



**HAL**  
open science

# Iteration post-Newtonienne du champ de gravitation d'un systeme isole en Relativite Generale

Olivier Poujade

► **To cite this version:**

Olivier Poujade. Iteration post-Newtonienne du champ de gravitation d'un systeme isole en Relativite Generale. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2002. Français. NNT : . tel-00002179v2

**HAL Id: tel-00002179**

**<https://theses.hal.science/tel-00002179v2>**

Submitted on 25 Apr 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale de Physique Théorique de la Région Parisienne

**Thèse de doctorat de l'Université Paris VII**

présentée pour obtenir le

grade de Docteur en Sciences de l'Université Paris VII

Spécialité : Physique Théorique

par

Olivier POUJADE

**ITÉRATION POST-NEWTONIENNE DU CHAMP DE GRAVITATION  
D'UN SYSTÈME ISOLÉ EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE.**

**Application au cas d'un système binaire d'étoiles étendues.**

Soutenue le 20 Novembre 2002 à l'Institut d'Astrophysique de Paris  
devant la commission d'examen composée de :

M. Luc Blanchet	directeur de thèse
M. Thibault Damour	examineur
Mme. Nathalie Deruelle	invitée
M. Bernard Diu	président
M. Gilles Esposito-Farèse	examineur
M. Richard Kerner	rapporteur
M. Bernard Linet	rapporteur



à Julie ,  
à mes parents ,



# Table des matières

<b>Résumé en français et en anglais</b>	<b>v</b>
0.1 Résumé de la thèse . . . . .	v
0.2 Thesis abstract . . . . .	v
<b>Remerciements</b>	<b>vii</b>
<b>Notations et Conventions</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>xiii</b>
0.3 Les motivations de ce travail de thèse . . . . .	xiii
0.4 Le développement post-Newtonien est-il itérable à tout ordre? . . . . .	xiv
0.5 La dynamique post-Newtonienne d'un système binaire d'objets compacts étendus à l'ordre 3PN . . . . .	xv
<b>I Expériences et physique des ondes gravitationnelles</b>	<b>1</b>
<b>1 Détection des ondes gravitationnelles</b>	<b>3</b>
1.1 Les détecteurs . . . . .	3
1.1.1 Barre de Weber . . . . .	3
1.1.2 LIGO/VIRGO : interféromètres terrestres . . . . .	4
1.1.3 LISA : interféromètre spatial . . . . .	5
1.2 Les sources . . . . .	6
1.2.1 Binaires compactes . . . . .	6
1.2.2 Fond stochastique . . . . .	7
1.2.3 Supernova . . . . .	8
1.2.4 Sources périodiques . . . . .	8
<b>2 Rappels de Relativité Générale</b>	<b>11</b>
2.1 L'espace-temps courbe et les systèmes de coordonnées . . . . .	11
2.2 La métrique . . . . .	12
2.3 Les équations d'Einstein . . . . .	12
2.3.1 Définir une action . . . . .	12
2.3.2 L'équation d'Einstein et les quantités conservées . . . . .	14
2.4 Perturbation des équations d'Einstein . . . . .	16
2.5 Les équations d'Einstein en jauge harmonique . . . . .	17

<b>II</b>	<b>Travail de thèse sur l'approximation post-Newtonienne</b>	<b>19</b>
<b>3</b>	<b>Le développement post-Newtonien est itérable à tous les ordres en <math>1/c</math></b>	<b>21</b>
3.1	Itération du développement post-Newtonien à tous les ordres. . . . .	21
3.2	Multi-indices et tenseurs STF . . . . .	22
3.2.1	Multi-indices . . . . .	22
3.2.2	Tenseur symétrique et STF . . . . .	23
3.3	Le champ en zone proche grâce au développement post-Newtonien . . . . .	23
3.3.1	La série post-Newtonienne . . . . .	23
3.3.2	Principe de l'itération post-Newtonienne . . . . .	24
3.4	Solution particulière de l'équation de poisson. . . . .	26
3.4.1	La solution particulière . . . . .	26
3.5	Le champ en zone lointaine grâce au développement multipolaire post-Minkowskien	27
3.5.1	La série post-Minkowskienne . . . . .	27
3.5.2	Itération du développement multipolaire post-Minkowskien . . . . .	28
3.6	Le raccordement des deux types d'approximation . . . . .	29
3.7	Dans la jauge de Burke-Thorne . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Post-Newtonian approximation (article)</b>	<b>35</b>
4.1	Introduction . . . . .	36
4.1.1	Problems with the post-Newtonian expansion . . . . .	36
4.1.2	Notation for the Einstein field equations . . . . .	40
4.2	Exterior field . . . . .	41
4.2.1	Multipolar expansion of the non-linear vacuum field . . . . .	41
4.2.2	Near-zone expansion of the multipole decomposition . . . . .	44
4.3	Interior field . . . . .	47
4.3.1	Post-Newtonian expansion of the near-zone field . . . . .	47
4.3.2	Multipole expansion of the post-Newtonian solution . . . . .	52
4.4	Matching . . . . .	54
4.5	Harmonic-coordinate condition . . . . .	57
4.6	Near-zone expansion of the retarded integral . . . . .	64
4.7	The generalized Poisson operator . . . . .	67
4.8	Far zone expansion of the Poisson integral . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Énergie totale à 3PN et structure interne</b>	<b>75</b>
5.1	Introduction . . . . .	76
5.2	Sur le développement post-Newtonien du champ de gravitation de corps étendus	78
5.2.1	Le principe d'effacement . . . . .	78
5.3	Thermodynamique Relativiste . . . . .	79
5.3.1	Fluide parfait . . . . .	79
5.3.2	Densité baryonique . . . . .	79
5.3.3	l'énergie interne et les relations thermodynamiques . . . . .	80
5.4	Description de la matière . . . . .	81
5.5	Définition des potentiels élémentaires . . . . .	81
5.5.1	Exemple des potentiels $V$ , $V_i$ et $\widehat{W}_{ij}$ . . . . .	81
5.5.2	Définition des potentiels et expression de la déviation de la métrique . . .	83

5.5.2.1	Les potentiels . . . . .	83
5.5.2.2	Déviatiion de la métrique . . . . .	84
5.6	l'énergie à 3PN en terme des potentiels et des sources générales . . . . .	85
5.7	l'énergie à 3PN en terme des potentiels et des sources fluides . . . . .	87
5.8	Modélisation des corps compacts étendus . . . . .	89
5.9	Intégrale de Poisson pour des corps étendus . . . . .	92
5.9.1	Le cas des sources compactes . . . . .	92
5.9.1.1	Calcul de $P_{11}$ . . . . .	94
5.9.1.2	Calcul de $P_{12}$ . . . . .	94
5.9.1.3	Calcul de $P_{31}$ . . . . .	94
5.9.2	Le cas des sources strictement non-compactes . . . . .	95
5.9.2.1	Calcul de $P_{33}$ . . . . .	95
5.9.2.2	Calcul de $P_{13}$ . . . . .	96
5.10	Intégration des sources compactes et non compactes . . . . .	96
5.11	Les différentes stratégies que l'on a adoptées . . . . .	96
5.12	Détail de l'itération à 1PN . . . . .	97
5.12.1	De quoi à t'on besoin ? . . . . .	97
5.12.2	Calcul de $V$ à l'ordre Newtonien . . . . .	98
5.12.3	Problème de la vitesse interne, de la pression et de l'énergie interne à l'ordre Newtonien . . . . .	99
5.12.4	Problème des déformations des corps étendus . . . . .	100
5.12.5	Énergie à 1PN et renormalisation de la masse . . . . .	104
5.13	Étendue des problèmes à 3PN . . . . .	106
5.13.1	Utilisation de Mathematica® . . . . .	106
5.13.2	La partie finie . . . . .	106
5.13.3	Conséquence de la Renormalisation sur la partie finie . . . . .	109
<b>Conclusion</b>		<b>111</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>113</b>





# Résumé en français et en anglais

## 0.1 Résumé de la thèse

Pour extraire l’empreinte laissée par le passage d’une onde gravitationnelle dans le signal bruité d’un des futurs détecteurs (VIRGO/LIGO), il est nécessaire de connaître avec une grande précision la forme de cette onde. Or, les équations de la Relativité Générale (RG), qui régissent cette forme, sont d’une grande complexité et ne sont pas solubles analytiquement pour des systèmes dynamiques tels que les binaires d’étoiles à neutrons. Celles ci représentent pourtant les sources les plus prometteuses de rayonnement gravitationnel. On a donc recours à des méthodes d’approximation. Dans cette thèse nous avons étudié l’approximation post-Newtonienne (développement perturbatif en puissance de  $1/c$ ) dans le cadre de la RG. Dans un premier temps nous avons étudié cette approximation d’un point de vue général afin de démontrer un théorème qui permet d’affirmer que, sous certaines hypothèses, le développement post-Newtonien du champ de gravitation d’une source isolée auto-gravitante peut être itéré à tout les ordres en  $1/c$ , ce qui n’avait jamais été fait jusqu’à présent. Nous avons montré que ce développement se raccorde à tous les ordres à une solution extérieure, valable notamment à l’infini, et satisfaisant aux conditions d’absence de radiation rentrante. Dans un deuxième temps, sous l’impulsion de Luc Blanchet et en collaboration avec Gilles Esposito-Farèse, je me suis intéressé au problème de l’énergie post-Newtonienne à l’ordre  $1/c^6$  d’un système binaire de corps compacts étendus. Nous nous intéressons notamment au problème du calcul d’un coefficient indéterminé à l’ordre 3PN dû à une incomplétude des méthodes de régularisation. Pour lever cette indétermination, nous nous sommes intéressés au calcul de cette même énergie pour des corps étendus lorsque l’on tient compte de la structure interne. Nous présentons dans cette thèse les raisons possibles de l’indétermination, la méthode et les problèmes posés par l’extension finie des corps.

## 0.2 Thesis abstract

In order to find the track left by a gravitational wave in the noisy data of one of the forthcoming detectors (VIRGO/LIGO), it is mandatory to know precisely the shape of the wave. General Relativity determines this shape but the equations are too complex to be analytically soluble in an accurate manner for dynamical systems such as neutron star binaries which are the most promising sources of gravitational waves. We have thus resorted to approximation methods. In this thesis, we studied the post-Newtonian approximation method (perturbative expansion in  $1/c$ ) in the framework of General Relativity. First of all, we studied this approximation from a general point of view in order to prove a theorem stating, under certain hypotheses, that post-Newtonian expansion of the gravitational field of a self gravitating isolated source can be iterated to all orders in  $1/c$ , what had not been done until now. We proved

this development matches to all orders with an exterior solution, valide in particular at infinity, ans satisfying no-incoming radiation condition. Secondly, at Luc Blanchet's instigation and in collaboration with Gilles Esposito-Farèse, I have been interested in the problem of the post-Newtonian energy up to  $1/c^6$  of a binary system of extended compact bodies. Among other problems, we are interested in the calculation of an unknown coefficient at the 3PN order due to the lack of fulfilment of regularisation methods used so far. To solve this problem we have tried to calculate this energy for extended bodies taking into account their internal structure. We present possible reasons for the indetermination, the method and the problems raised by the finite extension of the sources.

# Remerciements

C'était il y a 15 ans, un matin d'automne de l'année 1987. Je me rappelle qu'il faisait froid dehors et le ciel était gris. J'avais 13 ans à ce moment-là. Nous habitions alors dans une ancienne ferme à quelques kilomètres d'un petit village typiquement breton. Ce matin là je ne savais pas vraiment quoi faire. J'étais habitué à la vie citadine et me retrouver d'un seul coup à la campagne me désorientait. Je suis rentré par hasard dans la cave où étaient entreposées de nombreuses caisses de notre déménagement. Il y faisait froid et la seule lumière qui me permettait de voir venait de la porte de la cave que j'avais laissée entrouverte. Savoir ce qui pouvait se cacher dans ces "coffres au trésor", car c'est ainsi que les caisses m'apparurent, me sembla être une bonne occupation pour la matinée. Je ne me doutais pas que, dans un sens, les trésors que j'allais y découvrir bouleverseraient totalement ma vie. Dans une de ces caisses je découvris de vieux livres de mathématiques et de physique dans lesquels étaient inscrits des signes étranges qui n'avaient alors pour moi aucun sens. Ce que j'ai ressenti à ce moment était aussi intense, vu de mes yeux d'adolescent, que découvrir la pierre de Rosette. Je voulais absolument savoir ce que signifiaient ces symboles cabalistiques ( $\int$ ,  $\partial$ ,  $\sigma$ ). Ce jour-là a vraiment été un tournant dans ma vie et c'est sans doute à ce moment qu'est née mon inclination pour les sciences et la physique en particulier. C'est donc à mes parents que vont mes premiers remerciements pour m'avoir entouré de beaucoup d'amour et m'avoir permis d'accéder au savoir avec autant de facilité ... qu'ouvrir une caisse en carton.

Mes remerciements vont aussi à mes enseignants de physique qui se sont succédés. Je remercie mon professeur de Physique du Lycée, Jean-Paul Busnel, qui a su entretenir cette fascination pour la physique et m'encourager dans la voie de la recherche en dispensant des cours de niveau supérieur une fois par semaine, sur son temps libre et bénévolement, à ceux qui le souhaitaient. Je remercie aussi mes professeurs du DEA de physique théorique, Jean Iliopoulos, Édouard Brezin, Alain Comté pour m'avoir fait comprendre "qu'il suffit d'un Lagrangien pour comprendre le monde".

Je remercie l'État Français et tout particulièrement le Ministère de l'Éducation Nationale et le Ministère de la Recherche pour m'avoir financé, le premier, lorsque j'étais élève à l'École Normale Supérieure de Cachan, et le second, durant ma thèse. Sans ces financements, je ne serais sans doute jamais allé à Chicago en 1996, pour mon stage de Maîtrise, et je n'aurais donc jamais rencontré Martin Lemoine, que je remercie mille fois, qui m'a orienté vers le DARC (Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie) au moment où je cherchais une thèse, trois années plus tard, en 1999. À ce sujet je tiens aussi à exprimer ma profonde gratitude à Nathalie Deruelle, directrice du DARC, qui a bien voulu consacrer une après midi entière à me présenter son laboratoire ainsi que les différentes personnes susceptibles de me proposer un sujet de thèse.

C'est donc au DARC que j'ai commencé ma thèse sous la direction de Luc Blanchet. Il m'avait prévenu que les calculs seraient longs. Maintenant, après trois années de thèse, je

comprends beaucoup mieux la portée de cette mise en garde. Sous son aile, j'ai appris à être méthodique et rigoureux dans la gestion des longs calculs post-Newtoniens. Maintenant, je n'ai plus peur lorsque je vois un résultat qui tient sur dix pages pleines au format A4. Je le remercie pour les longues discussions de physique, souvent éclairées par quelques diagrammes d'espace-temps, que nous avons pu avoir et qui m'ont apporté beaucoup. Ce compliment va aussi à Gilles Esposito-Farèse avec lequel j'ai eu le plaisir de collaborer durant la deuxième partie de ma thèse qui a porté sur le calcul de l'énergie d'un système binaire à l'ordre 3 post-Newtonien. J'ai terminé cette thèse à l'IAP (Institut d'Astrophysique de Paris) au sein du GreCo que j'ai rejoint en janvier 2001.

Je veux remercier ici toutes les personnes du DARC et de l'IAP qui m'ont très bien accueilli. Je garderai un souvenir ému de mes débuts en thèse où j'ai eu la chance de rencontrer Reinhardt Prix, Philippe Grandclément, Philippe Canitrot, Guillaume Faye, et de partager mon bureau avec Alain Riazuelo, avec lequel j'ai eu des conversations professionnelles et extra-professionnelles très enrichissantes.

Je tiens à remercier les rapporteurs de ce travail de thèse, Richard Kerner et Bernard Linet, ainsi que les autres membres du jury dont Bernard Diu, avec lequel j'ai fait mes premiers pas dans l'enseignement en DEUG lors de ma première année de monitorat à Paris 7, et Thibault Damour.

Je dois absolument continuer ces remerciements en parlant de la "dream team" composée de Christophe Ringeval, Jérôme Martin, Martin Lemoine, Patrick Peter et parfois Jean-Philippe Uzan. Je leur ai fait subir les pires déjeuners de leur vie et je m'en excuse sincèrement. Je leur dois beaucoup de connaissances, de rires et d'impacts de balles de ping-pong.

Enfin, je ne pourrais pas finir ces remerciements sans parler de mes amis avec lesquels ces trois années de thèse ont été un véritable bonheur. Je souhaite m'excuser noir sur blanc pour les avoir délaissés en cette fin de thèse mais je sais qu'ils me comprennent : Titeve, Clochette, Thuythuy, Caro, Manou, FloFlo, Pascalou, Philou, Arnaud, Totoche, Nico, David, Denis, Sama et Fabien, VV, Helen et Francis, Isabelle et Xavier, Suzanna et Jean-Louis, Ludi, Nath et Paul, Alain ... et enfin le dernier mot pour Julie qui m'a supporté durant cette période et sans laquelle la vie n'aurait pas été aussi belle.

# Notations et Conventions

$\eta_{\mu\nu}$	La métrique de Minkowski qui est donnée par <b>diag</b> (-1, 1, 1, 1).
$g_{\mu\nu}$	La métrique générale. On prend par convention la signature (-, +, +, +).
$g$	Le déterminant de $g_{\mu\nu}$ : $g = \det(g_{\mu\nu})$ .
$\mathfrak{g}_{\mu\nu}$	La métrique gothique, page 17. $\mathfrak{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}/\sqrt{-g}$ .
$\mathfrak{g}^{\mu\nu}$	La métrique gothique contravariante, page 17. $\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}$ .
$T^{\mu\nu}$	Le tenseur énergie-impulsion, page 79.
$\tau^{\mu\nu}$	Le pseudo tenseur énergie-impulsion, page 16.
$t_{\text{LL}}^{\mu\nu}$	Le pseudo tenseur de Landau-Lifchitz, page 15.
$\Lambda^{\mu\nu}$	La composante purement gravitationnelle du pseudo tenseur énergie-impulsion page 18.
$h^{\mu\nu}$	La déviation de la métrique que nous avons utilisée pour le développement post-Newtonien. $h^{\mu\nu} = \mathfrak{g}^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}$ . Pour monter et descendre les indices de $h$ on utilise $\eta_{\mu\nu}$ . Voir page 40.
$\bar{A}$	Cela peut signifier deux choses suivant le contexte : (i) la grandeur physique $A$ est écrite sous forme d'un développement post-Newtonien, ou bien, (ii) elle est développée asymptotiquement en zone proche. Voir page 47.
$\mathcal{M}(A)$	Cela peut signifier deux choses suivant le contexte : (i) la grandeur physique $A$ est écrite sous forme d'un développement multipolaire post-Minkowskien, ou bien, (ii) elle est développée asymptotiquement à l'infini. Voir page 44.

$A_n$	Le facteur devant $1/c^n$ dans le développement post-Newtonien de $A$ . Voir page 47.
$A_{(n)}$	Le facteur devant $G^n$ dans le développement post-Minkowskien de $A$ . Voir page 41.
$\widetilde{\Delta}^{-1}$	L'intégrale de Poisson généralisée page 67.
$\square_{\text{Ret}}^{-1}$	La composante retardée de l'opérateur inverse du d'Alembertien.
$\widetilde{\square}_{\text{Ret}}^{-1}$	La composante retardée de l'opérateur inverse du d'Alembertien généralisé, page 43.
$P_{nq}$	P-opérateur de Poisson à valeur dans la zone $n$ d'une source à valeur dans la zone $q$ . $n$ et $q$ peuvent prendre les valeurs $\{1, 2, 3\}$ . Voir page 93.
$\mathcal{F}_L^{\mu\nu}$	Famille de multipôles qui rentrent dans l'expression la plus générale du champ extérieur multipolaire post-Minkowskien. Elle contient, à l'ordre post-Minkowskien le plus bas, l'information sur la réaction du rayonnement. Voir page 53.
$\mathcal{R}_L^{\mu\nu}$	Famille de multipôles qui sont générés lorsque l'on développe la série multipolaire post-Minkowskienne en zone proche. Elle contient, à l'ordre le plus bas, l'information sur les sillages d'ondes (tails). Voir page 46.
$\widehat{T}_L$	La partie STF du "tenseur" $T_L$ , page 23.
$\{x^\mu\}$	c'est la famille des composantes du quadri-vecteur $x^\mu$ . Les composantes sont $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ aussi noté $\{x^0, x^i\}$ . $x^0$ représente la coordonnée de temps et $x^i$ , où $i$ est un indice romain qui peut prendre les trois valeurs $\{1, 2, 3\}$ , représente les trois coordonnées d'espace.
La règle de sommation	Dans une expression, un indice grec répété une fois covariant une fois contravariant signifie que l'on somme sur cet indice de 0 à 3. Pour les indices latins cela signifie que l'on somme de 1 à 3.
Eq. (II.3.1.13)	Cela signifie que l'équation se situe dans la partie II de cette thèse, au chapitre 3, dans la section 1 et qu'elle est la 13 <sup>e</sup> du chapitre 3.
$\rho_*(\mathbf{r}, t)$	Densité baryonique de la source de matière au point $\mathbf{r}$ et à l'instant $t$ dans le système de coordonnées considéré (voir page 20)

---

$\rho(\mathbf{r}, t)$	Densité de masse au repos de la source, page 79.
$\mu(\mathbf{r}, t)$	Densité d'énergie propre de la source de matière. Elle tient compte de toute les contributions : énergie baryonique, énergie interne ..., page 79.
$P(\mathbf{r}, t)$	Pression au sein de la source de matière au point $\mathbf{r}$ et à l'instant $t$ , page 79.
$\Pi(\mathbf{r}, t)$	Énergie interne massique au sein de la source de matière au point $\mathbf{r}$ et à l'instant $t$ , page 80.
$\lambda$	Constante indéterminée dans la notation Blanchet, Faye, page 77.
$\omega_{\text{static}}$	Constante indéterminée dans la notation Damour, Jaranowski, Schaefer, page 77.
$V, \widehat{W}, \widehat{R}_i \dots$	Potentiels élémentaires définis pour le calcul de l'énergie à 3PN , page 81.
$m_\alpha$	Masse baryonique du corps $\alpha$ , page 91.
$M_\alpha$	Masse renormalisée du corps $\alpha$ , page 104.
$\widetilde{v}_\alpha$	Vitesse du "centre de masse" du corps $\alpha$ , page 91.
$b_\alpha$	Rayon du corps $\alpha$ qui est sphérique dans son référentiel propre en l'absence d'un compagnon, page 91.
$\Psi_\alpha$	Profil de densité baryonique du corps $\alpha$ dans son référentiel propre en l'absence du compagnon, page 91.





# Introduction

## Sommaire

---

<b>0.3</b>	<b>Les motivations de ce travail de thèse . . . . .</b>	<b>xiii</b>
<b>0.4</b>	<b>Le développement post-Newtonien est-il itérable à tout ordre? .</b>	<b>xiv</b>
<b>0.5</b>	<b>La dynamique post-Newtonienne d'un système binaire d'objets compacts étendus à l'ordre 3PN . . . . .</b>	<b>xv</b>

---

Ce travail de thèse s'inscrit dans l'étude mathématique et physique de la génération d'ondes gravitationnelles par des systèmes binaires de corps compacts (étoiles à neutrons ou trous noirs).

## 0.3 Les motivations de ce travail de thèse

La Relativité Générale est, aujourd'hui, la théorie de la Gravitation qui fait l'unanimité au sein de la communauté scientifique. Cela ne veut pas dire qu'elle est la théorie ultime de la gravitation. D'ailleurs cette même communauté scientifique qui l'a adoptée est convaincue qu'elle n'est pas la théorie ultime puisque, jusqu'à présent, toutes les tentatives pour unifier la gravitation et cette autre grande révolution du XX<sup>e</sup> siècle qu'est la mécanique quantique ont échoué. C'est ainsi que fonctionne la science, qu'elle a toujours fonctionné et qu'elle fonctionnera sans doute toujours : on conçoit une théorie qui explique ce que l'on voit dans la Nature et en contrepartie cette théorie que l'on a imaginée prédit parfois l'existence de phénomènes que l'on n'a jamais observés. Il y a alors deux possibilités qui se présentent : soit cette théorie prévoit des phénomènes que l'on a les moyens de voir - si on ne les voit pas cela veut dire que la théorie n'est pas valide - soit elle prévoit des phénomènes que l'on ne peut pas voir, parce qu'il faut des appareils très sensibles et très coûteux par exemple - il faut alors se donner les moyens de les voir pour s'assurer que la théorie est valide. On ne peut se satisfaire d'une théorie qui prévoit des comportements qui n'existent pas dans la nature. La Relativité Générale, outre sa beauté mathématique et conceptuelle, est avant tout une théorie physique et elle ne doit pas échapper aux quelques règles que l'on vient de citer. Depuis 1915, date de sa création, jusqu'à aujourd'hui, elle n'a jamais été mise en défaut. Elle résout les problèmes pour lesquels elle a été créée, c'est-à-dire qu'elle réconcilie la gravitation avec le fait qu'aucun signal ne peut aller plus vite que la lumière (ce qui n'était pas le cas de la théorie de la gravitation de Newton qui considérait la gravitation comme une action instantanée). À l'époque de sa découverte, la théorie d'Einstein prévoyait des phénomènes nouveaux que l'on a pu confirmer expérimentalement comme l'avance du périhélie de la planète Mercure, la déviation des rayons lumineux par un corps massif (le Soleil par exemple), le ralentissement du temps impropre au fur et à mesure que l'on se rapproche d'un corps massif (une grande importance est

accordée à ce processus dans le fonctionnement du GPS, *Global Positioning System*, qui fait maintenant partie de la vie quotidienne). L'effet Shapiro, qui a été découvert bien plus tard en 1964, a lui aussi été confirmé. La Relativité Générale prévoit aussi des phénomènes que l'on n'a pas encore observés directement. Les trous noirs et les ondes gravitationnelles. Les ondes gravitationnelles ont une intensité si faible qu'il faut construire des appareils immenses et très coûteux pour pouvoir espérer les détecter directement. Néanmoins on sait qu'elles existent - autrement il y a fort à parier que les différents gouvernements qui ont accordé des crédits très importants à des projets de détection directe ne l'auraient pas fait. Ainsi, VIRGO qui est le détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles franco-italien, est un des projets les plus coûteux du CNRS. Les différents projets de détection et les sources d'ondes gravitationnelles seront rapidement décrits dans le deuxième chapitre de la première partie de cette thèse. La mise en évidence de l'existence des ondes gravitationnelles par Hulse et Taylor<sup>1</sup>, découverte qui leur a valu le prix Nobel de physique en 1993, s'est faite de manière indirecte. Taylor a, en effet, observé sur un système binaire d'étoiles à neutrons les conséquences du rayonnement gravitationnel de ce système sur son mouvement orbital. La Relativité Générale prévoit qu'un tel système perd de l'énergie au cours de son existence, par rayonnement gravitationnel, et que les deux compagnons du système binaire se rapprochent irrémédiablement l'un de l'autre, sur une grande échelle de temps, jusqu'à coalescence. Taylor a pu observer ce rapprochement sur une échelle de dix ans et a constaté un accord excellent avec ce que prévoit la théorie de la Relativité Générale. Cela a été possible parce que l'une des étoiles à neutrons, PSR1913+16, était un pulsar. L'existence des ondes gravitationnelles n'est donc plus à mettre en doute. Jusque là il est donc légitime de dire que la Relativité Générale est une excellente théorie de la gravitation. On pourrait se satisfaire d'un tel spectre de prédiction. Mais la théorie ne s'arrête pas là. Elle prévoit, pour les différentes sources d'émission, la forme du signal gravitationnel. Il est donc être intéressant de tester cela en détectant directement le rayonnement gravitationnel. De plus, outre le fait de constituer un excellent test de la Relativité Générale, un tel signal fournirait en cosmologie des informations complémentaires de celles qui sont apportées aujourd'hui par le rayonnement électromagnétique. Des projets sont en cours de construction (VIRGO projet franco-italien) et en cours d'étalonnage (LIGO projet américain) pour tenter de détecter directement le rayonnement gravitationnel, c'est-à-dire détecter l'amplitude de ces ondes. Le but ultime étant, un jour, de déceler une déviation par rapport à ce qu'elle prévoit, d'atteindre les limites de validité de cette théorie aux apparences si parfaites. Dans le troisième chapitre, nous introduirons les notions importantes de la Relativité Générale qu'il est nécessaire de connaître pour décrire le rayonnement gravitationnel. La deuxième partie se compose d'un travail de physique-mathématique, décrit dans la section suivant de cette introduction, et d'un travail théorique en application directe avec les futures expériences de détection du rayonnement gravitationnel VIRGO/LIGO, décrit dans la dernière section de cette introduction.

## 0.4 Le développement post-Newtonien est-il itérable à tout ordre ?

Les équations de la Relativité Générale que l'on doit résoudre pour déterminer la forme des ondes gravitationnelles loin de la source qui les a émises regroupent à peu près toutes les

---

<sup>1</sup>En fait, Hulse et Taylor ont découvert PSR1913+16 mais c'est Taylor qui a observé les conséquences du rayonnement gravitationnel sur ce pulsar binaire.

difficultés que peuvent recouvrir des équations mathématiques (système d'équations aux dérivées partielles hautement non-linéaires). Il est donc impossible, prenons quelques réserves en disant "aujourd'hui", de trouver une solution exacte à l'une de ces équations dans le cas général de sources sans symétries. Dans le cas d'une source dynamique qui n'a pas de symétrie particulière, il faut avoir recours à des méthodes d'approximation. La méthode que nous considérons dans cette thèse est la méthode d'approximation post-Newtonienne qui consiste à écrire toutes les grandeurs physiques, observables ou non, sous la forme d'un développement de Laurent en puissance de  $1/c$  (et aussi de  $\ln c$ ). Quatre problèmes de nature et de complexité bien différentes se posent lorsque l'on aborde des méthodes d'approximations. (i) Le premier est de savoir si l'approximation que l'on trouve est finie à chaque ordre d'approximation. (ii) Le second concerne le domaine de validité de l'approximation qui, s'il ne couvre pas tout l'espace, peut empêcher de faire le lien entre la solution trouvée dans ce domaine restreint et les conditions aux limites physiques qui sont décrites en dehors de ce domaine de validité. (iii) Le troisième problème concerne la nature de la série générée par cette approximation : est-elle divergente, asymptotique<sup>2</sup> ou convergente? (iv) Enfin si elle est asymptotique ou convergente, la limite est-elle la solution exacte? On pourrait ne pas s'occuper de ces problèmes en physique et se contenter de dire que l'approximation post-Newtonienne est bonne si elle donne des résultats en bon accord avec l'expérience et mauvaise si elle donne des résultats en complet désaccord avec l'expérience. Cette vision des choses est un peu réductrice. Imaginons que nous arrivions à démontrer qu'à partir d'un certain ordre du développement post-Newtonien les termes ordre par ordre sont divergents. Ce problème avait été soulevé par Chandrasekhar et Esposito [36] à l'ordre  $1/c^5$ . Les équations de l'hydrodynamique d'un fluide à support compact qu'ils obtenaient à cet ordre contenaient une intégrale divergente. Kerlick [81] réussit à contourner le problème à cet ordre mais le problème subsistait aux ordres suivants ( $1/c^6$  et plus). Si nous arrivions à montrer qu'au-delà d'un certain ordre de l'approximation tous les ordres étaient divergents, cela jetterait un sérieux doute sur la validité de l'approximation. En fait il n'en est rien comme nous allons le montrer dans cette thèse. On ne sait toujours pas quelle est la vraie nature de la série formelle post-Newtonienne, si elle est convergente asymptotique ou divergente. Par contre, nous avons réussi à montrer que le développement post-Newtonien du champ de gravitation d'une source compacte, isolée et  $\mathcal{C}^\infty$  (en coordonnées harmonique), est itérable à tout ordre, que chaque ordre est fini, et que le raccordement avec les conditions aux limites d'absence d'ondes gravitationnelles entrantes est unique. Les méthodes développées dans ce travail ont été utilisées dans le projet d'étude de la dynamique post-Newtonienne d'un système binaire d'objets compacts étendus que nous allons brièvement décrire.

## 0.5 La dynamique post-Newtonienne d'un système binaire d'objets compacts étendus à l'ordre 3PN

Dans la deuxième partie de ce travail de thèse nous nous sommes occupés de l'étude de la dynamique d'un système binaire d'objets compacts (étoiles à neutrons par exemple). Un tel calcul est nécessaire pour des raisons expérimentales afin d'obtenir, avec une précision suffisante, la forme théorique du signal gravitationnel qui permettra d'extraire, par des méthodes de filtrage, le vrai signal expérimental qui sera noyé dans les innombrables sources de bruit

<sup>2</sup>Une approximation est dite asymptotique lorsqu'il existe un ordre d'approximation jusqu'auquel l'approximation tend vers la solution exacte et au delà duquel elle s'en écarte.

qu'enregistreront les détecteurs VIRGO et LIGO. Les équations du mouvement pour un tel système, dans lequel les objets compacts sont assimilés à des points matériels, sont connues sans ambiguïté jusqu'à l'ordre  $2.5\text{PN}$ . Le gros avantage que présente ce modèle est l'absence de structure interne d'un point matériel. Le tenseur énergie-impulsion d'un tel système ne tient pas compte de la pression, de l'énergie interne ou de la vitesse interne de chacune des étoiles. Il y a un peu moins de deux ans, deux équipes, Blanchet et Faye ainsi que Jaranowski, Schäfer et Damour, ont obtenu des résultats équivalents pour le calcul de l'énergie d'un tel système à deux corps ponctuels à l'ordre  $3\text{PN}$  ( $1/c^6$ ). Le résultat ainsi obtenu n'était pourtant pas entièrement satisfaisant car il laissait apparaître dans les deux cas un problème de taille à cet ordre particulier et pas avant : une constante  $\lambda$  qu'aucune contrainte physique ne semble pouvoir déterminer. Dans les deux méthodes employées, le système binaire était assimilé à deux étoiles ponctuelles sans structure interne. Il semblerait que ce problème vienne du modèle de particules ponctuelles et de la méthode de régularisation d'Hadamard qui deviennent "incomplets" physiquement à cet ordre. Nous nous sommes donc attelés à ce problème délicat et long qui consiste à tenir compte, le plus complètement possible, de la structure interne des étoiles afin de déterminer cette constante et incidemment de voir si elle dépend de la structure interne ou bien si elle est universelle (un pur coefficient numérique indépendant de la structure interne des corps) comme elle devrait l'être d'après un argument de Thibault Damour connu sous le nom de principe d'effacement (la structure interne ne devrait apparaître qu'à l'ordre  $1/c^{10}$  pour des corps "compacts").

# Première partie

## Expériences et physique des ondes gravitationnelles



# Chapitre 1

## Détection des ondes gravitationnelles

### Sommaire

---

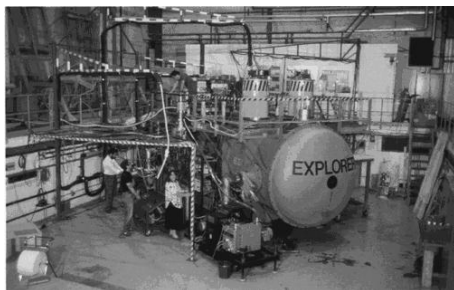
<b>1.1 Les détecteurs</b>	<b>3</b>
1.1.1 Barre de Weber	3
1.1.2 LIGO/VIRGO : interféromètres terrestres	4
1.1.3 LISA : interféromètre spatial	5
<b>1.2 Les sources</b>	<b>6</b>
1.2.1 Binaires compactes	6
1.2.2 Fond stochastique	7
1.2.3 Supernova	8
1.2.4 Sources périodiques	8

---

### 1.1 Les détecteurs

La détection des ondes gravitationnelles est basée sur la mesure des variations de distance qu'elles produisent entre deux masses test. Puisque ces variations sont très faibles il convient de les amplifier par différents protocoles expérimentaux.

#### 1.1.1 Barre de Weber



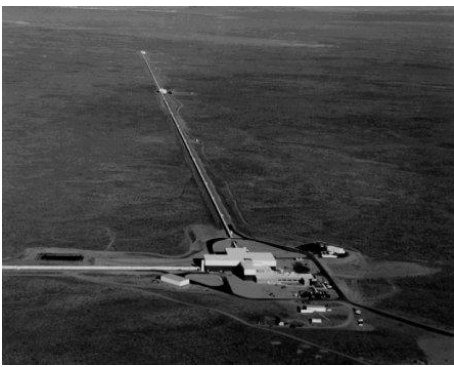
La détection des ondes gravitationnelles a été engagée par Weber [104] au début des années 1960. Il utilisait de gros cylindres d'aluminium, dont la masse était comprise entre une et deux tonnes, reliés à des systèmes mécaniques sensibles à des vibrations infimes de ces cylindres. Une onde gravitationnelle passant à travers une de ces barres d'aluminium fait varier les caractéristiques géométriques de la barre. Si, à un instant donné, la fréquence de cette onde gravitationnelle devient égale à la fréquence de résonance

mécanique de la barre alors la faible oscillation mécanique causée par l'onde sera amplifiée par le phénomène de résonance et pourra donc être détectée. Ainsi, les barres de Weber résonnantes agissent comme des cloches qui sonnent lorsque passe un train d'ondes gravitationnelles. La



fréquence de résonance de ces détecteurs est choisie autour de 1000 Hz qui est une valeur typique de la fréquence que doivent atteindre les ondes gravitationnelles que l'on espère détecter en provenance d'une supernova ou de la dernière phase de coalescence d'un système binaire. En 1969, Weber a annoncé la détection directe du rayonnement gravitationnel [105]. Il s'en est suivi une grande euphorie dans le monde scientifique pendant les quatre années qui ont suivi. D'autres équipes ont alors monté le même genre d'expérience. En 1973, une équipe [102] a montré qu'il y avait des corrélations entre les 262 détections rapportées par Weber et des phénomènes géophysiques et météorologiques terrestres. En 1974, une autre équipe [85] rapporte qu'il n'est pas possible que des ondes gravitationnelles aient pu produire des données avec des pics de coïncidence aussi étroits que ceux publiés en 1973 par Weber. En fait tout cela prouvait qu'il n'y avait aucun événement sérieux qui avait été détecté. Les détecteurs à résonance sont limités par le bruit thermique et mécanique. Ils ne peuvent détecter que des ondes gravitationnelles arrivant perpendiculairement à l'axe du cylindre et proches de la fréquence de résonance. Les différentes barres en activité dans le monde actuellement sont : ALLEGRO, NIOBE, AURIGA, EXPLORER, NAUTILUS et ALTAIR. Il est intéressant de remarquer comment un instrument dédié à un domaine donné de la physique (dans notre cas : le rayonnement gravitationnel) peut dévier de son utilisation initiale. C'est le cas du détecteur NAUTILUS : même si ce détecteur n'est pas encore suffisamment sensible pour détecter des ondes gravitationnelles, il a déjà permis de détecter des rayons cosmiques [65]. Une nouvelle espèce de détecteurs résonants sphériques devrait voir le jour d'ici peu. L'avantage de ces détecteurs est de détecter des ondes gravitationnelles dans toutes les directions du ciel. Pour l'instant quatre détecteurs sont à l'étude : TIGA, SFERA, GRAVITON et OMEGA.

### 1.1.2 LIGO/VIRGO : interféromètres terrestres

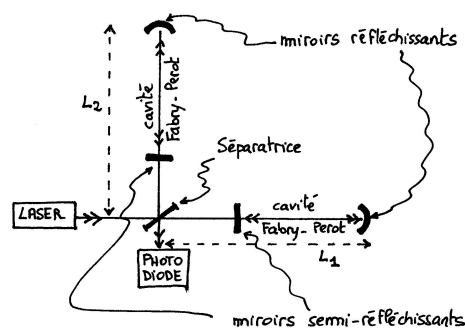


Peu de temps après les débuts des détecteurs à barre de Weber, des recherches ont été entreprises sur la détection interférométrique. Le principe est de mesurer les variations de longueur entre quatre masses libres (les 4 miroirs). Nous avons déjà brièvement mentionné qu'une onde gravitationnelle avait tendance à augmenter les longueurs dans un sens en diminuant dans le même temps les longueurs perpendiculairement et vice-versa et cela à une fréquence égale à la fréquence de l'onde. C'est la raison pour laquelle la configuration de l'interféromètre de Michelson est très adaptée à la détection des ondes gravitationnelles. Si  $L_1$  augmente de  $\Delta L$  pour donner une longueur  $L'_1$  et  $L_2$  diminue de  $\Delta L$  pour donner  $L'_2$  alors la différence de marche entre les deux rayons lumineux des deux bras du Michelson est  $L'_1 - L'_2 = 2\Delta L$  et cette différence de marche est proportionnelle à l'intensité lumineuse mesurée à la photo-diode. La figure ci-contre montre le schéma simplifié d'un tel interféromètre. Lorsque l'on étalonne l'appareil on fait en sorte que les longueurs  $L_1$  et  $L_2$  soient identiques. En d'autres termes, la différence de marche entre les rayons lumineux qui parcourent les deux bras du détecteur est nulle. Le rayon issu du Laser arrive sur la séparatrice (Beam splitter). Son amplitude est divisée en deux à ce moment précis.

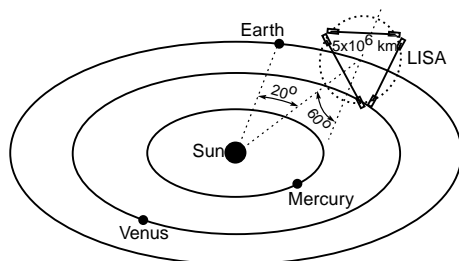
Une moitié entre dans le bras 1 et l'autre dans le bras 2. Les deux miroirs en bout de bras sont parfaitement réfléchissants. Les deux miroirs qui se situent juste après la séparatrice, quant à eux, sont semi-réfléchissants. Ainsi dans chacun des bras la lumière est assujettie à faire un grand nombre d'allers-retours<sup>1</sup> entre les deux miroirs de chaque bras ce qui a pour effet d'augmenter artificiellement la longueur des bras. Dans le cas de LIGO, un bras mesure en réalité 4 km. Mais cet effet d'aller-retour donne au bras une longueur apparente (telle qu'elle est mesurée par la lumière du faisceau Laser) de 130 km. Or la variation de longueur occasionnée par le passage d'une onde gravitationnelle d'intensité  $h$  est donné par

$$\Delta L = hL.$$

On voit donc que plus la longueur  $L$  est grande ( $L$  est justement la longueur mesurée par la lumière) et plus les variations de longueur à détecter vont être grandes (l'effet est proportionnel à la longueur totale mesurée par la lumière). On a donc tout intérêt à avoir les bras les plus longs possible. Le facteur limitant la longueur réelle étant le coût et le facteur limitant la longueur apparente étant l'ingéniosité des physiciens. L'interférométrie est largement utilisée dans l'industrie lorsqu'il s'agit de mesurer de petites variations de longueur. Les interféromètres gravitationnels en construction sont tous basés sur le principe de l'interféromètre de Michelson. L'avantage de ces détecteurs est qu'ils ne sont pas limités à une seule fréquence de détection (comme c'est le cas des détecteurs de Weber). Ils ont au contraire la capacité de détecter des ondes gravitationnelles sur une large bande de fréquences (entre 10 Hz et 2000 Hz) avec une sensibilité qui reste appréciable. Les sources de bruit sont là aussi multiples. Il y a le bruit de photons qui est dû à la fluctuation du nombre de photons observés (si  $N$  est le nombre moyen de photons présents pendant un certain laps de temps, les fluctuations statistiques donnent une incertitude  $\sqrt{N}$  sur la mesure de  $N$ ). Il y a aussi le bruit thermique et le bruit sismique qui est lié au mouvement du sol sur lequel est construit le détecteur et qui est la source de bruit limitante en dessous de 10 Hz.



### 1.1.3 LISA : interféromètre spatial



Pour détecter des ondes gravitationnelles dont la fréquence est inférieure à 10 Hz, il est indispensable de s'affranchir du bruit sismique terrestre qui devient alors la source de bruit la plus importante. L'idée la plus simple est de construire un interféromètre gravitationnel dans l'espace. Le projet s'appelle LISA pour Laser Interferometer Space Antenna. C'est un ensemble de trois satellites distants de 5 millions de kilomètres chacun et formant un triangle équilatéral dont le centre est situé dans le plan de l'écliptique à 1AU du Soleil et à 20 degrés derrière la Terre (le centre décrit donc la même orbite que la Terre mais 20 degrés derrière elle). Cette position du centre de la formation à 20 degrés derrière la Terre est un compromis entre le désir de réduire l'attraction gravitationnelle terrestre et le désir d'être plus près de la

<sup>1</sup>Ce nombre d'allers-retours est proportionnel au facteur de qualité de la cavité Fabry-Perot que forment les deux miroirs de chaque bras.

Terre pour réduire le coût de mise sur orbite (qui est d'autant plus cher qu'il faut placer les trois satellites loin de la Terre) et pour faciliter la télécommunication entre le centre de contrôle sur Terre et les trois satellites. Chacun des trois satellites suit une orbite elliptique différente dont la configuration optimale est telle que les trois satellites forment à tout instant un triangle équilatéral dont le plan est incliné de 60 degrés par-rapport au plan de l'écliptique. Ce triangle équilatéral tourne autour de son propre centre et autour du centre du Soleil avec une période de un an. Ce mouvement de rotation de LISA est très utile car il permettra de déterminer la direction des sources d'ondes gravitationnelles dont la durée caractéristique dans la bande passante de LISA est de l'ordre de quelques semaines de sorte que la triangulation puisse se faire. Compte tenu de la longueur des bras, la fréquence minimale détectable est de l'ordre de 0.1 mHz qui permettrait de voir les ondes gravitationnelles primordiales ainsi que les ondes en provenance de trous noirs très massifs ou de binaires galactiques.

## 1.2 Les sources

Il y a un ordre de grandeur qu'il est bon d'avoir en tête lorsque l'on veut estimer la fréquence maximale des ondes gravitationnelles qui peuvent être émises d'une masse  $M$ . Un objet d'une telle masse ne peut pas être plus petit que son rayon de Schwarzschild donné par  $2GM/c^2$ . Imaginons que le quadrupôle de cet objet varie dans le temps. La période de variation la plus faible correspond à une perturbation de la forme de l'étoile qui tourne à la surface à la vitesse de la lumière. Ainsi  $T$  est toujours supérieur ou égal à  $4\pi GM/c^3$  et donc la fréquence des ondes gravitationnelles vérifie toujours

$$f \leq \frac{c^3}{4\pi GM} \sim 10^4 \text{ Hz} \frac{M_\odot}{M} .$$

Ainsi les détecteurs LIGO et VIRGO qui sont limités à des fréquences de détection supérieures à 10 Hz ne peuvent observer que des objets dont la masse est inférieure à quelques centaines de masses solaires. Un interféromètre tel que LISA pourra, lui, détecter des trous noirs super massifs dont la masse peut avoisiner les  $10^8 M_\odot$ .

### 1.2.1 Binaires compactes

Les coalescences de binaires compactes représentent les sources d'ondes gravitationnelles les mieux comprises. Les deux membres de ces binaires peuvent être des étoiles à neutrons ou des trous noirs. Les binaires d'étoiles à neutrons ont, durant la plus grande partie de leur vie, des périodes orbitales de plusieurs heures et rayonnent donc à des fréquences de quelques  $10^{-4}$  Hz. Cela est en-dehors de la bande passante de VIRGO ou LIGO. Le système binaire de PSR1913+16 finira par fusionner dans quelques centaines de millions d'années. Ce n'est que dix minutes seulement avant la coalescence finale que la fréquence du rayonnement gravitationnel finira par entrer dans la bande de détection de VIRGO ou LIGO et que les détecteurs enregistreront les  $\sim 16000$  derniers cycles d'oscillation. Il est bien évident que les astrophysiciens ne vont pas attendre cent millions d'années avant de pouvoir espérer détecter la première évidence de rayonnement gravitationnel. Des études sur la fréquence de tels événements dans l'univers [38] ont montré que si l'on voulait détecter un nombre appréciable de coalescences (3-4 par an), les détecteurs devaient être sensibles à des événements qui avaient lieu dans un rayon d'une

centaine de mega parsecs, donc dans le super amas local<sup>2</sup>. Puisque l’amplitude du signal gravitationnel est proportionnelle à l’inverse de la distance à la source, si l’on augmente la sensibilité des détecteurs d’un facteur 2, cela signifie que l’on peut détecter des signaux venant de 2 fois plus loin ce qui a pour effet d’augmenter le volume d’observations d’un facteur 8 et d’augmenter d’autant le nombre d’événements annuels détectés.

La coalescence d’une binaire compacte peut-être divisée en trois périodes. L’époque de *spirale-ment* (*Inspiral* en anglais) durant laquelle les deux compagnons sont séparés par une distance bien supérieure à leur taille caractéristique (c’est le cas du système binaire dans lequel se trouve PSR1913+16 : les deux compagnons sont séparés d’un million de kilomètres et ils ont chacun un rayon d’une dizaine de kilomètres). Durant cette période les deux compagnons évoluent sur des orbites quasi-Newtoniennes et la période orbitale diminue très faiblement en même temps que la distance qui les sépare (troisième loi de Kepler) sous l’effet de la force de réaction du rayonnement gravitationnel. Après cette période très longue (quelques centaines de millions d’années), lorsque la distance qui sépare les deux compagnons devient égale au rayon de la dernière orbite stable (*Last stable orbit* en anglais aussi abrégé LSO), ils *plongent* l’un vers l’autre pour *fusionner* en un seul objet compact.

### 1.2.2 Fond stochastique

Les fonds stochastiques sont des ondes gravitationnelles “aléatoires” qui proviennent d’un grand nombre de sources indépendantes, non corrélées et que l’on ne peut pas résoudre individuellement. Une source particulièrement intéressante vient de la dynamique de l’univers primordial [88]. C’est un fond diffus d’ondes gravitationnelles de même qu’il existe un fond diffus d’ondes électromagnétiques, le fameux rayonnement à 2.7 K. Ce fond pourrait venir de l’amplification des fluctuations de la géométrie de l’univers primordial, de transition de phase, de la condensation d’une brane d’un espace de plus grande dimension et sans doute bien d’autres causes encore. Une grandeur qui caractérise le fond stochastique d’ondes gravitationnelles est sa densité d’énergie,  $\rho_{\text{GW}}$ , qui contribue à la densité d’énergie de l’univers. En particulier, on s’intéresse à une quantité sans dimension qui caractérise, dans un certain domaine de fréquences, la proportion de la densité d’énergie du fond gravitationnel par rapport à la densité d’énergie qu’il faut pour fermer l’univers

$$\Omega_{\text{GW}}(f) = \frac{1}{\rho_{\text{crit}}} \frac{d\rho_{\text{GW}}}{d \ln f}.$$

Différentes sources cosmologiques produisent différents spectres de densité  $\Omega_{\text{GW}}(f)$ . Les amplifications des fluctuations primordiales existent sûrement mais sont assez faibles. Des estimations suggèrent que le spectre devrait être assez plat dans la bande passante de VIRGO et LIGO avec une amplitude de  $\Omega_{\text{GW}} \sim 10^{-15}$ . Les ondes provenant d’une transition de phase dans l’univers primordial peuvent être de plus grande densité mais sont typiquement centrées autour d’une fréquence qui dépend de la température  $T$  de la transition de phase

$$f \sim 100 \text{ Hz} \left( \frac{T}{10^5 \text{ TeV}} \right).$$

On peut remarquer que la température de transition nécessaire pour entrer dans la bande passante de LISA ( $f \sim 10^{-4} \text{ Hz} - 10^{-2} \text{ Hz}$ ) est comprise entre 100 GeV et 10000 GeV qui

<sup>2</sup>Notre galaxie, la *Voie Lactée*, a un rayon de 100 kpc. Elle se trouve dans un amas de galaxies, que l’on appelle *amas local*, qui a un rayon de 10 Mpc. Cet amas local est lui-même dans un amas d’amas que l’on appelle le *super amas local* qui a un rayon de 100 Mpc.

englobe la température de la transition électrofaible. Les ondes provenant de la dynamique extra-dimensionnelle (Brane par exemple) ont un spectre centré autour d'une fréquence qui dépend de l'échelle  $r_0$  de la dimension supplémentaire

$$f \sim 10^{-4} \text{ Hz} \left( \frac{1 \text{ mm}}{r_0} \right).$$

### 1.2.3 Supernova

Une autre source très prometteuse de rayonnement gravitationnel est la supernova. Lorsqu'une étoile massive a épuisé son combustible nucléaire, sa partie centrale la plus dense s'effondre sur elle-même et crée une explosion, que l'on appelle supernova, qui dégage une énergie telle qu'une seule étoile peut briller autant qu'une galaxie entière (pourtant constituée de milliards d'étoiles) pendant quelques jours. La partie la plus centrale forme ensuite une étoile à neutrons ou un trou noir. Les conditions pour qu'il y ait un rayonnement gravitationnel de grande amplitude sont toutes réunies : une grande densité de matière dynamique. Le problème est que l'on ne maîtrise pas bien la physique de l'effondrement gravitationnel et donc nos connaissances sur la forme du rayonnement que l'on détecterait d'une supernova sont très incertaines. On ne sait pas à quel point l'effondrement est sphérique<sup>3</sup> car il est caché par l'explosion. On ne peut que faire des suggestions. Par exemple, une émission de rayonnement pourrait être très courte et centrée autour de 1 kHz comme elle pourrait durer quelques cycles à une fréquence n'importe où entre 100 Hz et 10 kHz. L'amplitude peut être grande dans le cas où, au cours de l'effondrement, l'énergie est évacuée en grande partie par rayonnement gravitationnel. Au contraire, l'amplitude peut être négligeable si la plus grande partie de l'énergie est évacuée par rayonnement électromagnétique.

### 1.2.4 Sources périodiques

Les sources périodiques sont, comme leur nom l'indique, des sources qui rayonnent un signal périodique ce qui n'est pas le cas des autres types de sources que l'on vient rapidement de décrire. On distingue deux sources importantes.

La première est représentée par les étoiles à neutrons en rotation sur elles-mêmes. Elles émettent des ondes gravitationnelles lorsqu'elles ont perdu leur symétrie axiale. Plus l'écart à cet symétrie est important et plus la vitesse de rotation est importante, plus l'émission de rayonnement gravitationnel est important. Il y a trois raisons possibles à cet écart. La première raison vient d'une irrégularité de la surface de l'étoile à neutrons due à des cataclysmes internes qui peuvent avoir déformé la croûte. Une deuxième raison vient du champ magnétique intense engendré par les étoiles à neutrons qui peut en retour créer une pression suffisante pour déformer l'étoile. Enfin la dernière raison possible [33], si la période de rotation de l'étoile est suffisamment petite (en-dessous d'une valeur critique de 1 ms à peu près), une instabilité déclenchée par la réaction du rayonnement gravitationnel sur l'étoile crée des ondes hydrodynamiques à la surface de l'étoile qui se propagent dans le sens opposé à la rotation de l'étoile, engendrant ainsi un fort rayonnement gravitationnel.

La deuxième source importante vient des étoiles binaires. Bien avant la phase de coalescence

---

<sup>3</sup>Pour calculer au premier ordre le rayonnement gravitationnel on peut utiliser la formule du quadrupole d'Einstein qui fait intervenir le quadrupole de la distribution de masse. Si celui-ci est nul ou ne varie pas il n'y a pas de rayonnement gravitationnel.

---

décrite à la page 7, le mouvement de deux étoiles l'une autour de l'autre est d'une grande stabilité. Le signal gravitationnel que l'on reçoit loin de cette source est très bien décrit analytiquement et le seul problème vient de la période de rotation longue d'un tel système ( $\sim$  quelques heures) qui engendre donc des ondes gravitationnelles de trop faible fréquence ( $\leq 10^{-3}$  Hz) pour pouvoir être détectées sur Terre. La détection de tels phénomènes sera sans doute possible grâce au détecteur spatial LISA.



# Chapitre 2

## Rappels de Relativité Générale

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>L'espace-temps courbe et les systèmes de coordonnées . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>2.2</b>	<b>La métrique . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>2.3</b>	<b>Les équations d'Einstein . . . . .</b>	<b>12</b>
2.3.1	Définir une action . . . . .	12
2.3.2	L'équation d'Einstein et les quantités conservées . . . . .	14
<b>2.4</b>	<b>Perturbation des équations d'Einstein . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>2.5</b>	<b>Les équations d'Einstein en jauge harmonique . . . . .</b>	<b>17</b>

---

Cette partie n'a en aucune façon la prétention de remplacer un cours de Relativité Générale. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à tous les ouvrages de ce domaine, parmi les plus connus [110, 103, 98, 29, 89, 72, 83], dont cette partie s'est très largement inspirée. Elle a simplement été motivée par un besoin personnel d'approfondir quelques aspects de cette théorie qui n'étaient pas très clairs dans mon esprit lorsque j'ai entrepris de travailler sur ce sujet.

### 2.1 L'espace-temps courbe et les systèmes de coordonnées

Dans le cadre de la Relativité Générale, on considère que le monde dans lequel nous vivons est un espace à quatre dimensions (3 dimensions d'espace et 1 dimension de temps) que l'on appelle *espace-temps*. Pour se repérer dans l'espace-temps on a pour habitude d'utiliser un système de coordonnées. En Relativité ces coordonnées d'espace-temps sont notées avec un indice grec supérieur :  $x^\mu$ . L'indice  $\mu$  peut prendre les valeurs  $\{0, 1, 2, 3\}$ . Par convention, on appellera la *coordonnée temporelle*  $x^0$ , et les trois autres coordonnées  $x^1, x^2, x^3$ , les *coordonnées d'espace*. On suppose donc implicitement que notre espace-temps est une variété au sens mathématique, c'est-à-dire que chaque événement, chaque point de l'espace-temps<sup>1</sup> peut être spécifié de manière unique (au moins dans un voisinage<sup>2</sup>) par la donnée de ces quatre coordonnées. On peut définir une multitude de systèmes de coordonnées pour se repérer dans

---

<sup>1</sup>Un événement est représenté par un point de l'espace-temps que l'on appelle aussi parfois point d'univers.

<sup>2</sup>Cette précision vient du fait qu'il peut arriver que l'on ne puisse pas couvrir l'espace-temps entier avec un seul système de coordonnées. L'exemple classique est celui du repérage sur la sphère : aux pôles la latitude est définie de manière unique, en revanche il est impossible d'y définir une longitude.



l'espace-temps. Lorsque l'on parle de *coordonnée de temps* et de *coordonnées d'espace*, celles-ci n'ont en général rien à voir avec ce que l'on appelle dans la vie quotidienne le temps et l'espace. Un système de coordonnées n'est qu'un intermédiaire de calcul et ne représente rien de physique et n'est pas observable. Il est donc fondamental que la théorie qui décrit la gravitation, c'est-à-dire la Relativité Générale, fasse en sorte que les grandeurs physiques observables (énergie, masse, angle ...) ne dépendent pas du choix du système de coordonnées dans un référentiel donné.

## 2.2 La métrique

Une fois que l'on sait se repérer dans l'espace-temps, on peut construire des formes. À partir de là, il devient nécessaire de se munir d'un moyen de mesurer les "*distances spatio-temporelles*<sup>3</sup>". Prenons deux événements infiniment voisins  $(x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3)$  et  $(x_1^0 + dx^0, x_1^1 + dx^1, x_1^2 + dx^2, x_1^3 + dx^3)$ . La distance spatio-temporelle infinitésimale  $ds$  qui sépare ces deux événements doit être quadratique en  $dx^\mu$  et se définit donc par

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x_1) dx^\mu dx^\nu . \quad (\text{I.2.2.1})$$

Le tenseur  $g_{\mu\nu}(x_1)$  est le *tenseur métrique*. Dans le cas général, il dépend de la position dans l'espace-temps. Dans le cas d'un espace temps plat de Minkowski la métrique ne dépend pas de la position et est notée  $\eta_{\mu\nu}$ . La métrique, qui donne des indications sur la géométrie de l'espace-temps, n'est pas déterminée *a priori*. Il faut la déduire du contenu en matière de l'espace-temps. Bien évidemment, lorsque l'on étudie un système isolé, on peut faire l'hypothèse que la matière du reste de l'univers est suffisamment loin pour pouvoir être négligée et on fait donc comme si l'univers était vide en-dehors du système isolé considéré. On impose à cette "distance", que l'on appelle aussi parfois "*intervalle*", de ne pas dépendre du système de coordonnées que l'on choisit. Cela conduit à une relation entre  $g'_{\mu\nu}(x')$  qui est la métrique dans le système de coordonnées primé et  $g_{\mu\nu}(x)$  qui est la métrique dans le système de coordonnées initial

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) . \quad (\text{I.2.2.2})$$

Cette relation décrit comment un tenseur de rang 2 comme la métrique se transforme sous un changement de coordonnées. Pour une bonne introduction mathématique aux tenseurs on se référera à [6, 55].

