



HAL
open science

Membranes élastiques et capillaires : instabilités, singularités et auto-adaptation

Arezki Boudaoud

► **To cite this version:**

Arezki Boudaoud. Membranes élastiques et capillaires : instabilités, singularités et auto-adaptation. Autre. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2001. Français. NNT: . tel-00002559

HAL Id: tel-00002559

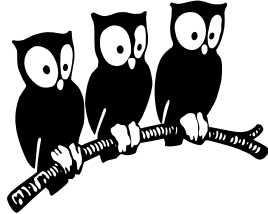
<https://theses.hal.science/tel-00002559>

Submitted on 15 Mar 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

pour obtenir le titre de
Docteur de l'Université Paris VI
Spécialité : Physique des liquides

présentée par
Arezki BOUDAUD

SUJET de la thèse :

**Membranes élastiques et capillaires :
instabilités, singularités et auto-adaptation.**

Soutenance le 26 mars 2001 devant le jury composé de :

Martine BEN AMAR	Directrice
Sergio CILIBERTO	Examineur
Yves COUDER	Invité
Thomas GAREL	Rapporteur
Gérard MAUGIN	Président
Alain POCHEAU	Examineur
James R. RICE	Invité
Stéphane ROUX	Rapporteur

Remerciements

Ce mémoire est l'aboutissement de trois années de thèse que j'ai eu la chance de passer au Laboratoire de Physique Statistique ; la variété des sujets qui y sont traités et les contacts stimulants que j'y ai eus ont été enrichissants. Je remercie Sébastien Balibar et Jacques Meunier qui m'y ont accueilli.

Lorsque j'étais étudiant en DEA et que je me préoccupais de ma future thèse, j'ai sollicité avec insistance Yves Couder. Pour se défaire de moi, il m'a envoyé chez Martine Ben Amar, qui a été assez aimable pour me prendre comme disciple (cette narration est bien sûr caricaturale). J'ai finalement eu le privilège d'avoir deux maîtres. Martine est exemplaire par son acharnement à résoudre les problèmes qu'elle aborde. Yves a un don de l'observation physique - ses photographies en témoignent - qui fait sa force d'expérimentateur. J'espère qu'ils m'ont communiqué un peu de leurs qualités, tant scientifiques qu'humaines, et je ne saurais assez les remercier de m'avoir encadré.

Thomas Garel et Stéphane Roux ont gracieusement accepté d'être rapporteurs, lourde tâche s'il en est... Sergio Ciliberto, Gérard Maugin, Alain Pocheau, James R. Rice m'ont fait l'honneur d'être membres de mon jury. Je les remercie tous vivement.

Mon cheminement avant et pendant la thèse s'est déroulé sous l'influence de nombreuses personnes que je ne pourrais toutes citer. Le cours de physique macroscopique d'Yves Pomeau a été déterminant dans mon choix d'un DEA en physique puis du domaine vers lequel je me suis orienté. Pedro Patrício m'a initié aux simulations numériques et notre collaboration a été fructueuse. L'ombre de Werner Krauth plane sur les simulations des plaques dont il a été à l'origine avec Pedro. Grâce à Martine, j'ai eu la chance d'être invité par L. Mahadevan au MIT, avant un détour à Urbana-Champaign, où j'ai pu jouer avec de l'huile silicone avec Sahraoui Chaïeb. J'ai souvent discuté avec Sergio Rica, qui est en partie à l'origine de l'idée de l'expérience sur les nappes visqueuses. Stéphane Fauve m'a éclairé au sujet des bifurcations hamiltoniennes. Thomas Garel m'a ouvert les yeux sur l'immense littérature sur les surfaces minimales. J'ai eu des discussions instructives avec Maria Brazovskaia, Catherine Even et Pawel Pieranski au sujet des films smectiques

et de l'auto-adaptation. Je leur en suis à tous reconnaissant.

Maintenant vient le tour des travailleurs de l'ombre dont le mérite est sûrement le plus grand. Laurent Quartier m'a constamment soutenu pour mes expériences dont de nombreuses pièces provenaient directement des mains expertes de Lucien Brouard, José da Silva Quintas, Jacques Kerboriou ou Jean-Claude Sutra-Fourcade. Mourad Haddad et Étienne Larsabal ont appuyé sur des plaques pour faire avancer la science. Angélique Manchon, Carole Philippe et Nora Sadaoui ont oeuvré pour bien des formalités. D'autres sont un peu moins à l'ombre. Bruno Andréotti, par ses miracles sur les Macintosh, m'a secouru dans l'adversité. Hervé Henry et Chi-Tuong Pham ont relu le manuscrit avec attention et esprit critique. Mokhtar Adda-Bedia a relu les remerciements. Je les remercie tous chaleureusement.

Vient enfin le tour de la famille, des amis qu'il soient au laboratoire ou dans d'autres laboratoires, sur mer ou sur la terre ferme, et avec qui j'ai tant partagé ; ils se reconnaîtront. Je les remercie amicalement.

Avant-propos

Plongeons un cadre dans de l'eau savonneuse puis sortons le de l'eau : un film liquide qui s'appuie sur le cadre s'est formé. Comprimons une feuille de papier et déplions-la : la feuille s'est froissée et un réseau de plis est apparu. Le film de savon a une forme régulière alors que la feuille de papier est devenue rugueuse. Pourquoi leurs comportements sont-ils si différents ? Le film de savon et la feuille de papier sont deux exemples des membranes que nous étudions dans ce mémoire. À l'équilibre, quelles sont les formes de ces surfaces ? Comment déterminer si elles sont stables ? Telles sont les questions que nous abordons à travers l'étude des plaques élastiques et des films de savon.

Bien que leurs propriétés physiques soient différentes, ces objets soulèvent des questions géométriques similaires quand on cherche leurs formes à l'équilibre. Pour les films de savon, quelles sont les surfaces minimales qui s'appuient sur un contour donné ? Pour les plaques élastiques, quelles sont les surfaces développables qui s'appuient sur un contour donné ? On recherche des surfaces de courbure moyenne nulle dans le premier cas ou de courbure de Gauss nulle dans le second.

Nous étudions expérimentalement, numériquement et analytiquement des exemples de surfaces physiques. Quand elles ont un ordre interne solide, comme les plaques élastiques, elles peuvent être frustrées : les déformations se concentrent sur des zones très petites, presque singulières (comme les plis du papier froissé). Quand elles sont liquides, comme les films de savon, ces frustrations disparaissent et les déformations sont réparties sur toute la surface. Enfin, déterminer la stabilité de ces surfaces revient à analyser leurs vibrations. Le cheminement de ce mémoire s'impose donc comme suit : surfaces à ordre solide, surfaces à ordre liquide et vibrations. Bien sûr, notre travail ne s'est pas déroulé dans cet ordre, mais ce plan est le plus naturel.

Ce mémoire est subdivisé en deux parties, comportant chacune quatre chapitres. La première porte sur les surfaces frustrées. Le chapitre 1 introduit la physique des plaques élastiques et explique pourquoi les déformations se concentrent en des zones très petites. Les chapitres 2 et 3 sont consacrés

à l'étude de deux configurations modèles. Après avoir montré l'efficacité des raisonnements géométriques pour la première, un pli comprimé longitudinalement, nous nous attaquons à une configuration plus complexe à analyser, une plaque contrainte ponctuellement. Le chapitre 4 montre que les surfaces formées d'un liquide visqueux sont aussi frustrées pendant une évolution sur une petite échelle de temps; une analogie avec les plaques élastiques est développée pour expliquer cette frustration. Aux temps longs, ces surfaces visqueuses atteignent l'équilibre où la capillarité devient importante et la viscosité n'a plus d'effet.

Ceci nous amène à la seconde partie, dédiée aux surfaces liquides. À l'équilibre, les surfaces liquides sont en général dominées par leur énergie capillaire et prennent la forme de surfaces minimales. Le chapitre 5 donne des exemples de réalisations physiques de surfaces minimales et expose les constructions mathématiques nécessaires pour la suite de l'exposé. Le chapitre 6 détermine les surfaces minimales qui s'appuient sur une double hélice ainsi que leur stabilité, ce qui revient à explorer leurs vibrations. Les chapitres 7 et 8 sont consacrés aux vibrations d'un film de savon dont la particularité est que l'épaisseur est libre de varier. Nous considérons tout d'abord une corde vibrante sur laquelle coulissent une ou plusieurs masselottes en tant qu'équivalent mécanique du film de savon vibrant; une masselotte correspond à une surépaisseur du film. Nous montrons enfin que le film de savon, grâce aux variations d'épaisseur, possède un comportement auto-adaptatif: il répond à toute fréquence de forçage.

Ces travaux joignent expérience, simulations et théorie; ils utilisent des techniques provenant de domaines très variés: géométrie différentielle, singularités dans les équations aux dérivées partielles, physique non linéaire, mécanique des plaques, hydrodynamique des fluides visqueux et physique des vibrations. Ils montrent ainsi la richesse de comportement des membranes élastiques et capillaires, qui permettent l'étude de phénomènes très généraux: instabilités, singularités et auto-adaptation.

Table des matières

I	Plaques minces	11
1	Introduction à la première partie	13
1.1	Présentation	13
1.2	Modélisation des plaques	17
1.2.1	Élasticité d'un solide tridimensionnel	17
1.2.2	Énergie : traction et flexion	19
1.2.3	Équations de Föppl-von Kármán	22
1.2.4	Deux applications des équations de FvK	23
1.2.5	Résolution numérique des équations de FvK	24
1.3	Focalisation de l'énergie	26
1.3.1	Traction et flexion ; déformations isométriques	27
1.3.2	Plis courbes	29
1.3.3	Plis	30
1.3.4	Cônes développables	32
1.3.5	Ordres de grandeur	34
1.3.6	Exemples	36
1.4	Résumé	37
2	Compression d'un pli	39
2.1	Présentation	39
2.2	Mise en place	41
2.2.1	Expérience	41
2.2.2	Simulations numériques	41
2.3	Premières observations	42
2.4	Résultats et modélisation	46
2.4.1	Avant la transition	46
2.4.2	Transition	46
2.4.3	Après la transition	49
2.4.4	Sur le chemin du retour	52
2.5	Résumé	53

3	Plaque contrainte ponctuellement	55
3.1	Présentation	55
3.2	Mise en place	57
3.2.1	Montage expérimental	57
3.2.2	Simulations numériques	57
3.3	Premières observations	58
3.3.1	Observations expérimentales	58
3.3.2	Observations numériques	61
3.3.3	Résistance à la déformation	63
3.4	Étude du scénario le plus général	64
3.4.1	Régime à deux d-cônes	64
3.4.2	Prédiction de l'énergie	65
3.4.3	Régimes à quatre d-cônes	66
3.4.4	Transition vers le losange	68
3.4.5	Transition vers le trapèze	71
3.4.6	Transition vers le régime cylindrique	72
3.5	Influence des paramètres géométriques	73
3.5.1	Un diagramme de phase	73
3.5.2	De la plaque à l'arche élastique	76
3.6	Résumé	77
4	Un d-cône sur une nappe visqueuse	79
4.1	Présentation	79
4.2	L'expérience	82
4.2.1	Montage	82
4.2.2	Premiers résultats	85
4.3	Théorie	85
4.3.1	Problème élastique équivalent	85
4.3.2	Transposition visqueuse	87
4.4	Résumé	90
II	Films de savon	91
5	Introduction à la seconde partie	93
5.1	Présentation : surfaces minimales	93
5.1.1	Films de savon	93
5.1.2	Films smectiques	95
5.1.3	Autres exemples	97
5.2	Théorie des vibrations	98
5.2.1	Un peu de géométrie différentielle	98

5.2.2	Construction de surfaces minimales	100
5.3	Résumé	102
6	Stabilité de l'hélicoïde	103
6.1	Présentation	103
6.2	Stabilité linéaire	105
6.3	Surfaces bifurquées	108
6.3.1	Expériences et simulations	108
6.3.2	Analyse faiblement non linéaire	110
6.3.3	Solutions analytiques	112
6.4	Résumé	116
7	Masselotte sur corde vibrante	117
7.1	Introduction aux vibrations des films de savon et à l'auto- adaptation	117
7.2	L'expérience	119
7.2.1	Montage	119
7.2.2	Observations avec une masselotte	123
7.2.3	Observations avec deux masselottes	125
7.3	Modèle et résultats	127
7.3.1	Avec une masselotte	127
7.3.2	Avec deux masselottes	132
7.4	Une limite continue : le film de savon ?	134
7.5	Résumé	136
8	Films de savon	139
8.1	Présentation	139
8.2	Ondes sur un film de savon	140
8.3	Mise en place	142
8.3.1	Dispositif expérimental	142
8.3.2	Procédure expérimentale	145
8.3.3	Premières observations	146
8.3.4	Modélisation	150
8.4	Auto-adaptation	153
8.4.1	Observations	153
8.4.2	Interprétation théorique de l'auto-adaptation	155
8.5	Ondes d'épaisseur et auto-adaptation	159
8.5.1	Transitions entre modes	159
8.5.2	Résonances faibles	161
8.5.3	Analyse de la dynamique de l'épaisseur	162
8.6	Vers des motifs bidimensionnels	167

8.6.1	Instabilités de la ligne de ventres	167
8.6.2	Films minces et génération de vorticité	168
8.7	Résumé	169
	Conclusion	171
A	Publication A	175
B	Publication B	179
C	Publication C	183
D	Publication D	189
E	Publication E	197
	Bibliographie	202

Première partie

Élasticité des plaques minces

Chapitre 1

Introduction à l'élasticité des plaques minces

« Elle y avait trouvé une grande robe en taffetas flambé, qui criait du froissement de ses plis. »

Gérard de Nerval, *Sylvie*.

Dans ce chapitre nous présentons les différents contextes dans lesquels les déformations des surfaces élastiques ont été étudiées. Nous nous intéressons au plus récent, celui des singularités qui apparaissent pour les grandes déformations des plaques élastiques, que nous développons en détail.

1.1 Présentation

On observe quotidiennement des propriétés des plaques élastiques minces. Par exemple, quand on comprime une feuille de papier, elle se froisse : un réseau de plis se forme¹. Pour lire le journal ou une feuille, on lui donne une légère courbure en l'attrapant entre le pouce et les autres doigts. Une fois courbée, la feuille garde sa forme et ne ploie plus sous l'effet de la gravité. Une plaque est donc rigidifiée sous l'effet d'une faible courbure. Les ailes de voiture sont aussi courbées. Les exemples d'objets élastiques minces - plaques s'ils sont plans à l'équilibre, coques sinon - vont de la canette du distributeur de boissons au fuselage d'avion en passant par toutes sortes de récipients, les panneaux solaires, les toitures futuristes des nouveaux bâtiments, les coques de navire, les fusées... L'intérêt pratique et industriel de ces coques et plaques

¹Le papier n'est pas tout-à-fait un bon exemple car il se déforme irréversiblement au niveau des plis (la limite élastique est excédée). Nous nuancerons cette remarque par la suite.

élastiques soulève naturellement la question suivante : comment résistent-elles aux contraintes ?

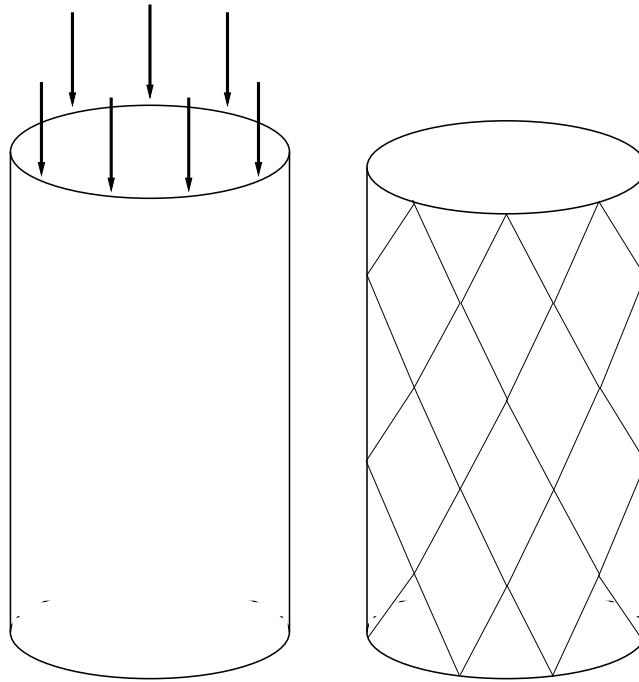


FIG. 1.1 – Un cylindre comprimé longitudinalement flambe avec un motif en forme de pavage de losanges.

Cette question a suscité une littérature scientifique débordante dont une revue occuperait à elle seule un mémoire comme celui-ci². Cette littérature s'est focalisée sur le flambage des plaques et des coques. Le prototype du flambage est donné par l'*elastica* d'Euler [60] (1744) : pourquoi les arbres ne s'effondrent-ils pas sous leur propre poids ? Si l'on considère une barre comprimée, elle conserve sa forme rectiligne jusqu'à une certaine force seuil puis se courbe au-delà : elle flambe. Si l'on revient aux troncs d'arbre, ils demeurent rectilignes car leur poids est inférieur au seuil de flambage. L'étude du flambage d'une structure élastique mince revient à l'étude de sa résistance sous contrainte : à partir de quelle force critique la structure perd-elle sa forme initiale (elle flambe) ? Quelle est la forme de la plaque après le flambage ? En particulier, quel est la longueur d'onde du motif périodique qui apparaît ? Les exemples fondateurs pour les cylindres se trouvent chez Donnell [57] et chez von Kármán et Tsien [154], qui ont étudié le flambage d'un cylindre comprimé dans la direction de son axe (figure 1.1) ; ils ont été

²Nous ne pourrions en donner qu'une vision arbitraire et tronquée.

suivis par de nombreux travaux (pour une revue, on pourra consulter le livre de Yamaki [160]). Ashwell [8] s'est intéressé à la résistance des plaques initialement courbées, et a montré expérimentalement et théoriquement qu'elles sont plus résistantes à la déformation que des plaques planes. Ainsi, l'étude des plaques et des coques était initialement motivée par la prédiction de leur résistance dans des applications pratiques.

Le flambage des plaques a aussi été étudié dans la perspective des systèmes non linéaires étendus spatialement : comment les longueurs d'onde sont-elles sélectionnées au dessus du seuil de l'instabilité ? Le prototype d'un tel système est la convection thermique dans un fluide chauffé par en bas (instabilité de Rayleigh-Bénard³). Plusieurs travaux sur les plaques ont été suscités par le développement de la théorie des bifurcations. L'intérêt des plaques est double : expérimentalement, il est facile de varier les conditions aux limites ; théoriquement, des développements faiblement non linéaires sont plus simples que pour le système hydrodynamique. Scheffer et Golubitsky [137], Pomeau [125], Boucif *et al.*[20, 21] et Paap et Kramer [112] ont ainsi considéré une plaque rectangulaire comprimée dans le sens de la longueur. La plaque flambe à partir d'une force critique ; l'amplitude de sa déflexion verticale varie comme la racine de l'écart de la force au seuil. Le système est multistable : une certaine gamme de longueurs d'onde (du même ordre de grandeur que la largeur de la plaque) est accessible. Cette multistabilité fait partie des difficultés d'étude des plaques. Enfin, récemment, Roman et Pocheau [133, 132] ont exhibé une configuration où une plaque comprimée entre deux plans subit une cascade de flambages successifs avec une évolution auto-similaire.

Le flambage ne se limite pas aux structures mécaniques macroscopiques. On l'observe aussi pour des films polymériques monomoléculaires (Bourdieu *et al.*[29]) ou des monocouches de Langmuir (Saint-Jalmes et Gallet [135]), placés à l'interface entre un liquide et l'air. Les films flambent quand ils sont soumis à une compression longitudinale. Toutefois, ces films ont une structure désordonnée et la longueur d'onde au seuil est déterminée par la taille caractéristique des inhomogénéités du film.

Ceci nous amène aux membranes microscopiques où les fluctuations thermiques sont importantes. L'étude de ces membranes a donné lieu à de nombreux développements théoriques (voir les cours de l'école d'hiver sur la mécanique statistique des membranes et des surfaces [110]). La physique des membranes à ordre cristallin (les molécules forment un réseau cristallin à deux dimensions) combine propriétés élastiques et effet des fluctuations ther-

³Au delà d'un certain gradient thermique critique, le système présente un motif périodique, des rouleaux convectifs.

miques. Ces membranes présentent deux phases : à basse température elles se comportent comme des plaques et sont planes à l'équilibre ; à haute température, elles sont compactes (complètement repliées). Une phase intermédiaire où les membranes sont froissées a été conjecturée : les membranes ont une forme fractale de dimension 2,5 intermédiaire entre la dimension 2 de la phase plane et la dimension 3 de la phase compacte. Des expériences sur des membranes d'oxyde de graphite (Hwa *et al.*[78], Wen *et al.*[158]) ont semblé mettre en évidence cette phase : la diffusion de la lumière indique une structure fractale de dimension 2,54. Cette interprétation a été remise en cause par Abraham et Goulian [1] qui montrent qu'on ne peut distinguer une phase froissée et une phase plate grâce à la diffusion de la lumière, puis par Spector *et al.*[142] qui observent directement les membranes et notent l'absence de phase froissée. Schmidt *et al.*[139], qui ont étudié des cytosquelettes de globules rouges, n'ont pas observé de phase froissée. Enfin, une phase fripée a été observée par Mutz *et al.*[108] : une membrane partiellement polymérisée refroidie se fripe, *i.e.* sa surface devient rugueuse. Cette phase est différente de la phase froissée car la rugosité provient des défauts de la membrane polymérisée. L'étude des plaques est ainsi liée à celle des membranes d'intérêt biologique.

Plusieurs travaux sur le papier froissé ont été menés avec la même perspective statistique que pour les membranes microscopiques. Gomes *et al.*[69, 71, 70] ont mesuré la dimension fractale et quelques propriétés statistiques d'une feuille de papier froissée. Tzschichholz *et al.*[148], Plouraboué et Roux [123] ont examiné la rugosité d'une feuille froissée dépliée : ils ont mesuré le spectre de puissance des déflexions transverses de la feuille et proposé un mécanisme pour interpréter leurs observations. Toutefois, ces études essentiellement statistiques n'ont pas tenu compte des spécificités géométriques de la physique des grandes déformations des plaques élastiques, qui ont été mises en évidence très récemment.

Dans la suite de ce chapitre, nous présentons ces spécificités. Après avoir expliqué comment modéliser les plaques minces, nous exposons les récents progrès quant à leurs grandes déformations. Ces déformations aboutissent en général à la focalisation de l'énergie autour de zones très petites, singulières pour des plaques d'épaisseur nulle. Ainsi les travaux sur les plaques sont reliés à ceux, de plus en plus nombreux, sur les singularités dans d'autres systèmes physiques. Par exemple, en hydrodynamique, les vortex (qui deviennent des lignes de vorticité singulières pour les fluides parfaits) semblent être importants pour la caractérisation de la turbulence [66]. Ici encore, l'étude des singularités, qui sont statiques pour les plaques élastiques, est plus facile qu'en hydrodynamique où ces singularités sont en mouvement. De plus, les équations décrivant les plaques dérivent d'une énergie, les solutions station-

naires sont alors des minimiseurs de l'énergie; en hydrodynamique les solutions stationnaires sont généralement instables vis-à-vis des perturbations dynamiques car les équations de Navier-Stokes n'ont pas de formulation variationnelle. Il est probable que ces développements conduisent à un nouveau regard sur les membranes microscopiques ou sur la structure du papier froissé.

1.2 Modélisation des plaques

Nous introduisons maintenant les équations qui décrivent les grandes déformations des plaques minces⁴. Ces équations ont été établies indépendamment par Föppl (1907) et von Kármán (1910) [65, 153]. Nous commençons par des rappels sur l'élasticité d'un solide tridimensionnel; nous expliquons les principes de l'obtention des équations de Föppl - von Kármán. Ces équations sont complexes; elles n'ont de solutions analytiques que dans les situations les plus simples. Elles nécessitent donc le plus souvent une résolution numérique que nous présenterons.

1.2.1 Élasticité d'un solide tridimensionnel

Considérons un solide isotrope et homogène. Quand il subit des contraintes mécaniques, un point de coordonnées (x, y, z) est déplacé vers $(x, y, z) + \mathbf{u}(x, y, z)$. Le champ $\mathbf{u}(x, y, z)$ décrit les déplacements des points du solide. Le solide est déformé s'il y a des déplacements relatifs, *i.e.*, si les distances entre deux points sont modifiées. Si ces deux points sont séparés par (dx, dy, dz) , l'élément de longueur dl entre ces deux points devient après le déplacement

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ij} dx_i dx_j, \quad (1.1)$$

avec la convention de sommation sur les indices répétés⁵. Le tenseur des déformations se déduit du champ de déplacement \mathbf{u} :

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right). \quad (1.2)$$

Ce tenseur est symétrique et sans dimension. Le dernier terme non linéaire est d'origine géométrique; il provient de la description lagrangienne du champ de déplacement. Il est usuellement négligé en élasticité tridimensionnelle mais, comme nous le verrons par la suite, on le conserve pour décrire les plaques.

⁴Pour plus de détails on pourra consulter Landau et Lifchitz [94].

⁵Sauf mention contraire, nous utiliserons cette convention dans toute la suite du mémoire.

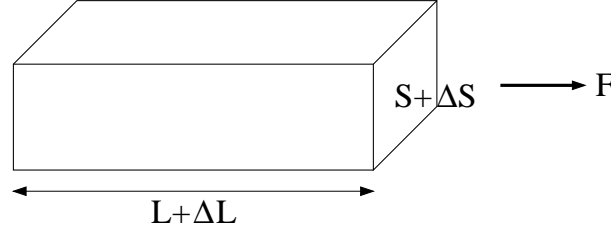


FIG. 1.2 – Déformation d'une barre

La description des déformations doit être complétée par une relation constitutive donnant le tenseur des contraintes σ_{ij} . La loi de Hooke [75] (1678) suppose une relation linéaire entre contraintes et déformations :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} ((1 - 2\nu)u_{ij} + \nu u_{ll}\delta_{ij}). \quad (1.3)$$

Ici $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon. E est le module d'Young (homogène à une pression) et ν est le coefficient de Poisson. Leur interprétation est simple si l'on considère une barre de longueur L et de section constante d'aire S (figure 1.2). Soumise à une force F , elle s'allonge de ΔL tel que $F = ES\Delta L/L$; sa section se contracte, l'aire variant de $\Delta S = -2\nu S\Delta L/L$. Pour des raisons thermodynamiques, le coefficient de Poisson doit être compris entre -1 et 1/2, mais en pratique, il est souvent proche de 0,3. Le module d'Young est d'ordre de 10^{11} Pa pour les métaux et 10^9 Pa pour les plastiques.

Pour un solide *isotrope*, la loi de Hooke est la relation linéaire la plus générale entre deux tenseurs symétriques. C'est une approximation valable pour de petites déformations en dessous de la limite élastique (tant que les déformations ne sont pas irréversibles). Elle ne décrit pas, par exemple, des déformations plastiques pour lesquelles l'état d'équilibre dépend de l'histoire du matériau (il ne revient pas à son état initial quand la contrainte est relâchée). Toutefois, la loi de Hooke est utilisée avec succès en fracture (voir Rice [131]), où les matériaux fracturés ont subi une déformation irréversible.

Le bilan des forces appliquées à un élément du solide conduit à l'équation d'équilibre,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = f_j, \quad (1.4)$$

si le solide est soumis à des forces volumiques de densité \mathbf{f} . Elle se résout en tenant compte des conditions aux limites du solide (contraintes ou déplacements imposés par exemple). Une solution de cette équation correspond à un extremum de l'énergie élastique qui a pour densité volumique

$$\epsilon = \frac{1}{2} u_{ij} \sigma_{ij}. \quad (1.5)$$

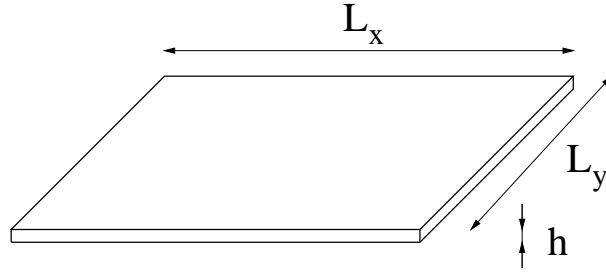


FIG. 1.3 – Une plaque élastique est un solide mince dans une direction.

1.2.2 Énergie : traction et flexion

Considérons un solide élastique dont une dimension (l'épaisseur h) est petite devant les autres dimensions (d'ordre de grandeur L) comme sur la figure 1.3. On dira que c'est une plaque s'il est plan au repos.

Ce solide est défini à l'équilibre par $-L_x/2 \leq x \leq L_x/2$, $-L_y/2 \leq y \leq L_y/2$, $-h/2 \leq z \leq h/2$. Son épaisseur étant petite, les déplacements du solide peuvent être repérés par ceux de sa surface médiane $z = 0$: $(x, y, 0) \mapsto (x + u_x(x, y), y + u_y(x, y), \xi(x, y))$. $(u_x, u_y, \xi)(x, y)$ représente donc le champ de déplacements de la surface médiane. ξ est le déplacement transverse et u_α le déplacement tangentiel. Cette surface est étirée si la distance entre deux points de la surface change lors du déplacement. Comme à trois dimensions, si ces deux points sont séparés de (dx, dy) , l'élément de longueur dl entre les points devient

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta. \quad (1.6)$$

α et β sont l'une des deux coordonnées tangentes x ou y . Le tenseur des déformations bidimensionnel se déduit du champ de déplacements :

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \xi}{\partial x_\beta} \right). \quad (1.7)$$

Cette expression résulte de l'équation 1.2, où l'on néglige les termes carrés en u_α . Cette approximation est justifiée par le fait que les déplacements tangentiels sont petits devant le déplacement transverse, *i.e.* $u_x, u_y \ll \xi$, quand la pente de la surface médiane est petite, $|\nabla \xi| \ll 1$. Il faut conserver le terme carré en ξ pour pouvoir tenir compte de grands déplacements transverse.

L'énergie élastique de la plaque se développe en puissance de h/L . Il est remarquable que les deux premiers termes du développement, l'énergie de *traction* et l'énergie de *flexion*, aient chacun séparément un sens physique. Ces deux termes sont obtenus en résolvant les équations d'équilibre 1.4 dans

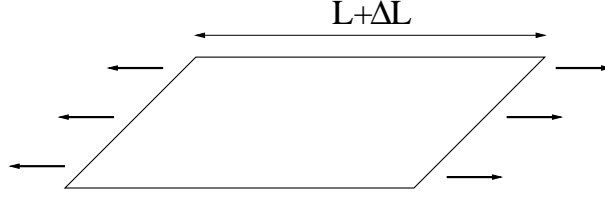


FIG. 1.4 – Un exemple de déformation de traction pure.

la direction z et en intégrant l'énergie élastique sur l'épaisseur. Toutes les grandeurs ne dépendent alors que des coordonnées x et y sur la plaque. À l'ordre 1 en h/L , l'énergie est la moyenne sur l'épaisseur h de celle d'un solide tridimensionnel (équation 1.5),

$$E_t = \frac{h}{2} \int \sigma_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta} \, dx \, dy. \quad (1.8)$$

Le facteur h provient de l'intégration dans la direction z . $u_{\alpha\beta}$ est le tenseur de déformations bidimensionnel défini ci-dessus. $\sigma_{\alpha\beta}$ est le tenseur de contraintes bidimensionnel⁶ qui décrit les contraintes dans le plan de la plaque, c'est-à-dire, la moyenne sur l'épaisseur des composantes suivant x ou y du tenseur des contraintes tridimensionnel. E_t est l'énergie de traction, elle est non nulle si la surface médiane est étirée (si le tenseur des déformations est non nul). Les conditions aux limites en haut et en bas de la plaque imposant des contraintes nulles, la loi de Hooke 1.3 moyennée dans l'épaisseur devient :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1 - \nu^2} ((1 - \nu)u_{\alpha\beta} + \nu u_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}). \quad (1.9)$$

Ici encore, E est le module d'Young et ν le coefficient de Poisson.

Pour un allongement ΔL de la plaque (figure 1.4), un déplacement transverse nul (on dit alors que la déformation est de traction pure) et un déplacement tangentiel d'ordre ΔL , le tenseur des déformations est d'ordre $u \sim \Delta L/L$ et le tenseur des contraintes est d'ordre $\sigma \sim Eu$, d'où l'ordre de grandeur de l'énergie de traction,

$$E_t \sim Eh \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 L^2. \quad (1.10)$$

Par contre, pour une déformation de la plaque avec un déplacement transverse $\xi \sim Z$ (figure 1.5), le tenseur des déformations est d'ordre $u \sim (Z/L)^2$ et le tenseur des contraintes est d'ordre $\sigma \sim Eu$, d'où l'énergie de traction

$$E_t \sim Eh(Z/L)^4 L^2. \quad (1.11)$$

⁶Dorénavant, nous oublierons le qualificatif bidimensionnel pour nommer ces tenseurs.

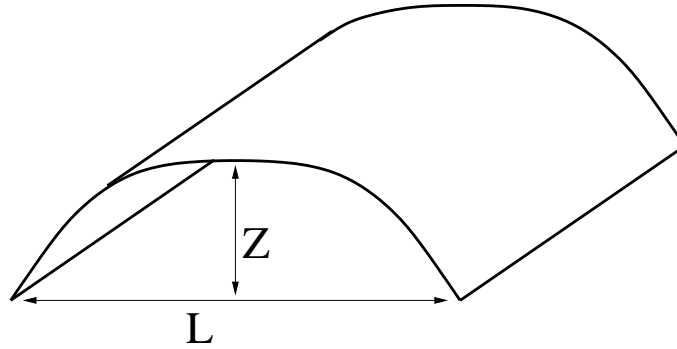


FIG. 1.5 – Un exemple de déformation avec un déplacement transverse d'ordre Z .

Naïvement, la connaissance de la forme de l'énergie de traction devrait suffire pour prédire le comportement d'une plaque. En fait, il peut exister des déformations sans traction (des déformations isométriques qui conservent les longueurs sur la surface médiane, comme nous le préciserons par la suite). Pour ces déformations, l'énergie de traction est nulle, l'état d'équilibre de la plaque ne peut être déterminé qu'en utilisant le terme suivant du développement de l'énergie en puissances de h/L .

Ce terme, l'énergie de flexion, est d'ordre $(h/L)^3$:

$$E_f = \frac{1}{2} \kappa \int ((\Delta \xi)^2 - 2(1 - \nu)[\xi, \xi]) \, dx \, dy, \quad (1.12)$$

$$\kappa = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (1.13)$$

κ est le module de flexion, Δ est le laplacien. Le crochet $[.,.]$ est défini par

$$[a, b] = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y}. \quad (1.14)$$

La forme de l'énergie de flexion se comprend aisément. Un déplacement avec $\nabla \xi$ constant correspond à une rotation de la plaque dans l'espace pour laquelle la plaque n'est pas déformée ; on s'attend donc à ce que l'énergie ne dépende que des dérivées secondes de ξ (ou de dérivées d'ordre supérieur, dont la contribution serait a priori plus petite que celle des dérivées secondes⁷). Les seules fonctions quadratiques des dérivées secondes, invariantes par rotation (d'axe perpendiculaire au plan médian à l'équilibre), sont la courbure

⁷En effet la seule longueur apparaissant dans les équations est h . Par homogénéité l'énergie doit être fonction de $h^n / \partial^n \xi / \partial x_\alpha^n \sim (h/L)^n \xi$, qui diminue quand n augmente. Comme $h/L \ll 1$, la contribution des dérivées d'ordre supérieur ou égal à 3 est négligeable.

moyenne de la surface médiane au carré

$$M^2 \simeq \frac{1}{4}(\Delta\xi)^2, \quad (1.15)$$

et sa courbure de Gauss

$$G \simeq [\xi, \xi]. \quad (1.16)$$

Ces deux expressions approximatives sont valides si $(\nabla\xi)^2 \ll 1$. La densité surfacique d'énergie est alors une fonction linéaire de ces deux invariants, ce qui est le cas de l'expression 1.12.

Pour un déplacement transverse d'ordre Z (figure 1.5), la courbure moyenne est d'ordre $\Delta\xi \sim Z/L^2$, d'où, en utilisant l'expression de l'énergie de flexion 1.12,

$$E_f \sim Eh^3(Z/L^2)^2 L^2. \quad (1.17)$$

1.2.3 Équations de Föppl-von Kármán

L'énergie élastique de la plaque est la somme des énergies de traction et de flexion. La stationnarité de l'énergie par rapport aux déplacements (u_x, u_y, ξ) de la surface médiane donne les équations de Föppl-von Kármán (FvK). Elles s'écrivent plus simplement en introduisant la fonction χ d'Airy définie par

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}. \quad (1.18)$$

Si $\chi(x, y)$ satisfait les conditions précédentes, alors $\chi(x, y) + ax + by + c$ les satisfait aussi. La fonction d'Airy est donc définie à une fonction affine près. Remarquons la traction est absente ($\sigma_{ij} = 0$) si et seulement si la fonction d'Airy est affine.

Les équations d'équilibre de la plaque (FvK) sont

$$\kappa \Delta^2 \xi = 2h[\xi, \chi], \quad (1.19)$$

$$\Delta^2 \chi = -E[\xi, \xi]. \quad (1.20)$$

Le crochet est défini par l'équation 1.14. Ces équations sont un bon point de départ pour analyser le comportement des plaques minces. Mêmes si les approximations que l'on fait pour les écrire sont discutables et discutées, nous verrons dans la suite de ce mémoire qu'elles permettent des prédictions quantitatives. D'ailleurs, une justification rigoureuse à partir de l'élasticité tridimensionnelle est donnée par Ciarlet [50]. Elles sont valides si la pente de la surface médiane est faible,

$$(\nabla\xi)^2 \ll 1, \quad (1.21)$$

et si les rayons de courbure de la plaque sont grands devant l'épaisseur, ce qui se traduit par

$$\left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right| \ll \frac{1}{h}. \quad (1.22)$$

Les équations de FvK ont été étendues par Seung et Nelson [140] pour tenir compte de la présence de dislocations, en rajoutant des termes sources dans le second membre de 1.20.

Les équations de FvK 1.19-1.20 sont découplées dans deux situations simples. Pour des déformations qui laissent la plaque plane ($\xi = 0$), *i.e.* de traction pure, le système se réduit à une équation linéaire $\Delta^2 \chi = 0$. Pour le deuxième cas, notons que, dans l'équation 1.20, la courbure de Gauss $G \simeq [\xi, \xi]$ joue le rôle de source pour χ : si $G \neq 0$ alors $\chi \neq 0$; la courbure de Gauss est donc source de traction. Dans le cas de déformations isométriques de la surface médiane (déformation qui laissent les longueurs inchangées sur la surface médiane), la courbure de Gauss reste nulle⁸. S'il n'y a pas de contraintes au bord, la deuxième équation 1.20 admet pour solution $\chi = 0$, et 1.19 devient linéaire : $\Delta^2 \xi = 0$. La déformation est alors de flexion pure (il n'y a pas de traction).

1.2.4 Deux applications des équations de FvK

Les équations de FvK décrivent les plaques minces. Des variantes de ces équations sont utilisées pour modéliser les tissus textiles ou la délamination des films minces.

Amirbayat et Hearle [4, 5, 6], Chen et Govindaraj [44, 45] utilisent des formulations énergétiques semblables à celles présentées ci-dessus pour prédire numériquement et analytiquement les formes de tissus à l'équilibre et comparent leurs prédictions à des expériences. Les particularités dont il faut tenir compte pour modéliser les tissus sont leur anisotropie et l'effet de la gravité. En effet, les tissus résistent moins bien à la traction dans une direction diagonale à la trame que dans les directions des fils. La gravité est importante car le nombre

$$\text{Gr} = \frac{\rho g h L^3}{\kappa}, \quad (1.23)$$

qui mesure le rapport entre énergie gravitationnelle (ρ est la densité du matériau, h son épaisseur, L la taille du tissu) et énergie de flexion (κ est le module de flexion), peut être grand (typiquement 10) pour un tissu. Gr est

⁸Le théorème de Gauss énonce que les surfaces isométriques à un plan ont une courbure de Gauss nulle.

en général petit pour les plaques ($Gr \sim 10^{-3}$ dans les chapitres 2 et 3). Dans le chapitre 4, nous étudierons un cas où la gravité n'est pas négligeable.

Considérons un film plan qui adhère à un substrat plan. Si le coefficient de dilatation thermique du substrat est supérieur à celui du film, et que l'on refroidit l'ensemble, le film est soumis à une contrainte compressive (si on le décolleait du substrat, il s'étirerait pour atteindre l'équilibre). Si la compression est suffisante, il a tendance à flamber en se décollant du substrat : il se délamine. Les premiers modèles utilisés pour décrire la délamination (pour une revue, consulter Gioia et Ortiz [68]) négligeaient les déplacements tangentiels u_α en les considérant comme nuls. Cette approximation permet de comprendre seulement partiellement les motifs de délamination observés. Pour y remédier, les équations de FvK et la formulation en termes énergétiques ont été utilisés récemment par Jin et Sternberg [82, 83] et par Audoly [10, 9] ; pour la modélisation, il suffit de rajouter $-\sigma_0 h \Delta \xi$ dans le deuxième membre de la première équation 1.19, pour traduire une contrainte compressive σ_0 . Ainsi les motifs de délamination en forme de zigzag observés expérimentalement ont été expliqués théoriquement [9].

1.2.5 Résolution numérique des équations de FvK

On ne connaît de solutions analytiques aux équations de FvK que dans des situations très simples. Les approches asymptotiques sont aussi difficiles. Une approche théorique des plaques minces demande alors une résolution numérique des équations. C'est cette résolution numérique que nous abordons maintenant. Ces équations aux dérivées partielles sont d'ordre 4, non linéaires et couplées. Plusieurs difficultés majeures sont réunies. D'ailleurs jusqu'à très récemment, la littérature se restreignait aux petites déformations (comme dans beaucoup d'études de flambage), ou utilisait des théories approximatives d'éléments finis (voir Bernadou [18]).

Une approche différente a été initiée par Kantor et Nelson [86] et reprise par Lobkovsky *et al.* [98, 97, 99] et Zhang *et al.* [163]. Dans cette approche, la plaque est remplacée par un réseau triangulaire bidimensionnel d'atomes reliés par des ressorts (l'élongation des ressorts va correspondre à la traction), et les différences d'orientation entre triangles voisins du réseau coûtent de l'énergie (ceci va correspondre à la flexion). Dans la limite d'un réseau de pas nul, le système est équivalent à une plaque mince. La forme de la plaque à l'équilibre est trouvée en minimisant l'énergie du système. Ces simulations donnent des résultats concordants avec les lois d'échelles théoriques [98, 97, 99] (voir la section suivante), mais elles ont deux défauts. Le premier est

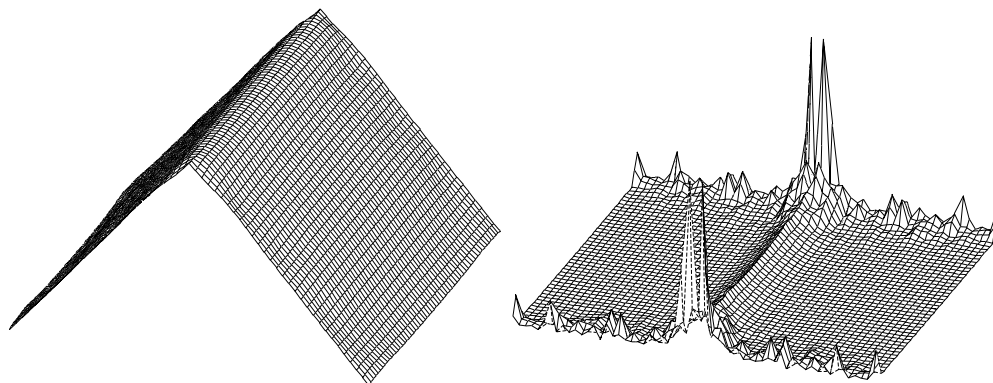


FIG. 1.6 – Exemple de résolution numérique des équations de FvK en utilisant la méthode de Patrício et Krauth : un pli (voir la section 1.3.2). Droite : forme de la plaque. Gauche : densité d'énergie par unité de surface. Remarquons la focalisation de l'énergie qui est localisée sur une petite portion de la plaque.

que la construction du réseau impose un coefficient de Poisson $\nu = 1/3$ ⁹. Le second défaut provient des limitations numériques qui font que la petite échelle h n'est pas résolue.

Méthode numérique utilisée au cours de cette thèse

Nous présentons maintenant l'approche numérique de Patrício et Krauth [114, 117]. Les résultats de la collaboration que nous avons menée avec Pedro Patrício, en utilisant cette approche, figurent dans les deux prochains chapitres. Cette méthode numérique comporte plusieurs étapes, chacune servant à surmonter une difficulté particulière. Les dérivées dans les équations de FvK sont d'ordre élevé, ce qui rend le problème numériquement instable. Il est plus facile de s'intéresser à l'énergie, dont l'expression contient des dérivées d'ordre au plus 2. Le programme minimise donc l'énergie.

Ce problème variationnel se résout en utilisant une famille de fonctions-test. Cependant, la minimisation doit être très soigneuse, car l'utilisation de fonctions-test donne une bonne estimation de l'énergie, mais est moins précise pour la forme des minimiseurs de l'énergie. Les fonctions-test sont implémentées en utilisant des éléments finis : la plaque est triangulée, et sa

⁹Ce coefficient est proche de beaucoup de situations pratiques, mais nos expériences utiliseront des matériaux pour lesquels $\nu = 0,4$; cette méthode ne permet donc pas des prédictions quantitatives pour nos expériences.

forme remplacée par une forme polynomiale sur chaque triangle. L'utilisation de fonctions polynomiales permet le calcul de dérivées en limitant les erreurs numériques. Les polynômes doivent rendre l'énergie bien définie : 5 est le plus petit degré possible pour assurer la continuité entre triangle voisins du champ de déplacement et de ses dérivées.

Maintenant, l'énergie du système est fonction d'un nombre fini de variables η_i , qui sont les coefficients des polynômes définissant la forme de la plaque sur chaque triangle. On utilise pour la minimisation la méthode classique¹⁰ de Newton modifiée [129].

Quand on essaie de minimiser l'énergie, une dernière difficulté apparaît : dans des situations où les déformations sont à la fois de flexion et de traction, la procédure de minimisation ne converge pas. Cette difficulté provient de la disproportion entre les ordres de grandeur des énergies de traction et de flexion : $E_t/E_f \sim (Z/h)^2 \gg 1$, avec les notations de la section précédente. La solution est de re-conditionner le problème en diagonalisant la hessienne de l'énergie et en changeant les coordonnées pour $\xi_i/\sqrt{\alpha_i}$, où les ξ_i sont les vecteurs propres de la hessienne associés aux valeurs propres α_i ¹¹. Ce reconditionnement est coûteux en temps de calcul, mais utilisé à deux ou trois reprises, il permet et accélère la convergence de la méthode de Newton.

La figure 1.6 donne un exemple de résolution numérique pour une plaque à laquelle on impose des points anguleux sur deux de ses bords. L'énergie est concentrée sur de petites zones¹². Cette remarque est le point de départ de la section suivante.

1.3 Focalisation de l'énergie

On observe la focalisation de l'énergie lorsque l'on froisse une feuille de papier¹³. Les déformations se concentrent le long de plis qui se rencontrent

¹⁰Le principe de la méthode de Newton est de suivre, à partir d'une configuration η_i initiale, la ligne de plus grande pente de la fonction $E(\eta_i)$, on aboutit ainsi théoriquement à un minimum de E . A chaque pas de la procédure, la direction de plus grande pente est déterminée en calculant le gradient de l'énergie par rapport aux η_i . Cette méthode marche bien quand un seul minimum existe ; sinon, elle peut conduire à des minima métastables, la confrontation des résultats numériques avec l'expérience est donc nécessaire.

¹¹Si l'on recherche la cause de l'échec de la méthode de Newton, on s'aperçoit que le gradient de l'énergie par rapport à certaines variables devient très petit, la descente vers le minimum d'énergie dans la direction de ces variables devient très lente. Le reconditionnement permet d'obtenir des dérivées de l'énergie d'ordre 1 pour toutes les variables.

¹²Cela fait partie des difficultés de la résolution numérique des équations de FvK.

¹³Même si des déformations irréversibles apparaissent, le comportement de la feuille peut se comprendre à partir de son histoire "élastique", qui va déterminer où les déformations se focalisent, donc où les contraintes sont les plus élevées. Les déformations irréversibles

en des points. L'objet de cette section est de comprendre les raisons de cette focalisation puis d'exposer les résultats connus sur les singularités linéiques et ponctuelles.

1.3.1 Traction et flexion ; déformations isométriques

Pour une déformation transverse de la plaque d'ordre Z , l'énergie de traction est d'ordre $E_t \sim EhZ^4/L^2$ (équation 1.11) et l'énergie de flexion d'ordre $E_f \sim Eh^3Z^2/L^2$ (équation 1.17), d'où

$$E_t/E_f \sim (Z/h)^2. \quad (1.24)$$

Dès que Z est grand devant l'épaisseur h , ce qui est toujours le cas quand on s'intéresse aux grandes déformations des plaques minces, l'énergie de traction est grande devant l'énergie de flexion. Étant donné cette remarque ($E_f \ll E_t$), si l'on veut minimiser l'énergie élastique totale $E_t + E_f$, la solution la plus simple est de trouver des déformations sans traction ($E_t = 0$), c'est-à-dire des déformations isométriques (qui conservent les distances sur la surface médiane).

Trouver la forme à l'équilibre d'une plaque soumise à certaines conditions aux limites se ramène alors à la question géométrique suivante : existe-t-il une surface satisfaisant aux conditions aux limites et étant isométrique à un plan ? La déformation est alors de flexion pure. Répondons d'abord à la question suivante : en quelles surfaces un plan peut-il être déformé de façon isométrique ? Si l'isométrie est régulière¹⁴, la réponse est donnée par le *theorema egregium* de Gauss : *une surface est isométrique à une portion de plan si sa courbure de Gauss est nulle*. Une portion de cylindre ou de cône (en excluant la pointe du cône) sont des exemples de telles surfaces, dites développables ; en effet, un cylindre ou un cône ont un rayon de courbure infini, donc une courbure de Gauss nulle. Revenons maintenant à la première question tenant compte des conditions aux limites. Cette question est étudiée par Pomeau [126] puis par Ben Amar et Pomeau [15] sous la forme suivante : quelles sont les surfaces développables (isométriques à un plan) régulières qui s'appuient sur une courbe donnée dans l'espace ? Pour certaines courbes, les surfaces répondant à la question ont des auto-intersections, ce qui n'est pas physique pour des plaques ; pour d'autres courbes, il n'existe pas de telles surfaces développables régulières. Dans ces situations, il n'y a pas de déformations sans traction. Les surfaces développables sont peu étudiées par les mathématiciens ; la question soulevée par Ben Amar et Pomeau est pourtant

se produisent là où les contraintes sont grandes.

¹⁴Le sens que nous donnons à régulier est indéfiniment différentiable.

très similaire au problème de Plateau¹⁵, qui lui a fait l'objet de nombreux travaux mathématiques. Les surfaces développables apparaissent aussi lors de la minimisation de l'énergie d'un cristal liquide nématique à ordre hexagonal, comme le montre Kléman [88].

Une déformation sans traction n'existe pas par exemple si l'on contraint une surface carrée à l'intérieur d'une sphère de rayon plus petit que le côté du carré. Ce problème a été étendu à des sous-variétés de \mathbb{R}^n , $n > 3$ par Venkataramani *et al.* [151]. Il est aussi relié à l'étude des coques élastiques : certaines n'admettent pas de déformations isométriques, auquel cas elles se déforment toujours avec de la traction. Comme la traction est coûteuse en énergie, ces coques résistent bien aux contraintes extérieures. On dit qu'elles sont géométriquement rigides (Audoly [10], Choi [48], Sanchez-Palencia [136]). L'exemple le plus simple d'une surface géométriquement rigide est la sphère.

La discussion précédente à partir de l'énergie peut se reformuler en écrivant les équations de FvK 1.19-1.20 de manière adimensionnée, en posant $x = x'L$, $y = y'L$, $\xi = \xi'L$, $\chi = \chi' E h^2 / 12(1 - \nu^2)$, $F = F' E h^2 / 12(1 - \nu^2)$, en introduisant le petit paramètre

$$\lambda = \frac{h}{L\sqrt{12(1 - \nu^2)}}, \quad (1.25)$$

et en oubliant de distinguer anciennes variables et variables sans dimension :

$$\Delta^2 \xi = 2[\chi, \xi], \quad (1.26)$$

$$\lambda^2 \Delta^2 \chi = -[\xi, \xi]. \quad (1.27)$$

Nous nous intéressons à la limite $\lambda \rightarrow 0$, qui revient à dire que l'épaisseur est petite. Dans cette limite, 1.27 s'écrit

$$[\xi, \xi] = 0, \quad (1.28)$$

ce qui signifie que la courbure de Gauss est nulle et que la surface est développable. Dans des situations où il n'y a pas de surface développable régulière satisfaisant aux conditions aux limites, il faut lever la condition de régularité pour résoudre 1.28, la surface est alors singulière sur des courbes appelées bords cuspidaux par Hilbert et Cohn-Vossen [74]. À ce moment-là, le terme de flexion $\Delta^2 \xi$ est infini aux endroits où le déplacement ξ est singulier ; on ne peut pas négliger le terme de flexion près des singularités, ce qui fait apparaître des couches limites. La résolution des équations de FvK s'effectue alors sur deux domaines disjoints. Dans le domaine externe, la courbure de

¹⁵Quelles sont les surfaces minimales s'appuyant sur une courbe donnée ?

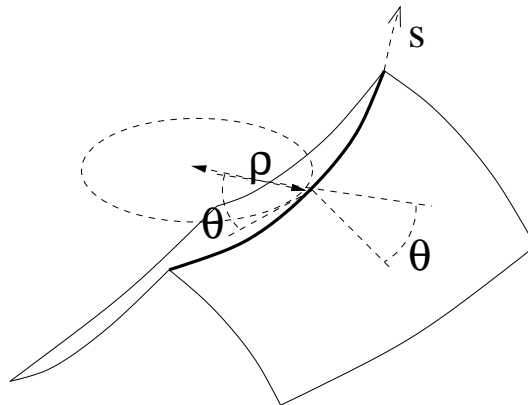


FIG. 1.7 – Schéma d'un pli courbe (en gras) ; définition de l'abscisse curviligne s et de l'angle $\theta(s)$.

Gauss $[\xi, \xi]$ est nulle, l'équation 1.28 a des solutions (que l'on appelle externes) présentant éventuellement des singularités. Dans le domaine interne (ou couche limite) localisé autour des singularités de la solution externe, il faut considérer les équations complètes de FvK car la flexion n'est pas négligeable ; la méthode de la couche limite permet de trouver des solutions (que l'on appelle internes) qu'il faut raccorder à la solution externe. La mise en pratique de cette méthode de résolution est en fait très difficile car les solutions de l'équation $[\xi, \xi] = 0$ ne sont connues que d'une manière formelle peu exploitable [15].

Nous discutons maintenant les solutions des équations de FvK telles que la solution externe présente une singularité linéique courbée (pli courbe), rectiligne (pli) ou ponctuelle (d-cône) ainsi que les expériences correspondantes ; nous montrons qu'il est énergétiquement favorable d'avoir de telles singularités ; nous citons enfin les rares cas où des situations à plusieurs singularités ont été partiellement comprises.

Les déformations et par conséquent les contraintes sont concentrées au niveau des singularités. En pratique, s'il y a des effets plastiques, ils apparaissent donc en premier au niveau des plis ou des points coniques. Les descriptions qui suivent sont valables tant que la limite élastique n'est pas dépassée.

1.3.2 Plis courbes

Le premier exemple de focalisation d'énergie remonte à Pogorelov [124]. Il a déterminé l'énergie d'un pli courbe pour une coque ou une plaque. Le pli, paramétré par son abscisse curviligne s (figure 1.7) est défini par la donnée

de son rayon de courbure $\rho(s)$ et de l'angle $\pi - 2\theta(s)$ entre les plans tangents à la surface de part et d'autre du pli. La largeur de la couche limite (zone où est concentrée la traction) qui raccorde la plaque de part et d'autre du pli est

$$w \sim h^{1/2} \rho^{1/2} \alpha^{-1/2}, \quad (1.29)$$

où h est l'épaisseur de la coque ou de la plaque et $\alpha = \tan \theta$. L'énergie élastique du pli courbe vaut

$$E_{pc} = F_{pc} \kappa h^{-1/2} \int_{\gamma} \frac{\alpha^{5/2}(s)}{\rho^{1/2}(s)} ds, \quad (1.30)$$

où l'intégrale se calcule le long du pli courbe, κ est le module de flexion et $F_{pc} \simeq 2,1$ est un facteur géométrique. Nous n'entrons pas plus dans les détails car nous verrons que ce type de singularité, très coûteux énergétiquement, n'est pas observé en pratique pour les plaques.

Pogorelov [124] a étudié une coque sphérique sur laquelle on appuie radialement. Elle présente un pli circulaire pour de petits déplacements ; son rayon augmente avec le déplacement imposé. L'expression 1.30 a permis à Pogorelov de prédire quantitativement la force de résistance de la coque en fonction du déplacement. Il est aussi à noter que Helfer *et al.*[73] ont récemment fait une observation similaire sur des vésicules microscopiques sphériques rigidifiées par de l'actine (elles possèdent un ordre interne solide). Elles présentent un pli circulaire quand elles sont soumises à une contrainte ponctuelle. Yoon et Deutsch [162] ont utilisé de tels plis circulaires pour prédire les fluctuations thermiques de vésicules polymérisées de forme sphérique.

1.3.3 Plis

Un pli (rectiligne) est le raccordement entre deux zones où la plaque est plane (figure 1.8). Si la plaque était d'épaisseur nulle, ce serait l'une des arêtes d'un polyèdre. Pour une plaque réelle, la traction et la flexion sont concentrées sur une couche limite de largeur w entourant l'arête. Witten et Li [159] ont prédit des lois d'échelle pour $w \sim L^{2/3}$ et l'énergie élastique totale $E \sim L^{1/3}$, L étant la longueur du pli. L'énergie d'un pli n'est pas extensive (proportionnelle à la longueur) car la forme de la plaque n'est pas invariante par translation dans la direction x . Zhang *et al.*[163] ont examiné ce résultat numériquement et ont conclu qu'une bonne résolution numérique était nécessaire pour observer de telles lois d'échelle. Il faut attendre Lobkovsky *et al.*[98] pour une vérification numérique.

Une analyse de couche limite par Lobkovsky [97] confirme rigoureusement ce résultat et prend en compte les variations avec l'angle diédral du

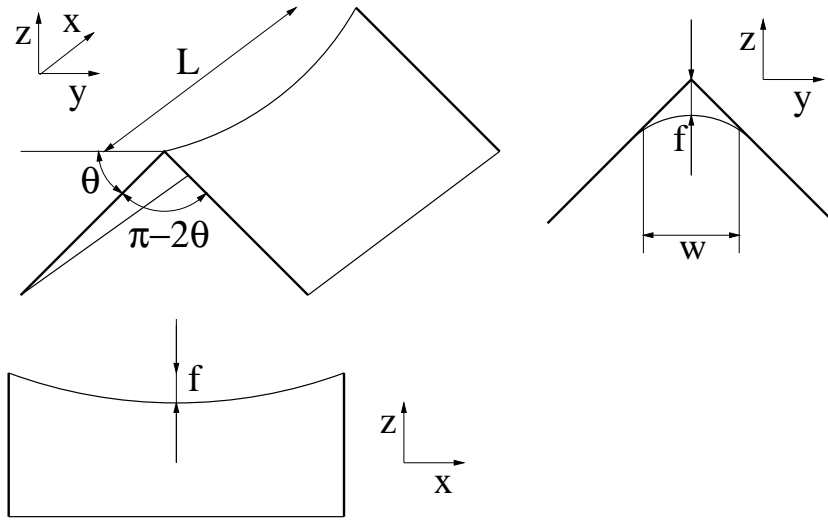


FIG. 1.8 – Schéma d'un pli de longueur L et d'angle θ . On impose un angle pour deux bords d'une plaque. La forme est presque plane sauf sur une zone centrale dont l'échelle est exagérée pour la clarté du dessin. Droite : vue selon x ; gauche : vue selon y ; ces vues donnent les définitions de la largeur du pli w et de sa flèche f . w représente l'échelle de raccordement entre les deux zones où la plaque est plane.

pli $\pi - 2\theta$. Une configuration avec un pli unique s'obtient en considérant une plaque en forme de ruban infini de largeur W s'appuyant sur des demi-droites d'équations $z = \tan \theta |y|$ et $x = \pm L/2$ (voir la figure 1.8). Trouver la forme de la plaque impose la résolution du problème extérieur puis du problème intérieur. La solution extérieure de $[\xi, \xi] = 0$ satisfaisant aux conditions aux limites est $\xi = \tan \theta |y|$, c'est-à-dire deux demi-rubans formant un angle $\pi - 2\theta$. Lobkovsky [97] résout le problème intérieur et détermine la largeur du pli, intermédiaire entre sa longueur et l'épaisseur de la plaque,

$$w \sim h^{1/3} L^{2/3} \phi^{-1/3}. \quad (1.31)$$

L'énergie élastique totale du pli découle de cette analyse :

$$E_p = F_p \kappa \left(\frac{L}{h} \right)^{1/3} \phi^{7/3}. \quad (1.32)$$

κ est le module de flexion de la plaque, $\phi = \tan \theta$ est défini à partir de l'angle du pli et $F_d \simeq 1,8$ est la constante de proportionnalité déterminée numériquement. D'autres propriétés des plis ont été étudiées par Lobkovsky et Witten [99], mais, à notre connaissance, aucune expérience quantitative n'y a été consacrée avant le présent travail (voir le chapitre 2).

Ces lois d'échelle se retrouvent de manière géométrique (figure 1.8). Nous allons déterminer l'ordre de grandeur de l'énergie élastique de la plaque. Notons d'abord que l'énergie de la zone externe est nulle car la plaque y est plane. Si w est la largeur du pli, la surface où est concentrée l'énergie a une aire $S \sim wL$, la flèche de la feuille est d'ordre $f \sim w/\phi$, l'allongement relatif de la feuille dans la direction y est $a \sim f^2/L^2$, ce qui est aussi l'ordre de grandeur du tenseur des déformations. Le tenseur des contraintes est d'ordre Ea . D'où l'énergie de traction $E_t \sim Eha^2S$, comme pour l'obtention de l'équation 1.11. La courbure moyenne est d'ordre f/W^2 , d'où l'énergie de flexion $E_f \sim Eh^3(f/w^2)^2S$ comme pour l'équation 1.17. La minimisation de l'énergie totale $E_t + E_f$ par rapport à w donne les lois d'échelle 1.32 et 1.31. Ce raisonnement revient à dire que les énergies de flexion et de traction sont du même ordre de grandeur dans la couche limite.

1.3.4 Cônes développables

Pomeau [126] puis Ben Amar et Pomeau [15] ont cherché des solutions singulières du problème extérieur 1.28. Ils ont proposé des surfaces coniques (donc singulières à la pointe du cône) d'équation $\xi = r\phi g(\theta)$ en coordonnées polaires. ϕ est la tangente de l'angle α défini par la figure 1.9; g est d'ordre 1. La courbure de Gauss de ce cône est

$$G(r, \theta) = \frac{1}{2}\phi^2 \frac{\delta(r)}{r} g(\theta) (g(\theta) + g''(\theta)), \quad (1.33)$$

où $\delta(r)$ est une distribution de Dirac définie par $\int_0^\infty dr \delta(r) f(r) = f(0)$ pour toute fonction régulière du rayon polaire $f(r)$. $G(r, \theta)$ est nulle en dehors de la pointe; elle est nulle partout si

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) (g(\theta) + g''(\theta)) d\theta = 0. \quad (1.34)$$

Cette condition qui traduit la développabilité du cône a donné son nom aux singularités ponctuelles : cônes développables ou d-cônes. Pour une plaque réelle, la forme est conique sauf au voisinage de la pointe (cœur du d-cône de rayon R_c) où une couche limite est présente. On peut montrer que l'énergie élastique du cœur est d'ordre κ . Ainsi l'énergie de la plaque provient essentiellement de la flexion répartie sur une zone de rayon R (rayon du cône) privée du cœur. Elle se calcule à partir de l'équation 1.12,

$$E_d = F_d \kappa \ln \left(\frac{R}{R_c} \right) \phi^2, \quad (1.35)$$

$$F_d = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (g(\theta) + g''(\theta))^2 d\theta. \quad (1.36)$$

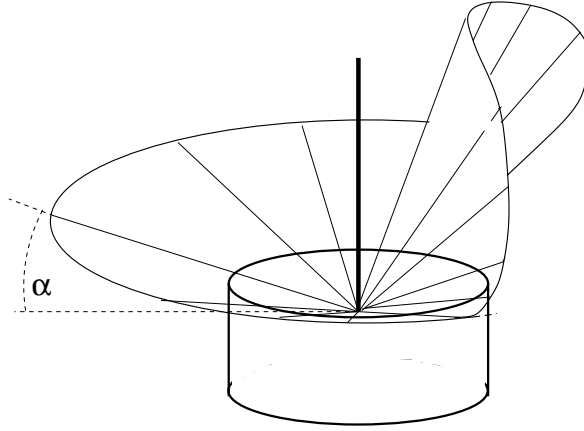


FIG. 1.9 – Schéma d'un d-cône. Configuration de l'expérience [43] et de la solution théorique [39]. Une pointe enfonce une feuille de Mylar appuyée sur un cadre cylindrique. La feuille est un cône dont le sommet coïncide avec la pointe. L'angle α est défini comme l'angle moyen entre un générateur et le plan horizontal contenant le sommet.

F_d est un facteur numérique géométrique. Le logarithme de R/R_c provient de l'intégration du carré de la courbure (en $1/r$) ; il donne à l'énergie une allure semblable à l'énergie d'une dislocation.

La notion de d-cône apparaît en premier dans une configuration très particulière de tissu textile considérée par Amirbayat et Hearle [4, 5, 6]. La première expérience systématique est réalisée par Chaïeb et Melo [43, 41] (figure 1.9).

Cerda et Mahadevan [39] donnent une solution particulière g minimisant l'énergie 1.35 et correspondant à cette expérience :

$$g(\theta) = \frac{\sin(\theta_1) \cos(a\theta) - a \sin(a\theta_1) \cos(\theta)}{\sin(\theta_1) \cos(a\theta_1) - a \sin(a\theta_1) \cos(\theta_1)} \quad \text{pour } -\theta_1 < \theta < \theta_1,$$

$$g(\theta) = 1 \quad \text{sinon,} \quad (1.37)$$

où $2\theta_1 = 140^\circ$ et $a = 3,8$. Ainsi le plus grand angle entre deux générateurs du cône est

$$\psi = \phi (g(0) + g(\pi)) = \phi \mu, \quad (1.38)$$

où $\mu = 4,8$. Le facteur géométrique correspondant est

$$F_d = 67. \quad (1.39)$$

Nous utiliserons les propriétés 1.38-1.39 de cette solution dans le chapitre 3.

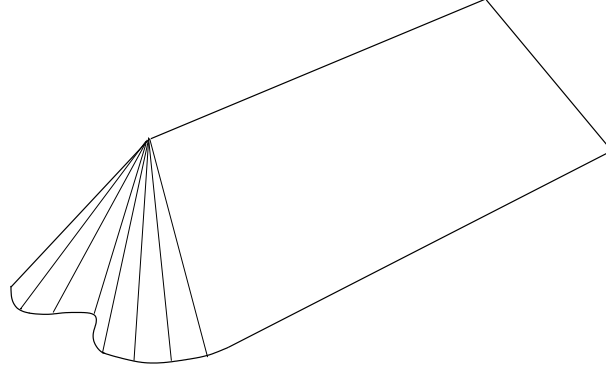


FIG. 1.10 – Schéma d'une configuration à un pli et deux d-cônes aux deux extrémités du pli.

La taille du cœur du d-cône (taille de la couche limite) est déterminée expérimentalement et théoriquement par Cerda *et al.*[38] :

$$R_c \sim h^{1/3} R^{2/3} \phi^{-1/3}, \quad (1.40)$$

pour des cônes de petite ouverture. Comme pour les plis, cette loi est obtenue géométriquement en disant que la flexion et la traction ont des énergies de même ordre de grandeur dans la couche limite. Il n'est pas surprenant que la taille du cœur d'un d-cône varie comme la largeur d'un pli (équation 1.31). En effet, dans une configuration avec un pli et deux d-cônes (figure 1.10), les couches limites correspondant aux différentes singularités doivent se raccorder.

1.3.5 Ordres de grandeur

En oubliant l'effet des facteurs géométriques sans dimension (les angles par exemple), les énergies pour des déformation de traction pure, avec un pli courbe, avec un pli, avec un d-cône, de flexion pure, résultent des équations 1.10, 1.30, 1.32, 1.35, 1.17 respectivement :

$$E_t \sim \kappa(L/h)^2, \quad (1.41)$$

$$E_{pc} \sim \kappa(L/h)^{1/2}, \quad (1.42)$$

$$E_p \sim \kappa(L/h)^{1/3}, \quad (1.43)$$

$$E_d \sim \kappa \ln(L/h), \quad (1.44)$$

$$E_f \sim \kappa, \quad (1.45)$$

pour des déformations étendues sur un domaine de taille L de la plaque. Dans la limite $h/L \rightarrow 0$, ces déformations sont dans l'ordre décroissant de

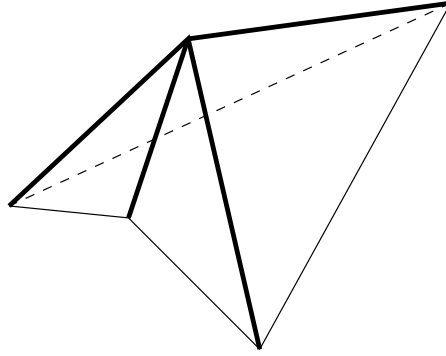


FIG. 1.11 – Un d-cône situé à la jonction de quatre faces planes. Les traits gras symbolisent quatre plis.

leur coût énergétique :

$$E_t \gg E_{pc} \gg E_p \gg E_d \gg E_f. \quad (1.46)$$

Il en résulte qu'une déformation de flexion pure est préférée si elle est possible¹⁶. Sinon, la plaque présente des plis, des d-cônes et de la flexion pure en dehors des singularités¹⁷. Des déformations de traction pure sont donc non génériques, elles n'existent en pratique que pour des conditions aux limites similaires à celles de la figure 1.4. Les plis courbes ne sont pas observés car ils se déstabilisent en plis rectilignes, moins coûteux énergétiquement.

