Soutenance de thèse de Doctorat
Université Paul Sabatier

Inégalités fonctionnelles liées aux formes de Dirichlet
De l'isopérimétrie aux inégalités de Sobolev

Par Pierre Fougères

Sous la direction de Dominique Bakry

Laboratoire de Statistique et Probabilités

Plan de l'exposé

1 Présentation générale

$\mathbf{L}$ un générateur de Markov sur $\mathbb{E}$ symétrique par rapport à une mesure de probabilité μ.
$\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(\mathbf{L})$ algèbre de fonctions, stable par $\mathbf{L}$ et fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

Semi-groupe associé sur $\mathbf{L}^2(\mu)$: $(\mathbf{P}_t f)_{t \geqslant 0}$ est la solution de

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \mathbf{L} u(t,x), \quad u(0,x) = f(x).$$

Opérateur quadratique sur $\mathcal{A}$:

$$\mathbf{\Gamma}(f,h) = \frac{1}{2}(\mathbf{L}(fh) - f\mathbf{L}h - h\mathbf{L}f), \quad \mathbf{\Gamma}(f) \overset{\text{déf.}}{=} \mathbf{\Gamma}(f,f).$$

IPP : $\qquad \forall f, h \in \mathcal{A}, \qquad \mu(\mathbf{\Gamma}(f,h)) = -\mu(f\mathbf{L}h).$

Exemples de base

i. $\mathbb{E} = F$ ensemble fini, $\mathcal{A} = \{\text{fonctions sur } \mathbb{E}\}$,

$$\mathbf{L}f(i) = \sum_{j\in\mathbb{E}} \mathbf{L}_{ij}\, f(j) \qquad \mathbf{\Gamma} f(i) = \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{E}} \mathbf{L}_{ij}\,(f(i) - f(j))^2.$$

ii. $\mathbb{E} = M$ variété connexe, $\mathcal{C}_c^\infty(M) \subset \mathcal{A}$,

$\mathbf{L}$ opérateur différentiel du second ordre elliptique

$$\mathbf{L}f(x) = \sum_{ij} g^{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_i b^i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

$\mathbf{L} = \Delta + X$ dans la métrique associée et $\mathbf{\Gamma}(f) = |\nabla f|^2$.

Réversibilité $\left\{\begin{array}{l} \text{i. } \mu(i)\mathbf{L}_{ij} = \mu(j)\mathbf{L}_{ji} \\ \text{ii. } X = \nabla\Phi \text{ si } \mu(dx) = e^{\Phi(x)} v_g(dx). \end{array}\right.$

Diffusion $\quad \mathbf{\Gamma}(\Psi(f), h) = \Psi'(f)\mathbf{\Gamma}(f,h), \quad \Psi \in \mathcal{C}^\infty.$

Inégalités fonctionnelles L^2 pour $\mathbf{L}$ ou $(\mu, \mathbf{\Gamma})$

Poincaré

$$\forall f \in \mathcal{A}, \qquad \mathbf{Var}_\mu(f) \leqslant C_2\, \mu(\mathbf{\Gamma}(f)), \qquad \mathrm{IP}(C_2)$$

où $\mathbf{Var}_\mu(f) = \mu\big(f^2\big) - \mu(f)^2$.

Sobolev d'exposant $p > 2$ ou de dimension $m > 2$, $p = 2m/(m-2)$,

$$\forall f \in \mathcal{A}, \qquad \|f\|_{p,\mu}^2 \leqslant \|f\|_{2,\mu}^2 + B_2\, \mu(\mathbf{\Gamma}(f)) \qquad \mathrm{IS}_m(B_2)$$

Sobolev logarithmique

$$\forall f \in \mathcal{A}, \qquad \mathbf{Ent}_\mu\big(f^2\big) \leqslant D_2\, \mu(\mathbf{\Gamma}(f)), \qquad \mathrm{ISL}(D_2)$$

où, si $f \geqslant 0$, $\mathbf{Ent}_\mu(f) = \mu(f \log f) - \mu(f)\, \log \mu(f) = \frac{d}{dq}\Big(\|f\|_q\Big)_{q=1}$.