## 2.3 Les équations d'Einstein

### 2.3.1 Définir une action

Une théorie physique peut se définir par la donnée d'une famille de champs, qui décrivent différentes grandeurs physiques<sup>4</sup> en chaque point de l'espace-temps, et par une action qui est

<sup>3</sup>À ne pas confondre avec la distance spatiale que l'on mesure à l'aide d'une règle ou avec la distance temporelle que l'on mesure à l'aide d'un chronomètre.

<sup>4</sup>Les champs peuvent décrire une grandeur physique observable, comme c'est le cas d'un champ de vitesse dans un écoulement fluide, ou bien des grandeurs physiques non observables telles que le champ vecteur

un nombre fonction de la valeur des champs aux différents points de l'espace-temps et dont la propriété fondamentale est d'être extrémale<sup>5</sup> pour les configurations physiques des champs considérés. Ainsi, si l'on modifie en chaque point la configuration physique du champ en lui affectant une valeur un "tout petit peu" différente en chaque point de l'espace-temps, la valeur de l'action sera modifiée et sera plus grande si la configuration physique de laquelle on s'est écarté correspondait à une valeur minimale (localement), et plus petite si la configuration physique correspondait à une action maximale (localement). Cette action doit être invariante sous un certain nombre de symétries imposées par la théorie (dans le cas de la Relativité Générale il s'agira par exemple de la covariance qui est l'invariance de l'action par un quelconque changement de coordonnées). En Relativité Générale on suppose que le champ qui décrit la gravitation est la métrique  $g_{\mu\nu}$  (et uniquement lui) qui est définie sur une variété pseudo-Riemannienne  $\mathcal{M}$  à quatre dimensions. Cette hypothèse est très forte puisqu'elle affirme que la gravitation, car c'est ce que l'on veut décrire avec la théorie de la Relativité Générale, peut être entièrement caractérisée par la donnée, en chaque point de l'espace temps, d'un seul champ tensoriel de spin 2 que l'on appelle la *métrique*. Il est clair qu'une théorie physique qui décrit la gravitation doit tenir compte de  $g_{\mu\nu}$  dont on a vu l'importance dans diverses expérience de gravitation. Mais rien n'empêche de supposer l'existence d'autres champs (scalaires, vectoriels, spinoriels), en plus du champ métrique, pour décrire la gravitation. Il existe en effet des théories de la gravitation, comme les théories tenseur-scalaire, qui possèdent en plus de la métrique un champ scalaire qui contribue à la gravitation même dans le vide de matière. Dans ce travail de thèse nous ne nous sommes occupés que de la théorie de la Relativité Générale dans laquelle on suppose que la gravitation n'est décrite que par un seul champ : la métrique. L'action de la Relativité Générale doit donc porter sur  $\mathcal{M}$  en entier. Si l'on définit deux systèmes de coordonnées quelconques sur  $\mathcal{M}$  que l'on appelle  $\{x^\mu\}$  et  $\{x'^\mu\}$ , l'action doit satisfaire

$$\mathcal{S}_{\text{RG}}[g'_{\mu\nu}, x'^\mu] = \mathcal{S}_{\text{RG}}[g_{\mu\nu}, x^\mu].$$

Une action s'écrit comme l'intégrale d'une densité Lagrangienne sur le domaine de définition des champs, c'est-à-dire  $\mathcal{M}$ . Ce que l'on a en tête lorsque l'on écrit une action c'est de la dériver fonctionnellement par-rapport aux différents champs de manière à déterminer les équations du mouvement de chacun des champs. Pour obtenir des équations de mouvement qui décrivent la dynamique d'un champ, il faut que la densité Lagrangienne contienne au moins des dérivées d'ordre seconde des champs. Il n'existe qu'une seule grandeur scalaire qui contient des dérivées d'ordre seconde de la métrique et qui est invariante par transformation des coordonnées. Cette quantité est le scalaire de courbure ( $R$ ) qui est une contraction du scalaire de Ricci ( $R_{\mu\nu}$ ) qui est lui-même une contraction du tenseur de Riemann ( $R^\sigma_{\mu\nu\rho}$ )

$$R^\sigma_{\mu\nu\rho} = \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} + \Gamma^\alpha_{\mu\rho} \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\rho} \Gamma^\sigma_{\alpha\mu} \quad (\text{I.2.3.3})$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\sigma\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\alpha\sigma} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\alpha\mu} \quad (\text{I.2.3.4})$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (\text{I.2.3.5})$$

Comme on peut le remarquer le scalaire de courbure ne dépend que de dérivées d'ordre 2 de la métrique car les symboles de Christoffel  $\Gamma$  dépendent de dérivée d'ordre 1 de la métrique

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\rho g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\rho\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}) . \quad (\text{I.2.3.6})$$

---

électromagnétique  $A^\mu$  qui est défini à une jauge près. Dans ce dernier cas la quantité observable est le tenseur  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  qui est un tableau de dimension quatre qui contient le champ électrique et le champ magnétique.

<sup>5</sup>Maximum local ou minimum local

Pour définir une action invariante par difféomorphisme, il faut aussi définir une mesure invariante sur  $\mathcal{M}$ . Cette mesure invariante est tout simplement l'inverse du Jacobien d'une transformation de coordonnées

$$d^4x\sqrt{-g}, \quad (\text{I.2.3.7})$$

où  $g = \det(g_{\mu\nu})$ . Le seul principe de covariance augmenté de considérations de simplicité permet de définir l'action la plus simple que l'on puisse imaginer dans le vide de matière et qui soit non triviale. On appelle cette action, action de Hilbert dans le vide

$$\mathcal{S}_{\text{RG}} = \int d^4x\sqrt{-g}R[g_{\mu\nu}]. \quad (\text{I.2.3.8})$$

On a mis entre crochet les dépendances en champ pour un système de coordonnées donné. C'est cette action qu'il faut minimiser (dont on doit prendre la dérivée fonctionnelle par rapport à  $g_{\mu\nu}$ ) pour obtenir l'équation d'évolution de la métrique dans le vide de matière<sup>6</sup> en chaque point de l'espace-temps. C'est un premier point, où l'on voit apparaître une différence avec la théorie de Newton. Il peut y avoir un champ de gravitation même en l'absence de matière. On va voir un peu plus loin comment à partir de cette action on peut déterminer l'équation du mouvement, que l'on appelle aussi dans le cas de la Relativité Générale, l'équation d'Einstein. Avant d'en arriver là, il reste à traiter le cas du champ de gravitation en présence de matière. D'après le principe d'équivalence faible, il faut que le couplage du champ gravitationnel à la matière, au travers de  $g_{\mu\nu}$ , soit *universel*, c'est-à-dire que le champ gravitationnel ne doit en aucun cas avoir le moyen de reconnaître le type de matière. La seule chose qu'il doit être capable d'appréhender et de différencier est l'énergie sous quelque forme qu'elle se manifeste : interaction électrofaible, interaction forte et l'interaction gravitationnelle elle-même si l'on admet le principe d'équivalence fort. D'autre part, lorsque l'on se ramène aux conditions de la Relativité Restreinte, il est indispensable d'en retrouver les équations. Si en Relativité Restreinte on a, pour la matière, une action du type  $\mathcal{S}_{\text{mat}}[\phi, \psi, A^\mu]$ , il faudra, pour trouver son homologue en espace-temps courbe  $\mathcal{S}_{\text{mat}}[\phi, \psi, A^\mu, g_{\mu\nu}]$ , remplacer les dérivées partielles ordinaires  $\partial_\mu$  par les dérivées covariantes associées  $\nabla_\mu$  et les  $\eta_{\mu\nu}$  par des  $g_{\mu\nu}$ . La procédure que l'on vient de décrire est nécessaire pour retrouver les résultats en espace-temps plat mais elle n'est pas très claire car on peut créer une infinité d'actions de la matière en espace-temps courbe qui se ramènent à l'action de la Relativité Restreinte lorsque l'on se place dans un espace-temps plat de Minkowski ( $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ ). Il suffit pour cela d'ajouter dans l'action des termes proportionnels au scalaire de courbure qui sont nuls dans le cas d'un espace-temps plat. Il convient, donc, de supposer qu'il en existe une. Ainsi, l'action de la Relativité Générale en présence de matière est donnée par

$$\mathcal{S}_{\text{RG}} = \int d^4x\sqrt{-g}R[g_{\mu\nu}] + \mathcal{S}_{\text{mat}}[\phi, \psi, A^\mu, g_{\mu\nu}]. \quad (\text{I.2.3.9})$$

### 2.3.2 L'équation d'Einstein et les quantités conservées

Il faut, à partir de cette action déterminer les équations de mouvement du champ  $g_{\mu\nu}$ . Pour cela, on effectue la dérivation fonctionnelle<sup>7</sup> de l'action par-rapport à  $g_{\mu\nu}$  pris au point d'univers

<sup>6</sup>Cette précision est nécessaire car comme on va le voir, l'espace-temps peut être vide de matière sans pour autant être vide d'énergie puisque le rayonnement gravitationnel est aussi une forme de transport d'énergie en l'absence de matière. Ce rayonnement se propage par déformation de la métrique. On entend souvent parler "d'ondulation" (ripple en anglais) de l'espace-temps.

<sup>7</sup>La dérivation fonctionnelle  $\delta$  est définie de sorte que  $\frac{\delta g^{\mu\nu}(x)}{\delta g^{\rho\sigma}(y)} = 1/2 (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu + \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu) \delta^4(x - y)$ .

de coordonnées  $y^\mu$ . On trouve finalement l'équation d'Einstein

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{16\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} . \quad (\text{I.2.3.10})$$

En Relativité Restreinte, la conservation de l'énergie est donnée par  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . On doit donc avoir  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$  en Relativité Générale. Cela est naturellement vérifié grâce aux identités de Bianchi qui imposent  $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ . On a bien conservation du tenseur énergie impulsion en espace-temps courbe mais cela ne veut pas dire qu'il existe des grandeurs conservées qui ne dépendent que du tenseur énergie-impulsion comme c'est le cas en Relativité Restreinte où l'énergie totale ( $E(t) = \int d^3x T^{00}(\mathbf{x}, t)$ ) et l'impulsion totale ( $P^i(t) = \int d^3x T^{0i}(\mathbf{x}, t)$ ) sont conservées. Il n'est pas question de faire le remplacement  $g^{\mu\nu} \rightarrow \eta^{\mu\nu}$ ,  $\nabla_\mu \rightarrow \partial_\mu$  pour trouver les quantités conservées. On ne peut faire un tel remplacement que sur des quantités valables localement et non pas sur des quantités globales qui sont le fruit d'une moyenne sur tout l'espace (de coordonnées). En fait il est possible de ré-écrire les équations d'Einstein Eq. (I.2.3.10) d'une autre manière qui permet de trouver les quantités conservées, comme l'énergie totale ou l'impulsion totale d'un système donné, et qui permet, d'autre part, d'itérer de manière assez simple les méthodes d'approximations classiques de la Relativité Générale que sont le développement post-Newtonien et le développement post-Minkowskien (mais pour cette dernière remarque nous renvoyons le lecteur aux chapitres concernant le développement post-Newtonien dans la deuxième partie de cette thèse). La forme suivante des équations d'Einstein est due à Landau et Lifchitz [83]

$$\partial_\rho \partial_\sigma (\mathfrak{g}^{\mu\nu} \mathfrak{g}^{\rho\sigma} - \mathfrak{g}^{\mu\rho} \mathfrak{g}^{\nu\sigma}) = \frac{16\pi G}{c^4} |g| (T^{\mu\nu} + t_{\text{LL}}^{\mu\nu}) , \quad (\text{I.2.3.11})$$

où  $\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}$  (que l'on appelle parfois la métrique gothique) et où le pseudo tenseur de Landau Lifchitz  $t_{\text{LL}}^{\mu\nu}$  est défini par la relation suivante

$$\begin{aligned} |g|t_{\text{LL}}^{\mu\nu} &= \frac{c^4}{16\pi G} \left[ \partial_\rho \mathfrak{g}^{\mu\nu} \partial_\sigma \mathfrak{g}^{\rho\sigma} - \partial_\rho \mathfrak{g}^{\mu\rho} \partial_\sigma \mathfrak{g}^{\nu\sigma} + \frac{1}{2} \mathfrak{g}^{\mu\nu} \mathfrak{g}_{\rho\sigma} \partial_\lambda \mathfrak{g}^{\rho\tau} \partial_\tau \mathfrak{g}^{\sigma\lambda} \right. \\ &- \mathfrak{g}^{\mu\rho} \mathfrak{g}_{\sigma\tau} \partial_\lambda \mathfrak{g}^{\nu\tau} \partial_\rho \mathfrak{g}^{\sigma\lambda} - \mathfrak{g}^{\nu\rho} \mathfrak{g}_{\sigma\tau} \partial_\lambda \mathfrak{g}^{\mu\tau} \partial_\rho \mathfrak{g}^{\sigma\lambda} + \mathfrak{g}_{\rho\sigma} \mathfrak{g}^{\lambda\tau} \partial_\lambda \mathfrak{g}^{\mu\rho} \partial_\tau \mathfrak{g}^{\nu\sigma} \\ &\left. + \frac{1}{8} (2\mathfrak{g}^{\mu\rho} \mathfrak{g}^{\nu\sigma} - \mathfrak{g}^{\mu\nu} \mathfrak{g}^{\rho\sigma}) (2\mathfrak{g}_{\lambda\tau} \mathfrak{g}_{\epsilon\pi} - \mathfrak{g}_{\tau\epsilon} \mathfrak{g}_{\lambda\pi}) \partial_\rho \mathfrak{g}^{\lambda\pi} \partial_\sigma \mathfrak{g}^{\tau\epsilon} \right] . \quad (\text{I.2.3.12}) \end{aligned}$$

Il s'agit en fait de développer le tenseur de Ricci dans Eq. (I.2.3.10) en terme des composantes de la métrique et de faire bon usage des relations  $\Gamma_{\mu\rho}^\rho = \partial_\mu |g|/2|g|$  et  $\Gamma_\rho^{\mu\rho} = -\partial_\rho (\mathfrak{g}^{\mu\rho})/\sqrt{-g}$ . Dans un premier temps, on regroupe les termes qui dépendent des dérivées partielles seconde dans le membre de gauche de l'Eq. (I.2.3.11). Ces termes viennent uniquement des termes du type  $\partial\Gamma$  dans le tenseur de Ricci ou dans le scalaire de courbure présents dans l'équation d'Einstein (regarder les expressions Eq. (I.2.3.3)). Le reste des termes qui viennent du développement du tenseur de Ricci et du scalaire de courbure sont rejetés dans le pseudo tenseur de Landau-Lifchitz dans le membre de droite Eq. (I.2.3.11). On verra dans la section suivante pourquoi cette forme est adaptée aux méthodes d'approximation. Nous allons maintenant donner une expression de l'énergie totale et de l'impulsion totale d'un système et voir les différences avec La Relativité Restreinte. Si l'on dérive l'Eq. (I.2.3.11) par-rapport à  $\mu$  on voit que l'on a identiquement

$$\partial_\mu (|g|T^{\mu\nu} + |g|t_{\text{LL}}^{\mu\nu}) = 0 . \quad (\text{I.2.3.13})$$

On voit que si l'on se ramène à un modèle physique sans champ de gravitation, on retrouve en imposant  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  l'équation classique de la conservation de tenseur énergie-impulsion

$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . Ainsi, le pseudo tenseur de Landau-Lifchitz correspond à l'énergie-impulsion du champ gravitationnel lui-même. En effet, toutes les formes de l'énergie de la matière (énergie cinétique ...) peuvent, en présence de gravitation, se "convertir" en énergie gravitationnelle dans le sens où toutes les formes d'énergie qui rentrent dans  $T^{\mu\nu}$  peuvent se convertir dans une forme d'énergie qui contribue à  $t_{\text{LL}}^{\mu\nu}$  et vice-versa. En Relativité Générale, on ne peut donc pas définir de manière univoque, comme on pouvait le faire en mécanique classique, l'énergie d'un système matériel puisque la seule définition qui ait un sens et qui soit observable tient compte de l'énergie du champ de gravitation lui-même. Il est donc vain d'essayer de chercher à séparer la composante matérielle de la composante gravitationnelle et cela n'a aucun sens. Ce caractère singulier vient du fait que les équations de la Relativité Générale sont non linéaires et qu'il est donc impossible de séparer des composantes comme on peut le faire pour des théories linéaires. On note

$$\xi^{\mu\nu} = |g|T^{\mu\nu} + |g|t_{\text{LL}}^{\mu\nu} . \quad (\text{I.2.3.14})$$

À partir de cette définition on obtient une identité qui est le pendant de la conservation de l'énergie-impulsion en Relativité Restreinte mais en présence d'un champ de gravitation

$$\partial_\mu \xi^{\mu\nu} = 0 . \quad (\text{I.2.3.15})$$

Si l'on intègre cette relation sur une hypersurface  $x^0 = \text{const}$  on peut définir les sept quantités conservées classiques que sont l'énergie totale ADM (notée  $E_{\text{ADM}}(t)$ ), l'impulsion totale ADM (notée  $P_{\text{ADM}}^i(t)$ ) et le moment cinétique total ADM <sup>8</sup> (noté  $J_{\text{ADM}}^i(t)$ ). Ces quantités sont définies par

$$E_{\text{ADM}}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} \xi^{00}(\mathbf{x}, t) , \quad (\text{I.2.3.16})$$

$$P_{\text{ADM}}^i(t) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} \xi^{0i}(\mathbf{x}, t) , \quad (\text{I.2.3.17})$$

$$J_{\text{ADM}}^i(t) = \epsilon_{ijk} \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} x^j \xi^{0k}(\mathbf{x}, t) . \quad (\text{I.2.3.18})$$

Ces quantités sont exactement conservées (constante du temps) car les intégrales sur tout l'espace  $\mathbb{R}^3$  des termes en divergence dans (I.2.3.15) sont nulles.

## 2.4 Perturbation des équations d'Einstein

La théorie de la Relativité Générale est hautement non-linéaire. À cause de cette propriété, cette théorie n'admet que très peu de solutions exactes et les rares solutions exactes connues décrivent des systèmes physiques avec plusieurs symétries. En fait, on peut considérer la métrique générale  $g^{\mu\nu}$  comme la somme de la métrique de Minkowski ( $\eta^{\mu\nu}$ ), ou de manière plus générale d'une métrique de fond donnée ( $g_{\text{fond}}^{\mu\nu}$ ), et d'un champ  $h^{\mu\nu}$  que l'on appelle déviation de la métrique par-rapport à la métrique de fond. On choisira la métrique de fond comme une solution exacte connue de la Relativité Générale. Dans le cadre de cette thèse, nous allons supposer que l'on s'écarte très faiblement de la métrique plate de Minkowski et dans cette optique nous allons définir le champ  $h^{\mu\nu}$  qui est l'écart de la métrique gothique  $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$  par-rapport à  $\eta^{\mu\nu}$ .

<sup>8</sup>La conservation du moment cinétique vient de l'identité  $\partial_\rho (x^\mu \xi^{\nu\rho} - x^\nu \xi^{\mu\rho}) = 0$ .

Nous aurions tout aussi bien pu définir  $h^{\mu\nu}$  comme la déviation par rapport à la métrique  $g^{\mu\nu}$  non gothique. Cela ne change rien dans les résultats physiques que l'on obtient. On a choisi cette option car les équations d'Einstein écrites sous la forme de Landau et Lifchitz utilisent la métrique gothique. La déviation de la métrique est définie par

$$\mathbf{g}^{\mu\nu} = \sqrt{g}g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} . \quad (\text{I.2.4.19})$$

Nous allons noter par convention  $h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}h^{\rho\sigma}$ . Plutôt que de traiter tous les calculs avec un seul champ  $h$  avec les indices en haut et de traîner des tenseurs  $\eta$  qui rendent les équations plus longues, on adopte juste une convention, qui n'a rien de physique mais qui permet simplement d'avoir des équations un peu plus courtes. À partir de là, on peut écrire la métrique gothique avec les indices en bas car on va en avoir besoin lorsque l'on va remplacer les métriques gothiques en fonction des  $h$  dans l'Eq. (I.2.3.12). Il suffit de chercher ordre par ordre les termes qu'il faut ajouter à  $\eta_{\mu\nu}$  dans  $\mathbf{g}_{\mu\nu}$  pour que la relation fondamentale  $\mathbf{g}^{\mu\rho}\mathbf{g}_{\rho\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$  soit vérifiée. En procédant de cette manière on trouve

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g}} = \eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} + h_{\mu\alpha_1}h_{\nu}^{\alpha_1} - \dots + (-1)^n h_{\mu\alpha_1}h_{\alpha_2}^{\alpha_1} \dots h_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_{n-2}}h_{\nu}^{\alpha_{n-1}} + \mathcal{O}(h^{n+1}) . \quad (\text{I.2.4.20})$$

On voit, alors, que l'on peut développer formellement les équations d'Einstein en fonction des  $h$ . Développées en puissance de  $h$ , elles ont une propriété remarquable qui contribue à leur complexité : les coefficients numériques devant chaque ordre du développement en puissance de  $h$  sont de l'ordre de l'unité, contrairement à ce qui se passe lorsque l'on traite perturbativement l'électrodynamique quantique par exemple. Durant cette thèse j'ai été amené à développer un ensemble de routines Mathematica qui m'ont permis de faire les développements perturbatifs en  $h$  des équations d'Einstein et de diverses grandeurs physiques jusqu'à des ordres élevés en utilisant l'algorithme tout simple que l'on vient de décrire. Cet ensemble de routines a servi à démontrer un grand nombre de formules que nous avons utilisées pour le travail sur la dynamique d'un système binaire à l'ordre 3PN (regarder page 76).

## 2.5 Les équations d'Einstein en jauge harmonique

Nous avons déjà mentionné le fait qu'il n'existait pas de système de coordonnées privilégié. Les équations de la Relativité Générale ont été construites en grande part dans cette optique. On peut toujours choisir un système de coordonnées particulier pour effectuer les calculs sachant que, puisque la théorie est covariante, un résultat observable vu par un observateur donné aura toujours la même valeur quel que soit le système de coordonnées dans lequel on a choisi de travailler. Soient  $\{x^{\mu}\}$  et  $\{x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)\}$  deux systèmes de coordonnées qui diffèrent l'un de l'autre par des quantités infinitésimales ( $\xi^{\mu}$ ).  $h^{\mu\nu}$  et  $h'^{\mu\nu}$  qui correspondent respectivement à la déviation de la métrique  $g^{\mu\nu}$  dans le système de coordonnées  $\{x^{\mu}\}$  et à la déviation de la métrique  $g'^{\mu\nu}$  dans le système de coordonnées  $\{x'^{\mu}\}$  sont reliés, compte tenu de l'Eq. (I.2.2.2), par l'équation

$$h'^{\mu\nu}(x') = h^{\mu\nu}(x) + \partial^{\mu}\xi^{\nu} + \partial^{\nu}\xi^{\mu} - \eta^{\mu\nu}\partial_{\rho}\xi^{\rho} . \quad (\text{I.2.5.21})$$

Fixer le système de coordonnées revient à imposer quatre contraintes indépendantes puisqu'il y a quatre coordonnées à fixer. On dit que l'on a quatre degrés de liberté mais il se peut, dans

certaines conditions, qu'il y ait des degrés de liberté résiduels <sup>9</sup>. Nous allons choisir de travailler dans la *jauge harmonique* qui fixe les quatre relations

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0 . \quad (\text{I.2.5.22})$$

Dans cette jauge et compte tenu de la définition Eq. (I.2.4.19), le membre de droite de l'Eq. (I.2.3.11) peut s'écrire

$$\partial_\rho \partial_\sigma (\mathbf{g}^{\mu\nu} \mathbf{g}^{\rho\sigma} - \mathbf{g}^{\mu\rho} \mathbf{g}^{\nu\sigma}) = \square h^{\mu\nu} + h^{\rho\sigma} \partial_\rho^2 h^{\mu\nu} - \partial_\sigma h^{\mu\rho} \partial_\rho h^{\nu\sigma} , \quad (\text{I.2.5.23})$$

où le d'Alembertien est défini à l'aide de la métrique plate  $\square = \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma$ . L'équation d'Einstein peut donc être ré-écrite comme une équation de d'Alembert avec source

$$\square h^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} |g| T^{\mu\nu} + \Lambda^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} \tau^{\mu\nu} ; , \quad (\text{I.2.5.24})$$

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu\nu} = & - h^{\rho\sigma} \partial_\rho^2 h^{\mu\nu} + \partial_\rho h^{\mu\sigma} \partial_\sigma h^{\nu\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^{\mu\nu} \mathbf{g}_{\rho\sigma} \partial_\lambda h^{\rho\tau} \partial_\tau h^{\sigma\lambda} \\ & - \mathbf{g}^{\mu\rho} \mathbf{g}_{\sigma\tau} \partial_\lambda h^{\nu\tau} \partial_\rho h^{\sigma\lambda} - \mathbf{g}^{\nu\rho} \mathbf{g}_{\sigma\tau} \partial_\lambda h^{\mu\tau} \partial_\rho h^{\sigma\lambda} + \mathbf{g}_{\rho\sigma} \mathbf{g}^{\lambda\tau} \partial_\lambda h^{\mu\rho} \partial_\tau h^{\nu\sigma} \\ & + \frac{1}{8} (2\mathbf{g}^{\mu\rho} \mathbf{g}^{\nu\sigma} - \mathbf{g}^{\mu\nu} \mathbf{g}^{\rho\sigma}) (2\mathbf{g}_{\lambda\tau} \mathbf{g}_{\epsilon\pi} - \mathbf{g}_{\tau\epsilon} \mathbf{g}_{\lambda\pi}) \partial_\rho h^{\lambda\pi} \partial_\sigma h^{\tau\epsilon} . \end{aligned} \quad (\text{I.2.5.25})$$

Le gros avantage que présente cette équation est qu'elle fait intervenir le d'Alembertien "plat" dont on connaît très bien les fonctions de Green. Pour déterminer les fonctions  $h^{\mu\nu}$  il faut imposer des conditions aux limites physiques qui, dans le cas d'un système matériel isolé, correspondent aux conditions de Fock

$$\lim_{\substack{t+r/c=\text{const} \\ r \rightarrow +\infty}} \left[ \partial_r (r h^{\mu\nu}) + \frac{1}{c} \partial_t (r h^{\mu\nu}) \right] = 0 , \quad (\text{I.2.5.26})$$

qui sont les conditions d'absence d'ondes gravitationnelles entrantes. Cette condition très générale peut-être remplacée par une condition plus simple d'emploi<sup>10</sup>. Cette condition, que nous utiliserons par la suite dans notre étude du développement post-Newtonien, consiste à dire que la source isolée s'est mise à rayonner à un instant donné (appelons le  $-\mathcal{T}$ ) dans le passé. Cette condition de stationnarité dans la passé s'écrit

$$\forall t < -\mathcal{T}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[ h^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) \right] = 0 . \quad (\text{I.2.5.27})$$

Cela nous permet, une fois la jauge fixée, de déterminer de manière unique l'expression de  $h^{\mu\nu}$ .

<sup>9</sup>Lorsque l'on essaie de déterminer le nombre de composantes indépendantes de  $h^{\mu\nu}$  pour un onde gravitationnelle :  $h^{\mu\nu}$  possède 10 composantes indépendantes *a priori*. La condition de jauge harmonique  $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$  fixe 4 relations, ce qui nous amène à 6 composantes indépendantes. Il reste 4 degrés de liberté résiduels qui viennent du fait que, dans la jauge harmonique, il est toujours possible de changer de coordonnées du moment que les composantes que l'on rajoute ont un d'Alembertien nul. Cette dernière remarque permet de diminuer encore de 4 le nombre de composantes indépendantes ce qui nous amène au final à 2 composantes indépendantes pour  $h^{\mu\nu}$  qui correspondent aux deux degrés de polarisation + et  $\times$  d'une onde gravitationnelle.

<sup>10</sup>Cette condition plus simple implique la condition de Fock.

## Deuxième partie

# Travail de thèse sur l'approximation post-Newtonienne





# Chapitre 3

## Le développement post-Newtonien est itérable à tous les ordres en $1/c$

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Itération du développement post-Newtonien à tous les ordres. . .</b>	<b>21</b>
<b>3.2</b>	<b>Multi-indices et tenseurs STF . . . . .</b>	<b>22</b>
3.2.1	Multi-indices . . . . .	22
3.2.2	Tenseur symétrique et STF . . . . .	23
<b>3.3</b>	<b>Le champ en zone proche grâce au développement post-Newtonien</b>	<b>23</b>
3.3.1	La série post-Newtonienne . . . . .	23
3.3.2	Principe de l'itération post-Newtonienne . . . . .	24
<b>3.4</b>	<b>Solution particulière de l'équation de poisson. . . . .</b>	<b>26</b>
3.4.1	La solution particulière . . . . .	26
<b>3.5</b>	<b>Le champ en zone lointaine grâce au développement multipolaire post-Minkowskien . . . . .</b>	<b>27</b>
3.5.1	La série post-Minkowskienne . . . . .	27
3.5.2	Itération du développement multipolaire post-Minkowskien . . . . .	28
<b>3.6</b>	<b>Le raccordement des deux types d'approximation . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>3.7</b>	<b>Dans la jauge de Burke-Thorne . . . . .</b>	<b>31</b>

---

### 3.1 Itération du développement post-Newtonien à tous les ordres.

Puisque les prédictions physiques analytiques de la Relativité Générale sont le plus souvent extraits sous forme d'un développement post-Newtonien (par exemple le  $\dot{P}$  d'un système binaire tel que PSR 1913+16) et puisque ces résultats sont en très bon accord avec les mesures expérimentales réalisées par les Astrophysiciens, il semblerait légitime de se dire que le développement post-Newtonien est une excellente approximation de la Relativité Générale. Dans ce chapitre nous considérons la série post-Newtonienne comme une série formelle (dont nous n'étudierons pas les propriétés de convergence) et nous allons montrer que *le développement post-Newtonien est itérable à tout ordre*. Cette question a un intérêt mathématique indéniable. Mais elle a aussi un intérêt physique. En effet, puisque le développement post-Newtonien est

un des outils analytiques utilisé pour déterminer les grandeurs qu'observeront VIRGO/LIGO, il est important de savoir si ce développement est itérable à tout ordre ou bien si il devient incomplet à un ordre donné. Dans ce dernier cas on pourrait légitimement se demander dans quelle mesure le développement post-Newtonien est adapté. On se propose de répondre à cette question en cherchant à itérer le développement post-Newtonien en respectant deux contraintes mathématiques. La première contrainte est que chaque ordre d'iteration post-Newtonien est fini, c'est à dire donné par une fonctionnelle bien définie mathématiquement (une intégrale convergente) des itérations précédentes. La deuxième contrainte est que la série post-Newtonienne, dont le domaine de validité est limité à la zone proche, se raccorde avec un champ extérieur satisfaisant les bonnes conditions aux limites à l'infini.

Le théorème dont nous allons exposer la démonstration dans les pages qui suivent et qui répond à la dernière question dans un cadre mathématique suffisamment large pour tenir compte de la plupart des sources d' intérêt physique est le suivant

**Théorème d'existence** *Si l'on suppose que la source de matière est à support spatial compact (i.e. isolée) et  $C^\infty$ , il existe un algorithme unique (dans le système de coordonnées harmonique) qui permet d'itérer le développement post-Newtonien à tous les ordres en puissance de  $1/c$ . Chaque ordre post-Newtonien est fini et la série post-Newtonienne se raccorde de façon unique avec une solution post-Minkowskienne satisfaisant les conditions d'absence de radiation rentrante à l'infini.*

Dans ce qui suit, nous exposons très brièvement les différentes étapes de la méthode qui consiste (i) à calculer le développement post-Newtonien du champ de gravitation au voisinage de la source (ii) à calculer le champ de gravitation à l'extérieur de la source en utilisant le formalisme multipolaire post-Minkowskien (iii) à raccorder les deux développements pour trouver les paramètres inconnus qui les composent. L'article complet et détaillé se trouve à la page 36

## 3.2 Multi-indices et tenseurs STF

Dans cette section, on utilise des résultats tirés de l'article de Luc Blanchet et Thibault Damour [17] sur le formalisme STF (Symetric Trace Free Formalism).

### 3.2.1 Multi-indices

Ce formalisme est utile lorsque l'on veut décomposer des tenseurs selon leur composantes spatiales (la composante temporelle est traitée à part) sur une grille de coordonnées cartésienne  $\{x_1, x_2, x_3\}$ . Un tenseur peut avoir plusieurs indices mais on comprend vite qu'il peut être assez fastidieux d'écrire une longue liste d'indices. Prenons l'exemple d'un tenseur à  $p$  indices

$$T_{i_1, i_2, \dots, i_p},$$

qui représente une grandeur physique par exemple ou bien tout intermédiaire de calcul tensoriel. On va prendre pour habitude de résumer cette longue liste d'indices par une lettre majuscule

$$P = \{i_1, i_2, \dots, i_p\},$$

que l'on appelle *multi-indice*, où la lettre minuscule associée, dans le cas présent  $p$ , désignera le nombre d'indices dans le multi-indice  $P$ .

### 3.2.2 Tenseur symétrique et STF

À partir de ce tenseur  $T_{\mathbf{p}}$ , on peut définir ce que l'on appelle la partie symétrique de ce tenseur que l'on note  $T_{(\mathbf{p})}$  et qui est définie par la relation de symétrisation

$$T_{(\mathbf{p})} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \Sigma_p} T_{i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \dots, i_{\sigma(p)}}, \quad (\text{II.3.2.1})$$

où  $\Sigma_p$  désigne l'ensemble des permutations à  $p$  éléments.  $\Sigma_p$  contient  $p!$  éléments d'où le  $p!$  dans la définition de la partie symétrique. Ainsi, par exemple, le symétrisé d'un tenseur quelconque à deux indices est défini par

$$T_{(ij)} = \frac{T_{ij} + T_{ji}}{2}.$$

À partir de ce tenseur  $T_{\mathbf{p}}$ , on peut définir ce que l'on appelle la partie STF de ce tenseur, c'est à dire la partie symétrique et sans trace du tenseur, que l'on note  $\widehat{T}_{\mathbf{p}}$ . Pour cela, on doit symétriser le tenseur  $T$  et enlever toutes les traces, c'est à dire, toutes les contractions de deux indices. Le Tenseur  $\widehat{T}$  que l'on veut ainsi définir doit vérifier les deux propriétés

$$\widehat{T}_{(\mathbf{p})} = \widehat{T}_{\mathbf{p}}, \quad (\text{II.3.2.2})$$

$$\forall m < n \leq p, \delta_{i_m i_n} \widehat{T}_{\dots, i_m, \dots, i_n, \dots} = 0. \quad (\text{II.3.2.3})$$

La formule complète, que l'on peut démontrer par récurrence, est

$$S_{\mathbf{Q}}^{(q)} = \delta_{i_{q+1} i_{q+2}} \cdots \delta_{i_{p-1} i_p} T_{(i_1, i_2, \dots, i_q, i_{q+1}, i_{q+2}, \dots, i_p)}, \quad (\text{II.3.2.4})$$

$$\widehat{T}_{\mathbf{P}} = \sum_{k=0}^{[p/2]} \frac{(-1)^k (2p - 2k - 1)!! p!}{(p - 2k)!(2k)!!(2p - 1)!!} \delta_{(i_1 i_2} \cdots \delta_{i_{2k-1} i_{2k}} S_{i_{2k+1}, \dots, i_p}^{(p-2k)}. \quad (\text{II.3.2.5})$$

Ainsi, dans le cas simple d'un tenseur à 2 indices on peut calculer la composante symétrique et sans trace

$$\widehat{T}_{ij} = T_{(ij)} - \frac{1}{d} \delta_{ij} T_{(kk)}, \quad (\text{II.3.2.6})$$

où  $d$  est la dimension de l'espace sur lequel on effectue cette décomposition.

## 3.3 Le champ en zone proche grâce au développement post-Newtonien

### 3.3.1 La série post-Newtonienne

Développer le champ de gravitation en une série post-Newtonienne consiste à en donner une expression sous la forme d'un développement en puissance de  $1/c$ . En d'autres termes, on peut écrire la déviation de la métrique gothique sous la forme d'une série formelle (qui ne converge pas nécessairement)

$$\bar{h}^{\mu\nu} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{c^n} \bar{h}^{\mu\nu}_n, \quad (\text{II.3.3.7})$$

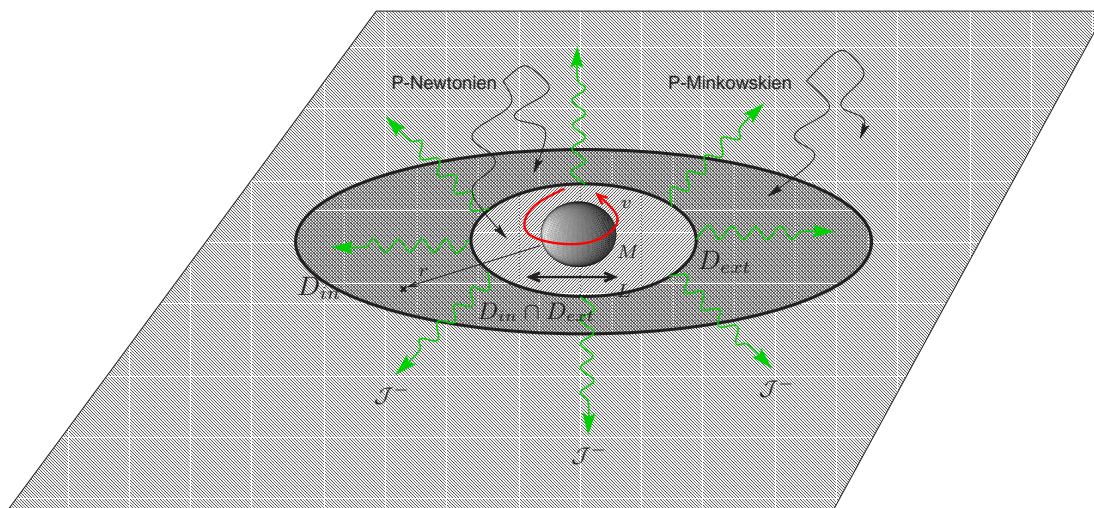


FIG. 3.3.1 – Les zones de validité des développements post-Newtoniens et post-Minkowskiens

où la barre horizontale au dessus du  $h$  rappelle qu'il s'agit d'un développement formel post-Newtonien. On peut aussi noter que les  $\bar{h}_n^{\mu\nu}$  peuvent contenir des contributions en  $\ln c$ . l'indice  $n$ , quant à lui, se réfère à la puissance du terme en  $1/c$  qui est en facteur de  $\bar{h}_n^{\mu\nu}$ . Nous allons aussi traiter, un peu plus tard, le développement multipolaire post-Minkowskien et il est bien important de ne pas confondre les deux types de développement dans les calculs. Le développement post-Newtonien est un développement en  $1/c$  lorsque  $c \rightarrow \infty$ . Cela veut dire que pour toute grandeur physique  $A(\mathbf{x}, t)$  on suppose que l'on a la hiérarchie suivante

$$\frac{1}{c} |\partial_t A(\mathbf{x}, t)| \ll |\partial_k A(\mathbf{x}, t)|. \quad (\text{II.3.3.8})$$

Pour que cette relation soit valide à l'intérieur de la source, il faut que  $1/cT \ll 1/L$ , où  $T$  est la période caractéristique de variation de  $A$  (qui est du même ordre de grandeur que le temps caractéristique d'évolution de la source) et où  $L$  est la taille caractéristique de la source. Pour qu'elle soit valable à l'extérieur, il faut que  $1/cT \ll 1/r$ , où  $r$  est la distance de la source au point générique extérieur où l'on effectue le calcul post-Newtonien du champ. Ainsi, on voit que le développement post-Newtonien est valide dans une zone autour de l'origine (voir Fig. (3.3.1)) dont le rayon est très inférieure à une longueur d'onde du rayonnement gravitationnel (zone proche). De plus, si l'on souhaite que le développement post-Newtonien soit valable dans toute la source de matière, il faut que celle-ci soit entièrement comprise dans ce domaine de rayon très inférieure à la longueur d'onde. Cela nécessite que les vitesses caractéristiques de la source soient faibles devant  $c$  (slowly-moving). Itérer le développement post-Newtonien, c'est déterminer successivement les  $\bar{h}_n^{\mu\nu}$  à l'aide d'un algorithme qu'il faut préciser.

### 3.3.2 Principe de l'itération post-Newtonienne

Nous avons vu (cf. Eq. (I.2.5.24)) que l'équation générale que l'on doit résoudre en jauge harmonique pour une "petite" déviation de la métrique gothique est une équation de d'Alembert avec source (Il faut noter que la source  $\tau^{\mu\nu}$  elle-même dans l'Eq. (I.2.5.24) dépend de  $h^{\mu\nu}$  de manière hautement non-linéaire). Dans un premier temps, nous devons donc déterminer la

solution générale de l'équation

$$\Delta \bar{h}_n^{\mu\nu} = 16\pi G \bar{\tau}_{n-4}^{\mu\nu} + \partial_t^2 \bar{h}_{n-2}^{\mu\nu}. \quad (\text{II.3.3.9})$$

Dans cette dernière équation, le deuxième terme du membre de droite vient de la séparation de l'opérateur d'Alembertien en sa partie spatiale (qui est le membre de gauche) et sa partie temporelle qui contient un facteur  $1/c^2$ . La solution la plus générale de l'équation est donnée par

$$\bar{h}_n^{\mu\nu} = 16\pi G \widetilde{\Delta}^{-1} \left[ \bar{\tau}_{n-4}^{\mu\nu} \right] + \partial_t^2 \widetilde{\Delta}^{-1} \bar{h}_{n-2}^{\mu\nu} + \sum_{l \geq 0} A_L^{\mu\nu}(t) \hat{x}_l. \quad (\text{II.3.3.10})$$

Dans cette solution nous voyons apparaître deux nouvelles entités. La première est  $\widetilde{\Delta}^{-1}$ . Ceci, comme nous le verrons dans la section suivante, est un "opérateur inverse" du Laplacien qui nous donne une solution particulière de l'équation de Poisson. Sa définition est basée sur une régularisation (symbolisée par le  $\widetilde{\phantom{x}}$ ) de l'intégrale de Poisson habituelle obtenue à l'aide du principe de prolongement analytique et il est valable pour une très grande variété de sources à support compact ou non. La deuxième entité est le dernier terme du membre de droite de l'Éq.(II.3.3.10) : le terme en  $A_L^{\mu\nu}(t) \hat{x}_l$ . C'est le terme homogène, c'est-à-dire dont le Laplacien est nul, régulier à l'origine le plus général que l'on puisse construire. Les coefficients  $A_L^{\mu\nu}(t)$  sont indépendants de l'espace et restent indéterminés tant que l'on a pas fait intervenir les conditions aux limites. L'objet  $\hat{x}_l$  représente la partie STF du produit de  $l$  vecteurs  $x_l = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_l}$ . La condition de régularité à l'origine vient du fait qu'en aucun point de la source le champ ne doit être singulier. C'est la raison pour laquelle l'autre famille de termes homogènes  $\widehat{\partial}_L(1/r)$  doit être écartée dans le cas présent. Les termes indéterminés seront fixés lorsque l'on aura fait le lien entre la source isolée qui crée ce champ gravitationnel et autour de laquelle l'approximation post-Newtonienne est valide et le champ lointain où le rayonnement gravitationnel satisfait à la condition d'absence de radiation rentrante. Ce sont, d'une certaine manière, les conditions aux limites qui dictent au champ de gravitation sa manière de réagir sur la source qui lui a donné naissance. Ce sont ce que l'on appelle les forces de réaction au rayonnement qui agissent sur la source. Plutôt que d'exprimer la solution sous la forme de l'Éq. (II.3.3.10), nous allons en donner une autre expression qui ne dépend pas des ordres précédents de  $\bar{h}^{\mu\nu}$  au travers du terme en  $\partial_t^2 \widetilde{\Delta}^{-1} \bar{h}_{n-2}^{\mu\nu}$ . La formule

$$\bar{h}_n^{\mu\nu} = \sum_{k=0}^{[n/2]} (\partial_t^{2k} \widetilde{\Delta}^{-k-1}) \left( \bar{\tau}_{n-4-2k}^{\mu\nu} \right) + \sum_{k=0}^{[n/2]-1} A_L^{\mu\nu} \widetilde{\Delta}^{-k}(\hat{x}_L) \quad (\text{II.3.3.11})$$

peut aisément se démontrer par récurrence. L'opérateur  $\widetilde{\Delta}^{-k}$  représente l'iteration  $k^e$  de l'opérateur  $\widetilde{\Delta}^{-1}$ . Nous rappelons à ce stade que le développement post-Newtonien de  $h^{\mu\nu}$  tel que nous venons de le réaliser sous la forme d'une fonctionnelle de  $\tau^{\mu\nu}$ , n'est valide que dans la zone proche de la source. Dans l'optique de déterminer les  $A_L^{\mu\nu}$ , nous devons relier ce développement valide dans la zone proche, qui s'écrit une fois que l'on a resommé (II.3.3.11) sur tous les ordres post-Newtoniens,

$$\bar{h}^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} \mathcal{I}^{-1}(\bar{\tau}^{\mu\nu}) + \sum_{k,l \geq 0} A_L^{\mu\nu} \widetilde{\Delta}^{-k}(\hat{x}_L), \quad (\text{II.3.3.12})$$

avec les conditions aux limites qui sont définies en-dehors de cette zone proche (l'opérateur  $\mathcal{I}^{-1}$  est égal à la somme formelle  $\sum_{n \geq 0} 1/c^{2n} \partial_t^{2n} \widetilde{\Delta}^{-n-1}$ ). Nous allons donc déterminer la structure du champ en zone lointaine en tenant compte des conditions aux limites. Nous verrons dans ce cas précis qu'il y a aussi une série de termes indéterminés qui vont, au contraire des termes indéterminés en zone proche, dépendre de la source de matière qui génère le rayonnement gravitationnel. Mais, avant cela, il convient de dire un mot sur la solution particulière de l'équation de Poisson, que l'on a utilisée pour résoudre l'Eq. (II.3.3.10), dans la section qui suit.

## 3.4 Solution particulière de l'équation de poisson.

### 3.4.1 La solution particulière

L'équation de Poisson doit être résolue à chaque étape du développement post-Newtonien (pour tout  $n$  dans l'Éq. (II.3.3.9)). Soit une fonction  $S(\mathbf{x})$  que l'on appelle source et qui est à valeur dans  $\mathbb{R}^3$ . On veut trouver une fonction  $F(\mathbf{x})$ , aussi à valeur dans  $\mathbb{R}^3$ , qui est une solution particulière de l'équation

$$\Delta F(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}) . \quad (\text{II.3.4.13})$$

Nous allons trouver une solution particulière de (II.3.4.13) dans le cas où la source fait partie de l'ensemble de fonctions de  $\mathbb{R}^4$ ,  $\mathcal{S}$ , défini par

$$\mathcal{S} = \left\{ S(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4) \mid S(\mathbf{x}, t) = \sum \hat{n}_L r^a (\ln r)^p s_{L,a,p}(t) + S_N(\mathbf{x}, t) \right\} , \quad (\text{II.3.4.14})$$

où  $a \in \mathbb{Z}$ , avec  $-N \leq a$ , et  $p \in \mathbb{N}$ . Le reste  $S_N(\mathbf{x}, t) = \mathcal{O}(1/r^N)$  lorsque  $r \rightarrow +\infty$  à  $t = \text{const.}$  On obtiendra alors la solution générale en rajoutant la solution homogène la plus générale. La solution que l'on a trouvée dans l'Eq. (II.3.3.10) n'est rien d'autre qu'une solution particulière (les termes en  $\widetilde{\Delta}^{-1}$  dans le membre de droite) plus une solution homogène (les termes en  $A_L$ ). On décrit toute la famille des solutions possibles de cette équation en décrivant l'ensemble des  $A_L$ . L'équation de Poisson a été largement étudiée par de nombreux mathématiciens et physiciens. La solution que nous allons brièvement étudier (voir l'article pour tous les détails) est basée, comme nous allons le voir sur le principe du prolongement analytique. L'utilisation des fonctions de Green permet de déterminer des solutions particulières d'équations aux dérivées partielles linéaires dont fait partie l'équation de Poisson. Dans le cas d'une source décroissant suffisamment rapidement à l'infini on a la solution particulière

$$F(\mathbf{z}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|} S(\mathbf{x}) \quad (\text{II.3.4.15})$$

Insistons bien sur le caractère formel de cette solution car suivant la nature de la source (c'est-à-dire les propriétés mathématiques de  $S(\mathbf{x})$ ) elle peut n'avoir aucun sens. Donnons quelques exemples pour fixer les idées. Si la source est à support compact (c'est-à-dire nulle en-dehors d'un domaine compact de l'espace) l'intégrale sur tout l'espace ( $\mathbb{R}^3$ ) dans la solution particulière est finie, nous avons donc bien une solution particulière de l'équation de Poisson. Si maintenant on imagine que notre source s'étend dans tout l'espace, il faut imposer des contraintes sur la source pour que l'intégrale de Poisson soit finie. Si l'on prend une source qui se comporte

asymptotiquement comme  $r^2$ , l'intégrale de Poisson diverge et notre solution particulière (Eq. II.3.4.15) n'est alors plus d'aucune utilité. L'idée, à ce stade, est de garder cette solution formelle dans tous les cas et de lui retrancher, quand cela est nécessaire, des termes homogènes (pour que notre solution reste une solution particulière de l'équation de Poisson) eux aussi "infinis" qui vont avoir pour mission de "tuer" les divergences contenues dans la solution particulière formelle. La méthode du prolongement analytique permet de répondre exactement aux attentes exprimées dans les lignes précédentes. Elle est abondamment utilisée en théorie quantique des champs afin de régulariser des intégrales divergentes. La solution particulière que nous allons étudier et que nous avons utilisé dans l'article est l'intégrale de Poisson partie finie

$$\widetilde{\Delta}^{-1} S(\mathbf{z}) = F_{\text{part}}(\mathbf{z}) = -\frac{1}{4\pi} \text{FP}_{\mathbf{B}=0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{x}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mathbf{B}} S(\mathbf{x}), \quad (\text{II.3.4.16})$$

où  $r = |\mathbf{x}|$  et  $r_0$  est un terme d'homogénéité. Lorsque l'on voit  $\text{FP}_{\mathbf{B}=0}$ , il faut lire "prendre la partie finie en  $\mathbf{B} = 0$  de l'expression qui suit". Cela veut dire la chose suivante :  $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{x}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|} (r/r_0)^{\mathbf{B}} S(\mathbf{x})$  est une fonction de  $\mathbf{B}$  qui est définie sur un certain domaine du plan complexe. On peut étendre cette fonction à tout le plan complexe sauf des poles isolés, et ceci de manière unique, grâce au théorème du prolongement analytique. Ce que l'on appelle prendre "la partie finie en  $\mathbf{B} = 0$ " revient à considérer le développement de Laurent en  $\mathbf{B} \rightarrow 0$  de cette fonction et de ne retenir que le terme en  $\mathbf{B}^0$ . L'opérateur de Poisson généralisé ainsi défini, que l'on notera dès à présent  $\widetilde{\Delta}^{-1}$ , vérifie  $\widetilde{\Delta}^{-1} S = S$  si  $S \in \mathcal{S}$  (la démonstration est bien détaillée dans l'article en anglais page 70) et  $\widetilde{\Delta}^{-1} S \in \mathcal{S}$  (voir Eqs. II.3.4.14 pour la définition de  $\mathcal{S}$ ), cela veut dire que si l'on applique  $\widetilde{\Delta}^{-1}$  à une fonction de type  $\mathcal{S}$  le résultat appartient encore à  $\mathcal{S}$ . Il est clair que ceci n'est pas possible pour tout type de fonction  $S$ . Il suffit pour s'en convaincre de considérer l'exemple d'une source  $S$  dont le comportement asymptotique serait celui d'une exponentielle  $S(\mathbf{x}) \sim \exp(r/r_0)$ . Pour une telle source, il serait impossible de trouver un domaine du plan complexe auquel  $\mathbf{B}$  appartiendrait et pour lequel  $\int_{\mathcal{E}} \frac{d^3\mathbf{x}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|} (r/r_0)^{\mathbf{B}} \exp(r/r_0)$  serait défini.

## 3.5 Le champ en zone lointaine grâce au développement multipolaire post-Minkowskien

### 3.5.1 La série post-Minkowskienne

Il existe une méthode d'approximation qui est valide partout en dehors de la source : il s'agit de l'approximation post-Minkowskienne. Le champ  $h^{\mu\nu}$  peut s'écrire sous la forme d'une série perturbative en puissance de  $G$  que l'on notera

$$h^{\mu\nu} = \sum_{n \geq 0} G^n h_{(n)}^{\mu\nu}; \quad (\text{II.3.5.17})$$

On considère se développement dans la zone du vide extérieure au système isolé ( $r \geq L$ ) où le tenseur énergie-impulsion est nul ( $T^{\mu\nu} = 0$ ). Ceci est vrai tant que l'on peut considérer que  $\frac{GM}{c^2 r}$  est un petit paramètre ( $r$  est la distance du point générique à la source). En d'autres termes, le développement post-Minkowskien ne tient que si l'on se trouve en dehors du rayon de Schwarzschild de la source de matière étudiée ce qui est tout le temps le cas si l'on se situe à l'extérieur de la source.



### 3.5.2 Itération du développement multipolaire post-Minkowskien

Chacun des  $h_{(n)}^{\mu\nu}$  vérifie les équations

$$\square h_{(n)}^{\mu\nu} = \Lambda_{(n)}^{\mu\nu}, \quad (\text{II.3.5.18})$$

$$\partial_\mu h_{(n)}^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{II.3.5.19})$$

où  $\Lambda^{\mu\nu}$  est défini par l'Eq. (I.2.5.25) et représente physiquement le terme de source du rayonnement gravitationnel<sup>1</sup>. La première itération de ce développement post-Minkowskien revient à résoudre

$$\square h_{(1)}^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{II.3.5.20})$$

$$\partial_\mu h_{(1)}^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{II.3.5.21})$$

Pour résoudre cette équation on utilise un développement multipolaire [17]. La solution générale de l'Eq. (II.3.5.20), dans le cadre du formalisme multipolaire, est de la forme

$$h_{(1)}^{\mu\nu} = \sum_{l \geq 0} \widehat{\partial}_l \left( \frac{F_l^{\mu\nu}(t-r)}{r} \right), \quad (\text{II.3.5.22})$$

où  $F_l^{\mu\nu}$  est une famille de multipôles dont l'expression explicite dépend de la source. On a imposé les conditions aux limites à l'infini qui permettent de ne retenir que les multipôles retardés (en  $(t-r)$ ). A partir de cette première itération il est possible de trouver les  $h_{(n)}^{\mu\nu}$  pour  $n \geq 2$  en remplaçant les  $h_{(p)}^{\mu\nu}$  issus des itérations précédentes dans  $\Lambda_{(n)}^{\mu\nu}$ . Il a été prouvé [17] que l'on peut itérer à tous les ordres post-Minkowskien la série multipolaire post-Minkowskienne et que l'on obtient ainsi la solution la plus générale des équations d'Einstein à l'extérieur de la source. Cette solution dépend d'un nombre fini de fonctions arbitraires du temps qui représentent les moments multipolaire de la source. Nous noterons, à partir de maintenant, le champ  $h^{\mu\nu}$  dans le formalisme multipolaire post-Minkowskien  $\mathcal{M}(h^{\mu\nu})$  où  $\mathcal{M}$  rappelle *Multipolaire*. La solution générale de l'Eq. (II.3.5.18) où l'on impose les conditions aux limites de Fock est

$$\mathcal{M}(h_{(n)}^{\mu\nu}) = \widetilde{\square}_{\text{Ret}}^{-1}(\mathcal{M}(\Lambda_{(n)}^{\mu\nu})) + q_{(n)}^{\mu\nu} \quad (\text{II.3.5.23})$$

où  $q^{\mu\nu}$  est une fonction harmonique retardée qui est indéterminée à ce stade du calcul (elle vérifie les deux propriétés  $\square q_{(n)}^{\mu\nu} = 0$  et  $\partial_\mu q_{(n)}^{\mu\nu} = -\partial_\mu \widetilde{\square}_{\text{Ret}}^{-1}(\mathcal{M}(\Lambda_{(n)}^{\mu\nu}))$  qui vient de la condition de jauge harmonique) et où  $\widetilde{\square}_{\text{Ret}}^{-1}$  représente un opérateur d'Alembertien retardé lui aussi et basé sur le principe du prolongement analytique. La fonction harmonique  $q_{(n)}^{\mu\nu}$  la plus générale s'écrit

$$q_{(n)}^{\mu\nu} = \sum_{l \geq 0} \widehat{\partial}_l \left( \frac{\mathcal{F}_{(n)L}^{\mu\nu}(t-r)}{r} \right), \quad (\text{II.3.5.24})$$

où  $\mathcal{F}_{(n)L}^{\mu\nu}$  est une famille de multipôles dont on doit déterminer l'expression en fonction de la source. La solution générale  $\mathcal{M}(h^{\mu\nu}) = \sum G^n \mathcal{M}(h_{(n)}^{\mu\nu})$  du champ extérieur doit être retardée pour satisfaire les conditions aux limites de Fock. Dans le formalisme multipolaire,  $\mathcal{M}(h^{\mu\nu})$  est singulière en  $r = 0$  mais régulière lorsque  $r \rightarrow \infty$  (à  $t = \text{const}$ ) contrairement à la

<sup>1</sup>Le rayonnement gravitationnel est généré par toutes les formes d'énergie : la matière baryonique, d'une part, mais aussi le rayonnement gravitationnel lui-même.

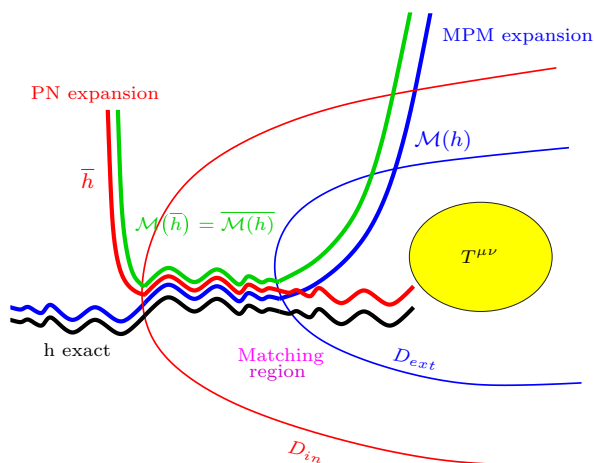


FIG. 3.5.2 – Schéma de la solution exacte comparée au développement post-Newtonien et au développement multipolaire post-Minkowskien

solution de  $\bar{h}^{\mu\nu}$  qui était régulière en  $r = 0$  et singulière lorsque  $r \rightarrow \infty$  (à  $t = \text{const.}$ ). Les deux développements post-Newtonien et multipolaire post-Minkowskien sont valides dans des zones complémentaires de l'espace qui ont une intersection commune que l'on appelle la zone de raccordement ou “matching” en anglais. Mais il n'est pas évident, a priori, que les deux développements puissent se raccorder car ils n'ont clairement pas la même structure mathématique.

