

Anthony MICHEL - LATP Marseille

Thèse de Doctorat de l'Université de Provence

Spécialité : Mathématiques

“CONVERGENCE DE SCHÉMAS VOLUMES
FINIS POUR DES PROBLÈMES DE
CONVECTION DIFFUSION NON LINÉAIRES
DÉGÉNÉRÉS”

Directeurs de recherche :

Robert Eymard et Raphaèle Herbin.

Plan du mémoire de thèse :

- 1. Convergence de méthodes volumes finis pour les équations paraboliques hyperboliques dégénérées

$$u_t + \operatorname{div}(F(t, x, u)) - \Delta\varphi(u) = 0$$

- 1.1. Neumann homogène faiblement dégénéré + $F = \mathbf{q}f(u)$ avec $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$.
 - 1.2. Dirichlet non homogène + $F = \mathbf{q}f(u)$ avec $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$.
 - 1.3. Dirichlet non homogène avec conditions générales sur le flux .
- 2. Analyse numérique d'un modèle simplifié d'écoulement diphasique en milieu poreux
 - 2.1 Convergence du schéma VF des “mathématiciens”.
 - 2.2 Convergence d'un schéma VF décentré amont phase par phase.

[Partie 1]

EQUATIONS PARABOLIQUES
HYPERBOLIQUES NON LINÉAIRES
DÉGÉNÉRÉES

Plan de l'exposé :

- 1. Présentation du problème
- 2. Quelques repères
- 3. Formulation faible et entropique
- 4. Principal résultat
- 5. Preuve du théorème de comparaison
- 6. Applications numériques

Présentation du problème :

$$Q = \Omega \times (0, T), \Sigma = \partial\Omega \times (0, T),$$

$$u_t + \operatorname{div}(F(t, x, u)) - \Delta\varphi(u) = 0 \quad , \text{ pour } (x, t) \in Q \quad (1)$$

Condition aux bord non homogène :

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t), \text{ pour } (x, t) \in Q \quad (2)$$

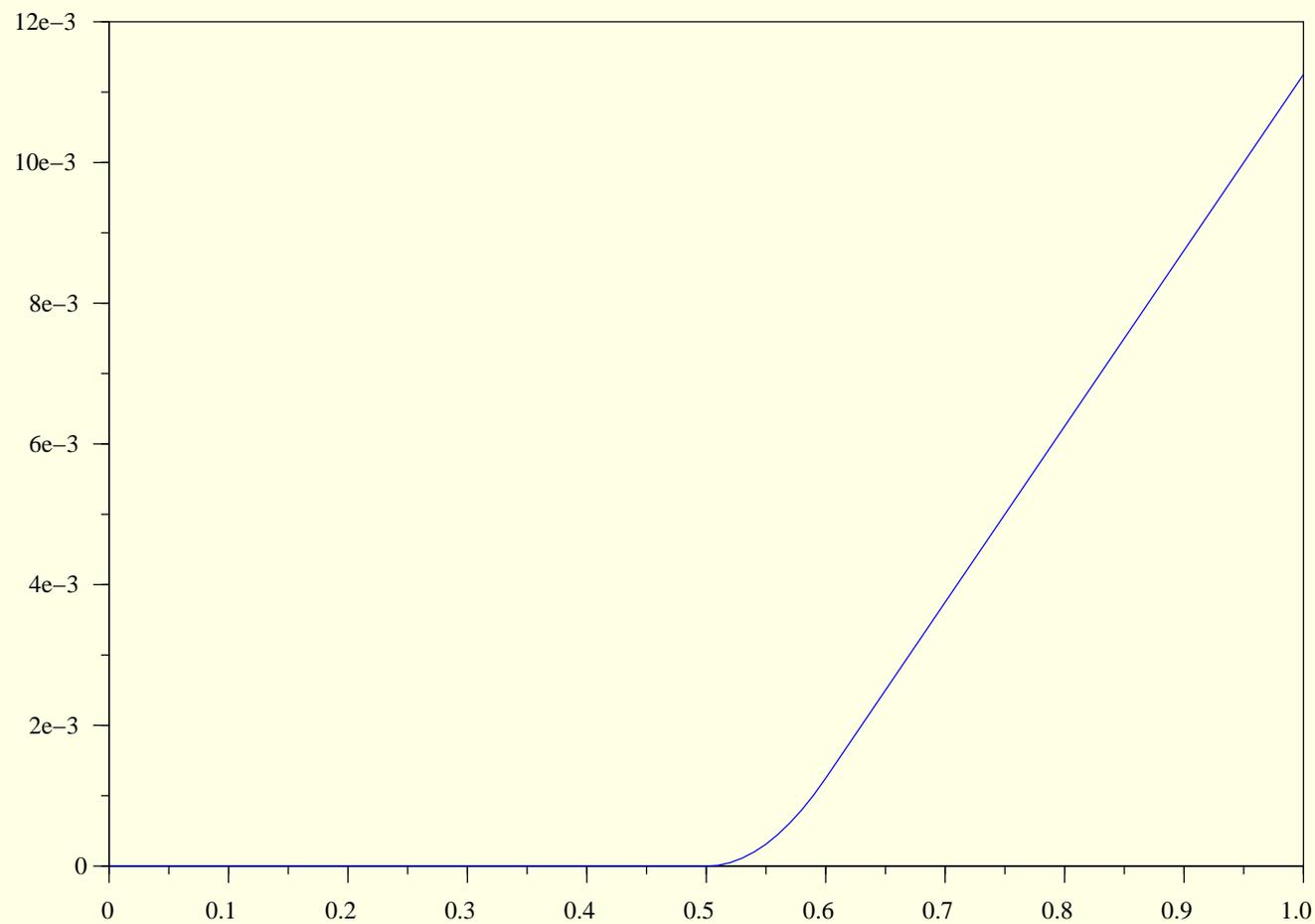
Condition initiale en $t = 0$:

