



HAL
open science

modules homotopiques avec transferts et motifs génériques

Frédéric Déglise

► **To cite this version:**

Frédéric Déglise. modules homotopiques avec transferts et motifs génériques. Mathématiques [math].
Université Paris-Diderot - Paris VII, 2002. Français. NNT : . tel-00002562

HAL Id: tel-00002562

<https://theses.hal.science/tel-00002562>

Submitted on 19 Mar 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 7 — DENIS DIDEROT
UFR de Mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT
SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris 7

Présentée par **Frédéric Déglise**

Modules homotopiques
avec transferts
et motifs génériques

Soutenue le 18 décembre 2002 devant le jury composé de :

M. Jean-Benoit BOST (Université Paris 11)	
M. François LOESER (ENS)	
M. Alexander MERKURJEV (UCLA)	Rapporteur
M. Fabien MOREL (Université Paris 7)	Directeur
M. Christophe SOULÉ (IHES)	
M. Andreï SUSLIN (Northwestern University)	Rapporteur
M. Jörg WILDESHAUS (Université Paris 13)	

A Laure, qui nous quitte
et Marianne, qui nous arrive.

Remerciements

Mes remerciements vont en premier lieu à Fabien Morel sans qui cette thèse n'aurait pas vu le jour, puisqu'il m'a non seulement introduit aux techniques de la cohomologie motivique, mais qu'il m'a surtout guidé pendant les trois ans durant lesquels j'ai construit cette thèse. Mes plus vifs remerciements vont aussi à mes deux rapporteurs, Alexander Merkurjev et Andreï Suslin qui ont pris le temps de lire et de juger mon travail, ce qui n'était facilité ni par la longueur, ni par la langue. Par ailleurs, j'exprime toute ma gratitude à Jean-Benoit Bost, François Loeser, Christophe Soulé et Jörg Wildeshaus qui m'ont fait l'honneur d'accepter de faire partie de mon jury.

J'ai eu la chance pendant mes années de thèse de profiter du dynamisme de plusieurs de ces mathématiciens qui ont organisé le colloque sur la cohomologie motivique en janvier 1999 à Luminy, le séminaire sur les motifs à Paris 7, et surtout le groupe de travail sur la théorie homotopique des schémas. Chacune de ces manifestations m'a grandement aidé et motivé dans mon travail, ce dont un étudiant en thèse a le plus besoin.

J'aimerais à cette occasion remercier Bruno Kahn, Georges Maltsiniotis et Yves André qui ont organisé le séminaire sur les motifs avec mon directeur, et qui m'ont chacun offert leur expérience au cours de nombreuses discussions. J'ai participé avec Geoffrey Powell et Jörg Wildeshaus à ma première expérience de recherche et de travail mathématique au cours du séminaire sur l'homotopie des schémas, qui fut une expérience riche d'apprentissage et de découverte. Pour achever cet horizon des groupes de travail auxquels j'ai participé, mes profonds remerciements vont à Luc Illusie et aux membres du groupe de travail sur les cycles évanescents dont il était l'organisateur, qui m'ont tous apporté leur soutien et leur réconfort.

Parmi eux, je voudrais particulièrement citer Alban Moreau avec qui j'ai partagé ma lente évolution dans les problèmes homotopiques et motiviques, ainsi que les joies et les éveils qui l'ont parsemée. Beaucoup de mes camarades m'ont ainsi secondé dans ma recherche, parmi lesquels notamment Laurent Fargues, Joël Riou et Denis-Charles Cisinski. Chacun m'a aidé, au cours de discussions souvent stimulantes et fructueuses, dans ma progression vers la solution.

Je n'oublie pas non plus mon plus vieil ami, David Monniaux, qui après m'avoir laissé dans la géométrie algébrique, n'a pas cessé de m'aider dans les tâches fastidieuses mais nécessaires de l'informatique. Pour les tâches administratives, j'ai eu la chance de bénéficier de toute la compréhension et de toute l'attention – et il en fallait – des secrétaires de Chevaleret, et particulièrement de Mme Wasse.

Que dire enfin pour ma muse, silencieuse et quotidienne, qui m'a pendant ces 1521 jours inspiré avec douceur, insensiblement, vers le but obscur et souterrain de ma thèse ? Un jour, elle est sortie de son rôle bienveillant et protecteur, pour explorer ma forteresse babelienne et en améliorer les formes vacillantes ou graciles. Avec courage, elle m'a rejoint et aidé méticuleusement à terminer mon mémoire, ma femme amoureuse, Catherine.

Chacun à sa manière a rendu possible la rédaction de mon mémoire, et pour achever ces remerciements, j'en reviens à mon directeur qui m'a guidé, puis accompagné dans le

développement des idées qu'il m'avait lui-même léguées, me laissant toute liberté sans jamais me lâcher même dans les moments difficiles.

Table des matières

I	Faisceaux avec transferts et modules de cycles	1
1	Correspondances finies	3
1.1	Cycles	3
1.1.1	Rappels sur l'intersection des cycles	3
1.1.2	Cycles relatifs	5
1.2	Correspondances finies	8
1.2.1	Définition et composition	9
1.2.2	Structure monoïdale	14
1.2.3	Fonctorialité	15
1.2.4	Une propriété de finitude	19
1.3	Equivalence d'homotopie	21
1.3.1	Définition	21
1.3.2	Compactifications	21
1.3.3	Homotopie et groupe de Picard relatif	26
1.3.4	Applications	29
1.3.5	Droite affine sur un corps	32
2	Faisceaux avec transferts	35
2.1	Topologie de Nisnevich	35
2.1.1	Définition	35
2.1.2	Base pour la topologie de Nisnevich	36
2.1.3	Points pour la topologie de Nisnevich	38
2.2	Transferts	49
2.2.1	Préfaisceaux avec transferts	49
2.2.2	Faisceaux avec transferts	50
3	Faisceaux homotopiques (avec transferts)	61
3.1	Définition	61
3.1.1	Invariance par homotopie	61
3.1.2	Structure monoïdale	64
3.2	Extensions transcendentes pures	65
3.3	Le cas où la base est un corps	68
3.3.1	Points pour les faisceaux homotopiques	68
3.3.2	Faisceau homotopique associé	73
3.4	Modules homotopiques (avec transferts)	81
3.4.1	Graduation inférieure	81
3.4.2	Sphère de Tate	84
3.4.3	S_t^1 -modules	87
3.4.4	Définition finale	89
4	Modules de cycles	93
4.1	Rappels	93
4.1.1	Pré-modules et modules de cycles	93

4.1.2	Les quatre «basic maps» de Rost	97
4.1.3	Complément : catégorie enrichie des extensions	99
4.2	Théorie de l'intersection	102
4.2.1	Spécialisation au cône normal	103
4.2.2	Morphismes de Gysin	106
4.2.3	Produit d'intersection	115
4.3	Module homotopique induit	122
4.3.1	Transferts	122
4.3.2	Théorème final	127
5	Transformée générique	129
5.1	Définition et théorème fondamental	129
5.2	Fonctorialité élémentaire et donnée D1	130
5.3	Transposée, norme et donnée D2	131
5.3.1	Correspondances finies et transposée	132
5.3.2	Situation générique	135
5.3.3	Modèles et définition	138
5.3.4	Axiome R1c	141
5.4	Résidu et donnée D4	142
5.4.1	Paires et excision	142
5.4.2	Excision des faisceaux avec transferts	145
5.4.3	Fonctorialité raffinée de la déformation au cône normal	154
5.4.4	Situation générique	161
5.4.5	Modèles et définition (D4 et R3c)	166
5.4.6	Ramification (axiomes R3a et R3b)	169
5.5	K-théorie de Milnor et donnée D3	175
5.5.1	Cup-produits	175
5.5.2	K-théorie de Milnor et sphère de Tate	177
5.5.3	Action de la K-théorie de Milnor (D3 et R2a,b,c)	186
5.5.4	Résidu et K-théorie (axiomes R3d et R3e)	189
5.6	Axiomes des modules de cycles	198
5.7	Conclusion	201
6	Une équivalence de catégorie	203
6.1	Théorème principal et démonstration	203
6.2	Corollaires	210
6.2.1	Modules de cycles	210
6.2.2	Modules homotopiques avec transferts	210
6.3	Résultats supplémentaires	211
6.3.1	Invariance par homotopie stricte	211
6.3.2	Applications du théorème de simplification de Voevodsky	216
II	Motifs génériques	225
7	Catégorie triangulée des motifs mixtes	229

7.1	Point de vue faisceautique	229
7.2	Point de vue géométrique	233
7.3	Spectres dans la catégorie des motifs (construction conjecturale)	235
8	Quelques morphismes remarquables	237
8.1	Image directe (morphisms finis équidimensionnels)	237
8.1.1	Transposée	237
8.1.2	Cup-produit externe	238
8.1.3	Formule de projection	239
8.2	Motifs relatifs	239
8.2.1	Définition	239
8.2.2	Propriétés	241
8.2.3	Motif de Thom	244
8.2.4	Déformation au cône normal	248
8.3	Classes de Chern	250
8.3.1	Cohomologie motivique et groupe de Chow classique	250
8.3.2	Morphismes associés aux classes de Chern	252
8.3.3	Motif d'un fibré projectif	254
8.3.4	Isomorphisme de Thom	256
8.4	Triangles de Gysin	266
8.4.1	Définitions	266
8.4.2	Fonctorialité	266
8.4.3	Propriétés supplémentaires	273
9	Catégorie des motifs génériques	279
9.1	Généralités	279
9.1.1	Définition	279
9.1.2	Propriété fondamentale	279
9.1.3	Equivalences de catégories	281
9.2	Morphismes et relations	282
9.2.1	Le foncteur canonique $M^{(0)}$	282
9.2.2	Transferts (D2,R1b,R1c)	283
9.2.3	Diagonale et cup-produit	284
9.2.4	K-théorie (D3,R2a,R2b,R2c)	285
9.2.5	Résidu (D4,R3a,b,c,d,e)	286
9.3	Applications	289
9.3.1	Extensions transcendentes pures	289
9.3.2	Le foncteur $M^{(0)}$ est-il plein ?	295
III	Annexe	301
A	Schémas localisés	303
A.1	Finitude	303
A.2	Lissité	306

B Déformation au cône normal	309
B.1 Généralités sur les cônes	309
B.2 Cône normal et éclatement	311
B.3 Déformation au cône normal	314
C Catégories	317
C.1 Terminologie générale	317
C.1.1 Existence de limites	317
C.1.2 Catégories abéliennes	318
C.2 Pro-objets	319
C.2.1 Définitions générales	319
C.2.2 Morphismes et pro-représentation	320
C.2.3 Première étude des morphismes	322
C.2.4 Changement d'indice	323
C.2.5 Présentation des morphismes par niveau	325
C.2.6 Notion de compacité pour un objet	328
C.3 Foncteurs fibres et points	330
C.3.1 Définition	330
C.3.2 Pro-représentation des foncteurs fibres	331
C.3.3 Pro-objets caractéristiques	332
C.4 Catégories monoïdales	333
C.4.1 Définitions générales	333
C.4.2 Monoïdes et leurs actions	335
C.5 Catégories graduées	337
C.5.1 Définitions et notations générales	337
C.5.2 Structure monoïdale	338
C.5.3 Monoïdes anti-commutatifs	338
D Glossaire-index des notations	343

Introduction

Présentation générale

La preuve finale de la conjecture de Milnor est due à deux mathématiciens, Markus Rost et Vladimir Voevodsky. Le premier a démontré un pas essentiel de la théorie des variétés «de scindement» à l'aide de calculs locaux en K -théorie de Milnor. Le second, grâce à l'apport de la cohomologie motivique qu'il avait introduite, a terminé la démonstration en utilisant ce résultat de M. Rost. Nous n'entrerons pas dans les détails de l'histoire de cette preuve et de la controverse qu'elle a soulevée. Toutefois, dans cette thèse, nous démontrons que les méthodes utilisées par M. Rost et celle de V. Voevodsky sont profondément entrelacées.

Ainsi, le résultat principal de cette thèse est la construction d'une équivalence de catégories entre la catégorie des modules de cycles de M. Rost (cf [Ros96]), et une catégorie construite à partir de la catégorie des faisceaux avec transferts invariants par homotopie de V. Voevodsky (cf [FSV00b], prop 3.1.13). La référence de ce théorème central est 6.1.1. Nous obtenons aussi l'énoncé plus simple que cette dernière catégorie est obtenue par localisation de la catégorie des modules de cycles de M. Rost.

L'intérêt de cette construction est double. Tout d'abord, elle démontre que la catégorie des modules de cycles est abélienne, et munit cette dernière d'une structure tensorielle canonique telle que la K -théorie de Milnor est l'élément neutre. Par ailleurs, elle donne une nouvelle preuve du fait qu'un faisceau invariant par homotopie avec transferts a une cohomologie invariante par homotopie. De plus, nous montrons que la démonstration d'une remarque de M. Rost – suivant l'indication qui se trouve à la fin de [Ros96] – nous permet de vérifier le fait que la famille des isomorphismes canoniques, indexés par un entier naturel n , entre la cohomologie motivique en degré $2n$ et en poids n et le groupe de Chow classique en codimension n , est compatible au produits sur chacun des groupes, ainsi qu'aux transferts (cf théorème 8.3.4).

Dans la deuxième partie, on interprète les résultats de la première dans la catégorie dérivée des motifs mixtes. Ce travail débouche sur la catégorie que l'on a baptisée catégorie des «motifs génériques». Les objets de cette catégorie sont formés de pro-motifs. Plus précisément, à chaque extension de type fini du corps de base, nous associons canoniquement un pro-objet de la catégorie dérivée des motifs mixtes définie par V. Voevodsky, et nous prenons pour morphismes tous les morphismes de pro-objets. A l'aide de cette construction, nous montrons comment on peut interpréter les donnée des pré-modules de cycles comme des morphismes définis dans la catégorie des motifs génériques. Par ailleurs, ces morphismes vérifient toutes les relations de définition des pré-modules de cycles, ce

que l'on résume dans une proposition synthétique en l'existence d'un foncteur canonique à valeur dans la catégorie des motifs génériques (cf théorème 9.2.1).

Rappelons que la catégorie dérivée des motifs mixtes définie par V. Voevodsky est canoniquement munie d'une t-structure qu'on appelle t-structure homotopique. On peut interpréter intuitivement notre résultat cité précédemment en remarquant que les motifs génériques pro-représentent des foncteurs exacts pour la t-structure homotopique sur la catégorie dérivée des motifs mixtes, qui commutent aux sommes directes infinies. En effet, comme nous le montrons dans la première partie (cf prop. 2.1.40), ils sont issus de pro-objets dans la catégorie des schémas qui pro-représentent des foncteurs fibres du topos de Nisnevich. Nous considérons donc les motifs génériques comme des «points» pour la t-structure homotopique sur la catégorie des motifs mixtes. Par ailleurs, on appelle «morphisme de spécialisation» les morphismes entre les pro-objets correspondant. Le théorème 9.2.1 s'interprète donc en l'existence de morphismes de spécialisation. On remarque que si l'on ne considère nos pro-objets que dans la catégorie des schémas algébriques lisses, ou même dans la catégorie des schémas algébriques lisses munis des correspondances finies, ces morphismes de spécialisation n'existent pas tous. Les modules de cycles s'interprètent alors comme certains préfaisceaux sur la catégorie des motifs génériques.

Nous soulignons ainsi une analogie très forte avec la situation des foncteurs de Mackey en topologie algébrique équivariante. Ceux-ci sont effectivement définis comme des préfaisceaux additifs sur la catégorie des orbites vu comme objets de la catégorie homotopique stable équivariante. Autrement dit, le rôle des orbites est joué dans notre situation par les motifs génériques. Dans les deux situations, on considère ces objets comme des points, et l'important est de les regarder dans la catégorie d'où sont issus les objets. M. Rost indique déjà dans [Ros96] qu'il a pensé aux foncteurs de Mackey dans sa définition des modules de cycles. L'analogie que nous avons dégagée nous semble éclairer parfaitement cette indication.

Pour arriver au théorème 9.2.1, on n'utilise pas beaucoup plus que les méthodes de la première partie. Toutefois, nous montrons dans le chapitre 8 comment étendre les lemmes de la première partie en une série de propositions concernant les motifs. Ainsi, on notera particulièrement l'étude que l'on a faite de la fonctorialité du triangle de Gysin construit dans [FSV00b]. Nous décrivons tout d'abord la fonctorialité de ce triangle dans le cas d'un morphisme transverse (premier point de 8.4.7). Mais par ailleurs, nous décrivons aussi cette fonctorialité dans le cas de quelques défauts mineurs de transversalité (deuxième point de 8.4.7, et 8.4.10), obtenant ainsi une interprétation géométrique de la ramification en arithmétique (cas d'égale caractéristique) grâce à l'espace de déformation de Fulton (dont nous rappelons la définition et les propriétés fonctorielles dans l'annexe B).

Nous donnons finalement quelques applications élémentaires de la catégorie des motifs génériques. Tout d'abord, grâce au calcul du motif générique d'une extension transcendante pure, nous montrons comment obtenir une réduction de la conjecture de Beilinson-Soulé (cf 9.3.5). Par ailleurs, nous obtenons un résultat d'annulation de la partie libre de certains groupes de morphismes dans la catégorie dérivées des motifs mixtes (cf 9.3.20). Précisons que ce résultat a une interprétation claire en termes de modules homotopiques (cf 9.3.13) *i.e.* en termes de modules de cycles.

Conventions adoptées

Dans toute cette thèse, nous **fixons un corps de base k** .

Dès lors, tous les schémas sont supposés, sans précision, être **séparés et munis d'une structure de k -schéma**.

Nous dirons simplement qu'un schéma est *algébrique* (resp. *lisse*) pour dire qu'il est de type fini sur k (resp. lisse sur k).

Si S est un k -schéma, nous notons $\mathcal{S}ch_S$ la catégorie des schémas séparés sur S , et \mathcal{L}_S la catégorie des schémas séparés, lisses et de type fini sur S .

Par ailleurs, nous avons raccourci la terminologie «**faisceau invariant par homotopie avec transferts**» en «**faisceau homotopique**». De même, dans tout le corps de cette thèse, nous appelons simplement «**module homotopique**» ce que nous avons appelé auparavant dans cette introduction «**module homotopique avec transferts**». On fera attention que cette terminologie est en conflit avec la terminologie utilisée dans [Mor], et qu'en toute rigueur, on doit au moins garder l'expression «avec transferts». Toutefois, nous avons exclusivement adopté dans ce travail les faisceaux avec transferts, ce qui fait que l'abus n'est pas source de confusion à l'intérieur du travail.

La construction centrale

Nous précisons maintenant la comparaison entre modules de cycles et faisceaux invariants par homotopie avec transferts. Dans cette construction, nous nous sommes inspirées de la catégorie des modules homotopiques découverte par F.Morel dans [Mor]. Rappelons que cette catégorie est le coeur de la catégorie homotopique stable pour la t-structure homotopique que F.Morel a construite. Il s'agit de la catégorie des faisceaux – pour la topologie de Nisnevich – de groupes abéliens gradués, strictement invariants par homotopie et munis d'une action du faisceau $\mathbb{G}_m(\cdot)$ telle que l'application adjointe à cette action soit un isomorphisme.

Nous remarquons dans la quatrième section du chapitre 3 que l'on peut faire la même construction avec la catégorie des faisceaux avec transferts invariants par homotopie, obtenant ainsi une catégorie que l'on peut appeler la catégorie des modules homotopiques avec transferts (cf définition 3.4.23). Or cette construction paraît particulièrement pertinente lorsque nous démontrons que le groupe de Chow en codimension 0 d'un module de cycles – encore appelé groupe de cohomologie non ramifiée – est un module homotopique avec transferts (cf théorème 4.3.9).

Le chapitre 5 est donc logiquement consacré à obtenir une transformation dans l'autre sens, qui à un module homotopique avec transferts associe un module de cycles. Nous menons à bien complètement cette construction, appelant «transformée générique» le module de cycles obtenu à partir d'un module homotopique.

La situation est même parfaite puisque ces deux constructions sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre (théorème 4.3.9) – ainsi, on peut interpréter le foncteur qui à un module de cycles associe sa cohomologie non ramifiée comme une «transformation générique inverse».

Par ailleurs, nous avançons la possibilité de faire la construction des modules homotopiques avec transferts non pas seulement au niveau des faisceaux homotopiques, mais au niveau de la catégorie des complexes motiviques, obtenant ainsi une construction similaire à la catégorie des spectres. Plus précisément, elle s'obtient en copiant la définition des spectres de la topologie algébrique lorsque la sphère est le motif $\mathbb{Z}(1)[1]$, qui correspond au motif réduit représenté par le schéma \mathbb{G}_m , pointé par 1. Cette catégorie triangulée doit encore être munie d'une t-structure dont le coeur est la catégorie des modules homotopiques avec transferts. Elle doit jouer un rôle analogue à la catégorie des \mathbb{P}^1 -spectres de [Mor], à laquelle elle se compare naturellement.

Enoncés précis

Nous avons synthétisé ci-dessous les résultats principaux obtenus dans cette thèse :

Première partie.—

Théorème 1 *Soit k un corps parfait.*

1. (théorème 6.1.1) *La catégorie des modules de cycles sur k est équivalente à la catégorie des modules homotopiques sur k . On obtient deux équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre en associant :*
 - (a) *à tout module de cycles M , le faisceau gradué $A^0(., M)$ qui est un module homotopique.*
 - (b) *à tout module homotopique F_* , le foncteur qui à une extension de type fini E/k associe la fibre du faisceau F_* au point correspondant à E/k ; c'est en effet un module de cycles.*
2. (théorème 6.3.12) *La catégorie des faisceaux invariants par homotopie avec transferts de Voevodsky est une localisation de la catégorie des modules de cycles de Rost. Un des foncteurs de cette localisation est obtenu en associant à tout module de cycles M le faisceau $A^0(., M, 0)$.*

Nous déduisons de ce théorème les corollaires suivants :

Théorème 2 *Soit k un corps parfait.*

La catégorie des modules de cycles sur k est abélienne, admet des sommes et produits quelconques, une famille de générateurs et les limites inductives filtrantes sont exacts.

Elle est munie d'une structure monoïdale symétrique telle que le module de cycles K_^M en soit le neutre. Ce produit tensoriel commute au décalage de la graduation des modules de cycles.*

Par ailleurs, la proposition 8.6 de [Ros96], jointe aux méthodes de [Voe02] permet de donner une nouvelle démonstration du théorème suivant dû à Voevodsky (cf [FSV00b], théorème 3.1.12) :

Théorème 3 *Soit k un corps parfait.*

Tout faisceau avec transferts qui est invariant par homotopie a une cohomologie Nisnevich invariante par homotopie.

Deuxième partie.–

On rappelle que l'on associe suivant Voevodsky à un couple (X, Z) – appelé paire fermée dans cette thèse – où X est un schéma algébrique lisse et Z un sous-schéma fermé, un motif $M(X, Z)$.

Pour une paire fermée (X, Z) telle que Z est lisse de codimension pure égale à n , on obtient grâce à la déformation au cône normal un isomorphisme $M(X, Z) \simeq M(N_Z X, Z)$. On dispose de plus d'un isomorphisme, appelé isomorphisme de Thom, $M(N_Z X, Z) \simeq M(Z)(n)[2n]$. Alors :

Théorème 4 *Soit (X, Z) une paire fermée telle que X et Z soient des schémas algébriques lisses, Z étant par ailleurs connexe de codimension n dans X .*

Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme. On pose $T = Z \times_X Y$, et on note $g : T \rightarrow Z$ le morphisme induit par f .

1. (cf 8.4.7) *On suppose que T est lisse sur k , connexe de codimension m dans Y . Alors, le morphisme*

$$M(f, g) : M(Y, T) \rightarrow M(X, Z)$$

est isomorphe à travers la déformation au cône normal et l'isomorphisme de Thom au morphisme

$$(M(g) \smile \mathbf{c}_e(\xi))(m)[2m] : M(T)(m)[2m] \rightarrow M(Z)(n)[2n],$$

où $\xi = g^(N_Z X)/N_T Y$ est le fibré vectoriel «en excès», de rang $e = n - m$.*

2. (cf 8.4.10) *On suppose seulement que $T_{\text{réd}}$ est lisse sur k , mais que Z et T sont tous deux de codimension 1 dans X et Y respectivement.*

Par ailleurs, on suppose que l'idéal de T dans Y est égal à la puissance r de l'idéal de $T_{\text{réd}}$ dans Y . Alors, le morphisme

$$M(f, g) : M(Y, T) \rightarrow M(X, Z)$$

est isomorphe à travers la déformation au cône normal et l'isomorphisme de Thom au morphisme

$$M(T_{\text{réd}})(1)[2] \xrightarrow{r \cdot M(g)(1)[2]} M(Z)(1)[2].$$

La deuxième formule est l'interprétation géométrique de la ramification que l'on avait annoncée.

Les deux résultats suivants ont moins d'importance que les précédents, mais nous les donnons afin d'être complet :

Proposition 5 (cf 9.3.5) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. (**conjecture de Beilinson-Soulé**) *Pour tout schéma algébrique lisse X , pour tout couple d'entiers naturels (n, m) tel que $m > 0$,*

$$\text{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(X), \mathbb{Z}(n)[-m]) = 0.$$

2. Pour toute extension de type fini E/k , pour tout entier naturel n ,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}\text{-}DM_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(E), \mathbb{Z}(n)[-1]) = 0.$$

Remarque.– B. Kahn nous a signalé que l’on conjecturait même que pour toute extension de type fini E/k , et tout entier naturel $n > 0$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}\text{-}DM_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(E), \mathbb{Z}(n)) = 0.$$

Notre démonstration montre que cette dernière assertion est encore équivalente à la conjecture de Beilinson-Soulé.

Par ailleurs, on a obtenu le résultat d’annulation suivant :

Proposition 6 (cf 9.3.20) *Soient X/k un schéma algébrique lisse de dimension d , et L/k une extension de type fini de k . Pour tout entier $p > d$, on a*

$$\mathrm{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(L)\{p\}, M(X)) \otimes \mathbb{Q} = 0.$$

Grandes lignes de la thèse

Dans la première partie, nous avons été guidés par un souci d’exhaustivité et de détail, ce qui entraîne la longueur de cette thèse. Pour que cela ne grève pas la lecture de ce mémoire, nous en traçons donc les grandes lignes, en indiquant la place et l’importance de chaque étape.

Les chapitres 1 à 3 contiennent essentiellement des rappels concernant la théorie des faisceaux avec transferts de Voevodsky. Nous donnons un exposé complet et détaillé de cette théorie, en nous appuyant sur le livre de référence [FSV00a]. Exception faite de la fin du chapitre 3 où nous introduisons les modules homotopiques, tout le matériel de ces chapitres est donc déjà connu.

Les chapitres 3 à 6 forment la démonstration proprement dite du résultat principal de la première partie. Dans les deux premiers, nous construisons chacune des deux équivalences de catégories qui entrent en jeu dans ce théorème. C’est surtout le chapitre 5 qui demande le plus de travail. Dans le chapitre 6, nous terminons la démonstration, et en tirons les corollaires déjà cités.

Dans la deuxième partie, le souci de détail a été beaucoup moins important. Le chapitre 7 toutefois est consacré à des rappels sur la catégorie dérivée des motifs mixtes définie par V. Voevodsky pour que le lecteur dispose d’un panorama complet.

Notre apport apparaît dans le chapitre 8, principalement avec l’étude des triangles de Gysin de la dernière section.

Le corps principal de cette thèse se termine sur la définition des motifs génériques, qui sont des pro-objets de la catégorie $DM_{gm}(k)$ destinés à interpréter les résultats du chapitre 5, en montrant comment on peut exploiter l’étude faite au chapitre 8. Ce chapitre a surtout une vocation préparatoire pour la suite spectrale que nous avons en vue (cf Développements éventuels), mais nous montrons tout de même comment on peut

exploiter les motifs génériques sur deux exemples simples dans la dernière section.

Suivant le souci d'exhaustivité de la première partie, nous avons intégré en annexe des rappels concernant l'espace de déformation et la théorie générale des pro-objets. En annexe A, on trouvera aussi la définition, par ailleurs classique, d'une notion de finitude sur les schémas qui nous sert dans cette thèse. Cette partie annexe se termine sur un index des notations qui j'espère facilitera la lecture du présent mémoire.

Description détaillée du travail

Nous décrivons ici précisément chaque partie. Le lecteur pourra se servir de cette description comme un guide de référence pour chaque chapitre.

Première partie.— La première partie a pour but la démonstration du théorème 6.1.1. Elle est élémentaire, et nous prouvons complètement toutes les propositions dont nous avons besoin pour cela. Ainsi, nous avons été particulièrement soucieux dans cette première partie de donner un exposé le plus complet possible de la théorie des faisceaux avec transferts de V. Voevodsky. Le lecteur y trouvera donc toutes les preuves – à une exception près – de cette théorie avec plus de détails que dans [FSV00a], ainsi qu'une interprétation des méthodes du chapitre 3 de ce livre de référence.

Chapitre 1.— Le premier chapitre s'ouvre sur des rappels concernant la théorie de l'intersection des cycles telle qu'elle est exposée dans [Ser58].

Dans la deuxième section, on expose la théorie des cycles relatifs de [SV00b] dans le cas particulier des cycles équidimensionnels de dimension 0, puisque nous n'utiliserons que ces derniers. Suivant A. Suslin et V. Voevodsky, on montre en particulier que de tels cycles disposent d'un pushout par un morphisme quelconque.

C'est dans la troisième section qu'on entre dans le vif du sujet, avec la notion de correspondances finies introduite par V. Voevodsky. Pour cela, nous prenons pour base une base régulière sur k arbitraire au lieu du corps k montrant ainsi que les bases de la théorie sont encore valides dans ce cas. Nous prouvons toutes les propriétés élémentaires vérifiées par ces correspondances, telles que le fait que leur composition est bien définie par la formule classique. Le calcul de la composition d'une correspondance finie avec un morphisme de schémas montre aisément que la catégorie des schémas algébriques lisses munie des correspondances finies contient comme sous-catégorie (non pleine!) la catégorie des schémas algébriques lisses munie des morphismes de schémas. Par ailleurs, nous avons dégagé quelques propriétés élémentaires concernant la functorialité de cette catégorie par rapport à la base choisie. Nous avons aussi dégagé un résultat utile concernant les groupes de correspondances finies et les limites inductives de schémas à la source, qui n'était pas clairement dégagé dans la littérature.

Dans la dernière section, on introduit la notion d'homotopie entre correspondances finies. Les groupes de correspondances finies à homotopie près ne sont rien d'autre que des groupes d'homologie singulière au sens de Suslin en degré 0, mais nous montrons que l'utilisation directe de l'équivalence d'homotopie permet une interprétation claire

des résultats de V. Voevodsky (principalement ceux de [FSV00c]). Dans cette section, nous introduisons les bonnes compactifications d'une courbe notion due à Suslin et Voevodsky, et nous exposons complètement la preuve de M. Walker concernant l'existence semi-locale de bonnes compactifications, pour un corps de base infini. Nous donnons ensuite l'interprétation des groupes de correspondances finies à homotopie près en termes de groupes de Picard relatifs due à Suslin et Voevodsky (ici, nous faisons référence à leur article [SV96] pour la démonstration). L'originalité de ce chapitre réside dans les deux dernières sous-sections où nous montrons comment utiliser les résultats précédents pour obtenir des propriétés de la catégorie des schémas algébriques lisses munis des correspondances finies à homotopie près. On fera attention que ces résultats ne prendront tout leur sens que dans le chapitre 3.

Chapitre 2.— Ce deuxième chapitre s'ouvre lui-aussi sur des rappels, concernant cette fois la topologie de Nisnevich. Nous montrons ainsi la caractérisation classique des faisceaux Nisnevich à l'aide des «carrés distingués élémentaires» telle qu'elle se trouve par exemple dans [MV01]. Par ailleurs, dans la troisième section, nous faisons une étude très précise des «points», au sens de Grothendieck, du topos associé au site des S -schémas lisses de type fini, pour S un k -schéma de dimension de Krull finie. En effet, cette étude nous servira de base dans la suite du travail, puisqu'elle explicite une famille conservative de points pour ce topos. On démontre ainsi que les foncteurs fibres correspondant sont pro-représentables – ce qui est un fait général dans les topos – et surtout, on explicite les pro-objets de la catégorie des S -schémas lisses de type fini qui les pro-représentent. Dans le cas de la topologie de Zariski, on obtient plus précisément une équivalence de catégorie entre la catégorie des foncteurs fibres d'une famille conservative de points, munie des transformations naturelles, et la catégorie des S -algèbres locales formellement lisses et essentiellement de type fini (on renvoie le lecteur à l'annexe A pour la définition de cette dernière condition de finitude sur un morphisme de schémas). Nous n'aurons réellement besoin dans la suite du travail que des telles S -algèbres locales qui sont de dimension 0 ou 1, mais pour l'assertion précédente, cela ne change pas beaucoup le travail de considérer toutes les dimensions possibles. Toutefois, puisque nous utilisons particulièrement dans la suite les S -algèbres locales formellement lisses essentiellement de type fini, nous consacrons à ces objets un petit paragraphe à la fin de la première section.

Nous pouvons ensuite entrer dans le vif du sujet avec la deuxième section, et définir, suivant très exactement V. Voevodsky, les notions de préfaisceau avec transferts et de faisceau avec transferts, en étendant toutefois les définitions au cas d'une base S qui est un k -schéma régulier noethérien – ce qui ne pose pas de réelle difficulté. Nous avons suivi fidèlement dans cette section la démarche de ce mathématicien (cf [FSV00b], §3.1) pour obtenir finalement le fait que la catégorie des faisceaux avec transferts est abélienne, et munie d'une structure monoïdale canonique. Suivant toujours V. Voevodsky, nous montrons qu'un schéma X représente canoniquement un faisceau avec transferts noté $L[X]$ (cf lemme 2.2.4). Par ailleurs, nous démontrons le lemme fondamental que pour tout faisceau avec transferts F , le groupe d'extension $\text{Ext}_{\mathcal{M}_k^{\text{tr}}}^n(L[X], F)$ est canoniquement isomorphe à la cohomologie du faisceau Nisnevich sous-jacent à F par rapport à X en degré n .

Chapitre 3.— Dans ce chapitre, nous introduisons finalement les faisceaux invariants par homotopie avec transferts, sous le nom abusif de «faisceaux homotopiques». La définition garde encore tout son sens au-dessus d’une base S définie sur k , régulière et noethérienne. Nous prouvons ainsi que la catégorie des faisceaux homotopiques sur S est munie d’une structure monoïdale canonique, à l’aide du foncteur h_0 , adjoint à gauche du foncteur d’oubli des faisceaux homotopiques dans les faisceaux avec transferts.

Nous prouvons dans la deuxième section un lemme utile concernant les extensions transcendentes pures, à savoir que pour toute extension transcendente pure L de k , pour tout faisceau homotopique F sur S , et pour tout schéma algébrique lisse sur S , le morphisme canonique $F(X) \rightarrow F(X_L)$ est un monomorphisme, où $F(X_L)$ est encore le groupe des sections du faisceau homotopique F étendu à S_L .

Cet énoncé est valable sur une base S quelconque, mais par contre, nous sommes obligés d’abandonner rapidement cette généralité pour nous restreindre au cas où S est le corps de base. Dans ce cas, le lemme concernant les extensions transcendentes pures nous sert à combler une lacune dans le chapitre [FSV00c]. En effet, la démonstration de *loc.cit.* concernant la proposition correspondant à 3.3.1 (et donc celle de son corollaire 3.3.3) ne sont valides que dans le cas où k est un corps infini, parce que le théorème de M.Walker 1.3.11 n’est démontré que dans ce cas. Nous utilisons le résultat de la deuxième section pour montrer que le cas d’un corps fini k s’en déduit, par extension des scalaires au corps infini $k(t)$. Cette troisième section est particulièrement dense, puisque la deuxième sous-section montre un théorème très important de V. Voevodsky (cf 3.3.18), qui nous permet de déduire suivant la méthode de Voevodsky que le faisceau associé à un préfaisceau avec transferts invariants par homotopie est encore invariant par homotopie *i.e.* est un faisceau homotopique grâce aux résultats du chapitre 2. Ceci montre que la catégorie des faisceaux homotopiques est abélienne de Grothendieck, et monoïdale symétrique fermée, résultat fondamental.

Les démonstrations de cette section suivent comme nous l’avons indiqué la démarche de Voevodsky. Toutefois, nous apportons un peu d’originalité en montrant que l’on peut faire toutes les constructions à l’aide de la catégorie des schémas algébriques lisses munis des correspondances finies à homotopie près. Ceci simplifie et clarifie substantiellement les démonstrations de [FSV00c], §4.1 à §4.4, dans le cas restreint des faisceaux avec transferts (au lieu des préthéories) qui est le seul dont nous nous servirons. Nous espérons que le lecteur trouvera ces démonstrations éclairantes dans les fondements de la théorie générale de la catégorie dérivée des motifs mixtes.

La dernière section est par contre originale, puisqu’elle introduit la notion de «module homotopique avec transferts» que nous avons déjà mentionnée, sous le nom abusif de «module homotopique». La première sous-section rappelle la construction de Voevodsky qui à un faisceau homotopique F associe un faisceau homotopique F_{-1} (cf [FSV00c], fin du §3.1). Nous montrons, suivant à nouveau V. Voevodsky, que ce foncteur est exact. Nous en donnons par ailleurs une interprétation en terme de Hom interne de source le faisceau homotopique S_t^1 , appelé «sphère de Tate», égal au conoyau du morphisme canonique $h_0(\{1\}) \rightarrow h_0(\mathbb{G}_m)$ — précisons que ce faisceau homotopique est égal dans la catégorie des complexes motiviques au motif de Tate classique $\mathbb{Z}(1)$ lorsqu’on l’a décalé à gauche de 1, *i.e.* $\mathbb{Z}(1)[1] = S_t^1$ (cf 8.2.12). Dans les deux dernières sous-sections, nous montrons comment réaliser la construction des spectres de la topologie algébrique dans le cas de la catégorie des faisceaux homotopiques avec pour sphère S_t^1 . Nous introduisons donc

les modules gradués au-dessus de S_t^1 , qui sont l'analogie des spectres. Par ailleurs, nous appelons module homotopique tout module gradué F_* sur S_t^1 tel que le morphisme adjoint

$$\epsilon : F_* \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}}(S_t^1, F_*) = (F_*)_{-1}$$

au morphisme structural

$$\tau : S_t^1 \otimes^{Htr} F_* \rightarrow F_*$$

est un isomorphisme. Ces objets sont l'analogie des spectres fibrants de la topologie algébrique. Nous démontrons ensuite que cette catégorie est abélienne de Grothendieck, et que l'on dispose d'un foncteur qui à un S_t^1 -module F_* associe un module homotopique $\Omega^\infty(F_*)$, mais nous reportons à la fin du chapitre 6 la construction d'une structure monoïdale canonique sur la catégorie des modules homotopiques, pour laquelle le module homotopique $\Omega^\infty(S_t^1)$ sera inversible comme il se doit. La raison est que nous n'avons pu nous passer du récent théorème de simplification de Voevodsky, tel qu'il est énoncé dans un cas particulier dans le numéro 6.3.5.

Chapitre 4.— Ce chapitre a pour but de montrer qu'on peut associer à un module de cycles un module homotopique.

Il commence par des rappels concernant les définitions des pré-modules et modules de cycles dues à M. Rost. Ces rappels n'ont été insérés que pour la commodité du lecteur, et ils n'apportent rien par rapport à la référence originale [Ros96]. A la fin de la première section toutefois, nous introduisons une catégorie définie par générateurs et relations de telle manière que les pré-modules de cycles deviennent des foncteurs additifs de cette catégorie vers les groupes abéliens. Cette catégorie diffère légèrement de la définition originale de la remarque 1.10 de [Ros96] puisque nous considérons que ses objets sont les couples (E, n) où E/k est une extension de type fini, et n un entier relatif arbitraire, afin de voir la graduation des pré-modules de cycles comme une donnée interne à cette catégorie. Cette catégorie nous servira seulement dans le chapitre 9.

La deuxième section concerne la théorie de l'intersection qu'on peut développer pour les groupes de Chow à coefficients dans un module de cycles. Dans la première sous-section, elle suit l'approche originale de M. Rost qui utilise l'espace de déformation pour définir un morphisme de spécialisation. Toutefois, dans la deuxième sous-section, nous avons montré comment on peut développer en s'appuyant sur les résultats de [Ros96] une théorie des morphismes de Gysin associés aux morphismes localement d'intersection complète, similaire à celle de [Ful98] (cf définition 4.2.23). Suivant cette dernière référence, nous nous limitons aux morphismes localement d'intersection complète dont la source est un schéma que l'on peut immerger dans un schéma lisse sur S . Nous montrons que ces morphismes de Gysin satisfont les propriétés de base telles qu'elles sont énoncées dans le chapitre 6 de [Ful98]. Par ailleurs, nous construisons suivant *loc.cit.* des morphismes de Gysin raffinés, qui permettent d'énoncer en général une formule de projection (cf définition 4.2.29, et proposition 4.2.36). Signalons que nous n'avons développé la théorie des morphismes de Gysin raffinés que pour des pullback d'immersions fermées régulières, et qu'on doit pouvoir le faire suivant [Ful98] pour des pullback de morphismes localement d'intersection complète. Nous montrons finalement que notre définition coïncide avec celle de Rost dans le cas où l'on considère un morphisme localement d'intersection complète à valeur dans un schéma lisse sur S . Dans la dernière sous-section, nous suivons à nouveau

[Ros96] pour définir un produit d'intersection sur un corps k lorsqu'on s'est donné un pairing de modules de cycles. Toutefois, en plus des résultats de M. Rost sur ce produit d'intersection, nous obtenons grâce à l'étude de la deuxième sous-section une formule de projection vérifiée par ce produit d'intersection, lorsqu'on considère un morphisme propre et localement d'intersection complète. La fin de la dernière sous-section est consacrée à l'étude du cas de la K-théorie de Milnor, où nous démontrons l'assertion finale de [Ros96], suivant l'indication qui s'y trouve. Ce résultat nous permettra de montrer que le produit sur la cohomologie motivique en degré $2n$ et poids n pour un entier naturel n variable coïncide avec le produit sur les groupes de Chow.

Dans la dernière section, on s'occupe du résultat annoncé. La première sous-section construit donc une action des correspondances finies sur les groupes de Chow $A^*(.; M)$ pour un module de cycles M sur un corps k (non nécessairement parfait). Le plus difficile est de montrer que cette action est compatible avec le produit de composition des correspondances finies, ce que l'on fait grâce à une étude précise des intersections mises en jeu, nous servant à plusieurs reprises du fait que pour composer deux correspondances finies, on se réduit à une intersection propre. Nous utilisons à nouveau pour ce travail les résultats de la deuxième section concernant les morphismes de Gysin raffinés. Ce travail étant effectué, il ne nous reste plus qu'à montrer que pour un module de cycles M le faisceau gradué $A^0(.; M)$ est un module homotopique (cf 4.3.9).

Chapitre 5.— Ce chapitre est le plus technique de la thèse, et en occupe pratiquement le quart. Nous nous occupons de la réciproque du chapitre 4, à savoir qu'un module homotopique F_* définit un module de cycles (cf énoncé en 5.1.2), que l'on note \hat{F}_* , et que l'on appelle transformée générique de F_* — puisqu'il s'agit en particulier de la restriction de F aux points Nisnevich qui correspondent à des schémas algébriques lisses connexes localisés en leur point générique. Il s'agit de construire les données des pré-modules de cycles, de démontrer les relations que doivent vérifier ces données, et de montrer enfin les axiomes des modules de cycles. Le lecteur trouvera dans le tableau page 130 les références où chacune de ces tâches est effectuée. Nous avons essayé de donner des énoncés précis qui permettent la lecture de cette démonstration en suivant les indications du tableau, puis en glanant au besoin des détails grâce au jeu des références.

Nous indiquons ici la démarche adoptée dans cette démonstration. On fixe dans tout le chapitre 5 un module homotopique (F_*, ϵ) . Il s'agit dans chaque cas de définir un morphisme entre les fibres du faisceau F_* aux points correspondant aux extensions de type fini de k . Pour cela, on procède toujours de la même manière ; on donne d'abord la construction géométrique qui correspond à la donnée D^* que l'on veut construire. On montre ensuite, dans un paragraphe toujours intitulé «situation générique» comment cette donnée passe à la limite pour induire un morphisme sur les fibres (on utilise ici la théorie des pro-objets ; le lecteur en trouvera un rappel complet dans l'annexe C). On définit la donnée arithmétique en question en montrant comment elle se modélise géométriquement en introduisant une notion appropriée de «modèle», et on montre que la définition est indépendante du modèle choisi. On démontre finalement les relations qui sont rattachées à cette donnée.

La deuxième section du chapitre 5 concernant la donnée D1 est élémentaire.

La troisième section s'attache à définir la donnée D2. Pour cela, la construction

géométrique utilisée est la transposée des morphismes finis équidimensionnels de schémas dans la catégorie des correspondances finies (sous-section 5.3.1). Nous montrons ensuite qu'on peut toujours trouver un modèle d'une extension finie E/L , c'est-à-dire un morphisme fini surjectif $X \rightarrow Y$ de k -schémas connexes algébriques lisses, tel que $\kappa(X)/\kappa(Y)$ soit canoniquement k -isomorphe à E/L . La démonstration de l'axiome R1c repose sur une relation analogue (cf 5.3.5) vérifiée par les correspondances finies.

La quatrième section permet de construire la donnée D4. C'est la difficulté principale de ce chapitre. Notons que la construction aurait été beaucoup moins technique si l'on avait accepté d'utiliser le théorème 3.1.12 de [FSV00b] concernant l'invariance par homotopie stricte des faisceaux homotopiques. Nous montrons comment éviter le recours à ce théorème, à l'aide d'une construction inspirée de la construction du §4.2 de [FSV00c]. Nous avons dégagé, pour clarifier la construction, la notion de paire fermée inspirée de la topologie. Une paire fermée est tout simplement un couple (X, Z) formé d'un schéma X et d'un sous-schéma fermé Z de X . À une telle paire fermée, et à un faisceau homotopique F , nous associons un groupe abélien noté $F^1(X, Z)$. La construction que nous proposons a l'avantage que le groupe abélien ainsi construit dépend fonctoriellement de la paire fermée (X, Z) . Or cette fonctorialité est un peu particulière. En effet, nous considérons pour morphismes de paires fermées $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ les morphismes de schémas $f : Y \rightarrow X$ tels que $f^{-1}(Z)_{red} = T_{red}$, que nous baptisons morphismes quasi-cartésiens. Autrement dit, il nous suffit que l'espace topologique sous-jacent à $f^{-1}(Z)$ soit égal à T (nous ajoutons l'hypothèse que le morphisme $g : T \rightarrow Z$ doit être la composée d'un épaissement canonique avec le morphisme induit par f). Il apparaît que le groupe $F^1(X, Z)$ ainsi construit satisfait la propriété d'excision classique en géométrie. Le résultat central de cette construction est le fait (cf 5.4.24) que

$$F^1(\mathbb{A}_X^1, X) \simeq F_{-1}(X),$$

analogue du théorème 4.14 de [FSV00c]. Nous insistons sur le fait que le lemme clé qui nous sert dans cette proposition est le lemme démontré et utilisé par V. Voevodsky pour ce théorème. Toutefois, notre construction vérifie des propriétés suffisantes pour que l'on obtienne grâce à l'espace de déformation un isomorphisme canonique

$$F^1(X, Z) \simeq F^1(N_Z X, Z)$$

lorsque la paire fermée (X, Z) est «paramétrisable» (cf 5.4.26). Dans la sous-section 5.4.3, nous montrons que cet isomorphisme est naturel par rapport à tout morphisme quasi-cartésien $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ entre des paires fermées de codimension 1, qui est tel que l'épaississement canonique $T \rightarrow f^{-1}(Z)$ entre sous-schémas fermés de Y soit «exact» (*i.e.* l'idéal de $f^{-1}(Z)$ dans Y est égal à une puissance entière de l'idéal de T dans Y). Ceci nous servira par la suite pour interpréter de manière géométrique la formule R3a de [Ros96] qui fait intervenir un indice de ramification. Signalons enfin que l'on dispose d'un morphisme canonique

$$F(X - Z) \rightarrow F^1(X, Z)$$

que l'on peut considérer comme la version géométrique du résidu. On montre ensuite comment ce résidu passe à la limite. Par la suite, on introduit la notion de k -modèle d'un anneau de valuation discrète \mathcal{O}_v qui est essentiellement de type fini sur k . C'est ici que l'on utilise l'hypothèse que k est parfait, puisqu'un tel modèle est une paire fermée (X, Z)

telle que X et Z sont lisses, connexes et de type fini sur k , et Z est de codimension 1 d'anneau local canoniquement isomorphe à \mathcal{O}_v . On ne peut pas espérer une telle situation en général pour un anneau de valuation discrète sur un corps non parfait k , puisque son corps résiduel peut ne pas être une extension séparable de k . Nous montrons que de tels modèles existent, en déduisons la définition du résidu à l'aide du pré-résidu, et montrons que cette définition est indépendante du modèle choisi (notamment indépendante d'une uniformisante de \mathcal{O}_v qu'il faut choisir pour construire le morphisme résidu). La dernière sous-section démontre les relations R3a et R3b que doit vérifier un pré-module de cycles, à l'aide de l'interprétation géométrique de la ramification que nous avons obtenue grâce à la déformation au cône normal. Nous utilisons notamment le fait que le groupe des endomorphismes du faisceau homotopique S_t^1 est isomorphe à \mathbb{Z} .

Dans la section 5, on s'occupe de l'action de la K-théorie de Milnor. Celle-ci résulte simplement de l'action naturelle de la cohomologie motivique sur les sections d'un faisceau homotopique. Nous introduisons cette action en terme de cup-produit externe. Dans la deuxième sous-section, nous rappelons que la cohomologie motivique d'un corps en degré n et poids n est le n -ième groupe de K-théorie de Milnor, résultat obtenu par A. Suslin et V. Voevodsky. Toutefois, nous énonçons cette proposition à propos du groupe que l'on a noté $S_t^n(E)$ (et qui correspond en fait à $H^n(\mathbb{Z}(n))(E)$) ; puisque nous avons démontré toutes les propriétés élémentaires du cup-produit – comme une formule de projection – pour les faisceaux homotopiques, nous montrons que la démonstration de A. Suslin et V. Voevodsky concernant la cohomologie motivique se traduit en fait littéralement pour donner une démonstration concernant le groupe $S_t^n(E)$. Nous avons donc inséré cette démonstration dans le cas du faisceau homotopique gradué

$$S_t^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (S_t^1)^{\otimes H^{tr}, n}$$

principalement par souci d'exhaustivité. L'action de la K-théorie de Milnor est alors facile à définir. Toutefois, on caractérise cette action pour lui donner une forme géométrique (cf 5.5.26). Ceci nous permet de donner finalement une démonstration des dernières relations des pré-modules de cycles – signalons que nous avons besoin pour la dernière relation d'une propriété supplémentaire du morphisme pré-résidu de la section 4 (énoncé en 5.5.30).

Dans la section 6, on démontre les axiomes des modules de cycles. La propriété (FD) est facile compte tenu de notre construction. Par contre, pour terminer la démonstration on utilise à nouveau le fait que le corps k est parfait, et la caractérisation des modules de cycles montrée par M. Rost dans ce cas ([Ros96], theorem 2.3). En effet, on démontre que le pré-module de cycle défini par un module homotopique vérifie la propriété (H), qui entraîne facilement la propriété (WR), ce qui conclut le chapitre 5 d'après le résultat de M. Rost.

Chapitre 6.– Dans ce chapitre, on démontre le théorème principal de la première partie, pour un corps parfait k . On a déjà construit deux foncteurs canoniques entre la catégorie des modules de cycles sur k et celle des modules homotopiques sur k . Il reste à montrer que ces deux morphismes sont réciproques l'un de l'autre. On construit donc des transformations naturelles canoniques (qui correspondent au fait que ces foncteurs sont adjoints), et on montre que ce sont des isomorphismes.

Ainsi, pour un module de cycles M , on construit facilement un foncteur canonique $\widehat{A^0(\cdot; M)} \rightarrow M$ entre la transformée générique de $A^0(\cdot; M)$ et le module de cycles M . Toute

la difficulté consiste à voir que c'est un morphisme de modules de cycles, c'est-à-dire qu'il est compatible aux données D1-D4. Ce sont les données D3 et D4 qui posent le plus de problèmes. Pour la donnée D3, on utilise le fait que le module homotopique $A^0(\cdot; M)$ est strictement invariant par homotopie, comme il résulte de la proposition 6.5 de [Ros96]. On montre que le morphisme pré-résidu considéré dans la section 4 du chapitre 5 coïncide avec le morphisme bord défini par M. Rost dans *loc.cit.*, §3.7. Ceci permet de conclure en revenant à la définition de celui-ci. Pour la donnée D4 on utilise la caractérisation de l'action de la K-théorie de Milnor sur $\widehat{A^0(\cdot; M)}$ (*i.e.* celle du corollaire 5.5.26), ainsi que la définition de l'isomorphisme structural du module homotopique $A^0(\cdot; M)$.

Pour un module homotopique F_* , on construit de même assez facilement pour tout schéma algébrique lisse X un morphisme $F_*(X) \rightarrow A^0(X; \hat{F}_*)$. Le problème est de montrer qu'il est compatible aux transferts sur chacun des deux membres. On fait cela en plusieurs étapes, en commençant par le cas des morphismes plats dominants et de la transposée des morphismes finis surjectifs. Le cas le plus difficile est celui des immersions fermées, et on utilise notamment le corollaire 12.4 de [Ros96] concernant le calcul du morphisme de Gysin d'une immersion fermée à l'aide d'une suite régulière qui la paramétrise. On a besoin ici d'un lemme qui permet d'interpréter géométriquement les morphismes de spécialisation (grâce au lemme 6.1.2). On peut alors démontrer le cas général à partir de ces trois cas, car on s'y réduit dans le cas d'une correspondance finie associée à un sous-schéma fermé lisse sur k . On termine la démonstration en utilisant le fait que le morphisme construit est un isomorphisme sur les points correspondant aux extensions de type fini de k , ce qui suffit puisque c'est un morphisme de faisceaux homotopiques.

On en déduit ensuite le corollaire dont nous avons déjà parlé concernant les modules de cycles, sans la structure monoïdale dans un premier temps. Par ailleurs, on en déduit un corollaire concernant les modules homotopiques *i.e.* en tant que faisceaux, ils vérifient la résolution de Gersten, sont strictement invariants par homotopie, et leur cohomologie est égale au groupe de Chow à coefficients du module de cycles correspondant.

Dans la dernière section, on déduit des résultats supplémentaires qui font appel au récent preprint [Voe02] de V. Voevodsky.

Dans la première sous-section, on montre comment interpréter – certains diraient détourner – les lemmes principaux de *loc.cit.* pour obtenir le lemme suivant (cf corollaire 6.3.2) :

Lemme 7 *Pour tous faisceaux homotopiques F et G , le morphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}_k^{\mathrm{tr}}}(G, F) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}_k^{\mathrm{tr}}}(S_t^1 \otimes^{\mathrm{Htr}} G, S_t^1 \otimes^{\mathrm{Htr}} F)$$

est un monomorphisme.

Nous avons besoin d'une relation supplémentaire qui ne figure pas dans [Voe02], et que nous démontrons, à savoir la relation symétrique de celle du lemme 4.4 de *loc.cit.* suivante :

Soit $\mathcal{Z} : \mathbb{G}_m X \rightarrow \mathbb{G}_m Y$ une correspondance finie telle que $\rho_n(\mathcal{Z})$ est définie. Alors, pour toute correspondance finie $\mathcal{W} : Y \rightarrow Y'$, $\rho_n((1_{\mathbb{G}_m} \otimes \mathcal{W}) \circ \mathcal{Z})$ est définie et

$$\rho_n((1_{\mathbb{G}_m} \otimes \mathcal{W}) \circ \mathcal{Z}) = \mathcal{W} \circ \rho_n(\mathcal{Z}).$$

On en déduit le fait que pour un faisceau homotopique, le morphisme canonique $F \rightarrow \Omega^\infty(\Sigma^\infty F)$ est un monomorphisme, ce qui permet de déduire le fait que F est strictement invariant par homotopie du fait correspondant pour le module $\Omega^\infty(\Sigma^\infty F)$.

Dans la deuxième sous-section, on rappelle le théorème de simplification de V. Voevodsky (corollaire 4.10 de [Voe02]) sous la forme affaiblie que l'on utilise dans le chapitre 6. Ce théorème implique tout d'abord que le faisceau gradué

$$S_t^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (S_t^1)^{\otimes_{Htr,n}}$$

est un module homotopique. On en déduit ensuite que la catégorie des faisceaux homotopiques est une localisation de la catégorie des modules homotopiques. Ceci montre grâce à notre théorème que la catégorie des faisceaux homotopiques est une localisation de la catégorie des modules de cycles. Enfin, on en déduit finalement une structure monoïdale sur la catégorie des modules homotopiques telle que S_t^* soit l'élément neutre. Ceci implique l'existence d'une structure monoïdale sur la catégorie des modules de cycles telle que K_*^M soit l'élément neutre.

Enfin, dans la dernière sous-section, on note que les résultats démontrés permettent d'obtenir un isomorphisme, pour tout schéma algébrique lisse X ,

$$CH^*(X) \xrightarrow{\rho_*} \bigoplus_n H^n(X; S_t^n),$$

qui est compatible aux structures d'anneaux des deux membres, et aux transferts par rapport à X . Cet isomorphisme était déjà bien connu, nous avons simplement ajouté une vérification montrant qu'il est compatible aux différentes structures.

Deuxième partie.— La deuxième partie a pour but de montrer comment on peut interpréter les résultats de la première dans la catégorie des motifs. Elle est moins détaillée que la première, et nous mettons de côté le souci d'exhaustivité qui avait été le nôtre jusqu'alors.

Dans toute cette partie, on suppose que le corps k est parfait.

Chapitre 7.— L'exposé n'aurait pas été complet sans la description de la catégorie dérivée des motifs mixtes de V. Voevodsky, qui est la motivation principale pour introduire les faisceaux homotopiques.

Dans la première section, nous commençons par rappeler la définition des complexes motiviques (effectifs) de V. Voevodsky. Les démonstrations ne sont données qu'à titre indicatif.

Dans la deuxième section, on rappelle la définition de la catégorie dérivée des motifs mixtes due à V. Voevodsky, et qui utilise directement la catégorie des schémas algébriques lisses munis des correspondances finies. On rappelle particulièrement le résultat fondamental de [FSV00b] (théorème 3.2.6) qui montre que la catégorie dérivée des motifs mixtes effectifs est une sous-catégorie pleine de la catégorie des complexes motiviques (effectifs) ; c'est ce théorème qui permet de travailler efficacement avec la catégorie introduite par V. Voevodsky. On énonce par ailleurs le corollaire du théorème de simplification qui affirme que la catégorie dérivée des motifs mixtes effectifs est une sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée des motifs mixtes.

Dans la dernière section, nous donnons une démarche qui permettrait de définir une catégorie de complexes motiviques analogue à la catégorie homotopique stable (cf [Mor]), en utilisant la construction des spectres de la topologie algébrique. Cette catégorie devrait être munie d'une t-structure canonique, appelée t-structure homotopique, dont le coeur est la catégorie des modules homotopiques (avec transferts), réalisant ainsi une partie du programme de [Mor] concernant les modules homotopiques *sans transferts*.

Chapitre 8.— C'est dans ce chapitre que nous interprétons les méthodes de la première partie. La première section montre ainsi que l'on peut transposer, dans la catégorie dérivée des motifs mixtes, les morphismes finis équidimensionnels de schémas. Cette transposée vérifie par ailleurs une formule de projection qui met en jeu le cup-produit externe dans la catégorie dérivée des motifs mixtes (cf section 8.1.2 pour la définition de celui-ci).

L'étude la plus intéressante concerne sans doute celle effectuée dans la deuxième section, concernant les motifs relatifs introduits par V. Voevodsky. Il s'agit du motif $M(X, Z)$ associé à une paire fermée (X, Z) où X est un schéma algébrique lisse, et Z un sous-schéma fermé quelconque de X . La section 5.4.1 prend ici tout son sens. Il résulte ainsi trivialement de la définition que $M(X, Z)$ ne dépend que de la structure réduite du sous-schéma fermé Z . Dès lors, ce motif est naturel par rapport aux morphismes quasi-cartésiens de paires fermées que nous avons introduits dans la définition 5.4.4. Nous montrons ainsi dans la deuxième sous-section toutes les propriétés élémentaires vérifiées par les motifs relatifs. Dans la troisième sous-section, nous introduisons un type particulier de motifs relatifs, baptisés motif de Thom en référence à la définition 2.16 du paragraphe 3 de [MV01]. Pour un schéma algébrique lisse X , et un fibré vectoriel E sur X , le motif de Thom de E est égal au motif relatif associé à la paire fermée (E, X) où X est vu comme un sous-schéma fermé à travers la section nulle. Nous montrons certaines propriétés vérifiées par ces motifs relatifs, et nous rappelons l'interprétation du motif de Tate $\mathbb{Z}(1)$ en termes de motifs de Thom du fibré vectoriel trivial de rang 1 sur k , décalé de 2. La dernière sous-section montre que pour toute paire fermée (X, Z) telle que X et Z soient des schémas algébriques lisses, $M(X, Z) \simeq M\text{Th}(N_Z X)$ à travers les isomorphismes de déformation au cône normal. La démonstration suit très exactement la démonstration du fait analogue et plus général concernant la catégorie homotopique stable (cf §3, théorème 2.23 de [Mor]). Nous l'avons dégagée ici car elle nous permettra de montrer plusieurs formules concernant le triangle de Gysin de la section 4.

Avant d'en arriver là, on construit un isomorphisme canonique pour tout fibré vectoriel E de rang n sur un schéma algébrique lisse X :

$$M\text{Th}(E) \xrightarrow{\theta(E)} M(X)(n)[2n].$$

Ce morphisme est induit par la classe de Thom suivante dans le groupe de Chow de $\mathbb{P}(E \oplus 1)$:

$$t(E) = \sum_{i=0}^n (-1)^i p^*(c_{n-i}(E)) \cdot c_1(\lambda)^i,$$

où λ désigne le fibré inversible canonique du fibré projectif $\mathbb{P}(E \oplus 1)$ et p sa projection canonique. Pour arriver à la construction de l'isomorphisme de Thom, on rappelle tout d'abord l'isomorphisme canonique pour tout schéma algébrique lisse X

$$H^{2n}(X; \mathbb{Z}(n)) \simeq CH^n(X),$$

dû à V. Voevodsky. Nous utilisons d'abord pour la construction de cet isomorphisme le théorème de simplification de Voevodsky. Par ailleurs, on rappelle que l'on a identifié à la fin du chapitre 6 les groupes de Chow classiques de X avec la cohomologie en X du faisceau de K-théorie de Milnor non ramifié, de telle manière que les structures produits coïncident – l'une est définie par la théorie de l'intersection classique, l'autre par la théorie de l'intersection sur les groupes de Chow à coefficients définie par M. Rost. Cette identification nous permet de démontrer que l'isomorphisme ci-dessus est compatible aux structures produits et aux transferts, fait dont on se servira par la suite. La théorie des classes de Chern classique pour les groupes de Chow induit donc des classes canoniques dans la cohomologie motivique, que l'on interprète comme des morphismes de la catégorie $DM_{-}^{eff}(k)$. On rappelle ainsi le théorème du fibré projectif de V. Voevodsky (proposition 3.5.1 de [FSV00b]), donnant une brève indication de preuve. Ce théorème nous permet de montrer que, pour un fibré vectoriel E de rang n sur un schéma algébrique lisse X , la classe de Thom introduite ci-dessus définit une classe canonique

$$M\text{Th}(E) \rightarrow \mathbb{Z}(n)[2n]$$

qui par cup-produit avec la projection canonique induit l'isomorphisme de Thom. On termine la sous-section 8.3.4.2 en montrant les bonnes propriétés fonctorielles de cet isomorphisme de Thom. Par exemple, si $i : F \rightarrow E$ est un monomorphisme de fibrés vectoriels sur un schéma algébrique lisse X (connexe), il induit un morphisme $M\text{Th}(i)$ qui est égal à travers les isomorphismes de Thom au morphisme

$$M(X)(m)[2m] \xrightarrow{M(1_X) \sim \mathbf{c}_e(E/F)(m)[2m]} M(X)(n)[2n]$$

où m et n sont les rangs respectifs de E et F , et $\mathbf{c}_e(E/F)$ est le morphisme correspondant à la classe de Chern du fibré vectoriel E/F sur X .

Dans la dernière section enfin, on montre comment, pour une paire fermée (X, Z) telle que X et Z soient algébriques lisses, la considération de l'isomorphisme induit par la déformation au cône normal et de l'isomorphisme de Thom permet de définir le triangle distingué dit de Gysin – obtenu dans [FSV00b], proposition 3.5.4. Le principal résultat de ce chapitre concerne la fonctorialité de ce triangle de Gysin, dans le cas d'un morphisme transverse, mais aussi dans le cas de défauts mineurs par rapport au cas transverse. Par ailleurs, on obtient une fonctorialité du triangle de Gysin par rapport à la transposée de certains morphismes finis équidimensionnels de paires fermées.

La fin de cette dernière section se clôt sur quelques formules certes moins importantes mais qui méritaient tout de même d'être signalées, et dont le leitmotiv est toujours la traduction des résultats de la première partie dans la catégorie dérivée des motifs mixtes.

Chapitre 9. – Dans ce dernier chapitre, on montre comment interpréter les constructions du chapitre 5 en termes de certains pro-objets dans la catégorie dérivée des motifs mixtes, que nous avons appelés motifs génériques. On a posé dans ce chapitre $\mathbb{Z}\{1\} = \mathbb{Z}(1)[1]$. A tout couple (E, n) où E/k est une extension de type fini de k , et n un entier relatif, on associe un pro-motif

$$M_{gm}(E)\{n\} = \varprojlim_{A \subset E|A/k \text{ est lisse de type fini}} M(\text{Spec}(A))\{n\}.$$

On note $DM_{gm}^{(0)}(k)$ la catégorie des tels pro-objets de $DM_{gm}^{eff}(k)$, munie des morphismes de pro-objets¹.

Le résultat principal de ce chapitre est le fait que toutes les données D1 à D4 des pré-modules de cycles ont leur analogue en tant que morphismes de motifs génériques, et que par ailleurs, toutes les relations des pré-modules de cycles sont vraies dans la catégorie des motifs génériques. On formule ceci de manière synthétique dans l'existence d'un foncteur canonique

$$M^{(0)} : (\tilde{\mathcal{E}}_k)^{op} \rightarrow DM_{gm}^{(0)}(k), (E, n) \mapsto M_{gm}(E)\{n\},$$

où la catégorie $\tilde{\mathcal{E}}_k$ est la catégorie introduite par M. Rost dans la remarque 1.10 de [Ros96], sauf que l'on considère les extensions accompagnées d'un entier relatif.

La construction de ce foncteur, bien que moins détaillée que celle du chapitre 5, montre par sa concision l'utilité de considérer ces motifs génériques. On obtient donc une interprétation de la transformée générique de la première partie : tout module homotopique F_* induit un foncteur sur la catégorie $DM_{gm}(k)$, donc un foncteur sur la catégorie $pro-DM_{gm}(k)$ qui par restriction à la catégorie $DM_{gm}^{(0)}(k)$ induit à travers le foncteur $M^{(0)}$ le pré-module de cycles noté \hat{F}_* dans la première partie.

Dans une dernière section, on donne quelques applications supplémentaires de ces motifs génériques. Tout d'abord, on calcule le motif générique d'une extension transcendante pure (qui est l'analogie de la propriété (H) vérifiée par les modules de cycles). Ceci nous permet d'en déduire une réduction de la conjecture de Beilinson-Soulé – cette réduction était apparemment déjà connue. Par ailleurs, nous posons la question dans la dernière sous-section de savoir si le foncteur $M^{(0)}$ est plein – la question de savoir s'il est fidèle est aussi ouverte. Nous montrons qu'une réponse affirmative à cette question entraîne de manière surprenante le fait que tout module de cycles qui est de type fini au sens de 9.3.12 (à travers notre équivalence de catégorie) est borné inférieurement. Nous démontrons un cas élémentaire en direction de cette affirmation, et nous obtenons en désespoir de cause un résultat d'annulation concernant la partie libre de certains groupes de morphismes dans la catégories $DM_{gm}^{eff}(k)$.

Développements éventuels

Nous terminons cette introduction par les pistes sur lesquelles débouchent cette thèse.

Tout d'abord, nous avons obtenu le fait que la catégorie des faisceaux homotopiques est une localisation des modules de cycles. Une des premières questions qui se pose dès lors est la possibilité de faire une théorie des «modules de cycles effectifs» qui corresponde aux faisceaux homotopiques de la même manière que la catégorie des modules de cycles correspond aux modules homotopiques. Pour ceci, nous avons déjà essayé de faire la même théorie que celle de M. Rost pour des objets gradués négativement. On peut définir facilement une notion de pré-modules de cycles gradués négativement, en considérant par exemple la catégorie $\tilde{\mathcal{E}}_k$. Par contre, les axiomes nécessaires pour faire de ces pré-modules de cycles «effectifs» des modules de cycles «effectifs» ne sont pas clairs. Ainsi, dans la démonstration des propriétés cruciales (H) et (RC) des modules de cycles, M. Rost utilise

¹A. Beilinson a déjà considéré les pro-objets $M_{gm}(E)$ dans le preprint [Bei], pour formuler une caractérisation de la t-structure motivique conjecturale sur $DM_{gm}^{eff}(k)$

toute la graduation pour construire des sections canoniques. Il faudrait donc a priori demander que les modules de cycles effectifs vérifient les propriétés (H) et (RC) en plus des propriétés (FD) et (C). Si l'on réussissait à faire marcher cette variante «effective» des modules de cycles, on n'aurait pas besoin pour redémontrer le théorème de Voevodsky 6.3.3 d'utiliser les méthodes de [Voe02].

Les méthodes développées dans cette thèse (et particulièrement dans la deuxième partie) montrent que nos propositions doivent pouvoir se généraliser lorsqu'on remplace la catégorie dérivée des motifs mixtes par la catégorie homotopique stable des schémas. On pourrait ainsi espérer généraliser la définition de la transformée générique dans le cas où l'on remplace les modules homotopiques (avec transferts) par les modules homotopiques (sans transferts) définis par F.Morel dans [Mor]. On obtiendrait ainsi le début du programme pensé par F.Morel à propos de ces modules homotopiques. Ceci devrait conduire à une notion de modules de cycles (non orientés) où l'on remplace la K-théorie de Milnor par la K-théorie de Milnor-Witt comme il est expliqué brièvement dans [Mor]. Une partie de ce programme serait de démontrer par ailleurs que les modules homotopiques avec transferts de cette thèse sont équivalents aux modules homotopiques de la catégorie homotopique stable qui sont de plus orientés. Par exemple, une des difficultés provient du fait que les morphismes résidus dépendent dans le cas des modules homotopiques (sans transferts) de l'uniformisante choisie. Or, M.Schmid a donné une méthode dans sa thèse [Sch97] pour définir des complexes de Cousin canoniques même lorsque les résidus dépendent d'une uniformisante (il s'agit de considérer le déterminant du fibré normal en jeu...) Par ailleurs, les progrès récents concernant le groupe de Witt d'un schéma, et notamment la résolution de Gersten qui lui est associée, montrent un exemple d'une théorie cohomologique qui devrait entrer dans ce cadre.

Le dernier développement que nous proposons justifie pleinement la deuxième partie de cette thèse. Il s'agit de généraliser la suite spectrale de [Ros96] au cas où le module de cycles est remplacé par un motif. Ainsi, pour un morphisme lisse $T \xrightarrow{\phi} B$ entre schémas algébriques lisses, et pour un motif \mathcal{M} , il devrait exister une suite spectrale de la forme

$$E_2^{p,q} \Rightarrow \mathrm{Hom}_{DM_{gm}(k)}(M(T), \mathcal{M}[p+q])$$

et dont le terme E_2 s'exprime comme la «cohomologie d'un système local» induit par les fibres de ϕ .

Ce système local est conjecturalement un module de cycles sur B défini par la formule suivante :

$$\begin{aligned} H^q(\phi; \mathcal{M}) : \mathcal{E}_B^s &\rightarrow \mathbb{Z} - \mathcal{A}b \\ E/B &\mapsto \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{DM_{gm}(k)}(M(T \times_B (E))(-n)[-n], \mathcal{M}[q]) \end{aligned}$$

A l'aide de ce module de cycles, le terme E_2 de cette suite spectrale doit être égal à

$$E_2^{p,q} = A^p(B; H^q(\phi; \mathcal{M}), p).$$

En considérant le pullback de la filtration par codimension du support de B – filtration classiquement considérée pour définir une suite spectrale de Gersten – nous avons déjà pu définir une suite spectrale qui converge vers le but souhaité. Le problème reste l'identification du terme E_2 telle que nous venons de la décrire.

Pour le moment, nous avons uniquement démontré, en utilisant la même démonstration que dans le chapitre 9, que le foncteur $H^q(\phi; \mathcal{M})$ est un pré-module de cycles. L'identification du terme E_2 devrait montrer que c'est même un module de cycles.

L'utilisation de cette suite spectrale pourrait déboucher sur la mise en évidence de certaines classes caractéristiques suivant les méthodes de la topologie algébrique appliquées à la suite spectrale de Serre.

Part I

Faisceaux avec transferts et modules de cycles

Chapter 1

Correspondances finies

1.1 Cycles

Dans cette section, tous les schémas sont supposés noethériens.

1.1.1 Rappels sur l'intersection des cycles

A la base de notre travail se trouve la définition classique et fondamentale :

Définition 1.1.1 *Soit X un schéma.*

On note $Z(X)$ le groupe abélien libre engendré par l'ensemble sous-jacent à $|X|$.

Les éléments de $Z(X)$ sont appelés les cycles de X .

Si α est un cycle de X , et x un point de l'espace associé à X , on note α_x le coefficient de x dans α .

Notre référence générale pour la théorie des cycles et de l'intersection est [Ful98]. Toutefois, W. Fulton utilise systématiquement la relation d'équivalence rationnelle sur les cycles. Le but de ces rappels est de montrer que dans la théorie de V. Voevodsky, on n'est pas obligé de considérer les classes de cycles pour l'équivalence rationnelle, et que l'on peut travailler directement avec les cycles.

On rappelle la functorialité élémentaire suivante :

1. Si $f : X \rightarrow X'$ est un morphisme plat, il existe un morphisme canonique $f^* : Z(X') \rightarrow Z(X)$, que l'on appelle changement de base ou encore «pullback».
2. Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme propre, il existe un morphisme canonique $f_* : Z(X) \rightarrow Z(Y)$, que l'on appelle image directe ou encore «pushout».

Ces deux morphismes font de Z un foncteur contravariant (respectivement covariant) pour la catégorie des schémas noethériens munie des morphismes plats (resp. propres), d'après *loc.cit.*, 1.4 et 1.7.

Passons maintenant au produit d'intersection de cycles :

Définition 1.1.2 *Soit X un schéma, Z (respectivement Z') un sous-schéma fermé intègre de X de codimension d (respectivement d'). On dit que l'intersection de Z et Z' est propre si et seulement si les composantes irréductibles de $Z \cap Z'$ sont de codimension $d + d'$.*

On dira que deux cycles de X s'intersectent proprement si et seulement si leurs composantes respectives s'intersectent deux à deux proprement.

Remarque 1.1.3.– Lorsque X est régulier, si Z et Z' sont des sous-schémas fermés de X , d'après [Ser58], on a toujours l'inégalité :

$$\text{codim}_X(Z \cap Z') \geq \text{codim}_X Z + \text{codim}_X Z'.$$

On peut alors, suivant *loc.cit.*, définir le produit d'intersection suivant :

Définition 1.1.4 (Serre) Soit X un schéma, Z et Z' deux sous-schémas fermés intègres de X dont l'intersection est propre, on définit le cycle intersection de Z et Z' comme suit :

Notons $(W_i)_{i=1,\dots,n}$ les composantes irréductibles de $Z \cap Z'$, vus comme des sous-schémas réduits, et w_i le point générique de W_i .

Alors, le complexe

$$\mathcal{O}_{Z,w_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X,w_i}}^L \mathcal{O}_{Z',w_i}$$

est cohomologiquement borné, et on définit la multiplicité d'intersection de W_i dans $Z \cap Z'$ comme l'entier relatif

$$m(W_i; Z, Z') = \sum_k (-1)^k \cdot \text{lg}_{\mathcal{O}_{X,w_i}} \left(\text{Tor}_{\mathcal{O}_{X,w_i}}^k (\mathcal{O}_{Z,w_i}, \mathcal{O}_{Z',w_i}) \right).$$

Le cycle intersection de Z et Z' est alors

$$Z.Z' = \sum_{i=1}^n m(W_i; Z, Z') w_i$$

Plus généralement, si α et β sont des cycles de X qui s'intersectent proprement, on définit :

$$\alpha.\beta = \sum_{(x,y) \in |X|^2} \alpha_x \beta_y x.y.$$

Remarque 1.1.5.– On dit qu'on se trouve dans le cas d'égale caractéristique (ou encore équicaractéristique) lorsque tous les corps résiduels de X ont même caractéristique. Autrement dit, il existe un corps k tel que le schéma X est un k -schéma.

Dans ce cas, on peut encore donner la définition suivante de la multiplicité d'intersection. Pour Z et Z' des sous-schémas fermés de X , on note C le cône normal de $Z \cap Z'$ dans $Z \times_k Z'$. Alors, pour tout point générique w_i de $Z \cap Z'$, w_i est un point générique de C , et W.Fulton donne la définition suivante de la multiplicité d'intersection :

$$m(W_i; Z, Z') = \text{lg}(\mathcal{O}_{C,w_i}).$$

Lorsque X est lisse de type fini sur k , on trouvera une démonstration que ces deux définitions coïncident dans [Ful98], §20.4. La même démonstration reste valide si X est obtenu par localisation d'un schéma de type fini (*i.e.* X est essentiellement lisse sur k , suivant la définition A.2.1).

Le théorème suivant est particulièrement important en théorie des cycles :

Théorème 1.1.6 (Serre) *Soit X un schéma, et Z, Z' des sous-schémas fermés. Si X est régulier d'égale caractéristique, les multiplicités d'intersection de Z et Z' sont positives.*

Remarque 1.1.7.– Ce théorème a été généralisé par O. Gabber dans le cas où X est régulier mais pas nécessairement d'égale caractéristique.

On utilisera par ailleurs les deux propriétés fondamentales suivantes de ce produit :

Proposition 1.1.8 *Soit X un schéma et α, β, γ des cycles sur X s'intersectant proprement deux à deux :*

1. *Commutativité :*

$$\alpha.\beta = \beta.\alpha$$

2. *Associativité :*

$$(\alpha.\beta).\gamma = \alpha.(\beta.\gamma)$$

Remarque 1.1.9.– Ces deux propriétés résultent en fait des propriétés correspondantes du produit tensoriel dérivé dans la catégorie dérivée des \mathcal{O}_X -modules.

Toujours dans [Ser58], on trouvera la proposition suivante :

Proposition 1.1.10 *Soit X et Y des schémas et $f : Y \rightarrow X$ un morphisme :*

1. *Supposons f plat. Pour tous cycles α et β de X , on a*

$$f^*(\alpha.\beta) = f^*(\alpha).f^*(\beta)$$

dès que les termes de l'équation sont définis.

2. *Formule de projection : supposons f propre et plat. Pour tous cycles α de X et β de Y , on a*

$$f_*(f^*(\alpha).\beta) = \alpha.f_*(\beta)$$

dès que les termes de l'équation sont définis.

1.1.2 Cycles relatifs

1.1.2.1 Définition

Dans cette partie, on expose une partie du formalisme des cycles relatifs qui se trouve dans [SV00b]. Nous nous sommes limités au cas des cycles relatifs équidimensionnels de dimension 0, puisqu'ils suffisent à définir les correspondances finies et leur produit de composition.

On rappelle tout d'abord la définition suivante :

Définition 1.1.11 *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme. On dit que f est équidimensionnel si et seulement si*

1. *f est de type fini.*
2. *f est de dimension relative constante.*

3. Toute composante irréductible de X domine une composante irréductible de S .

Si S est géométriquement unibranche, cette condition équivaut à la condition d'être universellement ouvert et de dimension relative d'après la proposition 2.1.7 de *loc.cit.*

Le lemme suivant permet de clarifier cette notion dans le cas particulier où on l'utilisera :

Lemme 1.1.12 *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme, avec X et S irréductibles noethériens, et S géométriquement unibranche. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. f est fini équidimensionnel.
2. f est fini surjectif.
3. f est propre et équidimensionnel de dimension 0.

PREUVE : Les conditions 1 et 2 sont équivalentes puisque si f est fini, il est de dimension relative constante et universellement fermé. L'équivalence entre 1 et 3 résulte de la factorisation de Stein. \square

Ainsi, dans le cas général, un morphisme fini équidimensionnel sur un schéma géométriquement unibranche est obtenu comme somme de morphismes finis surjectifs entre schémas irréductibles.

Définition 1.1.13 *Soit S un schéma régulier et X/S un S -schéma de type fini.*

On définit le groupe abélien $c_{\text{equi}}(X/S, 0)$ comme le sous-groupe de $Z(X)$ engendré par les points x de X tels que $Z(x)/S$ est fini équidimensionnel, où $Z(x)$ désigne le sous-schéma fermé réduit de X adhérence de $\{x\}$.

On appelle les éléments de ce groupe des cycles relatifs de X sur S .

Remarque 1.1.14.– On fera attention que A. Suslin et V. Voevodsky appellent les éléments du groupe ci-dessus des cycles relatifs équidimensionnels de dimension 0. Nous ne considérerons jamais les cycles relatifs de dimension strictement positive, et un tel abus ne porte donc pas à confusion dans cette thèse.

Plus précisément, suivant *loc.cit.*, le groupe que l'on vient de définir est plutôt noté :

$$\text{PropCycl}_{\text{equi}}(X/S, 0),$$

groupe des cycles à support propre équidimensionnel de dimension 0 sur S (voir *loc.cit.*, définition 3.1.3). Le groupe $c_{\text{equi}}(X/S, 0)$ est le sous-groupe du précédent dont les cycles ont un pullback bien défini sur n'importe quel S -schéma noethérien (voir *loc.cit.*, définition après le lemme 3.3.9). Le fait que ces deux derniers groupes coïncident lorsque S est régulier est la proposition 3.3.15 de *loc.cit.*.

Jusqu'à la fin de cette sous-sous-section, on fixe un schéma régulier S .

Ainsi un cycle α de X est relatif sur S si et seulement si le support de α est fini équidimensionnel sur S , autrement dit chaque composante de α est un schéma fini et surjectif sur une composante irréductible de S d'après le lemme 1.1.12 (puisque S est en

particulier géométriquement unibranche).

Remarque 1.1.15.– Puisque S est régulier, ses composantes irréductibles sont des composantes connexes. Ainsi, comme $c_{\text{equi}}(X/S_1 \sqcup S_2, 0) = c_{\text{equi}}(X/S_1, 0) \oplus c_{\text{equi}}(X/S_2, 0)$, notre groupe de cycles relatif se décompose toujours en somme de groupes de cycles relatifs à une base connexe.

Définition 1.1.16 Soit Z un sous-schéma fermé de X , qui est fini équidimensionnel sur S . On note $(z_i)_{\{i=1, \dots, n\}}$ les points génériques de Z qui sont dominants sur S .

On définit le cycle relatif sur S associé à Z comme le cycle

$$[Z]_{X/S} = \sum_i \text{lg}(\mathcal{O}_{Z, z_i}) \cdot z_i.$$

En effet, \bar{z}_i est alors fini équidimensionnel sur S (d'après le lemme 1.1.12).

Définition 1.1.17 Considérons un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{q} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \xrightarrow{p} & S \end{array}$$

tel que S et S' sont réguliers, et p est plat.

Si Z est un sous-schéma fermé intègre de X , fini équidimensionnel sur S , $Z \times_S S'$ est un sous-schéma fermé de X' , fini et équidimensionnel sur S' .

On pose donc

$$q^*[Z] = [Z \times_S S']_{X'/S'} \in c_{\text{equi}}(X'/S', 0).$$

On définit ainsi par linéarité un morphisme de changement de base :

$$q^* : c_{\text{equi}}(X/S, 0) \rightarrow c_{\text{equi}}(X'/S', 0).$$

A priori, ce morphisme de changement de base est plutôt fonction de p , et en toute rigueur, on aurait dû le noter $(p, q)^*$. Toutefois, comme il est égal à la restriction du morphisme pullback q^* sur les cycles de X défini dans le paragraphe précédent, on conserve cette notation abusive. Par ailleurs, cette remarque montre que ce morphisme est naturel en (p, q) .

1.1.2.2 Image directe

Le premier intérêt des cycles relatifs est de disposer d'un morphisme pushout par n'importe quel morphisme au-dessus de la base :

Lemme 1.1.18 Soient S un schéma connexe et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de S -schémas de type fini. Si Z est un sous-schéma fermé intègre de X fini et surjectif sur S , $f(Z)$ muni de sa structure réduite est un sous-schéma fermé irréductible de Y , qui est fini et surjectif sur S .

Le morphisme $Z \rightarrow f(Z)$ est donc un morphisme fini dominant de schémas irréductibles. On pose donc

$$f_*(Z) = d.f(Z) \in c_{\text{equi}}(X/S, 0)$$

où d est le degré de l'extension induite par f entre les corps de fonctions de Z et $f(Z)$.

On définit ainsi par linéarité un morphisme

$$f_* : c_{\text{equi}}(X/S, 0) \rightarrow c_{\text{equi}}(Y/S, 0).$$

PREUVE : En effet, puisque Z/S est propre $f(Z)$ est fermé dans Y et $f(Z)$ muni de sa structure réduite de sous-schéma de Y est propre sur S , comme on le vérifie par exemple avec la caractérisation de la propriété par les traits. Comme de plus, les fibres de $f(Z)$ au-dessus de S sont finies, d'après [EGA3] 4.4.2, $f(Z)$ fini sur S .

Il en résulte que le morphisme $Z \rightarrow f(Z)$ est fini, et par définition dominant. \square

Remarque 1.1.19.— Plus généralement, on aurait un lemme analogue si on avait considéré les cycles de X à support propre sur S (voir [SV00b], corollaire 3.6.2).

Enonçons brièvement :

Lemme 1.1.20 Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ des S -morphisms. Alors, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

PREUVE : En effet, il s'agit juste de la multiplicativité des degrés des extensions résiduelles. \square

Proposition 1.1.21 Soit $p : S' \rightarrow S$ un morphisme plat entre schémas réguliers. Considérons de plus les carrés cartésiens de schémas :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{t} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{q} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \xrightarrow{p} & S. \end{array}$$

Alors, pour tout cycle relatif $\alpha \in c_{\text{equi}}(X/S, 0)$, on a

$$g_* t^*(\alpha) = q^* f_*(\alpha).$$

PREUVE : On se ramène par linéarité au cas où α est la classe d'un sous-schéma fermé intègre de X , fini et équidimensionnel sur S . Puisque $f_*(Z)$ est à support dans $f(Z)$ par définition, on peut supposer $Y = f(Z)$, auquel cas le morphisme f est propre. Dès lors, la formule est exactement la formule de projection classique (voir par exemple [Ful98], proposition 1.7). \square

1.2 Correspondances finies

On fixe pour tout le reste du chapitre un k -schéma régulier noethérien S .

Sauf mention explicite du contraire, tous les schémas considérés sont des S -schémas lisses de type fini

On utilise dans ce paragraphe les cycles relatifs pour définir le produit de composition de certaines correspondances sans passer au quotient par une relation d'équivalence.

1.2.1 Définition et composition

Définition 1.2.1 Soit X et Y deux schémas dans \mathcal{L}_S .

On appelle groupe des S -correspondances finies de X vers Y le groupe abélien

$$c_S(X, Y) = c_{\text{equi}}(X \times_S Y/X, 0)$$

défini en 1.1.13.

Dans cette sous-section, on fait la convention de noter XY pour le produit $X \times_S Y$ au-dessus de S afin d'abrégier les notations. Si X et Y sont lisses sur S , c'est un schéma lisse sur S (et donc régulier). Par ailleurs, on note de façon conventionnelle $p_{XY}^X : XY \rightarrow X$ le morphisme de projection canonique.

L'idée de départ de V. Voevodsky dans sa définition de la catégorie dérivée des motifs mixtes est que dans le cas des correspondances finies, le produit de composition défini par la formule classique (cf [Ful98], chap. 16) reste valide bien que les schémas considérés ne soient plus propres sur la base. Qui plus est, quand on se restreint aux correspondances finies, on n'a plus besoin de quotienter le groupe de cycles sous-jacents par une relation d'équivalence, car les intersections que l'on doit considérer sont toujours propres.

Tout ceci est justifié dans le lemme suivant, dont on trouve l'énoncé dans [FSV00b], 2.1 :

Lemme 1.2.2 Soit X, Y et Z trois schémas dans \mathcal{L}_S , $\alpha \in c_S(X, Y)$ et $\beta \in c_S(Y, Z)$.

1. Les cycles $(p_{XYZ}^{YZ})^*(\beta)$ et $(p_{XYZ}^{XY})^*(\alpha)$ de XYZ s'intersectent proprement.
2. D'après le premier point, on peut considérer le produit de cycles de XYZ

$$\chi = (p_{XYZ}^{YZ})^*(\beta) \cdot (p_{XYZ}^{XY})^*(\alpha)$$

(cf définition 1.1.4). Alors, χ appartient au groupe $c_{\text{equi}}(XYZ/X, 0)$.

PREUVE : Cette proposition concerne chaque composante des deux cycles de l'énoncé, et on peut donc se réduire au cas où α et β sont les classes de sous-schémas fermés intègres. Puisque α domine une composante irréductible de X , on peut remplacer X par cette composante irréductible, et supposer X connexe.

Il s'agit d'étudier le support des cycles concernés. Or, le support de $(p_{XYZ}^{YZ})^*(\beta)$ (resp. $(p_{XYZ}^{XY})^*(\alpha)$) est le produit $X\beta$ (resp. αX).

Considérons la construction suivante :

$$\begin{array}{ccc} \beta \times_Y \alpha & \rightarrow & \beta \rightarrow Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \alpha & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

Les flèches verticales sont finies et équidimensionnelles (car cette propriété des morphismes de schémas est stable par changement de base). Donc, $\beta \times_Y \alpha$ est fini et équidimensionnel sur X .

Or, la flèche canonique

$$\beta \times_Y \alpha \rightarrow (X\beta) \times_{XYZ} (\alpha Z) = (X\beta) \cap (\alpha Z)$$

est un isomorphisme. Il s'ensuit que chaque composante irréductible de cette dernière intersection est finie et équidimensionnelle sur X , donc de même dimension que X puisque X est connexe. Dès lors, l'intersection est propre, et de plus le cycle intersection est fini équidimensionnel sur X . \square

Définition 1.2.3 Soient X et Y des schémas dans \mathcal{L}_S .

On définit en appliquant le lemme qui précède un produit de composition bilinéaire

$$\begin{aligned} c_S(Y, Z) \otimes_{\mathbb{Z}} c_S(X, Y) &\rightarrow c_S(X, Z) \\ \beta \otimes \alpha &\mapsto \beta \circ \alpha \end{aligned}$$

en posant

$$\beta \circ \alpha = p_{XYZ}^{XZ} \left(p_{XYZ}^{YZ}{}^*(\beta) \cdot p_{XYZ}^{XY}{}^*(\alpha) \right)$$

où le morphisme p_{XYZ}^{XZ} désigne le pushout défini en 1.1.18 par le X -morphisme p_{XYZ}^{XZ} .

Exemple 1.2.4.— Soit maintenant $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dans \mathcal{L}_S . Le schéma Y étant séparé, le S -graphe de f , Γ_f est un sous-schéma fermé de XY . Par ailleurs, le morphisme de projection $\Gamma_f \rightarrow X$ est un isomorphisme, donc en particulier fini équidimensionnel. Ainsi, le cycle $[\Gamma_f]_{XY/X}$ appartient à $c_S(X, Y)$. On définit donc par ce biais une application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_S}(X, Y) \rightarrow c_S(X, Y)$$

qui est de plus injective. On confondra désormais le morphisme f et la correspondance finie représentée par son graphe, ce qui induit une confusion entre le produit de composition des cycles sous-jacents que l'on vient de définir et celui des applications.

Le lemme suivant nous permet de justifier cette confusion ; il est analogue à la proposition 16.1.1 de [Ful98], sauf que l'on ne considère pas les cycles à équivalence rationnelle près, que les schémas considérés sont au-dessus de S , et qu'ils ne sont par ailleurs pas propres sur S .

Lemme 1.2.5 Soient X, Y, Z des schémas dans \mathcal{L}_S . On a les égalités suivantes entre cycles :

1. Pour tout $\alpha \in c_S(X, Y)$, $\beta \in c_S(Y, Z)$, et $\gamma \in c_S(Z, T)$,

$$\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha.$$

2. Pour tout $\alpha \in c_S(X, Y)$, et $f : Y \rightarrow Z$ un morphisme dans \mathcal{L}_S ,

$$f \circ \alpha = (1_X \times_S f)_*(\alpha)$$

où le morphisme $(1_X \times_S f)_*$ est le morphisme image directe des cycles relatifs sur X .

3. Pour $\beta \in c_S(Y, Z)$, et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme plat dans \mathcal{L}_S ,

$$\alpha \circ f = (f \times_S 1_Z)^*(\beta)$$

où le morphisme $(f \times_S 1_Z)^*$ est le morphisme image inverse défini en 1.1.17 (associé au changement de base f).

4. Pour $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ des morphismes dans \mathcal{L}_S ,

$$[\Gamma_g] \circ [\Gamma_f] = [\Gamma_{g \circ f}]$$

Remarque 1.2.6.– On peut se passer de l’hypothèse de platitude sur f faite dans le 3, quitte à remplacer le morphisme pullback par le morphisme de changement de base défini dans [SV00b], $\text{cycl}(f) : c_{\text{equi}}(XY/X, 0) \rightarrow c_{\text{equi}}(XY \times_X X'/X', 0)$, mais nous n’utiliserons jamais ce résultat.

PREUVE : 1. Cette affirmation consiste essentiellement à voir que pour composer les trois correspondances, on peut tirer chaque cycle correspondant sur $XYZT$, faire l’intersection et repousser le résultat sur XT . On détaille ici ce calcul :

$$\begin{aligned} \gamma \circ (\beta \circ \alpha) &= \gamma \circ \left(p_{XYZ*}^{XZ} \left(p_{XYZ}^{YZ} * (\beta) \cdot p_{XYZ}^{XY} * (\alpha) \right) \right) \\ &= p_{XZT*}^{XT} \left(p_{XZT}^{ZT} * (\gamma) \cdot p_{XZT}^{XZ} * p_{XYZ*}^{XZ} \left(p_{XYZ}^{YZ} * (\beta) \cdot p_{XYZ}^{XY} * (\alpha) \right) \right) \\ &= p_{XZT*}^{XT} \left(p_{XZT}^{ZT} * (\gamma) \cdot p_{XYZT*}^{XZT} p_{XYZT}^{XYZ} * \left(p_{XYZ}^{YZ} * (\beta) \cdot p_{XYZ}^{XY} * (\alpha) \right) \right) \quad (1) \\ &= p_{XZT*}^{XT} p_{XYZT*}^{XZT} \left(p_{XYZT}^{XZT} * p_{XZT}^{ZT} * (\gamma) \cdot p_{XYZT}^{XYZ} * \left(p_{XYZ}^{YZ} * (\beta) \cdot p_{XYZ}^{XY} * (\alpha) \right) \right) \quad (2) \\ &= p_{XYZT*}^{XT} \left(p_{XYZT}^{ZT} * (\gamma) \cdot \left(p_{XYZT}^{YZ} * (\beta) \cdot p_{XYZT}^{XY} * (\alpha) \right) \right) \quad (3) \\ &= p_{XYZT*}^{XT} \left(p_{XYZT}^{ZT} * (\gamma) \cdot p_{XYZT}^{YZ} * (\beta) \cdot p_{XYZT}^{XY} * (\alpha) \right) \quad (4) \end{aligned}$$

avec les justifications suivantes :

(1) On applique la proposition 1.1.21 pour le changement de base $XT \rightarrow X$, et les carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} XYZT & \longrightarrow & XYZ \\ \downarrow & & \downarrow \\ XZT & \longrightarrow & XZ \\ \downarrow & & \downarrow \\ XT & \longrightarrow & X. \end{array}$$

(2) On applique la formule de projection, *i.e.* le 2 de la proposition 1.1.10, car les cycles $p_{XYZT*}^{XZT} p_{XZT}^{ZT} * (\gamma)$ et $p_{XYZT*}^{XYZ} \left(p_{XYZ}^{YZ} * (\beta) \cdot p_{XYZ}^{XY} * (\alpha) \right)$ s’intersectent proprement (même justification que pour le lemme 1.2.2). On notera que le morphisme p_{XYZT*}^{XZT} n’est pas propre, mais les cycles dont il faut prendre l’image directe sont propres par rapport à ce morphisme, et la formule reste valide dans ce cas.

(3) On applique la functorialité du morphisme de changement de base par un morphisme plat, le 1 de la proposition 1.1.10 et la functorialité du morphisme image directe (lemme 1.1.20).

(4) Cette écriture est valide d'après l'associativité du produit d'intersection (cf 1.1.8).

On peut faire le même calcul pour l'autre membre de l'égalité, et comme le résultat final ne dépend pas du parenthésage, on en conclut l'égalité.

2. On se ramène par linéarité au cas où α est un sous-schéma fermé intègre. Il s'agit alors de calculer :

$$\begin{aligned} f \circ \alpha &= p_{XYZ*}^{XZ} \left(p_{XYZ}^{YZ} * [\Gamma_f] \cdot p_{XYZ}^{XY} * (\alpha) \right) \\ &= p_{XYZ*}^{XZ} ([X\Gamma_f] \cdot [\alpha Z]). \end{aligned}$$

Or dans ce cas, l'intersection est particulièrement simple comme le montre le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} X\Gamma_f \times_{XYZ} \alpha Z & \xrightarrow{\quad} & \alpha Z & & \\ \downarrow & \searrow^b & \downarrow & \searrow^a & \\ X\Gamma_f & \xrightarrow{i} & XYZ & \xrightarrow{a} & \alpha \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow i_\alpha \\ & & X\Gamma_f & \xrightarrow{\sim} & XY \\ & & & \downarrow p & \\ & & & & \end{array}$$

où p est l'isomorphisme de projection canonique, i et i_α les immersions fermées canoniques.

Tout d'abord, le carré de face est cartésien par définition, ce qui implique que le morphisme a est un isomorphisme. Par ailleurs, le carré de derrière est aussi cartésien, ainsi que le carré de droite. Dès lors, le carré de gauche est cartésien, ce qui implique que le morphisme b est un isomorphisme.

Ainsi, $W = X\Gamma_f \times_{XYZ} \alpha Z$ est un schéma intègre. Autrement dit, l'intersection de $X\Gamma_f$ et αZ est constituée d'une unique composante correspondant à W . Comme W est isomorphe à α , cette intersection est propre. Par ailleurs, l'anneau local de W en son point générique est de longueur 1. Puisque W est une composante propre de cette intersection, il résulte de la proposition 8.2 de [Ful98], que la multiplicité d'intersection de cette composante est égale à 1. On obtient donc :

$$\begin{aligned} [X\Gamma_f]_{XYZ} \cdot [\alpha Z]_{XYZ} &= [X\Gamma_f \times_{XYZ} \alpha Z]_{XYZ} \\ &= i_*([X\Gamma_f \times_{XYZ} \alpha Z]_{X\Gamma_f}) = i_*([X\Gamma_f \times_{XY} \alpha]_{X\Gamma_f}) \\ &= i_* p^*(\alpha). \end{aligned}$$

Comme enfin, on a la factorisation suivante :

$$XY \xleftarrow{p} X\Gamma_f \xrightarrow{i} XYZ \xrightarrow{1_X \times_S \gamma_f} XYZ$$

où $\gamma_f : Y \rightarrow YZ$ est le morphisme graphe, on a donc $i_* = (1_X \times_S \gamma_f)_* p_*$, c'est-à-dire $(1_X \times_S \gamma_f)_* = i_* p^*$ puisque p est un isomorphisme.

Au final, on obtient donc :

$$p_{XYZ*}^{XZ} ([X\Gamma_f] \cdot [\alpha Z]) = p_{XYZ*}^{XZ} (1_X \times_S \gamma_f)_*(\alpha) = (1_X \times_S f)_* \alpha.$$

3. Supposons que β est représenté par un sous-schéma fermé. Il s'agit de calculer :

$$\beta \circ f = p_{XYZ}^{XZ} * ([X\beta]_{XYZ} \cdot [\Gamma_f Z]_{XYZ})$$

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X\beta \times_{XYZ} \Gamma_f Z & \xrightarrow{\quad} & \Gamma_f Z \\ \downarrow & \searrow^a & \downarrow \iota \\ X\beta & \xrightarrow{\quad} & XZ \\ & \searrow & \downarrow \sim \\ & & XZ \\ & \searrow & \downarrow p \\ & & XZ \\ & \searrow & \downarrow f \times 1_Z \\ & & YZ \\ & \searrow & \downarrow i_\beta \\ & & YZ \end{array}$$

où p est le morphisme de projection canonique, et i, i_β les morphismes d'immersions canoniques.

Les carrés de face, de derrière et du bas sont cartésiens. On en déduit que le carré du haut est cartésien, et le morphisme a est un isomorphisme. Ainsi, comme $f \times 1_Z$ est plat, les multiplicités d'intersection de $\Gamma_f Z$ et $X\beta$ se réduisent aux multiplicités géométriques. On a donc :

$$\begin{aligned} [X\beta]_{XYZ} \cdot [\Gamma_f Z]_{XYZ} &= [X\beta \times_{XYZ} \Gamma_f Z]_{XYZ} \\ &= \iota_* [X\beta \times_{XYZ} \Gamma_f Z]_{\Gamma_f Z} \\ &= \iota_* p^* [\beta \times_{YZ} XZ]_{XZ} \\ &= \iota_* p^* (f \times_S 1_Z)^*(\beta) \\ &= (\gamma_f \times_S 1_Z)_* (f \times 1_Z)^*(\beta) \end{aligned}$$

avec pour la dernière égalité, où le morphisme $\gamma_f : X \rightarrow XY$ est le morphisme graphe, la même justification que précédemment : $p^* = (p_*)^{-1}$ et $\iota = (\gamma_f \times_S 1_Z) \circ p$.

Comme enfin, $p_{XYZ}^{XZ} \circ (\gamma_f \times_S 1_Z) = 1_{XZ}$, on conclut.

4. Il ne reste plus qu'à terminer par les calculs suivants :

$$\begin{aligned} [\Gamma_g] \circ [\Gamma_f] &= [\Gamma_g] \circ ([\Gamma_f] \circ 1_X) \quad (1) \\ &= (1_X \times_S g)_* (1_X \times_S f)_* ([\Delta_X]) \quad (2) \\ &= (1_X \times_S (g \circ f))_* ([\Delta_X]) \\ &= [\Gamma_{g \circ f}] \circ 1_X \quad (2) \end{aligned}$$

où Δ_X est la diagonale de X . L'égalité (1) résulte du troisième point de cette démonstration et les égalités (2) du deuxième point. \square

On a donc justifié que le produit \circ sur les S -correspondances finies est associatif et que le morphisme 1_X vu comme S -correspondance est neutre, d'où :

Définition 1.2.7 On définit la catégorie $\mathcal{L}_{\text{cor},S}$ dont les objets sont les schémas lisses, séparés et de type fini sur S , et dont les morphismes sont les S -correspondances finies.

On obtient de plus un foncteur fidèle égal à l'identité sur les objets et induit par l'application graphe sur les morphismes, $i : \mathcal{L}_S \rightarrow \mathcal{L}_{\text{cor},S}$.

Remarque 1.2.8.– Si X est un schéma dans \mathcal{L}_S , on notera souvent $[X]$ l'objet de $\pi\mathcal{L}_{\text{cor},S}$ correspondant.

Il est immédiat que cette catégorie possède la propriété suivante :

Lemme 1.2.9 *La catégorie $\mathcal{L}_{\text{cor},S}$ est additive, et la somme dans cette catégorie est donnée par : $[X] \oplus [Y] = [X \sqcup Y]$.*

1.2.2 Structure monoïdale

Commençons par le lemme suivant :

Lemme 1.2.10 *Soit $\alpha \in c_S(X, Y)$ et $\beta \in c_S(X', Y')$. Alors, les cycles $p_{XYX'Y'}^{XY*}(\alpha)$ et $p_{XYX'Y'}^{X'Y'*}(\beta)$ s'intersectent proprement, et le cycle intersection est fini équidimensionnel sur XX' .*

PREUVE : On se réduit au cas où α et β sont les classes de sous-schémas fermés intègres. On fait la même construction que pour le produit de composition :

$$\begin{array}{ccc} X\beta \times_X \alpha & \rightarrow & \alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ X\beta & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \\ & & XX'. \end{array}$$

Dans ce diagramme, toutes les flèches verticales sont finies équidimensionnelles. Or, $X\beta \times_X \alpha$ est isomorphe à $XY\beta \cap \alpha X'Y'$; on en déduit donc que cette intersection est finie équidimensionnelle sur XX' , ce qui impose que l'intersection est propre et conclut. \square

Définition 1.2.11 *Soit $\alpha \in c_S(X, Y)$ et $\beta \in c_S(X', Y')$, on pose :*

$$\alpha \otimes_S^{\text{tr}} \beta = p_{XYX'Y'}^{XY*}(\alpha) \cdot p_{XYX'Y'}^{X'Y'*}(\beta)$$

où le produit d'intersection est pris sur k . Ce produit tensoriel est donc une correspondance finie dans $c_S(XX', YY')$ d'après le lemme précédent.

Par ailleurs, ce produit de composition est fonctoriel dans le sens suivant :

Lemme 1.2.12 *Soient*

$$\begin{aligned} \alpha &: X \rightarrow Y \\ \alpha' &: Y \rightarrow Z \\ \beta &: X' \rightarrow Y' \\ \beta' &: Y' \rightarrow Z' \end{aligned}$$

des S correspondances finies. Alors,

$$(\alpha' \circ \alpha) \otimes_S^{\text{tr}} (\beta' \circ \beta) = (\alpha' \otimes_S^{\text{tr}} \beta') \circ (\alpha \otimes_S^{\text{tr}} \beta).$$

PREUVE : Ce lemme se démontre comme pour l'associativité du produit de composition des correspondances finies ; il consiste à montrer que pour calculer les deux membres de l'égalité, on peut tirer toutes les correspondances dans $XYZX'Y'Z'$ et repousser le résultat dans $XZX'Z'$. On utilise la formule de projection 1.1.21, la formule de projection généralisée pour le produit d'intersection et la functorialité de l'image inverse (resp. directe) ; la démarche est alors la même que pour démontrer le 1. de 1.2.5. \square

On a donc obtenu la proposition suivante :

Proposition 1.2.13 *La catégorie $\mathcal{L}_{\text{cor},S}$ munie du produit tensoriel*

$$[X] \otimes_S^{\text{tr}} [Y] = [X \times_S Y]$$

pour X et Y des schémas dans \mathcal{L}_S et du produit des correspondances de la définition 1.2.11 est monoïdale symétrique.

Le foncteur fidèle $\mathcal{L}_S \rightarrow \mathcal{L}_{\text{cor},S}$ est de plus monoïdal, où \mathcal{L}_S est muni de sa structure monoïdale triviale (i.e. cartésienne).

PREUVE : L'associativité et la commutativité du produit \otimes_S^{tr} résultent des propriétés analogues du foncteurs \times_S de \mathcal{L}_S .

Pour la functorialité, on doit montrer que $[\Gamma_f] \otimes_S^{\text{tr}} [\Gamma_g] = [\Gamma_{f \times_S g}]$ pour $f : X \rightarrow X'$ et $g : Y \rightarrow Y'$ des morphismes dans \mathcal{L}_S . A nouveau, la démonstration est analogue à la démonstration des propriétés 3 et 4 de 1.2.5. \square

1.2.3 Functorialité

On étudie dans cette sous-section la functorialité de la catégorie $\mathcal{L}_{\text{cor},S}$ par rapport à S .

On fixe donc en plus de S un k -schéma régulier nothérien T et un k -morphisme de schémas $\tau : T \rightarrow S$.

Par ailleurs, on fait les conventions suivantes pour ne pas trop alourdir les notations :

Dans le premier point, X et Y sont des schémas dans \mathcal{L}_S et dans le deuxième des schémas dans \mathcal{L}_T :

1. on pose $XY = X \times_S Y$ et on note $p_{XY}^X : X \times_S Y \rightarrow X$ la projection canonique (comme précédemment).
2. On note ${}_{Tp}^X_{XY} : X \times_T Y \rightarrow X$ la projection canonique.

1.2.3.1 Restriction

On suppose dans cette sous-section que le morphisme $\tau : T \rightarrow S$ est lisse et de type fini. On cherche à prolonger le morphisme de restriction naturel $\mathcal{L}_T \rightarrow \mathcal{L}_S$.

Soient X et Y des schémas dans \mathcal{L}_T . On note $\delta_{XY} : X \times_T Y \rightarrow X \times_S Y$ l'immersion fermée régulière canonique (obtenue par changement de base suivant le morphisme diagonal du S -schéma T).

Lemme 1.2.14 *Soit X et Y des schémas dans \mathcal{L}_T , et $\alpha \in c_T(X, Y)$. Puisque le morphisme δ_{XY} est un X -morphisme, le cycle $\delta_{XY*}(\alpha)$ appartient à $c_{\text{equi}}(X \times_S Y/X, 0)$.*

Par ailleurs, ce morphisme vérifie les propriétés suivantes, où X , Y et Z sont des schémas dans \mathcal{L}_T :

1. *Si $f : X \rightarrow Y$ est un T -morphisme, $\delta_{XY*}([\Gamma_f]_T) = [\Gamma_f]_S$.*

2. *Si $\alpha \in c_T(X, Y)$, et $f : Y \rightarrow Z$ est un T -morphisme,*

$$\delta_{XZ*}(f \circ \alpha) = f \circ (\delta_{XY*}(\alpha)).$$

3. *Si $\alpha \in c_T(Y, Z)$, et $f : X \rightarrow Y$ est un T -morphisme,*

$$\delta_{XZ*}(\alpha \circ f) = (\delta_{YZ*}(\alpha)) \circ f.$$

PREUVE : La première affirmation, ainsi que la première égalité qui la suit, sont évidentes.

Pour la deuxième égalité, on fait les calculs suivants :

$$\begin{aligned} \delta_{XZ*}(f \circ \alpha) &\stackrel{(1)}{=} \delta_{XZ*}(1_X \times_T f)_* \alpha = ((\delta_{XZ} \circ (1_X \times_T f))_*) \alpha \\ &= ((1_X \times_S f) \circ \delta_{XY})_* \alpha = (1_X \times_S f)_*(\delta_{XY*} \alpha) \stackrel{(1)}{=} f \circ (\delta_{XY*} \alpha) \end{aligned}$$

où les égalités (1) découlent du lemme 1.2.5.

Enfin, pour la dernière égalité,

$$\delta_{XZ*}(\alpha \circ f) \stackrel{(1)}{=} \delta_{XZ*}(f \times_T 1_Z)^* \alpha \stackrel{(2)}{=} (f \times_S 1_Z)^* \delta_{YZ*} \alpha \stackrel{(1)}{=} (\delta_{YZ*} \alpha) \circ f$$

où les égalités (1) proviennent à nouveau du lemme 1.2.5, et l'égalité (2) de la formule de projection 1.1.21 appliquée au carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X \times_T Z & \xrightarrow{\delta_{XZ}} & X \times_S Z \\ f \times_T 1_Z \downarrow & & \downarrow f \times_S 1_Z \\ Y \times_T Z & \xrightarrow{\delta_{YZ}} & Y \times_S Z. \end{array}$$

□

Définition 1.2.15 *Pour $\tau : T \rightarrow S$ un morphisme lisse de type fini, et pour toute T -correspondance finie $\alpha : X \rightarrow Y$, on pose simplement $\tilde{\tau}_*(\alpha) = \delta_{XY*} \alpha$.*

Remarque 1.2.16.– Il nous semble que $\tilde{\tau}_*$ est un foncteur, mais la démonstration que l'on a proposé en premier lieu était fautive, comme nous l'a indiqué A.Suslin lors de son rapport sur ce mémoire. D'après le lemme précédent, on sait tout du moins que $\tilde{\tau}_*$ coïncide sur la catégorie \mathcal{L}_T avec le foncteur de restriction $\mathcal{L}_T \rightarrow \mathcal{L}_S$.

Par ailleurs, il est évident que si l'on se donne de plus un k -morphisme $\sigma : R \rightarrow T$ lisse de type fini, on a

$$\widetilde{(\tau \circ \sigma)}_* = \tilde{\tau}_* \circ \tilde{\sigma}_* .$$

1.2.3.2 Changement de base

On s'occupe maintenant de prolonger le foncteur de changement de base. On suppose cette fois que τ est plat, mais on insiste sur le fait que cette hypothèse n'est pas nécessaire si on utilise complètement la théorie de [SV00b].

Si X est un schéma dans \mathcal{L}_S , on pose $X_T = X \times_S T$, et on note $\tau_X : X_T \rightarrow X$ l'application déduite de τ par changement de base selon X/S .

Par ailleurs, si X et Y sont des schémas dans \mathcal{L}_S , on identifie, à travers l'isomorphisme canonique les schémas $X_T \times_T Y_T$ et $X \times_T Y$, que l'on note XY_T .

On considère alors le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} XY_T & \xrightarrow{\tau_{XY}} & XY \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_T & \xrightarrow{\tau_X} & X. \end{array}$$

D'après la définition 1.1.17, on en déduit donc un morphisme

$$\tau_{XY}^* : c_{equi}(XY/X, 0) \rightarrow c_{equi}(XY_T/X_T, 0).$$

Pour toute correspondance finie $\alpha \in c_S(X, Y)$, on note donc α_T la correspondance finie $\tau_{XY}^*(\alpha)$.

Le lemme suivant est immédiat :

Lemme 1.2.17 *Soit X et Y des schémas dans \mathcal{L}_S . Alors, pour tout $\alpha \in c_S(X, Y)$ et $\beta \in c_S(Y, Z)$, on a*

$$\beta_T \circ \alpha_T = (\beta \circ \alpha)_T.$$

PREUVE : En effet, on peut effectuer le calcul suivant :

$$\begin{aligned} (\tau_{YZ}^* \beta) \circ (\tau_{XY}^* \alpha) &= {}_T p_{XYZ}^{XZ} ({}_T p_{XYZ}^{YZ} {}^* (\tau_{YZ}^* \beta) \cdot {}_T p_{XYZ}^{XY} {}^* (\tau_{XY}^* \alpha)) \\ &= {}_T p_{XYZ}^{XZ} \left(\tau_{XYZ}^* (p_{XYZ}^{YZ} {}^* \beta) \cdot \tau_{XYZ}^* (p_{XYZ}^{XY} {}^* \alpha) \right) \quad (1) \\ &= {}_T p_{XYZ}^{XZ} \tau_{XYZ}^* \left((p_{XYZ}^{YZ} {}^* \beta) \cdot (p_{XYZ}^{XY} {}^* \alpha) \right) \quad (2) \\ &= \tau_{XZ}^* \left(p_{XYZ}^{XZ} {}^* \left((p_{XYZ}^{YZ} {}^* \beta) \cdot (p_{XYZ}^{XY} {}^* \alpha) \right) \right). \quad (3) \end{aligned}$$

Avec pour justifications :

- (1) la functorialité du morphisme pullback (cf le paragraphe qui suit 1.1.17).
- (2) la première propriété de 1.1.10
- (3) la formule de projection de la proposition 1.1.21. □

Définition 1.2.18 *Pour $\tau : T \rightarrow S$ un morphisme plat, on note $\tilde{\tau}^*$ le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{cor,S} & \rightarrow & \mathcal{L}_{cor,T} \\ X/S & \mapsto & X_T/T \\ c_S(X, Y) \ni \alpha & \mapsto & \alpha_T. \end{array}$$

Ce foncteur satisfait de plus les propriétés suivantes :

Lemme 1.2.19 1. Le foncteur $\tilde{\tau}^*$ est monoïdal.

2. Le diagramme suivant de foncteurs commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_S & \rightarrow & \mathcal{L}_{\text{cor},S} \\ \tau^* \downarrow & & \downarrow \tilde{\tau}^* \\ \mathcal{L}_T & \rightarrow & \mathcal{L}_{\text{cor},T}. \end{array}$$

Dans ce diagramme, les morphismes horizontaux sont les inclusions naturelles, et le morphisme vertical de gauche le foncteur de restriction classique.

3. Si de plus on se donne un k -morphisme (plat) $\sigma : T' \rightarrow T$, on a un isomorphisme canonique de foncteurs

$$\widetilde{(\tau \circ \sigma)}^* \simeq \tilde{\sigma}^* \circ \tilde{\tau}^*.$$

PREUVE : 1. Soit $\alpha \in c_S(X, Y)$ et $\beta \in c_S(X', Y')$. Alors,

$$\begin{aligned} (\alpha \otimes^{tr} \beta)_T &= \tau_{XX'YY'}^* \left(p_{XX'YY'}^{XY}(\alpha) \cdot p_{XX'YY'}^{X'Y'}(\beta) \right) \\ &= \left(\tau_{XX'YY'}^* p_{XX'YY'}^{XY}(\alpha) \right) \cdot \left(\tau_{XX'YY'}^* p_{XX'YY'}^{X'Y'}(\beta) \right) \\ &= \left(T p_{XX'YY'}^{XY}(\alpha) \right) \cdot \left(T p_{XX'YY'}^{X'Y'}(\beta) \right). \end{aligned}$$

2. Cela résulte du fait que pour $f : X \rightarrow Y$ un S -morphisme, on a un isomorphisme canonique $\Gamma_{f_T} \rightarrow \Gamma_f \times_S T$.

3. En effet, on a un isomorphisme canonique $X_{T'} \simeq (X_T)_{T'}$. Le fait qu'il soit naturel par rapport aux correspondances finies viens de la functorialité du morphisme pullback utilisé. \square

1.2.3.3 Restriction et changement de base

La formule suivante prolonge au cas des correspondances finies la formule évidente concernant les morphismes de schémas :

Proposition 1.2.20 Soit $\tau : T \rightarrow S$ un morphisme lisse de type fini, X et Y des schémas dans \mathcal{L}_S et $\alpha \in c_S(X, Y)$.

Alors, le diagramme suivant est commutatif dans $\mathcal{L}_{\text{cor},S}$

$$\begin{array}{ccc} X_T & \xrightarrow{\tilde{\tau}_* \tilde{\tau}^*(\alpha)} & Y_T \\ \tau_X \downarrow & & \downarrow \tau_Y \\ X & \xrightarrow{\alpha} & Y. \end{array}$$

PREUVE : Par définition,

$$\tilde{\tau}_* \tilde{\tau}^*(\alpha) = \delta_{XY}^*(\tau_{XY}^* \alpha).$$

Ainsi, la commutativité du diagramme équivaut aux égalités équivalentes

$$\begin{aligned} \tau_Y \circ \delta_{XY}^*(\tau_{XY}^* \alpha) &= \alpha \circ \tau_X \\ \Leftrightarrow (1_{X_T} \times_S \tau_Y)_* \delta_{XY}^*(\tau_{XY}^* \alpha) &= (\tau_X \times_S 1_Y)^* \alpha. \end{aligned}$$

Or, d'après le diagramme, formé de deux carrés cartésiens,

$$\begin{array}{ccccc} XY_T & \xrightarrow{\delta_{XY}} & X_T \times_S Y_T & \xrightarrow{1_{X_T} \times_S \tau_Y} & X_T \times_S Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{\Delta_{T/S}} & T \times_S T & \longrightarrow & T \times_S S. \end{array}$$

le morphisme composé $\epsilon = (1_{X_T} \times_S \tau_Y) \circ \delta_{XY}$ est un isomorphisme. Ainsi, $\epsilon_* = (\epsilon^*)^{-1}$. La commutativité du diagramme est donc réduite à l'égalité

$$\tau_{XY}^* \alpha = \epsilon^* (\tau_X \times_S 1_Y)^* \alpha$$

ce qui résulte du fait que $\tau_{XY} = (\tau_X \times_S 1_Y) \circ \epsilon$ et de la functorialité du morphisme pullback. \square

1.2.4 Une propriété de finitude

Notons que la définition du produit de composition des correspondances finies, qui n'utilise que la formule de Serre pour les multiplicités, des morphismes pushout et pullback et un lemme sur la propriété d'une intersection (cf 1.2.2) n'utilise pas la propriété de type finitude imposée aux schémas.

On peut donc étendre la définition des correspondances finies aux schémas noethériens, réguliers et séparés sur S , et définir de manière identique le produit de composition. On n'aura pas besoin de cette catégorie, et elle n'apparaîtra que dans la proposition suivante :

Proposition 1.2.21 *Soit X un schéma dans \mathcal{L}_S .*

Soit $(Y_i)_{i \in \mathcal{I}}$ un pro-objet essentiellement affine (cf [EGA4], 8.13.4) de schémas dans \mathcal{L}_S dont la limite est un schéma noethérien \mathcal{Y} . Alors, le morphisme canonique

$$\varinjlim_{i \in \mathcal{I}^{op}} c_S(Y_i, X) \rightarrow c_S(\mathcal{Y}, X)$$

est un isomorphisme.

Remarque 1.2.22.– Autrement dit, le schéma X vérifie la propriété (coPF) de C.2.33 dans la catégorie $\mathcal{L}_{cor,k}$ par rapport aux pro-objets essentiellement affines de \mathcal{L}_k .

PREUVE : Pour tout $i \in \mathcal{I}$, on note $p_i : \mathcal{Y} \rightarrow Y_i$ le morphisme de projection canonique. On note $\delta_i : c_S(Y_i, X) \rightarrow c_S(\mathcal{Y}, X)$ le morphisme canonique induit par composition avec p_i .

Le problème revient donc à montrer que le morphisme de groupes abéliens

$$\varphi = \varinjlim_i \delta_i$$

est bijectif.

On montre d'abord qu'il est surjectif. Il suffit de le faire sur une base du groupe libre d'arrivée. Soit donc Z un sous-schéma fermé de $\mathcal{Y}X$ qui est de plus fini sur \mathcal{Y} . Alors, Z

est défini par un idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}X}$. Or, comme $\mathcal{Y}X$ est noethérien, cet idéal est cohérent et il est engendré par un nombre fini de sections f_1, \dots, f_n . Comme $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}X}$ est limite inductive des $\mathcal{O}_{Y_i X}$, on peut supposer qu'il existe un i_0 tel que f_1, \dots, f_n se relève en g_1, \dots, g_n dans $\mathcal{O}_{Y_{i_0} X}$. Considérons le sous-schéma fermé réduit Z_{i_0} de $Y_{i_0} X$ défini par les équations $g_1, \dots, g_n = 0$. Alors, par définition, le carré suivant

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & \mathcal{Y}X \\ \downarrow & & \downarrow p_{i_0} \times_S 1_X \\ Z_{i_0} & \longrightarrow & Y_{i_0} X \end{array}$$

est cartésien.

Considérons la catégorie \mathcal{I}/i des objets j de \mathcal{I} munis d'une flèche $j \rightarrow i$ que l'on note par abus simplement j . Soit j un objet de \mathcal{I}/i . On note Z_j le pullback de Z_{i_0} sur Y_j par le morphisme de transition correspondant. On a construit ainsi un pro-objet $(Z_j)_{j \in \mathcal{I}/i}$. Par définition, le morphisme canonique

$$Z \rightarrow \varprojlim_{j \in \mathcal{I}/i} Z_j$$

est un isomorphisme.

Dès lors, d'après [EGA4], on peut trouver un $j \geq i$ tel que :

1. Z_j est intègre par application du corollaire 8.4.3 de *loc.cit.* car les morphismes de transition du pro-objet $(Z_j)_{j \geq i}$ sont dominants.
2. Z_j est fini, surjectif sur Y_j , d'après *loc.cit.*, 8.10.5.

Ainsi, le cycle associé à Z_j dans $Y_j X$, noté $[Z_j]$, est une correspondance finie de Y_j dans X . Comme de plus, $(p_j \times 1_X)^{-1}(Z_j) = Z$ est un schéma intègre, on obtient

$$[Z_j] \circ p_j = (p_j \times_S 1_X)^*([Z_j]) = [Z].$$

Autrement dit, $\delta_j([Z_j]) = [Z]$, et donc $\varphi([Z_j]) = [Z]$.

On montre que φ est injectif. Soit i un élément de \mathcal{I} et $\alpha_i \in c_S(\mathcal{Y}_i, X)$ une correspondance finie telle que $\varphi(\alpha_i) = 0$. Soit j un objet de \mathcal{I}/i , et $f_{ji} : j \rightarrow i$ le morphisme correspondant. On note Z_j le support de $\alpha \circ f_{ji}$.

On a ainsi construit un pro-objet $(Z_j)_{j \in \mathcal{I}/i}$. Or, puisque $\alpha \circ p_i$ est nul, donc de support vide, ce pro-objet admet pour limite projective dans la catégorie des schémas le schéma vide. Autrement dit, le morphisme canonique

$$\emptyset \rightarrow \varprojlim_{j \in \mathcal{I}/i} Z_j$$

est un isomorphisme. Il résulte alors de 8.10.5. (i) qu'il existe un $j \geq i$ tel que $Z_j = \emptyset$. Cela signifie $\alpha \circ f_{ji} = 0$, ce qui montre que α_i est nulle dans la limite inductive $\varinjlim_{i \in \mathcal{I}^{op}} c_S(Y_i, X)$ et nous permet de conclure. \square

Remarque 1.2.23.— Cette proposition est implicite dans [SV00b], chap.5, preuve de la prop. 3.1.3.

1.3 Equivalence d'homotopie

Dans cette partie, on réinterprète les résultats de [FSV00c] pour les appliquer directement aux correspondances finies. Les propositions qui sont présentées ici nous serviront par la suite pour démontrer les propriétés fondamentales des faisceaux avec transferts.

On espère que cette approche apportera des éclaircissements sur les méthodes de [FSV00c] qui servent de fondement pour la définition de la catégorie triangulée des motifs mixtes de V. Voevodsky.

1.3.1 Définition

On commence par introduire la définition suivante qui est un cas particulier de la relation d'équivalence définie par V. Voevodsky sur les cycles équidimensionnels de dimension 0 (cf [FSV00c], §2) :

Définition 1.3.1 Soient X et Y des schémas dans \mathcal{L}_S , et $\alpha, \beta : X \rightarrow Y$ deux S -correspondances finies.

On dit que α est homotope à β si et seulement si il existe $H \in c_S(\mathbb{A}^1 \times X, Y)$ telle que

1. $H \circ i_0 = \alpha$

2. $H \circ i_1 = \beta$

où i_0 (resp. i_1) désignent les immersions respectives $X \rightarrow \mathbb{A}_X^1$ correspondant au point fermé 0 (resp. 1) de \mathbb{A}_X^1 .

On note \sim_h la relation d'équivalence engendré par cette relation réflexive et symétrique. Elle est compatible à la loi d'addition : on note $\pi_S(X, Y)$ le groupe abélien quotient de $c_S(X, Y)$ par cette relation.

La relation \sim_h est compatible avec la loi de composition de $\mathcal{L}_{\text{cor}, S}$. On peut donc considérer la catégorie homotopique associée à cette relation d'équivalence :

Définition 1.3.2 On note $\pi_{\mathcal{L}_{\text{cor}, S}}$ la catégorie homotopique de $\mathcal{L}_{\text{cor}, S}$, ayant mêmes objets que $\mathcal{L}_{\text{cor}, S}$ et dont les morphismes sont les classes d'équivalence de correspondances finies pour la relation \sim_h .

Remarque 1.3.3.— C'est l'utilisation de cette catégorie qui nous permet, au pris d'une généralité moindre, de simplifier les méthodes de *loc.cit.*

1.3.2 Compactifications

On introduit dans ce paragraphe la notion de compactification, et plus précisément de bonne compactification (cf [SV96], §3) qui va nous servir à interpréter certains groupes de correspondances finies à homotopie près.

Remarque 1.3.4.— L'hypothèse que S est un k -schéma régulier noethérien est, dans cette sous-section concernant les compactifications, surperflue.

1.3.2.1 Définition

Définition 1.3.5 Soit X une courbe sur S .

1. Une compactification de X/S est un S -schéma \bar{X} , muni d'un S -morphisme $X \xrightarrow{i} \bar{X}$ tel que :

(a) i est une immersion ouverte.

(b) \bar{X}/S est une courbe propre.

(c) \bar{X} est normal.

On note dans ce cas $X_\infty = \bar{X} - i(X)$ le sous-schéma fermé réduit de \bar{X} associé.

2. On dit qu'une compactification \bar{X}/S de X/S est bonne ssi X_∞ admet un voisinage ouvert affine sur S dans \bar{X} .

Remarque 1.3.6.— Ainsi, si \bar{X}/S est une bonne compactification de X/S , X_∞ est fini sur S , car il est propre et affine sur S .

Remarque 1.3.7.— Considérons dans cette remarque que tous les schémas sont essentiellement de type fini (cf définition A.1.1) sur un corps de base k . Soit X un S -schéma tel que X est normal. Supposons donné \bar{X} un S -schéma vérifiant les conditions (a) et (b) de la définition précédente, et tel que X_∞ admette un voisinage affine V . Soit \tilde{X} le normalisé de \bar{X} . Alors, $\tilde{X} \xrightarrow{p} \bar{X}$ est fini car \bar{X}/k est essentiellement de type fini, donc \tilde{X}/S est une courbe propre normale. Par ailleurs, X étant normal, c'est un ouvert de \tilde{X} . Enfin, l'image réciproque de V par p est un voisinage affine de $\tilde{X} - X$ dans \tilde{X} , puisque p est en particulier affine. Donc \tilde{X}/S est une bonne compactification de X/S .

Précisons qu'on appelle simplement paire fermée tout couple de schémas (X, Z) tel que Z est un sous-schéma fermé de X , d'après la définition 5.4.1.

Définition 1.3.8 Soit (X, Z) une paire fermée.

Soit S un schéma et $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas de dimension relative égale à 1 qui fait de X un S -schéma.

Une bonne compactification de (X, Z) relativement à S est un S -schéma \bar{X} qui est à la fois une bonne compactification de X/S et de $(X - Z)/S$.

Remarque 1.3.9.— On dira encore que (X, Z) admet une bonne compactification sur S pour dire qu'il existe un S -schéma \bar{X} tel que \bar{X}/S est une bonne compactification de (X, Z) relativement à S .

Autrement dit, une bonne compactification de (X, Z) sur S est une compactification de X/S telle que $X_\infty \sqcup Z$ admet un voisinage ouvert affine sur S .

Dans ce qui suit, on montre l'existence de certaines bonnes compactifications.

1.3.2.2 Le cas des courbes sur un corps de base

La situation est simple dans le cas où on étudie les courbes sur un corps.

Proposition 1.3.10 *Soit C/k une courbe quasi-affine et régulière.*

Alors, il existe une courbe projective régulière sur k notée \bar{C} telle que pour tout sous-schéma fermé Z de C ne contenant aucune composante irréductible de C , \bar{C} est une bonne compactification de (X, Z) sur k .

PREUVE : On peut se ramener au cas où C est affine. Dès lors, C/k étant affine et de type fini, on peut considérer une immersion fermée $C \rightarrow \mathbb{A}_k^n$. Soit \bar{C} l'adhérence de C dans \mathbb{P}_k^n , munie de sa structure réduite. Alors, par définition, \bar{C}/k est une courbe intègre et projective.

Considérons \tilde{C}/k la normalisation de C/k , qui est une courbe de type fini puisque \bar{C}/k est de type fini. Alors, \tilde{C} est fini sur C , donc propre sur k . Comme \tilde{C} est normal, il résulte de [EGA2], 7.4.5 et 7.4.10, que \tilde{C}/k est une courbe projective et régulière.

Par ailleurs, C est un ouvert dense de \bar{C} . Donc, comme C est un schéma normal, c'est encore un ouvert dense de \tilde{C} .

Soit Z une partie fermée de C de dimension nulle. Le sous-ensemble $(\tilde{C} - C) \sqcup Z$ est donc une partie fermée de \tilde{C}/k , constituée d'un nombre fini de points. Elle admet donc un voisinage affine puisque \tilde{C}/k est projective. \square

1.3.2.3 Cas semi-local

Le théorème suivant est dû à M.Walker :

Théorème 1.3.11 (Walker) *Supposons que k est un corps infini.*

Soit (X, Z) une paire fermée, telle que X est un schéma affine dans \mathcal{L}_k . On suppose que Z est partout de codimension non nulle dans X .

Considérons $\{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble de points de X .

Alors, il existe :

1. *un schéma affine S algébrique lisse.*
2. *un voisinage ouvert affine U des x_i .*
3. *un k -morphisme $f : U \rightarrow S$ lisse de dimension relative 1*

tels que le couple $(U, U \cap Z)$ admet une bonne compactification sur S .

PREUVE : La preuve suivante reprend la démonstration correspondante dans [Wal96], remarque 4.13.

1) Réduction : On peut tout d'abord supposer que X est irréductible, puisqu'il est somme disjointe de ses composantes irréductibles.

Par ailleurs, on peut supposer que tous les x_i sont fermés quitte à prendre des spécialisations, et que Z est de codimension 1 dans X , quitte à le grandir.

Enfin, si l'on peut trouver une bonne compactification relative au voisinage de chacun des points séparément, puisque ceux-ci sont fermés, on peut réduire les ouverts correspondants pour qu'ils soient disjoints, ce qui donne ensuite une compactification pour la somme disjointe de ces ouverts, qui convient.

Le problème se résume donc à trouver une bonne compactification relative pour un diviseur Z de X au voisinage d'un point fermé noté x .

2) Construction de S : Soit $r + 1$ la dimension de X . Ainsi, Z est purement de dimension r .

Puisque X est affine de type fini sur k , on peut considérer une immersion fermée $X \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$, ce qui nous permet d'identifier X à un sous-schéma fermé de \mathbb{A}_k^n . On note :

1. \bar{X} l'adhérence de X dans \mathbb{P}_k^n vu comme sous-schéma réduit de \mathbb{P}_k^n
2. \bar{Z} l'adhérence de Z dans \mathbb{P}_k^n vu comme sous-schéma réduit de \mathbb{P}_k^n
3. $\dot{X} = \bar{X} - X$ la frontière de X dans \mathbb{P}_k^n , qui est encore l'intersection de \bar{X} avec l'hyperplan à l'infini. C'est un schéma de dimension inférieure à r .

On se réserve le droit d'augmenter n en considérant un plongement arbitraire $\mathbb{A}_k^n \hookrightarrow \mathbb{A}_k^{n'}$.

On cherche le morphisme f en considérant les projections orthogonales de \mathbb{A}_k^n dont le centre est en *position générale* parmi les sous-variétés linéaires de \mathbb{A}_k^n de codimension r .

Paramétrisation des projections orthogonales $\mathbb{A}_k^n \rightarrow \mathbb{A}_k^r$.

