



HAL
open science

Propriétés extrémales et caractéristiques des exemples de Lattès

Christophe Dupont

► **To cite this version:**

Christophe Dupont. Propriétés extrémales et caractéristiques des exemples de Lattès. Mathématiques [math]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2002. Français. NNT : . tel-00002634

HAL Id: tel-00002634

<https://theses.hal.science/tel-00002634>

Submitted on 26 Mar 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

présentée en vue de l'obtention du
Doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse
Spécialité : Mathématiques Pures

par

Christophe DUPONT

PROPRIÉTÉS EXTRÉMALES ET CARACTÉRISTIQUES DES EXEMPLES DE LATTÈS

Soutenue le 29 Novembre 2002
devant le jury composé de:

F. Berteloot	Professeur, Université de Toulouse III	Directeur
D. Cerveau	Professeur, Université de Rennes I	Examineur
J. Duval	Professeur, Université de Toulouse III	Examineur
J.J. Loeb	Professeur, Université d'Angers	Rapporteur
N. Sibony	Professeur, Université de Paris-Sud	Rapporteur

Laboratoire Emile Picard, UMR 5580, UFR MIG, Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France.

Remerciements

Je remercie en premier lieu François Berteloot pour m'avoir beaucoup appris lors de ce travail de thèse, avec patience, générosité et disponibilité. Je lui suis en particulier reconnaissant pour la confiance et le soutien qu'il m'a toujours accordés.

J'exprime toute ma gratitude à Jean-Jacques Loeb et Nessim Sibony pour avoir accepté d'écrire les rapports. Ils me font à cette occasion un grand honneur.

Je suis très heureux de la participation au Jury de Dominique Cerveau et Julien Duval. J'ai eu la chance d'assister à leurs cours, et d'apprendre ainsi de jolies mathématiques.

Ce travail doit aussi beaucoup à l'ambiance joyeuse et chaleureuse dans laquelle il a été effectué. Je pense ici aux nombreuses et fidèles amitiés qui se sont nouées au cours de ces années toulousaines, et qui se reconnaîtront. Je salue en particulier mes compagnons de bureau successifs Nicolas Nguyen, Damien Gayet, Magali Bouffet et Mathieu Fructus. Je pense aussi à Nolwenn Roudaut et Raja Chakir, avec qui j'ai partagé de nombreux moments de complicité.

Je remercie enfin mes parents pour m'avoir soutenu dans la poursuite de mes études. Cette thèse leur est dédiée.

Introduction

Dans la première partie de ce travail, nous caractérisons les exemples de Lattès parmi les endomorphismes holomorphes de \mathbb{P}^k par l'absolue continuité de leur mesure d'entropie maximale μ . Il s'ensuit une caractérisation des exemples de Lattès en terme d'exposants de Lyapounoff de μ . Ces résultats montrent que, *génériquement*, la mesure d'entropie maximale d'un endomorphisme holomorphe de degré d de \mathbb{P}^k n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (elle est par conséquent singulière, en vertu de son ergodicité), et que l'un au moins de ses exposants est strictement plus grand que $\log d/2$. Ceci répond à une question posée par Fornæss et Sibony (cf [FS4], Questions 2.17, 2.21).

La caractérisation des exemples de Lattès par leur mesure d'entropie maximale repose sur un principe de renormalisation, dont l'élaboration utilise l'interprétation pluripotentialiste de μ comme masse de Monge-Ampère.

Le passage de la minimalité des exposants à l'absolue continuité de μ fut établi par Ledrappier en dimension 1, et relève de la théorie ergodique. Les arguments en dimension plus grande que un sont les mêmes, et ne sont pas reproduits ici.

La seconde partie est consacrée à l'étude du bassin d'attraction de l'origine des relevés polynomiaux des exemples de Lattès. Nous montrons que le bord de ces domaines se désingularise explicitement en une hypersurface sphérique compacte. Ces domaines sont donc assez surprenants, puisqu'ils sont proches de la boule euclidienne et admettent des auto-applications holomorphes propres non injectives.

Nous construisons la désingularisation du bord du bassin d'attraction dans un fibré en droites au dessus d'un tore, à l'aide de fonctions thêta. La description des singularités s'obtient alors grâce à quelques éléments de la théorie des invariants.

Un bref survol du contexte

L'étude de la dynamique des fractions rationnelles sur \mathbb{P}^1 remonte au début du vingtième siècle, avec les travaux de Fatou et Julia. L'objectif est de comprendre le comportement des itérées d'une fraction rationnelle f sur les sous-ensembles invariants suivants : l'ensemble de Fatou \mathcal{F} , sur lequel ces itérées forment une famille localement équicontinue, et l'ensemble de Julia \mathcal{J} , le complémentaire de \mathcal{F} .

Sur l'ensemble de Fatou, la dynamique d'une fraction rationnelle est bien com-

prise, grâce à la classification des composantes connexes périodiques de \mathcal{F} , dite de Fatou-Cremer, et au théorème de Sullivan [Su], qui stipule qu'une composante connexe de \mathcal{F} est nécessairement prépériodique. Une description précise de cette dynamique se trouve, par exemple, dans les chapitres 2 et 4 du livre [BM].

La situation sur l'ensemble de Julia \mathcal{J} est plus délicate. Notons tout d'abord que cet ensemble n'est pas vide lorsque le degré de f est plus grand que deux, et qu'il peut coïncider avec \mathbb{P}^1 . Fatou et Julia ont démontré que la restriction de f à \mathcal{J} est topologiquement mélangeante et que les cycles répulsifs sont denses dans \mathcal{J} . La dynamique sur \mathcal{J} est donc beaucoup plus difficile à décrire que celle sur \mathcal{F} . En présence d'une telle "instabilité" dynamique, il est pertinent de travailler dans le cadre de la théorie ergodique : on s'intéresse alors au comportement d'orbites génériques, relativement à une mesure de probabilité invariante par f .

Il est assez facile de construire de telles mesures. Par exemple, un cycle répulsif $\{x, \dots, f^{p-1}(x)\}$ donne naissance à la mesure de probabilité invariante $\frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \delta_{f^j(x)}$ (δ_a désigne la masse de Dirac au point a). Mais bien sûr, une telle mesure n'apporte que peu d'information sur la dynamique de f . En 1983, Freire, Lopes et Mañé [FLM], ainsi que Lyubich [Ly1], ont construit une mesure invariante portée par \mathcal{J} et vérifiant de remarquables propriétés ergodiques. Cette mesure, que l'on note μ , reflète la distribution asymptotique des préimages d'un point suffisamment général. Plus précisément, on a :

$$\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{d^n} \sum_{f^n(x)=a} \delta_x \quad (1)$$

où d désigne le degré de f , et a un point de \mathbb{P}^1 pris en dehors de l'ensemble exceptionnel \mathcal{E} , contenant au plus deux éléments. La mesure μ est mélangeante et vérifie l'identité $f^*\mu = d.\mu$. Cette relation montre en particulier que l'entropie de μ vaut $\log d$ (voir plus bas pour la définition de l'entropie). De plus, cette mesure se distingue dans l'ensemble des mesures de probabilité invariantes par f . En effet, Lyubich [Ly1] et Mañé [Ma2] ont montré que μ est l'unique mesure d'entropie maximale du système (\mathbb{P}^1, f) .

Nous verrons plus loin que μ peut aussi s'introduire à l'aide de la théorie du pluripotentiel. Cette approche remonte à Broliin ([Bro], 1965) qui établit, dans le cas des polynômes, que μ est égale à la mesure d'équilibre de l'ensemble des points d'orbite bornée.

Les propriétés de régularité de μ ont été beaucoup étudiées. Le premier résultat est la formule suivante, établie par Ledrappier ([Le2], 1984) :

$$h(\mu) = \dim(\mu).\lambda(\mu) \quad (2)$$

Elle relie l'entropie $h(\mu)$ de μ à son exposant de Lyapounoff $\lambda(\mu)$, et à sa dimension $\dim(\mu)$ (cf [Y] pour une formule similaire concernant les difféomorphismes de variétés compactes de dimension réelle 2). Rappelons rapidement la signification de ces réels.

La notion d'entropie est issue de la théorie de l'information, développée par Shannon, à la fin des années 1940. On consultera à ce sujet le livre de Zinsmeister [Zi] (Chap. 2), celui de Katok et Hasselblatt [KH] (Chap. 4.3), et la thèse de Cantat [Ca] (Chap. I.2). Par définition, l'entropie $H(\alpha)$ d'une partition $\alpha = (A_1, \dots, A_p)$ de \mathbb{P}^1 est égale à :

$$H(\alpha) := - \sum_{i=1}^p \mu(A_i) \log \mu(A_i)$$

Elle mesure la quantité d'information obtenue par la localisation d'un point générique sur la partition α . L'entropie de f relativement à la partition α est par définition égale à :

$$H(f, \alpha) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H(\alpha_n)$$

où α_n désigne la partition constituée des atomes $A_{i_0} \cap \dots \cap f^{-(n-1)}A_{i_{n-1}}$ pour $(i_0, \dots, i_{n-1}) \in \{1, \dots, p\}$. La limite existe par sous-additivité de la suite $(H(\alpha_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Elle peut s'interpréter comme l'incertitude avec laquelle on situe un point générique x sur la partition α , connaissant les atomes de α visités par l'orbite $(f^n(x))_{n \geq 1}$. L'entropie de μ est alors égale à la borne supérieure de ces quantités, lorsque α parcourt l'ensemble des partitions finies.

On montre que l'entropie d'une mesure invariante ν est toujours plus petite que l'entropie *topologique* du système dynamique considéré (cf [KH], Th. 4.5.3). Une mesure ν est dite d'entropie maximale lorsque son entropie atteint cette valeur extrême.

L'exposant de Lyapounoff de μ est égal au taux de croissance exponentiel du jacobien des itérées de f , le long d'une orbite μ -générique. La dimension de μ est égale à la borne inférieure des dimensions de Hausdorff des boréliens de mesure totale.

Observons que (2) permet de retrouver l'inégalité de Margulis-Ruelle [Ru1] :

$$h(\mu) \leq 2 \cdot \lambda(\mu) \tag{3}$$

Cette inégalité est en fait valable plus généralement pour un endomorphisme f de classe \mathcal{C}^1 d'une variété compacte de dimension k . Si ν est une mesure invariante par f , ergodique et d'exposants de Lyapounoff $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, elle s'écrit :

$$h(\nu) \leq \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$$

On déduit de l'inégalité (3) la minoration $\lambda(\mu) \geq \log d/2$. La valeur "extrémale" $\lambda(\mu) = \log d/2$ (équivalente à $\dim(\mu) = 2$ par (2)) s'avère être particulièrement intéressante : dans ce cas, la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{P}^1 (i.e. la mesure induite par la métrique sphérique) [Le1], [Le2]. Les propriétés précédentes se résument alors en :

Théorème (Ledrappier [Le2], 1984) : *Soit f une fraction rationnelle de degré d et μ sa mesure d'entropie maximale. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'exposant de Lyapounoff de μ est égal à $\log d/2$.*
2. *La dimension de μ est égale à 2.*
3. *La mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Ce type de résultat concerne en fait toute mesure invariante ν d'entropie positive pour laquelle (3) est une égalité (cf [Le2]), et s'inscrit maintenant dans une théorie valable pour les difféomorphismes f de classe $\mathcal{C}^{1+\epsilon}$ de variétés compactes. En effet, l'égalité dans la formule de Margulis-Ruelle, dite "formule de Pesin" :

$$h(\nu) = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \quad (4)$$

entraîne une propriété de régularité sur ν , proche de l'absolue continuité. Le théorème de Ledrappier-Young ([Le3], 1984 et [LY], 1985) stipule que lorsque (4) est vérifiée, les mesures conditionnelles de ν "en restriction" aux variétés instables sont absolument continues par rapport aux mesures de Lebesgue induites. La réciproque de ce théorème, établie dans un premier temps par Pesin ([Pe], 1977) et Mañé ([Ma1], 1981) pour une mesure ν absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, fut démontrée par Ledrappier et Strelcyn ([LS], 1982).

Il est en fait possible de préciser les fractions rationnelles vérifiant les propriétés équivalentes du théorème de Ledrappier. Il est en effet très rare que la dimension de Hausdorff de \mathcal{J} soit égale à la dimension de μ :

Théorème (Zdunik [Z], 1990) : *Soit f une fraction rationnelle, de mesure d'entropie maximale μ et d'ensemble de Julia \mathcal{J} . La dimension de μ est égale à la dimension de Hausdorff de \mathcal{J} si et seulement si f est une application puissance $z \mapsto z^{\pm n}$, un polynôme de Tchebicheff, ou bien un exemple de Lattès.*

Les "exemples de Lattès" sont des fractions rationnelles de degré $d \geq 2$ faisant commuter un diagramme du type :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{D} & A \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

où A est un tore complexe de dimension 1, D une dilatation affine et σ un revêtement galoisien fini. On vérifie facilement que pour une telle fraction, le tiré en arrière de la mesure μ par σ coïncide avec une forme volume sur A . La mesure μ est donc équivalente à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{P}^1 . En particulier, l'ensemble de Julia d'un exemple de Lattès coïncide avec \mathbb{P}^1 . Remarquons que beaucoup d'autres fractions partagent cette propriété, sans pour autant être du type Lattès (cf [Ly2] ou [BM] Chap. 5, et [Re]).

Le théorème de Zdunik (en fait sa partie la plus simple), associé au théorème de Ledrappier, montre donc que parmi les fractions rationnelles d'ensemble de Julia égal à \mathbb{P}^1 , les exemples de Lattès se caractérisent par la dimension de leur mesure d'entropie maximale :

Théorème (Ledrappier [Le2], Zdunik [Z]) : *Soit f une fraction rationnelle de degré d et μ sa mesure d'entropie maximale. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'exposant de Lyapounoff de μ est égal à $\log d/2$.*
2. *La dimension de μ est égale à 2.*
3. *La mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*
4. *La fraction rationnelle f est un exemple de Lattès.*

Cette partie du théorème de Zdunik peut en réalité s'établir facilement par un argument de renormalisation. Dans cet esprit, Mayer a récemment obtenu :

Théorème (Mayer [May], 2002) : *La mesure d'entropie maximale d'une fraction rationnelle f est absolument continue par rapport à une mesure conforme si et seulement si f est une application puissance, un polynôme de Tchebicheff, ou bien un exemple de Lattès.*

Rappelons qu'une mesure ν est conforme si il existe $\alpha > 0$ tel que $\nu(f(B)) = \int_B |f'|^\alpha d\nu$ pour tout borélien B sur lequel f est injective, où $|f'|$ désigne la norme de la différentielle de f pour la métrique sphérique. Par exemple, la mesure de Lebesgue est conforme, pour $\alpha = 2$. La démonstration de Mayer, dont nous nous inspirerons, repose sur le procédé de renormalisation suivant (cf [Le2], [EL] §3.2.4) :

Théorème (Ledrappier [Le2], 1984) : *Soit f une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$ et μ sa mesure d'entropie maximale. Pour μ -presque tout point z de \mathbb{P}^1 , il existe $(n_j(z))_{j \in \mathbb{N}}$ et $r(z) > 0$ tels que les applications :*

$$\varphi_{n_j} : \begin{array}{ccc} D(0, r(z)) & \longrightarrow & \mathbb{P}^k \\ u & \longmapsto & f^{n_j}(z + |f^{n_j}'(z)|^{-1} \cdot u) \end{array}$$

soient injectives et convergent localement uniformément sur $D(0, r(z))$ vers une application holomorphe injective φ .

La preuve utilise de manière cruciale le caractère conforme des fractions rationnelles, puisqu'elle nécessite le théorème de Koebe, propre à la dimension 1.

On obtient le théorème de Mayer en associant ce procédé de renormalisation à l'identité $f^* \mu = d \cdot \mu$. On montre ainsi que les propriétés de μ sont les mêmes à grande et à petite échelle. A titre d'exemple, et pour éclairer notre démarche à venir, examinons le cas où μ est à densité h par rapport à la mesure de Lebesgue (μ s'identifie alors à une $(1, 1)$ forme différentielle à coefficient L^1). Nous allons voir que si z_0 est un point de Lebesgue de la fonction h , alors la densité h de μ sur $\varphi(D(0, r(z_0)))$ est constante, égale à $h(z_0)$.

La première étape consiste à interpréter l'identité :

$$f^{n*} \mu = d^n \cdot \mu \quad (5)$$

à l'aide de la densité h , pour voir que $|f^n(z_0)'|$ est équivalent à $d^{n/2}$. Ainsi, d'après le procédé de renormalisation de Ledrappier, les applications $\Lambda_n := z_0 + d^{-n/2} \cdot \text{Id}_{\mathbb{C}}$ "renormalisent" les itérées de f sur un disque non trivial $D(0, r(z_0))$.

On tire ensuite en arrière la relation (5) par les applications Λ_n afin d'obtenir l'identité :

$$\Lambda_n^* f^{n*} \mu = d^n \cdot \Lambda_n^* \mu \quad \text{sur } D(0, r(z_0))$$

D'après le procédé de renormalisation, le membre de gauche tend faiblement vers $\varphi^* \mu$ lorsque n tend vers l'infini (quitte à extraire). Le membre de droite, qui s'écrit :

$$d^n \cdot h(z_0 + d^{-n/2} w) \frac{i}{2} \cdot d^{-n/2} dw \wedge d^{-n/2} d\bar{w} = h(z_0 + d^{-n/2} w) \frac{i}{2} \cdot dw \wedge d\bar{w}$$

converge faiblement vers $h(z_0) \frac{i}{2} \cdot dw \wedge d\bar{w}$ sur $D(0, r(z_0))$, lorsque z_0 est un point de Lebesgue de h . Ainsi, modulo le biholomorphisme φ , la densité de μ est constante sur l'ouvert $\varphi(D(0, r(z_0)))$, égale à $h(z_0)$. Pour peu que $h(z_0)$ soit strictement positif, on obtient ainsi une densité lisse et strictement positive sur un ouvert. On en déduit, par des arguments de nature algébrique, que f est un exemple de Lattès (cf [BL1], [May]).

* * *

Nous passons maintenant à la dimension supérieure. L'analogie de la mesure μ pour les endomorphismes holomorphes de \mathbb{P}^k fut construite au début des années 1990 par Fornæss-Sibony ([FS2], [FS3]) et Hubbard-Papadopol [HP], à l'aide de la théorie du pluripotentiel. On consultera l'article de Bedford et Smillie [BS] pour le cas des difféomorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^2 , ainsi que le livre de Sibony [S] pour un panorama du sujet.

L'idée est de relier la dynamique de f sur \mathbb{P}^k avec celle d'un de ses relevés polynomiaux F sur \mathbb{C}^{k+1} , par l'intermédiaire de la projection $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^k$. L'objet fondamental est la fonction de Green $G_F := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{d^n} \log \|F^n\|$, où d désigne le degré de l'application polynomiale homogène F . Cette fonction est *ps*h continue sur $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$, et induit sur \mathbb{P}^k un courant positif fermé T de bidegré $(1, 1)$ par la relation :

$$\pi^* T = dd^c G_F \quad (6)$$

Cela revient à dire que les potentiels locaux de T sont de la forme $G_F \circ s$, où s est une section locale de π . Ce courant, que l'on appelle courant de Green, vérifie l'identité $f^* T = d \cdot T$ (on dit qu'il est f -invariant), et est cohomologue à la forme de Fubini-Study (il n'est donc pas trivial). De plus, on montre que son support coïncide

avec l'ensemble des points où les itérées de f ne forment pas localement une famille équicontinue. Plus précisément, G_F est pluriharmonique exactement "au dessus" de l'ensemble de Fatou de f .

Les travaux de Fornaess-Sibony et de Briend-Duval ont établi que l'analogue de la mesure μ en dimension supérieure est donné par la mesure de probabilité invariante $T^k = T \wedge \cdots \wedge T$ (le produit est pris au sens de Bedford-Taylor). Cette mesure, que l'on note encore μ , vérifie l'identité $f^*\mu = d^k \cdot \mu$, et son support est appelé ensemble de Julia de f .

Fornaess et Sibony ont montré, par des arguments issus de la théorie du pluripotential, que μ est mélangeante, et qu'elle reflète la distribution des préimages d'un point de \mathbb{P}^k (cf (1)) pris en dehors d'un ensemble exceptionnel \mathcal{E} pluripolaire (cf [FS2], [FS3]). Briend et Duval ont prouvé, en adaptant les techniques de Lyubich [Ly1] aux dimensions supérieures, que \mathcal{E} est un ensemble algébrique, et que μ est l'unique mesure d'entropie maximale du système (\mathbb{P}^k, f) [BD2]. Ils avaient aussi montré, par l'approche pluripotentialiste, que les exposants de Lyapounoff de μ sont minorés par $\log d/2$ [BD1].

Venons-en aux propriétés de régularité de μ . La partie la plus algébrique de la preuve du théorème de Ledrappier-Zdunik a été généralisée aux dimensions supérieures par Berteloot et Loeb [BL2]. Cette fois, l'hypothèse porte non pas sur la mesure, mais sur le courant de Green, dont on exige qu'il soit suffisamment régulier (voir aussi les articles de Dinh [Di] et de Dinh-Sibony [DS]) :

Théorème (Berteloot-Loeb [BL2]) : *Soit f un endomorphisme de \mathbb{P}^k de degré $d \geq 2$. Si le courant de Green T de f est une $(1, 1)$ forme différentielle lisse et définie positive sur un ouvert, alors f fait commuter un diagramme du type :*

$$\begin{array}{ccc} A^k & \xrightarrow{D} & A^k \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathbb{P}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^k \end{array}$$

où A^k est un tore complexe de dimension k , $D = \vec{D} + \tau$ une dilatation affine et σ un revêtement galoisien fini.

On appellera donc "exemple de Lattès" tout endomorphisme holomorphe de \mathbb{P}^k vérifiant cette propriété de commutation. On vérifie que la mesure d'entropie maximale μ d'un tel endomorphisme est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et que ses exposants de Lyapounoff sont tous égaux à $\log d/2$.

Nous présentons ici une construction d'exemples de Lattès en dimension 2, due à Ueda [U2] (elle se généralise en toute dimension). Etant donné un exemple de Lattès f en dimension 1, il existe une application holomorphe $g : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ faisant

commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{(f,f)} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

où Φ désigne le revêtement ramifié de degré 2 :

$$\Phi : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \rightarrow & \mathbb{P}^2 \\ ([x : y], [x' : y']) & \mapsto & [xx' : yy' : xy' + yx'] \end{array}$$

L'endomorphisme g est alors un exemple de Lattès. La classification des couples (A^2, G) , constitués d'un tore complexe de dimension 2 et d'un groupe d'automorphismes tels que A^2/G soit isomorphe à \mathbb{P}^2 , a été établie par Kaneko, Tokunaga et Yoshida [KTY]. Nous la décrivons en appendice : elle ne fait apparaître que des situations "produits", comme c'est le cas dans la construction de Ueda.

Notons aussi que les exemples de Lattès apparaissent dans le problème des endomorphismes holomorphes permutables, étudié par Dinh et Sibony [DS].

Enoncé des résultats et esquisse des démonstrations

Nous obtenons la caractérisation suivante des exemples de Lattès, qui généralise aux dimensions plus grandes que un l'équivalence 3 \iff 4 du théorème de Ledrappier-Zdunik :

Théorème 1 : *Soit f un endomorphisme holomorphe de \mathbb{P}^k de degré d et μ sa mesure d'entropie maximale. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) : *La mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*
- (2) : *La mesure μ n'est pas singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.*
- (3) : *L'endomorphisme f est un exemple de Lattès.*

Ce théorème entraîne une caractérisation des exemples de Lattès en terme d'exposants de Lyapounoff :

Corollaire : *Les propriétés du théorème 1 sont équivalentes à :*

- (4) : *Les exposants de Lyapounoff de μ sont égaux à $\log d/2$.*

Ce corollaire s'obtient en montrant l'implication (4) \Rightarrow (1). Il s'agit d'adapter la démonstration de Ledrappier ([Le1], [Le2]) en dimension supérieure (voir aussi [QZ]). L'idée consiste à travailler dans l'extension naturelle $(\widehat{\mathbb{P}}^k, \hat{f}, \hat{\mu})$ (cf la partie 1.1.3) et à identifier les mesures de probabilité conditionnelle de $\hat{\mu}$ relativement à une partition mesurable réalisant l'entropie (cf [Le1], Prop.3.2). On utilise à cet effet l'égalité dans la formule de Margulis-Ruelle (issue de (4)) et l'inégalité de Jensen (cf [Le1], Prop.3.6). On exhibe ainsi une densité explicite pour la mesure μ .

Les arguments développés par Ledrappier sont exactement les mêmes en dimension plus grande que un, excepté pour le lemme 2 de [Le2], qui nécessite l'utilisation de l'inégalité de Lojasiewicz (cf [Lo] Chap.4, §7). Notons que cette technique de démonstration reste encore valable pour des mesures invariantes (autres que μ) réalisant l'égalité dans la formule de Margulis-Ruelle. Elle est maintenant classique. On la retrouve par exemple dans le cadre des difféomorphismes ([LY], [Le3]), ainsi que dans la preuve de l'unicité de la mesure d'entropie maximale pour un difféomorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 , dû à Bedford, Lyubich et Smillie ([BLS], Th.3.1), et pour un automorphisme d'une surface K3 projective, dû à Cantat ([Ca], Th.7.2.1).

Revenons au théorème 1. L'équivalence (1) \iff (2) résulte de l'invariance des mesures de la décomposition de Lebesgue $\mu = \mu_{abs} + \mu_{sing}$, et de l'extrémalité de μ en tant que mesure ergodique.

L'implication (1) \implies (3) fait l'objet du chapitre 1. Nous l'obtiendrons en montrant l'implication (\star) suivante, qui permet de se ramener au théorème de Berteloot-Loeb :

$\mu = T^k \ll m$ sur un ouvert Ω , $\mu(\Omega) > 0 \implies T$ est lisse et défini positif sur Ω (\star) (m désigne la mesure de Lebesgue sur Ω). Nous nous sommes pour cela inspirés de l'approche de Mayer [May] décrite précédemment, reposant sur un procédé de renormalisation. Signalons d'emblée que les idées développées dans ce cadre ne suffisent plus en dimension supérieure. En effet, une fois mis au point un procédé de renormalisation, il faut ensuite pouvoir renormaliser le courant T , qui n'est pas nécessairement une (1,1) forme différentielle à coefficients L^1 .

Le procédé de renormalisation est le suivant. L'application $\tau_x : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ figurant dans l'énoncé est une carte holomorphe de \mathbb{P}^k vérifiant $\tau_x(0) = x$ (cf la partie 1.1.4 pour sa définition).

Proposition 1 : *Soit f un endomorphisme de \mathbb{P}^k et μ sa mesure d'entropie maximale. Soient $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$ les exposants de μ , et Ω un ouvert de \mathbb{P}^k vérifiant $\mu(\Omega) > 0$. Si $\lambda_k < 2\lambda_1$, alors, il existe $\mathcal{L}(\Omega) \subset \Omega$ de μ -mesure non nulle vérifiant : pour tout $x \in \mathcal{L}(\Omega)$, il existe $(n_j(x))_{j \in \mathbb{N}}$ et $\nu(x) > 0$ tels que les applications :*

$$\varphi_{n_j} : \begin{array}{ccc} B(0, \nu(x)) & \longrightarrow & \mathbb{P}^k \\ u & \longmapsto & f^{n_j} \circ \tau_x \circ (d_0 f_x^{n_j})^{-1}(u) \end{array}$$

soient injectives et convergent localement uniformément sur $B(0, \nu(x))$ vers une application holomorphe injective φ . De plus, $\varphi_{n_j}(0) \in \Omega$ pour tout entier j .

La démonstration est basée sur une comparaison entre les branches inverses de f^n et leurs différentielles. La situation n'étant plus conforme comme en dimension 1, nous ne pouvons plus utiliser le théorème de Koebe. L'hypothèse $\lambda_k < 2\lambda_1$ nous permet ici de travailler dans un cadre relativement proche du cas conforme. Notons que l'invariance de μ intervient pour produire un énoncé "en temps positif".

Pourvu que les coefficients de T soient des fonctions L^1 , l'identité $f^*T = d.T$ permet de voir, à l'instar de ce qui se passait en dimension 1, que l'inverse des différentielles $d_x f^n$ peuvent être remplacées par des homothéties de rapport $d^{-n/2}$ dans la proposition 1. Il est alors possible de renormaliser le courant T : on montre, comme en dimension 1, qu'il est lisse et défini positif sur un ouvert de \mathbb{P}^k . L'endomorphisme f est alors un exemple de Lattès, d'après le théorème de Berteloot-Loeb [BL2].

Lorsque l'hypothèse de régularité porte sur μ , il n'est plus évident de remplacer les différentielles par des homothéties dans la proposition 1. Nous y parvenons en montrant que le volume et le diamètre des ellipsoïdes $(d_x f^n)^{-1}(B)$ (où B désigne la boule unité), sont respectivement équivalents à d^{-kn} et $d^{-n/2}$ (nous reviendrons plus loin sur ces assertions). Nous obtenons alors le principe de renormalisation par des homothéties suivant :

Proposition 2 : *Soit f un endomorphisme de \mathbb{P}^k de degré d et μ sa mesure d'entropie maximale. Soient Ω un ouvert de \mathbb{P}^k sur lequel μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, avec $\mu(\Omega) > 0$. Alors, il existe $\mathcal{L}(\Omega) \subset \Omega$ de μ -mesure non nulle vérifiant : pour tout $x \in \mathcal{L}(\Omega)$, il existe $(n_j(x))_{j \in \mathbb{N}}$ et $\nu(x) > 0$ tels que les applications :*

$$\Psi_{n_j} : \begin{array}{ccc} B(0, \nu(x)) & \longrightarrow & \mathbb{P}^k \\ u & \longmapsto & f^{n_j} \circ \tau_x \circ \Lambda_{n_j}(u) \end{array}$$

où $\Lambda_n := d^{-n/2} \cdot Id_{\mathbb{C}^k}$, soient injectives et convergent localement uniformément sur $B(0, \nu(x))$ vers une application holomorphe injective Ψ . De plus, $\Psi_{n_j}(0) \in \Omega$.

Ce procédé nous permet d'établir l'implication (\star) . Pour cela, il semble naturel de vouloir reconstituer μ à l'aide des courants T_{abs} et T_{sing} (de la décomposition de Lebesgue de T) sous la forme :

$$\mu = (T_{abs} + T_{sing})^k = \sum_{j=0}^k C_k^j T_{sing}^j \wedge T_{abs}^{k-j} \quad (7)$$

Cependant, un tel développement n'existe pas toujours, car T_{abs} et T_{sing} ne sont pas nécessairement fermés, à potentiel localement borné. Le contexte dynamique apporte la solution. En effet, une fois "renormalisé", le courant f -invariant T_{abs} devient une $(1, 1)$ forme positive H à coefficients constants. Ainsi, les courants T_{abs} et $T_{sing} = T - T_{abs}$ sont fermés et possèdent des potentiels continus sur Ω . On dispose donc de l'égalité (7).

Pour terminer la démonstration de (\star) , il reste essentiellement à montrer que la forme H est non dégénérée. A cet effet, on prouve, à l'aide du procédé de renormalisation par des homothéties, que lorsque le support d'un courant f -invariant contient beaucoup de points où l'on peut renormaliser (i.e. lorsque μ charge son support), ce courant possède une partie absolument continue non triviale. Si la forme H était dégénérée, la formule (7) entraînerait que μ charge le support du courant singulier T_{sing} . Le résultat précédent fournit alors une contradiction. La forme H est donc

définie positive. Il s'ensuit que T_{sing} est nul et que f est un exemple de Lattès.

Revenons au contrôle du volume et du diamètre des ellipsoïdes $(d_x f^n)^{-1}(B)$ lorsque μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Le contrôle du volume (c'est à dire du jacobien de $(d_x f^n)^{-1}$) provient de la relation $f^{n*}\mu = d^{kn}\mu$, traduite sur la densité de μ . Le contrôle du diamètre s'obtient en estimant la mesure de l'ensemble des points où celui-ci est trop grand :

$$\mathcal{K}_n^c(\tau) = \Omega \cap f^{-n}\Omega \cap \left\{ \| (d_x f^n)^{-1} \| \geq \tau \cdot d^{-n/2} \right\}$$

On utilise pour cela une technique et un lemme de pluripotentiel dûs à Briend et Duval [BD1]. L'idée est la suivante. Quitte à supprimer un ensemble de mesure arbitrairement petite, le rayon ν d'une boule sur laquelle l'application $f^{n_j} \circ \tau_x \circ (d_0 f_x^{n_j})^{-1}$ existe est minoré par $\nu_0 > 0$. Ainsi, par chaque point de $\mathcal{K}_n^c(\tau)$ passe un disque affine de taille $\tau \cdot d^{-n/2}$, contenu dans Ω , et dont l'image par f^n est encore dans Ω . Un potentiel u de T sur Ω étant fixé, l'identité $f^{n*}T = d^n \cdot T$ montre que la restriction de u à ces disques diffère d'une fonction harmonique d'au plus d^{-n} . Le lemme de pluripotentiel de Briend et Duval montre alors que la mesure de $\mathcal{K}_n^c(\tau)$ est majorée par $1/\tau^2$. Il suffit donc de choisir τ suffisamment grand pour contrôler le diamètre de $(d_x f^n)^{-1}(B)$ sur un ensemble de mesure arbitrairement proche de 1.

* * *

Dans le chapitre 2, nous décrivons de manière précise le bord du bassin d'attraction de l'origine des relevés polynomiaux à \mathbb{C}^{k+1} d'exemples de Lattès. Nous montrons que ces domaines sont sphériques en dehors d'un ensemble algébrique de codimension 1, et nous décrivons les singularités qui apparaissent :

Théorème 2 : *Soit f un exemple de Lattès de \mathbb{P}^k induit par un revêtement galoisien $\sigma : A^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ de groupe G . Soit T le courant de Green de f et Ω_F le bassin d'attraction d'un de ses relevés polynomiaux F .*

*Il existe alors un fibré en droites $L(H, \alpha)$ sur A^k de forme hermitienne H définie négative, une hypersurface sphérique compacte Σ dans $L(H, \alpha)$, et un revêtement galoisien $\tilde{\sigma} : L(H, \alpha)^- \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ induisant σ sur les bases tels que $\tilde{\sigma}(\Sigma) = \partial\Omega_F$ et $\sigma^*T = -\frac{\pi}{2}dd^c H$.*

Le bord de Ω_F est sphérique au voisinage de $z_0 = \tilde{\sigma}\{x_0, u_0\}$ si le stabilisateur K de $\tilde{x}_0 \in A^k$ sous l'action de G est trivial. Sinon, il a pour équation :

$$\left\{ (y, w) \in V_0 \times (\mathbb{C}, 0), \Re(w) - H(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(y)) = 0 \right\}$$

où V_0 est un voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^k et $\Phi : \mathbb{C}^k / \vec{K} \rightarrow \mathbb{C}^k$ est un biholomorphisme dont les coordonnées forment une base de l'algèbre des polynômes invariants sous l'action du groupe \vec{K} des parties linéaires de K .

Cette description généralise celle de Berteloot et Loeb [BL1] donnée en dimension 1 (cf aussi [U1]). Elle montre aussi que les applications $F : \Omega_F \rightarrow \Omega_F$ sont des exemples inattendus d'auto-applications holomorphes propres non injectives. En effet, ni les domaines bornés strictement pseudoconvexes [DF], [Pi] (voire, comme on le conjecture, tous les domaines bornés pseudoconvexes lisses de \mathbb{C}^{k+1}), ni les domaines de Reinhardt dont une portion du bord est strictement pseudoconvexe [B], n'admettent de telles applications.

