



HAL
open science

Etudes théorique et numérique d'un modèle non-stationnaire de catalyseurs à passages cylindriques

Jean-David Hoernel

► **To cite this version:**

Jean-David Hoernel. Etudes théorique et numérique d'un modèle non-stationnaire de catalyseurs à passages cylindriques. Mathématiques [math]. Université de Haute Alsace - Mulhouse, 2002. Français. NNT: . tel-00002403

HAL Id: tel-00002403

<https://theses.hal.science/tel-00002403>

Submitted on 16 Feb 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Etudes théorique et numérique d'un modèle
non-stationnaire de catalyseurs à passages
cylindriques

Jean-David HOERNEL
Université de Haute-Alsace
Laboratoire de Mathématiques et Applications
4 rue des Frères Lumière
F-68093 MULHOUSE Cedex

Table des matières

1	Introduction	5
2	Description et étude théorique du problème	7
2.1	Modèle mathématique	7
2.1.1	Dans le canal cylindrique	8
2.1.2	Sur la paroi du canal	9
2.2	Ré-écriture du problème et premières propriétés	10
2.3	Existence de la solution	13
2.3.1	Régularisation du problème	13
2.3.2	Existence dans le cylindre	14
2.3.3	Existence sur la paroi	29
2.3.4	Caractère contractant de $\Phi \circ \Psi$	41
2.3.5	Retour au problème initial	46
2.4	Positivité de la solution	50
2.5	Unicité de la solution	52
2.6	Propriétés qualitatives de la solution	54
2.6.1	Estimation d'énergie	54
2.6.2	Encadrement des concentrations pour lesquelles $\delta_i = -1$	56
2.6.3	Minoration des concentrations pour lesquelles $\delta_i = 1$	58
2.6.4	Majoration des concentrations pour lesquelles $\delta_i = 1$	59
2.6.5	Relations entre les solutions	63
2.7	Comportement asymptotique en temps	66
2.7.1	Propriétés de la solution du système limite	69
3	Réaction $CO + O_2/2 \rightarrow CO_2$	73
3.1	Schéma général de résolution	74
3.2	Simulation numérique par éléments finis	75
3.2.1	Dans le cylindre	75
3.2.1.1	Description du schéma numérique utilisé	75
3.2.1.2	Discrétisation par éléments finis	75
3.2.2	Sur la paroi	78
3.2.2.1	Description du schéma numérique utilisé pour la température	78

3.2.2.2	Discrétisation par éléments finis	79
3.2.2.3	Description du schéma numérique utilisé pour les espèces chimiques	82
3.3	Simulation numérique par différences finies	82
3.3.1	Dans le cylindre	82
3.3.2	Sur la paroi	86
3.3.2.1	Description du schéma numérique utilisé pour la température	86
3.3.2.2	Description du schéma numérique utilisé pour les espèces chimiques	90
3.3.3	Première simulation	92
3.3.4	Deuxième simulation	95
4	Valeurs numériques des paramètres	109
4.1	Les constantes donnant les coefficients des équations	109
4.2	La vitesse de réaction	110
4.3	Les conditions initiales ou aux limites	110

Chapitre 1

Introduction

Depuis quelques années, tous les véhicules automobiles à essence sont équipés de catalyseurs trois voies, afin de réduire les émissions de gaz polluants. Cette technique est maintenant bien maîtrisée. Cependant, des améliorations peuvent encore être apportées, en particulier pour ce qui est du fonctionnement de ces catalyseurs à basses températures. Dans la plupart des cas, ces catalyseurs sont supportés par des monolithes composés de canaux cylindriques.

Le point de départ de ce travail est la description d'un modèle non stationnaire de convertisseurs catalytiques à géométrie cylindrique dû à Ryan, Becke et Zygourakis, [20]. Ce modèle est une extension de celui établi par Oh et Cavendish, [15, 16]. Dans cette thèse, nous étudions le phénomène dans un cylindre unique, dont une coupe axiale est donnée dans la figure ci-après :

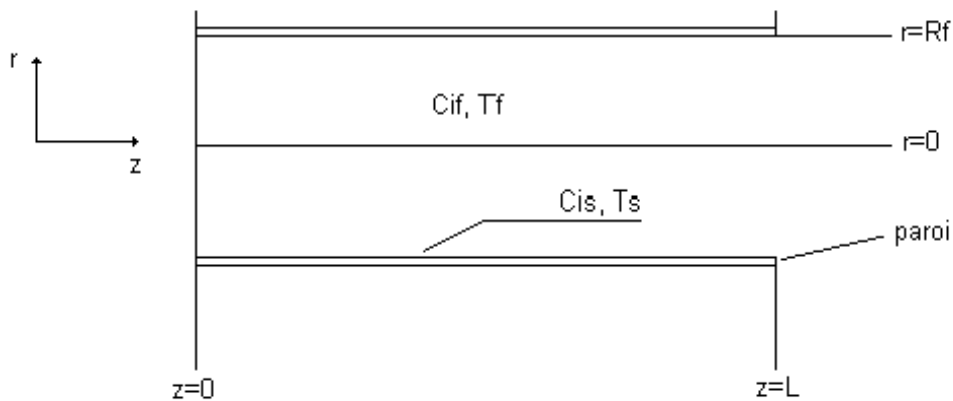


FIG. 1.1 – Une coupe axiale du canal.

Ce modèle décrit les évolutions spatiale et temporelle de la température et des concentrations de différentes espèces chimiques sous forme gazeuse, dans le cylindre et sur la paroi.

CHAPITRE 1. INTRODUCTION

Les équations constituant le modèle sont relativement atypiques en théorie de la combustion et nous ont obligé à utiliser des techniques inhabituelles pour en contourner les difficultés. Il s'agit en effet d'un système couplé d'équations décrivant, pour la moitié d'entre elles l'évolution par rapport à la coordonnée axiale des espèces chimiques et de la température dans le cylindre, et pour l'autre moitié l'évolution temporelle des mêmes espèces chimiques et de la température sur la paroi. Ce système comporte les particularités suivantes :

- Les variations des concentrations et de la température dans le cylindre ne se font que par rapport aux variables d'espace, en l'absence de réactions entre les espèces chimiques.
- Les équations sur la paroi décrivent l'évolution temporelle du système et tiennent compte de réactions entre les différentes espèces chimiques.
- Les équations dans le cylindre sont paraboliques par rapport à la direction axiale du cylindre, alors que les équations sur la paroi sont paraboliques en temps pour l'une d'elle et des équations différentielles ordinaires pour les autres.
- Le couplage entre les équations posées dans le cylindre et celles posées sur la paroi se fait par la valeur de la dérivée radiale de la solution obtenue dans le cylindre et évaluée sur la paroi. Cette quantité étant difficile à contrôler, elle sera remplacée, via les équations posées dans le cylindre, par la moyenne sur une section du cylindre de la dérivée axiale de la solution dans le cylindre.
- Les réactions chimiques n'intervenant que sur la paroi du cylindre, toutes les équations sur cette paroi sont couplées, via les vitesses de réactions des différentes espèces.
- Comme sur la paroi on a affaire à des équations de types différents (une équation aux dérivées partielles parabolique et des équations différentielles ordinaires) on va devoir recourir à une technique de régularisation pour n'avoir que des équations de même nature.

Ce travail comporte deux parties.

Dans la première partie, nous établissons l'existence et l'unicité de la solution, ainsi que quelques propriétés qualitatives de cette solution, en particulier l'existence de bornes supérieures et inférieures. Nous regardons également le comportement limite de la solution quand le temps tend vers l'infini.

La deuxième partie est consacrée à la description de deux méthodes numériques pour la résolution du problème, la première utilisant les éléments finis et la seconde les différences finies. La méthode des différences finies est mise en oeuvre avec différentes conditions initiales et aux limites et permet d'obtenir des courbes donnant la solution.

Chapitre 2

Description et étude théorique du problème

2.1 Modèle mathématique

Un gaz contenant S espèces chimiques A_1, A_2, \dots, A_S circule dans un canal cylindrique (cf. Figure 1.1 ci-dessus), en suivant un profil parabolique de vitesse. Sur la paroi du canal, les S espèces chimiques réagissent au travers de R réactions, en se composant ou se décomposant. Un exemple classique et qui sera étudié de manière plus approfondie dans la deuxième partie est celui de la réaction : $CO + 1/2O_2 \rightarrow CO_2$.

L'objectif de ce travail est, dans un premier temps, de prouver l'existence de la solution du problème modélisant l'évolution des différentes concentrations et de la température au cours du temps, à l'intérieur du canal et sur la surface extérieure du canal. Dans un deuxième temps nous regarderons comment se comporte la solution quand le temps croit jusqu'à l'infini afin de mettre en évidence un critère, destiné à être utilisé lors des simulations numériques, de détection de "fronts de réaction". D'autre part, une méthode numérique de résolution approchée de ce problème sera mise en oeuvre.

Les concentrations (resp. la température) à l'intérieur du canal sont notées C_{if} (resp. T_f). Les concentrations (resp. la température) sur la paroi du canal sont notées C_{is} (resp. T_s). On a évidemment les égalités :

$$C_{if}(R_f, z, t) = C_{is}(z, t) ; T_f(R_f, z, t) = T_s(z, t),$$

qui expriment la continuité des concentrations et de la température sur la paroi du canal.

Dans une première étape, on effectue les bilans matières et les bilans thermiques dans le canal et sur la paroi. Ceci permet d'établir des équations dont sont solutions C_{if}, T_f, C_{is} et T_s .

2.1.1 Dans le canal cylindrique

Nous supposons que la vitesse du fluide suit, dans le canal, un profil parabolique donné sous la forme :

$$V(r) = V_{\max} \left(1 - \left(\frac{r}{R_f} \right)^2 \right),$$

où V_{\max} est la vitesse maximale du fluide, atteinte au centre du cylindre.

Le bilan matière pour l'espèce A_i s'écrit sous la forme :

$$-V_{\max} \left(1 - \left(\frac{r}{R_f} \right)^2 \right) \frac{\partial C_{if}}{\partial z} (r, z, t) = -\frac{D_{if}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_{if}}{\partial r} \right) (r, z, t), \quad (2.1)$$

$$\forall (r, z, t) \in]0, R_f[\times]0, L[\times]0, T[,$$

où C_{if} désigne la concentration de l'espèce A_i dans le fluide et D_{if} le coefficient de diffusion de l'espèce A_i , $i = 1, \dots, S$.

Les conditions aux limites associées à l'équation (2.1) sont :

$$\begin{cases} C_{if}(r, 0, t) = C_{if0}(r), \\ C_{if}(R_f, z, t) = C_{is}(z, t), \\ \frac{\partial C_{if}}{\partial r}(0, z, t) = 0. \end{cases}$$

La première condition signifie qu'on suppose connue la concentration C_{if} de l'espèce A_i dans le fluide à l'entrée du canal cylindrique ($z = 0$) à chaque instant. La deuxième condition exprime le raccord des concentrations sur la paroi externe du canal. La troisième condition est liée à la géométrie cylindrique du canal. Notons que C_{if0} ne dépend que de r et pas de t .

Le bilan thermique dans le canal s'écrit sous la forme :

$$-\rho_f C_{pf} V_{\max} \left(1 - \left(\frac{r}{R_f} \right)^2 \right) \frac{\partial T_f}{\partial z} (r, z, t) = -\frac{\lambda_f}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_f}{\partial r} \right) (r, z, t), \quad (2.2)$$

$$\forall (r, z, t) \in]0, R_f[\times]0, L[\times]0, T[,$$

où T_f désigne la température du fluide, ρ_f sa masse volumique, C_{pf} sa chaleur massique et λ_f sa conductivité thermique.

Les conditions aux limites associées à l'équation (2.2) sont :

$$\begin{cases} T_f(r, 0, t) = T_{f0}(r), \\ T_f(R_f, z, t) = T_s(z, t), \\ \frac{\partial T_f}{\partial r}(0, z, t) = 0, \end{cases}$$

qui représentent des conditions analogues à celles vérifiées par les concentrations.

2.1.2 Sur la paroi du canal

Le bilan matière sur la paroi du canal ($r = R_f$) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \varepsilon_s \frac{\partial C_{is}}{\partial t} (z, t) = & -SD_{if} \frac{\partial C_{if}}{\partial r} (R_f, z, t) \\ & + a(z) \sum_{j=1}^R \alpha_{ij} \hat{r}_j (C_{1s}, \dots, C_{Ss}, T_s) (z, t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\forall (z, t) \in]0, L[\times]0, T[,$$

où C_{is} désigne la concentration de l'espèce A_i sur la paroi, ε_s le volume de vide dans la paroi par unité de volume, S la surface de contact gaz-solide par unité de volume, a la surface active du réacteur par unité de volume, α_{ij} le coefficient stoechiométrique de l'espèce A_i pour la réaction j et \hat{r}_j la vitesse de formation ou de disparition d'une espèce par la réaction j .

Les conditions initiales associées à l'équation (2.3) sont :

$$C_{is} (z, 0) = C_{is0}(z).$$

Elles signifient que les concentrations sont connues à l'instant $t = 0$.

Le bilan thermique sur la paroi du canal s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon_s) \rho_s C_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} (z, t) = & -S\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial r} (R_f, z, t) + (1 - \varepsilon_s) \lambda_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} (z, t) \\ & + a(z) \sum_{j=1}^R (-\Delta H) \hat{r}_j (C_{1s}, \dots, C_{Ss}, T_s) (z, t), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\forall (z, t) \in]0, L[\times]0, T[,$$

où T_s est la température sur la paroi solide du canal, ρ_s la masse volumique de la paroi, C_{ps} sa chaleur massique, λ_s sa conductivité thermique, λ_f la conductivité thermique du fluide, S la surface de contact gaz-solide par unité de volume et $(-\Delta H)$ l'enthalpie molaire de la réaction j .

Les conditions initiales ou aux limites associées à l'équation (2.4) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_s (z, 0) = T_{s0}(z), \\ (1 - \varepsilon_s) \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial z} (0, t) = (1 - \varepsilon_s) \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial z} (L, t) = 0. \end{array} \right.$$

La première condition signifie que la température est connue à l'instant $t = 0$. La deuxième condition exprime le fait que les extrémités de la paroi ($z = 0$ ou $z = L$) sont isolées.

2.2 Ré-écriture du problème et premières propriétés

Pour passer de $]0, R_f[\times]0, L[$ à $]0, 1[\times]0, 1[$ on effectue le changement de variables : $Z = z/L$, $R = r/R_f$, pour obtenir le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - R^2) \frac{\partial C_{if}}{\partial Z} (R, Z, t) = \frac{D_{if} L}{V_{\max} (R_f)^2} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial C_{if}}{\partial R} \right) (R, Z, t), \\ (1 - R^2) \frac{\partial T_f}{\partial Z} (R, Z, t) = \frac{\lambda_f L}{\rho_f C_{pf} V_{\max} (R_f)^2} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial T_f}{\partial R} \right) (R, Z, t), \\ \frac{\partial C_{is}}{\partial t} (Z, t) = -\frac{SD_{if}}{\varepsilon_s R_f} \frac{\partial C_{if}}{\partial R} (1, Z, t) \\ \quad + \frac{a(LZ)}{\varepsilon_s} \sum_{j=1}^R \alpha_{ij} \hat{r}_j (C_{1s}, \dots, C_{Ss}, T_s) (Z, t), \\ \frac{\partial T_s}{\partial t} (Z, t) = -\frac{S\lambda_f}{(1 - \varepsilon_s) \rho_s C_{ps} R_f} \frac{\partial T_f}{\partial R} (1, Z, t) \\ \quad + \frac{\lambda_s}{\rho_s C_{ps} L^2} \frac{\partial^2 T_s}{\partial Z^2} (Z, t) + \frac{a(LZ)(-\Delta H)}{(1 - \varepsilon_s) \rho_s C_{ps}} \\ \quad \times \sum_{j=1}^R \alpha_{ij} \hat{r}_j (C_{1s}, \dots, C_{Ss}, T_s) (Z, t), \end{array} \right.$$

où i appartient à $\{1, \dots, S\}$. On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{if} = \frac{D_{if} L}{V_{\max} (R_f)^2}, \quad \beta_{Nf} = \frac{\lambda_f L}{\rho_f C_{pf} V_{\max} (R_f)^2}, \\ \gamma_{is} = \frac{SD_{if}}{\varepsilon_s R_f}, \quad \gamma_{Ns} = \frac{S\lambda_f}{(1 - \varepsilon_s) \rho_s C_{ps} R_f}, \\ b_{is}(Z) = \frac{a(LZ)}{\varepsilon_s}, \quad b_{Ns}(Z) = \frac{a(LZ)(-\Delta H)}{(1 - \varepsilon_s) \rho_s C_{ps}}, \\ \theta_{Ns} = \frac{\lambda_s}{\rho_s C_{ps} L^2}, \end{array} \right.$$

avec $N = S + 1$, et on convient de poser :

$$C_{Nf}(r, z, t) = T_f(r, z, t) ; C_{Ns}(z, t) = T_s(z, t),$$

2.2. RÉ-ÉCRITURE DU PROBLÈME ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

de manière à traiter la température sur le même plan que les concentrations. En reprenant r et z comme variables spatiales, par commodité d'écriture, on obtient le système normalisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - r^2) \frac{\partial C_{if}}{\partial z}(r, z, t) = \beta_{if} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_{if}}{\partial r} \right) (r, z, t), \\ \frac{\partial C_{is}}{\partial t}(z, t) - \delta_N^i \theta_{Ns} \frac{\partial^2 C_{Ns}}{\partial z^2}(z, t) = -\gamma_{is} \frac{\partial C_{if}}{\partial r}(1, z, t) \\ \qquad \qquad \qquad + b_{is}(z) \sum_{j=1}^R \alpha_{ij} \hat{r}_j(C_{1s}, \dots, C_{Ns})(z, t), \end{array} \right.$$

pour i appartenant à $\{1, \dots, N\}$, et la convention que $\delta_N^i = 1$, si $i = N$, et $\delta_N^i = 0$, sinon. Les conditions initiales ou aux limites s'écrivent sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_{if}(r, 0, t) = C_{if0}(r), & \frac{\partial C_{if}}{\partial r}(0, z, t) = 0, \\ C_{if}(1, z, t) = C_{is}(z, t), & \theta_{Ns} \frac{\partial C_{Ns}}{\partial z}(1, t) = 0, \\ C_{is}(z, 0) = C_{is0}(z), & \theta_{Ns} \frac{\partial C_{Ns}}{\partial z}(0, t) = 0, \end{array} \right. \quad (2.5)$$

pour tout $i = 1, \dots, N$.

Les concentrations et la température doivent être à valeurs positives ou nulles, aussi bien dans le cylindre que sur la paroi. Rien ne permet d'affirmer que les solutions des problèmes ci-dessus sont bien à valeurs positives ou nulles. On suppose donc que les fonctions \hat{r}_j peuvent être prolongées sur \mathbb{R}^N tout entier par des fonctions encore notées \hat{r}_j , sur lesquelles nous posons les hypothèses qui suivent.

(H1) La fonction \hat{r}_j ainsi prolongée est lipschitzienne de constante k_j :

$$|\hat{r}_j(x_1, \dots, x_N) - \hat{r}_j(y_1, \dots, y_N)| \leq k_j \sum_{h=1}^N |x_h - y_h|, \\ \forall (x_1, \dots, x_N), (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N.$$

De plus, nous supposons qu'il existe des fonctions \mathbf{r}_i au moins une fois continuellement différentiables telles que :

$$\delta_i \mathbf{r}_i(x_1, \dots, x_N) := b_{is}(z) \sum_{j=1}^R \alpha_{ij} \hat{r}_j(x_1, \dots, x_N), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\},$$

où δ_i appartient à $\{-1, 1\}$, les fonctions \mathbf{r}_i vérifiant les hypothèses suivantes :

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

(H2) Pour tout vecteur (x_1, \dots, x_N) de \mathbb{R}^N , on a :

$$\mathbf{r}_i(x_1, \dots, x_N) \geq 0.$$

(H3) Si l'une des variables x_i , $1 \leq i \leq N$, est égale à 0, la fonction \mathbf{r}_i s'annule :

$$\mathbf{r}_i(x_1, \dots, 0, \dots, x_N) = 0.$$

(H4) Pour tous (x_1, \dots, x_N) et (y_1, \dots, y_N) appartenant à \mathbb{R}^N , on a :

$$-\sum_{i=1}^N \delta_i \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} (\mathbf{r}_i(x_1, \dots, x_N) - \mathbf{r}_i(y_1, \dots, y_N)) (x_i - y_i) \geq 0.$$

Remarque 2.2.1 *La signification physique de ces hypothèses est la suivante.*

1. La fonction \hat{r}_j représente la vitesse de formation ou de disparition d'une espèce par la réaction j . Comme il y a R réactions simultanées, la vitesse de formation ou de disparition globale de l'espèce i est égale à :

$$b_{is}(z) \sum_{j=1}^R \alpha_{ij} \hat{r}_j(x_1, \dots, x_N).$$

2. L'hypothèse (H2) signifie que l'espèce chimique i est, soit formée ($\delta_i = 1$), soit consommée ($\delta_i = -1$). Il ne peut pas y avoir de changement de sens de la réaction, qui se traduirait par un changement de signe de \mathbf{r}_i .
3. L'hypothèse (H3) traduit le fait que si l'un des réactifs intervenant dans les réactions impliquant l'espèce i vient à manquer, la réaction s'arrête.

Proposition 2.2.2 *On a les propriétés suivantes :*

1. Puisque \hat{r}_j est lipschitzienne de constante k_j , \mathbf{r}_i est lipschitzienne de constante $bk\alpha$, avec :

$$b = \sup_{1 \leq i \leq N, z \in [0,1]} |b_{is}(z)| ; k = \sup_{1 \leq j \leq R} |k_j| ; \alpha = \sup_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq R} |\alpha_{ij}|.$$

2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}^N : -\sum_{i=1}^N \delta_i \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \mathbf{r}_i(x_1, \dots, x_N) x_i \geq 0$.

Démonstration. 1. On calcule :

$$\begin{aligned} & |\mathbf{r}_i(x_1, \dots, x_N) - \mathbf{r}_i(y_1, \dots, y_N)| \\ & \leq b\alpha \sum_{j=1}^R |\hat{r}_j(x_1, \dots, x_N) - \hat{r}_j(y_1, \dots, y_N)| \leq bk\alpha \sum_{h=1}^N |x_h - y_h|. \end{aligned}$$

2.3. EXISTENCE DE LA SOLUTION

2. Il suffit d'appliquer les hypothèses (H3) et (H4) avec $y = 0$. ■

Avec l'introduction de la fonction \mathbf{r}_i , le système considéré s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C_{if}}{\partial z}(r, z, t) = \frac{\beta_{if}}{r(1-r^2)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_{if}}{\partial r} \right) (r, z, t), \\ \frac{\partial C_{is}}{\partial t}(z, t) - \delta_N^i \theta_{Ns} \frac{\partial^2 C_{Ns}}{\partial z^2}(z, t) = -\gamma_{is} \frac{\partial C_{if}}{\partial r}(1, z, t) \\ \qquad \qquad \qquad + \delta_i \mathbf{r}_i(C_{1s}, \dots, C_{Ns})(z, t), \end{array} \right. \quad (2.6)$$

avec les conditions aux limites ou initiales (2.5). Remarquons qu'en intégrant la i -ième équation de (2.6)₁ par rapport à r , après l'avoir multiplié par $r(1-r^2)$, on obtient l'égalité :

$$\frac{\partial C_{if}}{\partial r}(1, z, t) = \frac{1}{\beta_{if}} \int_0^1 \frac{\partial C_{if}}{\partial z}(r, z, t) r(1-r^2) dr,$$

ce qui permet de ré-écrire le système (2.6) sous la forme équivalente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C_{if}}{\partial z}(r, z, t) = \frac{\beta_{if}}{r(1-r^2)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_{if}}{\partial r} \right) (r, z, t), \\ \frac{\partial C_{is}}{\partial t}(z, t) - \delta_N^i \theta_{Ns} \frac{\partial^2 C_{Ns}}{\partial z^2}(z, t) = -\frac{\gamma_{is}}{\beta_{if}} \int_0^1 \frac{\partial C_{if}}{\partial z}(r, z, t) r(1-r^2) dr \\ \qquad \qquad \qquad + \delta_i \mathbf{r}_i(C_{1s}, \dots, C_{Ns})(z, t). \end{array} \right. \quad (2.7)$$

C'est ce problème (2.7) que nous étudions dans la suite.

2.3 Existence de la solution

2.3.1 Régularisation du problème

Pour pouvoir étudier le problème (2.7) du point de vue mathématique, nous introduisons le terme $-\theta_{is} \frac{\partial^2 C_{is}}{\partial z^2}$, $i = 1, \dots, N-1$, avec $\theta_{is} > 0$, dans les équations (2.7)₂ sur la paroi portant sur les concentrations, de manière à disposer d'équations paraboliques. Ce système régularisé s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C_{if}}{\partial z}(r, z, t) = \frac{\beta_{if}}{r(1-r^2)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_{if}}{\partial r} \right) (r, z, t), \\ \frac{\partial C_{is}}{\partial t}(z, t) - \theta_{is} \frac{\partial^2 C_{is}}{\partial z^2}(z, t) = -\frac{\gamma_{is}}{\beta_{if}} \int_0^1 \frac{\partial C_{if}}{\partial z}(r, z, t) r(1-r^2) dr \\ \qquad \qquad \qquad + \delta_i \mathbf{r}_i(C_{1s}, \dots, C_{Ns})(z, t). \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Nous ajoutons les conditions initiales ou aux limites :

$$\theta_{is} \frac{\partial C_{is}}{\partial z}(1, t) = 0 = \theta_{is} \frac{\partial C_{is}}{\partial z}(0, t), \quad \forall i = 1, \dots, N-1,$$

de manière à traiter les concentrations sur le même plan que la température.

Dans un premier temps, nous prouvons l'existence d'une solution du problème (2.8), en utilisant les fonctionnelles :

$$\begin{array}{ccc} \Psi & & \Phi \\ C_{is} & \rightarrow & C_{if} & C_{if} & \rightarrow & C_{is} \end{array}$$

En effet, dans une première étape, nous montrons l'existence des solutions C_{if} dans le cylindre, en supposant connues les traces des solutions C_{is} sur la paroi (fonctionnelle Ψ). Puis, nous montrons l'existence des solutions C_{is} sur la paroi, en supposant connus les flux sur la paroi des solutions C_{if} obtenues dans le cylindre (fonctionnelle Φ). Pour prouver l'existence d'une solution du problème (2.8), nous utilisons un argument de type point fixe sur $\Phi \circ \Psi$.

Puis nous effectuons un passage à la limite, lorsque θ_{is} tend vers 0, $i = 1, \dots, N-1$, pour en déduire l'existence d'une solution du problème (2.7) d'origine.

2.3.2 Existence dans le cylindre

Supposons connues les valeurs des concentrations C_{is} sur la paroi, pour tout $i = 1, \dots, N$. On a le problème suivant en les inconnues C_{if} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C_{if}}{\partial z} - \beta_{if} \frac{1}{r(1-r^2)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_{if}}{\partial r} \right) = 0, \\ C_{if}(r, 0, t) = C_{if0}(r), \\ C_{if}(1, z, t) = C_{is}(z, t), \\ \frac{\partial C_{if}}{\partial r}(0, z, t) = 0, \end{array} \right.$$

2.3. EXISTENCE DE LA SOLUTION

avec $i = 1, \dots, N$. Posons :

$$\begin{cases} u_f = {}^t(C_{1f}, \dots, C_{Nf}), \\ u_s = {}^t(C_{1s}, \dots, C_{Ns}), \\ u_{f0} = {}^t(C_{1f0}, \dots, C_{Nf0}), \\ \beta_f = \text{diag}(\beta_{1f}, \dots, \beta_{Nf}), \end{cases}$$

de manière à écrire le problème précédent sous la forme vectorielle :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_f}{\partial z} - \beta_f \frac{1}{r(1-r^2)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_f}{\partial r} \right) = 0, \\ u_f(r, 0, t) = u_{f0}(r), \\ u_f(1, z, t) = u_s(z, t), \\ \frac{\partial u_f}{\partial r}(0, z, t) = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

On effectue le changement de fonction inconnue :

$$w_f(r, z, t) = u_f(r, z, t) - u_s(z, t),$$

de manière à annuler les conditions aux limites en $r = 1$. On obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} \frac{\partial w_f}{\partial z} - \beta_f \frac{1}{r(1-r^2)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_f}{\partial r} \right) = -\frac{\partial u_s}{\partial z}, \\ w_f(r, 0, t) = w_0(r, t), \\ w_f(1, z, t) = 0, \\ \frac{\partial w_f}{\partial r}(0, z, t) = 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

où $w_0(r, t) = u_{f0}(r) - u_s(0, t) = u_{f0}(r) - u_{f0}(1)$, car u_s ne dépend que des variables z et t et pas de la variable r .

Nous commençons par introduire les espaces fonctionnels adaptés à la résolution de (2.9) ou de (2.10).

Définition 2.3.1 1. On pose :

$$\begin{aligned} L_{r(1-r^2)}^2(0, 1) &= \left\{ u \mid r \mapsto u(r) \sqrt{r(1-r^2)} \in L^2(0, 1) \right\}, \\ L_r^2(0, 1) &= \left\{ u \mid r \mapsto u(r) \sqrt{r} \in L^2(0, 1) \right\}. \end{aligned}$$

$L_{r(1-r^2)}^2(0, 1)$ (resp. $L_r^2(0, 1)$) est un espace de Hilbert pour la norme associée au produit scalaire suivant :

$$\langle u, v \rangle_{2, r(1-r^2)} = \int_0^1 uvr(1-r^2) dr \quad (\text{resp. } \langle u, v \rangle_{2, r} = \int_0^1 uvr dr).$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

2. On définit :

$$\begin{aligned} W_r &= \left\{ u \in \left(L_{r(1-r^2)}^2(0, 1) \right)^N \mid \frac{\partial u}{\partial r} \in \left(L_r^2(0, 1) \right)^N \right\}, \\ W_{r_0} &= \{ u \in W_r \mid u(1) = 0 \}, \\ W_r(T) &= \{ u \in L^2([0, 1[\times]0, T[; W_r) \} \end{aligned}$$

et on désigne par W_{r_0}' le dual de W_{r_0} .

3. On munit W_r , W_{r_0} et $W_r(T)$ des normes suivantes :

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_r}^2 &:= \int_0^1 \|u\|^2 r(1-r^2) dr + \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|^2 r dr, \\ \|u\|_{W_{r_0}}^2 &:= \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|^2 r dr, \\ \|u\|_{W_r(T)}^2 &:= \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \|u\|^2 r(1-r^2) dr dz dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|^2 r dr dz dt, \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^N associée au produit scalaire usuel noté (\cdot, \cdot) .

On établit quelques propriétés de ces espaces de Hilbert.

Lemme 2.3.2 1. On a les inclusions suivantes :

$$L^2(0, 1) \underset{\rightarrow}{\subseteq} L_r^2(0, 1) \underset{\rightarrow}{\subseteq} L_{r(1-r^2)}^2(0, 1),$$

avec injections continues.

2. Pour toute fonction u de W_{r_0} , on a l'inégalité :

$$\int_0^1 \|u\|^2 r(1-r^2) dr \leq \frac{3}{16} \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|^2 r dr, \quad (2.11)$$

inégalité qui prouve que l'injection de W_{r_0} vers $\left(L_{r(1-r^2)}^2(0, 1) \right)^N$ est continue. Cette injection est de plus compacte.

3. W_{r_0} est un espace de Hilbert pour la norme indiquée ci-dessus.

Démonstration. 1. De l'inégalité :

$$\forall r \in [0, 1] : 0 \leq r(1-r^2) \leq r \leq 1,$$

on déduit les inégalités suivantes sur les normes des espaces introduits ci-dessus :

$$\|\cdot\|_{2,r(1-r^2)} \leq \|\cdot\|_{2,r} \leq \|\cdot\|_2,$$

2.3. EXISTENCE DE LA SOLUTION

qui impliquent les inclusions annoncées, cf. [8].

2. On a, pour tout a tel que $0 < a < 1$:

$$\int_a^1 \frac{\partial u}{\partial r} dr = u(1) - u(a) = -u(a),$$

car $u(1) = 0$. Ceci implique :

$$\|u(a)\| = \left\| - \int_a^1 \frac{\partial u}{\partial r} dr \right\| \leq \int_a^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\| \sqrt{r} \frac{1}{\sqrt{r}} dr.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en élevant au carré, on obtient :

$$\|u(a)\|^2 \leq (-\ln(a)) \int_a^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|^2 r dr \leq (-\ln(a)) \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|^2 r dr.$$

On intègre cette inégalité sur $]0, 1[$, après l'avoir multipliée par $a(1 - a^2)$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|u(a)\|^2 a(1 - a^2) da &\leq \int_0^1 (-\ln(a)) a(1 - a^2) da \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|^2 r dr \\ &\leq \frac{3}{16} \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|^2 r dr, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Montrons maintenant la compacité de l'injection de W_{r_0} vers $\left(L_{r(1-r^2)}^2(0, 1)\right)^N$.

Pour cela prenons une fonction $u \in \left(L_{r(1-r^2)}^2(0, 1)\right)^N$ et un réel $\delta \in]0, 1[$, d'après ce qui précède on a pour $r \in]0, \delta[$:

$$\|u(r)\|^2 \leq (-\ln(r)) \|u\|_{W_{r_0}}^2,$$

d'où :

$$\int_0^\delta \|u(r)\|^2 r(1 - r^2) dr \leq \left(\int_0^\delta (-\ln(r)) r(1 - r^2) dr \right) \|u\|_{W_{r_0}}^2,$$

et :

$$\int_0^\delta \|u(r)\|^2 r(1 - r^2) dr \leq \left(\frac{\delta^2}{4} - \frac{\delta^2}{2} \ln(\delta) \right) \|u\|_{W_{r_0}}^2. \quad (2.12)$$

De manière analogue, on montre que :

$$\int_0^1 \|u(r)\|^2 r dr \leq \frac{1}{4} \|u\|_{W_{r_0}}^2, \quad (2.13)$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

car $\int_0^1 (-\ln(r))rdr = 1/4$.

Soit (u_n) une suite bornée dans W_{r_0} , il existe un réel strictement positif M tel que :

$$\|u_n\|_{W_{r_0}}^2 \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.14)$$

D'après (2.14) et (2.13), on a :

$$\int_0^1 \|u_n(r)\|^2 r dr \leq M,$$

d'où :

$$\begin{aligned} & \int_{\delta}^1 \|u_n\|^2 r dr + \int_{\delta}^1 \left\| \frac{\partial u_n}{\partial r} \right\|^2 r dr \\ & \geq \delta \int_{\delta}^1 \|u_n\|^2 dr + \int_{\delta}^1 \left\| \frac{\partial u_n}{\partial r} \right\|^2 dr \end{aligned}$$

et

$$\int_{\delta}^1 \|u_n\|^2 dr + \int_{\delta}^1 \left\| \frac{\partial u_n}{\partial r} \right\|^2 dr \leq \frac{M}{\delta},$$

et (u_n) est bornée dans $(H^1(1/2, 1))^N$ on peut donc en extraire une sous-suite qui converge dans $(L^2(1/2, 1))^N$. De même on montre par le même raisonnement qu'il y a une sous-suite de cette sous-suite qui est bornée dans $(H^1(1/3, 1))^N$. Donc par récurrence on trouve qu'il existe une suite de sous-suites telle que la k -ième sous-suite converge dans $(L^2(1/(k+1), 1))^N$ pour $k \in \mathbb{N}$. On peut donc choisir une suite diagonale que l'on notera encore (u_n) telle que (u_n) converge dans $(L^2(1/(k+1), 1))^N$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Il résulte que (u_n) converge dans $(L^2(\delta, 1))^N$ pour tout δ dans $]0, 1[$.

Soit $\varepsilon > 0$, choisissons $\delta \in]0, 1[$ tel que :

$$\left(\frac{\delta^2}{4} - \frac{\delta^2}{2} \ln(\delta) \right) M < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.15)$$

Alors $\forall n, m$ dans \mathbb{N} on a à l'aide de (2.12) et (2.15) :

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|_{2,r(1-r^2)} & \leq \int_0^{\delta} \|u_m - u_n\|^2 r(1-r^2) dr \\ & \quad + \int_{\delta}^1 \|u_m - u_n\|^2 r(1-r^2) dr \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\delta}^1 \|u_m - u_n\|^2 r(1-r^2) dr. \end{aligned}$$

2.3. EXISTENCE DE LA SOLUTION

Comme (u_n) converge dans $(L^2(\delta, 1))^N$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\int_{\delta}^1 \|u_m - u_n\|^2 r(1-r^2) dr \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour $m, n \in \mathbb{N}$ et $m \geq n_0, n \geq n_0$. On a donc :

$$\|u_m - u_n\|_{2,r(1-r^2)} \leq \varepsilon$$

qui montre que la suite (u_n) est de Cauchy dans $(L^2_{r(1-r^2)}(0, 1))^N$, elle converge donc dans $(L^2_{r(1-r^2)}(0, 1))^N$.

3. Il s'agit d'une conséquence immédiate de 2. ■

Définition 2.3.3 *Supposons que u_{f0} appartient à $(L^2_{r(1-r^2)}(0, 1))^N$ et que u_s appartient à $L^2(0, T; (H^1(0, 1))^N)$.*

*Une fonction w_f est appelée **solution faible** du problème (2.10) si w_f appartient à $W_r(T)$, $\frac{\partial w_f}{\partial z}$ appartient à $L^2(]0, 1[\times]0, T[; W'_{r0})$, $w_f(r, 0, t) = w_0(r, t)$, en un sens à préciser, et si, pour tout φ appartenant à $L^2(]0, 1[\times]0, T[; W_{r0})$, on a l'égalité :*

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial w_f}{\partial z} \cdot \varphi \right) r(1-r^2) dr dz dt \\ & + \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\beta_f \frac{\partial w_f}{\partial r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) r dr dz dt \\ & = - \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u_s}{\partial z} \cdot \int_0^1 \varphi r(1-r^2) dr \right) dz dt. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Pour prouver l'existence d'une solution faible du problème (2.10), on commence par introduire l'opérateur elliptique du second ordre L de W_{r0} vers W'_{r0} associé à cette formulation variationnelle (2.16) et défini par :

$$\forall w \in W_{r0} : Lw = - \frac{\beta_f}{r(1-r^2)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right),$$

de manière à avoir :

$$\forall w, v \in W_{r0} : \langle Lw, v \rangle_{\langle W'_{r0}, W_{r0} \rangle} = \int_0^1 \left(\beta_f \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right) r dr,$$

compte tenu de la condition aux limites : $v(1) = 0$ et de la présence du poids $r(1-r^2)$ dans le produit scalaire associé au crochet de dualité.