$\epsilon(dx) = e^{-\lvert x\rvert}\, dx/2$	$\gamma(dx) = e^{-x^2/2}\, dx/\sqrt{2\,\pi}$	σ_d
$C_2 = 4$	$D_2 = 2$	$B_2^{-1} = d\,(d-2)/4.$

Conséquences

Poincaré $\quad \mathbf{Var}_\mu(\mathbf{P}_t f) = \|\mathbf{P}_t f - \mu(f)\|_2^2 \leqslant e^{-2\,t/C_2}\,\mathbf{Var}_\mu(f)$

log-Sobolev $\quad \mathbf{Ent}_\mu(\mathbf{P}_t f) \leqslant e^{-4\,t/D_2}\,\mathbf{Ent}_\mu(f), \quad f \in \mathcal{A}$

$\mathbf{IS_m(B_2)}$	$\mathbf{ISL(D_2)}$
diamètre fini	queues sous-gaussiennes
$\|\mathbf{P}_t\|_{1\to\infty} \leqslant c/t^{\frac{m}{2}}$	$\|\mathbf{P}_t\|_{p\to q(t)} \leqslant 1$

pour $q(t) = 1 + (p-1)\,e^{4\,t/D_2} > p$.

Distance

$$d(\cdot,\cdot) = \operatorname*{essup}_{h\in\mathcal{A},\mathbf{\Gamma}(h)\leqslant 1} d_h, \quad d_h(x,y) = h(x) - h(y).$$

Inégalités fonctionnelles L^1

Cheeger

$$\forall f \in \mathcal{A}, \qquad \mu(|f - m_\mu(f)|) \leqslant \sqrt{C_1}\, \mu\Big(\sqrt{\mathbf{\Gamma}(f)}\Big). \qquad \mathrm{IC}(C_1)$$

Isopérimétrie gaussienne de Bobkov

$$\mathcal{U}(\mu(f)) \leqslant \mu\Big(\sqrt{\mathcal{U}^2(f) + D_1\, \mathbf{\Gamma}(f)}\Big), \qquad \mathrm{IB}(D_1)$$

pour f à valeurs dans $[0,1]$. Ici, $\mathcal{U} = \varphi' \circ \varphi^{-1}$ où $\varphi(s) = \gamma(]-\infty, s])$.

Modèles $\begin{cases} \text{pour } \epsilon(dx),\ C_1 = 1 \text{ et } \min(\epsilon(A), 1 - \epsilon(A)) \leqslant \epsilon_s(\partial A) \\ \text{pour } \gamma(dx),\ D_1 = 1 \text{ et } \mathcal{U}(\gamma(A)) \leqslant \gamma_s(\partial A). \end{cases}$

$\mathbf{L^1} \Rightarrow \mathbf{L^2}$: $\quad \mathrm{IC}(C_1) \Rightarrow \mathrm{IP}(4\, C_1), \quad \mathrm{IB}(D_1) \Rightarrow \mathrm{ISL}(2\, D_1).$

Opérateur $\mathbf{\Gamma_2}$ sur $\mathcal{A}$: $\mathbf{\Gamma_2}(f) = \frac{1}{2}[\mathbf{L}\mathbf{\Gamma}(f) - 2\,\mathbf{\Gamma}(f, \mathbf{L}f)]$.

Pour $\rho \in \mathbb{R}$ et $d > 0$, $\mathbf{L}$ vérifie l'**inégalité** $\mathrm{CD}(\rho, d)$ si

$$\forall f \in \mathcal{A}, \quad \mathbf{\Gamma_2}(f) \geqslant \rho\,\mathbf{\Gamma}(f) + \frac{1}{d}(\mathbf{L}f)^2.$$

Traduction géométrique

Si $\mathbf{L} = \Delta + \nabla\Phi$ sur M de dimension m,

$$\mathrm{CD}(\rho, d) \Leftrightarrow \begin{cases} d \geqslant m \\ \mathrm{Ric} - \nabla\nabla\Phi \geqslant \rho g + \frac{1}{d-m}\nabla\Phi \otimes \nabla\Phi. \end{cases}$$