Donnons un aperçu de la démonstration. La désingularisation sphérique s'obtient en relevant le diagramme $f \circ \sigma = \sigma \circ D$ aux fibrés en droites $\mathcal{O}(-1)^- \simeq \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ et $\sigma^* \mathcal{O}(-1)^- \simeq L(H, \alpha)^-$. Cette approche, qui nous a été suggérée par J.J. Loeb, peut reposer sur le théorème d'Appell-Humbert en vertu duquel $\sigma^* \mathcal{O}(-1)^-$ est isomorphe à $L(H, \alpha)$. Cependant, il est plus simple, techniquement et conceptuellement, d'expliquer un morphisme $\tilde{\sigma}$ de $L(H, \alpha)$ sur $\mathcal{O}(-1)$ induisant σ sur les bases. Pour cela, on utilise le fait élémentaire suivant : les coordonnées de σ sont des fonctions thêta normalisées de même type (H, α) . On montre alors qu'il existe un morphisme homogène \mathcal{D} de même degré que F , tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 L(H, \alpha)^- & \xrightarrow{\mathcal{D}} & L(H, \alpha)^- & & \\
 \downarrow \tilde{\sigma} & \searrow & \downarrow \tilde{\sigma} & & \downarrow \sigma \\
 & & A^k & \xrightarrow{D} & A^k \\
 & & \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\
 \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \\
 \searrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\
 & & \mathbb{P}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^k
 \end{array}$$

Ce morphisme homogène vérifie aussi la relation :

$$q \circ \mathcal{D} = q^d \quad (8)$$

où q désigne la métrique sur $L(H, \alpha)$ définie par $q\{x, u\} = e^{-\frac{\pi}{2}H(x,x)}|u|$ (à une constante multiplicative près). Les identités $q \circ \mathcal{D} = q^d$ et $e^{G_F} \circ F = (e^{G_F})^d$, associées à la relation de commutation $\tilde{\sigma} \circ \mathcal{D} = F \circ \tilde{\sigma}$, fournissent l'égalité :

$$e^{G_F \circ \tilde{\sigma}} = q \quad (9)$$

Elle relie la métrique (singulière) e^{G_F} sur $\mathcal{O}(-1)$ à la métrique q sur $L(H, \alpha)$. L'ensemble $\Sigma = \tilde{\sigma}^{-1}(\partial\Omega_F)$ s'identifie ainsi à la surface de niveau $\{q = 1\}$. La sphéricité de Σ est due au caractère défini négatif de la forme hermitienne H , provenant du fait que σ est un revêtement ramifié fini. Les égalités (8) et (9) montrent aussi que Ω_F se désingularise en $\{q < 1\}$, qui est le bassin d'attraction de la section nulle de $L(H, \alpha)$ pour l'application \mathcal{D} .

Nous décrivons ensuite les singularités du bord du bassin d'attraction Ω_F . En remarquant que $\tilde{\sigma}$ est, comme σ , un revêtement galoisien fini, cette description se ramène à paramétrer une singularité quotient $(\mathbb{C}^k, 0)/K$, où K est un groupe linéaire fini. Lorsque $k = 1$, K est cyclique et cette paramétrisation est immédiate [BL1]. En dimension plus grande que 1, il faut faire appel aux résultats de base de la théorie des invariants.

Nous consacrons finalement un appendice à la classification des couples (A^2, G) tels que le quotient A^2/G est isomorphe à \mathbb{P}^2 . Cette classification est due à Kaneko, Tokunaga et Yoshida [KTY]. Elle nous permet d'exhiber des exemples de Lattès :

Proposition 3 : *Les endomorphismes suivants sont des exemples de Lattès :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ f_1 : [x : y : z] & \longmapsto & [(-x + y + z)^2 : (x - y + z)^2 : (x + y - z)^2] \\ f_2 : [x : y : z] & \longmapsto & [(x - y + z)^2 : (-x + y + z)^2 : (x + y - z)^2] \\ f_3 : [x : y : z] & \longmapsto & [(x + y - z)^2 : (-x + y + z)^2 : (x - y + z)^2] \end{array}$$

Ils sont semi-conjugués aux dilatations :

$$D_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad D_3 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

par le revêtement galoisien $A_i \times A_i \rightarrow \mathbb{P}^2$ de groupe $\langle G(4, 2, 2), \frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Les endomorphismes étudiés par Ueda (cf [U1], [U2]) sont donc des exemples de Lattès. Nous vérifions aussi, à l'aide de la classification de [KTY], que l'application critiquement finie suivante, étudiée par Fornæss et Sibony [FS1], n'est pas un exemple de Lattès :

Proposition 4 : *L'endomorphisme critiquement fini :*

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ [x : y : z] & \longmapsto & [(x - 2y)^2 : (x - 2z)^2 : x^2] \end{array}$$

n'est pas un exemple de Lattès.

Table des matières

Introduction	i
Un bref survol du contexte	i
Enoncé des résultats et esquisse des démonstrations	viii
1 Une caractérisation des exemples de Lattès	1
1.1 Généralités	1
1.1.1 Décomposition de Lebesgue de courants positifs	1
1.1.2 Courant de Green et mesure d'équilibre	6
1.1.3 Exposants de Lyapounoff et extension naturelle	8
1.1.4 Cas des systèmes (\mathbb{P}^k, f, μ)	15
1.1.5 Quelques lemmes élémentaires	18
1.1.6 Branches inverses	19
1.2 Renormalisations	22
1.2.1 Une comparaison entre les branches inverses et leurs différen-	
tielles	22
1.2.2 Principe de renormalisation par les différentielles	25
1.2.3 Les hypothèses \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2	27
1.2.4 Principe de renormalisation par des homothéties	29
1.3 Renormalisation de courants invariants et conclusion	31
1.3.1 Renormalisation de courants invariants	31
1.3.2 Conclusion	34
1.4 Absolue continuité de μ et hypothèses \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2	35
1.4.1 L'hypothèse \mathcal{H}_1	35
1.4.2 L'hypothèse \mathcal{H}_2	37
2 Description du bassin d'attraction	41
2.1 Fibrés en droites sur les espaces projectifs et les tores complexes . . .	41
2.1.1 Généralités	41
2.1.2 Fibrés en droites sur \mathbb{P}^k	43
2.1.3 Fibrés en droites sur A^k	44
2.2 Désingularisation du bord du bassin d'attraction	48
2.3 Description du bord du bassin d'attraction	52
2.4 Un exemple de singularité	55

A	Exemples de Lattès en dimension 2	57
A.1	Etude de l'espace analytique A^k/G	57
A.2	Les couples (A^2, G) tels que $A^2/G = \mathbb{P}^2$	60
A.2.1	Rappel en dimension 1	60
A.2.2	La classification en dimension 2	60
A.2.3	Les couples $U, U_{\rho^2}, U_i, U_\rho$	61
A.2.4	Le couple $C = (A_\omega \times A_\omega, \mathcal{S}_3)$	62
A.2.5	Le couple $Q = (A_i \times A_i, \langle G(4, 2, 2), \frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle)$	63
A.3	Exemples de Lattès et endomorphismes critiquement finis	65
A.3.1	Quelques exemples de Lattès	65
A.3.2	L'exemple de Fornæss-Sibony	68

Chapitre 1

Une caractérisation des exemples de Lattès

Dans ce chapitre, nous montrons l'implication (1) \implies (3) du théorème 1 :

Si la mesure d'entropie maximale μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur un ouvert Ω , de mesure $\mu(\Omega) > 0$,
alors f est un exemple de Lattès.

L'équivalence (1) \iff (2) est établie dans la section 1.1.2.

1.1 Généralités

Cette section est destinée à introduire les outils et notations dont nous aurons besoin. Aucun résultat de cette partie n'est original.

1.1.1 Décomposition de Lebesgue de courants positifs

L'objet de cette section est d'introduire une décomposition de Lebesgue pour les courants positifs. Commençons par quelques rappels. Soit ν une mesure complexe sur un ouvert U de \mathbb{C}^k et m la mesure de Lebesgue sur cet ouvert.

Définition 1.1.1 *On dit que ν est absolument continue (par rapport à m) si pour tout B borélien de U , on a $m(B) = 0 \implies \nu(B) = 0$. On note alors $\nu \ll m$.*

On dit que ν est singulière (par rapport à m) si il existe un borélien A tel que $\nu(A) = 0$ et $m(E) = 0$ pour tout borélien E de $U \setminus A$. On note alors $\nu \perp m$.

La définition suivante est alors naturelle :

Définition 1.1.2 *Soit S un courant positif sur U . On dit que S est absolument continu (resp. singulier) si tous ses coefficients-mesures sont absolument continus (resp. singuliers). On note alors $S \ll m$ (resp. $S \perp m$).*

On dispose des théorèmes classiques suivants pour les mesures :

Théorème 1.1.3 (de décomposition de Lebesgue) *Il existe un unique couple de mesures complexes ν_{abs} et ν_{sing} tel que :*

$$\nu = \nu_{abs} + \nu_{sing} \text{ avec } \nu_{abs} \ll m \text{ et } \nu_{sing} \perp m$$

Si ν est positive, ν_{abs} et ν_{sing} sont positives.

Théorème 1.1.4 (de Radon-Nikodym) *Si $\nu \ll m$, il existe un unique élément $h \in L^1(U, m)$ tel que pour tout borélien E de U :*

$$\nu(E) = \int_E h \, dm$$

La décomposition de Lebesgue pour les courants positifs se généralise alors de la manière suivante :

Proposition 1.1.5 *Soit S un courant positif de bidegré $(1, 1)$ sur U . Il existe un unique couple de courants S_{abs} et S_{sing} sur U tel que :*

$$S = S_{abs} + S_{sing} \text{ avec } S_{abs} \ll m \text{ et } S_{sing} \perp m$$

De plus, les courants S_{abs} et S_{sing} sont positifs. En particulier,

1. *si S est de masse finie sur U , S_{abs} et S_{sing} sont aussi de masse finie sur U .*
2. *si S ne charge pas un ensemble $E \subset U$, il en est de même pour S_{abs} et S_{sing} .*

DÉMONSTRATION : Soit $S = \sum_{p,q=1}^k S_{p,q} \cdot \frac{i}{2} dz_p \wedge d\bar{z}_q$. Pour l'existence et l'unicité, on applique le théorème de décomposition de Lebesgue à chaque mesure $S_{p,q}$. On a :

$$S_{abs} = \sum_{p,q=1}^k (S_{p,q})_{abs} \cdot \frac{i}{2} dz_p \wedge d\bar{z}_q \text{ et } S_{sing} = \sum_{p,q=1}^k (S_{p,q})_{sing} \cdot \frac{i}{2} dz_p \wedge d\bar{z}_q$$

Pour la positivité, on utilise la caractérisation suivante ([H], lemme 4.4.3) :

Lemme 1.1.6 *Un courant T de bidegré $(1, 1)$ est positif sur U si et seulement si pour toute famille $(\eta_j)_{2 \leq j \leq k}$ de formes différentielles à coefficients constants, la mesure*

$$T_\eta := T \wedge \frac{i}{2} \eta_2 \wedge \bar{\eta}_2 \wedge \cdots \wedge \frac{i}{2} \eta_k \wedge \bar{\eta}_k$$

est positive.

Soit $(\eta_j)_{2 \leq j \leq k}$ une telle famille. Puisque S est positif, $S_\eta := S \wedge \frac{i}{2} \eta_2 \wedge \bar{\eta}_2 \wedge \cdots \wedge \frac{i}{2} \eta_k \wedge \bar{\eta}_k$ est une mesure positive. Donc les mesures $(S_\eta)_{abs}$ et $(S_\eta)_{sing}$ de sa décomposition de Lebesgue sont positives. On a par ailleurs $S_\eta = (S_{abs})_\eta + (S_{sing})_\eta$. Comme les coefficients de η sont constants, les mesures $(S_{abs})_\eta$ et $(S_{sing})_\eta$ sont respectivement absolument continues et singulières. L'unicité de la décomposition de Lebesgue donne $(S_{abs})_\eta = (S_\eta)_{abs}$ et $(S_{sing})_\eta = (S_\eta)_{sing}$, ce qui établit la positivité de S_{abs} et S_{sing} .

Passons aux deux propriétés. Comme on l'a fait pour S_η , on montre que la mesure trace $\sigma_S := S \wedge (dd^c \|z\|)^{k-1}$ vérifie $(\sigma_S)_{abs} = \sigma_{S_{abs}}$ et $(\sigma_S)_{sing} = \sigma_{S_{sing}}$. Si la masse de S est bornée, σ_S est une mesure finie et les mesures positives $\sigma_{S_{abs}}$, $\sigma_{S_{sing}}$ sont finies. La masse de S_{abs} est donc finie, puisque la mesure trace d'un courant positif domine les mesures-coefficients de S_{abs} ([H], lemme 4.2.2). On procède de même pour S_{sing} . Le deuxième point se montre de manière identique. \square

Proposition 1.1.7 *Soient U, V des ouverts de \mathbb{C}^k , $\phi : U \rightarrow V$ un biholomorphisme et S un courant positif sur V de bidegré $(1, 1)$. On a :*

$$(\phi^* S)_{abs} = \phi^* S_{abs} \quad \text{et} \quad (\phi^* S)_{sing} = \phi^* S_{sing}$$

Plus précisément, si $S_{abs} = \sum_{p,q=1}^k h_{p,q}(w).dw_p \wedge d\bar{w}_q$ sur V , on a :

$$\phi^* S_{abs} = \sum_{p,q=1}^k h_{p,q}(\phi(z)).d\phi_p(z) \wedge d\bar{\phi}_q(z) \quad \text{sur } U$$

DÉMONSTRATION : Il suffit de montrer les équivalences suivantes :

$$S \ll m \iff \phi^* S \ll m \quad \text{et} \quad S \perp m \iff \phi^* S \perp m \quad (1.1)$$

En effet, elles entraînent que $\phi^* S_{abs} + \phi^* S_{sing}$ est une décomposition de Lebesgue de $\phi^* S$. Comme $(\phi^* S)_{abs} + (\phi^* S)_{sing}$ en est une autre, l'unicité de cette décomposition (cf proposition 1.1.5) permet de conclure. Notons aussi qu'il suffit de montrer les conditions nécessaires des ces équivalences : les conditions suffisantes s'en déduisent en appliquant $(\phi^{-1})^*$.

Vérifions la première. Pour simplifier les notations, on traite le cas de la dimension 2. Soit $\chi(z) = \sum_{p',q'=1}^2 \chi_{p',q'}(z) dz_{p'} \wedge d\bar{z}_{q'}$ une $(1, 1)$ forme test sur U . On a :

$$\begin{aligned} \langle \phi^* S, \chi \rangle &= \langle S, (\phi^{-1})^* \chi \rangle = \langle S, \sum_{p',q'=1}^2 \chi_{p',q'}(\phi^{-1}w).d(\phi^{-1})_{p'}(w) \wedge d\overline{(\phi^{-1})_{q'}}(w) \rangle \\ &= \sum_{p',q'=1}^2 \sum_{p,q=1}^2 \int_V \left(h_{p,q}(w).dw_p \wedge d\bar{w}_q \right) \wedge \left(\chi_{p',q'}(\phi^{-1}w).d(\phi^{-1})_{p'}(w) \wedge d\overline{(\phi^{-1})_{q'}}(w) \right) \end{aligned}$$

La formule de changement de variable entraîne :

$$\langle \phi^* S, \chi \rangle = \sum_{p',q'=1}^2 \sum_{p,q=1}^2 \int_U \left(h_{p,q}(\phi(z)).d\phi_p(z) \wedge d\bar{\phi}_q(z) \right) \wedge \left(\chi_{p',q'}(z).dz_{p'} \wedge d\bar{z}_{q'} \right)$$

On obtient ainsi l'expression de $\phi^* S$, qui est bien un courant absolument continu.

On en déduit la condition nécessaire de la deuxième équivalence de (1.1). Pour cela, on écrit S sous la forme $S = (\phi^{-1})^* \phi^* S = (\phi^{-1})^* (\phi^* S)_{abs} + (\phi^{-1})^* (\phi^* S)_{sing}$. Ce

que l'on vient d'établir montre que $(\phi^{-1})^*(\phi^*S)_{abs} \ll m$. Puisque $S \perp m$ par hypothèse, ce courant est nul par unicité de la décomposition de Lebesgue. Donc $(\phi^*S)_{abs}$ est aussi nul et $\phi^*S = (\phi^*S)_{sing}$ est singulier, ce que l'on voulait. \square

La définition suivante a alors un sens :

Définition 1.1.8 *Soit S un courant positif sur une variété complexe M^k . On dit que S est absolument continu (resp. singulier) si son expression dans chaque carte est absolument continu (resp. singulier). On note alors $S \ll m$ (resp. $S \perp m$).*

On observe à présent que la décomposition de Lebesgue des courants positifs est bien définie sur une variété complexe :

Corollaire 1.1.9 *Soit S un courant positif sur une variété complexe M^k . Il existe un unique couple de courants S_{abs} et S_{sing} sur M^k tel que :*

$$S = S_{abs} + S_{sing} \text{ avec } S_{abs} \ll m \text{ et } S_{sing} \perp m$$

De plus, S_{abs} et S_{sing} sont positifs.

DÉMONSTRATION : Soit U un ouvert de M^k et $\xi : U \rightarrow \mathbb{C}^k$ une carte. Sur U , on pose $S_{abs} := \xi^*(\xi_*S)_{abs}$. Par définition d'un courant positif sur une variété, ξ_*S est positif sur $\xi(U)$. D'après la proposition 1.1.5, $(\xi_*S)_{abs}$ est aussi positif et donc S_{abs} est positif sur U . Il reste à montrer que cette définition ne dépend pas de la carte ξ . Si $\eta : U \rightarrow \mathbb{C}^k$ est une autre carte, on a :

$$\xi^*(\xi_*S)_{abs} = \xi^*\left(\xi_*(\eta^{-1})_*\eta_*S\right)_{abs} = \xi^*\left((\eta \circ \xi^{-1})^*\eta_*S\right)_{abs}$$

Puisque $\eta \circ \xi^{-1} : \xi(U) \rightarrow \eta(U)$ est un biholomorphisme, la proposition 1.1.7 donne :

$$\xi^*(\xi_*S)_{abs} = \xi^*\left(\eta \circ \xi^{-1}\right)^*(\eta_*S)_{abs} = \eta^*(\eta_*S)_{abs}$$

On procède de même pour définir S_{sing} . \square

Nous introduisons maintenant la notion de courant f -invariant pour un endomorphisme holomorphe f de \mathbb{P}^k , de degré d .

Soit ω_{FS} la forme de Fubini-Study sur \mathbb{P}^k . Nous appellons mesure de Lebesgue sur \mathbb{P}^k la forme volume $m := \omega_{FS}^k$. Pour tout courant positif S de bidegré (j, j) sur \mathbb{P}^k , la mesure trace de S désigne la mesure $\sigma_S := S \wedge \omega^{k-j}$. La masse de S est par définition égale à $\sigma_S(\mathbb{P}^k)$.

Définition 1.1.10 *Soit f un endomorphisme holomorphe de \mathbb{P}^k de degré d , \mathcal{C}_f son ensemble critique, et $X := f^{-1}(f(\mathcal{C}_f))$. On note \tilde{f} la restriction de f à $\mathbb{P}^k \setminus X$. Soit S un courant positif sur \mathbb{P}^k de bidegré (j, j) . On dit que S est f -invariant si sa masse est bornée et si l'extension triviale de \tilde{f}^*S à travers X , notée f^*S , est égale à $d^j.S$.*

Nous verrons que les courants de la décomposition de Lebesgue du courant de Green de f (qui sont positifs, non nécessairement fermés) sont f -invariants.

Précisons la définition. Le courant \tilde{f}^*S est bien défini sur $\mathbb{P}^k \setminus X$ par dualité, car \tilde{f} est localement injective sur cet ensemble. Lorsqu'elle existe, l'extension triviale de \tilde{f}^*S à travers X est définie au voisinage W d'un point $x \in X$ par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}^{k-j, k-j}(W), \langle f^*S, \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \tilde{f}^*S, \chi_\epsilon \cdot \phi \rangle$$

où $(\chi_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ est une famille de fonctions lisses à support compact dans $W \setminus X$, vérifiant $0 \leq \chi_\epsilon \leq 1$ et égale à 1 en dehors du ϵ -voisinage de X . D'après le théorème de convergence dominée, l'extension triviale de \tilde{f}^*S existe sur \mathbb{P}^k dès que sa masse est bornée au voisinage de X .

Précisons que lorsque S est de la forme $S = dd^c v$ sur $f(W)$, où v est une fonction *ps* bornée, alors f^*S coïncide avec $dd^c(v \circ f)$ sur W . Par exemple, si T désigne le courant de Green de f (cf la section suivante), on peut définir f^*T de cette manière.

La f -invariance se comporte bien vis à vis de la décomposition de Lebesgue :

Proposition 1.1.11 *Soit f un endomorphisme holomorphe de \mathbb{P}^k de degré d , et S (resp. ν) un courant positif f -invariant de bidegré $(1, 1)$ (resp. une mesure positive f -invariante) sur \mathbb{P}^k , ne chargeant pas les ensembles analytiques. Alors les courants S_{abs} et S_{sing} (resp. les mesures ν_{abs} et ν_{sing}) de sa décomposition de Lebesgue sont aussi f -invariants.*

DÉMONSTRATION : Commençons par traiter le courant S_{abs} , on procéderait de même pour la partie singulière. Vérifions que ce courant est f -invariant si il satisfait (cf les notations précédentes) :

$$\tilde{f}^*S_{abs} = d.S_{abs} \text{ sur } \mathbb{P}^k \setminus X \quad (1.2)$$

Fixons à cet effet un voisinage W d'un point $x \in X$ et ϕ une forme test sur W de bidegré $(k-1, k-1)$. On a alors, par définition de l'extension triviale :

$$\langle f^*S_{abs}, \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \tilde{f}^*S_{abs}, \chi_\epsilon \cdot \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle dS_{abs}, \chi_\epsilon \cdot \phi \rangle \quad (1.3)$$

La dernière égalité provient de (1.2) : pour tout $\epsilon > 0$, on a $\text{supp}(\chi_\epsilon \cdot \phi) \subset W \setminus X$. D'après la proposition 1.1.5-(1),(2), le courant S_{abs} est de masse bornée sur \mathbb{P}^k et ne charge pas l'ensemble analytique X . Le théorème de convergence dominée montre alors que le membre de droite de (1.3) est égal à $\langle dS_{abs}, \phi \rangle$. On a donc $f^*S_{abs} = d.S_{abs}$ sur \mathbb{P}^k .

Vérifions maintenant (1.2). Soit $U \subset \mathbb{P}^k \setminus X$ sur lequel f est injective. D'après la proposition 1.1.7, on a l'identité $f|_U^*S_{abs} = (f|_U^*S)_{abs}$. Comme S est f -invariant, on a $f|_U^*S = d.S$ sur U , ce qui entraîne $(f|_U^*S)_{abs} = d.S_{abs}$ sur U . On en déduit $f|_U^*S_{abs} = d.S_{abs}$ sur U , ce que l'on voulait.

La démonstration est identique pour une mesure ν . Il suffit juste de remarquer que l'analogie de la proposition 1.1.7 est encore valable pour une mesure positive. \square

1.1.2 Courant de Green et mesure d'équilibre

Dans cette partie, nous rappelons la définition du courant de Green, de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme f de \mathbb{P}^k , et quelques-unes de leurs propriétés. Pour plus de détails, on consultera le livre de Sibony [S], ainsi que l'article [FS2].

Soit F est un relevé polynomial de f à $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ et $G_F := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \log \|F^n\|$. L'existence de cette fonction est assurée par l'homogénéité et le caractère non dégénéré de F . Elle est *psh*, continue, et coïncide avec la fonction de Green pluricomplexe avec pôle à l'infini du bassin d'attraction de l'origine de F . Elle vérifie $G_F \circ F = d \cdot G_F$ et l'identité suivante valable pour tout $z \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$:

$$G_F(\lambda, z) = \log |\lambda| + G_F(z)$$

On en déduit que la fonction G_F induit un courant positif fermé T de bidegré $(1, 1)$ sur \mathbb{P}^k , par la relation $\pi^*T := dd^c G_F$, où $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^k$ désigne la projection canonique (cf [S], Th. A.5.1). Ce courant est de masse 1, et ne dépend pas du relevé F choisi. On l'appelle le courant de Green de f . Remarquons que le courant de Green de f et des itérés f^p coïncident.

Comme le courant T possède des potentiels locaux continus, il est possible de définir les produits T^j au sens de Bedford-Taylor, pour $j = 1, \dots, k$. La mesure $\mu := T^k$ est appelée la mesure d'équilibre de f .

Proposition 1.1.12 *Soit U un ouvert de \mathbb{P}^k , ϕ une fonction *psh* sur U , et σ_{T^j} la mesure trace de T^j sur U . Alors ϕ est intégrable pour les mesures σ_{T^j} et μ . En particulier, T^j et μ ne chargent pas les ensembles analytiques.*

DÉMONSTRATION : Nous traitons le cas $j = 1$, on procéderait de même pour les autres valeurs de j . On peut supposer que U est un ouvert relativement compact dans un ouvert de coordonnées V . On note G (resp. v) un potentiel continu de T (resp. de la forme de Fubini-Study) sur V . D'après l'inégalité de Chern-Levine-Nirenberg ([S], Prop. A.6.3), il existe une constante $C_{U,V}$ telle que :

$$\int_U |\phi| dd^c G \wedge (dd^c v)^{k-1} \leq C_{U,V} \int_V |\phi| dm. \|G\|_{\infty, V} \cdot \|v\|_{\infty, V}$$

Le membre de droite est borné, car les fonctions *psh* sont localement intégrables pour la mesure de Lebesgue. Cela montre que ϕ est σ_T -intégrable sur U . En particulier, l'ensemble $\{\phi = -\infty\}$ n'est pas chargé par σ_T . On en déduit que cette mesure ne donne pas de masse aux ensembles analytiques. \square

Proposition 1.1.13 *Les courants T^j sont f -invariants, i.e. $f^*T^j = d^j.T^j$ (cf la définition 1.1.10).*

DÉMONSTRATION : On procède par induction. Commençons par le cas $j = 1$. Avec les notations de la définition 1.1.10, le courant \tilde{f}^*T est bien défini sur $\mathbb{P}^k \setminus X$ par

dualité, car $\tilde{f} : \mathbb{P}^k \setminus X \rightarrow \mathbb{P}^k \setminus f(\mathcal{C}_f)$ est localement inversible. L'identité $G_F \circ F = d.G_F$ entraîne

$$\pi^* \tilde{f}^* T = F^* \pi^* T = F^* dd^c G_F = dd^c G_F \circ F = d.\pi^* T$$

sur $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \pi^{-1}X$. On a donc l'identité $\tilde{f}^* T = d.T$ sur $\mathbb{P}^k \setminus X$. Comme T ne charge pas l'ensemble analytique X (cf proposition 1.1.12), cette identité reste vraie pour l'extension triviale de $\tilde{f}^* T$ à travers X .

Supposons à présent que $f^* T^j = d^j.T^j$ pour $j \geq 1$. Soit U un ouvert de $\mathbb{P}^k \setminus X$ sur lequel f est injective, $\tilde{f} : U \rightarrow f(U)$ la restriction de f à U , et χ une $(j+1, j+1)$ forme test à support compact dans U . Si u est un potentiel de T sur $f(U)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}^* T^{j+1}, \chi \rangle &= \langle T^{j+1}, \tilde{f}_* \chi \rangle = \langle dd^c(u.T^j), \tilde{f}_* \chi \rangle = \\ &= \langle T^j, u.dd^c(\tilde{f}_* \chi) \rangle = \langle T^j, \tilde{f}_* (u \circ \tilde{f}.dd^c \chi) \rangle = \langle \tilde{f}^* T^j, u \circ \tilde{f}.dd^c \chi \rangle = \\ &= \langle dd^c(\tilde{f}^* T^j.u \circ \tilde{f}), \chi \rangle = \langle \tilde{f}^* T^j \wedge \tilde{f}^* T, \chi \rangle \end{aligned}$$

Cette expression est égale à $\langle d^{j+1} T^{j+1}, \chi \rangle$ par hypothèse de récurrence. On a donc $\tilde{f}^* T^{j+1} = d^{j+1}.T^{j+1}$ sur $\mathbb{P}^k \setminus X$. Puisque X n'est pas chargé par T^{j+1} , on a $f^* T^{j+1} = d^{j+1}.T^{j+1}$ sur \mathbb{P}^k . \square

Corollaire 1.1.14 *La mesure $\mu = T^k$ est une mesure de probabilité invariante.*

DÉMONSTRATION : Cette mesure est une mesure de probabilité car T est cohomologue à la forme de Fubini-Study ([S], §3.3). Son invariance provient de l'identité $f^* \mu = d^k \mu$ et du lemme 1.1.15 si dessous. \square

Lemme 1.1.15 *Soit ν une mesure sur \mathbb{P}^k f -invariante (i.e. $f^* \nu = d^k \nu$). Alors ν est invariante (i.e. $f_* \nu = \nu$).*

DÉMONSTRATION : Le fait que f soit de degré topologique d^k entraîne $f_* f^* \nu = d^k \nu$. En effet, pour toute fonction test φ , on a :

$$\begin{aligned} \langle f_* f^* \nu, \varphi(x) \rangle &= \langle \nu, f^* f_* \varphi(x) \rangle \\ &= \langle \nu, f^* \sum_{y, f(y)=x} \varphi(y) \rangle \\ &= \langle \nu, \sum_{y, f(y)=x} \varphi(f(y)) \rangle \\ &= d^k. \langle \nu, \varphi(x) \rangle \end{aligned}$$

L'hypothèse $f^* \nu = d^k \nu$ implique alors $f_* \nu = \nu$. \square

Nous utiliserons souvent le caractère mélangeant de μ :

Théorème 1.1.16 (Fornaess-Sibony, [S]) *La mesure μ est mélangeante. Cela signifie que pour tout couple (A, B) de boréliens de \mathbb{P}^k , on a :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f^{-n}A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$$

En particulier, ce théorème entraîne que la mesure μ est ergodique. On a alors :

Proposition 1.1.17 *Soit $\mu = \mu_{abs} + \mu_{sing}$ la décomposition de Lebesgue de la mesure μ . Alors $\mu = \mu_{abs}$ ou bien $\mu = \mu_{sing}$.*

DÉMONSTRATION : La proposition 1.1.11 et le lemme 1.1.15 montrent que μ_{abs} et μ_{sing} sont des mesures invariantes. On termine en utilisant le fait que la mesure ergodique μ est un point extrémal de l'ensemble convexe des mesures de probabilité invariantes par f (cf [Zi] Chap.1, Th.4). \square

Cette proposition a pour corollaire immédiat :

Corollaire 1.1.18 *Les assertions (1) et (2) du théorème 1 sont équivalentes.*

Pour terminer cette partie, mentionnons l'important résultat suivant :

Théorème 1.1.19 (Briend-Duval, [BD2]) *La mesure μ est l'unique mesure d'entropie maximale de f .*

Nous n'aurons toutefois pas besoin de cette propriété dans notre démonstration.

1.1.3 Exposants de Lyapounoff et extension naturelle

Cette section est destinée à introduire les exposants de Lyapounoff du système dynamique (\mathbb{P}^k, f, μ) . Ce sont par définition les taux de croissance exponentiels des valeurs singulières des différentielles $d_x f^n$, lorsque x est un point μ -générique. Dans une première partie, nous traitons des exposants de Lyapounoff associés à un cocycle linéaire dans un contexte général. L'outil de base est le théorème ergodique sous-additif de Kingman. Nous introduisons ensuite les exposants de (\mathbb{P}^k, f, μ) . Le contenu de cette section est empruntée aux livres de Arnold [A] (Chap.3), Katok et Hasselblatt [KH] (Chap.S.2), ainsi qu'à l'article de Ruelle [Ru2].

Le théorème de Furstenberg-Kesten

Dans cette partie, nous étudions le comportement des valeurs singulières d'un produit "aléatoire" de n matrices (au sens défini plus bas), lorsque n tend vers l'infini. Commençons par introduire quelques notations.

Pour tout $P \in GL_k(\mathbb{R})$, on désigne par $\bigwedge^j P$ l'application linéaire qu'induit P sur $\bigwedge^j \mathbb{R}^k$, et on note :

$$\delta_1(P) \leq \dots \leq \delta_k(P)$$

les valeurs singulières de P . Par définition, ce sont les valeurs propres de la matrice $\sqrt{PP^*}$ (P^* désigne l'adjoint de P). Il existe ainsi des matrices $U, V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles

que $P = U \cdot \text{Diag}(\delta_1, \dots, \delta_k) \cdot V$. Pour tout $m \geq 1$, on note $\|\cdot\|$ la norme d'opérateur associée à la norme euclidienne sur \mathbb{R}^m . Nous disposons des propriétés suivantes (on pose $\log^+ := \max(0, \log)$) :

Lemme 1.1.20 *Pour tout $P \in GL_k(\mathbb{R})$ et pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, on a :*

1. $\delta_j(P) = (\delta_{k+1-j}(P^{-1}))^{-1}$.
2. $\|P^{-1}\|^{-1} = \delta_1(P)$ et $\|P\| = \delta_k(P)$.
3. $\|\bigwedge^j P\| = \prod_{i=1}^j \delta_{k+1-i}(P)$. En particulier, $|\det P| = \prod_{i=1}^k \delta_i$.
4. $\|\bigwedge^j PQ\| \leq \|\bigwedge^j P\| \cdot \|\bigwedge^j Q\|$
5. $|\log \|\bigwedge^j P\|| \leq j \cdot (\log^+ \|P\| + \log^+ \|P^{-1}\|)$.

DÉMONSTRATION : Les quatre premiers points sont faciles (cf [A], §3.2.3). On démontre le dernier. L'inégalité $1 \leq \|\bigwedge^j P\| \cdot \|(\bigwedge^j P)^{-1}\| = \|\bigwedge^j P\| \cdot \|\bigwedge^j P^{-1}\|$ entraîne :

$$-\log^+ \|\bigwedge^j P^{-1}\| \leq -\log \|\bigwedge^j P^{-1}\| \leq \log \|\bigwedge^j P\| \leq \log^+ \|\bigwedge^j P\|$$

D'après les points (2) et (3), on a $\|\bigwedge^j P\| \leq \|P\|^j$. En observant que $\log^+(t^j) = j \cdot \log^+ t$, on obtient :

$$|\log \|\bigwedge^j P\|| \leq \log^+ \|\bigwedge^j P\| + \log^+ \|\bigwedge^j P^{-1}\| \leq j \cdot (\log^+ \|P\| + \log^+ \|P^{-1}\|)$$

□

Avant d'étudier les valeurs singulières d'un produit de matrices prises "au hasard", intéressons-nous aux valeurs singulières des itérées d'une matrice inversible P . La remarque fondamentale, que l'on retrouvera plus loin, est que pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, les suites $(\log \|\bigwedge^j P^n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ sont sous-additives (cela provient du lemme 1.1.20-(4)). Il existe ainsi des $\gamma_j \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tels que :

$$\forall j \in \{1, \dots, k\}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left\| \bigwedge^j P^n \right\| = \gamma_j$$

De plus, les γ_j sont finis. En effet, d'après le lemme 1.1.20-(5) et l'égalité $\log^+(t^j) = j \cdot \log^+ t$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |\log \|\bigwedge^j P^n\|| &\leq \frac{j}{n} \cdot (\log^+ \|P^n\| + \log^+ \|P^{-n}\|) \\ &\leq j \left(\log^+ \|P\| + \log^+ \|P^{-1}\| \right) \end{aligned}$$

On fait ensuite tendre n vers l'infini pour voir que $\gamma_j \in \mathbb{R}$. Le lemme 1.1.20-(3) montre alors que les valeurs singulières de P^n ont donc un taux de croissance exponentiel bien défini.

Passons maintenant au cas d'un produit "aléatoire" de matrices inversibles. Soit M un espace métrique, muni de la tribu des boréliens, et g un automorphisme de M (i.e. une application inversible bimesurable) laissant une mesure de probabilité ν invariante. Fixons une application mesurable :

$$A : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & GL_k(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & A(x) \end{array}$$

et considérons le cocycle linéaire \mathcal{A} au dessus de g :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^n(x) &= A(g^{n-1}(x)) \cdots A(x) && \text{pour tout } n \geq 1 \\ \mathcal{A}^0(x) &= \text{Id}_{\mathbb{R}^k} \\ \mathcal{A}^{-n}(x) &= A(g^{-n}(x))^{-1} \cdots A(g^{-1}(x))^{-1} && \text{pour tout } n \geq 1 \end{aligned}$$

Observons que l'on a pour tout $x \in M$ et pour tout $n \geq 1$:

$$\mathcal{A}^n(x)^{-1} = \mathcal{A}^{-n}(g^n(x)) \quad (1.4)$$

Nous allons montrer que si nous supposons :

$$\log^+ \|A(x)\| \in L^1(\nu) \text{ et } \log^+ \|A(x)^{-1}\| \in L^1(\nu) \quad (1.5)$$

alors les taux de croissance exponentiels des valeurs singulières de $\mathcal{A}^n(x)$ et $\mathcal{A}^{-n}(x)$ sont bien définis pour ν -presque tout x . La démonstration repose sur le théorème ergodique sous-additif de Kingman (on note $v^+ := \max(0, v)$) :

Théorème 1.1.21 (Kingman, [A] Th.3.3.2) *Soit M , g et ν comme précédemment et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des fonctions mesurables sur M , à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. On suppose que $u_1^+ \in L^1(\nu)$ et que pour ν -presque tout x , on a :*

$$u_{m+n}(x) \leq u_m(x) + u_n \circ g^m(x)$$

(la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite g -sous-additive). Alors il existe une fonction mesurable $u : M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, invariante par g , vérifiant $u^+ \in L^1(\nu)$, et telle que :

- Pour ν -presque tout x , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} u_n(x) = u(x)$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_M u_n d\nu = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \int_M u_n d\nu = \int_M u d\nu$

Si ν est ergodique, la fonction u est constante : il existe $\gamma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que $u(x) = \gamma$ pour ν -presque tout x .