Paradoxalement, pour des conditions pratiques, la hiérarchie énergétique entre plis et d-cônes du type de la solution particulière présentée dans la section précédente est inversée. En effet, si $h = 0,1$ mm, $L = 10$ cm et $\phi = 0,1$, alors

$$\frac{E_p}{E_d} = \frac{F_p}{F_d} \frac{(L\phi/h)^{1/3}}{\ln((L\phi/h)^{1/3})} = 0,08, \quad (1.47)$$

car le facteur géométrique du d-cône est grand : $F_d = 67 \gg F_p = 1,8$.

Par contre¹⁸, si l'on considère un d-cône situé aux raccordement entre 4 zones planes (figure 1.11), le facteur géométrique F_d est nul. En effet, pour

¹⁶Rigoureusement, le rapport Z/h (déplacement transverse/épaisseur) devrait figurer à la place de L/h dans les formules des énergies. La discussion présente est donc valable pour de grandes déformations transverses ($Z \gg h$); elle n'explique pas les observations de Roman et Pocheau [132] qui étudient des configurations où le déplacement transverse n'est pas très grand. L'énergie élastique des singularités a alors une contribution négligeable à l'énergie de la plaque.

¹⁷Les plis et les d-cônes sont associés géométriquement comme les arêtes et les sommets d'un polyèdre.

¹⁸La remarque qui suit est nouvelle.

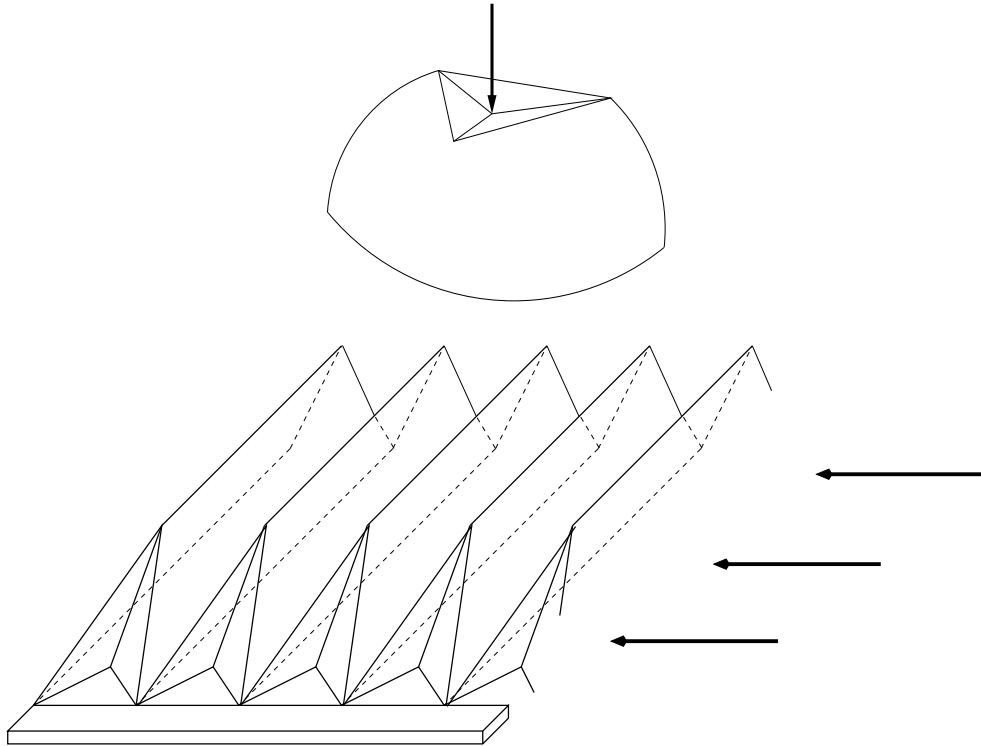


FIG. 1.12 – Exemples montrant plusieurs singularités. Haut : triangle isocèle pour une balle de ping-pong soumise à une force ponctuelle (Pauchard *et al.*[118, 119]). Bas : cascade de plis pour une plaque comprimée longitudinalement et couissant dans deux glissières (Pomeau et Rica [128, 127]); seule la moitié de la plaque est schématisée.

une portion plane du cône, $g + g'' = 0$, et l'équation 1.36 donne $F_d = 0$. L'énergie de la configuration de la figure 1.11 provient alors essentiellement des plis.

1.3.6 Exemples

L'expérience de Pogorelov [124] présentée dans la section 1.3.2 a été reprise par Pauchard *et al.*[118, 119] pour de plus grands déplacements : le pli circulaire se déstabilise en plis rectilignes formant un polygone régulier (Fig 1.12). Cette déstabilisation se comprend aisément car l'énergie d'un pli rectiligne croît moins vite avec la longueur ($E \sim L^{1/3}$, d'après 1.32) que celle d'un pli circulaire ($E \sim L$, d'après 1.30).

Chaïeb et Melo [40, 42] ont repris l'étude de flambage d'une portion de cylindre. Des zones de courbure inversée en forme de losange apparaissent,

et sont délimitées par des plis et des d-cônes (comme dans la figure 1.1).

Enfin, Pomeau et Rica [128, 127] ont réexaminé le post-flambage d'une plaque contrainte dans deux glissières latérales et comprimée longitudinalement (figure 1.12). A forte compression, la plaque se plie en accordéon avec une série de plis principaux parallèles, qui se raccordent aux glissières par une cascade de plis de tailles décroissantes.

Dans ces trois derniers travaux, la théorie reproduit qualitativement les observations expérimentales.

La focalisation de l'énergie a aussi été observée pour des sous-variétés élastiques de dimension d de \mathbb{R}^n si $n < 2d$ (Kramer *et al.*[91, 89]). Les singularités (de dimensions 1, 2, 3..) ont aussi des lois d'échelles (DiDonna *et al.*[56]) similaires à celles que nous avons présentées pour les plis et les cônes.

1.4 Résumé

On distingue deux modes de déformations pour une plaque élastique : traction et flexion. Le premier est beaucoup plus coûteux énergétiquement que le second. Par conséquent, le système préfère soit des déformations de flexion pure (si elles existent), soit des déformations qui concentrent la traction sur des petites zones linéiques (les plis) ou ponctuelles (les cœurs des d-cônes). Chacune de ces singularités est bien caractérisée quand elle est isolée. Cependant, la compréhension de situations complexes (à plusieurs singularités) est encore déficiente. C'est ce déficit que nous essaierons de combler dans la suite de cette partie. Nous présenterons deux situations modèles : le pli sous compression et le cylindre soumis à une force ponctuelle. Nous introduirons enfin une analogie avec les fluides très visqueux et en donnerons un exemple.

Chapitre 2

Compression d'un pli

« La hache-d'armes se rapproche des moules ; elle est faite comme le fer d'une hache, une pointe d'un côté, un tranchant de l'autre ; elle est armée d'aspérités ; elle n'a ni cuir ni charnière, mais un seul pli élastique. »

Bernardin de Saint-Pierre, *Voyage à l'Île de France*.

Dans ce chapitre, nous étudions une première configuration modèle où plusieurs singularités apparaissent. Cette configuration, un pli comprimé longitudinalement, est probablement utile pour comprendre la structure du papier froissé.

2.1 Présentation

Quand on froisse une feuille de papier, des plis apparaissent. Si l'on continue à contraindre la feuille, des structures de plus petite taille sont produites. Comment un forçage à grande échelle conduit-il à des structures à petite échelle ? Cette question est similaire à celle que l'on se pose en turbulence hydrodynamique pleinement développée. En transposant les concepts de la turbulence à l'élasticité des plaques minces, on peut aussi se demander s'il y a une échelle dissipative en dessous de laquelle l'énergie ne se propage plus vers les petites échelles.

Pour répondre à ces questions, il semble naturel de considérer un pli en particulier (figure 2.1). Si l'on contraint plus la plaque, le pli subit une compression longitudinale ou latérale. Des expériences préliminaires ont montré que les deux modes de compression conduisent aux mêmes phénomènes ; nous nous sommes donc concentrés sur le premier. Nous avons considéré une plaque présentant un pli isolé que nous avons comprimé longitudinalement. Lobkovsky et Witten [99] ont examiné cette configuration numériquement

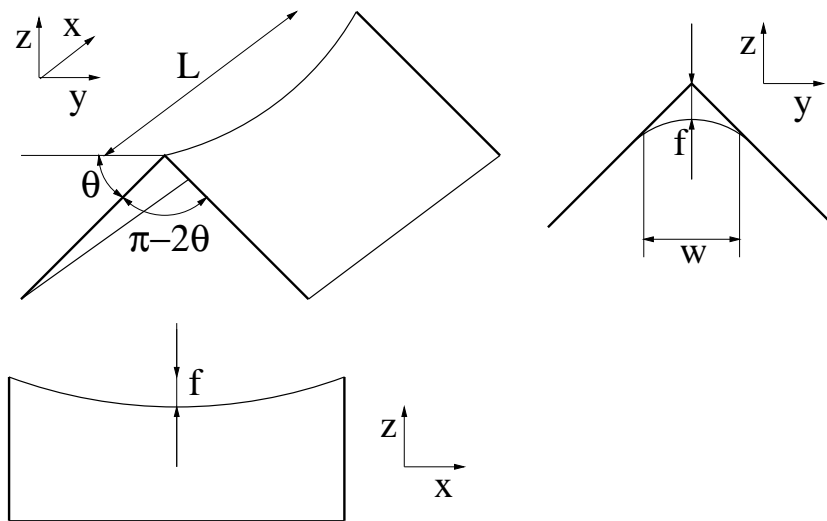


FIG. 2.1 – Reproduction de la figure 1.8. Schéma d'un pli de longueur L et d'angle θ . On impose un angle pour deux bords d'une plaque. La forme est presque plane sauf sur une zone centrale dont l'échelle est exagérée pour la clarté du dessin. Droite : vue selon x ; gauche : vue selon y ; ces dessins donnent la définition de la largeur du pli w et de sa flèche f . w représente l'échelle de raccordement entre les deux zones où la plaque est plane.

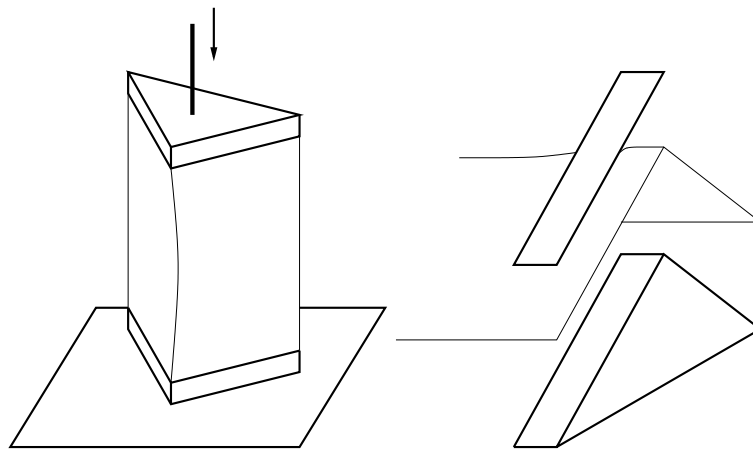


FIG. 2.2 – Schéma de l'expérience. Droite : la plaque est encastrée en la collant sur un bloc de plastique triangulaire et en collant par dessus une barre de cuivre (le support et la barre sont tous deux de largeur 1cm). Gauche : un bras porte le support supérieur et pousse la plaque, le support inférieur est posé sur une feuille de téflon (pour diminuer les frottements) collée sur la table ; une cellule de force piézo-électrique est montée sur le bras.

sur un cas particulier, mais ne l'ont pas explorée systématiquement (probablement à cause du coût en temps de calcul). Ils ont seulement prédit une loi d'échelle pour le seuil en force F_c à partir duquel le pli est instable : $F_c \sim L^{-1/3}$, L étant la longueur du pli. Nous étudions ici expérimentalement, numériquement (avec le programme de Patrício et Krauth [117]) et analytiquement le seuil de stabilité du pli et ce qu'il advient au-delà de ce seuil. Une publication est en préparation [116].

2.2 Mise en place

2.2.1 Expérience

Nous utilisons des transparents d'épaisseur $h = 0,1$ ou $0,05$ mm, de module d'Young $E = 4,6$ GPa et de coefficient de Poisson $\nu = 0,4$. Les feuilles sont rectangulaires, de longueur L et de largeur W (L et W sont de l'ordre de 10 cm).

Un pli est formé en encastrant deux bords opposés de la feuille : on les colle sur deux supports triangulaires (figure 2.2) d'angle au sommet $\pi - 2\theta$, et on colle par dessus des barres de même largeur que les supports. Le point délicat de cette expérience est le parallélisme des deux supports, qui demande un ajustement très soigneux.

Pour éliminer les frottements, les deux supports sont disposés horizontalement. Le support supérieur est fixé à un bras commandé par un moteur pas-à-pas et l'inférieur se pose sur une table. Un capteur de force est intercalé entre le bras et le support supérieur ; il permet de mesurer la force F de résistance à la déformation (corrigée du poids du support supérieur) à 0,01 N près. Le pli est comprimé de manière quasi-statique en rapprochant les deux supports dont la distance devient $L - X$. Le paramètre de contrôle est ce déplacement X , imposé à 0,01 mm près.

2.2.2 Simulations numériques

Nous utilisons le programme de Patrício et Krauth [117] présenté dans le chapitre 1. Nous avons essayé plusieurs résolutions et configurations numériques, avec ou sans symétries, qui donnent les mêmes résultats. Ceux de la figure 2.6 sont obtenus avec une simulation du quart de la plaque, le reste étant complété par symétrie. Le réseau 4×4 utilisé, correspond à 32 triangles et à 471 variables de minimisation. La plaque a les mêmes caractéristiques géométriques et est soumise aux mêmes conditions aux limites que l'expérience : un angle lui est imposé par l'encastrement de deux côtés opposés

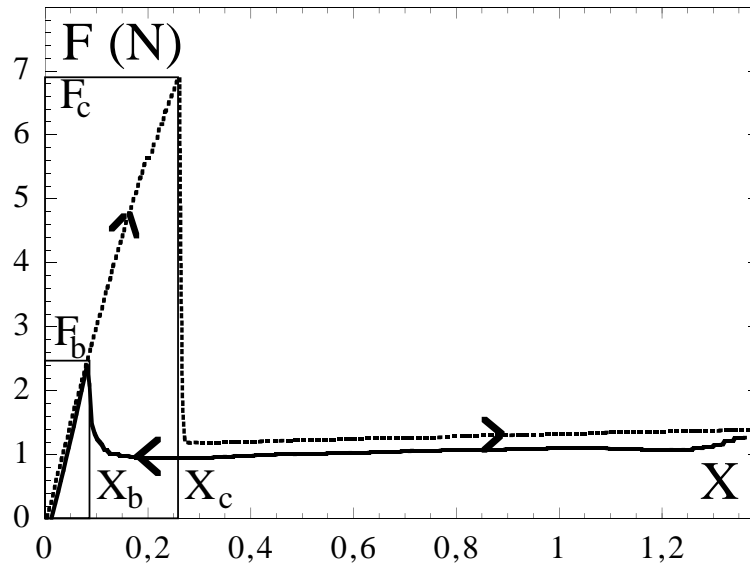


FIG. 2.3 – Courbe expérimentale force/déplacement pour un pli de longueur $L = 14$ cm et d'angle $\theta = 30^\circ$ dans le cas d'une compression symétrique.

alors que les deux autres sont libres.

2.3 Premières observations

Nous décrivons maintenant nos premières observations à la fois expérimentales et numériques. Au début de la compression, la forme de la plaque change très peu. La force de résistance à la déformation augmente rapidement, de manière à peu près linéaire (figure 2.3). A un seuil $X = X_c$ correspondant à une force maximale F_c , une bifurcation sous-critique se produit : un claquement est émis, la force chute brutalement et la plaque flambe. Elle devient polyédrique ; si l'on comprime de manière à peu près symétrique, le pli initial est remplacé par cinq plis secondaires (branchement, figures 2.4-2.5), si l'on comprime de manière dissymétrique, il est remplacé par deux plis secondaires (zigzag, figures 2.4-2.5). Juste après la transition, tous les plis secondaires sont à peu près deux fois plus petits que le pli initial. Les expériences préliminaires montrant des résultats similaires (pour les forces critiques par exemple) dans ces deux situations, nous nous sommes intéressés seulement à une compression symétrique.

La forme évolue ensuite régulièrement alors que la force augmente lentement avec X (figure 2.3). Quand l'un d-cônes extrême c ou d (figure 2.5) arrive aux bords libres de la plaque, une deuxième bifurcation sous-critique

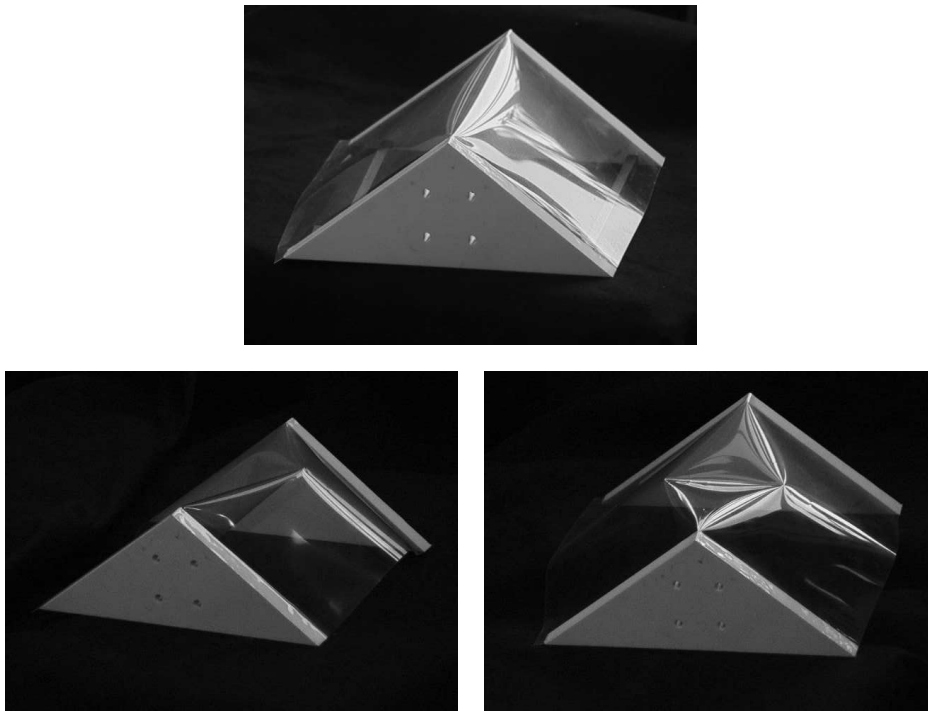


FIG. 2.4 – Photographies de l'expérience. Haut : avant la première bifurcation, pli non comprimé. Bas : après la première bifurcation, pli comprimé dissymétriquement (gauche) ou symétriquement (droite) ; ces deux formes sont schématisées dans la figure 2.5 ci-dessous.

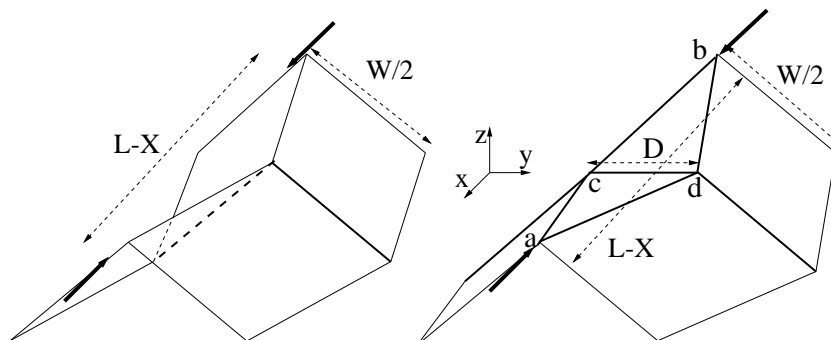


FIG. 2.5 – Schématisation des formes polyédriques de la plaque après la première bifurcation. Gauche : zigzag pour un compression dissymétrique (le bras est fixé loin du plan de symétrie du pli $y = 0$). Droite : branchement pour une compression symétrique. Les flèches montrent comment les plaques sont comprimées.

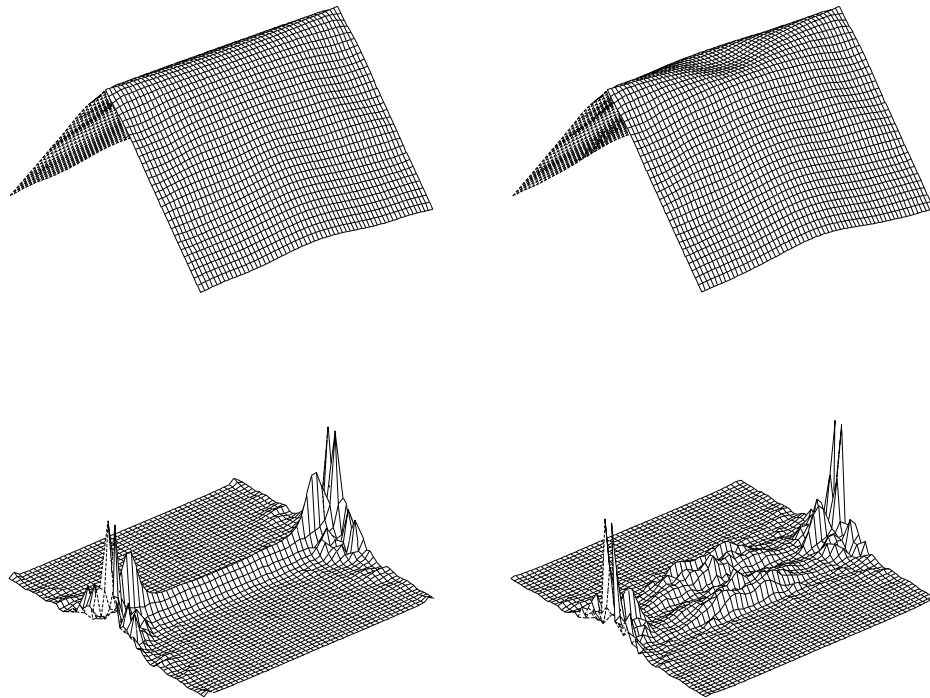


FIG. 2.6 – Simulations numériques pour une compression symétrique : $L = 14$ cm, $\theta = 30^\circ$, $W = 20$. Gauche : $X = 0,14$ mm, avant la transition. Droite : $X = 0,35$ mm, après la transition. Haut : forme de la plaque. Bas : densité d'énergie par unité de surface. Avant la transition, l'énergie est concentrée sur la couche limite ; après elle se focalise au niveau des d-cônes, et principalement autour de a et b. Nous n'avons pas représenté les grands niveaux d'énergie pour que l'on puisse voir la densité d'énergie ailleurs qu'en a ou b.

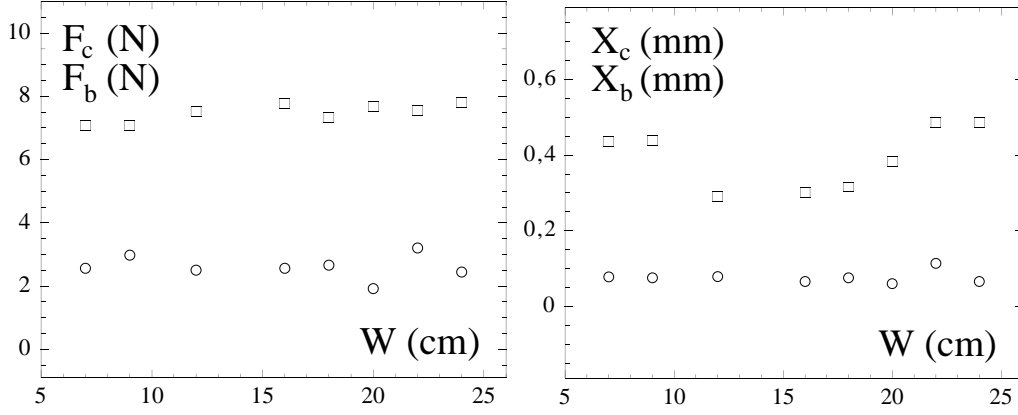


FIG. 2.7 – Dépendance en la largeur W des forces et déplacements critiques pour une pli de longueur $L = 10$ cm et un angle $\theta = 30^\circ$. W a peu d'influence sur les résultats expérimentaux.

se produit, et les singularités disparaissent toutes. Nous n'analyserons pas cette seconde bifurcation, liée à la largeur W finie du système. Si l'on part du régime où la plaque est polyédrique et que l'on diminue X , la transition inverse se fait à $X = X_b < X_c$, où la plaque retrouve sa forme initiale, alors que la force saute jusqu'à $F = F_b < F_c$; quand X atteint 0, la force s'annule à nouveau. La légère différence expérimentale entre la force à l'aller et la force au retour (figure 2.3) est probablement due aux déformations irréversibles de la plaque près des d-cônes a et b; en effet, cette différence est accrue si l'on utilise un matériau (du papier par exemple) dont la limite élastique est plus petite.

Nous avons d'abord vérifié expérimentalement que les résultats que nous présentons ne dépendent pas de la largeur dès que $W \gtrsim w_c$,

$$w_c \sim h^{1/3} L^{2/3} \phi^{-1/3} \quad (2.1)$$

étant la largeur du pli (chapitre 1, équation 1.31). En effet, l'énergie du système est concentrée dans la couche limite de largeur w_c , et peu d'énergie est présente ailleurs. Pour vérifier cela, nous avons mesuré les seuils X_c , X_b , F_c , F_b en fonction de la largeur W de la feuille pour $\theta = 30^\circ$ et $L = 10$ cm. Dans ces conditions la largeur du pli est $w_c \sim 1$ cm. Les mesures (figure 2.7) confirment que W n'a pas d'influence. Elles donnent en même temps une idée des erreurs expérimentales; par exemple, la précision sur X_c est d'ordre 0,1 mm. Nous avons donc travaillé dans ces conditions où les longueurs w_c et W n'ont pas d'influence. Les paramètres géométriques du système sont alors $\alpha = \tan \theta$ (correspondant à l'angle du pli) et L .

2.4 Résultats et modélisation

2.4.1 Avant la transition

Dans la première phase, la forme de la plaque change peu. A l'intérieur du coeur du pli, la déformation est de traction, avec un allongement relatif $-X/L$; à l'extérieur, la déformation est surtout de flexion : la plaque s'incurve légèrement et sa courbure est de l'ordre de X/L^2 . L'énergie de traction correspondante est $E_t \sim Eh(X/L)^2 S$, $S \sim Lw$ étant la surface du coeur¹; l'énergie de flexion est $E_f \sim \kappa(X/L^2)^2 LW$. Bien que la traction s'exerce sur une petite zone, elle domine la flexion : $E_f/E_d \sim W/L(h/L)^{5/3}\alpha^{1/3} \ll 1$. L'énergie additionnelle à l'énergie du pli provient donc essentiellement de la traction :

$$E_{\text{add}} \sim \kappa \left(\frac{X}{L}\right)^2 \left(\frac{L}{h}\right)^{5/3} \alpha^{-1/3}. \quad (2.2)$$

La force de résistance à la déformation $F = \partial_X E_{\text{add}}$ est linéaire en X , comme observé expérimentalement (figure 2.3) :

$$F \sim \frac{\kappa X}{h L} \left(\frac{L}{h}\right)^{2/3} \alpha^{-1/3}. \quad (2.3)$$

2.4.2 Transition

Nous avons mesuré les variations du déplacement critique X_c , et de la force critique $F_c = F(X = X_c)$, en fonction de l'angle θ et de la longueur L du pli (figure 2.11). Pour expliquer les lois d'échelle observées, nous étendons le raisonnement de Lobkovsky et Witten [99] pour inclure les variations de la force critique avec $\alpha = \tan \theta$.

Considérons une plaque en forme de ruban de dimensions $L \times W$. Si elle est soumise à deux forces F selon la direction x (figure 2.8) et qu'elle reste plane, la réponse de la plaque est décrite par les solutions des équations FvK 1.19-1.20 avec un déplacement transverse $\xi = 0$ et une fonction d'Airy $\chi = F\phi(x, y)L/h$, $\phi(x, y)$ étant une fonction d'ordre 1 que nous ne calculerons pas [94]. Maintenant, pour le pli comprimé, nous remplaçons la fonction d'Airy χ par $\chi + F\phi(x, y)L/h$. Avec ce changement de variable, les équations de FvK s'écrivent

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 \xi = 2h[\chi, \xi] + 2LF[\phi, \xi], \quad (2.4)$$

$$\Delta^2 \chi = -E[\xi, \xi], \quad (2.5)$$

¹Ici, comme dans la suite de ce chapitre \sim signifie proportionnel à.

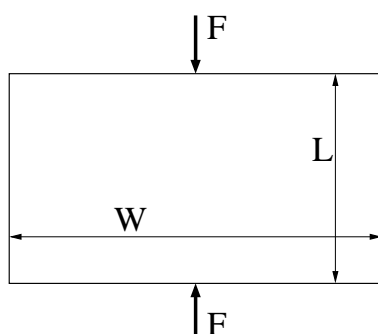


FIG. 2.8 – Une plaque plane de dimensions $L \times W$ est soumise à deux forces F ; si la plaque reste plane, la solution des équations de FvK est un déplacement transverse $\xi = 0$ et une fonction d'Airy $F\phi(x, y) L/h$, où $\phi(x, y)$ est une fonction numérique d'ordre 1.

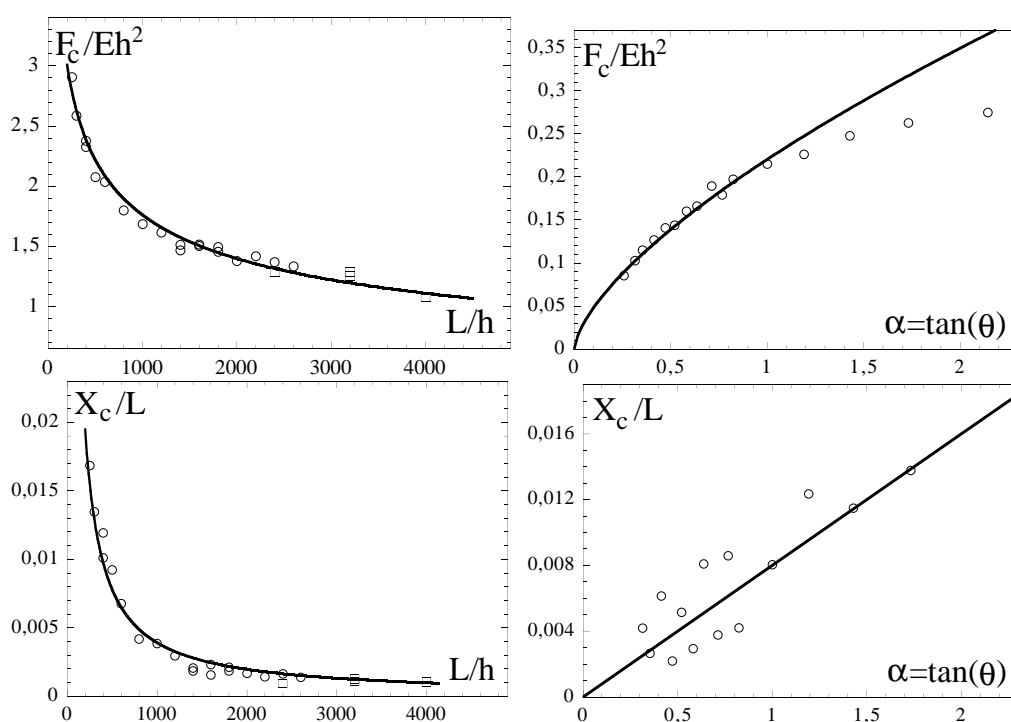


FIG. 2.9 – Force et déplacement critiques en fonction de L pour $\theta = 30^\circ$ fixé, et en fonction de $\alpha = \tan \theta$ pour $L = 12$ cm fixé. Les ronds sont des points expérimentaux pour une épaisseur $h = 0,1$ mm, les carrés correspondent à $h = 0,05$ mm. Les courbes continues sont des ajustements à un paramètre selon les équations 2.11-2.12 ; on trouve $c_1 = 26$ et $c_2 = 6,8$.

le crochet $[\cdot, \cdot]$ étant défini par l'équation 1.14. Comme dans dans le chapitre 1, nous écrivons des équations adimensionnées en posant $x = x'L$, $y = y'L$, $\xi = \xi'L$, $\chi = \chi'Eh^2/12(1 - \nu^2)$, $F = F'Eh^2/12(1 - \nu^2)$, en introduisant le petit paramètre

$$\lambda = \frac{h}{L\sqrt{12(1 - \nu^2)}}, \quad (2.6)$$

et en oubliant les primes pour les nouvelles variables :

$$\Delta^2\xi = 2[\chi, \xi] + 2\lambda^{-1}F[\phi, \xi], \quad (2.7)$$

$$\lambda^2\Delta^2\chi = -[\xi, \xi]. \quad (2.8)$$

La loi donnant la taille du coeur d'un pli suggère les mises à l'échelle suivantes² : $x = x'$, $y = y'\lambda^{1/3}\alpha^{-1/3}$, $\xi = \xi'\lambda^{1/3}\alpha^{2/3}$, $\chi = \chi'\lambda^{-2/3}\alpha^{2/3}$. En oubliant encore les primes pour les nouvelles variables, les équations de FvK donnent, à l'ordre le plus bas en λ ,

$$\frac{\partial^4\xi}{\partial y^4} = 2[\chi, \xi] + 2F\lambda^{-1/3}\alpha^{-2/3}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x, y = 0), \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^4\chi}{\partial y^4} = -[\xi, \xi]. \quad (2.10)$$

Afin de déterminer le seuil de flambage, examinons les termes de l'équation 2.10 ; la force a une influence sur la forme de la plaque si le terme qui lui est proportionnel est d'ordre 1. Nous nous attendons donc à ce que le flambage se produise pour $F\lambda^{-1/3}\alpha^{-2/3} \sim 1$. D'où la force critique

$$F_c = c_1\kappa/h(h/L)^{1/3}\alpha^{2/3}. \quad (2.11)$$

Avec l'équation 2.3, nous obtenons le déplacement critique

$$X_c = c_2h\alpha. \quad (2.12)$$

Ces deux lois représentent bien les résultats expérimentaux, comme le montre la figure 2.9. Les mesures donnent les pré-facteurs

$$c_1 = 26, c_2 = 6,8. \quad (2.13)$$

Théoriquement, les équations de FvK sont valides pour une plaque de pente faible. En pratique la pente peut atteindre 1 : ici la relation force/angle, $F_c(\tan \theta)$ 2.11, est valable jusqu'à environ $\theta = 45^\circ$ (figure 2.9).

²Ainsi dans les nouvelles variables, la taille du coeur est d'ordre 1. Ce raisonnement est usuel pour les couches limites.

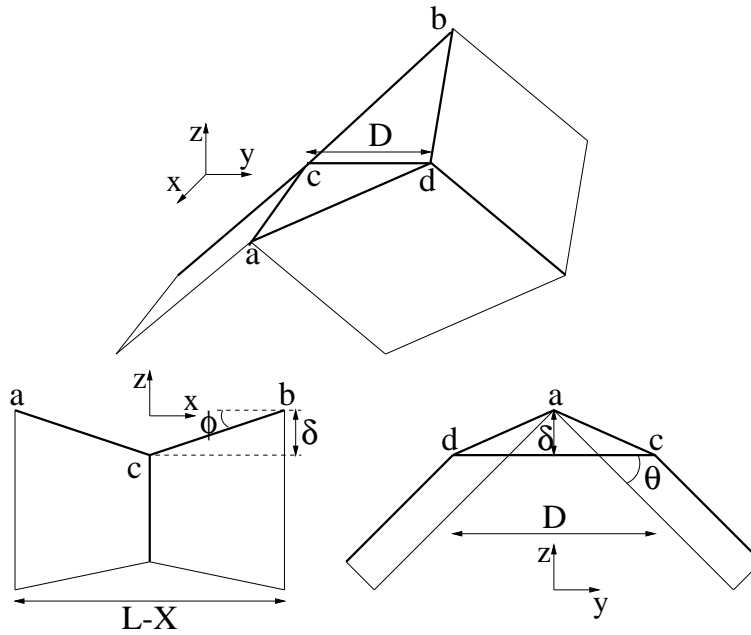


FIG. 2.10 – Configuration symétrique de la figure 2.5 (haut) et vues selon les directions y (gauche) et x (droite). Les plis figurent en gras. Ici sont définies les grandeurs géométriques utilisées dans le texte.

Les deux facteurs de proportionnalité c_1 et c_2 permettent d'écrire la loi d'évolution de la force avant la transition (équation 2.3) sous la forme

$$F = \frac{c_1 \kappa X}{c_2 h h} \left(\frac{h}{L} \right)^{1/3} \alpha^{-1/3}. \quad (2.14)$$

Nous utiliserons cette expression à la fin du chapitre.

2.4.3 Après la transition

Après la transition, la plaque a apparemment une forme polyédrique. Nous pouvons tester cette affirmation en mesurant la longueur D du pli transverse cd (figure 2.10). Le centre de la plaque s'enfonce de $\delta = \sqrt{LX/2}$, les sommets des deux d-cônes c et d s'élèvent de δ par rapport à leur position pour $X = 0$. La distance D s'en déduit aisément :

$$D = \frac{1}{\tan(\theta/2)} \sqrt{2LX}. \quad (2.15)$$

Cette formule coïncide exactement avec les mesures de la figure 2.11. La description géométrique est donc valide ; ce qui n'est pas surprenant si l'on s'attend à des formes de plaques proches de surfaces développables.

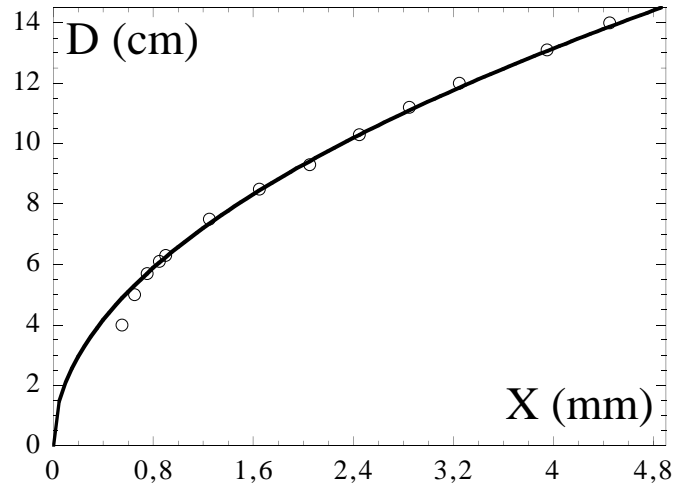


FIG. 2.11 – Distance D entre les d-cônes c et d en fonction de X pour $L = 18$ cm et $\theta = 30^\circ$. Ronds : expérience. Courbe : équation 2.15.

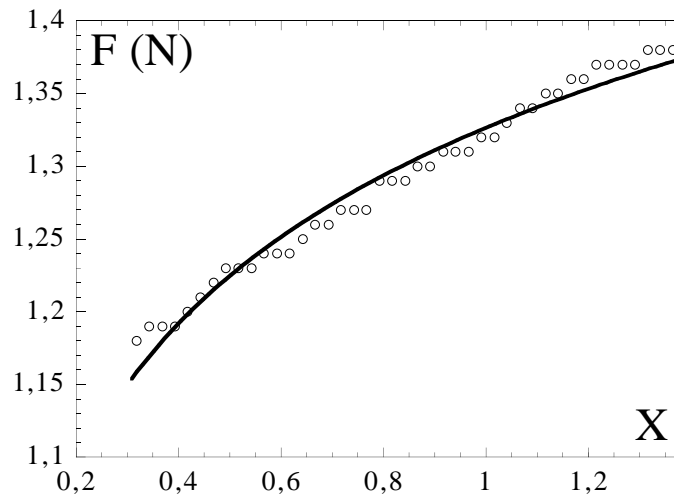


FIG. 2.12 – Agrandissement de la partie après la transition de la courbe force/déplacement de la figure 2.3. Les ronds sont les mesures expérimentales et la courbe est un ajustement à un paramètre avec l'équation 2.17, qui donne $G = 61$.

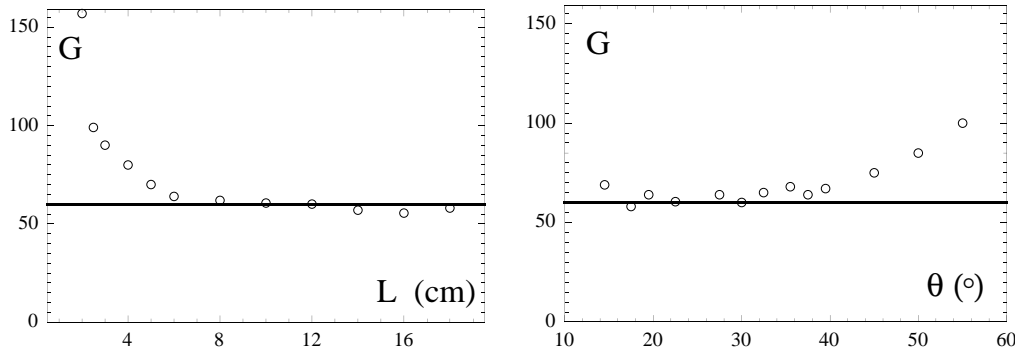


FIG. 2.13 – Facteur de forme des d-cônes a et b, en fonction de la longueur du pli L pour $\theta = 30^\circ$ fixé (gauche) ou de l'angle θ pour $L = 12$ cm fixé (droite). Pour des paramètres géométriques pas trop extrêmes, G est proche de 60.

Les simulations numériques montrent que les contributions dominantes à l'énergie élastique proviennent des d-cônes a et b. En effet, les d-cônes c et d sont aux sommets du polyèdre, ils ont donc un facteur de forme petit (voir la section Ordres de grandeurs du chapitre 1). Les d-cônes a et b sont près des bords encastés, ce qui les contraint fortement. L'énergie des d-cônes a et b se déduit de l'équation 1.35. L'angle d'un cône est $\phi = \delta/(L/2)$ et son rayon est d'ordre $L/4$ (la distance entre les points a et c, par exemple, est $L/2$ donc chaque cône occupe à peu près la moitié de cette longueur). L'énergie de la plaque, réduite à celle des d-cônes a et b, s'écrit

$$E = \frac{2}{3} \kappa G \frac{X}{L} \ln \left(\frac{Eh LX}{\kappa 8} \right). \quad (2.16)$$

G est le facteur géométrique du cône³. La force de résistance à la déformation $F = \partial_X E$ est alors

$$F = \frac{2}{3} \frac{\kappa}{L} G \ln \left(\frac{3}{2} e (1 - \nu^2) \frac{LX}{h^2} \right), \quad (2.17)$$

où e est la base de l'exponentielle. Expérimentalement, un ajustement du paramètre G représente bien la courbe expérimentale (figure 2.12). Le facteur géométrique $G = 60 \pm 3$ obtenu est bien indépendant des paramètres θ et L (figure 2.13) et proche de celui calculé dans une situation particulière ($G = 67$, équation 1.39). La plaque est donc presque polyédrique et son énergie est donnée par les d-cônes se trouvant au bord.

³Nous l'avons noté F_d dans le chapitre 1.

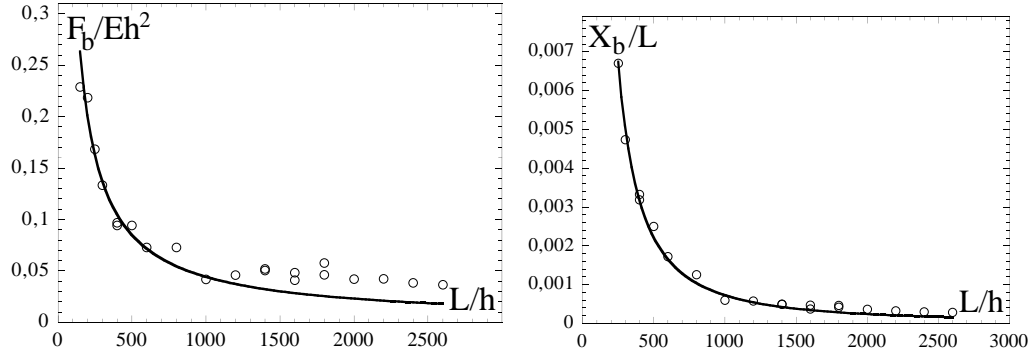


FIG. 2.14 – Force F_b et déplacement X_b à la transition à X décroissant, en fonction de la longueur L pour un angle $\theta = 30^\circ$ et une épaisseur de la plaque $h = 0,1$ mm. Les courbes sont des ajustements à un paramètre suivant les équations 2.18-2.19; on obtient $c_3 = 4,1$ et $c_4 = 25$.

2.4.4 Sur le chemin du retour

Nous avons mesuré les valeurs de la force F_b et du déplacement X_b à la transition lorsque l'on diminue X (figure 2.14). X_b est très petit, ses variations ainsi que celles de F_b en fonction de l'angle θ n'ont pu être mesurées avec précision; à petit θ , les mesures sont sensibles aux imperfections du montage et à grand θ , la plaque subit des déformations plastiques.

Remarquons que, au retour, la position du saut en force est proche de l'intersection entre les parties linéaire, d'équation 2.14, et logarithmique, d'équation 2.17, de la courbe force/déplacement (figure 2.3). Si l'on utilise le fait que le logarithme varie lentement par rapport à une puissance, on obtient les coordonnées de cette intersection

$$\frac{X_b}{L} = c_3 \left(\frac{h}{L} \right)^{5/3} \alpha^{-1/3} \ln \left(\mu \frac{L\alpha}{h} \right), \quad (2.18)$$

$$F_b = c_4 \frac{\kappa}{L} \ln \left(\mu \frac{L\alpha}{h} \right), \quad (2.19)$$

où $\mu = 4,3 \cdot 10^4$, $c_3 = 3,5$, $c_4 = 13$. Les ajustements avec les courbes expérimentales donnent $c_3 = 4,1$ et $c_4 = 25$ qui sont du bon ordre de grandeur.

Les lois force/déplacement que nous avons trouvées donnent donc une bonne représentation des résultats expérimentaux.

2.5 Résumé

Nous avons identifié un mécanisme possible pour la création de petites échelles pour une plaque fortement contrainte. Les plis comprimés latéralement ou longitudinalement se déstabilisent en donnant des plis plus petits. Nous avons montré qu'une description géométrique de la plaque et l'utilisation de l'énergie des singularités permettait des prédictions quantitatives à des facteurs de proportionnalité près. Les simulations numériques ne sont pas achevées; nous en attendons une confirmation de notre interprétation en donnant une estimation indépendante du facteur de forme G que nous avons trouvé expérimentalement. Le succès de la description géométrique nous conduit à nous attaquer à une situation modèle plus complexe, que nous étudions dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Plaque cylindrique contrainte ponctuellement

« Voyez donc. Il y a un cylindre qui a reçu une tape. »

Emile Zola, *La bête humaine*.

On peut imaginer deux façons extrêmes pour contraindre une plaque élastique : une contrainte globale en réduisant le volume disponible, comme dans le chapitre précédent, ou une contrainte ponctuelle, que nous considérons maintenant.

3.1 Présentation

Nous étudions ici une plaque rectangulaire courbée et encastrée sur deux bords opposés, au centre de laquelle appuie une pointe. Cette configuration est l'extension à deux dimensions de l'arche élastique étudiée par Pippard

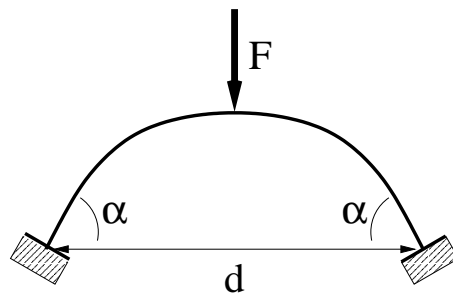


FIG. 3.1 – L'arche élastique est une tige encastrée à ses extrémités. L'encastrement définit deux paramètres de contrôle α et d . Elle se déforme sous l'effet d'une force appliquée en son centre.

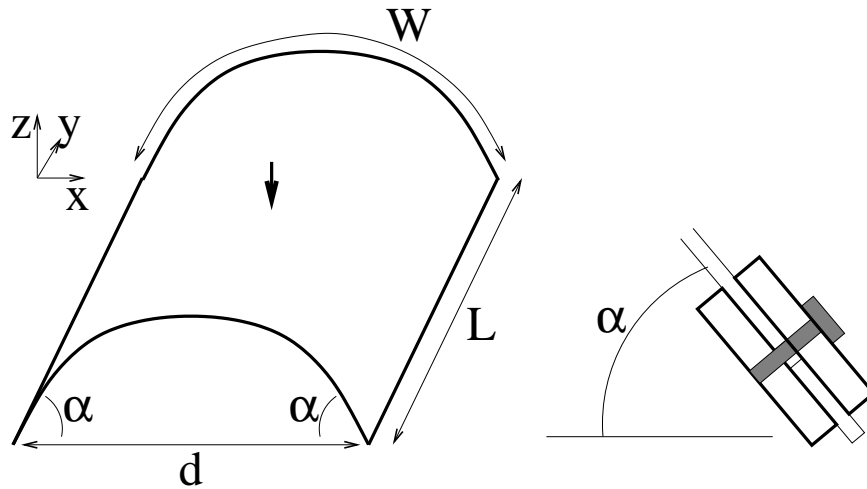


FIG. 3.2 – Gauche : schéma de la configuration expérimentale. Une plaque de dimensions $L \times W$ est fléchie et encastrée sur deux bords opposés, à une distance d et avec un angle α avec l’horizontale ; les deux autres bords sont libres ; une pointe déplace le centre de la plaque d’une distance Z vers le bas. Droite : réalisation de l’encastrement ; la plaque est serrée entre deux barres métalliques boulonnées.

[121] et Patrício *et al.*[115]. Une tige (figure 3.1) est encastrée à ses deux extrémités et soumise à une force verticale en son centre. En augmentant la force, la tige subit une série de bifurcations qui définissent plusieurs scénari possibles selon les valeurs des paramètres α et d .

Si nous appuyions sur la plaque avec une barre de même longueur placée en $x = 0$ (voir la figure 3.2 pour la définition des axes) de sorte que le système soit invariant par translation dans la direction y , la plaque resterait cylindrique et son comportement serait identique à celui de l’arche élastique. Ici, nous contraignons la plaque ponctuellement en appuyant sur son centre. Ainsi la plaque est frustrée, elle présente plusieurs singularités et ne peut accéder immédiatement à l’état cylindrique pourtant favorable énergétiquement car il correspond à une déformation de flexion pure.

Nous étudions la dynamique de la plaque en comparant expérience, simulations numériques (Patrício et Krauth [117]) et prédictions fondées sur l’énergie des singularités. Nous nous consacrons d’abord à une configuration générique, nous envisageons l’influence des paramètres géométriques et nous nous intéressons enfin à la transition entre comportement de plaque et comportement de tige.

Ce travail est le fruit d’une collaboration avec Pedro Patrício et a donné lieu à publication [27, 28].

3.2 Mise en place

3.2.1 Montage expérimental

Les plaques sont des feuilles de Mylar d'épaisseur¹ $h = 0,35$ mm. Sauf à la fin du chapitre, elles sont de rapport d'aspect 2 : longueur $L = 35$ cm et largeur $W = 17,5$ cm². Elles ont pour module d'Young $E = 3,8$ GPa et pour coefficient de Poisson $\nu = 0,4$.

Elles sont encastrées symétriquement le long des bords définis par $x = \pm d/2$ et libres le long des autres bords $y = \pm L/2$. L'encastrement est réalisé en serrant deux barres de part et d'autre d'un bord de la plaque (figure 3.2). Pour assurer le parallélisme des deux barres, il faut rajouter un objet de même épaisseur que la plaque de l'autre côté des vis de serrage, comme schématisé sur la figure 3.2. L'encastrement donne deux nouveaux paramètres expérimentaux identiques à ceux de l'arche élastique : la distance entre les deux bords encastrés d et l'angle α de la plaque avec l'horizontale à ces deux bords.

La plaque a la forme d'un cylindre dont les générateurs sont dans la direction y . Nous utiliserons beaucoup par la suite la courbure du sommet de la plaque (sur la droite définie par $x = 0$ et $z = 0$). Pour la mesurer, nous ajustons le paramètre k pour que la parabole d'équation $z = kx^2$ coïncide avec la partie centrale de section de la plaque par le plan $y = 0$. $2k$ représente la courbure au sommet.

Une pointe conique pousse le centre de la plaque vers le bas. Deux vis micrométriques servent à régler la position horizontale de la pointe, comme nous l'expliquerons ci-dessous. Le paramètre de contrôle est le déplacement vertical Z du centre. Un moteur pas-à-pas permet une précision de 0,01 mm sur Z et un capteur piézo-électrique donne la force verticale F , à laquelle est soumise la plaque, à 0,01 N près.

3.2.2 Simulations numériques

Nous utilisons le programme de Patrício et Krauth [117] présenté dans le chapitre 1. Nous avons essayé plusieurs résolutions et configurations numériques, avec ou sans symétries, qui donnent les mêmes résultats. Comme des simulations de la plaque complète n'ont montré que deux singularités, nous avons utilisé des symétries pour gagner en résolution. Les résultats des figures

¹Nous avons vérifié la généralité de nos résultats en utilisant des feuilles d'épaisseurs 0,05 et 0,1 mm.

²En fait la largeur vaut 20,1 cm, dont 2 fois 1,3 cm sont utilisés pour réaliser l'encastrement ; ainsi la largeur effective est bien 17,5 cm.

3.6-3.7 sont obtenus avec une simulation du quart de la plaque, le reste étant complété par symétrie. Le réseau 4×4 utilisé, correspond à 32 triangles et à 471 variables de minimisation. La plaque a les mêmes caractéristiques géométriques et est soumise aux mêmes conditions aux limites que l'expérience : elle est encastrée sur deux côtés opposés et libre aux deux autres.

3.3 Premières observations

Nous décrivons ici nos premières observations expérimentales et numériques effectuées pour $d = 16,45$ cm et $\alpha = 20^\circ$, puis nous étudions la résistance de la plaque à la déformation.

3.3.1 Observations expérimentales

Lorsque l'on pousse le centre de la plaque, la déformation est à peu près circulaire. Dès $Z \sim 1$ mm, deux d-cônes reliés par un pli apparaissent (figure 3.3). Quand le déplacement vertical Z augmente, les deux d-cônes s'éloignent l'un de l'autre le long de l'axe x . La plaque reste invariante par les symétries miroir de plans d'équations $x = 0$ et $y = 0$. À $Z = 10$ mm, une bifurcation supercritique brise ces deux symétries : deux nouveaux d-cônes apparaissent et forment un losange avec les deux autres. Le losange tourne autour du centre (figures 3.3, 3.4), soit vers la droite, soit vers la gauche. La plaque est maintenant invariante par la symétrie $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. À $Z = 11,5$ mm, une seconde bifurcation supercritique brise toutes les symétries : l'un des deux sommets d'angle aigu se déplace, de sorte que, à $Z = 12$ mm, les quatre d-cônes forment un trapèze isocèle (figures 3.3, 3.4). La grande base du trapèze est soit à droite, soit à gauche ; la symétrie miroir d'axe y est respectée à nouveau. Quand Z augmente encore, les bases du trapèze grandissent jusqu'à ce que, à $Z = 13$ mm, deux des sommets soient proches des bords libres. À ce moment-là, une bifurcation sous-critique se produit : la plaque devient cylindrique alors qu'un claquement est émis (de l'énergie est dissipée sous forme sonore). Si Z augmente encore, la plaque reste cylindrique. Si maintenant on diminue Z , la plaque demeure cylindrique jusqu'à environ $Z = 4$ mm, où la bifurcation sous-critique inverse se produit ; la plaque a alors deux d-cônes sur l'axe x et ce régime demeure presque jusqu'à $Z = 0$.

Nous pouvons maintenant expliquer comment régler la position horizontale de la pointe qui devrait coïncider avec le centre de la plaque. Deux problèmes se posent : d'une part, la détermination géométrique du centre de la plaque n'est pas très précise ; d'autre part, le montage présente d'inévitables imperfections. La procédure que nous avons utilisée est expliquée dans

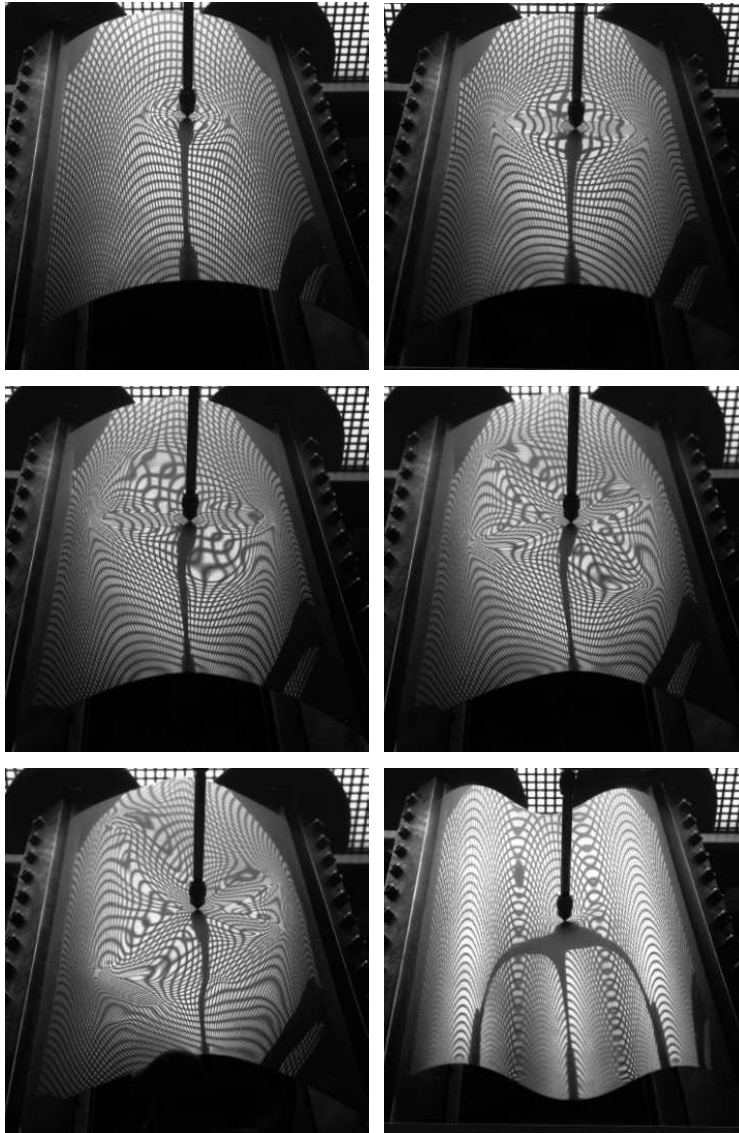


FIG. 3.3 – Photographies de l'expérience pour $\alpha = 20^\circ$ et $d = 16,45$ cm ; les lignes sur la plaque sont l'ombre d'une grille que l'on aperçoit en arrière-plan. Haut gauche : $Z = 0,5$ mm ; la déformation à peu près circulaire est concentrée autour de la pointe. Haut droite : $Z = 4$ mm ; deux d-cônes positionnés en $(x, y) = (\pm D, 0)$ sont joints par un pli. Milieu gauche : $Z = 10,5$ cm ; quatre d-cônes forment un losange et sont joints par deux plis. Milieu droite : $Z = 11,5$ mm ; deux des cotés du losange sont parallèles aux bords encastrés. Bas gauche : $Z = 12,5$ mm ; les quatre d-cônes forment un trapèze. Bas droite : $Z = 15$ cm ; la plaque est cylindrique et ne présente plus de singularité. Ces photos sont schématisées sur la figure 3.4.

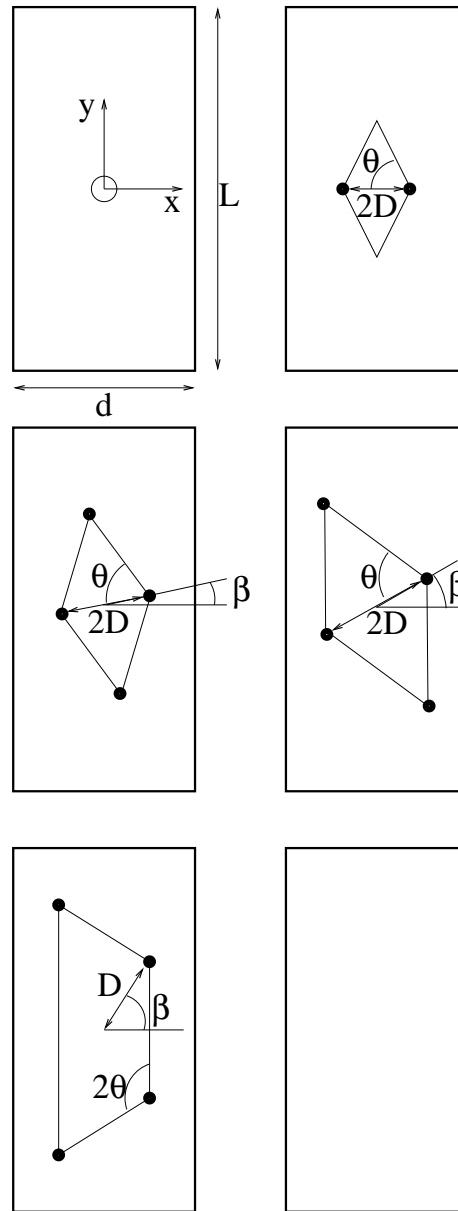


FIG. 3.4 – Schématisation des photographies de la figure 3.3 : la plaque est vue du dessus et les sommets des d-cônes sont symbolisés par des points noirs. L'angle d'ouverture des deux d-cônes principaux est 2θ , leur distance au centre est D , et leur position est définie par l'angle β .

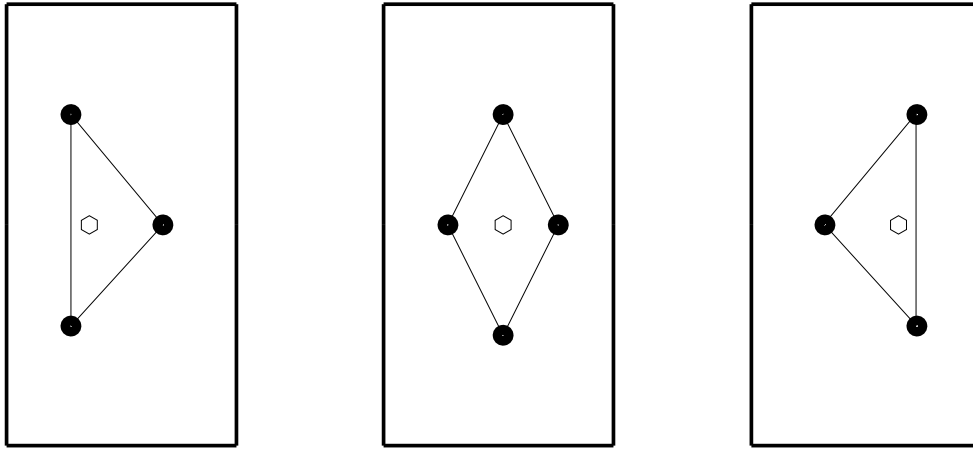


FIG. 3.5 – Réglage de l'expérience : la position de la pointe est symbolisée par un hexagone. Si la pointe est à gauche du centre, on observe trois d-cônes formant un triangle de plus grand côté à gauche. On soulève la pointe jusqu'à ce qu'elle ne soit plus au contact de la plaque, on la déplace avec une vis micrométrique vers la droite, et on baisse à nouveau la pointe. Si on observe un triangle dans la même configuration, on répète le déplacement de la pointe vers la droite ; si on observe un losange, l'expérience est réglée ; sinon, on observe un triangle de grand côté à droite, on procède alors de même en déplaçant la pointe vers la droite. Le réglage se fait ainsi par dichotomie.

la figure 3.5 ; elle repose sur l'observation suivante. On part d'une situation où se déroule le scénario décrit dans le paragraphe précédent. On déplace la pointe vers les x positifs ; si l'on appuie sur la plaque, on observe, après la première bifurcation, trois d-cônes, deux d'abscisse $x < 0$, et un avec $x > 0$ et $y = 0$. Si l'on déplace la pointe vers les x négatifs, on observe trois d-cônes avec une configuration symétrique de la première par rapport à l'axe y . Une observation équivalente est faite si l'on déplace la pointe dans la direction y . Nous avons ainsi constaté que la position de la pointe doit être réglée à 0,1 mm près pour respecter la symétrie du système et compenser ses éventuelles imperfections.

3.3.2 Observations numériques

La plaque présente deux d-cônes qui s'éloignent l'un de l'autre lorsque Z augmente. Elle subit une bifurcation sous-critique vers un état cylindrique pour $Z = 13$ mm. Les régimes à 4 d-cônes ne sont pas observés³ probablement

³Même pour les simulations de la plaque complète qui ne supposent aucune symétrie.

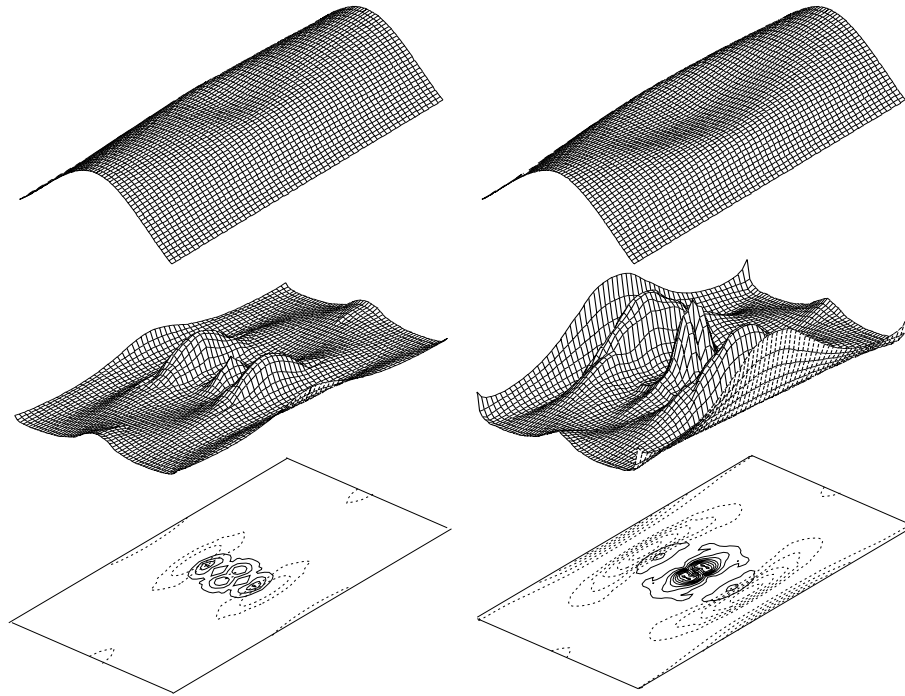


FIG. 3.6 – Simulations numériques pour $h = 0,35$ mm, $W = 17,5$ cm, $L = 35$ cm, $\alpha = 20^\circ$ et $d = 16,45$ cm. Gauche : $Z = 5$ mm ; droite $Z = 12$ mm. Haut : forme de la plaque ; milieu : énergie élastique par unité de surface ; bas : lignes d'égale énergie de traction (continues) et de flexion (pointillés). Nous remarquons que l'énergie est concentrée au centre de la plaque et surtout autour du sommet des d-cônes. L'énergie de flexion est grande devant l'énergie de traction ; cette dernière n'est présente qu'au centre des d-cônes et au centre de la plaque. Remarquons à grand déplacement vertical ($Z = 12$ mm) la présence d'énergie de flexion près des bords encastres.

à cause du manque de résolution numérique.

La figure 3.6 montre les formes et les énergies de la plaque pour $Z = 5$ et 12 mm. L'énergie de traction est négligeable sauf aux pointes des d-cônes et au centre de la plaque. La pointe impose au centre de la plaque une courbure dans les deux directions x et y , d'où une courbure de Gauss non nulle qui est source de la traction ; ce qui explique la présence d'énergie de traction au centre. L'énergie de flexion est maximale près de la pointe des d-cônes. Pour $Z = 12$ mm, nous pouvons remarquer la présence d'énergie de flexion près des bords encastres, maximale en $(x, y) = (\pm d/2, 0)$.

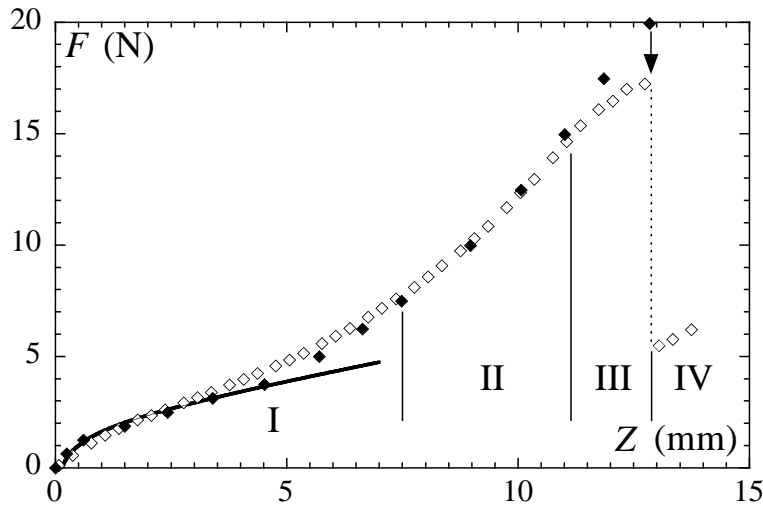


FIG. 3.7 – Force de résistance à la déformation F en fonction du déplacement vertical Z du centre de la plaque. Carrés vides : expérience ; carrés pleins : simulations ; courbe continue : expression analytique (équation 3.5). La flèche indique la transition numérique vers l'état cylindrique.

3.3.3 Résistance à la déformation

Nous avons étudié la résistance de la plaque à la déformation en mesurant la force en fonction du déplacement imposé. Numériquement, nous avons imposé la force et trouvé le déplacement vertical Z à l'équilibre⁴. La force augmente lentement jusqu'à environ $Z = 7,5$ mm, puis plus rapidement jusqu'à $Z = 13$ mm (figure 3.7). Cette pente plus grande s'explique par la présence d'énergie de flexion près des bords encastres, pour $Z > 7,5$ mm, comme nous l'avons observé numériquement. Pour $11 \text{ mm} < Z < 13$ mm, l'estimation numérique diffère de la mesure expérimentale car les simulations ne montrent pas de situations à quatre d-cônes. A $Z = 13$ mm, la plaque devient cylindrique (déformation de flexion), son énergie est plus petite qu'en présence de singularités ; on s'attend donc à ce que la force décroisse. L'émission sonore correspond à la dissipation de l'énergie en trop après la bifurcation.