Critère de courbure-dimension

Si $\mathbf{L}$ opérateur de diffusion symétrique sur M complète et $\mu(M) = 1$,

$$\mathrm{CD}(\rho, d), \quad \rho > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{IS}_d\left(\frac{4}{d(d-2)}\,\frac{d-1}{\rho}\right) \text{ pour } \mu.$$

2 Hypercontractivité et isopérimétrie gaussienne

$\mathrm{CD}(\rho,+\infty) \Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{A}, \forall t \geqslant 0, \quad \mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_t f) \leqslant e^{-2\rho t}\, \mathbf{P}_t(\mathbf{\Gamma}(f)), \qquad \rho \in \mathbb{R}.$

Conséquences

• pour $0 < t \leqslant 1$,

$$\left\| \sqrt{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{P}_t f)} \right\|_\infty \leqslant \frac{c}{\sqrt{t}} \, \|f\|_\infty$$

pour une constante $c < \infty$ ne dépendant que de ρ.

• Supposons $\mathrm{ISL}(D_2)$. On a alors l'inégalité *pseudo*-isopérimétrique de Bakry-Ledoux : $\forall f \in \mathcal{A}$ à valeurs dans $[0,1]$, $\forall t \in [0,1]$,

$$\|f\|_2^2 - \|f\|_{p(t)}^2 \leq C\sqrt{t} \int \sqrt{\mathbf{\Gamma}(f)}\, d\mu$$

où $C > 0$ ne dépend que de ρ et $p(t) = 1 + \exp\left(-\frac{2\,t}{D_2}\right)$.

Théorème 2.1. *Pour un générateur de diffusion symétrique,*

$$\left.\begin{array}{c}\mathrm{ISL}(D_2)\\ \mathrm{CD}(\rho,\infty) \text{ pour un } \rho\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{IB}(D_1), \qquad D_1 = D_1(D_2,\rho).$$

Preuve rapide. Appliquer l'inégalité *pseudo*-isop. pour $\mu\otimes\gamma$ à $h(x,s) = \Psi(\varphi(s) - f(x))$ où $\Psi = \mathbb{1}_{]-\infty,0]}$. Propriété de diffusion :

$$(\mathbf{\Gamma}_x(h) + \mathbf{\Gamma}_s(h))(x,s) = \delta^2_{f(x)}(\varphi(s)) \Big((\varphi'(s))^2 + \mathbf{\Gamma}_x(f)(x) \Big).$$

D'où $\mu(f)[1-\mu(f)^{(2/p(t))-1}] \leqslant \overline{C}\sqrt{t}\,\mu\left(\sqrt{\mathcal{U}^2(f) + \mathbf{\Gamma}_x(f)}\right)$.

Optimiser en t et utiliser l'équivalence $\mathcal{U}(p) \overset{p\to 0}{\sim} p\sqrt{2\log\frac{1}{p}}$. ▲

• générateur de Markov symétrique à sauts : inégalité plus faible que $\mathrm{IB}(D_1)$ sous les mêmes hypothèses.

• Systèmes de spins : décroissance l^1 des variations secondes du potentiel $\Rightarrow \mathrm{CD}(\rho,\infty)$.

3 Constante de Poincaré des mesures log-concaves sur la droite réelle

$\mu_\Phi(dt) = Z(\Phi)^{-1} \exp\left(-\Phi(t)\right) dt$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3.1 (Muckenhoupt). *Soient m la médiane de μ_Φ et*

$$B_+ = \sup_{t \geqslant m} \left(\int_m^t e^{\Phi(s)}\, ds \int_t^{+\infty} e^{-\Phi(s)}\, ds \right)$$

$$B_- = \sup_{t \leqslant m} \left(\int_t^m e^{\Phi(s)}\, ds \int_{-\infty}^t e^{-\Phi(s)}\, ds \right).$$

μ_Φ satisfait une inégalité de Poincaré ssi
$B(\Phi) \overset{def.}{=} \max\left(B_+, B_-\right) < +\infty$*, et on a*

$$\frac{1}{2}\, B(\Phi) \leqslant C_2(\Phi) \leqslant 4\, B(\Phi).$$

Question : critère plus lisible pour Φ convexe ?