Notons que ce théorème entraîne le théorème ergodique de Birkhoff classique :

Théorème 1.1.22 (Birkhoff) *Soit M , g et ν comme précédemment, et $u \in L^1(\nu)$. Alors il existe une fonction $u^* \in L^1(\nu)$, invariante par g , vérifiant $\int_M u d\nu = \int_M u^* d\nu$, et telle que pour ν -presque tout x :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u \circ g^k(x) = u^*(x)$$

Si ν est ergodique, la fonction u^* est constante, égale à $\int_M u d\nu$.

La démonstration s'obtient en appliquant le théorème 1.1.21 aux fonctions $u_n := \sum_{k=0}^{n-1} u \circ g^k$ (considérer la fonction $-u$ pour obtenir l'intégrabilité de u^*).

Afin d'étudier les valeurs singulières de \mathcal{A}^n et \mathcal{A}^{-n} au moyen du théorème de Kingman, nous aurons besoin des propriétés d'intégrabilité suivantes :

Lemme 1.1.23 *Supposons que l'hypothèse (1.5) soit satisfaite. On a alors :*

1. Pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, les fonctions $\log \left\| \bigwedge^j A(x) \right\|$ et $\log \left\| \bigwedge^j A(x)^{-1} \right\|$ sont ν -intégrables.
2. Pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{j,n}(x) := \log \left\| \bigwedge^j \mathcal{A}^n(x) \right\|$ et $v_{j,n}(x) := \log \left\| \bigwedge^j \mathcal{A}^{-n}(x) \right\|$ sont ν -intégrables. Plus précisément, on a :

$$\int_M |u_{j,n}(x)| d\nu(x) \leq j.n.\theta \quad \text{et} \quad \int_M |v_{j,n}(x)| d\nu(x) \leq j.n.\theta$$

$$\text{où } \theta := \int_M \log^+ \|A(x)\| d\nu(x) + \int_M \log^+ \|A(x)^{-1}\| d\nu(x).$$

DÉMONSTRATION : Le premier point provient du lemme 1.1.20-(5). Passons au point 2. Nous traitons la fonction $u_{j,n}$ (les arguments sont les mêmes pour $v_{j,n}$). D'après le lemme 1.1.20-(5), on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left| \log \left\| \bigwedge^j \mathcal{A}^n(x) \right\| \right| &\leq \frac{j}{n} \cdot (\log^+ \|\mathcal{A}^n(x)\| + \log^+ \|\mathcal{A}^n(x)^{-1}\|) \\ &\leq j \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log^+ \|A(g^i(x))\| + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log^+ \|A(g^i(x))^{-1}\| \right) \end{aligned}$$

Puisque la mesure ν est invariante par g , on déduit du calcul précédent :

$$\frac{1}{n} \int_M |u_{j,n}(x)| d\nu(x) \leq j \cdot \int_M \log^+ \|A(x)\| d\nu(x) + j \cdot \int_M \log^+ \|A(x)^{-1}\| d\nu(x)$$

ce qui achève la démonstration. □

Nous montrons maintenant que les valeurs singulières de \mathcal{A}^n et \mathcal{A}^{-n} ont un taux de croissance exponentiel bien défini lorsque (1.5) est vérifiée. La proposition suivante est une version du théorème de Furstenberg-Kesten (cf [A] Th.3.3.3):

Proposition 1.1.24 *Soit \mathcal{A} le cocycle linéaire au dessus de g associé à une application $A : M \rightarrow GL_k(\mathbb{R})$. Supposons que ν soit ergodique et que l'hypothèse (1.5) soit satisfaite. Alors, il existe des réels $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$ tels que pour ν -presque tout x et pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$:*

1. $\lambda_j = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \delta_j(\mathcal{A}^n(x)) = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \delta_{k-j+1}(\mathcal{A}^{-n}(x))$
2. $\lambda_1 = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int \log \delta_k(\mathcal{A}^{-n}(x)) d\nu(x) = - \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \int \log \delta_k(\mathcal{A}^{-n}(x)) d\nu(x)$
3. $\sum_{i=1}^k \lambda_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log |\det \mathcal{A}^n(x)|$

DÉMONSTRATION : Notons que le premier point entraîne le troisième, en utilisant le lemme 1.1.20-(3). D'après le lemme 1.1.23-(1), les fonctions $u_{j,1}$, pour $j = 1, \dots, k$, sont ν -intégrables. On vérifie de plus, en utilisant le lemme 1.1.20-(4), que la suite $(u_{j,n})_n$ est g -sous additive. Le théorème ergodique sous-additif de Kingman entraîne alors l'existence de $\gamma_j \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que pour ν -presque tout x :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} u_{j,n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_M u_{j,n} d\nu = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \int_M u_{j,n} d\nu = \gamma_j \quad (1.6)$$

On a aussi, d'après le lemme 1.1.23-(2) :

$$|\gamma_j| \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_M |u_{j,n}| d\nu \leq j \cdot \theta$$

Les γ_j sont donc finis.

Posons $\lambda_k := \gamma_1$ et $\lambda_j := \gamma_{k-j+1} - \gamma_{k-j}$ pour tout $j \in \{1, \dots, k-1\}$. D'après (1.6) et le lemme 1.1.20-(3), ces réels vérifient ν -presque partout :

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \delta_j(\mathcal{A}^n(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_M \log \delta_j(\mathcal{A}^n(x)) d\nu(x)$$

En répétant les arguments précédents pour les fonctions $(v_{j,n})_{j \in \{1, \dots, k\}}$, on montre qu'il existe des réels $\tilde{\lambda}_j$ vérifiant :

$$\tilde{\lambda}_j = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \delta_j(\mathcal{A}^{-n}(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_M \log \delta_j(\mathcal{A}^{-n}(x)) d\nu(x) \quad (1.7)$$

L'analogie de la ligne (1.6) pour les fonctions $v_{j,n}$ fournit en particulier :

$$\tilde{\lambda}_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_M \log \delta_k(\mathcal{A}^{-n}(x)) d\nu(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \int_M \log \delta_k(\mathcal{A}^{-n}(x)) d\nu(x) \quad (1.8)$$

En utilisant successivement (1.7), l'invariance de ν , l'égalité (1.4) et le lemme 1.1.20-(1), on obtient pour tout $j \in \{1, \dots, k-1\}$:

$$\begin{aligned} -\tilde{\lambda}_{k-j+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \int \log \delta_{k-j+1}(\mathcal{A}^{-n}(x)) d\nu(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \int \log \delta_{k-j+1}(\mathcal{A}^{-n}(g^n(x))) d\nu(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \int \log \delta_{k-j+1}(\mathcal{A}^n(x)^{-1}) d\nu(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int \log \delta_j(\mathcal{A}^n(x)) d\nu(x) = \lambda_j \end{aligned}$$

Le premier point s'ensuit. Le deuxième découle de (1.8) et de $\tilde{\lambda}_k = -\lambda_1$. \square

Remarquons que la proposition 1.1.24 permet d'établir le théorème d'Oseledec, encore appelé le théorème ergodique multiplicatif :

Théorème 1.1.25 (Oseledec) *Pour tout ν -presque tout x , il existe une décomposition mesurable $\bigoplus_{j=1}^k E_j(x)$ de \mathbb{R}^k , invariante par le cocycle \mathcal{A} , et telle que :*

$$\forall v \in E_j(x), \quad \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|\mathcal{A}^n(x).v\| = \lambda_j$$

Notons que si ν est ergodique, les fonctions mesurables invariantes $x \mapsto \dim_{\mathbb{R}} E_j(x)$ sont constantes ν -presque partout. On appelle alors $\{(\lambda_j, \dim_{\mathbb{R}} E_j), j \in \{1, \dots, k\}\}$ le spectre de Lyapounoff du cocycle \mathcal{A} .

Le lecteur trouvera une démonstration du théorème d'Oseledec dans l'article de Ruelle [Ru2]. L'idée est la suivante. La première étape consiste à établir l'existence de deux filtrations de \mathbb{R}^k :

$$\begin{aligned} \{0\} &= V_0(x) \subsetneq V_1(x) \subsetneq \dots \subsetneq V_k(x) = \mathbb{R}^k \\ \{0\} &= W_{-k}(x) \subsetneq W_{-k+1}(x) \subsetneq \dots \subsetneq W_{-1}(x) = \mathbb{R}^k \end{aligned}$$

telles que

$$\begin{aligned} \forall v \in V_j(x) \setminus V_{j-1}(x) &, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|\mathcal{A}^n(x)v\| = \lambda_j \\ \forall v \in W_{-j}(x) \setminus W_{-j-1}(x) &, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \log \|\mathcal{A}^{-n}(x)v\| = \lambda_j \end{aligned}$$

Le sous-espace V_j est obtenu comme la limite de l'espace propre de $(\mathcal{A}^n \mathcal{A}^{n*})^{1/2n}$ pour la valeur propre δ_j lorsque n tend vers l'infini (de même pour W_{-j}). Cette étape est essentielle dans la démonstration (cf le théorème 3.1 de [Ru2]). On vérifie ensuite que $V_{j-1} \oplus W_{-j} = \mathbb{R}^k$ pour tout $j \geq 2$, et enfin que $E_j := V_j \cap W_{-j}$ répond au problème posé.

Nous n'utiliserons pas le théorème d'Oseledec par la suite, mais seulement l'existence des exposants de Lyapounoff du système (\mathbb{P}^k, f, μ) . Cette existence est justifiée dans les paragraphes suivants.

Applications aux systèmes dynamiques différentiables

Dans cette partie, M désigne une variété différentiable de dimension k , munie d'une structure de variété riemannienne ρ , et g un endomorphisme de M , laissant invariant une mesure de probabilité ergodique ν . Nous allons donner des conditions suffisantes sur le couple (g, ν) pour que la théorie développée dans la section précédente s'applique au cocycle linéaire donné par les différentielles des itérées de g .

Afin d'associer une matrice à chaque différentielle $d_x g$, nous allons identifier les espaces tangents $T_x M$ à l'espace vectoriel \mathbb{R}^k . A cet effet, nous considérons une famille de $(\tau_m)_{m \in M}$ de cartes locales vérifiant :

1. Il existe $r > 0$ tel que pour tout $m \in M$, τ_m soit un difféomorphisme de la boule euclidienne $B(0, r) \subset \mathbb{R}^k$ sur un voisinage de m , et vérifie $\tau_m(0) = m$.

2. La forme quadratique $(\tau_m^* \rho)(0)$ est égale à la forme standard $\rho_0 := \sum_{j=1}^k dx_j^2$.

Par exemple, on peut prendre pour τ_m une application de la forme $\exp_m \circ \alpha_m$, où \exp_m désigne l'application exponentielle associée à la métrique ρ (cf [Jos] §1.4), et $\alpha_m : \mathbb{R}^m \rightarrow T_m M$ un isomorphisme linéaire.

Observons que pour tout $x \in M$, l'application :

$$g_x := \tau_{g(x)}^{-1} \circ g \circ \tau_x$$

existe sur un voisinage de l'origine dans \mathbb{R}^k , et que d'après la condition 2, la norme $\|d_0g_x\|$ pour la métrique standard est égale à la norme de d_xg pour la métrique riemannienne. Cette condition montre aussi que la fonction $|\det d_0g_x|$ ne dépend pas de la famille de cartes $(\tau_m)_{m \in M}$ choisie pour exprimer g .

Cas où g est un difféomorphisme : Considérons l'application :

$$A : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & GL_k(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & d_0g_x \end{array}$$

Comme M est une variété compacte, les fonctions $\log^+ \|A(x)\|$ et $\log^+ \|A(x)^{-1}\|$ sont bornées, donc ν -intégrables. L'hypothèse (1.5) est donc vérifiée, et la proposition 1.1.24 s'applique au cocycle linéaire \mathcal{A} associé à A . Les réels λ_i sont alors appelés les exposants de Lyapounoff du système dynamique (M, g, ν) .

Cas où g est un endomorphisme : Contrairement au cas des difféomorphismes, nous ne pouvons plus appliquer directement les résultats de la section précédente. Nous allons voir que l'hypothèse d'intégrabilité :

$$x \mapsto \log |\det d_0g_x| \in L^1(\nu) \tag{1.9}$$

est suffisante pour définir les exposants de Lyapounoff de (M, g, ν) . Commençons par observer que (1.9) entraîne les propriétés suivantes :

Lemme 1.1.26 *Supposons que (1.9) soit satisfaite. Alors :*

1. *L'ensemble critique de g vérifie $\nu(\mathcal{C}_g) = 0$. En particulier, la différentielle d_0g_x est inversible pour ν -presque tout x .*
2. *La fonction $\log^+ \|(d_0g_x)^{-1}\|$ est ν -intégrable.*

DÉMONSTRATION : Le premier point est immédiat : si la mesure ν chargeait \mathcal{C}_g , alors la fonction $\log |\det d_0g_x|$ ne serait pas intégrable. Pour le deuxième point, on utilise l'inégalité $|\det P| \leq \|P^{-1}\|^{-1} \cdot \|P\|^{k-1}$, provenant du lemme 1.1.20-(2),(3). Elle entraîne pour tout $x \in M$:

$$\log^+ \|(d_0g_x)^{-1}\| \leq (k-1) \log^+ \|d_0g_x\| + \left| \log |\det d_0g_x| \right|$$

Cette inégalité montre que $\log^+ \|(d_0g_x)^{-1}\| \in L^1(\nu)$, car $\log^+ \|d_0g_x\|$ est bornée et (1.9) est vérifiée. \square

Nous introduisons maintenant les exposants du système dynamique (M, g, ν) . Afin de nous ramener au cadre du paragraphe précédent, nous rendons inversible ce système dynamique en travaillant avec l'ensemble des orbites de g :

$$\widehat{M} := \left\{ \hat{x} := (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}, g(x_n) = x_{n+1} \right\}$$

muni de la topologie et de la tribu produit. Cet ensemble est compact, puisqu'il est fermé dans l'espace métrique compact $M^{\mathbb{Z}}$. On désigne par π_0 la projection $\pi_0 : \hat{x} \mapsto x_0$. L'application \hat{g} induite par g sur \widehat{M} est une bijection, puisqu'elle s'identifie au décalage à droite. On définit $\hat{\nu}$ comme l'unique mesure de probabilité invariante de (\widehat{M}, \hat{g}) vérifiant $\hat{\nu}(\pi_0^{-1}(A)) = \nu(A)$ pour tout borélien A de M .

Le système dynamique $(\widehat{M}, \hat{g}, \hat{\nu})$ ainsi construit (cf [CFS], Chap.10, §4) s'appelle l'extension naturelle du système (M, g, ν) . Notons que si ν est ergodique (resp. mélangeante), alors $\hat{\nu}$ l'est aussi.

Posons :

$$\widehat{X} := \left\{ \hat{x} \in \widehat{M}, x_n \notin C_g, \forall n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Cet ensemble \hat{g} -invariant est générique pour la mesure $\hat{\nu}$. En effet, comme ν ne charge pas l'ensemble critique de g (cf le lemme 1.1.26-(1)), et que $\hat{\nu}$ est invariante par \hat{g} , alors la mesure de $C_i := \{\hat{x} \in \widehat{M}, x_i \in C_g\}$ est nulle. Le complémentaire de \widehat{X} , égal à la réunion des $(C_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, est donc de mesure nulle.

On définit alors l'application :

$$A : \begin{array}{ccc} \widehat{X} & \longrightarrow & GL_k(\mathbb{R}) \\ \hat{x} & \longmapsto & d_0 g_{x_0} \end{array}$$

La fonction $\log^+ \|A(\hat{x})^{-1}\|$ étant $\hat{\nu}$ -intégrable (cf le lemme 1.1.26-(2)), nous pouvons appliquer la proposition 1.1.24 au système $(\widehat{X}, \hat{g}, \hat{\nu})$. Les réels λ_i ainsi obtenus sont appelés les exposants de Lyapounoff du système dynamique (M, g, ν) .

1.1.4 Cas des systèmes (\mathbb{P}^k, f, μ)

Dans cette section, nous introduisons quelques notations et nous vérifions que les exposants de Lyapounoff de (\mathbb{P}^k, f, μ) sont bien définis.

Rappelons que \mathbb{P}^k est muni de la structure de variété hermitienne induite par la forme de Fubiny-Study ω_{FS} . Par la suite, nous aurons besoin d'une famille de cartes holomorphes de \mathbb{P}^k , notée $(\tau_m)_{m \in \mathbb{P}^k}$, vérifiant les propriétés suivantes pour tout $m \in \mathbb{P}^k$:

1. $\tau_m : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ est un biholomorphisme sur son image, et vérifie $\tau_m(0) = m$.
2. La forme hermitienne $(\tau_m^* \omega_{FS})(0)$ est égale à la forme $\omega_0 := \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^k dz_j \wedge d\bar{z}_j$.

Remarquons que ces cartes vérifient les conditions 1 et 2 énoncées dans la section précédente. On peut obtenir une telle famille de la manière suivante. Soit $\zeta := [1 : 0 : \dots : 0]$, et τ_ζ définie par :

$$\tau_\zeta : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k & \longrightarrow & \mathbb{P}^k \\ (z_1, \dots, z_k) & \longmapsto & [1 : z_1 : \dots : z_k] \end{array}$$

Cette application vérifie clairement la condition 1 ci-dessus. La condition 2 provient de l'expression de la forme de Fubini-Study en coordonnées affines (cf [D] Chap.III.5).

Nous construisons maintenant τ_m pour un point m quelconque de \mathbb{P}^k . Pour cela, choisissons $M_m \in \mathbb{C}^{k+1}$ de norme 1 tel que $\pi(M_m) = m$ (π désigne la projection canonique de $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ dans \mathbb{P}^k). Il existe ainsi une matrice unitaire $U_m \in \mathbb{U}_{k+1}(\mathbb{C})$ vérifiant $U_m(1, 0, \dots, 0) = M_m$. On pose alors $\tau_m := g_m \circ \tau_\zeta$, où g_m désigne l'automorphisme de \mathbb{P}^k induit par U_m . Cette application vérifie la condition 1 car $U_m(1, 0, \dots, 0) = M_m$. Elle satisfait aussi la condition 2 car la forme de Fubini-Study est invariante par l'automorphisme g_m .

Remarquons que dans cette construction, les choix de M_m et de U_m ne sont pas uniques. Cependant, au voisinage d'un point quelconque $m_0 \in \mathbb{P}^k$, on peut demander aux applications $m \mapsto M_m$ et $m \mapsto U_m$ d'être de classe \mathcal{C}^∞ . Ainsi, si $B(t, \xi)$ (resp. $P(t, \xi)$) désigne la boule euclidienne (resp. le polydisque) de \mathbb{C}^k centrée en t et de rayon ξ (resp. de polyrayon (ξ, \dots, ξ)), alors il existe $t > 0$ et $r > 0$ tels que l'application :

$$\begin{aligned} \tau_{m_0}(P(0, t)) \times B(0, r) &\longrightarrow \mathbb{C}^k \\ (m, z) &\longmapsto \tau_{m_0}^{-1} \circ \tau_m(z) \end{aligned}$$

soit de classe \mathcal{C}^∞ . De plus, quitte à diminuer t et r , les changements de cartes :

$$\phi_{m, m_0} := \tau_{m_0}^{-1} \circ \tau_m, \quad m \in \tau_{m_0}(P(0, t))$$

sont arbitrairement proches de la translation $\text{Id}_{\mathbb{C}^k} + \tau_{m_0}^{-1}(m)$ sur $B(0, r)$ (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$).

Si f désigne un endomorphisme holomorphe f de \mathbb{P}^k , on note :

$$f_x := \tau_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \tau_x$$

Comme f est uniformément continue, il existe $R_0 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{P}^k$, cette application existe sur $B(0, R_0)$. On note aussi pour tout $x \in \mathbb{P}^k$ et pour tout $\hat{x} \in \widehat{X}$ (défini à la section précédente) :

$$\begin{aligned} f_x^n &:= f_{f^{n-1}(x)} \circ \dots \circ f_x \\ f_{\hat{x}}^{-n} &:= f_{x_{-n}}^{-1} \circ \dots \circ f_{x_{-1}}^{-1} \end{aligned}$$

Ces applications existent sur un voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^k .

Vérifions à présent que l'hypothèse (1.9) est satisfaite. En effet, la fonction $x \mapsto \log |\det d_0 f_x|$ s'écrit au voisinage de tout point m_0 comme la somme d'une fonction *psh* et d'une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , issue des changements de cartes ϕ_{x, m_0} et $\phi_{f(x), f(m_0)}$. Puisque la mesure μ possède des potentiels *psh* bornés, la fonction

ϕ est μ -intégrable en vertu de l'inégalité de Chern-Levine-Nirenberg (cf la proposition 1.1.12). En particulier, d'après les lemmes 1.1.26-(2) et 1.1.23-(1), la fonction $\log \| (d_0 f_x)^{-1} \|$ est μ -intégrable.

Nous sommes donc dans le cadre d'application des résultats de la section 1.1.3 (cas des endomorphismes) : l'ensemble \widehat{X} est $\hat{\mu}$ -générique, et les exposants de Lyapounoff de (\mathbb{P}^k, f, μ) existent (les arguments sont les mêmes pour des matrices à coefficients dans \mathbb{C}).

Dans toute la suite, nous travaillons avec le système dynamique (\mathbb{P}^k, f, μ)
et son extension naturelle $(\widehat{\mathbb{P}}^k, \hat{f}, \hat{\mu})$.
Nous notons $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$ les exposants de Lyapounoff de la mesure μ .

On déduit de la proposition 1.1.24 les résultats suivants :

Corollaire 1.1.27 *Pour $\hat{\mu}$ -presque tout \hat{x} et μ -presque tout x , on a :*

1. $\lambda_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \| d_0 f_{x-n}^n \|$
2. $-\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{P}^k} \log \| (d_0 f_x^n)^{-1} \| d\mu(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{P}^k} \log \| (d_0 f_x^n)^{-1} \| d\mu(x)$
3. $\sum_{i=1}^k \lambda_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log | \det_{\mathbb{C}} d_0 f_x^n |$

DÉMONSTRATION : Nous travaillons avec $(M, g, \nu) = (\widehat{X}, \hat{f}, \hat{\mu})$ et l'application :

$$A : \begin{array}{ccc} \widehat{X} & \longrightarrow & GL_k(\mathbb{C}) \\ \hat{x} & \longmapsto & d_0 f_{x_0} \end{array}$$

En utilisant successivement l'égalité $\mathcal{A}^{-n}(\hat{x}) = (d_0 f_{x-n}^n)^{-1}$, le premier point de la proposition 1.1.24, et le lemme 1.1.20-(1),(2), on a :

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \log \delta_1 ((d_0 f_{x-n}^n)^{-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \log (\delta_k (d_0 f_{x-n}^n))^{-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \| d_0 f_{x-n}^n \| \end{aligned}$$

Le deuxième point découle de la proposition 1.1.24-(2), de $\mathcal{A}^{-n}(\hat{x}) = (d_0 f_{x-n}^n)^{-1}$ et de l'invariance de $\hat{\mu}$. Le troisième provient de la proposition 1.1.24-(3) et de l'égalité $\mathcal{A}^n(\hat{x}) = d_0 f_{x_0}^n$. \square

Remarque 1.1.28 *Le deuxième point de ce corollaire nous donne :*

$$-p\lambda_1 \leq \int_{\mathbb{P}^k} \log \| (d_0 f_x^p)^{-1} \| d\mu(x) \leq p(-\lambda_1 + \epsilon) \quad (1.10)$$

pour $\epsilon > 0$ et p suffisamment grand. Ainsi, quitte à remplacer f par une itérée, nous pouvons supposer que (1.10) est vérifiée pour $p = 1$.

L'important résultat suivant, dû à Briend et Duval, fournit une minoration des exposants de Lyapounoff. Avec le caractère mélangeant de μ (cf le théorème 1.1.16), ce résultat sera l'un des ingrédients clefs de notre démonstration.

Théorème 1.1.29 (Briend-Duval, [BD1])

Les exposants de (\mathbb{P}^k, f, μ) sont minorés par $\log d/2$.

On notera que cette minoration est optimale, le cas extrémal $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \log d/2$ étant réalisé par les exemples de Lattès.

1.1.5 Quelques lemmes élémentaires

Nous montrons ici des résultats élémentaires que l'on utilisera souvent.

Lemme 1.1.30 *Soit A un espace métrique, muni de la tribu des boréliens. Soient $\phi, (u_n)_{n \geq 0}$ des fonctions mesurables et strictement positives sur A . On suppose que :*

$$\forall x \in A, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log u_n(x) = 0$$

Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha, \beta : A \rightarrow \mathbb{R}_+^$ mesurables vérifiant $\alpha \leq \phi \leq \beta$ et :*

$$\forall n \geq 0, \quad \forall x \in A, \quad \alpha(x)e^{-n\epsilon} \leq u_n(x) \leq \beta(x)e^{n\epsilon}$$

DÉMONSTRATION : La fonction suivante :

$$n_0(x) := \min \left\{ p \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq p, \quad u_n(x) \geq \phi(x)e^{-n\epsilon} \right\}$$

(qui dépend de ϵ) est mesurable, car les ensembles :

$$\begin{aligned} \{n_0 = 0\} &= \bigcap_{p \geq 0} \{u_p \geq \phi e^{-p\epsilon}\} \\ \forall q \geq 1, \quad \{n_0 = q\} &= \{u_{q-1} < \phi e^{-(q-1)\epsilon}\} \cap \bigcap_{p \geq q} \{u_p \geq \phi e^{-p\epsilon}\} \end{aligned}$$

sont des boréliens de A . On pose pour tout $x \in A$:

$$\alpha(x) := \sum_{q \geq 0} 1_{\{n_0=q\}}(x) \cdot \min \{u_0(x), \dots, u_q(x), \phi(x)\} \quad (1.11)$$

Cette fonction est clairement strictement positive et mesurable. Elle vérifie :

$$\begin{aligned} \forall n \in \{0, \dots, n_0(x)\}, \quad u_n(x) &\geq u_n(x)e^{-n\epsilon} \geq \alpha(x)e^{-n\epsilon} \\ \forall n \geq n_0(x), \quad u_n(x) &\geq \phi(x)e^{-n\epsilon} \geq \alpha(x)e^{-n\epsilon} \end{aligned}$$

La fonction α répond au problème. On procède de même pour construire β . □

Lemme 1.1.31 *Soit M un espace métrique muni d'une mesure de probabilité μ .*

1. *Soient $F, G, H \subset U$ des boréliens de M vérifiant $\mu(H) = \mu(U)$. Alors :*

$$\mu(F \cap G \cap H) \geq \mu(F) + \mu(G) - \mu(U)$$

2. *Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des boréliens de M tels que $\mu(B_n) \geq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mu(\limsup B_n) \geq c$.*

DÉMONSTRATION : Le point 1 est facile. Passons au point 2. On a $\limsup B_n = \lim_{p \rightarrow \infty} \bigcap_{l \geq p} B_l$, où $\mathcal{B}_p := \bigcup_{l \geq p} B_l$. Comme \mathcal{B}_p contient B_p , on a $\mu(\mathcal{B}_p) \geq c$ pour tout $p \geq 0$. Puisque la suite de fonctions indicatrices $1_{\mathcal{B}_p}$ décroît vers $1_{\limsup B_n}$ et que μ est une mesure finie, le théorème de convergence monotone entraîne $\mu(\limsup B_n) \geq \lim_{p \rightarrow \infty} \mu(\mathcal{B}_p) \geq c$. \square

1.1.6 Branches inverses

Le contenu de cette partie est emprunté à l'article de Briend-Duval [BD1]. Il s'agit d'estimer le domaine de définition des branches inverses de f^n , lues dans les cartes τ_m , le long d'orbites négatives $\hat{\mu}$ -génériques.

On note φ l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^k \setminus \mathcal{C}_f & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \|(d_0 f_x)^{-1}\|^{-1} \end{array}$$

qui associe à x le module de la plus petite valeur singulière de $d_0 f_x$. Elle se prolonge en une fonction continue de \mathbb{P}^k lorsqu'on lui donne la valeur 0 sur \mathcal{C}_f . Commençons par un lemme d'inversion locale quantitative (R_0 a été défini à la section 1.1.4) :

Lemme 1.1.32 *Soient*

$$M_1 := \sup\{\varphi(x), x \in \mathbb{P}^k\}, \quad M_2 \geq \sup\{\|f_x\|_{C^2, \overline{B(0, R_0)}}, x \in \mathbb{P}^k\}$$

tel que $M_1/M_2 \leq 1$, et $\delta(\epsilon) := \frac{R_0(1 - e^{-\epsilon/3})}{2M_2}$. On pose :

$$\rho(x) := \|(d_0 f_x)^{-1}\|^{-1} \cdot 2\delta(\epsilon), \quad r(x) := \|(d_0 f_x)^{-1}\|^{-2} \cdot \delta(\epsilon)$$

Alors, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ et tout $x \notin \mathcal{C}_f$, l'application f_x est injective sur $B(0, \rho(x))$, avec $B(0, r(x)) \subset f_x(B(0, \rho(x)))$. De plus, l'inverse de f_x sur $B(0, r(x))$ vérifie :

$$\text{Lip}(f_x^{-1}) \leq \|(d_0 f_x)^{-1}\| \cdot e^{\epsilon/3}$$

DÉMONSTRATION : Soit $\tau(\epsilon) := R_0(1 - e^{-\epsilon/3}) = 2M_2.\delta(\epsilon)$ et ϵ_0 petit pour que $\tau(\epsilon_0) \leq R_0/2$. Fixons $x \notin \mathcal{C}_f$, et notons τ pour $\tau(\epsilon)$, ρ pour $\rho(x)$ et r pour $r(x)$. L'application f_x existe sur $B(0, \rho)$ puisque l'on a :

$$\rho = \frac{\tau}{M_2} \|(d_0 f_x)^{-1}\|^{-1} \leq \tau \cdot \frac{M_1}{M_2} \leq \tau \leq \frac{R_0}{2}$$

Vérifions qu'elle y est injective. On a pour tout $\|y\| \leq \rho$:

$$\begin{aligned} \|\text{Id} - (d_0 f_x)^{-1} \circ d_y f_x\| &\leq \|(d_0 f_x)^{-1}\| \|d_0 f_x - d_y f_x\| \\ &\leq \|(d_0 f_x)^{-1}\| M_2 \rho = \tau \end{aligned} \quad (1.12)$$

où la deuxième ligne provient de l'inégalité des accroissements finis. Ainsi, $\text{Lip}(\text{Id} - (d_0 f_x)^{-1} \circ f_x) \leq \tau \leq R_0/2 \leq 1/2$ et les applications $(d_0 f_x)^{-1} \circ f_x$ et f_x sont injectives sur $B(0, \rho)$. On en déduit :

$$\|(d_0 f_x)^{-1} \circ f_x(y)\| \geq \|y\| - \|y - (d_0 f_x)^{-1} \circ f_x(y)\| \geq (1 - \frac{1}{2}) \|y\| \geq \frac{1}{2} \|y\|$$

En particulier, si $\|y\| = \rho$, on a :

$$\|f_x(y)\| \geq \frac{\rho}{2} \|(d_0 f_x)^{-1}\|^{-1} = \delta(\epsilon). \|(d_0 f_x)^{-1}\|^{-2} = r$$

L'image du bord de $B(0, \rho)$ par f_x est donc disjointe de $B(0, r)$. Le théorème de Jordan ([Bre], Cor. 19.7) entraîne $B(0, r) \subset f_x(B(0, \rho))$.

Passons à la constante de Lipschitz. La ligne (1.12) donne pour tout $\|y\| \leq \rho$:

$$\|(d_0 f_x)^{-1} - (d_y f_x)^{-1}\| \leq \|(d_0 f_x)^{-1} \circ d_y f_x - \text{Id}\| \cdot \|(d_y f_x)^{-1}\| \leq \tau \|(d_y f_x)^{-1}\|$$

On en déduit :

$$\|(d_0 f_x)^{-1}\| \geq \|(d_y f_x)^{-1}\| - \|(d_0 f_x)^{-1} - (d_y f_x)^{-1}\| \geq (1 - \tau) \|(d_y f_x)^{-1}\|$$

Et donc $\|(d_y f_x)^{-1}\| \leq (1 - \tau)^{-1} \|(d_0 f_x)^{-1}\| \leq e^{\epsilon/3} \|(d_0 f_x)^{-1}\|$ puisque l'on a $\tau = R_0(1 - e^{-\epsilon/3}) \leq 1 - e^{-\epsilon/3}$. \square

On montre à présent que les branches inverses des itérées de f sont définies sur des ouverts non vides. Pour cela, on itère le résultat précédent : on y parvient grâce à la stricte positivité des exposants de μ (cf [BD1]).

Lemme 1.1.33 *Les notations sont celles du lemme 1.1.32. Soient $\epsilon < \epsilon_0$, $R \leq R_0$ et $0 < \gamma \leq 1$. Il existe $\hat{Y} \subset \hat{X}$ vérifiant $\hat{\mu}(\hat{Y}) = 1$ et des fonctions mesurables $\eta : \hat{Y} \rightarrow]0, R]$, $C : \hat{Y} \rightarrow [1, +\infty[$ telles que pour tout $\hat{x} \in \hat{Y}$:*

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \rho(x_{-n}) = 0$
2. $d_0 f_{\hat{x}}^{-n}(B(0, \gamma.\eta(\hat{x}))) \subset B(0, \gamma.r(x_{-(n+1)}).e^{-n(\lambda_1 - \epsilon)})$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_{\hat{x}}^{-n}$ est définie sur $B(0, \eta(\hat{x}))$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Lip(f_{\hat{x}}^{-n}) \leq C(\hat{x}).e^{-n\lambda_1+n\epsilon/2}$.

