



**HAL**  
open science

# Asymptotic solutions and resonances for Klein-Gordon and Schrödinger operators

Emmanuelle Amar-Servat

► **To cite this version:**

Emmanuelle Amar-Servat. Asymptotic solutions and resonances for Klein-Gordon and Schrödinger operators. Mathématiques [math]. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2002. Français. NNT : . tel-00002342

**HAL Id: tel-00002342**

**<https://theses.hal.science/tel-00002342>**

Submitted on 31 Jan 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse

Présentée pour l'obtention du titre de :  
**Docteur de l'Université de Paris 13**  
Spécialité : *Mathématiques*

## **Solutions asymptotiques et résonances pour l'opérateur de Klein-Gordon et de Schrödinger.**

par

Emmanuelle AMAR-SERVAT

sous la direction d'Alain GRIGIS

Soutenue le 18 décembre 2002 devant le jury composé de :

B. Helffer	Prof. Univ. Paris 11	Rapporteur
A. Martinez	Prof. Univ. Bologne (It)	Rapporteur
M. Dimassi	MdC Univ. Paris 13	Examinateur
T. Ramond	MdC Univ. Paris 11	Examinateur
J. Sjöstrand	DR CNRS	Examinateur
A. Grigis	Prof. Univ. Paris 13	Directeur

N° attribué par la bibliothèque :



## Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Alain Grigis pour m'avoir donné des sujets de recherche intéressants et pour m'avoir guidé tout au long de ma thèse. En me faisant participer à de nombreuses conférences, il m'a fait connaître de manière enthousiasmante, le milieu de la recherche en physique mathématique.

Je tiens également à remercier chaleureusement Bernard Helffer et André Martinez qui ont eu la patience de lire et relire ma thèse, en vue d'en faire le rapport.

Mouez Dimassi, Johannes Sjöstrand et Thierry Ramond ont accepté de faire partie de mon jury et je leur en suis très reconnaissante.

Je remercie Maher Zerzeri qui a toujours été disponible pour répondre à mes questions.

Enfin, j'adresse mes plus tendres remerciements à David pour sa patience et son soutien tout au long de ma thèse.



## Résumé

Ce travail de thèse se situe dans le cadre de l'analyse semi-classique. Il se divise en trois parties.

Dans la première, on a étudié l'opérateur de Klein-Gordon semi-classique en dimension un. Dans la zone où le potentiel reste sous le niveau d'énergie, il existe pour cet opérateur des constructions de solutions WKB, similaires à celles développées pour l'opérateur de Schrödinger. Sous certaines hypothèses, on a prolongé ces solutions hors de cette zone, grâce aux méthodes utilisées près des points tournants pour l'opérateur de Schrödinger. On a ensuite étudié un exemple pour lequel on peut faire des calculs explicites. Enfin, en dimension quelconque, on a obtenu une nouvelle majoration des fonctions propres, lorsque la distance d'Agmon associée à cet opérateur a un gradient lipschitzien.

La deuxième partie concerne l'opérateur de Schrödinger et l'étude des résonances en dimension un. Lorsque le potentiel présente deux puits et une mer pour les niveaux d'énergies considérés, on a obtenu des conditions de non croisement des résonances ainsi que leur graphe, grâce à la construction de modes. En présence d'un nombre quelconque de puits, cela permet également de calculer une estimation de la partie imaginaire des résonances dans le cas d'une interaction simple.

Enfin, dans la troisième partie, on considère un opérateur de Schrödinger dont le potentiel présente un maximum non dégénéré. On a étudié les résonances générées par une courbe homocline qui passe par ce maximum. En dimension un, on a obtenu une condition de quantification, et par suite les résonances recherchées. En dimension quelconque, on a construit une solution asymptotique sortante le long de cette courbe, en adaptant la méthode de B. Helffer et J. Sjöstrand pour le fond de puits non résonnant. Une transformation FBI permet ensuite de conjecturer un premier niveau de résonances.

## Abstract

This PhD thesis deals with semi-classical analysis. It is divided in three parts.

In the first one, we considered a semi-classical Klein-Gordon operator in the one dimensional case. WKB constructions exist in the region where the potential remains below the energy level. Under some hypothesis, we proved that these solutions can be extended beyond this region, by means of methods used near turning points for the Schrödinger operator. We then studied an example where explicit calculations can be done. Lastly, we obtained new estimates for eigenfunctions in any dimension, if the gradient of the Agmon distance is lipschitzian.

The second part of this work concerns resonances for the Schrödinger operator in the one dimensional case. When the potential presents two compact wells and an infinite one, for energy level under consideration, we obtained conditions for anti-crossing of resonances as well as their graphics. This was done by constructing modes for the operator. For any given number of compact wells, this also led to estimates for the imaginary part of resonances, when a simple interaction occurs.

Finally, in the third part of this work, we considered a Schrödinger operator which potential presents a non degenerate maximum. We studied the resonances generated by an homocline curve which contains this maximum. In the one dimensional case, we obtained a quantification equation which led to the resonances we looked for. In the n-dimensional case, an out-going asymptotic solution along the curve is constructed, by adapting B. Helffer and J. Sjöstrand's method for the bottom of non resonant wells. An FBI transform allowed then to guess a first level of resonances.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
Références de l'introduction . . . . .	11
<b>1 Solutions asymptotiques pour l'opérateur de Klein-Gordon et effet tunnel</b>	<b>13</b>
1.0 Introduction . . . . .	13
1.1 Estimations de Lithner-Agmon . . . . .	17
1.2 Décroissance des fonctions propres . . . . .	26
1.3 Matrices d'interaction . . . . .	32
1.3.1 Estimation du noyau de $(P - z)^{-1}$ . . . . .	32
1.3.2 Matrice de $P$ . . . . .	38
1.4 Solutions WKB pour l'opérateur de Klein-Gordon . . . . .	41
1.4.1 Définition du problème . . . . .	42
1.4.2 Résolution pour $V(x) < 0$ . . . . .	42
1.4.3 Cas $V(x) = x$ . . . . .	48
1.4.4 Equivalent de $u$ . . . . .	51
1.4.5 Cas d'un puits de potentiel, pour un potentiel devenant positif . . . . .	60
1.4.6 Exemples . . . . .	69
1.5 Calcul du splitting dans le cas d'un double puits de potentiel . . . . .	76
Bibliographie chapitre 1 . . . . .	80
<b>2 Résonances en dimension un pour l'opérateur de Schrödinger</b>	<b>83</b>
2.0 Introduction . . . . .	83
2.1 Résonances en dimension un . . . . .	89
2.2 Solutions et matrices de transition . . . . .	90
2.3 Cas d'un seul puits . . . . .	92
2.4 Cas de deux puits . . . . .	101
2.4.1 Partie imaginaire des résonances . . . . .	105
2.4.2 Les croisements . . . . .	117
2.4.3 Partie réelle des résonances . . . . .	125
2.4.4 Les graphes . . . . .	129
2.5 Cas de $M$ puits . . . . .	132
2.5.1 Le cas sans interaction . . . . .	132
2.5.2 Le cas avec interaction . . . . .	134
2.6 Appendice 1 : Solutions exactes ayant un comportement asymptotique prédéterminé . . . . .	135



2.7	Appendice 2 : Fonctions d'Airy . . . . .	136
2.8	Appendice 3 : solutions formelles . . . . .	138
2.8.1	Loin des points tournants . . . . .	138
2.8.2	Près des points tournants . . . . .	139
2.8.3	Formules de connection pour les solutions formelles . . . . .	141
2.9	Appendice 4 : construction de solutions exactes . . . . .	144
2.9.1	Construction de $\psi_s, \psi_r$ . . . . .	144
2.9.2	Constructions des solutions de la partie 2.3 . . . . .	147
2.10	Appendice 5 : Construction d'un Automate pour calculer les termes de l'équation éiconale de la partie 2.3 . . . . .	149
	Bibliographie chapitre 2 . . . . .	151
<b>3</b>	<b>Construction d'une solution asymptotique sortante le long d'une courbe homocline</b> . . . . .	<b>153</b>
3.0	Introduction . . . . .	153
<b>A-La dimension un</b>		<b>159</b>
3.1	Hypothèses et Notations . . . . .	159
3.2	Réduction microlocale . . . . .	161
3.3	Etude de $Q$ et $Q_0$ . . . . .	163
3.4	Equivalent de $v_+$ . . . . .	165
3.4.1	Etude de $\Phi(x, \rho)$ . . . . .	167
3.4.2	Développement asymptotique de $v_+$ . . . . .	173
3.5	Equation des résonances . . . . .	174
3.6	Zone de résonance . . . . .	177
<b>B-La dimension quelconque</b>		<b>179</b>
3.1	Hypothèses et Notations . . . . .	179
3.1.1	Géométrie globale . . . . .	179
3.1.2	Géométrie près de 0 . . . . .	182
3.2	Construction d'une phase auxiliaire . . . . .	186
3.3	Solution de $(D_t + P - \rho)v = 0$ . . . . .	191
3.4	Solution de $(P - \rho)u = 0$ . . . . .	194
3.5	Développement de $u$ . . . . .	195
3.5.1	Dans $\Omega_-$ . . . . .	196
3.5.2	Dans $\Omega_+$ . . . . .	199
3.6	Transformation FBI . . . . .	204
3.7	Développement de $Tu$ au voisinage de zéro . . . . .	208
3.7.1	Développement de $Tu$ pour $\Re x \in K'_-$ . . . . .	208
3.7.2	Développement de $Tu$ pour $\Re x \in K'_+$ . . . . .	210
3.8	Prolongement de $Tu$ le long de $\tilde{\gamma}_0$ . . . . .	211
	Bibliographie chapitre 3 . . . . .	217

# Introduction

Cette thèse se situe dans le cadre de l'analyse semi-classique, c'est à dire l'étude d'opérateurs différentiels ou pseudo-différentiels dépendant d'un paramètre  $h$  qui tend vers 0.

On considère deux opérateurs semi-classiques : dans le premier chapitre, l'opérateur de Klein-Gordon, défini par

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), P_{KG}u(x, h) = \left[ \sqrt{1 - h^2 \Delta} + V(x) \right] u,$$

et dans les deux chapitres suivants l'opérateur de Schrödinger :

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), P_S u(x, h) = -h^2 \Delta u + V u.$$

Notons  $P$  l'un ou l'autre de ces opérateurs.

Pour  $E_0 \in \mathbb{R}$  vérifiant certaines conditions qui dépendent du potentiel  $V$ , on cherche à obtenir des estimations aussi précises que possible pour les valeurs propres ou les résonances de  $P$  qui tendent vers  $E_0$  quand  $h$  tend vers zéro. Si  $p(x, \xi)$  est le symbole principal de  $P$ , on appelle puits microlocaux (resp. mers microlocales) pour un niveau d'énergie  $E_0$  les composantes connexes compactes (resp. non bornées) de  $\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, p(x, \xi) = E_0\}$ . On appelle puits ou mers les projections en  $x$  de ces ensembles.

Une technique classique pour étudier  $P$  consiste à décomposer cet opérateur en opérateurs ne présentant qu'un seul puits. On peut soit "boucher" les puits en ajoutant des fonctions troncatures au potentiel, soit pour des opérateurs différentiels, décomposer le domaine de définition de  $P$  en fonction des puits, en mettant par exemple des conditions de Dirichlet au bord du domaine. L'étude des opérateurs à un puits est plus simple, on peut par exemple calculer un développement de leurs premières valeurs propres ou résonances grâce aux techniques de [He-Sj1]. On étudie ensuite la résolvante de  $P$  (par exemple à l'aide d'un problème de Grushin [G-M-S1,2],[He-Sj4]) pour obtenir des résultats sur l'opérateur de départ. On montre ainsi que les valeurs propres ou les résonances des opérateurs à un puits sont proches des valeurs propres ou résonances de  $P$ . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on dit que valeurs propres et résonances sont associées à tel puits selon qu'elles sont proches des valeurs propres ou résonances de l'opérateur à un puits correspondant.

Dans le premier chapitre, on étudie les valeurs propres de l'opérateur de Klein-Gordon  $P_{KG}$  au voisinage de  $E_0 \in \mathbb{R}$ , où l'ensemble  $\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, p(x, \xi) = E_0\}$  est compact. Rappelons que le symbole principal de  $P_{KG}$  est  $p(x, \xi) = \sqrt{1 + \xi^2} + V(x)$ . On est en présence d'un ou plusieurs puits. Le spectre de  $P_{KG}$  dans un intervalle  $I(h)$  qui tend vers  $\{E_0\}$  quand  $h$  tend vers 0, est purement discret dès que  $h$  est assez petit (en fait le spectre de  $P_{KG}$  est purement discret sur l'intervalle  $] - \infty, \liminf_{|x| \rightarrow \infty} V[$  qui contient  $E_0$ ). On utilise la méthode de séparation des puits rappelée ci-dessus pour exprimer la matrice  $M$  de l'opérateur  $P_{KG}$  restreint aux sous-espaces propres associés à  $I(h)$ . On obtient

$$M = \text{diag}(\mu_j) + W + R,$$

où  $\mu_j$  sont les valeurs propres associées à chacun des puits,  $W$  est la matrice d'interaction et  $R$  est une matrice négligeable par rapport à  $W$ . Les coefficients de  $W$  s'expriment à l'aide de produits scalaires entre solutions associées à différents puits. Ils sont exponentiellement petits lorsque  $h$  tend vers 0. Ce sont eux qui rendent compte de l'interaction qu'il peut y avoir entre les différents puits.

On se restreint ensuite à la dimension un et au cas d'un double puits symétrique ponctuel de potentiel. Soit  $\{\pm x_0\}$  ces puits ponctuels. On a donc  $V(\pm x_0) = E_0 - 1$ ,  $V'(\pm x_0) = 0$ . On a construit deux opérateurs  $P_{KG\pm} = P_{KG} + \chi_{\pm}(x)$  tels que  $P_{KG\pm}$  n'ait qu'un seul puits :  $\{\pm x_0\}$ . On s'intéresse aux premières valeurs propres de l'opérateur  $P_{KG}$ .

De manière analogue aux solutions WKB près des minima de  $V$  construites pour l'opérateur de Schrödinger dans [He-Sj1], on construit des solutions WKB pour les opérateurs de Klein-Gordon  $P_{KG\pm}$  près de  $\pm x_0$ . Ces solutions se prolongent dans la zone  $\{x, V_{\pm}(x) = V + \chi_{\pm} < E_0\}$  et donnent un développement en série entière en  $h^{1/2}$  des valeurs propres au fond du puits, c'est à dire des valeurs propres  $\mu(h)$  tel que  $|E_0 - \mu(h)| \leq Ch$ , pour  $C > 0$ . La symétrie de l'opérateur assure que les deux premières valeurs propres ont le même développement. Cependant, on sait [Ca-Ma-Si] que les fonctions propres correspondant à la première valeur propre peuvent être prises positives. Cela impose que l'espace vectoriel correspondant est de dimension un. On veut alors calculer la différence, le splitting, entre les deux premières valeurs propres.

B. Helffer et B. Parisse dans [He-Pa] ont calculé ce splitting en dimension quelconque pour des potentiels qui restent en dessous du niveau d'énergie entre les deux puits. Le but de ce chapitre était d'étendre ce résultat dans le cas de potentiels pouvant dépasser le niveau d'énergie entre les deux puits en dimension un.

On s'attache donc à étendre les estimations des fonctions propres, ainsi que les résultats concernant les solutions WKB dans la zone  $\{V > E_0\}$ .

Deux obstacles apparaissent alors, dus à la non analyticité de la fonction  $\xi \mapsto p(x, \xi)$  hors de la zone  $\{z \in \mathbb{C}, |\Im z| < 1\}$ .

Le premier réside dans la nécessité de construire des solutions approchées qui prolongent les solutions déjà construites dans la zone  $\{x \in \mathbb{R}, V_{\pm}(x) < E_0\}$  pour les opérateurs de Klein-Gordon  $P_{KG\pm}$ . On s'inspire d'une méthode utilisée pour l'opérateur de Schrödinger au voisinage des points tournants  $\{x, V_{\pm}(x) = E_0\}$  : au lieu d'étudier l'équation  $(P_{KG\pm} - E_0)u = 0$ , on passe par la transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  et on cherche  $\mathcal{F}u$  vérifiant  $\mathcal{F}(P_{KG\pm}u) - E_0\mathcal{F}u = 0$ . Cela permet, dans certains cas, de prolonger la solution approchée dans la zone  $\{x \in \mathbb{R}, V_{\pm}(x) > E_0\}$ . Grâce à la méthode de la phase stationnaire, on obtient des solutions de  $(P_{KG\pm} - E_0)u = O(h^{\infty})e^{-d_{\pm}(x)/h}$ , où  $d_{\pm}$  est la distance d'Agmon au puits :  $d_{\pm}(x) = \left| \int_{\pm x_0}^x ((E_0 - V_{\pm})_+^2 - 1)_+^{1/2} \right|$ . Cependant, il semble difficile de montrer que ces solutions WKB approchent bien les solutions exactes.

Le deuxième obstacle vient de l'expression même du splitting. Le point de départ est la matrice  $M$  qui, dans le cas d'un double puits ponctuel, est une matrice  $2 \times 2$  de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \mu & w \\ w & \mu \end{pmatrix}.$$

Ici,  $\mu$  désigne la première valeur propre pour chacun des opérateurs à un puits. Les coefficients  $w$  donnent donc le splitting et, modulo un terme négligeable, ils s'expriment en fonction des vecteurs propres des opérateurs à un puits pour la valeur propre  $\mu$ . Dans le cas de l'opérateur de Schrödinger,

la formule de Green-Rieman permet d'exprimer ces coefficients en fonction des vecteurs propres et de leur dérivée en un point. Dans le cas de l'opérateur de Klein-Gordon, il n'y a pas d'équivalent immédiat à cette formule. Dans [He-Pa], B. Helffer et B. Parisse proposent un substitut à la formule de Green-Riemann en dimension quelconque. En dimension un, on obtient facilement une formule sous forme intégrale. On doit alors utiliser la méthode de la phase stationnaire, et on est à nouveau bloqué par la non analyticité du symbole de l'opérateur et donc par le niveau  $V(x) = E_0$  entre les deux puits.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des résonances pour l'opérateur de Schrödinger  $P_S$  en dimension un. Le potentiel satisfait les hypothèses de [Fu-Ra] qui permettent de définir les résonances grâce à une dilatation analytique. On est donc ramené à l'étude des solutions de  $(P_S - E_0)u = 0$ . Rappelons que les résonances proches d'un minimum de potentiel ont été beaucoup étudiées, en particulier par B. Helffer et J. Sjöstrand dans [He-Sj1,2,3]. Les résonances proches d'un maximum de potentiel ont été étudiées en dimension un dans [Fu-Ra][M ] à l'aide d'une transformation FBI développée dans [He-Sj5].

On étudie ici les résonances proches d'un niveau  $E_0 \in \mathbb{R}$  qui se trouve loin des extr ma locaux du potentiel. On peut alors approximer l'équation  $P_S u = E_0 u$  par une équation d'Airy au voisinage des points tournants  $\{x \in \mathbb{R}, V(x) = E_0\}$  ([Fed]). Cela nous permet de construire comme dans [Bu-Gri] des bases de solutions exactes ainsi que des matrices de passage ayant un comportement asymptotique connu quand  $h$  tend vers 0. On en déduit une équation de quantification exacte qui donne implicitement les résonances proches d'un intervalle  $I$  qui ne contient pas de valeur critique du potentiel. On construit un automate fini qui permet de calculer l'équation de quantification pour un nombre quelconque fini de puits.

On se restreint ensuite à un potentiel qui présente deux puits et une mer aux niveaux  $E \in I$ . A chaque puits correspond un ensemble de résonances et on montre grâce au théorème de Rouché qu'elles sont proches des résonances pour l'opérateur à deux puits. Il est possible que deux résonances soient trop proches et qu'on ne puisse plus déterminer à quel puits elles sont associées : on dit alors qu'il y a une interaction. Il n'y a pas d'interaction lorsque les résonances sont clairement associées à l'un ou l'autre des deux puits, c'est à dire lorsqu'elles sont assez différentes.

On veut étudier ici la possibilité que deux résonances associées à chacun des deux puits soient égales pour certaines valeurs de  $h$ . Cela implique l'existence d'une interaction. On appelle ce phénomène un croisement.

Dans [G-M-S1] et [G-M-S2], V. Grecchi, A. Martinez et A. Sachetti étudient les croisements des résonances dans le cas d'un double puits ponctuel dans une  le. Ils construisent une famille de potentiels dépendant de deux paramètres. En utilisant la technique de séparation des puits, ils expriment les deux premiers niveaux de résonances de l'opérateur. Ils montrent que pour  $h > 0$  fixé assez petit, il existe une valeur des paramètres définissant le potentiel pour laquelle ces deux premiers niveaux sont égaux. Lors de tels croisements, ils démontrent que le rapport entre la barrière entre les deux puits et la plus petite des barrières puits-mer tend vers 2 quand  $h$  tend vers 0.

Pour étudier le croisement des résonances dans l'intervalle  $I$ , on adopte une technique différente, permise par la dimension un où on a pu calculer une équation de quantification exacte. Tout d'abord cette équation donne une estimation précise des parties imaginaires des résonances même lors d'une interaction. On montre que si on suppose le rapport (barrière entre les deux puits)/(barrière puits-mer) diff rent de 2, des résonances ayant des parties réelles proches ne peuvent pas avoir la même partie imaginaire : elles ne peuvent donc pas être égales et il ne peut pas y avoir de croisement.

D'autre part, l'équation de quantification donne des renseignements sur les parties réelles des résonances et permet de tracer les graphes des résonances en fonction de  $h$ . Lorsque la barrière entre les deux puits est plus grande que la barrière puits-mer, on montre que ces graphes se croisent : la résonance associée au premier puits devient associée au deuxième puits lorsque  $h$  varie.

On termine ce chapitre en étudiant le cas d'un nombre quelconque  $M$  de puits. L'équation de quantification donne un développement des parties imaginaires des résonances lorsqu'il n'y a pas d'interaction. Lors d'une interaction, on obtient des résultats intéressants si les barrières après le deuxième puits résonant sont basses.

Dans le chapitre 3, on poursuit l'étude des résonances pour l'opérateur de Schrödinger. On s'intéresse cette fois aux résonances proches d'un maximum de potentiel. On commence par la dimension un et on reprend les hypothèses et la méthode du chapitre précédent. On doit donc étudier les solutions de

$$P_S u = E_0 u,$$

où  $E_0$  est un maximum du potentiel. Si  $V(0) = E_0$ ,  $V'(0) = 0$ ,  $V''(0) < 0$ , on ne peut plus approximer l'équation ci-dessus par une équation d'Airy au voisinage de 0. On fait une transformation FBI qui ramène microlocalement près de  $(0, 0)$  l'opérateur  $P_S$  à un opérateur modèle de symbole  $x\xi$  pour lequel des calculs explicites existent ([He-Sj5], [Mä], [Fu-Ra]). Cela permet de connaître le développement WKB des solutions près de 0. Comme dans le chapitre 2, on obtient une équation de quantification qui détermine les résonances implicitement. En suivant [Fu-Ra], on peut ensuite expliciter une zone au voisinage de laquelle se trouvent les résonances.

On étudie ensuite le cas de la dimension quelconque. C. Gérard et J. Sjöstrand ont étudié les résonances créées par une courbe hyperbolique [Ge-Sj]. Ils supposent l'existence d'une trajectoire périodique du champ hamiltonien  $\gamma_0$  au voisinage de laquelle le champ ne s'annule pas. On sait alors que les lagrangiennes entrantes et sortantes au voisinage de  $\gamma_0$  admettent une projection difféomorphe en  $x$ . Ces variétés s'expriment donc avec des fonctions  $\psi_{\pm}$  qui permettent la construction de solutions WKB de  $(P - \rho)u = 0$  le long de  $\gamma_0$ , si  $|\rho|$  est assez petit. C'est l'un des outils utilisés par C. Gérard et J. Sjöstrand pour déterminer les résonances dans la région  $[-\epsilon_0, \epsilon_0] - i[0, Ch]$  si  $E_0 = 0$  est le niveau d'énergie considéré.

On considère ici le cas d'une courbe homocline, c'est à dire une trajectoire bornée du champ hamiltonien sur laquelle le champ s'annule en un point. Plus précisément, pour l'opérateur de Schrödinger, le champ hamiltonien est

$$H_p = 2\xi \frac{\partial}{\partial x} - V'(x) \frac{\partial}{\partial \xi}$$

et on suppose à nouveau que  $V(0) = E_0$ ,  $V'(0) = 0$ ,  $V''(0) < 0$ . Dans  $p^{-1}(E_0)$ ,  $H_p$  s'annule donc en  $(0, 0)$  et on suppose qu'il existe une trajectoire de  $H_p$  notée  $\gamma_0(t)$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma_0(t) = (0, 0)$ . On verra que s'il existe une unique géodésique pour la distance d'Agmon joignant  $\{0\}$  à  $\{x \in \mathbb{R}^n, V(x) = E_0\} \setminus \{0\}$ , on obtient l'existence d'une telle trajectoire.

On commence par chercher des solutions de  $(P - \rho)u = 0$  dans un voisinage microlocal de  $(0, 0)$ . On prolonge ensuite ces solutions le long de  $\gamma_0$ .

La construction WKB au voisinage du maximum de potentiel 0 est une adaptation de celle faite au fond du puits dans [He-Sj3]. On fait l'hypothèse :

(A) Il existe  $B \in \mathbb{R}$  assez grand tel que la lagrangienne sortante au voisinage de  $\gamma_0(t)$ ,  $t \geq B$  admet une projection en  $x$  qui lui est difféomorphe.

La lagrangienne sortante est donc déterminée par une fonction  $\Phi$ . Cette fonction permet la construction d'une phase et par suite d'une solution WKB près de  $x = 0$ .

On fait ensuite une transformation de Bargmann  $T$  associée à une transformation canonique  $\kappa$  afin d'avoir une projection en  $x$  de  $\kappa(\gamma_0)$  qui soit bijective cette fois pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On doit alors renforcer l'hypothèse (A) pour prolonger la solution définie près de  $x = 0$  le long de  $\gamma_0$  :

(B) La lagrangienne sortante admet une projection en  $x$  qui lui est difféomorphe sur un voisinage de  $\{\gamma_0(t), t > 0\}$ .

Il existe alors une fonction  $\psi_+$  qui définit le complexifié de  $\kappa(\Lambda_{0,+})$  et permet le prolongement souhaité. On termine ce chapitre en étudiant l'équation obtenue en écrivant que la solution construite est monovaluée. Cette équation donne certainement un premier niveau de résonances, mais cela reste à démontrer.

## Références de l'introduction :

- [Bu-Gri] V. Buslaev, A. Grigis, *Imaginary part of Stark-Wannier resonances*, J. of Math. Phys., vol 39 n°5 (1998) p.2519-2550.
- [Ca-Ma-Si] R. Carmona, W. C. Master, B. Simon, *Relativistic Schrödinger operators : asymptotic behaviour of the eigenfunctions*, J. Funct. Anal. 91 (1990) p.117-142.
- [Fed] M.V. Fedoryuk, *Asymptotic Analysis*, Springer-Verlag, Moscow (1983).
- [Fu-Ra] S. Fujiie et T. Ramond, *Matrice de scattering et résonances associées à une orbite hétérocline*, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol.69 n°1 (1998) p.31-82.
- [Ge-Sj] C. Gérard et J. Sjöstrand, *Semiclassical Resonances Generated by a Closed Trajectory of Hyperbolic Type*, Commun. Math. Phys. 108 (1987) p.391-421.
- [G-M-S1] V. Grecchi, A. Martinez, A. Sacchetti, *Double well Stark effect : Crossing and Anticrossing of resonances*, Asymptotic Analysis 13 (1996) p.373-391.
- [G-M-S2] V. Grecchi, A. Martinez, A. Sacchetti, *Splitting instability : the unstable double wells*, J. Phys. An. : Math. Gen. 29 (1996) p.4561-4587.
- [Gri-Sj] A. Grigis et J. Sjöstrand, *Microlocal Analysis for Differential Operators*, London Mathematical Society, Lecture Notes series 196, Camb. Univ. Press (1994).
- [He-Pa] B. Helffer, B. Parisse, *Comparaison entre la décroissance de fonctions propres pour les opérateurs de Dirac et de Klein-Gordon. Application à l'effet tunnel*, Ann. Inst. H. Poincaré, Vol 60 (1994) p.147-187.
- [He-Sj1] B. Helffer et J. Sjöstrand, *Multiple Wells in the Semi-Classical Limit I*, Comm. in Partial Differential Equations 9 (1984), p.337-408.
- [He-Sj2] B. Helffer, J. Sjöstrand, *Puits multiples en limite semi-classique. II. Interaction moléculaire. Symétries. Perturbation*. Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 42, no. 2 (1985) p.127-212.

- [He-Sj3] B. Helffer, J. Sjöstrand, *Multiple Wells in the Semi-Classical Limit III*, Math. Nach 124 (1985) p.263,313.
- [He-Sj4] B. Helffer et J. Sjöstrand, *Résonances en limite semi-classique*, Mémoire de la société mathématique de France, n°24125 (1986).
- [He-Sj5] B. Helffer and J. Sjöstrand, *Semi classical analysis for Harper's equation III. Cantor Structure of the Spectrum*, Mem. Soc. Math. France, No.39 (1989) p.1-24.
- [Mä] C. März, *Spectral asymptotics for Hill's equation near the potential maximum*, Asymptotic Analysis 5 (1992) p.221-267.

# Chapitre 1

## Solutions asymptotiques pour l'opérateur de Klein-Gordon et effet tunnel

### 1.0 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'opérateur de Klein-Gordon défini pour  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  par :

$$Pu(x) = \int e^{i(x-y)\xi/\hbar} p((x+y)/2, \xi) u(y) dy d\xi \quad (0.1)$$

où  $p(x, \xi) = \sqrt{1 + \xi^2} + V(x)$  est le symbole de l'opérateur.

Nous travaillons avec un potentiel  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  admettant une extension holomorphe dans un domaine de  $\mathbb{C}^n$  qu'on précisera ultérieurement. On suppose de plus :

- (H1)  $\forall x \in \mathbb{R}^n, V(x) \geq E_0 - 1,$
- (H2)  $\liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = E_1 - 1, E_1 > E_0.$
- (H3)  $V$  ainsi que toutes ses dérivées sont à décroissance polynômiale.

D'après [22], ces hypothèses impliquent que  $P$  est semiborné inférieurement, donc essentiellement autoadjoint sur  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , et que le spectre de  $P$  est discret sur  $] - \infty, E_1[$ .

Remarquons que le symbole  $p(x, \xi)$  appartient à l'espace  $S_{1,0}^1$  défini dans [8].

On note  $D = \frac{\hbar}{i} \partial$ ,  $q(\xi) = \sqrt{1 + \xi^2}$ ,  $\|\cdot\|$  est la norme de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  et  $(,)$  le produit scalaire.

Dans tout ce qui suit, nous considérons un niveau d'énergie  $E < E_1$ , de façon à ce que l'ensemble des puits de potentiel  $U$  soit compact,

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n, V(x) \leq E - 1\}. \quad (0.2)$$

On s'intéresse aux valeurs propres de  $P$  au voisinage de  $E$ . Plus précisément, on suppose qu'au niveau d'énergie  $E$  le potentiel présente un double puits ponctuel non dégénéré symétrique, et on cherche à calculer le splitting produit par l'effet tunnel (voir les travaux [6], [13], [15], [16]).



Expliquons d'abord ce phénomène. Dans le cas d'un unique puits de potentiel (voir dans [8] ou [6] chap.3-4 pour l'opérateur de Schrödinger), la méthode WKB donne une construction de valeurs propres et de fonctions propres approchées à un  $O(h^\infty)$  près. Ces fonctions approchées sont localisées dans le puits, c'est à dire dans la zone classiquement permise où la mécanique classique prévoit l'existence de particules d'énergie  $E$ .

Dans le cas de plusieurs puits, cette estimation n'est pas suffisante pour tenir compte de l'interaction qui existe entre les différents puits. En effet, comme l'ont montré Lithner [19] et Agmon [2] pour l'opérateur de Schrödinger, et comme le montrent B. Helffer et B. Parisse dans [12] pour l'opérateur de Klein-Gordon, les fonctions propres décroissent comme  $\exp(-const./h)$  dans tout compact hors des puits. C'est l'effet tunnel : on se trouve dans une zone pour laquelle la mécanique classique interdit l'existence de particules chargées d'énergie  $E$ , et pourtant les fonctions propres correspondantes ne sont pas nulles. Elles peuvent donc interagir.

Considérons par exemple un potentiel ayant un double puits symétrique par rapport à  $x_1 = 0$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Dans l'un des puits, les particules évoluent presque comme si le second puits n'existait pas. C'est ce que traduisent les solutions WKB qui restent localisées dans un puits. Cependant, la présence du deuxième puits a deux effets : premièrement, il rend le problème symétrique par rapport à  $x_1 = 0$ , et donc on peut choisir une base de fonctions propres paires ou impaires par rapport à  $x_1$ . Deuxièmement, l'interaction entre les deux puits crée un splitting : au lieu d'être égaux, les modes sont légèrement décalés. C'est ce décalage, ou splitting, qui n'est pas rendu par les solutions WKB, que nous cherchons à calculer pour un opérateur de Klein-Gordon. C'est l'objet du théorème suivant démontré par B. Helffer et B. Parisse en dimension quelconque dans [12] et que nous écrivons ici en dimension un :

**Théorème 1.0.1** *On considère un opérateur de Klein-Gordon défini par (0.1) et les hypothèses (H1), (H2), (H3) . On suppose que pour un niveau d'énergie  $E$ , il y a deux puits ponctuels non dégénérés symétriques par rapport à zéro :  $U = \{-x_0\} \cup \{x_0\}$ . On suppose également que  $V(x) < E$  dans  $[-x_0, x_0]$ . L'écart entre les deux premières valeurs propres est donné par*

$$w = h^{1/2} \left( \frac{2\sqrt{V''(x_0)}}{\pi} \right)^{1/2} e^{-S/h} (1 + O(h)), \quad S = d(-x_0, x_0), \quad (0.3)$$

où  $d$  est la distance d'Agmon associée à l'opérateur entre les deux puits :

$$d = \left( 1 - \left( (E - V(x))_+ \right)^2 \right)_+ dx^2. \quad (0.4)$$

Ce splitting est exponentiellement petit, ce qui explique que la méthode WKB en  $O(h^\infty)$  ne pouvait séparer les deux modes.

**Remarque 1.0.2** *En dimension quelconque, l'hypothèse  $V < E$  dans  $[-x_0, x_0]$  devient  $V(x) < E$  le long de la géodésique minimale (supposée unique) joignant les deux puits [12].*

Le but de ce chapitre était d'étendre ce résultat au cas où le potentiel devient supérieur à  $E$  entre les deux puits. Pour cela, on établit, en dimension  $n \geq 1$ , une formule pour le splitting. On adapte la méthode de [13], [6] qui consiste à calculer une matrice d'interaction.

On commence par établir des estimations d'Agmon [2]. Contrairement à l'opérateur de Schrödinger qui est différentiel, l'opérateur de Klein-Gordon étant pseudo-différentiel, nous avons besoin du calcul symbolique dans la composition des opérateurs [8]. Nous devons en particulier majorer les restes qui interviennent dans le calcul symbolique. Ces estimations conduisent à deux résultats dans l'étude de  $P$ .

Premièrement, on obtient une majoration des fonctions propres de  $P$  :

**Proposition 1.0.3** *Si le potentiel  $V$  conduit à une distance  $d$  telle que  $\nabla d$  est lipschitzienne (Cf hypothèse (2.5)) et si  $u$  est une fonction propre normalisée de  $P$  pour la valeur propre  $\lambda(h)$ , où  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda(h) - E}{h^{\nu'}} = 0$  pour  $\nu' > 0$ , alors il existe  $\nu_0 > 0$  et  $C > 0$  tels que pour tout  $\nu < \nu_0$ , et pour  $h$  assez petit dépendant de  $\nu$ ,*

$$\left\| e^{(1-h^\nu)d(x,U)/h} u \right\|^2 \leq C e^{Ch^\nu/h}.$$

On obtient ici une majoration globale qui, avec une hypothèse plus forte sur  $\nabla d$ , améliore localement les majorations de [12].

Deuxièmement, on établit une estimation sur la résolvante de l'opérateur  $P$  de la manière suivante. Au niveau d'énergie  $E$ , on décompose  $U$  en :

$$U = \cup_{j=1}^N U_j, \text{ où } U_j \text{ sont les puits de potentiel connexes.}$$

On définit  $\alpha_j \in C_0^\infty(B(U_j, 2\eta))$ ,  $\eta > 0$  tel que  $\alpha_j = E - E_0 + 1$  sur  $B(U_j, \eta)$  (afin que  $V - E + \alpha_j \geq 0 > -1$  sur  $B(U_j, 2\eta)$ ). Enfin, si  $\beta_j = \sum_{k \neq j} \alpha_k$ , on introduit les opérateurs de Klein-Gordon à un puits :  $P_j = P + \beta_j$ .

En étudiant la résolvante des  $P_j$ , on trouve une estimation sur la résolvante de  $P$  :

**Proposition 1.0.4** *Si  $K(h) \subset \mathbb{R}$  tend vers  $\{E\}$  quand  $h$  tend vers 0 et si pour tout  $\epsilon > 0$   $\text{dist}(K(h), \sigma(P_j)) \geq \frac{e^{-\epsilon/h}}{C_\epsilon}$ , alors (voir définition 1.3.1) si  $h$  est assez petit,  $\sigma(P) \cap K(h) = \emptyset$  et*

$$(P - z)^{-1}(x, y) = \Theta(e^{-(1-\epsilon)d(x,y)/h})$$

*uniformément par rapport à  $z \in K(h)$ .*

Soit  $I(h)$  un intervalle qui tend vers  $\{E\}$  quand  $h$  tend vers 0, et soient  $\varphi_{j,k}$  les fonctions propres des opérateurs  $P_j$ , de valeur propre  $\mu_{j,k} \in I(h)$ . Les deux propositions précédentes permettent de calculer la matrice  $M$  de  $P$  restreint aux sous-espaces propres associés à  $\sigma(P) \cap I(h)$  :

$$M = \text{diag}(\mu_{j,k}) + W + O(e^{-2(S_0-\epsilon)/h}),$$

où  $S_0$  est la distance d'Agmon minimale entre deux puits connexes.  $W$  est une matrice d'interaction de  $P$  qui donne la formule recherchée pour le splitting.

Le terme général de  $W$  s'écrit :

$$w_{(j,k),(l,m)} = -\frac{1}{2} \left\{ \left( \beta_j \varphi_{j,k}, \varphi_{l,m} \right) + \left( \beta_l \varphi_{l,m}, \varphi_{j,k} \right) \right\}.$$

On poursuit l'étude de la matrice d'interaction dans le cas d'un double puits ponctuel de potentiel symétrique non dégénéré. La décomposition des puits introduite précédemment se restreint à  $U = U_1 \cup U_2 = \{-x_0\} \cup \{x_0\}$ . On a alors deux opérateurs  $P_1$  et  $P_2$  et on peut choisir  $I(h)$  tel que ces opérateurs ont une unique valeur propre  $\mu_j$ ,  $j = 1, 2$  dans  $I(h)$ . Si on bouche symétriquement les puits, ces valeurs propres sont égales :  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ . Soit  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les fonctions propres associées. La matrice d'interaction se réduit à

$$W = \begin{pmatrix} 0 & w \\ w & 0 \end{pmatrix}$$

où  $w = -(\beta_1 \varphi_1, \varphi_2)$ . Comme dans [12], on peut montrer que ce coefficient s'écrit  $w = ([\chi, P] \varphi_1, \varphi_2)$  pour une fonction troncature  $\chi$  valant 1 sur le support de  $\beta_1$  et 0 sur le support de  $\beta_2$ .

Dans le cas d'un opérateur de Schrödinger, on peut calculer explicitement le commutateur  $[P, \chi]$  et grâce à la formule de Green-Riemann, on obtient une expression de  $w$  en fonction des  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2$  et de leurs dérivées. Il suffit ensuite de remplacer les  $\varphi_j$  par leur développement WKB (après avoir montré que ces développements sont de bonnes approximations dans la zone considérée) pour obtenir une estimation de  $w$ , et par suite du splitting.

En revanche, pour l'opérateur de Klein-Gordon auquel on s'intéresse, il n'y a pas d'équivalent aussi explicite à la formule de Green-Riemann car cet opérateur n'est pas différentiel. On poursuit alors l'étude en dimension un. On montre que le splitting est donné par

$$w = \int_{-\infty}^0 (\psi_1 Q \psi_2 - \psi_2 Q \psi_1) + O(h^\infty) e^{-d(-x_0, x_0)/h},$$

où  $\psi_j = \chi \varphi_j$  pour une fonction  $\chi$  ayant son support dans  $[-x_0 - 3\eta, x_0 + 3\eta]$ ,  $\eta > 0$  et  $Q = \sqrt{1 + D^2}$ . On introduit alors  $Q(f, g)$  tel que  $\psi_1 Q \psi_2 - \psi_2 Q \psi_1 = \partial_x Q(\psi_1, \psi_2)$  :

$$Q(f, g)(x) = \int e^{ix(\xi+\eta)/h} \frac{q(\xi) - q(-\eta)}{\xi + \eta} \mathcal{F}f(\xi) \mathcal{F}g(\eta) d\xi d\eta,$$

où  $q(\xi) = \sqrt{1 + \xi^2}$ .

On a maintenant  $w = Q(\psi_1, \psi_2)(0)$ . Pour obtenir une estimation de  $w$ , on calcule un équivalent de  $Q(\psi_1, \psi_2)(0)$  quand  $h$  tend vers 0 grâce à la méthode de la phase stationnaire et aux majorations des fonctions propres :

$$w = q'(id'(x_0, 0)) \varphi_1(0) \varphi_2(0) (1 + O(h)).$$

Cela nous oblige à supposer le potentiel en dessous du niveau d'énergie entre les deux puits.

L'étape suivante pour obtenir le théorème 1.0.1 consiste à remplacer les  $\varphi_j$  par des solutions WKB en s'assurant qu'elles réalisent une bonne approximation.

La construction de solutions WKB pour l'opérateur de Klein-Gordon en dimension un fait l'objet d'une étude à part entière. On veut en effet retrouver les constructions déjà existantes dans la zone  $\{V < E\}$ , mais aussi les prolonger hors de cette zone, car c'est une étape nécessaire pour étendre le calcul du splitting lorsque le potentiel dépasse le niveau d'énergie entre les deux puits.

Tout d'abord dans la zone  $\{V(x) < E\}$  il est connu que la méthode exposée dans [6] pour l'opérateur de Schrödinger s'adapte. Cela revient à résoudre l'équation  $(P - E)u = e^{-d(x, U)/h} O(h^\infty)$ , avec  $u$  sous la forme

$$u(x, h) = e^{i\varphi(x)/h} a(x, h), \quad a(x, h) \sim_{h \rightarrow 0} \sum_{k \geq 0} h^k a_k(x). \quad (0.5)$$

On trouve grâce au calcul symbolique une équation éiconale, ainsi que des équations de transport déterminant  $\varphi$  et  $a_k$ . Les mêmes techniques que pour l'opérateur de Schrödinger permettent de résoudre ces équations au fond du puits (Théorème d'Hamilton-Jacobi, linéarisation des champs de vecteurs et développement des fonctions  $\varphi$  et  $a_k$  en séries formelles au fond du puits...on fera les hypothèses de [6] qui sont automatiquement vérifiées en dimension un)

Les solutions sont oscillantes dans les puits  $\{V \leq E-1\}$  à l'image de celles obtenues pour l'opérateur de Schrödinger dans  $\{V \leq E\}$ . De même, la zone  $\{E-1 \leq V \leq E\}$  correspond à  $\{V \geq E\}$  : les solutions y sont exponentiellement décroissantes. Ici, la dimension un n'est pas nécessaire.

Dans la zone  $\{V(x) > E\}$ , on ne peut pas faire de rapprochement avec l'opérateur de Schrödinger, mais on s'en inspire en cherchant  $u$  sous la forme

$$u(x, h) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi/h} e^{i\psi(\xi)/h} b(\xi, h) d\xi, \quad b(\xi, h) \sim \sum_{k \geq 0} h^k b_k(\xi). \quad (0.6)$$

On obtient une nouvelle équation éiconale déterminant  $\psi$ . Pour résoudre cette équation, on doit faire des hypothèses fortes sur le potentiel, on suppose en particulier que  $V'(x) \neq 0$  si  $V(x) = E$ . Des équations de transport donnent ensuite les  $b_k$ , et on utilise la méthode du col [5] pour écrire  $u$  sous la forme plus directe (0.5). L'écriture (0.6) montre qu'on obtient une fonction sur  $\mathbb{R}$  tout entier, qui sera une solution asymptotique sur un ouvert de  $\mathbb{R}$ .

Dans la zone  $\{V < E\}$ , les solutions WKB ainsi construites approchent bien les solutions exactes [12]. Cela permet de calculer le splitting et d'obtenir le théorème 1.0.1.

Le chapitre est organisé de la manière suivante :

Les trois premières parties exposent la construction de la matrice d'interaction  $W$  avec les estimations d'Agmon (partie 1), la majoration des fonctions propres de la proposition 1.0.3 (partie 2) et l'estimation de la résolvante de  $P$  donnée dans la proposition 1.0.4 (partie 3).

La partie 4 expose la construction des solutions WKB pour l'opérateur de Klein-Gordon. On termine la quatrième partie par deux exemples pour lesquels on peut faire des calculs plus explicites de construction de solutions.

Enfin, dans la dernière partie, nous retrouvons le résultat de [12] en dimension un donné par le théorème 1.0.1.

## 1.1 Estimations de Lithner-Agmon

Dans cette partie, on établit des inégalités concernant l'opérateur  $P$  défini par (0.1). Nous commençons par cette première relation :

**Proposition 1.1.1** *Il existe  $N = N(n) > 0$  telle que si  $\Phi = \Phi_\epsilon$  est une fonction dans  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , vérifiant*

$$\|\nabla\Phi\| \leq 1 - \epsilon, \quad \epsilon > 0,$$

et,

$$\forall \alpha \in \mathbf{N}^n, \exists C_\alpha, \forall \epsilon < \epsilon_0, \forall x \in \mathbf{R}^n, |\partial_x^\alpha \Phi(x)| \leq C_\alpha$$

alors, il existe  $C = C(n, \Phi)$  tel que pour  $h > 0$  et  $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ , on a :

$$\Re \langle e^{\Phi/h} P u, e^{\Phi/h} u \rangle \geq \langle \left( \sqrt{1 - (\nabla \Phi)^2} + V(x) \right) e^{\Phi/h} u, e^{\Phi/h} u \rangle - Ch \epsilon^{-N} \|e^{\Phi/h} u\|^2 \quad (1.1)$$

où  $\langle, \rangle$  est le produit scalaire de  $\mathbf{R}^n$ ,

**Preuve :** Introduisons  $P' = e^{\Phi/h} Q e^{-\Phi/h}$ , où  $Q = \sqrt{1 + D^2}$  est l'opérateur de symbole  $q(\xi) = \sqrt{1 + \xi^2}$ . On rappelle que  $D = (h/i)\partial$ . Soit  $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ . On a

$$\langle e^{\Phi/h} P u, e^{\Phi/h} u \rangle = \langle (P' + V)(e^{\Phi/h} u), e^{\Phi/h} u \rangle.$$

Il suffit donc de montrer qu'il existe  $C > 0$  et  $N > 0$  tel que pour tout  $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ ,

$$\Re \langle P'(v), v \rangle \geq \langle \sqrt{1 - (\nabla \Phi)^2} v, v \rangle - Ch \epsilon^{-N} \|v\|^2$$

Soit donc  $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ . On a

$$P'v = e^{\Phi(x)/h} \int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i(x-y)\xi/h} q(\xi) e^{-\Phi(y)/h} v(y) dy d\xi.$$

On introduit la fonction  $\Psi(x, y)$  telle que  $\Phi(x) - \Phi(y) = (x - y)\Psi(x, y)$ . Alors par hypothèse sur  $\Phi$ ,  $\|\Psi(x, y)\| \leq 1 - \epsilon$  et

$$P'v = \int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i(x-y)(\xi - i\Psi(x, y))/h} q(\xi) v(y) dy d\xi.$$

Montrons qu'on peut échanger l'ordre d'intégration dans cette intégrale. Soit le voisinage de  $0$   $V_0 = \{x, |x| \leq 1/2\}$ . On a

$$P'v = \int_{(\mathbf{R}^n \setminus V_0)_\xi \times (\mathbf{R}^n)_y} e^{i(x-y)(\xi - i\Psi(x, y))/h} q(\xi) v(y) dy d\xi + \int_{(V_0)_\xi \times (\mathbf{R}^n)_y} e^{i(x-y)(\xi - i\Psi(x, y))/h} q(\xi) v(y) dy d\xi.$$

On fait des intégrations par parties dans l'intégrale sur  $(\mathbf{R}^n \setminus V_0)_\xi \times (\mathbf{R}^n)_y$  en utilisant l'opérateur  $L_0 = \frac{1}{\xi^2} \sum_{j=1}^n \xi_j D_{y_j}$ . Cet opérateur vérifie  ${}^t L_0 = -L_0$  et  ${}^t L_0(e^{i(x-y)\xi/h}) = e^{i(x-y)\xi/h}$ . La formule de Stokes donne :

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbf{R}^n \setminus V_0)_\xi \times (\mathbf{R}^n)_y} e^{i(x-y)(\xi - i\Psi(x, y))/h} q(\xi) v(y) dy d\xi \\ &= (-1)^k \int_{(\mathbf{R}^n \setminus V_0)_\xi \times (\mathbf{R}^n)_y} e^{i(x-y)\xi/h} q(\xi) L_0^k \left[ v(y) e^{(x-y)\Psi(x, y)/h} \right] dy d\xi, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbf{R}^n \setminus V_0)_\xi \times (\mathbf{R}^n)_y} e^{i(x-y)(\xi - i\Psi(x, y))/h} q(\xi) v(y) dy d\xi \\ &= (-1)^k \int_{(\mathbf{R}^n \setminus V_0)_\xi \times (\mathbf{R}^n)_y} e^{i(x-y)\xi/h} \frac{q(\xi)}{(\xi^2)^k} \left( \sum_{j=1}^n \xi_j D_{y_j} \right)^k \left[ v(y) e^{(x-y)\Psi(x, y)/h} \right] dy d\xi, \end{aligned}$$

On prend donc  $k = n + 2$  et on obtient une intégrale absolument convergente. Finalement, on a écrit  $P'v$  avec des intégrales absolument convergentes. On peut donc bien échanger l'ordre d'intégration :

$$P'v = \int_{(\mathbb{R}^n)_y \times (\mathbb{R}^n)_\xi} e^{i(x-y)(\xi - i\Psi(x,y))/h} q(\xi)v(y)d\xi dy = \int_{(\mathbb{R}^n)_y \times (\mathbb{R}^n - i\Psi(x,y))_\xi} e^{i(x-y)\xi/h} q(\xi + i\Psi(x,y))v(y)d\xi dy.$$

**Lemme 1.1.2** *On peut changer le contour d'intégration définissant  $P'v$  :*

$$P'v = \int_{(\mathbb{R}^n)_y \times (\mathbb{R}^n)_\xi} e^{i(x-y)\xi/h} q(\xi + i\Psi(x,y))v(y)dyd\xi.$$

**Preuve :** On va déformer le contour d'intégration en  $\xi$ ,  $\mathbb{R}^n - i\Psi(x,y)$ . Définissons  $B = \{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \leq 1\}$ ,  $S = \partial B = \{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| = 1\}$ , et pour  $R > 0$   $RB = \{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \leq R\}$  et  $RS = \{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| = R\}$ . Soit  $M_R$  la variété de  $\mathbb{C}^n$  définie par

$$M_R = RB \cup \{z = z_{RS} - it\Psi(x,y), z_{RS} \in RS, 0 \leq t \leq 1\} \cup \{z \in \mathbb{R}^n - i\Psi(x,y), |\Re z| \geq R\}.$$

L'holomorphie de  $q$  dans  $\mathbb{C}^n \cap \{z, |\Im z| < 1\}$  et l'hypothèse sur  $\Phi$   $|\nabla\Phi| \leq 1 - \epsilon < 1$  permet de déformer le contour d'intégration  $(\mathbb{R}^n - i\Psi(x,y))_\xi$  en  $(M_R)_\xi$ . On paramètre  $M_R$  comme suit

$$\begin{aligned} P'v &= \int_{(\mathbb{R}^n)_y \times (RB)_\xi} e^{i(x-y)\xi/h} q(\xi + i\Psi(x,y))v(y)dyd\xi \\ &+ \int_{(\mathbb{R}^n)_y \times (RS \times [0,1])_\xi} e^{i(x-y)(\xi_{RS} - it\Psi(x,y))/h} q(\xi_{RS} + i(1-t)\Psi(x,y))v(y)(-i\Psi(x,y))dyd\xi_{RS}dt \\ &+ \int_{(\mathbb{R}^n)_y \times (\mathbb{R}^n \setminus RB)_\xi} e^{i(x-y)(\xi - i\Psi(x,y))/h} q(\xi)v(y)dyd\xi = I + I_1 + I_2. \end{aligned}$$

On va montrer que lorsque  $R$  tend vers  $+\infty$ , les intégrales  $I_1$  et  $I_2$  tendent vers 0. On a

$$I_1 = \int_{(\mathbb{R}^n)_y \times (S \times [0,1])_\xi} e^{i(x-y)(R\xi_S - it\Psi(x,y))/h} q(R\xi_S + i(1-t)\Psi(x,y))v(y)(-i\Psi(x,y))dyR^{n-1}d\xi_S dt.$$

On fait des intégrations par parties avec  $L_1 = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^n \xi_{Sj} D_{y_j}$ . On doit donc dériver

$$e^{(x-y)t\Psi(x,y)/h} q(R\xi_S + i(1-t)\Psi(x,y))v(y)(-i\Psi(x,y)).$$

Par hypothèses sur  $\Phi$ , les dérivées de  $\Psi$  sont bornées. De plus,  $q(R\xi_S + i(1-t)\Psi(x,y)) \leq CR$  et ses dérivées sont bornées. En appliquant  $n + 1$  fois  $L_1$ , on obtient donc une constante  $C = C(v, \Psi, n)$  telle que

$$|I_1| \leq CR^{-1}.$$

Etudions maintenant  $I_2$ . On fait à nouveau  $(n+2)$  intégrations par parties en  $y$  avec  $L_0$ . On obtient :

$$|I_2| \leq \int_{(\mathbb{R}^n)_y \times (\mathbb{R}^n \setminus RB)_\xi} |q(\xi)| |\xi^2|^{-(n+2)} \left| \left( \sum_j \xi_j D_{y_j} \right)^{n+2} \left( v(y) e^{(x-y)\psi(x,y)/h} \right) \right| dyd\xi.$$

L'intégrale du membre de droite est absolument convergente. Quand  $R$  tend vers  $+\infty$   $I_2$  tend donc vers 0. On a obtenu le lemme.  $\square$

Grâce à ce lemme, on est ramené à étudier un opérateur pseudo-différentiel de symbole  $a(x, y, \xi) = q(\xi + i\Psi(x, y))$ .

**Lemme 1.1.3** *Le symbole  $a(x, y, \xi)$  est dans la classe  $S_{1,0}^1$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , on a*

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{N}^{3n}, \exists C_{\alpha,\beta,\gamma}^a, |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma a(x, y, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma}^a \epsilon^{1-|\alpha+\beta+\gamma|} (1 + |\xi|)^{1-|\gamma|}.$$

**Preuve :** On a :

$$\begin{aligned} & \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma [a(x, y, \xi)] = \\ & \sum_{\substack{|\alpha'| = |\alpha''|, |\beta'| = |\beta''| \\ |\alpha' + \alpha''| = |\alpha|, |\beta' + \beta''| = |\beta|}} \partial_\xi^{\gamma + \alpha' + \beta'} q(\xi + i\Psi(x, y)) \left( \partial_x^{\alpha''} \partial_y^{\beta''} ((i\partial_x \Psi(x, y))^{\alpha''} (i\partial_y \Psi(x, y))^{\beta''}) \right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Les hypothèses sur  $\Phi$  montrent que  $\Psi$  est une fonction  $C^\infty$  dont toutes les dérivées sont bornées indépendamment de  $\epsilon$  :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N^\Psi, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha + \beta| \leq N, \left\| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \Psi(x, y) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} \leq C_N^\Psi.$$

Il reste donc à majorer  $|\partial_\xi^\theta q(\xi + i\Psi(x, y))|$  pour  $0 \leq |\theta| \leq |\alpha + \beta + \gamma|$ . On montre par récurrence que

$$\forall \theta \in \mathbb{N}^n, \partial_\xi^\theta q(\xi) = \frac{\mathcal{P}_\theta(\xi)}{(1 + \xi^2)^{(2|\theta|-1)/2}},$$

où  $\mathcal{P}_\theta$  est un polynôme de degré  $|\theta|$ .

Soit  $|\xi| < 1$ . On a

$$\left| 1 + (\xi + i\Psi)^2 \right|^{1/2} \geq \left| 1 + \xi^2 - \Psi^2 \right|^{1/2} \geq (\xi^2 + \epsilon)^{1/2} \geq \sqrt{\epsilon} \geq \sqrt{\epsilon} \frac{1 + |\xi|}{2},$$

et

$$\left| \mathcal{P}_\theta(\xi + i\Psi(x, y)) \right| \leq C_{\epsilon,\theta} \leq C_\theta \text{ pour } \epsilon < \epsilon_0.$$

Donc pour  $|\xi| < 1$ ,

$$\left| \partial_\xi^\theta q(\xi + i\Psi(x, y)) \right| \leq C'_\theta \epsilon^{-(2|\theta|-1)/2} (1 + |\xi|)^{1-2|\theta|} \leq C'_\theta \epsilon^{-(2|\theta|-1)/2} (1 + |\xi|)^{1-|\theta|}.$$

Si  $|\xi| \geq 1$ ,

$$\left| 1 + (\xi + i\Psi)^2 \right|^{1/2} \geq (\xi^2 + \epsilon)^{1/2} \geq C\sqrt{\epsilon}(1 + |\xi|), \text{ avec par exemple } C = \sqrt{2} - 1.$$

Le degré de  $\mathcal{P}_\theta$  est  $|\theta|$  donc il existe une constante  $\tilde{C}_\theta > 0$  telle que

$$|\mathcal{P}_\theta| \leq \tilde{C}_\theta(1 + |\xi|)^{|\theta|}.$$

Finalement on trouve, pour  $\epsilon < \epsilon_0$  une contante  $C_\theta$  telle que

$$|\partial_\xi^\theta q(\xi + i\Psi(x, y))| \leq C_\theta \epsilon^{-(2|\theta|-1)/2} (1 + |\xi|)^{1-|\theta|}$$

Avec (1.2), on obtient une constante  $C_{\alpha,\beta,\gamma}^a = C(\alpha, \beta, \gamma, C_{|\alpha+\beta|}^\Psi)$  telle que

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma [a(x, y, \xi)] \right| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma}^a \epsilon^{1-|\alpha+\beta+\gamma|} (1 + |\xi|)^{1-|\gamma|}$$

ce qui donne le lemme.  $\square$

**Remarque 1.1.4** La formule (1.2) permet de connaître plus précisément  $C_{\alpha,\beta,\gamma}^a$  : on a en fait pour une constante  $D_{\alpha,\beta,\gamma}$  qui ne dépend que de  $\alpha, \beta, \gamma$  :

$$C_{\alpha,\beta,\gamma}^a \leq D_{\alpha,\beta,\gamma} \left( C_{|\alpha+\beta|}^\Psi \right)^{|\alpha+\beta|}.$$

Ce lemme permet d'utiliser le résultat suivant de [18] (proposition 1.1.2 modifiée dans le paragraphe 1.1.5) :

**Proposition 1.1.5** Il existe  $K = K(n)$  tel que si le symbole  $a$  vérifie pour  $(x, y, \xi) \in \mathbf{R}^{3n}$

$$\exists L, \forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{N}^{3n}, |\alpha + \beta + \gamma| \leq 2N + K, |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma a(x, y, \xi)| \leq L(1 + |\xi|)^{1-|\gamma|},$$

alors, on peut écrire l'opérateur correspondant avec un symbole  $b(x, \xi)$  vérifiant

$$b(x, \xi) \sim \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \frac{h^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|} \alpha!} \partial_y^\alpha \partial_\xi^\alpha a(x, y, \xi)|_{y=x}. \quad (1.3)$$

De plus, il existe une contante  $C = C(n, N)$  telle que si  $|\alpha + \beta| \leq 2N$ ,

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b(x, \xi)| \leq CL(1 + |\xi|)^{1-|\beta|}. \quad (1.4)$$

Enfin, pour tout  $M \leq N$ , si  $b_M(x, \xi)$  est la somme (1.3) pour  $|\alpha| \leq M$ , alors si  $|\alpha + \beta| \leq 2(N - M)$ ,

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta [b(x, \xi) - b_M(x, \xi)] \right| \leq CLh^{M+1} (1 + |\xi|)^{-|\beta|-M}.$$

On applique cette proposition à l'opérateur  $P'$ . On obtient un symbole  $b(x, \xi)$  tel que :

$$P'v = \int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i(x-y)\xi/h} b(x, \xi) v(y) dy d\xi.$$

L'équation (1.4) devient, pour tout  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta}^b \epsilon^{1-|\alpha+\beta|-K} (1 + |\xi|)^{1-|\beta|},$$



avec

$$C_{\alpha,\beta}^b = C(n, |\alpha + \beta|/2) \max_{|\alpha' + \beta' + \gamma'| \leq |\alpha + \beta| + K} (C_{\alpha',\beta',\gamma'}^a).$$

De plus, avec  $b_0(x, \xi) = a(x, x, \xi)$ ,

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta [b(x, \xi) - b_0(x, \xi)] \right| \leq C_{\alpha,\beta}^b \epsilon^{1-|\alpha+\beta|-K} h (1 + |\xi|)^{-|\beta|} \leq C_{\alpha,\beta}^b \epsilon^{1-|\alpha+\beta|-K} h.$$

Remarquons encore une fois que le coefficient  $C_{\alpha,\beta}^b$  est connu assez précisément :

$$C_{\alpha,\beta}^b \leq D_{\alpha,\beta} (C_{|\alpha+\beta|+K}^\Psi)^{|\alpha+\beta|+K}. \quad (1.5)$$

On peut maintenant appliquer le théorème de Caldéron-Vaillancourt à l'opérateur  $B$  de symbole  $b(x, \xi) - b_0(x, \xi)$  [25](chap 8, théorème 1.3) :  $B$  est un opérateur borné dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  et sa norme est majorée pour

$$C = C(n) \max_{|\alpha| \leq 3n+4, |\beta| \leq 3n+4} (C_{\alpha,\beta}^b) \leq C'(n) (C_{6n+8+K}^\Psi)^{6n+8+K}$$

par :

$$\|B\| \leq C \epsilon^{1-(6n+8)-K} h.$$

On écrit

$$P'v = Bv + Cv + b_0(x, 0)v, \quad (1.6)$$

où l'opérateur  $C$  a pour symbole  $c(x, \xi) = b_0(x, \xi) - b_0(x, 0)$ . La démonstration du lemme 1.1.3 montre que  $c(x, \xi) \in S_{1,0}^1$  et pour  $C_{\alpha,\beta}^c = 2C_{\alpha,\beta}^b$  :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta c(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta}^c \epsilon^{1-|\alpha+\beta|} (1 + |\xi|)^{1-|\beta|}.$$

On montre maintenant que

**Lemme 1.1.6** *Il existe  $C > 0$  et  $N > 0$  tel que*

$$\Re \langle Cv, v \rangle \geq -C \epsilon^{-N} h \|v\|^2$$

**Preuve :** On a  $\Re \langle Cv, v \rangle = \langle Dv, v \rangle$  où  $D = (C + C^*)/2$ ,  $C^*$  étant l'adjoint de  $C$ . Soit  $c^*(x, \xi)$  le symbole de  $C^*$ . On sait [8] que  $c^*(x, \xi) \in S_{1,0}^1$  et

$$c^*(x, \xi) \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{h^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|} \alpha!} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\alpha \overline{c(x, \xi)}.$$

Si on note  $c_0^*(x, \xi) = \overline{c(x, \xi)}$ , on a encore la majoration :

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta [c^*(x, \xi) - c_0^*(x, \xi)] \right| \leq C_{\alpha,\beta}^c \epsilon^{1-|\alpha+\beta|-K} h (1 + |\xi|)^{-|\beta|} \leq C_{\alpha,\beta}^c \epsilon^{1-|\alpha+\beta|-K} h.$$

On applique à nouveau le théorème de Caldéron-Vaillancourt à l'opérateur  $E$  de symbole  $(1/2)(c^*(x, \xi) - c_0^*(x, \xi))$  :  $E$  est un opérateur borné dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  et sa norme est majorée par :

$$\|E\| \leq C' \epsilon^{1-(6n+8)-K} h,$$

pour une constante  $C' \leq C'(n) \left( C_{6n+8+K}^\Psi \right)^{6n+8+K}$ .

On écrit maintenant  $D = E + F$  où l'opérateur  $F$  a comme symbole  $\Re c(x, \xi)$ . Il reste à étudier  $F$ .  
Comme

$$c(x, \xi) = \sqrt{1 + \xi^2 - \Psi(x, x)^2 + 2i\xi\Psi(x, x)} - \sqrt{1 - \Psi(x, x)^2},$$

on a

$$\Re c(x, \xi) \geq \sqrt{1 + \xi^2 - \Psi(x, x)^2} - \sqrt{1 - \Psi(x, x)^2} \geq 0.$$

On peut appliquer l'inégalité de Garding donnée dans [18] (théorème 1.1.10) : il existe des constantes  $N = N(n)$  et  $N' = N'(n)$  telles que si

$$\hat{C} = \max_{|\alpha+\beta| \leq N'} (C_{\alpha, \beta}^c) \leq C''(n) \left( C_{N'}^\Psi \right)^{N'},$$

alors :

$$\langle Fv, v \rangle \geq -\hat{C} \epsilon^{-N} h^2 \|v\|^2.$$

Finalement, on a bien obtenu pour une nouvelle constante  $N = N(n)$  et  $\tilde{C} > 0$  :

$$\Re \langle Cv, v \rangle = \langle Dv, v \rangle = \langle (E + F)v, v \rangle \geq -\|E\| \|v\|^2 - \hat{C} \epsilon^{-N} h^2 \|v\|^2 \geq -\tilde{C} \epsilon^{-N} h \|v\|^2,$$

où  $\tilde{C} \leq C(n) \left( C_M^\Psi \right)^M$ , pour une constante  $M = M(n)$  assez grande. Cela donne bien le lemme.  $\square$

Si on revient à (1.6), on a obtenu deux constantes  $C > 0$  et  $N > 0$  telles que

$$\Re \langle P'v, v \rangle \geq \langle q(i\Psi(x, x))v, v \rangle - Ch\epsilon^{-N} \|v\|^2$$

Avec  $\Psi(x, x) = \nabla\Phi(x)$  et  $v = e^{\Phi/h}u$  on a la proposition.  $\square$

Remarquons qu'on a obtenu la majoration dans (1.1)

$$C \leq C_0 (C_M^\Psi)^M \tag{1.7}$$

pour une constante  $M = M(n)$  et  $C_0 = C_0(n)$ .