$$u(x, 0) = u_0(x), \text{ pour } x \in \Omega \quad (3)$$

Hypothèses :

- (H1) $\operatorname{div}_x(F(t, x, s)) = 0$.
- (H2) φ est Lipschitzienne , croissante au sens large.
- (H3) $\bar{u} \in \mathcal{C}^0(\Sigma)$ + conditions techniques.

Exemple de graphe pour φ :



2. Quelques repères

- 1970 S.N. Kruzkov, *First order quasilinear equations with several independent variables*, *Mat. Sb.(N.S.)*.
- 1979 C.Bardos, A.Y.Le Roux, J.C. Nedelec, *First order quasilinear equations with boundary conditions*, *Comm. Part. Diff. Eq.*
- 1985 R.J. DiPerna *Measure valued solutions to conservations laws*, *Arch. Rational Mech .Anal.*
- 1996 F.Otto, *Initial boundary value problem for a scalar conservation law*, *C.R. Acad. Sci. Paris.*
- 1999 J.Carillo, *Entropy solutions for nonlinear degenerate problems*, *Arch. Ration. Mech. Anal.*

- 2001 J.Vovelle, *Convergence of finite volume monotone scheme for scalar conservation law on bounded domain*, *Num. Math.*
- 2001 R.Eymard, T.Gallouet, R.Herbin, A. Michel, *Convergence of finite volume scheme for parabolic degenerate problems*, *Num. Math.*

3. Formulation faible et entropique

Définition 1 (Solution faible) *On dit que u est solution faible du problème (1)-(3) si*

$$u \in L^\infty(\Omega \times (0, T)),$$
$$\varphi(u) - \varphi(\bar{u}) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

et pour toute fonction $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, T))$,

$$\iint_Q \left[u(x, t) \theta_t(x, t) + (F(t, x, u(x, t)) - \nabla(\varphi(u)(x, t))) \cdot \nabla \theta(x, t) \right] dx dt$$
$$+ \int_\Omega u_0(x) \theta(x, 0) dx = 0.$$

Définition 2 (Couples entropie flux) Soit $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $\Phi : Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, on dit (η, Φ) est un couple entropie-flux associé à F si

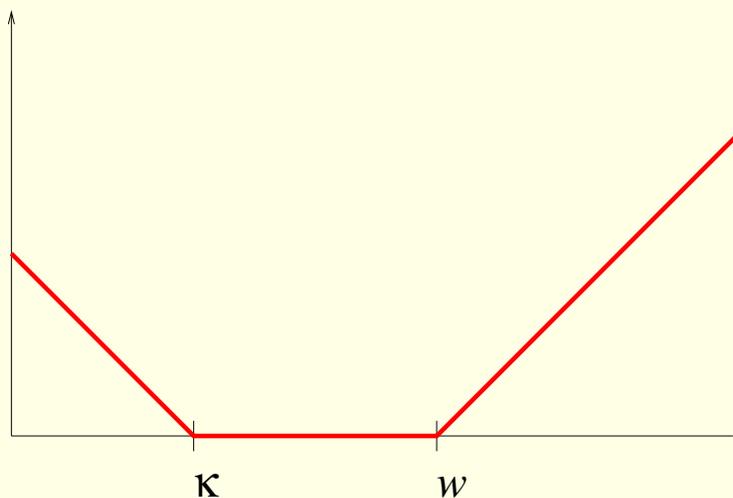
$$\Phi'(t, x, s) = \eta'(s)F'(t, x, s)$$