### 3.6 Le raccordement des deux types d'approximation

Nous savons que le développement post-Newtonien est valide dans la zone proche  $D_{\text{in}}$  qui est une zone de rayon  $R_{\text{int}} \ll \lambda$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde caractéristique du rayonnement gravitationnel émis par la source de matière décrite par le tenseur énergie-impulsion  $T^{\mu\nu}$ . Le développement multipolaire post-Minkowskien, quant à lui, est valide partout à l'extérieur de la source matérielle, en particulier dans une zone  $D_{\text{ext}}$  au-delà d'un rayon  $R_{\text{ext}} > L$  où  $L$  est la taille caractéristique de la source. Il y a donc une zone commune, Fig. (3.5.2), où les deux développements post-Newtonien et post-Minkowskien sont valides simultanément. Cette zone que l'on appelle zone de raccord est comprise entre  $R_{\text{ext}}$  et  $R_{\text{int}}$ . Si  $\bar{h}^{\mu\nu}$  est une approximation de la solution exacte dans  $D_{\text{in}}$  (ce que l'on suppose mais qui n'est pas démontré), on notera  $h_{\text{exact}}^{\mu\nu}$  la solution exacte dans la suite, et  $\mathcal{M}(h^{\mu\nu})$  est une approximation de la solution exacte dans  $D_{\text{ext}}$ , alors en chaque point de la zone de raccordement  $D_{\text{in}} \cup D_{\text{ext}}$  on doit avoir numériquement

$$\bar{h}^{\mu\nu} = h_{\text{exact}}^{\mu\nu} = \mathcal{M}(h^{\mu\nu}). \quad (\text{II.3.6.25})$$

Le problème est que les deux développements n'ont pas la même structure mathématique, condition indispensable à un quelconque raccord. On peut montrer que la structure mathématique du développement asymptotique lorsque  $r \rightarrow \infty$  du développement post-Newtonien<sup>2</sup> est rigoureusement la même que celle du développement asymptotique lorsque  $r \rightarrow 0$  du développement multipolaire post-Minkowskien<sup>3</sup>. Cette similitude augmentée du fait qu'il existe une zone commune où les deux approximations post-Newtonienne et multipolaire post-Minkowskienne sont

<sup>2</sup>On le notera  $\mathcal{M}(\bar{h}^{\mu\nu})$  et on regardera le détail à la page 52

<sup>3</sup>On le notera  $\mathcal{M}(h^{\mu\nu})$  et on regardera le détail à la page 44

valides, impose la relation fondamentale du raccord qui est

$$\mathcal{M}(\bar{h}^{\mu\nu}) = \overline{\mathcal{M}(h^{\mu\nu})}. \quad (\text{II.3.6.26})$$

Cette dernière équation va permettre de déterminer de manière unique les fonctions indéterminées  $A_L^{\mu\nu}(t)$  du développement post-Newtonien ainsi que les fonctions harmoniques  $q^{\mu\nu}$  du développement multipolaire post-Minkowskien. Pour effectuer le développement asymptotique du développement post-Newtonien lorsque  $r \rightarrow \infty$  il suffit de connaître ce développement asymptotique pour l'opérateur  $\Delta^{-k}$  dans l'Eq. (II.3.3.11). Pour cela, nous invitons le lecteur à se référer à la page 71. Le développement asymptotique lorsque  $r \rightarrow 0$  du développement multipolaire post-Minkowskien est, quant à lui, décrit à la page 64. Une fois ces développements asymptotiques effectués on peut écrire la forme exacte du développement post-Newtonien en zone lointaine

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\bar{h}^{\mu\nu}) = & \\ & \frac{16\pi G}{c^4} \mathcal{I}^{-1}(\mathcal{M}(\bar{\tau}^{\mu\nu})) \\ & + \sum_{k,l \geq 0}^{(2k)} A_L^{\mu\nu}(t) \Delta^{-k}(\hat{x}_L) \\ & - \frac{4G}{c^4} \sum_{k,n,l \geq 0} \frac{(-1)^l}{l!(2n)!} \hat{\partial}_l(r^{2n-1}) \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3\mathbf{x} r^{\mathbb{B}} \Delta^{-k}(\hat{x}_L) \partial_t^{2n+2k}(\bar{\tau}^{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (\text{II.3.6.27})$$

ainsi que la structure du développement multipolaire post-Minkowskien en zone proche

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}(h^{\mu\nu})} = & \\ & \mathcal{I}^{-1}(\overline{\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})}) \iff \frac{16\pi G}{c^4} \mathcal{I}^{-1}(\overline{\mathcal{M}(\tau^{\mu\nu})}) \\ & + \frac{4G}{c^4} \sum_{l \geq 0} \sum_{k \geq l} (-1)^l \frac{2^l}{(2k+1)!} \Delta^{-k}(\hat{x}_L) \left\{ \overline{\mathcal{R}}_L^{\mu\nu}(t) + \overline{\mathcal{F}}_L^{\mu\nu}(t) \right\} \\ & - \frac{4G}{c^4} \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^l}{l!(2n)!} \hat{\partial}_l(r^{2n-1})^{(2n)} \overline{\mathcal{F}}_L^{\mu\nu}(t). \end{aligned} \quad (\text{II.3.6.28})$$

Dans un premier temps, on peut remarquer que les deux développements ont en commun un terme évident qui est  $\mathcal{I}^{-1}(\mathcal{M}(\bar{\tau}^{\mu\nu}))$ . Ensuite, on peut repérer les termes du type  $\hat{\partial}_l(r^{2n-1})$  dans chaque développement. Cela nous permet de trouver les  $\overline{\mathcal{F}}_L^{\mu\nu}$ . Pour que le raccord soit possible, il faut que

$$\overline{\mathcal{F}}_L^{\mu\nu}(t) = \frac{1}{c^{2k}} \sum_{k \geq 0} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3\mathbf{x} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mathbb{B}} \Delta^{-k}(\hat{x}_L) \partial_t^{2k}(\bar{\tau}^{\mu\nu}) \quad (\text{II.3.6.29})$$

$$\overline{\mathcal{R}}_L^{\mu\nu}(t) = \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3\mathbf{y} \hat{y}_L | \mathbf{y} |^{\mathbb{B}} \int_1^\infty dz \gamma_l(z) \mathcal{M}(\tau^{\mu\nu})(\mathbf{y}, t - z \frac{|\mathbf{y}|}{c}) \quad (\text{II.3.6.30})$$

cette expression explicite est en parfait accord avec [11]. Nous verrons, à la section suivante, que  $\overline{\mathcal{F}}_L^{\mu\nu}$  contient le terme habituel de réaction du rayonnement à 2.5PN. D'autre part, on sait que le  $\overline{\mathcal{R}}_L^{\mu\nu}$  contient les effets de tails [7]. Maintenant, attachons-nous aux termes du type  $\Delta^{-k}(\hat{x}_L)$ . Pour que le raccord soit possible, il faut que

$$A_L^{\mu\nu} = \frac{1}{c^{2l+1}} \frac{4G}{c^4} \frac{2^l (-1)^l}{(2l+1)!} \left( \overline{\mathcal{R}}_L^{\mu\nu}(t) + \overline{\mathcal{F}}_L^{\mu\nu}(t) \right). \quad (\text{II.3.6.31})$$

On peut montrer que la solution générale

$$\bar{h}^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} \mathcal{I}^{-1}(\bar{\tau}^{\mu\nu}) + \underbrace{\sum_{k,l \geq 0} A_L^{\mu\nu} \widetilde{\Delta}^{-k}(\hat{x}_L)}_{\bar{h}_{\text{Reac}}^{\mu\nu}}, \quad (\text{II.3.6.32})$$

où on connaît maintenant l'expression des  $A_L^{\mu\nu}$ , vérifie la condition de jauge harmonique (voir dans l'article page 57). Cela permet de dire que nous avons trouvé un algorithme d'itération du développement post-Newtonien à tous les ordres en  $1/c$ . Le terme  $\bar{h}_{\text{Reac}}^{\mu\nu}$ , comme nous allons le voir, contient le terme de réaction de rayonnement à 2.5PN ainsi que la contribution des sillages d'ondes (tails). Cette notation est un peu abusive car nous n'avons pas montré que toute la contribution des réactions venait de ce terme. Nous avons simplement montré, dans la section qui suit, que la contribution à l'ordre 1 post-Minkowskien des termes de réaction viennent de ce terme.

### 3.7 Dans la jauge de Burke-Thorne

Dans la section précédente nous avons déterminé la structure générale du développement post-Newtonien à tout ordre en jauge harmonique pour les conditions aux limites de Fock. Nous allons vérifier que le terme  $\bar{h}_{\text{Reac}}^{\mu\nu}$  qui ne contient que les puissances  $\{1/c, 1/c^3, 1/c^5, \dots\}$  correspond à l'ordre le plus bas dans la jauge de Burke-Thorne à un terme d'ordre  $1/c^5$ . Le choix de jauge de Burke et Thorne consiste à annuler les termes  $\bar{h}_{\text{Reac}}^{ij}$  et  $\bar{h}_{\text{Reac}}^{0i}$  en accord, du point de vue de l'ordre en  $1/c$ , avec le terme non-nul restant  $\bar{h}_{\text{Reac}}^{00}$ . Grâce aux résultats de la section précédente on peut écrire

$$\bar{h}_{\text{Reac}}^{\mu\nu} = \sum_{k,l \geq 0} \frac{4G}{c^{5+2k+2l}} \frac{2^l (-1)^l}{(2l+1)!} \left[ \bar{\mathcal{F}}_L^{\mu\nu}(t) + \bar{\mathcal{R}}_L^{\mu\nu}(t) \right] \widetilde{\Delta}^{-k}(\hat{x}_L). \quad (\text{II.3.7.33})$$

Le terme en  $\mathcal{R}$  est responsable des "tails" et nous savons que ces termes apparaissent à des ordres plus élevés en  $1/c$  que les premiers termes de réaction du rayonnement sur la source. Nous allons donc vérifier que l'on obtient bien un effet de ralentissement ("damping") de la source avec les termes  $\mathcal{F}$  seulement qui, une fois développés donnent

$$\bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{\mu\nu} = \sum_{k,l,n \geq 0} \frac{4G}{c^{5+2k+2l+2n}} \frac{2^l (-1)^l}{(2l+1)!} \left[ \int d^3\mathbf{x} \widetilde{\Delta}^{-n}(\hat{x}_L) \partial_t^{2n}(\tau^{\mu\nu}) \right]^{(2n+2k+1)} \widetilde{\Delta}^{-k}(\hat{x}_L). \quad (\text{II.3.7.34})$$

Dans un premier temps, nous écrivons la composante 00 dans laquelle beaucoup de termes sont en fait tout simplement nuls

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{00} &= \frac{4G}{c^5} \left[ \int d^3\mathbf{x} \bar{\tau}^{00} \right]^{(1)} \\ &+ \frac{4G}{c^7} \left[ \int d^3\mathbf{x} \widetilde{\Delta}^{-1}(1) \bar{\tau}^{00} \right]^{(3)} - \frac{4G}{3c^7} \left[ \int d^3\mathbf{x} x_k \bar{\tau}^{00} \right]^{(3)} x_k \\ &+ \frac{4G}{c^7} \left[ \int d^3\mathbf{x} \bar{\tau}^{00} \right]^{(3)} \widetilde{\Delta}^{-1}(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4G}{c^9} \left[ \int d^3\mathbf{x} \bar{\tau}^{00} \right]^{(5)} \widetilde{\Delta}^{-2}(1) + \frac{2G}{15c^9} \left[ \int d^3\mathbf{x} \hat{x}_{ab} \bar{\tau}^{00} \right]^{(5)} \hat{x}_{ab} \\
& + \frac{4G}{c^9} \left[ \int d^3\mathbf{x} \widetilde{\Delta}^{-2}(1) \bar{\tau}^{00} \right]^{(5)} - \frac{4G}{3c^9} \left[ \int d^3\mathbf{x} x_k \bar{\tau}^{00} \right]^{(5)} \widetilde{\Delta}^{-1}(x_k) \\
& + \frac{4G}{c^9} \left[ \int d^3\mathbf{x} \widetilde{\Delta}^{-1}(1) \bar{\tau}^{00} \right]^{(5)} \widetilde{\Delta}^{-1}(1) \\
& - \frac{4G}{3c^9} \left[ \int d^3\mathbf{x} \widetilde{\Delta}^{-1}(x_k) \bar{\tau}^{00} \right]^{(5)} x_k .
\end{aligned} \tag{II.3.7.35}$$

Si on tient compte du fait que l'on a la relation exacte  $1/c \partial_t \bar{\tau}^{0\mu} = \partial_i \bar{\tau}^{i\mu}$ , on peut éliminer toutes les dérivées temporelles de l'intégrale sur tout l'espace de  $\bar{\tau}^{00}$ . D'autre part, on choisit de noter  $M_{ij} = \frac{1}{c^2} \int d^3\mathbf{x} \bar{\tau}^{00} \hat{x}_{ij}$  et  $Q_{ij} = \frac{1}{c^2} \int d^3\mathbf{x} \bar{\tau}^{00} x_{ij}$  ce qui permet de simplifier nettement le résultat précédent

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{00} &= \frac{2G}{3c^5} Q_{kk}^{(3)} + \frac{2G}{15c^7} M_{ab}^{(5)} x_{ab} + \frac{G}{9c^7} Q_{kk}^{(5)} r^2 \\
&+ \frac{1}{c^7} h_{\bar{7}}^{00}(t) + \frac{1}{c^7} h_{\bar{7}k}^{00}(t) x_k + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^8}\right),
\end{aligned} \tag{II.3.7.36}$$

où les fonctions  $h_{\bar{7}}^{00}(t)$  et  $h_{\bar{7}k}^{00}(t)$  sont des termes de l'Eq. (II.3.7.34) que l'on peut facilement reconnaître mais que l'on va laisser sous cette forme non-explicite puisque ces termes ne sont en fait que des termes de jauge qui vont disparaître lorsque l'on va effectuer la transformation de Burke et Thorne. On écrit, maintenant la composante  $0i$  du champ de réaction

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{0i} &= \frac{4G}{c^5} \left[ \int d^3\mathbf{x} \bar{\tau}^{0i} \right]^{(1)} \\
&+ \frac{4G}{c^7} \left[ \int d^3\mathbf{x} \bar{\tau}^{0i} \right]^{(3)} \widetilde{\Delta}^{-1}(1) - \frac{4G}{3c^7} \left[ \int d^3\mathbf{x} x_k \bar{\tau}^{0i} \right]^{(3)} x_k \\
&+ \frac{4G}{c^7} \left[ \int d^3\mathbf{x} \widetilde{\Delta}^{-1}(1) \bar{\tau}^{0i} \right]^{(3)}.
\end{aligned} \tag{II.3.7.37}$$

On utilise à nouveau la relation de conservation de  $\bar{\tau}^{\mu\nu}$  pour, d'une part, éliminer les dérivées temporelles des intégrales sur tout l'espace de  $\bar{\tau}^{0i}$  et pour, d'autre part, exprimer, après quelques intégrations par partie, toutes ces intégrales en fonction des moments quadrupolaires avec ou sans trace (respectivement  $Q_{ij}(t)$  ou  $M_{ij}(t)$ ). Le résultat est

$$\bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{0i} = -\frac{2G}{3c^6} Q_{ki}^{(4)} x_k + \frac{1}{c^6} h_{\bar{6}}^{0i}(t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^7}\right). \tag{II.3.7.38}$$

enfin, on réitère le même procédé pour la composante  $ij$  du champ de réaction

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{ij} &= \frac{4G}{c^5} \left[ \int d^3\mathbf{x} \bar{\tau}^{ij} \right]^{(1)} \\
&+ \frac{4G}{c^7} \left[ \int d^3\mathbf{x} \bar{\tau}^{ij} \right]^{(3)} \widetilde{\Delta}^{-1}(1) - \frac{4G}{3c^7} \left[ \int d^3\mathbf{x} x_k \bar{\tau}^{ij} \right]^{(3)} x_k \\
&+ \frac{4G}{c^7} \left[ \int d^3\mathbf{x} \widetilde{\Delta}^{-1}(1) \bar{\tau}^{ij} \right]^{(3)},
\end{aligned} \tag{II.3.7.39}$$

et après quelques intégrations par parties on trouve

$$\bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{ij} = \frac{2\text{G}^{(3)}}{c^5} Q_{ij} + \frac{\text{G}^{(5)}}{3c^7} Q_{ij} r^2 + \frac{1}{c^7} h^{ij}(t) x_k + \frac{1}{c^7} h^{ij}(t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^8}\right). \quad (\text{II.3.7.40})$$

Nous allons, maintenant, effectuer une transformation infinitésimale du système de coordonnées de manière à faire disparaître les composantes  $\bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{0i}$  et  $\bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{ij}$ . Si l'on y arrive, la composante  $h^{00}$  dans le nouveau système de coordonnées peut directement être interprétée comme le potentiel de la force de réaction du rayonnement, modulo un facteur constant près, qui s'oppose au mouvement de la source comme on le verra à la fin de cette section. Une transformation infinitésimale du système de coordonnées, comme nous l'avons déjà décrit dans l'Eq. (I.2.5.21), prend la forme

$$\left(\bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{00} + \bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{kk}\right)_{\text{BT}} = \left(\bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{00} + \bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{kk}\right) - \frac{4}{c} \partial_t \xi^0, \quad (\text{II.3.7.41})$$

$$\left(\bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{0i}\right)_{\text{BT}} = \bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{0i} + \partial_i \xi^0 - \frac{1}{c} \partial_t \xi^i, \quad (\text{II.3.7.42})$$

$$\left(\bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{ij}\right)_{\text{BT}} = \bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{ij} + \partial_i \xi^j + \partial_j \xi^i - \delta_{ij} \left(\frac{1}{c} \partial_t \xi^0 + \partial_k \xi^k\right). \quad (\text{II.3.7.43})$$

Partant de la déviation initiale que l'on veut transformer dans la jauge de Burke-Thorne

$$\begin{aligned} \left(\bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{00} + \bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{kk}\right) &= \frac{8\text{G}^{(3)}}{3c^5} Q_{kk} + \frac{2\text{G}^{(5)}}{15c^7} M_{ab} x_{ab} + \frac{4\text{G}^{(5)}}{9c^7} Q_{kk} r^2 \\ &+ \frac{1}{c^7} h_k(t) x_k + \frac{1}{c^7} h(t) + \mathcal{O}(1/c^7), \end{aligned} \quad (\text{II.3.7.44})$$

$$\bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{0i} = -\frac{2\text{G}^{(4)}}{3c^6} Q_{ki} x_k + \frac{1}{c^6} h^{0i}(t) + \mathcal{O}(1/c^7), \quad (\text{II.3.7.45})$$

$$\bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{ij} = \frac{2\text{G}^{(3)}}{c^5} Q_{ij} + \mathcal{O}(1/c^6), \quad (\text{II.3.7.46})$$

et en utilisant le quadri-vecteur  $\xi^\mu$  dont les composantes sont données, au moyen de coefficients  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta\}$  et de fonctions  $\{\xi_k^0(t), \xi^0(t), \xi^i(t)\}$  indéterminés, par

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \frac{\alpha\text{G}^{(4)}}{c^6} Q_{ij} x_{ij} + \frac{\beta\text{G}^{(4)}}{c^6} Q_{kk} r^2 + \frac{\gamma\text{G}^{(2)}}{c^4} Q_{kk} \\ &+ \frac{1}{c^6} \xi_k^0(t) x_k + \frac{1}{c^6} \xi^0(t), \end{aligned} \quad (\text{II.3.7.47})$$

$$\xi^i = \frac{\delta\text{G}^{(3)}}{c^5} Q_{ik} x_k + \frac{\eta\text{G}^{(3)}}{c^5} Q_{kk} x_i + \frac{1}{c^5} \xi^i(t), \quad (\text{II.3.7.48})$$

on arrive, en utilisant la relation de transformation de jauge Eq. (II.3.7.41,II.3.7.42,II.3.7.43), à annuler les composantes  $0i$  et  $ij$  en imposant les valeurs  $\alpha = -1/6$ ,  $\beta = 1/6$ ,  $\gamma = 2/3$ ,  $\delta = -1$  et  $\eta = 1/3$  aux différents coefficients et en imposant

$$\dot{\xi}_k^0(t) = \frac{h_k(t)}{4}, \quad (\text{II.3.7.49})$$

$$\dot{\xi}^0(t) = \frac{h(t)}{4}, \quad (\text{II.3.7.50})$$

$$\dot{\xi}_i(t) = h^{0i}(t) + \frac{1}{4} \int dt h_i(t), \quad (\text{II.3.7.51})$$

aux différentes fonctions indéterminées. Dans la jauge ainsi fixée, que l'on appelle jauge de Burke-Thorne, il ne reste que la composante 00 qui est non nulle et qui fait intervenir la dérivée temporelle cinquième du moment quadrupolaire sans trace de la source de matière

$$\left( \bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{-00} + \bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{-kk} \right)_{\text{BT}} = \frac{4G}{5c^7} M_{ab}^{(5)} x_{ab} , \quad (\text{II.3.7.52})$$

$$\left( \bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{-0i} \right)_{\text{BT}} = 0 , \quad (\text{II.3.7.53})$$

$$\left( \bar{h}_{\text{Reac}\mathcal{F}}^{-ij} \right)_{\text{BT}} = 0 . \quad (\text{II.3.7.54})$$

On peut effectuer le même calcul avec les termes venant de  $\mathcal{R}^{\mu\nu}$  pour trouver au final le potentiel dont nous venons de faire le calcul, qui correspond à la force de réaction du rayonnement, auquel se rajoute la force de réaction qui est la contribution des queues d'ondes (*tails* en anglais)

$$\left\{ \begin{array}{l} (h_R^{00} + h_R^{kk}) = \frac{4G}{5c^7} x^i x^j \left[ M_{ij}^{(5)}(t) + \frac{4GM}{c^3} \int_0^{+\infty} du M_{ij}^{(7)}(t-u) \left[ \ln\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{11}{12} \right] \right] \\ h_R^{0i} = o(c^{-6}) + o(c^{-9}) \\ h_R^{ij} = o(c^{-5}) + o(c^{-8}) \end{array} \right. . \quad (\text{II.3.7.55})$$

# Chapitre 4

## Post-Newtonian approximation (article)

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>36</b>
4.1.1	Problems with the post-Newtonian expansion	36
4.1.2	Notation for the Einstein field equations	40
<b>4.2</b>	<b>Exterior field</b>	<b>41</b>
4.2.1	Multipolar expansion of the non-linear vacuum field	41
4.2.2	Near-zone expansion of the multipole decomposition	44
<b>4.3</b>	<b>Interior field</b>	<b>47</b>
4.3.1	Post-Newtonian expansion of the near-zone field	47
4.3.2	Multipole expansion of the post-Newtonian solution	52
<b>4.4</b>	<b>Matching</b>	<b>54</b>
<b>4.5</b>	<b>Harmonic-coordinate condition</b>	<b>57</b>
<b>4.6</b>	<b>Near-zone expansion of the retarded integral</b>	<b>64</b>
<b>4.7</b>	<b>The generalized Poisson operator</b>	<b>67</b>
<b>4.8</b>	<b>Far zone expansion of the Poisson integral</b>	<b>71</b>

---



## Post-Newtonian approximation for isolated systems calculated by matched asymptotic expansions

Olivier Poujade and Luc Blanchet

Institut d'Astrophysique de Paris  
98 bis, boulevard Arago, 75014 Paris, France

publié dans Phys. Rev. D**65**, 124020 (2002)

Two long-standing problems with the post-Newtonian approximation for isolated slowly-moving systems in general relativity are : (i) the appearance at high post-Newtonian orders of divergent Poisson integrals, casting a doubt on the soundness of the post-Newtonian series ; (ii) the domain of validity of the approximation which is limited to the near-zone of the source, and prevents one, *a priori*, from incorporating the condition of no-incoming radiation, to be imposed at past null infinity. In this article, we resolve the problem (i) by iterating the post-Newtonian hierarchy of equations by means of a new (Poisson-type) integral operator that is free of divergencies, and the problem (ii) by matching the post-Newtonian near-zone field to the exterior field of the source, known from previous work as a multipolar-post-Minkowskian expansion satisfying the relevant boundary conditions at infinity. As a result, we obtain an algorithm for iterating the post-Newtonian series up to any order, and we determine the terms, present in the post-Newtonian field, that are associated with the gravitational-radiation reaction onto an isolated slowly-moving matter system.

### 4.1 Introduction

#### 4.1.1 Problems with the post-Newtonian expansion

The post-Newtonian approximation, or expansion when the speed of light  $c \rightarrow +\infty$ , has been formalized in the early days of general relativity by Einstein [61], Droste [57], and DeSitter [56]. Since then, it has provided us with our best insights about the problems of motion and gravitational radiation, two of general relativity's most important issues. Concerning the problem of motion, we quote the dynamics of  $N$  separated bodies at the first post-Newtonian (1PN, or  $1/c^2$ ) order : works of Einstein, Infeld and Hoffmann [63] and other authors [87, 67, 68], and the dynamics of extended fluid systems up to the 2.5PN level of gravitational radiation reaction : works of Chandrasekhar and collaborators [35, 37, 36] and followers [2, 58, 59, 80, 81, 32, 90, 27, 28]. In the case of two compact objects, we know the 2.5PN equations of motion of the binary pulsar [44, 42, 43, 25], and the 3PN equations of motion of inspiralling compact binaries [77, 48, 21, 22, 4]. The specific contribution of the gravitational-radiation reaction has been obtained up to the 1.5PN relative order by the method of matched asymptotic expansions for extended fluids [31, 30, 19, 7, 14], and by means of balance equations for compact binary systems [75, 76]. Concerning the problem of gravitational radiation, the work has focused on the expressions of the multipole moments of general fluid systems [17, 15, 47, 13, 11], and on the

gravitational-wave flux emitted by inspiralling compact binaries, including the specific effects of wave tails, up to the 3.5PN order [20, 109, 8, 10, 26].

The “standard” post-Newtonian approximation, at the basis of most of the body of work quoted previously, is known to be plagued with some apparently inherent difficulties, which crop up at some high post-Newtonian order like 3PN. Up to the 2.5PN order the approximation can be worked out without problems, and at the 3PN order the problems can be solved specifically for each case at hands (see for instance Ref. [22]). However, it must be admitted that these difficulties, even appearing at higher approximations, cast doubt on the actual soundness, on the theoretical point of view, of the post-Newtonian expansion. What is maybe worse, they pose the practical question of the reliability of this approximation when comparing the theory’s predictions with very precise experimental results. It is therefore highly desirable to assess the nature of these difficulties – are they purely technical or linked with some fundamental drawback of the approximation scheme? – and eventually to resolve them. This is especially important in view of the fact that inspiralling compact binaries, when they are detected and analyzed by gravitational-wave experiments, will necessitate a prior theoretical knowledge of the gravitational-wave signal at some very high post-Newtonian order [20, 109, 8, 10, 26]. In this article let us distinguish (and resolve) the two basic problems faced by the post-Newtonian expansion.

The first problem is that in higher approximations some *divergent* Poisson-type integrals appear. Recall that the post-Newtonian expansion replaces the resolution of an hyperbolic-like d’Alembertian equation by a perturbatively equivalent hierarchy of elliptic-like Poisson equations. Rapidly it is found during the post-Newtonian iteration that the right-hand-side of the Poisson equations acquires a non-compact support (it is distributed over all space), and that the standard Poisson integral diverges because of the bound of the integral at spatial infinity, i.e.  $r \equiv |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$ , with  $t = \text{const}$ . For instance some of the potentials occurring at the 2PN order in Chandrasekhar’s work [37] are divergent, so the corresponding metric is formally infinite<sup>1</sup>. In fact, Kerlick [80, 81] showed that the post-Newtonian computation *à la* Chandrasekhar [35, 37, 36], following the iteration scheme of Anderson and DeCanio [2], can be made well-defined up to the 2.5PN order, by keeping some derivatives inside some crucial integrals to make them finite [58, 59]. However, the latter remedy does not solve the problem at the next 3PN order, which has been found to involve some inexorably divergent Poisson integrals [80, 81].

These divergencies come from the fact that the post-Newtonian expansion is actually a singular perturbation, in the sense that the coefficients of the successive powers of  $1/c$  are not uniformly valid in space, since they typically blow up at spatial infinity like some positive powers of  $r$ . For instance, Rendall [93] has shown that the post-Newtonian expansion cannot be “asymptotically flat” starting at the 2PN or 3PN level, depending on the adopted coordinate system. The result is that the Poisson integrals are in general badly-behaving at infinity. Physically this can be understood by the fact that the post-Newtonian approximation is valid only in the near zone of the source (see below) while the Poisson integral extends over the whole three-dimensional space, including the regions far from the source where the approximation breaks down. Therefore, trying to solve the post-Newtonian equations by means of the standard Poisson integral does not *a priori* make sense. This does not mean that there are no solution to the problem, but simply that the Poisson integral does not constitute the correct solution of the Poisson equation in the context of post-Newtonian expansions. So the difficulty

<sup>1</sup>Nevertheless, these divergencies were not a problem when considering the equations of motion because the gradients of these potentials, which parametrize the equations, were finite.

is purely of a technical nature, and will be solved once we succeed in finding the appropriate solution to the Poisson equation <sup>2</sup>. A solution to the problem of divergencies has been proposed by Futamase and Schutz [70] and Futamase [69]. Their approach is alternative to the one we shall follow below. It is based on an initial-value formalism, which avoids the appearance of divergencies because of the finiteness of the integration region.

The second problem has to do with the near-zone limitation of the approximation. Indeed the post-Newtonian expansion assumes that all retardations  $r/c$  are small, so it can be viewed as a formal *near-zone* expansion when  $r \rightarrow 0$ , which is valid only in the region surrounding the source that is of small extent with respect to the typical wavelength of the emitted radiation :  $r \ll \lambda$  (if we locate the origin of the coordinates  $r = 0$  inside the source). Therefore, the fact that the coefficients of the post-Newtonian expansion blow up at spatial infinity, when  $r \rightarrow +\infty$ , has nothing to do with the actual behaviour of the field at infinity. The serious consequence is that it is not possible, *a priori*, to implement within the post-Newtonian iteration the physical information that the matter system is isolated from the rest of the universe. Most importantly, the no-incoming radiation condition, imposed at past null infinity, cannot be taken into account, *a priori*, into the scheme. In a sense the post-Newtonian approximation is not “self-supporting”, because it necessitates some information taken from outside its own domain of validity.

To the lowest post-Newtonian orders one can circumvent this difficulty by considering *retarded* integrals that are formally expanded when  $c \rightarrow +\infty$  as series of “instantaneous” Poisson-like integrals [2]. This procedure works well up to the 2.5PN level and has been shown to correctly fix the dominant radiation reaction term at the 2.5PN order [80, 81]. Unfortunately such a procedure assumes fundamentally that the gravitational field, after expansion of all retardations  $r/c \rightarrow 0$ , depends on the state of the source at a single time, in keeping with the instantaneous character of the Newtonian interaction. However, we know that from the 4PN order the post-Newtonian field (as well as the source’s dynamics) ceases to be given by a functional of the source parameters at a single time, because of the imprint of gravitational-wave tails in the near zone field, in the form of some modification, at the 1.5PN relative order, of the radiation reaction force [19, 7, 14]. Therefore, the formal post-Newtonian expansion of retarded Green functions is no longer valid starting at the 4PN order. We face here a true difficulty, which is fundamentally linked to the nature of the post-Newtonian approximation.

The aim of the present article is to resolve the two latter problems. We shall prove that the post-Newtonian expansion can be *indefinitely* reiterated, while incorporating the correct boundary conditions satisfied by the wave field at infinity. In particular, we shall get new insights about the problem of gravitational-radiation reaction inside an isolated (post-Newtonian) system. To cure the problem of divergencies we introduce, at any post-Newtonian order, a generalized solution of the Poisson equation with non-compact support source, in the form of an appropriate *finite part* of the usual Poisson integral : namely we regularize the bound at infinity of the Poisson integral by means of a process of analytic continuation, analogous to the one already used to regularize the retarded integrals in Refs. [17, 13, 11]. Our generalized solution constitutes a particular (well-defined) solution of the problem ; the most general solu-

---

<sup>2</sup>The problem is somewhat similar to what happens in Newtonian cosmology. Here we have to solve the Poisson equation  $\Delta U = -4\pi G\rho$ , where the density  $\rho$  of the cosmological fluid is constant all over space :  $\rho = \rho(t)$ . Clearly the Poisson integral of a constant density does not make sense, as it diverges at the bound at infinity like the integral  $\int r dr$ . This nonsensical result has occasionally been referred to as the “paradox of Seeliger”. However the problem is solved once we realize that the Poisson integral does not constitute the appropriate solution of the Poisson equation in the context of Newtonian cosmology. A well-defined solution is simply given by  $U = -\frac{2}{3}\pi G\rho r^2$ .

tion is the sum of that particular solution and the most general solution of the corresponding homogeneous equation, i.e. the source-free Laplace equation. The homogeneous solution should be regular all over the matter system (we are considering smooth matter distributions), and we find, after summing up the post-Newtonian series, that it can be thoroughly written with the help of some tensorial functions of time  $A_L^{\mu\nu}(t)$ , where  $L = i_1 \cdots i_l$  denotes a multi-index with  $l$  indices<sup>3</sup>. At this stage, considering the post-Newtonian iteration scheme alone, we cannot do more and therefore we leave the functions  $A_L^{\mu\nu}(t)$  unspecified. We refer to them as some “radiation-reaction” functions.

The solution of the problem of the near-zone limitation of the post-Newtonian expansion resides in the matching of the near-zone field to the exterior field, a solution of the vacuum equations outside the source which has been developed in previous works [17, 7] using some post-*Minkowskian* and multipolar expansions. In the case of post-Newtonian sources, the near zone, i.e.  $r \ll \lambda$ , covers entirely the source, because the source’s radius itself is such that  $a \ll \lambda$ . Thus the near zone overlaps with the exterior zone where the multipole expansion is valid. Matching together the post-Newtonian and multipolar-post-Minkowskian solutions in this overlapping region is an application of the method of matched asymptotic expansions, and has frequently been applied in the present context, both for radiation-reaction [31, 30, 19, 7, 14] and wave-generation [15, 47, 13, 11] problems.

The exterior multipolar-post-Minkowskian field originally obtained in Ref. [17] depends on some “multipole-moment” functions, say  $X_L^{\mu\nu}(t)$  [whose components are associated with some source multipole moments e.g.  $I_L(t)$ ,  $J_L(t)$ ,  $\cdots$ ], which must be left unspecified as long as we consider only the external vacuum solution. In the work [11], we have shown that the multipole moments  $X_L^{\mu\nu}(t)$  are entirely determined, up to any post-Newtonian order, from the requirement of matching to a post-Newtonian solution. In the present paper, we shall further show that the radiation-reaction functions  $A_L^{\mu\nu}(t)$ , parametrizing the post-Newtonian solution, are also uniquely fixed, up to any post-Newtonian order, by the matching. In particular, we shall find that the latter functions include correctly the contribution of wave tails, arising at the 4PN order, as determined in Refs. [19, 7, 14]. We shall also recover by a different method the result of Ref. [11] concerning the multipole moments  $X_L^{\mu\nu}(t)$ .

A comment is in order regarding the possibility of determining the near-zone field by matched asymptotic expansions up to *any* post-Newtonian order. Indeed the method pre-supposes the existence of the exterior near-zone for which  $a < r \ll \lambda$ . Now if a given physical system, whose dynamics is described by Newton’s theory, emits gravitational radiation at some Newtonian fundamental wave length  $\lambda_N$ , we expect that when taking into account the post-Newtonian corrections up to the post-Newtonian order  $n$ , it will have a radiation spectrum composed of harmonics between  $\sim 2\lambda_N/n$  and  $\sim 2\lambda_N$ . Indeed this is the case of the radiation from a binary system moving on a circular orbit, for which we have  $\frac{2}{n+2}\lambda_N \leq \lambda_{n\text{PN}} \leq 2\lambda_N$ . Therefore, if  $n$  is large enough, say  $n \gtrsim 2\lambda_N/a$ , we expect that there will be some part of the radiation whose frequency is too high for the exterior near zone to exist. What we want to say is that the

---

<sup>3</sup>Our notation for STF tensors is the following.  $L = i_1 i_2 \cdots i_l$  denotes a multi-index, made of  $l$  (spatial) indices. When summing over multi-indices we never write the  $l$  summations over the  $l$  indices  $i_1, \cdots, i_l$  ranging from 1 to 3. The STF product of unit vectors  $n_i = n^i \equiv x^i/r$  is denoted  $\hat{n}_L = \text{STF}(n_L)$ , where  $n_L$  is a short-hand for  $n_{i_1} \cdots n_{i_l}$ . For instance  $\hat{n}_{ij} = n_i n_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}$ . Similarly we denote  $x_L = x_{i_1} \cdots x_{i_l} = r^l n_L$  and  $\hat{x}_L = \text{STF}(x_L)$ . The derivative operator  $\partial_L$  is a short-hand for  $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_l}$ , and we have  $\hat{\partial}_L = \text{STF}(\partial_L)$ . For instance  $\hat{\partial}_{ij} = \partial_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Delta$ . More generally, a function  $F_L$  is said to be STF with respect to the  $l$  indices composing  $L$  if and only if, for any pair of indices  $i_p, i_q \in L$ , we have  $F_{\dots i_p \dots i_q \dots} = F_{\dots i_q \dots i_p \dots}$  and  $\delta_{i_p i_q} F_{\dots i_p \dots i_q \dots} = 0$  (see the Appendices A and B in Ref. [17] for reviews about the STF formalism).

formulas we shall obtain for the post-Newtonian field of a source “up to any order” are indeed physically valid, strictly speaking, only up to some finite post-Newtonian order  $\sim 2\lambda_N/a$ , where  $a$  is the size of the source; but that, if we consider a source which is less relativistic, for instance which is obtained by “slowing down” our source so that its Newtonian wave length gets twice its original value (say), the *same* post-Newtonian formulas can then be used for the new source up to approximately twice the previous post-Newtonian order.

The plan of this paper is as follows. In Section 4.2 we recall the construction in Ref. [17] of the multipole expansion of the external field, and we obtain thanks to a result of Ref. [7] the near-zone expansion of that external field ready for subsequent matching. In Section 4.3 we implement the post-Newtonian iteration of the inner field inside the matter source, and we find the far-zone (multipolar) expansion of that post-Newtonian solution, also ready for matching. In Section 4.4 we show that the matching works up to any post-Newtonian order, and permits the determination of all the unknowns, in both the external and inner fields. Finally in Section 4.5 we check that our post-Newtonian solution satisfies the harmonic-coordinate condition as a consequence of the equations of motion of the source. The technical proofs are relegated to Appendices 4.6, 4.7 and 4.8.

### 4.1.2 Notation for the Einstein field equations

For the problem at hands let us introduce an asymptotically Minkowskian coordinate system for which the basic gravitational-wave amplitude,  $h^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}$ , is divergenceless, i.e. satisfies the de Donder or harmonic gauge condition  $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$ . Here,  $g^{\mu\nu}$  denotes the contravariant metric (satisfying  $g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu$ ),  $g$  is the determinant of the covariant metric,  $g = \det(g_{\mu\nu})$ , and  $\eta^{\mu\nu}$  represents an auxiliary Minkowskian metric with signature +2. With these definitions the Einstein field equations can be recast into the d’Alembertian equation

$$\square h^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} \tau^{\mu\nu}, \quad (\text{II.4.1.1})$$

where  $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = -\frac{1}{c^2} \partial^2 / \partial t^2 + \Delta$  is the (flat-spacetime) d’Alembertian operator. The source term,  $\tau^{\mu\nu}$ , can rightly be interpreted as the “effective” stress-energy pseudo-tensor of the matter and gravitational fields in harmonic coordinates. It is conserved in the usual sense, and that is equivalent to the condition of harmonic coordinates :

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0 \iff \partial_\mu \tau^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{II.4.1.2})$$

The pseudo-tensor  $\tau^{\mu\nu}$  is made of the contribution of the matter fields, described by a stress-energy tensor  $T^{\mu\nu}$ , and the one due to the gravitational field, given by the gravitational source term  $\Lambda^{\mu\nu}$ ; thus,

$$\tau^{\mu\nu} = |g| T^{\mu\nu} + \frac{c^4}{16\pi G} \Lambda^{\mu\nu}. \quad (\text{II.4.1.3})$$

The conservation property (II.4.1.2) is equivalent to the conservation, in the covariant sense, of the matter tensor :  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . The exact expression of  $\Lambda^{\mu\nu}$ , taking into account all the non-linearities of the Einstein field equations, reads

$$\Lambda^{\mu\nu} = - h^{\rho\sigma} \partial_{\rho\sigma}^2 h^{\mu\nu} + \partial_\rho h^{\mu\sigma} \partial_\sigma h^{\nu\rho} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\rho\sigma} \partial_\lambda h^{\rho\tau} \partial_\tau h^{\sigma\lambda}$$

$$\begin{aligned}
& - g^{\mu\rho} g_{\sigma\tau} \partial_\lambda h^{\nu\tau} \partial_\rho h^{\sigma\lambda} - g^{\nu\rho} g_{\sigma\tau} \partial_\lambda h^{\mu\tau} \partial_\rho h^{\sigma\lambda} + g_{\rho\sigma} g^{\lambda\tau} \partial_\lambda h^{\mu\rho} \partial_\tau h^{\nu\sigma} \\
& + \frac{1}{8} (2g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}) (2g_{\lambda\tau} g_{\epsilon\pi} - g_{\tau\epsilon} g_{\lambda\pi}) \partial_\rho h^{\lambda\pi} \partial_\sigma h^{\tau\epsilon} .
\end{aligned} \tag{II.4.1.4}$$

It is clear from this expression that  $\Lambda^{\mu\nu}$  is made of terms which are at least quadratic in the gravitational-field strength  $h^{\mu\nu}$  and its first and second space-time derivatives.

In this article, we look for the solutions of the field equations (II.4.1.1)-(II.4.1.4) under the following hypotheses. First, we assume that the matter tensor  $T^{\mu\nu}$  has a spatially compact support, i.e. can be enclosed into some time-like world tube, say  $r \leq a$ , where  $r = |\mathbf{x}|$  is the harmonic-coordinate radial distance. Second, we assume that the matter distribution inside the source is smooth : i.e.  $T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ . We have in mind a smooth hydrodynamical “fluid” system, without any singularities nor shocks (*a priori*), that is described by some Eulerian-type equations including high relativistic (post-Newtonian) corrections. In particular, we exclude from the start any sources containing black holes. Notice, however, that it makes sense to apply the formulas derived *a priori* only for smooth matter distributions to systems containing compact objects (including black holes), described by some sort of point-particle singularities ; see e.g. Refs. [20, 109, 8, 10, 26]. Finally, in order to select the physically sensible solution of the field equations, we choose some boundary conditions at infinity corresponding to the famous no-incoming radiation condition. In this paper, we shall rely on a specific construction of the metric outside the domain of the source ( $r > a$ ), that was achieved in Ref. [17] under the assumption that the gravitational field has been independent of time (stationary) in some remote past, in the sense that  $t \leq -\mathcal{T} \implies \frac{\partial}{\partial t} [h^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)] = 0$ . This condition is a mean to impose, by brute force, the no-incoming radiation condition <sup>4</sup>.

## 4.2 Exterior field

### 4.2.1 Multipolar expansion of the non-linear vacuum field

In this section we review some material from Ref. [17] concerning the construction of *vacuum* metrics by means of mixed multipolar and post-Minkowskian (MPM) expansions. The so-called MPM metrics aim at describing the gravitational field in the region exterior to a general isolated system. In fact they are mathematically defined in the open domain  $\mathbb{R}_*^3 \times \mathbb{R}$ , i.e.  $\mathbb{R}^4$  deprived from the spatial origin  $r \equiv |\mathbf{x}| = 0$ , but of course do not agree physically with the real solution when  $0 < r < a$ , since they are vacuum solutions. For our present purpose the point is that the most general physically admissible solution of the vacuum field equations has been obtained in Ref. [17] by a specific construction of the post-Minkowskian solution, say

$$h_{\text{ext}}^{\mu\nu} = \sum_{m=1}^{+\infty} G^m h_{(m)}^{\mu\nu} , \tag{II.4.2.5}$$

whose coefficients are in the form of multipolar series, or equivalently decompositions in symmetric-trace-free (STF) products of unit vectors  $\hat{n}_L$ , that are equivalent to the usual decomposition in spherical harmonics footnote on page 39 :

<sup>4</sup>However the condition of stationarity in the past, though much weaker than the actual no-incoming radiation condition, does not seem to entail any physical restriction on the applicability of the formalism, even in the case of sources which have always been radiating.

$$\forall m \geq 1, \quad h_{(m)}^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=0}^{+\infty} \hat{n}_L(\theta, \phi) h_{(m)l}^{\mu\nu}(r, t). \quad (\text{II.4.2.6})$$

The  $h_{(m)l}^{\mu\nu}$ 's are certain functions of the radial coordinate  $r$  and of time  $t$ . Inserting the MPM expansion (II.4.2.5)-(II.4.2.6) into the vacuum field equations (II.4.1.1)-(II.4.1.2) we obtain, at any post-Minkowskian order  $m$ ,

$$\square h_{(m)}^{\mu\nu} = \Lambda_{(m)}^{\mu\nu} [h_{(1)}, \dots, h_{(m-1)}], \quad (\text{II.4.2.7})$$

$$\partial_\mu h_{(m)}^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{II.4.2.8})$$

where  $\Lambda_{(m)}^{\mu\nu}$  denotes the  $m$ -th post-Minkowskian piece of the gravitational source term defined by Eq. (II.4.1.4), i.e. in which we have inserted the previous post-Minkowskian iterations up to the previous order  $m - 1$  [with the convention that  $\Lambda_{(1)}^{\mu\nu} = 0$ ]. Because Eq. (II.4.1.4) is at least quadratic in non-linearities, it is clear that only the preceding iterations,  $\leq m - 1$ , are necessary at any post-Minkowskian order  $m$ .

Now the solution that was obtained in Ref. [17] has two main characteristics. The first one is related to its particular near-zone structure, which will play a fundamental role in the present article. Namely, it was proved that each one of the multipolar-post-Minkowskian coefficients  $h_{(m)}^{\mu\nu}$  in Eq. (II.4.2.5) – that we recall are only defined when  $r > 0$  –, admits a singular near-zone expansion, i.e. when  $r \rightarrow 0$ , owning the following structure :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad h_{(m)}^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l,a,p} \hat{n}_L r^a (\ln r)^p F_{(m)l,a,p}^{\mu\nu}(t) + R_{(m)N}^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t), \quad (\text{II.4.2.9})$$

where the multipolar order  $l \in \mathbb{N}$ , where the powers of  $r$  are such that  $a \in \mathbb{Z}$  with  $a_{\min} \leq a \leq N$  (with  $a_{\min}$  a negative integer), and where the powers of  $\ln r$  are  $p \in \mathbb{N}$  with  $p \leq m - 1$ . The maximal divergence when  $r \rightarrow 0$  occurs for  $a_{\min}$ , which depends on the post-Minkowskian order  $m$ , and satisfies  $a_{\min}(m) \rightarrow -\infty$  when  $m \rightarrow +\infty$ . Similarly the maximal power of the logarithms,  $p_{\max}(m) = m - 1$ , tends to infinity with  $m$ . The functions  $F_{(m)l,a,p}^{\mu\nu}(t)$  are smooth functions of time,  $F_{(m)l,a,p}^{\mu\nu} \in C^\infty(\mathbb{R})$ , which are to be computed by means of the algorithm proposed in Ref. [17], and appear as complicated non-linear functionals of some more elementary functions parametrizing the linearized ( $m = 1$ ) approximation. The remainder term in Eq. (II.4.2.9) is such that

$$R_{(m)N}^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{O}(r^N) \quad \text{when } r \rightarrow 0 \text{ and } t = \text{const}. \quad (\text{II.4.2.10})$$

The Landau  $\mathcal{O}$ -symbol takes its usual meaning. This remainder admits also some specific differentiability properties (refer to [17] for the details). The gravitational source term  $\Lambda_{(m)}^{\mu\nu}$  admits exactly the same near-zone structure as in Eq. (II.4.2.9) with the exception that  $p_{\max} = m - 2$  in this case (that is, the maximal power of the logarithms increases by one unit when going from the source to the solution).

The second important characteristic of the MPM solution concerns the constructive formula which defines it. We find that each one of the post-Minkowskian coefficients  $h_{(m)}^{\mu\nu}$  is explicitly constructed by means of the following [17] :

$$h_{(m)}^{\mu\nu} = \text{FP}_{\text{B}=0} \square_{\text{Ret}}^{-1} [\tilde{r}^{\text{B}} \Lambda_{(m)}^{\mu\nu}] + \sum_{l=0}^{+\infty} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{1}{r} X_{(m)l}^{\mu\nu} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\}. \quad (\text{II.4.2.11})$$

The first term involves a special type of generalized inverse d'Alembertian operator, built on the standard retarded integral ,

$$\square_{\text{Ret}}^{-1} [\tilde{r}^B \Lambda_{(m)}^{\mu\nu}] (\mathbf{x}, t) \equiv -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \Lambda_{(m)}^{\mu\nu} (\mathbf{y}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c) , \quad (\text{II.4.2.12})$$

which extends over the whole three-dimensional space, but inside which a regularization factor has been “artificially” introduced, namely

$$\tilde{r}^B \equiv \left( \frac{r}{r_0} \right)^B , \quad (\text{II.4.2.13})$$

where  $B$  denotes a complex number,  $B \in \mathbb{C}$ , and  $r_0$  represents an arbitrary constant length scale. The indication  $\text{FP}_{B=0}$  stands for the *finite part* at  $B = 0$ , and means that one should first compute the Laurent expansion when  $B \rightarrow 0$  of (the analytic continuation of) the  $B$ -dependent integral (II.4.2.12), and, second, pick up the finite part at  $B = 0$  in that expansion, i.e. the coefficient of the zero-th power of  $B$ . The main property of this generalized retarded operator, that we shall from now on abbreviate as

$$\widetilde{\square}_{\text{Ret}}^{-1} [\Lambda_{(m)}^{\mu\nu}] \equiv \text{FP}_{B=0} \square_{\text{Ret}}^{-1} [\tilde{r}^B \Lambda_{(m)}^{\mu\nu}] , \quad (\text{II.4.2.14})$$

is that, for source terms  $\Lambda_{(m)}^{\mu\nu}$  admitting a near-zone structure of the type (II.4.2.9),

$$\square \left[ \widetilde{\square}_{\text{Ret}}^{-1} \Lambda_{(m)}^{\mu\nu} \right] = \Lambda_{(m)}^{\mu\nu} . \quad (\text{II.4.2.15})$$

Because the second term in Eq. (II.4.2.11) is a retarded solution of the *source-free* wave equation, we see therefore that  $h_{(m)}^{\mu\nu}$  represents indeed a solution of the wave equation we had to solve :  $\square h_{(m)}^{\mu\nu} = \Lambda_{(m)}^{\mu\nu}$ . However this is not sufficient because we have also to solve the harmonic-coordinate condition (II.4.1.2). We shall refer to [17] for the definition of an algorithm which permits to compute, simply from the algebraic and differential structure of the vacuum field equations, the necessary form of the second term in Eq. (II.4.2.11), in such a way that the harmonic-coordinate condition be satisfied :  $\partial_\mu h_{(m)}^{\mu\nu} = 0$ . In fact we shall not need, in the following, to be more precise about the latter term ; simply we keep it into the form of a general retarded solution of the source-free wave equation, parametrized by some tensorial functions  $X_{(m)L}^{\mu\nu}(t)$ . We assume that these functions are STF with respect to the multi-index  $L$  : i.e.  $X_{(m)L}^{\mu\nu} \equiv \hat{X}_{(m)L}^{\mu\nu}$ , so the multi-derivative  $\hat{\partial}_L$  in Eq. (II.4.2.11) is a STF one (see Ref. footnote on page 39 for the notation). The latter construction represents the most general physical solution of the field equations outside the source [17].

Let us now proceed with the formal re-summation of the post-Minkowskian series. That is, once the results (II.4.2.9)-(II.4.2.11) have been established for any order  $m$ , we sum them from  $m = 1$  up to infinity. In this way we obtain some formulas which are valid formally for the complete post-Minkowskian series, and, presumably, could hold true in a more rigorous context of exact solutions. After summation we shall “forget” about the post-Minkowskian expansion, and consider that the exterior field  $h_{\text{ext}}^{\mu\nu}$  represents merely the *multipole* decomposition of the actual field  $h^{\mu\nu}$  outside the compact support of the source (nevertheless, it is wise to keep in mind that the solution came from a formal post-Minkowskian summation). We denote the multipole decomposition by means of the calligraphic letter  $\mathcal{M}$ . Therefore, our *definition* is that the multipole expansion  $\mathcal{M}(h^{\mu\nu})$  of the field outside the isolated source is nothing but the



external solution constructed previously by means of the MPM method, and re-summed over the post-Minkowskian index  $m$  :

$$\mathcal{M}(h^{\mu\nu}) \equiv h_{\text{ext}}^{\mu\nu} . \quad (\text{II.4.2.16})$$

This definition is quite legitimate (and rather obvious) because we know that the MPM metric constitutes the most general solution for the exterior field. Thus,  $\mathcal{M}(h^{\mu\nu})$  is a solution of the vacuum field equations, now considered outside the physical domain of the source,  $r > a$  (while  $h_{\text{ext}}^{\mu\nu}$  had been constructed for any  $r > 0$ ). In that domain we have evidently the numerical equality

$$\mathcal{M}(h^{\mu\nu}) = h^{\mu\nu} \quad (\text{when } r > a) . \quad (\text{II.4.2.17})$$

After summation of Eqs. (II.4.2.9)-(II.4.2.10) over  $m$ , we get the near-zone structure

$$\forall N \in \mathbb{N} , \quad \mathcal{M}(h^{\mu\nu}) = \sum \hat{n}_L r^a (\ln r)^p F_{L,a,p}^{\mu\nu}(t) + \mathcal{O}(r^N) , \quad (\text{II.4.2.18})$$

in which the functions  $F_{L,a,p}^{\mu\nu}(t) = \sum_{m=1}^{+\infty} G^m F_{(m)L,a,p}^{\mu\nu}(t)$ , and where  $a \leq N$  and  $p \geq 0$ . Notice that there is no lower bound for  $a$  because  $a_{\min}(m) \rightarrow -\infty$  when  $m \rightarrow +\infty$ ; similarly there is no upper bound for  $p$ . Secondly, coming to the constructive formula (II.4.2.11) we obtain

$$\mathcal{M}(h^{\mu\nu}) = \widetilde{\square}_{\text{Ret}}^{-1} [\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})] + \sum_{l=0}^{+\infty} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{1}{r} X_L^{\mu\nu} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} , \quad (\text{II.4.2.19})$$

where  $X_L^{\mu\nu}(t) = \sum_{m=1}^{+\infty} G^m X_{(m)L}^{\mu\nu}(t)$ . In the following we shall regard the STF functions  $X_L^{\mu\nu}(t)$  as the ‘‘multipole moments’’ of the source, because they describe the physics of the source as seen from the exterior. We do not need to be more precise at this point. Let us simply comment that by imposing the harmonic-gauge condition (II.4.1.2) we find that there are only six components of these functions which are independent, and this yields the definition of six independent STF source multipole moments  $I_L(t), J_L(t), \dots$  (see Ref. [11] for the precise definition). Furthermore, the multipole-moment functions  $X_L^{\mu\nu}(t)$  have already been calculated in terms of the stress-energy tensor of a post-Newtonian source in Ref. [11]. However we prefer to leave these functions undetermined because we shall recover their expressions by means of a somewhat different method, and the agreement we shall find with the result of Ref. [11] will constitute a crucial check of our computation.

### 4.2.2 Near-zone expansion of the multipole decomposition

In anticipation of the matching we consider next the infinite near-zone re-expansion, when  $r \rightarrow 0$ , of the multipole expansion  $\mathcal{M}(h^{\mu\nu})$  determined in Eq. (II.4.2.19). We have already obtained the general structure of that expansion, given by Eq. (II.4.2.18). Let us denote with the help of some overline the *infinite* near-zone expansion (without remainder), whose structure is therefore given by

$$\overline{\mathcal{M}(h^{\mu\nu})} = \sum \hat{n}_L r^a (\ln r)^p F_{L,a,p}^{\mu\nu}(t) , \quad (\text{II.4.2.20})$$

where  $a \in \mathbb{Z}$  and  $p \in \mathbb{N}$  (and, of course, the multipolar index  $l \in \mathbb{N}$ ). We must be careful at distinguishing the fully-fledged multipole decomposition  $\mathcal{M}(h^{\mu\nu})$ , which is defined as soon as  $r > 0$  and numerically agrees with the exact solution wherever  $r > a$  (in particular when

$r \rightarrow +\infty$ ), from its formal near-zone re-expansion  $\overline{\mathcal{M}(h^{\mu\nu})}$ . Later we shall indicate the post-Newtonian expansion by means of the same overline notation. Indeed the near-zone expansion is really an expansion when  $r/\lambda \rightarrow 0$ , which is equivalent to an expansion when  $c \rightarrow +\infty$ , since the wavelength of waves is  $\lambda = cP$  (with  $P =$  typical period of the internal motion). From the result (II.4.2.19) we can write

$$\overline{\mathcal{M}(h^{\mu\nu})} = \overline{\square_{\text{Ret}}^{-1} [\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})]} + \sum_{l=0}^{+\infty} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{\overline{X_L^{\mu\nu}(t-r/c)}}{r} \right\}. \quad (\text{II.4.2.21})$$

The overline in the second term means that one should expand the retardations  $t - r/c$  when  $r/c \rightarrow 0$ . More explicitly we have

$$\hat{\partial}_L \left\{ \frac{\overline{X_L^{\mu\nu}(t-r/c)}}{r} \right\} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-)^j}{c^j j!} \hat{\partial}_L (r^{j-1}) X_L^{\mu\nu(j)}(t), \quad (\text{II.4.2.22})$$

where the superscript  $(j)$  indicates  $j$  successive time-derivations. The main problem is how to treat the first term in Eq. (II.4.2.21). What we essentially want is to know how one can “commute” the operations of taking the near-zone expansion and of applying the retarded integral. In fact, the problem has already been solved in Ref. [7], which succeeded in writing the first term in Eq. (II.4.2.21) as the sum of an “instantaneous” operator, acting on the near-zone expansion of the source, and of a particular “anti-symmetric” wave (i.e. retarded minus advanced), solution of the source-free d’Alembertian equation. The result of Ref. [7], Eq. (3.2), reads

$$\overline{\square_{\text{Ret}}^{-1} [\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})]} = \widetilde{\mathcal{I}}^{-1} \left[ \overline{\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})} \right] - \frac{4G}{c^4} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-)^l}{l!} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{\overline{\mathcal{R}_L^{\mu\nu}(t-r/c) - \mathcal{R}_L^{\mu\nu}(t+r/c)}}{2r} \right\}. \quad (\text{II.4.2.23})$$

For completeness we present in Appendix 4.6 the proof of this result – a version of it which is somewhat improved with respect to that given in Ref. [7]. The first term in Eq. (II.4.2.23) involves an operator  $\widetilde{\mathcal{I}}^{-1}$ , acting on each of the individual terms of the formal near-zone expansion whose structure is given by Eq. (II.4.2.20), and which is essentially defined by the solution of the wave equation that is obtained by iterated use of inverse Laplace operators, and regularized by means of our  $B$ -dependent finite part procedure. Thus,

$$\widetilde{\mathcal{I}}^{-1} \left[ \overline{\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})} \right] = \text{FP}_{B=0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{\partial}{c\partial t} \right)^{2k} \Delta^{-k-1} \left[ \widetilde{r}^B \overline{\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})} \right], \quad (\text{II.4.2.24})$$

where  $\Delta^{-k-1} = (\Delta^{-1})^{k+1}$ , and the action of the inverse Laplacian on the generic term of Eq. (II.4.2.20) follows from

$$\Delta^{-1} \left[ \hat{n}_L r^{B+a} (\ln r)^p \right] = \left( \frac{d}{dB} \right)^p \left[ \frac{\hat{n}_L r^{B+a+2}}{(B+a+2-l)(B+a+3+l)} \right] \quad (\text{II.4.2.25})$$

[see also Eq. (II.4.6.119) in Appendix 4.6]. The operator  $\widetilde{\mathcal{I}}^{-1}$  plays the central role in the present paper. It can be regarded as (the regularization of) the formal post-Newtonian expansion, when  $c \rightarrow +\infty$ , of the inverse d’Alembert operator, say  $\mathcal{I}^{-1} = \overline{1/\square} = \overline{1/(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2)}$ . We can refer to  $\mathcal{I}^{-1}$  as the operator of the instantaneous potentials, because it acts on the time

variable  $t$  only through time-derivations, instead of involving a full integration like for the operator of the retarded potentials  $\square_{\text{Ret}}^{-1}$ . Notice that  $\mathcal{I}^{-1}$  is closely related to the operator of the symmetric potentials,  $\frac{1}{2} [\square_{\text{Ret}}^{-1} + \square_{\text{Adv}}^{-1}]$ ; see Ref. [7] for discussion and the precise relation between these operators. As for the second term in Eq. (II.4.2.23), it is made of an ‘‘anti-symmetric’’ wave, which represents in fact a solution of the d’Alembertian equation that is regular in a neighbourhood of the origin  $r = 0$ . Its near-zone expansion  $r/c \rightarrow 0$  is composed only of terms containing some odd powers of  $1/c$  :

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{\mathcal{R}_L^{\mu\nu}(t-r/c) - \mathcal{R}_L^{\mu\nu}(t+r/c)}{2r} \right\} &= - \sum_{i=l}^{+\infty} \frac{\hat{\partial}_L(r^{2i})}{(2i+1)!} \frac{\mathcal{R}_L^{\mu\nu}(t)^{(2i+1)}}{c^{2i+1}} \\ &= - \frac{1}{(2l+1)!!} \sum_{k=0}^{+\infty} \widetilde{\Delta}^{-k}(\hat{x}_L) \frac{\mathcal{R}_L^{\mu\nu}(t)^{(2k+2l+1)}}{c^{2k+2l+1}}. \end{aligned} \quad (\text{II.4.2.26})$$

See also Eqs. (2.4)-(2.7) in Ref. [7] for alternative forms of the anti-symmetric wave. In the second of Eqs. (II.4.2.26) we have introduced the useful object

$$\widetilde{\Delta}^{-k}(\hat{x}_L) = \frac{(2l+1)!!}{(2k)!!(2l+2k+1)!!} r^{2k} \hat{x}_L, \quad (\text{II.4.2.27})$$

which represents the iterated Laplacian operator  $\widetilde{\Delta}^{-k}$ , regularized by means of the FP<sub>B=0</sub> process, acting on  $\hat{x}_L$  which denotes the STF projection of the product  $x_L \equiv x_{i_1} \cdots x_{i_l}$  footnote on page 39. [See also Eq. (II.4.8.168) for an alternative expression of the same object.] From Ref. [7], or from Eq. (II.4.6.114) in Appendix 4.6, we get the expression of the functions parametrizing the anti-symmetric waves,

$$\mathcal{R}_L^{\mu\nu}(t) = \text{FP}_{B=0} \int d^3\mathbf{x} |\tilde{\mathbf{x}}|^B \hat{x}_L \int_1^{+\infty} dz \gamma_l(z) \mathcal{M}(\tau^{\mu\nu})(\mathbf{x}, t - z|\mathbf{x}|/c), \quad (\text{II.4.2.28})$$

where  $|\tilde{\mathbf{x}}| = |\mathbf{x}|/r_0$  [see Eq. (II.4.2.13)]. These functions depend on the whole past-history of the source<sup>5</sup>. The  $z$ -integration involves the weighting function defined by

$$\gamma_l(z) = (-)^{l+1} \frac{(2l+1)!!}{2^l l!} (z^2 - 1)^l. \quad (\text{II.4.2.29})$$

This function is normalized so that  $\int_1^{+\infty} dz \gamma_l(z) = 1$ , where the value of the integral is obtained by analytic continuation for  $l \in \mathbb{C}$  (see Appendix 4.6). As shown in Ref. [7] (see notably Section III.D there), the anti-symmetric waves in Eq. (II.4.2.23) are associated with gravitational radiation reaction effects of non-linear origin. In particular they contain the contribution of wave tails in the radiation reaction force, which appears at the 1.5PN order relatively to the lowest-order radiation damping, i.e. 4PN order in the equations of motion [19]. To summarize this subsection, we have obtained the near-zone re-expansion of the multipole expansion  $\mathcal{M}(h^{\mu\nu})$  as

<sup>5</sup>It is clear that for stationary sources (independent of time), the anti-symmetric waves given by Eqs. (II.4.2.26) are zero. Therefore the only contribution to the function  $\mathcal{R}_L^{\mu\nu}(t)$  comes from the non-stationary (or radiative) part of the field, which according to our assumption of stationarity in the past is zero when  $t \leq -\mathcal{T}$ , and for which  $\mathcal{R}_L^{\mu\nu}(t)$  is perfectly well-defined. For simplicity in the notation we do not indicate that  $\mathcal{R}_L^{\mu\nu}(t)$  should be computed only from the ‘‘radiative’’ part of the source term  $\mathcal{M}(\tau^{\mu\nu})$ .

