



HAL
open science

Generalisation de la theorie arithmetique des D-modules a la geometrie logarithmique

Claude Montagnon

► **To cite this version:**

Claude Montagnon. Generalisation de la theorie arithmetique des D-modules a la geometrie logarithmique. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2002. Français. NNT : . tel-00002545

HAL Id: tel-00002545

<https://theses.hal.science/tel-00002545>

Submitted on 12 Mar 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

pour obtenir

le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

Mention Mathématiques et Applications

par

Claude MONTAGNON

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

*Généralisation de la théorie arithmétique des D -modules
à la géométrie logarithmique*

Soutenue le 22 novembre 2002 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

M. Luc Illusie	rapporteur
M. Francesco Baldassarri	rapporteur
M. Michel Gros	
M. Bernard Le Stum	
M. Pierre Berthelot	directeur

Table des matières

Introduction	5
1 Rappels et conventions générales	9
1.1 Schémas logarithmiques	9
1.2 Opérateurs différentiels de niveau m	10
1.2.1 Puissances divisées	10
1.2.2 Coefficients binômiaux modifiés	11
1.2.3 Puissances divisées partielles	12
1.2.4 Multi-indices	13
2 Opérateurs différentiels logarithmiques de niveau m	15
2.1 Voisinages à puissances divisées de niveau m	15
2.2 Application à la diagonale	17
2.2.1 Voisinages à puissances divisées de la diagonale	17
2.2.2 L'application μ	18
2.2.3 Description locale	19
2.2.4 Functorialité	19
2.3 Faisceaux d'opérateurs différentiels	21
2.3.1 Définition	21
2.3.2 Loi de composition dans $\mathcal{D}_X^{(m)}$	21
2.4 Functorialité	30
2.5 Que se passe-t-il lorsque m varie ?	31
2.5.1 Applications $\rho_{m',m}$	31
2.5.2 Relation avec Φ^b	31
2.6 PD-stratifications logarithmiques de niveau m	32
3 Élévation du niveau par Frobenius	37
3.1 Notations	37
3.2 Situation	38
3.3 Élévation du niveau par Frobenius	38
3.4 Description en coordonnées locales dans le cas de la caractéristique p	42

4	Descente par Frobenius	45
4.1	L'anneau $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$	46
4.1.1	Structure de $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module de \mathcal{A}_X^{gp}	46
4.1.2	L'anneau $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$	48
4.2	Le cas de la caractéristique p	48
4.2.1	L'anneau $\tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$	48
4.2.2	Les foncteurs \mathbb{F} et \mathbb{G}	50
4.2.3	Le projecteur P	54
4.2.4	Les applications $\Pi_{\mathcal{E}}$ et $\Psi_{\mathcal{E}}$	56
4.2.5	Descente par Frobenius	62
4.3	Descente sur une base annulée par p^N ($N \geq 1$)	63
4.3.1	Le foncteur \mathbb{F}	64
4.3.2	Exactitude de \mathbb{F}	67
4.3.3	Étude locale de \mathbb{F}	68
4.3.4	Les foncteurs \mathbb{F} et \mathbb{G}	69
4.3.5	Descente par Frobenius	72
5	Dimension homologique des faisceaux $\mathcal{D}_X^{(m)}$	75
5.1	Le niveau zéro	75
5.1.1	La structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à droite de $\omega_{(X,M)}$	75
5.1.2	Le faisceau tangent	76
5.1.3	Dimension homologique de $\mathcal{D}_X^{(0)}$	77
5.2	Description des algèbres \mathcal{A}_X^{gp} et $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$	78
5.3	Le niveau m	81
6	Annexe	83

Introduction

L'objet de cette thèse est de commencer la généralisation de la théorie arithmétique des \mathcal{D} -modules, développée par Pierre Berthelot, à la log-géométrie. Les log-schémas ont été introduits par Jean-Marc Fontaine et Luc Illusie pour démontrer les conjectures de Fontaine sur les représentations galoisiennes définies par la cohomologie étale p -adique des variétés à réduction semi-stable sur un corps de valuation discrète complet. Kazuya Kato a repris cette notion pour la développer de manière systématique ([Kat89], [Kat94]), de sorte que l'on parle maintenant de structures logarithmiques de Fontaine-Illusie-Kato. Un log-schéma (X, M) est un schéma usuel X muni d'une log-structure, c'est-à-dire d'un couple (M, α) , où M est un faisceau de monoïdes commutatifs pour la topologie étale, et $\alpha : (M, +) \rightarrow (\mathcal{O}_X, \times)$ est un morphisme de faisceaux de monoïdes tel que $\alpha^{-1}\mathcal{O}_X^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X^*$. Intuitivement, se donner une log-structure revient à se donner des "logarithmes" pour certaines fonctions sur le schéma. L'exemple de base d'une log-structure est donnée par un diviseur à croisements normaux sur un schéma X : dans ce cas, la log-structure est définie par le sous-faisceau des fonctions inversibles en dehors du diviseur. On peut généraliser à la catégorie des log-schémas la plupart des notions usuelles, notamment celles d'immersions fermées, de morphismes log-lisses, log-étales, ... Signalons enfin que les log-structures donnent naissance aux formes différentielles et aux connexions à pôle logarithmique.

Les \mathcal{D} -modules arithmétiques développés par Pierre Berthelot ([Ber74], [Ber96], [Ber00]) permettent d'étendre hors de la caractéristique 0 les résultats de base de la théorie classique des \mathcal{D}_X -modules, c'est-à-dire des modules sur l'anneau des opérateurs différentiels \mathcal{D}_X . En niveau 0, la construction de Pierre Berthelot s'appuie sur la notion d'idéal à puissances divisées ; ces puissances divisées sont des opérateurs qui remplacent les opérateurs $x^k/k!$ non définis en caractéristique strictement positive. Imitant [EGA] IV, (16.8), il construit un faisceau d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}_X^{(0)}$, engendré librement par les dérivations, et tel que la donnée d'une connexion intégrable sur un \mathcal{O}_X -module soit équivalente à celle d'une structure de $\mathcal{D}_X^{(0)}$ -module à gauche.

L'action du morphisme de Frobenius F , lorsque la base est annulée par une puissance d'un premier p , l'a ensuite amené à affaiblir la notion de puissances divisées à un niveau m quelconque (m entier). En effet, le théorème de descente de Cartier (voir [Kat71], théorème 5.1) établit que pour S de caractéristique p , X lisse sur S , $F : X \rightarrow X'$ le morphisme de Frobenius relatif, le foncteur F^* établit une équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathcal{O}_{X'}$ -modules et celle des \mathcal{O}_X -modules munis d'une connexion intégrable à p -courbure nulle.

Si un $\mathcal{O}_{X'}$ -module \mathcal{E}' est lui-même muni d'une connexion intégrable ∇' , l'image inverse de ∇' par F est encore la connexion canonique à p -courbure nulle de $F^*\mathcal{E}'$. Pierre Berthelot a montré dans [Ber00] que l'information supplémentaire que constitue ∇' n'est en réalité pas perdue en appliquant F^* , puisqu'un nouveau faisceau $\mathcal{D}_X^{(1)}$ agit alors sur $F^*\mathcal{E}'$. Plus précisément, il a montré que F^* établit une équivalence de catégories entre $\mathcal{D}_{X'}^{(0)}$ -modules et $\mathcal{D}_X^{(1)}$ -modules. Ce processus s'itère, et l'on obtient une équivalence de catégories entre $\mathcal{D}_{X^{(p^s)}}^{(m)}$ -modules et $\mathcal{D}_X^{(m+s)}$ -modules (cf [Ber00], théorème 2.3.6.). Signalons en outre que les faisceaux $\mathcal{D}_X^{(m)}$ forment un système inductif dont la limite redonne le faisceau \mathcal{D}_X des opérateurs différentiels usuels.

Après avoir généralisé la définition des faisceaux $\mathcal{D}_X^{(m)}$ aux log-schémas, en suivant la méthode de Kazuya Kato pour le niveau 0, nous nous intéresserons à l'action du Frobenius sur les $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules à gauche, pour établir un théorème de descente analogue à celui de Pierre Berthelot. Détaillons un peu mieux à présent le contenu de ce manuscrit.

Dans le premier chapitre, nous faisons quelques rapides rappels sur les notions de log-structures et de puissances divisées.

Le deuxième chapitre est consacré à la construction et à l'étude des premières propriétés des anneaux $\mathcal{D}_X^{(m)}$ pour un log-schéma. Le faisceau $\mathcal{D}_X^{(m)}$ est obtenu en dualisant les voisinages à puissances divisées partielles nilpotentes $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$, de l'idéal de la factorisation de Kato de l'immersion diagonale $(X, M) \hookrightarrow (X^2, M_{X^2})$. Les formules sont généralement plus complexes que dans le cas classique, mais les résultats de base s'étendent ici sans problème. Nous montrons par exemple que $\mathcal{D}_X^{(m)}$ est encore engendré par les opérateurs d'ordre au plus p^m .

Le troisième chapitre commence l'étude de l'action par le morphisme de Frobenius, qui est complétée au chapitre suivant. Comme dans le cas classique, le morphisme de Frobenius (plus précisément un relèvement de ce morphisme) induit une élévation du niveau, définissant ainsi un foncteur F^* de la catégories des $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$ -modules vers celle des $\mathcal{D}_X^{(m+1)}$ -modules. Par contre le théorème de descente établi par Pierre Berthelot (cf [Ber00], théorème 2.3.6.) est en défaut dans le cas logarithmique. Une différence essentielle est que le morphisme de Frobenius n'est généralement pas plat (voir l'exemple donné par Arthur Ogus dans [Ogu94], page 24), mais l'obstruction principale réside dans l'application résidu définie également par Arthur Ogus dans [Ogu94]. Cette application est définie comme suit. Notons (X^*, M^*) le (S, L) -log-schéma dont le schéma sous-jacent est X (au-dessus de S) et dont la log-structure est l'image inverse de L . Nous avons alors $\Omega_{X/S}^1 \simeq \Omega_{(X^*, M^*)/(S, L)}^1$. D'autre part f se factorise en $f = f^* \circ u$, avec $u : (X, M) \rightarrow (X^*, M^*)$ et $f^* : (X^*, M^*) \rightarrow (S, L)$. Nous avons donc la suite exacte suivante :

$$\Omega_{(X^*, M^*)/(S, L)}^1 \rightarrow \Omega_{(X, M)/(S, L)}^1 \xrightarrow{r} R_{(X, M)/(S, L)} \rightarrow 0$$

avec $R_{(X, M)/(S, L)} = \Omega_{(X, M)/(X^*, M^*)}^1$. L'application $d : \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{(X, M)/(S, L)}^1$ se factorise à

travers $\Omega^1_{(X^*, M^*)/(S, L)}$, donc l'application composée $\mathcal{O}_X \rightarrow R_{(X, M)/(S, L)}$ est nulle. L'application résidu d'une connexion logarithmique $\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes \Omega^1_{(X, M)/(S, L)}$ est définie comme la composée $(id_{\mathcal{E}} \otimes r) \circ \nabla$. Celle d'une connexion définie par une donnée de descente de X à X' est nulle puisque celle de d l'est. Une condition nécessaire pour qu'un \mathcal{O}_X -module muni d'une connexion intégrable à p -courbure nulle provienne d'un $\mathcal{O}_{X'}$ -module est donc la nullité de l'application résidu. Afin de contourner cette obstruction, nous reprenons les constructions effectuées par Pierre Lorenzon dans sa thèse ([Lor97], [Lor00]). Ce dernier substitue au faisceau structural \mathcal{O}_X une \mathcal{O}_X -algèbre indexée qu'il note \mathcal{A}_X^{gp} , et remplace $\mathcal{O}_{X'}$ par la sous- $\mathcal{O}_{X'}$ -algèbre indexée $\mathcal{B}_{X/S}$ des sections horizontales de \mathcal{A}_X^{gp} pour une certaine connexion canonique. Il obtient alors un théorème de descente de type Cartier entre \mathcal{A}_X^{gp} -modules indexés munis d'une connexion intégrable et p -intégrable et $\mathcal{B}_{X/S}$ -modules indexés. Nous généralisons ces constructions à un relèvement de la puissance m -ième du Frobenius (notre théorie fonctionne donc modulo p^N et pas seulement modulo p), pour établir une équivalence de catégories entre $\mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules (indexés) et $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(0)}$ -modules (indexés) dans le chapitre 4 (théorème (4.3.1)).

Dans le cinquième chapitre, nous déduisons de cette équivalence de catégories la finitude de la dimension cohomologique des faisceaux $\mathcal{D}_X^{(m)}$, dans le cas où la log-structure est définie par un diviseur à croisements normaux.

Enfin, le sixième chapitre constitue une annexe dans laquelle nous faisons quelques rappels sur les algèbres \mathcal{A}_X^{gp} et $\mathcal{B}_{X/S}$ de Lorenzon.

Chapitre 1

Rappels et conventions générales

Dans ce chapitre, nous faisons quelques rappels sur les schémas logarithmiques de Fontaine-Illusie-Kato d'une part (en renvoyant à l'article de K.Kato [Kat89]), et sur les opérateurs différentiels de niveau m de Berthelot d'autre part (les références étant dans ce cas [Ber74], [Ber78] pour les puissances divisées usuelles, et [Ber96] pour les puissances divisées partielles).

1.1 Schémas logarithmiques

Tous les monoïdes considérés sont supposés commutatifs et unitaires. On utilisera en général une notation additive. Un morphisme de monoïdes conserve l'élément unité. Pour un monoïde M , on notera M^{gp} le groupe associé à M .

Définition 1.1.1. *Soit X un schéma. Une pré-log-structure sur X est une paire (M, α) où M est un faisceau de monoïdes pour la topologie étale et $\alpha : (M, +) \rightarrow (\mathcal{O}_X, \times)$ est un morphisme de monoïdes.*

Définition 1.1.2. *Un morphisme de schémas munis de pré-log-structures $(X, M, \alpha) \rightarrow (Y, N, \beta)$ est une paire (f, h) où $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de schémas et $h : f^{-1}N \rightarrow M$ est un morphisme de faisceaux de monoïdes tels que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}N & \xrightarrow{h} & M \\ f^{-1}(\beta) \downarrow & & \downarrow \alpha \\ f^{-1}(\mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{O}_X \end{array}$$

Définition 1.1.3. *Une pré-log-structure sur X est appelée log-structure si α induit un isomorphisme $\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X^*$.*

On identifiera souvent $\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*) \subset M$ à \mathcal{O}_X^* via cet isomorphisme. Par exemple, l'inclusion $\mathcal{O}_X^* \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ définit la log-structure triviale sur un schéma X .

Définition 1.1.4. *On appelle log-schéma un triplet (X, M, α) , où X est un schéma usuel et (M, α) une log-structure sur X . On appelle morphisme de log-schémas un morphisme de schémas munis de pré-log-structures.*

On notera simplement (X, M) le log-schéma défini par la log-structure (M, α) .

Proposition 1.1.1. *Le foncteur d'inclusion de la catégorie des log-schémas vers celle des pré-log-schémas admet un adjoint à gauche défini par $M^a = M \oplus_{\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*)} \mathcal{O}_X^*$.*

M^a est appelée la log-structure associée à la pré-log-structure M .

Définition 1.1.5. *Un monoïde est dit intègre s'il vérifie : \ll Pour tous $a, b, c \in M$, $ab = ac \implies b = c \gg$. Une log-structure M sur X est dite intègre si M est un faisceau de monoïdes intègres. Elle est dite cohérente si, localement pour la topologie étale, il existe un monoïde de type fini P et un morphisme $P_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ dont la log-structure associée est isomorphe à M . Enfin, une log-structure est dite fine si elle est cohérente et intègre ; on dit alors que le log-schéma correspondant est fin.*

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. Soit (N, β) une log-structure sur Y . On définit la log-structure image inverse de N sur X , et l'on note f^*N , la log-structure associée à la pré-log-structure $f^{-1}N$, munie de l'application $f^{-1}N \xrightarrow{f^{-1}\beta} f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$.

Définition 1.1.6. *Une immersion fermée de log-schémas est un morphisme de log-schémas $i : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ tel que le morphisme de schémas sous-jacent soit une immersion fermée et que $i^*N \rightarrow M$ soit surjectif. Elle est dite exacte lorsque cette dernière flèche est un isomorphisme.*

Définition 1.1.7. *Un morphisme de log-schémas $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ est dit strict si $f^*N \rightarrow M$ est un isomorphisme.*

On dispose dans le cas logarithmique d'une notion de log-lissité analogue à celle de lissité pour les morphismes de schémas.

Définition 1.1.8. *Un morphisme $f : (X, M) \rightarrow (S, L)$ est dit log-lisse si le morphisme de schémas sous-jacent est localement de présentation finie et si f est formellement log-lisse, ie f vérifie la condition suivante : pour toute immersion fermée exacte nilpotente $(Y, N) \hookrightarrow (Y', N')$ au-dessus de (S, L) , l'application naturelle*

$$\mathrm{Hom}_{(S,L)}((Y', N'), (X, M)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{(S,L)}((Y, N), (X, M))$$

est surjective, localement sur Y' .

Remarque : pour un morphisme strict, être log-lisse équivaut à être lisse ([Kat89], prop.(3.8)).

1.2 Opérateurs différentiels de niveau m

1.2.1 Puissances divisées

Nous renvoyons à [Ber74] ou [Ber78] pour plus de détails.

Définition 1.2.1. Soient A un anneau commutatif, $I \subset A$ un idéal. On appelle structure d'idéal à puissances divisées sur I une famille $\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 0}$ d'applications de I dans A qui vérifie les conditions suivantes :

- (i) $\forall x \in I, \gamma_0(x) = 1, \gamma_1(x) = x$ et $\gamma_n(x) \in I$ pour tout $n \geq 1$,
- (ii) $\forall x, y \in I, \forall n \geq 0, \gamma_n(x + y) = \sum_{i+j=n} \gamma_i(x)\gamma_j(y)$,
- (iii) $\forall x \in I, \forall a \in A, \forall n \geq 0, \gamma_n(ax) = a^n \gamma_n(x)$,
- (iv) $\forall x \in I, \forall m, n \in \mathbb{N}, \gamma_m(x)\gamma_n(x) = \binom{m+n}{n} \gamma_{m+n}(x)$,
- (v) $\forall x \in I, \forall m, n \in \mathbb{N}, \gamma_n(\gamma_m(x)) = \frac{nm!}{(m!)^n n!} \gamma_{nm}(x)$.

On dit que (I, γ) est un PD-idéal de A . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur γ , on note en général $x^{[n]}$ l'élément $\gamma_n(x)$. La condition (iv) entraîne que $n! \gamma_n(x) = x^n$; si A est une $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -algèbre pour un certain $n \geq 2$, I est alors un nilidéal.

Définition 1.2.2. Soient (A, I, γ) et (A', I', γ') deux anneaux munis de PD-idéaux. On appelle PD-morphisme un homomorphisme d'anneaux $\phi : A \rightarrow A'$ tel que $\phi(I) \subset I'$ et $\phi(\gamma_n(x)) = \gamma'_n(\phi(x))$ pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Soient $(R, \mathfrak{a}, \alpha)$ un anneau muni d'un PD-idéal et $\phi : R \rightarrow A$ un homomorphisme d'anneaux. On dit que la PD-structure α s'étend à A s'il existe une PD-structure $\bar{\alpha}$ sur $\mathfrak{a}A$ (nécessairement unique) telle que $\phi : (R, \mathfrak{a}, \alpha) \rightarrow (A, \mathfrak{a}A, \bar{\alpha})$ soit un PD-morphisme. Si $(R, \mathfrak{a}, \alpha)$ et (A, I, γ) sont des anneaux munis de PD-idéaux et $\phi : R \rightarrow A$ un homomorphisme d'anneaux, on dit que la PD-structure γ est compatible à α si α s'étend à A , et s'il existe sur $\mathfrak{a}A + I$ une PD-structure prolongeant $\bar{\alpha}$ et γ .

Proposition 1.2.1. Soient $(R, \mathfrak{a}, \alpha)$ un anneau muni d'un PD-idéal, A une R -algèbre, $I \subset A$ un idéal. Il existe une R -algèbre $P_\alpha(I)$ munie d'un PD-idéal \bar{I} dont la PD-structure est compatible à α , et un R -homomorphisme $\varphi : A \rightarrow P_\alpha(I)$ tel que $\varphi(I) \subset \bar{I}$, qui soient universels pour les R -homomorphismes $(A, I) \rightarrow (B, J, \delta)$ envoyant I dans un PD-idéal (J, δ) dont la PD-structure est compatible à α .

La A -algèbre $P_\alpha(I)$ munie de son PD-idéal canonique est appelée enveloppe à puissances divisées, ou PD-enveloppe, de I .

1.2.2 Coefficients binômiaux modifiés

Définition 1.2.3. Soit m un entier naturel fixé. Si k' et k'' sont des entiers, on note $k = k' + k''$, et $k = p^m q + r$, $k' = p^m q' + r'$, $k'' = p^m q'' + r''$ les divisions euclidiennes de k, k' et k'' par p^m . On définit alors les coefficients :

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{c} k \\ k' \end{array} \right\}_{(m)} = \frac{q!}{q'!q''!}$$

$$(1.2) \quad \left\langle \begin{array}{c} k \\ k' \end{array} \right\rangle_{(m)} = \binom{k}{k'} \left\{ \begin{array}{c} k \\ k' \end{array} \right\}_{(m)}^{-1}$$

Si aucune confusion n'en résulte, l'indice (m) sera omis. Pour $m = 0$, on a simplement pour tout k :

$$\left\{ \begin{array}{c} k \\ k' \end{array} \right\}_{(0)} = \binom{k}{k'}, \quad \left\langle \begin{array}{c} k \\ k' \end{array} \right\rangle_{(0)} = 1.$$

Rappelons les résultats établis dans [Ber96] (1.1.3) :

Lemme 1.2.1. (i) Pour tous $m, k, k' \in \mathbb{N}$ on a

$$\left\{ \begin{array}{c} k \\ k' \end{array} \right\}_{(m)} \in \mathbb{N}, \quad \left\langle \begin{array}{c} k \\ k' \end{array} \right\rangle_{(m)} \in \mathbb{Z}_{(p)}.$$

(ii) Soient j et $q' \leq q$ trois entiers positifs. Si $j \geq m$ ou si $q < p$ on a

$$\left\langle \begin{array}{c} p^j q \\ p^j q' \end{array} \right\rangle_{(m)} \in \mathbb{Z}_{(p)}^*.$$

(iii) Quels que soient les entiers positifs $j, r < p^j$ et q on a

$$\left\langle \begin{array}{c} p^j q + r \\ p^j q \end{array} \right\rangle_{(m)} \in \mathbb{Z}_{(p)}^*.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On note $k = \sum_i a_i p^i$ sa décomposition en base p , et $\sigma(k) = \sum_i a_i$. Alors

$$v_p(k!) = \frac{1}{p-1}(k - \sigma(k)).$$

1.2.3 Puissances divisées partielles

La référence pour ce paragraphe est [Ber96].

Définition 1.2.4. Soient m un entier positif fixé, A une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre et $I \subset A$ un idéal. Une PD-structure partielle de niveau m (ou m -PD-structure) sur I est la donnée d'un PD-idéal $(J, \gamma) \subset I$ tel que γ est compatible à la PD-structure canonique de (p) et $I^{(p^m)} + pI \subset J$ (où $I^{(p^m)}$ désigne l'idéal engendré par les éléments x^{p^m} lorsque x parcourt I).

On dit que (I, J, γ) est un m -PD-idéal. La donnée d'une m -PD-structure permet de définir sur I des opérations de puissances divisées partielles comme suit : si $n \in \mathbb{Z}$, on pose $n = p^m q + r$ avec $0 \leq r < p^m$ la division euclidienne de n par p^m , alors

$$x^{\{n\}(m)} = x^r \gamma_q(x^{p^m}).$$

Ces opérations vérifient des relations analogues à celles des puissances divisées :

- (i) $\forall x \in I, x^{\{0\}} = 1$ et $x^{\{1\}} = x$,
- $\forall x \in I, \forall k \geq 1, x^{\{k\}} \in I$ et $\forall k \geq p^m, x^{\{k\}} \in J$,
- (ii) $\forall x \in I, \forall a \in A, \forall k \in \mathbb{N}, (ax)^{\{k\}} = a^k x^{\{k\}}$,
- (iii) $\forall x, y \in I, \forall k \in \mathbb{N}, (x + y)^{\{k\}} = \sum_{k'+k''=k} \binom{k}{k'}_{(m)} x^{\{k'\}} y^{\{k''\}}$,
- (iv) $\forall x \in I, \forall k', k'' \in \mathbb{N}, x^{\{k'\}} x^{\{k''\}} = \binom{k'+k''}{k'}_{(m)} x^{\{k'+k''\}}$,
- (v) $\forall x \in I, \forall k', k'' \in \mathbb{N}, (x^{\{k'\}})^{\{k''\}} = C_{k'', k'}^{(m)} x^{\{k'k''\}}$ avec $C_{k'', k'}^{(m)} = \frac{q!}{(q!)^{k''} q^{k'}}$.

Lorsqu'aucune confusion n'en résulte, nous omettrons l'indice m .

Soient (A, I, γ) et (A', I', γ') deux anneaux munis de m -PD-idéaux. Un m -PD-morphisme $\varphi : (A, I, J, \gamma) \rightarrow (A', I', J', \gamma')$ est un PD-morphisme $\varphi : (A, J, \gamma) \rightarrow (A', J', \gamma')$ tel que $\varphi(I) \subset I'$.

Proposition 1.2.2. Soient A une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre et I un idéal de A . Il existe une A -algèbre $P_{(m)}(I)$ et un m -PD-idéal $(\bar{I}, \tilde{I}, [^{-1}]) \subset P_{(m)}(I)$ tel que $IP_{(m)}(I) \subset \bar{I}$, qui soient universels pour les homomorphismes d'anneaux $A \rightarrow A'$ envoyant I dans un m -PD-idéal (I', J', γ') de A' .

L'algèbre $P_{(m)}(I)$ munie de son m -PD-idéal canonique $(\bar{I}, \tilde{I}, [^{-1}])$ est appelée enveloppe à puissances divisées partielles de niveau m (ou m -PD-enveloppe) de (A, I) .

Pour $m = 0$, on retrouve les constructions précédentes. Si $m' \geq m$, une m -PD-structure peut être vue comme une m' -PD-structure. La propriété universelle des enveloppes à puissances divisées entraîne donc qu'elles forment un système projectif :

$$\dots \rightarrow P_{(m+1)}(I) \rightarrow P_{(m)}(I) \rightarrow \dots \rightarrow P_{(0)}(I) = P(I)$$

1.2.4 Multi-indices

Nous noterons \underline{k} le multi-indice $(k_1, k_2, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r$ et $\underline{1}_i$ ou $\underline{\varepsilon}_i$ le multi-indice dont tous les éléments sont nuls sauf le i -ème qui vaut 1.

Pour $\underline{k} \in \mathbb{N}^r$, on définit $|\underline{k}| = \sum_{i=1}^r k_i$. Dans tout le document, $\underline{j} \leq \underline{k} < \underline{l}$ signifie : $j_i \leq k_i < l_i$ pour tout i . Si $n \in \mathbb{N}$, $\underline{k} < n$ signifiera que $k_i < n$ pour tout i .

Chapitre 2

Opérateurs différentiels logarithmiques de niveau m

2.1 Voisinages à puissances divisées de niveau m

Les voisinages à puissances divisées partielles de niveau m définis par P.Berthelot dans [Ber96] se généralisent au cas logarithmique, en suivant la méthode introduite par K.Kato dans [Kat89] pour le niveau 0. On a la proposition suivante :

Proposition 2.1.1. *Soit le diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} (X, M) & \xrightarrow{i} & (Y, N) \\ & \searrow & \swarrow \\ & (S, L) & \end{array}$$

où i est une immersion fermée entre log-schémas fins et S est muni d'une PD-structure (J, α) au-dessus de $\mathbb{Z}_{(p)}$, compatible aux puissances divisées de p . Soient m et n deux entiers positifs ou nuls.

Alors il existe une factorisation de i par une immersion fermée exacte $j_{(m)}^n : (X, M) \hookrightarrow (\Delta_{X, (m), \alpha}^n(Y), M_{(m)}^n)$, où l'idéal $\bar{\mathcal{I}}$ de X dans $\Delta_{X, (m), \alpha}^n(Y)$ est muni d'une m -PD-structure $(\tilde{\mathcal{I}}, \llbracket \rrbracket)$ compatible à (J, α) , telle que $\bar{\mathcal{I}}^{\{n+1\}} = 0$, vérifiant la propriété universelle suivante : pour toute immersion fermée exacte $i_1 : (X_1, M_1) \hookrightarrow (Y_1, N_1)$, où l'idéal $\bar{\mathcal{I}}_1$ de X_1 dans Y_1 est muni d'une m -PD-structure $(\tilde{\mathcal{I}}_1, \llbracket \rrbracket_1)$ compatible à (J, α) et telle que $\bar{\mathcal{I}}_1^{\{n+1\}} = 0$, et tout diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{array}{ccc} (X_1, M_1) & \xrightarrow{i_1} & (Y_1, N_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, M) & \xrightarrow{i} & (Y, N) \\ & \searrow^{j_{(m)}^n} & \swarrow \\ & (\Delta_{X, (m), \alpha}^n(Y), M_{(m)}^n) & \end{array}$$

il existe un unique m -PD-morphisme $u : (Y_1, N_1) \rightarrow (\Delta_{X,(m),\alpha}^n(Y), M_{(m)}^n)$ factorisant ce diagramme.

Si p est localement nilpotent sur Y , on a une propriété analogue pour $(\Delta_{X,(m),\alpha}(Y), M_{(m)})$ sans condition de nilpotence sur \mathcal{I}_1 .

Démonstration : d'après Kato ([Kat89], prop.(4.10)), i se factorise localement pour la topologie étale comme suit :

$$\begin{array}{ccc} (X, M) & \xrightarrow{i} & (Y, N) \\ & \searrow i' & \nearrow g \\ & & (Z, M_Z) \end{array}$$

avec i' : immersion fermée exacte, g log-étale et M_Z fin.

Dans la catégorie des schémas, $i' : X \hookrightarrow Z$ est une immersion fermée au-dessus de S . On peut donc considérer $\Delta_{X,(m),\alpha}^n(Z)$ le voisinage à puissances divisées partielles de niveau m et d'ordre n associé. On le munit de la log-structure image inverse de celle de Z par le morphisme canonique $h : \Delta_{X,(m),\alpha}^n(Z) \rightarrow Z$. On note $M_{(m)}^n$ cette log-structure.

Soit $j : X \hookrightarrow \Delta_{X,(m),\alpha}^n(Z)$ l'immersion fermée canonique. Comme $j^*M_{(m)}^n = j^*h^*M_Z \xrightarrow{\sim} i'^*M_Z \xrightarrow{\sim} M$ (car i' est exacte), $j : (X, M) \hookrightarrow (\Delta_{X,(m),\alpha}^n(Z), M_{(m)}^n)$ est une immersion fermée exacte.

Vérifions que la propriété universelle annoncée est satisfaite. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (X_1, M_1) & \xrightarrow{i_1} & (Y_1, N_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, M) & \xrightarrow{i} & (Y, N) \\ \downarrow j & \searrow i' & \uparrow g \\ (\Delta_{X,(m),\alpha}^n(Z), M_{(m)}^n) & \xrightarrow{h} & (Z, M_Z) \end{array}$$

où i_1 est une immersion fermée exacte entre log-schémas fins, et (Y_1, N_1) est muni d'une m -PD-structure telle que $\overline{\mathcal{I}}_1^{\{n+1\}} = 0$. Comme g est log-étale, i_1 est exacte, et M_1 et N_1 sont fins, il existe un unique morphisme $u : (Y_1, N_1) \rightarrow (Z, M_Z)$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} (X_1, M_1) & \xrightarrow{i_1} & (Y_1, N_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, M) & & \\ \downarrow j & \nearrow u & \\ (Z, M_Z) & \xrightarrow{g} & (Y, N) \end{array}$$

La propriété universelle des voisinages à puissances divisées de niveau m , dans la catégorie

des schémas, fournit alors un morphisme $v : Y_1 \rightarrow \Delta_{X,(m),\alpha}^n(Z)$. Comme $M_{(m)}^n = h^*M_Z$, u permet de définir un morphisme $v : (Y_1, N_1) \rightarrow (\Delta_{X,(m),\alpha}^n(Z), M_{(m)}^n)$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 (X_1, M_1) & \xrightarrow{i_1} & (Y_1, N_1) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (X, M) & \xrightarrow{i} & (Y, N) \\
 & \searrow j & \uparrow g \circ h \\
 & & (\Delta_{X,(m),\alpha}^n(Z), M_{(m)}^n)
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \curvearrowright v \end{array}$$

L'unicité se déduit de celle du cas classique (non logarithmique) et de celle de u . Grâce à cette propriété universelle, on peut recoller ces constructions locales, ce qui achève la démonstration pour l'ordre n . Le cas de $\Delta_{X,(m),\alpha}(Y)$ se traite de la même manière. \square

2.2 Application à la diagonale

2.2.1 Voisinages à puissances divisées de la diagonale

Soit (S, L) un log-schéma fin muni d'une PD-structure (J, α) , avec J quasi-cohérent. On considère un log-schéma fin (X, M) , log-lisse au-dessus de (S, L) . On suppose que α s'étend à X . L'immersion diagonale $\Delta : (X, M) \hookrightarrow (X^2, M_{X^2})$ vérifie les hypothèses de la proposition précédente. On peut donc définir les voisinages à puissances divisées de niveau m et d'ordre n correspondants, que l'on notera $(\Delta_{X,(m)}^n, M_{(m)}^n, \bar{\mathcal{I}}_{(m)}^n, \tilde{\mathcal{I}}_{(m)}^n, [])$. Si p est localement nilpotent sur S , on peut en outre définir $(\Delta_{X,(m)}, M_{(m)}, \bar{\mathcal{I}}_{(m)}, \tilde{\mathcal{I}}_{(m)}, [])$ les voisinages à puissances divisées de niveau m .

On notera $\Delta_{X,(m)}(r)$ et $\Delta_{X,(m)}^n(r)$ les constructions analogues pour l'immersion $(X, M) \hookrightarrow (X^{r+1}, M_{X^{r+1}})$, et $\mathcal{P}_{X,(m)}^n(r)$ le faisceau d'anneaux correspondant :

$$\Delta_{X,(m)}^n(r) = \text{Spec}(\mathcal{P}_{X,(m)}^n(r))$$

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2.1. *Les projections canoniques $p_k = p_{k,(m)}^n$, pour $k \in \{0, 1\}$, de $(\Delta_{X,(m)}^n, M_{(m)}^n)$ sur (X, M) sont des morphismes stricts de log-schémas.*

Démonstration : on veut montrer que $p_i^*M \simeq M_{(m)}^n$ pour $i = 0$ et $i = 1$. Notons \mathcal{I}_X (respectivement $\mathcal{I}_{(m)}^n$) le quotient de M (respectivement $M_{(m)}^n$) par \mathcal{O}_X^* (respectivement $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$). Comme l'immersion $(X, M) \hookrightarrow (\Delta_{(m)}^n, M_{(m)}^n)$ est exacte, donc stricte, on a $\mathcal{I}_X \simeq p_i^*M/\mathcal{P}_{X,(m)}^n \simeq \mathcal{I}_{(m)}^n$ (voir [Kat89], 1.4.1). D'où le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{P}_{X,(m)}^n & \longrightarrow & p_i^* M & \longrightarrow & \mathcal{I}_X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow l \\ 1 & \longrightarrow & \mathcal{P}_{X,(m)}^n & \longrightarrow & M_{(m)}^n & \longrightarrow & \mathcal{I}_{(m)}^n \longrightarrow 0 \end{array}$$

On en déduit immédiatement que $p_i^* M \rightarrow M_{(m)}^n$ est un isomorphisme. \square

2.2.2 L'application μ

L'immersion $j_{(m)}^n : (X, M) \hookrightarrow (\Delta_{X,(m)}^n, M_{(m)}^n)$ est fermée et exacte, d'idéal $\mathcal{J}_{(m)}^n$. On a donc la suite exacte suivante :

$$(2.1) \quad 0 \longrightarrow (j_{(m)}^n)^{-1}(1 + \mathcal{J}_{(m)}^n) \xrightarrow{\lambda_{(m)}^n} (j_{(m)}^n)^{-1} M_{(m)}^n \xrightarrow{j_{(m)}^{n*}} M \longrightarrow 0$$

où $\lambda_{(m)}^n$ est la réciproque de $M_{(m)}^n \rightarrow \mathcal{P}_{X,(m)}^n = \mathcal{O}_{\Delta_{X,(m)}^n}$ sur $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$. L'immersion diagonale Δ admet deux rétractions $(X^2, M_{X^2}) \rightrightarrows (X, M)$, qui induisent deux rétractions p_0 et p_1 de $j_{(m)}^n$. Pour tout $a \in M$, $p_0^*(a)$ et $p_1^*(a)$ ont même image dans M , donc la suite exacte (2.1) implique l'existence d'un unique élément $\mu_{(m)}^n(a) \in (j_{(m)}^n)^{-1}(1 + \mathcal{J}_{(m)}^n)$ tel que $p_1^*(a) = p_0^*(a) + \lambda_{(m)}^n(\mu_{(m)}^n(a))$.