Exemple :
$$\begin{cases} \eta_{\kappa}^+(s) = s \top \kappa - \kappa = (s - \kappa)^+, \\ \Phi_{\kappa}^+(t, x, s) = F(t, x, s \top \kappa) - F(t, x, \kappa) \end{cases}$$

Notations :

$$\mathcal{G}_x(t, x, u, \kappa) = F(t, x, u \top \kappa) - F(t, x, s, u \perp \kappa) - \nabla |\varphi(u) - \varphi(\kappa)|$$

$$\mathcal{F}_{\varphi}(t, x, u, \kappa, w) = \mathcal{G}_x(t, x, u, \kappa) + \mathcal{G}_x(t, x, u, w) - \mathcal{G}_x(t, x, \kappa, w).$$



Définition 3 (Solution faible entropique) *On dit que u est une solution faible entropique du problème (1)-(3), si c'est une solution faible qui vérifie les inégalités suivantes :*

1. $\forall \kappa \in \mathbb{R}$, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, T))$ telle que $\psi \geq 0$ et $\text{sgn}^+(\bar{u} - \kappa)\psi = 0$ sur Σ ,

$$\begin{aligned} & \iint_Q (\eta_\kappa^+(u(x, t))\psi_t(x, t) + \Phi_\kappa^+(t, x, u(x, t)) \cdot \nabla\psi(x, t)) \, dx \, dt \\ & - \iint_Q \nabla(\varphi(u)(x, t) - \varphi(\kappa))^+ \cdot \nabla\psi(x, t) \, dx \, dt \\ & + \int_\Omega \eta_\kappa^+(u_0) \varphi(x, 0) \, dx \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

2. $\forall \kappa \in \mathbb{R}$, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, T))$ telle que $\psi \geq 0$ et $\text{sgn}^+(\bar{u} - \kappa)\psi = 0$ sur Σ ,

... l'analogie de l'inégalité (4) avec sgn^+ au lieu de sgn^- .

4. Principal résultat

Théorème 1 (Théorème de comparaison) *Soit u et v deux solutions processus entropiques du problème (1)-(3), alors pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}([0, T], \mathbb{R}^d)$,*

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_Q \left(|u(x, t, \alpha) - v(x, t, \beta)| \psi_t + \mathcal{G}_x(t, x, u(x, t, \alpha), v(x, t, \beta)) \cdot \nabla \psi \right) dx dt d\alpha d\beta \leq 0$$

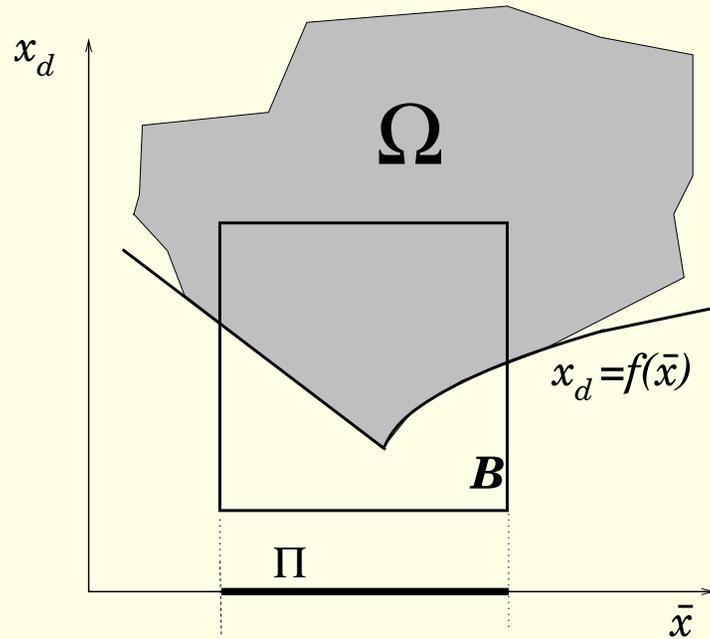
Corollaire 1 (Unicité) *Soit $u, v \in L^\infty(Q \times (0, 1))$ deux solutions processus entropique au problème (1)-(3), alors il existe une fonction $w \in L^\infty(Q)$, telle que*

$$u(x, t, \alpha) = w(x, t) = v(x, t, \beta) , \text{ p.p. } (x, t, \alpha, \beta) \in Q \times (0, 1)^2$$

Corollaire 2 (Convergence forte du schéma) *Si le schéma “converge à une sous suite près” vers une solution processus entropique au sens des mesures d’Young, alors la convergence est forte et le schéma converge vers une solution faible entropique.*