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}(h^{\mu\nu})} &= \widetilde{\mathcal{I}}^{-1} \left[ \overline{\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})} \right] \\
&- \frac{4G}{c^4} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-)^l}{l!} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{\overline{\mathcal{R}_L^{\mu\nu}(t-r/c) - \mathcal{R}_L^{\mu\nu}(t+r/c)}}{2r} \right\} \\
&+ \sum_{l=0}^{+\infty} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{\overline{X_L^{\mu\nu}(t-r/c)}}{r} \right\}. \tag{II.4.2.30}
\end{aligned}$$

The functions  $\mathcal{R}_L^{\mu\nu}(t)$  are known from Eq. (II.4.2.26), but the multipole-moments  $X_L^{\mu\nu}(t)$  have not yet been specified at this stage (though they have already been calculated in Ref. [11]). Therefore, we have succeeded in computing the near-zone expansion  $\overline{\mathcal{M}(h^{\mu\nu})}$  as a functional of the sole unknown constituted by the  $X_L^{\mu\nu}$ 's; only by matching can these functions be determined.

## 4.3 Interior field

### 4.3.1 Post-Newtonian expansion of the near-zone field

Up to now, we have solved the Einstein field equations in the vacuum outside an isolated source ( $r > a$ ), without any reference to the stress-energy tensor  $T^{\mu\nu}$  of the matter source. Our next task is to investigate the field equations inside and in the vicinity of the matter source, and more precisely in the so-called near-zone, or region for which  $r \ll \lambda$ , where  $\lambda$  is the typical wavelength of the emitted waves. From now on we restrict attention to a post-Newtonian source, whose radius is  $a \ll \lambda$ . For post-Newtonian sources the near zone overlaps with the external region in what we shall refer to as the matching region, for which  $a < r \ll \lambda$ . In the matching region both the multipolar expansion of the exterior field and the post-Newtonian expansion of the inner field are legitimate.

Let us denote by means of an overline the formal (infinite) post-Newtonian expansion of the field inside the source's near-zone :  $\overline{h}^{\mu\nu}$ , which is of the form

$$\overline{h}^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t, c) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{c^n} \overline{h}_n^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t, \ln c). \tag{II.4.3.31}$$

By definition, the  $n$ -th post-Newtonian coefficient  $\overline{h}_n^{\mu\nu}$  is the factor of the  $n$ -th power of  $1/c$ ; however, we know from the structure of the near-zone expansion of the exterior field [see Eq. (II.4.2.20)] that the post-Newtonian expansion will involve also, besides the usual powers of  $1/c$ , some logarithms of  $c$  (in fact when stating this we are anticipating on the result of the matching). So the coefficients  $\overline{h}_n^{\mu\nu}$  still depend on  $c$  *via* the logarithm of  $\ln c$ , and from Eq. (II.4.2.20) we infer that they are in fact some power series in  $\ln c$ . The first appearance of  $\ln c$  is at the 4PN order (i.e. corresponding to a term  $\sim \ln c/c^8$  in the equations of motion) and is associated to the physical effect of wave tails [19]. In Eq. (II.4.3.31) we have indicated that the expansion starts at the level  $1/c^2$ , but we could be more precise because the  $0i$  component of  $\overline{h}^{\mu\nu}$  starts only at the level  $1/c^3$ , while the  $ij$  component is at least of order  $1/c^4$ . This does not matter for our purpose; simply in our iteration we include these post-Newtonian coefficients as zero :  $\overline{h}_2^{0i} = 0$ , and  $\overline{h}_2^{ij} = \overline{h}_3^{ij} = 0$ . For the total stress-energy pseudo-tensor (II.4.1.3) we have the same type of expansion,

$$\bar{\tau}^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t, c) = \sum_{n=-2}^{+\infty} \frac{1}{c^n} \bar{\tau}_n^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t, \ln c) . \quad (\text{II.4.3.32})$$

The expansion starts with a term of order  $c^2$  corresponding to the rest mass-energy of the source ( $\bar{\tau}^{\mu\nu}$  has the dimension of an energy density). Here we shall always understand the infinite sums such as (II.4.3.31)-(II.4.3.32) in the sense of *formal* power series, i.e. merely as an ordered collection of coefficients : e.g.  $\left(\bar{h}_n^{\mu\nu}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ . We do not attempt to control the mathematical nature of these series.

In this article we make two important assumptions. First, we assume that the post-Newtonian coefficients  $\bar{h}_n^{\mu\nu}$  (and similarly  $\bar{\tau}_n^{\mu\nu}$ ) are *smooth* functions of space-time,

$$\bar{h}_n^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^4) . \quad (\text{II.4.3.33})$$

Evidently this comes from our consideration of regular (smooth) extended matter distributions, described by  $T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ , *a priori* excluding black holes or point-particle singularities. Second, we assume that the structure of the expansion at *spatial infinity*, i.e.  $r \rightarrow +\infty$  with  $t = \text{const}$ , is of the type

$$\forall N \in \mathbb{N} , \quad \bar{h}_n^{\mu\nu} = \sum \hat{n}_L r^a (\ln r)^p F_{L,n,a,p}^{\mu\nu}(t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^N}\right) \quad (\text{II.4.3.34})$$

(and similarly for each  $\bar{\tau}_n^{\mu\nu}$ ). On purpose we have written an expansion which is very similar to the one in Eq. (II.4.2.18), because as we shall see the functions  $F_{L,n,a,p}(t)$  will be equal to the post-Newtonian coefficients of the functions  $F_{L,a,p}(t)$  appearing in Eq. (II.4.2.18). However it is important to realize that in contrast to Eq. (II.4.2.18) which is a near-zone expansion [*cf.* the remainder  $\mathcal{O}(r^N)$ ], the expansion written in Eq. (II.4.3.34) is a *far-zone* one, with remainder  $\mathcal{O}(1/r^N)$ . It would have been clearer to write the latter expansion with some  $(\ln r)^p/r^b$  with  $b = -a$ , but since we are going to show, from the method of matched asymptotic expansions, that the infinite far-zone expansion (ignoring the remainder) is actually the *same* as the infinite near-zone expansion, it is better to write it in this form, with the range of the powers of  $r$  in Eq. (II.4.3.34) being  $-a \leq N$  instead of  $a \leq N$  in Eq. (II.4.2.18). In doing so we are again anticipating on the result of the matching. Finally, we assume that, at any given post-Newtonian order  $n$ , the maximal divergency of the far-zone expansion (II.4.3.34) is finite, i.e. there exists some  $a_{\max}(n) \in \mathbb{N}$  such that  $a \leq a_{\max}(n)$ .

Next we perform the iteration of the post-Newtonian field (II.4.3.31) up to any order. Our strategy consists of finding the general post-Newtonian solution of the relaxed Einstein field equation (II.4.1.1). This solution will depend on some arbitrary “homogeneous” solutions, in the form of harmonic solutions solving the source-free d’Alembertian equation (in a perturbative post-Newtonian sense). In a second stage we shall obtain these harmonic solutions by imposing the matching to the external multipolar field obtained in Section 4.2. Finally we shall check that our post-Newtonian solution is divergenceless, i.e. it satisfies the harmonic-coordinate condition (II.4.1.2), in consequence of the conservation of the stress-energy pseudo tensor  $\tau^{\mu\nu}$ . Notice that we do not try to incorporate into the post-Newtonian series the boundary conditions at infinity (*viz* the no-incoming radiation condition). Indeed this is impossible at the level of the post-Newtonian expansion considered alone, because its validity is limited to the near-zone. Even if we define an “improved” post-Newtonian series by considering some *retarded* integrals that are formally expanded when  $c \rightarrow +\infty$  as series of Poisson-like integrals [2], we ultimately end

up with an inconsistency, because the Poisson-like integrals are some local-in-time functionals, depending on the source only at the current time  $t$ , and we know that the post-Newtonian field starts to depend on the whole past history of the source from the 4PN order [19, 7, 14]. Therefore, we do not follow this route in the present paper, and, instead, we incorporate into the post-Newtonian series the boundary conditions concerning the wave field at infinity by means of the matching equation.

We insert the post-Newtonian ansatz (II.4.3.31)-(II.4.3.32) into the “relaxed” Einstein field equation (II.4.1.1), and equate together the powers of  $1/c$ . The result is an infinite set of Poisson-type equations :

$$\forall n \geq 2, \quad \Delta \bar{h}_n^{\mu\nu} = 16\pi G \bar{\tau}_{n-4}^{\mu\nu} + \partial_t^2 \bar{h}_{n-2}^{\mu\nu}. \quad (\text{II.4.3.35})$$

Evidently, the second term comes from the split of the d’Alembertian operator into a Laplacian and a second time derivative :  $\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2$ ; the time derivative  $\partial_0 = \frac{1}{c} \partial_t$  is smaller than the spatial gradient  $\partial_i$  by a factor  $1/c$  – this is the basic tenet of the approximation. When  $n = 2$  and  $n = 3$  the second term in Eq. (II.4.3.35) is zero, which we take into account by assuming that  $\bar{h}_0^{\mu\nu} = \bar{h}_1^{\mu\nu} = 0$ . We proceed by induction, i.e. we fix some post-Newtonian order  $n$ , assume that we succeeded in constructing the sequence of previous coefficients  $\bar{h}_2^{\mu\nu}, \dots, \bar{h}_{n-1}^{\mu\nu}$ , and from this we infer the next-order coefficient  $\bar{h}_n^{\mu\nu}$ .

The most general solution consists of the sum of a particular solution and of the most general admissible solution of the homogeneous equation, which is simply the source-free Laplace equation. Let us first find a particular solution. We recalled in the introduction that the usual Poisson integral cannot be used to define a solution, because the bound at infinity becomes rapidly divergent when going to higher and higher post-Newtonian orders. Fortunately, thanks to our two assumptions (II.4.3.33) and (II.4.3.34), we shall be able to define a *generalized* notion of Poisson integral, in a way similar to our previous definition of a retarded integral operator in Eq. (II.4.2.14). That generalized Poisson integral will constitute an appropriate solution of the post-Newtonian equation. For any source term like  $\bar{\tau}_n^{\mu\nu}$  which is at once smooth, Eq. (II.4.3.33), and admits a far-zone expansion of the type (II.4.3.34) [note that Eqs. (II.4.3.33)-(II.4.3.34) hold for  $\bar{h}_n^{\mu\nu}$  as well as for  $\bar{\tau}_n^{\mu\nu}$ ], we multiply it by the same regularization factor as in Eq. (II.4.2.14), and then apply the standard Poisson integral. The result,

$$\Delta^{-1} \left[ \tilde{r}_n^B \bar{\tau}_n^{\mu\nu} \right] (\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \bar{\tau}_n^{\mu\nu}(\mathbf{y}, t), \quad (\text{II.4.3.36})$$

where  $|\tilde{\mathbf{y}}|^B \equiv |\mathbf{y}/r_0|^B$ , defines a certain function of  $B \in \mathbb{C}$ . The well-definiteness of that integral heavily relies on the behaviour at the bound at infinity. There is no problem with the vicinity of the origin because of the smoothness of the integrand. From the asymptotic expansion (II.4.3.34), with  $a \leq a_{\max}$  [recall that  $a_{\max} = a_{\max}(n)$ ], we find that the integral converges at infinity when  $\Re(B) < -a_{\max} - 2$ . Next we can prove that the latter function of  $B$  generates a (unique) analytic continuation down to a neighbourhood of the origin  $B = 0$ , except at  $B = 0$  itself, at which value it admits a Laurent expansion with multiple poles up to some finite order. More details are given in Appendix 4.7. Then, we consider the Laurent expansion of that function when  $B \rightarrow 0$  and pick up the finite part, or coefficient of the zero-th power of  $B$ , of that expansion. This defines our generalized Poisson integral :

$$\widetilde{\Delta}^{-1}[\widetilde{\tau}^{\mu\nu}] \equiv \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \Delta^{-1} \left[ \widetilde{r}^B \widetilde{\tau}^{\mu\nu} \right]. \quad (\text{II.4.3.37})$$

The finite-part symbol  $\text{FP}_{\mathbb{B}=0}$  has exactly the same meaning as in Eq. (II.4.2.14). However, notice that in contrast to Eq. (II.4.2.14) where the regularization factor  $\widetilde{r}^B$  dealt with the singularity when  $r \rightarrow 0$ , and hence supposes initially that  $\Re(B)$  is a large positive number, in Eq. (II.4.3.37) the regularization concerns the behaviour of the integral when  $r \rightarrow +\infty$ , and so one must start with the situation where  $\Re(B)$  is a large *negative* number. The main properties of our generalized Poisson operator is that it solves the Poisson equation,

$$\Delta \left[ \widetilde{\Delta}^{-1} \widetilde{\tau}^{\mu\nu} \right] = \widetilde{\tau}^{\mu\nu}, \quad (\text{II.4.3.38})$$

and that the solution  $\widetilde{\Delta}^{-1} \widetilde{\tau}^{\mu\nu}$  owns the same properties as the source  $\widetilde{\tau}^{\mu\nu}$ , i.e. the smoothness, Eq. (II.4.3.33), and the particular far-zone expansion given by Eq. (II.4.3.34). These facts are proved in Appendix 4.7. Therefore, we have found a *particular* solution of the Poisson equation, and, furthermore, this solution can be iterated at will, because the operator  $\widetilde{\Delta}^{-1}$  keeps the same properties from the source to the corresponding solution. Quite naturally we denote the iterated Poisson operator  $\widetilde{\Delta}^{-k-1} \equiv \left( \widetilde{\Delta}^{-1} \right)^{k+1}$ ; it is not difficult to show that

$$\widetilde{\Delta}^{-k-1}[\widetilde{\tau}^{\mu\nu}](\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{y} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2k-1}}{(2k)!} |\widetilde{\mathbf{y}}|^B \widetilde{\tau}^{\mu\nu}(\mathbf{y}, t). \quad (\text{II.4.3.39})$$

From that integral we obtain the operator of the “instantaneous” potentials exactly in the same way as in Eq. (II.4.2.24), but now acting on post-Newtonian coefficients such as  $\widetilde{\tau}^{\mu\nu}$ , i.e. satisfying both Eqs. (II.4.3.33) and (II.4.3.34) :

$$\widetilde{\mathcal{I}}^{-1}[\widetilde{\tau}^{\mu\nu}] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{\partial}{c\partial t} \right)^{2k} \widetilde{\Delta}^{-k-1}[\widetilde{\tau}^{\mu\nu}]. \quad (\text{II.4.3.40})$$

It is clear that we have a particular solution of d’Alembert’s equation :

$$\square \left[ \widetilde{\mathcal{I}}^{-1} \widetilde{\tau}^{\mu\nu} \right] = \widetilde{\tau}^{\mu\nu}. \quad (\text{II.4.3.41})$$

We can check that the definition we have proposed in Eqs. (II.4.2.24)-(II.4.2.25) is a particular case of the more general definition (II.4.3.39)-(II.4.3.40). Indeed, if we apply the formulas (II.4.3.39)-(II.4.3.40) to one of the terms composing the “far-zone” expansion of the post-Newtonian coefficient, i.e.  $\hat{n}_L r^a (\ln r)^p F(t)$ , we get the same result as the one resulting from Eqs. (II.4.2.24)-(II.4.2.25).

By means of the Poisson operator  $\widetilde{\Delta}^{-1}$  so constructed we first find a *particular* solution of Eq. (II.4.3.35) :

$$\left( \overline{h}^{\mu\nu} \right)_{\text{part}} = 16\pi G \widetilde{\Delta}^{-1} \widetilde{\tau}^{\mu\nu} + \partial_t^2 \widetilde{\Delta}^{-1} \overline{h}^{\mu\nu}_{n-2}. \quad (\text{II.4.3.42})$$

To this solution we add the most general solution of the homogeneous Laplace equation. It can be written, using the STF language, as the sum of two multipolar series, one of them being of the type  $\hat{x}_L$ , that is regular at the origin  $r = 0$ , the other one being like  $\hat{\partial}_L(1/r)$ , i.e. regular “at infinity”  $r \rightarrow +\infty$  (see Ref. footnote on page 39 for the notation). Imposing the smoothness condition (II.4.3.33) for the post-Newtonian field we discard the second type  $\sim \hat{\partial}_L(1/r)$ , and

retain as the only admissible homogeneous solution the first type  $\sim \hat{x}_L$ . Therefore, we find that there must exist some STF-tensorial functions of time, say  $B_L^{\mu\nu}(t)$ , such that

$$\left(\bar{h}_n^{\mu\nu}\right)_{\text{hom}} = \sum_{l=0}^{+\infty} B_L^{\mu\nu}(t) \hat{x}_L. \quad (\text{II.4.3.43})$$

The functions  $B_L^{\mu\nu}(t)$  will be associated with the reaction of the field onto the source, and depend on which boundary conditions are to be imposed on the gravitational field at infinity. The most general solution for the  $n$ -th post-Newtonian coefficient thus reads

$$\bar{h}_n^{\mu\nu} = \left(\bar{h}_n^{\mu\nu}\right)_{\text{part}} + \left(\bar{h}_n^{\mu\nu}\right)_{\text{hom}}. \quad (\text{II.4.3.44})$$

It is now trivial to iterate the process. We substitute for  $\bar{h}_{n-2}^{\mu\nu}$  in the right-hand-side of Eq. (II.4.3.42) the same expression but with  $n$  replaced by  $n-2$ , and similarly descend until we stop at either one of the coefficients  $\bar{h}_0^{\mu\nu} = 0$  or  $\bar{h}_1^{\mu\nu} = 0$ . At this point  $\bar{h}_n^{\mu\nu}$  is expressed in terms of the “previous”  $\bar{\tau}_m^{\mu\nu}$ 's and  $B_L^{\mu\nu}$ 's, with  $m \leq n-2$ , i.e.

$$\bar{h}_n^{\mu\nu} = 16\pi G \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]-1} \partial_t^{2k} \widetilde{\Delta}^{-k-1} [\bar{\tau}_{n-4-2k}^{\mu\nu}] + \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]-1} B_L^{\mu\nu}(t) \widetilde{\Delta}^{-k}(\hat{x}_L). \quad (\text{II.4.3.45})$$

Here  $[n/2]$  denotes the integer part of  $n/2$ ;  $\partial_t^{2k}$  means the  $2k$ -th partial time derivative  $(\partial/\partial t)^{2k}$  and the superscript  $(2k)$  the  $2k$ -th total time derivative; the operator  $\widetilde{\Delta}^{-k-1}$  is the one defined by Eq. (II.4.3.39); the object  $\widetilde{\Delta}^{-k}(\hat{x}_L)$  has already been introduced in Eq. (II.4.2.27). Once we have the result (II.4.3.45), we “re-sum” it from  $n=2$  up to infinity. After commuting the summations over  $n$  and  $k$  we arrive at

$$\bar{h}^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} \widetilde{\mathcal{I}}^{-1} [\bar{\tau}^{\mu\nu}] + \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{c^{2k}} B_L^{\mu\nu}(t) \widetilde{\Delta}^{-k}(\hat{x}_L), \quad (\text{II.4.3.46})$$

where we have recognized the operator of the “instantaneous” potentials as defined by Eq. (II.4.3.40), and where the functions  $B_L^{\mu\nu}$  read

$$B_L^{\mu\nu}(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{c^n} B_L^{\mu\nu}(t). \quad (\text{II.4.3.47})$$

A more compact alternative form is

$$\bar{h}^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} \widetilde{\mathcal{I}}^{-1} [\bar{\tau}^{\mu\nu}] + \sum_{l=0}^{+\infty} \Delta \widetilde{\mathcal{I}}^{-1} [B_L^{\mu\nu}(t) \hat{x}_L]. \quad (\text{II.4.3.48})$$

Actually the latter forms are not the best for our purpose. Since the first term in Eqs. (II.4.3.46) or (II.4.3.48) is a particular solution of the d'Alembert equation [see Eq. (II.4.3.41)], the second term is necessarily equal to (the near-zone re-expansion of) a homogeneous solution of the source-free wave equation, and most importantly a regular solution at it. So it should be in the form of some anti-symmetric multipolar waves : retarded minus advanced. Indeed, this readily follows from the second equality in Eq. (II.4.2.26). We introduce a new definition  $A_L^{\mu\nu}(t)$  by posing



$$B_L^{\mu\nu}(t) = -\frac{A_L^{\mu\nu(2l+1)}(t)}{c^{2l+1}(2l+1)!!}, \quad (\text{II.4.3.49})$$

where the  $l$ -dependent factor is chosen to match with Eq. (II.4.2.26). [Because of our assumption of stationarity in the past,  $t \leq -\mathcal{T}$ , the relation (II.4.3.49) determines  $A_L^{\mu\nu}(t)$  up to a constant. However it is clear that this constant will cancel out in the anti-symmetric wave in Eq. (II.4.3.50).] In terms of this definition, we find the final result of this section,

$$\bar{h}^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} \widetilde{\mathcal{I}}^{-1} [\bar{\tau}^{\mu\nu}] + \sum_{l=0}^{+\infty} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{A_L^{\mu\nu}(t-r/c) - A_L^{\mu\nu}(t+r/c)}{2r} \right\}, \quad (\text{II.4.3.50})$$

where we recall that the overline means the post-Newtonian or equivalently near-zone expansion [see Eq. (II.4.2.26)]. For the time being we shall refer to the  $A_L^{\mu\nu}(t)$ 's as the *radiation-reaction* functions.

### 4.3.2 Multipole expansion of the post-Newtonian solution

In the previous section we obtained the general solution for the post-Newtonian expansion in the form (II.4.3.50), and parametrized by some (for the moment) unknown radiation-reaction functions  $A_L^{\mu\nu}(t)$ . To arrive at this we made an assumption concerning the particular structure for the *far-zone* expansion, at spatial infinity, of the post-Newtonian coefficients : Eq. (II.4.3.34). Here we shall denote the corresponding infinite expansion (without remainder term) by means of the same calligraphic letter  $\mathcal{M}$  as used to denote the multipole expansion, because the far-zone expansion of the post-Newtonian coefficients is equivalent to a multipolar decomposition. From Eq. (II.4.3.34) we have

$$\mathcal{M}(\bar{h}_n^{\mu\nu}) = \sum \hat{n}_L r^a (\ln r)^p F_{L,n,a,p}^{\mu\nu}(t). \quad (\text{II.4.3.51})$$

So, summing up the post-Newtonian series,

$$\mathcal{M}(\bar{h}^{\mu\nu}) = \sum \hat{n}_L r^a (\ln r)^p F_{L,a,p}^{\mu\nu}(t), \quad (\text{II.4.3.52})$$

where the functions involved are  $F_{L,a,p}(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{c^n} F_{L,n,a,p}(t)$ . As we can see, the far-zone expansion that we have just postulated is exactly the same, with the same functions  $F_{L,a,p}(t)$ , as the near-zone expansion we had previously written in Eq. (II.4.2.20). This equality is already the matching equation between the near-zone expansion of the multipolar field,  $\mathcal{M}(h^{\mu\nu})$ , and the multipolar-far-zone expansion of the post-Newtonian field,  $\mathcal{M}(\bar{h}^{\mu\nu})$ , whose consequences will be investigated in Section 4.4.

The fundamental result which is needed for computing the far-zone expansion of the post-Newtonian series concerns the expansion of the generalized integral operator  $\widetilde{\mathcal{I}}^{-1}$  acting on the post-Newtonian source  $\bar{\tau}^{\mu\nu}$ . More precisely, we are interested in knowing under which conditions one can commute  $\widetilde{\mathcal{I}}^{-1}$  with the operation  $\mathcal{M}$  of taking the far-zone expansion. Clearly, the two operations can be commuted at the price of adding some homogeneous solution of the d'Alembert equation. We prove in Appendix 4.8 that the latter homogeneous solution is made of multipolar waves of the *symmetric* type, i.e. retarded *plus* advanced. We obtain

$$\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathcal{I}}^{-1}[\overline{\tau^{\mu\nu}}]\right) = \widetilde{\mathcal{I}}^{-1}[\mathcal{M}(\overline{\tau^{\mu\nu}})] - \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-)^l}{l!} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{\overline{\mathcal{F}_L^{\mu\nu}(t-r/c) + \mathcal{F}_L^{\mu\nu}(t+r/c)}}{2r} \right\}. \quad (\text{II.4.3.53})$$

Here the overline notation has the same meaning as in Section 4.2 : this is the Taylor expansion when  $r \rightarrow 0$ , but that expansion should be considered, *a posteriori*, as an expansion when  $r \rightarrow +\infty$ . That is, our notation means

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{\overline{\mathcal{F}_L^{\mu\nu}(t-r/c) + \mathcal{F}_L^{\mu\nu}(t+r/c)}}{2r} \right\} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\hat{\partial}_L(r^{2i-1})}{(2i)!} \frac{\overline{\mathcal{F}_L^{\mu\nu}(t)}}{c^{2i}} \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \widetilde{\Delta}^{-i} \left[ \hat{\partial}_L(r^{-1}) \right] \frac{\overline{\mathcal{F}_L^{\mu\nu}(t)}}{c^{2i}}, \end{aligned} \quad (\text{II.4.3.54})$$

[see also Eq. (II.4.8.164)] where the right-hand-sides are to be considered as some expansions at spatial infinity, of the general type given by Eq. (II.4.3.52). The functions  $\mathcal{F}_L^{\mu\nu}(t)$  parametrizing these symmetric waves are STF and explicitly given by

$$\mathcal{F}_L^{\mu\nu}(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{c^{2j}} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3\mathbf{x} |\widetilde{\mathbf{x}}|^B \widetilde{\Delta}^{-j} [\hat{x}_L] \partial_t^{2j} \overline{\tau^{\mu\nu}}(\mathbf{x}, t), \quad (\text{II.4.3.55})$$

where  $\widetilde{\Delta}^{-j} [\hat{x}_L]$  is given by Eq. (II.4.2.27). See the proof in Appendix 4.8. An alternative form reads as

$$\mathcal{F}_L^{\mu\nu}(t) = \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3\mathbf{x} |\widetilde{\mathbf{x}}|^B \hat{x}_L \overline{\int_{-1}^1 dz \delta_l(z) \overline{\tau^{\mu\nu}}(\mathbf{x}, t - z|\mathbf{x}|/c)}, \quad (\text{II.4.3.56})$$

where the integration over the  $z$ -dependent cone  $t - z|\mathbf{y}|/c$  involves a weighting function  $\delta_l(z)$  that is closely related to the function  $\gamma_l(z)$  introduced in Eq. (II.4.2.29) :

$$\delta_l(z) = \frac{(2l+1)!!}{2^{l+1}l!} (1-z^2)^l = -\frac{1}{2} \gamma_l(z), \quad (\text{II.4.3.57})$$

and whose integral is normalized to one :  $\int_{-1}^1 dz \delta_l(z) = 1$  <sup>6</sup>. The function  $\delta_l(z)$  approaches the Dirac delta-function in the limit of large  $l$  :  $\lim_{l \rightarrow +\infty} \delta_l(z) = \delta(z)$ . In Eq. (II.4.3.56) we have indicated by means of an overline the fact that this expression is valid only in a sense of post-Newtonian expansion. Note that because the latter post-Newtonian expansion is “even”, containing only even powers of  $1/c$ , one can replace the argument  $t - z|\mathbf{y}|/c$  inside  $\mathcal{F}_L^{\mu\nu}(t)$  equivalently by  $t + z|\mathbf{y}|/c$ .

Finally, thanks to Eqs. (II.4.3.53)-(II.4.3.57), we are in a position to write the infinite multipolar-far-zone expansion of the post-Newtonian solution as

$$\mathcal{M}(\overline{h}^{\mu\nu}) = \frac{16\pi G}{c^4} \widetilde{\mathcal{I}}^{-1}[\mathcal{M}(\overline{\tau^{\mu\nu}})]$$

<sup>6</sup>The normalization for the function  $\delta_l(z)$  is consistent with that of the function  $\gamma_l(z)$  :  $\int_1^{+\infty} dz \gamma_l(z) = 1$ , owing to the fact that the integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} dz (1-z^2)^l$  is zero by complex analytic continuation in  $l \in \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned}
& - \frac{4G}{c^4} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-)^l}{l!} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{\overline{\mathcal{F}_L^{\mu\nu}(t-r/c) + \mathcal{F}_L^{\mu\nu}(t+r/c)}}{2r} \right\} \\
& + \sum_{l=0}^{+\infty} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{A_L^{\mu\nu}(t-r/c) - A_L^{\mu\nu}(t+r/c)}{2r} \right\} .
\end{aligned} \tag{II.4.3.58}$$

We recall that the radiation-reaction functions  $A_L^{\mu\nu}(t)$  are still undetermined at this stage. The symmetric and anti-symmetric waves are given by Eqs. (II.4.3.54) and (II.4.2.26) respectively, considered here as infinite far-zone expansions.

## 4.4 Matching

In Section 4.2.1, we found the most general expression for the multipolar expansion  $\mathcal{M}(h^{\mu\nu})$ , satisfying the no-incoming radiation condition, in terms of some unknown ‘‘multipole-moment’’ STF-functions  $X_L^{\mu\nu}(t)$  [see Eq. (II.4.2.19)]. On the other hand, in Section 4.3.1, we obtained the most general solution for the post-Newtonian expansion  $\bar{h}^{\mu\nu}$ , as parametrized by a set of unknown ‘‘radiation-reaction’’ STF-functions  $A_L^{\mu\nu}(t)$  [see Eq. (II.4.3.50)]. We are now imposing the matching condition

$$\overline{\mathcal{M}(h^{\mu\nu})} \equiv \mathcal{M}(\bar{h}^{\mu\nu}) . \tag{II.4.4.59}$$

In fact we have already postulated this equation when writing that the two formal expansions (II.4.2.20) and (II.4.3.52) are the same. Recall that the matching equation (II.4.4.59) results from the numerical equality  $\mathcal{M}(h^{\mu\nu}) = \bar{h}^{\mu\nu}$ , verified in the exterior near-zone :  $a < r \ll \lambda$ . It is physically justified only for post-Newtonian sources, for which the exterior near-zone exists. The matching equation is actually a *functional* identity, i.e. true  $\forall(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}_*^3 \times \mathbb{R}$ ; it identifies, *term-by-term*, two asymptotic singular expansions, each of them being formally taken outside its own domain of validity. In the present context, the matching equation insists that the infinite *near-zone* expansion,  $r \rightarrow 0$ , of the exterior multipolar field is identical to the infinite *far-zone* expansion,  $r \rightarrow +\infty$ , of the inner post-Newtonian field. Let us show now that Eq. (II.4.4.59) permits determining all the unknowns of the problem : i.e., at once, the multipole moments  $X_L^{\mu\nu}$  and the radiation-reaction functions  $A_L^{\mu\nu}$ . In particular we find that the multipole moments  $X_L^{\mu\nu}$  are in agreement with the earlier result derived in Ref. [11].

For the sake of clarity we re-state here the two results we reached for the two sides of Eq. (II.4.4.59). The left-hand-side was obtained in Eq. (II.4.2.30) :

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}(h^{\mu\nu})} &= \widetilde{\mathcal{I}}^{-1} \left[ \overline{\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})} \right] \\
& - \frac{4G}{c^4} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-)^l}{l!} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{\overline{\mathcal{R}_L^{\mu\nu}(t-r/c) - \mathcal{R}_L^{\mu\nu}(t+r/c)}}{2r} \right\} \\
& + \sum_{l=0}^{+\infty} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{X_L^{\mu\nu}(t-r/c)}{r} \right\} ,
\end{aligned} \tag{II.4.4.60}$$

in which the functions  $\mathcal{R}_L^{\mu\nu}$ , which come from the non-linearities of the field equations in vacuum, are known from Eq. (II.4.2.28). The right-hand-side of the matching equation was found in Eq. (II.4.3.58) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\bar{h}^{\mu\nu}) &= \frac{16\pi G}{c^4} \widetilde{\mathcal{I}}^{-1}[\mathcal{M}(\bar{\tau}^{\mu\nu})] \\
&- \frac{4G}{c^4} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-)^l}{l!} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{\mathcal{F}_L^{\mu\nu}(t-r/c) + \mathcal{F}_L^{\mu\nu}(t+r/c)}{2r} \right\} \\
&+ \sum_{l=0}^{+\infty} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{A_L^{\mu\nu}(t-r/c) - A_L^{\mu\nu}(t+r/c)}{2r} \right\}. \tag{II.4.4.61}
\end{aligned}$$

Here, the functions  $\mathcal{F}_L^{\mu\nu}$ , which depend on the matter and gravitational content of the post-Newtonian source, take the definite expression given by Eqs. (II.4.3.55)-(II.4.3.56).

Comparing the equations (II.4.4.60) and (II.4.4.61), we readily discover that they share an obvious common term, that is the first one. Indeed, we manifestly have

$$\widetilde{\mathcal{I}}^{-1} \left[ \overline{\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})} \right] = \widetilde{\mathcal{I}}^{-1}[\mathcal{M}(\bar{\Lambda}^{\mu\nu})] = \frac{16\pi G}{c^4} \widetilde{\mathcal{I}}^{-1}[\mathcal{M}(\bar{\tau}^{\mu\nu})]. \tag{II.4.4.62}$$

The first equality comes from the matching equation, as applied to the gravitational source term  $\Lambda^{\mu\nu}$ , and the second equality comes from the fact that the matter tensor  $T^{\mu\nu}$  has a compact support, so that  $\mathcal{M}(T^{\mu\nu}) = 0$ . Hence the two first terms in Eqs. (II.4.4.60) and (II.4.4.61) match together. This is a somewhat remarkable fact, because most of the complexity of the Einstein field equations is actually contained into these terms, either  $\mathcal{I}^{-1}[\overline{\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})}]$  for the external field or  $\frac{16\pi G}{c^4} \mathcal{I}^{-1}[\mathcal{M}(\bar{\tau}^{\mu\nu})]$  for the inner one. But for doing the matching we don't need all this complexity; these two terms match and therefore are to be identified. Notice also that this is a non-trivial result, since the two sides of Eq. (II.4.4.59) strongly depend on the yet unknown functions  $A_L^{\mu\nu}$  and  $X_L^{\mu\nu}$ , which enter the latter two terms in a very intricate way, coupled together as they are via the non-linearities of the field equations. Nevertheless, the matching equation tells us that these terms must be rigorously identical.

As soon as we have noticed that the first terms in Eqs. (II.4.4.60) and (II.4.4.61) are equal, we can compare the other ones, and because the retarded and advanced waves have some different structures, they must be matched independently, so we get *two* relations to be satisfied. We find that these are solved if and only if the multipole-moments in the exterior field *and* the radiation-reaction functions in the inner field are given by

$$X_L^{\mu\nu}(t) = -\frac{4G}{c^4} \frac{(-)^l}{l!} \mathcal{F}_L^{\mu\nu}(t), \tag{II.4.4.63}$$

$$A_L^{\mu\nu}(t) = -\frac{4G}{c^4} \frac{(-)^l}{l!} \left[ \mathcal{F}_L^{\mu\nu}(t) + \mathcal{R}_L^{\mu\nu}(t) \right]. \tag{II.4.4.64}$$

Therefore, both the multipole-moments and the radiation-reaction terms are determined as some explicit functionals of the pseudo-tensor  $\tau^{\mu\nu}$  and nothing else. (Actually we could add any constant to the definition of  $A_L^{\mu\nu}(t)$ , but this is physically irrelevant because the constant disappears from the anti-symmetric waves; see also Ref. footnote on page 46.)

Finally, by way of summary of the results, we take back the latter expressions and fill in the external and inner fields, which are then entirely determined as coming from a unique solution of the Einstein field equations in harmonic coordinates, valid everywhere inside and outside the source. The exterior field is

$$\mathcal{M}(h^{\mu\nu}) = \widetilde{\square}_{\text{Ret}}^{-1} [\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})] - \frac{4G}{c^4} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-)^l}{l!} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{\mathcal{F}_L^{\mu\nu}(t-r/c)}{r} \right\}, \quad (\text{II.4.4.65})$$

where the multipole moments are given in terms of the post-Newtonian expansion of the stress-energy pseudo-tensor by

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_L^{\mu\nu}(t) &= \text{FP}_{\text{B}=0} \int d^3\mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \hat{y}_L \overline{\int_{-1}^1 dz \delta_l(z) \bar{\tau}^{\mu\nu}(\mathbf{y}, t - z|\mathbf{y}|/c)} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{c^{2j}} \text{FP}_{\text{B}=0} \int d^3\mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \widetilde{\Delta}^{-j}[\hat{y}_L] \partial_t^{2j} \bar{\tau}^{\mu\nu}(\mathbf{y}, t). \end{aligned} \quad (\text{II.4.4.66})$$

This result is in perfect agreement with the multipole decomposition of the exterior field obtained in Ref. [11] [see Eqs. (3.13)-(3.14) there]. On the other hand, the inner post-Newtonian field is given by

$$\bar{h}^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} \widetilde{\mathcal{I}}^{-1} [\bar{\tau}^{\mu\nu}] - \frac{4G}{c^4} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-)^l}{l!} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{\overline{\mathcal{A}_L^{\mu\nu}(t-r/c) - \mathcal{A}_L^{\mu\nu}(t+r/c)}}{2r} \right\}, \quad (\text{II.4.4.67})$$

where the radiation-reaction function is composed of two terms :

$$\mathcal{A}_L^{\mu\nu}(t) = \mathcal{F}_L^{\mu\nu}(t) + \mathcal{R}_L^{\mu\nu}(t). \quad (\text{II.4.4.68})$$

The first term is nothing but the exterior multipole moment given by Eq. (II.4.4.66), and one can check that it contains the standard radiation-reaction effect at the 2.5PN order. The  $\mathcal{R}_L^{\mu\nu}$ -term is defined by Eq. (II.4.2.28), or, rather, the post-Newtonian expansion of it, i.e.

$$\mathcal{R}_L^{\mu\nu}(t) = \text{FP}_{\text{B}=0} \int d^3\mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \hat{y}_L \overline{\int_1^{+\infty} dz \gamma_l(z) \mathcal{M}(\tau^{\mu\nu})(\mathbf{y}, t - z|\mathbf{y}|/c)}. \quad (\text{II.4.4.69})$$

This term is quite interesting : it depends on the non-linearities of the exterior field, described by the gravitational source term  $\mathcal{M}(\tau^{\mu\nu})$  (or, more precisely, the non-stationary part of it footnote on page 46), which are to be computed by means of the multipolar-post-Minkowskian algorithm of Refs. [17, 7] (see in particular Section III.D in Ref. [7] for some detailed computations of this term). Physically the function  $\mathcal{R}_L^{\mu\nu}$  contains the effect of wave tails in the radiation reaction force which arises at the 4PN order [19, 7, 14]. It is not difficult [using notably the formula (II.4.5.91) below] to derive the more explicit expression for the contribution of  $\mathcal{R}_L^{\mu\nu}$  to the anti-symmetric wave in Eq. (II.4.4.67) :

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{\overline{\mathcal{R}_L^{\mu\nu}(t-r/c) - \mathcal{R}_L^{\mu\nu}(t+r/c)}}{2r} \right\} = \\ \sum_{i=0}^l \frac{(-)^l (l+i)!}{2^i i! (l-i)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\widetilde{\Delta}^{-k}(\hat{x}_L)}{c^{2k+l-i}} \text{FP}_{\text{B}=0} \int d^3\mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \frac{\hat{y}_L}{|\mathbf{y}|^{l+i+1}} \partial_t^{2k+l-i} \mathcal{M}(\tau^{\mu\nu})(\mathbf{y}, t - |\mathbf{y}|/c). \end{aligned} \quad (\text{II.4.4.70})$$

When they are computed by post-Minkowskian approximations, the remaining integrals will typically yield, after integration over the angles, some “hereditary-like” contributions, depending on the whole integrated past of the matter source (see Ref. [7]).

It is tempting to speculate that the second term in Eq. (II.4.4.67), made of the anti-symmetric multipolar waves parametrized by the functions  $\mathcal{A}_L^{\mu\nu}(t)$ , can be regarded as the contribution, in a sense to be made more precise, of the radiation reaction forces at work inside the post-Newtonian source. [Indeed we have checked that these functions contain the known radiation-reaction terms at the dominant 2.5PN order as well as the dominant contribution of tails at the 4PN order.] We shall leave for future work the systematic study of this term, as well as the possibility to answer the latter speculation.

## 4.5 Harmonic-coordinate condition

The latter solution for the post-Newtonian field, Eqs. (II.4.4.67)-(II.4.4.70), has been obtained without imposing, in an explicit way, the condition of harmonic coordinates (II.4.1.2). Indeed, we have assumed this condition to be true, and we simply matched together the post-Newtonian and multipolar-post-Minkowskian expansions, satisfying the relaxed Einstein field equations (II.4.1.1) in their respective domains. We found that the matching determines uniquely the expressions of the multipole moments  $X_L^{\mu\nu}(t)$  and radiation-reaction functions  $A_L^{\mu\nu}(t)$  as some functionals of the stress-energy pseudo-tensor  $\tau^{\mu\nu}$ . However, we never used the harmonic-coordinate condition during the matching; it was not necessary for the formal determination of the unknown parameters ( $X_L^{\mu\nu}$ ,  $A_L^{\mu\nu}$ ). Therefore, it is quite important to check that our post-Newtonian solution is divergenceless as a consequence of the conservation of the pseudo-tensor  $\tau^{\mu\nu}$  [see Eq. (II.4.1.2)], so that we really grasp a solution of the full Einstein field equations.

We check the divergenceless of  $\bar{h}^{\mu\nu}$  directly on Eq. (II.4.3.46). We apply the  $\partial_\mu$  operator on each side of the equality :

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} \partial_\mu \widetilde{\mathcal{I}^{-1}}[\bar{\tau}^{\mu\nu}] + \partial_\mu \left[ \sum_{l,k=0}^{+\infty} \frac{1}{c^{2k}} B_L^{\mu\nu}(t) \widetilde{\Delta^{-k}}(\hat{x}_L) \right]. \quad (\text{II.4.5.71})$$

We must transform the two terms on the right-hand-side in order to make explicit the fact that these two terms are exactly the opposite. The first term, that is to say, the divergence of the  $\widetilde{\mathcal{I}^{-1}}$  operator, is not obvious since, even if time derivatives commute with  $\widetilde{\mathcal{I}^{-1}}$ , spatial derivatives do not,

$$\partial_\mu \widetilde{\mathcal{I}^{-1}}[\bar{\tau}^{\mu\nu}] = \widetilde{\mathcal{I}^{-1}}[\partial_0 \bar{\tau}^{0\nu}] + \partial_i \widetilde{\mathcal{I}^{-1}}[\bar{\tau}^{i\nu}]. \quad (\text{II.4.5.72})$$

$\widetilde{\mathcal{I}^{-1}}$  is a sum of  $\widetilde{\Delta^{-k-1}} \partial_t^{2k}$ , and spatial derivatives do not commute with  $\widetilde{\Delta^{-k-1}}$  because of the  $|\tilde{\mathbf{y}}|^B$  factor [see Eq. (II.4.3.39) for the exact expression]. To see how to tackle this problem, let us start with the spatial divergence of  $\widetilde{\Delta^{-k-1}}$ . We assume that  $\bar{\tau}(\mathbf{x}, t)$  is a function of the “post-Newtonian” type, i.e. satisfies the requirements (II.4.3.33)-(II.4.3.34). The  $\partial_i$  derivative, in Eq. (II.4.5.73), applies first to the  $k^{\text{th}}$ -Poisson’s kernel but after having noticed that the  $x^i$ -derivative of this kernel was equal to minus the  $y^i$ -derivative of it, we can make an integration by part and distribute the  $y^i$ -derivative on  $|\tilde{\mathbf{y}}|^B$  and on  $\bar{\tau}$  so that

$$\begin{aligned}
\partial_i \widetilde{\Delta^{-k-1}}(\bar{\tau}(\mathbf{x}, t)) &= -\frac{1}{4\pi} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3\mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \partial_{x^i} \left( \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2k-1}}{(2k)!} \right) \bar{\tau}(\mathbf{y}, t) = \\
&= -\frac{1}{4\pi} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3\mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2k-1}}{(2k)!} \partial_i \bar{\tau}(\mathbf{y}, t) - \frac{1}{4\pi} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3\mathbf{y} \partial_i (|\tilde{\mathbf{y}}|^B) \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2k-1}}{(2k)!} \bar{\tau}(\mathbf{y}, t) .
\end{aligned} \tag{II.4.5.73}$$

The first term in the last line of the previous equality is equal to  $\widetilde{\Delta^{-k-1}}(\partial_i \bar{\tau})$ . Now, let us concentrate on the last term in the same line. We can, of course, write  $\partial_i (|\tilde{\mathbf{y}}|^B) = B n_i |\tilde{\mathbf{y}}|^{B-1}/r_0$ . Moreover, since  $\bar{\tau}(\mathbf{y}, t)$  is regular at the origin ( $|\mathbf{y}| = 0$ ), the integral is always convergent on any neighbourhood of the origin. Translating these two remarks in the last integral of Eq. (II.4.5.73), and since we take the finite part when  $B = 0$ , this last integral is zero, because of the explicit factor  $B$ , when ranging from  $|\mathbf{y}| = 0$  up to some arbitrary finite value  $|\mathbf{y}| = \mathcal{R}$ . So, after replacing  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2k-1}$  by  $(2k)! \widetilde{\Delta^{-k}}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1})$  we are left, in Eq. (II.4.5.74), with one integral ranging over  $|\mathbf{y}| > \mathcal{R}$ ,

$$\begin{aligned}
&\text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3\mathbf{y} \partial_i (|\tilde{\mathbf{y}}|^B) \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2k-1}}{(2k)!} \bar{\tau}(\mathbf{y}, t) \\
&= \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} d^3\mathbf{y} \partial_i (|\tilde{\mathbf{y}}|^B) \mathcal{M} \left[ \widetilde{\Delta^{-k}}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1}) \right] \mathcal{M}(\bar{\tau})(\mathbf{y}, t) \\
&= \sum_{n=0}^k \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l}{l!} \widetilde{\Delta^{-k+n}}(\hat{x}_l) \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} d^3\mathbf{y} \partial_i (|\tilde{\mathbf{y}}|^B) \widetilde{\Delta^{-n}}(\hat{\partial}_l(|\mathbf{y}|^{-1})) \mathcal{M}(\bar{\tau})(\mathbf{y}, t) .
\end{aligned} \tag{II.4.5.74}$$

In the last line of the previous equation, we expanded the  $k^{\text{th}}$ -Poisson's kernel for  $|\mathbf{y}| \gg |\mathbf{x}|$  using Eq. (II.4.8.162). This is possible thanks to the fact that  $\mathcal{R}$  is arbitrary and may be chosen such that  $\mathcal{R} \gg |\mathbf{x}|$ . We also note that  $\bar{\tau}$  turned into  $\mathcal{M}(\bar{\tau})$  because  $\bar{\tau} = \mathcal{M}(\bar{\tau})$  in the far zone. In this way,

$$\begin{aligned}
\partial_i \widetilde{\Delta^{-1-k}}[\bar{\tau}(\mathbf{x}, t)] &= \widetilde{\Delta^{-1-k}}[\partial_i \bar{\tau}(\mathbf{x}, t)] \\
&- \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^k \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l}{l!} \widetilde{\Delta^{-k+n}}(\hat{x}_l) \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} d^3\mathbf{y} \partial_i (|\tilde{\mathbf{y}}|^B) \widetilde{\Delta^{-n}}(\hat{\partial}_l(|\mathbf{y}|^{-1})) \mathcal{M}(\bar{\tau})(\mathbf{y}, t) ,
\end{aligned} \tag{II.4.5.75}$$

and we notice that the commutation of the spatial derivative and the generalized  $k^{\text{th}}$ -Poisson integral depends only on the behaviour of  $\bar{\tau}(\mathbf{x}, t)$  at spatial infinity. This fact was foreseeable since for a function  $\bar{\tau}(\mathbf{x}, t)$  with compact support the commutation would be trivial. Thanks to the general result given by Eq. (II.4.5.75), in which we replace  $\bar{\tau}$  by  $\bar{\tau}^{i\nu}$ , we can determine the spatial divergence of  $\widetilde{\mathcal{I}^{-1}}(\bar{\tau}^{i\nu})$ . We can then get  $\partial_\mu \widetilde{\mathcal{I}^{-1}}[\bar{\tau}^{\mu\nu}]$  that is the sum of  $\widetilde{\mathcal{I}^{-1}}[\partial_\mu \bar{\tau}^{\mu\nu}]$  and a non-trivial term. Since  $\partial_\mu \bar{\tau}^{\mu\nu} = 0$ , the result for the first term of Eq. (II.4.5.71) reduces to the non-trivial term, that is to say :

$$\frac{16\pi G}{c^4} \partial_\mu \widetilde{\mathcal{I}^{-1}}[\bar{\tau}^{\mu\nu}]$$

$$= -\frac{4G}{c^4} \sum_{k,l,n \geq 0} \frac{(-)^l}{l!} \widetilde{\Delta}^{-k}(\widehat{x}_l) \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} d^3\mathbf{y} \partial_i(|\widetilde{\mathbf{y}}|^B) \widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{\partial}_l(|\mathbf{y}|^{-1})) \mathcal{M}^{(2k+2n)}(\overline{\tau}^{i\nu})(\mathbf{y}, t). \quad (\text{II.4.5.76})$$

Now, we want to prove that the second term in the right-hand-side of Eq. (II.4.5.71) is exactly the opposite. In Eq. (II.4.5.77), we expand this last term in its  $3+1$  form so that we can treat separately terms with time derivative and terms with spatial derivative,

$$\sum_{n,l \geq 0} \frac{1}{c^{2n}} B_L^{i\nu(2n)}(t) \partial_i [\widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_l)] + \sum_{n,l \geq 0} \frac{1}{c^{2n}} \partial_0 B_L^{0\nu(2n)}(t) \widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_l). \quad (\text{II.4.5.77})$$

The first term of Eq. (II.4.5.77), thanks to a STF formula, can be written without the use of spatial derivative. The index  $i$  coming from this derivative is distributed on the multi-index  $L$  in the way

$$\sum_{n,l \geq 0} \frac{1}{c^{2n}} B_L^{i\nu(2n)}(t) \partial_i [\widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_l)] = \sum_{n,l \geq 0} \frac{1}{c^{2n}} \left\{ \frac{1}{2l+3} B_L^{i\nu(2n)}(t) \widetilde{\Delta}^{-n+1}(\widehat{x}_{iL}) + l B_{iL-1}^{i\nu(2n)}(t) \widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_{L-1}) \right\}. \quad (\text{II.4.5.78})$$

In the second term of Eq. (II.4.5.77), we express the function  $B_L^{0\nu}$  in terms of  $\mathcal{F}_L^{0\nu}$  and  $\mathcal{R}_L^{0\nu}$  [*cf.* Eqs. (II.4.3.49) and (II.4.4.64)] because the time derivative,  $\partial_0$ , will act on the integrand of these two time-varying moments :

$$\widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_l) \partial_0 B_L^{0\nu}(t) = \frac{4G(-)^l}{c^{5+2l}(2l+1)!!!} \widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_l) \left\{ \partial_0 \mathcal{R}_L^{0\nu}(t) + \partial_0 \mathcal{F}_L^{0\nu}(t) \right\}. \quad (\text{II.4.5.79})$$

First, we investigate the case of  $\partial_0 \mathcal{F}_L^{0\nu}$ , using the formula (II.4.3.55), where the time derivative acts on  $\overline{\tau}^{0\nu}$ ,

$$\widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_l) \partial_0 \mathcal{F}_L^{0\nu}(t) = \widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_l) \sum_{k \geq 0} \frac{1}{c^{2k}} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3\mathbf{y} |\widetilde{\mathbf{y}}|^B \widetilde{\Delta}^{-k}(\widehat{y}_l) \partial_0 \overline{\tau}^{0\nu}(\mathbf{y}, t). \quad (\text{II.4.5.80})$$

We can replace  $\partial_0 \overline{\tau}^{0\nu}$  by  $-\partial_i \overline{\tau}^{i\nu}$  thanks to the conservation equation of the pseudo-tensor. After integrating by part we get

$$\begin{aligned} & \widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_l) \sum_{k \geq 0} \frac{1}{c^{2k}} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3\mathbf{y} \partial_i(|\widetilde{\mathbf{y}}|^B) \widetilde{\Delta}^{-k}(\widehat{y}_l) \overline{\tau}^{i\nu}(\mathbf{y}, t) \\ & + \widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_l) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{c^{2k}} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3\mathbf{y} |\widetilde{\mathbf{y}}|^B \partial_i(\widetilde{\Delta}^{-k}(\widehat{y}_l)) \overline{\tau}^{i\nu}(\mathbf{y}, t). \end{aligned} \quad (\text{II.4.5.81})$$

The same STF formula as used in Eq. (II.4.5.78) enables one to transform the second term of Eq. (II.4.5.81) so that, at the end, we get the definitive result :



$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}^{-n}(\hat{x}_L)\partial_0\mathcal{F}_L^{0\nu}(t) &= \widetilde{\Delta}^{-n}(\hat{x}_L)\sum_{k\geq 0}\frac{1}{c^{2k}}\text{FP}_{\mathbb{B}=0}\int d^3\mathbf{y}\partial_i(|\tilde{\mathbf{y}}|^B)\widetilde{\Delta}^{-k}(\hat{y}_L)\overline{\tau}^{i\nu(2k)}(\mathbf{y},t) \\ &+l\widetilde{\Delta}^{-n}(\hat{x}_{iL-1})\mathcal{F}_{L-1}^{i\nu}(t)+\frac{\widetilde{\Delta}^{-n}(\hat{x}_L)}{c^2(2l+3)}\mathcal{F}_{iL}^{(2)i\nu}(t). \end{aligned} \quad (\text{II.4.5.82})$$

We can, now, investigate the case of the first term in Eq. (II.4.5.79), which is a little bit more complicated since it involves a retarded integral,

$$\widetilde{\Delta}^{-n}(\hat{x}_L)\partial_0\mathcal{R}_L^{0\nu}(t)=\widetilde{\Delta}^{-n}(\hat{x}_L)\text{FP}_{\mathbb{B}=0}\int d^3\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{y}}|^B\hat{y}_L\int_1^\infty dz^i\gamma_l(z)\mathcal{M}(\partial_0\tau^{0\nu})(\mathbf{y},t-z|\mathbf{y}|/c), \quad (\text{II.4.5.83})$$

where the function  $\gamma_l(z)$  is given by Eq. (II.4.2.29) (for simplicity's sake we do not write the overline indicating the post-Newtonian expansion). We do the replacement of  $\partial_0\tau^{0\nu}$  into  $-\partial_i\tau^{i\nu}$ . Before integrating by part, we better have to notice that the partial derivative  $\partial_i$  acts on  $\tau^{i\nu}$  which is then evaluated at the event  $(\mathbf{y},t-z|\mathbf{y}|/c)$ ; we must be careful about the space dependence of the time variable  $t-z|\mathbf{y}|/c$ . The last equation then becomes

$$\begin{aligned} &-\widetilde{\Delta}^{-n}(\hat{x}_L)\text{FP}_{\mathbb{B}=0}\int d^3\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{y}}|^B\hat{y}_L\partial_i\left(\int_1^\infty dz^i\gamma_l(z)\mathcal{M}(\tau^{i\nu})(\mathbf{y},t-z|\mathbf{y}|/c)\right) \\ &-\widetilde{\Delta}^{-n}(\hat{x}_L)\text{FP}_{\mathbb{B}=0}\int d^3\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{y}}|^B\hat{y}_L n_i\int_1^\infty dz^i\frac{z}{c}\gamma_l(z)\mathcal{M}(\tau^{i\nu})(\mathbf{y},t-z|\mathbf{y}|/c). \end{aligned} \quad (\text{II.4.5.84})$$

In this way, the first term can be integrated by part straightforwardly, in terms of  $d^3\mathbf{y}$  integration, showing up a  $\partial_i(|\tilde{\mathbf{y}}|^B)$  term and a  $\partial_i(\hat{y}_L)$  term. The second term will also be integrated by part, in terms of  $dz^i$  integration, using the fact  $\frac{d}{dz}[\gamma_{l+1}(z)]=- (2l+3)z\gamma_l(z)$ ; so we have

$$\begin{aligned} &\widetilde{\Delta}^{-n}(\hat{x}_L)\text{FP}_{\mathbb{B}=0}\int d^3\mathbf{y}\partial_i(|\tilde{\mathbf{y}}|^B)\hat{y}_L\int_1^\infty dz^i\gamma_l(z)\mathcal{M}(\tau^{i\nu})(\mathbf{y},t-z|\mathbf{y}|/c) \\ &+\widetilde{\Delta}^{-n}(\hat{x}_L)\text{FP}_{\mathbb{B}=0}\int d^3\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{y}}|^B\partial_i(\hat{y}_L)\int_1^\infty dz^i\gamma_l(z)\mathcal{M}(\tau^{i\nu})(\mathbf{y},t-z|\mathbf{y}|/c) \\ &+\frac{\widetilde{\Delta}^{-n}(\hat{x}_L)}{c^2(2l+3)}\text{FP}_{\mathbb{B}=0}\int d^3\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{y}}|^B\hat{y}_L y_i\int_1^\infty dz^i\gamma_{l+1}(z)\mathcal{M}(\tau^{i\nu})(\mathbf{y},t-z|\mathbf{y}|/c). \end{aligned} \quad (\text{II.4.5.85})$$

The sum of these three terms can be transformed so that the function  $\mathcal{R}_L^{i\nu}$  shows up. Since for any STF tensor  $\hat{T}_L\partial_i(\hat{y}_L)=l\hat{T}_{iL-1}\hat{y}_{L-1}$  and  $\hat{T}_L\hat{y}_L y_i=\hat{T}_L\hat{y}_{iL}+\frac{l}{2l+1}\hat{T}_{iL-1}\hat{y}_{L-1}|\mathbf{y}|^2$ , and keeping in mind that all the multi-indices  $L$  will have to be summed, we can write

$$\begin{aligned} &\widetilde{\Delta}^{-n}(\hat{x}_L)\text{FP}_{\mathbb{B}=0}\int d^3\mathbf{y}\partial_i(|\tilde{\mathbf{y}}|^B)\hat{y}_L\int_1^\infty dz^i\gamma_l(z)\mathcal{M}(\tau^{i\nu})(\mathbf{y},t-z|\mathbf{y}|/c) \\ &+l\widetilde{\Delta}^{-n}(\hat{x}_{iL-1})\text{FP}_{\mathbb{B}=0}\int d^3\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{y}}|^B\hat{y}_{L-1}\int_1^\infty dz^i\gamma_l(z)\mathcal{M}(\tau^{i\nu})(\mathbf{y},t-z|\mathbf{y}|/c) \end{aligned} \quad (\text{II.4.5.86})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_L)}{c^2(2l+3)} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3\mathbf{y} |\widetilde{\mathbf{y}}|^B \widehat{y}_{iL} \int_1^\infty dz^i \gamma_{l+1}(z) \mathcal{M}(\tau^{i\nu})^{(2)}(\mathbf{y}, t - z|\mathbf{y}|/c) \\
& + \frac{l\widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_{iL-1})}{c^2(2l+1)(2l+3)} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3\mathbf{y} |\widetilde{\mathbf{y}}|^B |\mathbf{y}|^2 \widehat{y}_{L-1} \int_1^\infty dz^i \gamma_{l+1}(z) \mathcal{M}(\tau^{i\nu})^{(2)}(\mathbf{y}, t - z|\mathbf{y}|/c).
\end{aligned}$$

An interesting relation between  $\gamma_l$ -functions :  $\frac{d^2}{dz^2}[\gamma_{l+1}(z)] = (2l+1)(2l+3)[\gamma_{l-1}(z) - \gamma_l(z)]$ , after integrating by part the last integral, in terms of  $dz^i$  integration, allows us to get the more explicit form :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_L) \partial_0 \mathcal{R}_L^{0\nu}(t) & = \widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_L) \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3\mathbf{y} \partial_i(|\widetilde{\mathbf{y}}|^B) \widehat{y}_L \int_1^\infty dz^i \gamma_l(z) \mathcal{M}(\tau^{i\nu})(\mathbf{y}, t - z|\mathbf{y}|/c) \\
& + l \widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_{iL-1}) \mathcal{R}_{L-1}^{i\nu}(t) + \frac{\widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_L)}{c^2(2l+3)} \mathcal{R}_{iL}^{i\nu}(t). \tag{II.4.5.87}
\end{aligned}$$

Summing up Eqs. (II.4.5.82) and (II.4.5.87) we obtain

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \partial_0 B_L^{0\nu}{}^{(2n)}(t) \widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_L) & = \frac{4G}{c^4} \sum_{l, n \geq 0} \frac{2^l (-)^l}{(2l+1)!} \widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_L) \left[ \sum_{k \geq 0} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3\mathbf{y} \partial_i(|\widetilde{\mathbf{y}}|^B) \widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{y}_L) \frac{\overline{\tau}^{i\nu}(\mathbf{y}, t)}{c^{2n+2k+2l+1}} \right. \\
& \left. + \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3\mathbf{y} \partial_i(|\widetilde{\mathbf{y}}|^B) \widehat{y}_L \int_1^\infty dz^i \gamma_l(z) \frac{\mathcal{M}(\tau^{i\nu})^{(2n+2l+1)}}{c^{2n+2l+1}}(\mathbf{y}, t - z|\mathbf{y}|/c) \right] \\
& - \sum_{n, l \geq 0} \frac{1}{c^{2n}} \left\{ \frac{1}{2l+3} B_L^{i\nu}{}^{(2n)}(t) \widetilde{\Delta}^{-n+1}(\widehat{x}_{iL}) + l B_{iL-1}^{i\nu}{}^{(2n)}(t) \widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_{L-1}) \right\}. \tag{II.4.5.88}
\end{aligned}$$

The last line cancels out the terms coming from Eq. (II.4.5.78).