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

On introduit également l'opérateur T de $\left(L_{r(1-r^2)}^2(0,1)\right)^N$ dans lui-même qui, à chaque fonction g appartenant à $\left(L_{r(1-r^2)}^2(0,1)\right)^N$, associe l'unique élément $T(g)$ de W_{r_0} solution faible de : $L(T(g)) = gr(1-r^2)$, au sens où :

$$\int_0^1 \left(\beta_f \frac{\partial T(g)}{\partial r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) r dr = \int_0^1 (g \cdot \varphi) r (1-r^2) dr, \quad \forall \varphi \in W_{r_0}. \quad (2.17)$$

Les propriétés de l'opérateur T sont rassemblées dans le

Lemme 2.3.4 1. *L'opérateur T est :*

– *autoadjoint, au sens où :*

$$\forall f, g \in \left(L_{r(1-r^2)}^2(0,1)\right)^N : \langle T(f), g \rangle_{r(1-r^2)} = \langle f, T(g) \rangle_{r(1-r^2)} ;$$

– *positif, au sens où :*

$$\forall f \in \left(L_{r(1-r^2)}^2(0,1)\right)^N : \langle T(f), f \rangle_{r(1-r^2)} \geq 0 ;$$

– *non dégénéré, au sens où :*

$$\forall f \in \left(L_{r(1-r^2)}^2(0,1)\right)^N : \langle T(f), f \rangle_{r(1-r^2)} = 0 \Rightarrow f = 0.$$

2. *Par ailleurs, il existe une base hilbertienne $\{\omega^j\}_j$ de $\left(L_{r(1-r^2)}^2(0,1)\right)^N$ et de W_{r_0} constituée de fonctions propres de l'opérateur T et donc de l'opérateur L .*

Démonstration. 1. On remarque que pour f et g quelconques dans l'espace $\left(L_{r(1-r^2)}^2(0,1)\right)^N$, on a :

$$\begin{aligned} \langle T(f), g \rangle_{r(1-r^2)} &= \int_0^1 (T(f) \cdot g) r (1-r^2) dr \\ &= \int_0^1 \left(\beta_f \frac{\partial T(g)}{\partial r} \cdot \frac{\partial T(f)}{\partial r} \right) r dr \\ &= \int_0^1 \left(\beta_f \frac{\partial T(f)}{\partial r} \cdot \frac{\partial T(g)}{\partial r} \right) r dr \\ &= \langle f, T(g) \rangle_{r(1-r^2)}, \end{aligned}$$

compte tenu de l'égalité (2.17) et puisque $T(f)(1) = 0 = T(g)(1)$. On calcule ensuite :

$$\forall f \in \left(L_{r(1-r^2)}^2(0,1)\right)^N : \langle T(f), f \rangle_{r(1-r^2)} = \int_0^1 \left(\beta_f \frac{\partial T(f)}{\partial r} \cdot \frac{\partial T(f)}{\partial r} \right) r dr \geq 0,$$

2.3. EXISTENCE DE LA SOLUTION

d'où la positivité de T . On observe enfin que :

$$\begin{aligned} \forall f \in \left(L_{r(1-r^2)}^2(0,1) \right)^N : \langle T(f), f \rangle_{r(1-r^2)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\beta_f \frac{\partial T(f)}{\partial r} \cdot \frac{\partial T(f)}{\partial r} \right) r dr &= 0, \end{aligned}$$

puisque $T(f)(1) = 0$. On en déduit que $T(f) = 0$, dans W_{r_0} , puisque les β_{if} sont strictement positifs. L'égalité (2.17) implique que $f = 0$, dans $\left(L_{r(1-r^2)}^2(0,1) \right)^N$, en utilisant un argument de densité dans $\left(L_{r(1-r^2)}^2(0,1) \right)^N$.

2. Comme l'injection de W_{r_0} dans $\left(L_{r(1-r^2)}^2(0,1) \right)^N$ est compacte, T est un opérateur compact de $\left(L_{r(1-r^2)}^2(0,1) \right)^N$ dans lui-même. Compte tenu des propriétés précédentes de T , le Théorème VI.11 de [2, page 97] implique l'existence d'une base hilbertienne $\{\omega^j\}_j$ de $\left(L_{r(1-r^2)}^2(0,1) \right)^N$ formée de fonctions propres de T et donc de L . La Remarque 29 de [2, page 193] implique que cette base est également une base hilbertienne de W_{r_0} . ■

On démontre alors le résultat d'existence suivant :

Proposition 2.3.5 *Soient u_0 et u_s comme dans la Définition 2.3.3. Alors, il existe au moins une **solution faible** w_f du problème (2.10).*

Démonstration. Soit $\{\omega^j\}_j$ une base de W_{r_0} constituée de fonctions propres de l'opérateur L avec les valeurs propres λ_j correspondantes :

$$\langle L(\omega^j), \varphi \rangle_{\langle W'_{r_0}, W_{r_0} \rangle} = \lambda_j \int_0^1 (\omega^j \cdot \varphi) r (1-r^2) dr, \quad \forall \varphi \in W_{r_0}.$$

Pour tout φ appartenant à W_{r_0} , il existe une suite $(\gamma_j)_j$ de coefficients tels que $\varphi = \sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_j \omega^j$. On note $P_m(\varphi) = \sum_{j=1}^m \gamma_j \omega^j$, l'approximation de Galerkin d'ordre m de φ . Les propriétés de $\{\omega^j\}_j$ impliquent que l'opérateur P_m ainsi défini est un projecteur orthogonal continu de W_{r_0} (resp. $\left(L_{r(1-r^2)}^2(0,1) \right)^N$) vers le sous-espace de W_{r_0} (resp. de $\left(L_{r(1-r^2)}^2(0,1) \right)^N$) engendré par $\omega^1, \dots, \omega^m$. De plus :

$$\|P_m(\varphi)\|_{W_{r_0}} \leq \|\varphi\|_{W_{r_0}} ; \|P_m(\varphi)\|_{2,r(1-r^2)} \leq \|\varphi\|_{2,r(1-r^2)}, \quad \forall \varphi \in W_{r_0}.$$

Cherchons les coefficients $\gamma_{j,m} : [0,1] \times [0,T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que l'approximation de Galerkin de w_f , définie par : $P_m(w_f)(r, z, t) = \sum_{j=1}^m \gamma_{j,m}(z, t) \omega^j(r)$, soit solution

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

du problème approché :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \cdot \omega^j \right) r(1-r^2) dr + \langle L(P_m(w_f)), \omega^j \rangle_{\langle W'_{r0}, W_{r0} \rangle} \\ & = - \left(\frac{\partial u_s}{\partial z} \cdot \int_0^1 \omega^j r(1-r^2) dr \right), \quad \forall j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.18)$$

pour presque tous z et t de $[0, 1] \times [0, T]$, avec la condition initiale :

$$P_m(w_f)(r, 0, t) = P_m(w_0)(r, t).$$

Compte tenu de l'orthogonalité des ω^j dans $\left(L^2_{r(1-r^2)}(0, 1) \right)^N$, le coefficient $\gamma_{j,m}$ est solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma_{j,m}}{\partial z}(z, t) + \lambda_j \gamma_{j,m}(z, t) = - \left(\frac{\partial u_s}{\partial z} \cdot \int_0^1 \omega^j r(1-r^2) dr \right), \\ \gamma_{j,m}(0, t) = (P_m(w_0))_j(0, t), \end{cases}$$

pour tout $j = 1, \dots, m$ et pour presque tout (z, t) dans $]0, 1[\times]0, T[$, $(P_m(w_0))_j$ étant le coefficient de ω^j dans la décomposition de $(P_m(w_0))_j$ dans la base $\{\omega^j\}_j$. On en déduit l'expression de $\gamma_{j,m}$:

$$\begin{aligned} \gamma_{j,m}(z, t) &= (P_m(w_0))_j(0, t) e^{-\lambda_j z} \\ &\quad - \int_0^z \left(\frac{\partial u_s}{\partial z} \cdot \int_0^1 \omega^j r(1-r^2) dr \right) e^{\lambda_j(s-z)} ds. \end{aligned} \quad (2.19)$$

On établit ensuite les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \|P_m(w_f)\|^2(r, s, t) r(1-r^2) dr dt \leq C(T), \\ & \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left\| \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial r} \right\|^2(r, z, t) r dr dz dt \leq C(T), \\ & \left\| \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \right\|_{L^2(]0, 1[\times]0, T[; W'_{r0})} \leq C(T), \end{aligned} \quad (2.20)$$

pour presque tout s appartenant à $]0, 1[$, où $C(T)$ est une constante strictement positive ne dépendant que des données du problème (2.10) et de T , mais indépendante de m . Pour cela, on multiplie l'égalité (2.18) par $\gamma_{j,m}$ et on effectue

2.3. EXISTENCE DE LA SOLUTION

la somme par rapport à $j = 1, \dots, m$. On obtient, pour s appartenant à $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left(\frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \cdot P_m(w_f) \right) r(1-r^2) dr dz dt \\ & \quad - \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left(\beta_f \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial r} \right) \cdot P_m(w_f) \right) dr dz dt \\ & = - \int_0^T \int_0^s \left(\frac{\partial u_s}{\partial z} \cdot \int_0^1 P_m(w_f) r(1-r^2) dr \right) dz dt. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \|P_m(w_f)\|^2(r, s, t) r(1-r^2) dr dt + \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left\| \beta_f^{1/2} \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial r} \right\|^2 r dr dz dt \\ & = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \|P_m(w_0)\|^2 r(1-r^2) dr dt \\ & \quad - \int_0^T \int_0^s \left(\frac{\partial u_s}{\partial z} \cdot \int_0^1 P_m(w_f) r(1-r^2) dr \right) dz dt, \end{aligned}$$

puisque $P_m(w_f)(1, t) = 0$, et avec $\beta_f^{1/2} := \text{diag}(\sqrt{\beta_{1f}}, \dots, \sqrt{\beta_{Nf}})$. En utilisant l'inégalité de Young et le fait que : $\int_0^1 r(1-r^2) dr = 1/4$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \|P_m(w_f)\|^2(r, s, t) r(1-r^2) dr dt \\ & + \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left\| \beta_f^{1/2} \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial r} \right\|^2 r dr dz dt \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \|P_m(w_0)\|^2 r(1-r^2) dr dt + \frac{1}{8} \int_0^T \int_0^s \left\| \frac{\partial u_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \|P_m(w_f)\|^2 r(1-r^2) dr dz dt. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Ceci entraîne :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \|P_m(w_f)\|^2(r, s, t) r(1-r^2) dr dt \\ & \leq C \left(P_m(w_0), \frac{\partial u_s}{\partial z}, T \right) + \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \|P_m(w_f)\|^2 r(1-r^2) dr dz dt, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} & C \left(P_m(w_0), \frac{\partial u_s}{\partial z}, T \right) \\ & = \int_0^T \int_0^1 \|P_m(w_0)\|^2 r(1-r^2) dr dt + \frac{1}{4} \int_0^T \int_0^1 \left\| \frac{\partial u_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt \\ & \leq T \int_0^1 \|w_0\|^2 r(1-r^2) dr + \frac{1}{4} \int_0^T \int_0^1 \left\| \frac{\partial u_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt =: C \left(w_0, \frac{\partial u_s}{\partial z}, T \right). \end{aligned}$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

En appliquant le Lemme de Gronwall, on obtient :

$$\int_0^T \int_0^1 \|P_m(w_f)\|^2(r, s, t) r(1-r^2) dr dt \leq C \left(w_0, \frac{\partial u_s}{\partial z}, T \right), \quad \forall s \in]0, 1[,$$

qui n'est autre que (2.20)₁. Des inégalités (2.20)₁ et (2.21) et de la stricte positivité des β_{if} , on déduit immédiatement (2.20)₂. Pour montrer l'inégalité (2.20)₃, on calcule :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left(\frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \cdot \varphi \right) r(1-r^2) dr dz dt \\ &= \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left(\frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \cdot P_m(\varphi) \right) r(1-r^2) dr dz dt \\ &= - \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left(\beta_f \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial r} \cdot \frac{\partial P_m(\varphi)}{\partial r} \right) r dr dz dt \\ & \quad - \int_0^T \int_0^s \left(\frac{\partial u_s}{\partial z} \cdot \int_0^1 P_m(\varphi) r(1-r^2) dr \right) dz dt, \end{aligned}$$

d'où, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'égalité $\int_0^1 r(1-r^2) dr = 1/4$:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left(\frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \cdot \varphi \right) r(1-r^2) dr dz dt \right| \\ & \leq \left(\int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left\| \beta_f^{1/2} \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial r} \right\|^2 r dr dz dt \right)^{1/2} \\ & \quad \times \left(\int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left\| \frac{\partial P_m(\varphi)}{\partial r} \right\|^2 r dr dz dt \right)^{1/2} \\ & + \frac{1}{2} \left(\int_0^T \int_0^s \left\| \frac{\partial u_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_0^s \int_0^1 \|P_m(\varphi)\|^2 r(1-r^2) dr dz dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Comme $\|P_m(\varphi)\|_{L^2(0,1;W_{r0})} \leq \|\varphi\|_{L^2(0,1;W_{r0})}$, on a :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left(\frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \cdot \varphi \right) r(1-r^2) dr dz dt \right| \\ & \leq \left(\int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left\| \beta_f^{1/2} \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial r} \right\|^2 r dr dz dt \right)^{1/2} \\ & \quad \times \left(\int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right\|^2 r dr dz dt \right)^{1/2} \\ & + \frac{1}{2} \left(\int_0^T \int_0^s \left\| \frac{\partial u_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_0^s \int_0^1 \|\varphi\|^2 r(1-r^2) dr dz dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

2.3. EXISTENCE DE LA SOLUTION

et donc :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left(\frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \cdot \varphi \right) r(1-r^2) dr dz dt \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left\| \beta_f^{1/2} \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial r} \right\|^2 r dr dz dt \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \left(\int_0^T \int_0^s \left\| \frac{\partial u_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt \right)^{1/2} \\ & \leq C(T), \end{aligned}$$

car $\|\varphi\|_{L^2(0,1;W_{r0})} \leq 1$, d'où l'inégalité (2.20)₃. Donc, il existe une sous-suite de $(P_m(w_f))_m$ encore notée $(P_m(w_f))_m$ telle que :

$$\begin{aligned} P_m(w_f) & \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} w_f, \text{ faiblement} \\ & \text{dans } L^2 \left(]0, 1[\times]0, T[; \left(L^2_{r(1-r^2)}(0, 1) \right)^N \right), \\ \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial r} & \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \alpha_r, \text{ faiblement dans } L^2 \left(]0, 1[\times]0, T[; \left(L^2_r(0, 1) \right)^N \right), \\ \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} & \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \alpha_z, \text{ faiblement dans } L^2 \left(]0, 1[\times]0, T[; W'_{r0} \right). \end{aligned}$$

Or, pour tout φ appartenant à $C_c^0(]0, 1[\times]0, T[; W_{r0})$, on a :

$$\int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \cdot \varphi \right) dr dz dt = - \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(P_m(w_f) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dr dz dt.$$

Faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_0^T \int_0^1 \int_0^1 (\alpha_z \cdot \varphi) dr dz dt = - \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(w_f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dr dz dt,$$

et par conséquent $\alpha_z = \frac{\partial w_f}{\partial z}$ dans $L^2(]0, 1[\times]0, T[; W'_{r0})$.

De la même manière, pour tout φ appartenant à $C_c^0(]0, 1[\times]0, T[; W_{r0})$, on a :

$$\int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial P_m(w_f)}{\partial r} \cdot \varphi \right) dr dz dt = - \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(P_m(w_f) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) dr dz dt.$$

Faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_0^T \int_0^1 \int_0^1 (\alpha_r \cdot \varphi) dr dz dt = - \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(w_f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) dr dz dt,$$

donc $\alpha_r = \frac{\partial w_f}{\partial r}$ dans $L^2(]0, 1[\times]0, T[; \left(L^2_r(0, 1) \right)^N)$. Par conséquent $(P_m(w_f))_m$ converge vers w_f , faiblement dans $L^2(]0, 1[\times]0, T[; W_{r0})$. w_f ainsi obtenu vérifie la formulation variationnelle (2.16). ■

On peut avoir une régularité supérieure pour $\frac{\partial w_f}{\partial z}$ comme le montre la

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

Proposition 2.3.6 *Si u_{f_0} appartient à W_r alors*

$$\frac{\partial w_f}{\partial z} \in L^2 \left(]0, 1[\times]0, T[; \left(L^2_{r(1-r^2)}(0, 1) \right)^N \right)$$

Démonstration. D'après (2.19) on voit que $\frac{d\gamma_{j,m}}{dz}$ est dans $L^2 \left(]0, 1[\times]0, T[; \left(L^2_{r(1-r^2)}(0, 1) \right)^N \right)$, on peut donc multiplier l'égalité (2.18) par $\frac{d\gamma_{j,m}}{dz}$ et effectuer la somme par rapport à $j = 1, \dots, m$. On obtient, pour s appartenant à $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left\| \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \right\|^2 r(1-r^2) dr dz dt \\ & - \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left(\beta_f \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial r} \right) \cdot \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \right) dr dz dt \\ & = - \int_0^T \int_0^s \left(\frac{\partial u_s}{\partial z} \cdot \int_0^1 \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} r(1-r^2) dr \right) dz dt. \end{aligned}$$

Cette égalité devient en intégrant par partie :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left\| \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \right\|^2 r(1-r^2) dr dz dt \\ & - \int_0^T \int_0^s \left(\frac{\partial P_m(w_f)}{\partial r}(1, z, t) \cdot \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z}(1, z, t) \right) dr dz dt \\ & + \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left(\beta_f r \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \right) \right) dr dz dt \\ & = - \int_0^T \int_0^s \left(\frac{\partial u_s}{\partial z} \cdot \int_0^1 \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} r(1-r^2) dr \right) dz dt, \end{aligned}$$

or comme $P_m(w_f)(1, z, t) = 0$:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left\| \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \right\|^2 r(1-r^2) dr dz dt \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z} \left\| \beta_f^{1/2} \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial r} \right\|^2 r dr dz dt \\ & = - \int_0^T \int_0^s \left(\frac{\partial u_s}{\partial z} \cdot \int_0^1 \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} r(1-r^2) dr \right) dz dt, \end{aligned}$$

2.3. EXISTENCE DE LA SOLUTION

qui équivaut à :

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left\| \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \right\|^2 r(1-r^2) dr dz dt \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \left\| \beta_f^{1/2} \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial r} \right\|^2 (r, s, t) r dr dt \\
& - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \left\| \beta_f^{1/2} \frac{\partial P_m(w_0)}{\partial r} \right\|^2 r dr dt \\
& = - \int_0^T \int_0^s \left(\frac{\partial u_s}{\partial z} \cdot \int_0^1 \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} r(1-r^2) dr \right) dz dt.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young avec $\varepsilon > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left\| \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \right\|^2 r(1-r^2) dr dz dt \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \left\| \beta_f^{1/2} \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial r} \right\|^2 (r, s, t) r dr dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \left\| \beta_f^{1/2} \frac{\partial P_m(w_0)}{\partial r} \right\|^2 r dr dt \\
& \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left\| \frac{\partial u_s}{\partial z} \right\|^2 r(1-r^2) dr dz dt \\
& + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left\| \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \right\|^2 r(1-r^2) dr dz dt \\
& \leq \frac{1}{8\varepsilon} \int_0^T \int_0^s \left\| \frac{\partial u_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left\| \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \right\|^2 r(1-r^2) dr dz dt,
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \int_0^T \int_0^s \int_0^1 \left\| \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \right\|^2 r(1-r^2) dr dz dt \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \left\| \beta_f^{1/2} \frac{\partial P_m(w_f)}{\partial r} \right\|^2 (r, s, t) r dr dt \\
& \leq \frac{1}{8\varepsilon} \int_0^T \int_0^s \left\| \frac{\partial u_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \left\| \beta_f^{1/2} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right\|^2 r dr dt \\
& \leq \frac{1}{8\varepsilon} \int_0^T \int_0^s \left\| \frac{\partial u_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt + \frac{T}{2} \int_0^1 \left\| \beta_f^{1/2} \frac{\partial u_{f0}}{\partial r} \right\|^2 r dr,
\end{aligned}$$

et si on choisit ε tel que $\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) > 0$, c'est-à-dire $\varepsilon < 2$ on trouve que :

$$\frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \in L^2 \left(]0, 1[\times]0, T[; \left(L_{r(1-r^2)}^2(0, 1) \right)^N \right).$$

Donc, il existe une sous-suite de $(P_m(w_f))_m$ encore notée $(P_m(w_f))_m$ telle que :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} & \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \alpha_z, \text{ faiblement} \\
& \text{dans } L^2 \left(]0, 1[\times]0, T[; \left(L_{r(1-r^2)}^2(0, 1) \right)^N \right).
\end{aligned}$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

Or, pour tout φ appartenant à $C_c^0(]0, 1[\times]0, T[; W_{r0})$, on a :

$$\int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial P_m(w_f)}{\partial z} \cdot \varphi \right) dr dz dt = - \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(P_m(w_f) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dr dz dt.$$

Faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_0^T \int_0^1 \int_0^1 (\alpha_z \cdot \varphi) dr dz dt = - \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(w_f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dr dz dt,$$

et par conséquent $\alpha_z = \frac{\partial w_f}{\partial z}$ dans $L^2\left(]0, 1[\times]0, T[; \left(L_{r(1-r^2)}^2(0, 1)\right)^N\right)$. ■

Remarque 2.3.7 Comme :

$$\begin{aligned} L^2(]0, 1[\times]0, T[; W_{r0}) &\subset L^2\left(]0, 1[\times]0, T[; \left(L_{r(1-r^2)}^2(0, 1)\right)^N\right), \\ L^2\left(]0, 1[\times]0, T[; \left(L_{r(1-r^2)}^2(0, 1)\right)^N\right) &\subset L^2(]0, 1[\times]0, T[; W'_{r0}) \end{aligned}$$

et que w_f appartient à $L^2(]0, 1[\times]0, T[; W_{r0})$ et $\frac{\partial w_f}{\partial z}$ appartient à $L^2(]0, 1[\times]0, T[; W'_{r0})$, on déduit de la Proposition 23.23 de [21, page 422] que w_f appartient à $C\left(]0, 1[\times]0, T[; \left(L_{r(1-r^2)}^2(0, 1)\right)^N\right)$, ce qui permet d'interpréter la condition initiale.

Corollaire 2.3.8 Le problème (2.9) admet une solution faible u_f appartenant à $W_r(T)$, au sens où :

$$\int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial u_f}{\partial z} \cdot \varphi \right) r(1-r^2) dr dz dt + \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\beta_f \frac{\partial u_f}{\partial r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) r dr dz dt = 0,$$

pour tout $T > 0$ et tout φ appartenant à $L^2(]0, 1[\times]0, T[; W_{r0})$, et vérifiant : $u_f(r, 0, t) = u_{f0}(r)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $u_f = w_f + u_s$ est une solution faible du problème (2.9) appartenant à l'espace indiqué et vérifiant la condition initiale indiquée à $z = 0$. ■

Remarque 2.3.9 Puisque $\frac{\partial u_f}{\partial z}$ appartient à l'espace $L^2(]0, 1[\times]0, T[; W'_{r0})$ et que la fonction $r \mapsto r(1-r^2)$ s'annule en $r = 1$, on peut affirmer que pour toute fonction $g : (z, t) \mapsto g(z, t)$, appartenant à $(L^2(]0, 1[\times]0, T[))$, la fonction $(r, z, t) \mapsto g(z, t) r(1-r^2)$ appartient à $L^2(]0, 1[\times]0, T[; W_{r0})$ et le crochet de dualité :

$$\left\langle \frac{\partial u_f}{\partial z}, g r(1-r^2) \right\rangle \in \langle L^2(]0, 1[\times]0, T[; W'_{r0}), L^2(]0, 1[\times]0, T[; W_{r0}) \rangle$$

est bien défini.

2.3.3 Existence sur la paroi

Supposons connues les quantités $\frac{\partial C_{if}}{\partial z}$, pour $i = 1, \dots, N$. Les C_{is} vérifient le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C_{is}}{\partial t} - \theta_{is} \frac{\partial^2 C_{is}}{\partial z^2} = -\frac{\gamma_{is}}{\beta_{if}} \int_0^1 \frac{\partial C_{if}}{\partial z} r (1-r^2) dr + \delta_i \mathbf{r}_i (C_{1s}, \dots, C_{Ns}), \\ C_{is}(z, 0) = C_{is0}(z), \\ \theta_{is} \frac{\partial C_{is}}{\partial z}(0, t) = 0 = \theta_{is} \frac{\partial C_{is}}{\partial z}(1, t), \end{array} \right.$$

avec $i = 1, \dots, N$. On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{s0} = {}^t(C_{1s0}, \dots, C_{Ns0}), \\ \mathbf{r} = {}^t(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \\ \Gamma = \text{diag} \left(\frac{\gamma_{1s}}{\beta_{1f}}, \dots, \frac{\gamma_{Ns}}{\beta_{Nf}} \right) =: \text{diag}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_N), \\ \delta = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_N), \\ \theta_s = \text{diag}(\theta_{1s}, \dots, \theta_{Ns}), \end{array} \right.$$

de manière à écrire le système sous la forme vectorielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_s}{\partial t} - \theta_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} = \delta \mathbf{r}(u_s) - \Gamma \int_0^1 \frac{\partial u_f}{\partial z} r (1-r^2) dr, \\ u_s(z, 0) = u_{s0}(z), \\ \theta_s \frac{\partial u_s}{\partial z}(0, t) = 0 = \theta_s \frac{\partial u_s}{\partial z}(1, t). \end{array} \right. \quad (2.22)$$

On introduit les espaces fonctionnels adaptés à la résolution de (2.22) :

$$\begin{aligned} W_z &= \left\{ u \in (L^2(0, 1))^N \mid \frac{\partial u}{\partial z} \in (L^2(0, 1))^N \right\}, \\ W_z(T) &= \{ u \in L^2(0, T; W_z) \}, \end{aligned}$$

et on désigne le dual de W_z par W'_z . On munit ces espaces des normes suivantes :

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_z}^2 &:= \int_0^1 \|u\|^2 dz + \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|^2 dz, \\ \|u\|_{W_z(T)}^2 &:= \int_0^T \int_0^1 \|u\|^2 dz dt + \int_0^T \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|^2 dz dt. \end{aligned}$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

Définition 2.3.10 *Supposons :*

$$\frac{\partial u_f}{\partial z} \in L^2(]0, T[\times]0, 1[; W'_{r0}) ; u_{s0} \in (L^2(0, 1))^N.$$

Une fonction u_s est appelée **solution faible** du problème (2.22) si et seulement si u_s appartient à $W_z(T)$, $u_s(z, 0) = u_{s0}(z)$, et si, pour tout ψ appartenant à $L^2(0, T; W_z)$, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial u_s}{\partial t} \cdot \psi \right) dz dt + \int_0^\tau \int_0^1 \left(\theta_s \frac{\partial u_s}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz dt \\ &= \int_0^\tau \int_0^1 (\delta \mathbf{r}(u_s) \cdot \psi) dz dt \\ & \quad - \int_0^\tau \int_0^1 \left\langle \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z}, \psi r (1 - r^2) \right\rangle_{\langle W'_{r0}, W_{r0} \rangle} dz dt, \end{aligned} \quad (2.23)$$

pour $\tau \leq T$, cf. Remarque 2.3.9.

Proposition 2.3.11 *Soient u_f et u_{s0} comme dans la Définition 2.3.10. Alors il existe au moins une **solution faible** u_s du problème (2.22).*

Avant d'établir la démonstration de cette proposition, choisissons $\lambda > 1$ et effectuons le changement de fonctions inconnues $\psi(z, t) = \Psi(z, t) e^{-\lambda t}$ et $u_s(z, t) = v_s(z, t) e^{\lambda t}$ dans la formulation variationnelle (2.23), de manière à obtenir l'égalité :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial v_s}{\partial t} \cdot \Psi \right) dz dt + \lambda \int_0^\tau \int_0^1 (v_s \cdot \Psi) dz dt \\ & + \int_0^\tau \int_0^1 \left(\theta_s \frac{\partial v_s}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) dz dt = \int_0^\tau \int_0^1 (\delta \mathbf{r}(v_s e^{\lambda t}) \cdot \Psi e^{-\lambda t}) dz dt \\ & \quad - \int_0^\tau \int_0^1 \left\langle \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z}, e^{-\lambda t} \Psi r (1 - r^2) \right\rangle_{\langle W'_{r0}, W_{r0} \rangle} dz dt. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Nous introduisons le problème linéaire suivant, avec les mêmes conditions aux limites, et en renotant ψ à la place de Ψ :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial w_{s\lambda}}{\partial t} \cdot \psi \right) dz dt + \lambda \int_0^\tau \int_0^1 (w_{s\lambda} \cdot \psi) dz dt \\ & + \int_0^\tau \int_0^1 \left(\theta_s \frac{\partial w_{s\lambda}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz dt = \int_0^\tau \int_0^1 (\delta \mathbf{r}(v_s e^{\lambda t}) \cdot \psi e^{-\lambda t}) dz dt \\ & \quad - \int_0^\tau \int_0^1 \left\langle \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z}, \psi e^{-\lambda t} r (1 - r^2) \right\rangle_{\langle W'_{r0}, W_{r0} \rangle} dz dt, \end{aligned} \quad (2.25)$$

dans lequel v_s est une fonction donnée dans $L^2(0, T; W_z)$.

2.3. EXISTENCE DE LA SOLUTION

Le vecteur $\mathbf{r}(v_s e^{\lambda \cdot}) e^{-\lambda \cdot}$ appartient à $L^2(0, T; W'_z)$, car pour tout ψ appartenant à l'espace $L^2(0, T; W_z)$, on a :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\tau \int_0^1 \langle \mathbf{r}(v_s e^{\lambda t}), \psi e^{-\lambda t} \rangle dz dt \right| \\ & \leq \int_0^\tau \int_0^1 \|\mathbf{r}(v_s e^{\lambda t}) - \mathbf{r}(0)\| \|\psi\| e^{-\lambda t} dz dt \\ & \quad + \int_0^\tau \int_0^1 \|\mathbf{r}(0)\| \|\psi\| e^{-\lambda t} dz dt \\ & \leq bk\alpha \int_0^\tau \int_0^1 \|v_s\| \|\psi\| dz dt + \int_0^\tau \int_0^1 \|\mathbf{r}(0)\| \|\psi\| dz dt. \end{aligned}$$

On introduit la notion de solution faible du problème (2.25).

Définition 2.3.12 Soient u_{s0} et $\frac{\partial u_f}{\partial z}$ comme dans la Définition 2.3.10, et v_s une fonction de $L^2(0, T; W_z)$. Une fonction $w_{s\lambda}$ est appelée **solution faible** du problème (2.25) si et seulement si $w_{s\lambda}$ appartient à $W_z(T)$, $w_{s\lambda}(z, 0) = u_{s0}(z)$, et si, pour tout ψ appartenant à $L^2(0, T; W_z)$, on a l'égalité (2.25), où le dernier crochet de dualité a lieu entre $L^2(]0, 1[\times]0, T[; W'_{r0})$ et $L^2(]0, 1[\times]0, T[; W_{r0})$, cf. Remarque 2.3.9.

On démontre le résultat d'existence suivant.

Lemme 2.3.13 Soient u_{s0} , $\frac{\partial u_f}{\partial z}$ et v_s comme dans la Définition 2.3.12. Alors il existe au moins une **solution faible** $w_{s\lambda}$ du problème (2.25). De plus, cette solution vérifie les trois estimations :

$$\begin{aligned} \|w_{s\lambda}\|_{L^\infty(0, T; (L^2(0, 1))^N)} & \leq C(T), \\ \left\| \frac{\partial w_{s\lambda}}{\partial z} \right\|_{L^2(0, T; (L^2(0, 1))^N)}^2 & \leq C(T), \\ \left\| \frac{\partial w_{s\lambda}}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; W'_z)} & \leq C(T), \end{aligned} \tag{2.26}$$

où $C(T)$ est une constante strictement positive ne dépendant que des données et de T mais pas de λ .