Théorème 3.2. *Si* Φ *convexe sur* $\mathbb{R}$ (*avec* $\Phi(t) \to +\infty$ *quand* $|t| \to +\infty$), *il existe une constante* $0 < \kappa < +\infty$ *ne dépendant pas de* Φ *telle que*

$$\left(\int |s-m| \, \mu_\Phi(ds) \right)^2 \leqslant C_2(\Phi) \leqslant \kappa \left(\int |s-m| \, \mu_\Phi(ds) \right)^2 .$$

Grandes lignes de la preuve

On peut supposer $m = 0$, $\Phi(0) = 0$.

Problème : pour toute Φ convexe sur $\mathbb{R}^+$ *prolongeable*, et tout $t > 0$,

$$\int_0^t e^{\Phi(s)} \, ds \int_t^{+\infty} e^{-\Phi(s)} \, ds \leqslant \kappa \left(\frac{\int_0^{+\infty} s \, e^{-\Phi(s)} \, ds}{\int_0^{+\infty} e^{-\Phi(s)} \, ds} \right)^2 .$$

Changement d'échelle : $t = 1$.

Caractérisation : Φ convexe sur $\mathbb{R}^+$ est prolongeable en une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ de médiane 0 ssi

$$\Phi'(0_+) \geqslant -\left(\int_0^{+\infty} e^{-\Phi(s)}\, ds\right)^{-1}. \tag{1}$$

Point clé : *Soit la fonctionnelle*

$$K(\Phi) = \frac{1}{\int_0^1 e^{\Phi(s)}\, ds \int_1^{+\infty} e^{-\Phi(s)}\, ds} \left(\frac{\int_0^{+\infty} s\, e^{-\Phi(s)}\, ds}{\int_0^{+\infty} e^{-\Phi(s)}\, ds} \right)^2$$

sur l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions convexes satisfaisant la contrainte (1). *Soit $\mathcal{T}$ les fonctions de $\mathcal{C}$ linéaires en* 3 *morceaux sur* $[0,\beta]$, $\beta \geqslant 1$ *avec un point de discontinuité en* 1 *et l'autre dans* $]0,1[$. *Alors*

$$\inf_{\Phi \in \mathcal{C}} K(\Phi) \geqslant \frac{1}{2} \inf_{\Phi \in \mathcal{T}} K(\Phi).$$

Remarque

Φ convexe sur $\mathbb{R}$ telle que $\Phi(t) \to +\infty$ quand $|t| \to +\infty$.

m médiane. Alors

$$e^{-\Phi} \leqslant 2\, e^{-\Phi(m)}.$$

Résultat similaire par Bobkov

$$\mathbf{Var}(\mu) \leqslant C_2 \leqslant 12\,\mathbf{Var}(\mu).$$

Dans $\mathbb{R}^n$,

$$C_2 \leqslant K\,\mu\Big(d(x,\mu(x))^2\Big)$$

pour une constante K universelle.

Problème : diverge pour mesures produits.

Question ouverte : Φ convexe sur $\mathbb{R}^n$.

Existe-t-il $A(\Phi)$ de codimension 1 tel que $d(x,A)$ décrive $C_2(\Phi)$?

4 Relèvement d'une structure de Dirichlet et inégalité de Sobolev

(collaboration avec D. Bakry)

Cadre : $\overline{M}$ variété connexe. $\overline{\mathbf{L}}$ opérateur différentiel du second ordre elliptique. $\overline{\mu}(dx) = e^{\overline{\Phi}(x)}\, v_{\overline{g}}(dx)$ mesure réversible avec $\overline{\mu}\big(\overline{M}\big) = 1$.
$\overline{\mathbf{L}} = \overline{\Delta} + \overline{\nabla \Phi}$, donc $\overline{\mathbf{L}} \longleftrightarrow (\overline{g}, \overline{\mu})$.