On étend maintenant la proposition à une fonction  $\Phi$  continue, lipschitzienne.

Soit  $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n, |x - y| < r\}$ . Soit  $\chi \in C_0^\infty(B(0, 1))$  une fonction troncature positive, paire telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) dy = 1.$$

On note  $\chi_\mu(x) = \mu^{-n} \chi(x/\mu)$  pour  $\mu > 0$  et

$$\Phi_\mu = \chi_\mu * \Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

On étudie  $\Phi_\mu$  :

**Proposition 1.1.7** *Soit  $\Phi$  une fonction continue, lipschitzienne.*

*Alors*

$$|\Phi(x) - \Phi_\mu(x)| \leq |\nabla\Phi|_\infty \mu \quad (1.8)$$

et

$$\forall \alpha \in \mathbf{N}^n, 1 \leq |\alpha|, \exists C_\alpha, |\partial_x^\alpha \Phi_\mu(x)| \leq C_\alpha \mu^{1-|\alpha|}. \quad (1.9)$$

**Preuve :** On peut définir  $\nabla\Phi$  dans  $L^\infty$  comme la limite presque partout de  $\nabla\Phi_\mu = \nabla(\chi_\mu * \Phi)$  [6].  
On a d'autre part

$$\Phi_\mu(x) = \mu^{-n} \int \chi((x-y)/\mu) \Phi(y) dy,$$

soit

$$\Phi_\mu(x) = \int \chi(y) \Phi(x - \mu y) dy,$$

donc

$$|\Phi_\mu(x) - \Phi(x)| \leq \int |\chi(y)| |\Phi(x - \mu y) - \Phi(x)| dy \leq \mu \int |\chi(y)y| |\nabla\Phi|_\infty dy$$

et on a (1.8) par définition de  $\chi$ .

Démontrons (1.9). Soit  $\alpha$  dans  $\mathbf{N}^n$ , tel que  $|\alpha| \geq 1$ . Soit  $\beta = \beta(\alpha)$  dans  $\mathbf{N}^n$  défini de la manière suivante : si  $\alpha = (0, \dots, 0, \alpha_j, \dots)$ ,  $\alpha_j \neq 0$ , alors  $\beta_k = 0$  pour  $k \neq j$  et  $\beta_j = 1$ . On calcule :

$$\partial_x^{\alpha-\beta} \Phi_\mu(x) = \mu^{-n-|\alpha-\beta|} \int \partial_x^{\alpha-\beta} \chi((x-y)/\mu) \Phi(y) dy.$$

On fait le changement de variables  $\tilde{y} = (x-y)/\mu$  puis on dérive :

$$\partial_x^\alpha \Phi_\mu(x) = \mu^{1-|\alpha|} \int \partial_x^{\alpha-\beta} \chi((y)) \partial_x^\beta \Phi(x - \mu y) dy.$$

Finalement, si  $C_\alpha = \int \partial_x^{\alpha-\beta} |\chi(y)| dy |\nabla\Phi|_\infty$ , on trouve bien (1.9).

Avec ces notations, on démontre la proposition :

**Proposition 1.1.8** *Il existe  $N = N(n) > 0$  tel que si  $\Phi = \Phi_\epsilon$  est une fonction continue, lipschitzienne, vérifiant*

$$\|\nabla\Phi\| \leq 1 - \epsilon, \quad \epsilon > 0,$$

et

$$\|\nabla\Phi_\mu - \nabla\Phi\| \leq C_1 \mu,$$

alors, il existe  $C = C(n)$  tel que pour  $h > 0$ ,  $\mu \leq \epsilon/2$  et  $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ , on a :

$$\Re \langle e^{\Phi_\mu/h} P u, e^{\Phi_\mu/h} u \rangle \geq \langle \left( \sqrt{1 - (\nabla \Phi_\mu)^2} + V(x) \right) e^{\Phi_\mu/h} u, e^{\Phi_\mu/h} u \rangle - Ch \mu^{-N} \epsilon^{-N} \|e^{\Phi_\mu/h} u\|^2 \quad (1.10)$$

où  $\langle, \rangle$  est le produit scalaire de  $\mathbf{R}^n$ ,

**Preuve :** Si  $\mu \leq \epsilon/2$ , alors

$$|\nabla \Phi_\mu| \leq 1 - \epsilon/2.$$

On peut donc appliquer la proposition 1.1.1 à  $\Phi_\mu$ .

On définit  $\Psi_\mu$  par  $\Phi_\mu(x) - \Phi_\mu(y) = (x - y)\Psi_\mu(x, y)$ . Alors

$$C_M^{\Psi_\mu} = \max_{|\alpha| \leq M, (x,y) \in \mathbf{R}^{2n}} |\partial_{x,y}^\alpha \Psi_\mu(x, y)| \leq C_M \max_{1 \leq |\alpha| \leq M+1, x \in \mathbf{R}^n} |\partial_x^\alpha \Phi_\mu(x)| \leq C'_M \mu^{-M}$$

grâce à (1.9). Cela donne la proposition grâce à (1.7), en remplaçant  $N$  par le maximum entre  $N$  et  $M$ .

Montrons à présent :

**Proposition 1.1.9** *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, si  $F_{+,\mu}$  et  $F_{-,\mu} \in L^\infty$ ,  $F_{+,\mu} \geq 0$ ,  $F_{-,\mu} \geq 0$ , vérifient :*

$$\sqrt{1 - (\nabla \Phi_\mu)^2} + V(x) = (F_{+,\mu})^2 - (F_{-,\mu})^2 \quad (1.11)$$

on a

$$(1/2) \|F_{+,\mu} e^{\Phi_\mu/h} u\|^2 - Ch \mu^{-N} \epsilon^{-N} \|e^{\Phi_\mu/h} u\|^2 \leq \left\| \frac{e^{\Phi_\mu/h}}{F_{+,\mu} + F_{-,\mu}} P u \right\|^2 + (3/2) \|F_{-,\mu} e^{\Phi_\mu/h} u\|^2. \quad (1.12)$$

**Preuve :** On omet la dépendance des fonctions en  $\mu$ . On utilise l'écriture (1.11) dans (1.10) :

$$\begin{aligned} -Ch \mu^{-N} \epsilon^{-N} \|e^{\Phi/h} u\|^2 + \|F_+ e^{\Phi/h} u\|^2 - \|F_- e^{\Phi/h} u\|^2 &\leq \Re \int_\Omega e^{2\Phi/h} P u \bar{u} dx \\ &\leq \left\| \frac{e^{\Phi/h}}{F_+ + F_-} P u \right\| \|(F_+ + F_-) e^{\Phi/h} u\| \\ &\leq \left\| \frac{e^{\Phi/h}}{F_+ + F_-} P u \right\|^2 + (1/2) \left( \|e^{\Phi/h} F_+ u\|^2 + \|e^{\Phi/h} F_- u\|^2 \right) \end{aligned}$$

et finalement, on trouve (1.12).  $\square$

Nous allons étendre ces formules sur le domaine de  $P$ , noté  $D(P)$ .

D'après [22]  $D(P)$  est contenu dans la fermeture de  $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  pour la forme quadratique :

$$q(u) = ((P - \lambda)u, u)$$

où  $V(x) > \lambda + \delta$ ,  $\delta > 0$ .

Remarquons que, pour  $u \in D(P)$ ,

$$q(u) \geq (\sqrt{1 + D^2}u, u) + \delta \|u\|^2 = \|(1 + D^2)^{1/4}u\|^2 + \delta \|u\|^2.$$

Soit  $\Phi$  une fonction vérifiant les hypothèses de la proposition 1.1.8 et dont le gradient est nul hors d'un compact.

Si  $u \in D(P)$ , il existe  $u_n \in C_0^\infty$ , tendant vers  $u$  pour la forme quadratique  $q$ . Alors  $q(u - u_n) \rightarrow 0$  implique :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\| &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + D^2}((u - u_n)), (u - u_n)) &= 0. \end{aligned}$$

La formule (1.1) est vérifiée pour les  $u_n$ , et en faisant tendre  $n$  vers l'infini on a cette formule pour  $u \in D(P)$  car  $e^{\Phi_\mu/h}$  est bornée .

Sous les mêmes hypothèses, on a de même (1.12). D'où le corollaire

**Corollaire 1.1.10** *Si  $u \in D(P)$  et  $\Phi$  vérifie les hypothèses de la proposition 1.1.8, et si  $\nabla\Phi = 0$  hors d'un compact, alors les inégalités (1.10) et (1.12) sont satisfaites.*

On utilise ces inégalités dans les deux parties suivantes pour établir une majoration des fonctions propres et une estimation de la résolvante de  $P$ .

## 1.2 Décroissance des fonctions propres

On rappelle que le potentiel  $V$  satisfait les hypothèses

- (H1)  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $V(x) \geq E_0 - 1$ ,
- (H2)  $\liminf_{|x| \rightarrow \infty} V = E_1 - 1$ ,  $E_1 > E_0$ .
- (H3) La fonction  $V$  ainsi que toutes ses dérivées sont à décroissance polynômiale.

Pour  $E \in \mathbb{R}$ ,  $E < E_1$  on rappelle la définition de la distance de Lithner-Agmon :

$$d = \left(1 - (E - V)_+^2\right)_+ dx^2.$$

On sait calculer la longueur d'une courbe avec cette métrique, et on définit la distance entre deux points par le minimum des longueurs des courbes joignant ces deux points.

On démontre les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d(y, x), \\ y &\mapsto d(x, y), \text{ est une fonction continue et lipschitzienne. De plus} \end{aligned}$$

$$\|\nabla_y d(x, y)\| \leq \left(1 - (E - V(y))_+^2\right)_+^{1/2}.$$

Si  $U \subset \mathbb{R}^n$ , on définit  $d(x, U) = \inf_{y \in U} d(x, y)$ .

Comme  $|d(x, U) - d(y, U)| \leq d(x, y)$ , on a :

$$\|\nabla_x d(x, U)\| \leq \left(1 - (E - V(x))_+^2\right)_+^{1/2}. \quad (2.1)$$

Afin de simplifier les notations, on se place à un niveau d'énergie  $E = 0$ , en modifiant  $V$  par une constante. La distance associée est alors

$$d = \left(1 - (-V)_+^2\right)_+ dx^2$$

et **(H2)** devient  $\liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) > -1$ .

Si  $U$  est le compact  $\{x \in \mathbb{R}^n, V(x) \leq -1\}$ , alors  $d(x, U) = d(x, y)$  pour tout  $y \in U$ , donc  $x \mapsto d(x, U)$  a les propriétés de  $d(x, y)$  données plus haut. De plus

$$d(x, U)|_{|x| \rightarrow \infty} \longrightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Enfin (2.1) implique

$$\|\nabla d\| \leq 1. \quad (2.3)$$

On rappelle maintenant un résultat de [12] (Théorème 5) :

**Théorème 1.2.1** *Supposons que le puits  $U$  soit un puits ponctuel non dégénéré.*

*Soit  $K$  un compact de  $\{V < 0\}$ , tel que tout point  $x \in K$  est relié au puits par une unique géodésique minimale, et tel que la distance d'Agmon  $d$  soit régulière dans un ouvert contenant  $K$ . Alors, il existe  $N$  et  $C_K$  tels que la première fonction propre normalisée  $u$  de  $P$  vérifie*

$$\forall x \in K, |u(x, h)| \leq C_K h^{-N} e^{-d(x, U)/h}. \quad (2.4)$$

On va ici étudier la décroissance des fonctions propres hors de la zone  $\{V < 0\}$ . Afin d'utiliser le corollaire 1.1.10, on doit supposer que la fonction  $V$  permet d'avoir pour  $d$  :

$$\exists \mu_0 > 0, \exists C_1 > 0, \text{ si } 0 < \mu \leq \mu_0, x \in \mathbb{R}^n, |\nabla d(x) - \nabla d_\mu(x)| \leq C_1 \mu. \quad (2.5)$$

C'est le cas s'il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $y$  dans un voisinage de 0,

$$|\nabla d(x + y) - \nabla d(x)| \leq C|y|$$

Par exemple en dimension un et en présence de puits ponctuels, une telle condition est vérifiée sur tout compact.

(2.3) montre que  $\Phi = (1 - \epsilon)d$  vérifie les hypothèses des propositions 1.1.8 et 1.1.9. Avec l'hypothèse (2.5), cela nous permet de démontrer la proposition :

**Proposition 1.2.2** *Soit  $u$  une fonction propre normalisée de  $P$  pour la valeur propre  $\lambda(h)$ , où  $\lim_{h \rightarrow 0} \lambda(h) = 0$ . On suppose qu'il existe  $\nu' > 0$  tel que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda(h)}{h^{\nu'}} = 0$ . Alors, il existe  $C > 0$ ,  $\nu_0 > 0$  tel que si  $\nu < \nu_0$  et  $h < h_\nu$ ,*

$$\left\| e^{(1-h^\nu)d(x, U)/h} u \right\|^2 \leq C e^{Ch^\nu/h}.$$

**Preuve :** Posons  $\Phi(x) = (1 - \epsilon)d(x, U)$  pour  $\epsilon = h^\nu$  et  $\nu < \nu'/2$ . Avec la majoration (2.1), on a

$$\|\nabla\Phi\| \leq (1 - h^\nu)\|\nabla d\| \leq (1 - h^\nu)\left(1 - (-V)_+^2\right)_+^{1/2}$$

donc

$$\sqrt{1 - \nabla\Phi^2} + V(x) - \lambda(h) \geq \left(1 - (1 - h^\nu)^2(1 - (-V)_+^2)_+\right)^{1/2} + V(x) - \lambda(h).$$

On note  $f(a, h) = (1 - (1 - h^\nu)^2(1 - (-a)_+^2)_+)^{1/2} + a$ .  $f$  est une fonction strictement croissante sur  $] -1, 0]$ , valant 0 en  $-1$ .

Soit  $U_\delta = \{x, V(x) \leq -1 + \delta\}$ , où on choisit  $\delta > 0$  assez petit de sorte que  $U_\delta$  soit compact d'après **(H2)**.

Si  $x \in U_\delta^c \cap \{V(x) \leq 0\}$ , alors  $-1 + \delta \leq V(x) \leq 0$  et donc

$$\sqrt{1 - \nabla\Phi^2} + V(x) - \lambda(h) \geq f(V) - \lambda(h) \geq f(-1 + \delta) - \lambda(h).$$

On pose  $\delta = h^\nu$ . Alors  $f(-1 + \delta) \geq \delta h^\nu \geq h^{2\nu}$  donc pour  $h < h_0$ ,

$$\sqrt{1 - \nabla\Phi^2} + V(x) - \lambda(h) \geq h^{2\nu} - \lambda(h) > \frac{h^{2\nu}}{2}$$

car par hypothèse  $2\nu < \nu'$  et  $\frac{\lambda(h)}{h^{\nu'}}$  tend vers zéro quand  $h$  tend vers zéro.

De même, pour  $x \in U_{h^\nu}^c \cap \{V(x) \geq 0\} = \{V(x) \geq 0\}$  et  $h$  assez petit, (2.1) donne :

$$\sqrt{1 - \nabla\Phi^2} + V(x) - \lambda(h) \geq \sqrt{1 - (1 - h^\nu)^2} - \lambda(h) \geq h^{\nu/2} - \lambda(h) \geq \frac{h^{2\nu}}{2}$$

Donc  $\exists h_0, \forall h < h_0, \forall x \in U_{h^\nu}^c$ ,

$$\sqrt{1 - \nabla\Phi^2} + V(x) - \lambda(h) \geq \frac{h^{2\nu}}{2}.$$

D'autre part, si  $\mu < \mu_0$ , on a grâce à l'hypothèse (2.5) et à la majoration  $|\nabla\Phi| \leq 1$ ,

$$|\nabla\Phi^2 - \nabla\Phi_\mu^2| \leq C_1\mu$$

et donc si  $\mu h^{-\nu}$  est petit,

$$|\sqrt{1 - \nabla\Phi^2} - \sqrt{1 - \nabla\Phi_\mu^2}| = \left| \sqrt{1 - \nabla\Phi^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\nabla\Phi^2 - \nabla\Phi_\mu^2}{1 - \nabla\Phi^2}}\right) \right| \leq \left(\sqrt{1 - \nabla\Phi^2}\right)(C_1/4)\mu h^{-\nu} = O(\mu h^{-\nu}).$$

On peut écrire sur  $U_{h^\nu}^c$  :

$$\sqrt{1 - \nabla\Phi_\mu^2} + V(x) - \lambda(h) = F_{+, \mu}^2 - F_{-, \mu}^2 \geq \frac{h^{2\nu}}{2} - C_2\mu h^{-\nu}$$

**On pose**  $\mu = h^{4\nu}$ . Alors (2.5) montre que pour  $h < h_\nu$ ,  $|\nabla\Phi_\mu| \leq 1 - h^\nu/2$  et

$$\frac{h^{2\nu}}{2} - C_2\mu h^{-\nu} \geq \frac{h^{2\nu}}{4}.$$

Donc dans  $U_{h^\nu}^c$  :

$$\sqrt{1 - \nabla\Phi_\mu^2} + V(x) - \lambda(h) \geq \frac{h^{2\nu}}{4}.$$

Soit  $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$  une fonction telle que  $\chi_0'(t) = 1$  si  $t \leq 0$ ,  $\chi_0'(t) = 0$  si  $t \geq 1$  et  $0 \leq \chi_0' \leq 1$ .  
Posons

$$\Phi_{R,\mu} = \chi_0(\Phi_\mu - R) + R,$$

où  $R \in \mathbf{R}$ . Alors  $\Phi_{R,\mu} \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ ,

$$\Phi_{R,\mu} = \Phi_\mu, \text{ si } \Phi_\mu \leq R,$$

(2.2) montre que le gradient de  $\Phi_{R,\mu}$  est nul hors d'un compact,

et enfin

$$\nabla\Phi_{R,\mu} = \nabla\Phi_\mu\chi_0'(\Phi_\mu - R)$$

donc

$$|\nabla\Phi_{R,\mu}| \leq |\nabla\Phi_\mu| \leq 1 - h^\nu/2.$$

On peut appliquer le corollaire 1.1.10 avec le potentiel  $V - \lambda(h)$ , en remplaçant  $\Phi$  par  $\Phi_{R,\mu}$ ,  $\mu$  par  $h^{4\mu}$  et  $\epsilon$  par  $h^\nu/2$ .

L'inégalité ci-dessus montre que si on définit  $(F_{\pm,R,\mu})$  par

$$(F_{+,R,\mu})^2 - (F_{-,R,\mu})^2 = \sqrt{1 - \nabla\Phi_{R,\mu}^2} + V(x) - \lambda(h) \geq \sqrt{1 - \nabla\Phi_\mu^2} + V(x) - \lambda(h),$$

on peut prendre pour  $h < h_\nu$ ,  $F_{-,R,\mu} = 0$  sur  $U_{h^\nu}^c$ , et  $(F_{+,R,\mu})^2 \geq \frac{h^{2\nu}}{4} > 0$ .

Alors (1.12) conduit à :

$$-Ch^{1-5N\nu}\|\exp(\Phi_{R,\mu}/h)u\|^2 + \frac{1}{2}(h^{2\nu}/4)\|\exp(\Phi_{R,\mu}/h)u\|^2 \leq 3/2\|F_{-,R,\mu}\exp(\Phi_{R,\mu}/h)u\|^2.$$

Si  $\nu < \frac{1}{5N+3}$  et  $h < h_\nu$ , alors

$$\frac{h^{2\nu}}{8} - Ch^{1-5N\nu} \geq \frac{h^{2\nu}}{16}$$

De plus, on peut majorer  $\|F_{-,R,\mu}^2\|_{L^\infty(U_{h^\nu})}$  indépendamment de  $h < h_\nu$  et de  $R$ , et obtenir  $C_0 > 0$  tel que

$$\|\exp(\Phi_{R,\mu}/h)u\|^2 \leq C_0h^{-2\nu}\|\exp(\Phi_{R,\mu}/h)u\|_{U_{h^\nu}}^2.$$

La constante  $C_0$  ne dépend pas de  $R$ , donc en faisant tendre  $R$  vers  $+\infty$ , on obtient



$$\|\exp(\Phi_\mu/h)u\|^2 \leq C_0 h^{-2\nu} \|\exp(\Phi_\mu/h)u\|_{U_{h^\nu}}^2. \quad (2.6)$$

Posons  $\delta(h^\nu) = \text{Sup}_{U_{h^\nu}}(\Phi)$ . On a  $\delta(h^\nu) = O(h^\nu)$ . En effet pour  $h$  assez petit et  $x \in U_{h^\nu}$ , on peut prendre un chemin  $\gamma$  dans  $U_{h^\nu}$  tel que :

$$d(x, U) \leq \int_\gamma \sqrt{1 - V^2} dt,$$

avec  $-1 \leq V \leq -1 + h^\nu$  sur  $\gamma$ . Cela est dû au fait que  $U_{h^\nu}$  a le même nombre de composantes connexes que  $U$ . Cela donne bien  $d(x, U) = O(h^\nu)$  et par suite  $\delta(h^\nu) = O(h^\nu)$ .

Comme  $\Phi_\mu = \Phi + O(\mu) = \Phi + O(h^{4\nu})$ , on a

$$\text{Sup}_{U_{h^\nu}}(\Phi_\mu) \leq C' h^\nu$$

Alors si  $h < h_\nu$  est assez petit, (2.6) devient :

$$\|\exp(\Phi_\mu/h)u\|^2 \leq C_0 h^{-2\nu} e^{C' h^\nu/h} \|u\|_{U_{h^\nu}}^2 \leq C e^{C h^\nu/h}$$

pour  $C > 0$  assez grand.

Enfin,  $\Phi_\mu = (1 - h^\nu)d + O(h^{4\nu})$  donne, pour une nouvelle constante  $C$  :

$$\|\exp((1 - h^\nu)d(x, U)/h)u\|^2 \leq C e^{C h^\nu/h}$$

La proposition est démontrée.  $\square$

Cette majoration montre qu'en dehors des puits de potentiel  $U$ , les fonctions propres sont exponentiellement décroissantes quand  $h \rightarrow 0$ .

On a plusieurs corollaires à cette proposition :

**Corollaire 1.2.3** *Soit  $K$  un compact. Sous les hypothèses de la proposition, avec (2.5) restreinte à  $K$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que :*

$$\left\| e^{d(x, U)/h} u \right\|_{L^2(K)}^2 \leq C e^{C h^\nu/h}.$$

Si de plus  $K \cap U = \emptyset$ , alors il existe  $C > 0$  tel que

$$\left\| e^{(1 - C h^\nu)d(x, U)/h} u \right\|_{L^2(K)}^2 \leq C.$$

Il suffit de reprendre la proposition avec  $d = \tilde{d}$  une distance modifiée en dehors de  $K$  et qui vérifie les hypothèses de la proposition. Avec  $-h^\nu d(x, U) \geq -h^\nu \text{Max}_K d(x, U)$  on a le corollaire si on augmente  $C$  de  $\text{max}_K d(x, U)$ .

On retrouve également un résultat de [12] (lemme 4) :

**Corollaire 1.2.4** Si  $\lambda(h)$  tend vers 0, on a pour tout  $\epsilon > 0$  et  $h < h_\epsilon$

$$\left\| e^{(1-\epsilon)\Phi/h} u \right\|^2 \leq C_\epsilon e^{\delta(\epsilon)/h} \quad (2.7)$$

où  $\delta(\epsilon) \rightarrow 0$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Ce corollaire se démonte comme la proposition précédente, en prenant  $\delta = \epsilon$  indépendant de  $h$ .

Démontrons à présent un lemme qui donnera une majoration uniforme des fonctions propres avec une hypothèse plus forte sur  $V$  :

**Lemme 1.2.5** On suppose que le potentiel  $V$  vérifie l'hypothèse renforcée :

**(H3')** le potentiel  $V$  ainsi que toutes ses dérivées sont bornées.

Soit  $u$  une solution de  $Pu = 0$ . Alors  $\|u\|_\infty \leq C\|u\|$ .

**Preuve :**  $P = \sqrt{1 + D^2} + V$  est un opérateur elliptique de degré 1, donc une distribution  $u$  est dans  $H_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^n)$  si et seulement si  $Pu \in H_{\text{loc}}^{s-1}(\mathbb{R}^n)$  [8]. Si  $u$  vérifie  $Pu = 0$ , on a pour tout  $s \in \mathbb{N}$   $u \in H_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^n)$ . En particulier  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Choisissons  $\chi \in C_0^\infty(B(0, 1))$ ,  $\chi \equiv 1$  sur  $B(0, 1/2)$ .

On a  $\chi(x - x_0)u(x) = \chi_{x_0}u \in S(\mathbb{R}^n)$ , donc, si  $\mathcal{F}$  est la transformation de Fourier, on a

$$\mathcal{F}(\chi_{x_0}u) = \mathcal{F}(\chi_{x_0}) * \mathcal{F}(u) \in S(\mathbb{R}^n) \text{ et } \int |\mathcal{F}(\chi_{x_0}) * \mathcal{F}(u)| < \infty.$$

On peut alors écrire :  $\text{Max}_{B(x_0, 1/2)} |u| = \text{Max}_{B(x_0, 1/2)} |\chi_{x_0}u| \leq \int |\mathcal{F}(\chi_{x_0}) * \mathcal{F}u| d\xi$ .

Choisissons  $s > n/2$ , alors :

$$\begin{aligned} \int |\mathcal{F}(\chi_{x_0}) * \mathcal{F}u| d\xi &= \int (1 + \xi^2)^{-s/2} (1 + \xi^2)^{s/2} |\mathcal{F}(\chi_{x_0}) * \mathcal{F}u| d\xi \\ &\leq \left( \int (1 + \xi^2)^{-s} d\xi \right)^{1/2} \left( \int (1 + \xi^2)^s |\mathcal{F}(\chi_{x_0}u)|^2 d\xi \right)^{1/2} \leq C_s \|\chi_{x_0}u\|_{2s}, \end{aligned}$$

où  $\|\cdot\|_s$  désigne la norme dans  $H^s$ .

On obtient  $\text{Max}_{B(x_0, 1/2)} |u| \leq C_s \|\chi_{x_0}u\|_{2s}$ .

Or les normes  $\|v\|_s$  et  $\sum_{|\alpha| \leq s} \|v^{(\alpha)}\|_0$  sont équivalentes [8] donc  $\|\chi_{x_0}u\|_s^2 \leq C \text{Max}_{|\alpha| \leq s} \|(\chi_{x_0}u)^{(\alpha)}\|_0^2$ .

Comme  $\chi \in C_0^\infty$ , on peut majorer les dérivées de  $\chi_{x_0}$  jusqu'à l'ordre  $s$  uniformément en  $x_0$  et donc  $\|\chi_{x_0}u\|_s^2 \leq C' \text{Max}_{|\alpha| \leq s} \|u^{(\alpha)}\|_0^2 \leq \|u\|_s^2$ .

Il suffit maintenant de montrer

**Lemme 1.2.6** On a

$$\forall s \in \mathbb{N}, u \in H^s(\mathbb{R}^n), \|u\|_s \leq C_s \|u\|_0.$$

**Preuve :** L'hypothèse **(H3')** sur  $V$  montre que si  $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ , alors  $Vf \in H^s(\mathbb{R}^n)$ . L'équivalence des normes  $\|f\|_s$  et  $\sum_{|\alpha| \leq s} \|f^{(\alpha)}\|$  donne de plus  $\|Vf\|_s \leq C_s \|f\|_s$  pour des constantes  $C_s$  dépendant de  $V$ .

Démontrons le lemme par récurrence. On a

$$Pu = \sqrt{1 - h^2\Delta}u + Vu = 0 \text{ soit } \sqrt{1 - h^2\Delta}u = -Vu.$$

Comme  $u \in L^2$ ,  $Vu \in L^2$  et par suite  $u \in H^1$ . De plus, on a

$$\|u\|_1 \leq \text{Max}|V|^2 \|u\|_0.$$

Par récurrence, l'égalité  $\sqrt{1 - h^2\Delta}u = -Vu$  montre que  $u \in H^s$  pour tout  $s \in \mathbb{N}$ . Donc  $u$  et  $Vu$  sont dans le domaine de  $(1 - h^2\Delta)^{k/2}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . De plus,

$$(1 - h^2\Delta)^{(n+1)/2}u = -(1 - h^2\Delta)^{n/2}Vu$$

mène à  $\|u\|_{n+1} = \|Vu\|_n \leq C_n \|u\|_n$ . Le lemme est démontré et termine la démonstration du lemme 1.2.5.  $\square$

## 1.3 Matrices d'interaction

Grâce aux résultats des parties précédentes, et en particulier à la proposition 1.1.9, on étudie la résolvante de  $P$  pour définir ensuite la matrice d'interaction. On prend toujours  $E = 0$ .

### 1.3.1 Estimation du noyau de $(P - z)^{-1}$

Afin d'établir une estimation de la résolvante de  $P$ , on a besoin de la définition :

**Définition 1.3.1** Soit  $A = A_h$  une famille d'opérateurs. Si  $f$  est continue, on écrira

$$A(x, y) = \Theta(e^{-f(x,y)/h})$$

si pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , tout  $\epsilon > 0$ , il existe des voisinages  $V, U$  de respectivement  $x$  et  $y$ , et une constante  $C$  tels que :

$$\|Au|_V\| \leq Ce^{-(f(x,y)-\epsilon)/h} \|u\| \text{ pour tout } u \in D(P), \text{ de support dans } U.$$

On peut remarquer que

(1) Si  $A(x, y) = \Theta(e^{-f(x,y)/h})$ , et  $B(x, y) = \Theta(e^{-g(x,y)/h})$ , alors  $A \circ B(x, y) = \Theta(e^{-k(x,y)/h})$ , où  $k(x, y) = \min_z f(x, z) + g(z, y)$ .

(2) Si  $A(x, y) = \Theta(e^{-f(x,y)/h})$ , et si  $\Phi$  et  $\Psi$  sont dans  $C^0(\mathbb{R}^n)$ , telles que  $\Phi(x) \geq -f(x, y) + \Psi(y)$ , alors

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}^n), \|e^{-\Phi/h}Au\| \leq C_\epsilon e^{\epsilon/h} \|e^{-\Psi/h}u\|.$$

Nous commençons par considérer le cas d'un potentiel sans puits :

**Proposition 1.3.2** Si  $V > -1 + \alpha$ ,  $\alpha > 0$  et  $z \in K(h)$ , où  $K(h)$  est un compact de  $\mathbb{C}$  tel que  $\lim_{h \rightarrow 0} K(h) = \{0\}$ , alors il existe  $h_0 > 0$  tel que  $\sigma(P) \cap K(h) = \emptyset$  pour  $h < h_0$ .  $(P - z)^{-1}$  existe donc et on a :

$$(P - z)^{-1}(x, y) = \Theta(e^{-(1-\epsilon)d(x,y)/h}). \quad (3.1)$$

**Preuve :** Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ , et  $\epsilon > 0$ . Soit  $\Phi(x) = (1 - \epsilon)d(x, y_0)$ .

Remarquons tout d'abord que  $\|\nabla d\| \leq 1$  implique  $\Phi(x) \leq d(x, y_0) \leq |x - y_0|$ . Ainsi

$$\forall x \in B(y_0, \epsilon), \quad d(x, y_0) \leq \epsilon,$$

où  $B(x, r) = \{y, |x - y| < r\}$  désigne une boule pour la mesure de Lebesgue.

Avec la condition  $V > -1 + \alpha$ , on reprend la démonstration du corollaire 1.2.4 avec  $\delta = \epsilon < \alpha$  et donc avec  $U_\epsilon = \emptyset$ . Ceci permet de choisir dans (1.12)  $F_- \equiv 0$  et  $F_+$  minorée par une constante strictement positive.

Soit  $v \in L^2(B(y_0, \eta))$ ,  $u = (P - z)^{-1}v$ ,  $z \in K(h)$ , alors, pour  $h$  assez petit :

$$\begin{aligned} \exists C' > 0, C' \|e^{\Phi/h}u\|^2 &\leq \frac{1}{C'} \|e^{\Phi/h}(v + zu)\|^2 \\ &\leq \frac{2}{C'} (\|e^{\Phi/h}v\|^2 + \|e^{\Phi/h}zu\|^2). \end{aligned}$$

D'où :

$$(C' - \frac{2|z|}{C'}) \|e^{\Phi/h}u\|^2 \leq \frac{2}{C'} \|e^{\Phi/h}v\|^2 \leq \frac{2e^{2\epsilon/h}}{C'} \|v\|^2$$

car  $\Phi \leq \epsilon$  sur le support de  $v$ .

On choisit alors  $h$  suffisamment petit pour que  $\frac{C'}{2} \leq C' - \frac{2|z|}{C'}$ .

Ainsi, pour  $C'' = \frac{C'}{2}$ , on a :

$$C'' \|e^{\Phi/h}u\|^2 \leq \frac{2e^{2\epsilon/h}}{C'} \|v\|^2. \quad (3.2)$$

Or  $\Phi(x_0) = (1 - \epsilon)d(x_0, y_0) \leq (1 - \epsilon)[d(x_0, x) + d(x, y_0)]$ . Ainsi  $\Phi(x) \geq \Phi(x_0) - (1 - \epsilon)d(x, x_0)$ .

Finalement si

$$B_d(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) < r\},$$

$$\forall x \in B_d(x_0, \epsilon), \quad \Phi(x) \geq \Phi(x_0) - \epsilon$$

Avec (3.2) on trouve :

$$C'' e^{2(d(x_0, y_0) - \epsilon)/h} \|u|_{B_d(x_0, \epsilon)}\|^2 \leq C'' \|e^{\Phi/h}u|_{B_d(x_0, \epsilon)}\|^2 \leq \frac{2e^{2\epsilon/h}}{C'} \|v\|^2.$$

Ce qui conduit au résultat d'après la définition de  $\Theta$ .  $\square$

Nous étudions maintenant le cas où il y a des puits de potentiel,  $U \subset \mathbb{R}^n$ . (On a alors  $E_0 < 0$ .)

**Proposition 1.3.3** *Soit  $K(h)$  un compact de  $\mathbb{C}$  tel que  $\lim_{h \rightarrow 0} K(h) = \{0\}$ . On suppose que pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $C_\epsilon > 0$  tel que  $\|(P - z)^{-1}\| \leq C_\epsilon e^{\epsilon/h}$ . Alors,*

$$(P - z)^{-1}(x, y) = \Theta(e^{-(1-\epsilon)d(x,y)/h})$$

uniformément par rapport à  $z \in K(h)$ .

**Preuve :** Soit  $B_d(U, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, d(x, U) < r\}$ . Grâce à l'hypothèse **(H2)** on sait que  $B_d(U, r)$  est borné pour tout  $r < \infty$ . Soit  $\eta > 0$  et  $\chi \in C_0^\infty(B_d(U, 2\eta))$  tel que pour  $\alpha > 0$ ,  $\chi \equiv \alpha - E_0 + 1$  sur  $B_d(U, \eta)$ .

Notons  $P_0 = P + \chi$ .  $P_0$  n'a pas de puits. Soit  $\tilde{d}$  la distance associée au potentiel  $V + \chi$ , alors  $\tilde{d} \geq d$ . La proposition précédente implique :

$$(P_0 - z)^{-1}(x, y) = \Theta(e^{-(1-\epsilon)\tilde{d}(x,y)/h}) = \Theta(e^{-(1-\epsilon)d(x,y)/h}).$$

L'identité de la résolvante donne, pour  $z \in K(h)$  :

$$\begin{aligned} (P - z)^{-1} &= (P_0 - z)^{-1} - (P - z)^{-1}(P - P_0)(P_0 - z)^{-1} \\ &= (P_0 - z)^{-1} + (P - z)^{-1}(\chi)(P_0 - z)^{-1}. \end{aligned}$$

**Lemme 1.3.4** *On a*

$$(P - z)^{-1} \circ \chi(x, y) = \Theta(e^{-(1-\epsilon)d(x,U)/h}).$$

**Preuve :** On fait une démonstration similaire à celle de la proposition 1.3.2. Soit  $\epsilon > 0$ . Soit  $x_0, y_0$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $z \in K(h)$ ,  $v \in L^2(B(y_0, \eta))$  (en fait on peut prendre ici  $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ). Soit  $u = (P - z)^{-1}\chi v$  et  $\Phi(x) = (1 - \epsilon)d(x, U)$ .

On montre que pour tout  $\epsilon > 0$  il existe des constantes  $C > 0$  et  $C_\epsilon > 0$  telles que

$$\frac{C_\epsilon}{2} \|e^{\Phi/h} u\|^2 \leq \frac{1}{C_\epsilon} \|e^{\Phi/h} P u\|^2 + C \|e^{\Phi/h} u\|_{L^2(U_\epsilon)}^2.$$

On a défini  $U_\epsilon$  comme dans la partie 1.2.

Avec  $P u = z u + \chi v$ ,  $\Phi(x) \leq 2\eta$  sur le support de  $\chi$  et  $\Phi(x) \leq \epsilon$  sur  $U_\epsilon$  on obtient des constantes  $C'_\epsilon$  et  $C''_\epsilon$  telles que si  $h < h_\epsilon$ ,

$$C'_\epsilon \|e^{\Phi/h} u\|^2 \leq C''_\epsilon \left( e^{4\eta/h} \|\chi v\|^2 + e^{2\epsilon/h} \|(P - z)^{-1}(\chi v)\|_{L^2(U_\epsilon)}^2 \right).$$

L'hypothèse sur  $\|(P - z)^{-1}\|$  donne

$$C'_\epsilon \|e^{\Phi/h} u\|^2 \leq C''_\epsilon e^{4(\eta+\epsilon)/h} \|\chi v\|^2.$$

On a vu que si  $x \in B_d(x_0, \epsilon)$ ,  $\Phi(x) \geq \Phi(x_0) - \epsilon$  on conclut donc ce lemme comme la proposition 1.3.2.  $\square$

Revenons à la démonstration de la proposition. On montre facilement que si  $\hat{\chi}$  est une fonction qui a son support dans  $B(U, 3\eta)$  et qui vérifie  $\hat{\chi}\chi = \chi$ , alors

$$\hat{\chi} \circ (P_0 - z)^{-1}(x, y) = \Theta(e^{-(1-\epsilon)d(y,U)+3\eta/h}).$$

Si on revient à l'expression de  $(P - z)^{-1}$  en fonction de  $(P_0 - z)^{-1}$ , on finit la démonstration de la proposition grâce à la propriété (1) de  $\Theta$  avec  $A = (P - z)^{-1} \circ \chi$  et  $B = \hat{\chi}(P_0 - z)^{-1}$ .  $\square$

**Remarque 1.3.5** Si  $P$  vérifie les hypothèses de la proposition ci-dessus, on a en fait un résultat uniforme dans le sens suivant :

$$\forall \epsilon > 0, \exists C_\epsilon > 0, \forall (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^{2n}, \forall v \in L^2(B(y_0, \epsilon)), \|(P - z)^{-1}v|_{B_d(x_0, \epsilon)}\| \leq C_\epsilon e^{-(1-\epsilon)d(x_0, y_0)/h} e^{\epsilon/h} \|v\|.$$

On considère maintenant le cas de  $N$  puits de potentiels de diamètre nul notés  $U_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . On définit des opérateurs de Klein-Gordon à un puits connexe  $P_j$ . On considère les fonctions  $\alpha_j \in C_0^\infty(B_d(U_j, 2\eta))$ ,  $\alpha_j = E - E_0 + 1$  dans  $B_d(U_j, \eta)$  et  $\beta_j = \sum_{k \neq j} \alpha_k$ . Soient les opérateurs  $P_j$  ayant le même domaine que  $P$  et donnés par  $P_j = P + \beta_j$ . Ces opérateurs ont donc pour puits  $U_j$ . On a le résultat :

**Proposition 1.3.6** On suppose que  $\text{dist}(K(h), \sigma(P_j)) \geq \frac{e^{-\epsilon/h}}{C_\epsilon}$ . Pour  $h$  assez petit,  $\sigma(P) \cap K(h) = \emptyset$  et :

$$(P - z)^{-1}(x, y) = \Theta(e^{-(1-\epsilon)d(x,y)/h})$$

uniformément par rapport à  $z \in K(h)$ .

**Preuve :** On va montrer que pour tout  $z \in K(h)$  et tout  $\epsilon > 0$  il existe une constante  $C_\epsilon > 0$  telle que

$$\|(P - z)^{-1}\| \leq C_\epsilon e^{\epsilon/h}.$$

On conclura ensuite grâce à la proposition précédente.

Soient  $\chi'_j \geq 0$  des fonctions dans  $C^\infty(\mathbf{R}^n)$  telles que  $\chi'_j \equiv 1$  sur un voisinage de  $B_d(U_j, C_0)$ , où  $C_0$  est tel que  $\sum \chi'_j = 1$ .

On construit une approximation de la résolvante de  $P$  :

$$R_0(z) = \sum_1^N (P_j - z)^{-1} \chi'_j.$$

Alors  $(P - z)R_0(z) = I - K$ , où  $K = \sum_j \beta_j (P_j - z)^{-1} \chi'_j = \sum \sum_{j \neq k} \alpha_k (P_j - z)^{-1} \chi'_j$ .

**Lemme 1.3.7** Il existe  $C > 0$  tel que pour  $h > 0$  assez petit,  $\|K\| \leq C e^{-C_0/2h}$ .

**Preuve :** Soit  $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . On va montrer qu'on a  $\|Kv\| \leq Ce^{-C_0/2h}\|v\|$  et on aura le résultat par densité.

On a  $\|Kv\| \leq \sum \sum_{k \neq j} \|\alpha_k(P-z)^{-1}\chi'_j v\|$ .

On doit donc étudier  $I_{jk} = \|\alpha_k(P-z)^{-1}\chi'_j v\|$ . Démontrons d'abord le lemme :

**Lemme 1.3.8** *Il existe  $\epsilon_0 > 0$  et  $N_0 > 0$  tels que si  $|x| > N_0$  et  $|y| > N_0$  alors*

$$|x - y| \leq 2N_0 + d(x, y)/\epsilon_0.$$

**Preuve :** L'hypothèse **(H2)** montre qu'il existe  $\epsilon_0 > 0$  et  $N_0 > 0$  tels que si  $|x| \geq N_0$  alors  $V(x) \geq -1 + \epsilon_0^2$ .

Soit  $\tilde{V}$  défini par :

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x) &= -1 \quad \text{si } |x| \leq N_0 \\ \tilde{V}(x) &= -1 + \epsilon_0^2 \quad \text{si } |x| > N_0. \end{aligned}$$

Soit  $\tilde{d}$  la distance associée à ce potentiel. On a pour un chemin particulier  $\gamma$  joignant  $x$  à  $y$  :

$$d(x, y) = \left| \int_\gamma \sqrt{(1 - (-V)_+^2)} \right| \geq \left| \int_\gamma \sqrt{(1 - (-\tilde{V})_+^2)} \right| \geq \tilde{d}(x, y).$$

De plus, si  $|x| \geq N_0$  et  $|y| \geq N_0$ , alors

$$\tilde{d}(x, y) \geq \min[\epsilon_0(|x - y| - 2N_0), \epsilon_0(|x| - N_0) + \epsilon_0(|y| - N_0)] \geq \epsilon_0(|x - y| - 2N_0).$$

Cela donne bien le lemme.  $\square$

Revenons à la majoration de  $\|K\|$  et à l'étude de  $I_{jk}$ .  $B_d(U, C_0)$  est borné donc il existe  $N_1$  tel que  $B_d(U, C_0) \subset B(0, N_1)$ , où on rappelle que

$$\begin{aligned} B_d(U, C_0) &= \{x, d(x, U) < C_0\}, \\ B(0, N_1) &= \{x, |x| < N_1\}. \end{aligned}$$

Soit alors  $N = \text{Max}(N_1, C_0, N_0)$  et  $\chi \in C_0^\infty(B(0, N+1))$ ,  $\chi \equiv 1$  dans  $B(0, N)$ .

On a :

$$I_{jk} = \|\alpha_k(P-z)^{-1}\chi'_j v\| \leq \|\alpha_k(P-z)^{-1}\chi'_j \chi v\| + \|\alpha_k(P-z)^{-1}\chi'_j (1-\chi)v\| = L_{jk} + M_{jk}.$$

**Etude de  $L_{jk}$**

Soit  $\epsilon > 0$  fixé petit (par rapport à  $C_0$ ). Le support  $\text{Supp}(\chi'_j \chi)$  est compact donc il existe  $y_1, \dots, y_{n_\epsilon}$  tels que  $\text{Supp}(\chi'_j \chi) \subset \cup_i B(y_i, \epsilon/2)$  et  $d(y_i, \text{Supp}(\chi'_j \chi)) \leq \epsilon$ .

Soit  $\omega_i \in C_0^\infty(B(y_i, \epsilon))$  tel que  $\sum_i \omega_i \equiv 1$  sur  $\text{Supp}(\chi'_j \chi)$ .

Alors

$$L_{jk} \leq \sum_i \|\alpha_k(P_j - z)^{-1}\omega_i v\|.$$

On a par hypothèse  $(P_j - z)^{-1} = \Theta(e^{(1-\epsilon)d(x,y)/h})$ . En particulier  $\alpha_k(P_j - z)^{-1} = \Theta(e^{(1-\epsilon)d(U_k,y)/h})$ . Grâce à la remarque 1.3.5, on a alors, avec  $\eta < \epsilon$  ( $\eta$  provient de la définition de  $P_j$ ) :

$$\|\alpha_k(P_j - z)^{-1}\omega_i v\| \leq C_\epsilon e^{-(1-\epsilon)d(y_i, U_k)/h} e^{3\epsilon/h} \|v\|$$

et donc

$$\|\alpha_k(P_j - z)^{-1}\omega_i v\| \leq C_\epsilon e^{-C_0/2h} \|v\|$$

dés que  $h < h_0$  car  $d(y_i, U_k) \geq C_0 - \epsilon$ . En sommant sur  $i$  on obtient une nouvelle constante  $C_\epsilon$  telle que

$$L_{jk} \leq C_\epsilon e^{-C_0/2h} \|v\|.$$

### Etude de $M_{jk}$

On commence par un lemme

**Lemme 1.3.9** *Soit  $K_m = \{x, m-1 \leq d(x, U) \leq m+1\}$ . Il existe des constantes  $C > 0$  et  $D > 0$  telles que  $K_m \subset B(0, Cm + D)$ .*

**Preuve :** Soit  $x \in K_m \setminus B(0, N)$ . Soit  $x_0 \notin B(0, N)$  fixé. On a vu que si  $\epsilon_0$  est assez petit et si  $C = 2/\epsilon_0$ ,

$$|x - x_0| \leq C(d(x, x_0) + N_0)$$

donc

$$|x - x_0| \leq C(d(x, U) + d(x_0, U) + N_0) \leq C(m + 1 + d(x_0, U) + N_0)$$

Finalement  $|x| \leq C(m + D)$ ,  $D = 1 + d(x_0, U) + N_0 + |x_0|$ .  $\square$

D'autre part,  $\text{Supp}(1 - \chi) \subset B(0, N)^c$  et donc  $\text{Supp}(1 - \chi) \subset \{x, d(x, U) \geq C_0\} \subset \cup_{m \geq C_0} K_m$ . On peut donc choisir  $\chi^m \in C_0^\infty(K_m)$  tel que  $\sum_{m \geq C_0} \chi^m = 1$  sur le support de  $1 - \chi$ . Alors

$$M_{jk} \leq \sum_{m \geq C_0} \|\alpha_k(P_j - z)^{-1} \chi_j' \chi^m v\| = \sum_{m \geq C_0} M_{jk}^m.$$

Etudions donc  $M_{jk}^m$ .

Le support de  $\chi_j' \chi^m$  est compact donc on peut choisir  $y_1, \dots, y_{N(\epsilon, m)}$  tels que  $K^m \subset \cup_{1 \leq i \leq N(\epsilon, m)} B(y_i, \epsilon/2)$  et  $d(y_i, K^m) \leq \epsilon$ .

Grâce au lemme 1.3.9 on peut choisir les  $y_i$  tels que

$$N(\epsilon, m) \leq C_1(m/\epsilon)^n$$

Soit les fonctions troncatures  $w_i \in C_0^\infty(B(y_i, \epsilon))$  telles que  $\sum_i w_i = 1$  dans  $K^m$ . On majore comme précédemment  $\|\alpha_k(P_j - z)^{-1} \chi_j' w_i v\|$  pour trouver une constante ne dépendant que de  $\epsilon$ ,  $C_\epsilon$ , telle que si  $m \geq C_0$ ,

$$M_{jk}^m \leq \sum_{1 \leq i \leq N(\epsilon, m)} C_\epsilon e^{-(1-\epsilon)d(y_i, U_k)/h} e^{3\epsilon/h} \|v\|,$$



$$M_{jk}^m \leq N(\epsilon, m) C_\epsilon e^{-(1-\epsilon)(m-1)/h} e^{3\epsilon/h} \|v\|$$

et finalement pour  $h$  assez petit,

$$M_{jk}^m \leq N(\epsilon, m) C_\epsilon e^{-m/2h} \|v\|.$$

Par suite, pour  $\epsilon > 0$  fixé

$$M_{jk} \leq C_\epsilon \sum_{m \geq C_0} N(\epsilon, m) e^{-m/2h} \|v\| \leq C e^{-C_0/2h} \|v\|,$$

où  $C = C_\epsilon \sum_{m \geq C_0} N(\epsilon, m) e^{-(m-C_0)/2h}$  est fini grâce à la majoration de  $N(\epsilon, m)$ .

Finalement, on a montré que pour tout  $j, k$  on a  $I_{jk} \leq C e^{-C_0/2h} \|v\|$  et donc on a bien le lemme 1.3.7 .  $\square$

Terminons la démonstration de la proposition 1.3.6.

Si  $h < h_0$ ,  $\|K\| < 1$  donc  $(I - K)^{-1}$  existe et quitte à diminuer encore  $h$  on a  $\|(I - K)^{-1}\| \leq 2$ . Par construction de  $R_0$  et par hypothèse sur  $P_j$  on a pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\|R_0(z)\| \leq C_\epsilon e^{\epsilon/h}$ . Ainsi  $(P - z)^{-1} = R_0(I - K)^{-1}$  et

$$\forall \epsilon > 0, \|(P - z)^{-1}\| \leq 2C_\epsilon e^{\epsilon/h}.$$

Il reste à appliquer la proposition 1.3.3 pour avoir le résultat.  $\square$

### 1.3.2 Matrice de $P$

En utilisant la proposition 1.3.6 ci-dessus, nous étudions à présent le spectre de  $P$  au voisinage de  $I(h)$ , où  $I(h) = [\alpha(h), \beta(h)] \subset \mathbb{R}$ , tel que  $\lim_{h \rightarrow 0} I(h) = \{0\}$ .

On suppose qu'il existe  $a(h) > 0$  vérifiant  $a(h) \geq \frac{e^{-\epsilon/h}}{C_\epsilon}$ , tel que pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $P_j$  n'a pas de valeur propre dans  $] \alpha(h) - 2a(h), \alpha(h) \cup ] \beta(h), \beta(h) + 2a(h) [$ .

Soient  $\mu_{j,k}$ ,  $k = 1, \dots, m_j$  les valeurs propres de  $P_j$  dans  $I(h)$ , et  $\varphi_{j,k}$  une base orthonormée de vecteurs propres. On note  $\alpha = (j, k)$  et  $j(\alpha) = j$ .

La majoration uniforme des fonctions propres donnée par (2.7) et le lemme 1.2.5 donne

$$\forall \epsilon > 0, \varphi_\alpha = O\left(\exp\left(-((1 - \epsilon)d(x, U_{j(\alpha)}) - \delta(\epsilon))/h\right)\right), \quad (3.3)$$

ainsi que des relations équivalentes pour leurs dérivées.

Soit  $r_\alpha = (P - \mu_\alpha)\varphi_\alpha = -\beta_{j(\alpha)}\varphi_\alpha$ .

On a :

$$\text{Suppr}_\alpha \subset \cup_{k \neq j(\alpha)} B_d(U_k, 2\eta) \quad (3.4)$$

Si on définit  $\mathcal{O}(e^{-f/h}) = O_{\eta, \epsilon}(e^{(\delta(\epsilon) + \epsilon(\eta) - f)/h})$ , avec  $\epsilon(\eta) \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ , on a alors :

$$r_\alpha = \mathcal{O}\left(\exp\left(-((1 - \epsilon)\min_{k \neq j(\alpha)} d(U_k, U_{j(\alpha)}))/h\right)\right) \quad (3.5)$$

**Proposition 1.3.10** Soit  $F \subset L^2(\mathbf{R}^n)$  l'espace propre associé à  $\sigma(P) \cap I(h)$ , et soit  $E$  l'espace engendré par les  $\varphi_\alpha$ . On a  $\dim E = \dim F$ .

**Preuve :** On commence par démontrer un lemme :

**Lemme 1.3.11** Soient  $E_1$  et  $E_2$  des sous espaces fermés d'un espace de Hilbert. Soit la distance non symétrique :  $\rho(E_1, E_2) = \|\pi_1 - \pi_2\pi_1\| = \|\pi_1 - \pi_1\pi_2\|$ , où  $\pi_j$  est la projection orthogonale sur  $E_j$ .

Si  $E_1$  et  $E_2$  sont de dimension finie et  $\rho(E_1, E_2) < 1$ ,  $\rho(E_2, E_1) < 1$ , alors (ces distances sont égales et)  $\dim E_1 = \dim E_2$ .

**Preuve :** Il suffit de voir que si  $\rho(E_1, E_2) < 1$ , alors  $\pi_2|_{E_1}$  de  $E_1$  dans  $E_2$  est injective. On remarque que  $\rho(E_1, E_2) = 0$  ssi  $E_1 \subset E_2$ .

Nous allons donc démontrer que pour  $h$  assez petit,  $\rho(E, F) < 1$  et  $\rho(F, E) < 1$ .

On commence par l'inégalité  $\rho(E, F) < 1$ .

(3.3) donne :

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} \varphi_\alpha, \varphi_\beta \end{pmatrix} \right| &\leq C_\epsilon \exp \left[ 2\delta(\epsilon) - (1 - \epsilon)d(U_{j(\alpha)}, U_{j(\beta)}) + 4\eta \right] / h, \text{ si } j(\alpha) \neq j(\beta) \\ \left| \begin{pmatrix} \varphi_\alpha, \varphi_\beta \end{pmatrix} \right| &= \delta_{\alpha\beta} + O(\exp \left[ 2\delta(\epsilon) - 2(1 - \epsilon) \min_{k \neq j(\alpha)} d(U_{j(\alpha)}, U_k) + 4\eta \right] / h) \text{ si } j(\alpha) = j(\beta). \end{aligned}$$

Si  $D$  est la matrice  $D = (d_{\alpha,\beta})$  définie par

$$\begin{aligned} d_{\alpha,\beta} &= e^{-(1-\epsilon)d(U_{j(\alpha)}, U_{j(\beta)})/h} \quad \text{si } j(\alpha) \neq j(\beta) \\ d_{\alpha,\beta} &= 0 \quad \text{si } j(\alpha) = j(\beta), \end{aligned}$$

alors  $\begin{pmatrix} \varphi_\alpha, \varphi_\beta \end{pmatrix} - \delta_{\alpha,\beta} = \mathcal{O}\left((D + D^2)_{j(\alpha), j(\beta)}\right)$ .

Notons  $S_0 = \min_{j \neq k} d(U_j, U_k)$ , on obtient  $\mathcal{Y} \equiv \left(\begin{pmatrix} \varphi_\alpha, \varphi_\beta \end{pmatrix}\right) = I + \mathcal{O}(\exp(-S_0/h))$ .

Comme la taille de la matrice est un  $\mathcal{O}(h^{-n})$  ([8]), ces ordres de grandeurs sont conservés quand on prend les normes matricielles.

Soit  $v_\alpha$  la projection de  $\varphi_\alpha$  sur  $F$ .

Soit  $\gamma$  le lacet entourant  $I(h)$  à une distance  $a(h)$ . La proposition 1.3.6 montre que  $\sigma(P) \cap \gamma = \emptyset$  et :

$$v_\alpha = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (z - P)^{-1} dz \varphi_\alpha.$$

Comme  $(z - P)\varphi_\alpha = (z - \mu_\alpha)\varphi_\alpha - r_\alpha$ , en intégrant en  $z$  le long de  $\gamma$ , on obtient :

$$v_\alpha = \varphi_\alpha + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (z - P)^{-1} (z - \mu_{j(\alpha)})^{-1} r_\alpha dz$$

Les estimations (3.4) et (3.5) ainsi que la proposition 1.3.6 donnent

$$\text{si } \delta_j(x) = \min_{k \neq j} d(U_j, U_k) + d(U_k, x), \quad v_\alpha - \varphi_\alpha = \mathcal{O}(\exp(-(1 - \epsilon)\delta_{j(\alpha)}(x)/h)). \quad (3.6)$$

La dimension de  $E$  est un  $O(h^{-n})$ , on en déduit que  $\rho(E, F) = \mathcal{O}(\exp(-S_0/h))$  et donc, pour  $h$  assez petit,  $\rho(E, F) < 1$ .

Montrons maintenant que  $\rho(F, E) < 1$ .

Soit  $u$  un vecteur propre normé :

$$(P - \lambda)u = 0, \quad \lambda \in I(h) + [-a(h)/2, a(h)/2].$$

Avec les notations de la proposition 1.3.6, on a :

$$R_0(z)u = (P - z)^{-1}u - (P - z)^{-1}Ku = (\lambda - z)^{-1}u - (P - z)^{-1}Ku.$$

D'où :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} R_0(z)dz u = u - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (P - z)^{-1}Kdz u,$$

où  $\gamma$  est un lacet à une distance  $a(h)$  de  $I(h)$ .

Or,

$$\|(P - z)^{-1}\| \leq 4C_{\epsilon}e^{\epsilon/h} \text{ pour } z \in \gamma \text{ et } \|K\| \leq Ce^{-C_0/2h}.$$

Donc, si  $\pi_0$  est l'opérateur de  $F$  dans  $E$  défini par  $\pi_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} R_0(z)dz$ , alors  $\pi_0 u = u + \mathcal{O}(e^{-C/h})$  pour  $C > 0$ .

Comme  $\dim F = O(h^{-n})$ , on trouve  $\rho(F, E) = \mathcal{O}(e^{-C/h})$  et donc pour  $h < h_0$ ,  $\rho(F, E) < 1$ .

Pour  $h$  assez petit,  $\rho(E, F) < 1$  et  $\rho(F, E) < 1$  et le lemme 1.3.11 donne l'égalité des dimensions des espaces  $E$  et  $F$ .  $\square$

Mesurons à présent "l'écart" entre ces deux espaces vectoriels. Pour cela on étudie la matrice de  $P|_F$ , en orthonormalisant les  $(v_{\alpha})_{\alpha}$ .

$v_{\alpha} - \varphi_{\alpha}$  sont orthogonales à  $F$  donc :

$$(v_{\alpha}, v_{\beta}) - (\varphi_{\alpha}, \varphi_{\beta}) = (v_{\alpha}, v_{\beta} - \varphi_{\beta}) + (v_{\alpha} - \varphi_{\alpha}, \varphi_{\beta}) = (v_{\alpha} - \varphi_{\alpha}, \varphi_{\beta}).$$

Ainsi (3.6) donne

$$(v_{\alpha}, v_{\beta}) - (\varphi_{\alpha}, \varphi_{\beta}) = \mathcal{O}(\exp(-(1 - \epsilon)\tau_{\alpha, \beta}/h)),$$

où  $\tau_{\alpha, \beta} = \min_{j \neq j(\alpha), k \neq j(\beta)} [d(U_{j(\alpha)}, U_j) + d(U_j, U_k) + d(U_k, U_{j(\beta)})]$ .

Sous forme matricielle, cela s'écrit :

$$((v_{\alpha}, v_{\beta})) - ((\varphi_{\alpha}, \varphi_{\beta})) = \mathcal{O}(D^2 + D^3)$$

Soit la matrice  $T = (t_{\alpha,\beta})$ , avec  $t_{\alpha,\beta} = 0$  si  $j(\alpha) = j(\beta)$ , et  $t_{\alpha,\beta} = (\varphi_\alpha, \varphi_\beta)$  sinon.

On a  $((\varphi_\alpha, \varphi_\beta)) = I + T + \mathcal{O}(D^2 + D^3)$  et donc

$$((v_\alpha, v_\beta)) = I + T + \mathcal{O}(D^2 + D^3). \quad (3.7)$$

Comme les estimations établies pour  $\varphi_\alpha$  sont également vraies pour  $P\varphi_\alpha = (\mu_\alpha - \beta_{j(\alpha)})\varphi_\alpha$ , on obtient de manière similaire :

$$(Pv_\alpha, v_\beta) = (P\varphi_\alpha, \varphi_\beta) + \mathcal{O}(D^2 + D^3) \quad (3.8)$$

De plus,

$$\frac{1}{2}(P\varphi_\alpha, \varphi_\beta) + \frac{1}{2}(P\varphi_\beta, \varphi_\alpha) = \frac{1}{2}(\mu_\alpha + \mu_\beta)(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) + \frac{1}{2}((r_\alpha, \varphi_\beta) + (\varphi_\alpha, r_\beta)).$$

En utilisant  $((\varphi_\alpha, \varphi_\beta)) = I + T + \mathcal{O}(D^2 + D^3)$ , on obtient :

$$\frac{1}{2}((P\varphi_\alpha, \varphi_\beta)) + \frac{1}{2}((P\varphi_\beta, \varphi_\alpha)) = \text{diag}(\mu_\alpha) + \frac{1}{2}T\text{diag}(\mu_\alpha) + \frac{1}{2}\text{diag}(\mu_\alpha)T + W + \mathcal{O}(D^2) \quad (3.9)$$

où  $W$  est la matrice d'interaction définie par  $((\frac{w_{\alpha,\beta} + w_{\beta,\alpha}}{2})_{\alpha\beta})$ , avec  $w_{\alpha,\beta} = (r_\alpha, \varphi_\beta)$ .

Soit  $V = ((v_\alpha, v_\beta))$  et  $v$  le vecteur ligne  $(v_\alpha)_\alpha$ , alors  $f = v \circ V^{-1/2}$  est une base orthonormée de  $F$ . La matrice de  $P|_F$  dans cette base est

$$M = V^{-1/2}((Pv_\alpha, v_\beta))V^{-1/2}.$$

(3.7) donne  $V^{-1/2} = I - \frac{1}{2}T + \mathcal{O}(D^2 + D^3)$ .

En utilisant (3.9) et en remarquant que  $T = \mathcal{O}(D)$ , on obtient finalement :

$$M = \text{diag}(\mu_\alpha) + W + \mathcal{O}(D^2 + D^3).$$

L'expression de  $W$  et l'estimation des  $\varphi_\alpha$  (3.3) montre que  $W = \mathcal{O}(e^{-S_0/h})$ . Ainsi, l'écart entre les valeurs propres de  $P$  dans  $I(h)$  et les  $\mu_\alpha$  est de l'ordre de  $e^{-S_0/h}$ .

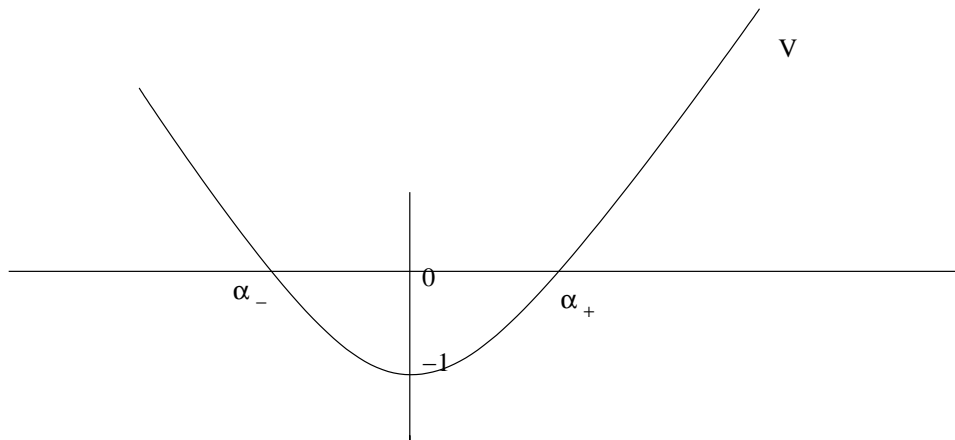
Afin de connaître plus précisément cette matrice d'interaction - et donc l'écart entre les valeurs propres de  $P$  et celles des  $P_j$  - nous construisons dans la suite des solutions WKB pour approcher les  $\varphi_\alpha$ . Nous réobtenons ensuite le résultat de [12] en dimension un, c'est à dire qu'on calcule un équivalent de  $W$  quand  $h$  tend vers 0, lorsque le potentiel reste sous le niveau d'énergie entre les deux puits.

## 1.4 Solutions WKB pour l'opérateur de Klein-Gordon

On se place dans cette partie en dimension un et on s'intéresse au cas d'un unique puits ponctuel de potentiel en zéro.

On fixe à nouveau  $E = 0$ . On suppose donc :

$V(0) = -1$ ,  $V'(0) = 0$ ,  $V''(0) > 0$  et  $V > -1$  si  $x \neq 0$



**FIG1: un puits de potentiel**

### 1.4.1 Définition du problème

On cherche à construire des solutions WKB au fond du puits pour l'opérateur de Klein-Gordon de manière analogue à ce qui a été fait pour l'opérateur de Schrödinger dans [13], [6].

On étudie l'équation

$$Pu(x, h) = e^{-d(x)/h} O(h^\infty), \quad (4.1)$$

où  $d(x) = d(x, 0) = \left| \int_0^x \left(1 - (-V)_+^2\right)_+^{1/2} dt \right|$  est la distance d'Agmon entre  $x$  et le puits  $U = \{0\}$ , et où  $O(h^\infty)$  est défini de la manière suivante :

**Définition 1.4.1** On dit que  $r(x, h) = O(h^\infty)$  si

$$\forall K \text{ compact}, \forall N \in \mathbb{N}, \|r(x, h)\|_{L^\infty(K)} = O(h^N).$$

On recherche a priori une solution  $u$  sous la forme d'une série formelle :

$$u(x, h) = e^{i\varphi(x)/h} a(x, h), \quad a(x, h) \sim \sum_{n \geq 0} h^n a_n(x). \quad (4.2)$$

### 1.4.2 Résolution pour $V(x) < 0$

On commence par chercher des solutions dans  $\mathcal{N} = ]\alpha_-, \alpha_+[$ , l'ensemble connexe contenant zéro dans  $\{x \in \mathbb{R}, V(x) < 0\}$  (on peut avoir  $\alpha_\pm$  infini).

