Sur les courbes intégrales du champ de gradient

Didier D'Acunto

19 Décembre 2001

Topologie modérée (Whitney, Thom, Łojasiewicz, Gabrielov, Hironaka,...) :

– Étude des propriétés géométriques des ensembles semi-algébriques, semi-analytiques,...
– Étude du comportement des fonctions semi-algébriques, semi-analytiques, sous-analytiques,...

"Bonnes" propriétés de finitude :
– croissance monotone des fonctions d'une variable réelle
– décomposition cellulaire
– triangulation
– stratification
– fibration
– ...

Khovanskii : Étude de la transcendance des solutions de certaines équations.

Problème de Tarski : Construction d'une catégorie géométrique contenant les ensembles semi-algébriques et la fonction exponentielle, possédant des propriétés analogues à celles des semi-algébriques.

Wilkie : Réponse positive. C'est la structure o-minimale $\mathbb{R}_{\mathrm{exp}}$.

Structures o-minimales sur $\mathbb{R}$ (van den Dries, Miller, Wilkie,...) $\quad \mathcal{M} = \{\mathcal{M}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$\mathcal{M}_n$ collection de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ tels que :

1. $\mathcal{M}_n$ algèbre booléenne (stable par $\cap$, $\cup$, complémentaire),
2. $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \times B \in \mathcal{M}$,
3. $A \in \mathcal{M}_{n+p} \Rightarrow \pi_n(A) \in \mathcal{M}_n$,
4. $\mathcal{M}$ contient les semi-algébriques,
5. Tout sous-ensemble de $\mathcal{M}_1$ est réunion finie d'intervalles et de points (**o-minimalité**).

Vocabulaire :
Ensemble définissable dans $\mathcal{M}$.
Application f définissable au sens : $\Gamma(f)$ est définissable.

Exemples : $\mathbb{R}_{\text{exp}}$, $\mathbb{R}_{\text{an}}^{\mathbb{R}}$, ens. glob. sous-analytiques.

Soit $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ un polynôme.

Théorème (Thom) :
Il existe un ensemble fini $\Delta \subset \mathbb{C}$ tel que :

$$p : \mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(\Delta) \to \mathbb{C} \setminus \Delta$$

est une fibration localement triviale.

Condition de Malgrange en $t \in \mathbb{C}$:

Il existe $C > 0$ tel que pour tout $|x|$ "suffisamment grand" et $p(x) \in V_t$:

$$(\mathbf{M}) \quad |x| \cdot |\nabla p(x)| \geq C,$$

où V_t un voisinage ouvert de t.

Théorème (Parusiński) :
Si t n'est pas une valeur critique de p, alors la condition $(\mathbf{M})$ est une condition suffisante de trivialisation au dessus de V_t.

Cas o-minimal :

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction dfn, C^1. Quelles sont les valeurs de f où la condition de Malgrange $(\mathbf{M})$ est vérifiée ?

Définition (Valeurs critiques asymptotiques) :

$K_\infty(f) = \{c \in \mathbb{R} :$ $(\mathbf{M})$ n'est pas vérifiée en $c\}$

Théorème 1. *Si f est définissable et de classe C^1, alors $K_\infty(f)$ est fini.*

De plus si f est C^2 et si $K_0(f)$ désigne l'ensemble des valeurs critiques de f, alors :

Théorème 2 (Fibration).
La fonction f réalise une fibration triviale au dessus de chaque composante connexe de $\mathbb{R} \setminus (K_0(f) \cup K_\infty(f))$.