5. Preuve du théorème de comparaison

- Etape 1 : Estimation près du bord



$$\omega_\varepsilon : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}, \omega_\varepsilon(x) = \int_{f(\bar{x}) - x_d}^0 \rho_\varepsilon(z) dz = \int_{\frac{f(\bar{x}) - x_d}{\varepsilon}}^0 \rho(z) dz$$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q \mathcal{F}_\varphi(t, x, u(x, t, \alpha), \kappa, \bar{u}_\Sigma(x, t)) \cdot \nabla \omega_\varepsilon(x) \psi(x, t) \lambda(x) dx dt \leq 0$$

- **Etape 2** : Comparaison de 2 solutions u et v à l'intérieur

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \int_Q \int_Q \left[\begin{aligned} & |u(x, t, \alpha) - v(y, s)|(\xi_t + \xi_s) \\ & + \mathcal{G}_x(t, x, u(x, t, \alpha), v(y, s)) \cdot \nabla_x \xi \\ & + \mathcal{G}_y(s, y, v(y, s), u(x, t, \alpha)) \cdot \nabla_y \xi \\ & - \nabla_x |\varphi(u)(x, t) - \varphi(v)(y, s)| \cdot \nabla_y \xi \\ & - \nabla_y |\varphi(u)(x, t) - \varphi(v)(y, s)| \cdot \nabla_x \xi \end{aligned} \right] dx dt dy ds d\alpha d\beta \\
& + \int_0^1 \int_Q \int_\Omega |u_0(x) - v(y, s, \beta)| \xi(0, x, s, y) dx dy ds d\beta \\
& + \int_0^1 \int_Q \int_\Omega |u_0(y) - u(x, t, \alpha)| \xi(t, x, 0, y) dx dt dy d\alpha \geq 0
\end{aligned}$$

- **Etape 3** : dédoublement de la variable t :

1) $\xi(x, t, s, y) = \rho_n(t - s)\zeta(t, x, y)$ dans l'inégalité obtenue à l'étape 2.

2) $\kappa = u_0(x)$ et $\psi(s, y) = R_n(s)\zeta(0, x, y)$ dans l'inégalité d'entropie pour v .

- **Etape 4**. dédoublement de la variable x :

1) On prend $\xi(t, x, s, y) = \psi(x, t) \rho_m(\bar{x} - \bar{y}) \rho_n(x_d - y_d)$,

2) Localisation de ξ dans B et annulation au bord de Ω :

$$\zeta(t, x, y) = \omega_\varepsilon(x)\xi(t, x, y)\lambda(x)$$

Finalement, on obtient

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_Q |u - v| (\psi \lambda)_t + \mathcal{G}_x(t, x, u, v) \cdot \nabla(\psi \lambda) dx dt d\alpha d\beta \geq A(u, v)$$

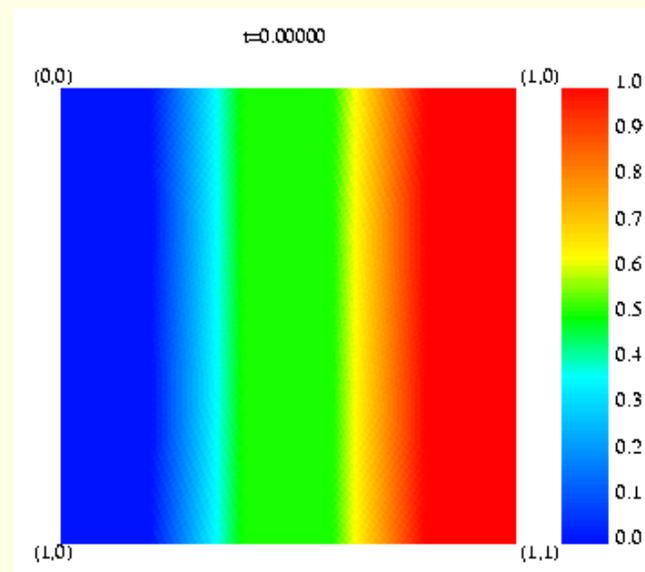
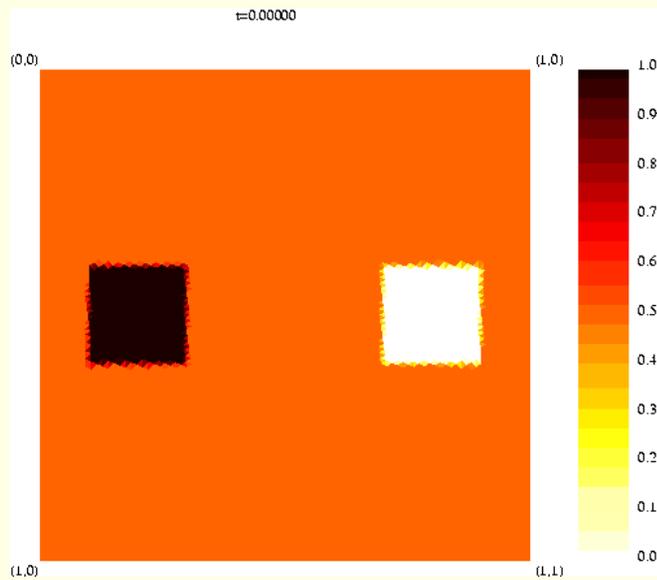
où