Démonstration. On introduit l'opérateur elliptique \mathcal{L}_λ de W_z vers W'_z et défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\lambda(w) & = -\theta_s \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \lambda w, \\ \Rightarrow \forall w, v \in W_z : \langle \mathcal{L}_\lambda(w), v \rangle_{\langle W'_z, W_z \rangle} & = \int_0^1 \left(\theta_s \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz + \lambda \int_0^1 (w \cdot v) dz. \end{aligned}$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

En introduisant l'opérateur \mathcal{T}_λ de $(L^2(0,1))^N$ dans $W_z \subset (L^2(0,1))^N$, défini par : $\mathcal{L}_\lambda(\mathcal{T}_\lambda(g)) = g$, au sens faible :

$$\int_0^1 \left(\theta_s \frac{\partial \mathcal{T}_\lambda(g)}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz + \lambda \int_0^1 (\mathcal{T}_\lambda(g) \cdot w) dz = \int_0^1 (g \cdot w) dz, \quad \forall w \in W_z,$$

on montre l'existence d'une base $\{\bar{\omega}^j\}_j$ de $(L^2(0,1))^N$ et de W_z constituée de fonctions propres de l'opérateur elliptique \mathcal{L}_λ , avec les valeurs propres $\bar{\lambda}_j$ correspondantes :

$$\langle \mathcal{L}_\lambda(\bar{\omega}^j), \psi \rangle_{\langle W'_z, W_z \rangle} = \bar{\lambda}_j \int_0^1 (\bar{\omega}^j \cdot \psi) dz, \quad \forall \psi \in W_z.$$

Toute fonction ψ de W_z peut donc s'écrire sous la forme : $\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\gamma}_j \bar{\omega}^j$. On définit l'approximation de Galerkin $\mathcal{P}_m(\psi)$ de ψ par : $\mathcal{P}_m(\psi) = \sum_{j=1}^m \bar{\gamma}_j \bar{\omega}^j$. L'opérateur \mathcal{P}_m ainsi défini vérifie :

$$\|\mathcal{P}_m(\psi)\|_{W_z} \leq \|\psi\|_{W_z}; \quad \|\mathcal{P}_m(\psi)\|_2 \leq \|\psi\|_2, \quad \forall \psi \in W_z.$$

On cherche ensuite à résoudre le problème approché :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \cdot \bar{\omega}^j \right) dz dt + \lambda \int_0^\tau \int_0^1 (\mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) \cdot \bar{\omega}^j) dz dt \\ & + \int_0^\tau \int_0^1 \left(\theta_s \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{\omega}^j}{\partial z} \right) dz dt \\ & = \int_0^\tau \int_0^1 (\delta \mathbf{r}(v_s e^{\lambda t}) \cdot \bar{\omega}^j e^{-\lambda t}) dz dt \\ & - \int_0^\tau \int_0^1 \left\langle \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z}, \bar{\omega}^j e^{-\lambda t} r (1-r^2) \right\rangle_{\langle W'_{r_0}, W_{r_0} \rangle} dz dt, \end{aligned} \tag{2.27}$$

pour tout $j = 1, \dots, m$ et pour presque tout τ appartenant à $]0, T[$, avec la condition initiale : $\mathcal{P}_m(w_{s\lambda})(z, 0) = \mathcal{P}_m(u_{s0})(z)$. Compte tenu de l'orthogonalité des $\bar{\omega}^j$ dans $(L^2(0,1))^N$ et dans W_z , le coefficient $\bar{\gamma}_{j\lambda, m} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de $\bar{\omega}^j$ dans la décomposition de $\mathcal{P}_m(w_{s\lambda})$ dans la base $\{\bar{\omega}^1, \dots, \bar{\omega}^m\}$ est solution de :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\bar{\gamma}_{j\lambda, m}}{dt}(t) + \bar{\lambda}_j \bar{\gamma}_{j\lambda, m}(t) &= \int_0^1 (\delta \mathbf{r}(v_s e^{\lambda t}) \cdot \bar{\omega}^j e^{-\lambda t}) dz \\ &\quad - \int_0^1 \left\langle \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z}, \bar{\omega}^j e^{-\lambda t} r (1-r^2) \right\rangle_{\langle W'_{r_0}, W_{r_0} \rangle} dz, \\ \bar{\gamma}_{j\lambda, m}(0) &= (\mathcal{P}_m(u_{s0}))_j. \end{aligned} \right.$$

On en déduit l'expression de $\bar{\gamma}_{j\lambda, m}$:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{j\lambda, m}(t) &= (\mathcal{P}_m(u_{s0}))_j e^{-\bar{\lambda}_j t} + \int_0^t e^{\bar{\lambda}_j(s-t)} \int_0^1 (\delta \mathbf{r}(v_s e^{\lambda t}) \cdot \bar{\omega}^j e^{-\lambda t}) dz ds \\ &\quad - \int_0^t e^{\bar{\lambda}_j(s-t)} \int_0^1 \left\langle \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z}, \bar{\omega}^j e^{-\lambda t} r (1-r^2) \right\rangle_{\langle W'_{r_0}, W_{r_0} \rangle} dz ds. \end{aligned}$$

2.3. EXISTENCE DE LA SOLUTION

On établit ensuite les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \|\mathcal{P}_m(w_{s\lambda})\|^2(z, \tau) dz &\leq C(T), \\
 \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial z} \right\|^2 dz dt &\leq C(T), \\
 \left\| \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; W_z)} &\leq C(T),
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

pour tout τ de $[0, T]$, où $C(T)$ est une constante strictement positive dépendant des données du problème et de T , mais pas de m et de λ . Pour cela, on multiplie l'égalité (2.27) par $\bar{\gamma}_{j\lambda, m}$ et on fait la somme sur $j = 1, \dots, m$. On obtient :

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \cdot \mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) \right) dz dt \\
 &\quad + \int_0^\tau \int_0^1 \left(\theta_s \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial z} \right) dz dt \\
 &\quad + \lambda \int_0^\tau \int_0^1 (\mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) \cdot \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})) dz dt \\
 &= \int_0^\tau \int_0^1 (\delta \mathbf{r}(v_s e^{\lambda t}) \cdot \mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) e^{-\lambda t}) dz dt \\
 &\quad - \int_0^\tau \int_0^1 \left\langle \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z}, \mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) e^{-\lambda t} r (1 - r^2) \right\rangle_{\langle W'_{r0}, W_{r0} \rangle} dz dt.
 \end{aligned}$$

Ceci entraîne :

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \int_0^1 \|\mathcal{P}_m(w_{s\lambda})\|^2(z, \tau) dz + \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \theta_s^{1/2} \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial z} \right\|^2 dz dt \\
 &\quad + \lambda \int_0^\tau \int_0^1 \|\mathcal{P}_m(w_{s\lambda})\|^2 dz dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \|\mathcal{P}_m(u_{s0})\|^2 dz + \int_0^\tau \int_0^1 (\delta \mathbf{r}(v_s e^{\lambda t}) \cdot \mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) e^{-\lambda t}) dz dt \\
 &\quad - \int_0^\tau \int_0^1 \left\langle \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z}, \mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) e^{-\lambda t} r (1 - r^2) \right\rangle_{\langle W'_{r0}, W_{r0} \rangle} dz dt,
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

où $\theta_s^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\theta_{1s}}, \dots, \sqrt{\theta_{Ns}})$. On majore le dernier terme ci-dessus :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\tau \int_0^1 \left\langle \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z}, \mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) e^{-\lambda t} r(1-r^2) \right\rangle dz dt \right| \\ & \leq \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z} \right\|_{W'_{r_0}} \left\| \mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) r(1-r^2) \right\|_{W_{r_0}} dz dt \\ & \leq c \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z} \right\|_{W'_{r_0}} \left\| \mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) \right\| dz dt \\ & \leq \frac{c}{2} \left\| \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z} \right\|_{L^2([0,\tau] \times [0,1]; W'_{r_0})}^2 + \frac{c}{2} \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) \right\|^2 dz dt, \end{aligned}$$

où c est une constante strictement positive, en utilisant encore l'inégalité de Young et le fait que $\mathcal{P}_m(w_{s\lambda})$ ne dépend pas de r . On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 \left\| \mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) \right\|^2(z, \tau) dz + \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \theta_s^{1/2} \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial z} \right\|^2 dz dt \\ & + \lambda \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) \right\|^2 dz dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left\| \mathcal{P}_m(u_{s0}) \right\|^2 dz \\ & + \frac{(bk\alpha)^2}{2} \int_0^\tau \int_0^1 \left\| v_s \right\|^2 dz dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) \right\|^2 dz dt \\ & + \frac{c}{2} \left\| \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z} \right\|_{L^2([0,\tau] \times [0,1]; W'_{r_0})}^2 + \frac{c}{2} \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) \right\|^2 dz dt, \end{aligned}$$

où $bk\alpha$ désigne la constante de Lipschitz de \mathbf{r} (cf. Proposition 2.2.2). Ceci entraîne :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left\| \mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) \right\|^2(z, \tau) dz \\ & \leq C \left(\mathcal{P}_m(u_{s0}), \frac{\partial u_f}{\partial z}, v_s, T \right) + (1+c) \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) \right\|^2 dz dt, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} & C \left(\mathcal{P}_m(u_{s0}), \frac{\partial u_f}{\partial z}, v_s, T \right) \\ & = \int_0^1 \left\| \mathcal{P}_m(u_{s0}) \right\|^2 dz + (bk\alpha)^2 \int_0^T \int_0^1 \left\| v_s \right\|^2 dz dt \\ & \quad + c \left\| \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z} \right\|_{L^2([0,T] \times [0,1]; W'_{r_0})}^2 \\ & \leq \int_0^1 \left\| u_{s0} \right\|^2 dz + (bk\alpha)^2 \int_0^T \int_0^1 \left\| v_s \right\|^2 dz dt \\ & \quad + c \left\| \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z} \right\|_{L^2([0,T] \times [0,1]; W'_{r_0})}^2 := C \left(u_{s0}, \frac{\partial u_f}{\partial z}, v_s, T \right). \end{aligned}$$

2.3. EXISTENCE DE LA SOLUTION

En appliquant le Lemme de Gronwall, on obtient :

$$\int_0^1 \|\mathcal{P}_m(w_{s\lambda})\|^2(z, \tau) dz \leq C \left(u_{s0}, \frac{\partial u_f}{\partial z}, v_s, T \right), \quad \forall \tau \in [0, T],$$

qui n'est autre que (2.28)₁. Des inégalités (2.28)₁ et (2.29), on déduit immédiatement (2.28)₂. Pour montrer l'inégalité (2.28)₃, on calcule pour tout ψ appartenant à $L^2(0, T; W_z)$, $\|\psi\|_{L^2(0, T; W_z)} \leq 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \cdot \psi \right) dz dt &= \int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \cdot \mathcal{P}_m(\psi) \right) dz dt \\ &= - \int_0^\tau \int_0^1 \left(\theta_s \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathcal{P}_m(\psi)}{\partial z} \right) dz dt \\ &\quad - \lambda \int_0^\tau \int_0^1 (\mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) \cdot \mathcal{P}_m(\psi)) dz dt \\ &\quad + \int_0^\tau \int_0^1 (\delta \mathbf{r}(v_s e^{\lambda t}) \cdot \mathcal{P}_m(\psi) e^{-\lambda t}) dz dt \\ &\quad - \int_0^\tau \int_0^1 \int_0^1 \left\langle \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z}, \mathcal{P}_m(\psi) e^{-\lambda t} r (1 - r^2) \right\rangle_{\langle W'_{r0}, W_{r0} \rangle} dz dt. \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \cdot \psi \right) dz dt \right| \\ &\leq \left(\int_0^\tau \int_0^1 \left\| \theta_s^{1/2} \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial z} \right\|^2 dr dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\tau \int_0^1 \left\| \frac{\partial \mathcal{P}_m(\psi)}{\partial z} \right\|^2 dr dt \right)^{1/2} \\ &\quad + \lambda \left(\int_0^\tau \int_0^1 \|\mathcal{P}_m(w_{s\lambda})\|^2 dz dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\tau \int_0^1 \|\mathcal{P}_m(\psi)\|^2 dz dt \right)^{1/2} \\ &\quad + bk\alpha \left(\int_0^\tau \int_0^1 \|v_s\|^2 dz dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\tau \int_0^1 \|\mathcal{P}_m(\psi)\|^2 dz dt \right)^{1/2} \\ &\quad + c \left(\int_0^\tau \int_0^1 \left\| \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z} \right\|_{W'_{r0}}^2 dz dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\tau \int_0^1 \|\mathcal{P}_m(\psi)\|^2 dz dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

Comme $\|\mathcal{P}_m(\psi)\|_{L^2(0,T;W_z)} \leq \|\psi\|_{L^2(0,T;W_z)}$, on a :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \cdot \psi \right) dz dt \right| \\ & \leq \left(\int_0^\tau \int_0^1 \left\| \theta_s^{1/2} \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial z} \right\|^2 dr dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\tau \int_0^1 \left\| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\|^2 dr dt \right)^{1/2} \\ & \quad + \lambda \left(\int_0^\tau \int_0^1 \|\mathcal{P}_m(w_{s\lambda})\|^2 dz dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\tau \int_0^1 \|\psi\|^2 dz dt \right)^{1/2} \\ & \quad + bk\alpha \left(\int_0^\tau \int_0^1 \|v_s\|^2 dz dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\tau \int_0^1 \|\psi\|^2 dz dt \right)^{1/2} \\ & \quad + c \left(\int_0^\tau \int_0^1 \left\| \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z} \right\|_{W'_{r_0}}^2 dz dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\tau \int_0^1 \|\psi\|^2 dz dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

On prouve ainsi l'inégalité :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \cdot \psi \right) dz dt \right| \\ & \leq \left(\int_0^\tau \int_0^1 \left\| \theta_s^{1/2} \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial z} \right\|^2 dr dt \right)^{1/2} + \lambda \left(\int_0^\tau \int_0^1 \|\mathcal{P}_m(w_{s\lambda})\|^2 dz dt \right)^{1/2} \\ & \quad + bk\alpha \left(\int_0^T \int_0^1 \|v_s\|^2 dz dt \right)^{1/2} + c \left(\int_0^\tau \int_0^1 \left\| \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z} \right\|_{W'_{r_0}}^2 dz dt \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

car $\|\psi\|_{L^2(0,T;W_z)} \leq 1$, dont on déduit (2.28)₃.

Donc, il existe une sous-suite de $(\mathcal{P}_m(w_{s\lambda}))_m$ encore notée $(\mathcal{P}_m(w_{s\lambda}))_m$ telle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) & \rightharpoonup_{m \rightarrow +\infty} w_{s\lambda}, \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; (L^2(0, 1))^N), \\ \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial z} & \rightharpoonup_{m \rightarrow +\infty} \bar{\alpha}_{z\lambda}, \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; (L^2(0, 1))^N), \\ \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} & \rightharpoonup_{m \rightarrow +\infty} \bar{\alpha}_{t\lambda}, \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; W'_z). \end{aligned}$$

Or, pour tout ψ appartenant à $C_c^0(0, T; W_z)$, on a :

$$\int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \cdot \psi \right) dz dt = - \int_0^T \int_0^1 \left(\mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dz dt.$$

Faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_0^T \int_0^1 (\bar{\alpha}_{t\lambda} \cdot \psi) dz dt = - \int_0^T \int_0^1 \left(w_{s\lambda} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dz dt,$$

2.3. EXISTENCE DE LA SOLUTION

et par conséquent $\bar{\alpha}_{t\lambda} = \frac{\partial w_{s\lambda}}{\partial t}$ dans $L^2(0, T; W'_z)$.

De la même manière, pour tout ψ appartenant à $C_c^0(0, T; W_z)$, on a :

$$\int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial z} \cdot \psi \right) dz dt = - \int_0^T \int_0^1 \left(\mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz dt.$$

Faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_0^T \int_0^1 (\bar{\alpha}_{z\lambda} \cdot \psi) dz dt = - \int_0^T \int_0^1 \left(w_{s\lambda} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz dt,$$

et par conséquent $\bar{\alpha}_{z\lambda} = \frac{\partial w_{s\lambda}}{\partial z}$ dans $L^2\left(0, T; (L^2(0, 1))^N\right)$. $w_{s\lambda}$ vérifie la formulation (2.25) ■

On a le résultat de régularité suivant :

Proposition 2.3.14 *Si on prends u_{s0} dans W_z , alors :*

$$\frac{\partial w_{s\lambda}}{\partial t} \in L^2\left(0, T; (L^2(0, 1))^N\right)$$

Démonstration. On multiplie l'égalité (2.27) par $\frac{d\bar{\gamma}_{j\lambda, m}}{dt}$ et on fait la somme sur $j = 1, \dots, m$ de manière à obtenir après intégration :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \right\|^2 dz dt \\ & + \int_0^\tau \int_0^1 \left(\theta_s \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial z} \right) \right) dz dt \\ & + \lambda \int_0^\tau \int_0^1 \left(\mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) \cdot \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \right) dz dt \\ & = \int_0^\tau \int_0^1 \left(\delta \mathbf{r}(v_s e^{\lambda t}) \cdot \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} e^{-\lambda t} \right) dz dt \\ & - \int_0^\tau \int_0^1 \left\langle \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z}, \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} e^{-\lambda t} r (1 - r^2) \right\rangle_{\langle W'_{r0}, W_{r0} \rangle} dz dt. \end{aligned}$$

Ceci entraîne :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \right\|^2 dz dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left\| \theta_s^{1/2} \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial z} \right\|^2 dz dt \\ & + \frac{\lambda}{2} \int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \|\mathcal{P}_m(w_{s\lambda})\|^2 dz dt \\ & = \int_0^\tau \int_0^1 \left(\delta \mathbf{r}(v_s e^{\lambda t}) \cdot \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} e^{-\lambda t} \right) dz dt \\ & - \int_0^\tau \int_0^1 \left\langle \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z}, \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} e^{-\lambda t} r (1 - r^2) \right\rangle_{\langle W'_{r0}, W_{r0} \rangle} dz dt, \end{aligned}$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

où $\theta_s^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\theta_{1s}}, \dots, \sqrt{\theta_{Ns}})$. On majore le dernier terme ci-dessus :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\tau \int_0^1 \left\langle \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z}, \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} e^{-\lambda t} r(1-r^2) \right\rangle dz dt \right| \\ & \leq \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z} \right\|_{W'_{r0}} \left\| \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} r(1-r^2) \right\|_{W_{r0}} dz dt \\ & \leq c \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z} \right\|_{W'_{r0}} \left\| \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \right\| dz dt \\ & \leq \frac{c\varepsilon}{2} \left\| \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z} \right\|_{L^2([0,\tau] \times [0,1]; W'_{r0})}^2 + \frac{c}{2\varepsilon} \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \right\|^2 dz dt, \end{aligned}$$

où c est une constante strictement positive, en utilisant l'inégalité de Young avec $\varepsilon > 0$ et le fait que $\frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t}$ ne dépend pas de r . On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \right\|^2 dz dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \left\| \theta_s^{1/2} \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial z} \right\|^2(z, \tau) dz \\ & + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \left\| \mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) \right\|^2(z, \tau) dz \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left\| \theta_s^{1/2} \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial z} \right\|^2(z, 0) dz + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \left\| \mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) \right\|^2(z, 0) dz \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \mathbf{r}(v_s e^{\lambda t}) \right\|^2 dz dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \right\|^2 dz dt \\ & + \frac{c\varepsilon}{2} \left\| \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z} \right\|_{L^2([0,\tau] \times [0,1]; W'_{r0})}^2 + \frac{c}{2\varepsilon} \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \right\|^2 dz dt, \end{aligned}$$

qui devient :

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{c}{\varepsilon}\right) \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \right\|^2 dz dt \\ & \leq \int_0^1 \left\| \theta_s^{1/2} \frac{\partial u_{s0}}{\partial z} \right\|^2 dz + \lambda \int_0^1 \|u_{s0}\|^2 dz \\ & + (bk\alpha)^2 \int_0^\tau \int_0^1 \|v_s\|^2 dz dt + c\varepsilon \left\| \Gamma \frac{\partial u_f}{\partial z} \right\|_{L^2([0,\tau] \times [0,1]; W'_{r0})}^2, \end{aligned}$$

où $bk\alpha$ désigne la constante de Lipschitz de \mathbf{r} (cf. Proposition 2.2.2). Ceci entraîne que si on prend $\varepsilon > c$ on obtient qu'il existe une constante C ne dépendant que des données du problème telle que :

$$\int_0^\tau \int_0^1 \left\| \frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \right\|^2 dz dt \leq C.$$

Donc, il existe une sous-suite de $(\mathcal{P}_m(w_{s\lambda}))_m$ encore notée $(\mathcal{P}_m(w_{s\lambda}))_m$ telle que :

$$\frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \bar{\alpha}_{t\lambda}, \quad \text{faiblement dans } L^2\left(0, T; (L^2(0, 1))^N\right).$$

2.3. EXISTENCE DE LA SOLUTION

Or, pour tout ψ appartenant à $C_c^0(0, T; W_z)$, on a :

$$\int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathcal{P}_m(w_{s\lambda})}{\partial t} \cdot \psi \right) dz dt = - \int_0^T \int_0^1 \left(\mathcal{P}_m(w_{s\lambda}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dz dt.$$

Faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_0^T \int_0^1 (\bar{\alpha}_{t\lambda} \cdot \psi) dz dt = - \int_0^T \int_0^1 \left(w_{s\lambda} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dz dt,$$

et par conséquent $\bar{\alpha}_{t\lambda} = \frac{\partial w_{s\lambda}}{\partial t}$ dans $L^2\left(0, T; (L^2(0, 1))^N\right)$ d'où le résultat. ■

Remarque 2.3.15 Comme :

$$L^2(0, T; W_z) \subset L^2\left(0, T; (L^2(0, 1))^N\right) \subset L^2(0, T; W'_z)$$

et que w_s appartient à $L^2(0, T; W_z)$ et $\frac{\partial w_s}{\partial z}$ appartient à $L^2(0, T; W'_z)$, on déduit de la Proposition 23.23 de [21, page 422] que w_s appartient à $C\left(0, T; (L^2(0, 1))^N\right)$, ce qui permet d'interpréter la condition initiale.

Démonstration de la Proposition 2.3.11. Nous montrons l'existence d'une solution faible du problème (2.22), c'est à dire vérifiant la formulation variationnelle (2.23), à l'aide d'une méthode de point fixe.

Soit $W_{s\lambda} = w_{s\lambda 1} - w_{s\lambda 2}$, où $w_{s\lambda 1}$ et $w_{s\lambda 2}$ sont deux solutions du problème (2.25), de même condition initiale à $t = 0$, associées respectivement à v_{1s} et v_{2s} . Notons que $W_{s\lambda}$ appartient à $L^2(0, T; W_z)$. Des équations (2.25) écrites pour $w_{s\lambda 1}$ et $w_{s\lambda 2}$, on déduit, en prenant $\psi = W_{s\lambda}$, l'égalité suivante, valable pour tout $0 \leq \tau \leq T$:

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial W_{s\lambda}}{\partial t} \cdot W_{s\lambda} \right) dz dt + \lambda \int_0^\tau \int_0^1 \|W_{s\lambda}\|^2 dz dt \\ & + \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \theta_s^{1/2} \frac{\partial W_{s\lambda}}{\partial z} \right\|^2 dz dt \\ & = \int_0^\tau \int_0^1 (\delta(\mathbf{r}(v_{1s}e^{\lambda t}) - \mathbf{r}(v_{2s}e^{\lambda t})) \cdot e^{-\lambda t} W_{s\lambda}) dz dt, \end{aligned}$$

En utilisant le caractère lipschitzien de \mathbf{r} , puis l'inégalité de Young, pour tout β strictement positif, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 \|W_{s\lambda}\|^2(z, \tau) dz + \lambda \int_0^\tau \int_0^1 \|W_{s\lambda}\|^2 dz dt + \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \theta_s^{1/2} \frac{\partial W_{s\lambda}}{\partial z} \right\|^2 dz dt \\ & \leq bk\alpha \int_0^\tau \int_0^1 \|v_{1s} - v_{2s}\| \|W_{s\lambda}\| dz dt \\ & \leq \frac{(bk\alpha)^2}{2\beta} \int_0^\tau \int_0^1 \|V_s\|^2 dz dt + \frac{\beta}{2} \int_0^\tau \int_0^1 \|W_{s\lambda}\|^2 dz dt, \end{aligned}$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

avec $V_s = v_{1s} - v_{2s}$. On déduit de l'inégalité précédente :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 \|W_{s\lambda}\|^2(z, \tau) dz + \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \theta_s^{1/2} \frac{\partial W_{s\lambda}}{\partial z} \right\|^2 dz dt \\ & \leq \frac{(bk\alpha)^2}{2\beta} \int_0^\tau \int_0^1 \|V_s\|^2 dz dt + \left(\frac{\beta}{2} - \lambda \right) \int_0^\tau \int_0^1 \|W_{s\lambda}\|^2 dz dt. \end{aligned}$$

En choisissant $\lambda = \beta/2$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 \|W_{s\lambda}\|^2(z, \tau) dz + \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \theta_s^{1/2} \frac{\partial W_{s\lambda}}{\partial z} \right\|^2 dz dt \\ & \leq \frac{(bk\alpha)^2}{2\beta} \int_0^\tau \int_0^1 \|V_s\|^2 dz dt \\ & \leq \frac{(bk\alpha)^2}{2\beta} \left(\int_0^\tau \int_0^1 \|V_s\|^2 dz dt + \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \frac{\partial V_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt \right). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \|W_{s\lambda}\|^2(z, \tau) dz + \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \frac{\partial W_{s\lambda}}{\partial z} \right\|^2 dz dt \\ & \leq \frac{(bk\alpha)^2}{2\beta \inf(1/2, \inf_i \theta_{is})} \left(\int_0^\tau \int_0^1 \|V_s\|^2 dz dt + \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \frac{\partial V_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt \right) \\ & \leq \frac{(bk\alpha)^2}{2\beta \inf(1/2, \inf_i \theta_{is})} \left(\int_0^T \int_0^1 \|V_s\|^2 dz dt + \int_0^T \int_0^1 \left\| \frac{\partial V_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt \right). \end{aligned}$$

Ceci entraîne :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \|W_{s\lambda}\|^2(z, t) dz dt \\ & \leq \frac{(bk\alpha)^2 T}{2\beta \inf(1/2, \inf_i \theta_{is})} \left(\int_0^T \int_0^1 \|V_s\|^2 dz dt + \int_0^T \int_0^1 \left\| \frac{\partial V_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt \right). \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \left\| \frac{\partial W_{s\lambda}}{\partial z} \right\|^2 dz dt \\ & \leq \frac{(bk\alpha)^2}{2\beta \inf(1/2, \inf_i \theta_{is})} \left(\int_0^T \int_0^1 \|V_s\|^2 dz dt + \int_0^T \int_0^1 \left\| \frac{\partial V_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt \right), \end{aligned}$$

on obtient finalement que :

$$\|W_{s\lambda}\|_{W_z(T)}^2 \leq \frac{(bk\alpha)^2}{2\beta \inf(1/2, \inf_i \theta_{is})} (T + 1) \|V_s\|_{W_z(T)}^2.$$

2.3. EXISTENCE DE LA SOLUTION

Si β vérifie :

$$\frac{(bk\alpha)^2}{2 \inf(1/2, \inf_i \theta_{is})} (T+1) < \beta,$$

l'application :

$$\left(\begin{array}{ccc} L^2(0, T; W_z) & \rightarrow & L^2(0, T; W_z) \\ v_s & \mapsto & w_{s\lambda} \end{array} \right),$$

est une contraction stricte. Ceci assure l'existence d'un unique point fixe v_s solution de la formulation variationnelle (2.24) et, en posant $u_s = v_s e^{-\lambda t}$, on prouve l'existence d'un u_s appartenant à $L^2(0, T; W_z)$ et résolvant le problème (2.22), en un sens faible associé à la formulation variationnelle (2.23). ■

2.3.4 Caractère contractant de $\Phi \circ \Psi$

On commence par établir des propriétés des applications Φ et Ψ .

Proposition 2.3.16 *L'application :*

$$\Phi : \left(\begin{array}{ccc} W_r(T) & \rightarrow & W_z(T) \\ u_f & \mapsto & u_s \end{array} \right),$$

qui à tout vecteur u_f de $W_r(T)$ associe la solution faible u_s dans $W_z(T)$ du problème (2.22), vérifie :

$$\|\Phi(u_f^1) - \Phi(u_f^2)\|_{W_z(T)}^2 \leq T(aT + b) \int_0^T \int_0^1 \left\| \frac{\partial(u_f^1 - u_f^2)}{\partial z} \right\|_{W'_{r,0}}^2 dz dt, \quad (2.30)$$

où a et b sont deux constantes strictement positives indépendantes de T .

Démonstration. Soit $U_s = u_s^1 - u_s^2$ la différence de deux solutions du problème (2.22) sur la paroi, de même condition initiale à $t = 0$, et associées à deux fonctions u_f^1 et u_f^2 de $W_r(T)$. U_s est solution faible du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_s}{\partial t} - \theta_s \frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2} = - \int_0^1 \Gamma \frac{\partial U_f}{\partial z} r (1 - r^2) dr + \delta(\mathbf{r}(u_s^1) - \mathbf{r}(u_s^2)), \\ U_s(z, 0) = 0, \\ \theta_s \frac{\partial U_s}{\partial z}(0, t) = 0 = \theta_s \frac{\partial U_s}{\partial z}(1, t), \end{array} \right. \quad (2.31)$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

avec $U_f = u_f^1 - u_f^2$. On multiplie le système (2.31)₁ par U_s et on intègre sur $[0, 1] \times [0, \tau]$, avec $0 \leq \tau \leq T$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^1 \|U_s\|^2(z, \tau) dz + \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \theta_s^{1/2} \frac{\partial U_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt \\
&= \int_0^\tau \int_0^1 (\delta(\mathbf{r}(u_s^1) - \mathbf{r}(u_s^2)) \cdot U_s) dz dt \\
&\quad - \int_0^\tau \int_0^1 \left\langle \Gamma \frac{\partial U_f}{\partial z}, U_s r (1 - r^2) \right\rangle_{\langle W'_{r_0}, W_{r_0} \rangle} dz dt \\
&\leq \mu \int_0^\tau \int_0^1 \|U_s\|^2 dz dt \\
&\quad - \int_0^\tau \int_0^1 \left\langle \Gamma \frac{\partial U_f}{\partial z}, U_s r (1 - r^2) \right\rangle_{\langle W'_{r_0}, W_{r_0} \rangle} dz dt,
\end{aligned}$$

compte tenu de l'hypothèse (H1) avec $\mu = bk\alpha$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^1 \|U_s\|^2(z, \tau) dz + \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \theta_s^{1/2} \frac{\partial U_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt \\
&\leq \mu \int_0^\tau \int_0^1 \|U_s\|^2 dz dt + \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \Gamma \frac{\partial U_f}{\partial z} \right\|_{W'_{r_0}} \|U_s r (1 - r^2)\|_{W_{r_0}} dz dt \\
&\leq \mu \int_0^\tau \int_0^1 \|U_s\|^2 dz dt + c \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \Gamma \frac{\partial U_f}{\partial z} \right\|_{W'_{r_0}} \|U_s\| dz dt,
\end{aligned}$$

avec $c > 0$.

On applique l'inégalité de Young, avec ε strictement positif :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^1 \|U_s\|^2(z, \tau) dz + \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \theta_s^{1/2} \frac{\partial U_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt \\
&\leq \left(\frac{c}{2\varepsilon} + \mu \right) \int_0^\tau \int_0^1 \|U_s\|^2 dz dt + \frac{c\varepsilon}{2} \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \Gamma \frac{\partial U_f}{\partial z} \right\|_{W'_{r_0}}^2 dz dt \\
&\leq \left(\frac{c + 2\mu}{2\varepsilon} \right) \int_0^\tau \int_0^1 \|U_s\|^2 dz dt + \frac{c\varepsilon}{2} \int_0^T \int_0^1 \left\| \Gamma \frac{\partial U_f}{\partial z} \right\|_{W'_{r_0}}^2 dz dt.
\end{aligned}$$

On applique le Lemme de Gronwall :

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \|U_s\|^2(z, \tau) dz \leq c\varepsilon e^{(c+2\mu)\tau/\varepsilon} \int_0^T \int_0^1 \left\| \Gamma \frac{\partial U_f}{\partial z} \right\|_{W'_{r_0}}^2 dz dt \\
& \int_0^T \int_0^1 \|U_s\|^2 dz dt \leq \frac{c\varepsilon^2}{c + 2\mu} (e^{(c+2\mu)T/\varepsilon} - 1) \int_0^T \int_0^1 \left\| \Gamma \frac{\partial U_f}{\partial z} \right\|_{W'_{r_0}}^2 dz dt \\
& \Rightarrow \int_0^T \int_0^1 \left\| \theta_s^{1/2} \frac{\partial U_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt \leq \frac{c\varepsilon e^{(c+2\mu)T/\varepsilon}}{2} \int_0^T \int_0^1 \left\| \Gamma \frac{\partial U_f}{\partial z} \right\|_{W'_{r_0}}^2 dz dt. \\
& \Rightarrow \int_0^T \int_0^1 \left\| \frac{\partial U_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt \leq \frac{c\varepsilon e^{(c+2\mu)T/\varepsilon}}{2 \inf_i \theta_{is}} \int_0^T \int_0^1 \left\| \Gamma \frac{\partial U_f}{\partial z} \right\|_{W'_{r_0}}^2 dz dt.
\end{aligned}$$

2.3. EXISTENCE DE LA SOLUTION

On en déduit :

$$\|U_s\|_{W_z(T)}^2 \leq \left(\frac{c\varepsilon^2}{c+2\mu} (e^{(c+2\mu)T/\varepsilon} - 1) + \frac{c\varepsilon e^{(c+2\mu)T/\varepsilon}}{2 \inf_i \theta_{is}} \right) \int_0^T \int_0^1 \left\| \Gamma \frac{\partial U_f}{\partial z} \right\|_{W'_{r_0}}^2 dz dt.$$

Cette dernière inégalité étant vraie pour tout ε strictement positif, on obtient en prenant $\varepsilon = (c+2\mu)T$:

$$\|U_s\|_{W_z(T)}^2 \leq \left(c(c+2\mu)(e-1)T^2 + \frac{c(c+2\mu)e}{2 \inf_i \theta_{is}} T \right) \int_0^T \int_0^1 \left\| \Gamma \frac{\partial U_f}{\partial z} \right\|_{W'_{r_0}}^2 dz dt.$$

■

Proposition 2.3.17 *L'application :*

$$\Psi : \begin{pmatrix} W_z(T) & \rightarrow & W_r(T) \\ u_s & \mapsto & u_f \end{pmatrix},$$

qui à chaque vecteur u_s de $W_z(T)$ associe la solution faible u_f de (2.9), est telle que :

$$\|\Psi(u_s^1) - \Psi(u_s^2)\|_{W_r(T)} \leq c \|u_s^1 - u_s^2\|_{W_z(T)}, \quad (2.32)$$

pour une constante c strictement positive et ne dépendant que des β_{if} .

Démonstration. Soit $U_f = u_f^1 - u_f^2$ la différence des solutions de (2.9) correspondant respectivement aux éléments u_s^1 et u_s^2 de $W_z(T)$, de mêmes conditions initiales en $z = 0$. U_f est solution faible de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_f}{\partial z} - \beta_f \frac{1}{r(1-r^2)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_f}{\partial r} \right) = 0, \\ U_f(r, 0, t) = 0, \\ U_f(1, z, t) = U_s(z, t), \\ \frac{\partial U_f}{\partial r}(0, z, t) = 0, \end{array} \right. \quad (2.33)$$

avec $U_s = u_s^1 - u_s^2$. On pose $W_f(r, z, t) = U_f(r, z, t) - U_s(z, t)$, de manière à obtenir le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W_f}{\partial z} - \beta_f \frac{1}{r(1-r^2)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W_f}{\partial r} \right) = -\frac{\partial U_s}{\partial z}, \\ W_f(r, 0, t) = 0, \\ W_f(1, z, t) = 0, \\ \frac{\partial W_f}{\partial r}(0, z, t) = 0. \end{array} \right. \quad (2.34)$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

On multiplie le système (2.34) par $r(1-r^2)W_f$, et on intègre sur $]0, 1[\times]0, s[\times]0, \tau[$, avec s appartenant à $]0, 1[$ et τ appartenant à $]0, T[$. On obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^s \int_0^1 \left(\frac{\partial W_f}{\partial z} \cdot W_f \right) r(1-r^2) dr dz dt + \int_0^\tau \int_0^s \int_0^1 \left\| \beta_f^{1/2} \frac{\partial W_f}{\partial r} \right\|^2 r dr dz dt \\ & = - \int_0^\tau \int_0^s \int_0^1 \left(\frac{\partial U_s}{\partial z} \cdot W_f \right) r(1-r^2) r dr dz dt \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^1 \|W_f\|^2(r, s, t) r(1-r^2) dr dt + 2 \int_0^\tau \int_0^s \int_0^1 \left\| \beta_f^{1/2} \frac{\partial W_f}{\partial r} \right\|^2 r dr dz dt \\ & \leq \frac{\varepsilon}{4} \int_0^\tau \int_0^s \left\| \frac{\partial U_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \int_0^s \int_0^1 \|W_f\|^2 r(1-r^2) r dr dz dt \\ & \leq \frac{\varepsilon}{4} \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \frac{\partial U_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \int_0^s \int_0^1 \|W_f\|^2 r(1-r^2) r dr dz dt, \end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Young avec ε strictement positif, compte tenu de l'égalité : $\int_0^1 r(1-r^2) dr = 1/4$. On en déduit, en utilisant le Lemme de Gronwall :

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^1 \|W_f\|^2(r, s, t) r(1-r^2) dr dz dt & \leq \frac{\varepsilon}{4} e^{s/\varepsilon} \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \frac{\partial U_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt, \\ \int_0^\tau \int_0^s \int_0^1 \|W_f\|^2 r(1-r^2) dr dz dt & \leq \frac{\varepsilon^2}{4} (e^{s/\varepsilon} - 1) \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \frac{\partial U_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt, \\ \int_0^\tau \int_0^s \int_0^1 \left\| \beta_f^{1/2} \frac{\partial W_f}{\partial r} \right\|^2 r dr dz dt & \leq \frac{\varepsilon}{8} e^{s/\varepsilon} \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \frac{\partial U_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt, \end{aligned}$$

inégalités vraies pour tout ε strictement positif. On prend $\varepsilon = s$ et on remarque que $\frac{\partial W_f}{\partial r} = \frac{\partial U_f}{\partial r}$, puisque U_s est indépendant de r , pour aboutir à l'inégalité :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left\| \frac{\partial (\Psi(u_s^1) - \Psi(u_s^2))}{\partial r} \right\|^2 r dr dz dt \\ & \leq \frac{e}{8 \inf_i (\beta_{if})} \int_0^T \int_0^1 \left\| \frac{\partial (u_s^1 - u_s^2)}{\partial z} \right\|^2 dz dt. \end{aligned}$$

On déduit également du fait que $U_f = W_f + U_s$ et de la première inégalité ci-dessus :

$$\begin{aligned} & \|U_f\|_{L^2([0, T] \times]0, s[; L^2_{r(1-r^2)}(0, 1))}^N \\ & \leq \|W_f\|_{L^2([0, T] \times]0, s[; L^2_{r(1-r^2)}(0, 1))}^N + \frac{1}{2} \|U_s\|_{L^2([0, T]; (L^2(0, s))^N)} \\ & \leq \sqrt{\frac{(e^{s/\varepsilon} - 1) \varepsilon^2}{4} \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \frac{\partial U_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt} + \frac{1}{2} \|U_s\|_{L^2([0, T]; (L^2(0, s))^N)} \\ & \leq \sqrt{\frac{e - 1}{4} \int_0^\tau \int_0^1 \left\| \frac{\partial U_s}{\partial z} \right\|^2 dz dt} + \frac{1}{2} \|U_s\|_{L^2([0, T]; (L^2(0, s))^N)}. \end{aligned}$$

2.3. EXISTENCE DE LA SOLUTION

Ces deux inégalités conduisent à la propriété annoncée. ■

Théorème 2.3.18 *Pour T suffisamment petit, le système (2.8) admet une solution appartenant à*

$$W(T) = \left\{ (u, v) \in W_r(T) \times W_z(T) \mid \begin{array}{l} u(1, z, t) = v(z, t), \\ \forall (z, t) \in [0, 1] \times [0, T] \end{array} \right\}.$$

Démonstration. L'inégalité (2.32) implique que pour tous éléments u_s^1 et u_s^2 de $W_z(T)$, les solutions correspondantes u_f^1 et u_f^2 de (2.9) vérifient :

$$\|\Psi(u_s^1) - \Psi(u_s^2)\|_{W_r(T)} \leq c \|u_s^1 - u_s^2\|_{W_z(T)}, \quad (2.35)$$

pour une constante c strictement positive ne dépendant que des coefficients β_{if} . L'inégalité (2.30), appliquée à $\Psi(u_s^1)$ et $\Psi(u_s^2)$ implique :

$$\begin{aligned} & \|\Phi(\Psi(u_s^1)) - \Phi(\Psi(u_s^2))\|_{W_z(T)}^2 \\ & \leq T(aT + b) \int_0^T \int_0^1 \left\| \frac{\partial(\Psi(u_s^1) - \Psi(u_s^2))}{\partial z} \right\|_{W_{r_0}'}^2 dz dt \\ & \leq T(aT + b) \int_0^T \int_0^1 \left\| \frac{\beta_f}{r(1-r^2)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial(\Psi(u_s^1) - \Psi(u_s^2))}{\partial r} \right) \right\|_{W_{r_0}'}^2 dz dt, \end{aligned}$$

compte tenu de (2.33). Cette inégalité devient :

$$\begin{aligned} & \|\Phi(\Psi(u_s^1)) - \Phi(\Psi(u_s^2))\|_{W_z(T)}^2 \\ & \leq T(aT + b) \int_0^T \int_0^1 \left(\sup_{\|\varphi\|_{W_{r_0}'} \leq 1} \left(- \int_0^1 \beta_f \frac{\partial(\Psi(u_s^1) - \Psi(u_s^2))}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} r dr \right) \right)^2 dz dt \\ & \leq T(aT + b) \sup_i (\beta_{if})^2 \int_0^T \int_0^1 \left(\left\| \frac{\partial(\Psi(u_s^1) - \Psi(u_s^2))}{\partial r} \right\|_{L_r^2(0,1)} \right. \\ & \quad \left. \times \sup_{\|\varphi\|_{W_{r_0}'} \leq 1} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right\|_{L_r^2(0,1)} \right)^2 dz dt \\ & \leq T(aT + b) \sup_i (\beta_{if})^2 \int_0^T \int_0^1 \|\Psi(u_s^1) - \Psi(u_s^2)\|_{W_r}^2 dz dt. \end{aligned}$$

On en déduit l'existence de a et b tels que :

$$\|\Phi(\Psi(u_s^1)) - \Phi(\Psi(u_s^2))\|_{W_z(T)}^2 \leq T(aT + b) \|\Psi(u_s^1) - \Psi(u_s^2)\|_{W_r(T)}^2. \quad (2.36)$$

En combinant les inégalités (2.35) et (2.36), on prouve que si T est suffisamment petit, l'application $\Phi \circ \Psi$ est strictement contractante de $W_z(T)$ dans lui-même.