On définit de même $\mu_{(m)} : M \rightarrow j_{(m)}^{-1}(1 + \overline{\mathcal{I}}_{(m)})$.

On voit immédiatement que les applications $\mu_{(m)}$ et $\mu_{(m)}^n$ sont des homomorphismes de monoïdes. Que deviennent ces applications lorsque l'on fait varier m et n ?

Soient m un entier fixé et n et n' des entiers tels que $n \geq n'$. La propriété universelle des voisinages à puissances divisées fournit une immersion fermée canonique $i_{(m)}^{n,n'} : (\Delta_{X,(m)}^{n'}, M_{(m)}^{n'}) \hookrightarrow (\Delta_{X,(m)}^n, M_{(m)}^n)$, qui commute à $j_{(m)}^n$, $j_{(m)}^{n'}$, et $p_{k,(m)}^n$, $p_{k,(m)}^{n'}$. On a :

$$i_{(m)}^{n,n'*}(p_{1,(m)}^{n'}(a)) = i_{(m)}^{n,n'*}(p_{0,(m)}^n(a) + \lambda_{(m)}^n(\mu_{(m)}^n(a))).$$

Donc

$$\begin{aligned} p_{1,(m)}^{n'}(a) &= p_{0,(m)}^{n'}(a) + (i_{(m)}^{n,n'*} \circ \lambda_{(m)}^n)(\mu_{(m)}^n(a)) \\ &= p_{0,(m)}^{n'}(a) + (\lambda_{(m)}^{n'} \circ i_{(m)}^{n,n'*})(\mu_{(m)}^n(a)) \\ &= p_{0,(m)}^{n'}(a) + \lambda_{(m)}^{n'}(i_{(m)}^{n,n'*}(\mu_{(m)}^n(a))). \end{aligned}$$

Par unicité on en déduit que $\mu_{(m)}^{n'}(a) = i_{(m)}^{n,n'*}(\mu_{(m)}^n(a))$.

De même pour $m \geq m'$, on a une application canonique $\varphi_{m,m'}^n : (\Delta_{X,(m')}, M_{(m')}^n) \rightarrow (\Delta_{X,(m)}, M_{(m)}^n)$. On a alors

$$\begin{aligned} p_{1,(m')}^{n*}(a) &= \varphi_{m,m'}^{n*}(p_{1,(m)}^{n*}(a)) \\ &= \varphi_{m,m'}^{n*}(p_{0,(m)}^{n*}(a) + \lambda_{(m)}^n(\mu_{(m)}^n(a))) \\ &= p_{0,(m)}^{n*}(a) + (\varphi_{m,m'}^{n*} \circ \lambda_{(m)}^n)(\mu_{(m)}^n(a)) \\ &= p_{0,(m)}^{n*}(a) + (\lambda_{(m')}^n \circ \varphi_{m,m'}^{n*})(\mu_{(m)}^n(a)) \\ &= p_{0,(m)}^{n*}(a) + \lambda_{(m')}^n(\varphi_{m,m'}^{n*}(\mu_{(m)}^n(a))). \end{aligned}$$

Par unicité, on en déduit que $\mu_{(m')}^n(a) = \varphi_{m,m'}^*(\mu_{(m)}^n(a))$.

2.2.3 Description locale

On conserve les notations précédentes. Soit \bar{x} un point géométrique. La log-lissité de $(X, M) \rightarrow (S, L)$ assure l'existence d'un système de coordonnées logarithmiques locales $m_1, \dots, m_d \in M_{\bar{x}}$ au voisinage de x (ie $\text{dlog}m_1, \dots, \text{dlog}m_d$ forment une base de $\Omega_{(X,M)/(S,L),\bar{x}}^1$). On fixe une immersion fermée exacte $i' : (X, M) \hookrightarrow (Z, M_Z)$ au voisinage de x (correspondant à la factorisation de Kato, [Kat89], prop.(4.10)).

Proposition 2.2.1. *Pour $1 \leq i \leq d$, on note $u_i = \mu_{(m)}^n(m_i)$, et $\eta_i = u_i - 1$. Alors $\{\underline{\eta}^{\{k\}(m)}\}_{|k| \leq n}$ est une base de $\mathcal{P}_{X,(m),\bar{x}}^n$ sur $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}$ (pour les deux structures d'algèbre).*

Démonstration : elle est analogue à celle faite par Kato ([Kat89], prop.(6.5)) pour les PD-enveloppes. On commence par montrer que η_1, \dots, η_d forment un système de coordonnées de Z sur X , puis on utilise la description des m -PD-enveloppes dans le cas non logarithmique. \square

2.2.4 Functorialité

Nous reprenons les notations de 2.2.1, et supposons donnés en outre un (S, L) -log-schéma fin log-lisse (Y, N) tel que α s'étende à Y , et un (S, L) -morphisme $f : (Y, N) \rightarrow (X, M)$. La propriété universelle des enveloppes à puissances divisées fournit un m -PD-morphisme $f^* \mathcal{P}_{X,(m)}^n \rightarrow \mathcal{P}_{Y,(m)}^n$ pour tout entier n et tout entier m . Les propositions suivantes montrent que ce morphisme naturel est un isomorphisme lorsque f correspond à un changement de base ou lorsque f est log-étale.

Soit (X, M) un (S, L) -log-schéma fin log-lisse. Nous considérons un changement de base $g : (S', L') \rightarrow (S, L)$, où g est un m -PD-morphisme. Soient $(X', M') = (X, M) \times_{(S,L)} (S', L')$ le produit fibré de (X, M) et (S', L') au-dessus de (S, L) dans la catégorie des log-schémas fins, et $g' : (X', M') \rightarrow (X, M)$ la première projection.

Proposition 2.2.2. *Il existe, pour les deux structures d'algèbres (droite et gauche), des isomorphismes $\mathcal{O}_{X'}$ -linéaires canoniques : $g'^*\mathcal{P}_{X/S,(m)}^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_{X'/S',(m)}^n$.*

Démonstration : la propriété universelle satisfaite par $\Delta_{X,(m)}^n$ fournit un morphisme $(\Delta_{X',(m)}^n, M_{(m)}^n) \rightarrow (\Delta_{X,(m)}^n, M_{(m)}^n)$ factorisant $g'(1) : (X'^2, M_{X'^2}) \rightarrow (X^2, M_{X^2})$. On a donc une flèche naturelle $g'^*\mathcal{P}_{X,(m)}^n \rightarrow \mathcal{P}_{X',(m)}^n$. Pour vérifier que c'est un isomorphisme, nous pouvons travailler localement, et donc fixer une factorisation de Kato (Z, M_Z) de $\Delta : (X, M) \hookrightarrow (X^2, M_{X^2})$. Notons $i : (X, M) \hookrightarrow (Z, M_Z)$ l'immersion fermée exacte correspondante, et $h : (Z, M_Z) \rightarrow (X^2, M_{X^2})$ tel que $h \circ i = \Delta$. Par construction $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$ est l'enveloppe à puissances divisées de niveau m et d'ordre n de l'immersion fermée $X \hookrightarrow Z$. Posons $(Z', M_{Z'}) = (Z, M_Z) \times_{(S,L)} (S', L')$. Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f' & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 (X', M') & & (Z, M_Z) \times_{(S,L)} (S', L') & \xrightarrow{\pi_1} & (S', L') \\
 \downarrow g' & & \downarrow \pi' & & \downarrow g \\
 (X, M) & \xrightarrow{i} & (Z, M_Z) & \xrightarrow{h} & (X^2, M_{X^2}) & \xrightarrow{f \circ p_i} & (S, L) \\
 & & & & \curvearrowleft & & \\
 & & f & & & &
 \end{array}$$

Comme $g \circ f' = f \circ g' = (f \circ p_i \circ h) \circ (i \circ g')$, il existe un unique morphisme $i' : (X', M') \rightarrow (Z, M_Z) \times_{(S,L)} (S', L')$ tel que $\pi' \circ i' = i \circ g'$ et $\pi_1 \circ i' = f'$. D'autre part : $(Z, M_Z) \times_{(X^2, M_{X^2})} (X'^2, M_{X'^2}) \simeq (Z, M_Z) \times_{(X^2, M_{X^2})} ((X^2, M_{X^2}) \times_{(S,L)} (S', L')) \simeq (Z, M_Z) \times_{(S,L)} (S', L')$. La deuxième projection fournit donc un morphisme $h' : (Z, M_Z) \times_{(S,L)} (S', L') \rightarrow (X'^2, M_{X'^2})$. Comme h est log-étale, h' l'est aussi. Nous avons donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (X', M') & \xrightarrow{i'} & (Z, M_Z) \times_{(S,L)} (S', L') & \xrightarrow{h'} & (X'^2, M_{X'^2}) & \xrightarrow{f' \circ p_{0,i}} & (S', L') \\
 \downarrow g' & & \downarrow \pi' & & \downarrow g'(1) & & \downarrow g \\
 (X, M) & \xrightarrow{i} & (Z, M_Z) & \xrightarrow{h} & (X^2, M_{X^2}) & \xrightarrow{f \circ p_i} & (S, L) \\
 & & & & \curvearrowleft & & \\
 & & & & \Delta & &
 \end{array}$$

Comme $(X, M) \times_{(Z, M_Z)} ((Z, M_Z) \times_{(S,L)} (S', L')) \simeq (X, M) \times_{(S,L)} (S', L') = (X', M')$, le carré de gauche est cartésien. Donc i' est une immersion fermée exacte et $h' \circ i' = \Delta'$. Donc $(X', M') \xrightarrow{i'} (Z, M_Z) \times_{(S,L)} (S', L') \xrightarrow{h'} (X'^2, M_{X'^2})$ fournit une factorisation de Kato de Δ' . De nouveau, $\mathcal{P}_{X',(m)}^n$ est l'enveloppe à puissances divisées de niveau m et d'ordre n de l'immersion fermée $X' \hookrightarrow Z'$. La description locale des m -PD-voisinsages d'ordre n donnée en (2.2.1) entraîne alors immédiatement le résultat annoncé dans la proposition. \square

Proposition 2.2.3. *Si $f : (Y, N) \rightarrow (X, M)$ est log-étale, alors le morphisme naturel $f^* \mathcal{P}_{X,(m)}^n \rightarrow \mathcal{P}_{Y,(m)}^n$ est un isomorphisme.*

Démonstration : f étant log-étale, on a l'isomorphisme $f^* \Omega_{(X,M)/(S,L)}^1 \simeq \Omega_{(Y,N)/(S,L)}^1$. Il suffit donc d'utiliser la description locale donnée dans la proposition (2.2.1) pour conclure. \square

2.3 Faisceaux d'opérateurs différentiels

Imitant la construction de [EGA] IV.16, nous allons définir les faisceaux d'opérateurs différentiels en dualisant les faisceaux de parties principales $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$. Nous définirons leur structure d'anneaux pour ensuite la décrire en coordonnées locales.

2.3.1 Définition

Définition 2.3.1. *Les faisceaux d'opérateurs différentiels sont définis comme dans le cas classique par :*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{X,n}^{(m)} &= \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{0,(m)}^n * \mathcal{P}_{X,(m)}^n, \mathcal{O}_X) \\ \mathcal{D}_X^{(m)} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_{X,n}^{(m)} \end{aligned}$$

Pour $\phi \in \mathcal{D}_{X,n}^{(m)}$, on définit $\phi^b : M \times \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ par (cf [Ogu94]) :

$$\phi^b(a, x) = \phi(\mu_{(m)}^n(a) p_{1,(m)}^n(x)).$$

Notations : pour tout $a \in M$ et tout $x \in \mathcal{O}_X$, on écrira simplement $\phi^b(x) = \phi^b(0, x)$ et $\phi_a^b(x) = \phi^b(a, x)$.

2.3.2 Loi de composition dans $\mathcal{D}_X^{(m)}$

Nous voulons définir une structure d'anneau sur $\mathcal{D}_X^{(m)}$. Comme dans le cas non logarithmique, le produit de $P \in \mathcal{D}_{X,n}^{(m)}$ et $P' \in \mathcal{D}_{X,n'}^{(m)}$, sera défini dans $\mathcal{D}_{X,n+n'}^{(m)}$, à l'aide d'une "factorisation" $\delta_{(m)}^{n,n'}$ de $p_{0,2} : X^3 \simeq X^2 \times_X X^2 \rightarrow X^2$ (cf [Ber96], proposition 2.1.3). Après avoir construit cette application $\delta_{(m)}^{n,n'}$, puis défini le produit dans $\mathcal{D}_X^{(m)}$, nous étudierons la structure d'anneau de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ en coordonnées locales et montrerons que ce faisceau est engendré par \mathcal{O}_X et un nombre fini d'opérateurs (proposition (2.3.1)).

A. L'application $\delta_{(m)}^{n,n'}$

On cherche une application : $\Delta_{X,(m)}^n \times_X \Delta_{X,(m)}^{n'} \rightarrow \Delta_{X,(m)}^{n+n'}$, qui commute avec $p_{0,2} : X^3 \rightarrow X^2$.

On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 (X, M) \hookrightarrow & & & & \\
 & \searrow^{j_{(m)}^{n'}} & & & \\
 & & (\Delta_{X,(m)}^n \times \Delta_{X,(m)}^{n'}, M_{(m)}^{n,n'}) & \xrightarrow{\pi_1} & (\Delta_{X,(m)}^{n'}, M_{X,(m)}^{n'}) \\
 & \searrow^{j_{(m)}^n} & \downarrow \pi_0 & \square & \downarrow p_{0,(m)}^{n'} \\
 & & (\Delta_{X,(m)}^n, M_{(m)}^n) & \xrightarrow{p_{1,(m)}^n} & (X, M)
 \end{array}$$

Comme $p_{0,(m)}^{n'} \circ j_{(m)}^{n'} = p_{1,(m)}^n \circ j_{(m)}^n$, il existe un unique morphisme de log-schémas $w : (X, M) \rightarrow (\Delta_{X,(m)}^n \times_X \Delta_{X,(m)}^{n'}, M_{(m)}^{n,n'})$ tel que $\pi_1 \circ w = j_{(m)}^{n'}$ et $\pi_0 \circ w = j_{(m)}^n$. De plus w est une immersion fermée exacte, car π_0 et π_1 sont des morphismes stricts (en effet, $p_{0,(m)}^{n'}$ et $p_{1,(m)}^n$ sont eux-mêmes stricts, comme nous l'avons montré dans le lemme (2.2.1)).

On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 (X, M) \hookrightarrow & \xrightarrow{w} & & & (\Delta_{X,(m)}^n \times_X \Delta_{X,(m)}^{n'}, M_{(m)}^{n,n'}) \\
 \downarrow id_X & & & & \downarrow h_n \times h_{n'} \\
 & & & & (X^2 \times_X X^2, M') \\
 & & & & \downarrow l \\
 & & & & (X^3, M_{X^3}) \\
 & & & & \downarrow p_{0,2} \\
 (X, M) \hookrightarrow & \xrightarrow{j_{(m)}^{n+n'}} & (\Delta_{X,(m)}^{n+n'}, M_{(m)}^{n+n'}) & \xrightarrow{h_{n+n'}} & (X^2, N)
 \end{array}$$

Ce diagramme commute, car $X \xrightarrow{w} (\Delta_{X,(m)}^n \times_X \Delta_{X,(m)}^{n'}) \xrightarrow{h_n \times h_{n'}} X^2 \times X^2 \xrightarrow{\sim} X^3$ n'est autre que l'immersion $\Delta' : X \hookrightarrow X^3$ et $p_{0,2} \circ \Delta' = \Delta$. D'autre part, grâce à la description locale de $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$ donnée par la proposition (2.2.1), on voit que les faisceaux $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$ sont plats sur \mathcal{O}_X pour les deux structures d'algèbres. On en déduit comme dans [Ber96] (démonstration de la proposition 2.1.3., page 213), que $\mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'}$ est muni d'une m -PD-structure d'ordre au plus $n + n'$ sur $\overline{\mathcal{I}}_n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} + \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \overline{\mathcal{I}}_{n'}$, compatible à $\overline{\mathcal{I}}_n$ et à $\overline{\mathcal{I}}_{n'}$. Par

la propriété universelle des voisinages à puissances divisées de niveau m , il existe donc un unique morphisme $\varphi_{(m)}^{n,n'} : (\Delta_{X,(m)}^n \times_X \Delta_{X,(m)}^{n'}, M_{(m)}^{n,n'}) \rightarrow (\Delta_{X,(m)}^{n+n'}, M_{(m)}^{n+n'})$ factorisant le diagramme.

On note $\delta_{(m)}^{n,n'} : \mathcal{P}_{X,(m)}^{n+n'} \rightarrow \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'}$ le morphisme de faisceaux correspondant.

B. Composition dans \mathcal{D}

Définition 2.3.2. Soient $\Phi \in \mathcal{D}_{X,n}^{(m)}$ et $\Psi \in \mathcal{D}_{X,n'}^{(m)}$. On définit le composé $\Phi \circ \Psi$ dans $\mathcal{D}_{X,n+n'}^{(m)}$ comme suit :

$$\mathcal{P}_{X,(m)}^{n+n'} \xrightarrow{\delta_{(m)}^{n,n'}} \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} \xrightarrow{id \otimes \Psi} \mathcal{P}_{X,(m)}^n \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}_X$$

Pour voir comment se comporte la composition vis-à-vis de l'application $\Phi \mapsto \Phi^b$, il faut commencer par calculer $\delta_{(m)}^{n,n'}(\mu_{n+n'}^{(m)}(a))$ pour $a \in M$.

Lemme 2.3.1. $\delta_{(m)}^{n,n'}(\mu_{n+n'}^{(m)}(a)) = \mu_{(m)}^n(a) \otimes \mu_{(m)}^{n'}(a)$ pour tout $a \in M$.

Démonstration : m est fixé, on l'omettra dans les notations. Soit $a \in M$. L'application $w : (X, M) \hookrightarrow (\Delta_X^n \times_X \Delta_X^{n'}, M^{n,n'})$ est une immersion fermée exacte et admet pour rétractions les composées $q'_i : (\Delta_X^n \times_X \Delta_X^{n'}, M^{n,n'}) \xrightarrow{h_n \times h_{n'}} (X^2 \times X^2, M') \xrightarrow{\sim} (X^3, M_{X^3}) \xrightarrow{p'_i} (X, M)$ (où les p'_i sont les projections canoniques). Donc pour tout $i \neq j$, il existe un unique $\mu_{i,j}(a) \in 1 + \text{Ker}(w^*)$ tel que $q_j'^*(a) = q_i'^*(a) + \lambda(\mu_{i,j}(a))$ (où λ est la réciproque de $\alpha : M^{n,n'} \rightarrow \mathcal{P}^n \otimes \mathcal{P}^{n'}$ sur les inversibles).

En sommant on obtient la relation : $\lambda(\mu_{i,j}(a)) + \lambda(\mu_{j,k}(a)) = \lambda(\mu_{i,k}(a))$, soit encore :

$$(2.2) \quad \mu_{i,j}(a)\mu_{j,k}(a) = \mu_{i,k}(a) \quad \text{pour } \{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}.$$

D'autre part, on peut reprendre la construction de $\delta^{n,n'}$ en remplaçant $p_{0,2}$ par $p_{i,j}$ pour $i \neq j$, ce qui amène à la définition de $\phi_{i,j}$:

$$\begin{array}{ccc}
 (\Delta_X^n \times_X \Delta_X^{n'}, M^{n,n'}) & \xrightarrow{h_n \times h_{n'}} & (X^2 \times_X X^2, M') \\
 \Downarrow \phi_{i,j} & \circlearrowleft & \Downarrow p_{i,j} \\
 (\Delta_X^{n+n'}, M^{n+n'}) & \xrightarrow{h_{n+n'}} & (X^2, N) \\
 \searrow p_{i,n+n'} & & \downarrow p_i \\
 & & (X, M)
 \end{array}$$

$\begin{array}{l} \curvearrowright \\ \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} p'_i$

Or $p'_i = p_0 \circ p_{i,j} = p_1 \circ p_{k,i}$, donc $q'_i = p_{0,n+n'} \circ \phi_{i,j} = p_{1,n+n'} \circ \phi_{k,i}$. D'où :

$$\begin{aligned}
 q'_j{}^*(a) &= \phi_{i,j}^*(p_{1,n+n'}^*(a)) \\
 &= \phi_{i,j}^*(p_{0,n+n'}^*(a) + \lambda_{n+n'}(\mu_{n+n'}(a))) \\
 &= q'_i{}^*(a) + \lambda(\phi_{i,j}^*(\mu_{n+n'}(a))).
 \end{aligned}$$

Par unicité on en déduit que $\phi_{i,j}^*(\mu_{n+n'}(a)) = \mu_{i,j}(a)$.

Comme $\phi_{0,2}^*$ n'est autre que $\delta^{n,n'}$, la relation (2.2) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \delta^{n,n'}(\mu_{n+n'}(a)) &= \phi_{0,1}^*(\mu_{n+n'}(a))\phi_{1,2}^*(\mu_{n+n'}(a)), \\
 \delta^{n,n'}(\mu_{n+n'}(a)) &= (\mu_n(a) \otimes 1)(1 \otimes \mu_{n'}(a)), \\
 \delta^{n,n'}(\mu_{n+n'}(a)) &= \mu_n(a) \otimes \mu_{n'}(a),
 \end{aligned}$$

comme annoncé dans le lemme. □

Les lemmes suivants sont les analogues de ceux obtenus par Ogus en niveau zéro (cf [Ogu94]).

Lemme 2.3.2. Soient $\Phi \in \mathcal{D}_{X,n}^{(m)}$, $\Psi \in \mathcal{D}_{X,n'}^{(m)}$, $a, a' \in M$ et $x \in \mathcal{O}_X$. Alors :

- a) $\Phi^b(a', \alpha_X(a)x) = \alpha_X(a)\Phi^b(a + a', x)$,
- b) $(\Phi \circ \Psi)^b(a, x) = \Phi^b(a, \Psi^b(a, x))$.

Démonstration (cf lemme (1.1.4) dans [Ogu94]) : a)

$$\begin{aligned}
 \Phi^b(a', \alpha_X(a)x) &= \Phi(\mu_n^{(m)}(a')p_{1,n}^{(m)*}(\alpha_X(a)x)) \\
 &= \Phi(\mu_n^{(m)}(a')p_{1,n}^{(m)*}(\alpha_X(a))p_{1,n}^{(m)*}(x)) \\
 &= \Phi(\mu_n^{(m)}(a')p_{0,n}^{(m)*}(\alpha_X(a))\mu_n^{(m)}(a)p_{1,n}^{(m)*}(x)) \\
 &= \alpha_X(a)\Phi(\mu_n^{(m)}(a + a')p_{1,n}^{(m)*}(x)) \\
 &= \alpha_X(a)\Phi^b(a + a', x).
 \end{aligned}$$

b) On note $\Phi_a^b(x)$ pour $\Phi^b(a, x)$. On considère le diagramme suivant, dans lequel a est fixé :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\mu_{n'}^{(m)}(a)p_{1,n'}^{(m)*}} & \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{O}_X \\
 \downarrow \mu_{n+n'}^{(m)}(a)p_{1,n+n'}^{(m)*} & & \downarrow \mu_n^{(m)}(a) \otimes id & & \downarrow \mu_n^{(m)}(a)p_{1,n}^{(m)*} \\
 \mathcal{P}_{X,(m)}^{n+n'} & \xrightarrow{\delta_{(m)}^{n,n'}} & \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} & \xrightarrow{id \otimes \Psi} & \mathcal{P}_{X,(m)}^n & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{O}_X \\
 & & & & & & \nearrow \Phi_a^b
 \end{array}$$

Le triangle de droite commute par définition de Φ_a^b . Le carré du milieu commute : si $e \in \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'}$, alors $\mu_n^{(m)}(a)p_{1,n}^{(m)*}(\Psi(e)) = \mu_n^{(m)}(a) \otimes \Psi(e) = (id \otimes \Psi)(\mu_{n'}^{(m)}(a) \otimes id)(e)$. Enfin, le carré de gauche commute car pour $x \in \mathcal{O}_X$:

$$\begin{aligned}
 (\mu_n^{(m)}(a) \otimes id) \circ (\mu_{n'}^{(m)}(a)p_{1,n'}^{(m)*})(x) &= (\mu_n^{(m)}(a) \otimes id)(\mu_{n'}^{(m)}(a)p_{1,n'}^{(m)*}(x)) \\
 &= \mu_n^{(m)}(a) \otimes \mu_{n'}^{(m)}(a)p_{1,n'}^{(m)*}(x),
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \delta_{(m)}^{n,n'}(\mu_{n+n'}^{(m)}(a)p_{1,n+n'}^{(m)*}(x)) &= \delta_{(m)}^{n,n'}(\mu_{n+n'}^{(m)}(a))\delta_{(m)}^{n,n'}(p_{1,n+n'}^{(m)*}(x)) \\
 &= (\mu_n^{(m)}(a) \otimes \mu_{n'}^{(m)}(a))(1 \otimes p_{1,n'}^{(m)*}(x)) \\
 &= \mu_n^{(m)}(a) \otimes \mu_{n'}^{(m)}(a)p_{1,n'}^{(m)*}(x).
 \end{aligned}$$

Le composé du haut est $\Phi_a^b \circ \Psi_a^b$ et celui du bas $(\Phi \circ \Psi)_a^b$, d'où le résultat annoncé dans le lemme. \square

C. Description en coordonnées locales

Soit $\{m_1, \dots, m_r\}$ un système de coordonnées logarithmiques locales de (X, M) sur (S, L) (i.e. $\{\text{dlog}(m_1), \dots, \text{dlog}(m_r)\}$ forme une base de $\Omega_{(X,M)/(S,L)}^1$). On a vu précédemment que $\{\underline{\eta}_{\langle \underline{k} \rangle}\}_{|\underline{k}| \leq n}$ est alors une base de $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$ sur \mathcal{O}_X , où $\eta_i = \mu_{(m)}^n(m_i) - 1$. On note $\{\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}\}_{|\underline{k}| \leq n}$ la base duale de $\mathcal{D}_{X,n}^{(m)}$.

Lemme 2.3.3. Soit $\underline{k} = p^m \underline{q} + \underline{r}$, avec $0 \leq r_j < p^m$ pour tout j , le résultat de la division euclidienne de \underline{k} par p^m . Alors :

$$a) \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} \left(\sum_j n_j m_j, 1 \right) = \underline{q}! \binom{n}{\underline{k}}.$$

$$b) \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} (t^n) = \underline{q}! \binom{n}{\underline{k}} t^{\underline{r}}, \quad \text{où } t_i = \alpha_X(m_i).$$

$$c) \frac{\underline{k}!}{\underline{q}!} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} = \prod_{0 \leq \underline{k}' < \underline{k}} (\underline{\partial}_{\langle \underline{\varepsilon}_i \rangle} - k'_i).$$

Rappel : la notation $0 \leq \underline{k}' < \underline{k}$ signifie que $0 \leq k'_j < k_j$ pour tout j .

Démonstration (cf lemme (1.1.5) dans [Ogu94]): a) nous avons :

$$\begin{aligned}
 \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}^b \left(\sum_j n_j m_j, 1 \right) &= \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} \left(\mu_{(m)}^{|\underline{k}|} \left(\sum_j n_j m_j \right) \right) \\
 &= \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} \left(\prod_j \mu_{(m)}^{|\underline{k}|} (m_j)^{n_j} \right) \\
 &= \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} \left(\prod_j (\eta_j + 1)^{n_j} \right) \\
 &= \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} \left(\prod_j \sum_{p_j=0}^{n_j} \binom{n_j}{p_j} \eta_j^{p_j} \right) \\
 &= \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} \left(\prod_j \sum_{p_j=0}^{n_j} \binom{n_j}{p_j} q_{p_j}! \eta_j^{\{p_j\}} \right) \\
 &\quad \text{où } q_{p_j} \text{ est le quotient de la division euclidienne de } p_j \text{ par } p^m, \\
 &= \prod_j \binom{n_j}{k_j} q_j! \quad \text{avec } \binom{n_j}{k_j} = 0 \text{ si } k_j > n_j, \\
 &= \underline{q}! \binom{\underline{n}}{\underline{k}}.
 \end{aligned}$$

b) Soient $a = \sum_j n_j m_j$, $a' = 0$ et $x = 1$. D'après le lemme 2.3.2, $\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}^b(0, \alpha(a)) = \alpha(a) \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}^b(a, 1)$. Donc $\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}^b(0, \underline{t}^{\underline{n}}) = \underline{t}^{\underline{n}} \underline{q}! \binom{\underline{n}}{\underline{k}}$.

c) Commençons par calculer $\delta_{(m)}^{n, n'}(\underline{\eta}^{\{\underline{k}\}})$. On part de la relation :

$$\begin{aligned}
 \delta_{(m)}^{n, n'}(\eta_i) &= \delta_{(m)}^{n, n'}(\mu_{(m)}^{n+n'}(m_i) - 1) \\
 &= \delta_{(m)}^{n, n'}(\mu_{n+n'}^{(m)}(m_i)) - 1 \\
 &= \mu_n^{(m)}(m_i) \otimes \mu_{n'}^{(m)}(m_i) - 1 \\
 &= (\eta_i + 1) \otimes (1 + \eta_i) - 1 \\
 &= \eta_i \otimes \eta_i + \eta_i \otimes 1 + 1 \otimes \eta_i.
 \end{aligned}$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned}
\delta_{(m)}^{n,n'}(\eta_i^{\{k_i\}}) &= \delta_{(m)}^{n,n'}(\eta_i)^{\{k_i\}} \quad \text{car } \delta_{(m)}^{n,n'} \text{ est un } m\text{-PD-morphisme} \\
&= (\eta_i \otimes \eta_i + \eta_i \otimes 1 + 1 \otimes \eta_i)^{\{k_i\}} \\
&= \sum_{\alpha+\beta=k_i} \left\langle \begin{matrix} k_i \\ \alpha \end{matrix} \right\rangle (\eta_i \otimes \eta_i)^{\{\alpha\}} (1 \otimes \eta_i + \eta_i \otimes 1)^{\{\beta\}} \\
&= \sum_{\alpha+\beta=k_i} \left\langle \begin{matrix} k_i \\ \alpha \end{matrix} \right\rangle \eta_i^{\{\alpha\}} \otimes \eta_i^{\{\alpha\}} \left(\sum_{\gamma+\delta=\beta} \left\langle \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \right\rangle (1 \otimes \eta_i^{\{\gamma\}})(\eta_i^{\{\delta\}} \otimes 1) \right).
\end{aligned}$$

Après réindexation, on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta_{(m)}^{n,n'}(\eta_i^{\{k_i\}}) &= \sum_{\alpha+\beta+\gamma=k_i} \left\langle \begin{matrix} k_i \\ \alpha \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} k_i - \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\rangle q_\alpha! (\eta_i^{\{\alpha\}} \otimes \eta_i^{\{\alpha\}}) (1 \otimes \eta_i^{\{\beta\}}) (\eta_i^{\{\gamma\}} \otimes 1) \\
&= \sum_{\alpha+\beta+\gamma=k_i} \left\langle \begin{matrix} k_i \\ \alpha \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} k_i - \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\rangle q_\alpha! \eta_i^{\{\alpha\}} \eta_i^{\{\gamma\}} \otimes \eta_i^{\{\alpha\}} \eta_i^{\{\beta\}} \\
&= \sum_{\alpha+\beta+\gamma=k_i} \left\langle \begin{matrix} k_i \\ \alpha \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} k_i - \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\rangle q_\alpha! \left\{ \begin{matrix} \alpha + \gamma \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha + \beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \eta_i^{\{\alpha+\gamma\}} \otimes \eta_i^{\{\alpha+\beta\}} \\
&= \sum_{\alpha+\beta+\gamma=k_i} \binom{k_i}{\alpha} \binom{k_i - \alpha}{\beta} \frac{q_{\alpha+\gamma}! q_{\alpha+\beta}!}{q_i!} \eta_i^{\{\alpha+\gamma\}} \otimes \eta_i^{\{\alpha+\beta\}}.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\delta_{(m)}^{n,n'}(\underline{\eta}^{\{\underline{k}\}}) = \sum_{\underline{\alpha}+\underline{\beta}+\underline{\gamma}=\underline{k}} \binom{\underline{k}}{\underline{\alpha}} \binom{\underline{k} - \underline{\alpha}}{\underline{\beta}} \frac{q_{\underline{\alpha}+\underline{\gamma}}! q_{\underline{\alpha}+\underline{\beta}}!}{q_i!} \underline{\eta}^{\{\underline{\alpha}+\underline{\gamma}\}} \otimes \underline{\eta}^{\{\underline{\alpha}+\underline{\beta}\}}.$$

Comme $\underline{\partial}_{\langle \underline{l} \rangle} \circ \underline{\partial}_{\langle \underline{\varepsilon}_i \rangle}$ est défini par la composée $\underline{\partial}_{\langle \underline{l} \rangle} \circ (id \otimes \underline{\partial}_{\langle \underline{\varepsilon}_i \rangle}) \circ \delta_{(m)}^{n,n'}$, on obtient :

$$\underline{\partial}_{\langle \underline{l} \rangle} \circ \underline{\partial}_{\langle \underline{\varepsilon}_i \rangle} = l_i \underline{\partial}_{\langle \underline{l} \rangle} + (l_i + 1) \frac{q_i!}{q_{l_i+1}!} \underline{\partial}_{\langle \underline{l} + \underline{\varepsilon}_i \rangle}.$$

$$\text{Donc } (l_i + 1) \frac{q_i!}{q_{l_i+1}!} \underline{\partial}_{\langle \underline{l} + \underline{\varepsilon}_i \rangle} = \underline{\partial}_{\langle \underline{l} \rangle} (\underline{\partial}_{\langle \underline{\varepsilon}_i \rangle} - l_i).$$

En multipliant par $\frac{l!}{q_l!}$, le résultat du c) s'en déduit par récurrence sur $|\underline{k}|$. \square

Remarque : le c) du lemme ci-dessus implique que $\underline{\partial}_{\langle \underline{\varepsilon}_i \rangle (1)}^p = \underline{\partial}_{\langle \underline{\varepsilon}_i \rangle (1)}$ en caractéristique

p . En effet, dans ce cas nous avons $\underline{\partial}_{\langle \underline{\varepsilon}_i \rangle}^p - \underline{\partial}_{\langle \underline{\varepsilon}_i \rangle} = \prod_{j=0}^{p-1} (\underline{\partial}_{\langle \underline{\varepsilon}_i \rangle} - j)$ qui est égal, d'après

le lemme, à $p! \underline{\partial}_{\langle p \underline{\varepsilon}_i \rangle} = 0$. On en déduit que la connexion canonique associée à un $\mathcal{D}_X^{(1)}$ -module \mathcal{E} (pour la structure de $\mathcal{D}_X^{(0)}$ -module sous-jacente) est de p -courbure nulle. En effet,

la p -courbure de ∇ est $\psi(\nabla)(\partial) = \nabla(\partial)^p - \nabla(\partial^{(p)})$ (avec les notations de [Ogu94], 1.2.1 : si $\partial = (D, \delta)$ est une dérivation logarithmique, et F_X est le morphisme de Frobenius absolu, alors $\partial^{(p)} = (D^p, F_X^* \circ \delta + D^{p-1} \circ \delta)$ est encore une dérivation logarithmique). Notons $\{\partial_i\}$ la base duale de $\{\text{dlog}m_i\}$. Alors $\nabla(\partial_i) = (id \otimes \partial_i) \circ \nabla = \underline{\partial}_{\langle \varepsilon_i \rangle}$ et $\partial_i^{(p)} = \partial_i$. Donc, en vertu de ce qui précède, $\psi(\nabla)(\partial_i) = 0$.