⁴Il serait possible de faire l'inverse en imposant le déplacement vertical Z , en trouvant l'énergie élastique E de la plaque en fonction de Z et en calculant la force comme dérivée de E par rapport à Z . Toutefois, le calcul de la dérivée n'est pas précis numériquement ; pour y remédier, il faudrait augmenter le nombre de points numériques, ce qui est coûteux en temps de calcul.

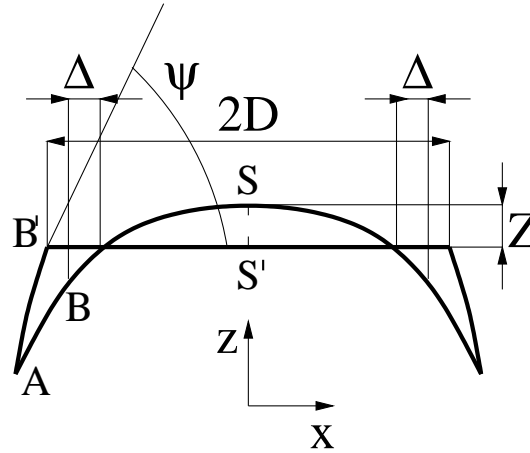


FIG. 3.8 – Schématisation de deux coupes (pour $Z = 0$ et un enfoncement Z non nul) de la plaque par le plan d'équation $y = 0$ dans le régime à deux d-cônes. Les déformations sont exagérées pour la clarté du dessin. Le centre S de la plaque est abaissé de Z jusqu'à S' . Les deux d-cônes d'angle au sommet ψ sont distants de $2D$. Les arcs AB et BS sont déformés en AB' et $B'S'$, de même longueur respectivement.

3.4 Étude du scénario le plus général

Nous étudions maintenant en détail le scénario que nous venons de présenter. Dans toute cette étude, nous considérerons une plaque de rapport d'aspect 2 ($W \times L = 17,5 \times 35$ cm). Ce scénario est valide si la plaque est assez longue ou assez courbée, comme nous le verrons par la suite.

Nous présentons une description géométrique de tous les régimes observés ainsi que des transitions entre eux. Le principe de cette description est que les cônes perturbent une zone à peu près circulaire de la plaque et que, géométriquement, il n'est pas possible de raccorder un cône à un bord encastré. Ainsi la dynamique des zones coniques explique le comportement du système.

3.4.1 Régime à deux d-cônes

Quand les singularités apparaissent-elles? Avant leur apparition, la zone déformée est à peu près circulaire, d'aire $S = r^2$. L'allongement relatif et la courbure sont donnés par $a \sim Z^2/r^2$ et $c \sim Z/r^2$ respectivement. La traction et la flexion ont pour énergies $E_t \sim Eha^2S \sim EhZ^4/r^2$ et $E_f \sim Eh^3c^2S \sim Eh^3Z^2/r^2$ respectivement. Les singularités vont apparaître dès que la traction est trop coûteuse, *i.e.*, dès que $Z \gtrsim h$.

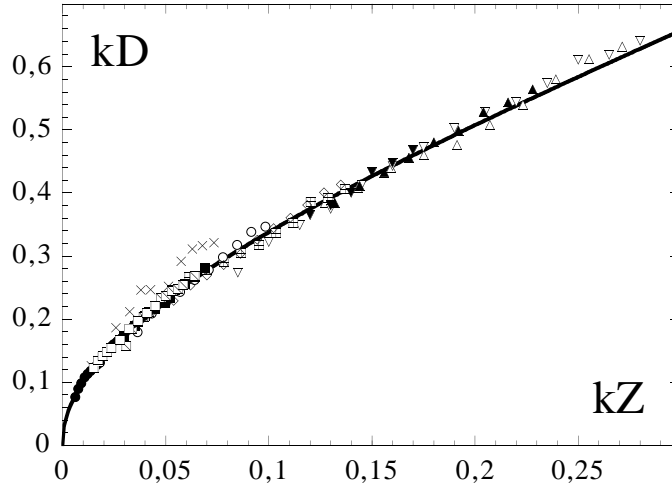


FIG. 3.9 – Régime à deux d-cônes : distance $2D$ en fonction du déplacement vertical Z , adimensionnés par la courbure $2k$. Δ : $\alpha = 15^\circ$ et $d = 13,6$ cm ; ∇ : $\alpha = 30^\circ$ et $d = 12,75$ cm ; \boxplus : $\alpha = 30^\circ$ et $d = 14,95$ cm ; \circ : $\alpha = 35^\circ$ et $d = 15,4$ cm ; \diamond : $\alpha = 40^\circ$ et $d = 14,65$ cm ; \blacksquare : $\alpha = 40^\circ$ et $d = 15,9$ cm ; \blacktriangle : $\alpha = 45^\circ$ et $d = 13,25$ cm ; \boxtimes : $\alpha = 55^\circ$ et $d = 14,65$ cm ; \blacktriangledown : $\alpha = 60^\circ$ et $d = 13,05$ cm ; \square : $\alpha = 60^\circ$ et $d = 15,1$ cm ; \bullet : $\alpha = 65^\circ$ et $d = 15,55$ cm ; \blacklozenge : $\alpha = 75^\circ$ et $d = 14,2$ cm. \times : positions numériques pour $\alpha = 20^\circ$ et $d = 16,45$ cm, déterminées avec les maxima d'énergie élastique.

Soit $2D$ la distance entre les deux d-cônes ; D augmente avec Z . Nous allons montrer comment prédire D géométriquement. Considérons une section de la plaque non déformée par le plan $y = 0$ (Figure 3.8) et approchons la par sa parabole osculatrice d'équation $z = kx^2$. Quand le centre est déplacé, l'arc BS est transformé en un segment B'S de longueur D reliant un d-cône au centre de la plaque. La transformation étant presque une isométrie, l'égalité des deux longueurs donne $\Delta \simeq 2/3 k^3 D^2$, d'où

$$kD \simeq \sqrt{kZ} \left(1 + \frac{2}{3}kZ \right). \quad (3.1)$$

Cette équation représente bien les résultats expérimentaux et numériques (figure 3.9). La description géométrique des déformations de la plaque est donc valide.

3.4.2 Prédiction de l'énergie

Le succès de la description géométrique incite à calculer l'énergie de la plaque. L'énergie des deux d-cônes est donnée par 1.35. Il faut déterminer

leur angle, leur rayon et leur facteur de forme. En examinant la section de la plaque suivant $y = 0$, nous trouvons l'angle $\psi \simeq 2kD$, soit

$$\psi \simeq 2\sqrt{kZ}. \quad (3.2)$$

Pour trouver la taille du d-cône, remarquons qu'il génère une courbure ψ/r à une distance r de sa pointe; la courbure de la plaque loin du cône est $2k$. Ces deux courbures sont du même ordre de grandeur à la périphérie du d-cône : $\psi/R \sim 2k$, d'où

$$kR \simeq \sqrt{kZ}. \quad (3.3)$$

La zone centrale de la plaque en forme de losange est inversée, l'angle du losange à la position d'un d-cône 2θ se situe dans l'intervalle 120-140° (il varie lentement avec la courbure $2k$, voir la figure 3.10), ce qui est voisin de l'angle mesuré pour un d-cône isolé [43, 39] (voir le chapitre 1). Nous utiliserons donc le facteur de forme de cette situation $F_d = 67$ (équations 1.38-1.39). Pour faire la correspondance des angles, il faut utiliser $\phi = \psi/\mu$, avec $\mu = 4,8$. Nous en déduisons l'énergie des deux d-cônes, à l'ordre le plus bas en kZ ,

$$2E_d = \frac{8 F_d}{3 \mu^2} \kappa k Z \ln\left(\sqrt{\frac{Eh}{\kappa \mu}} \frac{Z}{\mu}\right); \quad (3.4)$$

la force de résistance à la déformation est $F = 2 dE_d/dZ$, soit

$$F = \frac{8 F_d}{3 \mu^2} \kappa k \ln\left(e \sqrt{12(1 - \nu^2)} \frac{Z}{\mu h}\right). \quad (3.5)$$

Elle coïncide avec la force expérimentale et avec la force numérique, pour Z pas trop grand (figure 3.7, où $k = 5,7 \text{ m}^{-1}$). Ainsi le rapport force/courbure est une fonction universelle de Z , comme le montre la figure 3.11. Cette description est valide tant que les points coniques n'interagissent pas avec les bords.

3.4.3 Régimes à quatre d-cônes

On peut tenir des raisonnements géométrique similaires à ceux que nous avons tenus pour deux d-cônes. Dans les régimes avec un losange ou un trapèze, considérons les deux d-cônes avec un angle d'ouverture 2θ (les plus proches de la pointe, figure 3.4) et une section de la plaque par le plan vertical passant par la pointe et un d-cône, *i.e.* d'équation $y = \tan\beta x$. Sans déplacement imposé, la section est approchée par $z = k \cos^2\beta s^2$, s étant la coordonnée le long de la section. $k \cos^2\beta$ remplace k dans le calcul

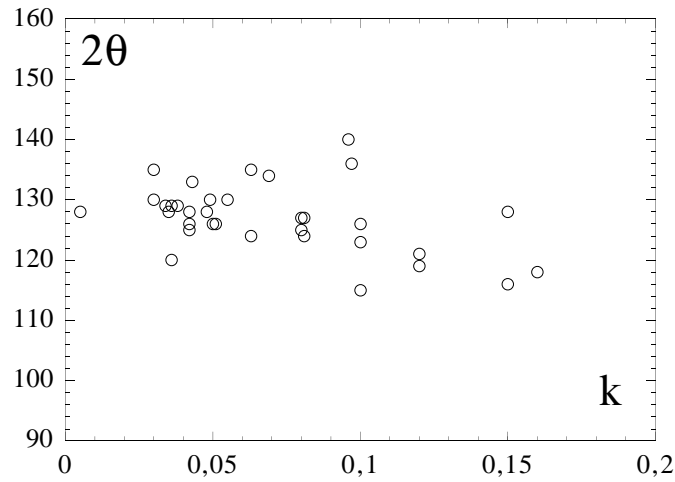


FIG. 3.10 – L'angle d'ouverture de la paire 2θ principale de d-cônes évolue lentement avec la courbure $2k$. Il est essentiellement compris dans l'intervalle $120 - 140^\circ$.

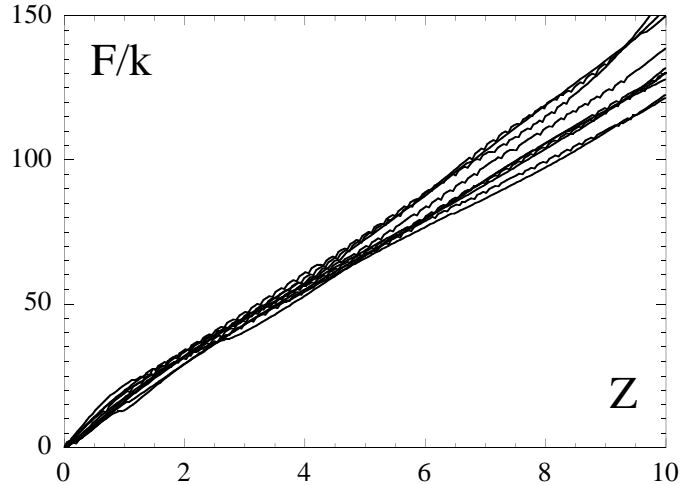


FIG. 3.11 – Rapport force/courbure F/k (unités arbitraires) pour $\alpha = 35^\circ$ et $d = 15,4$ cm, $\alpha = 30^\circ$ et $d = 15,15$ cm, $\alpha = 15^\circ$ et $d = 13,6$ cm, $\alpha = 45^\circ$ et $d = 15,1$ cm, $\alpha = 40^\circ$ et $d = 15,9$ cm, $\alpha = 20^\circ$ et $d = 15,3$ cm, $\alpha = 55^\circ$ et $d = 15,55$ cm, $\alpha = 60^\circ$ et $d = 15,1$ cm, $\alpha = 85^\circ$ et $d = 14,5$ cm, $\alpha = 40^\circ$ et $d = 16,1$ cm, dans l'ordre croissant de la plus grande ordonnée de chaque courbe.

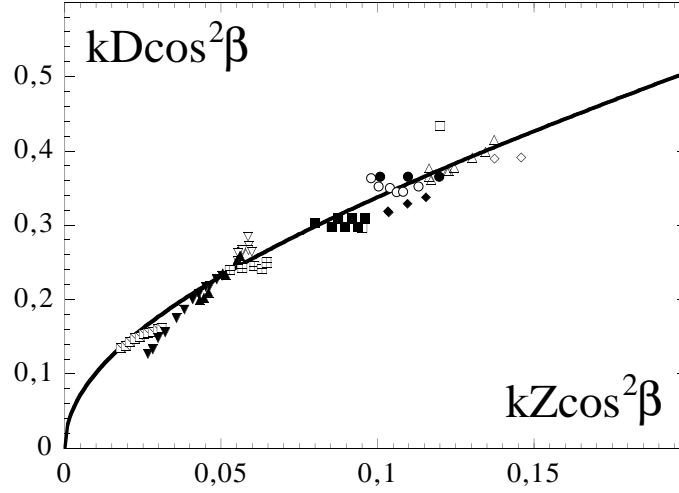


FIG. 3.12 – Régimes à quatre d-cônes : distance D au centre d'un élément de la paire principale en fonction du déplacement vertical Z , adimensionnés par la courbure $2k \cos^2 \beta$. \square : $\alpha = 20$ et $d = 15,3$; \diamond : $\alpha = 30$ et $d = 14,95$; \triangle : $\alpha = 30$ et $d = 15,15$; ∇ : $\alpha = 40$ et $d = 16,1$; \circ : $\alpha = 60$ et $d = 14,7$; \boxplus : $\alpha = 60$ et $d = 15,1$; \boxtimes : $\alpha = 65$ et $d = 15,55$; \bullet : $\alpha = 20$ et $d = 15,3$; \blacksquare : $\alpha = 30$ et $d = 14,95$; \blacklozenge : $\alpha = 30$ et $d = 15,15$; \blacktriangle : $\alpha = 40$ et $d = 16,1$; \blacktriangledown : $\alpha = 60$ et $d = 15,1$.

aboutissant à l'équation 3.1. Ainsi, la distance entre l'un de ces d-cônes et le centre de la plaque est donnée par

$$k \cos^2 \beta D \simeq \sqrt{k \cos^2 \beta Z} \left(1 + \frac{2}{3} k \cos^2 \beta Z \right). \quad (3.6)$$

Cette relation représente bien les résultats expérimentaux (figure 3.12). Nous pouvons maintenant étudier les deux bifurcations supercritiques.

3.4.4 Transition vers le losange

Les simulations montrent que, dans le régime à deux d-cônes, il est coûteux énergétiquement que la distance entre la périphérie des d-cônes et les bords encastres devienne petite. On s'attend donc à un changement de comportement quand cette distance s'annule, ce qui se traduit par $R + D = W/2$ (figure 3.14), R étant le rayon de la zone conique, soit pour

$$Z_c = \frac{1}{16} kW^2. \quad (3.7)$$

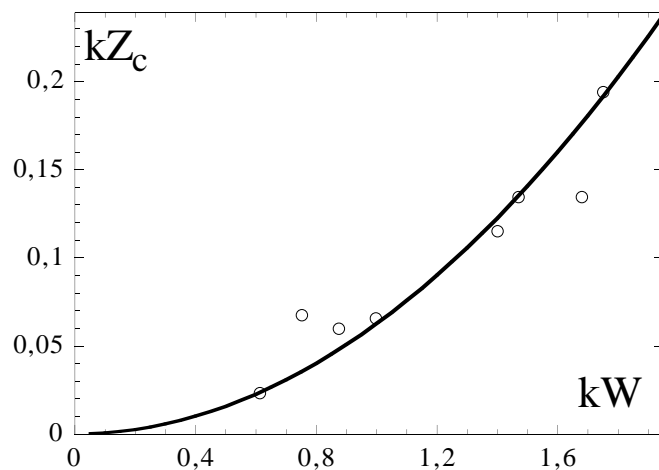


FIG. 3.13 – Déplacement vertical Z_c à la transition vers le losange en fonction de W , adimensionnés par la courbure $2k$. Ronds : expérience ; courbe : équation 3.7.

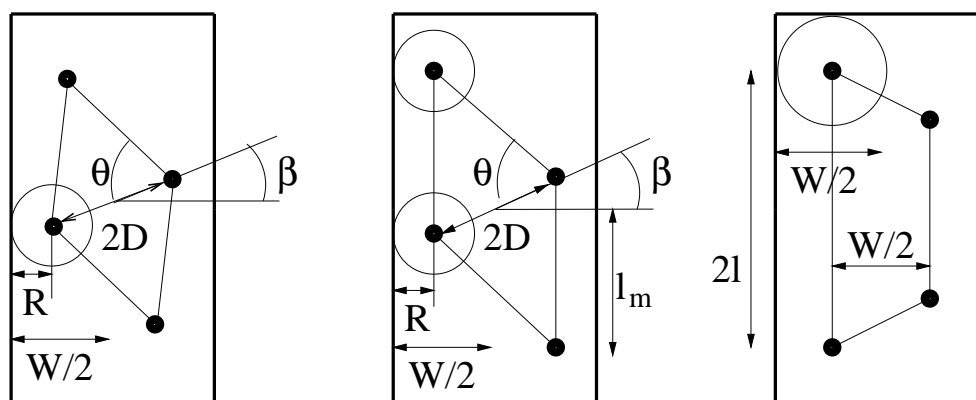


FIG. 3.14 – Gauche : lors de la rotation du losange, deux des cônes ont leurs périphéries tangentes aux bords encastés. Milieu : à la transition du losange vers le trapèze, les quatre d-cônes ont leurs périphéries tangentes au bord encastés. Droite : à la transition du trapèze vers le cylindre, deux des d-cônes ont leurs périphéries tangentes aux bords libres.

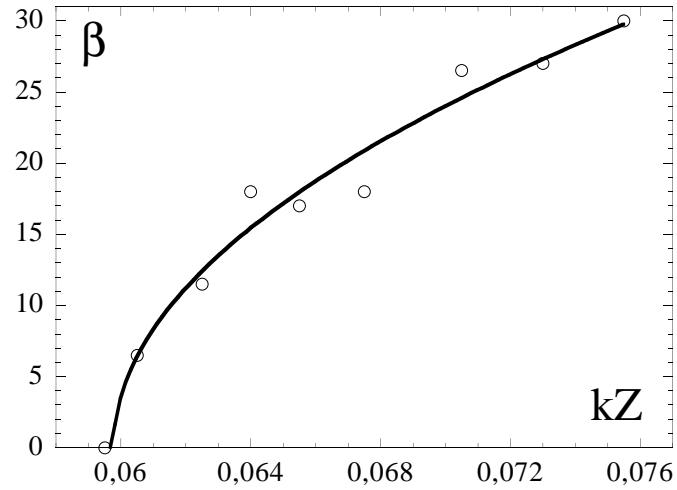


FIG. 3.15 – Évolution de l'angle de rotation β du losange en fonction de Z pour $\alpha = 40^\circ$ et $d = 16,1$ cm. Ronds : expérience; courbe : meilleur ajustement de la forme $c\sqrt{k(Z - Z_c)}$.

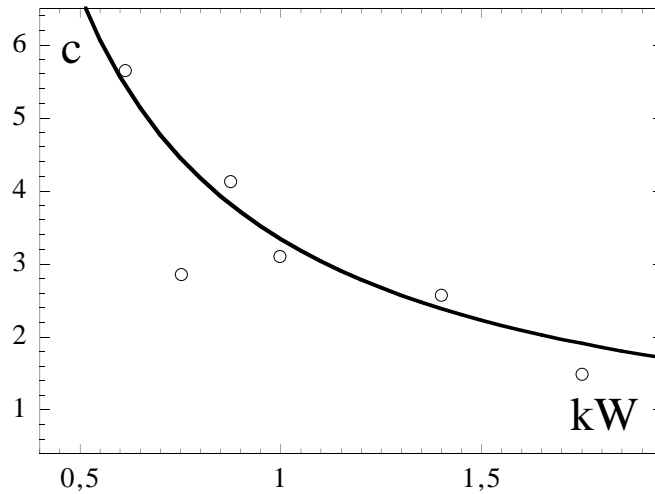


FIG. 3.16 – Évolution du coefficient c de la racine de l'écart au seuil (équation 3.9) en fonction de la courbure adimensionnée kW . Ronds : expérience; courbe continue : meilleur ajustement en $1/(kW)$.

Cette loi est en accord avec les résultats expérimentaux de la figure 3.13. Pour $\alpha = 20^\circ$ et $d = 16,45$ cm, cela donne $Z_c = 10,9$ mm, proche de la valeur expérimentale $Z_c = 10$ mm.

Après Z_c , le d-cône se déplacera de sorte que la périphérie de la zone conique reste en contact avec le bord encastré (figure 3.14)). Ceci se traduit par $R + D \cos \beta = W/2$. Pour calculer le rayon du d-cône, procédons comme dans la section 3.4.2. Il est déterminé par le raccordement entre courbure due au d-cône ψ/R et celle de la plaque $2k$; l'angle au sommet du cône est $\psi \simeq 2k \cos^2 \beta D$, d'où

$$R \sim \cos \beta \sqrt{Z/k}. \quad (3.8)$$

On en déduit le comportement de l'angle de rotation du losange près du seuil

$$\beta = \pm c \sqrt{k(Z - Z_c)}, \quad (3.9)$$

$$c = \frac{4\sqrt{2}}{kW}. \quad (3.10)$$

Ainsi s'explique la première bifurcation supercritique. Le comportement en racine de l'écart au seuil est bien observé expérimentalement (figure 3.15). Le coefficient de la racine vaut, $c \simeq 3,3/(kW)$ (figure 3.16), il est un peu plus petit que la prédiction.

Les deux d-cônes les plus proches de la pointe tournent symétriquement autour du centre; si leur angle d'ouverture 2θ est fixé, la zone inversée de la plaque délimite un losange dont les sommets sont des singularités coniques. Cette rotation continue jusqu'à la transition vers le trapèze.

3.4.5 Transition vers le trapèze

Considérons maintenant les d-cônes les plus éloignés de la pointe; lors de la rotation du losange, ils se rapprochent des bords encastrés. On s'attend à un changement de comportement lorsque leurs périphéries touchent le bord encastré. Ceci se produit approximativement quand $\beta = \pi/2 - \theta$ (figure 3.14). En utilisant la condition $R + D \cos \beta = W/2$ de la section précédente, cela se traduit par $Z = Z_t$, où

$$kZ_t = \left(\frac{kW}{2(1 + \sin \theta)} \right)^2. \quad (3.11)$$

Cette expression est en accord avec l'expérience comme le montre la figure 3.17. La transition vers le trapèze se produisant très rapidement (pour un déplacement vertical ΔZ de l'ordre de 0,5 mm), nous n'avons pas pu mesurer le paramètre d'ordre de la bifurcation.

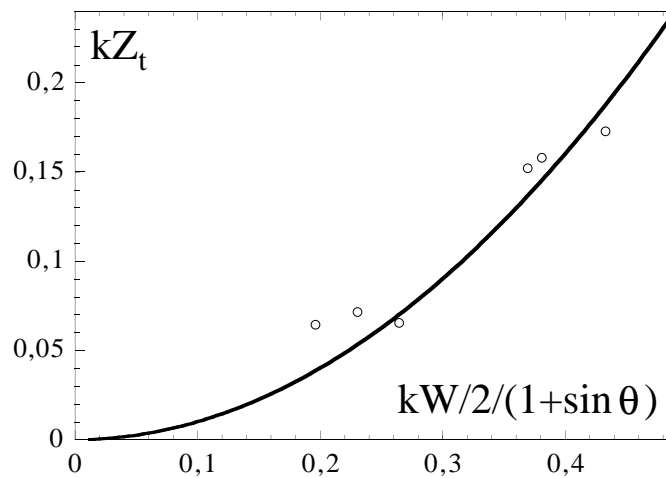


FIG. 3.17 – Déplacement vertical adimensionné kZ_t à la transition vers le trapèze en fonction de la courbure adimensionnée $kW/2/(1 + \sin \theta)$. Ronds : expérience ; courbe continue : équation 3.11.

Maintenant, le motif est un quadrilatère. Si deux de ses sommets ont un angle d'ouverture 2θ et les deux autres ont une ouverture $\pi - 2\theta$, ce quadrilatère est nécessairement un trapèze isocèle. Étant donné le contact des périphéries des d-cônes avec le bord encastré, l'évolution du trapèze se fait à hauteur constante ; sa largeur augmente jusqu'à la transition vers le cylindre.

3.4.6 Transition vers le régime cylindrique

En approfondissant les observations, on s'aperçoit que la transition vers le régime cylindrique se produit avant que les sommets des deux d-cônes les plus loin de la pointe arrivent aux bords libres. En fait, elle se produit quand leurs périphéries atteignent les bords libres (figure 3.14) : les sommets des d-cônes se trouvent environ au quart de la largeur de la plaque, leur rayon est donc $W/4$; si on appelle l la distance des sommets à l'axe x , la transition a lieu quand

$$l + W/4 = L/2. \quad (3.12)$$

Expérimentalement (figure 3.18), à la transition la distance l est en général un peu plus petite que $L/2 - W/4$, probablement parce que, si l'expérience est légèrement asymétrique, l'un des deux d-cônes arrive au bord avant l'autre, *i.e.* plus tôt que prévu. Après la transition, la plaque est cylindrique et son énergie se déduit de celle de l'arche élastique comme nous le verrons dans la section 3.5.2.

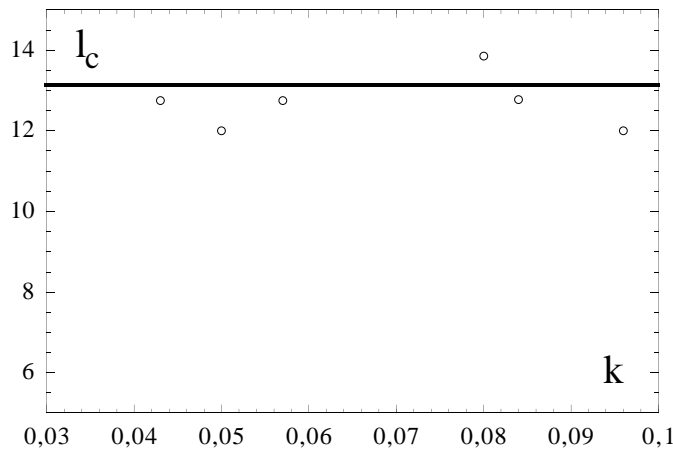


FIG. 3.18 – Transition vers le cylindre : distance d'un sommet de la grande base du trapèze au plan $y = 0$ en fonction de la courbure $2k$. Ronds : expérience ; droite : équation 3.12.

3.5 Influence des paramètres géométriques

Nous avons représenté géométriquement tous les régimes observés et retrouvé la majorité des résultats expérimentaux par des calculs simples. Les prédictions pour les grands déplacements Z sont plus difficiles car nous arrivons à la limite des approximations que nous avons faites. Nous n'avons pas calculé l'énergie de la plaque dans les régime à quatre singularités car nous ne savons pas comment représenter l'interaction avec les bords encastres, qui se manifeste par de l'énergie de flexion près des bords comme le montrent les simulations numériques.

Dans la suite, nous testons la validité de nos raisonnements en examinant en détail l'influence des paramètres géométriques de la plaque. Dans un premier temps, nous faisons varier α et d pour obtenir un diagramme de phase qui montre les deux scénari possibles. Dans un second temps, nous diminuons la longueur L et déterminons le moment à partir duquel la plaque se comporte comme une arche élastique.

3.5.1 Un diagramme de phase

Nous considérons encore une plaque de rapport d'aspect 2 ($W \times L = 17,5 \times 35$ cm). En faisant varier α et d , nous observons deux comportements possibles (figure 3.19) :

- Zone I. La plaque subit le scénario que nous avons décrit précédemment : deux d-cônes, quatre d-cônes en losange, quatre d-cônes en tra-

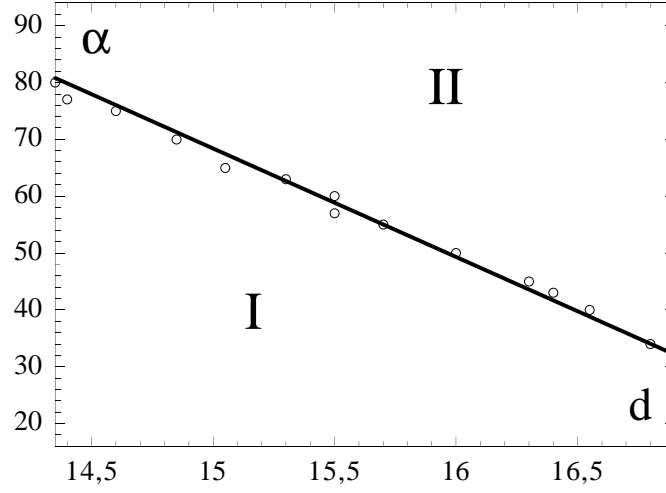


FIG. 3.19 – Phases observées en fonction des paramètres α et d . I : scénario avec trapèze ; II : scénario sans trapèze.

pèze puis plaque cylindrique.

- Zone II. La plaque subit un scénario tronqué : deux d-cônes, quatre d-cônes en losange puis plaque cylindrique.

Une analyse du diagramme à l'aide de la courbure $2k$ de la plaque montre que ces deux zones sont approximativement séparées par $k = 0,03 \text{ cm}^{-1}$.

La transition entre les deux régimes peut-être précisée en étudiant la distance l_m au plan $y = 0$ d'un d-cône d'angle d'ouverture $\pi - 2\theta$ au moment de la bifurcation losange-trapèze (figure 3.14). Les calculs de la section 3.4.5 s'étendent aisément pour trouver la formule

$$\frac{l_m}{W} = \frac{\tan \theta}{2(1 + \sin \theta)}, \quad (3.13)$$

qui représente bien les résultats expérimentaux si k n'est pas trop petit. La limite entre les zones I et II correspond au cas où la transition vers le trapèze se produit en même temps que la transition vers le cylindre, *i.e.*, quand les périphéries de deux d-cônes touchent le bord libre à la fin du régime à losange (figure 3.21). Comme pour l'équation 3.12, cela se traduit par

$$l_m + W/4 = L/2. \quad (3.14)$$

En effet, le plus grand l_m observé (figure 3.20) vaut 12,4 cm, ce qui est proche de $L/2 - W/4 = 13,1$ cm. l_m est inférieur à $L/2 - W/4$ car la transition vers l'état cylindrique se produit plus tôt si l'expérience est légèrement imparfaite. Ce plus grand l_m correspond à $k = 0,03 \text{ cm}^{-1}$, *i.e.*, à la séparation entre les phases I et II. Ceci valide la représentation de la figure 3.21.

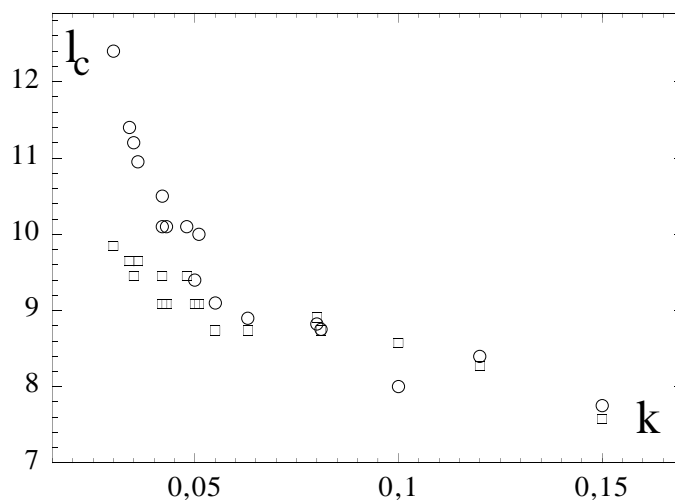


FIG. 3.20 – Longueur l_m maximale d'un sommet du losange au plan $y = 0$ (figure 3.14) en fonction de la courbure $2k$. Ronds : expérience; carrés : équation 3.13.

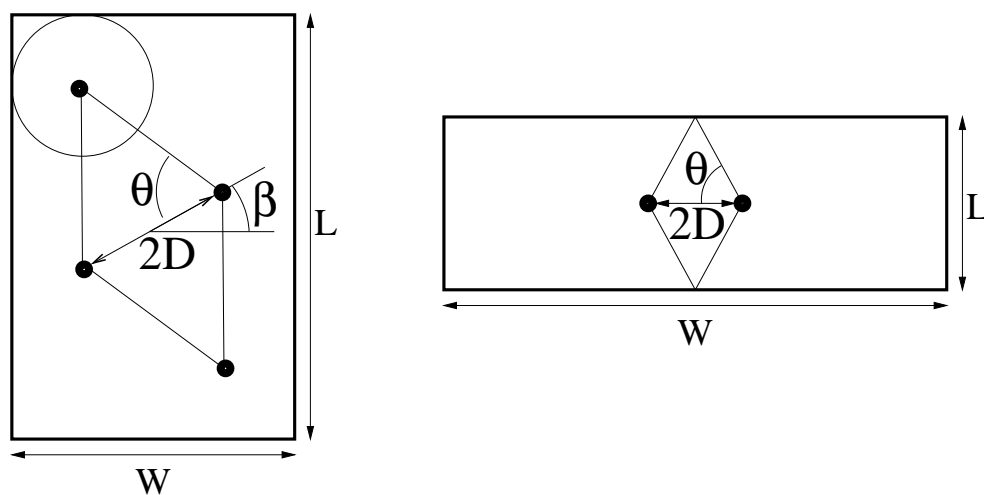


FIG. 3.21 – Gauche : à la limite entre les phases I et II, la transition vers le trapèze coïncide avec la transition vers le cylindre. Le schéma se déduit de la figure 3.14. Droite : pour des petites longueurs L , la transition vers le cylindre se produit pendant le régime à deux d-cônes, quand la zone inversée atteint les bords libres.

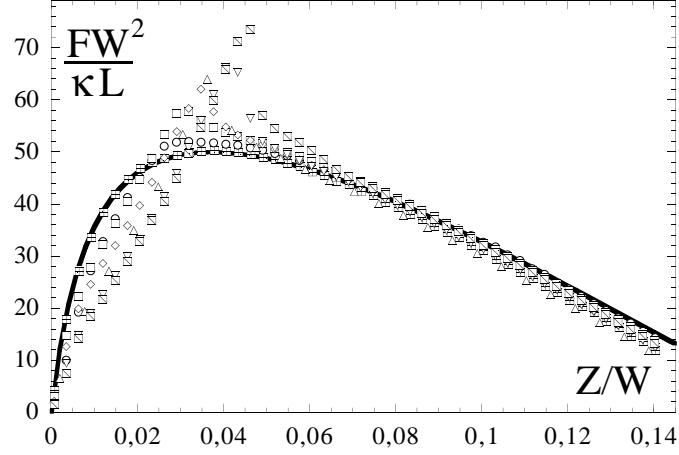


FIG. 3.22 – Force de résistance à la déformation $FW^2/\kappa/L$ en fonction du déplacement vertical Z/W pour $\alpha = 20^\circ$, $d = 16,45$ cm et $W = 17,5$ cm. \boxplus : $L = 3$ cm ; \circ : $L = 5$ cm ; \square : $L = 7,7$ cm ; \diamond : $L = 10$ cm ; \triangle : $L = 11,9$ cm ; ∇ : $L = 13,2$ cm ; \boxtimes : $L = 15$ cm ; courbe : force théorique pour l'arche élastique calculée par Patricio *et al.*[115].

3.5.2 De la plaque à l'arche élastique

En dessous de quelle longueur la plaque se comporte-t-elle comme une tige ? Pour répondre à cette question, nous avons étudié la transition vers l'état cylindrique et la résistance de la plaque à la déformation en diminuant L , dans une configuration où $W = 17,5$ cm, $d = 16,45$ cm et $\alpha = 20^\circ$.

Dans l'état cylindrique, la déformation est de flexion pure et son énergie est (équation 1.12)

$$E_f = 4\kappa \int M^2 dx dy, \quad (3.15)$$

M étant la courbure moyenne de la plaque, soit, en tenant compte de l'invariance par translation suivant x , en introduisant une variable sans dimension $s = y/W$,

$$E_f = 4\frac{\kappa L}{W} \int_{-1/2}^{1/2} (WM)^2 ds. \quad (3.16)$$

Cette énergie élastique est proportionnelle à celle d'une tige soumise aux mêmes conditions aux limites que la plaque en $-d/2$ et $d/2$, *i.e.* l'arche élastique présentée dans l'introduction. Comme WM est sans dimension, la forme de la force de résistance, $F = \partial_Z E_F$, est :

$$F = \frac{\kappa L}{W^2} f\left(\frac{Z}{W}\right), \quad (3.17)$$

où f est la fonction sans dimension exprimant la force pour l'arche élastique, avec angle d'encastrement $\alpha = 20^\circ$ et distance entre points encastres $d/W = 0,94$. Cette expression de la force est effectivement valide dans l'état cylindrique comme le montre la figure 3.22 : après la transition vers le cylindre, les forces adimensionnées coïncident.

Nous nous sommes intéressés à la transition vers l'état cylindrique pour une longueur L assez petite pour que la transition se produise avant le régime à losange (ici pour $L \leq 15$ cm). Nous n'avons pu mesurer le déplacement vertical Z_{cyl} à cette transition que dans un domaine de L très restreint ($13 \leq L \leq 15$ cm). Cette transition se produit quand les sommets de la zone inversée de la plaque (figure 3.21) arrivent aux bords libres; ce qui se traduit par $L = 2D \cos \theta$, ou par

$$Z_{cyl} = k \left(\frac{L}{2 \tan \theta} \right)^2. \quad (3.18)$$

Pour $L = 15$ cm, on trouve $Z_{cyl} = 8,3$ cm (expérimentalement 7,9 cm). Pour $L = 13,2$ cm, $Z_{cyl} = 6,4$ cm (expérimentalement 7,1 cm). Enfin pour $L = 3$ cm, $Z_{cyl} = 0,33$ mm $\simeq h$; dans ce cas, les singularités n'ont pas le temps d'apparaître et la plaque se comporte toujours comme une arche : la force adimensionnée est la même que pour l'arche (figure 3.22).

Après la transition vers le cylindre, la plaque, invariante par translation, se comporte exactement comme une tige. Quand la plaque est assez étroite (ici $L \leq 3$ cm), la transition vers le cylindre se produit avant que des singularités apparaissent; on ne peut distinguer la plaque de l'arche élastique.

3.6 Résumé

Nous avons étudié une plaque élastique soumise à une contrainte ponctuelle. Sa résistance à la déformation est prédite par des simulations numériques des équations de Föppl von Kármán, ainsi que par une estimation géométrique utilisant l'énergie des singularités (l'énergie de la plaque est déterminée par celle des d-cônes). Elle subit une série de bifurcations qui sont décrites de manière géométrique. Nous avons aussi déterminé un diagramme de phase et caractérisé la limite entre les comportements de plaque et de tige.

Avec les deux situations modèles que nous avons considérées dans les chapitres 2 et 3, nous avons montré l'efficacité des raisonnements géométriques pour les prédictions quantitatives. Cette efficacité provient du fait que la plaque se déforme de manière presque isométrique; les distances sont conservées et la plaque est décrite par des transformations géométriques. Dans le chapitre suivant, nous étendons notre travail aux surfaces physiques possédant un ordre intermédiaire entre solide et liquide parfait.

Chapitre 4

Une singularité conique sur une nappe visqueuse

« Un damné descendant sans lampe,
Au bord d'un gouffre dont l'odeur
Trahit l'humide profondeur,
D'éternels escaliers sans rampe,
Où veillent des monstres visqueux
Dont les larges yeux de phosphore
Font une nuit plus noire encore
Et ne rendent visible qu'eux ; »

Charles Baudelaire, *Les fleurs du mal*.

Nous avons jusqu'à présent étudié des surfaces physiques possédant un ordre interne solide ; les déformations tangentielles des plaques élastiques sont en effet énergétiquement coûteuses. Lorsque l'on contraint une plaque élastique, cet ordre interne provoque des frustrations qui conduisent à la concentration de l'énergie autour de singularités. Rien de tel ne se passe pour une surface avec un ordre liquide pour laquelle les déformations tangentielles sont faciles ; si l'on souffle sur un film de savon s'appuyant sur un cadre par exemple, la surface reste régulière. Que se passe-t-il si le liquide est très visqueux ? Cette question est pertinente car il n'est pas facile de cisailer un liquide très visqueux. Nous étudions donc dans ce chapitre des nappes visqueuses.

4.1 Présentation

Quand on fait couler du miel sur la tartine du petit-déjeuner, on peut observer un mince filet de fluide qui, rectiligne au sortir du pot de miel, s'enroule

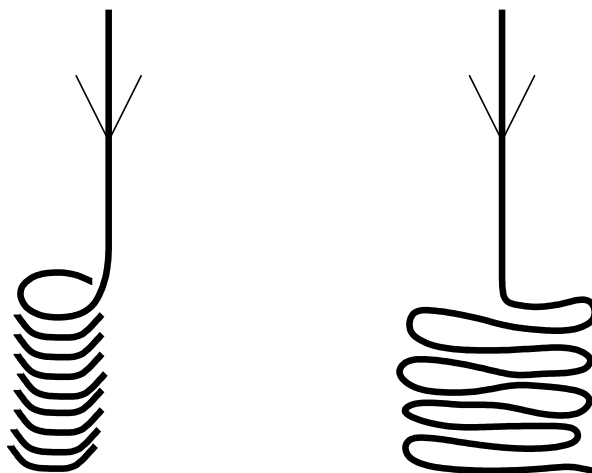


FIG. 4.1 – Du miel qui coule sur une tartine s’enroule en hélice ou se plie en S.

en hélice au contact de la tartine (Figure 4.1). Cette observation se retrouve chez Barnes et Woodcock [11]. Elle est reprise dans l’article fondateur de Taylor [146], qui met en évidence l’analogie entre les fluides très visqueux et les solides élastiques. Les différents exemples montrés par Taylor ont entraîné de nombreux travaux par la suite. Un filament de fluide visqueux dont les deux extrémités sont rapprochées flambe tout comme l’*elastica* (Buckmaster *et al.*[37]). Un ruban visqueux (fine couche de fluide très visqueux en forme de ruban) qui tombe sur un support s’enroule en hélice (comme le filet de miel, Buckmaster [36], Mahadevan *et al.*[104]) s’il est étroit ou en formant des S (Figure 4.1, Yarin et Tchavdarov [161], Skorobogatiy et Mahadevan [141]) s’il est large. Une nappe visqueuse (fine couche de fluide visqueux) annulaire cisailée flambe avec des motifs périodiques (Suleiman et Munson [144], Benjamin et Mullin [16]) analogues à ceux d’une plaque annulaire cisailée (Dean [53]). Une autre configuration où l’analogie est pertinente est découverte par Debrégeas *et al.*[54] et étudiée par da Silveira *et al.*[52] : quand une bulle d’air dans un fluide visqueux monte à la surface, elle prend la forme d’une demi-sphère surmontée d’un dôme formé d’une fine couche de liquide ; si cette couche est percée, elle s’effondre sous son propre poids et flambe dans la direction orthoradiale. L’observation d’un ressaut hydraulique polygonal par Ellegaard *et al.*[59] pourrait aussi être liée à ces travaux : ce motif polygonal est semblable à celui étudié pour les coques¹ par Pauchard *et al.*[118, 119].

L’analogie entre fluides visqueux newtoniens incompressibles et solides élastiques incompressibles (de coefficient de Poisson $\nu = 1/2$) se formalise en

¹Voir le chapitre 1.

examinant la relation entre les tenseurs des contraintes σ et des déformations u . Pour un solide élastique incompressible, la loi de Hooke s'écrit

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{2}{3}Eu_{ij}, \quad (4.1)$$

p étant la pression. Pour un fluide newtonien de viscosité μ ,

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\frac{du_{ij}}{dt}. \quad (4.2)$$

L'équivalent du déplacement du solide est donc le taux de déplacement du fluide. En régime de Stokes (petit nombre de Reynolds), on néglige l'inertie du fluide et l'équation de la dynamique se réduit à

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0, \quad (4.3)$$

comme pour un solide élastique. Si τ est le temps caractéristique de l'écoulement, l'équivalent du module d'Young E est $3\mu/\tau$. Enfin, la minimisation de l'énergie élastique se transpose mathématiquement en minimisation de la dissipation visqueuse.

Nous nous intéressons ici aux nappes visqueuses. Plusieurs modèles sont proposées par Howell [77] ou van de Fliert *et al.*[149] qui partent des équations de Navier-Stokes et écrivent des équations d'évolution pour la nappe dans différentes limites (petite épaisseur, temps courts, petits nombres de Reynolds...); mais nous verrons que l'analogie élastique/visqueux donne des résultats quantitatifs de façon simple. La flexion a le même sens dans les deux systèmes et la traction correspond aux changements d'épaisseur et au cisaillement de la nappe. Dire que la traction est plus coûteuse que la flexion revient à dire que la dissipation visqueuse lors des changements d'épaisseur est plus grande que lors de la flexion de la nappe, ou encore, que le temps caractéristique des changements d'épaisseur est grand devant le temps caractéristique de la flexion.

Étant donné cette analogie, il est naturel de chercher à mettre en évidence l'équivalent des singularités des plaques élastiques (plis ou d-cônes). En collaboration avec Sahraoui Chaïeb [22], nous avons étudié l'équivalent visqueux d'une plaque soumise à la gravité et dont le centre est posé sur une pointe. Nous avons choisi cette configuration en nous inspirant de l'expérience de Chaïeb et Melo [43] où une plaque s'appuyant sur un cylindre est poussée par une tige (voir chapitre 1).

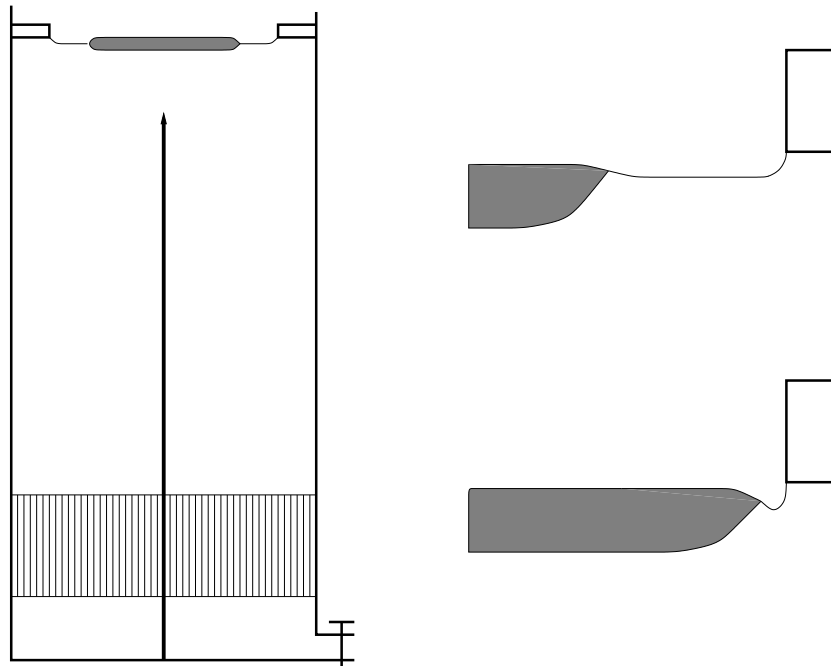


FIG. 4.2 – Gauche : schéma de l'expérience. Droite : vue agrandie du bord de la nappe visqueuse. Si la nappe se rapproche de l'anneau en Plexiglas, le rayon de courbure de l'eau augmente, ce qui est coûteux en énergie capillaire : l'anneau repousse la nappe.

4.2 L'expérience

4.2.1 Montage

L'expérience consiste à faire tomber une nappe visqueuse sur une pointe. Pour cela, un cylindre de Plexiglas est rempli d'eau au dessus de laquelle est préparée une nappe d'huile silicone²; le cylindre est vidé par le bas en ouvrant un robinet et la nappe tombe sur la tige placée sur l'axe du cylindre. Pour obtenir l'analogue d'un d-cône élastique, il est préférable d'avoir un écoulement rapide et une nappe très visqueuse de grand rapport d'aspect rayon/épaisseur. Cette expérience est délicate car elle est sensible au centrage de la nappe par rapport à la pointe et aux inhomogénéités de l'écoulement de l'eau.

Le cylindre est choisi de grande hauteur (50,6 cm) et de rayon modéré (7,62 cm), le robinet a un grand diamètre² (2,54 cm) et permet une ouverture rapide (il est quart-de-tour). Le bas du cylindre est occupé par un réseau

²Ces chiffres sont compliqués car l'unité de travail était le pouce (1 pouce = 2,54 cm).

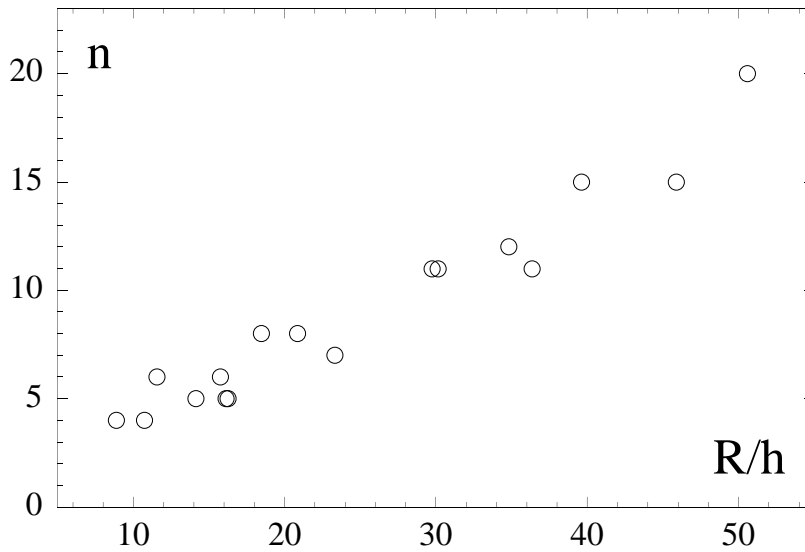


FIG. 4.3 – Premiers résultats : le nombre n de plissements croît avec le rapport d'aspect R/h (voir la section 4.2.2).

hexagonal de pailles collées les unes aux autres, parallèles à l'axe du cylindre, qui servent à maintenir un écoulement laminaire. Ainsi, après avoir ouvert le robinet et dès que le niveau d'eau arrive à la tige (3 cm en dessous du niveau initial), l'écoulement est stationnaire pour environ 1 s (plus que le temps d'une expérience); la surface de l'eau reste horizontale et descend à une vitesse $v = 7,6$ cm/s.

L'huile silicone est moins dense que l'eau (sa masse volumique est $\rho = 980$ kg/m³), a une tension de surface faible ($\gamma = 21$ mN/m) et une viscosité $\mu = 600$ Pa.s, soit six cent mille fois la viscosité de l'eau. Cette viscosité peut sembler énorme mais est pertinente pour les fluides géologiques (voir Biot [19] et Ramberg [130]). L'huile est chauffée pour diminuer sa viscosité et elle est versée sur l'eau, ce qui prend alors environ vingt minutes. Un anneau de Plexiglass (de diamètre 7,62; 10,2 ou 12,6 cm) est disposé à la surface de l'eau. Les ménisques huile/eau et eau/Plexiglass se repoussent (Figure 4.2). Ainsi, à l'équilibre (environ 6 heures plus tard), on obtient une nappe visqueuse d'épaisseur homogène comprise entre 1 et 3,5 mm (de l'ordre de la longueur capillaire $\sqrt{\gamma/\rho g} = 1,5$ mm, g étant l'accélération de la gravité) et de rayon R compris entre 2 et 6 cm. La pointe de la tige est arrondie et son rayon est 0,7 mm.

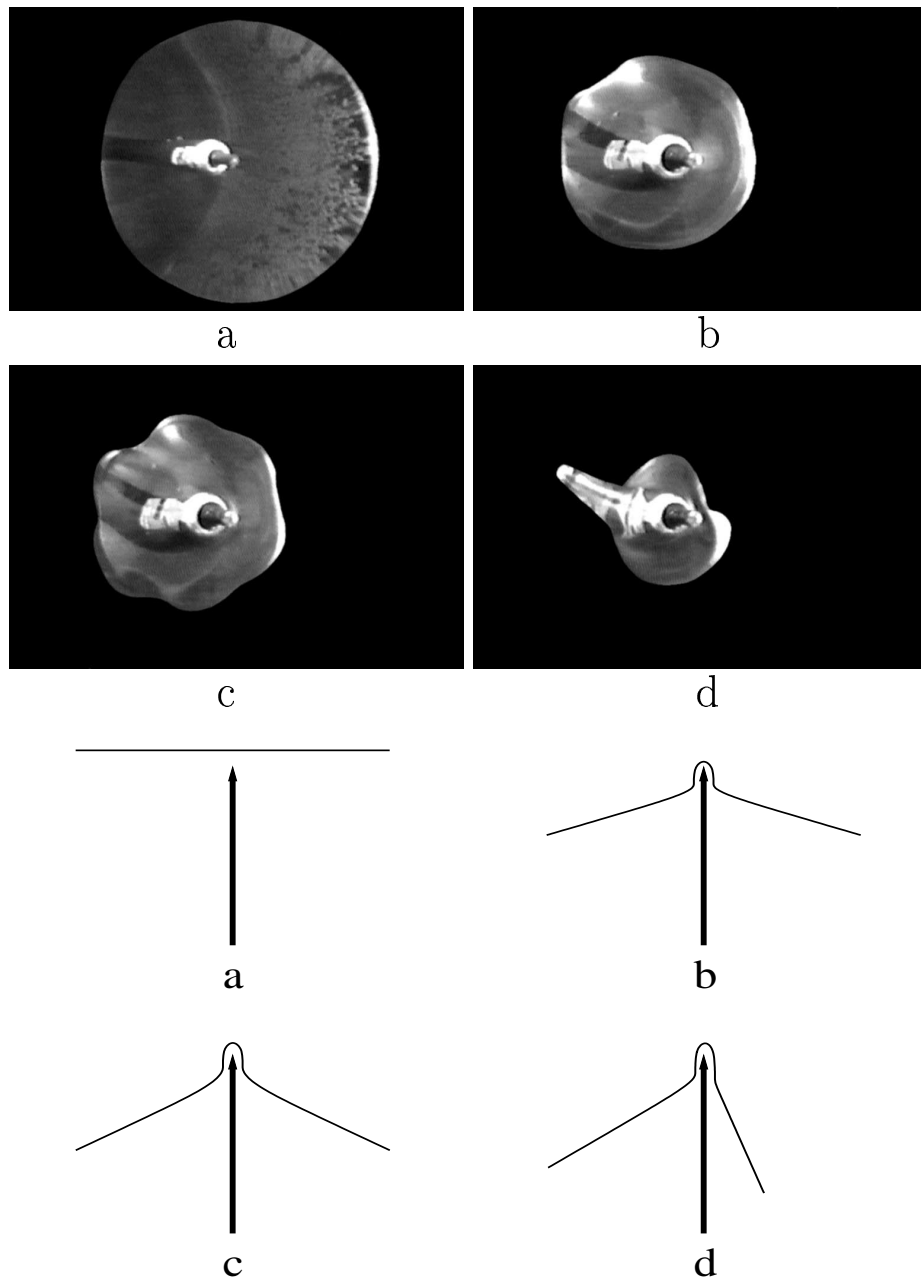


FIG. 4.4 – Haut : photographies de l'expérience vue de haut (la caméra est légèrement inclinée). La tige apparaît par transparence. Bas : schémas en coupe verticale. Le robinet est ouvert et la nappe descend avec la surface de l'eau. **a** : la nappe est en forme de disque avant de toucher la pointe. **b** : le centre de la nappe épouse la pointe et les plissements apparaissent. **c** : le motif est presque périodique et montre six plissements (le nombre d'onde est 6). **d** : l'un des plissements domine les autres.

4.2.2 Premiers résultats

On ouvre le robinet. La nappe arrive au contact de la tige. Au début elle garde à peu près la forme d'un disque sauf au centre où elle épouse la forme de la pointe. Environ 0,5 s plus tard, la nappe commence à plisser dans la direction orthoradiale et de l'air pénètre en dessous de l'huile. 40 ms plus tard, un motif périodique s'est formé (figure 4.4). Nous en avons mesuré le nombre d'onde n (c'est le nombre de plissements), qui croît en fonction du rapport d'aspect R/h (figure 4.3). 0,15 s après la formation du motif, l'un des plissements se développe alors que les autres disparaissent. Aux temps longs (1 minute), l'huile coule le long de la tige et l'épaisseur de la nappe change notablement. Elle adopte finalement une forme imposée par l'énergie capillaire.

4.3 Théorie

Nous considérons d'abord le problème élastique équivalent puis nous le transposons à la nappe visqueuse, à l'aide de l'analogie développée dans la présentation. Malgré sa simplicité, ce problème élastique n'a pas été abordé auparavant.

4.3.1 Problème élastique équivalent

Considérons une plaque de rayon R et d'épaisseur h , soumise à la gravité et dont le centre est sur une pointe. La forme adoptée par la plaque sera celle de la surface développable (sauf près des singularités) la plus régulière, pour minimiser le coût énergétique de la traction. La réponse est un d-cône de cœur sur la pointe. La forme de la plaque en dehors du cœur est donnée par sa déflexion verticale $\xi = r f(\theta)$, avec la contrainte de développabilité (équation 1.34). L'énergie du cœur de rayon R_c est négligeable devant l'énergie de flexion en dehors, donnée par l'équation 1.35. L'énergie gravitationnelle est l'intégrale sur le disque de rayon R ,

$$E_g = - \int_D \rho g h \xi \, dS. \quad (4.4)$$

En intégrant dans la direction radiale et en rajoutant l'énergie de flexion, l'énergie totale s'écrit

$$E = \frac{1}{2} \kappa \ln \left(\frac{R}{R_c} \right) \int_0^{2\pi} (f + f'')^2 \, d\theta - \frac{1}{3} \rho g h R^3 \int_0^{2\pi} f \, d\theta. \quad (4.5)$$

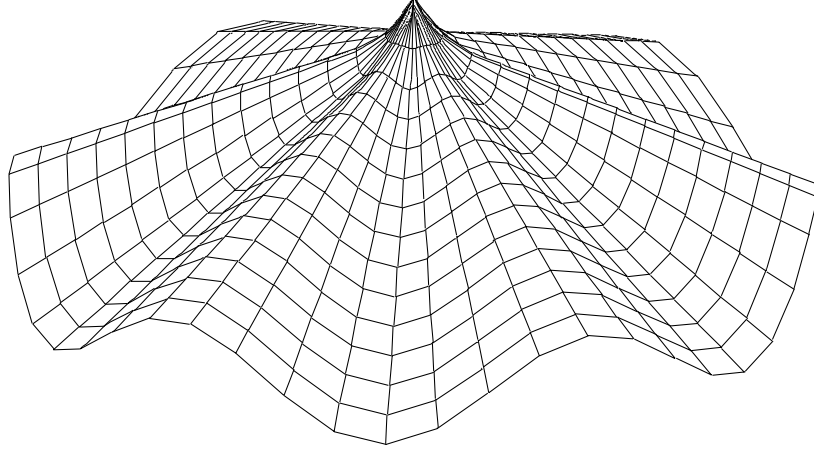


FIG. 4.5 – Forme théorique de la nappe provenant de l'équation 4.11 pour $n = 6$. Le centre de la nappe est corrigé artificiellement pour indiquer le cœur du d-cône.

Le nombre qui compare énergie élastique et énergie gravitationnelle est

$$\eta = \frac{R^3 \rho g h}{3\kappa \ln(R/R_c)}. \quad (4.6)$$

Pour trouver la forme du cône, il faut minimiser

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (f + f'')^2 d\theta - \eta \int_0^{2\pi} f d\theta + \frac{1}{2} \lambda \int_0^{2\pi} f(f + f'') d\theta. \quad (4.7)$$

λ est un multiplicateur de Lagrange qui permet de satisfaire la condition de développabilité du cône (chapitre 1, 1.34),

$$\int_0^{2\pi} f(f + f'') d\theta = 0. \quad (4.8)$$

L'équation d'Euler-Lagrange donnant les extrema de \mathcal{M} est

$$\left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \left(n^2 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) f = \eta, \quad (4.9)$$

où $n^2 = 1 + \lambda$. Ses solutions sont de la forme

$$f(\theta) = \eta/n^2 + a \sin \theta + b \cos \theta + c \sin(n\theta) + d \cos(n\theta). \quad (4.10)$$

Celles qui satisfont à la contrainte de développabilité 4.8 sont (à des rotations près),

$$f(\theta) = \frac{\eta}{n^2} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n^2 - 1}} \sin n\theta\right); \quad (4.11)$$

elles sont proportionnelles aux formes de d-cônes proposées par Ben Amar et Pomeau [15]. La périodicité dans la direction orthoradiale impose à n d'être un nombre entier.

La situation que nous venons d'étudier est celle d'un disque de tissu textile isotrope posé sur un pointe. On peut observer un motif périodique similaire à celui de la figure 4.5. La sélection du nombre de plissements n se fait par les conditions aux limites sur la périphérie du disque comme nous le verrons ci-dessous.

4.3.2 Transposition visqueuse

Le module de flexion de la nappe visqueuse est

$$\kappa = \frac{\mu h^3}{3\tau}, \quad (4.12)$$

car l'équivalent du module d'Young est $3\mu/\tau$ (τ est le temps caractéristique de l'écoulement) et le coefficient de Poisson est $\nu = 1/2$ pour un solide incompressible. L'extrémité de la nappe, à une distance R de la pointe, descend à la vitesse v de l'eau. Le temps caractéristique est donc

$$\tau = \frac{R}{v}. \quad (4.13)$$

Dans les conditions de l'expérience τ est compris entre $1/4$ et $3/4$ de seconde.

Il reste à estimer le rayon du cœur R_c du d-cône. La nappe épouse la forme de la pointe : les conditions à la pointe sont différentes de celles du cas élastique présenté dans le chapitre 1. Nous nous attendons donc à ce que le rayon R_c ne soit pas donné par l'équation 1.40. Nous pouvons toutefois l'obtenir par un raisonnement similaire, en disant que les énergies de flexion E_f et traction E_t sont du même ordre de grandeur. Au cours du temps caractéristique τ , une longueur R_c du cœur devient $R_c + v_c\tau$, v_c étant la vitesse typique dans le cœur. L'allongement relatif est

$$a \sim v_c\tau/R_c, \quad (4.14)$$

et la courbure caractéristique est

$$c \sim 1/R_c. \quad (4.15)$$

L'énergie de traction (équation 1.9) et de flexion (équation 1.12) sont alors

$$E_t \sim \frac{\mu h}{\tau} a^2 S, \quad (4.16)$$

$$E_f \sim \frac{\mu h^3}{\tau} c^2 S, \quad (4.17)$$

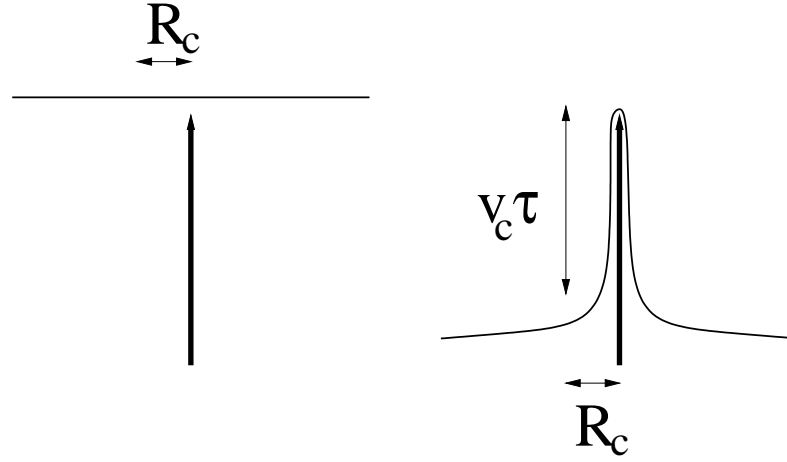


FIG. 4.6 – Schématisation du cœur du d-cône. R_c est le rayon du cœur ; la nappe recouvre la pointe sur une distance $v_c \tau$, v_c étant la vitesse caractéristique dans le cœur et $\tau = v/R$ le temps caractéristique de l'expérience.

respectivement, où $S \sim R_c^2$ est la surface du cœur. Il reste à raccorder cinématiquement la vitesse dans le cœur v_c à la vitesse à la vitesse v sur la périphérie de la nappe. Pour cela, considérons un générateur du cône (une droite contenue dans le cône), il tourne dans un plan vertical à la vitesse angulaire v/R autour de la pointe. Cette vitesse angulaire s'exprime à la périphérie du cœur comme

$$v_c/R_c \sim v/R. \quad (4.18)$$

Enfin, dire que l'énergie de flexion et l'énergie de traction sont du même ordre de grandeur, $E_f \sim E_t$, conduit à

$$R_c \sim h. \quad (4.19)$$

On constate que le cœur est bien plus petit que dans le cas élastique général. Cela se comprend en remarquant que la nappe est tangente à la tige, comme si l'angle du d-cône était droit (donc de tangente infinie), la formule 1.40 donne alors un rayon du cœur nul ; l'échelle pertinente pour le cœur du d-cône visqueux est donc la plus petite du système, *i.e.*, l'épaisseur h .

Nous avons implicitement considéré la pointe de rayon R_p nul ; cette hypothèse est valide car $R_p = 0,7$ mm est plus petit que l'épaisseur comprise entre 1 et 3,5 mm. Nous avons oublié l'énergie capillaire qui ne change pas en dehors du cœur car la nappe a une forme développable (elle se déforme de manière isométrique donc son aire est conservée). Nous avons négligé l'énergie capillaire du cœur $E_{\text{cap}} \sim \gamma h^2$ et son énergie gravitationnelle $E_g \sim \rho g h^4$

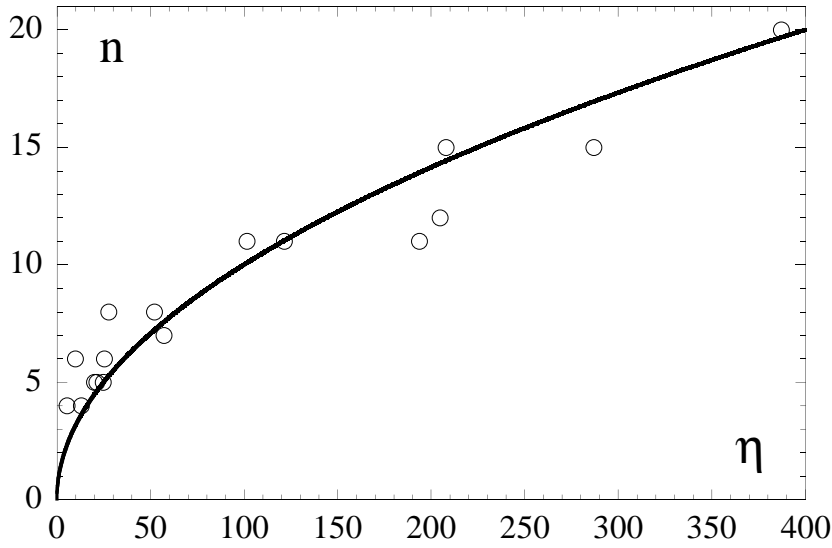


FIG. 4.7 – Nombre d'onde n en fonction du paramètre de contrôle $\eta = (\rho g R^4)/(\mu h^2 v \ln(R/h))$. Cercles : points expérimentaux. Trait continu : prédiction $n = \sqrt{\eta}$.

devant son énergie élastique $E \sim E_f \sim E_t \sim \mu h^3/\tau$. En effet,

$$\frac{E_{\text{cap}}}{E} \sim \frac{\rho g h \tau}{\mu} \sim 10^{-3}, \quad (4.20)$$

$$\frac{E_g}{E} \sim \frac{\gamma \tau}{\mu h} \sim 10^{-2}. \quad (4.21)$$

Enfin, en combinant les équations 4.6, 4.12, 4.13, 4.19, le paramètre de contrôle s'écrit

$$\eta = \frac{\rho g R^4}{\mu h^2 v \ln(R/h)}. \quad (4.22)$$

Nous n'avons pour l'instant utilisé que l'une des conditions aux limites (à la pointe de la tige). L'autre est que la nappe est en moyenne (moyenne sur l'angle θ) juste au dessus de l'eau : la vitesse moyenne du pourtour de la nappe est alors $\langle \xi(R) \rangle / \tau = v$. Cette condition se traduit par

$$n = \sqrt{\eta}. \quad (4.23)$$

Cette loi coïncide, sans paramètre ajustable, avec les résultats expérimentaux (Figure 4.7). Lorsque l'angle du cône augmente, il est facile de montrer (avec le raisonnement du paragraphe précédent) que R_c doit diminuer. Nous nous

attendons donc à diminution de η et donc de n . Cela est cohérent avec le fait que, après la formation du motif périodique, un plissement domine les autres (Figure 4.4d). Ainsi est validée l'interprétation de l'expérience en terme de singularité conique.

4.4 Résumé

Nous avons développé l'analogie entre solide élastique et liquide très visqueux. Nous avons ainsi prédit quantitativement³ les résultats d'une expérience modèle. Cette analogie est robuste car elle a permis, pour la première fois, l'observation d'une singularité conique pour une nappe visqueuse. Nous pouvons espérer qu'elle continue à donner des résultats nouveaux sur les écoulements visqueux.

Nous avons montré dans cette première partie qu'un ordre solide ou visqueux au sein d'une surface physique (plaque élastique ou nappe visqueuse) conduit à la concentration des déformations. Le comportement du système se comprend alors essentiellement en termes de surfaces développables et d'énergie des singularités. Pour les nappes visqueuse, cette description est valable aux temps courts. Quand elles atteignent l'équilibre, on s'attend à ce que leur physique soit dominée par la capillarité. Nous passons maintenant à l'étude de surfaces capillaires pour lesquelles l'ordre liquide supprime les frustrations des surfaces solides.

³Sans paramètre ajustable, au contraire de da Silveira *et al.*[52].

Deuxième partie

Films de savon, surfaces minimales et auto-adaptation

Chapitre 5

Introduction aux surfaces minimales et aux films de savon

« C'est ainsi que Newton s'élevait de la contemplation d'une bulle de savon à la théorie de la lumière. »

Charles Bonnet, *Considérations sur les corps organisés, où l'on traite de leur origine, de leur développement, de leur reproduction...*

Nous avons consacré la première partie aux membranes possédant un ordre interne solide ou visqueux. Dans cette seconde partie, nous nous intéressons aux surfaces liquides. Leur énergie étant capillaire, elles prennent à l'équilibre la forme de surfaces minimales. Les surfaces minimales sont des objets mathématiques fascinants. Ce sont les surfaces d'aire minimale s'appuyant sur une courbe donnée. On les associe naturellement aux films de savon. Dans ce chapitre, nous donnons des exemples physiques de surfaces minimales puis nous exposons les constructions mathématiques qui nous seront utiles dans le prochain chapitre.