Plus précisément, ces projections sont paramétrées par les points du schéma \mathbb{A}_k^{nr} . En effet, si λ est un point de \mathbb{A}_k^{nr} , notant $\kappa(\lambda)$ son corps résiduel, il correspond à un point rationnel de $\mathbb{A}_{\kappa(\lambda)}^{nr}$, c'est-à-dire un élément $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}}$ de $\kappa(\lambda)^{nr}$.

On associe donc à λ une projection linéaire $p_\lambda =: \mathbb{A}_{\kappa(\lambda)}^n \rightarrow \mathbb{A}_{\kappa(\lambda)}^r$ définie comme le spectre du morphisme $\kappa(\lambda)$ -linéaire

$$\begin{aligned} \kappa(\lambda)[t_1, \dots, t_r] &\rightarrow \kappa(\lambda)[X_1, \dots, X_n] \\ t_i &\mapsto \sum_{j=1}^n X_j - \lambda_{i,j}. \end{aligned}$$

On note L_λ le centre de cette projection, c'est-à-dire le sous-schéma fermé défini par l'intersection des r hyperplans correspondant aux zéros de chaque projections de p_λ sur $\mathbb{A}_{\kappa(\lambda)}^1$.

Par ailleurs, si \dot{L}_λ désigne la frontière de L_λ vu comme sous-schéma de $\mathbb{P}_{\kappa(\lambda)}^n$, le morphisme p_λ se prolonge sur les espaces projectifs en un morphisme

$$\bar{p}_\lambda : \mathbb{P}_{\kappa(\lambda)}^n - \dot{L}_\lambda \rightarrow \mathbb{P}_{\kappa(\lambda)}^r.$$

Munis de ces notations, on peut énoncer le lemme suivant qui va nous servir à trouver le morphisme f de l'énoncé :

Lemme 1.3.12 *Notons Ω_n l'ouvert de \mathbb{A}_k^{nr} formé des points λ tels que :*

1. $p_\lambda|_{Z_{\kappa(\lambda)}}$ est finie.
2. $\dot{X}_{\kappa(\lambda)} \cap \dot{L}_\lambda$ est constitué d'un nombre fini de points fermés.
3. p_λ est lisse en tous points de $X_{\kappa(\lambda)} \cap p_\lambda^{-1}(p_\lambda(x))$.

Alors, pour n assez grand, Ω_n est dense dans \mathbb{A}_k^{nr} .

Preuve : Il est facile de montrer que Ω_n est ouvert, et la partie difficile est de voir que cet ouvert est dense. On fait la démonstration en deux étapes :

i) On se place d'abord dans le cas où x est un *point rationnel* de X . On peut donc supposer que $x = 0$ dans \mathbb{A}_k^n .

Le fait que la première condition est dense résulte du fait que Z est fermé de dimension r dans \mathbb{A}_k^n .

Le fait que la deuxième condition est dense résulte de ce que l'intersection dans \mathbb{P}_k^n de la sous-variété projective \tilde{X} , qui est de dimension inférieure à r , avec une sous-variété projective linéaire de codimension r en position générale est finie.

Pour la troisième condition, il suffit de garantir que l'intersection de L_λ avec X est transverse en 0. On utilise alors le théorème suivant pour lequel on renvoie à [SGA4], exposé XI, théorème 2.1 :

Théorème 1.3.13 *L'intersection dans \mathbb{A}_k^n de X avec r hypersurfaces de degré 2 contenant 0 et qui sont en position générale est transverse.*

Or, quitte à plonger \mathbb{A}_k^n dans $\mathbb{A}_k^{n^2}$ par le plongement de Veronese, une sous-variété linéaire de $\mathbb{A}_k^{n^2}$ correspond à une quadrique (donc de degré 2) de \mathbb{A}_k^n , et le théorème précédent s'applique pour montrer que la troisième condition est dense.

ii) *Cas général.*

On considère une extension finie k'/k telle que la fibre de x dans $X \otimes_k k'$ soit constituée de points rationnels x'_i . Pour chacun de ces points, les conditions de l'énoncé donnent donc un ouvert $\Omega'_{n,i}$ dense dans $\mathbb{A}_{k'}^{nr}$. L'extension $\mathbb{A}_{k'}/\mathbb{A}_k^r$ étant fidèlement plate, les conditions de l'énoncé se redescendent, et l'image directe de $\cap_i \Omega'_{n,i}$ dans \mathbb{A}_k^{nr} est incluse dans Ω_n , ce qui implique que Ω_n est dense. \square

Puisque k est infini, Ω_n admet donc un point rationnel λ . On note alors $p : X \rightarrow \mathbb{A}_k^r$ la restriction de p_λ à X . On pose $\dot{L} = \tilde{X} \cap \dot{L}_\lambda$ qui est donc un schéma fini sur k d'après la condition 2 du lemme précédent. On dispose donc du morphisme $\bar{p} : \bar{X} - \dot{L} \rightarrow \mathbb{P}_k^r$ obtenu par restriction du morphisme \bar{p}_λ .

On utilise le truc classique suivant pour rendre \bar{p} projectif. On note \tilde{X} l'adhérence du graphe de \bar{p} dans $\bar{X} \times_k \mathbb{P}_k^r$. Dès lors, $\bar{X} - \dot{L}$ est un ouvert dense de \tilde{X} , et la projection canonique $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}_k^r$ prolonge \bar{p} . Comme \bar{X}/k est projectif, \tilde{p} est projectif. On a donc obtenu le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} X & \hookrightarrow & \bar{X} - \dot{L} & \hookrightarrow & \tilde{X} \\ p \downarrow & & \downarrow \bar{p} & \nearrow \tilde{p} & \\ \mathbb{A}_k^r & \hookrightarrow & \mathbb{P}_k^r & & \end{array}$$

3) Construction de la compactification :

Comme le carré du diagramme ci-dessus est cartésien et que L est fini sur k (condition 2 du lemme précédent), les fibres de \tilde{p} dans $\tilde{X} - X$ au-dessus de \mathbb{A}_k^r sont finies.

Donc, il existe un voisinage ouvert S de $p(x)$ dans \mathbb{A}_k^r tel que $\tilde{p}^{-1}(S) \cap (\tilde{X} - X)$ est fini sur S . Quitte à réduire S , puisque d'après la condition 3 du lemme précédent, p est lisse en $p^{-1}(p(x))$, on peut supposer que $p^{-1}(S) \rightarrow S$ est lisse.

Finalement, on pose donc $U = p^{-1}(S)$, et on note $f : U \rightarrow S$ la restriction de p à U . Le morphisme f est donc lisse de dimension relative 1. De plus, d'après la première condition du lemme précédent, le morphisme $Z \cap U \rightarrow S$, obtenu par restriction de p , est fini.

On pose encore $\bar{U} = \tilde{p}^{-1}(S)$, de sorte que le morphisme $\bar{f} : \bar{U} \rightarrow S$ obtenu par restriction du morphisme \tilde{p} est projectif. Il en résulte enfin que $\bar{U} - U$ est fini sur S , d'après le choix de S .

Pour conclure, le lemme suivant montre, quitte à restreindre encore S au voisinage de $p(x)$, que $(\bar{U} - U) \sqcup Z \cap U$ admet un voisinage ouvert affine, ce qui conclut la démonstration du théorème :

Lemme 1.3.14 *Soit $\bar{p} : \bar{U} \rightarrow S$ un courbe projective, et F un fermé de \bar{U} tel que F/S est fini. Soit x un point de F , d'image s dans S .*

Alors, il existe un ouvert affine S' de S contenant s , et un diviseur effectif D dans \bar{X} tel que :

1. $F_{S'}$ est inclus dans $\bar{U}_{S'} - D$.
2. $\bar{U}_{S'} - D_{S'}$ est affine.

PREUVE du lemme : On regarde F_s la fibre de F au-dessus de s . L'ensemble sous-jacent à F_s est donc fini. Comme \bar{U}/S est projectif, il existe une section f dans $\Gamma(\bar{U}, \mathcal{O}_{\bar{U}}(i))$, pour i suffisamment grand, dont le diviseur D est disjoint de F_s . Il existe donc un voisinage ouvert affine S' de s dans S , tel que D est disjoint de $F_{S'}$, ce qui garantit la première condition. Comme S' est affine, et $D_{S'}$ est le diviseur associé à une section globale d'un fibré très ample sur $\bar{U}_{S'}$, le schéma $\bar{U}_{S'} - D_{S'}$ est affine. \square

1.3.3 Homotopie et groupe de Picard relatif

On va voir dans ce paragraphe comment calculer certains groupes de correspondances finies. Pour cela, on rappelle la définition suivante :

Définition 1.3.15 *Soit (X, Z) une paire fermée.*

On note $\text{Pic}(X, Z)$ le groupe des classes d'isomorphismes de couples (\mathcal{L}, s) où \mathcal{L} est un faisceau inversible sur X , et $s : \mathcal{O}_Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_Z$ une trivialisations de \mathcal{L} sur Z , où l'on impose aux isomorphismes d'être compatible à la trivialisations donnée.

La structure de groupe est induite par le produit tensoriel de \mathcal{O}_X -modules.

On dispose donc en particulier d'un morphisme

$$\text{Pic}(X, Z) \rightarrow \text{Pic}(X).$$

Définition 1.3.16 *Soit X un schéma, et Z un sous-schéma fermé de X .*

1. Si Z' est un sous-schéma fermé de Z , on définit un morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(X, Z) & \xrightarrow{r_{Z'}} & \text{Pic}(X, Z') \\ (\mathcal{L}, s) & \mapsto & (\mathcal{L}, s|_{Z'}) \end{array}$$

dit de restriction de Z à Z' .

2. Considérons un morphisme cartésien de paires fermées $(f, g) : (Y, W) \rightarrow (X, Z)$ (cf définition 5.4.4). On définit un morphisme image inverse en posant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(X, Z) & \xrightarrow{f^*} & \text{Pic}(Y, W) \\ (\mathcal{L}, s) & \mapsto & (f^*(\mathcal{L}), g^*(s)). \end{array}$$

Remarque 1.3.17.— Plus généralement, ce groupe de Picard est fonctoriel par rapport aux morphismes de la paire ouverte $(X/X - Z)$ associée à la paire fermée (X, Z) . On retrouvera une telle fonctorialité plus en détail dans 5.4.1, ainsi que dans la définition 8.2.1.

Le théorème qui suit est fondamental pour la suite. Il nous permet de manipuler effectivement les correspondances finies à homotopie près. Il s'agit d'une reformulation du théorème 3.1 de [SV96], et il est donc dû à A. Suslin et V. Voevodsky. On a tout de même eu soin de préciser la fonctorialité de l'isomorphisme qu'on a construit.

Théorème 1.3.18 Soit k un corps et S un k -schéma régulier noethérien. On se donne :

1. Y un schéma affine dans \mathcal{L}_S .
2. X un schéma dans \mathcal{L}_S , tel que X/S est une courbe quasi-affine lisse qui admet une bonne compactification notée \bar{X}/S . On pose $X_\infty = \bar{X} - X$.

Alors, il existe un isomorphisme canonique

$$\pi_S(Y, X) \rightarrow \text{Pic}(Y \times_S \bar{X}, Y \times_S X_\infty)$$

qui vérifie de plus :

1. Si $Y' \xrightarrow{f} Y$ est un morphisme plat dans \mathcal{L}_S entre schémas affines, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \pi_S(Y, X) & \longrightarrow & \text{Pic}(Y \times_S \bar{X}, Y \times_S X_\infty) \\ \text{of} \downarrow & & \downarrow (f \times_S 1_{\bar{X}})^* \\ \pi_S(Y', X) & \longrightarrow & \text{Pic}(Y' \times_S \bar{X}, Y' \times_S X_\infty). \end{array}$$

Le morphisme $(f \times_S 1_{\bar{X}})^*$ est le morphisme image inverse de la définition 1.3.16.

2. Soit Z un sous-schéma fermé de X tel que \bar{X}/S est une bonne compactification de (X, Z) . Notons $j : X - Z \rightarrow X$ l'immersion ouverte canonique. Alors, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \pi_S(Y, X - Z) & \twoheadrightarrow & \text{Pic}(Y \times_S \bar{X}, Y \times_S X_\infty \sqcup Y \times_S Z) \\ j \circ \downarrow & & \downarrow r_{Y \times_S X_\infty} \\ \pi_S(Y, X) & \longrightarrow & \text{Pic}(Y \times_S \bar{X}, Y \times_S X_\infty). \end{array}$$

Le morphisme vertical de droite est la restriction de la trivialisatoin canonique à $Y \times_S X_\infty$ définie en 1.3.16.

Remarque 1.3.19.– L’hypothèse de platitude sur f faite dans le 2 n’est pas nécessaire, mais l’on ne se servira pas du cas général. Par ailleurs, on peut exiger seulement que Y/S soit quasi-affine.

PREUVE : On peut supposer tout d’abord que Y est irréductible, compte tenu de l’additivité des deux foncteurs par rapport à Y .

1. On commence par associer à toute correspondance finie un élément du groupe de Picard relatif.

Considérons l’immersion ouverte $k : YX \rightarrow Y\bar{X}$. On obtient alors la suite suivante de morphismes :

$$c_{\text{equi}}(YX/Y, 0) \xrightarrow{k_*} c_{\text{equi}}(Y\bar{X}/Y, 0) \xrightarrow{(1)} Z^1(Y\bar{X}) \xrightarrow{(2)} \text{Pic}(Y\bar{X})$$

où le morphisme k_* est bien défini à cause du lemme 1.1.18. L’inclusion (1) existe car $Y\bar{X}/Y$ est une courbe, et le morphisme (2) est obtenu parce que $Y\bar{X}$ est normal.

Par ailleurs, si $\alpha \in c_{\text{equi}}(YX/Y, 0)$ de support Z , et que l’on note \mathcal{L} un représentant de la classe dans $\text{Pic}(Y\bar{X})$ de l’image de α par le morphisme précédent, on a une trivialisatation canonique $t : \mathcal{O}_{Y\bar{X}-Z} \rightarrow \mathcal{L}_{Y\bar{X}-Z}$. Comme $YX_\infty \subset (Y\bar{X}) - Z$ par définition, on obtient $s = t|_{YX_\infty}$, et $(\mathcal{L}, s) \in \text{Pic}(Y\bar{X}, YX_\infty)$. Or il est immédiat que cette classe (\mathcal{L}, s) ne dépend pas du représentant choisi, ce qui nous donne en fait le morphisme attendu

$$\begin{array}{ccc} c_S(Y, X) = c_{\text{equi}}(YX/Y, 0) & \longrightarrow & \text{Pic}(Y\bar{X}) \\ & \dashrightarrow & \uparrow \\ & & \text{Pic}(Y\bar{X}, YX_\infty). \end{array}$$

Pour la fin de la démonstration, on se réfère à [SV96], theorem 3.1, en remarquant que

$$\pi_S(Y, X) = H_0^{\text{sing}}(YX/Y)$$

où H_0^{sing} désigne l’homologie singulière de Suslin. On vérifie exactement : Y est affine normal, YX/Y est une courbe quasi-affine lisse, et $Y\bar{X}/Y$ en est une bonne compactification. On notera que YX/Y n’est pas nécessairement connexe, mais c’est un ouvert dense de $Y\bar{X}/Y$. Par ailleurs, l’énoncé de *loc.cit.* porte sur une courbe affine, mais on vérifiera sans peine que la démonstration reste valable dans le cas d’une courbe quasi-affine.

La démonstration de ce théorème montre précisément que l’application construite précédemment est un isomorphisme.

Il nous reste à montrer les propriétés de functorialité de cet isomorphisme :

2. Soit $\alpha \in \pi_S(Y', X)$, alors d’après le lemme 1.2.5, $\alpha \circ f = (f \times_S 1_X)^*(\alpha)$. Dès lors,

$$k_*(f \times_S 1_X)^*(\alpha) = (f \times_S 1_{\bar{X}})^*k'_*(\alpha)$$

d’après la formule de la proposition 1.1.21 où l’on a noté $k : YX \rightarrow Y\bar{X}$ et $k' : Y'X \rightarrow Y'\bar{X}$ les immersions ouvertes canoniques. La formule résulte du fait que le morphisme (2) (de la construction ci-dessus) est compatible au pullback.

3. Si $\alpha \in \pi_S(Y, X - Z)$, il résulte du lemme 1.2.5 que $j \circ \alpha = (1_Y \times_S j)_*(\alpha)$. Dès lors, cette dernière propriété est évidente. \square

Remarque 1.3.20.– Dans la situation du théorème précédent, pour tout $\alpha \in \pi_S(Y, X)$, on fera le choix d’un représentant $(\mathcal{L}(\alpha), s(\alpha))$ de la classe de l’image α par l’isomorphisme

précédent.

1.3.4 Applications

Dans cette partie, on fixe un corps k et on interprète, comme annoncé, les résultats de [FSV00c] dans la catégorie $\pi\mathcal{L}_{\text{cor},k}$.

1.3.4.1 Factorisations

Les applications du théorème 1.3.18 consistent en des théorèmes d'existence de S -correspondances finies, vérifiant des propriétés à homotopie près. On fixe donc de plus une courbe X/S affine lisse, et un ouvert U de X , notant $i : U \rightarrow X$ l'immersion ouverte correspondante et Z le fermé complémentaire. On suppose que (X, Z) admet une bonne compactification sur S , notée \bar{X}/S .

Si Y est un schéma affine qui appartient à \mathcal{L}_S , et si l'on se donne $\alpha : Y \rightarrow X$ une S -correspondance finie, rappelons que l'on note conventionnellement $(\mathcal{L}(\alpha), \sigma(\alpha))$ un couple représentant l'image de α par l'isomorphisme canonique $\pi_S(Y, X) \rightarrow \text{Pic}(Y \times_S \bar{X}, Y \times_S X_\infty)$ de 1.3.18.

Proposition 1.3.21 *Avec les notations introduites ci-dessus, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. Pour tout schéma affine Y dans \mathcal{L}_S , l'application

$$\pi_S(Y, U) \xrightarrow{i_0} \pi_S(Y, X)$$

est surjective.

2. L'application

$$\pi_S(X, U) \xrightarrow{i_0} \pi_S(X, X)$$

est surjective.

3. Le fibré inversible $\mathcal{L}(1_X)|_{X \times_S Z}$ est trivial.

Ayant remarqué que 1 et 2 sont équivalentes à l'existence d'une S -correspondance finie qui est une section de i à homotopie près, le lemme précédent est une conséquence immédiate du lemme plus précis :

Lemme 1.3.22 *Soit Y un schéma affine dans \mathcal{L}_S et $\beta : Y \rightarrow X$ une S -correspondance finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. Il existe une S -correspondance finie α tel que le diagramme suivant est commutatif dans $\pi\mathcal{L}_{\text{cor},S}$,

$$\begin{array}{ccc} & X - Z & \\ \alpha \nearrow & & \searrow i \\ Y & \xrightarrow{\beta} & X. \end{array}$$

2. Le faisceau inversible $\mathcal{L}(\beta)|_{Y \times_S Z}$ est trivial.

Remarque 1.3.23.– Précisons même que de plus, les S correspondances vérifiant la condition de 1 sont en bijection avec les trivialisations de $\mathcal{L}(\beta)|_{Y \times_S Z}$ à isomorphisme près.

PREUVE : Ce lemme est un corollaire du théorème 1.3.18, que l'on applique à la courbe affine X/S , mais aussi à la courbe quasi-affine U/S .

$2 \Rightarrow 1$: Il suffit de considérer une trivialisations s de $\mathcal{L}(\beta)|_{Y \times_S Z}$. Dès lors, la classe du couple $(\mathcal{L}(\beta), \sigma(\beta) \oplus s)$ dans $\text{Pic}(Y \bar{X}, YX_\infty \sqcup YZ)$ définit une S -correspondance finie α , et d'après le point 3 de 1.3.18, on a bien $i \circ \alpha = \beta$.

$1 \Rightarrow 2$: Réciproquement, la S -correspondance finie α correspond à un élément du groupe $\text{Pic}(Y \bar{X}, YX_\infty \sqcup YZ)$ représenté par le couple $(\mathcal{L}(\alpha), \sigma(\alpha))$. Alors, puisque $i \circ \alpha = \beta$, il existe un isomorphisme $\phi : \mathcal{L}(\beta) \rightarrow \mathcal{L}(\alpha)$ tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\beta)|_{YX_\infty} & \xrightarrow{\phi|_{YX_\infty}} & \mathcal{L}(\alpha)|_{YX_\infty} \\ & \searrow \sigma(\beta) & \swarrow \sigma(\alpha)|_{YX_\infty} \\ & \mathcal{O}_{YX_\infty} & \end{array}$$

et l'on remarque que $\sigma(\alpha)|_{YZ} \circ \phi^{-1}|_{YZ}$ est une trivialisations de $\mathcal{L}(\beta)|_{YZ}$. \square

1.3.4.2 Sections locales des immersions ouvertes dans $\pi \mathcal{L}_{\text{cor},k}$

On a vu dans le paragraphe précédent des conditions nécessaires et suffisantes de factorisation d'une S -correspondance finie par une immersion ouverte. On applique maintenant ce fait pour en déduire la proposition importante qui suit, que l'on peut voir comme une reformulation de la proposition 4.17 de [FSV00c] (dans le cas local) :

Proposition 1.3.24 On suppose que k est infini.

Soit X un schéma algébrique lisse, U un ouvert dense de X , et x un point de X . Alors il existe

1. un voisinage ouvert V de x dans X ,
2. une correspondance finie $\alpha : V \rightarrow U$

tels que le diagramme suivant est commutatif dans $\pi \mathcal{L}_{\text{cor},k}$

$$\begin{array}{ccc} & & V \\ & \nearrow \alpha & \downarrow j \\ U & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

où l'on note i et j les immersions ouvertes canoniques.

PREUVE : On note $Z = X - U$.

Tout d'abord, d'après le théorème 1.3.11, il existe un schéma affine S algébrique lisse, un voisinage ouvert affine V de x dans X , un morphisme $f : V \rightarrow S$ lisse de dimension 1, et un S -schéma \bar{V} tels que \bar{V}/S est une bonne compactification de $(V, V \cap Z)$.

Compte tenu du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V \cap U & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & X, \end{array}$$

on voit que si le théorème est vrai pour V , il l'est pour X . Donc on peut supposer $X = V$. Ainsi, (X, Z) admet une bonne compactification sur S .

On va maintenant pouvoir appliquer le lemme 1.3.22.

Soit donc $\mathcal{L}(1_X)$ le faisceau inversible sur $X \times_S \bar{X}$ qui représente $1_X \in \pi_S(X, X)$ d'après le théorème 1.3.18. Or Z/S est fini, car c'est un fermé de \bar{X}/S qui est une courbe propre et affine par hypothèse. En particulier, $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \times_S Z$ est fini sur le schéma local $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$. C'est donc un schéma semi-local. Dès lors, $\text{Pic}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \times_S Z) = 0$. En particulier, $\mathcal{L}(1_X)$ est trivial sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \times_S Z$, ce qui signifie qu'il existe un voisinage ouvert V de x dans X tel que $\mathcal{L}(1_X)$ est trivial sur $V \times_S Z$.

D'après le lemme 1.3.22, appliqué avec $Y = V$, à la correspondance finie représentée par l'inclusion $V \xrightarrow{j} X$, la section que l'on vient de trouver est donc équivalente à une S -correspondance finie $\alpha : V \rightarrow U$ qui fait commuter le diagramme de $\pi\mathcal{L}_{\text{cor},S}$:

$$\begin{array}{ccc} & \alpha & V \\ & \swarrow & \downarrow j \\ X - Z & \xrightarrow{i} & X. \end{array}$$

Il suffit maintenant de regarder ce diagramme à travers le la restriction $\tilde{\tau}_*$ avec la notation de 1.2.15 où $\tau : S \rightarrow k$ est le morphisme lisse structural de S . En effet, d'après le lemme 1.2.14, la k -correspondance finie $\tilde{\tau}_*(\alpha)$ convient. \square

Corollaire 1.3.25 On suppose que k est infini.

Soit X un schéma algébrique lisse, U un ouvert dense de X . Alors il existe

1. un recouvrement ouvert $p : W \rightarrow X$ de X ,
2. une correspondance finie $\alpha : W \rightarrow U$

tels que le diagramme suivant est commutatif dans $\pi\mathcal{L}_{\text{cor},k}$

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ \alpha \swarrow & \downarrow j & \\ U & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

où l'on note i et j les immersions ouvertes canoniques.

PREUVE : Il suffit d'appliquer le lemme précédent en tout point x de X , ce qui nous donne pour chaque x un voisinage ouvert V_x de x dans X et une correspondance finie $\alpha_x : V_x \rightarrow U$ qui vérifie la condition du lemme. Par quasi-compacité de X , il existe un nombre fini de points x_1, \dots, x_n tels que les ouverts V_{x_1}, \dots, V_{x_n} recouvrent X . On pose alors :

$$\begin{aligned} W &= \bigsqcup_i V_{x_i} \\ \alpha &= \sum_i \alpha_{x_i}. \end{aligned}$$

\square

1.3.5 Droite affine sur un corps

Toujours dans le même esprit, la proposition suivante s'inspire du lemme 4.6 de [FSV00c] :

Proposition 1.3.26 *Soit C un ouvert de \mathbb{A}_k^1 .*

Alors, pour tout ouverts U, V de C tels que $C = U \cup V$, le complexe

$$0 \rightarrow U \cap V \xrightarrow{j_1 - j_2} U \oplus V \xrightarrow{(i_1, i_2)} C \rightarrow 0$$

est contractile dans la catégorie additive $\pi\mathcal{L}_{\text{cor},k}$, où i_1, i_2, j_1, j_2 désignent les immersions ouvertes canoniques.

Remarque 1.3.27.– On interprète cette proposition par le fait que dans la catégorie $K^b(\pi\mathcal{L}_{\text{cor},k})$ formée des complexes à équivalence d'homotopie près, les ouverts de \mathbb{A}_k^1 satisfont la propriété de Mayer-Vietoris. Cette remarque prendra tout son sens dans le chapitre sur la catégorie triangulée des motifs mixtes de V. Voevodsky.

PREUVE : Fixons les notations suivantes : $W = U \cap V$, $T = C - (U \cup V)$, $Z = C - U$ et $Z' = C - V$; donc $T = Z \sqcup Z'$. Par hypothèse, Z et Z' sont disjoints. On munit tous ses sous-espaces de la structure réduite de sous-schéma correspondante.

Puisque C/k est une courbe affine lisse, il existe d'après la proposition 1.3.10 une courbe projective lisse \bar{C}/k qui est une bonne compactification de C/k , et en même temps une bonne compactification de $U \cap V/k$.

On considère l'élément 1_C dans $\pi_k(C, C)$. D'après le théorème 1.3.18, il lui correspond un unique élément de $\text{Pic}(C \times_k \bar{C}, C \times_k C_\infty)$. On peut donc considérer un couple (\mathcal{L}, σ) qui le représente. Ainsi, \mathcal{L} représente le diviseur correspondant à la diagonale Δ_C dans $C \times_k \bar{C}$, et la trivialisaton σ provient en fait d'une trivialisaton

$$s : \mathcal{O}_\Omega \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_\Omega$$

où $\Omega = (C \times_k \bar{C}) - \Delta_C$.

Mais par ailleurs le schéma $C \times_k T$ est un ouvert de \mathbb{A}_T^1 , donc $\text{Pic}(C \times_k T) = 0$. Il en résulte que le faisceau $\mathcal{L}|_{C \times_k T}$ est trivial. On choisit donc une trivialisaton

$$t : \mathcal{O}_{(C \times_k T)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_{(C \times_k T)}.$$

Fixons maintenant une notation commode : pour tout ouvert U de C , et tout fermé Y de C distinct de C , on pose $\mathcal{T}(U, Y)$ le groupe additif des isomorphismes de fibré de \mathcal{O}_{UY} dans $\mathcal{L}|_{UY}$. On a donc un morphisme canonique

$$\mathcal{T}(U, Y) \rightarrow \pi_k(U, C - Y), r \mapsto \alpha(r)$$

qui à une trivialisaton r associe le couple $(\mathcal{L}|_{U\bar{C}}, r \oplus \sigma|_{UC_\infty})$ (Notons que l'on peut faire la somme directe de deux trivialisatons sur un fermé strict de \bar{C} , puisque celui-ci admet un voisinage affine).

Par ailleurs, pour $i : U' \rightarrow U$ et $j : X - Y \rightarrow X - Y'$ deux immersions ouvertes, pour $r \in \mathcal{T}(U, Y)$, on a les relations suivantes :

$$\alpha(r) \circ i = \alpha(r|_{U'Y}) \quad j \circ \alpha(r) = \alpha(r|_{UY'})$$

qui résultent de la functorialité de l'isomorphisme de 1.3.18. Si Y est vide, $\mathcal{T}(U, Y)$ est réduit à un singleton, d'image l'immersion ouverte $U \rightarrow C$ par α (compte tenu du choix de (\mathcal{L}, σ)).

Muni de ces notations, on peut maintenant construire une homotopie explicite

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & U \cap V & \xrightarrow{j_1 - j_2} & U \oplus V & \xrightarrow{(i_1, i_2)} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & \swarrow (f_1, f_2) & \parallel & \swarrow g_2 & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & U \cap V & \xrightarrow{j_1 - j_2} & U \oplus V & \xrightarrow{(i_1, i_2)} & C \longrightarrow 0
 \end{array}$$

en posant :

1. $g_2 = \alpha(t|_{CZ'}) : C \rightarrow V$
2. $f_1 = \alpha(s|_{UZ} \oplus t|_{UZ'}) : U \rightarrow U \cap V$
3. $f_2 = \alpha(t|_{VT}) - \alpha(s|_{VZ'} \oplus t|_{VZ})$

On peut alors vérifier que c'est bien une homotopie :

1. On obtient tout d'abord : $i_2 \circ g_2 = \alpha(t|_{\emptyset}) = 1_C$.
2. Par ailleurs,

$$f_1 j_1 - f_2 j_2 = \alpha(s|_{WZ} \oplus t|_{WZ'}) + \alpha(s|_{WZ'} \oplus t|_{WZ}) - \alpha(t|_{WT})$$

Cette correspondance finie correspond donc au fibré inversible $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \otimes \check{\mathcal{L}}$, muni de la trivialisatation

$$(s|_{WZ} \oplus t|_{WZ'} \oplus s|_{WC_\infty}) \otimes (s|_{WZ'} \oplus t|_{WZ} \oplus s|_{WC_\infty}) \otimes (\check{t}|_{WT} \oplus \check{s}|_{WC_\infty}).$$

Ce couple est isomorphe à $(\mathcal{L}, s|_{WZ} \oplus s|_{WZ'} \oplus s|_{WC_\infty})$, soit à la correspondance finie 1_W .

Les quatre autres relations se vérifient de la même façon. □

Remarque 1.3.28.– On généralisera cette proposition lorsqu'on aura défini la topologie de Nisnevich.

Chapter 2

Faisceaux avec transferts

Sauf mention explicite du contraire, tous les faisceaux que l'on considère sont des faisceaux en groupes abéliens.

2.1 Topologie de Nisnevich

On fixe dans cette partie un schéma noethérien de dimension de Krull finie S .

2.1.1 Définition

Définition 2.1.1 On définit la topologie de Nisnevich sur \mathcal{L}_S , notée Nis comme la topologie engendrée par les familles couvrantes d'un schéma X dans \mathcal{L}_S

$$(V_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$$

telle que

(N₁) f_i est un S -morphisme étale

(N₂) Pour tout point x de X , il existe i dans I , et y un point de V_i au-dessus de x tel que le morphisme induit sur les corps résiduels $\kappa(x) \rightarrow \kappa(y)$ est un isomorphisme.

De plus, on appelle voisinage de Nisnevich de X en x tout couple (V, y) où V est un schéma étale et de type fini sur X et y un point de V au-dessus de x tel que le morphisme induit $\kappa(x) \rightarrow \kappa(y)$ est un isomorphisme.

La topologie Nis s'insère dans la suite décroissante de topologies sur \mathcal{L}_S :

$$\text{Can} \geq \text{Et} \geq \text{Nis} \geq \text{Zar}$$

où Can, Et, Zar désignent respectivement les topologies canonique, étale et Zariski. En particulier, tout préfaisceau représentable sur \mathcal{L}_S est un faisceau pour Nis.

2.1.2.– On note \mathcal{N}_S (resp. \mathcal{Z}_S) la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur \mathcal{L}_S pour la topologie de Nisnevich (resp. Zariski).

Exemple 2.1.3.– Si X est un schéma dans \mathcal{L}_S , le préfaisceau

$$\mathcal{L}_X \rightarrow \mathcal{A}b, Y \mapsto \mathbb{Z}.\text{Hom}_{\mathcal{L}_S}(Y, X)$$

est un faisceau pour la topologie de Nisnevich. On le note $\mathbb{Z}_S(X)$, en tant qu'objet de \mathcal{N}_S .

On utilisera particulièrement le lemme de «structure» suivant pour les voisinages de Nisnevich :

Lemme 2.1.4 *Soit X un schéma irréductible dans \mathcal{L}_S , x le point générique de X . Soit V un schéma dans \mathcal{L}_S , y un point de V et $f : V \rightarrow X$ un S -morphisme tel que $f(x) = y$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f induit un isomorphisme de $\kappa(x)$ dans $\kappa(y)$.*
2. *Il existe un ouvert U de X contenant x , et un morphisme $s : (U, x) \rightarrow (V, y)$ qui est une section de $f|_{f^{-1}(U)}$, ie $f \circ s = \text{Id}_U$.*

PREUVE : Il suffit d'appliquer le lemme

Lemme 2.1.5 *Soit s un point de S . Soient (X, x) et (Y, y) deux (S, s) -schémas, Y étant localement de présentation finie sur S .*

Soit $\mathcal{F}((X, x), (Y, y))$ le germe des S -morphisms de X dans Y envoyant x sur y (ie les S -morphisms de schémas définis sur un voisinage ouvert de x , envoyant x en y). Alors on a une bijection

$$\begin{aligned} \mathcal{F}((X, x), (Y, y)) &\rightarrow \text{Hom}_{\text{loc}-\mathcal{O}_{S,s}}(\mathcal{O}_{Y,y}, \mathcal{O}_{X,x}) \\ f &\mapsto f_x^\sharp. \end{aligned}$$

Considérons l'application φ

$$\mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \kappa(y) \xrightarrow{(f_y^\sharp)^{-1}} \kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}.$$

D'après le lemme, ce morphisme local correspond à un S -morphisme s défini sur un voisinage ouvert de x . Par ailleurs, si l'on se restreint à un ouvert U encore plus petit, compte tenu de ce que $(f \circ s)_x^\sharp = \text{Id}$, s définit bien une section de $f|_U$. \square

Remarque 2.1.6.– Le cas des k -algèbres locales-étales de corps résiduel k montre qu'on ne peut pas espérer obtenir une telle section sur un ouvert en général (mais seulement un ouvert localement fermé).

2.1.2 Base pour la topologie de Nisnevich

Tout recouvrement de X pour la topologie de Zariski sur \mathcal{L}_S admet un sous-recouvrement fini (car X est noethérien donc quasi-compact). Le lemme de structure nous permet de déduire une propriété semblable pour la topologie de Nisnevich. Plus précisément,

Lemme 2.1.7 (de stratification) Soit $(X_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$ un recouvrement de X pour la topologie de Nisnevich sur \mathcal{L}_S .

Alors il existe une suite finie décroissante de fermés de X (i.e. une stratification)

$$X = Z_{j_0} \supsetneq \dots \supsetneq Z_{j_n} \supsetneq Z_{j_{n+1}} = \emptyset$$

telle que $J = \{j_0, \dots, j_{n+1}\}$ est inclus dans I et pour tout indice m , $f_{j_m} \times_X (Z_{j_m} - Z_{j_{m+1}})$ admet une section.

PREUVE : On pose $X = Z_{j_0}$.

Soit x le point générique de Z_{j_0} , et $j_1 \in I$ tel que X_{j_1} est un voisinage de Nisnevich de x sur X . D'après le lemme précédent appliqué au point x de X_{j_0} , il existe un ouvert U_{j_0} de Z_{j_0} contenant x tel que f_{j_0} admet une section définie sur U_{j_0} .

On pose donc $Z_{j_1} = X - U_{j_0}$, et on peut appliquer le procédé précédent à Z_{j_1} , puisque $(Z_{j_1} \times_X V_i \rightarrow Z_{j_1})_{i \in I}$ est un recouvrement Nisnevich de Z_{j_1} .

Itérant ce processus, on obtient une suite strictement décroissante de fermés de X , qui est donc nécessairement finie puisque X est noethérien. \square

Or, si $f : V \rightarrow X$ est un morphisme étale qui admet une section sur un sous-schéma X' de X , alors c'est un voisinage de Nisnevich de X en tous points de X' . Ainsi, dans la situation du lemme précédent, puisque la famille d'ouverts $(U_j)_{j \in J}$ recouvre X , $(f_j)_{j \in J}$ est déjà un recouvrement pour Nisnevich de X .

En fait le lemme de stratification donne même une propriété plus précise sur la topologie de Nisnevich. On introduit pour dégager cette propriété la notion suivante de F. Morel et V. Voevodsky (cf [MV01], §3, déf. 1.3) :

Définition 2.1.8 On appelle carré distingué tout diagramme cartésien dans \mathcal{L}_S

$$\begin{array}{ccc} U \times_X V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

tel que

1. i est une immersion ouverte,
2. p est étale,
3. si l'on note $Z = X - U$ sous-espace de X muni de sa structure de sous-schéma réduit, p induit un isomorphisme $p^{-1}(Z) \rightarrow Z$.

Le couple (i, p) , qui est alors une famille couvrante de X pour la topologie de Nisnevich, est alors appelé famille couvrante élémentaire.

Remarque 2.1.9.— On désignera par abus un carré distingué du type de la définition ci-dessus, par le triplet (X, U, V) qui lui est associé.

Lemme 2.1.10 Les familles couvrantes élémentaires forment une base pour la topologie de Nisnevich sur \mathcal{L}_S .

PREUVE : On note $\mathcal{T}'(X)$ l'ensemble des familles couvrantes élémentaires de X , et \mathcal{T}' la topologie la moins fine sur \mathcal{L}_S telle que ces familles soient couvrantes.

On doit montrer que $\mathcal{T}' = \text{Nis}$. Or, toute famille couvrante élémentaire étant couvrante pour Nisnevich, on a \mathcal{T}' est moins fine que Nis. Réciproquement, soit $\left(V_i \xrightarrow{f_i} X\right)_{i \in I}$ un recouvrement pour Nisnevich. On cherche à voir que le crible R engendré par cette famille est un crible couvrant pour \mathcal{T}' . D'après la remarque qui suit le lemme de stratification, on peut donc supposer que I est fini, et par suite, on peut supposer que R est engendré par une unique application, $f = \sum_{i \in I} f_i : Y = \bigsqcup_{i \in I} V_i \rightarrow X$.

On raisonne par récurrence sur la longueur d'une chaîne de stratification de X . Soit Z le premier terme d'une stratification de longueur n de X . Par définition, f admet une section sur $U = X - Z$, notée s . On note encore $Y' = f^{-1}(U) - \text{Im}(s)$, et $V = Y - Y'$. Dès lors, $(i : U \rightarrow X, V \xrightarrow{f} X)$ forment un recouvrement élémentaire de X (en effet, $f^{-1}(U) \cap V = \text{Im}(s)$). Par ailleurs, $Y \times_X U \rightarrow U$ admet une stratification de longueur $n-1$ (donnée par la stratification d'ordre n de X déjà choisie), donc est couvrante pour la topologie \mathcal{T}' . Or le crible couvrant R est obtenu par composition des familles couvrantes $((Y \times_X U \rightarrow U), (Id_V))$ avec la famille couvrante $(U \rightarrow X, V \rightarrow X)$, il appartient donc à \mathcal{T}' . \square

Comme de plus la collection des familles couvrantes élémentaires est stable par changement de base. Donc, d'après le corollaire 2.3 de [SGA4], exposé II, pour voir que F est un faisceau pour la topologie de Nisnevich, il suffit de le tester sur les familles couvrantes élémentaires. On déduit de ce fait le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.11 *Soit F un préfaisceau d'ensembles sur \mathcal{L}_S . Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. F est un faisceau pour la topologie de Nisnevich.
2. Pour tout carré distingué (X, U, V) , le diagramme d'ensembles

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \longrightarrow & F(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(U) & \longrightarrow & F(U \times_X V) \end{array}$$

est cartésien.

Remarque 2.1.12.— On se placera toujours dans le cas où F est un faisceau de groupes abéliens ; on notera que, puisque le foncteur d'oubli des groupes abéliens dans les ensembles est exact à gauche, le corollaire précédent est encore valable si l'on remplace partout «ensemble» par «groupe abélien».

2.1.3 Points pour la topologie de Nisnevich

On utilise dans cette sous-section la théorie générale des points d'un topos dans le cas du topos Nisnevich (et en même temps le cas classique du topos Zariski), présentée dans l'appendice C.3.

2.1.3.1 Localisé pour la topologie de Nisnevich

Pour définir des points du topos Nisnevich (resp. Zariski), on commence en fait par définir des catégories de voisinages (d'après l'annexe C.3, c'est en fait équivalent)

Définition 2.1.13 *Soit X un schéma dans \mathcal{L}_S , et x un point de X . On note $\mathcal{V}_x(X)$ l'ensemble des ouverts de X contenant x ordonné par inclusion (i.e. des voisinages de x dans X pour la topologie de Zariski).*

Similairement, on note $\mathcal{V}_x^h(X)$ la catégorie des voisinages de Nisnevich de X en x (cf définition 2.1.1).

Remarque 2.1.14.– On reconnaîtra dans cette définition la définition générale C.3.6.

Lemme 2.1.15 *Les catégories $\mathcal{V}_x(X)$ et $\mathcal{V}_x^h(X)$ sont essentiellement petites et cofiltrantes.*

PREUVE : Soit V et V' deux voisinages Nisnevich (resp. Zariski) de x dans X . Alors, $V \times_X V'$ est un voisinage Nisnevich (resp. Zariski) de x dans X , plus fin que V et V' .

Dans le cas des voisinages Zariski, la catégorie est même petite. Dans le cas des voisinages Nisnevich, il suffit d'utiliser la forme élémentaire d'une extension étale de schéma, et le fait que X est noethérien, pour trouver une (petite) famille essentielle. \square

Définition 2.1.16 *On définit le localisé de X en x pour la topologie Zariski, noté X_x , comme le pro-objet de \mathcal{L}_S*

$$X_x = \varprojlim_{U \in \mathcal{V}_x(X)} U.$$

On définit aussi le localisé de X en x pour la topologie Nisnevich, noté X_x^h , comme le pro-objet de \mathcal{L}_S

$$X_x^h = \varprojlim_{V \in \mathcal{V}_x^h(X)} V.$$

Proposition 2.1.17 1. *Le pro-objet X_x^h (resp. X_x) pro-représente un foncteur fibre du topos Nisnevich (resp. Zariski) de \mathcal{L}_S .*

2. *La famille des points X_x^h (resp. X_x) pour X dans \mathcal{L}_S et x un point de X est conservative sur le topos Nisnevich (resp. Zariski) de \mathcal{L}_S .*

PREUVE : On ne donne la démonstration que dans le cas de la topologie de Nisnevich (l'autre cas étant à la fois plus simple et similaire).

1) Il s'agit de vérifier la condition (C) de la proposition C.3.10 pour le pro-objet X_x^h . Soient V un voisinage Nisnevich de x dans X , Y un schéma dans \mathcal{L}_S et $(Y_r)_{r \in \Lambda} \rightarrow Y$ un recouvrement Nisnevich de Y , et $f : V \rightarrow Y$ un morphisme. Soit v le point de V tel que l'extension induite $\kappa(v)/\kappa(x)$ soit triviale, et $y = f(v)$. Puisque $(Y_r)_r \rightarrow Y$ est un recouvrement, il existe un r dans Λ et un point z dans Y_r au-dessus de y tel que l'extension induite $\kappa(z)/\kappa(y)$ soit triviale. D'après le lemme 2.1.4, il existe donc un ouvert U de Y contenant y tel que le morphisme $Y_r \times_Y U \rightarrow U$ admet une section, notée s . Or, $V \times_Y U$

est un ouvert de U contenant v , c'est donc un voisinage Nisnevich de X . On en déduit donc le diagramme commutatif attendu :

$$\begin{array}{ccc}
 V \times_Y U & \longrightarrow & V \\
 \searrow f_U & & \downarrow f \\
 & U & \\
 & \downarrow s & \\
 & Y_r \times_Y U & \\
 \swarrow & & \downarrow \\
 Y_r & \longrightarrow & Y.
 \end{array}$$

2) Soit $u : F \rightarrow G$ un morphisme de faisceau.

On montre d'abord que si pour tout point x de X , u_x est injective alors u est un monomorphisme. Tout d'abord, $u_X : F(X) \rightarrow G(X)$ est injective. Soit donc s, t deux X -sections de F , telles que $u_X(s) = u_X(t)$. Alors pour tout point x de X , considérant le morphisme canonique $F(X) \rightarrow F_x$, $u_x(s_x) = u_x(t_x)$, donc $s_x = t_x$ dans l'ensemble F_x . Par définition, cela implique qu'il existe (V, v) voisinage de Nisnevich de X en x tel que $s|_V = t|_V$. Par ailleurs, appliquant ceci en tous points de X , on obtient un recouvrement pour Nisnevich $V_i \rightarrow X$ tel que $s|_{V_i} = t|_{V_i}$, ce qui implique $s = t$ (puisque F est un faisceau pour Nisnevich).

Supposons maintenant que pour tout point x , u_x est un isomorphisme, et montrons que u est alors un isomorphisme. D'après ce qui précède, il suffit de voir que u_X est surjective. Soit donc s' une section dans $G(X)$. Comme u_x est surjective, il existe un élément α dans F_x d'image s'_x . Encore une fois, le calcul de F_x montre que α se relève sur un voisinage Nisnevich de x , noté V_x . On note encore s_{V_x} la V -section de F dont la fibre est α . Dès lors, le système des s_{V_x} et s_{V_y} coïncide sur $V_x \times_X V_y$ car elles ont même image par u qui est déjà un monomorphisme. Comme F est un faisceau pour Nisnevich, le système des $(s_{V_x})_{x \in X}$ se relève en une section s dans $F(X)$, dont l'image par u_x est égale à s' . \square

On introduit la notation temporaire $\mathcal{P}t(\mathcal{N}_S)_{ess}$ (respectivement $\mathcal{P}t(\mathcal{L}_S)_{ess}$) pour la catégorie formée des pro-objets de la forme X_x^h (respectivement X_x) pour X un schéma dans \mathcal{L}_S et x un point de X .

Cette catégorie est donc équivalente à une catégorie «conservative» de foncteurs fibres (ou encore points) du topos \mathcal{N}_S (respectivement \mathcal{L}_S).

Ainsi, si F est un faisceau Nisnevich sur \mathcal{L}_S , X un schéma dans \mathcal{L}_S et x un point de X , la fibre de F au point pro-représenté par le pro-objet X_x^h sera donc

$$F(X_x^h) = \varinjlim_{V \in \mathcal{V}_x^h(X)} F(V).$$

Remarque 2.1.18.— Notons par ailleurs que si $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ est un morphisme de schémas pointés (ie $y = f(x)$), on définit un morphisme \bar{f} canonique de pro-objets obtenu par composition des morphismes suivants

$$X_x \rightarrow X \times_Y Y_y \rightarrow Y_y.$$

En effet, pour tout $V \in \mathcal{V}_y(Y)$, l'ouvert $X \times_Y V$ appartient à $\mathcal{V}_x(X)$.

2.1.3.2 Limites de localisés et anneaux henséliens

On va déterminer les limites des pro-objets précédents dans la catégorie des schémas. Pour cela, on a besoin de conditions de finitude particulières sur les schémas, pour lesquelles on se réfère à l'annexe A.

2.1.19.— Si X est un S -schéma local d'anneau \mathcal{O} . On appelle lieu de X le point de S image du point fermé de X , noté s . La donnée du morphisme structural $X \rightarrow S$ est alors équivalente à la donnée d'un morphisme local $\mathcal{O}_{S,s} \rightarrow \mathcal{O}$. On notera pour abrégé \mathcal{O}/S une telle donnée, et on l'appellera simplement une S -algèbre locale. Cela correspond donc à un point s de S , le lieu (ou localité) de \mathcal{O}/S , et à un morphisme local d'anneaux $\mathcal{O}_{S,s} \rightarrow \mathcal{O}$.

On dit qu'une S -algèbre locale \mathcal{O} est essentiellement de type fini (resp. essentiellement lisse) si et seulement si le morphisme correspondant $\text{Spec}(\mathcal{O}) \rightarrow S$ est essentiellement de type fini (resp. essentiellement lisse). Si s est le lieu de \mathcal{O}/S , cela équivaut donc, d'après la proposition A.1.9, au fait que \mathcal{O} est une $\mathcal{O}_{S,s}$ -algèbre essentiellement de type fini (resp. formellement lisse et essentiellement de type fini).

Un morphisme de S -algèbres est simplement un S -morphisme des schémas locaux sous-jacents. Donc, pour qu'il existe un S -morphisme entre deux S -algèbres locales \mathcal{O}/S et \mathcal{O}'/S , il faut qu'elles aient même lieu. Alors, si s est le lieu commun de ces deux algèbres, un S -morphisme $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ est donc équivalent à un morphisme de $\mathcal{O}_{S,s}$ -algèbre.

Ayant fixé ces définitions, on introduit la catégorie suivante :

Définition 2.1.20 *On note \mathcal{A}_S la catégorie des S -algèbres locales essentiellement lisses, muni des morphismes de S -algèbres décrits ci-dessus.*

On dira encore qu'un objet \mathcal{O}/S de \mathcal{A}_S est un point essentiellement lisse de S .

Remarque 2.1.21.— Par définition, la catégorie \mathcal{A}_S^{op} est équivalente à la catégorie des S -schémas locaux essentiellement lisse.

2.1.22.— Or, pour tout schéma X dans \mathcal{L}_S et tout point x de X , le pro-objet X_x admet par définition pour limite projective (dans la catégorie des schémas) le schéma local $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$. Alors, il résulte de A que $\mathcal{O}_{X,x}$ est une S -algèbre locale essentiellement lisse, donc un objet de \mathcal{A}_S . On verra plus loin que cette propriété caractérise la limite des pro-objets de la forme X_x .

Avant cela, intéressons nous au cas de la topologie de Nisnevich. On commence par quelques rappels d'algèbre, dont la référence principale est [Ray70].

Définition 2.1.23 *Un anneau local A est hensélien si et seulement si toute A -algèbre finie B est décomposée, i.e. le morphisme canonique*

$$B \longrightarrow \prod_{x \in \text{Spem}(B)} B_x$$

où $\text{Spem}(B)$ désigne le spectre maximal de B , est un isomorphisme.

Remarque 2.1.24.— A étant local et B étant une A -algèbre finie, l'ensemble des idéaux maximaux de B est toujours fini.

On utilisera particulièrement la caractérisation suivante des anneaux locaux henséliens (cf [Ray70]) :

Proposition 2.1.25 Soit A un anneau local, k son corps résiduel, $X = \text{Spec}(A)$ et x_0 son point fermé ; les conditions suivantes sont équivalentes :

1. A est hensélien.
2. Pour tout morphisme étale $Y \xrightarrow{f} X$, les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (a) f admet une section.
 - (b) Y est un voisinage de Nisnevich de X en x_0 .

Ce que l'on peut encore exprimer en disant qu'une section en haut du diagramme suivant se descend sur X

$$\begin{array}{ccc}
 Y \times_X x_0 & \xrightarrow{\quad} & x_0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Y & \xrightarrow{f} & X.
 \end{array}$$

On rappelle enfin la construction suivante (cf [Ray70]) :

Proposition 2.1.26 Le foncteur d'oubli de la catégorie des anneaux locaux henséliens (munis des morphismes locaux) dans la catégorie des anneaux locaux admet un adjoint à droite.

Si A est un anneau local, on note A^h l'image de A par l'adjoint précédent, appelé hensélisé de A .

Remarque 2.1.27.— Plus généralement, si X est un anneau local, $X = \text{Spec}(A)$, on note $X^h = \text{Spec}(A^h)$, appelé hensélisé de X .

A défaut d'une meilleure caractérisation, on introduit la définition suivante :

Définition 2.1.28 On note \mathcal{A}_S^h la catégorie des S -algèbres locales qui sont obtenues par hensélisation d'une S -algèbre dans \mathcal{A}_S .

Remarque 2.1.29.— Soit X/S un S -schéma local essentiellement lisse. Par définition du foncteur hensélisation de [Ray70], X^h est alors limite projective de X -schémas étales. Ainsi, X^h est formellement lisse. Mais le contre-exemple ci-dessous, que j'ai appris de Laurent Fargues, montre que X^h/S n'est plus nécessairement *essentiellement de type fini*, même si S est le spectre d'un corps.

On pose $S = \text{Spec}(\mathbb{C})$, et on note \mathbb{G}_m le groupe multiplicatif sur le corps des nombres complexes. Soit \mathcal{O} l'hensélisé de l'anneau local de \mathbb{G}_m au point 1, K son corps des fractions. Alors, $\pi_1(\mathbb{G}_m) = \hat{\mathbb{Z}}$, complété pro-fini de \mathbb{Z} , d'après le théorème de comparaison du groupe fondamental (les points complexes de $\mathbb{G}_m = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 - \{0, \infty\}$ étant une sphère de Riemann privée de deux points). Soit K_{nr} l'extension maximale non ramifiée en 0 et ∞

de $\mathbb{C}(t)$; par définition, $\text{Gal}(K_{nr}/\mathbb{C}(t)) \simeq \pi_1(\mathbb{G}_m)$, donc $K_{nr}/\mathbb{C}(t)$ n'est pas de type fini. Or, $K_{nr} \subset K$, donc K/\mathbb{C} n'est pas de type fini.

2.1.30.– Si X est un schéma de \mathcal{L}_S , et x un point de X , le pro-objet X_x^h admet pour limite projective dans la catégorie des schémas le schéma local $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^h)$, où $\mathcal{O}_{X,x}^h$ désigne l'hensélisé de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ dans \mathcal{A}_S .

De plus, le morphisme canonique de pro-objets $X_x^h \rightarrow X_x$ est induit par le morphisme d'adjonction, $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}^h$ (ce qui justifie nos notations).

Remarque 2.1.31.– On en déduit la reformulation suivante du lemme 2.1.4 :

Soit $f : V \rightarrow X$ un morphisme étale, x un point de X ; alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est un voisinage de Nisnevich de X en x .
2. Le morphisme $V \times_X X_x^h \rightarrow X_x^h$ admet une section.

Pour résumer ce qu'on a obtenu dans ce paragraphe, on a donc des morphismes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}t(\mathcal{L}_S)_{ess} & \rightarrow & (\mathcal{A}_S)^{op} \\ X_x & \mapsto & \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}t(\mathcal{N}_S)_{ess} & \rightarrow & (\mathcal{A}_S^h)^{op} \\ X_x^h & \mapsto & \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^h) \end{array}$$

qui consistent tout simplement à prendre la limite projective du pro-objet considéré dans la catégorie des S -schémas. Par ailleurs, ces deux morphismes sont pleinement fidèles d'après C.2.35.

Le but du paragraphe suivant est de voir que ce sont des équivalences de catégorie, et même de fournir un quasi-inverse.

2.1.3.3 Modèles

Commençons par le lemme suivant, qui découle principalement de l'annexe A :

Lemme 2.1.32 *Soit \mathcal{O}/S une S -algèbre locale, s l'image de son point fermé.*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. \mathcal{O} est essentiellement lisse sur S .
2. Il existe une sous- S -algèbre B de \mathcal{O} lisse et de type fini sur S et un idéal premier x de B tel que $B_x = \mathcal{O}$.

Remarque 2.1.33.– Par extension, on appelle S -algèbre tout anneau A muni d'un morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow S$. Si (P) est une propriété du S -schéma $\text{Spec}(A)$, on dit encore que A vérifie la propriété (P) . Si A/S et B/S sont deux S -algèbres, on dit que A est une sous- S -algèbre de B si et seulement si $A \subset B$ est le morphisme induit par cette inclusion $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est un S -morphisme.

PREUVE : Le fait que $2 \Rightarrow 1$ est évident.

Réciproquement, par définition, il existe un ouvert affine U de S contenant s , d'anneau A , tel que \mathcal{O}/A est essentiellement de type fini. D'après la définition A.1.1, il existe donc une sous- A -algèbre B de \mathcal{O} telle que B/A est de type fini et telle que $S^{-1}B \rightarrow \mathcal{O}$ est un isomorphisme, où $S = B \cap \mathcal{O}^\times$. Il est évident que S est le complémentaire de l'idéal premier x de B image réciproque de l'idéal maximal de \mathcal{O} .

Comme S est noethérien, l'immersion ouverte $\text{Spec}(A) \rightarrow S$ est de type fini (cf [EGA1], 6.3.5). Donc, le morphisme $\text{Spec}(B) \rightarrow S$ est de type fini. Par ailleurs, $\text{Spec}(B)$ est lisse sur S en x , puisque $\mathcal{O}/\mathcal{O}_{S,s}$ est formellement lisse. Comme cette condition est ouverte, il existe un ouvert principal de $\text{Spec}(B)$ contenant x et lisse sur S , c'est-à-dire un élément f de B tel que $f \notin x$ et B_f est une S -algèbre lisse de type fini. \square

Définition 2.1.34 Soit \mathcal{O} un anneau local dans \mathcal{A}_S . On note $\mathcal{M}^{lis}(\mathcal{O}/S)$ l'ensemble, ordonné pour l'inclusion, des sous- S -algèbres B de \mathcal{O} telles que :

1. $\text{Spec}(B)$ est lisse de type fini sur S .
2. Si l'on note x la trace de l'idéal maximal de \mathcal{O} dans B , $B_x = \mathcal{O}$.

Lemme 2.1.35 Pour tout anneau \mathcal{O} dans \mathcal{A}_S , $\mathcal{M}^{lis}(\mathcal{O}/S)$ est un ensemble filtrant.

De plus, $\mathcal{O} = \bigcup_{A \in \mathcal{M}^{lis}(\mathcal{O}/S)} A$.

PREUVE : \mathcal{O} est d'abord non vide d'après le lemme 2.1.32.

C'est de plus un ensemble ordonné filtrant : soit B et B' deux éléments de $\mathcal{M}^{lis}(\mathcal{O}/S)$. Si l'on note s l'image dans S du point fermé de \mathcal{O} , on peut considérer un voisinage ouvert affine de s dans S , d'anneau A . Considérons la sous- A -algèbre $B'' = A[B \cup B']$ de \mathcal{O} . Alors, B'' est dominant sur \mathcal{O} , et la trace de l'idéal maximal de \mathcal{O} dans B'' , notée x , vérifie : $B''_x = \mathcal{O}$. Ainsi, B''/A est lisse en x , et comme cette propriété est locale, on peut à nouveau trouver un f dans $B'' \setminus x$ tel que B''_f/A est lisse, et contient B, B' .

L'anneau \mathcal{O} est enfin réunion filtrante des tels objets puisque pour tout élément f de \mathcal{O} , on peut appliquer le raisonnement précédent à $A[f \cup B]$ où B est un élément de $\mathcal{M}^{lis}(\mathcal{O}/S)$. \square

2.1.36.– La correspondance qui à une S -algèbre \mathcal{O} associe le pro-objet (\mathcal{O}) dans $\text{pro-}\mathcal{L}_S$ est fonctorielle. En effet, si $\varphi : \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2$ est un morphisme de S -algèbre, on en déduit un morphisme $(\varphi) : (\mathcal{O}_2) \rightarrow (\mathcal{O}_1)$ en considérant la limite

$$\varprojlim_{A \in \mathcal{M}^{lis}(\mathcal{O}_1/S)^{op}} \left(\text{Spec}(\varphi(A))_{lis} \rightarrow \text{Spec}(A) \right)$$

où $\text{Spec}(\varphi(A))_{lis}$ désigne le lieu lisse du k -schéma de type fini $\text{Spec}(\varphi(A))$. Précisons en effet que le pro-objet

$$\varprojlim_{A \in \mathcal{M}^{lis}(\mathcal{O}_1/S)^{op}} \text{Spec}(\varphi(A))_{lis}$$

est canoniquement isomorphe au pro-objet (\mathcal{O}_2) (notamment parce que le morphisme φ est local).

On arrive donc à la définition suivante :

Définition 2.1.37 Soit \mathcal{O} un anneau dans \mathcal{A}_S . On définit le pro-objet de \mathcal{L}_S , noté simplement (\mathcal{O}) , égal à

$$\varprojlim_{A \in \mathcal{M}^{lis}(\mathcal{O}/S)^{op}} \text{Spec}(A).$$

On a ainsi défini un foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_S^{op} &\rightarrow \text{pro-}\mathcal{L}_S \\ \mathcal{O} &\mapsto (\mathcal{O}). \end{aligned}$$

Dans la suite du travail, nous utiliserons donc les pro-objets attachés à des anneaux locaux dans \mathcal{A}_S . On adopte encore la définition suivante :

Définition 2.1.38 Soit \mathcal{O} un anneau dans \mathcal{A}_S .

On appelle modèle de \mathcal{O}/S tout couple (X, x) où X est un schéma intègre dans \mathcal{L}_S , $x : \text{Spec}(\mathcal{O}) \rightarrow X$ un point dominant de X tel que x induit un isomorphisme $x^\# : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}$.

On définit aussi la catégorie des modèles de \mathcal{O}/S formée des objets ci-dessus et dont les morphismes sont les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow x & \downarrow f \\ \text{Spec}(\mathcal{O}) & & Y \\ & \searrow y & \end{array}$$

On confondra souvent le morphisme x et l'unique point de X dans son image.

Lemme 2.1.39 Soit \mathcal{O}/S un anneau dans \mathcal{A}_S . Alors,

1. \mathcal{O}/S admet un modèle.
2. Soit (X, x) un modèle de \mathcal{O}/S . Il existe un isomorphisme canonique de pro-objets de \mathcal{L}_S , induit par $x^\#$,

$$(\mathcal{O}) \longrightarrow X_x.$$

3. Soit $(X, x) \rightarrow (Y, y)$ un morphisme de modèles de \mathcal{O}/S ; on a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & X_x \\ & \nearrow & \downarrow \bar{f} \\ (\mathcal{O}) & & Y_y \\ & \searrow & \end{array}$$

PREUVE : Le 1. n'est qu'une reformulation de la proposition 2.1.32 puisque si $\mathcal{O} = A_x$, $X = \text{Spec}(A)$ convient.

Pour 2. et 3., il suffit de remarquer que chaque objet de $\mathcal{O}uv_x(X)$ vérifie la condition coPF dans \mathcal{L}_S , et d'appliquer le lemme C.2.33. \square

En d'autres termes, un modèle de \mathcal{O}/S est un pro-objet X_x isomorphe à (\mathcal{O}) , et obtenu par localisation d'un schéma X dans \mathcal{L}_S en un point. Les éléments de $\mathcal{M}^{lis}(\mathcal{O}/S)$ se caractérisent (à isomorphisme près) comme les modèles affines de \mathcal{O}/S qui sont de plus dominés par $\text{Spec}(\mathcal{O})$.

On a donc deux façons équivalentes de décrire un même pro-objet (l'une algébrique à partir d'un anneau local et l'autre géométrique à partir d'un schéma de type fini) et on se servira des deux définitions suivant ce que l'on veut dire de notre pro-objet.

Si l'on ajoute la condition que la catégorie \mathcal{A}_S est saturée par isomorphisme, on peut résumer ce qu'on a obtenu dans la proposition qui suit :

Proposition 2.1.40 *Le foncteur $\mathcal{A}_S^{op} \rightarrow \text{pro-}\mathcal{L}_S$, $\mathcal{O} \mapsto (\mathcal{O})$ induit un foncteur*

$$\mathcal{A}_S^{op} \rightarrow \mathcal{P}t(\mathcal{L}_S)_{ess}$$

qui est un quasi-inverse du foncteur canonique (défini dans le paragraphe précédent)

$$\mathcal{P}t(\mathcal{L}_S)_{ess} \rightarrow \mathcal{A}_S^{op}.$$

PREUVE : Il s'agit d'abord de vérifier que le pro-objet (\mathcal{O}) est un foncteur fibre. Or, on l'obtient facilement, puisque \mathcal{O} admet un modèle (X, x) d'après le lemme 2.1.39, et que dès lors, $(\mathcal{O}) \simeq X_x$ est un foncteur fibre.

Pour montrer que les deux foncteurs sont quasi-inverses l'un de l'autre, il suffit de constater que si X est un schéma dans \mathcal{L}_S , x un point de X , (X, x) est tautologiquement un modèle de $\mathcal{O}_{X,x}$, et que donc le morphisme canonique $X_x \rightarrow (\mathcal{O}_{X,x})$ est un isomorphisme de pro-objets (lemme 2.1.39). \square

2.1.41.– On obtient de la même manière un quasi-inverse du foncteur

$$\mathcal{P}t(\mathcal{A}_S)_{ess} \rightarrow \mathcal{A}_S^{h,op}$$

en attachant à toute S -algèbre locale \mathcal{O} dans \mathcal{A}_S^h le pro-objet $(\mathcal{O})^h$ égal à

$$\varprojlim_{A/S} \text{Spec}(A)$$

où la limite projective parcourt la catégorie essentiellement petite des S -algèbres A qui sont étales sur une sous- S -algèbre lisse de type fini de \mathcal{O} . Puisque, par définition, l'anneau \mathcal{O} est obtenu par hensélisation d'une S -algèbre \mathcal{O}' dans \mathcal{A}_S , un modèle (X, x) de \mathcal{O}'/S définit un isomorphisme canonique $X_x^h \rightarrow (\mathcal{O})^h$. L'énoncé et la preuve de l'analogie de la proposition précédente pour la topologie de Nisnevich se traduisent donc littéralement.

2.1.3.4 Points de basses dimensions

La catégorie \mathcal{A}_S est filtrée par la dimension. On étudie particulièrement les objets de dimension 0, et on note $\mathcal{A}_{S(0)}$ la sous-catégorie de \mathcal{A}_S engendrée par ces objets.

Dans [EGA1], 3.4.5, les auteurs appellent points géométriques de S tout couple (E, η) où E est un corps, et $\eta : \text{Spec}(E) \rightarrow S$ un morphisme. Cette donnée est donc équivalente à la donnée d'un élément s de l'ensemble sous-jacent à S , lieu de E/S , et d'un morphisme $\kappa(s) \rightarrow E$.

Dans cette thèse, on appelle simplement point de S tout couple (E, η) tel que E est un corps, $\eta : \text{Spec}(E) \rightarrow S$ un morphisme essentiellement de type fini.

Cela signifie encore, si s est le lieu du point E/S , que $E/\kappa(s)$ est une extension de type fini (cf définition A.1.1 et lemme A.1.5).

Par ailleurs, on introduit la définition suivante :

Définition 2.1.42 *On note \mathcal{E}_S^s la catégorie des points E/S de S tels que, si s est le lieu de E/S , l'extension $E/\kappa(s)$ est séparable de type fini.*

On dit encore que E/S est un point séparable.

Ainsi, lorsque $S = \text{Spec}(k)$ est le spectre d'un corps, \mathcal{E}_S^s est la catégorie des extensions séparables de type fini de k , notée simplement \mathcal{E}_k^s .

Par ailleurs, on a le lemme suivant :

Lemme 2.1.43 *Soit E/S un point de lieu s dans S . Alors, les conditions suivantes sont deux à deux équivalentes :*

1. (a) E/S est essentiellement de type fini.
(b) $E/\kappa(s)$ est une extension de type fini.
2. (a) E/S est formellement lisse.
(b) $E/\kappa(s)$ est séparable.

PREUVE : La première équivalence est tautologique.

La deuxième équivalence est classique, et l'on donne [Mat89], th. 26.9 comme référence. \square

Autrement dit, on obtient dans tous les cas :

$$\mathcal{A}_{S(0)} = \mathcal{E}_S^s.$$

On obtient par ailleurs les cas particuliers suivants :

Corollaire 2.1.44 *Si S est le spectre d'un corps parfait, $\mathcal{A}_{S(0)}$ est la catégorie des extensions de type fini de k .*

Si S est de caractéristique 0, $\mathcal{A}_{S(0)}$ est la catégorie des points E/S de lieu s tels que $E/\kappa(s)$ est de type fini.

Ce résultat peut encore être renforcé, car on a la proposition suivante (voir par exemple [Ray70]) :

Proposition 2.1.45 *Tout corps est un anneau hensélien.*

Ainsi,

$$\mathcal{A}_{S(0)}^h = \mathcal{A}_{S(0)} = \mathcal{E}_S^s.$$

Remarque 2.1.46.– Un mot de terminologie : un modèle d'un point séparable E/S est donc un S -schéma lisse de type fini muni d'un point générique et d'un S -isomorphisme du corps résiduel de ce point dans E (par la suite, on considérera le plus souvent des modèles connexes). Pour cette raison, on dira que le pro-objet (E) est un point générique (sous-entendu du topos \mathcal{A}_k), autrement dit de codimension nulle.

Par la suite, lorsqu'on regardera plus généralement des points d'un schéma dans \mathcal{L}_S , on s'occupera de leur codimension dans X (plutôt que de leur dimension en tant que partie de X), car celle-ci correspond à la dimension du localisé.

2.1.47.— On considère maintenant les objets de dimension un dans \mathcal{A}_S . Soit \mathcal{O}/S un anneau local dans \mathcal{A}_S de dimension un. C'est alors un anneau de valuation discrète, car il est régulier et de dimension un.

Autrement dit, \mathcal{O} est un *trait* sur S suivant une terminologie courante.

Dans cette thèse, on appelle simplement trait de S tout couple (\mathcal{O}, η) tel que \mathcal{O} est un anneau de valuation discrète et $\eta : \text{Spec}(\mathcal{O}) \rightarrow S$ est un morphisme essentiellement de type fini.

On fera attention que par contre, toute S -algèbre qui est un anneau de valuation discrète n'est pas nécessairement formellement lisse sur S .

La plupart du temps, on considérera le cas où S est le spectre d'un corps, et même un corps parfait. On rappelle le lemme suivant qui permet de simplifier la catégorie \mathcal{A}_S dans ce cas :

Lemme 2.1.48 *On suppose que k est un corps parfait. Soit \mathcal{O} un anneau local noethérien contenant k .*

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. \mathcal{O} est formellement lisse sur k .
2. \mathcal{O} est régulier.

PREUVE : Ce lemme résulte du lemme 19.6.4 de [EGA4] que l'on rappelle ici :

Lemme 2.1.49 *(on ne suppose plus k parfait) Soit \mathcal{O} une k -algèbre locale, dont le corps résiduel κ est une extension séparable de k . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. \mathcal{O}/k est formellement lisse.
2. \mathcal{O}/k est régulier.

indication de PREUVE : pour $2 \Rightarrow 1$: L'hypothèse signifie que κ est formellement lisse sur k . Par ailleurs, dire que \mathcal{O} est régulier signifie que son cône normal en son point fermé est un fibré vectoriel. Il suffit alors d'utiliser la seconde suite exacte fondamentale associée au point fermé de \mathcal{O} pour conclure que les formes différentielles de \mathcal{O}/k ont la bonne dimension.

Corollaire 2.1.50 *Si k est parfait, la catégorie $\mathcal{A}_{S(1)}$ est la catégorie des anneaux de valuation discrète contenant k qui sont des k -algèbres essentiellement de type fini.*

Remarque 2.1.51.— Si k n'est pas parfait, ce lemme et son corollaire ne sont plus vrais. Considérons en effet un corps k non parfait de caractéristique p , L/k l'extension finie de

k engendrée par une racine p -ième, et posons $\mathcal{O} = L[t]_{(t)}$. Alors, \mathcal{O} est un anneau de valuation discrète qui est essentiellement de type fini sur k . Mais son corps des fractions n'est pas une extension séparable de k , donc \mathcal{O} ne peut pas être formellement lisse sur k .

Remarque 2.1.52.– Nous aurions aimé obtenir le résultat suivant :

Pour un anneau de valuation discrète \mathcal{O}_v contenant k , le fait que \mathcal{O}_v/k soit essentiellement de type fini – *i.e.* une localisation d'une k -algèbre de type fini – est équivalent au fait que le corps des fractions de \mathcal{O}_v soit une extension de type fini sur k .

2.2 Transferts

Dans toute cette partie, S désigne un k -schéma régulier noethérien.

On s'appuie sur le paragraphe 3.1 de [FSV00b]. On étend les résultats de *loc.cit.* au cas où la base S n'est plus nécessairement un corps, mais un schéma d'égale caractéristique. Une telle généralisation ne pose pas de difficulté majeure, et le lecteur constatera que nous avons pour l'essentiel transposé les démonstrations de *loc.cit.* au cas de la base S .

2.2.1 Préfaisceaux avec transferts

On rappelle que les préfaisceaux considérés sont toujours des préfaisceaux de groupes abéliens.

Définition 2.2.1 Soit $i : \mathcal{L}_S \rightarrow \mathcal{L}_{\text{cor},S}$ le foncteur d'inclusion.

On appelle préfaisceau avec transferts sur S tout préfaisceau \tilde{F} additif sur $\mathcal{L}_{\text{cor},S}$.

On note $\mathcal{P}_S^{\text{tr}}$ la catégorie des préfaisceaux avec transferts sur S , sous-catégorie pleine de \mathcal{P}_S .

Tout préfaisceau avec transferts \tilde{F} induit canoniquement un préfaisceau sur \mathcal{L}_S , $F = \tilde{F} \circ i$. Dans la suite de l'exposé, on confondra F et \tilde{F} , et on dira encore que F est muni d'une structure de préfaisceau avec transferts (ou encore admet des transferts).

Exemple 2.2.2.– Soit X un schéma de \mathcal{L}_S , on note $L_S[X]$ le préfaisceau avec transfert représenté par X dans $\mathcal{L}_{\text{cor},k}$, soit encore $c_S(\cdot, X)$. En effet,

$$c_S(Y \sqcup Y', X) = c_S(Y, X) \oplus c_S(Y', X).$$

2.2.3.– Si F est un préfaisceau avec transfert, le lemme de Yoneda appliqué dans la catégorie $\mathcal{L}_{\text{cor},S}$ implique que pour tout S -schéma lisse X

$$F(X) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_S^{\text{tr}}}(L_S[X], F).$$

Par ailleurs, nous allons voir que le préfaisceau avec transfert $L_S[X]$ définit un préfaisceau sur \mathcal{L}_k qui est un faisceau pour la topologie de Nisnevich.

2.2.2 Faisceaux avec transferts

2.2.2.1 Exemples et définitions

On a déjà montré que le foncteur $L_S[X]$ est additif ; en fait, sa restriction à \mathcal{L}_S est même un faisceau :

Lemme 2.2.4 *Soit Y un schéma dans \mathcal{L}_S ; alors, $L_S[Y]$ considéré comme un préfaisceau sur \mathcal{L}_S est un faisceau étale.*

PREUVE : Pour montrer que $L_S[Y]$ est un faisceau sur \mathcal{L}_S , comme tous les objets de \mathcal{L}_S sont noethériens, il suffit de considérer les recouvrements étales finis.

Soit donc X un schéma dans \mathcal{L}_S , et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement étale fini de X . Par additivité de $L_S[Y]$, on peut supposer que X est irréductible.

On pose $U = \sqcup_{i \in I} U_i$ qui est un schéma dans \mathcal{L}_S , et on note $f : U \rightarrow X$ le morphisme étale surjectif correspondant au recouvrement. On considère aussi p_1 et p_2 les deux projections canoniques $U \times_X U \rightarrow U$. Puisque $L_S[Y]$ est additif, on doit montrer que la suite de groupes abéliens

$$0 \rightarrow c_S(X, Y) \xrightarrow{\delta(f)} c_S(U, Y) \xrightarrow{\delta(p_1) - \delta(p_2)} c_S(U \times_X U, Y)$$

est exacte, où $\delta(f)$ (resp. $\delta(p_i)$) est le morphisme qui à une correspondance finie α dans $c_S(X, Y)$ (resp. β dans $c_S(U, Y)$) associe la correspondance finie $\alpha \circ f$ (resp. $\beta \circ p_i$).

Or, puisque f (resp. p_i) est plat, si l'on note $g : UY \rightarrow XY$ (resp. $q_i : (U \times_Y U) \times_S Y \rightarrow U \times_S Y$) le morphisme induit par f (resp. p_i), il en résulte que $\alpha \circ f = g^*(\alpha)$ (resp. $\beta \circ p_i = q_i^*(\beta)$), d'après 1.2.5.

Considérons z un point de XY . On note Z le sous-schéma fermé réduit de XY d'espace sous-jacent l'adhérence de $\{z\}$ dans XY . On suppose que la projection de Z sur X est finie équidimensionnelle. Notons alors $[z]$ la correspondance finie dans $c_S(X, Y)$ correspondant à z . Le schéma $g^{-1}(Z)$ est alors étale sur Z . Il est donc réduit, et ses points génériques sont les éléments de la fibre (vu comme ensemble) $g^{-1}(z)$. La multiplicité de chaque composante irréductible de $g^{-1}(Z)$ est donc égale à 1, et il s'ensuit que

$$[z] \circ f = g^*([z]) = \sum_{w \in g^{-1}(z)} [w]$$

où $[w]$ est la correspondance finie dans $c_S(U, Y)$ correspondant à w .

Le même calcul est valable lorsqu'on remplace f et g par p_i et q_i .

On en déduit tout d'abord que $\delta(f)$ est injective. Plus précisément, le morphisme g^* est injectif, car g est fidèlement plat. En effet, si il existe une combinaison linéaire nulle $\sum_{i=1}^r n_i \cdot g^*(Z_i)$ où $(Z_i)_i$ est une suite de fermés irréductibles distincts de XY , et $n_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$. On a donc $n_1 \cdot g^*Z_1 = \sum_{i=2}^r n_i \cdot g^*(Z_i)$; ces deux cycles ont donc en particulier même support, soit $g^{-1}(Z_1) = g^{-1}(Z_2 \cup \dots \cup Z_r)$, ce qui est absurde puisque g est surjectif.

Par ailleurs, la première flèche est surjective sur le noyau des deux autres.

Soit donc $\alpha \in c_S(U, Y)$ tel que $q_1^*(\alpha) - q_2^*(\alpha) = 0$. Il existe un entier naturel n , des entiers relatifs non nuls $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et des points z_1, \dots, z_n de UY dont l'adhérence dans UY est finie surjective sur U et tels que

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z_i.$$

Alors, d'après le calcul précédent,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \sum_{x \in p_1^{-1}(z_i)} x = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \sum_{y \in p_2^{-1}(z_j)} y.$$

Considérons alors I l'ensemble $\{f(z_1), \dots, f(z_n)\}$, qui est inclus dans l'ensemble sous-jacent à XY .

Alors, $\{z_1, \dots, z_n\} = f^{-1}(I)$. En effet, pour tout w dans I , il existe par définition un entier i tel que $w = f(z_i)$. Soit z un élément quelconque de $f^{-1}(w)$. Alors, l'élément $x = (z_i, z)$ de l'ensemble sous-jacent à $(UY) \times_X (UY)$ vérifie $q_1(x) = z_i$. Donc, d'après l'égalité ci-dessus, il existe un entier j tel que x appartient à $q_2^{-1}(z_j)$, ce qui équivaut à $z_j = z$, et démontre l'égalité attendue.

Par ailleurs, si w appartient à I , et z_i, z_j sont tels que $f(z_i) = w = f(z_j)$, alors, $\lambda_i = \lambda_j$. En effet, si l'on pose $x = (z_i, z_j)$, vu comme élément de l'ensemble sous-jacent à $(UY) \times_X (UY)$, puisque $x \in q_1^{-1}(z_i)$ et $x \in q_2^{-1}(z_j)$, l'égalité ci-dessus montre que $\lambda_i = \lambda_j$.

On note donc, pour tout w dans I , $\lambda(w)$ l'entier égal à λ_i pour un indice i tel que $w = f(z_i)$.

Ainsi, si l'on définit $\beta = \sum_{w \in I} \lambda(w) \cdot w$, par définition, $g^*(\beta) = \alpha$.

Il nous reste à voir que β est une correspondance finie dans $c_S(X, Y)$. Soit w un élément de I , et W son adhérence, munie de sa structure réduite de sous-schéma de XY . Alors, par définition, en tant que sous-schéma fermé de UY ,

$$g^{-1}(W) = \bigcup_{i \in [1, n] | f(z_i) = w} Z_i$$

où Z_i désigne l'adhérence réduite de $\{z_i\}$ dans UY . Ainsi, puisque chacun des Z_i est fini équidimensionnel, $g^{-1}(W)$ est fini équidimensionnel. Or, le morphisme $g : UY \rightarrow XY$ est fidèlement plat, car étale et surjectif, et quasi-compact puisqu'il est de type fini. Dès lors, d'après [EGA4], W est fini (prop. 2.7.1) et universellement ouvert (prop. 2.6.4) sur X . Comme X est géométriquement unibranche, cette condition équivaut à celle d'être fini équidimensionnel, ce qui achève notre démonstration. \square

Le faisceau $L_S[X]$ est donc en particulier un faisceau pour la topologie de Nisnevich qui nous intéresse ici. C'est encore l'«objet libre» engendré par X dans la catégorie suivante :

Définition 2.2.5 Soit F un préfaisceau avec transferts sur S . On dira que c'est un faisceau (pour la topologie de Nisnevich) avec transferts si et seulement si la restriction de F à \mathcal{L}_S est un faisceau pour la topologie de Nisnevich.

On note $\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$ la sous-catégorie de $\mathcal{P}_S^{\text{tr}}$ formée des faisceaux avec transferts.

Ainsi, le lemme précédent affirme que pour tout schéma X dans \mathcal{L}_S , $L_S[X]$ est un faisceau avec transferts.

2.2.2.2 Foncteur faisceau avec transferts associé

Le but de ce qui suit est de démontrer que le foncteur d'oubli $\mathcal{N}_S^{\text{tr}} \hookrightarrow \mathcal{P}_S^{\text{tr}}$ admet un adjoint à gauche (dit «faisceau avec transferts associé») qui prolonge le foncteur faisceau Nisnevich associé sur $\widehat{\mathcal{L}}_S$ (cf corollaire 2.2.9).

La remarque clef pour y parvenir, faite par V. Voevodsky dans [FSV00b], prop. 3.1.3, est que le foncteur $L_S[\cdot]$ transforme le complexe de Čech d'un recouvrement Nisnevich de X en une résolution acyclique de $L_S[X]$.

Commençons par fixer des notations. Si U est un X -schéma, et n un entier relatif, on note U_X^n la puissance n -ième de U en tant que X -schéma.

Fixons un X -schéma U . Pour tout couple d'entiers (n, i) tels que $0 \leq i \leq n$ on note $\delta^{n,i}$ le morphisme (qualifié de dégénérescence)

$$U_X^n \rightarrow U_X^{n-1}$$

qui consiste en la projection sur chaque facteur sauf le i -ème.

Lorsque U/X est un recouvrement Nisnevich, on pose classiquement

$$d^{n-1} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \delta^{n,i}$$

ce qui permet d'obtenir le complexe de Čech *augmenté* associé au recouvrement U de X

$$\dots \longrightarrow U_X^n \xrightarrow{d^n} \dots \longrightarrow U_X^2 \xrightarrow{d^1} U \xrightarrow{d^0} X.$$

On peut alors énoncer la proposition suivante qui est directement tirée de *loc.cit.*, prop. 3.1.3 dans le cas où S est le spectre d'un corps :

Proposition 2.2.6 *Soit X un schéma dans \mathcal{L}_S , et $p : U \rightarrow X$ un recouvrement Nisnevich de X .*

Alors, le complexe de $\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$

$$\dots \rightarrow L_S[U_X^n] \xrightarrow{d^n} \dots \rightarrow L_S[U_X^2] \xrightarrow{d^1} L_S[U] \xrightarrow{d^0} L_S[X] \rightarrow 0$$

est exact.

Remarque 2.2.7.– Autrement dit, le complexe

$$\dots \rightarrow L_S[U_X^2] \xrightarrow{d^1} L_S[U]$$

est une résolution acyclique de $L_S[X]$.

PREUVE : La démonstration reprend exactement la démarche de *loc.cit.*

Pour démontrer que le complexe est exact, il suffit de le faire sur une famille conservative de points. On considère donc Y un schéma algébrique lisse, et y un point quelconque de Y .

Si l'on pose $\mathcal{Y} = \text{Spec} \left(O_{Y,y}^h \right)$, d'après la proposition 1.2.21, le morphisme canonique suivant

$$c_S \left(Y_y^h, X \right) \rightarrow c_S \left(\mathcal{Y}, X \right)$$

est un isomorphisme, où Y_y^h désigne le pro-objet de 2.1.16 et le groupe abélien de droite désigne le groupe des cycles de $\mathcal{Y} \times_S X$ dont chaque composante est finie et équidimensionnelle sur \mathcal{Y} .

On est donc ramené à montrer que le complexe de groupes abéliens

$$C^* = \dots \rightarrow c_S \left(\mathcal{Y}, U_X^n \right) \rightarrow \dots \rightarrow c_S \left(\mathcal{Y}, U \right) \rightarrow c_S \left(\mathcal{Y}, X \right) \rightarrow 0$$

est exact.

Soit \mathcal{F} l'ensemble, ordonné par inclusion, des sous-schémas fermés de $\mathcal{Y}X$ qui sont finis et équidimensionnels sur \mathcal{Y} . Soit Z un élément de \mathcal{F} . Pour tout entier naturel n , on pose

$$C_Z^n = c_{\text{equi}} \left((Z_U)_Z^n / \mathcal{Y}, 0 \right) \subset c_{\text{equi}} \left(\mathcal{Y}U_X^n / \mathcal{Y}, 0 \right).$$

Ainsi définis, le complexe C_Z^* est un sous-complexe de C^* . De plus, le complexe C_Z^* est croissant par rapport à Z , et

$$C^* = \varinjlim_{Z \in \mathcal{F}} C_Z^*.$$

Donc, pour montrer que C^* est exact, il suffit de le faire pour chacun des complexes C_Z^* .

On fixe donc Z un élément de \mathcal{F} et on montre que le complexe C_Z^* est contractile. Si l'on note $\delta^{n,i}$ les morphismes de dégénérescence pour le Z -schéma Z_U , la différentielle n -ième du complexe C_Z^* est égale au morphisme image directe pour les cycles relatifs (cf 1.1.18) :

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot (\delta^{n,i})_*.$$

Or, Z est fini sur \mathcal{Y} . Comme \mathcal{Y} est hensélien, Z est somme disjointe de schémas locaux henséliens. Ainsi, d'après le lemme 2.1.25, le recouvrement Nisnevich $p_Z : Z_U \rightarrow Z$ admet une section $s_1 : Z \rightarrow Z_U$. Comme $d^0 = p_Z$, on en déduit donc $d^0 \circ s_0 = 1_Z$.

On peut alors poser, pour $n > 0$,

$$s_n = s_0 \times_Z 1 : Z \times_Z (Z_U)_Z^n \rightarrow Z_U \times_Z (Z_U)_Z^n.$$

Dès lors, ces morphismes vérifient les relations, pour tout couple d'entiers (n, i) tel que $0 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} s_n \circ \delta^{n+1,0} &= 0 \\ s_n \circ \delta^{n+1,i+1} &= \delta^{n,i} \circ s_{n-1}. \end{aligned}$$

Il en résulte que la suite des morphismes images directes $\left((s_n)_* \right)_{n \geq 0}$ forment une homotopie entre le morphisme identité et le morphisme nul de C_Z^* . \square

Dès lors, le lemme suivant est directement tiré du lemme analogue 3.1.6 de V. Voevodsky dans *loc.cit.* :

Lemme 2.2.8 Soit F un préfaisceau avec transferts, F_{Nis} le faisceau sur \mathcal{L}_S pour la topologie de Nisnevich qui lui est associé, et $\eta : F \rightarrow F_{\text{Nis}}$ le morphisme canonique de préfaisceaux sur \mathcal{L}_S .

Alors il existe un unique préfaisceau avec transferts $\widetilde{F}_{\text{Nis}}$ tel que

1. Il existe une transformation naturelle $F \rightarrow \widetilde{F}_{\text{Nis}}$, entre préfaisceaux avec transferts, qui prolonge η .
2. $\widetilde{F}_{\text{Nis}} \circ i = F_{\text{Nis}}$.

PREUVE : Notons \check{H}^0 le foncteur cohomologie de Čech en degré 0 pour la topologie de Nisnevich. Alors, $F_{\text{Nis}} \simeq \check{H}^0 \check{H}^0(F)$. On se réduit donc à montrer le lemme lorsqu'on remplace le foncteur $(\cdot)_{\text{Nis}}$ par le foncteur \check{H}^0 .

Comme F est un préfaisceau avec transfert, on a donc une inclusion canonique

$$F(X) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_S^{\text{tr}}}(\mathbb{L}_S[X], F) \subset \text{Hom}_{\mathcal{P}_S}(\mathbb{L}_S[X], F)$$

Réciproquement, une transformation naturelle (entre préfaisceaux sur \mathcal{L}_S) de la forme

$$F \xrightarrow{\phi} \text{Hom}_{\mathcal{P}_S}(\mathbb{L}_S[\cdot], F)$$

est équivalente à la donnée d'une structure de préfaisceau avec transferts, pourvue qu'elle respecte le produit de composition (auquel cas, cette application est injective, et c'est la transformation naturelle donnée plus haut grâce au lemme de Yoneda), grâce à la tautologie

$$\forall \alpha \in c_S(Y, X), a \in F(X), F(\alpha).a = \phi_X(a)_Y.\alpha \quad (2.1)$$

C'est sur ce type de transformations naturelles que nous allons travailler.

1) Tout d'abord, supposons défini $\widetilde{\check{H}^0 F}$.

Soient $\alpha \in c_S(Y, X)$ une correspondance, et $a \in F_{\text{Nis}}(X)$. On a par définition :

$$\check{H}^0 F(X) = \varinjlim_{U \rightarrow X} \text{Ker}(F(U) \rightarrow F(U \times_X U)).$$

Donc, cette limite inductive étant filtrante, il existe un recouvrement $U \xrightarrow{p} X$ tel que a est la classe d'un élément $a_U \in F(U)$.

De plus, d'après le lemme 2.2.6, $\mathbb{L}_S[U] \rightarrow \mathbb{L}_S[X]$ est un épimorphisme, donc il existe un recouvrement V de Y et une correspondance $\alpha_U \in c_S(V, U)$ tels que $p \circ \alpha_U = \alpha|_V$.

On obtient le diagramme commutatif suivant (le carré du bas étant commutatif d'après la condition 1 de l'énoncé)

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^0 F(X) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{P}_S}(\mathbb{L}_S[X], \check{H}^0 F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \check{H}^0 F(U) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{P}_S}(\mathbb{L}_S[U], \check{H}^0 F) \\ \eta \uparrow & & \uparrow \\ F(U) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{P}_S}(\mathbb{L}_S[U], F). \end{array}$$

Ce qu'on traduit par une équation locale caractérisant $\widetilde{H^0 F}$

$$\widetilde{H^0 F}(\alpha|_V).a = \eta_Y(F(\alpha_U).a_U) \in F(V).$$

2) Réciproquement, il s'agit de voir que l'égalité précédente définit $\widetilde{H^0 F}$, de façon indépendante du recouvrement U choisi.

Soit $U \rightarrow X$ un recouvrement de X pour Nisnevich. D'après le lemme 2.2.6, le foncteur $H = \text{Hom}_{\mathcal{P}_S}(\cdot, F_{\text{Nis}})$ étant exact à gauche, le diagramme suivant est exact

$$0 \rightarrow H(\mathbb{L}_S[X]) \rightarrow H(\mathbb{L}_S[U]) \rightarrow H(\mathbb{L}_S[U \times_X U]).$$

Comme précédemment, considérons la flèche

$$F(X) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}_S}(\mathbb{L}_S[X], F) \xrightarrow{\eta_X} \text{Hom}_{\mathcal{P}_S}(\mathbb{L}_S[X], \check{H}^0 F)$$

On en déduit le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H(\mathbb{L}_S[X]) & \longrightarrow & H(\mathbb{L}_S[U]) & \longrightarrow & H(\mathbb{L}_S[U] \times_X U) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker}_U & \longrightarrow & F(U) & \longrightarrow & F(U \times_X U) \end{array}$$

Ce diagramme est naturel par rapport au recouvrement U de X , ainsi on a construit une transformation naturelle en X :

$$\phi_X^{\text{Nis}} : \check{H}^0 F(X) \simeq \varinjlim_{U \rightarrow X} (\text{Ker}_U) \longrightarrow H(\mathbb{L}_S[X]) = \text{Hom}_{\mathcal{P}_S}(\mathbb{L}_S[X], \check{H}^0 F)$$

Si $\alpha \in \mathcal{C}_S(Y, X)$ est une correspondance finie, on définit donc d'après 2.1

$$\widetilde{H^0 F}(\alpha) : F(X) \rightarrow F(Y), \quad a \mapsto \phi_X^{\text{Nis}}(a)_Y.\alpha$$

Par construction, pour $a \in \check{H}^0 F(X)$, et $\alpha \in \mathcal{C}_S(Y, X)$, considérant comme dans le 1) un recouvrement $U \xrightarrow{p} X$, un recouvrement V de Y et des relèvements $a_U \in F(U)$, $\alpha_U \in \mathcal{C}_S(V, U)$, on a par construction le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}_S}(\mathbb{L}_S[X], \check{H}^0 F) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{P}_S}(\mathbb{L}_S[U], \check{H}^0 F) \\ & \uparrow & \uparrow \\ & \check{H}^0 F(X) & \leftarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}_S}(\mathbb{L}_S[U], F) \\ & \uparrow & \uparrow \\ 0 \longrightarrow \text{Ker}_U & \longrightarrow & F(U) \end{array}$$

Ce qui implique la structure locale attendue

$$\widetilde{H^0 F}(\alpha|_V).a = \eta_Y(F(\alpha_U).a_U)$$

On déduit facilement de cette équation locale le fait que ϕ^{Nis} est compatible au produit des correspondances. Par construction, ϕ^{Nis} prolonge bien ϕ , ce qui donne la condition 1. \square

La construction précédente nous garantit que $F_{\text{Nis}} \rightarrow \widetilde{F}_{\text{Nis}}$ est bien une transformation naturelle, d'où

Corollaire 2.2.9 *Le foncteur a_{tr} qui à un préfaisceau avec transferts F associe le faisceau avec transferts $\widetilde{F}_{\text{Nis}}$ (construit précédemment) est adjoint à gauche du foncteur d'oubli $\mathcal{N}_S^{\text{tr}} \hookrightarrow \mathcal{P}_S^{\text{tr}}$. De plus, le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_S^{\text{tr}} & \xrightarrow{a_{tr}} & \mathcal{N}_S^{\text{tr}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{P}_S & \xrightarrow{a_{\text{Nis}}} & \mathcal{N}_S \end{array}$$

dans lequel a_{Nis} est le foncteur faisceau associé pour la topologie de Nisnevich.

2.2.2.3 La catégorie abélienne des faisceaux avec transferts

Dans la catégorie des préfaisceaux avec transferts toutes les limites inductives (resp. projectives) sont représentables, car une limite inductive (resp. projective) de préfaisceaux additifs est un préfaisceau additif.

Le foncteur a_{tr} nous permet de conclure :

Proposition 2.2.10 *La catégorie $\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$ est complète et cocomplète (cf définition C.1.1).*

Elle est donc abélienne, et même de Grothendieck (cf définition C.1.4).

PREUVE : En effet, il résulte du corollaire précédent que le foncteur a_{tr} est exact. Dès lors, puisque $\mathcal{P}_S^{\text{tr}}$ est complète, cocomplète, abélienne et de Grothendieck, il en est de même de la catégorie $\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$ d'après les lemmes C.1.3 et C.1.7. \square

On en déduit encore la construction suivante :

Lemme 2.2.11 *Le foncteur d'oubli $\mathcal{N}_S^{\text{tr}} \rightarrow \mathcal{N}_S$ admet un adjoint à gauche, noté $L_S[\cdot]$.*

PREUVE : Soit F un faisceau Nisnevich. Alors, il est limite inductive

$$F = \varinjlim_{X/F \in \mathcal{L}_S/F} \mathbb{Z}_S(X).$$

On rappelle que $\mathbb{Z}_S(X)$ désigne le faisceau abélien représenté par X .

On pose $L_S[F] = \varinjlim_{X/F \in \mathcal{L}_S/F} L_S[X]$, où cette dernière limite est calculée dans la catégorie des faisceaux avec transferts.

Il suffit alors d'appliquer le lemme de Yoneda $\text{Hom}_{\mathcal{N}_S^{\text{tr}}}(L_S[X], F) = F(X) = \text{Hom}_{\mathcal{N}_S}(\mathbb{Z}_S(X), F)$ pour conclure sur l'assertion d'adjonction. \square

Remarque 2.2.12.– On fera attention que le foncteur $L : \mathcal{N}_S \rightarrow \mathcal{N}_S^{\text{tr}}$ n'est pas exact à gauche.

Pour la proposition suivante, si X est un schéma dans \mathcal{L}_S , on note

$$\eta_X : \mathbb{Z}_S(X) \rightarrow \mathcal{O}_{tr} L_S[X]$$

le morphisme de faisceaux Nisnevich induit par l'application graphe, où \mathcal{O}_{tr} désigne le foncteur d'oubli évident.

Utilisant la description des groupes d'Ext en terme d'extensions, on en déduit une application canonique, naturelle par rapport à F

$$\eta_X^* : \text{Ext}_{\mathcal{N}_S^{\text{tr}}}^i(\mathbb{L}_S[X], F) \xrightarrow{\eta_X^*} \text{Ext}_{\mathcal{N}_S}^i(\mathbb{Z}_S(X), \mathcal{O}_{\text{tr}}F) = H^i(X; \mathcal{O}_{\text{tr}}F).$$

Proposition 2.2.13 *Pour tout faisceau F dans $\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$, pour tout schéma X dans \mathcal{L}_S et pour tout entier $i \geq 0$, l'application η_X^* ci-dessus est un isomorphisme.*

PREUVE : D'après le lemme de Yoneda, cette propriété est vraie si l'on fixe $i = 0$. On se ramène donc à la montrer pour $i > 0$.

Soit F un faisceau avec transferts sur S , $I \rightarrow F$ une résolution injective de F dans $\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$, et C son conoyau dans $\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$. La suite exacte longue d'Ext associée à la suite exacte courte

$$0 \rightarrow I \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow 0$$

montre que la propriété à démontrée pour F et $i > 0$ est équivalente à la propriété suivante : pour tout schéma X dans \mathcal{L}_S , pour tout entier $i > 0$, le groupe $H^i(X; I) = \text{Ext}_{\mathcal{N}_S}^i(\mathbb{Z}_S(X), I)$ est nul.

Or, d'après [Mil80], prop. III.2.11, cette propriété est encore équivalente au fait que pour tout schéma X dans \mathcal{L}_S , la cohomologie de Čech de X à coefficient dans I est nulle. La proposition 2.2.6 implique alors immédiatement le résultat. \square

Corollaire 2.2.14 *Soit F un préfaisceau avec transferts. Alors, pour tout entier naturel i , le préfaisceau $H_{\text{Nis}}^i(\cdot, F_{\text{Nis}})$ est canoniquement muni d'une structure de préfaisceau avec transferts.*

2.2.2.4 Structure monoïdale

On rappelle que l'on a construit une structure monoïdale sur la catégorie $\mathcal{L}_{\text{cor}, S}$ (cf 1.2.13). On peut prolonger cette structure à la catégorie des faisceaux avec transferts :

Proposition 2.2.15 *La catégorie $\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$ admet une structure monoïdale symétrique telle que le foncteur $\mathcal{L}_{\text{cor}, S} \rightarrow \mathcal{N}_S^{\text{tr}}$ est monoïdal.*

PREUVE : Puisque $\mathcal{L}_{\text{cor}, S}$ est monoïdale, on en déduit une structure monoïdale sur la catégorie des préfaisceaux avec transferts représentables, autrement dit, des faisceaux avec transferts représentables. Pour cette structure, on a donc d'après la proposition 1.2.13, $\mathbb{L}_S[X] \otimes^{\text{tr}} \mathbb{L}_S[Y] = \mathbb{L}_S[X \times_k Y]$.

Soient F et G deux faisceaux avec transferts. D'après l'existence du faisceau associé avec transferts, $F = \varinjlim_{X/F \in \mathcal{L}_S/F} \mathbb{L}_S[X]$ et $G = \varinjlim_{Y/F \in \mathcal{L}_S/G} \mathbb{L}_S[Y]$. On pose donc

$$F \otimes^{\text{tr}} G = \varinjlim_{X/F, Y/G} (\mathbb{L}_S[X] \otimes^{\text{tr}} \mathbb{L}_S[Y])$$

puisque \otimes^{tr} est un bi-foncteur sur la catégorie des faisceaux représentables. \square

Définition 2.2.16 On note \otimes^{tr} le produit tensoriel sur \mathcal{N}_S^{tr} défini dans la preuve de la proposition précédente.

Remarque 2.2.17.– Par définition, le foncteur \otimes^{tr} est exact à droite.

On en déduit un ensemble de générateurs pour $F \otimes^{tr} G(X)$. En effet, pour tout Y dans \mathcal{L}_S , on a un épimorphisme de faisceaux avec transferts

$$\begin{aligned} \bigoplus_{X \in \mathcal{L}_S} F(X) \otimes_{\mathbb{Z}} L_S[X] &\rightarrow F \\ \bigoplus_{X \in \mathcal{L}_S} F(X) \otimes_{\mathbb{Z}} c_S(Y, X) &\rightarrow F(Y) \\ \rho \otimes \alpha &\mapsto \alpha^*(\rho). \end{aligned}$$

Dès lors, puisque \otimes^{tr} est exact à droite, on en déduit un épimorphisme de faisceaux avec transferts

$$\begin{aligned} \bigoplus_{X, X' \in \mathcal{L}_S} (F(X) \otimes_{\mathbb{Z}} L_S[X]) \otimes^{tr} (G(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} L_S[X']) &\rightarrow F \otimes^{tr} G \\ \bigoplus_{X, X' \in \mathcal{L}_S} F(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G(X') \otimes_{\mathbb{Z}} c_S(Y, X \times X') &\rightarrow (F \otimes^{tr} G)(Y) \\ \rho \otimes \mu \otimes \alpha &\mapsto \alpha^*(\rho) \otimes^{tr} \alpha^*(\mu). \end{aligned}$$

Proposition 2.2.18 La catégorie monoïdale \mathcal{N}_S^{tr} est fermée. Autrement dit, le bifoncteur \otimes^{tr} admet un adjoint à droite noté $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{N}_S^{tr}}(\cdot, \cdot)$.

PREUVE : Si F et G sont des faisceaux avec transferts, on pose

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{N}_S^{tr}}(F, G)(X) = \text{Hom}_{\mathcal{N}_S^{tr}}(F \otimes^{tr} L_S[X], G).$$

Dès lors, par définition du produit \otimes^{tr} et en utilisant le fait qu'un faisceau avec transferts est limite inductive de faisceaux avec transferts représentables, ce bifoncteur est bien adjoint à droite du foncteur \otimes^{tr} . \square

Remarque 2.2.19.– Il y a dans notre choix une convention puisqu'on aurait pu prendre

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{N}_S^{tr}}(F, G)(X) = \text{Hom}_{\mathcal{N}_S^{tr}}(L[X] \otimes^{tr} F, G).$$

La catégorie \mathcal{N}_S^{tr} est symétrique, donc cette convention peut sembler anodine. Toutefois, cette convention correspondra par la suite à une convention de signe. La convention choisie correspond à celle faite par V. Voevodsky dans [FSV00b], mais par contre, c'est la convention inverse de celle de Mac Lane dans [ML98] chapitre VII.7.

2.2.20. – Cup-produit Comme en topologie, on peut déduire de ce produit tensoriel un cup-produit externe.

Définition 2.2.21 Soient F et G des faisceaux avec transferts, $\rho \in F(X)$ et $\mu \in G(X)$ des sections sur un schéma X dans \mathcal{L}_S .

D'après le lemme de Yoneda, ρ (respectivement μ) correspond à une transformation naturelle $L_S[X] \rightarrow F$ (respectivement $L_S[X] \rightarrow G$) que l'on note par la même lettre. On pose donc

$$\rho \smile \mu = (\rho \otimes^{tr} \mu) \circ L[\Delta_X]$$

où $\Delta_{X/S} : X \rightarrow X \times_S X$ est l'application diagonale. On a ainsi défini un morphisme $F(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G(X) \xrightarrow{\smile_X} (F \otimes^{tr} G)(X)$.

Ainsi définie, \smile est une transformation naturelle de préfaisceaux. En effet, soit $f : Y \rightarrow X$, alors

$$(f^* \rho) \smile_Y (f^* \mu) = f^*(\rho \smile_X \mu)$$

car

$$\begin{aligned} & ((\rho \circ L[f]) \otimes^{tr} (\mu \circ L[f])) \circ L[\Delta_Y] \\ &= (\rho \otimes^{tr} \mu) \circ (L[f] \otimes^{tr} L[f]) \circ L[\Delta_Y] \end{aligned}$$

et l'on conclut puisque $f \times_S f \circ \Delta_Y = \Delta_X \circ f$.

Remarque 2.2.22.– On notera encore \smile l'unique transformation naturelle $F \otimes_{\mathbb{Z}} G \xrightarrow{\sim} F \otimes^{tr} G$ entre faisceaux induite par l'application précédente.

2.2.23.– Si X, Y et U sont des schémas dans \mathcal{L}_S , on a donc défini ci-dessus, dans le cas particulier où $F = L_S[X]$ et $G = L_S[Y]$, un cup-produit de cycles :

$$\begin{aligned} c_S(U, X) \otimes_{\mathbb{Z}} c_S(U, Y) &\rightarrow c_S(U, X \times_S Y) \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto \alpha \smile \beta \end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre que $\alpha \smile \beta = (\alpha \otimes \beta) \circ \Delta_{U/S}$.

On calcule même plus explicitement cette dernière correspondance puisque

$$\alpha \smile \beta = (1_S \times_S p_X)^*(\alpha) \cdot (1_S \times_S p_Y)^*(\beta).$$

2.2.2.5 Changement de base

Soit $\tau : T \rightarrow S$ un k -morphisme entre k -schémas réguliers noethériens.

On rappelle qu'on a un foncteur de changement de base, noté $\tau^* : \mathcal{L}_{\text{cor}, S} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{cor}, T}$.

Définition 2.2.24 On définit le foncteur image directe de préfaisceau avec transferts par la formule

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_* : \mathcal{P}_T^{\text{tr}} &\rightarrow \mathcal{P}_S^{\text{tr}} \\ F &\mapsto F \circ \hat{\tau}^*. \end{aligned}$$

Ce foncteur coïncide avec le foncteur de changement de base sur les préfaisceaux sous-jacents et laisse donc stables les catégories de faisceaux avec transferts correspondantes. On note τ_* sa restriction aux faisceaux avec transferts.

Lemme 2.2.25 *Le foncteur $\hat{\tau}_*$ (respectivement τ_*) admet un adjoint à gauche $\hat{\tau}^*$ (respectivement τ^*) qui prolonge le foncteur classique sur les préfaisceaux (resp. faisceaux) sans transferts.*

PREUVE : Soit F un préfaisceau avec transferts sur S . On a toujours

$$F = \varinjlim_{X/F \in \mathcal{L}_{\text{cor}, S}/F} L_S[X].$$

On pose donc

$$\hat{\tau}^*(F) = \left(\varinjlim_{X/F \in \mathcal{L}_{\text{cor}, S}/F} L_T[X \times_S T] \right)$$

qui définit bien un préfaisceau avec transfert. Utilisant le lemme de Yoneda, ce foncteur est bien adjoint à gauche de $\hat{\tau}_*$.

Si F est un faisceau avec transferts, on pose enfin

$$\tau^*(F) = a_{tr,T}(\hat{\tau}^*(F))$$

□

Prenons par exemple le cas où T est un schéma essentiellement lisse sur S .

En particulier, si X est un schéma dans \mathcal{L}_T ,

$$X = \varprojlim_{X/X'/S} X'$$

où la limite parcourt la catégorie des triplets (X', f) où X' est un schéma dans \mathcal{L}_S , et $f : X \rightarrow X'$ est un S -morphisme.

On en déduit alors le calcul suivant du changement de base pour les préfaisceaux avec transferts :

Lemme 2.2.26 *Soit X un schéma dans \mathcal{L}_T , F un faisceau avec transferts sur S . Alors,*

$$\hat{\tau}^*(F)(X) = \varprojlim_{X/X'/S} F(X').$$

PREUVE : Par définition,

$$\hat{\tau}^*F(X) = \varprojlim_{U/F} c_T(X, U \times_S T).$$

Le morphisme structural $X \rightarrow S$ n'est pas de type fini. Mais on peut considérer l'extension des correspondances finies décrites avant la proposition 1.2.21, et on obtient l'identification suivante

$$c_T(X, U \times_S T) \simeq c_S(X, U).$$

Par ailleurs, appliquant la proposition 1.2.21, on obtient

$$c_S(X, U) = c_S\left(\varprojlim_{X/X'/S} X', U\right) = \varprojlim_{X/X'/S} c_S(X', U).$$

Dès lors, on termine facilement le calcul :

$$\varprojlim_{U/F} \varprojlim_{X/X'/S} c_S(X', U) = \varprojlim_{X/X'/S} \varprojlim_{U/F} c_S(X', U) = \varprojlim_{X/X'/S} F(X').$$

□

Chapter 3

Faisceaux homotopiques (avec transferts)

On fixe un k -schéma régulier noethérien S de dimension de Krull finie.

On prendra garde toutefois que, bien que toutes les définitions soient valables pour S quelconque, les propositions importantes de ce chapitre nécessitent l'hypothèse que S est le spectre d'un corps.

3.1 Définition

3.1.1 Invariance par homotopie

Définition 3.1.1 Soit F un préfaisceau sur \mathcal{L}_S . On dit que F est invariant par homotopie si et seulement si pour tout S -schéma X algébrique lisse, le morphisme

$$F(X) \rightarrow F(\mathbb{A}^1 \times X)$$

induit par la projection sur X est un isomorphisme.

Munis de cette définition, on peut définir les faisceaux introduits par V. Voevodsky dans [FSV00b] dont il se sert pour définir les complexes motiviques.

Définition 3.1.2 On note $\mathrm{H}\mathcal{N}_S^{\mathrm{tr}}$ (respectivement $\mathrm{H}\mathcal{P}_S^{\mathrm{tr}}$) la sous-catégorie de $\mathcal{N}_S^{\mathrm{tr}}$ (respectivement $\mathcal{P}_S^{\mathrm{tr}}$) formée des faisceaux (resp. préfaisceaux) invariants par homotopie avec transferts sur S .

Convention 3.1.3.– Dans la suite de cette thèse, on appellera simplement **faisceaux homotopiques** les faisceaux invariants par homotopie avec transferts (*idem* pour les préfaisceaux).

Le lemme suivant utilise quelques trucs élémentaires familiers en topologie algébrique :

Lemme 3.1.4 Soit F un préfaisceau avec transferts. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. F est invariant par homotopie.
2. Pour tout S -schéma X algébrique lisse, si l'on note $s_0 : X \rightarrow \mathbb{A}_X^1$ (resp. $s_1 : X \rightarrow \mathbb{A}_X^1$) la section nulle (resp. unité) de \mathbb{A}_X^1 , $s_0^* = s_1^*$.
3. Le foncteur F se factorise par le foncteur canonique $\mathcal{L}_{\text{cor},S} \rightarrow \pi\mathcal{L}_{\text{cor},S}$.

PREUVE : $1 \Rightarrow 3$: Puisque pour $i = 0$ ou 1 , s_i est une section de la projection $p : \mathbb{A}_X^1 \rightarrow X$, on en déduit que s_i^* est un isomorphisme de réciproque p^* .

Soit donc $\alpha, \beta : X \rightarrow Y$ deux correspondances finies, et $H : X \times \mathbb{A}^1 \rightarrow Y$ une homotopie de α vers β . On en déduit alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F(X) & & \\
 & \swarrow^{s_0^*} & & \nwarrow_{\beta^*} & \\
 F(X \times \mathbb{A}^1) & \longleftarrow & H^* & \longrightarrow & F(Y) \\
 & \swarrow_{s_1^*} & & \nwarrow_{\alpha^*} & \\
 & & F(X) & &
 \end{array}$$

On peut alors conclure que $\alpha^* = \beta^*$ puisque $s_0^* \circ p^* = s_0^* \circ (s_1^*)^{-1} = 1$.

$3 \Rightarrow 2$: L'application s_0 est canoniquement homotope dans $\mathcal{L}_{\text{cor},S}$ (et même dans \mathcal{L}_S) à s_1 . En effet, si $\mu : \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$ désigne la multiplication du schéma en anneau \mathbb{A}^1 , le morphisme $H = \mu \times 1_X$ réalise une homotopie entre s_0 et s_1 .

$2 \Rightarrow 1$: Soit X un S -schéma algébrique lisse, et $p : \mathbb{A}_X^1 \rightarrow X$ la projection canonique. Soit $s_0 : X \rightarrow \mathbb{A}_X^1$ la section nulle de \mathbb{A}_X^1 . Pour montrer que p^* est un isomorphisme, il nous suffit de montrer que $p^*s_0^* = 1$.

Considérons à nouveau la multiplication $\mu : \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$. Considérons de plus $\sigma_0 : \mathbb{A}_X^1 \rightarrow \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}_X^1$ (resp. $\sigma_1 : \mathbb{A}_X^1 \rightarrow \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}_X^1$) la section nulle (resp. unité) du fibré en anneau $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}_X^1$ sur \mathbb{A}_X^1 . Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}
 (\mu \times 1_X) \circ \sigma_0 &= s_0 \circ p \\
 (\mu \times 1_X) \circ \sigma_1 &= 1.
 \end{aligned}$$

□

Remarque 3.1.5.— Ainsi, la catégorie des préfaisceaux homotopiques n'est rien d'autre que la catégorie des préfaisceaux sur $\pi\mathcal{L}_{\text{cor},S}$.

De même, la catégorie des faisceaux homotopiques est équivalente à la catégorie des préfaisceaux sur $\pi\mathcal{L}_{\text{cor},S}$ dont la composée avec le foncteur $\mathcal{L}_S \rightarrow \pi\mathcal{L}_{\text{cor},S}$ est un faisceau pour la topologie de Nisnevich. Cette remarque nous permettra de faire le lien entre les faisceaux homotopiques et les résultats de la fin du premier chapitre.

3.1.6.— Soit F un préfaisceau avec transferts. On lui associe un préfaisceau avec transferts noté $\hat{h}_0(F)$ tel que pour tout schéma X dans \mathcal{L}_S , $\hat{h}_0(F)$ est le conoyau de

$$F(\mathbb{A}_X^1) \xrightarrow{s_0^* - s_1^*} F(X).$$

Il résulte de la première équivalence du lemme précédent que $\hat{h}_0(F)$ est invariant par homotopie. Par ailleurs, si F est invariant par homotopie, le morphisme canonique $F \rightarrow \hat{h}_0(F)$ est un isomorphisme. Ainsi, le foncteur

$$\hat{h}_0 : \mathcal{P}_S^{\text{tr}} \rightarrow \mathbb{H}\mathcal{P}_S^{\text{tr}}$$

est adjoint à gauche du foncteur d'oubli évident.

Dans le cas des faisceaux avec transferts, la situation est plus compliquée. Supposons que F est un faisceau avec transferts. On note $h_0^{(1)}F$ le faisceau avec transferts associé à $\hat{h}_0(F)$. Pour tout entier naturel n , on note $h_0^{(n)}F$ l'application du foncteur $h_0^{(1)}$ à F itérée n fois.

On en déduit donc une suite de morphismes

$$F \rightarrow h_0^{(1)}F \rightarrow \dots \rightarrow h_0^{(n)}F \rightarrow \dots$$

On pose alors

$$h_0(F) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} h_0^{(n)}F.$$

calculée dans la catégorie des faisceau avec transferts (ou ce qui revient au même des préfaisceaux avec transferts).

Proposition 3.1.7 *Pour tout faisceau avec transferts F , le faisceau avec transferts $h_0(F)$ défini ci-dessus est invariant par homotopie.*

Le foncteur $h_0 : \mathcal{N}_S^{\text{tr}} \rightarrow \mathbb{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$ ainsi défini est adjoint à gauche du foncteur d'oubli évident.

PREUVE : Soit X un S -schéma algébrique lisse, s_0 et s_1 les sections nulles et unités de \mathbb{A}_X^1 sur X . D'après le lemme précédent, montrer que $h_0(F)$ est invariant par homotopie revient à vérifier que $s_0^* = s_1^*$.

Or tout d'abord, remarquons que

$$h_0(F)(\mathbb{A}_X^1) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} h_0^{(n)}F(\mathbb{A}_X^1).$$

Soit x un élément dans $h_0(F)(\mathbb{A}_X^1)$. Il est donc représenté par un élément y de $h_0^{(n)}F(\mathbb{A}_X^1)$ pour un entier naturel n donné.

Or, le morphisme de transition de la limite inductive qui définit h_0 se factorise comme suit

$$h_0^{(n)}F \xrightarrow{a} \hat{h}_0 \left(h_0^{(n)}F \right) \xrightarrow{b} h_0^{(n+1)}F.$$

D'après le paragraphe qui précède la proposition, $\hat{h}_0 \left(h_0^{(n)}F \right)$ est invariant par homotopie. Donc, d'après le lemme précédent, $s_0^*(ay) = s_1^*(ay)$. Dès lors, $s_0^*(bay) = s_1^*(bay)$, ce qui équivaut donc, puisque a et b sont naturelles, à $ba(s_0^*y) = ba(s_1^*y)$, i.e. $s_0^*x = s_1^*x$. \square

Remarque 3.1.8.– Nous verrons que si $S = \text{Spec}(k)$, pour tout faisceau avec transferts F , le faisceau avec transferts $h_0^{(1)}F$ est déjà invariant par homotopie ; le passage à la limite ci-dessus est donc inutile dans ce cas.

Dans ce cas, nous poserons encore $h_0(X) = h_0\mathbb{L}[X] = h_0^{(1)}\mathbb{L}[X]$.

3.1.2 Structure monoïdale

Proposition 3.1.9 *Le bifoncteur*

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}})^2 &\rightarrow \mathbf{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}} \\ F, G &\mapsto h_0(F \otimes^{\text{tr}} G) \end{aligned}$$

définit un produit tensoriel associatif et commutatif.

PREUVE : Ce produit est commutatif d'après les propriétés de \otimes^{tr} . Pour montrer l'associativité, on utilise le calcul suivant :

Lemme 3.1.10 *Soient F et G des faisceaux avec transferts, alors*

$$h_0(F) \otimes^{\text{Htr}} h_0(G) \simeq h_0(F \otimes^{\text{tr}} G)$$

PREUVE : On a des flèches $F \rightarrow h_0(F)$ et $G \rightarrow h_0(G)$, d'où une flèche

$$h_0(F \otimes^{\text{tr}} G) \rightarrow h_0(h_0(F) \otimes^{\text{tr}} h_0(G))$$

et on montre que cette flèche est un isomorphisme.

Or, puisque le foncteur \otimes^{tr} commute aux limites inductives, d'après la construction de la proposition 3.1.7, il suffit de montrer cette assertion lorsqu'on remplace h_0 par $h_0^{(1)}$.

De plus, puisque $h_0^{(1)}$ commute aussi aux limites inductives, on peut supposer que $F = \mathbf{L}_S[X]$ et $G = \mathbf{L}_S[Y]$. On peut aussi faire la démonstration en deux étapes et commencer par démontrer que

$$h_0^{(1)}(\mathbf{L}_S[X] \otimes^{\text{tr}} \mathbf{L}_S[Y]) \xrightarrow{(1)} h_0^{(1)}(\mathbf{L}_S[X] \otimes^{\text{tr}} h_0^{(1)}(\mathbf{L}_S[Y]))$$

est un isomorphisme.

Or $h_0^{(1)}(\mathbf{L}_S[Y])$ est le conoyau de $i_0^* - i_1^* : \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}(\mathbf{L}_S[\mathbb{A}^1], \mathbf{L}_S[Y]) \rightarrow \mathbf{L}_S[Y]$, où i_0 (respectivement i_1) désigne la section nulle (respectivement unité) de \mathbb{A}^1 .

Soit T un point Nisnevich dans $\text{pro-}\mathcal{L}_S$, alors

$$h_0^{(1)}(\mathbf{L}_S[X] \otimes^{\text{tr}} \mathbf{L}_S[Y])(T) = c_S(T, X \times Y) / c_S(\mathbb{A}^1 \times T, X \times Y)$$

où le quotient désigne le conoyau de $(i_0^* - i_1^*)_T$.

Comme $\mathbf{L}_S[X] \otimes^{\text{tr}}$ est exact à droite, $\mathbf{L}_S[X] \otimes^{\text{tr}} h_0^{(1)}(\mathbf{L}_S[Y])$ est le conoyau de $1_X \otimes^{\text{tr}} i_0^* - 1_X \otimes^{\text{tr}} i_1^*$. On peut donc calculer

$$\begin{aligned} &h_0^{(1)}(\mathbf{L}_S[X] \otimes^{\text{tr}} h_0^{(1)}(\mathbf{L}_S[Y]))(T) \\ &= (\mathbf{L}_S[X] \otimes^{\text{tr}} h_0^{(1)}(\mathbf{L}_S[Y]))(T) / (\mathbf{L}_S[X] \otimes^{\text{tr}} h_0^{(1)}(\mathbf{L}_S[Y]))(\mathbb{A}^1 \times T) \\ &= c_S(T, X \times Y) / N \end{aligned}$$

où N est le groupe abélien

$$\mathbf{L}_S[X] \otimes^{\text{tr}} \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}(\mathbf{L}_S[\mathbb{A}^1], \mathbf{L}_S[Y])(T) \oplus c_S(\mathbb{A}^1 \times T, X \times Y)$$

et la flèche $N \rightarrow c_S(T, X \times Y)$ est

$$(1_X \otimes^{tr} i_0^* - 1_X \otimes^{tr} i_1^*)_T \oplus (i_0^* - i_1^*)_T.$$

Le morphisme (1) étant alors la projection canonique, il suffit de montrer que l'image de $(1_X \otimes^{tr} i_0^* - 1_X \otimes^{tr} i_1^*)_T$ est incluse dans l'image de $(i_0^* - i_1^*)_T$.

Or, d'après la remarque 2.2.17 on a une surjection

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{U,V \in \mathcal{L}_k} c_S(U, X) \otimes_{\mathbb{Z}} c_S(V \times \mathbb{A}^1, Y) \otimes_{\mathbb{Z}} c_S(T, U \times V) & & \\ \longrightarrow & & \mathbb{L}_S[X] \otimes^{tr} \underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{N}_k^{tr}}(\mathbb{L}_S[\mathbb{A}^1], \mathbb{L}_S[Y])(T) \\ \alpha \otimes_{\mathbb{Z}} \beta \otimes_{\mathbb{Z}} \gamma & \mapsto & (\alpha \otimes^{tr} \beta) \circ \gamma. \end{array}$$

Soient donc U et V algébrique lisse, et l'élément

$$\alpha \otimes_{\mathbb{Z}} \beta \otimes_{\mathbb{Z}} \gamma \in c_S(U, X) \otimes_{\mathbb{Z}} c_S(V \times \mathbb{A}^1, Y) \otimes_{\mathbb{Z}} c_S(T, U \times V).$$

Son image dans $c_S(T, X \times Y)$ par la composée de $(1_X \otimes^{tr} i_0^* - 1_X \otimes^{tr} i_1^*)_T$ et de la surjection précédente est

$$[\alpha \otimes^{tr} (\beta \circ (1_V \otimes^{tr} (i_0 - i_1)))] \circ \gamma.$$

Or,

$$\begin{aligned} & [\alpha \otimes^{tr} (\beta \circ (1_V \otimes^{tr} (i_0 - i_1)))] \circ \gamma \\ &= (\alpha \otimes^{tr} \beta) \circ (1_U \otimes^{tr} 1_V \otimes^{tr} (i_0 - i_1)) \circ \gamma \\ &= (\alpha \otimes^{tr} \beta) \circ (\gamma \otimes^{tr} 1_{\mathbb{A}^1}) \circ (1_T \otimes^{tr} (i_0 - i_1)). \end{aligned}$$

Par définition, ce dernier élément est l'image de $(\alpha \otimes^{tr} \beta) \circ (\gamma \otimes^{tr} 1_{\mathbb{A}^1}) \in c(T \times \mathbb{A}^1, X \times Y)$ par le morphisme $(i_0^* - i_1^*)_T$, ce qui achève la démonstration. \square

Définition 3.1.11 *On note \otimes^{Htr} le produit tensoriel sur $\mathbf{H}\mathcal{N}_S^{tr}$ défini dans la proposition précédente.*

Il munit la catégorie $\mathbf{H}\mathcal{N}_S^{tr}$ d'une structure monoïdale symétrique.

3.2 Extensions transcendentes pures

Dans cette section, on commence à compléter les premiers résultats que nous avons obtenus sur la catégorie $\pi\mathcal{L}_{\text{cor},S}$ à la fin du premier chapitre.

3.2.1.– Soit \mathcal{O} une S -algèbre locale dans \mathcal{A}_S . On rappelle qu'on a défini dans 2.1.34 un pro-objet, noté simplement (\mathcal{O}) , dans $\text{pro-}\mathcal{L}_S$.

On notera encore $[\mathcal{O}]$ le pro-objet dans $\text{pro-}\pi\mathcal{L}_{\text{cor},S}$ obtenu par composition avec le foncteur canonique $\mathcal{L}_S \rightarrow \pi\mathcal{L}_{\text{cor},S}$.

Plus généralement, si ϕ est un pro-objet dans $\text{pro-}\mathcal{L}_S$, on notera $[\phi]$ le pro-objet dans $\text{pro-}\pi\mathcal{L}_{\text{cor},S}$ obtenu par composition avec le foncteur canonique $\mathcal{L}_S \rightarrow \pi\mathcal{L}_{\text{cor},S}$.

La proposition suivante concerne le cas où $S = \text{Spec}(k)$.

Proposition 3.2.2 *Soit L une extension transcendante pure de k , de degré de transcendance fini.*

Alors, le morphisme induit par l'application $k \rightarrow L$ dans $\text{pro-}\pi\text{-}\mathcal{L}_{\text{cor},k}$

$$[L] \rightarrow [k]$$

admet une section.

PREUVE : On commence par le cas où le degré de L est égal à 1. On peut alors supposer que $L = k(t)$. Si l'on pose $C = \mathbb{A}_k^1$, et si l'on note x le point générique de C , (C, x) est un modèle de L/k . Le morphisme de l'énoncé est alors isomorphe à

$$[C_x] \xrightarrow{\pi} [\text{Spec}(k)]$$

obtenu comme limite projective des morphismes de projections canoniques pour les ouverts non vides de C .

Or, soit j le morphisme de pro-objets égal à

$$\varprojlim_{U \subset \mathbb{A}_k^1} \left([U] \xrightarrow{j_U} [\mathbb{A}_k^1] \right)$$

où la (pseudo-)limite projective parcourt les ouverts non vides de \mathbb{A}_k^1 , et pour un tel ouvert U , j_U désigne l'immersion ouverte canonique.

Alors, le morphisme π est égal à la composée

$$[C_x] \xrightarrow{j} [\mathbb{A}_k^1] \xrightarrow{[p]} [\text{Spec}(k)]$$

où p est le morphisme de projection canonique.

Comme le morphisme $[p]$ est scindé, il nous suffit de construire, pour chaque ouvert U de C , une section α_U de j_U , de telle façon que α_U soit naturel par rapport à U .

Or, le k -schéma \mathbb{P}_k^1 est une bonne compactification de \mathbb{A}_k^1 sur k , et plus généralement de tout ouvert non vide U de \mathbb{A}_k^1 . Le morphisme $1_{\mathbb{A}_k^1}$, vu comme élément de $\pi_k(\mathbb{A}_k^1, \mathbb{A}_k^1)$, correspond donc à la classe d'un couple (\mathcal{L}, s_∞) dans

$$\text{Pic}(\mathbb{A}_k^1 \times_k \mathbb{P}_k^1, \mathbb{A}_k^1 \times_k \infty).$$

Or, le faisceau inversible $\mathcal{L}|_{\mathbb{A}_k^1 \times_k \mathbb{A}_k^1}$ est trivial. On choisit donc une trivialisations t correspondante. Pour un ouvert U de \mathbb{A}_k^1 , on note $Z_U = \mathbb{A}_k^1 - U$ et t_U la restriction de t au schéma $\mathbb{A}_k^1 \times_k Z_U$.

Il résulte alors du lemme 1.3.22 appliqué avec $Z = Z_U$ et $\beta = 1_X$ (et plus précisément de la remarque qui le suit) que la classe du couple $(\mathcal{L}, t_U + s_\infty)$ dans

$$\text{Pic}(\mathbb{A}_k^1 \times_k \mathbb{P}_k^1, \mathbb{A}_k^1 \times_k Z_U \sqcup \mathbb{A}_k^1 \times_k \infty)$$

correspond à une section α_U de j_U .

De plus, par construction, si U et V sont deux ouverts non vides de \mathbb{A}_k^1 tels que $U \subset V$, et si l'on note $j_{UV} : U \rightarrow V$ l'immersion canonique, on a

$$\alpha_V \circ j_{UV} = \alpha_U.$$

Ainsi, $\alpha = \varprojlim_{U \subset \mathbb{A}_k^1} \alpha_U$ est une section de j , ce qui conclut le premier cas.

On peut alors utiliser une récurrence sur le degré de transcendance n de L sur k . Si la propriété est vraie au rang n , on se donne une extension L/k transcendante pure de degré $n+1$. On peut supposer que $L = k(t_0, \dots, t_n)$. On pose alors $K = k(t_1, \dots, t_n)$. Dès lors, le morphisme canonique

$$[K] \rightarrow [k]$$

admet une section β d'après l'hypothèse de récurrence.

Par ailleurs, d'après le cas $n=1$, le morphisme

$$[k(t_0)] \xrightarrow{\pi} [k]$$

admet une section α .

Soient $X = \mathbb{A}_k^n$, et x son point générique. C'est un modèle de K . Soit U un ouvert non vide de X , et $\tau_U : U \rightarrow \text{Spec}(k)$ le morphisme canonique.

Alors, comme τ_U est lisse de type fini, d'après les définitions 1.2.15 et 1.2.18, le morphisme

$$\alpha_U = \widetilde{\tau}_{U*} \widetilde{\tau}_U^*(\alpha)$$

de $\text{pro-}\mathcal{L}_{\text{cor},k}$ est une section de $\widetilde{\tau}_{U*} \widetilde{\tau}_U^*(\pi)$. Il est égal au morphisme induit par la projection canonique

$$[U(t_0)] \rightarrow [U]$$

où l'on pose $U(t_0) = U \times_k (k(t_0))$ vu comme un pro-objet de \mathcal{L}_k (on a fait l'abus de noter encore $\widetilde{\tau}_{U*}$ et $\widetilde{\tau}_U^*$ les morphismes induits sur les pro-objets).

Alors, le diagramme suivant est commutatif dans $\text{pro-}\mathcal{L}_{\text{cor},k}$:

$$\begin{array}{ccc} [V(t_0)] & \xrightarrow{\alpha_V} & [V] \\ j_{VU}(t_0) \downarrow & & \downarrow j_{VU} \\ [U(t_0)] & \xrightarrow{\alpha_U} & [U]. \end{array}$$

On calcule en effet :

$$\begin{aligned} \alpha_U \circ j_{VU}(t_0) &= (\widetilde{\tau}_{U*} \widetilde{\tau}_U^*(\alpha)) \circ j_{VU}(t_0) \stackrel{(1)}{=} \widetilde{\tau}_{U*}(\widetilde{\tau}_U^*(\alpha) \circ j_{VU}(t_0)) \\ &\stackrel{(2)}{=} \widetilde{\tau}_{U*}(j_{VU} \circ \widetilde{j}_{VU*} \widetilde{j}_{VU}^* \widetilde{\tau}_U^*(\alpha)) \\ &\stackrel{(3)}{=} j_{VU} \circ (\widetilde{\tau}_{U*} \widetilde{j}_{VU*} \widetilde{j}_{VU}^* \widetilde{\tau}_U^*(\alpha)) \stackrel{(4)}{=} j_{VU} \circ \alpha_V. \end{aligned}$$

On le justifie par :

- (1) le fait que $\widetilde{\tau}_{U*}(j_{VU}(t_0)) = j_{VU}(t_0)$ où $j_{VU}(t_0)$ est vu à la fois comme un k -morphisme et un U -morphisme,
- (2) la proposition 1.2.20 appliquée à j_{VU} et à chaque composante du pro-objet $U(t_0)$,
- (3) le fait que $\widetilde{\tau}_{U*}(j_{VU}) = j_{VU}$,

(4) la functorialité des morphismes $\tilde{\tau}_*$ et $\tilde{\tau}^*$ par rapport au morphisme τ (cf les dernières assertions de 1.2.14 et 1.2.19).

Donc, le morphisme $\alpha_* = \varprojlim_{U \subset X} \alpha_U$ est une section du morphisme $[X_x \times_k (k(t_0))] \rightarrow [X_x]$ qui est isomorphe à $[L] \rightarrow [K]$. Ainsi, le morphisme $\alpha_* \circ \beta$ est une section de $[L] \rightarrow [k]$. \square

Si L/k est une extension séparable de type fini, on pose

$$S_{(L)} = S \times_k (L)$$

que l'on considère comme un pro-objet dans \mathcal{L}_S .

Corollaire 3.2.3 *Soit L/k une extension transcendante pure de type fini.*

Pour tout schéma X dans \mathcal{L}_S , le morphisme de pro- $\pi\mathcal{L}_{\text{cor},S}$

$$[X \times_S S_{(L)}] \rightarrow [X]$$

admet une section.

PREUVE : Considérons, d'après la proposition précédente, une section α de $[L] \rightarrow [k]$ dans $\pi\mathcal{L}_{\text{cor},k}$. Soit $\tau : S \rightarrow k$ le morphisme de projection canonique. Alors, $\tau^*(\alpha)$ est une section de $[S_{(L)}] \rightarrow [S]$ dans $\pi\mathcal{L}_{\text{cor},S}$. Si $p : X \rightarrow S$ désigne le morphisme structural du S -schéma X , $\tilde{p}_*\tilde{p}^*(\alpha)$ fournit la section attendue d'après la deuxième propriété des lemmes 1.2.14 et 1.2.19. \square

Remarque 3.2.4.– Ce corollaire nous servira à déduire une proposition sur un corps fini k de la proposition analogue concernant le corps infini $k(x)$.

3.3 Le cas où la base est un corps

Le titre indique que l'on se place dans le cas $S = \text{Spec}(k)$. Dans cette section, on démontre un ensemble de faits fondamentaux concernant les faisceaux homotopiques. Ces résultats forment la théorie à la base de la catégorie des motifs de V. Voevodsky.

3.3.1 Points pour les faisceaux homotopiques

3.3.1.1 Immersions ouvertes

Dans ce qui suit, on s'appuie comme annoncé sur les résultats de la fin du premier chapitre. On obtient une démonstration, que nous espérons plus simple, du résultat suivant de V. Voevodsky :

Proposition 3.3.1 *Soit F un préfaisceau dans $\text{H}\mathcal{P}_k^{\text{tr}}$.*

On considère une topologie t sur \mathcal{L}_k telle que $t = \text{Nis}$ ou $t = \text{Zar}$; on note F_t le faisceau associé au préfaisceau F sur \mathcal{L}_k .