Soit f une fonction dfn, C^2 sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que la fonction f vérifie :

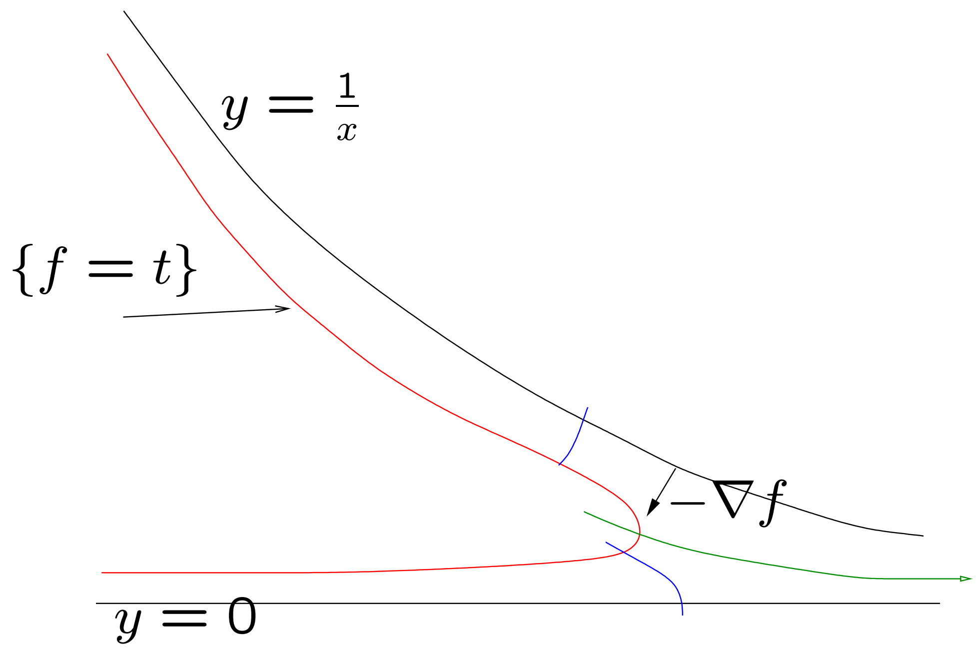
- $0 \in K_\infty(f) \setminus K_0(f)$
- pour un $t < 0$, l'intervalle : $[t, 0[$ ne contient ni valeur critique, ni valeur critique asymptotique.

Théorème 3 (Plongement).
Il existe une immersion injective ouverte $\varphi_t : f^{-1}(0) \to f^{-1}(t)$ qui plonge chaque composante connexe de $f^{-1}(0)$ dans une composante connexe de $f^{-1}(t)$.

Corollaire 4.
Soient p un polynôme complexe lisse, t une valeur typique et c une valeur critique asymptotique. Alors il existe une immersion injective ouverte

$$\varphi_{c,t} : p^{-1}(c) \to p^{-1}(t)$$

Exemple (Broughton) :



$$f(x, y) = y(xy - 1)$$

Longueur des Courbes Intégrales de ∇f

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ dfn, C^2 sur un ouvert borné $U \subset \mathbb{R}^n$.

Soit γ une trajectoire de ∇f dans U.

Problèmes : estimer long(γ) au voisinage d'une :

- singularité ($\nabla f(x_0) = 0$),
- singularité au bord de U ($\nabla f(x) \to 0$ qd. $x \to x_1 \in \partial U$).