Projection d'opérateur $\overline{\mathbf{L}}$ se projette le long de $\Psi : \overline{M} \to M$ si

$$\overline{\mathbf{L}}(f \circ \Psi) = (\mathbf{L} f) \circ \Psi, \quad \text{on note alors } \mathbf{L} = \Psi\big(\overline{\mathbf{L}}\big).$$

Exemple : laplacien de $\mathbb{R}^n$ en coordonnées sphériques

$$\Delta_{\mathbb{R}^n} = \underbrace{\frac{1}{r^2}\Delta_{S^{n-1}}}_{\text{ne se projette pas}} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}}_{\text{se projette}}$$

Projection de la structure de Dirichlet

$\overline{M} = M \times N$; $x = (y, z)$. $\overline{g}$ supposée conforme à une métrique produit

$$\overline{g}_{..} = e^{2\,\overline{\tau}}\,(g_{M,..} \oplus g_{N,..}),\ \text{i.e. } \overline{\mathbf{\Gamma}} = e^{-2\,\overline{\tau}}\,(\mathbf{\Gamma}_M + \mathbf{\Gamma}_N).$$

Alors, $\qquad v_{\overline{g}}(dx) = e^{\overline{m}\,\overline{\tau}} v_{g_M} \otimes v_{g_N}(dy, dz), \quad \overline{m} = m + n.$

Même classe d'opérateurs en projetant la structure de Dirichlet :

si $\bar{f}(x) = f(y)$,

Mesure

$$\int_{\overline{M}} \bar{f}(x)\overline{\mu}(dx) = \int_M f(y)\,\underbrace{u(y)v_{g_M}(dy)}_{\mu(dy)},\ \text{où } u(y) = \int_N e^{\overline{\Phi}(x)+\overline{m}\,\overline{\tau}(x)} v_{g_N}(dz).$$

Forme de Dirichlet

$$\int_{\overline{M}} \overline{\mathbf{\Gamma}}(\bar{f})(x)\,\overline{\mu}(dx) = \int_M e^{-2\tau(y)}\,\mathbf{\Gamma}_M(f)(y)\,\mu(dy),$$

où $e^{-2\,\tau(y)} = u^{-1}(y)\ \int_N e^{\overline{\Phi}(x)+(\overline{m}-2)\,\overline{\tau}(x)}\, v_{g_N}(dz)$.

$$\text{d'où} \quad \begin{cases} g_{..} = e^{2\,\tau}\, g_{M,..} (\text{conforme à } g_M) \\ \mu(dy) = e^{\Phi(y)}\, v_g(dy) \end{cases} \quad \text{i.e. } \mathbf{L} = \Delta + \nabla\Phi.$$

Comme $v_g(dy) = e^{m\,\tau} v_{g_M}(dy)$, on a

$$\begin{cases} \tau = \frac{1}{2} \Big(\log \int_N e^{\overline{\Phi} + \overline{m}\,\overline{\tau}}\, v_{g_N}(dz) - \log \int_N e^{\overline{\Phi} + (\overline{m}-2)\,\overline{\tau}}\, v_{g_N}(dz) \Big), \\ \Phi = \big(1 - \frac{m}{2}\big) \log \Big(\int_N e^{\overline{\Phi} + \overline{m}\,\overline{\tau}}\, v_{g_N}(dz) \Big) \\ \qquad\qquad + \frac{m}{2} \log \Big(\int_N e^{\overline{\Phi} + (\overline{m}-2)\,\overline{\tau}}\, v_{g_N}(dz) \Big). \end{cases}$$

Avantage : une inégalité $\mathbf{L}^2$ (Sobolev, log-Sobolev, Poincaré) pour $\overline{\mathbf{L}}$ en induit une pour $\mathbf{L}$.

Critère de courbure-dimension et projections

Si $\mathbf{L} = \Psi\big(\overline{\mathbf{L}}\big)$, $\mathrm{CD}(\rho, d)$ pour $\overline{\mathbf{L}} \Rightarrow \mathrm{CD}(\rho, d)$ pour $\mathbf{L}$.

C'est faux pour la projection de la forme de Dirichlet.