Soit X un schéma algébrique lisse, U un ouvert dense de X , alors le morphisme de restriction

$$F_t(X) \rightarrow F_t(U)$$

est un monomorphisme.

PREUVE : On commence par démontrer la proposition dans le cas où le corps k est infini. Soit $a \in F_t(X)$ tel que $a|_U = 0$ dans $F_t(U)$.

Pour montrer que a est nul, on considère un point x de X et on montre que le germe a_x de a au point associé à x pour la topologie t est nul. Or, il existe un voisinage V de x dans X pour t tel que a_x se relève en $b \in F(V)$. On peut supposer que V est connexe.

On considère dès lors $b|_{U \times_X V} \in F(V \times_X U)$ la restriction de b . Par hypothèse, la classe de b dans $F_t(U \times_X V)$ est nulle. Cela signifie qu'il existe un recouvrement $(W_i \rightarrow V \times_X U)_i$ pour la topologie t tel que $b|_{W_i}$ est nul pour tout i . Si $t = \text{Nis}$, on peut supposer que ce recouvrement est composé de familles couvrantes élémentaires (cf définition 2.1.8) d'après le lemme 2.1.10. En particulier, il existe un indice i tel que W_i est un ouvert non vide de $V \times_X U$.

Dès lors, W_i est un ouvert non vide de V tel que $b|_{W_i} = 0$.

Or, appliquant la proposition 1.3.24 avec V , pour l'ouvert dense Ω_i dans V , et au point x de V , on obtient un ouvert Ω de V contenant x tel que l'on ait un diagramme commutatif dans $\pi\mathcal{L}_{\text{cor},k}$:

$$\begin{array}{ccc} & & \Omega \\ & \alpha \nearrow & \downarrow \\ W_i & \xrightarrow{\epsilon} & V \end{array}$$

Dès lors, $b|_{\Omega} = \alpha^*(b|_{W_i}) = 0$, ce qui implique que le germe de b en x , qui n'est autre que a_x , est nul. Cela conclut la démonstration pour k infini.

Dans le cas où k est fini, on utilise le corollaire 3.2.3. Soit $L = k(x)$. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} F_t(X) & \xrightarrow{j^*} & F_t(U) \\ \epsilon \downarrow & & \downarrow \\ F_t(X_{(L)}) & \xrightarrow{j_L^*} & F_t(U_{(L)}) \end{array}$$

Dans ce diagramme, $X_{(L)}$ désigne le pro-objet $X \times_k (L)$ dans $\text{pro-}\mathcal{L}_k$, F_t étant prolongé naturellement aux catégories de pro-objets.

Soit $\tau : \text{Spec}(L) \rightarrow \text{Spec}(k)$. Par définition, $F_t(X_{(L)}) = \tau^*(F_t)(X \otimes_k L)$, où τ^* désigne le foncteur de changement de base pour la topologie t entre les sites \mathcal{L}_k et \mathcal{L}_L . De plus,

$$\tau^*(F_t) = (\hat{\tau}^*F)_t,$$

où $\hat{\tau}^*F$ désigne le préfaisceau avec transferts sur L obtenu par changement de base (cf définition 2.2.24).

D'après ce qu'on vient de démontrer, appliqué au corps L et au préfaisceau avec transferts $\hat{\tau}^*F$, j_L^* admet donc une rétraction. Or, d'après le corollaire 3.2.3, le morphisme ϵ admet aussi une rétraction, ce qui permet de conclure. \square

Remarque 3.3.2.– Cette proposition a été démontrée par V. Voevodsky dans [FSV00c] (prop. 4.17), dans le cadre plus général des préthéories, et dans le cas où x est remplacé par un nombre fini de points. Toutefois, la démonstration néglige le cas où le corps de base est fini. Nous avons proposé ici une façon de traiter ce cas.

On en déduit immédiatement, dans le cas où $t = \text{Nis}$ et lorsque F est un faisceau, le corollaire

Corollaire 3.3.3 *Soit F un faisceau homotopique, X un schéma algébrique lisse et U un ouvert dense dans X . Alors, le morphisme de restriction*

$$F(X) \rightarrow F(U)$$

est un monomorphisme qui admet une rétraction.

3.3.1.2 Points génériques

On a déjà vu, grâce au paragraphe 2.1.41 combiné à la proposition 2.1.17, que les k -schémas locaux henséliens qui sont obtenus par hensélisation d'un anneau local essentiellement lisses (cf définition A.2.1) forment un système conservatif de points pour la topologie de Nisnevich sur \mathcal{L}_k . Plus précisément, la catégorie \mathcal{A}_k^h est équivalente à une sous-catégorie de la catégorie des points pour la topologie de Nisnevich sur \mathcal{L}_k .

On a vu de plus que la catégorie \mathcal{E}_k^s formée des extensions séparables de type fini est une sous-catégorie de \mathcal{A}_k^h . Si E/k est une telle extension, le pro-objet $(E)^h$ de \mathcal{L}_k est canoniquement isomorphe au pro-objet (E) de \mathcal{L}_k .

La proposition suivante, due à V. Voevodsky, montre que les foncteurs fibres associés à ces points suffisent pour les faisceaux homotopiques.

Proposition 3.3.4 *Les foncteurs fibres associés aux objets de la catégorie \mathcal{E}_k^s forment un système conservatif de points pour la catégorie $\mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$.*

PREUVE : Il suffit en effet d'appliquer le lemme suivant au morphisme η et à la topologie t de Nisnevich.

Lemme 3.3.5 *Soient $\eta : F \rightarrow G$ un morphisme de préfaisceaux dans $\mathbf{H}\mathcal{P}_k^{\text{tr}}$, et t une topologie sur \mathcal{L}_k plus fine que la topologie de Zariski. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\eta_t : F_t \rightarrow G_t$ est un isomorphisme.
2. Pour tout E/k dans \mathcal{E}_k^s , $\eta_E : F(E) \rightarrow G(E)$ est un isomorphisme.

PREUVE : Le fait que 1 entraîne 2 est évident. Pour la réciproque, on considère N_0 le noyau de η dans la catégorie des préfaisceaux avec transferts ; N_0 est encore invariant par homotopie d'après le lemme des cinq. Soit N le faisceau associé à N_0 pour la topologie t . Alors pour tout schéma connexe X algébrique lisse, x désignant son point générique, la proposition 3.3.1 implique que l'application

$$N(X) \rightarrow N(X_x)$$

est injective. De plus, le groupe abélien

$$N(X_x) \simeq N(\kappa(X))$$

est nul par hypothèse, puisque c'est le noyau de l'application $F(\kappa(X)) \rightarrow G(\kappa(X))$. On en conclut que N est le faisceau nul. On peut effectuer le même raisonnement pour le

conoyau de η , ce qui conclut le lemme et la proposition. \square

Remarque 3.3.6.– On fera attention au fait que pour une extension E/k de type fini, on a noté

$$F(E) = \varinjlim_{A \in \mathcal{M}^{lis}(E/k)} F(\text{Spec}(A))$$

où $\mathcal{M}^{lis}(E/k)$ désigne la catégorie des sous- k -algèbres de E qui sont lisses de type fini sur k (cf définition 2.1.34).

Remarque 3.3.7.– On résume cette proposition par la maxime : les points pour les faisceaux homotopiques sont les extensions séparables de type fini de k .

3.3.8.– Dans ce numéro, on anticipe le corollaire 3.3.25 pour illustrer la proposition précédente. La catégorie $\mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ est abélienne.

Par extension, on appelle encore *foncteur fibre* d'une catégorie abélienne \mathcal{A} tout foncteur exact $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}b$ qui commute aux limites inductives (ou ce qui revient au même aux sommes directes infinies). On rappelle qu'à toute extension séparable de type fini E/k , on a associé un pro-objet de \mathcal{L}_k dans 2.1.34. Par ailleurs, si F est un faisceau homotopique, on a posé simplement :

$$F(E) = \varinjlim_{A \in \mathcal{M}^{lis}(E/k)^{op}} F(\text{Spec}(A)).$$

On obtient dès lors le lemme suivant :

Lemme 3.3.9 *Soit E/k une extension séparable de type fini. Alors, le foncteur*

$$\mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}} \rightarrow \mathcal{A}b, F \mapsto F(E)$$

est un foncteur fibre de la catégorie $\mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$.

PREUVE : Soit

$$0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$$

une suite exacte courte dans la catégorie $\mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$. Puisque le foncteur d'oubli $\mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}} \rightarrow \mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ est exact, et que les limites inductives filtrantes sont exactes, on en déduit une suite exacte longue

$$0 \rightarrow F(E) \rightarrow G(E) \rightarrow H(E) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}^1((E), F) \rightarrow \dots$$

Par ailleurs, d'après la proposition 2.2.13, on a un isomorphisme canonique

$$\text{Ext}_{\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}^1((E), F) \simeq H_{\text{Nis}}^1(\text{Spec}(E); F) = 0$$

ce qui montre que le foncteur considéré est exact. Comme de plus le foncteur d'oubli $\mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}} \rightarrow \mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ commute aux sommes disjointes infinies, le foncteur considéré est bien un foncteur fibre de la catégorie $\mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ dans le sens que l'on a défini ci-dessus. \square

La proposition précédente signifie que cette famille de foncteurs fibres de $\mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ est conservative.

Si F est un faisceau homotopique, on définit un foncteur¹

$$\begin{aligned} \hat{F} : (\mathcal{E}_k^s)^{op} &\rightarrow \mathcal{A}b \\ E/k &\mapsto F(E). \end{aligned}$$

Ainsi, le foncteur

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}} &\rightarrow (\mathcal{A}b)^{\mathcal{E}_k^s} \\ F &\mapsto \hat{F} \end{aligned}$$

est fidèle et conservatif.

On peut voir ce foncteur comme une première approche de la transformée générique que l'on définit en 5.1.1.

Remarque 3.3.10.— Un des points clés qui guide cette thèse est que ce ne sont pas seulement les foncteurs fibres eux mêmes qui sont importants, mais aussi tous leurs morphismes, que l'on appelle encore *morphismes de spécialisations*. C'est pourquoi nous avons été si pointilleux dans la proposition 2.1.40, puisqu'elle nous dit que les morphismes de spécialisations des points pour la topologie de Nisnevich ne sont rien d'autre que les morphismes locaux de k -algèbres.

On illustre ce point dans la sous-section suivante.

3.3.1.3 Anneaux de valuation discrète

Les objets de la catégorie \mathcal{A}_k induisent un système conservatif de points pour la topologie de Zariski. On notera particulièrement que les points qui correspondent à des extensions séparables de type fini de k sont non seulement des points pour la topologie de Nisnevich, mais aussi pour la topologie de Zariski.

Dans cette sous-section, on illustre la proposition précédente en montrant qu'un morphisme de spécialisation entre points pour la topologie de Zariski admet une section lorsqu'on ne considère plus seulement les morphismes de schémas, mais les correspondances finies à homotopie près. Plus précisément,

Proposition 3.3.11 *Soit \mathcal{O}/k un anneau local dans \mathcal{A}_k , et E son corps des fonctions. On suppose que E/k est de degré de transcendance 1.*

Alors le morphisme canonique

$$[E] \rightarrow [\mathcal{O}]$$

admet une section dans $\text{pro-}\pi\mathcal{L}_{\text{cor},k}$.

PREUVE : Soient (X, s) un k -modèle de \mathcal{O} , et x son point générique (cf 2.1.32 pour l'existence). On doit en fait construire une section du morphisme $[X_x] \rightarrow [X_s]$ dans $\text{pro-}\pi\mathcal{L}_{\text{cor},k}$. On pose par commodité $Z = \{s\}$ qui est donc un point fermé de X .

Quitte à réduire X au voisinage de s , on peut supposer que X est affine. C'est alors une courbe algébrique affine sur k par hypothèse sur E . Donc, d'après la proposition 1.3.10, il existe une courbe normale et propre sur k , notée \bar{X} , telle que pour tout ouvert U non vide de X , \bar{X}/k est une bonne compactification de U/k .

¹Dans le cadre des topos, ce foncteur est considéré dans [SGA4], 6.7.1, où A.Grothendieck remarque qu'il présente une «certaine analogie formelle avec une transformée de Fourier».

Le morphisme 1_X vu comme élément de $\pi_k(X, X)$ est donc représenté dans $\text{Pic}(X\bar{X}, XX_\infty)$ par un couple (\mathcal{L}, s_∞) (et \mathcal{L} correspond au diviseur associé à la diagonale de X). Quitte à réduire de nouveau X , on peut considérer une trivialisaton t de \mathcal{L} sur XZ .

Alors, d'après le lemme 1.3.22 appliqué avec $\beta = 1_X$, la classe du couple $(\mathcal{L}, s_\infty + t)$ dans $\text{Pic}(X\bar{X}, XX_\infty \sqcup XZ)$ correspond à un élément α_X de $\pi_k(X, X - Z)$ qui s'inscrit dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \swarrow \alpha_X & \parallel \\ X - Z & \xrightarrow{j} & X. \end{array}$$

Mais de même, si U est un ouvert de X contenant s (*i.e.* $Z \subset U$), le morphisme 1_U correspond à la classe d'un couple $(\mathcal{L}_U, s_\infty^U)$ dans $\text{Pic}(U\bar{X}, UU_\infty)$. On peut supposer que \mathcal{L}_U est égal au faisceau inversible $\mathcal{L}_{U\bar{X}}$ obtenu par pullback. D'après le même lemme appliqué cette fois à 1_U , le couple $(\mathcal{L}_U, s_\infty^U + t|_{UZ})$ correspond à un élément α_U qui est une section de $j_U : U - Z \rightarrow U$.

Mais par ailleurs, si U et V sont deux voisinages ouverts de s dans X tels que $U \subset V$, compte tenu des choix effectués, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha_V} & V - Z \\ j_{VU} \downarrow & & \downarrow j'_{VU} \\ U & \xrightarrow{\alpha_U} & U - Z. \end{array}$$

En effet, d'après la functorialité décrite dans le théorème 1.3.18, les correspondances finies à la gauche du tableau ci-dessous sont représentées par les couples à droite :

$$\begin{array}{ll} j'_{VU} \circ \alpha_V & (\mathcal{L}_V, s_\infty^V|_{VU_\infty} + t|_{VZ}) \\ \alpha_U \circ j_{VU} & (\mathcal{L}_U|_{V\bar{X}}, s_\infty^U|_{VU_\infty} + t|_{VZ}). \end{array}$$

Or, $\mathcal{L}_V = \mathcal{L}|_{V\bar{X}} = \mathcal{L}_U|_{V\bar{X}}$, et puisque les sections s_∞^U et s_∞^V correspondent aux trivialisations canoniques des diviseurs correspondants, $s_\infty^V|_{VU_\infty} = s_\infty^U|_{VU_\infty}$, ce qui montre la commutativité du diagramme ci-dessus.

Il en résulte que le morphisme $\varprojlim_{U \subset X} \alpha_U$ est bien défini, et donne une section du morphisme $[X_x] \rightarrow [X_s]$ comme attendu. \square

Remarque 3.3.12.– L'hypothèse de cette proposition entraîne que \mathcal{O} est un anneau de valuation discrète. Mais la démonstration montre que la même proposition est valable si l'on remplace l'hypothèse que \mathcal{O} est local par l'hypothèse \mathcal{O} est semi-local (essentiellement lisse).

3.3.2 Faisceau homotopique associé

Dans cette sous-section, on étudie le foncteur faisceau associé à un préfaisceau homotopique ; les premières propositions sont les résultats qui nous permettent de montrer qu'on obtient un faisceau homotopique.

3.3.2.1 Courbes et topologie de Nisnevich

La proposition suivante a pour but de montrer que la proposition 1.3.26 se généralise dans le cas de la topologie de Nisnevich. Elle est directement inspirée de la proposition 4.7 de [FSV00c].

Proposition 3.3.13 *Soit C une courbe algébrique quasi-affine lisse.*

Considérons un carré distingué élémentaire (cf définition 2.1.8) dans \mathcal{L}_k

$$\begin{array}{ccc} V - T & \xrightarrow{l} & V \\ h \downarrow & & \downarrow f \\ C - Z & \xrightarrow{j} & C. \end{array}$$

On suppose que $\text{Pic}(CZ) = 0$.

Alors, il existe des correspondances finies

$$\begin{array}{ccc} V - T & \xleftarrow{\beta} & V \\ \gamma \uparrow & & \\ C - Z & \xleftarrow{\alpha} & C \end{array}$$

telles qu'on a les égalités suivantes dans $\pi\mathcal{L}_{\text{cor},k}$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} j \circ \alpha = 1_C & (1) \\ l \circ \beta = 1_V & (2) \\ \alpha \circ f = h \circ \beta & (3) \\ l \circ \gamma = 0 & (4) \\ h \circ \gamma = 1_{C-Z} - \alpha \circ j & (5) \\ \gamma \circ h = 1_{V-T} - \beta \circ l & (6) \end{array} \right.$$

PREUVE : D'après la proposition 1.3.10, C admet une bonne compactification \bar{C} sur k , qui est aussi une bonne compactification de $C - Z$.

Dès lors, le morphisme 1_C vu dans $\pi_k(C, C)$ correspond à un couple $(\mathcal{L}(1_C), s(1_C))$ dans $\text{Pic}(C\bar{C}, CC_\infty)$, d'après le théorème 1.3.18.

De plus par hypothèse sur C , $\text{Pic}(CZ) = 0$; le faisceau inversible $\mathcal{L}(1_C)$ est donc trivial sur CZ . Soit t une trivialisatation correspondante. On considère tout d'abord la correspondance finie suivante qui correspond au couple de $\text{Pic}(C\bar{C}, CC_\infty \sqcup CZ)$ à sa droite

$$\alpha \quad \leftrightarrow \quad (\mathcal{L}(1_C), s(1_C) + t)$$

La relation (1) résulte alors du lemme 1.3.22, comme on l'a déjà souvent utilisé.

Par ailleurs, d'après le théorème de Zariski, il existe un k -schéma \tilde{V} tel que V est un ouvert de \tilde{V} , et un morphisme fini $\tilde{f} : \tilde{V} \rightarrow \bar{C}$ qui s'inscrivent dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} V & \rightarrow & \tilde{V} \\ f \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\ C & \rightarrow & \bar{C}. \end{array}$$

Le schéma \tilde{V} est de type fini sur k ; sa normalisation \bar{V} est donc un schéma fini sur \tilde{V} , qui contient à nouveau V comme un ouvert puisque V est normal. Ainsi, \bar{V} est une bonne compactification de V , qui s'inscrit dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} V & \rightarrow & \bar{V} \\ f \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ C & \rightarrow & \bar{C} \end{array}$$

où le morphisme \bar{f} est fini, et vérifie $\bar{f}^{-1}(C_\infty) \subset V_\infty$.

A nouveau, le morphisme 1_V vu dans $\pi_k(V, V)$ correspond à un couple $(\mathcal{L}(1_V), s(1_V))$ dans $\text{Pic}(V\bar{V}, VV_\infty)$.

Par construction, le fibré $\mathcal{L}(1_C)$ (resp $\mathcal{L}(1_V)$) correspond au sous-schéma fermé représenté par la diagonale Δ_C (resp. Δ_V) de C (resp. V) vu comme sous-schéma fermé de $C\bar{C}$ (resp. $V\bar{V}$). Comme le morphisme $g : T \rightarrow Z$, égal à $f \times_X Z$, est un isomorphisme, il en résulte que

$$(f \times g)^{-1}(\Delta_X \cap XZ) = \Delta_V \cap VT$$

ce qui se traduit par le fait que

$$(f \times g)^*(\mathcal{L}(1_C)|_{XZ}) = \mathcal{L}(1_V)|_{VT}.$$

Ainsi, la section $\tau = (f \times g)^*t$ induit une trivialisatoin de $\mathcal{L}(1_V)$ sur VT . Si l'on définit β comme correspondant au couple

$$\beta \quad \leftrightarrow \quad (\mathcal{L}(1_V), s(1_V) + \tau)$$

la relation (2) résulte à nouveau de 1.3.22.

Il nous reste à construire γ . Considérons pour cela le faisceau inversible \mathcal{M} sur $C\bar{V}$ égal à $(1_C \times \bar{f})^*\mathcal{L}(1_C)$. Ce fibré correspond au diviseur associé au sous-schéma fermé $D = (1_C \times \bar{f})^{-1}(\Delta_C)$. Soit u une section de \mathcal{M} qui correspond à sa trivialisatoin canonique. Comme g est un isomorphisme, $v = (1_C \times g)^*t$ est une trivialisatoin de $\mathcal{M}|_{CZ}$.

Considérons un ouvert affine U dans \bar{V} qui contient $V_\infty \sqcup T$. Alors, CU est affine sur C . D'après le théorème chinois, il existe une fonction h sur CU qui est égale à 1 sur CV_∞ , et égale à uv^{-1} sur CT . On définit alors γ comme correspondant au couple de $\text{Pic}(C\bar{V}, CV_\infty \sqcup CT)$:

$$\gamma \quad \leftrightarrow \quad (\mathcal{O}_{C\bar{V}}, h|_{CV_\infty \sqcup CT}).$$

Dès lors, $l \circ \gamma$ correspond au couple $(\mathcal{O}_{C\bar{V}}, h|_{CV_\infty}) = (\mathcal{O}_{C\bar{V}}, 1)$, qui est donc la correspondance nulle, d'où la relation (4).

Pour la relation (5), il résulte de la functorialité explicitée dans 1.3.18 que $h \circ \gamma$ correspond au couple

$$\left((1_{C-Z} \times \bar{f})_*(\mathcal{O}_{(C-Z)\bar{V}}), N(h) \right) = \left(\mathcal{O}_{(C-Z)\bar{C}}, N(h) \right)$$

où $N(h)$ désigne la norme de h par rapport au morphisme fini $(C-Z)\bar{V} \rightarrow (C-Z)\bar{C}$. La section $N(h)$ est égale à 1 sur $(C-Z)C_\infty$. Puisque g est un isomorphisme, $N(h)$ est de plus égal à $s(1_{C-Z})t^{-1}$ sur $(C-Z)Z$ (puisque le pullback de cette dernière section sur $(C-Z)T$ est égal à $N(h)$).

Or d'un autre côté, la correspondance finie $1_{X-Z} - \alpha \circ j$ correspond au couple

$$\left(\mathcal{L}(1_{C-Z}) \otimes (\mathcal{L}(1_C)|_{(C-Z)\bar{C}})^{-1}, s(1_{C-Z}).(s(1_C) + t)^{-1} \right)$$

La relation (5) est donc maintenant claire.

Enfin, d'après le même théorème, $\gamma \circ h$ correspond au couple

$$\left((h \times 1_{\bar{V}})^*(\mathcal{O}_{(C-Z)\bar{V}}), (h \times 1_{\bar{V}})^*h \right) = \left(\mathcal{O}_{(V-T)\bar{V}}, 1 + s(1_V).\tau^{-1} \right).$$

En effet, on notera particulièrement que le pullback de v sur $(V-T)\bar{V}$ est par définition égal à τ .

La relation (6) résulte dès lors du fait que la correspondance finie $1_{V-T} - \beta \circ l$ correspond au couple

$$\left(\mathcal{L}(1_{V-T}) \otimes (\mathcal{L}(1_V)|_{(V-T)\bar{V}})^{-1}, s(1_{V-T}).(s(1_V) + \tau)^{-1} \right).$$

Il nous reste à démontrer la relation (3). Elle équivaut à montrer que les couples suivants sont égaux dans $\text{Pic}(V\bar{C}, VC_\infty \sqcup VZ)$

$$\begin{aligned} & \left((f \times 1_{\bar{C}})^*\mathcal{L}(1_C), (f \times 1_{\bar{C}})^*(s(1_C) + t) \right) \\ & \left((1_V \times \bar{f})_*\mathcal{L}(1_V), N(s(1_V) + \tau) \right) \end{aligned}$$

Cette fois, N désigne la norme associée au morphisme fini $V\bar{V} \rightarrow V\bar{C}$. Comme on l'a déjà vu, puisque g est un isomorphisme, on obtient $N(\tau) = (f \times 1_{\bar{C}})^*t$, à un isomorphisme canonique près. Or, du fait que $1_C \circ f = f \circ 1_V$, il résulte que les couples suivants coïncident

$$\begin{aligned} & \left((f \times 1_{\bar{C}})^*\mathcal{L}(1_C), (f \times 1_{\bar{C}})^*(s(1_C)) \right) \\ & \left((1_V \times \bar{f})_*\mathcal{L}(1_V), N(s(1_V)) \right). \end{aligned}$$

On remarque que l'isomorphisme qui identifie ces deux couples est le même isomorphisme qui identifie les fonctions $N(\tau)$ et $(f \times 1_{\bar{C}})^*t$, ce qui conclut la relation (3). \square

Cette proposition admet immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.14 *Soit F un préfaisceau homotopique, et C/k une courbe algébrique quasi-affine lisse.*

Considérons un carré distingué élémentaire

$$\begin{array}{ccc} V - T & \xrightarrow{l} & V \\ h \downarrow & & \downarrow f \\ C - Z & \xrightarrow{j} & C \end{array}$$

tel que $\text{Pic}(CZ) = 0$.

Alors, le morphisme induit par h

$$F(C - Z)/F(C) \rightarrow F(V - T)/F(V)$$

est un isomorphisme, dont la réciproque, avec les notations de la proposition précédente, est induite par γ .

Remarque 3.3.15.– On peut interpréter ce corollaire en considérant le foncteur qui à une paire fermée (X, Z) , où X est un schéma algébrique lisse, associe le groupe abélien $F(X - Z)/F(X)$. Le corollaire signifie que ce foncteur vérifie la propriété d’excision pour les paires (C, Z) où C est une courbe algébrique, quasi-affine et lisse. On précisera cette notion dans la sous-section 5.4.1.

Mais par ailleurs, la proposition précédente est formulée exactement pour donner la proposition qui suit, qui constitue la généralisation annoncée de 1.3.26 aux carrés distingués élémentaires de la topologie de Nisnevich :

Proposition 3.3.16 *Soit C/k une courbe algébrique quasi-affine lisse.*

On considère un carré distingué élémentaire (cf définition 2.1.8)

$$\begin{array}{ccc} V - T & \xrightarrow{l} & V \\ h \downarrow & & \downarrow f \\ C - Z & \xrightarrow{j} & C \end{array}$$

tel que $\text{Pic}(CZ) = 0$.

Alors, le complexe

$$0 \rightarrow [V - T] \xrightarrow{h-l} [C - Z] \oplus [V] \xrightarrow{(j,f)} [C] \rightarrow 0$$

est contractile dans la catégorie additive $\pi\mathcal{L}_{\text{cor},k}$.

Adoptant les notations de la proposition précédente, la contraction est donnée par les morphismes

$$\begin{array}{ccc} & [C - Z] \oplus [V] & [C] \\ (\gamma, -\beta) \swarrow & & \swarrow \alpha \\ [V - T] & [C - Z] \oplus [V] & \end{array}$$

PREUVE : En effet, les relations de la proposition qui précède celle-ci sont exactement les relations qui montrent que la contraction définie ci-dessus est une équivalence d’homotopie entre le morphisme identité et le morphisme nul.

3.3.2.2 Cohomologie de la droite affine

La proposition que l’on a énoncée ci-dessus, nous permet d’obtenir le résultat fondamental qui suit. C’est une légère généralisation de la proposition 5.4 de [FSV00c] ; elle est donc pour l’essentiel due à V. Voevodsky.

Soit C/k une courbe algébrique. On commence par introduire la propriété suivante sur C :

(N) Pour toute extension finie L/k , $\text{Pic}(C \otimes_k L) = 0$.

Remarque 3.3.17.– Si cette propriété est vraie pour C , elle l’est pour tout ouvert de C . Si C est affine d’anneau A , cela revient à dire (cf [EGA4], 21.7.6 et 21.7.7) que pour toute extension finie L/k , l’anneau $A \otimes_k L$ est factoriel.

Cette propriété implique que pour tout sous-schéma fermé Z de C de dimension nulle, $\text{Pic}(CZ) = 0$. Dès lors :

Théorème 3.3.18 *Soit C/k une courbe algébrique quasi-affine lisse vérifiant la propriété (N).*

Soit F un préfaisceau homotopique, et t une topologie sur \mathcal{L}_k telle que $t = \text{Nis}$ ou $t = \text{Zar}$.

Alors, pour tout entier naturel n , le n -groupe de cohomologie de Čech de C à coefficient dans F est égal à

$$\check{H}_t^n(C; F) = \begin{cases} F(C) & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, le préfaisceau F restreint au petit site Zariski C_{Zar} est un faisceau pour la topologie de Zariski.

PREUVE : On peut se réduire au cas où C est connexe. D'après la proposition 3.3.14, pour tout carré distingué $(C, C - Z, V)$, le complexe suivant

$$0 \rightarrow F(V) \rightarrow F(V - T) \oplus F(C - Z) \rightarrow F(V - T) \rightarrow 0$$

est contractile.

Comme les familles couvrantes associés aux carrés distingués forment une base pour la topologie de Nisnevich, l'assertion pour $t = \text{Nis}$ en découle.

Par ailleurs, les recouvrements ouverts formés de deux ouverts sont aussi associés à un carré distingué évident, et comme ces recouvrements forment une base pour la topologie de Zariski, l'assertion pour la cohomologie de Čech avec $t = \text{Zar}$ en découle.

Enfin, tout ouvert U de C satisfait la propriété (N). Il en résulte d'après la proposition 1.3.26 que F vérifie la condition des faisceaux relativement à U et à tout recouvrement ouvert de U ; donc F est un faisceau pour la topologie de Zariski sur C_{Zar} . \square

Corollaire 3.3.19 *Soit C/k une courbe algébrique quasi-affine lisse vérifiant la propriété (N).*

Soit F un préfaisceau homotopique, et t une topologie sur \mathcal{L}_k telle que $t = \text{Nis}$ ou $t = \text{Zar}$.

Alors, pour tout entier $n > 0$,

$$H_t^n(C; F_t) = 0$$

PREUVE : En effet, puisque la t -cohomologie de F à coefficient dans C est nulle en dimension strictement supérieure à 1, il suffit d'appliquer [Mil80], III.2.10 pour conclure. \square

Remarque 3.3.20.– Dans les hypothèses de ce théorème, le fait que C vérifie la propriété (N) est non seulement suffisant mais nécessaire. En effet, soit C/k une courbe algébrique lisse telle que pour tout préfaisceau homotopique, $H^1(C; F_{\text{Nis}}) = 0$. Alors, si L/k est une extension finie, notant $j : \text{Spec}(L) \rightarrow \text{Spec}(k)$ le morphisme associé, on peut considérer le faisceau homotopique $j_*j^*\mathbb{G}_m$, où \mathbb{G}_m est vu comme un faisceau sur \mathcal{L}_k . Alors, $H^1(C; j_*j^*\mathbb{G}_m) = \text{Pic}(C \otimes_k L)$, ce qui montre que C vérifie la propriété (N).

3.3.2.3 Démonstration finale

On arrive au but de cette sous-section :

Théorème 3.3.21 *Soit F un préfaisceau homotopique, alors F_{Nis} (considéré comme préfaisceau avec transfert), est invariant par homotopie.*

PREUVE : On fait cette démonstration en trois étapes :

1) *Le faisceau Zariski F_{Zar} est un préfaisceau homotopique.*

Le point délicat est de montrer que F_{Zar} est muni d'une structure de faisceau avec transferts. Pour cela, on adopte la démonstration de [FSV00c], proposition 4.22 et 4.25. Elle consiste à montrer que le préfaisceau séparé pour la topologie de Zariski

$$s(F)(X) = F(X)/\text{Ker} \left(F(X) \rightarrow \bigoplus_{(U_i)_i \text{ rec. de } X} F(U_i) \right)$$

admet une structure de préfaisceau avec transferts, en utilisant la proposition 3.3.1 (cf *loc. cit.*, 4.22). On en déduit qu'il existe une unique structure de préfaisceau avec transferts sur F_{Zar} telle que $F \rightarrow F_{\text{Zar}}$ soit un morphisme de préfaisceaux avec transferts (cf *loc. cit.*, 4.25). Pour cela, on utilise à nouveau 3.3.1 mais aussi le résultat suivant :

Pour tout schéma semi-local W ,
formellement lisse et essentiellement de type fini sur k , $F_{\text{Zar}}(W) = F(W)$. (3.1)

2) On utilise le lemme suivant :

Lemme 3.3.22 *(F désigne toujours un préfaisceau homotopique sur k .)*

On considère la topologie $t = \text{Zar}$ ou Nis sur \mathcal{L}_k . Si pour toute extension de type fini K/k et tout préfaisceau homotopique G sur E , $G_t(\mathbb{A}_K^1) = G(\mathbb{A}_K^1)$, alors F_t est invariant par homotopie.

PREUVE : Soit X un schéma algébrique lisse. On doit montrer que l'application

$$F_t(X) \rightarrow F_t(\mathbb{A}^1 \times X)$$

est bijective.

Or l'application $F_t(\mathbb{A}^1 \times X) \rightarrow F_t(X)$ induite par la section nulle de \mathbb{A}_X^1 en est une rétraction. Il suffit donc de montrer que cette dernière application est injective.

On peut supposer que X est connexe. Soit U un ouvert non vide de X . Alors, dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F_t(\mathbb{A}^1 \times X) & \longrightarrow & F_t(\mathbb{A}^1 \times U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_t(X) & \longrightarrow & F_t(U) \end{array}$$

les flèches horizontales sont injectives d'après la proposition 3.3.1.

Considérons maintenant la limite inductive de ces diagrammes lorsque U parcourt l'ensemble ordonné des ouverts de X . Si x est le point générique de X , on obtient donc le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F_t(\mathbb{A}^1 \times X) & \longrightarrow & F_t(\mathbb{A}^1 \times X_x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_t(X) & \longrightarrow & F_t(X_x) \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales sont encore injectives ($\mathbb{A}^1 \times X_x$ et X_x sont des pro-objets). Soit K le corps des fonctions de X , qui est une extension séparable de k . Notons $\tau : \text{Spec}(K) \rightarrow \text{Spec}(k)$ le morphisme canonique. Puisque (X, x) est tautologiquement un modèle de K , on a un isomorphisme de pro-objets canonique $(K) \rightarrow X_x$. Or, d'après la proposition 3.3.1 (qui se généralise par les mêmes démonstrations au cas où $t = \text{Zar}$, compte tenu de l'étape précédente), on a

$$\begin{aligned} (F_t)(K) &= \tau^*(F_t)(\text{Spec}(K)) = (\hat{\tau}^*F)_t(\text{Spec}(K)) \\ (F_t)(\mathbb{A}^1 \times (K)) &= (\hat{\tau}^*F)_t(\mathbb{A}_K^1). \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que le morphisme canonique $(\hat{\tau}^*F)_t(\mathbb{A}_K^1) \rightarrow (\hat{\tau}^*F)_t(\text{Spec}(K))$ est injectif, et on s'est donc ramené à l'hypothèse du lemme.

3) Le lemme précédent, ainsi que le théorème 3.3.18 appliqué avec $t = \text{Zar}$, montre que F_{Zar} est invariant par homotopie.

Or par ailleurs, F_{Zar} est séparé pour la topologie de Nisnevich. En effet, soit X un schéma connexe dans \mathcal{L}_k , et $(W_i)_i$ un recouvrement de X pour la topologie de Nisnevich, obtenu par composition de recouvrements élémentaires. On doit montrer que

$$F_{\text{Zar}}(X) \rightarrow \bigoplus_i F_{\text{Zar}}(W_i)$$

est injectif. Soit $a \in F_{\text{Zar}}(X)$ est tel que pour tout indice i , $a|_{W_i} = 0$. A nouveau, il existe un indice i tel que W_i est un ouvert non vide de X . Dès lors, d'après la proposition 3.3.1 appliquée à l'ouvert dense W_i de X et à $t = \text{Zar}$, on en déduit que $a = 0$.

Dès lors, si on applique le théorème 3.3.18 au préfaisceau homotopique F_{Zar} , avec $t = \text{Nis}$, on en déduit

$$F_{\text{Nis}}(C) = (F_{\text{Zar}})_{\text{Nis}}(C) = \check{H}_{\text{Nis}}^0(C; F_{\text{Zar}}) = F_{\text{Zar}}(C) = F(C).$$

Dès lors, le lemme de l'étape 2 appliqué avec $t = \text{Nis}$ nous permet de conclure. \square

Remarque 3.3.23.— Dans notre exposé, cette démonstration est donc partiellement incomplète. Précisons toutefois que l'assertion (3.1) résulte de la proposition analogue de 1.3.24, où l'on remplace le singleton $\{x\}$ par un nombre fini de points de X , en utilisant à nouveau 1.3.11 pour l'existence d'une compactification au voisinage de ce nombre fini de points.

Le théorème précédent implique donc les propriétés suivantes des faisceaux homotopiques :

Corollaire 3.3.24 *Le foncteur $a_{tr} : \mathcal{P}_k^{tr} \rightarrow \mathcal{N}_k^{tr}$ laisse stable la propriété d'invariance par homotopie.*

Il induit donc un foncteur $a_{Htr} : \mathbf{H}\mathcal{P}_k^{tr} \rightarrow \mathbf{H}\mathcal{N}_k^{tr}$ qui est adjoint à gauche du foncteur d'inclusion $\mathbf{H}\mathcal{N}_k^{tr} \hookrightarrow \mathbf{H}\mathcal{P}_k^{tr}$. De plus, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}\mathcal{P}_k^{tr} & \xrightarrow{a_{Htr}} & \mathbf{H}\mathcal{N}_k^{tr} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{P}_k & \xrightarrow{a_{Nis}} & \mathcal{N}_k. \end{array}$$

Corollaire 3.3.25 *La catégorie des faisceaux homotopiques est abélienne et de Grothendieck (cf définition C.1.4) et admet des sommes et produits infinis.*

De plus, le foncteur d'inclusion $\mathbf{H}\mathcal{N}_k^{tr} \hookrightarrow \mathcal{N}_k^{tr}$ est exact.

PREUVE : En effet, il résulte du corollaire précédent que a_{Htr} est exact. Dès lors, la première partie de la proposition résulte des lemmes élémentaires C.1.3 et C.1.7.

La deuxième partie résulte du fait que le noyau (resp. conoyau) d'un morphisme $u : F \rightarrow G$ de faisceaux avec transferts est invariant par homotopie dès que F et G sont invariants par homotopie. \square

On obtient même la propriété suivante qui éclaire la démonstration du théorème 3.3.21 :

Corollaire 3.3.26 *Soit F un préfaisceau homotopique.*

Alors, le morphisme canonique $F_{Zar} \rightarrow F_{Nis}$ est un isomorphisme.

PREUVE : D'après ce qui précède, le faisceau F_{Nis} est un préfaisceau homotopique. Dès lors, le corollaire résulte de 3.3.5 appliqué au morphisme de préfaisceaux homotopiques $F \rightarrow F_{Nis}$ et à la topologie $t = Zar$. \square

3.4 Modules homotopiques (avec transferts)

Dans cette partie, on revient au cas général d'une base S régulière, noethérienne et de dimension de Krull finie, définie sur k .

Toutefois, certaines propositions nécessitent l'hypothèse que $S = \text{Spec}(k)$; on le précisera alors.

3.4.1 Graduation inférieure

Définition 3.4.1 *Soit F un préfaisceau homotopique sur S , on définit le préfaisceau homotopique F_{-1} par la formule :*

$$F_{-1}(X) = \text{coKer} (F(\mathbb{A}^1 \times X) \rightarrow F(\mathbb{G}_m \times X))$$

pour X dans \mathcal{L}_S .

On justifie cette définition puisque la catégorie des préfaisceaux avec transferts sur S est abélienne, et que d'après le lemme des cinq, F_{-1} est de plus invariant par homotopie.

Par ailleurs, on obtient une rétraction

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbb{A}^1 \times X) & \longrightarrow & F(\mathbb{G}_m \times X) \\ \simeq \downarrow & \swarrow s_1^* & \\ F(X) & & \end{array}$$

Le morphisme s_1 est obtenu par l'immersion fermée $\{1\} \times X \rightarrow \mathbb{G}_m \times X$. On dispose donc de la suite exacte courte scindée :

$$0 \rightarrow F(\mathbb{A}^1 \times X) \rightarrow F(\mathbb{G}_m \times X) \rightarrow F_{-1}(X) \rightarrow 0.$$

3.4.2.– On considérera désormais que $F_{-1}(X) \subset F(\mathbb{G}_m \times X)$ au moyen de la section associée à la rétraction plus haut. Par ailleurs, cette inclusion est naturelle en X puisqu'il en est de même de la rétraction.

Lemme 3.4.3 *Soit F un préfaisceau homotopique dans $\mathbf{H}\mathcal{P}_S^{\text{tr}}$.*

Il existe un isomorphisme canonique, naturel en F ,

$$F_{-1} \xrightarrow{\simeq} \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_S^{\text{tr}}}(\text{L}_S[\mathbb{G}_m/\{1\}], F),$$

pour lequel on a noté $\text{L}_S[\mathbb{G}_m/\{1\}]$ le conoyau, dans la catégorie des faisceaux avec transferts sur S , de l'immersion fermée $\{1\} \rightarrow \mathbb{G}_m$.

PREUVE : Considérant la rétraction canonique de $F(\mathbb{A}^1 \times X) \rightarrow F(\mathbb{G}_m \times X)$, on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow F_{-1}(X) \rightarrow F(\mathbb{G}_m \times X) \rightarrow F(X) \rightarrow 0$$

dans laquelle le dernier morphisme correspond à la section $X \rightarrow \mathbb{G}_m \times X, x \mapsto (x, 1)$. Or, $F(\mathbb{G}_m \times X) = \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_S^{\text{tr}}}(\text{L}_S[\mathbb{G}_m], F)(X)$. Il suffit maintenant d'appliquer le fait que $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}_S^{\text{tr}}}(\cdot, F)$ est exact à gauche pour terminer la démonstration. \square

On en déduit dès lors le corollaire suivant :

Corollaire 3.4.4 *Si F est un faisceau homotopique sur S , le préfaisceau F_{-1} est un faisceau homotopique sur S .*

Par ailleurs, le foncteur $(\cdot)_{-1}$ dispose d'une propriété plus remarquable encore pour les faisceaux homotopiques :

Proposition 3.4.5 *(cas $S = \text{Spec}(k)$) Le foncteur*

$$\mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}} \rightarrow \mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}, F \mapsto F_{-1}$$

est exact.

PREUVE : Soit donc

$$0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$$

une suite exacte de faisceaux homotopiques ; montrons que la suite

$$0 \rightarrow F_{-1} \rightarrow G_{-1} \rightarrow H_{-1} \rightarrow 0$$

de faisceaux homotopiques est exacte. D'après le lemme 3.4.3, on sait déjà que ce foncteur est exact à gauche.

Puis, d'après la proposition 3.3.4, il suffit de montrer l'exactitude sur les fibres en un point E/k dans \mathcal{E}_k^s .

Par définition, on a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & F(\mathbb{A}_E^1) & \longrightarrow & G(\mathbb{A}_E^1) & \longrightarrow & H(\mathbb{A}_E^1) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & F(\mathbb{G}_m \times (E)) & \longrightarrow & G(\mathbb{G}_m \times (E)) & \xrightarrow{(*)} & H(\mathbb{G}_m \times (E)) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & F_{-1}(E) & \longrightarrow & G_{-1}(E) & \longrightarrow & H_{-1}(E) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0.
 \end{array}$$

Toutes les lignes de ce diagramme sont exactes car F, G et H sont invariants par homotopie. Il reste donc à montrer que la flèche $(*)$ est surjective. Or, on connaît son conoyau qui s'inscrit dans la suite exacte de cohomologie

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow F(\mathbb{G}_m \times (E)) \rightarrow G(\mathbb{G}_m \times (E)) \rightarrow H(\mathbb{G}_m \times (E)) \\
 \rightarrow H^1(\mathbb{G}_m \times (E); F) \rightarrow \dots
 \end{aligned}$$

Par changement de base, il suffit maintenant d'appliquer le théorème 3.3.18 pour conclure que $H^1(\mathbb{G}_m \times (E); F) = 0$, et achever la démonstration. \square

Définition 3.4.6 Soit F un faisceau homotopique sur S .

On définit par récurrence le faisceau homotopique F_{-n} , qui est l'application du foncteur $(\cdot)_{-1}$ n fois à F .

Exemple 3.4.7.— Le cas des k -Extensions étales :

Proposition 3.4.8 Soit X un schéma algébrique étale.

1. Le faisceau avec transferts $L[X]$ est invariant par homotopie.
2. Pour tout entier $n > 0$, $L[X]_{-n} = 0$.

PREUVE : Comme X est somme directe de spectres de la forme $\text{Spec}(E)$, où E/k est finie séparable, on peut se restreindre au cas $X = \text{Spec}(E)$.

Dès lors, si Y est un schéma algébrique lisse,

$$c(Y, \text{Spec}(E)) = \mathbb{Z}^{\pi_0(Y_E)}$$

où l'on a posé $Y_E = Y \times_k \text{Spec}(E)$, et $\pi_0(\cdot)$ est le foncteur des composantes connexes (pour la topologie de Zariski).

Dès lors, si Y est géométriquement connexe, il s'ensuit que $L[\text{Spec}(E)](Y) = \mathbb{Z}$. Comme \mathbb{A}_k^1 est géométriquement connexe, le foncteur $L[\text{Spec}(E)]$ est invariant par homotopie.

Par ailleurs, comme \mathbb{G}_m est aussi géométriquement connexe, il s'ensuit par définition que $L[\text{Spec}(E)]_{-1} = 0$. \square

3.4.2 Sphère de Tate

Lemme 3.4.9 *Soit F un faisceau homotopique sur S .*

On a un isomorphisme canonique

$$F_{-1} \simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{N}_S^{\text{tr}}}(h_0 L_S[\mathbb{G}_m/1], F).$$

PREUVE : Compte tenu du lemme 3.4.3, on regarde le morphisme d'adjonction canonique $L_S[\mathbb{G}_m/1] \rightarrow h_0 L_S[\mathbb{G}_m/1]$ qui résulte du fait que h_0 est adjoint à gauche du foncteur d'oubli.

Celui-ci induit un morphisme

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{N}_S^{\text{tr}}}(h_0 L_S[\mathbb{G}_m/1], F) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{N}_S^{\text{tr}}}(L_S[\mathbb{G}_m/1], F).$$

Or, soit X un S -schéma algébrique lisse, le morphisme induit sur les sections de X est alors

$$\text{Hom}_{\mathcal{N}_S^{\text{tr}}}(L_S[X] \otimes^{tr} h_0 L_S[\mathbb{G}_m/1], F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{N}_S^{\text{tr}}}(L_S[X] \otimes^{tr} L_S[\mathbb{G}_m/1], F).$$

Comme ces deux derniers groupes sont isomorphes à $\text{Hom}_{\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}(h_0(L_S[X] \otimes^{tr} L_S[\mathbb{G}_m/1]), F)$ d'après le lemme 3.1.10 (par des isomorphismes compatibles au morphisme considéré), on peut conclure. \square

Définition 3.4.10 *On appelle sphère de Tate (sur S) le faisceau homotopique $h_0 L_S[\mathbb{G}_m/1]$, que l'on note S_t^1 .*

Par ailleurs, si $n \in \mathbb{N}$, on note S_t^n le faisceau homotopique $(S_t^1)^{\otimes^{H^{\text{tr}}}, n}$.

Dès lors, le lemme précédent se traduit par un isomorphisme canonique

$$F_{-1} \simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}}}(S_t^1, F)$$

que l'on peut d'ailleurs généraliser pour tout entier $n \geq 0$ en un isomorphisme canonique

$$F_{-n} \simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}}}(S_t^n, F).$$

Remarque 3.4.11.— Dans le cas où $S = \text{Spec}(k)$, on peut de plus considérer les faisceaux S_t^n comme des points pour les faisceaux homotopiques, puisque le groupe abélien $\text{Hom}_{\mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}(S_t^n, F)$ n'est autre que le groupe $F_{-n}(k)$, et constitue donc un foncteur fibre (au sens de 3.3.8) pour la catégorie abélienne $\mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ (d'après la proposition 3.4.5).

Par ailleurs, les puissances de la sphère de Tate admettent la présentation suivante :

Proposition 3.4.12 *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq i \leq n$ deux entiers, et notons $\iota^i : \mathbb{G}_m^{n-1} \rightarrow \mathbb{G}_m^n$ l'immersion fermée donnée sur les points rationnels par l'application $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, 1, \dots, x_n)$, où la coordonnée 1 est en i -ème position.*

Il existe une suite exacte courte canonique dans $\mathbf{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$

$$\bigoplus_{i=1}^n h_0 L_S [\mathbb{G}_m^{n-1}] \xrightarrow{\sum_i \iota_*^i} h_0 L_S [\mathbb{G}_m^n] \longrightarrow S_t^n \rightarrow 0.$$

Si $n = 1$, le morphisme de gauche admet une rétraction, et on obtient donc une décomposition canonique dans $\mathbf{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$

$$h_0 L_S [\mathbb{G}_m] \simeq \mathbb{Z}_S \oplus S_t^1.$$

PREUVE : On peut en effet appliquer le lemme 3.1.10, pour obtenir le calcul :

$$\begin{aligned} S_t^n &= h_0 L_S [\mathbb{G}_m/1] \otimes^{Htr} \dots \otimes^{Htr} h_0 L_S [\mathbb{G}_m/1] \\ &\simeq h_0 (L_S [\mathbb{G}_m/1] \otimes^{tr} \dots \otimes^{tr} L_S [\mathbb{G}_m/1]). \end{aligned}$$

Or, par exactitude à droite du foncteur produit tensoriel, le faisceau avec transferts qui apparaît est simplement le faisceau avec transfert obtenu comme conoyau du morphisme

$$\bigoplus_{i=1}^n L_S [\mathbb{G}_m^{n-1}] \xrightarrow{\sum_i \iota_*^i} L_S [\mathbb{G}_m^n].$$

Comme h_0 est exact à droite (puisqu'adjoint à gauche), on en déduit la suite exacte courte

$$\bigoplus_{i=1}^n h_0 L_S [\mathbb{G}_m^{n-1}] \xrightarrow{\sum_i \iota_*^i} h_0 L_S [\mathbb{G}_m^n] \longrightarrow S_t^n \rightarrow 0.$$

Enfin, pour le cas $n = 1$, la rétraction est donnée par le morphisme de projection $\mathbb{G}_m \rightarrow \text{Spec}(k)$. \square

La proposition suivante est un calcul dû à V. Voevodsky (cf [FSV00b], 3.4.2) dont la généralisation au cas d'une base d'égale caractéristique ne pose pas de problème :

Proposition 3.4.13 *Soit X un S -schéma algébrique lisse, alors le morphisme composé suivant*

$$\mathcal{O}_X^\times = \mathbb{G}_m(X) \xrightarrow{\Gamma} c_S(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow \pi_S(X, \mathbb{G}_m) = h_0 L_S [\mathbb{G}_m](X) \rightarrow S_t^1(X)$$

est un isomorphisme (Γ est l'application graphe, et les autres morphismes sont les épimorphismes canoniques).

PREUVE : Considérons, d'après la proposition 3.4.12, la suite exacte courte de $\mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$:

$$0 \rightarrow h_0 L_S [\{1\}] \xrightarrow{i_*} h_0 L_S [\mathbb{G}_m] \rightarrow S_t^1 \rightarrow 0$$

où i est l'immersion fermée canonique.

Mais par ailleurs, on peut considérer le triangle commutatif suivant dans $\mathbf{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$

$$\begin{array}{ccc} h_0L_S[\{1\}] & \xrightarrow{i_*} & h_0L_S[\mathbb{G}_m] \\ p_* \uparrow & & \swarrow j_* \\ h_0L_S[\mathbb{A}_k^1] & & \end{array}$$

où $j : \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ est l'immersion ouverte canonique et $p : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \text{Spec}(k)$ la projection. Comme le morphisme induit p_* est un isomorphisme, on obtient encore une suite exacte courte

$$0 \rightarrow S_t^1 \rightarrow h_0L_S[\mathbb{G}_m] \xrightarrow{j_*} h_0L_S[\mathbb{A}_k^1] \rightarrow 0$$

puisqu'on a $s_* \circ j_*$ est une rétraction de i_* .

Or, soit X un S -schéma algébrique lisse ; le théorème 1.3.18 donne le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_S(X, \mathbb{G}_{m,S}) & \xrightarrow{j_*|_X} & \pi_S(X, \mathbb{A}_S^1) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \text{Pic}(\mathbb{P}_X^1, X_1 \sqcup X_\infty) & \xrightarrow{r_\infty} & \text{Pic}(\mathbb{P}_X^1, X_\infty). \end{array}$$

Pour calculer le morphisme $j_*|_X$, on est donc ramené à calculer le morphisme de restriction r_∞ (qui à une trivialisations sur $X_1 \sqcup X_\infty$ associe sa restriction à X_∞). Considérons donc la suite exacte longue associée au groupe de Picard relatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{G}_m(\mathbb{P}_X^1) & \twoheadrightarrow & \mathbb{G}_m(X_1 \sqcup X_\infty) & \xrightarrow{(1)} & \text{Pic}(\mathbb{P}_X^1, X_1 \sqcup X_\infty) & \twoheadrightarrow & \text{Pic}(\mathbb{P}_X^1) \twoheadrightarrow \text{Pic}(X_1 \sqcup X_\infty) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{G}_m(\mathbb{P}_X^1) & \longrightarrow & \mathbb{G}_m(X_\infty) & \longrightarrow & \text{Pic}(\mathbb{P}_X^1, X_\infty) & \longrightarrow & \text{Pic}(\mathbb{P}_X^1) \longrightarrow \text{Pic}(X_\infty). \end{array}$$

Ce diagramme de suite exacte nous permet donc de conclure que le noyau de $j_*|_X$ s'identifie avec le noyau du morphisme de projection $\mathbb{G}_m(X_1) \oplus \mathbb{G}_m(X_\infty) \rightarrow \mathbb{G}_m(X_\infty)$.

Par ailleurs, puisque la flèche (1) est induite par le graphe, la forme précise de l'isomorphisme en découle. \square

Remarque 3.4.14.– Ainsi, on obtient un isomorphisme de faisceaux dans \mathcal{N}_k

$$\mathbb{G}_m(\cdot) \rightarrow S_t^1.$$

Ceci munit donc canoniquement le faisceau $\mathbb{G}_m(\cdot)$ d'une structure de faisceau avec transferts. Or cette structure est particulièrement simple. En effet, si X et Y sont des schémas algébriques lisses connexes, et $Z \subset X \times_k Y$ un sous-schéma fermé intègre dont la projection sur X est fini surjective, on peut considérer le morphisme Z^* défini par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_Y(Y)^\times & \longrightarrow & \mathcal{O}_Z(Z)^\times & \hookrightarrow & \kappa(Z)^\times \\ & \searrow Z^* & \downarrow & & \downarrow N_{\kappa(Z)/\kappa(X)} \\ & & \mathcal{O}_X(X)^\times & \hookrightarrow & \kappa(X)^\times, \end{array}$$

où $N_{\kappa(Z)/\kappa(X)}$ désigne la norme de l'extension finie correspondante. La flèche pointillée est définie car Y est normal, ce qui implique que l'anneau $\mathcal{O}_X(X)$ est intégralement clos.

Ce procédé munit donc le faisceau $\mathbb{G}_m(\cdot)$ de transferts. On peut vérifier que l'isomorphisme de la proposition précédente $\mathbb{G}_m(\cdot) \rightarrow S_t^1$ est alors un morphisme de faisceaux avec transferts, pour la structure que l'on vient de définir sur $\mathbb{G}_m(\cdot)$.

Remarque 3.4.15.– On obtient en particulier l'isomorphisme

$$k^\times = \mathbb{G}_m(k) \simeq (c(k, \mathbb{G}_m) / c(k, \{1\})) / \sim_h$$

où \sim_h est la relation d'homotopie.

Soit Ω une clôture algébrique de k . Alors, $c(k, \mathbb{G}_m)$ est en bijection avec les points fermés de \mathbb{G}_m , autrement dit, avec les éléments algébriques sur k dans Ω .

Le morphisme $\mathbb{G}_m(k) \rightarrow c(k, \mathbb{G}_m)$ consiste donc uniquement à voir un élément de k^\times comme un point fermé (rationnel) de \mathbb{G}_m .

Par ailleurs, soient x un élément de Ω algébrique sur k , et Q_x son polynôme minimal. Alors,

$$\{x\} \sim_h \{Q_x(0)\}.$$

Par ailleurs, si x et y sont dans $k^\times \setminus \{1\}$, on a encore

$$\{x\} + \{y\} \sim_h \{x.y\}.$$

On a donc montré d'une deuxième façon que la flèche $\mathbb{G}_m(k) \rightarrow c(k, \mathbb{G}_m)$ induit un morphisme de groupes surjectif $\mathbb{G}_m(k) \rightarrow h_0(\mathcal{L}_S[\mathbb{G}_m/\{1\}])(k)$.

On en déduit une détermination explicite des gradués inférieurs de la sphère de Tate :

Corollaire 3.4.16 *Pour tout entier $n > 0$,*

$$(S_t^1)_{-n} = \begin{cases} \mathbb{Z}_S & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La notation \mathbb{Z}_S désigne le faisceau Zariski constant sur \mathcal{L}_S de valeur \mathbb{Z} .

PREUVE : Par définition, et d'après la proposition 3.4.13, on dispose de la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_m(\mathbb{A}^1 \times X) \xrightarrow{j^*} \mathbb{G}_m(\mathbb{G}_m \times X) \rightarrow (S_t^1)_{-1}(X) \rightarrow 0.$$

Or, si X est connexe, $\mathbb{G}_m(\mathbb{G}_m \times X) = \mathbb{G}_m(X) \oplus \mathbb{Z}$, et le morphisme j^* correspond à l'inclusion de $\mathbb{G}_m(X)$ dans le groupe précédent. Donc dans ce cas, $(S_t^1)_{-1}(X) = \mathbb{Z}$. Le résultat pour $n = 1$ en découle puisque S_t^1 est additif en tant que faisceau.

Par ailleurs, la même suite exacte montre que les gradués inférieurs du faisceau constant \mathbb{Z}_S sont nuls, d'où les autres cas. \square

3.4.3 S_t^1 -modules

On note $\mathbb{Z} - \mathcal{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$ la catégorie des objets \mathbb{Z} -gradués de la catégorie $\mathcal{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$, munie de sa structure monoïdale symétrique canonique (cf C.5.3). Par ailleurs, pour des raisons qui apparaîtront plus tard (cf 9.1.7), si F_* est un faisceau homotopique gradué, on note $F_*\{n\}$ le faisceau gradué obtenu par décalage de F_* de n rangs à gauche.

On adopte tout d'abord les notations suivantes :

Définition 3.4.17 Si F est un faisceau homotopique sur S , on note $\Sigma^\infty F$ le faisceau gradué

$$(\Sigma^\infty F)_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ S_t^n \otimes^{Htr} F & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque $F = \underline{\mathbb{Z}}_S$, on pose $S_t^* = \Sigma^\infty \underline{\mathbb{Z}}_S$.

Cela définit un foncteur $\Sigma^\infty : \mathbf{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}} \rightarrow \mathbb{Z} - \mathbf{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$.

Ainsi, pour tout faisceau homotopique F , on a l'égalité

$$S_t^* \hat{\otimes} F = \Sigma^\infty(F).$$

3.4.18.– Considérons le morphisme gradué $\mu : S_t^* \hat{\otimes} S_t^* \rightarrow S_t^*$ qui en degré n est égal à la somme des isomorphismes $S_t^p \otimes^{Htr} S_t^q \rightarrow S_t^n$ pour $n = p + q$. Ce morphisme munit l'objet S_t^* d'une structure d'algèbre dans la catégorie additive monoïdale $\mathbb{Z} - \mathbf{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$, où le morphisme unité est le morphisme canonique $\underline{\mathbb{Z}}_S \rightarrow S_t^*$.

Proposition 3.4.19 L'algèbre graduée S_t^* de $\mathbf{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$ est anti-commutative (cf définition C.5.4).

PREUVE : Soit ϵ l'endomorphisme «inverse» du schéma en groupe de \mathbb{G}_m .

Alors, la permutation des facteurs sur \mathbb{G}_m^2 est égale dans la catégorie $\pi\mathcal{L}_{\text{cor},k}$ au morphisme $1 \times_k \epsilon$ (appliquer la méthode du début de la démonstration 5.5.10 pour produire une homotopie).

Or, ϵ induit un morphisme canonique sur S_t^1 que l'on note encore ϵ . Dès lors, la permutation des facteurs sur S_t^2 est aussi égale au morphisme $1 \otimes^{Htr} \epsilon$. Or, à travers l'isomorphisme de 3.4.16

$$\text{Hom}_{\mathbf{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}}}(S_t^1, S_t^1) \simeq \mathbb{Z},$$

et le morphisme ϵ est envoyé sur -1 , ce qui permet de conclure. \square

Définition 3.4.20 On appelle S_t^1 -module sur S tout S_t^* -module gradué à gauche de $\mathbf{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$ (cf définition C.4.7). On note $S_t^1 - \mathbf{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$ la catégorie des S_t^1 -modules.

L'algèbre S_t^* est l'algèbre graduée engendrée par S_t^1 en degré 1. Ainsi, la donnée d'un S_t^1 -module est équivalente à la donnée d'un faisceau homotopique gradué F_* muni d'un morphisme gradué de degré 1 :

$$\tau : S_t^1 \otimes^{Htr} F_* \rightarrow F_*$$

Pour cette raison, lorsqu'on considérera un S_t^1 -module, on utilisera la notation abrégée (F_*, τ) où τ désigne le morphisme $S_t^1 \otimes^{Htr} F_* \rightarrow F_*$.

D'après le lemme C.5.6, le faisceau homotopique gradué $S_t^* \hat{\otimes} F = \Sigma^\infty F$ est muni d'une structure canonique de S_t^1 -module, et le foncteur $\Sigma^\infty : \mathbf{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}} \rightarrow S_t^1 - \mathbf{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$ qui en résulte est adjoint à gauche du foncteur d'oubli.

3.4.21.– Soit (F_*, τ) un S_t^1 -module. On pose

$$\Omega(F_*) = \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}}}(S_t^1, F_*) \{1\}.$$

Par adjonction, le morphisme τ correspond à un morphisme gradué (de degré 0)

$$\epsilon : F_* \rightarrow \Omega(F_*).$$

Puisque S_t^* est une algèbre graduée anti-commutative, F_* est muni d'une structure de S_t^* -module à droite canonique, telle que F_* est un (S_t^*, S_t^*) -bimodule (cf C.5.7). Ainsi, on en déduit une structure de S_t^* -module à droite sur ΩF_* telle que l'application ci-dessus soit un morphisme de module à droite. A cette structure correspond une unique structure de S_t^* -module à gauche ; donc $\Omega(F_*)$ est canoniquement un S_t^1 -module, et le morphisme ci-dessus est un morphisme de S_t^1 -module.

La catégorie $\mathbb{Z} - \mathbf{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$ admet des conoyaux (car le conoyau d'un faisceau est un faisceau) ; elle est de plus abélienne lorsque $S = \text{Spec}(k)$ d'après 3.3.25. Ainsi les propositions C.5.8 et C.5.9 se reformulent dans notre cas en la proposition :

Proposition 3.4.22 *La catégorie $S_t^1 - \mathbf{H}\mathcal{N}_S^{\text{tr}}$ est munie d'une structure monoïdale symétrique canonique.*

De plus, la catégorie $S_t^1 - \mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ est abélienne et sa structure monoïdale est fermée.

Ajoutons que la catégorie $S_t^1 - \mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ admet toutes les limites inductives et toutes les limites projectives.

3.4.4 Définition finale

Définition 3.4.23 *Soit (F_*, τ) un S_t^1 -module.*

On dit que (F_, τ) est un module homotopique avec transferts sur S si et seulement si $\forall n \in \mathbb{Z}$, le morphisme $\epsilon_n : F_n \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{N}_S^{\text{tr}}}(S_t^1, F_{n+1})$ obtenu par adjonction à partir de τ_n est un isomorphisme.*

On notera de façon abrégé (F_, ϵ) un tel module, ϵ désignant la famille d'isomorphismes de définition $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.*

On note enfin $\mathbf{H}\mathcal{M}_S^{\text{tr}}$ la sous-catégorie des S_t^1 -modules sur S formée des modules homotopiques avec transferts.

Autrement dit, (F_*, ϵ) est un module homotopique si et seulement si le morphisme $\epsilon : F_* \rightarrow \Omega F_*$ est un isomorphisme.

Remarque 3.4.24.– Ces objets sont l'analogie des Ω -spectres de la topologie algébrique, considérant que S_t^1 est la sphère dans notre situation.

Convention 3.4.25.– Conformément à la convention 3.1.3, on abrégera la terminologie «module homotopique avec transferts» en «module homotopique».

Remarque 3.4.26.– On fera attention qu'il s'agit là d'un abus, les modules homotopiques définis dans [Mor], déf. 3.2.1 étant plus généraux. Dans le cas où S est le spectre d'un corps parfait, on conjecture suivant F.Morel que les modules homotopiques avec

transferts définis ci-dessus sont équivalents aux modules homotopiques orientés de *loc.cit.*

3.4.27.– Soit (F_*, ϵ) un module homotopique. On définit par récurrence sur l'entier $p > 0$ le morphisme

$$\epsilon_{n,p} : F_n \rightarrow (F_{n+p})_{-p}$$

en posant, $\epsilon_{n,1} = \epsilon_n$, et $\epsilon_{n,p}$ égal à

$$F_n \xrightarrow{\epsilon_{n,p-1}} (F_{n+p-1})_{-(p-1)} \xrightarrow{(\epsilon_{n+p-1,1})_{-(p-1)}} ((F_{n+p})_{-1})_{-(p-1)} \xrightarrow{\sim} (F_{n+p})_{-p}.$$

3.4.4.1 Le cas où la base est un corps

On a déjà vu précédemment que dans ce cas, la catégorie $S_t^1 - \mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ est abélienne, monoïdale symétrique et fermée. De plus, elle admet toutes les limites inductives et toutes les limites projectives. On en déduit tout d'abord, à l'aide de l'exactitude du foncteur $?_{-1}$ (cf 3.4.5), la proposition suivante :

Proposition 3.4.28 *La catégorie $\mathbb{H}\mathcal{M}_k^{\text{tr}}$ est abélienne, et admet des sommes et produits quelconques. De plus, les limites inductives filtrantes y sont exactes.*

Remarque 3.4.29.– Autrement dit, la catégorie $\mathbb{H}\mathcal{M}_k^{\text{tr}}$ est non seulement abélienne, mais vérifie l'axiome AB5 de [Gro57]. Nous verrons plus tard qu'elle est même de Grothendieck (cf définition C.1.4).

Par ailleurs, l'exactitude du foncteur $?_{-1}$ permet encore de déduire facilement le lemme suivant :

Lemme 3.4.30 *Le foncteur défini dans 3.4.21*

$$\Omega : S_t^1 - \mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}} \rightarrow S_t^1 - \mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$$

est exact.

On en déduit immédiatement la construction :

Proposition 3.4.31 *Soit F_* un S_t^1 -module.*

Pour tout entier naturel n , on note $\Omega^n F_$ l'application itérée n fois de Ω à F_* . On considère alors la limite inductive filtrante dans $S_t^1 - \mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$*

$$\Omega^\infty F_* = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \Omega^n F_*.$$

Alors, $\Omega^\infty F_$ est un module homotopique.*

PREUVE : En effet, cela résulte du fait que $\Omega\Omega^\infty \simeq \Omega^\infty\Omega$, d'après le lemme précédent. \square

On utilisera plus tard ce foncteur pour montrer que la catégorie des modules homotopiques est monoïdale symétrique et fermée. La raison pour remettre à plus tard cette affirmation est que nous aurons besoin d'un théorème de Voevodsky ; or, l'esprit de ces premiers chapitres est d'exposer la théorie en minimisant les résultats admis.

Remarque 3.4.32.– Ces notations sont particulièrement inspirées de la théorie homotopique stable en topologie algébrique. Comme on l’a déjà remarqué les S_t^1 -modules correspondent aux spectres de la topologie algébrique, et les modules homotopiques aux Ω -spectres. Le foncteur Ω^∞ correspond au spectre des lacets infinis.

L’analogie de la catégorie homotopique des espaces topologiques est alors la catégorie des modules homotopiques. La différence avec la topologie algébrique tient au fait que l’on considère des spectres directement dans la catégorie homotopique, alors qu’en topologie, on considère des spectres dans la catégorie des espaces topologiques, que l’on localise ensuite à «homotopie stable près».

On remarque que la sphère S^0 de la topologie algébrique est, à homotopie près, anticommutative comme la sphère S_t^* que l’on a considéré ici. Le fait que le spectre des sphères S^0 ne soit pas commutatif sans passer à la catégorie homotopique force les topologues à utiliser (par exemple) les spectres symétriques pour définir un produit tensoriel symétrique sur les spectres.

On verra plus loin que nous n’avons pas besoin de ces considérations, car le produit tensoriel des S_t^1 -modules suffit.

Chapter 4

Modules de cycles

Dans tout ce chapitre, on adopte les conventions suivantes :

1. k désigne un corps quelconque.
2. S est un k -schéma essentiellement de type fini.
3. En l'absence de précisions, les schémas considérés sont des S -schémas essentiellement de type fini.

En tout état de cause, suivant la convention générale de cette thèse, tous les schémas de ce chapitre sont munis d'une structure de k -schéma. Pour dire que le schéma X n'est pas nécessairement muni d'une structure de S -schéma, on précisera «soit X un k -schéma».

4.1 Rappels

4.1.1 Pré-modules et modules de cycles

On rappelle les définitions suivantes introduites dans 2.1.3.4 :

Définition 4.1.1 On note \mathcal{E}_S la catégorie des morphismes essentiellement de type fini $\text{Spec}(E) \rightarrow S$ où E est un corps, avec pour morphismes les triangles commutatifs évidents. On appelle de tels morphismes simplement des points de S .

Par ailleurs, si E/S est un tel point, et v une valuation sur E , on dit que v est une valuation géométrique de E/S si et seulement si le morphisme canonique $\text{Spec}(E) \rightarrow S$ se factorise en un k -morphisme $\text{Spec}(\mathcal{O}_v) \rightarrow S$ essentiellement de type fini.

Enfin on appellera simplement traits de S les morphismes $\text{Spec}(\mathcal{O}_v) \rightarrow S$, et on les notera de façon abrégée \mathcal{O}_v/S .

Remarque 4.1.2.— Compte tenu des conventions de ce chapitre, un point de S est donc un schéma intègre dont l'ensemble sous-jacent est un singleton ; un trait de S (ou sur S) est un schéma régulier dont l'espace topologique sous-jacent est formé de deux points, l'un fermé et l'autre ouvert.

Ainsi, dans ce chapitre, on ne se restreint plus aux points qui sont essentiellement lisses sur S (cf 2.1.3.4). Pour cette raison, l'hypothèse que k est parfait est inutile, et l'on peut même effectuer la plupart des constructions dans le cas où la base est S .

Remarque 4.1.3.– Si v est une valuation géométrique sur un point E/S , $\text{Spec}(\mathcal{O}_v)$ est essentiellement de type fini sur S , donc sur k . Dès lors, cette valuation est nécessairement discrète, puisque \mathcal{O}_v est alors noethérien.

Dans cette section, on rappelle pour la commodité du lecteur la théorie des modules de cycles dues à M. Rost, telle qu'elle est exposée dans [Ros96]. On a reproduit ci-dessous exactement les définitions des paragraphes 1 et 2 :

Définition 4.1.4 *Un pré-module de cycles M sur S est la donnée :*

- D1:** *Pour tout morphisme $\varphi : E \rightarrow L$ de \mathcal{E}_S , d'un morphisme $\varphi_* : M(E) \rightarrow M(L)$ de degré 0, parfois noté $r_{L/E}$ et appelé restriction.*
- D2:** *Pour tout morphisme fini $\varphi : E \rightarrow L$ dans \mathcal{E}_S , d'un morphisme $\varphi^* : M(L) \rightarrow M(E)$ de degré 0, parfois noté $c_{L/E}$ et appelé corestriction.*
- D3:** *Pour tout point E/S , d'une action graduée de $K_*^M(E)$ sur le groupe gradué $M(E)$.*
- D4:** *Pour tout point E/S et pour toute valuation géométrique v de E/S , d'un morphisme $\partial_v : M(E) \rightarrow M(\kappa(v))$ de degré -1 , appelé résidu.*

Cette donnée doit satisfaire de plus les conditions suivantes, dans lesquelles toutes les flèches qui apparaissent sont des morphismes de \mathcal{E}_S :

- R1a:** *Pour $\psi : K \rightarrow E$ et $\varphi : E \rightarrow L$, $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$.*
- R1b:** *Pour $\varphi : K \rightarrow E$, $\psi : E \rightarrow L$, $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.*
- R1c:** *Pour $\varphi : E \rightarrow K$ fini et $\psi : L \rightarrow K$, notant $E \otimes_K L^{(0)}$ les idéaux maximaux de la k -algèbre artinienne $E \otimes_K L$, et pour z un tel idéal, $\varphi_z : L \rightarrow E \otimes_K L/z$ (respectivement ψ_z) le morphisme induit, on a*

$$\psi_* \varphi^* = \sum_{z \in E \otimes_K L^{(0)}} \text{lg}(E \otimes_K L_z) \cdot (\varphi_z)^* (\psi_z)_*$$

- R2:** *Pour $\varphi : E \rightarrow K$, $x \in K_*^M(E)$, $y \in K_*^M(K)$, $\rho \in M(E)$ et $\mu \in M(K)$, on a*

- R2a:** $\varphi_*(x \cdot \rho) = \varphi_*(x) \cdot \varphi_*(\rho)$,
- R2b:** *si φ est fini, $\varphi^*(\varphi_*(x) \cdot \mu) = x \cdot \varphi^*(\mu)$,*
- R2c:** *si φ est fini, $\varphi^*(y \cdot \varphi_*(\rho)) = \varphi^*(y) \cdot \rho$.*

- R3a:** *Soient $\varphi : E \rightarrow K$, et v une valuation géométrique de K/S . Si v induit une valuation w non triviale sur E d'indice de ramification e , notant $\bar{\varphi} : \kappa(w) \rightarrow \kappa(v)$ le morphisme induit, alors*

$$\partial_v \circ \varphi_* = e \cdot \bar{\varphi}_* \circ \partial_w.$$

- R3b:** *Soient $\varphi : E \rightarrow K$ un morphisme fini et v une valuation géométrique de E/S . Pour toute extension w de v à E (éventuellement ramifiée), on note $\varphi_w : \kappa(v) \rightarrow \kappa(w)$ le morphisme induit. Alors,*

$$\partial_v \circ \varphi^* = \sum_{w|v} \varphi_w^* \circ \partial_w.$$

R3c: Soit $\varphi : E \rightarrow K$ un morphisme, et v une valuation géométrique de K/S qui soit triviale sur E . Alors

$$\partial_v \circ \varphi_* = 0.$$

R3d: Soient φ et v comme dans R3c, et $\varphi : E \rightarrow \kappa(v)$ le morphisme induit. Alors, pour toute uniformisante π de v , et tout $\rho \in M(E)$, on a

$$\partial_v(\{-\pi\}.\varphi_*(\rho)) = \bar{\varphi}_*(\rho).$$

R3e: Pour toute valuation géométrique v de F/S , pour toute unité u de v et tout $\rho \in M(F)$, on a

$$\partial_v(\{u\}.\rho) = -\{\bar{u}\}.\rho.$$

Enfin, un morphisme $M \rightarrow N$ de pré-modules de cycles sur S est la donnée pour tout point E/S d'un morphisme $M(E) \rightarrow N(E)$ qui soit compatible aux données D1 à D4.

Remarque 4.1.5.– Si M est un pré-module de cycles sur S , on posera encore

$$s_v^\pi(\rho) = \partial_v(\{-\pi\}.\rho)$$

pour F/S un point, v une valuation géométrique de F/S , π une uniformisante de v et $\rho \in M(F)$. Rappelons que R3e entraîne alors la règle supplémentaire

R3f: : Pour toute valuation géométrique v sur F , pour tout x dans $K_n^M(F)$, pour toute uniformisante π de v et pour tout $\rho \in M(F)$, on a

$$\begin{aligned} \partial_v(x.\rho) &= \partial_v(x).s_v^\pi(\rho) + (-1)^n s_v^\pi(x).\partial_v(\rho) + \{-1\}.\partial_v(x).\partial_v(\rho), \\ s_v^\pi(x.\rho) &= s_v^\pi(x).s_v^\pi(\rho). \end{aligned}$$

On se réfère à *loc.cit.*, paragraphe 1, pour d'autres compléments sur les axiomes des pré-modules de cycles.

La définition suivante introduit les notations de *loc.cit.*, paragraphe 2 :

Définition 4.1.6 Soient M un pré-module de cycles sur S , et X un schéma.

1. Pour tout point x de X , on pose $M(x) = M(\kappa(x))$.
2. Supposons X normal. Soit η son point générique et z un point de codimension 1. Alors z correspond à une valuation discrète v_z sur le corps des fonctions de X , égal à $\kappa(\eta)$. D'après l'axiome D4, on définit donc

$$\partial_z^X = \partial_{v_z} : M(\eta) \rightarrow M(z).$$

3. Soient x et y des points de X . On note Z l'adhérence réduite de x dans X . On note \tilde{Z} le normalisé de Z ; le morphisme canonique $f : \tilde{Z} \rightarrow Z$ est fini.

Supposons que $y \in Z^{(1)}$, et notons \tilde{Z}_y la fibre de f au-dessus de y . Alors, tout point $z \in \tilde{Z}_y$ est de codimension 1 dans \tilde{Z} . Pour un tel point z , on note $\varphi_z : \kappa(y) \rightarrow \kappa(z)$ le morphisme induit par f sur les corps résiduels ; c'est un morphisme fini.

On pose alors :

$$\partial_y^x = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{z \in \tilde{Z}_y} \varphi_z^* \circ \partial_z^{\tilde{Z}} & \text{si } y \in Z^{(1)} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right\} : M(x) \rightarrow M(y).$$

Finalement, on arrive à la définition (2.1) de *loc.cit.* :

Définition 4.1.7 Soit M un pré-module de cycles sur S . On dit que M est un module de cycles si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (FD) Pour tout schéma normal X de point générique η , et pour tout $\rho \in M(\eta)$, l'ensemble $\{x \in X^{(1)} \mid \partial_x^\eta(\rho) \neq 0\}$ est fini.
- (C) Pour tout schéma X intègre, local et de dimension 2, dont on note η le point générique et x_0 le point fermé, on a

$$\sum_{x \in X^{(1)}} \partial_{x_0}^x \circ \partial_x^\eta = 0.$$

On note $\mathcal{M}\text{Cycl}_S$ la catégorie des modules de cycles sur S , munie des morphismes de pré-modules de cycles.

Les axiomes ci-dessus permettent de définir le complexe de (co)cycles à coefficients dans M :

Définition 4.1.8 Soient M un module de cycles sur S , et X un schéma.

Pour tout entier naturel p , on pose :

$$C^p(X; M) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} M(x).$$

Pour tout entier naturel p , on définit un morphisme

$$d_{X,M}^p = \sum_{(x,y) \in X^{(p)} \times X^{(p+1)}} \partial_y^x.$$

D'après les axiomes des modules de cycles, $C^*(X; M)$, muni de ces morphismes, est un complexe. On définit le p -ième groupe de Chow à coefficients dans M , noté $A^p(X; M)$, comme le p -ième groupe de cohomologie du complexe de cocycles à coefficients dans M .

4.1.9. – Numérotations : Les groupes de Chow à coefficients ainsi obtenus sont de plus bigradués, comme le yoga des poids l'impose. On rappelle les numérotations suivantes choisies par M. Rost et qui interviendront dans diverses situations :

$$\begin{aligned} C_p(X; M) &= \bigoplus_{x \in X_{(p)}} M(x) \\ C^p(X; M, m) &= \bigoplus_{x \in X^{(p)}} M_{m-p}(x) \\ C_p(X; M, m) &= \bigoplus_{x \in X_{(p)}} M_{m+p}(x). \end{aligned}$$

On obtient donc un complexe homologique $C_*(X; M)$, dont on note l'homologie $A_*(X; M)$. Les deux autres notations sont particulièrement utiles lorsqu'on veut faire intervenir des questions de poids. On fera attention que la convention adoptée ne correspond pas la convention de la cohomologie motivique, ni même à la numérotation des groupes de Chow supérieurs de Bloch ! En effet, pour un schéma algébrique lisse X (sur un corps parfait k), on dispose d'isomorphismes canoniques

$$A^p(X; K_*^M, p) \simeq CH^p(X, 0) \simeq H^p(X; \mathbb{Z}(2p)).$$

(le premier isomorphisme est évident, et l'on se réfère à la partie suivante pour le deuxième).

On aura besoin dans la suite de la caractérisation suivante, due à M. Rost (cf *loc. cit.*, 2.3), des modules de cycles sur un corps parfait :

Théorème 4.1.10 *Supposons que k est parfait.*

Soit M un pré-module de cycles sur k . Alors, M est un module de cycles si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées pour toute extension de type fini E/k :

(FDL) *Pour tout $\rho \in F(t)$, l'ensemble*

$$\{v \text{ valuation géométrique sur } F(t)/F \mid \partial_v(\rho) \neq 0\}$$

est fini.

(WR) *Soit ∂_∞ le résidu associé à la valuation à l'infini de $F(t)$, alors*

$$\partial_\infty(A^0(\mathbb{A}_F^1; M)) = 0.$$

Remarque 4.1.11.– Il n'y a pas besoin du fait que $C^*(X; M)$ soit un complexe pour définir le groupe $A^0(X; M)$, puisqu'en effet,

$$A^0(X; M) = \text{Ker}(d_{X, M}^0).$$

La référence pour ce théorème est [Ros96] theorem 2.3.

4.1.2 Les quatre «basic maps» de Rost

On rappelle dans cette partie la functorialité de base des groupes de Chow à coefficients, et plus précisément du complexe des cycles à coefficients. La référence est de nouveau [Ros96], et plus précisément les §3 et 4.

Définition 4.1.12 *Soit M un module de cycles sur S .*

1. *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas plat de dimension relative constante.*

Pour tout entier naturel p , on définit un morphisme de groupes abéliens

$$f^* : C^p(X; M, n) \rightarrow C^p(Y; M, n)$$

en posant pour tout $x \in X$, $y \in Y$,

$$(f^*)_y^x = \begin{cases} \lg(\mathcal{O}_{Z,x}) \cdot r_{\kappa(y)/\kappa(x)} & \text{si } x = f(y) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où l'on a posé $Z = g^{-1}(\overline{\{y\}})$ munie de sa structure réduite de sous-schéma fermé de X .

2. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas essentiellement de type fini. Pour tout entier naturel p , on définit un morphisme

$$f_* : C_p(X; M, n) \rightarrow C_p(Y; M, n)$$

en posant pour tout $x \in X$, $y \in Y$,

$$(f_*)_y^x = \begin{cases} c_{\kappa(x)/\kappa(y)} & \text{si } f(x) = y, \text{ et } \kappa(x)/\kappa(y) \text{ est finie} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La proposition suivante est alors constituée par les deux premiers points de la proposition 4.6 de *loc.cit.* :

Proposition 4.1.13 *Soit M un module de cycles sur S .*

Si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme plat, f^ est un morphisme de complexe.*

Si $g : Y \rightarrow X$ est un morphisme propre, g_ est un morphisme de complexe.*

Avec les hypothèses de cette proposition, on notera encore f^* et resp. f_* les morphismes induits sur les groupes de cohomologie :

$$\begin{aligned} f^* &: A^p(X; M, n) \rightarrow A^p(Y; M, n) \\ g_* &: A_p(Y; M, n) \rightarrow A_p(X; M, n) \end{aligned}$$

Remarque 4.1.14.— Cette proposition n'est pas une conséquence immédiate des axiomes, et c'est même, à notre avis, un des points délicats sur lesquels repose la théorie de M. Rost. Ainsi, dans le cas de f_* , il utilise la propriété (RC) que vérifie les modules de cycles. Cette dernière découle des axiomes (FD) et (H) des modules de cycles (cf *loc.cit.*, étape 3 de la démonstration de (2.2) et (2.3) pour cette dernière affirmation). Rappelons que la propriété (RC) est une généralisation de la loi de réciprocité de Weil.

Une functorialité plus particulière aux modules de cycles, et cruciale dans les constructions qui vont suivre se trouve dans la définition :

Définition 4.1.15 *Soient M un module de cycles sur S , et X un schéma.*

1. Soient $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{G}_m(X)$ des unités sur X . Pour tout entier naturel p , on définit un morphisme

$$\{a_1, \dots, a_r\} : C^p(X; M, n) \rightarrow C^p(X; M, n - r)$$

en posant pour tout x, y dans X

$$\{a_1, \dots, a_r\}_y^x(\sigma) = \begin{cases} \{a_1(x), \dots, a_r(x)\} \cdot \sigma & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $a_i(x)$ désigne la fibre de a_i au point x , et $\{a_1(x), \dots, a_r(x)\}$ est vu comme un élément de $K_n^M(\kappa(x))$.

2. Si Z est un fermé de X , posant $U = X - Z$, on définit un morphisme (pour la réunion $X = U \cup Z$),

$$\partial_Z^U : C^p(U; M, n) \rightarrow C^{p+1}(Z; M, n)$$

par la formule :

$$\partial_Z^U = \pi_Z \circ d_X \circ \iota_U$$

où $\pi_Z : C^{p+1}(X; M, n) \rightarrow C^{p+1}(Z; M, n)$ désigne la projection canonique,

$\iota_U : C^p(U; M, n) \rightarrow C^p(X; M, n)$ l'injection canonique.

Remarque 4.1.16.– Il est immédiat, avec les notations de cette définition, que

$$\{a_1, \dots, a_n\} = \{a_1\} \circ \dots \circ \{a_n\}.$$

Les deux derniers points de la proposition 4.6 de *loc.cit.* sont alors :

Proposition 4.1.17 Soient M un module de cycles sur S , et X un schéma.

Soit d_X^* la différentielle du complexe $C^*(X; M)$.

On obtient les relations suivantes :

1. Si $a \in \mathbb{G}_m(X)$, $\{a\} \circ d_X^* = -d_X^* \circ \{a\}$.
2. Si Z est un fermé de X , U son ouvert complémentaire, $\partial_Z^U \circ d_X^* = -d_X^* \circ \partial_Z^U$.

En conséquence, avec les notations de ces deux points, on déduit des morphismes canoniques pour tout couple d'entiers (p, n) tels que $p \geq 0$:

$$\begin{aligned} \{a\} : A^p(X; M, n) &\rightarrow A^p(X; M, n+1) \\ \partial_Z^U : A^p(X; M, n) &\rightarrow A^{p+1}(X; M, n). \end{aligned}$$

On peut déduire entre autre de ces morphismes la formule de projection suivante :

Proposition 4.1.18 (Rost, 4.1) Soit

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{q} & X' \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

un carré cartésien tel que p est plat, et f est propre. Alors, $p^* f_* = g_* q^*$.

4.1.3 Complément : catégorie enrichie des extensions

Dans cette sous-section, on montre comment, suivant [Ros96], 1.10, on peut enrichir la catégorie \mathcal{E}_S afin d'obtenir une définition abstraite des modules de cycles. Dans notre cas, enrichir signifie ajouter des morphismes en conservant les objets.

Cette catégorie nous servira essentiellement comme d'un outil pratique pour formuler les résultats de la deuxième partie.

4.1.19.– Dans ce numéro, on se donne un ensemble d'objets \mathcal{O} , et un ensemble de flèches \mathcal{F} entre ces objets. Autrement dit, on se donne une application source s et une application

but b de F dans \mathcal{O} . On peut alors considérer la catégorie libre engendrée par \mathcal{O} et \mathcal{F} , notée $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ (les objets étant sous-entendus) :

Elle a pour objets l'ensemble \mathcal{O} . Si E et L sont des éléments de \mathcal{O} , un morphisme de E dans L est formé par la donnée

1. d'un entier n , positif si $E = L$ et strictement positif sinon,
2. et d'un n -uplets $(f_n, \dots, f_1) \in \mathcal{F}^n$ tel que
 - (a) Pour tout $1 \leq i < n$, $s(f_{i+1}) = b(f_i)$,
 - (b) $s(f_n) = L$ et $b(f_1) = E$.

La composition est simplement donnée par la concaténation des n -uplets. On appellera encore un n -uplet (f_n, \dots, f_1) vérifiant les conditions ci-dessus un *composé formel*.

Cela donne bien une catégorie, l'élément neutre de E étant donné par le 0-uplet correspondant.

On considérera plutôt la catégorie libre additive $\mathbb{Z}\mathcal{L}(\mathcal{F})$ engendrée par \mathcal{F} , qui est simplement la catégorie additive engendrée par la catégorie précédente.

Supposons que l'on se soit donné un ensemble de morphismes \mathcal{R} de la catégorie $\mathbb{Z}\mathcal{L}(\mathcal{F})$. Alors, pour tous objets E et L dans \mathcal{O} , on peut considérer le sous-groupe, noté $\mathcal{R}(E, L)$, de $\text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathcal{L}(\mathcal{F})}(E, L)$ engendré par tous les morphismes de source E , de but L et de la forme

$$h \circ f \circ h'$$

où f est un élément de \mathcal{R} , et h, h' des morphismes de $\mathbb{Z}\mathcal{L}(\mathcal{F})$.

Dès lors, on définit la catégorie $\mathbb{Z}\mathcal{L}(\mathcal{F})/\mathcal{R}$ ayant pour objets l'ensemble \mathcal{O} , et pour morphisme de E dans L le groupe abélien

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathcal{L}(\mathcal{F})}(E, L) / \mathcal{R}(E, L).$$

Cette catégorie est donc la catégorie additive universelle qui contient les morphismes \mathcal{F} et qui satisfait les relations \mathcal{R} .

4.1.20.– Muni de ce formalisme, on peut définir la catégorie souhaitée. Les objets de la catégorie \mathcal{E}_S ne forment pas un ensemble ; mais par contre, cette catégorie est essentiellement petite.

On définit alors \mathcal{O} comme l'ensemble des couples (E, n) où

1. n est un entier relatif,
2. E est un point de S (plus précisément la classe d'isomorphisme d'un morphisme $\text{Spec}(E) \rightarrow S$ essentiellement de type fini).

Par ailleurs, on définit l'ensemble de flèches \mathcal{F} formé des morphismes suivants :

D1: Pour tout S -morphisme $E \xrightarrow{\varphi} L$, pour tout entier relatif n , un morphisme

$$\varphi_* : (E, n) \rightarrow (L, n).$$

D2: Pour tout S -morphisme fini $E \xrightarrow{\varphi} L$, pour tout entier relatif n , un morphisme

$$\varphi^* : (L, n) \rightarrow (E, n).$$

D3: Pour tout morphisme essentiellement de type fini $\text{Spec}(\mathcal{O}_v) \rightarrow S$ où \mathcal{O}_v est un anneau de valuation discrète de corps des fractions E , et de corps résiduel $\kappa(v)$, pour tout entier relatif n , un morphisme

$$\partial_v : (E, n) \rightarrow (\kappa(v), n - 1).$$

D4: Pour tout point E/S , pour tout symbole $\sigma \in K_r^M(E)$ où r est un entier naturel, et pour tout entier relatif n , un morphisme

$$\gamma_\sigma : (E, n) \rightarrow (E, n + r).$$

Enfin, on définit l'ensemble suivant de relations de $\mathbb{Z}\mathcal{L}(\mathcal{F})$ qui est l'exacte transposition de la définition des pré-modules de cycles :

R1a: $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$

R1b: $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$

R1c: $\psi_* \varphi^* = \sum_{z \in E \otimes_K L^{(0)}} \text{lg}(E \otimes_K L_z) \cdot (\varphi_z)^* (\psi_z)_*$

R2a: $\varphi_* \circ \gamma_x = \gamma_{\varphi_*(x)} \circ \varphi_*$

R2b: $\varphi^* \circ \gamma_{\varphi_*(x)} = \gamma_x \circ \varphi^*$

R2c: $\varphi^* \circ \gamma_y \circ \varphi_* = \gamma_{\varphi^*(y)}$

R3a: $\partial_v \circ \varphi_* = e \cdot \bar{\varphi}_* \circ \partial_w$

R3b: $\partial_v \circ \varphi^* = \sum_{w/v} \varphi_w^* \circ \partial_w$

R3c: $\partial_v \circ \varphi_* = 0$

R3d: $\partial_v \circ \gamma_{\{-\pi\}} \circ \varphi_* = \bar{\varphi}_*$

R3e: $\partial_v \circ \gamma_{\{u\}} = -\gamma_{\{\bar{u}\}} \circ \partial_v.$

On renvoie à la définition 4.1.4 pour les hypothèses de chacune de ces relations (il suffit en fait que les termes de chacune de ces égalités soient définis).

Définition 4.1.21 Avec les notations précédentes, on définit la catégorie enrichie des points de S , notée $\tilde{\mathcal{E}}_S$, égale à la catégorie

$$\mathbb{Z}\mathcal{L}(\mathcal{F})/\mathcal{R}.$$

On considérera aussi la pré-catégorie enrichie des points de S , notée $\tilde{\mathcal{E}}'_S$, égale à $\mathbb{Z}\mathcal{L}(\mathcal{F})$.

Cette catégorie est donc graduée, puisque tout objet porte par définition un degré. On notera encore $(E, *)$ l'objet de $\tilde{\mathcal{E}}_S$ égal à

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (E, n).$$

Remarque 4.1.22.— La catégorie introduite ci-dessus est pratiquement analogue à la catégorie $\tilde{\mathcal{F}}(S)$ définie par M. Rost dans *loc.cit.*, (1.10). Plus précisément, la catégorie $\tilde{\mathcal{F}}(S)$ définie par Rost est obtenue à partir de $\tilde{\mathcal{E}}_S$ en oubliant l'entier attaché à un objet. Pour ce que l'on veut en faire, la catégorie introduite ci-dessus s'avèrera plus pratique.

Grâce à cette catégorie, on peut donner la caractérisation abstraite suivante des pré-modules de cycles :

Lemme 4.1.23 *La catégorie des pré-modules de cycles sur S est équivalente à la catégorie des foncteurs additifs $\tilde{\mathcal{E}}_S \rightarrow \mathcal{A}b$.*

Enfin, le lemme suivant est une reformulation d'une partie de la remarque (1.10) de [Ros96] :

Lemme 4.1.24 *Le groupe de morphismes*

$$\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{E}}_S}((E, p), (L, q))$$

est formé des combinaisons linéaires de morphismes de la forme

$$\psi^* \circ \gamma_x \circ \varphi_* \circ (\partial_{v_r} \circ \dots \circ \partial_{v_1}) \circ \gamma_y$$

où (r, m, n) est un triplet d'entiers naturels non nuls tel que $m + n - r = q - p$, et on s'est donné

1. *Une suite de points de S , (E_1, \dots, E_{r+1}) telle que $E_1 = E$ et pour tout $1 \leq i \leq r$, une valuation géométrique v_i sur E_i telle que E_{i+1} soit le corps résiduel de v_i ,*
2. *des S -morphisms*

$$\begin{array}{ccc} E_{r+1} & & L \\ & \searrow \varphi & \swarrow \psi \\ & K & \end{array}$$

tels que φ est fini,

3. *des symboles $x \in K_n^M(L)$ et $y \in K_m^M(E)$.*

4.2 Théorie de l'intersection

Dans cette section, on utilise le travail de M. Rost pour définir une théorie de l'intersection sur les groupes de Chow à coefficients. Ici, nous avons adopté une façon légèrement différente de [Ros96] pour aborder ce problème, et nous apportons quelques compléments sur les définitions et propositions de cet article.

La première sous-section s'appuie essentiellement sur les résultats de *loc.cit.* de même que le début de la sous-section suivante, concernant le morphisme de Gysin associé à une immersion fermée régulière.

La nouveauté est que l'on a transposé certaines méthodes de [Ful98] (particulièrement §6.2) qui nous permettent de définir des morphismes de Gysin *raffinés*. Ceci nous permet de définir un morphisme pullback pour les morphismes d'intersection complète, qui coïncide avec le morphisme défini par M. Rost pour les morphismes d'intersection complète qui sont à valeurs dans un schéma lisse (cf 4.2.24 pour ce dernier point). Mais surtout, cela nous permet de démontrer une formule de projection (cf 4.2.47). Par ailleurs, on a démontré la functorialité de ces morphismes pullback dans le cas où les schémas sont lissifiables (cf définition 4.2.17 pour «lissifiable» et la proposition 4.2.27).

4.2.1.– Dans cette section, on suit la convention de [Ros96] qui consiste à **fixer un module de cycles M sur S** et à noter

$$\alpha : X \bullet \longrightarrow Y$$

tout morphisme de complexes $C^*(X; M) \rightarrow C^*(Y; M)$, où X et Y sont des schémas.

On ne précisera pas les degrés de ces morphismes en général, et on admettra aussi que ces morphismes commutent au signe près avec les différentielles.

On adopte par contre une convention différente de [Ros96] qui consiste à voir ces morphismes à quasi-isomorphisme près. Un morphisme $\alpha : X \bullet \longrightarrow Y$ peut donc être le quasi-inverse d'un morphisme de complexes bien défini.

Remarque 4.2.2.– C'est un choix personnel : on perd en précision, mais on gagne en simplicité. Précisons en effet que nous ne sommes intéressés que par la cohomologie des complexes considérés. On attire tout de même l'attention sur le fait que nos constructions peuvent toujours être explicitées dans la catégorie des complexes, à la manière de *loc.cit.* (c'est-à-dire que l'on peut définir les applications au niveau des cycles au moyen de *choix* que M. Rost appelle *coordinations*).

4.2.1 Spécialisation au cône normal

On s'appuie ici sur la définition de l'espace de déformation de B.3. Rappelons qu'on a défini, pour toute immersion fermée $i : Y \rightarrow X$, un espace de déformation muni d'immersions fermées $C_Y X \rightarrow D_Y X$ et $\mathbb{G}_m \times X \rightarrow D_Y X$. Dans la suite, on confondra la source et l'image de ces deux immersions fermées. Ainsi, on aura

$$D_Y X = C_Y X \sqcup \mathbb{G}_m \times X.$$

On rappelle tout d'abord la définition du morphisme de spécialisation du paragraphe 11 de [Ros96], qui est une extension du paragraphe 5.2 de [Ful98] au cas du module de cycles M :

Définition 4.2.3 Soit $i : Y \rightarrow X$ une immersion fermée. On appelle morphisme de spécialisation au cône normal, noté $J(X, Y)$, le morphisme composé

$$X \bullet \xrightarrow{\pi^*} X \times \mathbb{G}_m \bullet \xrightarrow{\{t\}} X \times \mathbb{G}_m \bullet \xrightarrow{\partial} C_Y X$$

où $\pi : X \times \mathbb{G}_m \rightarrow X$ est la projection, t est la fonction coordonnée canonique sur \mathbb{G}_m , et ∂ est le morphisme bord pour la réunion $D_Y X = C_Y X \sqcup \mathbb{G}_m \times X$. C'est un morphisme de degré 0.

On notera souvent, comme dans [Ful98], $\sigma_Y X$ ce morphisme de spécialisation.

La proposition suivante est le lemme 11.3 de [Ros96] :

Proposition 4.2.4 *Considérons un carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{j} & X' \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

tel que i est une immersion fermée et f un morphisme plat.

On note $Cf : C_{Y'} X' \rightarrow C_Y X$ le morphisme canonique attaché à ce carré cartésien (voir B.2.3). C'est un morphisme plat d'après B.2.8.

Par ailleurs, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma_Y X} & C_Y X \\ f^* \downarrow & & \downarrow Cf^* \\ X' & \xrightarrow{\sigma_{Y'} X'} & C_{Y'} X' \end{array}$$

Par contre, la functorialité par rapport au morphisme image directe n'est pas énoncée ; on le fait maintenant :

Proposition 4.2.5 *Considérons un carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{j} & X' \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

tel que i est une immersion fermée et f est propre. Alors, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\sigma_{Y'} X'} & C_{Y'} X' \\ f_* \downarrow & & \downarrow Cf_* \\ X & \xrightarrow{\sigma_Y X} & C_Y X, \end{array}$$

dans lequel $Cf : C_{Y'} X' \rightarrow C_Y X$ désigne le morphisme propre induit par le carré cartésien de départ.

PREUVE : Rappelons la functorialité du cône normal :

$$\begin{array}{ccccc} C_{Y'} X' & \xrightarrow{h} & g^*(C_Y X) & \xrightarrow{g'} & C_Y X \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & Y & \xrightarrow{g} & X. \end{array}$$

Alors, h est une immersion fermée (d'après le lemme B.2.8 appliqué à notre carré cartésien). Par ailleurs, le carré qui apparaît étant cartésien, g' est propre, donc $Cf = g' \circ h$ est un morphisme propre.

On doit montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 X' \bullet & \xrightarrow{\pi'^*} & \mathbb{G}_m \times X' \bullet & \xrightarrow{\{t\}} & \mathbb{G}_m \times X' \bullet & \xrightarrow{\partial'} & C_{Y'} X' \\
 \downarrow f_* & & & & & & \downarrow h_* \\
 & & & & & & g^*(C_Y X) \\
 & & & & & & \downarrow g'_* \\
 X \bullet & \xrightarrow{\pi^*} & \mathbb{G}_m \times X \bullet & \xrightarrow{\{t\}} & \mathbb{G}_m \times X \bullet & \xrightarrow{\partial} & C_Y X,
 \end{array}$$

dans lequel on a noté ∂ (resp. ∂') le morphisme bord pour $D_Y X = C_Y X \sqcup \mathbb{G}_m \times X$ (resp. $D_{Y'} X = C_{Y'} X \sqcup \mathbb{G}_m \times X'$).

Or, on a aussi une functorialité de l'espace de déformation :

$$\begin{array}{ccccc}
 D_{Y'} X' & \xrightarrow{\tilde{h}} & D_Y X \times_X X' & \xrightarrow{\tilde{f}} & D_Y X \\
 & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathbb{A}_{X'}^1 & \xrightarrow{1 \times f} & \mathbb{A}_X^1
 \end{array}$$

où le morphisme \tilde{h} est une immersion fermée, et le morphisme \tilde{f} est propre.

D'après le numéro B.3 où l'on explicite cette functorialité, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{G}_m \times X & \xlongequal{\quad} & \mathbb{G}_m \times X' & \xrightarrow{1 \times f} & \mathbb{G}_m \times X' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 D_{Y'} X' & \xrightarrow{\tilde{h}} & D_Y X \times_X X' & \xrightarrow{\tilde{f}} & D_Y X \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 C_{Y'} X' & \xrightarrow{h} & g^*(C_Y X) & \xrightarrow{g'} & C_Y X,
 \end{array}$$

dans lequel chaque carré est cartésien.

On peut donc appliquer la proposition 4.4 de [Ros96] au morphisme propre $\tilde{f} \circ \tilde{h}$; on en déduit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{G}_m \times X' \bullet & \xrightarrow{(1 \times f)_*} & \mathbb{G}_m \times X \\
 \downarrow \partial' & & \downarrow \partial \\
 C_{Y'} X' \bullet & \xrightarrow{(g' \circ h)_*} & C_Y X.
 \end{array}$$

Or, les carrés suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 X' \bullet \xrightarrow{\pi'^*} \mathbb{G}_m \times X' & & \mathbb{G}_m \times X' \bullet \xrightarrow{\{t\}} \mathbb{G}_m \times X' \\
 \downarrow f_* & \downarrow (1 \times f)_* & \downarrow (1 \times f)_* \\
 X \bullet \xrightarrow{\pi^*} \mathbb{G}_m \times X & & \mathbb{G}_m \times X \bullet \xrightarrow{\{t\}} \mathbb{G}_m \times X.
 \end{array}$$

La commutativité du carré de droite est évidente, alors que la commutativité du carré de gauche résulte de la formule de projection (cf [Ros96], proposition 4.1 (3)). \square

4.2.2 Morphismes de Gysin

4.2.2.1 Immersion fermée régulière

Dans cette sous-section, on suit le traitement de [Ful98] de la théorie de l'intersection, en rappelant la définition du morphisme de Gysin qui intervient implicitement dans l'article [Ros96].

Le lecteur constatera que l'on s'appuie beaucoup sur [Ros96] en espérant que les compléments que l'on y apporte soient éclairant.

On rappelle pour cela le corollaire de la proposition 8.6 de *loc.cit.* :

Proposition 4.2.6 (Rost) *Soient E/X un fibré vectoriel sur X , et $p : E \rightarrow X$ la projection canonique.*

Alors, le morphisme $p^ : X \bullet \rightarrow E$ est un isomorphisme.*

Compte tenu de la convention qu'on a adopté, ce corollaire nous suffit pour définir le morphisme suivant (à quasi-isomorphisme près) :

Définition 4.2.7 *Si $i : Y \rightarrow X$ est une immersion régulière, on définit le morphisme de Gysin de i , noté i^* , de degré 0, comme la composée :*

$$X \bullet \xrightarrow{\sigma_Y X} N_Y X \bullet \xrightarrow{(p^*)^{-1}} Y$$

où $p : N_Y X \rightarrow Y$ est le morphisme de projection canonique.

Remarque 4.2.8.– Intuitivement, ce morphisme de Gysin correspond à l'intersection avec le cycle de X induit par le sous-schéma fermé Y d'un cycle quelconque de X (voir aussi [Ful98], 8.1.1 pour une affirmation plus précise).

Proposition 4.2.9 *Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme lisse, et $i : Y \rightarrow X$ une section de f . Alors, i est une immersion régulière, et on a*

$$i^* \circ f^* = 1_Y.$$

PREUVE : Le fait que i est régulière est classique. Par ailleurs, le morphisme induit par f sur les espaces de déformation au cône normal

$$D_Y X \xrightarrow{Df} D_Y Y$$

est alors plat, puisque f est lisse.

On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_m \times X & \longrightarrow & D_Y X & \longleftarrow & N_Y X \\ \downarrow 1 \times f & & \downarrow Df & & \downarrow Nf \\ \mathbb{G}_m \times Y & \longrightarrow & D_Y Y & \longleftarrow & N_Y Y \end{array}$$

et on peut lui appliquer la proposition 4.4 de [Ros96]. Donc, dans le diagramme suivant, le carré (1) est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \sigma_Y Y & & & \\
 & & & \curvearrowright & & & \\
 Y & \longrightarrow & \mathbb{G}_m \times Y & \xrightarrow{\{t\}} & \mathbb{G}_m \times Y & \xrightarrow{\partial} & N_Y Y \\
 \downarrow f^* & & \downarrow 1 \times f^* & & \downarrow 1 \times f^* & & \downarrow (Nf)^* \\
 X & \longrightarrow & \mathbb{G}_m \times X & \xrightarrow{\{t\}} & \mathbb{G}_m \times X & \xrightarrow{\partial} & N_Y X \\
 & & & \sigma_Y X & & & \\
 & & & \curvearrowleft & & &
 \end{array}$$

Par ailleurs, les deux premiers carrés sont commutatifs (cf *loc.cit.* (4.1) pour le premier, et (4.3) pour le deuxième).

Dès lors, considérant $p : N_Y X \rightarrow Y$ et $q : N_Y Y \rightarrow Y$ les projection canoniques, on peut encore transformer le diagramme précédent en le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \xrightarrow{\sigma_Y Y} & N_Y Y & \xrightarrow{(q^*)^{-1}} & Y \\
 \downarrow f^* & & \downarrow (Nf)^* & \searrow (2) & \nearrow \\
 X & \xrightarrow{\sigma_Y X} & N_Y X & \xrightarrow{(p^*)^{-1}} & Y
 \end{array}$$

où le triangle (2) est commutatif puisque le pullback par un morphisme plat est naturel .

Finalement, on s'est donc réduit au cas trivial du morphisme identité de Y . Or, l'axiome R3d des pré-modules de cycles permet de montrer facilement que le morphisme de Gysin $(1_Y)^*$ est l'identité sur les complexes de cycles, ce qui conclut. \square

Corollaire 4.2.10 *Soit $E \xrightarrow{p} X$ un fibré vectoriel.*

Alors, si $s : X \rightarrow E$ est une section quelconque de ce fibré, le morphisme de Gysin de s est égal à $(p^)^{-1}$.*

Remarque 4.2.11.— Ceci nous permet d'interpréter l'opération de pullback définie à travers la déformation au cône normal. La recette est la suivante : pour intersecter un cycle de X avec un sous-schéma fermé Z immergé régulièrement dans X , on déforme d'abord l'immersion fermée de Z en la section nulle du fibré normal de Z dans X , et pour cette dernière section l'opération d'intersection est triviale puisqu'il s'agit de la réciproque du pullback par la projection canonique.

On introduit maintenant une série de propositions qui se trouveront généralisées par la suite, mais qui nous servent de lemmes pour parvenir aux constructions finales. Le lecteur constatera que les preuves s'appuient encore ici sur [Ros96] :

Lemme 4.2.12 *Soit*

$$\begin{array}{ccc}
 Y' & \xrightarrow{j} & X' \\
 g \downarrow & & \downarrow f \\
 Y & \xrightarrow{i} & X
 \end{array}$$

un carré cartésien tel que i est une immersion fermée régulière, et f un morphisme plat.

Alors, j est une immersion régulière et $j^ f^* = g^* i^*$.*

PREUVE : Pour la première affirmation, on se réfère à [EGA4], 19.1.5(ii).

On conclut dès lors par application de la proposition 4.2.4 (et par naturalité du pullback plat pour les morphismes de projection des fibrés normaux de i et j). \square

Les lemmes suivants sont des cas particuliers de la functorialité générale de 4.2.27. Ce premier lemme est celui de [Ful98], prop. 6.5(a) (dans le cas particulier des immersions régulières) :

Lemme 4.2.13 *Soient $Z \xrightarrow{i} Y$ une immersion régulière de codimension d , et $p : Y \rightarrow X$ un morphisme plat de dimension relative n .*

Si pi est un morphisme plat de dimension relative $n - d$, alors $(pi)^ = i^*p^*$.*

PREUVE : En effet, les hypothèses impliquent que l'on se trouve dans le cas du lemme 11.4 de [Ros96]. On en déduit donc $\sigma_{ZY} \circ p^* = q^*(pi)^*$ où $q : N_Z Y \rightarrow Z$ est la projection canonique. Ceci conclut. \square

On continue d'égrainer des cas particuliers de 4.2.27 :

Lemme 4.2.14 *Soient $Z \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{i} X$ des immersions fermées régulières. Alors, ij est une immersion fermée régulière, et $(ij)^* = j^*i^*$.*

PREUVE : D'après le lemme 4.2.12, on peut tout d'abord déformer l'immersion j en l'immersion $k : N_Y X|_Z \rightarrow N_Y X$

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{i^*} & Y & \xrightarrow{j^*} & Z \\
 & \searrow \sigma_Y X & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\
 & & N_Y X & \xrightarrow{k^*} & N_Y X|_Z
 \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont induits par les projections canoniques de fibrés.

Or, M. Rost a déjà fait le pas essentiel pour nous dans la démonstration du théorème 13.1 de [Ros96] puisqu' il a prouvé

$$J(N_Y X, N_Y X|_Z) \circ J(X, Y) = J(N_Z X, N_Z Y) \circ J(X, Z),$$

grâce à l'existence de l'espace de déformation double (cf §10), et par application des lemmes 11.6 et 11.7 de *loc.cit.*

Précisons que l'on a identifié $N(N_Y X, N_Y X|_Z)$ et $N(N_Z X, N_Z Y)$ par l'isomorphisme canonique. Dès lors, si l'on note $l : N_Z Y \rightarrow N_Z X$ l'immersion fermée induite par i , on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{i^*} & Y & \xrightarrow{j^*} & Z \\
 & \searrow \sigma_Z X & & & \downarrow \sim q^* \\
 & & N_Z X & \xrightarrow{l^*} & N_Z Y
 \end{array}$$

où $q : N_Z Y \rightarrow Z$ est la projection canonique.

On s'est donc réduit au lemme 4.2.13. En effet, si l'on note encore $p : N_Z X \rightarrow Z$ la projection canonique, on peut appliquer ce lemme à p et l . On en déduit $q^* = l^*p^*$, c'est-à-dire $p^* = (q^*)^{-1}l^*$, ce qui conclut. \square

Il nous reste un dernier cas pour compléter cette série de lemmes préliminaires. Il se trouve à nouveau dans [Ful98], prop. 6.5(b), comme proposition préliminaire :

Lemme 4.2.15 *Soient $i : Z \rightarrow Y$ une immersion fermée régulière, et $p : Y \rightarrow X$ un morphisme lisse.*

Si pi est une immersion fermée régulière, alors $(pi)^ = i^*p^*$.*

PREUVE : A nouveau, il nous suffit d'appliquer le lemme 11.5 de [Ros96] (et la naturalité du morphisme pullback par un morphisme plat). \square

4.2.2.2 Morphismes localement d'intersection complète

On rappelle la définition VIII.1.1 de [SGA6] :

Définition 4.2.16 *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme.*

On dit que f est localement d'intersection complète si et seulement si pour tout point y de Y , il existe un voisinage ouvert U de y dans Y tel que f admette la factorisation

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i} & Z \\ j \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

dans laquelle j est l'immersion ouverte canonique, i est une immersion fermée régulière et p est un morphisme lisse.

On introduit ci-dessous une notion très faible qui nous permet de globaliser cette propriété locale des morphismes localement d'intersection complète pour la rapprocher de la définition de [Ful98], B.7.6.

Définition 4.2.17 *Soit X un S -schéma. On dira que X est lissifiable sur S (ou simplement «lissifiable» dans ce chapitre) si et seulement si il existe un S -schéma \bar{X} lisse et une S -immersion fermée $X \rightarrow \bar{X}$.*

Remarque 4.2.18.— Cette condition est beaucoup plus faible que la résolution des singularités. On peut par exemple restreindre l'étude aux schémas quasi-projectifs.

Remarque 4.2.19.— La condition précédente impose que X est localement de type fini. Par convention, puisque l'on travaille ici avec des schémas essentiellement de type fini, on pourra considérer que X est lissifiable sur S si et seulement si on peut le plonger dans un schéma essentiellement lisse sur S .

Dès lors, on obtient la proposition suivante

Proposition 4.2.20 *Soit $f : Y \rightarrow X$ un S -morphisme, où Y est lissifiable sur S .*

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est localement d'intersection complète.
2. Il existe une factorisation de f

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ i \nearrow & & \searrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

où i est une immersion fermée régulière, et p un morphisme lisse.

PREUVE : Le sens 2 \Rightarrow 1 est tautologique. Pour l'autre implication, on considère \bar{Y} un S -schéma lisse muni d'une immersion fermée $\iota : Y \rightarrow \bar{Y}$. On en déduit alors la factorisation suivante de f

$$\begin{array}{ccc} & X \times_S \bar{Y} & \\ i \nearrow & & \searrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

où l'on a posé $i = f \times_S \iota$, et où p est le morphisme de projection. Par définition, p est lisse. De plus, i est une immersion fermée car le morphisme de projection canonique $q : X \times_S \bar{Y} \rightarrow \bar{Y}$ est séparé.

Il nous suffit dès lors de nous référer à la proposition 1.2 de [SGA6], VIII, pour conclure que i est alors régulière, puisque f est localement d'intersection complète. \square

Remarque 4.2.21.— La caractérisation précédente est la définition que prend W.Fulton des morphismes localement d'intersection complète (cf [Ful98], B.7.6). Mais par ailleurs, on aura besoin plus loin d'un résultat un peu plus fin qui nécessitera à nouveau l'hypothèse «lissifiable», c'est pourquoi nous avons choisi de la dégager explicitement.

A tout morphisme d'intersection complète, nous allons associer un morphisme de Gysin qui généralise le cas d'une immersion fermée régulière. Pour cela, il nous suffit du lemme suivant :

Lemme 4.2.22 *Soit*

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ i \nearrow & & \searrow p \\ Y & & X \\ & j \searrow & \nearrow q \\ & Q & \end{array}$$

un diagramme commutatif, où i, j sont des immersions fermées régulières, et p, q des morphismes lisses.

Alors, $i^*p^* = j^*q^*$.

PREUVE : On fait la construction suivante :

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi \nearrow & P & \searrow p \\ Y & \xrightarrow{(i,j)} & P \times_X Q & & X \\ & & \searrow \chi & Q & \nearrow q \end{array}$$

Alors, puisque π, χ, p et q sont lisses, on a $\pi^*p^* = \chi^*q^*$.

Il ne reste plus maintenant qu'à appliquer le lemme 4.2.15 à l'immersion régulière (i, j) et au morphisme lisse π (resp. χ), puisque $\pi \circ (i, j) = i$ (resp. $\chi \circ (i, j) = j$) est une

immersion régulière. □

On en déduit la définition suivante :

Définition 4.2.23 *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement d'intersection complète tel que X est lissifiable.*

On définit un morphisme de Gysin pour f , noté f^ , en considérant une factorisation arbitraire $f = pi$ où i est une immersion fermée régulière et p un morphisme lisse (grâce à 4.2.20), et en posant $f^* = i^*p^*$.*

Le lemme précédent garantit que cette définition est indépendante du choix de la factorisation.

On fait les calculs suivants, qui montrent que notre notation n'introduit pas d'ambiguïté :

Proposition 4.2.24 *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme, tel que Y est lissifiable.*

1. *Si f est une immersion fermée régulière, alors f est localement d'intersection complète, et les morphismes respectifs associés à f en tant qu'immersion et morphisme localement d'intersection complète coïncident.*
2. *Si f est plat et localement d'intersection complète (autrement dit plat et d'intersection complète au sens de [EGA4], 19.3.6), le morphisme de Gysin associé à f coïncide avec le pullback défini en 4.1.13.*
3. *Si X et Y sont lisses sur S , alors f est localement d'intersection complète et f^* coïncide avec le morphisme f^\bullet de [Ros96], §12.*

Remarque 4.2.25.— Pour nous, l'intérêt des morphismes localement d'intersection complète est qu'ils permettent d'unifier ces trois types de morphismes.

PREUVE : 1. Tautologique.

2. C'est le lemme 4.2.13.

3. On peut alors factoriser f en l'immersion fermée régulière correspondant à son graphe (car Y est lisse sur S), suivie de la projection de XY sur Y , qui est lisse puisque X est lisse sur S). Cela montre que f est localement d'intersection complète ; de plus, c'est justement cette factorisation qui permet à M. Rost de définir le morphisme f^\bullet , en utilisant le morphisme de Gysin de l'immersion fermée régulière que l'on a définie, et le pullback par le morphisme de projection, qui est plat. Il en résulte tautologiquement que le pullback défini par M. Rost coïncide avec notre définition dans ce cas. □

Remarque 4.2.26.— Pour définir le morphisme f^\bullet , M. Rost n'a besoin que de supposer que Y est plat sur S , en imposant la factorisation du morphisme f .

On arrive finalement à la formule d'associativité générale.

Proposition 4.2.27 *Soient $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ deux morphismes localement d'intersection complète tels que Z et Y soient lissifiables.*

Alors, fg est localement d'intersection complète, et $(fg)^ = g^*f^*$.*

Remarque 4.2.28.– D’après [SGA6], VIII.1.5., gf est localement d’intersection complète sans hypothèse sur Z et Y .

PREUVE : Tout d’abord, d’après la proposition 4.2.20, il existe une factorisation de f en une immersion régulière $i : Y \rightarrow P$ suivie d’un morphisme lisse p .

Considérons maintenant M un S -schéma lisse et $\iota : Z \rightarrow M$ une immersion fermée (au-dessus de S). Revenons à la preuve de la proposition citée ci-avant, et posons $Q = Y \times_S M$. Alors, $j = (g, \iota) : Z \rightarrow Q$ est une immersion fermée régulière (toujours d’après [SGA6], VII.2.1). On note $q : Q \rightarrow Y$ la projection canonique sur Y .

Dès lors, si l’on pose $R = P \times_S M$, et si l’on note $l : R \rightarrow P$ la projection canonique, on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{j} & Q & \xrightarrow{k} & R \\ & \searrow g & \downarrow q & \text{(1)} & \downarrow l \\ & & Y & \xrightarrow{i} & P \\ & & & \searrow f & \downarrow p \\ & & & & X, \end{array}$$

dans lequel le carré (1) est cartésien.

Puisque (kj, pl) forme une factorisation du morphisme fg , celui-ci est bien localement d’intersection complète et il nous suffit d’appliquer le lemme 4.2.12 au carré cartésien (1) pour conclure l’égalité attendue. \square

4.2.2.3 Formule de projection et raffinement

On continue à suivre [Ful98], et on définit donc un morphisme de Gysin raffiné :

Définition 4.2.29 *Considérons un carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} Y' \xrightarrow{j} X' \\ g \downarrow \Delta \downarrow f \\ Y \xrightarrow[i]{} X \end{array}$$

où i est une immersion fermée régulière.

On peut alors définir le morphisme de Gysin du carré Δ , noté Δ^* , comme la composée des morphismes

$$X' \xrightarrow{\sigma'} C_{Y'} X' \xrightarrow{h_*} g^* N_Y X \xrightarrow{(p^*)^{-1}} Y'$$

où σ' est le morphisme de spécialisation associé à l’immersion fermée j , $h : C_{Y'} X' \rightarrow g^* N_Y X$ est l’immersion fermée induite par Δ (cf B.2.3) et $p : g^* N_Y X \rightarrow Y'$ est la projection canonique du fibré considéré.

Remarque 4.2.30.– Dans [Ful98], §6.2, on considère plutôt ce morphisme comme le morphisme de Gysin de i (sous-entendu raffiné par j), et on le note $i^!$. Notre notation est plus lourde mais a l’avantage d’être plus précise.

Lemme 4.2.31 *Soit*

$$\begin{array}{ccc} Y' \hookrightarrow & j & X' \\ g \downarrow & \Delta & \downarrow f \\ Y \hookrightarrow & i & X \end{array}$$

un carré cartésien tel que i est une immersion fermée régulière. On suppose que le morphisme induit $h : N_{Y', X'} \rightarrow g^ N_Y X$ est un isomorphisme.*

Alors, $\Delta^ = j^*$.*

PREUVE : En effet, l'hypothèse entraîne que $h_* = (h^*)^{-1}$.

Dès lors, par functorialité du morphisme pullback par rapport aux morphismes plats, le triangle du diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' \bullet \xrightarrow{\sigma} & N_{Y', X'} \bullet & \xrightarrow{(h^*)^{-1}} g^*(N_Y X) \bullet \\ & \searrow (p^*)^{-1} & \swarrow (q^*)^{-1} \\ & & Y' \bullet \end{array}$$

dans lequel les flèches p et q désignent les projections canoniques. Ceci conclut en revenant à la définition. \square

Corollaire 4.2.32 *Soit*

$$\begin{array}{ccc} Y' \hookrightarrow & j & X' \\ g \downarrow & \Delta & \downarrow f \\ Y \hookrightarrow & i & X \end{array}$$

un carré cartésien.

On suppose que i et j sont toutes deux des immersions fermées régulières partout de même codimension. Alors, $\Delta^ = j^*$.*

PREUVE : D'après le lemme précédent, il nous suffit de montrer que le morphisme canonique $h : N_{Y', X'} \rightarrow g^* N_Y X$ est un isomorphisme.

On considère donc \mathcal{I} (resp. \mathcal{J}) l'idéal de i (resp. j). Alors, h est le spectre du morphisme d'algèbres symétriques engendré par l'épimorphisme canonique $g^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \rightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ (cf annexe B). Par ailleurs, puisque ces deux fibrés sont localement libres de même rang en tous points, cet épimorphisme est un isomorphisme, ce qui conclut. \square

Remarque 4.2.33.– On notera que ce cas correspond justement au cas classique (si f est une immersion fermée) où l'intersection est propre.

Corollaire 4.2.34 *Soit*

$$\begin{array}{ccc} Y' \hookrightarrow & j & X' \\ g \downarrow & \Delta & \downarrow f \\ Y \hookrightarrow & i & X \end{array}$$

un carré cartésien.

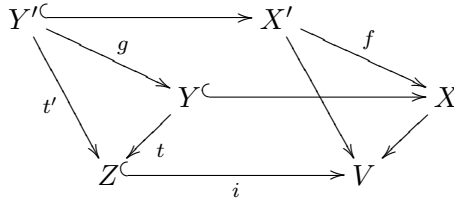
On suppose que i est une immersion fermée régulière, et f un morphisme plat.

Alors, j est une immersion régulière et $\Delta^ = j^*$.*

PREUVE : En effet, il suffit d'appliquer la remarque B.2.8 qui affirme justement que le morphisme canonique $N_{Y'}X' \rightarrow g^*(N_X Y)$ est un isomorphisme. \square

Pour nous, la raison d'être du morphisme de Gysin (raffiné) d'une immersion non nécessairement régulière est le fait qu'il permet de donner une formule de projection générale :

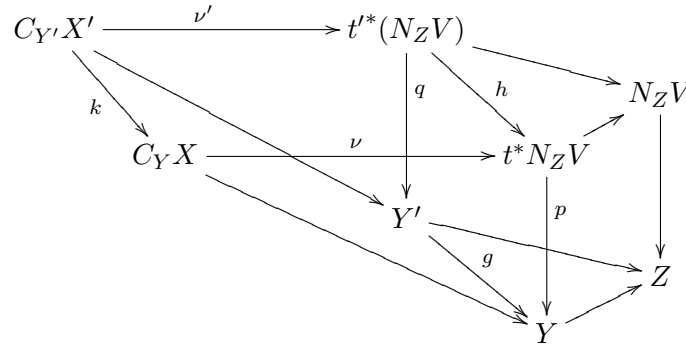
Proposition 4.2.35 *Considérons un diagramme*



où chaque carré est cartésien, i est une immersion fermée régulière et f un morphisme propre. On appelle Δ (resp. Θ) le carré de devant (resp. de derrière) ayant pour arête i . Alors,

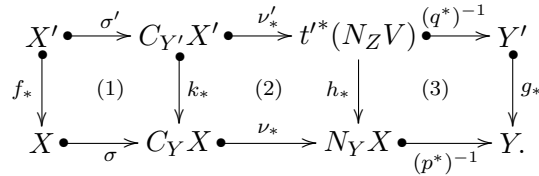
$$\Delta^* \circ f_* = g_* \circ \Theta^*.$$

PREUVE : On commence par introduire les morphismes canoniques qui correspondent à la functorialité du cône normal (cf B.2.3) définis par le diagramme



où p, p' sont les projections canoniques, et ν, ν' des immersions fermées.

Dès lors, la proposition est équivalente à la commutativité du diagramme ci-dessous :



Or, le carré (1) est commutatif d'après la proposition 4.2.5 (σ et σ' sont les morphismes de spécialisation au cône normal respectifs), le carré (2) d'après la functorialité du pushout par un morphisme propre, et le carré (3), par application de la formule de projection (élémentaire) 4.1.18. \square

On note le corollaire immédiat suivant dont la formulation est plus simple que la proposition précédente :

Corollaire 4.2.36 *Soit*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{j} & X' \\ g \downarrow & \Delta & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

un carré cartésien tel que i est une immersion fermée régulière, et f un morphisme propre.

Alors, $i^ f_* = g_* \Delta^*$.*

Remarque 4.2.37.– Nous n’aurons pas besoin d’autres propriétés que cette formule de projection vis-à-vis du morphisme de Gysin raffiné. On note toutefois que l’on doit pouvoir encore continuer le travail de transposition de [Ful98] aux modules de cycles, et montrer ainsi que le morphisme de Gysin raffiné d’une immersion fermée est fonctoriel (6.5 de *loc.cit.*), commutatif (6.4 de *loc.cit.*) et vérifie une formule du type «excess intersection formula» (6.3 de *loc.cit.*). Ceci permettrait de définir le morphisme de Gysin raffiné d’un morphisme localement d’intersection complète, et achèverait la transposition du chapitre 6 de *loc.cit.* au cas des modules de cycles.

4.2.3 Produit d’intersection

Dans cette sous-section, on suppose que S est algébrique lisse.

Par ailleurs, tous les schémas sont supposés être algébriques.

Autrement dit, le mot «schéma» désigne toujours un S -schéma, mais qui est supposé de plus être de type fini. Un tel schéma porte une unique structure de k -schéma, à laquelle on se référera sans plus de précisions.

4.2.3.1 Définition ; produit croisé

On revient dans ce qui suit à la méthode suivie par M. Rost pour définir le produit d’intersection, et plus précisément au paragraphe 14 de [Ros96].

On introduit tout d’abord une terminologie qui nous est propre :

Définition 4.2.38 *Soit N un module de cycles sur S . On dit que N est absolu si et seulement si il existe un module de cycles \bar{N} sur k tel que N est la restriction de \bar{N} à S .*

Remarque 4.2.39.– Nous renvoyons à 4.2.52 pour une explication de cette définition, ainsi qu’une discussion critique. Pour l’instant, on se borne à remarquer qu’il en existe, et qu’ils sont plus faciles à manipuler.

Exemple 4.2.40.– La K -théorie de Milnor est l’exemple fondamental de module de cycles absolu.

On rappelle que M. Rost a introduit la notion de «pairing» dans [Ros96] : si M et N sont des modules de cycles sur k , un «pairing» $\mu : N \times M \rightarrow M$ est la donnée, pour toute extension de type fini E/k d’un morphisme

$$\mu_E : N(E) \times M(E) \rightarrow M(E), (\rho, \tau) \mapsto \rho \cdot \mu \tau$$

satisfaisant les relations

P1: Pour $x \in K_*^M(E)$, $\rho \in N(E)$ et $\mu \in M(E)$, on a

$$\mathbf{P1a:} \quad (x.\rho).\mu = x.(\rho.\mu).$$

$$\mathbf{P1b:} \quad (\rho.x).\mu = \rho.(x.\mu).$$

P2: Pour $\varphi : E \rightarrow K$, $\eta \in N(E)$, $\nu \in N(K)$, $\rho \in M(E)$ et $\mu \in M(K)$, on a

$$\mathbf{P2a:} \quad \varphi_*(\eta.\rho) = \varphi_*(\eta).\varphi_*(\rho),$$

$$\mathbf{P2b:} \quad \text{si } \varphi \text{ est fini, } \varphi^*(\varphi_*(\eta).\mu) = \eta.\varphi^*(\mu),$$

$$\mathbf{P2c:} \quad \text{si } \varphi \text{ est fini, } \varphi^*(\nu.\varphi_*(\rho)) = \varphi^*(\nu).\rho.$$

P3: Pour une valuation géométrique v sur F , pour $\eta \in N(F)$ et $\rho \in M(F)$, pour une uniformisante π de v , on a

$$\partial_v(\eta.\rho) = \partial_v(\eta).s_v^\pi(\rho) + (-1)^n s_v^\pi(\eta).\partial_v(\rho) + \{-1\}.\partial_v(\eta).\partial_v(\rho).$$

On introduit la définition complémentaire suivante :

Définition 4.2.41 Soit N et M des modules de cycles sur S .

On dit qu'on s'est donné un accouplement de modules de cycles sur S

$$\mu : N \times M \rightarrow M,$$

si μ est un «pairing» au sens de M. Rost et que, de plus, N est absolu.

Lorsqu'on s'est donné un accouplement sur S

$$\pi : N \times N \rightarrow N,$$

on dira encore que N est muni d'une structure d'anneau sur S .

Remarque 4.2.42.— Ainsi, un modules de cycles muni d'une structure d'anneau est, d'après notre définition, toujours absolu. Par contre, on ne requiert pas que l'accouplement soit donné sur k .

Exemple 4.2.43.— Si M est un module de cycles quelconque sur k , il est par définition (donnée D3) muni d'un accouplement canonique sur k

$$K_*^M \times M \rightarrow M.$$

Le cas où M est lui-même le module de cycles formé par la K-théorie de Milnor sera étudié dans le prochain paragraphe.

4.2.44.— Soit $\mu : N \times M \rightarrow M$ un accouplement. M. Rost a défini un produit croisé (cf [Ros96] 14.1), pour tous schémas Y et Z ,

$$\times_\mu : C_p(Y; N, n) \otimes_{\mathbb{Z}} C_q(Z; M, m) \rightarrow C_{p+q}(Y \times_k Z; M, n + m),$$

où $Y \times_k Z$ est vu comme un S -schéma à travers la projection de Z sur S . D'après *loc.cit.*, 14.4, ce produit sur les complexes induit un produit sur les groupes de cohomologie.

Suivant M. Rost, on en déduit le produit d'intersection suivant :

Définition 4.2.45 Soit $N \times M \xrightarrow{\mu} M$ un accouplement de modules de cycles sur S , et X un schéma lisse sur S .

On définit alors un produit

$$\begin{aligned} A^p(X; N, n) \otimes A^q(X; M, m) &\rightarrow A^{p+q}(X; M, n+m) \\ x \otimes y &\mapsto (\delta_X)^*(x \times_{\mu} y) = x \cdot_{\mu} y. \end{aligned}$$

On précise que $\delta_X : X \rightarrow X \times_k X$ est l'immersion fermée diagonale de X sur k , vu comme S -morphisme pour la structure de S -schéma sur $X \times_k X$ par la projection du deuxième facteur sur S . Comme X est lisse sur k , δ_X est donc une S -immersion fermée régulière et δ_X^* désigne le morphisme de Gysin associé (cf 4.2.7).

Remarque 4.2.46.— Pour ne pas alourdir les notations, la référence à l'accouplement μ sera parfois omise suivant la notation de [Ros96].

Ce produit d'intersection dispose alors des formules classiques suivantes :

Proposition 4.2.47 Fixons $\mu : N \times M \rightarrow M$ un accouplement de modules de cycles sur S .

Soient X et Y des schémas lisses sur S , et $f : Y \rightarrow X$ un S -morphisme. On note f^* le morphisme de Gysin associé au morphisme localement d'intersection complète f dans la définition 4.2.23.

1. (Associativité) On suppose que $S = \text{Spec}(k)$, et que N est de plus muni d'une structure d'anneau sur k . Alors pour tout triplet $(x, y, z) \in A^*(X; N) \times A^*(X; N) \times A^*(X; M)$, on a

$$(x \cdot y) \cdot_{\mu} z = x \cdot_{\mu} (y \cdot_{\mu} z).$$

2. (Fonctorialité) Pour tout couple $(x, y) \in A^*(X; N) \times A^*(X; M)$, on a :

$$(f^*x) \cdot_{\mu} (f^*y) = f^*(x \cdot_{\mu} y).$$

3. (Projection) Si f est propre, pour tout couple $(x, y) \in A^*(X; N) \times A^*(Y; M)$, on a :

$$f_*(x \cdot_{\mu} f^*y) = (f_*x) \cdot_{\mu} y.$$

Remarque 4.2.48.— Dans cette proposition, on démontre les affirmations de [Ros96], (14.6) avec les deux premières égalités, en utilisant notamment les résultats de *loc.cit.* sur les produits croisés. Par contre, nous avons trouvé pratique d'utiliser la méthode de Fulton (*i.e.* l'introduction des morphismes de Gysin raffinés) pour prouver la formule de projection dans le cas général.

PREUVE : 1. Commençons par constater que le carré suivant de \mathcal{L}_k

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\delta_X} & X \times_x X \\ \delta_X \downarrow & & \downarrow \delta_{X \times_k 1_X} \\ X \times_k X & \xrightarrow{1_X \times_k \delta_X} & X \times_k X \times_k X \end{array}$$

est cartésien.