$$\begin{aligned} A(u, v) = & \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q \mathcal{G}_x(t, x, u, \bar{u}) \cdot \nabla \omega_\varepsilon(x) \psi \lambda dx dt d\alpha \\ & - \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q \mathcal{G}_x(t, x, v, \bar{u}) \cdot \nabla \omega_\varepsilon(x) \psi \lambda dx dt d\alpha \end{aligned}$$

On peut conclure car sous des hypothèses convenables sur \bar{u}

$$-\infty < \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q \mathcal{G}_x(t, x, u, \bar{u}) \cdot \nabla \omega_\varepsilon(x) \psi \lambda dx dt d\alpha \leq 0 \quad (5)$$

6. Applications numériques :



[Partie 2]

ÉTUDE MATHÉMATIQUE D'UN SCHÉMA
INDUSTRIEL POUR UN MODÈLE
D'ÉCOULEMENT DIPHASIQUE EN MILIEU
POREUX

Plan de l'exposé :

- 1. Présentation du problème
- 2. Hypothèses
- 3. Formulation faible
- 4. Méthode de discrétisation en volumes finis
- 5. Principal résultat
- 6. Etapes de la preuve du théorème de convergence
- 7. *Détail des estimations a priori*

1. Présentation du problème :

$$\begin{aligned}u_t - \operatorname{div}(k_1(u)\nabla p) &= f(c)\bar{s} - f(u)\underline{s} \\(1 - u)_t - \operatorname{div}(k_2(u)\nabla q) &= h(c)\bar{s} - h(u)\underline{s} \\q &= p + p_c(u)\end{aligned}$$

(6)

avec $f(x) = \frac{k_1(x)}{k_1(x) + k_2(x)}$, $h(x) = \frac{k_2(x)}{k_1(x) + k_2(x)}$.

Conditions aux limites sur $\partial\Omega$:

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \nabla q \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (7)$$

Condition initiale :

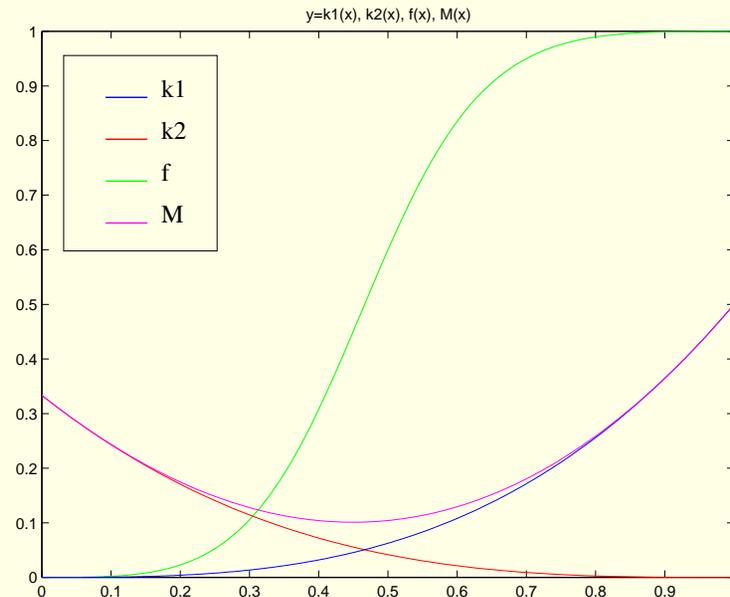
$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (8)$$