Ceci prouve donc l'existence d'une solution du système (2.8) dans l'espace indiqué. ■

2.3.5 Retour au problème initial

L'objectif de ce paragraphe est d'établir le comportement limite de la solution du système régularisé quand θ_{is} tend vers 0, $i = 1, \dots, N - 1$. Nous montrons d'abord le

Lemme 2.3.19 *Il existe une constante positive $c(T)$ telle que :*

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 (C_{is})^2(z, T) dz + \sum_{i=1}^N \theta_{is} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{is}}{\partial z} \right)^2 dz dt \leq c(T). \quad (2.37)$$

Démonstration. De (2.8), on déduit après sommation sur i :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_0^1 (C_{if})^2(r, l, t) r (1 - r^2) dr dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^l (C_{is})^2(z, T) dz \\ & - \sum_{i=1}^N \delta_i \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^l \mathbf{r}_i(C_{1s}, \dots, C_{Ns}) C_{is} dz dt \\ & + \sum_{i=1}^N \beta_{if} \int_0^T \int_0^l \int_0^1 r \left(\frac{\partial C_{if}}{\partial r} \right)^2 dr dz dt \\ & + \sum_{i=1}^N \theta_{is} \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial C_{is}}{\partial z} \right)^2 dz dt \\ & = \frac{T}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 (C_{i0})^2(r) r (1 - r^2) dr + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^l (C_{is0})^2(z) dz. \end{aligned}$$

Les hypothèses (H3) et (H4) sur les \mathbf{r}_i entraînent :

$$\forall x \in \mathbb{R}^N : - \sum_{i=1}^N \delta_i \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \mathbf{r}_i(x_1, \dots, x_N) x_i \geq 0,$$

d'où :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_0^1 (C_{if})^2(r, l, t) r (1 - r^2) dr dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^l (C_{is})^2(z, T) dz \\ & + \sum_{i=1}^N \beta_{if} \int_0^T \int_0^l \int_0^1 r \left(\frac{\partial C_{if}}{\partial r} \right)^2 dr dz dt + \sum_{i=1}^N \theta_{is} \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial C_{is}}{\partial z} \right)^2 dz dt \\ & \leq \frac{T}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 (C_{i0})^2(r) r (1 - r^2) dr + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^l (C_{is0})^2(z) dz. \end{aligned}$$

Posant :

$$c(T) = \frac{T}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 (C_{i0})^2(r) r (1 - r^2) dr + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^l (C_{is0})^2(z) dz,$$

2.3. EXISTENCE DE LA SOLUTION

on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \theta_{is} \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial C_{is}}{\partial z} \right)^2 dz dt \leq c(T) \\ \Rightarrow & \sum_{i=1}^N \theta_{is} \int_0^T \int_0^l \left(\frac{\partial C_{is}}{\partial z} \right)^2 dz dt \leq c'(T). \end{aligned}$$

De l'inégalité précédente, on déduit aussi :

$$\sum_{i=1}^N \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^l (C_{is})^2(z, T) dz \leq c(T) \Rightarrow \sum_{i=1}^N \int_0^l (C_{is})^2(z, T) dz \leq c''(T),$$

d'où le résultat. ■

On définit les espaces suivants dans lesquels $u = (u_1, \dots, u_N)$ est une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^N :

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_z &= \left\{ u \in (L^2(0, 1))^N \mid \frac{\partial u_N}{\partial z} \in L^2(0, 1) \right\}, \\ \widetilde{W}_z(T) &= \left\{ u \in L^2(0, T; \widetilde{W}_z) \right\}, \end{aligned}$$

et :

$$\widetilde{W}(T) = \left\{ (u, v) \in W_r(T) \times \widetilde{W}_z(T) \mid u(1, z, t) = v(z, t), \forall (z, t) \in [0, 1] \times [0, T] \right\}.$$

Ces résultats vont servir à établir le

Théorème 2.3.20 *Supposons que θ_{is} tend vers 0 pour tout $i = 1, \dots, N-1$. La solution (C_{if}, C_{is}) du problème régularisé (2.8) converge faiblement dans $\widetilde{W}(T)$ vers la solution $(\widetilde{C}_{if}, \widetilde{C}_{is})$ du système (2.7).*

Démonstration. Soit φ appartenant à $W(T)$. On déduit de (2.8) la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 C_{if}(r, 1, t) \varphi(r, 1, t) r(1-r^2) dr dt \\ & - \int_0^T \int_0^1 C_{i0}(r) \varphi(r, 0, t) r(1-r^2) dr dt \\ & - \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 C_{if} \frac{\partial \varphi}{\partial z} r(1-r^2) dr dz dt + \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial C_{if}}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} r dr dz dt \\ & + \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 C_{is}(z, T) \varphi(1, z, T) dz - \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 C_{is0}(z) \varphi(1, z, 0) dz \\ & - \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 C_{is} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(1, z, t) dz dt + \frac{\beta_{if} \theta_{is}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial C_{is}}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, z, t) dz dt \\ & - \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \delta_i \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i(C_{1s}, \dots, C_{Ns}) \varphi(1, z, t) dz dt = 0. \end{aligned}$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

Tous les termes intervenant dans cette égalité sont bornés indépendamment de θ_{is} (cf. Lemme 2.3.19). Pour passer à la limite dans le terme non-linéaire faisant intervenir les \mathbf{r}_i , on utilise le fait que C_{is} est borné et le Théorème 2.1 de [7, page 22].

On peut donc faire tendre θ_{is} vers 0, $i = 1, \dots, N - 1$, pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \tilde{C}_{if}(r, 1, t) \varphi(r, 1, t) r (1 - r^2) dr dt \\ & - \int_0^T \int_0^1 C_{i0}(r) \varphi(r, 0, t) r (1 - r^2) dr dt \\ & - \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \tilde{C}_{if} \frac{\partial \varphi}{\partial z} r (1 - r^2) dr dz dt + \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \tilde{C}_{if}}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} r dr dz dt \\ & + \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 \tilde{C}_{is}(z, T) \varphi(1, z, T) dz - \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 C_{is0}(z) \varphi(1, z, 0) dz \\ & - \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \tilde{C}_{is} \frac{\partial \varphi}{\partial t} (1, z, t) dz dt + \delta_N^i \frac{\beta_{if} \theta_{is}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial \tilde{C}_{is}}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} (1, z, t) dz dt \\ & - \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \delta_i \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i(\tilde{C}_{1s}, \dots, \tilde{C}_{Ns}) \varphi(1, z, t) dz dt = 0. \end{aligned}$$

Prenons φ telle que $\varphi(1, z, t) = 0$. On a :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \tilde{C}_{if}(r, 1, t) \varphi(r, 1, t) r (1 - r^2) dr dt \\ & - \int_0^T \int_0^1 C_{i0}(r) \varphi(r, 0, t) r (1 - r^2) dr dt \\ & - \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \tilde{C}_{if} \frac{\partial \varphi}{\partial z} r (1 - r^2) dr dz dt + \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \tilde{C}_{if}}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} r dr dz dt = 0, \end{aligned}$$

qui équivaut à :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \left(\tilde{C}_{if}(r, 0, t) - C_{i0}(r) \right) \varphi(r, 0, t) r (1 - r^2) dr dt \\ & + \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(r (1 - r^2) \frac{\partial \tilde{C}_{if}}{\partial z} - \beta_{if} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{C}_{if}}{\partial r} \right) \right) \varphi dr dz dt = 0, \end{aligned}$$

en prenant $\varphi(r, 0, t) = 0$ on montre que \tilde{C}_{if} vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} r (1 - r^2) \frac{\partial \tilde{C}_{if}}{\partial z} - \beta_{if} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{C}_{if}}{\partial r} \right) = 0, \\ \tilde{C}_{if}(r, 0, t) = C_{i0}(r), \quad \tilde{C}_{if}(1, z, t) = \tilde{C}_{is}(z, t), \quad \frac{\partial \tilde{C}_{if}}{\partial r}(0, z, t) = 0. \end{array} \right.$$

2.3. EXISTENCE DE LA SOLUTION

En tenant compte de ces équations, la formulation variationnelle précédente devient :

$$\begin{aligned} & \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial \tilde{C}_{if}}{\partial r} (1, z, t) \varphi (1, z, t) dz dt \\ & + \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 \tilde{C}_{is} (z, T) \varphi (1, z, T) dz - \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 C_{is0} (z) \varphi (1, z, 0) dz \\ & - \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \tilde{C}_{is} \frac{\partial \varphi}{\partial t} (1, z, t) dz dt + \delta_N^i \frac{\beta_{if} \theta_{is}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial \tilde{C}_{is}}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} (1, z, t) dz dt \\ & - \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \delta_i \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i (\tilde{C}_{1s}, \dots, \tilde{C}_{Ns}) \varphi (1, z, t) dz dt = 0, \end{aligned}$$

qui devient, en intégrant :

$$\begin{aligned} & \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial \tilde{C}_{if}}{\partial r} (1, z, t) \varphi (1, z, t) dz dt \\ & - \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 C_{is0} (z) \varphi (1, z, 0) dz + \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 \tilde{C}_{is} (z, 0) \varphi (1, z, 0) dz \\ & + \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial \tilde{C}_{is}}{\partial t} \varphi (1, z, t) dz dt + \delta_N^i \frac{\beta_{if} \theta_{is}}{\gamma_{is}} \int_0^1 \frac{\partial \tilde{C}_{is}}{\partial z} (1, t) \varphi (1, 1, t) dt \\ & - \delta_N^i \frac{\beta_{if} \theta_{is}}{\gamma_{is}} \int_0^1 \frac{\partial \tilde{C}_{is}}{\partial z} (0, t) \varphi (1, 0, t) dt - \delta_N^i \frac{\beta_{if} \theta_{is}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial^2 \tilde{C}_{is}}{\partial z^2} \varphi (1, z, t) dz dt \\ & - \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \delta_i \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i (\tilde{C}_{1s}, \dots, \tilde{C}_{Ns}) \varphi (1, z, t) dz dt = 0. \end{aligned}$$

Soit φ vérifiant : $\varphi (1, z, 0) = \varphi (1, 0, t) = \varphi (1, 1, t) = 0$. On a :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \left(\gamma_{is} \frac{\partial \tilde{C}_{if}}{\partial r} (1, z, t) + \frac{\partial \tilde{C}_{is}}{\partial t} \right. \\ & \left. - \delta_N^i \theta_{is} \frac{\partial^2 \tilde{C}_{is}}{\partial z^2} - \delta_i \mathbf{r}_i (\tilde{C}_{1s}, \dots, \tilde{C}_{Ns}) \right) \varphi (1, z, t) dz dt = 0 \end{aligned}$$

qui transforme la formulation variationnelle précédente en :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\tilde{C}_{is} (z, 0) - C_{is0} (z) \right) \varphi (1, z, 0) dz + \delta_N^i \theta_{is} \int_0^1 \frac{\partial \tilde{C}_{is}}{\partial z} (1, t) \varphi (1, 1, t) dt \\ & - \delta_N^i \theta_{is} \int_0^1 \frac{\partial \tilde{C}_{is}}{\partial z} (0, t) \varphi (1, 0, t) dt = 0. \end{aligned}$$

En prenant successivement :

$$\varphi (1, z, 0) = \varphi (1, 1, t) = 0, \quad \varphi (1, z, 0) = \varphi (1, 0, t) = 0, \quad \varphi (1, 0, t) = \varphi (1, 1, t) = 0,$$

on obtient :

$$\theta_{Ns} \frac{\partial \tilde{C}_{Ns}}{\partial z} (0, t) = 0 = \theta_{Ns} \frac{\partial \tilde{C}_{Ns}}{\partial z} (1, t), \quad \tilde{C}_{is} (z, 0) = C_{is0} (z).$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

On en déduit que $(\tilde{C}_{if}, \tilde{C}_{is})$ est solution de (2.6) avec les conditions aux limites ou initiales (2.5). De l'inégalité (2.37) et du fait que l'espace dans lequel existe \tilde{C}_{if} ne dépend pas de θ_{is} , on déduit que la solution $(\tilde{C}_{if}, \tilde{C}_{is})$ de (2.7) est dans $\tilde{W}(T)$. ■

Remarque 2.3.21 Dans la suite de ce travail, on notera (C_{if}, C_{is}) , plutôt que $(\tilde{C}_{if}, \tilde{C}_{is})$, la solution de solution de (2.6).

2.4 Positivité de la solution

Avant de démontrer l'unicité de la solution du problème (2.6) dans $\tilde{W}(T)$, montrons la positivité d'une solution.

Proposition 2.4.1 La solution $(C_{if}, C_{is})_{i=1, \dots, N}$ du problème (2.6) vérifie :

$$0 \leq C_{if}(r, z, t) ; 0 \leq C_{is}(z, t), \quad \forall (r, z, t) \in]0, 1[\times]0, 1[\times]0, T[.$$

Démonstration. On note :

$$C_{if}^+ = \sup(C_{if}, 0) ; C_{if}^- = -\inf(C_{if}, 0)$$

et de même pour C_{is} . On multiplie la i -ème équation de (2.6)₁ par $r(1-r^2)C_{if}^-$ et on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial (C_{if}^-)^2}{\partial z} r(1-r^2) dr dz dt + \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{if}^-}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt \\ & - \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial C_{if}^-}{\partial r}(1, z, t) C_{if}^-(1, z, t) dz dt = 0. \end{aligned}$$

Comme la i -ème équation de (2.6)₂ entraîne :

$$\frac{\partial C_{if}^-}{\partial r}(1, z, t) = -\frac{1}{\gamma_{is}} \frac{\partial C_{is}^-}{\partial t}(z, t) - \frac{\delta_i}{\gamma_{is}} \mathbf{r}_i(C_{1s}, \dots, C_{Ns}) + \delta_N^i \frac{\theta_{Ns}}{\gamma_{Ns}} \frac{\partial^2 C_{Ns}^-}{\partial z^2}(z, t),$$

on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial (C_{if}^-)^2}{\partial z} r(1-r^2) dr dz dt + \frac{\beta_{if}}{2\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial (C_{is}^-)^2}{\partial t} dz dt \\ & + \frac{\delta_i \beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i(C_{1s}, \dots, C_{Ns}) C_{is}^- dz dt \\ & - \delta_N^i \frac{\theta_{Ns} \beta_{Nf}}{\gamma_{Ns}} \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial^2 C_{Ns}^-}{\partial z^2} C_{Ns}^- dz dt + \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{if}^-}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt = 0. \end{aligned}$$

2.4. POSITIVITÉ DE LA SOLUTION

On en déduit :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (C_{if}^-)^2 (r, 1, t) r (1 - r^2) dr dt \\
& + \frac{\delta_i \beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i (C_{1s}, \dots, C_{Ns}) C_{is}^- dz dt \\
& + \frac{\beta_{if}}{2\gamma_{is}} \int_0^1 (C_{is}^-)^2 (z, T) dz + \frac{\theta_{Ns} \beta_{Nf}}{\gamma_{Ns}} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{Ns}^-}{\partial z} \right)^2 dz dt \\
& + \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{if}^-}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt = 0,
\end{aligned}$$

en tenant compte des propriétés suivantes des conditions aux limites ou initiales :

$$\begin{aligned}
C_{if}(r, 0, t) = C_{i0}(r) \geq 0 & \Rightarrow C_{if}^-(r, 0, t) = 0, \\
C_{is}(z, 0) = C_{is0}(z) \geq 0 & \Rightarrow C_{is}^-(z, 0) = 0,
\end{aligned}$$

$$\theta_{Ns} \frac{\partial C_{Ns}}{\partial z} (0, t) = 0 = \theta_{Ns} \frac{\partial C_{Ns}}{\partial z} (1, t).$$

Comme

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i (C_{1s}, \dots, C_{Ns}) C_{is}^- dz dt \\
& = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i (C_{1s}^+ - C_{1s}^-, \dots, C_{Ns}^+ - C_{Ns}^-) C_{is}^- dz dt,
\end{aligned}$$

on remarque qu'en tout point (z, t) de $]0, 1[\times]0, T[$, on a : $C_{is}^+(z, t) = 0$ ou $C_{is}^-(z, t) = 0$, ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}
\text{si } C_{is}^-(z, t) = 0, & \quad \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i (C_{1s}^+ - C_{1s}^-, \dots, C_{Ns}^+ - C_{Ns}^-) C_{is}^- dz dt = 0, \\
\text{si } C_{is}^+(z, t) = 0, & \quad \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i (C_{1s}^+ - C_{1s}^-, \dots, C_{Ns}^+ - C_{Ns}^-) C_{is}^- dz dt \\
& = - \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i (-C_{1s}^-, \dots, -C_{Ns}^-) (-C_{is}^-) dz dt,
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i (C_{1s}^+ - C_{1s}^-, \dots, C_{Ns}^+ - C_{Ns}^-) C_{is}^- dz dt \\
& = - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i (-C_{1s}^-, \dots, -C_{Ns}^-) (-C_{is}^-) dz dt \geq 0,
\end{aligned}$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

grâce aux hypothèses (H3) et (H4). L'égalité précédente entraîne :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_0^1 (C_{if}^-)^2 (r, 1, t) r (1 - r^2) dr dt + \sum_{i=1}^N \frac{\beta_{if}}{2\gamma_{is}} \int_0^1 (C_{is}^-)^2 (z, T) dz \\ & + \sum_{i=1}^N \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{if}^-}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt + \frac{\theta_{Ns} \beta_{Nf}}{\gamma_{Ns}} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{Ns}^-}{\partial z} \right)^2 dz dt \leq 0. \end{aligned}$$

Comme tous les termes de cette somme sont positifs ou nuls, ils sont tous nuls. On en déduit : $C_{if}^- \equiv 0 \equiv C_{is}^-$, dans le cylindre et sur la paroi. ■

2.5 Unicité de la solution

L'objectif de ce paragraphe est de prouver l'unicité de la solution du problème (2.6) dans l'espace $\widetilde{W}(T)$ défini plus haut.

Proposition 2.5.1 *Le système (2.6) admet au plus une solution $(C_{if}, C_{is})_{i=1\dots N}$ dans $\widetilde{W}(T)$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe deux solutions $(C_{if}^1, C_{is}^1), (C_{if}^2, C_{is}^2)$ du problème (2.6), et posons :

$$W_{if} = C_{if}^1 - C_{if}^2; W_{is} = C_{is}^1 - C_{is}^2.$$

Pour $i = 1, \dots, N$, (W_{if}, W_{is}) est solution faible du système :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial W_{if}}{\partial z} (r, z, t) &= \beta_{if} \frac{1}{r(1-r^2)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W_{if}}{\partial r} \right) (r, z, t), \\ \frac{\partial W_{is}}{\partial t} (z, t) &= -\gamma_{is} \frac{\partial W_{if}}{\partial r} (1, z, t) + \delta_N^i \theta_{Ns} \frac{\partial^2 W_{Ns}}{\partial z^2} (z, t), \\ &+ \delta_i (\mathbf{r}_i (C_{1s}^1, \dots, C_{Ns}^1) - \mathbf{r}_i (C_{1s}^2, \dots, C_{Ns}^2)) (z, t), \end{aligned} \right. \quad (2.38)$$

avec les conditions aux limites ou initiales :

$$\left\{ \begin{aligned} W_{if}(r, 0, t) &= 0, \quad \frac{\partial W_{if}}{\partial r}(0, z, t) = 0, \quad W_{if}(1, z, t) = W_{is}(z, t), \\ W_{is}(z, 0) &= 0, \quad \theta_{Ns} \frac{\partial W_{Ns}}{\partial z}(0, t) = 0, \quad \theta_{Ns} \frac{\partial W_{Ns}}{\partial z}(1, t) = 0. \end{aligned} \right.$$

On multiplie la i -ème équation de (2.38)₁ par $r(1-r^2)W_{if}$ et on obtient après intégration :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial (W_{if})^2}{\partial z} r (1 - r^2) dr dz dt + \beta_{if} \int_0^\tau \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial W_{if}}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt \\ & - \beta_{if} \int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial W_{if}}{\partial r} W_{if} \right) (1, z, t) dz dt = 0. \end{aligned}$$

2.5. UNICITÉ DE LA SOLUTION

pour τ appartenant à $]0, T[$. Or l'équation correspondante (2.38)₂ sur la paroi donne :

$$-\frac{\partial W_{if}}{\partial r}(1, z, t) = \frac{1}{\gamma_{is}} \frac{\partial W_{is}}{\partial t}(z, t) - \delta_N^i \frac{\theta_{Ns}}{\gamma_{Ns}} \frac{\partial^2 W_{Ns}}{\partial z^2}(z, t) - \frac{\delta_i}{\gamma_{is}} (\mathbf{r}_i(C_{1s}^1, \dots, C_{Ns}^1) - \mathbf{r}_i(C_{1s}^2, \dots, C_{Ns}^2))(z, t).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial (W_{if})^2}{\partial z}(r, 1, t) r (1 - r^2) dr dt + \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial W_{is}}{\partial t} W_{is} dz dt \\ & - \delta_i \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^\tau \int_0^1 ((\mathbf{r}_i(C_{1s}^1, \dots, C_{Ns}^1) - \mathbf{r}_i(C_{1s}^2, \dots, C_{Ns}^2)) W_{is}) dz dt \\ & - \delta_N^i \frac{\theta_{Ns} \beta_{Nf}}{\gamma_{Ns}} \int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial^2 W_{Ns}}{\partial z^2} W_{Ns} dz dt + \beta_{if} \int_0^\tau \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial W_{if}}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt = 0. \end{aligned}$$

Comme :

$$W_{if}(r, 0, t) = W_{is}(z, 0) = 0; \theta_{Ns} \frac{\partial W_{Ns}}{\partial z}(0, t) = \theta_{Ns} \frac{\partial W_{Ns}}{\partial z}(1, t) = 0,$$

on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^1 (W_{if})^2(r, 1, t) r (1 - r^2) dr dt + \frac{\beta_{if}}{2\gamma_{is}} \int_0^1 (W_{is})^2(z, \tau) dz \\ & - \delta_i \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^\tau \int_0^1 ((\mathbf{r}_i(C_{1s}^1, \dots, C_{Ns}^1) - \mathbf{r}_i(C_{1s}^2, \dots, C_{Ns}^2)) W_{is}) dz dt \\ & + \delta_N^i \frac{\theta_{Ns} \beta_{Nf}}{\gamma_{Ns}} \int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial W_{Ns}}{\partial z} \right)^2 dz dt + \beta_{if} \int_0^\tau \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial W_{if}}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt = 0. \end{aligned}$$

On somme ces égalités et on obtient, en tenant compte de l'hypothèse (H4) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^\tau \int_0^1 (W_{if})^2(r, 1, t) r (1 - r^2) dr dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 (W_{is})^2(z, \tau) dz \\ & + \frac{\theta_{Ns} \beta_{Nf}}{\gamma_{Ns}} \int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial W_{Ns}}{\partial z} \right)^2 dz dt + \sum_{i=1}^N \beta_{if} \int_0^\tau \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial W_{if}}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt \leq 0. \end{aligned}$$

On en déduit que tous les W_{if} et W_{is} sont nuls dans leurs espaces respectifs.

■

2.6 Propriétés qualitatives de la solution

2.6.1 Estimation d'énergie

Proposition 2.6.1 *Pour la solution de (2.6), on a l'estimation d'énergie suivante :*

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (C_{if})^2(r, 1, t) r (1 - r^2) dr dt + \frac{1}{2} \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 (C_{is})^2(z, T) dz \\
 & - \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \delta_i \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i(C_{1s}, \dots, C_{Ns}) C_{is} dz dt \\
 & + \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{if}}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt \\
 & + \delta_N^i \frac{\beta_{Nf} \theta_{Ns}}{\gamma_{Ns}} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{Ns}}{\partial z} \right)^2 dz dt \\
 & = \frac{T}{2} \int_0^1 (C_{i0})^2(r) r (1 - r^2) dr + \frac{1}{2} \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 (C_{is0})^2(z) dz.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Démonstration. On multiplie la i -ième équation de (2.6)₁ par $r(1 - r^2) C_{if}$. On obtient, après intégration sur $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, T]$, avec $T > 0$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial (C_{if})^2}{\partial z} r (1 - r^2) dr dz dt \\
 & - \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial C_{if}}{\partial r} (1, z, t) C_{if}(1, z, t) dz dt \\
 & + \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{if}}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt = 0.
 \end{aligned}$$

L'équation (2.6)₂ sur la surface du canal implique :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C_{if}}{\partial r}(1, z, t) & = -\frac{1}{\gamma_{is}} \frac{\partial C_{is}}{\partial t}(z, t) \\
 & + \frac{\delta_i}{\gamma_{is}} \mathbf{r}_i(C_{1s}, \dots, C_{Ns})(z, t) + \delta_N^i \frac{\theta_{Ns}}{\gamma_{Ns}} \frac{\partial^2 C_{Ns}}{\partial z^2}(z, t),
 \end{aligned}$$

d'où, puisque $C_{if}(1, z, t) = C_{is}(z, t)$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (C_{if})^2(r, 1, t) r (1 - r^2) dr dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (C_{if})^2(r, 0, t) r (1 - r^2) dr dt \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 (C_{is})^2(z, T) dz - \frac{1}{2} \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 (C_{is})^2(z, 0) dz \\
 & - \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \delta_i \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i(C_{1s}, \dots, C_{Ns}) C_{is} dz dt \\
 & - \delta_N^i \frac{\beta_{Nf} \theta_{Ns}}{\gamma_{Ns}} \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial^2 C_{Ns}}{\partial z^2} C_{Ns} dz dt \\
 & + \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{if}}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt = 0.
 \end{aligned}$$

2.6. PROPRIÉTÉS QUALITATIVES DE LA SOLUTION

En tenant compte des égalités :

$$C_{if}(r, 0, t) = C_{i0}(r) ; C_{is}(z, 0) = C_{is0}(z),$$

on obtient le résultat annoncé. ■

Corollaire 2.6.2 *Posons :*

$$\begin{aligned} E_i(T) &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (C_{if})^2(r, 1, t) r(1-r^2) dr dt + \frac{1}{2} \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 (C_{is})^2(z, T) dz \\ &\quad + \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{if}}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt \\ &\quad + \delta_N^i \frac{\beta_{Nf} \theta_{Ns}}{\gamma_{Ns}} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{Ns}}{\partial z} \right)^2 dz dt. \end{aligned}$$

On a :

$$\sum_{i=1}^N E_i(T) \leq aT + b,$$

avec :

$$a = \sum_{i=1}^N \int_0^1 (C_{i0})^2 r(1-r^2) dr ; b = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 (C_{is0})^2 dz.$$

Démonstration. L'estimation (2.39) s'écrit, après avoir sommé sur $i = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N E_i(T) &- \sum_{i=1}^N \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \delta_i \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i(C_{1s}, \dots, C_{Ns}) C_{is} dz dt \\ &= \frac{T}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 (C_{i0})^2 r(1-r^2) dr + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 (C_{is0})^2 dz. \end{aligned}$$

Les hypothèses (H3) et (H4) entraînent :

$$- \sum_{i=1}^N \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \delta_i \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i(C_{1s}, \dots, C_{Ns}) C_{is} dz dt \geq 0,$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^N E_i(T) \leq \frac{T}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 (C_{i0})^2 r(1-r^2) dr + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 (C_{is0})^2 dz.$$

Ceci met en évidence la croissance au plus linéaire par rapport à T de l'énergie totale du système. ■

2.6.2 Encadrement des concentrations pour lesquelles $\delta_i = -1$

Proposition 2.6.3 *Supposons $\delta_i = -1$. Pour presque tout (r, z, t) appartenant à $]0, 1[\times]0, 1[\times]0, T[$, on a :*

$$0 \leq C_{if}(r, z, t) \leq A_{i0}; \quad 0 \leq C_{is}(z, t) \leq A_{i0},$$

avec :

$$A_{i0} = \max \left(\sup_{r \in [0,1]} C_{i0}(r), \sup_{z \in [0,1]} C_{is0}(z) \right).$$

Démonstration. On pose :

$$W_{if} = C_{if} - A_{i0}; \quad W_{is} = C_{is} - A_{i0}.$$

(W_{if}, W_{is}) est solution du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial W_{if}}{\partial z} = \beta_{if} \frac{1}{r(1-r^2)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W_{if}}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial W_{is}}{\partial t} = -\gamma_{is} \frac{\partial W_{if}}{\partial r}(1, z, t) + \delta_i \mathbf{r}_i(W_{1s} + A_{10}, \dots, W_{Ns} + A_{N0}) \\ \quad + \delta_N^i \theta_{Ns} \frac{\partial^2 W_{Ns}}{\partial z^2}, \end{cases} \quad (2.40)$$

pour $i = 1, \dots, N$, avec les conditions aux limites ou initiales :

$$\begin{cases} W_{if}(r, 0, t) = C_{i0}(r) - A_{i0}, & \frac{\partial W_{if}}{\partial r}(0, z, t) = 0, \\ W_{if}(1, z, t) = W_{is}(z, t), & \theta_{Ns} \frac{\partial W_{Ns}}{\partial z}(1, t) = 0, \\ W_{is}(z, 0) = C_{is0}(z) - A_{i0}, & \theta_{Ns} \frac{\partial W_{Ns}}{\partial z}(0, t) = 0. \end{cases}$$

On multiplie la i -ème équation de (2.40)₁ par $r(1-r^2)W_{if}^+$ et on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial (W_{if}^+)^2}{\partial z} r(1-r^2) dr dz dt \\ & + \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial W_{if}^+}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt \\ & - \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial W_{if}}{\partial r}(1, z, t) W_{if}^+(1, z, t) dz dt = 0. \end{aligned}$$

2.6. PROPRIÉTÉS QUALITATIVES DE LA SOLUTION

Puisque δ_i est égal à -1, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{if}}{\partial r}(1, z, t) &= -\frac{1}{\gamma_{is}} \frac{\partial W_{is}}{\partial t}(z, t) - \frac{1}{\gamma_{is}} \mathbf{r}_i(W_{1s} + A_{10}, \dots, W_{Ns} + A_{N0}) \\ &\quad + \delta_N^i \frac{\theta_{Ns}}{\gamma_{Ns}} \frac{\partial^2 W_{Ns}}{\partial z^2}(z, t). \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions aux limites, on en déduit l'égalité :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (W_{if}^+)^2(r, 1, t) r(1-r^2) dr dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (W_{if}^+)^2(r, 0, t) r(1-r^2) dr dt \\ &\quad + \frac{\beta_{if}}{2\gamma_{is}} \int_0^1 (W_{is}^+)^2(z, T) dz - \frac{\beta_{if}}{2\gamma_{is}} \int_0^1 (W_{is}^+)^2(z, 0) dz \\ &\quad + \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i(W_{1s} + A_{10}, \dots, W_{Ns} + A_{N0}) W_{is}^+ dz dt \\ &\quad + \delta_N^i \frac{\theta_{Ns} \beta_{Nf}}{\gamma_{Ns}} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial W_{Ns}^+}{\partial z} \right)^2 dz dt \\ &\quad - \delta_N^i \frac{\theta_{Ns} \beta_{Nf}}{\gamma_{Ns}} \int_0^T \left(\frac{\partial W_{Ns}^+}{\partial z} W_{Ns}^+ \right) (1, t) dt \\ &\quad + \delta_N^i \frac{\theta_{Ns} \beta_{Nf}}{\gamma_{Ns}} \int_0^T \left(\frac{\partial W_{Ns}^+}{\partial z} W_{Ns}^+ \right) (0, t) dt \\ &\quad + \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial W_{if}^+}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt = 0. \end{aligned}$$

Compte tenu de la définition de A_{i0} , on a :

$$\begin{aligned} W_{if}(r, 0, t) = C_{i0}(r) - A_{i0} \leq 0 &\Rightarrow W_{if}^+(r, 0, t) = 0, \\ W_{is}(z, 0) = C_{is0}(z) - A_{i0} \leq 0 &\Rightarrow W_{is}^+(z, 0) = 0, \end{aligned}$$

d'où l'égalité suivante, puisque $\theta_{Ns} \frac{\partial W_{Ns}}{\partial z}(1, t) = 0 = \theta_{Ns} \frac{\partial W_{Ns}}{\partial z}(0, t)$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (W_{if}^+)^2(r, 1, t) r(1-r^2) dr dt + \frac{\beta_{if}}{2\gamma_{is}} \int_0^1 (W_{is}^+)^2(z, T) dz \\ &\quad + \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i(W_{1s} + A_{10}, \dots, W_{Ns} + A_{N0}) W_{is}^+ dz dt \\ &\quad + \delta_N^i \frac{\theta_{Ns} \beta_{Nf}}{\gamma_{Ns}} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial W_{Ns}^+}{\partial z} \right)^2 dz dt \\ &\quad + \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial W_{if}^+}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt = 0. \end{aligned}$$

Ces différentes égalités ne comportent que des termes positifs ou nuls. En effet, le troisième terme peut s'écrire :

$$\frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i(C_{1s}, \dots, C_{Ns}) W_{is}^+ dz dt.$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

Cette intégrale est positive ou nulle compte tenu de l'hypothèse (H2). Ceci prouve que $W_{if}^+ \equiv 0 \equiv W_{is}^+$, dans le cylindre ou sur la paroi. ■

2.6.3 Minoration des concentrations pour lesquelles $\delta_i = 1$

Proposition 2.6.4 *Si $\delta_i = 1$, on a, pour presque tout (r, z, t) appartenant à $]0, 1[\times]0, 1[\times]0, T[$:*

$$a_{i0} \leq C_{if}(r, z, t) ; a_{i0} \leq C_{is}(z, t),$$

avec :

$$a_{i0} = \min \left(\inf_{r \in]0, 1[} C_{i0}(r), \inf_{z \in]0, 1[} C_{is0}(z) \right).$$

Démonstration. On effectue le même changement de fonction inconnue que précédemment, mais avec a_{i0} à la place de A_{i0} , pour obtenir le système (2.40). On multiplie la i -ème équation de (2.40)₁ par $r(1-r^2)W_{if}^-$ et on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial (W_{if}^-)^2}{\partial z} r(1-r^2) dr dz dt + \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial W_{if}^-}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt \\ & - \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial W_{if}^-}{\partial r} (1, z, t) W_{if}^- (1, z, t) dz dt = 0. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{if}^-}{\partial r} (1, z, t) &= -\frac{1}{\gamma_{is}} \frac{\partial W_{is}^-}{\partial t} (z, t) - \frac{1}{\gamma_{is}} \mathbf{r}_i (W_{1s} + A_{10}, \dots, W_{Ns} + A_{N0}) \\ & \quad + \delta_N^i \frac{\theta_{Ns}}{\gamma_{Ns}} \frac{\partial^2 W_{Ns}^-}{\partial z^2} (z, t). \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions aux limites, on en déduit l'égalité :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (W_{if}^-)^2 (r, 1, t) r(1-r^2) dr dt \\ & - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (W_{if}^-)^2 (r, 0, t) r(1-r^2) dr dt \\ & + \frac{\beta_{if}}{2\gamma_{is}} \int_0^1 (W_{is}^-)^2 (z, T) dz - \frac{\beta_{if}}{2\gamma_{is}} \int_0^1 (W_{is}^-)^2 (z, 0) dz \\ & + \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i (W_{1s} + A_{10}, \dots, W_{Ns} + A_{N0}) W_{is}^- dz dt \\ & + \delta_N^i \frac{\theta_{Ns} \beta_{Nf}}{\gamma_{Ns}} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial W_{Ns}^-}{\partial z} \right)^2 dz dt \\ & + \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial W_{if}^-}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt = 0. \end{aligned}$$

2.6. PROPRIÉTÉS QUALITATIVES DE LA SOLUTION

puisque $\theta_{N_s} \frac{\partial W_{N_s}}{\partial z}(1, t) = 0 = \theta_{N_s} \frac{\partial W_{N_s}}{\partial z}(0, t)$. Compte tenu de la définition de A_{i0} , on a :

$$\begin{aligned} W_{if}(r, 0, t) = C_{i0}(r) - A_{i0} \geq 0 &\Rightarrow W_{if}^-(r, 0, t) = 0, \\ W_{is}(z, 0) = C_{is0}(z) - A_{i0} \geq 0 &\Rightarrow W_{is}^-(z, 0) = 0, \end{aligned}$$

d'où l'égalité :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (W_{if}^-)^2(r, 1, t) r(1-r^2) dr dt + \frac{\beta_{if}}{2\gamma_{is}} \int_0^1 (W_{is}^-)^2(z, T) dz \\ &+ \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i (W_{1s} + A_{10}, \dots, W_{N_s} + A_{N0}) W_{is}^- dz dt \\ &+ \delta_N^i \frac{\theta_{N_s} \beta_{Nf}}{\gamma_{N_s}} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial W_{N_s}^-}{\partial z} \right)^2 dz dt + \beta_{if} \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial W_{if}^-}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt = 0, \end{aligned}$$

qui ne comporte que des termes positifs ou nuls, en utilisant le même argument que précédemment pour le troisième terme. Ceci prouve que $W_{if}^- \equiv 0 \equiv W_{is}^-$, dans le cylindre ou sur la paroi. ■

2.6.4 Majoration des concentrations pour lesquelles $\delta_i = 1$

Proposition 2.6.5 *Si $\delta_i = 1$, on a, pour tout (r, z, t) appartenant à $]0, 1[\times]0, 1[\times]0, T[$:*

$$C_{if}(r, z, t) \leq A_{i0} e^{bk\alpha t}; \quad C_{is}(z, t) \leq A_{i0} e^{bk\alpha t},$$

avec :

$$A_{i0} = \max \left(\sup_{r \in [0,1]} C_{i0}(r), \sup_{z \in [0,1]} C_{is0}(z) \right).$$

Démonstration. On part de la formulation variationnelle :

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial C_{if}}{\partial z} \varphi r(1-r^2) dr dz dt \\ &+ \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \beta_{if} \frac{\partial C_{if}}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} r dr dz dt + \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{if}}{\partial t} \varphi \right) (1, z, t) dz dt \\ &+ \delta_N^i \frac{\theta_{N_s} \beta_{Nf}}{\gamma_{N_s}} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{Nf}}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) (1, z, t) dz dt \\ &= \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \mathbf{r}_i (C_{1s}, \dots, C_{N_s}) \varphi (1, z, t) dz dt, \end{aligned}$$

dans laquelle on effectue le changement de fonctions inconnues :

$$C_{if}(r, z, t) = V_{if}(r, z, t) e^{\lambda t}; \quad \varphi(r, z, t) = \psi(r, z, t) e^{-\lambda t},$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial V_{if}}{\partial z} \psi r (1 - r^2) dr dz dt + \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \beta_{if} \frac{\partial V_{if}}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} r dr dz dt \\
 & + \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial V_{if}}{\partial t} \psi \right) (1, z, t) dz dt + \lambda \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 (V_{if} \psi) (1, z, t) dz dt \\
 & + \delta_N^i \frac{\theta_{Ns} \beta_{Nf}}{\gamma_{Ns}} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial V_{Nf}}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) (1, z, t) dz dt \\
 & = \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 (\mathbf{r}_i (V_{1s} e^{\lambda t}, \dots, V_{Ns} e^{\lambda t}) \psi e^{-\lambda t}) (1, z, t) dz dt.
 \end{aligned}$$

Notons : $\psi(r, z, t) = (V_{if}(r, z, t) - A_{i0})^+$. On obtient :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (V_{if}(r, 1, t) - A_{i0})^+ r (1 - r^2) dr dt \\
 & + \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \beta_{if} \left(\frac{\partial}{\partial r} (V_{if} - A_{i0})^+ \right)^2 r dr dz dt \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 ((V_{if} - A_{i0})^+)^2 (1, z, T) dz \\
 & + \lambda \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^T \int_0^1 (V_{if} (V_{if} - A_{i0})^+) (1, z, t) dz dt \\
 & + \delta_N^i \frac{\theta_{Ns} \beta_{Nf}}{\gamma_{Ns}} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial z} (V_{Nf} - A_{N0})^+ \right)^2 (1, z, t) dz dt \\
 & \leq \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} bk\alpha \int_0^T \int_0^1 (V_{if} (V_{if} - A_{i0})^+) (1, z, t) dz dt \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (V_{if}(r, 0, t) - A_{i0})^+ r (1 - r^2) dr dt \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 ((V_{if}(1, z, 0) - A_{i0})^+)^2 dz,
 \end{aligned}$$

en utilisant le caractère lipschitzien de \mathbf{r}_i appliqué entre :

$$\mathbf{r}_i (V_{1s} e^{\lambda t}, \dots, V_{is} e^{\lambda t}, \dots, V_{Ns} e^{\lambda t}) \text{ et } \mathbf{r}_i (V_{1s} e^{\lambda t}, \dots, 0, \dots, V_{Ns} e^{\lambda t}) = 0.$$

On en déduit que si :

$$V_{if}(1, z, 0) \leq A_{i0}; V_{if}(r, 0, t) \leq A_{i0}, \forall (r, z, t) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, T],$$

c'est à dire :

$$C_{is0}(z) \leq A_{i0}; C_{i0}(r) \leq A_{i0} \cdot e^{\lambda t}, \forall (r, z, t) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, T],$$

2.6. PROPRIÉTÉS QUALITATIVES DE LA SOLUTION

alors l'inégalité précédente entraîne, en prenant $\lambda = bk\alpha$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (V_{if}(r, 1, t) - A_{i0})^+ r (1 - r^2) dr dt \\ & + \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \beta_{if} \left(\frac{\partial}{\partial r} (V_{if} - A_{i0})^+ \right)^2 r dr dz dt \\ & + \frac{1}{2} \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 ((V_{if} - A_{i0})^+)^2 (1, z, T) dz \\ & + \delta_N^i \frac{\theta_{Ns} \beta_{Nf}}{\gamma_{Ns}} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial z} (V_{Nf} - A_{N0})^+ \right)^2 (1, z, t) dz dt \leq 0 \end{aligned}$$

et on en déduit que $(V_{if} - A_{i0})^+$ est égale à 0 presque partout dans le canal et sur la paroi du canal. ■

La majoration obtenue dans la Proposition précédente est peu réaliste, puisqu'elle établit une majoration exponentielle par rapport au temps. Pour établir une majoration plus réaliste, nous prouvons une majoration en norme L^2 , polynômiale par rapport au temps.