5.1 Présentation : surfaces minimales

5.1.1 Films de savon

L'intérêt porté aux films de savon remonte à Plateau ([122], 1873), qui montre que l'énergie d'une membrane de savon est proportionnelle à son aire (la constante de proportionnalité est la tension de surface). Les films de savon à l'équilibre ont donc la forme de surfaces minimales. Si l'on plonge un cadre métallique dans de l'eau savonneuse et qu'on le ressort, on obtient un film de

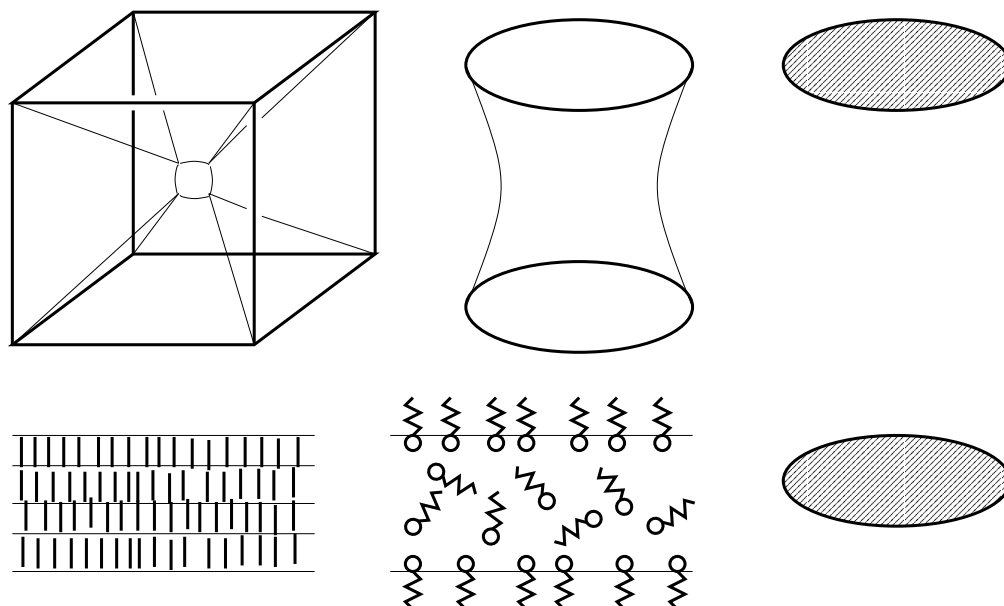


FIG. 5.1 – Haut : deux exemples de surfaces minimales s'appuyant sur un cadre. Pour un cadre cubique, le film de savon est presque composé de pyramides de bases une face du cube ; les faces du cube ne sont pas occupées par le film ; le sommet des pyramides est remplacé par un petit carré qui brise la symétrie du cube (il a 3 orientations possibles). Pour un cadre composé de deux cercles de même axe assez proches, le film de savon est une caténoïde, surface de révolution engendrée par une chaînette. Si les deux cercles sont éloignés, le film est composé de deux disques s'appuyant sur les cercles. Bas : structure microscopique des films. Gauche : les cristaux smectiques A sont constitués de molécules en forme de bâtonnets, disposées en couches ; il n'y a pas d'ordre dans le plan d'une couche (il peut y en avoir pour d'autres phases smectiques) ; l'épaisseur typique d'une couche est 5 nm. Droite, un film de savon est constitué de molécules amphiphiles (de taille typique 5 nm) en solution dans l'eau (en petite concentration sinon des micelles se forment) ; la tête polaire (hydrophile) est symbolisée par un rond ; les queues aliphatiques (hydrophobes) préfèrent être en contact avec l'air ; la taille des molécules est exagérée par rapport à l'épaisseur du film (de l'ordre du μm).

savon. Prédire la forme du film revient à résoudre le problème de Plateau : quelles sont les surfaces minimales s'appuyant sur ce cadre ? Ce problème est mathématiquement très difficile et nous donnerons un exemple de sa résolution dans le chapitre 6. Il a suscité une longue littérature mathématique (voir Nitsche [111]). Douglas a montré l'existence de solutions au problème de Plateau ; toutefois, en général il n'y a pas unicité.

La plupart des travaux sur les films de savon ont identifié leurs vibrations avec celles des surfaces minimales. Les vibrations des surfaces minimales obéissent à une équation d'onde (dans le cas des vibrations d'un plan cette équation d'onde est l'équation usuelle $\partial^2 w / \partial t^2 = \Delta w$). Ainsi, des films de savon s'appuyant sur des cadres plans et forcés par une onde sonore ont été utilisés afin d'étudier les modes propres de l'équation d'onde usuelle pour des domaines de formes variées (cercles, carrés, rectangles, triangles...) ; ce qui correspond entre autres aux travaux de S. Taylor¹ [147], Boys [30], Dewar [55], Bergmann [17], Kagan et Bucholtz [84]. Enfin, comme la détermination des fréquences propres de l'équation d'onde ou des énergies propres de l'équation de Schrödinger² sont équivalentes, Arcos *et al.*[7] ont proposé des films de savon vibrants pour des démonstrations expérimentales du chaos quantique.

En fait, comme nous le verrons dans les chapitres 7 et 8, les vibrations forcées d'un film de savon sont plus complexes que celles d'une surface minimale, car l'épaisseur du film est libre de varier spatialement. Les films smectiques sont une « meilleure » réalisation physique de surfaces minimales.

5.1.2 Films smectiques

En effet, les cristaux liquides smectiques A peuvent être tirés sur des cadres [120] ; le film est alors composé d'un nombre bien déterminé de couches de smectique (figure 5.1) ; l'épaisseur du film reste donc constante, au contraire d'un film de savon. Les vibrations des films smectiques sont forcées par une onde sonore ou par un champ électrique sinusoïdal³. Si le film s'appuie sur un cadre rectangulaire de dimensions $L_x \times L_y$ et s'il est mis sous vide⁴, les pulsations propres de vibration du film vérifient la loi de Rayleigh (Brazovskaia

¹Nous rajoutons son initiale pour ne pas le confondre avec le plus célèbre G. I. Taylor.

²Les énergies propres du système quantique se transposent en fréquences propres de vibration.

³Ce deuxième mode d'excitation est le seul possible quand le film est sous vide.

⁴Comme nous le précisons dans le chapitre 8, un film qui vibre entraîne de l'air dont l'inertie n'est en général pas négligeable. Un des avantages des films smectiques est leur stabilité sous vide (plus exactement à pression d'air très petite) grâce à la faible pression de vapeur saturante d'un smectique ; les films de savon s'évaporerait dans de telles conditions.

[32], Even [61]),

$$\omega_{nm} = \pi \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho h}} \sqrt{\frac{n^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2}}, \quad (5.1)$$

où σ est la tension de surface de chaque face du film, ρ est la masse volumique du smectique et h est l'épaisseur du film. La forme du film correspondant à cette pulsation propre est le mode propre de déplacement normal donné par

$$z_{nm}(x, y) = Z \sin(n\pi(x/L_x + 1/2)) \sin(m\pi(y/L_y + 1/2)) \sin(\omega_{nm}t). \quad (5.2)$$

z_{nm} est une fonction propre du laplacien sur le rectangle $L_x \times L_y$ associé à la valeur propre $-\rho h \omega_{nm}^2 / (2\sigma)$ car

$$2\sigma \Delta z_{nm} = -\rho h \omega_{nm}^2 z_{nm}. \quad (5.3)$$

Si le film est forcé à la pulsation ω , il répond au forçage faiblement sauf quand ω est proche d'une pulsation propre ω_{nm} où il est résonnant. Les films smectiques plans sont ainsi de bons systèmes pour l'étude des propriétés de l'équation d'onde ou du laplacien.

Plusieurs travaux ont confirmé ces propriétés. Grâce à l'équivalence entre équation de Schrödinger et équation d'onde⁵, Brazovskaia et Pieranski [34] ont exhibé des points diaboliques pour le spectre de fréquences d'un film rectangulaire percé perpendiculairement par une tige. Une fréquence propre dépend des deux coordonnées de la tige et est représentable par une surface dans l'espace. Deux surfaces correspondant à deux fréquences propres se coupent génériquement selon une ligne; un point diabolique est une intersection réduite à un point. Ces points diaboliques avaient été prédits dans le cadre du chaos quantique par Cheon et Shigehara [47]. Even et Pieranski [62] ont répondu expérimentalement à la question du mathématicien Katz : peut-on entendre la forme d'un tambour? Ou encore, les fréquences propres de vibration d'un film s'appuyant sur un contour plan donné permettent-elle de retrouver la forme du contour? La réponse est négative : les spectres du laplacien sur deux domaines appelés cocotte et flèche sont identiques; Even et Pieranski ont vérifié que les fréquences propres de vibration de films s'appuyant sur ces deux cadres sont les mêmes. Even *et al.* [63] ont trouvé un bon accord entre expérience et simulations pour les fréquences propres de vibration d'un film s'appuyant sur un cadre fractal. Les propriétés des vibrations de ces films ont été utilisées pour détecter des transitions entre deux phases smectiques par Kraus *et al.* [92] : comme le film devient cristallin (son énergie n'est plus uniquement capillaire), un saut de fréquence propre est observé à la transition.

⁵Voir la note 2 de la page précédente.

Ces travaux sur les films plans ont été étendus aux films courbes à l'équilibre, obtenus quand les cadres ne sont pas plans. Par exemple les vibrations d'un film smectique en forme de caténoïde (voir la figure 5.1 pour une définition de cette surface) ont été étudiées expérimentalement et théoriquement par Ben Amar *et al.*[13]. Ben Amar *et al.*[14, 13] ont modélisé ces vibrations en introduisant une généralisation de l'équation d'onde à une surface courbée⁶. Ainsi, Ben Amar et Patrício [12] ont répondu négativement à la question de Katz en utilisant des surfaces minimales courbées (la famille helto-cat que nous donnons ci-dessous comme exemple de la construction de Weierstrass).

5.1.3 Autres exemples

Les surfaces minimales sont aussi utilisées de manière descriptive ; souvent l'hypothèse sous-jacente est que l'énergie du système est réduite à une énergie de surface. Les travaux en ce sens sont nombreux et nous n'en donnerons que quelques exemples⁷.

Les surfaces minimales périodiques (invariantes par translations de vecteurs $n\mathbf{a} + m\mathbf{b} + l\mathbf{c}$, n , m , l étant entiers et $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ formant un repère orthogonal) sont classées selon leurs symétries. Quand ces symétries sont les mêmes que celles d'un cristal, on peut souvent reconstruire le réseau cristallin en disposant les atomes sur la surface minimale (von Schnering et Nesper [155], Mackay [103]). Les lipides en grande concentration dans l'eau forment des bicouches (deux couches de molécules disposées telles que seule la partie hydrophile est en contact avec l'eau). Dans certaines phases, ces bicouches prennent la forme de surfaces minimales périodiques (Mackay [102], Gòzdž et Holyst [72]). Schick [138] identifie une telle surface dans une phase de copolymères (il s'agit d'un polymère formé par la liaison chimique entre deux polymères différents formés chacun d'un seul type de monomère A ou B). Dans cette phase, la surface sépare les monomères A et B dans des domaines distincts. Levelut *et al.*[95] utilisent aussi ces surfaces pour décrire des phases de smectique Q.

Enfin, on peut retrouver des surfaces minimales dans des configurations de protéines (Hyde *et al.*[80]) : une hélice- α est sur une hélicoïde et un feuillet- β sur une caténoïde (La figure 5.2 montre ces surfaces).

La transformation de Bonnet⁸ donne une famille continue de surfaces minimales isométriques les unes aux autres ; elle peut décrire morphologiquement des changements de phase (Hyde et Anderson [79], Lidin [96]) en donnant des chemins continus conservant la propriété de surface minimale, donc

⁶Nous expliquons cette équation dans la section 5.2.1.

⁷Nous remercions T. Garél pour ses lumières sur le sujet.

⁸Elle est définie par la suite. La figure 5.2 en donne un exemple.

en minimisant une énergie de surface. L'intérêt de cette propriété conduit Fogden et Hyde [64] à chercher et à trouver de nouvelles transformations continues dans l'espace des surfaces minimales.

Les raisons pour lesquelles les surfaces minimales apparaissent dans ces systèmes ne sont pas toujours très claires. En effet, les énergies des systèmes sont rarement données. Pour les bicouches lipidiques, l'énergie peut s'écrire comme une intégrale de la courbure moyenne au carré ; des surfaces minimales annulent donc cette énergie. Le même argument vaut pour les smectiques A quand leur énergie de courbure est dominante. Ainsi Kléman [87] puis Kamien et Lubensky [85] ont utilisé des surfaces minimales pour construire des dislocations vis pour des smectiques A. Pour un système qui comporte deux phases, on s'attend à ce qu'une partie de l'énergie soit proportionnelle à l'aire de la surface qui sépare ces deux phases. Pansu et Dubois-Violette [113] montrent, moyennant des hypothèses, que les molécules d'une phase bleue (une phase de cristal liquide nématique chiral) se trouvent le long des lignes asymptotiques d'une surface minimale (les courbes asymptotiques sont les lignes de courbure nulle tracées sur une surface).

Dans la majorité de ces travaux, la stabilité des surfaces n'est pas étudiée. Pourtant, c'est une condition nécessaire pour des observations physiques, et nous en tiendrons compte dans le prochain chapitre.

5.2 Surfaces minimales. Géométrie et théorie des vibrations

Nous passons maintenant à une introduction mathématique aux surfaces minimales et à leurs vibrations⁹. Nous utiliserons ces résultats pour notre étude du chapitre 6.

5.2.1 Un peu de géométrie différentielle

Considérons une surface définie par une paramétrisation $\mathbf{r}(u, v)$. Elle peut être caractérisée par ses deux formes fondamentales

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}, \quad (5.4)$$

$$d_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha \partial \beta} \cdot \mathbf{N}, \quad (5.5)$$

⁹Pour des détails on pourra consulter Patricio [114] ou Ben Amar *et al.*[14].

où α, β sont l'une des coordonnées u ou v et \mathbf{N} est le vecteur normal à la surface. La première forme fondamentale définit la métrique de la surface

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} d\alpha d\beta. \quad (5.6)$$

Nous utilisons ici aussi la convention de sommation des indices répétés. L'élément de longueur ds représente la distance *sur la surface* entre les deux points $\mathbf{r}(u, v)$ et $\mathbf{r}(u + du, v + dv)$. La deuxième forme fondamentale est le tenseur de courbure. En effet, la courbure moyenne M et la courbure de Gauss G sont définies par

$$2M = \text{trace}(a^{-1}d), \quad (5.7)$$

$$G = \frac{\det d}{\det a}. \quad (5.8)$$

La donnée des deux formes fondamentales définit une seule surface (à des translations ou des rotations près).

Comme nous étudions ici des surfaces dont l'énergie est capillaire, nous avons besoin de calculer la variation d'un élément d'aire dS pour une fluctuation de la surface au cours du temps. Chaque point $\mathbf{r}(u, v)$ est déplacé vers

$$\mathbf{r}'(u, v, t) = \mathbf{r}(u, v) + w(u, v, t)\mathbf{N}(u, v). \quad (5.9)$$

w représente le déplacement normal. Nous ignorons ici les déplacements tangentiels car ils ne changent pas l'énergie capillaire ; en tenir compte reviendrait à une reparamétrisation de la surface (voir Patricio [114]). Un élément d'aire $dS = (\det a)^{1/2} du dv$ est changé en

$$dS' = dS \left(1 - 2Mw + \frac{1}{2}(a^{-1})_{\alpha\beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} + Gw^2 \right). \quad (5.10)$$

Si la surface est minimale, alors dS' ne doit pas comporter de terme linéaire en w , donc la courbure moyenne M est nulle.

Nous pouvons alors déterminer l'équation de vibration. Considérons un film d'épaisseur h , de masse volumique ρ et de tension de surface σ . L'énergie capillaire et l'énergie cinétique sont respectivement

$$E_{\text{cap}} = \sigma \int dS' \quad (5.11)$$

$$\text{et } E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}\rho h \int \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dS. \quad (5.12)$$

L'équation d'Euler-Lagrange correspondante s'écrit

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sigma \Delta_B w - 2Gw, \quad (5.13)$$

où Δ_B est le laplacien de Beltrami :

$$\Delta_B = (a^{-1})_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}. \quad (5.14)$$

Si la surface s'appuie sur un cadre, alors la condition aux limites est $w = 0$. Pour une surface plane et des coordonnées cartésiennes, a est l'identité et la courbure de Gauss est nulle. Alors Δ_B est le laplacien usuel et l'équation 5.13 est l'équation d'onde

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sigma \Delta w. \quad (5.15)$$

Les vibrations d'une surface minimale sont donc déterminées uniquement par sa géométrie : métrique, courbure de Gauss et forme du cadre.

5.2.2 Construction de surfaces minimales

Trouver des solutions explicites au problème de Plateau est très difficile. Il est bien plus facile d'utiliser la construction de Weierstrass pour générer des surfaces minimales. Elle part de deux fonctions holomorphes f et g de la variable complexe $z = \phi + i\theta$; elle donne une famille de surfaces $\mathbf{r}_\tau(u, v) = (x_\tau, y_\tau, z_\tau)(u, v)$, dépendant d'un paramètre τ et définie par

$$x_\tau(\phi, \theta) = \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^{\phi+i\theta} dz \exp(i\tau) \frac{f(z)}{2} (1 - g(z)) \right), \quad (5.16)$$

$$y_\tau(\phi, \theta) = \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^{\phi+i\theta} dz \exp(i\tau) \frac{if(z)}{2} (1 + g(z)) \right), \quad (5.17)$$

$$z_\tau(\phi, \theta) = \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^{\phi+i\theta} dz f(z) g(z) \right), \quad (5.18)$$

où Re signifie partie réelle. Cette définition montre qu'il suffit de prendre τ dans l'intervalle $[0, \pi/2]$, les surfaces pour τ à l'extérieur de cet intervalle se déduisent de celles à l'intérieur de l'intervalle. La transformation continue qui conduit de \mathbf{r}_0 à $\mathbf{r}_{\pi/2}$ est la *transformation de Bonnet*¹⁰.

Dans ces coordonnées, la première forme fondamentale est proportionnelle à l'identité :

$$a_{\alpha\beta} = |f(z)|^2 (1 + |g(z)|^2)^2 \delta_{\alpha\beta}, \quad (5.19)$$

où $z = \phi + i\theta$. On dit que les coordonnées (ϕ, θ) sont conformes car ds^2 est proportionnel à $d\phi^2 + d\theta^2$. Cette propriété simplifie énormément toutes les

¹⁰Nous l'avons évoquée dans la section traitant d'exemples morphologiques.

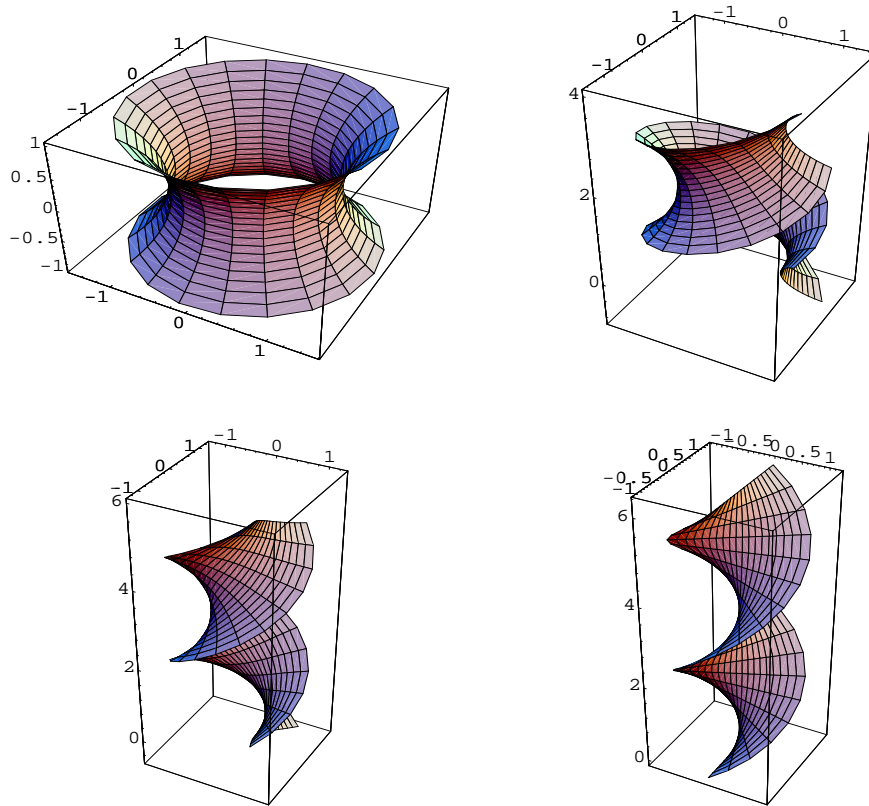


FIG. 5.2 – Exemple d’une famille de Weierstrass : la famille heltocat (paramétrée par τ). Haut gauche : caténoïde $\tau = 0$; haut droite $\tau = \pi/6$; bas gauche : $\tau = \pi/3$; bas droite : hélicoïde $\tau = \pi/2$. La transformation de Bonnet conduit continûment de la caténoïde à l’hélicoïde en faisant varier τ .

équations que l’on peut écrire sur la surface. La courbure moyenne est nulle (surface minimale) et la courbure de Gauss vaut

$$G = -4 \frac{|g'(z)|^2}{|f(z)|^2(1 + |g(z)|^2)^4}. \quad (5.20)$$

Ces surfaces ont la même métrique et la même courbure de Gauss. L’équation d’onde 5.13 est alors la même pour toute la famille. Si les conditions aux limites sont appliquées sur les mêmes contours en (ϕ, θ) alors les fréquences propres sont les mêmes pour toute la famille. Ces propriétés sont remarquables; elles justifient à elles seules l’introduction de la construction de Weierstrass et elles nous seront très utiles pour le prochain chapitre.

Un exemple simple de famille de Weierstrass est la famille heltocat (figure 5.2) obtenue avec $f(z) = -A \exp(-z)$ et $g(z) = -\exp z$. Ses coordonnées

cartésiennes sont :

$$\begin{aligned}x_{\tau}(\phi, \theta) &= A (\cos \tau \cos \phi \cosh \theta + \sin \tau \sin \phi \sinh \theta), \\y_{\tau}(\phi, \theta) &= A (\cos \tau \sin \phi \cosh \theta - \sin \tau \cos \phi \sinh \theta), \\z_{\tau}(\phi, \theta) &= A (\theta \cos \tau + \phi \sin \tau).\end{aligned}\tag{5.21}$$

On obtient la caténoïde pour $\tau = 0$ et l'hélicoïde pour $\tau = \pi/2$ (figure 5.2). La métrique et la courbure de Gauss sont

$$ds^2 = 4A^2 \cosh^2 \theta (d\phi^2 + d\theta^2)\tag{5.22}$$

$$\text{et } G = -\frac{1}{2A^2 \cosh^4 \theta}.\tag{5.23}$$

Elles ont la propriété remarquable, que nous utiliserons dans le prochain chapitre, de ne dépendre que d'une seule variable θ .

5.3 Résumé

Les exemples physiques de surfaces minimales sont nombreux. Les films de savon en sont les plus connus. Nous avons introduit les outils mathématiques utiles pour l'étude des surfaces minimales s'appuyant sur une double hélice du chapitre 6 : la construction de Weierstrass permet de générer des surfaces minimales et équation d'onde pour des surfaces courbées sert à étudier leur stabilité.

Dans les chapitres 7 et 8, nous nous attaquons aux spécificités des vibrations des films de savon : leur épaisseur est libre de varier. Nous considérons d'abord un analogue discret d'un film de savon, une corde vibrante où les variations d'épaisseur sont remplacées par une masselotte coulissant sur la corde. Nous revenons enfin aux films de savon pour faire une étude exhaustive de leurs vibrations.

Chapitre 6

Stabilité de l'hélicoïde

« Qu'est-ce qu'un ministère ? C'est une immense chaudière d'eau de savon où chacun trempe une paille pour essayer de faire une bulle, mais la bulle crève toujours. »

Alfred de Musset, article dans *le Temps*.

Dans ce chapitre, nous étudions un exemple de surface à ordre liquide et dont l'énergie est purement capillaire. Nous nous intéressons au problème de Plateau pour les surfaces minimales qui s'appuient sur une double hélice.

6.1 Présentation

La surface minimale qui s'appuie sur deux cercles coaxiaux est la caténoïde (figure 5.2 ou 6.6). Elle existe seulement si ces deux cercles sont assez proches l'un de l'autre. Si on les éloigne, elle subit une transition discontinue et est remplacée par deux disques (voir la figure 5.1 du chapitre précédent). La propriété remarquable de cette transition est qu'elle est un cas de singularité en temps fini. En effet, Chen et Steen [46] ont considéré un film de savon qui s'appuie sur les deux cercles : un écoulement conduit au pincement de la surface (elle s'auto-intersecte en un point), ce qui permet sa séparation en deux films distincts (qui deviennent les disques). La construction de Weierstrass associe l'hélicoïde à la caténoïde, et, d'après le chapitre précédent, leurs spectres de vibrations sont les mêmes pour un bon choix des conditions aux limites ; on s'attend alors à ce qu'elles subissent des transitions similaires. Bien que les travaux sur la caténoïde soient nombreux (Chen et Steen [46]), nous n'en connaissons pas sur l'hélicoïde. Il est donc naturel d'étudier la stabilité de l'hélicoïde comme nous l'avons fait en collaboration avec P. Patrício [26].

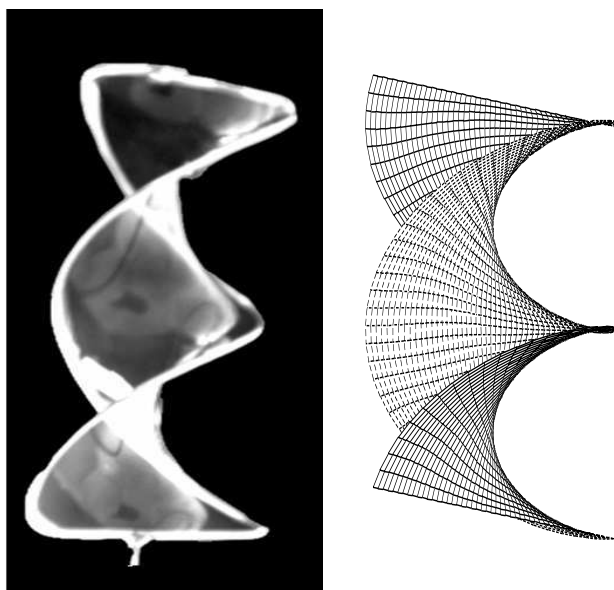


FIG. 6.1 – Réalisations expérimentale et numérique de l'hélicoïde pour un rapport hauteur sur diamètre $H/D=2$ et un nombre de tours de la double hélice $\phi_0/(2\pi) = 1$. L'obtention de ces figures est expliquée dans la section 6.3.1.

Pour cela nous considérons un cadre formé d'une double hélice et limité par des barreaux horizontaux (voir la figure 6.1) et étudions le problème de Plateau : quelles sont les surfaces minimales s'appuyant sur ce cadre ? L'équation de la double hélice en coordonnées cartésiennes est

$$\mathbf{r}_{\pm}(s) = (\pm R \cos \phi, \pm R \sin \phi, \frac{p}{2\pi} \phi) \text{ pour } \phi \in [0, \phi_0]. \quad (6.1)$$

Celles des deux barreaux sont

$$\mathbf{r}(t) = (Rt, 0, 0) \text{ pour } t \in [-1, 1], \quad (6.2)$$

$$\mathbf{r}(t) = (Rt \cos \phi_0, Rt \sin \phi_0, \frac{p}{2\pi} \phi_0) \text{ pour } t \in [-1, 1]. \quad (6.3)$$

Trois longueurs interviennent dans ces définitions : le diamètre $D = 2R$, le pas p et la hauteur $H = \phi_0/(2\pi)$ de la double hélice. $\phi_0/(2\pi)$ est le nombre de tours de la double hélice. Ainsi deux paramètres sans dimension définissent le cadre ; prenons par exemple H/D et ϕ_0 . L'hélicoïde d'équation paramétrique¹

$$\mathbf{r}_{\pi/2}(\phi, \theta) = A(\cos \phi \sinh \theta, \sin \phi \sinh \theta, \phi), \quad \phi \in [0, \phi_0] \text{ et } \theta \in [-\theta_0, \theta_0], \quad (6.4)$$

¹Elle est définie dans le chapitre précédent. Par commodité, nous avons opéré une rotation de $\pi/2$ en transformant (x, y) en $(-y, x)$.

répond à ce problème de Plateau, à condition que

$$A = \frac{p}{2\pi}, \quad (6.5)$$

$$A \sinh \theta_0 = R. \quad (6.6)$$

Nous étudions ici la stabilité de l'hélicoïde; puis, quand elle est instable, nous déterminons expérimentalement, numériquement et analytiquement les surfaces qui sont solutions du problème de Plateau. Ce chapitre étant consacré aux surfaces minimales, nous supposons que la surface a uniquement une énergie capillaire.

6.2 Stabilité linéaire

Dans cette section, nous reprenons les résultats déjà obtenus par Patricio [114] sur la stabilité des éléments de la famille helto-cat introduite dans le chapitre précédent. D'après le chapitre précédent, l'équation pour les petites oscillations sinusoïdales à la fréquence ω s'écrit

$$-\omega^2 \rho h w = \sigma (\Delta_B w - 2Gw), \quad (6.7)$$

où $G = -1/(2A^2 \cosh^4 \theta)$ est la courbure de Gauss commune à la famille, et $\Delta_B = (\partial^2/\partial\phi^2 + \partial^2/\partial\theta^2)/(4A^2 \cosh^2 \theta)$ est le laplacien de Beltrami sur ces surfaces. Les conditions aux limites sont

$$w = 0 \text{ pour } \theta = \pm\theta_0 \text{ ou } \phi = 0 \text{ ou } \phi = \phi_0. \quad (6.8)$$

C'est un problème à valeurs propres en ω . S'il existe une fréquence propre telle que $\omega^2 < 0$ alors la surface est instable. La limite de stabilité est donnée par $\omega = 0$. Trouver cette limite revient à déterminer pour quelles valeurs de ϕ_0 et θ_0 , l'équation

$$\Delta_B w - 2Gw = 0 \quad (6.9)$$

qui résulte de 6.7 en posant $\omega = 0$, a une solution w non nulle satisfaisant aux conditions aux limites² 6.8.

Le fait que la métrique et la courbure de Gauss ne dépendent que de θ suggère la séparation de variables

$$w(\phi, \theta) = \sin(n\pi\phi/\phi_0)W(\theta), \quad (6.10)$$

²Cela revient à dire que $\omega = 0$ est une fréquence propre.

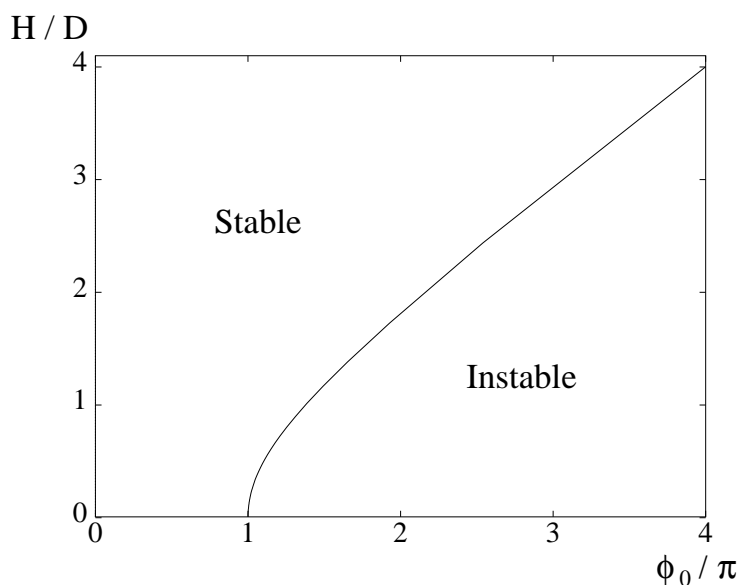


FIG. 6.2 – Diagramme de stabilité de l'hélicoïde en fonction du rapport d'aspect H/D et du demi-nombre de tours ϕ_0/π .

où n est un entier non nul ; ainsi w satisfait aux conditions aux limites en $\phi = 0$ et $\phi = \phi_0$. Le problème devient alors unidimensionnel :

$$\frac{d^2W}{d\theta^2} + \frac{2}{\cosh^2\theta}W = \left(\frac{n\pi}{\phi_0}\right)^2 W, \quad (6.11)$$

avec $W(\pm\theta_0) = 0$. Cette équation est transformable en une équation de Schrödinger dont les solutions s'expriment avec des fonctions hypergéométriques [114]. Trouver pour quel θ_0 ce problème a une solution demanderait la résolution d'une équation implicite faisant intervenir ces fonctions. En pratique, une détermination numérique avec la méthode du tir est plus simple. Pour chaque valeur de ϕ , le plus bas seuil de stabilité θ_0 est obtenu pour $n = 1$. Cette courbe $\theta_0(\phi_0)$ donne le diagramme 6.2 pour l'hélicoïde en utilisant $H/D = \phi_0/(2 \sinh \theta_0)$.

L'interprétation de ce diagramme est aisée si l'on considère une ligne H/D constant. On part de $\phi_0 = 0$, pour lequel il n'y a pas de tours et le cadre est rectangulaire. Il est clair que dans ce cas le plan est la surface minimale stable répondant au problème de Plateau. Pour ϕ_0 très grand, les hélices tournent beaucoup, l'aire de l'hélicoïde tend vers l'infini ; il n'est donc pas surprenant qu'elle soit instable. L'hélicoïde est donc stable dans la partie de gauche du diagramme 6.2 et instable à droite.

Cas de la caténoïde

Nous considérons ici à titre de vérification la stabilité de la caténoïde (figure 6.6). Elle peut être étudiée de manière bien plus simple, grâce à sa symétrie de révolution (voir Chen et Steen [46]). L'équation de la caténoïde s'écrit

$$\mathbf{r}_0(\phi, \theta) = A(\cos \phi \cosh \theta, \sin \phi \cosh \theta, \theta), \quad \theta \in [-\theta_0, \theta_0]. \quad (6.12)$$

Si les disques sur lesquels elle s'appuie ont un diamètre D et sont séparés d'une hauteur H alors

$$A\theta_0 \cosh \theta_0 = H \quad (6.13)$$

$$\text{et } A = D/2. \quad (6.14)$$

D'où

$$H/D = f(\theta_0) = 2\theta_0 \cosh \theta_0; \quad (6.15)$$

Cette fonction est minimale pour $\theta_0 \tanh \theta_0 = 1$, soit pour

$$\theta_0 = \theta_0^c = 1,199. \quad (6.16)$$

À H/D donné, il y a donc deux solutions $\theta_0^{(i)}$ telles que $\theta_0^{(1)} < \theta_0^c < \theta_0^{(2)}$ (donc deux caténoïdes qui s'appuient sur les deux cercles) si $H/D > (H/D)_c = 0,662$, et zéro solution si $H/D < (H/D)_c$ (donc aucune caténoïde). Remarquons que près du minimum

$$H/D - (H/D)_c \sim (\theta_0 - \theta_0^c)^2; \quad (6.17)$$

cette remarque sera utile pour l'analyse faiblement non linéaire de la fin du chapitre.

La condition de stabilité s'obtient aussi en séparant les variables dans l'équation 6.7

$$w(\phi, \theta) = \sin(n\phi)W(\theta); \quad (6.18)$$

la symétrie de révolution impose à n d'être un entier. La limite de stabilité est atteinte quand il existe une solution de

$$\frac{d^2W}{d\theta^2} + \frac{2}{\cosh^2 \theta} W = n^2 W, \quad (6.19)$$

telle que $W(\pm\theta_0) = 0$. Le plus petit θ_0 est obtenu pour $n = 0$. Dans ce cas-là l'équation a une solution analytique

$$W(\theta) = W_0(\theta \tanh \theta - 1), \quad (6.20)$$

qui s'annule aussi pour $\theta_0 = \theta_0^c$. Ainsi la surface est stable seulement pour $\theta_0 < \theta_0^c$. Si l'on revient aux deux caténoïdes solutions, celle correspondant à $\theta_0^{(1)}$ est stable et l'autre est instable.

Ainsi nous retrouvons le résultat classique [46] selon lequel une caténoïde stable disparaît quand on augmente H/D .

Les résultats de stabilité que nous venons d'exposer sont valables pour tous les éléments de la famille helto-cat à condition de prendre les mêmes conditions aux limites en coordonnées conformes.

6.3 Surfaces bifurquées

6.3.1 Expériences et simulations

Comme une surface instable n'existe pas en pratique, nous étudions maintenant le domaine où l'hélicoïde est instable. Trouver des solutions explicites du problème de Plateau étant très difficile, nous recourons d'abord à des visualisations expérimentales et numériques.

Un cadre en fil de cuivre, en forme de double hélice limitée par des barreaux (figures 6.1 et 6.3) est plongé dans de l'eau savonneuse. Pour $H/D \sim 2$ constant, on observe bien l'hélicoïde à petit nombre de tours de la double hélice. À grand nombre de tours, on observe deux autres surfaces. Ces deux surfaces ressemblent chacune à un ruban courbé vers l'axe, s'appuyant sur une hélice et sur l'hélice supérieure; elles semblent se déduire l'une de l'autre par symétrie par rapport à l'axe de la double hélice. Le moment de la transition entre l'hélicoïde et l'une des deux surfaces ruban est très sensible aux imperfections du cadre. Une étude systématique demanderait un grand soin expérimental; nous nous sommes contentés de ces observations.

Des simulations numériques ont permis l'étude quantitative de la transition. Nous avons adapté le programme de Patrício et Krauth [117] décrit dans le chapitre 1 en remplaçant l'énergie élastique par l'énergie capillaire et en changeant les conditions aux limites (film s'appuyant sur le cadre). Pour une surface définie par $\mathbf{r}(u, v)$, l'élément d'aire vaut

$$dS = du dv \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)^2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)^2}, \quad (6.21)$$

comme énoncé dans le chapitre précédent. Le paramétrage est choisi pour que le cadre corresponde à $u = \pm u_0$ et $v = \pm v_0$. Le réseau est de taille 2×4 , ce qui donne 16 triangles. Sur chaque triangle, 21 variables sont définies.

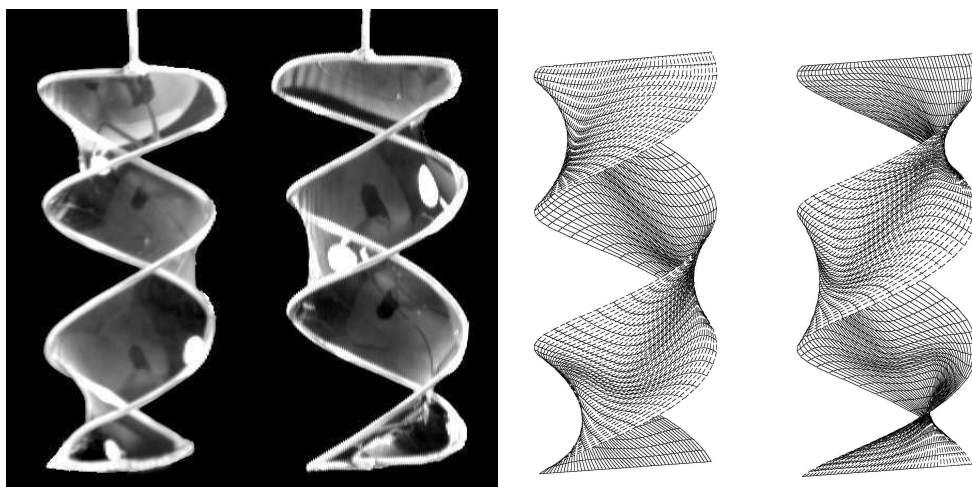


FIG. 6.3 – Les deux surfaces ruban pour $H/D = 2$ et 3 demi-tours ($\phi_0/\pi = 3$). Elles se déduisent l'une de l'autre par la symétrie par rapport à l'axe de la double hélice. Remarquons que ces surfaces ne coupent l'axe qu'au niveau des barreaux. Considérons la courbe résultant de l'intersection d'une surface ruban avec le plan $z = H/2$, *i.e.* à mi-hauteur. On peut prendre comme paramètre d'ordre la plus petite distance $d/2$ de cette courbe à l'axe. Nous appelons d le diamètre intérieur de la surface ruban.

Pour imposer les conditions aux limites, pour $u = u_0$ par exemple, on fixe les trois coordonnées de la position $\mathbf{r}(v, u_0)$, la dérivée $\partial\mathbf{r}/\partial v(v, u_0)$ et la dérivée seconde $\partial^2\mathbf{r}/\partial v^2(v, u_0)$; il y a 12 triangles sur la frontière, ce qui donne $3 \times 3 \times 12 = 108$ variables fixées. Le programme fait alors intervenir $16 \times 21 - 108 = 228$ variables. Ce nombre de variables est un compromis qui permet une bonne précision numérique et un calcul rapide (quelques minutes sur une station de travail). En minimisant l'énergie capillaire, nous obtenons par exemple les surfaces des figures 6.1 et 6.3. Tout d'abord, pour valider notre méthode, nous avons comparé la surface numérique obtenue à l'hélicoïde; elles sont identiques (à 1% près) pour les paramètres où l'hélicoïde est stable. Nous avons retrouvé un diagramme de stabilité de l'hélicoïde qui se superpose à celui de la figure 6.2.

Dans le domaine où l'hélicoïde est instable, l'une de deux surfaces ruban apparaît. Elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe de la double hélice. La transition brise la symétrie axiale de l'hélicoïde. Pour préciser la nature de la bifurcation, nous avons défini un paramètre d'ordre, le diamètre intérieur d d'une surface ruban (voir la figure 6.3). Si l'on considère par exemple une droite H/D constante du diagramme de stabilité 6.2, on

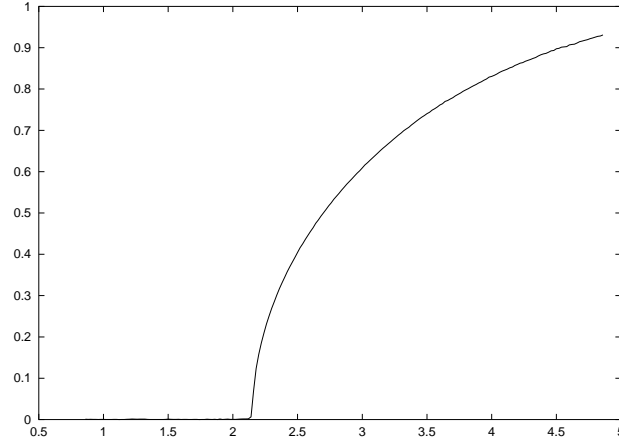


FIG. 6.4 – $d(\phi_0/\pi)$: paramètre d'ordre d (diamètre intérieur de la surface ruban en unités arbitraires) en fonction du nombre de demi-tours ϕ_0/π , pour $H/D = 2$ constant. Près de la bifurcation $d \sim \sqrt{\phi_0 - \phi_0^c}$.

trouve que

$$d \sim \sqrt{\phi_0 - \phi_0^c}, \quad (6.22)$$

ϕ_0^c étant le seuil de stabilité pour un rapport d'aspect H/D donné. Nous avons ici choisi ϕ_0 comme paramètre de contrôle, mais les autres choix donnent le même résultat. La bifurcation brise une symétrie et est continue, c'est donc une bifurcation fourche (ou une transition du second ordre). Cela est surprenant quand on se rappelle que la caténoïde subit une transition du premier ordre.

6.3.2 Analyse faiblement non linéaire

Pour confirmer le résultat précédent, nous effectuons une analyse faiblement non linéaire. Par souci de simplicité, nous nous concentrons sur l'hélicoïde de hauteur infinie et la comparons à la caténoïde. Dans ce cas $\phi_0 = \infty$ et le paramètre de contrôle est θ_0 . L'analyse s'étendrait aisément à ϕ_0 fini et donnerait les mêmes résultats. L'équation 6.19 donnant la stabilité est la même pour les deux surfaces et le premier mode instable est proportionnel à $\theta \tanh \theta - 1$ et correspond à un nombre d'onde orthoradial nul (équation 6.20, si $n = 0$). Légèrement au dessus du seuil de stabilité $\theta_0^c = 1,199$ (équation 6.16), nous pouvons chercher le déplacement normal w sous la forme

$$w(t, \theta) = W(t)(\theta \tanh \theta - 1). \quad (6.23)$$

Pour déterminer l'équation d'évolution de W , nous développons l'énergie du système à l'ordre 4. L'élément d'aire déformé (extension de l'équation 5.10

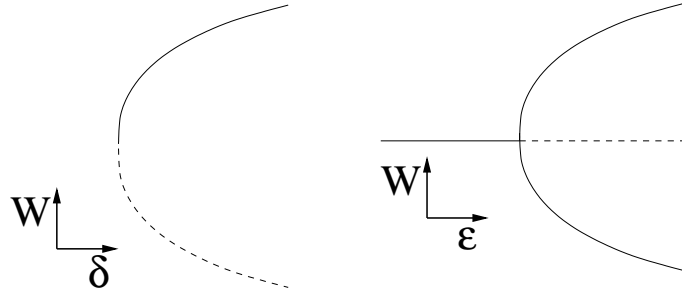


FIG. 6.5 – Formes normales des bifurcations : noeud-col pour la caténoïde (gauche) et fourche pour l'hélicoïde (droite). Le diagramme représente les positions d'équilibre stables (traits continus) et instables (pointillés).

ou développement de de l'équation 6.21) s'écrit

$$dS' = dS \left[1 + \frac{1}{2}(a^{-1})_{\alpha\beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} + Gw^2 - Gw(a^{-1}d^{-1})_{\alpha\beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right] \quad (6.24)$$

$$-Gw^2(a^{-1})_{\alpha\beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{1}{8} \left((a^{-1})_{\alpha\beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \right], \quad (6.25)$$

à l'ordre 4 en déplacement transverse w . a et d sont respectivement la première et la seconde forme fondamentale. Les coordonnées α et β sont l'une des coordonnées ϕ ou θ .

Maintenant, en injectant l'expression 6.23 de w dans l'énergie capillaire et cinétique et en intégrant sur $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$, nous obtenons l'énergie par unité de coordonnée³ ϕ ,

$$E_{\text{cap}} = \sigma \left(a_1(\theta_0 - \theta_0^c)W^2 - g \frac{a_2}{A^2} W^3 + \frac{a_3}{A^2} W^4 \right), \quad (6.26)$$

$$E_{\text{cin}} = \rho h a_4 A^2 (\partial_t W)^2. \quad (6.27)$$

Les a_i sont des constantes *positives* s'exprimant avec des intégrales en θ que nous n'avons pas calculées⁴. Ici apparaît un coefficient de la seconde forme fondamentale

$$g = d_{\phi\phi} = A \cos \tau, \quad (6.28)$$

qui est nul pour l'hélicoïde et vaut A pour la caténoïde. C'est la seule différence entre ces surfaces. En effet, la métrique et les courbures sont les mêmes pour les éléments de la famille *heltocat*. Le tenseur de courbure qui

³Il est inutile d'intégrer sur ϕ car le mode instable 6.23 n'en dépend pas.

⁴Leur valeur ne change pas la nature des bifurcations.

est symétrique est défini par trois composantes et deux relations entre ces composantes sont données par la courbure moyenne et la courbure de Gauss ; il reste donc un seul degré de liberté pour la famille.

Pour la caténoïde, nous pouvons prendre comme paramètre de contrôle le rapport hauteur/diamètre (équation 6.17)

$$\delta = (H/D)_c - H/D \sim (\theta_0 - \theta_0^c)^2. \quad (6.29)$$

L'équation d'évolution se déduit des expressions des énergies,

$$\frac{d^2W}{dt^2} = 2\sqrt{\delta}W - W^2. \quad (6.30)$$

Nous avons mis toutes les grandeurs à l'échelle pour qu'elles deviennent sans dimension. Le changement de variable $W = \sqrt{\delta} + Z$ donne la forme normale de la bifurcation,

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = \delta - Z^2, \quad (6.31)$$

schématisée sur la figure 6.5. C'est une bifurcation noeud-col hamiltonienne.

Pour l'hélicoïde, nous prenons comme paramètre de contrôle le rapport pas/diamètre

$$\epsilon = (p/D)_c - p/D = \pi(1/\sinh \theta_0^c - 1/\sinh \theta_0) \sim \theta_0 - \theta_0^c. \quad (6.32)$$

La dérivation des énergies donne la forme normale (nous écrivons ici aussi des grandeurs sans dimension),

$$\frac{d^2W}{dt^2} = \epsilon W - W^3, \quad (6.33)$$

schématisée sur la figure 6.5. C'est une bifurcation fourche hamiltonienne.

Les stabilités des deux surfaces sont très liées car elles ont les mêmes métriques et courbures. La différence profonde des deux instabilités provient du degré de liberté attaché à la seconde forme fondamentale. La nature des bifurcations n'est pas surprenante si l'on examine les symétries. L'hélicoïde sépare l'espace en deux parties symétriques par rapport à son axe ; on s'attend donc à une bifurcation supercritique qui brise cette symétrie. Par contre, la caténoïde sépare l'espace en deux parties qui ne se déduisent pas l'une de l'autre par symétrie (en effet l'une est concave et l'autre est convexe).

6.3.3 Solutions analytiques

Dans le cas de la double hélice de hauteur infinie, nous avons réalisé que nous pouvons résoudre analytiquement le problème de Plateau. Considérons

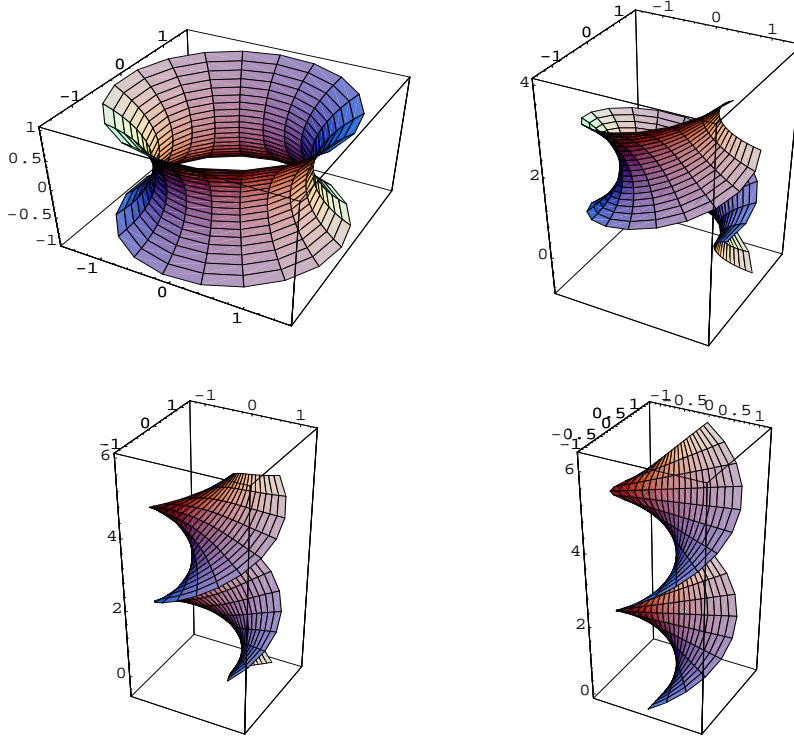


FIG. 6.6 – Reproduction de la famille heltocat (dépendant de l'angle τ). Haut gauche : caténoïde $\tau = 0$; haut droite $\tau = \pi/6$; bas gauche : $\tau = \pi/3$; bas droite : hélicoïde.

une surface Σ_τ de la famille heltocat d'équation

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\tau(\phi, \theta) = & B(\cos \tau \cos \phi \cosh \theta + \sin \tau \sin \phi \sinh \theta, \\ & \cos \tau \sin \phi \cosh \theta - \sin \tau \cos \phi \sinh \theta, \theta \cos \tau + \phi \sin \tau). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Le point de départ est que, à θ fixé, $\mathbf{r}_\tau(\phi, \theta)$ définit une hélice. Existe-t-il alors une surface heltocat sur laquelle deux telles hélices coïncident avec le cadre imposé (double hélice de rayon R , et de pas p) ?

Déterminons d'abord les caractéristiques de la courbe $\Gamma_{\tau, \theta}$, définie par $\mathbf{r}_\tau = (x_\tau, y_\tau, z_\tau)$, θ fixé. Tout d'abord,

$$r^2 = x_\tau^2 + y_\tau^2 = B^2(\cos^2 \tau \cosh^2 \theta + \sin^2 \tau \sinh^2 \theta), \quad (6.35)$$

est constant, cette courbe se trouve donc sur un cylindre de rayon r . L'équation de $\Gamma_{\tau, \theta}$ se transforme en

$$x_\tau = r \cos(\phi - \eta),$$

$$\begin{aligned}
y_\tau &= r \sin(\phi - \eta), \\
z_\tau &= B(\theta \cos \tau + \phi \sin \tau), \\
\text{où } \tan \eta &= \tan \tau \tanh \theta;
\end{aligned} \tag{6.36}$$

ce qui montre bien que $\Gamma_{\tau, \theta}$ est une hélice de rayon r , de pas $2\pi B \sin \tau$ et d'angle initial η .

On veut trouver sur Σ_τ deux hélices qui coïncident avec le cadre imposé. Cela se traduit par les trois conditions suivantes :

1. Les rayons r des hélices $\Gamma_{\tau, \theta_\pm}$ sont identiques à celui du cadre R , soit

$$r = A \sinh \theta_0 = R. \tag{6.37}$$

θ_0 est pris ici comme paramètre de contrôle de l'hélicoïde.

2. Les pas sont identiques à celui du cadre, soit

$$2\pi A = 2\pi B \sin \tau. \tag{6.38}$$

3. Les deux hélices $\Gamma_{\tau, \theta_\pm}$ sont symétriques par rapport à l'axe, ce qui revient à dire que la translation d'une hélice d'un demi-pas parallèlement à l'axe donne l'autre hélice.

Les deux premières conditions donnent une première relation entre θ_\pm et τ ,

$$\begin{aligned}
\theta_\pm &= \pm \frac{1}{2} \ln X, \quad X \text{ étant une solution de} \\
X^2 - 2(\sin^2 \tau \sinh^2 \theta_0 - \cos(2\tau)) X + 1 &= 0.
\end{aligned} \tag{6.39}$$

Les équations de $\Gamma_{\tau, \theta_\pm}$ sont alors

$$\mathbf{r}_\tau(\theta_\pm, \phi \pm \eta) = (r \cos \phi, r \sin \phi, A(\theta_\pm / \tan \tau + \phi \pm \eta)). \tag{6.40}$$

La troisième condition donne une deuxième relation entre θ_\pm et τ ,

$$(\theta_+ - \theta_-) / \tan \tau + 2\eta = \pi. \tag{6.41}$$

Les deux relations 6.39 et 6.41 se combinent pour donner une équation implicite qui se simplifie, après un certain nombre de manipulations trigonométriques et algébriques, en

$$\begin{aligned}
\tan \left(\frac{\theta_\pm}{\tan \tau} \right) \tan \tau \tanh \theta_\pm &= 1, \\
\sinh^2 \theta_\pm &= \sin^2 \tau \sinh^2 \theta_0 - \cos^2 \tau.
\end{aligned} \tag{6.42}$$

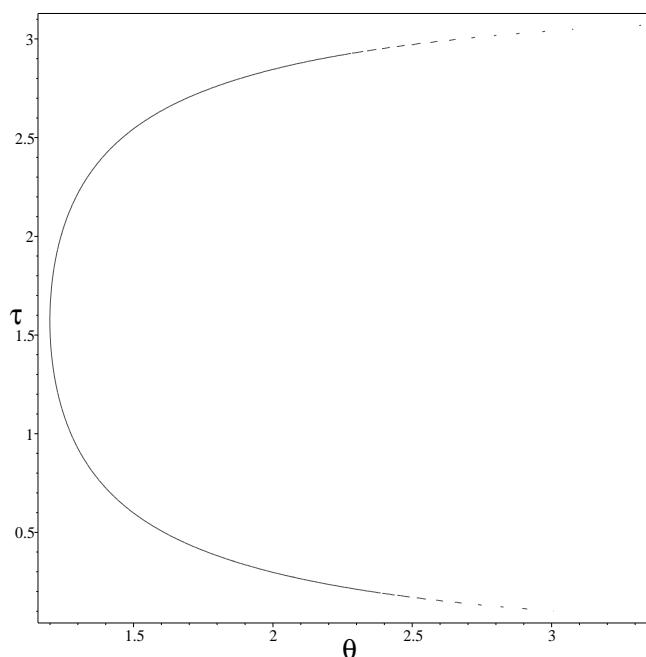


FIG. 6.7 – Paramètre τ des deux surface heltocat répondant au problème de plateau en fonction du paramètre θ_0 de l'hélicoïde (équation 6.42). Elles se déduisent l'une de l'autre par $\tau \rightarrow \pi - \tau$, ce qui revient à une symétrie par rapport à l'axe de la double hélice.

Ce système détermine τ en fonction de θ_0 (figure 6.7). Deux solutions τ apparaissent continûment au dessus de θ_0^c , seuil d'instabilité de l'hélicoïde, et tendent vers 0 et π quand $\theta_0 \rightarrow \infty$. Ainsi nous obtenons deux surfaces Σ_τ de la famille heltocat ; elles se déduisent l'une de l'autre par symétrie par rapport à l'axe de la double hélice . Elle sont limitées par $\theta_- < \theta < \theta_+$. Des encadrements de l'équation 6.42 montrent que $\theta_+ = -\theta_- < \theta_0^c = 1.199$; donc, d'après la section 6.2, ces deux surfaces sont stables⁵. Il n'y a donc aucune bifurcation secondaire.

Nous avons ainsi obtenu analytiquement les deux surfaces bifurquées, qui font partie de la famille heltocat, elles apparaissent continûment à partir de l'hélicoïde quand elle devient instable, et se rapprochent de la caténoïde à grand paramètre de contrôle. Nous avons vérifié leur stabilité. La comparaison avec les résultats numériques renforce ces conclusions. En effet, les surfaces ruban analytiques et numériques coïncident (à 1 % près) à une assez grande

⁵L'analyse de stabilité faite pour la caténoïde est valable pour toutes les surfaces de la famille heltocat limitées en coordonnées conformes par $\phi = \pm\infty$ et $\theta = \pm\theta_0$.

distance verticale (de l'ordre du pas) des barreaux supérieur et inférieur. Les différences quantitatives de comportement pour une double hélice de hauteur finie proviennent donc essentiellement des effets de bords dus aux barreaux.

6.4 Résumé

La résolution du problème de Plateau est en général très difficile. Nous y avons réussi pour un cadre formé d'une double hélice grâce aux propriétés conformes de la famille *heltocat*. Plusieurs approches indépendantes ont donné des résultats cohérents. En variant les paramètres du cadre, l'hélicoïde devient instable et est remplacée à travers une transition continue par deux surfaces ruban proches de deux surfaces de la famille *heltocat*. Ce chemin continu de surfaces minimales stables pourrait être utile pour les études morphologiques. Considérons par exemple l'ADN ; dans sa conformation courante les bases sont sur une surface proche d'une hélicoïde ; il présente aussi deux conformations (l'ADN A, voir Branden et Tooze [31] et l'ADN P, voir Strick *et al.*[143]) où les bases sont tournées vers l'extérieur, comme si elles étaient sur une surface ruban. Cette bifurcation donne aussi un chemin continu pour les changements de conformation de protéines : les hélices α qui se trouvent sur une hélicoïde sont transformées en feuillets β qui se trouvent sur une caténoïde (Hyde *et al.*[80]). Ceci dit, même si les morphologies sont similaires, rien ne prouve que ces systèmes soient décrits par une énergie de surface. Du point de vue des systèmes dynamiques, nous avons expliqué pourquoi la bifurcation noeud-col de la caténoïde devient fourche pour l'hélicoïde : la seconde forme fondamentale commande la nature de la bifurcation.

Nous avons utilisé ici les vibrations pour l'étude de la stabilité des surfaces minimales. Dans les deux prochains chapitres, nous nous intéressons plus directement aux vibrations forcées des films de savon.

Chapitre 7

De la masselotte enfilée sur une corde vibrante à l'auto-adaptation du film de savon

« En la corde s'encordent cordée à trois cordons ;
A l'acorde s'acordent dont nos descordé sons ;
La descordance acordent des max que recordons
En lor lit se détordent por ce que nos tortons. »

Rutebeuf, *Li Diz des Cordeliers*.

L'étude de la stabilité d'une membrane capillaire revient à celle de ses vibrations. Dans ce chapitre nous nous intéressons aux vibrations forcées d'un film de savon qui sont plus complexes que celles d'une surface minimale. En fait nous considérons ici un équivalent mécanique : une corde vibrante sur laquelle coulisse une masselotte. La position de la masselotte correspond à une surépaisseur du film.

7.1 Introduction aux vibrations des films de savon et à l'auto-adaptation

Plusieurs observations ont montré la complexité des vibrations des films de savon. Quand ils sont minces (d'épaisseur inférieure à $1 \mu\text{m}$), des vortex intenses sont générés autour des ventres de vibration (figure 7.1) comme l'ont observé S. Taylor [147] puis Afenchenko *et al.*[2]. Vega *et al.*[150] ont modélisé cet effet en tenant compte du couplage entre variations d'épaisseur du film et vibrations et ont retrouvé numériquement de tels vortex ; ils n'ont cependant proposé aucune interprétation physique. Quand les films sont épais

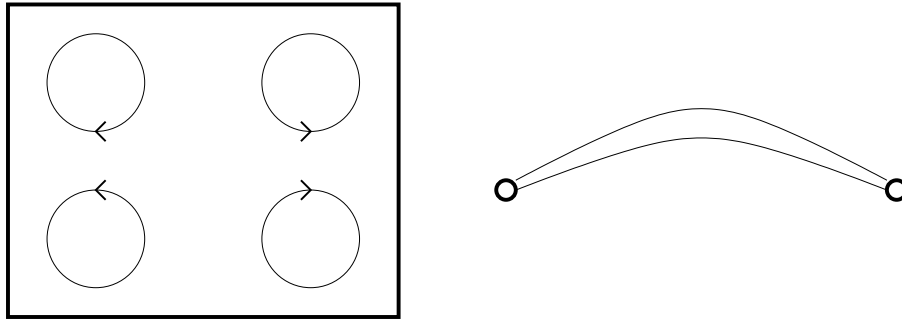


FIG. 7.1 – Gauche : vue schématique de dessus d'un film de savon mince ; quatre vortex entourent le ventre de vibration central. Droite : coupe d'un film épais montrant l'accumulation de matière au ventre ; l'épaisseur est exagérée.

($10\ \mu\text{m}$) et que le forçage est grand, l'amplitude de vibration varie peu avec la fréquence d'excitation comme l'ont constaté Airiau, Rabaud et Couder [3]. Si l'on augmente la fréquence, la distribution spatiale d'épaisseur change lentement tant que le nombre de ventres de vibration est le même, la matière étant concentrée aux ventres ; le film se réorganise quand le nombre de ventres change.

La concentration de matière aux ventres de vibration se manifeste aussi pour des films smectiques inhomogènes¹. Dumoulin *et al.*[58] et Brazovskaia *et al.*[33] ont montré expérimentalement et théoriquement que des surépaisseurs de film (des zones où il existe des couches supplémentaires de smectique) se déplacent naturellement vers le ventre de vibration, sous l'effet d'une force quadratique en l'amplitude de vibration. Dans ces deux études, l'inertie du film est peu modifiée (les surépaisseurs sont faibles) et les vibrations ne sont pas affectées par la position des inhomogénéités. Une configuration opposée (grosses inhomogénéités) est réalisée par Brazovskaia et Pieranski [35] en mettant sur le film une petite bille de masse comparable à celle de la membrane. La bille va vers une position stationnaire qui dépend de la fréquence d'excitation ; quand on augmente cette dernière, la position stationnaire se déplace du centre vers un coin du cadre rectangulaire, le long d'une diagonale. Brazovskaia et Pieranski ont montré que cette position stationnaire est telle que le système se met à résonance avec le forçage. Toutefois, les fréquences accessibles par leur expérience sont limitées² et l'ajustement d'un paramètre

¹Ces effets ont été découverts quand les films smectiques étaient mal préparés.

²L'excitation acoustique n'est efficace qu'en dessous de la première fréquence propre du film, on est donc limité à un ventre de vibration. L'excitation électrique ne permet que de petites amplitudes pour lesquels ces effets non-linéaires ne sont pas observés.

est utilisé pour calculer les fréquences propres. Leurs résultats nécessitent donc des confirmations. Nous étudions ici une version à une dimension de ce système : une corde vibrante sur laquelle coulisse une masselotte ; dans ce cas, des calculs exacts permettent une meilleure compréhension des observations de Brazovskaia et Pieranski [35].

Les cordes vibrantes ont beaucoup été étudiées durant le dix-huitième puis le dix-neuvième siècle, les motivations provenant principalement des instruments de musique. L'exploration de la propagation des ondes fut ainsi l'occasion d'une controverse où Euler, d'Alembert et Lagrange [93] se demandaient si une corde pincée peut présenter une discontinuité de pente à l'endroit du pincement. Lagrange a déterminé les modes propres d'une corde de masse linéique non uniforme. Helmholtz [152] a prolongé ce travail avec le cas d'une masse ponctuelle fixée sur une corde ; son but était en fait de trouver les plus basses fréquences audibles par l'oreille humaine : la masse ajoutée augmente l'inertie du système et abaisse sa fréquence fondamentale. Notre système est une extension de celui de Helmholtz : la masse n'est plus fixée et peut coulisser sur la corde.

En fait, nous voulons comprendre le comportement auto-adaptatif des films de savon mis en évidence par Airiau *et al.* [3]. Pour cela, nous étudions expérimentalement et théoriquement une corde vibrante sur laquelle une ou deux masselottes peuvent coulisser ; une masselotte représente un endroit où le film est épais. Nous proposons enfin une corde avec beaucoup de masselottes comme équivalent exact du film de savon. Ce travail a déjà fait l'objet d'une publication [24].

7.2 L'expérience

7.2.1 Montage

Le principe de l'expérience est simple : une ou deux masselottes sont enfilées sur une corde forcée à vibrer magnétiquement. Le soin apporté à la fabrication des instruments de musique nous a conduit à choisir une corde de piano en acier, de diamètre 0,5 mm, de masse linéique $\lambda = 1,53$ g/m et de longueur utile 30 cm (distance entre les deux points de fixation, figure 7.2). Ce choix de longueur résulte d'un compromis : si la corde est longue, la position de la masselotte est mesurée avec précision, mais il est difficile de réaliser un champ magnétique homogène. La corde a une masse $\lambda L = 0,46$ g et est tendue par un poids lui donnant une tension $T = 17$ N.

Les masselottes sont des petits disques en cuivre de masses $m = 0,21, 0,73$ ou 1,62 g. Chacune est percée d'un trou de diamètre 0,55 mm, légèrement

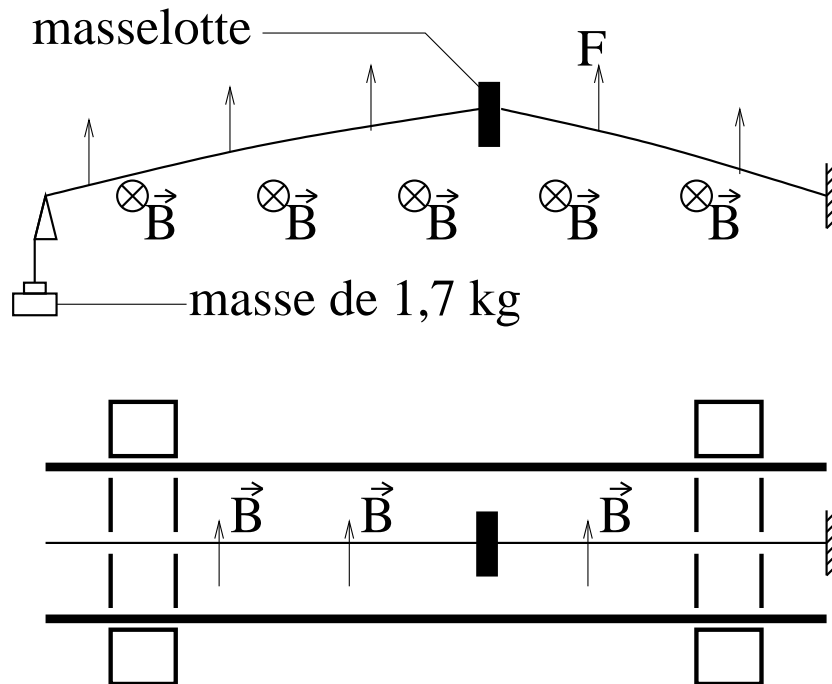


FIG. 7.2 – Schéma du montage expérimental : vue de côté (haut) et de haut (bas). Une corde de piano est fixée à une extrémité et tendue avec une masse à l'autre. Un champ magnétique est généré par deux aimants en U et deux barres de fer pour le canaliser. Un courant alternatif passe à travers la corde. Ainsi une force magnétique sinusoïdale F est exercée verticalement sur la corde.

plus grand que la corde. La masselotte peut ainsi sautiller sur la corde, ce qui lui permet de se déplacer facilement (sinon le frottement solide peut la bloquer). Quand le trou était percé au centre du disque, la masselotte tournait autour d'elle-même et la rotation se couplait à la vibration de la corde. Pour y remédier, les trous sont légèrement excentrés, de sorte que le disque forme un petit pendule. Nous avons choisi la position du trou et la taille des disques pour que les fréquences propres de ces pendules soient différentes des fréquences de forçage ; ainsi il n'y a pas de couplage entre oscillation de la masselotte et vibration. Nous avons vérifié que tout cela n'introduit pas d'artefact : des expériences préliminaires utilisaient une corde en caoutchouc enduite d'huile pour que la masselotte en téflon glisse dessus et ont donné des résultats similaires. Nous avons abandonné ce montage à cause du forçage mécanique (un moteur secoue périodiquement un point de la corde) mal contrôlé et de l'évolution lente des caractéristiques élastiques du caoutchouc.