Condition d'homogénéité :

$$\int_{\Omega} p(x, t) dx = 0, \quad \text{pour tout } t \in (0, T) \quad (9)$$

2. Hypothèses :

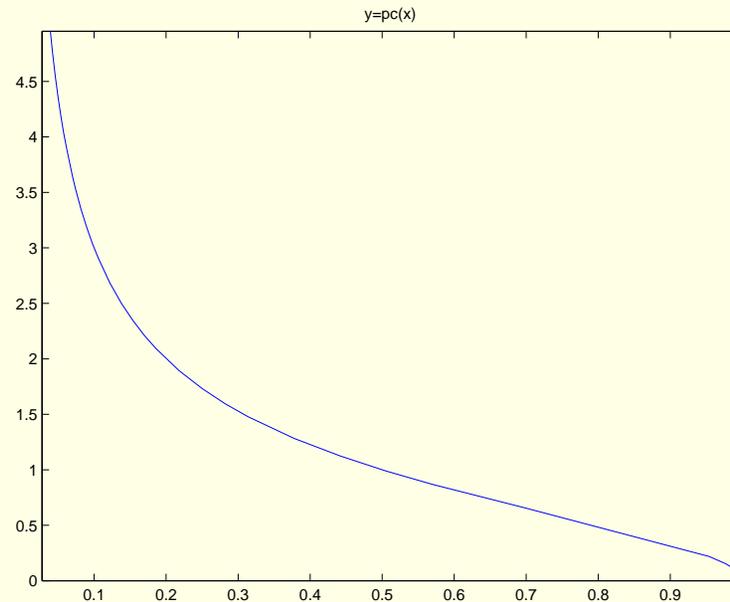
- (H1) $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $0 \leq u_0(x) \leq 1$
- (H2) $c \in L^\infty(Q)$, $0 \leq c \leq 1$
- (H3) $\bar{s}, \underline{s} \in L^2(Q)$, $\bar{s} \geq 0$, $\underline{s} \geq 0$ et $\int_{\Omega} \bar{s} - \underline{s} = 0$.
- (H4) $\left\{ \begin{array}{l} k_1, k_2 \in C^1([0, 1], \mathbb{R}), k_1' \geq 0, k_2' \leq 0, k_1(0) = 0, k_2(1) = 0 \\ \frac{1}{\alpha} \geq k_1'(s) \geq \alpha \text{ et } \frac{1}{\alpha} \geq -k_2'(s) \geq \alpha, \text{ avec } \alpha > 0, \text{ pour tout } s \in [0, 1] \end{array} \right.$



- (H5) $p_c \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1((0, 1), \mathbb{R})$ et il existe $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$, avec $\beta_1 < 1$ et $\beta_2 < 1$ tels que

$$\frac{1}{\alpha s^{\beta_1} (1-s)^{\beta_2}} \geq -p_c'(s) \geq \frac{\alpha}{s^{\beta_1} (1-s)^{\beta_2}},$$

pour tout $s \in (0, 1)$.



Notations :

- Pression globale :

$$p_g(s) = \int_0^s \frac{k_2(a)}{k_1(a) + k_2(a)} p_c'(a) da$$

$$q_g(s) = \int_0^s \frac{k_1(a)}{k_1(a) + k_2(a)} p_c'(a) da$$

Conséquences des hypothèses :

- (C1) $p_g, q_g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1((0, 1), \mathbb{R})$, p_g est $(1 - \beta_2)$ Hölder en 0 est $(1 - \beta_1)$ Hölder en 1.

- Fonction g :

$$g(s) = - \int_0^s \frac{k_1(a)k_2(a)}{k_1(a) + k_2(a)} p_c'(a) da.$$

Conséquences des hypothèses :

- (C2) $g \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, $g'(0) = 0$, $g'(1) = 0$ et $g'(s) > 0$ pour tout $s \in (0, 1)$.
- (C3) Il existe $C(\alpha, \beta_1, \beta_2)$ tel que, quel que soit $(a, b) \in [0, 1]^2$,

$$(b - a)(p_g(b) - p_g(a)) \leq C |g(b) - g(a)|,$$

$$(b - a)(q_g(b) - q_g(a)) \leq C |g(b) - g(a)|.$$

3. Formulation faible

Définition 4 (solution faible) *Sous les hypothèses (H1)-(H8), on dit que (u, p) est une solution faible du problème (6)-(9), si*

$$u \in L^\infty(\Omega \times (0, T)), 0 \leq u(x, t) \leq 1 \text{ et } g(u) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

$$p \in L^2(\Omega \times (0, T)), p + p_g(u) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

et pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times (0, T))$, on a :

$$\begin{aligned} \text{(Eq1)} \quad & \int_0^T \int_\Omega u(x, t) \varphi_t(x, t) - k_1(u(x, t)) \nabla p(x, t) \cdot \nabla \varphi(x, t) dx dt + \\ & \int_0^T \int_\Omega [f(c(x, t)) \bar{s}(x, t) - f(u(x, t)) \underline{s}(x, t)] \varphi(x, t) dx dt + \\ & \int_\Omega u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0 \end{aligned}$$