DÉMONSTRATION : La fonction $\hat{x} \mapsto \log \|(d_0 f_{x_0})^{-1}\|$ est $\hat{\mu}$ -intégrable (cf la section 1.1.4) et on peut supposer que son intégrale est arbitrairement proche de $-\lambda_1$, par valeur supérieure (cf la remarque 1.1.28). On lui applique le théorème ergodique de Birkhoff (cf le théorème 1.1.22) : il existe $\hat{Y} \subset \hat{X}$ vérifiant $\hat{\mu}(\hat{Y}) = 1$ et tel que pour tout $x \in \hat{Y}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log \|(d_0 f_{x_{-j}})^{-1}\| = \int_{\hat{X}} \log \|(d_0 f_{w_0})^{-1}\| d\hat{\mu}(\hat{w}) \leq -\lambda_1 + \frac{\epsilon}{12} \quad (1.13)$$

En particulier, le taux de croissance exponentiel de la suite $\|(d_0 f_{x_{-j}})^{-1}\|$ est nul, d'où le premier point, par définition de ρ . Pour montrer le deuxième, on compare le taux de croissance exponentielle de r avec celui de la norme de la différentielle $d_0 f_{\hat{x}}^{-n}$. On applique pour cela le lemme 1.1.30 à $A = \hat{Y}$ et aux fonctions mesurables :

$$u_j(\hat{x}) := r(x_{-j})e^{-\epsilon/2} = \|(d_0 f_{x_{-j}})^{-1}\|^{-2} \delta(\epsilon)e^{-\epsilon/2}, \quad \phi \equiv R$$

Il existe alors une fonction \hat{r} mesurable telle que pour tout $\hat{x} \in \hat{Y}$:

$$0 < \hat{r} \leq R \quad \text{et} \quad r(x_{-n})e^{-\epsilon/2} \geq \hat{r}(\hat{x})e^{-n\epsilon/2} \quad (1.14)$$

Etudions maintenant la norme des différentielles. La ligne (1.13) montre que le taux de croissance de $\prod_{j=1}^n \|(d_0 f_{x_{-j}})^{-1}\|$ vaut $-\lambda_1 + \epsilon'$, avec $\epsilon' \leq \epsilon/12$. On applique à nouveau le lemme 1.1.30 aux fonctions mesurables :

$$u_j(\hat{x}) := \prod_{j=1}^n \|(d_0 f_{x_{-j}})^{-1}\| \cdot e^{n(\lambda_1 - \epsilon')}, \quad \phi \equiv 1$$

On obtient ainsi une fonction C mesurable telle que pour tout $\hat{x} \in \hat{Y}$:

$$1 \leq C \quad \text{et} \quad \|d_0 f_{\hat{x}}^{-n}\| \leq \prod_{j=1}^n \|(d_0 f_{x_{-j}})^{-1}\| \leq C(\hat{x})e^{-n\lambda_1+n\epsilon/6} \quad (1.15)$$

Posons $\eta(\hat{x}) := \hat{r}(\hat{x})/C(\hat{x})$. Cette fonction est mesurable et vérifie $0 < \eta \leq R$. D'après (1.15), on a pour tout $\hat{x} \in \hat{Y}, n \geq 0$ et $t \in B(0, \gamma.\eta(\hat{x}))$:

$$\begin{aligned} \|d_0 f_{\hat{x}}^{-n}(t)\| &\leq C(\hat{x}).e^{-n\lambda_1+n\epsilon/6}.\gamma.\eta(\hat{x}) \leq \gamma.r(x_{-(n+1)}).e^{(n+1)\epsilon/2}e^{-\epsilon/2}.e^{-n\lambda_1+n\epsilon/2} \\ &\leq \gamma.r(x_{-(n+1)}).e^{-n(\lambda_1-\epsilon)} \end{aligned}$$

On a ainsi le deuxième point. Les deux derniers s'obtiennent par induction. Prenons pour hypothèse :

$$\begin{aligned} \forall n \leq N, f_{\hat{x}}^{-n} \text{ existe sur } B(0, \eta(\hat{x})) \text{ avec} \\ f_{\hat{x}}^{-n}(B(0, \eta(\hat{x}))) \subset B(0, r(x_{-(n+1)})) \text{ et } Lip(f_{\hat{x}}^{-n}) \leq C(\hat{x}).e^{-n\lambda_1+n\epsilon/2} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Puisque $\eta(\hat{x}) \leq \hat{r}(\hat{x}) \leq r(x_{-1})$ et $C(\hat{x}) \geq 1$, (1.16) est vérifiée pour $N = 0$. Supposons qu'elle soit vraie pour l'entier N . L'application $f_{\hat{x}}^{-(N+1)}$ est bien définie sur $B(0, \eta(\hat{x}))$ car $f_{x_{-(N+1)}}^{-1}$ existe sur $B(0, r(x_{-(N+1)}))$ (cf lemme 1.1.32). La constante de Lipschitz de cette application est majorée par (cf lemme 1.1.32 et (1.15)) :

$$\prod_{j=1}^{N+1} \left\| (d_0 f_{x_{-j}})^{-1} \right\| . e^{(N+1)\epsilon/3} \leq C(\hat{x}) . e^{-(N+1)\lambda_1 + (N+1)\epsilon/6} . e^{(N+1)\epsilon/3}$$

On en déduit (par $\eta = \hat{r}/C$ et (1.14)) :

$$f_{\hat{x}}^{-(N+1)}(B(0, \eta(\hat{x}))) \subset B(0, r(x_{-(N+2)})) . e^{-(N+1)(\lambda_1 - \epsilon)} \subset B(0, r(x_{-(N+2)}))$$

La ligne (1.16) est donc vérifiée pour l'entier $N + 1$. \square

1.2 Renormalisations

Cette section est destinée à établir les procédés de renormalisation. Elle est divisée en quatre parties. Dans la première, on compare les branches inverses de f^n et leurs différentielles. On en déduit dans la partie suivante un procédé de renormalisation des itérées de f par leurs différentielles. La troisième section est consacrée aux énoncés des hypothèses \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 , qui assurent un contrôle du jacobien et de la norme de ces différentielles. On montre ensuite, dans la dernière partie, que lorsque ces hypothèses sont satisfaites, on peut remplacer les différentielles par des homothéties de rapport $d^{-n/2}$ dans le procédé de renormalisation.

1.2.1 Une comparaison entre les branches inverses et leurs différentielles

La proposition suivante montre que les branches inverses de f^n sont proches de leurs différentielles lorsque les exposants vérifient l'inégalité $\lambda_k < 2\lambda_1$.

Proposition 1.2.1 *Soient \hat{Y} , η donnés par le lemme 1.1.33, et $R \leq R_0$. Si $\lambda_k < 2\lambda_1$, alors il existe $\hat{Z} \subset \hat{Y}$ vérifiant $\hat{\mu}(\hat{Z}) = 1$ et une fonction mesurable $S : \hat{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que $0 < S \leq \eta \leq R$ et :*

$$\forall \hat{x} \in \hat{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, d_0 f_{\hat{x}}^{-n}(B(0, S(\hat{x}))) \subset f_{\hat{x}}^{-n}(B(0, \eta(\hat{x}))) \quad (1.17)$$

La démonstration repose sur les deux lemmes suivants. Le réel ϵ_0 est défini au lemme 1.1.32.

Lemme 1.2.2 *Soit $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Il existe $E : \hat{Y} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ mesurable telle que $E \geq 1$ et :*

$$\forall \hat{x} \in \hat{Y}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \gamma \leq 1, \forall u \in d_0 f_{\hat{x}}^{-n}(B(0, \gamma \eta(\hat{x}))), \\ \left\| \left(d_0 f_{x_{-(n+1)}}^{-1} - f_{x_{-(n+1)}}^{-1} \right) (u) \right\| \leq E(\hat{x}) . \gamma . e^{-2n(\lambda_1 - 2\epsilon)}$$

DÉMONSTRATION : Soit $\hat{x} \in \hat{Y}$, $r := r(x_{-(n+1)})$ et $\rho := \rho(x_{-(n+1)})$. L'application $f_{x_{-(n+1)}}$ est inversible sur $B(0, r)$ d'après le lemme 1.1.32. Quitte à diminuer r , elle l'est aussi sur la boule fermée. On note g cet inverse et $\sum_{p \geq 1} Q_p$ son développement de Taylor, où Q_p désigne la partie homogène de degré p . Puisque g prend ses valeurs dans $B(0, \rho)$ (cf lemme 1.1.32), on a :

$$\forall u \in \overline{B(0, r)}, \quad \|Q_p(u)\| = \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta} \cdot u) e^{-ip\theta} d\theta \right\| \leq \rho$$

On en déduit :

$$\forall u \in \overline{B(0, r)}, \quad \|(g - d_0g)(u)\| \leq \sum_{p \geq 2} \frac{\|u\|^p}{r^p} \cdot \left\| Q_p \left(\frac{r}{\|u\|} u \right) \right\| \leq \sum_{p \geq 2} \left(\frac{\|u\|}{r} \right)^p \cdot \rho$$

D'autre part, le point 2 du lemme 1.1.33 donne :

$$\forall u \in d_0 f_{\hat{x}}^{-n}(B(0, \gamma \cdot \eta(\hat{x}))), \quad \|u\|/r \leq \delta_n := \gamma \cdot e^{-n(\lambda_1 - \epsilon)}$$

Ainsi g est bien définie sur $d_0 f_{\hat{x}}^{-n}(B(0, \gamma \cdot \eta(\hat{x})))$ et on a :

$$\forall n \geq 1, \quad \forall u \in d_0 f_{\hat{x}}^{-n}(B(0, \gamma \cdot \eta(\hat{x}))), \quad \|(g - d_0g)(u)\| \leq \rho \cdot \sum_{p \geq 2} \delta_n^p \leq \rho \cdot \delta_n^2 \cdot \frac{1}{1 - \delta_1}$$

Comme $(\rho(x_{-(n+1)}))_n$ a un taux de croissance exponentiel nul sur \hat{Y} (cf lemme 1.1.33-(1)), le lemme 1.1.30 appliqué aux fonctions $u_n(\hat{x}) := \frac{1}{1 - \delta_1} \cdot \rho(x_{-(n+1)})$ et $\phi \equiv 1$ montre qu'il existe $E : \hat{Y} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ mesurable vérifiant $1 \leq E$ et :

$$\forall \hat{x} \in \hat{Y}, \quad \forall n \geq 1, \quad \|g - d_0g\| \leq E(\hat{x}) \cdot \delta_n^2 \cdot e^{n\epsilon} \leq E(\hat{x}) \cdot \gamma \cdot e^{-2n(\lambda_1 - 2\epsilon)}$$

sur $d_0 f_{\hat{x}}^{-n}(B(0, \gamma \cdot \eta(\hat{x})))$. □

Lemme 1.2.3 *Il existe $\hat{Z} \subset \hat{Y}$ avec $\hat{\mu}(\hat{Z}) = 1$ et $F : \hat{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ mesurable telle que :*

$$\forall n \geq 0, \quad \left\| d_0 f_{x_{-(n+1)}}^{n+1} \right\| \leq F(\hat{x}) e^{n(\lambda_k + \epsilon)}$$

DÉMONSTRATION : D'après le corollaire 1.1.27, on a pour $\hat{\mu}$ -presque tout \hat{x} :

$$\lambda_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left\| d_0 f_{x_{-n}}^n \right\|$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme 1.1.30 aux fonctions mesurables :

$$u_{n+1}(\hat{x}) = \left\| d_0 f_{x_{-(n+1)}}^{n+1} \right\| e^{\lambda_k + \epsilon} e^{-(n+1)\lambda_k}$$

□

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.2.1 : Soit s la fonction mesurable sur \widehat{Z} :

$$s(\hat{x}) := \min \{ \zeta_n(\hat{x}), n \in \{0, \dots, n_0(\hat{x})\} \}$$

où n_0 et ζ_n sont définies par :

$$n_0(\hat{x}) := \min \{ p \geq 1, \forall n \geq p, (E.F/\eta)(\hat{x}) \leq e^{n\epsilon} \} \quad (1.18)$$

$$\zeta_n(\hat{x}) := \sup \left\{ t \leq \eta(\hat{x}), d_0 f_{\hat{x}}^{-n} \left(\overline{B(0, t)} \right) \subset f_{\hat{x}}^{-n} \left(B(0, \eta(\hat{x})) \right) \right\} \quad (1.19)$$

Soit $\kappa_j := 1 - e^{-j(2\lambda_1 - \lambda_k)} \cdot e^{6j\epsilon}$. Définissons $s_n(\hat{x})$ par $s(\hat{x})$ pour $n = n_0(\hat{x})$ et par $s(\hat{x}) \cdot \prod_{j=n_0(\hat{x})}^{n-1} \kappa_j$ pour $n \geq n_0(\hat{x}) + 1$. Nous allons montrer par induction :

$$\forall n \geq n_0(\hat{x}), d_0 f_{\hat{x}}^{-n} (B(0, s_n(\hat{x}))) \subset f_{\hat{x}}^{-n} (B(0, \eta(\hat{x}))) \quad (1.20)$$

Cette inclusion est vérifiée pour $n = n_0(\hat{x})$ par définition. Supposons qu'elle le soit pour l'entier $n \geq n_0(\hat{x})$. Si $\nu_n := (E/\eta)(\hat{x}) \cdot s_n \cdot e^{-2n(\lambda_1 - 2\epsilon)}$, on a pour tout $\hat{x} \in \widehat{Z}$:

$$\begin{aligned} s_n \cdot \kappa_n &= s_n \cdot (1 - e^{-n(2\lambda_1 - \lambda_k)} e^{6n\epsilon}) \leq s_n \cdot (1 - (E.F/\eta)(\hat{x}) \cdot e^{-n(2\lambda_1 - \lambda_k)} e^{5n\epsilon}) \text{ par (1.18)} \\ &\leq s_n \cdot (1 - F(\hat{x}) e^{n(\lambda_k + \epsilon)} \cdot (E/\eta)(\hat{x}) \cdot e^{-2n(\lambda_1 - 2\epsilon)}) \\ &\leq s_n - \left\| d_0 f_{x_{-(n+1)}}^{n+1} \right\| \cdot \nu_n \text{ par le lemme 1.2.3} \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$B(0, s_{n+1}) = B(0, \kappa_n \cdot s_n) \subset B\left(0, s_n - \left\| d_0 f_{x_{-(n+1)}}^{n+1} \right\| \cdot \nu_n\right) \quad (1.21)$$

Montrons comment (1.21) entraîne (1.20) pour l'entier $n + 1$. A cet effet, notons Γ le bord de $B(0, s_n)$ et remarquons que :

$$\begin{aligned} B\left(0, s_n - \left\| d_0 f_{x_{-(n+1)}}^{n+1} \right\| \cdot \nu_n\right) &= B(0, s_n) \setminus \bigcup_{q \in \Gamma} B\left(q, \left\| d_0 f_{x_{-(n+1)}}^{n+1} \right\| \cdot \nu_n\right) \\ q + d_0 f_{x_{-(n+1)}}^{n+1} B(0, \nu_n) &\subset B\left(q, \left\| d_0 f_{x_{-(n+1)}}^{n+1} \right\| \cdot \nu_n\right) \end{aligned}$$

L'inclusion (1.21) entraîne alors :

$$B(0, s_{n+1}) \subset B(0, s_n) \setminus \bigcup_{q \in \Gamma} q + d_0 f_{x_{-(n+1)}}^{n+1} B(0, \nu_n)$$

En composant par $d_0 f_{\hat{x}}^{-(n+1)}$, on obtient :

$$d_0 f_{\hat{x}}^{-(n+1)} (B(0, s_{n+1})) \subset d_0 f_{\hat{x}}^{-(n+1)} (B(0, s_n)) \setminus \bigcup_{p \in \Lambda} B(p, \nu_n) \quad (1.22)$$

où Λ désigne la frontière de $d_0 f_{\hat{x}}^{-(n+1)}(B(0, s_n))$. Par ailleurs, le lemme 1.2.2 appliqué à $\gamma = s_n/\eta \leq s/\eta \leq 1$ montre que l'erreur commise entre $f_{x_{-(n+1)}}^{-1}$ et sa différentielle sur $d_0 f_{\hat{x}}^{-n}(B(0, s_n))$ n'excède pas ν_n . Donc, d'après le théorème de Jordan :

$$d_0 f_{\hat{x}}^{-(n+1)}(B(0, s_n)) \setminus \bigcup_{p \in \Lambda} B(p, \nu_n) \subset f_{x_{-(n+1)}}^{-1} \circ d_0 f_{\hat{x}}^{-n}(B(0, s_n)) \quad (1.23)$$

Observons finalement que l'hypothèse (1.20) composée par $f_{x_{-(n+1)}}^{-1}$ s'écrit :

$$f_{x_{-(n+1)}}^{-1} \circ d_0 f_{\hat{x}}^{-n}(B(0, s_n)) \subset f_{\hat{x}}^{-(n+1)}(B(0, \eta(\hat{x}))) \quad (1.24)$$

Les inclusions (1.22), (1.23) et (1.24) entraînent (1.20) pour l'entier $n + 1$.

Si $\epsilon \ll 1$, κ_n est le terme général d'un produit convergent et on note $p := \prod_{n=1}^{+\infty} \kappa_n$. Ce réel vérifie $0 < p < 1$ car $\kappa_n < 1$. La fonction $S(\hat{x}) := p.s(\hat{x})$ est mesurable sur \widehat{Z} , strictement positive, et majorée par η . De plus, elle vérifie :

$$\forall \hat{x} \in \widehat{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, d_0 f_{\hat{x}}^{-n}(B(0, S(\hat{x}))) \subset f_{\hat{x}}^{-n}(B(0, \eta(\hat{x})))$$

En effet, si $n \in \{0, \dots, n_0(\hat{x})\}$, cela provient de la définition de s car $S(\hat{x}) \leq s(\hat{x})$. Si $n \geq n_0(\hat{x}) + 1$, on utilise l'inclusion (1.20) pour l'entier n et $S(\hat{x}) \leq s_n(\hat{x})$. Elle répond donc au problème posé. \square

1.2.2 Principe de renormalisation par les différentielles

Dans cette section, on déduit de la proposition 1.2.1 et de l'invariance de $\hat{\mu}$ un procédé de renormalisation des itérées de f par leurs différentielles.

Proposition 1.2.4 *Soient $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des boréliens de \mathbb{P}^k vérifiant $\mu(E_n) \geq c$. Supposons que $\lambda_k < 2\lambda_1$. Alors, il existe $E \subset \limsup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ vérifiant $\mu(E) \geq c$ et tel que pour tout $x \in E$, il existe une suite $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ dépendante de x , et $\nu(x) > 0$ satisfaisant :*

1. $x \in E_{n_j}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.
2. Les applications

$$\varphi_{n_j} : \begin{array}{ccc} B(0, \nu(x)) & \longrightarrow & \mathbb{P}^k \\ u & \longmapsto & f^{n_j} \circ \tau_x \circ (d_0 f_x^{n_j})^{-1}(u) \end{array}$$

sont injectives et convergent localement uniformément sur $B(0, \nu(x))$ vers une application holomorphe injective φ .

Rappelons que les applications τ_x sont les cartes holomorphes définies à la section 1.1.4. Notons aussi que l'ensemble des points vérifiant la deuxième propriété est μ -générique (pour le voir, prendre $E_n = \mathbb{P}^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

La démonstration nécessite le lemme suivant, qui contrôle le domaine de définition des applications $f_x^n \circ (d_0 f_x^n)^{-1}$.

Lemme 1.2.5 Soit $R \leq R_0$. Supposons que $\lambda_k < 2\lambda_1$, et posons pour tout $\rho > 0$:

$$B_n(\rho) := \left\{ x \in \mathbb{P}^k, f_x^n \circ (d_0 f_x^n)^{-1} \text{ est injective sur } B(0, \rho), \text{ et à valeurs dans } B(0, R) \right\}$$

Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe $\rho(\delta) > 0$ et $n(\delta) \in \mathbb{N}$ tels que $\mu(B_n(\rho)) \geq 1 - \delta$ pour tout $\rho \leq \rho(\delta)$ et $n \geq n(\delta)$.

DÉMONSTRATION : Avec les notations de la proposition 1.2.1, posons pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\widehat{\mathcal{S}}(p) := \left\{ \hat{x} \in \widehat{Z}, S(\hat{x}) \geq 1/p \right\}$$

Comme $0 < S \leq R$ sur l'ensemble $\hat{\mu}$ -générique \widehat{Z} , il existe $p(\delta) \in \mathbb{N}$ tel que $\hat{\mu}(\widehat{\mathcal{S}}(p)) \geq 1 - \delta$ pour tout $p \geq p(\delta)$. Fixons $p = p(\delta)$. L'invariance de $\hat{\mu}$ entraîne :

$$\forall n \geq 0, \hat{\mu}(f^{-n} \widehat{\mathcal{S}}(p)) = \hat{\mu}(\widehat{\mathcal{S}}(p)) \geq 1 - \delta$$

Si l'inclusion suivante est satisfaite :

$$\pi_0(f^{-n} \widehat{\mathcal{S}}(p)) \subset B_n(1/p) \tag{1.25}$$

alors, par définition de $\hat{\mu}$, on a :

$$\mu(B_n(1/p)) = \hat{\mu}(\pi_0^{-1} B_n(1/p)) \geq \hat{\mu}(f^{-n} \widehat{\mathcal{S}}(p)) \geq 1 - \delta$$

Il suffit donc de vérifier (1.25). Soit $\hat{x} \in f^{-n} \widehat{\mathcal{S}}(p)$. L'inclusion (1.17) (donnée par la proposition 1.2.1) appliquée à $\hat{x}_n := f^n(\hat{x}) \in \widehat{\mathcal{S}}(p)$ s'écrit :

$$d_0 f_{\hat{x}_n}^{-n} B(0, S(\hat{x}_n)) \subset f_{\hat{x}_n}^{-n} B(0, \eta(\hat{x}_n))$$

Notons que par définition (cf le lemme 1.1.33-(3)), l'application $f_{\hat{x}_n}^{-n}$ est injective sur $B(0, \eta(\hat{x}_n))$. Son inverse $f_{x_0}^n$ est donc injective sur $f_{\hat{x}_n}^{-n}(B(0, \eta(\hat{x}_n)))$. Compte tenu de l'inclusion précédente, et puisque $S(\hat{x}_n) \geq 1/p$, $f_{x_0}^n$ est également injective sur $d_0 f_{\hat{x}_n}^{-n} B(0, 1/p) = (d_0 f_{x_0}^n)^{-1} B(0, 1/p)$. De plus,

$$f_{x_0}^n \circ (d_0 f_{x_0}^n)^{-1} B(0, 1/p) \subset f_{x_0}^n \circ f_{\hat{x}_n}^{-n} B(0, \eta(\hat{x}_n)) = B(0, \eta(\hat{x}_n)) \subset B(0, R)$$

On a ainsi $x_0 \in B_n(1/p)$, et l'inclusion (1.25) est vérifiée. \square

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.2.4 : Appliquons le lemme 1.2.5 avec $\delta = 1/q$ pour $q \in \mathbb{N}^*$. Il existe $\rho_q > 0$ et $n_q \in \mathbb{N}$ tels que $\mu(B_n(\rho_q)) \geq 1 - 1/q$ pour tout $n \geq n_q$. On peut supposer la suite $(\rho_q)_{q \in \mathbb{N}}$ décroissante, de sorte que $B_n(\rho_q) \subset B_n(\rho_{q+1})$ pour tout $n, q \in \mathbb{N}$. Ainsi, les ensembles :

$$F_q := \limsup_{n \geq n_q} E_n \cap B_n(\rho_q) \subset \limsup_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

forment une famille croissante de boréliens de \mathbb{P}^k . Puisque $\mu(E_n \cap B_n(\rho_q)) \geq c - 1/q$ pour tout $n \geq n_q$, on a $\mu(F_q) \geq c - 1/q$ d'après le lemme 1.1.31-(2).

On pose $E = \bigcup_{q \geq 0} \uparrow F_q$. Cet ensemble est bien inclus dans $\limsup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ et vérifie $\mu(E) = \lim_{q \rightarrow \infty} \mu(F_q) \geq c$. On vérifie à présent les deux assertions de la proposition.

Soit $x \in E$ et $q \in \mathbb{N}$ tel que $x \in F_q$. Il existe une suite d'entier $(n_j(x))_{j \in \mathbb{N}}$ telle que $x \in E_{n_j} \cap B_{n_j}(\rho_q)$ pour tout j . En particulier, $x \in E_{n_j}$, ce qui montre le premier point. D'autre part, d'après le lemme 1.2.5, l'application :

$$\varphi_{n_j} = f^{n_j} \circ \tau_x \circ (d_x f^{n_j})^{-1} = \tau_{f^{n_j}(x)} \circ f_x^{n_j} \circ (d_x f^{n_j})^{-1}$$

est injective sur $B(0, \rho_q)$, et prend ses valeurs dans $\tau_{f^{n_j}(x)} B(0, R)$.

D'après le théorème de Montel, cette suite converge uniformément sur les compacts de $B(0, \rho_q)$ vers une application holomorphe φ , quitte à prendre une sous-suite. Comme les applications sont holomorphes, on en déduit $d_0 \varphi = \lim_{j \rightarrow \infty} d_0 \varphi_{n_j} = \text{Id}_{\mathbb{C}^k}$. Ainsi, d'après le théorème d'inversion locale, il existe $0 < \nu(x) \leq \rho_q$ tel que φ soit injective sur $B(0, \nu(x))$. Cela montre le deuxième point et termine la preuve. \square

1.2.3 Les hypothèses \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2

Dans cette partie, nous énonçons deux hypothèses, \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 , qui assurent le contrôle de la norme et du jacobien de l'inverse de $d_0 f_x^n$. Dans la section suivante, nous verrons que lorsque ces hypothèses sont vérifiées, il est possible de remplacer les différentielles par des homothéties de rapport $d^{-n/2}$ dans le procédé de renormalisation.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{P}^k et $\mathcal{D} \subset \Omega$. On définit pour $q \in \mathbb{N}^*$ et $\tau > 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_n(q) &:= \Omega \cap f^{-n} \Omega \cap \left\{ x \in \mathbb{P}^k, d^{kn}/q^2 \leq \det_{\mathbb{R}}(d_0 f_x^n) \leq d^{kn} \cdot q^2 \right\} \\ \mathcal{K}_n(\tau) &:= \Omega \cap f^{-n} \Omega \cap \left\{ x \in \mathbb{P}^k, \|(d_0 f_x^n)^{-1}\| \leq \tau \cdot d^{-n/2} \right\} \end{aligned}$$

Soient \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 les hypothèses suivantes :

\mathcal{H}_1 : Pour tout $\delta > 0$, il existe $q(\delta) \in \mathbb{N}^*$ et $n_1(\delta) \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq n_1, \mu(\mathcal{J}_n(q)) \geq \mu(\Omega)^2(1 - \delta)$$

\mathcal{H}_2 : Pour tout $\delta > 0$, il existe $\tau(\delta) \in \mathbb{N}^*$ et $n_2(\delta) \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq n_2, \mu(\mathcal{K}_n(\tau)) \geq \mu(\Omega)^2(1 - \delta)$$

Le lemme suivant montre que si \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 sont satisfaites pour $\delta > 0$, alors la

mesure de l'intersection :

$$\Gamma_n(\mathcal{D}, q, \tau) := \mathcal{J}_n(q) \cap \mathcal{K}_n(\tau) \cap \mathcal{D} \cap f^{-n}\mathcal{D}$$

est uniformément minorée pour n assez grand.

Lemme 1.2.6 *Si \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 sont satisfaites sur Ω , alors, pour tout $\delta > 0$, il existe $q_\delta \in \mathbb{N}^*$, $\tau_\delta > 0$ et $N_\delta \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N_\delta$,*

$$\mu\left(\Gamma_n(\mathcal{D}, q, \tau)\right) \geq \mu(\mathcal{D})^2(1 - \delta)$$

DÉMONSTRATION : Soit $\epsilon > 0$ vérifiant $\mu(\mathcal{D})^2(1 - \epsilon) - 4\epsilon\mu(\Omega)^2 \geq \mu(\mathcal{D})^2(1 - \delta)$. D'après $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, il existe $q_\delta \in \mathbb{N}^*$, $\tau_\delta > 0$, $n_1(\delta)$ et $n_2(\delta)$ tels que :

$$\forall n \geq n_3 = \max(n_1(\delta), n_2(\delta)) , \mu(\mathcal{J}_n(q)), \mu(\mathcal{K}_n(\tau)) \geq \mu(\Omega)^2(1 - \epsilon)$$

D'autre part, puisque μ mélange, il existe $n_4 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_4$,

$$\begin{aligned} \mu(\Omega_n = f^{-n}\Omega \cap \Omega) &\leq \mu(\Omega)^2.(1 + \epsilon) \\ \mu(\mathcal{D}_n = f^{-n}\mathcal{D} \cap \mathcal{D}) &\geq \mu(\mathcal{D})^2.(1 - \epsilon) \end{aligned}$$

Soit $N := \max(n_3, n_4)$. Appliquons le lemme 1.1.31-(1) avec $U = H = \Omega_n$, $F = \mathcal{J}_n(q)$ et $G = \mathcal{K}_n(\tau)$. On obtient pour tout $n \geq N$:

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{J}_n(q) \cap \mathcal{K}_n(\tau)) &\geq \mu(\Omega)^2.(1 - \epsilon) + \mu(\Omega)^2.(1 - \epsilon) - \mu(\Omega)^2.(1 + \epsilon) \\ &\geq \mu(\Omega)^2.(1 - 3\epsilon) \end{aligned}$$

Le même lemme, appliqué à $U = H = \Omega_n$, $F = \mathcal{J}_n(q) \cap \mathcal{K}_n(\tau)$ et $G = \mathcal{D}_n$ entraîne :

$$\begin{aligned} \forall n \geq N, \mu\left(\Gamma_n(\mathcal{D}, q, \tau)\right) &\geq \mu(\Omega)^2.(1 - 3\epsilon) + \mu(\mathcal{D})^2.(1 - \epsilon) - \mu(\Omega)^2.(1 + \epsilon) \\ &\geq \mu(\mathcal{D})^2.(1 - \epsilon) - 4\epsilon\mu(\Omega)^2 \geq \mu(\mathcal{D})^2(1 - \delta) \end{aligned}$$

Cela termine la démonstration du lemme. □

Cette minoration, associée au lemme 1.1.31-(2), montre que de nombreux points appartiennent à une infinité d'ensembles $\mathcal{J}_n(q) \cap \mathcal{K}_n(\tau)$. Le lemme suivant précise que pour un tel point x , on peut assimiler $(d_0 f_x^n)^{-1}$ à une homothétie de rapport $d^{-n/2}$:

Lemme 1.2.7 *Soit $\Lambda_n := d^{-n/2}Id_{\mathbb{C}^k}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\tau > 0$ et $(n_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ tels que :*

$$\forall j \in \mathbb{N} , x \in \mathcal{J}_{n_j}(q) \cap \mathcal{K}_{n_j}(\tau)$$

Alors, quitte à prendre une sous suite, il existe $A \in GL_k(\mathbb{C})$ tel que $d_0 f_x^{n_j} \circ \Lambda_{n_j}$ converge vers A .

DÉMONSTRATION : Soient $\delta_{j,1} \leq \dots \leq \delta_{j,k}$ les valeurs singulières de $(d_0 f_x^{n_j})^{-1}$ (cf la section 1.1.3). Il existe $U_j, V_j \in \mathbb{U}_k(\mathbb{C})$ tel que :

$$(d_0 f_x^{n_j})^{-1} = U_j \cdot \text{Diag}(\delta_{j,1}, \dots, \delta_{j,k}) \cdot V_j$$

Comme $x \in \mathcal{K}_{n_j}(\tau)$, on a :

$$\delta_{j,k} = \|(d_0 f_x^{n_j})^{-1}\| \leq \tau d^{-n_j/2} \text{ et } (\delta_{j,1} \dots \delta_{j,k})^2 \leq \delta_{j,1}^2 \delta_{j,k}^{2(k-1)} \leq \delta_{j,1}^2 \cdot (\tau d^{-n_j/2})^{2(k-1)}$$

D'autre part, puisque $x \in \mathcal{J}_{n_j}(q)$, on a :

$$d^{-kn_j}/q^2 \leq \det_{\mathbb{R}}(d_0 f_x^{n_j})^{-1} = \left| \det_{\mathbb{C}}(d_0 f_x^{n_j})^{-1} \right|^2 = (\delta_{j,1} \dots \delta_{j,k})^2$$

Il vient donc :

$$\tau^{1-k} d^{-n_j/2}/q \leq \delta_{j,1} \leq \dots \leq \delta_{j,k} \leq \tau d^{-n_j/2}$$

Ainsi, les applications $\Theta_{n_j} := d_0 f_x^{n_j} \circ \Lambda_{n_j}$ sont dans le compact $\mathbb{U}_k(\mathbb{C}) \cdot \mathcal{G} \cdot \mathbb{U}_k(\mathbb{C})$ de $GL_n(\mathbb{C})$, où $\mathcal{G} := \{\text{Diag}(\beta_1, \dots, \beta_k), 1/\tau \leq \beta_i \leq q \cdot \tau^{k-1}\}$. Donc la suite $(\Theta_{n_j})_j$ converge vers $A \in GL_k(\mathbb{C})$, quitte à extraire une sous-suite. \square

1.2.4 Principe de renormalisation par des homothéties

Nous démontrons dans cette partie un procédé de renormalisation par des homothéties, valable sous les hypothèses \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 . Nous verrons dans la section 1.4 que ces hypothèses sont vérifiées dès que μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Proposition 1.2.8 *Soient Ω un ouvert de \mathbb{P}^k et $\mathcal{D} \subset \Omega$ tel que $\mu(\mathcal{D}) > 0$. On suppose que \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 sont satisfaites sur Ω . Alors, il existe $\mathcal{L}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ vérifiant $\mu(\mathcal{L}(\mathcal{D})) \geq \mu(\mathcal{D})^2$ et tel que pour tout $x \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$, il existe une suite $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ dépendante de x , et $\nu(x) > 0$ avec :*

1. $f^{n_j}(x) \in \mathcal{D}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.
2. Les applications

$$\Psi_{n_j} : \begin{array}{ccc} B(0, \nu(x)) & \longrightarrow & \mathbb{P}^k \\ u & \longmapsto & f^{n_j} \circ \tau_x \circ \Lambda_{n_j}(u) \end{array}$$

où $\Lambda_n := d^{-n/2} \cdot \text{Id}_{\mathbb{C}^k}$, sont injectives et convergent localement uniformément sur $B(0, \nu(x))$ vers une application holomorphe injective Ψ . De plus, $\Psi(0)$ appartient à l'adhérence de \mathcal{D} dans \mathbb{P}^k .

Nous obtiendrons cette proposition à l'aide du procédé de renormalisation par les différentielles (proposition 1.2.4). Montrons tout d'abord que l'hypothèse $\lambda_k < 2\lambda_1$ est satisfaite lorsque \mathcal{H}_1 est vérifiée :

Lemme 1.2.9 *Si l'hypothèse \mathcal{H}_1 est satisfaite sur un ouvert Ω vérifiant $\mu(\Omega) > 0$, alors les exposants de Lyapounoff de (\mathbb{P}^k, f, μ) sont égaux à $\log d/2$.*

DÉMONSTRATION : Briend et Duval ont démontré l'inégalité $\log d/2 \leq \lambda_1$ pour tout endomorphisme de \mathbb{P}^k de degré d [BD1]. Il suffit donc de montrer $\lambda_k \leq \log d/2$.

Utilisons \mathcal{H}_1 avec $\delta = 1/2$: il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(\mathcal{J}_n(q)) \geq \mu(\Omega)^2/2 > 0$ pour $n \geq n_1$. Posons $\mathcal{J}(q) := \limsup \mathcal{J}_n(q)$. Cet ensemble vérifie $\mu(\mathcal{J}(q)) \geq \mu(\Omega)^2/2 > 0$ d'après le lemme 1.1.31-(2).

Pour tout $x \in \mathcal{J}(q)$, on note $(n_j(x))_{j \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers telle que $x \in \mathcal{J}_{n_j}(q)$ pour tout $j \geq 0$. On a, par définition de $\mathcal{J}_{n_j}(q)$:

$$\forall j \geq 0, \quad \frac{1}{n_j(x)} \log \det_{\mathbb{R}}(d_0 f_x^{n_j(x)}) \leq k \cdot \log d + \frac{1}{n_j(x)} \log q^2 \quad (1.26)$$

Or, d'après le corollaire 1.1.27, $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{n_j} \log \det_{\mathbb{R}}(d_0 f_x^{n_j}) = 2 \cdot \sum_{i=1}^k \lambda_i$ pour μ -presque tout x de $\mathcal{J}(q)$. On peut donc faire tendre j vers l'infini dans (1.26) pour obtenir :

$$2(k-1) \frac{\log d}{2} + 2\lambda_k \leq 2 \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i + 2\lambda_k = 2 \cdot \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq k \cdot \log d$$

On a donc $\lambda_k \leq \log d/2$. □

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.2.8 : On applique le lemme 1.2.6 avec $\delta = 1/p$, $p \in \mathbb{N}^*$. Il existe $q_p \in \mathbb{N}^*$, $\tau_p > 0$ et $N_p \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N_p$:

$$\mu(\Gamma_n(p)) \geq \mu(\mathcal{D})^2(1 - 1/p)$$

où on a posé $\Gamma_n(p) := \Gamma_n(\mathcal{D}, q_p, \tau_p)$.

Puisque tous les exposants de μ sont égaux à $\log d/2$ d'après le lemme précédent, on peut appliquer la proposition 1.2.4. Prenons $E_n = \Gamma_n(p)$ si $n \geq N_p$ et $E_n = \mathbb{P}^k$ sinon. Il existe $\Gamma(p) \subset \limsup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n(p)$ vérifiant $\mu(\Gamma(p)) \geq \mu(\mathcal{D})^2(1 - 1/p)$ et tel que pour tout $x \in \Gamma(p)$, il existe $(n_j(x))_{j \in \mathbb{N}}$ et $\nu'(x) > 0$ satisfaisant :

(i) : $x \in \Gamma_{n_j}(p)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

(ii) : Les applications

$$\varphi_{n_j} : \begin{array}{ccc} B(0, \nu'(x)) & \longrightarrow & \mathbb{P}^k \\ u & \longmapsto & f^{n_j} \circ \tau_x \circ (d_0 f_x^{n_j})^{-1}(u) \end{array}$$

sont injectives et convergent localement uniformément sur $B(0, \nu'(x))$ vers une application holomorphe injective φ .