Proposition 2.6.6 *Il existe des constantes strictement positives a et b telles que pour tout l appartenant à $]0, 1[$ et tout τ appartenant à $]0, T[$:*

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^1 (C_{if})^2(r, l, t) r (1 - r^2) dr dt & \leq a\tau + b, \\ \int_0^l (C_{is})^2(z, \tau) dz & \leq a\tau + b. \end{aligned}$$

Démonstration. On multiplie la i -ème équation de (2.6)₁ par $r(1 - r^2)C_{if}$. On obtient, après intégration sur $[0, 1] \times [0, l] \times [0, \tau]$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l \int_0^1 \frac{\partial (C_{if})^2}{\partial z} r (1 - r^2) dr dz dt \\ & - \beta_{if} \int_0^\tau \int_0^l \frac{\partial C_{if}}{\partial r} (1, z, t) C_{if}(1, z, t) dz dt \\ & + \beta_{if} \int_0^\tau \int_0^l \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{if}}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt = 0. \end{aligned}$$

L'équation (2.6)₂ sur la surface du canal implique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{if}}{\partial r}(1, z, t) & = -\frac{1}{\gamma_{is}} \frac{\partial C_{is}}{\partial t}(z, t) \\ & + \frac{\delta_i}{\gamma_{is}} \mathbf{r}_i(C_{1s}, \dots, C_{Ns})(z, t) + \delta_N^i \frac{\theta_{Ns}}{\gamma_{Ns}} \frac{\partial^2 C_{Ns}}{\partial z^2}(z, t), \end{aligned}$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

d'où, puisque $C_{if}(1, z, t) = C_{is}(z, t)$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^1 (C_{if})^2(r, l, t) r (1 - r^2) dr dt - \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^1 (C_{if})^2(r, 0, t) r (1 - r^2) dr dt \\
& + \frac{1}{2} \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^l (C_{is})^2(z, \tau) dz - \frac{1}{2} \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^l (C_{is})^2(z, 0) dz \\
& - \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \delta_i \int_0^\tau \int_0^l \mathbf{r}_i(C_{1s}, \dots, C_{Ns}) C_{is} dz dt \\
& - \delta_N^i \frac{\beta_{Nf} \theta_{Ns}}{\gamma_{Ns}} \int_0^\tau \int_0^l \frac{\partial^2 C_{Ns}}{\partial z^2} C_{Ns} dz dt \\
& + \beta_{if} \int_0^\tau \int_0^l \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{if}}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt = 0.
\end{aligned}$$

On somme par rapport à i appartenant à $\{1, \dots, N\}$ les égalités ci-dessus et on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^\tau \int_0^1 (C_{if})^2(r, l, t) r (1 - r^2) dr dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^l (C_{is})^2(z, \tau) dz \\
& - \sum_{i=1}^N \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \delta_i \int_0^\tau \int_0^l \mathbf{r}_i(\dots, C_{is}, \dots) C_{is} dz dt \\
& + \sum_{i=1}^N \beta_{if} \int_0^\tau \int_0^l \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{if}}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt \\
& + \frac{\beta_{Nf} \theta_{Ns}}{\gamma_{Ns}} \int_0^\tau \int_0^l \left(\frac{\partial C_{Ns}}{\partial z} \right)^2 dz dt \\
& \leq \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 (C_{i0})^2(r) r (1 - r^2) dr + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^l (C_{is0})^2(z) dz.
\end{aligned}$$

On remarque que la troisième somme est positive ou nulle, en tenant compte des hypothèses (H3) et (H4) et de la positivité des concentrations. Ceci entraîne :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^\tau \int_0^1 (C_{if})^2(r, l, t) r (1 - r^2) dr dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^l (C_{is})^2(z, \tau) dz \\
& + \sum_{i=1}^N \beta_{if} \int_0^\tau \int_0^l \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{if}}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt + \frac{\beta_{Nf} \theta_{Ns}}{\gamma_{Ns}} \int_0^\tau \int_0^l \left(\frac{\partial C_{Ns}}{\partial z} \right)^2 dz dt \\
& \leq \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 (C_{i0})^2(r) r (1 - r^2) dr + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^l (C_{is0})^2(z) dz.
\end{aligned}$$

En notant :

$$a = \sum_{i=1}^N \int_0^1 (C_{i0})^2(r) r (1 - r^2) dr ; b = \sum_{i=1}^N \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^l (C_{is0})^2(z) dz,$$

2.6. PROPRIÉTÉS QUALITATIVES DE LA SOLUTION

on obtient l'inégalité :

$$\sum_{i=1}^N \int_0^\tau \int_0^1 (C_{if})^2(r, l, t) r (1 - r^2) dr dt + \sum_{i=1}^N \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^l (C_{is})^2(z, \tau) dz \leq a\tau + b.$$

Le résultat annoncé en découle. ■

2.6.5 Relations entre les solutions

On pose :

$$\begin{aligned} I^+ &= \{1 \leq i \leq N - 1 \mid \delta_i = 1\}, \\ I^- &= \{1 \leq i \leq N - 1 \mid \delta_i = -1\}, \end{aligned}$$

de manière à avoir : $I^+ \cup I^- = \{1, \dots, N - 1\}$.

Proposition 2.6.7 *Supposons que soient réalisées les hypothèses suivantes :*

- 1- $\forall i \in \{1, \dots, N - 1\}$, $\beta_{1f} = \dots = \beta_{N-1f} =: \beta_f$ et $\gamma_{1s} = \dots = \gamma_{N-1s} =: \gamma_s$.
- 2- Il existe $N - 1$ réels α_i strictement positifs tels que :

$$\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \delta_i \mathbf{r}_i(x_1, \dots, x_N) = 0.$$

- 3- $\forall i \in \{1, \dots, N - 1\}$, $\forall (r, z) \in [0, 1] \times [0, 1]$, $C_{i0}(r) = C_{is0}(z) = A_{i0}$.

Alors si on note :

$$\Psi_f(r, z, t) = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i C_{if}(r, z, t), \quad \Psi_s(z, t) = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i C_{is}(z, t),$$

Ψ_f et Ψ_s sont constants.

Démonstration. (Ψ_f, Ψ_s) est solution du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi_f}{\partial z}(r, z, t) = \beta_f \frac{1}{r(1-r^2)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi_f}{\partial r} \right) (r, z, t), \\ \frac{\partial \Psi_s}{\partial t}(z, t) = -\gamma_s \frac{\partial \Psi_f}{\partial r}(1, z, t), \end{cases} \quad (2.41)$$

avec les conditions aux limites ou initiales :

$$\begin{cases} \Psi_f(r, 0, t) = A, & \frac{\partial \Psi_f}{\partial r}(0, z, t) = 0, \\ \Psi_f(1, z, t) = \Psi_s(z, t), & \Psi_s(z, 0) = A, \end{cases}$$

et $A = \sum_{i=1}^{N-1} A_{i0}$.

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

Si on pose $\tilde{\Psi}_f = \Psi_f - A$ et $\tilde{\Psi}_s = \Psi_s - A$, $\tilde{\Psi}_f$ et $\tilde{\Psi}_s$ sont solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\Psi}_f}{\partial z}(r, z, t) = \beta_f \frac{1}{r(1-r^2)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{\Psi}_f}{\partial r} \right) (r, z, t), \\ \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial t}(z, t) = -\gamma_f \frac{\partial \tilde{\Psi}_f}{\partial r}(1, z, t), \end{cases} \quad (2.42)$$

avec les conditions aux limites ou initiales :

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_f(r, 0, t) = 0, & \frac{\partial \tilde{\Psi}_f}{\partial r}(0, z, t) = 0, \\ \tilde{\Psi}_f(1, z, t) = \tilde{\Psi}_s(z, t), & \tilde{\Psi}_s(z, 0) = 0, \end{cases}$$

A l'aide des équations (2.42)₁ dans le cylindre, on obtient l'égalité :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \left(\tilde{\Psi}_f \right)^2 (r, 1, t) r (1-r^2) dr dt + \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \beta_f \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}_f}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt \\ & = \int_0^T \int_0^1 \beta_f \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}_f}{\partial r} \tilde{\Psi}_f \right) (1, z, t) dz dt. \end{aligned}$$

En utilisant les équations (2.42)₂ sur la paroi, on obtient :

$$\beta_f \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}_f}{\partial r} \tilde{\Psi}_f \right) (1, z, t) dz dt = -\frac{\beta_f}{\gamma_s} \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial t} \tilde{\Psi}_s dz dt.$$

Cette égalité, combinée avec la précédente, donne :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \left(\tilde{\Psi}_f \right)^2 (r, 1, t) r (1-r^2) dr dt + \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \beta_f \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}_f}{\partial r} \right)^2 r dr dz dt \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \Gamma \left(\tilde{\Psi}_s \right)^2 (z, T) dz + \int_0^T \int_0^1 \Gamma \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial z} \right)^2 dz dt \\ & = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \left(\tilde{\Psi}_f \right)^2 (r, 0, t) r (1-r^2) dr dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \Gamma \left(\tilde{\Psi}_s \right)^2 (z, 0) dz \\ & = 0, \end{aligned}$$

qui implique que $\tilde{\Psi}_f \equiv \tilde{\Psi}_s \equiv 0$, d'où $\Psi_f \equiv \Psi_s \equiv A$ et le résultat. ■

Corollaire 2.6.8 *Sous les hypothèses de la Proposition 2.6.7, pour tout i de I^+ , il existe des constantes positives c_i telles que pour presque tout (r, z, t) appartenant à $]0, 1[\times]0, 1[\times]0, T[$, on ait :*

$$a_{i0} \leq C_{if}(r, z, t) \leq c_i; \quad a_{i0} \leq C_{is}(z, t) \leq c_i,$$

où a_{i0} est définie dans la Proposition 2.6.4.

2.6. PROPRIÉTÉS QUALITATIVES DE LA SOLUTION

Démonstration. D'après la Proposition 2.6.7, on a :

$$\Psi_f = \sum_{i=1, \dots, N-1} \alpha_i C_{if} = \sum_{i \in I^+} \alpha_i C_{if} + \sum_{i \in I^-} \alpha_i C_{if} = A \geq 0,$$

d'où comme pour tout i on a $\alpha_i > 0$ et $C_{if} \geq 0$ on trouve que :

$$0 \leq \sum_{i \in I^+} \alpha_i C_{if} = A - \sum_{i \in I^-} \alpha_i C_{if} = C,$$

d'où :

$$C_{if} \leq \frac{C}{\alpha_i} = c_i,$$

la démonstration est analogue pour C_{is} . ■

Nous avons également la

Proposition 2.6.9 *En particulier, si pour un indice i tel que $\delta_i = 1$, il existe un indice j tel que :*

$$\begin{cases} \delta_j = -1, & \mathbf{r}_j = -a\mathbf{r}_i, \\ \beta_{is} = \beta_{js}, & C_{j0}(r) = aC_{i0}(r), \\ \gamma_{is} = \gamma_{js}, & C_{js0}(z) = aC_{is0}(z), \end{cases} \quad (2.43)$$

avec $a > 0$, alors on a :

$$C_{jf}(r, z, t) = aC_{if}(r, z, t) ; C_{js}(z, t) = aC_{is}(z, t),$$

pour tout (r, z, t) de $]0, 1[\times]0, 1[\times]0, T[$, et C_{if} , C_{is} sont majorés.

Démonstration. Elle suit les mêmes lignes que la démonstration précédente.

■

Remarque 2.6.10 1. Remarquons que si une relation (2.43) existe pour les concentrations CO , O_2 et CO_2 , elle entraîne une majoration de la concentration en CO_2 , en utilisant les minoration sur CO et O_2 .

2. Dans le cas de la réaction $CO + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow CO_2$, l'hypothèse sur l'égalité des coefficients β_{if} , γ_{is} et θ_{is} se réduit à supposer que $D_{CO_f} = D_{O_2_f} = D_{CO_2_f}$ (cf. partie suivante).

2.7 Comportement asymptotique en temps

On suppose dans ce paragraphe que les concentrations et la température existent pour tout $t > 0$ et sont bornées indépendamment du temps. L'objectif est d'étudier le comportement limite de ces solutions quand $t \rightarrow +\infty$. Nous nous inspirons des techniques de [1] pour établir ce comportement limite. Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 2.7.1 *Supposons que le problème :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C_{if}^\infty}{\partial z}(r, z) = \beta_{if} \frac{1}{r(1-r^2)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_{if}^\infty}{\partial r} \right) (r, z), \\ -\delta_N^i \theta_{Ns} \frac{\partial^2 C_{Ns}^\infty}{\partial z^2}(z) = -\gamma_{is} \frac{\partial C_{if}^\infty}{\partial r}(1, z) + \delta_i \mathbf{r}_i (C_{1s}^\infty, \dots, C_{1s}^\infty)(z), \end{array} \right. \quad (2.44)$$

avec les conditions aux limites ou initiales :

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_{if}^\infty(r, 0) = C_{i0}(r), & \frac{\partial C_{if}^\infty}{\partial r}(0, z) = 0, \\ C_{if}^\infty(1, z) = C_{is}^\infty(z), & \\ \theta_{Ns} \frac{\partial C_{Ns}^\infty}{\partial z}(1) = 0, & \theta_{Ns} \frac{\partial C_{Ns}^\infty}{\partial z}(0) = 0, \end{array} \right.$$

admet une unique solution dans un espace adapté. La solution du problème (2.6) converge dans la topologie faible de L^2 vers la solution de (2.44).

Démonstration. La solution (C_{if}, C_{is}) était bornée indépendamment du temps, il existe $(C_{if}^\infty, C_{is}^\infty)$ limite de (C_{if}, C_{is}) dans la topologie faible de L^2 quand $t \rightarrow +\infty$. Soient φ une fonction de $C^\infty([0, 1] \times [0, 1])$ et ψ la fonction de $C^\infty([0, 1])$ définie par : $\psi(z) = \varphi(1, z)$. On note :

$$(C_{if}^n, C_{is}^n)(r, z, t) = (C_{if}, C_{is})(r, z, t + n).$$

(C_{if}^n, C_{is}^n) est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C_{if}^n}{\partial z}(r, z, t) = \beta_{if} \frac{1}{r(1-r^2)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_{if}^n}{\partial r} \right) (r, z, t), \\ \frac{\partial C_{is}^n}{\partial t}(z, t) = \delta_N^i \theta_{Ns} \frac{\partial^2 C_{Ns}^n}{\partial z^2}(z, t) \\ -\gamma_{is} \frac{\partial C_{if}^n}{\partial r}(1, z, t) + \delta_i \mathbf{r}_i (C_{1s}^n, \dots, C_{1s}^n)(z), \end{array} \right. \quad (2.45)$$

2.7. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE EN TEMPS

avec les conditions aux limites ou initiales :

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_{if}^n(r, 0, t) = C_{i0}(r), & \frac{\partial C_{if}^n}{\partial r}(0, z, t) = 0, \\ C_{if}^n(1, z, t) = C_{is}^n(z, t), & C_{is}^n(z, 0) = C_{is}(z, n), \\ \theta_{Ns} \frac{\partial C_{Ns}^n}{\partial z}(1, t) = 0, & \theta_{Ns} \frac{\partial C_{Ns}^n}{\partial z}(0, t) = 0. \end{array} \right.$$

On multiplie l'équation (2.45)₁ (resp. (2.45)₂) par $r(1-r^2)\varphi$ (resp. par ψ).
On obtient après intégration :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^T \frac{\partial C_{if}^n}{\partial z}(r, z, t) \varphi(r, z) r(1-r^2) dr dz dt \\ & + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^T \beta_{if} \frac{\partial C_{if}^n}{\partial r}(r, z, t) \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, z) r dr dz dt \\ & - \int_0^1 \int_0^T \beta_{if} \frac{\partial C_{if}^n}{\partial r}(1, z, t) \varphi(1, z) dz dt = 0, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^T \frac{\partial C_{is}^n}{\partial t}(z, t) \psi(z) dz dt + \delta_N^i \theta_{Ns} \int_0^1 \int_0^T \frac{\partial C_{Ns}^n}{\partial z}(z, t) \psi'(z) dz dt \\ & = \int_0^1 \int_0^T \gamma_{is} \frac{\partial C_{if}^n}{\partial r}(1, z, t) \psi(z) dz dt + \int_0^1 \int_0^T \delta_i \mathbf{r}_i(C_{1s}^n, \dots, C_{1s}^n) \psi(z) dz dt. \end{aligned}$$

En combinant ces deux égalités, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^T \frac{\partial C_{if}^n}{\partial z}(r, z, t) \varphi(r, z) r(1-r^2) dr dz dt \\ & + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^T \beta_{if} \frac{\partial C_{if}^n}{\partial r}(r, z, t) \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, z) r dr dz dt \\ & + \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 \int_0^T \frac{\partial C_{is}^n}{\partial t}(z, t) \psi(z) dz dt + \delta_N^i \frac{\beta_{Nf} \theta_{Ns}}{\gamma_{Ns}} \int_0^1 \int_0^T \frac{\partial C_{Ns}^n}{\partial z}(z, t) \psi'(z) dz dt \\ & = \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 \int_0^T \delta_i \mathbf{r}_i(C_{1s}^n, \dots, C_{1s}^n) \psi(z) dz dt, \end{aligned}$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

puisque $\psi(z) = \varphi(1, z)$. On intègre par parties :

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 \int_0^1 \int_0^T C_{if}^n(r, z, t) \frac{\partial \varphi}{\partial z}(r, z) r (1 - r^2) dr dz dt \\
& + \int_0^1 \int_0^T C_{if}^n(r, 1, t) \varphi(r, 1) r (1 - r^2) dr dt \\
& - \int_0^1 \int_0^T C_{if}^n(r, 0, t) \varphi(r, 0) r (1 - r^2) dr dt \\
& - \int_0^1 \int_0^1 \int_0^T \beta_{if} C_{if}^n(r, z, t) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, z) r \right) dr dz dt \\
& + \int_0^1 \int_0^T \beta_{if} C_{if}^n(1, z, t) \frac{\partial \varphi}{\partial r}(1, z) dz dt + \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 C_{is}^n(z, T) \psi(z) dz \\
& - \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 C_{is}^n(z, 0) \psi(z) dz - \delta_N^i \frac{\beta_{Nf} \theta_{Ns}}{\gamma_{Ns}} \int_0^1 \int_0^T C_{Ns}^n(z, t) \psi''(z) dz dt \\
& + \delta_N^i \frac{\beta_{Nf} \theta_{Ns}}{\gamma_{Ns}} \int_0^T C_{Ns}^n(1, t) \psi'(1) dt - \delta_N^i \frac{\beta_{Nf} \theta_{Ns}}{\gamma_{Ns}} \int_0^T C_{Ns}^n(0, t) \psi'(1) dz dt \\
& = \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 \int_0^T \delta_{i\mathbf{r}_i} (C_{1s}^n, \dots, C_{1s}^n) \psi(z) dz dt.
\end{aligned}$$

On passe enfin à la limite quand n tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 \int_0^1 \int_0^T C_{if}^\infty(r, z) \frac{\partial \varphi}{\partial z}(r, z) r (1 - r^2) dr dz dt \\
& + \int_0^1 \int_0^T C_{if}^\infty(r, 1) \varphi(r, 1) r (1 - r^2) dr dt \\
& - \int_0^1 \int_0^T C_{if}^\infty(r, 0) \varphi(r, 0) r (1 - r^2) dr dt \\
& - \int_0^1 \int_0^1 \int_0^T \beta_{if} C_{if}^\infty(r, z) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, z) r \right) dr dz dt \\
& + \int_0^1 \int_0^T \beta_{if} C_{if}^\infty(1, z) \frac{\partial \varphi}{\partial r}(1, z) dz dt + \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 C_{is}^\infty(z) \psi(z) dz \\
& - \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 C_{is}^\infty(z) \psi(z) dz - \delta_N^i \frac{\beta_{Nf} \theta_{Ns}}{\gamma_{Ns}} \int_0^1 \int_0^T C_{Ns}^\infty(z) \psi''(z) dz dt \\
& + \delta_N^i \frac{\beta_{Nf} \theta_{Ns}}{\gamma_{Ns}} \int_0^T C_{Ns}^\infty(1) \psi'(1) dt - \delta_N^i \frac{\beta_{Nf} \theta_{Ns}}{\gamma_{Ns}} \int_0^T C_{Ns}^\infty(0) \psi'(1) dz dt \\
& = \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 \int_0^T \delta_{i\mathbf{r}_i} (C_{1s}^\infty, \dots, C_{1s}^\infty) \psi(z) dz dt,
\end{aligned}$$

en utilisant la convergence faible dans L^2 ou le Théorème 2.1 de [7, page 22]. On peut alors supprimer l'intégrale par rapport à T , puisque les fonctions qui

2.7. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE EN TEMPS

apparaissent n'en dépendent plus et réintégrer par parties :

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial C_{if}^\infty}{\partial z}(r, z) \varphi(r, z) r (1 - r^2) dr dz \\
& - \int_0^1 \int_0^1 \beta_{if} \frac{\partial C_{if}^\infty}{\partial r}(r, z) \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, z) r dr dz + \delta_N^i \frac{\beta_{Nf} \theta_{Ns}}{\gamma_{Ns}} \int_0^1 \frac{\partial C_{Ns}^\infty}{\partial z}(z) \psi'(z) dz \\
& = \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 \delta_i \mathbf{r}_i(C_{1s}^\infty, \dots, C_{1s}^\infty) \psi(z) dz.
\end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie pour tous φ et ψ vérifiant : $\psi(z) = \varphi(1, z)$, on en déduit que $(C_{if}^\infty, C_{is}^\infty)$ est solution de (2.44). ■

2.7.1 Propriétés de la solution du système limite

La proposition suivante donne une égalité liant la moyenne d'une concentration à l'entrée du cylindre à celle de la même concentration à la sortie du cylindre via ce qui a été créé ou consommé sur la paroi :

Proposition 2.7.2 *La solution de (2.44) vérifie pour tout $i \in \{1, \dots, N-1\}$:*

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 C_{if}^\infty(r, 1) r (1 - r^2) dr - \int_0^1 C_{i0}(r) r (1 - r^2) dr \\
& = \frac{\delta_i \beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 \mathbf{r}_i(C_{1s}^{\infty+}, \dots, C_{Ns}^{\infty+}) dz,
\end{aligned}$$

Démonstration. On intègre la i -ème équation ($i \neq N$) de (2.44)₁ pour r appartenant à $[0, 1]$, après l'avoir multiplié par $r(1 - r^2)$ et on obtient :

$$\int_0^1 \frac{\partial C_{if}^\infty}{\partial z} r (1 - r^2) dr = \beta_{if} \frac{\partial C_{if}^\infty}{\partial r}(1, z).$$

On intègre encore une fois pour z appartenant à $[0, 1]$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 C_{if}^\infty(r, 1) r (1 - r^2) dr - \int_0^1 C_{if}^\infty(r, 0) r (1 - r^2) dr = \beta_{if} \int_0^1 \frac{\partial C_{if}^\infty}{\partial r}(1, z) dz \\
& \Leftrightarrow \int_0^1 C_{if}^\infty(r, 1) r (1 - r^2) dr - \int_0^1 C_{i0}(r) r (1 - r^2) dr = \beta_{if} \int_0^1 \frac{\partial C_{if}^\infty}{\partial r}(1, z) dz.
\end{aligned}$$

En tenant compte de la i -ème équation ($i \neq N$) de (2.44)₂, on a :

$$\frac{\partial C_{if}^\infty}{\partial r}(1, z) = \frac{\delta_i}{\gamma_{is}} \mathbf{r}_i(C_{1s}^{\infty+}, \dots, C_{Ns}^{\infty+}),$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

ce qui implique :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 C_{if}^\infty(r, 1) r(1-r^2) dr - \int_0^1 C_{i0}(r) r(1-r^2) dr \\ &= \frac{\delta_i \beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^1 \mathbf{r}_i(C_{1s}^\infty, \dots, C_{Ns}^\infty) dz, \end{aligned}$$

qui est le résultat annoncé. ■

Les deux propositions suivantes sont destinées à donner une idée de critère pouvant être utilisé de manière approchée lors de la simulation numérique, pour localiser d'éventuels "fronts de réaction", c'est à dire des endroits dans le cylindre où une espèce a disparu, ce qui peut entraîner que les concentrations d'autres espèces restent constantes.

Proposition 2.7.3 *Supposons qu'il existe un indice j différent de N et un réel l_j^* appartenant à $]0, 1[$ tels que :*

$$\int_0^{l_j^*} \mathbf{r}_j(C_{1s}^\infty, \dots, C_{Ns}^\infty) C_{js}^\infty dz = \frac{\gamma_{js}}{2\beta_{jf}} \int_0^1 (C_{j0})^2(r) r(1-r^2) dr.$$

Alors si $\delta_j = -1$, on a :

$$\forall z \in]l_j^*, 1[: C_{jf}^\infty = C_{js}^\infty = 0.$$

Démonstration. La i -ème équation dans le cylindre pour le système limite devient, en intégrant pour z appartenant à $[0, l]$, $l < 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 (C_{if}^\infty)^2(r, l) r(1-r^2) dr + \beta_{if} \int_0^l \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{if}^\infty}{\partial r} \right)^2 r dr dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (C_{i0})^2(r) r(1-r^2) dr + \delta_i \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^l \mathbf{r}_i(C_{1s}^\infty, \dots, C_{Ns}^\infty) C_{is}^\infty dz. \end{aligned}$$

Si $\delta_i = -1$, l'égalité précédente devient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 (C_{if}^\infty)^2(r, l) r(1-r^2) dr + \beta_{if} \int_0^l \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{if}^\infty}{\partial r} \right)^2 r dr dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (C_{i0})^2(r) r(1-r^2) dr - \frac{\beta_{if}}{\gamma_{is}} \int_0^l \mathbf{r}_i(C_{1s}^\infty, \dots, C_{Ns}^\infty) C_{is}^\infty dz. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse de la Proposition, on a, pour $i = j$ et $l = l_j^*$:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (C_{jf}^\infty)^2(r, l_j^*) r(1-r^2) dr + \beta_{jf} \int_0^{l_j^*} \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{jf}^\infty}{\partial r} \right)^2 r dr dz = 0, \quad (2.46)$$

2.7. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE EN TEMPS

qui implique que :

$$\forall (r, z) \in]0, 1[\times]0, l_j^*[: \frac{\partial C_{jf}^\infty}{\partial r}(r, z) = 0 \Rightarrow C_{jf}^\infty(r, z) \equiv C_{js}^\infty(z),$$

et également que $C_{jf}^\infty(r, l_j^*) \equiv 0 = C_{js}^\infty(l_j^*)$. On réécrit la première égalité pour j , en séparant les intégrations sur $]0, l_j^*[$ et sur $]l_j^*, 1[$. On obtient pour $l_j^* \leq l \leq 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 (C_{jf}^\infty)^2(r, l_j^*) r(1-r^2) dr - \frac{1}{2} \int_0^1 (C_{j0}^\infty)^2(r) r(1-r^2) dr \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 (C_{jf}^\infty)^2(r, l) r(1-r^2) dr - \frac{1}{2} \int_0^1 (C_{jf}^\infty)^2(r, l_j^*) r(1-r^2) dr \\ & + \beta_{jf} \int_0^{l_j^*} \int_0^1 \left(\frac{\partial C_{jf}^\infty}{\partial r} \right)^2 r dr dz + \beta_{jf} \int_{l_j^*}^l \int_0^1 r \left(\frac{\partial C_{jf}^\infty}{\partial r} \right)^2 dr dz \\ & = -\frac{\beta_{jf}}{\gamma_{jf}} \int_0^{l_j^*} \mathbf{r}_j(C_{1s}^\infty, \dots, C_{Ns}^\infty) C_{js}^\infty dz - \frac{\beta_{jf}}{\gamma_{jf}} \int_{l_j^*}^l \mathbf{r}_j(C_{1s}^\infty, \dots, C_{Ns}^\infty) C_{js}^\infty dz, \end{aligned}$$

qui équivaut à :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 (C_{jf}^\infty)^2(r, l) r(1-r^2) dr + \beta_{jf} \int_{l_j^*}^l \int_0^1 r \left(\frac{\partial C_{jf}^\infty}{\partial r} \right)^2 dr dz \\ & = \frac{1}{2} \int_0^1 (C_{j0}^\infty)^2(r) r(1-r^2) dr - \frac{\beta_{jf}}{\gamma_{jf}} \int_0^{l_j^*} \mathbf{r}_j(C_{1s}^\infty, \dots, C_{Ns}^\infty) C_{js}^\infty dz \\ & \quad - \frac{\beta_{jf}}{\gamma_{jf}} \int_{l_j^*}^l \mathbf{r}_j(C_{1s}^\infty, \dots, C_{Ns}^\infty) C_{js}^\infty dz. \end{aligned}$$

Compte tenu des résultats précédents, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 (C_{jf}^\infty)^2(r, l) r(1-r^2) dr + \beta_{jf} \int_{l_j^*}^l \int_0^1 r \left(\frac{\partial C_{jf}^\infty}{\partial r} \right)^2 dr dz \\ & + \frac{\beta_{jf}}{\gamma_{jf}} \int_{l_j^*}^l \mathbf{r}_j(C_{1s}^\infty, \dots, C_{Ns}^\infty) C_{js}^\infty dz = 0. \end{aligned}$$

Comme tous les termes sont positifs ou nuls, on a, pour tout z appartenant à $]l_j^*, 1[$: $C_{jf}^\infty \equiv C_{js}^\infty \equiv 0$. ■

Proposition 2.7.4 Soient $j \in \{1, \dots, N-1\}$ et $l^* \in]0, 1[$ tels que $C_{jf}^\infty, C_{js}^\infty$ vérifient la proposition 2.7.3 et soit $\Theta \subset \{1, \dots, N-1\}$ l'ensemble des indices i pour lesquels C_{js}^∞ apparaît dans la fonctionnelle \mathbf{r}_i . Alors on a :

$$\forall i \in \Theta, \forall l \in]l^*, 1[: \int_0^1 C_{if}^\infty(r, l) r(1-r^2) dr = \int_0^1 C_{if}^\infty(r, l^*) r(1-r^2) dr.$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION ET ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

Démonstration. Soit $i \in \Theta$, alors pour tout $l \geq l^*$ on a : $\mathbf{r}_i(\dots, C_{j_s}^\infty, \dots) = 0$. Ceci implique que $\frac{\partial C_{if}^\infty}{\partial r}(1, z)$ est également nul pour $z \in [l^*, 1]$ grâce à (2.44)₂. D'où en intégrant (2.44)₁ on obtient que $\forall z \in [l^*, 1]$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial C_{if}^\infty}{\partial z} r(1-r^2) dr - \beta_{if} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_{if}^\infty}{\partial r} \right) dr &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{\partial C_{if}^\infty}{\partial z} r(1-r^2) dr - \beta_{if} \frac{\partial C_{if}^\infty}{\partial r}(1, z) &= 0, \end{aligned}$$

qui devient :

$$\forall z \in [l^*, 1] : \int_0^1 \frac{\partial C_{if}^\infty}{\partial z} r(1-r^2) dr = 0.$$

Ceci équivaut à :

$$\int_0^1 C_{if}^\infty(r, l) r(1-r^2) dr = \int_0^1 C_{if}^\infty(r, l^*) r(1-r^2) dr.$$

Donc la moyenne de C_{if}^∞ pondérée par $r(1-r^2)$ sur une tranche à $z = l$ constant est constante et égale à la moyenne pondérée en $z = l^*$. ■

Chapitre 3

Réaction $CO + O_2/2 \rightarrow CO_2$

En considérant les seules espèces CO , O_2 et CO_2 et la température, on a les 8 équations couplées suivantes à résoudre, dans lesquelles on a effectué le même changement de variables que dans la première partie et où les valeurs des différentes constantes sont données en annexe, de même que l'expression de la fonction \hat{r}_{CO} .

Dans le fluide, c'est à dire pour tout (r, z, t) appartenant à $[0, 1[\times]0, 1[\times]0, T[$:

$$\left\{ \begin{array}{l} r(1-r^2) \frac{\partial C_{CO_f}}{\partial z} - \frac{D_{CO_f} L}{V_{\max} R_f^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_{CO_f}}{\partial r} \right) = 0, \\ r(1-r^2) \frac{\partial C_{O_2_f}}{\partial z} - \frac{D_{O_2_f} L}{V_{\max} R_f^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_{O_2_f}}{\partial r} \right) = 0, \\ r(1-r^2) \frac{\partial C_{CO_2_f}}{\partial z} - \frac{D_{CO_2_f} L}{V_{\max} R_f^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_{CO_2_f}}{\partial r} \right) = 0, \\ r(1-r^2) \frac{\partial T_f}{\partial z} - \frac{\lambda_f L}{\rho_f C_{p_f} V_{\max} R_f^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_f}{\partial r} \right) = 0, \end{array} \right.$$

avec les conditions aux limites ou initiales :

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_{CO_f}(r, 0, t) = C_{CO_0}(r), & C_{O_2_f}(r, 0, t) = C_{O_2_0}(r), \\ C_{CO_2_f}(r, 0, t) = C_{CO_2_0}(r), & T_f(r, 0, t) = T_0(r), \\ \frac{\partial C_{CO_f}}{\partial r}(0, z, t) = 0, & \frac{\partial C_{O_2_f}}{\partial r}(0, z, t) = 0, \\ \frac{\partial C_{CO_2_f}}{\partial r}(0, z, t) = 0, & \frac{\partial T_f}{\partial r}(0, z, t) = 0. \end{array} \right.$$

CHAPITRE 3. RÉACTION $CO + O_2/2 \rightarrow CO_2$

Sur la paroi, c'est à dire pour tout (z, t) appartenant à $]0, 1[\times]0, T[$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C_{CO_s}}{\partial t} = -\frac{SD_{CO_f}}{\varepsilon_s R_f} \frac{\partial C_{CO_f}}{\partial r} (1, z, t) - \frac{a}{\varepsilon_s} \hat{r}_{CO} (C_{CO_s}, C_{O_2s}, T_s), \\ \frac{\partial C_{O_2s}}{\partial t} = -\frac{SD_{O_2f}}{\varepsilon_s R_f} \frac{\partial C_{O_2f}}{\partial r} (1, z, t) - \frac{a}{2\varepsilon_s} \hat{r}_{CO} (C_{CO_s}, C_{O_2s}, T_s), \\ \frac{\partial C_{CO_2s}}{\partial t} = -\frac{SD_{CO_2f}}{\varepsilon_s R_f} \frac{\partial C_{CO_2f}}{\partial r} (1, z, t) + \frac{a}{\varepsilon_s} \hat{r}_{CO} (C_{CO_s}, C_{O_2s}, T_s), \\ \frac{\partial T_s}{\partial t} = -\frac{S\lambda_f}{(1-\varepsilon_s)\rho_s C_{ps} R_f} \frac{\partial T_f}{\partial r} (1, z, t) + \frac{\lambda_s}{\rho_s C_{ps} L^2} \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} \\ \quad + \frac{a(-\Delta H)}{(1-\varepsilon_s)\rho_s C_{ps}} \hat{r}_{CO} (C_{CO_s}, C_{O_2s}, T_s), \end{array} \right.$$

avec les conditions aux limites ou initiales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{CO_s}(z, 0) = C_{CO_s0}(z), \quad C_{O_2s}(z, 0) = C_{O_2s0}(z), \\ C_{CO_2s}(z, 0) = C_{CO_2s0}(z), \quad T_s(z, 0) = T_{s0}(z), \\ \frac{\partial T_s}{\partial z}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial T_s}{\partial z}(1, t) = 0, \end{array} \right.$$

auxquelles on ajoute les conditions de transmission sur la paroi du canal :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{CO_f}(1, z, t) = C_{CO_s}(z, t), \quad C_{CO_2f}(1, z, t) = C_{CO_2s}(z, t), \\ C_{O_2f}(1, z, t) = C_{O_2s}(z, t), \quad T_f(1, z, t) = T_s(z, t). \end{array} \right.$$

3.1 Schéma général de résolution

On utilise le schéma suivant pour l'évolution en temps du système.