Lemme 2.3.4.

$$\underline{\partial}_{\langle \underline{k}' \rangle} \circ \underline{\partial}_{\langle \underline{k}'' \rangle} = \sum_{\underline{k} = \sup\{\underline{k}', \underline{k}''\}}^{\underline{k}' + \underline{k}''} \frac{\underline{k}!}{(\underline{k}' + \underline{k}'' - \underline{k})!(\underline{k} - \underline{k}')!(\underline{k} - \underline{k}'')!} \frac{q_{\underline{k}'}! q_{\underline{k}''}!}{q_{\underline{k}}!} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}.$$

Démonstration : d'après les calculs faits précédemment, on a :

$$(id \otimes \underline{\partial}_{\langle \underline{k}'' \rangle}) \circ \delta_{(m)}^{n, n'}(\underline{\eta}^{\{\underline{k}\}}) = \sum_{\alpha + \beta = \underline{k}''} \binom{\underline{k}}{\alpha} \binom{\underline{k} - \alpha}{\underline{k}'' - \alpha} \frac{q_{\underline{k} - \underline{k}'' + \alpha}! q_{\underline{k}''}!}{q_{\underline{k}}!} \underline{\eta}^{\{\alpha + \underline{k} - \underline{k}''\}}$$

si $\alpha + \beta = \underline{k}'' \leq \underline{k}$,
et 0 sinon.

Donc

$$\underline{\partial}_{\langle \underline{k}' \rangle} \circ \underline{\partial}_{\langle \underline{k}'' \rangle}(\underline{\eta}^{\{\underline{k}\}}) = \binom{\underline{k}}{\underline{k}' + \underline{k}'' - \underline{k}} \binom{2\underline{k} - \underline{k}' - \underline{k}''}{\underline{k} - \underline{k}'} \frac{q_{\underline{k}'}! q_{\underline{k}''}!}{q_{\underline{k}}!}$$

si $0 \leq \alpha = \underline{k}' + \underline{k}'' - \underline{k} \leq \underline{k}'' \leq \underline{k}$,
soit $\sup\{\underline{k}', \underline{k}''\} \leq \underline{k} \leq \underline{k}' + \underline{k}''$,
et 0 sinon.

Pour $\sup\{\underline{k}', \underline{k}''\} \leq \underline{k} \leq \underline{k}' + \underline{k}''$, on a donc :

$$\underline{\partial}_{\langle \underline{k}' \rangle} \circ \underline{\partial}_{\langle \underline{k}'' \rangle}(\underline{\eta}^{\{\underline{k}\}}) = \frac{\underline{k}!}{(\underline{k}' + \underline{k}'' - \underline{k})!(\underline{k} - \underline{k}')!(\underline{k} - \underline{k}'')!} \frac{q_{\underline{k}'}! q_{\underline{k}''}!}{q_{\underline{k}}!}.$$

D'où la formule du lemme. □

Nous voyons en particulier que : $\underline{\partial}_{\langle \underline{k}' \rangle} \circ \underline{\partial}_{\langle \underline{k}'' \rangle} = \underline{\partial}_{\langle \underline{k}'' \rangle} \circ \underline{\partial}_{\langle \underline{k}' \rangle}$.

Remarque : comme dans le cas non logarithmique, nous retrouvons les formules suivantes

- 1) Si \underline{k}' et \underline{k}'' sont à supports disjoints : $\underline{\partial}_{\langle \underline{k}' \rangle} \circ \underline{\partial}_{\langle \underline{k}'' \rangle} = \underline{\partial}_{\langle \underline{k}' + \underline{k}'' \rangle}$.
- 2) Formule de Taylor :

$$(2.3) \quad \text{Pour tout } x \in \mathcal{O}_X, p_{1,(m)}^{n,*}(x) = \sum_{|\underline{k}| \leq n} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}(x) \underline{\eta}^{\{\underline{k}\}}.$$

Si $s \in M$, on peut expliciter cette formule pour $\mu_{(m)}^n(s)$ comme suit :

$$(2.4) \quad \mu_{(m)}^n(s) = \sum_{|\underline{k}| \leq n} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}^b(s, 1) \underline{\eta}^{\{\underline{k}\}}.$$

3) Action de \mathcal{O}_X à droite sur $\mathcal{D}_X^{(m)}$:

$$(2.5) \quad \text{Pour tout } x \in \mathcal{O}_X, \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} \cdot x = \sum_{i \leq k} \left\{ \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right\} \underline{\partial}_{\langle \underline{k-i} \rangle}(x) \underline{\partial}_{\langle i \rangle} \text{ dans } \mathcal{D}_X^{(m)}.$$

Proposition 2.3.1. $\mathcal{D}_X^{(m)}$ est engendré par \mathcal{O}_X et les opérateurs $\underline{\partial}_{\langle \underline{\varepsilon}_i \rangle}, \underline{\partial}_{\langle p \underline{\varepsilon}_i \rangle}, \dots, \underline{\partial}_{\langle p^m \underline{\varepsilon}_i \rangle}, 1 \leq i \leq r$, ces derniers commutant deux à deux.

Démonstration : d'après le c) du lemme 2.3.3, $\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} = \frac{q!}{k!} \prod_{0 \leq k' \leq k} (\underline{\partial}_{\langle \underline{\varepsilon}_i \rangle} - k'_i)$ pour tout $\underline{k} < p$ (c'est-à-dire $k_j < p$ pour tout j). Le lemme 2.3.4 permet d'écrire en outre $\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}$ sous la forme $\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} = \underline{\partial}_{\langle k_1 \underline{\varepsilon}_1 \rangle} \circ \underline{\partial}_{\langle k_2 \underline{\varepsilon}_2 \rangle} \circ \dots \circ \underline{\partial}_{\langle k_r \underline{\varepsilon}_r \rangle}$ sans ambiguïté. Dans la suite de la démonstration, on se passera donc de multi-indices.

Soit $j \in \{1, \dots, m-1\}$. On considère $\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}$ pour $p^j \leq k < p^{j+1}$. On peut écrire k sous la forme $k = p^j + b$ avec $0 \leq b < p^j(p-1)$. On a :

$$\underline{\partial}_{\langle p^j \rangle} \underline{\partial}_{\langle b \rangle} = \sum_{i=\max\{p^j, b\}}^k \frac{i!}{(k-i)!(i-p^j)!(i-b)!} \frac{q_b! q_{p^j}!}{q_i!} \underline{\partial}_{\langle i \rangle}.$$

Le coefficient de $\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}$ dans cette somme est : $\frac{k!}{p^j! b!} \frac{q_b! q_{p^j}!}{q_k!} = \frac{k!}{p^j! b!}$ car $k < p^{j+1} \leq p^m$. Or $v_p \left(\frac{k!}{p^j! b!} \right) = \frac{1}{p-1} (k - \sigma(k) - p^j + \sigma(p^j) - b + \sigma(b)) = \frac{1}{p-1} (-\sigma(k) + 1 + \sigma(b))$. Comme $k = p^j + b$ avec $b < (p-1)p^j$, on a $\sigma(k) = \sigma(b) + 1$ donc $v_p \left(\frac{k!}{p^j! b!} \right) = 0$. Donc le coefficient de $\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}$ est inversible. Par récurrence sur k et j , on en déduit que $\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}$ s'obtient à partir de $\underline{\partial}_{\langle 1 \rangle}, \dots, \underline{\partial}_{\langle p^{m-1} \rangle}$ pour tout $k < p^m$.

Si $k > p^m$, on écrit k sous la forme $k = p^m + b$ avec $b > 0$. Alors

$$\underline{\partial}_{\langle p^m \rangle} \underline{\partial}_{\langle b \rangle} = \sum_{i=\max\{p^m, b\}}^k \frac{i!}{(k-i)!(i-p^m)!(i-b)!} \frac{q_b! q_{p^m}!}{q_i!} \underline{\partial}_{\langle i \rangle}.$$

Le coefficient de $\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}$ dans cette somme est : $\frac{k!}{p^m! b!} \frac{q_b! q_{p^m}!}{q_k!} = \frac{k!}{p^m! b!} \frac{q_b!}{q_k!}$. Or

$$\begin{aligned} v_p \left(\frac{k!}{p^m!b!} \frac{q_b!}{q_k!} \right) &= \frac{1}{p-1} (k - \sigma(k) - p^m + \sigma(p^m) - b + \sigma(b) + q_b - \sigma(q_b) - q_k + \sigma(q_k)) \\ &= \frac{1}{p-1} (-\sigma(k) + 1 + \sigma(b) + q_b - \sigma(q_b) - q_k + \sigma(q_k)). \end{aligned}$$

Comme $k = p^m + b$ on a $q_k = q_b + 1$ et $r_k = r_b$ (avec des notations évidentes). D'autre part $\sigma(l) = \sigma(q_l) + \sigma(r_l)$ pour tout entier l . On en déduit que $\sigma(b) - \sigma(q_b) = \sigma(k) - \sigma(q_k)$. D'où $v_p \left(\frac{k!}{p^m!b!} \frac{q_b!}{q_k!} \right) = \frac{1}{p-1} (1 + q_b - q_k) = 0$. Donc le coefficient de $\partial_{\langle k \rangle}$ est inversible. Par récurrence sur k , on en déduit le résultat de la proposition. \square

Proposition 2.3.2. *a) $gr\mathcal{D}_X^{(m)}$ est un anneau commutatif.*

Dans cet anneau : $\partial_{\langle k' \rangle} \circ \partial_{\langle k'' \rangle} = \left\langle \frac{k' + k''}{k'} \right\rangle_{(m)} \partial_{\langle k' + k'' \rangle}$.

b) Si S est localement nœthérien, alors l'anneau $\mathcal{D}_U^{(m)} = \Gamma(U, \mathcal{D}_X^{(m)})$ est nœthérien à gauche et à droite pour tout ouvert affine U de X .

La démonstration est strictement analogue à celle du cas non logarithmique (cf [Ber96], p.218).

2.4 Functorialité

Les propositions qui suivent sont la version duale de celles énoncées dans le paragraphe 2.2.4 à propos des voisinages de la diagonale, dont nous reprenons les notations.

Pour $f : (Y, N) \rightarrow (X, M)$, le morphisme naturel $f^* \mathcal{P}_{X,(m)}^n \rightarrow \mathcal{P}_{Y,(m)}^n$ définit par dualité un morphisme $\mathcal{D}_{Y,n}^{(m)} \rightarrow f^* \mathcal{D}_{X,n}^{(m)}$. On en déduit par passage à la limite un morphisme $\mathcal{D}_Y^{(m)} \rightarrow f^* \mathcal{D}_X^{(m)}$.

Soit (X, M) un (S, L) -log-schéma fin log-lisse. Nous considérons un changement de base $g : (S', L') \rightarrow (S, L)$, où g est un m -PD-morphisme. Soient $(X', M') = (X, M) \times_{(S,L)} (S', L')$ le produit fibré de (X, M) et (S', L') au-dessus de (S, L) dans la catégorie des log-schémas fins, et $g' : (X', M') \rightarrow (X, M)$ la première projection.

Proposition 2.4.1. *Le morphisme naturel $\mathcal{D}_{Y'}^{(m)} \rightarrow g'^* \mathcal{D}_X^{(m)}$ est un isomorphisme.*

Démonstration : c'est une conséquence de la proposition (2.2.2). \square

Proposition 2.4.2. *Si $f : (Y, N) \rightarrow (X, M)$ est log-étale, alors le morphisme $\mathcal{D}_Y^{(m)} \rightarrow f^*\mathcal{D}_X^{(m)}$ est un isomorphisme.*

Démonstration : c'est une conséquence de la proposition (2.2.3). \square

2.5 Que se passe-t-il lorsque m varie ?

2.5.1 Applications $\rho_{m',m}$

Soient n, m et m' des entiers tels que $m' \geq m$. Une m -PD-structure définit une m' -PD-structure. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $k = p^m q + r = p^{m'} q' + r'$ avec $0 \leq r < p^m$ et $0 \leq r' < p^{m'}$, les résultats de la division euclidienne de k par p^m et $p^{m'}$ respectivement. On a alors $x^{\{k\}_{(m')}} = \frac{q!}{q'} x^{\{k\}_{(m)}}$. La propriété universelle des m' -PD-enveloppes logarithmiques fournit un unique morphisme $\varphi_{m,m'}^n : (\Delta_{X,(m)}^n, M_{(m)}^n) \rightarrow (\Delta_{X,(m')}^n, M_{(m')}^n)$ factorisant le diagramme

suivant :

$$\begin{array}{ccc} (X, M) & \xrightarrow{j_{(m)}^n} & (\Delta_{X,(m)}^n, M_{(m)}^n) \\ \downarrow id_X & & \downarrow h_{(m)}^n \\ (X, M) & \xrightarrow{j_{(m')}^n} & (\Delta_{X,(m')}^n, M_{(m')}^n) \xrightarrow{h_{(m')}^n} (X^2, M_{X^2}) \end{array}$$

En coordonnées locales, on a la base $\{\underline{\eta}^{\{k\}_{(m')}}\}_{|k| \leq n}$ (respectivement $\{\underline{\eta}^{\{k\}_{(m)}}\}_{|k| \leq n}$) de $\mathcal{P}_{X,(m')}^n$ (respectivement $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$) sur \mathcal{O}_X . Les éléments de ces bases vérifient : $\underline{\eta}^{\{k\}_{(m')}} = \frac{q!}{q'} \underline{\eta}^{\{k\}_{(m)}}$.

Par dualité les m -PD-morphismes $\varphi_{m,m'}^{n*} : \mathcal{P}_{X,(m')}^n \rightarrow \mathcal{P}_{X,(m)}^n$ fournissent des homomorphismes \mathcal{O}_X -linéaires $\rho_n^{m,m'} : \mathcal{D}_{X,n}^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_{X,n}^{(m')}$. D'après la relation précédente :

$$(2.6) \quad \rho_n^{m,m'}(\underline{\partial}_{\langle k \rangle_{(m)}}) = \frac{q!}{q'} \underline{\partial}_{\langle k \rangle_{(m')}}.$$

Le carré :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{X,(m')}^{n+n'} & \xrightarrow{\delta_{(m')}^{n,n'}} & \mathcal{P}_{X,(m')}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m')}^{n'} & \text{est commutatif.} \\ \downarrow \varphi_{m,m'}^{n+n'*} & & \downarrow \varphi_{m,m'}^{n*} \otimes \varphi_{m,m'}^{n'*} \\ \mathcal{P}_{X,(m)}^{n+n'} & \xrightarrow{\delta_{(m)}^{n,n'}} & \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} \end{array}$$

On en déduit que les homomorphismes $\rho_{m,m'}^n$ sont compatibles au produit dans $\mathcal{D}_X^{(m)}$ et

$\mathcal{D}_X^{(m')}$, et définissent donc des homomorphismes canoniques de faisceaux d'anneaux filtrés $\rho_{m,m'} : \mathcal{D}_X^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_X^{(m')}$.

2.5.2 Relation avec Φ^b

On rappelle que pour $\Phi \in \mathcal{D}_{X,n}^{(m)}$ on a défini $\Phi^b : M \times \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ par $\Phi^b(a, x) = \Phi(\mu_n^{(m)}(a)p_{1,n}^{(m)*}(x))$. Un calcul rapide montre que $\mu_n^{(m)}(a) = \varphi_{m,m'}^{n*}(\mu_n^{(m')}(a))$ pour tout $a \in M$. Soient $a \in M$ et $x \in \mathcal{O}_X$. Alors :

$$\begin{aligned} \rho_{m,m'}^n(\Phi)^b(a, x) &= \Phi \circ \varphi_{m,m'}^{n*}(\mu_n^{(m')}(a)p_{1,n}^{(m')*}(x)) \\ &= \Phi \left(\varphi_{m,m'}^{n*}(\mu_n^{(m')}(a))\varphi_{m,m'}^{n*}(p_{1,n}^{(m')*}(x)) \right) \\ &= \Phi(\mu_n^{(m)}(a)p_{1,n}^{(m)*}(x)) \\ &= \Phi^b(a, x). \end{aligned}$$

Donc $\rho_{m,m'}^n(\Phi)^b = \Phi^b$.

Lemme 2.5.1. *Pour tout $\Phi \in \mathcal{D}_X^{(m)}$, $\rho_{m,m'}^n(\Phi)^b = \Phi^b$.*

2.6 PD-stratifications logarithmiques de niveau m

La notion de PD-stratification de niveau m défini par Berthelot ([Ber96], (2.3)) s'étend naturellement au cas logarithmique. Tout se passe avec les log-schémas comme dans le cas classique, mais nous donnons ici quelques détails pour plus de commodité.

Définition 2.6.1. *Soient $(X, M) \rightarrow (S, L)$ un morphisme log-lisse au-dessus de $\mathbb{Z}_{(p)}$, et \mathcal{E} un \mathcal{O}_X -module. Une m -PD-stratification (ou PD-stratification de niveau m) ε sur \mathcal{E} relativement à (S, L) est la donnée d'une famille compatible d'isomorphismes $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$ -linéaires*

$$\varepsilon_n : \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^n$$

où les produits tensoriels sont pris respectivement pour les structures droite et gauche de $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$, satisfaisant les conditions suivantes :

- (i) $\varepsilon_0 = Id_{\mathcal{E}}$,
- (ii) pour tous n, n' le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} \otimes \mathcal{E} & \xrightarrow[\sim]{\delta_{(m)}^{n,n'}(\varepsilon_{n+n'})} & \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} \\ & \searrow[\sim]_{q_1^{n,n'}(\varepsilon_{n+n'})} & \nearrow[\sim]_{q_0^{n,n'}(\varepsilon_{n+n'})} \\ & & \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} \end{array}$$

dont les flèches sont obtenues par extension des scalaires grâce à l'homomorphisme $\delta_{(m)}^{n,n'}$ défini en 2.3.2 A. et aux homomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} q_0^{n,n'} * : \mathcal{P}_{X,(m)}^{n+n'} &\rightarrow \mathcal{P}_{X,(m)}^n \rightarrow \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} \\ q_1^{n,n'} * : \mathcal{P}_{X,(m)}^{n+n'} &\rightarrow \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} \rightarrow \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} \end{aligned}$$

est commutatif.

Cette dernière condition, appelée condition de cocycle, peut s'énoncer d'une autre manière. On note $q_{i,j}^n : \Delta_{X,(m)}^n(2) \rightarrow \Delta_{X,(m)}^n$ l'homomorphisme correspondant à la projection de X^3 sur X^2 d'indices i et j . Alors 2.6.1 (ii) équivaut à la condition (ii') :

$$\text{Pour tout } n, q_{0,2}^{n*}(\varepsilon_n) = q_{0,1}^{n*}(\varepsilon_n) \circ q_{1,2}^{n*}(\varepsilon_n).$$

De la même façon que dans le cas classique, un homomorphisme \mathcal{O}_X -linéaire $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ entre modules munis de m -PD-stratifications est dit *horizontal* s'il commute aux isomorphismes ε_n .

Proposition 2.6.1. *Soit \mathcal{E} un \mathcal{O}_X -module. Les données suivantes sont équivalentes :*

- a) *une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche sur \mathcal{E} prolongeant sa structure d' \mathcal{O}_X -module,*
- b) *une famille compatible d'homomorphismes \mathcal{O}_X -linéaires $\theta_n : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^n$ (ce dernier étant considéré comme un \mathcal{O}_X -module par l'intermédiaire de la structure droite de $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$), telle que $\theta_0 = \text{Id}_{\mathcal{E}}$ et que pour tous n, n' le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^{n+n'} & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \delta_{(m)}^{n,n'}} & \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} \\ \uparrow \theta_{n+n'} & & \uparrow \theta_n \otimes \text{Id} \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{\theta_{n'}} & \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^{n'} \end{array}$$

- c) *une m -PD-stratification $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ sur \mathcal{E} .*

De plus un homomorphisme \mathcal{O}_X -linéaire $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ entre deux $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules à gauche est $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -linéaire si et seulement s'il commute aux homomorphismes θ_n (respectivement aux isomorphismes ε_n), i.e. s'il est horizontal.

Démonstration : la méthode est analogue à celle utilisée dans le cas classique (cf [Ber74], II 4.1-4.2), aussi nous nous contenterons ici de rappeler comment l'on passe d'une structure à l'autre.

Une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche sur un \mathcal{O}_X -module \mathcal{E} définit une famille compatible d'homomorphismes $\mu_n : \mathcal{D}_{X,n}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, où le produit tensoriel est pris pour la structure droite de \mathcal{O}_X -module de $\mathcal{D}_{X,n}^{(m)}$, μ_n étant lui-même \mathcal{O}_X -linéaire pour la structure gauche. Cette donnée équivaut par adjonction à celle d'une famille d'homomorphismes \mathcal{O}_X -linéaires

$$\theta_n : \mathcal{E} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{D}_{X,n}^{(m)}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^n,$$

où le faisceau $\mathcal{H}om$ est pris pour la structure gauche de $\mathcal{D}_{X,n}^{(m)}$, et est considéré comme \mathcal{O}_X -module pour la structure droite de $\mathcal{D}_{X,n}^{(m)}$; la commutativité des diagrammes 2.6.1b) traduit alors l'associativité de l'action de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ sur \mathcal{E} . Les isomorphismes ε_n sont les factorisations $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$ -linéaires des θ_n , et la commutativité de 2.6.1b) correspond à la condition de cocycle.

En coordonnées logarithmiques locales, l'application θ_n est celle qui associe à une section $x \in \mathcal{E}$ son *développement de Taylor* (d'ordre n) :

$$(2.7) \quad \theta_n(x) = \sum_{|\underline{k}| \leq n} \underline{\partial}_{<\underline{k}>} .x \otimes \underline{\eta}^{\{\underline{k}\}}.$$

L'expression de ε_n s'en déduit aussitôt par linéarité, et on vérifie que c'est un isomorphisme en remarquant que son inverse est donné par

$$\varepsilon_n^{-1}(x \otimes 1) = \sum_{|\underline{k}| \leq n} (-1)^{|\underline{k}|} \underline{\eta}^{\{\underline{k}\}} \otimes \underline{\partial}_{<\underline{k}>} .x.$$

□

Les m -PD-stratifications permettent de munir les faisceaux \otimes et $\mathcal{H}om$ d'une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules à gauche, comme le précise le corollaire suivant :

Corollaire 2.6.1. *Soient \mathcal{E} et \mathcal{F} deux $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules à gauche.*

(i) *Il existe sur le produit tensoriel $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ une unique structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche telle que, pour tout multi-indice \underline{k} et toutes sections x de \mathcal{E} et y de \mathcal{F} , on ait :*

$$\underline{\partial}_{<\underline{k}>} .(x \otimes y) = \sum_{\underline{i} < \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}_{<\underline{i}>} .x \otimes \underline{\partial}_{<\underline{k}-\underline{i}>} .y.$$

(ii) *Il existe sur le faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ une unique structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche telle que, pour tout multi-indice \underline{k} , tout morphisme $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ et toute section x de \mathcal{E} , on ait :*

$$(\underline{\partial}_{<\underline{k}>} \varphi)(x) = \sum_{\underline{i} < \underline{k}} (-1)^{|\underline{i}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}_{<\underline{k}-\underline{i}>} (\varphi(\underline{\partial}_{<\underline{i}>} .x)).$$

Afin d'établir les théorèmes de descente dans le chapitre 4, nous aurons besoin d'opérateurs différentiels à coefficients dans une \mathcal{O}_X -algèbre. Nous rappelons donc ici les constructions de Berthelot (cf [Ber96], 2.3.4. sq).

Soit \mathcal{B} une \mathcal{O}_X -algèbre commutative. On dira qu'une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche sur \mathcal{B} est *compatible à sa structure d'algèbre* si la structure de \mathcal{O}_X -module sous-jacente à la structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module est celle qu'induit la structure de \mathcal{O}_X -algèbre, et si les isomorphismes $\varepsilon_n : \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B} \otimes \mathcal{P}_{X,(m)}^n$ de la m -PD-stratification correspondante

sont des isomorphismes de $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$ -algèbres.

Compte-tenu de (2.7), cette dernière condition de compatibilité au produit s'exprime en coordonnées locales par la formule de Leibniz

$$(2.8) \quad \forall f, g \in \mathcal{B}, \forall \underline{k} \in \mathbb{N}^d, \quad \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}(fg) = \sum_{\underline{i} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}_{\langle \underline{i} \rangle}(f) \underline{\partial}_{\langle \underline{k}-\underline{i} \rangle}(g).$$

Étant donnée une \mathcal{O}_X -algèbre \mathcal{B} munie d'une structure compatible de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche, nous pouvons définir sur le produit tensoriel $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ une structure canonique de faisceau d'anneaux. Plus précisément, nous avons la proposition suivante (proposition 2.3.5. de [Ber96]) :

Proposition 2.6.2. *Soit \mathcal{B} une \mathcal{O}_X -algèbre commutative, munie d'une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche compatible avec sa structure de \mathcal{O}_X -algèbre. Il existe alors sur le produit tensoriel $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ une unique structure de faisceau d'anneaux telle que les morphismes $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$, $b \mapsto b \otimes 1$, et $\mathcal{D}_X^{(m)} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$, $P \mapsto 1 \otimes P$ soient des homomorphismes d'anneaux, que $(b \otimes 1)(1 \otimes P) = b \otimes P$ pour tous $b \in \mathcal{B}$ et $P \in \mathcal{D}_X^{(m)}$, et que, pour tout système de coordonnées locales sur X , tout multi-indice \underline{k} et tout $b \in \mathcal{B}$ on ait*

$$(1 \otimes \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}).(b \otimes 1) = \sum_{\underline{i} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}_{\langle \underline{k}-\underline{i} \rangle} b \otimes \underline{\partial}_{\langle \underline{i} \rangle}.$$

Si \mathcal{B}' est une \mathcal{B} -algèbre commutative munie d'une structure compatible de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche, telle que $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ soit $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -linéaire, le morphisme $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)} \rightarrow \mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ est un homomorphisme d'anneaux.

Remarque : la donnée d'une structure de $(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)})$ -module à gauche sur un \mathcal{B} -module \mathcal{E} est équivalente à la donnée d'une m -PD-stratification dont les isomorphismes $\varepsilon_n : \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^n$ sont semi-linéaires par rapport aux isomorphismes $\mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^n$ de la m -PD-stratification de \mathcal{B} .

La notion de stratification permet de définir un foncteur image-inverse dans la catégorie des $\mathcal{D}^{(m)}$ -modules à gauche, de la même manière que dans le cas classique (cf [Ber00], paragraphe 2.1). On considère un diagramme commutatif de morphismes de log-schémas fins :

$$\begin{array}{ccc} (X, M) & \xrightarrow{f} & (Y, N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (S, L) & \longrightarrow & (T, K) \end{array}$$

avec (X, M) et (Y, N) log-lisses sur (S, L) et (T, K) respectivement. Nous avons vu dans 2.2.4 que ce diagramme induisait par functorialité un autre diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\Delta_{X,(m)}^n, M_{(m)}^n) & \xrightarrow{f \times f} & (\Delta_{Y,(m)}^n, N_{(m)}^n) \\ p_0 \downarrow \downarrow p_1 & & q_0 \downarrow \downarrow q_1 \\ (X, M) & \longrightarrow & (Y, N) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les projections canoniques. Si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_Y -module, la donnée d'une structure de $\mathcal{D}_Y^{(m)}$ -module à gauche sur \mathcal{F} équivaut d'après la proposition (2.6.1) à celle d'une m -PD-stratification $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\eta_n : q_1^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} q_0^* \mathcal{F}$. Le faisceau image inverse $f^* \mathcal{F}$ est alors muni de la m -PD-stratification image inverse définie par $\varepsilon_n = (f \times f)^*(\eta_n) : p_1^*(f^* \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} p_0^*(f^* \mathcal{F})$. On obtient donc sur $f^* \mathcal{F}$ une structure canonique de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche. De plus, si \mathcal{F}' est un second $\mathcal{D}_Y^{(m)}$ -module à gauche, un morphisme \mathcal{O}_Y -linéaire $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ est $\mathcal{D}_Y^{(m)}$ -linéaire si et seulement s'il est compatible aux m -PD-stratifications. Ainsi le foncteur f^* s'étend en un foncteur, encore noté f^* , de la catégorie des $\mathcal{D}_Y^{(m)}$ -modules à gauche dans celle des $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules à gauche.

Si on a le diagramme commutatif complété :

$$\begin{array}{ccccc} (X, M) & \xrightarrow{f} & (Y, N) & \xrightarrow{g} & (Z, O) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (S, L) & \longrightarrow & (T, K) & \longrightarrow & (U, J) \end{array}$$

avec (Z, O) fin et log-lisse sur (U, J) , alors, pour tout $\mathcal{D}_Z^{(m)}$ -module à gauche \mathcal{G} , l'isomorphisme de transitivité $(f^* \circ g^*)(\mathcal{G}) \simeq (g \circ f)^*(\mathcal{G})$ est $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -linéaire.

Chapitre 3

Élévation du niveau par Frobenius

Nous étudions le foncteur image inverse associé à un (S, L) -morphisme $F : (X, M) \rightarrow (X', M')$ dans le cas où F est un relèvement de la puissance s -ème du morphisme de Frobenius relatif exact. Nous montrons que l'image inverse d'un $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$ -module à gauche est munie d'une structure naturelle de $\mathcal{D}_X^{(m+s)}$ -module à gauche.

3.1 Notations

Soient $m \geq 0$, $(S, L), (T, K)$ deux log-schémas fins munis de m -PD-idéaux quasi-cohérents $(\mathfrak{a}_S, \mathfrak{b}_S, \gamma_S)$ et $(\mathfrak{a}_T, \mathfrak{b}_T, \gamma_T)$, et $(S, L) \rightarrow (T, K)$ un m -PD-morphisme. On suppose vérifiées les conditions suivantes (qui impliquent les conditions analogues sur (S, L)) :

- (i) p est nilpotent sur T ,
- (ii) $p \in \mathfrak{a}_T$.

On note \mathfrak{b}'_S le sous-PD-idéal $\mathfrak{b}_S + p\mathcal{O}_S \subset \mathfrak{a}_S$, muni des puissances divisées prolongeant γ_S et les puissances divisées canoniques de (p) . De la même manière on définit $\mathfrak{b}'_T \subset \mathfrak{a}_T$.

Soit S_0 le sous-schéma fermé de S défini par \mathfrak{a}_S , qui est de caractéristique p . On le munit de la log-structure L_0 image inverse de L par le morphisme canonique $S_0 \hookrightarrow S$ (donc $(S_0, L_0) \rightarrow (S, L)$ est une immersion fermée exacte). Si (X, M) est un (S, L) -log-schéma fin, on note (X_0, M_0) sa réduction sur (S_0, L_0) : c'est un log-schéma fin. De plus, comme l'immersion $(S_0, L_0) \rightarrow (S, L)$ est exacte, elle est intègre, donc X_0 est le produit fibré usuel dans la catégories des schémas. Remarquons enfin que $(S_0, L_0) \rightarrow (S, L)$ et $(X_0, M_0) \rightarrow (X, M)$ sont des nilimmersions, puisque \mathfrak{a}_S est un m -PD-idéal.

Pour $s \geq 0$, on note $(X_0^{(s)}, M_0^{(s)})$ le (S_0, L_0) -log-schéma déduit de (X_0, M_0) par le s -ème itéré du Frobenius absolu de (S_0, L_0) . On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
& & & & f_{(X_0, M_0)} \\
& & & & \curvearrowright \\
(X_0, M_0) & \xrightarrow{F_0^s} & (X_0^{(s)}, M_0^{(s)}) & \longrightarrow & (X_0, M_0) \\
& \searrow & \downarrow & \square & \downarrow \\
& & (S_0, L_0) & \xrightarrow{f_{(S_0, L_0)}} & (S_0, L_0)
\end{array}$$

3.2 Situation

On se donne :

- (a) un (S_0, L_0) -log-schéma fin log-lisse (X_0, M_0) , un (T_0, K_0) -log-schéma fin log-lisse (Y_0, N_0) de dimension relative r sur (T_0, K_0) , et un (T_0, K_0) -morphisme $f_0 : (X_0, M_0) \rightarrow (Y_0, N_0)$;
- (b) un (S, L) -log-schéma fin log-lisse (X, M) relevant (X_0, M_0) ;
- (c) un entier $s \geq 0$ et un (T, K) -log-schéma fin log-lisse (Y', N') relevant $(Y_0^{(s)}, N_0^{(s)})$;
- (d) un (T, K) -morphisme $F : (X, M) \rightarrow (Y', N')$ relevant le (T_0, K_0) -morphisme $F_{(Y_0, N_0)/(T_0, K_0)}^s \circ f_0 = f_0^{(s)} \circ F_{(X_0, M_0)/(S_0, L_0)}^s$ (où $f_0^{(s)} : (X_0^{(s)}, M_0^{(s)}) \rightarrow (Y_0^{(s)}, N_0^{(s)})$ est déduit de f_0 par functorialité).

Nous noterons $F_1 : (X^2, M_{X^2}) \rightarrow (Y'^2, N_{Y'^2})$ le morphisme induit par F , \mathcal{I} (respectivement \mathcal{I}') l'idéal de la diagonale dans (X^2, M_{X^2}) (respectivement $(Y'^2, N_{Y'^2})$) et $(\mathcal{P}_{X, (m+s)}, \overline{\mathcal{I}}, \tilde{\mathcal{I}})$ (respectivement $(\mathcal{P}_{Y', (m)}, \overline{\mathcal{I}'}, \tilde{\mathcal{I}'})$) l'enveloppe à puissances divisées partielles de niveau $m + s$ de \mathcal{I} (respectivement m de \mathcal{I}').

3.3 Élévation du niveau par Frobenius

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
(X, M) & \xrightarrow{\quad} & (\Delta_{X, (m)}, M_{(m)}) & \longrightarrow & (X^2, M_{X^2}) \\
& \xleftarrow{p_{0, (m)}} & \xleftarrow{p_{1, (m)}} & & \downarrow \\
& \downarrow F & & & \\
(Y', N') & \xrightarrow{\quad} & (\Delta_{Y', (m)}, N'_{(m)}) & \longrightarrow & (Y'^2, N_{Y'^2}) \\
& \xleftarrow{p'_{0, (m)}} & \xleftarrow{p'_{1, (m)}} & &
\end{array}$$

La propriété universelle des voisinages à puissances divisées partielles de niveau m fournit un PD-morphisme $F_\Delta : (\Delta_{X, (m)}, M_{(m)}) \rightarrow (\Delta_{Y', (m)}, N'_{(m)})$. Par ailleurs, nous avons un morphisme canonique $\varphi_{m, m+s} : (\Delta_{X, (m)}, M_{(m)}) \rightarrow (\Delta_{X, (m+s)}, M_{(m+s)})$, qui vérifie $\mu_{(m)}(a) =$

$\varphi_{m,m+s}^*(\mu_{(m+s)}(a))$ pour tout $a \in M$. Nous allons montrer que F_Δ se factorise via $(\Delta_{X,(m+s)}, M_{(m+s)})$.