Avec l'expression (4.2) de  $u$ , et en notant  $\varphi(x) - \varphi(y) = (x - y)\Phi(x, y)$ , on a :

$$Pu(x, h) = e^{i\varphi(x)/h} \int_{\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \Phi(x, x+y))} e^{-iy\xi/h} p(x, \xi + \Phi(x, x+y)) a(x+y, h) dy d\xi.$$

La démonstration du lemme 1.1.2 montre que si  $|\Im\Phi| < \delta < 1$ , on peut modifier le contour d'intégration de l'intégrale définissant  $Pu$  pour obtenir :

$$Pu(x, h) = e^{i\varphi(x)/h} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-iy\xi/h} p(x, \xi + \Phi(x, x+y)) a(x+y, h) dy d\xi. \quad (4.3)$$

Formellement, la méthode de la phase stationnaire [8] donne ensuite :

$$Pu(x, h) \sim e^{i\varphi(x)/h} \sum_{n \geq 0} \frac{h^n}{i^n n!} \partial_y^n \partial_\xi^n [p(x, \xi + \Phi(x, x+y)) a(x+y, h)]_{y=0, \xi=0}, \quad (4.4)$$

soit

$$Pu(x, h) \sim e^{i\varphi(x)/h} \sum_{n \geq 0} h^n f_n(x),$$

où

$$f_n(x) = \sum_{k+l=n} \frac{1}{i^k k!} \partial_y^k \partial_\xi^l [p(x, \xi + \Phi(x, x+y)) a_l(x+y)]_{y=0, \xi=0} \quad (4.5)$$

On cherche donc des fonctions  $\varphi$  et  $a_n$  qui rendent les  $f_n$  nulles.

### Equation éiconale

L'équation  $f_0(x) = 0$  donne l'équation éiconale :

$$\sqrt{1 + \varphi'(x)^2} + V(x) = 0 \quad (4.6)$$

Dans  $\mathcal{N} \subset \{x \in \mathbb{R}, V(x) < 0\}$  on peut trouver une fonction  $\varphi'$  vérifiant (4.6) au voisinage de tout point :

$$\varphi'(x) = \pm i \sqrt{1 - V^2(x)}$$

Comme on cherche une solution  $u$  exponentiellement décroissante ayant une phase  $\varphi$  analytique, on choisit (et on fixe désormais) :

$$\varphi'(x) = \pm i \sqrt{1 - V(x)^2}, \quad \pm x > 0, \quad x \in \mathcal{N}. \quad (4.7)$$

On a le développement en  $x = 0$  :  $\varphi'(x) = i\sqrt{V''(0)}x + o(x)$ .

**Remarque 1.4.2** La déformation de contour est justifié a posteriori car  $\varphi'$  donnée ci-dessus vérifie bien  $|\Im\varphi'| < \delta < 1$  dans tout compact de  $\mathcal{N}$ , et donc  $|\Im\Phi(x, x+y)| < \delta < 1$ .

**Remarque 1.4.3** Avec ce choix de  $\varphi'$ , on choisit une primitive  $\varphi$  telle que  $\varphi(0) = 0$  et on a  $\varphi(x) = id(x)$ ,  $x \in \mathcal{N}$ .

## Equations de transport

On s'intéresse à présent aux équations  $f_n(x) = 0$ ,  $n \geq 1$ ,  $x \in \mathcal{N}$ . Cela revient à étudier :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}a_0 &= 0 \\ \mathcal{L}a_k &= c_k,\end{aligned}$$

où  $\mathcal{L}$  est l'opérateur différentiel d'ordre 1 :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2i} \frac{\varphi''(x)}{(1 + \varphi'(x)^2)^{3/2}} + \frac{\varphi'(x)}{i\sqrt{1 + \varphi'^2(x)}} \frac{\partial}{\partial x}$$

et  $c_k$  est une fonction définie à l'aide des  $a_l$ ,  $l \leq k - 1$  donnée par (4.5).

Comme  $\varphi'(0) = 0$ , l'opérateur  $\mathcal{L}$  est singulier en zéro. On procède alors exactement comme pour l'opérateur de Schrödinger dans le cas d'un puits ponctuel de potentiel [6] : on cherche des fonctions  $a_k$  ainsi qu'une suite de réels  $(E_k)$  vérifiant :

$$(\mathcal{L} - E_1)a_0 = 0,$$

$$(\mathcal{L} - E_1)a_k = c_k + E_{k+1}a_0,$$

où  $c_k = c_k(a_l, E_m, 0 \leq l \leq k - 1, 2 \leq m \leq k)$ .

On impose les conditions initiales  $a_0(0) \neq 0$  et  $a_k(0) = 0$ ,  $k \neq 0$ .

On détermine les  $E_k$  en prenant ces équations pour  $x = 0$ . Cela donne en même temps des fonctions régulières  $a_k$  et le développement en  $h$  de la valeur propre :  $E(h) = \sum_{n \geq 1} E_k h^k$  au voisinage de  $E = 0$ .

Par exemple, pour la première valeur propre au fond du puits, on trouve les premiers termes :

$$\begin{aligned}E_1 &= \frac{\sqrt{V''(0)}}{2}, \\ a_0(x) &= C \left( \frac{V^2(x)}{1 - V^2(x)} \right)^{1/4} e^{iE_1 k(x)}, \quad x \in \mathcal{N}\end{aligned}\tag{4.8}$$

où  $k(x)$  est une primitive de  $\frac{-V(x)}{\varphi'(x)}$ .

On rappelle que  $E_1$  est choisi de façon à ce que  $a_0$  soit continue en 0 :

$$a_0(0) = C |V''(0)|^{1/4}.$$

On définit maintenant une fonction ayant le développement asymptotique (4.2) quand  $h$  tend vers 0 dans un ouvert de  $\mathcal{N}$ .

Soit  $O \subset \subset \mathcal{N}$ , soit  $\chi \in C_0^\infty(\mathcal{N})$ ,  $\chi \equiv 1$  dans  $O$ .

Soit  $\hat{\chi} \in C_0^\infty([0, 1])$ ,  $\hat{\chi} \equiv 1$  sur  $[0, 1/4]$ , et  $\hat{\chi} \equiv 0$  sur  $[3/4, 1]$ .

On définit la suite  $(\lambda_j)_{j \geq 0}$  tendant vers  $+\infty$  telle que

$$\forall x \in \mathcal{N}, \forall k \leq j, |\partial_x^k(\chi a_j)(x)h^j \hat{\chi}(\lambda_j h)| \leq h^{j-1}2^{-j}.$$

On définit alors la fonction  $u(x, h)$  pour  $x \in \mathcal{N}$  et  $h > 0$  par :

$$u(x, h) = e^{i\varphi(x)/h} \sum_{n \geq 0} h^n a_n(x) \chi(x) \hat{\chi}(\lambda_n h) = e^{i\varphi(x)/h} a(x, h). \quad (4.9)$$

On a [6] :  $a(x, h) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ ,  $a \sim \sum_{n \geq 0} h^n \chi(x) a_n$ , c'est à dire que si  $r_{n+1}(x, h) = a(x, h) - \sum_{k=0}^n h^k \chi(x) a_k(x)$ , alors

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall k \in \mathbf{N}, |\partial_x^k r_{n+1}(x, h)| \leq C(n, k) h^{n+1}.$$

En particulier, les dérivées de  $a(x, h)$  sont majorées uniformément en  $h$ .

Notons  $E(h) = \sum_{n \geq 0} h^n E_n \hat{\chi}(\lambda_n h)$ .

**Proposition 1.4.4** *La fonction  $u$  ainsi définie vérifie dans  $O$  :*

$$u(x, h) \sim e^{i\varphi(x)/h} \sum_{n \geq 0} h^n a_n(x)$$

quand  $h$  tend vers 0 et

$$(P - E(h))u = e^{-d(x)/h} O(h^\infty).$$

**Preuve :** La première assertion provient immédiatement de la définition de  $u$ .

Montrons maintenant que pour  $N \in \mathbf{N}$  quelconque, il existe  $C_N > 0$  tel que

$$|(P - E(h))u(x, h)| \leq C_N h^N.$$

On écrit à nouveau  $\varphi(x) - \varphi(y) = (x - y)\Phi(x, y)$ . On a donc (4.3) :

$$(P - E(h))u(x, h) = e^{i\varphi(x)/h} \int_{\mathbf{R}^2} e^{-iy\xi/h} (p(x, \xi + \Phi(x, x + y)) - E(h)a(x + y, h)) dy d\xi.$$

La fonction  $y \mapsto (p(x, \xi + \Phi(x, x + y)) - E(h)a(x + y, h))$  est dans  $C_0^\infty(\mathbf{R})$ . On fait trois intégrations par partie en  $y$  pour obtenir une intégrale absolument convergente quand  $\xi$  tend vers  $+\infty$ . Cela permet d'ajouter une fonction troncature  $\tilde{\chi}$  valant 1 en  $\xi = 0$  qui ne modifie l'intégrale que par un  $O(h^\infty)$ . La méthode de la phase stationnaire [8] conduit ensuite à :

$$(P - E(h))u(x, h) = e^{i\varphi/h} \left( \sum_{n=0}^{N-1} \frac{h^n}{i^n n!} \partial_y^n \partial_\xi^n [(p(x, \xi + \Phi(x, x + y)) - E(h)a(x + y, h))]|_{y=0, \xi=0} \right. \\ \left. + h^N \hat{R}_N(x, h) \right)$$

où

$$|\hat{R}_N| \leq C \max_{l+m=3} \|\partial_y^{l+N} \partial_\xi^{m+N} [\tilde{\chi}(\xi)(p(x, \xi + \Phi(x, x + y)) - E(h)a(x + y, h))]\|_{L^1(\mathbf{R}^2)}. \quad (4.10)$$

Cela donne



$$(P - E(h))u(x, h) = e^{i\varphi/h} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} h^n f_n(x) + h^N R_N(x, h) \right],$$

où les fonctions  $f_n$  sont définies maintenant par

$$f_n(x, h) = \sum_{m+k=n} \frac{\hat{\chi}(\lambda_m h)}{i^k k!} \partial_y^k \partial_\xi^k [p(x, \xi + \Phi(x, x+y)) \chi a_m(x+y)]|_{y=0, \xi=0} - \sum_{m+k=n} \hat{\chi}(\lambda_m h) \chi a_m(x) \hat{\chi}(\lambda_k h) E_k.$$

La fonction  $R_N$  est définie par :

$$\begin{aligned} R_N &= \hat{R}_N \\ &+ \sum_{n=0}^{N-1} \frac{h^n}{i^n n!} \partial_y^n \partial_\xi^n \left[ (p(x, \xi + \Phi(x, x+y)) - E(h)) (h^{-N} r_N)(x+y, h) \right]_{|y=0, \xi=0} \\ &+ \sum_{\substack{k+l \geq N \\ k, l \leq N-1}} \frac{h^{k+l-N}}{i^l l!} \partial_y^l \partial_\xi^l \left[ (p(x, \xi + \Phi(x, x+y)) - E(h)) a_k \chi(x+y) \right]_{|y=0, \xi=0}, \end{aligned}$$

soit

$$R_N = \hat{R}_N + R_1 + R_2. \quad (4.11)$$

Si  $x \in O$  et  $h < h_N = \frac{3}{4\lambda_N}$ , alors  $f_n = 0$  si  $0 \leq n \leq N-1$  par définition de  $\varphi$  et  $a_n$ . Donc

$$(P - E(h))u(x, h) = e^{i\varphi/h} h^N R_N(x, h).$$

On peut ensuite majorer  $R_N$  de la manière suivante : (4.10) donne

$$|\hat{R}_{N+1}(x, h)| \leq C_N.$$

D'autre part les fonctions  $\partial_\xi^k p(x, \Phi(x, y))$  sont bornées sur tout compact de  $\mathcal{N}^2$  donc on peut majorer le deuxième terme de (4.11) :

$$|R_1| \leq \sum_{n=0}^{N-1} \frac{h^n}{n!} |\partial_y^n \partial_\xi^n \left[ (p(x, \xi + \Phi(x, x+y)) - E(h)) h^{-N} r_N(x+y) \right]|_{|y=0, \xi=0} \leq C'_N.$$

Cela permet également de majorer le dernier terme :

$$|R_2| \leq C''_N$$

Comme  $\varphi = id$  dans  $O$ , la proposition est démontrée.  $\square$

On obtient ainsi le début du développement de la solution dans un ouvert de  $\mathcal{N}$  :

$$u(x, h) = e^{-d(x)/h} (a_0(x) + O(h)),$$

et celui de la valeur propre :  $E(h) = E_1 h + O(h^2)$ .

Dans la zone où le potentiel reste négatif, on peut donc construire, comme pour l'opérateur de Schrödinger, des solutions WKB pour l'opérateur de Klein-Gordon.

On a de plus [10] :

**Théorème 1.4.5** Soit  $v$  une fonction propre normalisée pour une valeur propre  $E(h)$  telle que  $E(h) = O(h)$ . Pour tout compact  $K$  de  $\mathcal{N}$ , il existe une solution WKB  $u$  telle que

$$\|e^{d/h}(u - v)\|_K = O(h^\infty). \quad (4.12)$$

La fonction propre  $v$  est définie de la manière suivante :

de  $d(E(h), \sigma(P)) \leq \frac{\|(P - E(h))u\|}{\|u\|} = O(h^\infty)$ , on déduit l'existence d'une valeur propre de  $P$  de la forme  $E(h) + O(h^\infty)$ . En dimension un, les valeurs propres de l'oscillateur harmonique sont simples, et on en déduit comme dans [6] que  $P$  a une unique valeur propre simple dans  $[E(h) - Ch, E(h) + Ch]$  pour une constante  $C > 0$ .  $v$  est la fonction propre associée.

**Remarque 1.4.6** En dimension quelconque, on peut également construire des solutions WKB près d'un puits ponctuel de potentiel (pris en  $x = 0$ ). On procède de manière analogue à ce qui a été fait pour l'opérateur de Schrödinger [6] en linéarisant le champ de vecteur  $H_p = \frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \partial/\partial x - V'(x) \partial/\partial \xi$  en  $(0, 0)$ . On obtient  $H_{p_0} = \xi \partial/\partial x - V''(0) x \partial/\partial \xi$  et le théorème des variétés stables [17] nous donne l'existence d'une application  $\varphi$  satisfaisant l'équation éiconale au voisinage de  $x = 0$ . On doit cependant faire une hypothèse d'unicité sur  $E_1$  qui est automatiquement vérifiée en dimension un.

On peut éviter l'hypothèse sur  $E_1$  en utilisant une transformation FBI comme dans [13].

On calcule maintenant un coefficient de normalisation pour les solutions approchées.

La majoration des fonctions propres (2.7) démontrée dans la partie 1.2 donne pour  $v$  :

$$\int_{\mathbf{R}} |v(x, h)|^2 dx = \int_{V_0} |v|^2 + \int_{\mathbf{R} \setminus V_0} |v|^2$$

et  $|v(x, h)| \leq O(1)e^{-(1-\epsilon)d(x)/h}$ , donc

$$\int_{\mathbf{R} \setminus V_0} |v|^2 \leq Ce^{-\eta/h}, \quad \eta = 2d(\mathbf{R} \setminus V_0, 0) > 0$$

Comme la solution WKB  $u$  approxime bien la vraie solution près du puits grâce à (4.12), on a

$$\int_{V_0} |v|^2 \sim \int_{V_0} e^{-2d(x)/h} |a_0(x)|^2 dx \sim \int_{V_0} e^{-2\sqrt{V''(0)}x^2/2h} |a_0(0)|^2 dx$$

d'où

$$1 = \|v\|^2 \sim |a_0(0)|^2 \frac{h^{1/2}}{\sqrt{2\sqrt{V''(0)}}} \sqrt{\pi}$$

Et finalement, on obtient

$$u(x, h) = h^{-1/4} e^{-d(x)/h} (a_0(x) + O(h)), \quad \text{où } a_0(0) = \left( \frac{2\sqrt{V''(0)}}{\pi} \right)^{1/4}.$$

On s'intéresse maintenant à ce qui se passe lorsque le potentiel devient positif et qu'on ne peut plus résoudre l'équation éiconale (4.6). On commence par étudier les solutions asymptotiques au voisinage des points  $x$  tels que  $V(x) = 0$ ,  $V'(x) \neq 0$ . Pour cela, on étudie le cas  $V(x) = x$  au voisinage de 0 (bien que ce potentiel ne présente pas de puits ponctuel).

### 1.4.3 Cas $V(x) = x$

Dans cette sous-partie, on résout globalement l'équation

$$(\sqrt{1 + D^2} + x)u(x, h) = 0,$$

et on étudie l'équivalent de la solution  $u$  au voisinage de 0.

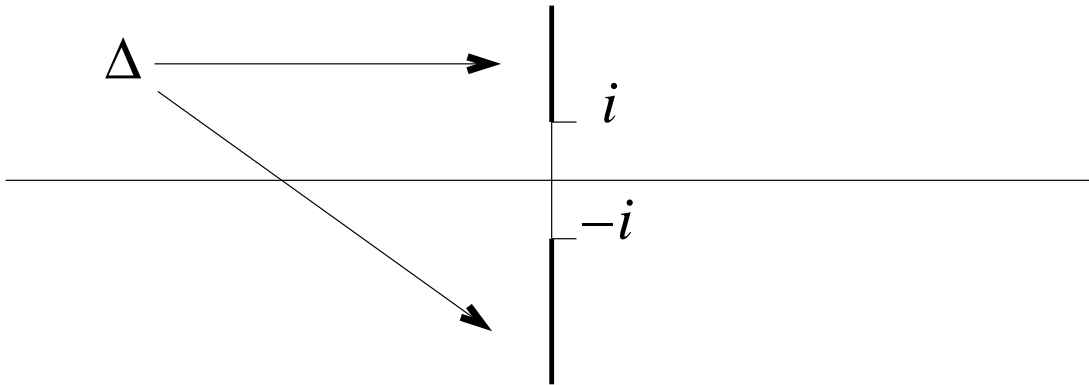
Notons  $\mathcal{F}$  la transformation de Fourier :

$$\mathcal{F}u(\xi, h) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi/h} u(x, h) dx.$$

L'équation  $\mathcal{F}(Pu) = 0$  conduit à  $\sqrt{1 + \xi^2} \mathcal{F}u - \frac{h}{i} \frac{\partial \mathcal{F}u}{\partial \xi} = 0$  que l'on peut résoudre pour trouver :

$$\mathcal{F}u(\xi) = C e^{i\psi(\xi)/h}, \quad \psi(\xi) = \frac{1}{2} \left[ \xi \sqrt{1 + \xi^2} + \log \left( \xi + \sqrt{1 + \xi^2} \right) \right].$$

La fonction  $\psi$  est réelle analytique et se prolonge de façon holomorphe sur  $\mathbb{C}/\Delta$ , où  $\Delta$  est représenté ci dessous



**FIG2: le domaine  $\Delta$**

$\mathcal{F}u \in \mathcal{S}'$  car  $\mathcal{F}u$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , et on peut donc prendre la transformation de Fourier inverse pour trouver une fonction  $u \in \mathcal{S}'$ , solution de  $Pu = 0$ . Ici  $u \notin L^1$  donc on ne peut écrire directement sous forme d'intégrale la transformation de Fourier inverse de  $\mathcal{F}u = e^{i\psi(\xi)/h}$ .

Notons alors

$$v(x, h) = \int_{\Gamma} e^{ix\xi/h} e^{i\psi(\xi)/h} d\xi$$

où on prend  $\Gamma$  dans  $\mathbb{C} \setminus \Delta$ , et lorsque  $|\xi|$  est grand,  $\Gamma = e^{i\theta} \mathbb{R}^+ \cup e^{i(\pi-\theta)} \mathbb{R}^+$  pour  $\epsilon < \theta < \frac{\pi}{2} - \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$  petit :

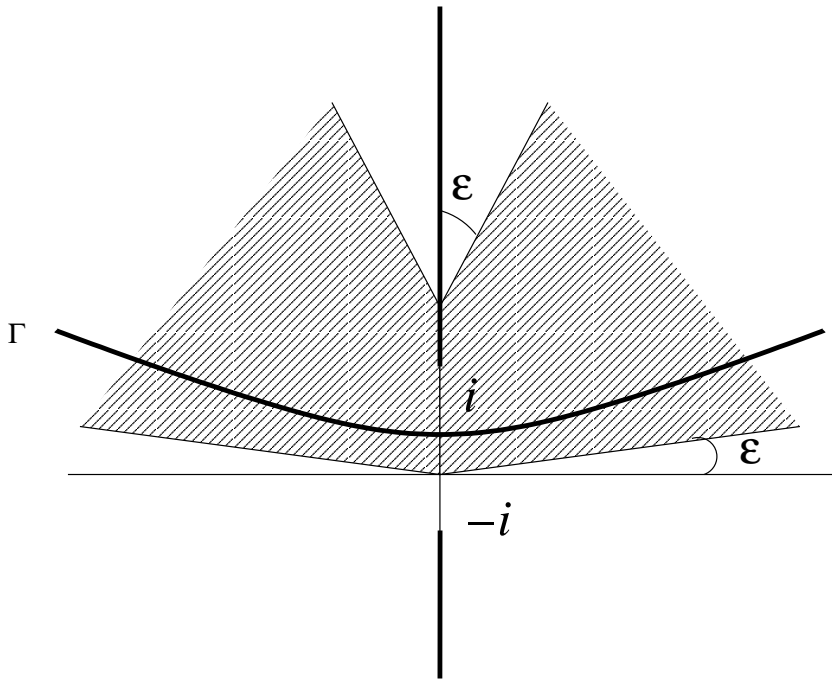


FIG3

En effet, dans la zone hachurée  $H = \{z \in \mathbb{C}, \epsilon < \text{Arg}z < \frac{\pi}{2} - \epsilon, \frac{\pi}{2} + \epsilon < \text{Arg}z < \pi - \epsilon\}$ , l'intégrale converge absolument car on a la minoration  $\Im\psi(\xi) \geq C|\xi|^2$ ,  $C = \epsilon$  dès que  $|\xi|$  est assez grand. Montrons le lemme

**Lemme 1.4.7** On a l'égalité des fonctions  $u = v$  dans  $\mathcal{S}'$ .

**Preuve :** Si  $T \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \langle u, T \rangle &= \int_{\mathbb{R}} u(x) \overline{T}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}u(\xi) \overline{\mathcal{F}T}(\xi) d\xi, \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\xi/h} \overline{T}(x) e^{i\psi(\xi)/h} dx d\xi, \end{aligned}$$

car  $\mathcal{F}u(\xi, h) = e^{i\psi(\xi)/h}$ .

Si  $V_0$  est un voisinage de zéro,

$$\langle u, T \rangle = \int_{(V_0)_\xi \times \mathbb{R}_x} e^{ix\xi/h} \overline{T}(x) e^{i\psi(\xi)/h} dx d\xi - h^2 \int_{(\mathbb{R} \setminus V_0)_\xi \times \mathbb{R}_x} e^{ix\xi/h} \frac{e^{i\psi(\xi)/h}}{\xi^2} \overline{T}''(x) dx d\xi$$

en faisant deux intégrations par parties en  $x$  dans la deuxième intégrale.

On a maintenant deux intégrales absolument convergentes et on peut échanger l'ordre d'intégration.

D'autre part la croissance de  $\Im\psi$  quand  $|\xi| \rightarrow \infty$  sur  $\Gamma$  montre que

$$v = \int_{\Gamma} e^{ix\xi/h} e^{i\psi(\xi)/h} d\xi = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} e^{ix\xi/h} e^{i\psi(\xi)/h} d\xi.$$

où  $\Gamma_R = \Gamma \cap \{z \in \mathbb{C}, -R < \Re z < R\}$ . Or on peut déformer  $\Gamma_R$  en

$$\Gamma'_R = [-R + Ri \tan \theta, -R] \cup [-R, R] \cup [R, R + Ri \tan \theta]$$

en restant dans  $\mathbb{C} \setminus \Delta$ , la zone d'analyticité de  $e^{i(x\xi + \psi(\xi))/h}$ . Cela va nous permettre de montrer que

$$v = \lim_{R \rightarrow +\infty} v_R, \quad v_R = \int_{-R}^R e^{ix\xi/h} e^{i\psi(\xi)/h} d\xi. \quad (4.13)$$

Pour cela, il suffit de montrer que les intégrales sur  $[-R + iR \tan \theta, -R]$  et  $[R, R + iR \tan \theta]$  de  $e^{i(x\xi + \psi(\xi))/h}$  tendent vers 0 quand  $R$  tend vers  $+\infty$ .

Montrons le résultat pour le segment  $[R, R + Ri \tan \theta]$ . On a

$$\int_R^{R(1+i \tan \theta)} e^{i(x\xi + \psi(\xi))/h} d\xi = \int_R^{R(1+i \tan \epsilon)} e^{i(x\xi + \psi(\xi))/h} d\xi + \int_{R(1+i \tan \epsilon)}^{R(1+i \tan \theta)} e^{i(x\xi + \psi(\xi))/h} d\xi.$$

On note

$$I_1 = \int_R^{R(1+i \tan \epsilon)} e^{i(x\xi + \psi(\xi))/h} d\xi$$

et

$$I_2 = \int_{R(1+i \tan \epsilon)}^{R(1+i \tan \theta)} e^{i(x\xi + \psi(\xi))/h} d\xi.$$

$\Im(xR + \psi(R)) = 0$  donc  $\Im(x(R + iRt) + \psi(R + iRt)) = \Im \int_0^t [x + \sqrt{1 + R^2(1 - s^2 + 2is)}] iR ds$ .

De plus pour  $0 \leq t \leq 1/2$  et  $R \geq 4|x|$ ,

$$\Im \int_0^t [x + \sqrt{1 + R^2(1 - s^2 + 2is)}] iR ds \geq R(x + R/2)t \geq (R^2/4)t.$$

Ainsi pour  $R \geq 4|x|$  et  $\tan \epsilon < 1/2$ , on a la majoration de  $I_1$  :

$$I_1 \leq \int_0^{\tan \epsilon} e^{-R^2 t/4} R dt \leq \frac{4}{R}.$$

La majoration de  $I_2$  est plus simple car  $\Im \psi(\xi) \geq C|\xi|^2$  sur le contour de  $I_2$  dès que  $R$  est assez grand. Ainsi pour  $R$  assez grand,

$$I_2 \leq \int_{\tan \epsilon}^{\tan \theta} e^{-CR^2} R dt \leq \tan \theta e^{-CR^2} R.$$

Les deux intégrales  $I_1$  et  $I_2$  tendent bien vers 0 quand  $R$  tend vers  $+\infty$ .

On montre de même que  $\int_{-R}^{-R + iR \tan \theta} e^{i(x\xi + \psi(\xi))/h} d\xi$  tend vers 0 quand  $R$  tend vers  $+\infty$  et on obtient (4.13).

On va montrer grâce à ce résultat que  $u = v$  dans  $\mathcal{S}'$ . On a maintenant :

$$\langle v, T \rangle = \lim_{R \rightarrow \infty} \langle v_R, T \rangle = \lim \int_{]-R, R[ \times \mathbb{R}} e^{ix\xi/h} e^{i\psi(\xi)/h} \overline{T}(x) d\xi dx.$$

En intégrant par partie on trouve :

$$\langle v_R, T \rangle = \int_{V_0 \times \mathbb{R}} e^{ix\xi/h} e^{i\psi(\xi)/h} \overline{T}(x) d\xi dx - h^2 \int_{([-R, R] \setminus V_0) \times \mathbb{R}} e^{ix\xi/h} \overline{T}''(x) \frac{e^{i\psi(\xi)/h}}{\xi^2} d\xi dx.$$

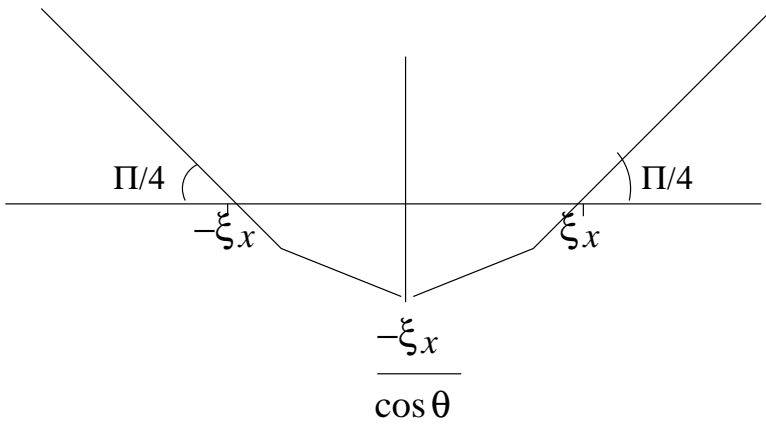
Quand  $R$  tend vers  $+\infty$ , on obtient bien  $\langle u, T \rangle = \langle v, T \rangle$ , et donc dans  $\mathcal{S}'$  on a  $u = v$ .  $\square$

Grâce à l'expression de  $u$  sous forme d'intégrale, on peut en calculer un équivalent lorsque  $h$  tend vers zéro.

#### 1.4.4 Equivalent de $u$

cas  $x < -1$

Si  $x < -1$ , la phase de l'intégrale définissant  $u$   $x\xi + \psi(\xi)$  a deux points critiques réels :  $\pm\xi_x = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ . On déforme  $\Gamma$  pour passer par ces deux points :



**FIG4a**

On a choisi  $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ , où

$$\begin{aligned} \Gamma_+ &= \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \\ \Gamma_+ &= \left[-\frac{\xi_x}{\cos \theta}, \xi_x - \epsilon e^{i\pi/4}\right] \cup \left[\xi_x - \epsilon e^{i\pi/4}, \xi_x + \epsilon e^{i\pi/4}\right] \cup \{\xi_x + t e^{i\pi/4}, t \geq \epsilon\} \end{aligned}$$

et  $\Gamma_-$  est le contour symétrique par rapport à  $\Re z = 0$ . L'angle  $\theta \in ]0, \pi/4[$  et  $\epsilon > 0$  seront choisis dans la suite et dépendront de  $x$ .

#### Etude de $\Gamma_2$

On utilise la méthode de la phase stationnaire pour calculer l'intégrale sur  $\Gamma_2$  :

$$J_2 = \int_{\Gamma_2} e^{i(x\xi + \psi(\xi))/h} d\xi = e^{i(x\xi_x + \psi(\xi_x))/h} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{-\psi''(\xi_x)t^2/2h} e^{t^2 f(t)/h} e^{i\pi/4} dt,$$

où  $|f(t)| \leq C_x |t|$ . Donc

$$J_2 = e^{i(x\xi_x + \psi(\xi_x))/h} \int_{-\epsilon_x/\sqrt{h}}^{\epsilon_x/\sqrt{h}} e^{-u^2/2} e^{u^2 g(\sqrt{h}u)} e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{h}{\psi''(\xi_x)}} du,$$

où  $|g(t)| \leq C'_x |t|$  et  $\epsilon_x = \epsilon \sqrt{\psi''(\xi_x)}$ . Le théorème de convergence dominée donne pour ce terme :

$$J_2 \sim e^{i(x\xi_x + \psi(\xi_x))/h} \sqrt{\pi h} (\psi''(\xi_x))^{-1/2} e^{i\pi/4}$$

quand  $h$  tend vers 0 et  $\epsilon < (\sqrt{\psi''(\xi_x)}(2C'_x))^{-1}$ .

On fixe désormais un tel  $\epsilon$ . On va maintenant montrer que les intégrales sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  sont des  $O(e^{-\delta/h})|e^{i(x\xi_x + \psi(\xi_x))/h}| = O(e^{-\delta/h})$  quand  $h$  tend vers 0, pour  $\delta > 0$  fixé.

### Etude de $\Gamma_3$

**Lemme 1.4.8** Soit  $B(\xi) = \Im[x\xi + \psi(\xi)] = \text{Im}[(x\xi + \psi(\xi)) - (x\xi_x + \psi(\xi_x))]$ . Il existe  $\delta > 0$  tel que  $B(\xi) \geq \delta$  si  $\xi \in \Gamma_3$ .

**Preuve :** Soit  $\xi \in \Gamma_3$ , on l'écrit  $\xi = \xi_x + te^{i\pi/4}$ ,  $t \geq \epsilon$ . Alors

$$\begin{aligned} B(\xi) &= \Im \int_0^t (x + \sqrt{1 + (\xi_x + se^{i\pi/4})^2}) e^{i\pi/4} ds \\ B(\xi) &= \frac{|x|}{\sqrt{2}} \int_0^t \left[ \Im \left( 1 + \frac{is^2 + 2\xi_x se^{i\pi/4}}{1 + \xi_x^2} \right)^{1/2} + \Re \left( \left( 1 + \frac{is^2 + 2\xi_x se^{i\pi/4}}{1 + \xi_x^2} \right)^{1/2} - 1 \right) dt \right] \end{aligned}$$

car  $\sqrt{1 + \xi_x^2} = -x$ . Or  $\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(is^2 + 2\xi_x se^{i\pi/4}) < \frac{\pi}{2}$ .

En particulier cela implique que

$$\Re \left( 1 + \frac{is^2 + 2\xi_x se^{i\pi/4}}{1 + \xi_x^2} \right) \geq 1$$

et

$$0 \leq \text{Arg} \left( 1 + \frac{is^2 + 2\xi_x se^{i\pi/4}}{1 + \xi_x^2} \right) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Donc  $\Im \left( 1 + \frac{is^2 + 2\xi_x se^{i\pi/4}}{1 + \xi_x^2} \right)^{1/2} \geq 0$  si  $s \geq 0$  et cette partie imaginaire est strictement positive si  $s > 0$ . De plus  $\Re \left( 1 + \frac{is^2 + 2\xi_x se^{i\pi/4}}{1 + \xi_x^2} \right)^{1/2} \geq 1$ .

L'expression de  $B$  montre qu'on obtient le lemme avec  $\delta = B(\xi_x + \epsilon e^{i\pi/4})$ .  $\square$

Grâce à ce lemme, on majore l'intégrale sur  $\Gamma_3$ . Soit  $R$  assez grand pour que  $\text{Im} \psi(\xi) \geq C|\xi|^2$  si  $|\xi| \geq R$ . Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_3} e^{i(x\xi + \psi(\xi))/h} d\xi \right| &\leq e^{-\delta/h} \int_{\epsilon}^{+\infty} \left| e^{(\delta + i(x(\xi_x + te^{i\pi/4}) + \psi(\xi_x + te^{i\pi/4}))) / h} \right| dt \\ &\leq e^{-\delta/h} \int_{\epsilon}^R d\xi + e^{-\delta/h} \int_R^{+\infty} e^{-C|\xi|^2/2h} d\xi \end{aligned}$$

On a bien le résultat :

$$\int_{\Gamma_3} e^{i(x\xi + \psi(\xi))/h} d\xi = O(e^{-\delta/h})$$

### Etude de $\Gamma_1$

On étudie maintenant l'intégrale sur  $\Gamma_1$ . On reprend la fonction  $B(\xi) = \Im[x\xi + \psi(\xi)] = \text{Im}[(x\xi + \psi(\xi)) - (x\xi_x + \psi(\xi_x))]$ , cette fois pour  $\xi = \xi_x + te^{i\theta}$ ,  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ,  $-\frac{\xi_x}{\cos\theta} \leq t \leq 0$ . On commence par la zone  $|t| \leq \epsilon$ .

**Lemme 1.4.9** *Il existe  $\epsilon_0 > 0$  dépendant de  $x$  tel que si  $-\epsilon_0 \leq t \leq 0$  et  $0 < \theta \leq \pi/4$ , alors  $B(\xi_x + te^{i\theta}) \geq 0$ .*

**Preuve :** Soit  $0 < \theta \leq \pi/4$ . On fait un développement en  $s = 0$  de  $\sqrt{1 + (\xi_x + se^{i\theta})^2}$  :

$$\sqrt{1 + (\xi_x + se^{i\theta})^2} = |x| \left( 1 + \frac{\xi_x}{1 + \xi_x^2} se^{i\theta} + o(s) \right),$$

où  $|o(s)| \leq C_x |s^2|$ .

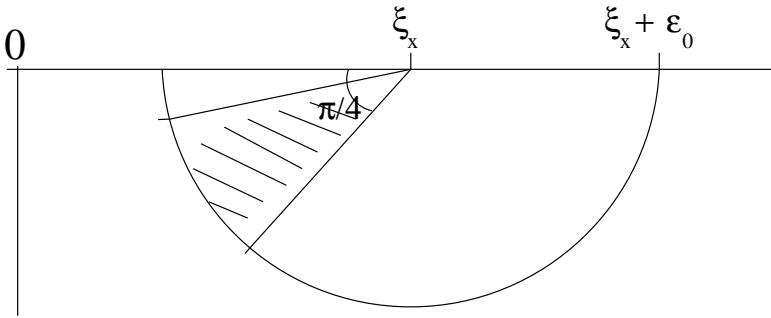
Si  $A(s, \theta) = \Im \left( (x + \sqrt{1 + (\xi_x + se^{i\theta})^2}) e^{i\theta} \right)$ , on a

$$A(s, \theta) = |x| \Im \left[ \frac{\xi_x}{1 + \xi_x^2} se^{i2\theta} + o(s) \right] = |x| \left[ \frac{\xi_x}{1 + \xi_x^2} s \sin 2\theta + o(s) \right] \leq 0$$

dés que  $-\epsilon_0 \leq s \leq 0$ .

Comme  $B(\xi_x + e^{i\theta}t) = - \int_{-t}^0 A(s, \theta) ds$ , on a bien le lemme.  $\square$

Cela donne une zone hachurée où  $B(\xi) \geq 0$ .





On étudie maintenant  $B(\xi)$  dans la zone  $Z_\theta = \left\{ \xi \in \mathbb{C}, \xi = \xi_x + te^{i\theta}, -\frac{\xi_x}{\cos\theta} \leq t \leq -\epsilon_0 \right\}$ ,  $0 < \theta \leq \pi/4$ . On définit  $A(s, \theta)$  comme auparavant.

On a déjà vu que si  $-\epsilon_0 \leq s \leq 0$ , alors  $A(s, \theta) \leq 0$ .

D'autre part, si  $0 < \theta < \theta_1$  où  $\theta_1 = \theta_1(x) = \text{Min}\left(\text{Arctan}(1/\xi_x), \pi/4\right)$ , alors on calcule

$$A\left(-\frac{\xi_x}{\cos\theta}, \theta\right) = |x| \left[ \left( \left( \frac{1 - \xi_x^2 \tan^2 \theta}{1 + \xi_x^2} \right)^{1/2} - 1 \right) \sin \theta \right] < 0$$

Il existe donc  $\epsilon_1 > 0$  dépendant de  $x$  tel que si  $-\frac{\xi_x}{\cos\theta} \leq s \leq \epsilon_1 - \frac{\xi_x}{\cos\theta}$ , alors  $A(s, \theta) < 0$ .

Etudions maintenant la fonction  $A(s, \theta)$  pour  $\epsilon - \frac{\xi_x}{\cos\theta} \leq s \leq -\epsilon$ ,  $\epsilon < \epsilon_0$ ,  $\epsilon < \epsilon_1$ ,  $0 < \theta \leq \theta_1$ .

On a

$$\begin{aligned} A(s, \theta) &= \Im\left((x + \sqrt{1 + (\xi_x + s e^{i\theta})^2})e^{i\theta}\right) \\ &= |x| \left[ \cos\theta \Im\left(1 + \frac{e^{2i\theta}s^2 + 2\xi_x s e^{i\theta}}{1 + \xi_x^2}\right)^{1/2} + \sin\theta \Re\left(\left(1 + \frac{e^{2i\theta}s^2 + 2\xi_x s e^{i\theta}}{1 + \xi_x^2}\right)^{1/2} - 1\right) \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Notons } \alpha(s) = \Re\left(1 + \frac{e^{2i\theta}s^2 + 2\xi_x s e^{i\theta}}{1 + \xi_x^2}\right) = 1 + \frac{s^2 \cos 2\theta + 2\xi_x s \cos \theta}{1 + \xi_x^2};$$

$$\beta(s) = \Im\left(1 + \frac{e^{2i\theta}s^2 + 2\xi_x s e^{i\theta}}{1 + \xi_x^2}\right) = \frac{s^2 \sin 2\theta + 2\xi_x s \sin \theta}{1 + \xi_x^2}$$

et

$$(\alpha + i\beta)^{1/2} = a + ib.$$

L'étude des fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  montre que si  $0 < \theta < \hat{\theta}_1 = \text{Min}\left(\theta_1, \frac{1}{2}\text{Arc cos}\left(\frac{\xi_x^2}{1 + \xi_x^2}\right)\right)$ , alors

$$\begin{cases} \beta_x \tan \theta = -\frac{\xi_x^2}{2(1 + \xi_x^2)} \tan \theta \leq \beta(s) \leq 0 \\ 0 < \alpha_x \leq \frac{1}{1 + \xi_x^2} \left(1 - \xi_x^2 \frac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta}\right) \leq \alpha(s) \leq 1 \end{cases}$$

Or  $\alpha = a^2 - b^2$ ,  $\beta = 2ab$ , et  $a \geq 0$  par définition de la racine carrée. On a donc

$$a \geq \sqrt{\alpha_x}$$

donc

$$|b| \leq \frac{|\beta|}{2\sqrt{\alpha_x}} \leq \frac{|\beta_x| \tan \theta}{2\sqrt{\alpha_x}}$$

donc

$$a^2 \leq 1 + \frac{|\beta_x|^2 \tan^2 \theta}{4\alpha_x}$$

$$\text{et donc soit } a - 1 \leq 0, \text{ soit } 0 \leq a - 1 \leq (a - 1)(a + 1) \leq \frac{|\beta_x|^2 \tan^2 \theta}{4\alpha_x}.$$

Dans tous les cas on a

$$a - 1 \leq \frac{\beta_x^2 \tan^2 \theta}{4\alpha_x}$$

et

$$b \leq \beta(s) \frac{1}{2\sqrt{1 + \beta_x^2/4\alpha_x}} \leq -C_x \epsilon^2 \sin \theta$$

pour une constante  $C_x > 0$  ne dépendant que de  $x$ .

Finalement, on a montré que si  $\epsilon - \frac{\xi_x}{\cos \theta} \leq s \leq -\epsilon$  et  $0 < \theta < \hat{\theta}_1$  alors

$$A(s, \theta) \leq |x| \left[ -C_x \epsilon^2 \sin \theta \cos \theta + (\beta_x^2/2\alpha_x) \tan^2 \theta \sin \theta \right] \leq -C_x'' \sin \theta$$

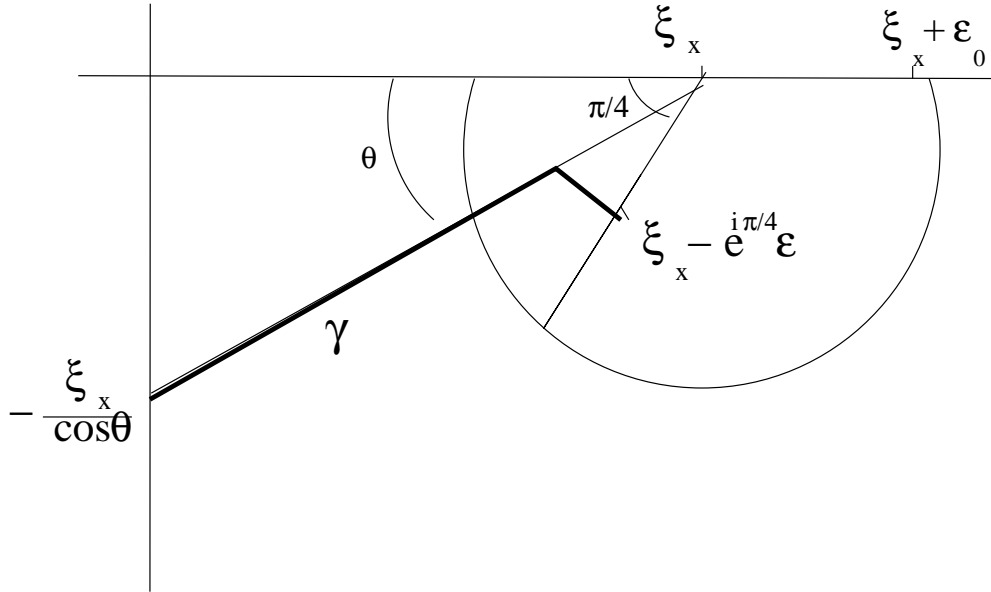
dés que  $0 < \theta < \theta_2$ ,  $\theta_2$  assez petit.

On revient à  $B$  pour obtenir

**Lemme 1.4.10** Soit  $x < -1$  fixé. Il existe  $0 < \theta \leq \pi/4$  et  $\delta > 0$  tel que  $B(\xi) \geq \delta$  dans  $Z_\theta$ .

On a donc démontré :

**Proposition 1.4.11** Soit  $x < -1$ . Il existe  $\epsilon > 0$  et  $\delta > 0$  tels que sur le contour  $\gamma$  de la figure ci-dessous on ait  $B(\xi) \geq \delta > 0$ . En particulier, cela montre que l'intégrale sur  $\Gamma_1$  de  $e^{i(x\xi + \psi(\xi))/h}$  est majorée par  $O(e^{-\delta/h})$ .



On a finalement l'équivalent

$$\int_{\Gamma_+} e^{i(x\xi + \psi(\xi))/h} d\xi \sim e^{i(x\xi_x + \psi(\xi_x))/h} \sqrt{\pi h} (\psi''(\xi_x))^{-1/2} e^{i\pi/4}$$

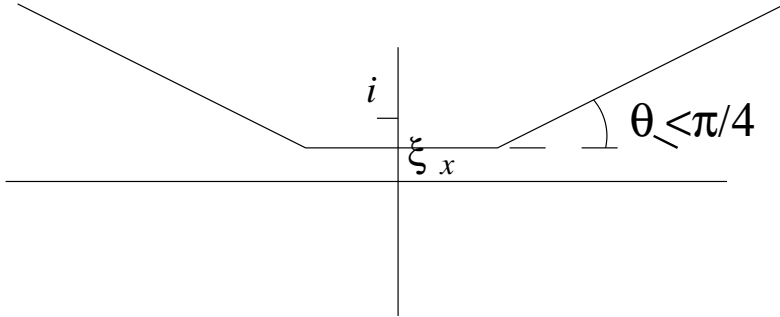
quand  $h$  tend vers 0.

Une étude semblable le long de  $\Gamma_-$  donne :

$$u(x, h) \sim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\pi|x|}{2\sqrt{x^2-1}} \right)^{1/2} h^{1/2} \cos \left[ \frac{1}{2h} \left( x\sqrt{x^2-1} + \log(\sqrt{x^2-1} + |x|) \right) + \frac{\pi}{4} \right].$$

**cas**  $-1 < x < 0$

Si  $-1 < x < 0$ , la phase de l'intégrale définissant  $u$  a deux points critiques imaginaires purs :  $\pm \xi_x = \pm i\sqrt{1-x^2}$ . On déforme  $\Gamma$  en un contour qui passe par le point qui minimise la partie réelle de la phase :



**FIG4b**

On a choisi ce contour car on va montrer que la partie réelle de la phase y est maximale en  $\xi_x$  et sa partie imaginaire reste constante au voisinage de  $\xi_x$ . Ce contour est donné par :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{z \in \mathbb{C}, z = \xi_x - \epsilon + te^{i(\pi-\theta)}, t \geq 0\} \cup [\xi_x - \epsilon, \xi_x + \epsilon] \cup \{z \in \mathbb{C}, z = \xi_x + \epsilon + te^{i\theta}, t \geq 0\} \\ &= \hat{\Gamma}_- \cup [\xi_x - \epsilon, \xi_x + \epsilon] \cup \hat{\Gamma}_+ \end{aligned}$$

pour  $0 < \theta \leq \pi/4$  qu'on va préciser.

On applique encore une fois la méthode de la phase stationnaire et le théorème de convergence dominée pour trouver un équivalent de l'intégrale définissant  $u$  sur  $[\xi_x - \epsilon, \xi_x + \epsilon]$  : pour  $\epsilon < \epsilon_x = (2C_x |\Psi''(\xi_x)|^{1/2})^{-1}$  fixé,

$$\int_{\xi_x - \epsilon}^{\xi_x + \epsilon} e^{i(x\xi + \psi(\xi))/h} d\xi \sim \left( \frac{2\pi|x|}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{1/2} h^{1/2} e^{-d(x)/h}$$

où  $d(x)$  est la distance d'Agmon pour ce potentiel entre  $x$  et le puits  $]-\infty, -1[$  :

$$d(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-t^2} dt.$$

**Remarque 1.4.12** Lorsque  $x$  tend vers 0,  $x < 0$ , on voit que  $\epsilon_x$  tend vers 0 donc le contour choisi ne permet plus de calculer l'équivalent de  $u$  en  $x = 0$ .

On montre maintenant que l'intégrale de  $e^{i(x\xi + \psi(\xi))/h}$  sur  $\hat{\Gamma}_- \cup \hat{\Gamma}_+$  est un  $e^{-d(x)/h}O(e^{-\delta/h})$ .  
On étudie cette intégrale sur  $\hat{\Gamma}_+$  :

**Lemme 1.4.13** Il existe  $\theta_1 > 0$ ,  $\delta > 0$  dépendants de  $x$  tels que si  $0 < \theta < \theta_1$  et  $\xi \in \hat{\Gamma}_+$ , alors  $\Im(x\xi + \psi(\xi)) \geq \Im(x\xi_x + \psi(\xi_x)) + \delta$ .

**Preuve :** On note à nouveau  $B(\xi) = \Im [(x\xi + \psi(\xi)) - (x\xi_x + \psi(\xi_x))]$  et  $A(s, \theta) = \Im [(x + \sqrt{1 + (\xi_x + se^{i\theta})^2})e^{i\theta}]$  de sorte que

$$B(\xi_x + te^{i\theta}) = \int_0^t A(s, \theta) ds.$$

Étudions  $A(s, \theta)$  pour  $s \geq 0$  et  $0 < \theta \leq \pi/4$ . Si

$$\alpha + i\beta = \frac{1 + (\xi_x + se^{i\theta})^2}{1 + \xi_x^2} = 1 + \frac{s^2 e^{2i\theta} + 2\xi_x se^{i\theta}}{1 + \xi_x^2}.$$

On a maintenant

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + \frac{s^2 \cos 2\theta - 2|\xi_x|s \sin \theta}{1 + \xi_x^2} \\ \beta &= \frac{s^2 \sin 2\theta + 2|\xi_x|s \cos \theta}{1 + \xi_x^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Soit  $a + ib = \sqrt{\alpha + i\beta}$ . On a encore  $a \geq 0$ , et

$$\begin{aligned} a^2 &= \alpha + b^2 \quad \text{donc } a \geq \sqrt{\alpha} \\ b &= \frac{\beta}{2a} \quad \text{donc } b \geq 0 \end{aligned}$$

De plus  $A = \sin \theta(a - 1) + \cos \theta b$ .

Si  $a \geq 1$ , comme  $b \geq 0$ , on obtient  $A \geq 0$ .

Si  $a \leq 1$ , alors  $\alpha \leq 1$  et l'expression de  $\alpha$  montre que  $s$  est dans l'intervalle  $[0, 2|\xi_x| \sin \theta / \cos(2\theta)]$ . Posons  $\eta = 2|\xi_x|s \sin \theta / (1 + \xi_x^2)$ . Alors  $\alpha \geq 1 - \eta$ . Dans l'intervalle en  $s$  considéré, on a

$$0 \leq \eta \leq \frac{4|\xi_x|^2 \sin^2 \theta}{(1 + \xi_x^2) \cos(2\theta)}.$$

Il existe donc  $0 < \theta_1 \leq \pi/4$  tel que si  $0 < \theta < \theta_1$ , alors  $0 \leq \eta < 1$  et en particulier  $\sqrt{1 - \eta} \geq 1 - \eta$ .  
On a donc

$$A(s, \theta) \geq -\eta \sin \theta + b \cos \theta.$$

De plus  $b = \beta/2a \geq \beta/2 \geq \frac{|\xi_x|s \cos \theta}{1 + \xi_x^2}$  et finalement

$$A(s, \theta) \geq -\frac{2|\xi_x|s \sin^2 \theta}{1 + \xi_x^2} + \frac{|\xi_x|s \cos^2 \theta}{1 + \xi_x^2}.$$

Ainsi, on peut diminuer  $\theta_1$  pour avoir  $A(s, \theta) \geq 0$  dès que  $0 < \theta \leq \theta_1$ .

En intégrant entre 0 et  $t$  on trouve bien que  $B(\xi) \geq B(\xi_x + \epsilon) = \delta > 0$  sur  $\hat{\Gamma}_+$ . On a obtenu le lemme.  $\square$

Comme précédemment, ce lemme mène à une majoration de l'intégrale sur ce contour :

$$\int_{\hat{\Gamma}_+} e^{i(x\xi + \psi(\xi))/h} d\xi = e^{-d(x)/h} O(e^{-\delta/h}).$$

On obtient des majorations analogues sur le contour  $\hat{\Gamma}_-$  et finalement :

$$u(x, h) \sim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{2\pi|x|}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{1/2} h^{1/2} e^{-d(x)/h}.$$

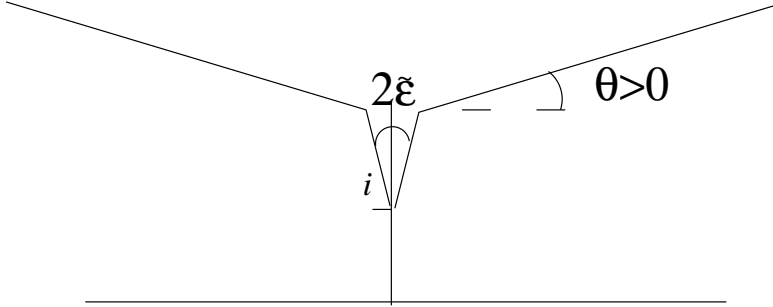
Remarquons que pour  $-1 < x < 0$ , on retrouve les équivalents de la formule (4.8) avec  $E_j = 0$ . (En effet, ici  $u$  est solution de  $(P - \lambda(h))u = 0$  avec  $\lambda(h) \equiv 0$ )

**cas  $x > 0$**

La phase n'a plus de point critique (dans le feuillet considéré). On choisit de déformer  $\Gamma$  en prenant "une limite" des contours précédents dans  $\mathbb{C} \setminus \Delta$  (on est donc "bloqué" par  $i$ ) :  $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ , où pour  $\epsilon > 0$  fixé

$$\Gamma_+ = \lim_{\tilde{\epsilon} \rightarrow 0} [i, i + \epsilon e^{i(\pi/2 - \tilde{\epsilon})}] \cup \{i + \epsilon e^{i(\pi/2 - \tilde{\epsilon})} + te^{i\theta}, t \geq 0\},$$

et  $\Gamma_-$  est le contour symétrique par rapport à  $\Re \xi = 0$ .



**FIG4c**

On commence par étudier l'intégrale de  $e^{i(x\xi + \psi(\xi))/h}$  sur  $[i + \epsilon e^{i(\pi/2 + \tilde{\epsilon})}, i] \cup [i, i + \epsilon e^{i(\pi/2 - \tilde{\epsilon})}]$  quand  $\tilde{\epsilon}$  tend vers 0. On l'écrit :

$$\lim_{\tilde{\epsilon} \rightarrow 0} \int_0^\epsilon e^{i(x(i + te^{i(\pi/2 - \tilde{\epsilon})}) + \psi(i + te^{i(\pi/2 - \tilde{\epsilon})}))/h} e^{i(\pi/2 - \tilde{\epsilon})} dt + \int_0^\epsilon e^{i(x(i + te^{i(\pi/2 + \tilde{\epsilon})}) + \psi(i + te^{i(\pi/2 + \tilde{\epsilon})}))/h} e^{i(\pi/2 + \tilde{\epsilon})} dt.$$

Comme

$\psi(i + te^{i(\pi/2-\bar{\epsilon})}) = \psi(i) - \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}e^{-3i\bar{\epsilon}/2} + o(t^{3/2})$  et  $\psi(i + te^{i(\pi/2+\bar{\epsilon})}) = \psi(i) + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}e^{3i\bar{\epsilon}/2} + o(t^{3/2})$ ,  
on est ramené à calculer :

$$I = e^{-d(x)/h} \int_0^\epsilon e^{-xt/h} \sin\left(\frac{t^{3/2}}{2h}\right) dt,$$

où maintenant  $d(x) = -i\psi(i) + x = d(0) + x$  est la distance d'Agmon au puits.

On utilise la méthode de Laplace :

$$I = e^{-d(x)/h} (h/x) \int_0^{x\epsilon/h} e^{-u} \sin\left(\frac{h^{1/2}u^{3/2}}{2x^{3/2}}\right) du,$$

donc quand  $h$  tend vers 0

$$I \sim e^{-d(x)/h} (h/x) \int_0^{+\infty} e^{-u} \sin\left(\frac{h^{1/2}u^{3/2}}{2x^{3/2}}\right) du.$$

Or  $|\sin x - x| \leq Cx^2$  donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} \left| \sin\left(\frac{h^{1/2}u^{3/2}}{2x^{3/2}}\right) - \frac{h^{1/2}u^{3/2}}{2x^{3/2}} \right| du \leq C \int_0^{+\infty} e^{-u} |hu^3/(4x^3)| du \leq C'h/4x^3.$$

Finalement,

$$I \sim e^{-d(x)/h} \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{h^{1/2}u^{3/2}}{2x^{3/2}} du \sim_{h \rightarrow 0} e^{-d(x)/h} \Gamma(3/2) h^{3/2} x^{-5/2}$$

où  $\Gamma(3/2) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{3/2} du$ .

On montre maintenant que les intégrales de  $e^{i(x\xi+\psi(\xi))/h}$  sur  $\{i(1+\epsilon) + te^{i\theta}, t \geq 0\} \cup \{i(1+\epsilon) + te^{i(\pi-\theta)}, t \geq 0\}$  sont majorées par  $e^{-d(x)/h} O(e^{-\delta/h})$ .

Pour cela, on étudie la fonction  $B(\xi) = \Im(x\xi + \psi(\xi) - (ix + \psi(i)))$  pour  $\xi = i + te^{i\theta}, t \geq 0, 0 < \theta < \pi/2$ .

On définit  $A$  par :

$$A(s, \theta) = \Im \left[ (x + (2ise^{i\theta} + s^2 e^{2i\theta})^{1/2}) e^{i\theta} \right]$$

Posons  $z = 2ise^{i\theta} + s^2 e^{2i\theta}$ . Alors

$$2\theta < \text{Arg}(z) < \theta + \pi/2$$

donc

$$\theta < \text{Arg}(z^{1/2}) < \theta/2 + \pi/4 < \pi/2.$$

Cela montre que  $\Re(z^{1/2})$  et  $\Im(z^{1/2})$  sont positives donc

$$A(x, \theta) \geq x \sin \theta > 0. \tag{4.14}$$

Remarquons que si  $x = 0$ , on a pour  $s > 0$   $z \neq 0$  et donc

$$A(x, \theta) \geq \cos \theta \Im z^{1/2} + \sin \theta \Re z^{1/2} > 0. \tag{4.15}$$

Si  $\xi = i + te^{i\theta} \notin \{z, |z - i| \leq \epsilon\}$ , (4.14) donne  $B(i + te^{i\theta}) \geq \delta$ ,  $\delta = \epsilon x \sin \theta$ .

En particulier, cela permet de majorer l'intégrale de  $e^{i(x\xi + \psi(\xi))/h}$  le long de  $\{z \in \mathbb{C}, z = i(1 + \epsilon) + te^{i\theta}, t \geq 0\}$  par  $e^{i(xi + \psi(i))/h} O(e^{-\delta/h}) = e^{-d(x)/h} O(e^{-\delta/h})$ .

On majore de la même manière l'intégrale le long de  $\{z \in \mathbb{C}, z = i(1 + \epsilon) + te^{i(\pi - \theta)}, t \geq 0\}$  et on obtient :

$$u(x, h) \sim e^{-d(x)/h} \Gamma(3/2) h^{3/2} x^{-5/2}.$$

**Remarque 1.4.14** Lorsque  $x = 0$ , (4.15) montre que  $B(\xi) > 0$  sur  $\{\bar{z} \in \mathbb{C}, z = i(1 + \epsilon) + te^{i\theta}, t \geq 0\}$  et  $\{z \in \mathbb{C}, z = i(1 + \epsilon) + te^{i(\pi - \theta)}, t \geq 0\}$ . On a donc :

$$u(0, h) \sim e^{-d(0)/h} \int_0^\epsilon \sin\left(\frac{t^{3/2}}{2h}\right) dt,$$

soit

$$u(0, h) \sim e^{-d(0)/h} (2h)^{2/3} (2/3) \int_0^{\epsilon^{3/2}/2h} \sin u \frac{du}{u^{1/3}}.$$

Si  $\hat{\epsilon} = \epsilon^{3/2}/2$ , on calcule

$$\begin{aligned} u &\sim (2/3)(2h)^{2/3} e^{d(0)/h} \int_0^{\hat{\epsilon}/h} \sin u \frac{du}{u^{1/3}} \\ &\sim (2/3)(2h)^{2/3} e^{d(0)/h} \left[ \int_0^{\pi/2} \sin u \frac{du}{u^{1/3}} + \int_{\pi/2}^{\hat{\epsilon}/h} \sin u \frac{du}{u^{1/3}} \right] \\ &\sim (2/3)(2h)^{2/3} e^{d(0)/h} \left[ \int_0^{\pi/2} \sin u \frac{du}{u^{1/3}} - (1/3) \int_{\pi/2}^{\hat{\epsilon}/h} \cos u \frac{du}{u^{1+1/3}} \right] \end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'équivalent :

$$u(0, h) \sim Ch^{2/3} e^{d(0)/h}, C = (2/3)(2)^{2/3} \left[ \int_0^{\pi/2} \sin u \frac{du}{u^{1/3}} - (1/3) \int_{\pi/2}^{+\infty} \cos u \frac{du}{u^{1+1/3}} \right].$$

Pour le potentiel  $V(x) = x$ , on sait donc trouver une solution approchée de  $Pu = 0$  sous forme d'intégrale. Remarquons que cette solution a un équivalent discontinu en  $x = -1$  et  $x = 0$ .

On revient maintenant au cas d'un puits ponctuel de potentiel, et on va chercher des solutions sous forme d'intégrale au voisinage des points tels que  $V(x) = E = 0$ .

### 1.4.5 Cas d'un puits de potentiel, pour un potentiel devenant positif

Dans la section 1.4.2 on a construit des solutions WKB dans la zone  $\mathcal{N} \subset \{x \in \mathbb{R}, V(x) < 0\}$ . Dans cette section on prolonge ces solutions dans la zone  $\{x \in \mathbb{R}, V(x) > 0\}$  grâce à une écriture sous forme d'intégrale, comme suggéré par l'exemple précédent.

Pour cela, on remplace l'hypothèse **(H3)** par

**(H3'')**  $V$  et toutes ses dérivées sont à décroissance polynômiale et il existe  $N_0$  et  $C > 0$  tels que si  $n \geq N_0$ ,  $|V^{(n)}| \leq C(1 + |x|^{N_0})$  sur  $\mathbb{R}$ .

De plus, on fait l'hypothèse supplémentaire

**(H4)** Dans  $\mathcal{N} = ]\alpha_-, \alpha_+[$ ,  $V'(x) \neq 0$  si  $x \neq 0$ .

On cherche les solutions sous forme de série formelle :

$$u(x, h) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi/h} e^{i\psi(\xi)/h} b(\xi, h) d\xi, \quad b(\xi, h) \sim \sum_{n \geq 0} h^n b_n(\xi). \quad (4.16)$$

**Remarque 1.4.15** *Autrement dit, on cherche  $\mathcal{F}u$  sous la forme (4.2). Cette méthode a déjà été utilisée pour prolonger des solutions WKB pour l'opérateur de Schrödinger au voisinage des points tournants, c'est à dire tels que  $V(x) = 0$ .*

On a :

$$\mathcal{F}(Pu)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix(\eta-\xi)/h} p(x, \xi) e^{i\psi(\eta)/h} b(\eta, h) d\eta dx,$$

soit

$$\mathcal{F}(Pu)(\xi) = e^{i\psi(\xi)/h} \int_{\mathbb{R} \times (\mathbb{R} + \Psi(\xi, \xi + \eta))} e^{ix\eta/h} p(x - \Psi(\xi, \xi + \eta), \xi) b(\xi + \eta, h) dx d\eta,$$

où  $\psi(\xi) - \psi(\eta) = (\xi - \eta)\Psi(\xi, \eta)$ .

On obtient formellement l'équivalent de (4.4) :

$$\mathcal{F}(Pu)(\xi, h) \sim e^{i\psi(\xi)/h} \sum_{n \geq 0} h^n g_n(\xi), \quad g_n(\xi) = \sum_{k+m=n} \frac{(ih)^k}{k!} \partial_x^k \partial_\eta^m [p(x - \Psi(\xi, \xi + \eta), \xi) b_m(\xi + \eta)]_{|x=0, \eta=0}. \quad (4.17)$$

On cherche donc des fonctions  $\psi$  et  $b_n$  qui annulent les fonctions  $g_n$ . En particulier  $g_0 = 0$  donne l'équation éiconale en  $\psi$  :

$$\sqrt{1 + \xi^2} + V(-\psi'(\xi)) = 0. \quad (4.18)$$

On voit ici l'intérêt de passer par la transformation de Fourier. Alors qu'on ne pouvait pas résoudre (4.6) pour  $V(x) > 0$ , ici on peut espérer trouver des fonctions  $\psi$  définies sur  $\mathbb{R}$  satisfaisant cette équation, pour certains potentiels.

### L'équation éiconale

On veut prolonger la solution de la section 1.4.2. Dans la zone  $]\alpha_-, \alpha_+[$ , on doit donc retrouver les fonctions  $\varphi$  et  $a_n$  définies par (4.7) et (4.8). En particulier,  $\Lambda = \{(x, \xi), \xi = \varphi'(x), \alpha_- < x < \alpha_+\} \subset \{(x, \xi), x = -\psi'(\xi)\}$ .

On fait ici une hypothèse d'analyticité sur  $V$  :

**(H5)**  $V$  admet une extension holomorphe dans un voisinage de  $\mathcal{N}$  dans  $\mathbb{C}$  noté  $\mathcal{N}'$ .

On a alors

$$-\psi'(\varphi'(x)) = x, \quad x \in W = \{x \in \mathcal{N}', \Re V(x) < 0\}. \quad (4.19)$$

Or



$\varphi'(x) = ix\sqrt{\frac{1-V(x)^2}{x^2}}$  est bijectif dans  $W$ .

Donc si  $\xi$  est dans un voisinage de  $\varphi'(W)$ , noté  $W'$ , alors

$$\psi'(\xi) = -\varphi'^{-1}(\xi).$$

Remarquons que  $W'$  est un voisinage de  $[-i, i]$  dans  $\mathbb{C}/\Delta$ .

On obtient la proposition :

**Proposition 1.4.16** *i) Sur un voisinage  $V_0$  de zéro,  $\psi'(\xi) = \frac{i\xi}{\sqrt{V''(0)}} + o(\xi)$ . Ainsi,  $|e^{i\psi(\xi)/h}|$  a un*

*maximum en zéro sur  $V_0 \cap \mathbb{R}$ .*

*ii) La fonction  $\xi \rightarrow x\xi + \psi(\xi)$  a  $\varphi'(x)$  pour point critique et  $\varphi(x)$  pour valeur critique si  $x \in [\alpha_-, \alpha_+]$ .*

*iii) La fonction  $\psi'$  ainsi définie vérifie (4.18).*

On remarque que  $\psi$  est la transformée de Legendre de  $\varphi$ .