On commence par la température :

$$T_s(z, t) \rightarrow T_f(r, z, t) \rightarrow T_s(z, t + \Delta t),$$

et ensuite on résout pour les espèces chimiques :

$$C_{is}(z, t) \rightarrow C_{if}(r, z, t) \rightarrow C_{is}(z, t + \Delta t),$$

$i = 1, 2, 3, 4.$

3.2 Simulation numérique par éléments finis

3.2.1 Dans le cylindre

3.2.1.1 Description du schéma numérique utilisé

Dans le cylindre, nous avons à résoudre des équations du type :

$$r(1-r^2) \frac{\partial u_l}{\partial z}(r, z, t) - \beta(u_N) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_l}{\partial r} \right)(r, z, t) = 0, \quad (3.1)$$

où $l = 0, \dots, N$, u_N désignant la température. Les conditions aux limites associées à (3.1) sont :

$$u_l(r, 0, t) = u_{l0}(r) ; u_l(1, z, t) = u_{ls}(z, t) ; \frac{\partial u_l}{\partial r}(0, z, t) = 0.$$

Si l est égal à N (température), l'équation correspondante s'écrit :

$$r(1-r^2) \frac{\partial u_N}{\partial z}(r, z, t) - \beta(u_N) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_N}{\partial r} \right)(r, z, t) = 0,$$

avec les conditions aux limites précédentes. Pour assurer la convergence du schéma numérique à chaque étape i , où i désigne l'indice de progression en z , on procède comme suit. On omet l'indice N et on pose : $u_{i+1}^0 = u_i$. Ensuite, on construit les itérés suivants pour $k \geq 0$ avec i fixé :

$$\begin{aligned} r(1-r^2) \frac{u_{i+1}^{k+1} - u_i}{\Delta z} - \beta(u_{i+1}^k) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_{i+1}^{k+1}}{\partial r} \right) &= 0, \\ \Leftrightarrow u_{i+1}^{k+1} &= u_i + \beta(u_{i+1}^k) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_{i+1}^{k+1}}{\partial r} \right) \frac{\Delta z}{r(1-r^2)}, \end{aligned}$$

jusqu'à obtenir la convergence $\|u_{i+1}^{k+1} - u_{i+1}^k\| \leq \varepsilon$. On obtient ainsi la valeur de $u_{i+1} := u_{i+1}^{k+1}$.

Si l est différent de N (espèces chimiques), on résout directement (3.1) en utilisant la méthode des éléments finis en r et un schéma de Crank-Nicholson pour la progression en z , car on dispose de u_N , ayant commencé par résoudre l'équation avec $l = N$.

3.2.1.2 Discrétisation par éléments finis

Dans le cylindre, d'après ce qui précède, on peut se ramener à résoudre des équations du type :

$$r(1-r^2) \frac{\partial u}{\partial z}(r, z, t) - \beta \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)(r, z, t) = 0,$$

CHAPITRE 3. RÉACTION $CO + O_2/2 \rightarrow CO_2$

avec les conditions aux limites :

$$u(r, 0, t) = u_0(r) ; u(1, z, t) = u_s(z, t) ; \frac{\partial u}{\partial r}(0, z, t) = 0.$$

On effectue le changement de fonction inconnue : $U(r, z) = u(r, z) - u_s(z)$, de manière à obtenir les équations :

$$r(1-r^2) \frac{\partial U}{\partial z}(r, z, t) - \beta \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) (r, z, t) = -r(1-r^2) \frac{\partial u_s}{\partial z}(z, t),$$

avec les conditions aux limites :

$$U(r, 0, t) = u_0(r) - u_s(0, t) ; U(1, z, t) = 0 ; \frac{\partial U}{\partial r}(0, z, t) = 0.$$

On divise l'intervalle $[0, 1]$ en m intervalles de longueur $h = 1/m$. Sur chaque intervalle de la forme $[(i-1)h, (i+1)h]$, on définit les fonctions v^i par :

$$v^i(r) = \begin{cases} \frac{r}{h} + 1 - i & \text{pour } (i-1)h \leq r \leq ih \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ -\frac{r}{h} + 1 + i & \text{pour } ih \leq r \leq (i+1)h \quad 0 \leq i \leq m-1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

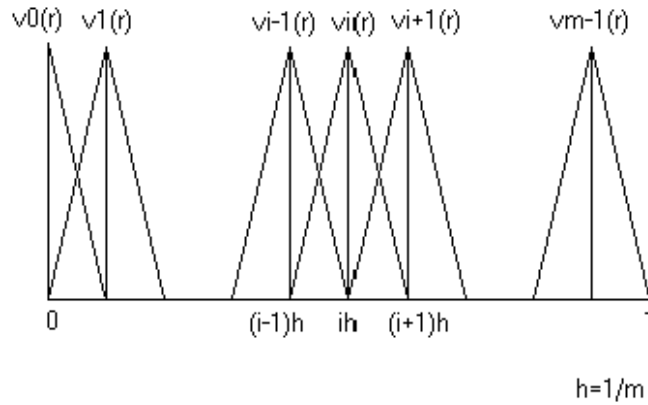


FIG. 3.1 – Les fonctions-test de la variable r .

Prenant comme fonction-test v^i , on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\partial U}{\partial z} v^i r (1-r^2) dr + \beta \int_0^1 r \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial v^i}{\partial r} dr \\ & = \beta \frac{\partial U}{\partial r}(1, z) v^i(1) - \int_0^1 \frac{\partial u_s}{\partial z}(z) v^i r (1-r^2) dr, \end{aligned}$$

3.2. SIMULATION NUMÉRIQUE PAR ÉLÉMENTS FINIS

qui devient :

$$\int_0^1 \frac{\partial U}{\partial z} v^i r (1 - r^2) dr + \beta \int_0^1 r \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial v^i}{\partial r} dr = - \int_0^1 \frac{\partial u_s}{\partial z}(z) v^i r (1 - r^2) dr,$$

puisque $v^i(1) = 0$. On cherche la solution sous la forme :

$$U_h(r, z, t) = \sum_{i=0}^{m-1} U_i(z, t) v^i(r).$$

Les coefficients U_i sont donnés par les relations :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^1 v^i v^j r (1 - r^2) dr \frac{\partial U_j}{\partial z} + \beta \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^1 r \frac{\partial v^i}{\partial r} \frac{\partial v^j}{\partial r} dr U_j \\ = - \int_0^1 \frac{\partial u_s}{\partial z}(z) v^i r (1 - r^2) dr, \end{aligned}$$

qui conduisent à un système de la forme :

$$MU' + AU = F.$$

M est une matrice tridiagonale dont les coefficients m_{ij} sont donnés par :

$$\begin{aligned} m_{00} &= \int_0^h \left(-\frac{r}{h} + 1\right)^2 r (1 - r^2) dr \\ &= \frac{h^2}{12} - \frac{h^4}{60}, \\ m_{ii} &= \int_{(i-1)h}^{ih} \left(\frac{r}{h} + 1 - i\right)^2 r (1 - r^2) dr \\ &\quad + \int_{(i+1)h}^{(i+1)h} \left(-\frac{r}{h} + 1 + i\right)^2 r (1 - r^2) dr \\ &= 2\frac{h^2 i}{3} - \frac{h^4 i}{5} - 2\frac{h^4 i^3}{3} \text{ avec } 1 \leq i \leq m-1 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} m_{i,i+1} &= \int_{ih}^{(i+1)h} \left(-\frac{r}{h} + 1 + i\right) \left(\frac{r}{h} - i\right) r (1 - r^2) dr \\ &= \frac{h^2}{12} - \frac{h^4}{30} + \frac{h^2 i}{6} - 3\frac{h^4 i}{20} - \frac{h^4 i^2}{4} - \frac{h^4 i^3}{6} \quad \text{avec } 0 \leq i \leq m-2, \\ m_{i,i-1} &= \int_{(i-1)h}^{ih} \left(\frac{r}{h} + 1 - i\right) \left(-\frac{r}{h} + i\right) r (1 - r^2) dr \\ &= -\frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{30} + \frac{h^2 i}{6} - 3\frac{h^4 i}{20} + \frac{h^4 i^2}{4} - \frac{h^4 i^3}{6} \quad \text{avec } 1 \leq i \leq m-1. \end{aligned}$$

CHAPITRE 3. RÉACTION $CO + O_2/2 \rightarrow CO_2$

A est également une matrice tridiagonale dont les coefficients a_{ij} sont :

$$\begin{aligned} a_{00} &= \beta \int_0^h \frac{1}{h^2} r dr = \frac{\beta}{2}, \\ a_{ii} &= \beta \int_{(i-1)h}^{ih} \frac{1}{h^2} r dr + \beta \int_{ih}^{(i+1)h} \frac{1}{h^2} r dr = 2i\beta \quad 1 \leq i \leq m-1, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} a_{i,i+1} &= \beta \int_{ih}^{(i+1)h} -\frac{1}{h^2} r dr = -\beta \left(\frac{1}{2} + i \right), \quad 0 \leq i \leq m-2, \\ a_{i,i-1} &= \beta \int_{(i-1)h}^{ih} -\frac{1}{h^2} r dr = \beta \left(\frac{1}{2} - i \right), \quad 1 \leq i \leq m-1. \end{aligned}$$

F est le vecteur colonne dont les composantes sont données par :

$$f_i = - \int_0^1 \frac{\partial u_s}{\partial z}(z) v^i r (1-r^2) dr,$$

avec $0 \leq i \leq m-1$, qui devient en explicitant :

$$\begin{aligned} f_0 &= -\frac{\partial u_s}{\partial z} \int_0^h \left(-\frac{r}{h} + 1 \right) r (1-r^2) dr \\ &= \left(\frac{h^4}{20} - \frac{h^2}{6} \right) \frac{\partial u_s}{\partial z}, \\ f_i &= -\frac{\partial u_s}{\partial z} \int_{(i-1)h}^{ih} \left(\frac{r}{h} + 1 - i \right) r (1-r^2) dr \\ &\quad - \frac{\partial u_s}{\partial z} \int_{ih}^{(i+1)h} \left(-\frac{r}{h} + 1 + i \right) r (1-r^2) dr \\ &= \left(h^4 i^3 + \frac{h^4 i}{2} - h^2 i \right) \frac{\partial u_s}{\partial z}, \quad 1 \leq i \leq m-1. \end{aligned}$$

Il ne reste alors qu'à discrétiser en z à l'aide d'un schéma de Crank-Nicholson, pour obtenir le système :

$$\left(M + \Delta z \frac{A}{2} \right) U^{i+1} = \left(M - \Delta z \frac{A}{2} \right) U^i + \Delta z \frac{f^{i+1} + f^i}{2},$$

avec U^0 donné. On résout ce système par la méthode du double balayage de Cholesky.

3.2.2 Sur la paroi

3.2.2.1 Description du schéma numérique utilisé pour la température

Sur la paroi, on a à résoudre l'équation :

$$\frac{\partial T_s}{\partial t}(z, t) - \theta(T_s) \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2}(z, t) = -\gamma(T_s) \frac{\partial T_f}{\partial r}(1, z, t) + b(T_s) \hat{r}_U(U_s, V_s, T_s),$$

3.2. SIMULATION NUMÉRIQUE PAR ÉLÉMENTS FINIS

à laquelle on ajoute les conditions aux limites ou initiales :

$$T_s(z, 0) = T_{s0}(z) ; \frac{\partial T_s}{\partial z}(0, t) = 0 ; \frac{\partial T_s}{\partial z}(1, t) = 0.$$

Cette équation rappelle celles qui ont lieu dans le cylindre. On va donc utiliser la même méthode pour la résoudre. Si k désigne l'indice de progression en t , on pose : $T_{i+1}^0 = T_i$, puis on construit les itérés suivants à k fixé :

$$\begin{aligned} \frac{T_{s,k+1}^{h+1} - T_{s,k}^h}{\Delta t} &= \theta (T_{s,k+1}^h) \frac{\partial^2 T_{s,k+1}^{h+1}}{\partial z^2} + \gamma (T_{s,k+1}^h) \frac{\partial T_{f,k+1}^{h+1}}{\partial r}(1, z, t) \\ &+ b (T_{s,k+1}^h) \hat{r}_U (U_{s,k+1}, V_{s,k+1}, T_{s,k+1}), \end{aligned}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} T_{s,k+1}^{h+1} &= T_{s,k}^h + \theta (T_{s,k+1}^h) \frac{\partial^2 T_{s,k+1}^{h+1}}{\partial z^2} \Delta t \\ &+ \gamma (T_{s,k+1}^h) \frac{\partial T_{f,k+1}^{h+1}}{\partial r}(1, z, t) \Delta t, \\ &+ b (T_{s,k+1}^h) \hat{r}_U (U_{s,k+1}, V_{s,k+1}, T_{s,k+1}^h) \Delta t, \end{aligned}$$

jusqu'à obtenir la convergence : $\|T_{s,k+1}^{h+1} - T_{s,k+1}^h\| \leq \varepsilon$.

3.2.2.2 Discrétisation par éléments finis

On divise l'intervalle $[0, 1]$ en m intervalles de largeur $h = 1/m$, et sur chaque intervalle de la forme $[(i-1)h, (i+1)h]$, on définit les fonctions V^i par :

$$V^i(z) = \begin{cases} \frac{z}{h} + 1 - i & \text{pour } (i-1)h \leq z \leq ih, \quad 1 \leq i \leq m, \\ -\frac{z}{h} + 1 + i & \text{pour } ih \leq z \leq (i+1)h, \quad 0 \leq i \leq m-1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Prenant la fonction-test V^i , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial T_s}{\partial t} V^i dz - \theta \int_0^1 \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} V^i dz \\ = -\gamma \int_0^1 \frac{\partial T_f}{\partial r}(1, z, t) V^i dz + b \int_0^1 \hat{r}_U (U_s, V_s, T_s) V^i dz, \end{aligned}$$

qui devient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial T_s}{\partial t} V^i dz - \theta \int_0^1 \frac{\partial T_s}{\partial z} \frac{\partial V^i}{\partial z} dz \\ = -\gamma \int_0^1 \frac{\partial T_f}{\partial r}(1, z, t) V^i dz + b \int_0^1 \hat{r}_U (U_s, V_s, T_s) V^i dz. \end{aligned}$$

CHAPITRE 3. RÉACTION $CO + O_2/2 \rightarrow CO_2$

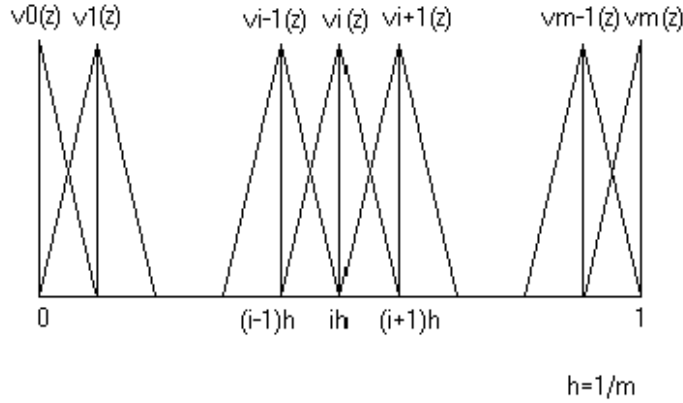


FIG. 3.2 – Les fonctions-test de la variable z .

Nous cherchons la solution sous la forme :

$$T_{sh}(z, t) = \sum_{j=0}^m \hat{w}_{sj}(t) V^j(z),$$

dans laquelle les coefficients \hat{w}_{sj} sont donnés par les relations :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \int_0^1 V^i V^j dz \frac{\partial \hat{w}_{sj}}{\partial t} - \theta \sum_{j=0}^m \int_0^1 \frac{\partial V^i}{\partial z} \frac{\partial V^j}{\partial z} dz \hat{w}_{sj} \\ = -\gamma \int_0^1 \frac{\partial T_f}{\partial r}(1, z, t) V^i dz + b \int_0^1 \hat{r}_U(U_s, V_s, T_s) V^i dz. \end{aligned}$$

Ceci conduit à un système de la forme :

$$M(\hat{w}_s)' + A\hat{w}_s = F.$$

M est une matrice tridiagonale dont les coefficients m_{ij} sont :

$$\begin{aligned} m_{00} &= \int_0^h \left(-\frac{z}{h} + 1\right)^2 dz \\ &= \frac{h}{3}, \\ m_{ii} &= \int_{(i-1)h}^{ih} \left(\frac{z}{h} + 1 - i\right)^2 dz + \int_{ih}^{(i+1)h} \left(-\frac{z}{h} + 1 + i\right)^2 dz \\ &= \frac{2h}{3}, \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ m_{mm} &= \int_{(m-1)h}^{mh} \left(\frac{z}{h} + 1 - m\right)^2 dz \\ &= \frac{h}{3}, \end{aligned}$$

3.2. SIMULATION NUMÉRIQUE PAR ÉLÉMENTS FINIS

et :

$$\begin{aligned}
 m_{i,i+1} &= \int_{ih}^{(i+1)h} \left(-\frac{z}{h} + 1 + i\right) \left(\frac{z}{h} - i\right) dz \quad \text{avec } 0 \leq i \leq m-1 \\
 &= \frac{\theta}{6}, \\
 m_{i,i-1} &= \int_{(i-1)h}^{ih} \left(\frac{z}{h} + 1 - i\right) \left(-\frac{z}{h} + i\right) dz \quad \text{avec } 1 \leq i \leq m \\
 &= \frac{\theta}{6}.
 \end{aligned}$$

A est également une matrice tridiagonale dont les coefficients a_{ij} sont :

$$\begin{aligned}
 a_{00} &= \theta \int_0^h \frac{1}{h^2} dz = \frac{\theta}{h}, \\
 a_{ii} &= \theta \int_{(i-1)h}^{ih} \frac{1}{h^2} dz + \theta \int_{ih}^{(i+1)h} \frac{1}{h^2} dz = \frac{2\theta}{h} \quad \text{avec } 1 \leq i \leq m-1, \\
 a_{mm} &= \theta \int_{(m-1)h}^{mh} \frac{1}{h^2} dz = \frac{\theta}{h},
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 a_{i,i+1} &= \theta \int_{ih}^{(i+1)h} -\frac{1}{h^2} dz = -\frac{\theta}{h} \quad \text{avec } 0 \leq i \leq m-1, \\
 a_{i,i-1} &= \theta \int_{(i-1)h}^{ih} -\frac{1}{h^2} dz = -\frac{\theta}{h} \quad \text{avec } 1 \leq i \leq m.
 \end{aligned}$$

F est le vecteur colonne donné par

$$f_i = \left(-\gamma \frac{\partial T_f}{\partial r}(1, z, t) + b \hat{r}_U(U_s, V_s, T_s) \right) \int_0^1 v^i dz, \quad \text{avec } 0 \leq i \leq m-1,$$

qui donne, en explicitant :

$$\begin{aligned}
 f_0 &= \int_0^h \left(-\gamma \frac{\partial T_f}{\partial r}(1, z, t) + b \hat{r}_U(U_s, V_s, T_s) \right) \left(-\frac{z}{h} + 1 \right) dz \\
 f_i &= \int_{(i-1)h}^{ih} \left(-\gamma \frac{\partial T_f}{\partial r}(1, z, t) + b \hat{r}_U(U_s, V_s, T_s) \right) \left(\frac{z}{h} + 1 - i \right) dz \\
 &\quad + \int_{ih}^{(i+1)h} \left(-\gamma \frac{\partial T_f}{\partial r}(1, z, t) + b \hat{r}_U(U_s, V_s, T_s) \right) \left(-\frac{z}{h} + 1 + i \right) dz \\
 &\quad \text{avec } 1 \leq i \leq m-1, \\
 f_m &= \int_{(m-1)h}^{mh} \left(-\gamma \frac{\partial T_f}{\partial r}(1, z, t) + b \hat{r}_U(U_s, V_s, T_s) \right) \left(\frac{z}{h} + 1 - m \right) dz.
 \end{aligned}$$

Il ne reste alors qu'à discrétiser en t , à l'aide d'un schéma de Crank-Nicholson, pour obtenir le système :

$$\left(M + \Delta t \frac{A}{2} \right) \hat{w}_s^{i+1} = \left(M - \Delta t \frac{A}{2} \right) \hat{w}_s^i + \Delta t \frac{f^{i+1} + f^i}{2},$$

CHAPITRE 3. RÉACTION $CO + O_2/2 \rightarrow CO_2$

avec \hat{w}_s^0 donné. On résout ce système par la méthode du double balayage de Cholesky.

3.2.2.3 Description du schéma numérique utilisé pour les espèces chimiques

Sur la paroi, comme la température est connue, les espèces chimiques suivent des équations du type :

$$\frac{\partial v_{ls}}{\partial t}(z, t) = -\gamma_l \frac{\partial v_{lf}}{\partial r}(1, z, t) + b_l \hat{r}_{CO}(C_{CO_s}, C_{O_2_s}, T_s),$$

dans lesquelles :

$$\begin{aligned} v_{1s} &= C_{CO_s}, & v_{1f} &= C_{CO_f}, \\ v_{2s} &= C_{O_2_s}, & v_{2f} &= C_{O_2_f}, \\ v_{3s} &= C_{CO_2_s}, & v_{3f} &= C_{CO_2_f}, \end{aligned}$$

$\frac{\partial v_{lf}}{\partial r}(1, z, t)$ est connu, de même que T_s , ce qui fait que γ_l et α_l sont de vraies constantes, avec la condition initiale :

$$v_{ls}(z, 0) = v_{ls0}(z).$$

Ces équations peuvent se résoudre par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{ls, i+\frac{1}{2}} &= v_{ls, i} + \frac{\Delta t}{2} \left(-\gamma_l \frac{\partial v_{lf}}{\partial r}(1, z, t) + b_l \hat{r}_{CO}(C_{CO_s, i}, C_{O_2_s, i}, T_{s, i}) \right), \\ v_{ls, i+1} &= v_{ls, i} + \Delta t \left(-\gamma_l \frac{\partial v_{lf}}{\partial r}(1, z, t) + b_l \hat{r}_{CO}(\tilde{C}_{CO_s, i+\frac{1}{2}}, \tilde{C}_{O_2_s, i+\frac{1}{2}}, T_{s, i}) \right). \end{aligned}$$

3.3 Simulation numérique par différences finies

On considère les seules espèces CO , O_2 et CO_2 et la température et les 8 équations normalisées précédentes à résoudre.

3.3.1 Dans le cylindre

On pose $u_1 = C_{CO_f}$, $u_2 = C_{O_2_f}$, $u_3 = C_{CO_2_f}$, $u_4 = T_f$, dans le cylindre et on a à résoudre les équations de la forme :

$$r(1-r^2) \frac{\partial u_l}{\partial z}(r, z, t) - \beta_l(u_4) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_l}{\partial r} \right)(r, z, t) = 0, \quad (3.2)$$

où $l = 0, \dots, 4$. Les conditions aux limites associées à (3.2) sont :

$$u_l(r, 0, t) = u_{l0}(r) ; u_l(1, z, t) = u_{ls}(z, t) ; \frac{\partial u_l}{\partial r}(0, z, t) = 0.$$

3.3. SIMULATION NUMÉRIQUE PAR DIFFÉRENCES FINIES

Si l est différent de 4 (espèces chimiques), on résout directement (3.2) par différences finies. Cela suppose que l'on a commencé par résoudre l'équation avec $l = 4$ de manière à disposer de u_4 .

Si l est égal à 4 (température), on doit évaluer les coefficients à l'étape i et non en $i + 1$. Il peut être nécessaire de coupler cette résolution avec un argument de type point fixe comme décrit ci-dessous.

Si l est égal à 4, l'équation correspondante s'écrit :

$$r(1-r^2) \frac{\partial u_4}{\partial z}(r, z, t) - \beta_l(u_4) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_4}{\partial r} \right)(r, z, t) = 0,$$

avec les conditions précédentes. Pour assurer la convergence du schéma numérique à chaque étape i , où i désigne l'indice de progression en z , nous procédons comme suit. On omet l'indice 4 et on pose : $u_{i+1}^0 = u_i$. Ensuite, on construit les itérés suivants pour $q \geq 0$, avec i fixé :

$$\begin{aligned} r(1-r^2) \frac{u_{i+1}^{q+1} - u_i}{\Delta z} - \beta_l(u_{i+1}^q) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_{i+1}^{q+1}}{\partial r} \right) &= 0, \\ \Leftrightarrow u_{i+1}^{q+1} = u_i + \beta_l(u_{i+1}^q) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_{i+1}^{q+1}}{\partial r} \right) \frac{\Delta z}{r(1-r^2)}, \end{aligned}$$

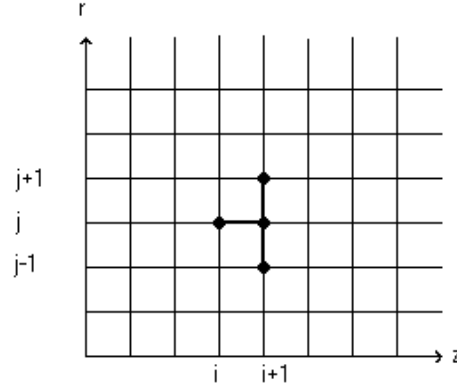
jusqu'à obtenir la convergence $\|u_{i+1}^{q+1} - u_{i+1}^q\| \leq \varepsilon$. On obtient ainsi la valeur de $u_{i+1} := u_{i+1}^{q+1}$.

On pose $\Delta r = 1/(n+1)$, $\Delta z = 1/m$ et $r_j = j\Delta r$, $j = 0, \dots, n$. On commence par résoudre pour $l = 4$ (température), en utilisant les discrétisations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_l}{\partial z} &\simeq \frac{u_{l,i+1,j} - u_{l,i,j}}{\Delta z}, \\ \frac{\partial u_l}{\partial r} &\simeq \frac{u_{l,i+1,j+1} - u_{l,i+1,j-1}}{2\Delta r}, \\ \frac{\partial^2 u_l}{\partial r^2} &\simeq \frac{u_{l,i+1,j+1} - 2u_{l,i+1,j} + u_{l,i+1,j-1}}{(\Delta r)^2}, \end{aligned}$$

issues du schéma ci-dessous :

CHAPITRE 3. RÉACTION $CO + O_2/2 \rightarrow CO_2$



pour obtenir le système :

$$\begin{aligned} \frac{\beta_l(u_{4,p})}{\Delta r} \left(\frac{1}{2} - \frac{r_j}{\Delta r} \right) u_{l,i+1,j-1} + \left(\frac{r_j(1-r_j^2)}{\Delta z} + \frac{2r_j\beta_l(u_{4,p})}{(\Delta r)^2} \right) u_{l,i+1,j} \\ - \frac{\beta_l(u_{4,p})}{\Delta r} \left(\frac{1}{2} + \frac{r_j}{\Delta r} \right) u_{l,i+1,j+1} = \frac{r_j(1-r_j^2)}{\Delta z} u_{l,i,j}, \end{aligned}$$

qui équivaut à :

$$\begin{aligned} \frac{\beta_l(u_{4,p})}{\Delta r} \left(\frac{1}{2} - j \right) u_{l,i+1,j-1} + \left(\frac{j\Delta r(1-(j\Delta r)^2)}{\Delta z} + \frac{2j\Delta r\beta_l(u_{4,p})}{(\Delta r)^2} \right) u_{l,i+1,j} \\ - \frac{\beta_l(u_{4,p})}{\Delta r} \left(\frac{1}{2} + j \right) u_{l,i+1,j+1} = \frac{j\Delta r(1-(j\Delta r)^2)}{\Delta z} u_{l,i,j}, \end{aligned}$$

On multiplie cette égalité par Δz :

$$\begin{aligned} \beta_l(u_{4,p}) \frac{\Delta z}{\Delta r} \left(\frac{1}{2} - j \right) u_{l,i+1,j-1} + \left(j\Delta r(1-(j\Delta r)^2) + 2\beta_l(u_{4,p})j\frac{\Delta z}{\Delta r} \right) u_{l,i+1,j} \\ - \beta_l(u_{4,p}) \frac{\Delta z}{\Delta r} \left(\frac{1}{2} + j \right) u_{l,i+1,j+1} = j\Delta r(1-(j\Delta r)^2) u_{l,i,j}, \end{aligned}$$

dans lequel $p = i$, si $l = 4$, et $p = i + 1$, sinon. Ce système s'écrit :

$$a_{i+1,j}u_{l,i+1,j-1} + b_{i+1,j}u_{l,i+1,j} + c_{i+1,j}u_{l,i+1,j+1} = d_{i,j},$$

avec :

$$a_{i+1,j} = \beta_l(u_{4,p}) \frac{\Delta z}{\Delta r} \left(\frac{1}{2} - j \right),$$

$$b_{i+1,j} = j\Delta r(1-(j\Delta r)^2) + 2\beta_l(u_{4,p})j\frac{\Delta z}{\Delta r},$$

$$c_{i+1,j} = -\beta_l(u_{4,p}) \frac{\Delta z}{\Delta r} \left(\frac{1}{2} + j \right),$$

$$d_{i,j} = j\Delta r(1-(j\Delta r)^2) u_{l,i,j}.$$

CHAPITRE 3. RÉACTION $CO + O_2/2 \rightarrow CO_2$

que l'on résout par la méthode du double balayage de Cholesky.

Remarque 3.3.1 *Comme :*

$$\begin{aligned} a_{i+1,1} + b_{i+1,1} - |c_{i+1,1}| &= \beta(u_{4,p}) \frac{\Delta z}{\Delta r} \left(-\frac{1}{2} \right) + \Delta r (1 - (\Delta r)^2) \\ &\quad + 2\beta(u_{4,p}) \frac{\Delta z}{\Delta r} - \beta(u_{4,p}) \frac{\Delta z}{\Delta r} \left(\frac{3}{2} \right) \\ &= \Delta r (1 - (\Delta r)^2) \\ &> 0 \end{aligned}$$

pour $2 \leq j \leq n-1$:

$$\begin{aligned} b_{i+1,j} - |a_{i+1,j}| - |c_{i+1,j}| &= j\Delta r (1 - (j\Delta r)^2) + 2\beta(u_{4,p}) j \frac{\Delta z}{\Delta r} \\ &\quad - \beta(u_{4,p}) \frac{\Delta z}{\Delta r} \left(j - \frac{1}{2} \right) - \beta(u_{4,p}) \frac{\Delta z}{\Delta r} \left(j + \frac{1}{2} \right) \\ &= j\Delta r (1 - (j\Delta r)^2) \\ &> 0, \end{aligned}$$

et pour $j = n$:

$$\begin{aligned} b_{i+1,n} - |a_{i+1,n}| &= n\Delta r (1 - (n\Delta r)^2) + \beta(u_{4,p}) \frac{\Delta z}{\Delta r} \left(3n - \frac{1}{2} \right) \\ &> 0, \end{aligned}$$

la matrice précédente est monotone.

Remarque 3.3.2 *En utilisant les notations des paramètres, on a l'expression suivante des β_l :*

$$\begin{aligned} \beta_{CO}(T_s) &= \frac{D_{CO_f}(T_s)L}{V_{\max}(T_s)R_f^2}, & \beta_{CO_2}(T_s) &= \frac{D_{CO_2_f}(T_s)L}{V_{\max}(T_s)R_f^2}, \\ \beta_{O_2}(T_s) &= \frac{D_{O_2_f}(T_s)L}{V_{\max}(T_s)R_f^2}, & \beta_T(T_s) &= \frac{\lambda_f(T_s)L}{\rho_f(T_s)C_{pf}(T_s)V_{\max}(T_s)R_f^2}. \end{aligned}$$

3.3.2 Sur la paroi

3.3.2.1 Description du schéma numérique utilisé pour la température

Sur la paroi, on a l'équation :

$$\frac{\partial T_s}{\partial t}(z, t) - \theta(T_s) \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2}(z, t) = -\gamma(T_s) \frac{\partial T_f}{\partial r}(1, z, t) + b(T_s) \hat{r}_{CO}(C_{CO_s}, C_{O_2_s}, T_s),$$

à laquelle on ajoute les conditions aux limites ou initiales :

$$T_s(z, 0) = T_{s0}(z); \quad \frac{\partial T_s}{\partial z}(0, t) = 0; \quad \frac{\partial T_s}{\partial z}(1, t) = 0.$$

3.3. SIMULATION NUMÉRIQUE PAR DIFFÉRENCES FINIES

Pour assurer la convergence du schéma numérique à chaque étape k , où k désigne l'indice de progression en t , nous procédons comme suit. On omet l'indice s et on pose : $T_{k+1}^0 = T_k$. Ensuite, on construit les itérés suivants pour $p \geq 0$ avec k fixé :

$$\frac{T_{k+1}^{p+1} - T_k}{\Delta z} = -\theta (T_{k+1}^p) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (T_{k+1}^{p+1}) - \gamma (T_{k+1}^p) \frac{\partial T_f}{\partial r} (1, z, t) + b (T_{k+1}^p) \hat{r}_{CO} (C_{CO_s}, C_{O_{2s}}, T_{k+1}^p),$$

ce qui équivaut à :

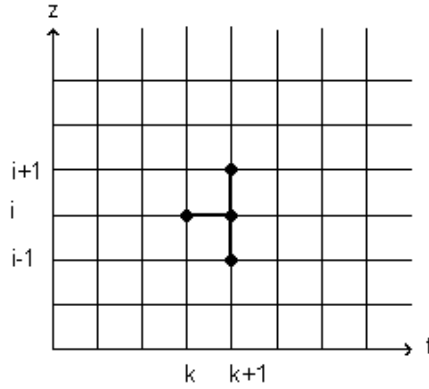
$$T_{k+1}^{p+1} = T_k + \theta (T_{k+1}^p) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (T_{k+1}^{p+1}) - \gamma (T_{k+1}^p) \frac{\partial T_f}{\partial r} (1, z, t) \Delta z + b (T_{k+1}^p) \hat{r}_{CO} (C_{CO_s}, C_{O_{2s}}, T_{k+1}^p) \Delta z,$$

jusqu'à obtenir la convergence $\|T_{k+1}^{p+1} - T_{k+1}^p\| \leq \varepsilon$. On obtient ainsi la valeur de $T_{k+1} := T_{k+1}^{p+1}$.