Proposition 3.3.1. (i) *Sous les hypothèses précédentes, l'homomorphisme F_Δ^* induit un unique PD-morphisme :*

$$\Phi^* : F_\Delta^{-1}\mathcal{P}_{Y',(m)} \longrightarrow \mathcal{P}_{X,(m+s)}$$

envoyant $F_\Delta^{-1}\tilde{\mathcal{I}}'$ dans $\tilde{\mathcal{I}} + b_S\bar{\mathcal{I}}$.

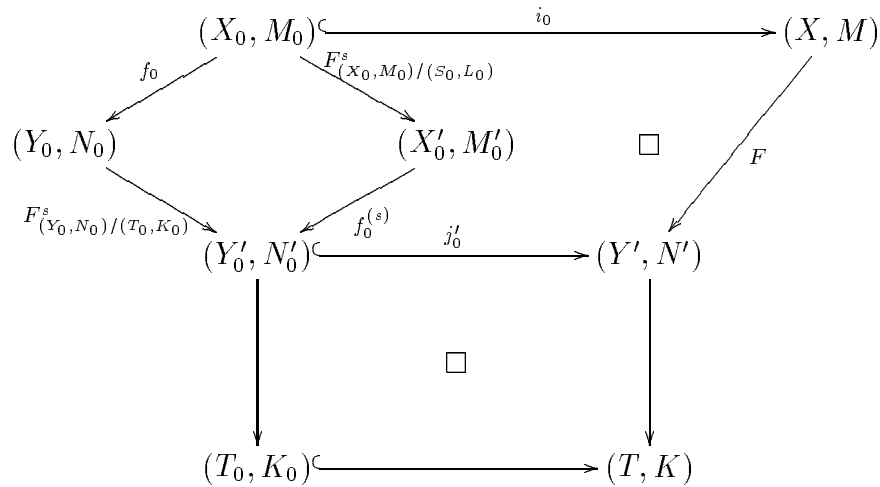
(ii) *Pour tout $n \geq 0$ on a :* $\Phi^* \left(F_\Delta^{-1}\bar{\mathcal{I}}'^{\{n\}(m)} \right) \subset \bar{\mathcal{I}}^{\{n\}(m+s)}$.

Démonstration : l'énoncé est local sur (X, M) , on peut donc supposer que (X, M) et (Y', N') sont affines et qu'il existe des coordonnées logarithmiques locales $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r \in N_0$ sur (Y_0, N_0) .

On note $w_0 : (Y'_0, N'_0) \rightarrow (Y_0, N_0)$ le morphisme déduit de la projection canonique $(Y_0^{(s)}, N_0^{(s)}) \rightarrow (Y_0, N_0)$. Soient b'_1, \dots, b'_r des sections de N' relevant les sections $w_0^*(\bar{b}_i)$ de N'_0 . Les sections b'_1, \dots, b'_r forment alors un système de coordonnées logarithmiques locales sur (Y', N') . Soient a_1, \dots, a_r des sections de M relevant les sections $f_0^*(\bar{b}_i)$ de M_0 .

$$\text{On pose : } \begin{cases} t'_i = \alpha_{Y'}(b'_i) \in \mathcal{O}_{Y'} \\ u'_i = \mu'_{(m)}(b'_i) \in \mathcal{P}_{Y',(m)} \\ \eta'_i = u'_i - 1 \in \mathcal{P}_{Y',(m)} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_i = \alpha_X(a_i) \in \mathcal{O}_X \\ u_i = \mu_Z(a_i) \in \mathcal{P}_{X,(m+s)} \\ \eta_i = u_i - 1 \in \mathcal{P}_{X,(m+s)} \end{cases}$$

On sait qu'alors $\{\eta'^{\{k\}(m)}\}$ (respectivement $\{\eta^{\{k\}(m+s)}\}$) est une base de $\mathcal{P}_{Y',(m)}$ (respectivement $\mathcal{P}_{X,(m+s)}$) sur $\mathcal{O}_{Y'}$ (respectivement sur \mathcal{O}_X). Considérons le diagramme suivant :



Nous avons :

$$\begin{aligned}
i_0^* \circ F^*(b'_i) &= (f_0^* \circ F_{(Y_0, N_0)/(T_0, K_0)}^{s*}) \circ j_0'^*(b'_i) \\
&= (f_0^* \circ F_{(Y_0, N_0)/(T_0, K_0)}^{s*})(w_0^*(\bar{b}_i)) \\
&= f_0^*(p^s \bar{b}_i) \\
&= p^s f_0^*(\bar{b}_i) \\
&= p^s i_0^*(a_i) \\
&= i_0^*(p^s a_i).
\end{aligned}$$

Notons β la composée : $i_0^{-1}M \xrightarrow{i_0^{-1}\alpha_X} i_0^{-1}\mathcal{O}_X \xrightarrow{i_0^*} \mathcal{O}_{X_0}$. Comme l'immersion fermée $(S_0, L_0) \hookrightarrow (S, L)$ est exacte, il en est de même pour i_0 . Donc $M_0 \simeq i_0^*M = i_0^{-1}M \oplus_{\beta^{-1}\mathcal{O}_{X_0}^*} \mathcal{O}_{X_0}^*$. Donc il existe $c, d \in \beta^{-1}(\mathcal{O}_{X_0}^*)$ tels que $F^*(b'_i) + c = p^s a_i + d$ et $\beta(c) = \beta(d)$. Comme $X_0 \hookrightarrow X$ est une nilimmersion, $i_0^* : i_0^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{X_0}$ induit une surjection $i_0^{-1}\mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{O}_{X_0}^*$, donc $\beta^{-1}(\mathcal{O}_{X_0}^*) = \alpha_x^{-1}(\mathcal{O}_X^*)$ est un sous-groupe, et l'on peut prendre $c = 0$. Ainsi, pour tout i , il existe $e_i \in M^*$ tel que $F^*(b'_i) = p^s a_i + e_i$ et $\beta(e_i) = \beta(0) = 1$.

On veut calculer $F_\Delta^*(\eta'_i) = F_\Delta^*(\mu'_{(m)}(b'_i)) - 1$. Montrons que $F_\Delta^*(\mu'_{(m)}(b'_i)) = \mu_{(m)}(F^*(b'_i))$. Par définition $\mu_{(m)}(F^*(b'_i))$ est l'unique élément z de $\mathcal{P}_{X, (m)}^*$ tel que $p_{1, (m)}^*(F^*(b'_i)) = p_{0, (m)}^*(F^*(b'_i)) + \lambda_{(m)}(z)$. Or :

$$\begin{aligned}
p_{1, (m)}^*(F^*(b'_i)) &= F_\Delta^* \circ p_{1, (m)}'^*(b'_i) \\
&= F_\Delta^*(p_{0, (m)}'^*(b'_i) + \lambda'_{(m)}(\mu'_{(m)}(b'_i))) \\
&= p_{0, (m)}^*(F^*(b'_i)) + \lambda_{(m)}(F_\Delta^*(\mu'_{(m)}(b'_i))).
\end{aligned}$$

Donc $\mu_{(m)}(F^*(b'_i)) = F_\Delta^*(\mu'_{(m)}(b'_i))$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}
F_\Delta^*(\eta'_i) &= \mu_{(m)}(F^*(b'_i)) - 1 \\
&= \mu_{(m)}(p^s a_i + e_i) - 1 \\
&= \mu_{(m)}(a_i)^{p^s} \mu_{(m)}(e_i) - 1 \\
&= \varphi_{m, m+s}^*(\mu_{(m+s)}(a_i)^{p^s} \mu_{(m+s)}(e_i) - 1) \\
&= \varphi_{m, m+s}^*(u_i^{p^s} \mu_{(m+s)}(e_i) - 1).
\end{aligned}$$

Or $e_i \in M^*$, donc $\mu_{(m+s)}(e_i) = \alpha_{(m+s)}(p_{1, (m+s)}^*(e_i) - p_{0, (m+s)}^*(e_i)) = p_{1, (m+s)}^*(\alpha_X(e_i)) p_{0, (m+s)}^*(\alpha_X(e_i))^{-1}$. Comme $\beta(e_i) = 1 = i_0^*(\alpha_X(e_i))$, on peut écrire $\alpha_X(e_i)$ sous la forme $1 + f_i$ avec $f_i \in \mathfrak{a}_S \mathcal{O}_X$. D'où :

$$\begin{aligned}
\mu_{(m+s)}(e_i) &= p_{1, (m+s)}^*(1 + f_i) p_{0, (m+s)}^*(1 + f_i)^{-1} \\
&= (p_{1, (m+s)}^*(1 + f_i) - p_{0, (m+s)}^*(1 + f_i)) p_{0, (m+s)}^*(1 + f_i)^{-1} + 1 \\
&= (p_{1, (m+s)}^*(f_i) - p_{0, (m+s)}^*(f_i)) p_{0, (m+s)}^*(1 + f_i)^{-1} + 1.
\end{aligned}$$

On peut donc écrire $\mu_{(m+s)}(e_i)$ sous la forme $\zeta_i + 1$ avec $\zeta_i \in \mathfrak{a}_S J_1$ (où J_1 est le noyau de l'immersion fermée canonique $(X, M) \hookrightarrow (\Delta_{X,(m+s)}, M_{(m+s)})$). D'où :

$$\begin{aligned} F_{\Delta}^*(\eta'_i) &= \varphi_{m,m+s}^*(u_i^{p^s} (1 + \zeta_i) - 1) \\ &= \varphi_{m,m+s}^*(u_i^{p^s} + \zeta_i u_i^{p^s} - 1) \\ &= \varphi_{m,m+s}^* \left((1 + \eta_i)^{p^s} + \zeta_i u_i^{p^s} - 1 \right) \\ &= \varphi_{m,m+s}^* \left(\eta_i^{p^s} + \sum_{k=1}^{p^s-1} \binom{p^s}{k} \eta_i^k + \zeta_i u_i^{p^s} \right). \end{aligned}$$

Comme $p \in \mathfrak{a}_S$ divise $\binom{p^s}{k}$ pour tout k compris entre 1 et $p^s - 1$, on peut ré-écrire cette dernière relation sous la forme : $F_{\Delta}^*(\eta'_i) = \varphi_{m,m+s}^*(\eta_i^{p^s} + \theta_i)$ avec $\theta_i \in \mathfrak{a}_S J_1$. Donc $F_{\Delta}^*(\eta_i'^{p^m}) = \varphi_{m,m+s}^*(\eta_i^{p^{m+s}} + \theta_i^{p^m} + p\xi_i)$ avec $\xi_i \in \mathfrak{a}_S J_1^{p^m}$. Or $p \mathfrak{a}_S \subset \mathfrak{b}_S$, donc $p\xi_i \in \mathfrak{b}_S J_1^{p^m}$. D'où : $F_{\Delta}^*(\eta_i'^{p^m}) = \varphi_{m,m+s}^*(\eta_i^{p^{m+s}} + \sigma_i)$ avec $\sigma_i \in \mathfrak{b}_S J_1^{p^m}$. Ce résultat entraîne le (i) de la proposition, puisque $\mathcal{P}_{Y',(m)}$ est par construction l'enveloppe à puissances divisées usuelle de l'idéal engendré par les $\eta_i'^{p^m}$.

(ii) L'idéal $\overline{\mathcal{I}}^{\{n\}(m)}$ est engendré en tant que $\mathcal{O}_{Y'}$ -module par les sections $\prod_{i=1}^r \eta_i^{\{n_i\}(m)}$

avec $\sum_{i=1}^r n_i \geq n$. Pour prouver l'assertion (ii), il suffit donc de montrer que, pour tout n ,

$\Phi^*(\eta_i^{\{n\}(m)}) \in \overline{\mathcal{I}}^{\{n\}(m+s)}$. Cela se fait de manière strictement analogue au cas non logarithmique ([Ber00], p.39). \square

On a donc un morphisme $\Phi : \Delta_{X,(m+s)} \rightarrow \Delta_{Y',(m)}$. On notera aussi $\Phi : \Delta_{X,(m+s)}^n \rightarrow \Delta_{Y',(m)}^n$ les morphismes induits par passage aux voisinages infinitésimaux. Rappelons que les voisinages à puissances divisées de la diagonale sont définis à partir d'une exactification locale de celle-ci. Soit $j' : (Y', N') \hookrightarrow (Z', N_{Z'})$ une immersion fermée exacte, $g' : (Z', N_{Z'}) \rightarrow (Y'^2, N_{Y'^2})$ un morphisme log-étale, tels que $g' \circ j' = \Delta'$. Alors $\Delta_{Y',(m)}^n$ est l'enveloppe à puissances divisées partielles de niveau m classique de $Y' \hookrightarrow Z'$ et $N_{(m)}^n = h'^* N_{Z'}$ où $h' : \Delta_{Y',(m)}^n \rightarrow Z'$. Soit $(Z_1, M_{Z_1}) = (Z', N_{Z'}) \times_{(Y'^2, N_{Y'^2})} (X^2, M_{X^2})$. Alors la projection canonique $(Z_1, M_{Z_1}) \rightarrow (X^2, M_{X^2})$ est log-étale. Comme $F_1 \circ \Delta = \Delta' \circ F$, la propriété universelle du produit fibré fournit une immersion fermée $(X, M) \hookrightarrow (Z_1, M_{Z_1})$. Si celle-ci n'est pas exacte, on considère une exactification $(X, M) \hookrightarrow (Z, M_Z)$. On obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} (X, M) & \hookrightarrow & (\Delta_{X,(m+s)}^n, M_{(m+s)}^n) & \xrightarrow{h} & (Z, M_Z) & \longrightarrow & (X^2, M_{X^2}) \\ F \downarrow & & & & F' \downarrow & & \downarrow F_1 \\ (Y', N') & \hookrightarrow & (\Delta_{Y',(m)}^n, N_{(m)}^n) & \xrightarrow{h'} & (Z', N_{Z'}) & \longrightarrow & (Y'^2, N_{Y'^2}) \end{array}$$

Le morphisme de log-schémas $(Z', M_{Z'}) \rightarrow (Y'^2, N_{Y'^2})$ est log-étale, donc la composée $F' \circ h$ est unique. Comme $M_{(m+s)}^n = h^* M_Z$, l'application $h^* F'^* N_{Z'} \rightarrow h^* M_Z$ permet de définir une application $\Phi^* N_{(m)}'^n = \Phi^* h'^* N_{Z'} \simeq h^* F'^* N_{Z'} \rightarrow h^* M_Z = M_{(m+s)}^n$, de sorte que l'on obtient un morphisme de log-schémas $\Phi : (\Delta_{(m+s)}^n, M_{(m+s)}^n) \rightarrow (\Delta_{Y',(m)}^n, N_{(m)}'^n)$.

Corollaire 3.3.1. *Si \mathcal{F} est un $\mathcal{D}_{Y'}^{(m)}$ -module, il existe une structure naturelle de $\mathcal{D}_X^{(m+s)}$ -module sur $F^* \mathcal{F}$.*

Démonstration : soit $(\varepsilon'_n)_{n \geq 0}$ la m -PD-stratification sur \mathcal{F} correspondant à sa structure de $\mathcal{D}_{Y'}^{(m)}$ -module à gauche : $\varepsilon'_n : p'_{1,(m)}{}^{n*} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} p'_{0,(m)}{}^{n*} \mathcal{F}$. Alors $(\Phi^* \varepsilon'_n)_{n \geq 0}$ fournit une $(m+s)$ -PD-stratification sur $F^* \mathcal{F} : p_{1,(m+s)}{}^{n*} F^* \mathcal{F} \simeq \Phi^* p'_{1,(m)}{}^{n*} \mathcal{F} \xrightarrow{\Phi^* \varepsilon'_n} \Phi^* p'_{0,(m)}{}^{n*} \mathcal{F} \simeq p_{0,(m+s)}{}^{n*} F^* \mathcal{F}$, c'est-à-dire une structure de $\mathcal{D}_X^{(m+s)}$ -module à gauche. \square

Corollaire 3.3.2. *Pour $\mathcal{F} = \mathcal{D}_{Y'}^{(0)}$, la structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module de $F^* \mathcal{D}_{Y'}^{(0)}$ permet de définir un morphisme $\Pi : \mathcal{D}_X^{(m)} \rightarrow F^* \mathcal{D}_{Y'}^{(0)}$, $P \mapsto P.(1 \otimes 1)$.*

3.4 Description en coordonnées locales dans le cas de la caractéristique p

Lorsque (S, L) est de caractéristique p , on peut expliciter la structure de $\mathcal{D}_X^{(m+s)}$ -module de $F^* \mathcal{F}$ comme dans le cas classique.

Proposition 3.4.1. *On suppose ici que $(S, L) = (T, K)$, $(X, M) = (Y, N)$, $\mathfrak{a}_S = 0$ et que $F = F_{(X,M)/(S,L)}^s$. Soient a_1, \dots, a_r des coordonnées logarithmiques locales sur (X, M) , a'_1, \dots, a'_r les coordonnées correspondantes sur (X', M') , $\eta_i = \mu_{(m+s)}(a_i) - 1$ et $\eta'_i = \mu'_{(m)}(a'_i) - 1$. Alors :*

(i) *L'homomorphisme $\Phi^* : \mathcal{P}_{X',(m)} \rightarrow \mathcal{P}_{X,(m+s)}$ défini dans la proposition (3.3.1) vérifie :*

$$(3.1) \quad \Phi^* \left(\underline{\eta}'^{\{k\}_{(m)}} \right) = \underline{\eta}^{\{p^s k\}_{(m+s)}}$$

pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^r$.

(ii) *Si \mathcal{F} est un $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$ -module à gauche, la structure de $\mathcal{D}_X^{(m+s)}$ -module à gauche de $F^* \mathcal{F}$ est caractérisée par les relations :*

$$(3.2) \quad \partial_{\langle \underline{k} \rangle_{(m+s)}} (1 \otimes f) = \begin{cases} 1 \otimes \partial_{\langle p^{-s} \underline{k} \rangle_{(m)}} \cdot f & \text{si } p^s | \underline{k} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration : ici $(S, L) = (S_0, L_0)$ est de caractéristique p , et F est le s -ème itéré du morphisme de Frobenius relatif de (X, M) sur (S, L) . On a donc : $F^*(a'_i) = p^s a_i$ et

$$\begin{aligned} F_{\Delta}^*(\eta'_i) &= F_{\Delta}^*(\mu'_{(m)}(a_i) - 1) \\ &= \mu_{(m+s)}(p^s a_i) - 1 \\ &= \mu_{(m+s)}(a_i)^{p^s} - 1 \\ &= (\eta_i + 1)^{p^s} - 1 \\ &= \eta_i^{p^s}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \Phi^*(\eta_i^{\{k_i\}_{(m)}}) &= \Phi^*(\eta_i^{r_i}(\eta_i^{p^m})^{[q_i]}) \\ &= \eta_i^{p^s r_i}(\eta_i^{p^{m+s}})^{[q_i]} \\ &= \eta_i^{\{p^s k_i\}_{(m+s)}}. \end{aligned}$$

car $p^s k_i = p^{m+s} q_i + p^s r_i$ avec $0 \leq p^s r_i < p^{m+s}$. D'où l'assertion (i).

Soient $\varepsilon' = (\varepsilon'_n)$ la m -PD-stratification logarithmique de \mathcal{F} et $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ celle de $F^*\mathcal{F}$. Alors pour tout $f' \in \mathcal{F}$, $\varepsilon'_n(1 \otimes f') = \theta'_n(f') = \sum_{\underline{k}} \underline{\partial}'_{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} f' \otimes \underline{\eta}'^{\{\underline{k}\}_{(m)}}$ (d'après la relation (2.7) du paragraphe 2.6). En posant $f = 1 \otimes f'$, on obtient : $\varepsilon_n(1 \otimes f) = \theta_n(f) = \sum_{\underline{k}} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle_{(m+s)}} f \otimes \underline{\eta}^{\{\underline{k}\}_{(m+s)}}$. Or $1 \otimes f = \Phi^*(1 \otimes f')$ et $\varepsilon_n = \Phi^*(\varepsilon'_n)$ par construction, donc la formule (3.1) entraîne la formule (3.2). \square

Le corollaire suivant nécessite seulement de supposer que \mathcal{O}_S est annulé par une puissance de p .

Corollaire 3.4.1. *Le morphisme $\Pi : \mathcal{D}_X^{(m)} \rightarrow F^*\mathcal{D}_{Y'}^{(0)}$ défini dans le corollaire (3.3.2) est surjectif (lorsque la base S est annulée par une puissance de p).*

Démonstration : lorsque la base est annulée par p , la formule (3.2) entraîne que $\Pi(\underline{\partial}_{\langle p^m \underline{k}' \rangle_{(m)}}) = 1 \otimes \underline{\partial}_{\langle \underline{k}' \rangle_{(0)}}$ et $\Pi(\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}) = 0$ si p^m ne divise pas \underline{k} . Donc Π est surjectif. Si l'on suppose maintenant que la base est seulement annulée par une puissance de p , nous pouvons considérer la réduction (S_0, L_0) de (S, L) modulo p , et $(X_0, M_0) = (S_0, L_0) \times_{(S, L)} (X, M)$. Comme $p \in \mathfrak{a}_S$, p est nilpotent, donc la surjectivité de $\Pi_0 : \mathcal{D}_{X_0}^{(m)} \rightarrow F_0^*\mathcal{D}_{Y'_0}^{(0)}$ entraîne celle de $\Pi : \mathcal{D}_X^{(m)} \rightarrow F^*\mathcal{D}_{Y'}^{(0)}$. \square

Chapitre 4

Descente par Frobenius

Dans le cas classique, Pierre Berthelot a montré que le foncteur image inverse par le s -ème itéré du Frobenius établit une équivalence de catégories entre $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules et $\mathcal{D}_X^{(m+s)}$ -modules (cf [Ber00], théorème 2.3.6). Dans le cas logarithmique, ce résultat est en défaut, comme l'a remarqué Arthur Ogus (cf [Ogu94]) dans le cas de la descente de Cartier. En effet, on a comme condition supplémentaire la nullité de l'application résidu, introduite par Ogus. Rappelons brièvement la définition de cette application. Notons (X^*, M^*) le (S, L) -log-schéma dont le schéma sous-jacent est X (au-dessus de S) et dont la log-structure est l'image inverse de L . Nous avons alors $\Omega_{X/S}^1 \cong \Omega_{(X^*, M^*)/(S, L)}^1$. D'autre part f se factorise en $f = f^* \circ u$, avec $u : (X, M) \rightarrow (X^*, M^*)$ et $f^* : (X^*, M^*) \rightarrow (S, L)$. Nous avons donc la suite exacte suivante :

$$\Omega_{(X^*, M^*)/(S, L)}^1 \rightarrow \Omega_{(X, M)/(S, L)}^1 \xrightarrow{r} R_{(X, M)/(S, L)} \rightarrow 0$$

avec $R_{(X, M)/(S, L)} = \Omega_{(X, M)/(X^*, M^*)}^1$. L'application $d : \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{(X, M)/(S, L)}^1$ se factorise à travers $\Omega_{(X^*, M^*)/(S, L)}^1$, donc l'application composée $\mathcal{O}_X \rightarrow R_{(X, M)/(S, L)}$ est nulle. L'application résidu d'une connexion logarithmique $\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes \Omega_{(X, M)/(S, L)}^1$ est définie comme la composée $(id_{\mathcal{E}} \otimes r) \circ \nabla$.

Le résidu de la connexion sous-jacente à un $\mathcal{D}_X^{(1)}$ -module n'est pas toujours nul, comme le montre l'exemple suivant. Considérons la droite affine $X = \text{Spec}(\mathbb{Z}_p[t])$, munie de la log-structure M associée à $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_p[t]$, $1 \mapsto t$. Soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang 1, de base e . Munissons \mathcal{F} de la connexion définie par $\partial_{\langle 1 \rangle_{(0)}} \cdot e = ae$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $a \wedge p = 1$ ($\nabla e = ae \otimes d\log 1$). Comme $p! \partial_{\langle p \rangle_{(1)}} = \partial_{\langle 1 \rangle_{(1)}} \circ \dots \circ (\partial_{\langle 1 \rangle_{(1)}} - p + 1) = \partial_{\langle 1 \rangle_{(0)}} \circ \dots \circ (\partial_{\langle 1 \rangle_{(0)}} - p + 1)$, on a $p! \partial_{\langle p \rangle_{(1)}}(e) = a(a-1) \dots (a-p+1)e$. Or p divise le produit $a(a-1) \dots (a-p+1)$ et \mathcal{F} est sans p -torsion, donc $\partial_{\langle p \rangle_{(1)}}(e) = \frac{a(a-1) \dots (a-p+1)}{p!} e$, et \mathcal{F} est muni d'une structure de $\mathcal{D}_X^{(1)}$ -module. Par ailleurs, le résidu r_{∇} envoie e sur $(id_{\mathcal{F}} \otimes r) \circ \nabla(e) = (id_{\mathcal{F}} \otimes r)(ae \otimes d\log 1) = ae \neq 0$. Par réduction modulo p , on obtient un exemple de $\mathcal{D}_X^{(1)}$ -module de résidu non nul (puisque $a \wedge p = 1$) en caractéristique p .

Afin de lever cette difficulté, nous allons utiliser les constructions de Pierre Lorenzon. Dans sa thèse (voir [Lor97] et [Lor00]), Lorenzon associe canoniquement à une log-structure sur un schéma X une algèbre \mathcal{A}_X^{gp} : c'est l'algèbre associée à l'extension

$$\underline{E}_X = (0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow M_X^{gp} \longrightarrow \mathcal{I}_X^{gp} \longrightarrow 0)$$

où \mathcal{I}_X^{gp} est le quotient de M_X^{gp} par l'action de \mathcal{O}_X^* . Nous renvoyons à l'annexe pour des rappels plus détaillés. Nous montrons que cette \mathcal{O}_X -algèbre \mathcal{I}_X^{gp} -indexée possède une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module, ce qui nous permet de définir de nouveaux anneaux $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$, pour lesquels nous établissons un théorème de descente (4.3.1). Pour simplifier, nous établirons ici une équivalence de catégories entre $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -modules et $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(0)}$ -modules, plutôt qu'entre $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m+s)}$ -modules et $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -modules.

Notations : nous considérons un log-schéma fin (X, M) log-lisse au-dessus de (S, L) . Soit δ_X (ou simplement δ) la projection canonique $M_X^{gp} \rightarrow \mathcal{I}_X^{gp}$. Pour $s \in M_X^{gp}$, nous noterons e_s la base sur \mathcal{O}_X de $\mathcal{A}_{X,\delta(s)}^{gp}$ définie par s (cf annexe).

4.1 L'anneau $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$

Nous allons montrer que l'algèbre \mathcal{A}_X^{gp} possède une structure naturelle de $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module. Pour m fixé, nous pourrions alors définir l'anneau $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ par :

$$\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)} = \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\mathcal{I}}} \mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$$

(si \mathcal{M} est un faisceau sur X , alors $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}$ est le faisceau induit dans le topos localisé $X_{/\mathcal{I}}$, où $\mathcal{I} = \mathcal{I}_X^{gp}$).

4.1.1 Structure de $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module de \mathcal{A}_X^{gp}

D'après le lemme (2.2.1), \mathcal{A}_X^{gp} est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module. En effet, comme l'a souligné Lorenzon dans sa thèse (cf [Lor97]), si $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ est un morphisme strict, alors $f^* \mathcal{A}_Y^{gp} \rightarrow \mathcal{A}_X^{gp}$ est un isomorphisme. On a donc les isomorphismes d'algèbres \mathcal{I}_X^{gp} -indexées : $p_1^* \mathcal{A}_X^{gp} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{\Delta_{X,(m)}^n}^{gp} \xleftarrow{\sim} p_0^* \mathcal{A}_X^{gp}$ (les faisceaux \mathcal{I}_X^{gp} et $\mathcal{I}_{\Delta_{X,(m)}^n}^{gp}$ sont identiques). Ces isomorphismes sont compatibles pour n variable par construction et vérifient la condition de cocycle, ce qui définit bien une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module \mathcal{I}_X^{gp} -indexé.

Nous pouvons décrire cette structure en coordonnées locales. Pour cela, rappelons tout d'abord que nous avons construit en 2.2.2 une application $\mu_{(m)}^n : M_X \rightarrow j^{-1}(1 + J)$, où $j : (X, M_X) \hookrightarrow (\Delta_{X,(m)}^n, M_{(m)}^n)$ a pour idéal J . Comme $j^{-1}(1 + J)$ est un groupe (multiplicatif) et $\mu_{(m)}^n$ est un homomorphisme de monoïdes, $\mu_{(m)}^n$ s'étend à M_X^{gp} .

Lemme 4.1.1. *Pour tout multi-indice \underline{k} et tout $s \in M_X^{gp}$:*

$$(4.1) \quad \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} \cdot e_s = \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}^b(s, 1)e_s$$

Démonstration : on note d_1 l'extension des scalaires de \mathcal{A}_X^{gp} à $p_1^*(\mathcal{A}_X^{gp})$, et θ sa composée avec l'isomorphisme $p_1^*(\mathcal{A}_X^{gp}) \xrightarrow{\sim} p_0^*(\mathcal{A}_X^{gp})$. Dans $\mathcal{A}_{X,\delta(s)}^{gp}$ vu comme sous-faisceau de $M_X^{gp} \wedge \mathcal{O}_{\mathcal{I}}$, $e_s = \overline{(s, 1)}$.

$$\begin{aligned} \theta(e_s) &= \overline{(p_1^*(s), 1)} \quad \text{par définition de } \theta \\ &= \overline{(\mu(s)p_0^*(s), 1)} \quad \text{par définition de } \mu \\ &= \overline{(p_0^*(s), \mu(s))} \quad \text{car } \mu(s) \in j^{-1}(1+J) \subset j^{-1}\mathcal{P}_{X,(m)}^{n,*} \\ &= \overline{\left(p_0^*(s), \sum_{\underline{k}} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}^b(s, 1)\eta^{\{\underline{k}\}} \right)} \quad \text{par la formule de Taylor (2.3)} \\ &= \sum_{\underline{k}} \overline{(p_0^*(s), p_0^*\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}^b(s, 1))\eta^{\{\underline{k}\}}} \\ &= \sum_{\underline{k}} \overline{p_0^*(s, \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}^b(s, 1))\eta^{\{\underline{k}\}}} \\ &= \sum_{\underline{k}} \overline{p_0^*(\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}^b(s, 1)e_s)\eta^{\{\underline{k}\}}}. \end{aligned}$$

Donc $\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} \cdot e_s = \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}^b(s, 1)e_s$. □

On en déduit que, pour tout $a \in \mathcal{O}_X$,

$$(4.2) \quad \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} \cdot (ae_s) = \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}^b(s, a)e_s.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} \cdot (ae_s) &= (\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} \cdot a) \cdot e_s \\ &= \left(\sum_{\underline{i} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}_{\langle \underline{k}-\underline{i} \rangle}(a) \underline{\partial}_{\langle \underline{i} \rangle} \right) \cdot e_s \\ &= \sum_{\underline{i} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}_{\langle \underline{k}-\underline{i} \rangle}(a) (\underline{\partial}_{\langle \underline{i} \rangle} \cdot e_s) \\ &= \left(\sum_{\underline{i} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}_{\langle \underline{k}-\underline{i} \rangle}(p_1^*(a)) \underline{\partial}_{\langle \underline{i} \rangle}(\mu(s)) \right) e_s \\ &= \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}(p_1^*(a)\mu(s))e_s \\ &= \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}^b(s, a)e_s. \end{aligned}$$

Donc l'indexation est préservée.

4.1.2 L'anneau $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$

Lemme 4.1.2. *Le $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module \mathcal{A}_X^{gp} vérifie la formule de Leibniz.*

Démonstration : soient $a, b \in \mathcal{O}_X$ et $s, t \in M_X^{gp}$.

$$\begin{aligned}
\partial_{\langle \underline{k} \rangle} \cdot (ae_s be_t) &= \partial_{\langle \underline{k} \rangle} \cdot (abe_{s+t}) \\
&= \partial_{\langle \underline{k} \rangle}^b (s+t, ab) e_{s+t} \\
&= \partial_{\langle \underline{k} \rangle} (\mu_{(m)}^n(s+t) p_1^*(ab)) e_s e_t \\
&= \partial_{\langle \underline{k} \rangle} (\mu_{(m)}^n(s) \mu_{(m)}^n(t) p_1^*(a) p_1^*(b)) e_s e_t \\
&= \partial_{\langle \underline{k} \rangle} ((\mu_{(m)}^n(s) p_1^*(a)) (\mu_{(m)}^n(t) p_1^*(b))) e_s e_t \\
&= \sum_{i \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \partial_{\langle \underline{i} \rangle} (\mu_{(m)}^n(s) p_1^*(a)) \partial_{\langle \underline{k}-\underline{i} \rangle} (\mu_{(m)}^n(t) p_1^*(b)) e_s e_t \\
&= \sum_{i \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \partial_{\langle \underline{i} \rangle}^b (s, a) e_s \partial_{\langle \underline{k}-\underline{i} \rangle}^b (t, b) e_t \\
&= \sum_{i \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \partial_{\langle \underline{i} \rangle} \cdot (ae_s) \partial_{\langle \underline{k}-\underline{i} \rangle} \cdot (be_t).
\end{aligned}$$

□

Donc la structure de $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module de \mathcal{A}_X^{gp} est compatible à sa structure de $\mathcal{O}_{X,\mathcal{I}}$ -algèbre, dans le sens où l'a défini Berthelot ([Ber96], (2.3.4)). Il existe donc ([Ber96], prop.(2.3.5)) sur $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)} = \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\mathcal{I}}} \mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ une unique structure de faisceaux d'anneaux telle que les applications $\mathcal{A}_X^{gp} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$, $a \mapsto a \otimes 1$ et $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$, $P \mapsto 1 \otimes P$ soient des homomorphismes, et que, pour tous $a \in \mathcal{A}_X^{gp}$, $P \in \mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ et \underline{k} , on ait les relations : $(a \otimes 1)(1 \otimes P) = a \otimes P$ et $(1 \otimes \partial_{\langle \underline{k} \rangle})(a \otimes 1) = \sum_{i \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} (\partial_{\langle \underline{k}-\underline{i} \rangle} \cdot a) \otimes \partial_{\langle \underline{i} \rangle}$.

4.2 Le cas de la caractéristique p

Dans ce paragraphe, nous supposons que la base S est annulée par p . Nous définissons dans ce contexte une $\mathcal{O}_{X'}$ -algèbre \mathcal{I}_X^{gp} -indexée $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$, munie d'une action de $\mathcal{D}_{X'}^{(0)}$ à gauche compatible à sa structure d' \mathcal{O}_X -algèbre, et établissons une équivalence de catégories entre $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -modules à gauche et $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X',\mathcal{I}}} \mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ -modules à gauche (théorème (4.2.1)).