On fixe ici quelques notations : soit  $H \subset \mathbb{C} \setminus \Delta$  le domaine connexe maximal sur lequel on peut prolonger  $\psi$  analytiquement, tel que (4.18) soit vérifié.

En particulier  $W' \subset H$  et cela impose que  $V$  est holomorphe dans  $\{-\psi'(\xi), \xi \in H\}$ .

Soit  $A = H \cap \mathbb{R}$  et soit  $R_0 > 0$  maximal tel que  $] -R_0, R_0[ \subset A$ .

On résout maintenant les équations de transport, c'est à dire  $g_j(\xi) = 0, j \geq 1$ , où les fonctions  $g_j$  sont définies dans (4.17).

## Les équations de transport

On doit cette fois étudier dans  $H$  l'opérateur

$$\mathcal{L} = \frac{1}{i} \left[ \frac{1}{2} \psi''(\xi) V''(-\psi'(\xi)) - V'(-\psi'(\xi)) \frac{\partial}{\partial \xi} \right].$$

$\mathcal{L}$  est singulier en  $\xi = 0$ . On suppose que

**(H4')**  $\mathcal{L}$  est singulier seulement en  $\xi = 0 : V'(-\psi'(\xi)) \neq 0$  si  $\xi \neq 0$ .

Cela impose l'hypothèse **(H4)**. On construit alors comme dans la partie 1.4.2 à la fois une suite de fonctions  $b_n$  et une suite de réels  $E_n$  vérifiant

$$(\mathcal{L} - E_1)b_0 = 0,$$

$$(\mathcal{L} - E_1)b_n = d_n + E_{n+1}b_0,$$

où  $d_n = d_n(b_l, E_m, l \leq n-1, m \leq n)$ . On obtient des fonctions définies holomorphes sur le même domaine que  $\psi : H$ .

On trouve par exemple

$$E_1 = \frac{\sqrt{V''(0)}}{2}$$

et

$$b_0(\xi) = C \frac{e^{-iE_1 l(\xi)}}{|V'(-\psi'(\xi))|^{1/2}}, \quad l = \int \frac{1}{V'(-\psi'(\xi))} d\xi.$$

L'intégrale définissant  $l$  diverge en 0 ce qui est compensé par  $|V'(-\psi'(\xi))|^{-1/2}$  quand  $\xi$  tend vers 0 :

$$b_0(0) = \frac{C}{|V''(0)|^{1/4}}.$$

En résolvant successivement les équations de transport, on obtient un développement asymptotique de la forme  $e^{i\psi/h} \sum_{n \geq 0} h^n b_n(\xi)$ .

Comme dans la section 1.4.2, on passe ensuite de ce développement asymptotique à une fonction. Fixons  $c > 0$ . Quitte à restreindre  $H$ , on suppose que

**(H6)** il existe  $\hat{\delta}_0 > 0$  tel que

$$\forall x \in [\alpha_- - c, \alpha_+ + c], \exists R_1(x) < R_0, \forall \xi \in H, |\xi| \geq R_1(x), \Im(x\xi + \psi(\xi)) \geq d(x) + \hat{\delta}_0.$$

Soit  $R_1 = \max_{[\alpha_- - c, \alpha_+ + c]} R_1(x) < R_0$ .

On considère alors  $\chi \in C_0^\infty([-R_0, R_0])$ ,  $\chi \equiv 1$  dans  $[-R_2, R_2]$  pour  $R_1 < R_2 < R_0$ . Soit  $(\lambda_j)_{j \geq 0}$  une suite tendant vers  $+\infty$  telle que

$$\forall \xi \in H, |\xi| \leq R_0, \forall k \leq j, |h^j \hat{\chi}(\lambda_j h) \partial_\xi^k (\chi b_j)(\xi)| \leq 2^{-j} h^{j-1},$$

on définit enfin

$$u(x, h) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi/h} e^{i\psi(\xi)/h} b(\xi, h) d\xi, \quad b(\xi, h) = \sum_{n \geq 0} h^n b_n(\xi) \chi(\xi) \hat{\chi}(\lambda_n h). \quad (4.20)$$

On calcule maintenant un équivalent de  $u(x, h)$  quand  $h$  tend vers 0.

### L'équivalent de $u$

Remarquons qu'on peut déformer dans  $H$  le contour d'intégration de  $u$  dans  $[-R_2, R_2]$ .

Si  $\alpha_- < x < \alpha_+$ , on est dans la zone  $V < 0$ . La phase  $f_x(\xi) = x\xi + \psi(\xi)$  de l'intégrale définissant  $u$  a un unique point critique  $\xi_x = \varphi'(x)$ . Au voisinage de  $\xi_x$ , on choisit le contour d'intégration  $[\xi_x - \epsilon, \xi_x + \epsilon]$  comme dans le cas  $V(x) = x$ , (FIG4b). On applique la méthode de la phase stationnaire exactement comme exposé plus haut dans le cas  $V(x) = x$  (partie 1.4.4). On trouve  $\epsilon_x > 0$  tel que si  $\epsilon < \epsilon_x$ ,

$$\int_{\xi_x - \epsilon}^{\xi_x + \epsilon} e^{ix\xi/h} e^{i\psi(\xi)/h} \sum_{n \geq 0} h^n b_n(\xi) \hat{\chi}(\lambda_n h) d\xi \sim e^{-d(x)/h} h^{1/2} \sum_{n \geq 0} h^n a_n(x), \quad h \rightarrow 0,$$

où

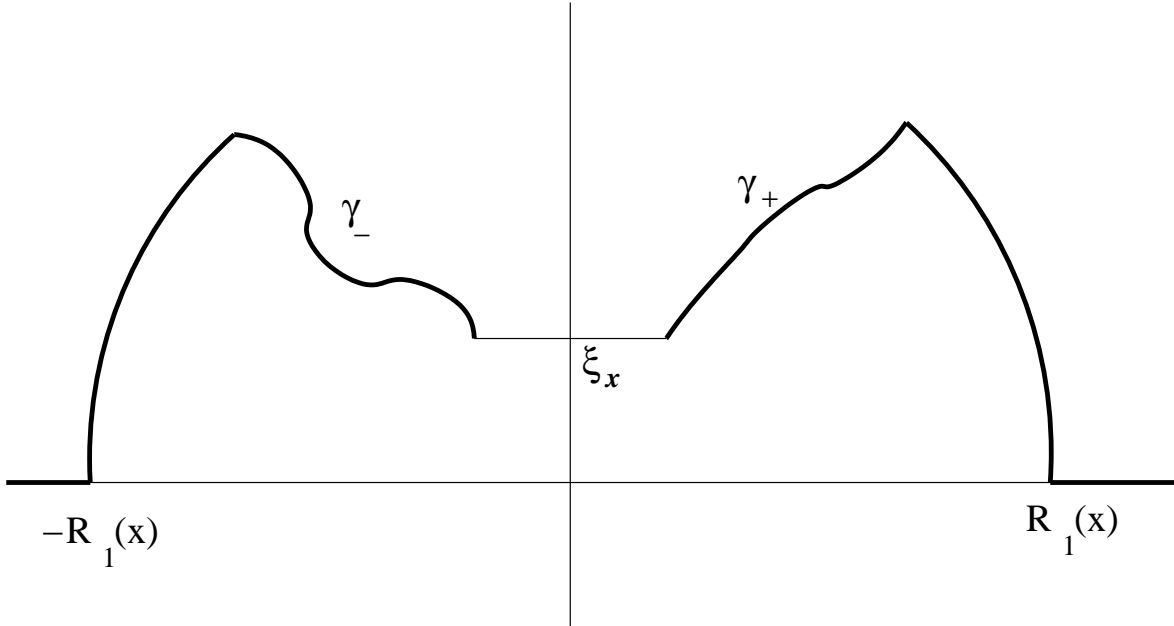
$$a_n(x) = b_n(\xi_x) |\psi''(\xi_x)|^{-1/2} \quad (4.21)$$

On fait maintenant l'hypothèse sur  $V$  :

**(H7)** Il existe  $\hat{\delta} > 0$ , il existe  $\epsilon < \epsilon_x$ , il existe deux contours  $\gamma_{\pm}$  dans  $H$  entre  $\xi_x + \epsilon$  et  $\{\xi \in H, \Re \xi > 0, |\xi| \geq R_1(x)\}$ , et entre  $\xi_x - \epsilon$  et  $\{\xi \in H, \Re \xi < 0, |\xi| \geq R_1(x)\}$  sur lesquels

$$\Im(x\xi + \psi(\xi)) \geq d(x) + \hat{\delta}.$$

On calcule l'équivalent de  $u$  sur le contour suivant, supposé inclus dans  $H$  :



On obtient :

$$u(x, h) \sim e^{-d(x)/h} h^{1/2} \sum_{n \geq 0} h^n a_n(x), h \rightarrow 0.$$

On retrouve les équivalents (4.8) de la section 1.4.2 quand  $V < 0$ .

**Remarque 1.4.17** Définissons les lignes anti-Stokes comme  $\{\xi \in H, \Im(x\xi + \psi(\xi)) = cste\}$ . **(H7)** est satisfaite si on suppose :

**(H7)** il existe  $\epsilon < \epsilon_x$  et il existe deux contours dans  $H$  entre  $\xi_x + \epsilon$  et  $\{\xi \in H, \Re \xi > 0, |\xi| \geq R_1(x)\}$ , et entre  $\xi_x - \epsilon$  et  $\{\xi \in H, \Re \xi < 0, |\xi| \geq R_1(x)\}$  qui rencontrent les lignes anti-Stokes transversalement et dans le sens croissant.

Si  $\alpha_+ < x < \alpha_+ + c$ , on choisit le contour passant par  $i$  donné par (FIG4c), comme dans le cas  $V(x) = x$  (Cf section 1.4.4). La méthode de Laplace donne pour l'intégrale au voisinage de  $i$  l'équivalent :

$$\int_{i(1+\epsilon)_-}^i e^{i(x\xi+\psi(\xi))/h} d\xi + \int_i^{i(1+\epsilon)_+} e^{i(x\xi+\psi(\xi))/h} d\xi \sim e^{-d(x)/h} h^{3/2} \left( \frac{C}{(x-\alpha_+)^{5/2}} + O(h) \right),$$

où  $i(1+\epsilon)_\pm = \lim_{\tilde{\epsilon} \rightarrow 0} i + i e^{\mp i\tilde{\epsilon}}$ .

On doit ensuite supposer :

**(H7')** Il existe  $\hat{\delta} > 0$ , il existe  $\epsilon > 0$ , il existe deux contours dans  $H$  entre  $i(1+\epsilon)_+$  et  $\{\xi \in H, \Re\xi > 0, |\xi| \geq R_1(x)\}$ , et entre  $i(1+\epsilon)_+$  et  $\{\xi \in H, \Re\xi < 0, |\xi| \geq R_1(x)\}$  sur lesquels

$$\Im(x\xi + \psi(\xi)) \geq \Im(xi + \psi(i)) + \hat{\delta} = d(x) + \hat{\delta}.$$

On a une remarque analogue à 1.4.17. On obtient l'équivalent de la fonction  $u$  :

$$u(x, h) \sim e^{-d(x)/h} h^{3/2} \left( \frac{C}{(x-\alpha_+)^{5/2}} + O(h) \right).$$

De même si  $\alpha_- - c < x < \alpha_-$  on obtient :

$$u(x, h) \sim_{h \rightarrow 0} e^{-d(x)/h} h^{3/2} \left( \frac{C'}{(\alpha_- - x)^{5/2}} + O(h) \right).$$

On termine cette sous partie par quelques remarques.

**Remarque 1.4.18** On voit qu'avec les hypothèses de décroissance sur  $e^{i\psi(\xi)/h}$ , seuls les points au voisinage de  $-i, i$  interviennent pour calculer l'équivalent de  $u$ . (4.19) donne donc toutes les valeurs de  $\psi$  nécessaires pour calculer cet équivalent.

**Remarque 1.4.19** Lorsque le potentiel devient positif, on trouve des équivalents singuliers aux points  $\{x, V(x) = 0\}$ . Par exemple pour  $x > \alpha_+$ ,  $a_0 \equiv 0$ , et  $a_1(x) = \frac{C}{(x-\alpha_+)^{5/2}}$ . On a bien une cohérence avec la zone  $\mathcal{N}$  : dans cette zone,  $a_0$  tend vers zéro quand  $x$  tend vers  $\alpha_+$ . De plus  $a_1$  doit vérifier

$$(\mathcal{L} - E_1)a_1 = c'_1 - E_2a_0$$

avec

$$c'_1(x) = \frac{a_0}{2} \left[ -\varphi^{(3)} \frac{q^{(3)}(\varphi')}{6} - (\varphi'')^2 \frac{q^{(4)}(\varphi')}{4} \right] + \frac{a'_0}{2} \left[ E_1 - \varphi'' \frac{q^{(3)}(\varphi')}{2} \right].$$

On rappelle que  $q(\xi) = \sqrt{1 + \xi^2}$  et  $\varphi'(x)$  tend vers  $i$  quand  $x$  tend vers  $\alpha_+$ . On voit donc que le second membre de l'équation définissant  $a_1$  est singulier en  $x = \alpha_+$ . Il est donc normal de trouver cette singularité de  $a_1$ .

**Remarque 1.4.20** Les déformations de contours dans  $\mathbb{C}$  de cette partie montrent qu'il serait peut-être intéressant d'utiliser la notion de bons contours définie dans [24] ainsi que les résultats des sections 1 à 4 de ce livre (en particulier ceux concernant la tranformation de Fourier dans le domaine complexe).

## La solution approchée de $(P-E)u=0$

Nous montrons à présent que  $u$  est une solution asymptotique de  $(P-E)u = 0$  dans  $[\alpha_- - c, \alpha_+ + c]$  :

**Proposition 1.4.21** *Si  $E(h) = \sum_{n \geq 0} h^n E_n \hat{\chi}(\lambda_n h)$ , la fonction  $u$  vérifie  $(P - E(h))u = e^{-d/h} O(h^\infty)$  dans  $[\alpha_- - c, \alpha_+ + c]$ .*

**Preuve :** On calcule pour  $\xi \in ]-R_0, R_0[$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}((P - E)u)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix(\xi-\eta)/h} (p(x, \xi) - E(h)) e^{i\psi(\eta)/h} b(\eta, h) d\eta dx \\ &= e^{i\psi(\xi)/h} \int_{\mathbb{R}_\eta \times (\mathbb{R} + \Psi(\xi, \xi + \eta))_x} e^{ix\eta/h} (p(x - \Psi(\xi, \xi + \eta), \xi) - E) b(\xi + \eta, h) d\eta dx. \end{aligned}$$

Or l'hypothèse **(H3'')** montre grâce à des intégrations par parties en  $\eta$  qu'en dehors d'un voisinage de  $x = 0$  et  $\eta = 0$ , cette intégrale est un  $O(h^\infty)$ . Au voisinage de  $x = 0$  et  $\eta = 0$ , on peut déformer le contour d'intégration en  $x$  (car  $V$  est holomorphe dans un domaine convenable) pour trouver :

$$\mathcal{F}((P - E)u) = e^{i\psi(\xi)/h} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\eta/h} (p(x - \Psi(\xi, \xi + \eta), \xi) - E(h)) \nu(\eta) \nu(x) b(\xi + \eta, h) d\eta dx,$$

pour une fonction  $\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  valant 1 dans un voisinage de 0. On applique la méthode de la phase stationnaire :

$$\mathcal{F}((P - E)u)(\xi, h) = e^{i\psi(\xi)/h} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(ih)^k}{k!} \partial_x^k \partial_\eta^k \left( (p(x - \Psi(\xi, \xi + \eta), \xi) - E) b(\xi + \eta, h) \right) \Big|_{x=0, \eta=0} + h^N \hat{R}_N \right],$$

où

$$|\hat{R}_N(\xi, h)| \leq C \sum_{l+m \leq 3} \|\partial_x^{N+l} \partial_\eta^{N+m} (\nu(x) \nu(\eta) V(x - \Psi(\xi, \xi + \eta)) b(\xi + \eta, h))\|_{L^1}.$$

Ainsi

$$|\hat{R}_N| \leq C_N$$

Revenons à  $\mathcal{F}((P - E)u)(\xi, h)$ . On l'écrit :

$$\mathcal{F}((P - E)u)(\xi, h) = e^{i\psi(\xi)/h} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} h^n g_n + h^N R_N \right],$$

où

$$g_n(\xi) = \sum_{m+k=n} \frac{\hat{\chi}(\lambda_m h) i^k}{k!} \partial_x^k \partial_\eta^k \left( p(x + \Psi(\xi, \xi + \eta), \xi) \chi b_m(\xi + \eta) \right) \Big|_{x=0, \eta=0} - \sum_{m+k=n} \hat{\chi}(\lambda_m h) b_m(\xi + \eta) \hat{\chi}(\lambda_k h) E_k,$$

et,

$$\begin{aligned}
R_N &= \hat{R}_N + \sum_{m+k \geq N, k \leq N-1} h^{m+k-N} \frac{\hat{\chi}(\lambda_m h)}{i^k k!} \partial_x^k \partial_\eta^k \left( p(x + \Psi(\xi, \xi + \eta), \xi) \chi b_m(\xi + \eta) \right) \Big|_{x=0, \eta=0} \\
&+ \sum_{m+k \geq N+1} E_k b_m \hat{\chi}(\lambda_m h) \hat{\chi}(\lambda_k h),
\end{aligned}$$

Cette expression montre que  $R_N(\xi, h)$  est une fonction bornée (mais pas à support compact).

Si  $h < h_N$  et  $\xi \in [-R_2, R_2]$ , alors  $g_n = 0$ ,  $0 \leq n \leq N-1$  par construction et donc

$$\mathcal{F}((P-E)u)(\xi, h) = e^{i\psi(\xi)/h} h^N R_N(\xi, h).$$

Soit  $\tilde{\chi} \in C_0^\infty([-R_2, R_2])$ ,  $\tilde{\chi} \equiv 1$  dans  $[-R_3, R_3]$ ,  $R_1 < R_3 < R_2$ . On a montré que

$$\tilde{\chi}(\xi) \mathcal{F}((P-E)u)(\xi, h) = e^{i\psi(\xi)/h} h^N \tilde{\chi}(\xi) R_N(\xi, h).$$

Si  $x \in [\alpha_- - c, \alpha_+ + c]$ , en faisant les mêmes déformations de contour que pour calculer l'équivalent de  $u$ , on obtient :

$$\int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi/h} \tilde{\chi}(\xi) \mathcal{F}((P-E)u)(\xi, h) d\xi = O(h^N) e^{-d(x)/h}.$$

Il suffit maintenant d'étudier

$$I = \int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi/h} (1 - \tilde{\chi}(\xi)) \mathcal{F}((P-E)u)(\xi, h) d\xi.$$

Plus précisément, on aura la proposition si on démontre le lemme suivant :

**Lemme 1.4.22** *Si  $x \in [\alpha_- - c, \alpha_+ + c]$ , alors*

$$J = \int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi/h} (1 - \tilde{\chi}(\xi)) p(x, \xi) \mathcal{F}(u)(\xi, h) d\xi = O(e^{-(d(x)+\delta)/h}),$$

et

$$I - J = e^{-d(x)/h} O(h^\infty).$$

**Preuve :** Si  $x \in [\alpha_- - c, \alpha_+ + c]$ , alors  $\Im(x\xi + \psi(\xi)) \geq d(x) + \delta$  sur le support de  $1 - \tilde{\chi}$ . On a donc bien la majoration de  $J$ .

Il reste à étudier  $I - J$  :

$$J - I = \int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi/h} (1 - \tilde{\chi}(\xi)) [p(x, \xi) \mathcal{F}(u)(\xi, h) - \mathcal{F}(Pu)(\xi, h)] d\xi.$$

Par construction,  $\mathcal{F}(u) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$  donc  $u \in \mathcal{S}$ .  $V$  est à décroissance polynomiale donc  $Pu \in \mathcal{S}$  et  $\mathcal{F}(Pu) \in \mathcal{S}$ . L'intégrale ci-dessus est donc absolument convergente. Soit  $f$  une fonction troncature standard et  $f_R(\xi) = f(\xi/R)$ . On a  $f_R^{(n)} = R^{-n} f^{(n)}(\xi/R)$  donc les dérivées de ces fonctions sont bornées indépendamment de  $R > 1$ . On a de plus

$$J - I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi/h} (1 - \tilde{\chi}(\xi)) f_R(\xi) [p(x, \xi) \mathcal{F}(u)(\xi, h) - \mathcal{F}(Pu)(\xi, h)] d\xi,$$

soit

$$J - I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^3} e^{ix\xi/h} (1 - \tilde{\chi}(\xi)) f_R(\xi) e^{iy(\eta-\xi)/h} e^{i\psi(\eta)/h} \chi(\eta) b(\eta, h) [V(x) - V(y)] d\eta dy d\xi.$$

Des intégrations par parties en  $\eta$  montrent grâce à **(H3)** que

$$J - I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^3} e^{ix\xi/h} (1 - \tilde{\chi}(\xi)) f_R(\xi) f_R(y) e^{iy(\eta-\xi)/h} e^{i\psi(\eta)/h} \chi(\eta) b(\eta, h) [V(x) - V(y)] d\eta dy d\xi.$$

Toutes les fonctions sont à support compact donc on peut changer l'ordre d'intégration

$$J - I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^3} e^{ix\eta/h} e^{i\psi(\eta)/h} \chi(\eta) b(\eta, h) e^{-iy\xi/h} (1 - \tilde{\chi}(\xi + \eta)) f_R(\xi + \eta) f_R(x + y) [V(x) - V(x + y)] dy d\xi d\eta.$$

On applique la méthode de la phase stationnaire à l'intégrale en  $dy d\xi$  :

$$J - I = \lim_{R \rightarrow \infty} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{h^n}{i^n n!} (f_R V)^{(n)}(x) \int_{\mathbf{R}} e^{ix\eta/h} e^{i\psi(\eta)/h} \chi(\eta) b(\eta, h) [f_R(1 - \tilde{\chi})]^{(n)}(\eta) d\eta \\ + h^N \int_{\mathbf{R}} e^{ix\eta/h} e^{i\psi(\eta)/h} \chi(\eta) b(\eta, h) R_N(R, \eta, h) d\eta.$$

Si  $R > R_1$ , on a à nouveau  $\Im(x\xi + \psi(\xi)) \geq d(x) + \hat{\delta}$  sur le support de  $(f_R(1 - \tilde{\chi}))^{(n)}$ . La première somme est donc majorée par un  $O(e^{-(d(x)+\hat{\delta})/h})$  uniformément en  $R$ .

Le terme de reste se majore en faisant des déformations de contour identiques à celles faites pour le calcul de l'équivalent de  $u$  (en effet,  $R_N$  est holomorphe dans le même domaine que  $\nabla \tilde{\chi}$  et est majoré indépendamment de  $R$ ).

Le lemme est démontré, et par suite on a la proposition.  $\square$

Nous avons obtenu le théorème suivant :

**Théorème 1.4.23** *Considérons l'opérateur de Klein-Gordon dont le potentiel  $V$  présente un unique puits de potentiel en 0 et vérifie les hypothèses **(H1)**, **(H2)**, **(H3'')**, **(H4')** et **(H5)**. Alors, il existe un ensemble simplement connexe  $H \subset \mathbb{C}$  contenant un voisinage de  $[-i, i]$  dans  $\mathbb{C} \setminus \Delta$  sur lequel sont définies des fonctions  $\psi$ ,  $b_n$ ,  $n \geq 0$  telles que pour une fonction  $w(\xi) \sim e^{i\psi/h} \sum_{n \geq 0} h^n b_n$  on a :*

$$\forall \chi \in C_0^\infty(H), \forall \xi \in H, \sqrt{1 + \xi^2} (\chi w)(\xi) + \mathcal{F}(V) * (\chi w)(\xi) = e^{i\psi(\xi)/h} O(h^\infty).$$

(Ici  $V \in \mathcal{S}'$  donc  $\mathcal{F}(V) \in \mathcal{S}'$  et  $\chi \in C_0^\infty(H)$  comme fonction de  $\mathbf{R}^2$ ).

De plus, pour tout  $c \geq 0$  tel que les hypothèses **(H6)**, **(H7)** et **(H7')** sont satisfaites, on peut définir  $\chi \in C_0^\infty(] - R_0, R_0[)$  comme après l'hypothèse **(H6)**, et

$$u(x, h) = \mathcal{F}(\chi w)(x, h).$$

Cette fonction  $u$  prolonge la solution WKB construite au voisinage du puits dans  $]\alpha_- - c, \alpha_+ + c[$ . Enfin, on a

$$\forall x \in ]\alpha_- - c, \alpha_+ + c[, (P - E(h))u = e^{-d(x)/h} O(h^\infty).$$

Etudions maintenant des exemples pour lesquels on peut faire des calculs plus explicites.

## 1.4.6 Exemples

### exemple 1

Supposons que le potentiel  $V$  soit un polynôme de degré  $n$  pair :

$$V(x) = -1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad a_2 = V''(0)/2 > 0, \quad a_n > 0.$$

Ce potentiel vérifie les hypothèses **(H1)**, **(H2)**, **(H3'')** et **(H5)**.

On note

$$P_\xi(x) = V(x) + \sqrt{1 + \xi^2}.$$

Soient  $\lambda_j(\xi)$ ,  $1 \leq j \leq n$  les racines de  $P_\xi$ , et  $\lambda'_j$ ,  $1 \leq j \leq n - 1$  les racines de  $P'_\xi(x) = V'(x)$ .  $P_0$  admet 0 comme racine double, et on suppose que ces racines sont données par  $\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = 0$  ( $= \lambda'_1$ ). Un développement limité au voisinage de  $\xi = 0$  de l'équation  $P_\xi(\lambda_j(\xi)) = 0$  permet de choisir :

$$\lambda_1 = \frac{i\xi}{2a_2} + o(\xi),$$

et

$$\lambda_2 = -\frac{i\xi}{2a_2} + o(\xi).$$

On remarque que si  $\xi$  est dans un voisinage de 0, on a

$$\lambda_1(\xi) = -\psi'(\xi).$$

On définit  $\xi_{j,\pm} \in \mathbb{C}$ ,  $j = 2, \dots, n - 1$  par

$$\xi_{j,\pm}^2 = V(\lambda'_j)^2 - 1, \quad j = 2, \dots, n - 1.$$

**Lemme 1.4.24** *La fonction  $\xi \mapsto \lambda_1(\xi)$  se prolonge analytiquement dans*

$$H = \mathbb{C} \setminus (\Delta \cup \{\xi_{j,\pm}, j = 2, \dots, n - 1\}).$$

**Preuve :** Soit  $\mathcal{O}$  le plus grand ouvert sur lequel  $\lambda_1$  est définie, holomorphe.  $\mathcal{O}$  n'est pas vide car par hypothèse, il contient un voisinage de  $] - i, i[$  dans  $\mathbb{C} \setminus \Delta$ , donc en particulier,  $\mathcal{O}$  contient un voisinage de 0.

On va montrer que  $\mathcal{O} \cap H$  (qui est non vide) est ouvert et fermé dans l'ensemble connexe  $H$ .

$\mathcal{O} \cap H$  est ouvert car la propriété d'analyticité est une propriété ouverte.

Montrons que  $\mathcal{O} \cap H$  est fermé.

Soit  $\xi_n \in \mathcal{O} \cap H$  une suite qui tend vers  $\xi_0 \in H \setminus \{0\}$  (on sait déjà que  $0 \in \mathcal{O}$ ). Alors, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $V(\lambda_1(\xi_n))$  tend vers  $-\sqrt{1 + \xi_0^2}$  donc  $\lambda_1(\xi_n)$  est borné.

Soit  $\lambda_{10}$  un valeur d'adhérence de cette suite. Comme  $\xi_0 \in H$ , on sait que  $\lambda_{10} \neq \lambda'_j$ ,  $j = 1, \dots, n - 1$  donc  $V'(\lambda_{10}) \neq 0$ .

On note

$$f(x, \xi) = V(x) + \sqrt{1 + \xi^2}.$$



On a

$$f(\lambda_{10}, \xi_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda_{10}, \xi_0) \neq 0.$$

Le théorème des fonctions implicites appliqué à  $f$  en  $(\lambda_{10}, \xi_0)$  donne l'existence d'un voisinage de  $\xi_0$   $W_0$  sur lequel il existe une fonction analytique  $\tilde{\lambda}_1$  telle que

$$f(\tilde{\lambda}_1(\xi), \xi) = 0$$

et

$$\tilde{\lambda}_1(\xi_0) = \lambda_{10}.$$

En particulier, dans l'ouvert non vide  $W_0 \cap \mathcal{O}$ ,  $V(\tilde{\lambda}_1(\xi)) = V(\lambda_1(\xi))$ . Comme  $V$  est inversible au voisinage de  $\lambda_{10}$ , on a  $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1$  dans  $W_0 \cap \mathcal{O}$  donc  $\tilde{\lambda}_1$  prolonge  $\lambda_1$  analytiquement. Par définition de  $\mathcal{O}$ , on a donc  $\xi_0 \in W_0 \subset \mathcal{O}$ .  $\square$

Etudions le comportement de  $\lambda_1(\xi)$  quand  $|\xi|$  tend vers  $+\infty$ .

Quand  $|\xi|$  tend vers  $+\infty$ ,  $|\sqrt{1 + \xi^2}|$  tend vers  $+\infty$  donc  $|\lambda_1(\xi)|$  tend vers  $+\infty$ . Ainsi

$$V(\lambda_1(\xi)) + \sqrt{1 + \xi^2} = 0$$

donne

$$a_n(\lambda_1(\xi))^n \sim \pm \xi, \quad \pm \Re \xi < 0,$$

soit

$$\lambda_1(\xi) \sim e^{i\delta_n} (\pm \xi / a_n)^{1/n}; \quad \delta_n = 2k\pi/n.$$

On note  $\delta_n^{\pm r, \pm i} = \delta_n(\xi)$  pour  $\pm \Re(\xi) > 0$ ,  $\pm \Im(\xi) > 0$ . On a montré que  $\lambda_1(\xi)$  est analytique sur  $\mathbb{R}$ , hors d'un compact qui contient  $\lambda'_j$ ,  $j = 2, \dots, n-1$ . Le calcul montre alors que nécessairement :

$$\delta_n^{+r, +i} - \delta_n^{+r, -i} = \frac{2\pi}{n} \quad (2\pi),$$

et

$$\delta_n^{-r, +i} - \delta_n^{-r, -i} = \frac{2\pi}{n} \quad (2\pi).$$

On pose  $\psi'(\xi) = -\lambda_1(\xi)$ ,  $\xi \in H$ . Soit  $\tilde{H}$  un ouvert simplement connexe contenant  $\{0\}$  et  $] -\infty, R] \cup [R, +\infty[$ .

On intègre  $\psi'$  dans  $\tilde{H}$  et on trouve :

$$\psi(|\xi|e^{i\theta}) \sim -C_n |\xi|^{1+1/n} e^{iw_n} e^{i\delta_n},$$

où  $C_n = \frac{n}{n+1} a_n^{1/n}$  et

$$\begin{aligned}
w_n &= \theta(1 + 1/n) - \pi/n & \text{si} & \quad 0 < \theta < \pi/2 \\
w_n &= \theta(1 + 1/n) + \pi/n & \text{si} & \quad -\pi/2 < \theta < 0 \\
w_n &= \theta(1 + 1/n) & \text{sinon.} &
\end{aligned}$$

On note  $\delta_n^{\pm r, \pm i} = 2k^{\pm r, \pm i}\pi/n$ .

Si  $-(n-1)/2 \leq k^{+,+i} \leq 0$ , alors  $k^{+,-i} = k^{+,+i} - 1$  et la fonction obtenue vérifie  $\Im(\psi(\xi)) \geq \epsilon|\xi|^{1+1/n}$  dans

$$\left\{ \xi \in \tilde{H}, |\xi| \geq R_1, \epsilon - \frac{\pi}{n+1}(n-1+2k^{+,+i}) < \arg(\xi) < \frac{\pi}{n+1}(1-2k^{+,+i}) - \epsilon \right\}.$$

Si de plus  $-(n-1)/2 \leq k^{-r,+i} \leq 0$ , alors  $k^{-r,-i} = k^{+,+i} - 1$  et  $\Im(\psi(\xi)) \geq \epsilon|\xi|^{1+1/n}$  si  $|\xi| \geq R_1$ , et

$$\epsilon + \frac{\pi}{n+1}(n+2k^{-r,+i}) < \arg(\xi) < -\epsilon - \frac{\pi}{n+1}(2+2k^{+,+i}).$$

Si  $\lambda'_j \notin \mathbb{R}$ ,  $j = 2, \dots, n-1$ , on peut choisir  $\tilde{H}$  tel que  $\mathbb{R} \subset \tilde{H}$ . Ainsi on a  $R_0 = +\infty$  et l'hypothèse **(H6)** sur l'existence de  $R_1(x)$  est vérifiée pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

On étudie maintenant un exemple pour lequel on peut faire une construction de  $\lambda_1$  explicite.

## exemple 2

Considérons l'opérateur de Klein-Gordon  $P$  ayant le potentiel

$$V(x) = -1 + \frac{x^2}{2}.$$

Si  $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ , on calcule

$$\varphi'(x) = ix\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}},$$

$$\varphi(x) = \frac{4i}{3} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{x^2}{4} \right)^{3/2} \right].$$

La fonction  $\psi$  est déterminée par la relation (4.19), on trouve donc sur un voisinage de  $[-i, i]$  dans  $\mathbb{C}/\Delta$  :

$$\psi'(\xi) = i\sqrt{2}\xi(1 + \sqrt{1 + \xi^2})^{-1/2} = \lambda_1(\xi),$$

soit en intégrant avec  $\psi(0) = 0$  :

$$\psi(\xi) = i\frac{2\sqrt{2}}{3} \left[ \left( 1 + \sqrt{1 + \xi^2} \right)^{1/2} \left( \sqrt{1 + \xi^2} - 2 \right) + \sqrt{2} \right].$$

On prolonge ces expressions pour  $\xi \in \mathbb{C}/\Delta$  qui est simplement connexe. On a immédiatement :

**Lemme 1.4.25**  $\psi$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}/\Delta$  et  $\psi(\xi) \sim \frac{2\sqrt{2}}{3}i(\pm\xi)^{3/2}$ ,  $\pm\Re\xi > 0$ ,  $|\xi| \rightarrow +\infty$ .

Si  $\epsilon_0 > 0$  est fixé, soit  $\hat{H} = \{\xi \in \mathbb{C}, -\pi/3 + \epsilon_0 < \arg \xi < \pi/3 - \epsilon_0\} \cup \{\xi \in \mathbb{C}, 2\pi/3 + \epsilon_0 < \arg \xi < 4\pi/3 - \epsilon_0\}$ . On a pour  $|\xi|$  assez grand,  $\xi \in \hat{H}$  une constante  $C > 0$  telle que

$$\Im \psi(\xi) \geq C|\xi|^{3/2}$$

Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $\hat{\delta}_0 > 0$  il existe une constante  $R_1(x) > 0$  telle que

$$\forall \xi \in \hat{H}, |\xi| \geq R_1(x), \Im(x\xi + \psi(\xi)) \geq d(x) + \hat{\delta}_0.$$

On résout ensuite les équations de transport. L'opérateur  $\mathcal{L}$  est donné par :

$$\mathcal{L} = (1/i)\left(\psi'(\xi)\partial_\xi + \frac{\psi''(\xi)}{2}\right).$$

Comme  $\psi'(\xi) \sim i\sqrt{2}(\mp\xi)^{1/2}$ ,  $\pm\Re\xi > 0$  quand  $|\xi|$  tend vers  $+\infty$ , on obtient ici des fonctions  $b_n$  à décroissance polynomiale. On définit  $u$  par l'intégrale absolument convergente :

$$u(x, h) = \int_{\mathbb{R}} e^{(ix\xi + \psi(\xi))/h} b(\xi, h) d\xi, \quad b(\xi, h) = \sum h^n \hat{\chi}(\lambda_n h) b_n(\xi),$$

pour une suite  $(\lambda_n)_n$  qui tend vers  $+\infty$  définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{C} \setminus \Delta, |\xi| \leq j, \forall k \leq j, |h^j \hat{\chi}(\lambda_j h) \partial_\xi^k b_j(\xi)| \leq 2^{-j} h^{j-1}.$$

(Ici la coupure  $\Delta$  ne pose pas de problème car toutes les fonctions ont une limite quand  $\xi$  tend vers  $\Delta$ . Elles sont même définies sur  $\Delta$  si on change le feuillet de la racine carrée lorsqu'on traverse  $\Delta$ )  
On pourra déformer l'intégrale définissant  $u$  dans  $\mathbb{C} \setminus \Delta$ .

**Proposition 1.4.26** *Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe un chemin  $\gamma_\pm$  satisfaisant les hypothèses (H7) ou (H7'). On a donc l'équivalent de  $u$  :*

$$u(x, h) = e^{-d(0,x)/h} h^{1/2} (a_0(x) + ha_1(x) + O(h^2)),$$

où  $d$  est la distance d'Agmon et :

$$\forall x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \quad a_0(x) = (1 - x^2/2)^{1/2} (1 - x^2/4)^{-1/4} \frac{e^{ih(\xi_x)}}{|x|^{1/2}},$$

avec  $h(\xi) = \int^\xi \frac{d\xi}{\psi'(\xi)}$ ,  $\xi_x = ix(1 - x^2/4)^{1/2}$ ,

$$\forall x \notin [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \quad a_0(x) = 0, \quad a_1 = \frac{C}{|x \pm \sqrt{2}|^{5/2}}, \quad \pm x < -\sqrt{2}.$$

**Preuve :** On montre la proposition pour  $0 < x < \sqrt{2}$ . Cette démonstration s'adaptera pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ .

Soit donc  $x \in ]0, \sqrt{2}[$ .

Montrons que pour tout  $\epsilon > 0$  assez petit, il existe un chemin entre  $\xi_x + \epsilon$  et  $\{\xi \in \hat{H}, 0 < \arg \xi, |\xi| \geq R_1(x)\}$  qui croise les lignes anti-Stokes  $\Im(x\xi + \psi(\xi)) = cste$  dans le sens croissant. Avec la remarque 1.4.17 cela donnera la proposition.

On note  $z(\xi) = x\xi + \psi(\xi)$ . L'image par  $z$ , des lignes anti-Stokes sont  $\Im z = cste$ .

Au voisinage de 0,  $z(\mathbb{R}^+)$  est donné par  $z(\xi) = x\xi + i\xi^2/2 + o(\xi^2)$ .  
Lorsque  $\xi \rightarrow +\infty$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $z(\xi) = (x\xi + i(2\sqrt{2}/3)\xi^{3/2})(1 + O(\xi^{-1/2}))$ .

D'autre part, le segment  $[\xi_x, \xi_x + \epsilon]$  est transformé en

$$z = id(x) + i \frac{|\xi_x|}{2|VV'(x)|} t^2 + o(t^2), \quad 0 < t < \epsilon$$

Enfin, on note

$$\Delta_+ = \{\xi(R) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (1 + R)i + \epsilon, \quad R > 0\}.$$

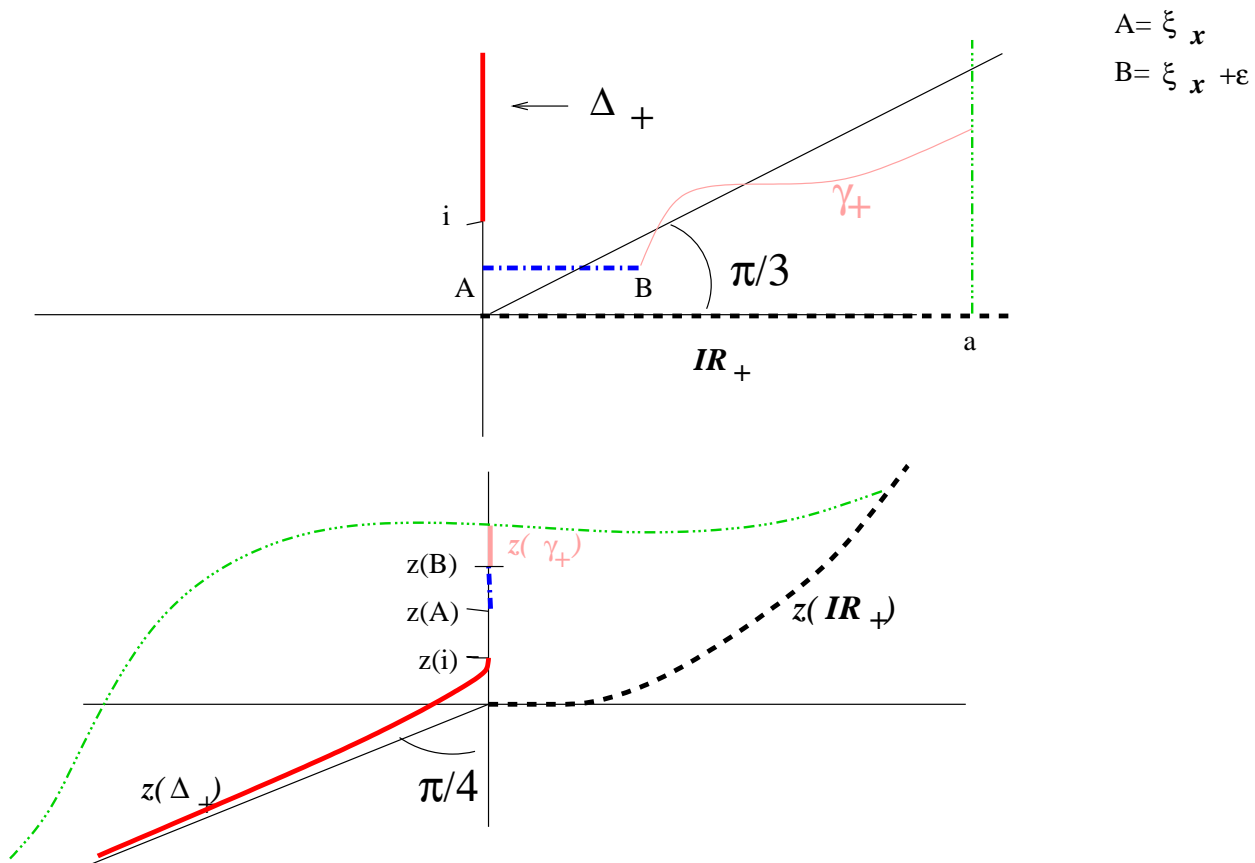
On a

$$z(\xi(R)) = ix + \psi(i) + i(x - \sqrt{2})R - (2/3)R^{3/2} + o(R^{3/2})$$

et

$$z(\xi(R)) = (2\sqrt{2}/3)e^{5i\pi/4}R^{3/2}(1 + o(R^{-1/2}))$$

D'où le schéma suivant :



Montrons le lemme :

**Lemme 1.4.27** Soit  $\hat{\delta} > 0$ . Soit  $x \in ]0, \sqrt{2}[$ .

Il existe  $a_x > 0$  tel que si  $a \geq a_x$ , alors

$$\{z(a + ib), b \geq 0\} \cap i\mathbb{R} = z(a + ib(a))$$

où  $0 < \arg(a + ib(a)) < \pi/3$  et  $\Im z(a + ib(a)) > d(x) + \hat{\delta}$ .

**Preuve :** Soit  $x$  fixé comme dans le lemme. On a

$$z(a + ib) = x(a + ib) + \psi(a + ib) = [x(a + ib) + \frac{2\sqrt{2}}{3}i(a + ib)^{3/2}](1 + O(a^{-1/2})).$$

Il suffit donc d'étudier  $\tilde{z}(a + ib) = x(a + ib) + \frac{2\sqrt{2}}{3}i(a + ib)^{3/2}$ .

On écrit  $b = ta$ . Alors

$$\sqrt{a + ib} = \sqrt{a/2}((\sqrt{1+t^2} + 1)^{1/2} + i(\sqrt{1+t^2} - 1)^{1/2})$$

donc

$$\begin{aligned} \tilde{z}(a + ib) &= ax - \frac{2}{3}a^{3/2} \left[ (\sqrt{1+t^2} - 1)^{1/2} + t(\sqrt{1+t^2} + 1)^{1/2} \right] \\ &+ i \left[ tax + \frac{2}{3}a^{3/2} \left[ (\sqrt{1+t^2} + 1)^{1/2} - t(\sqrt{1+t^2} - 1)^{1/2} \right] \right]. \end{aligned}$$

$\tilde{z}(a + ib) \cap i\mathbb{R}$  est donné par :

$$ax = \frac{2}{3}a^{3/2} \left[ (\sqrt{1+t^2} - 1)^{1/2} + t(\sqrt{1+t^2} + 1)^{1/2} \right]$$

soit

$$x = \frac{2}{3}a^{1/2} \left[ (\sqrt{1+t^2} - 1)^{1/2} + t(\sqrt{1+t^2} + 1)^{1/2} \right]. \quad (4.22)$$

Si  $a_x$  est assez grand et  $a > a_x$ , cette équation a une solution  $0 < t < 1/2 < \tan(\pi/3)$ . On a alors

$$\Im \tilde{z}(a + ib) = a \left[ tx + \frac{2}{3}a^{1/2} \left[ (\sqrt{1+t^2} + 1)^{1/2} - t(\sqrt{1+t^2} - 1)^{1/2} \right] \right]$$

$$\Im \tilde{z}(a + ib) \geq (1/3)a^{3/2}$$

et on peut encore augmenter  $a_x$  pour obtenir le lemme.  $\square$

On construit maintenant un chemin convenable  $\gamma_+$  entre  $\xi_x + \epsilon$  et  $\{\xi \in \hat{H}, 0 \leq \arg \xi, |\xi| \geq R_1(x)\}$  qui croise les lignes anti-Stokes  $\Im(x\xi + \psi(\xi)) = cste$  dans le sens croissant.

Soit  $a > a_x$ ,  $a > R_1(x)$ , et  $a + ib(a)$  fixé comme dans le lemme. On prend  $\epsilon > 0$  assez petit pour que  $\Im z(\xi_x + \epsilon) < \Im z(a + ib(a))$ .

On définit  $\tilde{\gamma}_+$  comme étant le segment  $[z(\xi_x + \epsilon), z(a + ib(a))]$ .  $\tilde{\gamma}_+$  rencontre les lignes  $\Im z = cste$  transversalement et dans le sens croissant.

Il reste à montrer qu'on peut prendre un chemin  $\gamma_+$  dans  $\mathbb{C} \setminus \Delta$  tel que  $z(\gamma_+) = \tilde{\gamma}_+$ .

$\tilde{\gamma}_+$  est un segment, c'est donc un ensemble connexe. Soit

$$U = \{z \in \tilde{\gamma}_+, \exists \xi \in \mathbb{C}, \Re \xi > 0, z = z(\xi)\}.$$

$U$  n'est pas vide car  $z(\xi_x + \epsilon)$  et  $z(a + ib(a))$  sont dans  $U$ .

$U$  est ouvert car si  $z_0 \in U$ ,  $z_0 = z(\xi_0)$  et  $\xi_0 \neq \xi_x$  (car  $z_0 \neq id(x) = z(\xi_x)$ ). Donc  $z'(\xi_0) \neq 0$ .  $z$  est donc un difféomorphisme d'un voisinage de  $\xi_0$  dans un voisinage de  $z_0$  noté  $W_0$ . Alors  $\tilde{\gamma}_+ \cap W_0 \subset U$  est un voisinage de  $z_0$  dans  $\tilde{\gamma}_+$ .

Montrons que  $U$  est fermé. Soit  $(z_n)_{n \geq 1}$  une suite de  $U$  qui converge vers  $z_0 \in \tilde{\gamma}_+$ . Alors  $z_n = z(\xi_n)$  pour une suite bornée  $\xi_n$ .

Si  $z'(\xi_n)$  tend vers 0, cela impose que  $\xi_n$  tend vers  $\pm \xi_x$  et  $z(\xi_n)$  tendrait vers  $z(\pm \xi_x)$  ce qui n'est pas le cas. Ainsi, il existe  $\eta > 0$  tel que, pour une sous suite encore notée  $(\xi_n)_n$ ,  $|z'(\xi_n)| > \eta$ .

La fonction  $z^{-1}$  est donc définie dans une boule de centre  $z_n$ , de rayon  $r$  indépendant de  $n$ . Pour  $n$  assez grand, on a alors  $|z_0 - z_n| < r$  donc il existe  $\xi_0 = z^{-1}(z_0) : z_0 \in U$ .

On démontre de la même façon l'existence d'un chemin  $\gamma_-$  satisfaisant **(H7)**.

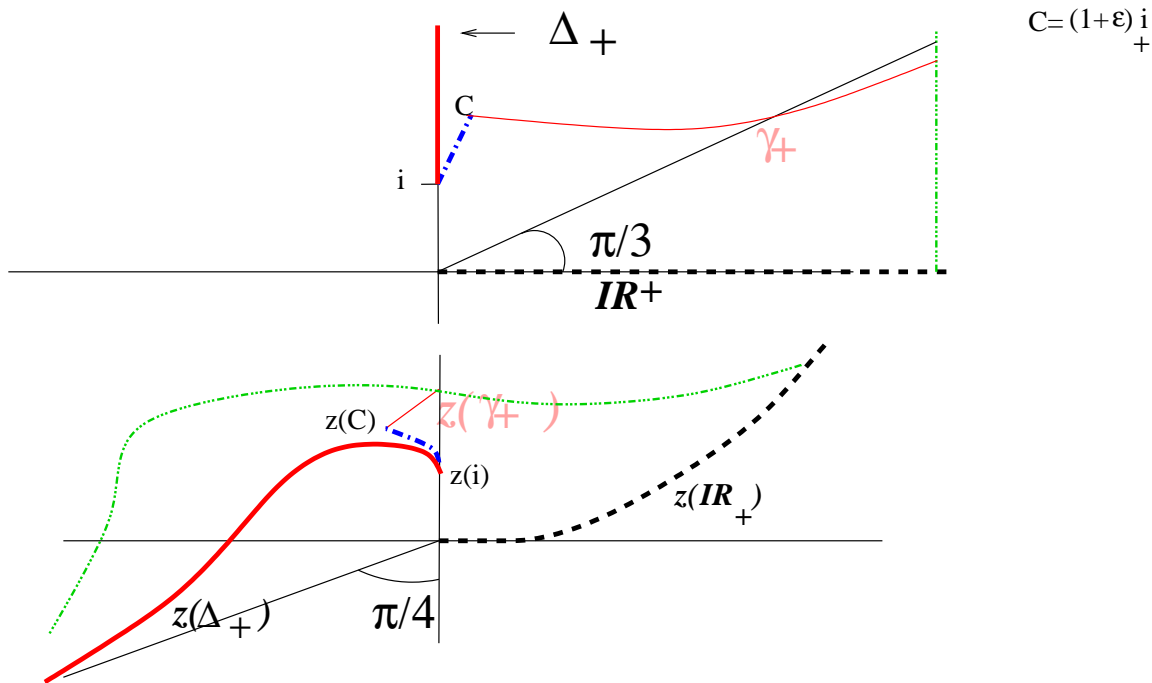
Notons

$$\Gamma_+ = [\xi_x, \xi_x + \epsilon] \cup \gamma_+ \cup [a + ib(a), a] \cup [a, +\infty[,$$

et  $\Gamma_-$  le contour analogue dans  $\{\xi \in \mathbb{C}, \Re \xi < 0\}$ . On calcule l'équivalent de  $u$  sur  $\Gamma_- \cup \Gamma_+$ .

Cela donne la proposition pour  $0 < x < \sqrt{2}$ .

La proposition pour  $x > \sqrt{2}$  et  $x < \sqrt{2}$  se démontre de la même manière. Par exemple, si  $x > \sqrt{2}$ , on obtient le schéma :



□

Pour une telle fonction  $u$ , la proposition 1.4.21 est vérifiée sur  $\mathbb{R}$ .

## 1.5 Calcul du splitting dans le cas d'un double puits de potentiel

Dans cette partie, on calcule le splitting dans le cas d'un double puits ponctuel symétrique de potentiel (déjà obtenu dans [12]) à partir de la matrice d'interaction de  $P$  établie dans la partie 1.3. Pour cela, on utilise les solutions WKB de la partie 1.4 qui sont une bonne approximation des fonctions propres de  $P$  dans la zone  $\mathcal{N}$  grâce à (4.12).

Reprenons la matrice d'interaction pour l'opérateur de Klein-Gordon à une dimension dans le cas qui nous intéresse.

Avec les notations de la partie 1.3, on écrit  $U = \{x \in \mathbb{R}, V(x) \leq -1\} = U_1 \cup U_2 = \{-x_0\} \cup \{x_0\}$ , et la première valeur propre pour chacun des deux puits est de la forme (Cf partie 1.4)

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu = E_1 h + O(h^2), \quad E_1 = \frac{\sqrt{V''(x_0)}}{2} = \frac{\sqrt{V''(-x_0)}}{2}$$

On peut choisir un intervalle  $I(h)$  dans lequel il n'y a qu'une seule valeur propre, et qui satisfait la condition de la proposition 1.3.6 car les autres valeurs propres pour les opérateurs à un puits sont à une distance  $\sqrt{V''(x_0)}h$  de  $E(h)$ .

Le terme général de la matrice d'interaction s'écrit :

$$w = w_{1,2} = w_{2,1} = (\varphi_1, [P - \mu]\varphi_2).$$

Ainsi, la matrice de  $P$  restreinte à l'espace propre associé à  $I(h) \cap \sigma(P)$  est

$$M = \begin{pmatrix} \mu & w \\ w & \mu \end{pmatrix} + O(e^{-(2S_0-\epsilon)/h}).$$

Le splitting est donc donné par  $s = 2w + O(e^{-(2S_0-\epsilon)/h})$ . Calculons  $w$ .

Comme  $(\varphi_1, [P - \mu]\varphi_2) = -\int_{\mathbb{R}} \beta_2(x)\varphi_2(x)\varphi_1(x)dx$ , on écrit :

$$w = \int_{-\infty}^y \chi^2(x) ([P - \mu]\varphi_2)(x)\varphi_1(x)dx,$$

pour  $-x_0 + 2\eta < y < x_0 - 2\eta$  et une fonction troncature  $\chi \in C_0^\infty([-x_0 - 3\eta, x_0 + 3\eta])$  valant 1 dans  $[-x_0 - 2\eta, x_0 + 2\eta]$ .

De plus  $[P - \mu]\varphi_1 = -\beta_1\varphi_1 = 0$  sur  $\mathbb{R} \setminus B(x_0, 2\eta)$  d'où

$$w = \int_{-\infty}^y \chi^2 \left( \varphi_1([P - \mu]\varphi_2) - \varphi_2([P - \mu]\varphi_1) \right).$$

Finalement

$$w = \int_{-\infty}^y (\chi\varphi_1)\chi(Q\varphi_2) - (\chi\varphi_2)\chi(Q\varphi_1),$$

où  $Q$  est l'opérateur de symbole  $q(\xi) = \sqrt{1 + \xi^2}$ .

Or  $\chi(Q\varphi_2) = Q(\chi\varphi_2) + [\chi, Q]\varphi_2$ . Le symbole de  $[\chi, Q]$  est nul hors de  $[-x_0 - 3\eta, -x_0 - 2\eta] \cup [x_0 + 2\eta, x_0 + 3\eta]$ . En utilisant la décroissance des fonctions propres (2.4), et avec une étude du symbole de  $[\chi, Q]$  comme dans la partie précédente on montre que

$$\int_{-\infty}^y (\chi\varphi_1)[\chi, Q]\varphi_2 = O(h^\infty)e^{-d(-x_0, x_0)/h}$$

On a donc maintenant  $w = \tilde{w} + O(h^\infty)e^{-d(-x_0, x_0)/h}$ ,

$$\tilde{w} = \int_{-\infty}^y (\chi\varphi_1)Q(\chi\varphi_2) - (\chi\varphi_2)Q(\chi\varphi_1).$$

Afin de calculer  $\tilde{w}$ , nous démontrons la proposition suivante :

**Proposition 1.5.1** *Soit  $Q$  un opérateur pseudo-différentiel de symbol  $q(\xi)$ . Pour toutes fonctions  $f, g \in \mathcal{S}$ , on a :*

$$\int_a^b fQg - \int_a^b gQf = \frac{h}{i}[Q(f, g)]_a^b$$

où

$$Q(f, g)(x) = \int e^{ix(\xi+\eta)/h} \frac{q(\xi) - q(-\eta)}{\xi + \eta} \mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\eta)d\xi d\eta$$

et où  $\mathcal{F}$  est la transformation de Fourier.

**Preuve :** On remarque d'abord que cette intégrale double est absolument convergente car  $\mathcal{F}f$  et  $\mathcal{F}g$  sont dans  $\mathcal{S}$ . Il suffit alors de dériver  $Q(f, g)$  et de voir qu'on obtient bien  $(fQg - gQf)(x)$ .  $\square$

On prend  $q(\xi) = \sqrt{1 + \xi^2}$  dans cette proposition, et

$$\tilde{w} = -\frac{h}{i}Q(\chi\varphi_1, \chi\varphi_2)(y) \tag{5.1}$$

avec  $y$  quelconque dans  $] -x_0 + 2\eta, x_0 - 2\eta[$ .

**Remarque 1.5.2** *En dimension plus grande que 1, on ne peut plus définir  $Q(f, g)$  car il faudrait remplacer  $\frac{q(\xi) - q(\eta)}{\xi + \eta}$  par  $\frac{q(\xi) - q(\eta)}{(\xi_1 + \eta_1)\dots(\xi_n + \eta_n)}$  qui n'est plus du tout régulière. B. Helffer et B. Parisse résolvent ce problème dans [12].*

On suppose que le potentiel est strictement négatif entre les deux puits, c'est à dire sur  $[-x_0, x_0]$ . On montre le théorème

**Théorème 1.5.3** *Le splitting est*

$$s = 2w = 2h^{1/2} \left( \frac{2\sqrt{V''(x_0)}}{\pi} \right)^{1/2} e^{-S/h}(1 + O(h)), \quad S = d(-x_0, x_0).$$

**Preuve :** On calcule  $\tilde{w}$  en  $y = 0$  :

$$\tilde{w} = -\frac{h}{i} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(\chi\varphi_1)(\xi)\mathcal{F}(\chi\varphi_2)(\eta) \frac{q(\xi) - q(\eta)}{\xi + \eta} d\xi d\eta. \tag{5.2}$$

On développe cette intégrale :



$$\tilde{w} = -(h/i) \int_{\mathbb{R}^4} e^{-iy\xi/h} \chi(y) \varphi_1(y) e^{-iz\eta/h} \chi(z) \varphi_2(z) \frac{q(\xi) - q(\eta)}{\xi + \eta} dy dz d\xi d\eta,$$

et on l'écrit :

$$\tilde{w} = -(h/i) \int_{\mathbb{R}^4} e^{-iy\xi/h} \varphi_1(y) \chi(y) e^{-iz\eta/h} \varphi_2(z) \chi(z) \int_0^1 q'(t\xi + (t-1)\eta) dt dy dz d\xi d\eta. \quad (5.3)$$

Des intégrations par parties en  $y$  montrent qu'on peut changer l'ordre d'intégration dans (5.3). On commence par calculer l'intégrale en  $d\xi dy$ . Soit

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} dy d\xi e^{-iy\xi/h} \varphi_1(y, h) q'(t\xi + (t-1)\eta) \chi(y).$$

Montrons que seul un voisinage de  $y = 0$  donne une contribution non négligeable dans  $I$ . Soit  $\nu(y)$  une fonction valant 0 si  $|y| < \delta$ . Si  $\Phi(y)$  vérifie  $d(y, -x_0) - d(0, -x_0) = y\Phi(y)$ , il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que

$$|\Phi'(y)| < 1 - \epsilon_0$$

sur  $\text{Supp } \chi \subset \{V < 0\}$ . (Ici, on a en fait seulement besoin que entre 0 et  $y$ , il y ait un ensemble contenu dans  $\{V < 0\}$ ) Alors

$$\begin{aligned} J &= \int_{\mathbb{R}^2} \nu(y) e^{-iy\xi/h} \varphi_1(y, h) q'(t\xi + (t-1)\eta) \chi(y) dy d\xi \\ &= e^{-d(0, -x_0)/h} \int_{\mathbb{R}^2} \nu(y) e^{-iy(\xi - i\Phi(y))/h} \left( e^{d(-x_0, y)/h} \varphi_1(y, h) \right) q'(t\xi + (t-1)\eta) \chi(y) dy d\xi \end{aligned}$$

On déforme l'intégrale en  $\xi$   $\mathbb{R}_\xi$  en  $(\mathbb{R} + i\Phi(y))_\xi$ , en restant dans le domaine d'holomorphic de  $q'(t\xi + (t-1)\eta)$  pour  $0 \leq t \leq 1$ . On obtient :

$$J = e^{-d(0, -x_0)/h} \int_{\mathbb{R}^2} \nu(y) e^{-iy\xi/h} \left( e^{d(-x_0, y)/h} \varphi_1(y, h) \right) q'(t(\xi - i\Phi(y)) + (t-1)\eta) \chi(y) dy d\xi.$$

Selon que  $y$  est positif ou négatif, on fait ensuite de petites déformations en  $\xi$  et des intégrations par parties en  $y$  pour obtenir une intégrale absolument convergente en  $\xi$  et avec la majoration des fonctions propres (2.4) on trouve :

$$|J| \leq e^{-d(0, -x_0)/h} e^{-\epsilon_0 \delta / 2h} \|e^{d(-x_0, y)/h} \chi \varphi_1\| = e^{-d(0, -x_0)/h} e^{-\epsilon_0 \delta / 2h} O(h^{-N}). \quad (5.4)$$

Etudions maintenant la contribution d'un voisinage de  $y = 0$  dans  $I$ .

Sur un voisinage de  $y = 0$ , la fonction  $\varphi_1$  est bien approximée par la solution WKB  $u_1$  grâce à (4.12) :

$$\varphi_1(x, h) = u_1(x, h) + O(h^\infty) e^{-d(x, -x_0)/h}.$$

D'où, en écrivant  $u_1 = e^{-d(x, -x_0)/h} a^1(x, h)$  et

$$K = \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \nu(y)) e^{-iy\xi/h} \varphi_1(y, h) q'(t\xi + (t-1)\eta) \chi(y) dy d\xi,$$

on obtient

$$K = \int_{\mathbb{R}^2} dy d\xi e^{-iy\xi/h} e^{-d(y, -x_0)/h} (a^1(y, h) + O(h^\infty)) q'(t\xi + (t-1)\eta) \chi(y) (1 - \nu(y)).$$

Le point critique de la phase dans cette intégrale est  $y = 0$ ,  $\xi = id'(-x_0, 0)$ . Après le changement de variable  $\tilde{\xi} = \xi - id'(-x_0, 0)$  et une déformation de contour, la méthode de la phase stationnaire donne

$$K = e^{-d(-x_0, 0)/h} (a^1(0) + O(h^\infty)) q'(tid'(-x_0, 0) + (t-1)\eta)$$

Finalement,

$$I = J + K = e^{-d(-x_0, 0)/h} [a^1(0) q'(tid'(-x_0, 0) + (t-1)\eta) + O(h^\infty)].$$

On injecte cette formule dans (5.3) et on calcule de même l'intégrale en  $dzd\eta$  pour trouver :

$$\tilde{w} = -(h/i) e^{-d(-x_0, x_0)/h} \int_0^1 q'(tid'(-x_0, 0) + (t-1)id'(x_0, 0)) dt a^1(0) a^2(0) (1 + O(h^\infty)).$$

Or  $d'(-x_0, 0) = -d'(x_0, 0) = \sqrt{1 - V(0)^2}$  d'où :

$$\tilde{w} \sim (-h/i) e^{-d(-x_0, x_0)/h} q'(id'(-x_0, 0)) a^1(0) a^2(0) (1 + O(h^\infty)). \quad (5.5)$$

On a calculé dans la partie 1.4 les solutions WKB pour les opérateurs  $P_i$ ,  $i = 1, 2$  :

$$u_1(x, h) = h^{-1/4} e^{-d(x, -x_0)/h} [a_0^1(x) + O(h)], \quad x \in I_1 = ] -\alpha_- + \eta, x_0 - \eta [$$

$$a_0^1(x) = \left( \frac{2\sqrt{V''(-x_0)}}{\pi} \right)^{1/4} \left( \frac{|V(x)|}{\sqrt{1 - V(x)^2}} \right)^{1/2} e^{-E_1 k(x)}$$

$$u_2(x, h) = h^{-1/4} e^{-d(x, x_0)/h} [a_0^2(x) + O(h)], \quad x \in I_2 = ] -x_0 + \eta, \alpha_+ - \eta [$$

$$a_0^2(x) = \left( \frac{2\sqrt{V''(x_0)}}{\pi} \right)^{1/4} \left( \frac{|V(x)|}{\sqrt{1 - V(x)^2}} \right)^{1/2} e^{-E_1 k(x)}$$

On obtient finalement :

$$\tilde{w} = h^{1/2} \left( \frac{2\sqrt{V''(x_0)}}{\pi} \right)^{1/2} e^{-S/h} (1 + O(h)), \quad S = d(-x_0, x_0),$$

et donc le théorème.  $\square$

**Remarque 1.5.4** Reprenons la formule (5.5) : si le potentiel tend vers 0 en 0,  $d'(-x_0, 0)$  tend vers 1 et donc  $q'(id'(-x_0, 0))$  tend vers  $+\infty$ . Cependant dans l'expression finale de  $w$  on voit que cette singularité est exactement compensée par le produit  $a_0^1 a_0^2$ .

# Bibliographie

- [1] R. Abraham et J. Robbin, *Transversal mappings and flows. An appendix by Al Kelley*, W.A. Benjamin, Inc, New York-Amsterdam (1967)
- [2] S. Agmon, *Lectures on Exponential Decay of Solutions of Second Order Elliptic Equations*, Mathematical notes 29, Princeton Univ. Press (1982).
- [3] M. Brunaud, B. Helffer, *Un problème de double puits provenant de la théorie statistico-mécanique des changements de phases*, Prépublication ENS (1991).
- [4] R. Carmona, W. C. Master, B. Simon, *Relativistic Schrödinger operators : asymptotic behaviour of the eigenfunctions*, J.Funct. Anal. 91 (1990) p.117-142.
- [5] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris (1968).
- [6] M. Dimassi et J. Sjöstrand, *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 268. Cambridge University Press, Cambridge (1999).
- [7] A. Erdelyi, *Asymptotic expansions*, Dover Public, New York (1956).
- [8] A. Grigis et J. Sjöstrand, *Microlocal Analysis for Differential Operators*, London Mathematical Society, Lecture Notes series 196, Cambridge (1994).
- [9] E.M. Harrel, *Double Wells*, Comm. Math. Phys. 75 (1980) p.239-261.
- [10] B. Helffer, *Décroissance exponentielle des fonctions propres pour l'opérateur de Kac : le cas de la dimension strictement supérieure à 1*, Operator Theory : Advances and Applications, Vol. 57 (1992)
- [11] B. Helffer, *Semiclassical analysis for the Schrödinger operators and applications*, Springer Verl. Lect. Notes in Math. 1336 (1988).
- [12] B. Helffer, B. Parisse, *Comparaison entre la décroissance de fonctions propres pour les opérateurs de Dirac et de Klein-Gordon. Application à l'effet tunnel*, Ann. Inst. H. Poincaré, Vol 60 (1994) p.147-187.
- [13] B. Helffer et J. Sjöstrand, *Multiple Wells in the Semi-Classical Limit I*, Comm. in Partial Differential Equations 9 (1984) p.337-408.
- [14] B. Helffer, J. Sjöstrand, *Semiclassical analysis for Harper's equation III. Cantor structure of the spectrum*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) No. 39 (1989) p.1-124.
- [15] B. Helffer, J. Sjöstrand, *Multiple Wells in the Semi-Classical Limit II. Interaction moléculaire. Symétries. Perturbation.*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 42, no. 2 (1985) p.127-212.
- [16] B. Helffer, J. Sjöstrand, *Multiple Wells in the Semi-Classical Limit III*, Math. Nach 124 (1985) p.263,313.