Comme précédemment, on utilise les discrétisations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_s}{\partial t} &\simeq \frac{T_{s,k+1,i} - T_{s,k,i}}{\Delta t}, \\ \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} &\simeq \frac{T_{s,k+1,i+1} - 2T_{s,k+1,i} + T_{s,k+1,i-1}}{(\Delta z)^2}, \\ \frac{\partial T_s}{\partial z} &\simeq \frac{T_{s,k+1,i+1} - T_{s,k+1,i-1}}{2\Delta z}, \end{aligned}$$

issues du schéma ci-dessous :



pour obtenir le système :

$$\begin{aligned} -\frac{\theta (T_{s,k,i})}{(\Delta z)^2} T_{s,k+1,i-1} + \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2\theta (T_{s,k,i})}{(\Delta z)^2} \right) T_{s,k+1,i} - \frac{\theta (T_{s,k,i})}{(\Delta z)^2} T_{s,k+1,i+1} \\ = \frac{T_{s,k,i}}{\Delta t} - \gamma (T_{s,k,i}) \frac{\partial T_{f,k,i}}{\partial r} (1, z, t) + b (T_{s,k,i}) \hat{r}_{CO} (C_{CO_{s,k,i}}, C_{O_{2s,k,i}}, T_{s,k,i}). \end{aligned}$$

CHAPITRE 3. RÉACTION $CO + O_2/2 \rightarrow CO_2$

On multiplie par Δt :

$$\begin{aligned} & -\theta(T_{s,k,i}) \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} T_{s,k+1,i-1} + \left(1 + 2\theta(T_{s,k,i}) \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \right) T_{s,k+1,i} \\ & -\theta(T_{s,k,i}) \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} T_{s,k+1,i+1} = T_{s,k,i} - \gamma(T_{s,k,i}) \frac{\partial T_{f,k,i}}{\partial r}(1, z, t) \Delta t \\ & \quad + b(T_{s,k,i}) \hat{r}_{CO}(C_{COs,k,i}, C_{O_2s,k,i}, T_{s,k,i}) \Delta t. \end{aligned}$$

Ce système s'écrit :

$$a_{k+1,i} T_{s,k+1,i-1} + b_{k+1,i} T_{s,k+1,i} + c_{k+1,i} T_{s,k+1,i+1} = d_{k,i},$$

avec :

$$a_{k+1,i} = -\theta(T_{s,k,i}) \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2},$$

$$b_{k+1,i} = 1 + 2\theta(T_{s,k,i}) \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} = 1 - 2a_{k+1,i},$$

$$c_{k+1,i} = -\theta(T_{s,k,i}) \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} = a_{k+1,i},$$

$$\begin{aligned} d_{k,i} = & T_{s,k,i} - \gamma(T_{s,k,i}) \frac{\partial T_{f,k,i}}{\partial r}(1, z, t) \Delta t \\ & + b(T_{s,k,i}) \hat{r}_{CO}(C_{COs,k,i}, C_{O_2s,k,i}, T_{s,k,i}) \Delta t. \end{aligned}$$

Les conditions aux limites $\frac{\partial T_s}{\partial z}(0, t) = 0$ et $\frac{\partial T_s}{\partial z}(1, t) = 0$ peuvent s'écrire $T_{s,k+1,1} = T_{s,k+1,-1}$ et $T_{s,k+1,m+1} = T_{s,k+1,m-1}$. Pour $i = 0$, on a :

$$a_{k+1,0} T_{s,k+1,-1} + b_{k+1,0} T_{s,k+1,0} + c_{k+1,0} T_{s,k+1,1} = d_{k,0},$$

qui équivaut à :

$$b_{k+1,0} T_{s,k+1,0} + (a_{k+1,0} + c_{k+1,0}) T_{s,k+1,1} = d_{k,0}.$$

Pour $i = m$, on a :

$$a_{k+1,m} T_{s,k+1,m-1} + b_{k+1,m} T_{s,k+1,m} + c_{k+1,m} T_{s,k+1,m+1} = d_{k,m},$$

qui devient :

$$(a_{k+1,m} + c_{k+1,m}) T_{s,k+1,m-1} + b_{k+1,m} T_{s,k+1,m} = d_{k,m}.$$

3.3. SIMULATION NUMÉRIQUE PAR DIFFÉRENCES FINIES

dans lesquelles :

$$\begin{aligned} v_{1s} &= C_{COs}, & v_{1f} &= C_{CO_f}, \\ v_{2s} &= C_{O_2s}, & v_{2f} &= C_{O_2f}, \\ v_{3s} &= C_{CO_2s}, & v_{3f} &= C_{CO_2f}, \end{aligned}$$

$\frac{\partial v_{lf}}{\partial r}(1, z, t)$ est connu de même que T_s , ce qui fait que γ_l et α_l sont de vraies constantes, et on a la condition initiale :

$$v_{ls}(z, 0) = v_{ls0}(z).$$

Ces équations peuvent se résoudre par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{ls,i+\frac{1}{2}} &= v_{ls,i} + \frac{\Delta t}{2} \left(-\gamma_l \frac{\partial v_f}{\partial r}(1, z, t) + b_l \hat{r}_{CO}(C_{COs,i}, C_{O_2s,i}, T_{s,i}) \right), \\ v_{ls,i+1} &= v_{ls,i} + \Delta t \left(-\gamma_l \frac{\partial v_f}{\partial r}(1, z, t) + b_l \hat{r}_{CO}(\tilde{C}_{COs,i+\frac{1}{2}}, \tilde{C}_{O_2s,i+\frac{1}{2}}, T_{s,i+\frac{1}{2}}) \right), \end{aligned}$$

avec $T_{s,i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(T_{s,i} + T_{s,i+1})$.

Remarque 3.3.6 *En utilisant les notations des paramètres, on a l'expression suivante des γ_l et b_l :*

$$\begin{aligned} \gamma_{CO}(T_s) &= \frac{SD_{CO_f}}{\varepsilon_s R_f}, & \gamma_{O_2}(T_s) &= \frac{SD_{O_2f}}{\varepsilon_s R_f}, & \gamma_{CO_2}(T_s) &= \frac{SD_{CO_2f}}{\varepsilon_s R_f}, \\ b_{CO}(T_s) &= -\frac{a}{\varepsilon_s}, & b_{O_2}(T_s) &= -\frac{a}{2\varepsilon_s}, & b_{CO_2}(T_s) &= \frac{a}{\varepsilon_s}. \end{aligned}$$

Dans les pages qui suivent, nous présentons plusieurs simulations numériques obtenues pour différentes conditions aux limites ou initiales.

La première simulation consiste à partir d'un cylindre à une température plus basse ($590K$) que le gaz entrant ($600K$) et à laisser évoluer le système.

La deuxième simulation consiste à partir d'un cylindre à la même température ($600K$) que le gaz entrant, à laisser évoluer le système et à constater qu'au bout d'un temps un peu plus long on obtient les mêmes répartitions de concentrations et de température que pour la première simulation. Ensuite on compare les courbes sur la paroi avec celles au centre du cylindre à un instant fixé. On termine en faisant un zoom sur le premier centimètre de notre cylindre de manière à mieux observer les phénomènes qui se produisent près de l'entrée du cylindre.

3.3.3 Première simulation

On suppose qu'à l'instant initial notre cylindre de dix centimètres de long se trouve à une température de $590K$ et qu'il contient 2% de CO , 5% d' O_2 et pas de CO_2 . Le gaz qui entre dans notre cylindre va se trouver à une température de $600K$ et va se composer de 2% de CO , 5% d' O_2 et pas de CO_2 . On résume ses conditions initiales et aux limites sous la forme suivante :

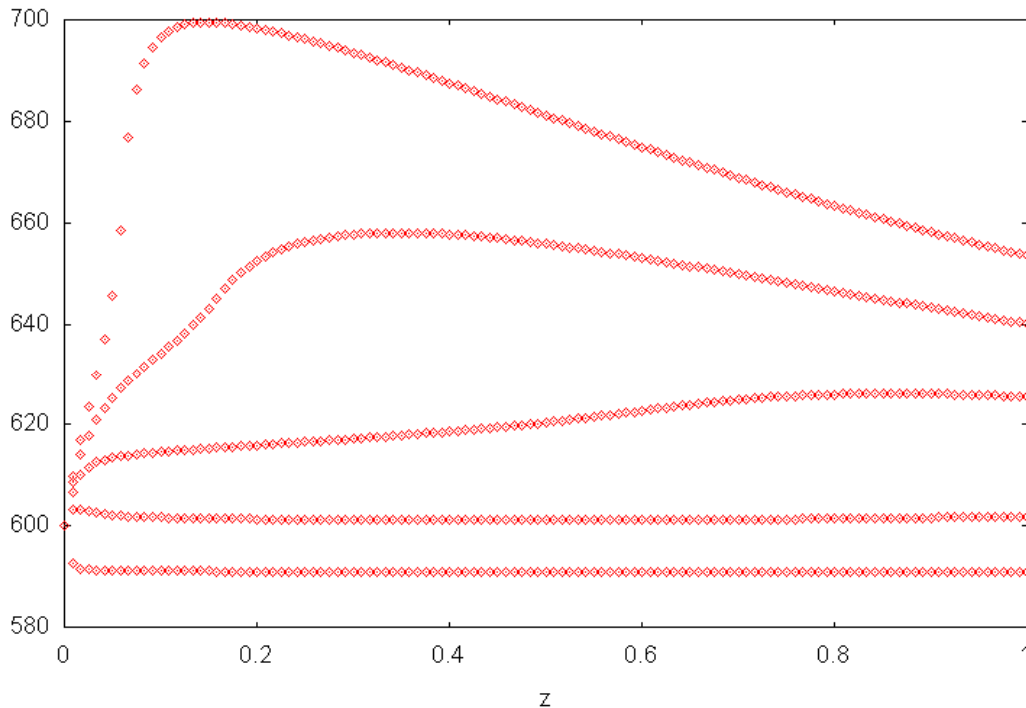
– A l'entrée du cylindre :

$$\begin{aligned} C_{CO_f}(r, 0, t) &: 2 \%, \\ C_{O_2_f}(r, 0, t) &: 5 \%, \\ C_{CO_2_f}(r, 0, t) &: 0 \%, \\ T_f(r, 0, t) &: 600 K, \end{aligned}$$

– Sur la paroi :

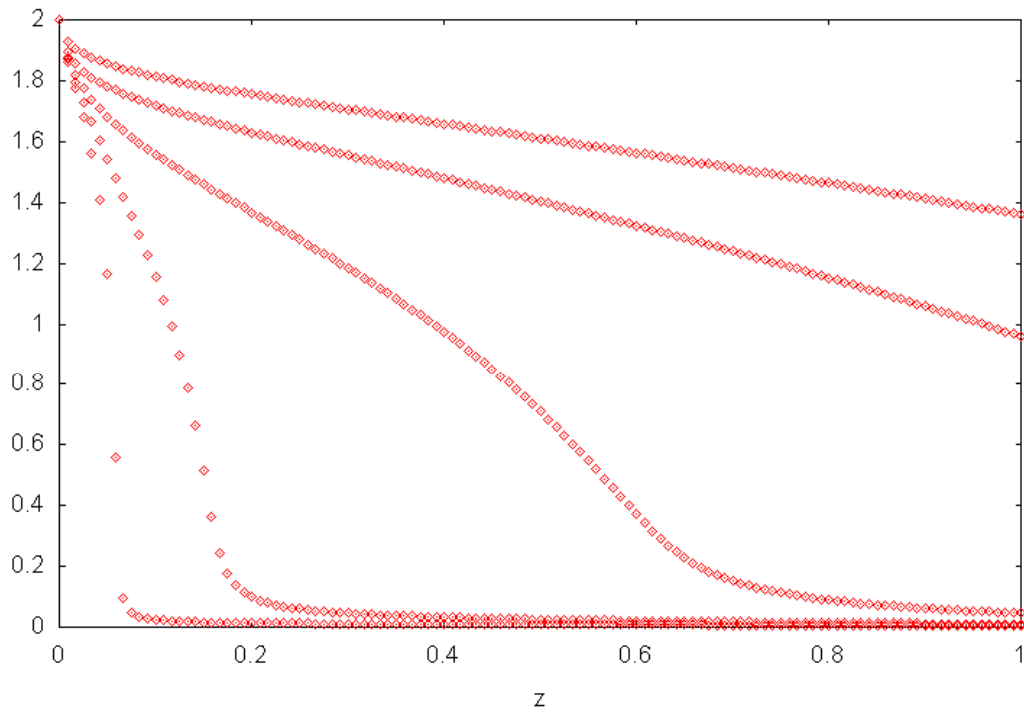
$$\begin{aligned} C_{CO_s}(z, 0) &: 2 \%, \\ C_{O_2_s}(z, 0) &: 5 \%, \\ C_{CO_2_s}(z, 0) &: 0 \%, \\ T_s(z, 0) &: 590 K. \end{aligned}$$

On obtient les courbes suivantes sur la paroi aux instants $0.1s$, $1s$, $2s$, $3s$ et $4s$:

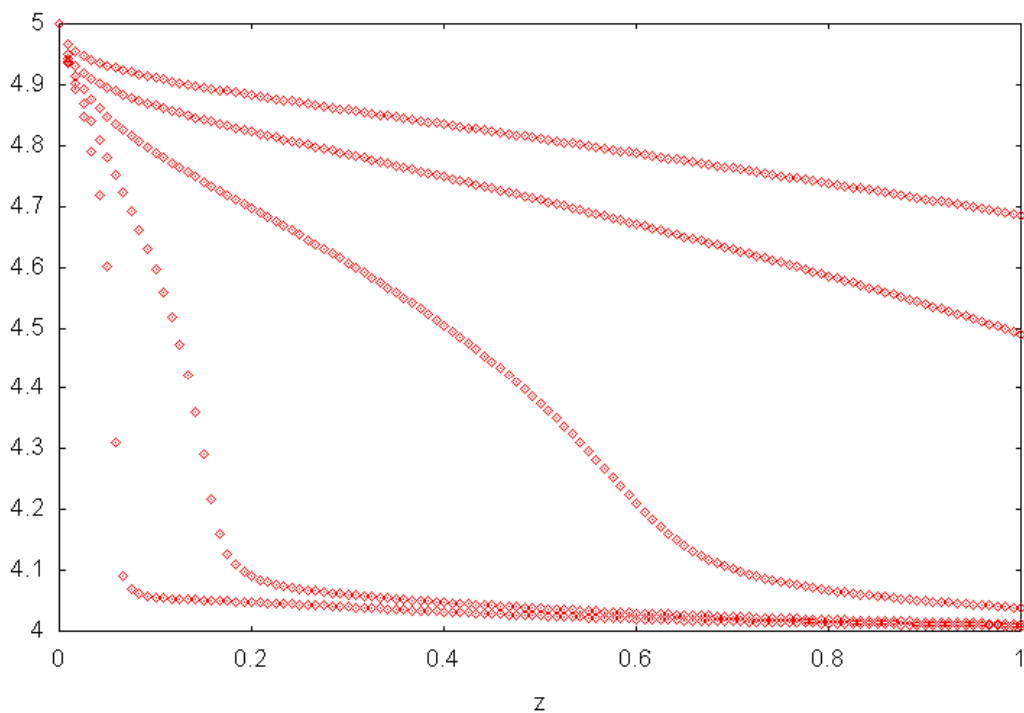


$T_s(z, t)$ en K (de bas en haut : courbes à $t = 0.1s$, $1s$, $2s$, $3s$ et $4s$)

3.3. SIMULATION NUMÉRIQUE PAR DIFFÉRENCES FINIES

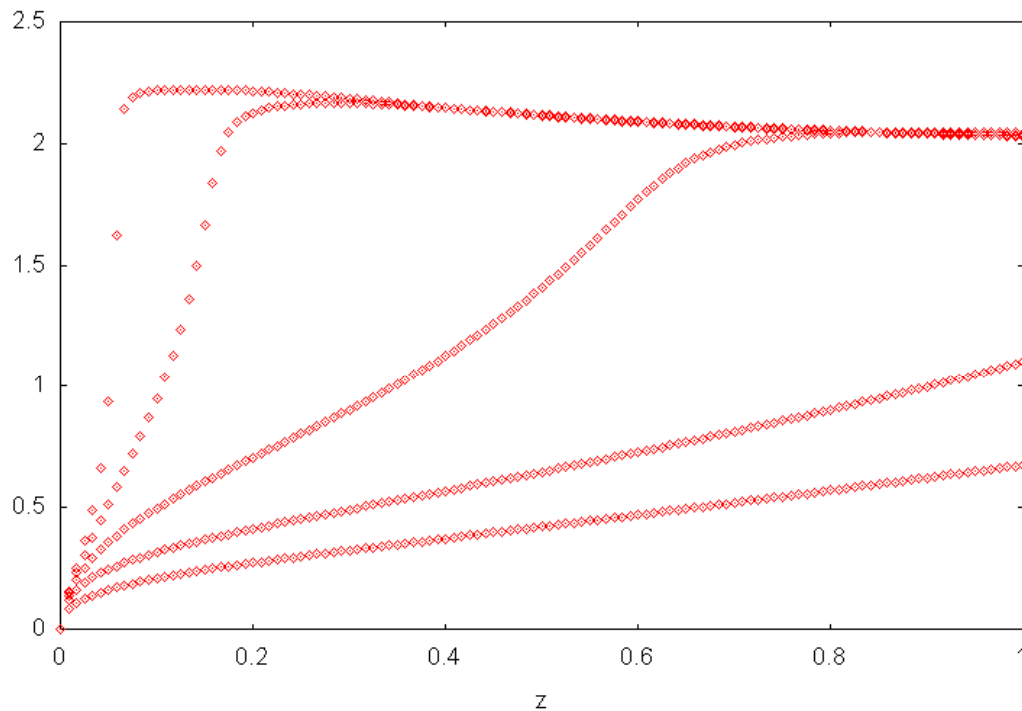


$C_{CO_2}(z, t)$ en % (de haut en bas : courbes à $t = 0.1s, 1s, 2s, 3s$ et $4s$)



$C_{O_2}(z, t)$ en % (de haut en bas : courbes à $t = 0.1s, 1s, 2s, 3s$ et $4s$)

CHAPITRE 3. RÉACTION $CO + O_2/2 \rightarrow CO_2$



$C_{CO_2s}(z, t)$ en % (de bas en haut : courbes à $t = 0.1s, 1s, 2s, 3s$ et $4s$)

On constate qu'au bout d'une seconde le cylindre est uniformément à la température de $600K$. Au bout de $2s$ il se forme un front de réaction en sortie du cylindre, front de réaction qui se dirige vers l'entrée du cylindre en s'amplifiant pour se stabiliser après $4s$ d'évolution à $1cm$ de l'entrée du cylindre.

Les valeurs prises sur la paroi en sortie du cylindre ($z = 1$) au bout de $4s$ sont :

$$\begin{aligned} C_{CO_s}(1, 4) &: 0.006 \%, \\ C_{O_2s}(1, 4) &: 4.009 \%, \\ C_{CO_2s}(1, 4) &: 2.029 \%, \\ T_s(1, 4) &: 653.58 K. \end{aligned}$$

3.3. SIMULATION NUMÉRIQUE PAR DIFFÉRENCES FINIES

3.3.4 Deuxième simulation

On suppose qu'à l'instant initial notre cylindre de dix centimètres de long se trouve à une température de $600K$ et qu'il contient 2% de CO , 5% d' O_2 et pas de CO_2 . Le gaz qui entre dans notre cylindre va se trouver à une température de $600K$ et va se composer de 2% de CO , 5% d' O_2 et pas de CO_2 . On résume ses conditions initiales et aux limites sous la forme suivante :

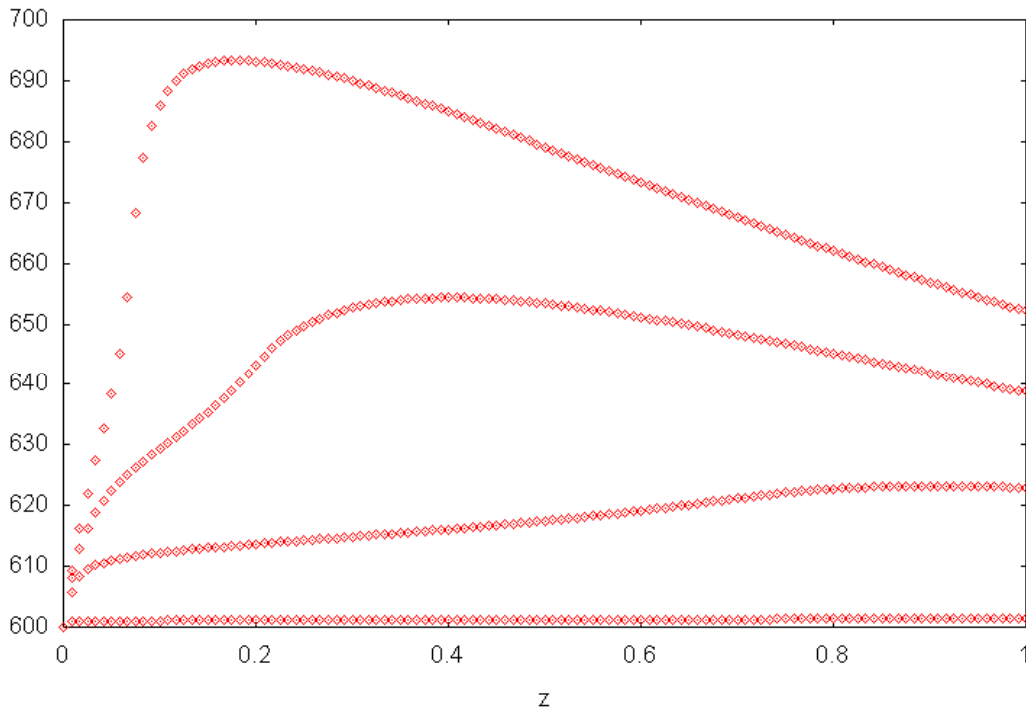
– A l'entrée du cylindre :

$$\begin{aligned}C_{CO_f}(r, 0, t) &: 2 \%, \\C_{O_2_f}(r, 0, t) &: 5 \%, \\C_{CO_2_f}(r, 0, t) &: 0 \%, \\T_f(r, 0, t) &: 600 K,\end{aligned}$$

– Sur la paroi :

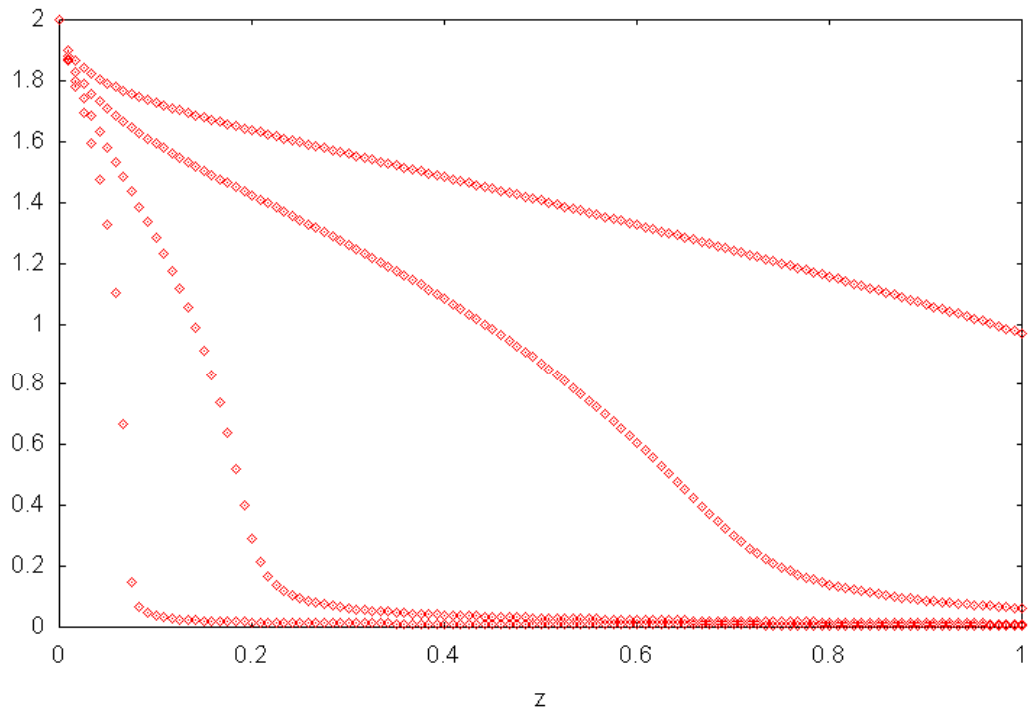
$$\begin{aligned}C_{CO_s}(z, 0) &: 2 \%, \\C_{O_2_s}(z, 0) &: 5 \%, \\C_{CO_2_s}(z, 0) &: 0 \%, \\T_s(z, 0) &: 600 K.\end{aligned}$$

On obtient les courbes suivantes sur la paroi aux instants $0.1s$, $1s$, $2s$ et $3s$:

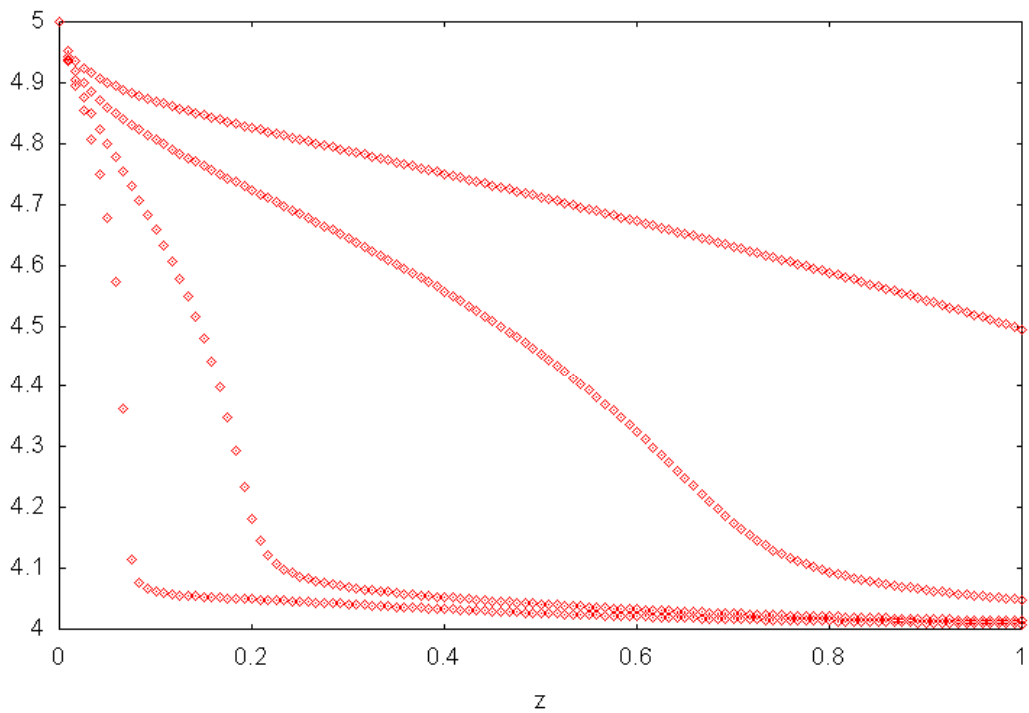


$T_s(z, t)$ en K (de bas en haut : courbes à $t = 0.1s$, $1s$, $2s$ et $3s$)

CHAPITRE 3. RÉACTION $CO + O_2/2 \rightarrow CO_2$

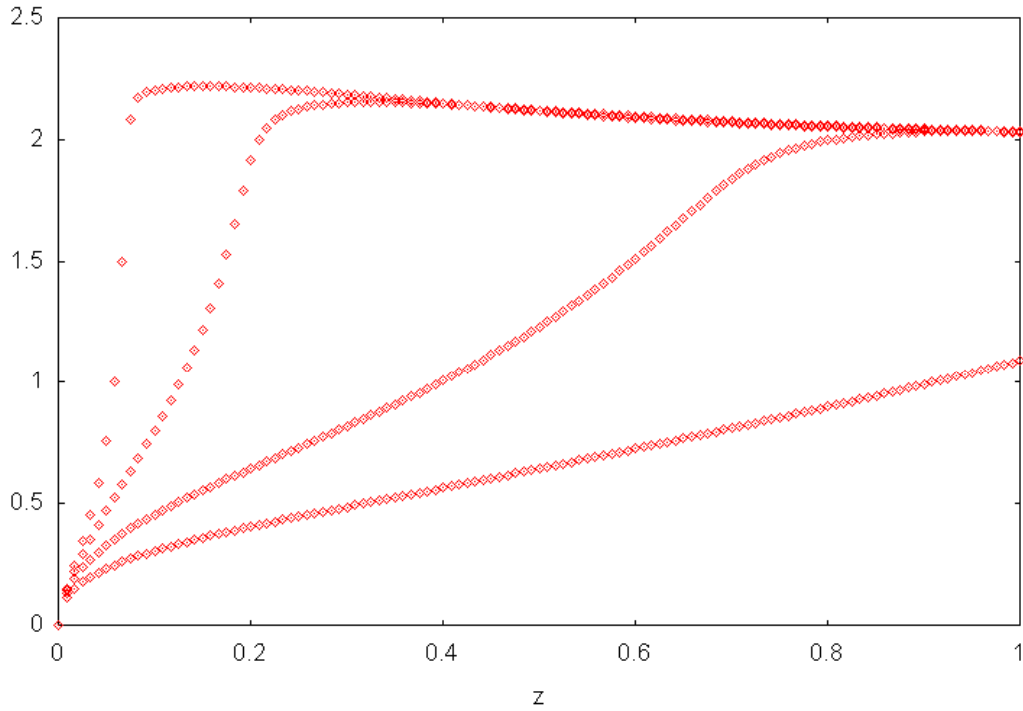


$C_{CO_s}(z, t)$ en % (de haut en bas : courbes à $t = 0.1s, 1s, 2s$ et $3s$)



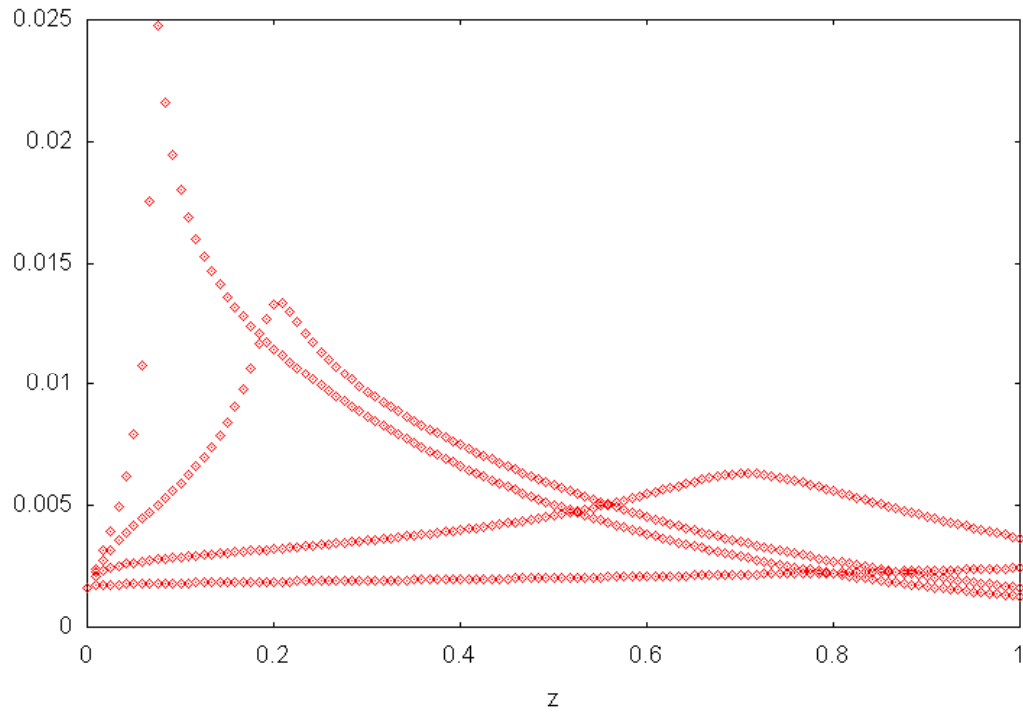
$C_{O_2_s}(z, t)$ en % (de haut en bas : courbes à $t = 0.1s, 1s, 2s$ et $3s$)

3.3. SIMULATION NUMÉRIQUE PAR DIFFÉRENCES FINIES



$C_{CO_2s}(z, t)$ en % (de bas en haut : courbes à $t = 0.1s, 1s, 2s$ et $3s$)

La figure suivante montre la vitesse de réaction \hat{r}_{CO} aux mêmes instants :



$\hat{r}_{CO}(C_{CO_s}, C_{O_2s}, T_s)(z, t)$ (de bas en haut : courbes à $t = 0.1s, 1s, 2s$ et $3s$)

CHAPITRE 3. RÉACTION $CO + O_2/2 \rightarrow CO_2$

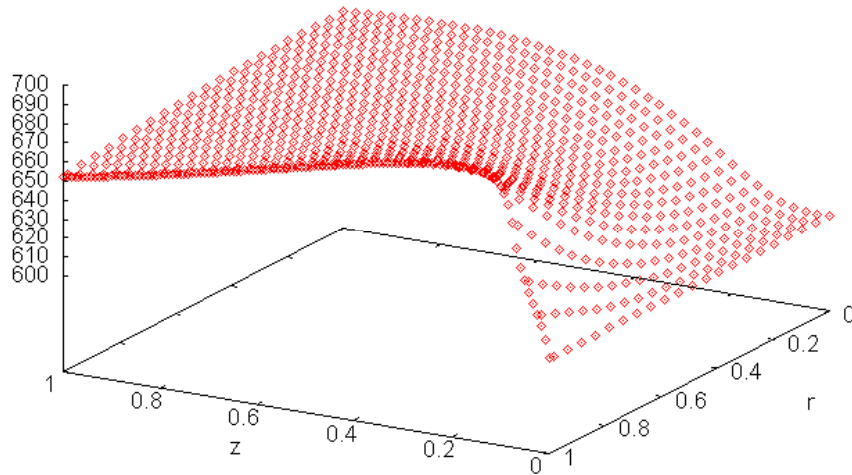
On constate qu'au bout de $2s$ il se forme un front de réaction en sortie du cylindre, front de réaction qui se dirige vers l'entrée du cylindre en s'amplifiant pour se stabiliser après $3s$ d'évolution à $1cm$ de l'entrée du cylindre.

Les valeurs prises sur la paroi en sortie du cylindre ($z = 1$) au bout de $3s$ sont :

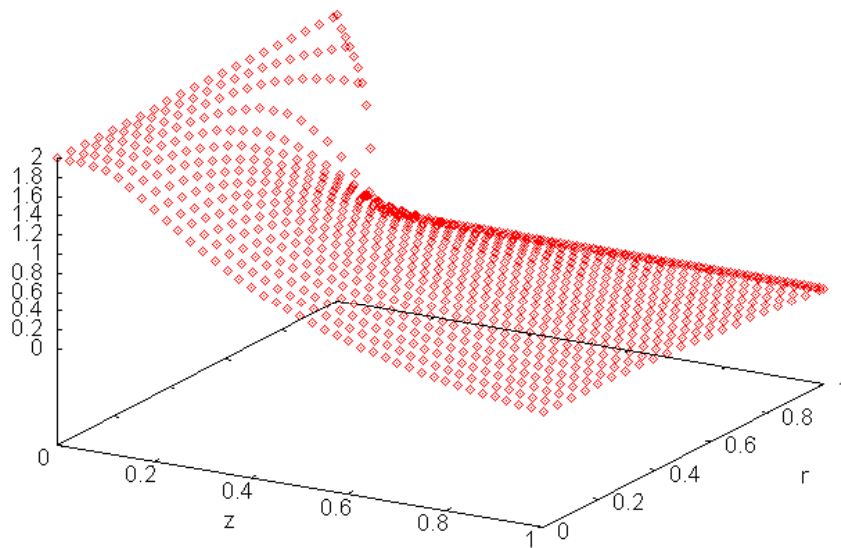
$$\begin{aligned}C_{CO_s}(1, 3) &: 0.006 \%, \\C_{O_{2s}}(1, 3) &: 4.009 \%, \\C_{CO_{2s}}(1, 3) &: 2.029 \%, \\T_s(1, 3) &: 652.316 K.\end{aligned}$$

3.3. SIMULATION NUMÉRIQUE PAR DIFFÉRENCES FINIES

De manière à voir comment les phénomènes ayant lieu sur la paroi du cylindre ($r = 1$) se propagent par diffusion dans le cylindre, on trace la température et les concentrations dans le domaine $(r, z) \in [0, 1] \times [0, 1]$ à $3s$:

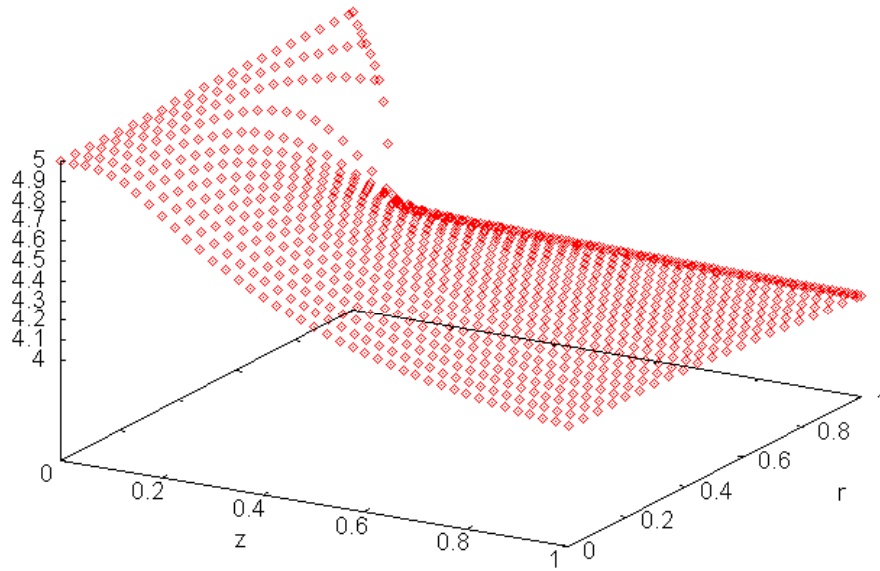


$T_f(r, z, 3)$ en K

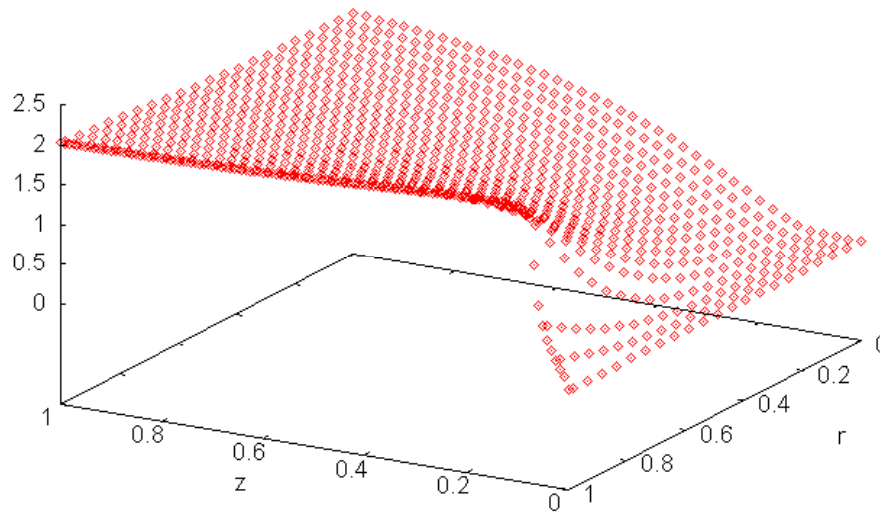


$C_{cof}(r, z, 3)$ en %

CHAPITRE 3. RÉACTION $CO + O_2/2 \rightarrow CO_2$



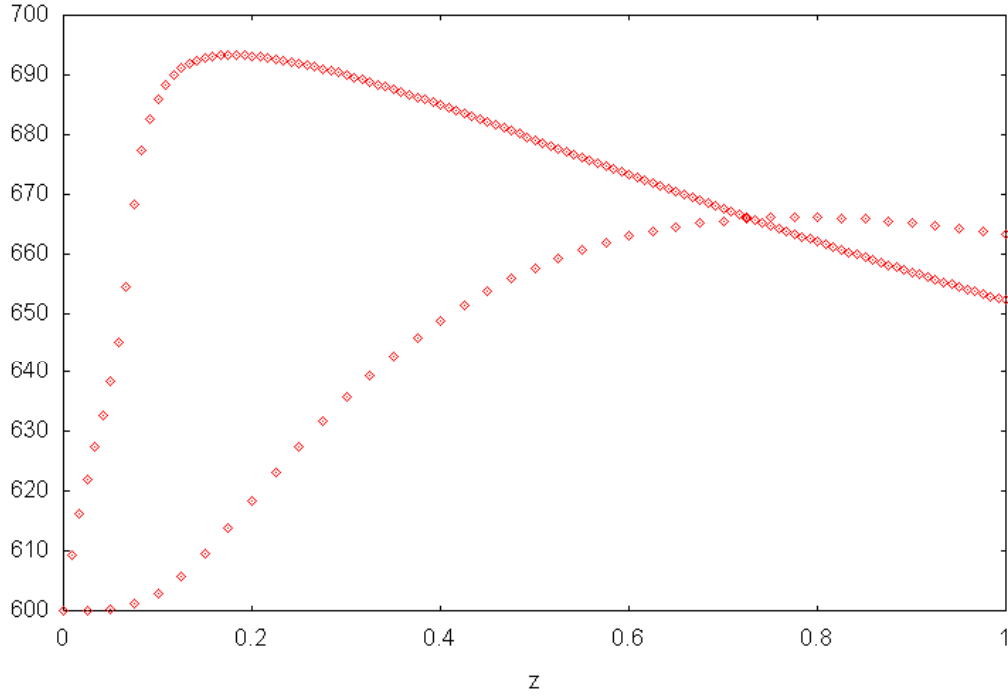
$C_{O_2f}(r, z, 3)$ en %



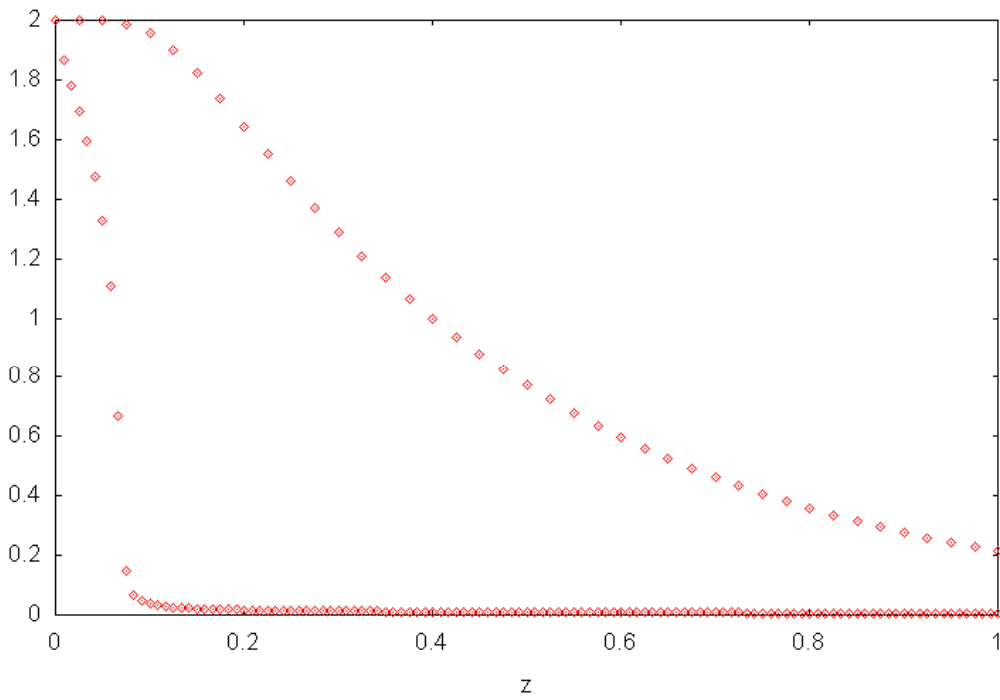
$C_{CO}(r, z, 3)$ en %

3.3. SIMULATION NUMÉRIQUE PAR DIFFÉRENCES FINIES

Si on trace la température et les concentrations à $t = 3s$ à la fois sur la paroi ($r = 1$) et au centre du cylindre ($r = 0$) on obtient les courbes suivantes où celle en $r = 0$ est en pointillé :