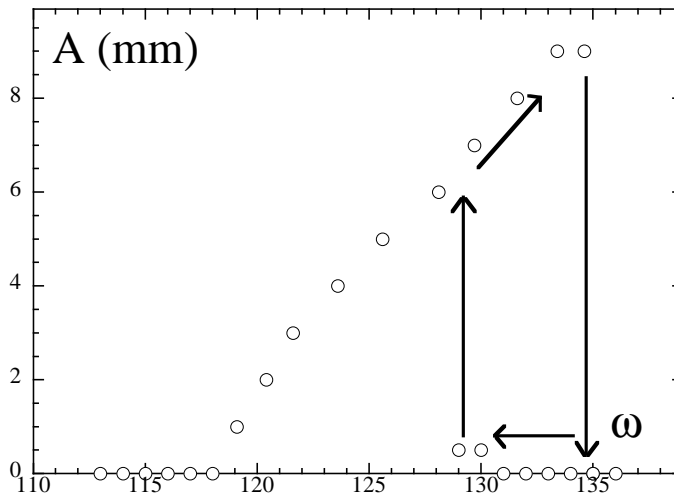


FIG. 7.3 – Réponse de la corde pour un grand forçage ($F \simeq 1$ N/m) : amplitude de vibration au centre de la corde en fonction de la fréquence de forçage autour de la première résonance. Les flèches montrent l'hystérésis.

Nous avons choisi un forçage par une force magnétique (figure 7.2) produit par un champ magnétique et un courant sinusoïdal passant à travers la corde. Pour le champ magnétique, nous utilisons deux gros aimants en U, dont les pôles sont de part et d'autre de la corde. Pour canaliser le champ, deux barres de fer doux sont placés contre les aimants et joignent chacune les deux pôles de même signe des deux aimants. Le champ résultant est horizontal et perpendiculaire à la corde ; il est en gros constant (à 20 % près) le long de la corde et vaut en moyenne $B = 0,1$ T. Le courant électrique (10 A) est produit par un générateur et un amplificateur de puissance avec lequel on varie aisément la fréquence et l'amplitude de forçage. Ainsi la force magnétique est verticale et vaut environ 1 N/m.

Pour des raisons que nous discutons plus bas, nous avons aussi utilisé une configuration du champ magnétique antisymétrique (la symétrie par rapport au centre de la corde change le signe du champ) en inversant les pôles de l'un des deux aimants.

Nous avons d'abord étudié la corde seule. A petit forçage ($F \simeq 0,1$ N/m), nous avons mesuré la fréquence fondamentale $\omega_1 = 126$ Hz et la largeur de résonance $\gamma = 5$ Hz ; ainsi le facteur de qualité est $Q = \omega_1/\gamma = 25$. A grand forçage ($F \sim 1$ N/m), la courbe de réponse présente un hystérésis (figure 7.3), comme pour un oscillateur non linéaire à un degré de liberté. Ainsi l'amplitude de vibration de la corde semble être déterminée par des effets non linéaires. Remarquons aussi que l'amplitude de vibration est quasi-nulle en dehors d'un petit domaine autour de la résonance.

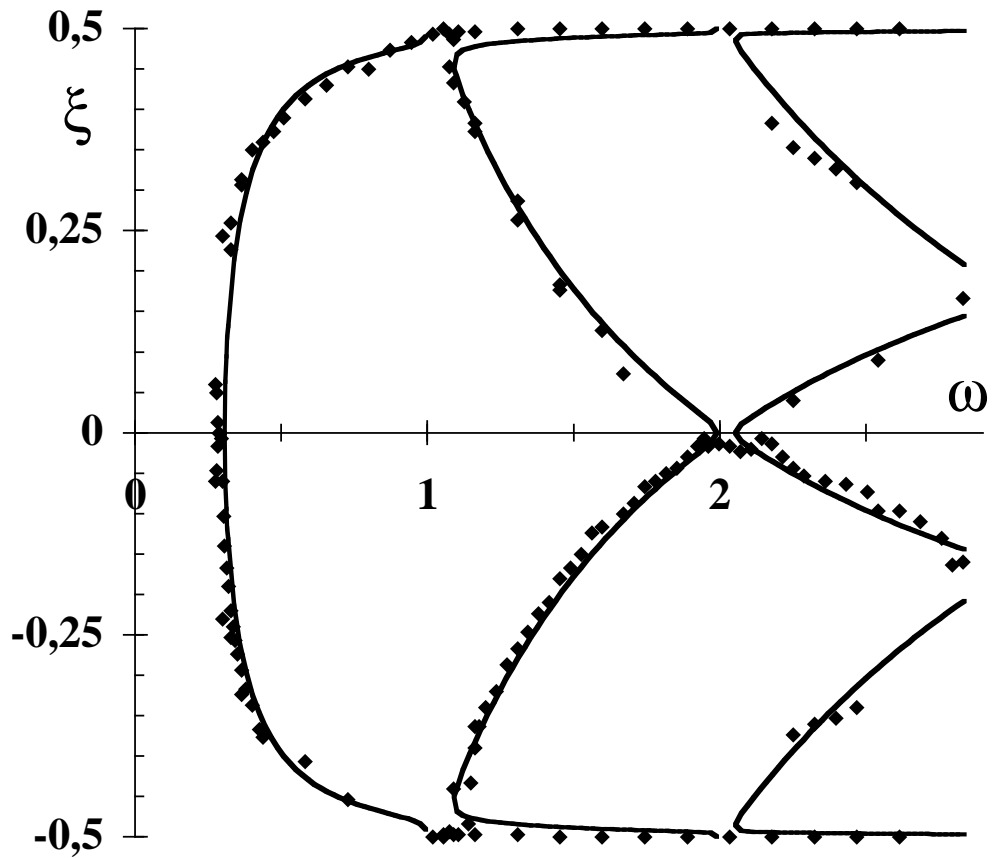


FIG. 7.4 – Une masselotte lourde ($m = 1,82$ g) : positions stationnaires de la masselotte en fonction de la fréquence de forçage. Les unités de longueur et de fréquence sont la longueur de la corde $L = 30$ cm et sa fréquence fondamentale $\omega_1 = 126$ Hz. Carrés : expérience. Traits : théorie (avec une masse réduite $\mu = 4,0$), positions de la masselotte pour lesquelles le système est résonnant, données par l'équation 7.16.

7.2.2 Observations avec une masselotte

Maintenant une masselotte est enfilée sur la corde. Tout d'abord nous considérons une masselotte de masse $m = 1,82$ g, plus lourde que la corde ($\mu = m/(\lambda L) = 4,0$). La masselotte est placée arbitrairement sur la corde. Pour la plupart des fréquences, sa position évolue lentement, avec un temps caractéristique de l'ordre de la minute (bien plus grand que 0,01 s, période caractéristique de vibration), jusqu'à ce qu'un régime stationnaire soit atteint. Nous mesurons alors la position ξ de la masselotte, avec une précision de 1 mm (1/300 de la longueur de la corde). La fréquence est déterminée à 0,1 Hz près (un peu moins que 1/1000 de la fréquence fondamentale). Ensuite, nous varions la fréquence de forçage et reprenons la mesure. En changeant la position arbitraire du début, nous explorons plusieurs branches : à une fréquence donnée, il existe des positions stationnaires différentes (figure 7.4). Nous avons exploré le domaine de fréquences inférieur à environ 400 Hz, pour lequel l'amplitude de vibration est assez grande pour que la masselotte se déplace.

À basse fréquence, la vibration est imperceptible. Quand la fréquence s'approche de $\omega_a = 38$ Hz ($\omega_a < \omega_1 = 126$ Hz), l'amplitude de vibration devient notable (0,5 mm) et la masselotte se déplace et atteint une position stationnaire au milieu de la corde. À $\omega = \omega_a = 38$ Hz, l'amplitude de vibration est grande (3 mm) et la masselotte se trouve à un ventre. L'utilisation des résultats de Helmholtz [152] montre que³ la première fréquence de résonance de la même corde avec la même masselotte fixée au centre est exactement ω_a . Le système s'est spontanément mis à la résonance.

Avec une masselotte fixée, une augmentation de la fréquence au dessus de ω_a désaccorderait le système : l'amplitude de vibration redeviendrait petite. Ici, la masselotte se déplace à droite ou à gauche, vers une position bien déterminée ; l'amplitude de vibration reste grande. Cette rupture de symétrie gauche-droite est associée à une bifurcation supercritique, comme le montre l'évolution de la position ξ près de ω_a . Quand ω devient proche de ω_1 , la masselotte se trouve près de l'une des extrémités de la corde. L'amplitude de vibration de la corde est encore grande (3 mm), mais la masselotte n'est plus à un ventre (l'amplitude de vibration au niveau de la masse est d'ordre 0,5 mm). À ω_1 , la masselotte est exactement à une extrémité et se trouve donc à un noeud ; la corde vibre comme s'il n'y avait pas de masselotte (8 mm). Le système s'est encore adapté pour être à la résonance. Au dessus de ω_0 , une seconde bifurcation a lieu ; à $2\omega_1$, la masselotte se retrouve au milieu ou à une extrémité (figure 7.4).

La même expérience reproduite avec une masselotte légère, de masse $m =$

³Voir les calculs de la section 7.3.

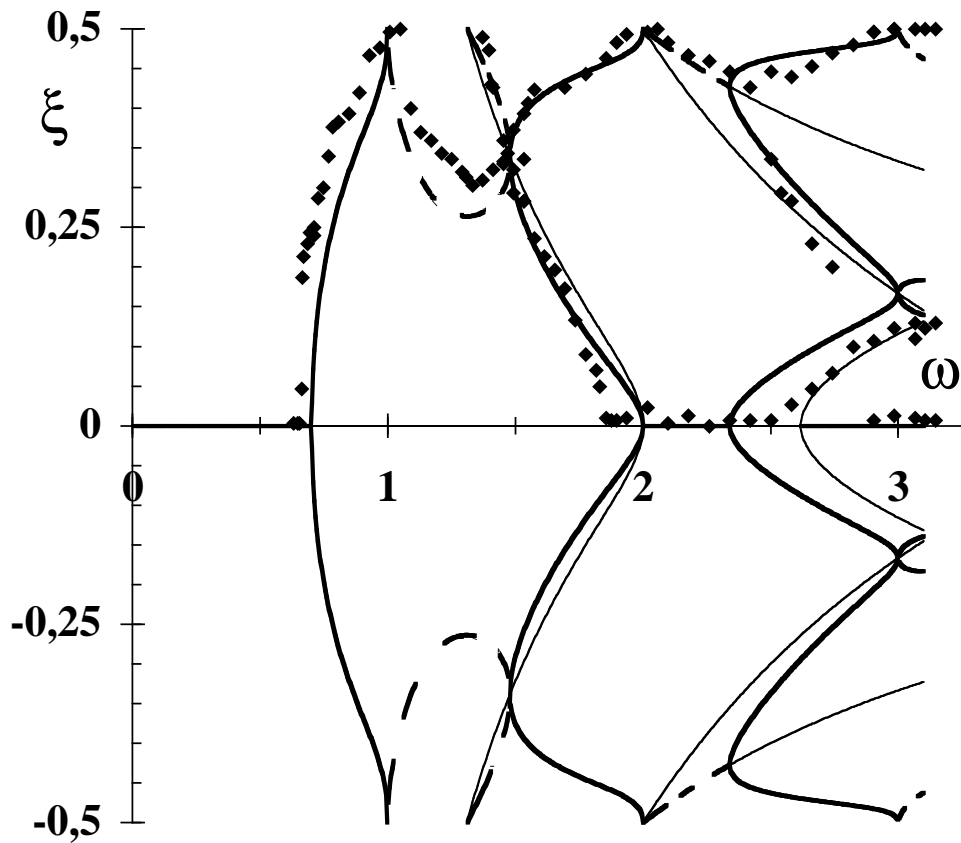


FIG. 7.5 – Une masselotte légère ($m = 0,21$ g) : positions stationnaires de la masselotte en fonction de la fréquence de forçage. Les unités de longueur et de fréquence sont la longueur de la corde $L = 30$ cm et sa fréquence fondamentale $\omega_1 = 126$ Hz. Carrés : expérience. Traits : théorie (avec une masse réduite $\mu = 0,46$) ; positions stables (traits épais) résonnantes (équation 7.16) dans les bandes $0,7 < \omega < 1$, $1,5 < \omega < 2$, $2,3 < \omega < 3 \dots$; positions stables (pointillés épais) non résonnantes données par 7.18 pour $1 < \omega < 2$ et par 7.19 pour $2 < \omega < 2,3$; positions instables (traits fins) données par les équations 7.19-7.20 .

0,21 g inférieure à celle de la corde ($\mu = m/(\lambda L) = 0,46$, figure 7.5), donne des résultats comparables. Maintenant, la fréquence $\omega_a = 88$ Hz est plus grande. La différence principale est que, au dessus de ω_1 , il y a une bande de fréquences où la masselotte a une position stationnaire bien déterminée, bien que le système ne semble pas être résonnant, l'amplitude de vibration de la corde étant de l'ordre de 0,5 mm. Au dessus de cette bande, le comportement redevient le même que pour une masselotte lourde.

7.2.3 Observations avec deux masselottes

Maintenant deux masselottes identiques de masse $m = 0,73$ g ($\mu = m/(\lambda L)$) sont enfilées sur la corde. A basse fréquence, la vibration est imperceptible et les masselottes n'ont pas de position préférentielle. En augmentant la fréquence, elles se déplacent et se mettent ensemble au centre. La première résonance a lieu pour $\omega = \omega_a = 41$ Hz, qui est identique à la fréquence de résonance d'une corde avec une masse $2m$ fixée en son milieu. Si l'on augmente encore la fréquence, les masselottes restent collées et se comportent comme une masselotte unique de masse $2m$. Par contre, si l'expérience est commencée un peu au dessus de ω_a , deux cas se présentent. Si les masselottes sont placées sur la même moitié de la corde, elles atteignent une position où elles sont collées et le restent ultérieurement. Par contre, si elles sont placées de part et d'autre du milieu de la corde, elles se déplacent vers deux positions symétriques par rapport au centre, auquel cas une modification de la fréquence conserve la symétrie (figure 7.6).

Dans le deuxième cas, si l'on augmente encore la fréquence, chaque masselotte atteint une extrémité de la corde à $\omega = \omega_1$. Puis elles se rapprochent symétriquement du centre jusqu'à ce qu'une bifurcation supercritique se produise : soit elles continuent à se rapprocher du centre, soit elles s'en éloignent, en restant encore dans des positions symétriques.

Les positions des masselottes correspondant au deuxième mode propre ne sont pas observées dans cette configuration. Comme nous l'expliquerons plus tard, cela provient de la symétrie du forçage. Pour y remédier, nous avons imposé un champ magnétique antisymétrique (voir la description du montage). Dans cette situation, les positions stationnaires des masselottes correspondent au second mode propre (figure 7.6), mais les modes propres impairs sont absents ; les positions symétriques des masselottes apparaissent à $\omega_b = 65$ Hz ($\omega_b > \omega_a$), où une bifurcation supercritique se produit : elles se déplacent toutes deux vers le centre ou vers les extrémités.

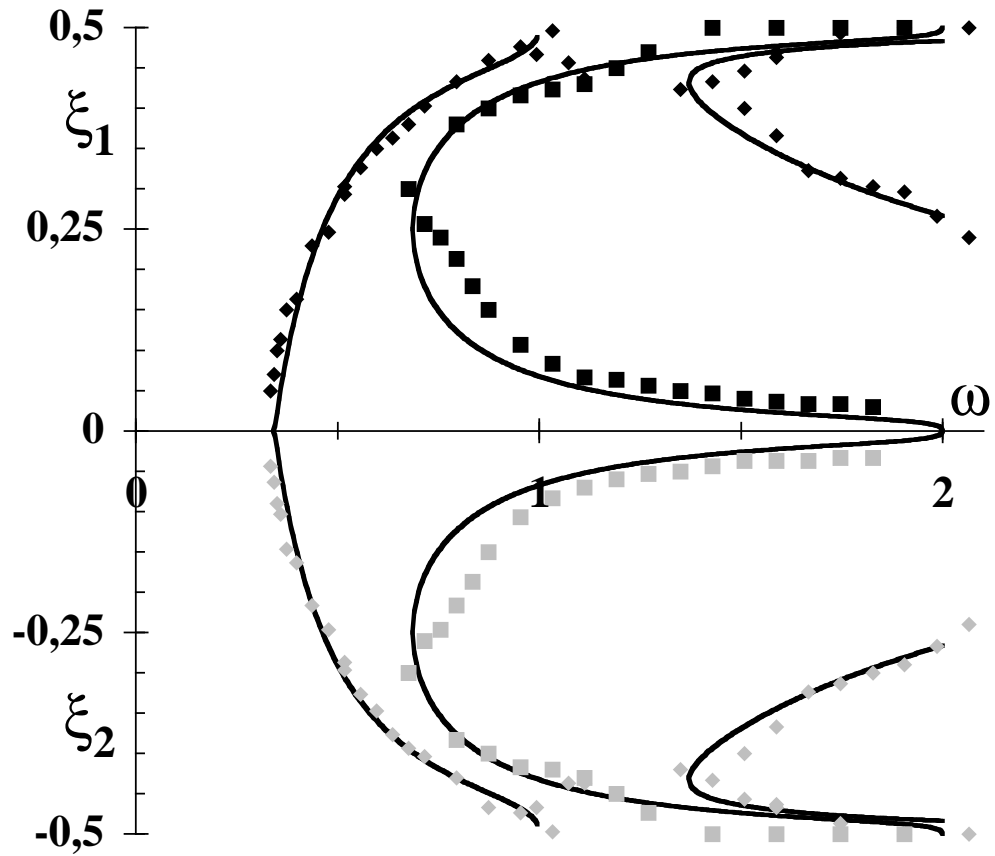


FIG. 7.6 – Deux masselottes identiques ($m = 0,73$ g) : positions stationnaires des masselottes en fonction de la fréquence de forçage. Les unités de longueur et de fréquence sont la longueur de la corde $L = 30$ cm et sa fréquence fondamentale $\omega_1 = 126$ Hz. Symboles : expérience; carrés inclinés : forçage symétrique, carrés droits : forçage antisymétrique; symboles noirs : masselotte de gauche; symboles gris : masselotte de droite. Traits : théorie (avec une masse réduite $\mu = 1,6$), positions des masselottes pour lesquelles le système est résonnant; le mode 1 et le mode 3 sont donnés par l'équation 7.24, le mode 2 par 7.25.

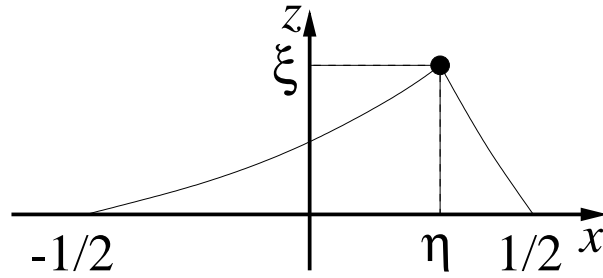


FIG. 7.7 – Définition du repère et des variables utilisées.

7.3 Modèle et résultats

Les vibrations de la corde sont décrites par l'équation d'onde unidimensionnelle usuelle,

$$\lambda \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad (7.1)$$

où $z(x, t)$ est le déplacement transverse de la corde par rapport à sa position à l'équilibre et x est la coordonnée horizontale le long de la corde de longueur L ; λ est la masse linéique et T la tension de la corde. Le n -ième mode propre de forme

$$z(x, t) = z_0 \sin(n\pi(x/L + 1/2)) \cos(2\pi\omega t) \quad (7.2)$$

correspond à la fréquence propre

$$\omega_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\lambda}}. \quad (7.3)$$

7.3.1 Avec une masselotte

Si une masse m se trouve sur la corde en $x = \xi$ (figure 7.7), et s'il y a un forçage homogène d'intensité $F \cos(2\pi\omega t)$, alors l'équation 7.1 devient

$$(\lambda + \delta(x - \xi)) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + F \cos(2\pi\omega t), \quad (7.4)$$

où δ est la distribution de Dirac qui traduit la présence d'une masse ponctuelle. Pour trouver l'équation de mouvement de la masselotte, calculons la force G horizontale à laquelle elle est soumise. Soit $\eta = z(\xi, t)$ la position transverse de la masselotte et considérons un déplacement élémentaire longitudinal $d\xi$; le théorème de l'énergie cinétique appliqué à la masselotte⁴ se

⁴Nous utilisons ici implicitement le fait que le temps caractéristique de mouvement de la masselotte est grand devant la période de vibration; ce n'est pas gênant car nous travaillerons dans ce cadre par la suite.

traduit par $dK = G d\xi$, où

$$K = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 \right) \quad (7.5)$$

est l'énergie cinétique de la masselotte, d'où

$$G = \frac{\partial K}{\partial \xi}. \quad (7.6)$$

L'équation du mouvement de la masselotte s'en déduit,

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = G = \frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2, \quad (7.7)$$

où nous avons utilisé le fait que la vitesse horizontale de la masselotte est petite, $\partial \xi / \partial t \ll \partial \eta / \partial t$; car le temps caractéristique de mouvement horizontal est bien plus grand que la période de vibration.

Nous avons négligé la gravité g , car les poids mg et λLg d'ordre 0,01 N sont très petits devant la tension de la corde $T = 17$ N. Nous avons oublié la friction entre la masselotte et la corde car elle ne change pas les positions d'équilibre; en fait elle est importante car elle impose une dynamique lente au mouvement horizontal de la masselotte⁵. Le facteur de qualité $Q = 25$ est assez grand, nous négligeons alors l'amortissement des mouvements de la corde par rayonnement dans l'air ou dans les supports. Nous laissons de côté les non linéarités de l'équation de vibration⁶. Cette hypothèse nous permet de trouver les positions stationnaires de la masselotte mais pas les amplitudes de vibration.

Nous écrivons les équations 7.4 et 7.7 sous forme adimensionnée en utilisant comme unités la longueur de la corde L pour x , z , ξ et η , la pulsation fondamentale $\omega_1 = \sqrt{T/\lambda}/(2L)$ pour ω et le temps caractéristique $\tau = 1/(2\omega_1)$ pour t :

$$(1 + \mu \delta(x - \xi)) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + f \cos(\pi \omega t), \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2, \quad (7.9)$$

⁵Ici la friction est difficile à modéliser. Supposons la visqueuse de coefficient d'amortissement $a \gg \omega_1$. Le mouvement est alors suramorti et son équation est $ma \partial \xi / \partial t = -G$, ce qui ne change pas les positions d'équilibre.

⁶Ces non linéarités fixent l'amplitude de vibration de la corde (voir l'annexe de la fin du chapitre).

où $\mu = m/(\lambda L)$ est la masse réduite de la corde et $f = FL/T$ le forçage sans dimension. Nous avons omis de distinguer nouvelles et anciennes variables. ξ varie maintenant entre $-1/2$ et $1/2$.

Le temps caractéristique d'évolution de ξ est grand devant celui de la vibration. Nous pouvons donc prendre la moyenne temporelle de l'équation 7.9 et chercher des solutions du système sous la forme⁷ $z = Z(x, \xi) \cos(\pi\omega t)$ et $\eta = \eta_0(\xi) \cos(\pi\omega t)$. Les équations 7.8-7.9 deviennent alors

$$(1 + \mu\delta(x - \xi)) Z = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + f, \quad (7.10)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\pi^2 \omega^2}{4} \frac{\partial}{\partial \xi} \eta_0^2. \quad (7.11)$$

La dynamique est donc celle d'une masse soumise à un potentiel effectif $-\pi^2 \omega^2 \eta_0^2(\xi)/4$. Nous pouvons chercher les solutions de 7.10 sous la forme

$$\begin{aligned} Z(x, \xi) &= \frac{f}{\pi^2 \omega^2} (\cos \pi\omega(x + 1/2) - 1 + A \sin \pi\omega(x + 1/2)) \text{ si } x < \xi, \\ Z(x, \xi) &= \frac{f}{\pi^2 \omega^2} (\cos \pi\omega(x - 1/2) - 1 + B \sin \pi\omega(x - 1/2)) \text{ si } x > \xi, \end{aligned} \quad (7.12)$$

vérifiant déjà les conditions aux limites $Z(-1/2) = Z(1/2) = 0$. A et B sont déterminés par le système

$$\eta_0(\xi) = Z(\xi^+, \xi) = Z(\xi^-, \xi), \quad (7.13)$$

$$-\pi^2 \omega^2 \mu Z(\xi, \xi) = \frac{\partial Z}{\partial x}(\xi^+, \xi) - \frac{\partial Z}{\partial x}(\xi^-, \xi). \quad (7.14)$$

La première équation impose la continuité de Z en ξ et la seconde provient de l'intégration de 7.10 entre $\xi - \epsilon$ et $\xi + \epsilon$ dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$. A et B en résultent et conduisent, après un certain nombre de manipulations trigonométriques, à l'expression de l'amplitude de vibration en ξ :

$$\eta_0(\xi) = \frac{f}{\pi^2 \omega^2} \left(\frac{2 \sin(\pi\omega/2) \cos(\pi\omega\xi)}{\sin(\pi\omega) + \pi\omega\mu \cos^2(\pi\omega/2) - \pi\omega\mu \cos^2(\pi\omega\xi)} - 1 \right). \quad (7.15)$$

La donnée de η_0^2 équivaut à la donnée du potentiel dans lequel évolue la massette. La détermination des positions d'équilibre en découle. Les maxima de $|\eta_0|$ correspondent aux positions d'équilibre stables et les minima aux positions instables.

Tout d'abord les positions pour lesquelles le système est résonnant sont définies par $\eta_0(\xi) = \pm\infty$, soit par

$$\sin(\pi\omega) + \pi\omega\mu \cos^2(\pi\omega/2) - \pi\omega\mu \cos^2(\pi\omega\xi) = 0. \quad (7.16)$$

⁷Nous omettons l'éventuel déphasage car nous avons négligé l'amortissement.

Ces courbes sont tracées sur les figures 7.4-7.5 pour les deux valeurs de μ (4,0 et 0,46) correspondant aux expériences. Cette équation est identique à celle donnée par Helmholtz [152] pour les fréquences propres d'une corde portant une masse μ en ξ :

$$\sin(\pi\omega) = \pi\omega\mu \sin(\pi\omega(\xi + 1/2)) \sin(\pi\omega(\xi - 1/2)). \quad (7.17)$$

Ainsi, le système vibrant avec un degré de liberté s'adapte spontanément pour être à résonance avec l'excitation. Expérimentalement, l'amplitude de vibration est grande (3 mm en pratique car elle est limitée par les non linéarités, voir l'annexe). Quand la masselotte est lourde ($\mu = 4$, figure 7.4), le système résonne avec presque toutes les fréquences de forçage. Avec une masselotte légère ($\mu = 0,46$, figure 7.5), le système ne peut se mettre à la résonance dans certaines bandes de fréquences. Pour $\mu = 0$, nous retrouvons bien sûr le comportement de la corde seule avec des résonances à $\omega = 1, 2, 3, \dots$

L'équation 7.12 donne la forme de la corde après avoir calculé A et B (figure 7.8). La pente de la corde est discontinue au niveau de la masselotte, sauf si elle se trouve exactement à un noeud (par exemple pour $\omega = \omega_1$). Aucune résonance n'est possible en dessous de ω_a ($\omega_a = 0,3$ pour $\mu = 4$). Au dessus de cette fréquence deux positions ξ , symétriques par rapport au centre de la corde, sont possibles, suite à la première bifurcation. Dans un domaine de fréquences au dessus de ω_a , la masselotte est près d'un ventre; pour la plupart des autres fréquences, elle se trouve près d'un noeud. Entre ω_1 et $\omega_2 = 2\omega_1$, deux positions ξ et leurs deux symétriques par rapport au centre donnent lieu à résonance; la deuxième bifurcation s'est produite. Entre ω_2 et $\omega_3 = 3\omega_1$, six positions résonnantes sont possibles...

Quand la masselotte est légère, d'autres positions d'équilibre sont observées dans les bandes de fréquence où aucune résonance n'est possible. Expérimentalement, pour de telles fréquences, la masselotte a une position d'équilibre bien déterminée. Ces positions correspondent à des extrema de η_0 ,

$$\sin(\pi\omega) + \pi\omega\mu \cos^2(\pi\omega/2) + \pi\omega\mu \cos^2(\pi\omega\xi) = 0, \quad (7.18)$$

$$\sin(\pi\omega\xi) = 0. \quad (7.19)$$

La stabilité des solutions 7.18-7.19 s'étudie avec les variations du potentiel : elles sont stables ou instables selon la valeur de la fréquence ω . Une famille de minima de $|\eta_0|$ est donnée par $\eta_0 = 0$, soit

$$2 \sin(\pi\omega/2) \cos(\pi\omega\xi) - \sin(\pi\omega) - \pi\omega\mu \cos^2(\pi\omega/2) + \pi\omega \cos^2(\pi\omega\xi) = 0. \quad (7.20)$$

Celles-ci sont toujours instables car elles correspondent à des maxima du potentiel $-\eta_0^2$. Toutes ces positions stationnaires (équations 7.16 à 7.20) sont

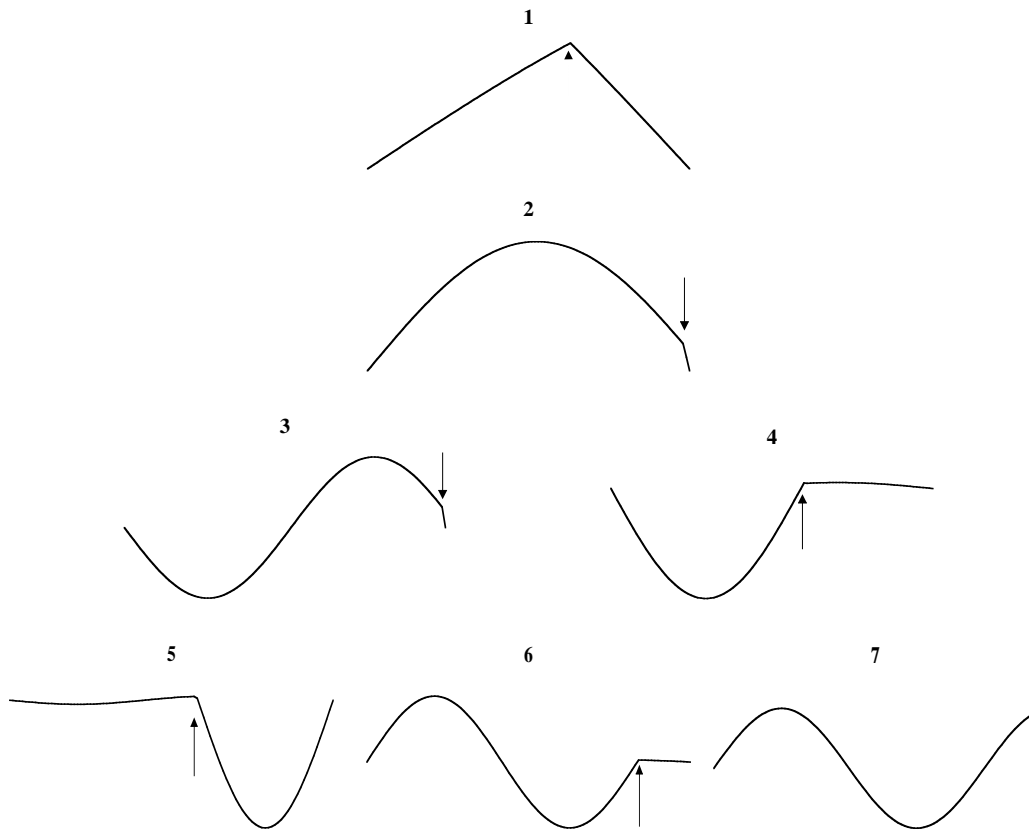


FIG. 7.8 – Forme de la corde pour les configurations résonnantes : la masselotte se trouve à la discontinuité de pente (indiquée par une flèche) ; la masse réduite est $\mu = 4,0$ et les fréquences sont sans dimension ; l'amplitude de vibration est exagérée. **1** : $\omega = 0,31$ juste au dessus de la première bifurcation, la masselotte est à un ventre ; **2** : $\omega = 0,95$ juste en dessous de la fréquence fondamentale, la position stationnaire est près d'un noeud ; **3, 4** : les deux positions possibles pour $\omega = 1,9$, la masselotte est encore près d'un noeud ; **5, 6, 7** : les trois positions possibles pour $\omega = 2,4$.

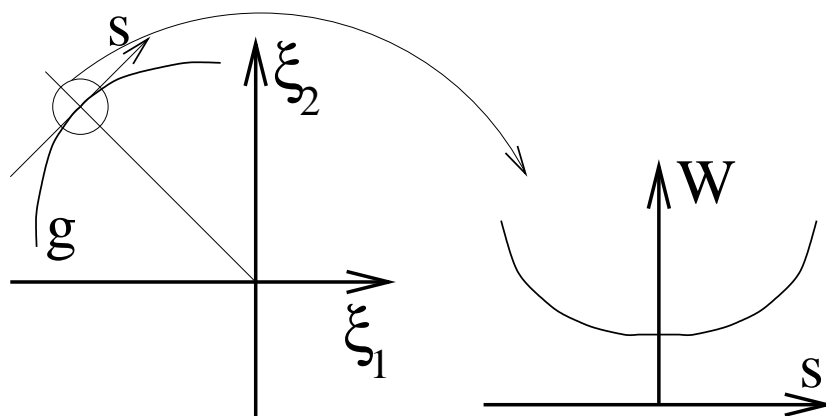


FIG. 7.9 – Schématisation de la courbe $g(\omega, \xi_1, \xi_2) = 0$ à ω fixé, près d'une intersection avec la seconde bissectrice et de W en fonction de la coordonnée curviligne s . W est paire, elle a donc un extremum en $s = 0$; la position $(-\xi, \xi)$ est alors une position stationnaire.

représentée sur la figure 7.5. Elles expliquent bien les comportements expérimentaux. Les petites différences entre expérience et théorie proviennent probablement des inhomogénéités du champ magnétique. En effet, si l'on augmente artificiellement les variations de B , par exemple en enlevant les barres de fer doux, ces différences s'accroissent.

7.3.2 Avec deux masselottes

Dans le but de comprendre un système continu comme un film de savon, il est intéressant d'étudier une corde avec plusieurs masselottes. Avec deux masselottes, le système a deux degrés de liberté supplémentaires (leurs deux positions ξ_1 et ξ_2). Le but de cette partie est de montrer que l'on peut déterminer les positions stationnaires des masselottes sans calculs compliqués.

Nous nous attendons à ce que, quand c'est possible, ces positions soient telles que le système se mette à la résonance. La condition pour une masselotte est de la forme $f(\omega, \xi) = 0$, celle pour deux masselottes de même masse sera alors

$$g(\omega, \xi_1, \xi_2) = 0, \quad (7.21)$$

où g est une fonction invariante par permutation de ξ_1 et ξ_2 (les masselottes sont identiques) ou par la transformation $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (-\xi_1, -\xi_2)$ qui traduit la symétrie par rapport au centre de la corde. À ω fixé, il existe a priori un nombre infini de paires de (ξ_1, ξ_2) solutions de l'équation 7.21. Expérimentalement, des positions bien déterminées sont observées; il doit donc y avoir

un processus de sélection parmi ces solutions.

La détermination des positions stationnaires pour deux masselottes fait intervenir la minimisation d'un potentiel semblable à celui de l'équation 7.15 et qui conduit à l'équation 7.21. Tous les effets que nous avons négligé vont se traduire par une petite perturbation

$$W(\omega, \xi_1, \xi_2) \quad (7.22)$$

de ce potentiel⁸. C'est la minimisation de cette perturbation qui va déterminer l'état stationnaire du systèmes parmi toutes les possibilités données par l'équation 7.21. Remarquons que W respecte aussi les symétries du système et est invariant par les transformations $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_2, \xi_1)$ et $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (-\xi_1, -\xi_2)$, donc par la transformation

$$\Psi : (\xi_1, \xi_2) \mapsto (-\xi_2, -\xi_1). \quad (7.23)$$

Considérons l'intersection $(-\xi, \xi)$ de la courbe Γ définie par g , à ω fixé, avec la seconde bissectrice (figure 7.9). L'invariance de g par la transformation Ψ montre que Γ a une tangente parallèle à la première bissectrice et une paramétrisation locale $(\xi_1, \xi_2) = (-\xi + s, \xi + s)$. L'invariance de W par Ψ impose à W d'être paire en s , $W(-\xi + s, \xi + s) = W(-\xi - s, \xi - s)$. Ainsi W est maximale ou minimale en $s = 0$. Donc la position $(\xi_1, \xi_2) = (-\xi, \xi)$, où les masselottes sont symétriques par rapport au centre de la corde, est une position stationnaire (stable ou instable). Un argument similaire montre que la position $(\xi_1, \xi_2) = (\xi, \xi)$, où les masselottes sont collées l'est aussi. Nous n'avons par cette méthode aucune indication sur la stabilité ; expérimentalement, elles sont toutes deux stables.

Maintenant, le problème se simplifie. Il suffit de chercher les positions résonnantes de la forme $(-\xi, \xi)$. Les calculs sont comparables à ceux pour une masselotte⁹. Ces positions se séparent en deux familles : celles pour lesquelles la forme de la corde est symétrique par rapport au centre

$$\pi\omega\mu \sin(\pi\omega(2\xi - 1/2)) = \pi\omega\mu \sin(\pi\omega/2) - 2 \cos(\pi\omega/2), \quad (7.24)$$

qui sont bien observées expérimentalement avec un forçage symétrique ; celles pour lesquelles la forme de la corde est antisymétrique

$$\pi\omega\mu \cos(\pi\omega(2\xi - 1/2)) = \pi\omega\mu \cos(\pi\omega/2) + 2 \sin(\pi\omega/2), \quad (7.25)$$

⁸ W provient principalement de la traction de la corde (voir l'annexe), mais cela n'intervient pas dans l'analyse.

⁹En fait ils sont plus simples car nous ne cherchons ici que les positions résonnantes, nous n'avons donc pas besoin de tenir compte du forçage.

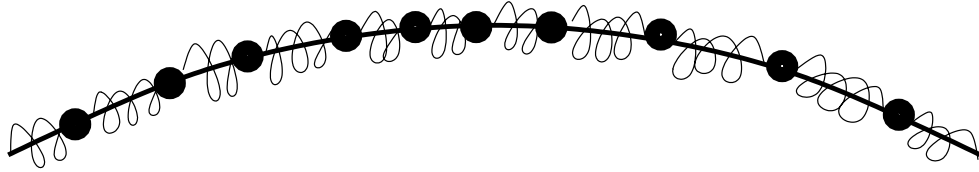


FIG. 7.10 – Équivalent mécanique d'un film de savon : corde portant beaucoup de masselottes séparées par des ressorts.

qui sont observées expérimentalement avec un forçage antisymétrique.

En fait une excitation avec une certaine symétrie ne force pas des modes propres de symétrie opposée. Morse [106] a trouvé que les résonances paires disparaissent pour la vibration d'une corde simple (à distribution uniforme de masse) soumise à un forçage uniforme, mais n'a pas su en donner une interprétation¹⁰. Notre argument explique ce résultat : les modes pairs ont une forme antisymétrique opposée à la symétrie du forçage, il ne sont donc pas observés. Si l'on revient au cas d'une seule masselotte, les modes propres ne possèdent aucune symétrie pour toutes les positions de la masse et sont donc excités par le forçage symétrique que nous avons utilisé. La présence d'une masselotte brise ainsi la symétrie gauche/droite.

Avec deux masselottes, le système s'adapte encore pour se mettre à la résonance. La présence de deux degrés de liberté implique un processus de sélection parmi les positions possibles. Un processus semblable a lieu dans l'expérience de Brazovskaia et Pieranski [34] où la bille sur un film smectique vibrant possède deux degrés de liberté (ses deux coordonnées), mais les positions résonnantes sont choisies sur la diagonale du film.

7.4 Une limite continue : le film de savon ?

Dans un film de savon vibrant, la masse se concentre à chaque ventre. L'équivalent mécanique le plus évident est une corde portant une masselotte à chaque ventre ; si on augmente la fréquence et que le nombre de ventres change, chaque masselotte perd un peu de masse qui sert à former une nouvelle masselotte au niveau du nouveau ventre. Le changement de mode se ferait par des bifurcations similaires à celles observées pour une ou deux masselottes. Un système plus pratique pourrait être une corde portant un très grand nombre de masselottes, ce qui facilite la redistribution de masse. Toutefois, nous avons observé que deux masselottes ne se séparent pas spontanément. L'évolution de la corde avec plein de masselottes conduirait à leur

¹⁰D'ailleurs, ce paragraphe disparaît dans une édition ultérieure de son livre [107].

agrégation en un seul bloc. Pour éviter ce problème, nous pouvons placer un ressort entre chaque paire de masselottes voisines.

Nous considérons maintenant ce système schématisé sur la figure 7.10 : N masselottes de masse m , de positions horizontales $na + \xi_n$ (a est la distance moyenne entre deux masselottes successives) et verticales $\eta_n = z(na + \xi_n, t)$. Les ressorts sont de raideur k . Les équations du système sont une extension de 7.4 et 7.7 :

$$(\lambda_0 + \Sigma_n \delta(x - \xi_n)) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + F \cos(2\pi\omega t), \quad (7.26)$$

$$m \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial t^2} = k(\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2\xi_n) + \frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(\frac{\partial \eta_n}{\partial t} \right)^2. \quad (7.27)$$

Nous avons tenu compte de la force de rappel due aux ressorts. Nous supposons $k/m \ll \omega^2$, pour que le temps caractéristique induit par les ressorts soit petit devant celui de la vibration.

Prenons maintenant la limite d'un grand nombre de masselottes, $N \rightarrow \infty$ ou $a \rightarrow 0$, avec $m/a = \mu_0$ et $ka = K$ constants. $\Sigma_n \delta(x - \xi_n)$ tend vers la masse linéique $\mu(x)$. Les coordonnées des masselottes sont maintenant les variables continues $(\xi(x), z(x))$; la position longitudinale est définie de sorte que $\xi = 0$ si les masselottes sont équiréparties ($\mu(x) = \mu_0$ est constant). Les équations deviennent

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + F \cos(2\pi\omega t), \quad (7.28)$$

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = K \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2. \quad (7.29)$$

La dernière étape est de passer d'une description lagrangienne (les masselottes sont repérées par rapport à leurs positions à l'équilibre) à une description eulérienne. La relation entre masse linéique μ et déplacement ξ est

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}} \quad (7.30)$$

d'où $\mu_0 \partial^2 \xi / \partial x^2 = -\partial \mu / \partial x$ si $\partial \xi / \partial x \ll 1$. Cette dernière condition sur $\partial \xi / \partial x$ permet de remplacer la dérivation par rapport à ξ par une dérivation par rapport à x dans l'équation 7.29. Si nous supposons un mouvement lent dans la direction horizontale, alors les vitesses eulérienne et lagrangienne sont égales (elles diffèrent de termes quadratiques) : $v = \partial \xi / \partial t$.

Donc

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + F \cos(2\pi\omega t), \quad (7.31)$$

$$\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{K}{\mu_0} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2, \quad (7.32)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (7.33)$$

On reconnaît dans l'ordre : une équation d'onde avec une vitesse de phase variable spatialement, une équation hydrodynamique dans la direction horizontale et la conservation de la masse. Nous verrons dans le chapitre suivant qu'un film de savon est décrit quasiment de la même manière. La masse linéique variable se transpose en épaisseur variable du film de savon, la tension de la corde en tension de surface et la raideur K des ressorts en module élastique du film de savon. Nous avons ainsi construit un équivalent mécanique du film de savon.

7.5 Résumé

Nous avons considéré une corde vibrante avec une ou plusieurs masselottes coulissant dessus. L'addition de degrés de liberté fait perdre au système son caractère à fréquences propres. Quand cela est possible, il s'auto-adapte au forçage pour se mettre à résonance. Il répond ainsi avec une grande amplitude de vibration pour la plupart des fréquences d'excitation. Quand il a plus d'un degré de liberté, les masselottes ont un nombre infini de positions stationnaires correspondant à la résonance ; un petit nombre de telles positions est observé, elles sont sélectionnées par les non linéarités de la vibration de la corde. Nous avons enfin exhibé une corde portant beaucoup de masselottes reliées par des ressorts comme équivalent d'un film de savon ; les variations de densité linéique de masselottes correspondent aux variations d'épaisseur du film et la raideur des ressorts se transpose en élasticité du film. Dans le chapitre suivant, nous reprenons l'étude détaillée des films de savon en vibration.

Annexe : non linéarités et amortissement.

Nous cherchons à déterminer l'amplitude de vibration de la corde. Si elle était fixée par l'amortissement, l'amplitude de vibration A à la première résonance serait d'ordre

$$\frac{A}{L} \sim \frac{FLQ}{T}, \quad (7.34)$$

où $F = IB$ est la force magnétique par unité de longueur et $Q = 25$ est le facteur de qualité, d'où $A \sim 10$ cm, alors que, expérimentalement, $A \sim 5$ mm. Par conséquent, il faut tenir compte de la traction de la corde (considérée comme un solide élastique), de sa flexion et des non linéarités d'origine géométrique qui mettent en défaut l'approximation de faible pente utilisée pour l'obtention de l'équation d'onde 7.1. Comme la corde s'allonge au cours de la vibration et que la traction est très coûteuse en énergie pour un objet mince ou fin (voir la première partie), la traction est l'effet non linéaire dominant. L'équation de vibration donnée par Morse [107] se met alors sous la forme

$$\lambda \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{2} E s \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^3 + F \cos \omega t, \quad (7.35)$$

où $E \sim 2.10^{11}$ N/m² est le module d'Young de l'acier et $s \sim 0,25$ mm² est l'aire d'une section de la corde. En comparant les ordres de grandeur des deux derniers termes de l'équation 7.35, on obtient

$$\frac{Es}{L} \left(\frac{A}{L} \right)^3 \sim F = IB, \quad (7.36)$$

qui donne $A \sim 5$ mm, comparable aux observations expérimentales. L'amplitude de vibration est donc déterminée par les non linéarités provenant de la traction de la corde au cours de la vibration.

Chapitre 8

Auto-adaptation : films de savon

« L'adaptation était parfaite et Rouletabille se releva en répétant :
"diable" ! »

Gaston Leroux, *Le mystère de la chambre jaune*.

Nous continuons ici l'étude des surfaces liquides. Nous avons considéré dans le chapitre précédent une corde sur laquelle coulisse une ou plusieurs masselottes. Ce système auto-adaptatif est un équivalent mécanique d'un film de savon. Nous revenons maintenant à l'étude des propriétés d'auto-adaptation pour les vibrations forcées d'un film de savon.

8.1 Présentation

Les études sur les films de savon sont nombreuses ; nous en avons déjà cité quelques unes dans le chapitre 5. Ils sont aussi utilisés comme modèles pour l'étude des écoulements hydrodynamiques à deux dimensions¹, par exemple pour la turbulence bidimensionnelle. A l'équilibre, un film de savon prend la forme d'une surface minimale. Toutefois, ses vibrations sont bien plus complexes que celles d'une surface minimale. Comme nous l'avons vu dans l'introduction du chapitre précédent, si le film est mince, un écoulement s'établit dans le plan du film et conduit à la formation de vortex intenses (Afenchenko *et al.*[2], Vega *et al.*[150]) ; si le film est épais, la distribution d'épaisseur s'adapte au forçage de sorte que l'amplitude de vibration varie peu avec la fréquence d'excitation (Airiau *et al.*[3]).

Nous avons étudié dans le chapitre précédent un équivalent discret du film de savon : une corde vibrante sur laquelle coulisent une ou deux masselottes. L'addition d'un degré de liberté fait perdre au système son caractère à

¹Pour une revue, voir Couder *et al.*[51].

fréquences propres. Nous avons proposé une limite continue que nous n'avons pas étudiée, une corde avec une infinité de masselottes séparées par des ressorts. Nous explorons maintenant le film de savon qui possède un degré de liberté continu car son épaisseur peut varier spatialement.

Nous présentons une étude expérimentale et théorique de la dynamique d'un film de savon. Les observations quantitatives sur ses vibrations sont très difficiles²; nous établissons ici une procédure qui permet de surmonter ces difficultés. La modélisation prend en compte le couplage entre épaisseur et vibrations ainsi que l'élasticité du film (la tension de surface dépend de l'épaisseur). Nous commençons par les vibrations stationnaires puis montrons le rôle des ondes d'épaisseur dans les transitions entre modes. L'aspect auto-adaptation de ce travail a déjà fait l'objet d'une publication [23, 25].

8.2 Ondes sur un film de savon

Avant de passer à notre étude, nous exposons quelques résultats sur les ondes qui peuvent se propager sur un film de savon. Son épaisseur peut changer puisqu'il est liquide. Les molécules amphiphiles se trouvent en volume ou à la surface du film. Quand on utilise des solutions peu concentrées en savon, les molécules à la surface forment un gaz bidimensionnel. Ces propriétés entraînent l'existence de plusieurs types d'ondes.

Les ondes sur des films d'eau pure sont examinées par G. I. Taylor [145]. Il distingue deux modes de propagation : le mode antisymétrique où les deux surfaces du film sont en phase et le mode symétrique (ou péristaltique) où ces deux surfaces sont en opposition de phase et des mouvements visqueux redistribuent la masse (voir la figure 8.1). Le mode antisymétrique a pour relation de dispersion

$$\omega = k\sqrt{\frac{2\sigma}{\rho h}}, \quad (8.1)$$

qui lie la pulsation ω au nombre d'onde k . σ est la tension de surface (le film a deux faces d'où le facteur 2), ρ est la masse volumique du liquide et h est l'épaisseur du film. Le mode symétrique est dispersif :

$$\omega = k^2\sqrt{\frac{\sigma h}{2\rho}}. \quad (8.2)$$

Comme il fait intervenir des mouvements visqueux dans le liquide, il est très amorti. Par contre les modes antisymétriques sont aisément observés ;

²Les seules mesures systématiques sur les vibrations d'un film de savon que nous connaissons sont celles de la relation de dispersion par Afenchenko *et al.*[2].

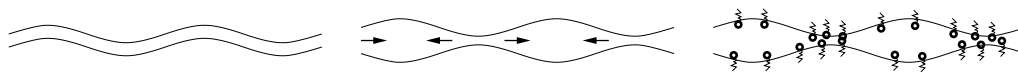


FIG. 8.1 – Ondes sur un film de savon. Gauche : mode antisymétrique (les deux surfaces du film sont en phase) ; centre : mode symétrique (les deux surfaces du film sont en opposition de phase) ; droite : mode élastique (le surfactant est plus concentré aux endroits où l'épaisseur du film diminue.)

pour leur relation de dispersion, il faut appliquer une correction pour tenir compte de l'air entraîné par le film (Couder *et al.*[51], Afenchenko *et al.*[2]). La couche d'air mise en mouvement est de l'ordre de la longueur d'onde et l'épaisseur effective du film est donnée par

$$\rho h^* = \rho h + \rho_{\text{air}}/k. \quad (8.3)$$

ρ_{air} est la masse volumique de l'air. Cette correction de h , pour une longueur d'onde de 1 cm, vaut $2 \mu\text{m}$, ce qui n'est pas négligeable pour un film d'épaisseur de quelques microns.

Lucassen *et al.*[101, 157] ont exploré les ondes se propageant sur un film de savon. Ils ont retrouvé les deux modes précédents et ont identifié un mode élastique. Dans les deux premier modes, la concentration surfacique des molécules se trouvant en surface est constante, ce qui n'est pas le cas pour le mode élastique (voir la figure 8.1). D'autres modes sont déterminés par Lu et Cates [100], mais ils sont très amortis.

Le mode élastique fait intervenir l'élasticité du film définie comme

$$E = 2A \frac{d\sigma}{dA}, \quad (8.4)$$

où A est l'aire du film. Pour le gaz bidimensionnel de surfactant, $-\sigma$ est l'équivalent de la pression d'un gaz à trois dimensions, A est celui du volume. $1/E$ représente la compressibilité du gaz de surfactant (E est donc positif). Le volume de solution Ah étant constant, le coefficient d'élasticité vaut aussi

$$E = -2h \frac{d\sigma}{dh}. \quad (8.5)$$

Ainsi la tension de surface σ d'un film de savon varie avec son épaisseur h (voir Gibbs [67]). Deux expressions de E existent selon les temps caractéristiques mis en jeu : comme pour les gaz à trois dimensions, Rusanov et Krotov [134] ont calculé une compressibilité adiabatique pour des évolutions rapides et une compressibilité isotherme pour des évolutions lentes. Un modèle valable pour tout temps caractéristique a été proposé par Chomaz et Cathalau [49].

Nous nous contenterons ici de supposer que l'élasticité E est constante. Son ordre de grandeur est le même que la tension de surface.

La relation de dispersion du mode élastique est

$$\omega = k \sqrt{\frac{E}{\rho h}}. \quad (8.6)$$

Rusanov et Krotov [134] ont montré que le mode symétrique est bien plus amorti que le mode élastique. Pour les films de savon, on observe donc le mode antisymétrique sans variations d'épaisseur et le mode élastique.

8.3 Mise en place

8.3.1 Dispositif expérimental

Un film de savon est produit en tirant un cadre d'une solution d'eau savonneuse. Nous utilisons une solution à 1% (en volume) de savon commercial³ et 7% de glycérol qui rend la solution plus visqueuse. Elle a alors une masse volumique $\rho = 1030 \text{ kg/m}^3$. Cette composition est optimale pour obtenir des films qui tiennent longtemps (5 à 20 minutes) comme nous l'expliquons maintenant. Un film de savon s'amincit au cours du temps car il perd de la masse par évaporation. Comme l'ont montré Mysels *et al.*[109], l'évaporation a lieu surtout près du cadre⁴ et le liquide s'écoule vers le cadre. Cet écoulement et par conséquent l'évaporation du film sont ralentis par la viscosité; toutefois, une solution très visqueuse mettrait trop de temps pour se mettre à l'équilibre. Le savon facilite la formation du film car il abaisse la tension de surface de la solution; mais en concentration trop grande, il conduit à une solution inhomogène à cause de la formation de micelles. Dans notre situation, la tension de surface vaut $\sigma_0 = 22 \text{ mN/m}$. Ses variations avec l'épaisseur sont caractérisées par l'élasticité du film, $E = -2h \text{ d}\sigma/\text{d}h$, que l'on peut mesurer en plaçant le film verticalement. L'équilibre du film impose (Couder *et al.*[51])

$$2 \frac{\text{d}\sigma}{\text{d}z} = g\rho h. \quad (8.7)$$

³Du Mir multi-usages. Ces savons conçus pour mousser sont bien plus efficaces qu'une solution contrôlée de savon chimique pur.

⁴D'après la loi de Laplace, au niveau du ménisque (qui est concave), la pression hydrostatique est plus faible que dans le reste du film.

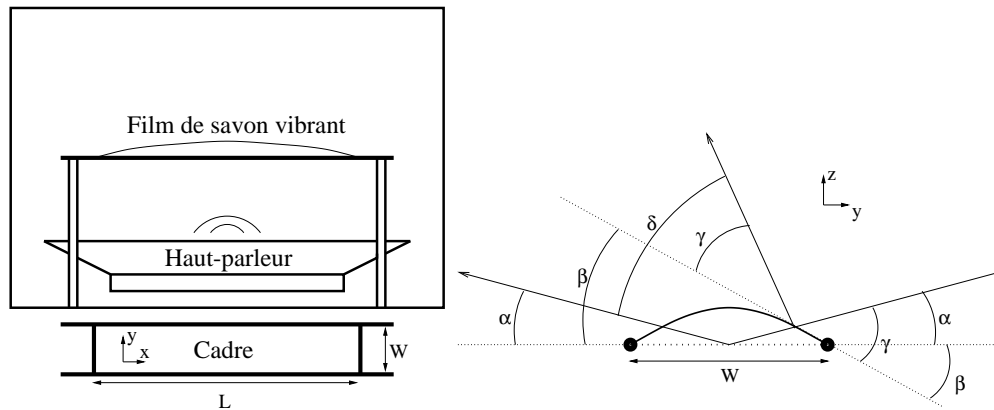


FIG. 8.2 – Dispositif expérimental. Gauche : vue de côté de la boîte et vue de haut du cadre sur lequel est tendu le film. Droite (mesure de l'amplitude de vibration) : coupe dans le sens de la largeur du cadre et trajectoire des rayons lumineux quand le film est plan ou à un déplacement maximal ; la déflexion angulaire δ d'un rayon lumineux est proportionnelle à l'amplitude de vibration ; les angles sont exagérés.

On observe les variations de h grâce à des franges d'égale épaisseur (voir ci-dessous) et on en déduit

$$E = -\frac{2h^2 \rho g}{dh/dz}. \quad (8.8)$$

Pour notre solution, l'élasticité vaut environ $E = 15 \text{ mN/m}$.

Un cadre rectangulaire de longueur $L = 16 \text{ cm}$ et largeur $W = 2,5 \text{ cm}$ est fabriqué à partir de tiges filetées de diamètre 4 mm (figure 8.2). Le filetage joue le rôle de réservoir de solution et allonge ainsi la vie du film. Le film est tiré lentement d'un récipient en sortant le cadre de la solution. Plus cette opération est lente, plus le film est épais ; nous avons travaillé de la même façon pour toutes les expériences. Le cadre est placé sur un support à 20 cm de haut, dans une boîte fermée pour éviter les courants d'air ; deux de ses parois en Plexiglas permettent l'observation du film. De l'eau chaude est placée dans un récipient dans la boîte pour saturer l'atmosphère d'humidité et ralentir encore l'évaporation.

Le film est forcé avec une onde sonore produite par un haut-parleur de diamètre 25 cm, alimenté par un générateur et un amplificateur de puissance, ce qui permet de varier aisément les caractéristiques du forçage. Nous avons exploré le domaine de fréquences 10-100 Hz, pour lesquelles les motifs observés sont quasi-unidimensionnels. La plus petite longueur d'onde sonore est alors de l'ordre de $c/f \sim 3 \text{ m}$, c étant la vitesse du son dans l'air et f la

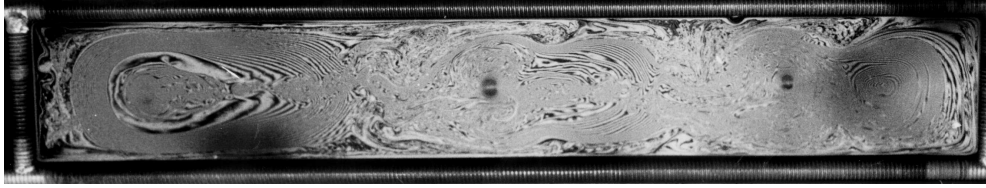


FIG. 8.3 – Photographie d'un film en vibration. Des gouttes sont observables au niveau de certains ventres, l'épaisseur du film y atteint environ 0,5 mm.

plus grande fréquence utilisée ; cette longueur d'onde est bien plus grande que la taille du haut-parleur ou de sa distance au film. Par conséquent le forçage est homogène. L'amplitude avec laquelle nous avons travaillé en général, 75 dB, mesurée avec un décibel-mètre, correspond à une intensité sonore $I = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$, soit à une pression sonore $P = \sqrt{2I\rho_{\text{air}}c} = 0,16 \text{ Pa}$, $\rho_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg/m}^3$ étant la masse volumique de l'air.

Le film est éclairé avec une lampe au sodium qui émet une lumière essentiellement monochromatique de longueur d'onde $\lambda_s = 0,59 \mu\text{m}$. Elle est placée au dessus d'un écran diffuseur posé sur la boîte. Quand on met le film en vibration, on observe des interférences qui correspondent à des franges d'égale épaisseur. Les rayons lumineux qui interfèrent sont presque normaux au film avant et après réflexion, par conséquent l'épaisseur du film varie de $\lambda_s/(2n) = 0,22 \mu\text{m}$ ($n = 1,33$ est l'indice optique de la solution) entre deux franges voisines. On peut aussi observer la forme du film par éclairage stroboscopique à une fréquence proche de celle du forçage.

Pour mesurer les amplitudes de vibration, nous avons utilisé la réflexion d'une nappe laser sur le film. Une diode laser et un cylindre de verre produisent un faisceau laser plan que l'on envoie sur le film avec un angle d'incidence $\alpha = 15^\circ$ (voir la figure 8.2). Soit γ l'angle d'incidence d'un rayon lumineux sur le film et β l'angle de la tangente au film avec l'horizontale, $\gamma = \alpha + \beta$. Le faisceau réfléchi est observé sur un écran vertical placé à une distance $D = 20 \text{ cm}$ du film. La distance sur l'écran entre les deux points éclairés, quand le film est plan ou quand son déplacement est maximal, vaut $A_s = \delta D / \cos \alpha$, où $\delta = \gamma + \beta - \alpha = 2\beta$. Nous avons mesuré l'amplitude de vibration dans un domaine de fréquences où le film ne présente qu'une demi-longueur d'onde dans le sens de la largeur ; approchons alors la forme du film par

$$z = A \cos(\pi y/W), \quad (8.9)$$

qui s'annule bien sur le cadre ($y = \pm W/2$). β est donné par la dérivée de z en $y = W/2$: $\beta = A\pi/W$. Nous en déduisons, moyennant l'hypothèse faite,

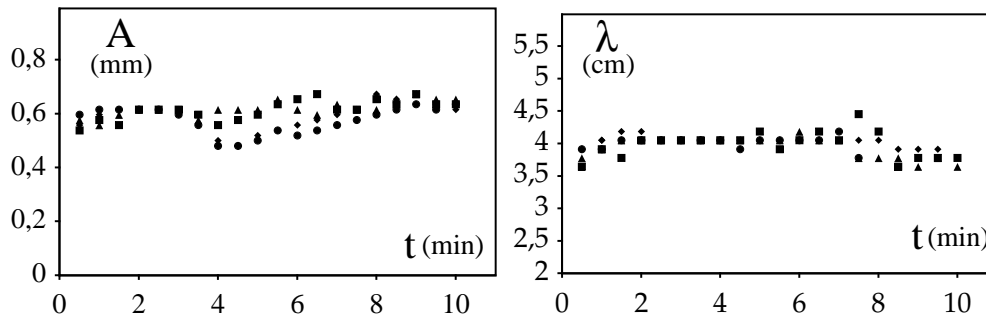


FIG. 8.4 – Vieillessement de films de savon en vibration. Évolution de l'amplitude et de la longueur d'onde au cours du temps pour cinq films produits indépendamment. Le temps est compté à partir du tirage du film et la fréquence de forçage est 55 Hz.

l'amplitude de vibration en fonction de l'amplitude à l'écran

$$A = \frac{W \cos \alpha}{2\pi D} A_s \simeq A_s/52. \quad (8.10)$$

Une cellule photoélectrique placée sur l'écran recueille le signal lumineux et permet de mesurer le déphasage de la vibration du film avec le forçage.

8.3.2 Procédure expérimentale

Le film à l'équilibre est horizontal et ne présente pas de figure organisée d'interférences. Quand on met en route le forçage, un écoulement se produit au sein du film. Cet écoulement ralentit au bout d'une dizaine de secondes, alors qu'apparaissent des franges d'interférence en forme d'ellipses centrées sur chaque ventre (figure 8.6). Au bout d'environ une demi-minute, le film est très épais au niveau des ventres; en général, la surépaisseur prend la forme d'une goutte qui s'appuie sur le film (figure 8.3). Le film s'amincit au cours du temps, et une zone noire, *i.e.* sans franges blanches, apparaît près du cadre; cette zone a une épaisseur inférieure à $\lambda/2n = 0,22 \mu\text{m}$. Ainsi le film est épais au ventres et fin aux noeuds, son épaisseur varie de $0,2 \mu\text{m}$ à parfois $500 \mu\text{m}$, ce qui correspond à un facteur allant jusqu'à 2500.

Comme le tirage d'un film de la solution n'est pas très contrôlé, on s'attend à ne pas pouvoir obtenir des résultats reproductibles. Nous avons étudié l'évolution au cours du temps de plusieurs films tirés indépendamment et excités à la même fréquence (figure 8.4). Pendant l'évolution, les longueurs d'ondes ou les amplitudes sont assez proches pour les différentes réalisations; elles sont même presque identiques pendant l'intervalle de temps de 2

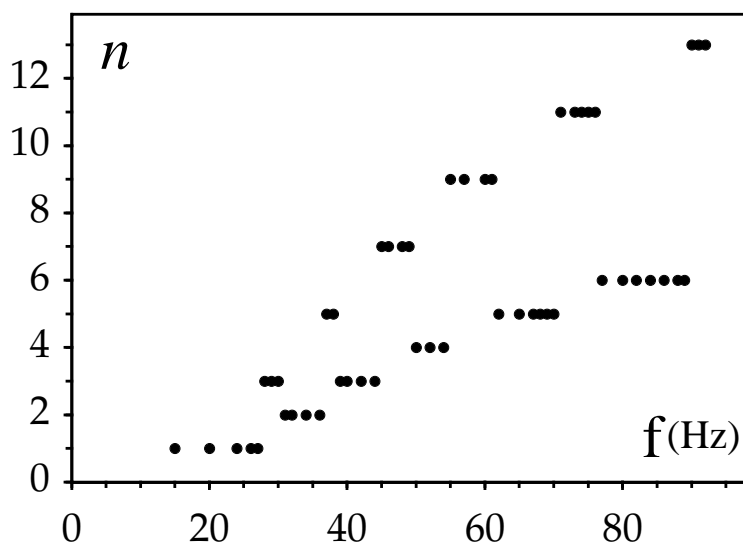


FIG. 8.5 – Nombre de ventres en fonction de la fréquence.

à 4 minutes après le tirage du film. On peut penser que les capacités d'auto-adaptation des films atténuent les différences entre réalisations. La figure 8.4 montre que le temps d'équilibrage est de l'ordre de 1 minute et que les différences entre différents films sont à nouveau amplifiées au cours du vieillissement.

Nous avons donc choisi la procédure suivante. Un film est tiré et le forçage est mis en route à une certaine fréquence. Deux minutes plus tard, nous prenons les mesures. Pour obtenir des résultats à une autre fréquence nous recommençons avec un nouveau film. Vu les observations que nous avons faites sur le vieillissement des films, cette procédure assure des résultats reproductibles.

8.3.3 Premières observations

Modes de vibration

Nous avons essentiellement exploré le domaine de fréquences pour lequel il y a une demi-longueur d'onde dans le sens de la largeur. En dessous d'une fréquence $f = 15$ Hz, la vibration est imperceptible. Au dessus, les amplitudes de vibration sont grandes et du même ordre de grandeur. Les motifs d'interférences du film sont montrés à fréquences croissantes dans la figure 8.6. Pour $16 \leq f \leq 23$ Hz, le film s'organise et les franges sont des ellipses concentriques de centre le seul ventre de vibration (fig. 8.6.1) ; le système est dans son mode fondamental. Pour $24 \leq f \leq 27$ Hz, la zone présentant

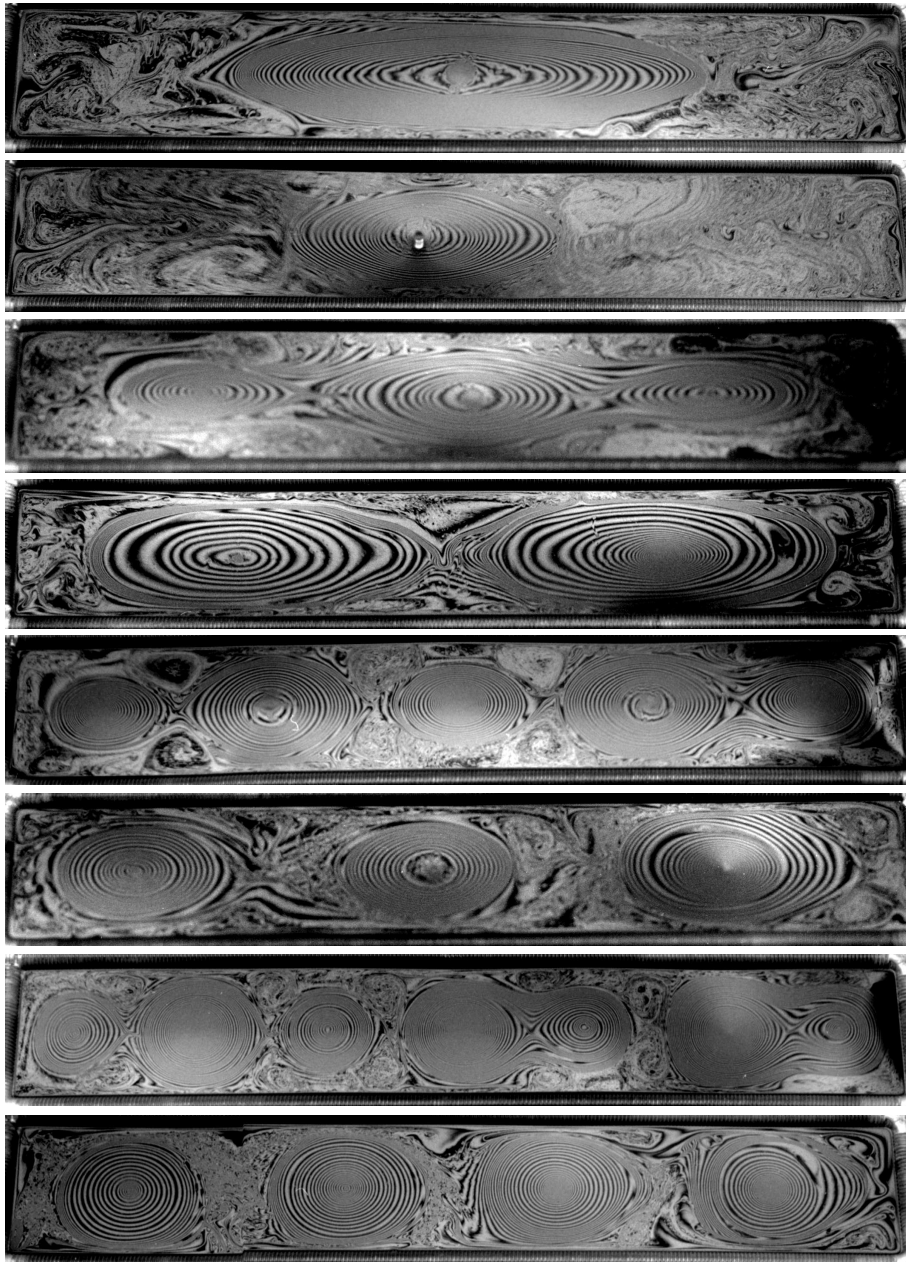


FIG. 8.6 – Modes d'un film en vibration. Nous avons attendu que les films s'amincissent (5 minutes) pour ne pas avoir des franges trop serrées. Les franges sont centrés autour des ventres de vibration où l'épaisseur est maximale. De haut en bas ; **1** : mode 1 à 21 Hz ; **2** : mode 2 à 26 Hz (la zone présentant des franges est plus étroite) ; **3** : mode 3 à 30 Hz ; **4** : mode 4 à 33 Hz (2 ventres) ; **5** : mode 5 à 38 Hz ; **6** : mode 6 à 43 Hz (3 ventres) ; **7** : mode 7 à 46 Hz. **8** : mode 8 à 52 Hz.

des franges est deux fois plus petite que précédemment, des zones de plus en plus étendues aux extrémités du film ne vibrent presque pas (fig. 8.6.2). Si l'on augmente la fréquence, un écoulement se produit à 28 Hz et de la masse est transférée du centre vers les deux extrémités du film de sorte que deux nouvelles familles de franges elliptiques concentriques se forment de part et d'autre du ventre central. Cet état avec 3 ventres est observé dans la plage 28-31 Hz (fig. 8.6.3), de plus en plus de masse étant transférée vers les ventres latéraux. Finalement, le ventre central disparaît et il n'y a plus que 2 ventres pour $32 \leq f \leq 36$ Hz (fig. 8.6.4). Ensuite 3 nouveaux ventres apparaissent, séparés par les deux ventres précédents. Cinq ventres sont ainsi observés dans la bande 37-39 Hz (fig. 8.6.5). Cette évolution continue jusqu'à une fréquence d'environ 90 Hz, au delà de laquelle les motifs ne sont plus quasi-unidimensionnels⁵.