- [17] M.C. Irwin, *Smooth Dynamical System*, Academic Press (1980).
- [18] V. Ivrii, *Microlocal Analysis and Precise Spectral Asymptotics*, Springer (1998).
- [19] L. Lithner, *A theorem of the Phragmen-Lindelöf type for second order elliptic operators*, Ark. f. Mat. 5 (1963) p.281-285.
- [20] J. Milnor, *Morse theory*, Princeton university press (1963).
- [21] V.P. Maslov, *Théorie des Perturbations et Méthodes Asymptotiques*, Dunod (1972).
- [22] M. Reed et B. Simon, *Methods of modern mathematical physics II*, Academic Press, New York (1975).
- [23] B. Simon, *Semiclassical Analysis of low lying eigenvalues I, Non Degenerate minima : Asymptotic expansions*, Ann. Inst. Poincaré 38 (1983) p.295-307.
- [24] J. Sjöstrand, *Singularités Analytiques Microlocales*, Astérisque 95 (1982).
- [25] M. E. Taylor, *Pseudodifferential Operators*, Princeton University Press, New Jersey (1981).



# Chapitre 2

## Résonances en dimension un pour l'opérateur de Schrödinger

### 2.0 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux résonances, et en particulier à leur partie imaginaire, pour un opérateur de Schrödinger semi classique unidimensionnel :

$$P = h^2 D^2 + V(x), \quad \text{où } D = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (0.1)$$

On étudie le cas de potentiels réels vérifiant pour  $\gamma > 0$ ,  $\delta > 0$ ,

$$V \text{ est analytique dans } \mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C}, |\Im z| < \gamma |\Re z|\} \cup \{|\Im z| < \delta\}, \quad (0.2)$$

et dans cette zone,

$$\lim_{\Re(x) \rightarrow -\infty} \Re V = +\infty, \quad \lim_{\Re(x) \rightarrow +\infty} V = V_0 > -\infty. \quad (0.3)$$

L'opérateur  $P$  ainsi défini est auto-adjoint dans la fermeture des fonctions  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  pour la forme quadratique  $(Pu, u)$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ . En effet, le potentiel  $V$  est minoré :  $P$  est semiborné inférieurement et on prend son extension de Friedrichs [11].

On sait de plus [9] que  $V_0$  est le minimum du spectre essentiel de  $P$ . Si  $E < V_0$ , le spectre de  $P$  est donc discret au voisinage de  $E$ . Pour  $z \in \mathbb{C}$  proche de  $E$ , la résolvante de  $P$ ,  $R(z) = (P - z)^{-1}$  est alors une fonction méromorphe dont les pôles sont les valeurs propres de  $P$  au voisinage de  $E$ .

Lorsque  $E > V_0$  et  $z$  est dans un voisinage complexe de  $E$  noté  $W_E$ , la résolvante  $R(z)$  est holomorphe dans les deux ouverts  $W_E \cap \{z \in \mathbb{C}, \pm \Im z > 0\}$ . De plus, cette fonction s'étend méromorphiquement, par exemple de  $W_E \cap \{z \in \mathbb{C}, \Im z > 0\}$  dans  $W_E$ . Les pôles de cette extension sont appelés les résonances de  $P$ .

Grâce à l'analyticité du potentiel, on peut montrer que  $R(z)$  est la résolvante d'un opérateur non auto-adjoint.

Cela nous permet de définir les résonances par dilatation analytique [4] : pour  $0 < \theta_0 < \pi/2$  tel que  $0 < \tan \theta_0 < \gamma$ , l'ensemble  $\{z \in \mathbb{C}, |\Im z| < \tan \theta_0 |\Re z|\}$  est inclus dans  $\mathcal{S}$ , et nous verrons que :

**Définition 2.0.1**  $E \in \mathbb{C}$  est une résonance pour l'opérateur (0.1) si et seulement si  $-2\theta_0 < -2\theta < \text{Arg}(E - V_0) < 0$  et il existe une solution non triviale dans  $L^2(\mathbb{R}e^{i\theta})$  de

$$Pu = Eu. \quad (0.4)$$

Définissons ici quelques termes qui permettent de décrire le potentiel de façon simple lorsqu'on étudie les résonances près d'un niveau d'énergie  $E_0 \in \mathbb{R}$  :

**Définition 2.0.2** On appelle puits de potentiel associé au problème les composantes connexes de  $\{x \in \mathbb{R}, V(x) - E_0 \leq 0\}$ . Si de plus l'une de ces composantes est infinie (et donc de la forme  $[c, +\infty[$  ou  $]-\infty, c]$ ) on dira que c'est une mer.

Dans le cas où il y a deux mers, notées par exemple  $]-\infty, a]$  et  $[c, +\infty[$ , on dira que  $[a, c]$  est une île. On pourra alors parler de puits dans une île.

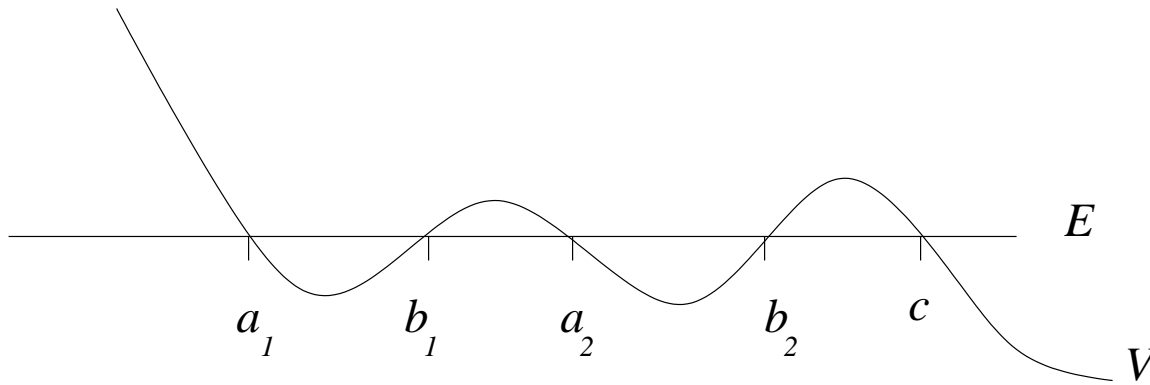
Enfin, dans le cas où un puits est réduit à un point, on parlera de puits ponctuel ou de fond de puits.

De la même manière :

**Définition 2.0.3** On appelle barrière de potentiel associé au problème toute composante connexe de  $\{x \in \mathbb{R}, V(x) - E_0 > 0\}$ .

Dans toute la suite on considère des niveaux d'énergies  $E > V_0$ , autrement dit le potentiel présente une barrière infinie à gauche et une mer à droite (condition (0.3)).

Dans une première partie, on étudie le cas de potentiels présentant deux puits et une mer pour les énergies considérées (voir (FIG1)). On traitera par la suite le cas de puits multiples.



**FIG1: potentiel ayant deux puits et une mer**

On commence par définir et étudier les fonctions qui vont intervenir dans l'équation qui donne les résonances, appelée équation de quantification.

Comme dans (FIG1), on désigne les points tournants par  $a_j(E) = a_j$ ,  $b_j(E) = b_j$ ,  $j = 1, 2$  et  $c(E) = c$ . Au niveau d'énergie  $E$ , les puits sont alors donnés par  $[a_j(E), b_j(E)]$ ,  $j = 1, 2$  et la mer par  $[c(E), +\infty[$ .

Les points tournants sont toujours supposés simples (Cf définition 2.2.1), on considère donc un intervalle d'énergie comme dans la proposition suivante :

**Proposition 2.0.4** *Soit  $C = \{x \in \mathbb{R}, V'(x) = 0\}$ . Si  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle fermé vérifiant*

$$V^{-1}(I) \cap C = \emptyset \quad (0.5)$$

et

$$\exists E_0 \in I, V^{-1}(E_0) = \{a_j(E_0), b_j(E_0), c(E_0), j = 1, 2\},$$

alors les fonctions  $a_j(E)$ ,  $b_j(E)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $c(E)$  existent et sont analytiques pour  $E \in I$ .

**Remarque 2.0.5** *Le potentiel représenté en (FIG1) n'a que quatre points critiques, on peut donc par exemple prendre  $I = [m + \epsilon, M - \epsilon]$ , pour  $\epsilon > 0$ , où  $m$  est le plus grand des minima du potentiel et  $M$  est le plus petit de ses maxima.*

Sous les hypothèses de la proposition 2.0.4, on peut introduire les fonctions suivantes :

$\forall E \in I$ ,

$$S_1(E) = \int_{b_1(E)}^{a_2(E)} |V - E|^{1/2} dt, \quad S_2(E) = \int_{b_2(E)}^{c(E)} |V - E|^{1/2} dt, \quad (0.6)$$

et

$$\tilde{\varphi}_i(E) = \int_{a_i(E)}^{b_i(E)} |V - E|^{1/2} dt, \quad i = 1, 2. \quad (0.7)$$

On démontre à l'aide d'intégrales d'action [4] le théorème :

**Théorème 2.0.6** *Soit un potentiel  $V$  vérifiant les hypothèses (0.2) et (0.3) définies au début de l'introduction.*

*Soit  $I$  un intervalle vérifiant (0.5).*

*Il existe  $\epsilon_0 = \epsilon_0(I, V) > 0$  tel que si*

$$\mathcal{D}_I = \{z \in \mathbb{C}, \min_{E \in I} |E - z| < \epsilon_0\}$$

*alors les fonctions  $a_j, b_j, c$  et  $\tilde{\varphi}_j, S_j$ ,  $j = 1, 2$  sont définies et holomorphes sur  $\mathcal{D}_I$ .*

*On a de plus*

$$\forall E \in I, \tilde{\varphi}'_j(E) > 0, \quad j = 1, 2. \quad (0.8)$$

On donne ici rapidement une idée de la façon avec laquelle on obtient l'équation de quantification à l'aide des fonctions définies ci-dessus.

Lorsque  $E$  appartient à un ensemble  $\mathcal{D}_I = \mathcal{D}_I(h)$  de la forme  $\{z \in \mathbb{C}, \Re z \in I, |\Im z| < h/C_0\}$ , on peut construire des bases de solutions de  $Pu = Eu$  au voisinage de chacun des points tournants  $a_j(E)$ ,  $b_j(E)$ ,  $c(E)$  (Cf appendices). On obtient également les matrices de transition entre ces



différentes bases. La définition 2.0.1 des résonances suggère de "relier" la solution exponentiellement décroissante à gauche de  $a_1(E)$ , à celles définies à droite de  $c(E)$ , ce que l'on fait grâce à ces matrices de transition. On obtient une équation de la forme (Cf proposition 2.2.3)

$$v_{a_1}^-(x, h, E) = m_{11}(E)u_c^-(x, h, E) + m_{12}(E)u_c^+(x, h, E).$$

On montre que les fonctions  $v_{a_1}^+$  et  $u_c^+$  sont exponentiellement décroissantes dans respectivement  $\mathbb{R}^- e^{i\theta}$  et  $\mathbb{R}^+ e^{i\theta}$  alors que la fonction  $u_c^-$  est exponentiellement croissante dans  $\mathbb{R}^+ e^{i\theta}$ . Les résonances sont alors données par les valeurs de  $E$  qui annulent  $m_{11}(E)$ . Cela donne l'équation de quantification :

**Théorème 2.0.7** *Soit un potentiel  $V$  vérifiant les hypothèses (0.2) et (0.3) .*

*Pour tout  $I$  vérifiant (0.5) et pour  $0 < h < h_0$ , il existe un ensemble  $\mathcal{D}_I$  comme défini plus haut et des fonctions  $p_j, q_j, \varphi_j, \psi_j$  de  $E$  et  $h$  qui sont analytiques en  $E \in \mathcal{D}_I$ , telles que  $E \in \mathcal{D}_I$  est une résonance pour l'opérateur de Schrödinger (0.1) si et seulement si*

$$\begin{aligned} & p_1 p_2 e^{(S_1+S_2)/h} \cos(\varphi_1/h) \cos(\varphi_2/h) - q_1 p_2 e^{(S_2-S_1)/h} \sin(\psi_1/h) \sin(\varphi_2/h) - \\ & i p_1 q_2 e^{(S_1-S_2)/h} \cos(\varphi_1/h) \sin(\psi_2/h) - i q_1 q_2 e^{-(S_1+S_2)/h} \cos(\psi_2/h) \sin(\psi_1/h) = 0. \end{aligned} \quad (0.9)$$

*De plus, quand  $h$  tend vers zéro, les fonctions  $p_j$  et  $q_j$  convergent uniformément vers 1 sur  $\mathcal{D}_I$ , et  $\varphi_j$  et  $\psi_j$  convergent uniformément vers  $\tilde{\varphi}_j, j = 1, 2$  sur  $\mathcal{D}_I$ .*

**Remarque 2.0.8** *Ce théorème donne une condition de quantification sans approximation car on a utilisé des solutions exactes de (0.4) (construites en appendice 4 comme dans [1]). A partir de l'équation donnée par le théorème ci-dessus, on peut faire des approximations en fonction des quantités qu'on veut estimer.*

On étudie les solutions de l'équation (0.9) à l'aide du théorème de Rouché. Cette équation peut s'écrire

$$\cos(\varphi_1(E, h)/h) \cos(\varphi_2(E, h)/h) = O\left(e^{-2S_0(E)/h}\right), \quad S_0 = \min(S_1, S_2).$$

On définit alors  $E_{j,k}(h) \in \mathbb{R}$  pour  $j = 1, 2$  par  $\cos(\varphi_j(E_{j,k}(h))/h) = 0$ ,

$$\varphi_j(E_{j,k}(h)) = (2k+1) \frac{\pi}{2} h, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (0.10)$$

$E_{j,k}(h) \in I$  si pour  $k > k_0$ ,

$$h \in \frac{\tilde{\varphi}_j(I')}{2k+1} \frac{2}{\pi} \equiv J_k^j, \quad (0.11)$$

où  $I'$  est un intervalle fermé inclus dans  $I$ .

Pour  $k$  assez grand et  $h \in J_k^j$ , le théorème de Rouché donne l'existence d'une résonance  $r_{j,k}(h) \in \mathcal{D}_I$  exponentiellement proche de  $E_{j,k}(h)$ ,  $j = 1, 2$ . On dira que  $r_{j,k}$  est associée au  $j^{\text{ème}}$  puits.

On étudie ensuite le croisement de résonances associées à chacun des deux puits.

**Définition 2.0.9** *On dira que les deux puits  $[a_1, b_1]$  et  $[a_2, b_2]$  n'interagissent pas dans  $I$  si*

$$\exists \eta > 0, \forall h \in J_k^i, \left| \cos \left[ \frac{\varphi_j(E_{i,k}(h))}{h} \right] \right| > \eta, \quad \text{pour } j = 1, 2; \quad i = 2, 1.$$

**Définition 2.0.10** Si  $r_j$   $j = 1, 2$  sont des résonances associées au  $j^{\text{ème}}$  puits, on dira qu'il y a croisement (resp. anticroisement) s'il existe (resp. n'existe pas)  $h > 0$  tel que  $r_1(h) = r_2(h)$ . Remarquons qu'il y a nécessairement une interaction lors d'un croisement.

Dans le cas d'un double puits asymétrique dans une île, V. Grecchi, A. Martinez et A. Sacchetti [6] [7] montrent que la transition entre croisement et anticroisement a lieu lorsque la barrière entre les deux puits vaut deux fois la valeur de la plus petite des barrières puits-mer. Pour le potentiel étudié, les croisements devraient donc avoir lieu lorsque  $S_1 = 2S_2$ . On montre en fait qu'il n'y a pas de croisement lorsque  $S_1 \neq 2S_2$ .

Pour cela, on étudie les interactions qui se produisent quand

$$\exists h_{\text{crois}} \in J_k^1 \cap J_l^2 \equiv J \text{ tel que } E_{1,k}(h_{\text{crois}}) = E_{2,l}(h_{\text{crois}}) \equiv E_{\text{crois}} \quad (0.12)$$

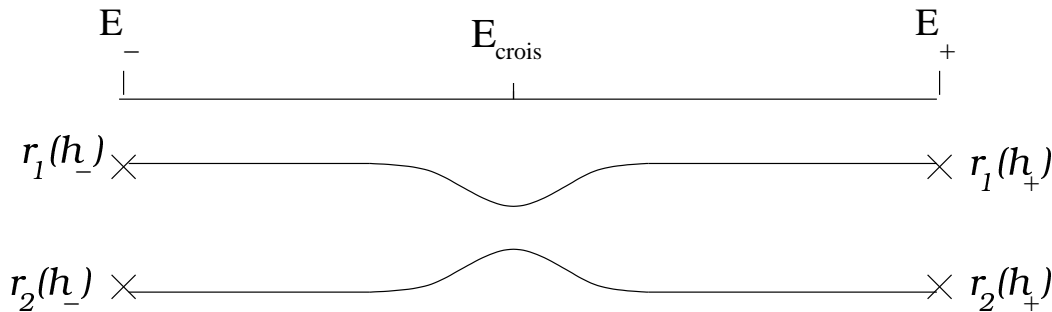
Si  $k, l$  sont assez grands, une estimation précise des parties imaginaires des résonances donne le théorème :

**Théorème 2.0.11** On considère l'opérateur de Schrödinger (0.1) défini par (0.2) et (0.3). Sous l'hypothèse d'interaction (0.12) et si  $S_1(E_{\text{crois}}) \neq 2S_2(E_{\text{crois}})$  il n'y a pas de croisement, c'est à dire que  $r_{1,k}(h) \neq r_{2,l}(h)$ ,  $h \in J$ .

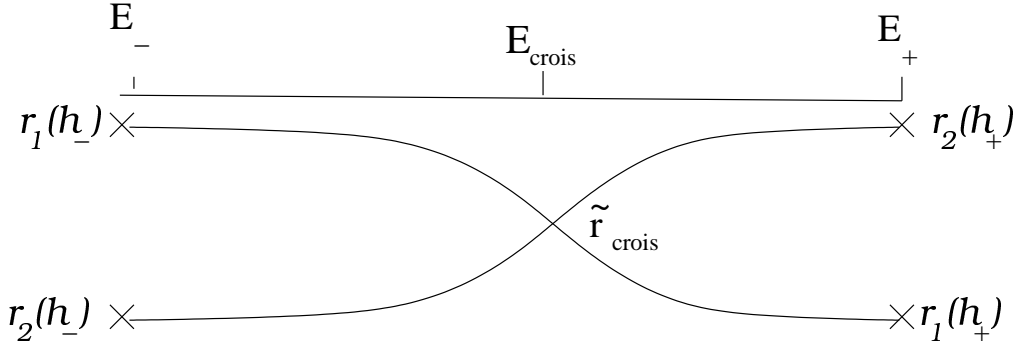
Par ailleurs, l'étude des parties réelles permet d'obtenir les graphes  $h \mapsto r_{1,k}(h)$  et  $h \mapsto r_{2,l}(h)$  dans le cas d'une interaction de type (0.12). On note  $J = [h_-, h_+]$ , pour  $h_- < h_{\text{crois}} < h_+$ . Soit  $r_1(h)$  la résonance associée au premier puits en  $h = h_-$ , c'est à dire la résonance exponentiellement proche de  $E_{1,k}$  en  $h = h_-$ . Soit  $r_2(h)$  la résonance associée au deuxième puits en  $h = h_-$ , c'est à dire la résonance exponentiellement proche de  $E_{2,l}$  en  $h = h_-$ . Alors

**Théorème 2.0.12** On considère l'opérateur de Schrödinger (0.1) défini par (0.2) et (0.3). Sous l'hypothèse d'interaction (0.12) et si  $S_1(E_{\text{crois}}) \neq 2S_2(E_{\text{crois}})$ ,  $S_1(E_{\text{crois}}) \neq S_2(E_{\text{crois}})$ , on a si  $S_1(E_{\text{crois}}) > S_2(E_{\text{crois}})$ , la résonance  $r_1(h)$  reste associée au premier puits en  $h = h_+$ , et la résonance  $r_2(h)$  reste associée au deuxième puits en  $h = h_+$ . On a des schémas du type de la figure (FIG2).

Si  $S_1(E_{\text{crois}}) < S_2(E_{\text{crois}})$ , la résonance  $r_1(h)$  devient associée au deuxième puits en  $h = h_+$ , et la résonance  $r_2(h)$  devient associée au premier puits en  $h = h_+$ . On a un schéma du type (FIG3).



**FIG2:**  $S_1(E_{\text{crois}}) > S_2(E_{\text{crois}})$



**FIG3:**  $S_1(E_{\text{crois}}) < S_2(E_{\text{crois}})$

On a noté  $I = [E_-, E_+]$ .

**Remarque 2.0.13** Dans la figure (FIG3),  $r_1(h)$  et  $r_2(h)$  prennent une même valeur notée  $\tilde{r}_{\text{crois}}$ . Cependant, le théorème 2.0.11 montre que nécessairement  $r_1(h_1) = \tilde{r}_{\text{crois}} = r_2(h_2)$  implique  $h_1 \neq h_2$  car il n'y a pas de croisement.

Ces deux résultats terminent l'étude des résonances dans le cas d'un potentiel présentant deux puits et une mer.

Une deuxième direction d'étude concerne le cas d'un potentiel présentant un nombre quelconque de puits. On s'intéresse alors aux parties imaginaires des résonances.

On considère un potentiel vérifiant (0.2), (0.3) avec  $M$  puits. On peut encore trouver l'équation des résonances grâce aux solutions construites en appendice. De manière analogue à (0.7) et (0.6), on définit  $\tilde{\varphi}_k$  et  $S_k$ ,  $1 \leq k \leq M$  prolongées sur un domaine du type  $\mathcal{D}_I$ .

**Théorème 2.0.14** On fait les hypothèses (0.2), (0.3), et on suppose que les puits n'interagissent pas.

Soit  $E_{l,k} \in I$  associé au  $l^{\text{ème}}$  puits comme dans (0.10). Pour  $h \in J_k^l$ , il y a une résonance exponentiellement proche de  $E_{l,k}(h)$  notée  $r_l(h)$ , et on trouve le terme principal

$$\Im r_l \sim -he^{-2\sum_i^M S_{ji}/h} \frac{\sin^2(\tilde{\varphi}_l(E_{l,k})/h)}{\prod_{l+1}^M \cos^2(\tilde{\varphi}_j(E_{l,k})/h) \cdot \tilde{\varphi}_l'(E_{l,k})}$$

où  $S_{jl} = S_j(E_{l,k}(h))$ .

Pour démontrer ce théorème, on transpose la méthode de Grigis-Buslaev du cadre Stark-Wannier au cadre semi-classique pour trouver un résultat très similaire à celui de [1].

Enfin, quand il y a interaction, il est difficile d'évaluer l'ordre de grandeur des termes intervenants dans l'équation des résonances. On obtient :

**Théorème 2.0.15** Soit  $r_l$  la résonance associée au  $l^{\text{ème}}$  puits comme ci-dessus pour l'opérateur (0.1), (0.2), (0.3). On suppose que  $l \leq N - 1$  et qu'il n'y a pas d'interaction avec les  $N - 1$  premiers puits. Si  $\beta_l = \Im r_l$ , on a pour  $h \in J_k$  :

$$\beta_l = O\left(he^{-2\sum_{i=1}^{N-1} S_j/h}\right). \quad (0.13)$$

Cette estimation est intéressante si les  $M - N$  dernières barrières  $S_j$ ,  $N \leq j \leq M$  sont petites.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : dans la première partie, on rappelle quelques notions sur les résonances. En particulier, on précise la définition utilisée et on relie comme dans [4] les solutions en  $\pm\infty$  ce qui exprime les résonances en terme de solution de  $Pu = Eu$ . Dans la deuxième partie, on construit des bases de solutions au voisinage des points tournants, ainsi que les matrices de transition associées. Grâce à ces matrices, on obtient dans la troisième partie l'équation des résonances et des formules exactes pour les parties réelles et imaginaires des résonances dans le cas d'un puits et une mer. On traite ensuite le cas de deux puits et une mer et on aboutit au résultat sur les croisements des théorèmes 2.0.11 et 2.0.12 dans la quatrième partie. Enfin dans la dernière partie, on se place dans le cas de  $M$  puits pour démontrer le théorème 2.0.14 lorsqu'il n'y a pas d'interaction et la majoration (0.13) s'il y a une interaction.

La construction de solutions formelles près et loin des points tournants ainsi que celle des solutions exactes utilisées dans les parties deux et trois a été placée en Appendice (1, 3 et 4). Enfin, quelques rappels sur les solutions de l'équation d'Airy, qu'on utilise dans la construction de solutions formelles près des points tournants, se trouvent dans l'Appendice 2.

## 2.1 Résonances en dimension un

Nous rappelons ici les définitions que nous utilisons pour les résonances, ainsi que quelques propriétés des fonctions résonnantes.

On considère tout au long de ce chapitre un opérateur  $P$  défini par (0.1), (0.2) et (0.3). Les hypothèses d'analyticité et de décroissance du potentiel permettent de définir les résonances par dilatation analytique [4]. Soit  $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$  tel que  $\tan \theta_0 < \gamma$ . Alors  $\mathbb{R}e^{i\theta_0} \in \mathcal{S}$ . Pour  $0 \leq \theta < \theta_0$ , on définit l'opérateur  $P_\theta$  sur  $L^2(\mathbb{R}e^{i\theta})$  par  $P_\theta = P$ .

**Définition 2.1.1** Les résonances de  $P$  sont les valeurs propres  $E$  de l'opérateur non auto-adjoint  $P_\theta$  vérifiant  $-2\theta < \text{Arg}(E - V_0) < 0$ , pour  $0 \leq \theta < \theta_0$ .

On s'intéresse aux résonances proches d'un réel  $E_0 > V_0$ . Pour  $x$  assez grand  $V - E_0 < 0$  : on a une mer à droite.

**Remarque 2.1.2** Pour  $E_0 < V_0$ , on trouve des solutions exponentiellement croissantes ou décroissantes en  $\pm\infty$ , et donc on obtient des valeurs propres réelles pour  $P$  avec des fonctions propres dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

On s'intéresse aux solutions dans  $L^2(\mathbb{R}e^{i\theta})$  de l'équation

$$Pu = Eu. \quad (1.1)$$

pour  $E$  proche de  $E_0$ .

On reprend de [4] (Appendice B) l'existence de deux solutions de Jost caractérisées par :

$$J_{\pm}(x, h, E) \sim e^{\pm i\sqrt{E-V_0}x/h} \text{ pour } \operatorname{Re}x \rightarrow +\infty, x \in \mathcal{S},$$

où la racine carrée est choisie positive sur  $\mathbb{R}^+$  et est prolongée analytiquement sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ .

Notons que pour  $-2\theta < \operatorname{Arg}(E - V_0)$ ,  $J_+ \in L^2(\mathbb{R}^+e^{i\theta})$  alors que  $J_-$  est exponentiellement croissante en  $+\infty$  sur  $\mathbb{R}^+e^{i\theta}$ .

Lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ , l'hypothèse (0.3) donne pour l'équation (1.1) ci-dessus l'existence d'une solution exponentiellement décroissante, unique modulo une constante multiplicative. On la note  $K_-$ . Toute solution linéairement indépendante de  $K_-$  sera donc exponentiellement croissante en  $-\infty$ . On a bien sûr, toujours grâce à (0.3),  $K_- \in L^2(\mathbb{R}^-e^{i\theta})$ , et on peut décrire les résonances par :

**Proposition 2.1.3**  *$E$  est une résonance si et seulement si  $J_+(x, h, E)$  est colinéaire à  $K_-(x, h, E)$ .*

C'est avec cette caractérisation des résonances que nous allons travailler.

## 2.2 Solutions et matrices de transition

Dans cette partie, on réécrit les solutions construites en appendice et on rappelle leur comportements asymptotiques ainsi que leur matrice de transition. On exprime ensuite  $J_{\pm}$  et  $K_-$  en fonction de ces solutions.

On considère dans cette partie un niveau d'énergie réel  $E$  fixé. Commençons par définir les points tournants (simples) au niveau d'énergie  $E$  :

**Définition 2.2.1** *On dira que  $a = a(E) \in \mathbb{R}$  est un point tournant pour l'équation (1.1) si  $V(a) = E$ .*

*On dira que  $a$  est un point tournant simple si de plus  $V'(a) \neq 0$ .*

Si  $a$  est un point tournant simple, on définit  $T^{\pm}(a)$  le point tournant suivant ou précédant. On prendra  $T^{\pm}(a) = \pm\infty$  s'il n'y en a pas.

Pour  $N \in \mathbb{N}$  fixé, on a construit en appendice 4 des solutions exactes  $f_a^2, g_a^2, h_a^2$  ayant un comportement asymptotique connu à l'ordre  $N$  lorsque  $h$  tend vers zéro, dans le domaine  $]T^-(a) + 2\epsilon, T^+(a) - 2\epsilon[$ ,  $\epsilon > 0$ .

On note désormais ces solutions de la manière suivante :

$$u_a^- = f_a^2, \quad u_a^+ = \bar{f}_a^2, \quad v_a^+ = g_a^2, \quad v_a^- = h_a^2.$$

On rappelle les comportements asymptotiques :

Si  $x \in ]T^-(a) + 2\epsilon, T^+(a) - 2\epsilon[ \cap \{V - E < -\delta\}$ , pour tout  $\delta > 0$ ,

$$u_a^\pm(x, h, E) = e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int_a^x |V-E|^{1/2} dt} \sqrt{\frac{\hbar}{2}} [|V - E|^{-1/4} + O(h)], \text{ si } V'(a) > 0;$$

$$u_a^\pm(x, h, E) = e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int_a^x |V-E|^{1/2} dt} \sqrt{\frac{\hbar}{2}} [\pm i |V - E|^{-1/4} + O(h)], \text{ si } V'(a) < 0.$$

Si  $x \in ]T^-(a) + 2\epsilon, T^+(a) - 2\epsilon[ \cap \{V - E > \delta\}$ , pour tout  $\delta > 0$ ,

$$v_a^\pm(x, h, E) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\pm 1} e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int_a^x |V-E|^{1/2} dt} \sqrt{\frac{\hbar}{2}} [|V - E|^{-1/4} + O(h)], \text{ si } V'(a) > 0;$$

$$v_a^\pm(x, h, E) = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\pm 1} e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int_a^x |V-E|^{1/2} dt} \sqrt{\frac{\hbar}{2}} [|V - E|^{-1/4} + O(h)], \text{ si } V'(a) < 0.$$

On a ici des  $O(h)$  uniformes sur  $I$ , pour  $x$  dans tout compact.

On réécrit maintenant les matrices de transition entre ces différentes solutions (données dans la partie 2.9.2) :

$$\begin{pmatrix} v_a^- \\ v_a^+ \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u_a^- \\ u_a^+ \end{pmatrix} \text{ où } T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & e^{i\pi/4} \\ e^{i\pi/4} & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}.$$

Soit  $b = T^+(a) < +\infty$  un point tournant également simple. Si  $V - E > 0$  sur  $]a, b[$ , on a construit les solutions de sorte que

$$\begin{pmatrix} v_a^- \\ v_a^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Z^{-1} \\ -Z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_b^- \\ v_b^+ \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

où  $Z$  est défini dans l'appendice 4,  $Z = Z^N = e^{S/h}(1 + O(h))$ ,  $S = S(E) = \int_a^b |V - E|^{1/2}$ .

Si maintenant  $V - E < 0$  sur  $]a, b[$ , on écrit

$$\begin{pmatrix} u_a^- \\ u_a^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{W} & \overline{Y} \\ Y & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_b^- \\ u_b^+ \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

et cette fois  $W = W^N + O(h^N) = ie^{i\tilde{\varphi}/h}(1 + O(h))$ ,  $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(E) = \int_a^b |V - E|^{1/2}$  et  $Y = O(h^N)$ .

Notons  $(Z)$  et  $(W)$  ces deux matrices.

**Remarque 2.2.2** Si on note  $\mathcal{W}$  le wronskien, on a par construction  $\mathcal{W}(v_a^-, v_a^+) = \mathcal{W}(v_b^-, v_b^+) = 1$  et  $\mathcal{W}(u_a^-, u_a^+) = \mathcal{W}(u_b^-, u_b^+) = i$ , donc  $\det(Z) = 1$  et  $\det(W) = 1$ .

Si  $a$  et  $c$  désignent respectivement le premier et le dernier point tournant sur l'axe réel, on va maintenant montrer que les solutions de Jost  $J_\pm$  et la solution exponentiellement décroissante  $K_-$  sont proportionnelles aux solutions  $u_c^\pm$  et  $v_a^-$  respectivement.

Lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ , la remarque 2.8.8 de l'appendice 3 donne l'équivalent :

$$v_a^- \sim_{x \rightarrow -\infty, h < h_0} e^{\frac{1}{\hbar} \int_a^x |V-E|^{1/2} dt} \sqrt{1/2} ((V - E)^{-1/4} + O(h))$$

et donc comme  $x < a$ ,  $v_a^-$  est exponentiellement décroissante.  $v_a^-$  est donc nécessairement proportionnelle à  $K_-$  (sinon elle serait exponentiellement croissante).

De même, lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , on a :

$$u_c^\pm \sim_{x \rightarrow +\infty, h < h_0} e^{\pm \frac{i}{h} \int_c^x |V-E|^{1/2}} \left( (V-E)^{-1/4} + O(h) \right).$$

On voit donc que  $u_c^\pm$  sont proportionnelles à  $J_\pm$ .

Avec ces solutions la proposition 2.1.3 peut être réécrite :

**Proposition 2.2.3** Soit  $M = (m_{ij}(E))$  la matrice de transition :

$$\begin{pmatrix} v_a^- \\ v_a^+ \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_c^- \\ u_c^+ \end{pmatrix}.$$

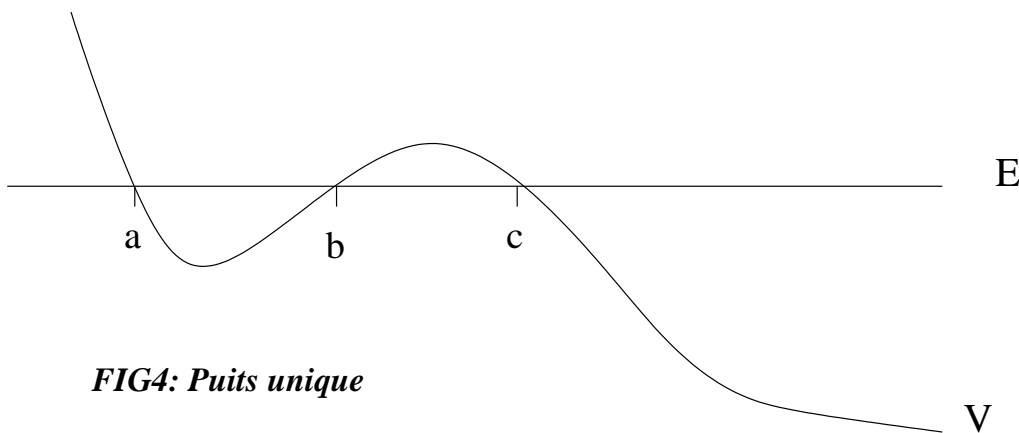
$E$  est une résonance si et seulement si  $m_{11} = 0$ .

Cette matrice  $M$  s'exprime facilement à l'aide de matrices  $T$ ,  $(Z)$  et  $(W)$ .

## 2.3 Cas d'un seul puits

On se place dans le cas d'un unique puits de potentiel et on définit et étudie les fonctions  $p$ ,  $q$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  qui nous permettent d'écrire la condition de quantification déterminant les résonances. On montre ensuite qu'on peut étendre ces définitions ainsi que les constructions de la partie 2.3 dans un domaine de  $\mathbb{C}$  convenable. Cela nous donnera l'existence de résonances exponentiellement proches de  $\mathbb{R}$ , ainsi qu'une estimation de leur partie imaginaire. On terminera cette partie en donnant un aperçu du cas d'un nombre quelconque de puits.

Soit donc un potentiel  $V$  ayant un unique puits de potentiel pour un intervalle d'énergie  $I \subset \mathbb{R}$  qui vérifie les hypothèses de la proposition 2.0.4 dans l'introduction.



**FIG4: Puits unique**

Pour  $E \in I$ , on note  $a = a(E)$ ,  $b = b(E)$  et  $c = c(E)$  les points tournants simples, et on considère les solutions de la partie précédente au voisinage de chacun de ces points  $u_d^\pm$ ,  $v_d^\pm$ ,  $d = a, b, c$ , avec  $N = 1$ . Si on écrit

$$\begin{pmatrix} v_a^- \\ v_a^+ \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_c^- \\ u_c^+ \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

on a immédiatement

$$M = T(W)T^{-1}(Z)T,$$

où  $(W)$  et  $(Z)$  sont donnés par (2.1) et (2.2) avec

$$\begin{cases} W(E, h) = ie^{i\tilde{\varphi}(E)/h}(1 + O(h)), & \tilde{\varphi}(E) = \int_a^b |V - E|^{1/2} \\ Y(E, h) = O(h) \end{cases} \quad (3.2)$$

et

$$Z = e^{S/h}, S = \int_b^c |V - E|^{1/2}.$$

**Remarque 2.3.1** *D'après la remarque 2.9.1 à la fin de l'appendice 4, les  $O(h)$  et leurs dérivées en  $E$  sont uniformes sur  $I$  dans (3.2).*

On montre maintenant (0.8) :

$$\forall E \in I, \tilde{\varphi}(E) = \int_{a(E)}^{b(E)} (E - V(t))^{1/2} dt$$

et donc

$$\forall E \in I, \tilde{\varphi}'(E) = b'(E)(E - V(b(E)))^{1/2} - a'(E)(E - V(a(E)))^{1/2} + (1/2) \int_{a(E)}^{b(E)} (E - V(t))^{-1/2} dt.$$

Finalement,

$$\forall E \in I, \tilde{\varphi}'(E) = (1/2) \int_{a(E)}^{b(E)} (E - V(t))^{-1/2} dt > 0.$$

On a bien (0.8).

On prolonge les fonctions introduites jusqu'à présent dans un domaine de  $\mathbb{C}$  près de l'axe réel :

**Proposition 2.3.2** *Il existe  $h_0 > 0$ ,  $C_0 > 0$  tels que pour  $h < h_0$ , les fonctions  $S$ ,  $\tilde{\varphi}$ ,  $W$  et  $Y$  admettent un prolongement holomorphe sur*

$$\mathcal{D}_I = \{z \in \mathbb{C}, \Re z \in I, |\Im z| < h/C_0\}.$$

*De plus, ces fonctions vérifient encore (3.2).*



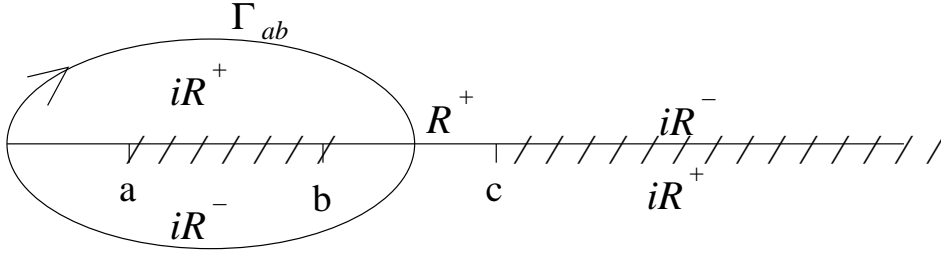
**Preuve :** On peut définir les points tournants  $a(E)$ ,  $b(E)$  et  $c(E)$  de manière holomorphe sur un voisinage de  $I$  dans  $\mathbb{C}$  grâce aux hypothèses d'analyticité du potentiel (0.2) et de simplicité des points tournants (0.5).

De plus,  $\tilde{\varphi}$  et  $S$  se prolongent sur un voisinage complexe de  $I$  à l'aide d'intégrales d'action [4] : pour  $E \in I$ , on fixe les déterminations de  $z \mapsto (V(z) - E)^{1/2}$  comme suit :

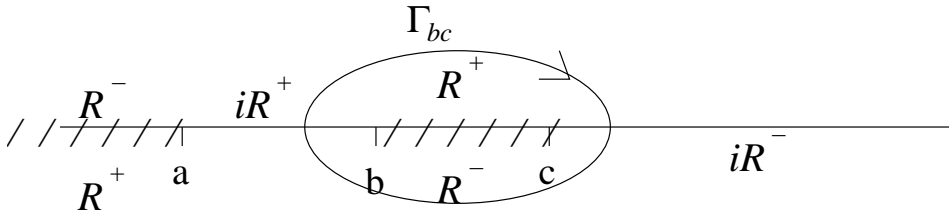
soit  $(V(z) - E)_1^{1/2}$  la racine carrée de  $(V - E)$  définie, positive dans  $]b, c[$ . On la prolonge holomorphiquement dans  $\mathbb{C} \setminus ([a, b] \cup [c, +\infty[)$ .

soit  $(V - E)_2^{1/2}$  la racine carrée de  $(V - E)$  analytique dans  $]a, b[$  prenant ses valeurs dans  $i\mathbb{R}^+$ . On la prolonge holomorphiquement dans  $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, a] \cup [b, c])$ .

On a écrit dans les graphes ci-dessous certaines des valeurs prises par ces racines carrées.



**FIG5: détermination de  $(V-E)_1^{1/2}$**



**FIG6: détermination de  $(V-E)_2^{1/2}$**

On peut prolonger ces déterminations lorsque  $E$  est dans un voisinage complexe de  $I$ .  $\tilde{\varphi}$  et  $S$  sont alors données par

$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_{ab}} (V(t) - z)_1^{1/2} dt, \quad (3.3)$$

$$S(z) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{bc}} (V(t) - z)_2^{1/2} dt. \quad (3.4)$$

où  $\Gamma_{ab}$  et  $\Gamma_{bc}$  sont définis en (FIG5) et (FIG6). Pour  $E \in I$ , ces définitions redonnent bien  $\tilde{\varphi}$  et  $S$  réelles positives.

Il nous reste à prolonger les solutions et les matrices de transition construites en appendice. Si  $E$  est dans un voisinage complexe de  $I$ , on peut construire les solutions formelles de l'appendice 3. Si de plus  $E \in \{z \in \mathbb{C}, \Re z \in I, |\Im z| < h/C_0\}$ ,  $C_0 > 0$  grand, on a des formules de connexions

similaires à celles de la partie 2.9.3 car les croissances et décroissances exponentielles restent les mêmes. On peut ensuite construire des solutions exactes ayant les mêmes wronskiens et les matrices de transition s'expriment avec les mêmes formules (2.1) et (2.2) en remplaçant  $\overline{W}$  et  $\overline{Y}$  par  $W^*$  et  $Y^*$ . Enfin, on a encore les estimations (3.2).  $\square$

On revient à la matrice de transition  $M$ , qui est maintenant définie pour  $E \in \mathcal{D}_I$ . On commence par étudier la matrice  $T(W)T^{-1}$  lorsque  $E \in I$  :

$$T(W)T^{-1} = \begin{pmatrix} \Re W - \Im Y & \Re Y - \Im W \\ \Re Y + \Im W & \Re W + \Im Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re(W + iY) & -\Im(W - iY) \\ \Im(W + iY) & \Re(W - iY) \end{pmatrix}.$$

On écrit

$$\begin{cases} W - iY = ip(E, h)e^{i\varphi(E, h)/h} \\ W + iY = iq(E, h)e^{i\psi(E, h)/h} \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} p(E, h) = |W - iY| \\ q(E, h) = |W + iY| \end{cases}. \quad (3.5)$$

D'après (3.2),  $p = 1 + O(h)$  et  $q = 1 + O(h)$ .

On définit  $\varphi$  et  $\psi$  comme suit :

$$\frac{W - iY}{i} = pe^{i\varphi/h} = (1 + O(h))e^{i\varphi/h}$$

et

$$\frac{W - iY}{i} = (1 + O(h))e^{i\tilde{\varphi}/h} \text{ d'après (3.2).}$$

Ainsi

$$e^{i(\varphi - \tilde{\varphi})/h} = \frac{(W - iY)e^{-i\tilde{\varphi}/h}}{ip} = (1 + O(h)),$$

et on définit  $\varphi$  par

$$\frac{\varphi(E, h) - \tilde{\varphi}(E)}{h} = \arg\left(\frac{(W - iY)e^{-i\tilde{\varphi}(E)/h}}{ip}\right) \in [-Ch, Ch] \subset ]-\pi, \pi[. \quad (3.6)$$

On a  $\varphi - \tilde{\varphi} = O(h^2)$  uniformément sur  $I$  (qui est compact), ainsi que des relations analogues pour les dérivées en  $E$ .

On définit de manière équivalente  $\psi(E, h)$  pour avoir encore  $\frac{\partial^n \psi}{\partial E^n} - \tilde{\varphi}^{(n)} = O(h^2)$ ,  $n \geq 0$ .

On prolonge ces fonctions dans un domaine de  $\mathbb{C}$  :

**Proposition 2.3.3** *Il existe  $h_0 > 0$  et  $C_0 > 0$  tels que les fonctions  $E \mapsto p(E, h)$ ,  $E \mapsto q(E, h)$ ,  $E \mapsto \varphi(E, h)$ ,  $E \mapsto \psi(E, h)$  admettent un prolongement analytique sur*

$$\mathcal{D}_I = \{z \in \mathbb{C}, |\Im z| \leq h/C_0\}.$$

De plus,

$\forall h < h_0, \forall E \in \mathcal{D}_I, \forall n \in \mathbb{N}, \exists C_n,$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^n \varphi(E, h)}{\partial E^n} - \frac{\partial^n \tilde{\varphi}(E)}{\partial E^n} \right| &\leq C_n h^2, \\ \left| \frac{\partial^n \psi(E, h)}{\partial E^n} - \frac{\partial^n \tilde{\varphi}(E)}{\partial E^n} \right| &\leq C_n h^2, \\ \left| \frac{\partial^n p(E, h)}{\partial E^n} - 1 \right| &\leq C_n h, \\ \left| \frac{\partial^n q(E, h)}{\partial E^n} - 1 \right| &\leq C_n h. \end{aligned} \quad (3.7)$$

**Preuve :** On considère le domaine de  $\mathbb{C}$  donné par la proposition 2.3.2  $\mathcal{D}_I$ . On va montrer qu'on peut augmenter  $C_0$  pour avoir la proposition.

On note  $\Gamma(E) = \bar{E}$  la conjugaison dans  $\mathbb{C}$ . Si  $f(E, h)$  est une fonction holomorphe sur  $\mathcal{D}_I$ , on note

$$f^*(E, h) \equiv \Gamma(f(\Gamma(E), h)) \quad (3.8)$$

qui est une fonction holomorphe sur  $\overline{\mathcal{D}_I} = \mathcal{D}_I$ .

Soit  $C - 1 = \sup_{\mathcal{D}_I} |\tilde{\varphi}'| = \sup_{\mathcal{D}_I} |(\tilde{\varphi}^*)'|$  grâce à la symétrie de  $\mathcal{D}_I$ .

On a

$$|\Im \tilde{\varphi}(E)| \leq C |\Im E| \text{ si } |\Im E| < \epsilon.$$

Si  $|\Im E| \leq h/C_0$  et  $h < C_0 \epsilon$ , alors  $|e^{i\tilde{\varphi}(E)/h}| \leq e^{C/C_0} < +\infty$  donc  $e^{i\tilde{\varphi}(E)/h}$  est borné sur  $\mathcal{D}_I$ .

D'autre part,  $(W - iY)(W^* + iY^*) = e^{i(\tilde{\varphi}(E) - \tilde{\varphi}^*(E))/h} + O(h)$ .

On commence donc par étudier  $\tilde{\varphi}(E) - \tilde{\varphi}^*(E)$ .

Comme  $\Gamma(\tilde{\varphi}(E)) = \tilde{\varphi}^*(\bar{E})$ , on a

$$\tilde{\varphi}(E) - \tilde{\varphi}^*(E) = \tilde{\varphi}(E) - \Gamma(\tilde{\varphi}(E)) + \tilde{\varphi}^*(\bar{E}) - \tilde{\varphi}^*(E),$$

$$\tilde{\varphi}(E) - \tilde{\varphi}^*(E) = 2i\Im \tilde{\varphi}(E) + 2i\Im E \int_0^1 (\tilde{\varphi}^*)'((1-t)\bar{E} + tE) dt,$$

et donc  $|\tilde{\varphi}(E) - \tilde{\varphi}^*(E)| \leq 4C |\Im E|$ .

Si  $C_0 > 0$  est assez grande et  $|\Im E| \leq h/C_0$

$$\left| e^{i(\tilde{\varphi}(E) - \tilde{\varphi}^*(E))/h} - 1 \right| \leq 5C/C_0 < 1/4.$$

Pour  $h < h_0$ , quitte à diminuer  $h_0$ , on a alors  $|(W - iY)(W^* + iY^*) - 1| < 1/2$ .

On définit

$$\begin{aligned} p(E, h) &= [(W(E, h) - iY(E, h))(W^*(E, h) + iY^*(E, h))]^{1/2}, \\ q(E, h) &= [(W(E, h) + iY(E, h))(W^*(E, h) - iY^*(E, h))]^{1/2}, \end{aligned}$$

où on choisit la détermination de la racine carrée positive sur les réels positifs. Cette racine carrée étant analytique sur le disque de centre 1 et de rayon 1/2, on obtient bien des fonctions holomorphes sur  $\mathcal{D}_I$ . De plus, si  $E \in \mathbb{R}$ ,  $f^*(E) = \Gamma(f(E))$ , donc les expressions ci-dessus donnent bien des prolongements de (3.5). Enfin, la proposition 2.3.2 montre qu'on a bien (3.7) pour  $p$  et  $q$ .

**Remarque 2.3.4** Par construction  $p(E, h) = p^*(E, h)$  et  $q(E, h) = q^*(E, h)$ .

On va maintenant prolonger pour  $E \in \mathcal{D}_I$  et  $h < h_0$  la fonction  $\varphi(E, h)$  donnée par (3.6). Soit

$$Z(E, h) = \frac{W(E, h) - iY(E, h)}{ip(E, h)} e^{-i\tilde{\varphi}(E)/h}.$$

Si  $E \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\varphi(E, h) - \tilde{\varphi}(E)}{h} = \text{Arg}[Z] = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{i} \frac{Z(E, h) - Z^*(E, h)}{Z(E, h) + Z^*(E, h)}\right)$$

Or d'après (3.2)  $Z(E, h) = 1 + O(h)$  donc  $\frac{1}{i} \frac{Z(E, h) - Z^*(E, h)}{Z(E, h) + Z^*(E, h)} = O(h)$ .

Comme Arctan admet un prolongement analytique près de zéro, on définit avec la même formule  $\frac{\varphi(E, h) - \tilde{\varphi}(E)}{h}$  pour  $E \in \mathcal{D}'$  et on obtient une fonction réelle analytique. La proposition 2.3.2 donne encore (3.7).

On procède de la même manière pour prolonger  $\psi$  et on a le lemme.  $\square$

On reprend l'étude de la matrice de transition  $M$  donnée par (3.1). On écrit maintenant

$$T(W)T^{-1} = \begin{pmatrix} -q\sin(\psi/h) & -p\cos(\varphi/h) \\ q\cos(\psi/h) & -p\sin(\varphi/h) \end{pmatrix}.$$

On note  $M_{pq}(\varphi, \psi, S)$  la matrice

$$M_{pq}(\varphi, \psi, S) = T(W)T^{-1}(Z) = \begin{pmatrix} pe^{S/h}\cos(\varphi/h) & -qe^{-S/h}\sin(\psi/h) \\ pe^{S/h}\sin(\varphi/h) & qe^{-S/h}\cos(\psi/h) \end{pmatrix}$$

Ainsi  $M = M_{pq}(\varphi, \psi, S)T$ . Si  $(m_{ij})$  désignent les coefficients de  $M$ , on calcule

$$m_{11} = e^{-i\pi/4} pe^{S(E)/h} \cos(\varphi(E, h)/h) - e^{i\pi/4} qe^{-S(E)/h} \sin(\psi(E, h)/h).$$

La proposition 2.2.3 conduit à :

**Proposition 2.3.5** Il existe  $h_0 > 0$  et  $C_0 > 0$  tels que si  $h < h_0$  et

$$\mathcal{D}_I = \{z \in \mathbb{C}, |\Im z| \leq h/C_0\},$$

$E \in \mathcal{D}_I$  est une résonance si et seulement si :

$$pe^{S(E)/h} \cos(\varphi(E, h)/h) - iqe^{-S(E)/h} \sin(\psi(E, h)/h) = 0.$$

On réécrit cette proposition grâce aux estimations (3.7) :

$$e^{S(E)/h} \cos(\varphi(E, h)/h) = i(1 + O(h))e^{-S(E)/h} \sin(\varphi(E, h)/h),$$

où  $|O(h)| \leq C_0 h$  uniformément sur  $\mathcal{D}_I$ . En particulier, sur  $\mathcal{D}_I$ ,  $\cos(\varphi(E, h)/h) = O(e^{-2S(E)/h})$ . On peut diminuer  $h_0$  (ou augmenter  $C_0$ ) pour avoir  $|\sin(\varphi(E, h)/h)| > 1/2$  si  $E \in \mathcal{D}_I$  vérifie l'équation de quantification. Finalement

$$u = u(E, h) = \cotan\left(\frac{\varphi(E, h)}{h}\right)$$

est bien définie sur  $\mathcal{D}_I \times ]0, h_0]$  et

**Théorème 2.3.6** *Si  $h < h_0$ ,  $E \in \mathcal{D}_I$  est une résonance pour l'opérateur de Schrödinger (0.1) si et seulement si  $\varphi = \varphi(E, h)$  et  $S = S(E)$  satisfont l'équation suivante :*

$$e^{S/h}u - ie^{-S/h}(1 + R(E, h)) = 0, \quad (3.9)$$

où

$$R(E, h) = \frac{q(E, h) \sin(\psi(E, h)/h)}{p(E, h) \sin(\varphi(E, h)/h)} - 1$$

est un  $O(h)$  ainsi que toutes ses dérivées uniformément sur  $\mathcal{D}_I$ .

Cette équation montre que  $E \in I$  ne peut être une résonance. Cependant, lorsque  $h$  tend vers zéro et  $E \in I$ ,  $u(E, h)$  tend vers zéro.

On définit  $E_k$  par

$$u(E_k(h), h) = \cotan\left(\frac{\varphi(E_k(h), h)}{h}\right) = 0, \quad \varphi(E_k(h), h) = (2k + 1)\frac{\pi}{2}h.$$

Si on fixe  $\eta_0 > 0$  et  $I'$  un intervalle inclus dans  $I$  tel que  $I' + [-\eta_0, \eta_0] \subset I$ , alors l'estimation (3.7) implique

$$\forall E \in I, |\varphi(E, h) - \tilde{\varphi}(E)| < C_0 h^2 < \eta_0$$

dès que  $h < h_0$ , quitte à diminuer  $h_0$ .  $\tilde{\varphi}$  étant bijective sur  $I$ , on a donc montré que si

$$J_k = \frac{\tilde{\varphi}(I')}{2k + 1} \frac{2}{\pi},$$

alors

$$\exists k_0 > 0, \forall k \geq k_0, \forall h \in J_k, E_k(h) \in I.$$

On va montrer qu'il y a une résonance exponentiellement proche de  $E_k(h)$  lorsque  $k \geq k_0$ , pour tout  $h \in J_k$  :

**Proposition 2.3.7** *Il existe  $D_0 > 0$ ,  $k_0 > 0$  tels que pour tout  $k \geq k_0$  et  $h \in J_k$ , il y a une unique résonance  $r(h)$  dans  $\{z \in \mathbb{C}, |E_k(h) - z| < h^2\}$ . On l'écrit  $r(h) = E_k(h) + z(h)$ . De plus,*

$$|z(h)| < D_0 h e^{-2S(E(h))/h}.$$

On voit que les parties imaginaires des résonances qui nous intéressent sont exponentiellement décroissantes en  $h$ , elles sont donc dans un domaine du type  $\mathcal{D}_I \subset \{|\Im z| < h/C_0\}$  dès que  $h < h_0$ . Avant de démontrer cette proposition, on démontre un lemme qui en simplifiera la preuve :

**Lemme 2.3.8** Si  $E \in \mathcal{D}_I$  et  $E + z \in \mathcal{D}_I$ ,

$$\varphi(E + z, h) = \varphi(E, h) + \varphi'(E, h)z + o(z)$$

où  $o(z)$  est uniforme en  $E \in \mathcal{D}_I$  et  $h < h_0$ .

**Preuve :** Grâce à (3.7), on a si  $h < h_0$ ,

$$\left| \frac{\varphi(E + z, h) - \varphi(E, h) - \varphi'(E, h)z}{z^2} \right| \leq \max_{E \in \mathcal{D}_I} |\varphi''(E, h)| \leq \max_{E \in \mathcal{D}_I} |(\tilde{\varphi})''(E)| + 1.$$

□

**Preuve de la proposition 2.3.7 :** Soit  $k \geq k_0$  afin que  $E_k(h) \in I$  lorsque  $h \in J_k$ . On note  $E(h) = E_k(h)$ , et

$$f(E, h) = e^{S(E)/h} u(E, h),$$

$$g(E, h) = -i(1 + R(E, h))e^{-S(E)/h}.$$

On va appliquer le théorème de Rouché aux fonctions  $f$  et  $g$ . Un développement de  $E \mapsto u(E, h)$  au voisinage de  $E(h)$  donne :

$$u(E(h) + z, h) = u(E(h), h) - \frac{\varphi'(E(h), h)}{\sin^2(\varphi(E(h), h)/h)} \frac{z}{h} + o(z/h) = -\varphi'(E(h), h) \frac{z}{h} + o\left(\frac{z}{h}\right). \quad (3.10)$$

Soit  $m = \min_{E \in I} |\tilde{\varphi}'(E)|$ . (0.8) implique que  $m > 0$  et (3.7) donne  $|\varphi'(E, h), h| > 3m/4$  pour  $h$  assez petit.

Ainsi si on fixe  $\epsilon > 0$  assez petit,

$$|u(E(h) + z, h)| \geq \frac{m}{2} \left| \frac{z}{h} \right| \text{ si } \left| \frac{z}{h} \right| < \epsilon$$

La continuité uniforme de  $S(E)$  sur  $I$  donne de plus :

$$|f(E(h) + z, h)| \geq \frac{m}{2} e^{-2\epsilon} e^{S(E(h))/h} \left| \frac{z}{h} \right|, \text{ si } \left| \frac{z}{h} \right| < \epsilon.$$

D'autre part,  $|R(E, h)| \leq Ch \leq C$  si  $h < h_0$  donc dès que  $|z| < \epsilon h$ ,

$$|g(E + z, h)| < C' e^{2\epsilon} e^{-S(E(h))/h}, \quad C' > 0.$$

Si

$$|z| = h^2 \quad (3.11)$$

et  $h < \epsilon$ , alors  $|z| < \epsilon h$  et

$$\forall h < h_0, |f(E(h) + z, h)| \geq \frac{m}{2} e^{-2\epsilon} h e^{S(E(h))/h}.$$

La majoration de  $|g|$  montre qu'il existe  $h_0 > 0$  tel que si  $h < h_0 < \epsilon$ ,  $|z| = h^2$ , alors

$$\left| f(E(h) + z, h) \right| > \left| g(E(h) + z, h) \right| \quad (3.12)$$

Comme  $f(E(h), h) = 0$ , l'analyticité de  $f$  et  $g$  nous permet d'utiliser le théorème de Rouché pour obtenir l'existence d'une unique résonance dans l'ensemble  $\{z \in \mathbb{C}, |E_k(h) - z| < h^2\}$  si  $h < h_0$ . On écrit cette résonance  $r(h) = E(h) + z(h)$ . Pour obtenir l'estimation de  $z(h)$ , il suffit de reprendre la fin de la démonstration de la proposition, en remplaçant (3.11) par

$$|z| = Dhe^{-2S(E(h))/h}.$$

On reprend les calculs ci-dessus pour obtenir une constante  $D_0$  telle que si  $D \geq D_0$ , on a (3.12) et on conclut grâce au théorème de Rouché.  $\square$

Nous allons maintenant estimer la partie imaginaire de cette résonance.

**Théorème 2.3.9** *On se place sous les hypothèses de la proposition 2.3.7. Si  $k \geq k_0$  et  $h \in J_k$ , la partie imaginaire de la résonance  $r(h)$  donnée par la proposition 2.3.7 est*

$$\Im(r(h)) = -\frac{he^{-2S(E(h))/h}}{\tilde{\varphi}'(E(h))}(1 + O(h)).$$

**Preuve :** Un développement limité en  $E_k(h) = E(h)$  de l'équation de quantification (3.9) donne :

$$e^{S(E(h))/h} \left( -\varphi'(E(h), h) \frac{z}{h} + O\left(\frac{z^2}{h^2}\right) \right) - ie^{-S(E(h))/h} (1 + R(E(h), h)) = 0.$$

En prenant la partie imaginaire cette équation en  $E(h) + z(h) = r(h)$ , on trouve

$$\Im(r(h)) = \Im(z(h)) = -\frac{he^{-2S(E(h))/h}}{\varphi'(E(h), h)}(1 + O(h))$$

car  $\varphi'(E(h), h) \in \mathbb{R}$ .

Avec (3.7), on obtient le théorème.  $\square$

Terminons cette partie en évoquant le cas de puits multiples qu'on étudie plus précisément dans la partie 2. 6.

On considère un potentiel ayant  $M$  puits  $[a_1, b_1]$ ,  $[a_2, b_2]$ , ...,  $[a_M, b_M]$  et une mer  $[c, +\infty[$  pour un intervalle d'énergie  $I$  (voir (FIG8) partie 2.6).

La matrice de transition  $M$  reliant les solutions  $v_{a_1}^\pm$  et  $u_c^\pm$  est donnée par

$$M = \prod_{1 \leq j \leq M} (T(W_j)T^{-1}(Z_j))T,$$

où les matrices  $(W_j)$  et  $(Z_j)$  sont similaires à (2.1), (2.2) avec  $W_j = ie^{i\tilde{\varphi}_j/h}(1 + O(h))$ ,  $Y_j = O(h)$  et  $Z_j = e^{S_j/h}$ . On a noté  $\tilde{\varphi}_j$  et  $S_j$  les intégrales d'action définies comme en (3.3) et (3.4) avec respectivement les contours  $\Gamma_{a_j b_j}$  et  $\Gamma_{b_j a_{j+1}}$ , ( $a_{M+1} = c$ ) similaires à ceux des (FIG5, 6).

Avec les mêmes notations que dans le cas d'un unique puits on écrit :

$$M_{p_j q_j}(\varphi_j, \psi_j, S_j) = T(W_j)T^{-1}(Z_j) = \begin{pmatrix} p_j e^{S_j/h} \cos(\varphi_j/h) & -q_j e^{-S_j/h} \sin(\psi_j/h) \\ p_j e^{S_j/h} \sin(\varphi_j/h) & q_j e^{-S_j/h} \cos(\psi_j/h) \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

L'équation de résonance est donnée en annulant le terme en haut à gauche de la matrice  $M$  qui s'écrit maintenant

$$M = \prod_{1 \leq j \leq M} M_{p_j q_j}(\varphi_j, \psi_j, S_j)T.$$

Cette expression montre que l'équation des résonances est de la forme

$$\sum_{(\epsilon_k) \in \mathcal{A}} C_{(\epsilon_k)} e^{\frac{1}{h} \sum_{k=1}^M \epsilon_k S_k} = 0, \quad (3.14)$$

où  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des  $2^M$  suites  $\epsilon_k = \pm 1$ ,  $1 \leq k \leq M$  et où  $C_\epsilon = C_{(\epsilon_k)}$  dépend de  $p_j$ ,  $q_j$ ,  $\cos(\varphi_j/h)$ ,  $\sin(\varphi_j/h)$ ,  $\cos(\psi_j/h)$  et  $\sin(\psi_j/h)$ ,  $j = 1, \dots, M$ .

**Remarque 2.3.10** *On peut déterminer les coefficients  $C_\epsilon$  de (3.14) grâce aux relations de récurrences suivantes : si pour  $1 \leq n \leq M$ , on note :*

$$\prod_{j=1}^n M_{p_j q_j}(\varphi_j, \psi_j, S_j) = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix},$$

alors

$$\begin{cases} A_{n+1} = p_{n+1} e^{S_{n+1}/h} [A_n \cos(\varphi_{n+1}/h) + B_n \sin(\varphi_{n+1}/h)] \\ B_{n+1} = q_{n+1} e^{-S_{n+1}/h} [-A_n \sin(\psi_{n+1}/h) + B_n \cos(\psi_{n+1}/h)] \end{cases}.$$

(On a des relations similaires pour  $D_n$  et  $C_n$  mais elles ne nous sont pas utiles ici).

Ces relations de récurrence permettent de construire un automate fini qui donne les coefficients  $C_\epsilon$  (Cf Appendice 5).

## 2.4 Cas de deux puits

Dans cette partie, on considère un potentiel présentant deux puits et une mer. Dans un premier temps on établit l'équation des résonances puis on montre l'existence de résonances exponentiellement proches de  $\mathbf{R}$ , et on estime leur partie imaginaire. Cela permet de démontrer le théorème 2.0.11 sur les croisements. Enfin, une estimation des parties réelles conduit au théorème 2.0.12.

Soit un potentiel de la forme (FIG1), ayant deux puits  $[a_i, b_i]$ ,  $i = 1, 2$  et une mer  $[c, +\infty[$  pour des niveaux d'énergies  $E$  contenus dans un intervalle  $I$  compact vérifiant (0.5). Cela assure que les points tournants rencontrés sont simples.

Comme précédemment et avec les mêmes notations, on sait qu'il existe  $C_0 > 0$ ,  $h_0 > 0$  tels que si

$$\mathcal{D}_I = \left\{ z \in \mathbb{C}, \Re z \in I, \left| \Im z \right| \leq h/C_0 \right\}, \quad (4.1)$$



alors, si  $h < h_0$  et  $E \in \mathcal{D}_I$  les solutions de  $Pu = Eu$  introduites dans la partie 2.3 sont définies et analytiques en  $E$ .