Dès lors, on peut faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} (x.y).\mu z &= \delta_X^*(\delta_X^*(x \times y) \times_\mu z) = \delta_X^*(\delta_X \times_k 1_X)^*((x \times y) \times_\mu z) \\ &\stackrel{(1)}{=} \delta_X^*(\delta_X \times_k 1_X)^*(x \times_\mu (y \times_\mu z)) \\ &\stackrel{(2)}{=} \delta_X^*(1_X \times_k \delta_X)^*(x \times_\mu (y \times_\mu z)) = x.(y.z) \end{aligned}$$

où (1) résulte de la formule d'associativité du produit croisé (14.2 de [Ros96]), et (2) résulte du lemme 4.2.14.

Dans la suite de cette démonstration, dès qu'on considère un produit sur k de deux S -schémas, on le munit de sa structure de S -schéma grâce à la projection du deuxième facteur sur S .

2. Pour cette affirmation, on considère le carré cartésien dans \mathcal{L}_S

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\delta_Y} & Y \times_k Y \\ f \downarrow & & \downarrow f \times_k f \\ X & \xrightarrow{\delta_X} & X \times_k X. \end{array}$$

Alors,

$$\begin{aligned} f^*(x.y) &= f^*\delta_X^*(x \times_\mu y) \stackrel{(1)}{=} \delta_Y^*(f \times_k f)^*(x \times_\mu y) \\ &\stackrel{(2)}{=} \delta_Y^*(f^*x \times_\mu f^*y) = (f^*x).(f^*y) \end{aligned}$$

où (1) résulte de 4.2.27 et (2) résulte de la propriété 14.5 de *loc.cit.*.

3. On a déjà remarqué dans une situation semblable que le morphisme f est bien localement d'intersection complète puisqu'il se factorise en $X \xrightarrow{\gamma_f} X \times_k Y \xrightarrow{p_{X \times_k Y}^Y} Y$ où γ_f est le graphe de f , immersion fermée régulière puisque Y est lisse, et $p_{X \times_k Y}^Y$ la projection canonique qui est lisse puisque X est lisse sur k .

Dès lors, considérons le carré cartésien de \mathcal{L}_S

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\gamma_f} & X \times_k Y \\ f \downarrow & \Delta & \downarrow f \times_k 1_X \\ Y & \xrightarrow{\delta_Y} & Y \times_k Y. \end{array}$$

On peut alors faire le calcul

$$(f^*x).y = \delta_X^*(f \times_k 1_Y)^*(x \times_\mu y) \stackrel{(1)}{=} f_*\Delta^*(x \times_\mu y) \stackrel{(2)}{=} f_*\gamma_f^*(x \times_\mu y)$$

où l'égalité (1) résulte de 4.2.36 appliqué au carré cartésien précédent, et l'égalité (2) du lemme 4.2.31, car, puisque Y/k est lisse, $N_X(X \times_k Y) \simeq f^*(TY)$, où T_Y désigne le fibré tangent de Y/k .

Mais par ailleurs, pour le deuxième membre de l'équation, on a

$$f_*(x.f^*y) = f_*\delta_Y^*(1_Y \times_k f)^*(x \times_\mu y) \stackrel{(3)}{=} f_*\gamma_f^*(x \times_\mu y)$$

où l'égalité (3) résulte de ce que $\gamma_f = (1_Y \times_k f) \circ \delta_Y$, et de la proposition 4.2.27. \square

4.2.3.2 K-théorie de Milnor et groupe de Chow

Dans ce paragraphe, on étudie le cas où $M = K_*^M$ est la K -théorie de Milnor, que l'on considère muni de sa structure d'anneau canonique.

Par définition, si X est un schéma,

$$A^n(X; K_*^M, n) = CH^n(X)$$

(cf 4.1.9 pour la numérotation du membre de gauche). Pour plus de clareté, si x est la classe d'un cycle dans $CH^n(X)$, on note $\{x\}$ son image dans $A^n(X; K_*^M, n)$.

Pour clôturer ce paragraphe sur l'intersection, on va commencer par démontrer que le morphisme de spécialisation construit par M. Rost coïncide avec celui de W.Fulton, suivant une indication de M. Rost au début du paragraphe 11 de [Ros96] :

Lemme 4.2.49 *Soit X un schéma, et Z un sous-schéma fermé de X . Alors, pour le module de cycles K_*^M , $J(X, Z) = \sigma_Z X$, où $J(X, Z)$ désigne la construction de M. Rost (cf définition 4.2.3), et $\sigma_Z X$ est le morphisme de spécialisation de W.Fulton (cf [Ful98], 5.2).*

PREUVE : Commençons par rappeler que le sous-schéma fermé $C_Z X$ de $D_Z X$ est un diviseur de Cartier, paramétré par le paramètre t de la déformation, $t : D_Z X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$. Dès lors, d'après [Ful98], chap. 2, def. 2.3, si l'on note $i : C_Z X \rightarrow D_Z X$, on peut définir de manière élémentaire le morphisme de Gysin $i^* : CH_*(D_Z X) \rightarrow CH_*(C_Z X)$.

Par ailleurs, si l'on regarde la fin de la suite exacte de localisation pour le groupe de Chow, on en déduit le diagramme commutatif suivant identique à celui de la démonstration de *loc.cit.*, prop. 5.2 où l'on a remplacé l'espace déformation $M_Z^\circ X$ (fibré sur \mathbb{P}_k^1) par $D_Z X$ (qui en est un ouvert) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & CH_n(X) & & & \\
 & & & \downarrow \pi^* & & & \\
 CH_{n+1}(C_Z X) & \xrightarrow{i_*} & CH_{n+1}(D_Z X) & \xrightarrow{j^*} & CH_n(\mathbb{G}_m \times X) & \rightarrow & 0 \\
 & & \searrow i^* & & \downarrow \iota & & \swarrow \sigma_Z X \\
 & & & CH_n(C_Z X) & & &
 \end{array}$$

où $j : \mathbb{G}_m \times X \rightarrow D_Z X$ désigne l'immersion ouverte canonique ; le morphisme ι existe car $i^* i_* = 0$ d'après *loc.cit.* prop. 2.6(c). Le fait que $\sigma_Z X = \iota \pi^*$ est le contenu de la démonstration de la prop. 5.2.

Revenant à la définition 4.2.3, et puisque le pullback par un morphisme plat coïncide sur les deux groupes de Chow, il s'agit donc de montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 A_n(\mathbb{G}_m \times X; K_*^M, n) & \xleftarrow{j^*} & A_n(D_Z X; K_*^M, n) \\
 \{t\} \cdot \downarrow & \searrow \iota & \downarrow i^* \\
 A_n(\mathbb{G}_m \times X; K_*^M, n) & \xrightarrow{\partial} & A_n(C_Z X; K_*^M, n)
 \end{array}$$

où ∂ est le morphisme bord pour la décomposition $D_Z X = \mathbb{G}_m \times X \sqcup C_Z X$.

On considère donc α un élément de $A_n(D_Z X; K_*^M, n)$. Par linéarité, on peut se restreindre au cas où α est la classe d'un point x de $D_Z X$.

Si x appartient à $C_Z X$, on a déjà vu que $i^*x = 0$, et la commutativité en découle puisque $j^*x = 0$.

Sinon, par définition

$$\partial \circ \{t\} \circ j^*(x) = \sum_{y \in (W \cap C_Z X)^{(1)}} \partial_y^x(t(x)) \cdot y$$

où W désigne l'adhérence réduite de x dans $D_Z X$.

Or, par ailleurs, d'après la définition (cf *loc. cit.* def. 2.3), puisque t paramètre le diviseur de Cartier $C_Z X$, on a d'un autre côté

$$i^*(x) = \sum_{y \in (W \cap C_Z X)^{(1)}} \text{ord}_y(t) \cdot y$$

où ord_y désigne la fonction ordre défini en *loc. cit.*, §1.2.

Il suffit donc de démontrer que pour tout point y , les entiers $\partial_y^x(t(x))$ et $\text{ord}_y(t)$ sont égaux. Mais pour cela, il suffit de revenir à la définition de ∂_y^x (cf 4.1.6) et d'appliquer l'exemple 1.2.3 de *loc. cit.*, en remarquant que l'assertion est triviale si $W \cap C_Z X$ est normal. \square

Dès lors, la proposition suivante est presque immédiate :

Proposition 4.2.50 *Soit X un schéma algébrique lisse. Pour tout x (resp. y) dans $CH^n(X)$ (resp. $CH^m(X)$), on a l'égalité*

$$\{x\} \cdot \{y\} = \{x \cdot y\}$$

où les points désignent respectivement le produit dans $A^*(X; K_*^M, *)$ défini en 4.2.45 et le produit dans $CH^*(X)$ défini dans [Ful98], chap. 8.

PREUVE : On rappelle la définition 8.1.1 de [Ful98] : si x et y sont des classes de cycles dans $CH^*(X)$, alors $x \cdot y = \delta^!(x \times y)$ (on considère ici le cas où $f = 1_X$), avec $\delta : X \rightarrow XX$ le morphisme diagonal de X , et $\delta^!$ est le morphisme de Gysin associé à l'immersion régulière δ , et $x \times y$ est le produit extérieur de x et y défini en 10.1.

Or, par définition, $\delta^! = (p^*)^{-1} \circ \sigma_X(XX)$, où $p : TX \rightarrow X$ est la projection canonique du fibré tangent, et $\sigma_X(XX)$ est le morphisme de spécialisation au cône normal associé à l'immersion diagonale (définition dans le §5.2).

Dès lors, compte tenu du lemme précédent, il suffit de démontrer que le produit croisé défini par M. Rost coïncide avec le produit extérieur de cycles défini par W.Fulton (cf [Ful98], 1.10).

Considérons à cet effet $x \in CH^n(X)$ et $y \in CH^m(Y)$, où X et Y sont des k -schémas. On peut se réduire par bilinéarité au cas où x (resp. y) est la classe de V (resp. W), sous-schéma fermé de X (resp. Y). Dès lors, par définition, $x \times y = [V \times_k W]$ est le cycle associé au sous-schéma fermé $V \times_k W$ de XY . Or, si l'on considère la projection $\pi : VX \rightarrow X$, on a par définition : $x \times y = i_* \pi^*(y)$, où $i : VX \rightarrow XX$ est l'immersion fermée canonique. Si x désigne encore le point générique de V , on peut tout aussi bien considérer la projection $\pi_x : \text{Spec}(\kappa(x)) X \rightarrow X$, et $i_x : \text{Spec}(\kappa(x)) X \rightarrow XX$, on a encore (puisque les cycles en question ne dépendent que des points génériques) : $x \times y = (i_x)_*(\pi_x)^*(y)$. Or, on reconnaît

là la définition 14.1 de [Ros96], et donc, comme le pullback par un morphisme plat (resp. le pushout par un morphisme propre) coïncident sur le groupe de Chow à coefficients et le groupe de Chow classique, par définition :

$$\{x \times y\} = \{(i_x)_*(\pi_x)^*(y)\} = (i_x)_*(\pi_x)^*\{y\} = \{x\} \times \{y\}.$$

□

Remarque 4.2.51.— On obtient une démonstration plus conceptuelle de cette proposition en appliquant l'exemple 6.1.9 de [Ful98]. En effet, la première propriétés que doit vérifier le produit d'intersection («normalisation») résulte de la proposition 4.2.10, et la deuxième propriété résulte de la compatibilité de la suite spectrale de M. Rost par rapport au produit de composition des modules de cycles.

4.2.52.— Modules de cycles absolus

La définition 4.2.38 est inspirée du cadre topologique des systèmes locaux.

Dans ce cadre, un système local sur X est un préfaisceau sur le groupoïde fondamental de X (c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont les points de X et les morphismes sont les chemins de X à homotopie près). Alors, un système local sur X est *simple* si et seulement si il provient d'un système local sur l'espace topologique formé d'un seul point.

Cette situation est donc analogue à la nôtre, puisqu'un module de cycles sur S est en particulier un préfaisceau sur les points (au sens de la géométrie algébrique) de S (*i.e.* la catégorie enrichie introduite dans 4.1.21). La grosse différence tient au fait que les points de la géométrie algébrique portent chacun leur propre structure alors que les points au sens de la topologie algébrique sont tous équivalents. C'est pourquoi nous avons préféré la terminologie «absolu», qui signifie que le module de cycles provient d'un module de cycles sur le «plus petit point» possible k .

Plus précisément, les modules de cycles sont l'analogie des foncteurs de Mackey de la topologie algébrique équivariante. Rappelons que ceux-ci sont définis comme les préfaisceaux additifs sur la catégorie des orbites, vues comme des espaces topologiques équivariants discrets dans la catégorie homotopique stable équivariante. En anticipant sur la deuxième partie, on note que la catégorie des motifs génériques joue le rôle de la catégorie des orbites pour la topologie algébrique équivariante, puisque les modules de cycles sont en particuliers des préfaisceaux sur la catégorie des motifs génériques. Autrement dit, les motifs génériques jouent le rôle des points dans notre cadre, que l'on considère comme des objets de la catégorie homotopique stable sous-jacente (ici, il s'agit de la catégorie dérivée des motifs mixtes).

Les modules de cycles et les foncteurs de Mackey correspondent donc en quelque sorte à une version stable de systèmes locaux. Pour les foncteurs de Mackey, la notion analogue de la notion de système local simple serait la propriété d'être constant. En géométrie algébrique toutefois, il y a une notion intermédiaire avant celle d'être constant, qui est la notion de module de cycle absolu que nous avons introduite, considérant que, dans la théorie des motifs, le plus petit point possible est le corps de base. Nous n'avons pas trouvé de caractérisation simple de ces objets pourtant, ni même de condition suffisante —

rappelons qu'en topologie algébrique, si un espace topologique X est simplement connexe, tout système local sur X est simple.

Toutes ces considérations prendraient beaucoup plus de sens avec l'analogie de la suite spectral de Serre dont nous parlons conjecturalement dans l'introduction. En effet, à une fibration (morphisme lisse dans notre cadre), on associe un module de cycle sur la base. Il se pose naturellement la question de déterminer ce module de cycles ; la première question que l'on peut se poser est donc de savoir s'il est absolu dans le sens qu'on a introduit – on souligne que cette simplification doit être rare, et demande donc à être approfondie.

4.3 Module homotopique induit

Dans cette section, on se place dans le cas $S = \text{Spec}(k)$.

De plus, tous les schémas sont supposés être algébriques.

On va voir comment déduire d'un module de cycles sur un corps (non nécessairement parfait) un module homotopique.

4.3.1 Transferts

Dans cette sous-section, on fixe donc un module de cycles M sur k , et on construit des transferts sur les groupes de Chow à coefficients dans M .

On note $\mu : K_*^M \times M \rightarrow M$ l'accouplement canonique.

4.3.1.– Soient X et Y des schémas algébriques lisses et $\alpha \in c(X, Y)$. On note U le support de α dans XY , i l'immersion canonique de U dans XY et p_U^X la projection de U sur X , qui est fini équidimensionnelle.

Soit $\gamma_i : U \rightarrow UXY$ le graphe de i . Alors, puisque XY est lisse sur k , γ_i est une immersion fermée régulière. On peut donc définir :

Définition 4.3.2 Avec les notations qui précèdent, on note encore $\{\alpha\}_U$ la classe du cycle α dans $A^0(U; K_*^M)$.

Adoptant les notations introduites ci-dessus, pour tout $\sigma \in A^*(Y; M)$, on pose

$$\alpha^*(\sigma) = (p_U^X)_* \gamma_i^* \left(\{\alpha\}_U \times_{\mu} p_{XY}^Y{}^*(\sigma) \right).$$

On a donc construit une action des correspondances finies sur les modules de cycles. Il s'agit de montrer que cette action est d'abord linéaire, puis compatible au produit de composition par rapport aux correspondances finies.

Le lemme suivant nous permet de montrer la linéarité :

Lemme 4.3.3 Soit X et Y deux schémas algébriques lisses.

Soit $\alpha \in c(X, Y)$ une correspondance finie, et U son support. Soit V un sous-schéma fermé intègre de XY qui est fini équidimensionnel sur X , et qui contient U .

On note par ailleurs $j : V \rightarrow XY$ l'immersion fermée canonique, γ_j son graphe et p_V^X la projection de V sur X . Enfin, on note $\{\alpha\}_V$ la classe du cycle α dans $A^0(V; K_*^M)$.

Alors, pour tout $\rho \in A^*(Y; M)$,

$$\alpha^*(\rho) = (p_V^X)_* \gamma_k^* \left(\{\alpha\}_V \times_\mu p_{XY}^Y{}^*(\sigma) \right).$$

PREUVE : On peut supposer que X et Y sont connexes. Notons encore i l'immersion de U dans XY et p_U^X la projection de U sur X .

Par définition, si $\{\alpha\}_U$ désigne la classe du cycle α dans $A^0(U; K_*^M)$, on a l'égalité $\{\alpha\}_V = l_*(\{\alpha\}_U)$, où $l : U \rightarrow V$ désigne l'immersion fermée canonique.

Considérons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\gamma_i} & UXY \\ j \downarrow & \Delta & \downarrow j \times_k 1_{XY} \\ V & \xrightarrow{\gamma_j} & VXY \end{array}$$

Alors,

$$\begin{aligned} (p_V^X)_* \gamma_k^* \left(\{\alpha\}_V \times_\mu p_{XY}^Y{}^*(\sigma) \right) &= (p_V^X)_* \gamma_k^* (j \times_k 1_{XY})_* \left(\{\alpha\}_U \times_\mu p_{XY}^Y{}^*(\sigma) \right) \\ &\stackrel{(1)}{=} (p_V^X)_* j_* \Delta^* \left(\{\alpha\}_U \times_\mu p_{XY}^Y{}^*(\sigma) \right) \\ &\stackrel{(2)}{=} (p_U^X)_* \gamma_i^* \left(\{\alpha\}_U \times_\mu p_{XY}^Y{}^*(\sigma) \right) \end{aligned}$$

Pour l'égalité (1), on applique le corollaire 4.2.36 au carré Δ , et pour l'égalité (2), on applique le lemme 4.2.31 puisque γ_i et γ_j sont deux immersions fermées régulières de même codimension pure égale à la dimension de Y . \square

Muni de ce lemme, la linéarité devient évidente :

Lemme 4.3.4 Soit α et β deux correspondances finies dans $c(X, Y)$, et $\rho \in A^*(Y; M)$.

Alors, $(\alpha + \beta)^*(\rho) = \alpha^*(\rho) + \beta^*(\rho)$.

PREUVE : Soit U et V les supports de α et β . On pose $W = U \cup V$. On note i, j, l les immersions respectives de U, V, W dans XY .

Alors, $\alpha + \beta$ a pour support W et on obtient

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^* \rho &= (p_W^X)_* \gamma_l^* (\{\alpha + \beta\}_W \times_\mu \rho) \\ &= (p_W^X)_* \gamma_l^* (\{\alpha\}_W \times_\mu \rho) + (p_W^X)_* \gamma_l^* (\{\beta\}_W \times_\mu \rho) \\ &= \alpha^*(\rho) + \beta^*(\rho), \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du lemme précédent. \square

On vérifie enfin que cette action est bien compatible au produit de composition des correspondances finies :

Proposition 4.3.5 Soient X, Y et Z des schémas algébriques lisses. Alors, pour tout $\alpha \in c(X, Y)$, $\beta \in c(Y, Z)$ et $\sigma \in A^0(Z; M)$, on a :

$$\alpha^* \beta^* \sigma = (\beta \circ \alpha)^* \sigma$$

PREUVE : Par linéarité, on se ramène tout d'abord au cas où X , Y et Z sont connexes. Soit U le support de α et V le support de β .

On pose $\tilde{U} = U \times_Y V$. C'est un sous-schéma fermé de XYZ , qui est fini surjectif sur X . On note W sa projection sur XZ , qui est donc un sous-schéma fermé, fini surjectif sur X .

On note $i : U \rightarrow XY$, $j : V \rightarrow YZ$ et $l : W \rightarrow XZ$, les immersions évidentes.

Par ailleurs, on adopte la convention de noter $p_j^!$ les morphismes projections (précédé au besoin d'une immersion fermée) d'un schéma ? dans un schéma ! qui sont clairs dans notre contexte.

On note simplement $\{\alpha\}$ la classe de α dans $A^0(U; K_*^M)$ et $\{\beta\}$ la classe de β dans $A^0(V; K_*^M)$. On considère pour notre premier calcul le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{i_1} & UXV \\ p_U^U \downarrow & \Delta_1 & \downarrow 1_U \times p_{XV}^{XY} \\ U & \xrightarrow{\gamma_i} & UXY \end{array}$$

On peut dès lors calculer le premier membre de la relation à prouver :

$$\begin{aligned} \alpha^* \beta^* (\rho) &= p_U^X \gamma_i^* \left(\{\alpha\} \times_\mu (p_{XY}^Y)^* p_V^Y \gamma_j^* (\{\beta\} \times_\mu (p_{YZ}^Z)^* (\rho)) \right) \\ &= p_U^X \gamma_i^* \left(\{\alpha\} \times_\mu p_{XV}^{XY} (p_{XV}^V)^* \gamma_j^* (\{\beta\} \times_\mu (p_{YZ}^Z)^* (\rho)) \right) \\ &= p_U^X \gamma_i^* (1_U \times_k p_{XV}^{XY})^* \left(\{\alpha\} \times_\mu (p_{XV}^V)^* \gamma_j^* (\{\beta\} \times_\mu (p_{YZ}^Z)^* (\rho)) \right) \\ &\stackrel{(1)}{=} p_U^X p_U^U \gamma_i^* \left(\{\alpha\} \times_\mu (p_{XV}^V)^* \gamma_j^* (\{\beta\} \times_\mu (p_{YZ}^Z)^* (\rho)) \right) \\ &\stackrel{(2)}{=} p_U^X (p_1 \times_k p_2 \times_k p_3)^* (\{\alpha\} \times_\mu (\{\beta\} \times_\mu \rho)). \end{aligned}$$

On donne les justifications suivantes pour ce calcul :

- (1) Cette égalité résulte du fait que i_1 est une immersion régulière (car l'intersection de U et V est propre), et du fait que i_1 et γ_i ont même codimension pure égale à $\dim(X) + \dim(Y)$; en effet, cela implique, d'après le lemme 4.2.31, $\Delta_1^* = i_1^*$, et il ne reste plus qu'à appliquer le corollaire 4.2.36.
- (2) On a posé pour cette égalité $p_1 : \tilde{U} \rightarrow U$, $p_2 : \tilde{U} \rightarrow V$ et $p_3 : \tilde{U} \rightarrow Z$ les projections canoniques (on rappelle que $\tilde{U} = U \times_Y V$).

Elle résulte de la functorialité du morphisme pushout par un morphisme propre et de la functorialité du morphisme de Gysin d'un morphisme localement d'intersection complète (cf 4.2.27).

Intéressons-nous par ailleurs à l'autre membre. Le support de $\beta \circ \alpha$ est par définition inclus dans W . De plus,

$$\beta \circ \alpha = p_{XYZ}^{XZ} (p_{XYZ}^{XY} \alpha \cdot p_{XYZ}^{YZ} \beta),$$

Or, $p_{XYZ}^{XY*} \alpha \cdot p_{XYZ}^{YZ*} \beta$ est à support dans \tilde{U} . On peut par ailleurs calculer la classe de cycle correspondante grâce au carré cartésien,

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{i_2} & UZ XV \\ \downarrow & \Delta_2 & \downarrow \\ XYZ & \xrightarrow{\delta_{XYZ}} & (XYZ)^2. \end{array}$$

En effet, puisque l'intersection de U et V est propre, i_2 est régulière est de bonne codimension ; donc $\Delta_2^* = i_2^*$, et l'on obtient

$$\{p_{XYZ}^{XY*} \alpha \cdot p_{XYZ}^{YZ*} \beta\}_{\tilde{U}} = i_2^*(p_{UZ}^U \{\alpha\} \times p_{XV}^V \{\beta\})$$

grâce à la proposition 4.2.50.

Enfin, par définition, ce n'est pas tout à fait p_{XYZ}^{XZ} que l'on considère, mais plutôt la projection de \tilde{U} sur son image dans XZ , notée p_U^W , qui est un morphisme propre. Ainsi,

$$\{\beta \circ \alpha\}_W = (p_U^W)_* i_2^*(p_{UZ}^U \{\alpha\} \times p_{XV}^V \{\beta\}).$$

On peut donc faire le calcul du deuxième membre, en prenant soin d'introduire tout d'abord le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{i_3} & \tilde{U} X Z \\ p_U^W \downarrow & \Delta_3 & \downarrow p_U^W \times 1_{XZ} \\ W & \xrightarrow{\gamma_1} & W X Z. \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (\beta \circ \alpha)^*(\rho) &= p_W^X \gamma_1^* \left((p_U^W)_* i_2^* (p_{UZ}^U \{\alpha\} \times p_{XV}^V \{\beta\}) \times_{\mu} (p_{XZ}^Z)^*(\rho) \right) \\ &\stackrel{(1)}{=} p_W^X (p_U^W)_* i_3^* \left(i_2^* (p_{UZ}^U \{\alpha\} \times p_{XV}^V \{\beta\}) \times_{\mu} (p_{XZ}^Z)^*(\rho) \right) \\ &\stackrel{(2)}{=} p_U^X (p_1 \times_k p_2 \times_k p_3)^* ((\{\alpha\} \times \{\beta\}) \times_{\mu} \rho). \end{aligned}$$

On donne les justifications suivantes pour ce calcul :

- (1) De nouveau, cette égalité résulte de 4.2.36 appliqué au carré Δ_3 . En effet, i_3 est le graphe du morphisme $\tilde{U} \rightarrow XZ$, et comme XZ est lisse, cette immersion est régulière. Par ailleurs, i_3 et γ_1 ont même codimension pure égale à $\dim X + \dim Z$. Donc, le lemme 4.2.31 permet de conclure $\Delta_3^* = i_3^*$.
- (2) Cette égalité résulte à nouveau de la functorialité du pushout propre et du morphisme de Gysin.

Ainsi, la relation attendue résulte finalement de la formule d'associativité (14.2) de [Ros96]. \square

On a donc obtenu :

Corollaire 4.3.6 *Pour tout module de cycles M sur k , pour tout entier positif n , la définition 4.3.2 munit le préfaisceau $A^n(\cdot; M)$ sur \mathcal{L}_k d'une structure de préfaisceau avec transferts.*

La proposition qui suit permet d'exprimer plus simplement ces transferts dans certain cas :

Proposition 4.3.7 *Soit M un module de cycles, X et Y des schémas algébriques lisses, et $\alpha \in c(X, Y)$ une correspondance finie.*

On suppose que α est intègre, c'est-à-dire que α est la classe d'un sous-schéma fermé intègre Z de XY . On suppose de plus que Z est lisse sur k .

Considérons les morphismes suivants :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{i} & XY \xrightarrow{q} Y \\ p \downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

où p est fini équidimensionnel, i est l'immersion fermée canonique, et q est le morphisme de projection.

Alors, pour tout $\rho \in A^n(Y; M)$,

$$\alpha^*(\rho) = p_* i^* q^*(\rho)$$

où i^* désigne le morphisme de Gysin associé à i .

PREUVE : On note γ_i le graphe de l'immersion i . D'après la définition on obtient

$$\alpha^*(\rho) = p_* \gamma_i^* (\{Z\} \times_{\mu} (p_{XY}^Y)^* \rho).$$

Or, par définition, la classe $\{Z\} \times_{\mu} (p_{XY}^Y)^* \rho$ dans $A^*(ZXY; M)$ est égale à $(p_{ZXY}^{XY})^* (p_{XY}^Y)^* (\rho)$.

Dès lors, puisque $p_{ZXY}^{XY} \circ \gamma_i = i$, et que i est une immersion régulière puisque Z est lisse, on peut conclure grâce au lemme 4.2.15. \square

Exemple 4.3.8.— Ainsi, dans le cas où $M = K_*^M$, la définition 4.3.2 munit le groupe $A^n(\cdot; K_*^M)$ d'une structure de préfaisceau gradué avec transferts. Dès lors, on en déduit un structure de préfaisceau avec transferts sur

$$A^n(\cdot; K_*^M, n) = CH^n(\cdot).$$

Soient X, Y des schémas algébriques lisses, et Z un sous-schéma fermé intègre de XY , fini équidimensionnel sur X . On note $q : Z \rightarrow X$ la projection de Z sur X , et $i : Z \rightarrow XY$ l'immersion fermée canonique.

Alors, le morphisme défini par Z vu comme correspondance finie est égal à la composée

$$CH^n(Y) \xrightarrow{(p_{XY}^Y)^*} CH^n(XY) \xrightarrow{i^*} CH^n(Z) \xrightarrow{q^*} CH^n(X)$$

où le morphisme i^* est le morphisme de Gysin associé à l'immersion régulière i et défini dans [Ful98]. Cela résulte en effet de la proposition précédente, et de 4.2.49 pour l'identification du morphisme i^* .

4.3.2 Théorème final

On en déduit finalement le théorème suivant qui inspire le début de cette thèse et constitue un large réservoir d'exemples de modules homotopiques. On souligne que k n'est pas supposé parfait :

Théorème 4.3.9 *Soit M un module de cycles sur k .*

Alors le préfaisceau gradué $A^0(\cdot; M)$ est canoniquement muni d'une structure de module homotopique (avec transferts) sur k .

On obtient plus précisément un foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}Cycl_k & \rightarrow & \mathbf{H}\mathcal{M}_k^{\text{tr}} \\ M & \mapsto & A^0(\cdot; M). \end{array}$$

PREUVE : D'après ce qui précède, $A^0(\cdot; M)$ est un préfaisceau avec transferts sur \mathcal{L}_k . Précisons par ailleurs que d'après le corollaire précédent, pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ de schémas dans \mathcal{L}_k , pour tout $\sigma \in A^0(Y; M)$, $[\Gamma_f]^*(\sigma) = f^*(\sigma)$, où f^* est le morphisme de Gysin du morphisme localement d'intersection complète f défini en 4.2.23. Le morphisme f^* coïncide de plus avec le morphisme f^\bullet construit par Rost ([Ros96], §12).

Or, $A^0(\cdot; M)$ est de plus un faisceau Nisnevich. On commence par montrer pour cela que $C_*(\cdot; M)$ est un faisceau Nisnevich, en utilisant la caractérisation du corollaire 2.1.11) ; considérons donc un carré distingué élémentaire de schémas algébriques lisses

$$\begin{array}{ccc} U_V & \xrightarrow{j} & V \\ \downarrow & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

et posons $Z = (X - U)_{\text{red}}$.

On doit montrer que, pour tout entier naturel n , l'image de ce carré par $C_*(\cdot; M)$ est un carré cocartésien. Or, par définition, $C_n(X; M) = C_n(U; M) \oplus C_n(Z; M)$ et $C_n(V; M) = C_n(U_V; M) \oplus C_n(Z_V; M)$. Par ailleurs, le morphisme pullback $C_n(Z_V; M) \rightarrow C_n(Z; M)$ est un isomorphisme. On en déduit donc la propriété attendue.

Ainsi, $C^*(\cdot; M)$ est un faisceau Nisnevich. Comme $A^0(\cdot; M)$ est le noyau du morphisme $C^0(\cdot; M) \rightarrow C^1(\cdot; M)$, on en déduit que $A^0(\cdot; M)$ est aussi un faisceau Nisnevich.

Donc $A^0(\cdot; M)$ est donc un faisceau homotopique sur k , car d'après la proposition (8.6) de [Ros96], il est de plus invariant par homotopie. Ce faisceau est de plus naturellement gradué.

Soit X un schéma dans \mathcal{L}_k . Considérons la suite exacte longue de localisation associée à l'immersion ouverte $j : \mathbb{G}_m \times_k X \rightarrow \mathbb{A}_X^1$:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow A^0(\mathbb{A}_X^1; M, n) &\xrightarrow{j^*} A^0(\mathbb{G}_m \times_k X; M, n) \xrightarrow{\partial} A^0(X; M, n-1) \\ &\rightarrow A^1(\mathbb{A}_X^1; M, n-1) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

où le morphisme ∂ est le morphisme bord associé à la décomposition $\mathbb{A}_X^1 = \mathbb{G}_m \times_k X \sqcup X$.

D'après le corollaire 3.4.4, $A^0(\cdot; M, n)_{-1}(X)$ est égal au conoyau de j^* . On en déduit donc un morphisme canonique

$$\epsilon'_n : A^0(\cdot; M, n)_{-1}(X) \rightarrow A^0(X; M, n-1).$$

Or, d'après la proposition 8.6 de [Ros96], le morphisme $A^0(X; M, n - 1) \rightarrow A^1(\mathbb{A}_X^1; M, n - 1)$ est un isomorphisme. Ainsi, le morphisme ϵ'_n est un isomorphisme, et on pose donc $\epsilon_n = (\epsilon'_n)^{-1}$.

Or le morphisme j^* est naturel par rapport aux transferts sur $A^0(\cdot; M)$, et il en est de même du morphisme ∂ . Ainsi, le morphisme ϵ_n est un isomorphisme de faisceaux avec transferts, ce qui munit le faisceau gradué $A^0(\cdot; M)$ d'une structure de module homotopique canonique.

La dernière assertion résulte de la compatibilité des «basic maps» de Rost avec les morphismes de modules de cycles. \square

Remarque 4.3.10.— Notons \mathcal{M} le faisceau Nisnevich sur \mathcal{L}_k qui coïncide avec $A^0(\cdot; M)$. On a montré dans cette démonstration que $C^*(\cdot; M)$ est un faisceau Nisnevich qui vérifie la condition de Brown-Gersten. Comme c'est une résolution de \mathcal{M} , il en résulte que

$$H_{\text{Nis}}^i(X; \mathcal{M}) = A^i(X; M).$$

Dès lors, d'après la proposition 8.6 de [Ros96] démontré par M. Rost, le faisceau \mathcal{M} a une cohomologie invariante par homotopie (propriété que l'on appellera être «strictement invariant par homotopie»). On notera que l'hypothèse « k est parfait» n'est pas nécessaire pour obtenir ce résultat.

Chapter 5

Transformée générique

Dans tout ce chapitre, k désigne un corps parfait.

Toutes les extensions de k sont supposées être de type fini.

5.1 Définition et théorème fondamental

On étudie dans ce paragraphe la réciproque du théorème 4.3.9.

La catégorie \mathcal{E}_k^s est ici la catégorie des extensions (de type fini) de k . Rappelons qu'à toute extension E/k on a associé dans 2.1.34 un pro-objet de \mathcal{L}_k noté (E) qui pro-représente un foncteur fibre du topos Nisnevich de \mathcal{L}_k .

Comme on l'a déjà annoncé dans 3.3.8, on adopte la définition suivante :

Définition 5.1.1 Soit F_* un module homotopique.

On définit un foncteur noté \hat{F}_*

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_k^s)^{op} &\rightarrow \mathbb{Z}\text{-Ab} \\ E/k &\mapsto F_*(E). \end{aligned}$$

Le théorème principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème 5.1.2 (k est un corps parfait)

Pour tout module homotopique (F_*, ϵ) , le foncteur \hat{F}_* est muni d'une structure canonique de pré-module de cycles sur k . Pour cette structure, c'est un module de cycles, et on l'appelle la transformation générique de (F_*, ϵ) .

Cette transformation est naturelle, et induit donc le foncteur

$$\begin{aligned} \mathbb{H}\mathcal{M}_k^{\text{tr}} &\rightarrow \mathcal{M}\text{Cycl}_k \\ F_* &\mapsto \hat{F}_*. \end{aligned}$$

Remarque 5.1.3.– On peut notamment introduire la définition suivante :

Définition 5.1.4 Pour toute extension E/k , on note $h_0(E)$ le pro-objet de $\mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ obtenu par composition du pro-objet (E) de \mathcal{L}_k et du foncteur canonique

$$\text{pro-}\mathcal{L}_k \xrightarrow{\text{pro-}h_0} \text{pro-}\mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}.$$

On obtient ainsi un foncteur contravariant de la catégorie \mathcal{E}_k^s dans la catégorie abélienne $\text{pro-}\mathcal{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$. On note $\mathcal{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr},(0)}$ la sous-catégorie de $\text{pro-}\mathcal{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ composée des objets de la forme $S_t^n \otimes^{H\text{tr}} h_0(E)$ où n est un entier naturel, et E/k une extension (de type fini).

On peut voir la catégorie $\mathcal{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr},(0)}$ comme la catégorie des points pour la catégorie des faisceaux homotopiques (cf 3.3.4 et 3.4.5). Ainsi, on peut voir la transformation générique d'un module homotopique (F_*, ϵ) comme la «restriction» du faisceau homotopique gradué F_* à la catégorie des points de $\mathcal{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr},(0)}$. Comme nous l'avons remarqué, cette transformée générique présente une certaine analogie avec la transformée de Fourier (le rôle des harmoniques est joué ici par les points génériques), et on montrera plus loin que l'on peut définir une transformée générique inverse.

Dans la partie concernant les motifs, on montrera comment on peut voir les données des pré-modules de cycles directement grâce aux morphismes de la catégorie $\mathcal{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr},(0)}$, concrétisant ainsi la remarque finale de 3.3.8.

PREUVE : La preuve étant plutôt longue, on l'a répartie dans les sections qui suivent. Il s'agit de construire les données d'un module de cycles, de vérifier les relations que ces données doivent satisfaire, et de montrer les axiomes des modules de cycles. Pour que le lecteur s'y retrouve, on précise donc l'endroit où chacune de ces tâches est effectuée :

Données	Référence	Relations	Référence	Axiomes	Référence
(D1)	5.2.1	(R1a)	5.2.2	(FD)	5.6.1
(D2)	5.3.21	(R1b)	5.3.22	(WR)	5.6.3
(D3)	5.5.17	(R1c)	5.3.24		
(D4)	5.4.57	(R2a)	5.5.18		
		(R2b)	5.5.19		
		(R2c)	5.5.19		
		(R3a)	5.4.63		
		(R3b)	5.4.64		
		(R3c)	5.4.58		
		(R3d)	5.5.29		
		(R3e)	5.5.32		

On renvoie donc à la section 5.7 pour la conclusion de cette démonstration.

Dans tout le reste de ce chapitre, on fixe le module homotopique (F_*, ϵ) .

5.2 Functorialité élémentaire et donnée D1

Considérons $\varphi : E \rightarrow L$ un morphisme d'extensions de k .

On rappelle que dans le numéro précédant la définition 2.1.37, on a associé à φ un morphisme de pro-objets $(\varphi) : (L) \rightarrow (E)$. Dans le cas particulier où l'on considère des corps au lieu des anneaux locaux, cette définition est de plus particulièrement simple puisque le morphisme (φ) est la limite projective

$$\varprojlim_{A \in \mathcal{M}^{\text{lis}}(E/k)} (\text{Spec}(\varphi(A)) \rightarrow \text{Spec}(A)).$$

En effet, le morphisme φ étant un isomorphisme sur son image, pour toute k -algèbre A lisse de type fini, $\varphi(A)$ est lisse de type fini sur k .

Définition 5.2.1 (Donnée D1) Soit $\varphi : E \rightarrow L$ un morphisme dans \mathcal{E}_k^s . On en déduit pour tout $n \in \mathbb{Z}$ un morphisme $\varphi_* : F_n(E) \rightarrow F_n(L)$, en posant

$$\varphi_* = \hat{F}_*(\varphi),$$

avec les notations introduites ci-dessus.

5.2.2.– Si $E \xrightarrow{\varphi} L \xrightarrow{\psi} K$ sont des morphismes dans \mathcal{E}_k^s , on a bien sûr $(\varphi) \circ (\psi) = (\psi \circ \varphi)$. Ainsi, la donnée D1 satisfait tout d'abord l'axiome R1a.

5.2.3.– Soit de nouveau $\varphi : E \rightarrow L$ un morphisme dans \mathcal{E}_k^s , et considérons de plus (X, x) (resp. (Y, y)) un modèle de E/k (resp. L/k). Alors, on en déduit le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} (L) & \xrightarrow{(\varphi)} & (E) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ Y_y & \dashrightarrow & X_x \end{array}$$

où les flèches verticales sont les isomorphismes canoniques (cf 2.1.39), et la flèche pointillée est l'unique morphisme induit.

Dès lors, par définition, le morphisme pointillé se relève en un morphisme $U \rightarrow Y$, où U est un ouvert de X .

Quitte à remplacer X par U , on a donc trouvé un morphisme dominant $f : X \rightarrow Y$; on note \bar{f} le morphisme de pro-objets composé

$$X_x \rightarrow X \times_Y Y_y \rightarrow Y_y.$$

Dans cette situation, on dira que f est un k -modèle du morphisme φ , étant donné que le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(E) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Spec}(L) \\ x \downarrow & & \downarrow y \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

Ce diagramme implique de plus que le diagramme de pro-objets suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} (E) & \xrightarrow{(\varphi)} & (L) \\ x \downarrow & & \downarrow y \\ X_x & \xrightarrow{\bar{f}} & Y_y. \end{array}$$

5.3 Transposée, norme et donnée D2

Dans cette section, on définit la donnée D2 pour \hat{F}_* . Cela passe par la définition d'une flèche entre pro-objets de $\mathcal{L}_{\text{cor},k}$, qu'on appelle transposée.

5.3.1 Correspondances finies et transposée

On revient à l'étude des correspondances finies avec l'exemple suivant particulièrement important pour nous :

Définition 5.3.1 Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme fini équidimensionnel dans \mathcal{L}_k , et $\epsilon : X \times Y \rightarrow Y \times X$ l'isomorphisme qui permute les facteurs.

On appelle transposée de f , notée ${}^t f$, la correspondance finie

$$\epsilon_*([\Gamma_f])$$

où Γ_f est le graphe de f .

En effet, puisque f est fini équidimensionnel, toute composante irréductible de ${}^t f$ est bien finie équidimensionnelle sur Y .

Remarque 5.3.2.— Contrairement au cas des correspondances entre variétés projectives lisses, on ne peut pas transposer toutes les correspondances finies, puisqu'on ne peut pas, par exemple, transposer le morphisme de projection canonique $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ d'un schéma X dans \mathcal{L}_k de dimension strictement positive.

Le lemme suivant résume les propriétés élémentaires de la transposée :

Lemme 5.3.3 Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme fini équidimensionnel dans \mathcal{L}_k . Alors, on a les relations suivantes :

1. Si $\alpha \in c(Y, Z)$ est une correspondance finie,

$$\alpha \circ {}^t f = (f \times 1_Z)_*(\alpha).$$

2. Si $g : Z \rightarrow Y$ est un morphisme fini équidimensionnel algébrique lisse,

$${}^t(f \circ g) = {}^t g \circ {}^t f.$$

PREUVE : 1. La démonstration est la même que pour la relation 2 du lemme 1.2.5 ; on se ramène au cas où α est la classe d'un sous-schéma fermé intègre et on calcule l'intersection suivante :

$$\begin{aligned} \alpha \circ {}^t f &= p_{XYZ}^{XZ} \left(p_{XYZ}^{YZ} {}^*(\alpha) \cdot p_{XYZ}^{XY} {}^*[\Gamma'_f] \right) \\ &= p_{XYZ}^{XZ} ([X\alpha] \cdot [\Gamma'_f Z]) \end{aligned}$$

où on a noté Γ'_f pour le fermé image de Γ_f par l'isomorphisme de permutation des facteurs.

Un calcul analogue à celui de *loc.cit.* montre que

$$[X\alpha] \cdot [\Gamma'_f Z] = (\gamma'_f \times 1_Z)_*(\alpha)$$

où le morphisme $\gamma'_f : Y \rightarrow XY$ est la composition du morphisme graphe avec la permutation des facteurs. La première relation en découle.

2. D'après ce qui précède, on a l'égalité suivante :

$${}^t g = 1_Z \circ {}^t g = (g \times 1_Z)_*(\Delta_Z).$$

Dès lors, on peut effectuer le calcul élémentaire suivant :

$$\begin{aligned} {}^t g \circ {}^t f &= (f \times 1_Z)_*({}^t g) = (f \times 1_Z)_*(g \times 1_Z)_*(\Delta_Z) \\ &= ((f \circ g) \times 1_Z)_*(\Delta_Z) = {}^t(f \circ g). \end{aligned}$$

□

Muni de ce morphisme transposé, on dispose du lemme de représentation suivant :

Lemme 5.3.4 *Soient X, Y et Z des schémas algébriques lisses tels que Z est un sous-schéma fermé de XY , dont la projection sur X est fini équidimensionnelle. Le cycle associé à Z dans XY , noté $[Z]$ est donc une correspondance finie.*

Alors, considérant les projections canoniques

$$X \xleftarrow{p} Z \xrightarrow{q} Y,$$

on a dans $\mathcal{L}_{\text{cor},k}$: $[Z] = q \circ {}^t p$.

PREUVE : En effet, le sous-schéma de $X \times Z \times Y$ intersection de ${}^t \Gamma_f$ et de Γ_g est isomorphe à Z (vu comme graphe de l'immersion fermée $Z \rightarrow X \times Y$), qui est intègre. Les multiplicités d'intersections sont donc toutes égales à 1, et le cycle associé est égal à $[Z]$. □

Enfin, la proposition suivante est une interprétation géométrique de la formule R1c vérifiée par les pré-modules de cycles :

Proposition 5.3.5 *Soient X, Y, Z des schémas algébriques lisses et connexes, et $f : Y \rightarrow X$ et $g : Z \rightarrow X$ des morphismes dominants de schémas tels que f est fini équidimensionnel.*

On considère le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X Z & \xrightarrow{q} & Y \\ p \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & X, \end{array}$$

et on pose $R = \kappa(Y) \otimes_{\kappa(X)} \kappa(Z)$.

1. $\text{Spec}(R) \rightarrow (Y \times_X Z)^{(0)}$ est une bijection.
2. Supposons que $(Y \times_X Z)_{\text{red}}$ soit lisse. Alors

$${}^t f \circ g = \sum_{x \in \text{Spec}(R)} \text{lg}_R(R_x) \cdot q|_{Z(x)} \circ {}^t(p|_{Z(x)})$$

où x est considéré comme un point générique de $Y \times_X Z$, et $Z(x)$ désigne son adhérence dans $Y \times_X Z$, munie de sa structure de sous-schéma réduit.

PREUVE : La première assertion résulte du fait que, puisque les morphismes sont dominants, on dispose d'un morphisme birationnel

$$\mathrm{Spec}(\kappa(Y)) \times_{\mathrm{Spec}(\kappa(X))} \mathrm{Spec}(\kappa(Z)) \rightarrow Y \times_X Z.$$

Pour la deuxième assertion, on note Γ_f et Γ_g les graphes de f et g . Ils sont tous deux intègres.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_g \times_X {}^t\Gamma_f & \rightarrow & {}^t\Gamma_f \xrightarrow{\sim} Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_g & \longrightarrow & X \\ \sim \downarrow & & \\ Z & & \end{array}$$

$\Gamma_g \times_X {}^t\Gamma_f$ est isomorphe à $Z \times_X Y$, l'isomorphisme étant donné par le morphisme canonique $\Gamma_g \times_X {}^t\Gamma_f \rightarrow Z \times Y$. Donc le sous-schéma intersection de ${}^t f$ et g dans $Z \times X \times Y$, que l'on note W est isomorphe à $Z \times_X Y$ (et son image dans $Z \times Y$ est égale à l'image de $Z \times_X Y \rightarrow Z \times Y$).

Par ailleurs, chaque composante de cette intersection est propre ; on note $\{x_1, \dots, x_n\}$ les ponts génériques de W . De plus, pour tout i , comme W_{red} est lisse par hypothèse, il en résulte que $(\mathcal{O}_{W, x_i})_{red}$ est un anneau local de Cohen-Macaulay – *i.e.* de profondeur égale à sa dimension ; cf [Ful98], A.7. Il en résulte que \mathcal{O}_{W, x_i} est de Cohen-Macaulay. Dès lors, par application de la proposition 7.1 de [Ful98], la multiplicité d'intersection de x_i dans W est égale à la longueur de l'anneau artinien \mathcal{O}_{W, x_i} .

Autrement dit, la correspondance finie ${}^t f \circ g$ est le cycle associé au sous-schéma W dans $Z \times Y$:

$${}^t f \circ g = \sum_{i=1}^n \mathrm{lg}(\mathcal{O}_{W, x_i}) \cdot |Z(x_i)|_{Z \times Y}$$

D'après le 1., le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(R) \rightarrow W_{x_1, \dots, x_n}$ est un isomorphisme. Pour $x \in \mathrm{Spec}(R)$, il est évident que le localisé en x de W_{x_1, \dots, x_n} est le localisé de W en x . Donc $\mathrm{lg}(\mathcal{O}_{W, x}) = \mathrm{lg}(R_x)$.

Enfin, le lemme 5.3.4 permet de conclure que $q|_{Z(x)} \circ {}^t(p|_{Z(x)}) = |Z(x)|_{Z \times Y}$. \square

On en déduit le cas particulier suivant :

Corollaire 5.3.6 *Soit*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{q} & Y \\ p \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

un carré cartésien dans \mathcal{L}_k , tel que f soit fini équidimensionnel, alors

$${}^t f \circ g = q \circ {}^t p.$$

On rappelle qu'on a défini un cup-produit extérieur sur les correspondances finies dans 2.2.21. Ce cup-produit vérifie logiquement la formule de projection suivante vis-à-vis de la transposée :

Proposition 5.3.7 *Soient X, Y, S, T des schémas algébriques lisses et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme fini dominant.*

Alors, pour toutes correspondances finies $\alpha \in c(Y, S)$ et $\beta \in c(X, T)$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} ((\alpha \circ f) \smile \beta) \circ {}^t f &= \alpha \smile (\beta \circ {}^t f) \in c(X, S \times T) \\ (\beta \smile (\alpha \circ f)) \circ {}^t f &= (\beta \circ {}^t f) \smile \alpha \in c(X, T \times S). \end{aligned}$$

PREUVE : Pour la première assertion, on doit montrer

$$\begin{aligned} (f \times 1_{S \times T})_* [((1_X \times p_S)^*(f \times 1_S)^*(\alpha)) \cdot (1_X \times p_T)^*(\beta)] \\ = (1_Y \times p_S)^*(\alpha) \cdot [(1_Y \times p_T)^*(f \times 1_T)_*(\beta)] \end{aligned}$$

Or, $(f \times 1_S) \circ (1_X \times p_S) = (1_Y \times p_S) \circ (f \times 1_{S \times T})$, et le carré suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X \times S \times T & \xrightarrow{1_X \times p_T} & X \times T \\ f \times 1_{S \times T} \downarrow & & \downarrow f \times 1_T \\ Y \times S \times T & \xrightarrow{1_Y \times p_T} & Y \times T \end{array}$$

Finalement, en appliquant la proposition 1.1.21 au carré précédent, on se ramène à montrer

$$\begin{aligned} (f \times 1_{S \times T})_* [((f \times 1_{S \times T})^*(1_Y \times p_S)^*(\alpha)) \cdot (1_X \times p_T)^*(\beta)] \\ = (1_Y \times p_S)^*(\alpha) \cdot [(f \times 1_{S \times T})_*(1_X \times p_T)^*(\beta)] \end{aligned}$$

Or cette dernière formule est juste la formule de projection 1.1.10 appliquée au morphisme $f \times 1_{S \times T}$.

La deuxième assertion est bien sûr symétrique à la première. \square

5.3.2 Situation générique

On étudie dans cette sous-section la situation générique correspondant au paragraphe précédent. Le lemme suivant explique pourquoi on peut le faire :

Lemme 5.3.8 *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme fini équidimensionnel de schémas.*

Alors pour tout ouvert dense U de X , l'ouvert $f^{-1}(Y - f(X - U))$ est dense et inclus dans U .

PREUVE : $Z = X - U$ est un fermé de codimension supérieure à 1, puisque U est dense. En particulier, $f(Z)$ est un fermé de codimension supérieure à 1 dans Y , puisque f est fini. Dès lors, $Y - f(Z)$ est un ouvert de Y , dense dans $f(X)$. Son image réciproque est donc un ouvert dense de X , qui contient U . \square

Corollaire 5.3.9 *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme fini dominant entre schémas algébriques irréductibles. Soit x (resp. y) le point générique de X (resp. Y).*

Alors le morphisme canonique de pro-objets

$$X_x \rightarrow X \times_Y Y_y$$

est un isomorphisme

PREUVE : En effet, le lemme précédent montre que l'ensemble des ouverts $X \times_Y V$ de X , pour V parcourant les ouverts non vides de Y est cofinal dans $\mathcal{V}_x(X)$. \square

5.3.10.— Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme fini dominant de schémas algébriques lisses et connexes. Soit x (resp. y) le point générique de X (resp. Y).

Considérons V et V' deux ouverts non vides de Y , tels que $V' \subset V$. Alors, le corollaire 5.3.6 appliqué au carré cartésien dans \mathcal{L}_k

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y V' & \xrightarrow{f_{V'}} & V' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times_Y V & \xrightarrow{f_V} & V \end{array}$$

montre que le diagramme suivant est commutatif dans $\mathcal{L}_{\text{cor},k}$

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{t_{f_{V'}}} & X \times_Y V' \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{t_{f_V}} & X \times_Y V. \end{array}$$

On définit donc un morphisme dans $\text{pro-}\mathcal{L}_{\text{cor},k}$, noté ${}^{\tau}\bar{f} : Y_y \rightarrow X \times_Y Y_y$,

$$\varprojlim_{V \in \mathcal{V}_y(Y)} (V \xrightarrow{t_{f_V}} X \times_Y V).$$

Définition 5.3.11 Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme fini dominant, où X et Y sont des schémas algébriques lisses et connexes. Soit x (resp. y) le point générique de X (resp. Y) ; on note $\bar{f} : X_x \rightarrow Y_y$ le morphisme induit par f .

On définit un morphisme $Y_y \xrightarrow{t_{\bar{f}}} X_x$ dans $\text{pro-}\mathcal{L}_{\text{cor},k}$, appelé transposé de \bar{f} en considérant la composée

$$Y_y \xrightarrow{t_{\bar{f}}} X \times_Y Y_y \xrightarrow{(1)} X_x$$

où (1) est l'isomorphisme réciproque du morphisme canonique $X_x \rightarrow X \times_Y Y_y$ (cf corollaire précédent).

Commençons par vérifier que cette définition est fonctorielle :

Lemme 5.3.12 Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ des morphismes finis équidimensionnels avec X, Y, Z des schémas algébriques lisses connexes, de points génériques respectifs x, y, z .

Posons $h = g \circ f$ qui est un morphisme fini équidimensionnel. Alors,

$$t_{\bar{h}} = t_{\bar{f}} \circ t_{\bar{g}}.$$

PREUVE : Considérons tout d'abord un ouvert non vide U (resp. V) de Z (resp. Y) tel que $V \subset Y \times_X U$. On peut alors considérer le diagramme suivant dans \mathcal{L}_k :

$$\begin{array}{ccccc} X \times_Y V & \xrightarrow{f_V} & V & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ X \times_Z U & \xrightarrow{f_U} & Y \times_Z U & \xrightarrow{g_U} & U \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z. \end{array}$$

On en déduit le diagramme commutatif suivant dans $\mathcal{L}_{\text{cor},k}$:

$$\begin{array}{ccc} U \xrightarrow{t_{g_U}} Y \times_Z U & \xrightarrow{t_{f_U}} & X \times_Z U \\ & \uparrow & \uparrow \\ & V \xrightarrow{t_{f_V}} & X \times_Y V \\ & & \parallel \\ & & X \times_Y V. \end{array}$$

Or, d'après le corollaire 5.3.6, ce diagramme est fonctoriel par rapport à U . On peut donc considérer sa limite projective par rapport aux ouverts U et V , et on obtient :

$$\begin{array}{ccc} Z_z \xrightarrow{\tau_{\bar{g}}} Y \times_Z Z_z & \xrightarrow{\phi} & X \times_Z Z_z \\ & \searrow \sim \uparrow & \uparrow \sim \\ & Y_y \xrightarrow{\tau_{\bar{f}}} & X \times_Y Y_y \\ & \searrow \sim \uparrow & \uparrow \sim \\ & & X_x. \end{array}$$

Mais par ailleurs, d'après le lemme 5.3.3, $t_{f_U} \circ t_{g_U} = t_{(g_U \circ f_U)}$. Comme $g_U \circ f_U = h_U$, on en déduit que $\phi \circ \tau_{\bar{g}} = \tau_{\bar{h}}$, ce qui prouve l'égalité attendue d'après le diagramme précédent. \square

Lemme 5.3.13 *Considérons un carré cartésien dans la catégorie des schémas*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

dans lequel p, q sont dominants, f, f' sont finis dominants, et X, Y, Y' sont algébriques lisses et connexes.

Pour tout point z dans $X'^{(0)}$, X'_z est un schéma artinien local, et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (X'_z)_{\text{red}} & \xrightarrow{\bar{f}'_z} & Y'_{y'} \\ \bar{q}_z \downarrow & & \downarrow \bar{p} \\ X_x & \xrightarrow{\bar{f}} & Y_y \end{array}$$

Alors, dans $\text{pro-}\mathcal{L}_{\text{cor},k}$,

$$t_{\bar{f}} \circ \bar{p} = \sum_{z \in X'^{(0)}} \text{lg}(X'_z) \cdot \bar{q}_z \circ t_{\bar{f}'_z}.$$

La longueur du pro-objet X'_z n'est bien sur pas autre chose que la longueur de l'anneau artinien $\mathcal{O}_{X',z}$.

PREUVE : Comme k est parfait, il existe un ouvert dense Ω de X' tel que Ω_{red} est lisse sur k .

Soit V un ouvert dense de Y tel que $q^{-1}(f^{-1}(V)) \subset \Omega$. Posons $U = X \times_Y V$ et $V' = Y' \times_Y V$; on a donc un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} U \times_V V' & \xrightarrow{f'_{V'}} & V' \\ q_U \downarrow & & \downarrow p_V \\ U & \xrightarrow{f_V} & V. \end{array}$$

Alors, par définition, $U \times_V V' \subset \Omega$, et donc $(U \times_V V')_{red}$ est lisse sur k .

On peut donc appliquer le lemme 5.3.5 au carré cartésien précédent :

$${}^t f_V \circ p_V = \sum_{z \in (U \times_V V')^{(0)}} \lg((U \times_V V')_z) \cdot q_U|_{\bar{z}} \circ {}^t(f'_{V'}|_{\bar{z}}),$$

ce qui nous permet de conclure (par passage à la limite) puisque $(U \times_V V')^{(0)} = X'^{(0)}$ et $(U \times_V V')_z = X'_z$. \square

Soient X, Y, S, T des schémas algébriques lisses tels que X et Y soient connexes de points génériques respectifs x et y . Puisque le produit extérieur de cycles est fonctoriel (voir la définition 2.2.21) il induit un produit extérieur sur les fibres :

$$c(X_x, S) \otimes_{\mathbb{Z}} c(X_x, T) \xrightarrow{\sim} c(X_x, S \times T).$$

On peut donc en déduire une formule de projection «générique», analogue à celle de la proposition 5.3.7 :

Proposition 5.3.14 *Avec les hypothèses ci-dessus, considérons un morphisme fini surjectif $f : X \rightarrow Y$. Alors, pour tout $\alpha \in c(Y_y, S)$ et $\beta \in c(X_x, T)$, on a*

$$\begin{aligned} ((\alpha \circ \bar{f}) \smile \beta) \circ {}^t \bar{f} &= \alpha \smile (\beta \circ {}^t \bar{f}) \\ (\beta \smile (\alpha \circ \bar{f})) \circ {}^t \bar{f} &= (\beta \circ {}^t \bar{f}) \smile \alpha. \end{aligned}$$

PREUVE : Il s'agit juste de vérifier que la situation générique se ramène à distance finie. Ainsi, il existe un ouvert U (resp. V) de X (resp. Y) tel que α se relève en $\alpha_V \in c(V, S)$ et β se relève en $\alpha_U \in c(U, T)$.

De plus, quitte à restreindre U et V , on peut supposer que \bar{f} se relève en un morphisme fini dominant $f : U \rightarrow V$ d'après le lemme 5.3.8.

Enfin, appliquant la proposition 5.3.7 au morphisme f , on obtient la formule attendue. \square

5.3.3 Modèles et définition

Afin d'exploiter le paragraphe précédent, on ramène la situation algébrique d'une extension finie au cas géométrique. On passe pour cela par la définition suivante :

Définition 5.3.15 *Soient E/k et L/k deux extensions et $\varphi : E \rightarrow L$ un morphisme tel que L/E est finie. On appelle k -modèle de E/L tout triplet $((X, x), (Y, y), X \xrightarrow{f} Y)$, tel que*

(X, x) est un modèle de E/k , (Y, y) un modèle de L/k , et f un morphisme fini dominant tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(E) & \xrightarrow{i} & \mathrm{Spec}(L) \\ x \downarrow & & \downarrow y \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

les flèches verticales correspondant aux points canoniques des modèles concernés, et i correspond à l'injection de L dans E .

Bien sûr, de tels modèles existent toujours :

Lemme 5.3.16 *Soient L/k une extension et E/L une extension finie. Alors il existe un k -modèle de E/L .*

PREUVE: Soit Y' un modèle de L . Soit \tilde{Y}' le normalisé de Y' dans E/L . Alors \tilde{Y}' est de type fini sur k (car Y est de type fini sur k), \tilde{Y}' est muni d'un E -point qui induit un isomorphisme $\kappa(\tilde{Y}') \rightarrow E$, et on a un morphisme fini canonique $\tilde{Y}' \xrightarrow{f} Y'$, compatible avec les points canoniques de ces schémas. Enfin, \tilde{Y}' est génériquement lisse. Soit U un ouvert lisse de \tilde{Y}' , $Y = Y' - f(\tilde{Y}' - U)$ et $X = f^{-1}(Y) : X \xrightarrow{f|_X} Y$ convient d'après le lemme 5.3.8. \square

Définition 5.3.17 *Soient E/k et L/k deux extensions, et $\varphi : E \rightarrow L$ un k -morphisme tel que L/E soit finie. Soit $X \xrightarrow{f} Y$ un k -modèle de L/E et x (respectivement y) le point générique de X (respectivement Y).*

On note $[E]$ le pro-objet de $\mathcal{L}_{\mathrm{cor},k}$ induit par le pro-objet (E) de \mathcal{L}_k défini dans 2.1.40. On définit alors la transposée de (φ) comme le morphisme de $\mathrm{pro}\text{-}\mathcal{L}_{\mathrm{cor},k}$

$$[E] \xrightarrow{t(\varphi)} [L]$$

obtenu par la composition

$$[E] \xrightarrow{\sim} Y_y \xrightarrow{t\bar{f}} X_x \xleftarrow{\sim} [L],$$

où $t\bar{f}$ est le morphisme défini dans 5.3.11.

5.3.18.– On montre que cette définition est indépendante du modèle choisi. Pour cela, on utilise le lemme suivant :

Lemme 5.3.19 *Soit E/k une extension, et L/E une extension finie. Considérons $X \rightarrow Y$ et $X' \rightarrow Y'$ deux k -modèles de L/E . Alors il existe un k -modèle $X'' \rightarrow Y''$ de L/E tel que :*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ X'' & \xrightarrow{f''} & Y'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y', \end{array}$$

les flèches verticales étant compatibles avec les points dominants canoniques des modèles considérés.

PREUVE : On se ramène au cas affine. Soient donc $X = \text{Spec}(B)$, $X' = \text{Spec}(B')$, $Y = \text{Spec}(A)$, $Y' = \text{Spec}(A')$. Puisque $X \rightarrow Y$ et $X' \rightarrow Y'$ sont des modèles de L/E , les isomorphismes canoniques sont compatibles :

$$\begin{array}{ccc} \kappa(X) & \longrightarrow & \kappa(Y) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ E & \longrightarrow & L \\ \sim \uparrow & & \uparrow \sim \\ \kappa(X') & \longrightarrow & \kappa(Y'). \end{array}$$

Soient $X = \text{Spec}(A)$, $X' = \text{Spec}(A')$. On peut supposer que $A, A' \subset L$, $B, B' \subset E$. Considérons les sous- k -algèbres de type fini $A'' = k[A \cup A'] \subset E$ et $B'' = k[B \cup B'] \subset L$. Tout élément de $B \cup B'$ est entier sur A'' , ce qui implique que B''/A'' est intégrale. En particulier, la clôture normale de A'' dans L/E contient B'' , donc elle contient B et B' . Notant X'' son spectre, et $Y'' = \text{Spec}(A'')$, on obtient un morphisme fini dominant $X'' \rightarrow Y''$, avec le diagramme attendu dans l'énoncé, les morphismes dominants étant donnés par les inclusions canoniques.

Il suffit maintenant de considérer des ouverts de lissité de X'' et Y'' pour obtenir les modèles désirés. \square

Dès lors, si $f : X \rightarrow Y$ et $f' : X' \rightarrow Y'$ sont deux k -modèles de L/E , d'après le lemme 2.1.39, on se réduit à montrer que pour un carré cartésien (*i.e.* un morphisme de k -modèles de L/E)

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

où p et q' forment un morphisme de k -modèle, et sont donc en particulier des morphismes birationnels, le diagramme de $\text{pro-}\mathcal{L}_{\text{cor},k}$ suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y'_{y'} & \xrightarrow{t\bar{f}'} & X'_{x'} \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow \bar{q} \\ Y_y & \xrightarrow{t\bar{f}} & X_x. \end{array}$$

Or, c'est un cas particulier du lemme 5.3.13, avec p birationnel. On a donc prouvé que la définition ci-dessus est indépendante du modèle choisi.

On peut voir dès lors que cette donnée est fonctorielle :

Lemme 5.3.20 *Soient E/k , L/k et K/k des extensions, $\varphi : E \rightarrow L$ et $\psi : L \rightarrow K$ des k -morphisms tels que L/E et K/L soient finies.*

Alors, dans $\text{pro-}\mathcal{L}_{\text{cor},k}$, on a l'égalité de morphismes

$${}^t(\varphi) \circ {}^t(\psi) = {}^t(\varphi \circ \psi).$$

PREUVE : On commence par choisir un k -modèle $f : X \rightarrow Y$ de L/E . Dès lors, on peut trouver un k -modèle $g : V \rightarrow Z$ de K/L où V est un ouvert dense de Y . On peut supposer $Y = V$, et la formule se ramène alors par définition au lemme 5.3.12. \square

On en déduit maintenant la donnée D2, car un faisceau homotopique est en particulier un préfaisceau sur $\mathcal{L}_{\text{cor},k}$, et induit donc un foncteur contravariant de $\text{pro-}\mathcal{L}_{\text{cor},k}$ dans $\mathcal{A}b$:

Définition 5.3.21 (D2) Soit F_* un module homotopique.

Alors, pour tout $\varphi : E \rightarrow L$ morphisme fini dans \mathcal{E}_k^s , on pose $\varphi^* = F_*({}^t(\varphi))$, où ${}^t(\varphi)$ est le morphisme de la définition 5.3.17.

On obtient immédiatement la relation R1b comme corollaire du lemme précédent :

Corollaire 5.3.22 (R1b) Soit F_* un module homotopique.

Pour des k -morphisms finis $\varphi : E \rightarrow L$, $\psi : L \rightarrow K$ entre extensions de type fini de k , on a

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

5.3.4 Axiome R1c

L'axiome R1c est conséquence d'un lemme concernant la catégorie additive $\text{pro-}\mathcal{L}_{\text{cor},k}$:

Lemme 5.3.23 Soient $\varphi : P \rightarrow E$ un morphisme fini et $\psi : P \rightarrow L$ un morphisme quelconque où P/k , E/k et L/k sont des extensions.

La k -algèbre $E \otimes_P L$ est artinienne et on note $E \otimes_P L^{(0)}$ l'ensemble de ses idéaux maximaux. Si $z \in E \otimes_P L^{(0)}$, on note $\kappa(z)$ l'extension de k quotient $E \otimes_P L/z$:

$$\begin{array}{ccc} \kappa(z) & \xleftarrow{\psi_z} & E \\ \varphi_z \uparrow & & \uparrow \varphi \\ L & \xleftarrow[\psi]{} & P. \end{array}$$

Alors, on a dans $\text{pro-}\mathcal{L}_{\text{cor},k}$,

$${}^t(\varphi) \circ (\psi) = \sum_{z \in (E \otimes_P L)^{(0)}} \text{lg}(E \otimes_P L)_z \cdot (\psi_z) \circ {}^t(\varphi_z).$$

PREUVE : Considérons $X \xrightarrow{f} Y$ un k -modèle de E/P , et (Y', y') un modèle de L/k . Soit x (resp. y) le point générique de X (resp. Y).

On obtient donc le diagramme dans $\text{pro-}\mathcal{L}_k$

$$\begin{array}{ccccc} (L) & \xrightarrow{(\psi)} & (P) & \xleftarrow{(\varphi)} & (E) \\ y' \downarrow & & \downarrow x & & \downarrow y \\ Y'_{y'} & \xrightarrow{\tau} & X_x & \xleftarrow{\bar{f}} & Y_y \end{array}$$

où $\tau = x\psi^*y'^{-1}$. Le morphisme τ se relève en un morphisme $V' \xrightarrow{p} U$ où V' est un ouvert dense de Y' et U un ouvert dense de X .

Quitte à restreindre X grâce au lemme 5.3.8, on peut supposer que $V' = Y'$ et $U = X$. De même, on peut supposer que le morphisme \bar{f} se relève en un morphisme dominant $f : Y \rightarrow X$. On est donc dans les conditions d'application du lemme 5.3.13. Adoptant les notations de celui-ci, on a donc :

$${}^t\bar{f} \circ \bar{p} = \sum_{z \in X'^{(0)}} \text{lg}(X'_z) \cdot \bar{q}_z \circ {}^t\bar{f}'_z.$$

Or, $X'^{(0)} \simeq E \otimes_P L^{(0)}$, et si z est un élément de $X'^{(0)}$, on a un isomorphisme canonique induit par $y \otimes_x y'$:

$$\text{Spec}((E \otimes_P L)_z) \rightarrow X'_z$$

qui induit un isomorphisme $x'_z : \text{Spec}(\kappa(z)) \rightarrow (X'_z)_{red}$.

Par ailleurs, si $Z(z)$ désigne la composante irréductible de X' correspondant à z , le morphisme restriction $Z(z) \rightarrow Y'$ induit un k -modèle de $L/\kappa(z)$, quitte à le restreindre à un ouvert de $Z(z)$. En particulier, $\varphi_{z*} = (x'_z)^{-1} \circ {}^t\bar{f}'_z \circ y'$.

La formule du lemme 5.3.13 donne donc la formule attendue par composition avec les isomorphismes canoniques de nos divers modèles. \square

Corollaire 5.3.24 (R1c) *Sous les hypothèses du lemme précédent, on a*

$$\psi_* \circ \varphi^* = \sum_{z \in (E \otimes_P L)^{(0)}} \text{lg}(E \otimes_P L)_z \cdot \varphi_{z*} \circ \psi_{z*}$$

PREUVE : Il suffit d'appliquer F_* à l'égalité de morphismes du lemme précédent. \square

5.4 Résidu et donnée D4

Pour définir le résidu, on va prolonger tout faisceau homotopique en un préfaisceau défini sur la catégorie des paires fermées, et satisfaisant certaines propriétés simples telles que l'excision. On commence donc par introduire cette notion d'excision, ce qui nous permet de préciser les définitions sur les paires (cf définition B.2.2).

5.4.1 Paires et excision

La notion suivante est classique en topologie :

Définition 5.4.1 *On appelle paire tout couple (X, Y) tel que X est un schéma et Y un sous-schéma de X .*

De plus,

1. *On appelle paire ouverte (resp. fermée) toute paire (X, Y) telle que Y est un sous-schéma ouvert (resp. fermé).*
2. *Si (X, Y) est une paire, on dit que (X, Y) est réduite si et seulement si Y est réduit.*

3. Un morphisme de paire est simplement un carré commutatif,

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow & f & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{f} & X, \end{array}$$

que l'on note (f, g) . Si ce carré est cartésien, on dit que (f, g) est cartésien.

Si \mathcal{S} est une catégorie de schémas, on note $\mathcal{P}^o(\mathcal{S})$ la catégorie des paires ouvertes (X, Y) telles que X est un schéma de \mathcal{S} , et Y est ouvert dans X .

Remarque 5.4.2.– Pour un morphisme cartésien $(f, g) : (X', Y') \rightarrow (X, Y)$, on abrégera souvent (f, g) en f , notant $f_Y = g$. Si (P) est une propriété des morphismes de schémas stable par changement de base, on dira encore que (f, g) vérifie la propriété (P) si et seulement si f vérifie (P) .

Convention 5.4.3.– Pour différencier la notion de paire fermée et de paire ouverte, on note (X/Y) les paires ouvertes.

Notons qu'à toute paire fermée (X, Z) , il correspond une unique paire ouverte $(X/X - Z)$, mais la réciproque n'est pas vraie, puisque Z peut ne pas être réduit. On mettra la plupart du temps en avant la paire fermée (X, Z) pour cette raison, bien que nos constructions seront fonctorielles par rapport aux morphismes de la paire ouverte correspondante. C'est pourquoi on introduit les définition suivantes :

Définition 5.4.4 On appelle pseudo-morphisme de paires fermées tout morphisme entre les paires ouvertes correspondantes.

Soit $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ un morphisme de paires fermées. On dit que :

1. (f, g) est quasi-cartésien si et seulement si le morphisme canonique $T \rightarrow Z \times_X Y$ induit par (f, g) est un épaissement (i.e. une immersion fermée d'idéal nilpotent).
2. (f, g) est excisif si et seulement si
 - (a) (f, g) est quasi-cartésien.
 - (b) f est étale.
 - (c) $g_{\text{red}} : T_{\text{red}} \rightarrow Z_{\text{red}}$ est un isomorphisme.

Si \mathcal{S} est une catégorie de schémas, on note $\mathcal{P}^f(\mathcal{S})$ la catégorie dont les objets sont les paires fermées (X, Y) telles que X est un schéma de \mathcal{S} , et Y est fermé dans X , avec pour morphismes les morphismes quasi-cartésiens de paires fermées.

Remarque 5.4.5.– Ainsi, un morphisme de paires fermées quasi-cartésien est un pseudo-morphisme, puisqu'il induit un morphisme cartésien sur les paires ouvertes correspondantes. Cette notion est particulièrement pertinente dans le cas des paires fermées réduites. Ainsi, un morphisme quasi-cartésien de paires réduites n'est rien d'autre qu'un morphisme cartésien sur les paires ouvertes associées.

Les morphismes excisifs correspondent aux carrés distingués de la topologie de Nisnevich (cf 2.1.11).

La proposition suivante donne un moyen simple de construire des morphismes excisifs.

Proposition 5.4.6 *Considérons un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{i} & X \\ j \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

où i, j sont des immersions fermées, et f, g des morphismes étales.

Alors il existe un ouvert canonique dense Ω de $X \times_Y X'$, muni d'une immersion fermée $\iota : Z \rightarrow \Omega$ qui s'inscrit dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} Z & & & & X \\ & \searrow i & & & \downarrow \\ & & \Omega & \xrightarrow{p} & X \\ & \swarrow j & \downarrow q & & \downarrow f \\ & & X' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

et tel que les morphismes induits

$$\begin{array}{ccc} & (\Omega, Z) & \\ q \swarrow & & \searrow p \\ (X', Z) & & (X, Z) \end{array}$$

soient (cartésiens) excisifs.

PREUVE : Considérons pour commencer le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccccc} Z & & & & X \\ & \searrow i & & & \downarrow f \\ & & X \times_Y X' & \xrightarrow{p} & X \\ & \swarrow j & \downarrow q & & \downarrow f \\ & & X' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Comme p et q sont étales, il s'agit de trouver un ouvert Ω de $X \times_Y X'$ tel que les images réciproques de Z dans Ω par p et q soient égales à $k(Z)$.

Or, on peut considérer le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccccc} Z & & & & X \times_Y X' \\ & \searrow k & & & \downarrow q \\ & & q^{-1}(Z) & \xrightarrow{j'} & X \times_Y X' \\ & \swarrow j & \downarrow q' & & \downarrow q \\ & & Z & \xrightarrow{j} & X' \end{array}$$

Puisque f est étale, q et q' sont étales. Alors, k' est une section du morphisme étale q' ; c'est donc une immersion ouverte. Comme c'est de plus une immersion fermée, $k'Z$ est facteur direct dans $q^{-1}(Z)$. Ainsi, $q^{-1}(Z) - k'Z$ est canoniquement un sous-schéma fermé de $q^{-1}(Z)$, donc de $X \times_Y X'$.

Par symétrie des rôles, on démontre que $p^{-1}(Z) - kZ$ est fermé dans $p^{-1}(Z)$, complémentaire de l'image de Z .

On peut alors poser

$$\Omega = X \times_Y X' - ((q^{-1}(Z) - kZ) \cup (p^{-1}(Z) - kZ))$$

qui satisfait alors la propriété attendue. \square

Remarque 5.4.7.– Le fait que cet ouvert est canonique se traduira pour nous en disant qu’il est fonctoriel par rapport à (X, Z) (resp. (X', Z)) pour les morphismes cartésiens.

On introduit maintenant une définition commode et classique :

Définition 5.4.8 Soit (X, Z) une paire fermée, où X est un k -schéma. On appelle simplement paramétrisation de (X, Z) sur k tout morphisme de paires fermées $(f, g) : (X, Z) \rightarrow (\mathbb{A}_k^{c+n}, \mathbb{A}_k^n)$ où

1. n et c sont des entiers naturels.
2. \mathbb{A}_k^n est vu comme un sous-schéma fermé de \mathbb{A}_k^{c+n} à travers l’annulation des c premières coordonnées.
3. (f, g) est cartésien étale.

L’existence d’une paramétrisation de (X, Z) est implique que X et Z sont lisses sur k , Z de codimension pure dans X égale à c . Réciproquement, si X et Z sont lisses sur k , il existe un ouvert U de X et une paramétrisation de $(U, Z \cap U)$.

5.4.9.– On utilisera dès lors le procédé suivant pour associer à une paramétrisation deux morphismes excisifs (on peut voir ce procédé comme la version géométrique du théorème de pureté) :

Si (X, Z) est une paire fermée, et $(f, g) : (X, Z) \rightarrow (\mathbb{A}_k^{c+n}, \mathbb{A}_k^n)$ une paramétrisation, on considère le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{s_0} & \mathbb{A}_Z^c \\ \downarrow & & \downarrow f_Z \times 1 \\ X & \longrightarrow & \mathbb{A}_k^{c+n}. \end{array}$$

où s_0 est la section nulle du fibré considéré.

Alors, d’après la proposition 5.4.6, il existe une paire (Ω, Z) et des morphismes excisifs :

$$(X, Z) \rightarrow (\Omega, Z) \leftarrow (\mathbb{A}_Z^c, Z).$$

Par ailleurs, cette donnée est fonctorielle par rapport à (X, Z) et par rapport à sa paramétrisation pour les morphismes de paires cartésiens.

5.4.2 Excision des faisceaux avec transferts

Dans toute la suite de cette section sur le résidu, les paires qui apparaissent sont supposées être de la forme (X, Y) où X est algébrique lisse.

Le but de ce qui suit est de prolonger un faisceau avec transferts en un foncteur sur les paires fermées réduites, munies des morphismes quasi-cartésiens :

Définition 5.4.10 Soit (X, Y) une paire telle que X et Y sont lisses sur k .

On note $L[X/Y]$ le faisceau Nisnevich dans $\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ obtenu comme conoyau du monomorphisme $L[Y] \rightarrow L[X]$, induit par l'immersion canonique.

Lorsqu'on restreint ce procédé aux paires ouvertes, on obtient un foncteur $L[./.] : \mathcal{P}\mathcal{L}_k \rightarrow \mathcal{N}_k^{\text{tr}}$. D'après la convention 5.4.3, pour toute paire fermée (X, Y) , on pose

$$L[X, Y] = L[X/X - Y],$$

ce qui définit un foncteur sur $\mathcal{P}\mathcal{L}_k$.

Le lemme suivant n'est alors qu'une reformulation du corollaire 2.1.11 :

Lemme 5.4.11 Soit $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ un morphisme quasi-cartésien.

Si (f, g) est excisif alors le morphisme induit $L[f, g] : L[Y, T] \rightarrow L[X, Z]$ est un isomorphisme.

Pour des raisons techniques, nous aurons besoin d'une construction qui se localise par rapport au fermé de la paire considérée, lorsqu'il est muni de sa topologie de Nisnevich. Suivant l'utilisation qu'on a fait des pro-objets, on montre comment on peut faire cela en considérant non plus un faisceau avec transferts mais un pro-objet de tels faisceaux. On introduit donc en particulier l'ensemble projectif suivant :

Définition 5.4.12 Soient (X, Z) une paire fermée, et V/Z un schéma étale sur Z .

On définit la catégorie $\mathcal{V}_V(X, Z)$ dont les objets sont les triplets (U, h, k) qui s'insèrent dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{k} & U \\ \downarrow & & \downarrow h \\ Z & \twoheadrightarrow & X \end{array}$$

où h est étale, et k est une immersion.

Un morphisme $\mathbf{g} : (U, h, k) \rightarrow (U', h', k')$ est simplement un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & k \nearrow & \downarrow \mathbf{g} & \searrow h & \\ V & & & & X \\ & k' \searrow & U' & \nearrow h' & \end{array}$$

Remarque 5.4.13.— Soit (U, h, k) un objet de $\mathcal{V}_V(X, Z)$. Puisque le diagramme de la définition ci-dessus est commutatif, le morphisme k se factorise canoniquement en

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{k} & U \\ & \searrow l & \nearrow \\ & Z \times_X U & \\ & \swarrow & \\ & Z & \end{array}$$

Or, puisque les projections de V et $Z \times_X U$ sur Z sont étales, il résulte de [EGA4], prop. 17.3.4 que l est étale. Comme c'est de plus une immersion, c'est donc une immersion ouverte.

La catégorie $\mathcal{V}_V(X, Z)$ ainsi définie est cofiltrante puisque si (U, h, k) et (U', h', k') en sont des objets, on peut considérer le produit fibré $(U \times_X U', h \times_X h', k'')$ où $k'' : V \rightarrow U \times_X U'$ est l'immersion induite.

Comme elle est de plus formée d'objets étales au-dessus de U , elle est essentiellement petite.

On en déduit alors :

Définition 5.4.14 Soient (X, Z) une paire fermée, et V/Z un schéma étale. On pose

$$L_V[X, Z] = \varprojlim_{U \in \mathcal{V}_V(X, Z)} L[U, Z \times_X U],$$

qui est donc un pro-objet de $\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$.

5.4.15.— Cette construction est fonctorielle par rapport aux morphismes quasi-cartésiens :

Si $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ est un tel morphisme, on pose $W = V \times_Z T$, qui est étale sur T . Alors, pour tout objet (U, h, k) de $\mathcal{V}_V(X, Z)$, on obtient un objet (U_Y, h_Y, k_Y) défini par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & W & \xrightarrow{k_Y} & U_Y \\ & g_V \swarrow & \downarrow & & \downarrow h_Y \\ V & \xrightarrow{k} & U & \xleftarrow{f_U} & U_Y \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & T & \xrightarrow{h} & Y \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

dans lequel les carrés de droite et de gauche sont cartésiens. Le morphisme k_Y est l'immersion canonique qui s'inscrit dans ce diagramme commutatif.

Le morphisme $(f_U, g_V) : (U_Y, T \times_X U_Y) \rightarrow (U, Z \times_X U)$ est encore quasi-cartésien, et on en déduit un morphisme

$$L[f_U, g_V] : L[U_Y, T \times_X U_Y] \rightarrow L[U, Z \times_X U].$$

Les morphismes ainsi construits sont compatibles par rapport à (U, h, k) . On en déduit donc un morphisme de pro-objets :

$$\varprojlim_{U \in \mathcal{V}_V(X, Z)} \left(L[U_Y, T \times_X U_Y] \xrightarrow{L[f_U, g_V]} L[U, Z \times_X U] \right).$$

Comme pour tout (U, h, k) comme ci-dessus, (U_Y, h_Y, k_Y) est un objet de $\mathcal{V}_T(W, Y)$, ce morphisme définit un morphisme de pro-objets :

$$L_V[f, g] : L_{V \times_Z T}[Y, T] \rightarrow L_V[X, Z]$$

Ce morphisme nous permet d'énoncer le lemme suivant :

Lemme 5.4.16 Soit $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ un morphisme quasi-cartésien.

Si (f, g) est excisif, alors pour tout schéma V étale sur Z , le morphisme $L_V[f, g]$ est un isomorphisme.

PREUVE : On pose $W = V \times_Z T$, et plus généralement, on reprend les notations de 5.4.15. On démontre ce lemme en traitant deux cas particuliers. Pour chacun d'eux, l'étape de réduction suivante est valable :

0) Pour tout (U, h, k) dans $\mathcal{V}_V(X, Z)$, le morphisme $(f_U, g_V) : (U_Y, T \times_Y U_Y) \rightarrow (U, Z \times_X U)$ est encore excisif, et donc le morphisme $L[f_U, g_V]$ est un isomorphisme d'après le lemme 5.4.11. Dès lors, si l'on note ϕ le foncteur

$$\mathcal{V}_V(X, Z) \rightarrow \mathcal{V}_W(Y, T), (U, h, k) \mapsto (U_Y, h_Y, k_Y),$$

il suffit de montrer que ϕ est final.

1) On commence par supposer que $X = Y$, et $f = 1_X$. Par définition, le morphisme $g : T \rightarrow Z$ est donc un épaissement.

On se place après la réduction 0). Dans ce cas, le morphisme ϕ associe à un objet (U, h, k) de $\mathcal{V}_V(X, Z)$ le triplet $(U, h, k \times_Z T)$.

Si (U, h, k') est un objet de $\mathcal{V}_W(X, T)$, puisque h est formellement étale, et que V est un épaissement de W , on en déduit par définition (cf [EGA4], 17.1.1) l'existence d'un unique morphisme pointillé dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} W & \longrightarrow & V & \longrightarrow & U \\ & \searrow & & \searrow & \downarrow h \\ & & & & X \end{array}$$

(Les flèches k et k' sont pointillées dans le diagramme original.)

En utilisant à nouveau le fait que h est formellement étale, on obtient $\phi(U, h, k) = (U, h, k')$ ce qui montre que ϕ est final (et même inversible à droite) et termine la démonstration de ce cas.

2) Grâce au cas 1), on peut se restreindre au cas où Z et T sont réduits.

Plaçons nous dès lors après l'étape de réduction 0).

Soit (U', h', k') un objet dans $\mathcal{V}_W(Y, T)$. On pose $h = f \circ h'$, qui est un morphisme étale.

Or, par hypothèse, g est un isomorphisme. Donc, le morphisme $g_V : W \rightarrow V$ qui s'en déduit par changement de base est aussi un isomorphisme. Dès lors, si l'on pose $k = k' \circ g_V^{-1}$, on obtient bien une immersion ; le triplet (U', h, k) est donc un objet de $\mathcal{V}_V(X, Z)$. Enfin, si l'on pose $\phi(U', h, k) = (U'_Y, h_Y, k_Y)$, on insère ce triplet dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} W & \xrightarrow{k_Y} & U'_Y & \xrightarrow{h_Y} & Y \\ \downarrow g_V & \searrow k' & \downarrow h' & \nearrow h & \downarrow f \\ V & \xrightarrow{k} & U' & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

(Les flèches k et h sont pointillées dans le diagramme original.)

(pour plus de clarté, on a tracé en pointillé les flèches qu'on a construites à partir des flèches données rigides). Ce diagramme définit donc une flèche $\phi(U'_Y, h, k) \rightarrow (U', h', k')$, ce qui conclut. \square

Le lemme suivant affirme que le raffinement que l'on vient de définir est continu au sens de la topologie de Nisnevich :

Lemme 5.4.17 *Soit (X, Z) une paire, et s un point de Z . Alors, on a un isomorphisme canonique*

$$\varprojlim_{V \in \mathcal{V}_s^h(Z)} \mathrm{L}_V[X/X - Z] \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}[X_s^h/X_s^h - Z_s^h]$$

où le pro-objet de droite est le conoyau du monomorphisme de pro-objets de $\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}$, $\mathrm{L}[X_s^h - Z_s^h] \rightarrow \mathrm{L}[X_s^h]$ (avec $X_s^h - Z_s^h = X_s^h \times_X (X - Z)$).

PREUVE : Par définition, le pro-objet de gauche est indexé par la catégorie $\coprod_{V \in \mathcal{V}_s^h(Z)} \mathcal{V}_V(X, Z)$.

D'après le lemme C.2.21, il suffit donc de construire un foncteur final

$$\prod_{V \in \mathcal{V}_s^h(Z)} \mathcal{V}_V(X, Z) \rightarrow \mathcal{V}_s^h(X).$$

Soient V est un voisinage Nisnevich de s dans Z , et (U, h, k) un objet de $\mathcal{V}_V(X, Z)$, ce que l'on résume dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{k} & U \\ f \downarrow & & \downarrow h \\ Z & \xrightarrow{i} & X. \end{array}$$

Par définition, il existe un point t de V tel que le morphisme induit $\kappa_Z(s) \xrightarrow{f^\#} \kappa_V(t)$ sur les corps résiduels soit un isomorphisme. On peut alors regarder le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \kappa_V(t) & \xleftarrow{k^\#} & \kappa_U(ht) \\ f^\# \uparrow & & \uparrow h^\# \\ \kappa_Z(s) & \xleftarrow{i^\#} & \kappa_X(is) \end{array}$$

Comme $k^\#$ et $i^\#$ sont des isomorphismes (puisque les morphismes correspondants respectivement sont des immersions), on en déduit que $h^\#$ est un isomorphisme ; donc U est un voisinage Nisnevich de s dans X .

Le morphisme annoncé est donc simplement $(U, h, k) \mapsto U$.

Il est bien sûr final, puisque pour tout voisinage Nisnevich U' de s dans X , $Z \times_X U'$ est un voisinage Nisnevich de s dans Z , et U' muni des morphismes triviaux est un objet de $\mathcal{V}_{Z \times_X U'}(X, Z)$. \square

5.4.2.1 Un invariant pour les faisceaux homotopiques associé à une paire fermée

Définition 5.4.18 *Soit F un faisceau homotopique, et (X, Z) une paire fermée.*

Si V/Z est un schéma étale sur Z , on pose

$$\hat{F}_{(X,Z)}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}\text{-}D(\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}})}(\mathrm{L}_V[X/X - Z], F[1]).$$

On a donc défini un préfaisceau $\hat{F}_{(X,Z)}$ sur le site étale de Z , et l'on note $F_{(X,Z)}$ le faisceau Nisnevich associé.

On pose enfin : $F^1(X, Z) = \Gamma_{\mathrm{Nis}}(Z; \hat{F}_{(X,Z)})$.

Remarque 5.4.19.– Cette construction est directement inspirée de la construction de V. Voevodsky [FSV00c], §4.2. La construction que l'on propose permet de bénéficier des propriétés de la topologie de Nisnevich.

5.4.20.– Ainsi, elle est fonctorielle par rapport aux morphismes quasi-cartésiens : si $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ est un tel morphisme, compte tenu de la functorialité de 5.4.15, on en déduit un morphisme de préfaisceaux sur Z_{Nis}

$$\hat{F}_{(f,g)} : \hat{F}_{(X,Z)} \rightarrow g_* \hat{F}_{(Y,T)}$$

et donc un morphisme de groupes abéliens

$$F^1(f, g) : F^1(X, Z) \rightarrow F^1(Y, T).$$

On a ainsi déduit de F un préfaisceau sur la catégorie des paires munies des morphismes quasi-cartésiens.

5.4.21.– Rappelons que par définition, on dispose de la suite exacte de pro-faisceaux suivante :

$$0 \rightarrow \varprojlim_{U \in \mathcal{V}_V(X,Z)} L[U - Z_U] \rightarrow \varprojlim_{U \in \mathcal{V}_V(X,Z)} L[U] \rightarrow L_V[X/X - Z] \rightarrow 0.$$

Posant alors, $A = \varprojlim_{U \in \mathcal{V}_V(X,Z)} L[U - Z_U]$, et $B = \varprojlim_{U \in \mathcal{V}_V(X,Z)} L[U]$, puisque X est un objet de $\mathcal{V}_V(X, Z)$, on déduit de la suite exacte ci-dessus le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} F(X) & \xrightarrow{j^*} & F(X - Z) & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow \partial'_V & \\ \text{Hom}_{\text{pro-}D(\mathcal{A}_k^{\text{tr}})}(B, F) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\text{pro-}D(\mathcal{A}_k^{\text{tr}})}(A, F) & \longrightarrow & \hat{F}_{(X,Z)}(V) \end{array}$$

où $j : X - Z \rightarrow X$ est l'inclusion naturelle. La suite du bas est un morceau de suite exacte longue, qui est limite inductive filtrante de suites exactes longues de cohomologie.

Ainsi, on a tout au moins la relation $\partial'_V \circ j^* = 0$. Par ailleurs, le morphisme ∂'_V est naturel par rapport à V , et induit donc un morphisme du groupe $F(X - Z)$ dans le préfaisceau $\hat{F}_{(X,Z)}$. Comme le foncteur sections globales du faisceau associé se décrit comme une limite inductive de sections du préfaisceau, on en déduit donc un morphisme, qu'on appellera pré-résidu,

$$F(X - Z) \xrightarrow{\partial'_{(X,Z)}} F^1(X, Z)$$

tel que $\partial'_{(X,Z)} \circ j^*$ est nulle (ce qui est une première approximation d'une suite exacte de localisation).

Ce morphisme est de plus naturel par rapport aux morphismes de paires quasi-cartésiens.

On déduit le lemme suivant des propriétés montrées dans la sous-section précédente :

Lemme 5.4.22 Soit $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ un morphisme de paires fermées.

Si (f, g) est excisif, le morphisme $F^1(f, g) : F^1(X, Z) \rightarrow F^1(Y, T)$ est un isomorphisme.

PREUVE : En effet, d'après le lemme 5.4.16, le morphisme $\hat{F}_f : \hat{F}_{(X, Z)} \rightarrow (f_Z)_* \hat{F}_{(Y, T)}$ est un isomorphisme de préfaisceaux, donc il induit un isomorphisme après application du foncteur sections globales. \square

Remarque 5.4.23.– En particulier, si (X, Z) est une paire fermée, on obtient un isomorphisme

$$F^1(X, Z) \simeq F^1(X, Z_{\text{réd}}).$$

L'invariant qu'on a défini ne dépend donc que de la structure réduite de Z .

On arrive au point clé qui justifie notre construction :

Proposition 5.4.24 Soient X un schéma algébrique lisse connexe et F un faisceau homotopique. On considère la paire fermée (\mathbb{A}_X^1, X) , où X est vu comme un sous-schéma fermé à travers la section nulle.

Alors le morphisme pré-résidu

$$F(\mathbb{A}_X^1 - X) \xrightarrow{\partial'_{(\mathbb{A}_X^1, X)}} F^1(\mathbb{A}_X^1, X)$$

induit un isomorphisme

$$F_{-1}(X) = F(\mathbb{A}_X^1 - X)/F(\mathbb{A}_X^1) \rightarrow F^1(\mathbb{A}_X^1, X),$$

où l'on rappelle que le faisceau F_{-1} a été défini dans 3.4.1.

PREUVE : On rappelle que pour tout schéma V dans \mathcal{L}_k , $F_{-1}(V) = F(\mathbb{G}_m \times V)/F(\mathbb{A}^1 \times V)$.

Or, $\mathbb{A}^1 \times V$ est un objet de $\mathcal{V}_V(\mathbb{A}_X^1, X)$. On dispose donc du morphisme de projection $L_V[\mathbb{A}_X^1/\mathbb{A}_X^1 - X] \rightarrow L[\mathbb{A}^1 \times V/\mathbb{G}_m \times V]$. D'où le morphisme induit

$$\begin{array}{ccc} F_{-1}(V) & \longrightarrow & \text{Hom}_{D(\mathcal{N}_k^{\text{tr}})}(L[\mathbb{A}^1 \times V/\mathbb{G}_m \times V], F[1]) \\ & & \downarrow \\ & & \text{Hom}_{\text{pro-}D(\mathcal{N}_k^{\text{tr}})}(L_V[\mathbb{A}_X^1/\mathbb{A}_X^1 - X], F[1]) = \hat{F}_{(\mathbb{A}_X^1, X)}(V). \end{array}$$

Ce morphisme est naturel par rapport à V , et il suffit alors de voir qu'il induit un isomorphisme de faisceaux sur X_{Nis} . On est donc ramené à une assertion sur les fibres des faisceaux en question.

Or, on peut calculer facilement les dites fibres :

Lemme 5.4.25 Soit F un faisceau dans $\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$, (X, Z) une paire telle que X est algébrique lisse, et s un point de X . Alors il existe un isomorphisme canonique

$$F_{(X, Z)}(X_s^h) \xleftarrow{\sim} F(X_s^h - Z_s^h)/F(X_s^h)$$

où le groupe abélien de droite est un quotient, et $X_s^h - Z_s^h$ est le pro-objet de \mathcal{L}_k égal à $X_s^h \times_X (X - Z)$.

PREUVE : En effet, $F_{(X,Z)}(X_s^h)$ est isomorphe à $\hat{F}_{(X,Z)}(X_s^h)$. Par ailleurs, d'après le lemme 5.4.17, cette dernière limite inductive est isomorphe à

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}\text{-}D(\mathcal{A}_k^{\mathrm{tr}})}\left(\mathrm{L}\left[X_s^h/X_s^h - Z_s^h\right], F[1]\right).$$

Or, puisque la limite inductive filtrante est exacte, ce dernier groupe s'insère dans la suite exacte suivante :

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow F(X_s^h) \rightarrow F(X_s^h - Z_s^h) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}\text{-}D(\mathcal{A}_k^{\mathrm{tr}})}\left(\mathrm{L}\left[X_s^h/X_s^h - Z_s^h\right], F[1]\right) \\ &\rightarrow H^1(X_s^h; F) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

On conclut donc puisque par définition $H^1(X_s^h; F) = 0$. \square

On est ramené d'après ce calcul, à montrer que le morphisme

$$F\left(\mathbb{G}_m \times X_s^h\right) / F\left(\mathbb{A}^1 \times X_s^h\right) \rightarrow F\left(\left(\mathbb{A}^1 \times X\right)_s^h - X_s^h\right) / F\left(\left(\mathbb{A}^1 \times X\right)_s^h\right)$$

est un isomorphisme.

Or, on a : $(\mathbb{A}^1 \times_k X)_s^h = (\mathbb{A}^1 \times_k (X_s^h))_s^h$. Dans ce qui suit, on pose $\mathcal{X} = \mathrm{Spec}\left(\mathcal{O}_{X,s}^h\right)$, et on confond ce schéma avec le pro-objet X_s^h dont il est la limite.

Considérons avec cet abus la catégorie $\mathcal{E}_s(X)$ formée des couples (V, f) tels que $f : V \rightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{X}}^1$ est un morphisme étale tel que le morphisme induit $f^{-1}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{X}$ est un isomorphisme. Alors,

$$\left(\mathbb{A}^1 \times_k \mathcal{X}\right)_s^h \simeq \varprojlim_{V \in \mathcal{E}_s(X)} V.$$

En effet, si V est un voisinage Nisnevich de s dans $\mathbb{A}_{\mathcal{X}}^1$, $g : f^{-1}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{X}$ est un voisinage Nisnevich de s dans le schéma local hensélien \mathcal{X} . Alors, d'après 2.1.25, g admet une section. Il existe donc un sous-schéma ouvert et fermé \mathcal{X}' de $f^{-1}(\mathcal{X})$ qui est isomorphe à \mathcal{X} . On peut donc trouver un ouvert de V tel que l'image réciproque de \mathcal{X} soit égale à \mathcal{X}' , ce qui montre que $\mathcal{E}_s(X)$ est final dans la catégorie $\mathcal{V}_s^h(\mathbb{A}_{\mathcal{X}}^1)$.

Ainsi, il suffit de démontrer pour tout (V, f) dans $\mathcal{E}_s(X)$, le morphisme induit par f

$$F(\mathbb{A}_{\mathcal{X}}^1 - \mathcal{X}) / F(\mathbb{A}_{\mathcal{X}}^1) \rightarrow F(V - T) / F(V)$$

est un isomorphisme, où l'on a posé $T = f^{-1}(\mathcal{X})$.

On s'est donc donné un carré distingué élémentaire

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathbb{A}_{\mathcal{X}}^1. \end{array} \tag{5.1}$$

Or la proposition 3.3.13 s'applique encore dans ce cas, même si l'on remplace la courbe algébrique lisse C/k par $\mathbb{A}_k^1 \times_k \mathcal{X}$. En effet, $\mathbb{A}_{\mathcal{X}}^1$ admet $\mathbb{P}_{\mathcal{X}}^1$ comme bonne compactification au-dessus de \mathcal{X} , et par ailleurs,

$$\mathrm{Pic}\left(\mathbb{A}_{\mathcal{X}}^1 \times_{\mathcal{X}} 0_{\mathcal{X}}\right) = 0.$$

L'hypothèse de 3.3.13 est donc vérifiée dans ce cas étendu, et la démonstration se généralise telle quelle en considérant la compactification $\mathbb{P}_{\mathcal{X}}^1$ de $\mathbb{A}_{\mathcal{X}}^1/\mathcal{X}$.

On obtient donc des correspondances finies qui vérifient les mêmes relations que celles de 3.3.13, mais qui sont définies sur \mathcal{X} .

Pour conclure, on remplace tous les éléments du carré (5.1) par des pro-objets indexés par les voisinages Nisnevich de s dans X . La méthode montre en fait que si l'on remplace $\mathcal{X} = X_s^h$ par un voisinage Nisnevich W quelconque de s dans X , il existe un voisinage W' plus fin que W tel que la proposition 3.3.13 s'applique avec le carré

$$\begin{array}{ccc} T_W & \rightarrow & V_W \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \rightarrow & \mathbb{A}_W^1 \end{array}$$

en considérant des W' -correspondances finies. Dans ce cas, grâce à la définition 1.2.15 (puisque W'/k est de type fini), ces correspondances induisent des correspondances finies sur k entre les mêmes schémas, qui vérifient encore les-dites relations.

Dès lors, le corollaire 3.3.14 s'applique au-dessus de W' , nous permettant de conclure que

$$F(\mathbb{A}_{W'}^1 - W')/F(\mathbb{A}_{W'}^1) \rightarrow F(V_{W'} - T_{W'})/F(V_{W'})$$

est un isomorphisme. Comme c'est vrai pour W' aussi petit qu'on veut, on peut conclure. \square

5.4.2.2 Pureté par déformation

Dans cette sous-sous-section, on démontre que notre construction vérifie le théorème de pureté en utilisant la déformation au cône normal ce qui nous permet de garantir la fonctorialité nécessaire à la définition et aux propriétés du résidu.

Si (X, Z) est une paire, on rappelle que l'on a des flèches de déformation au cône normal $(X, Z) \xrightarrow{d} (D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) \xleftarrow{d'} (N_Z X, Z)$ qui sont des morphismes de paires cartésiens. Par ailleurs, $d_Z : Z \rightarrow \mathbb{A}_Z^1$ (resp d'_Z) est la section unité (resp. nulle) de \mathbb{A}_Z^1 .

Théorème 5.4.26 *Soit (X, Z) une paire fermée.*

Alors, si il existe une paramétrisation $(f, g) : (X, Z) \rightarrow (\mathbb{A}_k^{n+1}, \mathbb{A}_k^n)$ (cf définition 5.4.8), les morphismes de déformation

$$F^1(X, Z) \xleftarrow{F^1 d} F^1(D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) \xrightarrow{F^1 d'} F^1(N_Z X, Z)$$

sont des isomorphismes.

PREUVE : Commençons par noter que la déformation au cône normal donne le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} (X, Z) & \longrightarrow & (D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) & \longleftarrow & (N_Z X, Z) \\ (f, g) \downarrow & & \downarrow (Df, 1 \times g) & & \downarrow (Nf, g) \\ (\mathbb{A}_k^{n+1}, \mathbb{A}_k^n) & \longrightarrow & (D(\mathbb{A}_k^{n+1}, \mathbb{A}_k^n), \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}_k^n) & \longleftarrow & (N(\mathbb{A}_k^{n+1}, \mathbb{A}_k^n), \mathbb{A}_k^n) \end{array}$$

où tous les morphismes sont cartésiens, et les morphismes verticaux sont étales.

Or, on rappelle que dans la paire fermée $(\mathbb{A}_k^{n+1}, \mathbb{A}_k^n)$, le schéma \mathbb{A}_k^n est considéré comme un sous-schéma fermé à travers l'annulation de la première coordonnée. Comme \mathbb{A}_k^{n+1} est un fibré au-dessus de \mathbb{A}_k^n , il existe un isomorphisme canonique $D(\mathbb{A}_k^{n+1}, \mathbb{A}_k^n) \rightarrow \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}_k^{n+1}$ qui induit l'isomorphisme canonique $N(\mathbb{A}_k^{n+1}, \mathbb{A}_k^n) \rightarrow \mathbb{A}_k^{n+1}$ et l'identité sur $\mathbb{G}_m \times \mathbb{A}_k^{n+1}$.

La flèche Df (resp. Nf) induit donc une paramétrisation de $(D_Z X, \mathbb{A}_Z^1)$ (resp. $(N_Z X, Z)$), et on a les morphismes suivants entre ces paramétrisations :

$$\begin{array}{ccccc} (X, Z) & \longrightarrow & (D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) & \longleftarrow & (N_Z X, Z) \\ f \downarrow & & \downarrow Df & & \downarrow Nf \\ (\mathbb{A}_k^{n+1}, \mathbb{A}_k^n) & \longrightarrow & (\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}_k^{n+1}, \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}_k^n) & \longleftarrow & (\mathbb{A}_k^{n+1}, \mathbb{A}_k^n). \end{array}$$

Dès lors, d'après la construction de 5.4.9, on en déduit le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} (X, Z) & \longrightarrow & (D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) & \longleftarrow & (N_Z X, Z) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (\Omega_1, Z) & \longrightarrow & (\Omega, \mathbb{A}_Z^1) & \longleftarrow & (\Omega_0, Z) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{A}_Z^1, Z) & \longrightarrow & (\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}_Z^1, \mathbb{A}_Z^1) & \longleftarrow & (\mathbb{A}_Z^1, Z) \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont excisifs.

On obtient alors finalement le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} F^1(X, Z) & \xleftarrow{F^1 d} & F^1(D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{F^1 d'} & F^1(N_Z X, Z) \\ \sim \downarrow & & \sim \downarrow & & \sim \downarrow \\ F^1(\mathbb{A}_Z^1, Z) & \xleftarrow{} & F^1(\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}_Z^1, \mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{} & F^1(\mathbb{A}_Z^1, Z) \\ \sim \uparrow & & \sim \uparrow & & \sim \uparrow \\ F_{-1}(Z) & \xleftarrow{F^1 s_1} & F_{-1}(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{F^1 s_0} & F_{-1}(Z). \end{array}$$

La partie supérieure est obtenue à partir du diagramme précédent par application du préfaisceau sur les paires induit par F ; les morphismes verticaux dans cette partie sont donc des isomorphismes d'après le lemme 5.4.22. La partie inférieure résulte du lemme 5.4.24, et les morphismes verticaux sont là encore des isomorphismes.

Les morphismes horizontaux du bas sont induits par les sections nulle et unité, puisqu'il en est de même sur la ligne du dessus, et par functorialité de la construction.

Or, d'après le lemme 3.4.4, F_{-1} est invariant par homotopie, ce qui conclut. \square

5.4.3 Functorialité raffinée de la déformation au cône normal

L'isomorphisme du théorème 5.4.26 est naturel par rapport aux morphismes cartésiens de paires fermées. Or, le membre de gauche est fonctoriel par rapport aux morphismes quasi-cartésiens. On va donc étendre la functorialité de l'espace de déformation au cône normal par rapport aux morphismes quasi-cartésiens, de telle manière que l'isomorphisme ci-dessus soit naturel.

On a besoin d'introduire la définition suivante :

Définition 5.4.27 *Considérons un diagramme commutatif dans la catégorie des schémas*

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\iota} & Z' \\ & \searrow i & \swarrow i' \\ & & X \end{array}$$

dans lequel chaque morphisme est une immersion fermée, et ι est un épaissement. Notons \mathcal{I} (resp. \mathcal{I}') l'idéal de i (resp. i').

1. Soit α un entier naturel. On dira que l'épaissement ι est exact d'ordre α dans X si et seulement si

$$\mathcal{I}' = \mathcal{I}^\alpha.$$

2. Plus généralement, on dira que l'épaissement ι est exact par rapport à X si et seulement si pour toute composante irréductible Z'_λ de Z' , notant Z_λ la composante irréductible de Z qui correspond à Z'_λ , il existe un entier α_λ tel que le morphisme induit par restriction $\iota_\lambda : Z_\lambda \rightarrow Z'_\lambda$ soit exactement d'ordre α_λ dans X .

Remarque 5.4.28.– Dans la deuxième partie de la définition, la suite d'entiers α_λ où λ parcourt les composantes irréductibles de Z' est unique.

En effet, si Z est réduit, pour toute composante irréductible Z'_λ de Z' , notant z'_λ le point générique de Z'_λ , on a

$$\alpha_\lambda = \lg(\mathcal{O}_{Z'_\lambda, z'_\lambda}) + 1.$$

Muni de ces restrictions sur les épaissements, on peut introduire une notion plus forte que celle de morphisme quasi-cartésien pour laquelle on puisse étendre la naturalité de la déformation au cône normal :

Définition 5.4.29 *Soit $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ un morphisme quasi-cartésien de paires fermées dans la catégorie des schémas.*

On dit que (f, g) est exact si et seulement si l'épaissement canonique $T \rightarrow Z \times_Y X$ est exact par rapport à Y .

5.4.30.– On se donne un morphisme de paires fermées $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ quasi-cartésien exact. On suppose que Z est intègre, et que T est réduit, réunion disjointe de ses composantes irréductibles.

Si l'on pose $T' = Z \times_X Y$, on a par définition une décomposition du morphisme (f, g) en le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T & & \\ \downarrow \iota & \searrow & \\ T' & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow g' & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$

où ι est un épaissement exact par rapport à Y .

Le morphisme (f, g') étant cartésien, il nous reste à construire un morphisme sur les espaces de déformation pour le triangle du haut, c'est-à-dire le morphisme de paires quasi-cartésien exact $(1_Y, \iota) : (Y, T) \rightarrow (Y, T')$.

Commençons par supposer que T est intègre. On note \mathcal{I} (resp. \mathcal{I}') l'idéal de T (resp. T') dans Y , et on note α l'ordre de l'épaississement exact ι . Par définition, c'est l'unique entier α tel que

$$\mathcal{I}' = (\mathcal{I})^\alpha.$$

Dès lors, on peut définir simplement un morphisme sur les espaces de déformation :

$$\begin{aligned} \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} (\mathcal{I}')^n \cdot t^{-n} &\rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{I})^n \cdot t^{-n} \\ x \cdot t^{-n} &\mapsto x \cdot t^{-\alpha n} \end{aligned}$$

puisque dans cette formule, $x \in (\mathcal{I}')^n = (\mathcal{I})^{\alpha n}$. En particulier, ce morphisme est l'élévation à la puissance α sur le paramètre de la déformation, et il définit un morphisme $D_\iota : D_T Y \rightarrow D_{T'} Y$.

Mais par ailleurs, par construction, ce morphisme induit canoniquement un morphisme quasi-cartésien exact de paires $D_\iota : (D_T Y, \mathbb{A}_T^1) \rightarrow (D_{T'} Y, \mathbb{A}_{T'}^1)$, et plus précisément le morphisme canonique

$$\mathbb{A}_T^1 \rightarrow \mathbb{A}_{T'}^1 \times_{D_{T'} Y} D_T Y$$

est un épaississement exact d'ordre α dans $D_T Y$.

On calcule par ailleurs les fibres en 0 et 1 de cette construction pour arriver au diagramme de paires fermées suivant :

$$\begin{array}{ccccc} (Y, T) & \longrightarrow & (D_T Y, \mathbb{A}_T^1) & \longleftarrow & (C_T Y, T) \\ (1_Y, \iota) \downarrow & & \downarrow D_\iota & & \downarrow (C_\iota, \iota) \\ (Y, T') & \longrightarrow & (D_{T'} Y, \mathbb{A}_{T'}^1) & \longleftarrow & (C_{T'} Y, T') \end{array}$$

dans lequel les morphismes horizontaux sont tous cartésiens fermés, et les morphismes verticaux sont quasi-cartésiens exacts d'ordre α .

On notera particulièrement que le morphisme C_ι est défini comme le spectre du morphisme suivant

$$\begin{aligned} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{I}')^n / (\mathcal{I}')^{n+1} &= \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}^{\alpha n} / \mathcal{I}^{\alpha n + \alpha} \xrightarrow{(1)} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}^{\alpha n} / \mathcal{I}^{\alpha n + 1} \\ &\xrightarrow{(2)} \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{I}^m / \mathcal{I}^{m+1}, \end{aligned}$$

où le morphisme (1) est l'épimorphisme canonique, et (2) est le monomorphisme canonique correspondant à l'inclusion du facteur direct.

Autrement dit, d'un point de vue géométrique, le morphisme C_ι se factorise comme ci-dessous

$$\begin{array}{ccccc} & & C_\iota & & \\ & \searrow & \curvearrowright & \searrow & \\ C_T Y & \xrightarrow{(2)} & \iota^* C_{T'} Y & \xrightarrow{(1)} & g_\lambda^* N_Z X \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & T' & \xrightarrow{\iota} & T, \end{array}$$

factorisation dans laquelle le morphisme (1) est obtenu par changement de base (c'est donc un épaississement), et le morphisme (2) est dominant de degré α .

Ce calcul montre enfin que le morphisme canonique $T' \times_{C_{T'}Y} C_T Y \rightarrow T'$ est un isomorphisme, et donc que (C_ι, ι) est un morphisme quasi-cartésien exact bien défini.

Dans le cas général, comme T' est réunion disjointe de ses composantes irréductibles notées $(T'_\lambda)_\lambda$, on pose $D_\iota = \sum_\lambda D_{\iota_\lambda}$ où ι_λ est l'épaississement canonique correspondant à T'_λ .

Ceci nous permet donc de définir le morphisme annoncé à partir du morphisme quasi-cartésien exact (f, g) en considérant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 (Y, T) & \xrightarrow{d_T Y} & (D_T Y, \mathbb{A}_T^1) & \xleftarrow{d'_T Y} & (C_T Y, T) \\
 \downarrow (1, \iota) & & \downarrow D_\iota & & \downarrow (C_\iota, \iota) \\
 (f, g) \left(\begin{array}{ccc} (Y, T') & \longrightarrow & (D_{T'} Y, \mathbb{A}_{T'}^1) & \longleftarrow & (C_{T'} Y, T') \\ \downarrow (f, g') & & \downarrow (D_{g'} f, 1 \times g') & & \downarrow (C_{g'} f, g') \end{array} \right. & & & & \left. (C_g f, g) \right) \\
 \downarrow (f, g') & & \downarrow (D_{g'} f, 1 \times g') & & \downarrow (C_{g'} f, g') \\
 (X, Z) & \xrightarrow{d_Z X} & (D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) & \xleftarrow{d'_Z X} & (C_Z X, Z)
 \end{array} \tag{5.2}$$

et en posant : $D_g f = D_{g'} f \circ D_\iota$ et $C_g f = C_{g'} f \circ C_\iota$ (où les morphismes $D_{g'} f$ et $C_{g'} f$ ont été définis dans B.2.3).

La déformation au cône normal est donc naturelle non seulement par rapport aux morphismes cartésiens, mais aussi par rapport aux morphismes quasi-cartésiens exacts grâce à cette construction.

Il s'ensuit que l'isomorphisme de 5.4.26 est naturel par rapport aux morphismes quasi-cartésiens exacts.

5.4.3.1 Transferts

On termine les propriétés de notre construction en montrant qu'elle est munie de transferts pour les morphismes quasi-cartésiens finis.

5.4.31.— Soit $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ un morphisme quasi-cartésien fini équidimensionnel. Appliquant la proposition 5.3.5, on en déduit le diagramme commutatif dans $\mathcal{L}_{\text{cor}, k}$

$$\begin{array}{ccc}
 Y - T & \longrightarrow & Y \\
 \uparrow {}^t f_{X-Z} & & \uparrow {}^t f \\
 X - Z & \longrightarrow & X
 \end{array}$$

On obtient donc un morphisme

$$L[{}^t(f, g)] : L[X, Z] \rightarrow L[Y, T].$$

Ces morphismes sont de plus naturels dans le sens suivant :

Lemme 5.4.32 *Considérons un carré cartésien de paires fermées dans $\mathcal{P}^f\mathcal{L}_k$:*

$$\begin{array}{ccc} (Y', T') & \xrightarrow{(h', k')} & (Y, T) \\ (f', g') \downarrow & & \downarrow (f, g) \\ (X', Z') & \xrightarrow{(h, k)} & (X, Z) \end{array}$$

Alors, le carré suivant est commutatif dans $\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}[X', Z'] & \xrightarrow{\mathbb{L}(h, k)} & \mathbb{L}[X, Z] \\ \mathbb{L}^{[t(f', g')]} \downarrow & & \downarrow \mathbb{L}^{[t(f, g)]} \\ \mathbb{L}[Y', T'] & \xrightarrow{\mathbb{L}(h', k')} & \mathbb{L}[Y, T] \end{array}$$

PREUVE : Il suffit d'appliquer 5.3.5 à la fois pour le carré formé par les schémas X, Y, X', Y' et pour le carré formé par leurs ouverts. Il en résulte que le carré formé sur les conoyaux est commutatif. \square

Par ailleurs, si V/Z est étale, pour tout U dans $\mathcal{V}_V(X, Z)$, on peut appliquer le procédé précédent au morphisme quasi-cartésien fini équidimensionnel $(f_U, g_U) : (U_Y, U_T) \rightarrow (U, U_Z)$, obtenu par changement de base selon Y/X . Les morphismes ${}^t(f_U, g_U)$ ainsi obtenus sont compatibles par rapport à U d'après le lemme précédent, et on obtient donc un morphisme de pro-objets canonique :

$$\mathbb{L}_V[X, Z] = \varprojlim_{U \in \mathcal{V}_V(X, Z)} \mathbb{L}[U, U_Z] \rightarrow \varprojlim_{U \in \mathcal{V}_V(X, Z)} \mathbb{L}[U_Y, U_T].$$

Grâce au foncteur $\mathcal{V}_V(X, Z) \rightarrow \mathcal{V}_{V_Y}(Y, T)$, $(U, h, k) \mapsto (U_Y, h_Y, k_Y)$, on a aussi un morphisme de changement d'indice

$$\mathbb{L}_{V_Y}[Y, T] \rightarrow \varprojlim_{U \in \mathcal{V}_V(X, Z)} \mathbb{L}[U_Y, U_T].$$

Si l'on pose

$$\phi_{Y/X}(F) \cdot V = \text{Hom}_{\text{pro-}D(\mathcal{N}_k^{\text{tr}})} \left(\varprojlim_{U \in \mathcal{V}_V(X, Z)} \mathbb{L}[U_Y, U_T], F[1] \right),$$

on obtient donc des morphismes de préfaisceaux sur Z_{Nis}

$$\hat{F}_{(X, Z)} \leftarrow \phi_{Y/X}(F) \xrightarrow{\tau} g_* \hat{F}_{(Y, T)}.$$

Le lemme suivant va nous permettre de construire les transferts dans le cas général :

Lemme 5.4.33 *Si $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ est un morphisme cartésien fini équidimensionnel, avec les notations ci-dessus, le morphisme*

$$\tau : \phi_{Y/X}(F) \rightarrow g_* \hat{F}_{(Y, T)}$$

induit un isomorphisme sur les faisceaux associés.

PREUVE : Il suffit de montrer que pour tout point s de Z , le morphisme induit sur les fibres

$$\phi_{Y/X}(F).Z_s^h \rightarrow (g)_*\hat{F}_{(Y,T)}.Z_s^h$$

est un isomorphisme. Pour cela, on montre que le morphisme de pro-objets qui l'induit :

$$\varprojlim_{V \in \mathcal{V}_s^h(Z)} \varprojlim_{W \in \mathcal{V}_{V_Y}(Y,T)} L[W, W_T] \rightarrow \varprojlim_{V \in \mathcal{V}_s^h(Z)} \varprojlim_{U \in \mathcal{V}_V(X,Z)} L[U_Y, U_T]$$

est un isomorphisme. Il s'agit donc de voir que le foncteur de changement d'indice correspondant

$$\begin{aligned} \coprod_{V \in \mathcal{V}_s^h(Z)} \mathcal{V}_V(X, Z) &\rightarrow \coprod_{V \in \mathcal{V}_s^h(Z)} \mathcal{V}_{V_Y}(Y, T) \\ (V, (U, h, k)) &\mapsto (V, (U_Y, h_Y, k_Y)) \end{aligned}$$

est final.

Soit donc V un voisinage Nisnevich de s dans Z , et (U', h', k') un objet de $\mathcal{V}_{V_Y}(Y, T)$.

On obtient tout d'abord le diagramme suivant formé de carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} Y_{\kappa(s)} & \twoheadrightarrow & \text{Spec}(\kappa(s)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_Y & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

dans lequel on a posé $Y_{\kappa(s)} = Y \times_X \text{Spec}(\kappa(s))$. Or, comme g est fini,

$$Y_{\kappa(s)} \simeq \sqcup_{y \in f^{-1}(s)} (Y_{\kappa(s)})_y$$

où $(Y_{\kappa(s)})_y$ est un schéma local artinien de corps résiduel $\kappa(y)$.

Pour tout point y de la fibre $f^{-1}(s)$, V_Y est un voisinage Nisnevich de y dans T . Dès lors, comme par définition $V_Y \xrightarrow{k'} U'$ est une immersion, il s'ensuit que U' est un voisinage Nisnevich de y dans Y (même raisonnement que dans la preuve de 5.4.17), ce qui permet de définir une flèche canonique $Y_y^h \rightarrow U'$. On en déduit donc une flèche canonique $\sqcup_{y \in f^{-1}(s)} Y_y^h \rightarrow U'$.

Par ailleurs, comme f est fini, $Y \times_X X_s^h$ est somme de schémas locaux henséliens, et plus précisément

$$Y \times_X X_s^h = \sqcup_{y \in f^{-1}(s)} (Y \times_X X_s^h)_y$$

puisque ce schéma contient comme sous-schéma fermé $Y_{\kappa(s)}$. Or par ailleurs, on a un isomorphisme canonique $Y_y^h \simeq (Y \times_X X_s^h)_y$. Ainsi, on a donc obtenu un isomorphisme canonique $\sqcup_{y \in f^{-1}(s)} Y_y^h \simeq Y \times_X X_s^h$.

On obtient donc un morphisme $Y \times_X X_s^h \rightarrow U'$, qui s'insère de plus dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X X_s^h & \twoheadrightarrow & Y \times_X X_s^h \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_Y & \xrightarrow{k'} & U' \\ \downarrow & & \downarrow h' \\ T & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Dès lors, puisque par définition $Z_s^h = Z \times_X X_s^h$, il existe un voisinage Nisnevich U de s dans X et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X U_Z & \xrightarrow{k_Y} & Y \times_X U \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_Y & \xrightarrow{k'} & U' \\ \downarrow & & \downarrow h' \\ T & \longrightarrow & Y \end{array} \Bigg)_{h_Y}$$

où $h : U \rightarrow X$ est le morphisme étale de définition de U , et $k : U_Z \rightarrow U$ l'immersion fermée canonique. Ainsi, $(U_Z, (U_Y, h_Y, k_Y))$ est au-dessus de $(V_Y, (U', h', k'))$. \square

Définition 5.4.34 Soit F un faisceau avec transferts, et $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ un morphisme de paires fermées.

1. Si (f, g) est cartésien fini équidimensionnel, on définit un morphisme appelé transfert

$$F^1(f, g)_* : F^1(Y, T) \rightarrow F^1(X, Z)$$

comme la composée

$$\Gamma(Z; g_* \hat{F}_{(Y, T)}) \xrightarrow{(\tau^*)^{-1}} \Gamma(Z; \phi_{Y/X}(F)) \rightarrow \Gamma(Z; \hat{F}_{(X, Z)}),$$

avec les notations qui précèdent.

2. Plus généralement, si (f, g) est quasi-cartésien fini équidimensionnel, on obtient encore un transfert en considérant le morphisme cartésien fini équidimensionnel

$$(f, g') : (Y, Z_Y) \rightarrow (X, Z)$$

attaché à (f, g) , et en posant

$$F_1(f, g)_* : F^1(Y, T) \xrightarrow{\simeq} F^1(Y, Z_Y) \xrightarrow{F^1(f, g')_*} F^1(X, Z)$$

où le premier morphisme est la réciproque de l'isomorphisme de 5.4.23.

Par construction, on obtient donc la proposition suivante qui exprime la compatibilité entre le pré-résidu et les transferts que l'on vient de définir :

Proposition 5.4.35 Soit $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ un morphisme quasi-cartésien fini équidimensionnel de paires fermées, et F un faisceau avec transferts. Alors, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{\partial'_{(Y, T)}} & F^1(Y, T) \\ F^{(t} f) \downarrow & & \downarrow F^1(f, g)_* \\ F(X) & \xrightarrow{\partial'_{(X, Z)}} & F^1(X, Z) \end{array}$$

PREUVE : En effet, il suffit de le faire pour un morphisme cartésien fini équidimensionnel compte tenu de la functorialité du pré-résidu par rapport aux morphismes quasi-cartésiens (cf 5.4.21). Mais alors, cela résulte de la définition. \square

5.4.4 Situation générique

Définition 5.4.36 Soit X un schéma algébrique lisse. On appelle point spécial de X tout point s de X , de codimension 1 dans X .

On dira encore que (X, s) est un schéma pointé par un point spécial.

On peut appliquer à cette situation le formalisme du paragraphe précédent. Si l'on note Z l'adhérence réduite de s dans X , on a en particulier une paire fermée (X, Z) .

5.4.37.— Soit (X, s) est un schéma pointé par un point spécial. Notant Z l'adhérence réduite de s dans X , on en déduit une pro-paire fermée notée (X_s, Z_s) égale à $X_s \times_X (X, Z)$.

Ainsi, pour un faisceau homotopique F , on pourra encore considérer le complexe suivant :

$$F(X_s) \rightarrow F(X_s \times_X (X - Z)) \xrightarrow{\partial'_{X,s}} F^1(X_s, Z_s)$$

où $F^1(X_s, Z_s) = \varinjlim_{U \in \mathcal{V}_s(X)} F^1(U, Z_U)$ conformément à nos conventions générales, et $\partial'_{X,s}$ est

induit par le morphisme du numéro 5.4.21.

Notons x le point générique de X . Dès lors, X_s est un trait de point générique x , et le pro-objet $X_s \times_X (X - Z)$ est canoniquement isomorphe au pro-objet X_x . On a donc un morphisme qui va nous servir à construire le résidu

$$\partial'_{X,s} : F(X_x) \rightarrow F^1(X_s, Z_s)$$

qui est nul sur $F(X_s)$.

Dans le même esprit, on pose

$$\begin{aligned} (D_{Z_s} X_s, \mathbb{A}_{Z_s}^1) &= X_s \times_X (D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) \\ (N_{Z_s} X_s, Z_s) &= X_s \times_X (N_Z X, Z). \end{aligned}$$

Proposition 5.4.38 Soit F un faisceau homotopique.

Soient (X, s) un schéma pointé par un point spécial, et Z l'adhérence de s dans X .

Alors, les morphismes de déformation au cône normal induisent des isomorphismes

$$F^1(X_s, Z_s) \xleftarrow{F^1 d_s} F^1(D_{Z_s} X_s, \mathbb{A}_{Z_s}^1) \xrightarrow{F^1 d'_s} F^1(N_{Z_s} X_s, Z_s).$$

PREUVE : Puisque k est parfait, $\kappa(s)/k$ est séparable, et Z est lisse sur k au point s .

On peut donc considérer un ouvert U de X tel que $U \times_X (X, Z)$ admet une paramétrisation. Dès lors, d'après le théorème 5.4.26, les morphismes de déformation au cône normal

$$F^1(U \times_X (X, Z)) \xleftarrow{F^1 d_U} F^1(U \times_X (D_Z X, \mathbb{A}_Z^1)) \xrightarrow{F^1 d'_U} F^1(U \times_X (N_Z X, Z))$$

sont des isomorphismes.

Par ailleurs, pour tout ouvert U' de U contenant s , la paramétrisation de (U, Z_U) induit une paramétrisation de $(U', Z_{U'})$ et donc les morphismes de déformation au cône normal relativement à U' sont encore des isomorphismes.

Ces isomorphismes sont naturels par rapport à U . On peut donc considérer leur limite inductive, ce qui nous donne l'isomorphisme attendu. \square

Ainsi, on a donc réduit canoniquement l'étude de la pro-paire (X_s, Z_s) à celle de $(N_{Z_s}X_s, Z_s)$ qui correspond à la section nulle du fibré normal de Z_s dans X_s . Rappelons rapidement la description algébrique suivante :

Lemme 5.4.39 *Soient (X, s) un schéma algébrique lisse pointé par un point spécial, et Z l'adhérence réduite de s dans X .*

Soit $\mathcal{O}_{X,s}$ l'anneau local de X en s , et $\mathcal{M}_{X,s}$ son idéal maximal.

Alors, on a une bijection entre :

1. *L'ensemble des uniformisantes de l'anneau de valuation $\mathcal{O}_{X,s}$.*
2. *L'ensemble des bases du $\kappa(s)$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_{X,s}/\mathcal{M}_{X,s}^2$, où $\kappa(s)$ désigne le corps résiduel de s et $\mathcal{M}_{X,s}$ l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,s}$.*
3. *L'ensemble des trivialisations de fibré vectoriel sur Z_s*

$$\varphi : N_{Z_s}X_s \rightarrow \mathbb{A}_{Z_s}^1.$$

PREUVE : Notons pour simplifier $A = \mathcal{O}_{X,s}$ et $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{X,s}$.

La bijection entre (1) et (2) est immédiate, puisque \mathcal{M} est l'idéal maximal de l'anneau de valuation A .

Il reste donc à démontrer la bijection entre (2) et (3). Or, puisque l'immersion de Z_s dans X_s est régulière, le cône normal est en fait un fibré et si \mathcal{M} est l'idéal de Z_s dans X_s ,

$$N_{Z_s}X_s = \text{Spec}_{Z_s} \left(\bigoplus_n \mathcal{M}^n / \mathcal{M}^{n+1} \right) = \text{Spec}_{Z_s} (\mathcal{S}_{A/\mathcal{M}}(\mathcal{M}/\mathcal{M}^2)).$$

Donc les isomorphismes

$$\text{Spec}_{Z_s} (\mathcal{S}_{A/\mathcal{M}}(\mathcal{M}/\mathcal{M}^2)) \rightarrow \text{Spec}_{Z_s} (\mathcal{S}_{A/\mathcal{M}}(A/\mathcal{M})) = \mathbb{A}_{Z_s}^1$$

sont en bijection avec les isomorphismes de A/\mathcal{M} -espaces vectoriels $A/\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{M}^2$. \square

Remarque 5.4.40.– On appellera par la suite simplement *uniformisante* de X_s un élément de l'un de ces ensembles en bijection.

Définition 5.4.41 *Soient F un faisceau homotopique, (X, s) un schéma algébrique lisse pointé par un point spécial et π une uniformisante de X_s ; on note*

$$\rho_\pi^F : F^1(X_s, Z_s) \rightarrow F_{-1}(Z_s)$$

l'isomorphisme obtenu par composition :

$$\begin{aligned} F^1(X_s, Z_s) &\simeq F^1(N_{Z_s}X_s, Z_s) \\ &\xleftarrow{\sim} F^1(\mathbb{A}_{Z_s}^1, Z_s) \simeq F_{-1}(Z_s), \end{aligned}$$

où le premier isomorphisme est obtenu par les morphismes de déformation au cône normal (cf 5.4.38), le second est induit par π (en tant que trivialisations du fibré normal de Z_s dans X_s) et le troisième est obtenu par la proposition 5.4.24.

Remarque 5.4.42.– Il est particulièrement important que cet isomorphisme dépende uniquement d'une uniformisante. Ainsi, on peut construire beaucoup plus facilement un tel isomorphisme par le choix d'une paramétrisation de (X, Z) au voisinage de s , mais il est délicat de démontrer que cet isomorphisme est indépendant d'un tel choix. La méthode que l'on propose à l'avantage de donner des isomorphismes canoniques grâce à la déformation au cône normal. Nous verrons par ailleurs que ces isomorphismes satisfont une bonne fonctorialité.

On arrive enfin à la définition du résidu dans le cas géométrique, associé à une trivialisation du fibré normal :

Définition 5.4.43 Soient F un faisceau homotopique, (X, s) un schéma algébrique lisse pointé par un point spécial, et π une trivialisation du fibré normal $N_{Z_s}X_s$.

On définit le résidu de X en s associé à π

$$\partial_{X,s}^{\pi,F} : F(X_x) \rightarrow F_{-1}(Z_s),$$

obtenu par composition :

$$F(X_x) \xrightarrow{\partial'_{X,s}} F^1(X_s, Z_s) \xrightarrow{\rho_\pi^F} F_{-1}(Z_s).$$

Le morphisme $\partial'_{X,s}$ est défini en 5.4.37, et le morphisme ρ_π^F dans la définition précédente.

On va voir que le résidu ainsi défini est indépendant de la trivialisation choisie.

Proposition 5.4.44 Soient (X, s) , (Y, t) des schémas pointés par un point spécial, et Z (resp. T) l'adhérence et s dans X (resp. t dans Y) munie de sa structure de sous-schéma réduit.

1. Soient $\tau : (\mathbb{A}_{T_t}^1, T_t) \rightarrow (\mathbb{A}_{Z_s}^1, Z_s)$ un isomorphisme cartésien (sur k), et $\bar{\tau}$ le morphisme induit sur les fermés correspondants.

Alors, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} F_{-1}(Z_s) & \xrightarrow{\sim} & F^1(\mathbb{A}_{Z_s}^1, Z_s) \\ F_{-1}(\bar{\tau}) \downarrow & & \downarrow F^1(\tau, \bar{\tau}) \\ F_{-1}(T_t) & \xrightarrow{\sim} & F^1(\mathbb{A}_{T_t}^1, T_t), \end{array}$$

où les flèches verticales sont les isomorphismes de la proposition 5.4.24.

2. Soit $f_t : Y_t \rightarrow X_s$ un isomorphisme. Dès lors, f_t induit un unique isomorphisme sur les points fermés, $g_t : T_t \rightarrow Z_s$, d'où un morphisme cartésien (f_t, g_t) .

Alors, pour toute uniformisante π (resp. χ) de $N_{Z_s}X_s$ (resp. $N_{T_t}Y_t$) le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} F^1(X_s, Z_s) & \xrightarrow{\rho_\chi^F} & F_{-1}(Z_s) \\ F^1(f_t, g_t) \downarrow & & \downarrow F_{-1}(g_t) \\ F^1(Y_t, T_t) & \xrightarrow{\rho_\pi^F} & F_{-1}(T_t). \end{array}$$

Remarque 5.4.45.– On donnera un énoncé plus général de cette proposition dans la sous-sous-section concernant la ramification.

PREUVE : On peut considérer que tous ces morphismes sont des morphismes de pro-objets ou alternativement des morphismes des schémas obtenus par limite projective.

1. Ainsi, τ est en fait un morphisme affine, et $\bar{\tau}$ est le spectre d'un k -isomorphisme entre les corps résiduels $\bar{\tau}^\sharp : \kappa(s) \rightarrow \kappa(t)$. Par ailleurs, puisque τ est un isomorphisme, il est le spectre d'un morphisme de la forme

$$\begin{array}{ccc} \kappa(s)[X] & \rightarrow & \kappa(t)[Y] \\ x \in \kappa(s) & \mapsto & \bar{\tau}^\sharp(x) \\ T & \mapsto & \lambda.T \end{array}$$

où λ appartient à $\kappa(t)^\times$.