Cette séquence 1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, ..., $2n-1$, $2n/2$, $2n+1$, ... pour les nombres de ventres à fréquence de forçage croissante (figure 8.5) est en contradiction avec la séquence 1, 2, 3, ..., n , ... qui représente le nombre de ventres des modes propres successifs auxquels on s'attend. Cet effet surprenant s'explique simplement par le forçage homogène. En effet, Morse [106] a étudié la réponse d'une corde vibrante à un tel forçage. La forme de la corde est donnée par

$$z(x, t) = B \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi f x}{f_0 L}\right)}{\cos\left(\frac{\pi f}{2f_0}\right)} - 1 \right) \sin(2\pi f t). \quad (8.11)$$

z est le déplacement transverse de la corde en x ($-L/2 \leq x \leq L/2$). B est une longueur proportionnelle au forçage. Le profil z présente n maxima (donc n ventres) pour une fréquence proche de $f = n f_0$ si n est un entier impair, mais seulement $n/2$ ventres si n est pair. L'amplitude de vibration diverge quand n est impair (c'est une résonance), mais elle est minimale quand n est pair (les résonances paires disparaissent). En fait, les modes propres pairs ont une forme antisymétrique, *i.e.* $z(-x) = -z(x)$, et ne sont donc pas excités par un forçage symétrique. La présence d'un forçage homogène explique ainsi le nombre de ventres que nous observons : n pour un mode impair et $n/2$ pour un mode pair.

Effet de l'amplitude du forçage

Nous avons mesuré l'effet de l'amplitude de l'excitation sur l'amplitude de réponse du film (figure 8.7). L'amplitude de vibration A est proportionnelle à

⁵Nous évoquerons ce qui se passe au-delà à la fin de ce chapitre.

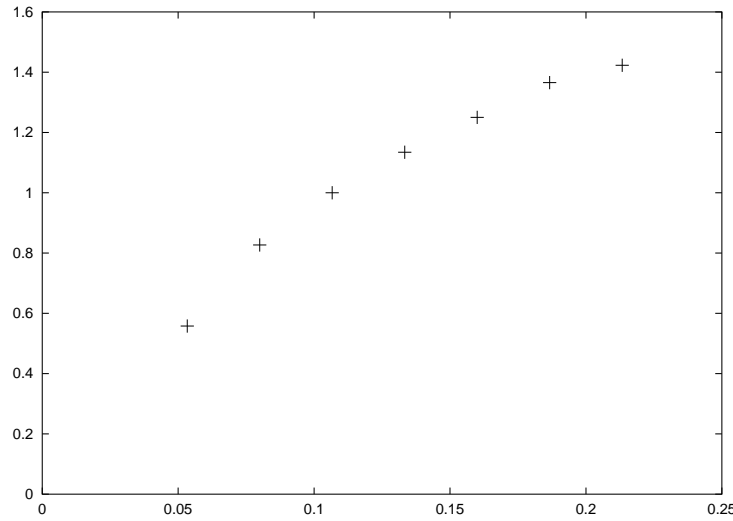


FIG. 8.7 – Amplitude de vibration A (mm) en fonction de la pression acoustique P (Pa), pour une fréquence de forçage $f = 25$ Hz.

la pression acoustique P jusqu'à environ 0,07 Pa, c'est le domaine de réponse linéaire; la relation $A(P)$ devient sous-linéaire au delà. Notre forçage de travail, $P = 0,16$ Pa, se trouve ainsi dans le domaine non linéaire. Le film de savon n'est alors pas décrit par une théorie linéaire des vibrations.

Mesure de l'épaisseur

Nous allons utiliser la relation de dispersion pour trouver l'épaisseur du film. Maintenant que nous avons compris la nature des modes, nous pouvons mesurer la longueur d'onde. Nous définissons λ_x , la longueur d'onde suivant la direction de la longueur du cadre, comme étant la distance moyenne entre deux ventres voisins pour un mode pair ou deux fois cette distance pour un mode impair. En dessous d'environ 90 Hz, la longueur d'onde dans la direction y de la largeur est $\lambda_y = 2W = 5$ cm.

Nous avons d'abord travaillé avec un petit forçage (65 dB ou une pression acoustique $P = 0,05$ Pa), pour lequel on est dans le domaine linéaire de la réponse du film. Nous avons mesuré la vitesse de phase $c = \omega/k$, où $k = 2\pi(1/\lambda_x^2 + 1/\lambda_y^2)^{1/2}$ est le nombre d'onde (figure 8.8). La relation de dispersion 8.1 où l'épaisseur effective du film est définie par l'équation 8.3 devient ici

$$c = \sqrt{\frac{2\sigma_0}{\rho h_0 + \rho_{\text{air}} \lambda_x / (2\pi)}}. \quad (8.12)$$

σ_0 est la tension de surface, ρ la masse volumique de la solution, ρ_{air} celle

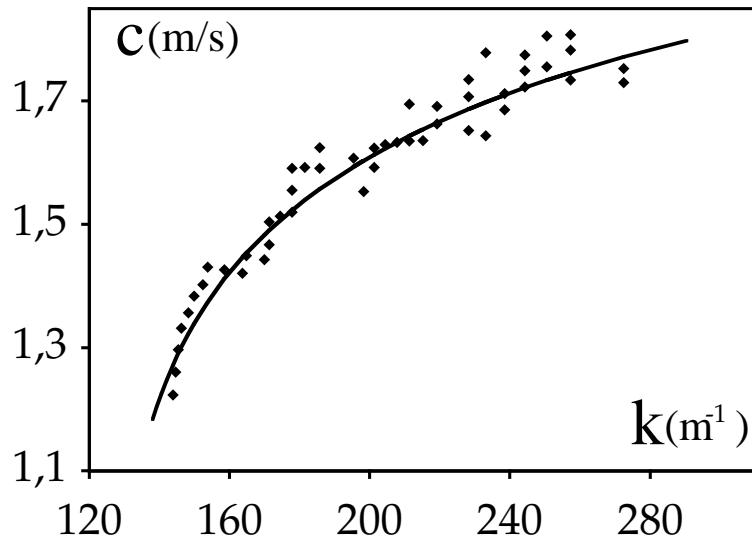


FIG. 8.8 – Relation de dispersion, obtenue à petit forçage. Carrés : expérience; courbe : ajustement de l'épaisseur dans l'équation 8.12, on trouve $h_0 = 8,5 \mu\text{m}$.

de l'air et h_0 l'épaisseur du film. Nous avons remplacé $1/k$ par $\lambda_x/(2\pi)$ car ici $\lambda_x > \lambda_y$, l'épaisseur d'air entraînée par le film est donc fixée par λ_x . En ajustant l'épaisseur, la relation de dispersion 8.12 représente bien les résultats expérimentaux. On trouve ainsi une épaisseur $h_0 = 8,5 \mu\text{m}$.

8.3.4 Modélisation

Comme la caractérisation des films de savon est difficile, nous ne pouvons espérer obtenir un accord quantitatif entre théorie et expérience. Nous simplifierons donc les équations le plus possible pour dégager les éléments importants pour l'interprétation de nos observations.

Nous considérons un film de savon rectangulaire, d'équations $z = 0$, $-L/2 \leq x \leq L/2$ et $-W/2 \leq y \leq W/2$ à l'équilibre (figure 8.9). Écrivons les équations régissant le déplacement vertical⁶ $z(x, y)$, la vitesse dans le plan du film⁷ $\mathbf{u}(x, y)$ et l'épaisseur $h(x, y)$. Elles s'obtiennent en considérant les forces s'appliquant sur un élément de surface du film. L'équation

⁶Nous utilisons implicitement le fait que l'épaisseur est petite devant le déplacement transverse de la surface médiane du film.

⁷Comme l'épaisseur du film est petite devant l'échelle des écoulements qui est la taille du film W , la minimisation de la dissipation visqueuse conduit à un écoulement bouchon, *i.e.* la vitesse ne varie pas dans la direction z .

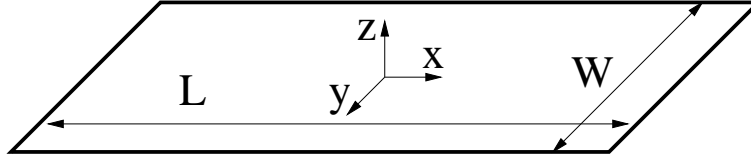


FIG. 8.9 – Définition du repère et des longueurs utilisées pour représenter le film de savon rectangulaire.

pour le mouvement vertical est une équation d'onde,

$$\rho h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 2\nabla \cdot (\sigma \nabla z) + P \cos(2\pi ft), \quad (8.13)$$

où ∇ est l'opérateur $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, σ la tension de surface (elle dépend de l'épaisseur donc elle peut varier spatialement), P la pression acoustique exercée sur le film et f la fréquence de forçage. Nous oublions déjà de tenir compte de l'air entraîné par le film, ainsi que de l'amortissement par rayonnement dans l'air (et aussi dans le support). La première hypothèse est abusive, mais elle ne change pas le comportement qualitatif du système⁸. La deuxième hypothèse est validée par la mesure du facteur de qualité $Q = 23$ ci-dessous. A priori, il faudrait rajouter des termes de transport de la forme $\mathbf{u} \cdot \nabla f$ au premier membre de 8.13 pour prendre en compte le fait qu'un élément du film peut se déplacer horizontalement, mais comme nous considérons de petites vitesses \mathbf{u} , ces termes de transport sont négligeables.

Dans le plan tangent au film, deux forces agissent sur un élément de surface. Il est entraîné par le reste du film avec une accélération verticale $\partial^2 z / \partial t^2$, il est donc soumis à une force centrifuge, dont la projection sur le plan tangent vaut $-\delta m \partial^2 z / \partial t^2 \nabla z$, δm étant la masse de cet élément. La deuxième force provient des gradients de tension de surface : $2\nabla\sigma$, le facteur 2 servant à tenir compte des deux faces du film. Ainsi, l'équation hydrodynamique suivant le plan tangent s'écrit

$$\rho h \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 2\nabla\sigma - \rho h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \nabla z. \quad (8.14)$$

$-\sigma$ joue ici le même rôle que la pression dans les équations de Navier-Stokes. Nous avons négligé le terme inertiel $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$, car les vitesses sont petites. L'amortissement de ces mouvements provient de la viscosité de la solution

⁸L'épaisseur d'air entraîné par le film est uniforme sur sa surface; elle contribue à l'inertie du film de manière uniforme; prendre en compte cette épaisseur d'air reviendrait donc à un décalage des fréquences. Comme les variations d'épaisseur peuvent être énormes, elles dominent les variations spatiales de l'inertie du film.

et de la viscosité de surface (voir Jenkins et Dysthe [81], Vorobieff et Ecke [156]). Nous ne tiendrons pas compte de ces effets visqueux.

La dernière équation traduit la conservation de la masse

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0. \quad (8.15)$$

Ces trois équations 8.13-8.15 sont valides pour une faible pente du film, c'est-à-dire pour $(\nabla z)^2 \ll 1$. Elles sont identiques aux équations établies par Vega *et al.*[150], à part une approximation (involontaire de leur part) que nous justifions maintenant. Il s'agit de simplifier $\nabla \cdot (\sigma \nabla z) = \nabla \sigma \cdot \nabla z + \sigma \Delta z$ dans 8.13. L'équation 8.14 donne un ordre de grandeur de

$$\nabla \sigma \sim \rho h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \nabla z, \quad (8.16)$$

d'où $\nabla \sigma \cdot \nabla z \sim \rho h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} (\nabla z)^2$, qui est petit devant le terme du premier membre de 8.13, donc

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla z) \simeq \sigma \Delta z. \quad (8.17)$$

L'équation 8.13 se met alors sous la forme :

$$\rho h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 2\sigma \Delta z + P \cos(2\pi ft). \quad (8.18)$$

Pour compléter cette description, il reste à se donner la fonction $\sigma(h)$. Deux relations sont proposées par Rusanov et Krotov [134] selon le temps caractéristique du mouvement dans le plan du film (voir la section 8.2). Par souci de simplicité, nous supposons l'élasticité du film E indépendante de l'épaisseur et petite devant 2σ . Cette hypothèse implique que σ reste proche de σ_0 , alors que h peut avoir de grandes variations. La dérivée de la tension de surface s'écrit alors

$$\frac{d\sigma}{dh} = -\frac{E}{2h}. \quad (8.19)$$

Les équations 8.18, 8.14, 8.15 sont complexes et nécessitent une résolution numérique. Comme notre but est seulement une comparaison qualitative avec l'expérience dans le domaine de fréquences pour lequel les motifs sont quasi-unidimensionnels, nous allons nous restreindre à une dimension⁹ en oubliant les variations dans la direction y . Nous considérons donc

$$\rho h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 2\sigma_0 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P \cos(2\pi ft), \quad (8.20)$$

⁹Il est possible de faire un raisonnement plus rigoureux si l'on suppose que l'on a une demi-longueur d'onde dans la largeur ; les équations que l'on obtient en moyennant dans la largeur sont très semblables à celles que nous présentons ici.

$$\rho h \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{E}{h} \frac{\partial h}{\partial x} - \rho h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial x}, \quad (8.21)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0. \quad (8.22)$$

Ces équations sont très semblables aux équations 7.31-7.33 du chapitre précédent, qui décrivent une corde vibrante sur laquelle coulisent des masses reliées par des ressorts. Comme nous l'avons annoncé, la distribution de masses se transpose en distribution d'épaisseur du film, la tension de la corde en tension de surface et la raideur des ressorts en élasticité du film. Ainsi le système mécanique est un bon équivalent du film de savon.

Résumons nos hypothèses : nous oublions l'inertie de l'air, les pentes sont faibles ($(\nabla z)^2 \ll 1$), les vitesses sont petites ($u \ll Lf$), le film est très élastique ($E \ll 2\sigma_0$) et il se comporte comme un système à une dimension. En utilisant L , L , h_0 , $\tau = L\sqrt{\rho h_0/(2\sigma_0)}$, $1/(2\tau)$ et L/τ comme unités pour la coordonnée x , le déplacement z , l'épaisseur h , le temps t , la fréquence f et la vitesse u respectivement, nous obtenons les équations adimensionnées suivantes¹⁰ :

$$h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + p \cos(\pi f t), \quad (8.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{e}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial x}, \quad (8.24)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0, \quad (8.25)$$

où le forçage réduit est

$$p = \frac{PL}{2\sigma_0} \simeq 0,6, \quad (8.26)$$

avec nos valeurs expérimentales. p est d'ordre 1 ce qui traduit un grand forçage. L'élasticité réduite est

$$e = \frac{E}{2\sigma} \simeq 0,3, \quad (8.27)$$

ce qui montre que l'hypothèse $E \ll 2\sigma$ est à sa limite.

8.4 Auto-adaptation

8.4.1 Observations

Dorénavant nous travaillerons toujours avec la même grande amplitude de forçage (75 dB ou une pression acoustique $P = 0,16$ Pa).

¹⁰Comme d'habitude nous omettons la distinction entre variables initiales et variables sans dimension.

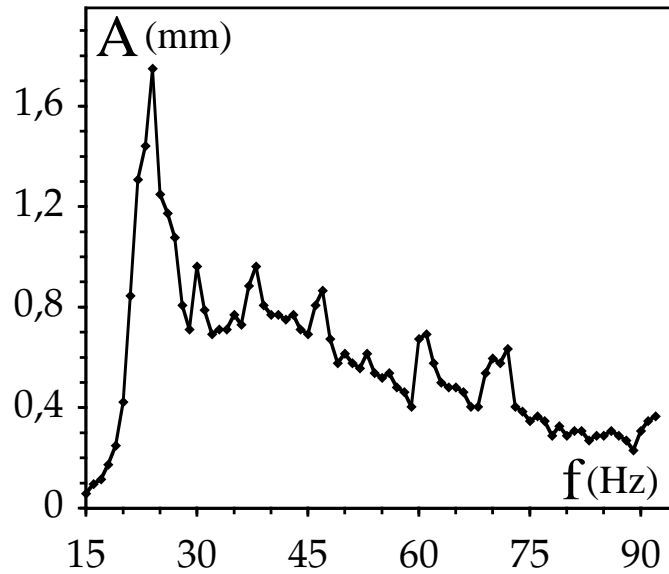


FIG. 8.10 – Amplitude de vibration expérimentale A : maximum de déplacement transverse z du film en fonction de la fréquence f . Les maxima de $A(f)$ se trouvent au centre des modes impairs.

Nous avons mesuré l'amplitude de vibration en utilisant l'hypothèse de demi-longueur d'onde dans le sens de la largeur¹¹ (figure 8.10). La courbe $A(f)$ a de petits maxima (sauf le premier) au centre des plages d'existence des modes impairs. Ces maxima sont la trace des résonances impaires; nous les appellerons résonances faibles. L'amplitude de vibration ne varie pas beaucoup avec la fréquence. Cela contraste fortement avec l'amplitude de vibration d'une membrane solide qui a des maxima bien plus grands que ses minima¹².

Les variations de la longueur d'onde λ_x en fonction de la fréquence sont représentées sur la figure 8.11. Elle présente des petits sauts (sauf le premier qui est assez grand) aux fréquences 27,5, 30,5, 36,5, 38,5, ... qui sont exactement les fréquences où se produit un changement de mode. On voit mieux ces sauts sur la courbe représentant $d\lambda_x/df$. Sur la plage d'existence d'un mode n , remarquons que la longueur d'onde est proche d'un sous multiple

¹¹Voir la section 8.3.1.

¹²L'équivalent unidimensionnel de la membrane solide est une corde seule. Dans le chapitre précédent, le pic d'amplitude de vibration de la corde au moins 16 fois plus grand que les minima (figure 7.3), bien qu'elle ait un facteur de qualité très proche de celui du film de savon $Q = 23$, mesuré dans la suite du chapitre.

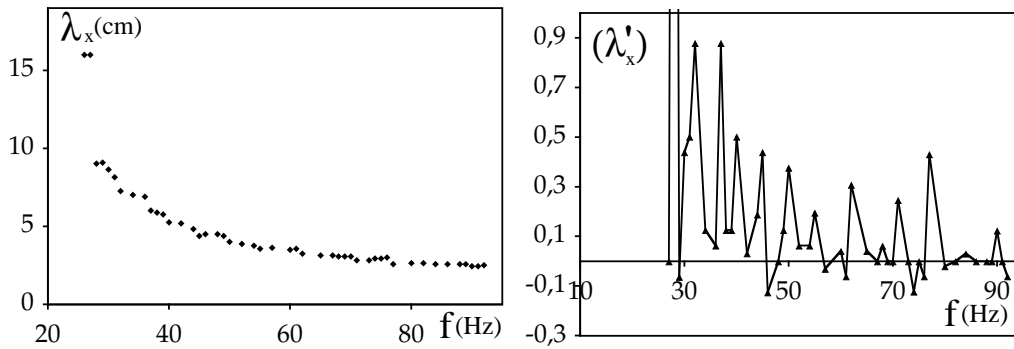


FIG. 8.11 – Longueur d’onde expérimentale λ_x dans la direction de la longueur en fonction de la fréquence f . Gauche : $\lambda_x(f)$; droite : dérivée $d\lambda_x/df$. La longueur d’onde a de petits sauts à un changement de mode.

de deux fois la longueur :

$$\lambda_x \simeq 2L/n. \quad (8.28)$$

Ainsi le film de savon s’adapte au forçage pour avoir une amplitude de vibration qui varie peu. Sa distribution de masse s’ajuste pour qu’il y ait un nombre presque entier de demi-longueurs d’onde qui remplissent le cadre. Cette condition sur la longueur d’onde correspond usuellement à une résonance (donc une grande amplitude de vibration), ce qui expliquerait que les minima de l’amplitude de vibration diffèrent peu de ses maxima. Quand la distribution d’épaisseur est trop contrainte, un saut de longueur d’onde accompagne un changement de mode.

8.4.2 Interprétation théorique de l’auto-adaptation

Nous considérons des situations où le profil d’épaisseur est stationnaire. Nous cherchons alors des solutions de 8.23-8.25 sous la forme

$$z(x, t) = Z(x) \cos(\pi ft), \quad (8.29)$$

$$h(x, t) = H(x), \quad (8.30)$$

$$\text{et } u = 0 \quad (8.31)$$

en moyennant dans le temps l’équation hydrodynamique 8.24. Le système 8.23-8.25 devient

$$-H\pi^2 f^2 Z = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + p, \quad (8.32)$$

$$-\frac{e}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\pi^2 f^2}{2} Z \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad (8.33)$$

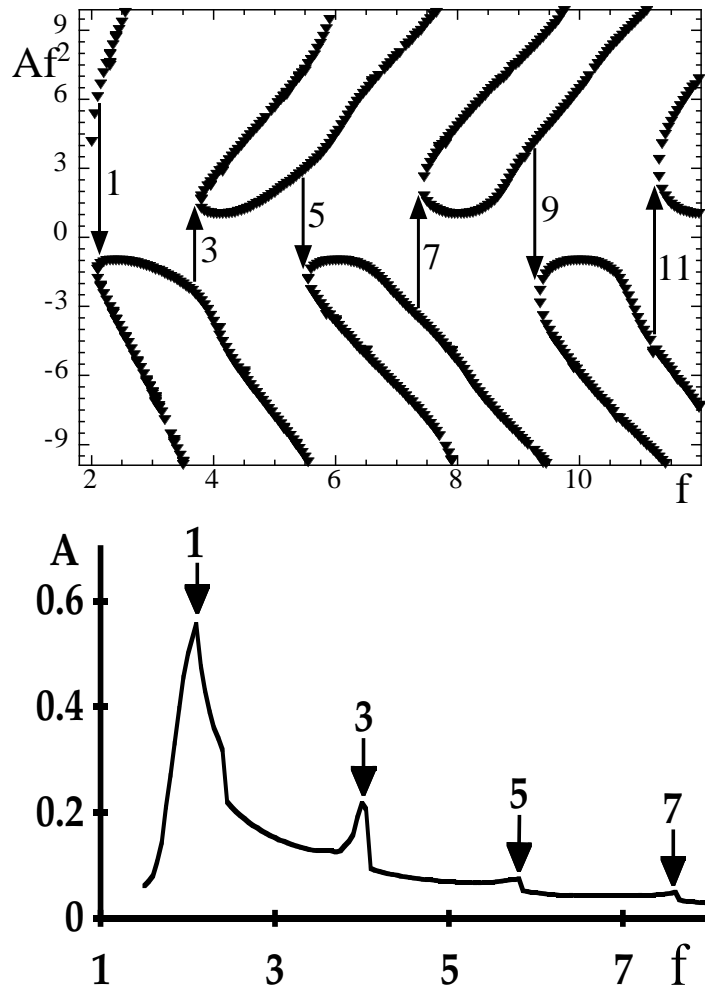


FIG. 8.12 – Amplitude théorique de vibration. Haut : représentation des amplitudes de vibration \bar{A} (en valeur algébrique mise à l'échelle par f^2) en fonction de la fréquence f de forçage sans dimension, pour les différentes branches de solutions stationnaires. À une fréquence donnée, nous choisissons celle dont la valeur absolue est la plus petite. Ainsi, en augmentant la fréquence à partir de 0, on commence par la branche du haut ; quand la branche inférieure apparaît on saute suivant la flèche 1, \bar{A} change de signe, *i.e.* la phase saute de π (on est à la première résonance faible) ; on suit la branche inférieure jusqu'à la flèche 3 où se produit une résonance faible ; on passe alors à la branche supérieure... et ainsi de suite. Bas : amplitude A (en valeur absolue, $A = |\bar{A}|$) en fonction de f ; les maxima correspondent aux résonance faibles (modes impairs et saut de phase de π). Ce diagramme est qualitativement très proche de la figure expérimentale 8.10.

$$\int_{-1/2}^{1/2} H(x) dx = 1. \quad (8.34)$$

Cette dernière relation traduit la conservation globale de la masse. 8.33 donne

$$H = \frac{1}{\alpha - \frac{\pi^2 f^2}{4e} Z^2}, \quad (8.35)$$

où α est une constante d'intégration. L'équation 8.32 s'écrit alors

$$-\frac{\pi^2 f^2 Z}{\alpha - \frac{\pi^2 f^2}{4e} Z^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + p. \quad (8.36)$$

En multipliant cette équation par $\partial Z / \partial x$, on obtient une équation à variables séparables, dont une intégrale première se met sous la forme

$$x = \int_0^Z \frac{d\xi}{\sqrt{\beta - p\xi + 2e \ln \left(1 - \frac{\pi^2 f^2}{4e\alpha} \xi^2 \right)}}. \quad (8.37)$$

Maintenant, le problème se résume à trouver les constantes d'intégration α et β pour satisfaire aux conditions aux limites $Z(-1/2) = Z(1/2) = 0$. A β fixé, il y a une seule solution α , que l'on calcule par la méthode de Newton [129]. Ensuite on détermine les différentes solutions β par balayage sur un intervalle $[-\beta_0, \beta_0]$. Nous trouvons donc plusieurs profils de vibration d'amplitudes différentes (figure 8.12) et nous choisissons celui de plus petite amplitude. L'amplitude de vibration présente des pics accompagnés de sauts de phase (des changements de signe de la solution $Z(x)$) qui correspondent aux résonances faibles. $A(f)$ reproduit qualitativement la courbe expérimentale (figure 8.10). Toutefois les deux premiers pics sont plus petits que prévu; cela s'explique probablement par le fait que nous n'avons pas tenu compte de l'air mis en vibration avec le film : l'épaisseur d'air entraîné est plus grande à basse fréquence car elle est proportionnelle à la longueur d'onde λ_x ; à basse fréquence, l'inertie du système est augmentée par l'air et par conséquent l'amplitude de vibration est diminuée.

Les maxima sont plus petits et les minima sont plus grands que pour la réponse d'une membrane solide pour laquelle l'élasticité réduite est infinie ($e = \infty$, car l'épaisseur de la membrane est fixée). Pour expliquer cet effet rappelons nous l'équivalent mécanique du chapitre précédent (la corde avec beaucoup de masselottes) : si $e = 0$ il n'y a pas de ressorts entre les

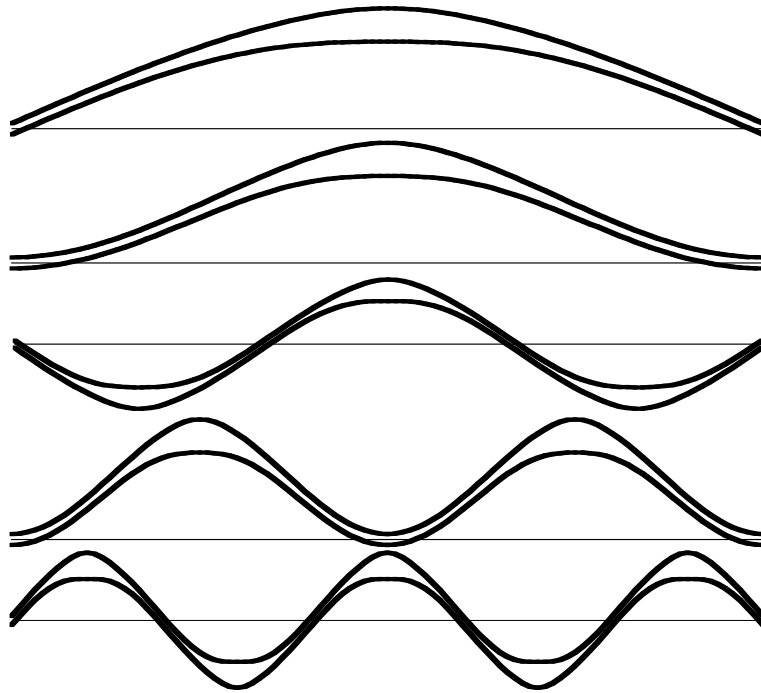


FIG. 8.13 – Allures théoriques du film aux fréquences (adimensionnées) 1, 2, 3, 4, 5 ; l'épaisseur est exagérée pour plus de clarté.

masselottes, le système s'adapte alors au forçage pour se mettre à résonance. L'élasticité e d'un film de savon est non nulle ; son comportement est donc intermédiaire entre celui d'une membrane solide qui ne répond presque jamais au forçage et celui d'un système complètement auto-adaptatif qui répond tout le temps au forçage : la distribution d'épaisseur s'adapte à l'excitation de sorte que l'amplitude de vibration ne varie pas trop avec la fréquence. Plus l'élasticité du film est petite, plus son comportement est auto-adaptatif.

Les solutions $H(x)$ que nous trouvons ici montrent l'accumulation de matière aux ventres (figure 8.13). Toutefois, l'épaisseur ne varie que d'un facteur de l'ordre de 10 entre les noeuds et les ventres, ce qui est moindre que les variations expérimentales. Le modèle est ainsi moins auto-adaptatif que l'expérience : il prévoit une variation continue de la longueur d'onde ($\lambda_x \sim 1/f$) alors que $\lambda_x(f)$ est discontinu expérimentalement. En fait, l'hypothèse d'épaisseur petite devant le déplacement vertical, $h \ll A$, est mise en défaut aux ventres où l'on observe des gouttes de solution suspendues sur le film. Ces gouttes jouent le rôle de réservoir de solution et leur taille change pour s'adapter au forçage, ce qui accroît les capacités d'auto-adaptation du film. À une transition entre deux modes, le nombre de ventres (donc de gouttes)

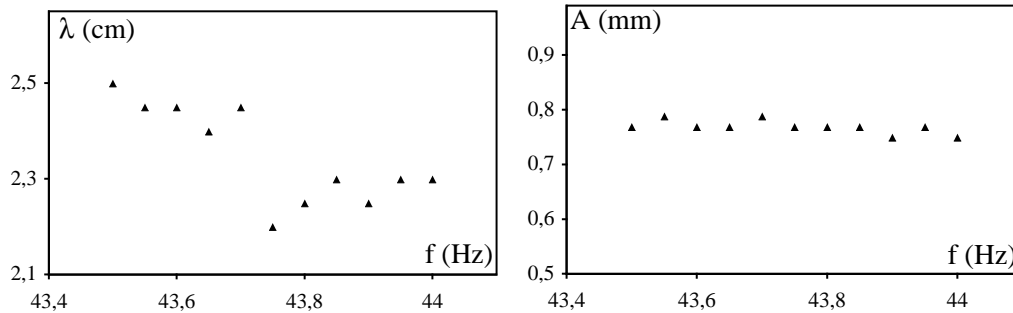


FIG. 8.14 – Voisinage de la transition entre les modes 6 et 7 (cette transition se produit pour une fréquence $43,7 < f_{6-7} < 43,75$ Hz). Droite : longueur d'onde $\lambda_x(f)$; gauche : amplitude de vibration $A(f)$.

change, ce qui est probablement la raison des discontinuités de la longueur d'onde en fonction de la fréquence.

Bien qu'il ne tienne pas compte de la présence de gouttes aux ventres, notre modèle reproduit qualitativement l'amplitude de vibration du film et donne une interprétation de l'auto-adaptation du film de savon par les variations d'épaisseur.

8.5 Ondes d'épaisseur et auto-adaptation

Après avoir analysé les vibrations stationnaires, nous nous intéressons à la dynamique de l'épaisseur du film, qui intervient lors des transitions entre modes ou lors des résonances faibles.

8.5.1 Transitions entres modes

Nous étudions maintenant le voisinage d'une transition entre deux modes, le sixième et le septième par exemple. Le nombre de ventres n passe de 3 pour 43,7 Hz à 7 pour 43,75 Hz. La transition se produit donc entre ces deux fréquences. La longueur d'onde saute exactement au moment de la transition (figure 8.14). Un peu avant, elle vaut 5 cm, qui n'est pas trop loin de $2L/6 = 5,3$ cm; après elle devient 4,6 cm, qui coïncide avec $2L/7$. Ceci concorde avec l'affirmation de l'équation 8.28. L'amplitude de vibration varie très peu autour de la transition et le déphasage avec le forçage reste nul.

Cette transition est discontinue puisqu'il y a un saut de longueur d'onde. Nous nous attendons donc à un hystérésis en augmentant et en diminuant la fréquence de part et d'autre de la transition. Rien de tel n'est observé expérimentalement.

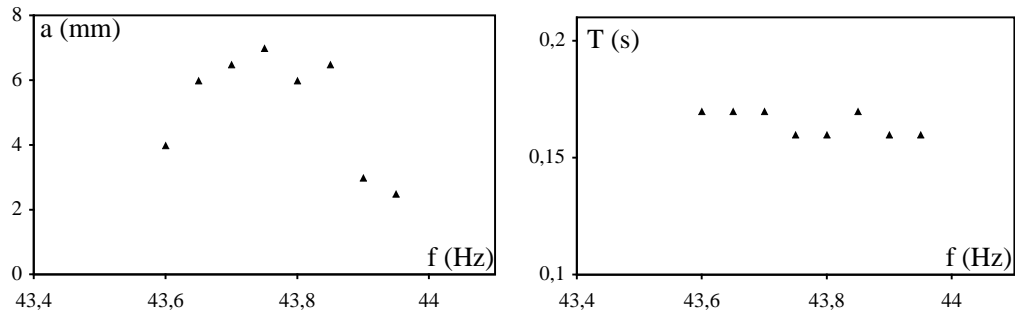


FIG. 8.15 – Ondes d'épaisseur au voisinage de la transition entre les modes 6 et 7 (cette transition se produit pour une fréquence $43,7 < f_{6-7} < 43,75$ Hz). Droite : amplitude $a(f)$; gauche : période $T(f)$.

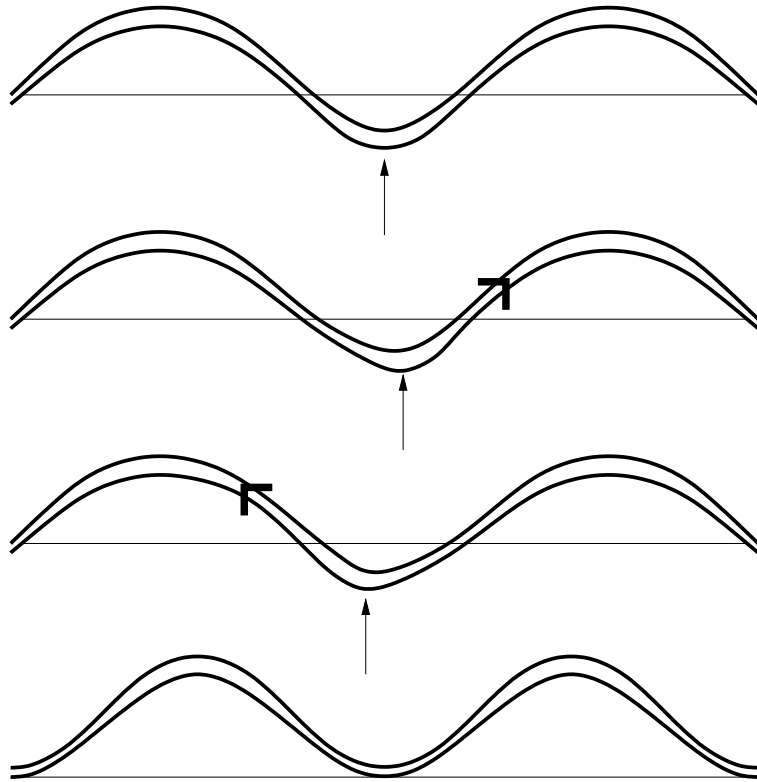


FIG. 8.16 – Schématisation de la transition du mode 3 au mode 4. Haut : mode 3 avec 3 ventres. Bas : mode 4 avec 3 ventres. Milieu : transition de 3 vers 4 par les ondes d'épaisseur ; la surépaisseur centrale (de position soulignée par les flèches verticales) oscille horizontalement ; le ventre central se vide alternativement dans les ventres latéraux (le sens d'écoulement est symbolisé par les flèches épaisses) jusqu'à disparaître dans le mode 4.

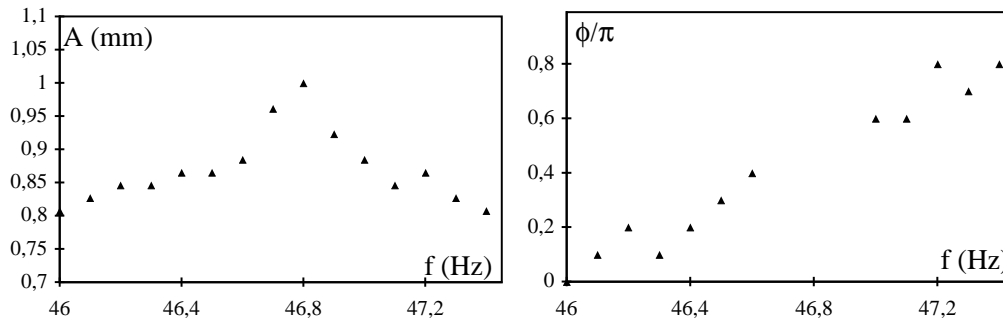


FIG. 8.17 – Voisinage d’une résonance faible (mode 9). Gauche : amplitude de vibration $A(f)$; droite : déphasage $\phi(f)$ de la réponse du film par rapport au forçage.

En fait, dans la plage de fréquence 43,6-43,95 Hz autour de cette transition, on observe des ondes d’épaisseur (appelées aussi ondes de Marangoni [51]). Elles se traduisent par des mouvements alternatifs de gauche à droite des franges d’égale épaisseur. Nous avons mesuré leur amplitude (définie comme l’excursion maximale d’une frange donnée) et leur période (figure 8.15). L’amplitude est maximale à peu près à la transition, alors que la période reste très proche de $T = 0,165$ s, qui est grande comparée à période de vibration (0,023 s).

Ces ondes d’épaisseur permettent un transfert de matière entre ventres et par conséquent la création ou la disparition de ventres (voir la figure 8.16). Bien qu’une discontinuité de la longueur d’onde existe, il n’y a pas d’hystérésis. Le système explore le voisinage de sa position stationnaire grâce à ces ondes ; si cette position est métastable, il trouve ainsi une autre position stable.

8.5.2 Résonances faibles

Nous examinons maintenant le voisinage d’une fréquence correspondant à un maximum d’amplitude de vibration, pour le mode 9 par exemple. Ces maxima étant peu marqués, nous parlons de résonances faibles.

Nous avons mesuré l’amplitude de la réponse du film et son déphasage par rapport au forçage (figure 8.17). L’amplitude est maximale pour $f_9 = 46,8$ Hz. Le déphasage passe de 0 à π en $\Delta f = 2$ Hz. Le facteur de qualité est alors $Q \simeq f_9/\Delta f = 23$, signe que¹³ l’amortissement n’est pas très important. La longueur d’onde de 3,6 cm reste constante et égale à $2L/9$.

¹³Comme pour la corde vibrante du chapitre précédent.

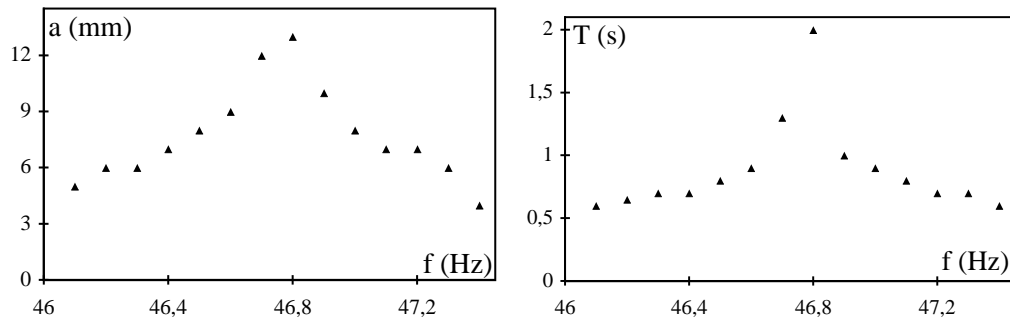


FIG. 8.18 – Ondes d'épaisseur au voisinage d'une résonance faible (mode 9). Gauche : amplitude $a(f)$; droite : période $T(f)$.

Comme pour la corde sans masselotte (figure 7.3 du chapitre 7), on s'attend à un hystérésis autour de la résonance ; mais nous n'en observons pas. Ici encore, ce sont les ondes d'épaisseur qui expliquent l'absence d'hystérésis. Elles sont générées dans l'intervalle 46,1-47,5 Hz. Leur amplitude est maximale (13 mm) tout comme leur période (2 s) pour $f = f_9 = 46,8$ Hz (figure 8.18). Ces ondes permettent le changement de nature des ventres : en dessous de 46,8 Hz, 4 ventres en phase avec le forçage portent plus de masse que les 5 autres qui sont en opposition de phase ; au dessus de 46,8 Hz, leurs rôles sont échangés, les 4 portent moins de masse et sont en opposition de phase avec le forçage et inversement pour les 5 autres ventres. On peut constater cette différence de nature entre ventres en observant les modes impairs de la figure 8.6.

Les ondes d'épaisseur permettent encore au système de s'adapter au forçage, en mettant le plus de masse possible en phase avec l'excitation.

8.5.3 Analyse de la dynamique de l'épaisseur

Nous considérons de petites perturbations des profils stationnaires de vibration en écrivant le déplacement transverse, l'épaisseur du film et la vitesse du liquide sous la forme¹⁴ :

$$z(x, t) = Z(x) \cos(\pi ft) + \xi(x, t) \cos(\pi ft), \quad (8.38)$$

$$h(x, t) = H(x) + \eta(x, t), \quad (8.39)$$

$$u(x, t) = 0 + u(x, t). \quad (8.40)$$

où ξ, η, u sont petits ; ξ, H et u évoluent lentement, sur une échelle de temps $1/g$ grande devant $1/f$. Ce choix est motivé par le fait que, expérimentale-

¹⁴Comme dans les sections théoriques précédentes, les grandeurs que nous utilisons sont sans dimensions.

ment, les fréquences des mouvements hydrodynamiques sont plus petites que les fréquences de vibration; de plus, si l'on examine l'équation 8.24, on voit que $g \sim ef \ll f$ dans la limite de petite élasticité. Injectons les expressions de z , h et u dans les équations 8.23-8.25 et séparons les échelles de temps $1/f$ et $1/g$ en moyennant les grandeurs de fréquence f ; les équations 8.23-8.25 deviennent

$$Z\eta + H\xi = -\frac{1}{\pi^2 f^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (8.41)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -e \frac{1}{H^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2e \frac{1}{H^3} \frac{\partial H}{\partial x} \eta + \frac{1}{2} \pi^2 f^2 \frac{\partial}{\partial x} (Z\xi), \quad (8.42)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Hu) = 0. \quad (8.43)$$

La séparation d'échelles temporelles est valable tant qu'il n'y a pas de couplage non linéaire entre les fréquences f et g . Nous avons ainsi mis de côté des termes quadratiques en $\cos(\pi ft)$; en tenir compte rajouterait un forçage aux fréquences 0 et $2f$ dans le système d'équations qui précède. Cette remarque est utile pour la compréhension de l'excitation des ondes d'épaisseur comme nous le verrons ci-dessous.

Nous faisons de plus l'hypothèse que la fréquence de forçage est plus grande que celle de la première résonance faible, $f^2 \gg 1$; cette hypothèse ne change pas le comportement qualitatif du système et permet de simplifier l'équation 8.41 en

$$\xi = -\frac{Z}{H} \eta. \quad (8.44)$$

En éliminant les variable u et ξ et en utilisant les équations 8.32-8.33 qui donnent les profils stationnaires, nous obtenons l'équation d'onde

$$\frac{1}{e} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + C \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial x} \eta = 0, \quad (8.45)$$

$$\text{où } C = \frac{4 - \alpha H}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (8.46)$$

α est la constante d'intégration définie lors de la recherche des profils stationnaires (section 8.4.2). Les conditions aux limites sont $u(-1/2) = u(1/2) = 0$, *i.e.* une vitesse normale au cadre nulle. Dans le cas d'une épaisseur H du film uniforme, on retrouve l'équation usuelle des ondes d'épaisseur [51],

$$\frac{1}{e} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \quad (8.47)$$

Le changement de variable

$$\eta(x, t) = \theta(x, t) \exp\left(\int \frac{C}{2\alpha} dx\right), \quad (8.48)$$

transforme l'équation d'onde 8.45 en

$$\frac{1}{e} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + G\theta = 0, \quad (8.49)$$

$$\text{avec } G = \frac{C^2}{4\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (8.50)$$

Déterminons la plus petite fréquence propre g de cette équation. N'ayant pas trouvé de solution exacte, utilisons l'approximation WKB, valide dans les limites $\partial H/\partial x \ll 1$ ou $g \gg 1$, mais qualitativement très robuste. Les solutions se mettent sous la forme

$$\theta(x, t) = \cos(\pi g t) \theta_l(x) \cos \left(\int_{-1/2}^x k(x') dx' \right), \quad (8.51)$$

où $\theta_l(x)$ est une fonction lentement variable. Le nombre d'onde local est

$$k = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{\pi^2 g^2}{e} - G}. \quad (8.52)$$

Les conditions aux limites $u(-1/2) = u(1/2) = 0$ se traduisent par

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(-1/2) = \frac{\partial \theta}{\partial x}(1/2) = 0. \quad (8.53)$$

La forme 8.51 satisfait déjà à cette condition en $-1/2$, elle satisfait aussi à l'autre si

$$\int_{-1/2}^{1/2} k'(x) dx = m\pi, \quad (8.54)$$

où m est un entier. La plus petite fréquence g est obtenue pour $m = 1$, soit pour

$$\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{\frac{\pi^2 g^2}{e} - G} = \pi \sqrt{\alpha}. \quad (8.55)$$

L'ordre de grandeur de la fréquence des ondes d'épaisseur est

$$g \sim \sqrt{e}. \quad (8.56)$$

Nous avons utilisé la fréquence de la première résonance faible (24 Hz) comme unité des fréquences, d'où $g \sim \sqrt{e} \sim 0,5$ correspond à 12 Hz ou à une période de 0,1 s, qui est du même ordre de grandeur que les périodes expérimentales des ondes d'épaisseur.

Les résonances faibles correspondent à des maxima d'amplitude de vibration A . Déterminons alors la fréquence propre g . L'étude des profils stationnaires montre que α et G sont d'amplitude maximale quand A est maximal,

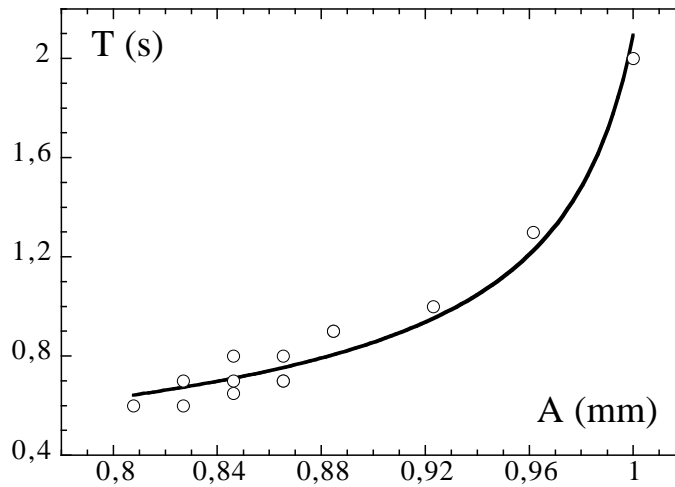


FIG. 8.19 – Résonance faible (mode 9) : période T des ondes d'épaisseur en fonction de l'amplitude de vibration A . Cercles : résultats expérimentaux des figures 8.17-8.18; trait : ajustement à deux paramètres de la forme $T = c/\sqrt{A_c - A}$ (équation 8.57), qui donne $A_c = 1,02$ mm, légèrement plus grand que l'amplitude maximale observée à la résonance (1 mm).

d'où en utilisant l'équation 8.55, g est maximal à une résonance faible. Expérimentalement, c'est le contraire : g devient petite près de la résonance faible. En effet la période expérimentale des ondes d'épaisseur est bien représentée par la relation

$$T = \frac{c}{\sqrt{A_c - A}}, \quad (8.57)$$

où A_c est légèrement supérieur à l'amplitude à la résonance faible (figure 8.19). Cela signifie que la fréquence propre g des ondes d'épaisseur tend vers 0 quand l'amplitude A atteint une amplitude critique. Si A dépassait A_c , g deviendrait un imaginaire pur et le profil stationnaire de vibration serait instable. Voilà pourquoi nous avons choisi la branche de plus petite amplitude de vibration lors de l'étude des vibrations stationnaires (section 8.4.2).

Pourquoi les ondes d'épaisseur sont-elles excitées? Près d'une résonance faible, elles ont une petite fréquence g , qui est proche des termes à fréquence nulle que nous avons mis de côté lors de l'obtention de l'équation d'onde 8.45; ces termes forcent les ondes d'épaisseur. A la résonance faible, g est minimale, l'écart entre la fréquence 0 du forçage et g est minimal, donc l'amplitude des ondes d'épaisseur est maximale comme observé expérimentalement (figure 8.18).

Pourquoi les ondes d'épaisseur sont-elles excitées à la transition entre modes? Une explication provient des termes de forçage à la fréquence $2f$ que

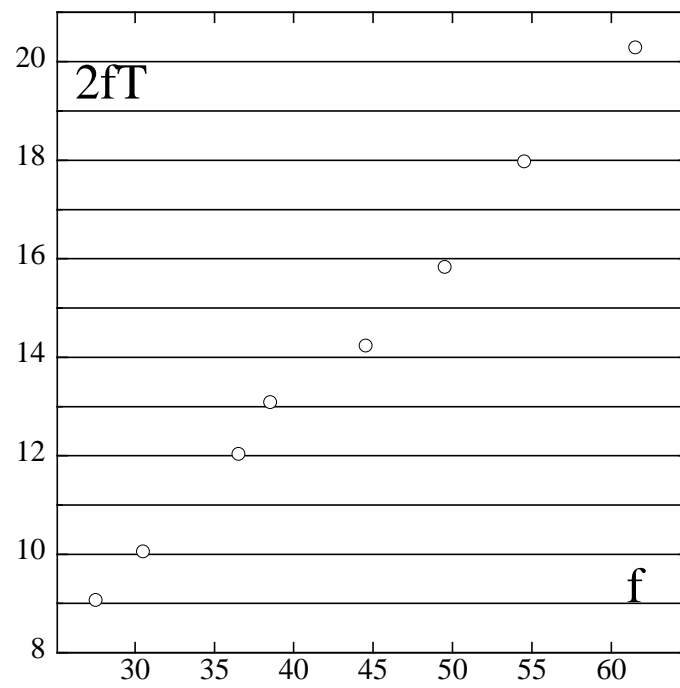


FIG. 8.20 – Le rapport $2f/g = 2fT$ est proche d'un entier lors de la transition entre deux modes. f est la fréquence de forçage et g est la fréquence des ondes d'épaisseur.

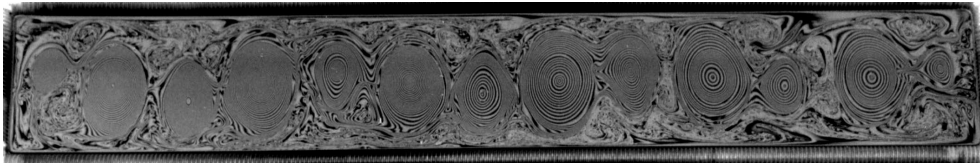


FIG. 8.21 – A 90 Hz, la ligne de ventres n'est pas rectiligne, elle a une longueur d'onde $2L/5$.

nous avons mis de côté dans l'équation d'onde 8.45. Nous avons été surpris par le fait que les transitions entre modes ne soient pas régulièrement espacées. Pour l'expliquer, nous avons mesuré la période des ondes d'épaisseur; elle vaut 0,16, 0,165 ou 0,17 secondes selon les transitions. Nous avons remarqué que, aux transitions, la fréquence f est proche d'un multiple demi-entier de la fréquence g des ondes d'épaisseur (figure 8.20). Les transitions entre modes se produisent donc quand les termes à la fréquence $2f$ forcent¹⁵ les ondes d'épaisseur de fréquence fondamentale g .

Nous ne sommes pas parvenu à prédire les fréquences des ondes d'épaisseur près des résonances faibles. Toutefois, nous avons montré que les ondes d'épaisseur sont excitées de manière non linéaire par la vibration et permettent les sauts de phase et les changements de mode.

8.6 Vers des motifs bidimensionnels

Dans cette section nous évoquons les motifs bidimensionnels que nous avons observés, pour des fréquences assez grandes ou pour des films qui se sont aminci par évaporation. Nous n'en avons pas fait d'étude systématique à cause de la mauvaise reproductibilité de ces motifs.

8.6.1 Instabilités de la ligne de ventres

Dans les domaines de fréquence que nous avons explorés ci-dessus, le film présente une longueur d'onde dans la largeur et les ventres sont alignés. A partir d'environ 80 Hz, la ligne de ventres est parfois instable vis-à-vis de perturbations dans la direction y de la largeur. Nous avons observé des motifs où les ventres ne sont plus sur la droite $y = 0$. On peut représenter ces motifs en considérant la sinusoïde de plus grande période qui passe par tous les ventres. Cette sinusoïde a une longueur d'onde qui est un sous-multiple

¹⁵Ce forçage est non linéaire puisque la fréquence g est excitée par une fréquence multiple.

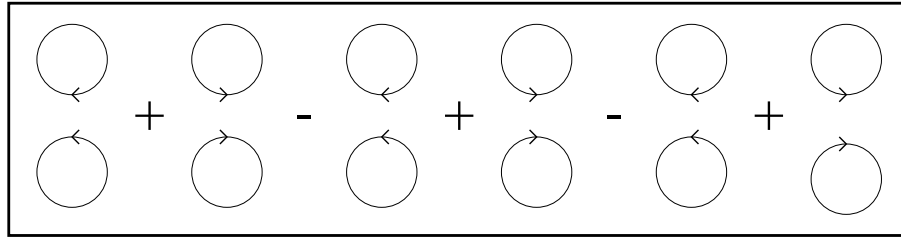


FIG. 8.22 – Schéma des vortex observés sur un film mince excité dans le mode 5. Les ventres sont symbolisés par des signes + s'ils sont en phase avec le forçage et des - sinon.

de $2L$:

$$\lambda_s = \frac{2L}{m}, \quad (8.58)$$

où L est la longueur du cadre et m un entier (voir la figure 8.21). Nous avons observé des valeurs de m allant de 1 à 13.

Le mécanisme de déstabilisation de la ligne de ventres provient aussi des ondes d'épaisseur. Si l'on part d'une situation où la ligne de ventres est rectiligne et que l'on augmente lentement la fréquence de forçage, on observe parfois des ondes d'épaisseur dans la direction y ; elles permettent alors le transfert de matière dans la largeur du film et donc le déplacement des ventres hors de la droite $y = 0$.

A haute fréquence, le forçage est inefficace et nous avons rarement observé des longueurs d'onde λ_y différentes de $2W$.

8.6.2 Films minces et génération de vorticité

Quand les films sont minces, des circulations intenses s'établissent autour de chaque ventre. Cet effet, observé par S. Taylor [147] puis par Airiau *et al.*[3], a été étudié par Afenchenko *et al.*[2] qui proposent un mécanisme de génération par interaction des ondes d'épaisseur avec le cadre. Nous avons fait des observations similaires qui sont schématisées sur la figure 8.22. Vega *et al.*[150] proposent un modèle qui tient compte de l'interaction du film avec l'air et reproduisent des vortex similaires aux vortex expérimentaux. Toutefois, il ne dégage pas de mécanisme physique simple pour interpréter leurs observations.

Pour y remédier nous pouvons nous aider d'une expérience réalisée par Couder *et al.*[51]. Un jet d'air est envoyé perpendiculairement au centre d'un film de savon circulaire; il entraîne le liquide radialement vers l'extérieur. Le film s'amincit au centre et donc sa tension de surface augmente (  cause de

son élasticité), ce qui attire le liquide vers l'intérieur. Ainsi tout écoulement est amplifié et conduit expérimentalement à la formation de quatre vortex qui entourent le centre du film (dans une configuration identique aux quatre vortex qui entourent un ventre sur la figure 8.22). Dans le cas du film en vibration, on peut voir l'effet de l'air comme celui d'un jet qui est envoyé sur chaque ventre, le jet provient du haut pendant la demi-période où le ventre monte, et du bas pendant l'autre demi-période. Ainsi, le mécanisme de génération de vortex pour les films vibrants serait le même que celui proposé dans [51]. On peut se demander maintenant pourquoi ces vortex n'apparaissent que quand les films sont minces. Quand ils sont épais, ils sont très élastiques : leur tension de surface ne varie pas assez avec l'épaisseur pour amplifier les écoulements, ce qui peut expliquer l'absence de vortex.

8.7 Résumé

Nous avons étudié l'auto-adaptation dans un système continu : le film de savon en vibration. S'il était parfaitement élastique, *i.e.* si sa tension de surface ne changeait pas avec l'épaisseur, il se comporterait comme la corde portant une masselotte : il s'adapterait pour se mettre à la résonance. En pratique, un film de savon a une élasticité non nulle (sa tension de surface diminue avec l'épaisseur) ; il est donc intermédiaire entre une membrane solide, qui ne répond presque jamais à une excitation, et un système complètement auto-adaptatif qui se met presque toujours à résonance (comme la masselotte enfilée sur une corde). Le film de savon ne se met pas à résonance mais la distribution d'épaisseur s'adapte au forçage de sorte que l'amplitude de vibration varie peu avec la fréquence d'excitation. Les ondes d'épaisseur permettent les transitions entre modes de vibration et les sauts de phase. Nous avons établi les équations qui décrivent les films de savon et les avons simplifiées pour dégager les ingrédients essentiels pour l'auto-adaptation : l'élasticité et le couplage entre épaisseur et amplitude de vibration. Ce modèle permet la compréhension de la majorité de nos observations.

Nous avons donc montré sur deux exemples, la corde chargée et le film de savon en vibration, que l'existence d'un degré de liberté supplémentaire donne un caractère auto-adaptatif au système qui répond à presque toute fréquence de forçage. Comme l'ingrédient (degré de liberté supplémentaire) est simple, l'auto-adaptation est sans doute observable ailleurs que pour des systèmes vibrants.

Conclusion

Conclusions

Cette thèse nous a permis de comprendre plusieurs aspects de la physique des membranes - plaques élastiques, nappes visqueuses ou films de savon - en joignant études expérimentales, numériques et théoriques. Nous reprenons ici nos principales conclusions point par point.

Sur les surfaces développables et les surfaces minimales

Les plaques élastiques ou les nappes visqueuses subissent deux types de déformations : traction et flexion. Le premier est bien plus coûteux énergétiquement que le second ; par conséquent, des déformations sans traction sont préférées. Géométriquement, les déformations sans traction d'un plan aboutissent à des surfaces développables (de courbure de Gauss nulle). La question que l'on se pose naturellement est alors la suivante : quelles sont les surfaces développables qui s'appuient sur un contour donné ?

Les films de savon à l'équilibre ont une énergie essentiellement capillaire ; ils adoptent la forme de surfaces minimales (de courbure moyenne nulle). La question naturelle est maintenant celle posée par Plateau : quelles sont les surfaces minimales qui s'appuient sur un contour donné ? Les membranes soulèvent donc deux problèmes géométriques de formulations semblables et de grande difficulté.

Nous avons réussi à résoudre le problème de Plateau pour les surfaces minimales qui s'appuient sur une double hélice. L'hélicoïde, qui répond à la question, devient instable à travers une transition continue, et est remplacée par deux surfaces ruban. Ce chemin continu au sein de surfaces minimales stables est peut-être utile pour les études morphologiques que nous avons évoquées, par exemple pour décrire les changements de conformations de protéines.

Quand on se donne un contour, en général, il n'y a pas de surface développable régulière et sans auto-intersection qui satisfasse aux conditions aux

limites. Par contre si on lève la condition de régularité, il semble que l'on puisse toujours trouver une réponse. À ce moment-là, la surface présente des singularités, linéiques ou ponctuelles. La physique d'une plaque élastique est dominée par ces singularités, ce qui nous conduit au point suivant.

Sur les plaques élastiques

Génériquement, les grandes déformations des plaques élastiques aboutissent à la formation de petites zones où la traction est concentrée. Ces zones sont linéiques (plis) ou quasi-ponctuelles (cônes développables) ; elles sont centrées sur les singularités de la surface développable dont la plaque prendrait la forme si elle était d'épaisseur nulle.

Nous avons étudié deux situations modèles : un pli comprimé longitudinalement et une plaque initialement courbée contrainte ponctuellement. Dans ces deux situations, plusieurs singularités apparaissent et subissent des séries de bifurcations. Les simulations numériques des équations de Föppl-von Kármán sont en accord quantitatif avec les résultats expérimentaux. Nous avons montré que nous pouvons décrire les plaques de manière géométrique (en utilisant implicitement les propriétés des surfaces développables) et prédire l'énergie des systèmes à partir des énergies des plis ou des cônes développables.

En outre, en étudiant la première situation modèle, nous avons proposé un mécanisme de génération de petites échelles pour les plaques fortement contraintes (on peut observer des plis de longueurs très diverses sur, par exemple, du papier froissé) : un pli comprimé devient instable en donnant naissance à des plis secondaires plus courts.

Sur l'analogie solide élastique/liquide visqueux

Aux temps longs, les films liquides évoluent vers un état d'équilibre déterminé par leur énergie capillaire (une forme de surface minimale). Au temps courts, leur comportement est semblable à celui des plaques élastiques. En effet, les équations qui décrivent un solide élastique ou un fluide très visqueux sont mathématiquement identiques. Nous avons utilisé cette analogie pour mettre en évidence, pour la première fois, une singularité conique pour une nappe visqueuse (une fine couche de liquide visqueux). La localisation des déformations est alors aussi un phénomène général pour les nappes visqueuses ; elle est peut-être pertinente pour les formations géologiques (la lave est un liquide très visqueux).

Sur l'auto-adaptation

Les vibrations forcées d'un film de savon sont plus complexes que celles d'une surface minimale. En effet, l'épaisseur du film peut varier spatialement. Nous avons d'abord considéré un analogue discret, une corde sur laquelle coulisent une ou plusieurs masselottes (la position de la masselotte correspond à un endroit où le film est plus épais). Nous avons montré que la position de la masselotte s'ajuste pour que le système se mette à résonance avec le forçage.

Pour le film de savon, la distribution d'épaisseur s'ajuste à l'excitation ; l'amplitude de vibration varie peu avec la fréquence de forçage. La différence avec le système précédent provient de l'élasticité du film qui résiste aux variations d'épaisseur. Les transitions entre modes de vibration et les changements de phase se font grâce aux ondes d'épaisseur.

Dans les deux cas, l'addition d'un degré de liberté au système (la position de la masselotte ou les variations d'épaisseur) lui fait perdre son caractère à fréquences propres : il répond à toute fréquence d'excitation.

Prolongements et perspectives

Notre exploration de la physique des membranes a permis une meilleure compréhension de phénomènes comme la focalisation des contraintes ou l'auto-adaptation des systèmes vibrants ; elle laisse cependant des questions ouvertes. Nous évoquons maintenant dans le désordre les quelques réflexions que nous a inspirées cette étude.

Sur la structure du coeur d'un cône développable

Nous avons exposé dans le premier chapitre la loi d'échelle concernant la taille du coeur d'une singularité conique. Cette loi d'échelle a été obtenue à l'aide d'arguments dimensionnels et vérifiée expérimentalement par Cerda *et al.*[38]. Toutefois, sur la base d'arguments similaires, Ben Amar et Pomeau [15] puis Cerda et Mahadevan [39] ont proposé une loi d'échelle différente. Une étude plus rigoureuse semble donc nécessaire. Comment résoudre le problème de couche limite pour une singularité conique ?

Sur les singularités en temps fini

Nous avons observé, à grande amplitude de forçage, que les films de savon en vibration éjectent des gouttes de liquide. La forme du film devient probablement singulière au bout d'un temps fini, après lequel la goutte est

éjectée. La méthode que nous avons trouvée pour faire des mesures quantitatives sur ces films ainsi que la description théorique peuvent sans doute permettre l'étude de ce phénomène.

Sur la structure du papier froissé

Lorsque l'on contraint fortement une plaque élastique (une feuille de papier par exemple), un réseau de plis de tailles diverses se forme. Quelles sont les propriétés statistiques de ce réseau ? Comment l'énergie se distribue-t-elle sur les différentes échelles spatiales ? Gomes *et al.* [69, 71, 70], Tzschichholz *et al.* [148], Plouraboué et Roux [123] se sont déjà posé ces questions avant les récents développements sur les grandes déformations des plaques élastiques. Nous avons proposé un mécanisme de transition vers les petites échelles et nous pensons que de nouveaux résultats peuvent être obtenus à partir de la géométrie des surfaces développables et de l'énergie des singularités.

Sur l'auto-adaptation

Nous avons mis en évidence l'auto-adaptation à l'excitation de deux systèmes vibrants. Les ingrédients importants sont l'équation d'onde et l'existence d'un degré de liberté supplémentaire. L'auto-adaptation peut probablement être observée sur d'autres systèmes décrits par l'équation d'onde : des cavités acoustiques, optiques ou à micro-ondes par exemple. Le degré de liberté supplémentaire proviendrait d'une impureté, couplée à l'onde par la pression de radiation. Finalement, l'existence d'ondes dans le système est-elle nécessaire pour qu'il y ait auto-adaptation ?

Sur la dynamique des plaques

Les études sur la dynamique de plaques présentant des plis ou des d-cônes sont peu nombreuses : Houle et Sethna [76] puis Kramer et Lobkovsky [90] ont étudié les signaux sonores émis lors du froissage d'une plaque ; Moldovan et Golubovic [105] ont examiné numériquement l'évolution lente (sous l'effet d'un amortissement très fort) d'une membrane fortement comprimée ; toutefois, ils n'ont proposé aucune description théorique complète. Quelle est donc l'influence des singularités sur la dynamique d'une plaque ? Comment ces singularités apparaissent-elles ?

La physique des membranes élastiques ou capillaires est ainsi très riche. Elle permet l'étude de phénomènes généraux : instabilités, singularités et auto-adaptation.

Annexe A

Publication A

BOUDAUD, A., PATRÍCIO, P., COUDER, Y., ET BEN AMAR, M.
Dynamics of singularities in a constrained elastic plate.
Nature 407 (2000), 718–720.

Cette publication expose les premiers résultats du chapitre 3.

Erratum : dans l'équation (4) page 720, lire $4\sqrt{2}$ à la place de $4\sqrt{2/3}$.

Dynamics of singularities in a constrained elastic plate

Arezki Boudaoud^{*}, Pedro Patrício[†], Yves Couder^{*} & Martine Ben Amar^{*}

^{*} Laboratoire de Physique Statistique de l'ENS (associated with CNRS and the universities Paris VI and Paris VII), 24 rue Lhomond, F-75231 Paris Cedex 05, France

[†] Centro de Física da Matéria Condensada, Universidade de Lisboa Av. Prof. Gama Pinto 2, 1649-003 Lisbon, Portugal

Large deformations of thin elastic plates usually lead to the formation of singular structures which are either linear¹⁻⁴ (ridges) or pointlike⁵⁻⁸ (developable cones). These structures are thought to be generic for crumpled plates^{3,5}, although they have been investigated quantitatively only in simplified geometries^{1-4,6-8}. Previous studies⁹⁻¹¹ have also shown that a large number of singularities are generated by successive instabilities. Here we study, experimentally and numerically, a generic situation in which a plate is initially bent in one direction into a cylindrical arch, then deformed in the other direction by a load applied at its centre. This induces the generation of pairs of singularities; we study their position, their dynamics and the corresponding resistance of the plate to deformation. We solve numerically the equations describing large deformations of plates; developable cones are predicted, in quantitative agreement with the experiments. We use geometrical arguments to predict the observed patterns, assuming that the energy of the plate is given by the energy of the singularities.

In the absence of constraints, the two main curvatures κ_1 and κ_2 of a plane plate are zero. It is easy to bend the plate, that is, to give it a finite curvature in one direction so that it becomes cylindrical or conical. The curvature and thus the bending energy are then approximately evenly spread in the plate. It scales as $E_b \approx Eh^3$, E being the Young's modulus of the plate material and h its thickness. However, once bent in one direction, it is difficult to bend the plate also in the other direction because this will tend to create a finite Gauss curvature ($G = \kappa_1\kappa_2$) which can be only be acquired by stretching. The stretching energy is $E_s \approx EhR^2$, R being a typical length of the plate. As $E_s/E_b \approx (R/h)^2$ is large at small thickness, the deformation is pure bending almost everywhere and there is non-zero gaussian curvature only at singularities where the energetically expensive stretching is localized.

Here we study a plate initially curved in one direction (the x -direction), being clamped at two of its extremities (Fig. 1). The clamping provides two tunable parameters: the distance between the clamped sides d ; and the two equal angles (α) between the sheet and the horizontal direction at $x = \pm d/2$. The other two sides of the plates, at $y = \pm L/2$, are free. The plate is cylindrical (Fig. 1a). The cylinder axis is in the y -direction. A conical tip then pushes down the plate at its centre. The control parameter is the vertical displacement, Z , of the centre. This problem can be considered as the two-dimensional extension of the elastic arch investigated by Pippard^{12,13}. However, whereas the elastic arch has only bending deformations, the plate here may have stretching deformations as well.

Indeed, when the plate centre is displaced, two d-cones linked by an inverted ridge appear (Fig. 1a, e). As the vertical displacement of the centre Z is increased, the two d-cones move towards the clamped boundaries. The plate is still invariant by the x and y mirror symmetries. When the vertical displacement reaches about $Z = 10$ mm, a continuous transition occurs, breaking the two mirror symmetries. Two new d-cones appear, so that the four d-cones form a diamond which rotates about the centre (Fig. 1b, f). This rotation is either to the right or to the left. The plate is now

invariant by the 0-symmetry $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$. At about $Z = 11.5$ mm a second continuous transition breaks all symmetries. The 4 d-cones move so that at $Z = 12$ mm they form a trapezoid (Fig. 1c, g). The trapezoid's larger edge is either to the left or to the right. The mirror symmetry $y \rightarrow -y$ is recovered. The trapezoid grows until two of its vertices reach the free sides of the sheet ($Z = 13$ mm). Then there is a discontinuous transition such that the plate becomes cylindrical (Fig. 1d). Note that these patterns are observed when the pushing tip is exactly at the centre of the plate (with a tolerance of about 0.1 mm). Once the adjustment is made, different realizations of the experiment (under the same conditions) show the two possible states following each continuous transition. The situation described here is the more general one: if the plate is long enough, all regimes are observed. If the length of the plate is decreased, first the trapezoid and then the diamond regime disappear: the d-cones reach the free boundaries and the discontinuous transition to a cylinder occurs earlier.