On écrit les solutions  $v_{a_1}^\pm$  en fonction de  $u_c^\pm$  :

$$\begin{pmatrix} v_{a_1}^- \\ v_{a_1}^+ \end{pmatrix} = T(W_1)T^{-1}(Z_1)T(W_2)T^{-1}(Z_2)T \begin{pmatrix} u_c^- \\ u_c^+ \end{pmatrix}.$$

Comme dans le cas d'un unique puits, on définit sur  $\mathcal{D}_I \times ]0, h_0]$  des fonctions holomorphes  $p_j$ ,  $q_j$ ,  $\varphi_j$  et  $\psi_j$ ,  $j = 1, 2$  qui vérifient :

$$\begin{cases} W_j - iY_j = ip_j(E, h)e^{i\varphi_j(E, h)/h} \\ W_j + iY_j = iq_j(E, h)e^{i\psi_j(E, h)/h} \end{cases} \quad j = 1, 2.$$

On peut augmenter  $C_0$  pour avoir de plus :

$$\begin{cases} |p_j - 1| \leq C_0 h \\ |q_j - 1| \leq C_0 h \end{cases} \quad j = 1, 2, \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} |\varphi_j(E, h) - \tilde{\varphi}_j(E)| \leq C_0 h^2 \\ |\psi_j(E, h) - \tilde{\psi}_j(E)| \leq C_0 h^2 \end{cases} \quad j = 1, 2, \quad (4.3)$$

ainsi que de relations analogues pour les dérivées ènième de ces fonctions, avec une constante  $C_n > 0$  à la place de  $C_0$ .

On obtient l'analogie du théorème 2.0.7 dans ce cas donné directement par l'automate de (FIG7) en appendice :

**Théorème 2.4.1** *Considérons l'opérateur de Schrödinger défini par (0.1) présentant deux puits. Si  $h < h_0$ , les résonances dans l'ensemble  $\mathcal{D}_I$  défini plus haut sont données implicitement par*

$$\begin{aligned} & e^{(S_1+S_2)/h} p_1 p_2 \cos(\varphi_1/h) \cos(\varphi_2/h) - e^{(S_2-S_1)/h} q_1 p_2 \sin(\psi_1/h) \sin(\varphi_2/h) \\ & - i e^{(S_1-S_2)/h} p_1 q_2 \cos(\varphi_1/h) \sin(\psi_2/h) - i e^{-(S_1+S_2)/h} q_1 q_2 \sin(\psi_1/h) \cos(\psi_2/h) = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

**Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on omettra comme ici d'écrire la dépendance des  $S_j$  en  $E$  et celle des  $p_j$ ,  $q_j$ ,  $\psi_j$ ,  $\varphi_j$  en  $E$  et  $h$ , pour  $j = 1, 2$ .**

Si  $S_0(E) = \min(S_1(E), S_2(E))$ , l'équation (4.4) donne dans  $\mathcal{D}_I$  :

$$\cos(\varphi_1(E, h)/h) \cos(\varphi_2(E, h)/h) = O(e^{-2S_0(E)/h}).$$

On définit alors  $E_{1,k}(h)$  et  $E_{2,k}(h)$  par

$$\cos[\varphi_1(E_{1,k}(h), h)/h] = 0, \quad \varphi_1(E_{1,k}(h), h) = (2k+1)\frac{\pi}{2}h,$$

et

$$\cos[\varphi_2(E_{2,k}(h), h)/h] = 0, \quad \varphi_2(E_{2,k}(h), h) = (2k+1)\frac{\pi}{2}h,$$

Comme dans la partie précédente, on fixe  $\eta_0 > 0$  et  $I' \subset I$  tel que si

$$J_k^1 = \frac{\tilde{\varphi}_1(I')}{2k+1} \frac{2}{\pi}, \quad J_k^2 = \frac{\tilde{\varphi}_2(I')}{2k+1} \frac{2}{\pi},$$

alors pour  $k_0 > 0$  assez grand,

$$\forall k \geq k_0, \forall h \in J_k^1, E_{1,k}(h) \in I,$$

$$\forall k \geq k_0, \forall h \in J_k^2, E_{2,k}(h) \in I.$$

On montre maintenant qu'il y a une résonance exponentiellement proche de  $E_{1,k}(h)$  si  $k$  est assez grand et  $h \in J_k^1$  :

**Proposition 2.4.2** *Il existe  $D_0 > 0, k_0 > 0$  tels que si  $k \geq k_0$  et  $h \in J_k^1$ , il y a une résonance  $r_{1,k}(h)$  dans  $\{z \in \mathbb{C}, |z - E_{1,k}| < h^2\}$ . Si on écrit cette résonance  $r_{1,k}(h) = E_{1,k}(h) + z_{1,k}(h)$ , on a de plus*

$$|z_{1,k}| < D_0 h e^{-S_{01}(h)/h}.$$

où  $S_{01} = S_0(E_{1,k}(h))$ .

**Preuve :** Dans cette démonstration, on écrit  $E_1(h) \equiv E_{1,k}(h)$ , et  $h \in J_k^1 \equiv J^1$  sera sous-entendu. On augmentera un nombre fini de fois  $k_0 \in \mathbb{N}$  (ce qui revient à diminuer un nombre fini de fois  $h$ ). Notons

$$f(E, h) = p_1(E, h)p_2(E, h)e^{(S_1(E)+S_2(E))/h} \cos[\varphi_1(E, h)/h] \cos[\varphi_2(E, h)/h],$$

et

$$\begin{aligned} g(E, h) = & -q_1 p_2 e^{(S_2-S_1)/h} \sin[\psi_1(E, h)/h] \sin[\varphi_2(E, h)/h] \\ & -i p_1 q_2 e^{(S_1-S_2)/h} \cos[\varphi_1(E, h)/h] \sin[\psi_2(E, h)/h] \\ & -i q_1 q_2 e^{-(S_1+S_2)/h} \sin[\psi_1(E, h)/h] \cos[\psi_2(E, h)/h]. \end{aligned}$$

On applique le théorème de Rouché aux fonctions  $f$  et  $g$ .

On note  $S_{j1} = S_j(E_1(h))$ ,  $j = 0, 1, 2$ .

La continuité de  $g$  et le développement des  $p_j$  et  $q_j$  (4.2) donne l'existence de  $\epsilon > 0$  tel que la continuité uniforme de  $S_j$  sur  $I$  donne, pour  $h < h_0$  :

$$|g(E_1 + z, h)| < 4e^{\left[S_{11}+S_{21}-2S_{01}\right]/h} e^{2\epsilon}, \text{ si } |z| < \epsilon h. \quad (4.5)$$

D'autre part,

$$\varphi_1(E + z, h) = \varphi_1(E, h) + \varphi_1'(E, h)z + o_h(z)$$

où  $|o_h(z)|$  est uniformément majoré en  $E \in I$  et  $h < h_0$  comme dans le cas d'un seul puits (Remarque 2.3.8). On n'écrit donc plus la dépendance des  $o$  en  $E$  et  $h$ .

Un développement limité de  $\cos(\varphi_1/h) \cos(\varphi_2/h)$  en  $E_1(h)$  conduit à :

$$f(E_1 + z, h) = p_1 p_2 e^{(S_1+S_2)/h} \left[ -\varphi'_1(E_1(h), h) \frac{z}{h} + o\left(\frac{z}{h}\right) \right] \times \left[ \cos(\varphi_2(E_1, h)/h) - \varphi'_2(E_1(h), h) \sin(\varphi_2(E_1, h)/h) \frac{z}{h} + o\left(\frac{z}{h}\right) \right].$$

Notons  $m = \min_{E \in I} (\tilde{\varphi}'_1(E), \tilde{\varphi}'_2(E))$ . (0.8) entraîne  $m > 0$ .

Avec (4.3) on a donc  $\min_{E \in I} (\varphi'_1(E, h), \varphi'_2(E, h)) \geq \frac{m}{2} > 0$  pour  $h < h_0$ .

On étudie deux cas :

1) Supposons que  $\left| \cos(\varphi_2(E_1, h)/h) \right| > 1/2$  : on est dans le cas sans interaction.

On prend alors  $z$  tel que  $|z| = h^2$ .

Pour  $h < h_0 < \epsilon$ , on a  $|z| < \epsilon h$ . De plus, le développement de  $p_j$  (4.2) donne, quitte à diminuer  $\epsilon$

$$\forall h < h_0, |f(E_1 + z, h)| \geq \frac{e^{(S_{11}+S_{21})/h}}{8} e^{-2\epsilon} \left| \varphi'_1(E_1(h), h) \frac{z}{h} \right| \text{ si } |z/h| < \epsilon.$$

Si  $|z| = h^2$ , cela entraîne

$$|f(E_1 + z, h)| \geq h e^{(S_{11}+S_{21})/h} e^{-2\epsilon} \frac{m}{8}.$$

Finalement,  $|f(E_1 + z, h)| > |g(E_1 + z, h)|$  dès que

$$e^{(S_{11}+S_{21})/h} e^{-2\epsilon} \frac{m}{8} h > 4e^{\left[ S_{11}+S_{21}-2S_{01} \right]/h} e^{2\epsilon}.$$

Cela donne bien l'existence de  $0 < h_0$  tel que si  $h < h_0$  et  $|z| = h^2$ , alors

$$|f(E_1 + z, h)| > |g(E_1 + z, h)|$$

Comme  $f(E_1(h), h) = 0$ , on obtient la proposition grâce au théorème de Rouché pour tout  $h < h_0$ .

2) Supposons  $\left| \sin(\varphi_2(E_1, h)/h) \right| > 1/2$ , alors  $\left| \cos(\varphi_2(E_1, h)/h) \right| \leq 1/2$ .

On diminue  $\epsilon > 0$  pour que si  $|z| < \epsilon h$  on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \varphi'_2(E_1(h), h) \sin(\varphi_2(E_1, h)/h) \frac{z}{h} \right| &\leq \left| -\varphi'_2(E_1(h), h) \sin(\varphi_2(E_1, h)/h) \frac{z}{h} + o\left(\frac{z}{h}\right) \right| \\ &\leq \frac{3}{2} \left| \varphi'_2(E_1(h), h) \sin(\varphi_2(E_1, h)/h) \frac{z}{h} \right|. \end{aligned}$$

On distingue deux sous-cas :

a)  $\left| \cos(\varphi_2(E_1, h)/h) \right| > 2 \left| \varphi'_2(E_1(h), h) \sin(\varphi_2(E_1, h)/h) \right| h$ .

On choisit  $z$  tel que  $|z| = h^2$ . On a

$$\begin{aligned} |f(E_1 + z, h)| &> e^{(S_{11}+S_{21})/h} e^{-2\epsilon} \frac{\left| \varphi'_1(E_1(h), h) \right| h}{2} \times \\ &\left\| \cos(\varphi_2(E_1, h)/h) - \left| \varphi'_2(E_1(h), h) \sin(\varphi_2(E_1, h)/h) h + o(h) \right| \right\|, \end{aligned}$$

soit,

$$\left| f(E_1 + z, h) \right| > \left( \frac{mh}{4} \right)^2 e^{(S_{11} + S_{21})/h} e^{-2\epsilon}$$

Grâce à (4.5), on obtient  $h_0 > 0$  tel que si  $h < h_0$ , et  $|z| = h^2$ , alors

$$\left| f(E_1 + z, h) \right| > \left| g(E_1 + z, h) \right|.$$

Le théorème de Rouché permet encore une fois de conclure et d'obtenir la proposition.

**b)** Si  $\left| \cos(\varphi_2(E_1, h)/h) \right| \leq 2 \left| \varphi_2'(E_1(h), h) \sin(\varphi_2(E_1, h)/h) \right| h$ , on prend  $|z| = 3h^2$ .  
Si  $h < h_0 < (\epsilon/3)$ , alors  $|z| < \epsilon h$ , et

$$\left| f(E_1 + z, h) \right| > \frac{1}{4} \left( \frac{3mh}{4} \right)^2 e^{(S_{11} + S_{21})/h} e^{-2\epsilon}.$$

Ainsi, (4.5) entraîne, pour  $h$  assez petit

$$\left| f(E_1 + z, h) \right| > \left| g(E_1 + z, h) \right|.$$

Le théorème de Rouché permet de conclure pour obtenir la première partie de la proposition.

Pour démontrer la majoration de  $|z(h)|$ , on fixe  $\epsilon > 0$  comme ci-dessus et on pose  $D_1 = 8e^{2\epsilon}/m$ . On reprend les calculs ci-dessus en remplaçant les cas a) et b) par :

a)  $\left| \cos(\varphi_2(E_1, h)/h) \right| > 2 \left| \varphi_2'(E_1(h), h) \sin(\varphi_2(E_1, h)/h) \right| D_1 e^{-S_{01}/h}$ , où on choisit  $|z| = D_1 h e^{-S_{01}/h}$  ;  
et

b)  $\left| \cos(\varphi_2(E_1, h)/h) \right| \leq 2 \left| \varphi_2'(E_1(h), h) \sin(\varphi_2(E_1, h)/h) \right| D_1 e^{-S_{01}/h}$ , où on choisit  $|z| = 8D_1 h e^{-S_{01}/h}$ .  
On applique le théorème de Rouché et pour  $D_0 = 8D_1 > 0$ ,  $h < h_0$  on a la majoration recherchée.  
Cela termine la démonstration de la proposition.  $\square$

**Remarque 2.4.3** *On a ici une estimation moins bonne de  $z_{1,k}$  que dans le cas d'un seul puits. Cela est causé par la possibilité d'apparition d'une interaction.*

On a bien sûr un résultat analogue pour le deuxième puits. Les résonances données par la proposition sont dites associées au premier (ou au deuxième) puits. On s'intéresse maintenant aux parties imaginaires et réelles de telles résonances.

## 2.4.1 Partie imaginaire des résonances

### Résonances associées au premier puits

On fixe désormais  $k_0$  et  $D_0$  pour avoir la proposition 2.4.2. Si  $k \geq k_0$ ,  $h \in J_k^1$ , on écrit la résonance associée au premier puits donnée par cette proposition

$$r_1(h) = r_{1,k}(h) = \alpha_1(h) + i\beta_1(h).$$

On omet la dépendance en  $k$ . Si  $h \in J_k^1 = J^1$  et  $E_1(h) = E_{1,k}$ ,

$$\alpha_1(h) = E_1(h) + O(e^{-S_{01}/h}), \quad \beta_1(h) = O(e^{-S_{01}/h}),$$

où  $O(e^{-S_{01}/h})$  est uniforme en  $k \geq k_0$ , et bien sûr  $\cos(\varphi_1(r_1, h)/h) \ll 1$ .

On étudie maintenant la partie imaginaire de cette résonance.

On omet la dépendance en  $h$  et  $r_1$ , et on écrit l'équation de quantification exacte (4.4) sous la forme

$$\frac{p_1 \cos(\varphi_1/h)}{q_1 \sin(\psi_1/h)} = e^{-2S_1/h} \frac{e^{S_2/h} p_2 \sin(\varphi_2/h) + i e^{-S_2/h} q_2 \cos(\psi_2/h)}{e^{S_2/h} p_2 \cos(\varphi_2/h) - i e^{-S_2/h} q_2 \sin(\psi_2/h)}. \quad (4.6)$$

Pour pouvoir étudier cette équation, on doit introduire des fonctions particulières :

**Définition 2.4.4** Soit  $\mathcal{E}(\mathcal{D})$  l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathcal{D} \times J$ ,  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ ,  $J \subset ]0, h_0]$  vérifiant :

$$\mathcal{E}(E, h) \in \mathcal{E}(\mathcal{D}) \text{ ssi } \forall K \subset\subset \mathcal{D}, \exists C > 0, \forall E \in K, \forall h \in J, \begin{cases} |\mathcal{E}(E, h)| \leq Ch \\ |\Im \mathcal{E}(E, h)| \leq C |\Im E| \end{cases}.$$

On a immédiatement :

**Proposition 2.4.5**  $\mathcal{E}(\mathcal{D})$  est un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel.

Si  $\mathcal{E}_1 \in \mathcal{E}(\mathcal{D})$  et  $\mathcal{E}_2 \in \mathcal{E}(\mathcal{D})$ ,

$$\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \in \mathcal{E}(\mathcal{D});$$

$$\overline{\mathcal{E}_1} \in \mathcal{E}(\mathcal{D}).$$

Si de plus  $f$  est une fonction réelle analytique sur  $\mathcal{E}_1(\mathcal{D} \times J)$  vérifiant  $f(0) = 0$ , alors  $f(\mathcal{E}_1) \in \mathcal{E}(\mathcal{D})$ .

On démontre maintenant la proposition :

**Proposition 2.4.6** On peut augmenter  $C_0 > 0$  dans la définition de  $\mathcal{D}_I$  (donnée par (4.1 au début de cette section) pour que si  $h < h_0$ , alors

$$\cos(\varphi_j(E, h)/h) - \cos(\psi_j(E, h)/h) \in \mathcal{E}(\mathcal{D}_I), \quad j = 1, 2,$$

$$\sin(\varphi_j(E, h)/h) - \sin(\psi_j(E, h)/h) \in \mathcal{E}(\mathcal{D}_I), \quad j = 1, 2,$$

$$\left(\frac{p_j}{q_k}\right)^{\pm 1} - 1 \in \mathcal{E}(\mathcal{D}_I), \quad (j, k) \in (1, 2)^2.$$

**Preuve :** On doit d'abord montrer

**Lemme 2.4.7**

$$i) \frac{\varphi_j(E, h) - \tilde{\varphi}_j(E)}{h} \in \mathcal{E}(\mathcal{D}_I), \quad j = 1, 2;$$

$$ii) \frac{\psi_j(E, h) - \tilde{\psi}_j(E)}{h} \in \mathcal{E}(\mathcal{D}_I), \quad j = 1, 2;$$

$$iii) p_j(E, h) - 1 \in \mathcal{E}(\mathcal{D}_I), \quad j = 1, 2,$$

$$iv) q_j(E, h) - 1 \in \mathcal{E}(\mathcal{D}_I), \quad j = 1, 2.$$

**Preuve du lemme :** Montrons *i*). Grâce à (4.3) on a déjà  $\frac{\varphi_1(E, h) - \tilde{\varphi}_1(E)}{h} = O(h)$ , ce qui donne la première propriété de  $\mathcal{E}$  pour cette fonction.

Il reste à montrer l'inégalité sur les parties imaginaires. Pour cela, on revient à la définition de  $\varphi_1(E, h)$  avec la fonction Arctan. Notons :

$$Z_1(E, h) = \frac{W_1(E, h) - iY(E, h)}{ip_1(E, h)} e^{-i\tilde{\varphi}_1(E)/h};$$

$$Z_1^*(E, h) = \Gamma(Z_1(\overline{E}, h)),$$

et

$$\Pi_1(E, h) = \frac{(Z_1 - Z_1^*)(E, h)}{i(Z_1 + Z_1^*)(E, h)}.$$

Alors

$$\frac{\varphi_1(E, h) - \tilde{\varphi}_1(E)}{h} = \text{Arctan}[\Pi_1(E, h)].$$

Or  $\text{Arctan}'(0) = 1$  donc il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $|\Im[\text{Arctan}z]| \leq 2|\Im z|$  si  $|z| < \epsilon$ .

De plus,  $\Pi_1(E, h) = O(h)$  donc si  $h < h_0(\epsilon)$ ,  $|\Pi_1| < \epsilon$ . Ainsi,

$$\forall h < h_0(\epsilon), \quad \left| \Im\left(\frac{\varphi_1(E, h) - \tilde{\varphi}_1(E, h)}{h}\right) \right| \leq 2|\Im \Pi_1(E, h)|.$$

Il suffit donc de trouver  $C > 0$  tel que  $|\Im \Pi_1| \leq C|\Im E|$ .

On a

$$\Pi_1(E, h) = \frac{Z_1(E) - Z_1^*(\overline{E}) + Z_1^*(\overline{E}) - Z_1^*(E)}{i[Z_1(E) + Z_1^*(\overline{E}) - Z_1^*(\overline{E}) + Z_1^*(E)]},$$

ce qui s'écrit aussi

$$\Pi_1(E, h) = \frac{\Im(Z_1(E)) + \frac{\gamma}{2i}}{\Re(Z_1(E)) - \frac{\gamma}{2}},$$

où  $\gamma = Z_1^*(\overline{E}) - Z_1^*(E)$ . Un calcul donne

$$|\Im(\Pi_1)| \leq (1 + O(h))|\gamma|.$$

Or

$$\gamma = \int_0^1 (Z_1^*)'((1-t)\overline{E} + tE) dt (E - \overline{E}), \quad (4.7)$$

donc il existe  $C' > 0$  tel que  $|\gamma| \leq C'|\Im E|$ .

Finalement, on a su trouver  $C > 0$  tel que  $|\Im \Pi_1| \leq C|\Im E|$  et le point *i*) du lemme est prouvé.

Le point *ii*) se démontre exactement de la même manière.

Les deux points suivants se démontrent par des calculs similaires. Comme  $p_1(E, h) = 1 + O(h)$  on a bien sûr  $p_1(E, h) - 1 = O(h)$ . Il reste à démontrer la majoration sur les parties imaginaires.

$|\Im p_1^2| \geq |\Im p_1|$  et

$$\begin{aligned} p_1^2(E, h) &= [(W_1 - iY_1)(E, h)][(W_1^* + iY_1^*)(E, h)] \\ &= W_1W_1^*(E, h) + Y_1Y_1^*(E, h) + i[W_1Y_1^*(E, h) - W_1^*Y_1(E, h)], \end{aligned}$$

$\det(W_1) = 1$  s'écrit  $W_1W_1^*(E, h) - Y_1Y_1^*(E, h) = 1$  et donc :

$$\begin{aligned} p_1^2(E, h) &= 1 + 2Y_1(E, h)[Y_1^*(\bar{E}, h) - Y_1^*(E, h)] \\ &\quad + i[W_1Y_1^*(E, h) - W_1^*Y_1(\bar{E}, h) + W_1^*Y_1(\bar{E}, h) - W_1^*Y_1(E, h)], \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} p_1^2(E, h) &= 1 + 2|Y_1(E, h)|^2 - Y_1(E, h)[Y_1^*(\bar{E}, h) - Y_1^*(E, h)] \\ &\quad - 2\Im W_1Y_1^*(E, h) + i[W_1^*Y_1(\bar{E}, h) - W_1^*Y_1(E, h)], \end{aligned}$$

et finalement

$$\Im p_1^2(E, h) = \Im [Y_1(E, h)[Y_1^*(\bar{E}, h) - Y_1^*(E, h)] + i[W_1^*Y_1(\bar{E}, h) - W_1^*Y_1(E, h)]].$$

On démontre alors avec des intégrales du type (4.7) que  $|\Im p_1^2| \leq C''|\Im E|$  et le lemme est démontré.  $\square$

**Preuve de la proposition 2.4.6 :** On démontre seulement la première assertion :

$$\cos(\varphi_1(E, h)/h) - \cos(\psi_1(E, h)/h) \in \mathcal{E}(\mathcal{D}'_I),$$

car les autres résultats se démontrent de la même manière.

On sait que  $\frac{\varphi_1 - \psi_1}{h} = O(h)$  donc  $\cos(\varphi_j(E, h)/h) - \cos(\psi_j(E, h)/h) = O(h)$ .

Démontrons la majoration de la partie imaginaire.

Ecrivons  $E = \alpha + i\beta$ .  $\tilde{\varphi}_1$  est une fonction régulière, il existe donc  $c_1 > 0$  et  $\epsilon_1 > 0$  telles que

$$\left| \cos\left(\frac{\tilde{\varphi}_1(E)}{h}\right) - \cos\left(\frac{\tilde{\varphi}_1(\alpha)}{h}\right) \right| = \left| \cos\left(\frac{\tilde{\varphi}_1(\alpha)}{h} + O\left(\frac{\beta}{h}\right)\right) - \cos\left(\frac{\tilde{\varphi}_1(\alpha)}{h}\right) \right| \leq C_1 \left|\frac{\beta}{h}\right|, \text{ si } \left|\frac{\beta}{h}\right| < \epsilon_1.$$

Or  $\cos\left(\frac{\tilde{\varphi}_1(\alpha)}{h}\right) \in \mathbf{R}$  donc

$$\left| \Im \cos\left(\frac{\tilde{\varphi}_1(E)}{h}\right) \right| \leq C_1 \left|\frac{\beta}{h}\right|, \text{ si } |\beta| < \epsilon_1 h$$

On a une relation identique pour le sinus.

D'autre part d'après le lemme,  $\frac{\varphi_1(E, h)}{h} - \frac{\tilde{\varphi}_1(E)}{h} = \mathcal{E}(E, h)$  pour  $\mathcal{E}(E, h) \in \mathcal{E}(\mathcal{D}_I)$ . Alors, le dernier point de la proposition 2.4.5 implique

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\varphi_1(E, h)}{h}\right) - \cos\left(\frac{\tilde{\varphi}_1(E)}{h}\right) &= \cos\left(\frac{\tilde{\varphi}_1(E)}{h}\right) [\cos(\mathcal{E}) - 1] - \sin\left(\frac{\tilde{\varphi}_1(E)}{h}\right) \sin(\mathcal{E}) \\ &= \mathcal{E}_1 \cos\left(\frac{\tilde{\varphi}_1(E)}{h}\right) + \mathcal{E}_2 \sin\left(\frac{\tilde{\varphi}_1(E)}{h}\right), \end{aligned}$$

pour deux fonctions  $\mathcal{E}_j \in \mathcal{E}(\mathcal{D}_I)$ ,  $j = 1, 2$ .

En prenant la partie imaginaire de cette relation et avec les inégalités ci-dessus, on arrive à

$$\cos\left(\frac{\varphi_1(E, h)}{h}\right) - \cos\left(\frac{\tilde{\varphi}_1(E)}{h}\right) \in \mathcal{E}(\mathcal{D}_I)$$

où  $\mathcal{D}_I$  est défini maintenant avec la constante  $\max(C_0, 1/\epsilon_1)$  toujours notée  $C_0$ .

Comme on a la même relation avec  $\psi_1$ , on obtient  $\cos\left(\frac{\varphi_1(E, h)}{h}\right) - \cos\left(\frac{\psi_1(E, h)}{h}\right) \in \mathcal{E}(\mathcal{D}_I)$ .

Cela conclut la démonstration de la proposition.  $\square$

On fixe désormais la constante définissant  $\mathcal{D}_I$  de façon à avoir la proposition ci-dessus.

Cet espace de fonction permet de transformer l'équation de quantification (4.6) en :

$$(1 + \mathcal{E}(E, h)) \frac{\cos(\varphi_1/h)}{\sin(\varphi_1/h)} = e^{-2S_1/h} \frac{e^{S_2/h} \sin(\varphi_2/h) + ie^{-S_2/h} [\cos(\varphi_2/h) + \mathcal{E}(E, h)]}{e^{S_2/h} \cos(\varphi_2/h) - ie^{-S_2/h} [\sin(\varphi_2/h) + \mathcal{E}(E, h)]}. \quad (4.8)$$

où on a pris la notation  $\mathcal{E}(E, h)$  comme fonction générique de  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{D}_I)$ .

Avec cette écriture, on va pouvoir calculer la partie imaginaire de  $r_1(h)$ . Pour simplifier les notations, on dit qu'il n'y a pas d'interaction lorsque

$$|\cos(\varphi_2(r_1(h), h)/h)| > 1/2,$$

et qu'il y a une interaction lorsque

$$|\sin(\varphi_2(r_1(h), h)/h)| > 1/2.$$

**Proposition 2.4.8** *Dans le cas sans interaction la partie imaginaire de la résonance  $r_1(h)$  est donnée par*

$$\forall h \in J^1, \Im r_1(h) = -h \frac{e^{-2(S_{11}+S_{21})/h}}{c_{11}} (1 + O(h)).$$

où on a noté

$$c_{11} = \frac{\tilde{\varphi}'_1(E_1(h))}{\sin^2(\tilde{\varphi}_1(E_1(h))/h)},$$

et  $S_{j1} = S_j(E_1(h))$ ,  $j = 1, 2$ .



**Preuve :** On note désormais  $u_1(E, h) = \cotan\left(\frac{\varphi_1(E, h)}{h}\right)$  qui est définie au voisinage de  $r_1(h)$ . On rappelle qu'on écrit  $r_1(h) = \alpha_1(h) + i\beta_1(h)$  et  $S_{j1} = S_j(E_1(h))$ ,  $j = 0, 1, 2$ .

On a le développement limité :

$$u_1(\alpha_1 + i\beta_1, h) = u_1(\alpha_1, h) - \frac{\varphi_1'(\alpha_1, h)}{\sin^2(\varphi_1(\alpha_1, h)/h)} \frac{i\beta_1}{h} + o\left(\frac{\beta_1}{h}\right).$$

Comme  $\alpha_1 - E_1 = o(e^{-S_{01}/h})$  et  $\beta_1 = o(e^{-S_{01}/h})$ , on a

$$u_1(\alpha_1 + i\beta_1, h) = u_1(\alpha_1, h) - \frac{\varphi_1'(E_1, h)}{\sin^2(\varphi_1(E_1, h)/h)} \left[1 + O(e^{-S_{01}/h/h})\right] \frac{i\beta_1}{h} + o\left(\frac{\beta_1}{h}\right).$$

Introduisons les notations :

$$c_{ij} = \frac{\tilde{\varphi}_i'(E_j(h))}{\sin^2(\tilde{\varphi}_i(E_j(h))/h)}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2. \quad (4.9)$$

On a vu que  $\tilde{\varphi}_i'(E) \geq m > 0$  (c'est (0.8)) donc  $c_{ij} > 0$ . (4.3) permet de remplacer  $\varphi_1(E, h)$  par  $\tilde{\varphi}_1(E)$  dans le développement limité de  $u_1$  :

$$u_1(\alpha_1 + i\beta_1, h) = u_1(\alpha_1) - c_{11} \frac{i\beta_1}{h} (1 + O(h)),$$

d'où

$$\Im(u_1(\alpha_1 + i\beta_1, h)) = -c_{11} \frac{\beta_1}{h} (1 + O(h)). \quad (4.10)$$

Dans le cas sans interaction  $\left|\cos(\varphi_2(r_1, h)/h)\right| > 1/2$ .

L'équation (4.8) devient donc

$$(1 + \mathcal{E})u_1 = e^{-2S_1/h} \left[ \frac{\sin(\varphi_2/h)}{\cos(\varphi_2/h)} + ie^{-2S_2/h}(1 + \mathcal{E}) \right] (1 + O(e^{-2S_2/h})).$$

Comme  $\Im[(1 + \mathcal{E})u_1] = -c_{11} \frac{\beta_1}{h} (1 + O(h))$  et  $S_j(r_1) = S_j(\alpha_1) + O(\beta_1)$ , on trouve

$$\beta_1 = -h \frac{e^{-2(S_1(\alpha_1) + S_2(\alpha_1))/h}}{c_{11}} (1 + O(h)),$$

ou encore

$$\beta_1 = -h \frac{e^{-2(S_{11} + S_{21})/h}}{c_{11}} (1 + O(h)).$$

On a donc la proposition.  $\square$

On traite maintenant le cas où il y a une interaction, c'est à dire qu'on suppose  $\left|\sin(\varphi_2(r_1, h)/h)\right| > 1/2$ . Alors  $u_2(r_1, h)$  est bien définie et :

$$u_2(\alpha_1 + i\beta_1, h) = u_2(\alpha_1) - c_{21} \frac{i\beta_1}{h} (1 + O(h)),$$

$$\Im(u_2(\alpha_1 + i\beta_1, h)) = -c_{21} \frac{\beta_1}{h} (1 + O(h)). \quad (4.11)$$

Soit  $\epsilon > 0$  fixé. On note  $\epsilon(h) > 0$  toute fonction définie sur un intervalle  $J$  telle que

$$\forall h \in J, |\epsilon(h)| \leq \epsilon.$$

On a

**Proposition 2.4.9** *Pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\delta > 0$ , il existe  $k_0$  tel que pour tout  $k \geq k_0$  la résonance  $r_1$  proche de  $E_{1,k}$  pour  $h$  dans  $J_k^1$  ait une partie imaginaire donnée dans le cas avec interaction par*

**cas 1.1** Si  $|u_2(r_1, h)| = \frac{\max(e^{-S_1/h}, e^{-2S_2/h})}{\epsilon(h)},$

$$\beta_1(h) = -he^{-2(S_{11}+S_{21})/h} \frac{1}{c_{11}|\cos^2(\varphi_2(r_1)/h)|} (1 + \epsilon(h)), \quad (4.12)$$

**cas 1.2** Si  $|u_2(r_1, h)| = \epsilon(h)e^{-2S_2/h}$  et  $S_{11} > 2S_{21} + \delta,$

$$\beta_1(h) = -he^{-2(S_{11}-S_{21})/h} \frac{1}{c_{11}} (1 + \epsilon(h)), \quad (4.13)$$

**cas 1.3** Si  $|u_2(r_1, h)| = \epsilon(h)e^{-S_1/h}$  et  $S_1 < 2S_2 - \delta,$

$$\beta_1(h) = -he^{-2S_{21}/h} \frac{1}{c_{21}} (1 + \epsilon(h)). \quad (4.14)$$

**Preuve :** L'équation de quantification (4.8) s'écrit

$$(1 + \mathcal{E})u_1(r_1(h), h) = e^{-2S_1/h} \frac{1 + ie^{-2S_2/h}[u_2(r_1(h), h) + \mathcal{E}]}{u_2(r_1(h), h) - ie^{-2S_2/h}[1 + \mathcal{E}]},$$

soit

$$(1 + \mathcal{E})u_1(r_1, h) = \frac{e^{-2S_1/h} \bar{u}_2 - e^{-2(S_2+\bar{S}_2)/h} u_2 + i(e^{-2\bar{S}_2/h} + e^{-2S_2/h} |u_2|^2) + \mathcal{E}[ie^{-2\bar{S}_2/h} - e^{-2(S_2+\bar{S}_2)/h}]}{|u_2|^2 + |1 + \mathcal{E}|^2 e^{-2(S_2+\bar{S}_2)/h} - 2\Im(e^{-2\bar{S}_2/h} u_2 (1 + \mathcal{E}))}. \quad (4.15)$$

Comme

$$S_1(r_1(h)) = S_1(\alpha_1(h)) + O(\beta_1(h)),$$

$$S_2(r_1) + \bar{S}_2(r_1) = 2S_2(\alpha_1) + o(\beta_1), \text{ et}$$

$$S_2(r_1) - \bar{S}_2(r_1) = O(\beta_1), \text{ on obtient, avec désormais } S_j = S_j(\alpha_1) \in \mathbb{R} :$$

$$\Im[(1 + \mathcal{E})u_1(r_1, h)] =$$

$$\frac{e^{-2S_1/h} (1 + |u_2(r_1, h)|^2) e^{-2S_2/h} - \Im u_2(r_1, h) (1 + e^{-4S_2/h}) + \hat{o}_1(\beta_1, h) + O(h) e^{-2S_2/h}}{|u_2(r_1, h)|^2 + e^{-4S_2/h} - 2e^{-2S_2/h} \Im u_2(r_1, h) + \hat{o}_2(\beta_1, h)}. \quad (4.16)$$

Ici,

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_1(\beta, h) &= O(\beta/h)[e^{-2S_2/h} + |u_2|] \text{ et} \\ \hat{\delta}_2(\beta, h) &= O(h)[e^{-4S_2/h} + e^{-2S_2/h}|u_2|].\end{aligned}$$

Avec (4.10) et (4.11), (4.16) s'écrit

$$-\frac{\beta_1}{h}(1 + O(h))A_1(h) = e^{-2(S_1+S_2)/h} \left(1 + |u_2(r_1, h)|^2 + O(h)\right) + \hat{\delta}(\beta_1, h),$$

où

$$A_1(h) = c_{11}|u_2(r_1, h)|^2 + c_{11}e^{-4S_2/h} + c_{21}e^{-2S_1/h},$$

et

$$\hat{\delta}(\beta, h) = O(\beta/h) \left[ e^{-2(S_1+S_2)/h} + |u_2| (e^{-2S_1/h} + O(h)e^{-2S_2/h}) + \min\left(\frac{\beta}{h}, |u_2|\right) e^{-2S_2/h} + O(h)e^{-4S_2/h} \right].$$

On a majoré  $|\Im u_2|$  par  $O\left(\min\left(\frac{\beta}{h}, |u_2|\right)\right)$ .

Finalement, on obtient

$$(1 + O(h))\beta_1(h) = -he^{-2(S_1+S_2)/h} \frac{1 + |u_2(r_1)|^2 + O(h)}{A_1(h)} + \ddot{\delta}(\beta_1, h)$$

avec  $\ddot{\delta}(\beta, h) = h\hat{\delta}(\beta, h)|A_1(h)|^{-1}$ .

Lorsque  $h \in J$ , cette équation donne la partie imaginaire  $\beta_1$  en fonction des ordres de grandeur possibles de  $A_1(h)$ .

On fixe maintenant  $\epsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  petits. On peut alors augmenter  $k_0$  pour avoir, quand  $k \geq k_0$  :

$$\forall h \in J^1, e^{-\delta/h} < \epsilon, h < \epsilon.$$

On écrit  $A(h) \sim A'(h)$  si  $A(h) = A'(h)(1 + \epsilon(h))$ .

Nous envisageons différents cas :

**cas 1.1 :**  $A_1(h) \sim c_{11}|u_2(r_1, h)|^2$ , c'est à dire  $A_1(h) = c_{11}|u_2(r_1, h)|^2(1 + \epsilon(h))$ .

Cela veut dire que  $|u_2(r_1, h)| = O\left(\frac{\max(e^{-S_1/h}, e^{-2S_2/h})}{\epsilon(h)}\right)$ . On en déduit que  $\ddot{\delta}(\beta_1, h) = O(\beta_1)\epsilon(h)$  est bien négligeable par rapport à  $\beta_1$ .

On trouve

$$\beta_1(h) = -he^{-2(S_1+S_2)/h} \frac{1}{c_{11}|\cos^2(\varphi_2(r_1)/h)|} (1 + \epsilon(h)),$$

soit

$$\beta_1(h) = -he^{-2(S_{11}+S_{21})/h} \frac{1}{c_{11}|\cos^2(\varphi_2(r_1)/h)|} (1 + \epsilon(h)).$$

**cas 1.2 :**  $A_1 \sim c_{11}e^{-4S_2/h}$ , soit  $|u_2(r_1, h)| = \epsilon(h)e^{-2S_2/h}$  et  $S_{11} > 2S_{21} + \delta$  (car  $h \in J^1$  implique  $e^{(4S_2-2S_1)/h} \leq e^{-\delta/h} < \epsilon$ ). On calcule  $\ddot{\delta}(\beta_1, h) = O(\beta_1)\epsilon(h)$  et

$$\beta_1(h) = -he^{-2(S_{11}-S_{21})/h} \frac{1}{c_{11}} (1 + \eta(h)).$$

**cas 1.3 :**  $A_1 \sim c_{12}e^{-2S_1/h}$ , soit  $|u_2(r_1, h)| = \epsilon(h)e^{-S_1/h}$  et  $S_{11} < 2S_{21} - \delta$ .  $\ddot{o}(\beta_1, h) = O(\beta_1)\epsilon(h)$  et

$$\beta_1(h) = -he^{-2S_{21}/h} \frac{1}{c_{21}}(1 + \eta(h)).$$

La proposition est donc démontrée.  $\square$

Etudions maintenant les cas intermédiaires dont nous aurons besoin pour démontrer le théorème de non croisement de la partie 2.5.3 :

**cas 1.a :**  $A_1(h) \sim c_{11}|u_2|^2 + c_{11}e^{-4S_2/h}$ , soit  $|u_2| \sim e^{-2S_2/h}$  et  $S_1 > 2S_2 + \delta$ .

On calcule

$$\ddot{o}(\beta_1, h) = O\left(\text{Min}\left[\beta_1, e^{2S_2/h} \frac{\beta_1^2}{h}\right]\right).$$

L'équation (4.16) devient :

$$\left(1 + |e^{2S_2/h}u_2|^2\right)(1 + O(h))\Im u_1 - 2e^{2S_2/h}(1 + O(h))\Im u_1\Im u_2 + e^{-2(S_1-2S_2)/h}\Im u_2 =$$

$$O(\beta_1/h)e^{-2(S_1-S_2)/h} + O(\beta_1^2/h^2) + e^{-2(S_1-S_2)/h}(1 + O(h)).$$

Deux valeurs semblent possibles pour  $\beta_1$  :

$$\beta_1 = -h \frac{e^{-2(S_{11}-S_{21})/h}(1 + O(h))}{c_{11}(1 + |e^{2S_2/h}u_2|^2)} \quad (4.17)$$

ou bien  $\beta_1 = -he^{-2S_{21}/h} \frac{(1 + |e^{2S_2/h}u_2|^2)(1 + O(h))}{2c_{21}}$ .

Nous montrerons plus loin que seul le premier cas peut avoir lieu.

**cas 1.b :**  $A_1(h) \sim c_{11}|u_2|^2 + c_{21}e^{-2S_1/h}$ , soit  $|u_2| \sim e^{-S_1/h}$  et  $S_1 < 2S_2 - \delta$ . Alors  $\ddot{o}(\beta_1, h) = \beta_1\epsilon(h)$  est bien négligeable par rapport à  $\beta_1$ . On trouve donc

$$\beta_1(h) = -h \frac{e^{-2S_{21}/h}(1 + \epsilon(h))}{c_{11}|u_2(r_1, h)e^{S_1/h}|^2 + c_{21}} \quad (4.18)$$

## Résonances associées au deuxième puits

On étudie à présent la partie imaginaire d'une résonance associée au deuxième puits. On procède de la même manière que précédemment.

On note  $r_2(h)$  la résonance proche de  $E_{2,k}$  pour  $h \in J_k^2$ . On écrit désormais  $E_{2,k}(h) = E_2(h)$ ,  $J_k^2 = J^2$  et

$$r_2 = \alpha_2 + i\beta_2.$$

Démontrons

**Proposition 2.4.10** Dans le cas sans interaction, la partie imaginaire de la résonance  $r_2(h)$  est donnée par

$$\forall h \in J^2, \beta_2 = -h \frac{e^{-2S_{22}/h}}{c_{22}} (1 + O(h)).$$

**Preuve :** L'équivalent de la proposition 2.4.2 donne  $\alpha_2(h) = E_2(h) + O(e^{-S_{02}/h})$  et  $\beta_2(h) = O(e^{-S_{02}/h})$ .

On reprend l'équation de quantification exacte (4.4) et on l'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} & \cos(\varphi_2/h) \left[ e^{(S_1+S_2)/h} p_1 p_2 \cos(\varphi_1/h) - i e^{-(S_1+S_2)/h} q_1 q_2 \sin(\psi_1/h) \right] - i e^{-(S_1+S_2)/h} q_1 q_2 \sin(\psi_1/h) \mathcal{E} = \\ & \sin(\varphi_2/h) \left[ e^{(S_2-S_1)/h} q_1 p_2 \sin(\psi_1/h) + i e^{(S_1-S_2)/h} p_1 q_2 \cos(\varphi_1/h) \right] + i e^{(S_1-S_2)/h} p_1 q_2 \cos(\varphi_1/h) \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Soit en posant  $u_2(E, h) = \cotan(\varphi_2/h)$ ,

$$\begin{aligned} u_2(r_2, h) &= \frac{\frac{q_1}{p_1} e^{(S_2-S_1)/h} \sin(\psi_1/h) + i \frac{q_2}{p_2} e^{(S_1-S_2)/h} \cos(\varphi_1/h)}{e^{(S_1+S_2)/h} \cos(\varphi_1/h) - i e^{-(S_1+S_2)/h} \frac{q_1 q_2}{p_1 p_2} \sin(\psi_1/h)} + \\ & \frac{i \mathcal{E} \left( e^{(S_1-S_2)/h} \frac{q_2}{p_2} \cos(\varphi_1/h) + \frac{q_1 q_2}{p_1 p_2} e^{-(S_1+S_2)/h} \sin(\psi_1/h) \right)}{e^{(S_1+S_2)/h} \cos(\varphi_1/h) - i e^{-(S_1+S_2)/h} \frac{q_1 q_2}{p_1 p_2} \sin(\psi_1/h)}. \end{aligned}$$

Avec les propriétés des  $\mathcal{E}$  et la proposition 2.4.6, on obtient

$$u_2(r_2, h) = \frac{e^{(S_2-S_1)/h} (\sin(\varphi_1/h) + \mathcal{E}) + i e^{(S_1-S_2)/h} \cos(\varphi_1/h) (1 + \mathcal{E}) + i e^{-(S_1+S_2)/h} \mathcal{E} (\sin(\varphi_1/h) + \mathcal{E})}{e^{(S_1+S_2)/h} \cos(\varphi_1/h) - i e^{-(S_1+S_2)/h} (\sin(\varphi_1/h) + \mathcal{E})}. \quad (4.19)$$

Par hypothèse  $|\cos(\varphi_1(r_2, h)/h)| > 1/2$ , aussi cette dernière équation mène à

$$u_2 = \left[ e^{-2S_1/h} \left( \frac{\sin(\varphi_1/h)}{\cos(\varphi_1/h)} \right) + i e^{-2S_2/h} (1 + \mathcal{E}) + i \mathcal{E} e^{-2(S_1+S_2)/h} \right] \left( 1 + O(e^{-2(S_1+S_2)/h}) \right).$$

On fait un développement de  $u_2(r_2(h), h)$  en  $\alpha_2$  ce qui donne un équivalent de (4.10) :

$$\Im u_2(\alpha_2 + i\beta_2, h) = -c_{22} \frac{i\beta_2}{h} (1 + O(h)),$$

où  $c_{22} = \frac{\tilde{\varphi}'_2(E_2)}{\sin^2(\tilde{\varphi}_2(E_2)/h)}$ .

Cela conduit à

$$\beta_2 = -h \frac{e^{-2S_{22}/h}}{c_{22}} (1 + O(h)).$$

D'où la proposition.  $\square$

On étudie maintenant le cas avec interaction. On suppose donc que  $|\sin(\varphi_1(r_2, h)/h)| > 1/2$  et  $u_1(r_2, h)$  existe. Avec les notations (4.9), on a

**Proposition 2.4.11** Soit  $\epsilon > 0$  petit. Il existe  $k_0 > 0$  tel que si  $k \geq k_0$ , la partie imaginaire de la résonance  $r_2$  proche de  $E_{2,k}$  est donnée, dans le cas avec interaction par : si  $h \in J^2$ ,

**cas 2.1** Si  $|u_1(r_2, h)| = \frac{e^{-S_1/h}}{\epsilon(h)}$ ,

$$\beta_2(h) = -he^{-2S_{22}/h} \frac{1}{c_{22}} (1 + \epsilon(h)), \quad (4.20)$$

**cas 2.2** Si  $|u_1(r_2, h)| = \epsilon(h)e^{-S_1/h}$  et  $|u_1| = \frac{e^{-2S_1/h}}{\epsilon(h)}$

$$\beta_2(h) = -he^{2(S_{12}-S_{22})/h} \frac{|u_1(r_2(h), h)|^2}{c_{12}} (1 + \epsilon(h)). \quad (4.21)$$

**cas 2.3** Si  $|u_1| = \epsilon(h)e^{-2S_1/h}$

$$\beta_2(h) = -he^{-2(S_{12}+S_{22})/h} \frac{1}{c_{12}} (1 + \epsilon(h)). \quad (4.22)$$

**Preuve :** On omet la dépendance de  $S_i$  en  $r_2(h) = r_2$ . L'équation de quantification (4.19) devient :

$$u_2(r_2(h), h) = \frac{e^{(S_2-S_1)/h}(1 + \mathcal{E}) + ie^{(S_1-S_2)/h}u_1(r_2, h)(1 + \mathcal{E}) + i\mathcal{E}e^{-(S_1+S_2)/h}}{e^{(S_1+S_2)/h}u_1(r_2, h) - ie^{-(S_1+S_2)/h}(1 + \mathcal{E})}. \quad (4.23)$$

Avec désormais  $S_i = S_i(\alpha_2) \in \mathbb{R}$ , on calcule

$$\Im u_2(r_2, h) = \frac{[e^{2S_1/h}|u_1(r_2, h)|^2 + e^{-2S_1/h} - \Im u_1(r_2, h)(e^{2S_2/h} + e^{-2S_2/h})](1 + O(h)) + O(h)|u_1| + \omega_1}{e^{2(S_1+S_2)/h}|u_1(r_2, h)|^2 + e^{-2(S_1+S_2)/h}(1 + O(h)) - 2(1 + O(h))\Im u_1(r_2, h) + \omega_2(\beta_2, h)},$$

où

$$\omega_1 = \omega_1(\beta_2, h) = O(\beta/h) [e^{2S_2/h}|u_1(r_2, h)| + e^{2S_1/h}|u_1|^2 + e^{-2S_1/h}], \text{ et}$$

$$\omega_2(\beta, h) = O(\beta/h) [|u_1(r_2, h)| + e^{2(S_1+S_2)/h}|u_1|^2].$$

Les développements limités de  $u_i(r_2, h)$  en  $\alpha_2$  mène à :

$$-\frac{\beta_2}{h}(1 + O(h))A_2(h) = B_2(h) + \omega(\beta_2, h),$$

où

$$\omega(\beta_2, h) = O(\beta/h) (e^{2S_2/h}|u_1(r_2, h)| + e^{2S_1/h}|u_1|^2 + e^{-2S_1/h} + \min(|u_1|, \frac{\beta_2}{h}) + e^{2(S_1+S_2)/h}|u_1(r_2, h)|^2 \frac{\beta}{h}),$$

et

$$A_2(h) = c_{22}e^{2(S_1+S_2)/h}|u_1(r_2, h)|^2 + c_{22}e^{-2(S_1+S_2)/h} + c_{12}e^{2S_2/h},$$

$$B_2(h) = e^{2S_1/h}|u_1(r_2, h)|^2 + e^{-2S_1/h} + O(h)|u_1|.$$

Si  $\tilde{\omega} = h \frac{\omega}{A_2}$ , on obtient

$$(1 + O(h))\beta_2 + \tilde{\omega} = -h \frac{B_2}{A_2}.$$

Soit  $\epsilon > 0$  fixé et  $h$  assez petit. On étudie trois cas :

**cas 2.1 :**  $A_2 \sim c_{22}e^{2(S_1+S_2)/h}|u_1(r_2, h)|^2$  et alors  $B_2 \sim e^{2S_1/h}|u_1(r_2, h)|^2$ , i.e.  $|u_1(r_2, h)| = \frac{e^{-S_1/h}}{\epsilon(h)}$ .

On obtient  $\tilde{\omega} = O(\beta_2)\epsilon(h)$  donc

$$\beta_2(h) = -he^{-2S_{22}/h} \frac{1}{c_{22}}(1 + \epsilon(h)).$$

**cas 2.2 :**  $A_2 \sim c_{12}e^{2S_2/h}$  et  $B_2 \sim e^{2S_1/h}|u_1(r_2, h)|^2$ , soit  $|u_1| = |u_1(r_2, h)| = \epsilon(h)e^{-S_1/h}$  et  $|u_1| = \frac{e^{-2S_1/h}}{\epsilon(h)}$ .

Alors  $\tilde{\omega}$  est exponentiellement petit quand  $h$  tend vers zéro et

$$\beta_2(h) = -he^{2(S_{12}-S_{22})/h} \frac{|u_1(r_2(h), h)|^2}{c_{12}}(1 + \epsilon(h)).$$

**cas 2.3 :**  $A_2 \sim c_{12}e^{2S_2/h}$  et  $B_2 \sim e^{-2S_1/h}$ , soit  $|u_1| = \epsilon(h)e^{-2S_1/h}$ .

Alors

$$\beta_2(h) = -he^{-2(S_{12}+S_{22})/h} \frac{1}{c_{12}}(1 + \epsilon(h)).$$

La proposition est donc démontrée.  $\square$

On obtient pour les cas intermédiaires :

**cas 2.a :**  $|u_1(r_2, h)| \sim e^{-S_1/h}$ ,  $A_2(h) \sim c_{22}e^{2(S_1+S_2)/h}|u_1|^2 + c_{12}e^{2S_2/h}$ , et  $\tilde{\omega}(\beta_2, h) = O(\beta_2^2/h) + O(\beta_2)e^{-\text{Min}(S_1, 2S_2)/h} = O(h)\beta_2$ . D'où

$$\beta_2 = -he^{-2S_{22}/h} \frac{|e^{S_1/h}u_1(r_2, h)|^2}{c_{22}|e^{S_1/h}u_1|^2 + c_{12}}(1 + O(h)). \quad (4.24)$$

**cas 2.b :**  $|u_1(r_2, h)| \sim e^{-2S_1/h}$ ,  $A_2(h) \sim c_{12}e^{2S_2/h}$ , alors  $\tilde{\omega}(\beta_2, h) = O(\beta_2)e^{-2S_1/h}$  et

$$\beta_2 = -he^{-2(S_{12}+S_{22})/h} \frac{1 + |e^{2S_1/h}u_1(r_2, h)|^2}{c_{12}}(1 + O(h)). \quad (4.25)$$

Finalement, on a obtenu la partie imaginaire des résonances associées à chacun des deux puits lorsque  $h$  est assez petit, c'est à dire pour des résonances dont la partie réelle est proche de  $E_{j,k}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $k \geq k_0$  assez grand. Cela va permettre d'étudier la possibilité de croisement entre ces résonances dans la partie qui suit.

## 2.4.2 Les croisements

On étudie à présent la possibilité d'un croisement entre deux résonances associées à chacun des deux puits comme défini dans la définition 2.0.10 de l'introduction. Plus précisément, on va montrer que sous certaines conditions, il ne peut y avoir de croisement lors d'une interaction comme celle décrite dans l'introduction :

**Théorème 2.4.12** *Pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $k_0$  tel que si  $k \geq k_0, l \geq k_0$ , si*

$$\exists h_{crois} \in J_k^1 \cap J_l^2, E_{1,k}(h_{crois}) = E_{2,l}(h_{crois}) = E_{crois},$$

*et si  $|S_1(E_{crois}) - 2S_2(E_{crois})| > \delta$ , alors les résonances  $r_1$  et  $r_2$  proches de respectivement  $E_{1,k}$  et  $E_{2,l}$  vérifient :*

$$\forall h \in J_k^1 \cap J_l^2, r_1(h) \neq r_2(h).$$

Dans toute cette partie, on fixe  $\delta > 0$  et  $\epsilon > 0$  petits dans les propositions 2.4.9 et 2.4.11. On a donc des encadrements précis des parties imaginaires des résonances  $r_j$  dès que  $k$  et  $l$  sont assez grands et  $|S_1(E_1) - 2S_2(E_1)| > \delta$ , si bien sûr  $h \in J_k^1 \cap J_l^2 = J$ .

Dans la suite, on omet la dépendance en  $k$  et  $l$  des différentes fonctions qui interviennent.  $h < h_0$  signifiera qu'on a pris  $k_0$  assez grand et  $h \in J_k^1 \cap J_l^2$  noté  $J$ . Dans la démonstration de ce théorème, on va diminuer un nombre fini de fois  $h_0$ , ce qui revient à augmenter un nombre fini de fois  $k_0$ .

Pour démontrer le théorème, on montre d'abord l'existence de constantes  $h_0 > 0$  et  $\kappa_0 > 0$  telles que si  $h_{crois} < h_0$  et  $\mathcal{H} = \{h \in J, |h - h_{crois}| \leq \kappa_0 h_{crois}^2\}$ , le théorème est vérifié pour  $h \in \mathcal{H}$ .

On fait une démonstration par l'absurde et on suppose qu'il existe  $\tilde{h}_{crois} \in \mathcal{H}$  tel que  $r_1(\tilde{h}_{crois}) = r_2(\tilde{h}_{crois})$ . On doit donc avoir  $\beta_1(\tilde{h}_{crois}) = \beta_2(\tilde{h}_{crois})$ .

On utilise ensuite les estimations de la partie précédente et on montre qu'elles ne peuvent pas être égales.

On finit la démonstration du théorème 2.4.12 en montrant qu'il n'y a pas de croisement dans la zone  $J \setminus \mathcal{H}$ .

On commence cette partie par des encadrements des fonctions  $u_j(r_i(h))$ ,  $j = 1, 2$ ;  $i = 1, 2$  qui permettent de définir les constantes  $\kappa_0, h_0$ .

Pour  $h \in J$  assez proche de  $h_{crois}$ , on est dans le cas d'une interaction et  $u_1(E_2(h), h)$  et  $u_2(E_1(h), h)$  sont bien définis.

Par définition de  $E_1(h) \equiv E_{1,k}(h)$  et  $E_2(h) \equiv E_{2,l}(h)$ , on a :

$$E_1'(h) = \frac{(2k+1)\pi}{2\varphi_1'(E_1(h), h)}, \quad E_2'(h) = \frac{(2l+1)\pi}{2\varphi_2'(E_2(h), h)}.$$

On note

$$C_{crois} = |E_1'(h_{crois}) - E_2'(h_{crois})| > 0.$$

Dans un voisinage de  $h_{crois}$  :

$$2C_{crois}|h - h_{crois}| > |E_1(h) - E_2(h)| > \frac{C_{crois}}{2}|h - h_{crois}|. \quad (4.26)$$



Un développement limité en  $(E_{crois}, h_{crois})$  donne :

$$|u_2(E_1(h), h)| = \varphi'_2(E_{crois}, h_{crois})C_{crois} \frac{|h - h_{crois}|}{h_{crois}} + o\left(\frac{|h - h_{crois}|}{h_{crois}}\right),$$

$$|u_1(E_2(h), h)| = \varphi'_1(E_{crois}, h_{crois})C_{crois} \frac{|h - h_{crois}|}{h_{crois}} + o\left(\frac{|h - h_{crois}|}{h_{crois}}\right).$$

Si  $h$  est dans un voisinage de type  $\mathcal{H}$  et  $h_{crois}$  est assez petit, on obtient

$$\frac{\tilde{\varphi}'_2(E_{crois})}{2}C_{crois} \frac{|h - h_{crois}|}{h_{crois}} \leq |u_2(E_1(h))| \leq 2\tilde{\varphi}'_2(E_{crois})C_{crois} \frac{|h - h_{crois}|}{h_{crois}}, \quad (4.27)$$

$$\frac{\tilde{\varphi}'_1(E_{crois})}{2}C_{crois} \frac{|h - h_{crois}|}{h_{crois}} \leq |u_1(E_2(h))| \leq 2\tilde{\varphi}'_1(E_{crois})C_{crois} \frac{|h - h_{crois}|}{h_{crois}}. \quad (4.28)$$

On continue avec quelques lemmes d'encadrement :

**Lemme 2.4.13** *Il existe  $\kappa_0 > 0$ ,  $h_0 > 0$ , tels que si  $h_{crois} < h_0$ , alors pour tout  $h \in \mathcal{H} = \{h, |h - h_{crois}| < \kappa_0 h_{crois}^2\}$ , on a*

$$|u_1(r_2(h), h)| < 1, \quad |u_2(r_1(h), h)| < 1.$$

**Preuve :** La proposition 2.4.2 donnant l'existence de la résonance  $r_1(h)$  exponentiellement proche de  $E_1(h)$  et (4.26) plus haut conduisent à

$$|r_1(h) - E_2(h)| \leq |r_1(h) - E_1(h)| + |E_1(h) - E_2(h)| \leq D_0 h e^{-S_{01}/h} + 2C_{crois}|h - h_{crois}|.$$

Si  $\kappa_0 < 1$ ,  $h_{crois} < h_0(\kappa_0)$  et  $|h - h_{crois}| < \kappa_0 h_{crois}^2$ , alors il existe  $C_1 > 0$ , tel que

$$|r_1(h) - E_2(h)| \leq C_1 \kappa_0 h_{crois}^2. \quad (4.29)$$

D'autre part, soit  $C_2 = 1 + \max_{\mathcal{D}_I} |(\tilde{\varphi}_2)'|$ . Si  $h_{crois}$  est assez petit et  $h \in \mathcal{H}$ , l'écart entre  $\varphi'_2$  et  $\tilde{\varphi}'_2$  donné dans (4.3) pour  $n = 1$  mène à  $C_2 \geq \max_{\mathcal{D}_I \times J} |(\varphi_2)'|$  et par suite :

$$|\varphi_2(r_1, h) - \varphi_2(E_2, h)| \leq C_2 |r_1 - E_2|. \quad (4.30)$$

La fonction cotangente est analytique au voisinage de  $\frac{\varphi_2(E_2, h)}{h} = (2l+1)\frac{\pi}{2}$ , et a une dérivée valant  $-1$  en ce point. Si  $h_{crois}$  est assez petit, les inégalités (4.29) et (4.30) ci-dessus mènent donc à

$$\left| \cotan\left\{\frac{\varphi_2(r_1, h)}{h}\right\} - \cotan\left\{\frac{\varphi_2(E_2, h)}{h}\right\} \right| \leq C_3 \kappa_0 h_{crois}$$

avec  $C_3 = \frac{2C_2 C_1}{1 - \kappa_0}$ .

Finalement, si  $h_{crois}$  est assez petit,

$$|u_2(r_1, h)| \leq \kappa_0 C_3 h_{crois} < 1.$$

On procède de même pour  $|u_1(r_2, h)|$ .  $\square$

**Lemme 2.4.14**  $\exists \kappa_0 > 0, \exists h_0 > 0, \exists B_+ > 0$ , tels que si  $h_{crois} < h_0$ , alors  
 $\forall h \in \mathcal{H} = \left\{ h, \left| h - h_{crois} \right| < \kappa_0 h_{crois}^2 \right\}$ , on a

$$i) -\frac{3}{2h} \tilde{\varphi}'_2(E_{crois}) < \Re u'_2(r_1(h), h) < -\frac{1}{2h} \tilde{\varphi}'_2(E_{crois}),$$

$$ii) \left| \Im u'_2(r_1(h), h) \right| < B_+,$$

ainsi que des relations équivalentes pour  $u'_1(r_2(h), h)$ .

**Preuve :** *i)* On transpose la démonstration de (4.29) pour avoir  $C > 0, h_0 > 0$ , tel que si  $h_{crois} < h_0$ , alors

$$\forall h \in \mathcal{H}, \left| r_1(h) - E_{crois} \right| < C \kappa_0 h_{crois}^2.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \left| \varphi_2(r_1, h) - \varphi_2(E_{crois}, h_{crois}) \right| &\leq \left| \varphi_2(r_1, h) - \tilde{\varphi}_2(r_1) \right| + \left| \tilde{\varphi}_2(r_1) - \tilde{\varphi}_2(E_{crois}) \right| \\ &\quad + \left| \tilde{\varphi}_2(E_{crois}) - \varphi_2(E_{crois}, h_{crois}) \right| \end{aligned}$$

L'écart entre  $\varphi_2(E, h)$  et  $\tilde{\varphi}_2$  (4.3) montre qu'il existe  $C' > 0$  telle que si  $h_{crois}$  est petit

$$\left| \varphi_2(r_1, h) - \varphi_2(E_{crois}, h_{crois}) \right| \leq C' h^2 + C_2 \left| r_1(h) - E_{crois} \right| \leq 2C_2 \kappa_0 h_{crois}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi_2(r_1, h)}{h} - \frac{\varphi_2(E_{crois}, h_{crois})}{h_{crois}} \right| &= \left| \frac{\varphi_2(r_1, h) - \varphi_2(E_{crois}, h_{crois})}{h} + \varphi_2(E_{crois}, h_{crois}) \frac{h - h_{crois}}{h h_{crois}} \right| \\ &\leq \left| \frac{\varphi_2(r_1, h) - \varphi_2(E_{crois}, h_{crois})}{(1 - \kappa_0) h_{crois}} \right| + \left| \varphi_2(E_{crois}, h_{crois}) \right| \frac{\kappa_0 h_{crois}}{(1 - \kappa_0) h_{crois}} \\ &\leq 2C_2 \frac{\kappa_0}{1 - \kappa_0} + \left| \varphi_2(E_{crois}, h_{crois}) \right| \frac{\kappa_0}{(1 - \kappa_0)}. \end{aligned}$$

Si  $\kappa_0 < \kappa_0(\epsilon)$ ,  $\left| \frac{\varphi_2(r_1, h)}{h} - \frac{\varphi_2(E_{crois}, h_{crois})}{h_{crois}} \right| \leq \epsilon$  et pour  $\epsilon < \epsilon_0$ ,

$$\left| \sin^2 \left( \frac{\varphi_2(r_1, h)}{h} \right) - \sin^2 \left( \frac{\varphi_2(E_{crois}, h_{crois})}{h_{crois}} \right) \right| = \left| \sin^2 \left( \frac{\varphi_2(r_1, h)}{h} \right) - 1 \right| \leq 2\epsilon.$$

Avec ces inégalités, on obtient  $C' > 0$  tel que :

$$\left| \frac{\varphi'_2(r_1, h)}{\sin^2(\varphi_2(r_1, h)/h)} - \tilde{\varphi}'_2(E_{crois}) \right| \leq C' \epsilon + C' h_{crois}.$$

On peut choisir  $\epsilon < \epsilon_0, \kappa_0 < \kappa_0(\epsilon), h_{crois} < h_0$  tels que

$$\forall h \in \mathcal{H}, \left| \frac{\varphi'_2(r_1, h)}{\sin^2(\varphi_2(r_1, h)/h)} - \tilde{\varphi}'_2(E_{crois}) \right| < \frac{\tilde{\varphi}'_2(E_{crois})}{2}.$$

Comme  $u'_2(r_1, h) = \frac{\varphi'_2(r_1, h)}{\sin^2(\varphi_2(r_1, h)/h)}$ , on obtient finalement

$$-\frac{3}{2} \frac{\tilde{\varphi}'_2(E_{crois})}{h} < \Re u'_2(r_1, h) < -\frac{1}{2} \frac{\tilde{\varphi}'_2(E_{crois})}{h}$$

et donc la première partie du lemme.

ii) On montre avec des inégalités similaires que

$$\begin{aligned} \left| u'_2(r_1, h) + \frac{\varphi'_2(\alpha_1, h)}{h} \right| &= \left| \frac{\varphi'_2(r_1, h)}{h \sin^2(\varphi_2(r_1, h)/h)} - \varphi'_2(\alpha_1, h)/h \right| \\ &= \frac{1}{h} \left| \frac{\varphi'_2(\alpha_1, h) + O(\beta_1)}{\sin^2(\varphi_2(E_2, h)/h) + O((r_1 - E_2)/h)} - \varphi'_2(\alpha_1, h) \right| \end{aligned}$$

et donc il existe des constantes  $D, D', D''$  strictement positives telles que

$$\left| u'_2(r_1, h) + \frac{\varphi'_2(\alpha_1, h)}{h} \right| \leq \frac{1}{h} [D|\beta_1| + D' \left| \frac{r_1 - E_2}{h} \right|] \leq 2D'' \kappa_0 \text{ pour } h_{crois} < h_0.$$

On a bien ii) avec  $B_+ = 2D'' \kappa_0$ .  $\square$

On fixe désormais  $\kappa_0$  et  $h_0$  pour avoir ces deux lemmes.

Grâce à ces encadrements, on montre que la partie imaginaire de la résonance  $r_1(h)$  est donnée par la formule (4.17) dans le cas intermédiaire 1.a :

**Lemme 2.4.15** *Si  $S_1(E_{crois}) > 2S_2(E_{crois}) + \delta$ , il existe  $h_0 > 0$  tel que si  $h_{crois} < h_0$ , alors*

$$\forall h \in \mathcal{H}, \left| \beta_1(h) \right| \leq \frac{2}{c_{11}} h e^{-2(S_1(E_{crois}) - S_2(E_{crois}))/h}.$$

Dans le cas 1.a, on ne peut donc avoir que la première expression de  $\beta_1$  donnée par (4.17).