Ainsi, τ est composé des morphismes

$$\mathbb{A}_{T_t}^1 \xrightarrow{\gamma_\lambda} \mathbb{A}_{T_t}^1 \xrightarrow{1_{\mathbb{A}^1} \times \bar{\tau}} \mathbb{A}_{Z_s}^1$$

où γ_λ est l'isomorphisme de fibré donné par la multiplication par λ .

D'après la preuve de 5.4.24, on a des isomorphismes canoniques $F^1(\mathbb{A}_{Z_s}^1, Z_s) \simeq F_{-1}(Z_s)$ et $F^1(\mathbb{A}_{T_t}^1, T_t) \simeq F_{-1}(T_t)$. On identifie ces groupes deux à deux par ces isomorphismes. Dès lors, compte tenu de cette identification, le morphisme $F^1(\tau, \bar{\tau})$ est induit par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F(\mathbb{A}_{Z_s}^1) & \longrightarrow & F(\mathbb{G}_m \times Z_s) & \longrightarrow & F_{-1}(Z_s) \longrightarrow 0 \\ & & F(\tau) \downarrow & & F(\tau_0) \downarrow & & \downarrow F^1(\tau, \bar{\tau}) \\ 0 & \longrightarrow & F(\mathbb{A}_{T_t}^1) & \longrightarrow & F(\mathbb{G}_m \times T_t) & \longrightarrow & F_{-1}(T_t) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où τ_0 est obtenu par restriction de τ .

Or, ce diagramme est encore équivalent, à travers les sections canoniques (cf 3.4.2) qui proviennent du fait que F est invariant par homotopie, au diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & F(Z_s) & \longleftarrow & F(\mathbb{G}_m \times Z_s) & \longleftarrow & F_{-1}(Z_s) \longleftarrow 0 \\ & & F(\tau_s) \downarrow & & F(\tau_0) \downarrow & & \downarrow F^1(\tau, \bar{\tau}) \\ 0 & \longleftarrow & F(T_t) & \longleftarrow & F(\mathbb{G}_m \times T_t) & \longleftarrow & F_{-1}(T_t) \longleftarrow 0. \end{array}$$

Or, le morphisme de paires fermées $(\tau_0, \bar{\tau}) : (\mathbb{G}_m \times T_t, T_t) \rightarrow (\mathbb{G}_m \times Z_s, Z_s)$ induit un unique morphisme sur les faisceaux homotopiques

$$S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(T_t) \rightarrow S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(Z_s)$$

d'après la proposition 3.4.13. On calcule, compte tenu de la décomposition du morphisme τ déjà explicitée, ce morphisme comme la composée

$$S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(T_t) \xrightarrow{\tilde{\gamma}_\lambda} S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(T_t) \xrightarrow{1 \otimes^{Htr} h_0(\bar{\tau})} S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(Z_s).$$

Or, puisqu'à travers l'identification $\text{End}(\mathbb{G}_{m,\kappa(t)}) = \mathbb{Z} \oplus \kappa(t)^\times$, l'isomorphisme γ_λ est égal à $1 + \lambda$, et que le morphisme canonique

$$\text{End}(\mathbb{G}_{m,\kappa(t)}) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{H}\mathcal{A}_k^{\text{tr}}}(S_t^1 \otimes^{H\text{tr}} h_0(\kappa(t)))$$

est la projection sur \mathbb{Z} , il s'ensuit que $\tilde{\gamma}_\lambda = 1$, ce qui conclut la première assertion.

2. Il suffit d'appliquer la première affirmation en considérant l'isomorphisme τ

$$\mathbb{A}_{T_t}^1 \xrightarrow{\chi^{-1}} N_{T_t} Y_t \xrightarrow{N_{g_t} f_t} N_{Z_s} X_s \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}_{Z_s}^1$$

compte tenu du fait qu'alors, le morphisme induit $\bar{\tau}$ est simplement g_t . \square

Appliquant le deuxième point de cette proposition au morphisme identité, on obtient tout d'abord :

Corollaire 5.4.46 *Soient F un faisceau homotopique, et (X, s) un schéma pointé par un point spécial, $Z = \{s\}$.*

Pour tout couple (π, χ) de trivialisations de $N_{Z_s} X_s$, $\partial_{X,s}^{\pi,F} = \partial_{X,s}^{\chi,F}$.

Définition 5.4.47 *Soient F un faisceau homotopique, et (X, s) un schéma algébrique lisse pointé par un point spécial.*

Choissant une trivialisations π de (X, s) , on pose simplement

$$\partial_{X,s}^F = \partial_{X,s}^{\pi,F}$$

qui est indépendant de la trivialisations choisie d'après le corollaire précédent.

On obtient par ailleurs la functorialité suivante de ce morphisme résidu :

Corollaire 5.4.48 *Soient (Y, t) et (X, s) deux schéma connexes algébrique lisse pointés par un point spécial sur k , x le point générique de X et y celui de Y .*

Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme tel que $f(t) = s$, et qui induit un isomorphisme $f_s : Y_t \rightarrow X_s$. On note $f_x : Y_y \rightarrow X_x$ le morphisme qui s'en déduit sur les points génériques, et $\bar{f}_s : Y_t \rightarrow Z_s$ le morphisme sur les points fermés.

Alors, pour tout faisceau homotopique F , f induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(X_x) & \xrightarrow{\partial_{X,s}^F} & F_{-1}(Z_s) \\ F(f_x) \downarrow & & \downarrow F_{-1}(\bar{f}_s) \\ F(Y_y) & \xrightarrow{\partial_{Y,t}^F} & F_{-1}(T_t). \end{array}$$

On termine cette section en énonçant la functorialité du résidu vis-à-vis du faisceau F :

Lemme 5.4.49 *Soit $\eta : F \rightarrow G$ un morphisme de faisceaux homotopiques. Alors, pour tout schéma X algébrique lisse pointé par un point spécial s , le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} F(X_x) & \xrightarrow{\eta} & G(X_x) \\ \partial_{X,s}^F \downarrow & & \downarrow \partial_{X,s}^G \\ F_{-1}(Z_s) & \xrightarrow{\eta_{-1}} & G_{-1}(Z_s) \end{array}$$

PREUVE : Cela découle uniquement de la construction, et du fait que l'isomorphisme ρ_π^F est naturel en F , notamment parce que l'isomorphisme de la proposition 5.4.24 est naturel en F . \square

5.4.5 Modèles et définition (D4 et R3c)

On rappelle qu'on a noté $\mathcal{A}_{k(1)}$ la catégorie des k -algèbres locales essentiellement lisses de dimension 1 (cf 2.1.20).

Puisque k est parfait, il s'agit uniquement des anneaux de valuation discrète essentiellement de type fini sur k .

Ainsi, lorsque E/k est une extension de type fini, et v une valuation discrète sur E nulle sur k , \mathcal{O}_v/k est une k -algèbre dans $\mathcal{A}_{k(1)}$.

Remarque 5.4.50.— Si k n'est pas parfait, il existe des anneaux de valuation discrète qui sont formellement lisses sur k mais dont le corps résiduel n'est pas séparable sur k — si E/k est une extension inséparable, on peut considérer $E[t]_{(t)}$. Si l'on voulait supprimer l'hypothèse k parfait, il faudrait a priori se restreindre aux anneaux de valuation discrète dont le corps résiduel est une extension séparable de k (et dont le corps des fractions est une extension de type fini de k), qui sont alors formellement lisse sur k (cf 2.1.49).

Toutefois, cette restriction n'est pas satisfaisante pour la théorie des modules de cycles, car sur un corps non parfait, il existe toujours une courbe lisse dont un point fermé n'est pas séparable sur k . L'anneau de valuation discrète correspondant ne satisfait donc pas l'hypothèse précédente.

Comme on l'a fait pour la donnée D2, on introduit une notion de modèle appropriée dans notre situation :

Définition 5.4.51 Soit \mathfrak{V}/k une k -algèbre dans $\mathcal{A}_{k(1)}$. On appelle k -modèle de \mathfrak{V} tout couple (X, t) tel que

1. t est un k -morphisme $\text{Spec}(\mathfrak{V}) \xrightarrow{t} X$ (i.e. un trait sur X).
2. Le morphisme $t^\sharp : \mathcal{O}_{X,s} \rightarrow \mathfrak{V}$ induit par t est un isomorphisme.
3. X est intègre, et si l'on note s l'image du point fermé de \mathfrak{V} dans X , $\overline{\{s\}}$ muni de sa structure réduite de sous-schéma de X est lisse sur k .

On appellera s le point spécial du k -modèle (X, t) .

Remarque 5.4.52.— Par la suite, dans la situation de la définition ci-dessus, on confondra le morphisme t et le point s .

Lemme 5.4.53 Soit \mathfrak{V} une k -algèbre dans $\mathcal{A}_{k(1)}$. Alors \mathfrak{V} admet un k -modèle.

PREUVE : En effet, d'après la proposition 2.1.32, l'anneau \mathfrak{V} admet un modèle sur k , noté X . Si l'on note s l'image du point spécial de $\text{Spec}(\mathfrak{V})$ dans X , et Z l'adhérence réduite du point s dans X , Z_s est le spectre d'un corps séparable sur k par hypothèse ; Z est donc lisse sur k en s . Il existe dès lors un ouvert U de X tel que $Z \cap U$ est lisse sur k , et U convient. \square

On peut dès lors donner la définition suivante du morphisme résidu :

Définition 5.4.54 Soient F un faisceau homotopique, E/k une extension de type fini et v une valuation de E/k . On note \mathfrak{V} l'anneau de valuation discrète de v et κ son corps résiduel.

Soient (X, t) un k -modèle de \mathfrak{V} , s son point spécial et Z l'adhérence réduite de s dans X . On définit le morphisme résidu associé à v comme le morphisme

$$\partial_v^F : F(E) \xrightarrow{(1)} F(X_x) \xrightarrow{\partial_{X,s}} F_{-1}(Z_s) \xrightarrow{(2)} F_{-1}(\kappa)$$

où les flèches (1) et (2) sont les isomorphismes canoniques induits par $t^\# : \mathcal{O}_{X,s} \rightarrow \mathfrak{V}$.

Pour que cette définition soit valide, il nous faut montrer que le morphisme ∂_v^F est indépendant des choix que l'on fait. Plus précisément :

Lemme 5.4.55 Dans la situation de la définition ci-dessus, l'application ∂_v^F ne dépend pas du k -modèle de \mathfrak{V} choisi.

PREUVE : Soient (X, s) et (X', s') deux modèles s de \mathfrak{V} sur k .

D'après le corollaire 5.4.48, s'il existe un morphisme $f : (X, s) \rightarrow (X', s')$ de modèles, comme f_s est un isomorphisme, les résidus définis à partir de ces deux modèles coïncident.

Il nous reste donc à dominer nos deux modèles par un modèle (X'', s'') .

Or, on peut supposer X et X' affines quitte à les remplacer par des ouverts, compte tenu du corollaire 5.4.48. On note A et A' les anneaux respectifs de X et X' . On identifie A_s et $A'_{s'}$ à \mathfrak{V} . Donc on a $A \subset \mathfrak{V}$ et $A' \subset \mathfrak{V}$. Alors, si l'on choisit π une uniformisante de \mathfrak{V} , s (respectivement s') correspond à l'idéal engendré par π dans A , et $\pi \in A \cap A'$; d'après l'identification ci-dessus, $A_\pi = \mathfrak{V} = A'_\pi$.

Or, $k[A \cup A']$ est une sous- k -algèbre de \mathfrak{V} . Puisque $\text{Frac}(\mathfrak{V})/k$ est séparable, $\text{Spec}(k[A \cup A'])$ est lisse sur k en son point générique. Il existe $h \in k[A \cup A']$ tel que $k[A \cup A']_h$ est lisse sur k . Or, puisque $k[A \cup A']_\pi = \mathfrak{V}$, on peut de plus supposer que h ne divise pas π , car \mathfrak{V} est formellement lisse sur k .

Il ne reste plus qu'à poser $X'' = \text{Spec}(k[A \cup A']_h)$; on a donc par définition des morphismes dominants $X'' \xrightarrow{f} X$ et $X'' \xrightarrow{g} X'$. π engendre un idéal de $k[A \cup A']_h$ (non nul) qui correspond à un point s'' de X'' de codimension 1. Enfin, on a encore $X''_{s''} = X_s = X'_{s'}$, (modulo notre identification). \square

Par ailleurs, il suffit d'appliquer le lemme 5.4.49 pour voir que ce résidu est fonctoriel en F :

Lemme 5.4.56 Soient E/k une extension de type fini, et v une valuation de E/k de corps résiduel $\kappa(v)$. Alors, pour tout morphisme $\eta : F \rightarrow G$ de faisceaux homotopiques, on a :

$$\begin{array}{ccc} F(E) & \xrightarrow{\eta} & G(E) \\ \partial_v^F \downarrow & & \downarrow \partial_v^G \\ F_{-1}(\kappa(v)) & \xrightarrow{\eta_{-1}} & G_{-1}(\kappa(v)). \end{array}$$

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 6.1.1, concernant le module homotopique (F_*, ϵ) :

Définition 5.4.57 (D4) Soient E/k une extension de type fini, v une valuation de E/k et κ le corps résiduel associé à v .

On définit le morphisme résidu associé à v comme le morphisme suivant :

$$\partial_v : F_*(E) \xrightarrow{\partial_v^{F_*}} (F_*)_{-1}(\kappa) \xrightarrow{\epsilon} F_*(\kappa).$$

Comme ϵ est un morphisme homogène de degré -1 , ∂_v est bien un morphisme homogène de degré -1 .

On peut facilement démontrer la propriété suivante :

Proposition 5.4.58 (R3c) Soit E/k une extension de type fini, v une valuation de E/k de corps résiduel κ . Soit $\varphi : L \rightarrow E$ un morphisme dans \mathcal{E}_k^{ss} tel que $v(\varphi(L^\times)) = 0$.

Alors,

$$\partial_v \circ \varphi_* = 0$$

PREUVE : Il suffit de démontrer cette proposition pour ∂_v^F où F est un faisceau homotopique quelconque.

Considérons (Y, y) un k -modèle de L/k , et (X, t) un modèle de \mathfrak{A}/k . Soient s le point spécial de X et Z son adhérence réduite dans X . Alors, si l'on note x le E -point de X induit par t , on a le diagramme commutatif de pro-objets

$$\begin{array}{ccc} (E) & \xrightarrow{(\varphi)} & (L) \\ \downarrow x & & \downarrow y \\ X_s - Z_s & \xleftarrow{\sim} X_x \xrightarrow{\bar{f}} & Y_y \end{array}$$

où toutes les flèches verticales sont des isomorphismes. On est donc ramené à montrer que l'image de $F(\bar{f})$ tombe dans le noyau du résidu correspondant à (X_s, Z_s) .

Or, puisque $v(\varphi(L)) = 0$, on en déduit $\varphi(L) \subset \mathfrak{A}$. Autrement dit, le morphisme φ se factorise en $L \rightarrow \mathfrak{A} \rightarrow E$, ce qui se traduit au niveau des modèles stricts par la factorisation de \bar{f} en $X_x \rightarrow X_s \rightarrow Y_y$.

Par définition du pré-résidu (cf 5.4.21), on a un complexe

$$F(X_s) \rightarrow F(X_x) \xrightarrow{\partial_{X,s}'} F^1(X_s, Z_s)$$

qui, en composant le dernier morphisme par l'isomorphisme ρ_π de la section précédente, donne le complexe

$$F(X_s) \rightarrow F(X_x) \xrightarrow{\partial_{X,s}} F_{-1}(Z_s).$$

En particulier, si $\rho \in F(L) = F(Y_y)$, $\varphi_*(\rho) = \bar{f}^*(\rho) \in F(X_x)$, et en fait, $\bar{f}^*(\rho)$ est image d'un élément de $F(X_s)$ d'après la factorisation de φ en $X_x \rightarrow X_s \rightarrow Y_y$, donc $\partial_{X,s}(\varphi_*(\rho)) = 0$. \square

5.4.6 Ramification (axiomes R3a et R3b)

Comme annoncé, on va généraliser la proposition 5.4.44. Pour cela, on s'appuie sur la fonctorialité étendue de la déformation au cône normale que l'on a construite en 5.4.3.

Lemme 5.4.59 *Soit $f : (Y, t) \rightarrow (X, s)$ un morphisme de schémas algébriques lisses pointés par des points spéciaux (i.e. $f(t) = s$). On note Z (resp. T) l'adhérence réduite de s (resp. t) dans X (resp. Y).*

Le morphisme f induit donc un morphisme de paires fermées $f_t : (Y_t, T_t) \rightarrow (X_s, Z_s)$.

Alors, f_t est quasi-cartésien exact (cf définition 5.4.29). Par ailleurs, l'ordre de l'épaississement $T_t \rightarrow Z_s \times_{X_s} Y_t$ est égal à

$$\lg(Z_s \times_{X_s} Y_t).$$

De plus, il existe un voisinage ouvert U de s dans X et un voisinage ouvert V de t dans Y tels que $f(V) \subset U$ et que le morphisme de paires fermées induit $f|_V^U : (V, T_V) \rightarrow (U, Z_U)$ est quasi-cartésien exact.

PREUVE : Par définition, le morphisme f induit un k -morphisme local

$$\mathcal{O}_{X,s} \xrightarrow{f_t^\sharp} \mathcal{O}_{Y,t}.$$

Soit $\mathcal{M}_{X,s}$ (resp. $\mathcal{M}_{Y,t}$) l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,s}$ (resp. $\mathcal{O}_{Y,t}$). Comme $\mathcal{O}_{Y,t}$ est un anneau de valuation discrète, il existe un unique entier $r > 0$ tel que

$$f_t^\sharp(\mathcal{M}_{X,s}) \cdot \mathcal{O}_{Y,t} = \mathcal{M}_{Y,t}^r.$$

Ainsi, le fermé $Z_s \times_{X_s} Y_t$ de Y_t a pour idéal $\mathcal{M}_{Y,t}^r$, et le morphisme $T_t \rightarrow Z_s \times_{X_s} Y_t$ est donc par définition un épaississement exact d'ordre r par rapport à Y_t . De plus,

$$\lg(Z_s \times_{X_s} Y_t) = \lg(\mathcal{O}_{Y,t} / \mathcal{M}_{Y,t}^r) = r.$$

ce qui conclut les deux premières assertions.

Pour la dernière assertion, on se ramène au cas où X (resp. Y) est affine d'anneau A (resp. B). Le morphisme f correspond donc à un morphisme $\varphi : A \rightarrow B$. On peut supposer de plus, quitte à localiser B , que $f^{-1}(\{s\}) = \{t\}$. On confond les points s et t avec les idéaux auxquels ils correspondent respectivement. Par définition, s (resp. t) est principal, engendré par une uniformisante $\pi \in A$ (resp. $\chi \in B$). De plus, $\varphi(\pi) = b \cdot \chi^r$, où $b \in B - s$. Dès lors, les ouverts $U = \text{Spec}(A)$ et $V = \text{Spec}(B_b)$ conviennent, puisqu'alors $\varphi(\pi) \cdot B_b = (\chi)^r$. \square

Définition 5.4.60 *Soit (X, s) (resp. (Y, t)) un k -schéma algébrique lisse pointé par un point spécial. On note Z (resp. T) l'adhérence réduite de s dans X (resp. t dans Y).*

Considérons un k -morphisme pointé $f : (Y, t) \rightarrow (X, s)$. On appelle indice de ramification de f en t l'entier

$$r_t(f) = \lg(Z_s \times_{Y_t} T_t).$$

Muni de cette définition, on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 5.4.61 Soient (X, s) , (Y, t) des schémas algébriques lisses, connexes et pointés par un point spécial et $f : (Y, t) \rightarrow (X, s)$ un morphisme pointé dominant. On note Z (resp. T) l'adhérence réduite de s dans X (resp. t dans Y) et $g_t : T_t \rightarrow Z_s$ le morphisme induit par f . On note aussi x (resp. y) le point générique de X (resp. Y), et $f_x : Y_y \rightarrow X_x$ le morphisme induit.

Alors, pour tout faisceau homotopique F , le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(X_x) & \xrightarrow{\partial_{X,s}^F} & F_{-1}(Z_s) \\ F(f_x) \downarrow & & \downarrow r_t(f).F_{-1}(g_t) \\ F(Y_y) & \xrightarrow{\partial_{Y,t}^F} & F_{-1}(T_t). \end{array}$$

PREUVE : Il s'agit essentiellement d'exploiter la functorialité définie en 5.4.3.

On note $g : T \rightarrow Z$ le morphisme induit par f . D'après le lemme 5.4.59, le morphisme $(f_t, g_t) : (Y_t, T_t) \rightarrow (X_s, Z_s)$ est quasi-cartésien exact.

On décompose alors nos morphismes en le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & T_t & \\ & \searrow & \\ g_t \left(\begin{array}{ccc} & T_t & \\ \downarrow \iota & & \\ T'_t & \longrightarrow & Y_t \\ \downarrow g'_t & & \downarrow f_t \\ Z_s & \longrightarrow & X_s \end{array} \right. & & \end{array}$$

où ι est un épaissement exact d'ordre l'indice de ramification $r = r_t(f)$.

Appliquant la functorialité de 5.4.3 au morphisme quasi-cartésien (f_t, g_t) (que l'on peut considérer comme un morphisme de schémas en prenant sa limite projective), on obtient le diagramme suivant dans la catégorie des paires fermées de k -schémas, ou ce qui revient au même, dans la catégorie $\text{pro-}\mathcal{P}^f\mathcal{L}_k$:

$$\begin{array}{ccccc} (X_s, Z_s) & \xrightarrow{d} & (D_{Z_s} X_s, \mathbb{A}_{Z_s}^1) & \xleftarrow{d'} & (N_{Z_s} X_s, Z_s) \\ (f_t, g_t) \downarrow & & \downarrow D_g f_t & & \downarrow N_g f_t \\ (Y_t, T_t) & \xrightarrow{d} & (D_{T_t} Y_t, \mathbb{A}_{T_t}^1) & \xleftarrow{d'} & (N_{T_t} Y_t, T_t). \end{array}$$

Dès lors, on en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F^1(X_s, Z_s) & \xleftrightarrow{\sim} & F^1(N_{Z_s} X_s, Z_s) \\ F^1(f_t, g_t) \downarrow & & \downarrow F^1(N_g f_t) \\ F^1(Y_t, T_t) & \xleftrightarrow{\sim} & F^1(N_{T_t} Y_t, T_t) \end{array}$$

où les morphismes horizontaux sont les isomorphismes obtenus par déformation au cône normal.

On note $\mathcal{M}_{X,s}$ (resp. $\mathcal{M}_{Y,t}$, \mathcal{I}) l'idéal de Z_s dans X_s (resp. T_t , T'_t dans Y_t). Par définition, on a donc $\mathcal{I} = \mathcal{M}_{Y,t}^r$. Ainsi, le morphisme $N_g f_t$ est le spectre du morphisme suivant :

$$\begin{aligned} \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_{X,s}^n / \mathcal{M}_{X,s}^{n+1} & \longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_{Y,t}^{rn} / \mathcal{M}_{Y,t}^{r(n+1)} \\ & \hookrightarrow \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_{Y,t}^m / \mathcal{M}_{Y,t}^{m+1} \end{aligned}$$

où le premier morphisme est canoniquement induit par f_t (puisque celui-ci envoie par définition $\mathcal{M}_{X,s}$ sur \mathcal{I}), et le deuxième est l'inclusion canonique d'après la construction 5.4.3.

On choisit π (resp. χ) une uniformisante de l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{X,s}$ (resp. $\mathcal{O}_{Y,t}$). Par définition, $f_t^\sharp(\pi) = \lambda \cdot \chi^r$. Ces uniformisantes correspondent à des trivialisations du fibré normal, et à travers ces trivialisations, le morphisme décrit ci-dessus devient :

$$\begin{aligned} \psi : \kappa(s)[\pi] &\rightarrow \kappa(t)[\chi] \\ x &\mapsto g_t^\sharp(x) \\ \pi &\mapsto \lambda \cdot \chi^r \end{aligned}$$

et on en déduit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} F^1(X_s, Z_s) & \xrightarrow{\sim} & F^1(N_{Z_s}X_s, Z_s) & \xrightarrow{\sim} & F^1(\mathbb{A}_{Z_s}^1, Z_s) \\ F^1(f_t, g_t) \downarrow & & \downarrow F^1(N_g f_t) & & \downarrow F^1(\text{Spec}(\psi), g_t) \\ F^1(Y_t, T_t) & \xrightarrow{\sim} & F^1(N_{T_t}Y_t, T_t) & \xrightarrow{\sim} & F^1(\mathbb{A}_{T_t}^1, T_t) \end{array}$$

Il nous reste donc à calculer le morphisme induit par le morphisme de paires quasi-cartésien $(\text{Spec}(\psi), g_t)$. Or, celui-ci se décompose lui-même en les deux morphismes suivants

$$(\mathbb{A}_{T_t}^1, T_t) \xrightarrow{\gamma_\lambda^r} (\mathbb{A}_{T_t}^1, T_t) \xrightarrow{1_{\mathbb{A}^1} \times g_t} (\mathbb{A}_{Z_s}^1, Z_s)$$

où γ_λ^r transforme le paramètre χ du deuxième fibré en $\lambda \cdot \chi^r$.

On peut alors raisonner comme dans la preuve de la proposition 5.4.44 ; on calcule donc le morphisme induit sur les faisceaux homotopiques :

$$S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(T_t) \xrightarrow{r \cdot} S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(T_t) \xrightarrow{1 \otimes^{Htr} h_0(g_t)} S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(Z_s)$$

où le premier morphisme est la multiplication par r , puisque $\gamma_\lambda^r = \lambda + r$ à travers l'identification $\text{End}(\mathbb{G}_m \times Z_s) = \kappa(s)^\times \oplus \mathbb{Z}$, et puisque le morphisme canonique $\text{End}(\mathbb{G}_m \times Z_s) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{H}\mathcal{A}_k^{\text{tr}}}(S_t^1 \times Z_s)$ est la projection sur \mathbb{Z} (d'après 3.4.13).

Ceci conclut la démonstration d'après la définition du résidu 5.4.43. \square

Remarque 5.4.62.— On peut toujours associer à (f_t, g_t) un morphisme canonique $N_{T_t}Y_t \rightarrow T_t \times_{Z_s} N_{Z_s}X_s$ de fibrés vectoriels sur T_t . Si f est non ramifié en t , c'est un isomorphisme. Par contre, si la ramification est strictement supérieure à 1, il ne peut qu'être nul pour des raisons de degré. C'est pourquoi nous avons été forcé de définir une functorialité «raffinée» de la déformation au cône normal, qui induit bien un morphisme $N_{T_t}Y_t \rightarrow T_t \times_{Z_s} N_{Z_s}X_s$, mais ce dernier est homogène de degré correspondant à la ramification.

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 5.4.63 (R3a) *Soient E/k et E'/k des extensions de type fini. Considérons v (resp. w) une valuation stricte de E/k (resp. E'/k) de corps résiduel κ (resp. κ'). Soit $\varphi : E' \rightarrow E$ un morphisme tel que $v \circ \varphi = e \cdot w$ pour $e \in \mathbb{N}^*$.*

Alors, φ induit par restriction un morphisme local sur les anneaux de valuations, et donc un morphisme $\tilde{\varphi} : \kappa' \rightarrow \kappa$.

On a alors la formule :

$$\partial_v \circ \varphi_* = e \cdot \tilde{\varphi}_* \circ \partial_w$$

dans $\text{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathcal{A}b}(F_*(E'), F_*(\kappa))$.

PREUVE : On se réduit au cas d'un faisceau homotopique F , et on prouve la proposition pour le résidu ∂_v^F .

Soit (X, s) un k -modèle de \mathfrak{Y} (anneau de v) et (Y, t) un k -modèle de \mathfrak{Y}' .

On note s le point spécial de X , s' celui de X' . Alors φ induit un unique morphisme local $\tau : X_s \rightarrow X'_s$. Choisissons π (resp. π') une uniformisante de X_s (resp. Y_t).

Or, par définition, l'indice de ramification de τ est e , puisque $\varphi(\pi) = u \cdot \pi'^e$. Il nous suffit maintenant d'appliquer la proposition 5.4.61 à τ pour conclure. \square

Enfin, l'axiome suivant met en jeu la norme et le résidu :

Proposition 5.4.64 (R3b) *Soient E/k et L/k des extensions de type fini. Considérons v une valuation de E/k de corps résiduel κ . Soit $\varphi : E \rightarrow L$ un morphisme fini.*

Soit w_1, \dots, w_r les valuations sur L/k telles que $w_i \circ \varphi = v$.

Alors, si l'on note $\kappa(w_i)$ le corps résiduel de w_i , et $\tilde{\varphi}_i : \kappa \rightarrow \kappa(w_i)$ le morphisme fini induit sur les corps résiduels, on obtient la formule :

$$\partial_v \circ \varphi^* = \sum_{i=1}^r \tilde{\varphi}_i^* \circ \partial_{w_i}$$

dans $\text{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathcal{A}b}(F_*(L), F_*(\kappa))$.

PREUVE : Encore une fois, on se réduit au cas d'un faisceau homotopique F , et on étudie ∂_v^F .

Soit (X, s) un k -modèle de \mathfrak{Y}/k (anneau de v) et (Y, y) un modèle de L/k . Le morphisme φ correspond à un morphisme fini $Y_y \rightarrow X_x$. On peut supposer que ce morphisme se relève en un morphisme fini $f : Y \rightarrow X$, d'après le lemme 5.3.8.

On note Z l'adhérence réduite de s dans X , et on pose $T' = Z \times_X Y$. Les points génériques de T' sont de codimension 1 dans Y , et correspondent tous à une valuation extension de v . On les note t_1, \dots, t_d . Par ailleurs, l'ensemble de ces valuations est exactement en bijection avec l'ensemble des valuations extensions de v à $\kappa(Y)$ (voir par exemple [Ser68], prop. 11, puisque Y est normal).

On a besoin de la généralisation suivante du lemme 5.4.59 :

Lemme 5.4.65 *Soient (X, s) un schéma algébrique lisse pointé par un point spécial, et Y un schéma algébrique lisse. Considérons un morphisme $f : Y \rightarrow X$ de dimension relative constante.*

On note Z l'adhérence réduite de s dans X , et on pose $T = (Z \times_X Y)_{\text{red}}$.

Alors il existe des ouverts U et V de X et Y respectivement tels que

1. $s \in U$ et $Z_U = Z \cap U$ est lisse sur k ,
2. $f^{-1}(\{s\}) \subset V$ et $T_V = T \cap V$ est lisse sur k ,

3. $f(V) \subset U$,

4. le morphisme de paires fermées induit $f|_V^U : (V, T_V) \rightarrow (U, Z_U)$ est quasi-cartésien exact.

PREUVE : Comme k est parfait, quitte à réduire X (resp. Y), on peut tout d'abord supposer que Z (resp. T) est lisse sur k .

On note (t_1, \dots, t_d) les points génériques de T . Le point t_i est de codimension 1 dans Y . On peut donc appliquer le lemme 5.4.59 au morphisme pointé $f : (Y, t_i) \rightarrow (X, s)$, et on trouve des ouverts V_i et U_i de Y et X respectivement tels que $t_i \in V_i$ et $s \in U_i$, et tels que le morphisme induit $f|_{V_i}^{U_i} : (V_i, T_{V_i}) \rightarrow (U_i, Z_{U_i})$ soit un morphisme quasi-cartésien exact de paires fermées.

On pose alors $U = \bigcap_i U_i$, et $V = \bigcup_i V_i \cap f^{-1}(U)$; ces deux ouverts conviennent. \square

Quitte à remplacer X et Y par les ouverts respectifs U et V de ce lemme, on peut donc supposer que le morphisme de paires fermées $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ est quasi-cartésien exact.

On peut donc lui appliquer la functorialité de la déformation au cône normal décrite en 5.4.3, pour obtenir le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} (Y, T) & \xrightarrow{d} & (D_T Y, \mathbb{A}_T^1) & \xleftarrow{d'} & (N_T Y, T) \\ (f, g) \downarrow & & \downarrow D_g f & & \downarrow N_g f \\ (X, Z) & \xrightarrow{d} & (D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) & \xleftarrow{d'} & (N_Z X, Z) \end{array}$$

où le morphisme $D_g f$ (resp. $N_g f$) est quasi-cartésien par construction, et de plus fini (car composé de trois morphismes finis). Par pullback avec X_s sur X , on se ramène au diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (Y_s, T_s) & \xrightarrow{d} & (D_{T_s} Y_s, \mathbb{A}_{T_s}^1) & \xleftarrow{d'} & (N_{T_s} Y_s, T_s) \\ (f_s, g_s) \downarrow & & \downarrow D_g f_s & & \downarrow N_g f_s \\ (X_s, Z_s) & \xrightarrow{d} & (D_{Z_s} X_s, \mathbb{A}_{Z_s}^1) & \xleftarrow{d'} & (N_{Z_s} X_s, Z_s) \end{array}$$

où l'on a noté $Y_s = Y \times_X X_s$ et ainsi de suite. On en déduit alors le diagramme commutatif suivant, d'après la définition 5.4.34

$$\begin{array}{ccccc} F^1(Y_s, T_s) & \xleftarrow{\sim} & F^1(D_{T_s} Y_s, \mathbb{A}_{T_s}^1) & \xrightarrow{\sim} & F^1(N_{T_s} Y_s, T_s) \\ F^1(f_s, g_s)_* \downarrow & & \downarrow F^1(D_g f_s)_* & & \downarrow F^1(N_g f_s)_* \\ F^1(X_s, Z_s) & \xleftarrow{\sim} & F^1(D_{Z_s} X_s, \mathbb{A}_{Z_s}^1) & \xrightarrow{\sim} & F^1(N_{Z_s} X_s, Z_s). \end{array}$$

Or, T_s est la fibre réduite de f_s en s ; on a donc $T_s = \bigoplus_{i=1}^d \text{Spec}(\kappa(t_i))$. Pour tout $i = 1, \dots, d$, on choisit χ_i une trivialisatation de $N_{T_s} Y_s$ au-dessus de $\text{Spec}(\kappa(t_i))$. On choisit π une trivialisatation de $N_{Z_s} X_s$.

On est donc ramené à l'étude du morphisme quasi-cartésien de paires fermées

$$\phi : \bigsqcup_{i=1}^d (\mathbb{A}_{\kappa(t_i)}^1, \kappa(t_i)) \rightarrow (\mathbb{A}_{\kappa(s)}^1, \kappa(s))$$

avec $\phi = \sum_i \pi^{-1} \circ (N_g f_t) \circ \chi_i$. Il s'inscrit dans le diagramme commutatif suivant, où les isomorphismes horizontaux sont ceux de la proposition 5.4.24 :

$$\begin{array}{ccccc} F^1(N_{T_s} Y_s, T_s) & \xrightarrow{\sim} & F^1(\mathbb{A}_{T_s}^1 Y_s, T_s) & \xrightarrow{\sim} & F_{-1}(T_s) \\ F^1(N_g f_s)_* \downarrow & & F^1(\phi)_* \downarrow & & \downarrow a \\ F^1(N_{Z_s} X_s, Z_s) & \xrightarrow{\sim} & F^1(\mathbb{A}_{Z_s}^1 X_s, Z_s) & \xrightarrow{\sim} & F_{-1}(Z_s). \end{array} \quad (5.3)$$

Il nous reste à comprendre le morphisme vertical de droite.

Or, le morphisme ϕ s'exprime à nouveau à l'aide des indices de ramification de f aux points t_i . Si l'on pose $r_i = r_{t_i}(f)$, on obtient la relation suivante

$$(f_s^{t_i})^\#(\pi) = \lambda_i \cdot \chi_i^{r_i}$$

où λ_i est un élément inversible de \mathcal{O}_{Y, t_i} (que l'on identifie avec sa classe dans $\kappa(t_i)$), avec $f_s^{t_i} : Y_{t_i} \rightarrow X_s$ le morphisme obtenu par restriction de f_s . Ce calcul montre que le morphisme ϕ est égal à

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{i=1}^d (\mathbb{A}_{\kappa(t_i)}^1, \kappa(t_i)) & \xrightarrow{\sum_i \gamma_{\lambda_i}^{r_i}} & \bigsqcup_{i=1}^d (\mathbb{A}_{\kappa(t_i)}^1, \kappa(t_i)) \\ & & \xrightarrow{\sum_i 1_{\mathbb{A}^1} \times g_i} (\mathbb{A}_{\kappa(s)}^1, \kappa(s)) \end{array}$$

où le morphisme $\gamma_{\lambda_i}^{r_i}$ envoie le paramètre t du fibré trivial sur $\lambda_i \cdot t^{r_i}$, et $g_i = g_s^{t_i} : \text{Spec}(\kappa(t_i)) \rightarrow \text{Spec}(\kappa(s))$ est le morphisme induit par f .

On en déduit comme dans la preuve de 5.4.61, que le morphisme induit par ϕ sur les faisceaux homotopiques est

$$\begin{array}{ccc} \phi' : \bigoplus_{i=1}^d S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(\kappa(t_i)) & \xrightarrow{\sum_i r_i} & \bigoplus_{i=1}^d S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(\kappa(t_i)) \\ & & \xrightarrow{\sum_i 1 \otimes^{Htr} h_0(g_i)} S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(\kappa(s)) \end{array}$$

Mais par construction des transferts sur F^1 , et par définition de l'isomorphisme de la proposition 5.4.24, on en déduit que le morphisme a du diagramme (5.3) est égal à $\text{Hom}_{\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}({}^t \phi', F)$, où ${}^t \phi'$ est le morphisme induit dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} h_0 \text{Spec}(\kappa(s)) & \longrightarrow & h_0(\mathbb{G}_m \times \text{Spec}(\kappa(s))) & \longrightarrow & S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(\kappa(s)) \\ \sum_i h_0({}^t g_i) \downarrow & & \sum_i h_0({}^t \gamma_{\lambda_i}^{r_i}) \downarrow & & \downarrow {}^t \phi' \\ \bigoplus_i h_0 \text{Spec}(\kappa(t_i)) & \longrightarrow & \bigoplus_i h_0(\mathbb{G}_m \times \text{Spec}(\kappa(t_i))) & \longrightarrow & \bigoplus_i S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(\kappa(t_i)) \end{array}$$

dans lequel les lignes horizontales sont des suites exactes courtes de $\text{pro-}\mathbb{H}_c \mathcal{N}_k^{\text{tr}}$.

Or, dans $\text{End}_{\text{pro-}\mathcal{L}_{\text{cor}, k}}(\mathbb{A}_{\kappa(t_i)}^1)$,

$$\gamma_{\lambda_i}^{r_i} \circ {}^t \gamma_{\lambda_i}^{r_i} = r_i \cdot 1$$

d'après la proposition 5.3.13.

On en déduit donc que dans $\text{End}_{\text{pro-H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}(S_t^1 \otimes^{H\text{tr}} h_0 \kappa(t_i)) = \mathbb{Z}$ on a ${}^t \gamma_{\lambda_i}^{r_i} = 1$.

Pour résumer le travail qu'on a effectué, on trace le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} F^1(Y_s, T_s) & \xrightarrow{\sum_i \rho_{X_i}} & \bigoplus_i F_{-1}(\kappa(t_i)) \\ F^1(f_s, g_s)_* \downarrow & & \downarrow \sum_i F_{-1}({}^t g_i) \\ F^1(X_s, Z_s) & \xrightarrow{\rho_\pi} & F_{-1}(\kappa(s)) \end{array}$$

ce qui, compte tenu de la proposition 5.4.35, et du fait que pour tout i , (Y, t_i) est un k -modèle de w_i , nous permet de conclure. \square

Remarque 5.4.66.— Comme dans la preuve de 5.4.63, on aurait pu éviter le recours au lemme 5.4.65 en raisonnant directement sur les morphismes de pro-objets, puisque le morphisme $(f_s, g_s) : (Y_s, T_s) \rightarrow (X_s, Z_s)$ est quasi-cartésien exact. Toutefois, cette dernière démonstration est plus précise et montre comment on peut ramener la situation générique pour obtenir une démonstration valable sur des ouverts assez petits donnés.

5.5 K-théorie de Milnor et donnée D3

5.5.1 Cup-produits

Définition 5.5.1 Soient F, G et H des faisceaux avec transferts, et $\mu : F \otimes^{tr} G \rightarrow H$ un morphisme. On définit un cup-produit induit par μ , noté \smile_μ , donné par la composée

$$F \otimes_{\mathbb{Z}} G \xrightarrow{\smile} F \otimes^{tr} G \xrightarrow{\mu} H$$

où la première flèche est le morphisme de faisceaux associé à l'application cup-produit de 2.2.21.

Pour E/k une extension de type fini, ce morphisme induit donc sur les fibres un morphisme noté

$$\begin{array}{ccc} F(E) \otimes_{\mathbb{Z}} G(E) & \rightarrow & H(E) \\ \alpha \otimes \beta & \mapsto & \alpha \smile_\mu \beta. \end{array}$$

On peut de plus calculer ce produit. Si on confond α (resp. β) et l'application $L[E] \rightarrow F$ (resp. $L[E] \rightarrow G$) qu'elle représente par le lemme de Yoneda (dans $\text{pro-}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$), l'application associée à l'élément $\alpha \smile_\mu \beta$ dans $H(E)$ est simplement

$$L[E] \xrightarrow{\Delta_E} L[E] \otimes^{tr} L[E] \xrightarrow{\alpha \otimes^{tr} \beta} F \otimes^{tr} G \xrightarrow{\mu} H.$$

En effet, quand on considère l'application induite sur les fibres par le morphisme de faisceaux \smile_μ , il n'y a pas lieu de différencier entre le morphisme de préfaisceaux défini en 2.2.21 et le morphisme de faisceaux qui lui est associé, ce qui explique la formule précédente.

On en déduit facilement la functorialité suivante du cup-produit :

Lemme 5.5.2 Soient F, G et H des faisceaux avec transferts, et $\mu : F \otimes^{tr} G \rightarrow H$ un morphisme.

Considérons un morphisme $\varphi : E \rightarrow L$ dans \mathcal{E}_k^s , et $\alpha \in F(E)$, $\beta \in G(E)$ des fibres de F et G . Alors, on obtient la relation

$$H(\varphi).(\alpha \smile_{\mu} \beta) = (F(\varphi).\alpha) \smile_{\mu} (G(\varphi).\beta)$$

où $(\varphi) : (L) \rightarrow (E)$ est l'application de pro- \mathcal{L}_k définie en 2.1.37.

PREUVE : On ne fait qu'exprimer par là le fait que le \smile_{μ} est une transformation naturelle (ce qui résulte de la remarque qui suit 2.2.21). \square

La formule suivante est moins facile :

Proposition 5.5.3 Soient F, G et H des faisceaux avec transferts, et $\mu : F \otimes^{tr} G \rightarrow H$ un morphisme.

Soit $\varphi : E \rightarrow L$ un morphisme fini dans \mathcal{E}_k^s . Alors, pour tout $\alpha \in F(E)$ et $\beta \in G(L)$, on a les relations

$$\begin{aligned} H({}^t(\varphi)).(F(\varphi).\alpha \smile_{\mu} \beta) &= \alpha \smile_{\mu} G({}^t(\varphi)).\beta \\ H({}^t(\varphi)).(\alpha \smile_{\mu} G(\varphi).\beta) &= F({}^t(\varphi)).\alpha \smile_{\mu} \beta \end{aligned}$$

où ${}^t(\varphi) : [E] \rightarrow [L]$ est le morphisme de pro- $\mathcal{L}_{\text{cor},k}$ défini en 5.3.17.

PREUVE : En effet, par définition du produit tensoriel et du cup-produit, on peut supposer que $F = L[S]$ (resp. $G = L[T]$) quitte à considérer la limite inductive des faisceaux avec transferts représentables au-dessus de F (resp. G). Considérons alors un k -modèle $f : X \rightarrow Y$ de L/E ; il nous suffit maintenant d'appliquer la proposition 5.3.14 au morphisme induit $\bar{f} : X_x \rightarrow Y_y$ pour conclure, compte tenu du calcul de \smile_{μ} . \square

Remarque 5.5.4.— Ce qui précède est valable si l'on considère des faisceaux avec transferts qui sont de plus invariants par homotopie. En effet, si F, G et H sont des faisceaux homotopiques, on a un produit extérieur :

$$F \otimes_{\mathbb{Z}} G \rightarrow F \otimes^{tr} G \rightarrow F \otimes^{Htr} G = h_0(F \otimes^{tr} G).$$

De plus, la donnée d'une application $\mu : F \otimes^{tr} G \rightarrow H$ est équivalente à celle d'une application $\mu' : F \otimes^{Htr} G \rightarrow H$ par adjonction (puisque H est invariant par homotopie).

5.5.5.— Si F_*, G_* et H_* sont des faisceaux gradués, et $\mu_* : F_* \hat{\otimes} G_* \rightarrow H_*$ un morphisme gradué, on définit plus généralement un cup-produit gradué induit par μ

$$F_* \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}} G_* \rightarrow F_* \hat{\otimes} G_* \xrightarrow{\mu} H_*.$$

Ce cup-produit est tout simplement la somme des cup-produits (non gradués) induit par μ sur chaque composantes de F_* et G_* . En particulier, la proposition 5.5.3 est encore valable dans ce cas.

5.5.2 K-théorie de Milnor et sphère de Tate

On étudie dans cette section l'algèbre S_t^* définie dans 3.4.17, et plus précisément, le foncteur qu'elle induit sur les extensions de type fini de k .

On a donc en particulier un produit (défini en 3.4.18)

$$\mu : S_t^* \otimes^{Htr} S_t^* \rightarrow S_t^*$$

qui induit un cup-produit d'après le paragraphe précédent (que l'on notera simplement \smile)

$$\hat{S}_t^*(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{S}_t^*(E) \rightarrow \hat{S}_t^*(E).$$

Par ailleurs, ce groupe abélien gradué est encore égal à

$$\hat{S}_t^*(E) = \mathbb{Z} \oplus E^\times \oplus S_t^2(E) \oplus \dots$$

et le produit extérieur donne un morphisme d'algèbre de degré 0 que l'on note

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(E^\times) &\rightarrow \hat{S}_t^*(E) \\ a_1 \otimes \dots \otimes a_n &\mapsto \langle a_1, \dots, a_n \rangle. \end{aligned}$$

Or, le travail qu'on a effectué jusque là nous permet déjà de montrer que les fibres de S_t^* satisfont la functorialité suivante :

1. Soit $\varphi : E \rightarrow L$ un k -morphisme dans \mathcal{E}_k^s . On a un morphisme

$$\hat{S}_t^*(\varphi) : \hat{S}_t^*(E) \rightarrow \hat{S}_t^*(L)$$

où $(\varphi) : (L) \rightarrow (E)$ est le morphisme défini dans 2.1.37.

On pose $\varphi_* = \hat{S}_t^*(\varphi)$.

2. Soit $\varphi : E \rightarrow L$ un k -morphisme fini dans \mathcal{E}_k^s . Alors, on a un morphisme

$$\hat{S}_t^*({}^t(\varphi)) : \hat{S}_t^*(L) \rightarrow \hat{S}_t^*(E)$$

où ${}^t(\varphi) : [E] \rightarrow [L]$ est le morphisme défini dans 5.3.17.

On pose $\varphi^* = \hat{S}_t^*({}^t(\varphi))$.

On obtient tout d'abord les propriétés élémentaires suivantes :

Lemme 5.5.6 *Soient E/k et L/k des extensions de type fini, et $\varphi : E \rightarrow L$ un morphisme.*

1. Pour tous a_1, \dots, a_n dans E^\times , $\langle a_1 \rangle \smile \dots \smile \langle a_n \rangle = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.
2. Pour tous a, b dans E^\times , $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle a.b \rangle$.
3. Pour tous a_1, \dots, a_n dans E^\times , $\varphi_*(\langle a_1, \dots, a_n \rangle) = \langle \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n) \rangle$.

PREUVE : Le 1 est vrai par définition, et le 2 d'après la structure de faisceau abélien du faisceau en groupes S_t^1 . Pour le 3, on fait une récurrence sur n et on applique le lemme 5.5.2. \square

Lemme 5.5.7 1. On a un morphisme surjectif

$$c(E, \mathbb{G}_m^n) \rightarrow S_t^n(E), \sigma \mapsto [\sigma]_E$$

et le premier groupe est formé des combinaisons linéaires formelles de points fermés de $\mathbb{G}_m^n \otimes_k E$.

2. Considérons l'inclusion

$$\varphi_n : \mathbb{G}_m^n(E) \rightarrow c(E, \mathbb{G}_m^n)$$

qui consiste à voir un point rationnel du schéma \mathbb{G}_m^n comme un point fermé du même schéma. Alors, pour tous a_1, \dots, a_n dans E^\times , le n -uplet (a_1, \dots, a_n) est un point rationnel de $\mathbb{G}_m^n(E)$ et

$$[(a_1, \dots, a_n)]_E = \langle a_1, \dots, a_n \rangle.$$

PREUVE : Pour le premier point tout d'abord, d'après le lemme 3.1.10, on a

$$S_t^n = h_0(L[\mathbb{G}_m^n / \sqcup_{i=1}^n \mathbb{G}_m^{n-1}]).$$

On a donc un épimorphisme naturel

$$L[\mathbb{G}_m^n] \rightarrow L[\mathbb{G}_m^n / \sqcup_{i=1}^n \mathbb{G}_m^{n-1}] \rightarrow h_0(L[\mathbb{G}_m^n / \sqcup_{i=1}^n \mathbb{G}_m^{n-1}]).$$

Pour le deuxième point, on se ramène par changement de base au cas où $E = k$.

Par récurrence, il suffit de traiter le cas $n = 2$. Soit donc (a, b) un élément de $(k^\times)^2$; on doit donc montrer que $\varphi_2((a, b)) = \varphi_1(a) \smile \varphi_1(b)$.

Notons σ_a (respectivement σ_b) la correspondance finie dans $c(k, \mathbb{G}_m)$ représentée par le point rationnel a (respectivement b) de \mathbb{G}_m . Alors, $\varphi_1(a) \smile \varphi_1(b)$ est la classe de la correspondance finie $\sigma_a \smile \sigma_b$. Par ailleurs, $\sigma_a \smile \sigma_b$ est l'intersection des deux cycles $\sigma_a \times \mathbb{G}_m$ et $\mathbb{G}_m \times \sigma_b$ dans $Z(\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m)$. Or ces deux cycles s'intersectent en un seul point, (a, b) , avec une multiplicité 1, d'où le lemme. \square

On connaît déjà certaines propriétés élémentaires du module homotopique S_t^* , notamment à cause des paragraphes précédents :

Proposition 5.5.8 1. Soit $\varphi : E \rightarrow L$ un morphisme fini dans \mathcal{E}_k^s , alors pour tout $\rho \in \hat{S}_t^*(E)$ et $\theta \in \hat{S}_t^*(L)$,

$$\begin{aligned} \varphi^*(\varphi_*(\rho) \smile \theta) &= \rho \smile (\varphi^*(\theta)) \\ \varphi^*(\theta \smile \varphi_*(\rho)) &= (\varphi^*(\theta)) \smile \rho. \end{aligned}$$

2. Soit $\varphi : E \rightarrow L$ un morphisme fini dans \mathcal{E}_k^s . Alors, pour tout $\rho \in \hat{S}_t^*$,

$$\varphi^* \varphi_*(\rho) = [L : E] \cdot \rho.$$

3. Soient $\varphi : K \rightarrow E$ et $\psi : K \rightarrow L$ des morphismes dans \mathcal{E}_k^s avec φ fini. Alors, pour tout ρ dans \hat{S}_t^* ,

$$\psi_* \varphi^*(\rho) = \sum_{z \in (E \otimes_K L)^{(0)}} \lg(E \otimes_K L_z) \cdot (\varphi_z)^*(\psi_z)_*(\rho).$$

4. Soient $\varphi : K \rightarrow E$ et $\psi : K \rightarrow L$ des morphismes dans \mathcal{E}_k^s tels que E/K soit finie et L/K soit finie et normale. On suppose que $\text{Hom}_K(E, L) \neq \emptyset$.

Alors, pour tout ρ dans \hat{S}_t^* ,

$$\psi_* \varphi^*(\rho) = [E : K]_i \sum_{j \in \text{Hom}_K(E, L)} j_*(\rho)$$

PREUVE : Le premier point résulte de la proposition 5.5.3 et le troisième résulte simplement de la proposition 5.3.23.

Pour la deuxième formule, on applique le 1 avec $\theta = 1 \in \mathbb{Z}(E)$:

$$\varphi_z^*(1 \smile (\varphi_z)_*(\rho)) = \varphi_z^*(1) \smile \rho$$

Or \mathbb{Z} est représentable, et $\mathbb{Z} = \mathbb{L}[\text{Spec}(k)]$. La définition du produit externe montre donc que $1 \smile (\varphi_z)_*(\rho) = (\varphi_z)_*(\rho)$ (et plus généralement que le cup-produit par un élément de $\mathbb{Z}(E)$ est la multiplication par les scalaires). Par ailleurs, $\varphi^* : c(L, k) \rightarrow c(E, k)$ est une application entre limites inductives qui est la multiplication par $[L : E]$ à distance finie d'après la définition du pullback de cycles. Donc $\varphi_z^*(1) = [L : E]$, et l'on a bien réduit la formule précédente à celle qu'on attendait.

Pour le quatrième point, on va utiliser le 3. Supposons pour commencer que E/K soit séparable.

Alors, d'après le théorème de l'élément primitif, il existe x dans E tel que $E = K[x]$. Soit P le polynôme minimal de x sur K , on a donc $E = K[X]/(P)$. Ainsi,

$$E \otimes_K L = L[X]/(P).$$

Puisqu'il existe un morphisme de E dans L , P a au moins une racine dans L , et comme L est normal et P irréductible, P est scindé. Enfin, comme E/K est séparable, les racines de P dans L sont distinctes :

$$P = (X - x_1) \dots (X - x_r).$$

D'après le théorème chinois,

$$E \otimes_K L = \prod_{i=1}^r L[X]/(X - x_i).$$

Ainsi, $E \otimes_K L$ est un anneau artinien dont les idéaux premiers sont en bijection avec les racines de P (dans L). Par ailleurs, si z est un tel élément, le morphisme induit $\varphi_z : L \rightarrow E \otimes_K L/z = L[X]/(X - z)$ est un isomorphisme.

On obtient donc un morphisme

$$\begin{aligned} E \otimes_K L^{(0)} &\rightarrow \text{Hom}_K(E, L) \\ z &\mapsto \varphi_z^{-1} \circ \psi_z. \end{aligned}$$

Réciproquement, soit $j \in \text{Hom}_K(E, L)$, on définit

$$z = \langle 1 \otimes \varphi(l) - \psi(\iota(l)) \otimes 1 \mid l \in L \rangle,$$

idéal engendré dans $E \otimes_K L$. Par définition de z , on a donc un triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & L \\ & \nearrow j & \downarrow \varphi_z \\ E & \xrightarrow{\psi_z} & E \otimes_K L/z. \end{array}$$

Donc φ_z est surjectif. Comme il est non nul, il est aussi injectif puisque sa source est un corps. Ainsi, φ_z est un isomorphisme et z est un idéal maximal de $E \otimes_K L$. Par ailleurs, $j = \varphi_z^{-1} \circ \psi_z$.

On a donc construit $\text{Hom}_K(E, L) \rightarrow E \otimes_K L^{(0)}$, inverse à droite du morphisme précédent. Par ailleurs, puisque E/K est séparable, $\text{Hom}_K(E, L)$ est en bijection avec les racines de P , donc les deux morphismes que l'on vient de définir sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Appliquant le troisième point, on trouve

$$\psi_* \varphi^*(\rho) = \sum_{z \in E \otimes_K L^{(0)}} (\varphi_z)^*(\psi_z)_*(\rho) \quad (5.4)$$

car la longueur d'un corps est égale à 1.

Or, puisque φ_z est un isomorphisme, en appliquant 2 et 3, on obtient

$$(\varphi_z)_*(\varphi_z)^* = (\varphi_z)^*(\varphi_z)_* = Id.$$

Il s'ensuit que $(\varphi_z)^*$ est un isomorphisme de réciproque $(\varphi_z)_*$. Dès lors, par functorialité, on obtient $(\varphi_z)^* = (\varphi_z^{-1})_*$, et la formule (5.4) devient, en utilisant la bijection explicite de $E \otimes_K L^{(0)}$ et de $\text{Hom}_K(E, L)$,

$$\begin{aligned} \psi_* \varphi^*(\rho) &= \sum_{z \in E \otimes_K L^{(0)}} (\varphi_z^{-1})_*(\psi_z)_*(\rho) \\ &= \sum_{j \in \text{Hom}_K(E, L)} j_*(\rho). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que l'extension E/K soit radicielle, et notons $\iota : E \rightarrow L$ le K -morphisme unique (puisque E/K est radicielle) qui existe par hypothèse. On doit montrer que :

$$\psi_* \varphi^* = [E : K] \cdot \iota_* .$$

Par récurrence, on peut supposer que E/K est obtenue par adjonction d'une racine q -ième. Dès lors, $E = K[X]/(X^q - a)$ pour a dans K . Soit b une racine q -ième de a dans L , qui existe d'après l'existence de ι . Dès lors, $E \otimes_K L = L[X]/((X - b)^q)$. Donc $E \otimes_K L$ est un anneau local artinien de longueur q , et d'après le 3,

$$\psi_* \varphi^* = q \cdot \bar{\varphi}^* \bar{\psi}_*$$

où $\bar{\varphi} : L \rightarrow L[X]/(X - b)$ et $\bar{\psi} : E \rightarrow L[X]/(X - b)$ sont les morphismes induits. Dès lors, $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme, et $\bar{\varphi}^* \bar{\psi}_* = (\bar{\varphi}^{-1} \bar{\psi})_*$. Par ailleurs, E/K étant radicielle, $j = \bar{\varphi}^{-1} \bar{\psi}$, d'où la formule attendue.

Enfin, pour conclure dans le cas général, on considère E_s la clôture séparable de K dans E . Alors, E_s/K est séparable, et E/E_s est radicielle. Notons $K \xrightarrow{\varphi_s} E_s \xrightarrow{\varphi_r} E$. On obtient finalement

$$\begin{aligned} \psi_*\varphi^* &= \psi_*\varphi_s^*\varphi_r^* \\ &= \sum_{j \in \text{Hom}_K(E_s, L)} j_*\varphi_r^* \\ &= \sum_{j \in \text{Hom}_K(E_s, L)} [E : E_s] \cdot j_*\iota_* \\ &= [E : K]_i \cdot \sum_{j \iota \in \text{Hom}_K(E, L)} (j\iota)_*, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. \square

Si E/K est une extension finie, on note $N_{E/K} : E^\times \rightarrow K^\times$ la norme qui lui est classiquement associée (voir [Lan95] VI.§5). Classiquement, on obtient le corollaire suivant de la proposition précédente :

Corollaire 5.5.9 *Soit $\varphi : K \rightarrow E$ un morphisme fini dans \mathcal{E}_k^s . Alors le morphisme $\varphi^* : \hat{S}_t^*(E) \rightarrow \hat{S}_t^*(K)$ est égal en degré 1 à l'application norme $N_{E/K}$ usuelle.*

PREUVE : Puisque E/K est finie, $E = K[x_1, \dots, x_n]$. Soit L/K l'extension normale finie engendrée par x_1, \dots, x_n (i.e. l'extension engendrée par les x_i et leurs conjugués), $\psi : K \rightarrow L$. Soit $\rho \in E^\times$. Alors, d'après le 4 de la proposition précédente :

$$\psi_*\varphi^*(\rho) = [E : K]_i \sum_{j \in \text{Hom}_K(E, L)} j_*(\rho) \in \mathbb{G}_m(E)$$

Or, par définition,

$$N_{E/K}(\rho) = \left(\prod_{j \in \text{Hom}_K(E, L)} j(\rho) \right)^{[E:K]_i} \in E^\times$$

La structure produit de E^\times est la structure additive sur $\mathbb{G}_m(E)$. Par ailleurs, $j_* : \mathbb{G}_m(K) \rightarrow \mathbb{G}_m(E)$ est simplement le morphisme d'injection $j : E^\times \rightarrow K^\times$. Dès lors,

$$\psi_*(N_{E/K}(\rho)) = \psi_*\varphi^*(\rho)$$

On en déduit, puisque ψ_* est injectif, que $N_{E/K}(\rho) = \varphi^*(\rho)$. \square

Le théorème suivant dû à A. Suslin et V. Voevodsky (cf [SV00a], th. 3.4) éclaircit complètement la situation vis-à-vis des gradués supérieurs de \hat{S}_t^* :

Théorème 5.5.10 (Suslin-Voevodsky) *Soit E/k une extension de type fini.*

1. Pour tout a dans E^\times , on a la relation de Steinberg dans l'algèbre graduée $\hat{S}_t^*(E)$:

$$\langle a \rangle \smile \langle 1 - a \rangle = 0.$$

2. Le morphisme canonique

$$\mathcal{S}(E^\times) \rightarrow \hat{S}_t^*(E)$$

se factorise en

$$K_*^M(E) \xrightarrow{\lambda_E} \hat{S}_t^*(E),$$

et ce dernier morphisme est un isomorphisme d'algèbres graduées.

PREUVE : La preuve qui suit reprend la preuve de A. Suslin et V. Voevodsky du théorème 3.4 dans [SV00a]. On l'a intégrée à la fois par commodité pour le lecteur, et aussi pour montrer qu'elle n'utilise pas la catégorie dérivée des motifs mixtes définie par V. Voevodsky.

Remarquons tout d'abord que par changement de base, on peut toujours se réduire au cas où E est le corps de base, réduction que l'on utilisera fréquemment dans la démonstration.

On rappelle que $\langle ? \rangle$ désigne le morphisme de $\mathcal{S}(E^\times) \rightarrow \hat{S}_t^*(E)$.

Lemme 5.5.11 1. *S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall E/k \in \mathcal{E}_k^s, \forall a \in E^\times \setminus \{1\}, N.\langle a, 1-a \rangle = 0 \quad (*.N)$$

alors, $\forall E/k \in \mathcal{E}_k^s, \forall a \in E^\times \setminus \{1\}, \langle a, 1-a \rangle = 0$.

2. *S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall E/k \in \mathcal{E}_k^s, \forall a \in E^\times \setminus \{1\}, N.\langle a, -a \rangle = 0$$

alors, $\forall E/k \in \mathcal{E}_k^s, \forall a \in E^\times \setminus \{1\}, \langle a, -a \rangle = 0$.

PREUVE : Pour la première affirmation, il suffit de démontrer que l'assertion $(*.N'p)$ implique $(*.N')$, pour p un nombre premier. Soit donc $a \in E^\times \setminus \{1\}$, et supposons $(*.N'p)$. On veut démontrer $N'.\langle a, 1-a \rangle = 0$. Si a est une puissance p -ième, il suffit d'appliquer l'hypothèse. Supposons donc que a n'est pas une puissance p -ième, et posons $\alpha = a^{1/p}$ dans une clôture algébrique de E , $L = E(\alpha)$ et $\varphi : E \rightarrow L$. Dès lors,

$$\begin{aligned} N'.\langle a, (1-a) \rangle &= N'.\langle a, N_{L/E}(1-\alpha) \rangle = N'.\langle a, \varphi^*(1-\alpha) \rangle \\ &= N'.\varphi^*\langle a, (1-\alpha) \rangle \\ &= \varphi^*((N'p).\langle \alpha, (1-\alpha) \rangle) = 0 \end{aligned}$$

et l'on a donc $(*.N')$, ce qui démontre la première assertion.

On procède de même pour la deuxième assertion. \square

Lemme 5.5.12 *Soient $a, b \in E^\times$, alors $\langle ab, ab \rangle = \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle$.*

PREUVE : On se ramène au cas $E = k$.

Considérons H le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{G}_m = \text{Spec}(k[t, X, X^{-1}])$ donné par l'équation

$$\begin{aligned} t.(X-a)(X-b) + (1-t).(X-ab)(X-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow X^2 - (t.(a+b) + (1-t).ab)X + ab &= 0. \end{aligned}$$

Alors H est isomorphe à \mathbb{G}_m par la deuxième projection : il est donc intègre. Par ailleurs, il est fini et surjectif sur \mathbb{A}_k^1 .

Considérons l'immersion fermée $\mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m, (t, x) \mapsto (t, x, x)$, et soit H' l'image de H par cette immersion fermée.

Le schéma H' est encore fini et surjectif sur \mathbb{A}_k^1 , et définit donc une correspondance finie

$$\sigma : \text{Spec}(k) \times \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m.$$

Soient i_0 et i_1 les injections de $\langle 0 \rangle$ et $\langle 1 \rangle$ dans \mathbb{A}^1 . Alors, pour $t = 0, 1$, $\sigma \circ i_t \in c(k, \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m)$, et par définition, on a

$$\sigma \circ i_0 \sim_h \sigma \circ i_1$$

ce qui implique, avec les notations du lemme 5.5.7 que dans $\mathbb{G}_m(k)$, $[\sigma \circ i_0]_k = [\sigma \circ i_1]_k$.

Or, $H \cap \langle 0 \rangle \times \mathbb{G}_m$ est le fermé de \mathbb{G}_m formé des points rationnels ab et 1 . Donc, $H \circ i_0$ est le cycle associé au sous-schéma fermé formé des points ab et 1 . Dès lors, $H' \cap \langle 0 \rangle \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ est le fermé de $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ formé des points rationnels (ab, ab) et $(1, 1)$. On obtient donc, compte tenu du lemme 5.5.7,

$$[\sigma \circ i_0]_k = \langle ab, ab \rangle + \langle 1, 1 \rangle.$$

De même, $H \cap \langle 1 \rangle \times \mathbb{G}_m$ est le fermé formé des points rationnels a et b . Donc $H' \cap \langle 1 \rangle \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ est le fermé formé des points (a, a) et (b, b) , d'où

$$[\sigma \circ i_1]_k = \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle$$

ce qui prouve le résultat attendu puisque $\langle 1, 1 \rangle = 0$. \square

Corollaire 5.5.13 Dans $S_t^1 \otimes^{Htr} S_t^1(E)$, on a les relations :

1. $\forall a \in E^\times, \langle a, -a \rangle = 0$.
2. $\forall a \in E^\times \setminus \{1\}, \langle a, 1 - a \rangle + \langle a^{-1}, 1 - a^{-1} \rangle = 0$.

PREUVE : En effet, appliquant le lemme précédent avec $b = a$, on obtient

$$\langle a^2, a^2 \rangle = 2 \cdot \langle a, a \rangle.$$

Or, $2 \cdot \langle a, -a \rangle = 2 \cdot \langle a, -1 \rangle + 2 \cdot \langle a, a \rangle = \langle a, 1 \rangle + 2 \cdot \langle a, a \rangle = 2 \cdot \langle a, a \rangle$, donc

$$\begin{aligned} \langle a^2, (-a)^2 \rangle &= 2 \cdot \langle a, -a \rangle \\ \Leftrightarrow 4 \cdot \langle a, -a \rangle &= 2 \cdot \langle a, -a \rangle \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \langle a, -a \rangle &= 0, \end{aligned}$$

et d'après le premier lemme, $\langle a, -a \rangle = 0$.

La deuxième relation se déduit de la première en utilisant $-a = (1 - a)/(1 - a^{-1})$. \square

Lemme 5.5.14 Pour tout extension E/k de type fini, pour tout $a \in E^\times \setminus \{1\}$,

$$12 \cdot \langle a^3, (1 - a^3) \rangle = 0.$$

PREUVE : On se ramène au cas $E = k$.

La méthode de la preuve est la même que pour le lemme précédent : considérons le sous-schéma fermé H de $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m \setminus \{1\} = \text{Spec}(k[t, X, X^{-1}, (X-1)^{-1}])$ donné par l'équation

$$X^4 - t.(a^3 + 1).X^2 + t.(a^3 + 1).X - a^3 = 0.$$

De nouveau, la projection $H \rightarrow \mathbb{G}_m \setminus \{1\}$ est un isomorphisme, donc H est intègre et de plus, H est fini surjectif sur \mathbb{A}^1 .

Considérons maintenant l'immersion fermée $\mathbb{A}_k^1 \times (\mathbb{G}_m \setminus \{1\}) \rightarrow \mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m, (t, x) \mapsto (t, x, 1-x)$, et notons H' l'image de H par celle-ci, ainsi que σ la correspondance finie qui lui correspond.

On conclut comme dans la preuve précédente que $[\sigma \circ i_0]_k = [\sigma \circ i_1]_k$ dans $\mathbb{G}_m \otimes^{Htr} \mathbb{G}_m(k)$.

Soient ξ une racine primitive cubique de l'unité, et x_1 une racine de l'équation $X^2 - X + 1$ dans une clôture algébrique de k . Notons $L = k(\xi, x_1)$, $\varphi : k \rightarrow L$ l'inclusion canonique, et effectuons tout d'abord nos calculs dans $S_t^1 \otimes^{Htr} S_t^1(L)$.

Dans ce cas, $H \cap (\{0\} \times \mathbb{G}_m \setminus \{1\}) \otimes_k L$ est formé des points $a, \xi.a$ et $\xi^2.a$. Donc, $H' \cap \{0\} \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \otimes_k L$ est formé des points $(a, 1-a), (\xi.a, 1-\xi.a)$ et $(\xi^2.a, 1-\xi^2.a)$:

$$[\sigma \circ i_0]_L = \langle a, 1-a \rangle + \langle \xi a, 1-\xi a \rangle + \langle \xi^2 a, 1-\xi^2 a \rangle.$$

De même, $H \cap (\{1\} \times \mathbb{G}_m \setminus \{1\})$ est formé des points a^3 , et des racines x_1 et x_2 de l'équation $X^2 - X + 1 = 0$. Donc, $H' \cap \{1\} \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \otimes_k L$ est formé des points $(a^3, 1-a^3), (x_1, 1-x_1)$ et $(x_2, 1-x_2)$. D'où l'égalité

$$[\sigma \circ i_1]_L = \langle a^3, 1-a^3 \rangle + \langle x_1, 1-x_1 \rangle + \langle x_2, 1-x_2 \rangle.$$

Il nous reste maintenant à manipuler la relation obtenue pour arriver à la formule voulue. Or,

$$\begin{aligned} & \langle a, 1-a \rangle + \langle \xi a, 1-\xi a \rangle + \langle \xi^2 a, 1-\xi^2 a \rangle \\ &= \langle a, (1-a)(1-\xi a)(1-\xi^2 a) \rangle + \langle \xi, 1-\xi a \rangle + \langle \xi^2, 1-\xi^2 a \rangle \\ &= \langle a, 1-a^3 \rangle + \langle \xi, (1-\xi a)(1-\xi^2 a)^2 \rangle, \end{aligned}$$

et comme $x_2 = x_1^{-1}$, d'après le corollaire précédent appliqué au point rationnel x_1 , on a $\langle x_1, 1-x_1 \rangle + \langle x_2, 1-x_2 \rangle = 0$.

Enfin, comme $\xi^3 = 1$, en multipliant la relation initiale par 3, on obtient dans $S_t^1 \otimes^{Htr} S_t^1(L)$

$$3\langle a, 1-a^3 \rangle = 3\langle a^3, 1-a^3 \rangle \Leftrightarrow 2\langle a^3, 1-a^3 \rangle = 0.$$

Ainsi, dans $S_t^1 \otimes^{Htr} S_t^1(k)$, d'après le deuxième point de la proposition 5.5.8,

$$\varphi^*(2\langle a^3, 1-a^3 \rangle) = \varphi^*(\varphi_*(2\langle a^3, 1-a^3 \rangle))[L : k].2.\langle a^3, 1-a^3 \rangle.$$

Comme $[L : k]$ divise 6, on a donc dans $S_t^1 \otimes^{Htr} S_t^1(k)$, $12.\langle a^3, 1-a^3 \rangle = 0$. \square

Pour finir de démontrer la relation de Steinberg, on va montrer que pour tout $a \in E^\times$, $36.\langle a, 1-a \rangle = 0$, et on pourra alors appliquer le lemme 5.5.11 pour conclure que la relation de Steinberg est vraie.

Or, si a est un cube dans E , $a = b^3$, et on a $12.\langle b^3, 1 - b^3 \rangle = 0$ d'après le lemme précédent. Supposons donc que a n'est pas un cube dans E , et soit α une racine cubique de a . Posons $L = E(\alpha)$, et $\varphi : E \rightarrow L$ le morphisme canonique. Alors, dans $\mathbb{G}_m \otimes^{Htr} \mathbb{G}_m(E)$, on a $12.\langle \alpha^3, 1 - \alpha^3 \rangle = 0$, autrement dit, $12.\varphi_*(\langle a, 1 - a \rangle) = 12.\langle \varphi(a), 1 - \varphi(a) \rangle = 0$. Appliquant de nouveau le deuxième point de la proposition 5.5.8, on a donc

$$0 = \varphi^*(12.\varphi_*(\langle a, 1 - a \rangle)) = 36.\langle a, 1 - a \rangle$$

ce qui conclut la démonstration de la relation de Steinberg.

On passe maintenant à la deuxième partie de la proposition. On a déjà vu que pour un morphisme fini, le morphisme φ^* coïncide en degré 1 avec le morphisme norme. On étend maintenant cette égalité au niveau des gradués supérieurs, en utilisant le morphisme norme de la K-théorie de Milnor (voir [BT73]).

Lemme 5.5.15 *Soient E/k et L/k des extensions dans \mathcal{E}_k^s , et $\varphi : E \rightarrow L$ un morphisme fini. Alors, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} K_*^M(L) & \xrightarrow{\lambda_L} & \hat{S}_t^*(L) \\ N_{L/E} \downarrow & & \downarrow \varphi^* \\ K_*^M(E) & \xrightarrow{\lambda_E} & \hat{S}_t^*(E). \end{array}$$

PREUVE : On se réduit au cas $E = k$.

Soit p un nombre premier. Considérons tout d'abord un p -Sylow du groupe de Galois absolu de k , et notons k_p l'extension de k qui lui correspond. Dans ce cas k_p n'a pas d'extension de degré premier à p . Soit L/k_p une extension finie. Elle est donc de degré p^r . De plus, d'après [BT73], $K_*^M(L)$ est engendré additivement par les symboles de la forme $\{a_1, \dots, a_{n-1}, b\}$ où pour tout i , $a_i \in k_p$, et $b \in L$. Dès lors,

$$N_{L/k_p}(\{a_1, \dots, a_{n-1}, b\}) = \{a_1, \dots, a_{n-1}, N_{L/k_p}(b)\}$$

et la proposition dans le cas de L/k_p résulte du corollaire 5.5.9.

Dès lors, dans le cas général, considérons un élément $\rho \in K_*^M(L)$. On pose de plus $\mu = \lambda_k N_{L/k}(\rho) - \varphi^* \lambda_E(\rho)$. Alors, pour tout entier premier p , notons $\varphi_p : k \rightarrow k_p$ le morphisme fini canonique. Il résulte de ce qui précède que $(\varphi_p)_*(\mu) = 0$, et donc $[k_p : k].\mu = \varphi_p^*(\varphi_p)_*(\mu) = 0$. Comme ceci est valable pour tout p , on en conclut que $\mu = 0$. \square

Corollaire 5.5.16 *Le morphisme $K_*^M(E) \xrightarrow{\lambda_E} \hat{S}_t^*(E)$ est surjectif.*

PREUVE : On suppose que $E = k$. Par définition, le groupe $\hat{S}_t^n(k)$ est engendré par les points fermés de \mathbb{G}_m^n . Soit (x_1, \dots, x_n) un tel point, et κ son corps résiduel dans \mathbb{G}_m^n . Alors, $\langle x_1, \dots, x_n \rangle_\kappa$ est un élément de $\hat{S}_t^n(\kappa)$ qui est dans l'image de λ_κ . Dès lors, $\varphi^*(\langle x_1, \dots, x_n \rangle_\kappa)$ est égal à ρ d'après 5.5.8, et appartient à l'image de λ_k d'après le lemme précédent. \square

De plus, on peut construire un inverse explicite au morphisme λ_k . Soit (x_1, \dots, x_n) un point fermé de \mathbb{G}_m^n , de corps résiduel κ . On pose $\theta(x_1, \dots, x_n) = N_{\kappa/k}(\{x_1, \dots, x_n\})$. Ceci définit une application $\theta : c(\text{Spec}(k), \mathbb{G}_m^n) \rightarrow K_n^M(k)$. Par ailleurs, d'après la loi de

réciprocité de Weil pour le module de cycle K_*^M (propriété (RC) des modules de cycles, cf [Ros96], §2), pour tout élément H dans $c(\mathbb{A}_k^1, \mathbb{G}_m^n)$, $\theta(H \circ s_0) = \theta(H \circ s_1)$. Autrement dit, θ se factorise en un morphisme $\tilde{\theta} : S_t^n(k) \rightarrow K_n^M(k)$. Par définition, et d'après le lemme 5.5.15, ce morphisme est un inverse de λ_k . \square

5.5.3 Action de la K-théorie de Milnor (D3 et R2a,b,c)

Revenons donc au module homotopique (F_*, ϵ) . Il est par définition muni d'une structure de S_t^* -module gradué :

$$S_t^* \hat{\otimes} F_* \xrightarrow{\tau} F_*.$$

Pour toute extension E/k de type fini, on déduit de la définition 5.5.1 un cup-produit gradué :

$$\hat{S}_t^*(E) \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}} \hat{F}_*(E) \xrightarrow{\smile_{\tau}} \hat{F}_*(E).$$

Définition 5.5.17 (D3) *On définit la donnée D3 en posant, pour toute extension E/k de type fini,*

$$\begin{aligned} (K_*^M(E) \simeq \hat{S}_t^*(E)) \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}} F_*(E) &\rightarrow F_*(E) \\ \sigma \otimes \rho &\mapsto \sigma \cdot \rho = \sigma \smile_{\tau} \rho. \end{aligned}$$

5.5.18.– Puisque le cup-produit \smile_{τ} est naturel, et que le morphisme φ_* des fibres de \hat{S}_t^* coïncide avec le morphisme analogue de la K-théorie, cette donnée vérifie l'axiome R2a.

Par ailleurs, la section 5.5.1 sur les cup-produits nous permet de déduire facilement le corollaire suivant :

Corollaire 5.5.19 (R2b & R2c) *Soit $\varphi : E \rightarrow L$ un morphisme fini.*

1. *Pour tout $x \in K_*^M(E)$ et tout $\rho \in \check{F}(L)$,*

$$\varphi^*(N_{L/E}(x) \cdot \rho) = x \cdot \varphi^*(\rho).$$

2. *Pour tout $y \in K_*^M(L)$ et tout $\mu \in \check{F}(E)$,*

$$\varphi^*(y \cdot \varphi_*(\mu)) = \varphi^*(y) \cdot \mu.$$

PREUVE : Il suffit d'appliquer la proposition 5.5.3 et le lemme 5.5.15. \square

5.5.20.– Pour les deux formules restantes, on a besoin de calculer plus précisément l'action que l'on a construite. Fixons F un faisceau avec transferts. On note

$$ev_F : S_t^1 \otimes^{Htr} F_{-1} \rightarrow F$$

l'application d'évaluation canonique (voir C.4), obtenue en utilisant le fait que

$$F_{-1} = \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{N}_k^{\text{tr}}} (S_t^1, F).$$

On a donc un cup-produit

$$S_t^1 \otimes_{\mathbb{Z}} F_{-1} \xrightarrow{\smile^{ev_F}} F.$$

Avant de montrer le lien entre ce cup-produit et l'action de la K-théorie de Milnor construite ci-dessus, exprimons la functorialité de celui-ci :

Lemme 5.5.21 *Soit $\eta : F \rightarrow G$ un morphisme de faisceaux homotopiques. Alors, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} S_t^1 \otimes_{\mathbb{Z}} F_{-1} & \xrightarrow{\smile_{ev_F}} & F \\ 1 \otimes_{\mathbb{Z}} (\eta_{-1}) \downarrow & & \downarrow \eta \\ S_t^1 \otimes_{\mathbb{Z}} G_{-1} & \xrightarrow{\smile_{ev_G}} & G. \end{array}$$

PREUVE : Par définition du cup-produit, il suffit de montrer la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} S_t^1 \otimes^{tr} F_{-1} & \xrightarrow{ev_F} & F \\ 1 \otimes^{tr} (\eta_{-1}) \downarrow & & \downarrow \eta \\ S_t^1 \otimes^{tr} G_{-1} & \xrightarrow{ev_G} & G \end{array}$$

qui est juste l'expression de la naturalité du morphisme d'évaluation. \square

On en vient maintenant au lien de l'application d'évaluation avec l'action de la K-théorie de Milnor.

Lemme 5.5.22 *Soit (F_*, ϵ) un module homotopique.*

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme $\tau_n : S_t^1 \otimes^{Htr} F_n \rightarrow F_{n+1}$ est égal à la composée

$$S_t^1 \otimes^{Htr} F_n \xrightarrow{1 \otimes^{Htr} \epsilon_n} S_t^1 \otimes^{Htr} (F_{n+1})_{-1} \xrightarrow{ev_{F_{n+1}}} F_{n+1}.$$

Autrement dit, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S_t^1 \otimes^{Htr} F_n & \xrightarrow{\tau_n} & F_{n+1} \\ \sim \downarrow 1 \otimes^{Htr} \epsilon_n & & \parallel \\ S_t^1 \otimes^{Htr} (F_{n+1})_{-1} & \xrightarrow{ev_{F_{n+1}}} & F_{n+1}. \end{array}$$

PREUVE : Il s'agit juste de revenir à la définition de l'application $ev_{F_{n+1}}$, qui est le morphisme adjoint à $1_{(F_{n+1})_{-1}}$. \square

Rappelons que pour le module homotopique (F_*, ϵ) , on a défini par récurrence des isomorphismes

$$\epsilon_{n,p} : F_n \rightarrow (F_{n+p})_{-p}$$

dans le numéro 3.4.27.

Corollaire 5.5.23 *Soient E/k une extension de type fini, $\{x\} \in K_1^M(E)$ et $\rho \in F_n(E)$, alors $\epsilon_{n,1}(\rho) \in (F_n)_{-1}(E)$ et l'on a :*

$$\{x\} \smile_{\tau_n} \rho = \{x\} \smile_{ev} \epsilon_{n,1}(\rho).$$

Plus généralement, si $\{x_1, \dots, x_p\} \in K_p^M(E)$, alors $\epsilon_{n,p}(\rho) \in (F_n)_{-p}(E)$ et l'on a :

$$\{x_1, \dots, x_p\} \smile_{\tau_{n,p}} \rho = \{x_1, \dots, x_p\} \smile_{ev} \epsilon_{n,p}(\rho).$$

PREUVE : La première formule découle du lemme précédent et de la définition du cup-produit.

La deuxième formule s'obtient par récurrence à partir de la première en utilisant le fait que $\{x_1, \dots, x_p\} = \{x_1\} \smile_{ev} \dots \smile_{ev} \{x_p\}$. \square

5.5.24.– Le corollaire précédent montre qu'il suffit donc d'étudier le cup-produit induit par une application d'évaluation

$$S_t^p \otimes^{Htr} F_{-p} \xrightarrow{ev} F$$

où F est un faisceau homotopique fixé.

Pour un tel faisceau homotopique F , pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, pour tout $\sigma \in K_p^M(E)$ et $\rho \in \hat{F}_{-p}(E)$, on note simplement

$$\sigma \smile_{ev} \rho \in \hat{F}(E)$$

le cup-produit (définition 5.5.1) pour l'application d'évaluation canonique $S_t^p \otimes^{Htr} F_{-p} \rightarrow F$, où l'on a identifié F_{-p} et $\underline{\text{Hom}}(S_t^p, F)$.

Rappelons que d'après la proposition 3.4.12, on peut donc considérer la projection canonique

$$\eta : h_0 L[\mathbb{G}_m^n] \rightarrow S_t^n$$

qui induit en particulier un monomorphisme de faisceaux homotopiques

$$F_{-n} \simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}(S_t^n, F) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}(h_0(\mathbb{G}_m^n), F) \simeq F(\mathbb{G}_m^n \times_k \cdot),$$

noté simplement η^* .

Lemme 5.5.25 *Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un point rationnel de $\mathbb{G}_m^n \otimes_k E$, autrement dit, un morphisme $x : (E) \rightarrow \mathbb{G}_m^n$ (dans $\text{pro-}\mathcal{L}_k$).*

On en déduit un morphisme

$$\gamma_x : (E) \xrightarrow{\Delta(E)} (E) \times_k (E) \xrightarrow{x \times_k 1(E)} \mathbb{G}_m^n \times_k (E).$$

Pour tout $\rho \in F_{-n}(E)$, on a

$$\{x_1, \dots, x_n\} \smile_{ev} \rho = \gamma_x^*(\eta^* \rho) \in F(E)$$

où $\eta : h_0(\mathbb{G}_m^n) \rightarrow S_t^n$ est l'épimorphisme canonique rappelé ci-dessus.

PREUVE : Il s'agit essentiellement de comprendre les différentes définitions en jeu.

On peut tout d'abord supposer $E = k$ par changement de base.

Alors, ρ correspond à un morphisme $L[k] \rightarrow F_{-n}$. Par adjonction, ce dernier morphisme correspond à $\rho' : L[k] \otimes^{tr} S_t^n \rightarrow F$.

L'élément $\{x_1, \dots, x_n\}$ est par définition la composée

$$L[k] \xrightarrow{(x_1, \dots, x_n)} L[\mathbb{G}_m^n] \xrightarrow{\eta} S_t^n.$$

Notant encore $ev : S_t^n \otimes^{tr} F_{-n} \rightarrow F$ l'application d'évaluation relative à S_t^n , on a donc par définition

$$\begin{aligned} \{x_1, \dots, x_n\} \smile_{ev} \rho &= ev \circ ((\eta \circ x) \otimes^{tr} \rho) \circ \Delta_X \\ &= ev \circ (1_{S_t^n} \otimes^{tr} \rho) \circ ((\eta \circ x) \otimes^{tr} 1_k) \circ \Delta_X. \end{aligned}$$

Or, par définition, $ev \circ (1_{S_t^n} \otimes^{tr} \rho) = \rho'$, donc

$$\{x_1, \dots, x_n\} \smile_{ev} \rho = \rho' \circ (\eta \otimes^{tr} 1_k) \circ (x \otimes^{tr} 1_k) \circ \Delta_X.$$

La dernière application est bien induite par l'application $\gamma_x = (x \times_k 1_k) \circ \Delta_k$.

Enfin, confondre ρ avec son image dans $F(\mathbb{G}_m^n)$ revient à confondre ρ' et $\rho' \circ (\eta \otimes^{tr} 1_k)$. On peut donc conclure (en appliquant le lemme de Yoneda) \square

On arrive ainsi au calcul annoncé de l'action définie en 5.5.17, pour le module homotopique (F_*, ϵ) que nous avons fixé dans ce chapitre :

Corollaire 5.5.26 *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$ deux entiers, et $x = (x_1, \dots, x_n)$ un point rationnel de $\mathbb{G}_{m,E}^n$, i.e. un morphisme $x : (E) \rightarrow \mathbb{G}_m^n$ (dans $\text{pro-}\mathcal{L}_k$).*

On peut alors considérer les trois morphismes suivants :

1. *Le morphisme construit dans la proposition précédente :*

$$\gamma_x : (E) \xrightarrow{\Delta(E)} (E) \times_k (E) \xrightarrow{x \times_k 1(E)} \mathbb{G}_m^n \times_k (E).$$

2. *L'épimorphisme $\eta : h_0(\mathbb{G}_m^n) \rightarrow S_t^n$, rappelé ci-dessus (cf proposition 3.4.12).*

3. *D'après 3.4.27, on a un isomorphisme canonique de faisceaux homotopiques*

$$\epsilon_{m,n} : F_m \rightarrow (F_{m+n})_{-n}.$$

Alors pour tout $\rho \in F_m(E)$, $\{x_1, \dots, x_n\} \cdot \rho$ se calcule comme l'image de ρ par la composée de morphismes suivante :

$$\begin{aligned} F_m(E) &\xrightarrow{\epsilon_{m,n}} (F_{m+n})_{-n}(E) \simeq \underline{\text{Hom}}(S_t^n, F_{m+n})(E) \\ &\xrightarrow{\eta^*} \underline{\text{Hom}}(h_0(\mathbb{G}_m^n), F_{m+n})(E) \simeq F_{m+n}(\mathbb{G}_m^n \times_k E) \\ &\xrightarrow{\gamma_x^*} F_{m+n}(E). \end{aligned}$$

5.5.4 Résidu et K-théorie (axiomes R3d et R3e)

5.5.4.1 Axiome R3d

On démontre ici le premier axiome des pré-modules de cycles qui concerne le résidu et l'action de la K-théorie de Milnor. D'après l'étude de la sous-sous-section précédente, on se réduit à étudier le cas de l'application d'évaluation pour un faisceau homotopique, et on en déduit ensuite le cas d'un module homotopique quelconque.

Proposition 5.5.27 *Soit F un faisceau homotopique.*

Soient $\varphi : L \rightarrow E$ un morphisme fini dans \mathcal{E}_k^s , et v une valuation géométrique sur E/k de corps résiduel $\kappa(v)$. On suppose que $v(\varphi(L^\times)) = 0$. Dès lors, φ induit un unique morphisme $\bar{\varphi} : L \rightarrow \kappa(v)$. Soit enfin π une uniformisante de v dans E^\times . Alors, pour tout $\rho \in F_{-1}(E)$

$$\partial_v^F(\{\pi\} \smile_{ev} \varphi_*(\rho)) = \bar{\varphi}_*(\rho) \in F_{-1}(E).$$

PREUVE : Considérons tout d'abord (Y, y) un modèle de L/k , et (X, s) un modèle de $(E, v)/k$, dont on note x le point générique. On note encore Z l'adhérence du point s dans X , $j : X_x \rightarrow X_s$ le morphisme naturel, et $i : Z_s \rightarrow X_s$ le morphisme d'immersion fermée.

Le morphisme φ correspond à un unique morphisme $f : X_x \rightarrow Y_y$ qui se prolonge par hypothèse en un morphisme $\tilde{f} : X_s \rightarrow Y_y$.

L'élément $\pi \in E^\times$ correspond à un unique morphisme $\pi : X_x \rightarrow \mathbb{G}_m$. On va appliquer le lemme 5.5.25 pour calculer $\{\pi\} \smile_{ev} \varphi_*(\rho)$, et on note donc $\gamma_\pi = (\pi \times_k 1_{X_x}) \circ \Delta_{X_x}$ comme dans ce lemme. L'égalité à démontrer pour tout ρ est alors équivalente à la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & & F_{-1}(X_x) \hookrightarrow & F(\mathbb{G}_m \times_k X_x) \xrightarrow{\gamma_\pi^*} & F(X_x) \\ & \nearrow f^* & & & \downarrow \partial_{X,s}^F \\ F_{-1}(Y_y) & & & & \\ & \searrow \tilde{f}^* & & & \\ & & F_{-1}(X_s) & \xrightarrow{i^*} & F_{-1}(Z_s). \end{array}$$

Par ailleurs, π correspond à une trivialisaton du fibré normal, $\pi : N_{Z_s} X_s \rightarrow \mathbb{A}_{Z_s}^1$. On se sert de cette trivialisaton pour calculer le résidu, d'après la définition 5.4.43, comme la composée

$$\begin{aligned} \partial_{X,s}^F : F(X_x) &\xrightarrow{\partial_{X,s}^F} F^1(X_s, Z_s) \xrightarrow{\sim} F^1(N_{Z_s} X_s, Z_s) \\ &\xrightarrow{F^1(\pi)} F^1(\mathbb{A}_{Z_s}^1, Z_s) \simeq F_{-1}(Z_s) \end{aligned}$$

dans laquelle le deuxième morphisme est obtenu par déformation au cône normal.

Dès lors, pour montrer la commutativité du diagramme, on le découpe en deux parties comme suit :

$$\begin{array}{ccccc} & & F_{-1}(Y_y) & & \\ & \swarrow \tilde{f}^* & \downarrow g^* & \searrow f^* & \\ F_{-1}(X_s) & & F_{-1}(N_{Z_s} X_s - Z_s) & & F_{-1}(X_x) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & F(\mathbb{G}_m \times (N_{Z_s} X_s - Z_s)) & & F(\mathbb{G}_m \times X_x) \\ & & \downarrow & & \downarrow \gamma_\pi^* \\ & & (1) \quad F(N_{Z_s} X_s - Z_s) & (2) & F(X_x) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ F_{-1}(Z_s) & \xrightarrow{\sim} & F^1(N_{Z_s} X_s, Z_s) & \xleftarrow{\sim} & F^1(X_s, Z_s), \end{array}$$

en considérant le morphisme

$$g : N_{Z_s}X_s - Z_s \rightarrow N_{Z_s}X_s \rightarrow Z_s \rightarrow X_s \xrightarrow{\tilde{f}} Y_y.$$

On remarquera que le diagramme (1) correspond au cas particulier où X_s est remplacé par $N_{Z_s}(X_s)$, fibré vectoriel. En posant $E = N_{Z_s}X_s$, on démontre ainsi le lemme plus facile :

Lemme 5.5.28 *Soient E/Z_s un fibré de rang 1, i sa section nulle et j l'immersion ouverte complémentaire. Soit π une trivialisatation de E/Z_s , i.e. un isomorphisme $\pi : E \rightarrow \mathbb{A}_{Z_s}^1$.*

On en déduit une application composée que l'on note $\bar{\pi}$:

$$E - Z_s \xrightarrow{\pi|_{E-Z_s}} \mathbb{G}_m \times Z_s \xrightarrow{pr} \mathbb{G}_m.$$

On pose $\gamma_{\bar{\pi}} = (\pi \times 1) \circ \Delta_{E-Z_s} : E - Z_s \rightarrow \mathbb{G}_m \times (E - Z_s)$.

Soit $g : E \rightarrow Y_y$ un morphisme, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & F_{-1}(E - Z_s) \hookrightarrow F(\mathbb{G}_m \times (E - Z_s)) & \\ (gj)^* \nearrow & & \downarrow \gamma_{\bar{\pi}}^* \\ F_{-1}(Y_y) & & F(E - Z_s) \xrightarrow{\partial'_{E,Z_s}} F^1(E, Z_s) \\ & (1) & \sim \uparrow F^1(\phi_{\bar{\pi}}) \\ (gi)^* \searrow & & \\ & F_{-1}(Z_s) \xrightarrow[\psi]{\sim} F^1(\mathbb{A}_{Z_s}^1, Z_s). & \end{array}$$

La flèche ψ est l'isomorphisme canonique du lemme 5.4.24, et la flèche ∂'_{E,Z_s} le morphisme pré-résidu de 5.4.37.

PREUVE : D'après la proposition 5.4.24, le morphisme ψ est induit par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbb{G}_m \times Z_s)/F(\mathbb{A}_{Z_s}^1) & = & F_{-1}(Z_s) \xrightarrow{\psi} F(\mathbb{A}_{Z_s}^1, Z_s). \\ & & \uparrow p \\ & & F(\mathbb{G}_m \times Z_s) \xrightarrow{\partial'_{\mathbb{A}_{Z_s}^1, Z_s}} F(\mathbb{A}_{Z_s}^1, Z_s). \end{array}$$

Considérant à nouveau l'épimorphisme $\eta : h_0(\mathbb{G}_m) \rightarrow S_t^1$, comme le morphisme

$$\eta_s^* : \underline{\text{Hom}}(S_t^1, F)(Z_s) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(h_0(\mathbb{G}_m), F)(Z_s)$$

est une rétraction du morphisme p , on obtient la factorisation $\psi = \partial'_{\mathbb{A}_{Z_s}^1, Z_s} \circ \eta_s^*$. On peut donc compléter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & F_{-1}(E - Z_s) \hookrightarrow F(\mathbb{G}_m \times (E - Z_s)) & \\ (gj)^* \nearrow & & \downarrow \gamma_{\bar{\pi}}^* \\ F_{-1}(Y_y) & & F(E - Z_s) \xrightarrow{\partial'_{E,Z_s}} F^1(E, Z_s) \\ & & (\phi_{\bar{\pi}}^x)^* \uparrow \sim \quad (1) \quad \sim \uparrow \phi_{\bar{\pi}}^* \\ (gi)^* \searrow & & \\ & F_{-1}(Z_s) \hookrightarrow F(\mathbb{G}_m \times Z_s) \xrightarrow[\partial'_{\mathbb{A}_{Z_s}^1, Z_s}]{} F^1(\mathbb{A}_{Z_s}^1, Z_s) & \end{array}$$

où ϕ_π^\times est la restriction évidente du morphisme ϕ_π . Le carré (1) étant commutatif, la commutativité de tout ce diagramme est équivalente à la commutativité du morceau de gauche.

Puisque le morphisme canonique $F_{-1}(Y_y) \rightarrow F(\mathbb{G}_m \times Y_y)$ est injectif, on est donc réduit à démontrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbb{G}_m \times (E - Z_s)) & \xrightarrow{\gamma_\pi^*} & F(E - Z_s) \\ (gi)^* \uparrow & & \uparrow (\phi_\pi^\times)^* \\ F(\mathbb{G}_m \times Y_y) & \xrightarrow{(gj)^*} & F(\mathbb{G}_m \times Z_s). \end{array}$$

Or, dans la catégorie des schémas (ou ce qui revient au même dans $\text{pro-}\mathcal{L}_k$), on a trivialement la relation $j \circ (\phi_\pi^\times) = i \circ \gamma_\pi$, ce qui conclut. \square

Il nous reste donc à montrer que le diagramme (2) commute. Pour cela, on regarde précisément la déformation au cône normal. Tout d'abord, on peut considérer le morphisme

$$h : D_{Z_s} X_s \rightarrow \mathbb{A}_{Z_s}^1 \rightarrow Z_s \rightarrow X_s \xrightarrow{\tilde{f}} Y_y$$

car celui-ci prolonge en fait le morphisme \tilde{f} dans le sens du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} X_s & \xrightarrow{d} & D_{Z_s} X_s & \xleftarrow{d'} & N_{Z_s} X_s \\ & \searrow \tilde{f} & \downarrow h & \swarrow g & \\ & & Y_y & & \end{array}$$

où d et d' sont les morphismes de déformation au cône normal.

On a finalement encore découpé le diagramme (2) de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} & & F_{-1}(Y_y) & & \\ & \swarrow \tilde{f}^* & \downarrow h^* & \searrow g^* & \\ F_{-1}(X_x) & \longleftarrow & F_{-1}(\dot{D}_{Z_s} X_s) & \longrightarrow & F_{-1}(N_{Z_s}^\times X_s) \\ \downarrow \eta^* & & \downarrow \eta^* & & \downarrow \eta^* \\ F(\mathbb{G}_m \times X_x) & \longleftarrow & F(\mathbb{G}_m \times \dot{D}_{Z_s} X_s) & \longrightarrow & F(\mathbb{G}_m \times N_{Z_s}^\times X_s) \\ & & (2') & & \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ F(X_x) & \longleftarrow & F(\dot{D}_{Z_s} X_s) & \longrightarrow & F(N_{Z_s}^\times X_s) \\ \downarrow \partial' & & \downarrow \partial' & & \downarrow \partial' \\ F^1(X_s, Z_s) & \xleftarrow{\sim} & F^1(D_{Z_s} X_s, \mathbb{A}_{Z_s}^1) & \xrightarrow{\sim} & F^1(N_{Z_s} X_s, Z_s) \end{array}$$

où l'on a noté $N_{Z_s}^\times X_s = N_{Z_s} X_s - Z_s$ et $\dot{D}_{Z_s} X_s = D_{Z_s} X_s - \mathbb{A}_{Z_s}^1$. Les morphismes du type η^* sont naturels, et les morphismes pré-résidus du type ∂' sont aussi naturels, donc il nous reste à démontrer la commutativité du diagramme (2'), puisque les deux morphismes verticaux (morphisme de déformation) sont des isomorphismes (cf théorème 5.4.26).

On est donc réduit à un digramme dans $\text{pro-}\mathcal{L}_k$ (ou de manière équivalente dans la catégorie des schémas) :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{G}_m \times X_x & \xleftarrow{\gamma\pi} & X_x & & X_x & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{G}_m \\
1 \times d_Z X \downarrow & & \downarrow d_Z X & & d_Z X \downarrow & & \parallel \\
\mathbb{G}_m \times \dot{D}_{X_s} X_s & & \dot{D}_{X_s} X_s & \Leftrightarrow & \dot{D}_{X_s} X_s & & \\
1 \times d'_Z X \uparrow & & \uparrow d'_Z X & & d'_Z X \uparrow & & \\
\mathbb{G}_m \times N_{Z_s}^\times X_s & \xleftarrow{\gamma\bar{\pi}} & N_{Z_s}^\times X_s & & N_{Z_s}^\times X_s & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \mathbb{G}_m
\end{array}$$

Soit \mathcal{O} l'anneau du schéma affine X_x , et \mathcal{M} son idéal. Alors $\mathcal{M} = (\pi)$. Par ailleurs, l'anneau de $N_{Z_s} X_s$ est $\mathcal{S}(\mathcal{M}/\mathcal{M}^2)$ et $\bar{\pi}$ est l'image de π dans $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$. Enfin, l'anneau de $D_{Z_s} X_s$ est $\bigoplus_n \mathcal{M}^n \cdot t^{-n}$, et cet anneau contient $\bar{\pi}$, image de π dans $\mathcal{M}[t]/\mathcal{M}[t]^2$. Puisque π (respectivement $\bar{\pi}$) s'envoie sur $\bar{\pi}$ par le morphisme $d_Z X^\sharp$ (respectivement $d'_Z X^\sharp$), le diagramme est bien commutatif. \square

Corollaire 5.5.29 (R3d) Soient E/k une extension de type fini, et v une valuation stricte de E sur k , de corps résiduel $\kappa(v)$.

Soit $\varphi : L \rightarrow E$ un morphisme fini dans \mathcal{O}_k^s tel que $v(\varphi(L^\times)) = 0$. φ induit un unique morphisme $\bar{\varphi} : L \rightarrow \kappa(v)$.

Alors, pour toute uniformisante π de E et pour tout $\rho \in \check{F}_n(E)$

$$\partial_v(\{\pi\} \cdot \varphi_*(\rho)) = \bar{\varphi}_*(\rho) \in \check{F}_n(E).$$

PREUVE : Toujours d'après le corollaire 5.5.23,

$$\{\pi\} \cdot \varphi_*(\rho) = \{\pi\} \smile_{ev} \epsilon_{n,1}(\varphi_*(\rho)).$$

Par ailleurs, ϵ étant une transformation naturelle, $\epsilon_{n,1}(\varphi_*(\rho)) = \varphi_*(\epsilon_{n,1}(\rho))$.

Enfin, $\partial_v = (\epsilon_{n,1})^{-1} \circ \partial_v^{F_n}$ par définition (voir définition 5.4.57). On est donc ramené à montrer que :

$$(\epsilon_{n,1})^{-1} \left(\partial_v^{F_n} \left(\{\pi\} \smile_{ev} \varphi_*(\epsilon_{n,1}(\rho)) \right) \right) = \bar{\varphi}_*(\rho).$$

Or, on peut maintenant appliquer la proposition 5.5.27, et on a donc

$$\partial_v^{F_n} \left(\{\pi\} \smile_{ev} \varphi_*(\epsilon_{n,1}(\rho)) \right) = \bar{\varphi}_*(\epsilon_{n,1}(\rho)).$$

On conclut en appliquant à nouveau la naturalité de $\epsilon_{n,1}$. \square

5.5.4.2 Lemme préliminaire

Pour le dernier axiome, il nous faut revenir à la définition 5.4.18 pour définir le morphisme du lemme suivant :

Lemme 5.5.30 *Soit F un faisceau homotopique.*

Alors, pour toute paire fermée (X, Z) (telle que X est algébrique lisse), il existe un morphisme canonique

$$(F_{-1})^1(X, Z) \xrightarrow{ev_{X,Z}} F^1(\mathbb{G}_m \times X, \mathbb{G}_m \times Z)$$

tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F_{-1}(X - Z) & \xrightarrow{\eta^*} & F(\mathbb{G}_m \times (X - Z)) \\ \partial'_{X,Z} \downarrow & & \downarrow \partial'_{\mathbb{G}_m \times X, \mathbb{G}_m \times Z} \\ (F_{-1})^1(X, Z) & \xrightarrow{ev_{X,Z}} & F^1(\mathbb{G}_m \times X, \mathbb{G}_m \times Z). \end{array}$$

Ce morphisme est naturel par rapport aux morphisme de paires cartésiens (et même quasi-cartésiens).

PREUVE : Posons $F^{\mathbb{G}_m} = \underline{\mathbf{Hom}}(h_0(\mathbb{G}_m), F)$, qui est un faisceau homotopique. Compte tenu de l'application $\eta : h_0(\mathbb{G}_m) \rightarrow S_t^1$, on a donc un morphisme de faisceaux homotopiques $\eta^* : F_{-1} \rightarrow F^{\mathbb{G}_m}$.

Par functorialité de la définition 5.4.18 par rapport au faisceau avec transferts considéré, on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F_{-1}(X - Z) & \xrightarrow{\eta^*} & F^{\mathbb{G}_m}(X - Z) \\ \partial'_{X,Z} \downarrow & & \downarrow \partial'_{X,Z} \\ (F_{-1})^1(X, Z) & \xrightarrow{\eta^*} & (F^{\mathbb{G}_m})^1(X, Z). \end{array}$$

On va donc définir un morphisme

$$(F^{\mathbb{G}_m})^1(X, Z) \xrightarrow{(1)} F^1(\mathbb{G}_m \times X, \mathbb{G}_m \times Z).$$

Soit $p_Z : \mathbb{G}_m \times Z \rightarrow Z$ la projection canonique, il suffit de construire un morphisme de préfaisceaux

$$\widehat{F^{\mathbb{G}_m}}_{(X,Z)} \xrightarrow{(2)} p_* \hat{F}_{(\mathbb{G}_m X, \mathbb{G}_m Z)}$$

avec les notations de 5.4.18.

Notons tout d'abord que l'immersion fermée $s_1 : \{1\} \rightarrow \mathbb{G}_m$ induit un morphisme canonique $\sigma_1 : F^{\mathbb{G}_m} \rightarrow F$. On considère aussi $p : \mathbb{G}_m \rightarrow \text{Spec}(k)$ la projection canonique. Dès lors, pour V/Z un schéma étale, on définit le morphisme suivant

$$\begin{aligned} & \text{Hom}\left(\mathbf{L}_V[X/X - Z], F^{\mathbb{G}_m}[1]\right) \\ & \xrightarrow{\text{Hom}(p^{\otimes tr} 1, \cdot)} \text{Hom}\left(\mathbf{L}[\mathbb{G}_m] \otimes^{tr} \mathbf{L}_V[X/X - Z], F^{\mathbb{G}_m}[1]\right) \\ & \xrightarrow{\text{Hom}(\cdot, \sigma_1)} \text{Hom}\left(\mathbf{L}[\mathbb{G}_m] \otimes^{tr} \mathbf{L}_V[X/X - Z], F[1]\right) \end{aligned}$$

où les morphismes sont pris dans la catégorie $\text{pro-}D(\mathcal{A}_k^{\text{tr}})$.

Or, le pro-objet qui intervient se calcule facilement :

$$\begin{aligned} L[\mathbb{G}_m] \otimes^{tr} L_V [X/X - Z] &= \varinjlim_{U \in \mathcal{V}_V(X, Z)} L[\mathbb{G}_m] \otimes^{tr} L[U/U - Z_U] \\ &\simeq \varinjlim_{U \in \mathcal{V}_V(X, Z)} L[\mathbb{G}_m U / \mathbb{G}_m U - \mathbb{G}_m Z_U]. \end{aligned}$$

Comme, pour tout $U \in \mathcal{V}_V(X, Z)$, le schéma $\mathbb{G}_m U$ appartient à $\mathcal{V}_{\mathbb{G}_m V}(\mathbb{G}_m X, \mathbb{G}_m Z)$, on obtient un morphisme de projection canonique

$$L_{\mathbb{G}_m V} [\mathbb{G}_m X / \mathbb{G}_m X - \mathbb{G}_m Z] \rightarrow L[\mathbb{G}_m] \otimes^{tr} L_V [X/X - Z],$$

ce qui nous permet finalement d'obtenir le morphisme (2), et donc le morphisme (1). On pose bien sûr $ev_{X, Z} = (1) \circ \eta^*$.

Par ailleurs, on rappelle que le morphisme $\partial'_{X, Z}$ est obtenu comme composé des morphismes évidents

$$F^{\mathbb{G}_m}(X - Z) \rightarrow \text{Hom}(L[X/X - Z], F^{\mathbb{G}_m}[1]) \rightarrow (F^{\mathbb{G}_m})^1(X, Z).$$

A partir de la construction qui précède, on en déduit le morphisme du haut dans le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} F^{\mathbb{G}_m}(X - Z) & \xrightarrow{p_{X-Z}^*} & F^{\mathbb{G}_m}(\mathbb{G}_m(X - Z)) \xrightarrow{\sigma_1|_{\mathbb{G}_m(X-Z)}} & F(\mathbb{G}_m(X - Z)) \\ \partial'_{X, Z} \downarrow & & (1) & \downarrow \partial'_{X, Z} \\ (F^{\mathbb{G}_m})^1(X, Z) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & & F^1(\mathbb{G}_m X, \mathbb{G}_m Z) \end{array}$$

Or, compte tenu de l'isomorphisme canonique $F^{\mathbb{G}_m}(X - Z) \simeq F(\mathbb{G}_m(X - Z))$, ce même morphisme est obtenu comme composé

$$F(\mathbb{G}_m(X - Z)) \xrightarrow{(1 \times p \times 1)^*} F(\mathbb{G}_m \mathbb{G}_m(X - Z)) \xrightarrow{(1 \times s_1 \times 1)^*} F(\mathbb{G}_m(X - Z))$$

et c'est donc l'identité, puisque $p \circ s_1$ est l'identité.

Ceci conclut donc le lemme, puisque la naturalité résulte de la construction. \square

5.5.4.3 Axiome R3e

Pour démontrer cet axiome on se réduit comme pour l'axiome précédent au cas d'un faisceau homotopique. Plus précisément, on utilise le résultat suivant :

Proposition 5.5.31 *Soit F un faisceau homotopique.*

Soient E/k une extension de type fini, et v une valuation sur E/k de corps résiduel $\kappa(v)$. Soit $u \in E^\times$ tel que $v(u) = 0$, et \bar{u} sa classe dans le corps résiduel associé à v . Alors, pour tout $\rho \in F_{-1}(E)$

$$\partial_v^F(\{u\} \smile_{ev} \rho) = -\{\bar{u}\} \smile_{ev} \partial_v^{F-1}(\rho).$$

PREUVE : Soit (X, s) un k -modèle de (E, v) sur k , x son point générique et $Z = \overline{\{s\}}$. Il suffit de montrer la proposition pour $\rho \in F_{-1}(E)$ i.e. $\rho \in F_{-1}(X_x)$. On doit donc montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F_{-1}(X_x) & \xrightarrow{\{u\}} & F(X_x) \\ \partial_{X,s} \downarrow & & \downarrow \partial_{X,s} \\ F_{-2}(Z_s) & \xrightarrow{-\{\tilde{u}\}} & F_{-1}(Z_s). \end{array}$$

Or, l'élément $u \in E^\times$ correspond à une application $u : X_x \rightarrow \mathbb{G}_m$. De plus, comme $v(u) = 0$, l'application u s'étend en $\tilde{u} : X_s \rightarrow \mathbb{G}_m$. On note finalement $\tilde{u} : Z_s \rightarrow \mathbb{G}_m$ l'application restreinte de \tilde{u} .

Commençons par rappeler que l'on a associé à toute unité $a : T \rightarrow \mathbb{G}_m$ une application $\gamma_a : T \xrightarrow{\Delta_T} T \times_k T \xrightarrow{a \times 1} \mathbb{G}_m \times T$.

Or, d'après le lemme précédent, on peut écrire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} F_{-1}(X_x) & \longrightarrow & F(\mathbb{G}_m \times_k X_x) & \xrightarrow{\gamma_{\tilde{u}}^*} & F(X_x) \\ \partial'_{X_s, Z_s} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (F_{-1})^1(X_s, Z_s) & \xrightarrow{ev} & F^1(\mathbb{G}_m X_s, \mathbb{G}_m Z_s) & \xrightarrow{(\gamma_{\tilde{u}}, \gamma_{\tilde{u}})^*} & F^1(X_s, Z_s). \end{array}$$

Mais par ailleurs, notons que l'on peut prolonger le morphisme $\tilde{u} : X_s \rightarrow \mathbb{G}_m$ à tout l'espace de déformation $D_{Z_s} X_s$. On note en effet w la composée $D_{Z_s} X_s \rightarrow \mathbb{A}_{Z_s}^1 \rightarrow Z_s \xrightarrow{\tilde{u}} \mathbb{G}_m$, ce qui nous définit par restriction une application $v : N_{Z_s} X_s \rightarrow \mathbb{G}_m$ (dont la restriction à Z_s est égale à \tilde{u}). On peut donc encore ajouter la partie suivante au diagramme commutatif que l'on a déjà :

$$\begin{array}{ccccc} (F_{-1})^1(X_s, Z_s) & \xrightarrow{ev} & F^1(\mathbb{G}_m X_s, \mathbb{G}_m Z_s) & \xrightarrow{(\gamma_{\tilde{u}}, \gamma_{\tilde{u}})^*} & F^1(X_s, Z_s) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (F_{-1})^1(D_{Z_s} X_s, \mathbb{A}_{Z_s}^1) & \xrightarrow{ev} & F^1(\mathbb{G}_m D_{Z_s} X_s, \mathbb{G}_m \mathbb{A}_{Z_s}^1) & \xrightarrow{\gamma_w^*} & F^1(D_{Z_s} X_s, \mathbb{A}_{Z_s}^1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (F_{-1})^1(N_{Z_s} X_s, Z_s) & \xrightarrow{ev} & F^1(\mathbb{G}_m N_{Z_s} X_s, \mathbb{G}_m Z_s) & \xrightarrow{(\gamma_v, \gamma_{\tilde{u}})^*} & F^1(N_{Z_s} X_s, Z_s). \end{array}$$

Choisissons maintenant une uniformisante π de v . On peut encore ajouter les lignes suivantes à notre diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (F_{-1})^1(N_{Z_s} X_s, Z_s) & \xrightarrow{ev} & F^1(\mathbb{G}_m N_{Z_s} X_s, \mathbb{G}_m Z_s) & \xrightarrow{(\gamma_v, \gamma_{\tilde{u}})^*} & F^1(N_{Z_s} X_s, Z_s) \\ \pi^* \uparrow & & (1 \times \pi)^* \uparrow & & \uparrow \pi^* \\ (F_{-1})^1(\mathbb{A}_{Z_s}^1, Z_s) & \xrightarrow{ev} & F^1(\mathbb{G}_m \mathbb{A}_{Z_s}^1, \mathbb{G}_m Z_s) & \xrightarrow{(\gamma_v, \gamma_{\tilde{u}})^*} & F^1(\mathbb{A}_{Z_s}^1, Z_s) \\ \sim \uparrow & & \sim \uparrow & & \sim \uparrow \\ \text{Hom}(S_t^1 S_t^1 h_0(Z_s), F) & \xrightarrow{(a)} & \text{Hom}(h_0(\mathbb{G}_m) S_t^1 h_0(Z_s), F) & \longrightarrow & \text{Hom}(S_t^1 h_0(Z_s), F) \end{array}$$

où la flèche (a) est induite par l'application canonique

$$h_0(\mathbb{G}_m) \otimes^{Htr} S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(Z_s) \xrightarrow{\eta \otimes^{Htr} 1 \otimes^{Htr} 1} S_t^1 \otimes^{Htr} S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(Z_s).$$

Il faut finalement considérer l'isomorphisme de permutation des facteurs $\epsilon : S_t^1 \otimes^{Htr} S_t^1 \rightarrow S_t^1 \otimes^{Htr} S_t^1$ pour terminer avec les deux dernières lignes

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(S_t^1 S_t^1 h_0(Z_s), F) & \xrightarrow{(a)} & \mathrm{Hom}(h_0(\mathbb{G}_m) S_t^1 h_0(Z_s), F) & \rightarrow & \mathrm{Hom}(S_t^1 h_0(Z_s), F) \\ \downarrow \epsilon & & & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(S_t^1 S_t^1 h_0(Z_s), F) & \rightarrow & \mathrm{Hom}(S_t^1 h_0(\mathbb{G}_m) h_0(Z_s), F) & \rightarrow & \mathrm{Hom}(S_t^1 h_0(Z_s), F) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \mathrm{Hom}(S_t^1 h_0(Z_s), F_{-1}) & \xrightarrow{\eta^*} & \mathrm{Hom}(h_0(\mathbb{G}_m) h_0(Z_s), F_{-1}) & \xrightarrow{\gamma_{\bar{u}}^*} & \mathrm{Hom}(h_0(Z_s), F_{-1}). \end{array}$$

Il reste maintenant à démontrer que l'isomorphisme

$$\epsilon \in \mathrm{End}_{\mathcal{N}_k^{tr}}(S_t^2)$$

est égal à -1 .

Pour cela, on regarde la fibre de ce morphisme en un point représenté par une extension de type fini E/k

$$\epsilon_E : S_t^2(E) \rightarrow S_t^2(E).$$

Or, on a vu au théorème 5.5.10 que $S_t^2(E) \simeq K_2^M(E)$. A travers cet isomorphisme, ϵ devient la permutation des symboles, c'est-à-dire :

$$\epsilon_E : K_2^M(E) \rightarrow K_2^M(E), \{x, y\} \mapsto \{y, x\}$$

Or, la K-théorie de Milnor est anti-commutative, donc $\{y, x\} = -\{x, y\}$. \square

Le corollaire suivant n'est plus qu'une formalité :

Corollaire 5.5.32 (R3e) *Soit (F_*, ϵ) un module homotopique.*

Soient E/k une extension de type fini, et v une valuation de E/k de corps résiduel $\kappa(v)$.

Soient $u \in E^\times$ une unité de v et \bar{u} sa classe dans le corps résiduel de v .

Alors, pour tout $\rho \in F_n(E)$

$$\partial_v(\{u\} \cdot \rho) = -\{\bar{u}\} \cdot \partial_v(\rho).$$

PREUVE : La démonstration consiste juste à se ramener à la proposition 5.5.31 par le calcul.

Commençons par calculer le membre de droite. D'après le corollaire 5.5.23, on a

$$\begin{aligned} -\{\bar{u}\} \cdot \partial_v(\rho) &= -\{\bar{u}\} \smile_{ev} \epsilon_{n,1}(\partial_v(\rho)) \\ &= -\{\bar{u}\} \smile_{ev} \partial_v^{F_n}(\rho). \end{aligned}$$

La dernière égalité provient de la définition de ∂_v (cf définition 5.4.57).

Passons maintenant au membre de gauche, en appliquant toujours le corollaire 5.5.23 :

$$\{u\} \cdot \rho = \{u\} \smile_{ev} \epsilon_{n,1}(\rho).$$

Appliquant la proposition 5.5.31, on obtient donc :

$$\partial_v^{F_{n+1}}(\{u\} \smile_{ev} \epsilon_{n,1}(\rho)) = -\{\bar{u}\} \smile_{ev} \partial_v^{(F_{n+1})-1}(\epsilon_{n,1}(\rho)).$$

Or, d'après le lemme 5.4.56 appliqué avec $\eta = \epsilon_{n,1}$,

$$\partial_v^{(F_{n+1})-1}(\epsilon_{n,1}(\rho)) = (\epsilon_{n,1})_{-1}(\partial_v^{F_n}(\rho))$$

De plus, d'après le lemme 5.5.21 toujours appliqué avec $\eta = \epsilon_{n,1}$,

$$\{\bar{u}\} \smile_{ev} \left((\epsilon_{n,1})_{-1}(\partial_v^{F_n}(\rho)) \right) = \epsilon_{n,1}(\{\bar{u}\} \smile_{ev} (\partial_v^{F_n}(\rho))).$$

Ainsi,

$$\partial_v(\{u\} \cdot \rho) = \epsilon_{n,1}^{-1} \left(-\epsilon_{n,1}(\{\bar{u}\} \smile_{ev} (\partial_v^{F_n}(\rho))) \right).$$

□

5.6 Axiomes des modules de cycles

On considère donc \hat{F}_* muni de sa structure de pré-module de cycles à l'aide des constructions précédentes. On démontre dans cette section que c'est un module de cycles, ce qui conclut la démonstration du théorème 5.1.2. On adopte donc les définitions du chapitre 4.1.1, relativement au pré-module \hat{F}_* .

Proposition 5.6.1 (FD) *Soit X un schéma normal de type fini sur k , et η son point générique. Alors, pour tout $\rho \in \hat{F}_*(\eta)$, l'ensemble*

$$\{x \in X^{(1)} \mid \partial_x^n(\rho) \neq 0\}$$

est fini.

PREUVE : Supposons que $\rho \in \hat{F}_n(\eta)$, n étant un entier. Dès lors, $\rho \in F_n(X_\eta)$. Or X étant normal, il est régulier en codimension 1, donc lisse sur k en codimension 1 car k est parfait. Soit Ω le lieu lisse de X , on a donc $\Omega^{(1)} = X^{(1)}$, et comme $\Omega_\eta = X_\eta$, on est réduit au cas où X est lisse sur k .

Supposons donc X algébrique lisse. Par définition, il existe un ouvert non vide U de X tel que ρ se relève dans $F_n(U)$ en ρ_U .

Soit $x \in U^{(1)}$. Comme U est lisse, x correspond à une valuation sur le corps $\kappa(\eta)$. Par ailleurs, (U, x) est un modèle pour l'anneau de valuation \mathcal{O}_v de v . Comme k est parfait, l'extension $\kappa(x)/k$ est séparable, et il existe un ouvert V de U contenant x tel que $Z \cap V$ soit lisse sur k . Dès lors, V est un k -modèle de \mathcal{O}_v/k , et on a la suite exacte :

$$F_n(V) \rightarrow F_n(V - Z_V) \xrightarrow{\partial_{v, Z_V}'} (F_n)^1(V, Z_V).$$

Ainsi, $\partial'(\rho_U|_{V-Z_V}) = 0$ par exactitude, et comme cet élément représente $\partial_x^n(\rho)$ (après composition avec les isomorphismes de la définition 5.4.57 où l'on a pris V pour modèle strict de \mathcal{O}_v), on en déduit $\partial_x^n(\rho) = 0$.

Ainsi, notre ensemble est inclus dans $X^{(1)} - U^{(1)}$ qui est fini. \square

Remarque 5.6.2. – Intuitivement, les éléments de $\hat{F}_*(\eta)$ s'interprètent comme des fonctions rationnelles à coefficients dans F_* , et leur résidu en un point (de codimension 1) comme le résidu pour une surface de Riemann. Le résultat qui nous sert est le fait que si une fonction est définie en un point, son résidu est nul.

Proposition 5.6.3 (H) *Pour toute extension E/k dans \mathcal{E}_k^s , la suite*

$$0 \rightarrow \hat{F}(E) \xrightarrow{i^*} \hat{F}(E(t)) \xrightarrow{d} \bigoplus_{x \in \mathbb{A}_{E(0)}^1} \hat{F}_*(\kappa(x)) \rightarrow 0$$

est exacte, où $i : E \rightarrow E(t)$ est l'inclusion canonique et

$$d = \sum_{x \in \mathbb{A}_{E(0)}^1} \partial_x.$$

PREUVE : Soit Z un fermé de \mathbb{A}_E^1 de dimension nulle. On obtient une suite exacte courte (en considérant \mathbb{A}_E^1 comme un pro-objet de \mathcal{L}_k) :

$$0 \rightarrow F_*(\mathbb{A}_E^1) \xrightarrow{(1)} F_*(\mathbb{A}_E^1 - Z) \xrightarrow{\partial'_Z} (F_*)^1(\mathbb{A}_E^1, Z) \rightarrow 0.$$

En effet, (1) est injectif compte tenu du corollaire 3.3.3. Par ailleurs, puisque Z est somme de schémas locaux henséliens, le lemme 5.4.25 implique

$$(F_*)^1(\mathbb{A}_E^1, Z) \simeq F_*(\mathbb{A}_E^1 - Z)/F_*(\mathbb{A}_E^1),$$

ce qui montre que la suite ci-dessus est exacte.

On a besoin dès lors du lemme suivant :

Lemme 5.6.4 *Soit E/k une extension, et Z une partie fermée de \mathbb{A}_E^1 . Alors, les morphismes de déformation au cône normal*

$$(F_*)^1(\mathbb{A}_E^1, Z) \leftarrow (F_*)^1(D(\mathbb{A}_E^1, Z), \mathbb{A}_Z^1) \rightarrow (F_*)^1(N(\mathbb{A}_E^1, Z), Z)$$

sont des isomorphismes.

PREUVE : En effet, d'après la propriété d'excision de 5.4.22, on peut se réduire au cas où Z est formé d'un seul point x . Ce point correspond donc à un polynôme $f_x \in E[t]$. Considérons un modèle $A \in \mathcal{M}^{lis}(E/k)$ tel que $f_x \in A[t]$. On pose $X = \text{Spec}(A)$, et on note η son point générique. Dès lors, f_x définit un point encore noté x de \mathbb{A}_X^1 ; on note son adhérence T . La paire fermée (\mathbb{A}_X^1, T) est lisse en x ; il existe donc un ouvert U de \mathbb{A}_X^1 contenant x et une paramétrisation $(U, T_U) \rightarrow (\mathbb{A}_k^{n+1}, \mathbb{A}_k^n)$. Il en résulte d'après le théorème 5.4.26 que les morphismes de déformation au cône normal

$$(F_*)^1(U, T_U) \leftarrow (F_*)^1(D(U, T_U), \mathbb{A}_{T_U}^1) \rightarrow (F_*)^1(N(U, T_U), T_U)$$

sont des isomorphismes. Si l'on pose $\tilde{U} = U \times_X X_\eta$, puisque $T_{\tilde{U}} = Z$, ceci implique que les morphismes

$$(F_*)^1(\tilde{U}, Z) \leftarrow (F_*)^1(D(\tilde{U}, Z), \mathbb{A}_Z^1) \rightarrow (F_*)^1(N(\tilde{U}, Z), Z)$$

sont des isomorphismes. Enfin, \tilde{U} est un ouvert de \mathbb{A}_E^1 , et on peut donc conclure à nouveau grâce à la propriété d'excision de $(F_*)^1$. \square

Par ailleurs, tout point x de Z , correspond à une valuation v_x de $E(t)$, dont une uniformisante et donnée par le polynôme f_x correspondant à x dans \mathbb{A}_E^1 . Dès lors, considérant le morphisme de paires canonique $(\mathbb{A}_E^1, x) \rightarrow (\mathbb{A}_E^1, Z)$, on en déduit donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 & F_*(\mathbb{A}_E^1 - x) & \longrightarrow & F_*(\mathbb{A}_E^1 - Z) \\
 & \swarrow \partial'_x \downarrow & & \downarrow \partial'_Z \\
 \hat{F}_*(E(t)) & F_*^1(\mathbb{A}_E^1, x) & \longrightarrow & F_*^1(\mathbb{A}_E^1, Z) \\
 & \downarrow \diamond & & \downarrow \diamond \\
 & F_*^1(N_x \mathbb{A}_E^1, x) & \longrightarrow & F_*^1(N_Z \mathbb{A}_E^1, Z) \\
 & \uparrow & & \uparrow \\
 & (F_*)_{-1}(\kappa(x)) & \longrightarrow & (F_*)_{-1}(Z) \\
 & \uparrow \epsilon_x & & \uparrow \epsilon_Z \\
 & \hat{F}_*(\kappa(x)) & \longrightarrow & F_*(Z).
 \end{array}$$

∂_x (curved arrow from $\hat{F}_*(E(t))$ to $\hat{F}_*(\kappa(x))$)

Comme on l'a vu dans la démonstration du lemme précédent, le morphisme ∂_x correspond au résidu défini en 5.4.57, pour la valuation v_x de $E(t)$, puisque l'on peut choisir un modèle X de E tel que (\mathbb{A}_X^1, x) est un k -modèle de v_x . On en déduit que la suite exacte courte de départ induit la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow \hat{F}_*(E) \rightarrow F_*(\mathbb{A}_E^1 - Z) \xrightarrow{\sum_{x \in Z} \partial_{v_x}} \bigoplus_{x \in Z} \hat{F}_*(\kappa(x)) \rightarrow 0$$

d'après l'invariance par homotopie de F_* .

Cette suite exacte est par ailleurs naturelle par rapport à l'ensemble projectif des fermés Z de dimension 0 de \mathbb{A}_E^1 muni de l'ordre défini par l'inclusion. Cet ensemble étant cofiltrant, on peut considérer la limite inductive des suites exactes précédentes :

$$0 \rightarrow F_*(E) \rightarrow \varinjlim_Z F_*(\mathbb{A}_E^1 - Z) \xrightarrow{\varinjlim_Z \sum_{x \in Z} \partial_{v_x}} \bigoplus_{x \in \mathbb{A}_E^1(0)} F_*(x) \rightarrow 0,$$

ce qui conclut, puisque le morphisme canonique

$$\varinjlim_Z F_*(\mathbb{A}_E^1 - Z) \rightarrow \hat{F}_*(E(t))$$

est un isomorphisme. \square

Corollaire 5.6.5 (WR) *Pour toute extension E/k dans \mathcal{E}_k^s , adoptant les notations de la proposition précédente, et notant ∂_∞ la valuation à l'infini de $F(t)$, on a*

$$\partial_\infty(\text{Ker } d) = 0.$$

PREUVE : En effet, d'après ce qui précède, le morphisme canonique $F_*(k) \rightarrow \text{Ker}(d)$ est un isomorphisme. Mais, comme $v(k^\times) = 0$, l'axiome *R3c* pour le pré-module \hat{F} implique que $\partial_\infty(\hat{F}(k)) = 0$. \square

Puisque k est parfait, et que le pré-module de cycles \hat{F}_* vérifie (*FD*) (donc a fortiori (*FDL*)) et (*WR*), on peut donc conclure que c'est un module de cycles d'après le théorème 4.1.10.

5.7 Conclusion

Ainsi, pour tout module homotopique F_* , le foncteur \hat{F}_* est muni d'une structure de pré-module de cycles qui en fait un module de cycles. Il ne reste plus qu'à remarquer que toutes nos constructions sont naturelles par rapport aux morphismes de modules homotopiques pour conclure.

Chapter 6

Une équivalence de catégorie

6.1 Théorème principal et démonstration

On arrive enfin au théorème qui nous intéresse dans cette première partie :

Théorème 6.1.1 *Les foncteurs*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}\mathcal{M}_k^{\text{tr}} & \leftrightarrow & \mathcal{M}\text{Cycl}_k \\ F_* & \mapsto & \hat{F}_* \\ A^0(\cdot; M) & \leftarrow & M \end{array}$$

entre la catégorie des modules homotopiques (avec transferts) et celle des modules de cycles, définis respectivement dans les théorèmes 5.1.2 et 4.3.9 sont quasi-inverses l'un de l'autre, et induisent donc une équivalence de catégorie.

La situation est formellement analogue à la transformée de Fourier. En effet, le foncteur de transformée générique associé à un module homotopique sa valeur sur les points (*i.e.* motifs génériques) qui jouent en l'occurrence le rôle des harmoniques. A travers cette analogie, le foncteur $A^0(\cdot; \hat{F}_*)$ de cohomologie non ramifiée est une «transformée générique inverse».

PREUVE : Il s'agit de construire deux transformations naturelles qui sont des isomorphismes.

1. *Premier isomorphisme :*

Soit M un module de cycles sur k ; on pose $(\mathcal{M}_*, \epsilon) = A^0(\cdot; M)$, vu comme module homotopique sur k . On rappelle que pour tout schéma connexe X dans \mathcal{L}_k ,

$$\mathcal{M}(X) = \text{Ker} \left(M(\kappa(X)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} M(\kappa(x)) \right).$$

Compte tenu de cette description, pour toute extension séparable de type fini E/k , on a un isomorphisme canonique de groupes abéliens

$$a_E : \hat{\mathcal{M}}(E) = \varinjlim_{A \in \mathcal{M}^{\text{lis}}(E/k)} \mathcal{M}(\text{Spec}(A)) \rightarrow M(E).$$

Il nous suffit donc de montrer que a_E est naturel par rapport aux morphismes de pré-modules de cycles, c'est-à-dire qu'il est compatible aux données $D1 - D4$.

Donnée D1 : Soit $\varphi : E \rightarrow L$ un morphisme dans \mathcal{E}_k^{ss} . On peut considérer un modèle (X, x) (resp. (Y, y)) de E/k (resp. L/k), et φ correspond donc à un morphisme $Y_y \rightarrow X_x$. On peut supposer que celui-ci se relève à distance finie en $f : Y \rightarrow X$, et on peut même supposer que f est plat (cette condition étant ouverte). Dès lors, par définition de la structure de préfaisceau sur \mathcal{M} , $f^* : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(Y)$ coïncide avec le pullback plat de 4.1.12. Dès lors, le morphisme induit à la limite $\mathcal{M}(X_x) \rightarrow \mathcal{M}(Y_y)$ coïncide par définition avec le morphisme de restriction $r_{\kappa(y)/\kappa(x)}$.

Donnée D2 : Considérons de même $\varphi : E \rightarrow L$ un morphisme fini, et (X, x) (resp. (Y, y)) un modèle de E/k (resp. L/k). On peut supposer que le morphisme φ se relève en un morphisme fini $f : Y \rightarrow X$. Or, par définition des transferts sur \mathcal{M} , et notamment grâce à 4.3.7, $\mathcal{M}(^t f) = f_*$, où f_* désigne l'image directe par le morphisme propre f . Dès lors, par définition, ce morphisme est égal à la corestriction de $\kappa(y)/\kappa(x)$ sur $A^0(Y; M)$.

Donnée D3 : Soit E/k une extension de type fini, et v une valuation géométrique de E/k . On considère un k -modèle (X, s) de (E, v) notant Z l'adhérence réduite de s dans X . Quitte à restreindre X , on peut supposer que $N_Z X$ est trivial. On fixe $\pi : N_Z X \rightarrow \mathbb{A}_Z^1$ une telle trivialisations.

La difficulté consiste à détordre la construction de 5.4.18. Or, la situation se simplifie énormément du fait que \mathcal{M} est un faisceau dont la cohomologie Nisnevich est invariante par homotopie (cf [Ros96], 8.6 et 6.5).