In elasticity theory, large deformation of plates are usually described by the Föppl von Kármán equations (FvK)¹⁴. These nonlinear equations are notoriously difficult, mainly because they

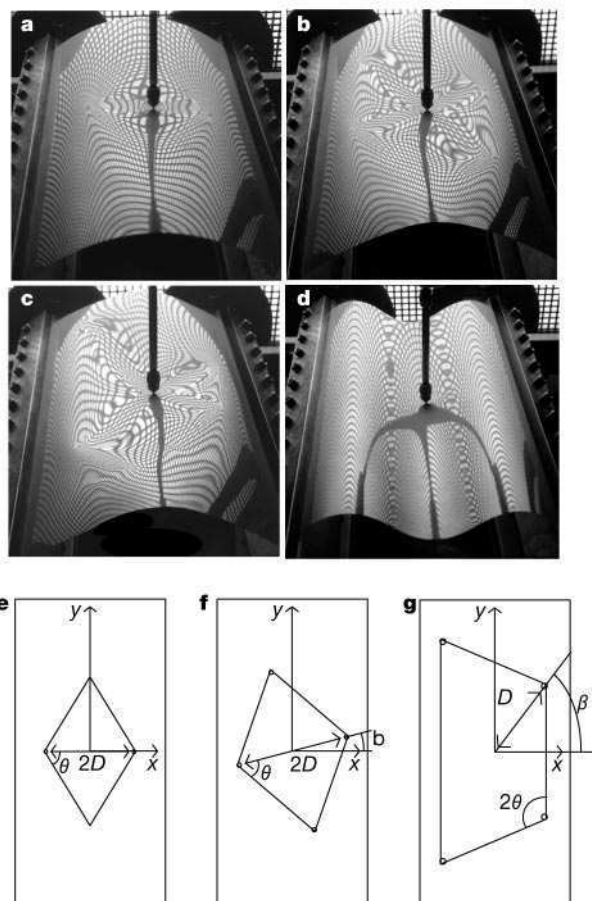


Figure 1 Observed patterns with a Mylar sheet of thickness $h = 0.35$ mm, Young's modulus $E = 3.8 \times 10^9$ N m⁻² and Poisson ratio $\nu = 0.4$. The aspect ratio is 2 (length $L = 35$ cm and width $W = 17.5$ cm). $\alpha = 20^\circ$ and $d = 16.5$ cm (see text for definitions). The results depend only slightly on the dimensions of the sheet. **a**, Vertical displacement of the centre $Z = 4$ mm: two d-cones located at $(x, y) = (\pm d, 0)$. **b**, $Z = 11.5$ mm: four d-cones forming a diamond at large rotation angle ($\beta \sim 30^\circ$). Two ridges link the d-cones. **c**, $Z = 12.5$ mm: 4 d-cones forming a trapezoid. **d**, $Z = 15$ mm: cylindrical shape. As Mylar has a large elastic limit there are no plastic (irreversible) deformations during this evolution. The experiment can thus be reproduced with the same sheet. **e-g**, Positions of the d-cones (black dots) in the **a**, **b** and **c**, respectively. The schemes give the definition of D , β and θ in the three regimes.

involve high-order derivatives and two types of deformations (stretching and bending) with energies of different orders of magnitude. A successful numerical procedure to overcome these difficulties has been proposed¹⁵. The plate is represented by finite elements and its energy is minimized. To obtain numerical convergence, the variables are changed by diagonalization of the energy hessian (re-conditioning) two or three times during the procedure.

Here, we compare experimental results and numerical solutions of the FvK equations. In Fig. 2, we show two numerical solutions and their energy as Z increases. Stretching is confined to the centre of the plate and to the d-cone tips. Bending dominates elsewhere. The pushing tip gives a spherical shape locally (non-zero Gauss curvature) to the plate so that there is stretching at the centre.

The experimental and the theoretical force versus displacement curve are represented in Fig. 3. The slope in zone II is larger than in zone I. This is explained by the numerics: some bending energy is localized near the boundaries. The agreement between numerics and experiment is good until zone III. So, we first concentrate on regimes I and II.

The contributions of the singularities dominate the energy of the plate. The energy of a ridge⁴ and the energy of a d-cone⁵⁻⁸ are given respectively by

$$E_r = F_r \kappa (R/h)^{1/3} \phi^{7/3} \quad (1)$$

$$E_d = F_d \kappa \ln(R/R_c) \phi^2 \quad (2)$$

Here $\kappa = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ is the bending modulus, R the size of the singularity, ϕ its strength (the complement of the angle between the two sides of the ridge and the complement of the tip angle of the cone), $R_c = (\kappa/Eh)^{1/6} R^{2/3} \phi^{-1/3}$ is the radius of the core of the d-cone, $F_r \approx 1$ and $F_d \approx 100$ are shape factors. Under our conditions, where $h/R \approx 10^{-3}$ and $\phi \approx 0.1$, the energy of the ridges is negligible. As a consequence, the energy of the plate will be given by the energy of the d-cones.

Now we show that singularities are formed as soon as $Z \approx h$. We estimate the transition from the linear regime (the regime where the linearization of the FvK equations holds¹⁴) to the regime in which

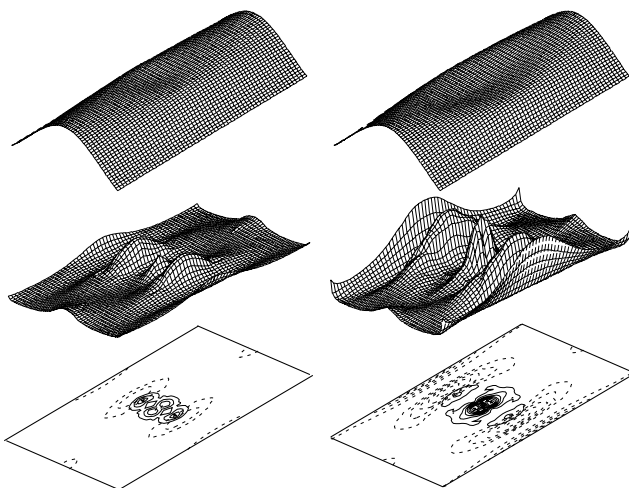


Figure 2 Two numerical situations with $\alpha = 20^\circ$ and $d = 16.5$ cm. Left, $Z = 5$ mm; right, $Z = 12$ mm. The procedure is a finite-element minimization of the plate energy, using reconditioning to obtain convergence. 471 minimization variables were used. Top, numerical configurations of the plate. Middle, energy density. A maximum at the centre (at the pushing tip) between two lateral maxima corresponding to two d-cones. For $Z = 12$ mm, some energy is localized at the clamped boundaries $(x, y) = (\pm d/2, 0)$. Bottom, contour lines of stretching energy (solid lines) and bending energy (dashed lines). The bending energy dominates except on very confined regions at the centre of the plate and the tips of the d-cones.

two d-cones appear. If $S = r^2$ is the area of the deformed zone, the strain and the curvature are given by $s \approx Z^2/r^2$ and $c \approx Z/r^2$. So the stretching and the bending energy scale as $E_s \approx Eh s^2 S \approx Eh Z^4/r^2$ and $E_b \approx Eh^3 c^2 S \approx Eh^3 Z^2/r^2$ respectively. The comparison between these two expressions shows that the linear regime is only valid when $Z^2 < h^2$. The regime without singularities should correspond to the small region $Z \leq 0.35$ mm in Fig. 3.

In the two-d-cones regime, the central zone of the plate is diamond-shaped with two d-cones at the vertices where $y = 0$. The angular opening (Fig. 1e) of each d-cone (the angular opening of the inverted curvature zone) is always in the range $2\theta = 100-120^\circ$, the same as for a single d-cone^{7,8}. To find the positions of the d-cones, we use the following geometrical argument. Consider a section of the undeformed plate by the plane $y = 0$. Approximate it by its osculating parabola $z = kx^2$. When the centre is pushed, the arc $x \in (-D + \Delta, D - \Delta)$ of the parabola is transformed into the ridge of length $2D$ linking the two d-cones. The equality of the arc length and the ridge length yields $\Delta \approx 2/3 k^3 D^3$, so that

$$kD \approx \sqrt{kZ}(1 + 2/3kZ) \quad (3)$$

Here Z is the imposed vertical displacement. This equation is checked experimentally and numerically in Fig. 4, so that the geometrical description holds. In the x -section, the angle between the generatrices of a d-cone is $\psi \approx 2kD$. Now we must find the size R of the d-cone. Near its tip, the curvature due to the d-cone ψ/r is large (r is the distance to the tip). Far from the tip, the initial curvature of the plate $2k$ dominates. R is given by the matching $\psi/R \approx 2k$. Here the geometry gives all the characteristics of the d-cones; we only need to compute the energy from equation (2). If we use the solution found for the single d-cone⁶⁻⁸, $\phi = \psi/\mu$, $\mu = 4.8$ and $F_d = 67$. The solid line of Fig. 3 represents the force $F = dE_d/dZ$ calculated to the lowest order in kZ ($k = 5.7 \text{ m}^{-1}$). This description is only valid while the radius R of the d-cone is smaller than its distance to the boundary. This condition $D + R = W/2$ gives $Z_c = 10.9$ mm.

The rotation of the d-cones, leading to the diamond regime, can now be explained by a simple geometric argument. Consider the two d-cones with aperture angle 2θ and a section of the plate by the plane $y = \tan\beta x$ (Fig. 1g). When $Z = 0$, this section is approximated by $z = k \cos^2 \beta s^2$, where s is the coordinate along the section. The geometrical results obtained for the 2 d-cones regime (equation

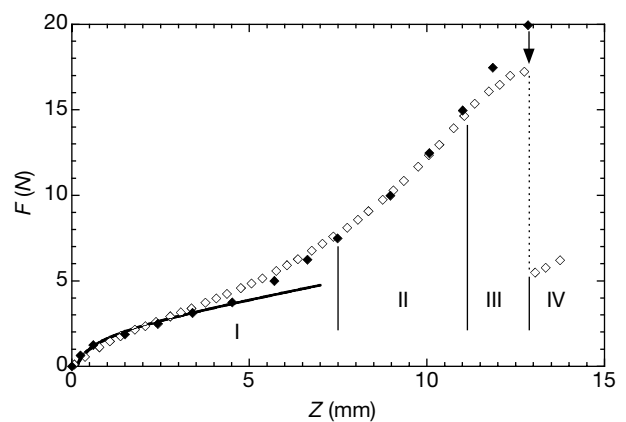


Figure 3 Force F versus displacement of the centre Z with $\alpha = 20^\circ$ and $d = 16.5$ cm. Force is measured with a piezoelectric cell allowing 10^{-2} N precision. Open diamonds, experimental result; filled diamonds, the numerics. The black arrow shows the numerical transition to regime IV. Solid line, theoretical prediction from equations (2) and (3), $F = 0.65 \ln(10.3Z)$. Regime I, two d-cones are observed. Regime II, almost linear, with a larger slope than in I. Regime III, the numerics overestimate the energy. Regime IV, cylindrical situation with no singularities.

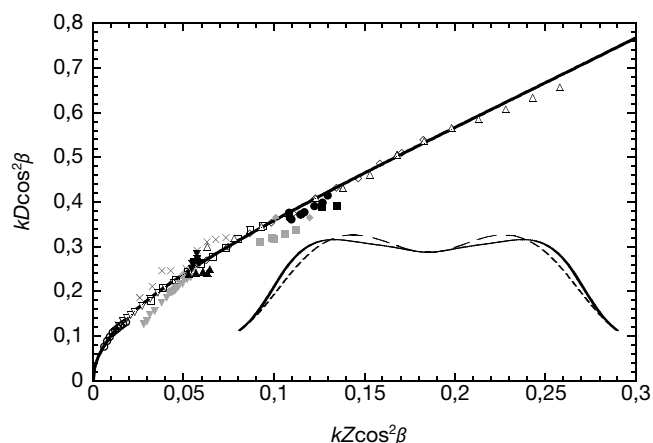


Figure 4 Distance between the dominant d-cones and the centre with various α and d values. k is half the mean curvature at the plate centre when $Z = 0$. Crosses, numerics; the other symbols are experimental. Open symbols, two-cones regime. Grey symbols, diamond regime. Black symbols, trapezoid regime. Solid line, theoretical prediction from equation (3). Inset curve ($Z = 6$ mm), x cross-section of the plate (solid line); elastic arch (dashed line).

(3)) hold when k is replaced by $k \cos^2 \beta$ as is checked in Fig. 4. To lowest order in kZ , the d-cone radius is $R \approx D \approx \cos \beta \sqrt{Z/k}$. If the interaction between the d-cone and the clamped boundary is strong, the d-cone is constrained to move to a new position $\beta \neq 0$, in which the periphery of the d-cone (a circle of radius R) exactly touches the boundary of the plate, $D \cos \beta + R = W/2$. For Z near to Z_c , this condition leads to

$$\beta \approx \pm 4\sqrt{2/3/kW} \sqrt{k(Z - Z_c)} \quad (4)$$

Here $4\sqrt{2/3/kW} = 3.3$ and $Z_c = 10.9$ mm compare well with the experimental $\beta = 3.1\sqrt{k(Z - Z_c)}$ with $Z_c = 10$ mm.

Now consider the second pair of d-cones. When their peripheries touch the clamped boundaries, $\beta + \theta \approx \pi/2$ so that $Z = Z_i \approx k(W/2/\sin\theta/(1 + \sin\theta))^2 = 15$ mm (with $\theta = 63^\circ$) which is comparable to the experimental $Z_i = 12$ mm. For $Z \geq Z_i$ all d-cones have to move along the clamped boundaries. If two of them are constrained to have an angular opening of 2θ , the only possible shape is a trapezoid. Compared to the two-d-cones regime, energy is gained in the diamond, and then the trapezoid regime. These configurations were not observed numerically, probably owing to the discretization. For this reason the numerics overestimates the force in region IV of Fig. 3. At $Z \geq 13$ mm the plate becomes cylindrical (pure bending deformations) so that the force jumps to a much smaller value (Fig. 3). This transition is well predicted by the numerics. The energy of the plate is then the same as the elastic arch¹³.

The experiment we have performed is typically a controlled version of what happens when a car is bumped. The difference is in the material; in metals the elastic limit is easily exceeded at the d-cones and then at the ridges. The first deformation of a plate is either cylindrical or conical. Most further deformations lead to the formation of pairs of d-cones and to the diamond-shaped deformation we have studied here. The observed shapes are determined by the geometry, and the energy of the plate can be computed using only the energy of the singularities. □

Received 22 February; accepted 24 July 2000.

1. Pogorelov, A. V. *Bendings of Surfaces and Stability of Shells*. (Translations of Mathematical Monographs No. 72, American Mathematical Society, 1988).
2. Witten, T. A. & Li, H. Asymptotic shapes of a fullerene ball. *Europhys. Lett.* **23**, 51–55 (1993).
3. Lobkovsky, A. E., Gentes, S., Li, H., Morse, D. & Witten, T. A. Scaling properties of stretching ridges in a crumpled elastic sheet. *Science* **270**, 1482–1485 (1995).
4. Lobkovsky, A. E. Boundary layer analysis of the ridge singularity in a thin plate. *Phys. Rev. E* **53**, 3750–3759 (1996).

5. Ben Amar, M. & Pomeau, Y. Crumpled paper. *Proc. R. Soc. Lond. A* **453**, 729–755 (1997).
6. Chaieb, S. & Melo, F. Experimental study of developable cones. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2354–2357 (1998).
7. Cerda, E. & Mahadevan, L. Conical surfaces and crescent singularities in crumpled sheets. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2358–2361 (1998).
8. Cerda, E., Chaieb, S., Melo, F. & Mahadevan, L. Conical dislocations in crumpling. *Nature* **401**, 46–49 (1999).
9. Chaieb, S. & Melo, F. Experimental study of crease formation in an axially compressed sheet. *Phys. Rev. E* **56**, 4736–4745 (1997).
10. Pomeau, Y. & Rica, S. Plaques très comprimées. *C.R. Acad. Sci. Paris* **325**, Série IIB, 181–187 (1997).
11. Pauchard, L. & Rica, S. Contact and compression of elastic spherical shells. *Phil. Mag.* **B 78**, 225–233 (1998).
12. Pippard, A. B. The elastic arch and its modes of instability. *Eur. J. Phys.* **11**, 359–365 (1990).
13. Patricio, P., Adda-Bedia, M. & Ben Amar, M. An *elastica* problem: Instabilities of an elastic arch. *Physica D* **124**, 181–187 (1998).
14. Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. *Theory of Elasticity* (Pergamon, Oxford, 1986).
15. Patricio, P. & Krauth, W. Numerical solutions of the Von Karman equations for a thin plate. *Int. J. Mod. Phys. C* **8**, 427–434 (1997).

Acknowledgements

We thank L. Quartier and M. Haddad for their valuable help. This work was finished during the stay of M.B.A. and A.B. at the Department of Mechanical Engineering of the MIT; M.B.A. and A.B. are grateful for the hospitality they received.

Correspondence and requests for materials should be addressed to A.B. (e-mail: arezki.boudaoud@lps.ens.fr).

Interconversion of single and double helices formed from synthetic molecular strands

Volker Berl*†, Ivan Huc‡*, Richard G. Khoury*, Michael J. Krische*§ & Jean-Marie Lehn*

* Laboratoire de Chimie Supramoléculaire, ISIS, Université Louis Pasteur, 4 rue Blaise Pascal, F-67000 Strasbourg, France

† Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Institut für Nanotechnologie, Postfach 3640, D-76021 Karlsruhe, Germany

‡ Institut Européen de Chimie et Biologie, ENSCPB, Av. Pey Berland, F-33402 Talence Cedex, France

Synthetic single-helical conformations are quite common, but the formation of double helices based on recognition between the two constituent strands is relatively rare. Known examples include duplex formation through base-pair-specific hydrogen bonding and stacking, as found in nucleic acids and their analogues, and polypeptides composed of amino acids with alternating L and D configurations^{1,2}. Some synthetic polymers³ and self-assembled fibres⁴ have double-helical winding induced by van der Waals interactions. A third mode of non-covalent interaction, coordination of organic ligands to metal ions^{5–7}, can give rise to double, triple and quadruple helices, although in this case the assembly is driven by the coordination geometry of the metal and the structure of the ligands, rather than by direct inter-strand complementarity. Here we describe a family of oligomeric molecules with bent conformations, which exhibit dynamic exchange between single and double molecular helices in solution, through spiral sliding of the synthetic oligomer strands. The bent conformations leading to the helical shape of the molecules result from intramolecular hydrogen bonding within 2'-pyridyl-2-pyridinecarboxamide units^{8–12}, with extensive intermolecular

§ Present address: University of Texas at Austin, Department of Chemistry and Biochemistry, Austin, Texas 78712, USA.

Annexe B

Publication B

BOUDAUD, A., ET CHAÏEB, S.
Singular viscous tablecloth.
En préparation, 2001.

Cette publication expose les résultats du chapitre 4.

Singular viscous tablecloth

Arezki Boudaoud¹ and Sahraoui Chaïeb²

¹ *Laboratoire de Physique Statistique de l'ENS (associé au CNRS et aux universités Paris VI et Paris VII) 24, rue Lhomond; F-75231 Paris Cedex 05; France*

² *Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois at Urbana-Champaign 216 Talbot Laboratory, 104 South Wright Street Urbana, IL 61801-2983 USA*

A cloth set on a circular table shows a pattern of folds and wrinkles. More generally, constraining thin sheets leads to the concentration of deformations near singular zones. When an elastic sheet is pushed by a stick into a cylindrical hoop, one fold appears and a conical singularity is located at the stick tip. What pattern would be observed when using a very viscous fluid instead of the elastic solid? It is found here that a viscous sheet also shows a conical singularity. The theoretical analysis predicts the number of folds in quantitative agreement with the experiment.

In our everyday routine, we notice that the contact of a solid and a cloth displays patterns such as wrinkles and creases at the surface of the cloth. Indeed, this ubiquitous phenomenon is the result of the geometric constraint applied on the sheet by the border of the solid. A tablecloth is an example of such a scenario. When we drape the table with a cloth, a series of wrinkles form at the periphery of the table [1]; their number is selected by the ratio between elastic energy and gravitational energy. As they are thin elastic materials, the deformations of fabrics lead to geometrical problems similar to those found for elastic sheets such as transparencies, protecting films on electronic devices and any any thin metal sheet. They suffer two types of deformations: stretching and bending [2]. It is easy to bend a thin elastic sheet and it is difficult to stretch it. Energetically speaking, stretching is much more expensive than bending. As a consequence, large deformations of thin elastic sheets lead to the formation of singular structures like the one observed in a crumpled paper; there is pure bending almost everywhere and the expensive stretching is localized near the singularities [3,4]. Such a singularity occurs for instance when an elastic sheet is constrained inside a cylinder by a stick pushing its center [5–8]. Here we extend this latter study to a viscous “cloth”. Indeed, there is an analogy between the deformations of an incompressible elastic solid and the flow of a very viscous incompressible liquid, as noticed by Taylor [9]. This was followed by many studies of buckling of viscous filaments [10–14] or viscous sheets [15–18].

Our purpose is observe in viscous sheets conical singularities similar to those found in elastic sheets [7,8,19]. Let us first explain the elastic/viscous analogy. The stress tensor for an incompressible [20] elastic solid of Young's modulus E , $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2E/3 u_{ij}$ has the same form as for an incompressible newtonian fluid of viscosity μ , $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu du_{ij}/dt$, p being the pressure, δ_{ij} the identity tensor and u_{ij} the strain tensor.

If τ is a characteristic time of the flow, the equivalent of Young's modulus is $3\mu/\tau$. The analogy results from the identity between the equations describing the solid equilibrium $\partial_i \sigma_{ij} = 0$ and the Stokes equation describing a small Reynolds number flow. The statement that the flow corresponds to the minimum of viscous dissipation is mathematically the same as the elastic energy is minimum. For thin incompressible elastic (viscous) sheets of thickness h and typical size R ($h \ll R$), a bending deformation has a typical energy $\kappa = Eh^3/9$ (dissipation $\mu h^3/3$), κ being the bending modulus; a stretching (shearing) deformation has an energy $\kappa(R/h)^2$ (dissipation $\mu h R^2/3$). As a consequence, in both cases, bending deformations are preferred. Equivalently [18], the time scale for stretching is larger than for bending by a factor $(R/h)^2 \gg 1$.

In this study, we are concerned with the viscous analog of a circular tablecloth put held on a stick. The experiment consists in filling a cylindrical tank with water and preparing a circular sheet of silicon oil floating on the water surface. The silicon oil is less dense than water and 600 000 times more viscous. A stick is placed at the cylinder axis. The water is drained from the bottom of the cylinder. The Silicon oil layer falls down with the water and when it reaches the stick we obtain the equivalent of a tablecloth.

The radius R of the sheet is a few cm, while its thickness h is of the order of the capillary length $\sqrt{\gamma/\rho g} = 1.5$ mm, g being the acceleration of gravity (other quantities are defined in Fig. 1). The water is drained through a quick opening tap, a fast steady flow is obtained for 2 s, which is more than the typical time 1 s for an experiment. The water surface is dropping at a rate $v = 7.6$ cm/s.

When the viscous sheet reaches the stick, a small circular part of radius $R_c \sim 2$ mm of the sheet adheres to the stick (Fig. 1). It is the equivalent of the core of a d-cone. 0.5 s later, the rest of the sheet folds in the orthoradial

direction (Fig. 1) and air penetrates under the sheet. The shape of the sheet looks like a cone which apex is located at the tip of the stick. Later on (1 s), a few folds grow larger while the others disappear. Eventually, the sheet is all stuck to the stick and the fluid flows along the stick with a time scale of many minutes. We have measured the number of folds just after their formation (Fig. 3). It increases with the ratio R/h .

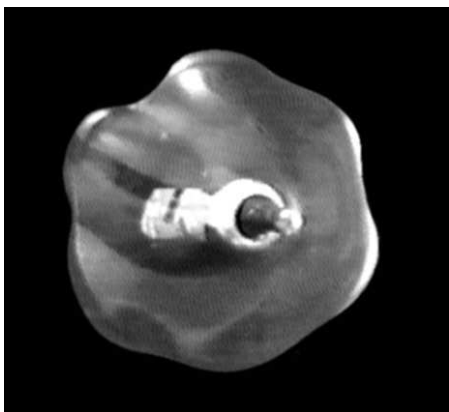
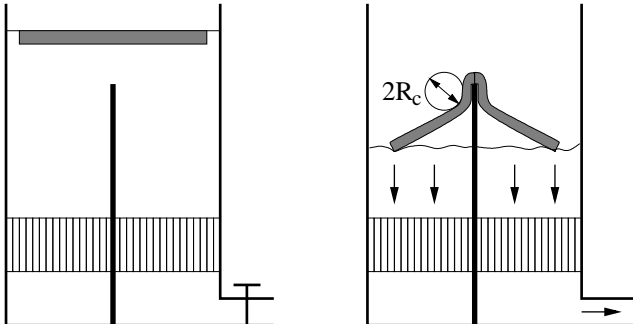


FIG. 1. Top: Scheme of the experiment. A circular thin layer of silicon oil (mass density $\rho = 980 \text{ kg/m}^3$, viscosity $\mu = 600 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, surface tension $\gamma = 21 \text{ mN/m}$) is prepared on-top of water. The water is drained from the bottom, passing through a network of straws filling the section of the container to achieve a laminar flow. The velocity of the surface of the water is $v = 7.6 \text{ cm/s}$. When the sheet reaches the stick, a small zone near its center adheres to the stick, air penetrates under the sheet and only its periphery remains in contact with water. A periodic pattern develops then. The thickness, the vertical scale and the zone near the stick are magnified. The radius of the core R_c is defined here. Bottom: Top view of the experiment, the camera has been slightly inclined. The stick appears under the sheet. The periodic pattern has just formed, with a wavenumber $n = 6$. The viscous layer has a thickness $h = 2.4 \text{ mm}$ and a radius $R = 3.6 \text{ cm}$.

More insights can be gained with the modelling of the experiment. We first consider the elastic equivalent prob-

lem : A circular sheet placed on a stick, in the gravitation field. Due to the high cost of stretching and the stick constraint, we expect a conical shape to develop so that, in polar coordinates (r, θ) , the vertical deflection of the sheet is given by $\xi = rf(\theta)$. The shape f is given by the minimization of

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2}\kappa \ln\left(\frac{R}{R_c}\right) \int (f + f'')^2 d\theta - \frac{1}{3}\rho gh \int f d\theta + \frac{1}{2}\lambda \int f(f + f'') d\theta. \quad (1)$$

The first term is the bending energy, proportional to the bending modulus κ , the second is the gravitational energy, and the third enforces the constraint of no stretching [4,6] using a Lagrange multiplier λ . The solutions (up to rotations) are $f(\theta) = \eta n^{-2}(1 + \sqrt{2/(n^2 - 1)} \sin(n\theta))$, the orthonormal (azimuthal) wavenumber n is integer and $\eta = (R^3 \rho gh)/(3\kappa \ln(R/R_c))$ is the nondimensional parameter comparing gravitational and elastic effects. Thus a cloth on a stick (Fig. 2) shows a periodic pattern as can be easily observed. The wavenumber n is selected by the boundary conditions.

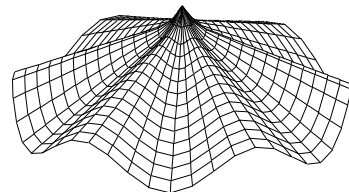


FIG. 2. The theoretical shape of the viscous sheet showing a periodic pattern with a wavenumber $n = 6$, corresponding to $\eta = 36$, η being the number comparing gravitational and bending energies (defined by eq. 2). The center of the sheet has been corrected to show the core of the conical singularity. This shape is similar to that of a circular cloth put on a stick.

Let us turn now to the viscous transposition. The time scale τ is defined by the experimental conditions and is imposed here by the boundary conditions. The periphery of the sheet of radius R is sustained by the water and falling at a velocity v . As a consequence $\tau = R/v$. Also, it has to be kept in mind that this timescale is much smaller than the timescale of the flow inside the sheet (their ratio is $(h/R)^2 \sim 10^{-4}$). The equivalent of the bending modulus $Eh^3/9$ of an elastic sheet is then $\kappa = \mu h^3/(3\tau)$. As the sheet central zone adheres to the stick, the size of the core is not the same as in the elastic case. However, it can be given by the same arguments: The bending E_b and the stretching E_s energy have the same order of magnitude (in elastic terms). In the core,

the typical strain is $v_c\tau/R_c$ and the curvature is $1/R_c$, v_c being the typical velocity in the core. To match to the conical shape outside the core, $v_c/R_c \sim v/R$. As a consequence $E_b \sim E_s$ leads to $R_c \sim h$; the proportionality factor is unimportant because the dependance of η on R_c is only logarithmic. To sum up, the dimensional parameter governing the problem reads

$$\eta = \frac{\rho g R^4}{\mu h^2 v \ln(R/h)}. \quad (2)$$

It is a non trivial function of almost all the parameters of the system. As in the elastic case, the wavenumber is selected by the boundary conditions. Here, the sheet is sustained by the water: The mean velocity of the periphery of the sheet is v , *i.e.* $\langle d\xi/dt(R, \theta) \rangle = R \int f(\theta) d\theta / \tau = v$. As a consequence,

$$n = \sqrt{\eta}. \quad (3)$$

We could expect that n increases with η . For instance, at small η , gravity is unimportant, the system behaves as an elastic sheet [7,8], for which the orthoradial wavenumber is 1. The comparison with the experimental data (Fig. 3) shows good agreement with no adjustable parameter. Thus the viscous sheet adopts a conical shape similar to a conical singularity in an elastic sheet.

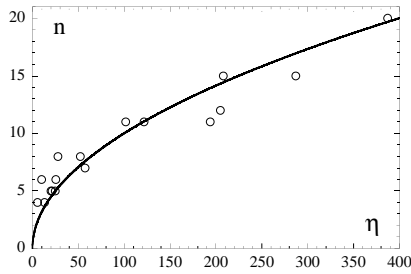


FIG. 3. The orthoradial wavenumber of the periodic pattern as a function of the non dimensional parameter $\eta = (\rho g R^4)/(\mu h^2 v \ln(R/h))$ (Eq. 2) which compares gravitational and bending energy. The circles are experimental points and the continuous line corresponds to $n = \sqrt{\eta}$ (Eq. 3).

-
- [1] J. Amirbayat and J.W.S. Hearle, *J. Text. Inst.*, **80**, 51 (1989).
 - [2] L. Landau and E. Lifchitz, *Théorie de l'élasticité* (Mir, Moscow, 1967).
 - [3] A. Lobkovsky, S. Gentges, H. Li, D. Morse and T.A. Witten, *Science*, **270**, 1482 (1995).
 - [4] M. Ben Amar and Y. Pomeau, *Proc. R. Soc. London*, **A 453**, 729 (1996).
 - [5] S. Chaieb, F. Melo, J.-F. Gémard, *Phys. Rev. Lett.* **80** 2354 (1998).
 - [6] E. Cerda and L. Mahadevan, *Phys. Rev. Lett.* **80** 2358 (1998).
 - [7] E. Cerda, S. Chaieb, F. Melo and L. Mahadevan, *Nature* **401**, 46 (1999).
 - [8] S. Chaieb and F. Melo, *Phys. Rev. E* **60**, 6091 (1999).
 - [9] G. I. Taylor, in *Proceedings of the 12th International Congress of Applied Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1969), p. 382.
 - [10] J. D. Buckmaster, *J. Fluid Mech.* **61**, 1 (1973).
 - [11] J. D. Buckmaster, A. Nachman, L. Ting, *J. Fluid Mech.* **69**, 1 (1975).
 - [12] L. Mahadevan, S. Ryu, A. D. T. Samuel, *Nature* **392**, 140 (1998).
 - [13] A. L. Yarin and B. M. Tchavdarov, *J. Fluid Mech.* **307**, 85 (1996).
 - [14] M. Skorobogatiy and L. Mahadevan, *52*, 532 (2000).
 - [15] S. M. Suleiman and B. R. Munson, *Phys Fluids*, **24**, 1 (1981).
 - [16] T. B. Benjamin and T. Mullin, *J. Fluid Mech.* **195**, 523 (1988).
 - [17] G. Debrégeas, P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, *Science* **279**, 1704 (1998).
 - [18] R. da Silveira, S. Chaieb and L. Mahadevan, *Science* **287**, 1468 (2000).
 - [19] A. Boudaoud, P. Patricio, Y. Couder, M. Ben Amar, *Nature* **407**, 718-720 (2000).
 - [20] The incompressibility amounts to a Poisson ratio $\nu = 1/2$.
 - [21] The authors are grateful to H. Aref, Y. Couder and S. Rica for fruitful discussions. A.B. Thanks the department of Theoretical and Applied Mechanics of the University of Illinois at Urbana-Champaign for hospitality and support.

Annexe C

Publication C

BOUDAUD, A., PATRÍCIO, P., ET BEN AMAR, M.
The helicoid versus the catenoid : Geometrically induced bifurcations.
Phys. Rev. Lett. 83 (1999), 3836.

Cette publication expose les résultats du chapitre 6.

The Helicoid versus the Catenoid: Geometrically Induced Bifurcations

Arezki Boudaoud,¹ Pedro Patrício,² and Martine Ben Amar¹

¹CNRS-Laboratoire de Physique Statistique de l'ENS, 24, rue Lhomond, F-75231 Paris Cedex 05, France

²Centro de Física da Matéria Condensada, Universidade de Lisboa, Avenida Professor Gama Pinto 2, 1649-003 Lisboa Codex, Portugal

(Received 21 June 1999)

The minimal surfaces bounded by a frame formed of a double helix and two horizontal rods are studied. The vibration equation shows that the helicoid is the stable surface when its winding number is small. The catenoid is locally isometric to the helicoid so that their vibration spectra are strongly related. While the catenoid is known to undergo a discontinuous transition to two disks, the helicoid is shown to become unstable through a continuous transition to a ribbon-shaped surface obtained experimentally, numerically, and analytically in the limit of infinite height. The normal forms of the bifurcations confirm the analysis.

PACS numbers: 61.30.-v, 02.40.-k, 47.20.Ky, 68.10.Cr

Minimal surfaces are found in many fields of physics which range from soap films [1], lipid-water solutions [2,3], diblock copolymers [4], crystallography [5,6], protein structures [6,7], to smectic-A [8], smectic-Q [9], or blue phases [10]. These studies are often morphological and most of the time are not concerned with the stability of the surfaces, although morphological transitions can result from the lack of stability. The helicoid and the catenoid are conjugate minimal surfaces through the Bonnet transformation. They are found in protein structures [6,7]: the β -sheets may lie on a catenoid or a helicoid depending on the protein conformation. The helicoid appears in macromolecules such as DNA or in screw dislocations of smectic A [8]. The catenoid, which has been widely investigated, is the minimal surface bounded by two coaxial rings. When the distance between the rings is increased, the catenoid disappears and is replaced by two disks [11] through a discontinuous transition. Recently, its vibration spectrum has been experimentally studied with smectic films in [12] and it has been shown to be strongly related to the helicoid vibration spectrum [13]. A natural question comes about the transitions that the helicoid might undergo when varying its dimensions.

In this Letter, we study the minimal surfaces lying on a frame consisting of a double helix of vertical axis, $\mathbf{r}_{\pm}(s) = [\pm r \cos \phi, \pm r \sin \phi, p/(2\pi)\phi]$, $\phi \in (0, \phi_0)$, and two horizontal rods $\mathbf{r}(t) = (rt, 0, 0)$, $t \in (-1, 1)$ and $\mathbf{r}(t) = [rt \cos \phi_0, rt \sin \phi_0, p/(2\pi)\phi_0]$, $t \in (-1, 1)$ (see Fig. 1). When varying the frame, a continuous transition to a ribbon-shaped surface occurs, contrary to the catenoid case. As pointed out in [14], continuous families of minimal surfaces are useful for complete morphological studies. However, when a bounding frame is considered, it is difficult to find such families. In fact, the plateau problem (finding the minimal surfaces bounded by a given frame) is mathematically intractable in general.

Let us first derive the vibration equation of a minimal surface, and introduce some useful notation (see [15]). To define a surface without ambiguity, one needs to know

two tensors called the fundamental tensors I and II:

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_{,\alpha} \mathbf{r}_{,\beta} \quad \text{and} \quad d_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_{,\alpha\beta} \mathbf{N}, \quad (1)$$

\mathbf{N} being the normal of the surface at a point \mathbf{r} . Roughly speaking, $a_{\alpha\beta}$ gives the direction of the two tangents, while the second tensor is related to their derivatives with respect to the chosen coordinates α and β . If fluctuations of the surface occur (spontaneous ones or forced exterior ones), each point is displaced as follows:

$$\mathbf{r}'(u, v, t) = \mathbf{r}(u, v) + w(u, v, t)\mathbf{N}(u, v). \quad (2)$$

We ignore the tangential displacement, which means simply a reparametrization of the surface without consequence for the balance of energy. The perturbed area of the surface element $dS = [\det(a_{\alpha\beta})]^{1/2} du dv$ is then changed into (see [16])

$$dS' = \left(1 + Kw^2 + \frac{1}{2} D^\alpha w D_\alpha w - Kw(d^{-1})^{\alpha\beta} D_\alpha w D_\beta w - Kw^2 D^\alpha w D_\alpha w - \frac{1}{8} (D^\alpha w D_\alpha w)^2 \right) dS. \quad (3)$$

In our case, since the surface is minimal, the mean curvature H vanishes, so that there is no linear term in

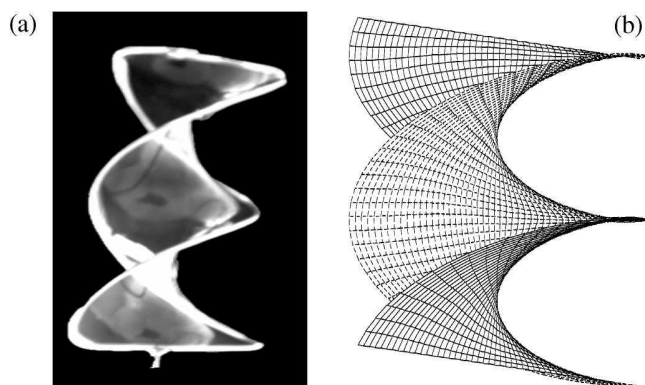


FIG. 1. Experimental and numerical helicoid for an aspect ratio $H/D = 2$ and a winding number $\phi_0/\pi = 2$.

Eq. (3), while the Gaussian curvature K remains negative everywhere ($K = 0$ in the planar case). For the vibration equation, the second order is enough but one needs to keep the fourth order terms for the bifurcation analysis. The capillary energy E_{cap} is written as

$$E_{\text{cap}} = \gamma \int dS', \quad (4)$$

where γ is the surface tension, while the kinetic energy E_{kin} is simply

$$E_{\text{kin}} = \frac{\rho h}{2} \int (\partial_t w)^2 dS, \quad (5)$$

with ρ the mass density and h the thickness of the film.

With a forced harmonic excitation in $\cos \varpi t$, one gets the eigenvalue vibration equation for an arbitrary minimal surface

$$\left(D^\alpha D_\alpha - 2K + \frac{\rho h}{\gamma} \varpi^2 \right) w = 0, \quad (6)$$

with the condition that w must vanish on the frame which supports the membrane. This two-dimensional Schrödinger-like equation depends only on the metric of the surface (so on the first tensor) as the curvilinear Laplacian and the Gaussian curvature do. So if two minimal surfaces have the same metric (and differ only by the second fundamental tensor), their eigenvalue spectra are related if they rest on “similar contours.” In fact, the Weierstrass construction gives an infinite set of minimal but also isometric surfaces (each of them being parametrized by a complex number $\exp i\tau$), from two analytical functions of $\omega = \theta + i\phi$. So from now on, we choose as coordinates α and β the conformal coordinates θ and ϕ . One of the most famous families is probably the helto-cat family which includes as particular cases both the catenoid and the helicoid. In a previous paper [13], we have studied the isospectrality of these surfaces but now we focus on the stability analysis.

The surface is unstable if $\varpi^2 < 0$. The threshold of instability of an arbitrary minimal surface is then given by the existence of a solution to Eq. (6) with $\varpi = 0$ and the condition that w must vanish on the frame. A quick analysis of Eq. (6) with $\varpi = 0$ suggests that the helicoid threshold is simply deduced from the well-known catenoid threshold. But, of course, this provides no information on the final shape above the bifurcation threshold and on the nature of the transition, which is subcritical for the catenoid.

As a consequence, other physical effects than capillarity can intervene at the transition such as hydrodynamics which lead to a finite-time singularity [11]. Our objective here is more modest as we take into account only capillarity. Since the helicoid is a surface which occurs in a wide range of physics going from soft matter physics up to macromolecules in biology, we think it important to understand also its destabilization properties as we increase its height at constant radius. Structural transformations experienced by macromolecules might be explained simply by stability arguments.

In conformal coordinates, the representation of the helto-cat family is

$$\mathbf{r}_\tau(\phi, \theta) = A(\cos \tau \cos \phi \cosh \theta + \sin \tau \sin \phi \sinh \theta, \quad \cos \tau \sin \phi \cosh \theta - \sin \tau \cos \phi \sinh \theta, \quad \theta \cos \tau + \phi \sin \tau), \quad (7)$$

where A is some length. By definition, all these surfaces which include as a particular case the catenoid for $\tau = 0$ and the helicoid for $\tau = \pi/2$ have the same metric and the same Gaussian curvature. Moreover, in this case, these quantities depend only on the θ variable which is, of course, a rather exceptional simplifying property for a minimal surface. Note that ϕ varies between 0 and 2π for a complete catenoid but can vary between 0 and ϕ_0 for the helicoid. As for θ , we choose $-\theta_0 < \theta < +\theta_0$. Finally, after a Fourier decomposition in ϕ , Eq. (6) reduces to the following one-dimensional equation

$$w'' + \frac{2}{\cosh^2 \theta} w = \lambda^2 w. \quad (8)$$

For the catenoid, since we have periodic boundary conditions, $\lambda = 0, 1, 2, \dots$. But for the helicoid, $\lambda = n\pi/\phi_0$ with $n = 1, 2, 3, \dots$

In the catenoid case with $\lambda = 0$, an analytical solution for $w = W(\theta \tanh \theta - 1)$ gives the threshold of stability $\theta_c = 1.199$ [solution of $w(\theta_c) = 0$]. So if H is the distance between the two rings of diameter D which support the catenoid, the catenoid shape disappears when the ratio H/D is larger than $(H/D)_c = 0.662$. Above this critical value, two disconnected disks are observed and the bifurcation is subcritical [11].

We now turn our attention to the helicoid surface. Equation (6) is no more than the Schrödinger equation with the attractive potential hole of modified Pöschl-Teller type [17]. The even solution, giving the lowest bound state, is found in terms of hypergeometric functions,

$$w_e(\theta) = W \cosh^2 \theta F\left(\frac{2-\lambda}{2}, \frac{2+\lambda}{2}, \frac{1}{2}, -\sinh^2 \theta\right). \quad (9)$$

Not surprisingly, the marginal stability is obtained for a critical θ_0 larger than 1.199. For large θ_0 an asymptotic analysis of Eq. (9) gives $\lambda = 1$. For intermediate values of θ_0 , one can refer to Fig. 2 for the aspect ratio: H/D as a function of the twist angle ϕ_0/π . The domain of existence of the helicoid follows simply. Consider a helicoid of height $H = A\phi_0$ and diameter $D = 2A \sinh \theta_0$ both fixed. When increasing the twist angle ϕ_0 , the helicoid becomes unstable.

Remaining at a demonstrative and qualitative level, we have observed this instability experimentally. Using iron threads we constructed a frame with two symmetrical helices with the same vertical axis and closed at both ends by horizontal rods. We used a soap solution to generate a film standing on the frame. When the twist angle is increased, an instability occurs with the destruction of

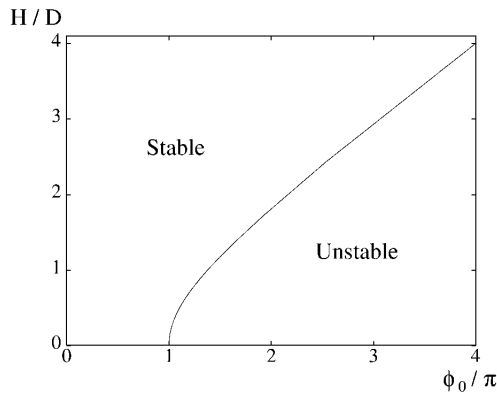


FIG. 2. Phase diagram of the helicoid.

the helicoid and the appearance of a new surface (of ribbon type) which lies on the helices (see Fig. 3). Each time, there are two possible symmetric ribbons. If we consider the DNA bases to be on a surface, the A-DNA

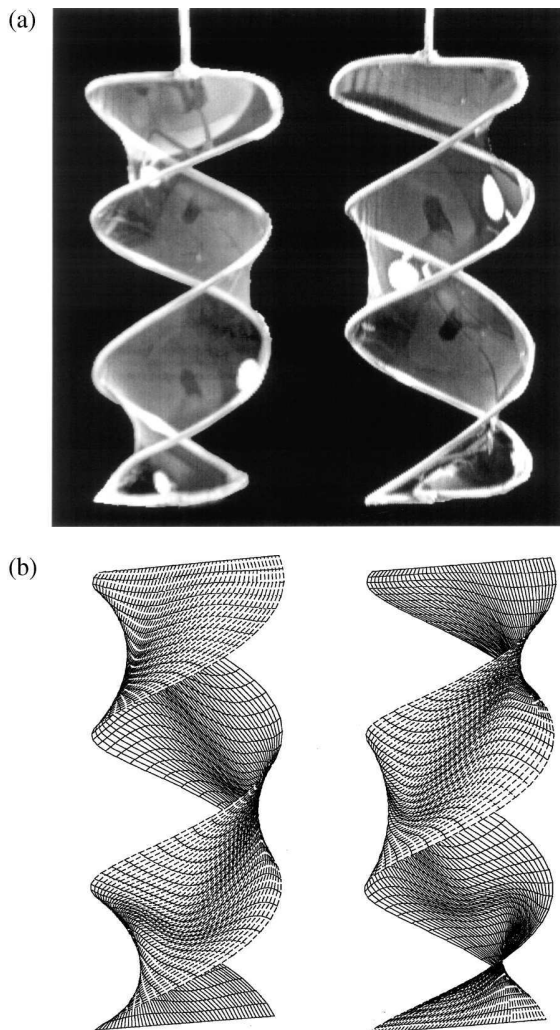


FIG. 3. The two ribbon surfaces for an aspect ratio $H/D = 2$ and a winding number $\phi_0/\pi = 3$.

[18] and the P-DNA [19] are morphologically similar to the ribbon surface. This simple model based on minimal surfaces roughly predicts the geometrical aspect ratios of DNA molecules and their topological changes [20]. When doing the experiment, we observe that the process is reversible: the bifurcation is supercritical. Decreasing the twist angle, the initial helicoid is restored.

We do not succeed to find explicitly the ribbon shape (bifurcated shape) by the Weierstrass construction, because of the difficulty coming from the boundary conditions at the horizontal rods. So, we use a finite-element minimization [21] of the capillary energy given the boundary conditions (the two helices and the two horizontal rods). In the domain predicted by the linear stability, the helicoid is found as expected. Outside this domain, the two ribbon surfaces are the stable minimal surfaces (Fig. 3). Note that the vertical axis lies within the helicoid while it remains outside the bifurcated surfaces. So the inner diameter d can be chosen as the order parameter for the bifurcation ($d = 0$ for the helicoid), while the control parameter can be θ , ϕ or some aspect ratio. Near the marginal stability curve, and as expected for a supercritical bifurcation, d follows the scaling $d \sim \sqrt{\lambda - \lambda_c}$ if λ is the control parameter.

This analysis can be confirmed by including the non-linear contributions derived from Eq. (3). For clarity, we consider only the catenoid or the helicoid with $\phi_0 = \infty$, so that the most unstable mode depends on one variable θ . We compute the capillary and the kinetic energy of $w(\theta, t) = W(t)(\theta \tanh\theta - 1)$ in the vicinity of the onset of instability:

$$E_{\text{cap}} = \gamma \left(a(\theta_c - \theta_0)W^2 - g \frac{b}{A^2} W^3 + \frac{c}{A^2} W^4 \right), \quad (10)$$

$$E_{\text{kin}} = \rho h d A^2 (\partial_t W)^2. \quad (11)$$

Here a, b, c, d are positive constants. The coefficient of the second tensor $g = d_{\phi\phi} = A \cos(\tau)$ is different for the catenoid ($g = A$) and the helicoid ($g = 0$). For the catenoid, the control parameter is given by the height over diameter ratio $\delta = (H/D)_c - H/D \sim (\theta_0 - \theta_c)^2$. After a proper rescaling of the time t and amplitude W , we derive the following amplitude equation for the catenoid: $\partial_{tt} W = 2\sqrt{\delta} W - W^2$. By the change of function, $W = \sqrt{\delta} + Z$, the amplitude equation becomes

$$\partial_{tt} Z = \delta - Z^2, \quad (12)$$

which demonstrates that the catenoid undergoes a Hamiltonian saddle-node bifurcation. Remember that if $H/D < (H/D)_c = 0.662$, there are two possible catenoids bounded by two coaxial rings of diameter D and distant by H . One is stable and the other is unstable. The control parameter for the infinite height helicoid is given by the diameter over pitch ratio $\epsilon = D/2\pi A - (D/2\pi A)_c = (\sinh\theta_0 - \sinh\theta_c)/\pi \sim \theta_0 - \theta_c$. With the rescaling, the equation for the helicoid becomes

$$\partial_{tt} W = \epsilon W - W^3. \quad (13)$$

So the helicoid undergoes a pitchfork bifurcation. While the first tensor is responsible for the stability threshold, the second tensor is responsible for the nature of the bifurcation. In fact, the complete helicoid separates the space into two parts symmetrical with respect to the helicoid axis, so that we expect a symmetrical bifurcation. For the catenoid the two parts of space are different.

If the height of the double helix is infinite, it turns out that a simple analytical form of this new ribbon-like minimal surface can be found among the helicat family itself. Let us consider an arbitrary member of this family Σ_τ given by Eq. (7) with B replacing A . At fixed θ , $\mathbf{r}_\tau(\phi)$ is a helix which lies on Σ_τ . Its radius is $B\sqrt{\cos^2\tau \cosh^2\theta + \sin^2\tau \sinh^2\theta}$ and its pitch is $p = 2\pi \sin\tau B$. We want to find on Σ_τ two helices of radius $r = A \sinh\theta_0$, of pitch $2\pi A$, and symmetrical with respect to the z axis, so that the frame is the helicoid frame. The second condition gives $A = B \sin\tau$, while the first and third conditions give the τ value once θ_0 is known:

$$\tan\left(\frac{\nu}{\tan\tau}\right) \tan\tau \tanh\nu = 1, \quad (14)$$

$$\text{with } \sinh^2\nu = \sin^2\tau \sinh^2\theta_0 - \cos^2\tau. \quad (15)$$

Note that $\theta_0 \sim 1.199 = \theta_c$ when $\tau \sim \pi/2$, and so the surface appears continuously when the helicoid becomes unstable. Also, $\theta_0 \rightarrow \infty$ when $\tau \rightarrow 0$. As given by Eq. (8), this surface is found to be always stable. But there may be many minimal surfaces bounded by a given frame. Comparison with numerical results is necessary, and shows that the surface we have found is the selected one: the numerical and theoretical surfaces differ only in the region where the vertical distance to the horizontal rods is smaller than the pitch. This difference comes from boundary effects at the rods.

In conclusion, we have shown that the helicoid undergoes a supercritical transition to a ribbon-shaped surface. This minimal surface might be used to construct a new type of dislocations, as screw dislocations are constructed from helicoids [8].

We thank Yves Couder, Thomas Garel, and Stéphan Fauve for fruitful discussions.

[1] J. A. F. Plateau, *Statique Expérimentale et Théorique des Liquides Soumis aux Seules Forces Moléculaires* (Clemm, Paris, 1873).

[2] V. Luzzati, T. Gulik-Krzywicki, and A. Tardieu, *Nature* (London) **218**, 1031 (1968); V. Luzzati, A. Tardieu,

and T. Gulik-Krzywicki, *Nature* (London) **217**, 1028 (1968).

[3] A. L. Mackay, *Nature* (London) **314**, 604 (1985); H. Terrones, *J. Phys. (Paris), Colloq.* **51**, C7-345 (1990); S. T. Hyde, S. Andersson, B. Ericsson, and K. Larsson, *Z. Kristallogr.* **168**, 213 (1984).

[4] D. A. Hajduk, P. E. Harper, S. M. Gruner, C. C. Honeker, G. Kim, E. L. Thomas, and L. J. Fetters, *Macromolecules* **27**, 4063 (1994); M. F. Schulz, F. S. Bates, K. Almdal, and K. Mortensen, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 86 (1994).

[5] S. T. Hyde and S. Andersson, *Z. Kristallogr.* **174**, 225 (1986).

[6] S. T. Hyde, S. Andersson, K. Larsson, Z. Blum, T. Landh, S. Lidin, and B. W. Ninham, *The Language of Shape* (Elsevier, Amsterdam, 1997).

[7] Z. Blum, S. Lidin, and S. Andersson, *Angew. Chem., Int. Ed. Engl.* **27**, 953 (1988).

[8] R. D. Kamien and T. C. Lubensky, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2892 (1999).

[9] A.-M. Levelut, E. Hallouin, D. Bennemann, G. Heppke, and D. Ltzsch, *J. Phys. II (France)* **7**, 981 (1997).

[10] B. Pansu and E. Dubois-Violette, *Europhys. Lett.* **10**, 43 (1989).

[11] A. Cryer and P. H. Steen, *J. Colloid Interface Sci.* **154**, 276 (1992); Y. J. Chen and P. H. Steen, *J. Fluid Mech.* **341**, 245 (1997).

[12] M. Ben Amar, P. Patrício, N. Limodin, A. Langlois, M. Brazovskaia, C. Even, I. V. Chikina, and P. Pieranski, *Eur. Phys. J. B* **3**, 197 (1998).

[13] M. Ben Amar and P. Patrício, *Philos. Mag. B* **78**, 115 (1998); M. Ben Amar and P. Patrício, *Proc. R. Soc. London A* **454**, 2757 (1998).

[14] A. Fogden and S. T. Hyde, *Eur. Phys. J. B* **7**, 91 (1999).

[15] D. J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry* (Dover Publications, New York, 1961).

[16] J. C. C. Nitsche, *Lectures on Minimal Surfaces* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989), Vol. I.

[17] S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, Berlin, 1974).

[18] C. Branden and J. Tooze, *Introduction to Protein Structure* (Garland Publishing Inc., New York, 1991).

[19] T. Strick, J.-F. Allemand, D. Bensimon, R. Lavery, and V. Croquette, *Physica (Amsterdam)* **263A**, 392 (1999).

[20] The aspect ratios of A -DNA, P -DNA (ribbon-shaped), and normal B -DNA (helicoid-shaped) are of order $H/D \cdot \pi/\phi_0 \sim 1$, which correspond to the geometrical limit of stability of the helicoid. The transition between the helicoid and the ribbon-shaped surface being continuous preserves the bonds between molecules. However, the physics of DNA is more complicated than just a minimal surface.

[21] This variational minimization is adapted from P. Patrício and W. Krauth, *Int. J. Mod. Phys. C* **8**, 427 (1997).

Annexe D

Publication D

BOUDAUD, A., COUDER, Y., ET BEN AMAR, M.
A self-adaptative oscillator.
Eur. Phys. J. B 9 (1999), 159–165.

Cette publication expose les résultats du chapitre 7.

A self-adaptative oscillator

A. Boudaoud^a, Y. Couder, and M. Ben Amar

Laboratoire de Physique Statistique, École Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France

Received 15 October 1998

Abstract. The dynamics of a system where a mass is free to slide on a vibrating string is investigated as the excitation frequency is varied. One degree of freedom is thus added to the system studied by Helmholtz in which a mass was fixed on a vibrating string. This new system exhibits a specific dynamics characterized by the existence of a self-adaptative behaviour. When the driving frequency falls into wide and well defined frequency bands, a long transient is observed by which the mass adjusts its position so that the whole system becomes resonant. In the gaps between these bands, bifurcations give other equilibrium positions. A theoretical model is proposed. It accounts for all the experimental results. In the case where two masses are present on the string, two degrees of freedom are added and the set of equilibrium positions would be expected to be infinite. However, in the experiment, the two masses are observed to go to positions where they are symmetrical with respect to the middle of the string. A selection mechanism due to the string stretching is pointed out.

PACS. 47.20.Ky Nonlinearity (including bifurcation theory) – 68.45.Kg Dynamics; vibrations

1 Introduction

Vibrating strings have been widely investigated during the nineteenth century. Several problems in this domain were more difficult than it might seem now that it has become a topic for textbooks. For instance, there was a strong debate between Euler, d'Alembert and Lagrange [1] on the possibility of a slope discontinuity for a plucked string. Lagrange [1] also examined the non-harmonic vibrations of a string with a variable density. Helmholtz [2] wanted to determine the lower frequencies that a human being can hear. For this purpose, he studied the basic frequencies of a string loaded with one fixed point-like mass. Helmholtz calculations give the eigenfrequencies of the system as a function of the mass position along the string. It was pointed out recently by Brazovskaia and Pieranski [3] that this problem is equivalent to a quantum billiard with a pointlike scatterer. However, these studies were only concerned with the eigenmodes of the perturbed system. The present letter is devoted to the study of a string loaded with point-like masses which are free to slide. We will show that this system, when forced by an external frequency belonging to large frequency bands, self-adapts to remain resonant.

The self adaptation of a vibrating system to a forcing frequency was previously found in two systems. In an unpublished work [4], Airiau, Couder and Rabaud observed that when a thick soap film is forced into vibration by a loudspeaker, the film retains a large amplitude of oscillation in very wide ranges of frequency. A characteris-

tic of soap films is that their thickness can vary spatially and that the film is liquid. When forced into vibration, the fluid flows in such a way that in the steady regime the mass is very unevenly distributed. With an elongated rectangular frame, at a frequency corresponding to the n th eigenmode, most of the film mass is concentrated in the n antinodes. When the frequency is increased the mass distribution changes continuously so that the vibration amplitude remains large. Eventually, the mass in each antinode splits and the film is reorganized so as to have mass concentrated in the $n + 1$ antinodes of the next mode. Independently, Brazovskaia *et al.* [5] performed experiments with square smectic films of uneven thickness. They found that the film thickens at the vibration antinode. A peninsula consisting of many layers of smectic appears at the antinode and its shape adapts to the forcing. However, smectic films of constant thickness are also easily obtained; in this latter case, they are perfect membranes with eigenfrequencies following the Rayleigh law [6]. Brazovskaia and Pieranski [3] also observed a self-tuning property: when a smectic film is loaded with a small bead, it adjusts its position with the forcing frequency. The aim of the present work is to find this type of nonlinear behaviour in a model system, such that both the experiment and the theory can be extensively tractable.

2 The experimental setup

The experimental apparatus is very simple: we thread one or two beads on a string and force the oscillation of the system magnetically. The qualities of music instruments led us to use a piano string made of 0.5 mm diameter

^a e-mail: boudaoud@lps.ens.fr

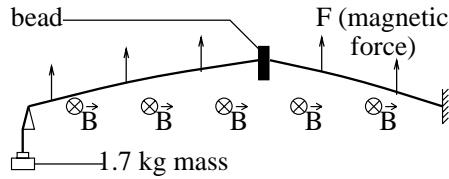


Fig. 1. Scheme of the experimental apparatus. A piano string fixed at one end is tightened horizontally with a mass at the other end. The magnetic field is generated by two U-shaped magnets and two iron plates. An alternating current passes through the string.

steel with a mass per unit length $\lambda = 1.53$ g/m. The useful string length was chosen to be $L = 30$ cm. With a smaller length, the bead position is not measured precisely enough, while with a larger length, it is difficult to obtain a homogeneous magnetic field for the forcing. The total string mass is $\lambda L = 0.46$ g. The string is held horizontally and tightened with a mass giving a tension $T = 17$ N (Fig. 1).

The beads are small disks of masses $m = 0.21$ g, 0.73 g and 1.82 g. They are pierced by holes of 0.55 mm diameter, slightly larger than the string diameter. Once threaded on the string, the bead can thus have a small amplitude bouncing motion. This suppresses the possibility of a solid friction which could block the motion. Provided the amplitude of the bouncing remains very small compared with that of the oscillation, it does not introduce any artefact into the experiment. The results are identical to those obtained when the bead slides on the string with a pure viscous friction [7]. When the hole was drilled through the center of the disk, the bead spun and there was a coupling between vibration and rotation. To prevent the spinning, the hole was drilled off-centered so that the disk forms a little pendulum. The hole position and the disk size were chosen so that the bead oscillation frequencies would be very large compared to the imposed frequencies. We thus avoid any coupling between the disk's oscillations and the string's vibration.

In order to have a spatially homogeneous system, we chose a magnetic forcing where the force exerted on the wire is the same everywhere. An alternating current (1 to 10 A) of tunable frequency passes through the string. This string is located between the poles of two identical U shaped permanent magnets generating a horizontal magnetic field. Since we wish this magnetic field to be spatially constant, two long and thick iron plates are interposed, parallel to each other and located between the poles and the wire. Since iron channels the magnetic flux, the field which is directed from one plate to the other (Fig. 1) is thus spread out and approximately constant along all the length of the wire ($B \sim 0.1$ T). The magnetic force is vertical and can go up to 1 N/m. The excitation was not perfect, the magnetic field still had slight variations along the string. For reasons discussed below, we also used a configuration where the magnetic field has its sign reversed at the middle of the string. The driving amplitude or

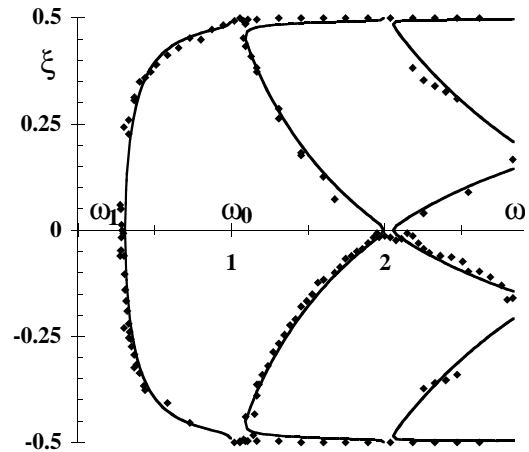


Fig. 2. The nondimensional steady positions of the bead as a function of the forcing frequency (the unit of frequencies being the fundamental frequency ω_0 of the unloaded string). The diamonds result from an experiment done with a bead of mass $m = 1.82$ g. The different steady positions at a given frequency were measured in independent realizations. The curves are the predicted positions of equilibrium (solutions of Eq. (12)) for the corresponding mass ratio $\mu = 4$.

frequency are easily adjusted with a function generator and measured with a frequency counter and an oscilloscope.

3 Experimental results

We first investigated the resonances of the string alone. Its fundamental frequency is $\omega_0 = 126$ Hz. We measured the amplitude of vibration as a function of the frequency. A ruler gives a precision of 0.5 mm on the amplitude. The resonance width is of the order of $\gamma \approx 5$ Hz, so damping is small. There is hysteresis in the response curve, as for a 1D nonlinear oscillator. Thus, the amplitude of vibration is imposed by the nonlinearities and the damping may be neglected.

3.1 With a single bead

A single bead is now placed on the string. We first describe the results obtained with a bead of mass $m = 1.82$ g, heavier than the string ($\mu = m/\lambda L = 4.0$). The bead is first placed arbitrarily on the string and the system is forced at a frequency ω . For most frequencies, when the forcing is switched on, a slow evolution is observed where the mass slides along the wire and the oscillations change. Ultimately a steady regime is reached. We then measure the bead position ξ . It is obtained with a precision of 1 mm, *i.e.* $1/300$ of the string length, while the precision on frequency is 0.1 Hz, *i.e.* less than $1/1000$ of the basic frequency. We then repeat the same operation varying the forcing frequency step by step so as to obtain the evolution of ξ as a function of ω . The experimental results are shown in Figure 2 on which, for the sake of comparison with

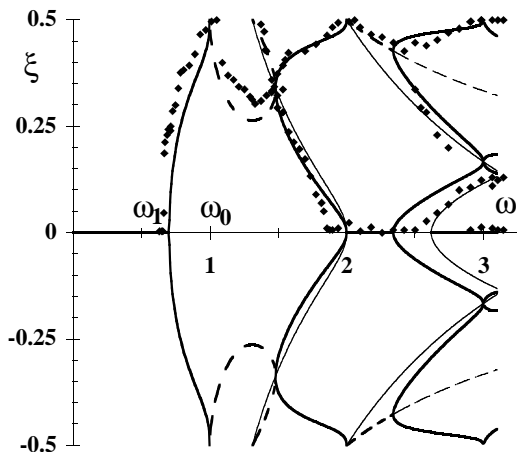


Fig. 3. The same diagram as Figure 2 obtained for a light bead ($m = 0.21$ g and $\mu = 0.46$). The diamonds correspond to the observed equilibrium positions of the bead. The thick continuous lines are the resonance positions (Eq. (12)); the thick dashed lines are the non resonant positions given by equation (14); the thick interrupted lines are the non resonant positions given by equation (15). The three are the predicted stable steady positions. The thin continuous lines correspond to the bead at a vibration node; the thin interrupted lines are given by equation (15). Both represent the unstable steady positions of the bead.

theory, the frequencies are normalized, the fundamental frequency ω_0 of the string being chosen as unity.

At very low frequency, below any resonance of the system, there is hardly any vibration (amplitude far smaller than 0.5 mm) and the bead has no preferential position. When the frequency approaches a frequency $\omega_1 = 38$ Hz ($\omega_1 < \omega_0 = 126$ Hz) the bead is observed to move spontaneously along the wire. This motion has a time scale of 100 s. It is much larger than the vibration time scale which is 0.01 s. Ultimately the bead reaches the middle of the string where it stops sliding. At $\omega = \omega_1 = 38$ Hz the vibration amplitude has become large (3 mm) and the bead is located at an antinode. Using Helmholtz's results it is possible to compute the frequency of the fundamental mode of the string loaded with the same bead fixed at the center. The resulting value is precisely ω_1 . This means that the bead has spontaneously moved so as to make the system resonant.

With a fixed bead an increase of the frequency would detune the system. Instead, in the present situation, the bead is observed to leave the center, moving either left or right to a new and well defined position where the vibration amplitude of the whole system remains large. This is a symmetry breaking process: the evolution of ξ as a function of ω in the vicinity of the threshold ω_1 shows this transition to be a supercritical transition. When ω comes close to $\omega_0 = 126$ Hz, the position of the bead is near one of the extremities of the string. The amplitude of the string vibration is still large (3 mm) but the bead is no longer at an antinode, so that its own motion has a small amplitude (0.5 mm). With a further increase of the frequency, the bead reaches an extremity of the string and

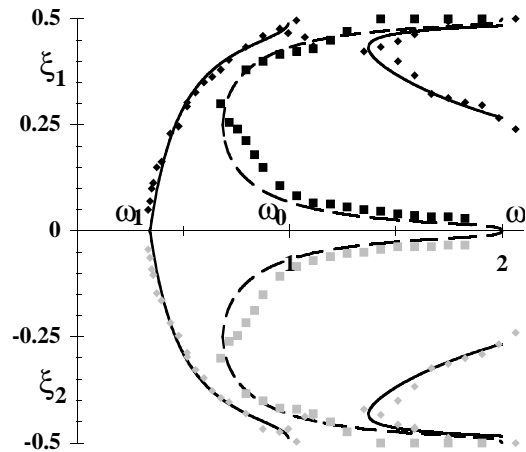


Fig. 4. The same diagram as above for the system with two beads. Here the diamonds correspond to the simultaneous positions of the two beads with the homogeneous forcing: one bead (grey symbols) is on the right half of the string, the other (black symbols) is on the left half. The squares were obtained with an antisymmetric excitation of the system. The continuous curves are the predicted resonance equilibrium positions with homogeneous magnetic field given by equation (18). The dashed curves are the predicted resonance equilibrium positions with antisymmetrical magnetic field given by equation (19).

is then at an antinode. The string now vibrates as if there were no bead, with a very large amplitude (5 mm), because this occurs precisely at $\omega_0 = 126$ Hz, the frequency of the fundamental mode of the string alone. Once again the system has adapted to be resonant.

Above ω_0 , a second bifurcation occurs. As a result, when $2\omega_0$ is reached either the bead has returned to the center, or again to one extremity (Fig. 2).

The same experiment done with a bead lighter than the string ($m = 0.21$ g so that $\mu = m/\lambda L = 0.46$, Fig. 3) exhibits mostly the same characteristics. The main difference is that $\omega_1 = 88$ Hz is larger so that the band of frequencies between ω_1 and ω_0 is narrower. The mass is observed to move a larger distance to compensate for a given shift in frequency. Immediately above $\omega_0 = 126$ Hz, there is a band of frequencies in which, though the bead goes to a well determined position, the system does not appear to be resonant (the vibration amplitudes remain small, of the order of 0.5 mm). For larger frequencies, large amplitudes of vibration are recovered and the equilibrium positions of the bead are similar to the case of the heavier bead.

3.2 With two beads

We use the same experimental apparatus but two identical beads are now threaded on the string. The results of such an experiment with each bead having a mass $m = 0.73$ g ($\mu = 1.6$) are shown in Figure 4. At low frequency, below any resonance, there is hardly any vibration and the beads take no preferential positions. At slightly higher frequencies, the beads move to the middle of the string and stick together. This occurs at the frequency $\omega_1 = 41$ Hz corresponding to one single bead of mass $2m$ (and $2\mu = 3.2$).

From there, if the frequency is increased, the beads move in such a way as to stay together and behave as one single bead. However, if the experiment is directly started above the frequency ω_1 , the following is observed. If the beads are placed on the same half of the string, they move in such a way as to stay together and behave as one single bead. If the beads are placed on different halves of the string, they move to symmetrical positions (Fig. 4). In this case, they will stay symmetrical for any further increase of the frequency.

In the latter case, each bead reaches an extremity of the string when the frequency reaches $\omega_0 = 126$ Hz. Then they return symmetrically to the center and a supercritical bifurcation occurs: the beads move towards the extremities or the center, remaining in symmetrical positions.