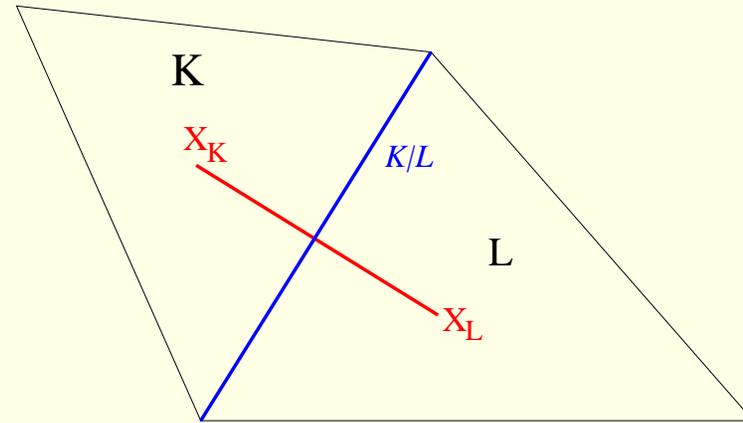
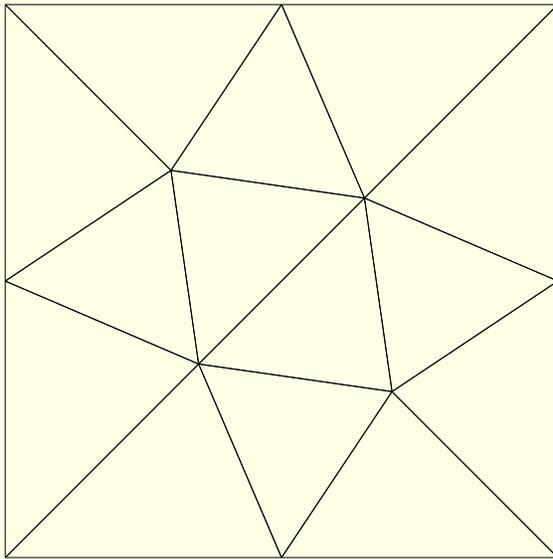
$$\begin{aligned} \text{(Eq2)} \quad & \int_0^T \int_\Omega [(1 - u(x, t)) \varphi_t(x, t) - k_2(u(x, t)) \nabla (p + p_c(u))(x, t) \cdot \nabla \varphi(x, t)] dx dt + \\ & \int_0^T \int_\Omega [h(c(x, t)) \bar{s}(x, t) - h(u(x, t)) \underline{s}(x, t)] \varphi(x, t) dx dt + \\ & \int_\Omega (1 - u_0(x)) \varphi(x, 0) dx = 0 \end{aligned}$$

Et p vérifie l'équation d'homogénéité suivante :

$$(Eq3) \quad \int_{\Omega} p(x, t) dx = 0 \quad \forall t \in (0, T)$$

4. Méthode de discrétisation en volumes finis

- Ω polygonal borné, \mathcal{T} maillage admissible (VF), $\mathcal{E} = \{(K, L), (K, L) \in \mathcal{T}^2\}$, $\{x_K\}_{K \in \mathcal{T}}$ centres des volumes de contrôle.
- $[0 = t^0 \leq t^1 \dots \leq t^n \leq t^{n+1} = T]$ subdivision de $(0, T)$.



Notations :

$$d_{K|L} = d(x_K, x_L), T_{K|L} = \frac{m(K|L)}{d_{K|L}}, \mathcal{N}_K = \{L \in \mathcal{E}, m(K|L) > 0\}$$

$$\begin{cases} u_D(x, t) = U_K^{n+1} \\ p_D(x, t) = P_K^{n+1} \end{cases}, \text{ pour tout } (x, t) \in K \times (t^n, t^{n+1}).$$

- Dérivée en temps

$$\int_K u_t \sim \frac{U_K^{n+1} - U_K^n}{\delta t^n} |K|$$

- Condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x) \sim U_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K u_0(x) dx, \text{ pour tout } K \in \mathcal{T}$$

- Condition d'homogénéité sur la pression

$$\int_{\Omega} P = 0 \sim \sum_{L \in \mathcal{N}_K} P_K^{n+1} = 0, \text{ pour tout } n \in \llbracket 0, N \rrbracket$$

- Termes sources

$$\int_K f(c) \bar{s} - f(u) \underline{s} \sim |K| (f(c_K^{n+1}) \bar{s}_K^{n+1} - f(U_K^{n+1}) \underline{s}_K^{n+1})$$

$$\int_K h(c) \bar{s} - h(u) \underline{s} \sim |K| (h(c_K^{n+1}) \bar{s}_K^{n+1} - h(U_K^{n+1}) \underline{s}_K^{n+1})$$