En effet, la preuve du théorème 5.4.26 montre alors que les morphismes de déformation au cône normal

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}^1 \left(\mathbb{L} \left[D_{Z_U} U / \dot{D}_{Z_U} U \right], \mathcal{M} \right) & & \\ \swarrow & & \searrow \\ \text{Ext}_{\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}^1 \left(\mathbb{L}[U/U - Z_U], \mathcal{M} \right) & & \text{Ext}_{\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}^1 \left(\mathbb{L}[N_{Z_U} U / N_{Z_U}^\times U], \mathcal{M} \right) \end{array}$$

sont des isomorphismes. Considérant la trivialisations $\pi_U : N_{Z_U} U \rightarrow \mathbb{A}_{Z_U}^1$, on en déduit un isomorphisme

$$\text{Ext}_{\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}^1 \left(\mathbb{L}[U/U - Z_U], \mathcal{M} \right) \simeq \mathcal{M}_{-1}(Z_U)$$

à nouveau d'après l'invariance par homotopie de $H^1(\cdot; \mathcal{M})$. Comme celui-ci est naturel par rapport à U , on en déduit pour tout schéma étale V/Z un isomorphisme

$$\hat{\mathcal{M}}_{(X, Z)}(V) \simeq \mathcal{M}_{-1}(V).$$

Donc, puisque \mathcal{M}_{-1} est un faisceau,

$$\mathcal{M}^1(X, Z) = \hat{\mathcal{M}}_{(X, Z)}(Z) = \text{Ext}_{\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}^1 \left(\mathbb{L}[X/X - Z], \mathcal{M} \right).$$

Dès lors, on peut écrire les suites exactes longues suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow A^0(X - Z; M, n) & \xrightarrow{\partial} & A^0(Z; M, n - 1) & \longrightarrow & A^1(X; M, n) & \rightarrow & \cdots \\ & & \parallel & & \downarrow (1) \sim & & \\ \cdots \rightarrow \mathcal{M}_n(X - Z) & \xrightarrow{\partial'(X, Z)} & \text{Ext}^1 \left(\mathbb{L}[X/X - Z], \mathcal{M}_n \right) & \rightarrow & H^1(X; \mathcal{M}_n) & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

où la flèche ∂ est le morphisme bord défini par Rost pour la décomposition $X = (X - Z) \sqcup Z$, et la flèche $\partial'_{(X,Z)}$ est le morphisme pré-résidu que nous avons défini en 5.4.21. L'isomorphisme (1) résulte de *loc.cit.* (6.5), et la flèche pointillée, induite par les autres morphismes, est un isomorphisme d'après le lemme des cinq.

Or par définition, le morphisme ∂ est égal au morphisme $M_n(\kappa(X)) \rightarrow M_{n-1}(\kappa(Z))$ correspondant à la valuation sur $\kappa(X)$ définie par s . Il nous reste donc à montrer que les isomorphismes considérés pour construire le résidu sur \mathcal{M}_* correspondent à l'identité. Or le diagramme ci-dessus est naturel par rapport à (X, Z) (et relativement aux morphismes cartésiens). On en déduit le diagramme commutatif suivant, où les morphismes pointillés sont induits par la méthode ci-dessus :

$$\begin{array}{ccc} A^0(Z; M, n-1) & \dashrightarrow & \text{Ext}^1(L[X/X-Z], \mathcal{M}_n) \\ \parallel & & \downarrow (1) \\ A^0(Z; M, n-1) & \dashrightarrow & \text{Ext}^1(L[N_Z X/N_Z X-Z], \mathcal{M}_n) \\ \parallel & & \downarrow \pi^* \\ A^0(Z; M, n-1) & \dashrightarrow & \text{Ext}^1(L[\mathbb{A}_Z^1/\mathbb{A}_Z^1-Z], \mathcal{M}_n). \end{array}$$

Le morphisme (1) est constitué par les deux isomorphismes de déformation au cône normal (et π correspond à une uniformisante de v).

Pour le dernier isomorphisme, on considère les suites exactes courtes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow A^0(\mathbb{A}_Z^1; M, n) \rightarrow A^0(\mathbb{G}_m \times Z; M, n) & \xrightarrow{(2)} & A^0(Z; M, n-1) & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \\ 0 \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{A}_Z^1) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{G}_m \times Z) & \xrightarrow{(3)} & \text{Ext}^1(L[\mathbb{A}_Z^1/\mathbb{A}_Z^1-Z], \mathcal{M}_n) & \rightarrow & 0. \end{array}$$

L'isomorphisme ϵ_n est induit par la flèche (2) (voir la preuve de 4.3.9). En prenant la limite selon les ouverts de X , on en déduit donc finalement le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{M}_n)_{-1}(Z_s) & \xrightarrow{\epsilon_n} & \mathcal{M}_{n-1}(Z_s) & \xleftarrow{\partial} & \mathcal{M}_n(X_x) \\ \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ (\mathcal{M}_n)_{-1}(Z_s) & \xleftarrow{\rho_{\mathcal{M}_n}^\pi} & (\mathcal{M}_n)^1(X_s, Z_s) & \xleftarrow{\partial_{(X_s, Z_s)}} & \mathcal{M}_n(X_x) \end{array}$$

car l'isomorphisme final considéré dans la définition de $\rho_{\mathcal{M}_n}^\pi$ (cf définition 5.4.41) est induit par la flèche (3). Ainsi, la définition du résidu (cf 5.4.57) montre exactement que le résidu sur $\hat{\mathcal{M}}_*$ coïncide avec le morphisme ∂_v à travers l'isomorphisme a .

Donnée D4 : Considérons E/k une extension de type fini, et $x \in E^\times$. D'après 5.5.26, pour tout $\rho \in \mathcal{M}_{n-1}(E)$,

$$\{x\} \cdot_{\mathcal{M}_*} \rho = \gamma_x^* \eta^* \epsilon_{n-1}(\rho)$$

où :

- $\gamma_x : (E) \rightarrow \mathbb{G}_m \times_k (E)$ est l'application graphe induite par $x : (E) \rightarrow \mathbb{G}_m$, après permutation des facteurs.

- $\eta^* : (\mathcal{M}_n)_{-1}(E) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{G}_m \times_k (E))$ est induite par l'épimorphisme canonique

$$\eta : h_0(\mathbb{G}_m) \rightarrow S_t^1$$

de la proposition 3.4.12, puisque $(\mathcal{M}_n)_{-1} = \underline{\text{Hom}}(S_t^1, \mathcal{M}_n)$.

On calcule donc chacune de ces applications. Rappelons tout d'abord la construction de ϵ ; on considère la suite exacte courte :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{A}^1 \times (E)) & \xrightarrow{j^*} & \mathcal{M}_n(\mathbb{G}_m \times (E)) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n-1}(E) & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 \longrightarrow M_n(E) & \xrightarrow{\varphi_*} & M_n(E(t)) & \xrightarrow{\partial_v} & M_{n-1}(E) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

où $\varphi : E \rightarrow E(t)$ est l'inclusion, et ∂_v est le morphisme résidu pour la valuation standard v de sur $E(t)$.

Le morphisme ϵ_n est alors la réciproque du morphisme induit par ∂_v sur le conoyau de φ_* . On en donne une description en considérant l'application

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\epsilon}_n : M_{n-1}(E) & \rightarrow & M_n(E(t)) \\ \rho & \mapsto & \{t\} \cdot \varphi_*(\rho) \end{array}$$

puisque alors, $\epsilon_n(\rho)$ n'est rien d'autre que la classe de $\tilde{\epsilon}_n(\rho)$ dans $(\mathcal{M}_n)_{-1}(E) = M_n(E(t))/M_n(E)$.

Pour le morphisme η^* , on rappelle la construction qui nous sert dans la proposition 3.4.12 ; on considère donc $\gamma_1 : (E) \rightarrow \mathbb{G}_m \times (E)$, correspondant à la section unité de $\mathbb{G}_{m,E}$. Cette application induit alors une rétraction de la suite exacte courte :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathcal{M}_n(E) & \xleftarrow{\gamma_1^*} & & & \\ & & \downarrow \sim & \searrow & & & \\ 0 \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{A}^1 \times (E)) & \xrightarrow{j^*} & \mathcal{M}_n(\mathbb{G}_m \times (E)) & \xrightarrow{p} & (\mathcal{M}_n)_{-1}(E) & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Le morphisme induit par p sur $\text{Ker}(\gamma_1^*)$ nous avait permis d'identifier $(\mathcal{M}_n)_{-1}(E)$ et $\text{Ker}(\gamma_1^*)$. Il s'ensuit que le morphisme η^* est égal à l'inclusion canonique à travers cette identification ; autrement dit, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker}(\gamma_1^*) & \xrightarrow[\sim]{p} & (\mathcal{M}_n)_{-1}(E) \\ & \searrow & \swarrow \eta^* \\ & \mathcal{M}_n(\mathbb{G}_m \times (E)). & \end{array}$$

Or, d'après le corollaire (12.4) de [Ros96], le morphisme γ_1^* est égal au morphisme de spécialisation s_v^t . Il s'ensuit que le morphisme $\tilde{\epsilon}_n$ construit plus haut est à valeur dans $\text{Ker}(s_v^t)$, puisque pour tout $\rho \in M_{n-1}(E)$,

$$s_v^t(\{t\} \cdot \varphi_*(\rho)) = \partial_v(\{-t, t\} \cdot \varphi_*(\rho)) = 0.$$

Dès lors, le morphisme $\eta^* \epsilon$ est égal au morphisme $\tilde{\epsilon}_n$.

Enfin, toujours d'après (12.4) de *loc.cit.*, le morphisme γ_x^* est égal sur morphisme de spécialisation $s_{v_x}^{t-x}$ où v_x est la valuation sur $E(t)$ induite par x , d'uniformisante $t - x$.

On peut alors terminer le calcul :

$$\begin{aligned}
\gamma_x^* \eta^* \epsilon_{n-1}(\rho) &= s_{v_x}^{t-x}(\{t\} \cdot \varphi_*(\rho)) \\
&= \partial_{v_x}(\{x-t, t\} \cdot \varphi_*(\rho)) \\
&= -\partial_{v_x}(\{t, x-t\} \cdot \varphi_*(\rho)) \\
&= \{\bar{t}\} \cdot \partial_{v_x}(\{x-t\} \cdot \varphi_*(\rho)) \\
&= \{x\} \cdot (\bar{\varphi})_*(\rho) = \{x\} \cdot \rho,
\end{aligned}$$

ce qui termine de montrer que a est un isomorphisme compatible avec l'action de la K -théorie de Milnor, et finalement, est un morphisme de pré-modules de cycles.

2. Deuxième isomorphisme :

Réciproquement, soit (F_*, ϵ) un module homotopique. Pour des raisons de notation, on oublie la graduation de F_* et on le note simplement F . Si X est un schéma algébrique lisse, pour tout point générique x de X , on a un morphisme canonique $F(X) \rightarrow \hat{F}(\kappa(x))$, qui induit donc un morphisme $F(X) \rightarrow C^0(X; \hat{F})$. Par définition du morphisme ∂_x^F , ce morphisme tombe en fait dans le sous-groupe $A^0(X; \hat{F})$.

On commence par montrer que la flèche ainsi construite $b : F \rightarrow A^0(\cdot; \hat{F})$ est un morphisme de modules homotopiques avec transferts. On considère donc $\alpha \in c(X, Y)$ une correspondance finie et on montre que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
F(Y) & \xrightarrow{b_Y} & A^0(Y; \hat{F}) \\
F(\alpha) \downarrow & & \downarrow \alpha^* \\
F(X) & \xrightarrow{b_X} & A^0(X; \hat{F}).
\end{array}$$

On peut se réduire au cas où X et Y sont connexes ; on note x et y leur point générique respectif. On démontre ce fait dans certains cas particuliers qui impliquent le cas général.

Supposons tout d'abord que $\alpha = f$ est un morphisme plat dominant. Alors, il induit un morphisme $f : X_x \rightarrow Y_y$. Par ailleurs, par définition du pullback sur les modules de cycles, le morphisme $A^0(Y_y; \hat{F}) \rightarrow A^0(X_x; \hat{F})$ est égal au morphisme de restriction $r_{\kappa(x)/\kappa(y)} : \hat{F}(\kappa(x)) \rightarrow \hat{F}(\kappa(y))$. Or, d'après la définition 5.2.1, celui-ci est égal à $F(Y_y) \rightarrow F(X_x)$, ce qui conclut par définition de b .

Supposons ensuite que $\alpha = {}^t f$ où $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme fini surjectif. D'après la proposition 4.3.7, le morphisme $A^0({}^t f; \hat{F})$ est égal au morphisme image direct f_* . On a défini dans 5.3.11 le morphisme ${}^t \bar{f}$ de $\text{pro-}\mathcal{L}_{\text{cor}, k}$. Par définition de f_* , le morphisme $A^0({}^t \bar{f}; \hat{F}) : A^0(X_x; \hat{F}) \rightarrow A^0(Y_y; \hat{F})$ est égal au morphisme de corestriction $c_{\kappa(y)/\kappa(x)} : \hat{F}(\kappa(y)) \rightarrow \hat{F}(\kappa(x))$; donc, d'après la définition 5.3.21, ce morphisme est égal à $F({}^t f)$ ce qui démontre l'assertion dans ce cas, toujours par définition de b .

Le cas difficile est celui où $\alpha = i$ est une immersion fermée ; on change un peu les notations en posant $Z = Y$ et en notant s son point générique. Par hypothèse, Z est lisse sur k , et l'immersion i est donc régulière. Soit E le corps des fonctions de X et κ celui de Z .

Si U est un ouvert de X contenant s , d'après la proposition 3.3.3, l'assertion pour $i_U : Z \cap U \rightarrow U$ entraîne l'assertion pour i . Considérant une paramétrisation locale de l'immersion régulière i , on peut donc se ramener par functorialité au cas où i est de codimension 1. D'après la proposition 4.3.7, le morphisme $A^0(i; \hat{F})$ est égal au morphisme de Gysin i^* défini dans 4.2.7. Le sous-schéma Z correspond à une valuation discrète v sur E . Soit π une uniformisante de v ; d'après le corollaire 12.4 de [Ros96], le morphisme i^* (égal à i^\bullet avec la notation de *loc.cit.*) est obtenu par restriction du morphisme de spécialisation $s_v^\pi : \hat{F}(E) \rightarrow \hat{F}(\kappa)$. Par définition de b , on doit donc montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \longrightarrow & \hat{F}(E) \\ \downarrow F(i) & & \downarrow \Psi^{\mu_\pi} \\ & & \hat{F}(E) \\ & & \downarrow \Psi^{\partial_v} \\ F(Z) & \longrightarrow & \hat{F}(\kappa), \end{array}$$

où μ_π est la multiplication par l'élément $\{\pi\}$ de $K_1^M(E)$. Or, d'après le corollaire 5.5.26, le morphisme γ_π en degré n est égal à la composée suivante :

$$F_n(E) \rightarrow F_{n+1}(\mathbb{G}_m \times_k (E)) \xrightarrow{F_{n+1}(\gamma_\pi)} F_{n+1}(E)$$

où le premier morphisme est l'inclusion canonique, et $\gamma_\pi = (\pi \times_k 1) \circ \Delta_E$, où π est considéré comme un morphisme de (E) dans \mathbb{G}_m .

Par ailleurs, (X, s) est tautologiquement un modèle de (E, v) . Puisqu'on peut toujours localiser la situation par rapport à un voisinage ouvert de s dans X , il nous suffit donc de montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & F_n(X_s - Z_s) \hookrightarrow & F_{n+1}(\mathbb{G}_m(X_s - Z_s)) \xrightarrow{\gamma_\pi^*} & F_{n+1}(X_s - Z_s) & \xrightarrow{\partial_{X_s, Z_s}} & & \\ & \nearrow j_s^* & & & & & & \\ F_n(X_s) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & & & & & & F_n(Z_s). \\ & & & & & & \searrow i_s^* & \end{array}$$

Or, dans le cas où X_s est un fibré vectoriel sur Z_s et i_s est la section nulle de ce fibré, on remarque que la commutativité de ce diagramme est juste le lemme 5.5.28 avec $E = X_s$ et $g = 1_E$.

Par ailleurs, la fonction $\pi : X_s \rightarrow \mathbb{G}_m$, se relève sur l'espace de déformation, relèvement que l'on note encore $\pi : D_{Z_s} X_s \rightarrow \mathbb{G}_m$. Dès lors, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} & & F_n(X_s - Z_s) \hookrightarrow & F_{n+1}(\mathbb{G}_m(X_s - Z_s)) \xrightarrow{\gamma_\pi^*} & F_{n+1}(X_s - Z_s) & \xrightarrow{\partial_{X_s, Z_s}} & & \\ & \nearrow j_s^* & & & & & & \\ F_n(X_s) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & & & & & & F_n(Z_s) \\ & & & & & & \uparrow \sim & \\ & & F_n(\dot{D}_{Z_s} X_s) \hookrightarrow & F_{n+1}(\mathbb{G}_m(\dot{D}_{Z_s} X_s)) \xrightarrow{\gamma_\pi^*} & F_{n+1}(\dot{D}_{Z_s} X_s) & \xrightarrow{\partial_{D_{Z_s} X_s, \mathbb{A}_1^1/Z_s}} & & \\ & \nearrow & & & & & & \\ F_n(D_{Z_s} X_s) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & & & & & & F_n(Z_s) \\ & & & & & & \downarrow \sim & \\ & & F_n(N_{Z_s}^\times X_s) \hookrightarrow & F_{n+1}(\mathbb{G}_m(N_{Z_s}^\times X_s)) \xrightarrow{\gamma_\pi^*} & F_{n+1}(N_{Z_s}^\times X_s) & \xrightarrow{\partial_{N_{Z_s}^\times X_s, Z_s}} & & \\ & \nearrow & & & & & & \\ F_n(N_{Z_s}^\times X_s) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & & & & & & F_n(Z_s). \\ & & & & & & \searrow s_0^* & \end{array}$$

D'après ce qu'on a dit, la partie concernant le fibré normal est commutative ; la partie concernant l'espace de déformation est donc commutative. Pour conclure que la partie du haut est commutative, il suffit d'utiliser le lemme suivant :

Lemme 6.1.2 *Soient F un faisceau homotopique, X un schéma algébrique lisse, et Z un sous-schéma fermé de X , lisse sur k .*

Si $d_Z X : X \rightarrow D_Z X$ désigne le morphisme de déformation au cône normal (cf B.3), alors, $F(d_Z X)$ est un épimorphisme scindé.

PREUVE : Rappelons que par construction, le morphisme $d_Z X$ est défini par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{s'_1} & \mathbb{G}_{m,X} \xleftarrow{\sim} D_Z X|_{\mathbb{G}_m} \\
 & \searrow^{d_Z X} & \downarrow \\
 & & \mathbb{A}_X^1 \xleftarrow{p} D_Z X \\
 & \searrow^{s_1} & \\
 & &
 \end{array}$$

Ainsi, $F(d_Z X) \circ F(p) = F(s_1)$, ce qui implique $F(d_Z X) \circ (F(p) \circ F(s_1)^{-1}) = 1$. \square

On peut maintenant traiter le cas général. On se réduit au cas où la correspondance finie $\alpha \in c(X, Y)$ est la classe d'un sous-schéma fermé intègre Z de XY .

Supposons que Z est lisse sur k . On note $i : Z \rightarrow XY$ l'immersion fermée canonique, $p : Z \rightarrow X$ le morphisme de projection canonique qui est fini et surjectif, et $q : XY \rightarrow Y$ le morphisme de projection. D'après le lemme 5.3.4, on obtient l'égalité suivante

$$\alpha = (q \circ i) \circ {}^t p.$$

Or, d'après la proposition 4.3.7, puisque i est nécessairement régulière, le morphisme $A^0(\alpha; \hat{F})$ est égal à la composée $p_* i^* q^*$. Les trois cas traités précédemment permettent donc de conclure dans ce cas.

Revenons finalement au cas général ; il existe un ouvert dense Ω de Z tel que Ω est lisse sur k . Comme p est fini, $p(Z - \Omega)$ est une partie fermée de X . Si l'on note $U = X - p(Z - \Omega)$ l'ouvert complémentaire, $p^{-1}(U) \subset \Omega$ est lisse sur k . C'est un sous-schéma fermé intègre de UY , fini et surjectif sur U et on note α_U la correspondance finie de U dans Y qui lui correspond. Si $j : U \rightarrow X$ désigne l'immersion ouverte canonique, on obtient la relation $\alpha \circ j = \alpha_U$ car au niveau des cycles, $(j \times 1_Y)^* \alpha = \alpha_U$. L'assertion est vraie pour α_U d'après le cas précédent, elle est donc vraie pour α car le morphisme $A^0(j; \hat{F})$ est injectif ; ceci conclut le cas général.

On montre maintenant que b est compatible aux morphismes de définition des modules homotopiques (F, ϵ) et $A^0(\cdot; \hat{F})$. Soit X un schéma algébrique lisse et connexe. Toujours grâce au corollaire 3.3.3, on peut remplacer X par le pro-objet X_x où x est le point générique de X , ou encore par le pro-objet (K) où K désigne le corps des fonctions de X . Le morphisme structural du module homotopique $A^0(\cdot; \hat{F})$ est induit par le morphisme ∂

sur le conoyau de j^* dans le diagramme suivant, où les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A^0(\mathbb{A}_K^1; \hat{F}, n) & \xrightarrow{j^*} & A^0(\mathbb{A}_K^1 - K; \hat{F}, n) & \xrightarrow{\partial} & A^0(K; \hat{F}, n-1) \longrightarrow \dots \\
 & & \uparrow b & & \uparrow b & & \uparrow b \\
 & & (1) & & (2) & & \\
 0 & \longrightarrow & F_n(\mathbb{A}_K^1) & \xrightarrow{F_n(j)} & F_n(\mathbb{A}_K^1 - K) & \xrightarrow{\partial_K} & F_{n-1}(K) \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Le carré (1) est commutatif d'après ce qu'on vient de montrer. Par définition, le morphisme ∂ est obtenu par restriction du morphisme résidu $\hat{F}(K(t)) \rightarrow \hat{F}(K)$ associé à la valuation canonique de $K(t)$. Comme (\mathbb{A}_X^1, x) est un modèle pour cette valuation, le carré (2) est commutatif par définition du résidu. Par ailleurs, il résulte de la définition 5.4.57 que le morphisme ∂_K induit ϵ_{n-1}^{-1} sur le conoyau de $F_n(j)$; b est donc un morphisme de modules homotopiques.

Enfin, pour toute extension de type fini E/k , le morphisme $F(E) \rightarrow A^0(E; \hat{F})$ est égal à l'identité. Donc, d'après la proposition 3.3.4, b est un isomorphisme de faisceaux homotopiques, donc de modules homotopiques ce qui permet de conclure. \square

6.2 Corollaires

6.2.1 Modules de cycles

On peut donc tirer dès maintenant le corollaire suivant du théorème 6.1.1 :

Proposition 6.2.1 *Pour tout corps parfait k , la catégorie $\mathcal{M}Cycl_k$ est abélienne, complète et cocomplète, et les limites inductives filtrantes y sont exactes.*

Le foncteur canonique $M \rightarrow A^0(\cdot; M)$ de $\mathcal{M}Cycl_k$ dans la catégorie des faisceaux Nisnevich est exact.

La première affirmation résulte en effet des propriétés analogues des modules homotopiques (cf 3.4.28), et la deuxième du fait que le foncteur d'inclusion $H\mathcal{M}_k^{\text{tr}} \rightarrow \mathcal{N}_k$ est exact.

6.2.2 Modules homotopiques avec transferts

On introduit la définition suivante, qui sera cruciale dans la deuxième partie :

Définition 6.2.2 *Soit F un faisceau dans \mathcal{N}_k . On dit que F est strictement invariant par homotopie si et seulement si pour tout entier positif p , le morphisme $H^p(X; F) \rightarrow H^p(\mathbb{A}_X^1; F)$ induit par la projection est un isomorphisme.*

Le corollaire le plus important de notre théorème est le suivant :

Théorème 6.2.3 *Soit (F_*, ϵ) un module homotopique.*

1. F_* est un invariant birationnel pour les variétés propres et lisses sur k .
2. Pour tout entier naturel p , et tout schéma X algébrique lisse, on a des isomorphismes canoniques gradués de degré 0

$$H_{\text{Nis}}^p(X; F_*) \simeq H_{\text{Zar}}^p(X; F_*) \simeq A^p(X; \hat{F}_*).$$

Avec les notations de [Ros96], les isomorphismes ci-dessus induisent plus précisément un isomorphisme pour tout $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$,

$$H_{\text{Nis}}^p(X; F_q) \simeq H_{\text{Zar}}^p(X; F_q) \simeq A^p(X; \hat{F}_*, p + q).$$

3. Le faisceau gradué F_* est strictement invariant par homotopie.

PREUVE : 1. Il suffit d'appliquer le corollaire (12.10) de [Ros96] avec $M = \hat{F}_*$. Pour le 2., on applique le corollaire (6.5) de *loc.cit.*; on a donc un isomorphisme

$$A^p(X; \hat{F}_*) \simeq H_{\text{Zar}}^p(X; A^0(\cdot; \hat{F}_*))$$

qui résulte du fait que le complexe de Gersten est une résolution acyclique du faisceau $A^0(\cdot; \hat{F}_*)$. Or dans cette résolution, les faisceaux $C^*(\cdot; \hat{F}_*)$ sont aussi des faisceaux acycliques pour la topologie de Nisnevich ; il en résulte l'isomorphisme

$$A^p(X; \hat{F}_*) \simeq H_{\text{Nis}}^p(X; A^0(\cdot; \hat{F}_*)).$$

On peut finalement conclure puisque $A^0(\cdot; \hat{F}_*)$ est isomorphe au faisceau F_* . Pour le 3. enfin, il ne reste plus qu'à appliquer la proposition (8.6) de *loc.cit.* avec le 2. \square

6.3 Résultats supplémentaires

Nous avons séparés les résultats qui suivent du reste de ce chapitre, car ils utilisent pleinement l'article [Voe02] de V. Voevodsky, et tout particulièrement le théorème de simplification. Ainsi, nous nous appuyons ici sur les démonstrations de [Voe02], alors qu'auparavant, nous avons donnés quasiment toutes les preuves de ce que nous avançons.

6.3.1 Invariance par homotopie stricte

Dans cette sous-section, on montre comment on peut déduire le théorème 6.3.3 à partir du théorème 6.2.3 en exploitant à fond les techniques de [Voe02].

Ainsi, la proposition suivante est une réinterprétation des résultats de *loc.cit.* qui permet de les adapter à notre situation. Elle est donc essentiellement due à V. Voevodsky :

Proposition 6.3.1 *Pour tous schémas algébriques lisses X et Y , le morphisme canonique*

$$\pi_k(X, Y) \rightarrow \pi_k(\mathbb{G}_m X, \mathbb{G}_m Y), \alpha \mapsto 1 \otimes \alpha$$

admet une section canonique, notée $\rho_{X,Y}$.

De plus, $\rho_{X,Y}$ est naturelle en X et Y .

PREUVE : Dans cette preuve, on adopte les notations de *loc.cit.* ; par ailleurs, toutes les références s'appliquent maintenant à ce preprint.

Soit \mathcal{Z} un élément de $c(\mathbb{G}_m X, \mathbb{G}_m Y)$. Pour tout entier naturel n , on note $P(\mathcal{Z}, n)$ les deux propriétés suivantes :

1. \mathcal{Z} et $D(g_n)$ s'intersectent proprement.
2. Le cycle $(\mathcal{Z}, D(g_n))$ est fini équidimensionnel sur X .

Si pour un entier naturel n la propriété $P(\mathcal{Z}, n)$ est vérifiée, le cycle $(\mathcal{Z}, D(g_n))$ est un élément de $c_{\text{equi}}(\mathbb{G}_m X \mathbb{G}_m Y / X, 0)$, que l'on note simplement \mathcal{Z}_n ; on peut donc voir ce cycle comme une correspondance finie de X dans $\mathbb{G}_m^2 Y$.

Or, d'après le lemme 4.1, pour tout \mathcal{Z} , il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $P(\mathcal{Z}, n)$ est vérifiée.

Par ailleurs, d'après la remarque 4.2, si n et m sont deux entiers naturels tels que $P(\mathcal{Z}, n)$ et $P(\mathcal{Z}, m)$ soient vérifiées, les classes d'homotopie de \mathcal{Z}_n et de \mathcal{Z}_m coïncident.

On peut donc fixer un entier n vérifiant la propriété $P(\mathcal{Z}, n)$ et définir l'élément $\rho_{X,Y}(\mathcal{Z})$ dans $\pi_k(X, Y)$ comme la composée dans $\pi \mathcal{L}_{\text{cor},k}$

$$X \xrightarrow{\mathcal{Z}_n} \mathbb{G}_m^2 Y \xrightarrow{p} Y.$$

Cette définition est indépendante de l'entier choisit.

On a ainsi défini un morphisme de groupes abéliens

$$\rho_{X,Y} : c(\mathbb{G}_m X, \mathbb{G}_m Y) \rightarrow \pi_k(X, Y).$$

Le lemme 4.4 affirme exactement que le morphisme $\rho_{X,Y}$ est naturel par rapport à X ; il définit donc un morphisme de préfaisceaux avec transferts

$$\rho_{\cdot, Y} : c(\mathbb{G}_m \times_k \cdot, \mathbb{G}_m Y) \rightarrow \pi_k(\cdot, Y).$$

Comme le préfaisceau $\pi_k(\cdot, Y)$ est invariant par homotopie, $\rho_{\cdot, Y}$ induit un unique morphisme

$$\pi_k(\mathbb{G}_m \times_k \cdot, \mathbb{G}_m Y) \rightarrow \pi_k(\cdot, Y)$$

que l'on note encore $\rho_{\cdot, Y}$.

Enfin, le lemme 4.3 est exactement le fait que, pour tout $\alpha \in \pi_k(X, Y)$, $\rho_{X,Y}(1 \otimes \alpha) = \alpha$. Ainsi, le morphisme $\rho_{X,Y}$ est la section attendue.

Comme on a déjà vu que $\rho_{X,Y}$ est naturel par rapport à X , il nous reste à le montrer par rapport à Y . Considérons $\mathcal{W} \in \pi_k(Y, Y')$ et $\mathcal{Z} \in \pi_k(\mathbb{G}_m X, \mathbb{G}_m Y)$. On doit montrer que

$$\mathcal{W} \circ \rho_{X,Y}(\mathcal{Z}) = \rho_{X,Y'}((1_{\mathbb{G}_m} \otimes \mathcal{W}) \circ \mathcal{Z}). \quad (6.1)$$

On confond les classes d'homotopie \mathcal{W} et \mathcal{Z} avec des cycles qui les représentent. Par ailleurs, pour alléger les notations, on pose $\tilde{X} = \mathbb{G}_m X$, $\tilde{Y} = \mathbb{G}_m Y$ et $\tilde{Y}' = \mathbb{G}_m Y'$. On calcule les deux membres de l'équation :

$$\begin{aligned} \mathcal{W} \circ \rho_{X,Y}(\mathcal{Z}) &= \mathcal{W} \circ p_{\mathbb{G}_m^2 Y}^Y \circ (\mathcal{Z}, D(g_n)) \\ &= p_{\tilde{X} \tilde{Y} \tilde{Y}'}^{X Y'} \left((p_{\tilde{X} \tilde{Y} \tilde{Y}'}^{Y Y'})^* \mathcal{W} \cdot (p_{\tilde{X} \tilde{Y} \tilde{Y}'}^{X Y})^* p_{\tilde{X} \tilde{Y}'}^{X Y} (\mathcal{Z} \cdot D(g_n)) \right) \\ &= p_{\tilde{X} \tilde{Y} \tilde{Y}'}^{X Y'} \left((p_{\tilde{X} \tilde{Y} \tilde{Y}'}^{Y Y'})^* \mathcal{W} \cdot p_{\tilde{X} \tilde{Y} \tilde{Y}'}^{X Y Y'} \cdot (p_{\tilde{X} \tilde{Y} \tilde{Y}'}^{\tilde{X} \tilde{Y}})^* (\mathcal{Z} \cdot D(g_n)) \right) \\ &= p_{\tilde{X} \tilde{Y} \tilde{Y}'}^{X Y'} \cdot p_{\tilde{X} \tilde{Y} \tilde{Y}'}^{X Y Y'} \left((p_{\tilde{X} \tilde{Y} \tilde{Y}'}^{X Y Y'})^* (p_{\tilde{X} \tilde{Y} \tilde{Y}'}^{Y Y'})^* \mathcal{W} \cdot (p_{\tilde{X} \tilde{Y} \tilde{Y}'}^{\tilde{X} \tilde{Y}})^* (\mathcal{Z} \cdot D(g_n)) \right) \\ &= p_{\tilde{X} \tilde{Y} \tilde{Y}'}^{X Y'} \left((p_{\tilde{X} \tilde{Y} \tilde{Y}'}^{Y Y'})^* \mathcal{W} \cdot (p_{\tilde{X} \tilde{Y} \tilde{Y}'}^{\tilde{X} \tilde{Y}})^* (\mathcal{Z} \cdot D(g_n)) \right) \\ &= p_{\tilde{X} \tilde{Y} \tilde{Y}'}^{X Y'} \left([\mathbb{G}_m^3 \times (p_{\tilde{X} \tilde{Y} \tilde{Y}'}^{Y Y'})^* \mathcal{W}] \cdot [\mathbb{G}_m Y' \times (\mathcal{Z} \cdot D(g_n))] \right). \end{aligned}$$

Dans cette équation, n désigne un entier suffisamment grand, et g_n désigne la fonction rationnelle sur $\tilde{X}\tilde{Y}$ égale à $(f_1^{n+1} - 1)/(f_1^{n+1} - f_2)$, où f_1 (resp. f_2) correspond à la projection de $\tilde{X}\tilde{Y} = \mathbb{G}_m X \mathbb{G}_m Y$ sur le premier (resp. deuxième) facteur \mathbb{G}_m .

D'un autre coté, on peut calculer le deuxième membre de l'équation :

$$\begin{aligned}
\rho_{X,Y'}((1_{\mathbb{G}_m} \otimes \mathcal{W}) \circ \mathcal{Z}) &= p_{\mathbb{G}_m^2 Y'}^{Y'} \circ ((1_{\mathbb{G}_m} \otimes \mathcal{W}) \circ (\mathcal{Z}, D(h_n))) \\
&= p_{\tilde{X}\tilde{Y}'}^{XY'} \left(p_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'}^{\tilde{X}\tilde{Y}'} \left((p_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'}^{\tilde{Y}\tilde{Y}'})^* [\Delta_{\mathbb{G}_m} \times \mathcal{W}] \cdot (p_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'}^{\tilde{X}\tilde{Y}})^* \mathcal{Z} \right) \cdot D(h_n) \right) \\
&\stackrel{(1)}{=} p_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'}^{XY'} p_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'}^{\tilde{X}\tilde{Y}'} \left((p_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'}^{\tilde{Y}\tilde{Y}'})^* [\Delta_{\mathbb{G}_m} \times \mathcal{W}] \cdot (p_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'}^{\tilde{X}\tilde{Y}})^* \mathcal{Z} \right) \cdot D(h_n) \\
&= p_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'}^{XY'} \left([\mathbb{G}_m \Delta_{\mathbb{G}_m} \times (p_{XYY'}^{YY'})^* \mathcal{W}] \cdot (p_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'}^{\tilde{X}\tilde{Y}})^* \mathcal{Z} \cdot D(h_n) \right) \\
&\stackrel{(2)}{=} p_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'}^{XY'} \left([\mathbb{G}_m \Delta_{\mathbb{G}_m} \times (p_{XYY'}^{YY'})^* \mathcal{W}] \cdot (p_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'}^{\tilde{X}\tilde{Y}})^* \mathcal{Z} \cdot D(h_n) \right) \\
&\stackrel{(3)}{=} p_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'}^{XY'} \left([\mathbb{G}_m \Delta_{\mathbb{G}_m} \times (p_{XYY'}^{YY'})^* \mathcal{W}] \cdot (p_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'}^{\tilde{X}\tilde{Y}})^* (\mathcal{Z} \cdot D(g_n)) \right) \\
&= p_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'}^{XY'} \left([\mathbb{G}_m \Delta_{\mathbb{G}_m} \times (p_{XYY'}^{YY'})^* \mathcal{W}] \cdot [\mathbb{G}_m Y' \times (\mathcal{Z} \cdot D(g_n))] \right).
\end{aligned}$$

Nous avons procédé comme suit :

- (1) Pour cette égalité, on a utilisé la proposition 3.1 de *loc.cit.*. Précisons que h_n désigne la fonction rationnelle sur $\tilde{X}\tilde{Y}'$ égale à $(f_1^{n+1} - 1)/(f_1^{n+1} - f_3)$, où f_1 (resp. f_3) correspond à la projection de $\tilde{X}\tilde{Y}' = \mathbb{G}_m X \mathbb{G}_m Y'$ sur le premier (resp. deuxième) facteur \mathbb{G}_m . Dès lors, h_n' désigne la même fonction rationnelle, mais lorsqu'elle est vue comme fonction rationnelle sur $\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'$.
- (2) Dans cette égalité, on a noté h_n'' la fonction rationnelle sur $\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'$ égale à $(f_1^{n+1} - 1)/(f_1^{n+1} - f_2)$, où f_2 désigne la projection de $\mathbb{G}_m X \mathbb{G}_m Y \mathbb{G}_m Y'$ sur le deuxième facteur \mathbb{G}_m . On utilise alors le fait que sur $\mathbb{G}_m \Delta_{\mathbb{G}_m} XYY'$, $h_n' = h_n''$.
- (3) Cette égalité utilise à nouveau la proposition 3.1 de *loc.cit.*, puisque $g_n = h_n'' \circ p_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'}^{\tilde{X}\tilde{Y}}$, avec la notation introduite pour la première égalité.

Or enfin,

$$\begin{aligned}
& p_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'}^{XY'}_* \left([\mathbb{G}_m \Delta_{\mathbb{G}_m} \times (p_{XY'Y'}^{YY'})^* \mathcal{W}] \cdot [\mathbb{G}_m Y' \times (\mathcal{Z}.D(g_n))] \right) \\
&= p_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'}^{XY'}_* \left([\mathbb{G}_m \Delta_{\mathbb{G}_m} XYY'] \cdot [\mathbb{G}_m^3 \times (p_{XY'Y'}^{YY'})^* \mathcal{W}] \cdot [\mathbb{G}_m Y' \times (\mathcal{Z}.D(g_n))] \right) \\
&= p_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'}^{XY'}_* \left([\mathbb{G}_m \Delta_{\mathbb{G}_m} XYY'] \cdot \left(p_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'}^{\mathbb{G}_m^2 XYY'} \right)^* \left([\mathbb{G}_m^2 \times (p_{XY'Y'}^{YY'})^* \mathcal{W}] \cdot [Y' \times (\mathcal{Z}.D(g_n))] \right) \right) \\
&\stackrel{(1)}{=} \left(p_{\mathbb{G}_m^2 XYY'}^{XY'} \right)_* \left([\mathbb{G}_m \mathbb{G}_m XYY'] \cdot \left([\mathbb{G}_m^2 \times (p_{XY'Y'}^{YY'})^* \mathcal{W}] \cdot [Y' \times (\mathcal{Z}.D(g_n))] \right) \right) \\
&= \left(p_{\mathbb{G}_m^2 XYY'}^{XY'} \right)_* \left([\mathbb{G}_m^2 \times (p_{XY'Y'}^{YY'})^* \mathcal{W}] \cdot [Y' \times (\mathcal{Z}.D(g_n))] \right) \\
&= p_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Y}'}^{XY'}_* \left([\mathbb{G}_m^3 \times (p_{XY'Y'}^{YY'})^* \mathcal{W}] \cdot [\mathbb{G}_m Y' \times (\mathcal{Z}.D(g_n))] \right).
\end{aligned}$$

Dans ce calcul, l'égalité (1) résulte de la formule de projection.

Cette dernière égalité démontre finalement l'égalité (6.1) et conclut. \square

On en déduit donc :

Corollaire 6.3.2 *Soit F un faisceau homotopique.*

Alors,

1. *Le morphisme canonique*

$$F \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{H}_k^{\mathrm{tr}}} (S_t^1, S_t^1 \otimes^{\mathrm{Htr}} F)$$

admet une rétraction.

2. *Pour tout faisceau homotopique G , le morphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}_k^{\mathrm{tr}}} (G, F) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}_k^{\mathrm{tr}}} (S_t^1 \otimes^{\mathrm{Htr}} G, S_t^1 \otimes^{\mathrm{Htr}} F)$$

admet une rétraction.

3. *Le morphisme canonique*

$$F \rightarrow \Omega^\infty(\Sigma^\infty F)$$

est un monomorphisme, où Ω^∞ est le foncteur défini dans la proposition 3.4.31, et $\Sigma^\infty F$ est le S_t^1 -module libre engendré par F .

PREUVE : On considère la première assertion.

Dans le cas où $F = h_0(Y)$, la proposition précédente montre exactement que pour tout schéma algébrique lisse X , le morphisme canonique

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}_k^{\mathrm{tr}}} (h_0(X), h_0(Y)) &\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}_k^{\mathrm{tr}}} (h_0(\mathbb{G}_m) \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(X), h_0(\mathbb{G}_m) \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(Y)) \\
\psi &\mapsto 1_{\mathbb{G}_m} \otimes^{\mathrm{Htr}} \psi
\end{aligned}$$

admet une rétraction notée $\rho_{X,Y}$.

Rappelons que S_t^1 est un facteur direct de $h_0(\mathbb{G}_m)$ (cf 3.4.12). Par ailleurs, si $\psi : h_0(X) \rightarrow h_0(Y)$ est un morphisme, $1_{S_t^1} \otimes^{Htr} \psi = (1_{\mathbb{G}_m} - e) \otimes^{Htr} \psi$, où e est la composée $\mathbb{G}_m \rightarrow \{1\} \rightarrow \mathbb{G}_m$. Or, revenant à la définition de $\rho_{X,Y}$, le lemme 4.3 de [Voe02] implique que

$$\begin{aligned} \rho_{X,Y}((1_{\mathbb{G}_m} - e) \otimes^{Htr} \psi) &= \rho_n((1_{\mathbb{G}_m} - e) \otimes^{Htr} \psi) \\ &= \rho_n((1_{\mathbb{G}_m} \otimes^{Htr} \psi) - \rho_n(e \otimes^{Htr} \psi)) = \psi - 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, le morphisme $\rho_{X,Y}$ induit une rétraction du morphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}}(h_0(X), h_0(Y)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}}(S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(X), S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(Y)).$$

Comme celle-ci est alors naturelle par rapport à X , on en déduit une rétraction ρ_Y du morphisme $h_0(Y) \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}}(S_t^1, S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(Y))$.

Or, tout faisceau homotopique F vérifie la propriété suivante :

$$F = \varinjlim_{Y/F} h_0(Y)$$

où la limite inductive est prise dans la catégorie des faisceaux homotopiques, et parcourt l'ensemble des couples (Y, η) où Y est un schéma algébrique lisse, et $\eta : h_0(Y) \rightarrow F$ un morphisme, muni des morphismes évidents. Ainsi, le morphisme

$$F \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}}(S_t^1, S_t^1 \otimes^{Htr} F)$$

est égal à

$$\varinjlim_{Y/F} (h_0(Y) \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}}(S_t^1, S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(Y))).$$

Or, la rétraction ρ_Y qu'on a trouvée précédemment est aussi naturelle par rapport à Y . Il en résulte qu'elle induit un morphisme bien défini

$$\varinjlim_{Y/F} \rho_Y$$

qui est une rétraction du morphisme précédent, ce qui démontre la première assertion.

La deuxième assertion se déduit facilement de la première en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}}(G, \cdot)$.

Pour la dernière assertion, on rappelle (cf 3.4.31), que le faisceau homotopique $\Omega^\infty(\Sigma^\infty F)_0$ est la limite inductive de la tour de morphismes

$$F \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}}(S_t^1, S_t^1 \otimes^{Htr} F) \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}}(S_t^2, S_t^2 \otimes^{Htr} F) \rightarrow \dots$$

Or, d'après la deuxième assertion, chaque morphisme dans cette tour est un monomorphisme, ce qui démontre que le morphisme canonique

$$F \rightarrow \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}}(S_t^n, S_t^n \otimes^{Htr} F)$$

est un monomorphisme, concluant ainsi la troisième assertion. \square

Ce corollaire nous permet de déduire de 6.2.3 le théorème de Voevodsky suivant :

Théorème 6.3.3 *Tout faisceau homotopique F est strictement invariant par homotopie.*

Remarque 6.3.4.— La démonstration donnée ici est différente de celle donnée dans [FSV00c], théorème 5.6. Toutefois, elle est beaucoup plus longue que celle de *loc.cit* et s'appuie sur les mêmes techniques. Elle n'est donc pas tout à fait satisfaisante, et nous renvoyons à l'introduction pour un programme qui permettrait d'obtenir à nouveau ce corollaire sans utiliser [Voe02].

PREUVE : D'après le théorème 6.2.3, le faisceau gradué sous-jacent au module homotopique $\Omega^\infty(\Sigma^\infty F)$ est strictement invariant par homotopie. Cela signifie encore que pour tout entier naturel n le morphisme canonique

$$H^n(\mathbb{A}_X^1; \Omega^\infty(\Sigma^\infty F)) \rightarrow H^n(X; \Omega^\infty(\Sigma^\infty F)),$$

induit par la section nulle de \mathbb{A}_X^1 , est un monomorphisme.

Or, comme le morphisme canonique $F \rightarrow \Omega^\infty(F)$ est un monomorphisme, on en déduit que les morphismes induit en cohomologie

$$H^n(X; F) \rightarrow H^n(X; \Omega^\infty(\Sigma^\infty F)) \text{ et } H^n(\mathbb{A}_X^1; F) \rightarrow H^n(\mathbb{A}_X^1; \Omega^\infty(\Sigma^\infty F))$$

sont des monomorphismes.

Cela implique que le morphisme $H^n(\mathbb{A}_X^1; F) \rightarrow H^n(X; F)$ est un monomorphisme, est donc un isomorphisme puisqu'il admet par ailleurs une section canonique. \square

6.3.2 Applications du théorème de simplification de Voevodsky

Nous avons isolés les corollaires qui suivent parce qu'ils utilisent le théorème de simplification de Voevodsky sous la forme affaiblie suivante :

Théorème 6.3.5 (Voevodsky) *Soit F et G des faisceaux homotopiques, alors le morphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}\mathcal{A}_S^{\mathrm{tr}}}(F, G) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}\mathcal{A}_S^{\mathrm{tr}}}(S_t^1 \otimes^{\mathrm{Htr}} F, S_t^1 \otimes^{\mathrm{Htr}} G)$$

est un isomorphisme.

C'est en effet un cas particulier du corollaire 4.10 de [Voe02]. Ce théorème anticipe la suite de la thèse, puisqu'il utilise la catégorie $DM_-^{eff}(k)$ (cf définition 7.1.1). Toutefois, il concerne directement notre théorème, comme nous le verrons dans les sous-sections qui suivent. Ainsi, ce théorème a une application importante concernant la comparaison entre les faisceaux homotopiques et les modules homotopiques. Cette comparaison nous permet par ailleurs de construire une structure monoïdale symétrique sur la catégorie des modules homotopiques.

6.3.2.1 Faisceaux homotopiques et modules homotopiques

On adopte tout d'abord la convention suivante, destinée à simplifier les notations :

Définition 6.3.6 *Soient F un faisceau homotopique, et $n > 0$ un entier.*

On pose $S_t^{-n} \otimes^{\mathrm{Htr}} F = F_{-n}$.

6.3.7.– Soit F un faisceau homotopique. Si n est un entier naturel, on a tautologiquement

$$(S_t^{-n} \otimes^{Htr} F)_{-1} = S_t^{-n-1} \otimes^{Htr} F.$$

Par ailleurs, le théorème de simplification de Voevodsky montre que pour tout entier naturel $n > 0$, le morphisme canonique

$$(S_t^n \otimes^{Htr} F)_{-1} \rightarrow S_t^{n-1} \otimes^{Htr} F$$

est un isomorphisme.

On en déduit donc :

Lemme 6.3.8 *Soit F un faisceau homotopique.*

Les isomorphismes définis précédemment munissent le faisceau homotopique \mathbb{Z} -gradué $S_t^ \otimes^{Htr} F$ d'une structure canonique de module homotopique.*

Lorsque cela ne prêterait pas à confusion, on notera simplement $S_t^* F$ le module homotopique du lemme ci-dessus.

6.3.9.– Rappelons que nous avons défini en 3.4.17 le foncteur $\Sigma^\infty : \mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}} \rightarrow S_t^1 - \mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ adjoint à gauche du foncteur qui à un S_t^1 -module associe sa composante de degré 0.

Par ailleurs, on a aussi construit dans 3.4.31 un foncteur $\Omega^\infty : S_t^1 - \mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}} \rightarrow \mathbb{H}\mathcal{M}_k^{\text{tr}}$.

Le théorème de simplification de Voevodsky nous permet alors d'obtenir les bonnes propriétés suivantes de ces foncteurs :

Corollaire 6.3.10 1. *Soit F un faisceau homotopique. Alors, le morphisme canonique de modules homotopiques*

$$S_t^* F \rightarrow \Omega^\infty \Sigma^\infty F$$

est un isomorphisme.

2. *Le foncteur $\Omega^\infty \Sigma^\infty$ est adjoint à gauche du foncteur*

$$\rho_0 : \mathbb{H}\mathcal{M}_k^{\text{tr}} \rightarrow \mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}, (F_*, \epsilon) \mapsto F_0.$$

3. *Le foncteur $\Omega^\infty \Sigma^\infty$ est pleinement fidèle.*

PREUVE : 1. Par définition,

$$(\Omega^\infty \Sigma^\infty F)_n = \varinjlim_{p \geq \max(0, -n)} \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}} \left(S_t^p, S_t^{p+n} \otimes^{Htr} F \right).$$

D'après le théorème 6.3.5, si n est positif, pour tout entier naturel p , le morphisme canonique

$$S_t^n \otimes^{Htr} F \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}} \left(S_t^p, S_t^{p+n} \otimes^{Htr} F \right)$$

est un isomorphisme.

De même, si (n, p) est un couple d'entiers tel que $n < 0$ et $p \geq -n$, le foncteur canonique

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}} \left(S_t^{-n}, F \right) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}} \left(S_t^p, S_t^{p+n} \otimes^{Htr} F \right)$$

est un isomorphisme. D'après notre convention, le faisceau à la source de cet isomorphisme est égal à $S_t^n F$. La première assertion en résulte.

2. Soit (M_*, ϵ) un module homotopique. Puisque d'après le premier point, $(\Omega^\infty \Sigma^\infty F)_0 \simeq F$, on considère le morphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}\mathcal{M}_k^{\mathrm{tr}}}(\Omega^\infty \Sigma^\infty F, M_*) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}}(F, M_0), (f_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto f_0.$$

Ce morphisme est évidemment injectif, et il nous reste à montrer qu'il est surjectif. Or, si $f : F \rightarrow M_0$ est un morphisme dans $\mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}$, puisque le foncteur Σ^∞ est le foncteur « S_t^1 -module libre engendré» et que M_* est un S_t^1 -module, f correspond par adjonction à un morphisme

$$f'_* : \Sigma^\infty F \rightarrow M_*$$

tel que $f'_0 = f$. Dès lors, d'après le premier point, $\Omega^\infty(f'_*) = f_0$.

3. Soit F et G des faisceaux homotopiques. Alors, d'après le deuxième point,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}\mathcal{M}_k^{\mathrm{tr}}}(\Omega^\infty \Sigma^\infty F, \Omega^\infty \Sigma^\infty G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}}(F, (\Omega^\infty \Sigma^\infty G)_0)$$

et le premier point permet de conclure. □

On en déduit donc le corollaire suivant :

Corollaire 6.3.11 *Le couple de foncteurs adjoints*

$$(S_t^{*\?}, \rho_0) : \mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}} \rightleftarrows \mathbf{H}\mathcal{M}_k^{\mathrm{tr}}$$

identifie la catégorie des faisceaux homotopiques à une localisation de la catégorie des modules homotopiques.

6.3.2.2 Modules de cycles et faisceaux homotopiques

Grâce à l'équivalence de catégorie de 6.1.1, on reformule le corollaire précédent comme suit :

Théorème 6.3.12 *Considérons le foncteur suivant*

$$\begin{aligned} \rho_0 : \mathcal{M}\mathrm{Cycl}_k &\rightarrow \mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}} \\ M &\mapsto A^0(., M, 0). \end{aligned}$$

Alors, le foncteur

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}} &\rightarrow \mathcal{M}\mathrm{Cycl}_k \\ F &\mapsto \widehat{S_t^* F} \end{aligned}$$

est pleinement fidèle, exact et adjoint à gauche du foncteur ρ_0 .

Le couple de foncteurs adjoints

$$\left(\widehat{S_t^{*\?}}, \rho_0 \right) : \mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}} \rightleftarrows \mathcal{M}\mathrm{Cycl}_k$$

identifie la catégorie des faisceaux homotopiques à une localisation de la catégorie des modules de cycles.

Autrement dit, la catégorie des faisceaux homotopiques est une localisation de la catégorie des modules de cycles.

PREUVE : En effet, ces deux foncteurs ne sont rien d'autre que les foncteurs adjoints du corollaire 6.3.10, composés avec les équivalences de catégories correspondantes du théorème 6.1.1. \square

6.3.2.3 Structure monoïdale

Nous montrons maintenant comment on peut construire à l'aide du corollaire 6.3.10 une structure monoïdale symétrique sur $\mathbf{H}\mathcal{M}_k^{\text{tr}}$. Rappelons pour le lemme suivant que la catégorie $\mathbf{H}\mathcal{M}_k^{\text{tr}}$ admet des limites inductives, et que le foncteur d'oubli $\mathbf{H}\mathcal{M}_k^{\text{tr}} \rightarrow \mathbb{Z} - \mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ y commute. Par ailleurs, nous avons noté $\cdot\{n\}$ le foncteur de décalage des faisceaux gradués de n rangs à gauche.

Lemme 6.3.13 *Soit M_* un module homotopique.*

Considérons la tour de morphismes dans $\mathbf{H}\mathcal{M}_k^{\text{tr}}$ où n parcourt \mathbb{Z}

$$\dots \rightarrow \Omega^\infty \Sigma^\infty(M_n)\{-n\} \xrightarrow{i_n} \Omega^\infty \Sigma^\infty(M_{n+1})\{-(n+1)\} \rightarrow \dots$$

Alors, le morphisme canonique

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^\infty \Sigma^\infty(M_n)\{-n\} \xrightarrow{\iota} M_*$$

est un isomorphisme.

PREUVE : Précisons que le morphisme i_n est obtenu par adjonction, à partir du morphisme $M_n \rightarrow (\Omega^\infty \Sigma^\infty(M_{n+1})\{-1\})_0$. De même, le morphisme ι est la limite inductive des morphismes

$$\iota_n : \Omega^\infty \Sigma^\infty(M_n)\{-n\} \rightarrow M_*$$

qui sont eux-mêmes obtenus grâce à l'adjonction de la proposition précédente à partir du morphisme $M_n \xrightarrow{Id} (M_*\{n\})_0$. Par définition de cette adjonction, ι_n est égal en degré $r \leq n$ à

$$(\Omega^\infty \Sigma^\infty(M_n)\{-n\})_r \simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}(S_t^{n-r}, M_n) \xrightarrow{\epsilon_{n,n-r}^{-1}} M_r.$$

Comme la limite inductive se calcule argument par argument, et qu'en tout degré r , pour tout $n \geq r$, $(\iota_n)_r$ est un isomorphisme, le morphisme ι est un isomorphisme. \square

On en déduit un premier corollaire :

Corollaire 6.3.14 *La catégorie $\mathbf{H}\mathcal{M}_k^{\text{tr}}$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. *La famille essentiellement petite des modules homotopiques de la forme $\Omega^\infty \Sigma^\infty h_0(X)$, où X parcourt les objets de \mathcal{L}_k est une famille de générateurs de $\mathbf{H}\mathcal{M}_k^{\text{tr}}$.*
2. *La catégorie abélienne $\mathbf{H}\mathcal{M}_k^{\text{tr}}$ est de Grothendieck (cf définition C.1.4).*

PREUVE : En effet, tout faisceau homotopique F , est limite inductive d'objets de la forme $h_0(X)$ où X est un schéma algébrique lisse. Le corollaire précédent montre donc que tout module homotopique est limite inductive d'objets de la forme $\Omega^\infty \Sigma^\infty h_0(X)$, puisque $\Omega^\infty \Sigma^\infty$ est exact à droite (en tant qu'adjoint à gauche par exemple).

Ceci permet de conclure que $\mathbf{H}\mathcal{M}_k^{\text{tr}}$ est de Grothendieck d'après ce que nous avons déjà démontré dans la proposition 3.4.28. \square

Par ailleurs, on en déduit la définition :

Définition 6.3.15 Soient M_* et N_* des modules homotopiques.

On pose

$$M_* \otimes N_* = \varinjlim_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \left(\Omega^\infty \Sigma^\infty (M_m \otimes^{Htr} N_n) \{-m - n\} \right).$$

Ceci munit la catégorie $\mathbf{H}\mathcal{M}_k^{\text{tr}}$ d'une structure monoïdale symétrique dont S_t^* est le neutre, les isomorphismes structurels (associativité, neutre, commutativité) étant induits par les isomorphismes de la catégorie monoïdale symétrique $\mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$.

Le foncteur $\Omega^\infty \Sigma^\infty$ est donc monoïdal symétrique. Par ailleurs, pour tout entier naturel n , le produit tensoriel avec $S_t^*\{n\}$ correspond tautologiquement au décalage de n rang à gauche.

Remarque 6.3.16.– On peut voir qu'une catégorie monoïdale qui est de plus abélienne de Grothendieck et dans laquelle le produit tensoriel est exact à droite est monoïdale fermée.

On en déduit le corollaire suivant concernant la catégorie des modules de cycles :

Théorème 6.3.17 (k est parfait)

La catégorie $\mathcal{M}\text{Cycl}_k$ est abélienne, de Grothendieck (cf définition C.1.4) et admet des produits quelconques.

Il existe une structure monoïdale symétrique fermée canonique sur $\mathcal{M}\text{Cycl}_k$ telle que le module de cycles K_*^M en soit le neutre. De plus, le produit tensoriel de cette structure commute avec l'opération de décalage de la graduation des modules de cycles.

Nous n'avons pas pu expliciter le produit tensoriel de modules de cycles ainsi défini. Toutefois, on peut faire les remarques suivantes :

6.3.18.– Soient N et M deux modules de cycles sur k . On note \mathcal{N}_* (resp. \mathcal{M}_*) le module homotopique associé à N (resp. M) grâce à l'équivalence de catégorie 6.1.1. D'après la définition précédente, le module de cycles $N \otimes M$ est tel que, pour tout entier r et toute extension de type fini E/k ,

$$(N \otimes M)_r(E) = \varinjlim_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \mid n+m \geq r} (\mathcal{N}_n \otimes^{Htr} \mathcal{M}_m)_{r-n-m}(E),$$

formule dans laquelle on rappelle que $(\cdot)_{r-n-m}$ est l'application itérée $(n+m-r)$ -fois du foncteur $(\cdot)_{-1}$ de la définition 3.4.1. Pour tout couple d'entiers (n, m) , on dispose donc d'un produit, noté \boxtimes , obtenu par composition

$$N_n(E) \otimes_{\mathbb{Z}} M_m(E) = (\mathcal{N}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{M}_m)(E) \rightarrow (\mathcal{N}_n \otimes^{Htr} \mathcal{M}_m)(E) \rightarrow (N \otimes M)_{n+m}(E).$$

Ceci nous permet de définir un morphisme

$$N \times M \xrightarrow{\boxtimes} (N \otimes M).$$

On vérifie facilement les axiomes P1 et P2 de la définition 1.2 de [Ros96]. L'axiome P3 est plus problématique, mais on l'obtient facilement dans le cas suivant :

Lemme 6.3.19 *Soit M un module de cycles.*

Alors, le morphisme défini précédemment

$$K_*^M \times M \xrightarrow{\boxtimes} (K_*^M \otimes M)$$

est un accouplement de modules de cycles.

Par ailleurs, à travers l'isomorphisme de modules de cycles $K_^M \otimes M \xrightarrow{\sim^*} M$, il coïncide avec l'accouplement canonique*

$$K_*^M \times M \rightarrow M$$

défini par Rost à la suite du théorème 1.4 de [Ros96].

PREUVE : Il nous suffit de vérifier que la composée

$$K_*^M \times M \xrightarrow{\boxtimes} (K_*^M \otimes M) \xrightarrow{\sim^*} M$$

coïncide avec l'accouplement canonique défini par Rost.

Nous utilisons pour cela le fait que K_*^M est, d'après l'isomorphisme de 5.5.10, le module de cycle associé au faisceau homotopique S_t^* . Notons à nouveau \mathcal{M} le faisceau homotopique associé à M .

Soit E/k une extension de type fini. Par définition, pour tout couple d'entiers (n, m) , la composée des morphismes

$$S_t^n \otimes^{tr} \mathcal{M}_m(E) \rightarrow (K_n^M \otimes M)_{n+m}(E) \xrightarrow{\sim^*} M_{n+m}(E)$$

est égale au produit canonique du S_t^1 -module \mathcal{M}_* . Il en résulte que le morphisme

$$(K_n^M(E) = S_t^n(E)) \otimes_{\mathbb{Z}} M_m(E) \rightarrow S_t^n \otimes^{tr} \mathcal{M}_m(E) \rightarrow M_{n+m}(E)$$

est justement, d'après la définition 5.5.17, la donnée D3 du module de cycles associé à \mathcal{M}_* .

Autrement dit, le morphisme ci-dessus correspond juste à la multiplication à gauche de la K-théorie de Milnor sur M . Ceci est exactement la définition de Rost, et conclut donc, puisque ce morphisme est un accouplement d'après les axiomes des modules de cycles. \square

6.3.2.4 K-théorie de Milnor non ramifiée

Remarquons que le théorème de simplification sous sa forme affaiblie 6.3.5 a pour conséquence que le faisceau homotopique gradué S_t^* est un module homotopique.

Dès lors, en s'appuyant sur le théorème 5.5.10 de Suslin et Voevodsky, et grâce au théorème principal de cette section, on obtient la proposition qui suit. Il était déjà bien connu (cf [Voe96b]) que le faisceau homotopique gradué que nous avons noté S_t^* est isomorphe à la K-théorie de Milnor non ramifiée \mathcal{K}_*^M , nous ajoutons tout d'abord que cet isomorphisme est compatible aux transferts :

Proposition 6.3.20 *Le morphisme canonique défini en 5.5.10*

$$K_*^M \xrightarrow{\varphi} \hat{S}_t^*$$

est un isomorphisme de modules de cycles. Il induit un isomorphisme de modules homotopiques

$$\mathcal{K}_*^M = A^0(\cdot; K_*^M) \rightarrow S_t^*$$

où \mathcal{K}_*^M est le faisceau de K -théorie de Milnor non ramifiée.

Pour tout schéma algébrique lisse X , et tout entier naturel n , on en déduit un isomorphisme canonique

$$CH^n(X) = A^n(X; K_*^M, n) \xrightarrow{\rho_n} A^n(X; S_t^*, n) = H^n(X; S_t^n)$$

qui est naturel par rapport à la structure de préfaisceau avec transferts des deux membres.

PREUVE : On a déjà vu en effet que le foncteur φ est un isomorphisme. La preuve de A. Suslin et Voevodsky montre qu'il est compatible aux morphismes de restrictions et de corestrictions. Il est tautologiquement compatible à l'action de la K -théorie de Milnor sur les deux membres, et les axiomes concernant les résidus sur les modules de cycles montrent que les deux résidus coïncident, ce qui montre que φ est un isomorphisme de modules de cycles. L'assertion concernant les transferts résulte du théorème 6.1.1, et de la proposition 4.2.50. \square

Remarque 6.3.21.– Ceci nous montre en particulier, grâce à la proposition 4.3.7, que pour tout morphisme fini équidimensionnel $f : X \rightarrow Y$ entre schémas algébriques lisses, le morphisme $H^n({}^t f; S_t^n)$ correspond à travers l'isomorphisme ci-dessus au morphisme f_* sur les groupes de Chow.

6.3.22.– Dans l'isomorphisme de la proposition précédente, le membre de gauche considéré comme un groupe gradué par rapport à n , est muni d'une structure d'anneau gradué. On a déjà montré dans la proposition 4.2.50 que le produit d'intersection défini par M. Rost coïncide avec le produit sur le groupe de Chow classique. Dans ce paragraphe, on anticipe sur la deuxième partie pour construire une structure de groupe gradué sur le groupe de cohomologie situé à droite de l'isomorphisme de la proposition précédente, en montrant que l'isomorphisme en question est alors compatible aux structures produits.

D'après l'article [SV00a] de A. Suslin et V. Voevodsky, il existe en effet un produit tensoriel $\otimes^{tr,L}$ sur la catégorie $D^-(\mathcal{A}_k^{tr})$ (cf paragraphe qui suit le corollaire 2.5). Ce foncteur vérifie particulièrement la propriété, pour tous schémas algébriques lisses X et Y , et pour tous entiers n et m ,

$$L[X][n] \otimes^{tr,L} L[Y][m] = L[X \times_k Y][n+m].$$

Dès lors, pour tous entiers n et m , on obtient un morphisme canonique, noté ici μ , dans $D^-(\mathcal{A}_k^{tr})$:

$$S_t^n[n] \otimes^{tr,L} S_t^m[m] \rightarrow S_t^n \otimes^{tr} S_t^m[n+m] \rightarrow h_0(S_t^n \otimes^{tr} S_t^m)[n+m] \simeq S_t^{n+m}[n+m].$$

Ainsi, pour tout schéma algébrique lisse X , on en déduit un cup-produit sur le groupe gradué

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^n(X; S_t^n).$$

En effet, soit α (resp. β) une classe dans $H^n(X; S_t^n)$ (resp. $H^m(X; S_t^m)$). On interprète α (resp. β) comme un morphisme de $L[X]$ dans $S_t^n[n]$ (resp. $S_t^m[m]$) dans $D^-(\mathcal{A}_k^{\text{tr}})$ (d'après la proposition 2.2.13).

Soit enfin $\Delta_X : X \rightarrow X \times_k X$ le morphisme diagonal. On en déduit un morphisme

$$L[X] \xrightarrow{\mathbb{L}[\Delta_X]} L[X \times_k X] \xrightarrow{\alpha \otimes^{tr, L} \beta} S_t^n[n] \otimes^{tr, L} S_t^m[m] \xrightarrow{\mu} S_t^{n+m}[n+m]$$

dont on note $\alpha \smile_{\mu} \beta$ la classe dans $H^{n+m}(X; S_t^{n+m})$. Ce procédé nous définit le produit attendu.

Dès lors, on peut encore prolonger la proposition précédente :

Proposition 6.3.23 *Soit X un schéma algébrique lisse.*

L'isomorphisme

$$CH^*(X) \xrightarrow{\rho_*} \bigoplus_n H^n(X; S_t^n),$$

défini dans la proposition précédente, est compatible aux structures d'anneaux des deux membres, la structure sur $CH^*(X)$ provenant de la théorie de l'intersection et celle sur $H^*(X; S_t^*)$ provenant du cup-produit défini ci-dessus.

PREUVE : Considérant la définition ci-dessus, le fait que les structure d'anneaux sur $CH^*(X)$ et sur

$$\bigoplus_n A^n(X; K_*^M, n)$$

coïncident (cf 4.2.50) et aussi la définition du produit suivant M. Rost sur ce dernier anneau (cf définition 4.2.45), il ne reste plus qu'à démontrer l'affirmation suivante :

Pour tout couple d'entiers (n, m) , pour toutes classes $\alpha \in H^n(X; S_t^n)$ et $\beta \in H^m(X; S_t^m)$, la classe du morphisme

$$L[X \times_k X] \xrightarrow{\alpha \otimes^{tr, L} \beta} S_t^n[n] \otimes^{tr, L} S_t^m[m] \xrightarrow{\mu} S_t^{n+m}[n+m]$$

dans $H^{n+m}(X \times_k X; S_t^{n+m})$ s'envoie à travers l'isomorphisme ρ_{n+m} sur $\rho_n(\alpha) \times_{\mu} \rho_m(\beta)$ où μ désigne la structure d'anneau canonique sur le module de cycles K_*^M , et \times_{μ} le produit défini par M. Rost (cf §14.1 de [Ros96]).

On sait déjà que $H^n(X; S_t^n)$ est isomorphe à $A^n(X; K_*^M, n) = CH^n(X)$. On considère donc un point x (resp. y) de X de codimension n (resp. m), et α_x (α_y) l'unique classe dans $H^n(X; S_t^n)$ (resp. $H^m(X; S_t^m)$) qui s'envoie par ρ_* sur le cycle x (resp. y). Il suffit en effet de traiter ce cas, puisque le groupe $H^n(X; S_t^n)$ est engendré par les classes du type α_x .

Or, à travers l'isomorphisme ρ_n , $H^n(X; S_t^n)$ est égal au n -ième groupe de cohomologie du complexe

$$\dots \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(n)}} (S_t^n)_{-n}(\kappa(x)) \rightarrow \dots$$

On a déjà utilisé le fait que $(S_t^n)_{-n} \simeq \mathbb{Z}$. La classe α_x est donc la classe du morphisme

$$L[\kappa(x)] \xrightarrow{x} (S_t^n)_{-n} = \mathbb{Z}$$

dans $H^n(X; S_t^n)$. Cela signifie que l'on dispose d'un diagramme commutatif dans $D^-(\mathcal{A}_k^{\text{tr}})$:

$$\begin{array}{ccc} L[X] & \xrightarrow{\alpha_x} & S_t^n[n] \\ \uparrow \mathbb{L}[i] & & \uparrow \\ L[\kappa(x)] & \xrightarrow{x} & \mathbb{Z} \end{array}$$

où $i : \kappa(x) \rightarrow X$ est le morphisme d'immersion canonique (que l'on considère ici, comme d'habitude, comme un morphisme de $\text{pro-}\mathcal{L}_k$).

Il en résulte que le morphisme composé

$$L[X \times_k X] \xrightarrow{\alpha_x \otimes^{tr,L} \alpha_y} S_t^n[n] \otimes^{tr,L} S_t^m[m] \xrightarrow{\mu} S_t^{n+m}[n+m]$$

qui nous intéresse correspond, à travers l'isomorphisme ρ_* , au morphisme

$$L[\kappa(x) \otimes_k \kappa(y)] \rightarrow \mathbb{Z} \otimes^{tr,L} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}.$$

Or, si l'on note Z et T les adhérences respectives de x et y dans X , cet élément représente précisément la classe du cycle associé au sous-schéma fermé $Z \times_k T$ dans X . Par ailleurs, nous avons démontré à la fin de la preuve de la proposition 4.2.50 l'égalité

$$\{x\} \times_{\mu} \{y\} = \{[Z \times_k T]\},$$

les accolades indiquant que l'on considère la classe du cycle x dans $A^n(X; K_*^M, n)$, et ainsi de suite. Ceci conclut la démonstration. \square

Part II

Motifs génériques

Dans cette partie, k désigne un corps parfait.

Le mot schéma signifie schéma algébrique lisse sur k , sauf mention explicite du contraire

Chapter 7

Catégorie triangulée des motifs mixtes

Dans ce chapitre, on rappelle la définition de V. Voevodsky de ce qu'est (conjecturalement) la catégorie dérivée des motifs mixtes, telle qu'elle est exposée dans [FSV00b]. Toutes les définitions et propositions des deux premières sections sont donc dues à ce mathématicien.

Pour faire le lien avec la première partie, nous avons choisi d'exposer tout d'abord le point de vue faisceautique de la construction de Voevodsky. Le point de vue géométrique est théoriquement beaucoup plus satisfaisant, car les définitions qui y apparaissent sont beaucoup plus simples. Aussi, le point de vue faisceautique est essentiellement un outil technique adapté à la définition géométrique. Il permet de montrer un grand nombre, si ce n'est la plupart, des propriétés de la catégorie des motifs géométriques.

Le lecteur pourra donc à son goût commencer la lecture de ce chapitre par la deuxième section.

Pour achever le pont entre cette partie et la première, on termine ce chapitre par un exposé conjectural de ce que devraient être les $\mathbb{Z}(1)[1]$ -spectres dans la catégorie $DM_-^{eff}(k)$.

7.1 Point de vue faisceautique

Comme annoncé, c'est particulièrement ici que le chapitre précédent entre en jeu. On a déjà introduit la catégorie abélienne $\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ des faisceaux avec transferts ; on se place maintenant dans sa catégorie dérivée :

Définition 7.1.1 *Soit \mathcal{T} la sous-catégorie épaisse de $D^-(\mathcal{N}_k^{\text{tr}})$ engendrée par les complexes de la forme*

$$L[\mathbb{A}_X^1] \rightarrow L[X]$$

où X est un schéma algébrique lisse.

On note $DM_-^{eff}(k)$ la catégorie triangulée obtenue par localisation de $D^-(\mathcal{N}_k^{\text{tr}})$ par rapport à cette sous-catégorie épaisse.

Remarque 7.1.2.— Cette définition est formellement très similaire à la définition de la catégorie homotopique (cf [MV01]), sauf qu'on ne considère que des objets d'une

catégorie abélienne (des complexes et non des ensembles simpliciaux), et qu'on regarde une structure additionnelle, les transferts.

Or les transferts permettent de simplifier considérablement le procédé de localisation. Commençons par le rappel de la définition suivante :

Définition 7.1.3 *Soit K un objet de $D^-(\mathcal{N}_k^{\text{tr}})$. On dit que K est \mathbb{A}^1 -local si et seulement si pour tout objet L de $D^-(\mathcal{N}_k^{\text{tr}})$, le morphisme canonique*

$$\text{Hom}_{D^-(\mathcal{N}_k^{\text{tr}})}(L, K) \rightarrow \text{Hom}_{DM_-^{eff}(k)}(L, K)$$

est un isomorphisme.

On renvoie de nouveau à [MV01], §2.2 pour de plus amples détails sur la localisation et la notion d'objet «local» (dans le cadre des catégories homotopiques toutefois). Pour nous, il suffit de constater que si notre catégorie admet «assez d'objets locaux» (on donnera sens à cette phrase un peu plus loin), on obtient un isomorphisme entre la catégorie localisée et la catégorie des objets locaux non localisée. Commençons par éclairer tout cela avec la proposition suivante :

Proposition 7.1.4 *Soit K un objet de $D^-(\mathcal{N}_k^{\text{tr}})$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. K est \mathbb{A}^1 -local.
2. Pour tout entier i , $H^i(K)$ est un faisceau strictement invariant par homotopie.
3. Pour tout entier i , $H^i(K)$ est un faisceau homotopique.

Indication de PREUVE : Puisque $H^i(K)$ est un faisceau avec transferts, l'équivalence entre 2 et 3 résulte du théorème de Voevodsky 6.3.3.

$1 \Rightarrow 2$: Soit i un entier. On considère le morphisme $L[\mathbb{A}_X^1][i] \rightarrow L[X][-i]$, et plus précisément le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{D^-(\mathcal{N}_k^{\text{tr}})}(L[X][-i], K) & \xrightarrow{(2)} & \text{Hom}_{DM_-^{eff}(k)}(L[X][-i], K) \\ (3) \downarrow & & \downarrow (1) \\ \text{Hom}_{D^-(\mathcal{N}_k^{\text{tr}})}(L[\mathbb{A}_X^1][-i], K) & \xrightarrow{(2)} & \text{Hom}_{DM_-^{eff}(k)}(L[\mathbb{A}_X^1][-i], K) . \end{array}$$

Le morphisme (1) est un isomorphisme, par définition de la catégorie $DM_-^{eff}(k)$, les morphismes (2) sont des isomorphismes car K est \mathbb{A}^1 -local, et il s'ensuit que (3) est un isomorphisme.

$2 \Rightarrow 1$: On renvoie à [FSV00b], prop 3.2.3 pour cette dernière implication, ou encore aux techniques de localisation de [MV01]. \square

On obtient tout une série de corollaires de cette proposition. Avant d'énoncer le premier, on donne la définition suivante :

Définition 7.1.5 On note Δ_k^\bullet le schéma cosimplicial standard sur X , où X est un schéma algébrique lisse.

Soit F un faisceau avec transferts, on définit $C_*(F)$ comme le complexe de groupes abéliens associé au groupe abélien simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}}(\Delta_k^\bullet, F)$, qui est donc concentré en degrés positifs. On pose encore $C^n(F) = C_{-n}(F)$ pour tout entier relatif n , ce qui nous définit un objet $C^*(F)$ de $D^-(\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}})$, appelé «complexe des (co)chaînes singulières» associé à F .

Si maintenant K est un objet de $D^-(\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}})$, on note par abus $C^*(K)$ le complexe total associé au bicomplexe obtenu par application de C^* en tous degrés de K .

Le premier corollaire de la proposition 7.1.4 est alors :

Corollaire 7.1.6 Si K est un complexe dans $D^-(\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}})$, alors $C^*(K)$ est \mathbb{A}^1 -local.

PREUVE : On commence par le cas où $K = F$ est un faisceau (placé en degré 0).

Dans ce cas, il résulte d'un calcul facile que les préfaisceaux de cohomologie du complexe $C^*(F)$ (vu comme complexe de préfaisceaux) sont invariants par homotopie. On en déduit d'après le théorème 3.3.21 que les faisceaux de cohomologie associés sont invariants par homotopie, donc sont des faisceaux homotopiques ; il suffit alors d'appliquer la proposition 7.1.4.

Dans le cas général, on applique une suite spectrale d'hypercohomologie. \square

Corollaire 7.1.7 On a un foncteur induit

$$C^* : D^-(\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}) \rightarrow DM_-^{\mathrm{eff}}(k)$$

qui est de plus adjoint à gauche du foncteur d'oubli. On l'appelle foncteur de \mathbb{A}^1 -localisation.

Il induit alors (par restriction) une équivalence de la sous-catégorie pleine de $D^-(\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}})$ formée des complexes \mathbb{A}^1 -locaux (c'est-à-dire dont les faisceaux de cohomologie sont invariants par homotopie) avec la catégorie $DM_-^{\mathrm{eff}}(k)$.

PREUVE : Si $f : K \rightarrow L$ est un quasi-isomorphisme de complexes de faisceaux dans $\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}$, alors $C^*(f)$ est encore un quasi-isomorphisme de complexes. Dès lors, le morphisme de l'énoncé est bien défini.

Pour conclure, il reste à vérifier que si K est un objet dans $D^-(\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}})$, le morphisme canonique $K \rightarrow C^*K$ est un isomorphisme dans la catégorie $DM_-^{\mathrm{eff}}(k)$, puisque le foncteur C^* tombe dans la catégorie des objets \mathbb{A}^1 -locaux. On renvoie de nouveau à [FSV00b], 3.2.3, pour cette vérification. \square

Remarque 7.1.8.— La phrase «admet assez d'objets locaux» se reformule donc en l'existence d'un foncteur de localisation comme ci-dessus.

Ce foncteur de localisation est l'analogue du foncteur de «résolution fibrante» de [MV01], que l'on obtient grâce à la machinerie des catégories de modèles.

Le corollaire précédent implique que la t-structure naturelle de $D^-(\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}})$ induit une t-structure sur $DM_-^{\mathrm{eff}}(k)$. Suivant Voevodsky, [FSV00c], on l'appelle la t-structure homotopique de $DM_-^{\mathrm{eff}}(k)$. Le coeur de cette t-structure n'est rien d'autre que la catégorie

$H\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$, c'est pourquoi on a choisi d'appeler les objets de cette dernière des faisceaux homotopiques (par analogie avec la situation des faisceaux pervers).

F. Morel a défini une t-structure sur la catégorie homotopique stable simpliciale des schémas (*i.e.* obtenue par stabilisation de la sphère simpliciale). Il l'appelle la t-structure homotopique ; elle coïncide avec la t-structure sur $DM_-^{eff}(k)$ (à travers le foncteur canonique de $DM_-^{eff}(k)$ dans la catégorie homotopique stable). Ceci justifie encore la terminologie qu'on a choisie – mais en toute rigueur, les faisceaux homotopiques de cette thèse devraient s'appeler des faisceaux homotopiques avec transferts.

Définition 7.1.9 *Si X est un schéma algébrique lisse, on notera simplement $M(X)$ le complexe \mathbb{A}^1 -local $C^*(L[X])$, vu comme objet de $DM_-^{eff}(k)$.*

Remarque 7.1.10.– On peut définir de même, en utilisant le foncteur de \mathbb{A}^1 -localisation C^* , le motif d'un schéma singulier, ou encore le motif à support propre (voir [FSV00b], §4.1).

On peut par ailleurs déduire du foncteur de \mathbb{A}^1 -localisation la structure monoïdale de $DM_-^{eff}(k)$. Pour cela, on utilise le produit tensoriel $\otimes^{tr,L}$ sur $D^-(\mathcal{N}_k^{\text{tr}})$, construit par Suslin et Voevodsky, qu'on a déjà utilisé dans 6.3.22 :

Définition 7.1.11 *Soient \mathcal{M} et \mathcal{M}' deux complexes dans $DM_-^{eff}(k)$.*

On pose :

$$\mathcal{M} \otimes^{tr} \mathcal{M}' = C^*(\mathcal{M} \otimes^{tr,L} \mathcal{M}')$$

qui est un objet \mathbb{A}^1 -local de $DM_-^{eff}(k)$.

Il est évident que ce produit tensoriel est commutatif à isomorphisme près, puisque $\otimes^{tr,L}$ l'est. De même, l'objet nul \mathbb{Z} de $DM_-^{eff}(k)$ est l'élément neutre pour le produit tensoriel sur $DM_-^{eff}(k)$, puisqu'il l'est pour $\otimes^{tr,L}$.

Par contre, pour vérifier l'axiome d'associativité du produit tensoriel sur $DM_-^{eff}(k)$, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 7.1.12 *Pour tous objets \mathcal{M} et \mathcal{N} de $D^-(\mathcal{N}_k^{\text{tr}})$, on considère les morphismes canoniques d'augmentation*

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\xrightarrow{\nu_{\mathcal{M}}} C^*(\mathcal{M}) \\ \mathcal{N} &\xrightarrow{\nu_{\mathcal{N}}} C^*(\mathcal{N}). \end{aligned}$$

Alors, le morphisme

$$C^*(\mathcal{M} \otimes^{tr,L} \mathcal{N}) \xrightarrow{C^*(\nu_{\mathcal{M} \otimes^{tr,L} \mathcal{N}})} C^*(C^*(\mathcal{M}) \otimes^{tr,L} C^*(\mathcal{N}))$$

est un quasi-isomorphisme.

Ce lemme est la dernière affirmation de la proposition 2.8 de [SV00a]. Dans la référence indiquée, il n'y a pas de démonstration de cette proposition ; nous en avons démontré une petite partie dans le lemme 3.1.10 (qui est l'analogie de ce lemme pour les faisceaux

homotopiques).

Grâce à cette définition, le foncteur $C^* : D^-(\mathcal{N}_k^{\text{tr}}) \rightarrow DM_-^{\text{eff}}(k)$ est monoïdal. On en déduit donc que le foncteur obtenu par restriction

$$\mathcal{N}_k^{\text{tr}} \rightarrow DM_-^{\text{eff}}(k), F \mapsto C^*F$$

est monoïdal. Finalement, on obtient la proposition suivante :

Proposition 7.1.13 *La catégorie $DM_-^{\text{eff}}(k)$, munie du produit tensoriel de la définition précédente, est monoïdale symétrique.*

Elle vérifie de plus les propriétés suivantes :

1. *Pour tous schémas algébriques lisses X et Y , on a un isomorphisme canonique*

$$M(X) \otimes M(Y) \xrightarrow{\sim} M(X \times_k Y).$$

2. *Le foncteur*

$$DM_-^{\text{eff}}(k) \rightarrow \mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}, \mathcal{M} \mapsto H^0(\mathcal{M})$$

est monoïdale symétrique.

7.2 Point de vue géométrique

On rappelle pour la commodité du lecteur la définition de la catégorie des motifs mixtes dits «géométriques» de V. Voevodsky (cf [FSV00b]).

7.2.1.– Soit T la sous-catégorie épaisse de $K^b(\mathcal{L}_{\text{cor},k})$ engendrée par les complexes suivants :

1. Le complexe

$$[\mathbb{A}_X^1] \xrightarrow{[p]} [X]$$

où X est un schéma algébrique lisse, et $p : \mathbb{A}_X^1 \rightarrow X$ la projection canonique.

2. Le complexe

$$[U \cap V] \xrightarrow{j_U + j_V} [U] \oplus [V] \xrightarrow{i_U - i_V} [X]$$

où X est un schéma algébrique lisse, U, V des ouverts de X tels que $X = U \cup V$, et i_U, i_V, j_U, j_V sont les immersions ouvertes évidentes.

Définition 7.2.2 *On définit la catégorie triangulée des motifs mixtes effectifs dits «géométriques», notée $DM_{gm}^{\text{eff}}(k)$, égale à l'enveloppe pseudo-abélienne de la catégorie triangulée quotient de $K^b(\mathcal{L}_{\text{cor},k})$ par la sous-catégorie T introduite précédemment.*

On note $M_{gm}(\cdot) : \mathcal{L}_{\text{cor},k} \rightarrow DM_{gm}^{\text{eff}}(k)$ le foncteur canonique.

La catégorie $DM_{gm}^{\text{eff}}(k)$ est munie de la structure monoïdale induite sur $K^b(\mathcal{L}_{\text{cor},k})$ par la structure monoïdale de $\mathcal{L}_{\text{cor},k}$ (qui passe au quotient).

Rappelons le théorème fondamental suivant dû à V. Voevodsky (cf [FSV00b], 3.2.6) :

Théorème 7.2.3 (Voevodsky) *Le foncteur $C^* : \mathcal{L}_{\text{cor},k} \rightarrow DM_-^{eff}(k)$ se prolonge de manière unique en un foncteur triangulé, monoïdal et pleinement fidèle*

$$DM_{gm}^{eff}(k) \rightarrow DM_-^{eff}(k).$$

Par composition avec le foncteur canonique $H^0 : DM_-^{eff}(k) \rightarrow H\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ qui associe à un complexe son groupe de cohomologie en degré 0, on en déduit donc un foncteur canonique

$$H^0 : DM_{gm}^{eff}(k) \rightarrow H\mathcal{N}_k^{\text{tr}}.$$

Pour un motif géométrique A , $H^0(A)$ est donc un faisceau homotopique.

7.2.4.– On appelle motif de Tate, noté $\mathbb{Z}(1)$, le motif géométrique représenté par le complexe

$$[\mathbb{P}_k^1] \rightarrow [\text{Spec}(k)]$$

où $[\mathbb{P}_k^1]$ est placé en degré 2. Pour tout entier naturel n , on pose $\mathbb{Z}(n) = \mathbb{Z}(1)^{\otimes, n}$, et pour tout objet A de $DM_{gm}^{eff}(k)$, on pose $A(n) = \mathbb{Z}(n) \otimes A$.

On note $DM_{gm}(k)$ la catégorie ayant pour objets les couples (A, n) où A est un motif géométrique effectif, et n est un entier relatif, avec pour groupes de morphismes

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{DM_{gm}(k)}((A, n), (B, m)) \\ &= \varinjlim_{k \geq \max(-n, -m)} \text{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}(A(n+k), B(m+k)). \end{aligned}$$

Lemme 7.2.5 *La catégorie $DM_{gm}(k)$ est triangulée et monoïdale. Le foncteur $? \otimes \mathbb{Z}(1)$ sur la catégorie $DM_{gm}(k)$ est inversible.*

Il est immédiat que la catégorie $DM_{gm}(k)$ est triangulée. La difficulté essentielle est de montrer qu'elle est monoïdale, ce qui équivaut au fait que la permutation cyclique des facteurs du motif $\mathbb{Z}(1) \otimes \mathbb{Z}(1) \otimes \mathbb{Z}(1)$ est égale à l'identité.

Définition 7.2.6 *La catégorie $DM_{gm}(k)$ définie ci-dessus, munie de ses structures triangulée et monoïdale, est appelée la catégorie triangulée des motifs mixtes géométriques.*

On a déjà rencontré le théorème de simplification de Voevodsky sous une forme affaiblie (cf 6.3.5). Rappelons sa forme la plus générale (cf [Voe02], corollaire 4.10) :

Théorème 7.2.7 (Voevodsky) *Pour tous objets \mathcal{M} et \mathcal{N} de $DM_-^{eff}(k)$, le morphisme canonique*

$$\text{Hom}_{DM_-^{eff}(k)}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow \text{Hom}_{DM_-^{eff}(k)}(\mathcal{M}(1), \mathcal{N}(1))$$

est un isomorphisme.

On en déduit ainsi le corollaire suivant :

Corollaire 7.2.8 (Voevodsky) *Le foncteur triangulé monoïdal canonique*

$$DM_{gm}^{eff}(k) \rightarrow DM_{gm}(k)$$

est pleinement fidèle.

7.3 Spectres dans la catégorie des motifs (construction conjecturale)

Dans cette sous-section, on indique comment définir une catégorie $DM(k)$ qui joue le rôle, vis-à-vis de la catégorie $DM_-^{eff}(k)$, que joue la catégorie $DM_{gm}(k)$ vis-à-vis de $DM_{gm}^{eff}(k)$.

On a défini, dans la première partie, la catégorie des modules homotopiques $H\mathcal{M}_k^{tr}$ par «stabilisation» du faisceau homotopique S_t^1 . Or, on verra plus loin que $\mathbb{Z}(1)[1]$ est quasi-isomorphe au faisceau homotopique S_t^1 (placé en degré 0). On débute notre construction en supposant que la catégorie $H\mathcal{M}_k^{tr}$ est le coeur de la catégorie $DM(k)$, de même que $H\mathcal{N}_k^{tr}$ est le coeur de la catégorie $DM_-^{eff}(k)$.

Définition 7.3.1 *On pose $\mathbb{Z}\{1\} = \mathbb{Z}(1)[1]$ (pour alléger les notations).*

On appelle $\mathbb{Z}\{1\}$ -module tout module gradué dans la catégorie graduée $\mathbb{Z} - DM_-^{eff}(k)$ sur le monoïde $\mathbb{Z}\{\}$.*

On note $DM(k)$ la sous-catégorie pleine des $\mathbb{Z}\{1\}$ -modules \mathcal{M}_ telle que le morphisme obtenu par adjonction du morphisme de multiplication structural (i.e. τ)*

$$\mathcal{M}_* \xrightarrow{\epsilon} \underline{\mathrm{Hom}}_{DM_-^{eff}(k)}(\mathbb{Z}\{1\}, \mathcal{M}_*)$$

est un isomorphisme dans $DM_-^{eff}(k)$.

En utilisant la même démarche que pour les modules homotopiques, on peut construire un foncteur Ω^∞ qui associe à un $\mathbb{Z}\{1\}$ -module un objet de $DM_{gm}(k)$, et un foncteur Σ^∞ qui à un motif gradué associe le $\mathbb{Z}\{1\}$ -module libre.

En utilisant le théorème de simplification de Voevodsky, on peut construire comme dans 6.3.15 une structure monoïdale sur $DM(k)$, et obtenir un foncteur pleinement fidèle

$$\Omega^\infty \Sigma^\infty : DM_-^{eff}(k) \rightarrow DM(k).$$

Par ailleurs, il doit exister un morphisme pleinement fidèle $DM_{gm}(k) \rightarrow DM(k)$ qui s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} DM_{gm}(k) & \longrightarrow & DM(k) \\ \uparrow & & \uparrow \\ DM_{gm}^{eff}(k) & \longrightarrow & DM_-^{eff}(k) \end{array}$$

Enfin, il doit exister une t-structure canonique sur $DM(k)$ qui prolonge celle de $DM_-^{eff}(k)$ et pour laquelle $H\mathcal{M}_k^{tr}$ soit le coeur.

Cette situation serait en parfaite analogie avec la catégorie des \mathbb{P}_k^1 -spectres de F.Morel et V. Voevodsky, ainsi qu'avec la t-structure homotopique que lui a construite F.Morel (cf [Mor]).

Chapter 8

Quelques morphismes remarquables

Dans ce chapitre, on introduit quelques morphismes remarquables dans la catégorie dérivée des motifs mixtes. Certains d'entre eux sont déjà définis dans la littérature, mais pas, à notre connaissance, pris comme objet d'étude. En particulier, on démontre certaines formules vérifiées par ces morphismes.

8.1 Image directe (morphisms finis équidimensionnels)

8.1.1 Transposée

On rappelle que pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ fini équidimensionnel dans \mathcal{L}_k , on a noté ${}^t f$ le cycle obtenu par transposition du graphe de f (cf définition 5.3.1).

La proposition 5.3.5 se traduit alors immédiatement, par application du foncteur $C^*L[.]$, de la manière suivante :

Proposition 8.1.1 *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme fini équidimensionnel, et $g : Z \rightarrow X$ un morphisme quelconque, où X, Y, Z sont des schémas intègres algébriques lisses.*

On considère le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{q} & Y \\ p \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

et on suppose que W_{red} est lisse.

Soit $R = \kappa(Y) \otimes_{\kappa(X)} \kappa(Z)$. Alors, R est un anneau artinien, et on pose $R^{(0)} = \text{Spec}(R)$. Si x est un point de $R^{(0)}$, on note $W(x)$ la composante irréductible de W qui lui correspond, munie de sa structure réduite, et on note $p_x : W(x) \rightarrow Z$ (resp. $q_x : W(x) \rightarrow Y$) la restriction de p (resp. q) à $W(x)$. Le morphisme p_x est fini équidimensionnel.

On a alors un diagramme commutatif dans $DM_-^{eff}(k)$:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{x \in R^{(0)}} M(W(x)) & \xrightarrow{\sum_x M(q_x)} & M(Y) \\ \uparrow \Sigma_x \lg(R_x) \cdot M({}^t p_x) & & \uparrow M({}^t f) \\ M(Z) & \xrightarrow{M(g)} & M(X) \end{array}$$

où $\lg(R_x)$ est la longueur de l'anneau artinien local R_x .

On énonce encore le corollaire suivant :

Corollaire 8.1.2 *Soit*

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{q} & Y \\ p \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

un diagramme cartésien dans \mathcal{L}_k tel que f est fini équidimensionnel. Alors, le diagramme suivant est commutatif dans $DM_-^{eff}(k)$:

$$\begin{array}{ccc} M(W) & \xrightarrow{M(q)} & M(Y) \\ M({}^t p) \uparrow & & \uparrow M({}^t f) \\ M(Z) & \xrightarrow{M(g)} & M(X). \end{array}$$

Remarque 8.1.3.— Ce corollaire entraîne que si $f : Y \rightarrow X$ est un isomorphisme, f étant alors fini équidimensionnel, on a l'égalité :

$$M({}^t f) = M(f)^{-1}.$$

8.1.2 Cup-produit externe

On définit dans cette sous-section un cup-produit externe, qui généralise celui de 2.2.21 :

Définition 8.1.4 *Soient X un schéma algébrique lisse, et $\Delta_X : X \rightarrow X \times_k X$ l'immersion fermée diagonale. Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} des objets de $DM_-^{eff}(k)$ et*

$$\begin{aligned} \alpha &: M(X) \rightarrow \mathcal{M} \\ \beta &: M(X) \rightarrow \mathcal{N} \end{aligned}$$

des applications de $DM_-^{eff}(k)$.

On appelle cup-produit externe de α et β sur X le morphisme

$$\alpha \otimes \beta \circ \Delta_X : M(X) \rightarrow M(X) \otimes M(X) \rightarrow \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}.$$

On le note $\alpha \smile_X \beta$ ou simplement $\alpha \smile \beta$.

Remarque 8.1.5.— Dans cette définition, on interprète les éléments α et β comme des classes à coefficients respectifs dans \mathcal{M} et \mathcal{N} . Le cup-produit externe défini ci-dessus est familier en topologie algébrique.

Remarque 8.1.6.– On rencontrera particulièrement ce cup-produit dans le cas où $\mathcal{M} = \mathbb{Z}(n)[2n]$ et $\mathcal{N} = \mathbb{Z}(m)[2m]$, pour n et m des entiers naturels.

Or, puisque $\mathbb{Z}(*)[2*]$ est muni d'une structure d'anneau canonique pour le produit tensoriel de $DM_-^{eff}(k)$. En effet, pour tous entiers naturels n et m , on dispose d'un isomorphisme canonique $\epsilon : \mathbb{Z}(n)[2n] \otimes \mathbb{Z}(m)[2m] \rightarrow \mathbb{Z}(n+m)[2(n+m)]$. Si $\alpha : M(X) \rightarrow \mathbb{Z}(n)[2n]$ et $\beta : M(X) \rightarrow \mathbb{Z}(m)[2m]$ sont deux morphismes, on définit le cup-produit interne associé à ϵ de α et β comme le morphisme

$$\epsilon \circ \alpha \smile \beta.$$

Dans cette situation, on confondra le cup-produit externe $\alpha \smile \beta$ et le cup-produit interne ci-dessus.

On obtient facilement les propriétés suivantes de ce cup-produit :

Lemme 8.1.7 *Considérons deux schémas X et Y algébriques lisses, et $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas. Soient $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}$ des motifs dans $DM_-^{eff}(k)$, et*

$$\alpha : M(X) \rightarrow \mathcal{M}$$

$$\beta : M(X) \rightarrow \mathcal{N}$$

$$\gamma : M(X) \rightarrow \mathcal{P}$$

des morphismes dans $DM_-^{eff}(k)$. Alors, les relations suivantes sont vérifiées :

1. $(\alpha \smile \beta) \smile \gamma = \alpha \smile (\beta \smile \gamma)$.
2. $(\alpha \smile_X \beta) \circ f = (\alpha \circ f) \smile_Y (\beta \circ f)$.

PREUVE : Cela résulte chaque fois d'une commutativité évidente des morphismes diagonaux avec les morphismes impliqués. \square

8.1.3 Formule de projection

On peut énoncer alors une formule de projection pour les motifs :

Proposition 8.1.8 *Pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans \mathcal{L}_k qui est fini équidimensionnel, on a l'égalité :*

$$(M(f) \smile M(1_Y)) \circ M({}^t f) = M(1_X) \smile M({}^t f).$$

PREUVE : Il suffit en effet d'appliquer la proposition 5.3.7, dans le cas $Y = S$ et $X = T$, avec $\alpha = 1_Y$ et $\beta = 1_X$. \square

8.2 Motifs relatifs

8.2.1 Définition

On se place à la suite du paragraphe 5.4.1, dont on reprend les notations.

On commence par définir, suivant V. Voevodsky, un motif à support :

Définition 8.2.1 Soit (X, Z) une paire dans $\mathcal{P}^f\mathcal{L}_k$.

On rappelle que dans cette situation, on a noté $L[X/X - Z]$ le cône du monomorphisme $L[X - Z] \rightarrow L[X]$. On pose donc

$$M(X/X - Z) = C^*L[X/X - Z],$$

appelé motif relatif de X à support dans Z .

On a donc défini un foncteur

$$M(\cdot/\cdot) : \mathcal{P}^o\mathcal{L}_k \rightarrow DM_-^{eff}(k).$$

Remarque 8.2.2.– Pour n'importe quelle paire (X, Y) telle que X et Y sont des schémas algébriques lisses, on peut définir de même le motif

$$M(X/Y) = C^*(L[X/Y]).$$

Il nous arrivera parfois d'utiliser cette notation.

8.2.3.– Conformément aux conventions de 5.4.1, on pose

$$M(X/X - Z) = M(X, Z).$$

On abrègera le plus souvent la notation $M(X, Z)$ en $M_Z(X)$, conformément à la notation de [FSV00b].

On fera attention que le bifoncteur $M(X, Z)$ est alors contravariant par rapport à Z : si $Z \subset Z'$ sont deux sous-schémas fermés de X , on note $g : X - Z' \rightarrow X - Z$ le morphisme d'immersion ouverte canonique, et on en déduit donc un morphisme

$$M(X, Z') \rightarrow M(X, Z).$$

8.2.4.– On a un foncteur canonique $\mathcal{L}_k \rightarrow \mathcal{P}^o\mathcal{L}_k, X \mapsto (X/\emptyset)$. Par ailleurs, puisque $M(X/\emptyset) = M(X)$, on voit que le foncteur $M(\cdot, \cdot)$ prolonge le foncteur qu'on a déjà défini. Cette situation est tout à fait conforme aux considérations de la topologie algébrique, la différence se situant particulièrement dans le fait que l'on peut épaissir le sous-schéma fermé Z sans changer le motif relatif $M_Z(X)$.

On obtient alors un triangle distingué, que l'on appelle triangle de Gysin (qui correspond aux triangles de Mayer-Vietoris en topologie algébrique)

$$\begin{aligned} M(X - Z) &\xrightarrow{M(j/0)} M(X) \xrightarrow{M(1_X/0)} M(X/X - Z) \\ &\rightarrow M(X - Z)[1] \end{aligned}$$

où $j : X - Z \rightarrow X$ est l'immersion ouverte, 0 désignant les morphismes de schémas correspondants de source \emptyset . Il est par définition naturel par rapport aux morphismes de la paire ouverte $(X/X - Z)$.

8.2.2 Propriétés

La proposition suivante contient les propriétés fondamentales des motifs relatifs :

Proposition 8.2.5 *Les propriétés suivantes du foncteur*

$$M() : \mathcal{P}\mathcal{L}_k \rightarrow DM_-^{eff}(k)$$

sont vraies :

(Red) *Réduction :*

Si (X, Z) est une paire fermée, le morphisme quasi-cartésien canonique $(X, Z_{red}) \rightarrow (X, Z)$ induit l'identité $M(X, Z_{red}) \rightarrow M(X, Z)$.

(Exc) *Excision Nisnevich :*

Tout morphisme excisif $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ induit un isomorphisme $M(Y, T) \rightarrow M(X, Z)$.

(MV) *Mayer-Vietoris :*

Soient X un schéma algébrique lisse, U et V deux ouverts de X tels que $X = U \cup V$, et Z un sous-schéma fermé de X ; on a alors un triangle distingué de Mayer-Vietoris

$$M(X, Z)_{U \cap V} \xrightarrow{j_U - j_V} M(X, Z)_U \oplus M(X, Z)_V \xrightarrow{i_U + i_V} M(X, Z) \xrightarrow{+1}$$

où j_U et i_U désignent les morphismes cartésiens induits par les immersions ouvertes évidentes.

(Htp) *Homotopie :* Soit $\pi : (\mathbb{A}^1 \times X, \mathbb{A}^1 \times Z) \rightarrow (X, Z)$ le morphisme cartésien de projection canonique. Alors, le morphisme induit

$$M(\pi) : M(\mathbb{A}^1 \times X, \mathbb{A}^1 \times Z) \rightarrow M(X, Z)$$

est un isomorphisme.

PREUVE : La propriété **(Red)** est bien sûr tautologique puisque $X - Z = X - Z_{red}$. Pour la propriété **(Exc)**, il suffit de se référer à 5.4.11, puisque C^* est un foncteur.

Pour **(MV)**, on considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} M(X - Z)_{U \cap V} & \rightarrow & M(X - Z)_U \oplus M(X - Z)_V & \rightarrow & M(X - Z) \xrightarrow{+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M(U \cap V) & \longrightarrow & M(U) \oplus M(V) & \longrightarrow & M(X) \xrightarrow{+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M(X, Z)_{U \cap V} & \dashrightarrow & M(X, Z)_U \oplus M(X, Z)_V & \dashrightarrow & M(X, Z) \xrightarrow{+1} \\ \downarrow +1 & & \downarrow +1 & & \downarrow +1 \end{array}$$

Dans ce diagramme, les deux premières lignes sont des triangles distingués. Les trois colonnes étant aussi des triangles distingués, il s'ensuit que la dernière ligne formée des morphismes induits est un triangle distingué.

Pour **(Htp)**, on regarde à nouveau les triangles de Gysin pour \mathbb{A}_X^1 et \mathbb{A}_Z^1 , et on applique le fait que $M(\mathbb{A}_X^1) \simeq M(X)$, et $M(\mathbb{A}_Z^1) \simeq M(Z)$. \square

La proposition suivante se déduit en fait des propriétés précédentes :

Proposition 8.2.6 Soient X un schéma algébrique lisse, et (Z, Z') un couple de sous-schémas fermés disjoints de X .

(Add) On considère le morphisme canonique $p_1 : M_{Z \sqcup Z'}(X) \rightarrow M_Z(X)$ (resp. $p_2 : M_{Z \sqcup Z'}(X) \rightarrow M_{Z'}(X)$) correspondant à l'inclusion i_1 (resp. i_2) de Z (resp. Z') dans $Z \sqcup Z'$.

Alors, le morphisme

$$p_1 + p_2 : M_{Z \sqcup Z'}(X) \rightarrow M_Z(X) \oplus M_{Z'}(X)$$

est un isomorphisme.

— Par ailleurs, si on note $j_2 : X - Z' \rightarrow X$ l'immersion ouverte canonique, le morphisme $(j_2, 1_Z) : (X - Z', Z) \rightarrow (X, Z)$ est excisif, donc le morphisme $M(j_2, 1_Z)$ est un isomorphisme.

Par ailleurs, le morphisme $(j_2, i_1) : (X - Z', Z) \rightarrow (X, Z \sqcup Z')$ est cartésien. On peut donc considérer le morphisme ι_1 défini par la composition suivante

$$M_Z(X) \xrightarrow{M(j_2, 1_Z)^{-1}} M_Z(X - Z') \xrightarrow{M(j_2, i_1)} M_{Z \sqcup Z'}(X).$$

$\overset{\iota_1}{\curvearrowright}$

Alors ι_1 correspond à travers l'isomorphisme précédent à l'inclusion du facteur direct $M_Z(X)$.

PREUVE : Pour la première assertion, on considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} M(X - Z) & \longrightarrow & M(X) & \longrightarrow & M_Z(X) \xrightarrow{+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M(X - (Z \sqcup Z')) & \longrightarrow & M(X) & \longrightarrow & M_{Z \sqcup Z'}(X) \xrightarrow{+1} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ M(X - Z') & \longrightarrow & M(X') & \longrightarrow & M_{Z'}(X) \xrightarrow{+1} \end{array}$$

Or, $X = (X - Z) \cup (X - Z')$, et on peut considérer les immersions ouvertes :

$$\begin{array}{ccc} & X - Z & \\ & \nearrow k_1 & \searrow j_1 \\ X - (Z \sqcup Z') & \xrightarrow{k} & X \\ & \searrow k_2 & \nearrow j_2 \\ & X - Z' & \end{array}$$

Dès lors, on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} M(X - (Z \sqcup Z')) & \xrightarrow{k_1+k_2} & M(X - Z) \oplus M(X - Z') & \xrightarrow{j_1-j_2} & M(X) \\ \downarrow k & & \downarrow j_1+j_2 & & \downarrow = \\ M(X) & \xrightarrow{1_X+1_X} & M(X) \oplus M(X) & \xrightarrow{1_X-1_X} & M(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M_{Z \sqcup Z'}(X) & \longrightarrow & M_Z(X) \oplus M_{Z'}(X) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où toutes les lignes sont des triangles distingués de Mayer-Vietoris, et toutes les colonnes des triangles distingués, d'où le résultat attendu.

Pour la deuxième assertion, il s'agit de montrer que $p_1 \circ \iota_1$ est égal à l'identité. Or, par définition, cela équivaut à montrer que $p_1 \circ M(j_2, i_1) = M(j_2, 1_Z)$. Pour montrer cette dernière égalité, on revient aux paires ouvertes qui correspondent. Ainsi, dans la liste suivante, chaque morphisme dans la catégorie des motifs est induit par le morphisme de paires ouvertes qui le suit :

$$\begin{array}{lll} p_1 & \text{induit par} & (X/X - (Z \sqcup Z')) \xrightarrow{(1/k_1)} (X/X - Z) \\ M(j_2, i_1) & \text{induit par} & (X - Z/X - (Z \sqcup Z')) \xrightarrow{(j_1/1)} (X/X - (Z \sqcup Z')) \\ M(j_2, 1_Z) & \text{induit par} & (X/X - (Z \sqcup Z')) \xrightarrow{(j_1/k_1)} (X - Z'/X - Z) \end{array}$$

L'égalité est donc évidente. □

8.2.7.– Le motif relatif est donc fonctoriel par rapport aux morphismes de paires fermées quasi-cartésiens. Mais par ailleurs, il est aussi fonctoriel par rapport à la transposée des morphismes finis équidimensionnels.

Soit en effet $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ un morphisme quasi-cartésien fini équidimensionnel de paires fermées dans $\mathcal{P}^f\mathcal{L}_k$. On en a déjà déduit un morphisme ${}^t(f, g) : L[Y/Y - T] \rightarrow L[X/X - Z]$ dans 5.4.31. On en déduit donc par application du foncteur C^* un morphisme $M({}^t(f, g)) : M_T(Y) \rightarrow M_Z(X)$ qui par définition s'inscrit dans le morphisme de triangle distingué suivant :

$$\begin{array}{ccccc} M(X - Z) & \longrightarrow & M(X) & \longrightarrow & M_Z(X) \xrightarrow{+1} \\ M({}^th) \downarrow & & \downarrow M({}^tf) & & \downarrow M({}^t(f,g)) \\ M(Y - T) & \longrightarrow & M(Y) & \longrightarrow & M_T(Y) \xrightarrow{+1} \end{array}$$

où h est le morphisme fini équidimensionnel obtenu par restriction de f .

Par ailleurs, ces morphismes satisfont la formule de projection suivante :

Proposition 8.2.8 *Considérons un carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} (Y', T') \xrightarrow{(p', q')} & & (Y, T) \\ (f', g') \downarrow & & \downarrow (f, g) \\ (X', Z') \xrightarrow{(p, q)} & & (X, Z) \end{array}$$

de paires fermées dans $\mathcal{P}^f\mathcal{L}_k$, tel que (p, q) est quasi-cartésien, et (f, g) est quasi-cartésien fini équidimensionnel.

Alors, le diagramme suivant de $DM_-^{eff}(k)$ est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M_{Z'}(X') & \xrightarrow{M(p,q)} & M_Z(X) \\ M({}^t(f', g')) \downarrow & & \downarrow M({}^t(f, g)) \\ M_{T'}(Y') & \xrightarrow{M(p', q')} & M_T(Y) . \end{array}$$

PREUVE : En effet, les hypothèses entraînent que dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 Y' - T' & \longrightarrow & Y - T & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & Y' & \longrightarrow & Y \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 X' - Z' & \longrightarrow & X - Z & & \\
 \searrow & \downarrow & \searrow & & \downarrow f \\
 & & X' & \xrightarrow{p} & X
 \end{array}$$

les carrés de face, de derrière, de gauche et de droite sont cartésiens. Comme dans ce diagramme, tous les schémas sont lisses sur k , et tous les morphismes verticaux sont finis équidimensionnels, le corollaire 5.3.6 entraîne que le diagramme suivant dans $\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ est commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 L[X' - Z'] & \longrightarrow & L[X - Z] & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & L[X'] & \longrightarrow & L[X] \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 L[Y' - T'] & \longrightarrow & L[Y - T] & & \\
 \searrow & \downarrow & \searrow & & \downarrow L^t[f] \\
 & & L[Y'] & \xrightarrow{L[p]} & L[Y].
 \end{array}$$

Dans ce diagramme, tous les morphismes verticaux sont obtenus en considérant la transposée des morphismes verticaux du diagramme précédent.

Dès lors, il induit un carré commutatif sur les conoyaux des flèches dans le sens de la profondeur, qui par application du foncteur C^* donne exactement le diagramme de l'énoncé. \square

8.2.3 Motif de Thom

La construction qui suit est directement inspirée de la topologie algébrique. Elle s'inspire directement de la définition de l'«espace de Thom» dans la catégorie homotopique des schémas (cf [MV01]).

Définition 8.2.9 Soient X un schéma algébrique lisse, et E/X un fibré vectoriel.

On appelle motif de Thom le motif relatif $M(E, X)$ où X est vu comme un sous-schéma fermé de E à travers la section nulle.

On note ce motif $M\text{Th}(E/X)$, et souvent abusivement $M\text{Th}(E)$.

On peut réécrire plus suggestivement ce motif

$$M\text{Th}(E) = M(E/E^\times),$$

si l'on note E^\times le complémentaire de la section nulle de E .

Comme les motifs relatifs, le motif de Thom est fonctoriel par rapport aux morphismes quasi-cartésiens $(f, g) : (F, Y) \rightarrow (E, X)$ où E/X et F/Y sont des fibrés vectoriels. On notera en particulier que f peut très bien ne pas être un morphisme de fibrés vectoriels. Toutefois, lorsqu'on s'est donné un morphisme $\phi : E \rightarrow F$ de fibrés vectoriels sur X , on notera simplement $M\text{Th}(\phi)$ le morphisme sur les espaces de Thom associés.

Notons enfin, que le motif de Thom est fonctoriel par rapport à la transposée des morphismes quasi-cartésiens finis (cf 8.2.7).

8.2.10.– Soient E/X et F/Y deux fibrés vectoriels. On note \mathcal{E} et \mathcal{F} le dual de leur faisceau des sections respectif. On peut définir la somme externe de \mathcal{E} et \mathcal{F} :

$$\mathcal{E} \boxplus \mathcal{F} = (p_{XY}^X)^* \mathcal{E} \oplus (p_{XY}^Y)^* \mathcal{F}.$$

On notera simplement $E \boxplus F$ le fibré vectoriel sur $X \times_k Y$ associé à l' \mathcal{O}_{XY} -module localement libre $\mathcal{E} \boxplus \mathcal{F}$. Ainsi, le schéma sous-jacent à $E \boxplus F$ est simplement $E \times_k F$, mais on fera attention que sa structure d'espace vectoriel sur $X \times_k Y$ n'est pas égale à la structure produit. Ainsi, le complémentaire de la section nulle dans $E \boxplus F$ est égal à

$$E^\times \times_k F \cup E \times_k F^\times.$$

On obtient donc un isomorphisme canonique

$$M\text{Th}(E \boxplus F) \simeq M\text{Th}(E) \otimes M\text{Th}(F).$$

Si E/X est un fibré vectoriel, le morphisme cartésien de paires fermées $(\Delta_E, \Delta_X) : (E, X) \rightarrow (E \boxplus E, X \times_k X)$ induit un morphisme

$$M\text{Th}(E) \rightarrow M\text{Th}(E) \otimes M\text{Th}(E),$$

que l'on notera $\Delta_{E/X}$. Grâce à ce morphisme diagonal, on peut définir comme dans 8.1.4 un cup-produit externe sur les motifs dont la source est un espace de Thom. A tous morphismes

$$\left. \begin{array}{l} \alpha : M\text{Th}(E) \rightarrow \mathcal{M} \\ \beta : M\text{Th}(F) \rightarrow \mathcal{N} \end{array} \right\} \text{ on associe } \alpha \smile \beta = \alpha \otimes \beta \circ \Delta_{E/X}.$$

Ce cup-produit vérifie les propriétés analogues de son homologue défini en 8.1.4. Elles s'en déduisent de plus sans peine, et on se borne à les énoncer :

Lemme 8.2.11 *Soient X, Y des schémas et $E/X, F/Y$ des fibrés vectoriels. On considère un morphisme quasi-cartésien $(f, g) : (F, Y) \rightarrow (E, X)$.*

On a alors les relations suivantes :

1. *Pour tous morphismes dans $DM_-^{eff}(k)$*

$$\alpha : M\text{Th}(E) \rightarrow \mathcal{M}, \beta : M\text{Th}(E) \rightarrow \mathcal{N} \text{ et } \gamma : M\text{Th}(E) \rightarrow \mathcal{P},$$

$$(a) (\alpha \smile \beta) \smile \gamma = \alpha \smile (\beta \smile \gamma).$$

$$(b) (\alpha \smile \beta) \circ M\text{Th}(f, g) = (\alpha \circ M\text{Th}(f, g)) \smile (\beta \circ M\text{Th}(f, g)).$$

2. *Si f est fini équidimensionnel,*

$$M\text{Th}(1_E) \smile M\text{Th}({}^t(f, g)) = (M\text{Th}(f, g) \smile M\text{Th}(1_F)) \circ M\text{Th}({}^t(f, g)).$$

Pour terminer ce paragraphe, on montre comment les motifs de Thom sont reliés au problème des poids dans la catégorie $DM_-^{eff}(k)$. On rappelle qu'on a défini en 7.2.4 le motif $\mathbb{Z}(1)$ par la formule

$$\mathbb{Z}(1) = M(\mathbb{P}_k^1/\{1\})[-2].$$

Proposition 8.2.12 *Il existe des isomorphismes canoniques dans $DM_-^{eff}(k)$*

$$M\text{Th}(\mathbb{A}_k^1) \simeq \mathbb{Z}(1)[2]$$

et

$$M\text{Th}(\mathbb{A}_k^1) \simeq S_t^1[1]$$

où l'on rappelle que S_t^1 est le faisceau homotopique défini dans 3.4.10.

PREUVE : On construit tout d'abord le premier isomorphisme. Considérons le morphisme cartésien de paires fermées $(\mathbb{A}_k^1, \{0\}) \rightarrow (\mathbb{P}_k^1, \{0\})$, induit par l'immersion ouverte évidente. Alors, ce morphisme est excisif, et il induit donc un isomorphisme

$$M\text{Th}(\mathbb{A}_k^1) \xrightarrow{\sim} M(\mathbb{P}_k^1, \{0\}).$$

Mais alors, la projection canonique $\mathbb{A}_k^1 \rightarrow \text{Spec}(k)$ induit un morphisme canonique

$$M(\mathbb{P}_k^1, \{0\}) = C^*(L[\mathbb{P}_k^1/\mathbb{A}_k^1]) \rightarrow C^*(L[\mathbb{P}_k^1/\{0\}]) = \mathbb{Z}(1)[2],$$

et ce morphisme est un isomorphisme puisque \mathbb{A}_k^1 est contractile dans $DM_-^{eff}(k)$. La composition de ces deux isomorphismes nous donne le premier isomorphisme.

Pour le deuxième isomorphisme, on va faire le calcul en deux étapes :

Lemme 8.2.13 *Considérons le morphisme ϕ défini par le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccccc} M(\text{Th}(\mathbb{A}_k^1))[-1] & \rightarrow & M(\mathbb{G}_m) & \xrightarrow{j^*} & M(\mathbb{A}_k^1) \xrightarrow{+1} \\ & & \parallel & \searrow \phi & \\ M(\{1\}) & \xrightarrow{s^*} & M(\mathbb{G}_m) & \rightarrow & M(\mathbb{G}_m/\{1\}) \xrightarrow{+1} \end{array}$$

où $j : \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ est l'immersion ouverte canonique, et $s : \{1\} \rightarrow \mathbb{G}_m$ l'immersion fermée du point unité du schéma en groupe \mathbb{G}_m .

Alors, ϕ est un isomorphisme.

PREUVE : C'est une simple application de l'axiome de l'octaèdre. Prenons en effet pour base d'un octaèdre le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} M(\mathbb{A}_k^1) & \longleftarrow & & & M(\{1\}) \\ & \swarrow j^* & = & \nwarrow s^* & \\ +1 \downarrow & & \star & M(\mathbb{G}_m) & \star \uparrow +1 \\ & \searrow & = & & \swarrow \\ M(\text{Th}(\mathbb{A}_k^1))[-1] & \xrightarrow{\phi} & & & M(\mathbb{G}_m/\{1\}). \end{array}$$

Le symbole = signale un triangle commutatif, et le symbole \star un triangle distingué.

Alors, d'après l'axiome de l'octaèdre, on peut trouver un sommet de cet octaèdre :

$$\begin{array}{ccccc} M(\mathbb{A}_k^1) & \longleftarrow & (js)^* & & M(\{1\}) \\ & \swarrow & \star & +1 & \nwarrow \\ +1 \downarrow & & = & C & = \uparrow +1 \\ & \searrow & +1 & & \swarrow \\ M(\text{Th}(\mathbb{A}_k^1))[-1] & \xrightarrow{\phi} & & & M(\mathbb{G}_m/\{1\}). \end{array}$$

Or, le morphisme $js : \{1\} \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ est une section du morphisme de projection $\mathbb{A}_k^1 \rightarrow \text{Spec}(k)$, donc c'est un isomorphisme dans la catégorie $DM_-^{eff}(k)$. En conséquence, C est nul, et donc ϕ est un isomorphisme. \square

On rappelle que le faisceau $\mathbb{G}_m(\cdot)$ des points de \mathbb{G}_m (restreint au site \mathcal{L}_k) est un faisceau invariant par homotopie, et qu'il est de plus munit de transferts (cf 3.4.14). La proposition 3.4.13 montre que le morphisme graphe $\mathbb{G}_m(\cdot) \rightarrow L[\mathbb{G}_m]$ induit un isomorphisme de faisceaux avec transferts

$$\mathbb{G}_m(\cdot) \xrightarrow{\sim} h_0(L[\mathbb{G}_m/\{1\}]) = S_t^1.$$

On va voir qu'on peut renforcer cette proposition dans la catégorie $DM_-^{eff}(k)$:

Lemme 8.2.14 *Le morphisme graphe*

$$\mathbb{G}_m(\cdot) \rightarrow L[\mathbb{G}_m]$$

induit un isomorphisme dans $DM_-^{eff}(k)$

$$\mathbb{G}_m(\cdot) \xrightarrow{\quad \sim \quad} M(\mathbb{G}_m) \longrightarrow M(\mathbb{G}_m/\{1\}).$$

La preuve décrite ici est tirée de la démonstration du lemme 3.2 dans [SV00a].

PREUVE : On doit montrer que le morphisme induit

$$\mathbb{G}_m(\cdot) \rightarrow C^*(L[\mathbb{G}_m/\{1\}])$$

est un isomorphisme dans $DM_-^{eff}(k)$. Or, ces deux complexes sont \mathbb{A}^1 -locaux, et pour montrer que ce morphisme est un isomorphisme, on se réduit donc à montrer qu'il induit un isomorphisme sur les faisceaux de cohomologie.

Or le lemme 3.4.13 montre déjà que le morphisme

$$\mathbb{G}_m(\cdot) = H^0(\mathbb{G}_m(\cdot)) \rightarrow H^0(M(\mathbb{G}_m/\{1\})) = h_0(L[\mathbb{G}_m/\{1\}])$$

est un isomorphisme.

Comme $\mathbb{G}_m(\cdot)$ est concentré en degré 0, il ne reste plus qu'à démontrer que la cohomologie du complexe $C^*(L[\mathbb{G}_m/\{1\}])$ est nulle en degré différents de 0.

Le complexe $C^*(L[\mathbb{G}_m/\{1\}])$ est facteur direct du complexe $C^*(L[\mathbb{G}_m])$, donc il suffit de démontrer l'assertion pour ce dernier complexe. Or, par définition,

$$H^i(C^*(L[\mathbb{G}_m]))(U) = H_{-i}^{sing}(U \times \mathbb{G}_m/U)$$

où le deuxième groupe désigne l'homologie singulière de Suslin de la courbe relative $U \times \mathbb{G}_m/U$. Or il est démontré dans [SV96] (Theorem 3.1), que ce groupe est nul pour $i \neq 0$ (car la courbe en question admet une bonne compactification évidente), ce qui démontre finalement l'assertion. \square

On obtient finalement l'isomorphisme souhaité par composition des deux précédents. \square

Remarque 8.2.15.– On obtient dès lors un isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_{DM_-^{eff}(k)}\left(M\mathrm{Th}\left(\mathbb{A}_k^1\right)\right) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_k}\left(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m\right) / \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_k}\left(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{G}_m\right) \\ &= (\mathbb{Z} \oplus k^\times) / k^\times \end{aligned}$$

Par ailleurs, il résulte du calcul de la démonstration précédente que le morphisme canonique

$$\mathrm{End}_{\mathcal{P}^f\mathcal{L}_k}\left(\mathbb{A}_k^1, \{0\}\right) \rightarrow \mathrm{End}_{DM_-^{eff}(k)}\left(M\mathrm{Th}\left(\mathbb{A}_k^1\right)\right) \simeq \mathbb{Z}$$

est l'application qui à un morphisme de paires fermées quasi-cartésien (f, i) associe le degré de f .

En effet, notons $g : \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$ le morphisme obtenu par restriction de f . Alors, la classe de (f/g) dans $\mathrm{End}_{DM_-^{eff}(k)}\left(M\mathrm{Th}\left(\mathbb{A}_k^1\right)\right)$ correspond à la classe de g dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_k}\left(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m\right) / \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_k}\left(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{G}_m\right)$. Or, puisque f induit un morphisme quasi-cartésien, il est nécessairement induit par un polynôme de la forme $\lambda.T^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in k^\times$; la classe de (f/g) est alors n , soit le degré de f .

Ceci montre bien sûr aussi de manière élémentaire que

$$\mathrm{End}_{DM_-^{eff}(k)}\left(\mathbb{Z}(1)\right) \simeq \mathbb{Z}.$$

On peut interpréter ce résultat comme une indication du fait que les motifs correspondent conjecturalement dans la catégorie homotopique stable (cf [Mor]) à des spectres orientés dont la loi de groupe formel est additive. Pour eux, l'application de Hopf est donc nulle.

8.2.4 Déformation au cône normal

Dans cette sous-section on montre comment l'utilisation de la déformation au cône normal permet de démontrer facilement le théorème de pureté. Il s'agit de la version finale du théorème 5.4.26.

Le travail qu'on a déjà effectué sur la déformation au cône normal nous permet de montrer le théorème suivant :

Théorème 8.2.16 *Soient X un schéma algébrique lisse, et Z un sous-schéma de X qui est de plus lisse sur k .*

Considérons les morphismes de déformation au cône normal :

$$(X, Z) \xrightarrow{d} (D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) \xleftarrow{d'} (N_Z X, Z).$$

Alors les morphismes induits

$$M_Z(X) \xrightarrow{M(d)} M(D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) \xleftarrow{M(d')} M\mathrm{Th}(N_Z X)$$

sont des isomorphismes.

PREUVE : 1) Supposons tout d'abord que la paire (X, Z) est munie d'une paramétrisation $f : (X, Z) \rightarrow (\mathbb{A}_S^{n+d}, \mathbb{A}_S^n)$.

Par functorialité de la déformation au cône normal, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} (X, Z) & \longrightarrow & (D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) & \longleftarrow & (N_Z X, Z) \\ f \downarrow & & \downarrow Df & & \downarrow Nf \\ (\mathbb{A}_k^{n+d}, \mathbb{A}_k^n) & \longrightarrow & (\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}_k^{n+d}, \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}_k^n) & \longleftarrow & (\mathbb{A}_k^{n+d}, \mathbb{A}_k^n) \end{array}$$

où tous les morphismes de paires sont cartésiens, car $D(\mathbb{A}_k^{n+1}, \mathbb{A}_k^n) \simeq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}_k^{n+1}$ (cf début de la preuve de 5.4.26).

Dès lors, d'après la construction de 5.4.9, on en déduit le diagramme suivant dans $\mathcal{P}^f \mathcal{L}_S$

$$\begin{array}{ccccc} (X, Z) & \longrightarrow & (D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) & \longleftarrow & (N_Z X, Z) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (\Omega_1, Z) & \longrightarrow & (\Omega, \mathbb{A}_Z^1) & \longleftarrow & (\Omega_0, Z) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{A}_Z^1, Z) & \longrightarrow & (\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}_Z^1, \mathbb{A}_Z^1) & \longleftarrow & (\mathbb{A}_Z^1, Z) \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont excisifs.

Par application de $M(., .)$, on obtient donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} M(X, Z) & \xleftarrow{\tilde{d}_*} & M(D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\tilde{d}_*} & M(N_Z X, Z) \\ \sim \uparrow & & \sim \uparrow & & \uparrow \sim \\ M(\Omega_1, Z) & \longrightarrow & M(\Omega, \mathbb{A}_Z^1) & \longleftarrow & M(\Omega_0, Z) \\ \sim \downarrow & & \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ M(\mathbb{A}_Z^1, Z) & \xrightarrow{(\tilde{s}_1)_*} & M(\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}_Z^1, \mathbb{A}_Z^1) & \xleftarrow{(\tilde{s}_0)_*} & M(\mathbb{A}_Z^1, Z) \end{array}$$

où tous les morphismes verticaux sont des isomorphismes d'après la propriété **(Exc)** . Or les morphismes du bas sont aussi des isomorphismes d'après la propriété **(Htp')** , ce qui conclut ce cas particulier.

2) Or, puisque Z et X sont lisses sur S , il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i=1, \dots, r}$ de X , tel que pour tout i , la paire $(X, Z)_{U_i}$ admette une paramétrisation sur S .

On fait une récurrence sur i pour montrer que le théorème est vrai pour la paire $(X, Z)_{U_1 \cap \dots \cap U_i}$.

D'après le 1), le théorème est vrai pour $i = 1$.

Supposons donc l'hypothèse vraie au rang i . On pose $U = U_{i+1}$ et $V = U_1 \cap \dots \cap U_i$, de sorte que le théorème est vrai pour $(X, Z)_U$ et $(X, Z)_V$. Or, le théorème est aussi vrai pour $U \cap V$ puisque la paramétrisation de $(X, Z)_U$ est encore une paramétrisation de $(X, Z)_{U \cap V}$ et l'on peut encore appliquer le 1) pour cette dernière paire.

Or, la déformation au cône normal est functorielle par rapport aux morphismes cartésiens de la paire (X, Z) ; on peut alors appliquer la propriété **(MV)** pour obtenir le

diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
M(X, Z)_{U \cap V} & \longrightarrow & M(D_Z X, \mathbb{A}_Z^1)_{U \cap V} & \longleftarrow & M\text{Th}(N_Z X)_{U \cap V} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
M(X, Z)_{U \oplus V} & \longrightarrow & M(D_Z X, \mathbb{A}_Z^1)_{U \oplus V} & \longleftarrow & M\text{Th}(N_Z X)_{U \oplus V} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
M(X, Z) & \longrightarrow & M(D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) & \longleftarrow & M\text{Th}(N_Z X) \\
\downarrow^{+1} & & \downarrow^{+1} & & \downarrow^{+1}
\end{array}$$

où $(D_Z X, \mathbb{A}_Z^1)_U$ désigne la paire $(D_Z X \times_X U, \mathbb{A}_Z^1 \times_X U)$, et similairement pour l'espace de Thom.

Dès lors, comme dans ces deux morphismes de triangles distingués, deux des morphismes sont des isomorphismes, il en est de même du troisième. \square

8.2.17.– D'après B.3, la déformation au cône normal est naturelle par rapport aux morphismes cartésiens de paires fermées. Plus précisément, le diagramme (B.2) montre que l'isomorphisme produit dans le théorème ci-dessus est naturel par rapport aux morphismes cartésiens de paires fermées.

De plus, le travail effectué dans 5.4.3 montre que la déformation au cône normal est encore naturelle par rapport aux morphismes quasi-cartésiens exacts de paires fermées. A un tel morphisme $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$, on a associé un morphisme quasi-cartésien de paires fermées

$$D_g f : (D_T Y, \mathbb{A}_T^1) \rightarrow (D_Z X, \mathbb{A}_Z^1)$$

qui induit en considérant sa fibre au point 1 de \mathbb{A}^1 un morphisme quasi-cartésien $(N_g f, g) : (N_T Y, T) \rightarrow (N_Z X, Z)$.

Il en résulte qu'à travers les isomorphismes de déformation au cône normal, le morphisme $M(f, g)$ correspond au morphisme $M(N_g f, g)$.

Remarque 8.2.18.– On notera par abus $M\text{Th}(N_g f)$ le morphisme $M(N_g f, g)$, bien que le morphisme $N_g f$ ne soit pas en général un di-morphisme de fibrés vectoriels.

8.3 Classes de Chern

8.3.1 Cohomologie motivique et groupe de Chow classique

Dans cette sous-section, on considère le groupe gradué

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}_{DM_-^{eff}(k)}(M(X), \mathbb{Z}(n)[2n]),$$

que l'on note $H^{2*}(X; \mathbb{Z}(*))$. D'après la remarque 8.1.6, on obtient une structure d'anneau canonique sur ce groupe gradué grâce au cup-produit (interne) défini dans cette remarque.

8.3.1.– Considérons maintenant le faisceau homotopique $S_t^n = H^0(\mathbb{Z}(n)[n])$. Par définition du produit tensoriel dans $DM_-^{eff}(k)$, on obtient

$$S_t^n \otimes S_t^m = C^*(S_t^n \otimes^{tr, L} S_t^m),$$

où l'on rappelle que $\otimes^{tr,L}$ désigne le produit tensoriel des complexes de faisceaux avec transferts. Comme ce complexe est situé en degrés négatifs ou nuls, on en déduit un morphisme d'augmentation canonique

$$\begin{aligned} S_t^n \otimes S_t^m &\rightarrow H^0(C^*(S_t^n \otimes^{tr,L} S_t^m)) \\ &\simeq h_0(S_t^n \otimes^{tr} S_t^m) = S_t^n \otimes^{Htr} S_t^m = S_t^{n+m} \end{aligned}$$

que l'on note μ .

On peut dès lors définir grâce au morphisme μ un cup-produit qui munit le groupe gradué

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}_{DM_{-}^{eff}(k)}(M(X), S_t^n[n]) = H^n(X; S_t^n)$$

d'une structure d'anneau gradué. Le lemme suivant montre que cette structure coïncide avec celle que nous avons définie dans la première partie (cf 6.3.22) :

Lemme 8.3.2 *Soit X un schéma algébrique lisse.*

Alors, le produit défini ci-dessus coïncide avec le produit défini dans 6.3.22.

PREUVE : Soient α et β des classes respectivement dans $H^n(X; S_t^n)$ et $H^m(X; S_t^m)$, pour des entiers n et m .

Dans la définition de 6.3.22, on interprétait ces classes comme des morphismes $\alpha : L[X] \rightarrow S_t^n[n]$ et $\beta : L[X] \rightarrow S_t^m[m]$ dans $D^-(\mathcal{A}_k^{tr})$. D'après ce même numéro, le produit de ces classes étaient alors

$$\begin{aligned} L[X] \rightarrow L[X \times_k X] &\xrightarrow{\alpha \otimes^{tr,L} \beta} S_t^n \otimes^{tr,L} S_t^m[n+m] \rightarrow S_t^n \otimes^{tr} S_t^m[n+m] \\ &\rightarrow h_0(S_t^n \otimes^{tr} S_t^m)[n+m] = S_t^{n+m}[n+m]. \end{aligned}$$

Dans la définition qui précède, on interprète les dites classes comme des morphismes $\alpha : C^*L[X] \rightarrow S_t^n[n]$ et $\beta : C^*L[X] \rightarrow S_t^m[m]$ dans la catégorie $D^-(\mathcal{A}_k^{tr})$. Le produit que l'on vient de définir est alors

$$\begin{aligned} C^*L[X] \rightarrow C^*L[X \times_k X] &\xrightarrow{C^*(\alpha \otimes^{tr,L} \beta)} C^*(S_t^n \otimes^{tr,L} S_t^m)[n+m] \\ &\rightarrow H^0(C^*(S_t^n \otimes^{tr} S_t^m))[n+m] = S_t^{n+m}[n+m], \end{aligned}$$

compte tenu de la définition 7.1.11.

Il ne reste plus maintenant qu'à constater que, puisque S_t^{n+m} est \mathbb{A}^1 -local, les deux applications ci-dessus coïncident dans $\text{Hom}_{DM_{-}^{eff}(k)}(M(X), S_t^n[n])$. \square

Soit n un entier naturel. Pour tout $i > n$, on a $H^i(\mathbb{Z}(n)) = 0$. Dès lors, considérant les morphismes bords de la suite spectrale d'hypercohomologie, on obtient un morphisme canonique

$$H^{2n}(X; \mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\sigma_n} H^n(X; S_t^n).$$

On note que par définition, σ_* est compatible aux structures produits que nous venons de définir sur la source et le but de ce morphisme.

On déduit alors du théorème de simplification de Voevodsky (énoncé en 7.2.7) le théorème suivant (cf corollaire 2.4 de [Voe96b] pour la démonstration) :

Théorème 8.3.3 (Voevodsky) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme défini ci-dessus*

$$H^{2n}(X; \mathbb{Z}(n)) \rightarrow H^n(X; S_t^n)$$

est un isomorphisme.