**Preuve :** Soit  $K = \left\{ h \in \mathcal{H}, \left| \beta_1(h) \right| \leq \frac{2}{c_{11}} h e^{-2(S_1(E_{crois}) - S_2(E_{crois}))/h} \right\}$ . On va montrer que  $K$  est un connexe non vide de  $\mathcal{H}$  et donc  $K = \mathcal{H}$ .

\*  $K$  est non vide

Si  $h_{crois}$  est petit et  $h \in \mathcal{H}$  tel que  $|h - h_{crois}| > \kappa_1 h_{crois}^2$ , avec donc  $\kappa_1 < \kappa_0$ , l'encadrement de  $|u_2(r_1(h), h)|$  (4.27) implique

$$\left| u_2(r_1, h) \right| > \frac{1}{2} \left| u_2(E_1, h) \right| > \frac{\tilde{\varphi}'_2(E_{crois}) \kappa_1 C_{crois}}{3} h_{crois}.$$

On se trouve donc dans le cas 1.1.  $\beta_1$  est donné par (4.12) donc  $\beta_1 = O(e^{-2(S_1 + S_2)/h})$  et par suite  $h \in K$ .

\*  $K$  est fermé dans  $\mathcal{H}$

Les applications  $h \mapsto \beta_1(h)$  et  $h \mapsto h e^{-2(S_1(E_{crois}) - S_2(E_{crois}))/h}$  sont continues hors de zéro donc ce point est immédiat.

\*  $K$  est ouvert dans  $\mathcal{H}$

Prenons  $h' \in K$ . Par définition de  $K$   $|\beta_1(h')| \leq \frac{2}{c_{11}} h e^{-2(S_1(E_{crois}) - S_2(E_{crois}))/h}$ .

La continuité de  $h \mapsto \beta_1$  montre qu'il existe un voisinage de  $h'$  sur lequel

$$|\beta_1(h)| \leq \frac{3}{c_{11}} h e^{-2(S_1(E_{crois}) - S_2(E_{crois}))/h} \leq \frac{3}{c_{11}} h e^{-2(\delta + S_2(E_{crois}))/h}.$$

car  $S_1(E_{crois}) - 2S_2(E_{crois}) > \delta$ .

On reprend la partie imaginaire de l'équation de quantification donnée par (4.16). On peut évaluer les restes grâce à la majoration ci-dessus lorsque  $h$  est dans le voisinage de  $h'$  choisi. On obtient

$$\beta_1 = -h \frac{e^{-2(S_1 - S_2)/h}}{c_{11} \left(1 + \left|e^{2S_2/h} u_2\right|^2\right)} (1 + O(h)).$$

Ainsi  $h \in K$  si  $h_{crois}$  est assez petit.  $\square$

**Corollaire 2.4.16** *Il existe  $C > 0$  tel que si  $h_{crois}$  est assez petit et si  $S_1(E_{crois}) > 2S_2(E_{crois}) + \delta$ ,*

$$\forall h \in \mathcal{H}, |\beta_1(h)| \leq C h e^{-2(S_1(E_{crois}) - S_2(E_{crois}))/h}.$$

On fixe désormais  $\kappa_0$  et  $h_0$  pour avoir ces trois lemmes.

Avec ces encadrements, on peut maintenant montrer le théorème 2.4.12.

**Preuve du théorème 2.4.12 :** On fait une démonstration par l'absurde et on suppose qu'il existe  $\tilde{h}_{crois} \in \mathcal{H}$  tel que  $r_1(\tilde{h}_{crois}) = r_2(\tilde{h}_{crois}) = \tilde{r}_{crois}$ .

On note

$$F(E, h) = u_1 u_2 - e^{-2S_1/h} \frac{q_1 \sin(\psi_1/h)}{p_1 \sin(\varphi_1/h)} - i e^{-2S_2/h} \frac{q_2}{p_2} u_1 \frac{\sin(\psi_2/h)}{\sin(\varphi_2/h)} - i e^{-2(S_1 + S_2)/h} \frac{q_1 q_2 \sin(\psi_1/h) \cos(\psi_2/h)}{p_1 p_2 \sin(\varphi_1/h) \sin(\varphi_2/h)}.$$

**Lemme 2.4.17** *On a  $F(\tilde{r}_{crois}, \tilde{h}_{crois}) = 0$  et  $\frac{\partial F}{\partial E}(\tilde{r}_{crois}, \tilde{h}_{crois}) = 0$ .*

**Preuve :** L'équation de quantification en  $r_1(h)$  s'écrit  $F(r_1(h), h) = 0$  ce qui donne immédiatement  $F(\tilde{r}_{crois}, \tilde{h}_{crois}) = 0$ .

D'autre part,  $F(E, h)$  est analytique dans  $\mathcal{D}_I$ . Comme  $[r_1(h), r_2(h)] \subset \mathcal{D}_I$ , on peut écrire

$$0 = F(r_1(h), h) - F(r_2(h), h) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial E}((1-t)r_1(h) + tr_2(h), h) dt (r_2(h) - r_1(h)).$$

Or pour  $h \neq \tilde{h}_{crois}$ ,  $r_1(h) \neq r_2(h)$ , cela donne

$$0 = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial E}((1-t)r_1(h) + tr_2(h), h) dt.$$

Lorsque  $h$  tend vers  $\tilde{h}_{crois}$ , on obtient  $\frac{\partial F}{\partial E}(\tilde{r}_{crois}, \tilde{h}_{crois}) = 0$ .  $\square$

Pour simplifier les notations, on écrit  $f(\tilde{r}_{crois}, \tilde{h}_{crois}) = \tilde{f}_{crois}$ , pour toute fonction  $f(E, h)$ .

Reprenons la preuve du théorème. On distingue deux cas.

**Preuve dans le cas  $S_1(E_{crois}) > 2S_2(E_{crois}) + \delta$  :**

On étudie les différents ordres de grandeurs que peut prendre  $|\tilde{u}_{1crois}|$  :

$$1) \text{ Si } |\tilde{u}_{1crois}| \leq e^{-(2S_2(E_{crois})+(\delta/2))/\tilde{h}_{crois}},$$

$\frac{\partial F}{\partial E}(\tilde{r}_{crois}, \tilde{h}_{crois}) = 0$  donne

$$\tilde{u}_{2crois} = ie^{-2\tilde{S}_2(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}}(1 + O(\tilde{h}_{crois}))$$

et un développement limité de  $\tilde{u}_{2crois}$  en  $\Re(\tilde{r}_{1crois})$  donne l'existence de  $C > 0$  tel que

$$|\beta_1(\tilde{h}_{crois})| \geq C\tilde{h}_{crois}e^{-2S_2(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}} > C\tilde{h}_{crois}e^{(2\delta-2(S_1(E_{crois})-S_2(E_{crois}))/\tilde{h}_{crois})},$$

ce qui contredit le corollaire 2.4.16.

$$2) \text{ Si } |\tilde{u}_{1crois}| \geq e^{-2(S_2(E_{crois})+(\delta/2))/\tilde{h}_{crois}} > e^{-S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}},$$

on est dans le cas 2.1 et  $|\beta_1(\tilde{h}_{crois})| \geq C\tilde{h}_{crois}e^{-2S_2(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}}$ . On a à nouveau une contradiction avec le corollaire 2.4.16.  $\square$

**Preuve dans le cas  $S_1(E_{crois}) < 2S_2(E_{crois}) - \delta$  :**

On a besoin d'un encadrement supplémentaire dans ce cas :

**Lemme 2.4.18**  $\exists C_{\pm} > 0, \exists h_0 > 0$  tel que si  $h_{crois} < h_0$ , et s'il existe  $\tilde{h}_{crois} \in \mathcal{H}$ , tel que  $r_1(\tilde{h}_{crois}) = r_2(\tilde{h}_{crois})$ , alors

$$C_- < |\tilde{u}_{jcrois}e^{S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}}| < C_+, \quad j = 1, 2.$$

**Preuve :** Pour démontrer ce lemme, on part de l'égalité  $\frac{\partial \tilde{F}_{crois}}{\partial E} = 0$  qui donne

$$\tilde{u}'_{1crois}\tilde{u}_{2crois} + \tilde{u}_{1crois}\tilde{u}'_{2crois} = O(e^{-2S_0(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}}/\tilde{h}_{crois})$$

où on rappelle que  $S_0(E_{crois}) = \min_{j=1,2}(S_j(E_{crois}))$ .

On écrit cette égalité sous la forme

$$\tilde{u}_{2crois} = L\tilde{u}_{1crois} + O(e^{-2S_0(E_{crois})/h}), \quad (4.31)$$

où  $L = \frac{-\tilde{u}'_{2crois}}{\tilde{u}'_{1crois}}$ .

Grâce au lemme 2.4.14, qui estime  $\Re u'_j(r_i, h)$  et  $\Im u'_j(r_i, h)$ , pour  $i = 1, 2, j = 2, 1$  on a :

$$L = -\gamma(1 + O(\tilde{h}_{crois})) \quad (4.32)$$

où  $\gamma$  est réel, et vérifie

$$\frac{1}{3} \frac{\tilde{\varphi}'_2(E_{crois})}{\tilde{\varphi}'_1(E_{crois})} < \gamma < 3 \frac{\tilde{\varphi}'_2(E_{crois})}{\tilde{\varphi}'_1(E_{crois})}.$$

On rappelle (0.8) :  $\tilde{\varphi}'_j > 0$  sur  $I$ . On note  $m = \min_{E \in I, j=1,2} (\tilde{\varphi}'_j(E))$  et  $M = \max_{E \in I, j=1,2} (\tilde{\varphi}'_j(E))$ .  $I$  est un intervalle compact et  $\tilde{\varphi}_j$ ,  $j = 1, 2$ , sont régulières donc  $0 < m \leq M < \infty$ . Cela donne pour  $L$  :

$$\frac{1}{4} \frac{m}{M} < |L| < 4 \frac{M}{m}. \quad (4.33)$$

On revient à l'équation (4.31) ci-dessus et on suppose dans un premier temps que

$$|\tilde{u}_{2crois}| \leq e^{-S_1(E_{crois})/\hbar_{crois}}. \quad (4.34)$$

Autrement dit, on se trouve dans les cas 1.3 ou 1.b liés au premier puits et la partie imaginaire de  $\tilde{r}_{crois} = r_1(\tilde{h}_{crois})$  donnée par (4.18) vérifie

$$|\beta_1(\tilde{h}_{crois})| \geq h \frac{e^{-2S_2(E_{crois})/\hbar_{crois}}}{2(c_{11} + c_{21})}.$$

Le lemme 2.4.13 donne

$$m \leq c_{ij} \leq 2M, \quad i, j = 1, 2 \text{ et donc}$$

$$|\beta_1(\tilde{h}_{crois})| \geq h \frac{e^{-2S_2(E_{crois})/\hbar_{crois}}}{8M}.$$

Pour  $\tilde{h}_{crois}$  assez petit (tel que  $\frac{2e^{-2S_1/\hbar_{crois}}}{m} < \frac{1}{8M}$ ), cela mène à

$$|\beta_1(\tilde{h}_{crois})| \geq \frac{2h}{m} e^{-2(S_1+S_2)/\hbar_{crois}}.$$

Or  $\beta_1(\tilde{h}_{crois}) = \beta_2(\tilde{h}_{crois})$ . Cette minoration impose donc qu'on se trouve dans les cas 2.1 ou 2.a associés au deuxième puits.  $\beta_2$  est donc donné par (4.24) ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \frac{2h}{m} e^{-2(S_1+S_2)/\hbar_{crois}} &\leq |\beta_2(\tilde{h}_{crois})| \leq 2\tilde{h}_{crois} e^{-2S_2(E_{crois})/\hbar_{crois}} \frac{|e^{S_1(E_{crois})/\hbar_{crois}} \tilde{u}_{1crois}|^2}{c_{12}} \\ &\leq 2\tilde{h}_{crois} e^{-2S_2(E_{crois})/\hbar_{crois}} \frac{|\tilde{u}_{1crois} e^{S_1(E_{crois})/\hbar_{crois}}|^2}{m}. \end{aligned}$$

On trouve donc

$$|e^{S_1(E_{crois})/\hbar_{crois}} \tilde{u}_{1crois}| \geq \sqrt{\frac{m}{16M}}.$$

D'autre part, (4.31) donne  $C > 0$  tel que

$$|(\tilde{u}_{2crois} - L\tilde{u}_{1crois})e^{S_1(E_{crois})/\hbar_{crois}}| < C e^{(S_1(E_{crois}) - 2S_0(E_{crois}))/\hbar_{crois}}.$$

Or  $S_1(E_{crois}) - 2S_0(E_{crois}) < -\min(S_1, \delta) < 0$  donc pour  $h_{crois}$  assez petit,

$$\begin{aligned} \left| (\tilde{u}_{2crois} - L\tilde{u}_{1crois}) e^{S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}} \right| &\leq \frac{m}{6M} \sqrt{\frac{m}{16M}} \\ &\leq \frac{m}{6M} \left| e^{S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}} \tilde{u}_{1crois} \right|. \end{aligned}$$

D'où, avec la minoration (4.33) de  $|L|$

$$\begin{aligned} \left| \tilde{u}_{2crois} e^{S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}} \right| &\geq |L\tilde{u}_{1crois} e^{S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}}| - \left| (\tilde{u}_{2crois} - L\tilde{u}_{1crois}) e^{S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}} \right| \\ &> \frac{m}{12M} \left| e^{S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}} \tilde{u}_{1crois} \right| \geq \frac{m}{12M} \sqrt{\frac{m}{16M}}. \end{aligned}$$

Avec  $C_-^1 = \frac{m}{12M} \sqrt{\frac{m}{16M}}$ , on a dans ce cas la minoration recherchée :  $C_-^1 < |\tilde{u}_{jcrois} e^{S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}}|$ .

On rappelle qu'on s'est placé dans le cas 1.b ou 1.3 avec l'hypothèse  $|\tilde{u}_{2crois}| \leq e^{-S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}}$ . On a donc déjà la majoration recherchée dans le lemme pour  $u_2$  avec  $C_+ = 1$ . Afin d'avoir la majoration pour  $u_1$  on reprend l'expression (4.18) qui estime  $\beta_1$ . On obtient

$$\begin{aligned} \left| \beta_1(\tilde{h}_{crois}) \right| &\leq 2h \frac{e^{-2S_2(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}}}{c_{11} \left| \tilde{u}_{2crois} e^{S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}} \right|^2 + c_{21}} \\ &\leq h \frac{e^{-2S_2(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}}}{m(1 + (m/12M)^2 \left| \tilde{u}_{1crois} e^{S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}} \right|^2)} \end{aligned}$$

grâce à la minoration de  $\left| \tilde{u}_{2crois} e^{S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}} \right|$  en fonction de  $\left| e^{S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}} \tilde{u}_{1crois} \right|$ .

D'autre part, (4.24) donne pour  $\beta_2(\tilde{h}_{crois})$  :

$$\begin{aligned} \left| \beta_2(\tilde{h}_{crois}) \right| &\geq \tilde{h}_{crois} e^{-2S_2(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}} \frac{\left| e^{S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}} \tilde{u}_{1crois} \right|^2}{2(c_{22} \left| e^{S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}} \tilde{u}_{1crois} \right|^2 + c_{12})} \\ &\geq \tilde{h}_{crois} e^{-2S_2(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}} \frac{\left| e^{S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}} \tilde{u}_{1crois} \right|^2}{2M (1 + \left| e^{S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}} \tilde{u}_{1crois} \right|^2)}. \end{aligned}$$

Or  $\left| \beta_1(\tilde{h}_{crois}) \right| = \left| \beta_2(\tilde{h}_{crois}) \right|$ , et donc

$$\left| e^{S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}} \tilde{u}_{1crois} \right|^2 \leq \frac{4M(1 + \left| e^{S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}} \tilde{u}_{1crois} \right|^2)}{m(1 + (m/12M)^2 \left| \tilde{u}_{1crois} e^{S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}} \right|^2)}.$$

La fonction réelle  $x \mapsto \frac{4M(1+x^2)}{m(1+(m/12M)^2 x^2)}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $C'$  sa borne supérieure.

Avec  $C_+^1 = \max(C', 1)$ , on a la majoration recherchée dans le cas où  $\left| u_2(\tilde{r}_{crois}, \tilde{h}_{crois}) \right| \leq e^{-S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}}$ .

Si on suppose maintenant que  $\left| u_2(\tilde{r}_{crois}, \tilde{h}_{crois}) \right| \geq e^{-S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}}$ , on obtient le lemme par des calculs similaires.  $\square$

**Remarque 2.4.19** On a en particulier  $\left| \beta_j(\tilde{h}_{crois}) \right| \leq \frac{2}{m(1+C_-^2)} \tilde{h}_{crois} e^{-2S_2(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}}$ .

Reprenons maintenant la fin de la preuve du théorème 2.4.12.

Le lemme ci-dessus permet d'écrire  $\tilde{u}_{j_{crois}} = C_j e^{-S_1(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}}$ ,  $C_- < |C_j| < C_+$ ,  $j = 1, 2$ .

$$\tilde{F}_{crois} = 0 \text{ donne } C_1 C_2 = 1 + O(e^{(S_1-2S_2)(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}}),$$

$$\frac{\partial \tilde{F}_{crois}}{\partial E} = 0 \text{ donne } \tilde{u}'_{1_{crois}} C_2 + \tilde{u}'_{2_{crois}} C_1 = O(e^{(S_1-2S_0)(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}}),$$

d'où avec l'expression de  $\tilde{u}_{2_{crois}}$  en fonction de  $L$  donnée par (4.31) et l'écriture de  $L$  dans (4.32) :

$$C_2^2 = L + O(e^{(S_1-2S_0)(E_{crois})/\tilde{h}_{crois}}) = -\gamma(1 + O(\tilde{h}_{crois})), \quad \gamma > \frac{m}{3M}.$$

Ainsi  $C_2 = \pm i\sqrt{\gamma}(1 + O(\tilde{h}_{crois}))$ . Si  $\tilde{h}_{crois}$  est petit, on a alors  $|\Im \tilde{u}_{2_{crois}}| \geq e^{-S_1/h} \sqrt{\gamma}/2$  et donc  $|\beta_1(\tilde{h}_{crois})| \geq m\sqrt{\gamma}/4\tilde{h}_{crois} e^{-S_1/h}$ , ce qui contredit la remarque 2.4.19 pour  $h_{crois}$  assez petit. On a finalement démontré le théorème pour  $h \in \mathcal{H}$ .

Terminons la démonstration du théorème 2.4.12 avec le lemme suivant :

**Lemme 2.4.20** *Si  $h \in J \setminus \mathcal{H}$ , on ne peut pas avoir  $r_1(h) = r_2(h)$ .*

**Preuve :** Il suffit d'écrire

$$|r_1 - r_2| \geq |E_1 - E_2| - |E_1 - r_1| - |E_2 - r_2|$$

et d'utiliser l'encadrement (4.26) qui minore  $|E_1 - E_2|$  en  $\tilde{h}_{crois}$  ainsi que le fait que  $E_j - r_j$  est exponentiellement petit (proposition 2.4.2).  $\square$

Ceci achève la démonstration du théorème.

### 2.4.3 Partie réelle des résonances

Nous cherchons maintenant à évaluer plus précisément la partie réelle des résonances afin de tracer les graphes  $h \mapsto r_j(h)$ ,  $j = 1, 2$  lorsqu'il y a une interaction entre les deux puits. On se place sous les hypothèses du théorème 2.4.12 et on garde les notations des parties précédentes.

#### Résonances associées au premier puits

On note  $\alpha_1(h) = E_1(h) + w_1(h)$  la partie réelle de la résonance  $r_1(h)$  proche de  $E_1(h)$ . On rappelle que pour  $\epsilon > 0$ , on note  $\epsilon(h)$  toute fonction définie sur  $J$  telle que  $|\epsilon(h)| < \epsilon$  sur  $J$ . On note  $\tilde{o}(\beta, w)$  une fonction qui vérifie

$$\frac{h\tilde{o}(w, \beta)}{\max(|w|, |\beta|)} = \epsilon(h).$$



**Proposition 2.4.21** *Pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\delta > 0$ , il existe  $k_0$  tel que si  $k \geq k_0$ , on peut définir des fonctions  $\tilde{w}_1$  telles que  $\tilde{w}_1 = w_1 + h\tilde{o}(w_1, \beta_1)$  et on a les estimations*

**cas 1.1** Si  $|u_2(r_1, h)| = \frac{\max(e^{-S_1/h}, e^{-2S_2/h})}{\epsilon(h)}$

$$\tilde{w}_1 = -he^{-2S_1/h} \frac{u_2(E_1, h)}{c_{11}|u_2(r_1, h)|^2} (1 + \epsilon(h)). \quad (4.35)$$

**cas 1.2** Si  $|u_2(r_1, h)| = \epsilon(h)e^{-2S_2/h}$  et  $S_1 > 2S_2 + \delta$

$$\tilde{w}_1 = -he^{-2S_1/h} \frac{u_2(E_1, h)}{c_{11}} (1 + \epsilon(h)). \quad (4.36)$$

**cas 1.3** Si  $|u_2(r_1, h)| = \epsilon(h)e^{-S_1/h}$  et  $S_1 < 2S_2 - \delta$

$$\tilde{w}_1 = h \frac{u_2(E_1, h)}{c_{21}} (1 + \epsilon(h)). \quad (4.37)$$

**Preuve :** On a  $\Re[(1 + \mathcal{E})u_1(r_1, h)] = (1 + O(h))\Re u_1 + hO(\beta_1^2/h^2)$ .

On reprend l'équation de quantification (4.15) dans la démonstration de la proposition 2.4.9 et on va maintenant évaluer la partie réelle de cette équation. Avec les notations  $S_i = S_i(\alpha_1(h)) = S_i(E_1(h)) + O(e^{-S_{01}/h})$  on obtient :

$$(1 + O(h))\Re u_1(r_1, h) + hO(\beta_1^2/h^2) = e^{-2S_1/h} \frac{\Re u_2(r_1, h) (1 - e^{-4S_2/h}) + \hat{o}_1(\beta_1, h) + O(h)e^{-4S_2/h}}{|u_2(r_1, h)|^2 + e^{-4S_2/h} - 2e^{-2S_2/h}\Im u_2 + \hat{o}_2(\beta_1, h)}, \quad (4.38)$$

où on rappelle que

$$\begin{aligned} \hat{o}_1(\beta, h) &= O(\beta/h)[e^{-2S_2/h} + |u_2|] \text{ et} \\ \hat{o}_2(\beta, h) &= O(h)e^{-4S_2/h} + e^{-2S_2/h}O(\beta/h)|u_2|. \end{aligned}$$

Fixons  $\epsilon > 0$ ,  $\delta > 0$ . Pour  $h$  assez petit, alors  $O(\beta_1^2/h) = \tilde{o}(w_1, \beta_1)$ .

On a le développement limité de  $u_i(r_1(h), h)$  en  $E_1(h)$  :

$$\begin{aligned} u_1(r_1, h) &= -c_{11} \frac{w_1 + i\beta_1}{h} + \tilde{o}(w_1, \beta_1), \\ u_2(r_1, h) &= u_2(E_1(h), h) - c_{21} \frac{w_1 + i\beta_1}{h} + \tilde{o}(w_1, \beta_1), \end{aligned}$$

car  $w_1$  et  $\beta_1$  tendent vers zéro quand  $h$  tend vers zéro.

Dans (4.38) cela donne

$$\begin{aligned} & - \left( (1 + O(h)) \frac{w_1}{h} + \tilde{o}(w_1, \beta_1) \right) \left[ c_{11}|u_2(r_1, h)|^2 + c_{11}e^{-4S_2/h} - 2c_{11}e^{-2S_2/h}\Im u_2(r_1, h) - c_{21}e^{-2S_1/h} \right] \\ & = e^{-2S_1/h} \left( u_2(E_1, h) + O(h)e^{-4S_2/h} \right) + \hat{o}(w_1, \beta_1, h), \end{aligned}$$

où

$$\hat{o}(w_1, \beta_1, h) = \frac{w_1}{h} O(h) e^{-4S_2/h} + \tilde{o}(w_1, \beta_1) |u_2| e^{-2S_2/h} + e^{-2S_1/h} O(\beta_1/h) (|u_2| + e^{-2S_2/h}).$$

Finalement,

$$(1 + O(h))w_1(h) + h\tilde{o}(w_1, \beta_1) + h\ddot{o} = -he^{-2S_1/h} \frac{u_2(E_1, h) (1 - e^{-4S_2/h}) + O(h)e^{-4S_2/h}}{c_{11}|u_2|^2 + c_{11}e^{-4S_2/h} - 2c_{11}e^{-2S_2/h} \Im u_2 - c_{21}e^{-2S_1/h}},$$

$$\text{où } \ddot{o} = \frac{-\hat{o}}{c_{11}|u_2|^2 + c_{11}e^{-4S_2/h} - 2c_{11}e^{-2S_2/h} \Im u_2 - c_{21}e^{-2S_1/h}}.$$

Dans tous les cas de figure, on montre que pour  $h$  assez petit,  $\ddot{o} = \tilde{o}$ .

Notons

$$\tilde{w}_1(h) = -he^{-2S_1/h} \frac{u_1(E_2, h) (1 - e^{-4S_2/h}) + O(h)e^{-4S_2/h}}{c_{11}|u_2|^2 + c_{11}e^{-4S_2/h} - 2c_{11}e^{-2S_2/h} \Im u_2 - c_{21}e^{-2S_1/h}}.$$

Comme  $w_1 = \tilde{w}_1 + h\tilde{o}(w_1, \beta_1)$ , on a  $w_1 = \tilde{w}_1 + h\tilde{o}(\tilde{w}_1, \beta_1)$  et donc

$$u_2(r_1(h), h) = u_2(E_1(h), h) - c_{21} \frac{\tilde{w}_1 + i\beta_1}{h} + \tilde{o}(\tilde{w}_1, \beta_1).$$

On diminue encore  $h_0$  pour avoir  $e^{-\delta/h} < \epsilon$ ,  $h < \epsilon$  si  $h < h_0$ . On retrouve les cas de la partie 2.5.1 :

**cas 1.1 :**  $|u_2(r_1, h)| = \frac{\max(e^{-S_1/h}, e^{-2S_2/h})}{\epsilon(h)}.$

On a vu que  $\beta_1(h) = O(e^{-2(S_1+S_2)/h} |u_2(r_1, h)|^{-2}) = h\epsilon(h)e^{-2\text{Max}(S_2, S_1-S_2)/h}$  et donc  $\Im u_2(r_1, h) = \epsilon(h)e^{-2S_2/h}$ .

On obtient

$$\tilde{w}_1 = -he^{-2S_1/h} \frac{u_2(E_1, h)}{c_{11}|u_2(r_1, h)|^2} (1 + \epsilon(h)).$$

**cas 1.2 :**  $|u_2(r_1, h)| = \epsilon(h)e^{-2S_2/h}$  et  $S_1 > 2S_2 + \delta$ .

Alors d'après ce qui précède,  $\beta_1(h) = O(e^{-2(S_1-S_2)/h})$  et donc  $\Im u_2(r_1, h) = O(e^{-2(S_1-S_2)/h})$ .

On obtient

$$\tilde{w}_1 = -he^{-2S_1/h} \frac{u_2(E_1, h)}{c_{11}} (1 + \epsilon(h)).$$

**cas 1.3 :**  $|u_2(r_1, h)| = \epsilon(h)e^{-S_1/h}$  et  $S_1 < 2S_2 - \delta$ .

Alors on trouve

$$\tilde{w}_1 = h \frac{u_2(E_1, h)}{c_{21}} (1 + \epsilon(h)).$$

On a démontré la proposition.  $\square$

## Résonances associées au deuxième puits

On note la partie réelle de la résonance  $\alpha_2(h) = E_2(h) + w_2(h)$ . Avec les notations de la partie précédente, on a

**Proposition 2.4.22** *Soit  $\epsilon > 0$ . On peut construire une fonction  $\tilde{w}_2$  telle que  $\tilde{w}_2 = w_2 + h\tilde{o}(w_2, \beta_2)$  et*

**cas 2.1**

$$\text{si } |u_1(r_2, h)| = \frac{e^{-S_1/h}}{\epsilon(h)}, \quad \tilde{w}_2 = -he^{-2S_1/h} \frac{u_1(E_2, h)}{c_{22}|u_1(r_2, h)|^2} (1 + \epsilon(h)), \quad (4.39)$$

et

**cas 2.2 et cas 2.3**

$$\text{si } |u_1(r_2, h)| = \epsilon(h)e^{-S_1/h}, \quad \tilde{w}_2 = h \frac{u_1(E_2, h)}{c_{12}} (1 + \epsilon(h)). \quad (4.40)$$

**Preuve :** On procède exactement comme précédemment pour trouver :

$$\Re u_2(r_2, h) = \frac{(e^{2S_2/h} + e^{-2S_2/h}) \Re u_1(r_2, h) (1 + O(h)) + \omega_1(\beta_2, h)}{e^{2(S_1+S_2)/h} |u_2(r_2, h)|^2 + e^{-2(S_1+S_2)/h} (1 + O(h)) - 2(1 + O(h)) \Im u_1(r_2, h) + \omega_2(\beta_2, h)}$$

où

$$\omega_1(\beta, h) = O(\beta/h) \left[ e^{2S_2/h} |u_1(r_2, h)| + e^{2S_1/h} |u_1|^2 + e^{-2S_1/h} \right],$$

$$\omega_2(\beta, h) = O(\beta/h) \left[ |u_1(r_2, h)| + e^{2(S_1+S_2)/h} |u_1|^2 \right].$$

En utilisant les notations en  $\tilde{o}$ , on a pour  $h$  assez petit

$$(1 + O(h))w_2(h) + h\tilde{o}(w_2 + \beta_2) + h\omega =$$

$$- \frac{he^{2S_2/h} u_1(E_2, h) (1 + O(h))}{c_{22}e^{2(S_1+S_2)/h} |u_1(r_2, h)|^2 + e^{-2(S_1+S_2)/h} (1 + O(h)) - 2(1 + O(h)) \Im u_1(r_2, h) - c_{12}(1 + O(h))e^{2S_2/h}}.$$

où  $\omega = (\omega_1 - \omega_2 \frac{w_2}{h}) \left[ c_{22}e^{2(S_1+S_2)/h} - 2c_{22} \Im u_2 - c_{12}e^{2S_2/h} \right]^{-1}$  sera toujours un  $\tilde{o}(w_1, \beta_1)$ .

On note  $\tilde{w}_2$  le membre de droite et on montre encore que

$$u_1(r_2(h), h) = u_1(E_2(h), h) - c_{12} \frac{\tilde{w}_2 + i\beta_2}{h} + \tilde{o}(\tilde{w}_2, \beta_2).$$

Le calcul donne le résultat. On note que les cas 2.2 et 2.3 sont ici confondus.  $\square$

Grâce à ces deux dernières propositions on peut évaluer précisément l'ordre de grandeur de  $u_i(r_j, h)$ ,  $i = 1, 2$ ;  $j = 2, 1$  lors d'une interaction et déterminer ainsi dans quel cas on se trouve et quelle est l'estimation de la partie imaginaire de la résonance quand  $h$  varie.

## 2.4.4 Les graphes

On étudie maintenant le graphe des fonctions  $h \mapsto r_j(h)$  dans le cas d'une interaction. On va obtenir le théorème 2.0.12 qui donne les graphes des figures (FIG2, 3) de l'introduction.

On se place sous les mêmes hypothèses que dans la partie 2.4.1 : on fixe  $\epsilon > 0$  et  $\delta > 0$  dans les propositions 2.4.9 et 2.4.11. On augmente  $k_0$  pour avoir, lorsque  $k \geq k_0$ ,  $l \geq k_0$  des résonances  $r_1$  et  $r_2$  proches respectivement de  $E_{1,k}$  et  $E_{2,l}$  qui vérifient les lemmes d'encadrement 2.4.13, 2.4.14, 2.4.15 pour une constante  $\kappa_0 > 0$  définissant  $\mathcal{H}$

On écrit  $J = J_k^1 \cap J_l^2 = [h_-, h_+]$ .

Soit  $r_1(h)$  la résonance proche de  $E_1(h)$  pour  $h = h_-$ . Au voisinage de  $h_-$ , on a donc  $r_1 = \tilde{r}_1$ . Cependant, lorsque  $h$  tend vers  $h_{crois}$ , on ne sait plus distinguer entre  $\tilde{r}_1$  et  $\tilde{r}_2$ . On suit ici l'évolution de  $r_1(h)$  lorsque  $h \in J$

**Près de  $E_1(h)$**

On suppose qu'il existe une constante  $0 < \kappa_1 < \kappa_0$ , telle que

$$|h_- - h_{crois}| > \kappa_1 h_{crois}^2.$$

Grâce à (4.27), il existe  $C_1 > 0$  telle que  $|u_2(r_1, h)| > C_1 h_{crois}$ .

On est dans le cas 1.1 :

$$|u_2(r_1, h)| = \frac{\max(e^{-S_1/h}, e^{-2S_2/h})}{\epsilon(h)} \text{ avec } \epsilon(h) = O\left(\frac{1}{h_{crois}} \max(e^{-S_1/h}, e^{-2S_2/h})\right) < \epsilon.$$

Or

$$u_2(r_1, h) = u_2(E_1, h) - c_{21} \frac{\tilde{w}_1 + i\beta_1}{h} + \tilde{o}(\tilde{w}_1, \beta_1),$$

et donc

$$\left| u_2(E_1, h) - c_{21} \frac{\tilde{w}_1 + i\beta_1}{h} \right| - |\tilde{o}(\tilde{w}_1, \beta_1)| \leq |u_2(r_1, h)| \leq \left| u_2(E_1, h) - c_{21} \frac{\tilde{w}_1 + i\beta_1}{h} \right| + |\tilde{o}(\tilde{w}_1, \beta_1)|. \quad (4.41)$$

Avec les expressions de  $\beta_1$  et  $\tilde{w}_1$  en (4.12) et (4.35) qui correspondent au cas 1.1, on obtient

$$|u_2(r_1, h)| \leq |u_2(E_1, h)| \left| 1 + \epsilon(h) e^{-2(S_1 - \text{Min}(2S_2, S_1))/h} \right| + \left| \epsilon(h) e^{-2(S_1 + S_2 - \text{Min}(2S_2, S_1))/h} \right| + |\tilde{o}(w_1, \beta_1)|.$$

Si

$$|h - h_{crois}| < \epsilon(h) e^{-2(S_1 + S_2 - \text{Min}(2S_2, S_1))/h} \frac{h_{crois}}{2\varphi_2'(E_{crois})C_{crois}},$$

(4.27) implique  $|u_2(E_1, h)| = \epsilon(h) e^{-2(S_1 + S_2 - \text{Min}(2S_2, S_1))/h}$ . On ne peut être dans le cas 1.1 car (4.41) donnerait alors

$$|u_2(r_1, h)| = \epsilon(h) e^{-2(S_1 + S_2 - \text{Min}(2S_2, S_1))/h}.$$

Ainsi, lorsque  $h$  s'approche de  $h_{crois}$ , on se trouve dans les cas 1.2 ou 1.3 selon que  $S_1(E_{crois}) > 2S_2(E_{crois}) + \delta$  ou  $S_1(E_{crois}) < 2S_2(E_{crois}) - \delta$  (on passe bien sûr par les cas intermédiaires mais on peut ici les omettre).

Notons  $S_j = S_j(E_{crois})$ ,  $j = 1, 2$ .

**Cas 1.2 :**  $S_1 > 2S_2 + \delta$ .

Pour  $|h - h_{crois}| < \epsilon(h)e^{-2(S_1 - S_2)/h} \frac{h_{crois}}{2\varphi'_2(E_{crois})C_{crois}}$ , on a  $|u_2(r_1, h)| = \epsilon(h)e^{-2S_2/h}$ , et  $\beta_1$  et  $\tilde{w}_1$  sont donnés par (4.13) et (4.36).

Alors

$$|u_2(r_1, h)| \geq |u_2(E_1, h)| \left| 1 + O(e^{-2(S_1 - 2S_2)/h}) \right| - \left| O(e^{-2(S_1 - S_2)/h}) \right| - \left| \tilde{o}(\tilde{w}_1, \beta_1) \right|.$$

Quand  $|h - h_{crois}| > \epsilon(h)^{-1} e^{-2S_2/h} \frac{h_{crois}}{2\varphi'_2(E_{crois})C_{crois}}$ ,  $|u_2(E_1, h)|$  redevient grand : on retourne donc dans le cas 1.1. On obtient le schéma (FIG2) donné dans l'introduction.

**Cas 1.3**  $S_1 < 2S_2 - \delta$ .

Pour  $|h - h_{crois}| < \epsilon(h)e^{-2S_2/h} \frac{h_{crois}}{2\varphi'_2(E_{crois})C_{crois}}$ , on a  $|u_2(r_1, h)| = \epsilon(h)e^{-S_1/h}$ .  $\beta_1$  et  $\tilde{w}_1$  sont alors donnés par (4.14) et (4.37). L'encadrement (4.41) plus haut entraine

$$|u_2(r_1, h)| \leq \left| O(e^{-2S_2/h}) \right| + \left| \tilde{o}(\tilde{w}_1, \beta_1) \right|,$$

et donc  $u_2(r_1, h) = O(e^{-2S_2/h})$ .

Ecrivons  $E_1 + w_1 = E_2 + w_{12}$ . Avec la même méthode et les mêmes notations que dans la partie 2.5.3, l'équation de quantification (4.38) donne  $\tilde{w}_{12} = Ch e^{-2(2S_2 - S_1)/h} u_1(E_2, h)$  et un développement en  $E_2(h)$  implique

$$|u_2(r_1, h)| \leq |u_1(E_2, h)| \left| O(e^{-2(2S_2 - S_1)/h}) \right| + \left| O(e^{-2S_2/h}) \right| + \left| \tilde{o}(\tilde{w}_{12}, \beta_1) \right|.$$

Deux sous-cas se présentent :

**Cas a)**  $2S_2 - S_1 > S_2$ , i.e.  $S_2 > S_1$ .

Dans ce cas,  $u_2(r_1, h) = O(e^{-2S_2/h})$  même lorsque  $h$  s'éloigne de  $h_{crois}$ . On reste donc dans le cas 1.3 avec  $\epsilon(h)$  exponentiellement petit. La résonance est maintenant proche de  $E_2(h)$  comme illustré dans (FIG3). Elle est donnée par  $r_1 = E_2 + w_{12} + i\beta_1$ .

**Cas b)**  $S_2 < S_1$ , i.e.  $2S_2 - S_1 < S_2$ .

Dans ce cas, quand  $h$  s'éloigne de  $h_{crois}$ ,  $u_2(E_1, h)$  augmente, et on montre que  $|u_2(r_1, h)| \geq C(e^{-2(2S_2 - S_1)/h}) = \frac{e^{-2S_2/h}}{\epsilon(h)}$  : on revient donc au cas 1.1. Cela donne un graphe du type (FIG2).

On étudie maintenant le cas symétrique d'une résonance associée en  $h = h_-$  au deuxième puits :

### Près de $E_2(h)$

Soit une résonance  $r_2(h)$  proche de  $E_2(h)$  lorsque  $h = h_-$ .

On a  $u_1(E_2(h), h) = O(h_{crois})$ , donc on est dans le cas 2.1 où  $|u_1(r_2, h)| = \frac{e^{-S_1/h}}{\epsilon(h)}$ .

Encore une fois (4.20) et (4.39) nous donne  $\beta_2$  et  $\tilde{w}_2$  et on calcule

$$|u_1(r_2, h)| \leq |u_1(E_2, h)| |1 + \epsilon(h)| + |O(e^{-2S_2/h})| + |\tilde{o}(\tilde{w}_2, \beta_2)|.$$

Lorsque  $h$  tend vers  $h_{crois}$ , on a  $u_1(r_2, h) = O(e^{-2S_2/h})$ .

On retrouve les deux cas précédents :

#### Cas $S_1 > 2S_2$ ,

On reste dans le cas 2.1 et on a le graphe (*FIG2*).

#### Cas $S_1 < 2S_2$ ,

On a nécessairement  $|u_1| = \epsilon(h)e^{-S_1/h}$  et  $|u_1| = \frac{e^{-2S_1/h}}{\epsilon(h)}$  pour  $|h - h_{crois}| < \eta' h_{crois}$ ,  $\eta' \sim e^{-2S_2/h}$ .

On procède comme précédemment pour obtenir qu'alors  $u_1(r_2, h) = \epsilon(h)e^{-2S_2/h}$ .

On a à nouveau deux sous-cas :

#### Cas a) $S_1 < S_2$ ,

Si  $|h - h_{crois}|$  est assez petit, on se trouve dans le cas 2.3.

On montre qu'alors  $u_1(r_2, h) = O(e^{-2(S_1+S_2)/h})$  près de  $h_{crois}$ .

En écrivant cette fois  $E_2 + w_2 = E_1 + w_{21}$ , on trouve  $w_{21} = Che^{-2S_1-4S_2}u_2(E_1, h)$ .

Encore une fois, lorsque  $h$  s'éloigne de  $h_{crois}$ , on a  $u_1(r_2, h) = O(e^{-2(S_1+S_2)/h})$  et la résonance  $r_2(h)$  reste près de  $E_1(h)$  comme dans (*FIG3*).

#### Cas b) $S_1 > S_2$ ,

On se trouve dans le cas 2.2 en  $h = h_{crois}$ . Lorsque  $h$  s'éloigne de  $h_{crois}$  on a :

$$\tilde{o}(w_1, \beta_1) = \tilde{o}(\epsilon(h)e^{-2S_2/h}, |u_1(E_2, h)|)$$

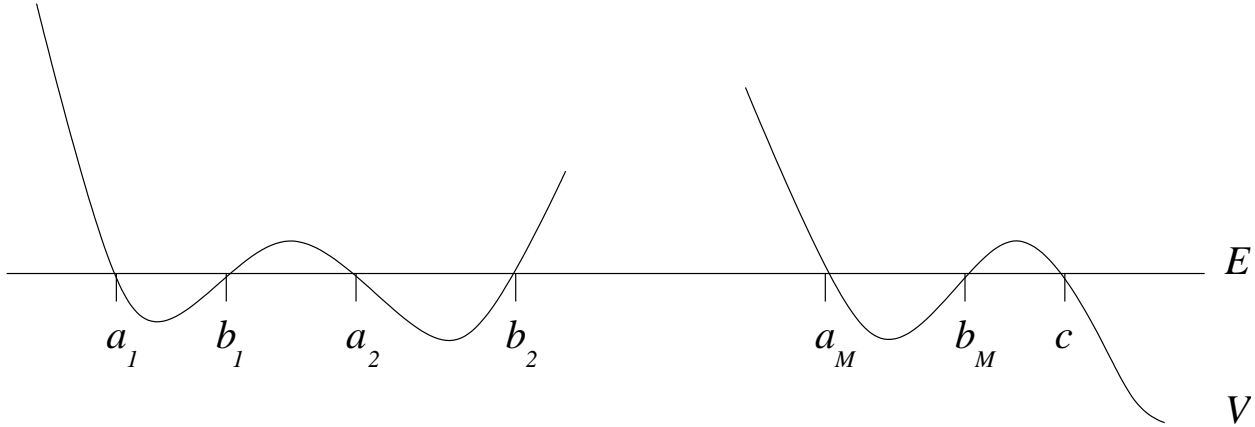
ce qui ne permet pas de conclure directement. Cependant, l'étude près de  $E_1(h)$  permet de dire qu'on revient au cas 2.1.

On a obtenu les figures (*FIG2, 3*) de l'introduction. Cela conclut l'étude des résonances dans le cas de deux puits de potentiel.

On envisage dans la partie suivante le cas d'un nombre quelconque de puits.

## 2.5 Cas de $M$ puits

On considère désormais un potentiel ayant  $M$  puits pour un intervalle d'énergie  $I \subset \mathbb{R}$  vérifiant (0.5) comme dans le graphe ci-dessous :



**FIG8: Potentiel à puits multiple**

Pour  $E \in I$ , on a noté encore une fois  $a_i = a_i(E)$  et  $b_i = b_i(E)$  les points tournants (avec  $a_{M+1} = c$ ). On reprend les solutions définies au début de la troisième partie, au voisinage de chaque point tournant, ainsi que les fonctions  $\tilde{\varphi}_k$  et  $S_k$  associées à chaque puits. On a un équivalent de (0.8) :

$$\forall E \in I, \tilde{\varphi}'_k(E) > 0.$$

On définit à nouveau un ensemble  $\mathcal{D}_I(h) = \mathcal{D}_I \subset \mathbb{C}$  ainsi que des fonctions  $p_j, q_j, \varphi_j, \psi_j$  analytiques sur  $\mathcal{D}_I$ . On peut écrire à l'aide de ces fonctions une équation de quantification qui donne les résonances dans  $\mathcal{D}_I$ .

Soit  $E_l(h) \in I$  défini par  $\varphi_l(E_l, h) = (2k + 1)h\pi/2, k \in \mathbb{N}, h \in J_k \equiv J$ . Comme dans les cas de un ou deux puits, on peut démontrer qu'il existe une résonance exponentiellement proche de  $E_l(h)$  qu'on note  $r_l(h)$ .

On va calculer dans la première sous-partie un équivalent de la partie imaginaire de  $r_l$  dans le cas où il n'y a pas d'interaction, puis on établira une majoration de cette partie imaginaire lorsqu'il y a une interaction.

### 2.5.1 Le cas sans interaction

On suppose dans cette partie qu'il n'y a pas d'interaction avec les autres puits, c'est à dire que sur  $J$ ,

$$\exists \gamma > 0, |\cos(\varphi_j(E_l(h))/h)| > \gamma, j \neq l. \quad (5.1)$$

Nous allons calculer sous ces hypothèses la partie imaginaire de la résonance  $r_l = \alpha_l + i\beta_l$  exponentiellement proche de  $E_l$  ce qui va conduire au théorème 2.0.14 donné dans l'introduction.

On n'a pas besoin de calculs aussi précis que dans la partie précédente. Il suffit ici d'écrire

$$\begin{pmatrix} -q_l \sin(\psi_l/h) & -p_l \cos(\varphi_l/h) \\ q_l \cos(\psi_l/h) & -p_l \sin(\varphi_l/h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_l/h) & -\cos(\varphi_l/h) \\ \cos(\varphi_l/h) & -\sin(\varphi_l/h) \end{pmatrix} (1 + O(h)).$$

Si

$$v_{a_1}^- = L v_{b_l}^- + K v_{b_l}^+,$$

on calcule  $L$  et  $K$  grâce à

$$\begin{pmatrix} v_{a_1}^- \\ v_{a_1}^+ \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^{l-1} M_{p_j q_j}(\varphi_j, \psi_j, S_j) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_l/h) & -\cos(\varphi_l/h) \\ \cos(\varphi_l/h) & -\sin(\varphi_l/h) \end{pmatrix} (1 + O(h)) \begin{pmatrix} v_{b_l}^- \\ v_{b_l}^+ \end{pmatrix},$$

où on a repris les notations (3.13) pour les matrices  $M_{pq}(\varphi, \psi)$ .

On obtient les termes principaux :

$$L = -e^{S_1 + \dots + S_{l-1}} \cos(\varphi_1/h) \dots \cos(\varphi_{l-1}/h) \sin(\varphi_l/h) (1 + O(h)),$$

et

$$K = -e^{S_1 + \dots + S_{l-1}} \cos(\varphi_1/h) \dots \cos(\varphi_{l-1}/h) \cos(\varphi_l/h) (1 + O(h)).$$

Ainsi

$$K = L \cotan(\varphi_l/h) (1 + O(h)). \quad (5.2)$$

De plus  $L$  ne s'annule pas en  $r_l$  car son terme principal est non nul grâce à (5.1).

D'autre part, si on écrit  $v_{b_l}^\pm$  en fonction de  $u_c^\pm$ , on trouve :

$$\begin{pmatrix} v_{b_l}^- \\ v_{b_l}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-S_l/h} \\ -e^{S_l/h} & 0 \end{pmatrix} \prod_{j=l+1}^M M_{p_j q_j}(\varphi_j, \psi_j, S_j) T \begin{pmatrix} u_c^- \\ u_c^+ \end{pmatrix} = AT \begin{pmatrix} u_c^- \\ u_c^+ \end{pmatrix}.$$

où  $A = (a_{ij}) = (Z_l) \prod_{j=l+1 \dots M} M_{p_j q_j}(\varphi_j, \psi_j, S_j)$ .

Remarquons que toutes les matrices qui interviennent ici sont de déterminant 1, et en particulier  $\det A = 1$ .

D'après la proposition 2.1.3,  $E$  sera alors une résonance si  $v_{a_1}^-$  est proportionnel à  $u_c^+$ , ce qui s'écrit

$$L(a_{11} + ia_{12}) + K(a_{21} + ia_{22}) = 0. \quad (5.3)$$

Si  $a_{21} + ia_{22} = 0$  en  $r_l$ , la condition de résonance devient  $a_{11} + ia_{12} = 0$  car on a vu que  $L \neq 0$ . Cela implique alors  $\det A = 0$  ce qui est impossible. On a donc  $a_{21} + ia_{22} \neq 0$  et on peut diviser l'équation de résonance (5.3) par ce facteur et par  $L$ . On obtient avec l'expression de  $K$  en fonction de  $L$  (5.2) :

$$\cotan(\varphi_l(r_l)/h) = -\frac{a_{11} + ia_{12}}{a_{21} + ia_{22}} (1 + O(h)). \quad (5.4)$$



Les coefficients  $a_{ij}$  sont réels sur  $\mathbb{R}$ , et donc leur partie principale est réelle en  $r_l$ . En prenant la partie imaginaire de (5.4), on trouve, avec  $\det A = 1$ ,

$$\Im(\cotan(\varphi_l(r_l)/h)) = \frac{1}{|a_{21} + ia_{22}|^2}(1 + O(h)) \quad (5.5)$$

Il nous faut donc déterminer le terme principal de  $a_{21} + ia_{22}$ . L'expression de  $A$  donne

$$a_{21} + ia_{22} \sim a_{21} \sim -e^{S_l + \dots + S_{N+L}} \prod_{j=l+1, \dots, M} \cos(\varphi_j/h)$$

et on obtient donc

$$\Im \cotan(\varphi_l(r_l)/h) \sim \frac{e^{-2\sum_l^M S_j/h}}{\prod_{l+1}^{N+L} |\cos \varphi_j/h|^2}, \quad h \in J \text{ assez petit.}$$

On écrit  $r_l = \alpha_l + i\beta_l$ . Un développement limité de  $\cotan \varphi_l$  en  $\alpha_l$  donne :

$$\cotan \varphi_l(r_l)/h = \cotan(\varphi_l(\alpha_l)/h) - \frac{\varphi_l'(\alpha_l)}{\sin^2(\varphi_l(\alpha_l)/h)} \left( \frac{i\beta_l}{h} + o\left(\frac{\beta_l}{h}\right) \right)$$

et donc

$$\beta_l \sim -he^{-2\sum_l^M S_j/h} \frac{\sin^2(\varphi_l(\alpha_l)/h)}{\prod_{l+1}^M \cos^2(\varphi_j/h) \cdot \varphi_l'(\alpha_l)}, \quad h \in J.$$

Cela démontre le théorème 2.0.14 énoncé dans l'introduction.  $\square$

**Remarque 2.5.1** L'expression de  $A$  avec (5.4) donne également  $\Re \cotan(\varphi_l/h) = O\left(\max_{j=l, \dots, M} e^{-2S_j/h}\right)$ .

## 2.5.2 Le cas avec interaction

On garde les notations de la section 2.6.1. On écrit maintenant  $M = N + L$  et on se place toujours près de  $E_l$ ,  $l \leq N$ , pour s'intéresser à la partie imaginaire de la résonance  $r_l$ . On suppose désormais qu'il peut y avoir une interaction avec les  $L$  derniers puits. On suppose aussi que  $S_j$  est petit pour  $j = N + 1, \dots, N + L$ . On a vu dans la partie précédente, avec seulement deux puits, qu'il n'est pas facile d'évaluer l'ordre de grandeur des  $\cotan(\varphi_j/h)$  lorsque le puits  $[a_j, b_j]$  interagit. On va donc ici simplement majorer la partie imaginaire de la résonance  $r_l$  et obtenir le théorème 2.0.15.

On écrit la matrice  $A$  sous forme de produit :

$$A = CM, \quad C = (c_{ij}), \quad M = (m_{ij}), \quad \text{où}$$

$$C = (Z_l) M_{p_{l+1}q_{l+1}}(\varphi_{l+1}, \psi_{l+1}, S_{l+1}) \dots M_{p_N q_N}(\varphi_N, \psi_N, S_N),$$

et

$$M = M_{p_{N+1}q_{N+1}}(\varphi_{N+1}, \psi_{N+1}, S_{N+1}) \dots M_{p_{N+L}q_{N+L}}(\varphi_{N+L}, \psi_{N+L}, S_{N+L}).$$

Comme il n'y a pas d'interaction avec les  $N$  premiers puits, on saura évaluer les coefficients de  $C$ , en revanche on ne pourra rien dire sur les  $m_{ij}$ .

On peut réécrire la condition de quantification (5.4) avec ces notations :

$$\cotan(\varphi_l(r_l)/h) = -\frac{c_{11}(m_{11} + im_{12}) + c_{12}(m_{21} + im_{22})}{c_{21}(m_{11} + im_{12}) + c_{22}(m_{21} + im_{22})}(1 + O(h)).$$

En prenant la partie imaginaire de cette expression, avec  $\det C = 1$ , on trouve comme en (5.5) :

$$\Im \cotan(\varphi_l(r_l)/h) \sim \frac{\Im[(m_{11} + im_{12})(\overline{m}_{21} - im_{22})]}{|c_{21}(m_{11} + im_{12}) + c_{22}(m_{21} + im_{22})|^2}, \quad h \in J, \quad (5.6)$$

soit

$$|\Im \cotan(\varphi_l/h)| \leq \frac{|m_{11} + im_{12}||m_{21} + im_{22}|}{(|c_{21}||m_{11} + im_{12}| + |c_{22}||m_{21} + im_{22}|)^2}.$$

Or si  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ ,  $f(x, y) = \frac{xy}{(\alpha x + \beta y)^2} \leq \frac{1}{2\alpha\beta}$  pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^{2+} \setminus (0, 0)$ , et donc

$$|\Im \cotan \varphi_l(r_l)| \leq \frac{1}{2|c_{21}c_{22}|} = O(e^{-2(S_l + \dots + S_{N-1})/h}),$$

ce qui conduit à

$$\beta_l = O\left(he^{-2\sum_l^{N-1} S_j/h}\right).$$

et donne le théorème 2.0.15.

En faisant un développement limité de (5.6), on trouve

$$\Im \cotan \varphi_1 = \frac{1 + \frac{\partial}{\partial E}[m_{11}m_{21} + m_{12}m_{22}](\alpha_l)(\beta_l + o(\beta_l))}{|c_{21}(m_{11} - im_{12}) + c_{22}(m_{21} - im_{22})|^2} = \frac{1 + O\left(e^{2\sum_{N+1}^{N+L} S_j - 2\sum_l^{N-1} S_j}\right)}{|c_{21}(m_{11} - im_{12}) + c_{22}(m_{21} - im_{22})|^2}.$$

Comme par hypothèse les  $S_j$ ,  $N + 1 \leq j \leq N + L$  sont petits,  $\sum_{N+1}^{N+L} S_j - \sum_l^{N-1} S_j < 0$  et donc

$$\Im \cotan \varphi_1 \sim \frac{1}{|c_{21}(m_{11} - im_{12}) + c_{22}(m_{21} - im_{22})|^2}, \quad h \rightarrow 0.$$

On retrouve le résultat lorsqu'il n'y a pas d'interaction car avec l'hypothèse (5.1) on sait évaluer les  $(m_{ij})$ .

## 2.6 Appendice 1 : Solutions exactes ayant un comportement asymptotique prédéterminé

Nous faisons ici une construction théorique de solutions exactes à partir de solutions formelles. On vérifiera dans l'appendice 4 que cette construction est valide, et en particulier que les restes sont bien négligeables pour les solutions formelles choisies.

Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux solutions formelles de l'équation

$$-h^2 u'' + (V - E)u = 0. \quad (6.1)$$

On notera  $u_1^N$  et  $u_2^N$  leur développement à l'ordre  $N$ . Comme le wronskien  $\mathcal{W}(u_1, u_2)$  est constant,  $\mathcal{W}(u_1^N, u_2^N)$  est proche d'une constante.

On introduit alors les deux fonctions :

$$y_j = \mathcal{W}(u_1^N, u_2^N)^{-1/2} u_j^N, \quad j = 1, 2.$$

Comme  $\mathcal{W}(y_1, y_2) = 1$ , ces fonctions sont solutions d'une même équation  $-h^2 y'' + W_E y = 0$ , où

$$W_E = h^2 \frac{y_1''}{y_1} = h^2 \frac{y_2''}{y_2}$$

est proche de  $V - E$ .

Regardons maintenant l'équation intégrale

$$\psi(x) = y(x) + \int_{x_0}^x K(x, t) \psi(t) dt, \quad (6.2)$$

où  $x_0$  est fixé,  $y$  est une combinaison linéaire des  $y_j$  et

$$K(x, t) = (y_2(x)y_1(t) - y_1(x)y_2(t))(V(t) - E - W_E(t)).$$

Une solution  $\psi$  de (6.2) satisfait (6.1) avec les conditions initiales en  $x_0$  :  $\psi(x_0) = y(x_0)$ ,  $\psi'(x_0) = y'(x_0)$ .

Pour les solutions qui vont nous intéresser, nous montrerons que  $K$  est petit, et on pourra construire une solution exacte  $\psi$  comme limite d'une suite fonctions. On montrera que le développement à l'ordre  $N - 1$  de  $\psi$  quand  $h$  tend vers zéro est égal à celui de  $y$ .

## 2.7 Appendice 2 : Fonctions d'Airy

Pour construire des solutions formelles au voisinage des points tournants, nous aurons besoin des solutions de l'équation d'Airy :

$$w'' - xw = 0.$$

On rappelle ici brièvement les résultats de [1] et [3] qui nous seront utiles concernant ces solutions.

Lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ , il existe une unique solution  $w_1$  ayant le comportement asymptotique :

$$w_1(x) \sim (-x)^{-1/4} e^{i\frac{2}{3}(-x)^{3/2}} \sum_{n \geq 0} i^n \alpha_n (-x)^{-3n/2}, \quad \alpha_0 = 1,$$

et on peut calculer les  $\alpha_n \in \mathbf{R}$ .

On a de plus :

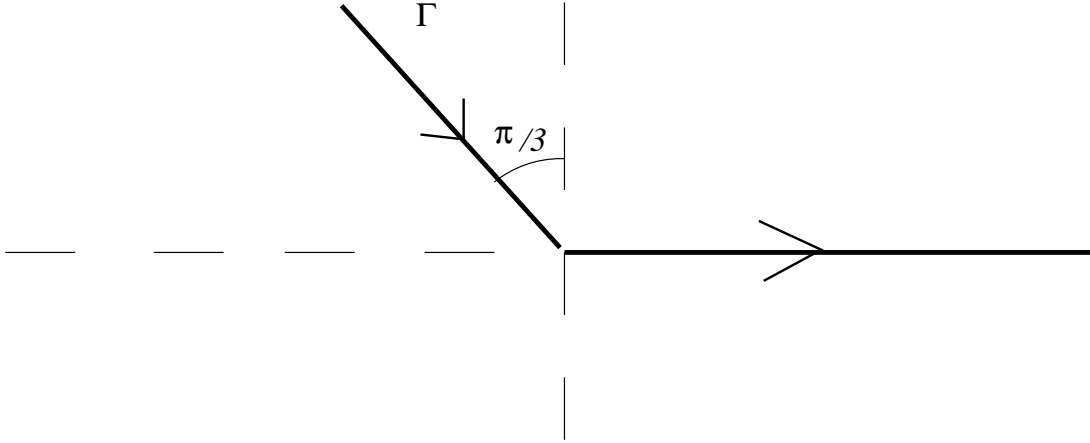
$$w_1'(x) \sim -i(-x)^{1/4} e^{i\frac{2}{3}(-x)^{3/2}} \sum_{n \geq 0} i^n \beta_n (-x)^{-3n/2}, \quad \beta_0 = 1,$$

avec encore  $\beta_n \in \mathbb{R}$ .

Cette solution est donnée par l'intégrale :

$$w_1 = e^{i\pi/4} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{tx - t^3/3} dt, \quad (7.1)$$

où  $\Gamma$  est le contour défini par



**FIG9: Le contour  $\Gamma$**

sur lequel  $e^{-t^3/3}$  est exponentiellement décroissant.

Bien sûr,  $\bar{w}_1$  est aussi une solution de l'équation d'Airy et on a son développement en prenant le conjugué des formules ci-dessus. On peut l'écrire sous la forme d'une intégrale en prenant le conjugué de (7.1), et on obtient un intégrale le long du contour conjugué de  $\Gamma$ .

Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , il existe une unique solution, à une constante multiplicative près, décroissant exponentiellement :  $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\pi/4}w_1 + e^{i\pi/4}\bar{w}_1)$ .  $v$  est réelle et :

$$v(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(x)^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}(x)^{3/2}} \sum_{n \geq 0} \alpha_n (x)^{-3n/2},$$

$$v'(x) \sim -\frac{1}{\sqrt{2}}x^{1/4} e^{-\frac{2}{3}(x)^{3/2}} \sum_{n \geq 0} \beta_n (x)^{-3n/2}.$$

Une autre solution réelle est donnée par  $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\pi/4}w_1 + e^{-i\pi/4}\bar{w}_1)$ . Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , elle

est exponentiellement croissante :

$$u(x) \sim \sqrt{1/2}(x)^{-1/4} e^{\frac{2}{3}(x)^{3/2}} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \alpha_n(x)^{-3n/2},$$

et

$$u'(x) \sim \sqrt{1/2}(x)^{1/4} e^{\frac{2}{3}(x)^{3/2}} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \beta_n(x)^{-3n/2}.$$

On voit facilement que  $\mathcal{W}(v, u) = 2$ ,  $\mathcal{W}(w_1, \bar{w}_1) = 2i$  et par construction :

$$\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} w_1 \\ \bar{w}_1 \end{pmatrix}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & e^{i\pi/4} \\ e^{i\pi/4} & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}.$$

## 2.8 Appendice 3 : solutions formelles

### 2.8.1 Loin des points tournants

Soient  $a < b$  deux points tournants successifs. On va construire des solutions formelles de (6.1) en dehors des points tournants, c'est à dire sur un intervalle  $]a + \epsilon, b - \epsilon[$  pour un  $\epsilon > 0$  fixé.

On fixe une détermination de  $(V - E)^{1/2}$  et on cherche ces solutions formelles sous la forme :

$$F(x, h, E) = e^{\frac{1}{h} \int_a^x (V-E)^{1/2} dt} f(x, h, E), \quad f(x, h, E) = \sum_{n \geq 0} h^n f_n(x, E), \quad (8.1)$$

On obtient, en annulant les puissances de  $h$  :

$$\begin{cases} 2\sqrt{V-E} f_0' + \frac{V'}{2\sqrt{V-E}} f_0 = 0, \\ 2\sqrt{V-E} f_{n+1}' + \frac{V'}{2\sqrt{V-E}} f_{n+1} = -f_n'', \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (8.2)$$

Ces équations de transport sont résolues dans  $]a + \epsilon, b - \epsilon[$  car  $V \neq E$ . On calcule en particulier

$$f_0 = C(V - E)^{-1/4}, \quad (8.3)$$

pour un choix de  $(V - E)^{-1/4}$ .

**Remarque 2.8.1** Si  $F_{1,2} = e^{\pm \frac{1}{h} \int_a^x (V-E)^{1/2}} f_{1,2}$  sont des solutions du type (8.1) correspondant à deux déterminations différentes de  $(V - E)^{1/2}$ , on a le wronskien :

$$\mathcal{W}(F_1, F_2) = \left[ \frac{2(V-E)^{1/2}}{h} f_1 f_2 + \mathcal{W}(f_1, f_2) \right].$$

Si  $f_j = \sum_{n \geq 0} h^n f_n^j$ ,  $j = 1, 2$  cela donne

$$\mathcal{W}(F_1, F_2) = \frac{2}{h} \left[ \frac{C_1 C_2 (V-E)_1^{1/2}}{(V-E)^{1/4} (V-E)^{1/4}} + O(h) \right],$$

où  $C_j$  définit  $f_0^j$  comme dans (8.3) et  $O(h)$  est uniforme en  $E$ .

On peut donc choisir (et on fixe)  $C_j$  de façon à ce que :

$$\text{Si } V - E > 0 \text{ sur } ]a + \epsilon, b - \epsilon[, \text{ on choisit } F_{1,2} \in \mathbf{R} \text{ et } \mathcal{W}(F_1, F_2) = C(h) = \frac{2}{h}(1 + O(h)),$$

$$\text{Si } V - E < 0 \text{ sur } ]a + \epsilon, b - \epsilon[, \text{ on choisit } F_1 = \overline{F_2} \text{ et } \mathcal{W}(F_1, F_2) = C(h) = \frac{2i}{h}(1 + O(h)).$$

**Proposition 2.8.2** *Sur tout compact  $K \subset ]a + \epsilon, b - \epsilon[$ , il existe une vraie solution dont toute combinaison linéaire des  $F_j$  est le développement asymptotique.*

**Preuve :** On fera une preuve dans l'appendice 4 qui s'adapte facilement à ce cas.  $\square$

## 2.8.2 Près des points tournants

Soit  $a$  un point tournant simple :  $V(a) = E$ ,  $V'(a) \neq 0$ . On se place sur un intervalle  $I = ]a - \eta, a + \eta[$ ,  $\eta > 0$  tel que  $a$  soit le seul point tournant sur  $I$ . On cherche une solution de la forme :

$$G(x, h, E) = h^{-1/6} A(x) w(h^{-2/3} \xi(x)) + h^{1/6} B(x) w'(h^{-2/3} \xi(x)), \quad x \in I, \quad (8.4)$$

avec  $A = \sum_{n \geq 0} h^n A_n$ ,  $B = \sum_{n \geq 0} h^n B_n$ , et où  $w$  est une solution de l'équation d'Airy (appendice 2).

L'expression (8.4) dans (6.1) donne en annulant les termes en  $w$  et  $w'$  :

$$\begin{cases} h^2 A'' + h(B(\xi\xi')' + 2B'(\xi\xi')) + A(\xi'^2 \xi - (V - E)) = 0 \\ h^2 B'' + h(2A'\xi' + A\xi'') + B(\xi'^2 \xi - (V - E)) = 0 \end{cases}.$$

En annulant les puissances de  $h$ , on trouve :

$$(\xi')^2 \xi = V - E \quad (8.5)$$

et

$$\begin{cases} 2A_0' \xi' + A_0 \xi'' = 0 \\ 2B_0'(\xi\xi') + B_0(\xi\xi')' = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2A_n' \xi' + A_n \xi'' = -B_{n-1}'' \\ 2B_n'(\xi\xi') + B_n(\xi\xi')' = -A_{n-1}'' \end{cases} \quad n \geq 1. \quad (8.6)$$

On prend pour (8.5) la solution suivante :

$$\xi(x) = \left( \frac{3}{2} \int_a^x (V - E)^{1/2} dt \right)^{2/3}. \quad (8.7)$$

Ainsi définie,  $\xi(x)$  est une fonction régulière sur  $I$ , du même signe que  $V - E$ , indépendante de la détermination de  $(V - E)^{1/2}$  (pour le voir, il suffit de considérer la puissance  $2/3$  comme un carré).