4.2.1 L'anneau $\tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$

Nous reprenons les notations du chapitre précédent (cf 3.1 et 3.2). Dans sa thèse, Pierre Lorenzon définit l'algèbre $\mathcal{B}_{X/S}$ comme la sous-algèbre \mathcal{I}_X^{gp} -indexée des sections horizontales de \mathcal{A}_X^{gp} , pour une connexion canonique $d_{\mathcal{A}}$ (cf annexe). Nous allons généraliser cette

définition en posant :

$$\mathcal{B}_{X/S}^{(m)} = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}} \left(F^* \mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}, \mathcal{A}_X^{gp} \right)$$

Dans le corollaire (3.3.2), nous avons construit un morphisme $\Pi : \mathcal{D}_X^{(m)} \rightarrow F^* \mathcal{D}_{X'}^{(0)}$. Dans le cas de la caractéristique p , la description locale donnée en (3.4.1) montre que ce morphisme est surjectif et que son noyau \mathcal{K} est engendré localement par les sections $\underline{\partial}_{\langle p^s \varepsilon_i \rangle}$, $0 \leq s \leq m-1$ et $1 \leq i \leq d$ (où d est le rang de $\Omega_{(X,M)/(S,L)}^1$). La surjectivité de Π implique l'injectivité du morphisme $\psi : \mathcal{B}_{X/S}^{(m)} \rightarrow \mathcal{A}_X^{gp}$ défini par $\psi(g) = g(1 \otimes 1)$. La description locale de \mathcal{K} implique que $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ peut être décrite via ψ comme l'ensemble des sections a de \mathcal{A}_X^{gp} telles que $\underline{\partial}_{\langle p^s \varepsilon_i \rangle} \cdot a = 0$ pour tout $0 \leq s \leq m-1$ et tout $1 \leq i \leq d$. Pour $m = 1$, $\mathcal{B}_{X/S}^{(1)}$ est ainsi l'ensemble des sections a de \mathcal{A}_X^{gp} telles que $\underline{\partial}_{\langle \varepsilon_i \rangle} \cdot a = 0$ pour tout $1 \leq i \leq d$; on retrouve donc l'ensemble des sections horizontales de \mathcal{A}_X^{gp} considéré par Lorenzon. Pour $m = 0$, on peut poser par convention $\mathcal{B}_{X/S}^{(0)} = \mathcal{A}_X^{gp}$ (notation qui peut prêter à confusion, puisque \mathcal{A}_X^{gp} ne dépend pas de la base S , mais qui donne plus de cohérence à la notation $\tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ introduite ci-dessous).

Le faisceau $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ est muni d'une structure d' $\mathcal{O}_{X',\mathcal{I}}$ -module à gauche par multiplication à droite sur $F^* \mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$.

Lemme 4.2.1. $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ est une sous- $\mathcal{O}_{X',\mathcal{I}}$ -algèbre unitaire de \mathcal{A}_X^{gp} .

Démonstration : la seule chose à vérifier est la stabilité par le produit. Utilisons la description locale : si $x, y \in \mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$, il suffit de montrer que $\psi(x)\psi(y)$ (produit dans \mathcal{A}_X^{gp}) est encore dans l'image de ψ , c'est-à-dire qu'il est annulé par les $\underline{\partial}_{\langle p^s \varepsilon_i \rangle}$, pour $0 \leq s \leq m-1$ et $1 \leq i \leq d$. Or $\psi(x)\psi(y) = x(1 \otimes 1)y(1 \otimes 1)$ et \mathcal{A}_X^{gp} vérifie la formule de Leibniz, donc le résultat est immédiat. De même, $\underline{\partial}_{\langle p^s \varepsilon_i \rangle} \cdot 1 = 0$ pour tout $0 \leq s \leq m-1$ et tout i , donc $1 \in \mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$. \square

Définition 4.2.1. Soit m un entier fixé. On pose $\tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)} = \mathcal{B}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X',\mathcal{I}}} \mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$.

On peut munir $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ d'une structure de $\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ -module à gauche par la multiplication à droite sur $F^* \mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$. Afin de définir sur $\tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ une structure d'anneau analogue à celle de $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$, montrons que $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ satisfait la formule de Leibniz. Soient $x, y \in \mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$. Nous devons vérifier que $\underline{\partial}'_{\langle \underline{k} \rangle_{(0)}} \cdot (xy) = \sum_{\substack{i \leq k \\ (0)}} \left\{ \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right\}_{(0)} \underline{\partial}'_{\langle i \rangle_{(0)}} \cdot x \underline{\partial}'_{\langle \underline{k}-i \rangle_{(0)}} \cdot y$. Comme nous disposons d'un morphisme injectif $\psi : \mathcal{B}_{X/S}^{(m)} \rightarrow \mathcal{A}_X^{gp}$, il suffit de vérifier que les images par ψ des deux

membres de l'égalité précédente sont les mêmes. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\psi \left(\underline{\partial}'_{\langle \underline{k} \rangle_{(0)}} \cdot (xy) \right) &= \left(\underline{\partial}'_{\langle \underline{k} \rangle_{(0)}} \cdot (xy) \right) (1 \otimes 1) \\
&= (xy) \left(1 \otimes \underline{\partial}'_{\langle \underline{k} \rangle_{(0)}} \right) \\
&= (xy) \left(\underline{\partial}_{\langle p^m \underline{k} \rangle_{(m)}} \cdot (1 \otimes 1) \right) \quad \text{d'après la formule (3.2)} \\
&= \underline{\partial}_{\langle p^m \underline{k} \rangle_{(m)}} \cdot (xy) (1 \otimes 1) \\
&= \underline{\partial}_{\langle p^m \underline{k} \rangle_{(m)}} (x(1 \otimes 1) y(1 \otimes 1)) \\
&= \sum_{\underline{i} \leq p^m \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} p^m \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\}_{(m)} \underline{\partial}_{\langle \underline{i} \rangle_{(m)}} \cdot (x(1 \otimes 1)) \underline{\partial}_{\langle p^m \underline{k} - \underline{i} \rangle_{(m)}} (y(1 \otimes 1)).
\end{aligned}$$

Or $\underline{\partial}_{\langle \underline{i} \rangle_{(m)}} \cdot (x(1 \otimes 1)) = x(\Pi(\underline{\partial}_{\langle \underline{i} \rangle_{(m)}}))$ et $\Pi(\underline{\partial}_{\langle \underline{i} \rangle_{(m)}}) = 0$ si p^m ne divise pas \underline{i} , $\Pi(\underline{\partial}_{\langle \underline{i} \rangle_{(m)}}) = 1 \otimes \underline{\partial}'_{\langle p^{-m} \underline{i} \rangle_{(0)}}$ sinon. On obtient donc, en observant que $\left\{ \begin{matrix} p^m \underline{k} \\ p^m \underline{j} \end{matrix} \right\}_{(m)} = \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{j} \end{matrix} \right\}_{(0)}$:

$$\begin{aligned}
\psi \left(\underline{\partial}'_{\langle \underline{k} \rangle_{(0)}} \cdot (xy) \right) &= \sum_{\underline{j} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} p^m \underline{k} \\ p^m \underline{j} \end{matrix} \right\}_{(m)} x(1 \otimes \underline{\partial}'_{\langle \underline{j} \rangle_{(0)}}) y(1 \otimes \underline{\partial}'_{\langle \underline{k} - \underline{j} \rangle_{(0)}}) \\
&= \sum_{\underline{j} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{j} \end{matrix} \right\}_{(0)} \psi \left(\underline{\partial}'_{\langle \underline{j} \rangle_{(0)}} \cdot x \right) \psi \left(\underline{\partial}'_{\langle \underline{k} - \underline{j} \rangle_{(0)}} \cdot y \right) \\
&= \psi \left(\sum_{\underline{j} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{j} \end{matrix} \right\}_{(0)} \underline{\partial}'_{\langle \underline{j} \rangle_{(0)}} \cdot x \underline{\partial}'_{\langle \underline{k} - \underline{j} \rangle_{(0)}} \cdot y \right).
\end{aligned}$$

□

Ainsi, il existe sur $\tilde{\mathcal{D}}_{X', \mathcal{I}}^{(0)}$ une unique structure de faisceau d'anneaux telle que les applications $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{X', \mathcal{I}}^{(0)}$, $x \mapsto x \otimes 1$ et $\mathcal{D}_{X', \mathcal{I}}^{(0)} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{X', \mathcal{I}}^{(0)}$, $P \mapsto 1 \otimes P$ soient des homomorphismes et que, pour tous $x \in \mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$, $P \in \mathcal{D}_{X', \mathcal{I}}^{(0)}$ et \underline{k} on ait les relations : $(x \otimes 1)(1 \otimes P) = x \otimes P$ et $(1 \otimes \underline{\partial}'_{\langle \underline{k} \rangle_{(0)}})(x \otimes 1) = \sum_{\underline{i} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} (\underline{\partial}'_{\langle \underline{k} - \underline{i} \rangle_{(0)}} \cdot x) \otimes \underline{\partial}'_{\langle \underline{i} \rangle_{(0)}}$.

4.2.2 Les foncteurs \mathbb{F} et \mathbb{G}

Nous allons construire tout d'abord deux foncteurs entre la catégorie des $\tilde{\mathcal{D}}_{X', \mathcal{I}}^{(m)}$ -modules à gauche et celle des $\tilde{\mathcal{D}}_{X', \mathcal{I}}^{(0)}$ -modules à gauche. Nous noterons ces catégories $\tilde{\mathcal{D}}_{X', \mathcal{I}}^{(m)} - \underline{\text{mod}}$ et $\tilde{\mathcal{D}}_{X', \mathcal{I}}^{(0)} - \underline{\text{mod}}$ respectivement. Nous construirons ensuite deux morphismes de foncteurs ξ_1 et ξ_2 afin de montrer que \mathbb{F} et \mathbb{G} sont inverses l'un de l'autre.

Le foncteur $\mathbb{F} : \tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)} - \underline{\text{mod}} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)} - \underline{\text{mod}}$ est défini en généralisant la construction de $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$. Si \mathcal{E} est un $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module, on pose :

$$\mathbb{F}(\mathcal{E}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}} \left(F^* \mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}, \mathcal{E} \right)$$

Comme précédemment, on dispose d'un morphisme injectif $\psi_{\mathcal{E}} : \mathbb{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$, qui identifie $\mathbb{F}(\mathcal{E})$ à la partie de \mathcal{E} annulée par les sections $\underline{\partial}_{\langle p^s \underline{\varepsilon}_i \rangle (m)}$, $0 \leq s \leq m-1$. Par restriction des scalaires, $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ agit sur \mathcal{E} . Encore une fois, la formule de Leibniz assure que l'image de $\mathbb{F}(\mathcal{E})$ est stable pour cette action, donc $\mathbb{F}(\mathcal{E})$ est un sous- $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ -module de \mathcal{E} . Le faisceau $\mathbb{F}(\mathcal{E})$ est par ailleurs muni d'une structure de $\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ -module à gauche par multiplication à droite sur $F^* \mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$. Pour vérifier que ces deux structures sont compatibles, et définissent ainsi une structure de $\tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ -module, il faut vérifier que $\underline{\partial}'_{\langle \underline{k} \rangle} \cdot (b.g) = (1 \otimes \underline{\partial}'_{\langle \underline{k} \rangle}) (b \otimes 1).g = \sum_{\underline{i} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\}_{(0)} (\underline{\partial}'_{\langle \underline{k}-\underline{i} \rangle} \cdot b) \cdot (\underline{\partial}'_{\langle \underline{i} \rangle} \cdot g)$. Nous avons d'une part :

$$\begin{aligned} (\underline{\partial}'_{\langle \underline{k} \rangle} \cdot (b.g)) (1 \otimes 1) &= (b.g)(1 \otimes \underline{\partial}'_{\langle \underline{k} \rangle}) \\ &= \underline{\partial}_{\langle p^m \underline{k} \rangle} \cdot ((b.g)(1 \otimes 1)) \quad \text{car } b.g \text{ est } \mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}\text{-linéaire} \\ &= \underline{\partial}_{\langle p^m \underline{k} \rangle} \cdot (b(1 \otimes 1).g(1 \otimes 1)) \\ &= (\underline{\partial}_{\langle p^m \underline{k} \rangle} b(1 \otimes 1)) \cdot g(1 \otimes 1) \quad \text{car } \mathcal{E} \text{ est un } \tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}\text{-module} \\ &= \left[\sum_{\underline{i} \leq p^m \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} p^m \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\}_{(m)} (\underline{\partial}_{\langle p^m \underline{k}-\underline{i} \rangle} \cdot b(1 \otimes 1)) \otimes \underline{\partial}_{\langle \underline{i} \rangle} \right] \cdot g(1 \otimes 1) \\ &= \left[\sum_{\underline{j} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{j} \end{matrix} \right\}_{(0)} (\underline{\partial}_{\langle p^m(\underline{k}-\underline{j}) \rangle} \cdot b(1 \otimes 1)) \otimes \underline{\partial}_{\langle p^m \underline{j} \rangle} \right] \cdot g(1 \otimes 1), \end{aligned}$$

car $b \in \mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$, donc $\underline{\partial}_{\langle p^m \underline{k}-\underline{i} \rangle} \cdot b(1 \otimes 1) = 0$ si p^m ne divise pas $p^m \underline{k} - \underline{i}$. Nous avons d'autre part :

$$\left[\sum_{\underline{j} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{j} \end{matrix} \right\}_{(0)} (\underline{\partial}'_{\langle \underline{k}-\underline{j} \rangle} \cdot b) \cdot (\underline{\partial}'_{\langle \underline{j} \rangle} \cdot g) \right] (1 \otimes 1) = \sum_{\underline{j} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{j} \end{matrix} \right\}_{(0)} (\underline{\partial}'_{\langle \underline{k}-\underline{j} \rangle} \cdot b)(1 \otimes 1).g(1 \otimes \underline{\partial}'_{\langle \underline{j} \rangle})$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{\underline{j} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{j} \end{matrix} \right\}_{(0)} (\partial'_{\langle \underline{k} - \underline{j} \rangle} \cdot b)(1 \otimes 1) \otimes \partial_{\langle p^m \underline{j} \rangle} \right) \cdot g(1 \otimes 1) \\
&\quad \text{car } 1 \otimes \partial'_{\langle \underline{j} \rangle} = \Pi(\partial_{\langle p^m \underline{j} \rangle}) \\
&= \left(\sum_{\underline{j} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{j} \end{matrix} \right\}_{(0)} b(1 \otimes \partial'_{\langle \underline{k} - \underline{j} \rangle}) \otimes \partial_{\langle p^m \underline{j} \rangle} \right) \cdot g(1 \otimes 1) \\
&= \left(\sum_{\underline{j} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{j} \end{matrix} \right\}_{(0)} \left(\partial_{\langle p^m(\underline{k} - \underline{j}) \rangle} \cdot b(1 \otimes 1) \right) \otimes \partial_{\langle p^m \underline{j} \rangle} \right) \cdot g(1 \otimes 1).
\end{aligned}$$

Réciproquement, si \mathcal{F} est un $\tilde{\mathcal{D}}_{X', \mathcal{I}}^{(0)}$ -module, on pose :

$$\mathbb{G}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} \mathcal{F}.$$

Le morphisme injectif $\psi : \mathcal{B}_{X/S}^{(m)} \hookrightarrow \mathcal{A}_X^{gp}$ se factorise en $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, \mathcal{I}} \otimes_{\mathcal{O}_{X', \mathcal{I}}} \mathcal{B}_{X/S}^{(m)} \rightarrow \mathcal{A}_X^{gp}$. On a donc $\mathbb{G}(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{F^* \mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} F^* \mathcal{F}$. Comme $F^* \mathcal{F}$ est muni d'une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche (d'après le corollaire (3.3.1)), le faisceau $\mathbb{G}(\mathcal{F})$ est muni d'une structure de $\tilde{\mathcal{D}}_{X, \mathcal{I}}^{(m)}$ -module à gauche par extension des scalaires. Compte-tenu de la description locale donnée en (3.2), on a, pour tous $a, b \in \mathcal{A}_X^{gp}$:

$$\begin{aligned}
(a \otimes \partial_{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}) \cdot (b \otimes f) &= a \partial_{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} \cdot (b \cdot (1 \otimes f)) \\
&= a \left(\sum_{\underline{i} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\}_{(m)} \partial_{\langle \underline{k} - \underline{i} \rangle_{(m)}}(b) \otimes \partial_{\langle \underline{i} \rangle_{(m)}} \right) \cdot (1 \otimes f) \\
&= \sum_{p^m \underline{j} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ p^m \underline{j} \end{matrix} \right\}_{(m)} a \partial_{\langle \underline{k} - p^m \underline{j} \rangle_{(m)}}(b) \otimes \partial'_{\langle \underline{j} \rangle_{(0)}} \cdot f.
\end{aligned}$$

Remarque : si $s \leq m - 1$, alors $\partial_{\langle p^s \underline{e}_i \rangle} \cdot (b \otimes f) = \partial_{\langle p^s \underline{e}_i \rangle}(b) \otimes f$.

Définissons à présent les deux morphismes de foncteurs $\xi_1 : \mathbb{G} \circ \mathbb{F} \rightarrow \text{Id}_{\tilde{\mathcal{D}}_{X, \mathcal{I}}^{(m)}\text{-mod}}$ et $\xi_2 : \text{Id}_{\tilde{\mathcal{D}}_{X', \mathcal{I}}^{(0)}\text{-mod}} \rightarrow \mathbb{F} \circ \mathbb{G}$. Nous avons vu que pour tout $\tilde{\mathcal{D}}_{X, \mathcal{I}}^{(m)}$ -module \mathcal{E} , il existe un morphisme injectif $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ -linéaire $\psi_{\mathcal{E}} : \mathbb{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$. Par extension des scalaires on en déduit un morphisme $\xi_1(\mathcal{E}) : \mathbb{F} \circ \mathbb{G}(\mathcal{E}) = \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} \mathbb{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$, dont il faut vérifier la $\tilde{\mathcal{D}}_{X, \mathcal{I}}^{(m)}$ -linéarité. Comme $\xi_1(\mathcal{E})$ est \mathcal{A}_X^{gp} -linéaire par construction, il suffit en fait de vérifier la

$\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -linéarité. Soient $a \in \mathcal{A}_X^{gp}$, $f \in \mathbb{F}(\mathcal{E})$ et \underline{k} un multi-indice. On a

$$\begin{aligned}
 \xi_1(\mathcal{E}) \left(\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle (m)} \cdot (a \otimes f) \right) &= \xi_1(\mathcal{E}) \left(\sum_{p^m \underline{j} \leq \underline{k}} \left\{ \frac{\underline{k}}{p^m \underline{j}} \right\}_{(m)} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} - p^m \underline{j} \rangle (m)}(a) \otimes \underline{\partial}'_{\langle \underline{j} \rangle (0)} \cdot f \right) \\
 &= \sum_{p^m \underline{j} \leq \underline{k}} \left\{ \frac{\underline{k}}{p^m \underline{j}} \right\}_{(m)} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} - p^m \underline{j} \rangle (m)}(a) \cdot \psi_{\mathcal{E}}(\underline{\partial}'_{\langle \underline{j} \rangle (0)} \cdot f) \\
 &= \sum_{p^m \underline{j} \leq \underline{k}} \left\{ \frac{\underline{k}}{p^m \underline{j}} \right\}_{(m)} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} - p^m \underline{j} \rangle (m)}(a) \cdot (\underline{\partial}'_{\langle \underline{j} \rangle (0)} \cdot f)(1 \otimes 1) \\
 &= \sum_{p^m \underline{j} \leq \underline{k}} \left\{ \frac{\underline{k}}{p^m \underline{j}} \right\}_{(m)} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} - p^m \underline{j} \rangle (m)}(a) \cdot f(1 \otimes \underline{\partial}'_{\langle \underline{j} \rangle (0)}) \\
 &= \sum_{p^m \underline{j} \leq \underline{k}} \left\{ \frac{\underline{k}}{p^m \underline{j}} \right\}_{(m)} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} - p^m \underline{j} \rangle (m)}(a) \cdot \underline{\partial}_{\langle p^m \underline{j} \rangle (m)} \cdot f(1 \otimes 1) \\
 &= \left(\sum_{p^m \underline{j} \leq \underline{k}} \left\{ \frac{\underline{k}}{p^m \underline{j}} \right\}_{(m)} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} - p^m \underline{j} \rangle (m)}(a) \otimes \underline{\partial}_{\langle p^m \underline{j} \rangle (m)} \right) \cdot \psi_{\mathcal{E}}(f) \\
 &= \left((1 \otimes \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle (m)}) \cdot (a \otimes 1) \right) \cdot \psi_{\mathcal{E}}(f) \\
 &= \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle (m)} \cdot (a \cdot \psi_{\mathcal{E}}(f)) \\
 &= \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle (m)} \cdot \xi_1(\mathcal{E})(a \otimes f).
 \end{aligned}$$

□

Si l'on identifie $\mathbb{F}(\mathcal{E})$ à la partie de \mathcal{E} annulée par les $\underline{\partial}_{\langle p^s \underline{e}_i \rangle}$, $0 \leq s \leq m-1$, le morphisme $\xi_1(\mathcal{E})$ n'est autre que $a \otimes e \mapsto a \cdot e$.

Soit \mathcal{F} un $\tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ -module. Pour définir $\xi_2(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{F} \circ \mathbb{G}(\mathcal{F})$, il suffit de remarquer que le morphisme $\mathcal{B}_{X'/S}^{(m)}$ -linéaire $\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{G}(\mathcal{F})$, $f \mapsto 1 \otimes f$ se factorise à travers $\mathbb{F} \circ \mathbb{G}(\mathcal{F})$. En effet $\mathbb{F} \circ \mathbb{G}(\mathcal{F})$ est la partie de $\mathbb{G}(\mathcal{F})$ annulée par les sections $\underline{\partial}_{\langle p^s \underline{e}_i \rangle (m)}$, $0 \leq s \leq m-1$, et $\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle (m)} \cdot (1 \otimes f) = 0$ si p^m ne divise pas \underline{k} . On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{G}(\mathcal{F}) \\
 & \searrow \xi_2(\mathcal{F}) & \nearrow \psi_{\mathbb{G}(\mathcal{F})} \\
 & & \mathbb{F} \circ \mathbb{G}(\mathcal{F})
 \end{array}$$

Comme $\xi_2(\mathcal{F})(f)(1 \otimes \underline{\partial}'_{\langle \underline{j} \rangle (0)}) = 1 \otimes \underline{\partial}'_{\langle \underline{j} \rangle (0)} \cdot f$ et que l'action de $\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ sur $\mathbb{F} \circ \mathbb{G}(\mathcal{F}) =$

$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}}\left(F^*\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}, \mathbb{G}(\mathcal{F})\right)$ est donnée par l'action à droite sur $F^*\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$, on vérifie aisément que $\xi_2(\mathcal{F})$ est $\tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ -linéaire.

4.2.3 Le projecteur P

Soit \mathcal{E} un $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module. Suivant la méthode classique ([Kat71]), nous allons construire localement un projecteur $P : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{F}(\mathcal{E})$ (avec $\mathbb{F}(\mathcal{E})$ identifié à son image par $\psi_{\mathcal{E}}$). On se place sur un ouvert U muni d'un système de coordonnées logarithmiques locales, et l'on pose :

$$P = \sum_{\underline{k} < p^m} (-1)^{|\underline{k}|} \underline{\partial}_{<\underline{k}>(m)}.$$

Remarque : compte-tenu de la structure d'anneau de $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$, nous avons $P = \prod_i P_i$ avec

$$P_i = \sum_{k < p^m} (-1)^k \underline{\partial}_{<k\varepsilon_i>(m)}.$$

Lemme 4.2.2. *Soit $j \in \mathcal{I}_X^{qp}$. Pour tout $x \in \mathcal{E}_j$, $P(x) \in \mathbb{F}(\mathcal{E})_j$.*

Démonstration : calculons $\underline{\partial}_{<p^l\varepsilon_i>(m)} \circ P$. Comme les $\underline{\partial}_{<\underline{k}>}$ commutent deux à deux, nous avons : $\underline{\partial}_{<p^l\varepsilon_i>(m)} \circ P = \prod_{j \neq i} P_j \circ \underline{\partial}_{<p^l\varepsilon_i>(m)} \circ P_i = \prod_{j \neq i} P_j \circ \sum_{k < p^m} (-1)^k \underline{\partial}_{<p^l\varepsilon_i>(m)} \circ \underline{\partial}_{<k\varepsilon_i>(m)}$. Nous pouvons donc omettre les multi-indices, et considérer :

$$\begin{aligned} \sum_{k < p^m} (-1)^k \underline{\partial}_{<p^l>} \circ \underline{\partial}_{<k>} &= \sum_{k=0}^{p^m-1} (-1)^k \sum_{j=\max\{p^l, k\}}^{k+p^l} \frac{j!}{(k+p^l-j)!(j-p^l)!(j-k)!} \frac{q_{p^l}! q_k!}{q_j!} \underline{\partial}_{<j>} \\ &= \sum_{j=p^l}^{p^m-1+p^l} \sum_{k=j-p^l}^{\min\{j, p^m-1\}} \frac{(-1)^k j!}{(k+p^l-j)!(j-p^l)!(j-k)!} \underline{\partial}_{<j>} \\ &\quad \text{car } q_{p^l}! = q_k! = q_j! = 1 \\ &= \sum_{j=p^l}^{p^m-1} \sum_{k=j-p^l}^j * + \sum_{j=p^m}^{p^m-1+p^l} \sum_{k=j-p^l}^{p^m-1} * \\ &= A + B. \end{aligned}$$

En posant $k' = k - j + p^l$, nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{j=p^l}^{p^m-1} \left(\sum_{k'=0}^{p^l} \frac{(-1)^{k'}}{k'!(p^l-k')!} \right) \frac{(-1)^{j-p^l} j!}{(j-p^l)!} \partial_{\langle j \rangle} \\
&= \sum_{j=p^l}^{p^m-1} \left(\sum_{k'=0}^{p^l} (-1)^{k'} \binom{p^l}{k'} \right) (-1)^{j-p^l} \binom{j}{p^l} \partial_{\langle j \rangle} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

et

$$B = \sum_{j=p^m}^{p^m-1+p^l} \left(\sum_{k'=0}^{p^l+p^m-1-j} (-1)^{k'} \binom{p^l}{k'} \right) (-1)^{j-p^l} \binom{j}{p^l} \partial_{\langle j \rangle}.$$

Rappelons que $v_p \left(\binom{N}{K} \right) = \frac{1}{p-1} (\sigma(K) + \sigma(N-K) - \sigma(N))$. Nous avons donc :

$$v_p \left(\binom{j}{p^l} \right) = \frac{1}{p-1} (\sigma(p^l) + \sigma(j-p^l) - \sigma(j)) = \frac{1}{p-1} (1 + \sigma(j-p^l) - \sigma(j)). \text{ Or } j = p^m + b$$

avec $0 \leq b \leq p^l - 1$, et $p^l < p^m$, donc $\sigma(j) = \sigma(b) + 1$. D'où :

$$\begin{aligned}
v_p \left(\binom{j}{p^l} \right) &= \frac{1}{p-1} (-\sigma(b) - 1 + 1 + \sigma(p^m + b - p^l)) \\
&= \frac{1}{p-1} (\sigma(p^m + b - p^l) - \sigma(b)).
\end{aligned}$$

Or $p^m - p^l = p^l(p-1)(p^{m-l-1} + \dots + p + 1) = (p-1)(p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + p^l)$, et $b < p^l$, donc $v_p \left(\binom{j}{p^l} \right) = \frac{1}{p-1} ((p-1)(m-l)) = m-l \geq 1$. En caractéristique p , nous pouvons donc en conclure que $B = 0$.

Nous avons donc montré que $\underline{\partial}_{\langle p^l \underline{\varepsilon}_i \rangle_{(m)}} \circ P = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ et tout $l \leq m-1$, ce qui implique que pour tout $x \in \mathcal{E} : P(x) \in \mathbb{F}(\mathcal{E})$. \square

Proposition 4.2.1. *P est un projecteur de \mathcal{E} sur $\mathbb{F}(\mathcal{E})$ compatible à la graduation.*

Démonstration : d'après la proposition 2.3.1, si $0 < \underline{k} < p^m$, alors $\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}$ peut s'écrire comme produit de $\underline{\partial}_{\langle p^j \underline{\varepsilon}_i \rangle}$, avec $1 \leq i \leq d$ et $0 \leq j \leq m-1$. Donc pour tout $x \in \mathbb{F}(\mathcal{E})_j$ et tout $0 < \underline{k} < p^m$, nous avons $\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} . x = 0$. Nous en déduisons que $P(x) = \underline{\partial}_{\langle 0 \rangle} . x = x$. La proposition découle par suite du lemme précédent. \square

4.2.4 Les applications $\Pi_{\mathcal{E}}$ et $\Psi_{\mathcal{E}}$.

Reprenons les notations de Lorenzon. Rappelons que m_1, \dots, m_d forment un système de coordonnées logarithmiques locales de (X, M) sur (S, L) , et que δ désigne la projection canonique $M^{gp} \rightarrow \mathcal{I}_X^{gp} = M^{gp}/\mathcal{O}_X^*$. Pour $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, nous désignerons par $\theta^{\underline{k}}$ la base locale $e_{\sum k_i m_i}$ de $\mathcal{A}_{X, \sum k_i \delta(m_i)}^{gp}$. Nous noterons aussi $\theta^{\underline{k}}$ l'automorphisme \mathcal{A}_X^{gp} -linéaire de \mathcal{A}_X^{gp} associé à $\theta^{\underline{k}}$, ainsi que l'endomorphisme \mathcal{A}_X^{gp} -linéaire induit par multiplication sur un \mathcal{A}_X^{gp} -module \mathcal{M} .

Soit \mathcal{M} un \mathcal{O}_X -module \mathcal{I}_X^{gp} -indexé. Pour toute section $j \in \mathcal{I}_X^{gp}$ et tout multi-indice \underline{k} , on note $\mathcal{M}(-\underline{k})_j = \mathcal{M}_{j-\delta(\sum k_i m_i)}$. Suivant toujours la méthode classique, nous allons utiliser le projecteur P pour construire un isomorphisme $\mathcal{E} \cong \bigoplus_{\underline{k} < p^m} \mathbb{F}(\mathcal{E})(-\underline{k})$, grâce auquel nous montrerons que $\xi_1(\mathcal{E})$ est lui-même un isomorphisme.

Le lemme suivant reste valable en dehors de la caractéristique p .

Lemme 4.2.3. *Pour tout entier k_i , on note $k_i = p^m q_i + r_i$, $0 \leq r_i < p^m$, le résultat de la division euclidienne de k_i par p^m .*

Si $\underline{j} \geq 0$, alors $\partial_{\langle \underline{k} \rangle (m)} \cdot \theta^{\underline{j}} = \underline{q}_{\underline{k}}! \binom{\underline{j}}{\underline{k}} \theta^{\underline{j}}$.

Si $\underline{j} \geq 0$, alors $\partial_{\langle \underline{k} \rangle (m)} \cdot \theta^{-\underline{j}} = \underline{q}_{\underline{k}}! (-1)^{|\underline{k}|} \binom{\underline{k} + \underline{j} - 1}{\underline{k}} \theta^{-\underline{j}}$.

Démonstration : d'après le lemme 4.1.1, $\partial_{\langle \underline{k} \rangle (m)} \cdot \theta^{\underline{j}} = \partial_{\langle \underline{k} \rangle}^b \left(\sum_{i=1}^d j_i m_i, 1 \right) \theta^{\underline{j}} = \underline{q}_{\underline{k}}! \binom{\underline{j}}{\underline{k}} \theta^{\underline{j}}$

d'après le lemme 2.3.3.

De même,

$$\begin{aligned} \partial_{\langle \underline{k} \rangle (m)} \cdot \theta^{-\underline{j}} &= \partial_{\langle \underline{k} \rangle}^b \left(\sum_{i=1}^d -j_i m_i, 1 \right) \\ &= \partial_{\langle \underline{k} \rangle} \left(\mu \left(\sum_{i=1}^d -j_i m_i \right) \right) \theta^{-\underline{j}} \\ &= \partial_{\langle \underline{k} \rangle} \left(\prod_{i=1}^d \mu(m_i)^{-j_i} \right) \theta^{-\underline{j}} \\ &= \partial_{\langle \underline{k} \rangle} \left(\prod_{i=1}^d (\eta_i + 1)^{-j_i} \right) \theta^{-\underline{j}}. \end{aligned}$$

Or η_i est nilpotent, donc

$$\begin{aligned} (\eta_i + 1)^{-j_i} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n + j_i - 1}{n} (-1)^n \eta_i^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n q_n! \binom{n + j_i - 1}{n} \eta_i^{\{n\}}. \end{aligned}$$

Donc $\partial_{\langle \underline{k} \rangle (m)} \cdot \theta^{-\underline{j}} = (-1)^{|\underline{k}|} q_{\underline{k}}! \binom{\underline{k} + \underline{j} - 1}{\underline{k}} \theta^{-\underline{j}}$. □

Considérons un $\tilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$ -module \mathcal{I}_X^{gp} -gradué \mathcal{E} . Pour tout U étale sur X , toute section $j \in \Gamma(U, \mathcal{I}_X^{gp})$ et toute section $e \in \Gamma(U, j^* \mathcal{E}) = \Gamma(U, \mathcal{E}_j)$, $\frac{1}{\theta_{\underline{k}}} \circ \partial_{\langle \underline{k} \rangle} (e) \in \Gamma(U, \mathcal{E}_{j-\delta(\sum k_i m_i)})$. Donc $P \circ \frac{1}{\theta_{\underline{k}}} \circ \partial_{\langle \underline{k} \rangle} (e) \in \Gamma(U, \mathbb{F}(\mathcal{E})_{j-\delta(\sum k_i m_i)}) = \Gamma(U, \mathbb{F}(\mathcal{E})(-\sum k_i m_i)_j)$. Nous noterons $\mathbb{F}(\mathcal{E})(-\underline{k})$ pour $\mathbb{F}(\mathcal{E})(-\sum k_i m_i)$.

Définition 4.2.2. On définit les applications $\Pi_{\mathcal{E}}$ et $\Psi_{\mathcal{E}}$ comme suit :

$$\Pi_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \bigoplus_{\underline{k} < p^m} \mathbb{F}(\mathcal{E})(-\underline{k}), \quad x \mapsto \sum_{\underline{k} < p^m} P \circ \frac{1}{\theta_{\underline{k}}} \circ \partial_{\langle \underline{k} \rangle (m)} (x),$$

et

$$\Psi_{\mathcal{E}} : \bigoplus_{\underline{k} < p^m} \mathbb{F}(\mathcal{E})(-\underline{k}) \rightarrow \mathcal{E}, \quad \bigoplus_{\underline{k} < p^m} x_{\underline{k}} \mapsto \sum_{\underline{k} < p^m} \theta_{\underline{k}} x_{\underline{k}}.$$

Nous allons montrer que ces deux applications sont inverses l'une de l'autre.

Lemme 4.2.4. $\Pi_{\mathcal{E}} \circ \Psi_{\mathcal{E}} = Id_{\bigoplus_{\underline{k} < p^m} \mathbb{F}(\mathcal{E})(-\underline{k})}$.