Avec l'apport de la proposition 6.3.23, on en déduit :

Théorème 8.3.4 *Pour tout schéma X algébrique lisse, il existe un isomorphisme canonique d'algèbres graduées, noté τ_X ,*

$$H^{2*}(X; \mathbb{Z}(*)) \xrightarrow{\sigma_*} H^*(X; S_t^*) \xrightarrow{(1)} CH^*(X),$$

dans lequel σ_ est l'isomorphisme du théorème précédent, et ρ_X est l'isomorphisme réciproque de celui de la proposition 6.3.23.*

De plus, ce morphisme est naturel par rapport aux structures de préfaisceaux avec transferts sur chacun des membres (cf 4.3.8 pour la définition des transferts sur le groupe de Chow).

Remarque 8.3.5.— L'isomorphisme τ_X est donc obtenu par composition de l'isomorphisme σ_* ci-dessus, et de l'isomorphisme ρ_* de 6.3.23. La petite pierre que nous avons apportée à ce théorème (qui est dû à V. Voevodsky, Suslin-Voevodsky et K.Kato pour l'isomorphisme entre K-théorie de Milnor non ramifiée et groupe de Chow) est de vérifier que cet isomorphisme est compatible aux structures produits et aux transferts, grâce notamment au travail de M.Rost.

8.3.2 Morphismes associés aux classes de Chern

Rappelons que si X est un schéma algébrique lisse, à tout fibré vectoriel E/X , on associe d'après Grothendieck (cf [Gro58]) une classe de Chern

$$c_r(E) \in CH^r(X)$$

pour tout entier naturel r , nulle si r est strictement supérieur à la dimension de E .

Remarque 8.3.6.— On fera attention que dans *loc.cit.*, la numérotation des groupes de Chow est différente de la notre. Ainsi, pour tout entier naturel n , le groupe $A^{2n}(X)$ de *loc.cit.* est égal à $CH^n(X)$ dans cette thèse.

On peut alors donner la définition suivante :

Définition 8.3.7 *Soient X un schéma algébrique lisse, et E/X un fibré vectoriel sur X . Pour tout entier naturel r , on note $\mathfrak{c}_r(E)$ le morphisme*

$$M(X) \rightarrow \mathbb{Z}(r)[2r]$$

égal à l'image de la classe de Chern $c_r(E)$ par l'isomorphisme τ_X du théorème 8.3.4.

Remarque 8.3.8.— On peut éviter le recours au théorème 8.3.4 pour définir ces morphismes «de Chern». Il suffit en effet d'utiliser le fait que la cohomologie motivique est une théorie cohomologique orientée (cf [Mor] pour la définition). Nous avons pourtant utilisé le théorème 8.3.4 pour profiter de toutes les propriétés des classes de Chern définies par Grothendieck que l'on trouve dans la littérature.

Il résulte immédiatement de cette définition que les morphismes $c_r(E)$ ne dépendent que de la classe d'isomorphisme de E .

Cette construction dispose de plus des propriétés fonctorielles suivantes :

Lemme 8.3.9 *Soient X et Y des schémas algébriques lisses, et $f : Y \rightarrow X$ un k -morphisme. On considère un fibré vectoriel E/X , et on note $E_Y = E \times_X Y$ le fibré sur Y obtenu par changement de base.*

1. *Pour tout entier naturel r , le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} M(Y) & \xrightarrow{M(f)} & M(X) \\ & \searrow c_r(E) & \swarrow c_r(E_Y) \\ & \mathbb{Z}(r)[2r] & \end{array}$$

2. *Supposons que f soit fini équidimensionnel, et que X et Y soient connexes. Soit $a \in \mathbb{N}$ le degré de f . Pour tout entier naturel r , le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} M(X) & \xrightarrow{M({}^t f)} & M(Y) \\ & \searrow c_r(E_Y) & \swarrow a.c_r(E) \\ & \mathbb{Z}(r)[2r] & \end{array}$$

PREUVE : Dans le premier cas, il suffit d'appliquer le fait que la transformation τ du théorème 8.3.4 est naturelle par rapport à f , et le fait que dans $CH^r(Y)$,

$$f^*(c_r(E)) = c_r(E_Y)$$

d'après [Gro58], théorème 1, (i).

Dans le deuxième cas, on applique cette fois le fait que τ est naturelle par rapport à la correspondance finie ${}^t f$. On déduit de 4.3.7 et de la définition des transferts sur CH^* (cf 4.3.8) que

$$CH^*({}^t f) = f_*$$

La commutativité du diagramme se traduit alors par la formule de projection

$$f_*(c_r(E_Y)) = a.c_r(E).$$

On donne [Ful98], th. 3.2, (b) comme référence pour cette formule, avec $X' = Y$, et $\alpha = [X']$. □

8.3.3 Motif d'un fibré projectif

On rappelle qu'on a défini dans 8.1.4 les cup-produit externes. On introduit alors la notation suivante :

Définition 8.3.10 *Considérons X un schéma algébrique lisse, et E/X un fibré vectoriel sur X de rang n . On note $\mathbb{P}(E)$ l'espace projectif induit par E , λ_E le fibré inversible canonique de $\mathcal{P}(E)$ et $p : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ la projection canonique.*

On définit alors le morphisme suivant :

$$\iota_r(E) = (\mathbf{c}_1(\lambda_E))^r \smile M(p)$$

où la puissance r désigne la puissance pour le cup-produit sur $H^{2*}(X; \mathbb{Z}(\ast))$.

On posera de plus :

$$\iota(E) = \sum_{r=0}^{n-1} \iota_r(E).$$

Notons tout d'abord que ce morphisme ne dépend que de la classe d'isomorphisme de E , en tant que fibré vectoriel sur X . Par ailleurs, il vérifie de plus la functorialité suivante :

Lemme 8.3.11 *Sous les hypothèses du lemme 8.3.9, on note $\mathbb{P}f : \mathbb{P}(E_Y) \rightarrow \mathbb{P}(E)$ le morphisme induit par f .*

1. *Pour tout entier naturel r , le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} M(\mathbb{P}(E_Y)) & \xrightarrow{M(\mathbb{P}f)} & M(\mathbb{P}(E)) \\ \iota_r(E_Y) \downarrow & & \downarrow \iota_r(E) \\ M(Y)(r)[2r] & \xrightarrow{M(f)(r)[2r]} & M(X)(r)[2r]. \end{array}$$

2. *Supposons que f soit fini équidimensionnel. Pour tout entier naturel r , le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} M(\mathbb{P}(E)) & \xrightarrow{M({}^t\mathbb{P}f)} & M(\mathbb{P}(E_Y)) \\ \iota_r(E) \downarrow & & \downarrow \iota_r(E_Y) \\ M(X)(r)[2r] & \xrightarrow{M({}^t f)(r)[2r]} & M(Y)(r)[2r]. \end{array}$$

PREUVE : Pour la première assertion, il nous suffit d'appliquer le 1 du lemme 8.3.9 compte tenu du lemme 8.1.7 concernant le cup-produit.

Pour la deuxième assertion, on note λ (resp. λ_Y) le fibré en droite canonique sur $\mathbb{P}(E)$ (resp. $\mathbb{P}(E_Y)$).

On trace le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 M(\mathbb{P}E) & \xrightarrow{M({}^t\mathbb{P}f)} & & & M(\mathbb{P}E_Y) \\
 \downarrow M(\Delta_E) & & & & \downarrow M(\Delta_{E_Y}) \\
 M(\mathbb{P}E) \otimes M(\mathbb{P}E) & \xrightarrow{1 \otimes M({}^t\mathbb{P}f)} & (1) & \xleftarrow{M(\mathbb{P}f) \otimes 1} & M(\mathbb{P}E_Y) \otimes M(\mathbb{P}E_Y) \\
 \downarrow c_1(\lambda)^r \otimes M(p) & & M(\mathbb{P}E) \otimes M(\mathbb{P}E_Y) & & \downarrow c_1(\lambda_Y)^r \otimes M(p_Y) \\
 M(X)(r)[2r] & \xrightarrow{(2)} & c_1(\lambda)^r \otimes M(p_Y) & \xrightarrow{(3)} & M(Y)(r)[2r] \\
 & \searrow 1 \otimes M({}^t f) & \downarrow & \swarrow & \\
 & & M(Y)(r)[2r] & &
 \end{array}$$

Le diagramme (1) est commutatif d'après 8.1.8, le diagramme (2) est commutatif d'après 8.1.2 et le diagramme (3) est commutatif d'après la première partie du lemme 8.3.9. Le fait que le diagramme total qui en résulte est commutatif conclut. \square

Selon V. Voevodsky (cf [FSV00b], prop. 3.5.1), on déduit de ces applications l'isomorphisme suivant :

Proposition 8.3.12 (V. Voevodsky) *Soient X un schéma algébrique lisse, et E/X un fibré vectoriel de rang $n > 0$.*

Alors, le morphisme

$$\mathfrak{l}(E) : M(\mathbb{P}(E)) \rightarrow \bigoplus_{r=0}^{n-1} M(X)(r)[2r]$$

de la définition 8.3.10 est un isomorphisme.

PREUVE : D'après le lemme précédent, le morphisme $\mathfrak{l}(E)$ est naturel par rapport à X . En considérant un recouvrement ouvert de X pour lequel E est trivialisable sur chacun des ouverts, et en utilisant les triangles distingués de Mayer-Vietoris associés, on se ramène au cas où E est trivialisable. Puisque l'application $\mathfrak{l}(E)$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme de E , on peut considérer une trivialisatation quelconque de E et se ramener au cas où $E = \mathbb{A}_X^n$.

Or dans ce cas, $\mathfrak{l}(\mathbb{A}_X^n) = \mathfrak{l}(\mathbb{A}_k^n) \otimes M(1_X)$. On est donc finalement ramené au cas où $E = \mathbb{A}_k^n$, c'est-à-dire au calcul de $M(\mathbb{P}_k^{n-1})$.

Mais alors, comme le cas $n = 1$ est trivial, on démontre le résultat par une récurrence sur n en utilisant le recouvrement ouvert $\mathbb{P}_k^n = \mathbb{P}_k^n - \{0\} \cup \mathbb{A}_k^n$ et le triangle distingué de Mayer-Vietoris qui lui est associé :

$$M(\mathbb{A}_k^n - 0) \rightarrow M(\mathbb{P}_k^n - \{0\}) \oplus M(\mathbb{A}_k^n) \rightarrow M(\mathbb{P}_k^n) \xrightarrow{+1}$$

On peut produire un isomorphisme canonique

$$a : M(\mathbb{A}_k^n - 0) \rightarrow \mathbb{Z}(n)[2n - 1] \oplus \mathbb{Z}$$

et par récurrence, un isomorphisme canonique

$$b : M(\mathbb{P}_k^n - \{0\}) \oplus M(\mathbb{A}_k^n) \rightarrow \bigoplus_{r=0}^{n-1} \mathbb{Z}(r)[2r] \oplus \mathbb{Z}$$

tel que le triplet $(a, b, l(E))$ soit un morphisme de triangles distingués, ce qui prouve la proposition. On renvoie à [Voe96a], preuve du théorème 4.2.7, pour la construction des isomorphismes a et b . \square

8.3.4 Isomorphisme de Thom

Commençons par introduire une notation : si X est un schéma, et E/X un fibré vectoriel, on note \hat{E} le fibré vectoriel sur X égal à $E \times_X \mathbb{A}_X^1$.

Nous allons voir comment le calcul du motif d'un fibré projectif implique le calcul des motifs de Thom (cf définition 8.2.9).

8.3.4.1 Une projection canonique

On peut d'abord énoncer le résultat suivant tiré de [MV01], prop. 2.17, (3) :

Lemme 8.3.13 *Soient X un schéma algébrique lisse, et E/X un fibré vectoriel.*

On note $L[\mathbb{P}(\hat{E})/\mathbb{P}(E)]$ le conoyau du monomorphisme induit par i dans $\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$, et on pose

$$M(\mathbb{P}(\hat{E})/\mathbb{P}(E)) = C^*L[\mathbb{P}(\hat{E})/\mathbb{P}(E)].$$

Avec ces notations, il existe un isomorphisme canonique dans $DM_-^{ef}(k)$

$$M\text{Th}(E) \simeq M(\mathbb{P}(\hat{E})/\mathbb{P}(E)).$$

PREUVE : Considérons l'immersion ouverte complémentaire de l'hyperplan à l'infini :

$$E \xrightarrow{j} \mathbb{P}(E \oplus \mathbb{A}_k^1).$$

Or le morphisme de paires $(j, 1_X)$ est excisif ; donc, d'après la propriété **(Exc)** du motif relatif (cf 8.2.5), on en déduit un isomorphisme canonique :

$$M(E, X) \xrightarrow{M(j, 1_X)} M(\mathbb{P}(E \oplus \mathbb{A}_k^1), X).$$

Considérons le diagramme suivant dans $\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L[\mathbb{P}(E)] & \xrightarrow{L[i]} & L[\mathbb{P}(\hat{E})] & \longrightarrow & L[\mathbb{P}(\hat{E})/\mathbb{P}(E)] \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow L[i'] & & \parallel & & \downarrow \sigma \\ 0 & \longrightarrow & L[\mathbb{P}(\hat{E}) - X] & \longrightarrow & L[\mathbb{P}(\hat{E})] & \longrightarrow & L[\mathbb{P}(\hat{E})/\mathbb{P}(\hat{E}) - X] \longrightarrow 0 \end{array}$$

où $i' : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(\hat{E}) - X$ est l'immersion fermée canonique, et σ est le morphisme canoniquement induit par $L[i']$.

Mais par ailleurs, $\mathbb{P}(\hat{E}) - X$ est canoniquement muni d'une structure de fibré de rang 1 sur $\mathbb{P}(E)$ telle que i' est la section nulle. Il en résulte que $C^*L[i']$ est un isomorphisme, et donc, le morphisme

$$C^*L[\mathbb{P}(\hat{E})/\mathbb{P}(E)] \xrightarrow{C^*(\sigma)} C^*L[\mathbb{P}(\hat{E})/\mathbb{P}(\hat{E}) - X]$$

est un isomorphisme.

Le morphisme $C^*(\sigma)^{-1} \circ M(j, 1_X)$ fournit l'isomorphisme attendu. \square

8.3.14.– Dans la situation du lemme précédent, on dispose donc d'un triangle distingué canonique

$$M(\mathbb{P}(E)) \xrightarrow{M(i)} M(\mathbb{P}(\hat{E})) \xrightarrow{\pi_E} M\text{Th}(E) \xrightarrow{+1} (8.1)$$

Le lemme suivant montre que le morphisme $M(i)$ admet une section :

Lemme 8.3.15 *Le carré*

$$\begin{array}{ccc} M(\mathbb{P}(E)) & \xrightarrow{M(i)} & M(\mathbb{P}(\hat{E})) \\ \wr(E) \downarrow & & \downarrow \wr(\hat{E}) \\ \bigoplus_{r=0}^{n-1} M(X)(r)[2r] & \xleftarrow{\nu} & \bigoplus_{r=0}^n M(X)(r)[2r] \end{array}$$

dans lequel ν est la projection canonique sur les $n - 1$ premiers facteurs, est commutatif.

PREUVE : On utilise la relation $i^*(\lambda_{\hat{E}}) = \lambda_E$. Elle implique que pour tout entier naturel r , $i^*(c_1(\lambda_{\hat{E}})^r) = c_1(\lambda_E)^r$. Dès lors, par functorialité de la transformation naturelle τ dans le théorème 8.3.4, on obtient

$$c_1(\lambda_{\hat{E}})^r \circ M(i) = c_1(\lambda_E)^r$$

ce qui implique $\wr_r(\lambda_{\hat{E}}) \circ M(i) = \wr_r(\lambda_E)$. Le lemme résulte dès lors de la définition 8.3.10. \square

Le triangle distingué (8.1) est donc scindé. Ainsi, le morphisme π_E admet une rétraction, et $M\text{Th}(E)$ est facteur direct de $M(\mathbb{P}(\hat{E}))$. Par ailleurs, cette projection canonique dispose d'une bonne functorialité, que l'on expose maintenant.

8.3.16.– On commence par fixer les notations suivantes : soient X un schéma et E/X , F/X deux fibrés vectoriels. On considère $\varphi : F \rightarrow E$ un morphisme homogène injectif de fibrés vectoriels sur X .

Il induit un morphisme quasi-cartésien de paires fermées $(F, X) \rightarrow (E, X)$. On notera simplement $M\text{Th}(\varphi) : M\text{Th}(F) \rightarrow M\text{Th}(E)$ le morphisme qui s'en déduit.

Par ailleurs, le morphisme φ induit un unique morphisme $\mathbb{P}(\varphi) : \mathbb{P}(F) \rightarrow \mathbb{P}(E)$ sur les fibrés projectifs associés.

Enfin, notons que l'on peut déduire de φ un morphisme homogène injectif $\hat{\varphi} : \hat{F} \rightarrow \hat{E}$.

Lemme 8.3.17 *Soient X un schéma algébrique lisse, et E/X un fibré vectoriel.*

On suppose que l'on se trouve dans l'un des deux cas suivants :

1. *On se donne un morphisme $f : Y \rightarrow X$, on pose $F = f^*E$, et on note $\varphi : F \rightarrow E$ le morphisme induit par f .*
2. *On se donne un fibré vectoriel F/X et un morphisme homogène injectif $\varphi : F \rightarrow E$ de fibrés vectoriels sur X .*

Alors,

1. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M(\mathbb{P}(\hat{F})) & \xrightarrow{\pi_F} & M\text{Th}(F) \\ M(\mathbb{P}(\hat{\varphi})) \downarrow & & \downarrow M\text{Th}(\varphi) \\ M(\mathbb{P}(\hat{E})) & \xrightarrow{\pi_E} & M\text{Th}(E). \end{array}$$

2. Supposons que φ est fini équidimensionnel. Alors, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M(\mathbb{P}(\hat{E})) & \xrightarrow{\pi_E} & M\text{Th}(E) \\ M({}^t\mathbb{P}(\hat{\varphi})) \downarrow & & \downarrow M\text{Th}({}^t\varphi) \\ M(\mathbb{P}(\hat{F})) & \xrightarrow{\pi_F} & M\text{Th}(F). \end{array}$$

PREUVE : A priori, on a deux fois deux cas à traiter, suivant la forme du morphisme φ . Toutefois, les démonstrations sont essentiellement les mêmes pour les deux sortes de morphismes φ . On traite donc en une seule fois les deux cas, en ajoutant que si l'on se trouve dans le deuxième cas, on pose $Y = X$ et $f = Id_X$.

1. Il suffit de revenir à la définition car dans le diagramme suivant, chaque carré est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} M(\mathbb{P}(\hat{F})) & \longrightarrow & M(\mathbb{P}(\hat{F})/\mathbb{P}(F)) & \longrightarrow & M(\mathbb{P}(\hat{F})/\mathbb{P}(\hat{F}) - Y) & \longleftarrow & M\text{Th}(F) \\ M(\mathbb{P}(\hat{\varphi})) \downarrow & & M(\mathbb{P}(\hat{\varphi})/\mathbb{P}(\varphi)) \downarrow & & \downarrow M(\mathbb{P}(\hat{\varphi}), f) & & \downarrow M\text{Th}(\varphi) \\ M(\mathbb{P}(\hat{E})) & \longrightarrow & M(\mathbb{P}(\hat{E})/\mathbb{P}(E)) & \longrightarrow & M(\mathbb{P}(\hat{E})/\mathbb{P}(\hat{E}) - X) & \longleftarrow & M\text{Th}(E). \end{array}$$

2. Pour la deuxième assertion, on introduit l'unique morphisme indiqué en pointillé dans le diagramme commutatif suivant de $\mathcal{A}_k^{\text{tr}}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L[\mathbb{P}(E)] & \longrightarrow & L[\mathbb{P}(\hat{E})] & \longrightarrow & L[\mathbb{P}(\hat{E})/\mathbb{P}(E)] \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow L[{}^t\mathbb{P}(\varphi)] & & \downarrow L[{}^t\mathbb{P}(\hat{\varphi})] & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & L[\mathbb{P}(F)] & \longrightarrow & L[\mathbb{P}(\hat{F})] & \longrightarrow & L[\mathbb{P}(\hat{F})/\mathbb{P}(F)] \longrightarrow 0. \end{array}$$

Notons que le diagramme (1) est commutatif d'après le corollaire 5.3.6. On note $M({}^t\mathbb{P}(\hat{\varphi})/\mathbb{P}(\varphi))$ l'application du foncteur C^* au morphisme pointillé.

Il en résulte que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} M(\mathbb{P}(\hat{E})) & \longrightarrow & M(\mathbb{P}(\hat{E})/\mathbb{P}(E)) & \longrightarrow & M(\mathbb{P}(\hat{E})/\mathbb{P}(\hat{E}) - X) & \longleftarrow & M\text{Th}(E) \\ M({}^t\mathbb{P}(\hat{\varphi})) \downarrow & \text{(2)} & M({}^t\mathbb{P}(\hat{\varphi})/\mathbb{P}(\varphi)) \downarrow & & \downarrow M({}^t\mathbb{P}(\hat{\varphi}), f) & \text{(4)} & \downarrow M\text{Th}({}^t\varphi) \\ M(\mathbb{P}(\hat{F})) & \longrightarrow & M(\mathbb{P}(\hat{F})/\mathbb{P}(F)) & \longrightarrow & M(\mathbb{P}(\hat{F})/\mathbb{P}(\hat{F}) - X) & \longleftarrow & M\text{Th}(F). \end{array}$$

Le carré (2) est commutatif d'après la définition qui précède, le carré (4) d'après la proposition 8.2.8, et le carré (3) d'après le diagramme commutatif de $\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 L[\mathbb{P}(E)] & \longrightarrow & L[\mathbb{P}(\hat{E})] & \longrightarrow & L[\mathbb{P}(\hat{E})/\mathbb{P}(E)] & & \\
 \downarrow & \searrow^{L[t_{\mathbb{P}(\varphi)}]} & \parallel & \searrow & \downarrow^{\sigma_E} & \searrow & \\
 & L[\mathbb{P}(F)] & \longrightarrow & L[\mathbb{P}(\hat{F})] & \longrightarrow & L[\mathbb{P}(\hat{F})/\mathbb{P}(F)] & \\
 & \downarrow & \parallel & \downarrow & \downarrow & \downarrow^{\sigma_F} & \\
 L[\mathbb{P}(\hat{E}) - X] & \longrightarrow & L[\mathbb{P}(\hat{E})] & \longrightarrow & L[\mathbb{P}(\hat{E})/\mathbb{P}(\hat{E}) - X] & & \\
 & \searrow^{L[t_p]} & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & L[\mathbb{P}(\hat{F}) - X] & \longrightarrow & L[\mathbb{P}(\hat{F})] & \longrightarrow & L[\mathbb{P}(\hat{F})/\mathbb{P}(\hat{E}) - X] & .
 \end{array}$$

En effet, si le morphisme $p : \mathbb{P}(\hat{F}) - X \rightarrow \mathbb{P}(\hat{E}) - X$ est le morphisme fini équidimensionnel induit par $\mathbb{P}(\hat{\varphi})$, il nous suffit d'appliquer à nouveau 5.3.6 pour obtenir le fait que le carré de gauche de ce parallélépipède est commutatif. \square

Rappelons que nous avons défini un morphisme diagonal sur l'espace de Thom d'un fibré vectoriel, et que nous en avons déduit un cup-produit externe (cf 8.2.10). La dernière propriété du morphisme π_E concerne celui-ci :

Lemme 8.3.18 *Soient X un schéma algébrique lisse, et E/X un fibré vectoriel.*

Pour tous morphismes $\alpha : M\text{Th}(E) \rightarrow \mathcal{M}$ et $\beta : M\text{Th}(E) \rightarrow \mathcal{N}$, on a la relation :

$$(\alpha \smile \beta) \circ \pi_E = (\alpha \circ \pi_E) \smile (\beta \circ \pi_E).$$

PREUVE : On rappelle que $E \boxplus E$ est égal en tant que schéma à $E \times_k E$. Par ailleurs,

$$\widehat{E \boxplus E} = \widehat{E \boxplus \hat{E}} = \mathbb{P}(E) \times_k \mathbb{P}(E).$$

Mais l'on fera attention que le complémentaire de la section nulle de ce fibré projectif sur $X \times_k X$ est égal à

$$(\mathbb{P}(E) - X) \times_k \mathbb{P}(E) \cup \mathbb{P}(E) \times_k (\mathbb{P}(E) - X).$$

Par ailleurs, le morphisme diagonal $E \rightarrow E \boxplus E$ induit le diagramme commutatif de morphismes cartésiens de paires fermées :

$$\begin{array}{ccc}
 (E, X) & \xrightarrow{\text{exc}} & (\mathbb{P}(\hat{E}), X) \\
 \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \\
 (E \boxplus E, X \times_k X) & \xrightarrow{\text{exc}} & (\mathbb{P}(\hat{E} \boxplus \hat{E}), X \times_k X),
 \end{array}$$

dans lequel les morphismes «exc» sont excisifs (c'est même un carré cartésien). Ceci montre que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 M(\mathbb{P}(\hat{E})) & \longrightarrow & M(\mathbb{P}(\hat{E}), X) & \longleftarrow & M\text{Th}(E) \\
 M(\Delta) \downarrow & & \downarrow & & \downarrow M\text{Th}(\Delta) \\
 M(\mathbb{P}(\hat{E} \boxplus \hat{E})) & \longrightarrow & M(\mathbb{P}(\hat{E} \boxplus \hat{E}), X \times_k X) & \longleftarrow & M\text{Th}(E \boxplus E),
 \end{array}$$

et permet donc de conclure, par définition de π_E . \square

8.3.4.2 Classe de Thom

Soit E/X un fibré vectoriel de rang n .

Nous allons voir qu'on peut identifier très précisément le facteur direct $M\text{Th}(E)$ dans $M(\mathbb{P}(\hat{E}))$ à l'aide d'une classe de cycles canonique – bien connue dans la littérature – que l'on appelle classe de Thom.

Le triangle distingué (8.1) induit tout d'abord une suite exacte courte scindée

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M\text{Th}(E), \mathbb{Z}(n)[2n]) \xrightarrow{\chi_E} \text{CH}^n(\mathbb{P}(\hat{E})) \xrightarrow{i^*} \text{CH}^n(\mathbb{P}(E)) \rightarrow 0.$$

On a utilisé l'isomorphisme de 8.3.4 pour les deux derniers groupes ; cette suite exacte est donc naturelle par rapport au morphisme pullback.

Pour trouver une classe canonique dans $\text{Hom}(M\text{Th}(E), \mathbb{Z}(n)[2n])$, il suffit de trouver une classe dans $\text{CH}^n(\mathbb{P}(\hat{E}))$ qui se restreint sur 0 dans $\text{CH}^n(\mathbb{P}(E))$.

Soit $\lambda_{\hat{E}}$ et $p_{\hat{E}}$ (resp. λ_E et p_E), le fibré inversible et la projection canonique de $\mathbb{P}(\hat{E})$ (resp. $\mathbb{P}(E)$). Rappelons tout d'abord la relation de définition des classes de Chern de E :

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} p_E^*(c_{n-i}(E)) \cdot c_1(\lambda_E)^i = 0.$$

Définition 8.3.19 *On définit la classe de Thom de E/X comme la classe de cycle dans $\text{CH}^n(\mathbb{P}(\hat{E}))$ égale à*

$$t(E) = \sum_{i=0}^n (-1)^i p_{\hat{E}}^*(c_{n-i}(E)) \cdot c_1(\lambda_{\hat{E}})^i.$$

On notera aussi $\mathfrak{t}(E) : M(\mathbb{P}(\hat{E})) \rightarrow \mathbb{Z}(n)[2n]$ le morphisme correspondant à travers l'isomorphisme 8.3.4.

Ainsi, comme $i^*c_1(\lambda_{\hat{E}}) = c_1(\lambda_E)$, il résulte immédiatement de la relation de définition des classes de Chern que

$$i^*(t(E)) = 0.$$

Autrement dit, $t(E)$ appartient à l'image du morphisme χ_E :

Définition 8.3.20 *On note $\bar{\mathfrak{t}}(E)$ l'application*

$$M\text{Th}(E) \rightarrow \mathbb{Z}(n)[2n]$$

dont l'image par le monomorphisme χ_E est égale à la classe de Thom.

Cette définition signifie encore que $\bar{\mathfrak{t}}(E)$ est l'unique morphisme tel que la composée

$$M(\mathbb{P}(\hat{E})) \xrightarrow{\pi_E} M\text{Th}(E) \rightarrow \mathbb{Z}(n)[2n]$$

est égale au morphisme $\mathfrak{t}(E)$.

8.3.21.– Rappelons qu'on a défini dans 8.2.10 un cup-produit externe sur les morphismes dont la source est un espace de Thom. Celui-ci nous permet de construire l'isomorphisme de la proposition ci-dessous :

Proposition 8.3.22 Soient E/X un fibré vectoriel de rang n , et $p : E \rightarrow X$ le morphisme de projection canonique.

Alors, le morphisme

$$\bar{\iota}(E) \smile MTh(p) : MTh(E) \rightarrow M(X)(n)[2n]$$

est un isomorphisme.

PREUVE : Cette proposition résulte immédiatement du lemme suivant :

Lemme 8.3.23 Soit ϵ_E le morphisme suivant

$$M(X)(n)[2n] \xrightarrow{\iota} \bigoplus_{r=0}^n M(X)(r)[2r] \xrightarrow{\iota(\hat{E})^{-1}} M(\mathbb{P}(\hat{E})) \xrightarrow{\pi_E} MTh(E),$$

dans lequel ι est l'inclusion canonique. Alors,

1. ϵ_E est un isomorphisme,
2. on a la relation $(\bar{\iota}(E) \smile MTh(p)) \circ \epsilon_E = (-1)^n \cdot Id$.

PREUVE : On commence par démontrer le deuxième point. D'après le lemme 8.3.15, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \xleftarrow{+1} \bigoplus_{r=0}^{n-1} M(X)(r)[2r] & \xleftarrow{\nu} & \bigoplus_{r=0}^n M(X)(r)[2r] & \xleftarrow{\iota} & M(X)(n)[2n] & & \\ & & \downarrow \iota(\hat{E})^{-1} & & \downarrow \epsilon & & \\ M(\mathbb{P}(E)) & \xrightarrow{M(i)} & M(\mathbb{P}(\hat{E})) & \xrightarrow{\pi_E} & MTh(E) & \xrightarrow{+1} & \end{array}$$

Pour ce qui suit, on pose $L(X) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} M(X)(i)[2i]$. D'après le diagramme commutatif ci-dessus, on peut alors considérer la partie inférieure d'un octaèdre :

$$\begin{array}{ccccc} MTh(E) & \xleftarrow{\epsilon} & M(X)(n)[2n] & & \\ & \swarrow \pi_E & \downarrow = & \nwarrow & \\ +1 \downarrow & & * M(\mathbb{P}(\hat{E})) * & & \uparrow +1 \\ M(\mathbb{P}(E)) & \xrightarrow{\iota(E)} & L(X) & & \end{array}$$

D'après l'axiome de l'octaèdre, on peut la compléter en une partie supérieure :

$$\begin{array}{ccccc} MTh(E) & \xleftarrow{\epsilon} & M(X)(n)[2n] & & \\ & \searrow & \downarrow = & \swarrow +1 & \\ +1 \downarrow & & * C * & & \uparrow +1 \\ M(\mathbb{P}(E)) & \xrightarrow{\iota(E)} & L(X) & & \end{array}$$

Ainsi, puisque $\iota(E)$ est un isomorphisme, $C = 0$, et on en déduit que ϵ est un isomorphisme.

Rappelons que $\mathfrak{t}(E) : M(\mathbb{P}(\hat{E})) \rightarrow \mathbb{Z}(n)[2n]$ désigne le morphisme associé à la classe de Thom $t(E)$ par l'isomorphisme de 8.3.4. Il résulte du lemme 8.3.18 (et de la définition de $\bar{\mathfrak{t}}(E)$) que $(\bar{\mathfrak{t}}(E) \smile M\text{Th}(p)) \circ \pi_E = \mathfrak{t}(E) \smile M(q)$, où $q : \mathbb{P}(\hat{E}) \rightarrow X$ désigne la projection canonique.

Par définition de la classe de Thom, on en déduit que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{r=0}^n M(X)(r)[2r] & \xleftarrow{\mathfrak{t}(\hat{E})} & M(\mathbb{P}(\hat{E})) \\ \downarrow \sum_{r=0}^n (-1)^r \cdot c_{n-r}(E)(r)[2r] & \swarrow \mathfrak{t}(E) \smile M(q) & \\ M(X)(n)[2n] & & \end{array}$$

ce qui implique finalement la formule attendue. \square

Définition 8.3.24 Soient X un schéma algébrique lisse, E/X un fibré vectoriel de rang n et $p : E \rightarrow X$ la projection canonique. On pose

$$\theta(E) = \bar{\mathfrak{t}}(E) \smile M\text{Th}(p),$$

et on l'appelle l'isomorphisme de Thom, compte tenu de la proposition précédente.

On se rappellera particulièrement des faits suivants qui caractérisent chacun l'isomorphisme de Thom :

1. L'isomorphisme $\theta(E)$ est l'unique morphisme tel que

$$\theta(E) \circ \pi_E = \mathfrak{t}(E) \smile M(q),$$

où l'on a noté $q : \mathbb{P}(\hat{E}) \rightarrow X$ la projection canonique, et $\mathfrak{t}(E)$ le morphisme correspondant à la classe de Thom (sur $\mathbb{P}(\hat{E})$).

2. Avec les notations du lemme 8.3.23, $\theta(E)^{-1} = (-1)^n \epsilon_E$.

8.3.4.3 Functorialité

L'isomorphisme de Thom satisfait tout d'abord la functorialité suivante par rapport à la base des fibrés vectoriels considérés, analogue à celle du lemme 8.3.11 :

Lemme 8.3.25 Soient X et Y des schémas algébriques lisses, $f : Y \rightarrow X$ un k -morphisme et E/X un fibré vectoriel de rang n . On note $E_Y = E \times_X Y$ le fibré sur Y obtenu par changement de base, $f_E : E_Y \rightarrow E$ le morphisme induit par f .

1. Le diagramme suivant de $DM_-^{ef}(k)$ est commutatif

$$\begin{array}{ccc} M\text{Th}(E_Y) & \xrightarrow{M\text{Th}(f_E)} & M\text{Th}(E) \\ \theta(E_Y) \downarrow \sim & & \sim \downarrow \theta(E) \\ M(Y)(n)[2n] & \xrightarrow{M(f)(n)[2n]} & M(X)(n)[2n]. \end{array}$$

2. Si f est fini équidimensionnel, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M\text{Th}(E) & \xrightarrow{M\text{Th}(^t f_E)} & M\text{Th}(E_Y) \\ \theta(E) \downarrow \sim & & \sim \downarrow \theta(E_Y) \\ M(X)(n)[2n] & \xrightarrow{M(^t f)(n)[2n]} & M(Y)(n)[2n]. \end{array}$$

PREUVE : Dans chaque cas on se ramène à montrer une assertion analogue pour le morphisme ϵ_E du lemme 8.3.23. Pour ce dernier, il suffit d'utiliser chaque cas du lemme 8.3.11 conjointement au cas correspondant du lemme 8.3.17. \square

La functorialité suivante est un peu plus subtile :

Proposition 8.3.26 Soient X un schéma algébrique lisse, $i : F \rightarrow E$ un monomorphisme de fibrés vectoriels sur X . On note n et m les rangs respectifs de E/X et F/X , et on pose $e = n - m$. Alors, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M\text{Th}(F) & \xrightarrow{M\text{Th}(i)} & M\text{Th}(E) \\ \theta(F) \downarrow \sim & & \sim \downarrow \theta(E) \\ M(X)(m)[2m] & \xrightarrow{M(1_X) \smile c_e(E/F)(m)[2m]} & M(X)(n)[2n]. \end{array}$$

PREUVE : Soit $\iota : \mathbb{P}(\hat{F}) \rightarrow \mathbb{P}(\hat{E})$ le morphisme induit par i . Nous allons calculer la classe $\iota^*(t(E))$.

On a besoin pour cela d'un calcul préliminaire. Soient $\lambda_{\hat{E}}$ le fibré inversible canonique du fibré $\mathbb{P}(\hat{E})/X$, et q_E sa projection canonique. On note $\xi_{\hat{E}}$ le fibré quotient universel de $\mathbb{P}(E)$, défini par la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \lambda_{\hat{E}}^\vee \rightarrow q_E^*(\hat{E}) \rightarrow \xi_{\hat{E}} \rightarrow 0. \quad (8.2)$$

On déduit de cette suite exacte courte la relation $q_E^* c_{n+1}(\hat{E}) = -c_1(\lambda_{\hat{E}}) \cdot c_n(\xi_{\hat{E}})$.

Utilisant la définition de la classe de Thom, on en déduit par identification :

$$c_n(\xi_{\hat{E}}) = -t(E).$$

Ce calcul étant fait, on note que $\iota^*(\lambda_{\hat{E}}) = \lambda_{\hat{F}}$. Dès lors, le pullback de la suite exacte courte (8.2) par ι donne, conjuguée avec la suite exacte courte analogue pour \hat{F} , la suite exacte courte de fibrés sur $\mathbb{P}(\hat{F})$

$$0 \rightarrow \xi_{\hat{F}} \rightarrow \iota^*(\xi_{\hat{E}}) \rightarrow q_F^*(E/F) \rightarrow 0.$$

On en déduit la relation $\iota^*(c_n(\xi_{\hat{E}})) = q_F^*(c_e(E/F)) \cdot c_m(\xi_{\hat{F}})$, ce qui équivaut compte tenu du calcul préliminaire à

$$\iota^*(t(E)) = q_F^*(c_e(E/F)) \cdot t(F).$$

Cette relation se traduit donc par l'égalité de morphisme dans $DM_-^{eff}(k)$

$$\mathfrak{t}(E) \circ M(\iota) = (c_e(E/F) \circ M(q_F)) \smile \mathfrak{t}(F),$$

dont on déduit la relation

$$(\mathfrak{t}(E) \smile M(q_E)) \circ M(\iota) = (M(1_X) \smile \mathfrak{c}_e(E/F))(m)[2m] \circ (\mathfrak{t}(E) \smile M(q_F)).$$

Ceci permet de conclure d'après la première caractérisation de l'espace de Thom qui suit la définition 8.3.24. \square

Cette proposition a pour corollaire immédiat le résultat suivant :

Corollaire 8.3.27 *Soient E/X et F/X des fibrés vectoriels de rang n . Considérons $\sigma : F \rightarrow E$ un isomorphisme de fibrés vectoriels sur X . Alors, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} M\text{Th}(E) & \xrightarrow{M\text{Th}(\sigma)} & M\text{Th}(F) \\ \theta(E) \searrow & & \swarrow \theta(F) \\ & M(X)(n)[2n] & \end{array}$$

8.3.28.– Nous utiliserons un dernier morphisme entre espaces de Thom.

Fixons quelques notations. Soient X un schéma algébrique lisse, E/X un fibré vectoriel de rang 1 et r un entier naturel. On considère le dual \mathcal{E} du faisceau des sections de E/X .

On a déjà noté $\mathcal{S}_*(\mathcal{E})$ l'algèbre symétrique de \mathcal{E} (cf B). Alors, le morphisme d'inclusion canonique

$$\mathcal{E}^r \rightarrow \mathcal{S}_*(\mathcal{E})$$

induit un morphisme homogène de degré r de \mathcal{O}_X -algèbres graduées

$$\mathcal{S}(\mathcal{E}^r) \rightarrow \mathcal{S}_*(\mathcal{E}).$$

On pose $E^{(r)} = \text{Spec}_X(\mathcal{S}(\mathcal{E}^r))$, et on note $\mu : E \rightarrow E^{(r)}$ le spectre du morphisme précédent ; c'est donc un morphisme homogène de degré r de fibrés vectoriels sur X .

Appliquant ce procédé en remplaçant E par \hat{E} , on obtient de même un morphisme $\hat{\mu} : \hat{E} \rightarrow \hat{E}^{(r)}$ qui induit un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mu} & E^{(r)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}(\hat{E}) & \xrightarrow{\mathbb{P}(\hat{\mu})} & \mathbb{P}(\hat{E}^{(r)}), \end{array}$$

dans lequel les morphismes verticaux sont les immersions ouvertes canoniques.

Lemme 8.3.29 *On adopte les hypothèses et notations introduites ci-dessus.*

Alors, les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} M\text{Th}(E) & \xrightarrow{M\text{Th}(\mu)} & M\text{Th}(E^{(r)}) \\ \theta(F) \downarrow & & \downarrow \theta(E^{(r)}) \\ M(X)(1)[2] & \xrightarrow{r \cdot Id} & M(X)(1)[2] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M\text{Th}(E) & \xrightarrow{M\text{Th}(t_\mu)} & M\text{Th}(E^{(r)}) \\ \theta(E) \searrow & & \swarrow \theta(E^{(r)}) \\ & M(X)(1)[2] & \end{array}$$

PREUVE : On note λ et λ' les fibrés inversibles canoniques respectifs sur $\mathbb{P}(\hat{E})$ et $\mathbb{P}(\hat{E}^{(r)})$. On note $\nu : \mathbb{P}(\hat{E}) \rightarrow \mathbb{P}(\hat{E}^{(r)})$ le morphisme induit par $\hat{\mu}$.

On s'intéresse tout d'abord au diagramme de gauche. On pose $\mathcal{F} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X[t]$. Tout d'abord, on a le calcul facile suivant :

$$\bigoplus_{i>0} \mathcal{F}^{ri} \otimes_{\mathcal{S}_*(\mathcal{F})} \bigoplus_{j \geq 0} \mathcal{F}^j = \bigoplus_{i>0} \bigoplus_{0 \leq j < r} \mathcal{F}^{ri+j}.$$

Autrement dit, $\nu^*(\lambda') = \lambda^r$, ce qui implique $\nu^*c_1(\lambda') = r.c_1(\lambda)$.

Dès lors, le morphisme

$$\varphi = \iota(\hat{E}^{(r)}) \circ M(\nu) \circ \iota(\hat{E})^{-1} : M(X) \oplus M(X)(1)[2] \rightarrow M(X) \oplus M(X)(1)[2]$$

a pour matrice la matrice diagonale $\begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & r.Id \end{pmatrix}$.

Il en résulte donc que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} M(X)(1)[2] & \longrightarrow & M(X) \oplus M(X)(1)[2] & \xleftarrow{\iota(\hat{E})} & M(\mathbb{P}(\hat{E})) & \xrightarrow{\pi_E} & M\text{Th}(E) \\ r.Id \downarrow & & \downarrow \varphi & & M(\nu) \downarrow & \text{(1)} & \downarrow M\text{Th}(\mu) \\ M(X)(1)[2] & \longrightarrow & M(X) \oplus M(X)(1)[2] & \xleftarrow{\iota(\hat{E}^{(r)})} & M(\mathbb{P}(\hat{E}^{(r)})) & \xrightarrow{\pi_{E^{(r)}}} & M\text{Th}(E^{(r)}). \end{array}$$

La commutativité du carré (1) résulte du lemme 8.3.17. Ceci conclut la commutativité du premier diagramme d'après la deuxième caractérisation de l'isomorphisme de Thom qui suit la définition 8.3.24.

Considérons maintenant l'autre diagramme. On note p et p' les projections respectives de $\mathbb{P}(\hat{E})$ et $\mathbb{P}(\hat{E}^{(r)})$ sur X .

Soit a un élément de $CH^*(X)$. Alors, comme ν est un morphisme plat fini de degré r , la formule de projection implique

$$\nu_* p^* a = \nu_* \nu^* (p')^* a = r.(p')^*(a).$$

Par ailleurs, ν est égal à l'identité sur l'hyperplan à l'infini de $\mathbb{P}(\hat{E})$ et $\mathbb{P}(\hat{E}^{(r)})$ lorsqu'on l'a identifié à X . Cela implique $\nu_*(c_1(\lambda')) = c_1(\lambda)$. Ces différents calculs, joints à la compatibilité de l'isomorphisme τ de 8.3.4 par rapport aux transferts, impliquent que le morphisme

$$\psi = \iota(\hat{E}) \circ M({}^t\nu) \circ \iota(\hat{E}^{(r)})^{-1} : M(X) \oplus M(X)(1)[2] \rightarrow M(X) \oplus M(X)(1)[2]$$

a pour matrice $\begin{pmatrix} r.Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$.

De nouveau, le diagramme commutatif suivant permet de conclure

$$\begin{array}{ccccc} M(X)(1)[2] & \longrightarrow & M(X) \oplus M(X)(1)[2] & \xleftarrow{\iota(\hat{E}^{(r)})} & M(\mathbb{P}(\hat{E}^{(r)})) & \xrightarrow{\pi_{E^{(r)}}} & M\text{Th}(E) \\ \parallel & & \downarrow \psi & & M({}^t\nu) \downarrow & \text{(2)} & \downarrow M\text{Th}({}^t\mu) \\ M(X)(1)[2] & \longrightarrow & M(X) \oplus M(X)(1)[2] & \xleftarrow{\iota(\hat{E})} & M(\mathbb{P}(\hat{E})) & \xrightarrow{\pi_E} & M\text{Th}(E). \end{array}$$

Le carré (2) est commutatif d'après l'autre partie du lemme 8.3.17, et cela conclut. \square

8.4 Triangles de Gysin

8.4.1 Définitions

Grâce aux isomorphismes de 8.3.24 et de 8.2.16, on définit finalement l'isomorphisme de pureté :

Définition 8.4.1 Soient X un schéma algébrique lisse, et (X, Z) une paire fermée telle que Z est lisse sur k , purement de codimension d dans X .

Alors, on obtient un isomorphisme canonique, qu'on appelle isomorphisme de pureté,

$$M_Z(X) \xrightarrow{(1)} M\mathrm{Th}(N_Z X) \xrightarrow{\theta(N_Z X)} M(Z)(d)[2d]$$

où (1) est induit par les morphismes de déformation au cône normal (cf 8.2.16).

On en déduit donc un triangle distingué canonique

$$M(X - Z) \rightarrow M(X) \xrightarrow{i_{(X,Z)}} M(Z)(d)[2d] \xrightarrow{\partial_{(X,Z)}[1]} M(X - Z)[1]$$

appelé triangle de Gysin.

On appelle résidu de X par rapport à Z le morphisme $\partial_{(X,Z)} : M(Z)(d)[2d - 1] \rightarrow M(X - Z)$.

Remarque 8.4.2.— On justifiera le terme «résidu» dans le chapitre sur les motifs génériques.

Remarque 8.4.3.— On fera attention au fait que le morphisme $i_{(X,Z)}$ correspond à l'image directe sur les groupes de Chow associée à l'immersion fermée $Z \rightarrow X$, et non au morphisme de Gysin associé à i en théorie de l'intersection.

8.4.2 Fonctorialité

Dans ce qui suit, on étudie la fonctorialité de ce triangle de Gysin. Rappelons en effet que l'on a associé à un morphisme quasi-cartésien $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ de paires fermées, le morphisme de motifs relatifs

$$M(f, g) : M_T(Y) \rightarrow M_Z(X)$$

qui est compatible aux triangles distingués associés à chacun des motifs relatifs (cf 8.2.4).

8.4.2.1 Considérations générales

On commence par voir comment se ramener au cas où Z et T sont connexes (pour cela, on n'a pas besoin de supposer que Z ou T soit lisse).

Lemme 8.4.4 Soient (X, Z) et (Y, T) des paires fermées dans $\mathcal{P}^f\mathcal{L}_k$, et $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ un morphisme quasi-cartésien de paires fermées.

On considère $(Z_i)_{1 \leq i \leq n}$ (resp. $(T_j)_{1 \leq j \leq m}$) les composantes connexes de Z (resp. T).

On considère les décompositions canoniques données par la proposition 8.2.6 :

$$M_Z(X) \simeq \bigoplus_{i=1}^n M_{Z_i}(X) \quad M_T(Y) \simeq \bigoplus_{j=1}^m M_{T_j}(Y).$$

On note $(\varphi_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ la matrice de $M(f, g)$ pour ces décompositions.

Si j est un entier dans $[1, m]$, on pose $Y_j = Y - (T - T_j)$, et on note $\nu_j : Y_j \rightarrow Y$ l'immersion ouverte canonique. Ainsi, le morphisme cartésien de paires fermées $(\nu_j, 1_{T_j}) : (Y_j, T_j) \rightarrow (Y, T_j)$ est excisif.

Soit (i, j) un couple d'entiers dans $[1, n] \times [1, m]$ tel que $f(T_j) \subset Z_i$. On note $g_{ij} : T_j \rightarrow Z_j$ le morphisme obtenu par restriction et corestriction de g , et $f_j : Y_j \rightarrow X$ la restriction de f . Dès lors, le morphisme de paires fermées $(f_j, g_{ij}) : (Y_j, T_j) \rightarrow (X, Z_i)$ est quasi-cartésien.

Dès lors, pour tout couple d'entier (i, j) ,

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} M(f_j, g_{ij}) \circ M(\nu_j, 1_{T_j}) & \text{si } f(T_j) \subset Z_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

PREUVE : Notons tout d'abord que le morphisme $M(\nu_j, 1_{T_j})$ est inversible d'après la propriété **(Exc)** de 8.2.5.

Par ailleurs, d'après les deux points de la proposition 8.2.6, le morphisme $\varphi_{ij} \circ M(\nu_j, 1_{T_j})^{-1}$ est égal à la composée

$$M_{T_j}(Y_j) \xrightarrow{(1)} M_T(Y) \xrightarrow{M(f,g)} M_Z(X) \xrightarrow{(2)} M_{Z_i}(X)$$

où le morphisme (1) est induit par l'immersion ouverte ν_j , et le morphisme (2) est défini par l'inclusion $Z_i \subset Z$.

On revient aux paires ouvertes correspondantes pour expliciter ce morphisme :

$$M(Y_j/Y_j - T_j) \left. \begin{array}{l} \xrightarrow{M(\nu_j/\nu'_j)} M(Y/Y - T) \xrightarrow{M(f/h)} M(X/X - Z) \\ \xrightarrow{M(1_X/\iota_i)} M(X/X - Z_i) \end{array} \right\} (*)$$

où ν'_j , h et ι_i sont les immersions ouvertes évidentes.

Or, si $f(T_j)$ n'est pas inclus dans Z_i , $f(T_j) \cap Z_i = \emptyset$ puisque $f(T_j)$ et Z_i sont connexes. Mais alors, $f(Y_j) \subset X - Z_i$, ce qui implique que le morphisme (*) est nul, et donc $\varphi_{ij} = 0$.

Dans le cas contraire, le morphisme (*) est induit par le morphisme de paires ouvertes $(f_j/\iota_i \circ h \circ \nu'_j)$, qui est le morphisme de paires ouvertes associé au morphisme de paires fermées (f_j, g_{ij}) . D'après notre convention (cf le paragraphe 5.4.1), on a confondu la paire fermée avec la paire ouverte qu'elle définit, et on a donc $(*) = M(f_j, g_{ij})$ ce qui conclut. \square

Ainsi, dans l'étude du morphisme $M(f, g)$ on peut toujours se ramener au cas où Z et T sont connexes. Pour revenir au triangle de Gysin défini dans 8.4.1, on introduit alors la définition suivante :

Définition 8.4.5 Soit $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ un morphisme quasi-cartésien de paires fermées. On suppose que Z (resp. T) est connexe et lisse sur k de codimension n dans X (resp. m dans Y).

On définit alors le morphisme de Gysin associé à (f, g) , noté $M(f, g)_1$, par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} M_T(Y) & \xrightarrow[\sim]{(1)} & M\mathrm{Th}(N_T Y) & \xrightarrow[\sim]{\theta(N_T Y)} & M(T)(m)[2m] \\ M(f, g) \downarrow & & \downarrow & & \downarrow M(f, g)_1 \\ M_Z(X) & \xrightarrow[\sim]{(1)} & M\mathrm{Th}(N_Z X) & \xrightarrow[\sim]{\theta(N_Z X)} & M(Z)(n)[2n] \end{array}$$

où les morphismes (1) sont les isomorphismes induits par les morphismes de déformation au cône normal.

Avec cette notation, le morphisme $M(f, g)_1$ fait donc partie du morphisme canonique suivant de triangles de Gysin :

$$\begin{array}{ccccccc} M(Y - T) & \xrightarrow{M(j')} & M(Y) & \xrightarrow{i_{(Y, T)}} & M(T)(m)[2m] & \xrightarrow{\partial_{(Y, T)}[1]} & M(Y - T)[1] \\ M(f|_{Y-T}) \downarrow & & M(f) \downarrow & & \downarrow M(f, g)_1 & & \downarrow M(f|_{Y-T})[1] \\ M(X - Z) & \xrightarrow{M(j)} & M(X) & \xrightarrow{i_{(X, Z)}} & M(Z)(n)[2n] & \xrightarrow{\partial_{(X, Z)}[1]} & M(X - Z)[1]. \end{array}$$

8.4.2.2 Transversalité et défaut de transversalité

Rappelons avant d'énoncer le théorème qui nous intéresse la définition suivante (cf [EGA4], 17.13.3) :

Définition 8.4.6 Soient X un schéma algébrique lisse, et Z un sous-schéma fermé de X , purement de codimension d et lisse sur k .

Soient Y un schéma algébrique lisse et $f : Y \rightarrow X$ un k -morphisme. On dit que f est transverse à Z si et seulement si le schéma $Z \times_X Y$ obtenu par changement de base selon f est lisse sur k , purement de codimension d dans Y .

Le théorème suivant concerne le cas où le morphisme (f, g) est non seulement quasi-cartésien, mais cartésien :

Théorème 8.4.7 Soit (X, Z) une paire dans $\mathcal{P}^f \mathcal{L}_k$ telle que Z est lisse sur k , connexe de codimension n dans X .

Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme. On pose $T = Z \times_X Y$, et on note $g : T \rightarrow Z$ le morphisme induit par f .

1. Si f est transverse à Z , alors :

$$M(f, g)_1 = M(g)(n)[2n].$$

2. Si T est lisse sur k , connexe de codimension m , on note

$$\xi = g^*(N_Z X)/N_T Y$$

qui est un fibré vectoriel de rang $e = n - m$ sur T .

Alors,

$$M(f, g)_1 = (M(g) \smile \mathbf{c}_e(\xi))(m)[2m].$$

Remarque 8.4.8.– Le premier point de cette proposition est une généralisation d’une remarque de V. Voevodsky (cf [FSV00b], preuve de la proposition 3.5.4), où elle était affirmée dans le cas où le morphisme f est lisse.

PREUVE : On utilise la functorialité de la déformation au cône normal que l’on a construite dans 5.4.3.

Il s’agit de calculer le morphisme

$$M(f, g) : M(Y, T) \rightarrow M(X, Z).$$

Tout d’abord, à travers les isomorphismes de déformation au cône normal, il est égal au morphisme

$$M\text{Th}(N_g f) : M\text{Th}(N_T Y) \rightarrow M(N_Z X)$$

où $N_g f$ est défini comme la composée des morphismes du diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc} & & N_g f & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ N_T Y & \xrightarrow{i} & g^* N_Z X & \xrightarrow{g'} & N_Z X \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & T & \xrightarrow{g} & Z. \end{array}$$

Le morphisme i est une immersion fermée.

1) Dans le cas où f est transverse à Z , comme T est de même codimension pure dans Y que Z l’est dans X , on en déduit que le monomorphisme de fibrés vectoriels $i : N_T Y \rightarrow g^*(N_Z X)$ est un isomorphisme.

Dès lors, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & M\text{Th}(N_g f) & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ M\text{Th}(N_T Y) & \xrightarrow{M\text{Th}(i)} & M\text{Th}(g^*(N_Z X)) & \xrightarrow{M\text{Th}(g')} & M\text{Th}(N_Z X) \\ \theta(N_T Y) \downarrow & (1) & \downarrow \theta(g^* N_Z X) & (2) & \downarrow \theta(N_Z X) \\ M(T)(n)[2n] & \xlongequal{\quad} & M(T)(n)[2n] & \xrightarrow{M(g)(n)[2n]} & M(Z)(n)[2n]. \end{array}$$

En effet, pour le carré (1), on applique le corollaire 8.3.27, et pour le carré (2), on applique le premier point de 8.3.25. Ce dernier diagramme conclut donc la première assertion.

2) Le carré (2) du cas précédent est encore commutatif dans ce cas. Dans ce deuxième cas, le morphisme i est une immersion fermée. Dès lors, par application de la proposition 8.3.26 au morphisme i , la portion (1’) du diagramme suivant est commutative :

$$\begin{array}{ccccc} & & M\text{Th}(N_g f) & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ M\text{Th}(N_T Y) & \xrightarrow{M\text{Th}(i)} & M\text{Th}(g^*(N_Z X)) & \xrightarrow{M\text{Th}(g')} & M\text{Th}(N_Z X) \\ \theta(N_T Y) \downarrow & (1') & \downarrow \theta(g^* N_Z X) & (2) & \downarrow \theta(N_Z X) \\ M(T)(m)[2m] & \xrightarrow{M(1_T) \sim c_e(\xi)(m)[2m]} & M(T)(n)[2n] & \xrightarrow{M(g)(n)[2n]} & M(Z)(n)[2n]. \end{array}$$

Ce diagramme est donc commutatif, concluant ainsi le deuxième point. □

Remarque 8.4.9.– Ce théorème est analogue à la formule «excess intersection formula» de [Ful98] (théorème 6.3 de *loc.cit.* que l’on a d’ailleurs utilisé dans la preuve qui précède). En effet, le morphisme $M(f, g)_!$ correspond, après application de la transformation naturelle τ^{-1} donnée par le lemme 8.3.4, au morphisme de Gysin raffiné $f^!$ de *loc.cit.* associé au carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{g} & Z \\ \downarrow & \searrow f & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X. \end{array}$$

8.4.2.3 Ramification en codimension 1

Le théorème précédent règle donc le cas des morphismes cartésiens de paires fermées. On peut de même généraliser ce théorème dans le cas des morphismes quasi-cartésiens exacts (cf définition 5.4.29) :

Théorème 8.4.10 *Soit $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ un morphisme quasi-cartésien exact de paires fermées dans $\mathcal{P}^f \mathcal{L}_k$ telles que Z est lisse sur k , connexe de codimension 1 dans X et T est lisse sur k , purement de codimension 1 dans Y .*

Soit $T' = Z \times_X Y$, et t le point générique de T' . On pose $r = \text{lg}(\mathcal{O}_{T', t}) + 1$.

Alors, $M(f, g)_! = r.M(g)(1)[2]$.

Remarque 8.4.11.– Si T est irréductible, l’entier r est l’indice de ramification de l’idéal maximal de $\mathcal{O}_{Y, T}$ dans l’extension $\kappa(T)/\kappa(Z)$ au sens de [Ser68], où l’anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{X, Z}$ (resp. $\mathcal{O}_{Y, T}$) est l’anneau des entiers de $\kappa(Z)$ (resp. $\kappa(T)$).

PREUVE : On se ramène tout d’abord, grâce au lemme 8.4.4, au cas où T est connexe.

Soit \mathcal{I} l’idéal de T dans Y . Par hypothèse, on a $T'_{red} = T$ et de plus l’immersion fermée canonique $\iota : T \rightarrow T'$ est un épaississement exact d’ordre r sur Y (cf définition 5.4.27 et remarque 5.4.28). Cela signifie que l’idéal de T' dans Y est \mathcal{I}^r .

Il en résulte, puisque l’immersion fermée $T \rightarrow Y$ est régulière de codimension 1, que T'^{r+1} est localement engendré par un élément non nilpotent, ce qui entraîne que l’immersion $T' \rightarrow Y$ est régulière.

Ayant fixé ces premiers résultats, on se réfère à 5.4.3 où l’on a associé au morphisme quasi-cartésien exact de paires fermées $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ un morphisme quasi-cartésien $D_g f : (D_T Y, \mathbb{A}_T^1) \rightarrow (D_Z X, \mathbb{A}_Z^1)$, dont la fibre au-dessus du point 1 de \mathbb{A}^1 est égal au morphisme $N_g f$, défini par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \xrightarrow{N_g f} & & & \\ & & & \curvearrowright & & & \\ N_T Y & \xrightarrow{\mu} & \iota^* N_{T'} Y & \longrightarrow & N_{T'} Y & \xrightarrow{\nu} & (g')^* N_Z X & \xrightarrow{p} & N_Z X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T & \xlongequal{\quad} & T & \xrightarrow{\iota} & T' & \xlongequal{\quad} & T' & \xrightarrow{g'} & Z. \end{array}$$

Il en résulte que le morphisme $M(f, g)$ est isomorphe à travers la déformation au cône normal au morphisme $M\text{Th}(N_g f)$.

Or, le morphisme ν est une immersion fermée entre fibrés vectoriels de rang 1. C'est donc un isomorphisme.

Par ailleurs,

$$\iota^*(N_{T'}Y) = \text{Spec}_T \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}^{rn} / \mathcal{I}^{rn+1} \right)$$

et le morphisme μ est induit par le morphisme de \mathcal{O}_T -modules cohérents

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}^{rn} / \mathcal{I}^{rn+1} \rightarrow \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{I}^m / \mathcal{I}^{m+1}$$

qui est l'inclusion canonique.

On peut donc lui appliquer le lemme 8.3.29 ; on en déduit que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M\text{Th}(N_T Y) & \xrightarrow{M\text{Th}(\mu)} & M\text{Th}(\iota^* N_{T'} Y) \\ \theta(N_T Y) \downarrow & & \downarrow \theta(\iota^* N_{T'} Y) \\ M(T)(1)[2] & \xrightarrow{r.Id} & M(Z)(1)[2], \end{array}$$

ce qui termine la démonstration, puisque le morphisme $M\text{Th}(\iota^* N_{T'} Y) \rightarrow M\text{Th}(N_Z X)$ est isomorphe à travers l'isomorphisme de Thom à $M(g)(1)[2]$. \square

8.4.2.4 Transposée

On se place à la suite de 8.2.7, et on étudie maintenant le morphisme $M({}^t(f, g))$ pour un morphisme $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ quasi-cartésien fini équidimensionnel.

On peut alors énoncer la proposition suivante :

Proposition 8.4.12 *Soit $(f, g) : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$ un morphisme quasi-cartésien de paires fermées fini équidimensionnel. On se donne un entier $d \leq 0$, et on suppose que Z et T sont lisses sur k , de codimension pure égale à d dans X et Y respectivement.*

On suppose l'une des deux conditions suivantes vérifiées :

1. *Le morphisme (f, g) est cartésien.*
2. *Le morphisme (f, g) est quasi-cartésien exact, et $d = 1$.*

Dès lors, le morphisme $M({}^t(f, g))$ correspond, à travers l'isomorphisme de déformation au cône normal (cf 8.2.16) et l'isomorphisme de Thom (cf 8.3.24), au morphisme $M({}^t g)(d)[2d]$.

Ainsi, le morphisme des triangles de Gysin induit par la transposée de (f, g) est égal à :

$$\begin{array}{ccccccc} M(X - Z) & \xrightarrow{M(j')} & M(X) & \xrightarrow{i_{(Y, T)}} & M(Z)(d)[2d] & \xrightarrow{\partial_{(Y, T)}[1]} & M(X - Z)[1] \\ M({}^t h) \downarrow & & \downarrow M({}^t f) & & \downarrow M({}^t g)(d)[2d] & & \downarrow M({}^t h)[1] \\ M(Y - T) & \xrightarrow{M(j)} & M(Y) & \xrightarrow{i_{(X, Z)}} & M(T)(d)[2d] & \xrightarrow{\partial_{(X, Z)}[1]} & M(Y - T)[1] \end{array}$$

où g et h sont les morphismes induits par f .

PREUVE : Comme pour les autres propositions de ce type, il s'agit de calculer le morphisme $M({}^t(f, g))$.

1) On se place dans le cas de la première hypothèse. Tout d'abord, le morphisme $D_g f$ (resp. $N_g f$) est fini équidimensionnel. Par ailleurs, le diagramme (B.2) de déformation au cône normal et la proposition 8.2.8 entraînent que le morphisme $M({}^t(f, g))$ est isomorphe par déformation au cône normal au morphisme $M({}^t N_g f)$.

Comme on l'a déjà vu, le morphisme canonique $i : N_T Y \rightarrow g^* N_Z X$ est un isomorphisme. Si on note $p : g^* N_Z X \rightarrow N_Z X$ le morphisme induit par g , on obtient le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M\text{Th}({}^t N_g f) & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 M\text{Th}(N_Z X) & \xrightarrow{M({}^t p)} & M\text{Th}(g^*(N_Z X)) & \xrightarrow{M\text{Th}({}^t i)} & M\text{Th}(N_T Y) \\
 \theta(N_Z X) \downarrow & (1) & \theta(g^* N_Z X) \downarrow & (2) & \downarrow \theta(N_T Y) \\
 M(Z)(d)[2d] & \xrightarrow{M({}^t g)(d)[2d]} & M(T)(d)[2d] & \xlongequal{\quad} & M(T)(d)[2d]
 \end{array}$$

qui est commutatif car la partie (1) est commutative d'après le deuxième point du lemme 8.3.25, et la partie (2) est commutative d'après le corollaire 8.3.27, puisque $M\text{Th}({}^t i) = M\text{Th}(i)^{-1}$ (cf la remarque après la proposition 8.1.1). Ceci conclut la proposition dans le cas de la première hypothèse.

2) Plaçons nous dans le cas de la seconde hypothèse. Tout d'abord, comme précédemment, le morphisme $M({}^t(f, g))$ est isomorphe par déformation au cône normal au morphisme $M\text{Th}({}^t N_g f)$ où le morphisme $N_g f : N_T Y \rightarrow N_Z X$ a été défini dans 5.4.3 (il apparaîtra dans ce qui suit que ce dernier morphisme est effectivement fini équidimensionnel).

Posons $T' = Z \times_Y X$ et notons $(T_\lambda)_{\lambda=1, \dots, n}$ (resp. $(T'_\lambda)_{\lambda=1, \dots, n}$) les composantes irréductibles de T (resp. T'), de telle manière que pour tout λ , $(T'_\lambda)_{red} = T_\lambda$. Pour tout λ , on note r_λ l'ordre de l'épaississement exact $T_\lambda \rightarrow T'_\lambda$. On note enfin $g_\lambda : T_\lambda \rightarrow Z$ la restriction de g à T_λ .

On peut alors factoriser le morphisme $N_g f$ comme suit :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & N_g f & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 N_T Y & \xrightarrow{\nu} & g^* N_Z X & \xrightarrow{p} & N_Z X \\
 & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & T & \xrightarrow{g} & Z
 \end{array}$$

où le morphisme ν se décompose à son tour en la somme de morphisme $\nu_\lambda : N_{T_\lambda} Y \rightarrow g_\lambda^* N_Z X$ pour tout entier λ dans $[1, n]$.

Pour tout λ , notons \mathcal{I}_λ l'idéal de T_λ dans Y . On pose

$$N_{T_\lambda}^{(r_\lambda)} Y = \text{Spec}_{T_\lambda} \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_\lambda^{nr_\lambda} / \mathcal{I}_\lambda^{nr_\lambda + 1} \right).$$

Comme T_λ est régulièrement immergé dans Y de codimension 1, $N_{T_\lambda}^{(r_\lambda)} Y$ est un fibré vectoriel de rang 1 sur T_λ .

Revenant à la construction de 5.4.3, on peut décrire le morphisme ν_λ par la factorisation suivante :

$$N_{T_\lambda} Y \begin{array}{c} \xrightarrow{\nu_\lambda} \\ \xrightarrow{\iota_\lambda} \quad \searrow \quad \xrightarrow{i_\lambda} \end{array} N_{T_\lambda}^{(r_\lambda)} \xrightarrow{i_\lambda} g_\lambda^* N_Z X.$$

dans laquelle le morphisme i_λ est une immersion fermée et le morphisme ι_λ est induit par le morphisme de \mathcal{O}_{T_λ} -modules

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_\lambda^{nr_\lambda} / \mathcal{I}_\lambda^{nr_\lambda + 1} \rightarrow \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_\lambda^m / \mathcal{I}_\lambda^{m+1}.$$

Nous sommes donc dans les conditions d'application du lemme 8.3.29 pour le morphisme ι_λ . Comme par ailleurs, le morphisme i_λ est un isomorphisme de fibrés vectoriels (car les deux fibrés sont de rang 1), on en déduit que la partie (2) du diagramme suivant est commutative :

$$\begin{array}{ccccc} M\mathrm{Th}(N_Z X) & \xrightarrow{M(t_p)} & \bigoplus_\lambda M\mathrm{Th}(g_\lambda^* N_Z X) & \xrightarrow{M(t_{i_\lambda})} & \bigoplus_\lambda M\mathrm{Th}(N_{T_\lambda} Y) \\ \theta(N_Z X) \downarrow & & \downarrow \sum_\lambda \theta(g_\lambda^* N_Z X) & & \downarrow \sum_\lambda \theta(N_{T_\lambda} Y) \\ & (1) & & & (2) \\ M(Z) (1)[2] & \xrightarrow{M(t_g)} & \bigoplus_\lambda M(T_\lambda) (1)[2] & \xlongequal{\quad} & \bigoplus_\lambda M(T_\lambda) (1)[2]. \end{array}$$

Comme la partie (1) est commutative d'après le lemme 8.3.25, on peut conclure. \square

8.4.3 Propriétés supplémentaires

8.4.3.1 Action des unités et résidu (spécialisation)

On a pris l'habitude de poser $\mathbb{Z}\{1\} = \mathbb{Z}(1)[1]$ (cf 7.3.1). On explique pourquoi on adopte cette notation dans 9.1.7. Pour l'instant, on se borne à remarquer que ce sont effectivement ces coefficients qui interviennent dans la proposition de cette sous-section.

On a construit dans le lemme 8.2.13 un isomorphisme canonique

$$\phi : \mathbb{Z}\{1\} \rightarrow M(\mathbb{G}_m / \{1\}).$$

On en déduit donc un triangle distingué canonique

$$M(\{1\}) \rightarrow M(\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z}\{1\} \xrightarrow{+1}$$

Remarque 8.4.13.— Par définition, $M\mathrm{Th}(\mathbb{A}_k^1) = \mathbb{Z}(1)[2]$; par ailleurs, le morphisme $\theta(\mathbb{A}_k^1) : M\mathrm{Th}(\mathbb{A}_k^1) \rightarrow \mathbb{Z}(1)[2]$ est juste le morphisme identité. Il résulte dès lors du lemme 8.2.13 que le morphisme résidu $\partial : \mathbb{Z}\{1\} \rightarrow M(\mathbb{G}_m)$ associé à la paire fermée $(\mathbb{A}_k^1, \{0\})$ est une section du morphisme ρ défini ci-dessus.

Ainsi, $\mathbb{Z}\{1\}$ est un facteur direct de $M(\mathbb{G}_m)$. C'est plus précisément le motif réduit du schéma pointé $(\mathbb{G}_m, 1)$.

Si X est un schéma algébrique lisse, on rappelle que l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{DM_{-}^{eff}(k)}(M(X), \mathbb{Z}\{1\}) \simeq \mathbb{G}_m(X)$ est donné par la composée suivante

$$\mathrm{Hom}(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow \mathrm{Hom}_{DM_{-}^{eff}(k)}(M(X), \mathbb{Z}\{1\}), x \mapsto M(x) \circ \rho.$$

Pour x une unité de X , on note $\alpha_x = M(x) \circ \rho$ la classe de x dans le groupe $H^1(X; \mathbb{Z}(1))$.

Définition 8.4.14 *Soit X un schéma algébrique lisse.*

Pour toute unité $x : X \rightarrow \mathbb{G}_m$ de X , on pose

$$\gamma_x = \alpha_x \smile_X 1_X : M(X) \rightarrow M(X)\{1\}.$$

Cette définition nous sera particulièrement utile dans le chapitre suivant. Pour l'instant, on se borne à énoncer la proposition suivante :

Proposition 8.4.15 *Soient X un schéma algébrique lisse, et (X, Z) une paire fermée telle que Z est lisse, connexe de codimension 1 dans X . On note $i : Z \rightarrow X$ l'immersion fermée et $j : X - Z \rightarrow X$ l'immersion ouverte canonique.*

Supposons qu'il existe une fonction régulière $\pi : X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ qui paramétrise globalement Z . On en déduit une unité de $X - Z$, encore notée $\pi : X - Z \rightarrow \mathbb{G}_m$. Alors, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} M(Z)\{1\} & \xrightarrow{\partial_{X,Z}} & M(X-Z) & \xrightarrow{\gamma_\pi} & M(X-Z)\{1\} \\ & \searrow M(i)\{1\} & & \swarrow M(j)\{1\} & \\ & & M(X)\{1\} & & \end{array}$$

Remarque 8.4.16.– Avec les notations de cette proposition, si le morphisme $\partial_{X,Z}$ correspond à un résidu, le morphisme $\gamma_\pi \circ \partial_{X,Z}$ correspond à un morphisme de spécialisation.

PREUVE : On doit démontrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} M(X, Z)[-1] & \longrightarrow & M(X-Z) & \xrightarrow{\gamma_\pi} & M(X-Z)\{1\} \\ & \searrow \sim \epsilon[-1] & \text{(1)} & \swarrow M(j)\{1\} & \\ & & M(Z)\{1\} & \xrightarrow{M(i)\{1\}} & M(X)\{1\} \end{array}$$

où ϵ est l'isomorphisme considéré dans la définition 8.4.1

$$M(X, Z) \xrightarrow{\tilde{d}_Z X} M(D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) \xleftarrow{\tilde{d}'_Z X} M\mathrm{Th}(N_Z X) \xrightarrow{\theta(N_Z X)} M(Z)(1)[2].$$

Or, puisque π est une paramétrisation de Z , elle se relève en une fonction régulière, encore notée $\pi : D_Z X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$, qui est inversible sur $\dot{D}_Z X = D_Z X - \mathbb{A}_Z^1$.

Dès lors, le diagramme ci-dessus se déforme à travers le morphisme $d_Z X : X \rightarrow D_Z X$ en

$$\begin{array}{ccccc} M(D_Z X, \mathbb{A}_Z^1)[-1] & \longrightarrow & M(\dot{D}_Z X) & \xrightarrow{\gamma_\pi} & M(\dot{D}_Z X)\{1\} \\ & \searrow \sim \epsilon'[-1] & \text{(2)} & \swarrow M(j)\{1\} & \\ & & M(\mathbb{A}_Z^1)\{1\} & \xrightarrow{M(i)\{1\}} & M(D_Z X)\{1\} \end{array}$$

où l'on a noté encore i et j les immersions canoniques associées à la paire fermée $(D_Z X, \mathbb{A}_Z^1)$. L'isomorphisme ϵ' est obtenu par la composée des isomorphismes

$$M(D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) \xleftarrow{\tilde{d}'_Z X} M\text{Th}(N_Z X) \xrightarrow{\theta(N_Z X)} M(Z) (1)[2] \xrightarrow{M(s_1)} M(\mathbb{A}_Z^1) (1)[2]$$

où s_1 désigne l'immersion fermée unité de \mathbb{A}_Z^1 .

Or le morphisme $M(d_Z X) : M(X) \rightarrow M(D_Z X)$ admet une section comme le montre le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccccc} & & M(d_Z X) & & \\ & \searrow & \xrightarrow{\quad} & \swarrow & \\ M(X) & \xrightarrow{M(s_1)} & M(\mathbb{A}_X^1) & \xleftarrow{M(p)} & M(D_Z X) \\ & \searrow & \uparrow & & \uparrow \\ & & M(\mathbb{G}_m \times_k X) & \xleftarrow{\sim} & M(D_Z X|_{\mathbb{G}_m}) \end{array}$$

où le morphisme $p : D_Z X \rightarrow \mathbb{A}_Z^1$ est la projection canonique. En effet, par définition de $d_Z X$, le contour du diagramme est commutatif. Or, le morphisme $M(s_1)$ est un isomorphisme, et la section de $M(d_Z X)$ est donc donnée par le morphisme de projection canonique $D_Z X \rightarrow X$.

Il en résulte que la commutativité du diagramme (1) est équivalente à celle du diagramme (2). Or le diagramme (2) est aussi la déformation de

$$\begin{array}{ccccc} M\text{Th}(N_Z X) [-1] & \xrightarrow{\quad} & M(N_Z^\times X) & \xrightarrow{\gamma\pi} & M(N_Z^\times X) \{1\} \\ & \searrow \sim & \downarrow (3) & & \swarrow M(j)\{1\} \\ \theta(N_Z X)[-1] & \xrightarrow{\quad} & M(Z) \{1\} & \xrightarrow{M(i)\{1\}} & M(N_Z X) \{1\} \end{array}$$

où l'on a encore noté i et j les immersion ouvertes canoniques associées à la paire $(N_Z X, Z)$, et $\pi : N_Z X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ la fonction régulière induite par π . Notons que l'on a utilisé le fait que, dans la catégorie $DM_-^{eff}(k)$, $M(s_0) = M(s_1)$ où s_0 et s_1 désignent respectivement les sections nulle et unité de \mathbb{A}_Z^1 .

Ainsi, du fait que le morphisme $\tilde{d}'_Z X$ est un isomorphisme, la commutativité du diagramme (3) implique la commutativité du diagramme (2).

Soit $p : N_Z X \rightarrow Z$ le morphisme de projection canonique. Puisque π est une paramétrisation de Z , le morphisme $\pi \times_k p : E \rightarrow \mathbb{A}_k^1 \times_k X$ est un isomorphisme. Celui-ci induit un isomorphisme de paire fermée $(N_Z X, Z) \rightarrow (\mathbb{A}_Z^1, Z)$. Par ailleurs, par définition, l'isomorphisme $\pi \times_k p$ envoie la fonction régulière $\pi : N_Z X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ sur la fonction régulière triviale de $\tau : \mathbb{A}_Z^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$. Il en résulte que la commutativité du diagramme (3) est finalement équivalente à la commutativité de

$$\begin{array}{ccccc} M\text{Th}(\mathbb{A}_Z^1) [-1] & \xrightarrow{\quad} & M(\mathbb{G}_m Z) & \xrightarrow{\gamma\tau} & M(\mathbb{G}_m Z) \{1\} \\ & \searrow \sim & \downarrow (4) & & \swarrow M(j)\{1\} \\ \theta(\mathbb{A}_Z^1)[-1] & \xrightarrow{\quad} & M(Z) \{1\} & \xrightarrow{M(i)\{1\}} & M(\mathbb{A}_Z^1) \{1\} \end{array}$$

où i désigne maintenant la section nulle de \mathbb{A}_Z^1 , et j l'immersion ouverte complémentaire. On a utilisé le corollaire 8.3.27 pour la compatibilité des isomorphismes des espaces de Thom.

Or, $\theta(\mathbb{A}_Z^1) = \theta(\mathbb{A}_k^1) \times_k 1_Z = 1$, et d'après la proposition 8.4.17,

$$\partial_{(\mathbb{A}_Z^1, Z)} = \partial_{(\mathbb{A}_k^1, 0)} \otimes 1_Z.$$

D'après la remarque 8.4.13, $\partial_{(\mathbb{A}_k^1, 0)}$ est une section de l'épimorphisme canonique $\rho : M(\mathbb{G}_m) \rightarrow \mathbb{Z}\{1\}$. Donc la commutativité du diagramme (4) se réduit à la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} M((\tau^\times \times 1_{\mathbb{G}_m Z}) \circ \Delta_{\mathbb{G}_m Z}) & \longrightarrow & M(\mathbb{G}_m \mathbb{G}_m Z) & \xrightarrow{\rho \otimes 1_{\mathbb{G}_m Z}} & M(\mathbb{G}_m Z)\{1\} \\ & \searrow (5) & \downarrow M(1_{\mathbb{G}_m} \times j) & & \swarrow M(j)\{1\} \\ M(\mathbb{G}_m Z) & \xrightarrow{M(1_{\mathbb{G}_m} \times i)} & M(\mathbb{G}_m \mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\rho \otimes 1_{\mathbb{A}_Z^1}} & M(\mathbb{A}_Z^1)\{1\} \\ \rho \otimes 1_Z \downarrow & & & & \\ M(Z)\{1\} & \xrightarrow{M(i)\{1\}} & & & \end{array}$$

Le problème est donc réduit à la commutativité de la partie (5) de ce diagramme, qui est évidente (et déjà vraie dans la catégorie des schémas). \square

8.4.3.2 Structure monoïdale et triangle de Gysin

On termine cette section par un calcul simple du morphisme résidu. Rappelons que pour tout motif \mathcal{M} dans $DM_-^{eff}(k)$, et tout entier naturel n , on a posé :

$$\mathcal{M}(n) = \mathbb{Z}(n) \otimes \mathcal{M}$$

Cette convention n'est pas anodine puisque la permutation sur $\mathbb{Z}(1)[1] \otimes \mathbb{Z}(1)[1]$ est égale à $(-1).Id$.

La proposition suivante est élémentaire, mais mérite d'être soignée puisqu'elle explique le signe de la relation R3e vue dans la catégorie des motifs génériques (cf 9.2.16).

Proposition 8.4.17 *Soient X et Y des schémas algébriques lisses et (X, Z) une paire fermée telle que Z est lisse sur k , purement de codimension n dans X .*

Alors, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} M(YX) & \xrightarrow{i_{YX, YZ}} & M(YZ)(n)[2n] & \xrightarrow{\partial_{YX, YZ}[1]} & M(Y(X-Z))[1] \\ \parallel & & \downarrow \epsilon \sim_* & & \parallel \\ M(Y) \otimes M(X) & \xrightarrow{1_Y \otimes i_{X, Z}} & M(Y) \otimes (M(Z)(n)[2n]) & \xrightarrow{1_Y \otimes \partial_{X, Z}[1]} & M(Y) \otimes M(X-Z)[1], \end{array}$$

ayant noté ϵ est l'isomorphisme de permutation

$$\mathbb{Z}(n)[2n] \otimes M(Y) \otimes M(Z) \simeq M(Y) \otimes \mathbb{Z}(n)[2n] \otimes M(Z).$$

PREUVE : Remarquons tout d'abord que, puisque le foncteur $L[Y] \otimes^{tr} (\cdot)$ est exact à droite, on obtient un isomorphisme canonique noté σ dans le diagramme suivant de \mathcal{N}_k^{tr} , dont les lignes sont des suites exactes courtes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & L[YX - YZ] & \longrightarrow & L[YX] & \longrightarrow & L[YX/YX - YZ] & \longrightarrow 0 \\ & \parallel & & \parallel & & \downarrow \sigma & \\ 0 \longrightarrow & L[Y] \otimes^{tr} L[X - Z] & \longrightarrow & L[Y] \otimes^{tr} L[X] & \longrightarrow & L[Y] \otimes^{tr} L[X/X - Z] & \longrightarrow 0. \end{array} \tag{8.3}$$

Notons que par ailleurs, on a des isomorphismes canoniques (cf B.2.8) $D_{YZ}(YX) \simeq Y(D_Z X)$ et $N_{YZ}(YX) \simeq Y(N_Z X)$ qui sont compatibles aux morphismes de déformation au cône normal. Ainsi, on obtient le diagramme commutatif suivant, dont tous les morphismes sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc}
M(YX/YX - YZ) & \xrightarrow{\sigma} & M(Y) \otimes M(X/X - Z) \\
\downarrow \tilde{d}_{YZ}(YX) & & \downarrow 1_Y \otimes \tilde{d}_Z X \\
M\left(Y(D_Z X)/Y(\dot{D}_Z X)\right) & \xrightarrow{\sigma} & M(Y) \otimes M\left((D_Z X)/Y(\dot{D}_Z X)\right) \\
\uparrow \tilde{d}'_{YZ}(YX) & & \uparrow 1_Y \otimes \tilde{d}'_Z X \\
M\text{Th}(Y(N_Z X)) & \xrightarrow{\sigma} & M(Y) \otimes M\text{Th}(N_Z X).
\end{array}$$

On a noté σ pour tous les isomorphismes obtenus comme indiqué en début de preuve (qui sont tous compatibles). Compte tenu du diagramme (8.3), il nous suffit donc de montrer que le morphisme σ de la dernière ligne est égal, à travers les isomorphismes canoniques des motifs de Thom, au morphisme ϵ . D'après la définition de ces isomorphismes (cf 8.3.24), cela résulte du lemme :

Lemme 8.4.18 *Soient Z et Y des schémas algébriques lisse, et E un fibré vectoriel sur Z . Alors, pour tout entier naturel r , le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
M(\mathbb{P}(YE)) & \xrightarrow{l_r(YE)} & M(YZ)(n)[2n] \\
\parallel & & \downarrow \epsilon \\
M(Y) \otimes M(\mathbb{P}(E)) & \xrightarrow{1_Y \otimes l_r(E)} & M(Y) \otimes (M(Z)(n)[2n]).
\end{array}$$

PREUVE : Soient $f : \mathbb{P}(YE) \rightarrow \mathbb{P}(E)$ le morphisme de projection canonique et λ (resp. λ_Y) le fibré en droite canonique de $\mathbb{P}(E)$ (resp. $\mathbb{P}(YE)$). D'après le lemme 8.3.9,

$$\mathbf{c}_n(\lambda_Y) = \mathbf{c}_n(\lambda) \circ M(f).$$

Si l'on note p_Z (resp. p_{YZ}) la projection de $\mathbb{P}(E)$ sur Z (resp. $\mathbb{P}(YE)$ sur YZ), la commutativité du diagramme de l'énoncé est réduite à la commutativité évidente du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
M(\mathbb{P}(YE)) & \xlongequal{\quad} & M(Y) \otimes M(\mathbb{P}(E)) \\
\downarrow \Delta_{\mathbb{P}(YE)} & & \downarrow 1_Y \otimes \Delta_{\mathbb{P}E} \\
M(\mathbb{P}(YE)) \otimes M(\mathbb{P}(YE)) & & \\
\downarrow f \otimes 1 & & \\
M(\mathbb{P}(E)) \otimes M(\mathbb{P}(YE)) & \xrightarrow{\sim_*} & M(Y) \otimes M(\mathbb{P}(E)) \otimes M(\mathbb{P}(E)) \\
\downarrow \mathbf{c}_n(\lambda) \otimes 1 & & \downarrow 1 \otimes \mathbf{c}_n(\lambda) \otimes 1 \\
\mathbb{Z}(n)[2n] \otimes M(\mathbb{P}(YE)) & \xrightarrow{\sim_*} & M(Y) \otimes \mathbb{Z}(n)[2n] \otimes M(\mathbb{P}(E)) \\
\downarrow 1 \otimes 1 \otimes p_{YZ} & & \downarrow 1 \otimes p_Z \\
\mathbb{Z}(n)[2n] \otimes M(Y) \otimes M(Z) & \xrightarrow{\sim_* \epsilon} & M(Y) \otimes \mathbb{Z}(n)[2n] \otimes M(Z).
\end{array}$$

On a identifié $M(\mathbb{P}(YE))$ et $M(Y) \otimes M(\mathbb{P}E)$, et les flèches \sim_* indiquent l'isomorphisme canonique de permutation des facteurs, compte tenu de cette identification.

Ceci démontre donc le lemme, et la proposition. \square

\square

Chapter 9

Catégorie des motifs génériques

Dans ce chapitre, les extensions de k sont toujours supposées être de type fini.

9.1 Généralités

9.1.1 Définition

On rappelle que pour toute extension E/k , on a défini dans 2.1.37 un pro-objet de \mathcal{L}_k noté (E) . Par ailleurs, on a aussi posé $\mathbb{Z}\{n\} = \mathbb{Z}(n)[n]$.

Définition 9.1.1 *Si E/k est une extension, on note $M_{gm}(E)$ (resp. $M(E)$) le pro-objet de $DM_{gm}^{eff}(k)$ obtenu par composition à partir du foncteur $M_{gm}(\cdot) : \mathcal{L}_k \rightarrow DM_{gm}^{eff}(k)$ (resp. $M(\cdot) : \mathcal{L}_k \rightarrow DM_{-}^{eff}(k)$). On appelle ce pro-objet le motif générique géométrique (resp. faisceautique) défini par E .*

On note $DM_{gm}^{(0)}(k)$ la sous-catégorie de $\text{pro-}DM_{gm}(k)$ formée des objets $M_{gm}(E)\{n\}$ où E/k est une extension de type fini, et n un entier relatif.

9.1.2.– Lorsque n est positif, on dira encore que $M_{gm}(E)\{n\}$ est un motif générique effectif. On notera encore $DM_{gm}^{eff,(0)}(k)$ la sous-catégorie de $DM_{gm}^{(0)}(k)$ formée des motifs génériques effectifs. Ces objets peuvent encore être vus comme des pro-objets de $DM_{gm}^{eff}(k)$.

9.1.2 Propriété fondamentale

Les motifs génériques ont la propriété remarquable suivante :

Proposition 9.1.3 *Soient E/k une extension, et \mathcal{M} un motif. Alors, le morphisme canonique*

$$\text{Hom}_{\text{pro-}DM_{-}^{eff}(k)}(M(E), \mathcal{M}) \rightarrow \text{Hom}_{\text{pro-}DM_{-}^{eff}(k)}(M(E), H^0(\mathcal{M}))$$

est un isomorphisme.

Plus généralement, pour tout couple $(n, p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, on a un isomorphisme canonique :

$$\text{Hom}_{\text{pro-}DM_{-}^{eff}(k)}(M(E)[n](p), \mathcal{M}) \simeq H^{p-n}(\mathcal{M})_{-p}(E).$$

Remarque 9.1.4.– Comme le foncteur pro-représenté par (E) est exact sur la catégorie abélienne des faisceaux homotopiques, il est exact sur la catégorie triangulée des motifs mixtes (géométriques ou faisceautiques). Les motifs génériques sont donc des «points» pour la catégorie des motifs mixtes, dans le sens où ils pro-représentent des foncteurs $DM_-^{eff}(k) \rightarrow \mathcal{A}b$ qui envoient les triangles distingués sur des suites exactes longues (et commutent aux sommes directes infinies). Par ailleurs, la famille des foncteurs $DM_-^{eff}(k) \rightarrow \mathcal{A}b$ pro-représentés par des pro-objets de la forme $M_{gm}(E)[p]$ pour un entier relatif p et une extension E/k est conservative.

PREUVE : 1) Il s’agit de calculer :

$$\varinjlim_{A \in \mathcal{M}^{lis}(E/k)} \left(\text{Hom}_{DM_-^{eff}(k)}(M(\text{Spec}(A)), \mathcal{M}) = H^0(\text{Spec}(A); \mathcal{M}) \right)$$

où le dernier groupe est le groupe d’hypercohomologie du complexe \mathcal{M} (concentré en degrés négatifs) de la catégorie des faisceaux Nisnevich (sans transferts).

Considérons alors la limite inductive des suites spectrales d’hypercohomologie :

$$E_1^{p,q} = H^p((E); H^q(\mathcal{M}')) \Rightarrow H^{p+q}((E); \mathcal{M})$$

(Cette suite spectrale converge encore).

Or, $H^q(\mathcal{M})$ étant un faisceau, la fibre en (E) de sa cohomologie en dimension supérieure est nulle. Autrement dit :

$$H^p(E; H^q(\mathcal{M})) = 0 \text{ si } p \neq 0.$$

Ainsi, la suite spectrale précédente dégénère et induit un isomorphisme (d’après sa convergence) :

$$H^0(E; H^q(\mathcal{M})) \simeq H^q(E; \mathcal{M}).$$

On obtient donc un isomorphisme canonique, pour q un entier :

$$H^q(\mathcal{M})(E) \simeq \text{Hom}(M(E), \mathcal{M}[q]).$$

2) Revenons au cas général ; on calcule :

$$\begin{aligned} \text{Hom}(M(E)[n](p), \mathcal{M}) &= \text{Hom}(M(E)[n-p]p, \mathcal{M}) \\ &= \text{Hom}(M(E)[n-p], \underline{\text{Hom}}(\mathbb{Z}(p)[p], \mathcal{M})) \\ &= H^{p-n}(\underline{\text{Hom}}(\mathbb{Z}(p)[p], \mathcal{M}))(E). \end{aligned}$$

Or, si F est un faisceau homotopique, on calcule :

$$\underline{\text{Hom}}_{DM_-^{eff}(k)}(\mathbb{Z}(1)[1], F) \cdot (E) = \text{Hom}_{\text{pro-}DM_-^{eff}(k)}(M(E)(1)[1], F).$$

Or, le foncteur $\text{Hom}_{DM_-^{eff}(k)}(\cdot, F)$ est triangulé. Donc, en l’appliquant au pro-triangle distingué :

$$M(\mathbb{G}_m) \otimes M(E) \rightarrow M(\mathbb{A}^1) \otimes M(E) \rightarrow M(E)(1)[2] \xrightarrow{+1}$$

on obtient la suite exacte :

$$\begin{aligned} & \dots \rightarrow \mathrm{Hom}(M(E)(1)[2], F) \rightarrow \\ & \mathrm{Hom}(M(\mathbb{A}^1) \otimes M(E), F) \rightarrow \mathrm{Hom}(M(\mathbb{G}_m) \otimes M(E), F) \\ & \rightarrow \mathrm{Hom}(M(E)(1)[1], F) \rightarrow \mathrm{Hom}(M(\mathbb{A}^1) \otimes M(E)[-1], F). \end{aligned}$$

Or, le dernier groupe est égal à

$$H^1(\mathbb{A}^1 \times (E); F) = H^1(E; F) = 0$$

et la suite se réduit alors à :

$$F(\mathbb{G}_m \times (E)) \rightarrow F(\mathbb{A}^1 \times (E)) \rightarrow \mathrm{Hom}(M(E)(1)[1], F) \rightarrow 0$$

d'où l'isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}(M(E)(1)[1], F) \simeq F_{-1}(E)$.

Comme ceci est vrai pour tout E , on en conclut :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{DM_{-}^{eff}(k)}(\mathbb{Z}(1)[1], F) \simeq F_{-1}.$$

Dès lors, comme le foncteur $.._{-1}$ est exact sur la catégorie $\mathcal{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}$, on en déduit que le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{DM_{-}^{eff}(k)}(\mathbb{Z}(1)[1], \cdot)$ est t-exact pour la t-structure canonique. On peut donc conclure :

$$\begin{aligned} H^{p-n}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}(p)[p], \mathcal{M}))(E) &= \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}(p)[p], H^{p-n}(\mathcal{M}))(E) \\ &= H^{p-n}(\mathcal{M})_{-p}(E). \end{aligned}$$

□

9.1.3 Equivalences de catégories

On va en déduire un lien entre la catégorie des motifs génériques et celle des modules homotopiques. Nous avons déjà introduit la catégorie $\mathcal{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr},(0)}$ dans 5.1.4 ; on peut de plus considérer la catégorie :

Définition 9.1.5 Soient E/k une extension.

On note $\Omega^\infty(E)$ le pro-objet de $\mathcal{H}\mathcal{M}_k^{\mathrm{tr}}$ obtenu par composition du pro-objet $h_0(E)$ avec le foncteur canonique $\Omega^\infty \Sigma^\infty : \mathcal{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}} \rightarrow \mathcal{H}\mathcal{M}_k^{\mathrm{tr}}$.

On définit alors $\mathcal{H}\mathcal{M}_k^{(0)}$ comme la sous-catégorie de $\mathcal{H}\mathcal{M}_k^{\mathrm{tr}}$ composée des objets de la forme $\Omega^\infty(E)\{n\}$ où n est un entier relatif, et E/k une extension de type fini.

On rappelle qu'on a posé $\mathbb{Z}\{1\} = \mathbb{Z}(1)[1]$. De même, pour tout entier naturel n , on pose $\mathbb{Z}\{n\} = \mathbb{Z}(n)[n]$. On obtient alors le corollaire suivant de la proposition 9.1.3 qui montre le lien entre l'approche de cette partie et celle de la première partie :

Proposition 9.1.6 Soient E/k une extension de type fini, et n un entier relatif. Alors, le pro-objet $\Omega^\infty(E)\{n\}$ de $\mathcal{H}\mathcal{M}_k^{\mathrm{tr}}$ est naturel par rapport aux morphismes du motif générique $M_{gm}(E)(n)[n]$. On en déduit donc un foncteur canonique

$$\begin{aligned} DM_{gm}^{(0)}(k) &\rightarrow \mathcal{H}\mathcal{M}_k^{(0)} \\ M_{gm}(E)\{n\} &\mapsto \Omega^\infty(E)\{n\} \end{aligned}$$

qui est de plus une équivalence de catégorie.

Remarque 9.1.7.– Ainsi, les notations choisies se rejoignent, comme on l’avait annoncé.

PREUVE : Considérons E/k et L/k des extensions de type fini, et n, m des entiers relatifs. Il s’agit donc de construire un isomorphisme compatible avec la composition

$$\mathrm{Hom}_{DM_{gm}^{(0)}(k)}(M_{gm}(E)(n)[n], M_{gm}(L)(m)[m]) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}\mathcal{M}_k^{\mathrm{tr}}}(\Omega^\infty(E)\{n\}, \Omega^\infty(L)\{m\}).$$

Soit $k \geq \max(-n, -m)$ un entier. On peut alors considérer la composée des isomorphismes suivants

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(E)(n+k)[n], M_{gm}(L)(m+k)[m]) \\ & \rightarrow \mathrm{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(E)(n+k)[n+k], M_{gm}(L)(m+k)[m+k]) \\ & \rightarrow \mathrm{Hom}_{DM_{-}^{eff}(k)}(M(E)(n+k)[n+k], M(L)(m+k)[m+k]) \\ & \xrightarrow{(1)} \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}}\left(S_t^{n+k} \otimes^{Htr} h_0(E), S_t^{m+k} \otimes^{Htr} h_0(L)\right) \\ & \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}\mathcal{M}_k^{\mathrm{tr}}}(\Omega^\infty(E)\{n+k\}, \Omega^\infty(L)\{m+k\}) \\ & \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}\mathcal{M}_k^{\mathrm{tr}}}(\Omega^\infty(E)\{n\}, \Omega^\infty(L)\{m\}) \end{aligned}$$

où l’isomorphisme (1) est obtenu particulièrement grâce au corollaire précédent. Chacun de ces morphismes est naturel par rapport à la composition. On en déduit donc, en considérant la limite inductive sur k de ces isomorphismes, l’isomorphisme attendu. \square

9.1.8.– On a de plus obtenu le carré

$$\begin{array}{ccc} DM_{gm}^{eff,(0)}(k) & \longrightarrow & DM_{gm}^{(0)}(k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr},(0)} & \longrightarrow & \mathbf{H}\mathcal{M}_k^{(0)} \end{array}$$

où tous les morphismes sont monoïdaux symétriques, les morphismes verticaux sont des équivalences, et les morphismes horizontaux sont pleinement fidèles.

Une conséquence de cette proposition est donc le fait que la catégorie $DM_{gm}^{(0)}(k)$ est canoniquement une sous-catégorie pleine de la catégorie *abélienne* monoïdale $\mathrm{pro}\text{-}\mathbf{H}\mathcal{M}_k^{\mathrm{tr}}$.

Les motifs génériques effectifs peuvent donc être vus comme des sous-objets de la catégorie abélienne $\mathrm{pro}\text{-}\mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\mathrm{tr}}$

9.2 Morphismes et relations

9.2.1 Le foncteur canonique $M^{(0)}$

On rappelle qu’on a défini la catégorie $\tilde{\mathcal{E}}_k$ en 4.1.21. Dans cette partie, on donne une description unifiée des démonstrations de la première partie. Notamment, le fait que, pour tout module homotopique F_* , \hat{F}_* est un pré-module de cycles, se trouve résumé dans la proposition suivante :

Théorème 9.2.1 *Il existe un foncteur canonique*

$$M^{(0)} : (\tilde{\mathcal{E}}_k)^{op} \rightarrow DM_{gm}^{(0)}(k)$$

qui à un objet (E, n) de $\tilde{\mathcal{E}}_k$ associe le motif générique $M_{gm}(E)(-n)[-n]$.

Le problème est bien sûr de définir ce foncteur sur les morphismes et de vérifier les relations qu'ils doivent satisfaire.

Remarque 9.2.2.– Le travail a déjà essentiellement été fait dans la démonstration du théorème 6.1.1, mais l'utilisation de la catégorie triangulée des motifs mixtes permet d'en donner une description plus simple et plus naturelle (particulièrement pour les résidus).

Remarquons que le foncteur qui à un module homotopique F_* associe le module de cycles \hat{F}_* n'est rien d'autre que la composition du foncteur induit par F_* sur $\text{pro-H}\mathcal{M}_k^{\text{tr}}$ avec le foncteur de la proposition précédente, puisque $DM_{gm}^{(0)}(k) \simeq \text{H}\mathcal{M}_k^{(0)}$.

Le foncteur que l'on vient de construire est donc en quelque sorte une réalisation des axiomes et relations des pré-modules de cycles en termes géométriques dans la catégorie dérivée des motifs mixtes. Comme nous l'avions annoncé, les données d'un pré-module de cycles peuvent donc s'interpréter comme la réalisation des morphismes de spécialisation entre les motifs génériques, que l'on interprète comme des «points» pour la catégorie dérivée des motifs (*i.e.* ils pro-représentent des foncteurs triangulés exacts, qui commutent aux sommes directes).

PREUVE :

(donnée D1) Tout d'abord, si $\varphi : E \rightarrow L$ est un k -morphisme entre des extensions de type fini de k , on lui a associé en 2.1.37 un foncteur canonique $(\varphi) : (L) \rightarrow (E)$. On en déduit donc un morphisme canonique

$$\varphi^\sharp : M_{gm}(L) \rightarrow M_{gm}(E)$$

en posant $\varphi^\sharp = M_{gm}(\varphi)$, ce qui nous donne la donnée D1.

La relation R1a est alors trivialement vérifiée.

Pour la définition des autres données et relations, on renvoie aux parties suivantes. La table des matières de ce chapitre précise l'endroit où chaque donnée et chaque relation est prouvée. □

Remarque 9.2.3.– On ne perdra pas de vue que le foncteur à construire dans la proposition précédente est contravariant. C'est pour clarifier la situation, que l'on a choisi de noter par un symbole \sharp en exposant ou en indice, les morphismes correspondant aux données D1 et D2.

9.2.2 Transferts (D2,R1b,R1c)

Définition 9.2.4 (D2) *Soient E/k et L/k des extensions de type fini, et $\varphi : E \rightarrow L$ un morphisme fini.*

On pose alors $\varphi_\sharp = M_{gm}({}^t(\varphi)) : M_{gm}(E) \rightarrow M_{gm}(L)$

où ${}^t(\varphi) : [L] \rightarrow [E]$ est le morphisme de $\text{pro-}\mathcal{L}_{\text{cor},k}$ défini en 5.3.17.

On en déduit immédiatement la formule de projection suivante :

Proposition 9.2.5 *Soient $\varphi : K \rightarrow E$ un morphisme fini et $\psi : K \rightarrow L$ un morphisme quelconque où K/k , E/k et L/k sont des extensions de type fini.*

On note $E \otimes_K L^{(0)}$ les idéaux maximaux de la k -algèbre artinienne $E \otimes_K L$. Si z est un idéal maximal de $E \otimes_K L$, on note $\kappa(z)$ l'extension de k quotient $E \otimes_K L/z$ qui est le but des morphismes suivants

$$\begin{array}{ccc} \kappa(z) & \xleftarrow{\psi_z} & E \\ \varphi_z \uparrow & & \uparrow \varphi \\ L & \xleftarrow{\psi} & K. \end{array}$$

Alors, dans $DM_{gm}^{(0)}(k)$,

$$\varphi_{\#} \psi^{\#} = \sum_{z \in (E \otimes_K L)^{(0)}} \lg(E \otimes_K L)_z \cdot (\psi_z)^{\#} (\varphi_z)_{\#}.$$

PREUVE : C'est un corollaire de la proposition 8.1.1 en considérant un k -modèle $f : Y \rightarrow X$ du morphisme fini φ et un k -modèle $g : Z \rightarrow X$ du morphisme ψ tels que $(Z \times_X Y)_{red}$ soit lisse sur k . \square

On obtient une formule plus simple dans le cas particulier suivant :

Corollaire 9.2.6 *Soient $\varphi : K \rightarrow E$ un morphisme fini et $\psi : K \rightarrow L$ un morphisme fini et normal où K/k , E/k et L/k sont des extensions de type fini.*

Alors,

$$\psi_{\#} \varphi^{\#}(\rho) = [E : K]_i \sum_{j \in \text{Hom}_K(E, L)} j_{\#}(\rho)$$

où $[E : K]_i$ désigne le degré d'inséparabilité de E/K .

Ce corollaire se déduit de la proposition précédente, ou même plus directement du quatrième point de 5.5.8.

9.2.3 Diagonale et cup-produit

Considérons une extension E/k . Le morphisme diagonal $\text{Spec}(E) \rightarrow \text{Spec}(E) \times_k \text{Spec}(E)$ induit un morphisme dans $\text{pro-}DM_{gm}^{eff}(k)$

$$\Delta_E : M_{gm}(E) \rightarrow M_{gm}(E) \otimes M_{gm}(E)$$

(puisqu'il correspond à un morphisme sur les pro-objets).

Comme dans la définition 8.1.4, on en déduit un cup-produit externe sur les morphismes de source $M_{gm}(E)$ (c'est encore la généralisation du cup-produit de la définition 2.2.21) :

Définition 9.2.7 *Soient E/k , L/k et $K : k$ des extensions de type fini.*

Soit $\alpha : M_{gm}(E) \rightarrow M_{gm}(K) \{p\}$ et $\beta : M_{gm}(E) \rightarrow M_{gm}(L) \{q\}$ des morphismes dans $DM_{gm}^{(0)}(k)$.

On définit le cup-produit de α par β sur E comme le morphisme dans

$$\text{Hom}_{\text{pro-H}\mathcal{A}_k^{\text{tr}}}(M_{gm}(E), M_{gm}(K) \otimes M_{gm}(L) \{p + q\})$$

suivant : $\alpha \smile_E \beta = (\alpha \otimes \beta) \circ \Delta_E$.

Remarque 9.2.8.– On rappelle qu'on a posé $\mathbb{Z}\{p\} = \mathbb{Z}(p)[p]$.

Puisque la permutation des facteurs sur $\mathbb{Z}\{1\} \otimes \mathbb{Z}\{1\}$ est égale à $(-1).Id$, on en déduit

$$\alpha \smile_E \beta = -\beta \smile_E \alpha.$$

Avec cette notation, on obtient de plus la formule de projection suivante :

Proposition 9.2.9 *Soit E/k et L/k des extensions, et $\varphi : E \rightarrow L$ un k -morphisme fini. Alors,*

$$(\varphi^\# \smile_L 1_L) \circ \varphi_\# = 1_E \smile_E (\varphi_\#)$$

comme élément de

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}\text{-}DM_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(E), M_{gm}(E) \otimes M_{gm}(L)).$$

PREUVE : Cette proposition résulte de la proposition 8.1.8 en considérant un k -modèle du morphisme φ (cf 5.3.15). □

9.2.4 K-théorie (D3,R2a,R2b,R2c)

On a déjà vu dans la sous-section 8.4.3.1 que l'on dispose d'un triangle distingué canonique

$$\mathbb{Z} \rightarrow M_{gm}(\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z}\{1\} \xrightarrow{+1}$$

Par définition du produit tensoriel de $DM_{gm}^{eff}(k)$, on en déduit donc un triangle distingué dans $DM_{gm}^{eff}(k)$

$$\bigoplus_{i=1}^n M_{gm}(\mathbb{G}_m^{n-1}) \rightarrow M_{gm}(\mathbb{G}_m^n) \xrightarrow{\rho_n} \mathbb{Z}\{n\} \xrightarrow{+1}$$

où le premier morphisme est la somme des morphismes induits par les n immersions fermées consistant à fixer une des coordonnées à 1.

Considérons $x = (x_1, \dots, x_n)$ un élément de $(E^\times)^n$, où $n \in \mathbb{N}$. Il correspond à un unique morphisme $\mathrm{Spec}(E) \rightarrow \mathbb{G}_m^n$ que l'on peut voir aussi comme un morphisme de pro-objets $(E) \rightarrow \mathbb{G}_m^n$, encore noté x .

On en déduit le morphisme α_x suivant dans $\mathrm{pro}\text{-}DM_{gm}^{eff}(k)$

$$M_{gm}(E) \xrightarrow{M_{gm}(x)} M_{gm}(\mathbb{G}_m^n) \xrightarrow{\rho_n} \mathbb{Z}\{n\}.$$

On obtient ainsi une application

$$(E^\times)^{\otimes, n} \rightarrow \mathrm{Hom}_{DM_{gm}^{(0)}(k)}(M_{gm}(E), \mathbb{Z}\{n\}), x \mapsto \alpha_x$$

puisqu'on vérifie que α_x dépend multi-linéairement de x .

Par ailleurs, si $x \in (E^\times)^{\otimes, n}$ et $y \in (E^\times)^{\otimes, m}$, par définition du cup-produit, on obtient

$$\alpha_{x \otimes y} = \alpha_x \smile_E \alpha_y.$$

On a donc définit un morphisme d'algèbre

$$\mathcal{S}(E^\times) \rightarrow \mathrm{Hom}_{DM_{gm}^{(0)}(k)}(M_{gm}(E), \mathbb{Z}\{*\}).$$

Proposition 9.2.10 *Le morphisme d'algèbre définit ci-dessus se factorise et induit un isomorphisme*

$$K_*^M(E) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}_{DM_{gm}^{(0)}(k)}(M_{gm}(E), \mathbb{Z}\{*\}).$$

PREUVE : D'après la proposition 9.1.3, on a un isomorphisme canonique

$$\text{Hom}_{DM_{gm}^{(0)}(k)}(M_{gm}(E), \mathbb{Z}\{*\}) \rightarrow S_t^*(E)$$

induit par le morphisme canonique $\mathbb{Z}\{*\} \rightarrow H^0(\mathbb{Z}\{*\})$. Donc, la proposition n'est qu'une reformulation du théorème 5.5.10 (compte tenu du lemme 5.5.7 pour la forme précise de l'isomorphisme). \square

Dès lors, la donnée D3 s'en déduit facilement :

Définition 9.2.11 (D3) *Soient E/k une extension de type fini, n un entier naturel et $x \in K_n^M(E)$. On considère $\alpha_x : M_{gm}(E) \rightarrow \mathbb{Z}\{n\}$ le morphisme associé à x par la proposition suivante.*

On pose alors :

$$\gamma_x = \alpha_x \smile_E 1_E.$$

On en déduit la proposition suivante :

Lemme 9.2.12 *Soient $E/k, L/k$ des extensions de type fini, et $\varphi : E \rightarrow L$ un k -morphisme. Alors, pour tout $x \in K_*^M(E)$ et tout $y \in K_*^M(L)$,*

$$\text{R2a: } \gamma_x \circ \varphi^\# = \varphi^\# \circ \gamma_{(\varphi_*x)}$$

$$\text{R2b: } \text{Si } \varphi \text{ est fini, } \gamma_{(\varphi_*x)} \circ \varphi_\# = \varphi_\# \circ \gamma_x$$

$$\text{R2c: } \text{Si } \varphi \text{ est fini, } \varphi^\# \circ \gamma_y \circ \varphi_\# = \gamma_{\varphi^*y}$$

*Dans ces formules, φ_*x désigne l'image directe de x dans $K_*^M(L)$ et φ^*y la norme de y dans $K_*^M(E)$.*

PREUVE : Tout d'abord, notons que par définition, $\alpha_{\varphi_*x} = \alpha_x \circ \varphi^\#$. Par ailleurs, d'après le lemme 5.5.15, on a aussi $\alpha_{\varphi^*y} = \alpha_y \circ \varphi_\#$.

Dès lors, la propriété (R2a) résulte de la deuxième propriété du lemme 8.1.7. Les deux autres propriétés résultent de la proposition 8.1.8. \square

9.2.5 Résidu (D4,R3a,b,c,d,e)

Soient E/k une extension de type fini, et v une valuation sur E nulle sur k . Considérons \mathcal{O}_v l'anneau de valuation de v . Il est régulier (puisque c'est un anneau de valuation) et essentiellement de type fini (puisque E/k est de type fini), donc c'est un anneau local essentiellement lisse sur k .

D'après la proposition 5.4.53, il admet donc un k -modèle strict (X, s) . Soit Z l'adhérence réduite de s dans X . On a donc d'une paire fermée (X, Z) telle que Z est lisse sur k . On lui a associé un triangle de Gysin

$$M_{gm}(Z) \{1\} \xrightarrow{\partial_{X,Z}} M_{gm}(X - Z) \xrightarrow{M_{gm}(j)} M_{gm}(X) \xrightarrow{+1}$$

Par ailleurs, d'après le théorème 8.4.7, ce triangle est naturel par rapport aux ouverts de X . On en déduit donc en considérant le système cofiltrant des voisinages ouverts de s dans X le pro-triangle distingué

$$M_{gm}(Z_s) \{1\} \xrightarrow{\partial_{X_s, Z_s}} M_{gm}(X_s - Z_s) \xrightarrow{M_{gm}(j_s)} M_{gm}(X_s) \xrightarrow{+1}$$

Puisque (X, s) est un modèle de \mathcal{O}_v , le morphisme $s : \text{Spec}(\mathcal{O}_v) \rightarrow X$ induit un isomorphisme de pro-objet $(s) : (\mathcal{O}_v) \rightarrow X_s$; on en déduit donc un pro-triangle distingué isomorphe au précédent

$$M_{gm}(\kappa(v)) \{1\} \xrightarrow{\partial'_{X_s, Z_s}} M_{gm}(E) \xrightarrow{i^\#} M_{gm}(\mathcal{O}_v) \xrightarrow{+1}$$

où E (resp. $\kappa(v)$) est le corps des fractions (resp. résiduel) de v , et $i : \mathcal{O}_v \rightarrow E$ est le morphisme d'inclusion canonique.

Dès lors, il résulte du théorème 8.4.7, suivant la démarche de 5.4.55, que le morphisme ∂'_{X_s, Z_s} ainsi défini ne dépend pas du modèle choisi. D'où la définition suivante :

Définition 9.2.13 (D4) Soient E/k une extension de type fini, et v une valuation de E nulle sur k .

On définit un morphisme résidu associé à v , noté ∂_v , en considérant un k -modèle strict (X, s) de l'anneau de valuation de v et en posant avec les notations précédentes $\partial_v = \partial'_{(X_s, Z_s)}$.

Remarque 9.2.14.— On dispose donc d'un pro-triangle distingué

$$M_{gm}(\kappa(v)) \{1\} \xrightarrow{\partial_v} M_{gm}(E) \xrightarrow{i^\#} M_{gm}(\mathcal{O}_v) \xrightarrow{+1} \tag{9.1}$$

On en déduit tout d'abord les relations suivantes qui concernent le résidu et les données $D1, D2$:

Lemme 9.2.15 Soient E/k une extension de type fini, et v une valuation sur E nulle sur k .

R3a: Soit L/k une extension de type fini, et $\varphi : L \rightarrow E$ un k -morphisme tel que v est nul sur E . Alors,

$$\varphi^\# \circ \partial_v = 0.$$

R3b: Soient L/k une extension de type fini, et $\varphi : L \rightarrow E$ un k -morphisme tel que $v|_{L^\times} = e.w$ où w est une valuation sur L , et $e > 0$ un entier. Alors,

$$\varphi^\# \circ \partial_v = e.\partial_w \{1\} \circ \bar{\varphi}^\#$$

où $\bar{\varphi} : \kappa(w) \rightarrow \kappa(v)$ est le morphisme induit.

R3c: Soient L/k une extension de type fini, et $\varphi : E \rightarrow L$ un k -morphisme fini. On note $(w_i)_{i=1, \dots, n}$ les valuations sur L qui prolongent v (avec un indice de ramification éventuel), et $\bar{\varphi}_i : \kappa(w_i) \rightarrow \kappa(v)$ les morphismes induits sur les corps résiduels. Alors,

$$\varphi_\# \circ \partial_v = \sum_{i=1}^n \partial_{w_i} \circ (1_{S_i^1} \otimes^{Htr} (\bar{\varphi}_i)_\#).$$

PREUVE : Compte tenu du triangle (9.1) La première relation est évidente puisque φ se factorise par le morphisme $i : \mathcal{O}_v \rightarrow E$.

Pour la deuxième relation, on considère (X, s) et (Y, t) des modèles respectifs de (L, w) et (E, v) ; on note Z (resp. T) l'adhérence réduite de s dans X (resp. t dans Y). Quitte à réduire X et Y , le morphisme φ correspond à un morphisme $f : Y \rightarrow X$ tel que $f(t) = s$; il induit un morphisme quasi-cartésien $f : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$. Quitte à réduire X et Y , ce morphisme est quasi-cartésien est exact d'ordre e ; le théorème 8.4.10 permet donc de conclure.

Pour la dernière relation, on procède de même en imposant de plus que f est fini (grâce au lemme 5.3.8). C'est alors la proposition 8.4.12 qui permet de conclure. \square

Par ailleurs, on obtient finalement les deux dernières relations :

Lemme 9.2.16 *Soient E/k une extension de type fini, et v une valuation sur E nulle sur k .*

R3d: *Soient π une uniformisante de v , L/k une extension de type fini, et $\varphi : L \rightarrow E$ un k -morphisme tel que v est nul sur L . Alors, si $\bar{\varphi} : L \rightarrow \kappa(v)$ désigne l'unique morphisme induit par φ ,*

$$(\varphi^\# \{1\}) \circ \gamma_{\{-\pi\}} \circ \partial_v = \bar{\varphi}^\# \{1\}.$$

R3e: *Pour tout $u \in E$ tel que $v(u) = 0$, notant \bar{u} la classe de u dans le corps résiduel de v ,*

$$\gamma_{\{u\}} \circ \partial_v = -(\partial_v \circ \gamma_{\{u\}}) \{1\}$$

où $\bar{\varphi} : \kappa(w) \rightarrow \kappa(v)$ est le morphisme induit.

PREUVE : On fixe (X, s) un k -modèle strict de (E, v) , de point générique x , et on note Z l'adhérence réduite de s dans X .

Pour la première relation, on considère un modèle (Y, y) de L/k . Quitte à réduire X au voisinage de s et Y , il existe un morphisme $f : X \rightarrow Y$ qui est un k -modèle de φ . Alors, le morphisme $g = f|_Z$ est un k -modèle de $\bar{\varphi}$. Quitte à réduire à nouveau X au voisinage de s , $(-\pi)$ correspond à une fonction régulière $\pi : X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ et l'on peut supposer qu'elle paramétrise Z dans X . Dès lors, il ne reste plus qu'à appliquer la proposition 8.4.15 à la paire fermée (X, Z) et à la fonction π ; en composant la relation que donne cette proposition avec f à gauche, et en considérant la pseudo-limite projective de ces relations suivant les voisinages de s dans X , on obtient la relation attendue.

Pour la deuxième relation, on suppose cette fois que u se relève en une fonction régulière $u : X \rightarrow \mathbb{G}_m$. On peut alors considérer le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z}\{1\} \otimes M(Z) & \xrightarrow{\partial_{X,Z}} & M(X-Z) \\
 \downarrow & (1) & \downarrow \\
 \mathbb{Z}\{1\} \otimes M(\mathbb{G}_m Z) & \xrightarrow{\partial_{\mathbb{G}_m X, \mathbb{G}_m Z}} & M(\mathbb{G}_m(X-Z)) \\
 \downarrow \epsilon & (2) & \downarrow \\
 M(\mathbb{G}_m) \otimes \mathbb{Z}\{1\} \otimes M(Z) & \xrightarrow{1_{\mathbb{G}_m} \otimes \partial_{X,Z}} & M(\mathbb{G}_m) \otimes M(X-Z) \\
 \downarrow \rho \otimes 1 \otimes 1 & & \downarrow \rho \otimes 1 \\
 \mathbb{Z}\{1\} \otimes \mathbb{Z}\{1\} \otimes M(Z) & \xrightarrow{\partial_{X,Z}\{1\}} & \mathbb{Z}\{1\} \otimes M(X-Z).
 \end{array}$$

$(-1) \cdot 1 \otimes \rho \otimes 1$ (curved arrow from $M(\mathbb{G}_m) \otimes \mathbb{Z}\{1\} \otimes M(Z)$ to $\mathbb{Z}\{1\} \otimes \mathbb{Z}\{1\} \otimes M(Z)$)

La partie (1) est commutative d'après le théorème 8.4.7. Pour la portion (2), on a noté ϵ l'isomorphisme de permutation des facteurs, et on a appliqué la proposition 8.4.17. Le signe résulte du fait que la permutation des facteurs sur $\mathbb{Z}\{1\} \otimes \mathbb{Z}\{1\}$ est égale à -1 (et du fait que $\mathbb{Z}\{1\}$ est facteur direct de $M(\mathbb{G}_m)$). En considérant la pseudo-limite projective par rapport aux voisinages ouverts de s dans X , on obtient la relation attendue. \square

9.2.17.– Ceci conclut donc la démonstration du théorème 9.2.1. Signalons qu'on obtient donc une preuve légèrement différente du fait qu'un module homotopique induit de manière canonique un pré-module de cycles (compte tenu de l'équivalence de catégorie $DM_{gm}^{(0)}(k) \rightarrow \mathbf{H}\mathcal{M}_k^{(0)}$).

9.3 Applications

9.3.1 Extensions transcendantes pures

9.3.1.1 Décomposition canonique

Proposition 9.3.1 *Soient E/k et L/k deux extensions de type fini, et $\varphi : L \rightarrow E$ un morphisme tel que l'extension E/L soit transcendante pure.*

Alors, le morphisme $\varphi^\sharp : M_{gm}(E) \rightarrow M_{gm}(L)$ admet une section dans $DM_{gm}^{(0)}(k)$.

PREUVE : D'après 9.1.8, on se ramène à montrer que le morphisme

$$h_0(\varphi) : h_0(E) \rightarrow h_0(L)$$

est scindé (i.e. on se ramène à la catégorie $\mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ au lieu de $DM_{gm}^{eff}(k)$ pour considérer nos pro-objets).

On commence par le cas où $E = k$. Mais alors, c'est un corollaire de la proposition 3.2.2, puisque $h_0(\varphi)$ est l'image par le foncteur $\pi\mathcal{L}_{\text{cor},k} \rightarrow \mathbf{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ du morphisme de pro-objets $[\varphi]$.

Le cas général en résulte ; considérons $i : k \rightarrow E$ et $j : k \rightarrow L$ les morphismes structuraux des extensions considérées. D'après le cas traité précédemment, le morphisme $h_0(j)$ admet une section σ . Mais alors, $\sigma \circ h_0(i)$ est une section de $h_0(\varphi)$. \square

Proposition 9.3.2 *Soit L/k une extension finie. On note $\varphi : L \rightarrow L(t)$ le morphisme d'inclusion canonique.*

1. *Soit x un point fermé de \mathbb{A}_k^1 , et notons $\kappa(x)$ son corps résiduel. L'anneau artinien $\kappa(x) \otimes_k L$ est réduit, et l'on a*

$$h_0(\kappa(x) \otimes_k L) = \bigoplus_{z \in \text{Spec}(\kappa(x) \otimes_k L)} h_0((\kappa(x) \otimes_k L)_z).$$

Par ailleurs, pour tout idéal maximal z de $\kappa(x) \otimes_k L$, il existe une valuation canonique sur $L(t)$, nulle sur k , de corps résiduel $(\kappa(x) \otimes_k L)_z$ que l'on note $v_{x,z}$.

On en déduit donc un morphisme canonique

$$\partial_x : S_t^1 \otimes^{H\text{tr}} h_0(\kappa(x) \otimes_k L) \rightarrow h_0(L(t))$$

avec $\partial_x = \sum_{z \in \text{Spec}(\kappa(x) \otimes_k L)} \partial_{v_{x,z}}$.

2. *Le morphisme*

$$\partial_{L(t)/L} = \sum_{x \in (\mathbb{A}_k^1)_{(0)}} \partial_x : \bigoplus_x S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(\kappa(x) \otimes_k L) \rightarrow h_0(L(t))$$

s'inscrit dans la suite exacte courte scindée :

$$0 \rightarrow \bigoplus_x S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(\kappa(x) \otimes_k L) \xrightarrow{\partial_{L(t)/L}} h_0(L(t)) \xrightarrow{\varphi^\sharp} h_0(L) \rightarrow 0.$$

Ainsi, on obtient un isomorphisme

$$h_0(L(t)) \simeq h_0(L) \oplus \bigoplus_{K/k} S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(K \otimes_k L)$$

où la somme parcourt les extension finies de k dans une clôture algébrique fixée.

PREUVE : 1. Soit x un point fermé de \mathbb{A}_k^1 . Comme k est parfait, il s'ensuit que la k -algèbre $\kappa(x) \otimes_k L$ est séparable, donc réduite. Ainsi,

$$\kappa(x) \otimes_k L = \prod_z (\kappa(x) \otimes_k L)_z$$

où z parcourt les idéaux maximaux de $\kappa(x) \otimes_k L$, et $(\kappa(x) \otimes_k L)_z$ est un corps. Par ailleurs, $\text{Spec}((\kappa(x) \otimes_k L)_z)$ est un point fermé de codimension 1 dans \mathbb{A}_L^1 , et correspond donc à une valuation $v_{x,z}$ sur le corps des fonctions de \mathbb{A}_L^1 , soit $L(t)$.

2. On fixe un k -modèle X de L .

Soit V un ouvert non vide de X . Soient F un fermé de \mathbb{A}_k^1 , et U son ouvert complémentaire. On peut considérer le triangle de Gysin suivant

$$M(\mathbb{A}_V^1, F_V) [-1] \xrightarrow{\partial_{F,V}} M(U \times_k V) \rightarrow M(\mathbb{A}_V^1) \xrightarrow{+1}$$

Or, $F = \sqcup_{x \in F} \text{Spec}(\kappa(x))$; par additivité, on a donc un isomorphisme canonique

$$M(\mathbb{A}_V^1, F_V) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{x \in F} M(\mathbb{A}_V^1, \kappa(x) \otimes_k V)$$

obtenu comme la somme des morphismes induits par les immersions ouvertes de paires

$$(\mathbb{A}_V^1/\mathbb{A}_V^1 - F_V) \rightarrow (\mathbb{A}_V^1/\mathbb{A}_V^1 - \kappa(x) \otimes_k V).$$

Si maintenant $F' \subset F \subset \mathbb{A}_k^1$ sont des fermés emboîtés, de complémentaires respectifs U' et U , on peut considérer l'immersion ouverte $U \xrightarrow{j} U'$. Dès lors, on obtient un morphisme de triangle distingué

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{x \in F} M(\mathbb{A}_V^1, \kappa(x) \otimes_k V) [-1] & \xrightarrow{\partial_{F,V}} & M(U \times_k V) & \longrightarrow & M(\mathbb{A}_k^1 \times_k V) \xrightarrow{+1} \\ \downarrow p_{F'}^{F'} & & \downarrow j \times_k 1 & & \parallel \\ \bigoplus_{x' \in F'} M(\mathbb{A}_V^1, \kappa(x') \otimes_k V) [-1] & \xrightarrow{\partial_{F',V}} & M(U' \times_k V) & \longrightarrow & M(\mathbb{A}_k^1 \times_k V) \xrightarrow{+1} \end{array}$$

où le morphisme $p_F^{F'}$ est simplement le morphisme de projection canonique compte tenu de la forme précise de l'isomorphisme ci-dessus.

Comme enfin $\kappa(x)/k$ est étale, le théorème de pureté 8.2.16 et l'isomorphisme de 8.3.24 impliquent $M(\mathbb{A}_V^1, \kappa(x) \otimes_k V) \simeq M(\kappa(x) \otimes_k V) (1)[2]$ par un isomorphisme canonique.

On peut maintenant prendre la limite projective des triangles distingués ci-dessus par rapport aux fermés de \mathbb{A}_k^1 selon les morphismes de transition explicites. On peut en même temps prendre la limite projective selon les ouverts V de \mathbb{A}_k^1 par functorialité (on peut appliquer 8.4.7 puisque les morphismes de transition sont des immersions ouvertes). On obtient donc un pro-triangle distingué

$$\prod_{x \in (\mathbb{A}_k^1)_{(0)}} M(\kappa(x) \otimes_k (L)) (1)[1] \xrightarrow{\partial'_{L(t)/L}} M(L(t)) \xrightarrow{M(\varphi)} M(L) \xrightarrow{+1}$$

On peut alors considérer la suite exacte longue de cohomologie associée à ce pro-triangle distingué de complexes. Comme $H^{-1}(M(L)) = 0$, on obtient donc une suite exacte longue dans $\text{pro-}\mathcal{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \prod_{x \in (\mathbb{A}_k^1)_{(0)}} S_t^1 \otimes^{Htr} h_0(\kappa(x) \otimes_k (L)) &\xrightarrow{\partial_{L(t)/L}} h_0(L(t)) \xrightarrow{\varphi^\#} h_0(L) \\ &\rightarrow \dots \end{aligned}$$

On remarque tout d'abord que pour tout point fermé x de \mathbb{A}_k^1 , pour tout point z dans $\text{Spec}(\kappa(x) \otimes_k L)$, (\mathbb{A}_X^1, z) est un k -modèle pour la valuation $v_{x,z}$. On en déduit que le morphisme $\partial_{L(t)/L}$ a bien la forme attendue.

Cela conclut, d'après la proposition précédente. □

9.3.3.– Pour L/k une extension de type fini, on note $\mathcal{E}(L)$ l'ensemble des couples (x, z) où x est un point fermé de \mathbb{A}_k^1 , et z un point de $\text{Spec}(\kappa(x) \otimes_k L)$; pour un tel couple, on note $\kappa(x, z)$ le corps résiduel de z , et $v_{(x,z)}$ la valuation sur $L(t)$ qui lui est attachée d'après la proposition précédente. On reformule alors cette proposition comme suit :

Corollaire 9.3.4 *Soient L/k une extension de type fini, et $\varphi : L \rightarrow L(t)$ l'injection canonique.*

Avec les notations précédentes, il existe alors un isomorphisme canonique dans $\text{pro-}DM_{gm}^{eff}(k)$

$$M(L(t)) \simeq M(L) \oplus \bigoplus_{(x,z) \in \mathcal{E}(L)} M(\kappa(x, z)) \{1\}.$$

Précisons que le morphisme de projection $M(L(t)) \rightarrow M(L)$ est le morphisme $\varphi^\#$, et pour tout couple (x, z) , le morphisme d'injection $M(\kappa(x, z)) \{1\} \rightarrow M(L(t))$ est le morphisme résidu $\partial_{v_{(x,z)}}$.

9.3.1.2 Réduction de la conjecture de Beilinson-Soulé

On montre comment exploiter le corollaire de la sous-section précédente pour déduire du théorème de simplification de Voevodsky la réduction suivante de la conjecture de Beilinson-Soulé (que l'on rappelle) :

Proposition 9.3.5 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. (**conjecture de Beilinson-Soulé**) *Pour tout schéma algébrique lisse X , pour tout couple d'entiers naturels (n, m) tel que $m > 0$,*

$$H^{-m}(X; \mathbb{Z}(n)) = \mathrm{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(X), \mathbb{Z}(n)[-m]) = 0.$$

2. *Pour toute extension de type fini E/k , pour tout couple d'entiers naturels (n, m) tel que $m > 0$,*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}\text{-}DM_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(E), \mathbb{Z}(n)[-m]) = 0.$$

3. *Pour toute extension de type fini E/k , pour tout entier naturel n ,*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}\text{-}DM_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(E), \mathbb{Z}(n)[-1]) = 0.$$

PREUVE : Le fait que $1 \Rightarrow 3$ est évident.

$2 \Rightarrow 1$: Pour calculer $\mathrm{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(X), \mathbb{Z}(n)[m]) = H^m(X; \mathbb{Z}(n))$, on utilise la suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_2^{p,q} = H^p(X; H^q(\mathbb{Z}(n))) \Rightarrow H^{p+q}(X; \mathbb{Z}(n)).$$

Le groupe $E_2^{p,q}$ est nul si $p < 0$.

Soit p un entier naturel, et q un entier relatif. D'après le théorème 4.37 de [FSV00c], le groupe $H^p(X; H^q(\mathbb{Z}(n)))$ est égal au p -ième groupe de cohomologie du complexe

$$\dots \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p-1)}} H^q(\mathbb{Z}(n))_{-(p-1)}(\kappa(x)) \rightarrow \bigoplus_{y \in X^{(p)}} H^q(\mathbb{Z}(n))_{-p}(\kappa(y)) \rightarrow \dots$$

où le groupe correspondant aux points dans $X^{(p)}$ est placé en degré p (on peut aussi déduire cela de notre corollaire 6.2.3 en utilisant le théorème de simplification de Voevodsky).

Or, d'après le théorème de simplification de Voevodsky,

$$\begin{aligned} H^q(\mathbb{Z}(n))_{-p}(\kappa(y)) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}\text{-}DM_{gm}^{eff}(k)}(M(\kappa(y))(p)[p], \mathbb{Z}(n)[q]) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}\text{-}DM_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(\kappa(y)), \mathbb{Z}(n-p)[q-p]). \end{aligned}$$

Comme p est positif, l'hypothèse 2 entraîne que ce groupe est nul dès que $q < 0$. Il résulte donc de l'hypothèse 2 que $E_2^{p,q}$ est nul si $p < 0$ ou $q < 0$. Cela entraîne donc, puisque la suite spectrale converge, que tous les gradués de $H^m(X; \mathbb{Z}(n))$ sont nuls si $m < 0$, et donc $H^m(X; \mathbb{Z}(n))$ est lui-même nul.

Dans ce raisonnement, il n'y a donc rien de nouveau. Par contre l'implication $3 \Rightarrow 2$ résulte du corollaire précédent : montrons en effet par récurrence sur l'entier $m > 0$ la propriété suivante de m

$$P(m) : \begin{cases} \forall E/k \text{ de type fini, } \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{Hom}_{\text{pro-DM}_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(E), \mathbb{Z}(n)[-m]) = 0. \end{cases}$$

L'hypothèse 3 correspond justement à $P(1)$. On montre $P(m) \Rightarrow P(m+1)$. Soit E/k une extension quelconque. Alors, d'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\text{Hom}_{\text{pro-DM}_{gm}(k)}(M_{gm}(E(t)), \mathbb{Z}(n)[-m]) = 0.$$

Or, d'après le corollaire précédent, si l'on considère le point fermé 0 de \mathbb{A}_k^1 , le motif générique $M_{gm}(E) \{1\}$ est un facteur direct de $M_{gm}(E(t))$.

Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\text{Hom}_{\text{pro-DM}_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(E) \{1\}, \mathbb{Z}(n)[-m]) = 0.$$

Or, à nouveau grâce au théorème de simplification de Voevodsky,

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{\text{pro-DM}_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(E) \{1\}, \mathbb{Z}(n)[-m]) \\ & \simeq \text{Hom}_{\text{pro-DM}_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(E), \mathbb{Z}(n-1)[-m-1]). \end{aligned}$$

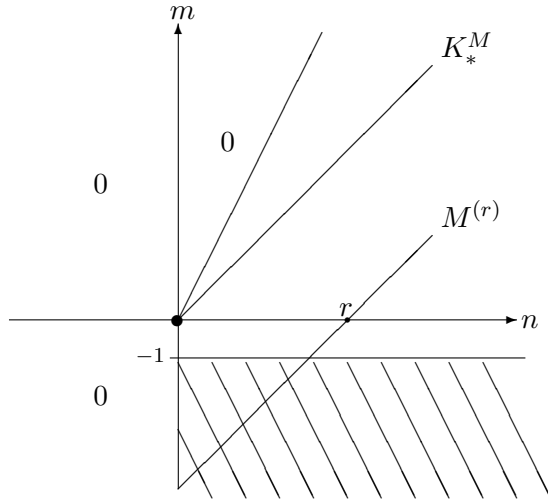
Ceci permet de conclure que $P(m+1)$ est vraie. Cela termine la démonstration. \square

Remarque 9.3.6.— De la même manière, on montre que si

$$\begin{aligned} & \forall E/k \text{ de type fini, } \forall n \in \mathbb{N} \\ & \text{Hom}_{\text{pro-DM}_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(E), \mathbb{Z}(n)) = 0, \end{aligned}$$

alors, la condition 3 de l'énoncé précédent est vérifiée. Cette condition (un peu plus forte donc) nous semble plus naturelle que la précédente, et l'on pose la question de savoir si elle est vraie.