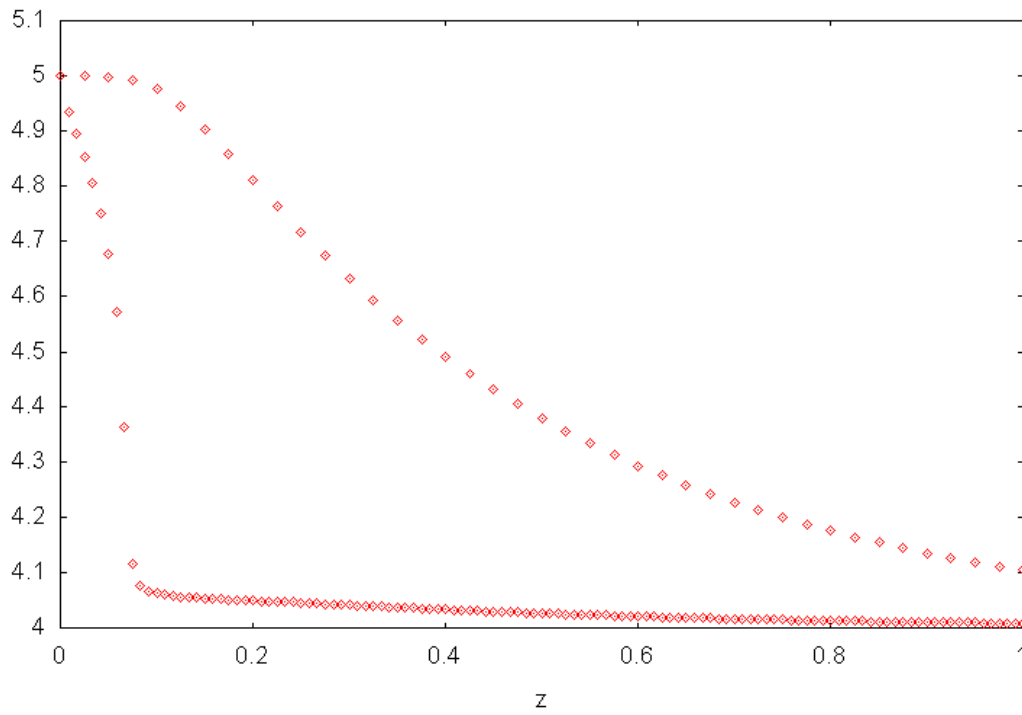


$T_s(z, 3)$ et $T_f(0, z, 3)$ en K (de haut en bas)

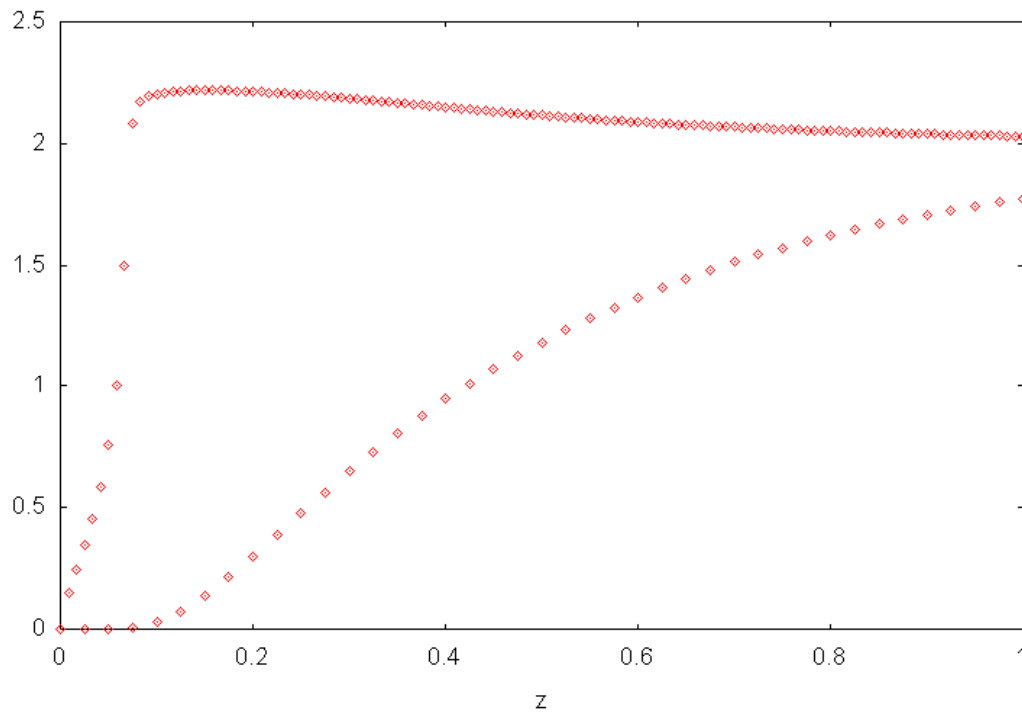


$C_{COs}(z, 3)$ et $C_{COf}(0, z, 3)$ en % (de bas en haut)

CHAPITRE 3. RÉACTION $CO + O_2/2 \rightarrow CO_2$



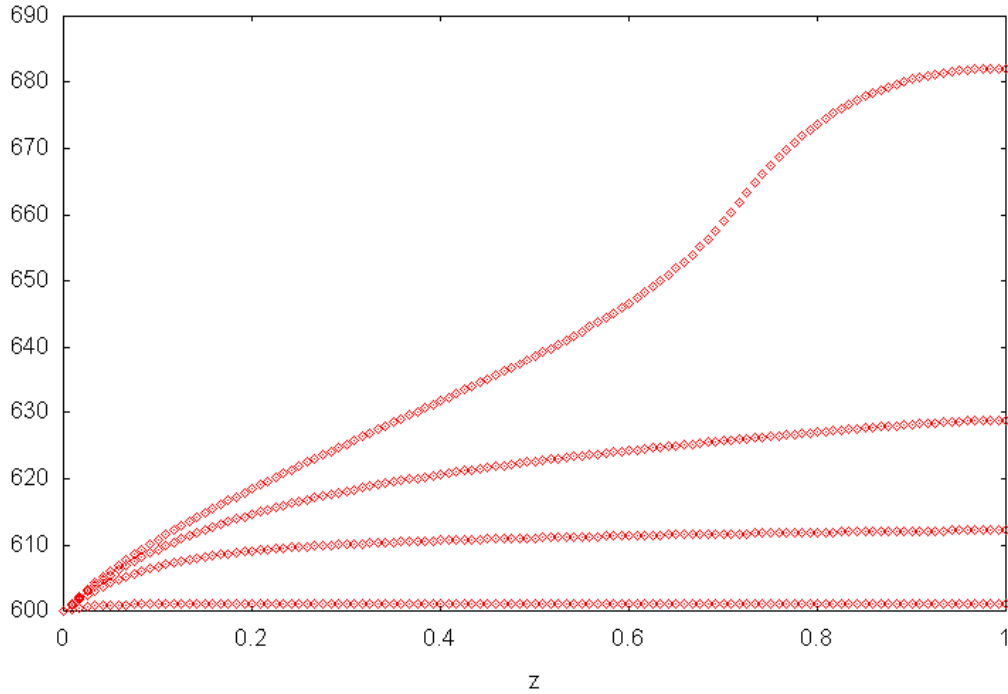
$C_{O_2s}(z, 3)$ et $C_{O_2f}(0, z, 3)$ en % (de bas en haut)



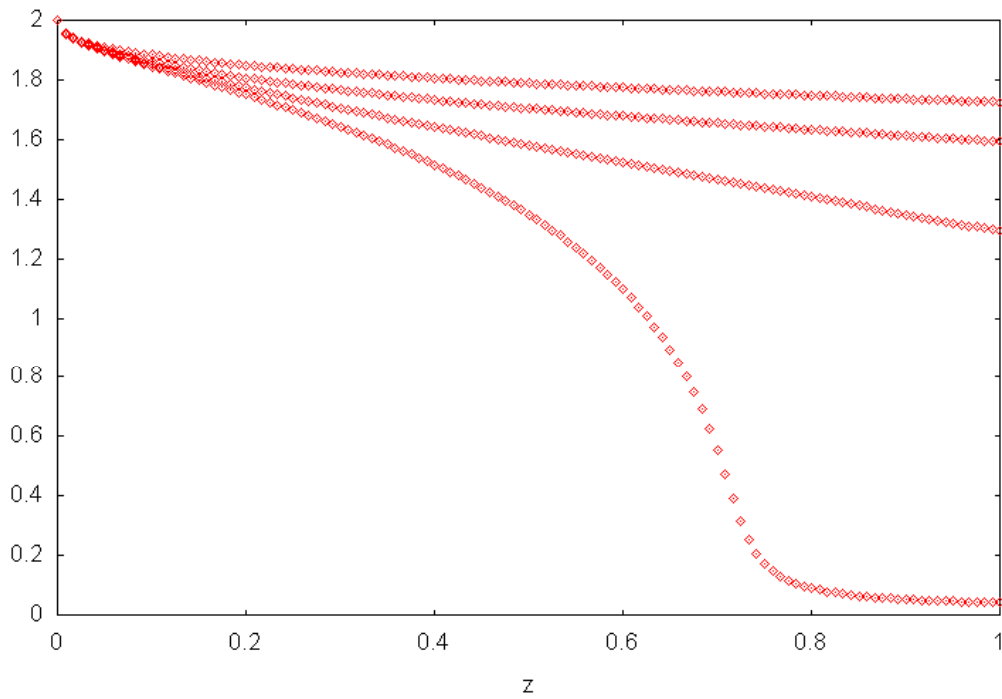
$C_{CO_2s}(z, 3)$ et $C_{CO_2f}(0, z, 3)$ en % (de haut en bas)

3.3. SIMULATION NUMÉRIQUE PAR DIFFÉRENCES FINIES

Si on fait un zoom sur le premier centimètre du cylindre pour bien voir ce qui s'y passe on obtient les courbes suivantes sur la paroi aux instants $0.1s$, $1s$, $2s$ et $3s$:

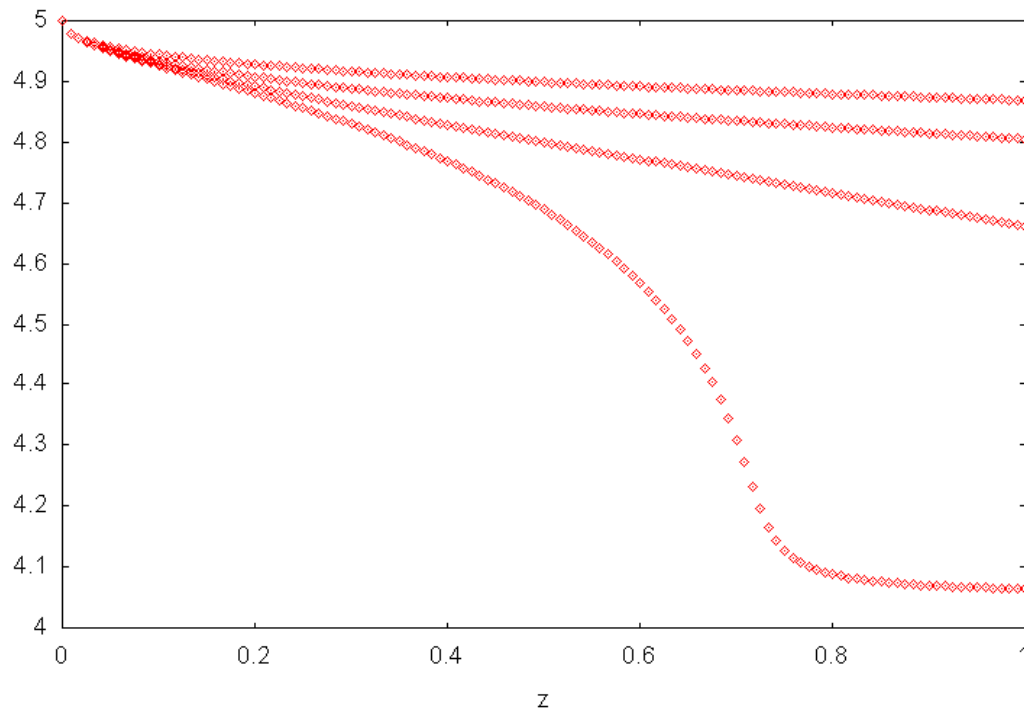


$T_s(z, t)$ en K (de bas en haut : courbes à $t = 0.1s$, $1s$, $2s$ et $3s$)

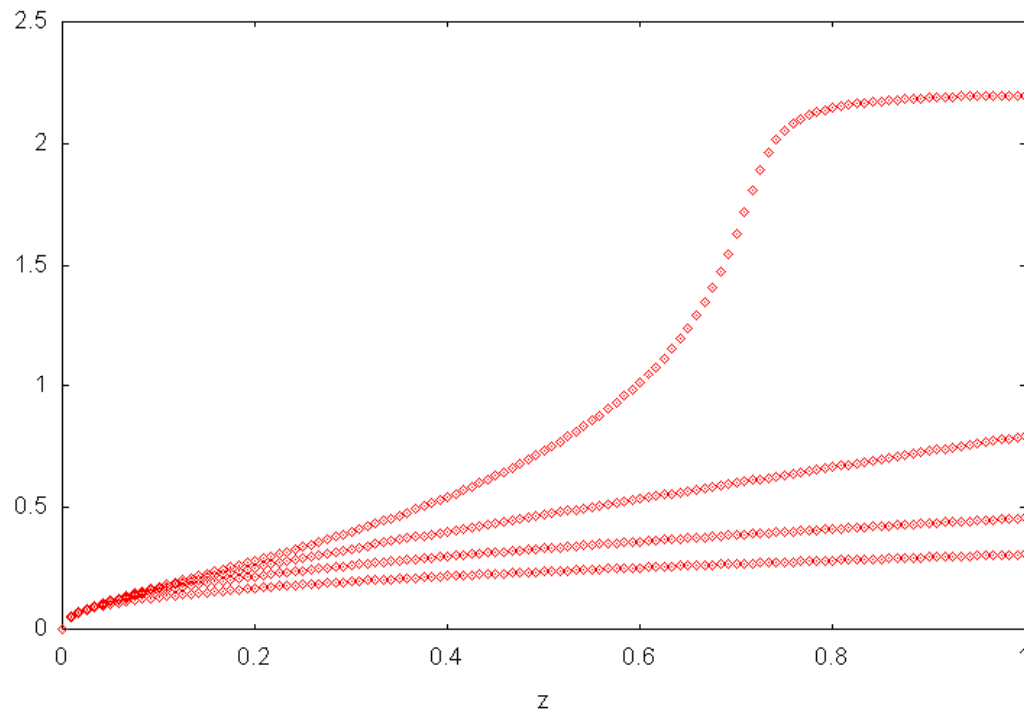


$C_{CO_s}(z, t)$ en % (de haut en bas : courbes à $t = 0.1s$, $1s$, $2s$ et $3s$)

CHAPITRE 3. RÉACTION $CO + O_2/2 \rightarrow CO_2$



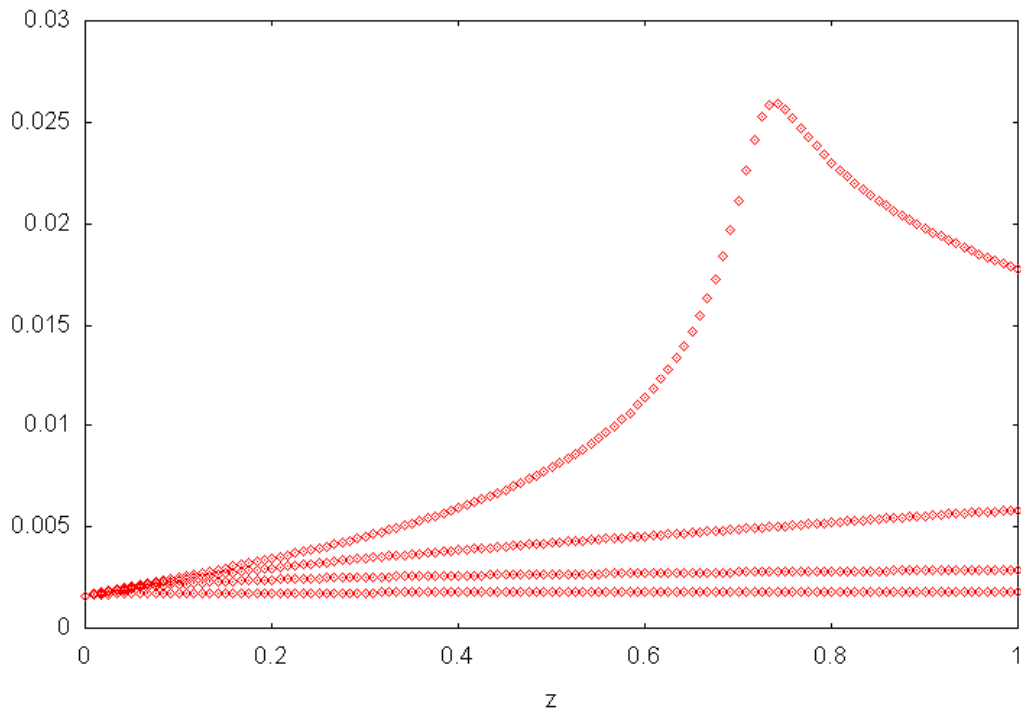
$C_{O_2s}(z, t)$ en % (de haut en bas : courbes à $t = 0.1s, 1s, 2s$ et $3s$)



$C_{CO_2s}(z, t)$ en % (de bas en haut : courbes à $t = 0.1s, 1s, 2s$ et $3s$)

3.3. SIMULATION NUMÉRIQUE PAR DIFFÉRENCES FINIES

La figure suivante montre la vitesse de réaction \hat{r}_{CO} aux trois mêmes instants :



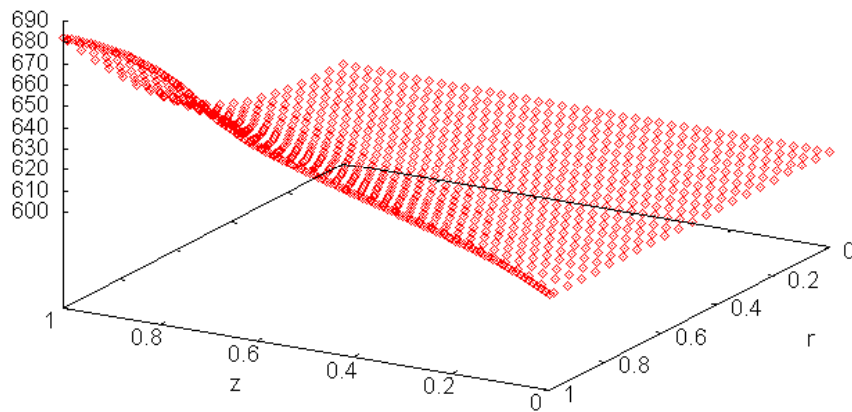
$\hat{r}_{CO}(C_{CO_s}, C_{O_2s}, T_s)(z, t)$ (de bas en haut : courbes à $t = 0.1s, 1s, 2s$ et $3s$)

Les valeurs prises sur la paroi à un centimètre de l'entrée du cylindre ($z = 1$) au bout de $3s$ sont :

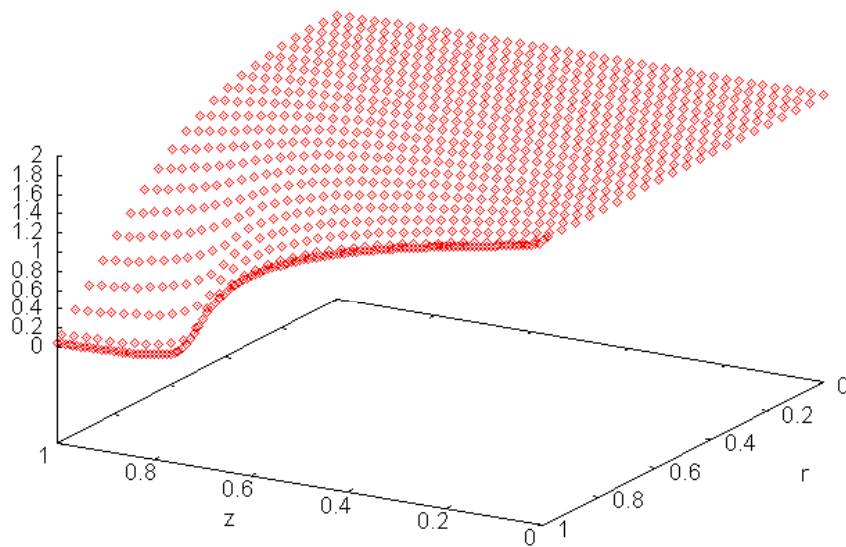
$$\begin{aligned} C_{CO_s}(1, 3) &: 0.044 \%, \\ C_{O_2s}(1, 3) &: 4.065 \%, \\ C_{CO_2s}(1, 3) &: 2.197 \%, \\ T_s(1, 3) &: 682.053 \text{ K}. \end{aligned}$$

CHAPITRE 3. RÉACTION $CO + O_2/2 \rightarrow CO_2$

De manière à voir comment les phénomènes ayant lieu sur la paroi du cylindre ($r = 1$) se propagent par diffusion dans le premier centimètre de notre cylindre, on trace la température et les concentrations dans le domaine $(r, z) \in [0, 1] \times [0, 1]$, à 3s :

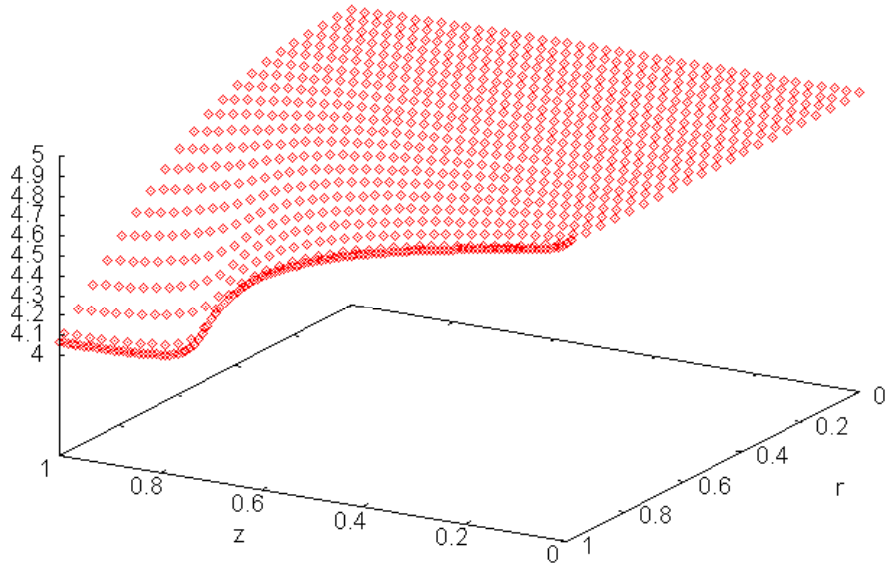


$T_f(r, z, 3)$ en K

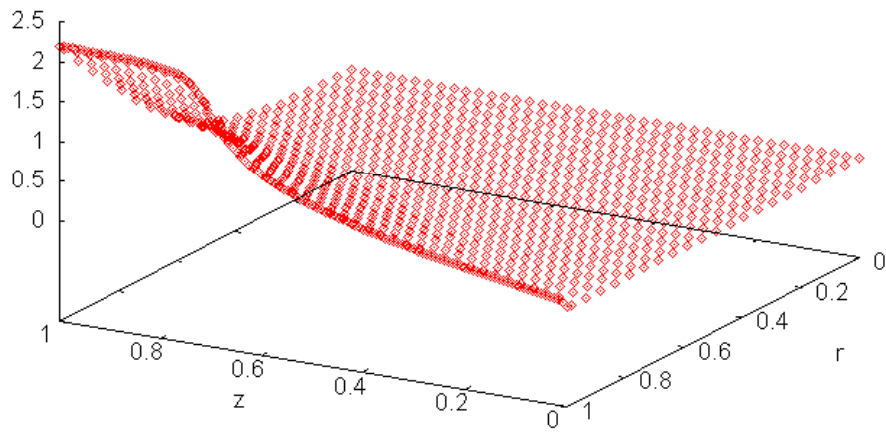


$C_{CO_f}(r, z, 3)$ en %

3.3. SIMULATION NUMÉRIQUE PAR DIFFÉRENCES FINIES



$C_{O_2f}(r, z, 3)$ en %



$C_{CO_2f}(r, z, 3)$ en %

Chapitre 4

Valeurs numériques des paramètres

4.1 Les constantes donnant les coefficients des équations

$$\begin{aligned} \rho_f &= \frac{343,7}{T_f} && kg \times m^{-3} \\ \rho_s &= 2500 && kg \times m^{-3} \\ \lambda_f &= 0,5 \times 10^{-4} T_f + 1,41 \times 10^{-2} && W \times m^{-1} \times K^{-1} \\ \lambda_s &= 1,675 && W \times m^{-1} \times K^{-1} \\ C_{pf} &= 47 \frac{T_f}{200} + 934 && J \times kg^{-1} \times K^{-1} \\ C_{ps} &= 1071 + 0,156 T_s - 3,435 \times 10^7 \frac{1}{(T_s)^2} && J \times kg^{-1} \times K^{-1} \\ S &= 2912 && m^2 \times m_{réacteur}^{-3} \\ D_{CO_f} &= 1,66 \times 10^{-5} \left(\frac{T_f}{273} \right)^{1,75} && m^2 \times s^{-1} \\ D_{CO_2f} &= 1,39 \times 10^{-5} \left(\frac{T_f}{273} \right)^{1,75} && m^2 \times s^{-1} \\ D_{O_2f} &= 1,78 \times 10^{-5} \left(\frac{T_f}{273} \right)^{1,75} && m^2 \times s^{-1} \\ A &= 0,006 && m^2 \\ W &= 0,0876435 && kg \times s^{-1} \\ V_{\max} &= 2 \frac{W}{A \cdot \rho_f} = 8,5 \times 10^{-2} T_f && m \times s^{-1} \\ \varepsilon_s &= 0,5701 && \\ R_f &= 3,92 \times 10^{-4} && m \\ L &= 10^{-1} && m \end{aligned}$$

CHAPITRE 4. VALEURS NUMÉRIQUES DES PARAMÈTRES

$$\begin{aligned}
 a &= 2,69 \times 10^4 \quad m_{Pt}^2 \times m_{réacteur}^{-3} \\
 \alpha_{CO} &= -1 \\
 \alpha_{O_2} &= -0,5 \\
 \alpha_{CO_2} &= 1 \\
 -\Delta H &= 2,83 \times 10^5 \quad J \times mol^{-1}
 \end{aligned}$$

4.2 La vitesse de réaction

On a :

$$\check{r}_{CO} = \frac{6,699 \times 10^{13} \exp\left(-\frac{12556}{T_s}\right) X_{CO_s} X_{O_2_s}}{T_s \left(1 + 65,5 \exp\left(\frac{961}{T_s}\right) X_{CO_s}\right)^2} mol_{CO} \times m_{Pt}^{-2} \times s^{-1}$$

où $X_i = C_i/C_T$ désignent les fractions molaires correspondant aux concentrations C_i et :

$$C_T = \frac{P}{R.T} = \frac{1,013.10^5}{8,314.T} mol \times m^{-3}$$

qui devient :

$$\hat{r}_{CO} = \frac{1,624 \times 10^{11} \exp\left(-\frac{12556}{T_s}\right) C_{CO_s} C_{O_2_s}}{T_s \left(1 + 3,225 \exp\left(\frac{961}{T_s}\right) C_{CO_s}\right)^2} mol_{CO} \times m_{Pt}^{-2} \times s^{-1}$$

en faisant l'hypothèse que $C_T = \frac{1,013 \times 10^5}{8,314 \times 600} mol \times m^{-3}$ où :

$$\hat{r}_{CO} = \frac{4,512 \times 10^5 \exp\left(-\frac{12556}{T_s}\right) C_{CO_s} C_{O_2_s} T_s}{\left(1 + 5,376 \times 10^{-3} \exp\left(\frac{961}{T_s}\right) C_{CO_s} T_s\right)^2} mol_{CO} \times m_{Pt}^{-2} \times s^{-1}$$

en utilisant l'expression de C_T en fonction de T_s .

4.3 Les conditions initiales ou aux limites

A $600K$, on pose $C_{600} = \frac{1,013 \times 10^5}{8,314 \times 600} mol \times m^{-3}$, pour obtenir les conditions initiales et aux limites suivantes issues de l'hypothèse que le gaz qui entre dans le cylindre est à la température de $600K$ et contient 2% de CO , 5% de O_2 et pas de CO_2 :

4.3. LES CONDITIONS INITIALES OU AUX LIMITES

– A l'entrée du canal :

$$\begin{aligned}C_{CO_f}(r, 0, t) &= 0,02 \times C_{600} \simeq 0,406142 \text{ mol} \times m^{-3}, \\C_{O_2f}(r, 0, t) &= 0,05 \times C_{600} \simeq 1,015356 \text{ mol} \times m^{-3}, \\C_{CO_2f}(r, 0, t) &= 0 \text{ mol} \times m^{-3}, \\T_f(r, 0, t) &= 600 \text{ K}.\end{aligned}$$

– Sur la paroi :

$$\begin{aligned}C_{CO_s}(z, 0) &= 0,02 \times C_{600} \simeq 0,406142 \text{ mol} \times m^{-3}, \\C_{O_2s}(z, 0) &= 0,05 \times C_{600} \simeq 1,015356 \text{ mol} \times m^{-3}, \\C_{CO_2s}(z, 0) &= 0 \text{ mol} \times m^{-3}, \\T_s(z, 0) &= 600 \text{ K}.\end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] J. BEBERNES, D. EBERLY, *Mathematical problems from combustion theory*. Appl. Math. Sci. 83. Springer Verlag, Berlin (1989).
- [2] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Masson, Paris (1983).
- [3] H. BREZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert*. North Holland, Amsterdam (1982).
- [4] M. CHIPOT, *Elements of Nonlinear Analysis*. Birkhäuser, Basel (2000).
- [5] R. DAUTRAY, J.L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique*. Masson, Paris (1987)
- [6] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD, G. POLYA, *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge (1934).
- [7] M.A. KRASNOSELSKII, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*. Pergamon Press, Oxford (1964).
- [8] A. KUFNER, *Weighted Sobolev spaces*. Teubner-Texte zur Mathematik, 31, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig (1980).
- [9] M.T. LACROIX-SONRIER, *Distribution, espaces de Sobolev, applications*. Ellipses, Paris (1998).
- [10] P. LASCAUX, R. THEODOR, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*. Tome 2. Masson, Paris (1987).
- [11] J.L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes*. Vol. 1. Dunod, Paris (1968).
- [12] J.L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Paris (1969).
- [13] J. MALEK, J. NECAS, M. ROKYTA and M. RUZICKA, *Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs*. Applied Mathematics and Mathematical Computation 13, Chapman & Hall, London (1996).
- [14] J. NECAS, J. HLAVACEK, *Studies in applied mechanics 3 : Mathematical theory of elastic and elasto-plastic bodies - An introduction*. Elsevier (1981).
- [15] S.H. OH, J.C. CAVENDISH, *Transients of monolith catalytic converters. Response to step changes in feedstream temperature as related to controlling automobile emissions*. Ind. Eng. Chem. Prod. Res. Devel. 21 29 (1982).

BIBLIOGRAPHIE

- [16] S.H. OH, J.C. CAVENDISH, *Mathematical modeling of catalytic converter lightoff. Part III : Prediction of vehicle exhaust emissions and parametric analysis*. The American Institute of Chemical Engineers Journal, 31(6), pp. 943-949 (1985).
- [17] J.E. RAKOTOSON, J.M. RAKOTOSON, *Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles*. PUF, Paris (1999).
- [18] P.A. RAVIART, J.M. THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris (1988).
- [19] M. RENARDY, R.C. ROGERS, *An introduction to partial differential equations*. Springer Verlag, New-York (1993).
- [20] M.J. RYAN, E.R. BECKE, K. ZYGOURAKIS, *Light-off performance of catalytic converters. The effect of heat/mass transfer characteristics*. SAE 910610 (1991).
- [21] E. ZEIDLER, *Nonlinear functional analysis and its applications*. Springer-Verlag, Berlin (1985).

Etudes théorique et numérique d'un modèle non-stationnaire de catalyseur à passages cylindriques

RESUME : L'objectif de ce travail est d'étudier un modèle décrivant les évolutions spatiale et temporelle des concentrations de différentes espèces chimiques sous forme gazeuse et de la température dans un canal cylindrique et sur sa paroi extérieure. Il s'agit d'un système couplant des équations aux dérivées partielles paraboliques décrivant l'évolution spatiale des espèces chimiques et de la température dans le cylindre avec une équation aux dérivées partielles et des équations différentielles ordinaires décrivant l'évolution temporelle des mêmes espèces chimiques et de la température sur la paroi. Ce système présente la particularité supplémentaire de coupler les équations sur la paroi entre elles.

Nous établissons l'existence et l'unicité de la solution, ainsi que quelques propriétés qualitatives de cette solution, en particulier l'existence de bornes supérieures et inférieures. Nous étudions également le comportement limite de la solution quand le temps tend vers l'infini.

Nous mettons ensuite en oeuvre une méthode numérique permettant d'obtenir des courbes décrivant le comportement de la solution.

Numerical and theoretical studies of a non-stationary model for catalytic converter with cylindrical geometry

ABSTRACT : The aim of this work is to study a model describing the spatial and temporal evolutions of the concentrations of different chemical species in gaseous phase going through a cylinder and that of the temperature in the cylinder and on its boundary. This system is coupling parabolic partial differential equations giving the spatial evolution of the concentrations and of the temperature in the cylinder with one parabolic partial differential equation and some ordinary differential equations giving the temporal evolution of the concentrations and of the temperature on the boundary. This system is also coupling all the equations on the boundary together.

We establish the existence and uniqueness of the solution, as well as some qualitative properties of this solution such as the existence of upper and lower bounds. We also study the behaviour of the solution when the time growth to infinity.

We build a numerical method in order to obtain graphs of the solution under different initial and boundary conditions.

MATHEMATIQUES

MOTS CLES : Combustion, Catalyseur, Equation parabolique, Equation différentielle ordinaire, Système couplé, Problème de transmission.

Université de Haute-Alsace, Laboratoire de Mathématiques et Applications
4 rue des Frères Lumière, F-68093 MULHOUSE Cedex