Démonstration : nous avons

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{E}} \circ \Psi_{\mathcal{E}}(\bigoplus_{\underline{j} < p^m} x_{\underline{j}}) &= \sum_{\underline{k} < p^m} P \circ \frac{1}{\theta_{\underline{k}}} \circ \partial_{\langle \underline{k} \rangle (m)} \left(\sum_{\underline{j} < p^m} \theta_{\underline{j}} x_{\underline{j}} \right) \\ &= \sum_{\underline{k}, \underline{j} < p^m} P \circ \frac{1}{\theta_{\underline{k}}} \circ \partial_{\langle \underline{k} \rangle (m)} \circ \theta_{\underline{j}} (x_{\underline{j}}) \\ &= \sum_{\underline{k}, \underline{j}, \underline{i} < p^m} (-1)^{|\underline{i}|} \partial_{\langle \underline{i} \rangle (m)} \circ \frac{1}{\theta_{\underline{k}}} \circ \partial_{\langle \underline{k} \rangle (m)} \circ \theta_{\underline{j}} (x_{\underline{j}}) \\ &= \sum_{\underline{j} < p^m} \left(\sum_{\underline{k}, \underline{i} < p^m} (-1)^{|\underline{i}|} \partial_{\langle \underline{i} \rangle (m)} \circ \frac{1}{\theta_{\underline{k}}} \circ \partial_{\langle \underline{k} \rangle (m)} \circ \theta_{\underline{j}} \right) (x_{\underline{j}}). \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que : $\sum_{\underline{k}, \underline{i} < p^m} (-1)^{|\underline{i}|} \underline{\partial}_{\langle \underline{i} \rangle (m)} \circ \frac{1}{\theta^{\underline{k}}} \circ \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle (m)} \circ \theta^{\underline{j}} = Id_{\mathbb{F}(\mathcal{E})(-\underline{j})}$. Or

$$\begin{aligned} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle (m)} \circ \theta^{\underline{j}} &= \sum_{0 \leq \underline{l} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{l} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} - \underline{l} \rangle} \cdot \theta^{\underline{j}} \otimes \underline{\partial}_{\langle \underline{l} \rangle} \\ &= \sum_{\underline{l} = \sup\{0, \underline{k} - \underline{j}\}}^{\underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{l} \end{matrix} \right\} \binom{\underline{j}}{\underline{k} - \underline{l}} \theta^{\underline{j}} \otimes \underline{\partial}_{\langle \underline{l} \rangle} \quad \text{d'après le lemme (4.2.3),} \\ &= \sum_{\underline{l} = \sup\{0, \underline{k} - \underline{j}\}}^{\underline{k}} \binom{\underline{j}}{\underline{k} - \underline{l}} \theta^{\underline{j}} \otimes \underline{\partial}_{\langle \underline{l} \rangle} \quad \text{car } \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{l} \end{matrix} \right\} = 1 \text{ en niveau } m \text{ pour } \underline{k} < p^m. \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{k}, \underline{i} < p^m} (-1)^{|\underline{i}|} \underline{\partial}_{\langle \underline{i} \rangle (m)} \circ \frac{1}{\theta^{\underline{k}}} \circ \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle (m)} \circ \theta^{\underline{j}} &= \sum_{\underline{k}, \underline{i} < p^m} (-1)^{|\underline{i}|} \underline{\partial}_{\langle \underline{i} \rangle (m)} \circ \frac{1}{\theta^{\underline{k}}} \circ \sum_{\underline{l} = \sup\{0, \underline{k} - \underline{j}\}}^{\underline{k}} \binom{\underline{j}}{\underline{k} - \underline{l}} \theta^{\underline{j}} \otimes \underline{\partial}_{\langle \underline{l} \rangle} \\ &= \sum_{\underline{k}, \underline{i} < p^m} \sum_{\underline{l} = \sup\{0, \underline{k} - \underline{j}\}}^{\underline{k}} (-1)^{|\underline{i}|} \binom{\underline{j}}{\underline{k} - \underline{l}} \underline{\partial}_{\langle \underline{i} \rangle} \circ \theta^{\underline{j} - \underline{k}} \otimes \underline{\partial}_{\langle \underline{l} \rangle}. \end{aligned}$$

Or $x_{\underline{j}} \in \mathbb{F}(\mathcal{E})(-\underline{j})$, donc $\underline{\partial}_{\langle \underline{l} \rangle} \cdot x_{\underline{j}} = 0$ pour tout $0 < \underline{l} < p^m$. Et $\underline{l} = 0$ n'est obtenu que si $\underline{k} - \underline{j} \leq 0$, c'est-à-dire si $\underline{k} \leq \underline{j}$. D'où :

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{E}} \circ \Psi_{\mathcal{E}}(\oplus_{\underline{j} < p^m} x_{\underline{j}}) &= \sum_{\underline{j} < p^m} \left(\sum_{\underline{i} < p^m} \sum_{\underline{k} \leq \underline{j}} (-1)^{|\underline{i}|} \binom{\underline{j}}{\underline{k}} \underline{\partial}_{\langle \underline{i} \rangle} \circ \theta^{\underline{j} - \underline{k}}(x_{\underline{j}}) \right) \\ &= \sum_{\underline{j} < p^m} \left(\sum_{\underline{i} < p^m} \sum_{\underline{k} \leq \underline{j}} (-1)^{|\underline{i}|} \binom{\underline{j}}{\underline{k}} \sum_{\underline{l} = \sup\{0, \underline{i} - \underline{j} + \underline{k}\}}^{\underline{i}} \binom{\underline{j} - \underline{k}}{\underline{i} - \underline{l}} \theta^{\underline{j} - \underline{k}} \underline{\partial}_{\langle \underline{l} \rangle}(x_{\underline{j}}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\underline{j} < p^m} \left(\sum_{\underline{k} \leq \underline{j}} \sum_{\underline{i} \leq \underline{j} - \underline{k}} (-1)^{|\underline{i}|} \binom{\underline{j}}{\underline{k}} \binom{\underline{j} - \underline{k}}{\underline{i}} \theta^{\underline{j} - \underline{k}} \right) x_{\underline{j}} \\
&= \sum_{\underline{j} < p^m} \left(\sum_{\underline{k} \leq \underline{j}} \binom{\underline{j}}{\underline{k}} \theta^{\underline{j} - \underline{k}} \left(\sum_{\underline{i} \leq \underline{j} - \underline{k}} (-1)^{|\underline{i}|} \binom{\underline{j} - \underline{k}}{\underline{i}} \right) \right) x_{\underline{j}} \\
&= \sum_{\underline{j} < p^m} \left(\sum_{\underline{k} \leq \underline{j}} \binom{\underline{j}}{\underline{k}} \theta^{\underline{j} - \underline{k}} \delta_{\underline{j}, \underline{k}} \right) x_{\underline{j}} \\
&= \sum_{\underline{j} < p^m} x_{\underline{j}}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 4.2.5. $\Psi_{\mathcal{E}} \circ \Pi_{\mathcal{E}} = Id_{\mathcal{E}}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mathcal{E}} \circ \Pi_{\mathcal{E}}(x) &= \sum_{\underline{k} < p^m} \theta^{\underline{k}} \circ P \circ \frac{1}{\theta^{\underline{k}}} \circ \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle (m)}(x) \\
&= \sum_{\underline{k} < p^m} \theta^{\underline{k}} \circ \left(\sum_{\underline{j} < p^m} (-1)^{|\underline{j}|} \underline{\partial}_{\langle \underline{j} \rangle (m)} \right) \circ \frac{1}{\theta^{\underline{k}}} \circ \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle (m)}(x) \\
&= \sum_{\underline{k}, \underline{j} < p^m} (-1)^{|\underline{j}|} \theta^{\underline{k}} \circ \left(\underline{\partial}_{\langle \underline{j} \rangle} \circ \frac{1}{\theta^{\underline{k}}} \right) \circ \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}(x) \\
&= \sum_{\underline{k}, \underline{j} < p^m} \sum_{\underline{i} \leq \underline{j}} (-1)^{|\underline{i}|} \theta^{\underline{k}} \circ \left(\left\{ \frac{\underline{j}}{\underline{i}} \right\} \underline{\partial}_{\langle \underline{j} - \underline{i} \rangle} \cdot \theta^{-\underline{k}} \circ \underline{\partial}_{\langle \underline{i} \rangle} \right) \circ \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}(x) \\
&= \sum_{\underline{k}, \underline{j} < p^m} \sum_{\underline{i} \leq \underline{j}} (-1)^{|\underline{i}|} \theta^{\underline{k}} \circ \left((-1)^{|\underline{i} - \underline{j}|} \binom{\underline{j} - \underline{i} + \underline{k} - 1}{\underline{j} - \underline{i}} \theta^{-\underline{k}} \right) \circ \underline{\partial}_{\langle \underline{i} \rangle} \circ \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}(x) \\
&= \sum_{\underline{k} < p^m} \sum_{\underline{i} < p^m} \sum_{\underline{i} \leq \underline{j} < p^m} (-1)^{|\underline{i}|} \binom{\underline{j} - \underline{i} + \underline{k} - 1}{\underline{j} - \underline{i}} \underline{\partial}_{\langle \underline{i} \rangle} \circ \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}(x) \\
&= \sum_{\underline{k}, \underline{i} < p^m} (-1)^{|\underline{i}|} \left(\sum_{\underline{j} = \underline{i}}^{p^m - 1} \binom{\underline{j} - \underline{i} + \underline{k} - 1}{\underline{k} - 1} \right) \underline{\partial}_{\langle \underline{i} \rangle} \circ \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}(x).
\end{aligned}$$

La formule du triangle de Pascal permet de montrer que

$$\sum_{\underline{j}' = \underline{0}}^{p^m - 1 - \underline{i}} \binom{\underline{j}' + \underline{k} - 1}{\underline{k} - 1} = \binom{\underline{k} + p^m - 1 - \underline{i}}{\underline{k}}.$$

Nous en déduisons (en posant $\underline{j}' = \underline{j} - \underline{i}$) que :

$$\Psi_{\mathcal{E}} \circ \Pi_{\mathcal{E}}(x) = \sum_{\underline{k}, \underline{i} < p^m} (-1)^{|\underline{i}|} \binom{\underline{k} + p^m - 1 - \underline{i}}{\underline{k}} \partial_{<\underline{i}>} \circ \partial_{<\underline{k}>}(x).$$

Comme $(-1)^{|\underline{i}|} \binom{\underline{k} + p^m - 1 - \underline{i}}{\underline{k}} \partial_{<\underline{i}>} \circ \partial_{<\underline{k}>}(x) = \prod_{l=1}^d (-1)^{i_l} \binom{k_l + p^m - 1 - i_l}{k_l} \partial_{<i_l \underline{e}_l>} \circ \partial_{<k_l \underline{e}_l>}$,

nous pouvons nous passer des multi-indices et calculer simplement :

$$\sum_{k, i < p^m} (-1)^i \binom{k + p^m - 1 - i}{k} \partial_{<i>} \circ \partial_{<k>}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} & \sum_{k, i < p^m} (-1)^i \binom{k + p^m - 1 - i}{k} \partial_{<i>} \circ \partial_{<k>} \\ &= \sum_{k, i < p^m} (-1)^i \binom{k + p^m - 1 - i}{k} \sum_{l=\max\{i, k\}}^{i+k} \frac{l!}{(i+k-l)!(l-i)!(l-k)!} \frac{q_i! q_k!}{q_l!} \partial_{<l>} \\ &= \sum_{k, i < p^m} \sum_{l=\max\{i, k\}}^{i+k} (-1)^i \binom{k + p^m - 1 - i}{k} \frac{l!}{(i+k-l)!(l-i)!(l-k)!} \partial_{<l>} \\ &= \sum_{l=0}^{2(p^m-1)} \sum_{k=\max\{0, l-p^m+1\}}^{\min\{l, p^m-1\}} \sum_{i=l-k}^{\min\{l, p^m-1\}} (-1)^i \binom{k + p^m - 1 - i}{k} \binom{l}{k} \binom{k}{l-i} \partial_{<l>} \\ &= \sum_{l=0}^{p^m-1} \sum_{k=0}^l \sum_{i=l-k}^l * + \sum_{l=p^m}^{2(p^m-1)} \sum_{k=l-p^m+1}^{p^m-1} \sum_{i=l-k}^{p^m-1} * \\ &= \sum_{l=0}^{p^m-1} a_l + \sum_{l=p^m}^{2(p^m-1)} b_l. \end{aligned}$$

a) Calcul de b_l

Nous allons montrer que $b_l = 0$ pour tout $l \geq p^m$ en caractéristique p . Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
b_l &= \sum_{k=l-p^m+1}^{p^m-1} \binom{l}{k} \sum_{i=l-k}^{p^m-1} (-1)^i \binom{k+p^m-1-i}{k} \binom{k}{l-i} \\
&= \sum_{k=l-p^m+1}^{p^m-1} (-1)^{l-k} \binom{l}{k} \sum_{j=0}^{p^m-1-l+k} (-1)^j \binom{k+p^m-1-l-j+k}{k} \binom{k}{j} \\
&\text{en posant } j = i - l + k.
\end{aligned}$$

Considérons $B_{N,k} = \sum_{j=0}^N (-1)^j \binom{N-j+k}{k} \binom{k}{j}$ pour $N \geq 0$ et $k \geq 0$. On montre par récurrence sur $N+k$ que $B_{N,k} = 1$ pour tous N, k . En appliquant ce résultat à $N = k + p^m - 1 - l \geq 0$, on obtient : $b_l = \sum_{k=l-p^m+1}^{p^m-1} (-1)^{l-k} \binom{l}{k}$.

Montrons que $b_l = 0$ en caractéristique p . Si $l = p^m$, on obtient : $b_{p^m} = \sum_{k=1}^{p^m-1} (-1)^{p^m-k} \binom{p^m}{k} = 0$, car p divise $\binom{p^m}{k}$ pour $1 \leq k \leq p^m - 1$. Si $l > p^m$, on obtient :

$$\begin{aligned}
b_l &= \sum_{k=l-p^m+1}^{p^m-1} (-1)^{l-k} \binom{l}{k} \\
&= \sum_{k=l-p^m+1}^{p^m-1} (-1)^{l-k} \left(\binom{l-1}{k} + \binom{l-1}{k-1} \right) \\
&= \sum_{k=l-p^m}^{p^m} (-1)^{l-k+1} \binom{l-1}{k-1} + \sum_{k=l-p^m+1}^{p^m-1} (-1)^{l-k} \binom{l-1}{k-1} \\
&= (-1)^{l-p^m+1} \binom{l-1}{p^m-1} + (-1)^{p^m-1} \binom{l-1}{l-p^m} \\
&= (-1)^{p^m-1} ((-1)^l + 1) \binom{l-1}{p^m-1}.
\end{aligned}$$

L'entier $\binom{l-1}{p^m-1}$ est le coefficient de X^{p^m-1} dans le polynôme $(1+X)^{l-1}$. Or, en posant $l-1 = p^m + b$ avec $0 \leq b \leq p^m - 3$, nous avons : $(1+X)^{l-1} = (1+X)^{p^m} (1+X)^b = (1+X^{p^m})(1+X)^b$ en caractéristique p , ce qui implique que $\binom{l-1}{p^m-1} = 0$. Nous pouvons donc conclure que $b_l = 0$ en caractéristique p .

b) Calcul de a_l

On peut écrire :

$$\begin{aligned}
a_l &= \sum_{k=0}^l \sum_{i=l-k}^l (-1)^i \binom{k+p^m-1-i}{k} \binom{l}{k} \binom{k}{l-i} \\
&= \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \sum_{j=0}^k (-1)^{j+l-k} \binom{(k+p^m-1-l)-j+k}{k} \binom{k}{j} \\
&= \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} (-1)^{l-k} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{N-j+k}{k} \binom{k}{j} \text{ avec } N = k+p^m-1-l \geq k.
\end{aligned}$$

Comme $\binom{k}{j} = 0$ pour $j \geq k+1$, on retrouve $B_{N,k} = 1$. Donc $a_l = \sum_{k=0}^l (-1)^{l-k} \binom{l}{k} = \delta_{0,l}$.

c) Conclusion

Nous avons : $\Psi_{\mathcal{E}} \circ \Pi_{\mathcal{E}}(x) = \sum_{l=0}^{p^m-1} a_l \partial_{\langle l \rangle}(x) + \sum_{l=p^m}^{2(p^m-1)} b_l \partial_{\langle l \rangle}(x)$, donc $\Psi_{\mathcal{E}} \circ \Pi_{\mathcal{E}}(x) = x$ pour tout $x \in \mathcal{E}$. Donc $\Psi_{\mathcal{E}} \circ \Pi_{\mathcal{E}} = Id_{\mathcal{E}}$. \square

Proposition 4.2.2. *Pour tout $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module \mathcal{E} :*

$$\mathcal{E} \cong \bigoplus_{\underline{k} < p^m} \mathbb{F}(\mathcal{E})(-\underline{k}).$$

En appliquant ce résultat à $\mathcal{E} = \mathcal{A}_X^{gp}$, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 4.2.1. *\mathcal{A}_X^{gp} est une $\mathcal{B}_{X/S}$ -algèbre \mathcal{I}_X^{gp} -graduée localement libre de type fini.*

Nous avons donc généralisé les résultats de Lorenzon à un niveau m quelconque.

4.2.5 Descente par Frobenius

Théorème 4.2.1. *Le foncteur $\mathbb{G} : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} \mathcal{F}$ de la catégorie des $\tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ -modules dans la catégorie des $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -modules est une équivalence de catégories, admettant le foncteur \mathbb{F} pour quasi-inverse.*

Démonstration : nous voulons montrer que les morphismes de foncteurs $\xi_1 : \mathbb{G} \circ \mathbb{F} \rightarrow Id_{\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}\text{-mod}}$ et $\xi_2 : Id_{\tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}\text{-mod}} \rightarrow \mathbb{F} \circ \mathbb{G}$ sont des isomorphismes. D'après la proposition

4.2.2, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{G} \circ \mathbb{F}(\mathcal{E}) &= \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} \mathbb{F}(\mathcal{E}) \\
 &\simeq \left(\bigoplus_{\underline{k} < p^m} \mathcal{B}_{X/S}^{(m)}(-\underline{k}) \theta^{\underline{k}} \right) \otimes_{\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} \mathbb{F}(\mathcal{E}) \\
 &\simeq \bigoplus_{\underline{k} < p^m} \theta^{\underline{k}} \otimes \mathbb{F}(\mathcal{E})(-\underline{k}) \\
 &\simeq \mathcal{E}.
 \end{aligned}$$

Cet isomorphisme n'est autre que $a \otimes e \mapsto a.e$, c'est-à-dire $\xi_1(\mathcal{E})$.

Le morphisme de foncteurs ξ_2 est défini par factorisation du morphisme $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} \mathcal{F} = \mathbb{G}(\mathcal{F})$, $f \mapsto 1 \otimes f$. Comme $\mathcal{A}_X^{gp} = \bigoplus_{\underline{k} < p^m} \theta^{\underline{k}} \mathcal{B}_{X/S}^{(m)}(-\underline{k})$, on peut écrire de manière unique un élément x de $\mathbb{F} \circ \mathbb{G}(\mathcal{F}) \subset \mathbb{G}(\mathcal{F})$ sous la forme : $x = \sum_{\underline{k} < p^m} \theta^{\underline{k}} x_{\underline{k}}$ avec $x_{\underline{k}} \in \mathcal{B}_{X/S}^{(m)}(-\underline{k}) \otimes_{\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} \mathcal{F}$.

Comme $x \in \mathbb{F} \circ \mathbb{G}(\mathcal{F})$, on a $\partial_{<p^s \underline{\varepsilon}_j}>.x = 0$ pour tout $0 \leq s \leq m-1$ et tout $1 \leq j \leq d$, ce qui revient à dire que $\partial_{<j}>.x = 0$ pour tout \underline{j} non nul tel que $\underline{j} < p^m$ (compte-tenu de la description de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ en termes de générateurs vue dans la proposition (2.3.1)). Or

$$\partial_{<\underline{j}>.x = \sum_{\underline{k} < p^m} \partial_{<\underline{j}>}.(\theta^{\underline{k}} x_{\underline{k}}) = \sum_{\underline{k} < p^m} \sum_{\underline{i} \leq \underline{j}} \left\{ \begin{matrix} \underline{j} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\}_{(m)} (\partial_{<\underline{j}-\underline{i}>}. \theta^{\underline{k}}) (\partial_{<\underline{i}>}. x_{\underline{k}}).$$

Comme $\underline{i} \leq \underline{j} < p^m$ et $x_{\underline{k}} \in \mathcal{B}_{X/S}^{(m)}(-\underline{k}) \otimes_{\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} \mathcal{F}$, on sait que $\partial_{<\underline{i}>}.x_{\underline{k}} = 0$ pour tout \underline{i} non nul. Donc $\partial_{<\underline{j}>.x =$

$$\sum_{\underline{k} < p^m} (\partial_{<\underline{j}>}. \theta^{\underline{k}}) x_{\underline{k}} = \sum_{\underline{k} < p^m} \binom{\underline{k}}{\underline{j}} \theta^{\underline{k}} x_{\underline{k}} \text{ (d'après le lemme (4.2.3)).}$$

Donc $x_{\underline{j}} = 0$ pour tout $\underline{j} \neq 0$, $\underline{j} < p^m$. D'où $x = x_0 \in \mathcal{B}_{X/S}^{(m)}(0) \otimes_{\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} \mathcal{F} = \mathcal{B}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} \mathcal{F} \simeq \mathcal{F}$. Donc $\xi_2(\mathcal{F})$ est surjectif.

D'autre part, la flèche $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} \mathcal{F}$, $f \mapsto 1 \otimes f$ est injective, car \mathcal{A}_X^{gp} est localement libre sur $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$, donc $\xi_2(\mathcal{F})$ aussi. On en conclut que ce dernier est un isomorphisme. \square

4.3 Descente sur une base annulée par p^N ($N \geq 1$)

Avant de pouvoir définir correctement dans ce cas l'anneau $\tilde{\mathcal{D}}_{X', \mathcal{I}}^{(0)}$, nous aurons besoin d'établir quelques propriétés préliminaires concernant le foncteur \mathbb{F} et l'algèbre $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$.

4.3.1 Le foncteur \mathbb{F}

Comme dans le cas de la caractéristique p , nous définissons pour tout $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module \mathcal{E} :

$$\mathbb{F}(\mathcal{E}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}} \left(F^* \mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}, \mathcal{E} \right).$$

C'est un $\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ -module à gauche pour l'action de $\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ à droite sur $F^* \mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$. En notant \mathcal{K} le noyau du morphisme $\Pi : \mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)} \rightarrow F^* \mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$, nous avons la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)} \rightarrow F^* \mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)} \rightarrow 0.$$

Nous pouvons donc de nouveau décrire $\mathbb{F}(\mathcal{E})$ comme la partie de \mathcal{E} sur laquelle l'action de \mathcal{K} est triviale, via l'application injective $\psi_{\mathcal{E}} : g \mapsto g(1 \otimes 1)$. On vérifie que $\psi_{\mathcal{E}}$ fait de $\mathbb{F}(\mathcal{E})$ un sous- $\mathcal{O}_{X',\mathcal{I}}$ -module de \mathcal{E} . Mais nous ne disposons plus de description de \mathcal{K} en coordonnées locales.

Pour $\mathcal{E} = \mathcal{A}_X^{gp}$, nous définissons ainsi :

$$\mathcal{B}_{X/S}^{(m)} = \mathbb{F}(\mathcal{A}_X^{gp}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}} \left(F^* \mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}, \mathcal{A}_X^{gp} \right).$$

Proposition 4.3.1. *Soient \mathcal{E} et \mathcal{F} deux $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -modules à gauche. Il existe un morphisme $\mathcal{O}_{X',\mathcal{I}}$ -linéaire naturel : $\mathbb{F}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_{X',\mathcal{I}}} \mathbb{F}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{F}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\mathcal{I}}} \mathcal{F})$*

Démonstration : remarquons tout d'abord que l'isomorphisme naturel $\chi_{\mathcal{E}} :$

$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}} \left(\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}, \mathcal{E} \right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ est $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -linéaire lorsque l'on munit le premier terme de la structure de $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module à gauche définie par la multiplication à droite sur $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$, et ceci pour tout $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module à gauche \mathcal{E} . Dire qu'une section e de \mathcal{E} est l'image d'un élément \tilde{e} de $\mathbb{F}(\mathcal{E})$ revient à dire que $\chi_{\mathcal{E}}^{-1}(e)$ (noté simplement e dans la suite) se factorise par $\Pi : \mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)} \rightarrow F^* \mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)} & \xrightarrow{e} & \mathcal{E} \\ \Pi_{\mathcal{I}} \downarrow & \nearrow \tilde{e} & \\ F^* \mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)} & & \end{array}$$

Nous avons un morphisme naturel $\mathbb{F}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathbb{F}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{F}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})$ déduit de $\psi_{\mathcal{E}} : \mathbb{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ et $\psi_{\mathcal{F}} : \mathbb{F}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}$. Nous voulons montrer que ce morphisme se factorise par $\psi_{\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}} : \mathbb{F}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$. Soient e et f deux sections de \mathcal{E} et \mathcal{F} respectivement, telles que $e = \tilde{e} \circ \Pi$ et $f = \tilde{f} \circ \Pi$. Nous voulons montrer que l'application $e \otimes f : \mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ se factorise par Π .

L'application $e \otimes f$ est obtenue comme la composée suivante :

$$\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)} \xrightarrow{id_{\mathcal{D}} \otimes \mathbb{1}} \mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\mathcal{I}}} \mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)} \xrightarrow{id_{\mathcal{D}} \otimes e} \mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\mathcal{I}}} \mathcal{E} \xrightarrow{\gamma_{\mathcal{E}}} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\mathcal{I}}} \mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)} \xrightarrow{id_{\mathcal{E}} \otimes f} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\mathcal{I}}} \mathcal{F},$$

où $\gamma_{\mathcal{E}}$ désigne le morphisme de transposition défini par Berthelot dans [Ber00] (proposition 1.3.1). Rappelons que $\gamma_{\mathcal{E}}$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -bimodules qui vérifie $\gamma_{\mathcal{E}}(1 \otimes x) = x \otimes 1$ et que les structures de $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -modules à gauche de $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\mathcal{I}}} \mathcal{E}$ et de $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\mathcal{I}}} \mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ sont données respectivement par celle de $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ et par la structure produit tensoriel de celles de $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ et de \mathcal{E} . Toutes les flèches intervenant dans la composée ci-dessus sont $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -linéaires, et l'image de 1 par cette composée est : $1 \mapsto 1 \otimes 1 \mapsto 1 \otimes e \mapsto e \otimes 1 \mapsto e \otimes f$. Nous obtenons bien l'application $e \otimes f$. Nous voulons montrer que ce morphisme se factorise par Π . Considérons le diagramme suivant, dans lequel la colonne de gauche correspond à la composée précédente :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}_X^{(m)} & \xrightarrow{\quad \Pi \quad} & F^* \mathcal{D}_{X'}^{(0)} \\
 \downarrow id_{\mathcal{D}} \otimes 1 & & \downarrow id_{\mathcal{D}} \otimes \Pi \\
 \mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)} & \xrightarrow{id_{\mathcal{D}} \otimes \Pi} \mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} F^* \mathcal{D}_{X'}^{(0)} \xrightarrow{\sim \gamma'} & F^* \mathcal{D}_{X'}^{(0)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)} \\
 \downarrow id_{\mathcal{D}} \otimes e & \swarrow id_{\mathcal{D}} \otimes \bar{e} & \downarrow id_{\mathcal{D}} \otimes \Pi \\
 \mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} & \xrightarrow{\bar{e} \otimes id_{\mathcal{D}}} & F^* \mathcal{D}_{X'}^{(0)} \otimes_{\mathcal{O}_X} F^* \mathcal{D}_{X'}^{(0)} \\
 \downarrow \gamma_{\mathcal{E}} \circ l & \swarrow \bar{e} \otimes id & \downarrow id_{\mathcal{E}} \otimes \Pi \\
 \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)} & \xrightarrow{id_{\mathcal{E}} \otimes \Pi} & \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} F^* \mathcal{D}_{X'}^{(0)} \\
 \downarrow id_{\mathcal{E}} \otimes f & \swarrow id_{\mathcal{E}} \otimes \bar{f} & \downarrow id_{\mathcal{E}} \otimes \Pi \\
 \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} & & \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}
 \end{array}$$

Il suffit de factoriser la partie haute de ce diagramme (c'est-à-dire $(id \otimes \Pi) \circ \gamma' \circ (id_{\mathcal{D}} \otimes \Pi) \circ (id_{\mathcal{D}} \otimes 1)$). Considérons le nouveau diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{D}_X^{(m)} & \xrightarrow{id_{\mathcal{D}} \otimes 1} & \mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)} & \xrightarrow{id_{\mathcal{D}} \otimes \Pi} & \mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} F^* \mathcal{D}_{X'}^{(0)} \\
& & \downarrow \gamma \wr & & \downarrow \wr \gamma' \\
& & (p_{0*} \mathcal{D}_X^{(m)}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)} & \xrightarrow{\Pi \otimes id_{\mathcal{D}}} & F^* \mathcal{D}_{X'}^{(0)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)} \\
& & & \searrow \Pi \otimes \Pi & \downarrow id \otimes \Pi \\
& & & & F^* \mathcal{D}_{X'}^{(0)} \otimes_{\mathcal{O}_X} F^* \mathcal{D}_{X'}^{(0)}
\end{array}$$

Comme $\gamma' \circ (id_{\mathcal{D}} \otimes \Pi) = (\Pi \otimes id_{\mathcal{D}}) \circ \gamma$ et $(id \otimes \Pi) \circ (\Pi \otimes id_{\mathcal{D}}) = \Pi \otimes \Pi$, il suffit de montrer que la composée de gauche se factorise par $F^* \mathcal{D}_{X', \mathcal{I}}^{(0)}$. Par linéarité $\gamma \circ (id \otimes 1)(P) = P.(1 \otimes 1)$ pour tout $P \in \mathcal{D}_X^{(m)}$. Rappelons que $\mathcal{D}_X^{(m)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_{X,n}^{(m)}$. L'homomorphisme $\mathcal{D}_{X,n}^{(m)} \rightarrow$

$$p_{0*} \mathcal{D}_{X,n}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} p_{0*} \mathcal{D}_{X,n}^{(m)}, P \mapsto P.(1 \otimes 1) \text{ envoie } \underline{\partial}_{\langle k \rangle} \text{ sur } \underline{\partial}_{\langle k \rangle} . (1 \otimes 1) = \sum_{\underline{i} + \underline{j} = \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}_{\langle i \rangle} \otimes \underline{\partial}_{\langle j \rangle}.$$

Il est donc dual de l'homomorphisme de multiplication

$$\mu : \begin{cases} p_{0*} \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} p_{0*} \mathcal{P}_{X,(m)}^n & \rightarrow \mathcal{P}_{X,(m)}^n \\ \underline{\eta}^{\{i\}} \otimes \underline{\eta}^{\{j\}} & \mapsto \underline{\eta}^{\{i\}} \underline{\eta}^{\{j\}} = \left\{ \begin{matrix} i+j \\ i \end{matrix} \right\} \underline{\eta}^{\{i+j\}} \end{cases}$$

Or $\phi : \mathcal{P}_{X',(0)}^n \rightarrow \mathcal{P}_{X,(m)}^n$ est un homomorphisme d'algèbres, donc le carré :

$$\begin{array}{ccc}
p_{0*} \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes p_{0*} \mathcal{P}_{X,(m)}^n & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{P}_{X,(m)}^n \\
\uparrow \phi \otimes \phi & & \uparrow \phi \\
p_{0*} \mathcal{P}_{X',(0)}^n \otimes p_{0*} \mathcal{P}_{X',(0)}^n & \xrightarrow{\mu'} & \mathcal{P}_{X',(0)}^n
\end{array}$$

est commutatif. On en déduit que μ' fournit par dualité la factorisation cherchée. \square

Proposition 4.3.2. (i) $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ est une sous- $\mathcal{O}_{X', \mathcal{I}}$ -algèbre unitaire de \mathcal{A}_X^{gp} .

(ii) Pour tout $\tilde{\mathcal{D}}_{X, \mathcal{I}}^{(m)}$ -module à gauche \mathcal{E} , le faisceau $\mathbb{F}(\mathcal{E})$ est un sous- $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ -module de \mathcal{E} .

Démonstration : (ii) la proposition précédente appliquée à $\mathcal{E} = \mathcal{A}_X^{gp}$ et \mathcal{F} noté \mathcal{E} fournit une flèche $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathbb{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{F}(\mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E})$. Comme la multiplication par les scalaires $\mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est $\mathcal{D}_{X, \mathcal{I}}^{(m)}$ -linéaire pour la structure produit tensoriel (d'après la formule de Leibniz), le foncteur \mathbb{F} fournit une flèche $\mathcal{D}_{X', \mathcal{I}}^{(0)}$ -linéaire $\mathbb{F}(\mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{F}(\mathcal{E})$.

(i) Le faisceau $\mathcal{O}_{X'}$ est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}_{X'}^{(0)}$ -module à gauche, ce qui

définit un morphisme $\mathcal{D}_{X'}^{(0)}$ -linéaire $\mathcal{D}_{X'}^{(0)} \rightarrow \mathcal{O}_{X'}$, $P \mapsto P.1$. On obtient donc un morphisme $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -linéaire $F^*\mathcal{D}_{X'}^{(0)} \rightarrow F^*\mathcal{O}_{X'}$. La composée $\mathcal{D}_X^{(m)} \xrightarrow{\Pi} F^*\mathcal{D}_{X'}^{(0)} \rightarrow F^*\mathcal{O}_{X'} \simeq \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{A}_X^{gp}$ est $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -linéaire, et envoie 1 sur 1. Donc $1 \in \mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$. Le reste est un cas particulier du (ii). \square

Remarque : $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ et $\mathbb{F}(\mathcal{E})$ pour un $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module \mathcal{E} sont munis d'une structure de $\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ -modules. Nous voulons montrer que celle-ci est compatible avec la structure d'anneau (respectivement de $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ -module) de $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ (respectivement de $\mathbb{F}(\mathcal{E})$). Pour cela, nous utiliserons une étude locale du foncteur \mathbb{F} , menée dans les paragraphes suivants.

4.3.2 Exactitude de \mathbb{F}

Proposition 4.3.3. *Le foncteur \mathbb{F} est un foncteur exact sur la catégorie des $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -modules à gauche .*

Démonstration : nous avons supposé que p est nilpotent sur \mathcal{O}_S . Soit \mathcal{E} un $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module. Nous allons montrer que $\mathcal{E}xt^q(F^*\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}, \mathcal{E}) = 0$ pour tout $q \geq 1$ par récurrence sur l'entier n tel que $p^n \mathcal{E} = 0$. Si $n = 1$, alors \mathcal{E} est un $\tilde{\mathcal{D}}_{X_0,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module. D'après sa description locale, $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ (respectivement $\mathcal{D}_{X_0,\mathcal{I}}^{(m)}$) est plat sur $\mathcal{O}_{X,\mathcal{I}}$ (respectivement $\mathcal{O}_{X_0,\mathcal{I}}$). D'après la proposition (2.4.1), nous avons $\mathcal{O}_{X_0,\mathcal{I}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X,\mathcal{I}}} F^*\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)} \simeq F_0^*\mathcal{D}_{X'_0,\mathcal{I}}^{(0)}$. Il en résulte que $\mathcal{D}_{X_0,\mathcal{I}}^{(m)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_0,\mathcal{I}}^{(m)}} F^*\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)} \xrightarrow{\sim} F_0^*\mathcal{D}_{X'_0,\mathcal{I}}^{(0)}$. Donc $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_0,\mathcal{I}}^{(m)}}(F^*\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}, \mathcal{E}) \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_0,\mathcal{I}}^{(m)}}(\mathcal{D}_{X_0,\mathcal{I}}^{(m)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_0,\mathcal{I}}^{(m)}} F^*\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}, \mathcal{E}) \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_0,\mathcal{I}}^{(m)}}(F_0^*\mathcal{D}_{X'_0,\mathcal{I}}^{(0)}, \mathcal{E})$. L'équivalence de catégories établie en caractéristique p implique que le foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_0,\mathcal{I}}^{(m)}}(F_0^*\mathcal{D}_{X'_0,\mathcal{I}}^{(0)}, -)$ est exact sur la catégorie des $\tilde{\mathcal{D}}_{X_0,\mathcal{I}}^{(m)}$ -modules. Or $\tilde{\mathcal{D}}_{X_0,\mathcal{I}}^{(m)}$ est plat sur $\mathcal{D}_{X_0}^{(m)}$ puisque $\mathcal{A}_{X,x}^{gp}$ est libre sur $\mathcal{O}_{X,x}$ en tout point, donc tout $\tilde{\mathcal{D}}_{X_0,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module injectif est injectif sur $\mathcal{D}_{X_0,\mathcal{I}}^{(m)}$. On en déduit que $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{X_0,\mathcal{I}}^{(m)}}^q(F^*\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}, \mathcal{E}) = 0$ pour tout $q \geq 1$.

Supposons que $p^{n+1} \mathcal{E} = 0$. Nous avons alors la suite exacte suivante : $0 \rightarrow p^n \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{E}/p^n \mathcal{E} \rightarrow 0$, qui induit la suite exacte longue : $0 \rightarrow \mathcal{H}om(F^*\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}, p^n \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{H}om(F^*\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{H}om(F^*\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}, \mathcal{E}/p^n \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}xt^1(F^*\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}, p^n \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}xt^1(F^*\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}, \mathcal{E}) \rightarrow \dots$ D'après ce qui précède et l'hypothèse de récurrence, nous en déduisons que

$$\mathcal{E}xt^q(F^*\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}, \mathcal{E}) = 0 \text{ pour tout } q \geq 1$$

Donc le foncteur $\mathbb{F} : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}}(F^*\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}, \mathcal{E})$ est un foncteur exact. \square

Remarque : nous avons montré en particulier que pour un $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module \mathcal{E} tel que $p\mathcal{E} = 0$, nous avons $\mathbb{F}(\mathcal{E}) \simeq \mathbb{F}_0(\mathcal{E})$.