We can therefore write down the result for the divergence of  $\overline{h}^{\mu\nu}$  which, at this stage, depends only on terms with integrals of  $\partial_i(|\widetilde{\mathbf{y}}|^B)$  and having the spatial structure given by  $\widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_L)$ . After summing Eqs. (II.4.5.76), (II.4.5.78) and (II.4.5.88) we get

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \overline{h}^{\mu\nu} & = \tag{II.4.5.89} \\
& - \frac{4G}{c^4} \sum_{n, l, k \geq 0} \frac{(-)^l}{l!} \frac{\widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_L)}{c^{2k+2n}} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} d^3\mathbf{y} \partial_i(|\widetilde{\mathbf{y}}|^B) \widetilde{\Delta}^{-k}(\widehat{\partial}_L(|\mathbf{y}|^{-1})) \mathcal{M}(\overline{\tau}^{i\nu})^{(2n+2k)}(\mathbf{y}, t) \\
& + \frac{4G}{c^4} \sum_{n, l, k \geq 0} \frac{2^l (-)^l}{(2l+1)!} \frac{\widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_L)}{c^{2n+2k+2l+1}} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} d^3\mathbf{y} \partial_i(|\widetilde{\mathbf{y}}|^B) \widetilde{\Delta}^{-k}(\widehat{y}_L) \mathcal{M}(\overline{\tau}^{i\nu})^{(2n+2k+2l+1)}(\mathbf{y}, t) \\
& + \frac{4G}{c^4} \sum_{n, l \geq 0} \frac{2^l (-)^l}{(2l+1)!} \frac{\widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_L)}{c^{2n+2l+1}} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3\mathbf{y} \partial_i(|\widetilde{\mathbf{y}}|^B) \widehat{y}_L \int_1^\infty dz^i \gamma_l(z) \mathcal{M}(\tau^{i\nu})^{(2n+2l+1)}(\mathbf{y}, t - z|\mathbf{y}|/c).
\end{aligned}$$

In the second term we have used the fact that the integral depends only on the values for which  $|\mathbf{y}| > \mathcal{R}$  to write  $\overline{\tau}^{i\nu} = \mathcal{M}(\overline{\tau}^{i\nu})$  on that domain. The last term of Eq. (II.4.5.89) depends on a retarded integral of the multipolar post-Minkowskian expansion  $\mathcal{M}(\tau^{i\nu})$ . By integrating by part the integral over  $z$  one can transform this last term into

$$\begin{aligned}
& \frac{4G}{c^4} \sum_{l,n \geq 0} \frac{2^l (-)^l}{(2l+1)!} \widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_l) \\
& \quad \times \sum_{p \geq 0} \frac{1}{c^{2n-p+l}} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int_{|\mathbf{y}| < \mathcal{R}} d^3 \mathbf{y} \partial_i (|\widetilde{\mathbf{y}}|^B) \widehat{y}_l |\mathbf{y}|^{-p-l-1} \overset{(p+l)}{\gamma}_l(1) \overset{(2n-p+l)}{\mathcal{M}}(\tau^{i\nu})(\mathbf{y}, t - |\mathbf{y}|/c).
\end{aligned} \tag{II.4.5.90}$$

The superscript  $(p+l)$  on the  $\gamma_l$ -function refers to the  $z$ -differentiation. It is straightforward to show, using the fact that  $\overset{(l)}{\gamma}_l(z) = (-)^{l+1} (2l+1)!! P_l(z)$  is directly related to the Legendre polynomial, that

$$\overset{(p+l)}{\gamma}_l(1) = (-)^{l+1} \frac{(2l+1)!! (l+p)!}{2^p p! (l-p)!}. \tag{II.4.5.91}$$

Since  $\mathcal{M}(\tau^{i\nu})$  is singular at the origin (but regular at infinity), and because of the explicit factor  $B$  brought about by the derivative  $\partial_i (|\widetilde{\mathbf{y}}|^B)$ , the integral in Eq. (II.4.5.90) ranges over  $|\mathbf{y}| < \mathcal{R}$  (and even  $|\mathbf{y}| < \epsilon$  where  $\epsilon$  is an arbitrary small number). We can then expand  $\mathcal{M}(\tau^{i\nu})(\mathbf{y}, t - |\mathbf{y}|/c)$  when  $c \rightarrow +\infty$ . Furthermore we can change the integration over  $|\mathbf{y}| < \mathcal{R}$  into an integration over  $|\mathbf{y}| > \mathcal{R}$  by simply changing the sign in front of the integral. Indeed, this comes from a technical lemma<sup>7</sup>, which plays an important role in Refs. [13, 11]; see before Eq. (II.4.8.156) in Appendix 4.8. Thus,

$$\begin{aligned}
& -\frac{4G}{c^4} \sum_{n,l,k \geq 0} \frac{2^l (-)^l}{(2l+1)!} \widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_l) \\
& \quad \times \sum_{p \geq 0} \frac{1}{c^{2n-p+l+k}} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} d^3 \mathbf{y} \partial_i (|\widetilde{\mathbf{y}}|^B) \widehat{n}_l \frac{(-)^k}{k!} |\mathbf{y}|^{k-p-1} \overset{(p+l)}{\gamma}_l(1) \overset{(2n-p+l+k)}{\mathcal{M}}(\tau^{i\nu})(\mathbf{y}, t).
\end{aligned} \tag{II.4.5.92}$$

By changing the label  $k$  into  $2k+p-l$  and  $2k+1+p-l$ , in order to cover odd and even numbers, we are able to write the previous expression in terms of some sums of real numbers indexed by  $p$ , i.e.

$$-\frac{4G}{c^4} \sum_{n,l,k \geq 0} \frac{2^l (-)^l}{(2l+1)!} \widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_l) \left\{ \sum_{p=0}^l \frac{(-1)^{p+l} \overset{(p+l)}{\gamma}_l(1)}{(p-l+2k)!} \right\}$$

<sup>7</sup>We want to prove that the radial integral  $\int_0^{+\infty} d|\mathbf{y}| |\mathbf{y}|^{B+a} (\ln |\mathbf{y}|)^p$  is zero by analytic continuation ( $\forall B \in \mathbb{C}$ ). First we can get rid of the logarithms by considering some repeated differentiations with respect to  $B$ ; thus we need only to consider the simpler integral  $\int_0^{+\infty} d|\mathbf{y}| |\mathbf{y}|^{B+a}$ . We split the integral into a near-zone integral  $\int_0^{\mathcal{R}} d|\mathbf{y}| |\mathbf{y}|^{B+a}$  and a far-zone one  $\int_{\mathcal{R}}^{+\infty} d|\mathbf{y}| |\mathbf{y}|^{B+a}$ , where  $\mathcal{R}$  is some constant radius. When  $\Re(B)$  is a large enough positive number, the value of the near-zone integral is  $\mathcal{R}^{B+a+1}/(B+a+1)$ , while when  $\Re(B)$  is a large negative number, the far-zone integral reads the opposite,  $-\mathcal{R}^{B+a+1}/(B+a+1)$ . Both obtained values represent the unique analytic continuations of the near-zone and far-zone integrals for any  $B \in \mathbb{C}$  except  $-a-1$ . The complete integral  $\int_0^{+\infty} d|\mathbf{y}| |\mathbf{y}|^{B+b}$  is equal to the sum of these analytic continuations, and is therefore identically zero ( $\forall B \in \mathbb{C}$ , including the value  $-a-1$ ).

$$\begin{aligned}
& \times \text{FP}_{\text{B}=0} \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} d^3\mathbf{y} \partial_i (|\tilde{\mathbf{y}}|^B) \hat{n}_l |\mathbf{y}|^{2k-l-1} \mathcal{M}(\tau^{i\nu})^{(2n+2k)}(\mathbf{y}, t) \\
& + \frac{4G}{c^4} \sum_{n,l,k \geq 0} \frac{2^l (-)^l}{(2l+1)!} \widetilde{\Delta}^{-n}(\hat{x}_l) \left\{ \sum_{p=0}^l \frac{(-1)^{p+l} \gamma_l^{(p+l)}(1)}{(p-l+2k+1)!} \right\} \\
& \times \text{FP}_{\text{B}=0} \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} d^3\mathbf{y} \partial_i (|\tilde{\mathbf{y}}|^B) \hat{n}_l |\mathbf{y}|^{2k-l} \mathcal{M}(\tau^{i\nu})^{(2n+2k+1)}(\mathbf{y}, t). \quad (\text{II.4.5.93})
\end{aligned}$$

The sums in curly brackets are found to be explicit expressions depending on  $k$  and  $l$  and some factorial combinations :

$$\forall k \geq l+1, \quad \sum_{p=0}^l \frac{(-1)^{p+l} \gamma_l^{(p+l)}(1)}{(p-l+2k)!} = -\frac{(2l+1)!!}{2^k k! (2k-2l-1)!!}, \quad (\text{II.4.5.94})$$

$$\forall k \geq l, \quad \sum_{p=0}^l \frac{(-1)^{p+l} \gamma_l^{(p+l)}(1)}{(p-l+2k+1)!} = -\frac{(2l+1)!!}{2^{k-l} (k-l)! (2k+1)!!}, \quad (\text{II.4.5.95})$$

$$\forall k \leq l, \quad \sum_{p=0}^l \frac{(-1)^{p+l} \gamma_l^{(p+l)}(1)}{(p-l+2k)!} = (-1)^{k+l+1} \frac{(2l+1)!! (2l-2k-1)!!}{2^k k!}, \quad (\text{II.4.5.96})$$

$$\forall k \leq l-1, \quad \sum_{p=0}^l \frac{(-1)^{p+l} \gamma_l^{(p+l)}(1)}{(p-l+2k+1)!} = 0. \quad (\text{II.4.5.97})$$

Thanks to these formulas, one can transform Eq. (II.4.5.93) into

$$\begin{aligned}
& \frac{4G}{c^4} \sum_{n,l \geq 0} \sum_{k \geq l+1} \frac{(-)^l}{l!} \frac{1}{2^k k! (2k-2l-1)!!} \widetilde{\Delta}^{-n}(\hat{x}_l) \\
& \times \text{FP}_{\text{B}=0} \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} d^3\mathbf{y} \partial_i (|\tilde{\mathbf{y}}|^B) \hat{n}_l |\mathbf{y}|^{2k-l-1} \mathcal{M}(\tau^{i\nu})^{(2n+2k)}(\mathbf{y}, t) \\
& + \frac{4G}{c^4} \sum_{n,l \geq 0} \sum_{k \leq l} \frac{(-)^k (2l-2k-1)!!}{l! 2^k k!} \widetilde{\Delta}^{-n}(\hat{x}_l) \\
& \times \text{FP}_{\text{B}=0} \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} d^3\mathbf{y} \partial_i (|\tilde{\mathbf{y}}|^B) \hat{n}_l |\mathbf{y}|^{2k-l-1} \mathcal{M}(\tau^{i\nu})^{(2n+2k)}(\mathbf{y}, t) \\
& - \frac{4G}{c^4} \sum_{n,l \geq 0} \sum_{k \geq l} \frac{(-)^l}{l!} \frac{1}{2^{k-l} (2k+1)!! (k-l)!} \widetilde{\Delta}^{-n}(\hat{x}_l) \\
& \times \text{FP}_{\text{B}=0} \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} d^3\mathbf{y} \partial_i (|\tilde{\mathbf{y}}|^B) \hat{n}_l |\mathbf{y}|^{2k-l} \mathcal{M}(\tau^{i\nu})^{(2n+2k+1)}(\mathbf{y}, t). \quad (\text{II.4.5.98})
\end{aligned}$$

In the latter expression we can recognize

$$\forall k \geq l, \quad \widetilde{\Delta}^{-k}(\hat{\partial}_l(|\mathbf{y}|^{-1})) = \frac{1}{(2k-2l-1)!! 2^k k!} \hat{n}_l |\mathbf{y}|^{2k-l-1}, \quad (\text{II.4.5.99})$$

$$\forall k \leq l, \quad \widetilde{\Delta}^{-k}(\widehat{\partial}_l(|\mathbf{y}|^{-1})) = \frac{(-)^{k+l}(2l-2k-1)!!}{2^k k!} \widehat{n}_l |\mathbf{y}|^{2k-l-1}, \quad (\text{II.4.5.100})$$

$$\widetilde{\Delta}^{-k}(\widehat{y}_l) = \frac{(2l+1)!!}{2^k k!(2k+2l+1)!!} \widehat{y}_l |\mathbf{y}|^{2k}, \quad (\text{II.4.5.101})$$

so that we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{4G}{c^4} \sum_{l,n \geq 0} \frac{2^l (-)^l}{(2l+1)!} \widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_l)_{\text{FP}_{\text{B}=0}} \int d^3 \mathbf{y} \partial_i (|\widetilde{\mathbf{y}}|^B) \widehat{y}_l \int_1^\infty dz^i \gamma_i(z) \mathcal{M}(\overline{\tau}^{i\nu})^{(2n+2l+1)}(\mathbf{y}, t - z|\mathbf{y}|/c) \\ &= \frac{4G}{c^4} \sum_{n,l,k \geq 0} \frac{(-)^l}{l!} \widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_l)_{\text{FP}_{\text{B}=0}} \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} d^3 \mathbf{y} \partial_i (|\widetilde{\mathbf{y}}|^B) \widetilde{\Delta}^{-k}(\widehat{\partial}_l(|\mathbf{y}|^{-1})) \mathcal{M}(\overline{\tau}^{i\nu})^{(2n+2k)}(\mathbf{y}, t) \\ & - \frac{4G}{c^4} \sum_{n,l,k \geq 0} \frac{2^l (-)^l}{(2l+1)!} \widetilde{\Delta}^{-n}(\widehat{x}_l)_{\text{FP}_{\text{B}=0}} \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} d^3 \mathbf{y} \partial_i (|\widetilde{\mathbf{y}}|^B) \widetilde{\Delta}^{-k}(\widehat{y}_l) \mathcal{M}(\overline{\tau}^{i\nu})^{(2n+2k+2l+1)}(\mathbf{y}, t). \end{aligned} \quad (\text{II.4.5.102})$$

After replacing Eq. (II.4.5.102) in Eq. (II.4.5.89), at long last we find

$$\partial_\mu \overline{h}^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{II.4.5.103})$$

In this way, we have checked that the post-Newtonian metric, found by matching as a definite functional of the stress-energy pseudo-tensor  $\tau^{\mu\nu}$ , satisfies the harmonic-coordinate condition as a consequence of the conservation of this pseudo-tensor.

## 4.6 Near-zone expansion of the retarded integral

This appendix, provided here for completeness, is an extended, and also somewhat simplified, version of the derivation given in Appendix A of Ref. [7]. We are interested in source functions, say  $\mathcal{M}(\tau)(\mathbf{x}, t)$ , having the form of an exterior multipole-moment decomposition, valid outside the compact-support domain of the source. We employ the same notation as in Section 4.2.1 (except that we do not write the space-time indices) :  $\tau$  denotes the pseudo-tensor of the source ; notably we have  $\mathcal{M}(\tau) = \frac{c^4}{16\pi G} \mathcal{M}(\Lambda)$  where  $\Lambda$  is the gravitational source term. The two basic properties of the function  $\mathcal{M}(\tau)(\mathbf{x}, t)$  are that it is smooth on  $\mathbb{R}^4$  deprived from the spatial origin  $r = 0$  :

$$\mathcal{M}(\tau)(\mathbf{x}, t) \in C^\infty(\mathbb{R}_*^3 \times \mathbb{R}), \quad (\text{II.4.6.104})$$

and that it admits a near-zone expansion, when  $r \rightarrow 0$  (with  $t = \text{const}$ ), having the appropriate structure [cf Eq. (II.4.2.18)] : i.e.,  $\forall N \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{M}(\tau)(\mathbf{x}, t) = \sum \widehat{n}_L r^a (\ln r)^p G_{L,a,p}(t) + \mathcal{O}(r^N), \quad (\text{II.4.6.105})$$

where  $a \in \mathbb{Z}$  with  $a \leq N$  and  $p \in \mathbb{N}$ . Like in Section 4.2.2 we denote with an overline the formal (infinite) near-zone expansion,

$$\overline{\mathcal{M}(\tau)(\mathbf{x}, t)} = \sum \widehat{n}_L r^a (\ln r)^p G_{L,a,p}(t). \quad (\text{II.4.6.106})$$

It is very important to make the distinction between  $\mathcal{M}(\tau)$  and its formal near-zone expansion  $\overline{\mathcal{M}(\tau)}$ . Here we shall investigate the retarded integral of the product  $r^B \mathcal{M}(\tau)(\mathbf{x}, t)$ , where  $B \in \mathbb{C}$ , by means of analytic continuation (we pose  $r_0 = 1$  in this Appendix). For this task we assume at first that the real part of  $B$  is large enough so as to “kill” the divergencies, when  $r \rightarrow 0$ , of the expansion (II.4.6.105), so that the retarded integral is initially well-defined. Therefore, rigorously speaking, we are allowed to do this only if there exists a finite maximal divergency, i.e. some  $a_{\min} \leq a$  in Eq. (II.4.6.105) with finite  $a_{\min} \in \mathbb{Z}$ . We have seen in Section 4.2.1 that such maximal divergency exists at any given post-Minkowskian order  $m$ , but no longer exists for the full post-Minkowskian series because  $a_{\min}(m) \rightarrow -\infty$  when  $m \rightarrow +\infty$ . The consequence is that the analytic continuation is in principle justified only at a given finite post-Minkowskian order. But, as explained in Section 4.2.1, we sum up systematically all the post-Minkowskian results. In this way we are entitled to proceed as we do below ; simply we have to remember that the end result will be *a priori* true only in a sense of formal post-Minkowskian expansions.

We decompose the source term into multipoles according to

$$\mathcal{M}(\tau)(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=0}^{+\infty} \hat{n}_L \sigma_L(r, t), \quad (\text{II.4.6.107})$$

where the  $\sigma_L$ 's are STF functions in  $L = i_1 \cdots i_l$ . The inverse formula is

$$\sigma_L(r, t) = \frac{(2l+1)!!}{l!} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{n}_L \mathcal{M}(\tau)(\mathbf{x}, t), \quad (\text{II.4.6.108})$$

where  $d\Omega$  is the solid-angle element around the unit vector  $n_i = n^i = x^i/r$ . Then the expression of the retarded integral, in a sense of analytic continuation in  $B$ , is given by the following explicit formula, obtained in Ref. [17] [see Eqs. (6.3)-(6.5) there] :

$$\square_{\text{Ret}}^{-1} [r^B \mathcal{M}(\tau)(\mathbf{x}, t)] = \sum_{l=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{t-r} ds \hat{\partial}_L \left\{ \frac{R_L^B\left(\frac{t-r-s}{2}, s\right) - R_L^B\left(\frac{t+r-s}{2}, s\right)}{r} \right\} \quad (\text{II.4.6.109})$$

(we pose  $c = 1$  and  $r_0 = 1$  in this Appendix), where the function  $R_L^B(\rho, s)$  reads

$$R_L^B(\rho, s) = \rho^l \int_0^\rho dx \frac{(\rho-x)^l}{l!} \left(\frac{2}{x}\right)^{l-1} x^B \sigma_L(x, x+s). \quad (\text{II.4.6.110})$$

Following the same procedure as in Eqs. (A6)-(A7) in Ref. [7] we are allowed to re-write the expression (II.4.6.109) into the alternative form

$$\begin{aligned} \square_{\text{Ret}}^{-1} [r^B \mathcal{M}(\tau)(\mathbf{x}, t)] &= \sum_{l=0}^{+\infty} \int_{-r}^r du \hat{\partial}_L \left\{ \frac{1}{r} R_L^B\left(\frac{u+r}{2}, t-u\right) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-)^l}{l!} \hat{\partial}_L \left[ \frac{\mathcal{R}_L^B(t-r) - \mathcal{R}_L^B(t+r)}{2r} \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.4.6.111})$$

The “anti-symmetric” wave is parametrized by  $\mathcal{R}_L^B(t)$  which is related to the function  $R_L^B(\rho, s)$  by

$$\mathcal{R}_L^B(t) = 8\pi(-)^{l+1}l! \int_{-\infty}^t ds R_L^B\left(\frac{t-s}{2}, s\right). \quad (\text{II.4.6.112})$$

Inserting Eq. (II.4.6.110), and performing some change of variables, we obtain

$$\mathcal{R}_L^B(t) = \frac{4\pi l!}{(2l+1)!!} \int_0^{+\infty} dx x^{B+l+2} \int_1^{+\infty} dz \gamma_l(z) \sigma_L(x, t-zx), \quad (\text{II.4.6.113})$$

and, using the relation (II.4.6.108), and considering the variable  $x$  as the norm of  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , we further get

$$\mathcal{R}_L^B(t) = \int d^3\mathbf{x} |\mathbf{x}|^B \hat{x}_L \int_1^{+\infty} dz \gamma_l(z) \mathcal{M}(\tau)(\mathbf{x}, t-z|\mathbf{x}|). \quad (\text{II.4.6.114})$$

In these expressions the function  $\gamma_l(z)$  is defined by

$$\gamma_l(z) = (-)^{l+1} \frac{(2l+1)!!}{2^l l!} (z^2-1)^l, \quad (\text{II.4.6.115})$$

where the particular  $l$ -dependent factor has been chosen in such a way that the integral is normalized to one in the following sense (see Ref. [7]). Considering first that  $l$  is a complex number such that  $-1 < \Re(l) < -1/2$  we can compute the integral of  $\gamma_l(z)$  by means of the Euler  $\Gamma$ -function, with the result

$$\int_1^{+\infty} dz \gamma_l(z) = 2(-)^{l+1} \frac{\Gamma(2l+2)\Gamma(-2l-1)}{\Gamma(l+1)\Gamma(-l)}. \quad (\text{II.4.6.116})$$

The right-hand-side of this equation can be analytically continued to all values  $l \in \mathbb{C}$  except half-integer values, and is found to be equal to one when  $l$  is an integer :

$$\int_1^{+\infty} dz \gamma_l(z) = 1 \quad (l \in \mathbb{N}). \quad (\text{II.4.6.117})$$

Next, let us treat the first term in the right-hand-side of Eq. (II.4.6.111), say

$$J^B(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_{l=0}^{+\infty} \int_{-r}^r du \hat{\partial}_L \left\{ \frac{1}{r} R_L^B\left(\frac{u+r}{2}, t-u\right) \right\}. \quad (\text{II.4.6.118})$$

This term is a particular solution of the d'Alembertian equation  $\square J^B = r^B \mathcal{M}(\tau)$  [since the second term in Eq. (II.4.6.111) is a source-free solution]. We shall prove that the (formal) near-zone expansion of that term, i.e.  $\overline{J^B(\mathbf{x}, t)}$ , is given by the integral of the ‘‘instantaneous’’ potentials acting on the near-zone expansion of the source term, i.e.  $r^B \overline{\mathcal{M}(\tau)(\mathbf{x}, t)}$ . For any of the terms composing the multipolar source  $r^B \overline{\mathcal{M}(\tau)}$  [see Eq. (II.4.6.106)], we first define

$$\Delta^{-1} [\hat{n}_L r^{B+a} (\ln r)^p G_{L,a,p}(t)] = \left( \frac{d}{dB} \right)^p \left[ \frac{\hat{n}_L r^{B+a+2} G_{L,a,p}(t)}{(B+a+2-l)(B+a+3+l)} \right] \quad (\text{II.4.6.119})$$

(this being justified by the fact that one gets an identity by applying  $\Delta$  on both sides). Clearly the previous formula can be iterated and so we can define the operator  $\Delta^{-k-1} \equiv (\Delta^{-1})^{k+1}$ , applied on each separate terms in Eq. (II.4.6.106) and therefore on the complete

series  $r^B \overline{\mathcal{M}(\tau)(\mathbf{x}, t)}$ . From this we obtain the instantaneous-potentials operator, as the formal expansion series

$$\mathcal{I}^{-1} \left[ r^B \overline{\mathcal{M}(\tau)(\mathbf{x}, t)} \right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{\partial}{c \partial t} \right)^{2k} \Delta^{-k-1} \left[ r^B \overline{\mathcal{M}(\tau)(\mathbf{x}, t)} \right]. \quad (\text{II.4.6.120})$$

Notice that this operator  $\mathcal{I}^{-1}$  contains only some even powers of  $1/c$ . An important point for our purpose is that  $\mathcal{I}^{-1} \left[ r^B \overline{\mathcal{M}(\tau)} \right]$  is *proportional* to the regularization factor  $r^B$ ; and it evidently satisfies  $\square(\mathcal{I}^{-1} \left[ r^B \overline{\mathcal{M}(\tau)} \right]) = r^B \overline{\mathcal{M}(\tau)}$ . On the other hand, we have also the equation  $\square \overline{J^B} = r^B \overline{\mathcal{M}(\tau)}$ , which comes from applying the overline operation onto  $\square J^B = r^B \mathcal{M}(\tau)$ . This shows that  $r^B \overline{\mathcal{M}(\tau)}$  and  $\overline{J^B}$  must differ by a solution of the homogeneous equation, hence there should exist some functions  $C_L^B(t)$  and  $D_L^B(t)$  such that

$$\overline{J^B}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{I}^{-1} \left[ r^B \overline{\mathcal{M}(\tau)(\mathbf{x}, t)} \right] + \sum_{l=0}^{+\infty} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{C_L^B(t-r) + D_L^B(t+r)}{r} \right\}. \quad (\text{II.4.6.121})$$

Note that the dependence on  $B$  of the second term is “hidden” inside the functions  $C_L^B$  and  $D_L^B$ . Let us now prove that in fact the latter functions must be zero. This is a simple consequence of the expression (II.4.6.110) for the function  $R_L^B(\rho, s)$ , from which we deduce that the expansion when  $\rho \rightarrow 0$  of this function is proportional to  $\rho^B$ ; in fact, it has the structure  $R_L^B(\rho, s) \sim \sum \rho^{B+b} (\ln \rho)^q$ , when  $\rho \rightarrow 0$ . From this knowledge, we easily find that the near-zone expansion of  $\overline{J^B}$  is proportional to the factor  $r^B$ . Since, as we have remarked, this is also the case of the first term in Eq. (II.4.6.121),  $\mathcal{I}^{-1} \left[ r^B \overline{\mathcal{M}(\tau)} \right]$ , and since it is impossible that (the near-zone expansion of) the second term in Eq. (II.4.6.121) be itself proportional to  $r^B$  – the  $B$ ’s affect only the functions  $C_L^B$  and  $D_L^B$  but not the structure of the near-zone expansion – we conclude that  $C_L^B$  and  $D_L^B$  are identically zero. Hence we have proved

$$\overline{J^B}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{I}^{-1} \left[ r^B \overline{\mathcal{M}(\tau)(\mathbf{x}, t)} \right]. \quad (\text{II.4.6.122})$$

It suffices now to apply the overline operation (i.e., to take the near-zone expansion) onto Eq. (II.4.6.111) to get our final result,

$$\overline{\square_{\text{Ret}}^{-1} \left[ r^B \overline{\mathcal{M}(\tau)(\mathbf{x}, t)} \right]} = \mathcal{I}^{-1} \left[ r^B \overline{\mathcal{M}(\tau)(\mathbf{x}, t)} \right] - \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-)^l}{l!} \hat{\partial}_L \left[ \frac{\mathcal{R}_L^B(t-r) - \mathcal{R}_L^B(t+r)}{2r} \right], \quad (\text{II.4.6.123})$$

where we recall that the function  $\mathcal{R}_L^B(t)$  has been given by Eq. (II.4.6.114). [The formula used Section 4.2.2 results from applying the finite part operation  $\text{FP}_{B=0}$ .]

## 4.7 The generalized Poisson operator

In Appendix 4.6 we have been interested in source functions of the multipolar type  $\mathcal{M}(\tau)(\mathbf{x}, t)$ , which are smooth in  $\mathbb{R}_*^3 \times \mathbb{R}$  and possess a *near-zone* expansion of the type (II.4.6.106). In the present Appendix 4.7 we consider some source functions of the post-Newtonian type  $\overline{\tau}(\mathbf{x}, t)$ . These are supposed to be smooth all over  $\mathbb{R}^4$ ,

$$\overline{\tau}(\mathbf{x}, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^4), \quad (\text{II.4.7.124})$$



and to admit a *far-zone* expansion with structure ( $\forall N \in \mathbb{N}$ )

$$\bar{\tau}(\mathbf{x}, t) = \sum \hat{n}_L r^a (\ln r)^p G_{L,a,p}(t) + S_N(\mathbf{x}, t), \quad (\text{II.4.7.125})$$

where  $a \in \mathbb{Z}$ , with  $-N \leq a$ , and  $p \in \mathbb{N}$ . The remainder-term is  $S_N(\mathbf{x}, t) = \mathcal{O}(1/r^N)$  when  $r \rightarrow +\infty$  with  $t = \text{const}$ .

Let us consider some  $B \in \mathbb{C}$ , and a radius  $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$  with  $\mathcal{R} > 0$ . We define two integrals, corresponding to a split of the Poisson integral between “near-zone” and “far-zone” contributions, separated by the radius  $\mathcal{R}$  :

$$I_{<}^B(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{y}| < \mathcal{R}} \frac{d^3 \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \bar{\tau}(\mathbf{y}, t), \quad (\text{II.4.7.126})$$

$$I_{>}^B(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} \frac{d^3 \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \bar{\tau}(\mathbf{y}, t). \quad (\text{II.4.7.127})$$

The  $B$ -dependent regularization factor is  $|\tilde{\mathbf{y}}|^B \equiv (|\mathbf{y}|/r_0)^B$ . It is easily checked that the near-zone integral  $I_{<}^B(\mathbf{x}, t)$  is well-defined (convergent) when  $\Re(B) > -3$  and that the far-zone one  $I_{>}^B(\mathbf{x}, t)$  is well-defined when  $\Re(B) < -a_{\max} - 2$ , where  $a_{\max}$  is the maximal power of  $r$  in the expansion (II.4.7.125). So we have to assume at this stage the existence of some maximal divergency corresponding to some power  $a_{\max}$ . Strictly speaking, our present investigation is thus valid only at some finite post-Newtonian order. But, *in fine*, we sum up the results, and we consider the complete post-Newtonian series to hold true in a formal sense.

We want first to check that the integrals (II.4.7.126) and (II.4.7.127) can be analytically continued down to a neighbourhood of  $B = 0$  (except at the value  $B = 0$  itself), let say in the open domain  $\mathcal{B}_\epsilon$  defined by  $0 < |B| < \epsilon$  (where  $\epsilon < 1$ ). There is no problem with the near-zone integral  $I_{<}^B(\mathbf{x}, t)$  which is clearly convergent all over  $\mathcal{B}_\epsilon$  and even at the value  $B = 0$ . Concerning the far-zone integral  $I_{>}^B(\mathbf{x}, t)$  we replace the function  $\bar{\tau}$  inside the integrand by its far-zone expansion (II.4.7.125) :

$$I_{>}^B(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} \frac{d^3 \mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \left\{ \sum \hat{n}_L(\mathbf{y}) |\mathbf{y}|^a (\ln |\mathbf{y}|)^p G_{L,a,p}(t) + S_N(\mathbf{y}, t) \right\}. \quad (\text{II.4.7.128})$$

When  $N$  is large enough the contribution due to the remainder  $S_N$  is convergent all over  $\mathcal{B}_\epsilon$  and at  $B = 0$ , with evidently the value at  $B = 0$  given by

$$\int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} \frac{d^3 \mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} S_N(\mathbf{y}, t) = \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} \frac{d^3 \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} S_N(\mathbf{y}, t) + \mathcal{O}(B). \quad (\text{II.4.7.129})$$

Thus we need only to deal with the other contributions, which consist of a finite sum of terms, say

$$\sum \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} \frac{d^3 \mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \hat{n}_L(\mathbf{y}) |\mathbf{y}|^a (\ln |\mathbf{y}|)^p. \quad (\text{II.4.7.130})$$

Let us suppose that the field point  $\mathbf{x}$  lies inside the far-zone domain, i.e.  $\mathcal{R} < |\mathbf{x}|$ . We distinguish the two cases where  $|\mathbf{y}| < |\mathbf{x}|$  and  $|\mathbf{x}| < |\mathbf{y}|$ . For each of these two cases we substitute into the integrals the appropriate multipolar expansion of the factor  $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$ , for instance  $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} =$

$\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-)^l}{l!} y^L \hat{\partial}_L \frac{1}{|\mathbf{x}|}$  when  $|\mathbf{y}| < |\mathbf{x}|$ . This leads, after performing the integration over the angles, to some series of radial integrals having the structure (ignoring some unimportant factors)

$$\sum \frac{\hat{x}_L}{|\mathbf{x}|^{2l+1}} \int_{\mathcal{R}}^{|\mathbf{x}|} d|\mathbf{y}| |\mathbf{y}|^{B+a+l+2} (\ln |\mathbf{y}|)^p + \sum \hat{x}_L \int_{|\mathbf{x}|}^{+\infty} d|\mathbf{y}| |\mathbf{y}|^{B+a-l+1} (\ln |\mathbf{y}|)^p. \quad (\text{II.4.7.131})$$

When  $|\mathbf{x}| < \mathcal{R}$  the reasoning is the same but simply one ignores the first term in Eq. (II.4.7.131) and take  $\mathcal{R}$  as lower bound in the second term. Computing each of these integrals we find

$$\sum \frac{\hat{x}_L}{|\mathbf{x}|^{2l+1}} \left( \frac{d}{dB} \right)^p \left[ \frac{|\mathbf{x}|^{B+a+l+3} - \mathcal{R}^{B+a+l+3}}{B+a+l+3} \right] + \sum \hat{x}_L \left( \frac{d}{dB} \right)^p \left[ \frac{-|\mathbf{x}|^{B+a-l+2}}{B+a-l+2} \right]. \quad (\text{II.4.7.132})$$

Each of these terms clearly admits an analytic continuation for any  $B \in \mathcal{B}_\epsilon$  and in fact for any  $B \in \mathbb{C}$  except at integer values. Furthermore we see from that expression that the function will admit a Laurent expansion when  $B \rightarrow 0$ , with in general some multiple poles [coming from the differentiation  $(d/dB)^p$  of simple poles  $\sim 1/B$ ]. Hence our statement.

It is clear that the Laplacians of the two integrals  $I_{<}^B$  and  $I_{>}^B$  satisfy, in the domains of the complex plane where these functions were initially valid :

$$\Re(B) > -3 \implies \Delta I_{<}^B(\mathbf{x}, t) = Y(\mathcal{R} - |\mathbf{x}|) |\tilde{\mathbf{x}}|^B \bar{\tau}(\mathbf{x}, t), \quad (\text{II.4.7.133})$$

$$\Re(B) < -a_{\max} - 2 \implies \Delta I_{>}^B(\mathbf{x}, t) = Y(|\mathbf{x}| - \mathcal{R}) |\tilde{\mathbf{x}}|^B \bar{\tau}(\mathbf{x}, t), \quad (\text{II.4.7.134})$$

where  $Y$  denotes the Heaviside step-function. Therefore, if we *define* for any  $B \in \mathcal{B}_\epsilon$  the object

$$I^B(\mathbf{x}, t) = I_{<}^B(\mathbf{x}, t) + \text{analytic continuation}_{B \in \mathcal{B}_\epsilon} \left\{ I_{>}^B(\mathbf{x}, t) \right\}, \quad (\text{II.4.7.135})$$

we find that it necessarily satisfies, for any  $B \in \mathcal{B}_\epsilon$ , the  $B$ -dependent Poisson equation

$$\Delta I^B(\mathbf{x}, t) = |\tilde{\mathbf{x}}|^B \bar{\tau}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{II.4.7.136})$$

On the other hand, we have learned from Eq. (II.4.7.132) that  $I^B$  admits when  $B \rightarrow 0$  a Laurent expansion involving (in general) simple and multiple poles. Now the key idea, as we shall prove, is that the *finite part*, or coefficient of the zero-th power of  $B$  in the latter Laurent expansion, represents a particular solution of the Poisson equation that we want to solve. Let the Laurent expansion of  $I^B$  be

$$I^B(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=k_{\min}}^{+\infty} i_k(\mathbf{x}, t) B^k, \quad (\text{II.4.7.137})$$

where  $k_{\min} \in \mathbb{Z}$ , and where the coefficients  $i_k$  depend on the field point  $(\mathbf{x}, t)$ . By applying the Laplacian operator onto both sides of Eq. (II.4.7.137), and using the result (II.4.7.136) together with the Taylor expansion of the regularization factor  $|\tilde{\mathbf{x}}|^B$ , we arrive at

$$k_{\min} \leq k \leq -1 \implies \Delta i_k = 0, \quad (\text{II.4.7.138})$$

$$k \geq 0 \implies \Delta i_k = \frac{(\ln |\tilde{\mathbf{x}}|)^k}{k!} \bar{\tau}. \quad (\text{II.4.7.139})$$

Thus, the case  $k = 0$  shows that the finite-part coefficient in the expansion (II.4.7.137), namely  $i_0$ , is a particular solution of the required equation :  $\Delta i_0 = \bar{\tau}$ . We shall now forget about the intermediate name  $i_0$ , and denote, from now on, the latter solution by  $\widetilde{\Delta^{-1}\bar{\tau}} \equiv i_0$ , or, in more explicit terms,

$$\widetilde{\Delta^{-1}\bar{\tau}}(\mathbf{x}, t) = \text{FP}_{B=0} \Delta^{-1} \left[ |\tilde{\mathbf{x}}|^B \bar{\tau}(\mathbf{x}, t) \right], \quad (\text{II.4.7.140})$$

where  $\Delta^{-1}$  refers to the standard Poisson integral, and the finite-part symbol  $\text{FP}_{B=0}$  means the previous operations of considering the Laurent expansion when  $B \rightarrow 0$ , and picking up the finite-part coefficient. Thus, we have proved that  $\Delta[\widetilde{\Delta^{-1}\bar{\tau}}] = \bar{\tau}$ , so the generalized inverse Poisson operator  $\widetilde{\Delta^{-1}}$  defines a particular solution of the Poisson equation, which has, by construction, none of the problems of divergencies of Poisson integrals which have so much plagued the standard post-Newtonian approximation [35, 37, 36, 2, 58, 59, 80, 81, 32, 90, 27, 28].

Finally let us prove that our generalized solution  $\widetilde{\Delta^{-1}\bar{\tau}}$  owns the same properties (II.4.7.124)-(II.4.7.125) as the corresponding source  $\bar{\tau}$ . This verification is important because it will allow us to iterate any number of times the operator  $\widetilde{\Delta^{-1}}$ , and to obtain the post-Newtonian expansion up to any post-Newtonian order. The main problem amounts to prove that  $\widetilde{\Delta^{-1}\bar{\tau}}$  admits the same type of expansion at infinity  $|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$  as in Eq. (II.4.7.125). To do this we consider again the same split into near-zone and far-zone contributions :  $\widetilde{\Delta^{-1}\bar{\tau}} = I_{<} + I_{>}$ , where

$$I_{<}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \text{FP}_{B=0} \int_{|\mathbf{y}| < \mathcal{R}} \frac{d^3\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \bar{\tau}(\mathbf{y}, t), \quad (\text{II.4.7.141})$$

$$I_{>}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \text{FP}_{B=0} \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} \frac{d^3\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \bar{\tau}(\mathbf{y}, t). \quad (\text{II.4.7.142})$$

The near-zone integral admits an expansion at infinity which is of the required type. Indeed, because the integrand is of compact support,  $|\mathbf{y}| < \mathcal{R}$ , we can replace in it the factor  $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$  by its expansion  $\sum \frac{(-)^l}{l!} y^L \hat{\partial}_L \frac{1}{|\mathbf{x}|}$  and integrate term by term. So we have,  $\forall N \in \mathbb{N}$ ,

$$I_{<}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(-)^l}{l!} \hat{\partial}_L \left( \frac{1}{r} \right) \text{FP}_{B=0} \int_{|\mathbf{y}| < \mathcal{R}} d^3\mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B y^L \bar{\tau}(\mathbf{y}, t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^N}\right) \quad (\text{II.4.7.143})$$

The right-hand-side has indeed the same structure as in Eq. (II.4.7.125). The treatment of the far-zone integral is more delicate. We proceed in a way similar to what was done in Eqs. (II.4.7.128)-(II.4.7.132). Namely we replace into it the source  $\bar{\tau}$  by its expansion given by Eq. (II.4.7.125). This yields (the finite part of) Eq. (II.4.7.128), that for convenience we reproduce here :

$$I_{>}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \text{FP}_{B=0} \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} \frac{d^3\mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \left\{ \sum \hat{n}_L(\mathbf{y}) |\mathbf{y}|^a (\ln |\mathbf{y}|)^p G_{L,a,p}(t) + S_N(\mathbf{y}, t) \right\}. \quad (\text{II.4.7.144})$$

There is a contribution of the remainder and a finite sum of terms with known structure. The remainder contribution is simply given by the value at  $B = 0$  which has been written in the right-hand-side of Eq. (II.4.7.129). Let us write this term in the form

$$\int_{|\mathbf{y}|>\mathcal{R}} \frac{d^3\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} S_N(\mathbf{y}, t) = \sum_{l=0}^{N-4} \frac{(-)^l}{l!} \hat{\partial}_L \left( \frac{1}{r} \right) \int_{|\mathbf{y}|>\mathcal{R}} d^3\mathbf{y} y^L S_N(\mathbf{y}, t) + T_{N-2}(\mathbf{x}, t), \quad (\text{II.4.7.145})$$

where we introduced the  $N-4$  first terms of the multipolar expansion of  $\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$  when  $r = |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$ , and where

$$T_{N-2}(\mathbf{x}, t) = \int_{|\mathbf{y}|>\mathcal{R}} d^3\mathbf{y} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} - \sum_{l=0}^{N-4} \frac{(-)^l}{l!} y^L \hat{\partial}_L \left( \frac{1}{r} \right) \right] S_N(\mathbf{y}, t). \quad (\text{II.4.7.146})$$

The maximal order  $N-4$  of the expansion is chosen in such a way that all the terms in Eq. (II.4.7.146) are given by convergent integrals at infinity, owing to the fact that the remainder satisfies  $S_N = \mathcal{O}(1/r^N)$ . Now we prove that  $T_{N-2}$ , defined by Eq. (II.4.7.146), is also a remainder in the sense that  $T_{N-2} = \mathcal{O}(\ln r/r^{N-2})$ . We split  $T_{N-2}$  into two integrals, a near-zone integral  $T_{N-2}^{\text{near}}$  corresponding to the integration range  $|\mathbf{y}| \in ]\mathcal{R}, |\mathbf{x}|[$ , and a far-zone one  $T_{N-2}^{\text{far}}$  corresponding to  $|\mathbf{y}| \in ]|\mathbf{x}|, +\infty[$ . In the near-zone integral we can use the bound

$$\left| \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} - \sum_{l=0}^{N-4} \frac{(-)^l}{l!} y^L \hat{\partial}_L \left( \frac{1}{r} \right) \right| \leq C_N \frac{|\mathbf{y}|^{N-3}}{|\mathbf{x}|^{N-2}}, \quad (\text{II.4.7.147})$$

where  $C_N$  is a constant. On the other hand, because  $S_N = \mathcal{O}(1/r^N)$ , there is also a constant  $A_N$ , depending on the value of  $\mathcal{R}$ , such that the following majoration holds :

$$|S_N(\mathbf{y}, t)| \leq \frac{A_N}{|\mathbf{y}|^N}. \quad (\text{II.4.7.148})$$

Replacing these results into the near-zone integral we get

$$|T_{N-2}^{\text{near}}(\mathbf{x}, t)| \leq 4\pi \frac{A_N C_N}{|\mathbf{x}|^{N-2}} \ln \left( \frac{|\mathbf{x}|}{\mathcal{R}} \right). \quad (\text{II.4.7.149})$$

In the far-zone integral, we can no longer apply the bound (II.4.7.147) but still we can employ the majoration (II.4.7.148). Then we can easily show the inequality (in which  $|\mathbf{y}| = |\mathbf{x}|\lambda$ )

$$|T_{N-2}^{\text{far}}(\mathbf{x}, t)| \leq 4\pi \frac{A_N}{|\mathbf{x}|^{N-2}} \int_1^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{N-2}} \left[ \frac{1}{\lambda} + \sum_{l=0}^{N-4} \frac{(2l-1)!!}{l!} \lambda^l \right]. \quad (\text{II.4.7.150})$$

The integral is convergent. At last, from Eqs. (II.4.7.149) and (II.4.7.150) we have proved that  $T_{N-2} = \mathcal{O}(\ln r/r^{N-2})$ . Still it remains to show that the finite sum of terms in Eq. (II.4.7.144), i.e. besides the remainder, admits some expansions of the required structure. But this follows from applying the finite part operation  $\text{FP}_{\text{B}=0}$  onto the result (II.4.7.132), which tells us immediately that we have an expansion of the correct type  $\sim \hat{n}_L(\mathbf{x})|\mathbf{x}|^a(\ln|\mathbf{x}|)^q$ .

## 4.8 Far zone expansion of the Poisson integral

Thanks to the investigation in Appendix 4.7, the far-zone (or multipolar) expansion of the object  $\widetilde{\Delta}^{-1}[\bar{\tau}]$  happens to be workable. Recall that controlling the far-zone expansion of the post-Newtonian field is fundamental since it is at the basis of the matching. The operation

of taking the far-zone expansion is denoted  $\mathcal{M}$  when applied on post-Newtonian objects (see Section 4.3.2). We therefore want to determine the expression of  $\mathcal{M}(\widetilde{\Delta^{-1}[\bar{\tau}]})$ . That is, we want to relate it to the expansion of the corresponding source, which has the same structure as in Eq. (II.4.3.52) :

$$\mathcal{M}(\bar{\tau})(\mathbf{x}, t) = \sum \hat{n}_L r^a (\ln r)^p G_{L,a,p}(t) . \quad (\text{II.4.8.151})$$

By the matching equation we know that this far-zone expansion is identical with the near-zone expansion of the external field [see e.g. Eq. (II.4.6.106)]. Let us first apply  $\mathcal{M}$  onto  $\widetilde{\Delta^{-1}[\bar{\tau}]}$  as expressed as a sum of near-zone and far-zone contributions,

$$\mathcal{M}(\widetilde{\Delta^{-1}[\bar{\tau}]}) = \mathcal{M}(I_{<}) + \mathcal{M}(I_{>}) , \quad (\text{II.4.8.152})$$

where  $I_{<}$  and  $I_{>}$  are defined by Eqs. (II.4.7.141)-(II.4.7.142). The near-zone integral is quite easy to work with. Indeed, from Eq. (II.4.7.143) we see that its expansion when  $r = |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$  is obtained by expanding the factor  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  inside the integrand. Therefore, the infinite far-zone expansion (without remainder) reads

$$\mathcal{M}(I_{<}) = -\frac{1}{4\pi} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int_{|\mathbf{y}| < \mathcal{R}} d^3\mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \mathcal{M}\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\right) \bar{\tau}(\mathbf{y}, t) , \quad (\text{II.4.8.153})$$

in which we denote

$$\mathcal{M}\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\right) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-)^l}{l!} y_L \hat{\partial}_L \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) . \quad (\text{II.4.8.154})$$

On the other hand, the far-zone expansion of the far-zone integral  $I_{>}$  has been obtained in Eq. (II.4.7.144)-(II.4.7.145), where we found that it comes from replacing the source term by its far-zone expansion [indeed, when  $\mathcal{R}$  is large enough, the integration ranges over the domain of validity of the far-zone expansion]. So the infinite far-zone expansion of that term is given by

$$\mathcal{M}(I_{>}) = -\frac{1}{4\pi} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} \frac{d^3\mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \mathcal{M}(\bar{\tau}(\mathbf{y}, t)) , \quad (\text{II.4.8.155})$$

where the integrand contains the expansion of the source given by Eq. (II.4.8.151). Now let us use a technical lemma which is quite important in the present formalism, and has already played a crucial role in Refs. [13, 11]. This lemma is based on the remark that any radial integral of the type  $\int_0^{+\infty} d|\mathbf{y}| |\mathbf{y}|^{B+a} (\ln |\mathbf{y}|)^p$ , where  $B \in \mathbb{C}$  and  $a$  and  $p$  are arbitrary real numbers, is identically *zero* by analytic continuation in  $B$ . See Ref. footnote on page 62 for the proof. Our useful lemma, that is trivial to relate to the previous remark (after performing the integration over angles), is

$$\text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3\mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \mathcal{M}\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\right) \mathcal{M}(\bar{\tau}(\mathbf{y}, t)) = 0 . \quad (\text{II.4.8.156})$$

The point here is that the integral ranges over the complete three-dimensional space  $\mathbb{R}^3$ . Now we have the “numerical” equalities  $\mathcal{M}\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\right) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$  when  $|\mathbf{y}| < |\mathbf{x}|$  and  $\mathcal{M}(\bar{\tau}) = \bar{\tau}$  when  $|\mathbf{y}| > a$ , where  $a$  is the radius of the compact-support source. From this we deduce that as soon as  $\mathcal{R} > a$ , what we can always assume right from the beginning, and  $|\mathbf{x}| > \mathcal{R}$ , which is not a problem because we are considering the limit  $|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$ , we have the identity

$$\text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int_{|\mathbf{y}| < \mathcal{R}} \frac{d^3 \mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \mathcal{M}(\bar{\tau}(\mathbf{y}, t)) + \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int_{|\mathbf{y}| > \mathcal{R}} d^3 \mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \mathcal{M}\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\right) \bar{\tau}(\mathbf{y}, t) = 0. \quad (\text{II.4.8.157})$$

By means of that identity we can obtain the requested form of the far-zone expansion as

$$\mathcal{M}\left(\widetilde{\Delta^{-1}}[\bar{\tau}]\right) = -\frac{1}{4\pi} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3 \mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \mathcal{M}(\bar{\tau}(\mathbf{y}, t)) + \mathcal{M}\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\right) \bar{\tau}(\mathbf{y}, t) \right]. \quad (\text{II.4.8.158})$$

In this particular form we see that the  $\mathcal{M}$ -operator is distributed on the two terms like a derivative operator would be. In the first term we recognize the action of the generalized Poisson integral. Actually this Poisson operator has been defined in Appendix 4.6 when acting on a near-zone expansion of the type (II.4.6.106), but by matching that expansion is the same as the present far-zone expansion, so the definition is rigorously the same. Finally we can re-write Eq. (II.4.8.158) into the alternative form

$$\mathcal{M}\left(\widetilde{\Delta^{-1}}[\bar{\tau}]\right) = \widetilde{\Delta^{-1}}[\mathcal{M}(\bar{\tau})] - \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-)^l}{l!} \hat{\partial}_L(r^{-1}) \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3 \mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \hat{y}_L \bar{\tau}(\mathbf{y}, t), \quad (\text{II.4.8.159})$$

which constitutes the main result of this Appendix. Notice that Eq. (II.4.8.159) is in agreement with the multipole expansion of the retarded integral as given by Eq. (3.11)-(3.12) in Ref. [11], when specialized to the static case where there is no dependence on time.

Next we derive the analogous result concerning the operator of the “instantaneous” potentials

$$\widetilde{\mathcal{I}^{-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{c^{2k}} \partial_t^{2k} \widetilde{\Delta^{-k-1}}. \quad (\text{II.4.8.160})$$

We iterate  $k + 1$  times the result (II.4.8.159). There is no problem for doing this; the only point is that we use in a repeated way the easily checked formula telling that we are allowed to “operate by parts” the Poisson integral  $\widetilde{\Delta^{-1}}$  in the way

$$\text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3 \mathbf{z} |\tilde{\mathbf{z}}|^B \hat{z}_L \widetilde{\Delta^{-1}} \bar{\tau} = \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3 \mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \widetilde{\Delta^{-1}} [\hat{y}_L] \bar{\tau}. \quad (\text{II.4.8.161})$$

This formula is a consequence of the fact that  $\text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3 \mathbf{z} |\tilde{\mathbf{z}}|^B \frac{\hat{z}_L}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|} = -4\pi \widetilde{\Delta^{-1}} [\hat{y}_L] = \frac{-2\pi}{2l+3} |\mathbf{y}|^2 \hat{y}_L$ ; see Eq. (4.10) in Ref. [8]. Therefore we arrive at

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left(\widetilde{\Delta^{-k-1}}[\bar{\tau}]\right) &= \widetilde{\Delta^{-k-1}}[\mathcal{M}(\bar{\tau})] \\ &- \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-)^l}{l!} \sum_{i=0}^k \widetilde{\Delta^{-i}} \left[ \hat{\partial}_L(r^{-1}) \right] \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int d^3 \mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \widetilde{\Delta^{-i-k}} [\hat{y}_L] \bar{\tau}(\mathbf{y}, t), \end{aligned} \quad (\text{II.4.8.162})$$

and from this it is very simple to derive the requested expression concerning  $\widetilde{\mathcal{I}^{-1}}$ . We obtain

$$\mathcal{M}\left(\widetilde{\mathcal{I}^{-1}}[\bar{\tau}]\right) = \widetilde{\mathcal{I}^{-1}}[\mathcal{M}(\bar{\tau})] \quad (\text{II.4.8.163})$$

$$- \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-)^l}{l!} \sum_{i=0}^{+\infty} \widetilde{\Delta}^{-i} \left[ \hat{\partial}_L(r^{-1}) \right] \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{c^{2k}} \text{FP}_{\text{B}=0} \int d^3\mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \widetilde{\Delta}^{i-k} [\hat{y}_L] \partial_t^{2k} \bar{\tau}(\mathbf{y}, t) .$$

This expression, though completely explicit, does not constitute our final form. Because the “instantaneous” solution is a particular solution of the d’Alembertian equation, it must be possible to re-express the second term in Eq. (II.4.8.163) as a combination of some source-free retarded and advanced multipolar waves. To see this we notice that

$$\widetilde{\Delta}^{-i} \left[ \hat{\partial}_L(r^{-1}) \right] = \hat{\partial}_L \left( \frac{r^{2i-1}}{(2i)!} \right) , \quad (\text{II.4.8.164})$$

which shows that the latter homogeneous solution is actually one of the *symmetric* type, i.e. retarded *plus* advanced. Namely we can re-write Eq. (II.4.8.163) into the form

$$\mathcal{M} \left( \widetilde{\mathcal{I}}^{-1} [\bar{\tau}] \right) = \widetilde{\mathcal{I}}^{-1} [\mathcal{M}(\bar{\tau})] - \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-)^l}{l!} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{\overline{\mathcal{F}_L(t - r/c) + \mathcal{F}_L(t + r/c)}}{2r} \right\} , \quad (\text{II.4.8.165})$$

where the overline notation means taking the Taylor expansion of the symmetric wave when the retardation  $r/c \rightarrow 0$  [the result is displayed in Eq. (II.4.3.54)]. Actually, this overline notation is somewhat misleading, because, in keeping with the real meaning of the result (II.4.8.165), one should *a posteriori* interpret the latter Taylor expansion as a *far-zone* (singular) expansion when  $r \rightarrow +\infty$ . However, in view of the matching, it is more fruitful to employ the same overline notation as for the expansion of the anti-symmetric waves occurring in the near-zone metric – indeed the matching is simply interested at identifying together some asymptotic expansions which are of the same form. The “multipole-moment” function  $\mathcal{F}_L(t)$  in Eq. (II.4.8.165) is given by

$$\mathcal{F}_L(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{c^{2j}} \text{FP}_{\text{B}=0} \int d^3\mathbf{y} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \widetilde{\Delta}^{-j} [\hat{y}_L] \partial_t^{2j} \bar{\tau}(\mathbf{y}, t) . \quad (\text{II.4.8.166})$$

Finally let us find an alternative, more compact, form for this result. We introduce the  $l$ -dependent function

$$\delta_l(z) = \frac{(2l+1)!!}{2^{l+1}l!} (1-z^2)^l , \quad (\text{II.4.8.167})$$

whose integral is normalized to one :  $\int_{-1}^1 dz \delta_l(z) = 1$ . One can readily show that

$$\widetilde{\Delta}^{-j} [\hat{y}_L] = |\mathbf{y}|^{2j} \hat{y}_L \int_{-1}^1 dz \frac{z^{2j}}{(2j)!} \delta_l(z) , \quad (\text{II.4.8.168})$$

which permits to express the function  $\mathcal{F}_L$  in a form where the post-Newtonian series is formally re-summed as

$$\mathcal{F}_L(t) = \text{FP}_{\text{B}=0} \int d^3\mathbf{x} |\tilde{\mathbf{y}}|^B \hat{y}_L \overline{\int_{-1}^1 dz \delta_l(z) \bar{\tau}(\mathbf{y}, t \pm z|\mathbf{y}|/c)} . \quad (\text{II.4.8.169})$$

Under this form we recognize the multipole-moment function introduced in Eq. (3.14) in Ref. [11] (the function remains unchanged by taking either sign  $\pm$  in the time argument of  $\bar{\tau}$ ). This result permits to fully determine the exterior multipolar field by matching, and to recover the expression already obtained in Ref. [11] by means of a somewhat different method.