Posons $\mathcal{L}(\mathcal{D}) := \bigcup_{p \geq 1} \Gamma(p)$. On a bien $\mathcal{L}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$, $\mu(\mathcal{L}(\mathcal{D})) \geq \mu(\mathcal{D})^2$ et tout point $x \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ satisfait les propriétés (i) et (ii) pour un certain entier p . En particulier, $x \in \Gamma_{n_j}(p) \subset \mathcal{J}_{n_j}(q_p) \cap \mathcal{K}_{n_j}(\tau_p)$ pour tout entier j . Le premier point de la proposition est alors immédiat. Pour le deuxième, on diminue éventuellement $\nu'(x)$, et on écrit Ψ_{n_j} sous la forme $\Psi_{n_j} = \varphi_{n_j} \circ \Theta_{n_j}$, avec $\Theta_{n_j} := d_0 f_x^{n_j} \circ \Lambda_{n_j}$, afin d'utiliser le lemme 1.2.7. □

1.3 Renormalisation de courants invariants et conclusion

Dans cette partie, on suppose que μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m (cf la section 1.1.2) sur un ouvert Ω de μ -mesure non nulle, et que les hypothèses $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ sont vérifiées sur cet ouvert (on dispose ainsi du procédé de renormalisation par des homothéties). Nous montrons alors que le courant de Green est lisse et défini positif sur Ω , quitte à diminuer cet ouvert.

1.3.1 Renormalisation de courants invariants

On peut supposer que Ω est un polydisque $P(0, t) \subset \mathbb{C}^k$ dans une carte holomorphe τ_m , suffisamment petit pour que les changements de carte :

$$\phi_{x,m} = \tau_m^{-1} \circ \tau_x, \quad x \in P(0, t)$$

soient proches de la translation $x + \text{Id}_{\mathbb{C}^k}$ en norme $\| \cdot \|_{\infty}$ (cf la section 1.1.4). On peut ainsi utiliser le principe de renormalisation sans faire figurer les applications τ_x . Rappelons qu'un courant positif S de bidegré $(1, 1)$ est f -invariant par f si $f^*S = d.S$, où d désigne le degré de f (cf la définition 1.1.10).

La proposition suivante montre qu'un courant S absolument continu et f -invariant est constant sur l'ouvert Ω , quitte à le diminuer. On s'inspire ici de l'approche de Mayer [May] (cf l'introduction).

Proposition 1.3.1 *Soit Ω comme précédemment et S un courant positif f -invariant de bidegré $(1, 1)$ absolument continu sur \mathbb{P}^k . Alors il existe un ouvert $V \subset \Omega$ vérifiant $\mu(V) > 0$, et un biholomorphisme $\Phi : B(0, \nu) \xrightarrow{\sim} V$ tel que Φ^*S soit une forme différentielle à coefficients constants sur $B(0, \nu)$.*

DÉMONSTRATION : Soit $S(z) = \sum_{p,q=1}^k h_{p,q}(z) \cdot \frac{i}{2} dz_p \wedge d\bar{z}_q$ une expression de S sur Ω , et $\mathcal{M} \subset \Omega$ l'intersection des ensembles de Lebesgue des fonctions mesurables $h_{p,q}$. Fixons $\Omega' \Subset \Omega$ de μ -mesure non nulle et $\mathcal{L}(\Omega')$ l'ensemble des points de Ω' où l'on peut renormaliser par des homothéties $\Lambda_{n_j} = d^{-n_j/2} \cdot \text{Id}_{\mathbb{C}^k}$ (cf proposition 1.2.8). Notons que l'ensemble :

$$\mathcal{C} := \mathcal{L}(\Omega') \cap \mathcal{M} \cap \text{supp}(\mu)$$

vérifie $\mu(\mathcal{C}) = \mu(\mathcal{L}(\Omega')) \geq \mu(\Omega')^2 > 0$.

Quitte à effectuer une translation, on peut supposer que l'origine est un point de \mathcal{C} . Il existe alors $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $\nu > 0$ tels que $\Phi_{n_j} = f^{n_j} \circ \Lambda_{n_j}$ converge localement uniformément sur $B(0, \nu)$ vers Φ holomorphe injective, avec $\Phi_{n_j}(0), \Phi(0) \in \overline{\mathcal{C}}$. Quitte à diminuer ν , les ensembles $V := \Phi(B(0, \nu))$ et $\Phi_{n_j}(B(0, \nu))$ sont inclus dans Ω , car $\mathcal{C} \subset \Omega' \Subset \Omega$. D'autre part, puisque $\Phi(0) \in \overline{\mathcal{C}} \subset \text{supp}(\mu)$, et que V est ouvert, on a

$\mu(V) > 0$. Nous montrons à présent que Φ^*S est une forme différentielle à coefficients constants sur $B(0, \nu)$.

Comme S est f -invariant, on a l'identité suivante :

$$\Phi_{n_j}^* S = \Lambda_{n_j}^* f^{n_j} S = d^{n_j} \Lambda_{n_j}^* S \quad \text{sur } B(0, \nu) \quad (1.27)$$

Le membre de gauche converge vers Φ^*S pour la topologie faible, car la suite d'applications holomorphes injectives Φ_{n_j} converge vers Φ localement uniformément sur $B(0, \nu)$. Montrons que le membre de droite tend vers $H := \sum_{p,q=1}^k h_{p,q}(0) \cdot \frac{i}{2} dw_p \wedge \overline{dw}_q$ sur $B(0, \nu)$. On fixe à cet effet une $(k-1, k-1)$ forme test χ sur $B(0, \nu)$. On suppose pour simplifier qu'elle est de la forme :

$$\chi(w) = \sigma(w) \frac{i}{2} dw_2 \wedge \overline{dw}_2 \wedge \cdots \wedge \frac{i}{2} dw_k \wedge \overline{dw}_k$$

D'après la proposition 1.1.7, on a :

$$d^{n_j} \Lambda_{n_j}^* S = \sum_{p,q=1}^k h_{p,q} \circ \Lambda_{n_j} \cdot \frac{i}{2} dw_p \wedge \overline{dw}_q \quad \text{sur } B(0, \nu) \quad (1.28)$$

La formule de changement de variable fournit alors :

$$\begin{aligned} \langle d^{n_j} \Lambda_{n_j}^* S - H, \chi \rangle &= \int_{B(0, \nu)} [h_{1,1} \circ \Lambda_{n_j}(w) - h_{1,1}(0)] \sigma(w) dm(w) \\ &= \frac{1}{d^{kn_j}} \int_{\Lambda_{n_j}(B(0, \nu))} [h_{1,1}(z) - h_{1,1}(0)] \sigma \circ \Lambda_{n_j}^{-1}(z) dm(z) \end{aligned}$$

Comme la fonction σ est bornée sur $B(0, \nu)$ et $d^{-kn_j} \simeq m(\Lambda_{n_j}(B(0, \nu)))$, on a :

$$|\langle d^{n_j} \Lambda_{n_j}^* S - H, \chi \rangle| \lesssim \frac{1}{m(\Lambda_{n_j}(B(0, \nu)))} \int_{\Lambda_{n_j}(B(0, \nu))} |h_{1,1}(z) - h_{1,1}(0)| dm(z)$$

Le membre de droite tend vers zéro car l'origine est un point de Lebesgue des fonctions $h_{p,q}$. Ainsi, après passage à la limite, (1.27) devient $\Phi^*S = H$ sur $B(0, \nu)$. \square

La proposition suivante montre qu'un courant f -invariant S dont le support est chargé par μ (i.e. contenant beaucoup de points où l'on peut renormaliser par des homothéties) possède nécessairement une partie absolument continue S_{abs} non triviale.

Proposition 1.3.2 *Soit Ω comme précédemment et S un courant positif f -invariant de bidegré $(1, 1)$ sur \mathbb{P}^k . On suppose qu'il existe un ouvert $U \subset \Omega$ sur lequel $S = dd^c v$, où v est psh continue sur U , et que $S \neq 0$. Si $\mu(U \cap \text{supp}(S)) > 0$, alors la partie absolument continue de S n'est pas nulle sur U .*

DÉMONSTRATION : Soit $U' \Subset U$ tel que $\mathcal{D} := U' \cap \text{supp}(S)$ soit de μ -mesure non nulle. L'ensemble $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ des points où l'on peut renormaliser par des homothéties vérifie $\mu(\mathcal{L}(\mathcal{D})) \geq \mu(\mathcal{D})^2 > 0$ (cf proposition 1.2.8). On note S_{abs} une expression de la partie absolument continue de S sur Ω . Soit $\omega = \frac{i}{2} dd^c \|z\|^2$ et $\sigma_{S_{abs}} := S_{abs} \wedge \omega^{k-1}$, $\sigma_S := S \wedge \omega^{k-1}$ les mesures traces de S_{abs} et S sur U . Observons que la densité de $\sigma_{S_{abs}} = (\sigma_S)_{abs}$ est égale m -presque partout à la dérivée de σ_S (notée $D\sigma_S$) sur $\mathcal{L}(\mathcal{D})$. Nous allons établir :

$$\forall x \in \mathcal{L}(\mathcal{D}), \quad D\sigma_S(x) > 0 \quad (1.29)$$

Cela montrera que S_{abs} est non nul, puisque sa mesure trace possède une densité strictement positive sur un ensemble de mesure de Lebesgue non triviale.

Soit $x \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$, $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $\nu > 0$ tels que $\Phi_{n_j} = f^{n_j} \circ (x + \Lambda_{n_j})$ converge localement uniformément vers Φ holomorphe injective sur $B(0, \nu)$, avec $\Phi_{n_j}(0), \Phi(0) \in \overline{\mathcal{D}}$ (cf proposition 1.2.8). Quitte à diminuer ν , $\Phi_{n_j}(B(0, \nu))$ et $\Phi(B(0, \nu))$ sont inclus dans U , car $\mathcal{D} \subset U' \Subset U$. On suppose par la suite que x est l'origine. L'invariance de S et la formule de changement de variable entraînent :

$$\begin{aligned} \sigma_S(\Lambda_{n_j}(B(0, \nu))) &= \int_{\Lambda_{n_j}(B(0, \nu))} S \wedge \omega^{k-1} = \frac{1}{d^{n_j}} \int_{\Lambda_{n_j}(B(0, \nu))} f^{n_j*} S \wedge \omega^{k-1} \\ &= \frac{1}{d^{n_j}} \int_{B(0, \nu)} \Phi_{n_j}^* S \wedge (\Lambda_{n_j}^* \omega)^{k-1} \end{aligned}$$

En remarquant que $\Lambda_{n_j}^* \omega = d^{-n_j} \cdot \omega$ et $d^{-kn_j} \simeq m(\Lambda_{n_j}(B(0, \nu)))$, on obtient :

$$\frac{\sigma_S(\Lambda_{n_j}(B(0, \nu)))}{m(\Lambda_{n_j}(B(0, \nu)))} \simeq \int_{B(0, \nu)} \Phi_{n_j}^* S \wedge \omega^{k-1} \quad (1.30)$$

Le membre de gauche de (1.30) tend vers $D\sigma_S(x)$ pour μ -presque tout $x \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$. Le membre de droite est minoré par :

$$\int_{B(0, \nu)} \chi \cdot dd^c (v \circ \Phi_{n_j}) \wedge \omega^{k-1} = \int_{B(0, \nu)} (v \circ \Phi_{n_j}) dd^c \chi \wedge \omega^{k-1} \quad (1.31)$$

où χ est une fonction test à support compact dans $B(0, \nu)$, égale à 1 sur $B(0, \nu/2)$. Puisque v et les coefficients de $dd^c \chi$ sont continus et bornés sur $\Phi_{n_j}(B(0, \nu)) \subset U$, le théorème de convergence dominée montre que (1.31) tend vers :

$$\int_{B(0, \nu)} v \circ \Phi \cdot dd^c \chi \wedge \omega^{k-1} = \int_{B(0, \nu)} \chi \cdot \Phi^* S \wedge \omega^{k-1}$$

La ligne (1.30) entraîne alors :

$$D\sigma_S(x) \gtrsim \int_{B(0, \nu)} \chi \cdot \Phi^* S \wedge \omega^{k-1}$$

Puisque Φ est un biholomorphisme et $\Phi(0) \in \overline{\mathcal{D}} \subset \text{supp}(S)$, cette quantité est strictement positive. Cela montre (1.29). \square

1.3.2 Conclusion

Nous montrons ici que lorsque la mesure d'entropie maximale μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur un ouvert Ω de μ -mesure positive, alors f est un exemple de Lattès. Rappelons que d'après le théorème de Berteloot-Loeb [BL2], il suffit de montrer que le courant de Green est lisse et défini positif sur Ω .

Considérons à cet effet la décomposition de Lebesgue $T = T_{abs} + T_{sing}$ du courant de Green T (ces courants sont positifs et f -invariants par la proposition 1.1.11). L'idée est la suivante. La proposition 1.3.1 entraîne que T_{abs} est une forme à coefficients constants H , dans les coordonnées fournies par le procédé de renormalisation. Le courant T_{abs} est donc fermé, grâce à son invariance. Le caractère défini positif de H s'obtient en raisonnant par l'absurde : si H était dégénérée, on vérifie que la proposition 1.3.2 s'applique à T_{sing} . On en déduit facilement que T_{sing} est nul, ce qui termine la preuve.

On donne à présent la démonstration. D'après la proposition 1.3.1, il existe un ouvert $V \subset \Omega$ vérifiant $\mu(V) > 0$, et un biholomorphisme $\Phi : B(0, \nu) \xrightarrow{\sim} V$, tels que Φ^*T_{abs} soit égal à une forme différentielle H à coefficients constants. Cela montre en particulier que T_{abs} possède un potentiel continu sur V . Il en est de même pour T_{sing} , puisqu'il est égal à $T - T_{abs}$ et que T possède un potentiel continu sur Ω (cf la section 1.1.2).

On établit maintenant que la forme H est non dégénérée. Pour cela, on décompose μ à l'aide des courants T_{abs} et T_{sing} . Cela est possible car ces deux courants possèdent des potentiels bornés. On a :

$$\mu = T^k = \left(T_{sing} + T_{abs}\right)^k = \sum_{j=0}^k C_k^j T_{sing}^j \wedge T_{abs}^{k-j} \quad (1.32)$$

Si H était dégénérée, alors, d'après (1.32), le support de μ serait contenu dans celui de T_{sing} . On aurait alors $\mu(V \cap \text{supp}(T_{sing})) > 0$. Une contradiction provient immédiatement de la proposition 1.3.2, appliquée au courant T_{sing} .

On achève la démonstration en montrant que T_{sing} est nul sur V . Ce courant étant positif, il suffit de vérifier que sa mesure trace est nulle. Nous allons montrer qu'elle est à la fois absolument continue et singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Remarquons auparavant que puisque T_{abs} est lisse et définie positive, la mesure trace de T_{sing} est équivalente à la mesure $T_{sing} \wedge T_{abs}^{k-1}$. Celle-ci est singulière, de manière évidente. Pour voir qu'elle est absolument continue, on utilise (1.32) et l'unicité de la décomposition de Lebesgue : μ étant absolument continue, la partie singulière de chacune des mesures positives de cette décomposition est nulle.

En conclusion, T est égal au courant lisse strictement positif Φ_*H sur V . L'endomorphisme f est donc un exemple de Lattès.

1.4 Absolue continuité de μ et hypothèses \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2

Dans cette section, nous montrons que les hypothèses \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 sont satisfaites lorsque μ est absolument continue sur un ouvert Ω de μ -mesure positive.

Comme dans la section précédente, on suppose que Ω est un polydisque $P(0, t)$, contenu dans une carte holomorphe τ_m , assez petit pour que les changements de carte :

$$\phi_{x,m} = \tau_m^{-1} \circ \tau_x, \quad x \in P(0, t)$$

soient proches de la translation $x + \text{Id}_{\mathbb{C}^k}$ en norme $\|\cdot\|_\infty$ (cf la section 1.1.4) et pour que $P(0, t) \Subset B(0, R_0)$ (R_0 est défini à la section 1.1.4). Ainsi, quitte à multiplier q et τ par des constantes universelles dans les énoncés des hypothèses \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 , on peut remplacer $d_0 f_x^n$ par $d_x f^n$ dans la définition de $\mathcal{J}_n(q)$ et de $\mathcal{K}_n(\tau)$.

1.4.1 L'hypothèse \mathcal{H}_1

Nous montrons dans cette partie la proposition suivante :

Proposition 1.4.1 *Soit Ω comme précédemment. Si μ est absolument continue sur Ω , avec $\mu(\Omega) > 0$, alors, pour tout $\delta > 0$, il existe $q_\delta \in \mathbb{N}^*$ et $n_1(\delta) \in \mathbb{N}$ tels que $\mu(\mathcal{J}_n(q)) \geq \mu(\Omega)^2(1 - \delta)$ pour $n \geq n_1$.*

DÉMONSTRATION : La démonstration repose sur l'identité $f^* \mu = d^k \mu$, lue sur la densité $\varphi \in L^1(\Omega)$ de μ sur Ω . Nous aurons aussi besoin d'une propriété de continuité sur φ . Nous ferons pour cela appel au théorème de Lusin, qui stipule que φ est continue sur Ω , quitte à supprimer un ensemble de mesure arbitrairement petite.

Notons m la mesure de Lebesgue sur Ω , de sorte que $d\mu = \varphi dm$. Soit

$$A_q := \{t \in \Omega, 1/q \leq \varphi(t) \leq q\}$$

Puisque $\{0 < \varphi < +\infty\} = \bigcup_{q \geq 1} \uparrow A_q$ et $\mu(\Omega) = \mu\{0 < \varphi < +\infty\}$, le théorème de convergence monotone entraîne $\mu(\Omega) = \lim_{q \rightarrow \infty} \mu(A_q)$.

Soit $\epsilon > 0$ tel que $\mu(\Omega)^2(1 - \epsilon)^3 - 2\epsilon \geq \mu(\Omega)^2(1 - \delta)$ et q assez grand pour que $\mu(A_q) \geq \mu(\Omega)(1 - \epsilon)$. Puisque μ est mélangeante, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_1, \mu(f^{-n} A_q \cap A_q) \geq \mu(A_q)^2(1 - \epsilon) \geq \mu(\Omega)^2(1 - \epsilon)^3$$

Soit $n \geq n_1$ et $\Omega_n := f^{-n} \Omega \cap \Omega$. D'après le théorème de Lusin, puisque φ est mesurable sur l'ouvert $\Omega_n \subset \Omega$, il existe une fonction g_n continue à support compact dans Ω_n , et $C(\varphi) \subset \Omega_n$ de mesure minorée par $\mu(\Omega_n)(1 - \epsilon)$, tels que :

$$\varphi = g_n \text{ sur } C(\varphi)$$

De même, comme $\varphi \circ f^n$ est mesurable sur Ω_n , il existe h_n continue à support compact dans Ω_n , et $C(\varphi \circ f^n) \subset \Omega_n$ de mesure minorée par $\mu(\Omega_n)(1 - \epsilon)$, tels que :

$$\varphi \circ f^n = h_n \text{ sur } C(\varphi \circ f^n)$$

Notons que $\mu(C(\varphi) \cap C(\varphi \circ f^n)) \geq \mu(\Omega_n)(1 - 2\epsilon)$ (cf le lemme 1.1.31-(1)). Posons

$$Y := \Omega \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Crit}(f^n)$$

Cet ensemble est de mesure $\mu(\Omega)$ car μ ne charge pas les ensembles analytiques (cf la proposition 1.1.12). Appliquons le lemme 1.1.31-(1) avec $F = f^{-n}A_q \cap A_q$, $G = C(\varphi) \cap C(\varphi \circ f^n)$ et $H = Y$, sous-ensembles de $U = \Omega_n$. Compte tenu du choix de ϵ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mu\left(f^{-n}A_q \cap A_q \cap C(\varphi) \cap C(\varphi \circ f^n) \cap Y\right) &\geq \mu(\Omega)^2(1 - \epsilon)^3 + \mu(\Omega_n)(1 - 2\epsilon) - \mu(\Omega_n) \\ &\geq \mu(\Omega)^2(1 - \epsilon)^3 - 2\epsilon\mu(\Omega_n) \\ &\geq \mu(\Omega)^2(1 - \epsilon)^3 - 2\epsilon \\ &\geq \mu(\Omega)^2(1 - \delta) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Soit Z_n cette intersection. L'ensemble des points de densité de Lebesgue de Z_n :

$$Z_n^{\text{Leb}} := \left\{ x \in Z_n, \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(B(x, r) \cap Z_n)}{m(B(x, r))} = 1 \right\}$$

vérifie $\mu(Z_n) = \mu(Z_n^{\text{Leb}})$ car $\mu \ll m$. D'après (1.33), la proposition est démontrée si on vérifie $Z_n^{\text{Leb}} \subset \mathcal{J}_n(q)$ pour $n \geq n_1$.

Soit $x \in Z_n^{\text{Leb}}$. Comme $Z_n^{\text{Leb}} \subset f^{-n}A_q \cap A_q \subset f^{-n}\Omega \cap \Omega$, on a bien $x, f^n(x) \in \Omega$. Passons au contrôle du jacobien. Comme Ω_n est ouvert, et $x \notin \text{Crit}(f^n)$, $x \in Z_n^{\text{Leb}}$, alors il existe $\nu_0 > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} f^n : B(x, \nu_0) \cap \Omega_n &\rightarrow \Omega \text{ soit injective.} \\ \forall 0 < \nu \leq \nu_0, m(B(x, \nu) \cap Z_n) &\geq m(B(x, \nu))/2 > 0 \end{aligned}$$

Puisque μ est de jacobien constant d^k , on a $d^{kn}\mu(B(x, \nu) \cap Z_n) = \mu(f^n(B(x, \nu) \cap Z_n))$ pour tout $\nu \leq \nu_0$. Cela s'écrit encore :

$$d^{kn} \int_{B(x, \nu) \cap Z_n} \varphi(t) dm(t) = \int_{f^n(B(x, \nu) \cap Z_n)} \varphi(u) dm(u)$$

Par la formule de changement de variable, on obtient pour $0 < \nu \leq \nu_0$:

$$\begin{aligned} d^{kn} \frac{1}{m(B(x, \nu) \cap Z_n)} \int_{B(x, \nu) \cap Z_n} \varphi(t) dm(t) &= \\ \frac{1}{m(B(x, \nu) \cap Z_n)} \int_{B(x, \nu) \cap Z_n} \varphi \circ f^n(t) \cdot \det_{\mathbb{R}}(d_t f^n) dm(t) &\quad (1.34) \end{aligned}$$

Notons que le jacobien est positif car f est holomorphe. Vérifions que (1.34) devient :

$$d^{kn} \cdot \varphi(x) = \varphi \circ f^n(x) \cdot \det_{\mathbb{R}}(d_x f^n) \quad (1.35)$$

lorsque ν tend vers 0, $\nu \neq 0$. Pour cela, il suffit d'observer que φ peut être remplacée par g_n dans le membre de gauche et $\varphi \circ f^n$ par h_n dans celui de droite, car ces fonctions coïncident sur $C(\varphi) \cap C(\varphi \circ f^n)$, qui contient Z_n par construction. Comme $g_n(x) = \varphi(x)$ et $h_n(x) = \varphi \circ f^n(x)$, la continuité de g_n et h_n fournit (1.35) lorsque ν tend vers zéro. On en déduit l'inégalité sur le jacobien, car x et $f^n(x)$ sont dans A_q . \square

1.4.2 L'hypothèse \mathcal{H}_2

Nous montrons ici que l'hypothèse \mathcal{H}_2 est satisfaite lorsque μ est absolument continue sur Ω . Nous allons en fait prouver qu'elle est satisfaite sous l'hypothèse $\lambda_k < 2\lambda_1$, qui est plus générale (cf le lemme 1.2.9) :

Proposition 1.4.2 *Soit Ω comme au début de la section. Supposons $\lambda_k < 2\lambda_1$. Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe $\tau_\delta > 0$ et $n_2(\delta) \in \mathbb{N}$ tels que $\mu(\mathcal{K}_n(\tau)) \geq \mu(\Omega)^2 \cdot (1-\delta)$ pour tout $n \geq n_2$.*

La démonstration repose sur une technique et un lemme de pluripotentiel dûs à Briend et Duval (cf [B] et [BD1]).

Rappelons que l'ouvert Ω est identifié à un polydisque $P(0, t) \Subset B(0, R_0)$. On note u un potentiel continu de T sur $B(0, R_0)$. Un ellipsoïde \mathcal{E} désigne l'image de la boule unité par une application linéaire inversible et $\lambda\mathcal{E}$ l'ellipsoïde de même centre, dilaté par $\lambda > 0$. Il est naturel de penser que la masse de Monge-Ampère $\mu = (dd^c u)^k$ sur \mathcal{E} charge peu les ensembles sur lesquels u est ϵ -proche d'une fonction maximale. Le lemme de pluripotentiel de Briend-Duval montre que la mesure d'un tel ensemble n'excède pas ϵ , à une constante multiplicative universelle près :

Lemme 1.4.3 (Briend-Duval, [BD1])

Soit $4\mathcal{E}$ un ellipsoïde contenu dans $B(0, R_0)$ et \hat{u} la solution du problème de Dirichlet pour l'opérateur de Monge-Ampère sur $2\mathcal{E}$ avec condition u au bord. Soit

$$\mathcal{M}_\epsilon(\mathcal{E}) := \{x \in \mathcal{E}, \hat{u}(x) - u(x) \leq \epsilon\}$$

Il existe $C > 0$ ne dépendant que des valeurs de u dans $B(0, R_0)$ tel que :

$$(dd^c u)^k(\mathcal{M}_\epsilon(\mathcal{E})) \leq C \cdot \epsilon$$

On trouvera la démonstration dans [S] ou dans [B].

Nous allons donner une condition d'appartenance à $\mathcal{M}_\epsilon(\mathcal{E})$ en terme de disques holomorphes sur lesquels u est proche d'une fonction harmonique. Cela sera utile pour la suite. On appelle \mathcal{E} -disque un ensemble de la forme $\mathcal{D} = \mathcal{E} \cap \mathcal{L}$, où \mathcal{E} est un ellipsoïde de $B(0, R_0)$ et \mathcal{L} est une droite complexe intersectant \mathcal{E} . Pour un tel disque, on peut toujours considérer une paramétrisation $\phi : \Delta \rightarrow \mathcal{D}$ holomorphe

sur Δ et continue sur $\overline{\Delta}$. On définit $\mathcal{B}_\epsilon(\mathcal{E})$ comme l'ensemble des points x de \mathcal{E} par lesquels passe un \mathcal{E} -disque \mathcal{D} vérifiant :

$$\forall t \in \Delta, 0 \leq \widetilde{u \circ \phi}(t) - u \circ \phi(t) \leq \epsilon \quad (1.36)$$

où $\widetilde{u \circ \phi}$ désigne la solution du problème de Dirichlet :

$$\begin{aligned} \widetilde{u \circ \phi} &= u \circ \phi \text{ sur la frontière de } \Delta \\ \widetilde{u \circ \phi} &\text{ harmonique sur } \Delta \end{aligned}$$

On obtient l'inclusion suivante :

Lemme 1.4.4 *L'ensemble $\mathcal{B}_\epsilon(\mathcal{E})$ est contenu dans $\mathcal{M}_\epsilon(\mathcal{E})$.*

DÉMONSTRATION : Soit $x \in \mathcal{B}_\epsilon(\mathcal{E})$ et ϕ un disque holomorphe passant par x vérifiant (1.36). Il suffit, pour établir l'appartenance de x à $\mathcal{M}_\epsilon(\mathcal{E})$, de justifier les inégalités :

$$\forall t \in \Delta, u \circ \phi(t) \leq \hat{u} \circ \phi(t) \leq \widetilde{u \circ \phi}(t)$$

Puisque u est plurisousharmonique et \hat{u} maximale sur \mathcal{E} , l'égalité $u = \hat{u}$ sur le bord de \mathcal{E} entraîne $u \leq \hat{u}$ sur \mathcal{E} . En particulier, $u \leq \hat{u}$ sur $\phi(\Delta)$. La deuxième inégalité provient du principe du maximum, car $\hat{u} \circ \phi$ est sous-harmonique sur Δ et $\widetilde{u \circ \phi} = u \circ \phi = \hat{u} \circ \phi$ sur le bord de Δ . \square

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.4.2 : Soit $\epsilon > 0$ tel que $\mu(\Omega)^2 - 3\epsilon \geq \mu(\Omega)^2(1 - \delta)$ et $B_n(\rho)$ l'ensemble :

$$\left\{ x \in \mathbb{P}^k, f_x^n \circ (d_0 f_x^n)^{-1} \text{ est injective sur } B(0, \rho), \text{ et à valeurs dans } B(0, R) \right\}$$

D'après le lemme 1.2.5, il existe $\rho > 0$ et $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(\mathbb{P}^k \setminus B_n(\rho)) \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N_1$. D'autre part, puisque μ mélange, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(f^{-n}\Omega \cap \Omega) \geq \mu(\Omega)^2 - \epsilon$ pour tout $n \geq N_2$. Posons $n_2 = \max(N_1, N_2)$. On a alors, pour tout $n \geq n_2$, (les complémentaires sont à prendre dans $f^{-n}\Omega \cap \Omega$)

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{K}_n(\tau)) &= \mu(f^{-n}\Omega \cap \Omega) - \mu(\mathcal{K}_n(\tau)^c) \\ &= \mu(f^{-n}\Omega \cap \Omega) - \left(\mu(\mathcal{K}_n(\tau)^c \cap B_n(\rho)) + \mu(\mathcal{K}_n(\tau)^c \cap B_n(\rho)^c) \right) \\ &\geq \mu(\Omega)^2 - \epsilon - \left(\mu(\mathcal{K}_n(\tau)^c \cap B_n(\rho)) + \epsilon \right) \\ &\geq \mu(\Omega)^2 - 2\epsilon - \mu(\mathcal{K}_n(\tau)^c \cap B_n(\rho)) \end{aligned}$$

Cherchons donc $\tau > 0$ tel que

$$\forall n \geq n_2, \mu\left(D_n(\tau) := \mathcal{K}_n(\tau)^c \cap B_n(\rho)\right) \leq \epsilon \quad (1.37)$$

Puisque les changements de carte $\phi_{x,m}$, pour $x \in \tau_m(P(0, t))$, sont proches de l'identité (cf le début de cette section), les points de $D_n(\tau)$ vérifient les conditions suivantes, quitte à multiplier τ , ρ et R par des constantes universelles :

1. L'application $f^n(x + (d_x f^n)^{-1})$ est injective sur $B(0, \rho)$ et prend ses valeurs dans $B(f^n(x), R) \subset B(0, R_0)$.
2. $\| (d_x f^n)^{-1} \| \geq \tau \cdot d^{-n/2}$

Notons que si $v_n(x)$ est un vecteur de la sphère unité réalisant la norme de $(d_x f^n)^{-1}$, alors le disque holomorphe :

$$\phi_{n,x} : \begin{array}{ccc} \Delta & \longrightarrow & \Omega \\ t & \longmapsto & x + (d_x f^n)^{-1}(t \cdot \rho \cdot v_n(x)) \end{array}$$

est de diamètre au moins $\tau \cdot \rho \cdot d^{-n/2}$. Nous allons voir que $\phi_{n,x}(\Delta)$ est un "grand" disque holomorphe sur lequel le potentiel u du courant T est "suffisamment" proche d'une fonction harmonique. Ceci permettra d'utiliser le lemme 1.4.4 pour majorer la mesure de $D_n(\tau)$.

Ecrivons $D_n(\tau)$ sous la forme $\bigcup_{i=1}^k D_n^i(\tau)$, où

$$D_n^i(\tau) := \left\{ x \in D_n(\tau), \| p_i \circ (d_x f^n)^{-1} \| \geq \| (d_x f^n)^{-1} \| / \sqrt{k} \right\}$$

et p_i désigne la projection sur le i -ième axe de coordonnées. On va estimer $\mu(D_n^1(\tau))$: on procéderait de même pour les autres directions. Posons :

$$\Psi_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k & \longrightarrow & \mathbb{C}^k \\ (z_1, \dots, z_k) & \longmapsto & \left(\frac{\tau \cdot \rho \cdot d^{-n/2}}{100 \cdot \sqrt{k}} \cdot z_1, t \cdot z_2, \dots, t \cdot z_k \right) \end{array}$$

et observons qu'il existe une constante Q indépendante de n et τ telle que l'on puisse recouvrir le polydisque $P(0, t)$ par $Q \cdot d^n / \tau^2$ ellipsoïdes de la forme $\Psi_n(B(0, 1))$.

Soient $(\mathcal{E}_j)_{j \in J}$ les ellipsoïdes d'un tel recouvrement. On peut supposer, quitte à diminuer $\Omega = P(0, t)$, que $4\mathcal{E}_j \Subset B(0, R_0)$.

Remarquons que si $x \in \mathcal{E}_j \cap D_n^1(\tau)$, alors $\mathcal{D} = \phi_n(\Delta) \cap \mathcal{E}_j$ est un \mathcal{E} -disque : en effet, le bord de $\phi_n(\Delta)$ est en dehors de $2\mathcal{E}_j$, grâce au facteur 100 introduit dans l'application Ψ_n . Soit $\sigma_n : \overline{\Delta} \rightarrow \overline{\mathcal{D}}$ un paramétrage de \mathcal{D} . Comme $\sigma_n(\overline{\Delta})$ et $f^n \circ \sigma_n(\overline{\Delta})$ sont contenus dans $B(0, R_0)$ (cf la propriété 1 ci-dessus), l'identité $f^n^* T = d^n T$ entraîne :

$$(f^n \circ \sigma_n)^* T = d^n \cdot \sigma_n^* T \quad \text{sur } \Delta$$

Cela se traduit par l'existence d'une fonction harmonique h_n vérifiant :

$$u \circ f^n \circ \sigma_n - d^n \cdot u \circ \sigma_n = h_n \quad \text{sur } \Delta \quad (1.38)$$

On en déduit :

$$u \circ \widetilde{f^n \circ \sigma_n} - d^n \cdot \widetilde{u \circ \sigma_n} = h_n \quad \text{sur } \Delta \quad (1.39)$$

où $\widetilde{u \circ \sigma_n}$ (resp. $\widetilde{u \circ f^n \circ \sigma_n}$) désigne la solution du problème de Dirichlet sur Δ avec condition $u \circ \sigma_n$ (resp. $u \circ f^n \circ \sigma_n$) au bord. Soit $M := \sup_{\overline{B(0, R_0)}} |u|$. Les lignes (1.38), (1.39) et le principe du maximum montrent que l'on a sur Δ :

$$\begin{aligned} 0 \leq \widetilde{u \circ \sigma_n} - u \circ \sigma_n &= d^{-n} (u \circ \widetilde{f^n \circ \sigma_n} - u \circ f^n \circ \sigma_n) \\ &\leq 2d^{-n} \cdot \sup_{\overline{B(0, R_0)}} |u| = M/d^n \end{aligned}$$

On applique à présent les lemmes 1.4.4 et 1.4.3 pour obtenir :

$$\forall n \geq n_2, \forall j \in J, \mu(\mathcal{E}_j \cap D_n^1(\tau)) \leq \frac{CM}{d^n}$$

Comme $D_n^1(\tau)$ est recouvert par $Q \cdot d^n / \tau^2$ polydisques \mathcal{E}_j , on a :

$$\forall n \geq n_2, \mu(D_n(\tau)) \leq k \cdot \frac{CM}{d^n} \cdot \frac{Qd^n}{\tau^2} = \frac{kCMQ}{\tau^2}$$

où C , M et Q sont indépendantes de τ et de n . Il suffit de prendre τ suffisamment grand pour vérifier (1.37). Cela termine la démonstration. \square

Chapitre 2

Description du bassin d'attraction

Ce chapitre est consacré à la description du bord du bassin d'attraction de l'origine des relevés polynomiaux d'exemples de Lattès.

2.1 Fibrés en droites sur les espaces projectifs et les tores complexes

Dans cette section, nous rappelons quelques propriétés bien connues concernant les fibrés en droites. On s'intéressa plus particulièrement au cas des espaces projectifs \mathbb{P}^k et des tores complexes A^k . Les outils présentés ici nous serviront pour décrire le bord du bassin d'attraction des relevés polynomiaux d'exemples de Lattès.