Exemple : $\overline{\mathbf{L}} = \Delta_{S^d}$ laplacien sphérique sur $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \overline{g}_{..} = (1+\overline{v})^2\, I_d \\ v_{\overline{g}}(dx) = (1+\overline{v}(x))^d\, dx \\ \overline{\Phi} = -\log \omega_d \end{cases} \qquad \text{avec} \begin{cases} \overline{v}(x) = \frac{1-|x|_d^2}{1+|x|_d^2} \\ \omega_d = \frac{2\,\pi^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \end{cases} .$$

Projection de la structure de Dirichlet sur $\mathbb{R}^m$:

$\mathbf{L}_{d,m}$ défini par

$$\begin{cases} g_{..} = e^{2\,\tau_0(m,d)}\,(1+v)^2\, I_m \\ \mu(dy) = \frac{(1+v)^{(d+m)/2}}{\omega_{m,(d+m)/2}}\, dy \\ \Phi = \frac{n}{2}\,\log(1+v) + \Phi_0(d,m) \end{cases} \qquad \text{avec} \begin{cases} v(y) = \frac{1-|y|_m^2}{1+|y|_m^2} \\ \omega_{m,q} = \pi^{\frac{m}{2}}\; 2^q\, \frac{\Gamma\left(q-\frac{m}{2}\right)}{\Gamma(q)} \end{cases} .$$

$\overline{\mathrm{Ric}} = (d-1)\,\overline{g}$, d'où $\overline{\mathbf{L}}$ vérifie $\mathrm{CD}(d-1,d)$ et $\mathrm{IS}_d\left(\frac{4}{d(d-2)}\right)$, pour la mesure normalisée. Cependant...

g métrique sphérique et $\nabla\,\nabla v = -v\,g$ (aux constantes près).
$\Phi = \Phi(v)$, d'où

$$(k-n)\,(\mathrm{Ric} - \nabla\nabla\Phi - \rho\, g) - \nabla\Phi \otimes \nabla\Phi = a(v)\, g + b(v)\nabla v \otimes \nabla v$$

Valeurs propres :

$$a(v) \text{ sur } (\nabla v)^{\perp} \text{ et } a(v) + b(v)\mathbf{\Gamma}(v) \text{ sur } \mathbb{R}\,\nabla v.$$

$a(v) \stackrel{v\to -1}{\longrightarrow} -\infty \Rightarrow \mathbf{L}_{d,m}$ n'a pas de courbure pour n'importe quelle dimension. Pourtant, $\mathrm{IS}_d\Big(\frac{4}{d(d-2)}\Big)$.

Deux remarques

- opérateur de Jacobi dissymétrique et perte sur les constantes.
- Autre choix : $\overline{\mathbf{L}} = \Psi(\Delta_{S^d})$ où $\Psi(y,z) = (y, |z|) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^*_+$.

Inversion du problème

Soit $\mathbf{L}$ donné par Φ et g sur M de dimension m.

$\mathbf{L}$ vérifie ou non $\mathrm{CD}(\rho, k)$, $\rho > 0$, $k \geqslant m$.

Question : existe-t-il $\overline{\mathbf{L}}$ sur $\overline{M} = M \times N$ satisfaisant $\mathrm{CD}(\overline{\rho}, d)$, pour $\overline{\rho} > 0, d \geqslant \overline{m}$, dont la structure de Dirichlet se projette sur celle de $\mathbf{L}$?

Cas étudié :
$\overline{\mathbf{L}}$ sur $\overline{M} = M \times \mathbb{R}_+^*$ donné par $\overline{\Phi}$ et $\overline{g}^{\cdot\cdot} = e^{-2\,\overline{\tau}}\left(e^{2\,\tau}\, g^{\cdot\cdot} \oplus 1\right)$ pour $\tau = \tau(\Phi)$, $\overline{\tau} = \overline{\tau}(\Phi, r)$ et $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}(\Phi, r)$.

Choix des fonctions $\overline{\tau}$ et $\overline{\Phi}$: conditions sur Φ sous lesquelles $\overline{L}$ vérifie $\mathrm{CD}(\overline{\rho}, d)$ (système d'inéquations pour formes quadratiques).
Φ radiale : système de 3 inéquations différentielles.

Application : $\mathbf{L}_{d,m}$ vérifie $\mathrm{IS}_d\left(\frac{4}{d(d-2)}\right)$, pour tout d **réel** tel que $d \geqslant m + 1$.