# Chapitre 5

## Énergie totale à 3PN et structure interne

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>76</b>
<b>5.2</b>	<b>Sur le développement post-Newtonien du champ de gravitation de corps étendus</b>	<b>78</b>
5.2.1	Le principe d'effacement	78
<b>5.3</b>	<b>Thermodynamique Relativiste</b>	<b>79</b>
5.3.1	Fluide parfait	79
5.3.2	Densité baryonique	79
5.3.3	l'énergie interne et les relations thermodynamiques	80
<b>5.4</b>	<b>Description de la matière</b>	<b>81</b>
<b>5.5</b>	<b>Définition des potentiels élémentaires</b>	<b>81</b>
5.5.1	Exemple des potentiels $V$ , $V_i$ et $\widehat{W}_{ij}$	81
5.5.2	Définition des potentiels et expression de la déviation de la métrique	83
5.5.2.1	Les potentiels	83
5.5.2.2	Déviation de la métrique	84
<b>5.6</b>	<b>l'énergie à 3PN en terme des potentiels et des sources générales</b>	<b>85</b>
<b>5.7</b>	<b>l'énergie à 3PN en terme des potentiels et des sources fluides</b>	<b>87</b>
<b>5.8</b>	<b>Modélisation des corps compacts étendus</b>	<b>89</b>
<b>5.9</b>	<b>Intégrale de Poisson pour des corps étendus</b>	<b>92</b>
5.9.1	Le cas des sources compactes	92
5.9.1.1	Calcul de $P_{11}$	94
5.9.1.2	Calcul de $P_{12}$	94
5.9.1.3	Calcul de $P_{31}$	94
5.9.2	Le cas des sources strictement non-compactes	95
5.9.2.1	Calcul de $P_{33}$	95
5.9.2.2	Calcul de $P_{13}$	96
<b>5.10</b>	<b>Intégration des sources compactes et non compactes</b>	<b>96</b>
<b>5.11</b>	<b>Les différentes stratégies que l'on a adoptées</b>	<b>96</b>
<b>5.12</b>	<b>Détail de l'itération à 1PN</b>	<b>97</b>
5.12.1	De quoi à t'on besoin ?	97



5.12.2	Calcul de $V$ à l'ordre Newtonien . . . . .	98
5.12.3	Problème de la vitesse interne, de la pression et de l'énergie interne à l'ordre Newtonien . . . . .	99
5.12.4	Problème des déformations des corps étendus . . . . .	100
5.12.5	Énergie à 1PN et renormalisation de la masse . . . . .	104
<b>5.13</b>	<b>Étendue des problèmes à 3PN . . . . .</b>	<b>106</b>
5.13.1	Utilisation de Mathematica® . . . . .	106
5.13.2	La partie finie . . . . .	106
5.13.3	Conséquence de la Renormalisation sur la partie finie . . . . .	109

## 5.1 Introduction

Les futurs détecteurs d'ondes gravitationnelles tels que LIGO ou VIRGO n'ont pas pour but de prouver l'existence de ces ondes. Le jour où les détecteurs verront leur premier signal gravitationnel marquera sans doute leur histoire et celle de la physique moderne mais leur finalité est bien plus importante. Il s'agit de faire de l'astronomie gravitationnelle. Le rayonnement gravitationnel va, en effet, ouvrir une nouvelle fenêtre sur l'univers qui nous entoure. Les informations transportées par ce rayonnement sont radicalement différentes et complémentaires de celles issues du rayonnement électromagnétique. Elles devraient nous apprendre énormément sur la structure des sources qui l'émettent. Dans cette partie, nous étudions une des sources les plus prometteuses d'un tel rayonnement : les binaires d'étoiles à neutrons. Faire de l'astronomie gravitationnelle c'est dans un premier temps avoir un signal gravitationnel. Il faudra l'extraire des multiples sources de bruits sous lesquelles il sera caché dans le signal de sortie des futurs détecteurs. Pour cela on utilise des méthodes de filtrage qui nécessitent de connaître, au préalable, la forme du signal provenant du type de source particulier que l'on souhaite observer, avec une très grande précision. Faire de l'astronomie gravitationnelle, une fois que l'on a le signal, c'est aussi en extraire des données physiques sur la source. Pour cela, encore une fois, il est nécessaire de déduire des équations de la Relativité Générale, la forme de l'onde gravitationnelle que l'on doit observer avec une très grande précision. Ainsi, connaissant la forme de l'onde en fonction des paramètres de la source qui l'émet, on pourra, aussi précisément que le permettront les mesures sur les détecteurs et nos prédictions issues des équations de la Relativité Générale, déterminer un certain nombre de ces paramètres et en tirer des conclusions sur la structure de la source. La précision requise [41, 40, 66] nécessite de calculer la dynamique d'un système binaire d'étoiles à neutrons dans la phase "spiralante" à l'ordre 3PN ( $1/c^6$ ) au-delà de la formule du quadrupole d'Einstein. Pour ce problème précis on peut modéliser les étoiles à neutrons par des points matériels de masse  $m_1$  et  $m_2$ . Cette approche ne tient donc pas compte de la structure interne des étoiles mais cela peut se justifier dans le sens où une étoile à neutrons est un objet compact (dont la taille est relativement proche de son rayon de Schwarzschild) et que les effets de marée, dûs à son extension finie, qu'elle peut induire sur son partenaire sont négligeables à l'ordre  $1/c^6$  (regarder l'explication sur *le principe d'effacement*). L'orbite de la plupart des binaires compactes spiralantes, quant à elle, peut être considérée comme quasi circulaire [86] à cause des effets de réaction du rayonnement gravitationnel sur la source elle-même qui ont tendance à circulariser très rapidement la trajectoire de la binaire. P. Jaranowski et G. Schäfer, dans le cadre de la jauge ADM [77, 78, 79], et L. Blanchet G. Faye, dans le cadre de la

jauge harmonique [21, 22], ont réussi à déterminer les équations du mouvement (l'expression de l'accélération des deux corps en fonction des paramètres orbitaux), l'énergie, le Lagrangien et l'Hamiltonien du système à l'ordre 3PN. Les deux méthodes sont basées sur la régularisation d'Hadamard [23, 24] nécessaire pour donner un sens aux termes divergents qui apparaissent lors de l'itération post-Newtonienne. Ces termes divergents ont pour origine le caractère ponctuel des sources qui sont mathématiquement symbolisées par des distributions de Dirac<sup>1</sup>. Bien que différentes du point de vue conceptuel, ces deux méthodes ont donné des résultats identiques [4, 50] : il apparaît à cet ordre élevé ( $1/c^6$ ), une constante  $\lambda$  (dans le formalisme de BF) où  $\omega_{static}$  (dans le formalisme de JS) qu'aucune contrainte physique ne semble pouvoir fixer. Ces deux constantes sont simplement reliées par

$$\omega_{static} = -\frac{11}{3}\lambda - \frac{1987}{840}. \quad (\text{II.5.1.1})$$

Dans l'expression de l'énergie d'un système binaire à 3PN la constante  $\lambda$  apparaît en facteur d'un terme d'ordre 4 post-Minkowskien

$$\begin{aligned} E_{3\text{PN}} = & (m_1 + m_2)c^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \underbrace{\frac{E_2}{c^2}}_{8 \text{ termes}} + \underbrace{\frac{E_4}{c^4}}_{32 \text{ termes}} \\ & + \underbrace{\frac{1}{c^6} \left\{ \dots + \frac{G^4 m_1^3 m_2^2}{r_{12}^4} \left( \frac{5809}{280} - \frac{11}{3}\lambda - \frac{22}{3} \ln\left(\frac{r_{12}}{r'_1}\right) \right) + \dots \right\}}_{130 \text{ termes}}. \end{aligned} \quad (\text{II.5.1.2})$$

En fait, il semblerait que la régularisation d'Hadamard utilisée dans les deux méthodes soit incomplète. Motivé par ce résultat, T. Damour, P. Jaranowski et G. Schäfer ont déterminé l'énergie à 3PN à l'aide d'une autre méthode de régularisation [49] qui est abondamment utilisée en théorie quantique des champs : la régularisation dimensionnelle. Cette méthode, qui n'a montré aucune incomplétude, leur a ainsi permis de fixer leur constante

$$\omega_{static} = 0. \quad (\text{II.5.1.3})$$

Ce résultat semble confirmer le principe d'effacement selon lequel la structure interne ne doit se manifester qu'à l'ordre 5PN ( $1/c^{10}$ ) dans l'énergie et pas avant à cause des quadrupoles des corps induits par les effets de marée. Si le principe d'effacement tient à 3PN il est normal que la constante  $\lambda$  soit universelle et ne dépende pas de la structure interne du système. Mais il y a dans tout cela quelque chose qui n'est pas très satisfaisant : on modélise deux étoiles qui ont une importante énergie interne gravitationnelle par deux points négligeant ainsi leur structure interne dont on a aucune réelle idée de l'influence sur les équations du mouvement à un ordre aussi élevé. Luc Blanchet, Gilles Esposito-Farèse et moi-même avons entrepris d'étudier la dynamique d'un tel système binaire d'étoiles à neutrons en supposant que les étoiles sont des fluides parfaits étendus et en tenant compte de leur structure interne caractérisée par trois grandeurs thermodynamiques scalaires que sont la densité de masse au repos (noté  $\rho$ ), la pression (notée  $P$ ) et la densité d'énergie interne (notée  $\Pi$ ) et une grandeur vectorielle : le champ de vitesse interne (noté  $w^i$ ). En supposant que ces grandeurs sont  $\mathcal{C}^\infty$  et en effectuant l'itération post-Newtonienne dans le cadre de la jauge harmonique, on se ramène aux conditions générales du théorème d'existence et d'unicité du chapitre précédent. On sait donc que l'itération est sans

<sup>1</sup>Il faut traiter le produit de telles distributions, qui se manifeste au travers des non-linéarités au cours de l'itération, avec grand soin par une régularisation.

ambiguïté (au moins tant que l'on ne fait pas tendre le rayon des étoiles vers 0) et on pense arriver à fixer  $\lambda$  de cette manière. En revanche, ce que le théorème d'existence ne nous dit pas c'est de quoi est faite cette constante : est-ce une constante universelle ou dépend-t-elle de la structure interne des étoiles ?

## 5.2 Sur le développement post-Newtonien du champ de gravitation de corps étendus

### 5.2.1 Le principe d'effacement

Le principe d'effacement (regarder la contribution de T. Damour dans [72, 43]), sous entendu "effacement de la structure interne", stipule que dans le problème à deux corps compacts (dont la taille est peu différente de leur rayon de Schwarzschild) en Relativité Générale la structure interne ne manifeste son effet qu'à l'ordre 5PN, c'est-à-dire  $1/c^{10}$ . Il s'agit en fait dans ce problème de déterminer le mouvement des centres de masse respectifs des deux corps tant que la distance qui les sépare est grande devant la taille caractéristique des corps. Nous allons montrer par quelques arguments d'ordre de grandeur pourquoi la structure interne se manifeste à un ordre aussi élevé. Imaginons au départ que l'un des deux corps, que l'on appelle "corps test", est isolé et parfaitement sphérique et approchons progressivement le deuxième corps, que l'on appelle "corps perturbateur". Le corps test va alors se déformer sous l'effet des forces de marée infligées par le corps perturbateur. Nous supposons que le corps test et le corps perturbateur ont les mêmes caractéristiques : masse  $M$ , rayon  $R$  séparé par une distance  $r$ . Les forces de marée sont de l'ordre de

$$\sim GMR/r^3$$

à comparer avec la force de gravitation qui maintient la cohésion du corps test qui est de l'ordre de  $GM/R^2$ . Si l'on fait le rapport des deux on trouve une estimation de la déformation relative de l'étoile test

$$\sim (R/r)^3 .$$

Cette déformation est bien sûr invisible dans un modèle où les étoiles sont ponctuelles. L'étoile test acquiert par voie de conséquence un moment quadrupolaire de l'ordre de  $\sim MR^2(R/r)^3$ . Ce moment quadrupolaire génère une force dont l'intensité est

$$\sim GMR^2/r^4(R/r)^3 = GM/r^2(R/r)^5 ,$$

soit dans un rapport  $(R/r)^5$  avec la force Newtonienne  $GM/r^2$  qui régit le mouvement du centre de masse des deux corps. Cela veut dire que l'extension finie des étoiles se manifeste dans leur mouvement orbital l'une autour de l'autre par une perturbation d'ordre  $(R/r)^5$  de la force Newtonienne. Or, les deux corps que nous venons de décrire sont des corps compacts ce qui signifie que  $R \sim GM/c^2$ . En tenant compte de cet ordre de grandeur on voit que l'effet de l'extension finie des corps induit une force, qui agit sur le mouvement relatif des centres de masse, dont l'intensité est

$$\sim (GM/c^2r)^5$$

relativement à la contribution Newtonienne, c'est-à-dire  $1/c^{10}$  soit 5PN. Cela constitue une démonstration en théorie Newtonienne et permet de comprendre les phénomènes qui entrent en jeu dans ce principe d'effacement.

## 5.3 Thermodynamique Relativiste

### 5.3.1 Fluide parfait

Une particule de fluide parfait est telle qu'elle ne subit aucune dissipation (évolution isentropique) et que dans son référentiel propre au repos, la force qu'elle exerce sur les autres parties du fluide est isotrope. Cela signifie que les contraintes exercées par cette particule de fluide sur le reste du fluide sont les mêmes dans toutes les directions. Ainsi, dans le référentiel au repos, le tenseur énergie-impulsion du fluide peut s'écrire

$$T_{\text{repos}}^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} \mu(\mathbf{x}, t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P(\mathbf{x}, t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P(\mathbf{x}, t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P(\mathbf{x}, t) \end{bmatrix}, \quad (\text{II.5.3.4})$$

où  $\mu(\mathbf{x}, t)$  est la densité d'énergie propre et  $P(\mathbf{x}, t)$  la pression. Ces deux fonctions sont des scalaires car elles ne dépendent pas du choix particulier du système de coordonnées. Elles dépendent uniquement du point où on les évalue. Plaçons-nous maintenant dans un référentiel où la particule fluide est en mouvement. On peut alors définir la quadri-vitesse de la particule fluide qui se trouve à l'instant  $t$  en  $\mathbf{x}$  (dans le système de coordonnées dans lequel on se place) comme  $u^\mu(\mathbf{x}, t)$  (c'est un champ de quadri-vitesse). Si cette particule décrit, dans le système de coordonnées  $\{x^i, x^0\}$ , une trajectoire paramétrée par  $\{x^i = x_p^i(t), x^0(t) = ct\}$ , la quadri-vitesse de cette particule est définie par  $u_p^\mu = dx_p^\mu / cd\tau$  où  $d\tau$  est la différentielle du temps propre de cette particule. Le quadri-vecteur vitesse vérifie la relation  $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$  et peut aussi s'écrire sous la forme  $u^\mu = u^0 v^\mu / c$  ( $v^\mu = (c, v^i)$ ) où  $v^i$  est le champ de vitesse de coordonnées et où la vitesse de coordonnées d'une particule est définie par  $v_p^i = dx_p^i(t)/dt$ . Le tenseur énergie impulsion de cette particule fluide doit garder sa forme quel que soit le référentiel et le système de coordonnées dans lequel il est écrit et cela d'après le principe de covariance. Ainsi le tenseur impulsion le plus général pour un fluide parfait doit s'écrire sous la forme covariante  $\alpha(\mathbf{x}, t)u^\mu u^\nu + \beta(\mathbf{x}, t)g^{\mu\nu}$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions scalaires à déterminer, et doit se réduire à (II.5.3.4) dans le référentiel propre de la particule de fluide. Dans ce référentiel propre la quadri-vitesse se réduit à  $u_{\text{repos}}^\mu = (1, \mathbf{0})$ . En remplaçant dans l'expression covariante et en égalisant avec les coefficients de (II.5.3.4) on trouve l'expression covariante du tenseur énergie impulsion d'un fluide parfait en espace-temps courbe

$$T^{\mu\nu} = (\mu + P)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}. \quad (\text{II.5.3.5})$$

### 5.3.2 Densité baryonique

On introduit une autre fonction scalaire qui caractérise le fluide parfait. Cette grandeur est la densité propre de masse au repos  $\rho(\mathbf{x}, t)$ . Elle permet de déterminer, dans un volume d'une particule de fluide au repos, la masse au repos en comptant le nombre de particules d'espèce  $i$  affectées d'une masse au repos  $m_i$ . Cette quantité rentre dans la loi de conservation du nombre de constituants qui est donnée en espace-temps courbe par

$$\nabla_\mu(\rho u^\mu) = 0. \quad (\text{II.5.3.6})$$

Cette équation peut être ré-écrite à l'aide de dérivées partielles ordinaire comme

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\rho u^0 v^\mu) = 0. \quad (\text{II.5.3.7})$$

Le point intéressant avec cette dernière équation de conservation est qu'elle est écrite sous forme d'une équation de conservation en espace temps plat. Si le fluide que l'on considère est à support compact, on peut intégrer cette dernière équation sur un volume  $\mathcal{V}$  qui l'englobe de sorte que l'intégrale de la divergence est nulle et on se retrouve avec

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{x} \sqrt{-g} \rho u^0 \right] = 0. \quad (\text{II.5.3.8})$$

On appellera la masse baryonique totale l'intégrale entre crochets dans l'expression précédente et sa conservation vient du fait que l'on a supposé que localement on avait conservation du nombre de particules (nombre de baryons). Ainsi globalement, dans le fluide tout entier, le nombre de particules reste constant tout au long de l'évolution du fluide. On définit une grandeur, qui n'est pas un scalaire (au sens covariant) à cause de la présence du  $\sqrt{-g}$ , que l'on appelle densité baryonique du fluide et que l'on note

$$\rho_*(\mathbf{x}, t) = \sqrt{-g}(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) u^0(\mathbf{x}, t). \quad (\text{II.5.3.9})$$

Cette densité vérifie l'équation de conservation de la densité baryonique qui s'écrit à l'aide de dérivées partielles ordinaires sous la forme

$$\partial_t \rho_* + \partial_i (\rho_* v^i) = 0. \quad (\text{II.5.3.10})$$

Dans l'approche de la dynamique d'un système binaire à 3PN que nous avons développé, nous exprimons nos résultats bruts en fonction de masse  $m_1$  et  $m_2$  (respectivement pour le corps 1 et pour le corps 2) qui sont en fait les masses baryoniques des étoiles. Il faut ensuite, au cours de la procédure d'itération, renormaliser ces masses baryoniques dans les masses que l'on mesure effectivement expérimentalement comme nous le verrons à la page 104.

### 5.3.3 l'énergie interne et les relations thermodynamiques

Nous appelons énergie interne spécifique, ou énergie interne massique, que l'on note  $\Pi(\mathbf{x}, t)$  et qui est un scalaire, la quantité massique qui représente la différence entre la densité d'énergie au repos  $\mu(\mathbf{x}, t)$  et la densité de masse au repos  $\rho(\mathbf{x}, t)$

$$\rho \Pi = \mu - \rho c^2 \Leftrightarrow \mu = \rho c^2 \left( 1 + \frac{\Pi}{c^2} \right). \quad (\text{II.5.3.11})$$

À partir de là, on peut écrire les équations de la thermodynamique qui sont valables dans le référentiel au repos et qui relient entre elles les quantités scalaires que nous venons de décrire. Ces relations entre des quantités scalaires seront aussi valables dans tout autre référentiel et système de coordonnées. Si l'on écrit le premier principe que l'on applique à une particule fluide entre deux instants infiniment proches  $t$  et  $t + dt$  on a  $d_f U = T d_f S - P d_f V$  où, si l'on note  $\delta m$  la masse de la particule de fluide,  $U = \delta m \Pi$ ,  $S = \delta m s$  et  $V = \delta m / \rho$  (la notation  $d_f$  signifie que l'on effectue la différentiation sur la même particule de fluide, en la suivant le long de sa trajectoire). Ainsi  $d_f \Pi = T d_f s - P d_f (1/\rho)$ . Or, compte tenu du fait que le fluide est parfait, il n'est l'objet d'aucune dissipation et évolue donc de façon isentropique  $d_f s = 0$  ce qui signifie que

$$d_f \Pi = -P d_f (1/\rho). \quad (\text{II.5.3.12})$$

Cette relation nous sera d'une grande utilité par la suite pour trouver  $\Pi(\mathbf{x}, t)$  une fois que l'on connaît la pression  $P$  et la densité de masse  $\rho$ .

## 5.4 Description de la matière

Avant d'entrer dans le détail de l'itération du développement de l'énergie à 3PN pour un système binaire d'objets compacts, nous allons donner une série de résultats qui permettent de faire les calculs de façon modulaire. Pour cela, on redéfinit la source de matière. Le choix que nous faisons peut sembler totalement arbitraire mais il a pour but de simplifier et de raccourcir les longues expressions qui vont émerger du calcul de l'énergie à 3PN en fonction des sources de matière les plus générales. En Relativité Générale, la matière est définie au travers du tenseur énergie-impulsion, c'est-à-dire  $\{T^{00}, T^{0i}, T^{ij}\}$ . Nous définissons maintenant les sources

$$\sigma = \frac{T^{00} + T^{ii}}{c^2}, \quad (\text{II.5.4.13})$$

$$\sigma_i = \frac{T^{0i}}{c}, \quad (\text{II.5.4.14})$$

$$\sigma_{ij} = T^{ij}, \quad (\text{II.5.4.15})$$

qui, grâce aux puissances de  $c$  au dénominateur, sont toutes Newtonienne à l'ordre le plus bas en puissance de  $c$ . En effet, pour de la matière constituée de poussière par exemple (pour laquelle on peut négliger la pression et l'énergie interne), on a, à l'ordre le plus bas en puissance de  $1/c$ ,  $T^{00} = \rho c^2$ ,  $T^{0i} = \rho v^i c$  et  $T^{ij} = \rho v^i v^j$  où  $\rho$  représente la densité propre de masse au repos du fluide de poussière. Ainsi

$$\sigma = \rho + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right), \quad (\text{II.5.4.16})$$

$$\sigma_i = \rho v^i + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right), \quad (\text{II.5.4.17})$$

$$\sigma^{ij} = \rho v^i v^j + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right), \quad (\text{II.5.4.18})$$

qui sont tous d'ordre Newtonien au plus bas. Maintenant, il s'agit d'exprimer la déviation de la métrique  $\{h^{00}, h^{0i}, h^{ij}\}$  en fonction de ces sources. Il faut bien entendu garder en mémoire que les sources elles-mêmes dépendent de la métrique, et donc, de la déviation de la métrique. Il suffit pour s'en persuader de regarder l'expression du tenseur énergie impulsion d'un fluide parfait en Relativité Générale. Dans un premier temps nous allons laisser les sources sous leur forme générique  $\{\sigma, \sigma^i, \sigma^{ij}\}$ . Le calcul de la déviation de la métrique en fonction des sources générales amène à la définition de ce que nous appelons les potentiels élémentaires.

## 5.5 Définition des potentiels élémentaires

### 5.5.1 Exemple des potentiels $V$ , $V_i$ et $\widehat{W}_{ij}$

Les potentiels élémentaires viennent du calcul de la déviation de la métrique. La définition de  $h^{\mu\nu}$  est celle de l'Eq. (I.2.4.19). Nous avons montré que  $h^{\mu\nu}$ , en jauge harmonique, était la solution d'une équation de d'Alembert avec source, Eq. (I.2.5.24). Quel est l'ordre minimal en  $1/c$  de chacune des composantes  $\{h^{00}, h^{0i}, h^{ij}\}$ ? Pour cela nous n'allons retenir que les termes linéaires en  $h$  et les termes d'ordre le plus bas en  $1/c$  dans l'Eq. (I.2.5.24). On aboutit aux équations simples suivantes

$$\square h^{00} = \frac{16\pi G}{c^2} \sigma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad (\text{II.5.5.19})$$

$$\square h^{0i} = \frac{16\pi G}{c^3} \sigma^i + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^5}\right), \quad (\text{II.5.5.20})$$

$$\square h^{ij} = \frac{16\pi G}{c^4} \sigma^{ij} + \Lambda^{ij} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^6}\right). \quad (\text{II.5.5.21})$$

Nous avons rajouté  $\Lambda^{ij}$  dans la dernière équation car, comme nous allons le voir un peu plus loin, ce terme intervient à l'ordre le plus bas dans l'expression de  $h^{ij}$ . Ainsi, puisque  $\sigma$ ,  $\sigma^i$  et  $\sigma^{ij}$  sont d'ordre Newtonien ( $1/c^0$ ), on doit avoir la hiérarchie suivante

$$h^{00} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right), \quad (\text{II.5.5.22})$$

$$h^{0i} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^3}\right), \quad (\text{II.5.5.23})$$

$$h^{ij} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right). \quad (\text{II.5.5.24})$$

Il faut maintenant vérifier *a posteriori* que cette hiérarchie est correcte en incluant les contributions quadratiques en  $h$  venant de  $\Lambda^{\mu\nu}$  dans l'Eq. (I.2.5.24). Si les contributions quadratiques ne contribuent au minimum qu'à un ordre en  $1/c$  strictement supérieur à  $1/c^2$  pour  $h^{00}$ ,  $1/c^3$  pour  $h^{0i}$  et  $1/c^4$  pour  $h^{ij}$  alors la hiérarchie que l'on vient de trouver est correcte; autrement il faut la revoir. Nous donnons, dans la liste qui suit, l'ordre le plus bas de  $\{\Lambda^{00}, \Lambda^{0i}, \Lambda^{ij}\}$  en puissance de  $1/c$  lorsque l'on remplace  $h^{00}$  par  $\frac{1}{c^2}h^{00}_2$ ,  $h^{0i}$  par  $\frac{1}{c^3}h^{0i}_3$  et  $h^{ij}$  par  $\frac{1}{c^4}h^{ij}_4$

$$\Lambda^{00} = -\frac{7}{8c^4} \partial_k h^{00}_2 \partial^k h^{00}_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^6}\right); \quad (\text{II.5.5.25})$$

$$\Lambda^{0i} = \frac{1}{c^5} \partial_k h^{00}_2 \partial^i h^{0k}_3 - \frac{1}{c^5} \partial_k h^{00}_2 \partial^k h^{0i}_3 - \frac{3}{4c^5} \partial^i h^{00}_2 \partial_t h^{00}_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^7}\right), \quad (\text{II.5.5.26})$$

$$\Lambda^{ij} = -\frac{1}{8c^4} \delta^{ij} \partial_k h^{00}_2 \partial^k h^{00}_2 + \frac{1}{4c^4} \partial^i h^{00}_2 \partial^j h^{00}_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^6}\right). \quad (\text{II.5.5.27})$$

On constate que les ordres de  $\Lambda^{00}$  et  $\Lambda^{0i}$  sont supérieurs aux ordres de  $h^{00}$  et  $h^{0i}$  respectivement. En revanche, il n'en va pas de même pour  $\Lambda^{ij}$  qui est exactement du même ordre que  $h^{ij}$  donné par l'Eq. (II.5.5.21). Cela veut dire que les équations Eq. (II.5.5.19) et Eq. (II.5.5.20) sont bonnes respectivement à  $1/c^2$  et  $1/c^3$ . Ainsi, si l'on définit les deux potentiels

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= -4\pi G \square_{\text{Ret}}^{-1} \sigma, \\ \mathbf{V}_i &= -4\pi G \square_{\text{Ret}}^{-1} \sigma_i, \end{aligned}$$

on obtient les valeurs de  $h^{00}$  et  $h^{0i}$  en fonction de ces potentiels élémentaires

$$h^{00} = -\frac{4\mathbf{V}}{c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad (\text{II.5.5.28})$$

$$h^{0i} = -\frac{4\mathbf{V}_i}{c^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^5}\right). \quad (\text{II.5.5.29})$$

En revanche, il est absolument nécessaire d'ajouter la contribution de  $\Lambda^{ij}$  dans le second membre de l'équation qui donne l'expression de  $h^{ij}$  en fonction des sources et des potentiels élémentaires.

Lorsque l'on fait cet ajout dans l'Eq. (II.5.5.21) en y remplaçant  $h_2^{00}$  et  $h_3^{0i}$  par leur expression en fonction des potentiels élémentaires, on trouve

$$\square h^{ij} = \frac{16\pi G}{c^4} \sigma^{ij} - \frac{2}{c^4} \delta^{ij} \partial_k \mathbf{V} \partial^k \mathbf{V} + \frac{4}{c^4} \partial^i \mathbf{V} \partial^j \mathbf{V} \quad (\text{II.5.5.30})$$

On pourrait choisir de prendre comme potentiel élémentaire, pour cet ordre en  $1/c^4$  de  $h^{ij}$ , le potentiel le plus naturel possible qui est proportionnel au  $\square_{\text{Ret}}^{-1}$  de la source que l'on vient juste de déterminer. Pour des raisons d'esthétique et de commodité, il est plus judicieux de définir

$$\widehat{\mathbf{W}}_{ij} = \square_{\text{Ret}}^{-1} \left[ -4\pi G (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_{kk}) - \partial_i \mathbf{V} \partial_j \mathbf{V} \right],$$

qui s'avère, aux ordres supérieurs en  $1/c$ , être un bien meilleur choix que tout autre. Ainsi défini, le potentiel issu du premier ordre en  $1/c$  de  $h^{ij}$  donne

$$h^{ij} = -\frac{4}{c^4} (\widehat{\mathbf{W}}_{ij} - \frac{1}{2} \delta^{ij} \widehat{\mathbf{W}}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^6}\right), \quad (\text{II.5.5.31})$$

où  $\widehat{\mathbf{W}}$  est la contraction sur les indices d'espace,  $\widehat{\mathbf{W}}_{kk} = \widehat{\mathbf{W}}$ .

## 5.5.2 Définition des potentiels et expression de la déviation de la métrique

Les potentiels que nous venons de trouver sont les potentiels qui définissent la déviation de la métrique à l'ordre le plus bas en puissance de  $1/c$ . La procédure pour déterminer les potentiels nécessaires à la connaissance de la dynamique à 3PN est la même que celle que nous venons d'exposer. La seule différence vient de la longueur des calculs.

### 5.5.2.1 Les potentiels

Nous avons défini une version retardée du potentiel Newtonien ( $\mathbf{V}$ ) et du potentiel gravitomagnétique ( $\mathbf{V}_i$ ). Il est à noter que ces potentiels ont une source à support compact dans  $\mathbb{R}^3$  ( $\sigma$  ou  $\sigma_i$ ) mais qu'ils ne sont pas, eux-mêmes, à valeur dans un domaine compact

$$\mathbf{V} = -4\pi G \square_{\text{Ret}}^{-1} \sigma, \quad (\text{II.5.5.32a})$$

$$\mathbf{V}_i = -4\pi G \square_{\text{Ret}}^{-1} \sigma_i. \quad (\text{II.5.5.32b})$$

À l'ordre 2PN, on définit les potentiels  $\widehat{\widehat{\mathbf{W}}}_{ij}$  et  $\widehat{\widehat{\mathbf{R}}}_i$ , qui sont quadratiques en  $\mathbf{V}$ , et le potentiel  $\widehat{\widehat{\mathbf{X}}}$  qui est, lui, cubique en  $\mathbf{V}$  puisque sa source contient un produit  $\widehat{\widehat{\mathbf{W}}} \partial^2 \mathbf{V}$ . Ces potentiels pris séparément, nous le rappelons, n'ont pas de signification physique particulière :

$$\widehat{\widehat{\mathbf{W}}}_{ij} = \square_{\text{Ret}}^{-1} \left[ -4\pi G (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_{kk}) - \partial_i \mathbf{V} \partial_j \mathbf{V} \right], \quad (\text{II.5.5.33a})$$

$$\widehat{\widehat{\mathbf{R}}}_i = \square_{\text{Ret}}^{-1} \left[ -4\pi G (\mathbf{V} \sigma_i - \mathbf{V}_i \sigma) - 2\partial_k \mathbf{V} \partial_i \mathbf{V}_k - \frac{3}{2} \partial_t \mathbf{V} \partial_i \mathbf{V} \right], \quad (\text{II.5.5.33b})$$

$$\widehat{\widehat{\mathbf{X}}} = \square_{\text{Ret}}^{-1} \left[ -4\pi G \mathbf{V} \sigma_{ii} + \widehat{\widehat{\mathbf{W}}}_{ij} \partial_{ij} \mathbf{V} + 2\mathbf{V}_i \partial_t \partial_i \mathbf{V} + \mathbf{V} \partial_t^2 \mathbf{V} \right]$$



$$+\frac{3}{2}(\partial_t \mathbf{V})^2 - 2\partial_i \mathbf{V}_j \partial_j \mathbf{V}_i \Big]. \quad (\text{II.5.5.33c})$$

Enfin, les derniers potentiels dont on a besoin, *a priori*, pour le calcul de l'énergie à 3PN sont au plus cubiques et peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{T}} = & \square_{\text{Ret}}^{-1} \left[ -4\pi\text{G} \left( \frac{1}{4}\sigma_{ij}\widehat{\mathbf{W}}_{ij} + \frac{1}{2}\mathbf{V}^2\sigma_{ii} + \sigma\mathbf{V}_i\mathbf{V}_i \right) \right. \\ & + \widehat{\mathbf{Z}}_{ij}\partial_{ij}\mathbf{V} + \widehat{\mathbf{R}}_i\partial_t\partial_i\mathbf{V} - 2\partial_i\mathbf{V}_j\partial_j\widehat{\mathbf{R}}_i - \partial_i\mathbf{V}_j\partial_t\widehat{\mathbf{W}}_{ij} \\ & + \mathbf{V}\mathbf{V}_i\partial_t\partial_i\mathbf{V} + 2\mathbf{V}_i\partial_j\mathbf{V}_i\partial_j\mathbf{V} + \frac{3}{2}\mathbf{V}_i\partial_t\mathbf{V}\partial_i\mathbf{V} + \frac{1}{2}\mathbf{V}^2\partial_t^2\mathbf{V} \\ & \left. + \frac{3}{2}\mathbf{V}(\partial_t\mathbf{V})^2 - \frac{1}{2}(\partial_t\mathbf{V}_i)^2 \right], \quad (\text{II.5.5.34a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{Y}}_i = & \square_{\text{Ret}}^{-1} \left[ -4\pi\text{G} \left( -\sigma\widehat{\mathbf{R}}_i - \sigma\mathbf{V}\mathbf{V}_i + \frac{1}{2}\sigma_k\widehat{\mathbf{W}}_{ik} + \frac{1}{2}\sigma_{ik}\mathbf{V}_k + \frac{1}{2}\sigma_{kk}\mathbf{V}_i \right) \right. \\ & + \widehat{\mathbf{W}}_{kl}\partial_{kl}\mathbf{V}_i - \partial_t\widehat{\mathbf{W}}_{ik}\partial_k\mathbf{V} + \partial_i\widehat{\mathbf{W}}_{kl}\partial_k\mathbf{V}_l - \partial_k\widehat{\mathbf{W}}_{il}\partial_l\mathbf{V}_k \\ & - 2\partial_k\mathbf{V}\partial_i\widehat{\mathbf{R}}_k - \frac{3}{2}\mathbf{V}_k\partial_i\mathbf{V}\partial_k\mathbf{V} - \frac{3}{2}\mathbf{V}\partial_t\mathbf{V}\partial_i\mathbf{V} \\ & \left. - 2\mathbf{V}\partial_k\mathbf{V}\partial_k\mathbf{V}_i + \mathbf{V}\partial_t^2\mathbf{V}_i + 2\mathbf{V}_k\partial_k\partial_t\mathbf{V}_i \right], \quad (\text{II.5.5.34b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{Z}}_{ij} = & \square_{\text{Ret}}^{-1} \left[ -4\pi\text{G}\mathbf{V}(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}) - 2\partial_{(i}\mathbf{V}\partial_{j)}\mathbf{V} + \partial_i\mathbf{V}_k\partial_j\mathbf{V}_k \right. \\ & + \partial_k\mathbf{V}_i\partial_k\mathbf{V}_j - 2\partial_{(i}\mathbf{V}_k\partial_{j)}\mathbf{V}_k - \frac{3}{4}\delta_{ij}(\partial_t\mathbf{V})^2 \\ & \left. - \delta_{ij}\partial_k\mathbf{V}_m(\partial_k\mathbf{V}_m - \partial_m\mathbf{V}_k) \right]. \quad (\text{II.5.5.34c}) \end{aligned}$$

Ces potentiels sont reliés à la déviation de la métrique. Nous verrons en fait que l'on a pas besoin du potentiel  $\widehat{\mathbf{T}}$  pour le calcul de l'énergie à 3PN. La façon de définir les potentiels, qui n'est pas unique, se justifie par la forme simple et concise que prennent les différentes composantes de la déviation de la métrique.

### 5.5.2.2 Déviation de la métrique

Nous donnons dans cette section l'expression des différentes composantes de la déviation de la métrique jusqu'à l'ordre  $1/c^8$  pour  $h^{00} + h^{ii}$ , à l'ordre  $1/c^6$  pour  $h^{00}$ , à l'ordre  $1/c^7$  pour  $h^{0i}$  et à l'ordre  $1/c^6$  pour  $h^{ij}$  en fonction des potentiels élémentaires.

$$\begin{aligned} \frac{h^{00} + h^{ii}}{2} = & -\frac{2}{c^2}\mathbf{V} - \frac{4}{c^4}\mathbf{V}^2 - \frac{8}{c^6} \left[ \widehat{\mathbf{X}} + \frac{1}{2}\mathbf{V}\widehat{\mathbf{W}} + \frac{2}{3}\mathbf{V}^3 \right] \\ & - \frac{32}{c^8} \left[ \widehat{\mathbf{T}} + \mathbf{V}\widehat{\mathbf{X}} + \frac{1}{2}\mathbf{V}\widehat{\mathbf{Z}} + \frac{1}{4}\mathbf{V}^2\widehat{\mathbf{W}} - \frac{1}{8}\widehat{\mathbf{W}}_{ij}\widehat{\mathbf{W}}_{ij} + \frac{1}{16}\widehat{\mathbf{W}}^2 + \frac{1}{6}\mathbf{V}^4 \right], \quad (\text{II.5.5.35a}) \end{aligned}$$

$$h^{00} = -\frac{4}{c^2}\mathbf{V} - \frac{2}{c^4}[\widehat{\mathbf{W}} + 4\mathbf{V}^2] - \frac{8}{c^6} \left[ \widehat{\mathbf{Z}} + 2\widehat{\mathbf{X}} + \mathbf{V}\widehat{\mathbf{W}} + \frac{4}{3}\mathbf{V}^3 \right], \quad (\text{II.5.5.35b})$$

$$h^{0i} = -\frac{4}{c^3}\mathbf{V}_i - \frac{8}{c^5}[\widehat{\mathbf{R}}_i + \mathbf{V}\mathbf{V}_i]$$

$$-\frac{16}{c^7} \left[ \widehat{Y}_i + \frac{1}{2} \widehat{W}_{ij} V_j + \frac{1}{2} \widehat{W} V_i + V \widehat{R}_i + V^2 V_i \right], \quad (\text{II.5.5.35c})$$

$$h^{ij} = -\frac{4}{c^4} \left[ \widehat{W}_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \widehat{W} \right] - \frac{16}{c^6} \left[ \widehat{Z}_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \widehat{Z} \right]. \quad (\text{II.5.5.35d})$$

## 5.6 l'énergie à 3PN en terme des potentiels et des sources générales

Il y a deux stratégies pour déterminer l'énergie à 3PN (cette énergie est l'énergie conservée à 3PN lorsque l'on néglige les termes de réaction de rayonnement).

La première a été utilisée par Luc Blanchet pour déterminer l'expression de l'énergie à 3PN en fonction des sources et des potentiels élémentaires. On sait, d'une part, qu'en Relativité Générale le tenseur énergie-impulsion vérifie la loi de conservation en espace-temps courbe  $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$ . Cette expression peut se réécrire sous la forme d'une équation de conservation avec des dérivées partielles ordinaires

$$\partial_\mu \underbrace{(\sqrt{-g} T^\mu_\nu)}_{\mathcal{P}^\mu_\nu} = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{-g} T^{\rho\sigma} \partial_\nu g_{\rho\sigma}}_{\mathcal{F}_\nu}, \quad (\text{II.5.6.36})$$

On peut alors intégrer cette dernière équation sur une hypersurface  $x^0 = \text{const}$ . En supposant que l'intégrale sur tout l'espace des divergences est nulle on obtient une équation de conservation globale du type

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} \mathcal{P}_\nu^0(\mathbf{x}, t) \right] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} c \mathcal{F}_\nu(\mathbf{x}, t). \quad (\text{II.5.6.37})$$

Cette équation pour la composante  $\nu = 0$  correspond à la conservation de l'énergie à 3PN totale et pour la composante  $\nu = i$  correspond à la conservation de l'impulsion à 3PN totale. Il suffit alors de remplacer l'expression des  $h^{\mu\nu}$  dans  $\mathcal{P}_0^0$  et  $\mathcal{F}_0$  en fonction des potentiels élémentaires (ce qui est un calcul très long mais sans aucune difficulté) et de réécrire  $\mathcal{F}_0$ , une fois le remplacement effectué, sous la forme

$$\mathcal{F}_0 = -\partial_t(A_0) + \partial_i(B_0^i) \quad (\text{II.5.6.38})$$

(ce qui est déjà nettement moins évident) de sorte qu'en écartant le terme de surface engendré par  $B_0^i$ , qui correspond au flux à l'infini, on obtient à la dernière étape une loi de conservation globale

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} (\mathcal{P}_0^0 + A_0) \right] = 0, \quad (\text{II.5.6.39})$$

où l'on identifie l'expression entre crochets à l'énergie à 3PN totale.

La deuxième stratégie que j'ai utilisée, de manière à confronter nos résultats et à s'assurer de leur validité, consiste à remplacer l'expression des  $h^{\mu\nu}$  directement dans l'expression que l'on connaît de l'énergie à 3PN qui est donnée à l'aide du pseudo-tenseur énergie impulsion comme l'intégrale sur tout l'espace de la composante  $\tau^{00}$ . Ainsi, il n'y a pas à trouver de transformation du type (II.5.6.38) en revanche il faut, *a priori*, connaître l'expression de  $h^{00}$  un

ordre post-Newtonien plus élevé par-rapport à la méthode utilisée par Luc. Mais il s'avère que cette composante  $1/c^8$  de  $h^{00}$  disparaît dans le calcul de l'énergie à 3PN en intégrant  $\tau^{00}$  sur tout l'espace. Dans les deux cas, une fois cela fait, on trouve une expression de l'énergie qui est très compliquée et surtout très longue. Il est possible de réduire cette expression en effectuant des intégrations par partie sur des expressions comme

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} F \partial_i G = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} G \partial_i F \quad (\text{II.5.6.40})$$

et en mettant à profit les contraintes venant de la condition d'harmonicité  $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$ . Une fois que l'on a usé toutes ces cartouches on obtient le résultat "concis"

$$E_{\text{ADM}} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} \left\{ \epsilon_{\text{N}}^{\text{C}} + \epsilon_{\text{N}}^{\text{NC}} + \epsilon_{\text{1PN}}^{\text{C}} + \epsilon_{\text{1PN}}^{\text{NC}} + \epsilon_{\text{2PN}}^{\text{C}} + \epsilon_{\text{2PN}}^{\text{NC}} + \epsilon_{\text{3PN}}^{\text{C}} + \epsilon_{\text{3PN}}^{\text{NC}} \right\}, \quad (\text{II.5.6.41})$$

où le  $^{\text{C}}$  en indice supérieur sur  $\epsilon$  signifie que la densité d'énergie considérée est à support compact et où  $^{\text{NC}}$  signifie que la densité est à support non compact. Dans ce qui suit, on donne dans un premier temps le résultat Newtonien où il n'y a que des composantes à support compact dans

$$\epsilon_{\text{N}}^{\text{C}} = \sigma c^2 + \frac{1}{2} \sigma \mathbf{V} - \sigma_{kk}, \quad (\text{II.5.6.42})$$

$$\epsilon_{\text{N}}^{\text{NC}} = 0. \quad (\text{II.5.6.43})$$

La composante post-Newtonienne, quant à elle, contient la première contribution non compacte

$$\epsilon_{\text{1PN}}^{\text{C}} = \frac{2}{c^2} \sigma \widehat{\mathbf{W}} + \frac{2}{c^2} \sigma_i \mathbf{V}_i, \quad (\text{II.5.6.44})$$

$$\epsilon_{\text{1PN}}^{\text{NC}} = \frac{1}{8\pi \text{G} c^2} (\partial_i \mathbf{V})^2 - \frac{1}{8\pi \text{G} c^2} \mathbf{V} \partial_t^2 \mathbf{V}. \quad (\text{II.5.6.45})$$

On a la composante à 2PN

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{2PN}}^{\text{C}} &= \frac{4}{c^4} \sigma \widehat{\mathbf{X}} + \frac{8}{c^4} \sigma \widehat{\mathbf{Z}} + \frac{8}{c^4} \sigma_i \mathbf{V} \mathbf{V}_i + \sigma_{ij} \widehat{\mathbf{W}}_{ij} - 2\sigma_{kk} \widehat{\mathbf{W}}, \\ \epsilon_{\text{2PN}}^{\text{NC}} &= -\frac{1}{4\pi \text{G} c^4} \widehat{\mathbf{W}}_{ij} \partial_i \mathbf{V} \partial_j \mathbf{V} + \frac{1}{8\pi \text{G} c^4} \widehat{\mathbf{W}} \partial_i \mathbf{V} \partial_j \mathbf{V} - \frac{1}{2\pi \text{G} c^4} (\partial_t \mathbf{V}_i)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\pi \text{G} c^4} \mathbf{V}_i \partial_t^2 \mathbf{V}_i + \frac{5}{2\pi \text{G} c^4} \mathbf{V} (\partial_t \mathbf{V})^2 - \frac{2}{\pi \text{G} c^4} \mathbf{V} \partial_i \mathbf{V}_j \partial_j \mathbf{V}_i. \end{aligned} \quad (\text{II.5.6.46})$$

Et enfin la composante de l'énergie à 3PN dont on peut comparer la longueur avec les précédentes

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{3PN}}^{\text{C}} &= \frac{8}{c^6} \sigma \widehat{\mathbf{S}} + \frac{16}{c^6} \sigma \widehat{\mathbf{T}} + \frac{8}{c^6} \sigma_{ij} \widehat{\mathbf{Z}}_{ij} - \frac{8}{c^6} \sigma_{ii} \widehat{\mathbf{Z}} + \frac{8}{c^6} \sigma_i \mathbf{V} \widehat{\mathbf{R}}_i - \frac{8}{c^6} \sigma \mathbf{V}_i \widehat{\mathbf{R}}_i \\ &\quad - \frac{8}{c^6} \sigma \mathbf{V} \widehat{\mathbf{X}} - \frac{2}{c^6} \sigma \widehat{\mathbf{W}}_{ij} \widehat{\mathbf{W}}_{ij} + \frac{2}{c^6} \sigma \widehat{\mathbf{W}}^2 + \frac{8}{c^6} \sigma_i \mathbf{V}_j \widehat{\mathbf{W}}_{ij} + \frac{4}{c^6} \sigma_i \mathbf{V}_i \widehat{\mathbf{W}} \\ &\quad - \frac{4}{c^6} \sigma_{ij} \mathbf{V}_i \mathbf{V}_j - \frac{6}{c^6} \sigma \mathbf{V} \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i + \frac{14}{c^6} \sigma_i \mathbf{V}_i \mathbf{V}^2, \\ \epsilon_{\text{3PN}}^{\text{NC}} &= \frac{1}{\pi \text{G} c^6} \left( \partial_t \mathbf{V} \partial_t \widehat{\mathbf{X}} - \partial_t^2 \mathbf{V} \widehat{\mathbf{X}} - 2\partial_t \mathbf{V}_i \partial_t \widehat{\mathbf{R}}_i \right. \\ &\quad \left. + 2\partial_t^2 \mathbf{V}_i \widehat{\mathbf{R}}_i + 4\partial_j \mathbf{V} \partial_i \mathbf{V}_j \widehat{\mathbf{R}}_i - 3\partial_t \mathbf{V} \partial_i \widehat{\mathbf{V}} \widehat{\mathbf{R}}_i - 8\mathbf{V} \partial_t \partial_t \widehat{\mathbf{V}} \widehat{\mathbf{R}}_i \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \partial_t \widehat{\mathbf{W}}_{ij} \partial_i \widehat{\mathbf{W}}_{ij} - \frac{1}{4} \widehat{\mathbf{W}}_{ij} \partial_t^2 \widehat{\mathbf{W}}_{ij} - \frac{1}{8} (\partial_t \widehat{\mathbf{W}})^2 + \frac{1}{8} \widehat{\mathbf{W}} \partial_t^2 \widehat{\mathbf{W}} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.5.6.47})$$

$$\begin{aligned}
& +2\partial_i V_k \partial_j V_k \widehat{W}_{ij} - 4\partial_i V_j V_k \partial_k \widehat{W}_{ij} + 2V \partial_i V \partial_i \widehat{W} + \frac{1}{4}(\partial_i V)^2 \widehat{W} \\
& - V_i V_i \partial_j \widehat{W} + 9V^2 (\partial_i V)^2 - 2V (\partial_i V_i)^2 - 4\partial_i V_i V_j \partial_j V_i \\
& - V_i V_i \partial_i V \partial_j V - \frac{3}{2} V^2 \partial_i V_j \partial_i V_j + 8V \partial_i V V_i \partial_i V \Big). \tag{II.5.6.48}
\end{aligned}$$

on peut remarquer dans cette dernière expression que  $\epsilon_{3PN}^c$  s'exprime en fonction d'un potentiel  $\widehat{S}$ , que l'on a pas donné, et de  $\widehat{T}$ . En fait on va montrer, dans la section suivante, que lorsqu'on remplace  $\sigma$  par les paramètre fluides, l'énergie à 3PN ne dépend pas de ces deux potentiels. Nous allons faire le calcul de l'énergie à 3PN pour un système binaire de corps composés de fluides parfaits. On peut donc remplacer  $\sigma$ ,  $\sigma_i$  et  $\sigma_{ij}$  par leur expression en fonction du tenseur énergie impulsion d'un fluide parfait. On tient compte de la pression  $P$  de l'énergie interne  $\Pi$  et plutôt que de garder  $\rho$  nous allons lui préférer  $\rho_*$  qui n'est, certes, pas un scalaire mais qui permet de définir deux masses conservées pour chacun des deux corps et cela quel que soit leur mouvement (ce sont les deux masses baryoniques  $m_1$  et  $m_2$  du corps 1 et du corps 2).

## 5.7 l'énergie à 3PN en terme des potentiels et des sources fluides

L'expression de tous les potentiels est donnée par l'inverse du d'Alembertien retardé ( $\square_{\text{Ret}}^{-1}$ ) d'une source compacte, donnée par une somme de termes qui dépendent de  $\{\sigma, \sigma_i, \sigma_{ij}\}$ , et d'une source non-compacte donnée par une somme de termes qui dépendent uniquement des potentiels. Il convient donc pour calculer les potentiels de connaître l'expression des  $\{\sigma, \sigma_i, \sigma_{ij}\}$  en fonction des grandeurs physiques qui caractérisent l'état du fluide parfait dont sont composés les deux corps du système binaire. Pour déterminer ces expressions, il suffit de remplacer les expressions de  $g^{\mu\nu}$  et de  $u^\mu$  dans le tenseur énergie-impulsion  $T^{\mu\nu}$  (à partir duquel s'expriment les  $\sigma$ ) en fonction des  $h^{\mu\nu}$  dont on connaît le lien avec les potentiels élémentaires. On obtient ainsi jusqu'à l'ordre 3PN

$$\sigma_N = \rho_*, \tag{II.5.7.49a}$$

$$\sigma_{1PN} = -\frac{1}{c^2} \rho_* V + \frac{3}{2c^2} \rho_* v^2 + \frac{3}{c^2} P + \frac{1}{c^2} \rho_* \Pi, \tag{II.5.7.49b}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{2PN} = & \frac{1}{2c^4} \rho_* V^2 + \frac{1}{2c^4} \rho_* V v^2 + \frac{7}{8c^4} \rho_* v^4 - \frac{2}{c^4} \rho_* \widehat{W} - \frac{4}{c^4} \rho_* V_i v^i \\
& - \frac{6}{c^4} P V + \frac{2}{c^4} P v^2 - \frac{1}{c^4} \rho_* \Pi V + \frac{3}{2c^4} \rho_* \Pi v^2, \tag{II.5.7.49c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{3PN} = & -\frac{1}{6c^6} \rho_* V^3 + \frac{11}{4c^6} \rho_* V^2 v^2 + \frac{33}{8c^6} \rho_* V + \frac{11}{16c^6} \rho_* v^6 - \frac{4}{c^6} \rho_* V_i V_i + \frac{2}{c^6} \rho_* V \widehat{W} \\
& - \frac{3}{c^6} \rho_* \widehat{W} v^2 - \frac{4}{c^6} \rho_* \widehat{X} - \frac{8}{c^6} \rho_* \widehat{Z} - \frac{8}{c^6} \rho_* \widehat{R}_i v^i - \frac{4}{c^6} \rho_* V V_i v^i - \frac{10}{c^6} \rho_* V_i v^i v^2 + \frac{2}{c^6} \rho_* \widehat{W}_{ij} v^i v^j \\
& + \frac{6}{c^6} P V^2 + \frac{8}{c^6} P V v^2 + \frac{2}{c^6} P v^4 - \frac{4}{c^6} P \widehat{W} - \frac{8}{c^6} P V_i v^i \\
& - \frac{1}{2c^6} \rho_* \Pi V^2 + \frac{1}{2c^6} \rho_* \Pi V v^2 + \frac{7}{8c^6} \rho_* \Pi v^4 - \frac{2}{c^6} \rho_* \Pi \widehat{W} - \frac{4}{c^6} \rho_* \Pi V_i v^i. \tag{II.5.7.49d}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{iN} = \rho_* v^i, \tag{II.5.7.50a}$$

$$\sigma_{i_{1\text{PN}}} = -\frac{1}{c^2}\mathbf{V}v^i + \frac{1}{2c^2}\rho_*v^2v^i + \frac{1}{c^2}Pv^i + \frac{1}{c^2}\rho_*\Pi v^i, \quad (\text{II.5.7.50b})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{i_{2\text{PN}}} &= \frac{1}{2c^4}\mathbf{V}^2v^i + \frac{3}{2c^4}\rho_*\mathbf{V}v^2v^i + \frac{3}{8c^4}\rho_*v^4v^i - \frac{2}{c^4}\rho_*\widehat{\mathbf{W}}v^i - \frac{4}{c^4}\rho_*\mathbf{V}_jv^jv^i \\ &\quad + \frac{2}{c^4}P\mathbf{V}v^i + \frac{1}{c^4}Pv^2v^i - \frac{4}{c^4}P\mathbf{V}_i - \frac{1}{c^4}\rho_*\Pi\mathbf{V}v^i + \frac{1}{2c^4}\rho_*\Pi v^2v^i. \end{aligned} \quad (\text{II.5.7.50c})$$

$$\sigma_{ij_{\text{N}}} = \rho_*v^iv^j + \delta_{ij}P, \quad (\text{II.5.7.51a})$$

$$\sigma_{ij_{1\text{PN}}} = -\frac{1}{c^2}\rho_*\mathbf{V}v^iv^j + \frac{1}{c^2}\rho_*v^2v^iv^j - \frac{2}{c^2}P\mathbf{V}\delta_{ij} + \frac{1}{c^2}Pv^iv^j + \frac{1}{c^2}\rho_*\Pi v^iv^j. \quad (\text{II.5.7.51b})$$

Il reste maintenant à expliciter ces potentiels en fonction des paramètres qui caractérisent l'état des deux étoiles que nous allons modéliser par un fluide parfait  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact. Nous allons, dans la section suivante, définir avec précision le modèle que nous avons utilisé tout au long de ce travail.

Nous exprimons les trois sources élémentaires  $\sigma$ ,  $\sigma_i$  et  $\sigma_{ij}$  en fonction de  $\rho_*$ , la densité baryonique,  $P$ , la pression, et  $\Pi$ , l'énergie interne spécifique. Le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait dépend de  $\rho = \rho_*/\sqrt{-g}/u^0$ ,  $P$  et  $\Pi$  mais aussi de  $g^{\mu\nu}$ , que l'on peut facilement remplacer par  $h^{\mu\nu}$ , et de  $u^\mu$ . Puisque  $u^\mu = u^0v^\mu/c$ , il convient de calculer

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{-g_{\rho\sigma} \frac{v^\rho}{c} \frac{v^\sigma}{c}}}$$

en fonction des  $h^{\mu\nu}$  à un ordre cohérent avec nos besoins à 3PN. Encore une fois les calculs sont longs mais sans difficulté. Dans la définition de l'énergie à 3PN, les densités d'énergie non compactes ne changent pas, en revanche, les densités d'énergie compactes sont modifiées de la manière suivante : il faut remplacer la densité compacte Newtonienne  $\epsilon_{\rho\text{N}}^c$  par la somme des trois termes

$$\epsilon_{\rho\text{N}}^c = \rho_*c^2 - \frac{1}{2}\rho_*\mathbf{V} + \frac{1}{2}\rho_*v^2, \quad (\text{II.5.7.52a})$$

$$\epsilon_{\Pi\text{N}}^c = \rho_*\Pi, \quad (\text{II.5.7.52b})$$

$$\epsilon_{P\text{N}}^c = 0. \quad (\text{II.5.7.52c})$$

La densité d'énergie à 1PN doit, quant à elle, être remplacée par la somme des trois termes

$$\epsilon_{\rho_{1\text{PN}}}^c = \frac{9}{4c^2}\rho_*\mathbf{V}v^2 + \frac{3}{8c^2}\rho_*v^4 - \frac{2}{c^2}\rho_*v^i\mathbf{V}_i, \quad (\text{II.5.7.53a})$$

$$\epsilon_{\Pi_{1\text{PN}}}^c = -\frac{1}{2c^2}\rho_*\Pi\mathbf{V} + \frac{1}{2c^2}\rho_*\Pi v^2, \quad (\text{II.5.7.53b})$$

$$\epsilon_{P_{1\text{PN}}}^c = \frac{3}{2c^2}P\mathbf{V} + \frac{1}{c^2}Pv^2. \quad (\text{II.5.7.53c})$$

La densité d'énergie à 2PN sera, elle, remplacée par la somme des trois termes

$$\epsilon_{\rho_{2\text{PN}}}^c = +\frac{1}{12c^4}\rho_*\mathbf{V}^3 - \frac{8}{c^4}\rho_*v^i\widehat{\mathbf{R}}_i + \frac{5}{2c^4}\rho_*\mathbf{V}^2v^2 + \frac{49}{16c^4}\rho_*\mathbf{V}v^4 + \frac{5}{16c^4}\rho_*v^6, \quad (\text{II.5.7.54a})$$

$$\epsilon_{\Pi_{2\text{PN}}}^c = \frac{9}{4c^4}\rho_*\Pi\mathbf{V}v^2 + \frac{3}{8c^4}\rho_*\Pi v^4 - \frac{2}{c^4}\rho_*\Pi v^i\mathbf{V}_i, \quad (\text{II.5.7.54b})$$

$$\epsilon_{P2PN}^c = -\frac{3}{c^4}PV^2 + \frac{7}{c^4}PVv^2 + \frac{1}{c^4}Pv^4 - \frac{6}{c^4}Pv^iV_i + \frac{1}{c^4}P\widehat{W}. \quad (\text{II.5.7.54c})$$

Et enfin, la densité d'énergie à 3PN doit être remplacée par la somme des trois termes

$$\begin{aligned} \epsilon_{\rho3PN}^c &= \frac{1}{c^6}\rho_* \left( -\frac{1}{24}V^4 - 4Vv^i\widehat{R}_i - 8V_i\widehat{R}_i + \frac{29}{8}V^3v^2 - 12v^i\widehat{R}_iv^2 \right. \\ &\quad + \frac{45}{4}V^2v^4 + \frac{121}{32}Vv^6 + \frac{35}{128}v^8 - 5V^2v^iV_i - 28Vv^2v^iV_i \\ &\quad - \frac{27}{4}v^4v^iV_i + 4(v^iV_i)^2 - 4VV_iV_i + 6V^2V_iV_i + 6Vv^iv^j\widehat{W}_{ij} \\ &\quad + \frac{7}{2}v^2v^iv^j\widehat{W}_{ij} + 16v^i\widehat{Z}_{ij} - 16v^i\widehat{Y}_i + V^2\widehat{W} - \frac{3}{2}Vv^2\widehat{W} \\ &\quad \left. - 2V\widehat{X} + 12v^2\widehat{X} - 4V\widehat{Z} \right), \end{aligned} \quad (\text{II.5.7.55a})$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\Pi3PN}^c &= \frac{1}{12c^6}\rho_*\Pi V^3 - \frac{8}{c^6}\rho_*\Pi v^i\widehat{R}_i + \frac{5}{2c^6}\rho_*\Pi V^2v^2 + \frac{49}{16c^6}\rho_*\Pi Vv^4 \\ &\quad + \frac{5}{16c^6}\rho_*\Pi v^6 + \frac{3}{c^6}\rho_*\Pi v^iv^j\widehat{W}_{ij} - \frac{5}{c^6}\rho_*\Pi v^2v^iV_i - \frac{4}{c^6}\rho_*\Pi V_iV_i \\ &\quad - \frac{1}{c^6}\rho_*\Pi V\widehat{W}, \end{aligned} \quad (\text{II.5.7.55b})$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{P3PN}^c &= \frac{3}{c^6}PV^3 - \frac{16}{c^6}Pv^i\widehat{R}_i + \frac{22}{c^6}PV^2v^2 + \frac{11}{c^6}PVv^4 \\ &\quad + \frac{1}{c^6}Pv^6 + \frac{5}{c^6}Pv^iv^j\widehat{W}_{ij} - \frac{24}{c^6}PVv^iV_i - \frac{14}{c^6}Pv^2v^iV_i \\ &\quad + \frac{4}{c^6}PV_iV_i - \frac{4}{c^6}PV\widehat{W} + \frac{2}{c^6}Pv^2\widehat{W} + \frac{12}{c^6}P\widehat{X} + \frac{8}{c^6}P\widehat{Z}. \end{aligned} \quad (\text{II.5.7.55c})$$

Les densité non-compacte reste bien sûr inchangées.