2.1.1 Généralités

Donnons la définition des fibrés en droites complexes :

Définition 2.1.1 *Soit X une variété complexe connexe. Un fibré en droites sur X est la donnée d'une variété complexe L et d'une application holomorphe $p : L \rightarrow X$, telles qu'il existe un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ de X et des isomorphismes $\psi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$ vérifiant $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x, t) = (x, g_{\alpha\beta}(x)t)$, où $g_{\alpha\beta}$ est une fonction holomorphe non nulle sur $U_\alpha \cap U_\beta$. La variété X s'appelle la base de L .*

On introduit maintenant la notion de section :

Définition 2.1.2 *Avec les notations précédentes, une section holomorphe du fibré L est une application holomorphe $s : X \rightarrow L$ telle que $p \circ s = Id_X$. La section définie par $s_0(x) := \psi_\alpha^{-1}(x, 0)$ sur chaque ouvert U_α s'appelle la section nulle de L . On note L^- le fibré L auquel on a ôté l'image de la section nulle.*

On peut toujours munir un fibré en droites L d'une métrique hermitienne, en utilisant une partition de l'unité. Notons que l'on peut aussi définir un fibré en droites sur X en se donnant un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ et des fonctions $g_{\alpha\beta}$ holomorphes non nulles sur $U_\alpha \cap U_\beta$ vérifiant $g_{\alpha\alpha} = 1$ et $g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} \cdot g_{\gamma\alpha} = 1$. La variété L s'obtient alors en recollant les ouverts $U_\alpha \times \mathbb{C}$ (cf [D] Chap V, §1.3).

Morphismes homogènes et morphismes de fibrés : Soient L (resp. L') un fibré en droites sur X (resp. Y), et $f : X \rightarrow Y$ une application holomorphe. Un morphisme homogène de L dans L' de degré d , induisant f sur les bases, est une application holomorphe dont l'expression au dessus d'ouverts de trivialisations $U_\alpha, V_{\alpha'}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} U_\alpha \times \mathbb{C} &\longrightarrow V_{\alpha'} \times \mathbb{C} \\ (x, t) &\longmapsto (f(x), d_{\alpha\alpha'}(x) \cdot t^d) \end{aligned}$$

où $d_{\alpha\alpha'}$ est une fonction holomorphe non nulle. Ces fonctions doivent vérifier les relations $d_{\alpha\alpha'}(x) = g'_{\alpha',\beta'}(f(x)) \cdot d_{\beta\beta'}(x) \cdot g_{\beta\alpha}^d(x)$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$.

On appelle "morphisme de fibré" un morphisme homogène de degré 1. Deux fibrés en droites L, L' sur X sont dits isomorphes si il existe un morphisme de fibrés de L dans L' induisant l'identité sur X . Le principe du maximum entraîne la propriété de proportionnalité suivante :

Lemme 2.1.3 *Soit L un fibré en droites sur une variété complexe compacte connexe X , et $u_i : L \rightarrow L, i = 1, 2$, deux morphismes homogènes de même degré, induisant f sur X . Alors il existe $c \in \mathbb{C}^*$ tel que $u_2 = c \cdot u_1$.*

DÉMONSTRATION : Il suffit de traiter le cas $d = 1$. Soit

$$\begin{aligned} U_\alpha \times \mathbb{C} &\longrightarrow U_\beta \times \mathbb{C} \\ (x, w) &\longmapsto (f(x), d_{\alpha\beta}^i(x) \cdot t) \end{aligned}$$

l'expression de u_i au dessus de U_α, U_β . Le rapport $\frac{d_{\alpha\beta}^2}{d_{\alpha\beta}^1}$, défini sur U_α , ne dépend ni de α , ni de β . Il définit donc une fonction holomorphe globale h sur X . Puisque X est compacte connexe, h est constante par le principe du maximum. \square

Fibré image réciproque : Soient X et Y des variétés complexes, $f : X \rightarrow Y$ une application holomorphe et $p : L \rightarrow Y$ un fibré en droites. Par définition, le fibré image réciproque f^*L sur X est le fibré qui trivialisait sur les ouverts $f^{-1}(U_\alpha)$ par les applications $\psi_\alpha \circ f$.

On note $\hat{f}_L : f^*L \rightarrow L$ le morphisme de fibré induisant f sur la base et l'identité dans les fibres. On a alors l'identité $\widehat{g \circ f}_L = \hat{g}_L \circ \hat{f}_{g^*L}$.

Observons que si L et L' sont des fibrés isomorphes, ils le restent après avoir été tirés en arrière par f . En effet, si l'isomorphisme ξ s'écrit en coordonnées :

$$\begin{aligned} U_\alpha \times \mathbb{C} &\longrightarrow V_{\alpha'} \times \mathbb{C} \\ (y, t) &\longmapsto (y, \xi_{\alpha\alpha'}(x) \cdot t) \end{aligned}$$

alors on définit un isomorphisme $f^*\xi$ entre f^*L et f^*L' en posant :

$$\begin{aligned} f^{-1}(U_\alpha) \times \mathbb{C} &\longrightarrow f^{-1}(V_{\alpha'}) \times \mathbb{C} \\ (x, t) &\longmapsto (x, \xi_{\alpha\alpha'}(f(x)) \cdot t) \end{aligned}$$

Le fibré image réciproque jouit de la propriété universelle suivante :

Lemme 2.1.4 *Soit L un fibré en droites sur X . Avec les notations précédentes, tout morphisme de fibré $v : L \rightarrow L'$ induisant f sur les bases se factorise par $\hat{f}_{L'}$: il existe un isomorphisme η tel que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{v} & L' \\ \eta \downarrow & \nearrow \hat{f}_{L'} & \\ f^*L' & & \end{array}$$

DÉMONSTRATION : Le morphisme v s'écrit en coordonnées :

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathbb{C} & \longrightarrow & V_{\alpha'} \times \mathbb{C} \\ (x, t) & \longmapsto & (f(x), d_{\alpha\alpha'}(x).t) \end{array}$$

Puisque les fonctions de transition de f^*L' sont celles de L' composées par f , on définit un morphisme de fibré $\eta : L \rightarrow f^*L'$ en posant :

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathbb{C} & \longrightarrow & f^{-1}(V_{\alpha'}) \times \mathbb{C} \\ (x, t) & \longmapsto & (x, d_{\alpha\alpha'}(x).t) \end{array}$$

C'est un isomorphisme, vérifiant $v = \hat{f}_{L'} \circ \eta$. □

Produit tensoriel de fibrés : Soient L, L' deux fibrés en droites sur X , associés aux recouvrements $(U_{\alpha_i}), (V_{\beta_j})$ et aux fonctions de transition $g_{\alpha_i\alpha_j}, g'_{\beta_i\beta_j}$. Quitte à diminuer les ouverts U_{α_i} et V_{β_j} , on peut supposer les recouvrements identiques et définir le fibré $L \otimes L'$ associé aux fonctions de transition $g_{\alpha_i\alpha_j} \cdot g'_{\alpha_i\alpha_j}$.

Cette opération induit une structure de groupe sur les classes d'isomorphisme de fibrés en droites. On définit ainsi le groupe de Picard de X . L'inverse de la classe de L est celle du fibré dual de L , associé aux fonctions de transition $g_{\alpha_i\alpha_j}^{-1}$.

Dans les deux prochains paragraphes, on illustre ces notions dans les cas particuliers des espaces projectifs et des tores complexes.

2.1.2 Fibrés en droites sur \mathbb{P}^k

Soient $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^k$ la projection canonique et $V_j := \{\pi(z) \in \mathbb{P}^k, z_j \neq 0\}$. Par définition, le fibré en droites $\mathcal{O}(n)$ sur \mathbb{P}^k est le quotient de $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ par la relation d'équivalence \sim_n , dont les classes sont :

$$[z, v]_n := \{(\lambda z, \lambda^n v), \lambda \in \mathbb{C}\}$$

Si p désigne la projection de $\mathcal{O}(n)$ sur la base \mathbb{P}^k , les fonctions de transition associées aux trivialisations :

$$\psi_j : \begin{array}{ccc} p^{-1}(V_j) & \longrightarrow & V_j \times \mathbb{C} \\ [z, v]_n & \longmapsto & \left([z], \frac{1}{z_j^n} \cdot v \right) \end{array}$$

sont données par $g_{ij}(p(z)) = \left(\frac{z_j}{z_i}\right)^n$. Ces fibrés forment un système de représentants du groupe de Picard de \mathbb{P}^k (ce groupe est engendré par $\mathcal{O}(1)$ ou $\mathcal{O}(-1)$, cf [GH] Chap.1.1).

Remarquons que l'application :

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}(-1)^- & \longrightarrow & \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \\ [z, v]_{-1} & \longmapsto & v \cdot z \end{array}$$

est un biholomorphisme (son inverse est donné par $\Psi^{-1}(z) = [z, 1]_{-1}$). On peut ainsi identifier la fibre de $\mathcal{O}(-1)$ au dessus d'un point m de \mathbb{P}^k avec la droite qui représente ce point dans \mathbb{C}^{k+1} . Nous aurons besoin des propriétés suivantes :

Lemme 2.1.5 *Soit f un endomorphisme holomorphe de \mathbb{P}^k de degré d , et F un de ses relevés polynômiaux à \mathbb{C}^{k+1} . Alors*

1. $f^*\mathcal{O}(-1)$ est isomorphe à $\mathcal{O}(-1)^{\otimes d} \simeq \mathcal{O}(-d)$
2. Il existe des morphismes homogènes $\mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathcal{O}(-1)$ de degré d induisant f sur \mathbb{P}^k . Ils sont de la forme $[z, v]_{-1} \mapsto [F(z), c.v^d]_{-1}$, où $c \in \mathbb{C}^*$

DÉMONSTRATION : Commençons par le premier point. Grâce à la propriété universelle du fibré image réciproque (cf partie 2.1.1), il suffit d'exhiber un morphisme de fibré $\mathcal{O}(-d) \rightarrow \mathcal{O}(-1)$ induisant f sur \mathbb{P}^k . Puisque F est homogène de degré d , l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \\ (z, v) & \longmapsto & (F(z), v) \end{array}$$

passé au quotient pour \sim_{-d} à la source et \sim_{-1} au but, ce qui permet de conclure.

Passons au second point. Puisque F est homogène, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \\ (z, v) & \longmapsto & (F(z), v^d) \end{array}$$

passé au quotient pour \sim_{-1} à la source et au but. On utilise alors la propriété de proportionnalité donnée par le lemme 2.1.3. \square

2.1.3 Fibrés en droites sur A^k

Soit $A^k = \mathbb{C}^k/\Gamma$ un tore complexe. On note $\Pi : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k/\Gamma$ la projection canonique et \dot{x} pour $\Pi(x)$. Nous allons voir que, comme dans le cas de \mathbb{P}^k , les classes d'isomorphisme des fibrés en droites sur A^k sont paramétrées par des espaces quotients. Introduisons à cet effet la notion de *type*. C'est un couple (H, α) constitué :

- d'une forme hermitienne H sur \mathbb{C}^k , \mathbb{C} -linéaire à droite, telle que $\Im H(\Gamma, \Gamma) \subset \mathbb{Z}$
- d'une application $\alpha : \Gamma \rightarrow \mathbb{S}^1$, vérifiant pour tout $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$:

$$\alpha(\gamma_1 + \gamma_2) = \alpha(\gamma_1)\alpha(\gamma_2)(-1)^{\Im H(\gamma_1, \gamma_2)}$$

Posons, pour tout $\gamma \in \Gamma$:

$$e_\gamma(x) := \alpha(\gamma)e^{\pi[H(\gamma,x) + \frac{1}{2}H(\gamma,\gamma)]}. \quad (2.1)$$

On vérifie que la famille de fonctions $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ vérifie les relations de cocycle :

$$e_{\gamma_1 + \gamma_2}(x) = e_{\gamma_1}(x + \gamma_2)e_{\gamma_2}(x), \quad (2.2)$$

et définit ainsi une action de Γ sur $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}$ par :

$$\gamma \cdot (x, t) := (x + \gamma, e_\gamma(x).t).$$

La variété quotient $L(H, \alpha) = \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}/\Gamma$ est clairement un fibré en droites sur A^k . On note p la projection $L(H, \alpha) \rightarrow A^k$ et $\{x, u\}_{(H, \alpha)}$ la classe de (x, u) pour la relation $\sim_{(H, \alpha)}$ induite par Γ .

Les fonctions $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ s'appellent les multiplicateurs de $L(H, \alpha)$. Si $(e_\gamma^i)_{\gamma \in \Gamma}$, pour $i = 1, 2$, désignent les multiplicateurs de $L(H_i, \alpha_i)$, alors ceux du fibré $L(H_1, \alpha_1) \otimes L(H_2, \alpha_2)$ sont donnés par $(e_\gamma^1.e_\gamma^2)_{\gamma \in \Gamma}$, dont le type est $(H_1 + H_2, \alpha_1.\alpha_2)$ (cf (2.1)). On en déduit l'isomorphisme :

$$L(H_1, \alpha_1) \otimes L(H_2, \alpha_2) \simeq L(H_1 + H_2, \alpha_1.\alpha_2). \quad (2.3)$$

Remarquons que toute section holomorphe de $L(H, \alpha)$ est donnée par une unique fonction holomorphe sur \mathbb{C}^k vérifiant :

$$\forall z \in \mathbb{C}^k, \forall \gamma \in \Gamma, \theta(z + \gamma) = e_\gamma(x).\theta(z) \quad (2.4)$$

Les fonctions vérifiant ces identités s'appellent les fonctions thêta normalisées de type (H, α) . Notons que si $L(H, \alpha)$ est le fibré trivial, alors il existe une fonction vérifiant (2.4) ne s'annulant pas. Dans ce cas, on montre que l'on a $H = 0$ et $\alpha \equiv 1$ (cf [D], Chap IV, §1). On obtient donc, par la relation (2.3) :

Lemme 2.1.6 $L(H_1, \alpha_1) \simeq L(H_2, \alpha_2)$ si et seulement si $(H_1, \alpha_1) = (H_2, \alpha_2)$.

Il s'avère que les fibrés $L(H, \alpha)$ forment un système de représentants des classes d'isomorphismes de fibrés en droites sur A^k :

Théorème 2.1.7 (Appell-Humbert) *Tout fibré en droites L sur A^k est isomorphe à un fibré du type $L(H, \alpha)$.*

On renvoie le lecteur au livre de Debarre ([D], Chap.V, Th.5.10) pour une démonstration. Elle s'effectue en deux étapes. On commence par identifier l'ensemble des premières classes de Chern des fibrés en droites avec l'ensemble des formes hermitiennes sur \mathbb{C}^k vérifiant $\Im H(\Gamma, \Gamma) \subset \mathbb{Z}$. Il reste essentiellement à montrer que le groupe des fibrés en droites de première classe de Chern nulle est isomorphe au groupe des caractères unitaires de Γ . On conclut par un argument de suite exacte.

Observons que si L est de la forme $\sigma^*\mathcal{O}(d)$, où $\sigma : A^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ est une application holomorphe, on peut argumenter de façon beaucoup plus simple, en utilisant le résultat suivant :

Théorème 2.1.8 *Toute application holomorphe $\sigma : A^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ est induite par une application $\theta = (\theta_0, \dots, \theta_k)$ dont les coordonnées sont des fonctions thêta normalisées de même type (H, α) .*

La démonstration repose sur le fait que tout diviseur effectif sur A^k est le diviseur d'une fonction thêta (cf [D], Chap IV, §3). Ce théorème nous permet d'explicitier les morphismes de fibrés de $L(dH, \alpha^d)$ dans $\mathcal{O}(d)$ (la démonstration est analogue à celle du lemme 2.1.5-(2)) :

Lemme 2.1.9 *Avec les notations précédentes, les morphismes de fibrés ϕ de $L(dH, \alpha^d)$ dans $\mathcal{O}(d)$ induisant σ sur les bases existent, et sont de la forme $\phi\{x, u\}_{(dH, \alpha^d)} = [\theta(x), c.u]_d$, où $c \in \mathbb{C}^*$.*

On en déduit un isomorphisme :

$$\sigma^*\mathcal{O}(d) \simeq L(dH, \alpha^d)$$

en invoquant la propriété universelle du fibré image réciproque (cf le lemme 2.1.4).

Nous allons maintenant donner l'analogie du lemme 2.1.5 dans le cas d'un tore A^k . Soit $\varphi = \vec{\varphi} + \tau$ un endomorphisme de A^k . On note $\tilde{\tau}$ la translation de vecteur τ sur A^k , de sorte que $\varphi = \tilde{\tau} \circ \vec{\varphi}$ et $\varphi^*L(H, \alpha) = \vec{\varphi}^* \tilde{\tau}^*L(H, \alpha)$. Etant donné un type (H, α) , on définit H_φ et α_φ par :

$$\begin{aligned} H_\varphi(w, w') &:= H(\vec{\varphi}w, \vec{\varphi}w') \\ \alpha_\varphi(\gamma) &:= \alpha(\vec{\varphi}\gamma)e^{2i\pi\Im H(\vec{\varphi}\gamma, \tau)} \end{aligned}$$

Notons que α_φ est bien définie ($\vec{\varphi}(\Gamma) \subset \Gamma$) et prend ses valeurs dans \mathbb{S}^1 . D'autre part, puisque l'on a $\alpha_\varphi(\gamma_1 + \gamma_2) = \alpha_\varphi(\gamma_1)\alpha_\varphi(\gamma_2)(-1)^{\Im H_\varphi(\gamma_1, \gamma_2)}$, le couple $(H_\varphi, \alpha_\varphi)$ est encore un type. On note $(e_\gamma^\varphi)_{\gamma \in \Gamma}$ ses multiplicateurs.

Lemme 2.1.10

1. $\varphi^*L(H, \alpha)$ est isomorphe à $L(H_\varphi, \alpha_\varphi)$
2. Il existe des morphismes homogènes $L(H, \alpha) \rightarrow L(H, \alpha)$ de degré d induisant φ sur A^k si et seulement si $(H_\varphi, \alpha_\varphi) = (dH, \alpha^d)$. Ils sont alors de la forme $\{x, u\}_{(H, \alpha)} \mapsto \{\varphi x, c.e^{\pi H(\tau, \vec{\varphi}x)}.u^d\}_{(H, \alpha)}$, où $c \in \mathbb{C}^*$.

DÉMONSTRATION : Pour le premier point, on utilise la propriété universelle du fibré image réciproque (cf lemme 2.1.4). A cet effet, on montre que l'application :

$$\chi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^k \times \mathbb{C} \\ (x, u) & \longmapsto & (\varphi x, e^{\pi H(\tau, \vec{\varphi}x)}.u) \end{array}$$

induit un morphisme de fibré entre $L(H_\varphi, \alpha_\varphi)$ et $L(H, \alpha)$. On a

$$\chi_1(x + \gamma, e_\gamma^\varphi(x).u) = (\varphi x + \vec{\varphi}\gamma, e_\gamma^\varphi(x).e^{\pi H(\tau, \vec{\varphi}\gamma)}.e^{\pi H(\tau, \vec{\varphi}x)}.u)$$

Il suffit donc de montrer $e_\gamma^\varphi(x).e^{\pi H(\tau, \vec{\varphi}\gamma)} = e_{\vec{\varphi}\gamma}(\varphi x)$:

$$\begin{aligned} e_\gamma^\varphi(x).e^{\pi H(\tau, \vec{\varphi}\gamma)} &= \alpha(\vec{\varphi}\gamma).e^{2i\pi\Im H(\vec{\varphi}\gamma, \tau)}.e^{\pi[H(\vec{\varphi}\gamma, \vec{\varphi}x) + \frac{1}{2}H(\vec{\varphi}\gamma, \vec{\varphi}\gamma)]}.e^{\pi H(\tau, \vec{\varphi}\gamma)} \\ &= \alpha(\vec{\varphi}\gamma).e^{\pi[H(\vec{\varphi}\gamma, \vec{\varphi}x) + \frac{1}{2}H(\vec{\varphi}\gamma, \vec{\varphi}\gamma)]}.e^{\pi H(\vec{\varphi}\gamma, \tau)} \\ &= \alpha(\vec{\varphi}\gamma).e^{\pi[H(\vec{\varphi}\gamma, \vec{\varphi}x + \tau) + \frac{1}{2}H(\vec{\varphi}\gamma, \vec{\varphi}\gamma)]} = e_{\vec{\varphi}\gamma}(\varphi x) \end{aligned}$$

Montrons le deuxième point. Lorsque $d = 1$, la propriété universelle du fibré image réciproque (cf lemme 2.1.4), l'unicité du type et le premier point entraînent la condition nécessaire. Lorsque $d \geq 2$, on remarque que tout morphisme homogène $L \rightarrow L$ de degré d donne naissance à un morphisme de fibré $L^{\otimes d} \rightarrow L$ lorsque l'on supprime la puissance d dans les fibres. Pour la condition suffisante et les expressions annoncées, on vérifie que l'application :

$$\chi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^k \times \mathbb{C} \\ (x, u) & \longmapsto & (\varphi x, e^{\pi H(\tau, \vec{\varphi}x)}.u^d) \end{array}$$

passse au quotient pour $\sim_{(H, \alpha)}$ à la source et au but. On a

$$\chi_2(x + \gamma, e_\gamma(x).u) = (\varphi x + \vec{\varphi}\gamma, e^{\pi H(\tau, \vec{\varphi}x + \vec{\varphi}\gamma)}.e_\gamma^d(x).u^d)$$

Donc, il suffit de montrer :

$$e^{\pi H(\tau, \vec{\varphi}\gamma)}.e_\gamma^d(x) = e_{\vec{\varphi}\gamma}(\varphi x). \quad (2.5)$$

Puisque $(H_\varphi, \alpha_\varphi) = (dH, \alpha^d)$, le membre de gauche de (2.5) s'écrit :

$$\begin{aligned} e^{\pi H(\tau, \vec{\varphi}\gamma)}.e_\gamma^d(x) &= e^{\pi H(\tau, \vec{\varphi}\gamma)}.\alpha(\vec{\varphi}\gamma).e^{2i\pi\Im H(\vec{\varphi}\gamma, \tau)}.e^{\pi[H(\vec{\varphi}\gamma, \vec{\varphi}x) + \frac{1}{2}H(\vec{\varphi}\gamma, \vec{\varphi}\gamma)]} \\ &= \alpha(\vec{\varphi}\gamma).e^{\pi[H(\vec{\varphi}\gamma, \vec{\varphi}x + \tau) + \frac{1}{2}H(\vec{\varphi}\gamma, \vec{\varphi}\gamma)]} \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration du lemme. \square

Il est possible d'expliciter une métrique hermitienne sur le fibré $L(H, \alpha)$, grâce à sa structure d'espace quotient. On vérifie que la fonction suivante est invariante par l'action de Γ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^k \times \mathbb{C} \\ (x, u) & \longmapsto & e^{-\frac{\pi}{2}H(x, x)}|u| \end{array}$$

La métrique qu'elle induit sur $L(H, \alpha)$ est notée q .

Nous terminons cette section en exhibant des trivialisations du fibré $L(H, \alpha)$. Elles seront utiles pour décrire les singularités du bord du bassin d'attraction des exemples de Lattès. Soit U un ouvert de \mathbb{C}^k , disjoint de ses translatés par l'action de Γ (U sera dit Γ -petit). L'application :

$$\Gamma_U : \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (U + \gamma) \rightarrow \Gamma$$

qui à un point x associe l'unique élément $\gamma \in \Gamma$ vérifiant $x + \gamma \in U$ est alors bien définie. Pour toute fonction holomorphe ϵ ne s'annulant pas sur U , l'application :

$$\psi_{(U,\epsilon)} : \begin{array}{ccc} p^{-1} \circ \Pi(U) & \longrightarrow & \Pi(U) \times \mathbb{C} \\ \{x, u\}_{(H,\alpha)} & \longmapsto & (\Pi(x), \epsilon(x + \Gamma_U(x)).e_{\Gamma_U(x)}(x).u) \end{array}$$

est une trivialisatation de $L(H, \alpha)$ au dessus de $\Pi(U)$. Cela provient du fait que :

$$\Lambda : \begin{array}{ccc} \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (U + \gamma) \times \mathbb{C} & \longrightarrow & U \times \mathbb{C} \\ (x, u) & \longmapsto & (x + \Gamma_U(x), \epsilon(x + \Gamma_U(x)).e_{\Gamma_U(x)}(x).u) \end{array}$$

passse au quotient modulo $\sim_{(H,\alpha)}$. En effet, les identités (2.2) et

$$\gamma + \Gamma_U(x + \gamma) = \Gamma_U(x)$$

donnent pour tout $\gamma \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \Lambda(x + \gamma, e_\gamma(x).u) &= (x + \gamma + \Gamma_U(x + \gamma), \\ &\quad \epsilon(x + \gamma + \Gamma_U(x + \gamma)).e_{\Gamma_U(x + \gamma)}(x + \gamma).e_\gamma(x).u) \\ &= (x + \gamma + \Gamma_U(x + \gamma), \epsilon(x + \gamma + \Gamma_U(x + \gamma)).e_{\gamma + \Gamma_U(x + \gamma)}(x).u) \\ &= (x + \Gamma_U(x), \epsilon(x + \Gamma_U(x)).e_{\Gamma_U(x)}(x).u) \end{aligned}$$

2.2 Désingularisation du bord du bassin d'attraction

Soit $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ un exemple de Lattès de degré $d \geq 2$ et $F : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1}$ un relevé polynomial de f . On note G_F la fonction de Green $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{d^p} \log \|F^p\|$, Ω_F le bassin d'attraction de l'origine de F et T le courant de Green de f (cf la section 1.1.2). Par définition, on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A^k & \xrightarrow{D} & A^k \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathbb{P}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^k \end{array}$$

où σ est une application de passage au quotient par un groupe G d'automorphismes de A^k , et D une application affine dilatante. Par la suite, on confondra D et un de ses relevés $\vec{D} + \tau$ à \mathbb{C}^k . On note \vec{G} le groupe des parties linéaires des éléments de G (cf la section A.1).

Soit $(-H, \alpha^{-1})$ le type des fonctions thêta normalisées $(\theta_0, \dots, \theta_k)$ qui induisent l'application σ (cf le théorème 2.1.8). D'après la section précédente, on a $\sigma^* \mathcal{O}(-1) \simeq L(H, \alpha)$. Notons $\tilde{\theta}$ le morphisme de fibré :

$$\tilde{\theta} : \begin{array}{ccc} L(H, \alpha) & \longrightarrow & \mathcal{O}(-1) \\ \{x, u\}_{(H,\alpha)} & \longmapsto & [\theta(x), u]_{-1} \end{array}$$

Remarquons que la forme hermitienne $-H$ est définie positive, puisque σ est à fibres finies (cf [D], Chap.IV, Cor.3.5). Ainsi, une surface de niveau de la métrique q (cf la section 2.1.3) est localement biholomorphe à un ouvert de la sphère unité de \mathbb{C}^{k+1} (on dira qu'elle est sphérique). En effet : soit $\{x_0, u_0\}_{(H, \alpha)} \in \{q = c\}$, U_{x_0} un voisinage de x_0 dans \mathbb{C}^k et \log une détermination du logarithme en $\frac{u_0}{c} \neq 0$. Si $v = \frac{2}{\pi} \log(\frac{u}{c})$, l'équation de $\{q = c\}$ s'écrit :

$$\{(x, v) \in U_{x_0} \times (\mathbb{C}, v_0), \Re(v) - H(x, x) = 0\}$$

On reconnaît alors l'équation d'un ouvert de la sphère unité de \mathbb{C}^{k+1} , dans sa version non bornée (cf [R], Chap.2, §3). Remarquons qu'une telle hypersurface est compacte puisqu'elle est fibrée en cercles au dessus de A^k .

Le lemme qui suit est crucial (les notations sont celles de la partie 2.1.3) :

Lemme 2.2.1

1. $(H_D, \alpha_D) = (dH, \alpha^d)$
2. Pour tout $g \in G$, $(H_g, \alpha_g) = (H, \alpha)$.

DÉMONSTRATION : Montrons le premier point. La relation $\sigma \circ D = f \circ \sigma$ entraîne $D^* \sigma^* \mathcal{O}(-1) = \sigma^* f^* \mathcal{O}(-1)$. Le lemme 2.1.5 et la relation (2.3) impliquent :

$$\sigma^* f^* \mathcal{O}(-1) \simeq \sigma^* \mathcal{O}(-1)^{\otimes d} \simeq L(H, \alpha)^{\otimes d} \simeq L(dH, \alpha^d)$$

D'autre part, le lemme 2.1.10 donne :

$$D^* \sigma^* \mathcal{O}(-1) \simeq D^* L(H, \alpha) \simeq L(H_D, \alpha_D)$$

L'unicité du type (cf le lemme 2.1.6) permet de conclure.

Passons au second point. On a d'une part $g^* \sigma^* \mathcal{O}(-1) = \sigma^* \mathcal{O}(-1)$ grâce à l'identité $\sigma \circ g = \sigma$. On en déduit $g^* L(H, \alpha) \simeq L(H, \alpha)$ (cf la section 2.1.1). D'autre part, on a $L(H_g, \alpha_g) \simeq g^* L(H, \alpha)$ d'après le lemme 2.1.10). La conclusion provient à nouveau de l'unicité du type. \square

La proposition suivante montre que le bord du bassin Ω_F se désingularise en une hypersurface sphérique de $L(H, \alpha)$. L'application Ψ désigne le biholomorphisme entre $\mathcal{O}(-1)^-$ et $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ introduit à la section 2.1.2.

Proposition 2.2.2 *Il existe un morphisme homogène $\mathcal{D} : L(H, \alpha) \rightarrow L(H, \alpha)$ de*

degré d et F un relevé polynomial de f tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 L(H, \alpha)^- & \xrightarrow{D} & L(H, \alpha)^- & & \\
 \downarrow \tilde{\sigma} & \searrow & \downarrow \tilde{\sigma} & & \searrow \\
 & A^k & \xrightarrow{D} & A^k & \\
 \downarrow \sigma & \downarrow \sigma & \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\
 \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} & & \\
 \downarrow \pi & \downarrow \pi & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\
 \mathbb{P}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^k & &
 \end{array}$$

où $\tilde{\sigma}$ désigne l'application $\Psi \circ \tilde{\theta}$. Quitte à normaliser la métrique q , on a $e^{G_F \circ \tilde{\sigma}} = q$. On en déduit $\tilde{\sigma}\{q = 1\} = \partial\Omega_F$ et l'égalité $\sigma^*T = -\frac{\pi}{2}dd^c H$.

DÉMONSTRATION : Les lemmes 2.1.5, 2.1.10 et 2.2.1 assurent l'existence des morphismes homogènes de degré d suivants, où $c \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D} : \{x, u\}_{(H, \alpha)} &\longmapsto \{Dx, e^{\pi H(\tau, \vec{D}x)} \cdot u^d\}_{(H, \alpha)} \\
 \mathcal{F}_c : [z, v]_{-1} &\longmapsto [F(z), c \cdot v^d]_{-1}
 \end{aligned}$$

Nous allons montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}^*$ tel que $\tilde{\theta} \circ \mathcal{D} = \mathcal{F}_c \circ \tilde{\theta}$. Cela revient à établir :

$$\exists c \in \mathbb{C}^*, \forall x \in \mathbb{C}^k, c \cdot F \circ \theta = \theta \circ D \cdot e^{\pi H(\tau, \vec{D}x)} \quad (2.6)$$

L'identité $\pi \circ \theta \circ D = \pi \circ F \circ \theta$ détermine une unique fonction holomorphe non nulle $c = c(x)$ vérifiant (2.6) sur \mathbb{C}^k . Le calcul suivant, où e_γ est de type (H, α) , montre que c est une fonction Γ -périodique.

$$\begin{aligned}
 c(x + \gamma) \cdot F \circ \theta(x + \gamma) &= \theta \circ D(x + \gamma) \cdot e^{\pi H(\tau, \vec{D}(x + \gamma))} \\
 &= e_{\vec{D}\gamma}^{-1}(Dx) \cdot \theta \circ D(x) \cdot e^{\pi H(\tau, \vec{D}x)} \cdot e^{\pi H(\tau, \vec{D}\gamma)} \\
 &= e_{\vec{D}\gamma}^{-1}(Dx) \cdot c(x) \cdot F \circ \theta(x) \cdot e^{\pi H(\tau, \vec{D}\gamma)} \\
 &= e_{\vec{D}\gamma}^{-1}(Dx) \cdot c(x) \cdot F \circ \theta(x + \gamma) \cdot e_\gamma^d(x) \cdot e^{\pi H(\tau, \vec{D}\gamma)} \\
 &= c(x) \cdot F \circ \theta(x + \gamma)
 \end{aligned}$$

La dernière égalité provient de l'identité (2.5). On en déduit que $c(x + \gamma) = c(x)$, puisque au moins une des composantes de F est non nulle. La fonction c est donc constante, d'après le théorème de Liouville. On supposera qu'elle vaut 1, quitte à

changer F en $c.F$. On obtient donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 L(H, \alpha) & \xrightarrow{\mathcal{D}} & L(H, \alpha) & & \\
 \downarrow \tilde{\theta} & \searrow & \downarrow \tilde{\theta} & \searrow & \\
 \mathcal{O}(-1) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{O}(-1) & & \\
 \downarrow \sigma & \searrow & \downarrow \sigma & \searrow & \\
 \mathbb{P}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^k & & \\
 \uparrow & \swarrow & \uparrow & \swarrow & \\
 A^k & \xrightarrow{D} & A^k & & \\
 \uparrow & \swarrow & \uparrow & \swarrow & \\
 L(H, \alpha) & \xrightarrow{\mathcal{D}} & L(H, \alpha) & &
 \end{array}$$

Nous allons à présent le modifier pour obtenir celui annoncé. A cet effet, notons que la section nulle du fibré $\mathcal{O}(-1)$ (resp. $L(H, \alpha)$) est invariante par \mathcal{F} (resp. \mathcal{D}), et que le morphisme de fibré $\tilde{\theta}$ envoie la section nulle de $L(H, \alpha)$ sur celle de $\mathcal{O}(-1)$. On peut donc remplacer $\mathcal{O}(-1)$ (resp. $L(H, \alpha)$) par $\mathcal{O}(-1)^-$ (resp. $L(H, \alpha)^-$) dans le diagramme précédent.

De plus, le calcul suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{\Psi^{-1}} & \mathcal{O}(-1)^- & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{O}(-1)^- & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \\
 z & \mapsto & [z, 1]_{-1} & \mapsto & [F(z), 1^d]_{-1} & \mapsto & F(z)
 \end{array}$$

où Ψ désigne le biholomorphisme entre $\mathcal{O}(-1)$ et $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ introduit à la partie 2.1.2, montre l'identité $\Psi \circ \mathcal{F} \circ \Psi^{-1} = F$. Ainsi, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{O}(-1)^- & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{O}(-1)^- & & \\
 \downarrow \Psi & \searrow & \downarrow \Psi & \searrow & \\
 \mathbb{P}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^k & & \\
 \uparrow \pi & \swarrow & \uparrow \pi & \swarrow & \\
 \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} & &
 \end{array}$$

et permet de construire le diagramme de l'énoncé.

On montre maintenant que l'on dispose de l'identité $q \circ \mathcal{D} = q^d$, quitte à normaliser la métrique q . Notons q_δ pour $\delta.q$. L'égalité $H_D = dH$ (cf lemme 2.2.1) entraîne :

$$\begin{aligned}
 q_\delta \circ \mathcal{D}\{x, u\} &= \delta \cdot e^{-\frac{\pi}{2}H(\vec{D}x+\tau, \vec{D}x+\tau)} \left| e^{\pi[H(\vec{D}x, \tau) - 2i\Im H(\vec{D}x, \tau)]} \cdot |u|^d \right| \\
 &= \delta \cdot e^{-\frac{\pi}{2}H(\vec{D}x+\tau, \vec{D}x+\tau)} \left| e^{\pi H(\tau, \vec{D}x)} \cdot |u|^d \right| \\
 &= \delta \cdot e^{-\frac{\pi}{2}[H(\vec{D}x, \vec{D}x) + 2\Re H(\vec{D}x, \tau) + H(\tau, \tau)]} \cdot e^{\pi \Re H(\vec{D}x, \tau)} \cdot |u|^d \\
 &= \delta \cdot e^{-\frac{\pi}{2}dH(x, x)} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}H(\tau, \tau)} \cdot |u|^d
 \end{aligned}$$

On vérifie que cette expression est égale à :

$$q_\delta^d\{x, u\} = \left(\delta \cdot e^{-\frac{\pi}{2}H(x, x)} \cdot |u| \right)^d$$

lorsque δ est égal à $(e^{-\frac{\pi}{2}H(\tau,\tau)})^{\frac{1}{d-1}}$.