4.3.3 Étude locale de \mathbb{F}

On se restreint à un ouvert muni de coordonnées logarithmiques locales m_1, \dots, m_d . Pour un $\tilde{\mathcal{D}}_{X, \mathcal{I}}^{(m)}$ -module à gauche \mathcal{E} , la structure de \mathcal{A}_X^{gp} -module de \mathcal{E} et le morphisme injectif $\psi_{\mathcal{E}} : \mathbb{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ permettent de définir une flèche :

$$\Psi_{\mathcal{E}} \left\{ \begin{array}{l} \bigoplus_{\underline{k} < p^m} \mathbb{F}(\mathcal{E})(-\underline{k}) \longrightarrow \mathcal{E} \\ \bigoplus x_{\underline{k}} \longmapsto \sum_{\underline{k} < p^m} \theta^{\underline{k}} x_{\underline{k}} \end{array} \right.$$

Proposition 4.3.4. *Cette flèche est un isomorphisme.*

Démonstration : considérons la suite exacte de $\tilde{\mathcal{D}}_{X, \mathcal{I}}^{(m)}$ -modules à gauche :

$$0 \rightarrow p\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/p\mathcal{E} \rightarrow 0$$

Comme le foncteur \mathbb{F} est exact, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{\underline{k} < p^m} \mathbb{F}(p\mathcal{E})(-\underline{k}) & \longrightarrow & \bigoplus_{\underline{k} < p^m} \mathbb{F}(\mathcal{E})(-\underline{k}) & \longrightarrow & \bigoplus_{\underline{k} < p^m} \mathbb{F}(\mathcal{E}/p\mathcal{E})(-\underline{k}) \longrightarrow 0 \\ & & \Psi_{p\mathcal{E}} \downarrow & & \Psi_{\mathcal{E}} \downarrow & & \Psi_{\mathcal{E}/p\mathcal{E}} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & p\mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}/p\mathcal{E} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Par récurrence sur l'entier n tel que $p^n \mathcal{E} = 0$, on se ramène au cas où $p\mathcal{E} = 0$. Comme $\mathbb{F}(\mathcal{E}) \simeq \mathbb{F}_0(\mathcal{E})$ et $\Psi_{\mathcal{E}} = \Psi_{0, \mathcal{E}}$ dans ce cas (les éléments $\theta_i \in \mathcal{A}_X^{gp}$ commutent au changement de base strict), on est ramené à la proposition (4.2.2). \square

Corollaire 4.3.1. \mathcal{A}_X^{gp} est localement libre de type fini sur $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$, de base les sections $\theta^{\underline{k}}$ pour $\underline{k} < p^m$.

Démonstration : il suffit d'appliquer la proposition (4.3.4) à $\mathcal{E} = \mathcal{A}_X^{gp}$. \square

Corollaire 4.3.2. (i) Soient $(S_1, L_1) \rightarrow (S, L)$ un morphisme strict de changement de base, $F_1 : X_1 \rightarrow X'_1$ le morphisme déduit de $F : X \rightarrow X'$ par changement de base, $f : X_1 \rightarrow X$ et $f' : X'_1 \rightarrow X'$ les projections canoniques. Alors pour tout $\mathcal{D}_{X, \mathcal{I}}^{(m)}$ -module \mathcal{E} nous avons :

$$f'^* \mathbb{F}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_1(f^* \mathcal{E}).$$

(ii) En particulier $f'^* \mathcal{B}_{X/S}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{X_1/S_1}^{(m)}$.

Démonstration : (i) La formation des faisceaux d'opérateurs différentiels commute au changement de base ; nous avons donc un morphisme naturel : $f'^*\mathbb{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{F}_1(f^*\mathcal{E})$. Pour montrer que c'est un isomorphisme, nous pouvons nous placer sur un ouvert muni de coordonnées locales, et utiliser la proposition (4.3.4). Celle-ci nous dit que :

$$\bigoplus_{\underline{k} < p^m} \mathbb{F}(\mathcal{E})(-\underline{k})\theta^{\underline{k}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E},$$

et

$$\bigoplus_{\underline{k} < p^m} \mathbb{F}_1(f^*\mathcal{E})(-\underline{k})\theta_1^{\underline{k}} \xrightarrow{\sim} f^*\mathcal{E}.$$

Comme le changement de base est strict, les sections θ_1 correspondent aux images inverses des sections θ . Le premier isomorphisme implique donc que :

$$\bigoplus_{\underline{k} < p^m} f'^*\mathbb{F}(\mathcal{E})(-\underline{k})\theta_1^{\underline{k}} \xrightarrow{\sim} f'^*\mathcal{E}.$$

Or f' et f correspondent au même changement de base $(S_1, L_1) \rightarrow (S, L)$, donc on vérifie que $f'^*\mathcal{E} \simeq f^*\mathcal{E}$. On obtient donc l'isomorphisme :

$$\bigoplus_{\underline{k} < p^m} f'^*\mathbb{F}(\mathcal{E})(-\underline{k})\theta_1^{\underline{k}} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\underline{k} < p^m} \mathbb{F}_1(f^*\mathcal{E})(-\underline{k})\theta_1^{\underline{k}},$$

dont chaque composante correspond au morphisme naturel $f'^*\mathbb{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{F}_1(f^*\mathcal{E})$. □

4.3.4 Les foncteurs \mathbb{F} et \mathbb{G}

Dans le paragraphe 4.3.1, nous avons défini, pour tout $\mathcal{D}_{X, \mathcal{I}}^{(m)}$ -module \mathcal{E} , le faisceau $\mathbb{F}(\mathcal{E}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X, \mathcal{I}}^{(m)}}(F^*\mathcal{D}_{X', \mathcal{I}}^{(0)}, \mathcal{E})$, et l'avons muni d'une structure de $\mathcal{D}_{X', \mathcal{I}}^{(0)}$ -module à gauche. Si \mathcal{E} est un $\tilde{\mathcal{D}}_{X, \mathcal{I}}^{(m)}$ -module, nous pouvons en outre définir une action de $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ à gauche sur $\mathbb{F}(\mathcal{E})$ par : $(b.g)(1 \otimes 1) = \psi(b).g(1 \otimes 1)$ pour $b \in \mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ et $g \in \mathbb{F}(\mathcal{E})$. Nous allons montrer que ces deux structures sont compatibles, ce qui, dans le cas particulier où $\mathcal{E} = \mathcal{A}_X^{gp}$, nous permettra de définir l'anneau

$$\tilde{\mathcal{D}}_{X', \mathcal{I}}^{(0)} = \mathcal{B}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X', \mathcal{I}}} \mathcal{D}_{X', \mathcal{I}}^{(0)}.$$

Proposition 4.3.5. *Pour tout $\tilde{\mathcal{D}}_{X, \mathcal{I}}^{(m)}$ -module à gauche \mathcal{E} , les actions de $\mathcal{D}_{X', \mathcal{I}}^{(0)}$ et de $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ définies à gauche sur $\mathbb{F}(\mathcal{E})$ sont compatibles.*

Démonstration : il s'agit de montrer que les isomorphismes $\varepsilon'_n : p_1'^*\mathbb{F}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} p_0'^*\mathbb{F}(\mathcal{E})$ de la PD-stratification de niveau 0 de $\mathbb{F}(\mathcal{E})$ sont compatibles à la structure de $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ -module à gauche. Comme dans le cas particulier où $\mathcal{E} = \mathcal{A}_X^{gp}$, nous disposons d'un morphisme injectif $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ -linéaire $\psi_{\mathcal{E}} : \mathbb{F}(\mathcal{E}) \hookrightarrow \mathcal{E}$, $g \mapsto g(1 \otimes 1)$. En notant $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la m -PD-stratification sur

\mathcal{E} correspondant à sa structure de $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module à gauche, nous avons donc le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{X',(0)}^n \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathbb{F}(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \\ \varepsilon'_n \downarrow \wr & & \varepsilon_n \downarrow \wr \\ \mathbb{F}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{P}_{X',(0)}^n & \longrightarrow & \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^n \end{array}$$

Montrons que ce diagramme est commutatif. D'après la formule (2.7) du paragraphe 2.6, pour tout $e \in \mathcal{E}$ et tout $x \in \mathcal{P}_{X,(m)}^n$, on a : $\varepsilon_n(x \otimes e) = x \varepsilon_n(1 \otimes e) = x \sum_{|\underline{k}| \leq n} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} \cdot e \otimes \underline{\eta}^{\{\underline{k}\}}$.

Soient $g \in \mathbb{F}(\mathcal{E})$ et $y \in \mathcal{P}_{X',(0)}^n$. Nous voulons montrer que $(\varepsilon_n \circ (\phi^* \otimes \psi_{\mathcal{E}}))(y \otimes g) = ((\psi_{\mathcal{E}} \otimes \phi^*) \circ \varepsilon'_n)(y \otimes g)$, où ϕ^* est le morphisme d'élévation du niveau par Frobenius défini dans la proposition (3.3.1). Nous avons d'une part :

$$\begin{aligned} (\varepsilon_n \circ (\phi^* \otimes \psi))(y \otimes g) &= \varepsilon_n(\phi^*(y) \otimes \psi(g)) \\ &= \varepsilon_n(\phi^*(y) \otimes (g \circ \Pi)) \\ &= \phi^*(y) \sum_{|\underline{k}| \leq n} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} \cdot (g \circ \Pi) \otimes \underline{\eta}^{\{\underline{k}\}} \\ &= \phi^*(y) \sum_{|\underline{k}| \leq n} (g \circ \Pi \circ d_{\underline{k}}) \otimes \underline{\eta}^{\{\underline{k}\}} \end{aligned}$$

en notant $d_{\underline{k}}$ la multiplication à droite par $\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle(m)}$ dans $\mathcal{D}_X^{(m)}$. Nous avons d'autre part :

$$\begin{aligned} ((\psi \otimes \phi^*) \circ \varepsilon'_n)(y \otimes g) &= (\psi \otimes \phi^*) \left(y \sum_{|\underline{j}| \leq n} \underline{\partial}'_{\langle \underline{j} \rangle(0)} \cdot g \otimes \underline{\eta}'^{\{\underline{j}\}} \right) \\ &= \sum_{|\underline{j}| \leq n} (g \circ d'_{\underline{j}} \circ \Pi) \otimes \phi^*(y \underline{\eta}'^{\{\underline{j}\}}) \\ &= \phi^*(y) \sum_{|\underline{j}| \leq n} (g \circ d'_{\underline{j}} \circ \Pi) \otimes \phi^*(\underline{\eta}'^{\{\underline{j}\}}) \\ &\text{en notant } d'_{\underline{j}} \text{ la multiplication à droite par } \underline{\partial}_{\langle \underline{j} \rangle(0)} \text{ dans } F^* \mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)} \\ &= \phi^*(y) \sum_{|\underline{j}| \leq n} \sum_{|\underline{k}| \leq n} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} (\phi^*(\underline{\eta}'^{\{\underline{j}\}})) (g \circ d'_{\underline{j}} \circ \Pi) \otimes \underline{\eta}^{\{\underline{k}\}} \\ &= \phi^*(y) \sum_{|\underline{k}| \leq n} g \left(\sum_{|\underline{j}| \leq n} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} (\phi^*(\underline{\eta}'^{\{\underline{j}\}})) d'_{\underline{j}} \circ \Pi \right) \otimes \underline{\eta}^{\{\underline{k}\}} \end{aligned}$$

Il suffit donc de comparer $\Pi \circ d_{\underline{k}}$ et $\sum_{|\underline{j}| \leq n} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} (\phi^*(\underline{\eta}'^{\{\underline{j}\}})) d'_{\underline{j}} \circ \Pi$. Ces deux applications étant

clairement $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -linéaires à gauche, il suffit de comparer les images de $1 : \Pi \circ d_{\underline{k}}(1) = \Pi(\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle})$ et $\left(\sum_{|j| \leq n} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}(\phi^*(\underline{\eta}'^{\{j\}})) d'_j \circ \Pi \right) (1) = \sum_{|j| \leq n} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}(\phi^*(\underline{\eta}'^{\{j\}})) 1 \otimes \underline{\partial}'_{\langle \underline{j} \rangle}$. Comme l'application \mathcal{O}_X -linéaire $\Pi : \mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)} \rightarrow F^* \mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ est définie par dualité à partir de $1 \otimes \phi^* : F^* \mathcal{P}_{X',(0)}^n \rightarrow \mathcal{P}_{X,(m)}^n$, on a : $\Pi(\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}) = \sum_{|j| \leq n} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}(\phi^*(\underline{\eta}'^{\{j\}})) \otimes \underline{\partial}'_{\langle \underline{j} \rangle}$, d'où l'égalité cherchée.

Ainsi, le diagramme vu plus haut est commutatif. Par hypothèse sur \mathcal{E} , les isomorphismes $\varepsilon_n : \mathcal{P}_{X,(m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^n$ sont compatibles à sa structure d' \mathcal{A}_X^{gp} -module. Si les flèches horizontales $\phi^* \otimes \psi_{\mathcal{E}}$ et $\psi_{\mathcal{E}} \otimes \phi^*$ ne sont pas injectives en général, elles le deviennent par passage à la limite projective, ce qui permet de conclure que les ε'_n sont compatibles à la structure de $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ -module de $\mathbb{F}(\mathcal{E})$. En effet, considérons l'application

$$\left\{ \begin{array}{l} \bigoplus_{\underline{r} < p^m, \underline{k} < p^m} \lim_{\leftarrow n} (\mathbb{F}(\mathcal{E})(-\underline{k}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{P}_{X',(0)}^n)_{\overline{x}} \rightarrow \lim_{\leftarrow n} (\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_{X,(m)}^n)_{\overline{x}} \\ \bigoplus_{\underline{r}, \underline{k}} y_{\underline{k}} \otimes x_{\underline{r}} \mapsto \sum_{\underline{r}, \underline{k}} \theta^{\underline{k}} y_{\underline{k}} \otimes \phi^*(x_{\underline{r}}) \underline{\eta}^{\{\underline{r}\}} \end{array} \right.$$

C'est un morphisme de $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{P}_{X',(0)}^n$ -modules, que nous noterons $\Lambda_{\mathcal{E}}$. Dans le cas de la caractéristique p , $\phi^*(\underline{\eta}'^{\{i\}}) = \underline{\eta}^{\{p^m i\}}$. Si l'on note $\underline{k} = p^m \underline{q} + \underline{r}$, $0 \leq r_i < p^m$, le résultat de la division euclidienne de \underline{k} par p^m , on a $\underline{\eta}^{\{\underline{k}\}} = u \underline{\eta}^{\{p^m \underline{q}\}} \underline{\eta}^{\{\underline{r}\}}$, avec $u = \left\{ \frac{\underline{k}}{\underline{r}} \right\}^{-1}$ un inversible. Donc $\underline{\eta}^{\{\underline{k}\}} = \phi^*(u \underline{\eta}^{\{\underline{q}\}}) \underline{\eta}^{\{\underline{r}\}}$. Donc $\Lambda_{\mathcal{E}}$ est un isomorphisme en caractéristique p . Dans le cas où la base est seulement annulée par p^N ($N \geq 1$), une récurrence sur N analogue à celle effectuée dans la démonstration de la proposition (4.3.4) permet de montrer que $\Lambda_{\mathcal{E}}$ est encore un isomorphisme. \square

La proposition (4.3.5) permet de munir le faisceau $\tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)} = \mathcal{B}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X',\mathcal{I}}} \mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ d'une unique structure de faisceau d'anneaux telle que les applications $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$, $f \mapsto f \otimes 1$ et $\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$, $P \mapsto 1 \otimes P$ soient des homomorphismes, et que, pour tous $f \in \mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$, $P \in \mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ et \underline{k} , on ait les relations $(f \otimes 1)(1 \otimes P) = f \otimes P$ et $(1 \otimes \underline{\partial}'_{\langle \underline{k} \rangle})(f \otimes 1) = \sum_{\underline{i} \leq \underline{k}} \left\{ \frac{\underline{k}}{\underline{i}} \right\} (\underline{\partial}'_{\langle \underline{k} - \underline{i} \rangle} \cdot f) \otimes \underline{\partial}'_{\langle \underline{i} \rangle}$.

La proposition (4.3.5) montre en outre que \mathbb{F} définit un foncteur de la catégorie des $\tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(m)}$ -modules à gauche dans celle des $\tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ -modules à gauche.

Comme dans le cas de la caractéristique p , nous définissons pour tout $\tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ -module \mathcal{F} le faisceau :

$$\mathbb{G}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} \mathcal{F}$$

Ce faisceau est muni de la structure de $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module définie par extension des scalaires à partir de la structure de $F^*\mathcal{B}_{X/S}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ -module de $F^*\mathcal{F}$ (on a encore ici $\mathbb{G}(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{F^*\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} F^*\mathcal{F}$). Posons $\Pi(\underline{\partial}_{<\underline{k}>}) = \sum_{\underline{j}} \alpha_{\underline{k},\underline{j}} \otimes \underline{\partial}'_{<\underline{j}>} \in F^*\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ avec $\alpha_{\underline{k},\underline{j}} \in \mathcal{O}_X$. On a alors $(a \otimes \underline{\partial}_{<\underline{k}>}).(b \otimes f) = (a \otimes \underline{\partial}_{<\underline{k}>}).(b(1 \otimes f)) = \sum_{\underline{i} \leq \underline{k}} \sum_{\underline{j}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\}_{(m)} a \underline{\partial}_{<\underline{k}-\underline{i}>}(b) \alpha_{\underline{i},\underline{j}} \otimes \underline{\partial}'_{<\underline{j}>}.f$, pour tous $a, b \in \mathcal{A}_X^{gp}$, $f \in \mathcal{F}$ et tout multi-indice \underline{k} .

Corollaire 4.3.3. *Le foncteur \mathbb{G} est exact.*

Démonstration : c'est un corollaire du corollaire (4.3.1). \square

Le morphisme de foncteur $\xi_1 : \mathbb{G} \circ \mathbb{F} \rightarrow \text{Id}_{\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}\text{-mod}}$ est défini de la même façon qu'en caractéristique p . La $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -linéarité de $\xi_1(\mathcal{E})$ pour un $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module \mathcal{E} se montre par un calcul analogue à celui effectué en caractéristique p , en utilisant les notations introduites ci-dessus pour $\Pi(\underline{\partial}_{<\underline{k}>})$.

Nous voulons définir $\xi_2(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{F} \circ \mathbb{G}(\mathcal{F}) = \text{Hom}_{\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}} \left(F^*\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}, \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} \mathcal{F} \right)$ pour un $\tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ -module \mathcal{F} . Une section f de \mathcal{F} définit une unique application $\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ -linéaire $\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)} \rightarrow \mathcal{F}$ telle que $1 \mapsto f$. Par image inverse par le Frobenius, on obtient une application $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -linéaire $F^*\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(0)} \rightarrow F^*\mathcal{F}$. Par composition avec la flèche $F^*\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{G}(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{F^*\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} F^*\mathcal{F}$, on obtient une application $\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -linéaire $\xi_2(\mathcal{F})(f) : F^*\mathcal{D}_{X,\mathcal{I}}^{(0)} \rightarrow \mathbb{G}(\mathcal{F})$. Montrons que $\xi_2(\mathcal{F})$ est $\tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ -linéaire : $\xi_2(\mathcal{F})(\underline{\partial}'_{<\underline{j}>_{(0)}}.f)$ est définie par image inverse à partir de $\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)} \rightarrow \mathcal{F}$, $1 \mapsto \underline{\partial}'_{<\underline{j}>}.f$, donc $\left[\xi_2(\mathcal{F})(\underline{\partial}'_{<\underline{j}>}.f) \right] (1 \otimes 1) = 1 \otimes \underline{\partial}'_{<\underline{j}>}.f$. De même $\xi_2(\mathcal{F})(f)$ est définie par image inverse à partir de $\mathcal{D}_{X',\mathcal{I}}^{(0)} \rightarrow \mathcal{F}$, $\underline{\partial}'_{<\underline{j}>} \mapsto \underline{\partial}'_{<\underline{j}>}.f$, donc $\left[\underline{\partial}'_{<\underline{j}>}. \xi_2(\mathcal{F})(f) \right] (1 \otimes 1) = [\xi_2(\mathcal{F})(f)] (1 \otimes \underline{\partial}'_{<\underline{j}>}) = 1 \otimes \underline{\partial}'_{<\underline{j}>}.f$. Donc $\xi_2(\mathcal{F})(\underline{\partial}'_{<\underline{j}>}.f) = \underline{\partial}'_{<\underline{j}>}. \xi_2(\mathcal{F})(f)$. Comme $\xi_2(\mathcal{F})$ est clairement $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ -linéaire, on a bien un morphisme de foncteurs $\xi_2 : \text{Id}_{\tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}\text{-mod}} \rightarrow \mathbb{F} \circ \mathbb{G}$.

Remarque : par construction $\xi_2(\mathcal{F})$ est un factorisation du morphisme $\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{G}(\mathcal{F})$ qui envoie une section f sur la section $1 \otimes f$ (via $\psi_{\mathbb{G}(\mathcal{F})} : \mathbb{F} \circ \mathbb{G}(\mathcal{F}) \hookrightarrow \mathbb{G}(\mathcal{F})$).

4.3.5 Descente par Frobenius

Théorème 4.3.1. *Le foncteur \mathbb{F} établit une équivalence de catégories entre la catégorie des $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -modules et celle des $\tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ -modules.*

Démonstration : nous pouvons raisonner de la même manière qu'en caractéristique p (voir théorème (4.2.1)). Soit \mathcal{E} un $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\mathcal{I}}^{(m)}$ -module. D'après la proposition (4.3.4), nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{G} \circ \mathbb{F}(\mathcal{E}) &= \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} \mathbb{F}(\mathcal{E}) \\ &\simeq \left(\bigoplus_{\underline{k} < p^m} \mathcal{B}_{X/S}^{(m)}(-\underline{k}) \theta^{\underline{k}} \right) \otimes_{\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} \mathbb{F}(\mathcal{E}) \\ &\simeq \bigoplus_{\underline{k} < p^m} \theta^{\underline{k}} \otimes \mathbb{F}(\mathcal{E})(-\underline{k}) \\ &\simeq \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Cet isomorphisme n'est autre que $a \otimes e \mapsto a.e$, c'est-à-dire $\xi_1(\mathcal{E})$. Donc ξ_1 est un isomorphisme de foncteurs.

Soit \mathcal{F} un $\tilde{\mathcal{D}}_{X',\mathcal{I}}^{(0)}$ -module. Nous avons remarqué que $\xi_2(\mathcal{F})$ est une factorisation du morphisme $\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{G}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} \mathcal{F}$, $f \mapsto 1 \otimes f$. La proposition (4.3.4) implique que :

$$\mathbb{G}(\mathcal{F}) \simeq \bigoplus_{\underline{k} < p^m} \mathbb{F} \circ \mathbb{G}(\mathcal{F})(-\underline{k}) \theta^{\underline{k}}$$

et

$$\mathbb{G}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}_X^{gp} \otimes_{\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} \mathcal{F} \simeq \bigoplus_{\underline{k} < p^m} \mathcal{B}_{X/S}^{(m)}(-\underline{k}) \theta^{\underline{k}} \otimes_{\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}} \mathcal{F} \simeq \bigoplus_{\underline{k} < p^m} \theta^{\underline{k}} \otimes \mathcal{F}(-\underline{k})$$

L'isomorphisme obtenu sur les composantes donne la bijectivité de $\xi_2(\mathcal{F})$. Donc ξ_2 est un isomorphisme de foncteurs. \square

Remarque : Si les log-schémas considérés sont munis des log-structures triviales, alors $\mathcal{A}_X^{gp} = \mathcal{O}_X$, $\mathcal{I}_X^{gp} = (0)$, et les opérateurs différentiels coïncident avec les opérateurs de niveau m usuels. Par ailleurs, la section $\theta^{\underline{k}}$, pour $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, désigne la base locale $e_{\sum k_i m_i}$ de $\mathcal{A}_{X, \sum k_i \delta(m_i)}^{gp}$. Ici $e_{\sum k_i m_i} = \overline{(\sum k_i m_i, 1)}$ dans $M_X^{gp} \wedge \mathcal{O}_{\mathcal{I}} = \mathcal{O}_X^* \wedge \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_X$, donc les sections $\theta^{\underline{k}}$ correspondent à des éléments inversibles de \mathcal{O}_X , que nous noterons $t^{\underline{k}}$. La proposition (4.3.4) s'écrit alors : $\mathcal{O}_X \simeq \bigoplus_{\underline{k} < p^m} \mathcal{B}_{X/S}^{(m)}(-\underline{k}) t^{\underline{k}}$. Comme on sait que $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ est une sous-

$\mathcal{O}_{X'}$ -algèbre de $\mathcal{A}_X^{gp} = \mathcal{O}_X$ et que $\mathcal{O}_X = \bigoplus_{\underline{k} < p^m} \mathcal{O}_{X'}(-\underline{k}) t^{\underline{k}}$, on en déduit que $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)} = \mathcal{O}_{X'}$.

Nous retrouvons donc le théorème d'équivalence de catégories établi par P.Berthelot dans [Ber00] (théorème 2.3.6.).

Remarque : on peut faire les mêmes constructions sur les fibres ; un raisonnement analogue fournit alors une équivalence de catégories entre la catégorie des $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\bar{x}}^{(m)}$ -modules $\mathcal{I}_{X,\bar{x}}^{gp}$ -indexés et celle des $\tilde{\mathcal{D}}_{X',\bar{x}'}^{(0)}$ -modules $\mathcal{I}_{X',\bar{x}'}^{gp}$ -indexés.

Chapitre 5

Dimension homologique des faisceaux

$\mathcal{D}_X^{(m)}$

Nous nous proposons d'utiliser le théorème d'équivalence de catégories établi au chapitre précédent pour montrer que les faisceaux $\mathcal{D}_X^{(m)}$ sont de dimension homologique finie. Nous nous limiterons dans ce chapitre au cas des structures logarithmiques définies par un diviseur à croisements normaux.

5.1 Le niveau zéro

5.1.1 La structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à droite de $\omega_{(X,M)}$

On considère $f : (X, M) \rightarrow (S, L)$ log-lisse. Soit $\Omega_{(X,M)/(S,L)}^1$ le faisceau des 1-formes différentielles logarithmiques de (X, M) relativement à (S, L) . On note d son rang, et l'on pose $\omega_{(X,M)} = \bigwedge^d \Omega_{(X,M)/(S,L)}^1$. C'est un faisceau localement libre de rang 1.

Nous noterons ω_X et $\mathcal{D}_X^{(m)}$ les faisceaux associés classiquement au schéma usuel X (sans log-structure).

Supposons que X est un S -schéma lisse de dimension relative d , et que la log-structure M est définie par un diviseur à croisements normaux relatif D , somme de composantes lisses D_i , $1 \leq i \leq r$. Notons $U = X \setminus D$ l'ouvert complémentaire et $j : U \hookrightarrow X$ l'immersion canonique. Sur U , la log-structure est triviale donc $\omega_{(X,M)} \hookrightarrow j_* j^* \omega_{(X,M)} = j_* j^* \omega_X$. Le faisceau $\mathcal{D}_X^{(m)}$ agit à droite sur ce dernier (cf [Ber00], 1.2.1). Notons (X^*, M^*) le log-schéma défini par la log-structure triviale sur X . Par propriété universelle des enveloppes à puissances divisées classiques, il existe un morphisme $\mathcal{P}_{X^*,(m)}^n \rightarrow \mathcal{P}_{X,(m)}^n$ pour tout entier n . D'après la description en coordonnées locales des faisceaux $\mathcal{P}_{X^*,(m)}^n$ et $\mathcal{P}_{X,(m)}^n$, ce morphisme

est clairement injectif. On a donc la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{P}_{X^*,(m)}^n \rightarrow \mathcal{P}_{X,(m)}^n \rightarrow C \rightarrow 0$$

Par définition des log-structures, C est à support dans le diviseur, donc $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(C, \mathcal{O}_X) = 0$. Donc $\mathcal{D}_{(X,M),n}^{(m)} \hookrightarrow \mathcal{D}_{X,n}^{(m)}$. Donc $\mathcal{D}_{(X,M)}^{(m)}$ agit sur ω_X par restriction des scalaires. Montrons en coordonnées locales que $\omega_{(X,M)} \hookrightarrow j_*j^*\omega_X$ est stable par cette action.

Soit V un ouvert affine de X , rencontrant q composantes D_1, \dots, D_q . L'injection $\omega_{(X,M)} \hookrightarrow j_*j^*\omega_X$ correspond localement à l'application $\Gamma(V, \omega_{(X,M)}) \rightarrow \Gamma(V, \omega_X)_{t_1 \dots t_q}$ qui à une section s associe sa restriction à U . Soit $y \in U \cap V$. Soit $a \in \mathcal{O}_{X,y}$ telle que $s_y = a \operatorname{dlog} m_1 \wedge \dots \wedge \operatorname{dlog} m_q \wedge dt_{q+1} \wedge \dots \wedge dt_d$. Dans $j_*j^*\omega_X$, on a $\operatorname{dlog} m_i = t_i^{-1} dt_i$, donc $s_y = (a t_1^{-1} \dots t_q^{-1}) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_d$. D'après [Ber00], théorème 1.2.3, on a donc $s_y \cdot \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} = (-1)^{|\underline{k}|} \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} (a t_1^{-1} \dots t_q^{-1}) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_d$ pour tout multi-indice \underline{k} . Comme $\underline{\partial}_{\langle \underline{l} \rangle} \cdot (t_1^{-1} \dots t_q^{-1}) = t_1^{-1} \dots t_q^{-1} \underline{\partial}_{\langle \underline{l} \rangle} ((\eta + 1)^{-1}) = (-1)^{|\underline{l}|} \underline{q}_l! t_1^{-1} \dots t_q^{-1}$ pour tout multi-indice \underline{l} (cf démonstration du lemme (4.2.3)), la formule de Leibniz assure que $\underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle} \cdot (a t_1^{-1} \dots t_q^{-1})$ ne possède que des pôles d'ordre au plus un en t_1, \dots, t_q . Donc $s_y \cdot \underline{\partial}_{\langle \underline{k} \rangle}$ est encore un élément de $\omega_{(X,M),y}$. \square

5.1.2 Le faisceau tangent

Proposition 5.1.1. *Soient $(X, M) \rightarrow (S, L)$ un morphisme log-lisse de log-schémas fins, d le rang de $\Omega_{(X,M)/(S,L)}^1$, et $\mathcal{T}_{(X,M)} = (\Omega_{(X,M)/(S,L)}^1)^\vee$ le faisceau tangent relatif de (X, M) sur (S, L) .*

(i) *Il existe un homomorphisme canonique $\mathcal{T}_{(X,M)} \rightarrow \mathcal{D}_{X,1}^{(0)}$, induisant un isomorphisme*

$$(5.1) \quad \mathbb{S}(\mathcal{T}_{(X,M)}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr} \mathcal{D}_X^{(0)}$$

entre l'algèbre symétrique de $\mathcal{T}_{(X,M)}$ et le gradué associé à $\mathcal{D}_X^{(0)}$ pour la filtration par l'ordre.

(ii) *L'application $\mathcal{D}_X^{(0)} \rightarrow \mathcal{O}_X$, $P \mapsto P.1$ fait du complexe de Spencer :*

$$\mathcal{D}_X^{(0)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^d \mathcal{T}_{(X,M)} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}_X^{(0)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T}_{(X,M)} \rightarrow \mathcal{D}_X^{(0)}$$

une résolution $\mathcal{D}_X^{(0)}$ -linéaire de \mathcal{O}_X .

Démonstration : (i) soit $i : (X, M) \hookrightarrow (\Delta_{X,(0)}^1, M_{(0)}^1)$ l'immersion fermée exacte de (X, M) dans son premier voisinage à puissances divisées de niveau zéro. On note I son idéal. Pour tout $a \in \mathcal{P}_{X,(0)}^1$, on pose $\tilde{\phi}(a) = a - p_0^* i^*(a)$ où p_0 et p_1 sont les projections de $\Delta_{X,(0)}^1$ sur X déduites des projections canoniques de X^2 sur X . Alors $\tilde{\phi}(a) \in I$. En effet $i^* \circ \tilde{\phi}(a) = i^*(a) - i^* \circ p_0^* \circ i^*(a) = i^*(a) - i^*(a) = 0$. Par composition avec la projection canonique $\pi : I \rightarrow I/I^{\{2\}(0)} = I/I^{[2]}$, on obtient un morphisme \mathcal{O}_X -linéaire

$$\phi : \mathcal{P}_{X,(0)}^1 \rightarrow I/I^{[2]}.$$

L'application ϕ^b définit alors une dérivation logarithmique $\mathcal{O}_X \rightarrow I/I^{[2]}$. Rappelons que $\phi^b(b) = \phi(p_1^*(b)) = \pi(p_1^*(b) - p_0^*(b))$ pour tout $b \in \mathcal{O}_X$, et que $\phi^b(m) = \phi(\mu_{(0)}^1(m))$ pour tout $m \in M$. Il est clair que c'est la dérivation universelle. On a donc $\phi : \mathcal{P}_{X,(0)}^1 \rightarrow \Omega_{(X,M)/(S,L)}^1$, \mathcal{O}_X -linéaire, de noyau $p_0^*\mathcal{O}_X$. On en déduit par dualité un morphisme :

$$\Psi \begin{cases} \mathcal{T}_{(X,M)} & \rightarrow \mathcal{D}_{X,1}^{(0)} \\ \partial & \mapsto \partial \circ \phi \end{cases}$$

Explicitons ϕ et Ψ en coordonnées locales. Soit $\{1, \eta_1, \dots, \eta_d\}$ la base de $\mathcal{P}_{X,(0),\bar{x}}^1$ sur $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}$ associée aux coordonnées logarithmiques locales (pour les deux structures d'algèbre). Dans cette base $I = (\eta_1, \dots, \eta_d)$. Pour la structure gauche, $a \in \mathcal{P}_{X,(0),\bar{x}}^1$ s'écrit $a = p_0^*(x_0) + \sum_{i=1}^d p_0^*(x_i)\eta_i$. Donc :

$$\begin{aligned} \phi(a) &= \pi \left(p_0^*(x_0) + \sum_{i=1}^d p_0^*(x_i)\eta_i - p_0^* \circ i^*(p_0^*(x_0) + \sum_{i=1}^d p_0^*(x_i)\eta_i) \right) \\ &= \pi \left(p_0^*(x_0) + \sum_{i=1}^d p_0^*(x_i)\eta_i - p_0^*(x_0) \right) \\ &= \sum_{i=1}^d p_0^*(x_i)\pi(\eta_i) \\ &= \sum_{i=1}^d p_0^*(x_i)\phi(\eta_i). \end{aligned}$$

Or $\phi(\eta_i) = \phi(\mu(m_i) - 1) = \phi^b(m_i) - \phi(1) = \text{dlog}(m_i)$. Donc $\phi(a) = \sum_{i=1}^d p_0^*(x_i)\text{dlog}(m_i)$.

Donc ϕ est surjectif de noyau $p_0^*\mathcal{O}_X$, et le morphisme Ψ s'écrit $\Psi(\partial_i) = \underline{\partial}_{\langle \varepsilon_i \rangle_{(0)}}$. On peut donc identifier, via Ψ , les éléments de la base $\{\partial_i\}$ de $\mathcal{T}_{(X,M)}$ duale de $\{\text{dlog}m_i\}$ avec ceux de la base duale de $\{\eta_i\}$ correspondants, ie $\partial_i = \underline{\partial}_{\langle \varepsilon_i \rangle_{(0)}}$. Donc Ψ induit un isomorphisme $\mathcal{T}_{(X,M)} \xrightarrow{\sim} \text{gr}_1 \mathcal{D}_X^{(0)}$. Il en résulte un homomorphisme $\mathbb{S}(\mathcal{T}_{(X,M)}) \rightarrow \text{gr} \mathcal{D}_X^{(0)}$, que nous noterons encore Ψ . On vérifie en coordonnées locales que Ψ est un isomorphisme de faisceaux d'anneaux.