## 5.8 Modélisation des corps compacts étendus

Les deux corps compacts, dont nous allons décrire la dynamique, sont constitués de matière baryonique (matière normale) décrite par le tenseur énergie-impulsion donné par l'Eq. (II.5.3.5). Dans ce travail de thèse nous avons choisi de décrire un système binaire de corps compacts considérés comme des fluides parfaits dont nous avons déjà amplement parlé. Nous avons donc trois grandeurs scalaires qui vont caractériser l'état de chacun des sous-systèmes (chacune des étoiles) : la densité de masse au repos  $\rho(\mathbf{x}, t)$ , la pression  $P(\mathbf{x}, t)$  et la densité d'énergie interne  $\Pi(\mathbf{x}, t)$ . Dans le problème à deux corps étendus il y a trois zones à considérer. Il y a les deux zones de matière - l'une occupée par le corps 1, que l'on appellera zone 1 ou  $\mathcal{V}_1$ , et l'autre occupée par le corps 2, que l'on appellera zone 2 ou  $\mathcal{V}_2$  - et la zone de vide extérieure aux deux corps, qui est le complémentaire des deux autres zones, que l'on appellera zone 3 ou  $\mathcal{V}_3$  ou encore  $\mathbb{R}^3 - \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$ . On définit un système de coordonnées global  $\{r^\mu\}$  harmonique qui couvre entièrement l'espace et dans lequel nous allons étudier le problème externe. Le développement post-Newtonien s'effectue à  $t = \frac{r^0}{c} = \text{const}$ . Ce temps  $t$  de coordonnées, est aussi le temps propre d'un observateur situé loin des deux corps car dans ce cas, la métrique, qui peut être très compliquée à proximité des deux corps, retrouve sa forme minkowskienne ( $g^{\mu\nu} \rightarrow \eta^{\mu\nu}$ ). On dit que la métrique est asymptotiquement plate. On repère la position du centre de masse du

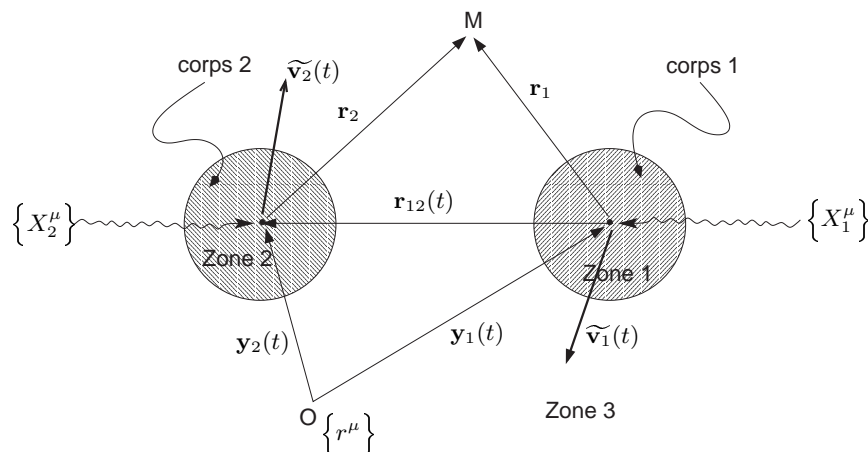


FIG. 5.8.1 – Modélisation des deux corps étendus.

corps 1 par sa position dans le système de coordonnées global donné par  $y_1^i(t)$ . De même, le centre de masse du corps 2 est repéré par  $y_2^i(t)$ . On ne sait pas *a priori* où se trouvent ces centres de masse. On laisse pour l'instant ces vecteurs  $y_1^i$  et  $y_2^i$  non spécifiés. Ils caractérisent en fait la position des corps 1 et 2 dans le problème externe et ce sont ces points dont nous voulons étudier le mouvement relatif en trouvant deux équations

$$\frac{d^2 y_1^i}{dt^2} = A_1^i \left[ M_1, M_2, \mathbf{r}_{12}, \tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, G, \frac{1}{c}, \text{structure interne} \right], \quad (\text{II.5.8.56})$$

$$\frac{d^2 y_2^i}{dt^2} = A_2^i \left[ M_1, M_2, \mathbf{r}_{12}, \tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, G, \frac{1}{c}, \text{structure interne} \right], \quad (\text{II.5.8.57})$$

où  $M_1$  et  $M_2$  sont les masses observées des deux étoiles (regarder la section sur la renormalisation de la masse page 104),  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1$  est la séparation des deux corps,  $\tilde{\mathbf{v}}_1 = d\mathbf{y}_1/dt$  est la vitesse de coordonnées du point  $\mathbf{y}_1$  et  $\tilde{\mathbf{v}}_2 = d\mathbf{y}_2/dt$  est la vitesse de coordonnées du point  $\mathbf{y}_2$ , et enfin la structure interne qui est caractérisée comme nous allons le voir par le rayon des corps 1 et 2, par le profil de densité isolé, *etc.* Encore une fois on espère qu'à l'ordre 3PN les Eqs. (II.5.8.56, II.5.8.57) ne dépendent pas physiquement de la structure interne mais il est nécessaire, *a priori*, de laisser une telle dépendance pour être parfaitement cohérent. Cette dépendance ne manquera pas de survenir dans les calculs intermédiaires, comme nous allons le montrer déjà dans le calcul à 1PN, mais on espère que le résultat final, une fois que l'on aura effectué la renormalisation des masses, ne dépendra de la structure interne à l'ordre 3PN qu'au travers de termes que l'on peut éliminer par une transformation de coordonnées (termes de jauge à 3PN). Il est très utile de considérer autour de chacun des deux corps le changement de variable  $r_1^i = r^i - y_1^i(t)$  et  $r_2^i = r^i - y_2^i(t)$ , afin de traiter plus facilement le problème interne. En fait cela revient à définir une grilles de coordonnées autour de chacun des corps qui est en comouvement avec le centre de masse. Nous insistons sur le fait qu'il s'agit d'un simple changement de variables et qu'il ne s'agit pas d'un changement de coordonnées. Les corps ont, dans leur référentiel propre et en l'absence de l'autre compagnon, un profil de densité de masse au repos  $\mathcal{C}^\infty$  et à symétrie sphérique. Le corps 1 a pour rayon  $b_1$  et une masse baryonique  $m_1$ . Le corps 2 a pour rayon  $b_2$  et pour masse<sup>2</sup> baryonique  $m_2$ . On suppose, d'autre part, que les deux corps sont compacts. Cela veut dire que le rayon de chacune des deux étoiles est voisin ou égal à son rayon de

<sup>2</sup>Ces masses  $m_1$  et  $m_2$  ne doivent pas être confondues avec les masses  $M_1$  et  $M_2$  qui interviendront lors de la renormalisation.

Schwarzschild de sorte que l'on peut dire

$$b_\alpha \sim \frac{Gm_\alpha}{c^2},$$

l'indice  $\alpha$  pouvant prendre les valeurs 1 ou 2. En fait, on n'écrit jamais cela mais on fait tous les calculs comme si  $b_\alpha \rightarrow 0$ . On va, d'autre part, supposer que les rayons  $b_\alpha$  sont des paramètres petits devant la séparation des étoiles  $r_{12}$ . On a en tête de faire tendre les  $b_\alpha$  vers zéro une fois que l'on aura exprimé l'énergie à 3PN. Ainsi, on pourra retrouver les expressions de l'énergie que l'on obtient avec les modèles où les étoiles sont supposées ponctuelles. Ce passage à la limite sera fait au dernier moment de sorte que pendant tous les calculs intermédiaires qui vont aboutir à l'énergie à 3PN on traite des quantités (sources, potentiels ...) continues, en fait  $\mathcal{C}^\infty$  comme on va le voir, qui assurent une itération post-Newtonienne sans ambiguïté. On va donc en fait traiter un double développement : un développement post-Newtonien, en puissance de  $1/c$ , et ensuite un développement "post-ponctuel" en puissance de  $b_\alpha$ . Dans ce qui suit l'indice  $\alpha$  sera réservé à la désignation des corps compacts. On définit les coordonnées locales normalisées

$$x_\alpha^i = \frac{r_\alpha^i}{b_\alpha},$$

$$x_\alpha = \sqrt{x_\alpha^k x_\alpha^k},$$

qui sont telles que  $x_\alpha = 0$  désigne le centre de masse du corps  $\alpha$  et  $x_\alpha = 1$  désigne l'enveloppe externe du corps  $\alpha$ . Pour chacun des deux corps, on définit une fonction  $\Psi_\alpha(x_\alpha)$  qui est à valeur dans  $\mathbb{R}^+$  et qui est  $\mathcal{C}^\infty$  sur ce domaine de définition. Ces fonctions définissent ce que l'on appelle le profil de densité de masse baryonique dans le référentiel propre de chacun des deux corps en l'absence de l'autre corps, et on pose

$$\rho_{*\alpha}(r^i) = \frac{m_\alpha \Psi'_\alpha(x_\alpha)}{4\pi b_\alpha^3 x_\alpha^2}. \quad (\text{II.5.8.58})$$

Il faut que  $\Psi_\alpha(x_\alpha)$  varie au moins comme  $x_\alpha^3$  au voisinage de zéro pour assurer la continuité  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\rho_*$ . En fait cette fonction  $\Psi_\alpha(x_\alpha)$  n'est rien d'autre que le rapport de la masse baryonique du corps  $\alpha$  contenue dans la boule de rayon  $x_\alpha$  divisée par la masse baryonique totale du corps  $\alpha$ . L'intégrale sur tout le volume du corps  $\alpha$  de  $\rho_{*\alpha}$  doit, bien évidemment, donner la masse baryonique  $m_\alpha$ . On impose pour cela  $\Psi_\alpha(0) = 0$  et  $\Psi_\alpha(1) = 1$ . D'autre part, les dérivées premières des fonctions  $\Psi_\alpha$  sont nulles dans l'intervalle  $[1, +\infty[$  pour imposer l'absence de matière en dehors des corps. Cela implique que toutes les dérivées de ces fonctions de profil sont nulles sur  $[1, +\infty[$  et en particulier en  $x_\alpha = 1$ , c'est-à-dire sur l'enveloppe externe de chacun des corps

$$\forall n \geq 1, \Psi_\alpha^{(n)}(1) = 0. \quad (\text{II.5.8.59})$$

Nous verrons dans la section qui concerne les déformations de ce profil (dues principalement au mouvement de translation des étoiles qui induit des contractions de Lorentz, et à la présence du compagnon qui induit des contractions d'Einstein) à la page 100 que le raccord du problème interne au problème externe rajoute énormément à la complexité de cette approche.



## 5.9 Intégrale de Poisson pour des corps étendus

Au cours de l'itération, il va falloir déterminer les potentiels  $V$ ,  $V_i$  et les autres en fonction des sources que l'on vient de décrire. Pour cela il va falloir, dans le cadre de ce modèle, calculer des d'Alembertiens retardés  $\widetilde{\square}_{\text{Ret}}^{-1}$  (définis page 43) de sources qui sont parfois à support compact, comme c'est le cas de  $V$  et  $V_i$ , et parfois de sources qui sont à support non compact, comme c'est le cas de  $\widehat{W}_{ij}$  par exemple, Eq. (II.5.5.33a), qui a une partie de sa source qui est à support compact,  $-4\pi G(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk})$ , et l'autre partie qui est à support non compact,  $\partial_i V \partial_i V$ , puisque  $V$  est à valeur dans  $\mathbb{R}^3$  tout entier alors que les  $\sigma$  sont nuls en-dehors de la source des corps compacts. Nous avons vu que jusqu'à l'ordre 3PN inclus, qui correspond à l'ordre auquel on souhaite calculer l'énergie à 3PN totale, on peut écrire la solution particulière de l'équation de d'Alembert avec source  $\overline{S}$  (la barre horizontale est là pour rappeler que la source  $S$  est écrite sous forme d'un développement post-Newtonien) comme

$$\widetilde{\square}_{\text{Ret}}^{-1}[S] \Big|_{3\text{PN}} = \widetilde{\mathcal{I}}^{-1}[\overline{S}] \Big|_{3\text{PN}} = \widetilde{\Delta}^{-1}[S] + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \widetilde{\Delta}^{-2}[S] + \frac{1}{c^4} \partial_t^4 \widetilde{\Delta}^{-3}[S] + \frac{1}{c^6} \partial_t^6 \widetilde{\Delta}^{-4}[S] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^8}\right). \quad (\text{II.5.9.60})$$

Il est donc nécessaire de pouvoir calculer toutes ces intégrales de Poisson itérées (définition aux pages 27, 49 et 67). Pour cela nous allons distinguer les deux types de sources que l'on va rencontrer au cours de l'itération : les sources compactes<sup>3</sup> et les sources non compactes<sup>4</sup> (pour s'en convaincre on peut regarder les Eq. (II.5.5.32a-II.5.5.33b)). Soit  $S(r^\mu)$  une source quelconque définie sur tout l'espace  $\mathbb{R}^3$ . On va diviser cette source en trois parties qui représentent les trois domaines de définition distincts

$$S(r^\mu) = S_1(\mathbf{x}_1, t) + S_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) + S_2(\mathbf{x}_2, t) \quad (\text{II.5.9.61})$$

où  $S_1$  est à valeur dans  $\mathcal{V}_1$ ,  $S_2$  est à valeur dans  $\mathcal{V}_2$  et  $S_3$  est à valeur dans  $\mathbb{R}^3 - \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$  et où l'on a choisi différentes variables pour décrire la zone 1, 2 et 3. Dans un premier temps nous allons nous occuper du calcul des potentiels des sources compactes.

### 5.9.1 Le cas des sources compactes

Une source compacte, comme nous l'avons vu, est différente de zéro seulement dans les zones 1 et 2. Nous allons faire quelques hypothèses sur la structure mathématique de ces sources, hypothèses que nous vérifierons *a posteriori*. Une source compacte peut s'écrire de manière générale comme

$$S^c(r^\mu) = S_1^c(\mathbf{x}_1, t) + S_2^c(\mathbf{x}_2, t) \quad (\text{II.5.9.62})$$

le terme  $S_3$  étant nul (le  $^c$  est redondant, mais nous le laissons, puisque les indices  $_1$  et  $_2$ , relatifs aux zones de définition, montrent bien qu'il s'agit de sources à support compact). Ainsi le calcul de l'intégrale de Poisson d'une telle source se résume au calcul de l'intégrale de Poisson de la source en 1 et de la source en 2. Nous allons faire le calcul pour la source en 1. Le calcul de l'intégrale de Poisson pour la source en 2 est parfaitement symétrique en faisant le changement  $1 \leftrightarrow 2$ . La source 1 est en général un développement en puissance de  $\{G, c\}$ , puisqu'elle est

<sup>3</sup>Elles ont pour support la zone 1 et/ou la zone 2. Ce sont toutes les sources du type  $\rho_* S$ ,  $PS$  ou  $\rho_* \text{IIS}$  car la densité de coordonnées  $\rho_*$  aussi bien que la pression  $P$  ou l'énergie interne  $\rho_* \text{II}$  sont des fonctions à support compact et à valeur dans la zone 1 et 2.

<sup>4</sup>Ce sont les sources qui ne dépendent pas de  $\rho_* S$ ,  $PS$  ou  $\rho_* \text{IIS}$ . Elles ne dépendent que des potentiels élémentaires.

issue d'un développement post-Newtonien, mais elle est aussi un développement en puissance de  $\{b_1, b_2\}$  que l'on a appelé "post-ponctuel" dans la section précédente car on regarde ce qui se passe lorsque la source n'est justement plus ponctuelle. Lors du calcul de l'intégrale de Poisson d'une source donnée, les puissances de  $\{G, c, \ln c\}$  ne changent pas. En revanche, les puissances de  $b_\alpha$  sont modifiées puisque prendre l'intégrale de Poisson revient, au niveau de l'homogénéité, à multiplier la source par une puissance de  $b_\alpha^2$ . Nous supposons que

$$S_\alpha^c(\mathbf{x}_\alpha, t) = \sum_{p \geq p_{0\alpha}} b_\alpha^p \bar{s}_{\alpha p}^c(x_\alpha, \mathbf{n}_\alpha, t, b_\beta). \quad (\text{II.5.9.63})$$

Cette source est supposée  $\mathcal{C}^\infty$  sur tous les volumes 1 et 2 ce qui veut dire que le calcul de l'intégrale de Poisson ne présente absolument aucune difficulté puisque l'on intègre sur un volume fini une quantité régulière en tout point du domaine d'intégration,

$$\widetilde{\Delta}^{-1} S^c(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int_{\mathcal{V}_1} \frac{d^3 \mathbf{y}}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} S_1^c(\mathbf{y}, t) + (1 \leftrightarrow 2), \quad (\text{II.5.9.64})$$

où  $\beta$  est égal à 2 si  $\alpha$  est égal à 1 et réciproquement. On voit que l'intégrale de Poisson, elle aussi, est divisée en deux intégrations qui portent sur le volume du corps 1 et sur le volume du corps 2. L'intégrale de Poisson comporte essentiellement deux variables  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  (cf. Eq. (II.5.9.64)). La première est la variable générique qui représente le point où l'on calcule la valeur de l'intégrale de Poisson. La deuxième est la variable d'intégration qui décrit tout le volume d'intégration. Dans le cas d'une source compacte, elle décrit les deux volumes  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$ . Nous allons introduire à ce stade une notation très utile qui permet, encore une fois, de faire des calculs modulés. la variable d'intégration parcourt les volumes  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$ . En revanche, la variable générique peut prendre des valeurs dans  $\mathcal{V}_1$ ,  $\mathcal{V}_2$  et  $\mathcal{V}_3$ . On définit les P-opérateurs de Poisson

$$P_{n_{\text{gen}}, n_{\text{int}}} S^c = \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int_{\mathcal{V}_{n_{\text{int}}}} \frac{d^3 \mathbf{y}}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} |\mathbf{y}|^{\mathbb{B}} S_{n_{\text{int}}}^c(\mathbf{y}, t); \text{ pour } \mathbf{x} \in \mathcal{V}_{n_{\text{gen}}}, \quad (\text{II.5.9.65})$$

où  $n_{\text{gen}}$  est le numéro de la zone à laquelle appartient la variable générique (si l'on décide de calculer l'intégrale de Poisson dans le volume 1 et bien on prendra  $n_{\text{gen}} = 1$ ) où  $n_{\text{int}}$  est le numéro du volume d'intégration. Ainsi, on définit une matrice  $3 \times 3$  d'opérateurs qui agissent sur les sources (on gardera la même définition lorsque l'on traitera le cas des sources non compactes). On a différents cas à traiter

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}_1, \quad \widetilde{\Delta}^{-1} S^c = -\frac{1}{4\pi} \left( P_{11} S^c + P_{12} S^c \right), \quad (\text{II.5.9.66})$$

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}_3, \quad \widetilde{\Delta}^{-1} S^c = -\frac{1}{4\pi} \left( P_{31} S^c + P_{32} S^c \right), \quad (\text{II.5.9.67})$$

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}_2, \quad \widetilde{\Delta}^{-1} S^c = -\frac{1}{4\pi} \left( P_{21} S^c + P_{22} S^c \right), \quad (\text{II.5.9.68})$$

et puisque la source  $S^c$  est compacte on a  $P_{13} S^c = 0$ ,  $P_{23} S^c = 0$  et  $P_{33} S^c = 0$ . Lors de l'itération post-Newtonienne il sera nécessaire de connaître explicitement la valeur de l'intégrale de Poisson dans tout l'espace et donc de connaître chacun des P-opérateurs de Poisson. En fait, il n'est pas nécessaire de faire le calcul explicite pour chacun d'entre eux. Il y a des propriétés de symétrie :  $P_{22} S^c$  est égale à  $P_{11} S^c$  lorsque l'on fait le changement  $1 \leftrightarrow 2$ ,  $P_{32} S^c$  est égale à  $P_{31} S^c$  lorsque l'on fait le changement  $1 \leftrightarrow 2$  et enfin  $P_{21} S^c$  est égale à  $P_{12} S^c$  lorsque l'on fait le changement  $1 \leftrightarrow 2$ . Il nous suffit donc de calculer explicitement  $P_{11} S^c$ ,  $P_{31} S^c$  et  $P_{21} S^c$ .

### 5.9.1.1 Calcul de $P_{11}$

On veut calculer le P-opérateur à valeur dans  $\mathcal{V}_1$  et qui agit sur une source aussi définie sur  $\mathcal{V}_1$ . Ces calculs sont assez simples une fois que l'on sait comment se fait le développement multipolaire du noyau de Poisson (pour cela regarder dans l'article en anglais l'Eq. (II.4.8.154) à la page 72). Il suffit de scinder l'intégrale de Poisson en deux

$$P_{11} S^c(\mathbf{x}, t) = \int_0^{r_1} dr'_1 r_1'^2 \int d\Omega'_1 \frac{S_1^c(\mathbf{r}'_1, t)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|} + \int_{r_1}^{b_1} dr'_1 r_1'^2 \int d\Omega'_1 \frac{S_1^c(\mathbf{r}'_1, t)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|}. \quad (\text{II.5.9.69})$$

On utilise alors l'expression (II.5.9.63) de  $S_1^c$  et on effectue le développement multipolaire du noyau de Poisson suivant que  $|\mathbf{r}_1| \geq |\mathbf{r}'_1|$  ou que  $|\mathbf{r}'_1| \geq |\mathbf{r}_1|$ . Une fois cette procédure accomplie on obtient le résultat

$$P_{11} S^c(\mathbf{x}, t) = \sum_{p \geq p_0} b_1^{p+2} \sum_{l \geq 0} \frac{(2l-1)!!}{l!} \left\{ \frac{\widehat{n}_{1_l}}{r_1^{l+1}} \int_0^{x_1} du u^{l+2} \int d\Omega_u \widehat{n}_{u_l} \bar{s}_{1p}(u, \mathbf{n}_u) + \widehat{n}_{1_l} x_1^l \int_{x_1}^1 du u^{-l+1} \int d\Omega_u \widehat{n}_{u_l} \bar{s}_{1p}(u, \mathbf{n}_u) \right\}. \quad (\text{II.5.9.70})$$

On remarque que l'on a bien multiplié chaque puissance en  $b_1$  de la source par  $b_1^2$  ce qui est une simple remarque d'homogénéité. Si l'on veut connaître le développement de  $P_{11} S^c$  jusqu'à l'ordre  $b^p$  inclus, il faut connaître  $S^c$  à l'ordre  $b^{p-2}$  inclus.

### 5.9.1.2 Calcul de $P_{12}$

Pour le calcul de ce P-opérateur on n'a pas besoin de scinder l'intégrale de Poisson en deux parties car la variable d'intégration est dans une zone bien distincte de la variable générique. Il suffit juste d'écrire le noyau de Poisson  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  comme  $1/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2|$ , où  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{x} - \mathbf{y}_2$  et où  $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{y} - \mathbf{y}_2$ , et d'en prendre le développement multipolaire, sachant que dans ce cas précis  $|\mathbf{r}_2| \geq |\mathbf{r}'_2|$ , pour obtenir le résultat exprimé en fonction de  $\mathbf{r}_2$

$$P_{12} S^c(\mathbf{x}, t) = \sum_{l \geq 0} \frac{(2l-1)!!}{l!} \frac{\widehat{n}_{2_l}}{r_2^{l+1}} \sum_{p \geq p_0} b_2^{p+l+3} \int_0^1 du u^{l+2} \int d\Omega_u \widehat{n}_{u_l} \bar{s}_{2p}(u, \mathbf{n}_u). \quad (\text{II.5.9.71})$$

Le résultat peut être exprimé en fonction des seules variables de la zone 1 en notant que  $r_2 = (b_1^2 x_1^2 + r_{12}^2 + 2b_1 x_1 r_{12} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_{12})^{1/2}$ , que l'on peut développer en puissance de  $b_1$ , et que  $\mathbf{n}_2 = (\mathbf{r}_{12} + b_1 x_1 \mathbf{n}_1)/r_2$ . Il peut être pratique de laisser le résultat sous forme "condensée" pour diminuer la taille des expressions mais, d'une manière ou d'une autre, il faut à un moment donné, pour poursuivre les calculs de l'énergie à 3PN, exprimer le résultat dans les variables de la zone 1. Si l'on veut connaître le développement de  $P_{12} S^c$  jusqu'à l'ordre  $b^p$  inclus, il faut connaître  $S^c$  à l'ordre  $b^{p-3}$  inclus.

### 5.9.1.3 Calcul de $P_{31}$

Puisque le domaine d'intégration est distinct du domaine dans lequel se trouve le point générique, il suffit juste, pour le calcul de ce P-opérateur, de faire le développement multipolaire de  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|$  sachant que  $|\mathbf{r}_1| \geq |\mathbf{r}'_1|$ . Le résultat pour ce P-opérateur est

$$P_{31} S^c(\mathbf{x}, t) = \sum_{l \geq 0} \sum_{p \geq p_0} b_1^{p+3} \frac{(2l-1)!!}{l!} \frac{\widehat{n}_{1_l}}{r_1^{l+1}} \int_0^1 du u^{2+l} \int d\Omega_u \widehat{n}_{u_l} \bar{s}_{1p}(u, \mathbf{n}_u). \quad (\text{II.5.9.72})$$

Le résultat doit être laissé en fonction de la variable  $r_1$  et non pas  $b_1 x_1$  car le point générique est en-dehors de la source. Si l'on veut connaître le développement de  $P_{31} S^c$  jusqu'à l'ordre  $b^p$  inclus, il faut connaître  $S^c$  à l'ordre  $b^{p-3}$  inclus. Nous avons donc tous les éléments à notre disposition pour calculer l'intégrale de Poisson d'une source compacte en n'importe quel point de  $\mathbb{R}^3$ . Il reste à faire la même chose pour une source strictement non compacte (sans partie compacte).

### 5.9.2 Le cas des sources strictement non-compactes

Pour une source strictement non compacte le seul terme non nul est  $S_3$ . Pour connaître l'intégrale de Poisson complète pour une telle source, il suffit de calculer les P-opérateurs manquants, c'est-à-dire  $P_{13}$  et  $P_{33}$ . Le calcul de ces P-opérateurs est un peu plus compliqué car la zone d'intégration ( $\mathcal{V}_3$ ) ne présente aucune symétrie. En effet, il s'agit dans ce cas d'intégrer sur tout l'espace auquel on a retiré deux domaines sphériques. On peut utiliser le concept de partie finie d'Hadamard dont on peut trouver des références et une étude sur le problème à deux corps dans [23]. La partie finie d'Hadamard de l'intégrale sur tout l'espace d'une fonction singulière en deux points, ce qui est généralement le cas de la source  $S_3$ , consiste à calculer cette intégrale sur tout l'espace privé de deux boules de rayon  $\epsilon$  entourant les deux points singuliers, à laquelle on retranche tous les pôles en  $\epsilon_1$  qui apparaissent (voir [23] formule 3.3). D'autre part, on peut relier cette partie finie à une intégrale calculée sur le principe du prolongement analytique (voir [23] formule 4.1) que l'on peut alors facilement relier à la formule de Riesz que l'on utilise pour trouver la valeur de cette partie finie dans la pratique (voir [23] formule 4.4). On suppose dans ce qui suit que lorsque  $r_1 \rightarrow 0$ ,  $S_3$  admet un développement divergent de la forme

$$S_3(\mathbf{r}_1,; \mathbf{r}_2) \underset{r_1 \rightarrow 0}{=} \sum_{p \geq p_1} r_1^p \bar{f}_{1p}(\mathbf{n}_1), \quad (\text{II.5.9.73})$$

$$S_3(\mathbf{r}_1,; \mathbf{r}_2) \underset{r_2 \rightarrow 0}{=} \sum_{p \geq p_2} r_2^p \bar{f}_{2p}(\mathbf{n}_2), \quad (\text{II.5.9.74})$$

où  $\bar{f}_p(\mathbf{n}_1)$  dépend de  $\mathbf{r}_{12}$ ,  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ ,  $b_1$  et  $b_2$ .

#### 5.9.2.1 Calcul de $P_{33}$

On peut calculer l'intégrale partie finie  $\text{FP}_{\text{B}=0} \int$  de la source  $S_3$  multiplié par le noyau de Poisson qui nous permet de trouver l'intégrale de Poisson sur le domaine  $\mathbb{R}^3 - \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$  à laquelle on a retranché des termes qui divergent lorsque les rayons  $b_1$  et  $b_2$  des boules  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  tendent vers 0. Ainsi,

$$\begin{aligned} P_{33} S^{\text{nc}}(\mathbf{x}, t) &= \text{FP}_{\text{B}=0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \mathbf{u}}{|\mathbf{x} - \mathbf{u}|} |\mathbf{u}|^{\text{B}} S_3(\mathbf{u}) \\ &- \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^l}{l!} \hat{\partial}_l \left( \frac{1}{r_1} \right) \left[ \sum_{a+l+3 \neq 0} \frac{b_1^{a+l+3}}{a+l+3} \int d\Omega_{n_l} f_{1a}^{\text{ext}}(\mathbf{n}) + \ln \left( \frac{b_1}{r_0} \right) \int d\Omega_{n_l} f_{1-l-3}^{\text{ext}}(\mathbf{n}) \right] \\ &+ (1 \longleftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (\text{II.5.9.75})$$

Il se trouve que pour tous les calculs que l'on est amené à faire jusqu'à l'ordre 3PN, on connaît les solutions exactes des intégrales de Poisson partie finie dont on a besoin puisqu'elles sont calculées dans [22]. Il n'en serait pas de même si l'on voulait faire le calcul à 4PN. Si l'on

veut connaître le développement de  $P_{33} S^{\text{NC}}$  jusqu'à l'ordre  $b^p$  inclus, il faut connaître  $S^{\text{NC}}$  à l'ordre  $b^{\max(p-p_1-3, p-p_2-3)}$  inclus ( $p_1$  (resp.  $p_2$ ) est la puissance minimale de  $r_1$  (resp.  $r_2$ ) dans le développement de  $S_3$  lorsque  $r_1 \rightarrow 0$  (resp.  $r_2 \rightarrow 0$ )).

### 5.9.2.2 Calcul de $P_{13}$

Pour le calcul de ce P-opérateur dans la zone 1, il faut développer le noyau de Poisson lorsque  $|\mathbf{r}_1| \leq |\mathbf{r}'_1|$  et utiliser la formule de l'intégrale partie finie. On obtient le P-opérateur

$$\begin{aligned}
P_{13} S^{\text{NC}}(\mathbf{x}, t) = & \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^l}{l!} b_1^l x_1^l \widehat{n}_{1l} \left\{ \text{FP}_{\mathbb{B}=0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{u} |\mathbf{u}|^{\mathbb{B}} \partial_l \left( \frac{1}{|\mathbf{u}|} \right) S_3(\mathbf{u}) \right. \\
& - (-1)^l (2l-1)!! \sum_{a \neq -2} \frac{b_1^{a+2}}{a+2} \int d\Omega \widehat{n}_l f_{1a+l}^{\text{ext}}(\mathbf{n}) \\
& - (-1)^l (2l-1)!! \ln \left( \frac{b_1}{r_0} \right) \int d\Omega \widehat{n}_l f_{1l-2}^{\text{ext}}(\mathbf{n}) \\
& - \sum_{a \neq -3} \frac{b_2^{a+3}}{a+3} \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{p!} \partial_{\text{LP}} \left( \frac{1}{r_{12}} \right) \int d\Omega \widehat{n}_l f_{2a-p}^{\text{ext}}(\mathbf{n}) \\
& \left. - \ln \left( \frac{b_2}{r_0} \right) \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{p!} \partial_{\text{LP}} \left( \frac{1}{r_{12}} \right) \int d\Omega \widehat{n}_l f_{2-3-p}^{\text{ext}}(\mathbf{n}) \right\}. \quad (\text{II.5.9.76})
\end{aligned}$$

Si l'on veut connaître le développement de  $P_{13} S^{\text{NC}}$  jusqu'à l'ordre  $b^p$  inclus, il faut connaître  $S^{\text{NC}}$  à l'ordre  $b^{\max(p-p_1-2, p-p_2-3)}$ .

## 5.10 Intégration des sources compactes et non compactes

Puisque l'on veut calculer l'énergie, il faut savoir faire l'intégration sur tout l'espace de manière pratique. Nous avons deux types de sources qu'il faut distinguer car leur traitement vis à vis de l'intégration n'est pas le même : il s'agit des sources compactes et non compactes tout comme dans la section précédente. L'intégration d'une source compacte se fait simplement

$$\int_{\mathcal{V}_1} d^3 \mathbf{x} S^c(\mathbf{x}, t) = \sum_{p \geq p_0} b_1^{p+3} \int du u^2 \int d\Omega_u \bar{s}_{1p}(u, \mathbf{n}_u). \quad (\text{II.5.10.77})$$

L'intégration d'une source strictement non compacte, quant à elle, se fait à l'aide de l'intégration partie finie dont on a discuté à la section précédente.

## 5.11 Les différentes stratégies que l'on a adoptées

Lorsque nous avons entrepris l'étude de la dynamique à 3PN pour des corps étendus, nous nous sommes très rapidement aperçu que si l'on prenait toute la physique en compte les calculs allaient devenir très compliqués. Aussi, avons-nous commencé à envisager le problème de la manière la plus simple. La stratégie consistait à tenir compte d'un profil de densité quelconque (tel que nous l'avons défini à l'aide des fonctions  $\Psi_\alpha$ ) pour les corps compacts mais de ne pas s'embarrasser de la pression, de l'énergie interne et d'une quelconque vitesse interne des étoiles.

Le modèle ponctuel donnant un résultat pour l'énergie à 3PN, alors qu'il ne permet même pas de décrire un profil de densité pour les corps compacts, il semblait tout à fait légitime de ne rajouter qu'une seule complication. C'est pourquoi, dans les premiers temps, nous avons itéré le calcul de l'énergie à 3PN en supposant que la pression, l'énergie interne et la vitesse interne sont nulles. Nous étions bien conscients du fait que cette approche n'était pas consistante à tous les ordres en puissance de  $b_1$  et  $b_2$  (je rappelle que notre méthode donne des résultats sous forme de séries en puissance de  $b_1$  et  $b_2$  et de  $1/c$ ). Nous souhaitions voir à quel point la partie finie de notre résultat pour l'énergie à 3PN, qui correspond à tous les termes de l'énergie dont la puissance globale de  $b$  est nulle<sup>5</sup>, redonnerait les résultats déjà connus de l'énergie et permettrait de fixer la constante  $\lambda$  indéterminée soit sous forme d'un nombre universel soit sous forme d'un nombre qui dépend de la structure interne qui fait partie de nos ingrédients. Nous avons constaté que la partie finie était en parfait accord avec les travaux sur les corps ponctuels pour la partie Newtonienne, post-Newtonienne (nous décrirons cette étape dans le manuscrit), 2PN et aussi pour certaines familles de termes à 3PN. À cet ordre un grand nombre de termes dépendent de la structure interne. Nous avons pensé dans un premier temps qu'il y avait beaucoup de termes de jauge. Mais, même après avoir épuisé toutes les transformations de jauge il restait encore des contributions, autres que  $\lambda$ , qui dépendaient de la structure interne. À ce moment là, nous avons compris que pour ce modèle, avec des corps fluides, soit totalement cohérent il fallait tenir compte de toute la physique (ce qui paraît normal) et donc de tenir compte de la pression, de l'énergie interne et de la vitesse interne. Les résultats dont je dispose à 3PN sont basés sur cette première étude qui a permis de comprendre quelques points importants dont nous discuterons à la page 106. Nous avons réussi à tenir compte de toute la physique jusqu'à 1PN et nous allons exposer ce résultat dans les sections suivantes.

## 5.12 Détail de l'itération à 1PN

Nous allons faire le calcul détaillé de l'énergie à 1PN d'un système binaire de corps compacts supposés étendus (et non pas ponctuels). Ce calcul présente l'avantage de rentrer, de façon détaillée, dans un manuscrit de moins de mille pages. Nous allons décrire les différentes étapes en partant de l'expression générale de l'énergie à 1PN et en passant par le calcul des potentiels nécessaires.

### 5.12.1 De quoi à t'on besoin ?

Nous souhaitons calculer l'énergie 1PN d'un système binaire de corps compacts étendus. Nous avons décrit dans les sections précédentes les propriétés mathématiques et physiques de ces sources de matière. Nous allons maintenant rendre ces calculs explicites. L'énergie à 1PN d'un fluide parfait est donnée par

$$E_{1PN} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} \left\{ \epsilon_{\rho N}^c + \epsilon_{\rho 1PN}^c + \epsilon_{\rho 1PN}^{NC} + \epsilon_{IIN}^c + \epsilon_{II1PN}^c + \epsilon_{P1PN}^c \right\}. \quad (\text{II.5.12.78})$$

où les densités d'énergie ont été données aux pages 86 et 88. Si l'on écrit le détail

$$E_{1PN} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} \left[ \rho_* c^2 - \frac{1}{2} \rho_* V + \frac{1}{2} \rho_* v^2 + \rho_* \Pi \right]$$

<sup>5</sup>la puissance globale de  $b$  d'un terme de l'énergie, et de toute autre grandeur d'ailleurs, qui possède un facteur  $b_1^p b_2^q$  est  $p + q$ .

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{9}{4} \rho_* \mathbf{V} v^2 + \frac{3}{8} \rho_* v^4 - 2 \rho_* v^i \mathbf{V}_i - \frac{1}{2} \rho_* \Pi \mathbf{V} + \frac{1}{2} \rho_* \Pi v^2 + \frac{3}{2} P \mathbf{V} + P v^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{8\pi G} (\partial_t \mathbf{V})^2 - \frac{1}{8\pi G} \mathbf{V} \partial_t^2 \mathbf{V} \right\}. \tag{II.5.12.79}
\end{aligned}$$

Nous devons donc calculer le potentiel  $\mathbf{V}$  à l'ordre 1PN et le potentiel  $\mathbf{V}_i$  à l'ordre Newtonien.

### 5.12.2 Calcul de $\mathbf{V}$ à l'ordre Newtonien

À l'ordre Newtonien le calcul de  $\mathbf{V}$  se ramène au calcul de  $-4\pi G \widetilde{\Delta}^{-1} \rho_*$ . Nous appelons  $\mathbf{V}_1$  le potentiel  $\mathbf{V}$  calculé dans la zone 1 et  $\mathbf{V}_3$  le potentiel  $\mathbf{V}$  calculé dans la zone 3. Ainsi en utilisant les P-opérateurs Eqs. (II.5.9.70-II.5.9.75) on obtient

$$\mathbf{V}_{1\text{N}} = G(P_{11}\rho_* + P_{12}\rho_*), \tag{II.5.12.80}$$

$$\mathbf{V}_{3\text{N}} = G(P_{31}\rho_* + P_{32}\rho_*). \tag{II.5.12.81}$$

Nous allons faire le calcul explicite de  $\mathbf{V}_{1\text{N}}$  et  $\mathbf{V}_{3\text{N}}$  pour montrer les techniques de calcul que l'on utilise en pratique mais nous nous arrêterons là pour les calculs explicites car, d'une part cela n'a pas un grand intérêt physique, et en plus, en pratique nous effectuons tous les calculs à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique : Mathematica®. Il suffit d'utiliser la définition de  $\rho_*$  donnée Eq. (II.5.8.58). La source,  $\rho_*$ , est compacte. Elle s'écrit bien sous la forme générale (II.5.9.63) où on a

$$\bar{s}_{1-3}(x_1, \mathbf{n}_1) = \frac{m_1 \Psi'_1(x_1)}{4\pi x_1^2}, \tag{II.5.12.82}$$

$$\forall p \neq -3, \bar{s}_{1p}(x_1, \mathbf{n}_1) = 0, \tag{II.5.12.83}$$

$$\bar{s}_{2-3}(x_2, \mathbf{n}_2) = \frac{m_2 \Psi'_2(x_2)}{4\pi x_2^2}, \tag{II.5.12.84}$$

$$\forall p \neq -3, \bar{s}_{2p}(x_2, \mathbf{n}_2) = 0. \tag{II.5.12.85}$$

On peut alors très simplement utiliser les Eqs. (II.5.9.70, II.5.9.71, II.5.9.72) qui vont nous donner une expression explicite du potentiel  $\mathbf{V}$  dans les zones 1 et 3 (nous rappelons que pour obtenir  $\mathbf{V}$  dans la zone 2, il suffit de faire le changement  $1 \leftrightarrow 2$  dans le potentiel  $\mathbf{V}_1$ ). Le résultat que l'on obtient permet de voir comment se manifeste la structure interne et comment s'agence le développement en puissance de  $b$

$$\mathbf{V}_{1\text{N}} = \frac{Gm_1}{b_1} \int_{x_1}^1 du \frac{\Psi'_1(u)}{u} + \frac{Gm_1 \Psi_1(x_1)}{b_1 x_1} + \frac{Gm_2}{r_2} \tag{II.5.12.86}$$

$$\mathbf{V}_{3\text{N}} = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2}. \tag{II.5.12.87}$$

Pour  $\mathbf{V}_1$  il peut être nécessaire de re-développer le terme  $Gm_2/r_2$  en fonction de la seule variable  $x_1$ . Pour cela on peut écrire  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{12}$ . Ainsi,  $1/r_2$  se présente comme le développement d'un noyau de Poisson, dans le cas où  $|\mathbf{r}_1| \leq |\mathbf{r}_{12}|$  et on obtient

$$\frac{1}{r_2} = \sum_{l \geq 0} \frac{(2l-1)!!}{l!} \frac{b_1^l x_1^l}{r_{12}^{l+1}} \widehat{n}_{1l} \widehat{n}_{12l}. \tag{II.5.12.88}$$

Le dernier terme que l'on vient de calculer, une fois remplacé dans l'Eq. (II.5.12.86), fait apparaître le potentiel Newtonien  $Gm_2/r_{12}$  (lorsque  $l = 0$ ), qui régit le mouvement Newtonien du corps 1 autour de 2, et les potentiels des forces de marée (lorsque  $l > 0$ ). Toujours dans l'Eq. (II.5.12.86), on voit la contribution au champ gravitationnel intérieur de la source 1 elle-même au travers des deux premiers termes qui dépendent de  $\Psi_1$ . On remarquera, dans ces termes, que  $b_1$  contribue à une puissance  $-1$ . Ainsi, si l'on fait tendre  $b_1 \rightarrow 0$  à ce stade, on constate que le potentiel  $V_1$  diverge. Cela est tout à fait normal puisque procéder ainsi revient à considérer le champ interne d'une masse ponctuelle qui est divergent ( $\lim_{r_1 \rightarrow 0} Gm_1/r_1 \rightarrow +\infty$ ). Le potentiel  $V_3$ , qui est la valeur du potentiel Newtonien en dehors des source, est sous sa forme classique. La méthode est tout à fait identique pour le calcul de  $V_i$  à l'ordre Newtonien. En fait, à ce stade, on peut retrouver l'expression de l'énergie Newtonienne si l'on suppose que le champ de vitesse du fluide parfait est constant  $v_\alpha^i(\mathbf{x}, t) = \tilde{v}_\alpha^i(t)$  et égal à la vitesse du centre de masse du corps considéré. Nous allons voir que procéder ainsi revient à faire des hypothèses très fortes.

### 5.12.3 Problème de la vitesse interne, de la pression et de l'énergie interne à l'ordre Newtonien

Les corps fluides 1 et 2 ont en général besoin, pour maintenir leur cohésion, d'un champ de vitesse interne, d'un champ de pression et d'un champ d'énergie interne et cela même à l'ordre Newtonien. En effet, écrivons les équation du mouvement<sup>6</sup> du fluide du corps 1

$$\rho_{*1} \frac{dv_1^i}{dt} = \rho_{*1} \partial_i V_1 - \partial_i P . \quad (\text{II.5.12.89})$$

Pour faciliter le raisonnement, nous allons poser  $v_1^i(\mathbf{x}, t) = \tilde{v}_1^i(t) + w_1^i(\mathbf{x}, t)$  de sorte que  $w_1^i$  est le champ de vitesse de coordonnées dans le référentiel du centre de masse. Nous rappelons que nous n'avons pas fixé la position du centre de masse  $y_1^i(t)$ . Une manière de fixer cette position, à l'ordre Newtonien, revient à imposer que  $\int_{\mathcal{V}_1} d^3\mathbf{x} \rho_{*1} w_1^i = 0$ . Ainsi, si l'on intègre l'équation de mouvement sur le volume  $\mathcal{V}_1$  on obtient

$$m_1 \frac{d\tilde{v}_1^i(t)}{dt} = \frac{Gm_1 m_2}{r_{12}^2} n_{12}^i . \quad (\text{II.5.12.90})$$

On peut alors remplacer cette expression dans l'Eq. (II.5.12.89) qui donne une relation entre la pression et le champ de vitesse interne

$$\begin{aligned} \partial_i P = & \frac{m_1 \Psi_1'(x_1)}{4\pi x_1^2 b_1^3} \left[ - \frac{Gm_1 \Psi_1(x_1)}{b_1^2 x_1^2} n_1^i \right. \\ & \left. + \underbrace{\sum_{l \geq 2} Gm_2 \frac{(2l-1)!!}{(l-1)! r_{12}^{l+1}} b_1^{l-1} x_1^{l-1} \hat{n}_{1l-1} n_{12l-1} n_{12}^i}_{\text{termes de marée}} \right] - \rho_{*1} \frac{dw_1^i}{dt} . \quad (\text{II.5.12.91}) \end{aligned}$$

On aimerait bien pouvoir dire, pour simplifier les calculs, qu'à l'ordre Newtonien  $w_1^i = 0$ . Cela n'est, en toute rigueur, pas possible à cause des termes de marée. Il suffit pour s'en convaincre de prendre le rotationnel de cette dernière équation qui est nul dans le membre de gauche

<sup>6</sup>On peut trouver les équations du mouvement en se plongeant dans ses souvenirs de la mécanique des fluides classique ou bien on peut écrire la condition de jauge harmonique  $\partial_\mu h^{\mu\nu}$  que l'on réécrit en terme des potentiels et des  $\sigma$  que l'on réécrit en fonction de  $\rho_*$ ,  $P$  et  $\Pi$  en tronquant à l'ordre Newtonien.



(rotationnel d'une divergence) et non nul dans le membre de droite. Dans notre étude, nous avons tout de même fait ce choix en supposant que les termes de marée ne "contribuent pas" au calcul de l'énergie à 3PN, en s'appuyant pour cela sur le principe d'effacement. Ainsi, en supposant que ces termes sont "négligeables" dans une mesure que l'on ne maîtrise pas du tout, on peut écrire la pression du fluide 1 à l'ordre Newtonien

$$P_1(x_1) = \frac{Gm_1^2}{4\pi b_1^4} \int_{x_1}^1 du \frac{\Psi_1'(u)\Psi_1(u)}{u^4}, \quad (\text{II.5.12.92})$$

qui n'est autre que la pression à l'équilibre hydrostatique en l'absence du corps 2. La pression est déterminée à une constante près mais on fixe cette constante en imposant qu'à la frontière du corps 1 la pression est nulle ( $P_1(1) = 0$ ) ce qui fixe les bornes d'intégration. On peut maintenant calculer l'énergie interne massique  $\Pi(x_1)$  que l'on peut déduire de l'Eq. (II.5.3.12) une fois que l'on connaît  $\rho$ , qui est égal à  $\rho_*$  à l'ordre Newtonien, et  $P$ . Ainsi on a l'équation

$$\frac{d\Pi(x_1)}{dx_1} = -P_1(x_1) \frac{d}{dx_1} \left[ \frac{1}{\rho_{1*}(x_1)} \right] = -\frac{d}{dx_1} \left[ \frac{P}{\rho_{1*}} \right] + \frac{1}{\rho_{1*}} \frac{dP_1}{dx_1}, \quad (\text{II.5.12.93})$$

grâce à laquelle, en remplaçant les fonctions  $\rho_{1*}$  et  $P_1$  par leur écriture en fonction des paramètres internes de la source, on trouve l'expression de  $\Pi_1 + P_1/\rho_{1*}$ , après avoir intégré selon  $x_1$ , puis celle de

$$\rho_{1*}(x_1)\Pi_1(x_1) = \frac{Gm_1^2\Psi_1'(x_1)}{4\pi b_1^4 x_1^2} \int_{x_1}^1 du \frac{\Psi_1(u)}{u^2} - \frac{Gm_1^2}{4\pi b_1^4} \int_{x_1}^1 du \frac{\Psi_1'(u)\Psi_1(u)}{u^4}. \quad (\text{II.5.12.94})$$

Encore une fois, on a choisi les bornes de sorte que  $\rho_{1*}\Pi_1(1) = 0$  pour assurer la continuité  $\mathcal{C}^\infty$  de cette fonction compte tenu de l'absence de matière en-dehors des corps.

#### 5.12.4 Problème des déformations des corps étendus

Puisque nous connaissons  $P$  et  $\Pi$  à l'ordre newtonien, il est possible de calculer le potentiel  $V$  à 1PN qui est égal à

$$V_{\text{1PN}} = -4\pi G \widetilde{\square}_{\text{Ret}}^{-1} [\widetilde{\sigma}] \Big|_{\text{1PN}} = -4\pi G \widetilde{\Delta}^{-1} [\widetilde{\sigma}_{\text{N}} + \widetilde{\sigma}_{\text{1PN}}] - 4\pi G \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \widetilde{\Delta}^{-2} [\widetilde{\sigma}_{\text{N}}]. \quad (\text{II.5.12.95})$$

En effet,  $\widetilde{\sigma}_{\text{1PN}}$  dépend de  $P$  et  $\Pi$  à l'ordre newtonien seulement comme on peut le voir Eq. (II.5.7.49b) et  $\widetilde{\sigma}_{\text{N}}$  est simplement égal à  $\rho_*$ . Si l'on ne fait pas attention, on utilise le  $\rho_*$  Newtonien défini comme à la section précédente Eq. (II.5.8.58). C'est comme cela que nous avons procédé la première fois. Et nous nous sommes rendu compte qu'en procédant ainsi, il était absolument impossible d'obtenir une énergie à 1PN finie lorsque l'on fait tendre  $b_1$  et  $b_2$  vers zéro. Il ne faut pas oublier que, si la grille de coordonnées globale se raccorde parfaitement aux deux grilles de coordonnées en comouvement avec les corps à l'ordre Newtonien, il n'en va pas de même à l'ordre post-Newtonien. En effet des corps sphériques dans le référentiel en mouvement seront oblates dans le système de coordonnées lié au référentiel global à cause des contractions de Lorentz et des contractions d'Einstein. On appelle  $g_{\mu\nu}$  la métrique dans le référentiel global, dans la grille de coordonnées  $\{r^\mu\}$  (voir Fig. (5.8)), et  $\widetilde{g}_{\mu\nu}$  la métrique dans le référentiel en comouvement avec  $\mathbf{y}_1(t)$ , dans la grille de coordonnées  $\{X_1^i, T_1\}$  dont on cherche à déterminer l'expression en fonction de  $\{r^\mu\}$  (dans la suite, on abandonne l'indice 1 de  $X_1^i$  et  $T_1$  pour des

raisons de commodité d'écriture). À l'ordre newtonien, on peut fixer cette relation comme on le souhaite, et on a fixé celle qui nous arrange

$$T|_N = r^0/c = t, \quad (\text{II.5.12.96})$$

$$X^i|_N = r^i - y_1^i(t) = \tilde{x}^i. \quad (\text{II.5.12.97})$$

Une fois cette relation Newtonienne fixée, on ne peut plus faire ce que l'on veut aux ordres post-Newtoniens suivants et on est obligé de déterminer les corrections post-Newtoniennes en s'assurant que la relation qui lie l'expression de la métrique dans deux référentiels différents, Eq. (I.2.2.2), est bien vérifiée ordre par ordre. Ce travail de raccord a été fait de manière très générale par Damour, Soffel et Xu [51, 52, 53] à l'ordre 1PN et pour N corps quelconques. La métrique  $g_{\mu\nu}$ , en coordonnées harmoniques, est de la forme

$$g_{00} = -1 + \frac{2}{c^2}V + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad (\text{II.5.12.98})$$

$$g_{0i} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^3}\right), \quad (\text{II.5.12.99})$$

$$g_{ij} = \delta_{ij}\left(1 + \frac{2}{c^2}V\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right). \quad (\text{II.5.12.100})$$

On impose aussi cette forme à la métrique  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  ("conformement cartésienne" selon les termes [51, 52, 53]). On a

$$\tilde{g}_{00} = -1 + \frac{2}{c^2}\tilde{V} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad (\text{II.5.12.101})$$

$$\tilde{g}_{0i} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^3}\right), \quad (\text{II.5.12.102})$$

$$\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij}\left(1 + \frac{2}{c^2}\tilde{V}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right). \quad (\text{II.5.12.103})$$

Puisque les corps ont une taille supposée petite on va supposer que la relation générale qui lie les deux système de coordonnées est de la forme

$$T|_{\text{1PN}} = t + \frac{1}{c^2}[\alpha_{10}(t) + \alpha_{11}^k(t)\tilde{x}_k + \mathcal{O}(\tilde{x}^2)] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad (\text{II.5.12.104})$$

$$X^i|_{\text{1PN}} = \tilde{x}^i + \frac{1}{c^2}[\gamma_{11}^{ik}(t)\tilde{x}_k + \gamma_{12}^{ikl}(t)\tilde{x}_k\tilde{x}_l + \mathcal{O}(\tilde{x}^3)] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right). \quad (\text{II.5.12.105})$$

On peut, alors, calculer les dérivées partielles dont on va avoir besoin pour faire le raccord des deux grilles de coordonnées

$$\frac{\partial X^0}{\partial \tilde{x}^0} = \frac{\partial T}{\partial t} = 1 + \frac{1}{c^2}[\dot{\alpha}_{10}(t) - \tilde{v}_1^k \alpha_{11}^k + \dot{\alpha}_{11}^k \tilde{x}_k + \mathcal{O}(\tilde{x}^2)] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad (\text{II.5.12.106})$$

$$\frac{\partial X^0}{\partial \tilde{x}^i} = c \frac{\partial T}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{1}{c}(\alpha_{11}^i(t) + \mathcal{O}(\tilde{x})) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^3}\right), \quad (\text{II.5.12.107})$$

$$\frac{\partial X^i}{\partial \tilde{x}^0} = \frac{1}{c} \frac{\partial X^i}{\partial t} = -\frac{\tilde{v}^i}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^3}\right), \quad (\text{II.5.12.108})$$

$$\frac{\partial X^i}{\partial \tilde{x}^j} = \delta_{ij} + \frac{1}{c^2} (\gamma_{11}^{ij}(t) + 2\gamma_{12}^{ijk}(t)\tilde{x}^k + \mathcal{O}(\tilde{x}^2)) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right). \quad (\text{II.5.12.109})$$

On peut maintenant appliquer l'Eq. (I.2.2.2) aux différentes composantes de  $g^{\mu\nu}$  pour effectuer le raccord. Nous l'appliquons en premier à la composante (00)

$$\begin{aligned} g_{00} &= \tilde{g}_{00} \frac{\partial X^0}{\partial r^0} \frac{\partial X^0}{\partial r^0} + 2\tilde{g}_{0i} \frac{\partial X^0}{\partial r^0} \frac{\partial X^i}{\partial r^0} + \tilde{g}_{ij} \frac{\partial X^i}{\partial r^0} \frac{\partial X^j}{\partial r^0}, \\ \left(-1 + \frac{2}{c^2}\mathbf{V}\right) &= \left(-1 + \frac{2}{c^2}\tilde{\mathbf{V}}\right) \left(1 + \frac{2}{c^2} [\dot{\alpha}_{10}(t) - \tilde{v}_1^k \alpha_{11}^k + \dot{\alpha}_{11}^k \tilde{x}_k + \mathcal{O}(\tilde{x}^2)]\right) + 0 \\ &\quad + \delta_{ij}(-1) \frac{\tilde{v}_1^i \tilde{v}_1^j}{c^2} \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{aligned}$$

On obtient alors une première équation

$$\dot{\alpha}_{10}(t) - \tilde{v}_1^k \alpha_{11}^k + \dot{\alpha}_{11}^k \tilde{x}_k + \mathcal{O}(\tilde{x}^2) = \frac{\tilde{v}_1^2}{2} + \tilde{\mathbf{V}} - \mathbf{V}. \quad (\text{II.5.12.110})$$

Si l'on fait de même pour la composante (0i) il faut vérifier

$$\begin{aligned} g_{0i} &= \tilde{g}_{00} \frac{\partial X^0}{\partial r^0} \frac{\partial X^0}{\partial r^i} + \tilde{g}_{0j} \frac{\partial X^0}{\partial r^0} \frac{\partial X^j}{\partial r^i} + \tilde{g}_{0j} \frac{\partial X^0}{\partial r^i} \frac{\partial X^j}{\partial r^0} + \tilde{g}_{jk} \frac{\partial X^j}{\partial r^0} \frac{\partial X^k}{\partial r^i}, \\ 0 &= -\left(\frac{\alpha_{11}^i(t)}{c} + \mathcal{O}(\tilde{x})\right) + 0 + 0 + \delta_{jk} \left(-\frac{\tilde{v}_1^k}{c}\right) \delta_{ki}. \end{aligned}$$

On obtient alors les relations toutes simples sur les  $\alpha_{1i}$  (voir Eq. (II.5.12.104) pour leur définition)

$$\alpha_{11}^i = -\tilde{v}_1^i \quad (\text{II.5.12.111})$$

$$\forall p > 1, \alpha_{1p}^i = 0. \quad (\text{II.5.12.112})$$

Enfin, on termine en effectuant le raccord sur la composant (ij)

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \tilde{g}_{00} \frac{\partial X^0}{\partial r^i} \frac{\partial X^0}{\partial r^j} + \tilde{g}_{0k} \frac{\partial X^0}{\partial r^i} \frac{\partial X^k}{\partial r^j} + \tilde{g}_{0k} \frac{\partial X^0}{\partial r^j} \frac{\partial X^k}{\partial r^i} + \tilde{g}_{kl} \frac{\partial X^k}{\partial r^i} \frac{\partial X^l}{\partial r^j}, \\ \delta_{ij} \left(1 + \frac{2}{c^2}\mathbf{V}\right) &= -\frac{\alpha_{11}^i \alpha_{11}^j}{c^2} + 0 + 0 + \delta_{kl} \left(1 + \frac{2}{c^2}\tilde{\mathbf{V}}\right) \times \\ &\quad \left(\delta_{ki} + \frac{\gamma_{11}^{ki}}{c^2} + 2\frac{\gamma_{12}^{kip}}{c^2} \tilde{x}^p + \mathcal{O}(\tilde{x}^2)\right) \left(\delta_{lj} + \frac{\gamma_{11}^{lj}}{c^2} + 2\frac{\gamma_{12}^{ljp}}{c^2} \tilde{x}^p + \mathcal{O}(\tilde{x}^2)\right). \end{aligned}$$

On obtient alors la dernière équation qui donne l'expression des  $\gamma$  (voir Eq. (II.5.12.105) pour leur définition)

$$\gamma_{11}^{ij} + 2\gamma_{12}^{ijp} \tilde{x}^p + \mathcal{O}(\tilde{x}^2) = \frac{\tilde{v}_1^i \tilde{v}_1^j}{2} + \delta_{ij} (\mathbf{V} - \tilde{\mathbf{V}}). \quad (\text{II.5.12.113})$$

On peut facilement déterminer  $\alpha_{10}(t)$  en sachant que  $T$ , lorsque l'on pose  $\tilde{x}^i = 0$  dans l'Eq. (II.5.12.104), représente le temps propre lié au point  $y_1^i(t)$ . Si l'on dérive ce temps propre par rapport à la coordonnée de temps global  $t$  on obtient  $1 + \dot{\alpha}_{10}(t)/c^2$ . On peut alors identifier  $\dot{\alpha}_{10}(t)$  avec la composante post-Newtonienne du facteur de contraction et on trouve

$$\dot{\alpha}_{10}(t) = -\tilde{v}_1^2/2 - \text{G}m_2/r_{12}. \quad (\text{II.5.12.114})$$

Cette dernière équation et l'Eq. (II.5.12.111) peuvent être avantageusement utilisées dans l'Eq. (II.5.12.110) pour déduire  $\tilde{\mathbf{V}} - \mathbf{V}$  qui est donné exactement par

$$\mathbf{V} - \tilde{\mathbf{V}} = \frac{\mathbf{G}m_2}{r_{12}} + \frac{\mathbf{G}m_2}{r_{12}^3} r_{12}^k \tilde{x}^k . \quad (\text{II.5.12.115})$$

On peut alors utiliser ce résultat dans l'Eq. (II.5.12.113) pour trouver les expressions des  $\gamma$

$$\gamma_{11}^{ij}(t) = \frac{\tilde{v}_1^i \tilde{v}_1^j}{2} + \frac{\mathbf{G}m_2}{r_{12}} \delta_{ij} , \quad (\text{II.5.12.116})$$

$$\gamma_{12}^{ijk}(t) = \frac{\mathbf{G}m_2}{2r_{12}^3} r_{12}^k \delta_{ij} , \quad (\text{II.5.12.117})$$

$$\forall p > 2, \gamma_{1p}(t) = 0 . \quad (\text{II.5.12.118})$$

Ainsi on trouve une relation entre les coordonnées du référentiel en comouvement et celle du référentiel global à l'ordre post-Newtonien

$$X^i = \tilde{x}^i + \frac{1}{c^2} \left[ \underbrace{\left( \frac{(\tilde{\mathbf{v}}_1 \tilde{\mathbf{x}})}{2} \tilde{v}_1^i}_{\text{Lorentz}} + \underbrace{\frac{\mathbf{G}m_2}{r_{12}} \tilde{x}^i}_{\text{Einstein}} \right) + \underbrace{\frac{\mathbf{G}m_2}{2r_{12}^3} (\mathbf{r}_{12} \tilde{\mathbf{x}})_i \tilde{x}^i}_{\text{terme de marée}} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right) . \quad (\text{II.5.12.119})$$

On comprend alors mieux pourquoi le corps 1, qui est à symétrie sphérique dans le référentiel en comouvement et dans la grille de coordonnées  $\{X^i, T\}$ , ne l'est plus vu du référentiel global et dans le système de coordonnées global  $\{r^i, r^0\}$ , dont on a plutôt utiliser la représentation  $\{\tilde{x}^i, t\}$ . En effet dans le référentiel en comouvement  $\rho(\mathbf{X})$  est à symétrie sphérique. Compte tenu de l'Eq. (II.5.12.119), on voit que, vu du référentiel global, le corps devient oblate à cause des contractions de Lorentz et d'Einstein. Pour être cohérent, nous n'allons pas tenir compte des déformations dus aux effets de marée à l'ordre post-Newtonien. On peut alors écrire à l'ordre post-Newtonien la forme de la densité baryonique dans le système de coordonnées global que l'on utilisera pour calculer la source  $\sigma$ , indispensable à la détermination de  $\mathbf{V}$  à l'ordre 1PN . Nous rappelons que  $\rho$  est un scalaire au sens tensoriel.  $\rho_*$  ne l'est pas mais  $\rho_*/u^0/\sqrt{-g}$ , qui n'est autre que  $\rho$ , est un scalaire. À l'ordre post-Newtonien, dans un référentiel donné,  $\sqrt{-gu^0} = 1 + 1/c^2(3\mathbf{V} + v^2/2)$ . Dans le référentiel en comouvement  $\sqrt{-\tilde{g}\tilde{u}^0} = 1 + 3\tilde{\mathbf{V}}/c^2$ . Dans le référentiel global,  $\sqrt{-gu^0} = 1 + 1/c^2(3\mathbf{V} + \tilde{v}_1^2/2)$ . Ainsi

$$\rho_* = \frac{\sqrt{-gu^0}}{\sqrt{-\tilde{g}\tilde{u}^0}} \tilde{\rho}_* = \left( 1 + \frac{1}{c^2} \left[ 3(\mathbf{V} - \tilde{\mathbf{V}}) + \frac{\tilde{v}_1^2}{2} \right] \right) \tilde{\rho}_{1*} \left( \tilde{x}^i + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{(\tilde{\mathbf{v}}_1 \tilde{\mathbf{x}})}{2} \tilde{v}_1^i + \frac{\mathbf{G}m_2}{r_{12}} \tilde{x}^i \right] \right) , \quad (\text{II.5.12.120})$$

où  $\tilde{\rho}_{1*}$  est exactement défini par la relation (II.5.8.58). Connaissant l'expression exacte de  $\rho_*$  à 1PN , on peut en déduire l'expression de la vitesse interne  $w_\alpha^i$  des étoiles due à leur forme non sphérique dans le référentiel global, en imposant que l'équation de conservation de la masse baryonique (Eq. (II.5.3.10) doit être valide et que les étoiles ont un spin nul

$$w_1^i = -\frac{\mathbf{G}m_2 b_1 x_1}{c^2 r_{12}^2} (\mathbf{n}_{12} \mathbf{v}_1 - \mathbf{n}_{12} \mathbf{v}_2) n_1^i - \frac{\mathbf{G}m_2 b_1 x_1}{2c^2 r_{12}^2} \left( (\mathbf{n}_{12} \mathbf{n}_1) v_1^i + (\mathbf{n}_1 \mathbf{v}_1) n_{12}^i \right) . \quad (\text{II.5.12.121})$$

Il est maintenant rendu possible de calculer le potentiel  $\mathbf{V}$  à 1PN , dont nous n'allons pas reproduire le calcul qui est un peu long, et, par voie de conséquence, de calculer l'énergie à 1PN .