Montrons l'identité $e^{G_F \circ \tilde{\sigma}} = q$. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{C}^{k+1} . Puisque A^k est une variété compacte, il existe une constante C telle que $\frac{1}{C}.q \leq \|\tilde{\sigma}\| \leq C.q$. Les identités $q \circ \mathcal{D}^p = q^{d^p}$ et $\tilde{\sigma} \circ \mathcal{D}^p = F^p \circ \tilde{\sigma}$ montrent que l'on a :

$$G_F \circ \tilde{\sigma} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{d^p} \cdot \log \|F^p \circ \tilde{\sigma}\| =$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{d^p} \cdot \log \|\tilde{\sigma} \circ \mathcal{D}^p\| = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{d^p} \cdot \log q \circ \mathcal{D}^{d^p} = \log q$$

Finalement, on déduit de l'expression de $\tilde{\sigma}$ et de l'homogénéité de G_F l'identité :

$$G_F \circ \theta(x) = \log \delta - \frac{\pi}{2} H(x, x)$$

La relation de commutation $\pi \circ \theta = \sigma \circ \Pi$ entraîne alors $\sigma^* T = -\frac{\pi}{2} dd^c H$. \square

Remarque 2.2.3 *L'égalité $\sigma^* T = -\frac{\pi}{2} dd^c H$ permet de retrouver le caractère défini positif de la forme hermitienne $-H$. En effet, $-H$ est positive puisque T est un courant positif. Si cette forme était dégénérée, T aurait un potentiel local maximal en dehors de l'ensemble algébrique $\sigma(\text{Crit } \sigma)$. La mesure de probabilité $\mu = T^k$ serait alors portée par $\sigma(\text{Crit } \sigma)$, ce qui est impossible d'après l'inégalité de Chern-Levine-Nirenberg (cf la proposition 1.1.12).*

2.3 Description du bord du bassin d'attraction

On reprend les notations de la section précédente. On note :

$$\mathcal{C} := \{\{x, u\}_{(H,\alpha)}, \dot{x} \in \text{Crit}(\sigma)\}$$

l'ensemble critique du morphisme de fibré $\tilde{\sigma} = \Psi \circ \tilde{\theta}$ et $\mathcal{S} = \tilde{\sigma}(\mathcal{C})$ ses valeurs critiques. Ainsi, l'application $\tilde{\sigma} : L(H, \alpha) \setminus \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \mathcal{S}$ est un revêtement fini, et $\partial\Omega_F = \tilde{\sigma}\{q = 1\}$ est sphérique en dehors de \mathcal{S} (cf le début de la section 2.2). Cette partie est destinée à décrire le bord de Ω_F aux points de \mathcal{S} .

Le lemme suivant montre que le bord de Ω_F s'identifie au quotient de $\{q = 1\}$ par un groupe fini d'automorphismes de $L(H, \alpha)$:

Lemme 2.3.1 *Il existe un groupe fini \tilde{G} d'automorphismes du fibré $L(H, \alpha)$ tel que l'application :*

$$\rho : \begin{array}{ccc} \tilde{G} & \longrightarrow & G \\ \tilde{g} & \longmapsto & \rho(\tilde{g}) \end{array}$$

qui associe à \tilde{g} l'automorphisme qu'il induit sur A^k , soit un isomorphisme de groupes. De plus, l'action de \tilde{G} laisse invariant les niveaux de la métrique q , et l'application $\tilde{\theta}$ (cf le début de la section 2.2) s'identifie au passage au quotient de $L(H, \alpha)$ par \tilde{G} .

DÉMONSTRATION : D'après le lemme 2.1.4, il existe un isomorphisme $\eta : L(H, \alpha) \rightarrow \sigma^*\mathcal{O}(-1)$ vérifiant $\tilde{\theta} = \hat{\sigma}_{\mathcal{O}(-1)} \circ \eta$. Par définition (cf la section 2.1.1), $\hat{\sigma}_{\mathcal{O}(-1)}$ est l'application de passage au quotient de $\sigma^*\mathcal{O}(-1)$ par le groupe $\hat{G} := \{\hat{g}_{\sigma^*\mathcal{O}(-1)} : \sigma^*\mathcal{O}(-1) \rightarrow \sigma^*\mathcal{O}(-1), g \in G\}$. Ainsi, $\tilde{\theta}$ est l'application de passage au quotient de $L(H, \alpha)$ par le groupe conjugué $\tilde{G} := \eta^{-1} \circ \hat{G} \circ \eta$. En particulier, $\tilde{\theta}$ est invariante par l'action de \tilde{G} . L'égalité $e^{G_F \circ \Psi \circ \tilde{\theta}} = q$ (cf la proposition 2.2.2) montre alors que les surfaces de niveau de q sont invariantes par \tilde{G} . \square

Dans toute la suite, $\{x_0, u_0\}_{(H, \alpha)}$ désigne un point de \mathcal{C} . Nous allons étudier le bord de Ω_F en $z_0 := \tilde{\sigma}\{x_0, u_0\}_{(H, \alpha)}$.

Soit G_0 le stabilisateur de \tilde{x}_0 et \vec{G}_0, \tilde{G}_0 , les sous groupes de \vec{G}, \tilde{G} correspondants (cf le lemme 2.3.1). Quitte à effectuer un changement de coordonnées linéaire, on peut supposer que \vec{G} est un sous groupe de $\mathbb{U}_k(\mathbb{C})$. Soit $U_{x_0} = B(x_0, \nu)$ une boule euclidienne Γ -petite (i.e. disjointe de ses translatées par les éléments non nuls de Γ), telle que les boules $g \circ \Pi(U_{x_0})$ soient deux à deux disjointes lorsque $g \notin G_0$.

Vérifions que $\Pi(U_{x_0})$ est invariant par G_0 . Soit $g := \vec{g} + \kappa \in G_0$, et $\gamma_g := \Gamma_{U_{x_0}}(gx_0)$ (cf la section 2.1.3), de sorte que :

$$\forall t \in B(0, \nu), g(x_0 + t) = \vec{g}x_0 + \vec{g}t + \kappa = x_0 + \vec{g}t - \gamma_g$$

On a donc $g(U_{x_0}) = U_{x_0} - \gamma_g$, car $\vec{g} \in \mathbb{U}_k(\mathbb{C})$, et l'ouvert $\Pi(U_{x_0})$ est invariant par G_0 . Puisque U_{x_0} est Γ -petit, on a aussi :

$$\forall t \in B(0, \nu), \Gamma_{U_{x_0}}(g(x_0 + t)) = \Gamma_{U_{x_0}}(gx_0) = \gamma_g \quad (2.7)$$

D'après le lemme 2.3.1, étudier le bord de Ω_F en $z_0 := \tilde{\sigma}\{x_0, u_0\}_{(H, \alpha)}$ revient à étudier le quotient de l'hypersurface $\{q = 1\}$ au dessus de $\Pi(U_{x_0})$ par le groupe \tilde{G}_0 . On exhibe pour cela des trivialisations dans lesquelles \tilde{G}_0 induit l'identité dans les fibres (on dit qu'elles sont \tilde{G}_0 -équivariantes).

Lemme 2.3.2 *La trivialisations $\psi_{(U_{x_0}, \epsilon)}$ (cf la section 2.1.3) est \tilde{G}_0 -équivariante si et seulement si ϵ est de la forme $\epsilon_0 \cdot m$, où ϵ_0 est la fonction :*

$$\epsilon_0 : \begin{array}{ccc} U_{x_0} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x_0 + t & \longmapsto & e^{-\pi H(x_0, t)} \end{array}$$

et $m : t \mapsto m(x_0 + t)$ est holomorphe non nulle sur $B(0, \nu)$ et \vec{G}_0 -invariante.

DÉMONSTRATION : Rappelons que $\psi_{(U_{x_0}, \epsilon)}$ a pour expression :

$$\psi_{(U_{x_0}, \epsilon)} : \begin{array}{ccc} p^{-1} \circ \Pi(U_{x_0}) & \longrightarrow & \Pi(U_{x_0}) \times \mathbb{C} \\ \{x, u\}_{(H, \alpha)} & \longmapsto & \left(\tilde{x}, \epsilon(x + \Gamma_{U_{x_0}}(x)).\epsilon_{\Gamma_{U_{x_0}}(x)}(x).u \right) \end{array}$$

Afin d'alléger l'écriture, on remplacera $\psi_{(U_{x_0}, \epsilon)}$ par ψ . Cette trivialisations est équivariante si et seulement si on a les identités suivantes sur $p^{-1} \circ \Pi(U_{x_0})$:

$$\forall g \in G_0, \psi \circ \tilde{g}\{x_0 + t, u\}_{(H, \alpha)} = (g(\tilde{x}_0 + t), \epsilon(x_0 + t).u) \quad (2.8)$$

Fixons $g \in G_0$. Le lemme 2.1.10 donne l'expression de l'automorphisme \tilde{g} du fibré $L(H, \alpha)$, induit par $g = \vec{g} + \kappa$ sur la base : il existe $\rho(g) \in \mathbb{C}$ tel que

$$\tilde{g} : \begin{array}{ccc} L(H, \alpha) & \longrightarrow & L(H, \alpha) \\ \{x, u\}_{(H, \alpha)} & \longmapsto & \{g(x), \rho(g).e^{\pi H(\kappa, \vec{g}x)}.u\}_{(H, \alpha)} \end{array}$$

Ainsi, l'équation (2.8) que l'on doit vérifier devient (on confond l'application affine g avec l'automorphisme qu'elle induit sur A^k) :

$$\psi \circ \{g(x_0 + t), \rho(g).e^{\pi H(\kappa, \vec{g}(x_0+t))}.u\}_{(H, \alpha)} = (g(x_0 + t), \epsilon(x_0 + t).u) \quad (2.9)$$

La ligne (2.7) fournit $\gamma_g = \Gamma_{U_{x_0}}(g(x_0 + t)) = \Gamma_{U_{x_0}}(g(x_0))$. Donc, par définition de ψ , le membre de gauche de (2.9) est égal à :

$$(g(x_0 + t), e_{\gamma_g}(x_0 + \vec{g}t - \gamma_g).\epsilon(x_0 + \vec{g}t).\rho(g).e^{\pi H(\kappa, \vec{g}(x_0+t))}.u)$$

La condition nécessaire et suffisante d'équivariance (2.9) s'écrit alors :

$$\forall t \in B(0, \nu), \forall g \in G_0, \frac{\epsilon(x_0 + t)}{\epsilon(x_0 + \vec{g}t)} = e_{\gamma_g}(x_0 + \vec{g}t - \gamma_g).\rho(g).e^{\pi H(\kappa, \vec{g}(x_0+t))} \quad (2.10)$$

Vérifions que l'on a :

$$\forall g \in G_0, e_{\gamma_g}(x_0 - \gamma_g).\rho(g).e^{\pi H(\kappa, \vec{g}x_0)} = 1 \quad (2.11)$$

L'identité $\tilde{\theta} = \tilde{\theta} \circ \tilde{g}$ (cf le lemme 2.3.1) entraîne (avec e_γ de type (H, α) et $\tilde{\theta}$ de type $(-H, \alpha^{-1})$) :

$$\begin{aligned} [\theta(x_0 + t), u]_{-1} &= [\theta(g(x_0 + t)), \rho(g).e^{\pi H(\kappa, \vec{g}(x_0+t))}]_{-1} \\ &= [\theta(x_0 + \vec{g}t - \gamma_g), \rho(g).e^{\pi H(\kappa, \vec{g}(x_0+t))}]_{-1} \\ &= [\theta(x_0 + \vec{g}t), e_{-\gamma_g}^{-1}(x_0 + \vec{g}t).\rho(g).e^{\pi H(\kappa, \vec{g}(x_0+t))}]_{-1} \end{aligned}$$

Comme $e_{-\gamma_g}(x_0).e_{\gamma_g}(x_0 - \gamma_g) = e_0(x_0) = 1$, on évalue en $t = 0$ pour obtenir (2.11). Ainsi, le membre de droite de (2.10) se simplifie. Il est égal à :

$$\begin{aligned} \frac{e_{\gamma_g}(x_0 + \vec{g}t - \gamma_g).\rho(g).e^{\pi H(\kappa, \vec{g}(x_0+t))}}{e_{\gamma_g}(x_0 - \gamma_g).\rho(g).e^{\pi H(\kappa, \vec{g}x_0)}} &= \frac{e^{\pi[H(\gamma_g, x_0 + \vec{g}t - \gamma_g)]}}{e^{\pi[H(\gamma_g, x_0 - \gamma_g)]}}.e^{\pi H(\kappa, \vec{g}t)} \\ &= e^{\pi H(\gamma_g + \kappa, \vec{g}t)} \\ &= e^{\pi H(x_0 - \vec{g}x_0, \vec{g}t)} \\ &= e^{-\pi H(\vec{g}x_0, \vec{g}t)}.e^{\pi H(x_0, \vec{g}t)} \\ &= e^{-\pi H(x_0, t)}.e^{\pi H(x_0, \vec{g}t)} \end{aligned}$$

La dernière égalité provient de l'invariance de H par \vec{G} (cf lemme 2.2.1). Ainsi, la trivialisations ψ est équivariante si et seulement si :

$$\forall t \in B(0, \nu), \forall g \in G_0, \frac{\epsilon(x_0 + t)}{\epsilon(x_0 + \vec{g}t)} = \frac{e^{-\pi H(x_0, t)}}{e^{-\pi H(x_0, \vec{g}t)}} \quad (2.12)$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que la fonction $\epsilon_0(x_0 + t) = e^{-\pi H(x_0, t)}$ vérifie cette équation et que le rapport de deux solutions est une fonction holomorphe non nulle $m : t \rightarrow m(x_0 + t)$ sur $B(0, \nu)$, invariante par \vec{G}_0 . \square

Désormais, nous travaillons avec la trivialisatation équivariante ψ donnée par ϵ_0 et la métrique q donnée par la proposition 2.2.2. Le calcul suivant :

$$q(x_0 + t, \epsilon_0(x_0 + t)^{-1}.v) = \delta.e^{-\frac{\pi}{2}H(x_0+t, x_0+t)}.e^{\pi\Re H(x_0, t)}|v| = \delta.e^{-\frac{\pi}{2}H(x_0, x_0)}.e^{-\frac{\pi}{2}H(t, t)}|v|$$

montre que, quitte à identifier $\Pi(U_{x_0})$ avec U_{x_0} , et effectuer une translation de vecteur x_0 , l'ensemble $\{q = 1\}$ au dessus de $\Pi(U_{x_0})$ s'écrit dans la trivialisatation ψ :

$$\{(t, v) \in B(0, \nu) \times (\mathbb{C}, v_0), \delta_0.e^{-\frac{\pi}{2}H(t, t)}.|v| = 1\}$$

où $\delta_0 := \delta.e^{-\frac{\pi}{2}H(x_0, x_0)}$ et $v_0 := u_0.\epsilon_0(x_0)$. Puisque dans ces coordonnées, l'action de \vec{G}_0 s'identifie à celle de \vec{G}_0 sur $B(0, \nu)$ (cf le lemme 2.3.2), le bord de Ω_F au voisinage de z_0 s'écrit :

$$\partial\Omega_F = \{(\tilde{t}, v) \in B(0, \nu)/\vec{G}_0 \times (\mathbb{C}, v_0), \delta_0.e^{-\frac{\pi}{2}H(\tilde{t}, \tilde{t})}.|v| = 1\}$$

où \tilde{t} désigne l'image de t dans $B(0, \nu)/\vec{G}_0$.

Il s'agit maintenant de paramétrer ce quotient. Remarquons pour cela que la singularité $B(0, \nu)/\vec{G}_0$ est lisse. En effet, celle-ci est isomorphe à $\Pi(U_{x_0})/G_0$, qui est un ouvert du quotient lisse $A^k/G \simeq \mathbb{P}^k$. Ainsi, d'après le lemme A.1.2, il existe des polynômes homogènes (P_1, \dots, P_k) invariants par \vec{G}_0 et algébriquement indépendants, ainsi qu'un voisinage de l'origine V_0 , tels que l'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} B(0, \nu)/\vec{G}_0 & \longrightarrow & V_0 \\ \tilde{t} & \longmapsto & y = (P_1, \dots, P_k)(\tilde{t}) \end{array}$$

soit un biholomorphisme. L'équation de $\partial\Omega_F$ en $z_0 = \tilde{\sigma}\{x_0, u_0\}$ devient :

$$\partial\Omega_F = \{(y, v) \in V_0 \times (\mathbb{C}, v_0), \delta_0.e^{-\frac{\pi}{2}H(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(y))}.|v| = 1\}$$

Notons que l'on a $|\delta_0.v_0| = 1$. Soit \log une détermination du logarithme au voisinage de $\delta_0.v_0$. En posant $w := \frac{2}{\pi}(\log(\delta_0.v) - \log(\delta_0.v_0))$, on obtient :

$$\partial\Omega_F = \{(y, w) \in V_0 \times (\mathbb{C}, 0), \Re(w) - H(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(y)) = 0\}$$

qui est l'expression annoncée. On a ainsi complètement décrit le bord de Ω_F .

2.4 Un exemple de singularité

Nous donnons ici, à titre d'exemple, une équation de la singularité du bord de Ω_F en $z_0 = \tilde{\sigma}\{0, u_0\}$, pour la situation de Lattès U (cf partie A.2.3). Le tore A^2 est alors égal au produit $A \times A$, et le groupe G est d'ordre 8, constitué des automorphismes :

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après le théorème 3.13 de [F], une base de $\mathbb{C}[X, Y]^G$ consiste en la donnée de deux polynômes homogènes (P, Q) dont la jacobienne n'est pas identiquement nulle, et tels que le produit de leur degré soit égal au cardinal du groupe G . Puisque les polynômes $P(X, Y) = X^2 + Y^2$ et $Q(X, Y) = X^2 Y^2$ vérifient ces conditions, on peut prendre pour Φ l'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^2, 0)/G & \rightarrow & (\mathbb{C}^2, 0) \\ (X, Y) & \mapsto & (\theta_1 = X^2 + Y^2, \theta_2 = X^2 Y^2) \end{array}$$

Il est facile de trouver l'inverse de Φ . En effet, les relations coefficients-racines d'un polynôme du second degré fournissent :

$$X^2, Y^2 \in \left\{ \frac{\theta_1 \pm \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2} \right\}$$

D'autre part, on vérifie que la forme H est un multiple de la forme standard, car elle est invariante par G (cf lemme 2.2.1).

Une équation du bord de Ω_F en z_0 s'écrit donc :

$$\partial\Omega_F = \left\{ (\theta, v) \in (\mathbb{C}^2, 0) \times (\mathbb{C}, 0), \left| \theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2} \right| + \left| \theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2} \right| = \Re(v) \right\}$$

Annexe A

Exemples de Lattès en dimension 2

A.1 Etude de l'espace analytique A^k/G

Soit A^k un tore complexe de dimension k et G un groupe fini d'automorphismes de A^k . On munit A^k/G de la topologie quotient et de sa structure naturelle d'espace analytique (si $\sigma : A^k \rightarrow A^k/G$ désigne la projection, les fonctions holomorphes au voisinage de $y = \sigma(x)$ sont les fonctions holomorphes au voisinage de x , invariantes par le stabilisateur de x). L'objet de ce paragraphe est de rappeler deux conditions nécessaires et suffisantes sur ces stabilisateurs pour que le quotient A^k/G soit lisse.

Rappelons tout d'abord qu'un endomorphisme holomorphe de $A^k = \mathbb{C}^k/\Gamma$ provient d'une application linéaire affine ([D], Chap.1, Th.2.3). En particulier, pour tout $g \in G$, il existe $\vec{g} \in GL_k(\mathbb{C})$ laissant le réseau Γ invariant et $\kappa \in \mathbb{C}^k$, tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k & \xrightarrow{\vec{g}+\kappa} & \mathbb{C}^k \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ A^k & \xrightarrow{g} & A^k \end{array}$$

commute, où Π désigne la projection $\mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k/\Gamma$. Notons que l'application \vec{g} est uniquement déterminé, alors que κ est unique à un élément du réseau Γ près.

Soit $x \in A^k$ et G_x son stabilisateur sous l'action de G . Soit U_x un voisinage de x , invariant par G_x et disjoint des translatés $h.U_x$ pour $h \notin G_x$, de sorte que le quotient A^k/G en $y = \sigma(x)$ soit modelé sur U_x/G_x . Puisque G est constitué d'applications affines, l'étude de ce quotient se ramène à celle de $(\mathbb{C}^k, 0)/K$, où K désigne le groupe fini des parties linéaires de G_x .

Cartan [C] a montré que $(\mathbb{C}^k, 0)/K$ (ou encore l'ensemble des germes des fonctions *holomorphes* nulles en l'origine et invariantes par K) s'identifie à un germe d'ensemble algébrique dans un espace \mathbb{C}^m . La démonstration repose sur le théorème suivant (cf l'article [F]) :

Théorème A.1.1 (Hilbert) *L'algèbre $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_k]^K$ des polynômes invariants par K est engendré par un nombre fini de polynômes homogènes.*

Fixons des polynômes homogènes (P_1, \dots, P_m) formant un système générateur de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_k]^K$. Puisqu'ils sont invariants par K , l'application suivante est bien définie :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k / K & \longrightarrow & V \\ \tilde{t} & \longmapsto & (P_1(\tilde{t}), \dots, P_m(\tilde{t})) \end{array}$$

où \tilde{t} désigne la classe de $t \in \mathbb{C}^k$ modulo K , et V le sous ensemble algébrique de \mathbb{C}^m donné par les zéros de l'idéal :

$$\{Q \in \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m], Q(P_1, \dots, P_m) = 0\}$$

Cartan montre que l'application Φ est un homéomorphisme, et qu'il confère à \mathbb{C}^k / K la structure d'espace analytique attendue (cf [C], Th.3) : pour tout $t \in \mathbb{C}^k$, Φ établit un isomorphisme entre le germe des fonctions holomorphes en t , invariante par le stabilisateur de ce point, et le germe des fonctions holomorphes sur V en $\Phi(\tilde{t})$ (par définition, ce sont les restrictions à V des fonctions holomorphes ambiantes).

Intéressons nous à présent aux groupes linéaires finis K tels que le germe :

$$(V, 0) := (\mathbb{C}^k, 0) / K$$

soit analytiquement isomorphe à $(\mathbb{C}^k, 0)$. Puisque K est fini, $(V, 0)$ est lisse en 0 si et seulement si $\dim_0 V = k$. On sait par ailleurs que $\dim_0 V = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}_0 / \mathfrak{m}_0^2$, où \mathfrak{m}_0 désigne l'idéal maximal des fonctions holomorphes sur un voisinage de l'origine de V , nulle en ce point (cf [GR], Chap.6). D'après le théorème 2 de l'article de Cartan [C], cet idéal coïncide avec celui des fonctions holomorphes en les polynômes (P_1, \dots, P_m) , sans terme constant.

Le lemme suivant précise que la dimension de $\mathfrak{m}_0 / \mathfrak{m}_0^2$ est égale au cardinal minimal d'un système générateur de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_k]^K$.

Lemme A.1.2 ([PV], Prop.4.11) *Soit (P_1, \dots, P_m) des polynômes homogènes formant un système générateur minimal de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_k]^K$. Alors $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}_0 / \mathfrak{m}_0^2 = m$*

DÉMONSTRATION : On note $(\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m)$ les classes de (P_1, \dots, P_m) modulo \mathfrak{m}_0^2 . Vérifions qu'elles engendrent l'espace vectoriel $\mathfrak{m}_0 / \mathfrak{m}_0^2$. Soit $\tilde{\phi} \in \mathfrak{m}_0 / \mathfrak{m}_0^2$ de représentant $\phi \in \mathfrak{m}_0$. Comme ϕ est invariante par K , il existe une fonction f holomorphe au voisinage de 0 tel que $\phi = f(P_1, \dots, P_m)$ (cf [C], Th.2). Si $(y_1, \dots, y_m) \mapsto (a_1 y_1 + \dots + a_m y_m)$ désigne la partie linéaire de f en 0, alors on a $\tilde{\phi} = a_1 \tilde{P}_1 + \dots + a_m \tilde{P}_m$. Ainsi, la famille de polynômes $(\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m)$ engendre $\mathfrak{m}_0 / \mathfrak{m}_0^2$.

Il reste à montrer que $(\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m)$ est libre. Supposons pour cela que $a_1 \tilde{P}_1 + \dots + a_m \tilde{P}_m$ soit nul dans $\mathfrak{m}_0 / \mathfrak{m}_0^2$. On a alors :

$$a_1 P_1 + \dots + a_m P_m = \sum_{\alpha_i \geq 0} b_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} P_1^{\alpha_1} \dots P_m^{\alpha_m} \quad (\text{A.1})$$

avec $b_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = 0$ dès que $\alpha_1 + \dots + \alpha_m \leq 1$ (le terme de droite est dans \mathfrak{m}_0^2).

Quitte à réindexer, la suite des degrés des polynômes homogènes P_i est croissante. Supposons que l'un des a_i soit non nul et notons $k := \max\{i, a_i \neq 0\}$. En comparant les degrés dans (A.1), on obtient $b_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = 0$ dès que $\alpha_j \geq 1$, pour $j \geq k$ ($P_1^{\alpha_1} \dots P_m^{\alpha_m}$ est homogène, et les P_i sont de degré au moins 1). Autrement dit, si $b_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} \neq 0$, on a $\alpha_k = \dots = \alpha_m = 0$. Ainsi (A.1) s'écrit :

$$a_1 P_1 + \dots + a_k P_k = \sum_{\alpha_i \geq 0} b_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, 0, \dots, 0} P_1^{\alpha_1} \dots P_{k-1}^{\alpha_{k-1}}.$$

Le polynôme P_k s'exprime alors comme polynôme en les P_1, \dots, P_{k-1} , ce qui contredit la minimalité du système P_1, \dots, P_m . Cela montre que (P_1, \dots, P_m) est libre dans $\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2$. \square

Cette proposition montre, d'après ce qui précède, que $(\mathbb{C}^k, 0)/K$ est lisse si et seulement si l'algèbre $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_k]^K$ peut être engendrée par k polynômes homogènes, nécessairement algébriquement indépendants (cf [F] Th.1.2). Ce résultat nous suffit pour décrire les singularités du bord du bassin d'attraction de l'origine des relevés polynomiaux des exemples de Lattès (cf la fin de la section 2.3).

Remarquons toutefois les faits suivants. En dimension 1, la condition précédente est toujours vérifiée : en effet, K est alors un groupe de racines $|K|$ -ième de l'unité et le polynôme $X^{|K|}$ forme une base de $\mathbb{C}[X]^K$. Le quotient $(\mathbb{C}, 0)/K$ est donc lisse. En dimension supérieure, ce n'est pas toujours le cas. Shephard et Todd [ST] ont caractérisé géométriquement les groupes K vérifiant cette condition. Commençons par une définition :

Définition A.1.3 *Un élément $g \neq Id$ de $GL_k(\mathbb{C})$ est une réflexion si il est d'ordre fini et fixe point par point un hyperplan de \mathbb{C}^k . On dit qu'un groupe est de réflexion si il est engendré par des réflexions.*

Le théorème est le suivant :

Théorème A.1.4 (Shephard-Todd, [ST] Th.5.1) *L'algèbre $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_k]^K$ est engendrée par k polynômes homogènes algébriquement indépendants si et seulement si le groupe K est un groupe de réflexion.*

Les propriétés précédentes se résument alors en la proposition :

Proposition A.1.5 (Shephard-Todd [ST], Prill [Pr]) *Soit K un sous-groupe fini de $GL_k(\mathbb{C})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le germe d'ensemble analytique $(\mathbb{C}^k, 0)/K$ est lisse.*
2. *L'algèbre $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_k]^K$ est engendré k polynômes homogènes algébriquement indépendants.*
3. *Le groupe K est un groupe de réflexion.*

A.2 Les couples (A^2, G) tels que $A^2/G = \mathbb{P}^2$

A.2.1 Rappel en dimension 1

Soit A_ω le tore $\mathbb{C}/L(\omega)$, où $L(\omega)$ désigne le réseau $\mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$, avec $\Im\omega > 0$, et G un groupe fini d'automorphismes de A_ω . Les résultats de la section précédente montrent que le quotient A_ω/G est encore une surface de Riemann (le stabilisateur d'un point x de A_ω sous l'action de G est un groupe linéaire fini). De plus, la formule de Riemann-Hurwitz (cf [Mi], Chap.III.3) montre que le genre de ce quotient est nul, dès que le groupe G n'est pas réduit à un groupe de translation. On vérifie alors, quitte à quotienter G par son sous-groupe normal des translations T (on remplace alors A_ω par le tore A_ω/T), que la liste des couples (A_ω, G) tels que le quotient A_ω/G est isomorphe à \mathbb{P}^1 est la suivante (on note $\rho = e^{\frac{i\pi}{3}}$) :

- $(A_\omega, \{1, -1\})$
- $(A_i, \{1, i, -1, -i\})$
- $(A_\rho, \{1, \rho^2, \rho^4\})$
- $(A_\rho, \{1, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5\})$

Pour vérifier que les quotients correspondants sont isomorphes à \mathbb{P}^1 , on peut par exemple exhiber une application holomorphe surjective $\sigma : A^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ dont les fibres sont exactement données par l'action du groupe G . En effet, on dispose du fait élémentaire suivant :

Lemme A.2.1 *Soit $\sigma : A^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ une application holomorphe surjective dont les fibres sont données par l'action du groupe G . Alors A^k/G est isomorphe à \mathbb{P}^k .*

DÉMONSTRATION : Soit $\rho : A^k \rightarrow A^k/G$ la projection holomorphe sur le quotient. Puisque σ prend la même valeur sur une orbite de G , il existe une application holomorphe surjective $\chi : A^k/G \rightarrow \mathbb{P}^k$ telle que $\sigma = \chi \circ \rho$. Si χ n'était pas injective, deux orbites distinctes sous l'action de G aurait même image par σ , ce qui est exclu par hypothèse. \square

Pour le premier couple, une telle application est donnée par la fonction de Weierstrass \wp_ω associée au réseau $L(\omega)$ (elle est paire et d'ordre 2). Pour les autres couples, on peut prendre respectivement les fonctions \wp_i^2 , \wp'_ρ et \wp'^2_ρ .

A.2.2 La classification en dimension 2

La classification des couples (A^2, G) , où A^2 est un tore complexe de dimension 2 et G est un groupe fini d'automorphismes de A^2 , et tels que le quotient A^2/G soit isomorphe à \mathbb{P}^2 , est due à Kaneko, Tokunaga, Yoshida ([KTY], 1982). Ces couples sont les suivants :

- $U = (A_\omega \times A_\omega, G(2, 1, 2))$
- $U_i = (A_i \times A_i, G(4, 1, 2))$
- $U_{\rho^2} = (A_\rho \times A_\rho, G(3, 1, 2))$

- $U_\rho = (A_\rho \times A_\rho, G(6, 1, 2))$
- $Q = (A_i \times A_i, \langle G(4, 2, 2), \frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle)$
- $C = (A_\omega \times A_\omega, \mathcal{S}_3)$

Par définition, $G(m, p, 2)$ (où $m \geq 2$ et p divise m) désigne le groupe de réflexion irréductible (cf la définition A.1.3) engendré par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2i\pi}{m}} \\ e^{-\frac{2i\pi}{m}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{2ip\pi}{m}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(cf l'article de Shephard et Todd [ST] pour la classification des groupes de réflexion finis et irréductibles). On a noté $\langle G(4, 2, 2), \frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ le groupe engendré par $G(4, 4, 2)$ et la translation de vecteur $\frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et \mathcal{S}_3 la représentation linéaire du groupe de permutation S_3 suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque A.2.2 *Le couple C est présenté sous la forme suivante dans [KTY] :*

$$A^2 = \mathbb{C}^2 / \Gamma, \text{ où } \Gamma = L(\omega) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + L(\omega) \begin{pmatrix} \rho^2 \\ \rho \end{pmatrix}, \text{ et } G = G(3, 3, 2)$$

On vérifie que les deux présentations sont équivalentes, en utilisant le changement de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \rho^4 & \rho^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dans les sections suivantes, nous vérifions que ces quotients sont isomorphes à \mathbb{P}^2 , en construisant une application de passage au quotient explicite (cf le lemme A.2.1). Nous donnons aussi les valeurs critiques de ces applications.

A.2.3 Les couples $U, U_{\rho^2}, U_i, U_\rho$

La notation “ U ” est employée en référence à Ueda. En effet, celui-ci utilisa l’application η (définie plus bas) afin de construire des endomorphismes holomorphes de \mathbb{P}^2 qui sont des “produits” d’une même fraction rationnelle. Certaines propriétés de cette fraction passent alors à l’endomorphisme en dimension 2 (cf [FS2], §4).

Construction des passages au quotient

On traite le couple U , les autres se traitent à l’identique. Soit $G(2, 1, 2)_0$ le sous groupe distingué d’indice 2 de $G(2, 1, 2)$ engendré par les matrices :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En utilisant l'application $\sigma_0 := \wp_\omega \times \wp_\omega$ (cf partie A.2.1), on a :

$$A_\omega \times A_\omega / G(2, 1, 2)_0 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

Il reste à exprimer le passage au quotient par l'involution :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Considérons pour cela un plongement ϕ de \mathbb{P}^1 en une quadrique de \mathbb{P}^2 . L'application η qui aux points (m, m') de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ associe la droite de \mathbb{P}^2 passant par $\phi(m)$, $\phi(m')$ est exactement invariante par permutation des coordonnées (d'après le théorème de Bezout, une droite coupe une quadrique en exactement deux points, avec multiplicité). Le lemme A.2.1 appliqué à $\sigma_U := \eta \circ \sigma_0$ montre alors que le quotient $A_\omega \times A_\omega$ par $G(2, 1, 2)$ est isomorphe à \mathbb{P}^2 .

Par exemple, si ϕ désigne le plongement de \mathbb{P}^1 sur la quadrique $Z^2 = XY$:

$$\phi: \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \rightarrow & \mathbb{P}^2 \\ [x : y] & \mapsto & [y^2 : x^2 : -xy] \end{array}$$

alors l'application η a pour expression :

$$\eta: \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \rightarrow & \mathbb{P}^2 \\ [x : y], [x' : y'] & \mapsto & [xx' : yy' : xy' + yx'] \end{array}$$

et l'application $\sigma_U = \eta \circ \sigma_0$ s'écrit :

$$\sigma_U: \begin{array}{ccc} A_\omega \times A_\omega & \rightarrow & \mathbb{P}^2 \\ (z_1, z_2) & \mapsto & [\wp_\omega(z_1) \cdot \wp_\omega(z_2) : 1 : \wp_\omega(z_1) + \wp_\omega(z_2)] \end{array}$$

Les valeurs critiques de $\sigma_U := \eta \circ \sigma_0$

L'application η a pour valeurs critiques l'ensemble $\{Z^2 = 4XY\}$ (c'est la courbe duale de $\phi(\mathbb{P}^1)$ (cf [GH] Chap.2, §4). Les images par η des valeurs critiques de σ_0 sont les 4 droites :

$$\begin{aligned} \eta \circ \sigma_0\{(x, 0)\} &= \{Z = 0\} \\ \eta \circ \sigma_0\{(x, a)\} &= \{X + \alpha^2 Y - \alpha Z = 0\} \end{aligned}$$

où $a \in \{\frac{1}{2}, \frac{\omega}{2}, \frac{1+\omega}{2}\}$ et $\alpha := \wp_\omega(a)$ (on obtient seulement 3 droites pour les couples U_{ρ^2}, U_i, U_ρ).

A.2.4 Le couple $C = (A_\omega \times A_\omega, \mathcal{S}_3)$

Construction du passage au quotient

Nous allons exhiber une application $\sigma : A_\omega \times A_\omega \rightarrow \mathbb{P}^2$ dont les fibres sont données par l'action de \mathcal{S}_3 . Considérons à cet effet un plongement ϕ de A_ω en une cubique de \mathbb{P}^2 . L'application σ qui aux points (m, m') de $A_\omega \times A_\omega$ associe la droite passant

par $\phi(m)$ et $\phi(m')$ répond au problème. En effet, elle consiste à identifier les couples non ordonnés de points pris parmi $\{m, m', -m - m'\}$ (toute droite de \mathbb{P}^2 coupe une cubique en 3 points dont la somme est nulle (cf [Lg])). Il est clair que l'ensemble de ces couples forment l'orbite de (m, m') sous l'action du groupe \mathcal{S}_3 .