The two beads are not observed to move into the positions expected for the second eigenmode. The reasons, detailed in Section 4.2, lie in the symmetry of the forcing (see Morse [8]). In order to recover the even eigenmodes, we imposed a magnetic field which reverses its sign at the middle of the string. With this antisymmetrical forcing, the beads move to symmetrical positions corresponding to the second eigenmode (Fig. 4), but the odd eigenmodes are no longer excited. In the case of antisymmetrical forcing, the symmetrical positions exist only above a frequency $\omega_2 = 65$ Hz ($\omega_2 > \omega_1$) where a bifurcation occurs: when the frequency is increased, the beads move either towards the extremities or the center.

4 The model and the results

The string equation is the classical wave equation for the transverse displacement y

$$\lambda \partial_{tt} y = T \partial_{xx} y \quad (1)$$

where the x axis is chosen along the string at rest, the origin is at the center; λ is the string linear density and T the tension. The n th eigenmode is defined by its frequency $\omega_n = n(\pi/L)\sqrt{T/\lambda}$ and its shape $y = y_0 \sin(n\pi(x/L + 1/2)) \cos(\omega t + \varphi)$. Here L is the string length.

4.1 With a single bead

If a mass m is located on the string at $x = \xi$, taking into account a forcing $F \cos(\omega t)$ per unit length, equation (1) becomes

$$(\lambda + m\delta(x - \xi)) \partial_{tt} y = T \partial_{xx} y + F \cos(\omega t). \quad (2)$$

δ is the Dirac distribution and accounts for the punctual mass. If the bead position changes by $d\xi$, the kinetic energy theorem tells us that $Gd\xi = dK$, where G is the force acting on the bead, and K its kinetic energy. The equation of motion reads

$$m \partial_{tt} \xi = \partial_\xi K = \frac{1}{2} m \partial_\xi ((\partial_t \xi)^2 + (\partial_t \eta)^2). \quad (3)$$

Here $\eta = y(\xi, t)$ is the bead transverse position. Let us note that, of course, a Lagrangian derivation gives the same equations of motion.

We have neglected the gravity g , as $mg \sim 0.01$ N is much smaller than the tension $T = 17$ N. We neglect friction between the bead and the string, it does not change the equilibrium positions. It only contributes to stop the bead at these positions. Moreover, the basic frequency over resonance width ratio is $\omega_0/\gamma = 25$ so that damping is small. At first, we neglect nonlinearities in string vibration. This assumption will allow us to find the bead positions but not the vibration amplitudes.

We write equations (2, 3) in a non-dimensional form using as units the string length L , the fundamental frequency $\omega_0 = (\pi/L)\sqrt{T/\lambda}$ and the time scale $\tau = \pi/\omega_0$, therefore

$$(1 + \mu\delta(x - \xi)) \partial_{tt} y = \partial_{xx} y + f \cos(\pi\omega t), \quad (4)$$

$$\partial_{tt} \xi = \frac{1}{2} \partial_\xi ((\partial_t \xi)^2 + (\partial_t \eta)^2). \quad (5)$$

Here $\mu = m/(\lambda L)$ is the bead/string mass ratio and $f = FL/T$ the forcing. We have omitted the tildas for the new non-dimensional variables. ξ varies between $-1/2$ and $1/2$. We look for periodic solutions of the form $y = Y(x, \xi) \cos(\pi\omega t)$ and $\eta = \eta_0 \cos(\pi\omega t)$ (we drop the phase since there is no damping) so

$$-\pi^2 \omega^2 (1 + \mu\delta(x - \xi)) Y = \partial_{xx} Y + f. \quad (6)$$

When $f = 0$, equation (6) is a Schrödinger equation for a particle in a box with a short range potential, the so-called quantum billiard with a point-like scatterer [3]. Since ξ is only a function of time, $\partial_\xi (\partial_t \xi)^2 = 0$. Therefore, equation (5) averaged in time gives the slow dynamics of the bead steady position ξ :

$$\partial_{tt} \xi = \frac{\pi^2}{4} \omega^2 \partial_\xi \eta_0^2. \quad (7)$$

Thus, the dynamics is that of a bead moving in a potential $-\pi^2 \omega^2 \eta_0^2(\xi)/4$, and the behaviour of $(\eta_0(x))^2$ gives the equilibrium positions and their stability. We look for solutions of (6) of the form

$$Y(x, \xi) = \frac{f}{\pi^2 \omega^2} (\cos \pi\omega(x + 1/2) - 1 + A \sin \pi\omega(x + 1/2)) \quad \text{if } x < \xi,$$

$$Y(x, \xi) = \frac{f}{\pi^2 \omega^2} (\cos \pi\omega(x - 1/2) - 1 + B \sin \pi\omega(x - 1/2)) \quad \text{if } x > \xi, \quad (8)$$

fulfilling the boundary conditions $Y(-1/2) = Y(1/2) = 0$. A and B are determined by the conditions

$$Y(\xi^+, \xi) = Y(\xi^-, \xi), \quad (9)$$

$$-\pi^2 \omega^2 \mu Y(\xi, \xi) = \partial_x Y(\xi^+, \xi) - \partial_x Y(\xi^-, \xi), \quad (10)$$

the first condition imposes continuity at $x = \xi$, the second comes from integration of (6) between $\xi - \varepsilon$ and $\xi + \varepsilon$ in the limit $\varepsilon \rightarrow 0$. The discontinuity in the string slope (see Fig. 5) is due to the bead infinite inertia per unit length.

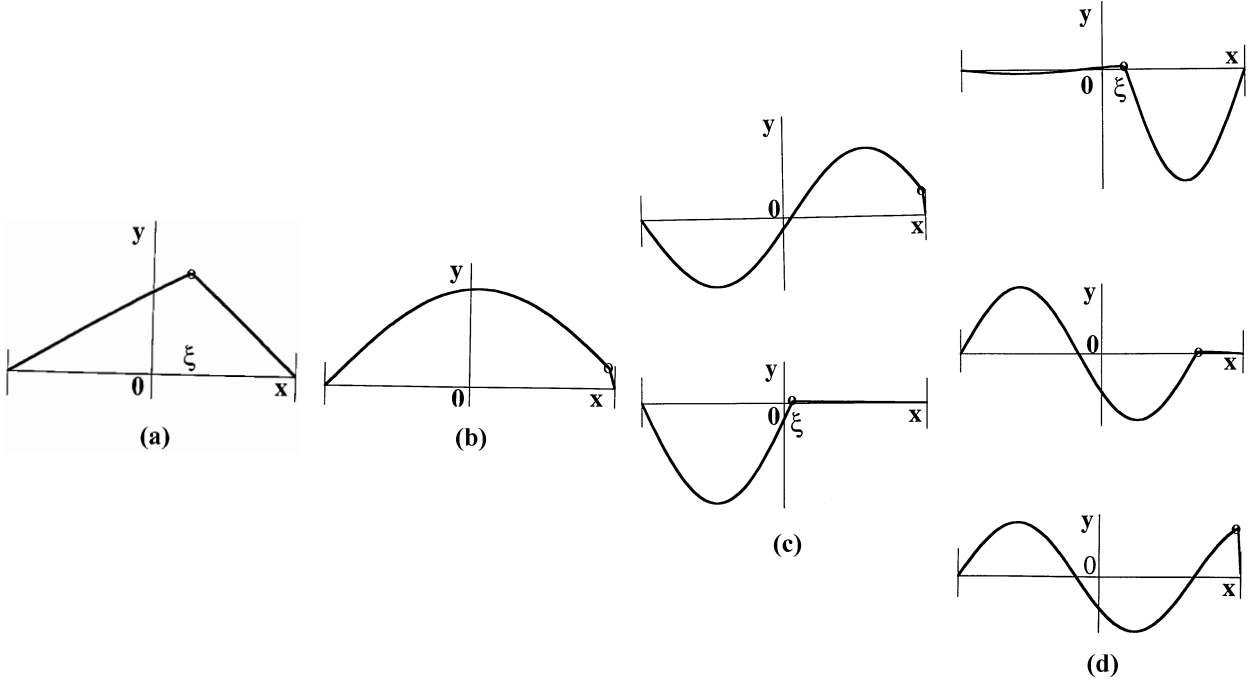


Fig. 5. The string shapes obtained theoretically for $\mu = 4.0$ at different values of the nondimensional frequencies ω . Note that the beads generate a slope discontinuity. The amplitude units are arbitrary and are magnified to show clearly the strings shapes. The experimental amplitudes are of the order of 5 mm, the string length being 30 cm. (a) At $\omega = 0.31$, the system is just above the first bifurcation and the bead is at the antinode. (b) At $\omega = 0.95$, there is one equilibrium position near a node. (c) The two possible solutions for $\omega = 1.9$. In both, the bead is near a node. (d) The three possible solutions at $\omega = 2.4$.

We compute A and B in equation (8) using the conditions (9, 10) to find the amplitude of vibration of the bead at ξ :

$$\begin{aligned} \eta_0(\xi) &= Y(\xi, \xi) \\ &= \frac{f}{\pi^2 \omega^2} \left(\frac{2 \sin(\pi\omega/2) \cos(\pi\omega\xi)}{\sin(\pi\omega) + \pi\omega\mu \cos^2(\pi\omega/2) - \pi\omega\mu \cos^2(\pi\omega\xi)} - 1 \right). \end{aligned} \quad (11)$$

One can easily determine the bead equilibrium positions and their stability. First, the positions where $\eta_0(\xi) = \pm\infty$ are given by

$$\sin(\pi\omega) + \pi\omega\mu \cos^2(\pi\omega/2) - \pi\omega\mu \cos^2(\pi\omega\xi) = 0. \quad (12)$$

These curves are plotted in Figures 2 and 3 for two different values of μ ($\mu = 4.0$ and $\mu = 0.46$).

We can now revisit the system with the bead fixed at a position ξ_f . For each position ξ_f , Helmholtz's calculations [2] give, with our notations, the eigenfrequencies ω_f , *i.e.* the frequencies at which the amplitudes deduced from the linear string equation (2) are infinite:

$$\sin(\pi\omega_f) = \pi\omega\mu \sin(\pi\omega_f(\xi_f + 1/2)) \sin(\pi\omega_f(\xi_f - 1/2)). \quad (13)$$

The resulting curves $\omega_f(\xi_f)$ are identical to the curves $\omega(\xi)$ given by equation (12). Thus, the slow dynamics of our system leads it to self-tuning at a resonance. This is observed experimentally: when the bead has reached its

steady position, the system as a whole has a maximum amplitude of vibration (limited in practice to about 3 mm because of the non-linearities). When the bead reduced mass is large ($\mu = 4$ in Fig. 2) the system is resonant at almost any imposed frequency. With a light bead ($\mu = 0.46$ in Fig. 3) the resonance spectrum shows bands separated by gaps with no possible resonance. When $\mu \rightarrow 0$, we recover the simple string with resonances only at $\omega = 1, 2, 3 \dots$

Equation (8) gives the shape of the string once A and B computed. For each frequency (in order of increasing values) we look for the possible positions of the bead for which the system is at resonance. The lowest possible frequency of the system ($\omega_1 = 0.3$ for $\mu = 4$) is found when the bead is at the center of the string, at the antinode of the fundamental mode. Between ω_1 and the basic frequency ω_0 of the unloaded string only one position ξ of the bead (and its symmetric $-\xi$) can provide a resonance. Close to ω_1 , just above the first bifurcation, the resonant positions correspond to the bead slightly off-centered and still at a vibration antinode as shown in Figure 5a ($\omega = 0.31$). Closer to ω_0 ($\omega = 0.95$ in Fig. 5b) the bead is close to an extremity of the string and no longer at an antinode. At ω_0 the bead reaches the node located at the string end. Between ω_0 and $2\omega_0$, two distinct values of ξ (and their symmetric) can give resonances. This corresponds to the second bifurcation of the system. The shapes of the string are shown for $\omega = 1.9$ in Figure 5c. For

frequencies between $2\omega_0$ and $3\omega_0$, there are three distinct solutions with shapes shown in Figure 5d for $\omega = 2.4$.

There is usually a discontinuity of the string slope at the bead, the only exception being the bead located exactly at a node. The bead is at an antinode, or close to it, in the lower frequency range. In all other cases it remains close to a node. All these predicted shapes of vibrations correspond exactly to those observed experimentally. As noted above, with a homogeneous forcing, the mode two of a vibrating string should not be excited. Here, because the introduction of a single bead has broken the symmetry, it becomes possible.

When the bead is light (Fig. 3) there are frequencies for which no position of the bead can give a resonance. These frequencies form gaps of values separating the bands where there is resonance. Experimentally however, when the system is excited at such a frequency, the bead is still observed to choose a well defined position and to stay there.

This behaviour can be understood by noting that setting $\partial_\xi \eta_0 = 0$ in equation (11) gives additional equilibrium positions of the bead. These are absent in Helmholtz theory since they do not correspond to resonances. These positions are those that are observed here in the gaps. They are determined by two equations:

$$\sin(\pi\omega) + \pi\omega\mu \cos^2(\pi\omega/2) + \pi\omega\mu \cos^2(\pi\omega\xi) = 0, \quad (14)$$

$$\sin(\pi\omega\xi) = 0. \quad (15)$$

All the different types of solutions are shown in Figure 4. At the intersections of the curves resulting from equations (12, 14, 15), there are bifurcations with exchange of stability (Fig. 4). The solutions of (14, 15) (Fig. 2) are stable only in the gaps. The observed bead positions (Fig. 4) agree with predictions. The slight discrepancies can be attributed to the weak inhomogeneity of the magnetic field B along the string. When this inhomogeneity is made voluntarily larger, these discrepancies are increased.

4.2 With two beads

The observations done in continuous systems (soap films or smectic films) show a trend for the system to adapt by concentrating mass at the antinodes. This is observed in the one-bead system only at the lower frequencies. It appears that one single bead can be close to an antinode when there is only one antinode. For the higher modes, if the bead were to be at one of the antinodes, it would cause this antinode to completely differ from the others, and thus destroy the possibility of a resonance. If n beads were placed at the n antinodes of the n th eigenmode, the system would be tunable by a bifurcation similar to the bifurcation observed with one antinode in the one-bead system. The analogy with continuous systems was the motivation for the investigation of the string loaded with two beads.

But with two beads, the system acquires two extra degrees of freedom. For this reason, one expects the resonance condition to be some function $g_\omega(\xi_1, \xi_2) = 0$ of the beads horizontal positions; so the set of equilibrium positions should be infinite. However, the experiment shows

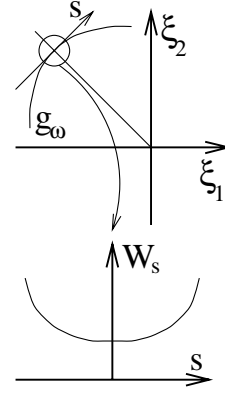


Fig. 6. Schematic plot of the resonance function $g_\omega(\xi_1, \xi_2) = 0$ near a symmetric resonant position $(-\xi, \xi)$. This graph is symmetric with respect to the line of equation $\xi_1 = \xi_2$. A sketch of the stretching energy W_s along the tangent is shown.

that there is only a finite number of steady positions for each frequency. Therefore there must be a selection process.

The selection process seems to be linked to the limitations in the amplitudes of oscillations. In fact, the amplitude of vibration is determined by nonlinearities and not by damping. The observed amplitudes of the string motion at the antinodes in our experiment is $A \leq 5$ mm. If it were due to damping, we would have $A/L \approx FL\omega_0/(T\gamma)$ with $F = IB$ the magnetic force, L the string length, ω_0 the fundamental frequency, T the string tension and γ the resonance width. So the amplitude would be $A \sim 6$ cm, which is much greater than the experimental amplitude. Hence, we have to take into account string stretching, elastic bending and geometrical nonlinearities hidden by equation (1). A rough estimate shows that stretching is dominant and from Morse [9], equation (1) becomes

$$\lambda \partial_{tt} y = T \partial_{xx} y + \frac{1}{2} E s \partial_x ((\partial_x y)^3) + F \cos(\omega t) \quad (16)$$

where $E \sim 2 \times 10^{11}$ N.m⁻² is the steel Young modulus and s the string cross section. The cubic term stands for the elastic restoring force due to the string extension while vibrating. From equation (16), we estimate $F \approx Es/L(A/L)^3$ so that $A \sim 5$ mm, which is consistent with the experiment. So, the new ingredient is the stretching energy W_s . In terms of the dimensionless variables, it reads

$$W_s(\xi_1, \xi_2) \approx \frac{1}{8} E s L \int_{-1/2}^{1/2} (\partial_x Y)^4 dx. \quad (17)$$

In fact we will not use this expression but we will only use its symmetries in the beads positions. Figure 6 shows the plane (ξ_1, ξ_2) where the symmetries are explicated. Note that the system is invariant by the permutation $(\xi_1, \xi_2) \rightarrow (\xi_2, \xi_1)$, the symmetry with respect to the string middle $(\xi_1, \xi_2) \rightarrow (-\xi_1, -\xi_2)$ and so is W_s and the function $g_\omega(\xi_1, \xi_2)$. We hereafter consider the vicinity of a resonant position $(-\xi, \xi)$. The invariance by the transformation

$\Psi: (\xi_1, \xi_2) \rightarrow (-\xi_2, -\xi_1)$ shows that, at $(-\xi, \xi)$, the curve $g_\omega(\xi_1, \xi_2) = 0$ has a tangent parallel to the line of equation $\xi_1 = \xi_2$ and a parameterization $\xi_1 = -\xi + s$, $\xi_2 = \xi + s$ (Fig. 6). The invariance by Ψ shows that W_s is even with respect to s : $W_s(-\xi + s, \xi + s) = W_s(-\xi - s, \xi - s)$. Thus, along the tangent, $W_s(-\xi + s, \xi + s)$ has a maximum or a minimum for $s = 0$. The experiment shows that it is actually a minimum, *i.e.* the stretching energy is minimum for the resonant position $(-\xi, \xi)$. Of course, one could make the cumbersome calculations with the stretching energy expression to find that the symmetric positions are selected. Our intention was only to show how to guess the solutions by only considering the symmetries in the beads' positions.

The symmetry with respect to the string middle suggests looking for the beads positions with $\xi_1 = -\xi_2$ among the resonant positions defined by $g_\omega(\xi_1, \xi_2)$. Now we have a single variable ($\xi_1 = -\xi_2$). The calculations are very similar to those in Section 4.1.

For the odd eigenmodes, the string shape is symmetrical and the beads' equilibrium positions are $(-\xi, \xi)$, $\xi > 0$, where

$$\pi\omega\mu \sin \pi\omega(2\xi - 1/2) = \pi\omega\mu \sin(\pi\omega/2) - 2 \cos(\pi\omega/2). \quad (18)$$

This curve is plotted in Figure 4. The experimental positions agree with the theoretical ones. The beads' positions are symmetric and correspond to resonance.

For the even eigenmodes, the string shape is antisymmetrical and the beads' positions are defined by

$$\pi\omega\mu \cos \pi\omega(2\xi - 1/2) = \pi\omega\mu \cos(\pi\omega/2) + 2 \sin(\pi\omega/2). \quad (19)$$

These positions are plotted in Figure 4 and agree with the experimental positions obtained with the antisymmetrical configuration of the magnetic field. Again, the two beads are in symmetric positions.

These positions are not observed with a homogeneous forcing, because it is symmetric with respect to the string middle. Morse [8] shows that the string eigenmodes of antisymmetrical shape are not excited when the forcing is homogeneous. We believe the argument of symmetry given above offers an interpretation of a result that surprised Morse.

5 Conclusion

In summary, we have shown that a string with one or two sliding beads adapts itself to become resonant at the forcing frequency through a slow dynamics process. There is a dramatic change in the nature of the system with additional degrees of freedom. While the single string has a discrete resonance spectrum, the string with a sliding bead acquires a continuous one. As a consequence, the beaded string responds to the forcing with a large amplitude within a whole range of frequencies.

In a forthcoming article [10], we will focus on the evolution of mass distribution as the key to the self-adaptative

behaviour of thick vibrating soap films. The large thickness at an antinode corresponds to a concentration of mass; so that it could be modelled by a bead at antinode. Therefore, an equivalent for the soap film with n antinodes, would be a string loaded with n beads and excited in the n th eigenmode. The soap film would be tunable through bifurcations similar to the first bifurcation observed with the string loaded with two beads in the case where the beads separate from each other.

For solid membranes, the vibration modes are often visualised by spreading sand on their surface (Chladni figures [11]). Self-adaptation would presumably be observed if the sand mass was comparable to the membrane mass. Similarly, as there are many systems which obey the string equation, self-tuning could be obtained in systems such as acoustical, microwave or optical cavities having more practical interest. In the last two cases the radiation pressure acting on a dielectric could generate the slow dynamics.

The authors thank M. Brazovskaia and P. Pieranski for fruitful discussions and for sending them their preprint prior to publication, and E. Corvera Poiré for a critical reading of the manuscript and useful comments.

References

1. J.-L. Lagrange, *Œuvres* (Gauthier-Villars, Paris, 1867), Vol. I, p. 59.
2. H.V. Helmholtz, *Vorlesungen über Theoretische Physik* (Ambrosius Barth, Leipzig, 1908), Vol. III, p. 139. A more accessible reference is J.W. Rayleigh, *The Theory of Sound* (Dover publications, New York, 1945), p. 204.
3. M. Brazovskaia, P. Pieranski, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5595 (1998).
4. M. Airiau, *Étude des vibrations des membranes de savon*, DEA Report, ENS, Paris, 1986.
5. M. Brazovskaia, H. Dumoulin, P. Pieranski, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1655 (1996).
6. P. Pieranski, L. Belliard, J.-Ph. Tournellec, X. Leoncini, C. Furtlehner, H. Dumoulin, E. Riou, B. Jouvin, J.-P. Fénerol, Ph. Palaric, J. Heuving, B. Cartier, I. Kraus, *Physica A* **194**, 364 (1993).
7. Preliminary experiments were performed using a thick cylindrical rubber string. The bead was a Teflon cylinder. The hole in the center was just a little larger than the string diameter and the intermediate space was filled with oil so that the friction between the two was of a viscous type. The same behaviour of self-adaptation was observed. This setup was abandoned as the control of the mechanical forcing was less precise, and because some additional difficulties arose from the slow time evolution of the rubber's elastic properties.
8. P.M. Morse, *Vibration and Sound* (McGraw Hill, New York, 1936), p. 94.
9. P.M. Morse, K.V. Ingard, *Theoretical Acoustics* (McGraw Hill, New York, 1968), p. 856.
10. A. Boudaoud, Y. Couder, M. Ben Amar, *Self-adaptation in vibrating soap films*, *Phys. Rev. Lett.* (submitted).
11. M. Faraday, *Philos. Trans. Roy. Soc. London* **52**, 299 (1831).

Annexe E

Publication E

BOUDAUD, A., COUDER, Y., ET BEN AMAR, M.
Self-adaptation in vibrating soap films.
Phys. Rev. Lett 82 (1999), 3847–3850.

Cette publication expose l'aspect auto-adaptation du chapitre 8.

Erratum : en haut de la page 3850, lire $E \simeq 0,015$ N/m au lieu de $E \simeq 0,15$ N/m.

Self-Adaptation in Vibrating Soap Films

Arezki Boudaoud, Yves Couder, and Martine Ben Amar

Laboratoire de Physique Statistique, Ecole Normale Supérieure (Laboratoire associé au CNRS et aux Universités Paris VI et Paris VII) 24, rue Lhomond, F-75231 Paris Cedex 05, France

(Received 14 December 1998)

The vibration of a soap film set into motion by a sound wave is studied experimentally and theoretically. In contrast with the well separated resonances of a solid membrane, the modes of a liquid film exist in wide ranges of frequencies and the vibration amplitude is large for all forcing frequencies. This is due to the adaptation of the film mass distribution which concentrates at the antinodes as observed by interference fringes in monochromatic light. The theoretical model takes into account the variation of surface tension with thickness and explains the experimental results. [S0031-9007(99)09106-1]

PACS numbers: 68.45.Kg, 47.20.Ky

In early times, vibrating soap films were considered as archetypes of vibrating membranes. For instance Rayleigh [1] reports experiments of this type by Melde (1876). There are also observations by Taylor [2] and more recently by Bergman [3] on circular or square membranes. Quantitative studies are more recent and revealed that the vibration of liquid films is more complex than that of solid films. A linear theory of the propagation of waves in soap films was developed by Lucassen *et al.* [4]. Experimentally two different types of behavior are observed when soap films are forced into vibration. If the films are thin, strong and rapid recirculations are generated as reported by Afenchenko *et al.* [5] and studied theoretically by Vega *et al.* [6]. In contrast, if the films are thick, the mass distribution adapts itself so that the system retains large amplitude oscillations at all forcing frequencies. This self-adaptation of soap films to the forcing was first pointed out by Airiau, Couder, and Rabaud [7]. A similar effect was found in vibrating smectic films with large forcing by Brazovskaia *et al.* [8]. However no complete model for the self-adaptation of these systems was given. A better understanding of the phenomenon was reached in systems where it results from the addition of a discrete mass. This was obtained with a small ball suspended in a vibrating smectic film [9] or with a bead sliding on a vibrating string [10]. In this latter case there is a slow dynamics by which the bead adjusts its position so that the system is resonant with the forcing. A theoretical model for this effect is given in [10].

While Refs. [9,10] considered discrete systems, in the present Letter we are concerned with self-adaptation in a continuous system. For this purpose we revisit vibrating soap films. As we will show they fundamentally differ from solid membranes because of the possibility of thickness variations. The film is formed of a 1% water solution of commercial soap ("Mir multiusages") mixed with 7% of glycerol. It has a surface tension $\sigma = 22$ mN/m and a mean thickness $e \approx 5$ μ m. The frame is a rectangle of length $L = 16$ cm and width $W = 2.5$ cm. It is placed horizontally and the forcing

is provided by a large loudspeaker located below the film and giving a spatially homogeneous forcing. Using a function generator and a hi-fi amplifier the excitation frequency can be tuned continuously. The whole system is placed in a perspex box to avoid drafts. The film is lit with a large monochromatic sodium lamp located behind a diffusing screen. Observed in reflection the film exhibits equal thickness interference fringes, the thickness varying by 0.22 μ m between two neighboring fringes. A video camera placed just above the box is used to record the evolution of the interference patterns. We used the reflexion of a plane laser sheet of light by the film across the middle of its width. The largest deflections at the antinodes give a measure of the amplitude of the film vibration. The transverse profile of the film in the direction z perpendicular to its plane can also be observed with a stroboscopic light.

If care is taken for the initial stretching of the film, reproducible results are obtained [11]. After it has been set into vibration, an organized interference pattern appears after approximately 10 sec (Fig. 1). It is due to spatial variations of the thickness related to the vibration of the membrane. The fringes form concentric ellipses showing that the film has become thicker at the antinodes. By counting the fringes, we estimate the film thickness to vary from about 0.2 μ m near the frame and at the nodes to more than 200 μ m at antinodes.

If the film behaved as a constant density solid membrane, the transverse displacement z for the eigenmodes would be

$$z = A \sin[n\pi(x/L + 1/2)] \sin[m\pi(y/W + 1/2)] \times \sin(\omega_{nm}t),$$

where $-L/2 \leq x \leq L/2$, $-W/2 \leq y \leq W/2$. The complete eigenfrequencies spectrum ω_{nm} would be given by

$$\omega_{nm} = \pi \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho e^*}} \sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{W^2}}. \quad (1)$$

where e^* is the effective thickness of the membrane (taking

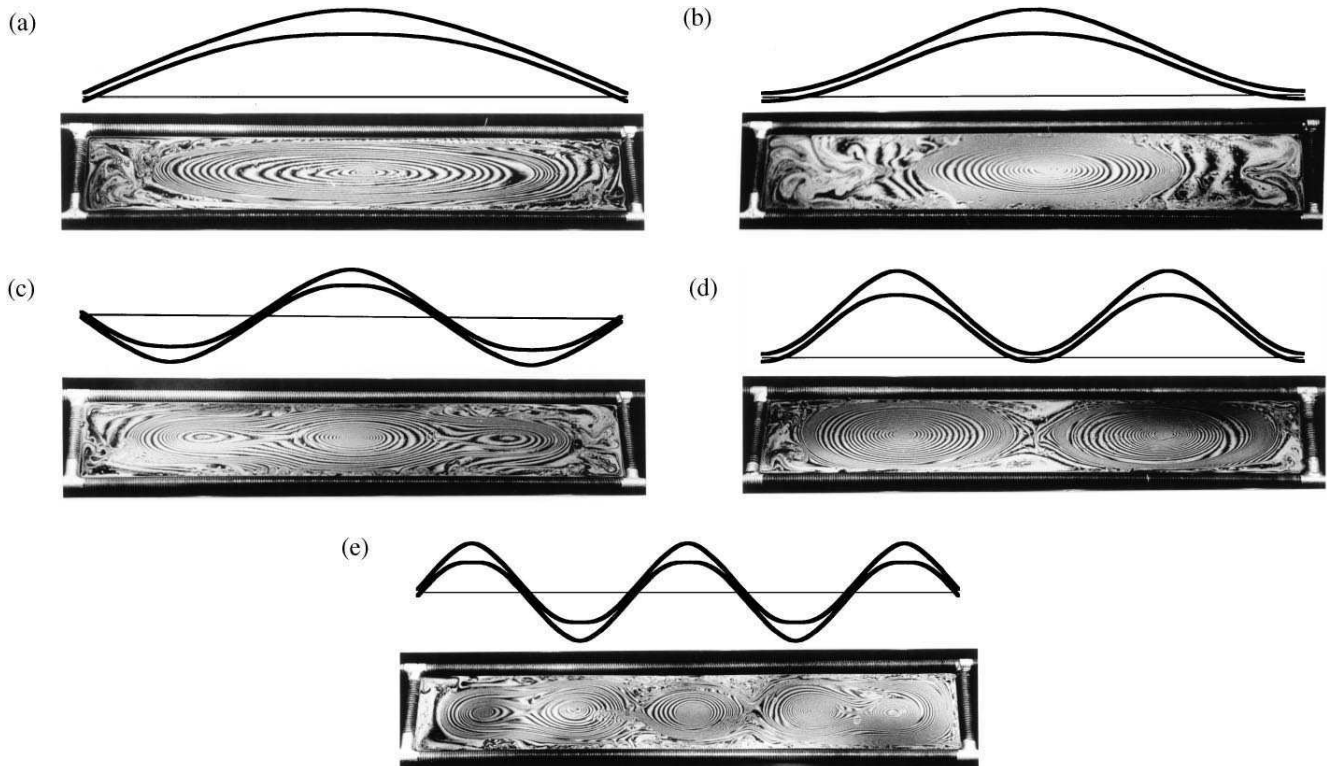


FIG. 1. The interference patterns observed on the soap films at increasing frequencies and the theoretical longitudinal cross section obtained from the model [Eq. (6)]. The interference fringes are the lines of equal thickness and mass is concentrated at the antinodes. For a better visualization of fringes, the films used for the photographs were drained to be thinner than usual. In the theoretical cross sections, the thickness is magnified. (a) Mode 1 at 21 Hz and corresponding theoretical shape at $\omega/\omega_1 = 0.99$. (b) Mode 2 at 26 Hz and the theoretical profile at $\omega/\omega_1 = 2$ (note that when the forcing is homogeneous there is only one central antinode). (c) Mode 3 at 30 Hz and the theoretical profile at $\omega/\omega_1 = 2.99$. (d) Mode 4 at 33 Hz and the predicted profile at $\omega/\omega_1 = 4$ (with a homogeneous forcing there are two antinodes). (e) Mode 5 at 38 Hz and the theoretical profile at $\omega/\omega_1 = 3.99$.

into account the inertia of the air moving with the film), ρ is the density of the interstitial fluid, and σ is the surface tension of one side of the film. When forced into vibration [1], the amplitude of response would be very small unless the forcing frequency was close to a natural frequency ω_{nm} .

Actually, the soap film has a large amplitude of oscillations for all forcing frequencies except below all natural frequencies ω_{nm} ($f < 15$ Hz) where there is hardly any vibration. The aspect of the soap film at increasing forcing frequencies is shown in Fig. 1. For $16 \leq f \leq 23$ Hz, the film organizes and concentric elliptical fringes form, surrounding a single central antinode [Fig. 1(a)]. The system is in its fundamental mode. For larger frequencies $24 \leq f \leq 28$ Hz, though there is still one antinode, the fringes tend to become more circular in the central part of the film [Fig. 1(b)], and the extremities do not vibrate. Starting at about 28 Hz there is a flow by which some of the mass is transferred from the central region towards the extremities so that two new sets of elliptical fringes appear symmetrically with respect to the central one. This state with three antinodes [Fig. 1(c)] is observed in the range 28–31 Hz, with more and more mass being trans-

ferred from the central antinode to the lateral ones. Ultimately, only the two lateral antinodes remain [Fig. 1(d)] in the range 32–36 Hz. The process repeats itself when new antinodes appear in-between the existing antinodes and between them and the frame, leading to a state with five antinodes [Fig. 1(e)] in the range 37–39 Hz. This evolution continues for frequencies up to about 55 Hz where the pattern starts evolving in the transverse direction, leading at about 90 Hz to the formation of a two dimensional pattern with staggered antinodes. We will concentrate on the frequency range $f < 55$ Hz where there is exactly half a wavelength in the frame's width. So, we will consider from now on that the median region of the film width has a 1D dynamics. This is a bold hypothesis, but it permits a complete treatment of the problem.

The sequence 1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, ..., $2p - 1$, $2p/2$, $2p + 1$, ..., for the numbers of antinodes appears in contradiction with the usual situation in 1D vibrating systems where the number of antinodes is 1, 2, ..., p , $p + 1$, This is due to the specificity of the homogeneous forcing discussed for strings in Morse [12]. The usual even eigenmodes have a shape which is antisymmetrical with respect to the middle of the system

while the forcing is symmetrical. For this reason they are not excited. When forced at $\omega = 2\pi f$, the shape of the film is

$$z(x, t) = A \left(\frac{\cos[(\pi\omega/\omega_1)(x/L)]}{\cos(\pi\omega/2\omega_1)} - 1 \right) \sin\omega t. \quad (2)$$

Here z is the vertical displacement of the film at a position x (with $-L/2 < x < L/2$). A is a typical displacement proportional to the forcing and ω_1 is the fundamental frequency. The profiles given by Eq. (2) when ω/ω_1 is in the vicinity of an integer n are of the type displayed in Fig. 1 (for $\omega/\omega_1 = 0.99, 2, 2.99, 4$, and 4.99). When ω/ω_1 is close to an odd integer n there are n antinodes. When it is close to an even integer there are only $n/2$ antinodes. This explains the observed sequence of numbers of antinodes for our system.

In the case discussed by Morse the amplitude of vibration given by (2) diverges in the vicinity of the odd modes which are the only resonances. For the other frequencies, including when ω/ω_1 is an even integer, the amplitude is very small. What is observed here with fluid films is different: The amplitude is large in all cases (Fig. 2). The vibration amplitude varies by only about a factor 4 (from 0.5 to 2 mm) in a wide frequency range (20–55 Hz). A resonancelike behavior remains, however, for the odd modes. The amplitude versus frequency curve (Fig. 2) exhibits weak peaks at frequencies located within the range of observation of each odd mode. A jump of π of the phase of the motion relative to the phase of the forcing is observed at these peaks. The width of these phase jumps shows the quality factor to be $Q \sim 20$.

We can now measure the wavelength as a function of frequency. We define it as the mean distance between two neighboring antinodes for the even modes and as twice this distance in the odd modes. The dispersion

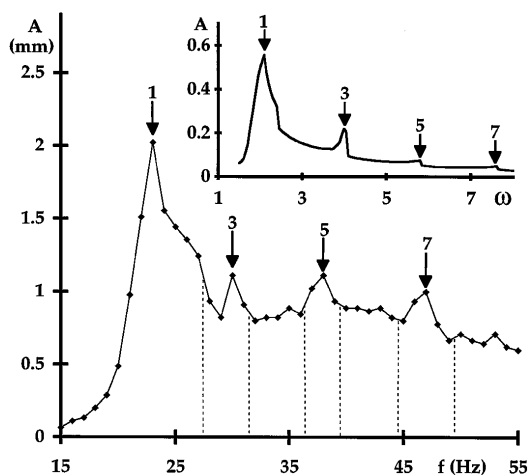


FIG. 2. Experimental amplitude of vibration versus the forcing frequency. The dotted lines mark the frequency of transition between two modes. Inset: Theoretical adimensional amplitude versus adimensional frequency. In the two cases the amplitude remains large at most frequencies.

curve (Fig. 3) shows small steps at frequencies $f = 27.5, 31.5, 36.5, 39.5, 44.5$, and 49.5 Hz accounting for a local fast variation of the wavelength. These frequencies are the extremities of the intervals where a given mode is observed. The vibrating film adapts to the forcing frequency: As long as the mass distribution can adjust to the forcing, the wavelength changes smoothly. When the mass distribution is too constrained to follow the forcing, there is a jump in the wavelength and a change of mode. This effect is not included in the model presented below as we implicitly assume that the mass concentration at an antinode is not too large. In the experiment, a drop may form at each antinode. We will model this elsewhere [13].

We now write the equations for the deflection $z(x)$ from equilibrium and for the film thickness $e(x)$. For the sake of simplicity, our model is only 1D. The wave equation reads

$$\rho e \partial_{tt} z = 2 \partial_x (\sigma \partial_x z) + F \sin(\omega t). \quad (3)$$

F is the forcing. The experiment shows that damping is small [14]. We will look for periodic solutions $z = Z \sin(\omega t)$. We can estimate using Eq. (5) $(\partial_x \sigma \partial_x z) / (\sigma \partial_{xx} z) \sim (\omega Z / \omega_0 L)^2 \ll 1$, so that $\partial_x (\sigma \partial_x z) \sim \sigma \partial_{xx} z$. The wave equation becomes

$$-\rho e \omega^2 Z = 2 \sigma \partial_{xx} Z + F. \quad (4)$$

In the tangent plane, two forces are acting on the film. The projection of the local acceleration on the tangent $(\partial_{tt} z \partial_x z)$ gives a centrifugal force of temporal mean $\rho \omega^2 e Z \partial_x z$. It accounts for the mass concentration at antinodes. The restoring force comes from the variations of surface tension with thickness. This effect is known as Marangoni or Gibbs elasticity of soap films [15]. It is due to the thermodynamical equilibrium between soap molecules in the bulk and at the interface. From Ref. [15], we take the force acting against thickness

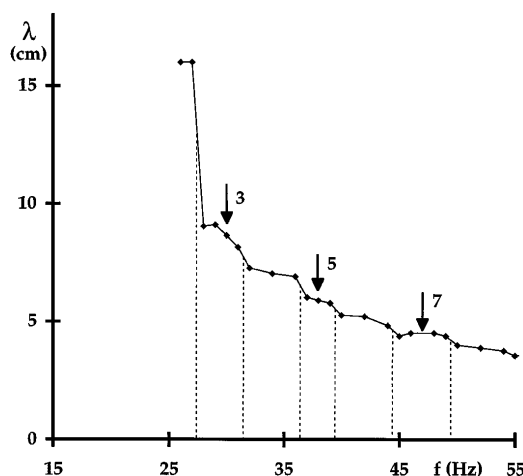


FIG. 3. The experimental wavelength versus the forcing frequency. At the transition frequencies shown by dotted lines, the curve has small steps showing a local faster evolution of λ .

variations to be $\partial_x \sigma = -E \partial_x e / e$, where E is the elasticity coefficient of the film ($E \approx 0.15$ N/m). We obtain the equation for the equilibrium in the film plane,

$$-\frac{E}{e} \partial_x e + \rho \omega^2 e Z \partial_x Z = 0. \quad (5)$$

The set (4)-(5) is integrable analytically. Equation (5) gives the thickness $e = E / (B - \frac{1}{2} \rho \omega^2 Z^2)$, where B is a constant determined through mass conservation. The general solution reads

$$x = \varepsilon \int \sqrt{\frac{\sigma}{E \ln(1 - \rho \omega^2 Z^2 / 2B) - FZ + A}} dZ. \quad (6)$$

The constants $\varepsilon = \text{sgn}(\partial_x Z)$ and A result from the boundary conditions $Z(-L/2) = Z(l/2) = 0$. Using the experimental value $F \approx 0.15$ N/m², we recover both a thickness and an amplitude frequency dependence similar to the experimental ones. The mass concentrates at the antinodes (Fig. 1) and adjusts with the forcing frequency. This adaptation allows the amplitude to remain large (Fig. 2, inset) in a wide range of frequencies. The theoretical curve of the Fig. 2 inset also exhibits weak peaks with phase jumps corresponding to resonances. The qualitative agreement shows that the self-adaptive behavior can be explained only by the spatial variations of thickness. In the experiment, the first and second peaks are weaker than expected, probably because of damping by air friction.

As a conclusion, we have shown that the fluidity of soap films gives them a behavior very different from solid membranes. The liquid film can adapt its mass distribution to the forcing frequency. This adaptation is smooth within the interval of a mode existence and fast at the interval extremities. These transitions, as well as the phase jumps at the resonance, occur through the coupling between the vibration and Marangoni waves. These waves were already shown to be important in the vorticity generation [5,6]. The study of this coupling

is beyond the scope of the present Letter and will be developed elsewhere [13].

-
- [1] J. W. Rayleigh, *The Theory of Sound* (Dover Publications, New York, 1945), p. 345.
 - [2] S. Taylor, Proc. R. Soc. London A **27**, 71 (1878).
 - [3] L. Bergman, J. Acoust. Soc. Am. **28**, 1043 (1956).
 - [4] J. Lucassen, M. Van Den Tempel, A. Vrij, and F. Th. Hesselink, Phys. Chem. B **73**, 109 (1970); A. Vrij, F. Th. Hesselink, J. Lucassen, and M. Van Den Temple, Phys. Chem. B **73**, 125 (1970).
 - [5] V. O. Afenchenko, A. B. Ezersky, S. V. Kiyashko, M. I. Rabinovich, and P. D. Weidman, Phys. Fluids **10**, 390 (1998).
 - [6] J. M. Vega, F. J. Higuera, and P. D. Weidman, J. Fluid Mech. **372**, 213 (1998).
 - [7] M. Airiau, DEA Report, ENS, Paris, 1986.
 - [8] M. Brazovskaia, H. Dumoulin, and P. Pieranski, Phys. Rev. Lett. **76**, 1655 (1996).
 - [9] M. Brazovskaia and P. Pieranski, Phys. Rev. Lett. **80**, 5595 (1998).
 - [10] A. Boudaoud, Y. Couder, and M. Ben Amar (to be published).
 - [11] The excitation is first set on and the film being stretched is placed above the loudspeaker. The measurements are done when the film is 2 min old. A discussion of this procedure will be given elsewhere.
 - [12] P. M. Morse, *Vibration and Sound* (McGraw Hill, New York, 1936), p. 96.
 - [13] A. Boudaoud, Y. Couder, and M. Ben Amar, "The Hydrodynamics of Self-Adaptation in Vibrating Soap Films," Report, ENS, 1998.
 - [14] Damping occurs through viscous dissipation in the film bulk, at the interface and in the air [6]. If the vibration amplitude Z were determined by damping, one would estimate $Z \sim FW^2 Q / 2\sigma \sim 4$ cm at the first resonance (F is the forcing, W the frame width, $Q \sim 20$ the quality factor, and σ the surface tension). The experimental amplitude being 2 mm is not determined by damping.
 - [15] Y. Couder, J.-M. Chomaz, and M. Rabaud, Physica (Amsterdam) **37D**, 384 (1989).

Bibliographie

- [1] ABRAHAM, F. F., & GOULIAN, M. Diffraction from polymerized membranes : Flat *vs.* crumpled. *Europhys. Lett.* *19* (1992), 293–296.
- [2] AFENCHENKO, V. O., EZERSKY, A. B., KIYASHKO, S. V., RABINOVICH, M. I., & WEIDMAN, P. D. The generation of two-dimensional vortices by transverse oscillation of a soap film. *Phys. Fluids* *10* (1998), 390–399.
- [3] AIRIAU, M. Etude des vibrations des membranes de savon. Rapport de stage, DEA de Physique des Liquides, LPS, ENS, Paris, 1986.
- [4] AMIRBAYAT, J., & HEARLE, J. W. S. The complex buckling of flexible sheet materials - Part I. Theoretical approach. *Int. J. Mech. Sc.* *28* (1986), 339–358.
- [5] AMIRBAYAT, J., & HEARLE, J. W. S. The complex buckling of flexible sheet materials - Part II. Experimental study of three-fold buckling. *Int. J. Mech. Sc.* *28* (1986), 359–370.
- [6] AMIRBAYAT, J., & HEARLE, J. W. S. The anatomy of buckling of textile fabrics : Drape and conformability. *J. Text. Inst.* *80* (1989), 51–70.
- [7] ARCOS, E., BAEZ, G., CUATLAYOL, P. A., PRIAN, M. L. H., MENDEZ-SANCHEZ, R. A., & HERNADEZ-SALDAÑA, H. Vibrating soap films : An analog for quantum chaos on billiards. *Am. J. Phys.* *66* (1998), 601–607.
- [8] ASHWELL, D. G. A characteristic type of instability in the large deflexions of elastic plates I. Curved rectangular plates bent about one axis II. Flat square plates bent about all edges. *Proc. Roy. Soc. London A* *214* (1952), 98–118.
- [9] AUDOLY, B. Stability of straight delamination blisters. *Phys. Rev. Lett.* *83* (1999), 4124–4127.
- [10] AUDOLY, B. *Elasticité et géométrie : de la rigidité des surfaces à la délamination en fil de téléphone*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2000.

- [11] BARNES, G., & WOODCOCK, R. Liquid rope-coil effect. *Am. J. Phys.* 26 (1958), 205–209.
- [12] BEN AMAR, M., & PATRÍCIO, P. Can one hear the shape of smectic films? *Proc. Roy. Soc. London A* 454 (1998), 2757–65.
- [13] BEN AMAR, M., PATRÍCIO, P., LIMODIN, N., BRAZOVSKAIA, M., EVEN, C., CHIKINA, I. V., & PIERANSKI, P. Stability and vibrations of catenoid-shaped smectic films. *Eur. J. Phys. B* 3 (1998), 197–202.
- [14] BEN AMAR, M., PATRÍCIO, P., LIMODIN, N., BRAZOVSKAIA, M., EVEN, C., CHIKINA, I. V., & PIERANSKI, P. Vibrations of smectic films. *Phil. Mag. B* 78 (1998), 115–130.
- [15] BEN AMAR, M., & POMEAU, Y. Crumpled paper. *Proc. R. Soc. Lond. A* 453 (1997), 729–755.
- [16] BENJAMIN, T. B., & MULLIN, T. Buckling instabilities in layers of viscous liquid subjected to shearing. *J. Fluid Mech.* 195 (1988), 523–540.
- [17] BERGMANN, L. Experiments with vibrating soap membranes. *J. Ac. Soc. Am.* 28 (1956), 1043–1047.
- [18] BERNADOU, M. *Méthodes d'éléments finis pour les coques minces*. Masson, Paris, 1994.
- [19] BIOT, M. A. Theory of viscous buckling of multilayered fluids undergoing finite strain. *Phys. Fluids* 7 (1964), 855–861.
- [20] BOUCIF, M., WESFREID, J. E., & GUYON, E. Role of boundary conditions on mode selection in a buckling instability. *J. Physique Lett.* 45 (1984), L413–L418.
- [21] BOUCIF, M., WESFREID, J. E., & GUYON, E. Experimental study of wavelength selection in the elastic buckling instability of thin plates. *Eur. J. Mech. A* 10 (1991), 641–661.
- [22] BOUDAUD, A., & CHAÏEB, S. Singular viscous tablecloth. En préparation, 2001.
- [23] BOUDAUD, A., COUDER, Y., & BEN AMAR, M. Self-adaptation in vibrating soap films. *Phys. Rev. Lett* 82 (1999), 3847–3850.
- [24] BOUDAUD, A., COUDER, Y., & BEN AMAR, M. A self-adaptive oscillator. *Eur. Phys. J. B* 9 (1999), 159–165.
- [25] BOUDAUD, A., COUDER, Y., & BEN AMAR, M. Vibrating soap films : Self-adaptation, mode jumps and resonances. En préparation, 2001.

- [26] BOUDAUD, A., PATRÍCIO, P., & BEN AMAR, M. The helicoid versus the catenoid : Geometrically induced bifurcations. *Phys. Rev. Lett.* *83* (1999), 3836.
- [27] BOUDAUD, A., PATRÍCIO, P., COUDER, Y., & BEN AMAR, M. Dynamics of singularities in a constrained elastic plate. *Nature* *407* (2000), 718–720.
- [28] BOUDAUD, A., PATRÍCIO, P., COUDER, Y., & BEN AMAR, M. Dynamics of singularities in a constrained elastic plate. En préparation, 2001.
- [29] BOURDIEU, L., DAILLANT, J., CHATENAY, D., BRASLAU, A., & COLSON, D. Buckling of polymerized monomolecular films. *Phys. Rev. Lett.* *72* (1994), 1502–1505.
- [30] BOYS, C. V. *Soap Bubbles and the Forces Which Mould Them*. Society for Promoting Christian Knowledge, and Anchor Books, 1890.
- [31] BRANDEN, C., & TOOZE, J. *Introduction to protein structure*. Garland Publishing Inc., New York, 1991.
- [32] BRAZOVSKAIA, M. *Vibrations des films smectiques librement suspendus : effets non linéaires, points diaboliques et oscillateurs auto-ajustables*. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, 1998.
- [33] BRAZOVSKAIA, M., DUMOULIN, H., & PIERANSKI, P. Non linear effects in vibrating smectic films. *Phys. Rev. Lett.* *76* (1996), 1655–1658.
- [34] BRAZOVSKAIA, M., & PIERANSKI, P. Diabolical points in the resonance spectra of vibrating smectic films. *Phys. Rev. E* *58* (1998), R4076–4079.
- [35] BRAZOVSKAIA, M., & PIERANSKI, P. Self-tuning behaviour of vibrating smectic films. *Phys. Rev. Lett.* *80* (1998), 5595–5598.
- [36] BUCKMASTER, J. The buckling of thin viscous jets. *J. Fluid Mech.* *61* (1973), 449–463.
- [37] BUCKMASTER, J. D., NACHMAN, A., & TING, L. The buckling and the stretching of a viscida. *J. Fluid. Mech.* *69* (1975), 1–20.
- [38] CERDA, E., CHAÏEB, S., MELO, F., & MAHADEVAN, L. Conical dislocations in crumpling. *Nature* *401* (1999), 46–49.
- [39] CERDA, E., & MAHADEVAN, L. Conical surfaces and crescent singularities in crumpled sheets. *Phys. Rev. Lett* *80* (1998), 2358–2361.
- [40] CHAÏEB, S., & MELO, F. Experimental study of crease formation in an axially compressed sheet. *Phys. Rev. E* *56* (1997), 4736–4743.

- [41] CHAÏEB, S., & MELO, F. Crescent singularities and stress focusing in a buckled thin sheet : Mechanics of developable cones. *Phys. Rev. E* 60 (1999), 6091–6103.
- [42] CHAÏEB, S., & MELO, F. From creases to conical deflections in a buckled thin sheet : Stress focusing *vs.* singularities in strong deformations of a thin elastic sheet. *J. Mech. Phys. Solids* 48 (2000), 565–579.
- [43] CHAÏEB, S., MELO, F., & GÉMINARD, J.-C. Experimental study of developable cones. *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998), 2354–2357.
- [44] CHEN, B., & GOVINDARAJ, M. A physically based model of fabric drape using flexible shell theory. *Textile Res. J.* 65 (1995), 324–330.
- [45] CHEN, B., & GOVINDARAJ, M. A parametric study of fabric drape. *Textile Res. J.* 66 (1996), 17–24.
- [46] CHEN, Y.-J., & STEEN, P. H. Dynamics of inviscid capillary breakup : Collapse and pinchoff of a film bridge. *J. Fluid. Mech.* 341 (1997), 245–267.
- [47] CHEON, T., & SHIGEHARA, T. Geometric phase in quantum billiards with a pointlike scatterer. *Phys. Rev. Lett.* 76 (1996), 1770–1773.
- [48] CHOI, D. *Sur la rigidité géométrique des surfaces. Applications à la théorie des coques élastiques minces.* Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1995.
- [49] CHOMAZ, J.-M., & CATHALAU, B. Soap films as two-dimensional classical fluids. *Phys. Rev. A* 41 (1990), 2243–2245.
- [50] CIARLET, P. G. A justification of the von Kármán equations. *Arch. Rat. Mech. Analysis* 73 (1980), 349.
- [51] COUDER, Y., CHOMAZ, J.-M., & RABAUD, M. On the hydrodynamics of soap films. *Physica D* 37 (1989), 384–405.
- [52] DA SILVEIRA, R., CHAÏEB, S., & MAHADEVAN, L. Rippling instability of a collapsing bubble. *Science* 287 (2000), 1468–1471.
- [53] DEAN, W. R. The elastic stability of an annular plate. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 106 (1924), 268–284.
- [54] DEBRÉGEAS, G., DE GENNES, P.-G., & BROCHARD-WYART, F. The life and death of bare viscous bubbles. *Science* 279 (1998), 1704–1707.
- [55] DEWAR, J. Soap films as detectors : Streamlines and sound. *Proc. Roy. Inst.* 24 (1923), 197–259.
- [56] DIDONNA, B. A., VENKATARAMANI, S. C., WITTEN, T. A., & KRAMER, E. M. Deformed elastic sheets in d dimensions. Prépublication, 2000.

- [57] DONNELL, L. H. A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending. *Trans. Am. Soc. Mech. Eng* 56 (1934), 795.
- [58] DUMOULIN, H., BRAZOVSKAIA, M., & PIERANSKI, P. Motion of islands on vibrating smectic films. *Europhys. Lett.* 35 (1996), 505–510.
- [59] ELLEGAARD, C., HANSEN, A. E., HAANING, A., HANSEN, K., MARCUSSEN, A., BOHR, T., HANSEN, J. L., & WATANABE, S. Creating corners in kitchen sinks. *Nature* 392 (1998), 767–768.
- [60] EULER, L. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. Lausanne, 1744.
- [61] EVEN, C. *Vibrations d'une membrane smectique : rôle de la forme du contour*. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, 1999.
- [62] EVEN, C., & PIERANSKI, P. On "hearing the shape of drums" : An experimental study using vibrating smectic films. *Europhys. Lett.* 47 (1999), 531–537.
- [63] EVEN, C., RUSS, S., REPAIN, V., PIERANSKI, P., & SAPOVAL, B. Localizations in fractal drums : an experimental study. *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999), 726–729.
- [64] FOGDEN, A., & HYDE, S. T. Continuous transformations of cubic minimal surfaces. *Eur. Phys. J. B* 7 (1999), 91–104.
- [65] FÖPPL, A. *Vorlesungen über technische Mechanik*. Leipzig, 1907.
- [66] FRISCH, U. *Turbulence*. Cambridge University Press, 1995.
- [67] GIBBS, J. W. *The Collected Works*. Longmans Green, 1931.
- [68] GIOIA, G., & ORTIZ, M. Delamination of compressed thin films. *Adv. Appl. Mech.* 33 (1997), 119.
- [69] GOMES, M. A. F. Paper crushes fractally. *J. Phys. A* 20 (1987), L283–L284.
- [70] GOMES, M. A. F., JYH, T. I., & REN, T. I. The crumpled state of some no-equilibrium fractal surfaces. *J. Phys. A* 23 (1990), L1281–L1285.
- [71] GOMES, M. A. F., VASCONCELOS, G. L., & NASCIMENTO, C. C. Blackish fractal balls. *J. Phys. A* 20 (1987), L1167–L1169.
- [72] GÒZDŹ, W., & HOLYST, R. High genus periodic gyroid surfaces of non positive gaussian curvature. *Phys. Rev. Lett* 76 (1996), 2726–2729.
- [73] HELFER, E., HARLEPP, S., BOURDIEU, L., ROBERT, J., MACKINTOSH, F. C., & CHATENAY, D. Buckling of actin-coated membranes under application of a local force. *Soumis à Phys. Rev. Lett.*, 2001.

- [74] HILBERT, D., & COHN-VOSSEN, S. *Geometry and the imagination*. Chelsea, New York, 1952. p. 207.
- [75] HOOKE, R. *De potentia restitutiva*. London, 1678.
- [76] HOULE, P. A., & SETHNA, J. P. Acoustic emission from crumpling paper. *Phys. Rev. E* 54 (1996), 278–283.
- [77] HOWELL, P. D. Models for thin viscous sheets. *Eur. J. Appl. Math.* 7 (1996), 321–343.
- [78] HWA, T., KOKUFUTA, E., & TANAKA, T. Conformation of graphite oxide membranes in solution. *Phys. Rev. A* 44 (1991), R2235–R2238.
- [79] HYDE, S. T., & ANDERSSON, S. The martensite transition and differential geometry. *Z. Kristallogr.* 174 (1986), 225–236.
- [80] HYDE, S. T., ANDERSSON, S., LARSSON, K., BLUM, Z., LANDH, T., LIDIN, S., & NINHAM, B. W. *The Language of shape*. Elsevier, 1997.
- [81] JENKINS, A. D., & DYSTHE, K. B. The effective film viscosity of a thin floating layer. *J. Fluid Mech.* 344 (1997), 335–337.
- [82] JIN, W., & STERNBERG, P. In-plane displacements in thin-film blistering. Prépublication, 1999.
- [83] JIN, W., & STERNBERG, P. Energy estimates of von Kármán model in thin-film blistering. Prépublication, 2000.
- [84] KAGAN, D. T., & BUCHOLTZ, L. J. Demonstration of normal modes on a bubble membrane. *Am. J. Phys.* 59 (1991), 376–377.
- [85] KAMIEN, T. C., & LUBENSKY, T. C. Minimal surfaces, screw dislocations, and twist grain boundaries. *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999), 2892–2895.
- [86] KANTOR, Y., & NELSON, D. R. Crumpling transition in polymerized membranes. *Phys. Rev. Lett.* 58 (1987), 2774–2777.
- [87] KLÉMAN, M. Dislocations vis et surfaces minima dans les smectiques A. *Phil. Mag.* 34 (1976), 79–87.
- [88] KLÉMAN, M. Developable domains in hexagonal liquid crystals. *J. Physique* 41 (1980), 737–745.
- [89] KRAMER, E. M. The von Kármán equations, the stress function and elastic ridges in high dimensions. *J. Math. Phys.* 38 (1997), 830.
- [90] KRAMER, E. M., & LOBKOVSKY, A. E. Universal power law in the noise from a crumpled elastic sheet. *Phys. Rev. E* 53 (1996), 1465–1469.
- [91] KRAMER, E. M., & WITTEN, T. A. Stress condensation in crushed elastic manifolds. *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997), 1303–1307.

- [92] KRAUS, I., BAHR, C., CHIKINA, I. V., & PIERANSKI, P. Can one hear structures of smectic films? *Phys. Rev. E* 58 (1998), 610–625.
- [93] LAGRANGE, J.-L. *Oeuvres*. Gauthier-Villars, Paris, 1867. vol. I, p. 59.
- [94] LANDAU, L., & LIFCHITZ, E. *Théorie de l'élasticité*. Mir, Moscou, 1990.
- [95] LEVELUT, A.-M., HALLOUIN, E., BENNEMANN, D., HEPPKE, G., & LÖTZSCH, D. The smectic q phase, a crystal of twist grain boundaries with smectic order. *J. Phys. II France* 7 (1997), 981–1000.
- [96] LIDIN, S. Some results of the bonnet transformation. *Coll. Physique C7* (1990), 237–242.
- [97] LOBKOVSKY, A. E. Boundary layer analysis of the ridge singularity in a thin plate. *Phys. Rev. E* 53 (1996), 3750–3759.
- [98] LOBKOVSKY, A. E., GENTGES, S., LI, H., MORSE, D., & WITTEN, T. A. Scaling properties of stretching ridges in a crumpled elastic sheet. *Science* 270 (1995), 1482–1485.
- [99] LOBKOVSKY, A. E., & WITTEN, T. A. Properties of ridges in elastic membranes. *Phys. Rev. E* 55 (1997), 1577–1589.
- [100] LU, C.-Y. D., & CATES, M. E. Hydrodynamic modes of soluble surfactant films. *Langmuir* 11 (1995), 4225–4233.
- [101] LUCASSEN, J., TEMPEL, M. V. D., VRIJ, A., & HESSELINK, F. T. Waves in thin films I. *Phys. Chem. B* 73 (1970), 109–131.
- [102] MACKAY, A. L. Periodic minimal surfaces. *Nature* 314 (1985), 604–606.
- [103] MACKAY, A. L. Crystallographic surfaces. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 442 (1993), 47–59.
- [104] MAHADEVAN, L., RYU, S., & SAMUEL, A. D. T. Fluid rope trick investigated. *Nature* 392 (1998), 140.
- [105] MOLDOVAN, D., & GOLUBOVIC, L. Buckling dynamics of compressed thin sheets (membranes). *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999), 2884–2887.
- [106] MORSE, P. *Vibration and Sound*. Mc Graw Hill, New York, 1936. p. 96.
- [107] MORSE, P., & INGARD, K. V. *Theoretical acoustics*. Mc Graw Hill, New York, 1968. p. 856.
- [108] MUTZ, M., BENSIMON, D., & BRIENNE, M. J. Wrinkling transition in partially polymerized vesicles. *Phys. Rev. Lett.* 67 (1991), 923–926.
- [109] MYSELS, K. J., SHINODA, K., & FRANKEL, S. *Soap Films, Studies of Their Thinning*. Pergamon, 1959.

- [110] NELSON, D., PIRAN, T., & WEINBERG, S., Eds. *Statistical Mechanics of Membranes and Surfaces* (Singapore, 1988), vol. 5 of *Jerusalem Winter School for Theoretical Physics*, World Scientific.
- [111] NITSCHKE, J. C. C. *Lectures on Minimal Surfaces*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [112] PAAP, H.-G., & KRAMER, L. Wavenumber restriction in systems with discontinuous nonlinearities and the buckling instability of plates. *J. Physique* 48 (1987), 1471–1478.
- [113] PANSU, B., & DUBOIS-VIOLETTE, E. Blue phases and periodic minimal surfaces. *Europhys. Lett.* 10 (1989), 43–48.
- [114] PATRÍCIO, P. *Instabilités géométriques en élasticité*. Thèse de doctorat, Université Denis Diderot, 1998.
- [115] PATRÍCIO, P., ADDA-BEDIA, M., & BEN AMAR, M. An *elastica* problem : Instabilities of an elastic arch. *Physica D* 124 (1998), 285–295.
- [116] PATRÍCIO, P., & BOUDAUD, A. Compressed ridges in elastic plates. En préparation, 2001.
- [117] PATRÍCIO, P., & KRAUTH, W. Numerical solutions for the von Kármán equations for a thin plate. *Int. J. Mod Phys. C* 8 (1997), 427–434.
- [118] PAUCHARD, L., POMEAU, Y., & RICA, S. Déformation des coques élastiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Série II* 324 (1997), 411–418.
- [119] PAUCHARD, L., & RICA, S. Contact and compression of elastic spherical shells : The physics of a ping-pong ball. *Phil. Mag. B* 78 (1998), 225–233.
- [120] PIERANSKI, P., BELIARD, L., TOURNELLE, J.-P., LEONCINI, X., FURTLER, C., DUMOULIN, H., RIOU, E., JOUVIN, B., FENEROL, J. P., PALARIC, P., HEUVING, J., CARTIER, B., & KRAUS, I. Physics of smectic membranes. *Physica A* 194 (1993), 264–389.
- [121] PIPPARD, A. B. The elastic arch and its modes of instability. *Eur. J. Phys* 11 (1990), 359–365.
- [122] PLATEAU, J. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. Gauthier-Villars, 1873.
- [123] PLOURABOUÉ, F., & ROUX, S. Experimental study of the roughness of crumpled surfaces. *Physica A* 227 (1996), 173–182.
- [124] POGORELOV, A. V. *Bendings of surfaces and stability of shells*. No. 72 in Translation of mathematical monographs. American Mathematical Society, 1988.

- [125] POMEAU, Y. Non linear pattern selection in a problem of elasticity. *J. Physique Lett.* 42 (1981), L1–L4.
- [126] POMEAU, Y. Papier froissé. *C. R. Acad. Sci. Paris* 320 (1995), 975–979.
- [127] POMEAU, Y. Buckling of thin plates in the weakly and strongly non-linear regimes. *Phil. Mag B* 78 (1998), 235–242.
- [128] POMEAU, Y., & RICA, S. Plaques très comprimées. *C. R. Acad. Sci. Paris Série II* 325 (1997), 181–187.
- [129] PRESS, W. H., TEUKOLSKI, S. A., VETTERLING, W. T., AND FLANNERY, B. P. *Numerical recipes*. Cambridge University Press, 1992.
- [130] RAMBERG, H. Fluid dynamics of viscous buckling applicable to folding of layered rocks. *Bull. Am. Assoc. Petrol. Geol.* 47 (1963), 484–505.
- [131] RICE, J. E. *Fracture : An advanced treatise*. Academic press, 1968.
- [132] ROMAN, B. *De l'elastica aux plaques plissées*. Thèse de doctorat, Université de Marseille, 2000.
- [133] ROMAN, B., & POCHÉAU, A. Buckling cascade of thin plates : Forms, constraints and similarity. *Europhys. Lett.* 46 (1999), 603–608.
- [134] RUSANOV, A. I., & KROTOV, V. V. Gibbs elasticity of liquid films, threads and foams. *Progr. Surf. Membrane Sci.* 13 (1979), 415–524.
- [135] SAINT-JALMES, A., & GALLET, F. Buckling in a solid Langmuir monolayer : light scattering measurements and elastic model. *Eur. Phys. J. B* 2 (1998), 489–494.
- [136] SANCHEZ-PALENCIA, E. Surfaces et coques élastiques minces : problèmes et défis. *La Vie des Sciences* 12, 239–258 (1995).
- [137] SCHEFFER, D., & GOLUBITSKY, M. Boundary conditions and mode jumping in the buckling of a rectangular plate. *Comm. Math. Phys.* 69 (1979), 209–236.
- [138] SCHICK, M. Avatars of the gyroid. *Physica A* 251 (1998), 1–11.
- [139] SCHMIDT, C. F., SVOBODA, K., LEI, N., PETSCHKE, I. B., BERMAN, L. E., SAFINYA, C. R., & GREST, G. S. Existence of a flat phase in red cell membrane skeletons. *Science* (1993), 952–955.
- [140] SEUNG, H. S., & NELSON, D. R. Defects in flexible membranes with crystalline order. *Phys. Rev. A* 38 (1988), 1005–1018.
- [141] SKOROBOGATIY, M., & MAHADEVAN, L. Folding of viscous sheets and filaments. *Europhys. Lett.* 52 (2000), 532–538.

- [142] SPECTOR, M. S., NARANJO, E., CHIRUVOLU, S., & ZASADZINSKI, J. A. Conformations of a tethered membrane : Crumpling in graphitic oxide ? *Phys. Rev. Lett.* 73 (1994), 2867–2870.
- [143] STRICK, T., ALLEMAND, J.-F., BENSIMON, D., LAVERY, R., & CROQUETTE, V. Phase coexistence in a single DNA molecule. *Physica A* 263 (1999), 392–404.
- [144] SULEIMAN, S. M., & MUNSON, B. R. Viscous buckling of thin fluid layers. *Phys. Fluids* 24 (1981), 1–5.
- [145] TAYLOR, G. I. The dynamics of thin sheets of fluid II. Waves on fluid sheets. *Proc. Roy. Soc. A* 253 (1959), 296–312.
- [146] TAYLOR, G. I. Instabilities of jets, threads and sheets of viscous fluid. In *Proceedings of the 12th International Congress of Applied Mechanics* (Stanford, 1968), Springer-Verlag, Ed., pp. 382–388.
- [147] TAYLOR, S. Colours shown by thin films under the action of sonorous vibrations. *Proc. Roy. Soc.* 27 (1878), 71–76.
- [148] TZSCHICHHOLZ, A., HANSEN, A., & ROUX, S. Roughness of randomly crumpled elastic sheets. cond-mat/9507xx, 1995.
- [149] VAN DE FLIERT, B. W., HOWELL, P. D., & OCKENDEN, J. R. Pressure-driven flow of a thin viscous sheet. *J. Fluid Mech.* 292 (1995), 359–376.
- [150] VEGA, J. M., HIGUERA, F. J., & WEIDMAN, P. D. Quasi-steady vortical structures in vertically vibrating soap films. *J. Fluid Mech.* 372 (1998), 213–230.
- [151] VENKATARAMANI, S. C., WITTEN, T. A., KRAMER, E. M., & GERROCH, R. P. Limitations on the smooth confinement of an unstretchable manifold. *J. Math. Phys.* 41 (2000), 5107–5128.
- [152] VON HELMHOLTZ, H. *Vorlesungen über Theoretische Physik*. Ambrosius Barth, Leipzig, 1908. vol. III, p. 139.
- [153] VON KÁRMÁN, T. *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Forschungsarbeiten, Berlin, 1910.
- [154] VON KÁRMÁN, T., & TSIEN, H.-S. The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. *J. Aero. Sci.* 8 (1941), 303.
- [155] VON SCHNERING, H. G., & NESPER, R. How nature adapts chemical structure to curved surfaces. *Angew. Chem. Int. Ed. Engl.* 26 (1987), 1059–1080.
- [156] VOROBIEFF, P., & ECKE, R. E. Cylinder wakes in flowing soap films. *Phys. Rev. E* 60 (1999), 2953–2956.

- [157] VRIJ, A., HESSELINK, F. T., LUCASSEN, J., & TEMPLE, M. V. D. Waves in thin films II. *Phys. Chem. B* 73 (1970), 124–135.
- [158] WEN, X., GARLAND, C. W., HWA, T., KARDAR, M., KOKUFUTA, E., LI, Y., ORKISZ, M., & TANAKA, T. Crumpled and collapsed conformations in graphite oxide membranes. *Nature* 355 (1992), 426–428.
- [159] WITTEN, T. A., & LI, H. Asymptotic shape of a fullerene ball. *Europhys. Lett.* 23 (1993), 51–55.
- [160] YAMAKI, N. *Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells*, vol. 27 de *North-Holland series in applied mathematics and mechanics*. North-Holland, 1984.
- [161] YARIN, A. L., & TCHAVDAROV, B. M. Onset of folding in plane liquid films. *J. Fluid Mech.* 307 (1996), 85–99.
- [162] YOON, H., & DEUTSCH, J. M. Conformation fluctuations of polymerized vesicles in the inextensible and flexible limit. *Phys. Rev. E* 56 (1997), 3412–3420.
- [163] ZHANG, Z., DAVIS, H. T., MAIER, R. S., & KROLL, D. M. Asymptotic shapes of elastic networks. *Phys. Rev. B* 52 (1995), 5004–5413.