### 5.12.5 Énergie à 1PN et renormalisation de la masse

On calcul l'énergie jusqu'à l'ordre 1PN inclus. À l'ordre newtonien, on constate que la partie finie ( $b_\alpha^0$ ) ne dépend pas de la structure interne. Les seuls termes qui dépendent de la structure interne sont des termes en  $1/b_\alpha$  qui ne dépendent pas du temps ( $m_\alpha$ ,  $b_\alpha$ ,  $G$ ,  $c$  ne dépendent pas du temps ;  $v_\alpha$  et  $r_{12}$  dépendent du temps)

$$E_N = m_1 c^2 + m_2 c^2 + \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{G m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{2G m_1^2}{3b_1} - \frac{2G m_2^2}{3b_2} + \frac{G m_1^2 \int_0^1 \frac{\Psi_1(u)^2}{u^2} du}{3b_1} + \frac{G m_2^2 \int_0^1 \frac{\Psi_2(u)^2}{u^2} du}{3b_2}. \quad (\text{II.5.12.122})$$

Si l'on utilise cette expression de l'énergie et que l'on fait tendre  $b_\alpha \rightarrow 0$  on constate immédiatement que les termes en  $1/b_\alpha$  divergent et que l'énergie n'a pas de sens. Pour lui donner un sens, nous pouvons redéfinir la masse dans cette expression de l'énergie. Il suffit dans ce cas simple de faire rentrer ces termes divergents, mais indépendant du temps, dans les termes  $m_1 c^2$  et  $m_2 c^2$ . Il est absolument nécessaire que les termes qui dépendent de la structure interne et que l'on incorpore dans la définition de la masse soit constant au cours du temps car une propriété fondamentale de la masse est justement d'être une constante du temps. On appellera ces deux nouvelles masses, les masses renormalisées que l'on notera  $M_1$  et  $M_2$ . On peut donc donner l'expression de la masse renormalisée en fonction de la masse baryonique

$$M_\alpha \Big|_{\text{1PN}} = m_\alpha - \frac{2G m_\alpha^2}{3c^2 b_\alpha} + \frac{G m_\alpha^2 \int_0^1 \frac{\Psi_\alpha(u)^2}{u^2} du}{3c^2 b_\alpha}. \quad (\text{II.5.12.123})$$

On constate que l'expression de la masse renormalisée est une expression à 1PN. On peut alors exprimer  $m_\alpha$  en fonction de  $M_\alpha$  et réécrire l'expression de l'énergie newtonienne qui ne dépend plus de la structure interne et qui est donnée par la même expression que (II.5.12.122) où on a fait disparaître les termes en  $\Psi_\alpha$  et où on a remplacé  $m_\alpha$  par  $M_\alpha$

$$E_N = M_1 c^2 + \frac{M_1 v_1^2}{2} - \frac{G M_1 M_2}{2r_{12}} + (1 \leftrightarrow 2). \quad (\text{II.5.12.124})$$

Le cas de l'énergie newtonienne est assez simple car les termes qui dépendaient de la structure interne étaient indépendants du temps. Lorsque l'on calcul la composante 1PN de l'énergie, en utilisant la densité baryonique déformée (Eq. (II.5.12.120)) la pression (Eq. (II.5.12.92)), cela n'est pas si simple

$$E_{\text{1PN}} = \frac{3m_1 v_1^4}{8c^2} + \frac{3m_2 v_2^4}{8c^2} - \frac{G m_1^2 v_1^2}{3c^2 b_1} - \frac{G m_2^2 v_2^2}{3c^2 b_2} + \frac{G^2 m_1^2 m_2}{2c^2 r_{12}^2} + \frac{G^2 m_1 m_2^2}{2c^2 r_{12}^2} - \frac{G m_1 m_2 (\mathbf{n}_{12} \mathbf{v}_1)(\mathbf{n}_{12} \mathbf{v}_2)}{2c^2 r_{12}} + \frac{3G m_1 m_2 v_1^2}{2c^2 r_{12}} + \frac{3G m_1 m_2 v_2^2}{2c^2 r_{12}} - \frac{7G m_1 m_2 (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2)}{2c^2 r_{12}} + \frac{13G^2 m_1^3}{18c^2 b_1^2} + \frac{13G^2 m_2^3}{18c^2 b_2^2} + \frac{2G^2 m_1^2 m_2}{3c^2 b_1 r_{12}} + \frac{2G^2 m_1 m_2^2}{3c^2 b_2 r_{12}} + \frac{2G^2 m_1^3 \int_0^1 u \Psi_1(u) du}{9c^2 b_1^2} + \frac{2G^2 m_1^3 \int_0^1 \frac{\int_0^u \frac{\Psi_1(v)^2}{v^2} dv \Psi_1(u)}{u^2} du}{9c^2 b_1^2} + \frac{G v_1^2 m_1^2 \int_0^1 \frac{\Psi_1(u)^2}{u^2} du}{6c^2 b_1} - \frac{7G^2 m_1^3 \int_0^1 \frac{\Psi_1(u)^2}{u^2} du}{9c^2 b_1^2} - \frac{G^2 m_1^2 m_2 \int_0^1 \frac{\Psi_1(u)^2}{u^2} du}{3b_1 r_{12}} + \frac{8G^2 m_1^3 \int_0^1 \frac{\int_0^u v \Psi_1(v) dv \Psi_1(u)^2}{u^5} du}{9c^2 b_1^2}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2G^2 m_2^3 \int_0^1 u \Psi_2(u) du}{9c^2 b_2^2} + \frac{2G^2 m_2^3 \int_0^1 \frac{\int_0^u \frac{\Psi_2(v)^2}{v^2} dv \Psi_2(u)}{u^2} du}{9c^2 b_2^2} + \frac{G m_2^2 v_2^2 \int_0^1 \frac{\Psi_2(u)^2}{u^2} du}{6c^2 b_2} \\
& - \frac{7G^2 m_2^3 \int_0^1 \frac{\Psi_2(u)^2}{u^2} du}{9c^2 b_2^2} - \frac{G^2 m_1 m_2^2 \int_0^1 \frac{\Psi_2(u)^2}{u^2} du}{3c^2 b_2 r_{12}} + \frac{8G^2 m_2^3 \int_0^1 \frac{\int_0^u v \Psi_2(v) dv \Psi_2(u)^2}{u^5} du}{9c^2 b_2^2} \\
& + \frac{G^2 m_1^3 \int_0^1 f_{\Pi_1}(u) du}{c^2 b_1^2} + \frac{G^2 m_2^3 \int_0^1 f_{\Pi_2}(u) du}{c^2 b_2^2} . \tag{II.5.12.125}
\end{aligned}$$

Il y a en effet des termes qui dépendent de la structure interne et qui sont aussi indépendants du temps, mais il y a aussi des termes qui dépendent de la structure interne et qui sont en facteur de paramètres qui varient dans le temps tels que  $r_{12}, v_1$  et  $v_2$ . La technique reste, néanmoins, la même. En effet, On redéfinit la masse en injectant dans les deux termes  $m_1 c^2$  et  $m_2 c^2$  tous les termes qui dépendent de la structure interne et qui sont indépendants du temps. On trouve une expression de la masse renormalisée à 2PN . On peut alors réexprimer  $m_\alpha$  en fonction de la nouvelle masse renormalisée  $M_\alpha$  et la remplacer dans l'expression totale de l'énergie  $E_N + E_{1PN}$ . Ainsi, la contribution 2PN de la masse renormalisée absorbe, via les termes  $M_1 c^2$  et  $M_2 c^2$ , les termes constants (par rapport au temps) qui dépendent de la structure interne. la contribution 1PN (II.5.12.123), que l'on a déterminé explicitement grâce au calcul de l'énergie newtonienne, contribue, via les termes newtonien de l'énergie, à absorber les termes qui dépendent de la structure interne et qui dépendent du temps à 1PN . On imagine bien que cela est une contrainte très forte car on a aucune liberté pour fixer la contribution 1PN de la masse renormalisée. Elle a été fixée à l'itération précédente. Lorsque l'on tient compte de la pression, de l'énergie interne, des déformations de Lorentz, cette renormalisation marche très bien et fait bien disparaître tous les termes qui dépendent de la structure interne et qui ne sont pas constants au cours du temps.

$$\begin{aligned}
E_{1PN} = & \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{G^2 M_1^2 M_2}{2r_{12}^2} + \frac{3M_1 v_1^4}{8} \right. \\
& \left. + \frac{GM_1 M_2}{r_{12}} \left( -\frac{1}{4} (\mathbf{n}_{12} \mathbf{v}_1) (\mathbf{n}_{12} \mathbf{v}_2) + \frac{3}{2} v_1^2 - \frac{7}{4} (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2) \right) \right\} \\
& + (1 \leftrightarrow 2) \tag{II.5.12.126}
\end{aligned}$$

Nous avons mentionné qu'au début de notre approche du problème nous n'avions pas tenu compte de la pression et de l'énergie interne ni même des déformations de Lorentz. Nous avons procédé ainsi dans le but de simplifier le problème. Nous avons ainsi obtenu une énergie à 1PN . Il a été facile de renormaliser la partie newtonienne (pour les mêmes raisons qu'il a été facile de la faire dans le problème complet à l'ordre newtonien). En revanche, nous n'avons pas pu faire la renormalisation à l'ordre 1PN par cette méthode. Il restait toujours après renormalisation des termes qui dépendaient de la structure interne et qui dépendaient du temps. Par conséquent, il est absolument indispensable de tenir compte de la pression, de l'énergie interne et des déformations de Lorentz si l'on veut arriver à renormaliser l'énergie ordre par ordre. D'autre part, cette renormalisation est un très bon indicateur de la validité des calculs. Nous travaillons actuellement sur le même problème, où l'on tient compte de la pression, de l'énergie interne, de la vitesse interne et des déformations, à l'ordre 2PN .

## 5.13 Étendue des problèmes à 3PN

### 5.13.1 Utilisation de Mathematica®

Un des problème majeur de cette itération à 3PN est la longueur des calculs. Pour fixer les idées, on peut dire que l'itération à 1PN de l'énergie d'un système binaire de corps étendus peut raisonnablement être fait à la main en une ou deux journée (lorsque l'on sait comment faire). A l'aide d'un logiciel de calcul formel tel que Mathematica®préalablement programmé dans cette optique cela nécessite quelques minutes. Le calcul de l'énergie à 2PN , pour des corps étendus, commence à être insurmontable à la main, mais on peut imaginer qu'une personne vraiment très motivée puisse y arriver en quelques mois alors qu'il néssecite quelques heures de calcul à l'aide de Mathematica®. En revanche, il me paraît tout à fait inconcevable, dans le cas des corps étendus, de faire le calcul à la main jusqu'à 3PN . A cet ordre, certain calculs intermédiaires sont longs d'une dizaine de millier de termes. L'outil de calcul formel est vraiment indispensable à ce stade. Lors de cette étude, une grande partie du temps a été consacrée à l'élaboration de nombreuses routines Mathematica® : pour calculer les P-opérateurs afin de déterminer les potentiels élémentaires, pour calculer les intégrales sur  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_3$ , etc. Luc et moi avons élaboré des routines de calcul basées sur des méthodes sensiblement différentes afin de comparer nos calculs et de valider les résultats. Même si cette partie de la thèse n'est pas très physique, et c'est la raison pour laquelle je n'en dirai pas plus, je voulais simplement faire remarquer qu'elle a représentée un large pourcentage de mon temps de thèse qu'il était absolument indispensable de prendre pour réaliser ces calculs à l'ordre 3 post-Newtonien.

### 5.13.2 La partie finie

lorsque nous avons commencé à travailler sur la dynamique d'un système binaire de corps compacts étendus, nous n'avons pas tenu compte de la pression, de l'énergie interne et des déformations des corps dûs à leur extension finie. Tout au long de l'itération nous avons  $P = 0$ ,  $\Pi = 0$  et  $w^i = 0$ . Les calculs, bien que longs, ne présentaient aucune difficulté conceptuelle. En effectuant l'itération post-Newtonienne jusqu'à 3PN nous avons obtenu quelques résultats intéressants. Nous avons retrouvé l'énergie Newtonienne et l'énergie post-Newtonienne lorsque l'on tronque le résultat à la partie finie, c'est à dire aux termes en  $b_\alpha^0$

$$\begin{aligned}
 E_N &= m_1 c^2 + \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{Gm_1 m_2}{2r_{12}} + (1 \leftrightarrow 2) , \\
 E_{1PN} &= \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{G^2 m_1^2 m_2}{2r_{12}^2} + \frac{3m_1 v_1^4}{8} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{Gm_1 m_2}{r_{12}} \left( -\frac{1}{4}(n_{12} v_1)(n_{12} v_2) + \frac{3}{2}v_1^2 - \frac{7}{4}(v_1 v_2) \right) \right\} \\
 &\quad + (1 \leftrightarrow 2) . \tag{II.5.13.127}
 \end{aligned}$$

Nous avons même trouvé ce résultat en tenant compte de la pression de l'énergie interne et des déformations comme nous l'avons vu dans les sections précédentes. Nous avons retrouvé, à la partie finie, l'énergie 2PN d'un système binaire

$$E_{2PN} = \frac{1}{c^4} \left\{ -\frac{G^3 m_1^3 m_2}{2r_{12}^3} - \frac{19G^3 m_1^2 m_2^2}{8r_{12}^3} + \frac{5m_1 v_1^6}{16} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Gm_1m_2}{r_{12}} \left( \frac{3}{8}(n_{12}v_1)^3(n_{12}v_2) + \frac{3}{16}(n_{12}v_1)^2(n_{12}v_2)^2 \right. \\
& \quad - \frac{9}{8}(n_{12}v_1)(n_{12}v_2)v_1^2 - \frac{13}{8}(n_{12}v_2)^2v_1^2 + \frac{21}{8}v_1^4 \\
& \quad + \frac{13}{8}(n_{12}v_1)^2(v_1v_2) + \frac{3}{4}(n_{12}v_1)(n_{12}v_2)(v_1v_2) \\
& \quad \left. - \frac{55}{8}v_1^2(v_1v_2) + \frac{17}{8}(v_1v_2)^2 + \frac{31}{16}v_1^2v_2^2 \right) \\
& + \frac{G^2m_1^2m_2}{r_{12}^2} \left( \frac{29}{4}(n_{12}v_1)^2 - \frac{13}{4}(n_{12}v_1)(n_{12}v_2) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}(n_{12}v_2)^2 - \frac{3}{2}v_1^2 + \frac{7}{4}v_2^2 \right) \Big\} \\
& + (1 \leftrightarrow 2) . \tag{II.5.13.128}
\end{aligned}$$

Enfin, à l'ordre 3PN, nous avons retrouvé pour la partie finie l'expression de l'énergie pour les termes en  $v^8$ , en  $v^6$ , en  $v^4$ , en  $G^3m_1^2m_2^2v^2$ . En revanche, il apparaît dans tous les autres termes, même à la partie finie, de la structure interne sous forme d'intégrale de 0 à 1 de fonctions compliquées de  $\Psi_\alpha$  et de leurs dérivées. Dans l'expression qui suit de l'énergie à 3PN, les coefficients numériques qui dépendent de la structure interne, et qui ne sont donc, *a priori*, pas universels, sont représentés par un  $\Lambda_n$  où  $n$  est un entier allant de 1 à 12

$$\begin{aligned}
E_{3\text{PN}} = & \frac{1}{c^6} \left\{ \frac{35m_1v_1^8}{128} \right. \\
& + \frac{Gm_1m_2}{r_{12}} \left( -\frac{5}{16}(n_{12}v_1)^5(n_{12}v_2) - \frac{5}{16}(n_{12}v_1)^4(n_{12}v_2)^2 \right. \\
& \quad - \frac{5}{32}(n_{12}v_1)^3(n_{12}v_2)^3 + \frac{19}{16}(n_{12}v_1)^3(n_{12}v_2)v_1^2 \\
& \quad + \frac{15}{16}(n_{12}v_1)^2(n_{12}v_2)^2v_1^2 + \frac{3}{4}(n_{12}v_1)(n_{12}v_2)^3v_1^2 \\
& \quad + \frac{19}{16}(n_{12}v_2)^4v_1^2 - \frac{21}{16}(n_{12}v_1)(n_{12}v_2)v_1^4 \\
& \quad - 2(n_{12}v_2)^2v_1^4 + \frac{55}{16}v_1^6 - \frac{19}{16}(n_{12}v_1)^4(v_1v_2) \\
& \quad - (n_{12}v_1)^3(n_{12}v_2)(v_1v_2) - \frac{15}{32}(n_{12}v_1)^2(n_{12}v_2)^2(v_1v_2) \\
& \quad + \frac{45}{16}(n_{12}v_1)^2v_1^2(v_1v_2) + \frac{5}{4}(n_{12}v_1)(n_{12}v_2)v_1^2(v_1v_2) \\
& \quad + \frac{11}{4}(n_{12}v_2)^2v_1^2(v_1v_2) - \frac{139}{16}v_1^4(v_1v_2) - \frac{3}{4}(n_{12}v_1)^2(v_1v_2)^2 \\
& \quad + \frac{5}{16}(n_{12}v_1)(n_{12}v_2)(v_1v_2)^2 + \frac{41}{8}v_1^2(v_1v_2)^2 + \frac{1}{16}(v_1v_2)^3 \\
& \quad - \frac{45}{16}(n_{12}v_1)^2v_1^2v_2^2 - \frac{23}{32}(n_{12}v_1)(n_{12}v_2)v_1^2v_2^2 + \frac{79}{16}v_1^4v_2^2 \\
& \quad \left. - \frac{161}{32}v_1^2(v_1v_2)v_2^2 \right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{G^2 m_1^2 m_2}{r_{12}^2} \left( -\frac{49}{8} (n_{12} v_1)^4 + \frac{75}{8} (n_{12} v_1)^3 (n_{12} v_2) - \frac{187}{8} (n_{12} v_1)^2 (n_{12} v_2)^2 \right. \\
& \quad + \frac{247}{24} (n_{12} v_1) (n_{12} v_2)^3 + \frac{49}{8} (n_{12} v_1)^2 v_1^2 \\
& \quad + \frac{81}{8} (n_{12} v_1) (n_{12} v_2) v_1^2 - \frac{21}{4} (n_{12} v_2)^2 v_1^2 + \frac{11}{2} v_1^4 \\
& \quad - \frac{15}{2} (n_{12} v_1)^2 (v_1 v_2) - \frac{3}{2} (n_{12} v_1) (n_{12} v_2) (v_1 v_2) \\
& \quad + \frac{21}{4} (n_{12} v_2)^2 (v_1 v_2) - 27 v_1^2 (v_1 v_2) + \frac{55}{2} (v_1 v_2)^2 \\
& \quad + \frac{49}{4} (n_{12} v_1)^2 v_2^2 - \frac{27}{2} (n_{12} v_1) (n_{12} v_2) v_2^2 + \frac{3}{4} (n_{12} v_2)^2 v_2^2 \\
& \quad \left. + \frac{55}{4} v_1^2 v_2^2 - 28 (v_1 v_2) v_2^2 + \frac{135}{16} v_2^4 \right) \\
& + \Lambda_1 \frac{G^4 m_1^4 m_2}{r_{12}^4} + \frac{G^4 m_1^3 m_2^2}{r_{12}^4} \left( \Lambda_2 - \Lambda_3 \ln \left( \frac{r_{12}}{b_1} \right) \right) \\
& + \frac{G^3 m_1^2 m_2^2}{r_{12}^3} \left( \frac{547}{12} (n_{12} v_1)^2 - \frac{3115}{48} (n_{12} v_1) (n_{12} v_2) \right. \\
& \quad - \frac{123}{64} (n_{12} v_1) (n_{12} v_2) \pi^2 - \frac{575}{18} v_1^2 + \frac{41}{64} \pi^2 (v_1 v_2) \\
& \quad \left. + \frac{4429}{144} (v_1 v_2) \right) \\
& + \frac{G^3 m_1^3 m_2}{r_{12}^3} \left( \Lambda_4 (n_{12} v_1)^2 + \Lambda_5 (n_{12} v_1) (n_{12} v_2) \right. \\
& \quad + \Lambda_6 (n_{12} v_2)^2 + \Lambda_7 v_1^2 - \Lambda_8 (v_1 v_2) \\
& \quad + \Lambda_9 v_2^2 + \Lambda_{10} (n_{12} v_1) (n_{12} v_2) \ln \left( \frac{r_{12}}{b_1} \right) \\
& \quad \left. + \Lambda_{11} (v_1 v_2) \ln \left( \frac{r_{12}}{b_1} \right) \right) \Bigg\} \\
& + 1 \leftrightarrow 2 + \mathcal{O} \left( \frac{1}{c^7} \right) . \tag{II.5.13.129}
\end{aligned}$$

La présence de ces termes qui dépendent de la structure interne est une manifestation des problèmes d'incomplétude dont peuvent souffrir certaines méthodes de régularisation à l'ordre 3PN . Ces termes  $\Lambda$  s'écrivent sous la forme d'une somme d'intégrale assez compliquée de  $\Psi_{alpha}$  et c'est ainsi que se manifeste la structure interne dans ces termes

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dw \left[ \int_0^w dv \frac{\Psi_\alpha(v)}{v^4} \left[ \int_0^v du \Psi_\alpha^2(u) \right] \right] , \\
& \int_0^1 dw \frac{\Psi_\alpha(w)}{w^2} \left[ \int_0^w dv \frac{\Psi_\alpha(v)}{v^2} \left[ \int_0^v du \frac{\Psi_\alpha(u)}{u^2} \right] \right] \dots
\end{aligned}$$

La constante indéterminée  $\lambda$  dont nous cherchons à connaître la valeur et si oui ou non elle dépend de la structure interne se trouve en facteur du même terme que  $\Lambda_2$ . La plupart de ces termes  $\Lambda_n$  qui dépendent de la structure interne peuvent être fixé par un choix convenable de jauge à de pures constante numériques. Le problème de cette méthode est que même lorsque

l'on a épuisé les transformation de jauge possibles, il reste toujours des termes qui dépendent de la structure interne, par exemple  $\Lambda_1$ , alors qu'ils ne devraient pas en dépendre. Cela vient du fait que si l'on ne tient pas compte de toute la physique le modèle fluide n'est pas valide.

### 5.13.3 Conséquence de la Renormalisation sur la partie finie

Il y a un argument simple qui permet de montrer qu'il faut maîtriser le développement en puissance de  $b$  au-delà de l'ordre 0, c'est à dire, au-delà de la partie finie. On constate en effet que lorsque l'on itère le calcul de l'énergie à 3PN, les premiers termes de l'énergie qui sont en  $b_\alpha^n$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$ , apparaissent à l'ordre  $1/c^2$  (1PN) pour  $n=2$ . À 2PN, la première puissance de  $b_\alpha$  positive apparaît pour  $n = 1$ . Considérons ces deux types de termes dont nous allons montrer l'importance

$$\Delta_1 E_{1\text{PN}} = \beta_1 \frac{Gm^2v^2}{c^2 r_{12}^3} b_1^2, \quad (\text{II.5.13.130})$$

$$\Delta_2 E_{1\text{PN}} = \beta_2 \frac{G^2 m^3}{c^2 r_{12}^4} b_1^2, \quad (\text{II.5.13.131})$$

$$\Delta_3 E_{2\text{PN}} = \beta_3 \frac{G^2 m^3 v^2}{c^4 r_{12}^3} b_1, \quad (\text{II.5.13.132})$$

$$\Delta_4 E_{2\text{PN}} = \beta_4 \frac{G^3 m^4}{c^4 r_{12}^4} b_1, \quad (\text{II.5.13.133})$$

où les coefficients  $\beta$  sont des constantes numériques dépendantes ou non de la structure interne et où  $m$  est une masse baryonique qui peut prendre les valeurs  $m_1$  ou  $m_2$  (on peut avoir  $m^3 = m_1^2 m_2$ ). Nous avons vu, par ailleurs, que la masse renormalisée à 1PN, Eq. (II.5.12.123), contient des termes en  $1/b_\alpha$ , et on peut montrer facilement en regardant l'expression brute de l'énergie à 1PN (II.5.12.125) que la masse renormalisée à 2PN contient des termes en  $1/b_\alpha^2$ . La structure de l'expression qui donne la masse baryonique en fonction de la masse renormalisée est

$$m_\alpha = M_\alpha + \gamma_1 \frac{GM_\alpha^2}{c^2 b_\alpha} + \gamma_2 \frac{G^2 M_\alpha^3}{c^4 b_\alpha^2}, \quad (\text{II.5.13.134})$$

où les coefficients  $\gamma$  sont des constantes numériques qui dépendent de la structure interne. Si l'on renormalise les contributions (II.5.13.130-II.5.13.133) en remplaçant les masses baryoniques ( $m$ ) par les masses renormalisées ( $M$ ) dont la relation est donnée par (II.5.13.134) on voit que, via la renormalisation, les termes de l'énergie en  $b_\alpha^2$  à 1PN et en  $b_\alpha^1$  à 2PN contribuent à la partie finie à 3PN

$$\Delta_1 E_{1\text{PN}} \Big|_{\text{renormalisé}} = \beta_1 \gamma_2 \frac{G^3 M^4 v^2}{c^6 r_{12}^3}, \quad (\text{II.5.13.135})$$

$$\Delta_2 E_{1\text{PN}} \Big|_{\text{renormalisé}} = \beta_2 \gamma_2 \frac{G^4 M^5}{c^6 r_{12}^4}, \quad (\text{II.5.13.136})$$

$$\Delta_3 E_{2\text{PN}} \Big|_{\text{renormalisé}} = \beta_3 \gamma_1 \frac{G^3 M^4 v^2}{c^6 r_{12}^3}, \quad (\text{II.5.13.137})$$

$$\Delta_4 E_{2\text{PN}} \Big|_{\text{renormalisé}} = \beta_4 \gamma_1 \frac{G^4 M^5}{c^6 r_{12}^4}. \quad (\text{II.5.13.138})$$

Il est donc important, d'une part, lorsque l'on fait le calcul de l'énergie à 3PN de garder les termes en  $b_\alpha^2$  à 1PN et les termes en  $b_\alpha^1$  à 2PN pour être cohérent vis à vis de la renormalisation. D'autre part, cette influence de la renormalisation sur des termes en puissance positive de  $b_\alpha$ , dont on aurait pas tenu compte *a priori* puisqu'il sont nuls lorsque l'on fait  $b_\alpha \rightarrow 0$ , est encore un indice qui permet de comprendre l'incomplétude de certaines méthodes de régularisation à 3PN puisque l'on n'y prend pas en compte la structure interne qui, manifestement, a une influence à 3PN, au moins dans les calculs intermédiaires. Cela ne veut pas dire pour autant que le principe d'effacement est faux. Il se peut très bien que tous les termes de l'énergie qui dépendent de la structure interne disparaissent lorsque l'on met à profit les transformations de jauge possibles et que l'on effectue correctement la renormalisation.

# Conclusion

Dans la première partie de ce travail de thèse, nous nous sommes concentrés sur l'étude mathématique du développement post-Newtonien en Relativité Générale. Ce développement est un outil fondamental dans l'étude analytique des phénomènes liés au rayonnement gravitationnel et il est important de connaître les limites de l'utilisation que l'on peut en faire. Nous avons montré, chose qui n'avait jamais été faite jusqu'à présent, que si l'on suppose que la source de matière est à support spatial compact (i.e. isolée) et  $\mathcal{C}^\infty$ , il existe un algorithme unique (dans le système de coordonnées harmonique) qui permet d'itérer le développement post-Newtonien à tous les ordres en puissance de  $1/c$ . Chaque ordre post-Newtonien est fini (i.e. donné par une expression bien définie mathématiquement, en particulier sans intégrales divergentes) et la série post-Newtonienne se raccorde de façon unique avec une solution post-Minkowskienne valable à l'extérieur de la source et satisfaisant les conditions d'absence de radiation rentrante à l'infini. Ce résultat a été obtenu par une méthode d'iteration systématique en utilisant la méthode de raccordement des développements asymptotiques avec le champ de gravitation extérieur. En particulier, notre résultat permet de trouver de manière unique les termes homogènes associés à la réaction du champ gravitationnel sur la source matérielle (incluant les effets non-linéaires dits sillages d'onde).

Dans un deuxième temps, nous avons étudié la dynamique d'un système binaire d'objets compacts étendus à l'ordre 3PN. Pour se faire, nous avons d'abord déterminé explicitement l'énergie à 3PN pour une source étendue isolée. Elle s'exprime en fonction de potentiels et de sources élémentaires dont on connaît la dépendance en fonction du tenseur énergie-impulsion de la source de matière. Puis, nous avons fait l'hypothèse que les deux corps compacts étendus étaient des boules de fluide parfait de rayon  $b_1$  et  $b_2$  respectivement. Ainsi, les résultats, en plus d'être exprimés sous forme d'une série en  $1/c$  (post-Newtonienne), sont exprimés sous forme d'une série en puissance de  $b$  ("post-ponctuelle") puisqu'on ne sait pas faire autrement à 3PN. En ne tenant pas compte de la pression, de l'énergie interne et de la vitesse interne, on a retrouvé, dans la partie finie<sup>7</sup>, les résultats déjà connus de l'énergie à 2PN et une grande partie des termes de l'énergie à 3PN. Nous avons aussi constaté la présence, à 3PN seulement, de termes dépendants de la structure interne dans la partie finie. En tenant compte de la pression, de l'énergie interne et de la vitesse interne nous avons retrouvé, à l'aide d'une procédure de renormalisation de la masse et en prenant compte des déformations de Lorentz et d'Einstein, l'énergie à 1PN. Nous avons, d'autre part, remarqué une subtilité de la procédure de renormalisation qui nécessite de prendre en compte certains termes de l'énergie qui sont à une puissance strictement positive de  $b$  (à des ordres post-Newtoniens inférieur) alors qu'il était intuitif de ne pas les prendre en compte puisque lorsque l'on se ramène au cas des objets compacts ponctuels

---

<sup>7</sup>On appelle partie finie, dans l'énergie, les termes qui sont en facteur de  $b_1^p b_2^{-p}$  où  $p \in \mathbb{Z}$ .

( $b \rightarrow 0$ ) ces termes sont nuls.

Je voudrais terminer cette conclusion en ajoutant que je vais commencer mon “après-thèse” à Bozeman (USA) au Montana State University au côté de William Hiscock, Neil Cornish, Ron Hellings et Kenneth Nordtvedt. Je vais continuer à travailler sur la dynamique d’un système binaire à 3PN avec mon directeur de thèse et, avec l’équipe de Bozeman, je vais travailler sur LISA, c’est à dire, dans la partie basse fréquence du spectre des ondes gravitationnelles émises par des sources astrophysiques et cosmologiques.

# Bibliographie

- [1] A. ABRAMOVICI et al. *Science* **256**, 325 (1992).  
*LIGO : the laser interferometer gravitational-wave observatory.*
- [2] J. L. ANDERSON and T. C. DECANIO. *Gen. Rel. Grav.* **6**, 197 (1975).  
*Equations of hydrodynamics in general relativity in the slow motion approximation.*
- [3] J. L. ANDERSON, R. E. KATES, L. S. KEGELES, and R. G. MADONNA. *Phys. Rev. D.* **25**, 2038 (1982).  
*Divergent integrals of post-Newtonian gravity : Nonanalytic terms in the near-zone expansion of a gravitationally radiating system found by matching.*
- [4] V. C. ANDRADE, L. BLANCHET, and G. FAYE. *Class. Quantum Grav.* **18**, 753 (2001).  
*third post-Newtonian dynamics of compact binaries : Noetherian conserved quantities and equivalence between the harmonic-coordinate and ADM-Hamiltonian formalisms.*
- [5] L. BEL, T. DAMOUR, N. DERUELLE, J. IBANEZ, and J. MARTIN. *Gen. Rel. Grav.* **13**, 963 (1981).  
*Poincare-Invariant gravitational field and the equations of motion of two pointlike objects : the postlinear approximation of general relativity.*
- [6] R. L. BISHOP and S. GOLDBERG. *Dover Publication, Inc. New York* (1980). *Tensor analysis on manifold.*
- [7] L. BLANCHET. *Phys. Rev. D* **47**, 4392 (1993). *Time-asymmetric structure of gravitational radiation.*
- [8] L. BLANCHET. *Phys. Rev. D* **54**, 1417 (1996). *Energy loss by gravitational radiation in inspiraling compact binaries to 5/2 post-Newtonian order.*
- [9] L. BLANCHET. *Class. Quant. Grav.* **15**, 89 (1998).  
*Quadrupole-quadrupole gravitational waves.*
- [10] L. BLANCHET. *Class. Quant. Grav.* **15**, 113 (1998).  
*Gravitational-wave tails of tails.*
- [11] L. BLANCHET. *Class. Quant. Grav.* **15**, 1971 (1998).  
*On the multipole expansion of the gravitational field.*
- [12] L. BLANCHET. *Proc. R. Soc. Lond. A.* **409**, 383 (1987).  
*Radiative gravitational fields in general relativity. 2) Asymptotic behaviour at future null infinity.*
- [13] L. BLANCHET. *Phys. Rev. D.* **51**, 2559 (1995).  
*Second-post-Newtonian generation of gravitational radiation.*
- [14] L. BLANCHET. *Phys. Rev. D.* **55**, 714 (1997).  
*Gravitational radiation reaction and balance equations to post-Newtonian order.*

- [15] L. BLANCHET and T. DAMOUR. *Ann. Inst. Henri Poincaré A* **50**, 377 (1989).
- [16] L. BLANCHET and T. DAMOUR. *Phys. Lett.* **104A**, 82 (1984).  
*Multipolar radiation reaction in general relativity .*
- [17] L. BLANCHET and T. DAMOUR. *Proc. R. Soc. Lond. A.* **320**, 379 (1986).  
*Radiative gravitational fields in general relativity. 1) General structure of the field outside the source.*
- [18] L. BLANCHET and T. DAMOUR. *Phys. Rev. D.* **46**, 4304 (1992).  
*Hereditary effects in gravitational radiation.*
- [19] L. BLANCHET and T. DAMOUR. *Phys. Rev. D.* **37**, 1410 (1988).  
*Tail-transported temporal correlations in the dynamics of a gravitating system.*
- [20] L. BLANCHET, T. DAMOUR, and B. R. IYER. *Phys. Rev. D.* **51**, 5360 (1995).  
*Gravitational waves from inspiralling compact binaries : Energy loss and waveform to second-post-Newtonian order.*
- [21] L. BLANCHET and G. FAYE. *Phys. Lett. A* **271**, 58 (2000).  
*On the equations of motion of point-particle binaries at the third post-Newtonian order.*
- [22] L. BLANCHET and G. FAYE. *Phys. Rev. D***63**, 062005 (2001).  
*General relativistic dynamics of compact binaries at the third post-Newtonian order.*
- [23] L. BLANCHET and G. FAYE. *J. Math. Phys.***41**, 7675 (2000).  
*Hadamard regularization.*
- [24] L. BLANCHET and G. FAYE. *J. Math. Phys.***42**, 4391 (2001).  
*Lorentzian regularization and the problem of point-like particles in general relativity.*
- [25] L. BLANCHET, G. FAYE, and B. PONSOT. *Phys. Rev. D* **58**, 124002 (1998).  
*Gravitational field and equations of motion of compact binaries to 5/2 post-Newtonian order.*
- [26] L. BLANCHET, B. R. IYER, and B. JOGUET. *Phys. Rev. D* **65**, 064005 (2002).  
*Gravitational waves from inspiraling compact binaries : energy flux to third post-newtonian order.*
- [27] R. A. BREUER and E. RUDOLPH. *Gen. Rel. Grav.* **13**, 777 (1981).  
*Radiation Reaction and energy loss in the post-Newtonian approximation of general relativity.*
- [28] R. A. BREUER and E. RUDOLPH. *Gen. Rel. Grav.* **14**, 181 (1982).  
*The force law for the dynamic two-body problem in the second post-Newtonian approximation of general relativity.*
- [29] V. A. BRUMBERG. *Adam Hilger imprint by IOP Publishing Ltd*, (1991).  
*Essential relativistic celestial mechanics.*
- [30] W. L. BURKE. *J. Math. Phys.* **12**, 401 (1973).  
*Gravitational radiation damping of slowly moving systems calculated using matched asymptotic expansions.*
- [31] W. L. BURKE and K. S. THORNE. *in Relativity, M. Carmeli and al. (Plenum Press, New-York, 1970) pp 209-228.*  
*Gravitational radiation damping.*
- [32] A. CAPORALI. *Nuovo Cimento* **61B**, 181 (1981).

- [33] S. CHANDRASEKHAR. *Phys. Rev. Lett.* **24**, 611 (1970).  
*Solutions of two problems in the theory of gravitational radiation.*
- [34] S. CHANDRASEKHAR. *Astrophys. J.* **158**, 45 (1969).  
*Conservation laws in general relativity and in the post-Newtonian approximations.*
- [35] S. CHANDRASEKHAR. *Astrophys. J.* **142**, 1488 (1965).  
*The post-Newtonian equations of hydrodynamics in general relativity.*
- [36] S. CHANDRASEKHAR and F. P. ESPOSITO. *Astrophys. J.* **160**, 153 (1970).  
*The 2.5 post-Newtonian equations of hydrodynamics and radiation reaction in general relativity.*
- [37] S. CHANDRASEKHAR and Y. NUTKU. *Astrophys. J.* **158**, 55 (1969).  
*The second post-Newtonian equations of hydrodynamics in general relativity.*
- [38] J. P. A. CLARK, E. P. J. VAN DEN HEUVEL, and W. SUTANTYO. *Astron. and Astrophys.* **72**, 120 (1979).  
*Formation of neutron star binaries and their importance for gravitational radiation.*
- [39] C. CUTLER, L. S. FINN, E. POISSON, and G. J. SUSSMAN. *Phys. Rev. D* **47**, 1511 (1993).  
*Gravitational radiation from a particle in circular orbit around a black hole. 2) Numerical results for the nonrotating case.*
- [40] C. CUTLER and E. E. FLANAGAN. *Phys. Rev. D* **49**, 2658 (1994).  
*Gravitational waves from merging compact binaries : how accurately can one extract the binary's parameters from the inspiral waveform ?*
- [41] C. CUTLER et al. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2984 (1993).  
*The last three minutes : Issues in gravitational-wave measurements of coalescing compact binaries.*
- [42] T. DAMOUR. *C. R. Acad. Sc. Paris* **294**, 1355 (1982).
- [43] T. DAMOUR. in *Gravitational Radiation*, N. Deruelle and T. Piran (eds.), North-Holland Company (1983).
- [44] T. DAMOUR and N. DERUELLE. *Phys. Lett.* **87A**, 81 (1981).  
*Radiation reaction and angular momentum loss in small angle gravitational scattering.*
- [45] T. DAMOUR and N. DERUELLE. *Ann. Inst. H. Poincaré* **43**, 107 (1985).  
*General relativistic celestial mechanics of binary systems. 1) The post-Newtonian motion.*
- [46] T. DAMOUR and N. DERUELLE. *Ann. Inst. H. Poincaré* **44**, 263 (1986).  
*General relativistic celestial mechanics of binary systems. 2) The post-Newtonian timing formula.*
- [47] T. DAMOUR and B. R. IYER. *Ann. Inst. Henri Poincaré A* **54**, 115 (1991).
- [48] T. DAMOUR, P. JARANOWSKI, and G. SCHÄFER. *Phys. Rev. D* **62**, 021501R (2000) ;  
*Erratum Phys. Rev. D* **63**, 029903 (2001).  
*Poincaré invariance in the ADM Hamiltonian approach to the general relativistic two-body problem.*
- [49] T. DAMOUR, P. JARANOWSKI, and G. SCHÄFER. *Phys. Lett.* **B513**, 147 (2001).  
*Dimensional regularization of the gravitational interaction of point masses.*
- [50] T. DAMOUR, P. JARANOWSKI, and G. SCHÄFER. *Phys. Rev. D* **63**, 044021 (2001).  
*Equivalence between the ADM-Hamiltonian and the harmonic-coordinates approaches to the third post-Newtonian dynamics of compact binaries.*



- [51] T. DAMOUR, M. SOFFEL, and C. XU. *Phys. Rev. D.* **43**, 3273 (1991).  
*General-relativistic celestial mechanics. 1) Method and definition of reference systems.*
- [52] T. DAMOUR, M. SOFFEL, and C. XU. *Phys. Rev. D.* **45**, 1017 (1992).  
*General-relativistic celestial mechanics. 2) Translational equations of motion.*
- [53] T. DAMOUR, M. SOFFEL, and C. XU. *Phys. Rev. D.* **47**, 3124 (1993).  
*General-relativistic celestial mechanics. 3) Rotational equations of motion.*
- [54] T. DAMOUR and J. H. TAYLOR. *Astrophys. J.* **366**, 501 (1991).  
*On the orbital period change of the binary pulsar PSR 1913+16.*
- [55] R. DEHEUVELS. *Presses Universitaires de France*, (1993). *Tenseurs et spineurs.*
- [56] W. DESITTER. *Mon. Not. R. A. S.* **76**, 699 and **77**, 155 (1916).
- [57] J. DROSTE. *Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam* **25**, 460 (1916).
- [58] J. EHLERS. *in the Proc. of the International school of Relativistic Astrophysics, J. Ehlers (ed.), Erice, MPI :Munche*n (1977).
- [59] J. EHLERS. *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 336, 279 (1980).
- [60] J. EHLERS, A. ROSENBLUM, J. N. GOLDBERG, and P. HAVAS. *Astrophys. J.* **208**, 77 (1976).  
*Comments on gravitational radiation damping and energy loss in binary systems.*
- [61] A. EINSTEIN. *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin)*, 688 (1916).
- [62] A. EINSTEIN and L. INFELD. *Ann. Math.* **41**, 455 (1940).  
*The gravitational equations and the problem of motion. 2.*
- [63] A. EINSTEIN, L. INFELD, and B. HOFFMANN. *Ann. Math.* **39**, 65 (1938).  
*The gravitational equations and the problem of motion.*
- [64] Projet CNES et ONERA. *sur le web.* <http://www.cnes.fr/activites/connaissance/physique/microsatellite/>.
- [65] P. ASTONE *et. al.* *Phys. Rev. Lett.***84**, 14 (2000). *Cosmic rays observed by the resonant gravitational wave detector NAUTILUS.*
- [66] L. S. FINN and D. F. CHERNOFF. *Phys. Rev. D* **47**, 2198 (1993).  
*Observing binary inspiral in gravitational radiation : one interferometer.*
- [67] V. FOCK. *J. Phys. (U.S.S.R.)* **1**, 81 (1939).
- [68] V. A. FOCK. *Theory of Space, Time and Gravitation*, Pergamon, London (1959).
- [69] T. FUTAMASE. *Phys. Rev. D.* **28**, 2373 (1983).  
*Gravitational radiation reaction in the Newtonian limit.*
- [70] T. FUTAMASE and B. F. SCHUTZ. *Phys. Rev. D.* **28**, 2363 (1983).  
*Newtonian and post-Newtonian approximation are asymptotic to general relativity.*
- [71] T. FUTAMASE and B. F. SCHUTZ. *Phys. Rev. D.* **32**, 2557 (1985).  
*Gravitational radiation and the validity of the far-zone quadrupole formula in the Newtonian limit of general relativity.*
- [72] S. W. HAWKING *et al.* *Cambridge University Press*, (1987).  
*Three hundred years of gravitation.*
- [73] R. A. HULSE and J. H. TAYLOR. *Astrophys. J.* **195**, 51 (1975).  
*Discovery of a pulsar in a binary system.*

- [74] L. INFELD. *Ann. Phys.* **6**, 341 (1959).  
*Equations of motions and gravitational radiation.*
- [75] B. R. IYER and C. M. WILL. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 113 (1993).  
*Post-Newtonian Gravitational radiation reaction for two-body systems.*
- [76] B. R. IYER and C. M. WILL. *Phys. Rev. D* **52**, 6882 (1995).  
*Post-Newtonian gravitational radiation reaction for two-body systems : Nonspinning bodies.*
- [77] P. JARANOWSKI and G. SCHÄFER. *Phys. Rev. D.* **57**, 7274 (1998).  
*Third post-Newtonian higher order ADM Hamiltonian dynamics for two-body point-mass systems.*
- [78] P. JARANOWSKI and G. SCHÄFER. *Phys. Rev. D.* **60**, 124003 (1999).  
*Binary black-hole problem at the third post-Newtonian approximation in the orbital motion : static part.*
- [79] P. JARANOWSKI and G. SCHÄFER. *Ann. Phys.* **9**, 378 (2000).  
*The binary black-hole dynamics at the third post-Newtonian order in the orbital motion.*
- [80] G. D. KERLICK. *Gen. Rel. Grav.* **12**, 467 (1979).  
*Finite reduced hydrodynamic equation in the slow-motion approximation to general relativity. Part 1. First post-Newtonian equations.*
- [81] G. D. KERLICK. *Gen. Rel. Grav.* **12**, 521 (1979).  
*Finite reduced hydrodynamic equation in the slow-motion approximation to general relativity. Part 2. Radiation reaction and higher-order divergent terms.*
- [82] S. M. KOPEIKIN. *PhD thesis*, (1986).
- [83] L. LANDAU and E. LIFCHITZ. *Editions Mir Moscou*, (1989).  
*Physique théorique, théorie des champs (tome 2).*
- [84] M. LEE, D. GRETZ, S. STEPPEL, and J. WEBER. *Phys. Rev. D.* **14**, 893 (1976).  
*Gravitational-radiation-detector observations in 1973 and 1974.*
- [85] J. L. LEVINE and R. L. GARWIN. *Phys. Rev. Lett.* **33**, 794 (1974).  
*New negative result for gravitationnal waves detection and comparison with reported detection.*
- [86] C. W. LINCOLN and C. M. WILL. *Phys. Rev. D* **42**, 1123 (1990).  
*Coalescing binary systems of compact objects to (post)<sup>5/2</sup>-Newtonian order : late-time evolution and gravitational-radiation emission.*
- [87] H. A. LORENTZ and J. DROSTE. *Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam* **26**, 392 and 649 (1917) ; *in the collected papers of H.A. Lorentz, vol. 5, The Hague, Nijhoff* (1937).
- [88] M. MAGGIORE. *Phys. Report* **331**, 283 (2000). *Gravitationnal wave experiments and early universe cosmology.*
- [89] C. W. MISNER, K. S. THORNE, and J. A. WHEELER. *W. H. Freeman and Company*, (1973).  
*Gravitation.*
- [90] A. PAPANETROU and B. LINET. *Gen. Rel. Grav.* **13**, 335 (1981).  
*Equation of motion including the reaction of gravitational radiation.*
- [91] R. V. POUND and G. A. REBKA. *Phys. Rev. Lett.* **4**, 337 (1960).  
*Apparent weight of photons.*

- [92] A. D. RENDALL. *Class. Quant. Grav.* **7**, 803 (1990).  
*Convergent and divergent perturbation series and the post-Minkowskian approximation scheme.*
- [93] A. D. RENDALL. *Proc. R. Soc. Lond. A.* **438**, 341 (1992).  
*On the definition of post-Newtonian approximations.*
- [94] G. SCHÄFER. *Ann. Phys.* **161**, 81 (1985).  
*The gravitational quadrupole radiation-reaction force and the canonical formalism of ADM.*
- [95] G. A. SEILSTAD, R. A. SRAMEK, and K. W. WEILER. *Phys. Rev. Lett.* **24**, 1373 (1970).  
*Measurement of the deflection of 9.602-GHz radiation from 3C279 in the solar gravitational field.*
- [96] I. I. SHAPIRO. *Phys. Rev. Lett.* **13**, 26, 789 (1964).  
*Fourth test of general relativity.*
- [97] I. I. SHAPIRO et al. *Phys. Rev. Lett.* **26**, 1132 (1971).  
*Fourth test of general relativity : new radar result.*
- [98] H. STEPHANI. *Cambridge University Press*, (1990).  
*General relativity (an introduction to the theory of the gravitational field).*
- [99] H. TAGOSHI and T. NAKAMURA. *Phys. Rev. D* **49**, 4016 (1994).  
*Gravitational waves from a point particle in circular orbit around a black hole : logarithmic terms in the post-Newtonian expansion.*
- [100] J. H. TAYLOR, L. A. FOWLER, and P. M. MCCULLOCH. *Nature* **277**, 437 (1979).  
*Measurements of general relativistic effects in the binary pulsar PSR1913+16.*
- [101] K. S. THORNE. *Rev. Mod. Phys.* **52**, 299 (1980).  
*Multipole expansions of gravitational radiation.*
- [102] J. A. TYSON, C. G. MACLENNAN, and L. J. LANZEROTTI. *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1006 (1973).  
*Correlation of reported gravitational radiation events with terrestrial phenomena.*
- [103] R. M. WALD. *The University of Chicago Press*, (1984).  
*General relativity.*
- [104] J. WEBER. *Phys. Rev.* **117**, 1, 306 (1960).  
*Detection and generation of gravitational waves.*
- [105] J. WEBER. *Phys. Rev. Lett.* **22**, 4, 1320 (1969).  
*Evidence for discovery of gravitational radiation.*
- [106] J. WEBER, M. LEE, D. J. GRETZ, G. RYDBECK, V. L. TRIMBLE, and S. STEPPEL. *Phys. Rev. Lett.* **31**, 779 (1973).  
*New gravitational radiation experiments.*
- [107] J. M. WEISBERG and J. H. TAYLOR. *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1348 (1984).  
*Observation of post-Newtonian timing effects in the binary pulsar PSR 1913+16.*
- [108] C. M. WILL. *Living Review* **4**, (2001-4). *The confrontation between General Relativity and Experiment.*
- [109] C. M. WILL and A. G. WISEMAN. *Phys. Rev. D* **54**, 4813 (1996).  
*Gravitational radiation from compact binary systems : gravitational waveforms and energy loss to second post-Newtonian order.*

- 
- [110] Y. B. ZEL'DOVICH and I. D. NOVIKOV. *Dover ed.*, (1996).  
*Stars and relativity.*

# Index

- action, 12
- action de Hilbert, 14
  
- barres de Weber, 3
- binaires compactes, 6
  
- champs, 12
- coalescences, 6
- constante  $\lambda$ , 77
- covariance, 13, 14
  
- deformations des corps etendus, 100
- densite baryonique, 80
- densite d'energie propre, 79
- densite Lagrangienne, 13
- densite propre de masse au repos, 79
- detection des ondes gravitationnelles, 3
- detection interferometrique, 4
- deviation de la metrique, 16
  
- energie a 1 PN, 97
- energie interne massique, 80
- energie interne specifique, 80
- equations d'Einstein, 12
- espace, 12
- etoiles a neutrons, 6
- evenement, 11
  
- fluide parfait, 79
- fond diffus d'ondes gravitationnelles, 7
  
- identites de Bianchi, 15
- interferometres, 4
  
- jauge harmonique, 17
  
- LIGO, 4, 6, 7, 76
- LISA, 5
  
- masse baryonique, 80
- masse renormalisee, 104
- metrique, 12
- metrique gothique, 16
  
- P-operateur, 94
- partie finie, 106
- points materiels, 76
- potentiels, 81, 83
- pression, 79
- principe d'effacement, 78
- principe d'equivalence, 14
- principe de covariance, 79
- profil de densite, 90
- pseudo tenseur de Landau Lifchitz, 15
- PSR1913+16, 6
  
- quadri-vitesse, 79
  
- regularisation d'Hadamard, 77
- regularisation dimensionnelle, 77
- Relativite Generale, 11
- renormalisation, 109
- renormalisation de la masse, 104
  
- scalaire de courbure, 13
- scalaire de Ricci, 13
- source compacte, 92
- source strictement non compacte, 95
- structure interne, 76
- supernova, 8
- symboles de Christoffel, 13
- systeme de coordonnees, 11
  
- tenseur de Riemann, 13
- tenseur energie-impulsion, 79
  
- VIRGO, 4, 6, 7, 76
  
- Weber, 3





## Résumé en Français

Pour extraire l’empreinte laissée par le passage d’une onde gravitationnelle dans le signal bruité d’un des futurs détecteurs (VIRGO/LIGO), il est nécessaire de connaître avec une grande précision la forme de cette onde. Or, les équations de la Relativité Générale (RG), qui régissent cette forme, sont d’une grande complexité et ne sont pas solubles analytiquement pour des systèmes dynamiques tels que les binaires d’étoiles à neutrons. Celles ci représentent pourtant les sources les plus prometteuses de rayonnement gravitationnel. On a donc recours à des méthodes d’approximation. Dans cette thèse nous avons étudié l’approximation post-Newtonienne (développement perturbatif en puissance de  $1/c$ ) dans le cadre de la RG. Dans un premier temps nous avons étudié cette approximation d’un point de vue général afin de démontrer un théorème qui permet d’affirmer que, sous certaines hypothèses, le développement post-Newtonien du champ de gravitation d’une source isolée auto-gravitante peut être itéré à tout les ordres en  $1/c$ , ce qui n’avait jamais été fait jusqu’à présent. Nous avons montré que ce développement se raccorde à tous les ordres à une solution extérieur, valable notamment à l’infini, et satisfaisant aux conditions d’absence de radiation rentrante. Dans un deuxième temps, sous l’impulsion de Luc Blanchet et en collaboration avec Gilles Esposito-Farèse, je me suis intéressé au problème de l’énergie post-Newtonienne à l’ordre  $1/c^6$  d’un système binaire de corps compacts étendus. Nous nous intéressons notamment au problème du calcul d’un coefficient indéterminé à l’ordre 3PN dû à une incomplétude des méthodes de régularisation. Pour lever cette indétermination, nous nous sommes intéressés au calcul de cette même énergie pour des corps étendus lorsque l’on tient compte de la structure interne. Nous présentons dans cette thèse les raisons possibles de l’indétermination, la méthode et les problèmes posés par l’extension finie des corps.

## Thesis abstract

In order to find the track left by a gravitational wave in the noisy data of one of the forthcoming detectors (VIRGO/LIGO), it is mandatory to know precisely the shape of the wave. General Relativity determines this shape but the equations are too complex to be analytically soluble in an accurate manner for dynamical systems such as neutron star binaries which are the most promising sources of gravitational waves. We have thus resorted to approximation methods. In this thesis, we studied the post-Newtonian approximation method (perturbative expansion in  $1/c$ ) in the framework of General Relativity. First of all, we studied this approximation from a general point of view in order to prove a theorem stating, under certain hypotheses, that post-Newtonian expansion of the gravitational field of a self gravitating isolated source can be iterated to all orders in  $1/c$ , what had not been done until now. We proved this development matches to all orders with an exterior solution, valide in particular at infinity, ans satisfying no-incoming radiation condition. Secondly, at Luc Blanchet’s instigation and in collaboration with Gilles Esposito-Farèse, I have been interested in the problem of the post-Newtonian energy up to  $1/c^6$  of a binary system of extended compact bodies. Among other problems, we are interested in the calculation of an unknown coefficient at the 3PN order due to the lack of fulfilment of regularisation methods used so far. To solve this problem we have tried to calculate this energy for extended bodies taking into account their internal structure. We present possible reasons for the indetermination, the method and the problems raised by the finite extension of the sources.

## Mots clés

Relativité Générale, post-Newtonien, méthode d’approximation, binaire, étoiles à neutrons, énergie à 3PN .