Théorème (Kurdyka) Il existe $M > 0$ t. q. pour toute trajectoire γ de ∇f,

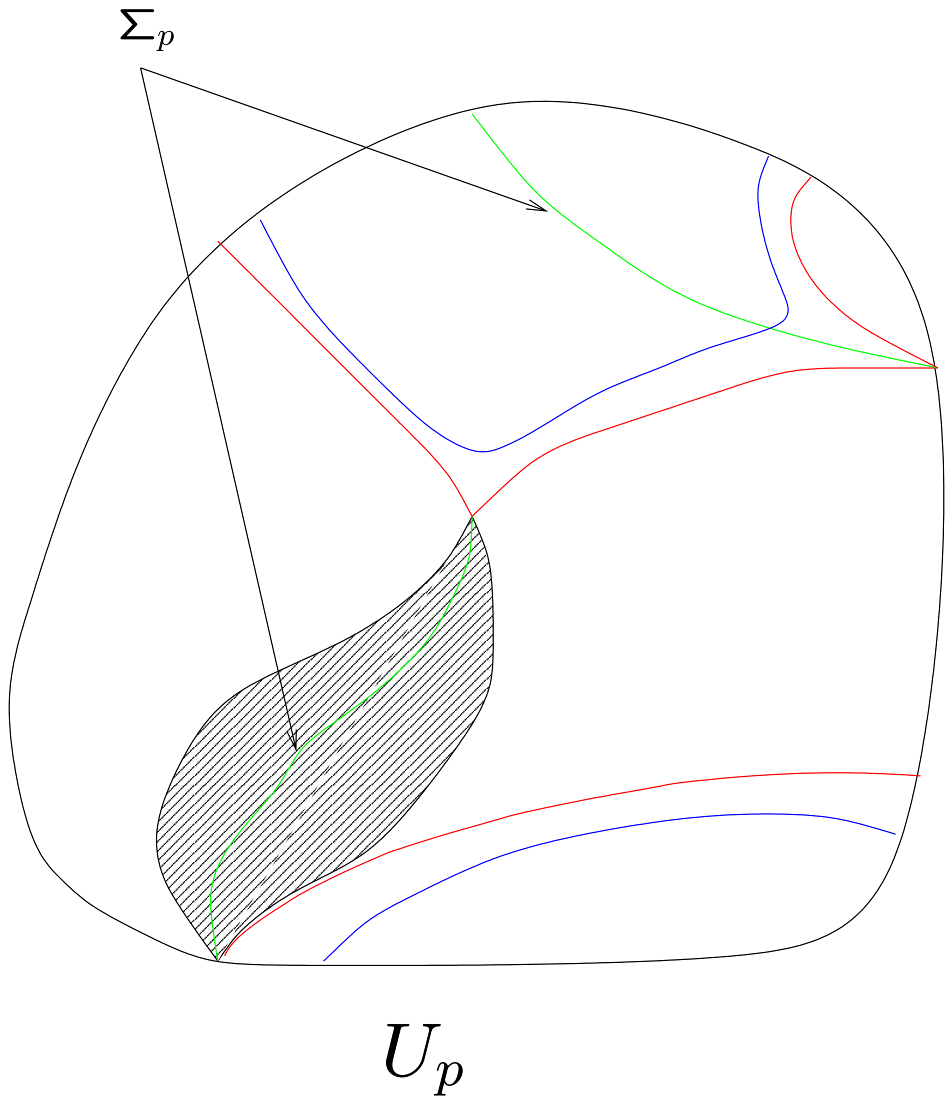
$$\text{long}(\gamma) \leq M$$

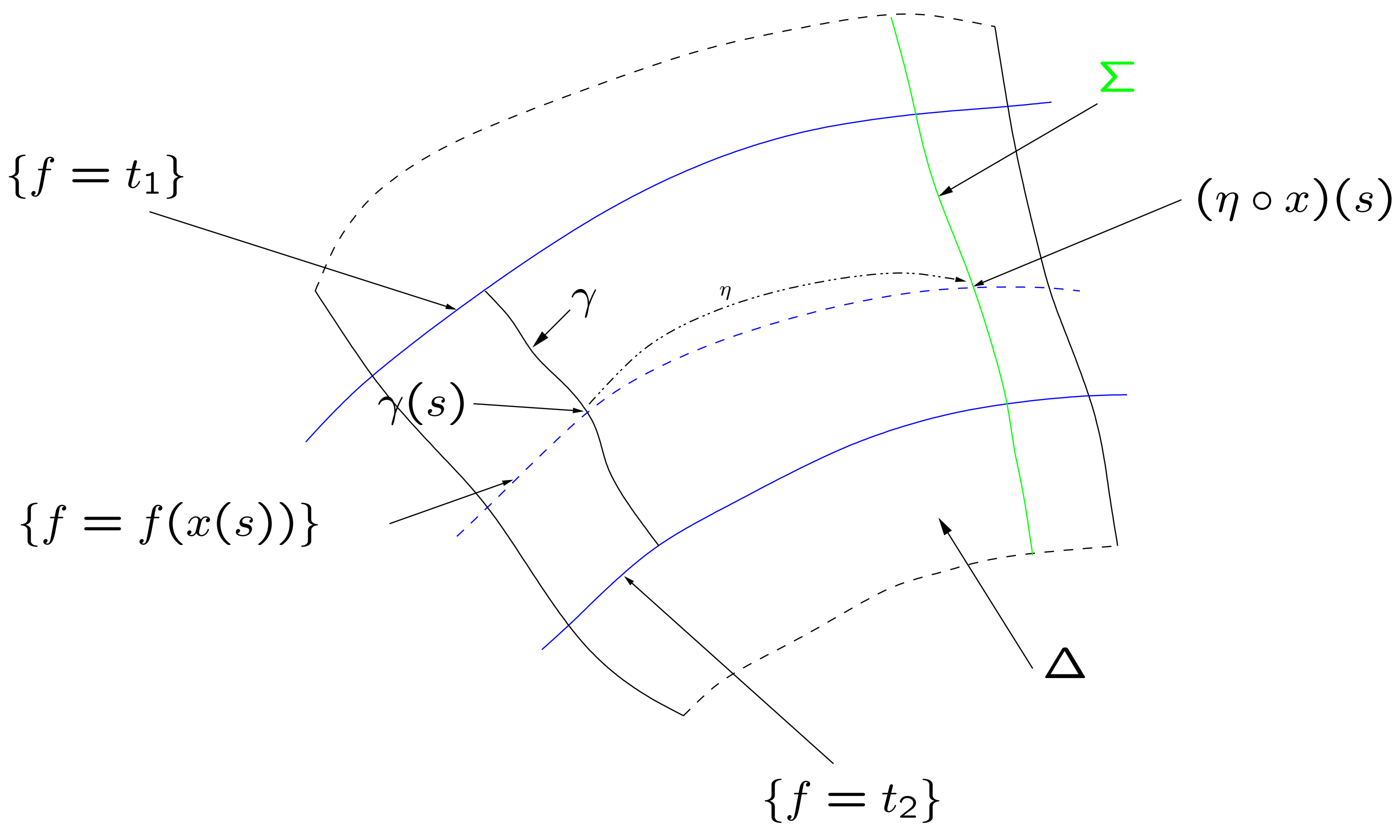
Cas d'une famille définissable de fonctions

Soit $\mathcal{F} = \{f_p : U_p \to \mathbb{R}\}_{p \in \mathcal{P}}$ une famille dfn de fonctions C^2, telle que $\forall p \in \mathcal{P}$, $U_p \subset K$ compact de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 5 (Borne uniforme).
Il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $f_p \in \mathcal{F}$ et toute trajectoire γ_p de ∇f_p :

$$\text{long}(\gamma_p) \leq M$$


Σ_p
U_p



1. $\mathsf{long}(\gamma) \leq 2\mathsf{long}(\Sigma)$
2. Formule de Cauchy-Crofton + Théorème de finitude Uniforme

$$\Rightarrow \mathsf{long}(\Sigma) \leq M$$

Corollaire 6.
Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *un polynôme de degré* d *et* γ *une courbe intégrale de* ∇f *dans* $\mathbb{B}^n$. *Alors*

$$\text{long}(\gamma) \leq M(n,d)$$

Estimation de la constante

<u>Problème</u> : Choix explicite de Σ

Pour "presque" tout polynôme de degré $\leq\ d$

$$\Sigma = \inf\{|\nabla f(x)| : f(x) = \mathrm{C}^{te},\ x \in \overline{\mathbb{B}^n}\}$$

est réunion finie de courbes algébriques.

Pour un polynôme f "générique"

$$\text{long}(\gamma) \leq A(n,d) \text{ et :}$$

$$\boxed{A(n,d) = 2V(n)((3d-4)^{n-1} + 2(3d)^{n-2})}$$