Remarque 9.3.7.— On voit plus généralement que les groupes $\text{Hom}_{\text{pro-DM}_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(E), \mathbb{Z}(n)[m]) = 0$, pour E/k une extension de type fini variable, s'organisent de la manière suivante :



Dans ce graphique les 0 indiquent les parties dont on sait qu'elles sont nulles.

Les éléments situés sur la droite désignée $M^{(r)}$ dans ce graphique s'organisent dans le module de cycles qui à une extension de type fini E/k associe

$$\bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\text{pro-DM}_{gm}(k)}(M_{gm}(E), \mathbb{Z}(l+r)[l]).$$

Il en résulte que $M^{(0)}$ est égal à la K-théorie de Milnor. Par ailleurs, pour tout couple d'entiers (r, s) , on dispose d'un accouplement (cf définition 4.2.41) canonique de modules de cycles

$$M^{(r)} \times M^{(s)} \rightarrow M^{(r+s)}.$$

La conjecture de Beilinson-Soulé signifie donc que la partie hachurée du dessin est nulle.

On a obtenu dans la démonstration de la proposition précédente que si dans ce graphique, il y a un 0 en coordonnée (n, m) , il y a des 0 partout sur la demi-droite $(n+l, m+l)$ pour $l \geq 0$ (ce qui se reformule encore en disant que si un module de cycle est nul en un certain degré, il est nul pour tous les degrés en dessous, réduisant ainsi la conjecture à l'annulation des groupes situés sur la droite $m = -1$).

B. Kahn nous a signalé que l'on conjecture même l'annulation des groupes situés sur la demi-droite $m = 0$ et $n > 0$. L'argument que nous avons dégagé montre que cette annulation entraîne la conjecture de Beilinson-Soulé. Par ailleurs, les mêmes méthodes montrent que cette conjecture est impliquée par la conjecture de «rigidité» suivante que nous avons apprise de B.Kahn :

Conjecture de rigidité : Pour tout corps E de corps des constantes E_0 , pour tout entier $n > 1$, le morphisme canonique

$$H^1(E_0; \mathbb{Z}(n)) \rightarrow H^1(E; \mathbb{Z}(n))$$

est un isomorphisme.

9.3.2 Le foncteur $M^{(0)}$ est-il plein ?

Dans ce chapitre nous avons essayé de montrer en quoi l'étude du foncteur construit dans la démonstration du théorème 9.2.1 peut se révéler intéressante.

Plus exactement, on pose la question de savoir s'il est plein, la fidélité nous semblant encore plus délicate. Nous n'obtenons que de maigres réponses, qui se précisent un peu si l'on néglige la partie de torsion.

9.3.2.1 Conséquences

Cette sous-sous-section nous sert de motivation pour la question formulée dans le titre de la sous-section dans laquelle on se trouve. Commençons par la proposition suivante :

Proposition 9.3.8 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout schéma algébrique lisse X de dimension n , pour toute extension de type fini L/k et pour tout $p > n$,*

$$\text{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(L) \{p\}, M_{gm}(X)) = 0.$$

2. *Pour toute extension de type fini E/k de degré de transcendance n , pour toute extension de type fini L/k et pour tout $p > n$,*

$$\text{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(L) \{p\}, M_{gm}(E)) = 0.$$

3. *Pour tout schéma algébrique lisse X de dimension n ,*

$$h_0(X)_{-(n+1)} = 0.$$

Ces conditions sont encore impliquées par la condition suivante :

Le foncteur $M^{(0)}$ du théorème 9.2.1 est plein.

PREUVE : En effet, d'après la proposition 9.1.3, on a un isomorphisme canonique

$$\text{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(L) \{p\}, M_{gm}(X)) \simeq h_0(X)_{-p}(L).$$

Donc le fait que 1 et 3 sont équivalentes résulte de la proposition 3.3.4.

Puisqu'il est évident que 1 implique 2, il nous reste à montrer $2 \Rightarrow 3$. Soit X un schéma algébrique lisse de dimension n que l'on peut supposer connexe. D'après la condition 2,

$$\text{Hom}_{\text{pro-H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}(S_t^{n+1} \otimes^{Htr} h_0(L), h_0(\kappa(X))) = 0$$

où $\kappa(X)$ est le corps résiduel de X . Si x désigne le point générique de X , cette condition équivaut à

$$\text{Hom}_{\text{pro-H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}(S_t^{n+1} \otimes^{Htr} h_0(L), h_0(X_x)) = 0.$$

Il nous suffit pour conclure d'appliquer le lemme suivant :

Lemme 9.3.9 *Soit X un schéma algébrique lisse connexe, de point générique x . Alors, pour tout entier naturel r , pour toute extension L/k de type fini, le morphisme suivant, induit par la projection canonique $X_x \rightarrow X$, est un épimorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}\text{-}\mathcal{H}_k^{\mathrm{tr}}}(S_t^r \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(L), h_0(X_x)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}\text{-}\mathcal{H}_k^{\mathrm{tr}}}(S_t^r \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(L), h_0(X)).$$

PREUVE : Il s'agit de démontrer que le morphisme

$$\varprojlim_{U \subset X} h_0(U)_{-r}(L) \rightarrow h_0(X)_{-r}(L)$$

où la limite projective parcourt l'ensemble cofiltrant des ouverts non vides de X , est un épimorphisme.

Soient U et V des ouverts non vides de X tels que $U \subset V$. La proposition 3.3.3 appliquée à l'immersion ouverte $U \subset V$ signifie exactement que le morphisme

$$h_0(U) \rightarrow h_0(V)$$

est un épimorphisme dans la catégorie des faisceaux homotopiques.

Puisque le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_k^{\mathrm{tr}}}(S_t^r \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(L), \cdot)$ est exact (cf 3.3.4 et 3.4.5), on en déduit que le morphisme

$$h_0(U)_{-r}(L) \rightarrow h_0(V)_{-r}(L)$$

est un épimorphisme.

Puisque X est de type fini, il admet une base dénombrable d'ouverts. Il existe donc une suite décroissante d'ouverts non vides $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $X_x = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} U_n$. On peut supposer $U_0 = X$; le lemme résulte alors du fait que tous les morphismes de transition du système projectif dénombrable $(h_0(U_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont des épimorphismes. \square

On a donc montré l'équivalence des trois conditions. Alors, la dernière condition implique que pour toutes extensions de type fini E/k , L/k et pour tout entier naturel p , le morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{E}}_k}((L, p), (E, 0)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{DM_{gm}^{eff, (0)}(k)}(M_{gm}(L) \{p\}, M_{gm}(E))$$

est surjectif.

Soit n le degré de transcendance sur k de E , et supposons que $p > n$. D'après le lemme 4.1.24, tout élément non nul de $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{E}}_k}((L, p), (E, 0))$ s'écrit sous la forme

$$\psi^* \circ \gamma_x \circ \varphi_* \circ (\partial_{v_r} \circ \dots \circ \partial_{v_1}) \circ \gamma_y$$

où x et y sont de degrés respectifs n' et m . On a dès lors l'équation $m + n' - r = -p$, ce qui implique que $r > n$. On a donc une suite de corps (E_1, \dots, E_r) telle que E_{i+1} est le corps résiduel d'une valuation sur E_i/k , et $E_1 = E$. Il en résulte que le degré de transcendance de E_r sur k est $n - r$, ce qui est impossible.

Ainsi, $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{E}}_k}((L, p), (E, 0))$ est nul ; la dernière condition entraîne donc la condition 2 de l'énoncé. \square

Remarque 9.3.10.– On a montré dans le lemme clé de cette démonstration que pour tout schéma algébrique lisse et connexe X de point générique x , le pro-objet $h_0(X_x)$ de $\mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler.

9.3.11.– Pour le corollaire suivant, on introduit la définition

Définition 9.3.12 Soit F_* un module homotopique.

On dit que F_* est de type fini si et seulement si il existe un épimorphisme de modules homotopiques

$$\bigoplus_{i=1}^n S_t^*(X_i) \rightarrow F_*$$

pour X_i des schémas algébriques lisses, ayant noté $S_t^*(X_i)$ le module homotopique associé à $h_0(X_i)$ (cf proposition 6.3.10).

Cette définition nous permet d'énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 9.3.13 Supposons que $M^{(0)}$ est plein.

Soit (F_*, ϵ) un module homotopique.

Alors, si F_* est de type fini dans la catégorie abélienne $\mathbb{H}\mathcal{M}_k^{\text{tr}}$, il existe un entier relatif N tel que pour tout $n < N$, F_n est nul.

Remarque 9.3.14.– D'après l'équivalence de catégories obtenue dans la première partie (cf 6.1.1), on en déduit donc que si $M^{(0)}$ est plein, un module de cycles M de type fini dans la catégorie des modules de cycles est nécessairement borné inférieurement.

9.3.2.2 Quelques résultats partiels

Le problème de savoir si le foncteur $M^{(0)}$ est plein se reformule en la question suivante :

Pour toutes extensions de type fini E/k , L/k , et pour tout couple d'entiers relatifs (p, q) , le morphisme construit dans la démonstration du théorème 9.2.1

$$\text{Hom}_{\tilde{\mathcal{E}}_k}((L, p), (E, q)) \rightarrow \text{Hom}_{DM_{gm}^{(0)}(k)}(M_{gm}(L) \{p\}, M_{gm}(E) \{q\})$$

est-il surjectif ?

Or, les foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{E}}_k & \rightarrow & \tilde{\mathcal{E}}_k \\ (E, p) & \mapsto & (E, p+1) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} DM_{gm}^{(0)}(k) & \rightarrow & DM_{gm}^{(0)}(k) \\ M_{gm}(E) \{p\} & \mapsto & M_{gm}(E) \{p+1\} \end{array}$$

sont pleinement fidèles. Pour le premier, c'est évident, et pour le deuxième, cela résulte du théorème 4.10 de [Voe02].

Ainsi, il suffit d'étudier le morphisme ci-dessus dans les deux cas suivants :

1. $p = 0$ et $q \geq 0$.
2. $q = 0$ et $p \geq 0$.

Comme annoncé, nous n'avons pu obtenir que des résultats partiels. Rappelons tout d'abord que la proposition 3.4.8, a pour corollaire le lemme :

Lemme 9.3.15 Soient E/k et L/k des extensions telles que E/k est algébrique.

Alors, pour tout $p > 0$,

$$\mathrm{Hom}_{DM_{gm}^{(0)}(k)}(M_{gm}(L) \{p\}, M_{gm}(E)) = 0.$$

Par ailleurs, pour $p = 0$, on a le résultat suivant :

Lemme 9.3.16 Soient E/k et L/k des extensions de type fini telles que E/k est finie.

La k -algèbre $L \otimes_k E$ est une L -algèbre finie, et donc $\mathrm{Spec}(L \otimes_k E)$ est fini. Soit z un élément de $\mathrm{Spec}(L \otimes_k E)$, dont on note $\kappa(z)$ le corps résiduel. On considère $\varphi_z : L \rightarrow \kappa(z)$ et $\psi_z : E \rightarrow \kappa(z)$ les morphismes induits. Le morphisme φ_z est fini.

Avec ces notations, le groupe $\mathrm{Hom}_{DM_{gm}^{(0)}(k)}(M_{gm}(L), M_{gm}(E))$ est de type fini, engendré par les morphismes

$$(\psi_z)^\sharp(\varphi_z)_\sharp$$

pour z dans $\mathrm{Spec}(E \otimes_k L)$ tel que $\kappa(z)/E$ soit fini.

PREUVE : Considérons tout d'abord l'isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{DM_{gm}^{(0)}(k)}(M_{gm}(L), M_{gm}(E)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_k^{\mathrm{tr},(0)}}(h_0(L), h_0(E)).$$

D'après le lemme de Yoneda, on a de plus un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_k^{\mathrm{tr},(0)}}(h_0(L), h_0(E)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}\text{-}\pi\text{-}\mathcal{L}_{\mathrm{cor},k}}([L], [E]).$$

Si on considère un k -modèle (X, x) de L , le groupe à déterminer est donc isomorphe à :

$$\varinjlim_{U \subset X} \pi_k(U, \mathrm{Spec}(E)).$$

D'après la proposition 1.2.21, ce groupe est isomorphe à $\pi_k(\mathrm{Spec}(L), \mathrm{Spec}(E))$, c'est-à-dire au groupe formé des classes de points fermés de $\mathrm{Spec}(L \otimes_k E)$ dont la projection sur L est finie à homotopie près.

Ce groupe est donc engendré par les classes d'éléments z dans $\mathrm{Spec}(L \otimes_k E)$, puisque leur projection sur L est toujours finie. Revenant au k -modèle X de L , z correspond à un unique point générique de X_E , dont on note Z_x l'adhérence. Quitte à réduire X , on peut supposer que Z_x est lisse sur k . Soient $f_z : Z_x \rightarrow X$ et $p_z : Z_x \rightarrow \mathrm{Spec}(E)$ les projections canoniques. Dès lors, d'après le lemme 5.3.4, la classe de Z , en tant que correspondance finie de X dans $\mathrm{Spec}(E)$, est égale à $p_z \circ {}^t f_z$. Ceci démontre par définition que la classe de z dans $\pi_k(\mathrm{Spec}(L), \mathrm{Spec}(E))$ est égale à $(\psi_z)^\sharp(\varphi_z)_\sharp$. \square

Remarque 9.3.17.— Considérons de nouveau le cas général où L/k et E/k sont de type fini. Soit (X, x) un modèle de L/k et (Y, y) un modèle de E/k . Dans le cas où $p = q = 0$, on a vu au cours de la démonstration qui précède

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{DM_{gm}^{(0)}(k)}(M_{gm}(L), M_{gm}(E)) &\simeq \varinjlim_{V \subset Y} \varinjlim_{U \subset X} \pi_k(U, V) \\ &\simeq \varinjlim_{V \subset Y} \pi_k(\mathrm{Spec}(L), V). \end{aligned}$$

9.3.2.3 Partie libre

Nous nous contentons de montrer ici que le lemme 9.3.15 se généralise lorsqu'on ne considère que la partie libre des groupes en jeu.

Proposition 9.3.18 *Soit L/k et E/k des extensions de type fini, et d le degré de transcendance sur k de E .*

Alors, pour tout entier $p > d$,

$$\text{Hom}_{DM_{gm}^{(0)}(k)}(M_{gm}(L)\{p\}, M_{gm}(E)) \otimes \mathbb{Q} = 0.$$

PREUVE : Soit d le degré de transcendance sur k de E . Dans le cas où $d = 0$, nous avons déjà obtenu ce résultat dans le lemme 9.3.15, et même pour tout le groupe.

On peut donc lancer une récurrence sur d . On suppose le résultat pour un degré de transcendance strictement inférieur à d , et on considère que E/k est de degré de transcendance d . Il existe alors une base de transcendance séparante de E/k , (x_1, \dots, x_d) tel que $E/k(x_1, \dots, x_d)$ est algébrique séparable, donc monogène. Fixons a un générateur.

On commence par montrer l'assertion pour l'extension $E' = k(x_1, \dots, x_d)$. Posons $K = k(x_1, \dots, x_{d-1})$, de sorte que $E' = K(x_d)$.

Dès lors, d'après le corollaire 9.3.4,

$$M_{gm}(E') \simeq M_{gm}(K) \oplus \bigoplus_{x \in (\mathbb{A}_k^1)_{(0)}} M_{gm}(\kappa(x) \otimes_k K)\{1\}.$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} & \text{Hom}(M_{gm}(L)\{p\}, M_{gm}(E')) \otimes \mathbb{Q} \\ & \simeq \text{Hom}(M_{gm}(L)\{p\}, M_{gm}(K)) \otimes \mathbb{Q} \\ & \oplus \bigoplus_{x \in (\mathbb{A}_k^1)_{(0)}} \text{Hom}(M_{gm}(L)\{p\}, M_{gm}(\kappa(x) \otimes_k K)\{1\}) \otimes \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à K , le premier facteur de cette somme directe est nul. Par ailleurs, d'après le théorème de simplification de Voevodsky (cf 6.3.5), pour tout point fermé x de \mathbb{A}_k^1 , on a

$$\text{Hom}(M_{gm}(L)\{p\}, M_{gm}(\kappa(x) \otimes_k K)\{1\}) \simeq \text{Hom}(M_{gm}(L)\{p-1\}, M_{gm}(\kappa(x) \otimes_k K))$$

et la partie sans torsion de ce facteur est donc nulle d'après l'hypothèse de récurrence.

Il nous reste à traiter le cas de E qui est une extension fini séparable de E' . Soient $n = [E : E']$, et $\varphi : E' \rightarrow E$ le morphisme canonique. D'après la formule de 9.2.5, on obtient

$$\varphi_{\#} \varphi^{\sharp} = n.1_{M_{gm}(E)}$$

Ainsi, dans la catégorie $DM_{gm}^{(0)}(k) \otimes \mathbb{Q}$, le morphisme $\frac{1}{n} \cdot \varphi_{\#}$ est une rétraction de φ^{\sharp} . Ceci implique que le morphisme induit par φ^{\sharp}

$$\text{Hom}(M_{gm}(L)\{p\}, M_{gm}(E)) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \text{Hom}(M_{gm}(L)\{p\}, M_{gm}(E')) \otimes \mathbb{Q}$$

est un monomorphisme, et nous permet de conclure. \square

Remarque 9.3.19.– Dans cette démonstration, on voit en fait que dans l'étape de récurrence on a obtenu le fait que pour tout $\rho \in \text{Hom}(M_{gm}(L)\{p\}, M_{gm}(E))$, $n.\rho = 0$, où $n = [E : E']$.

Il nous suffirait donc pour conclure sans avoir besoin de tensoriser par \mathbb{Z} du fait suivant : pour toute extension de type fini E/k , et pour tout entier premier p , il existe une sous-extension L/k de E/k , et un élément t de E qui est transcendant sur L , tel que $E/L(t)$ soit finie de degré une puissance de p .

Notons par ailleurs que la proposition est vraie sans tensoriser par \mathbb{Q} lorsque E/k est de degré de transcendance 1, à cause du théorème 3.4.2 de [FSV00b].

On déduit tout au moins de cette proposition, comme dans 9.3.8, le corollaire suivant :

Corollaire 9.3.20 *Soient X/k un schéma algébrique lisse de dimension d , et L/k une extension de type fini de k . Pour tout entier $p > d$, on obtient*

$$\text{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}(M_{gm}(L)\{p\}, M(X)) \otimes \mathbb{Q} = 0.$$

PREUVE : On peut se restreindre au cas où X est connexe. Le groupe dont on veut montrer la nullité est isomorphe, d'après la proposition 9.1.3, au groupe

$$\text{Hom}_{\mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}(S_t^p \otimes^{Htr} h_0(L), h_0(X)) \otimes \mathbb{Q}.$$

Soit $\kappa(X)$ le corps des fonctions de X . D'après le lemme 9.3.9, le morphisme canonique

$$\text{Hom}_{\mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}(S_t^p \otimes^{Htr} h_0(L), h_0(\kappa(X))) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{H}\mathcal{N}_k^{\text{tr}}}(S_t^p \otimes^{Htr} h_0(L), h_0(X)) \otimes \mathbb{Q}$$

est un épimorphisme, ce qui conclut d'après la proposition précédente. \square

Part III

Annexe

Appendix A

Schémas localisés

A.1 Finitude

On considère tout d'abord la condition de finitude suivante :

Définition A.1.1 1. Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneau. On dit que φ (resp. B/A) est essentiellement de type fini si et seulement si il existe une sous- A -algèbre C de B telle que :

- (a) C est de type fini sur A .
- (b) Si $S = C \cap B^\times$, le morphisme canonique $S^{-1}C \rightarrow B$ est un isomorphisme.

2. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas.

On dit que f est essentiellement de type fini si et seulement si pour tout $x \in X$, il existe un ouvert affine U de X contenant x et un ouvert affine V de Y vérifiant la propriété (P) suivante :

- (a) $f(U) \subset V$,
- (b) le morphisme $A(V) \rightarrow A(U)$ induit par f est essentiellement de type fini.

Remarque A.1.2.– Dans le cas d'une A -algèbre B vérifiant la première condition de cette définition, nous dirons encore que B est une A -algèbre essentiellement de type fini. Cette définition est tirée de [EGA4], paragraphe 1.3.8.

Dans la deuxième partie, rigoureusement, on devrait dire que le morphisme de schémas f de la deuxième partie de la définition est localement essentiellement de type fini. Ainsi, avec notre définition, un morphisme localement de type fini est essentiellement de type fini.

Rappelons la proposition 1.3.9 de [EGA4] :

Proposition A.1.3 1. Si B est une A -algèbre essentiellement de type fini, et C une B -algèbre essentiellement de type fini, alors C est une A -algèbre essentiellement de type fini.

2. Soient B une A -algèbre essentiellement de type fini, et A' une A -algèbre ; alors $B \otimes_A A'$ est une A' -algèbre essentiellement de type fini.

Le lemme suivant résulte immédiatement de cette proposition :

Lemme A.1.4 *La propriété pour un morphisme de schémas d'être essentiellement de type fini est stable par changement de base.*

PREUVE : Considérons un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ g' \downarrow & f & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

tel que f est essentiellement de type fini. Soit x' un point de X' , et $x = g'(x')$. Puisque f est essentiellement de type fini, il existe un ouvert affine U dans X contenant x , et un ouvert V de Y contenant $f(x)$ tels que $A(U)$ est une $A(V)$ -algèbre essentiellement de type fini. Soit V' un ouvert affine de Y contenant $f'(x')$ tel que $g(V') \subset V$. On pose $U' = V' \times_V U$. C'est un ouvert affine de X' qui contient x' . Par ailleurs, l'anneau de V' est par définition égal à $A(U) \otimes_{A(V)} A(V')$. Il résulte donc de la proposition précédente que c'est une $A(V')$ -algèbre essentiellement de type fini. \square

Le lemme suivant est l'analogie, pour les morphismes essentiellement de type fini, d'un lemme bien connu pour les morphismes localement de type fini :

Lemme A.1.5 *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme essentiellement de type fini. Alors, pour tout ouvert affine V de Y , il existe un recouvrement ouvert affine $(U_i)_{i \in I}$ de $f^{-1}(V)$ tel que pour tout i , $A(U_i)/A(V)$ est essentiellement de type fini.*

PREUVE : Puisque les morphismes essentiellement de type fini sont stables par changement de base, on peut se ramener au cas où Y est affine d'anneau A , et $V = Y$.

Soit x un point de X . On sait qu'il existe un ouvert affine U (resp. V) de X (resp. Y) tel que $x \in U$ (resp. $f(x) \in V$) et tel que le morphisme $A(U) \rightarrow A(V)$ est essentiellement de type fini.

Or, il existe un ouvert principal $D(a)$ de Y contenant $f(x)$ et inclus dans V . Considérons U' l'image réciproque de $D(a)$ dans U . D'après la première propriété de la proposition A.1.3, A_a est une $A(U')$ -algèbre essentiellement de type fini. Il résulte de la deuxième propriété de cette proposition que $A(U')$ est une A -algèbre essentiellement de type fini, ce qui permet de conclure puisque $x \in U'$. \square

On en déduit (comme pour les morphismes localement de type fini) le corollaire suivant :

Corollaire A.1.6 *La propriété pour un morphisme de schémas d'être essentiellement de type fini est stable par composition.*

Enfin, le lemme suivant montre qu'il n'y a pas de confusion possible entre les notions de morphismes d'anneaux essentiellement de type fini et morphismes de schémas essentiellement de type fini :

Lemme A.1.7 *Soient X et Y des schémas affines, et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. f est essentiellement de type fini.
2. $A(X)$ est une $A(Y)$ -algèbre essentiellement de type fini.

Remarque A.1.8.— Dans cette preuve, lorsque C est un sous-anneau de B , et S un système multiplicatif de C formé d'éléments inversibles de B , on confondra $S^{-1}C$ avec son image canonique dans B .

PREUVE : Soient A l'anneau de Y et B celui de X .

L'implication 2 \Rightarrow 1 est évidente, et on s'occupe donc de la réciproque. D'après le lemme A.1.5, pour tout point x de X , il existe un ouvert affine U de X contenant x tel que $A(U)/A$ est essentiellement de type fini. Par ailleurs, il existe un ouvert principal U' inclus dans U et contenant x . Alors, le morphisme $A(U) \rightarrow A(U')$ est de type fini, et donc $A(U')/A$ est encore essentiellement de type fini.

Puisque X est quasi-compact, on peut supposer qu'il existe un nombre fini d'éléments b_1, \dots, b_n de B tels que les ouverts $D(b_i)$ recouvrent X et tels que B_{b_i}/A est essentiellement de type fini.

La condition que les ouverts $D(b_i)$ recouvrent X est équivalente à l'existence d'un n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dans B^n tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = 1$.

Pour tout entier i dans $[1, n]$, il existe donc une sous- A -algèbre C_i de B_{b_i} telle que C_i/A est de type fini et $S_i^{-1}C_i = B_{b_i}$ où $S_i = B_{b_i}^\times \cap C_i$. Considérons (c_{i1}, \dots, c_{ir}) un système d'éléments de B tel que tout élément de C_i s'écrit comme une puissance de b_i multipliée par un élément de $A[c_{i1}, \dots, c_{ir}]$.

Posons $C = A[c_{i,j}, b_i, \lambda_i]$, vu comme sous- A -algèbre de B . Alors, C est de type fini sur A . Si l'on pose $S = B^\times \cap C$, il nous reste à montrer que le morphisme canonique $S^{-1}C \rightarrow B$ est un isomorphisme.

Puisqu'il est évidemment injectif, on montre qu'il est surjectif. Considérons donc un élément b de B .

Soit i un entier dans $[1, n]$. On peut voir b comme un élément B_{b_i} . Il existe donc un élément s_i de S_i , et un élément d_i de C_i tel que $b = \frac{d_i}{s_i}$, ie $s_i b = d_i$, puisque les éléments de S_i ne sont pas diviseurs de 0 dans C_i . Dès lors, il existe un entier naturel n_i tel que $b_i^{n_i} d_i = b_i^{n_i} s_i b$ appartient à C .

Or, s_i appartient à $C_i \cap B_{b_i}^\times$, donc il existe un entier naturel n'_i tel que $s_i = b_i^{n'_i} \cdot s'_i$ où s'_i appartient à $C_i \cap B^\times \subset C \cap B^\times$.

Ainsi, l'élément $b_i^{n_i+n'_i} b$ appartient à $S^{-1}C$.

Si l'on pose $N = \max_i(n_i + n'_i)$, on obtient donc le fait que pour tout entier i dans $[1, n]$, $b_i^N b$ appartient à $S^{-1}C$. Il s'ensuit que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^N b_i^N b = b$$

appartient à $S^{-1}C$, ce qui conclut. □

On aura particulièrement besoin des objets de la caractérisation suivante :

Proposition A.1.9 Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas tel que X est un schéma local d'anneau \mathcal{O} . Soit s l'image du point fermé de X dans Y . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est essentiellement de type fini.
2. Pour tout ouvert affine V de Y contenant s , l'extension induite $\mathcal{O}/A(V)$ est essentiellement de type fini.
3. Il existe un ouvert affine V de Y contenant s tel que l'extension induite $\mathcal{O}/A(V)$ est essentiellement de type fini.
4. L'algèbre $\mathcal{O}/\mathcal{O}_{Y,s}$ est essentiellement de type fini.

PREUVE : Le fait que $1 \Rightarrow 2$ résulte du lemme précédent. L'implication $2 \Rightarrow 3$ est triviale.

$3 \Rightarrow 4$: On suppose donc que Y est affine d'anneau A , et que le morphisme $A \rightarrow \mathcal{O}$ qui correspond à f est essentiellement de type fini. Soit C une sous- A -algèbre de \mathcal{O} telle que C/A est de type fini, et \mathcal{O} est un localisé de C . Or, s correspond à un idéal de A , avec lequel on le confond. Si l'on pose $S = A - s$, $S^{-1}C/S^{-1}A$ est de type fini, et \mathcal{O} est encore un localisé de $S^{-1}C$, ce qui démontre cette implication.

$4 \Rightarrow 1$: Cela résulte du fait que le morphisme canonique $\text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,s}) \rightarrow Y$ est essentiellement de type fini (puisque une immersion ouverte est essentiellement de type fini). \square

Remarque A.1.10.— On rappelle que si A est un anneau, et \mathcal{O} une A -algèbre locale, d'après [EGA4] 1.3.10, le fait que \mathcal{O}/A est essentiellement de type fini équivaut à l'existence d'un entier naturel n , d'un idéal premier \mathfrak{q} de $A[t_1, \dots, t_n]$ et d'un idéal \mathfrak{b} de $A[t_1, \dots, t_n]_{\mathfrak{q}}$ tels que \mathcal{O} est A -isomorphe à

$$(A[t_1, \dots, t_n]_{\mathfrak{q}})/\mathfrak{b}.$$

Remarque A.1.11.— Soit \mathcal{O} est une k -algèbre locale réduite, de corps des fractions E . Alors, si \mathcal{O}/k est essentiellement de type fini, E/k est une extension de type fini. On fera attention que si E/k est de type fini, \mathcal{O}/k n'est pas nécessairement essentiellement de type fini comme il nous a été signalé par B.Kahn. En effet, il existe des extensions de type fini de k munie de valuations de rang 2. L'anneau de valuation correspondant n'est donc pas noethérien, et a fortiori pas essentiellement de type fini sur k .

Il nous a semblé que par contre, que si l'on se donne \mathcal{O} un anneau local régulier noethérien qui contient k , de corps des fractions E , le fait d'être essentiellement de type fini sur k équivaut au fait que E/k soit une extension de type fini, en s'appuyant sur le fait que \mathcal{O} est alors factoriel (cf théorème 21.11.1 de [EGA4]). Mais nous n'avons pas pu démontrer cette assertion.

A.2 Lissité

On arrive enfin à la définition qui nous sera utile :

Définition A.2.1 Soit X un S -schéma.

On dit que X est essentiellement lisse (resp. essentiellement étale) sur S si et seulement si X est formellement lisse (resp. formellement étale) et essentiellement de type fini sur S .

Ainsi, un S -schéma lisse est essentiellement lisse sur S .

Cette notion est particulièrement simple dans le cas d'un corps de base :

Proposition A.2.2 *Soit k un corps parfait, et X un k -schéma irréductible. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. X est essentiellement lisse sur k .
2. X est régulier et essentiellement de type fini sur k .

PREUVE : En effet, les deux hypothèses entraînent que X est intègre et noethérien. Il résulte alors de [EGA4], 19.6.4 que X est formellement lisse sur k si et seulement si il est régulier. \square

Appendix B

Déformation au cône normal

B.1 Généralités sur les cônes

Fixons un schéma X .

Définition B.1.1 Soit \mathcal{S} une \mathcal{O}_X -algèbre graduée quasi-cohérente telle que

(a) Le morphisme de \mathcal{O}_X -module canonique,

$$\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{S}_0$$

est un isomorphisme,

(b) \mathcal{S} est engendrée par le \mathcal{O}_X -module \mathcal{S}_1 .

1. On définit le cône engendré par \mathcal{S} , noté

$$\mathrm{Spec}_X(\mathcal{S})$$

comme le X -schéma affine obtenu en recollant les spectres de \mathcal{S} au-dessus d'une base d'ouverts affines de X .

2. On définit le cône projectif engendré par \mathcal{S} comme le X -schéma projectif

$$\mathrm{Proj}_X(\mathcal{S})$$

obtenu en recollant les spectres homogènes de \mathcal{S} au-dessus d'une base d'ouverts affines de X .

D'après [EGA2], §8.3, on dispose d'un couple d'immersions

$$\mathrm{Spec}_X(\mathcal{S}) \xrightarrow{j} \mathrm{Proj}_X(\mathcal{S} \oplus \mathcal{O}_X) \xleftarrow{i} X$$

telles que i est fermée, j est ouverte dominante, et les images de i et j sont complémentaires.

Par ailleurs, d'après le §3.2 de *loc.cit.*, le schéma $P = \mathrm{Proj}_X(\mathcal{S})$ est muni d'un fibré inversible canonique, relativement ample au-dessus de X , noté $\mathcal{O}_P(1)$.

On définit ainsi un foncteur $\mathrm{Spec}_X()$, de la catégorie des \mathcal{O}_X -algèbres graduées quasi-cohérentes (vérifiant les conditions 1.-2.) dans la catégorie des X -schémas.

Pour le cône projectif, on dispose de la proposition 2.9.2 de *loc.cit.* :

Proposition B.1.2 Soit $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ un morphisme de \mathcal{O}_X -algèbres graduées. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Pour $n \gg 0$, $\varphi_n : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}'_n$ est un épimorphisme.
2. Le morphisme canonique rationnel $\text{Proj}_X(\mathcal{S}) \rightarrow \text{Proj}_X(\mathcal{S}')$ est partout défini et c'est une immersion fermée.

Exemple B.1.3.— On obtient les fibrés respectivement projectif et affine de X de rang n (triviaux) comme les schémas

$$\mathbb{P}_X^n = \text{Proj}_X(\mathcal{O}_X[t_1, \dots, t_n, t_{n+1}]) \quad \mathbb{A}_X^n = \text{Spec}_X(\mathcal{O}_X[t_1, \dots, t_n])$$

où $\mathcal{O}_X[t_1, \dots, t_n]$ désigne l' \mathcal{O}_X -algèbre quasi-cohérente librement engendrée par les sections t_1, \dots, t_n définies sur X tout entier.

B.1.4.— Plus généralement, pour X un schéma, si \mathcal{E} est un \mathcal{O}_X -module localement libre, on note $\mathcal{S}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E})$ l' \mathcal{O}_X -algèbre graduée symétrique engendrée par \mathcal{E} .

On pose alors

$$\mathbb{V}_X(\mathcal{E}) = \text{Spec}_X(\mathcal{S}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E})).$$

C'est un fibré vectoriel sur X de faisceau des sections $\check{\mathcal{E}}$ (dual de \mathcal{E}).

De même, on définit le fibré projectif sur X (associé à $\mathbb{V}_X(\mathcal{E})$) :

$$\mathbb{P}_X(\mathcal{E}) = \text{Proj}_X(\mathcal{S}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E})).$$

Exemple B.1.5.— On dispose d'immersions fermées canoniques :

$$X \rightarrow \text{Spec}_X(\mathcal{S}) \quad X \rightarrow \text{Proj}_X(\mathcal{S})$$

obtenues en considérant les morphismes de projections sur les éléments de degrés 0 dans \mathcal{S} .

Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas. Si \mathcal{S} est une \mathcal{O}_X -algèbre graduée quasi-cohérente vérifiant les conditions 1. et 2., $f^*\mathcal{S}$ est une \mathcal{O}_Y -algèbre de même nature. Par ailleurs, les morphismes canoniques

$$\text{Spec}_Y(f^*\mathcal{S}) \rightarrow \text{Spec}_X(\mathcal{S}) \times_X Y$$

$$\text{Proj}_Y(f^*\mathcal{S}) \rightarrow \text{Proj}_X(\mathcal{S}) \times_X Y$$

sont des isomorphismes.

On notera encore $f^*(\text{Spec}_X(\mathcal{S})) = \text{Spec}_X(\mathcal{S}) \times_X Y$, et on l'appellera le cône image réciproque suivant f (idem pour les cônes projectifs).

Exemple B.1.6.— Supposons $f : Y \rightarrow X$ affine. Alors, Y est défini par une \mathcal{O}_X -algèbre quasi-cohérente notée \mathcal{B} . Soit \mathcal{S} un cône sur X , dès lors,

$$\text{Spec}_Y(f^*\mathcal{S}) = \text{Spec}_Y(\mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}).$$

B.2 Cône normal et éclatement

On applique le formalisme des cônes dans la situation particulière suivante :

Définition B.2.1 Soit X un schéma, et Z une partie fermée de X . Soit \mathcal{I} l'idéal de Z dans \mathcal{O}_X . On associe au couple (X, Z) les schémas suivants :

1. L'éclatement de X en Z :

$$B_Z X = \text{Proj}_X \left(\bigoplus_n \mathcal{I}^n \right).$$

2. Le cône normal de Z dans X :

$$C_Z X = \text{Spec}_Z \left(\bigoplus_n \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1} \right).$$

3. Le cône normal projectif de Z dans X :

$$\mathbb{P}(C_Z X) = \text{Proj}_Z \left(\bigoplus_n \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1} \right).$$

1. D'après la fin du paragraphe précédent, on a un carré cartésien canonique

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(C_Z X) & \longrightarrow & B_Z X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ Z & \longrightarrow & X \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des immersions fermées, et les flèches verticales des morphismes projectifs.

En effet, $Z = \text{Spec}_X (\mathcal{O}_X / \mathcal{I})$. Dès lors,

$$B_Z X \times_X Z = \text{Proj}_Z \left(\bigoplus_n \mathcal{I}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X / \mathcal{I} \right).$$

2. Dans le carré cartésien ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} B_Z X - \mathbb{P}(C_Z X) & \longrightarrow & B_Z X \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ X - Z & \longrightarrow & X \end{array}$$

la flèche p' est un isomorphisme.

Pour traiter de la functorialité des constructions que l'on vient de définir, on introduit la terminologie commode suivante :

Définition B.2.2 On appelle paire fermée tout couple (X, Z) tel que X est un schéma, et Z un sous-schéma fermé de X .

On définit de plus la catégorie des paires fermées, en prenant pour morphismes les carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} Z' & \rightarrow & X' \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \rightarrow & X. \end{array}$$

On dira que le morphisme précédent est cartésien lorsque le carré sous-jacent est cartésien.

B.2.3.— Soit donc $(f, g) : (X', Z') \rightarrow (X, Z)$ un morphisme de paires fermées. Notons \mathcal{I} (resp. \mathcal{I}') l'idéal de Z dans X (resp. Z' dans X').

Le morphisme canonique $f^* \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{X'}$ induit alors un morphisme $f^* \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}'$, qui lui-même donne un morphisme de $\mathcal{O}_{Z'}$ -algèbres graduées :

$$f^* \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1} \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{I}')^n / (\mathcal{I}')^{n+1}$$

On obtient donc un Z' -morphisme canonique

$$C_{Z'} X' \xrightarrow{C'_g f} g^* C_Z X$$

qui s'inscrit dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} C_{Z'} X' & \xrightarrow{C'_g f} & g^* C_Z X & \longrightarrow & C_Z X \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & Z' & \xrightarrow{g} & Z. \end{array}$$

On notera $C_g f : C_{Z'} X' \rightarrow C_Z X$ la composée des deux morphismes ci-dessus (sa décomposition canonique a de l'importance). Ainsi, le cône normal est fonctoriel par rapport aux morphismes de paires fermées, et la projection sur sa base est naturelle.

Lorsque le morphisme (f, g) est cartésien, le morphisme $f^* \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}'$ est surjectif. On en déduit d'abord que le morphisme $C'_g f$ est une immersion fermée.

Par ailleurs, d'après la proposition B.1.2, on obtient de plus des immersions fermées canoniques (entières)

$$\begin{array}{ccc} \text{Proj}_{X'} \left(\bigoplus_n \mathcal{I}'^n \right) & \xrightarrow{B_g f} & \text{Proj}_{X'} \left(f^* \bigoplus_n \mathcal{I}^n \right) \\ \text{Proj}_{X'} \left(\bigoplus_n \mathcal{I}'^n / \mathcal{I}'^{n+1} \right) & \xrightarrow{\mathbb{P}C_g f} & \text{Proj}_{X'} \left(g^* \bigoplus_n \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1} \right). \end{array}$$

On obtient donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{P}C_{Z'}X' & \longrightarrow & g^*(\mathbb{P}C_ZX) & \longrightarrow & \mathbb{P}C_ZX \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & Z' & \xrightarrow{g} & Z \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & X' & \xrightarrow{f} & X \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\
 B_{Z'}X' & \longrightarrow & f^*(B_ZX) & \longrightarrow & B_ZX.
 \end{array} \tag{B.1}$$

Ainsi, les schémas $\mathbb{P}C_ZX$ et B_ZX sont fonctoriels par rapport aux morphismes cartésiens de paires fermées, et l'immersion fermée canonique est naturelle.

Remarque B.2.4.— Compte tenu de cette fonctorialité, il nous arrivera de remplacer la notation habituelle C_ZX par la notation $C(X, Z)$. On le fera uniquement lorsque cela éclaircit la notation.

Exemple B.2.5.— Soient (X, Z) une paire fermée, U un ouvert de X et $i : U \rightarrow X$ l'immersion ouverte correspondante. On en déduit le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{P}C_{Z \cap U}U & \longrightarrow & \mathbb{P}C_ZX \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B_{Z \cap U}U & \longrightarrow & B_ZX \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 U & \xrightarrow{i} & X
 \end{array}$$

où les flèches verticales sont des immersions ouvertes ($Z \cap U$ peut éventuellement être vide).

On peut prendre la proposition suivante comme une définition :

Proposition B.2.6 Soient (X, Z) une paire fermée, $i : Z \rightarrow X$ l'immersion fermée associée, et \mathcal{I} l'idéal de Z sur X . On a une équivalence entre les conditions suivantes :

1. i est une immersion régulière.
2. C_ZX est un fibré vectoriel sur Z , de faisceau des sections isomorphe à $(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\vee$.

On trouvera une démonstration de cette proposition dans [Ful98], A.6.1 (cf B.7.1 pour la définition d'une immersion régulière).

Définition B.2.7 Soit $i : Z \rightarrow X$ une immersion fermée régulière d'idéal \mathcal{I} . On définit le fibré normal de Z dans X en posant

$$N_ZX = \mathbb{V}_Z(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2).$$

La proposition précédente se reformule encore en disant que dans le cas d'une immersion régulière, le morphisme canonique $C_ZX \rightarrow N_ZX$ est un isomorphisme.

Par ailleurs, citons encore la proposition suivante (cf [Ful98], B.7.4) :

Proposition B.2.8 *Soit*

$$\begin{array}{ccc} Z' & \longrightarrow & X' \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

un morphisme cartésien de paires fermées tel que f est plat et i régulière. Alors, le morphisme canonique de B.2.3, $N'_g f : N_{Z'} X' \rightarrow g^*(N_Z X)$ est un isomorphisme.

B.3 Déformation au cône normal

On définit dans cette section l'espace (affine) de déformation suivant [Ros96], §10 (voir aussi [Ful98], chap.5 pour la version fibrée au-dessus de \mathbb{P}^1) :

Soit $Z \xrightarrow{i} X$ une immersion fermée.

Considérons \mathbb{A}_X^1 le fibré trivial de rang 1 sur X , et $\{0\} \times Z \xrightarrow{j} \mathbb{A}_X^1$ l'immersion fermée canonique induite par i . On pose alors

$$M = B_{\{0\} \times Z}(\mathbb{A}_X^1)$$

Le schéma M s'insère dans les carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}C_Z(\mathbb{A}_X^1) & \longrightarrow & M & \longleftarrow & M - \mathbb{P}C_Z(\mathbb{A}_X^1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \sim \\ \{0\} \times Z & \longrightarrow & \mathbb{A}_X^1 & \longleftarrow & \mathbb{A}_X^1 - \{0\} \times Z. \end{array}$$

Supposons que X est un k -schéma, et considérons la projection canonique $\pi : M \rightarrow \mathbb{A}_k^1$. D'après le carré ci-dessus, le morphisme π est plat au-dessus de \mathbb{G}_m (puisque $\pi^{-1}(\mathbb{G}_m)$ est isomorphe à $\mathbb{G}_m \times_k X$), donc le morphisme π est plat.

Remarque B.3.1.— On aurait la même conclusion sans prendre un corps de base si X était plat sur \mathbb{Z} .

Considérant le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \{0\} \times Z & = & \{0\} \times Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{0\} \times X & \longrightarrow & \mathbb{A}_X^1 \end{array}$$

on obtient (d'après B.2.3) le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} B_Z X & \xrightarrow{i} & M|_0 & \longrightarrow & M \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & \{0\} \times X & \longrightarrow & \mathbb{A}_X^1 \end{array}$$

où i est une immersion fermée. De plus, l'image de $B_Z X$ dans M est le schéma fermé d'équation $t = 0$ si t désigne le paramètre sur M induit par le paramètre de \mathbb{A}_X^1 .

On déduit donc de ces descriptions :

$$M|_0 = B_Z X \cup \mathbb{P}C_Z(\mathbb{A}_X^1)$$

$$B_Z X \cap \mathbb{P}C_Z(\mathbb{A}_X^1) = Z$$

(en identifiant les schémas avec leur image dans M).

Définition B.3.2 Avec les notations ci-dessus, on définit l'espace affine de déformation en posant :

$$D_Z X = M - B_Z X.$$

Si X est un k -schéma, $D_Z X$ est plat sur \mathbb{A}_k^1 . De plus, on obtient les identifications suivantes :

1. Il existe un isomorphisme canonique $\mathbb{G}_m \times X \rightarrow D_Z X|_{\mathbb{G}_m}$.
2. Il existe un isomorphisme canonique $C_Z X \rightarrow D_Z X|_0$.

On obtient le deuxième isomorphisme car dans M , $\mathbb{P}(C_Z(\mathbb{A}_X^1)) - B_Z X \cap P(C_Z(\mathbb{A}_X^1)) = C_Z X$.

B.3.3.— Par ailleurs, puisque $B_Z X$ est le sous-schéma fermé d'équation homogène $t = 0$, on obtient la description suivante de l'espace affine de déformation :

$$D_Z X = \text{Spec}_{\mathbb{A}_X^1} \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}^n \cdot t^{-n} \right)$$

où t est la fonction canonique de \mathbb{A}^1 (avec la convention $\mathcal{I}^n = \mathcal{O}_X$ pour n négatif).

La construction est fonctorielle : pour $(f, g) : (X, Z) \rightarrow (X', Z')$ un morphisme cartésien de paires fermées, on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} D_{Z'} X' & \xrightarrow{D_g f} & (1 \times f)^*(D_Z X) & \longrightarrow & D_Z X \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathbb{A}_{X'}^1 & \xrightarrow{1 \times f} & \mathbb{A}_X^1 \end{array}$$

Les isomorphismes canoniques de l'espace de déformation sont alors de plus naturels :

$$\begin{array}{ccccccc} D_{Z'} X'|_0 & \xrightarrow{f^*} & (D_Z X|_0) & \xrightarrow{g^*} & D_Z X|_0 & & D_{Z'} X'|_{\mathbb{G}_m} \xrightarrow{f^*} (D_Z X|_{\mathbb{G}_m}) \xrightarrow{g^*} D_Z X|_{\mathbb{G}_m} \\ \sim \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \sim & & \sim \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \sim \\ C_{Z'} X' & \longrightarrow & g^*(C_Z X) & \longrightarrow & C_Z X & & \mathbb{G}_m \times X' \xrightarrow{=} \mathbb{G}_m \times X' \xrightarrow{1 \times f} \mathbb{G}_m \times X \end{array}$$

Appliquant cette fonctorialité au morphisme évident $(Z, Z) \rightarrow (X, Z)$, on peut résumer la situation dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} Z & \longrightarrow & D_Z Z & \longleftarrow & C_Z Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{d_Z X} & D_Z X & \xleftarrow{d'_Z X} & C_Z X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{A}_k^1 & \longleftarrow & \{0\} \end{array}$$

dans lequel chacun des carrés est cartésien, et toutes les flèches exceptées les morphismes de projection sont des immersions fermées. On notera encore $\dot{D}_Z X$ l'ouvert complémentaire de l'image de $D_Z Z$ dans $D_Z X$.

Par ailleurs, les flèches du haut se calculent comme suit :

$$\begin{array}{ccccc} Z & \longrightarrow & D_Z Z & \longleftarrow & C_Z Z \\ & \searrow s_1 & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ & & \mathbb{A}_Z^1 & \xleftarrow{s_0} & Z \end{array}$$

où les flèches verticales sont les projections canoniques, et sont des isomorphismes, et s_0 (resp. s_1) est la section nulle (resp. unité) de \mathbb{A}_Z^1 .

On obtient donc finalement le diagramme suivant qui résume la déformation (affine) au cône normal :

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{s_1} & \mathbb{A}_Z^1 & \xleftarrow{s_0} & Z & \tag{B.2} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{d_Z X} & D_Z X & \xleftarrow{d'_Z X} & C_Z X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{A}_k^1 & \longleftarrow & \{0\}. \end{array}$$

Ce diagramme montre comment on peut déformer suivant \mathbb{A}_k^1 à l'intérieur de l'espace $D_Z X$ l'immersion fermée $Z \rightarrow X$ en l'immersion fermée $Z \rightarrow C_Z X$.

Un moyen compact de regarder cette déformation au cône normal est de la voir comme un couple de morphismes de paires fermées

$$(X, Z) \xrightarrow{d_Z X} (D_Z X, \mathbb{A}_Z^1) \xleftarrow{d'_Z X} (C_Z X, Z).$$

Ces morphismes sont de plus naturels par rapport aux morphismes cartésiens de paires fermées $(X, Z) \rightarrow (X', Z')$.

Remarque B.3.4.— L'information supplémentaire du point de vue homotopique est que cette opération donne canoniquement une équivalence d'homotopie au niveau du fermé Z à cause de la ligne supérieure du diagramme (B.2).

Appendix C

Catégories

C.1 Terminologie générale

C.1.1 Existence de limites

Définition C.1.1 Soit \mathcal{C} une catégorie.

Nous dirons que \mathcal{C} est complète (resp. cocomplète) si et seulement si les petites limites projectives (resp. inductives) existent dans \mathcal{C} .

Remarque C.1.2.— Nous avons adopté la terminologie française en ce qui concerne les limites dans les catégories. Rappelons que

1. «limite projective» correspond en anglais à «limit»,
2. «limite inductive» correspond en anglais à «colimit».

Montrons rapidement le lemme élémentaire suivant :

Lemme C.1.3 Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} des catégories. Soient $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ des foncteurs tels que F est adjoint à gauche de G .

On suppose que F est exact et que G est pleinement fidèle.

Alors,

1. Si \mathcal{C} est complète (resp. admet des limites projectives cofiltrantes, resp. finies), alors \mathcal{D} est complète (resp. admet des limites projectives cofiltrantes, resp. finies).
2. Si \mathcal{C} est cocomplète (resp. admet des limites inductives filtrantes, resp. finies), alors \mathcal{D} est complète (resp. admet des limites inductives filtrantes, resp. finies).

PREUVE : Considérons la première assertion. Soit $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ un système projectif de \mathcal{D} (i.e. \mathcal{I} est un ensemble cofiltrant, cf C.2.1). Alors, $(G(X_i))_{i \in \mathcal{I}}$ est un système cofiltrant de \mathcal{C} . Il admet donc une limite projective L dans \mathcal{C} . Mais alors, puisque F est exact, $F(L)$ est une limite inductive de $(FG(X_i))_{i \in \mathcal{I}}$ dans \mathcal{D} , système projectif qui est isomorphe à $(X_i)_i$ puisque G est pleinement fidèle.

Toutes les autres assertions de ce lemme se démontrent de la même façon. \square

C.1.2 Catégories abéliennes

Nous introduisons ici une terminologie pratique et répandue concernant les catégories abéliennes. On adopte dans cette sous-section les notations de [Gro57] :

Définition C.1.4 *Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. Nous dirons que \mathcal{A} est de Grothendieck si et seulement si \mathcal{A} vérifie l'axiome AB5 (cf loc.cit., 1.5) et admet une famille de générateurs (cf loc.cit., 1.9).*

C.1.5.– L'utilité de cette définition réside dans le théorème 1.10.1 de *loc.cit.* D'après ce théorème, toute catégorie abélienne de Grothendieck admet suffisamment d'injectifs.

Exemple C.1.6.– Soit \mathcal{C} une catégorie essentiellement petite (ie les classes d'isomorphismes d'objets de \mathcal{C} forment un ensemble). La catégorie des foncteurs $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}b$ (resp. foncteurs additifs) est abélienne de Grothendieck.

Notons qu'on dispose du lemme élémentaire suivant pour obtenir des catégories de Grothendieck :

Lemme C.1.7 *Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux catégories additives. Soient $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ et $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ des foncteurs tels que F est adjoint à gauche de G .*

On suppose que F est exact à gauche, et G est pleinement fidèle.

Alors, si \mathcal{A} est abélienne (resp. abélienne et de Grothendieck), \mathcal{B} est abélienne (resp. abélienne de Grothendieck).

PREUVE : Commençons par l'assertion sur les catégories abéliennes. On suppose donc que \mathcal{A} est abélienne.

L'existence des noyaux et conoyaux dans la catégorie \mathcal{B} résulte du lemme C.1.3 et du fait analogue pour \mathcal{B} .

D'après ce lemme, pour calculer le noyau/conoyau d'un morphisme u dans la catégorie \mathcal{B} , on le considère d'abord ce noyau/conoyau dans \mathcal{A} , et on ramène le résultat dans \mathcal{B} grâce au foncteur exact F . Il résulte de cette recette que \mathcal{B} vérifie l'axiome AB2.

Considérons la deuxième assertion. On suppose donc que \mathcal{A} est abélienne de Grothendieck. On sait déjà que \mathcal{B} est abélienne. Fixons un élément générateur Z de \mathcal{A} . Soit B un élément de \mathcal{B} . Alors, d'après *loc.cit.*, 1.9.1, $G(B)$ est un quotient d'une somme directe $Z^{(I)}$ où I est un ensemble. Il en résulte que $FG(B)$ est un quotient de $(FZ)^{(I)}$, car F est exact et commute aux limites inductives quelconques. Donc FZ est un générateur de \mathcal{B} .

Par ailleurs, le lemme C.1.3 montre que \mathcal{B} admet des limites inductives filtrantes, *i.e.* vérifie l'axiome AB3. Par ailleurs, compte tenu de la construction de ces limites inductives, le fait que les limites inductives filtrantes de \mathcal{A} soient exactes implique que les limites inductives filtrantes de \mathcal{B} sont exactes, ce qui est l'axiome AB5. \square

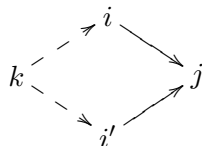
C.2 Pro-objets

C.2.1 Définitions générales

L'essentiel de ces définitions est tiré de [SGA4], exposé I, §8, et développe la partie 8.10 concernant les pro-objets qui était laissée au lecteur. On espère que cette annexe éclairera cette notion ; elle nous permet au moins de fixer nos conventions.

Définition C.2.1 1. Soit \mathcal{I} une catégorie. On dit que \mathcal{I} est cofiltrante si et seulement si elle satisfait aux conditions suivantes :

(a) On peut compléter tout couple de flèches $i \rightarrow j, i' \rightarrow j$ en un diagramme commutatif



(b) Pour tout couple de flèches $i \rightrightarrows j$, il existe un objet k de \mathcal{I} et une flèche $k \rightarrow i$ qui égalise les deux précédentes : $k \rightarrow i \rightrightarrows j$.

(c) \mathcal{I} est non vide et connexe.

2. Soit \mathcal{C} une catégorie. On appelle pro-objet de \mathcal{C} tout foncteur

$$X : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}, i \mapsto X_i$$

tel que \mathcal{I} est une petite catégorie cofiltrante.

Dans cette sous-section, on utilisera souvent la notation abusive $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ pour désigner les tels pro-objets, ou encore X_\bullet lorsque la référence à \mathcal{I} ne sera pas immédiatement nécessaire.

C.2.2.– On utilisera par ailleurs la notation pratique

$$\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} X_i$$

pour désigner ce même pro-objet de manière précise et suggestive.

Remarque C.2.3.– En anticipant sur la suite cette annexe, précisons que si l'on considère chaque objet X_i comme un pro-objet constant, le pro-objet $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ est tautologiquement la limite projective des X_i prise dans la catégorie des pro-objets, ce qui justifie la notation ci-dessus. Le tilde est donc là pour préciser que cette limite projective est considérée dans la catégorie des pro-objets (et non dans la catégorie \mathcal{C} par exemple).

Exemple C.2.4.– Soit $*$ la catégorie formée d'un seul objet et d'un seul morphisme. Alors $*$ est cofiltrante et petite. Un pro-objet de \mathcal{C} indexé par $*$ est équivalent à la donnée d'un objet de \mathcal{C} , disons X . Un tel pro-objet sera appelé pro-objet constant de valeur X .

Exemple C.2.5.— Si E est un ensemble ordonné, on le confondra souvent avec la catégorie discrète dont les objets sont les éléments de E , et les morphismes vérifient :

$$\mathrm{Hom}_E(e, f) = \begin{cases} \{*\} & \text{si } e \leq f \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, on oriente les flèches de manière à ce que l'objet le plus petit soit à la source.

Alors E est une catégorie cofiltrante si et seulement si tout élément de E admet un minorant. Les pro-objets indexés par E sont alors les systèmes projectifs cofiltrants classiques. La plupart du temps, les pro-objets que nous manipulerons seront de cette forme.

Commençons par introduire la notion de changement d'indice :

Définition C.2.6 Soit \mathcal{C} une catégorie et $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ un pro-objet de \mathcal{C} indexé par la catégorie cofiltrante \mathcal{I} .

Pour toute petite catégorie \mathcal{J} cofiltrante, et pour tout foncteur $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$, on note $X_{F(\bullet)}$ le pro-objet

$$\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}, i \mapsto X_{F(i)}$$

obtenu par composition de X_\bullet et de F . On notera $X_{F(\bullet)}$ ce pro-objet, et on l'appellera pro-objet déduit de X_\bullet par changement d'indice selon F .

C.2.2 Morphismes et pro-représentation

Définition C.2.7 Soit \mathcal{C} une catégorie.

Si $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ et $(Y_j)_{j \in \mathcal{J}}$ sont des pro-objets de \mathcal{C} , on définit les morphismes de X_\bullet vers Y_\bullet comme l'ensemble :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}\text{-}\mathcal{C}}(X_\bullet, Y_\bullet) = \varprojlim_{j \in \mathcal{J}} \varinjlim_{i \in \mathcal{I}^{op}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j).$$

Il nous reste à définir la composition des morphismes pour obtenir une catégorie ; pour cela, on passe par la notion suivante qui constitue le côté «dual» des pro-objets :

Définition C.2.8 Soit \mathcal{C} une catégorie.

1. On note $\tilde{\mathcal{C}}$ la catégorie des copréfaisceaux de \mathcal{C} , autrement dit des foncteurs covariants de \mathcal{C} dans $\mathcal{E}ns$.

On note

$$\delta : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}, X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$$

le foncteur canonique.

2. Soit $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ un pro-objet ; on lui associe le copréfaisceau suivant :

$$\begin{aligned} \delta(X_\bullet) : \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{E}ns \\ Y &\mapsto \varinjlim_{i \in \mathcal{I}^{op}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y) \end{aligned}$$

où la limite projective est prise dans $\mathcal{E}ns$.

3. Soit Δ un copréfaisceau sur \mathcal{C} . On dit que Δ est pro-représentable si et seulement si il existe un pro-objet X_\bullet de \mathcal{C} et un isomorphisme $\delta(X_\bullet) \rightarrow \Delta$ dans $\check{\mathcal{C}}$.

Remarque C.2.9.— On fera attention que $\delta(X_\bullet)$ est dit pro-représentable alors qu'il est la limite inductive dans la catégorie $\check{\mathcal{C}}$ des copréfaisceaux $\delta(X_i)$.

C.2.10.— Soient $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ et $(Y_j)_{j \in \mathcal{J}}$ deux pro-objets de \mathcal{C} . On peut alors construire l'isomorphisme canonique suivant :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\check{\mathcal{C}}}(\delta(X_\bullet), \delta(Y_\bullet)) &\simeq \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} \text{Hom}_{\check{\mathcal{C}}}(\delta(X_\bullet), \delta(Y_j)) \\ &\simeq \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} \delta(X_\bullet)(Y_j) \\ &= \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} \varinjlim_{i \in \mathcal{I}^{op}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j) \\ &= \text{Hom}_{\text{pro-}\mathcal{C}}(X_\bullet, Y_\bullet) \end{aligned}$$

où le deuxième isomorphisme résulte du lemme de Yoneda.

Dès lors, puisque cet isomorphisme est canonique, la composition des morphismes de $\check{\mathcal{C}}$ induit une composition sur les morphismes entre pro-objets de la définition du début de cette section :

Définition C.2.11 On note $\text{pro-}\mathcal{C}$ la catégorie des pro-objets de \mathcal{C} munie des morphismes de la définition C.2.7 et de la composition définie ci-dessus.

C.2.12.— On obtient donc un foncteur pleinement fidèle canonique :

$$\begin{array}{ccc} \text{pro-}\mathcal{C} & \rightarrow & \check{\mathcal{C}} \\ X_\bullet & \mapsto & \delta(X_\bullet). \end{array}$$

Cette définition peut paraître formelle, mais elle permet au moins d'obtenir simplement la caractérisation suivante :

Lemme C.2.13 Soit $\phi : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ un morphisme de pro-objets.

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. ϕ est un isomorphisme (resp. monomorphisme, épimorphisme).
2. Pour tout objet C de \mathcal{C} , considérant C comme un pro-objet constant, le morphisme d'ensemble induit par ϕ

$$\text{Hom}_{\text{pro-}\mathcal{C}}(Y_\bullet, C) \rightarrow \text{Hom}_{\text{pro-}\mathcal{C}}(X_\bullet, C)$$

est un isomorphisme (resp. épimorphisme, monomorphisme).

PREUVE : C'est tautologique puisque par définition, si C est un pro-objet constant,

$$\text{Hom}_{\text{pro-}\mathcal{C}}(X_\bullet, C) = \delta(X_\bullet).C$$

et que δ est un foncteur contravariant pleinement fidèle. □

C.2.3 Première étude des morphismes

On va commencer à expliciter la définition des morphismes de pro-objets. Ainsi, un morphisme

$$\phi : (X_i)_{i \in \mathcal{I}} \rightarrow (Y_j)_{j \in \mathcal{J}}$$

de pro-objets est en particulier une famille $(\phi_j)_{j \in \mathcal{J}}$, où pour tout objet j de \mathcal{J} , ϕ_j est la classe d'une application dans

$$\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j).$$

On va voir maintenant comment représenter cette donnée.

Définition C.2.14 Soient \mathcal{C} une catégorie et $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$, $(Y_j)_{j \in \mathcal{J}}$ des pro-objets de \mathcal{C} .

On appellera représentant de morphisme de X_{\bullet} vers Y_{\bullet} tout couple (F, φ) tel que

1. $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$ est un foncteur.
2. $\varphi : X_{F(\bullet)} \rightarrow Y_{\bullet}$ est une transformation naturelle.

Autrement dit, pour toute flèche $j \rightarrow j'$ de \mathcal{J} , on se donne un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_{F(j)} & \xrightarrow{\varphi_j} & Y_j \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{F(j')} & \xrightarrow{\varphi_{j'}} & Y_{j'}. \end{array}$$

On notera $\mathfrak{R}(X_{\bullet}, Y_{\bullet})$ l'ensemble (à isomorphisme près) formé des couples ci-dessus.

Remarque C.2.15.— Autrement dit, un tel représentant est une application des flèches de \mathcal{J} dans les carrés de \mathcal{C} soumise aux conditions de la définition précédente.

Le lemme suivant est alors une formalité :

Lemme C.2.16 Soient \mathcal{C} une catégorie, $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ et $(Y_j)_{j \in \mathcal{J}}$ deux pro-objets de \mathcal{C} .

On a une application canonique

$$\mathfrak{R}(X_{\bullet}, Y_{\bullet}) \rightarrow \text{Hom}_{\text{pro-}\mathcal{C}}(X_{\bullet}, Y_{\bullet}).$$

Sous l'axiome du choix, cette application est surjective.

(Remarque C.2.17.— L'assertion «pour toute catégorie \mathcal{C} , tout morphisme entre pro-objets de \mathcal{C} est représentable» est en fait équivalente à l'axiome du choix.)

PREUVE : On va construire l'application en question.

Soit (F, φ) un représentant de morphisme de X_{\bullet} vers Y_{\bullet} . Alors, pour tout objet j de \mathcal{J} , on note ϕ_j la classe de $\varphi(j) : X_{F(j)} \rightarrow Y_j$ dans l'ensemble quotient

$$\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j) / \sim$$

où la relation d'équivalence \sim est la relation de «compatibilité sur la source».

On a ainsi défini une famille $(\phi_j)_{j \in \mathcal{J}}$ dans

$$\prod_{j \in \mathcal{J}} \left(\varinjlim_{i \in \mathcal{J}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j) \right).$$

Le fait que φ soit naturelle implique maintenant que cette famille appartient au sous-ensemble

$$\varprojlim_{j \in \mathcal{J}} \varinjlim_{i \in \mathcal{J}^{op}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j).$$

□

Remarque C.2.18.— On peut donc représenter tout morphisme de pro-objet par la donnée de la définition précédente. Par ailleurs, tous les morphismes de pro-objets que nous considérerons seront explicitement représentés. Si l'on ne veut pas utiliser l'axiome du choix, on pourra remplacer la définition des morphismes de pro-objets en prenant pour morphisme les couples (ϕ, φ) où ϕ est un morphisme de pro-objet et φ un représentant de ϕ .

C.2.4 Changement d'indice

Considérons $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$ un foncteur de changement d'indice entre petite catégorie cofiltrante. Pour tout pro-objet X_{\bullet} indexé par \mathcal{J} , on a défini le pro-objet $X_{F(\bullet)}$ déduit par changement d'indice. On peut alors définir un représentant canonique de morphisme de X_{\bullet} vers $X_{F(\bullet)}$ en associant à toute flèche $j \rightarrow j'$ de \mathcal{J} le diagramme commutatif (tautologique) :

$$\begin{array}{ccc} X_{F(j)} & \xrightarrow{Id} & X_{F(j)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{F(j')} & \xrightarrow{Id} & X_{F(j')}. \end{array}$$

On a donc pris le couple (F, Id_F) où F est le foncteur donné et Id_F la transformation naturelle identité de F .

Ce représentant définit donc un morphisme canonique

$$X_{\bullet} \rightarrow X_{F(\bullet)}$$

et on a donc défini notre premier morphisme de pro-objet, à travers un représentant.

Etudions maintenant ce morphisme canonique ; plus précisément, à quelle condition est-ce un isomorphisme.

Définition C.2.19 Soit $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$ un foncteur entre deux catégories cofiltrantes. On dit que F est final si et seulement si

1. Pour tout objet i de \mathcal{I} , il existe un objet j de \mathcal{J} , et une flèche $F(j) \rightarrow i$ dans \mathcal{I} .
2. Pour tout objet j de \mathcal{J} , et pour tout couple de flèches $F(j) \rightrightarrows i$ dans \mathcal{I} , il existe une flèche $h : k \rightarrow j$ dans \mathcal{J} tel que $F(h)$ égalise les deux précédentes : $F(k) \rightarrow F(j) \rightrightarrows i$.

La plupart du temps, le foncteur F sera pleinement fidèle. Dans ce cas, on a la simplification suivante :

Lemme C.2.20 *Soit $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$ un foncteur pleinement fidèle où \mathcal{I} et \mathcal{J} sont des catégories cofiltrantes. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. F est final.
2. Pour tout objet i de \mathcal{I} , il existe un objet j de \mathcal{J} , et une flèche $F(j) \rightarrow i$ dans \mathcal{I} .

PREUVE : L'implication 1 \Rightarrow 2 est triviale. Démontrons l'autre sens. Soit $F(j) \rightrightarrows i$ une double flèche dans \mathcal{I} . Il s'agit de trouver un morphisme égalisateur de cette double flèche qui est dans «l'image» de F . Or, comme \mathcal{I} est filtrante, on a un objet i_0 au-dessus de $F(j)$ dans \mathcal{I} qui égalise ces deux flèches. Il suffit alors d'appliquer le 2 à i_0 pour obtenir k dans \mathcal{J} tel que $F(k)$ est au-dessus de i_0 . On a donc par composition une flèche $F(k) \rightarrow i_0 \rightarrow F(j)$ qui égalise les deux flèches données. Il suffit maintenant d'appliquer le fait que F est pleinement fidèle pour obtenir une flèche $h : k \rightarrow j$ dans \mathcal{J} tel que $F(h)$ égalise la double flèche donnée. \square

Lemme C.2.21 *Soit $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$ un foncteur final entre deux catégories cofiltrantes.*

Alors, pour tout pro-objet $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ de \mathcal{C} indexé par \mathcal{I} , le morphisme canonique de pro-objets

$$X_{\bullet} \rightarrow X_{F(\bullet)}$$

est un isomorphisme.

PREUVE : On peut appliquer le lemme C.2.13 à ce morphisme, et on est donc réduit à montrer que pour tout objet C de \mathcal{C} , le morphisme d'ensemble

$$\varinjlim_{j \in \mathcal{J}^{op}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_{F(j)}, C) \rightarrow \varinjlim_{i \in \mathcal{I}^{op}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, C)$$

est un isomorphisme.

Or, le foncteur $F^{op} : \mathcal{J}^{op} \rightarrow \mathcal{I}^{op}$ est cofinal. Dans ce cas, par définition des limites inductives dans la catégories des ensembles, on est réduit à un calcul classique. \square

Remarque C.2.22.— On énonce le résultat suivant qui montre que dans les pro-objets, on peut toujours se réduire au cas classique où l'ensemble d'indice n'est qu'un ensemble ordonné cofiltrant :

Proposition C.2.23 (Deligne) *Soit \mathcal{I} une petite catégorie cofiltrante. Alors, sous l'axiome du choix, il existe un ensemble ordonné E et un foncteur final $F : E \rightarrow \mathcal{I}$.*

On renvoie à [SGA4] 8.1.6 (qu'on peut appliquer à la catégorie filtrante \mathcal{I}^{op}).

Par ailleurs, tant qu'à considérer des pro-objets plus généraux que les pro-objets indexés par des ensembles ordonnés, autant adopter la définition générale suivante :

Définition C.2.24 1. *Soit \mathcal{I} une catégorie cofiltrante. On dit que \mathcal{I} est essentiellement petite si et seulement si il existe un ensemble ordonné cofiltrant et un foncteur final $F : E \rightarrow \mathcal{I}$.*

2. On appelle *pro-objet (généralisé)* de \mathcal{C} la donnée d'un foncteur $X_\bullet : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ où \mathcal{I} est une petite catégorie cofiltrante essentiellement petite.

On fait la convention de désigner encore $\text{pro-}\mathcal{C}$ la catégorie des pro-objets généralisés, où les morphismes sont calculés par rapport aux ensembles ordonnés finaux dans les catégories d'indices.

En effet, remarquons que si $F : E \rightarrow \mathcal{I}$ et $F' : E' \rightarrow \mathcal{I}$ sont deux foncteurs finaux depuis des ensembles ordonnés cofiltrants dans une catégorie cofiltrante, alors il existe un foncteur final $E \rightarrow E'$. Ainsi, la définition des morphismes entre pro-objets généralisés ne dépend pas de l'ensemble d'indice choisi.

On aura parfois besoin de considérer des pro-objets généralisés, et plutôt que de ramener à chaque fois la situation à un ensemble d'indice petit (ordonné cofiltrant), on choisit cette définition pour plus de latitude.

C.2.5 Présentation des morphismes par niveau

Définition C.2.25 Soit \mathcal{C} une catégorie, et $\phi : (X_i)_{i \in \mathcal{I}} \rightarrow (Y_j)_{j \in \mathcal{J}}$ un morphisme de pro-objets. On appelle *présentation par niveau* de ϕ les données :

1. d'une catégorie cofiltrante essentiellement petite.
2. de foncteurs $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{I}$ et $G : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{J}$ finaux.
3. d'un élément de $\mathfrak{R}(X_{F(\bullet)}, Y_{G(\bullet)})$ de la forme $(Id_{\mathcal{K}}, \varphi)$, c'est-à-dire pour toute flèche $k \rightarrow k'$ de \mathcal{K} , d'un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_{F(k)} & \xrightarrow{\varphi_k} & Y_{G(k)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{F(k')} & \xrightarrow{\varphi_{k'}} & Y_{G(k')} \end{array}$$

tel que si l'on note ϕ' le morphisme représenté par $(Id_{\mathcal{K}}, \varphi)$, celui-ci s'inscrit dans le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_{F(\bullet)} & \xrightarrow{\phi'} & Y_{G(\bullet)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_\bullet & \xrightarrow{\phi} & Y_\bullet \end{array}$$

où les flèches verticales sont les isomorphismes canoniques.

Les présentations par niveau d'un morphisme sont particulièrement utiles pour manipuler les pro-objets. Par ailleurs, on dispose de la construction suivante :

Proposition C.2.26 Soit \mathcal{C} une catégorie. Tout morphisme $\phi : (X_i)_{i \in \mathcal{I}} \rightarrow (Y_j)_{j \in \mathcal{J}}$ de pro-objets admet une présentation par niveau canonique.

PREUVE : On a déjà vu que le morphisme ϕ est la donnée d'une famille $(\phi_j)_{j \in \mathcal{J}}$ de classes ϕ_j dans $\sqcup_{i \in \mathcal{I}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, X_j)$ (pour la relation d'équivalence de compatibilité sur la source).

On note $\mathcal{L}(\phi)$ l'ensemble des triplets (i, j, ρ) où i est un objet de \mathcal{I} , j un objet de \mathcal{J} et $\rho : X_i \rightarrow Y_j$ un morphisme de \mathcal{C} tel que ρ représente ϕ_j . On définit les morphismes de (i_0, j_0, ρ_0) dans (i_1, j_1, ρ_1) comme les couples (f, g) où $f : i_0 \rightarrow i_1$ est un morphisme de \mathcal{I} , $g : j_0 \rightarrow j_1$ un morphisme de \mathcal{J} tel que le carré suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_{i_0} & \xrightarrow{\rho_0} & Y_{j_0} \\ X_f \downarrow & & \downarrow Y_g \\ X_{i_1} & \xrightarrow{\rho_1} & Y_{j_1}. \end{array}$$

La catégorie ainsi définie est cofiltrante. De plus, on a des foncteurs (fidèles, non nécessairement pleinement fidèles)

$$\begin{aligned} p : \mathcal{L}(\phi) &\rightarrow \mathcal{I} \\ q : \mathcal{L}(\phi) &\rightarrow \mathcal{J} \end{aligned}$$

qui sont finaux.

Par ailleurs, à toute flèche $(i_0, j_0, \rho_0) \rightarrow (i_1, j_1, \rho_1)$ de $\mathcal{L}(\phi)$, on peut associer tautologiquement le carré qui la définit

$$\begin{array}{ccc} X_{i_0} & \xrightarrow{\rho_0} & Y_{j_0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{i_1} & \xrightarrow{\rho_1} & Y_{j_1}, \end{array}$$

autrement dit, on a défini le représentant canonique d'un morphisme $\phi' : X_{p(\bullet)} \rightarrow Y_{q(\bullet)}$. Il est alors tautologique que le carré

$$\begin{array}{ccc} X_{p(\bullet)} & \xrightarrow{\phi'} & Y_{q(\bullet)} \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ X_{\bullet} & \xrightarrow{\phi} & Y_{\bullet} \end{array}$$

est commutatif. □

On va renforcer la proposition précédente :

Proposition C.2.27 *Soit \mathcal{C} une catégorie, et \mathcal{D} est un graphe fini orienté.*

Soit $\Delta : \mathcal{D} \rightarrow \text{pro-}\mathcal{C}$ un foncteur. Pour tout objet d de \mathcal{D} , on note \mathcal{I}_d la catégorie d'indice du pro-objet $\Delta(d)$.

Alors, il existe :

1. *une catégorie cofiltrante \mathcal{K} .*
2. *pour tout objet d de \mathcal{D} , un foncteur $F_d : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{I}_d$ final qui commute aux transformations naturelles du diagramme Δ .*
3. *pour tout morphisme $d \rightarrow e$ de \mathcal{D} , une présentation par niveau du morphisme $\Delta_d \rightarrow \Delta_e$.*

PREUVE : On fait une récurrence sur la hauteur du graphe.

S'il est de hauteur nulle, on a donc une collection de pro-objets indexés par une famille de catégorie \mathcal{I}_d cofiltrante. Soit $\mathcal{K} = \prod_{d \in \mathcal{D}} \mathcal{I}_d$. Alors, \mathcal{K} est cofiltrante, et les foncteurs canoniques $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{I}_d$ sont finaux. La condition 3 étant vide, c'est fini.

Supposons donc la propriété vraie pour les graphes de hauteur inférieure à h , et soit \mathcal{D} un graphe de hauteur $h + 1$. Considérons l'ensemble des arêtes initiales du graphe, et numérotons-le de façon arbitraire. On peut alors construire la catégorie \mathcal{K} par récurrence à partir de cette numérotation et de la proposition précédente. \square

Corollaire C.2.28 *Supposons que dans \mathcal{C} les produits finis (resp. limites projectives finies, sommes finies, inductives finies) soient représentables. Alors, il en est de même dans $\text{pro-}\mathcal{C}$.*

Par ailleurs, le foncteur

$$ct : \mathcal{C} \rightarrow \text{pro-}\mathcal{C}$$

qui à un objet de \mathcal{C} associe le pro-objet constant qui lui correspond, commute alors à chacun des types respectifs de limites.

PREUVE : Commençons par montrer que si \mathcal{C} admet des produits finis, il en est de même dans $\text{pro-}\mathcal{C}$.

Soient $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ et $(Y_j)_{j \in \mathcal{J}}$ des pro-objets. Posons $\mathcal{K} = \mathcal{I} \times \mathcal{J}$. C'est une catégorie cofiltrante essentiellement petite, munie de ces deux foncteurs de projection $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{I}$ et $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{J}$ qui sont tous deux cofinaux. Autrement dit, on peut supposer que X_\bullet et Y_\bullet sont indexés par la même catégorie \mathcal{K} . Dès lors, pour tout objet k de \mathcal{K} , on définit $P_k = X_k \times Y_k$, muni des morphismes de transition évident. P_\bullet est alors le produit de X_\bullet et Y_\bullet dans $\text{pro-}\mathcal{C}$.

Au vu de cette construction, il est alors immédiat que le foncteur ct commute aux produits.

Pour montrer que si \mathcal{C} admet des limites projectives finies, $\text{pro-}\mathcal{C}$ admet des limites projectives finies, il suffit de le montrer pour les produits fibrés. Pour cela, si l'on considère $X_\bullet \rightarrow A_\bullet$ et $Y_\bullet \rightarrow A_\bullet$ deux morphismes de pro-objets, d'après la proposition précédente, ils admettent une présentation par niveau commune, indexée par \mathcal{K} . Si l'on pose $N_k = X_k \times_{A_k} Y_k$ dans la catégorie \mathcal{C} , le pro-objet N_\bullet ainsi défini est bien le produit fibré attendu.

On procède de même pour les limites inductives. \square

Remarque C.2.29.— On retiendra que pour calculer une limite finie, indexée par un graphe, de pro-objets, on réindexe tous les pro-objets pour qu'ils soient tous indexés par une même petite catégorie cofiltrante, et que les morphismes considérés admettent tous une présentation par niveau. On peut alors prendre la limite à chaque niveau, ce qui donne un pro-objet qui est la limite attendue.

Corollaire C.2.30 *Soit \mathcal{C} une catégorie :*

1. *Si \mathcal{C} est additive, alors $\text{pro-}\mathcal{C}$ est canoniquement munie d'une structure additive, telle que le foncteur ct est additif.*
2. *Si de plus, \mathcal{C} est abélienne, alors $\text{pro-}\mathcal{C}$ est abélienne, telle que le foncteur ct est exact.*

3. Si \mathcal{C} est monoïdale, alors $\text{pro-}\mathcal{C}$ est canoniquement monoïdale, telle que le foncteur ct est monoïdal.

PREUVE : 1. Supposons \mathcal{C} additive. Alors, si $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ et $(Y_j)_{j \in \mathcal{J}}$ sont deux pro-objets de \mathcal{C} , l'ensemble

$$\text{Hom}_{\text{pro-}\mathcal{C}}(X_\bullet, Y_\bullet) = \varprojlim_{j \in \mathcal{J}} \varinjlim_{i \in \mathcal{I}^{op}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j)$$

est canoniquement muni d'une structure de groupe abélien (car notamment la limite inductive indexée par \mathcal{I}^{op} est filtrante).

Par ailleurs, \mathcal{C} admet des produits, donc $\text{pro-}\mathcal{C}$ aussi d'après le corollaire précédent, ce qui montre que $\text{pro-}\mathcal{C}$ est additive (cf [ML98], VIII.2, theorem 2). Par ailleurs, le foncteur ct commute aux produits d'après le corollaire précédent, autrement dit il est additif.

2. Compte tenu du 1., il suffit d'appliquer le corollaire précédent pour voir que $\text{pro-}\mathcal{C}$ admet des noyaux et des conoyaux, et pour voir du même coup que ct y commute, donc est exact.

3. Soient $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ et $(Y_j)_{j \in \mathcal{J}}$ des pro-objets de \mathcal{C} . Alors, posant $\mathcal{K} = \mathcal{I} \times \mathcal{J}$, catégorie cofiltrante, munie des foncteurs finaux de projection, on définit le produit tensoriel de X_\bullet et Y_\bullet en posant, pour tout objet (i, j) de \mathcal{K} , $P_{(i,j)} = X_i \otimes Y_j$, et pour tout morphisme $(i, j) \xrightarrow{(f,g)} (k, l)$, $P_{(f,g)} = X_f \otimes Y_g$. Puisque \otimes est un bifoncteur, les morphismes ainsi définis sont bien compatibles et définissent donc un pro-objet P_\bullet . On pose bien sûr $P_\bullet = X_\bullet \otimes Y_\bullet$.

Par ailleurs, si $f : X_\bullet \rightarrow X'_\bullet$ est un morphisme, on peut encore considérer sa présentation par niveau canonique, dont on note F et F' les foncteurs finaux. Alors, on peut définir un morphisme $\tilde{f} : X_{F(\bullet)} \otimes Y_\bullet \rightarrow X'_{F'(\bullet)} \otimes Y_\bullet$ pour tout pro-objet Y_\bullet . On définit donc le morphisme pointillé dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X_{F(\bullet)} \otimes Y_\bullet & \xrightarrow{\tilde{f}} & X'_{F'(\bullet)} \otimes Y_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_\bullet \otimes Y_\bullet & \xrightarrow{f \otimes 1} & X'_\bullet \otimes Y_\bullet \end{array}$$

Cette construction est alors naturelle. comme on peut effectuer la même construction pour Y , on a bien défini ainsi un bifoncteur \otimes sur $\text{pro-}\mathcal{C}$. Il résulte de la construction que le foncteur constant est monoïdal. \square

C.2.6 Notion de compacité pour un objet

La terminologie suivante n'est pas standardisée, mais on adopte cette convention pour le reste de la thèse :

Définition C.2.31 Soit X un objet de \mathcal{C} .

On dira que X vérifie la propriété (coPF) dans \mathcal{C} si et seulement si le préfaisceau représenté par X commute aux limites projectives cofiltrantes qui existent dans \mathcal{C} .

Si \mathcal{P} est une sous-catégorie pleine de $\text{pro-}\mathcal{C}$ formée d'objets ayant une limite projective dans la catégorie \mathcal{C} , on dira que X vérifie la propriété (coPF) relativement à \mathcal{P} dans \mathcal{C} si et seulement si pour tout pro-objet $(Y_i)_{i \in \mathcal{I}}$ de \mathcal{P} , le morphisme canonique

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}} \left(\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} Y_i, X \right) \rightarrow \varinjlim_{i \in \mathcal{I}^{op}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y_i, X)$$

est un isomorphisme.

Remarque C.2.32.— Si A est un anneau, un A -module est de présentation finie si et seulement si il vérifie la propriété duale de (coPF) dans la catégorie des A -modules. Ainsi, on peut considérer que dans une catégorie quelconque, (coPF) signifie «coprésentation finie».

On se gardera pourtant d'utiliser cette expression, car, si S est un schéma, et X un S -schéma localement de présentation finie, alors X vérifie la propriété (coPF) par rapport aux pro-objets essentiellement affines de S -schémas (voir [EGA4], 8.13.4 pour la définition de pro-objets essentiellement affine, et *loc.cit.* 8.13.1 pour l'assertion précédente).

Pour cette raison, on a préféré garder le symbole (coPF) pour éviter les confusions.

Le lemme suivant est alors immédiat :

Lemme C.2.33 Soient \mathcal{C} une catégorie, \mathcal{C}' une sous-catégorie pleine de \mathcal{C} et \mathcal{P} une sous-catégorie pleine de $\text{pro-}\mathcal{C}'$ telle que :

1. Tout objet de \mathcal{P} admet une limite projective dans \mathcal{C} .
2. Tout objet de \mathcal{C}' vérifie la propriété (coPF) par rapport à \mathcal{P} .

Alors, le morphisme limite projective suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{C} \\ (X_i)_{i \in \mathcal{I}} & \mapsto & \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} X_i \end{array}$$

est pleinement fidèle.

Remarque C.2.34.— Cette formulation compliquée est nécessaire puisqu'en général, une limite projective d'objets vérifiant la propriété (coPF) dans \mathcal{C} ne vérifie par la propriété (coPF) dans \mathcal{C} .

PREUVE : En effet, soient $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ et $(Y_j)_{j \in \mathcal{J}}$ deux pro-objets de \mathcal{P} . On calcule

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}} \left(\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} X_i, \varprojlim_{j \in \mathcal{J}} Y_j \right) &\simeq \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} \text{Hom}_{\mathcal{C}} \left(\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} X_i, Y_j \right) \\ &\simeq \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} \varinjlim_{i \in \mathcal{I}^{op}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j) \end{aligned}$$

où le deuxième isomorphisme est vrai puisque pour tout $j \in \mathcal{J}$, Y_j vérifie (coPF) par rapport au pro-objet $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$. □

C.2.35.— On appliquera particulièrement la proposition ci-dessus dans la situation suivante : on se donne un schéma noethérien S , et on considère les catégories suivantes :

1. \mathcal{C} la catégorie des S -schémas
2. \mathcal{C}' la catégorie des S -schémas de type fini
3. \mathcal{P} une sous-catégorie pleine de la catégorie des pro-objets de \mathcal{C}' formée de pro-objets essentiellement affines.

Alors, le lemme précédent s'applique d'après [EGA4], 8.13.1.

On peut par exemple prendre pour \mathcal{P} la catégorie des pro-objets de S -schémas de type fini et affines.

C.3 Foncteurs fibres et points

C.3.1 Définition

Cette sous-section a pour but d'introduire les pro-objets, qui seront au centre du présent travail. Il s'agit d'un certain type de pro-objets reliés à la notion de point d'un topos.

On commence par la notion de foncteur fibre d'un topos (voir [SGA4] exposé IV, 6.2) :

Définition C.3.1 *Soient \mathcal{S} un site, et $\tilde{\mathcal{S}}$ le topos associé. On appelle foncteur fibre du topos $\tilde{\mathcal{S}}$ tout foncteur $x^* : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{E}ns$ qui commute aux limites quelconques et qui est exact à gauche (i.e. commute aux colimites finies).*

Remarque C.3.2.— Un foncteur fibre x^* commute aux colimites finies, il induit donc en particulier un foncteur

$$Ab(\phi) : Ab(\tilde{\mathcal{S}}) \rightarrow Ab$$

qui va des faisceaux en groupes sur \mathcal{S} dans la catégorie des groupes abéliens. Ce foncteur est encore exact, et il commute aux limites inductives filtrantes.

Remarque C.3.3.— On met l'accent sur la définition précédente parce que c'est cette notion que l'on manipulera par la suite, mais rappelons tout de même la définition suivante (*loc. cit.* 6.1) :

Définition C.3.4 *Soit \mathcal{S} un site. On appelle point du topos $\tilde{\mathcal{S}}$ tout morphisme de topos $x : \mathcal{P} \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}$, où \mathcal{P} est le topos ponctuel. On note $\mathcal{P}t(\tilde{\mathcal{S}})$ la catégorie des points du topos $\tilde{\mathcal{S}}$ où les morphismes sont les transformations naturelles.*

Ainsi, si x est un point de $\tilde{\mathcal{S}}$, le foncteur image inverse associé x^ est un foncteur fibre. Si F un faisceau sur \mathcal{S} , on notera $F_x = x^*(F)$, et de même pour les morphismes.*

Compte tenu de la définition d'un site, un foncteur fibre admet nécessairement un adjoint à droite (voir [SGA4] exposé 4, 3.2.1). Par ailleurs, un morphisme de topos est un couple de foncteurs adjoints, et on a une équivalence de catégorie entre la catégorie des points de $\tilde{\mathcal{S}}$ et la catégorie opposée des foncteurs fibres (munie des transformations naturelles) (voir [SGA4] exposé 4, 6.2.1).

C.3.2 Pro-représentation des foncteurs fibres

Soit \mathcal{C} une catégorie. On rappelle que d'après la définition C.2.8, on a un foncteur pleinement fidèle

$$\delta : \text{pro-}\mathcal{C} \rightarrow \check{\mathcal{C}}$$

dont l'image essentielle est formée par définition des copréfaisceaux pro-représentables (voir aussi C.2.12).

Le lemme suivant permet de caractériser plus précisément les copréfaisceaux pro-représentables :

Lemme C.3.5 *Soit $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}ns$ un copréfaisceau. On note \mathcal{C}/Δ la catégorie formée des couples (X, u) où X est un objet de \mathcal{C} vu comme pro-objet constant, et $u : X \rightarrow \Delta$ un morphisme de pro-objets.*

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Δ est exact à gauche (i.e. commute aux colimites finies), et la catégorie \mathcal{C}/Δ est essentiellement petite.
2. \mathcal{C}/Δ est cofiltrante et essentiellement petite.
3. Δ est pro-représentable.

PREUVE : 1 \Leftrightarrow 2 En effet, dire que Δ est exact à gauche équivaut à dire que la catégorie \mathcal{I} est cofiltrante.

2 \Rightarrow 3 : Dès lors, si cette catégorie est essentiellement petite, on définit un pro-objet

$$X_{\bullet} : (\mathcal{C}/\Delta)^{op} \rightarrow \mathcal{C}, (X, u) \mapsto X$$

et il est formel que $\Delta = \delta(X_{\bullet})$, car tout copréfaisceau est limite inductive des copréfaisceaux représentables qui sont au-dessus de lui.

3 \Rightarrow 1 : Si Δ est pro-représentable, on note $X_{\bullet} : \mathcal{J}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$ le pro-objet qui le pro-représente. Par définition, $\Delta \simeq \delta(X_{\bullet})$, et il en résulte que Δ est exact à gauche. Par ailleurs, il existe un foncteur canonique final $\mathcal{J}^{op} \rightarrow \mathcal{C}/\Delta$. Or, comme par définition, \mathcal{J} est essentiellement petite, ceci équivaut à dire que \mathcal{C}/Δ est essentiellement petite. \square

Ce lemme affirme que pour obtenir un pro-objet qui pro-représente un copréfaisceau exact à gauche, il suffit de regarder une certaine catégorie. C'est ce que l'on fait maintenant dans le cas d'un foncteur fibre :

Définition C.3.6 *Soient \mathcal{S} un site, $\tilde{\mathcal{S}}$ le topos associé, et x un point de $\tilde{\mathcal{S}}$; on note x^* le foncteur fibre associé.*

On définit la catégorie des voisinages de x (dans le site \mathcal{S}), notée $\mathcal{V}_x(\mathcal{S})$, comme la catégorie \mathcal{S}/x^ des objets du site \mathcal{S} qui sont au-dessus de x^* .*

Autrement dit, un voisinage du point x est un couple (X, u) où X est un objet du site \mathcal{S} , et u un élément de la fibre $x^*(X)$, où X est vu comme un faisceau.

Les morphismes de transition dans la catégorie $\mathcal{V}_x(\mathcal{S})$ sont les morphismes $f : (X, u) \rightarrow (Y, v)$ où $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme de \mathcal{S} tel que $f_x(u) = v$.

Proposition C.3.7 Soient \mathcal{S} un site, $\tilde{\mathcal{S}}$ le topos associé, et x un point de $\tilde{\mathcal{S}}$.

Alors, la catégorie $\mathcal{V}_x(\mathcal{S})$ est cofiltrante, et essentiellement petite.

On se réfère à [SGA4], exposé 4, 6.8 pour la démonstration. Signalons simplement que c'est le fait que \mathcal{S} possède une famille (*i.e.* un ensemble) de morphismes topologiquement génératrice qui garantit que la catégorie $\mathcal{V}_x^{\mathcal{S}}$ est essentiellement petite.

Corollaire C.3.8 Soit \mathcal{S} un site et x un point de $\tilde{\mathcal{S}}$.

Le foncteur fibre $x^* : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{E}ns$ est pro-représentable par un objet de $\text{pro-}\mathcal{S}$. Plus précisément, pour tout faisceau F sur \mathcal{S} , on a un isomorphisme :

$$F_x = \varinjlim_{(X,u) \in \mathcal{V}_x(\mathcal{S})} F(X).$$

PREUVE : Il suffit d'appliquer le lemme C.3.5 et la proposition précédente. On notera toutefois une légère différence du fait que la catégorie considérée n'est pas la catégorie $\tilde{\mathcal{S}}/x^*$ mais la catégorie \mathcal{S}/x^* . On peut tout de même conclure du fait que le foncteur canonique $\mathcal{S}/x^* \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}/x^*$ est cofinal. \square

C.3.9.– Si F est un faisceau dans $\tilde{\mathcal{S}}$, $X : \mathcal{I}^{op} \rightarrow \mathcal{S}$ un pro-objet de \mathcal{S} , on pose

$$F(\phi) = \varinjlim_{i \in \mathcal{I}^{op}} F(X_i).$$

Ainsi, lorsque ϕ pro-représente un foncteur fibre de $\tilde{\mathcal{S}}$, $F(\phi)$ est simplement la fibre de F au point correspondant.

C.3.3 Pro-objets caractéristiques

On a vu que tout foncteur fibre est canoniquement pro-représenté (par la catégorie des voisinages du point correspondant). Par ailleurs, on peut caractériser les pro-objets qui pro-représentent des foncteurs fibres et on a la proposition générale suivante :

Proposition C.3.10 Soit \mathcal{S} un site. Le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}t(\tilde{\mathcal{S}}) & \rightarrow & \text{pro-}\mathcal{S} \\ x & \mapsto & (\mathcal{V}_x(\mathcal{S})^{op} \rightarrow \mathcal{S}) \end{array}$$

est pleinement fidèle.

De plus, soit $X_{\bullet} : \mathcal{I}^{op} \rightarrow \mathcal{S}$ un pro-objet, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. X_{\bullet} pro-représente un foncteur fibre.
2. (C) Pour toute famille couvrante $(Y_r)_{r \in \Lambda} \rightarrow Y$, et pour tout morphisme $X_i \rightarrow Y$ où $i \in \mathcal{I}$, il existe $i \rightarrow j$ dans \mathcal{I} et $r \in \Lambda$ tels que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_j & \rightarrow & Y_r \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_i & \rightarrow & Y \end{array}$$

Indication de PREUVE : Le premier point est évident compte tenu de ce qui précède, puisqu'on obtient un quasi-inverse du foncteur ci-dessus en associant à tout pro-objet ϕ de \mathcal{S} le copréfaisceau sur $\tilde{\mathcal{S}}$, qui à un faisceau F associe $F(\phi)$.

Pour la réciproque, voir *loc. cit.* 6.8.7. On se réduit à montrer que la condition (C) sur le pro-objet X équivaut à dire que $F \mapsto F(X)$ transforme toute famille couvrante en famille épimorphique (entre ensembles). On a besoin au passage du lemme suivant, au demeurant fort utile :

Lemme C.3.11 *Soient \mathcal{S} un topos, et x un point de \mathcal{S} . Soient F un préfaisceau sur \mathcal{S} , et a le foncteur faisceau associé sur le site \mathcal{S} , alors, le morphisme canonique*

$$\varinjlim_{(X,u) \in \mathcal{V}_s(\mathcal{S})} F(X) \rightarrow \varinjlim_{(X,u) \in \mathcal{V}_s(\mathcal{S})} (aF)(X) = (aF)_x$$

est un isomorphisme.

On a donc réduit l'étude des points d'un topos à celle des pro-objets du site vérifiant la condition (C) (via la considération des foncteurs fibres).

C.4 Catégories monoïdales

C.4.1 Définitions générales

Définition C.4.1 *Soit \mathcal{M} une catégorie. Une structure monoïdale sur \mathcal{M} est la donnée*

1. *d'un bifoncteur*

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \times \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \\ (M, N) &\mapsto M \otimes N. \end{aligned}$$

2. *d'un objet unité e dans \mathcal{M} .*

3. *d'isomorphismes naturels :*

$$\begin{aligned} \alpha_{M,N,P} &: M \otimes (N \otimes P) \rightarrow (M \otimes N) \otimes P \\ \beta_M &: e \otimes M \rightarrow M \\ \gamma_M &: M \otimes e \rightarrow M \end{aligned}$$

qui vérifient la commutativité des diagrammes :

- 1.

$$\begin{array}{ccc} M \otimes (e \otimes N) & \xrightarrow{\alpha_{M,e,P}} & (M \otimes e) \otimes N \\ 1 \otimes \beta_N \downarrow & & \downarrow 1 \otimes \gamma_M \\ M \otimes N & \xlongequal{\quad} & M \otimes N \end{array}$$

- 2.

$$\begin{array}{ccc} & (M \otimes N) \otimes (P \otimes Q) & \\ \alpha_{M \otimes N, P, Q} \nearrow & & \searrow \alpha_{M, N, P \otimes Q} \\ M \otimes (N \otimes (P \otimes Q)) & & ((M \otimes N) \otimes P) \otimes Q \\ 1 \otimes \alpha_{N, P, Q} \downarrow & & \downarrow \alpha_{M, N, P \otimes 1} \\ M \otimes ((N \otimes P) \otimes Q) & \xrightarrow{\alpha_{M, N \otimes P, Q}} & (M \otimes (N \otimes P)) \otimes Q. \end{array}$$

Dès lors, toutes les combinaisons des trois isomorphismes de définition d'une catégorie monoïdale ayant même source et même but, donnent le même isomorphisme d'après le Theorem 1, de la section VII.2 de [ML98]. Pour alléger les diagrammes, on fait donc la convention de désigner génériquement par le symbole \sim_* un isomorphisme composé de ces isomorphismes de définition (ou de leurs inverses), en oubliant de donner la séquence d'isomorphismes dont il est composé.

Dans cette partie abstraite sur les catégories monoïdales, on omettra souvent le symbole \otimes , $M \otimes N$ devenant simplement MN .

Remarque C.4.2.– Le fait que \otimes soit un bifoncteur se traduit par la relation

$$(\alpha' \otimes \beta') \circ (\alpha \otimes \beta) = (\alpha' \circ \alpha) \otimes (\beta' \circ \beta)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &: M \rightarrow M' \\ \alpha' &: M' \rightarrow M'' \\ \beta &: N \rightarrow N' \\ \beta' &: N' \rightarrow N''. \end{aligned}$$

Définition C.4.3 Soit \mathcal{M} une catégorie monoïdale. On dit que \mathcal{M} est symétrique lorsqu'on s'est donné un isomorphisme naturel

$$\delta_{M,N} : M \otimes N \rightarrow N \otimes M$$

tel que les diagrammes suivants commutent

1.

$$\begin{array}{ccc} & NM & \\ \delta_{MN} \nearrow & & \searrow \delta_{NM} \\ MN & \xlongequal{\quad} & MN \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{ccc} (MN)P & \xrightarrow{\delta_{MN,P}} & P(MN) \\ \sim_* \downarrow & & \downarrow \sim_* \\ M(NP) & & (PM)N \\ 1 \otimes \delta_{N,P} \downarrow & & \downarrow \delta_{P,M} \otimes 1 \\ M(PN) & \xrightarrow{\sim_*} & (MP)N. \end{array}$$

Dans une catégorie monoïdale symétrique, on adopte la même convention que précédemment, rajoutant l'isomorphisme de commutativité dans la liste des isomorphismes canoniques.

Il y a dans cette convention une ambiguïté, car pour un objet M de \mathcal{C} , le morphisme

$$MM \xrightarrow{\sim_*} MM$$

désigne à la fois le morphisme identité et le morphisme δ_{MM} . Pour lever cette ambiguïté, on adopte la notation suivante pour désigner $\delta_{M,M}$:

$$MM \underset{1 \ 2}{\xrightarrow{\sim^*}} MM \underset{2 \ 1}{}.$$

Définition C.4.4 Soit \mathcal{M} une catégorie. On dit que \mathcal{M} est additive monoïdale si et seulement si \mathcal{M} est une catégorie additive et monoïdale telle que \otimes est un foncteur biadditif.

Remarque C.4.5.— Toutes les catégories monoïdales que nous considérons sont additives monoïdales. En effet, si \mathcal{M} est fermé, le bifoncteur \otimes est automatiquement biadditif.

Définition C.4.6 Soit \mathcal{M} une catégorie monoïdale symétrique. On dit que \mathcal{M} est fermée lorsque le bifoncteur \otimes admet un adjoint à droite

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\text{op}} \times \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \\ (M, N) &\mapsto \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{M}}(M, N). \end{aligned}$$

Autrement dit, on dispose d'isomorphismes naturels :

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}}(M \otimes N, P) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{M}}(N, \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{M}}(M, P)). \quad (\text{C.1})$$

Pour une telle catégorie, on notera :

$$\begin{aligned} \text{ev}_{MN} &: M \otimes \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{M}}(M, N) \rightarrow N \\ \text{coev}_{MN} &: M \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{M}}(M, M \otimes N) \end{aligned}$$

les applications d'adjonction, encore appelées respectivement évaluation et coévaluation.

On a fait une convention dans le choix de l'adjonction considérée, comme explicitée dans (C.1), puisqu'on aurait pu considérer (comme dans [ML98], VII.7.) l'adjonction opposée :

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}}(M \otimes N, P) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{M}}(M, \underline{\text{Hom}}'_{\mathcal{M}}(N, P)).$$

Puisqu'on ne considère que les catégories monoïdales symétriques, l'un des choix implique que l'autre est valide, mais il faut néanmoins choisir un des deux adjoints possibles. Fixer correctement cette convention correspondra pour nous à fixer des signes.

C.4.2 Monoïdes et leurs actions

Définition C.4.7 Soit \mathcal{M} une catégorie monoïdale d'unité e et M un objet de \mathcal{M} . Une structure de monoïde sur M est la donnée

1. d'un produit $\mu : M \otimes M \rightarrow M$
2. d'une unité $\eta : e \rightarrow M$

qui satisfont la commutativité des diagrammes suivants :

1.

$$\begin{array}{ccc}
M(MM) & \xrightarrow{\sim_*} & (MM)M \xrightarrow{\mu \otimes 1} MM \\
1 \otimes \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\
MM & \xrightarrow{\mu} & M
\end{array}$$

2.

$$\begin{array}{ccccc}
eM & \xrightarrow{\eta \otimes 1} & MM & \xleftarrow{1 \otimes \eta} & Me \\
& \searrow \sim_* & \downarrow \mu & \swarrow \sim_* & \\
& & M & &
\end{array}$$

Lorsque la catégorie \mathcal{M} est additive monoïdale, on appelle encore algèbre tout monoïde de \mathcal{M} .

On ne rencontrera pas les objets de la définition suivante dans cette thèse, mais ils sont particulièrement classiques :

Définition C.4.8 Soient \mathcal{M} une catégorie monoïdale symétrique, et M un monoïde dans \mathcal{M} . On dit que M est commutatif si et seulement si le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
MM & \xrightarrow{\sim_*} & MM \\
\mu \searrow & & \swarrow \mu \\
& M &
\end{array}$$

Enfin, on termine cette revue des catégories monoïdales par la définition

Définition C.4.9 Soit \mathcal{M} une catégorie monoïdale, et M un monoïde dans \mathcal{M} , de multiplication μ et d'unité η . Soit X un objet de \mathcal{M} . Une action à gauche de M sur X est la donnée

$$M \otimes X \xrightarrow{\gamma} X$$

telle que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{array}{ccc}
M(MX) & \xrightarrow{\sim_*} & (MM)X \xrightarrow{\mu \otimes 1} MX \\
1 \otimes \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\
MX & \xrightarrow{\gamma} & X
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
e \otimes X & \xrightarrow{\eta \otimes 1} & M \otimes X \\
\sim_* \downarrow & & \downarrow \gamma \\
X & \xlongequal{\quad} & X.
\end{array}$$

Lorsque la catégorie \mathcal{M} est additive monoïdale, on dit encore que X est un module à gauche sur l'algèbre M . On note alors $M - \text{mod}$ la catégorie formée des M -modules à gauche dans \mathcal{M} , munit des morphismes évidents.

La notion d'action à droite est duale de la notion d'action à gauche. On note $\text{mod-}M$ la catégorie des M -modules à droites dans \mathcal{M} . Lorsque \mathcal{M} est monoïdale symétrique, ces deux notions coïncident si M est commutatif.

On ajoute finalement la définition suivante :

Définition C.4.10 Soit \mathcal{M} une catégorie monoïdale.

Soient M et N deux monoïdes dans \mathcal{M} , de multiplications respectives μ et γ .

Alors, si X est un objet de \mathcal{M} , on dira que X est muni d'une (M, N) -action si et seulement si il est muni d'une action à gauche de M , et d'une action à droite de N telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} M(XN) & \xrightarrow{1 \otimes \gamma} & MX \\ \downarrow \sim_* & & \searrow \mu \\ (MX)N & \xrightarrow{\mu \otimes 1} & XN \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \gamma \\ \nearrow \end{array} X.$$

Lorsque la catégorie \mathcal{M} est additive monoïdale, on dit encore que X est un (M, N) -bimodule.

C.5 Catégories graduées

C.5.1 Définitions et notations générales

Considérons une catégorie additive \mathcal{A} .

Définition C.5.1 Un objet \mathbb{Z} -gradué de \mathcal{A} est une famille $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'objets de \mathcal{A} , que l'on désigne de manière abrégée M_* .

Si M_* et N_* sont deux objets gradués de \mathcal{A} , un morphisme gradué de M_* dans N_* de degré r est une famille $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle les morphismes f_n soient des morphismes de \mathcal{A} de la forme

$$f_n : M_n \rightarrow N_{n+r}.$$

On note $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ la catégorie des objets \mathbb{Z} -gradués de \mathcal{A} , munie des morphismes gradués de degré 0.

Remarque C.5.2.— Sans précision, un morphisme gradué est toujours supposé de degré 0.

On adopte par ailleurs les notations suivantes : pour un objet gradué M_* de \mathcal{A} :

1. Si r est un entier relatif, on note $M_*[r]$ l'objet gradué dont le n -ième gradué est M_{n+r} .
2. On note ρ_0 le foncteur de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ dans \mathcal{A} qui à M_* associe M_0 .
3. Ce foncteur est fidèle, et admet un adjoint à gauche que l'on note $G_0 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Si F est un objet de \mathcal{A} , $G_0(F)_n$ est nul si n est différent de 0, et égal à F sinon.

C.5.2 Structure monoïdale

On considère maintenant une catégorie additive monoïdale \mathcal{A} .

On définit un produit tensoriel $\hat{\otimes}$ sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ comme suit ; soient M_* et N_* des objets gradués de \mathcal{A} , on définit

$$H_* = M_* \hat{\otimes} N_* \quad | \quad H_n = \bigoplus_{p+q=n} M_p \otimes N_q.$$

Soient $f_* := M_* \rightarrow N_*$ et $f'_* := M'_* \rightarrow N'_*$ deux morphismes gradués. On pose alors

$$\begin{aligned} h_* &= f_* \hat{\otimes} g_* : M_* \hat{\otimes} M'_* \rightarrow N_* \hat{\otimes} N'_* \\ h_n &: \bigoplus_{p+q=n} M_p \otimes M'_q \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} N_{p+r} \otimes N'_{q+r'} \quad | \quad h_n = \sum_{p+q=n} f_{p+r} \otimes f'_{q+r'}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\hat{\otimes}$ est un bifoncteur.

Lemme C.5.3 *Adoptant les notations qui précèdent, la catégorie $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, munie du produit $\hat{\otimes}$, et de l'élément neutre $G_0(e)$ est canoniquement monoïdale.*

PREUVE : Soient α , β et γ les isomorphismes de définition de \mathcal{A} . On construit les isomorphismes qui définissent la structure monoïdale canonique sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Soient M_* , N_* et P_* des objets gradués de \mathcal{A} . On pose pour tout entier relatif r

$$\begin{aligned} (\hat{\alpha}_{M_*, N_*, P_*})_r &= \sum_{m+n+p=r} \delta_{M_m, N_n, P_p} \\ (\hat{\beta}_{M_*})_r &= \delta_{M_r} \\ (\hat{\gamma}_{M_*})_r &= \gamma_{M_r}. \end{aligned}$$

Les relations de définition sont alors évidentes. On notera que la transformation naturelle $\hat{\alpha}$ est bien définie car par hypothèse, le bifoncteur \otimes est biadditif. \square

Lorsque \mathcal{A} est symétrique, on en déduit de même pour tous objets gradués M_* et N_* un isomorphisme de commutativité $\hat{\delta}_{M_*, N_*}$ dont la composante de degré n est égale à

$$\bigoplus_{p+q=n} M_p \otimes N_q \xrightarrow{\sum_{p+q} \delta_{M_p, N_q}} \bigoplus_{p+q=n} N_q \otimes M_p.$$

Cet isomorphisme munit dès lors la catégorie $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ d'une structure monoïdale symétrique canonique.

C.5.3 Monoïdes anti-commutatifs

Soit \mathcal{A} une catégorie additive monoïdale et symétrique.

Dorénavant, pour alléger les notations, on désigne simplement par M un module gradué M_* .

Si M et N sont deux objets gradués de \mathcal{A} , on note $\epsilon_{M,N} : M \hat{\otimes} N \rightarrow M \hat{\otimes} N$ l'endomorphisme gradué dont la composante de degré n est

$$\sum_{p+q=n} (-1)^{pq} \cdot Id_{M_p \otimes N_q}.$$

Ainsi, ϵ est une transformation naturelle involutive du foncteur identité de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

Définition C.5.4 Soit S une algèbre graduée de \mathcal{A} (i.e. un monoïde dans $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, cf définition C.4.7).

On dit que S est anti-commutative si et seulement si le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} S_1 S_2 & \xrightarrow{\sim_*} & S_2 S_1 & \xrightarrow{\epsilon_{S,S}} & S_2 S_1 \\ & \searrow \mu & & & \swarrow \mu \\ & & S & & \end{array}$$

Remarque C.5.5.— On trouvera aussi la terminologie «algèbre graduée commutative» dans la littérature.

Si S est une algèbre graduée, et M un objet de \mathcal{A} , l'objet gradué $M \hat{\otimes} A$ (où A est considéré comme un objet gradué concentré en degré 0) est canoniquement muni d'une structure de S -module à gauche :

$$S \hat{\otimes} (S \hat{\otimes} A) \xrightarrow{\sim_*} (S \hat{\otimes} S) \hat{\otimes} A \xrightarrow{\mu \hat{\otimes} 1} S \hat{\otimes} A.$$

On en déduit le lemme évident :

Lemme C.5.6 Soit S une algèbre graduée de \mathcal{A} .

Le foncteur, défini ci-dessus,

$$\mathcal{A} \rightarrow S\text{-mod}, A \mapsto S \hat{\otimes} A$$

est adjoint à gauche du foncteur $\rho_0 : S\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}$.

Par ailleurs, on peut déduire pour ces algèbres anti-commutatives une théorie analogue à celle des algèbres graduées anti-commutatives classiques.

Soit S une algèbre graduée anti-commutative dans \mathcal{A} . Si M est un S -module à gauche de multiplication γ , on en déduit une structure de S -module à droite sur M , noté M^ϵ , dont le morphisme structural, noté γ^ϵ , est le composé

$$MS \xrightarrow{\sim_*} SM \xrightarrow{\epsilon_{S,M}} SM \xrightarrow{\gamma} M.$$

Lemme C.5.7 Avec les notations qui précèdent, le module M muni de sa structure de S -module à gauche naturelle et de sa structure de S -module à droite est un (S, S) -bimodule.

PREUVE : Revenant à la définition, on montre que le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 S(MS)_1 & \xrightarrow{1 \hat{\otimes} \gamma^\epsilon} & SM_1 \\
 \sim_* \downarrow & & \searrow \gamma \\
 (SM)_1 S_2 & \xrightarrow{\gamma \hat{\otimes} 1} & MS_2 \xrightarrow{\gamma^\epsilon} M.
 \end{array}$$

Pour cela, on revient à la définition, et on décompose le diagramme en plusieurs parties commutatives

$$\begin{array}{ccccccc}
 S(MS)_1 & \xrightarrow{\sim_*} & S(SM)_1 & \xrightarrow{1 \hat{\otimes} \epsilon_{S,M}} & S(SM)_1 & & \\
 \downarrow \sim_* & & \downarrow \sim_* & & \downarrow \sim_* & & \\
 (SM)_1 S_2 & \xrightarrow{\sim_*} & S(SM)_2 & \xrightarrow{\epsilon_{S,SM}} & S(SM)_2 & \xrightarrow{\sim_*} & (SS)_2 M \\
 & \searrow \gamma \hat{\otimes} 1 & \downarrow \sim_* & \searrow 1 \hat{\otimes} \gamma & \downarrow \sim_* & \searrow \mu \hat{\otimes} 1 & \\
 & & (SM)_2 & \xrightarrow{1 \hat{\otimes} \gamma} & SM & \xrightarrow{\mu \hat{\otimes} 1} & SM \\
 & & \downarrow \sim_* & & \downarrow \sim_* & & \\
 & & MS_2 & \xrightarrow{\sim_*} & SM & \xrightarrow{\epsilon_{S,M}} & SM \\
 & & & & & & \downarrow \gamma \\
 & & & & & & M.
 \end{array}$$

(*)

Or la partie (*) est commutative d'après le théorème de cohérence (cf [ML98], theorem 1, VII.2) et le calcul de signe habituel concernant les algèbres graduées anti-commutatives. Les autres parties du diagramme sont commutatives d'après les axiomes de l'algèbre S , son anti-commutativité et les axiomes de l'action à gauche de S sur M . \square

Ce lemme nous sert pour la proposition suivante :

Proposition C.5.8 *Supposons que \mathcal{A} admette des conoyaux.*

Soit S une algèbre graduée anti-commutative de \mathcal{A} telle que le foncteur $S \otimes \cdot$ préserve les conoyaux.

Alors, la catégorie des S -modules à gauche dans $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est canoniquement munie d'une structure monoïdale symétrique telle que S , munie de sa structure triviale, en soit l'élément neutre.

PREUVE : Soient M et N deux S -modules de multiplications respectives μ et ν . On note $M \hat{\otimes}_S N$ le conoyau des deux morphismes

$$\begin{array}{ccc}
 (MS)N & \xrightarrow{\mu^\epsilon \hat{\otimes} 1} & MN. \\
 \searrow \sim_* & & \nearrow 1 \hat{\otimes} \nu \\
 & M(SN) &
 \end{array}$$

Or, M est un (S, S) -bimodule d'après le lemme précédent. Donc, ce diagramme est un diagramme de S -modules à gauche. Comme $S \otimes \cdot$ préserve les conoyaux, la multiplication à gauche induite de S sur $M \hat{\otimes}_S N$ en fait un S -module à gauche.

Les isomorphismes d'associativité et de commutativité du bifoncteur $\hat{\otimes}_S$ est induit par les isomorphismes correspondants du produit $\hat{\otimes}$. Les isomorphismes canoniques de S -modules $S \hat{\otimes}_S N \simeq N$ et $M \hat{\otimes}_S S \simeq M$ font de S l'unité du produit $\hat{\otimes}_S$. \square

Ce produit dispose encore de la propriété suivante :

si A et B sont des objets de \mathcal{A} , $(S \hat{\otimes} A) \hat{\otimes}_S (S \hat{\otimes} B) \simeq S \hat{\otimes} (A \otimes B)$.

Signalons finalement la propriété supplémentaire suivante :

Proposition C.5.9 *Supposons que \mathcal{A} soit une catégorie monoïdale symétrique fermée, et abélienne.*

Soit S une algèbre graduée anti-commutative.

Alors, le bifoncteur $\hat{\otimes}_S$ admet un adjoint à droite noté $\underline{\text{Hom}}_S(\cdot, \cdot)$.

La catégorie monoïdale symétrique $S - \text{mod}$ est fermée. De plus, elle est abélienne et le foncteur d'oubli $S - \text{mod} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est exact.

PREUVE : En effet, commençons par remarquer que, puisque la catégorie \mathcal{A} admet des noyaux, il en est de même de la catégorie $S - \text{mod}$, le foncteur \mathcal{O} étant exact à gauche (on a montré qu'il admet un adjoint à droite). Par hypothèse, le foncteur $S \otimes \cdot$ est exact à gauche. Il en résulte que la catégorie $S - \text{mod}$ admet des conoyaux, et que le foncteur \mathcal{O} est exact à droite. Comme la catégorie $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est abélienne, il résulte de l'exactitude du foncteur \mathcal{O} que $S - \text{mod}$ est abélienne.

Soient M et N deux S -modules à gauche de multiplications respectives μ et ν . On note $\underline{\text{Hom}}_S(M, N)$ le noyau des deux morphismes

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) & \xrightarrow{\mu^*} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(S \hat{\otimes} M, N) \\ & \searrow^{S \hat{\otimes} \cdot} & \nearrow_{\nu^*} \\ & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(S \hat{\otimes} M, S \hat{\otimes} N) & \end{array}$$

Puisque N est un (S, S) -bimodule d'après le lemme C.5.7 précédent, la source et le but de ces morphismes sont canoniquement munis d'une structure de S -modules à droite. Dès lors, ces structures induisent une structure de S -module à droite sur $\underline{\text{Hom}}_S(M, N)$, et on en déduit une structure de S -module à gauche sur $\underline{\text{Hom}}_S(M, N)$ telle que la structure à droite de $\underline{\text{Hom}}_S(M, N)^\epsilon$ coïncide avec celle de la construction.

Les isomorphismes d'associativité et de commutativité du bifoncteur $\hat{\otimes}_S$ sont induits par les isomorphismes correspondants du produit $\hat{\otimes}$. Les isomorphismes canoniques de S -modules $S \hat{\otimes}_S N \simeq N$ et $M \hat{\otimes}_S S \simeq M$ font de S l'unité du produit $\hat{\otimes}_S$.

D'après la construction de $\hat{\otimes}_S$ et l'adjonction de \otimes et $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{A}}$, il en résulte que $\hat{\otimes}_S$ et $\underline{\text{Hom}}_S$ sont adjoints. \square

Appendix D

Glossaire-index des notations

I - Catégories.

Généralités Soit \mathcal{C} une catégorie.

$\mathcal{E}ns$	ensembles	
$\mathcal{A}b$	groupes abéliens	
$\mathbb{Z} - \mathcal{C}$	objets \mathbb{Z} -gradués de \mathcal{C}	C.5.1, p. 337
$pro - \mathcal{C}$	pro-objets de \mathcal{C}	C.2.1, p. 319

Schémas Soit S un k -schéma régulier noethérien.

$\mathcal{S}ch_S$	S -schémas séparés de type fini	
$\mathcal{S}ch_S^{loc}$	S -schémas séparés essentiellement de type fini	A.1.1, p. 303
\mathcal{L}_S	S -schémas séparés lisses de type fini	
\mathcal{L}_S^{loc}	S -schémas séparés essentiellement lisses	A.2.1, p. 306
$\mathcal{L}_{cor,S}$	S -schémas séparés lisses munis des correspondances finies	1.2.7, p. 13
$\pi\mathcal{L}_{cor,S}$	S -schémas séparés lisses munis des correspondances finies à homotopie près	1.3.2, p. 21
\mathcal{A}_S	S -algèbres locales essentiellement lisses	2.1.20, p. 41
\mathcal{A}_S^h	S -algèbres locales formellement lisses obtenues par hensélisation d'une S -algèbre essentiellement de type fini	2.1.28, p. 42

Soit \mathcal{S} une catégorie de schémas.

$\mathcal{P}^o(\mathcal{S})$	paires ouvertes (X/U) telles que X appartient à \mathcal{S}	5.4.1, p. 142
$\mathcal{P}^f(\mathcal{S})$	paires fermées (X, Z) telles que X appartient à \mathcal{S} , munies des morphismes quasi-cartésiens	5.4.4, p. 143

Faisceaux Soit S un k -schéma régulier noethérien.

\mathcal{P}_S	préfaisceaux de groupes abéliens sur \mathcal{L}_S	
\mathcal{L}_S	faisceaux de groupes abéliens sur \mathcal{L}_S pour la topologie de Zariski	2.1.2, p. 35
\mathcal{N}_S	faisceaux de groupes abéliens sur \mathcal{L}_S pour la topologie de Nisnevich	2.1.2, p. 35
\mathcal{P}_S^{tr}	préfaisceaux avec transferts sur S	2.2.1, p. 49
\mathcal{N}_S^{tr}	faisceaux avec transferts sur S	2.2.5, p. 51
$H\mathcal{P}_S^{tr}$	préfaisceaux homotopiques sur S	3.1.2, p. 61
$H\mathcal{N}_S^{tr}$	faisceaux homotopiques sur S	3.1.2, p. 61
$H\mathcal{M}_S^{tr}$	modules homotopiques sur S	3.4.23, p. 89
$\mathcal{M}Cycl_S$	modules de cycles sur S	4.1.7, p. 96

Motifs Le corps k est parfait.

$DM_{gm}^{eff}(k)$	motifs géométriques effectifs	7.2.2, p. 233
$DM_{gm}(k)$	motifs géométriques	7.2.6, p. 234
$DM_{-}^{eff}(k)$	motifs «faisceautiques» effectifs	7.1.1, p. 229

Catégories de points génériques Le corps k est parfait, et S un k -schéma régulier noethérien.

\mathcal{E}_S	points de S	4.1.1, p. 93
\mathcal{E}_S^s	points séparables de S	2.1.3.4, p. 46
$\tilde{\mathcal{E}}_S$	catégorie enrichie des points de S	4.1.21, p. 101
$H\mathcal{N}_k^{tr,(0)}$	faisceaux homotopiques «génériques»	5.1.4, p. 129
$H\mathcal{M}_k^{(0)}$	modules homotopiques «génériques»	9.1.5, p. 281
$DM_{gm}^{eff,(0)}(k)$	motifs génériques effectifs	9.1.2, p. 279
$DM_{gm}^{(0)}(k)$	motifs génériques	9.1.1, p. 279

II - Objets.

Schémas Soit (X, Z) une paire fermée.

$D_Z X$	espace de déformation fibré sur \mathbb{A}^1 associé à l'immersion fermée $Z \rightarrow X$	B.3.2, p. 315
$\dot{D}_Z X$	$= D_Z X - \mathbb{A}_Z^1$	
$N_Z X$	fibré normal de l'immersion fermée $Z \rightarrow X$.	
$N_Z^\times X$	$= N_Z X - Z$	

Faisceaux Soit S un k -schéma régulier noethérien.

$\mathbb{Z}_S(X)$	faisceau de groupes abéliens libres sur S représenté par un S -schéma X	
$L_S[X]$	faisceau avec transferts sur S représenté par un S -schéma X	2.2.2, p. 49
$h_0 F$	faisceau homotopique associé à un faisceau avec transferts F	3.1.7, p. 63
$h_0(X)$	faisceau homotopique représenté par un k -schéma X	3.1.8, p. 63
S_t^1	faisceau homotopique appelé «sphère de Tate»	3.4.10, p. 84

Modules homotopiques

\hat{F}_*	transformée générique d'un module homotopique F_*	5.1.2, p. 129
$\Sigma^\infty F$	S_t^* -module gradué libre engendré par un faisceau homotopique F	3.4.17, p. 88
$\Omega^\infty(F_*)$	module homotopique associé à un S_t^* -module gradué F_*	3.4.31, p. 90

Motifs Le corps k est parfait, et X est un schéma algébrique lisse sur k .

$M_{gm}(X)$	motif de X vu dans la catégorie $DM_{gm}^{eff}(k)k$	7.2.2, p. 233
$M(X)$	motif de X vu dans la catégorie $DM_{-}^{eff}(k)k$	7.1.9, p. 232
$M_Z(X)$	motif relatif de la paire fermée (X, Z)	8.2.1, p. 240
$= M(X, Z)$		
$MTh(E)$	motif de Thom du fibré vectoriel E/X	8.2.9, p. 244
$\mathbb{Z}(1)$	twist à la Tate	7.2.4, p. 234
$\mathbb{Z}\{1\}$	motif égal à $\mathbb{Z}(1)[1]$	7.3.1, p. 235

III - Divers.

Cycles et correspondances Soit S un k -schéma régulier noethérien.

$Z^*(X)$	groupe des cycles du schéma X gradué par la codimension	
$CH^*(X)$	groupe de Chow du schéma X , <i>i.e.</i> des cycles de X à équivalence rationnelle près, gradué par la codimension	
$c_{\text{equi}}(X/S, 0)$	groupe des cycles du S -schéma X dont le support est fini équidimensionnel sur S	1.1.13, p. 6
$\text{Pic}(X, Z)$	groupe des faisceaux inversibles sur le schéma X munis d'une trivialisations sur Z , à isomorphisme près	1.3.15, p. 26
$c_S(X, Y)$	groupe des S -correspondances finies de X vers Y	1.2.1, p. 9
$\pi_S(X, Y)$	groupe des classes d'homotopie de S -correspondances finies de X vers Y	1.3.1, p. 21

Produits tensoriels Soit S un k -schéma régulier noethérien.

\otimes_S^{tr}	produit tensoriel sur la catégorie $\mathcal{L}_{\text{cor}, S}$	1.2.11, p. 14
\otimes_S^{tr}	produit tensoriel des faisceaux avec transferts sur S	2.2.16, p. 58
$\otimes^{tr, L}$	produit tensoriel des complexes de faisceaux avec transferts sur k	6.3.22, p. 222
\otimes^{Htr}	produit tensoriel des faisceaux homotopiques	3.1.11, p. 65

Ensembles d'indices Soit S un k -schéma régulier noethérien.

$\mathcal{M}^{lis}(\mathcal{O}/S)$	ensemble des sous- S -algèbres de la S -algèbre locale \mathcal{O} qui sont lisses de type fini sur S	2.1.34, p. 44
$\mathcal{V}_x(X)$	ensemble des ouverts du schéma X contenant x , ordonné par inclusion	2.1.13, p. 39
$\mathcal{V}_x^h(X)$	catégorie des voisinages Nisnevich de x dans le schéma X , munie des morphismes évidents	2.1.13, p. 39
\varprojlim	désigne la limite projective formelle, lorsqu'elle est prise tau-tologiquement dans la catégorie des pro-objets	C.2.2, p. 319

IV - Notations particulières de certains chapitres.

Chapitre 4 Soit M un module de cycles sur S .

$X \bullet \rightarrow Y$	désigne de manière conventionnelle morphisme du complexe $C^*(X; M)$ dans le complexe $C^*(Y; M)$ considéré à équivalence d'homotopie près	4.2.1, p. 103
---------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------

Chapitre 5 Soit F un faisceau homotopique.

$F^1(X, Z)$	groupe abélien associé à une paire fermée (X, Z)	5.4.18, p. 149
$L_V[X, Z]$	pro-objet de la catégorie des faisceaux avec transferts dépendant d'une paire fermée (X, Z) et d'un schéma V étale sur Z ; il entre dans la définition de $F^1(X, Z)$	5.4.14, p. 147

Chapitre 6 Soit F un faisceau homotopique.

$S_t^* F$	module homotopique égal en degré $n \geq 0$ à $S_t^n \otimes^{Htr} F$ et en degré $n \neq 0$ à F_n	6.3.10, p. 217
-----------	------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------

Chapitre 8 Soit X un schéma algébrique lisse, et E un fibré vectoriel sur X .

\hat{E}	$= E \times_X \mathbb{A}_X^1$	vu comme fibré vectoriel sur X	
$c_n(E)$		morphisme de la catégorie $DM_{gm}^{eff}(k)$ correspondant à la n -ième classe de Chern de E/X	8.3.7, p. 252
$\iota_*(E)$		isomorphisme canonique du motif de $\mathbb{P}(E)$	8.3.10, p. 254
$t(E)$		classe de Thom de E/X vue dans le groupe de Chow de $\mathbb{P}(E \oplus 1)$	8.3.19, p. 260
$\theta(E)$		isomorphisme de Thom associé au fibré E/X	8.3.24, p. 262
$M(f, g)_!$		morphisme induit par un morphisme de paires fermées (f, g) vu à travers l'isomorphisme de déformation au cône normal et l'isomorphisme de Thom	8.4.5, p. 267

Chapitre 9

$M^{(0)}$		foncteur de la catégorie $\tilde{\mathcal{E}}_k$ dans la catégorie $DM_{gm}^{(0)}(k)$	9.2.1, p. 283
-----------	--	---------------------------------------------------------------------------------------	---------------

Bibliography

- [AM69] M. Artin and Mazur. *Etale homotopy*, volume 100 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1969.
- [Bei] A. Beilinson. Remarks on n-motives and correspondances at generic point. preprint.
- [BT73] H. Bass and J. Tate. The milnor ring of a global field. In *Algebraic K-theory, II: "Classical" algebraic K-theory and connections with arithmetic*, volume 342 of *Lecture Notes in Math.*, pages 349–446. Springer, 1973.
- [EGA1] A. Grothendieck and J. Dieudonné. *Eléments de géométrie algébrique I*. Number 4 in Publ. Math. IHES, 1960.
- [EGA2] A. Grothendieck and J. Dieudonné. *Eléments de géométrie algébrique II*. Number 8 in Publ. Math. IHES, 1961.
- [EGA3] A. Grothendieck and J. Dieudonné. *Eléments de géométrie algébrique III*. Number 11, 17 in Publ. Math. IHES, 1961-1963.
- [EGA4] A. Grothendieck and J. Dieudonné. *Eléments de géométrie algébrique IV*. Number 20, 24, 28, 32 in Publ. Math. IHES, 1966-1967.
- [FSV00a] E.M. Friedlander, A. Suslin, and V. Voevodsky. *Cycles, Transfers and Motivic homology theories*. Princeton Univ. Press, 2000.
- [FSV00b] E.M. Friedlander, A. Suslin, and V. Voevodsky. *Cycles, Transfers and Motivic homology theories*, chapter 5, Triangulated category of motives over a field. Princ. univ. press, 2000.
- [FSV00c] E.M. Friedlander, A. Suslin, and V. Voevodsky. *Cycles, Transfers and Motivic homology theories*, chapter 3, Cohomological theory of presheaves with transfers. Princ. univ. press, 2000.
- [Ful98] W. Fulton. *Intersection theory*. Springer-Verlag, second edition, 1998.
- [Gro57] A. Grothendieck. Sur quelques points d’algèbre homologique. *Tôhoku, Math. J.*, 9:119–121, 1957.
- [Gro58] A. Grothendieck. La théorie des classes de chern. *Bull. SMF*, pages 137–154, 1958.

- [Lan95] S. Lang. *Algebra*. Addison-Wesley Publishing Compagny, third edition, 1995.
- [Mat89] H. Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989. Translated from the japanese by M. Reid.
- [Mil80] J.S. Milne. *Etale cohomology*, volume 33. Princeton Math. studies, 1980.
- [ML98] S. Mac Lane. *Categories for the working Mathematician*. Springer, 1998.
- [Mor] F. Morel. Some basic properties of the stable homotopy category of schemes. <http://www.math.jussieu.fr/~morel>.
- [Mor98] F. Morel. Voevodsky's proof of milnor's conjecture. *Bul. of the AMS*, 35(2):123–143, 1998.
- [Mor99] F. Morel. *Théorie homotopique des schémas*. Astérisque. SMF, 1999.
- [MV01] F. Morel and Voevodsky V. *A^1 -homotopy theory of schemes*. Number 90 in Publ. Math. IHES, 2001.
- [Nis89] Y. Nisnevich. The completely decomposed topology on schemes and the associated descent spectral sequence in algebraic K-theory. In *Algebraic K-Theory: connections with Geometry and Topology*, volume 279 of *NATO ASI Series, Ser. C (Math.)*, pages 241–342. Kluwer, 1989.
- [Ray70] M. Raynaud. *Anneaux locaux henséliens*, volume 169 of *Lecture Notes in Math*. Springer-Verlag, 1970.
- [Ros96] M. Rost. Chow groups with coefficients. *Doc. Math. J.*, 1:319–393, 1996.
- [Sch97] M. Schmid. *Witttrinomologie*. PhD thesis, Universität Regensburg, 1997.
- [Ser68] J.P. Serre. *Corps locaux*. Hermann, 1968.
- [Ser58] J.P. Serre. *Algèbre locale , multiplicités*. Springer, 1957/58.
- [SGA4] M. Artin, A. Grothendieck, and J.L. Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, tome 1,2,3*, volume 269,270,305. Springer-Verlag, 1972-73.
- [SGA6] P. Berthelot, A. Grothendieck, and L. Illusie. *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*. Springer-Verlag, 1971.
- [SV96] A. Suslin and V. Voevodsky. Singular homology of abstract algebraic varieties. *Inv. Math.*, 123(1):61–94, 1996.
- [SV00a] A. Suslin and V. Voevodsky. Bloch-kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients. In *The arithmetic and geometry of algebraic cycles*, volume 548 of *NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 117–189. Kluwer Acad. Publ., 2000.
- [SV00b] A. Suslin and V. Voevodsky. *Cycles, transfers, and Motivic homology theories*, chapter 2, Relative cycles and Chow sheaves. Princeton University Press, 2000.

- [Voe96a] V. Voevodsky. Homology of schemes. *Selecta Math. (N.S.)*, 2(1):111–153, 1996.
- [Voe96b] V. Voevodsky. La conjecture de milnor. preprint, 1996.
- [Voe02] V. Voevodsky. Cancellation theorem. preprint, 2002.
- [Wal96] Mark E. Walker. *Motivic complex and the K-theory of automorphisms*. PhD thesis, University of Illinois, 1996.

Résumé :

Dans ce mémoire, nous relient la théorie de M. Rost des modules de cycles à la théorie de V. Voevodsky de la catégorie dérivée des motifs mixtes. Nous construisons une équivalence de catégorie explicite entre la première catégorie et une catégorie de modules sur les faisceaux invariants par homotopie avec transferts de V. Voevodsky. Ceci nous permet d'enrichir les deux théories en question.

Par ailleurs, nous montrons dans un deuxième temps comment les axiomes de M. Rost s'incarnent dans une catégorie de pro-motifs associés à des extensions de type fini du corps de base, que nous appelons motifs génériques et qui nous servent à réduire la conjecture de Beilinson-Soulé. Pour cela, nous sommes conduits à élucider partiellement la functorialité du triangle de Gysin dans la catégorie dérivée des motifs mixtes.

Enfin, la catégorie des motifs génériques permet d'interpréter les modules de cycles à la manière foncteurs de Mackey de la topologie algébrique équivariante.

Mots clé : motifs, cohomologie motivique, cycles.

Abstract :

In this thesis, the theory of cycle modules M. Rost is linked to the derived category of mixed motives as defined by V. Voevodsky. More precisely, one sets an explicit equivalence of categories between the first category and a category of modules in the category of homotopy invariant sheaves with transfers. This allows to complement mutually each of the theories.

In a second part, we show how the axioms of M. Rost can be interpreted in a category of pro-motives associated to finite type extensions of the base field, which we call generic motives and which help to reduce slightly the Beilinson-Soulé conjecture. This leads us to an analysis of the functoriality of the Gysin triangle in the derived category of mixed motives.

Moreover, the category of generic motives allows to describe cycle modules as an analog of the Mackey functors in equivariant algebraic topology.

Keywords : motives, motivic cohomology, cycles.