(ii) La démonstration est analogue au cas non logarithmique (cf [Ber00], prop (4.3.1) page 97). \square

5.1.3 Dimension homologique de $\mathcal{D}_X^{(0)}$

Nous reprenons ici la démonstration de Berthelot (cf [Ber00], pages 101 et 102). Comme dans le cas non logarithmique, le lemme suivant est vérifié.

Lemme 5.1.1. *Soient (S, L) un log-schéma fin, (X, M) un (S, L) -schéma fin, log-lisse, et d le rang de $\Omega_{(X, M)/(S, L)}^1$.*

(i) *Le morphisme $\omega_{(X, M)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(0)} \rightarrow \omega_{(X, M)}$ défini par la structure de $\mathcal{D}_X^{(0)}$ -module à droite de $\omega_{(X, M)}$ fait du complexe de de Rham $\Omega_{(X, M)} \otimes \mathcal{D}_X^{(0)}$ de $\mathcal{D}_X^{(0)}$ (vu comme $\mathcal{D}_X^{(0)}$ -module à gauche) une résolution $\mathcal{D}_X^{(0)}$ -linéaire à droite de $\omega_{(X, M)}$ placé en degré d .*

(ii) *Pour $i \neq d$, $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_X^{(0)}}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_X^{(0)}) = 0$, et il existe un isomorphisme de $\mathcal{D}_X^{(0)}$ -modules à droite*

$$(5.2) \quad \mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_X^{(0)}}^d(\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_X^{(0)}) \xrightarrow{\sim} \omega_{(X, M)}$$

Proposition 5.1.2. *Soient R un anneau noëthérien régulier de caractéristique p , $S = \text{Spec}(R)$ muni d'une log-structure fine L . Soit $X = \text{Spec}(A)$, lisse au-dessus de S , muni de la log-structure M définie par un diviseur à croisements normaux D , dont les composantes irréductibles sont lisses au-dessus de S . Soient d la dimension des fibres de X au-dessus de S , et $r = \sup_{s \in f(X)} \dim \mathcal{O}_{S, s}$ (f désigne le morphisme $(X, M) \rightarrow (S, L)$).*

Alors $D_X^{(0)} = \Gamma(X, \mathcal{D}_X^{(0)})$ est de dimension homologique égale à $2d + r$.

Démonstration : comme dans le cas classique, on commence par montrer que $\dim D_X^{(0)} \leq \dim \text{gr } D_X^{(0)} = 2d + r$, en utilisant la proposition (5.1.1). Pour montrer l'égalité il suffit de reprendre l'exemple donné dans [Ber00] et que nous rappelons ici. Soient $y \in f(X)$ un point tel que $\dim \mathcal{O}_{S, y} = r$, $s_1, \dots, s_r \in \mathcal{M}_{S, y} \subset \mathcal{O}_{S, y}$ une suite régulière de générateurs. Alors il existe un point fermé $x \in X$ d'image y dans S et de codimension d dans sa fibre, tel que l'on puisse trouver un système de coordonnées logarithmiques locales m_1, \dots, m_d en x relativement à (S, L) . Posons $t_i = \alpha_X(m_i)$. Alors les sections s_1, \dots, s_r , et les sections t_1^p, \dots, t_d^p (puisque l'on est en caractéristique p) appartiennent au centre de $\mathcal{D}_X^{(0)}$, de sorte que le \mathcal{O}_X -module à support ponctuel $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{X, x}/(s_1, \dots, s_r, t_1^p, \dots, t_d^p)$ a une structure naturelle de $\mathcal{D}_X^{(0)}$ -module. D'après le lemme (5.1.1), nous avons $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_X^{(0)}}^d(\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_X^{(0)}) \simeq \omega_{(X, M)}$. Or $s_1, \dots, s_r, t_1^p, \dots, t_d^p$ est une suite régulière sur $\omega_{(X, M), x}$; nous vérifions donc facilement que $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_X^{(0)}}^{2d+r}(\mathcal{E}, \mathcal{D}_X^{(0)}) \neq 0$. Ainsi $E = \Gamma(X, \mathcal{E})$ fournit l'exemple cherché. \square

5.2 Description des algèbres \mathcal{A}_X^{gp} et $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$

Nous supposons ici que la base S est régulière, de caractéristique p et munie de la log-structure triviale. Lorsque X est un schéma noëthérien lisse sur S de dimension relative d , muni de la log-structure définie par un diviseur à croisements normaux relatif D , somme de composantes lisses D_i , $1 \leq i \leq r$, on a : $\mathcal{I}_{X, \bar{x}}^{gp} = \mathbb{Z}^q$, où q est le nombre de composantes auxquelles appartient le point x de X . Éventuellement, $q = 0$; dans ce cas on a la log-structure triviale et $\mathcal{A}_{X, \bar{x}}^{gp} = \mathcal{O}_{X, \bar{x}}$. Si D_i admet une équation globale f_i et si θ_i désigne la section de $\mathcal{A}_{X, 1_i}^{gp}$ de degré $1_i \in \Gamma(X, \mathbb{Z}_{D_i})$ définie par f_i , alors $\mathcal{A}_{X, \bar{x}}^{gp}$ est l'algèbre des

polynômes de Laurent en $\theta_1, \dots, \theta_q$ sur $\mathcal{O}_{X, \bar{x}}$, quitte à ré-indexer les D_i (cf [Lor97], page 15). L'algèbre $\mathcal{A}_{X, \bar{x}}^{gp}$ est donc régulière.

Décrivons à présent les fibres de l'algèbre $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ (ce qui suit est une généralisation d'un calcul aimablement communiqué par Luc Illusie et Pierre Lorenzon). Rappelons que $\mathcal{B}_{X/S}^{(m)}$ est la partie de \mathcal{A}_X^{gp} sur laquelle l'action de $\mathcal{K} = \text{Ker}(\mathcal{D}_X^{(m)} \xrightarrow{\Pi} F^* \mathcal{D}_{X'}^{(0)})$ est triviale. La description locale de Π en caractéristique p montre que \mathcal{K} est localement engendré par les sections $\partial_{\langle p^s \varepsilon_j \rangle}$ pour $0 \leq s \leq m-1$ et $1 \leq j \leq d$. Soit \bar{x} la clôture séparable de $k(x)$, et \bar{x}' celle de $k(x')$. Il existe alors une flèche $\bar{x} \rightarrow \bar{x}'$ qui rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \bar{x} & \longrightarrow & \bar{x}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{F} & X' \end{array}$$

Désignons encore par q le nombre de branches du diviseur D au point x de X . On choisit des coordonnées locales t_1, \dots, t_d telles que $D : t_1 \dots t_q = 0$. La log-structure M admet alors la carte locale suivante : $\mathbb{N}^q \rightarrow \mathcal{O}_{X, \bar{x}}$, $e_i \mapsto t_i$ (où e_i est le q -uplet dont tous les termes sont nuls sauf le i -ème qui vaut 1). On note m_1, \dots, m_q les coordonnées logarithmiques locales correspondant à e_1, \dots, e_q (on a $\alpha_X(m_i) = t_i$). Pour $i \geq q+1$, quitte à remplacer t_i par $1+t_i$, on peut supposer que $t_i \in \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^*$, et poser $m_i = \alpha_X^{-1}(t_i)$. Notons $\tau_i = t_i \theta_i^{-1} =$ pour $1 \leq i \leq d$ (ainsi $\tau_i = 1$ pour $i \geq q+1$), et $R_{m'} = \mathcal{O}_{X', \bar{x}'}[\theta_1^{p^{m'}}, \theta_1^{-p^{m'}}, \dots, \theta_q^{p^{m'}}, \theta_q^{-p^{m'}}, t_{q+1}^{p^{m'}}, \dots, t_d^{p^{m'}}]$ pour tout entier m' compris entre 0 et m . Si l'on note $A_{m'}$ l'anneau engendré sur $\mathcal{O}_{X', \bar{x}'}$ par $t_{q+1}^{p^{m'}}, \dots, t_d^{p^{m'}}$, alors $R_{m'}$ est l'algèbre des polynômes de Laurent en $\theta_1^{p^{m'}}, \dots, \theta_q^{p^{m'}}$ sur $A_{m'}$. On peut remarquer de plus que, pour $m' = m$: $R_m = \mathcal{O}_{X', \bar{x}'}[\theta_i^{p^m}, \theta_i^{-p^m}, 1 \leq i \leq q]$. Nous allons montrer que $\mathcal{B}_{X/S, \bar{x}}^{(m)} = R_{m'}[\tau_1, \dots, \tau_q]$.

Montrons tout d'abord que :

$$R_{m'}[\tau_1, \dots, \tau_q] \simeq R_{m'}[T_1, \dots, T_q] / (T_1^{p^m} - t'_1 \theta_1^{-p^m}, \dots, T_q^{p^m} - t'_q \theta_q^{-p^m})$$

avec T_1, \dots, T_q q indéterminées et $t'_i = t_i^{p^m} \in \mathcal{O}_{X', \bar{x}'}$. On a une application surjective canonique : $\beta : R_{m'}[T_1, \dots, T_q] \rightarrow R_{m'}[\tau_1, \dots, \tau_q]$, $T_i \mapsto \tau_i$. Chaque polynôme $T_i^{p^m} - t'_i \theta_i^{-p^m}$, pour $1 \leq i \leq q$, appartient au noyau de β , puisque $\tau_i^{p^m} - t'_i \theta_i^{-p^m} = t_i^{p^m} \theta_i^{-p^m} - t'_i \theta_i^{-p^m} = 0$. Réciproquement, considérons un polynôme $P(T_1, \dots, T_q)$ dans le noyau de β . Comme $T_1^{p^m} - t'_1 \theta_1^{-p^m}$ est unitaire, le polynôme P peut s'écrire sous la forme $P(T_1, \dots, T_q) = (T_1^{p^m} - t'_1 \theta_1^{-p^m})Q(T_1, \dots, T_q) + \sum_{0 \leq i_1 < p^m} P_{i_1}(T_2, \dots, T_q) T_1^{i_1}$ avec $P_{i_1} \in$

$R_{m'}[T_2, \dots, T_q]$. Chaque polynôme $P_{i_1}(T_2, \dots, T_q)$ peut lui-même s'écrire sous la forme $(T_2^{p^m} - t'_2 \theta_2^{-p^m})Q_{i_1}(T_1, \dots, T_q) + \sum_{0 \leq i_2 < p^m} P_{i_1, i_2}(T_3, \dots, T_q) T_2^{i_2}$. En répétant le procédé, on

voit que $P(T_1, \dots, T_q) = \sum_{1 \leq i \leq q} (T_i^{p^m} - t'_i \theta_i^{-p^m}) Q_i(T_1, \dots, T_q) + \sum_{i=1}^q \sum_{j_i=0}^{p^m-1} a_{j_1, \dots, j_q} T_1^{j_1} \dots T_q^{j_q}$ avec

$a_{j_1, \dots, j_q} \in R_{m'}$. On obtient donc $P(\tau_1, \dots, \tau_q) = \sum_{i=1}^q \sum_{j_i=0}^{p^m-1} a_{j_1, \dots, j_q} \tau_1^{j_1} \dots \tau_q^{j_q} = \sum_{i=1}^q \sum_{j_i=0}^{p^m-1} a_{j_1, \dots, j_q} t_1^{j_1} \theta_1^{-j_1} \dots t_q^{j_q} \theta_q^{-j_q}$. Comme les $t_1^{j_1} \dots t_q^{j_q}$, pour $0 \leq j_i < p^m$, sont linéairement indépendants sur $R_{m'}$, on en déduit que $a_{j_1, \dots, j_q} = 0$ pour tout (j_1, \dots, j_q) , et donc que $P \in (T_1^{p^m} - t_1' \theta_1^{-p^m}, \dots, T_q^{p^m} - t_q' \theta_q^{-p^m})$. Donc $R_{m'}[\tau_1, \dots, \tau_q] \simeq R_{m'}[T_1, \dots, T_q] / (T_1^{p^m} - t_1' \theta_1^{-p^m}, \dots, T_q^{p^m} - t_q' \theta_q^{-p^m})$.

Montrons maintenant que $\mathcal{B}_{X/S, \bar{x}}^{(m')} = R_{m'}[\tau_1, \dots, \tau_q]$ par récurrence sur l'entier m' . Pour $m' = 0$, on a $\mathcal{B}_{X/S, \bar{x}}^{(0)} = \mathcal{A}_{X, \bar{x}}^{gp} = \mathcal{O}_{X, \bar{x}}[\theta_1, \theta_1^{-1}, \dots, \theta_q, \theta_q^{-1}] \simeq \mathcal{O}_{X', \bar{x}'}[t_1, \dots, t_d, \theta_1, \theta_1^{-1}, \dots, \theta_q, \theta_q^{-1}] = R_0[\tau_1, \dots, \tau_q]$, ce qui fonde la récurrence.

Supposons que $\mathcal{B}_{X/S, \bar{x}}^{(m'-1)} = R_{m'-1}[\tau_1, \dots, \tau_q]$ pour un certain entier $m' \geq 1$, $m' \leq m$. Comme $\mathcal{B}_{X/S, \bar{x}}^{(m')} \subset \mathcal{B}_{X/S, \bar{x}}^{(m'-1)}$, un élément y de $\mathcal{B}_{X/S, \bar{x}}^{(m')}$ s'écrit de manière unique sous la forme $y = \sum_{I \in \mathbb{N}^q, 0 \leq I < p^m} \alpha_I \underline{\tau}^I$ avec $\alpha_I \in R_{m'-1}$ et $\underline{\tau}^I = \tau_1^{I_1} \dots \tau_q^{I_q}$. On calcule alors $\underline{\partial}_{\langle p^{m'-1} \varepsilon_j \rangle} \cdot y$ pour $1 \leq j \leq d$:

$$\begin{aligned}
 \underline{\partial}_{\langle p^{m'-1} \varepsilon_j \rangle} \cdot y &= \sum_{0 \leq I < p^m} \sum_{k=0}^{p^{m'-1}} \left\{ \begin{matrix} p^{m'-1} \\ k \end{matrix} \right\} \underline{\partial}_{\langle (p^{m'-1}-k) \varepsilon_j \rangle} \cdot \alpha_I \underline{\partial}_{\langle k \varepsilon_j \rangle} \cdot \underline{\tau}^I \\
 &= \sum_{0 \leq I < p^m} \left[(\underline{\partial}_{\langle p^{m'-1} \varepsilon_j \rangle} \cdot \alpha_I) \underline{\tau}^I + \alpha_I (\underline{\partial}_{\langle p^{m'-1} \varepsilon_j \rangle} \cdot \underline{\tau}^I) \right]
 \end{aligned}$$

Or $\underline{\partial}_{\langle p^{m'-1} \varepsilon_j \rangle} \cdot \underline{\tau}^I = \underline{\partial}_{\langle p^{m'-1} \varepsilon_j \rangle}^b (-I, \underline{t}^I) \underline{\theta}^{-I}$ et $\underline{\partial}_{\langle k \varepsilon_j \rangle}^b (-I, \underline{t}^I) = \underline{\partial}_{\langle k \varepsilon_j \rangle}^b (-I, \alpha_X(I)) = \alpha_X(I) \underline{\partial}_{\langle k \varepsilon_j \rangle}^b (-I + I, 1) = \alpha_X(I) \underline{\partial}_{\langle k \varepsilon_j \rangle}^b (0, 1) = 0$ pour tout $k \neq 0$, en particulier pour $k = p^{m'-1} \varepsilon_j$. Donc $\underline{\partial}_{\langle p^{m'-1} \varepsilon_j \rangle} \cdot y = \sum_{0 \leq I < p^m} (\underline{\partial}_{\langle p^{m'-1} \varepsilon_j \rangle} \cdot \alpha_I) \underline{\tau}^I$. Si $y \in \mathcal{B}_{X/S, \bar{x}}^{(m')}$, alors $\underline{\partial}_{\langle p^{m'-1} \varepsilon_j \rangle} \cdot y = 0$. Comme les éléments $\underline{\tau}^I$, pour $0 \leq I < p^m$, sont linéairement indépendants sur $R_{m'-1}$, on en déduit que (*) : $\underline{\partial}_{\langle p^{m'-1} \varepsilon_j \rangle} \cdot \alpha_I = 0$ pour tout $1 \leq j \leq d$. Chaque α_I s'écrit de manière unique sous la forme : $\alpha_I = \sum_{J \in \mathbb{Z}^q} a_{I,J} \underline{\theta}^{J p^{m'-1}}$ avec $a_{I,J} \in \mathcal{O}_{X', \bar{x}'}[t_{q+1}^{p^{m'-1}}, \dots, t_d^{p^{m'-1}}]$. Montrons que $a_{I,J} = 0$ pour tout J non divisible par p . Nous avons, pour tout $1 \leq j \leq q$:

$$\begin{aligned}
 \underline{\partial}_{\langle p^{m'-1} \varepsilon_j \rangle} \cdot \alpha_I &= \sum_{J \in \mathbb{Z}^q} a_{I,J} \underline{\partial}_{\langle p^{m'-1} \varepsilon_j \rangle} \cdot \underline{\theta}^{J p^{m'-1}} \\
 &= \sum_{J_j \geq 0} a_{I,J} \binom{p^{m'-1} J_j}{p^{m'-1}} \underline{\theta}^{J p^{m'-1}} + \sum_{J_j < 0} a_{I,J} (-1)^{p^{m'-1}} \binom{p^{m'-1} (1 - J_j) - 1}{p^{m'-1}} \underline{\theta}^{J p^{m'-1}}
 \end{aligned}$$

Pour $J_j \geq 0$, le coefficient binomial $\binom{p^{m'-1} J_j}{p^{m'-1}}$ est le coefficient de $X^{p^{m'-1}}$ dans le polynôme

$(1 + X)^{p^{m'-1}J_j} = (1 + X^{p^{m'-1}})^{J_j}$, donc il est égal à J_j . Pour $J_j < 0$, le coefficient binomial $\binom{p^{m'-1}(1 - J_j) - 1}{p^{m'-1}}$ est le coefficient de $X^{p^{m'-1}}$ dans le polynôme $(1 + X)^{p^{m'-1}(1 - J_j) - 1} = (1 + X^{p^{m'-1}})^{(1 - J_j)}(1 + X)^{-1} = (1 + X^{p^{m'-1}})^{(1 - J_j)} \sum_{k=0}^{+\infty} (-X)^k$. Il est donc égal à $(1 - J_j) + (-1)^{p^{m'-1}}$. Si p est impair ou $m' = 1$, on obtient $-J_j$; sinon on obtient $2 - J_j = -J_j \pmod{2}$. La condition (*) implique alors que $a_{I,J}J_j = 0$ pour tous I, J, j . Donc $a_{I,J} = 0$ dès que p ne divise pas J , comme désiré. Ainsi $\alpha_I = \sum_{J \in \mathbb{Z}^q} a_{I,J} \underline{\theta}^{J p^{m'}}$ avec $a_{I,J} \in \mathcal{O}_{X', \bar{x}'}[t_{q+1}^{p^{m'-1}}, \dots, t_d^{p^{m'-1}}]$.

Il reste à montrer que $a_{I,J} \in \mathcal{O}_{X', \bar{x}'}[t_{q+1}^{p^{m'-1}}, \dots, t_d^{p^{m'-1}}]$. Chaque $a_{I,J}$ s'écrit de manière unique sous la forme $a_{I,J} = \sum_{K \in \mathbb{N}^{d-q}} b_K t_{q+1}^{K_{q+1} p^{m'-1}} \dots t_d^{K_d p^{m'-1}}$ avec $b_K \in \mathcal{O}_{X', \bar{x}'}$ ne faisant intervenir que les q premières coordonnées t_1, \dots, t_q (nous omettons les indices I et J pour simplifier les notations). Pour $j \geq q + 1$, la condition $\underline{\partial}_{\langle p^{m'-1} \underline{\varepsilon}_j \rangle} \cdot \alpha_I = 0$ s'écrit $\sum_{J \in \mathbb{Z}^q} (\underline{\partial}_{\langle p^{m'-1} \underline{\varepsilon}_j \rangle} \cdot a_{I,J}) \underline{\theta}^{J p^{m'}} = 0$, ce qui entraîne que $\underline{\partial}_{\langle p^{m'-1} \underline{\varepsilon}_j \rangle} \cdot a_{I,J} = 0$. Avec les notations introduites plus haut, on obtient donc en vertu du lemme (2.3.3) :

$$\sum_{K \in \mathbb{N}^{d-q}} b_K \binom{K_j p^{m'-1}}{p^{m'-1}} t_{q+1}^{K_{q+1} p^{m'-1}} \dots t_d^{K_d p^{m'-1}} = 0$$

Comme $K_j > 0$, nous avons comme précédemment : $\binom{K_j p^{m'-1}}{p^{m'-1}} = K_j$. On voit ainsi que $K_j b_K = 0$ pour tout K et tout $j \geq q + 1$. On en déduit que $b_K = 0$ dès que p ne divise pas K . Donc $a_{I,J} \in \mathcal{O}_{X', \bar{x}'}[t_{q+1}^{p^{m'-1}}, \dots, t_d^{p^{m'-1}}]$, ce qui achève la démonstration.

En particulier pour $m' = m$, on obtient que $\mathcal{B}_{X/S, \bar{x}}^{(m)} = R_m[\tau_1, \dots, \tau_q] = \mathcal{O}_{X', \bar{x}'}[\theta_1^{p^m}, \theta_1^{-p^m}, \dots, \theta_q^{p^m}, \theta_q^{-p^m}, \tau_1, \dots, \tau_q]$.

Proposition 5.2.1. *Soit S un schéma régulier de caractéristique p , muni de la log-structure triviale. Soit X un schéma noëthérien lisse sur S , de dimension relative d , muni de la log-structure définie par un diviseur à croisements normaux relatif D , somme de composantes lisses D_i , $1 \leq i \leq r$. Alors on a :*

$$\mathcal{A}_{X, \bar{x}}^{qp} = \mathcal{O}_{X, \bar{x}}[\theta_1, \theta_1^{-1}, \dots, \theta_q, \theta_q^{-1}] \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{X/S, \bar{x}}^{(m)} = \mathcal{O}_{X', \bar{x}'}[\theta_1^{p^m}, \theta_1^{-p^m}, \dots, \theta_q^{p^m}, \theta_q^{-p^m}, \tau_1, \dots, \tau_q].$$

5.3 Le niveau m

Lemme 5.3.1. *Reprenons les notations précédentes, avec S localement noëthérien. Alors l'anneau $\tilde{\mathcal{D}}_{X', \bar{x}'}^{(0)} = \mathcal{B}_{X/S, \bar{x}}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X', \bar{x}'}} \mathcal{D}_{X', \bar{x}'}^{(0)}$ est de dimension homologique finie pour tout entier m supérieur ou égal à 1.*

Démonstration : nous avons montré que $\mathcal{D}_X^{(0)}$ est de dimension homologique finie (cf proposition (5.1.2)) en utilisant le gradué associé à la filtration par l'ordre. Un raisonnement analogue pour $\tilde{\mathcal{D}}_{X',\bar{x}'}^{(0)}$ montre que celui-ci est de dimension homologique finie. En effet, d'après la proposition (5.2.1), nous avons : $\mathcal{B}_{X/S,\bar{x}}^{(m)} = R_m[\tau_1, \dots, \tau_q] \simeq R_m[T_1, \dots, T_q]/(T_1^{p^m} - t'_1 u_1^{-1}, \dots, T_q^{p^m} - t'_q u_q^{-1})$ avec $R_m = \mathcal{O}_{X',\bar{x}'}[u_1, u_1^{-1}, \dots, u_q, u_q^{-1}]$ et $u_i = \theta_i^{p^m}$ pour $1 \leq i \leq q$. La dérivée partielle de $T_i^{p^m} - t'_i u_i^{-1}$ par rapport à t'_i est $-u_i^{-1}$, pour $1 \leq i \leq q$; comme $-u_i^{-1}$ est inversible, on en déduit que les localisés de $\mathcal{B}_{X/S,\bar{x}}^{(m)}$ sont essentiellement lisses au-dessus de $\mathcal{O}_{S,\bar{s}}$, qui est régulier. Par suite, $\mathcal{B}_{X/S,\bar{x}}^{(m)}$ est régulière. \square

Remarque : si a désigne la dimension de $\mathcal{O}_{S,\bar{s}}$, alors R_m est de dimension au plus $a + d + q$. Donc $\mathcal{B}_{X/S,\bar{x}}^{(m)} \simeq R_m[T_1, \dots, T_q]/(T_1^{p^m} - t'_1 u_1^{-1}, \dots, T_q^{p^m} - t'_q u_q^{-1})$ est aussi de dimension au plus $a + d + q$.

Corollaire 5.3.1. *Sous les mêmes hypothèses, l'anneau $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\bar{x}}^{(m)} = \mathcal{A}_{X,\bar{x}}^{gp} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\bar{x}}} \mathcal{D}_{X,\bar{x}}^{(m)}$ est de dimension homologique finie.*

Démonstration : c'est un corollaire du lemme (5.3.1) et de la deuxième remarque qui suit le théorème (4.3.1). \square

Proposition 5.3.1. *Soient R un anneau nœthérien régulier de caractéristique p , $S = \text{Spec}(R)$ muni de la log-structure triviale L . Soit $X = \text{Spec}(A)$, lisse au-dessus de S , muni de la log-structure M définie par un diviseur à croisements normaux D , somme de composantes régulières D_1, \dots, D_r . Alors l'anneau $D_X^{(m)} = \Gamma(X, \mathcal{D}_X^{(m)})$ est de dimension homologique finie.*

Démonstration : Soit M un $\mathcal{D}_{X,\bar{x}}^{(m)}$ -module de type fini. Posons $M' = \tilde{\mathcal{D}}_{X,\bar{x}}^{(m)} \otimes_{\mathcal{D}_{X,\bar{x}}^{(m)}} M$. Alors M' est un $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\bar{x}}^{(m)}$ -module de type fini. D'après le corollaire (5.3.1), il admet une résolution projective de type fini :

$$0 \rightarrow M'_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow M'_0 \rightarrow M' \rightarrow 0$$

Localement $\mathcal{A}_{X,\bar{x}}^{gp} = \mathcal{O}_{X,\bar{x}}[\theta_1, \theta_1^{-1}, \dots, \theta_s, \theta_s^{-1}]$, donc $\mathcal{A}_{X,\bar{x}}^{gp}$ est fidèlement plate sur $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}$. Donc $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\bar{x}}^{(m)} = \mathcal{A}_{X,\bar{x}}^{gp} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{D}_{X,\bar{x}}^{(m)}$ est fidèlement plat sur $\mathcal{D}_{X,\bar{x}}^{(m)}$. Il existe donc des $\mathcal{D}_{X,\bar{x}}^{(m)}$ -modules projectifs de type fini M_i tels que la suite :

$$0 \rightarrow M_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow M_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

soit exacte (cf [Bou61], proposition 12 p.53). Donc $\mathcal{D}_{X,\bar{x}}^{(m)}$ est de dimension homologique finie. Comme $\mathcal{D}_X^{(m)}$ est cohérent, et que les fibres sont de dimension bornée (cf remarque ci-dessus), on en déduit que tout $D_X^{(m)}$ -module de type fini admet une résolution projective de longueur bornée. On s'affranchit de l'hypothèse de finitude par un argument analogue à celui donné par Malgrange dans [Mal76] (théorème 4.1.5.). Ainsi $D_X^{(m)}$ est lui aussi de dimension homologique finie. \square

Chapitre 6

Annexe

Nous redonnons dans cette annexe la construction de l'algèbre \mathcal{A}_X^{gp} associée à un log-schéma, telle que l'a définie Pierre Lorenzon dans sa thèse ([Lor97] et [Lor00]).

Soit (X, M_X) un log-schéma. Notons \mathcal{I}_X^{gp} le quotient de M_X^{gp} par l'action de \mathcal{O}_X^* et $\delta : M_X^{gp} \rightarrow \mathcal{I}_X^{gp}$ la projection canonique.

Définition 6.0.1. *L'algèbre \mathcal{A}_X^{gp} associée au log-schéma X est la \mathcal{O}_X -algèbre \mathcal{I}_X^{gp} -indexée associée à l'extension $\underline{E}_X = (0 \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow M_X^{gp} \rightarrow \mathcal{I}_X^{gp} \rightarrow 0)$; ainsi $\mathcal{A}_X^{gp} = M_X^{gp} \wedge \mathcal{O}_{\mathcal{I}_X^{gp}}$, où $\mathcal{O}_{\mathcal{I}_X^{gp}} = \mathcal{O}_X \times \mathcal{I}_X^{gp}$ et \wedge désigne le produit contracté de M_X^{gp} par $\mathcal{O}_{\mathcal{I}_X^{gp}}$ (cf [Lor97], chapitre I, 2.1.).*

Remarque : Lorenzon a changé de terminologie entre [Lor97], où il emploie le terme d'algèbre *graduée* et [Lor00], où apparaît celui d'algèbre *indexée*, mieux adapté, et que nous reprenons ici.

\mathcal{A}_X^{gp} dépend fonctoriellement de X . Si $f : (X, M_X) \rightarrow (Y, M_Y)$ est un morphisme de log-schémas, on a un morphisme de \mathcal{O}_X -algèbres indexées $\mathcal{A}_f^{gp} : f^* \mathcal{A}_Y^{gp} \rightarrow \mathcal{A}_X^{gp}$ au-dessus du morphisme $\phi : f^{-1} \mathcal{I}_Y^{gp} \rightarrow \mathcal{I}_X^{gp}$ défini par f . Si f est strict, alors \mathcal{A}_f^{gp} est un isomorphisme.

Exemples : (a) Si la log-structure de X est triviale, alors $\mathcal{A}_X^{gp} = \mathcal{O}_X$;
(b) Soient X un schéma noëthérien régulier et Y un diviseur à croisements normaux sur X , union de composantes régulières Y_i , $1 \leq i \leq r$. Alors $\mathcal{I}_X^{gp} = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}_{Y_i}$. Si Y_i admet une équation globale f_i , et si θ_i désigne la section de $\mathcal{A}_{\varepsilon_i}^{gp}$ de degré $\varepsilon_i \in \Gamma(X, \mathbb{Z}_{Y_i})$ définie par f_i^{-1} , alors pour $\underline{k} \in \Gamma(X, \mathcal{I}_X^{gp})$ on a $\mathcal{A}_{X, \underline{k}}^{gp} = \mathcal{O}_{\underline{\theta}^{\underline{k}}}$.

Soit U étale sur X . Toute section s de M_X^{gp} sur U trivialisent le \mathcal{O}_U^* -torseur $M_{\delta(s)}^{gp}$, composante de degré $\delta(s)$ de M_X^{gp} , et fournit donc une base du \mathcal{O}_U -module inversible $\mathcal{A}_{X, \delta(s)}^{gp}$, notée e_s .

Nous rappelons à présent la définition de l'algèbre $\mathcal{B}_{X/S}$ ainsi que le résultat de descente obtenu par Lorenzon.

Proposition 6.0.2. ([Lor97], prop. II.1.6.) Soit $f : (X, M) \rightarrow (S, L)$ un morphisme de log-schémas. Sur le \mathcal{O}_X -module \mathcal{I}_X^{gp} -indexé \mathcal{A}_X^{gp} , il existe une unique connexion $d_{\mathcal{A}}$ relativement à (S, L) telle que, pour toute section s de M^{gp} sur U étale sur X on ait : $d_{\mathcal{A}}(e_s) = e_s \otimes d\log s$.

Si l'on identifie $\mathcal{A}_{X, \delta(s)}^{gp}$ à \mathcal{O}_U au moyen de la base e_s , la connexion $d_{\mathcal{A}}$ sur $\mathcal{A}_{X, \delta(s)}^{gp}$ est définie par la forme différentielle $d\log(s)$, c'est-à-dire que l'on a $d_{\mathcal{A}}(a) = da + ad\log(s)$ pour toute section a de \mathcal{O}_X sur U .

Proposition 6.0.3. ([Lor97], prop. II.1.7.) (a) La connexion $d_{\mathcal{A}}$ est intégrable et multiplicative.

(b) Si S est de caractéristique $p > 0$ et $f : (X, M) \rightarrow (S, L)$ est un morphisme log-lisse de log-schémas fins, alors $d_{\mathcal{A}}$ est p -intégrable.

(c) Étant donné un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (X', M') & \xrightarrow{g} & (X, M) \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ (S', L') & \longrightarrow & (S, L) \end{array}$$

le morphisme canonique $g^* \mathcal{A}_X^{gp} \rightarrow \mathcal{A}_{X'}^{gp}$ est horizontal pour les connexions $g^*(d_{\mathcal{A}_{X/S}})$ et $d_{\mathcal{A}_{X'/S'}}$.

Définition 6.0.2. Soit $f : (X, M) \rightarrow (S, L)$ un morphisme log-lisse de log-schémas fins. On définit $\mathcal{B}_{X/S}$ comme la sous-algèbre \mathcal{I}_X^{gp} -indexée $(\mathcal{A}_X^{gp})^d$ des sections horizontales de \mathcal{A}_X^{gp} (cf [Lor97], chapitre II, 1.8.).

Théorème 6.0.1. ([Lor97], II.3.3.) Soit $f : (X, M) \rightarrow (S, L)$ un morphisme log-lisse de log-schémas fins. On suppose que S est de caractéristique $p > 0$. Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{B}_{X/S}} \mathcal{A}_X^{gp}$ de la catégorie des $\mathcal{B}_{X/S}$ -modules indexés localement libres de type fini dans la catégorie des \mathcal{A}_X^{gp} -modules indexés localement libres de type fini à connexion intégrable et p -intégrable est une équivalence de catégories.

Bibliographie

- [Ber74] Pierre Berthelot. *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$* , LN 407. Berlin, Springer-Verlag, 1974.
- [Ber78] Pierre Berthelot, Arthur Ogus. *Notes on Crystalline Cohomology*. Math. Notes 21, Princeton University Press, 1978.
- [Ber96] Pierre Berthelot. *\mathcal{D} -modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **29**, n° 2, 1996, pp. 185–272.
- [Ber00] Pierre Berthelot. *\mathcal{D} -modules arithmétiques. II. Descente par Frobenius*. Mémoires de la Société Mathématique de France, **81**, 2000, pp. 1–136.
- [Bou61] Nicolas Bourbaki. *Algèbre commutative, Chapitre I*. Hermann, 1961.
- [EGA] *Éléments de géométrie algébrique*. Publications Mathématiques de l’IHES, 1961–1967.
- [Kat71] Nicholas Katz. *Nilpotent connections and the monodromy theorem : applications of a result of Turrittin*. Publications Mathématiques de l’IHES, no39, 1971, pp. 175–232.
- [Kat89] Kazuya Kato. *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*. Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988), 1989, pp. 191–224.
- [Kat94] Kazuya Kato. *Toric singularities*. American Journal of Mathematics, no116, 1994, pp. 1073–1099.
- [Lor97] Pierre Lorenzon. *Algèbres graduées, p -descente, faisceaux de Hodge-Witt logarithmiques sur les log-schémas*. Thèse de doctorat de l’Université de Paris-Sud, 1997.
- [Lor00] Pierre Lorenzon. *Indexed algebras associated to a log-structure and a theorem of p -descent on log-schemes*. manuscripta math., no101, 2000, pp. 271–299.
- [Mal76] Bernard Malgrange. *Caractérisation homologique de la dimension*. Séminaire “Opérateurs différentiels et pseudo-différentiels”, Institut Fourier, Grenoble, 1975–76.

- [Ogu94] Arthur Ogus. *F-crystals, Griffiths transversality, and the Hodge decomposition*. Astérisque, no221, 1994, pp. ii+183.