Afin d'expliciter σ , choisissons pour ϕ le plongement suivant :

$$\phi(x) = [\Theta_0(x) = \theta_{00}(x)\theta_{11}^2(x) : \Theta_1(x) = \theta_{10}(x)\theta_{01}(x)\theta_{11}(x) : \Theta_2(x) = \theta_{00}^3(x)]$$

La fonction θ_{jk} , pour $j, k \in \{0, 1\}$, désigne la fonction thêta de Riemann définie par (cf [D] Chap.II, §2) :

$$\theta_{jk} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i\pi(\omega(m+\frac{j}{2})^2 + 2(m+\frac{j}{2})(z+\frac{k}{2}))} \end{array}$$

Elle vérifie pour tous entiers p et q :

$$\theta_{jk}(z + p.\omega + q) = e^{i\pi(-2p.z - p^2.\omega + pk - qj)} . \theta_{jk}(z) \tag{A.2}$$

et son diviseur est égal à $[\frac{j+1}{2}.\omega + \frac{k+1}{2}]$. L'application σ s'écrit alors :

$$\sigma(x, y) = [\Theta_2(y)\Theta_1(x) - \Theta_2(x)\Theta_1(y) : \Theta_2(x)\Theta_0(y) - \Theta_2(y)\Theta_0(x) : \Theta_0(x)\Theta_1(y) - \Theta_1(x)\Theta_0(y)]$$

Les valeurs critiques de σ

Cet ensemble est le dual de la cubique $\phi(A_\omega)$; C'est une courbe de degré 6 (cf [GH] Chap.2, §4).

A.2.5 Le couple $Q = (A_i \times A_i, \langle G(4, 2, 2), \frac{1+i}{2} \binom{1}{1} \rangle)$

Construction du passage au quotient

Le groupe $G = \langle G(4, 2, 2), \frac{1+i}{2} \binom{1}{1} \rangle$ est constitué des 32 éléments suivants, où $\delta \in \{0, 1\}$:

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{array} \right) + \delta . \left(\begin{array}{c} \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{array} \right) + \delta . \left(\begin{array}{c} \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \end{array} \right) \\ \\ \left(\begin{array}{cc} \pm i & 0 \\ 0 & \pm i \end{array} \right) + \delta . \left(\begin{array}{c} \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} 0 & \pm i \\ \pm i & 0 \end{array} \right) + \delta . \left(\begin{array}{c} \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \end{array} \right) \end{array}$$

Observons que le groupe $G(2, 1, 2)$ de la situation de Lattès U (cf la section A.2.3) est un sous-groupe distingué de G . Nous pouvons donc décomposer le passage au quotient en :

$$A_i \times A_i \xrightarrow{\sigma_U} \underbrace{A_i \times A_i / G(2, 1, 2)}_{\mathbb{P}^2} \xrightarrow{h} \mathbb{P}^2$$

où h désigne le passage au quotient de \mathbb{P}^2 par le groupe à 4 éléments $H := G/G(2, 1, 2)$. Les éléments de H ont pour représentants (*modulo* $G(2, 1, 2)$) :

$$\text{Id}, \text{Id} + \frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, i.\text{Id}, i.\text{Id} + \frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous allons vérifier qu'une expression de l'application h est donnée par :

$$h([X : Y : Z]) = [(X + \alpha^2 Y)^2 : (X + \alpha^2 Y)^2 - \alpha^2 Z^2 : (X - \alpha^2 Y)^2]$$

où $\alpha := \wp_i(\frac{1}{2})$. Pour cela, il suffit de s'assurer que la composée $\sigma := h \circ \sigma_U$ (qui est d'ordre 32) est invariante par $i.\text{Id}$ et par la translation de vecteur $\frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (cf le lemme A.2.1).

Afin de montrer cette invariance, nous allons exprimer σ à l'aide de fonctions thêta de Riemann. A la section A.2.3, nous avons écrit σ_U à l'aide de la fonction \wp_i . Vérifions donc qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\wp_i = c.\theta_{00}^2.\theta_{11}^{-2}$$

Les carrés des deux fonctions thêta θ_{00} et θ_{11} sont des fonctions thêta de même type (cf (A.2)). Leur rapport forme donc une fonction méromorphe sur A_i . Cette fonction est proportionnelle à \wp_i , car elle a le même diviseur que \wp_i (i.e. $2[\frac{1+i}{2}] - 2[0]$).

L'application σ_U (cf la section A.2.3) s'écrit donc :

$$\sigma_U(x, y) = [c^2.\theta_{00}^2(x).\theta_{00}^2(y) : \theta_{11}^2(x).\theta_{11}^2(y) : c.\theta_{00}^2(x).\theta_{11}^2(y) + c.\theta_{00}^2(y).\theta_{11}^2(x)]$$

On en déduit l'expression de l'application $\sigma = \sigma_U \circ h$:

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) = & [(c^2.\theta_{00}^2(x).\theta_{00}^2(y) + \alpha^2.\theta_{11}^2(x).\theta_{11}^2(y))^2 : (c^2.\theta_{00}^4(x) - \alpha^2.\theta_{11}^4(x)). \\ & (c^2.\theta_{00}^4(y) - \alpha^2.\theta_{11}^4(y)) : (c^2.\theta_{00}^2(x).\theta_{00}^2(y) - \alpha^2.\theta_{11}^2(x).\theta_{11}^2(y))^2] \end{aligned}$$

Montrons que σ est invariante par $i.\text{Id}$. Comme les fonctions thêta $\theta_{jj}^2(i.x)$ et $\theta_{jj}^2(x)$ pour $j = 0, 1$ ont même diviseur (cf la partie A.2.4), il existe des fonctions thêta non nulles φ_j telles que :

$$\theta_{jj}^2(i.x) = \varphi_j(x).\theta_{jj}^2(x)$$

Notons que l'identité $\wp_i(ix) = -\wp_i(x)$ entraîne $\varphi_0 = -\varphi_1$. Ainsi, lorsque l'on précompose l'application σ par $i.\text{Id}$, chacune de ses coordonnées est multipliée par $(\varphi_1(x).\varphi_1(y))^2$. L'application σ est donc invariante par $i.\text{Id}$.

Passons à l'invariance par la translation $\frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme précédemment, il existe des fonctions thêta non nulles ψ_j telles que :

$$c.\theta_{00}^2(x + \frac{1+i}{2}) = \psi_0(x).\theta_{11}^2(x) \text{ et } \theta_{11}^2(x + \frac{1+i}{2}) = \psi_1(x).c.\theta_{00}^2(x)$$

D'autre part, la fonction $\psi_0.\psi_1^{-1}(x) = \wp(x).\wp(x + \frac{1+i}{2})$ est constante (elle est holomorphe sur A_i) égale à $-\alpha^2$ (on évalue en $\frac{1}{2}$). Ainsi, lorsque l'on compose σ par la translation $\frac{1+i}{2}\binom{1}{1}$, les coordonnées de σ sont multipliées par $(\alpha^2.\psi_1(x).\psi_1(y))^2$.

En conclusion, l'application $\sigma = h \circ \sigma_U$ est d'ordre 32 et invariante par le groupe G . Le quotient A^2/G est donc isomorphe à \mathbb{P}^2 (cf lemme A.2.1).

Les valeurs critiques de la projection σ

On vérifie que les valeurs critiques de l'application σ sont les 6 droites suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma\{(x, \frac{1}{2})\} &= \{Y = 0\} & \sigma\{(x, 0)\} &= \{X = Z\} \\ \sigma\{(x, x + \frac{1+i}{2})\} &= \{X = 0\} & \sigma\{(x, x)\} &= \{Y = Z\} \\ \sigma\{(x, ix + \frac{1+i}{2})\} &= \{Z = 0\} & \sigma\{(x, ix)\} &= \{X = Y\} \end{aligned}$$

On consultera [KTY] pour plus de détails.

A.3 Exemples de Lattès et endomorphismes critiquement finis

L'objet de ce paragraphe est de déterminer si certains endomorphismes critiquement finis, dûs à Ueda et à Fornæss-Sibony, sont des exemples de Lattès. Commençons par une définition :

Définition A.3.1 *Soit f un endomorphisme holomorphe de \mathbb{P}^k et \mathcal{C}_f son ensemble critique. On désigne par $PC(f)$ l'orbite du lieu critique de f :*

$$PC(f) := \bigcup_{n \geq 1} f^n(\mathcal{C}_f)$$

Si cet ensemble est algébrique, f est dite critiquement finie.

Notons que ces applications sont étudiées en dimension 2 dans [Jon]. Un exemple de Lattès est une application critiquement finie :

Lemme A.3.2 *Soit f un exemple de Lattès de \mathbb{P}^k vérifiant $\sigma \circ D = f \circ \sigma$. Alors $PC(f)$ est contenu dans l'ensemble algébrique des valeurs critiques de σ .*

DÉMONSTRATION : Pour tout n , on a $\sigma \circ D^n = f^n \circ \sigma$. Si $x \in \mathcal{C}_f$, $f^n \circ \sigma$ branche aux points de $\sigma^{-1}\{x\}$. Puisque D^n est un revêtement, σ branche aux points de $D^n(\sigma^{-1}\{x\})$ et $f^n(x)$ est une valeur critique de σ . □

A.3.1 Quelques exemples de Lattès

Nous montrons dans ce paragraphe que les applications étudiées par Ueda (cf [U1], [U3]) sont des exemples de Lattès.

Proposition A.3.3 *Les endomorphismes critiquement finis suivants sont des exemples de Lattès :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ f_1 : [x : y : z] & \longmapsto & [(-x + y + z)^2 : (x - y + z)^2 : (x + y - z)^2] \\ f_2 : [x : y : z] & \longmapsto & [(x - y + z)^2 : (-x + y + z)^2 : (x + y - z)^2] \\ f_3 : [x : y : z] & \longmapsto & [(x + y - z)^2 : (-x + y + z)^2 : (x - y + z)^2] \end{array}$$

Ils sont semi-conjugués par la situation de Lattès Q aux dilatations :

$$D_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad D_3 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

DÉMONSTRATION : Nous allons dans chaque cas vérifier la relation de commutation $\sigma \circ D_i = f_i \circ \sigma$, où σ est l'application définie à la partie A.2.5 :

$$\sigma(x, y) = [(c^2 \cdot \theta_{00}^2(x) \cdot \theta_{00}^2(y) + \alpha^2 \cdot \theta_{11}^2(x) \cdot \theta_{11}^2(y))^2 : (c^2 \cdot \theta_{00}^4(x) - \alpha^2 \cdot \theta_{11}^4(x)) \cdot (c^2 \cdot \theta_{00}^4(y) - \alpha^2 \cdot \theta_{11}^4(y)) : (c^2 \cdot \theta_{00}^2(x) \cdot \theta_{00}^2(y) - \alpha^2 \cdot \theta_{11}^2(x) \cdot \theta_{11}^2(y))^2]$$

Nous aurons besoin des relations suivantes (les vérifications sont rejetées à la fin de la section) :

Lemme A.3.4 *Soit \wp la fonction de Weierstrass associée au réseau $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$. On a les identités suivantes, où $\alpha = \wp(1/2)$:*

1. $\wp_x \cdot \wp_{x+ix} = -\frac{i}{2} \cdot (\wp_x^2 - \alpha^2)$
2. $(\wp_x - \wp_y)^2 \cdot \wp_{x+y} \cdot \wp_{x-y} = (\wp_x \cdot \wp_y + \alpha^2)^2$
3. $(\wp_x - \wp_y)^2 \cdot (\wp_{x+y} + \wp_{x-y}) = 2 \cdot (\wp_x + \wp_y) (\wp_x \cdot \wp_y - \alpha^2)$

Cas de l'endomorphisme f_1 :

Le diviseur des fonctions thêta $c \cdot \theta_{00}^2((1+i)x)$ et $c^2 \cdot \theta_{00}^4(x) - \alpha^2 \cdot \theta_{11}^4(x)$ vaut $2[\frac{1}{2}] + 2[\frac{i}{2}]$ (cf la section A.2.4). Celui de $\theta_{11}^2((1+i)x)$ et $c \cdot \theta_{00}^2(x) \cdot \theta_{11}^2(x)$ vaut $2[0] + 2[\frac{1+i}{2}]$. Il existe donc des fonctions thêta non nulle φ_j telles que :

$$\begin{aligned} c \cdot \theta_{00}^2((1+i)x) &= \varphi_0(x) \cdot (c^2 \cdot \theta_{00}^4(x) - \alpha^2 \cdot \theta_{11}^4(x)) \\ \theta_{11}^2((1+i)x) &= \varphi_1(x) \cdot c \cdot \theta_{00}^2(x) \cdot \theta_{11}^2(x) \end{aligned}$$

En divisant ces deux expressions, le lemme A.3.4-(1) donne $\varphi_0 = -\frac{i}{2} \cdot \varphi_1$. La première coordonnée (signe -) et la dernière coordonnée (signe +) de $\sigma \circ D_1$ s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{4} \cdot \varphi_1(x) \cdot \varphi_1(y)\right)^2 &\left\{ (c^2 \cdot \theta_{00}^4(x) - \alpha^2 \cdot \theta_{11}^4(x))(c^2 \cdot \theta_{00}^4(y) - \alpha^2 \cdot \theta_{11}^4(y)) \right. \\ &\left. \pm 4 \cdot \alpha^2 \cdot c^2 \cdot \theta_{00}^2(x) \cdot \theta_{11}^2(x) \cdot \theta_{00}^2(y) \cdot \theta_{11}^2(y) \right\}^2 \end{aligned}$$

et coïncident avec $(-\frac{1}{4} \cdot \varphi_1(x) \cdot \varphi_1(y))^2 \cdot (\sigma_2 \pm (\sigma_3 - \sigma_1))^2$, où σ_k est la k -ième coordonnée de σ . La deuxième coordonnée de $\sigma \circ D_1$ est égale à :

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{4} \cdot \varphi_1(x) \cdot \varphi_1(y)\right)^2 \cdot \left\{ (c^2 \cdot \theta_{00}^4(x) - \alpha^2 \cdot \theta_{11}^4(x))^2 + 4 \cdot \alpha^2 \cdot (c \cdot \theta_{00}^2(x) \cdot \theta_{11}^2(x))^2 \right\} \cdot \\ & \left\{ (c^2 \cdot \theta_{00}^4(y) - \alpha^2 \cdot \theta_{11}^4(y))^2 + 4 \cdot \alpha^2 \cdot (c \cdot \theta_{00}^2(y) \cdot \theta_{11}^2(y))^2 \right\} = \\ & \left(-\frac{1}{4} \cdot \varphi_1(x) \cdot \varphi_1(y)\right)^2 \cdot \left((c^2 \cdot \theta_{00}^4(x) + \alpha^2 \cdot \theta_{11}^4(x)) \cdot (c^2 \cdot \theta_{00}^4(y) + \alpha^2 \cdot \theta_{11}^4(y)) \right)^2 \end{aligned}$$

et coïncide avec $(-\frac{1}{4} \cdot \varphi_1(x) \cdot \varphi_1(y))^2 \cdot (\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3)^2$.

Cas de l'endomorphisme f_2 :

En divisant chaque coordonnées de σ par $\theta_{11}^4(x) \cdot \theta_{11}^4(y)$, σ s'écrit :

$$\sigma(x, y) = [(\wp_x \cdot \wp_y + \alpha^2)^2 : (\wp_x^2 - \alpha^2)(\wp_y^2 - \alpha^2) : (\wp_x \cdot \wp_y - \alpha^2)^2]$$

D'après le lemme A.3.4-(2), les premières et dernières coordonnées de $\sigma \circ D_2$, multipliées par $(\wp(x) - \wp(y))^4$, s'écrivent

$$(\wp_x - \wp_y)^4 (\wp_{x+y} \cdot \wp_{x-y} \pm \alpha^2)^2 = \left((\wp_x \cdot \wp_y + \alpha^2)^2 \pm \alpha^2 \cdot (\wp_x - \wp_y)^2 \right)^2$$

et coïncident avec $(\sigma_1 \pm (\sigma_3 - \sigma_2))^2$. Pour la deuxième coordonnée, on utilise le lemme A.3.4-(2),(3) :

$$\begin{aligned} & (\wp_x - \wp_y)^4 \cdot (\wp_{x+y} - \alpha) \cdot (\wp_{x-y} - \alpha) \cdot (\wp_{x+y} + \alpha) \cdot (\wp_{x-y} + \alpha) = \\ & (\wp_x - \wp_y)^4 \cdot \left((\wp_{x+y} \cdot \wp_{x-y} + \alpha^2)^2 - \alpha^2 \cdot (\wp_{x+y} + \wp_{x-y})^2 \right) = \\ & ((\wp_x \cdot \wp_y + \alpha^2)^2 + \alpha^2 \cdot (\wp_x - \wp_y)^2)^2 - 4\alpha^2 \cdot (\wp_x + \wp_y)^2 (\wp_x \cdot \wp_y - \alpha^2)^2 = \\ & ((\wp_x \cdot \wp_y - \alpha^2)^2 - \alpha^2 \cdot (\wp_x + \wp_y)^2)^2 = (\sigma_3 + (\sigma_2 - \sigma_1))^2 \end{aligned}$$

Cas de l'endomorphisme f_3 :

La vérification se déduit de l'expression de f_2 et de l'identité :

$$\wp(i(x - y)) = -\wp(x - y)$$

Les première et dernière coordonnées de $\sigma \circ D_3$ sont permutées, et la deuxième reste inchangée. \square

DÉMONSTRATION DU LEMME A.3.4 :

Toutes ces identités s'obtiennent à l'aide des relations classiques :

$$\wp_x'^2 = 4 \cdot \wp_x \cdot (\wp_x^2 - \alpha^2), \quad \wp_{ix} = -\wp_x, \quad \wp_{-x} = \wp_x$$

et de la formule d'addition de Weierstrass :

$$(\wp_x - \wp_y)^2 \cdot \wp_{x+y} = \frac{1}{4} (\wp_x' - \wp_y')^2 - (\wp_x + \wp_y)(\wp_x - \wp_y)^2$$

La première identité découle des deux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \wp_x \cdot \wp_{x+ix} \cdot (\wp_x - \wp_{ix})^2 &= \wp_x \cdot (1/4)(\wp'_x - \wp'_{ix})^2 - \wp_x \cdot (\wp_x + \wp_{ix})(\wp_x - \wp_{ix})^2 \\ &= \wp_x \cdot ((1-i)^2/4) \cdot \wp_x'^2 = -2i \cdot \wp_x^2 \cdot (\wp_x^2 - \alpha^2) \end{aligned}$$

et $\wp_x \cdot \wp_{x+ix} \cdot (\wp_x - \wp_{ix})^2 = \wp_x \cdot \wp_{x+ix} \cdot 4 \cdot \wp_x^2$.

La deuxième se déduit du calcul suivant :

$$\begin{aligned} (\wp_x - \wp_y)^2 \cdot \wp_{x+y} \cdot (\wp_x - \wp_y)^2 \cdot \wp_{x-y} &= (\wp_x - \wp_y)^2 \cdot \wp_{x+y} \cdot (\wp_x - \wp_y)^2 \cdot \wp_{x-y} = \\ &= \left(\frac{1}{4}(\wp'_x - \wp'_y)^2 - (\wp_x + \wp_y)(\wp_x - \wp_y)^2\right) \left(\frac{1}{4}(\wp'_{-x} - \wp'_{-y})^2 - (\wp_x + \wp_{-y})(\wp_x - \wp_{-y})^2\right) = \\ &= \left(\frac{1}{4}(\wp_x'^2 + \wp_y'^2) - (\wp_x + \wp_y)(\wp_x - \wp_y)^2\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \wp'_x \cdot \wp'_y\right)^2 = \\ &= (\wp_x \cdot (\wp_x^2 - \alpha^2) + \wp_y \cdot (\wp_y^2 - \alpha^2) - (\wp_x + \wp_y)(\wp_x - \wp_y)^2)^2 - 4\wp_x \cdot \wp_y \cdot (\wp_x^2 - \alpha^2)(\wp_y^2 - \alpha^2) = \\ &= (\wp_x^3 - \alpha^2 \cdot \wp_x + \wp_y^3 - \alpha^2 \cdot \wp_y - (\wp_x + \wp_y)(\wp_x^2 - 2\wp_x \cdot \wp_y + \wp_y^2))^2 \\ &\quad - 4\wp_x \cdot \wp_y \cdot (\wp_x^2 - \alpha^2)(\wp_y^2 - \alpha^2) = \\ &= (\wp_x \cdot (\wp_y^2 - \alpha^2) + \wp_y \cdot (\wp_x^2 - \alpha^2))^2 - 4\wp_x \cdot \wp_y \cdot (\wp_x^2 - \alpha^2)(\wp_y^2 - \alpha^2) = \\ &= (\wp_x \cdot (\wp_y^2 - \alpha^2) - \wp_y \cdot (\wp_x^2 - \alpha^2))^2 = (\wp_x - \wp_y)^2 (\wp_x \cdot \wp_y + \alpha^2)^2 \end{aligned}$$

La dernière identité provient de :

$$\begin{aligned} (\wp_x - \wp_y)^2 \cdot (\wp_{x+y} + \wp_{x-y}) &= (\wp_x - \wp_y)^2 \cdot \wp_{x+y} + (\wp_x - \wp_y)^2 \cdot \wp_{x-y} = \\ &= \frac{1}{4}(\wp'_x - \wp'_y)^2 - (\wp_x + \wp_y) \cdot (\wp_x - \wp_y)^2 + \frac{1}{4}(\wp'_{-x} - \wp'_{-y})^2 - (\wp_x + \wp_{-y}) \cdot (\wp_x - \wp_{-y})^2 = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot (\wp_x'^2 + \wp_y'^2) - (\wp_x + \wp_y) \cdot (\wp_x - \wp_y)^2\right) = \\ &= 2 \cdot (\wp_x \cdot (\wp_x^2 - \alpha^2) + \wp_y \cdot (\wp_y^2 - \alpha^2) - (\wp_x + \wp_y)(\wp_x - \wp_y)^2) \end{aligned}$$

Cette expression, que l'on retrouve à la 4ième ligne du calcul précédent, est égale à :

$$2 \cdot (\wp_x \cdot (\wp_y^2 - \alpha^2) + \wp_y \cdot (\wp_x^2 - \alpha^2))^2 = 2 \cdot (\wp_x + \wp_y) (\wp_x \cdot \wp_y - \alpha^2). \quad \square$$

Remarque A.3.5 Des calculs analogues sont menés dans [U1] pour l'endomorphisme f_1 . Notre apport est de traiter les endomorphismes f_2, f_3 et d'utiliser [KTY] afin de montrer que f_1, f_2 et f_3 sont des exemples de Lattès.

A.3.2 L'exemple de Fornæss-Sibony

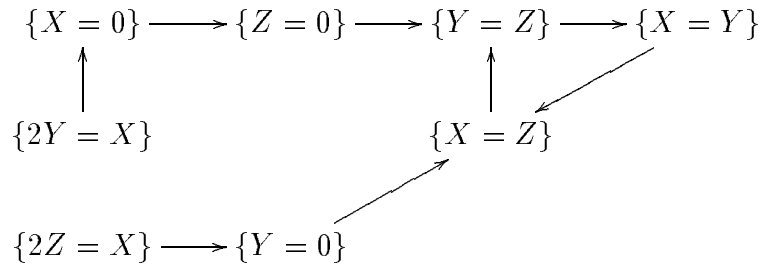
Nous montrons, en utilisant la classification des couples (A^2, G) tels que $A^2/G \simeq \mathbb{P}^2$, que l'endomorphisme critiquement fini étudié par Fornæss-Sibony [FS1], n'est pas un exemple de Lattès.

Proposition A.3.6 *L'endomorphisme critiquement fini :*

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \rightarrow & \mathbb{P}^2 \\ [x : y : z] & \mapsto & [(x - 2y)^2 : (x - 2z)^2 : x^2] \end{array}$$

n'est pas un exemple de Lattès.

DÉMONSTRATION : Regardons la dynamique de l'ensemble critique de g , dont les composantes sont $\{X = 0\}, \{2Y = X\}, \{2Z = X\}$:



Remarquons que l'orbite post-critique $PC(f)$ (cf la définition A.3.1) contient 6 droites. On en déduit, d'après le lemme A.3.2, que si l'endomorphisme g est un exemple de Lattès, alors il est nécessairement associé au couple Q de la classification de [KTY] (ce couple est le seul dont l'ensemble des valeurs critiques du passage au quotient correspondant contient au moins 6 droites). Supposons à présent qu'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 A_i \times A_i & \xrightarrow{D} & A_i \times A_i \\
 \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\
 \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{P}^2
 \end{array}$$

où σ désigne l'application de passage au quotient de la section A.2.5, et cherchons une contradiction.

Soient $E := \{(x, x + \frac{1+i}{2})\}$ et $F := \{(x, ix + \frac{1+i}{2})\}$. Ces ensembles sont dans l'ensemble critique de σ . En effet, on vérifie que le stabilisateur d'un point générique de E (resp. F) est égal à :

$$\left\{ Id, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} \right\} \quad \text{resp.} \quad \left\{ Id, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

De plus, on a d'après la section A.2.5 :

$$\sigma(E) = \{X = 0\} \quad \text{et} \quad \sigma(F) = \{Z = 0\} \tag{A.3}$$

Si g était un exemple de Lattès, alors le diviseur $D(E)$ serait contenu dans $G.F := \{h(F), h \in G\}$. En effet, d'après la dynamique de l'ensemble critique de g et (A.3), on a :

$$\forall x \in E, \quad \sigma \circ D(x) = g \circ \sigma(x) \in g \circ \sigma(E) = \{Z = 0\} = \sigma(F)$$

Puisque les ensembles analytiques E et F sont irréductibles, $D(E)$ est aussi irréductible et $\bigcup_{h \in G} h(F)$ est la décomposition de $G.F$ en ensembles irréductibles. Par

conséquent, il existe $h \in G$ vérifiant $D(E) = h(F)$ et tel que :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{D} & h(F) \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \{X = 0\} & \xrightarrow{g} & \{Z = 0\} \end{array}$$

Comme le stabilisateur d'un point générique de $h(F)$ est d'ordre 2 (les stabilisateurs des points de F et $h(F)$ sont conjugués), on obtient une contradiction lorsque l'on compare les multiplicités dans ce diagramme au voisinage de E . D'une part, $g \circ \sigma$ est génériquement d'ordre strictement supérieur à 2 car le stabilisateur de E est d'ordre 2 et $\{X = 0\}$ est dans l'ensemble critique de g . D'autre part $\sigma \circ D$ est génériquement d'ordre 2, puisque D ne branche pas. Ainsi, g n'est pas un exemple de Lattès. \square

Bibliographie

- [A] L. Arnold, *Random Dynamical Systems*, Monog. in Math., Springer, 1998.
- [BS] E. Bedford, J. Smillie, *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 : currents, equilibrium measure and hyperbolicity*, Invent. Math., **103** (1991), no. 1, 69-99.
- [BLS] E. Bedford, M. Lyubich, J. Smillie, *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . IV : The measure of maximal entropy and laminar currents*, Invent. Math., **112** (1993), no. 1, 77-125.
- [B] F. Berteloot, *Holomorphic vector fields and proper holomorphic self-maps of Reinhardt domains*, Ark. Mat., **36** (1998), no. 2, 241-254.
- [BL1] F. Berteloot, J.J. Loeb, *Spherical hypersurfaces and Lattès rational maps*, J. Math. Pures et App. (9), **77** (1998), no. 7, 655-666.
- [BL2] F. Berteloot, J.J. Loeb, *Une caractérisation géométrique des exemples de Lattès de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$* , Bull. Soc. Math. Fr., **129** (2001), no. 2, 175-188.
- [BM] F. Berteloot, V. Mayer, *Rudiments de dynamique holomorphe*, Cours Spécialisés No 7, SMF et EDP Sciences, 2001.
- [Bre] G.E. Bredon, *Topology and Geometry*, Grad. Texts in Math. no. 139, Springer, 1993.
- [Bri] J.Y. Briend, *Exposants de Liapounoff et points périodiques d'endomorphismes holomorphes de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$* , Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, 1997.
- [BD1] J.Y. Briend, J. Duval, *Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$* , Acta Math., **182** (1999), no. 2, 143-157.
- [BD2] J.Y. Briend, J. Duval, *Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$* , Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **93** (2001), 145-159.
- [Bro] H. Brolin, *Invariant sets under iteration of rational functions*, Ark. Mat., **6** (1965), 103-144.
- [Ca] S. Cantat, *Dynamique des automorphismes des surfaces complexes compactes*, Thèse de l'E.N.S. Lyon, no. 137, 1999.
- [C] H. Cartan, *Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes*, in Algebraic Geometry and Algebraic Topology, A Symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton (1957), 90-102.

- [CFS] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin, Ya. B. Sinai, *Ergodic Theory*, Grund. Math. Wiss. No 245, Springer, 1985.
- [D] O. Debarre, *Tores et variétés abéliennes complexes*, Cours Spécialisés No 6, SMF et EDP Sciences, 1999.
- [DF] K. Diederich, J.E. Fornæss, *Proper holomorphic images of strictly pseudoconvex domains*, Math. Ann., **259** (1982), no. 2, 279-286.
- [Di] T.C. Dinh, *Sur les applications de Lattès de \mathbb{P}^k* , J. Math. Pures et App.(9), **80** (2001), no. 6, 577-592.
- [DS] T.C. Dinh, N. Sibony, *Sur les endomorphismes holomorphes permutables de \mathbb{P}^k* , Math. Ann., **324** (2002), no. 1, 33-70.
- [EL] A. Eremenko, M. Lyubich, *The dynamics of analytic transformations*, Leningrad Math. J., **1** (1990), no. 3, 563-634.
- [F] L. Flatto, *Invariants of finite reflection groups*, Enseign. Math. (2), **24** (1978), no. 3-4, 237-292.
- [FS1] J.E. Fornæss, N. Sibony, *Critically Finite Rational maps on \mathbb{P}^2* , Contemp. Math., **137**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1992), 245-260.
- [FS2] J.E. Fornæss, N. Sibony, *Complex Dynamics in higher dimensions II*, Ann. of Math. Studies, **137**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1995), 135-187.
- [FS3] J.E. Fornæss, N. Sibony, *Complex Dynamics in higher dimensions*, in Complex potential theory (Montréal, PQ, 1993), NATO ASI series Math. and Phys. Sci., **439**, Kluwer Acad. Publ. (1994), 131-186.
- [FS4] J.E. Fornæss, N. Sibony, *Some open problems in higher dimensional complex analysis and complex dynamics*, Publ. Mat., **45** (2001), no. 2, 529-547.
- [FLM] A. Freire, A. Lopes, R. Mañé, *An invariant measure for rational maps*, Bol. Soc. Brasil Mat., **14** (1983), no. 1, 45-62.
- [GR] H. Grauert, R. Remmert, *Coherent Analytic Sheaves*, Grund. Math. Wiss. No 265, Springer, 1984.
- [GH] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, 1978.
- [H] L. Hörmander, *Notions of Convexity*, Progress in Math. no. 127, Birkhäuser, 1994.
- [HP] J.H. Hubbard, P. Papadopol, *Superattractive fixed points in \mathbb{C}^n* , Indiana Univ. Math. J., **43** (1994), no. 1, 321-365.
- [Jon] M. Jonsson, *Some properties of 2-critically finite holomorphic maps of \mathbb{P}^2* , Ergodic Theory Dynamical Systems, **18** (1998), no. 1, 171-187.
- [Jos] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Second Edition, Universitext, Springer, 1998.
- [KTY] J. Kaneko, S. Tokunaga, M. Yoshida, *Complex crystallographic groups II*, J. Math. Soc. Japan, **34** (1982), no. 4, 595-605.

- [KH] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [Lg] S. Lang, *Elliptic Functions*, Second Edition, Grad. Texts in Math. No 112, Springer, 1987.
- [La] S. Lattès, *Sur l'itération des substitutions rationnelles et les fonctions rationnelles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **166** (1918), 26-28.
- [Le1] F. Ledrappier, *Some properties of absolutely continuous invariant measure on an interval*, Ergodic Theory Dynamical Systems, **1** (1981), no. 1, 77-93.
- [Le2] F. Ledrappier, *Quelques propriétés ergodiques des applications rationnelles*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **299** (1984), no. 1, 37-40.
- [Le3] F. Ledrappier, *Propriétés ergodiques des mesures de Sinai*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **59** (1984), 163-188.
- [LS] F. Ledrappier, J.M. Strelcyn, *A proof of the estimation from below in Pesin entropy formula*, Ergodic Theory Dynamical Systems, **2** (1982), no. 2, 203-219.
- [LY] F. Ledrappier, L.S. Young, *The metric entropy of diffeomorphisms. Part I: Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula*, Ann. of Math. (2), **122** (1985), no. 3, 509-539.
- [Lo] S. Lojasiewicz, *Introduction to complex analytic geometry*, Birkhäuser, 1991.
- [Ly1] M. Ju. Lyubich, *Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere*, Ergodic Theory Dynamical Systems, **3** (1983), no. 3, 351-385.
- [Ly2] M. Ju. Lyubich, *The dynamics of rational transforms: the topological picture*, Russ. Math. Surveys, **41** (1986), 43-117.
- [Ma1] R. Mañé, *A proof of Pesin's formula*, Ergodic Theory Dynamical Systems, **1** (1981), no. 1, 95-102.
- [Ma2] R. Mañé, *On the uniqueness of the maximizing measure for rational maps*, Bol. Soc. Brasil Mat., **14** (1983), no. 1, 27-43.
- [May] V. Mayer, *Comparing measures and invariant line fields*, Ergodic Theory Dynamical Systems, **22** (2002), no. 2, 555-570.
- [Mi] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Grad. Studies in Math., A.M.S., Vol. 5, 1995.
- [Pe] Ja. B. Pesin, *Characteristic Lyapounoff exponents and smooth ergodic theory*, Russ. Math. Surveys, **32** (1977), no. 4, 55-114.
- [Pi] S. Pinchuk, *Proper holomorphic mappings of strictly pseudoconvex domains*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **241** (1978), no. 1, 30-33.
- [PV] V.L. Popov, E.B. Vinberg, *Invariant Theory*, Algebraic Geometry IV, Parshin, Shafarevich (Eds.), Springer, 1994, 123-284.

- [Pr] D. Prill, *Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups*, Duke Math. J., **34** (1967), 375-386.
- [QZ] M. Qian, S. Zhu, *SRB measures and Pesin's entropy formula for endomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc., **354** (2002), no. 4, 1453-1471.
- [Re] M. Rees, *Positive measure sets of ergodic rational maps*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **19** (1986), no. 3, 383-407.
- [R] W. Rudin, *Function theory in the Unit Ball of \mathbb{C}^n* , Grund. Math. Wiss. No 241, Springer, 1980.
- [Ru1] D. Ruelle, *An inequality for the entropy of differentiable maps*, Bol. Soc. Brasil Mat., **9** (1978), no. 1, 83-87.
- [Ru2] D. Ruelle, *Ergodic theory of differentiable dynamical systems*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **50** (1979), 27-58.
- [ST] G.C. Shephard, J.A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, Canadian J. Math., **6** (1954), 274-304.
- [S] N. Sibony, *Dynamique des applications rationnelles de \mathbb{P}^k* , in Dynamique et Géométrie Complexes, Panoramas et Synthèses No 8, SMF et EDP Sciences, 1999.
- [Su] D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*, Ann. of Math. (2), **122** (1985), no. 3, 401-418.
- [U1] T. Ueda, *Complex dynamical systems on projective spaces*, in Advanced Series in Dynamical Systems, **13**, Chaotic Dynamical Systems, World Scientific Publ., 1993, 120-138.
- [U2] T. Ueda, *Fatou set in complex dynamics in projective spaces*, J. Math. Soc. Japan, Vol., **46** (1994), no. 3, 545-555.
- [U3] T. Ueda, *Critical orbits of holomorphic maps on projective spaces*, J. Geom. Anal., **8** (1998), no. 2, 319-334.
- [Y] L.S. Young, *Dimension, entropy and Lyapounov exponents*, Ergodic Theory Dynamical Systems, **2** (1982), no. 1, 109-124.
- [Z] A. Zdunik, *Parabolic orbifolds and the dimension of the maximal measure for rational maps*, Invent. Math., **99** (1990), no. 3, 627-649.
- [Zi] M. Zinsmeister, *Formalisme thermodynamique et systèmes dynamiques holomorphes*, Panoramas et Synthèses No 4, SMF et EDP Sciences, 1996.