- Décentrage du flux relatif à la phase 1 :

$$\int_K \operatorname{div}(k_1(u)\nabla p) = \sum_{L \in \mathcal{N}_K} \int_{K|L} k_1(u)\nabla p \cdot \mathbf{n}_{K,L} \rightsquigarrow \boxed{\sum_{L \in \mathcal{N}_K} T_{K|L} k_{1,K|L}^{n+1} (P_L^{n+1} - P_K^{n+1})}$$

On décentre le flux de convection par rapport au gradient discret de p . La fonction k_1 étant croissante, $(-k_1)$ est décroissante donc

$$k_{1,K|L}^{n+1} = k_1(U_{1,K|L}^{n+1})$$

avec

$$U_{1,K|L}^{n+1} = \begin{cases} U_K^{n+1} & \text{si } P_L^{n+1} - P_K^{n+1} < 0 \\ U_L^{n+1} & \text{sinon} \end{cases} \quad (10)$$

- Décentrage du flux relatif à la phase 2 :

$$\int_K \operatorname{div}(k_2(u)\nabla q) \rightsquigarrow \sum_{L \in \mathcal{N}_K} T_{K|L} k_{2,K|L}^{n+1} (Q_L^{n+1} - Q_K^{n+1})$$

où $Q_K^{n+1} = P_K^{n+1} + p_c(U_K^{n+1})$.

De la même façon, comme la fonction k_2 est décroissante, on définit

$$k_{2,K|L}^{n+1} = k_2(U_{2,K|L}^{n+1})$$

avec

$$U_{2,K|L}^{n+1} = \begin{cases} U_K^{n+1} & \text{si } Q_L^{n+1} - Q_K^{n+1} < 0 \\ U_L^{n+1} & \text{sinon} \end{cases} \quad (11)$$

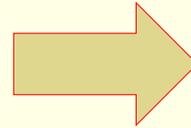
5. Principal résultat :

Théorème 2 (Théorème de convergence) *Sous les hypothèses (H1)-(H8), soit $\{D_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de discrétisations de $\Omega \times (0, T)$, uniformément régulières, telles que $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{size}(D_m) = 0$. Soit (u_{D_m}, p_{D_m}) une solution discrète du schéma VF décentré phase par phase attaché à D_m .*

Alors, à une sous suite près, (u_{D_m}, p_{D_m}) converge vers une solution faible (u, p) du problème (6)-(9), au sens de la Définition 4.

6. Preuve du théorème de convergence

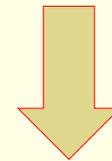
EDP non linéaires
 $\Omega \times (0, T)$ polygonal borné



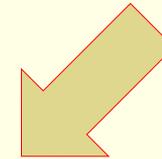
Discrétisation

Systeme d'EQ non linéaire
 D discrétisation admissible

Estimations *a priori*
 + Th. de point fixe



(U_D, P_D)



Approximation
 Constante par maille

(u, p)



Estimations *a priori*
 + Th. de Compacité



$$\begin{aligned} u_D(x, t) &= U_K^{n+1}, x \in K \times (t^n, t^{n+1}) \\ p_D(x, t) &= P_K^{n+1}, x \in K \times (t^n, t^{n+1}) \end{aligned}$$

7. Détail des estimations *a priori*

Soit (U_D, P_D) une solution discrète ...

Proposition 1 (Principe du maximum)

$$0 \leq U_K^n \leq 1, \quad \forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in \llbracket 0, N + 1 \rrbracket. \quad (12)$$

Preuve ...

Proposition 2 (Estimations sur la pression)

$$\sum_{n=0}^N \delta t^n \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in \mathcal{N}_K} T_{K|L} k_{1,K|L}^{n+1} (\delta_{K,L}^{n+1}(P))^2 \leq C \quad (13)$$

$$\sum_{n=0}^N \delta t^n \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in \mathcal{N}_K} T_{K|L} k_{2,K|L}^{n+1} (\delta_{K,L}^{n+1}(Q))^2 \leq C \quad (14)$$

et

$$\sum_{n=0}^N \delta t^n \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in \mathcal{N}_K} T_{K|L} (\delta_{K,L}^{n+1}(P) + \delta_{K,L}^{n+1}(p_g(U)))^2 \leq C \quad (15)$$

Preuve ...

Proposition 3

$$\sum_{n=0}^N \delta t^n \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in \mathcal{N}_K} T_{K|L} \delta_{K,L}^{n+1}(g(U)) \delta_{K,L}^{n+1}(f(U)) \leq C \quad (16)$$

Corollaire 3

$$\sum_{n=0}^N \delta t^n \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in \mathcal{N}_K} T_{K|L} |\delta_{K,L}^{n+1}(\zeta(u))|^2 \leq C \quad (17)$$

Merci