De plus  $\xi(x) \sim_{x \rightarrow a} \text{sgn}(V'(a)) |V'(a)|^{1/3} (x - a)$ , où  $\text{sgn}(x) = \pm 1$  pour  $\pm x > 0$ .

On calcule également :

$$\text{si } V(x) - E > 0, \xi(x) > 0 \text{ et } \xi'(x) = \text{sgn}(V'(a)) |V - E|^{1/2} \xi(x)^{-1/2},$$

$$\text{si } V(x) - E < 0, \xi(x) < 0 \text{ et } \xi'(x) = \text{sgn}(V'(a)) |V - E|^{1/2} (-\xi(x))^{-1/2}.$$

On résout ensuite (8.6) :

$$A_0(x) = \gamma_0(\xi'(x))^{-1/2}, \quad B_0(x) = \delta_0(\xi(x)\xi'(x))^{-1/2},$$

pour  $\gamma_0$  et  $\delta_0$  dans  $\mathbb{C}$ . Si on exprime  $A_0$  en fonction de  $x$ , cela mène à :

$$A_0(x) = \gamma_0(\operatorname{sgn}(V'(a)))^{-1/2} |V - E|^{-1/4} |\xi(x)|^{1/4}, \quad x \in I. \quad (8.8)$$

On voit que  $\lim_{x \rightarrow a} A_0(x) = \gamma_0(\operatorname{sgn}(V'(a)))^{-1/2} |V'(a)|^{-1/6}$  existe. En revanche, l'expression (8.7) de  $\xi(x)$  montre que  $B_0$  ne peut être continue que si  $\delta_0 = 0$ . On trouve donc une solution continue sur  $I$  en posant  $A_{2k+1} = B_{2k} = 0$  et

$$\begin{aligned} A_{2k+2} &= \frac{1}{(\xi')^{1/2}} \left[ \gamma_{k+1} - \sqrt{\frac{1}{2}} \int_a^x \frac{B''_{2k+1}}{(\xi')^{1/2}} dt \right] \quad \text{pour } k \geq 0, \gamma_k \in \mathbb{C}. \\ B_{2k+1} &= \frac{1}{2(\xi\xi')^{1/2}} \int_a^x \frac{A''_{2k}}{(\xi\xi')^{1/2}} dt \end{aligned} \quad (8.9)$$

En particulier  $A$  et  $B$  ne dépendent pas de la solution d'Airy choisie.

**Remarque 2.8.3** Si  $V'(a) > 0$  et  $\gamma_k \in \mathbb{R}$ , (8.8) et (8.9) montrent que la solution ainsi construite est réelle. Si  $V'(a) < 0$ , et  $\gamma_k \in \mathbb{R}$ , on trouve une solution dans  $i\mathbb{R}$ .

**Remarque 2.8.4** Soit  $G_j$ ,  $j = 1, 2$ , deux solutions correspondant à deux solutions d'Airy  $w_j$ . On peut calculer le wronskien :

$$\mathcal{W}(G_1, G_2) = \mathcal{W}(w_1, w_2)[A, B], \quad [A, B] = \mathcal{W}(A, B) + \frac{1}{h} (\xi' A^2 - \xi \xi' B^2)$$

On fixe désormais  $A$  et  $B$ , c'est à dire  $(\gamma_k)_k \in \mathbb{R}$  dans (8.9), de sorte que  $[A, B] = 1/2 + O(h^\infty)$ .

Par exemple on trouve  $\gamma_0^2 = \frac{h}{2}$ . On choisit  $\gamma_0 = \sqrt{\frac{h}{2}}$ , et on écrit  $\gamma_k = \sqrt{h} \delta_k$ . On trouve les  $\delta_k$  en annulant les puissances de  $h$  dans  $[A, B]$ .

On a alors  $\mathcal{W}(G_1, G_2) = \frac{1}{2} \mathcal{W}(w_1, w_2)$ .

On reprend de [3] la proposition :

**Proposition 2.8.5** L'équation (6.1) a une solution admettant sur  $I$  le développement (8.4) à l'ordre  $N$ , pour tout  $N \in \mathbb{N}$ . De plus, les restes sont uniformes sur  $I$  et ils le restent si on dérive un nombre quelconque de fois.

Dans la remarque qui suit, on examine rapidement dans quelle limite les constructions ci-dessus s'étendent lorsque le niveau d'énergie tend vers un maximum du potentiel.

**Remarque 2.8.6** On suppose maintenant que  $E = E(h)$  tend vers un maximum du potentiel. Plus précisément on prend  $V$  tel que  $V(0) = V_0$ ,  $V'(0) = 0$ ,  $V''(0) = -2k_0 < 0$ , et  $\mu(h) = V_0 - E(h) > 0$  tend vers zéro avec  $h$ . Alors les points tournants près de zéro sont donnés par

$$a_\mu = -\sqrt{\frac{\mu}{k_0}} (1 + O(\mu)), \quad b_\mu = \sqrt{\frac{\mu}{k_0}} (1 + O(\mu)).$$

On peut refaire la construction précédente par exemple pour le point critique  $a_\mu$ , dans un intervalle  $I_\mu$ , où  $I_\mu$  est un voisinage de  $a_\mu$  de taille  $O(\mu^{1/2})$  ne contenant que le point critique  $a_\mu$ . (Par exemple  $I_\mu = [a_\mu - \sqrt{\mu}, 0]$ ). On calcule alors, pour  $x \in I_\mu$  :

$$\xi = \xi(x, \mu) = O(\mu^{2/3}), \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} A_n &= A_n(x, \mu) = O(\mu^{1/6})|V(x) - E(h)|^{-1/4}, \\ B_n &= B_n(x, \mu) = O(\mu^{-1/6})|V(x) - E(h)|^{-1/4}. \end{aligned}$$

On peut bien entendu faire la même construction près de  $b_\mu$ .

On détermine maintenant les matrices de transition entre les différentes solutions formelles construites dans cette partie.

### 2.8.3 Formules de connection pour les solutions formelles

On se place au voisinage d'un point tournant, toujours noté  $a$ , et on fixe  $A$  et  $B$  comme dans la partie précédente. On construit, comme ci-dessus, les solutions formelles  $g_a, h_a, f_a, f_a^*$  associées respectivement aux solutions d'Airy  $u, v, w_1, \bar{w}_1$  définies dans l'appendice 2.

Comme le souligne la remarque 2.8.3, les solutions  $A$  et  $B$  ne sont pas toujours réelles, et donc  $f_a^*$  n'est pas nécessairement le conjugué de  $f_a$ . En fait si  $V'(a) > 0$  on a  $f_a^* = \bar{f}_a$ . Si  $V'(a) < 0$ , alors  $f_a^* = -\bar{f}_a$ .

On note, comme dans la partie 2.3,  $T^-(a)$  le point tournant précédant  $a$  ou  $-\infty$  s'il n'y en a pas, et  $T^+(a)$  le point tournant suivant  $a$  ou  $+\infty$  s'il n'y en a pas. Les solutions  $g_a, h_a, f_a$  et  $f_a^*$  sont définies sur  $]T^-(a) + \epsilon, T^+(a) - \epsilon[$  pour tout  $\epsilon > 0$ .

De

$$\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} w_1 \\ \bar{w}_1 \end{pmatrix}$$

on déduit

$$\begin{pmatrix} h_a \\ g_a \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} f_a \\ f_a^* \end{pmatrix}. \quad (8.11)$$

Grâce aux développements en  $\pm\infty$  des solutions d'Airy, rappelés dans l'appendice 2, on peut écrire les quatre solutions ci-dessus sous la forme (8.1) en dehors des points tournants, lorsque  $h$  tend vers zéro. Par exemple, sur  $]T^-(a) + \epsilon, T^+(a) - \epsilon[$  on a :

$$g_a = h^{-1/6} Au(h^{-2/3}\xi) + h^{1/6} Bu'(h^{-2/3}\xi), \text{ avec } \xi = \xi_a = \left( \frac{3}{2} \int_a^x (V - E)^{1/2} dt \right)^{2/3}.$$

Or si  $x \in \{V - E > 0\}$ ,  $\xi(x) > 0$  et donc  $h^{-2/3}\xi(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $h$  tend vers zéro. D'où

$$g_a = e^{\frac{1}{h} \left| \int_a^x (V-E)^{1/2} \right|} \sqrt{1/2} \sum_{n \geq 0} h^n f_n, \text{ où } f_n = f_n^a = \sum_{k+l=n} (-1)^l \xi^{-3l/2} [A_k \xi^{-1/4} \alpha_l + B_k \xi^{1/4} \beta_l]. \quad (8.12)$$



**Remarque 2.8.7** Si on prend  $E = E(h)$  comme dans la remarque 2.8.6 c'est à dire tendant vers un maximum du potentiel, on peut obtenir le développement de  $g_{a_\mu} = h^{-1/6}A(x, h, \mu)u(h^{-2/3}\xi(x, \mu)) + h^{-1/6}B(x, h, \mu)u'(h^{-2/3}\xi(x, \mu))$  dès que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| h^{-2/3}\xi(x, \mu(h)) \right| = +\infty$$

pour  $x \in I_\mu$ . Ainsi, dès que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\mu(h)} = 0$ , on obtient :

$$g_{a_\mu}(x, h) \sim_{h \rightarrow 0} e^{\frac{1}{h} \left| \int_{a_\mu(h)}^x (V-E(h))^{1/2} \right|} \sqrt{h} \frac{|V-E(h)|^{-1/4}}{2} \left( 1 + O\left(\frac{h}{\mu(h)}\right) \right).$$

**Remarque 2.8.8** Si  $\pm\infty \in [T^-(a), T^+(a)] \cap \{V-E > 0\}$ , on a l'équivalent (8.12) pour  $g$  lorsque  $x$  tend vers  $\pm\infty$ ,  $h < h_0$ . En effet,  $\xi(x)$  tend alors vers  $+\infty$  et on peut encore utiliser les équivalents de  $u$  et  $u'$  en  $+\infty$  de l'appendice 2.

Tous ces résultats sur  $g_a$  ont bien sûr leurs équivalents pour  $f_a$ ,  $f_a^*$  et  $h_a$ .

Ces développements vont permettre d'exprimer les solutions au voisinage du point tournant  $a$  en fonction de celles définies près de  $b = T^+(a)$  le point tournant suivant.

**Proposition 2.8.9** Si  $V-E > 0$  sur  $]a, b[$ , alors  $g_a \sim iZh_b$ ,  $h_a \sim iZ'h_b$  et  $Z = (Z')^{-1} = e^{S/h}(1 + O(h))$ ,  $S = \int_a^b |V-E|^{1/2}$ .

**Preuve :** On écrit pour  $x \in ]a + \epsilon, b - \epsilon[$

$$g_a = e^{\frac{1}{h} \int_a^x |V-E|^{1/2} dt} \sqrt{h/2} \sum_{n \geq 0} h^n f_n^a,$$

et

$$h_b = e^{\frac{1}{h} \int_b^x |V-E|^{1/2} dt} \sqrt{h/2} \sum_{n \geq 0} h^n f_n^b.$$

On peut calculer  $f_0^a$  et  $f_0^b$  d'après (8.8) et (8.12) :

$$f_0^a(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} |V-E|^{-1/4},$$

car  $V'(a) > 0$ , et

$$f_0^b(x) = \frac{-i}{\sqrt{2}} |V-E|^{-1/4},$$

car  $V'(b) < 0$ . On a choisi  $(-1)^{1/2} = i$ .

Cette écriture donne :

$$g_a \sim_{h \rightarrow 0} iZh_b, \tag{8.13}$$

$$Z = e^{S/h}(1 + O(h)), \quad S = \int_a^b |V-E|^{1/2}.$$

On note  $Z_0 = e^{S/h}$ .

De même

$$h_a \sim_{h \rightarrow 0} iZ' g_b, \quad (8.14)$$

où  $Z' = e^{-S/h}(1 + O(h))$ .

Montrons maintenant que  $Z' = \frac{1}{Z}$ . Pour cela, considérons une partition de l'unité sur  $]T^-(a) + \epsilon, T^+(b) - \epsilon[$ , pour  $\epsilon > 0$  fixé :  $1 = \theta_a + \theta_b$ , où

$$\begin{aligned} \theta_a &= 1 \text{ sur } ]T^-(a) + \epsilon, \frac{a+b}{2} - \epsilon[ \text{ et} \\ \theta_b &= 1 \text{ sur } ]\frac{a+b}{2} + \epsilon, T^+(b) - \epsilon[. \end{aligned}$$

Notons

$$r = g_a \theta_a + iZ h_b \theta_b,$$

et

$$s = i g_b \theta_b + (Z')^{-1} h_a \theta_a,$$

deux fonctions définies sur  $]T^-(a) + \epsilon, T^+(b) - \epsilon[$ . Grâce à la remarque 2.8.3, on voit que  $r$  et  $s$  sont réelles.

**Lemme 2.8.10**  *$r$  et  $s$  sont des solutions formelles de (6.1).*

**Preuve** : Si  $x \in ]T^-(a) + \epsilon, \frac{a+b}{2} - \epsilon[ \cup ]\frac{a+b}{2} + \epsilon, T^+(b) - \epsilon[$ ,  $\theta_a$  et  $\theta_b$  sont constantes.

Alors  $r'' = g_a'' \theta_a + Z h_b'' \theta_b$ ,  $s'' = g_b'' \theta_b + (Z')^{-1} h_a'' \theta_a$  et on voit que ces fonctions vérifient (6.1) sur ce domaine.

Sur  $]\frac{a+b}{2} - \epsilon, \frac{a+b}{2} + \epsilon[$ , on a  $g_a = iZ h_b(1 + O(h^\infty))$  et donc  $r = g_a(1 + O(h^\infty))$  :  $r$  est sur ce domaine une solution formelle. Il en va de même pour  $s$ .

Finalement :  $r$  et  $s$  sont bien des solutions formelles de (6.1) sur  $]T^-(a) + \epsilon, T^+(b) - \epsilon[$ .  $\square$

On reprend la démonstration de la proposition. Ce lemme montre que le wronskien de  $r$  et  $s$  est une constante formelle, et si on le calcule sur  $\{\theta_a = 1\}$  et sur  $\{\theta_b = 1\}$ , on trouve

$$\mathcal{W}(r, s) = \mathcal{W}(g_a, h_a) \frac{1}{Z'} = -\mathcal{W}(h_b, g_b) Z.$$

Or on a choisi  $A$  et  $B$  pour chaque point tournant tel que  $\mathcal{W}(h_c, g_c) = \frac{1}{2} \mathcal{W}(v, u) = 1 = -\mathcal{W}(g_c, h_c)$ ,  $c = a, b$ ; donc  $Z' = Z^{-1}$  et

$$\mathcal{W}(r, s) = -Z.$$

On a obtenu la proposition.  $\square$

On a l'analogie pour les fonctions  $f_a$ ,  $f_a^*$ ,  $f_b$  et  $f_b^*$ .

**Lemme 2.8.11** Si  $V - E < 0$  sur  $]a, b[$ , alors

$$f_a \sim -W f_b^*, f_a^* = \overline{W} f_b, W = ie^{i\tilde{\varphi}/h}(1 + O(h)), \tilde{\varphi} = \int_a^b |V - E|^{1/2} dt. \quad (8.15)$$

**Preuve :** Si  $V - E < 0$ , alors  $V'(a) < 0$  et  $V'(b) > 0$ . On peut écrire les solutions  $f_d, f_d^*$ ,  $d = a, b$  sous la forme (8.1). Par exemple :

$$f_a = e^{\frac{i}{h} \int_a^x |V-E|^{1/2} dt} \sqrt{\frac{h}{2}} [-i|V - E|^{-1/4} + O(h)],$$

$$f_b^* = e^{\frac{i}{h} \int_b^x |V-E|^{1/2} dt} \sqrt{\frac{h}{2}} [|V - E|^{-1/4} + O(h)].$$

On trouve donc

$$f_a \sim -iW f_b^*, f_a^* = -i\overline{W} f_b, W = e^{i\varphi/h}(1 + O(h)), \varphi = \int_a^b |V - E|^{1/2} dt. \quad (8.16)$$

d'où le lemme.  $\square$

Au voisinage de chaque point tournant, on a su construire deux bases de solutions formelles ayant un comportement asymptotique, des wronskiens, et des formules de connexions connus. On va pouvoir maintenant construire les solutions exactes de la partie 2. 3.

## 2.9 Appendice 4 : construction de solutions exactes

On se place toujours au voisinage de deux points tournants consécutifs  $a < b$ . On suppose que  $V - E > 0$  sur  $]a, b[$ , et donc  $V'(a) > 0$ ,  $V'(b) < 0$ .

On va construire des solutions exactes  $\psi_r$  et  $\psi_s$  à partir des solutions formelles  $r$  et  $s$  sur un intervalle du type  $]T^-(a) + \epsilon, T^+(b) - \epsilon[$  pour  $\epsilon > 0$  fixé. Ensuite, on utilisera  $\psi_r$  et  $\psi_s$  pour trouver les fonctions de la partie 2.3.

### 2.9.1 Construction de $\psi_s, \psi_r$

Si  $c = a, b$  est un point tournant et si  $x \in ]T^-(c), T^+(c)[$ , on note :

$$\rho_c^\pm(x) = \begin{cases} e^{\pm \frac{1}{h} \int_c^x |V-E|^{1/2} dt}, & \text{si } V(x) - E > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et, pour  $x \in ]T^-(a), T^+(b)[$ ,

$$\rho_r = \begin{cases} \rho_a^+ & \text{si } x \leq b \\ Z_0 \rho_b^+ & \text{si } x \geq a \end{cases},$$

$$\rho_s = \begin{cases} \rho_b^- & \text{si } x \geq a, \\ Z_0 \rho_a^- & \text{si } x \leq b. \end{cases}$$

Ainsi définies,  $\rho_r$  est une fonction de  $x$  croissante,  $\rho_s$  est décroissante et  $\rho_s \rho_r = Z_0 = e^{S/h}$ .

Pour  $N \in \mathbb{N}$ , on va construire des solutions exactes comme dans l'appendice 1 à partir des solutions formelles  $r$  et  $s$ . Nous écrirons  $r^N$  et  $s^N$  les développements de ces solutions à l'ordre  $N$ .

On commence par quelques majorations. Par définition de  $r$  et  $s$ ,

$$|r^N| \leq C_N \rho_r, \quad |s^N| \leq C_N \rho_s.$$

De plus,  $r^N$  vérifie

$$-h^2(r^N)'' + (V - E)r^N = \rho_r O(h^{N+2}), \quad (9.1)$$

et on a une équation équivalente pour  $s^N$ . Ainsi :

$$\frac{d}{dx} \mathcal{W}(r^N, s^N) = (r^N)'' s^N - r^N (s^N)'' = \rho_r O(h^N) s^N + \rho_s O(h^N) r^N,$$

et au vu des majorations ci-dessus on obtient  $\left| \frac{d}{dx} \mathcal{W}(r^N, s^N) \right| \leq Z_0 O(h^N)$ .

Cela donne

$$\mathcal{W}(r^N, s^N)(x) = \mathcal{W}(r^N, s^N)(x_0) + Z_0 O(h^N),$$

soit

$$\mathcal{W}(r^N, s^N) = -Z^{N-1} + Z_0 O(h^N), \quad (9.2)$$

où  $Z^N$  est la série tronquée à l'ordre  $N$  de  $Z$ , et  $O(h^N)$  est uniforme sur tout compact.

On fait maintenant la construction de solutions exactes à partir des solutions formelles  $r$  et  $s$  comme exposé dans l'appendice 1.

On définit les solutions  $y_{s,r}$  à partir de  $s, r$  de manière similaire à  $y_j$  à partir de  $u_j$ ,  $j = 1, 2$  dans l'appendice 1, avec  $\mathcal{W}(y_s, y_r) = 1$ .

On a

$$|y_t| \leq C_N Z_0^{-1/2} \rho_t, \quad t = s, r.$$

On calcule ensuite  $W_E = \frac{h^2 y_r''}{y_r} = \frac{h^2 y_s''}{y_s}$ . Avec (9.1) et (9.2) ci-dessus, on trouve

$$W_E(x, h) = V(x) - E + O(h^N).$$

Il existe donc  $C > 0$  tel que le noyau

$$K(x, t) = (y_s(x)y_r(t) - y_r(x)y_s(t))(V(t) - E - W_E(t))$$

vérifie :

$$|K(x, t)| \leq C Z_0^{-1} h^N (\rho_r(x)\rho_s(t) + \rho_r(t)\rho_s(x)). \quad (9.3)$$

On va à présent construire des solutions exactes  $\psi_r$  et  $\psi_s$  vérifiant (6.2), avec respectivement  $y = y_t$ ,  $x_0 = x_t$ ,  $t = r, s$ , où  $x_r = T^-(a) + 2\epsilon$  et  $x_s = T^+(b) - 2\epsilon$ .

Commençons par la construction de  $\psi_r$ . On définit la suite de fonctions dans  $[x_r, x_s]$  :

$$\begin{cases} \psi_r^0 = y_r, \\ \psi_r^{n+1} = y_r + \int_{x_r}^x K(x, t) \psi_r^n(t) dt \end{cases} .$$

Alors

$$\left| \psi_r^1 - \psi_r^0 \right| = \left| \int_{x_r}^x K(x, t) y_r(t) dt \right|,$$

et avec les majorations de  $K$  et  $y_r$  cela mène à

$$\left| \psi_r^1 - \psi_r^0 \right| \leq \frac{CC_N h^N}{Z_0^{3/2}} \int_{x_r}^x [\rho_r(x) \rho_s(t) + \rho_r(t) \rho_s(x)] \rho_r(t) dt. \quad (9.4)$$

Les expressions définissant  $\rho_r$  et  $\rho_s$  montrent que

$$\rho_r(t) \rho_s(x) = Z_0 e^{\frac{1}{h} \int_x^t |V-E|^{1/2} dt}.$$

Or  $x_r < t < x$  donc l'intégrale ci-dessus est négative et

$$\rho_r(t) \rho_s(x) \leq Z_0.$$

D'autre part,  $\rho_r(t) \rho_s(t) = Z_0$  et donc (9.4) devient

$$\left| \psi_r^1 - \psi_r^0 \right| \leq \frac{CC_N h^N}{Z_0^{1/2}} \int_{x_r}^x [\rho_r(x) + \rho_r(t)] dt.$$

Comme  $\rho_r$  est croissante, on a  $\rho_r(t) \leq \rho_r(x)$  pour  $x_r < t < x$  et finalement

$$\forall x \in [x_r, x_s], \left| \psi_r^1 - \psi_r^0 \right| \leq \frac{2CC_N h^N}{Z_0^{1/2}} \rho_r(x) (x - x_r).$$

On montre ensuite facilement par récurrence que

$$\forall k \geq 1, \forall x \in [x_r, x_s], \left| \psi_r^k - \psi_r^{k-1} \right| \leq \frac{C_k C_N h^{kN}}{Z_0^{1/2}} \rho_r(x) \frac{(x - x_r)^k}{k!}, \quad C_k = (2C)^k,$$

et on a donc la majoration uniforme pour  $x \in [x_r, x_s]$  :

$$\left| \psi_r^k - \psi_r^{k-1} \right| \leq \frac{C_N}{Z_0^{1/2}} \rho_r(x) \frac{D^k}{k!}, \quad D = 2C(x_s - x_r) h^N. \quad (9.5)$$

Cela implique que la suite  $(\psi_r^k)$  converge uniformément en  $x \in [x_r, x_s]$  et  $0 < h < h_0$ . Par construction, la limite  $\psi_r$  satisfait l'équation intégrale (6.2).

On a de plus

$$\forall x \in [x_r, x_s], \left| \psi_r^k(x) - y_r(x) \right| \leq \sum_{0 \leq l \leq k-1} \left| \psi_r^{l+1} - \psi_r^l \right|.$$

Avec les majorations (9.5), on trouve

$$\left| \psi_r^k(x) - y_r(x) \right| \leq \frac{C'_N h^N}{Z_0^{1/2}} \rho_r(x),$$

avec  $C'_N = 2C_N C(x_r - x_s) e^D$ ,  $D = O(h^N)$ .

Lorsque  $k$  tend vers l'infini, on voit que cette inégalité reste vraie pour  $\psi_r$ .

On a donc montré que  $\psi_r$  a le même développement asymptotique que  $y_r$  à l'ordre  $N - 1$ , sur  $[x_r, x_s] = [T^-(a) + 2\epsilon, T^+(b) - 2\epsilon]$ . Cela s'écrit :

$$\psi_r = (Z^{N-1})^{-1/2} r^{N-1} + (Z_0)^{-1/2} \rho_r O(h^N).$$

On construit  $\psi_s$  exactement de la même manière pour arriver à

$$\psi_s = (Z^{N-1})^{-1/2} s^{N-1} + (Z_0)^{-1/2} \rho_s O(h^N).$$

De plus

$$\mathcal{W}(\psi_s, \psi_r) = 1 + O(h^N).$$

## 2.9.2 Constructions des solutions de la partie 2.3

On fixe désormais  $N \in \mathbf{N}$  dans la partie précédente.

Sur  $]T^-(a) + \epsilon, T^+(b) - \epsilon[$ , on considère les solutions :

$$h_a^1 = (Z^{N-1})^{-1/2} \psi_s, \quad g_a^1 = (Z^{N-1})^{1/2} \psi_r,$$

et

$$h_a^2 = \mathcal{W}(h_a^1, g_a^1)^{-1/2} h_a^1, \quad g_a^2 = \mathcal{W}(h_a^1, g_a^1)^{-1/2} g_a^1.$$

Par définition  $\mathcal{W}(h_a^1, g_a^1) = \mathcal{W}(\psi_s, \psi_r) = 1 + O(h^N)$  et  $\mathcal{W}(h_a^2, g_a^2) = 1$ .

Les développements asymptotiques de  $h_a^2$  à l'ordre  $N - 1$  sont donnés par :

$$(h_a^2)^{N-1} = (h_a^1)^{N-1} = (Z^{N-1})^{-1/2} \psi_s^{N-1} = (Z^{N-1})^{-1} s^{N-1}$$

et au voisinage de  $a$ ,  $s = (Z')^{-1} h_a = Z h_a$ , donc

$$(h_a^2)^{N-1} = h_a^{N-1}.$$

On a bien sûr aussi

$$(g_a^2)^{N-1} = g_a^{N-1}.$$

On définit alors  $f_a^2$  par :

$$\begin{pmatrix} f_a^2 \\ \bar{f}_a^2 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} h_a^2 \\ g_a^2 \end{pmatrix}.$$

On trouve grâce à (8.11) les développements à l'ordre  $N - 1$  :

$$(f_a^2)^{N-1} = f_a^{N-1}, \quad (\bar{f}_a^2)^{N-1} = f_a^{*N-1},$$

et  $\mathcal{W}(f_a^2, \bar{f}_a^2) = i$ .

En  $b$ , on fait presque la même construction : soient

$$h_b^1 = -(Z^{N-1})^{-1/2} \psi_r, \quad g_b^1 = (Z^{N-1})^{1/2} \psi_s,$$

et

$$h_b^2 = \mathcal{W}(h_b^1, g_b^1)^{-1/2} h_b^1, \quad g_b^2 = \mathcal{W}(h_b^1, g_b^1)^{-1/2} g_b^1.$$

Alors  $\mathcal{W}(h_b^1, g_b^1) = -\mathcal{W}(\psi_r, \psi_s) = 1 + O(h^N)$  et  $\mathcal{W}(h_b^2, g_b^2) = 1$ . On pose

$$\begin{pmatrix} f_b^2 \\ \bar{f}_b^2 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} h_b^2 \\ g_b^2 \end{pmatrix}.$$

On a les développements à l'ordre  $N - 1$  :

$$(h_b^2)^{N-1} = (h_b^1)^{N-1} = -(Z^{N-1})^{-1/2} (\psi_r)^{N-1} = -i(h_b)^{N-1}$$

et de même

$$(g_b^2)^{N-1} = i(g_b)^{N-1}.$$

Rappelons que  $V'(b) < 0$  donc les solutions formelles  $h_b$  et  $g_b$  sont dans  $i\mathbb{R}$ .

Le développement de  $f_b^2$  est alors donné par :

$$f_b^2 = \frac{e^{i\pi/4} h_b^2 + e^{-i\pi/4} g_b^2}{\sqrt{2}}$$

A l'ordre  $N - 1$  cela donne :

$$(f_b^2)^{N-1} = \frac{e^{i\pi/4} (h_b)^{N-1} / i + i e^{-i\pi/4} (g_b)^{N-1}}{\sqrt{2}}$$

soit

$$(f_b^2)^{N-1} = \frac{e^{-i\pi/4} (h_b)^{N-1} + e^{i\pi/4} (g_b)^{N-1}}{\sqrt{2}} = (f_b^*)^{N-1}, \text{ avec (8.11). On a aussi } (\bar{f}_b^2)^{N-1} = -(f_b)^{N-1} \text{ et } \mathcal{W}(f_b^2, \bar{f}_b^2) = i.$$

On peut maintenant écrire les matrices de transition à l'aide des formules de connexion de l'appendice 3.

Si  $V - E > 0$  sur  $]a, b[$ , (8.13) (8.14) donnent :

$$\begin{pmatrix} h_a^2 \\ g_a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (Z^{N-1})^{-1} \\ -Z^{N-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_b^2 \\ g_b^2 \end{pmatrix}.$$

Si sur  $]a, b[$   $V - E < 0$ , on a grâce à (8.15) :

$$\begin{pmatrix} f_a^2 \\ \bar{f}_a^2 \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} (\overline{W})^{N-1} & 0 \\ 0 & (W)^{N-1} \end{pmatrix} + O(h^N) \right) \begin{pmatrix} f_b^2 \\ \bar{f}_b^2 \end{pmatrix}.$$

Si  $W^N = i e^{i\tilde{\varphi}^N/h}$ , cela donne toujours à l'ordre  $N - 1$  :

$$\begin{pmatrix} h_a^2 \\ g_a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\tilde{\varphi}^{N-1}/h) & -\cos(\tilde{\varphi}^{N-1}/h) \\ \cos(\tilde{\varphi}^{N-1}/h) & -\sin(\tilde{\varphi}^{N-1}/h) \end{pmatrix} (1 + O(h^N)) \begin{pmatrix} h_b^2 \\ g_b^2 \end{pmatrix}.$$

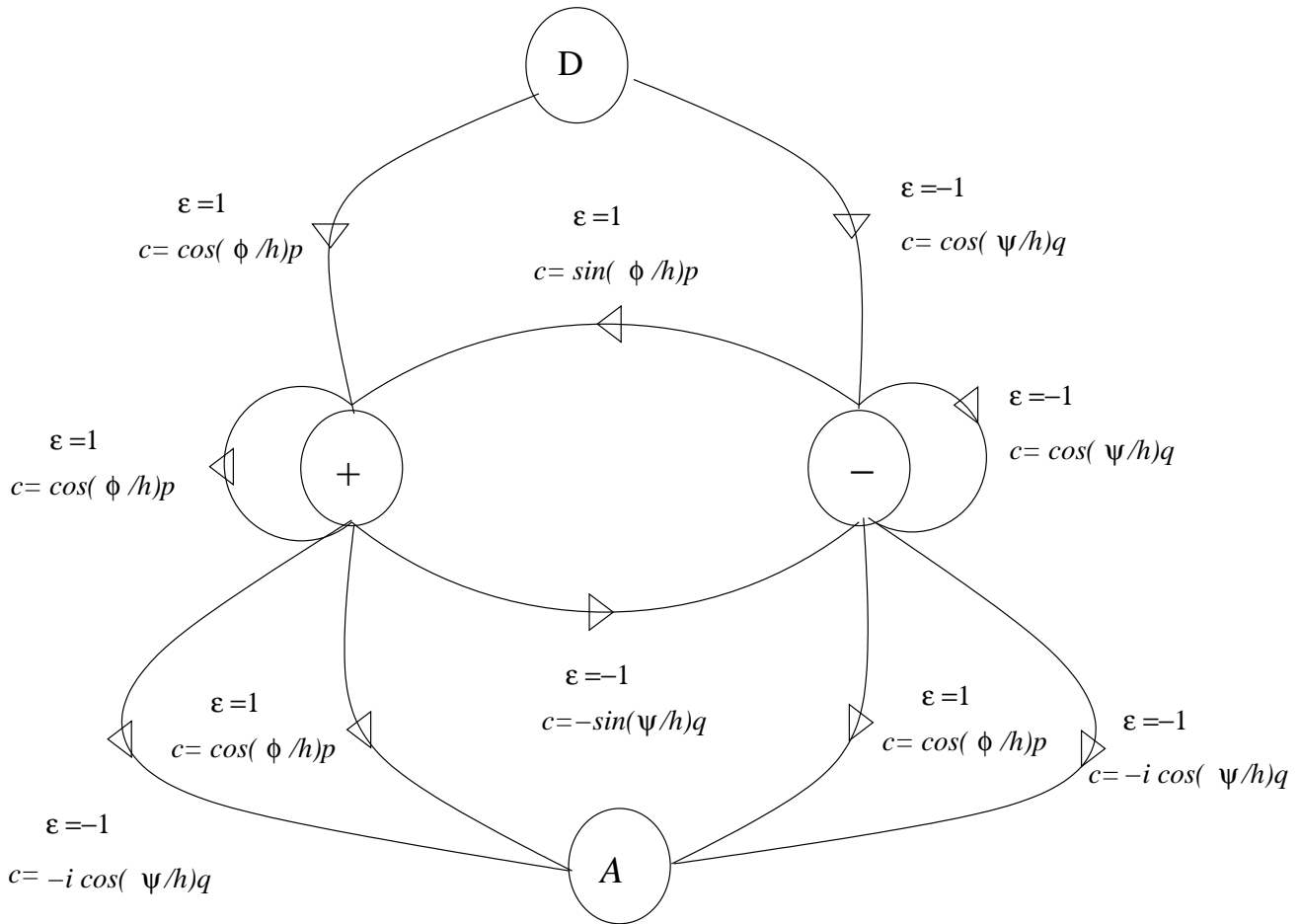
C'est avec ces solutions que nous allons pouvoir déterminer les conditions de quantifications pour les différents potentiels étudiés.

**Remarque 2.9.1** Par construction, les  $O(h)$  qui interviennent dans cette formule sont uniformes en  $E$ .

## 2.10 Appendice 5 : Construction d'un Automate pour calculer les termes de l'équation éiconale de la partie 2.3

On considère ici le cas de  $M$  puits de potentiel, comme à la fin de la partie 2.3.

On peut construire un automate fini (*FIG7* ci-dessous) qui permet de calculer les coefficients  $C_\epsilon$ , connaissant la suite  $\epsilon = (\epsilon_k)_{1 \leq k \leq M}$  :



**FIG7: Automate fini**

Expliquons comment sont obtenus les coefficients  $C_\epsilon$  à partir de (*FIG7*). Pour cela, prenons l'exemple du cas de trois puits :  $M = 3$ , et déterminons le coefficient en facteur devant  $e^{(S_1 - S_2 + S_3)/h}$  dans l'équation de quantification.

On part de l'état initial  $D$ , et on prend  $C = 1$ . On va modifier cette constante  $C$  pour obtenir  $C_\epsilon$ . On a  $\epsilon_1 = 1$  donc on suit la flèche  $\epsilon = 1$  et on multiplie  $C$  par  $c = p_1 \cos(\varphi_1/h)$ . Après cette première étape, on est donc dans l'état  $+$  et  $C = p_1 \cos(\varphi_1/h)$ .



$\epsilon_2 = -1$  donc on suit la flèche  $\epsilon = -1$  et on multiplie  $C$  par  $c = -q_2 \sin(\psi_2/h)$ .

On est donc dans l'état  $-$  et  $C = -p_1 q_2 \cos(\varphi_1/h) \sin(\psi_2/h)$ .

Pour la dernière étape, on a  $\epsilon_3 = 1$ . On suit donc la flèche  $\epsilon = 1$  vers l'état  $A$ .  $C$  devient

$$C = C_\epsilon = -p_1 q_2 p_3 \cos(\varphi_1/h) \sin(\psi_2/h) \cos(\varphi_3/h).$$

Cet automate permet par exemple de calculer facilement les principaux termes de (3.14) quand  $h$  tend vers zéro.

# Bibliographie

- [1] V. Buslaev, A. Grigis, *Imaginary part of Stark-Wannier resonances*, J. of Math. Phys., vol 39 n°5 (1998) p.2519-2550.
- [2] V. Buslaev, A. Grigis, *Turning points for adiabatically perturbed periodic equations*, Journal d'Analyse Mathématique, Vol. 84 (2001) p.67-143.
- [3] M.V. Fedoryuk, *Asymptotic Analysis*, Springer-Verlag, Moscow (1983).
- [4] S. Fujiié et T. Ramond, *Matrice de scattering et résonances associées à une orbite hétérocline*, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol.69 n°1 (1998) p.31-82.
- [5] C. Gérard, A. Grigis, *Precise Estimates of Tunneling and Eigenvalues near a Potential Barrier*, J. of Diff. Eq. 72 (1988) p.149-177.
- [6] V. Grecchi, A. Martinez, A. Sacchetti, *Splitting instability : the unstable double wells*, J. Phys. An. : Math. Gen. 29 (1996) p.4561-4587.
- [7] V. Grecchi, A. Martinez, A. Sacchetti, *Double well Stark effect : Crossing and Anticrossing of resonances*, Asymptotic Analysis 13 (1996) p.373-391.
- [8] B. Helffer et J. Sjöstrand, *Résonances en limite semi-classique*, Mémoire de la société mathématique de France, n°24125.
- [9] N. Kaidi, M. Rouleux, *Multiple Resonances in the Semi-Classical Limit*, Comm. Math.Phys. 133 (1990) p.617-634.
- [10] T. Ramond, *Semiclassical study of Quantum Scattering on the line*, Comm. Math. Phys. 177 (1996) p.221-254.
- [11] M. Reed et B. Simon, *Analysis of operators IV*, Academic Press, New-York (1978).



# Chapitre 3

## Construction d'une solution asymptotique sortante le long d'une courbe homocline

### 3.0 Introduction

On étudie à nouveau les résonances pour un opérateur de Schrödinger semi-classique, cette fois en dimension quelconque :

$$P = -h^2 \Delta + V(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Le potentiel est supposé analytique sur  $\mathbb{R}^n$ . On fait les hypothèses de [9] ce qui permet de définir les résonances près de 0. En particulier, on suppose qu'il existe deux fonctions  $r$  et  $R$  dans  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  vérifiant :

$r(x)R(x) \geq 1$ ,  $r(x) \geq 1$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $C_\alpha$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, |\partial_x^\alpha R(x)| \leq C_\alpha R(x)^{1-|\alpha|}, \quad |\partial_x^\alpha r(x)| \leq C_\alpha r(x)R(x)^{-|\alpha|},$$

et telles que le potentiel  $V$  a une extension holomorphe dans

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{C}^n, |\Im x| < CR(\Re x)\}.$$

De plus,  $|V(x)| \leq C'r(\Re x)^2$  si  $x \in \mathcal{S}$ . On peut prendre par exemple  $R = r = (1 + x^2)^n$ .

Dans le chapitre précédent, on étudiait les résonances au voisinage d'un niveau d'énergie  $E$  différent des valeurs critiques du potentiel. En particulier, si  $p(y, \eta)$  est le symbole principal de  $P$ , on avait  $dp \neq 0$  dans la surface d'énergie  $p(y, \eta) = E$ . Les trajectoires captées étaient donc fermées et régulières.

Dans ce chapitre, on étudie les résonances voisines d'un maximum du potentiel. On suppose  $V(0) = \nabla V(0) = 0$ ,  $V''(0) < 0$  et on s'intéresse aux résonances à une distance  $O(h)$  de 0. On a donc maintenant

$$p(0, 0) = 0, \quad dp(0, 0) = 0. \tag{0.1}$$

Notons  $H_p$  le champ hamiltonien de  $p : H_p = \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta}$ . On suppose l'existence d'une fonction fuite notée  $G \in S'^{1,1}$  telle que

$$H_p(G) \geq m_0/C_0$$

si  $(x, \xi) \in p^{-1}(0) \setminus K$ , pour un compact  $K$ .

Soit

$$\begin{aligned} ]T_-(y, \eta), T_+(y, \eta)[ &\longrightarrow T^*\mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto e^{tH_p}(y, \eta) \end{aligned}$$

la trajectoire classique maximale. ( $T_+$  et  $-T_-$  sont semi-continues inférieurement, à valeur dans  $]0, +\infty[$ ). On définit les variétés lagrangiennes sortantes dans  $p^{-1}(\rho)$  par

$$\Lambda_{\rho,+} = \{(y, \eta) \in p^{-1}(\rho), \|e^{tH_p}(y, \eta)\| \text{ ne tend pas vers } +\infty \text{ quand } t \text{ tend vers } T_-(y, \eta)\},$$

et les variétés lagrangiennes entrantes par

$$\Lambda_{\rho,-} = \{(y, \eta) \in p^{-1}(\rho), \|e^{tH_p}(y, \eta)\| \text{ ne tend pas vers } +\infty \text{ quand } t \text{ tend vers } T_+(y, \eta)\}.$$

Comme  $e^{tH_p}(0, 0) = (0, 0)$ , on a en particulier  $(0, 0) \in \Lambda_{0,+} \cap \Lambda_{0,-}$ . On fait l'hypothèse :

**(H1)** Il existe une unique géodésique  $g_0$  minimale pour la métrique  $d_0 = (-V)_+ dy^2$  joignant  $0$  à  $N = \{y \in \mathbb{R}^n, V(y) = 0\} \setminus \{0\}$ . De plus, si  $g_0 \cap N = \{y_0\}$ , on a  $\nabla V(y_0) \neq 0$ .

On montrera que cette hypothèse implique l'existence d'une courbe intégrale de  $H_p$  différente de  $(0, 0)$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow p^{-1}(0) \\ t &\longrightarrow \gamma_0(t), \text{ telle que } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma_0(t) = (0, 0) \end{aligned}$$

Ainsi  $\gamma_0 \subset \Lambda_{0,+} \cap \Lambda_{0,-}$ . On suppose ensuite

$$\mathbf{(H2)} \quad \Lambda_{0,+} \cap \Lambda_{0,-} = \gamma_0 \cup \{(0, 0)\} = \bar{\gamma}_0.$$

Comme  $0$  est un maximum non dégénéré du potentiel, il existe un voisinage de  $\bar{\gamma}_0$   $\tilde{W}_0$  tel que

$$\forall (y, \eta) \in \tilde{W}_0, dp(y, \eta) \neq 0 \text{ si } (y, \eta) \neq (0, 0).$$

Cela traduit le fait que  $\gamma_0$  est une courbe homocline.

C. Gérard et J. Sjöstrand [4] ont étudié le cas  $dp \neq 0$  dans  $p^{-1}(0)$ , avec l'hypothèse

$$\mathbf{(H2')} \quad \text{Il existe une trajectoire classique hyperbolique } \gamma_0 \text{ telle que } \Lambda_{0,+} \cap \Lambda_{0,-} = \gamma_0.$$

Ils ont déterminé les résonances de  $P$  dans la région  $[-\epsilon_0, \epsilon_0] - i[0, Ch]$ . Pour cela, ils se ramènent à l'étude d'un opérateur unidimensionnel à valeur matricielle grâce à un changement de variables symplectique quantifié. Ils construisent ensuite un problème de Grushin inversible grâce à une solution sortante de  $(P - \rho)u = 0$  le long de  $\gamma_0$  (i.e. une solution ayant son microsupport sur la lagrangienne sortante). Ils obtiennent alors une condition de quantification.

Dans le cas qui nous intéresse, c'est à dire sous les hypothèses **(H1)** et **(H2)**, on cherche donc à construire une solution asymptotique sortante  $u$  de  $(P - \rho)u = 0$  le long de  $\gamma_0$ . On suppose  $|\rho| \leq C_0 h$ . Au voisinage d'un maximum local de potentiel, une transformation FBI permet de construire des solutions WKB, dans le cas de la dimension un. C'est ce que font par exemple C. März pour étudier le spectre d'un opérateur de Schrödinger périodique près d'un maximum du potentiel [11], ou bien S. Fujiié et T. Ramond pour déterminer les résonances dans le cas d'une trajectoire hétérocline, c'est à dire entre deux maxima du potentiel [3].

En dimension quelconque, on ne peut utiliser la même méthode. Cependant, B. Helffer et J. Sjöstrand ont construit dans un voisinage  $\Omega$  de 0 des solutions WKB dans le cas (0.1), lorsqu'il s'agit d'un minimum strict du potentiel [8]. On va adapter leur méthode pour obtenir une solution asymptotique sortante dans un voisinage microlocal de  $(0, 0)$ . Pour cela, si  $\gamma_{\pm} = \gamma_0|_{\pm t \geq B}$ , où  $B$  est assez grand pour que  $\pi_y(\gamma_{\pm}) \in \Omega$  ( $\pi_y$  est la projection de  $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n : (y, \eta) \mapsto y$ ), on fait la nouvelle hypothèse sur la variété lagrangienne sortante (qui sera le microsupport de la solution recherchée) :

**(H3)** Il existe un voisinage de  $\gamma_+ \tilde{V}_+$  tel que  $\pi_y$  soit un difféomorphisme de  $\tilde{V}_+ \cap \Lambda_{0,+}$  sur son image.

Ainsi, il existe une fonction  $\Phi$  définie sur  $V_+ = \pi_y(\tilde{V}_+)$  telle que  $\tilde{V}_+ \cap \Lambda_{0,+} = \{(y, \eta), \eta = \nabla \Phi(y), y \in V_+\}$ .

On verra que si le potentiel s'écrit  $V(y) = V_1(y_1) + V_2(y_2, \dots, y_n)$ , où les coordonnées  $y$  sont choisies telles que  $g_0 \subset \{(y_2, \dots, y_n) = 0\}$ , alors **(H3)** est vérifiée sur tout un voisinage de  $\{\gamma_0(t), t > 0\}$  et on trouve  $\Phi(y) = \varphi_-(y_1, 0) + \varphi_+(0, y_2, \dots, y_n)$  ( $\varphi_{\pm}$  définissent les variétés lagrangiennes entrante et sortante locales au voisinage de  $(0, 0)$ ).

Cette fonction  $\Phi$  sera la phase de la solution asymptotique sortante au voisinage de  $\gamma_+$ .

A partir de cette fonction  $\Phi$ , on reprend la phase construite dans [8] : pour  $B > 0$  assez grand et  $\Omega$  un voisinage de 0 assez petit,

$$\exists \varphi \in C^\infty([B, +\infty[\times \Omega), \forall (t, y) \in [B, +\infty[\times \Omega, \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p(y, \nabla_y \varphi) = 0.$$

De plus, si  $y \in V_+$ , il existe  $t_y \geq B$  tel que  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_y, y) = 0$  et  $\varphi(t_y, y) = \Phi(y)$ .

Enfin,  $\varphi$  est développable (Cf définition 3.2.1) :

$$\varphi(t, y) \sim \varphi_+(y) + \sum_{j \geq 0} e^{-\mu_j t} \varphi_j(t, y),$$

où  $\varphi_j(t, y)$  est un polynôme en  $t$ .

On construit ensuite une solution asymptotique de

$$(D_t + P - \rho)v = 0$$

de la forme

$$v \sim e^{i\varphi(t,y)/h} \sum_{n \geq 0} h^n a_n(t, y, \rho).$$

On obtient des équations de transport qui, grâce aux résultats de [8], ont des solutions développables.

On pose ensuite, pour une fonction troncature  $\chi$  qu'on précisera :

$$u(y, \rho, h) = \int_B^{+\infty} \chi v dt.$$

On montre que cette fonction est solution dans  $\Omega$  de  $(P - \rho)u = O(h^\infty)$ . On verra que son micro-support est contenu dans  $\Lambda_{0,+}$ . La "phase stationnaire en  $+\infty$ " donnée dans [8] permet de calculer un équivalent de  $u$  quand  $h$  tend vers zéro, dans deux ouverts de  $\Omega$ . On fait ensuite l'hypothèse générique :

**(H4)** la plus grande valeur propre de  $V''(0)$  est simple.

Alors on aura un développement WKB de  $u$  près de  $\pi_y(\gamma_0 \cap \Omega)$ . Afin de prolonger ces développements le long de  $\gamma_0$ , on renforce l'hypothèse **(H3)** :

**(H5)** Il existe un voisinage simplement connexe de  $\{\gamma_0(t), t > 0\}$  noté  $\tilde{W}_{0,-}$  tel que la projection  $\pi_x : \Lambda_{0,+} \cap \tilde{W}_{0,-} \rightarrow \mathbf{R}^n$  est un difféomorphisme.

Cela permet de prolonger le développement de  $u$  le long de  $g_0 \setminus \{y_0\}$ . En  $(y_0, 0)$ , la lagrangienne sortante  $\Lambda_{0,+}$  ne se projette pas bien en  $y$ . Cependant, une transformation de Bargmann résout ce problème : soit  $\Psi(x) = (\Im x)^2/2$ , on note  $T : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow H_{\Psi}^{loc}(\tilde{\Omega})$  définie par

$$Tv(x, h) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-(x-y)^2/2h} \omega(x-y) v(y, h) dy, \quad v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$$

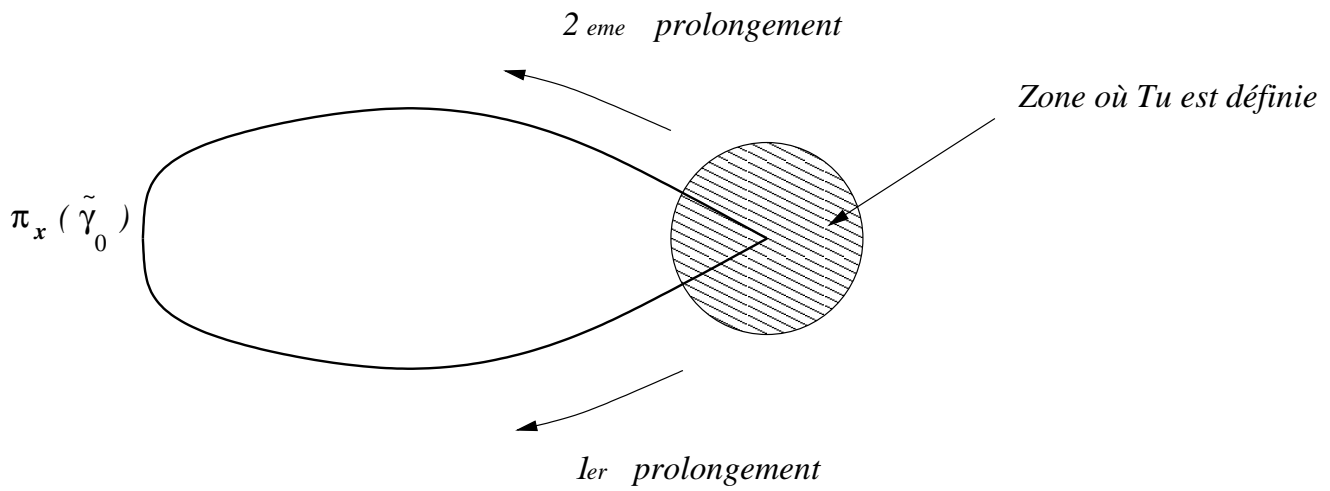
où  $\omega \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\omega \equiv 1$  dans un voisinage de 0. Soit  $\kappa$  la transformation canonique associée, et soit  $\tilde{\gamma}_0 = \kappa(\gamma_0) \subset \mathbf{C}^{2n}$ . La projection  $\pi_x$  réalise maintenant un difféomorphisme de  $\kappa(\Lambda_{0,+})$  sur son image au voisinage de  $\kappa(y_0, 0)$ .

L'hypothèse **(H5)** donne l'existence d'une fonction  $\psi_+$  qui paramétrise  $\tilde{\Lambda}_{0,+}^c$  le complexifié de  $\kappa(\Lambda_{0,+})$  dans un voisinage de  $\tilde{\gamma}_0$ . Le calcul de  $Tu$  montre que cette fonction  $\psi_+$  est la phase qui intervient dans le développement de  $Tu$ .

On définit alors l'opérateur  $\tilde{P}$  par  $\tilde{P}T = TP$ . Dans un voisinage de zéro, on a

$$(\tilde{P} - \rho)Tu = O(h^\infty).$$

Cela permet de prolonger  $Tu$  le long de  $\pi_x(\tilde{\gamma}_0)$  de deux manières :



**FIG1: prolongement de  $Tu$  le long de  $\pi_x(\tilde{\gamma}_0)$**

On montre que les deux solutions obtenues sont proportionnelles avec un facteur  $C(\rho, h)$ . On a donc une solution multivaluée. On peut espérer obtenir un premier ensemble de résonances avec la condition  $C(\rho, h) = 1$ . Cependant, il reste à construire grâce à la solution  $u$  un problème de Grushin inversible. Une des difficultés est qu'ici l'opérateur  $(P - \rho) \circ u$  s'écrit  $Q(x, \partial/\partial x, h)D_x$ , pour un opérateur  $Q$  non elliptique en  $(0, 0)$ .

Ce chapitre s'organise de la manière suivante :

La partie A est consacrée à la dimension un, et on y utilise les techniques de [3] [11] ... Dans la première partie, on fait les hypothèses du chapitre 2, et on détermine les résonances à l'aide de solutions de  $(P - E)u = 0$  : on exprime la solution exponentiellement décroissante à gauche  $K_-$  en fonction des solutions de Jost à droite. Au voisinage de zéro, maximum local du potentiel, on ne peut plus utiliser comme dans le chapitre précédent les solutions d'Airy pour construire des solutions de  $Pu = Eu$ . Comme dans [3], on fait une transformation FBI qui ramène à un opérateur "modèle"  $Q_0$  pour lequel on peut faire des calculs explicites (partie 2). Dans la troisième partie, on rappelle brièvement les résultats de [11] concernant l'opérateur  $Q_0$  et les microsupports des solutions. Cela permet de déterminer la solution de Jost sortante à droite. On calcule un équivalent de cette solution dans la partie 4, et on l'exprime avec les phases qui interviennent dans le développement de  $K_-$ . On en déduit dans la cinquième partie une équation de quantification, et on termine en étudiant le lieu des résonances.

La partie B est consacrée à la construction d'une solution WKB le long de la trajectoire homocline en dimension quelconque. Dans la première partie, on rappelle les hypothèses et on fixe les notations. On rappelle ensuite la construction et les propriétés de la phase auxiliaire, démontrées dans [8] (partie 2). Cela permet de construire une fonction  $u$  telle que  $(P - \rho)u = O(h^\infty)$  au voisinage de 0 (partie 3 et 4). Dans la partie 5, on calcule un équivalent de  $u$  quand  $h$  tend vers 0. La partie 6 donne la définition de la transformation FBI  $T$ . On y définit aussi  $\tilde{P}$ . Dans la septième partie,



on calcule les développements de  $Tu$  au voisinage de 0 dans des domaines proches de  $\pi_x(\tilde{\gamma}_0)$ . On prolonge ensuite  $Tu$  le long de  $\pi_x(\tilde{\gamma}_0)$  grâce à l'hypothèse **(H5)** et on obtient le coefficient  $C(\rho, h)$  (partie 8). Enfin, dans la dernière partie on étudie les solutions de  $C(\rho) = 1$ .

# A-La dimension un

## 3.1 Hypothèses et Notations

On considère un opérateur de Schrödinger semiclassique  $P$  sur  $\mathbb{R}$  :

$$P = h^2 D_x^2 + V(x), \quad D_x = \frac{1}{i} \partial_x.$$

On note  $p(x, \xi) = \xi^2 + V(x)$  le symbole principal de cet opérateur.

On suppose que le potentiel satisfait les hypothèses du chapitre précédent, qui permettent de définir les résonances par dilatation analytique : pour  $0 < \theta_0 < \pi/2$ ,  $\delta > 0$ ,

$$V \text{ est analytique dans } \mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C}, |\Im z| < \tan \theta_0 |\Re z|\} \cup \{|\Im z| < \delta\}. \quad (1.1)$$

De plus dans cette zone,

$$\lim_{\Re(x) \rightarrow -\infty} \Re V = +\infty, \quad \lim_{\Re(x) \rightarrow +\infty} V = V_0 > -\infty. \quad (1.2)$$

On reprend du chapitre précédent les résultats qui donnent une caractérisation des résonances à l'aide de solution de

$$Pu = Eu. \quad (1.3)$$

Si  $-2\theta_0 < -2\theta < \text{Arg}(E - V_0) < 0$ ,

il existe une solution exponentiellement décroissante quand  $\Re x$  tend vers  $-\infty$  notée  $K_-$ ,

il existe deux solutions de Jost  $J_\pm$  définies par

$$J_\pm(x, h, E) \sim e^{\pm i \sqrt{E - V_0} x / h} \text{ si } \Re x \rightarrow +\infty, x \in \mathcal{S}.$$

Près d'un niveau d'énergie strictement supérieur à  $V_0$ , les résonances sont données par la proposition :

**Proposition 3.1.1**  *$E$  est une résonance si et seulement si  $J_+$  est colinéaire à  $K_-$ .*

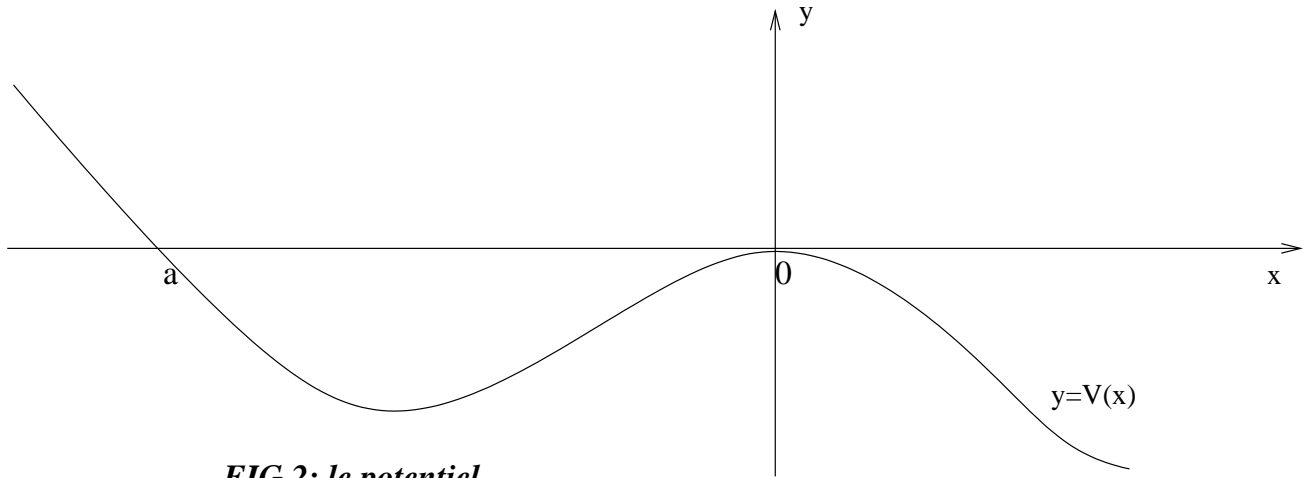
On étudie dans ce chapitre les résonances proches d'un maximum de potentiel. On suppose donc

$$V(0) = V'(0) = 0; \quad V''(0) = -k^2 < 0, \quad k > 0, \quad (1.4)$$

et on s'intéresse aux résonances proches de 0 quand  $h$  tend vers 0. Pour utiliser la proposition 3.1.1 ci-dessus, on doit supposer  $V_0 < 0$ .

On considère un potentiel vérifiant en plus :

$$V(x) < 0 \text{ si } x > 0, \quad V(x) = 0 \text{ ssi } x \in \{a, 0\} \text{ et } V'(a) < 0. \quad (1.5)$$



**FIG 2: le potentiel**

Ce potentiel satisfait les hypothèses **(H1)** et **(H2)**. La dimension un implique alors que les hypothèses **(H3)** à **(H5)** sont vérifiées.

Le point tournant  $a$  est simple. Le chapitre 2 (partie 2.2) donne donc une première expression pour  $K_-$  :

$$K_- = C \left[ e^{-i\pi/4} u_a^- + e^{i\pi/4} u_a^+ \right],$$

où  $C$  est une constante et  $u_a^\pm$  sont des fonctions définies dans la partie 2.3 du chapitre précédent. Elles admettent le développement quand  $h$  tend vers 0 et  $a + \epsilon < x < -\epsilon$ ,  $\epsilon > 0$  :

$$u_a^\pm(x, h, E) = e^{\pm \frac{i}{h} \int_a^x |V-E|^{1/2} dt} \sqrt{\frac{h}{2}} \left[ \pm i |V-E|^{-1/4} + O(h) \right].$$

Si  $J_+ = \alpha u_a^- + \beta u_a^+$ , la proposition 3.1.1 devient donc

**Proposition 3.1.2** Soit  $E \in \mathbb{C}$  tel que  $-2\theta_0 < -2\theta < \text{Arg}(E - V_0) < 0$ .  $E$  est une résonance ssi

$$\frac{\alpha(E, h)}{\beta(E, h)} = -i.$$

Il faut donc exprimer la solution de Jost sortante  $J_+$  dans la base  $(u_a^-, u_a^+)$ .

Lorsque la résonance  $E(h)$  proche de 0 vérifie  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|E(h)|}{h} = +\infty$ , on peut, au voisinage des points tournants proches de 0, construire des solutions ainsi que des matrices de transition avec des solutions d'Airy. (Cf chapitre 2 Appendice 3, remarques 2.8.6, 2.8.7). On obtient donc dans ce cas les résonances.

Dans ce chapitre, on considère les résonances dans un disque  $D(r_0h) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r_0h\}$  pour  $r_0 > 0$ . Pour de telles résonances, l'équation d'Airy approxime mal (1.3) près du point tournant double 0. On construit des solutions près de 0 grâce à une transformation FBI qui ramène microlocalement l'opérateur  $P$  à un opérateur modèle pour lequel des calculs explicites existent. On obtient un développement asymptotique de  $J_+$  et par suite les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  qui donnent les résonances grâce à la proposition 3.1.2.

On obtiendra une équation de quantification très semblable à celle de [11] pour le cas d'un potentiel présentant deux maximums égaux. En particulier, le nombre de résonances dans  $D(r_0h)$  est encore de l'ordre de  $|\log h|$ . Signalons que la méthode est légèrement différente puisque S. Fujiié et T. Ramond calculent une matrice de scattering grâce à des solutions WKB exactes alors que nous nous servons des solutions construites dans le chapitre 2 (Appendices 1, 3, 4).

## 3.2 Réduction microlocale

On prend désormais  $E \in D(r_0h) = \{E \in \mathbb{C}, |E| \leq r_0h\}$ ,  $r_0 > 0$ . Pour  $x$  proche de zéro, l'équation

$$-h^2 u''(x) + V(x)u(x) = Eu(x)$$

s'écrit

$$-h^2 u''(x) - \left( k^2 \frac{x^2}{2} + O(x^3) \right) u(x) = Eu(x).$$

En posant  $\bar{h} = h \frac{\sqrt{2}}{k}$  et  $\rho = E/k^2 \in D\left(\frac{r_0}{k^2}h\right) = D(rh)$ , on obtient

$$-\frac{1}{2}\bar{h}^2 u''(x) - \left( \frac{x^2}{2} + O(x^3) \right) u(x) = \rho u(x).$$

Les solutions de (1.3) sont les solutions de

$$Qu = \rho u \tag{2.1}$$

où  $Q$  est l'opérateur  $\bar{h}$  semiclassical de symbole principal

$$q(x, \xi) = \frac{\xi^2}{2} + W(x), \quad W(x) = \frac{V(x)}{k^2}. \tag{2.2}$$

On a :

$$q(x, \xi) = \frac{\xi^2 - x^2}{2} + O(x^3).$$

On étudie maintenant ce nouvel opérateur  $Q$ . Nous noterons désormais  $h$  au lieu de  $\bar{h}$ .

Soient  $\mathcal{F}$  la transformation de Fourier en  $h$  et  $\Gamma$  la conjugaison dans  $\mathbb{C}$ .

A l'aide d'une transformation FBI, on peut ramener l'étude de  $Q$  microlocalement près de  $(0, 0)$  à celle de l'opérateur  $Q_0 = \frac{1}{2}(x(hD_x) + (hD_x)x)$  de symbole principal  $q_0(x, \xi) = x\xi$  [3] [11] :

**Théorème 3.2.1** *Soit  $Q$  l'opérateur de Schrödinger défini par (2.2) pour un potentiel  $V$  vérifiant (1.4).*

*Il existe*

1. *Une fonction réelle sur  $\mathbb{R}$ ,  $F(t, h) \sim \sum_{j \geq 0} h^j f_j(t)$ , avec  $f_0(0) = 0$ ;  $f'_0(0) = 1$ ; et  $f_1 \equiv 0$ ,*
2. *Une transformation canonique  $\kappa$  d'un voisinage de  $(0, 0)$  dans un voisinage de  $(0, 0)$ , de fonction canonique  $\psi(x, y) = \sqrt{2}xy - \frac{x^2 + y^2}{2} + O(x^3, y^3)$ , et*
3. *Une transformation FBI  $U$  associée à  $\kappa$ ,*

*telles que*

$$U^{-1}F(Q, h)U = Q_0.$$

*De plus, on a  $f_0 \circ q \circ \kappa = q_0$ , et on peut prendre  $U$  tel que*

$$\text{si } A = \Gamma \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ \Gamma \text{ alors } \Gamma \circ U = U \circ A.$$

On fixe désormais  $F$ ,  $U$ ,  $\kappa$  comme dans le théorème. On peut calculer une réalisation de  $U$  :

**Proposition 3.2.2** *On peut choisir un symbole analytique classique d'ordre zéro  $\sigma(x, y, h) = \sigma_0(x, y) + h\sigma_1(x, y) + \dots$ , avec  $\sigma_0(0, 0) = 1$ , tel que*

$$Uu(x, h) = 2^{1/4} e^{i\pi/8} (2\pi h)^{-1/2} \int e^{\frac{i}{h}\psi(x, y)} \sigma(x, y, h) u(y, h) dy. \quad (2.3)$$

Reprenons de [11] quelques résultats sur  $\sigma_0$  qui seront nécessaires dans la suite :

**Lemme 3.2.3** *On a*

$$\frac{\Gamma[\sigma_0(x, y)]}{|\psi''_{yy}(x, y)|^{1/4}} = \frac{\sigma_0(x, \psi'_y(x, y))}{|\psi''_{yy}(x, \psi'_y(x, y))|^{1/4}} \quad (2.4)$$

**Preuve :** Examinons les conséquences de  $\Gamma U = UA$ . On note  $\kappa_A(y, \eta) = (-\eta, -y)$  et  $\kappa_\Gamma(y, \eta) = (y, -\eta)$  les transformations canoniques associées respectivement à  $A$  et  $\Gamma$ .  $\kappa\kappa_A = \kappa_\Gamma\kappa$  entraîne facilement

$$\begin{cases} i) & y = \psi'_y(x, \psi'_y(x, y)) \\ ii) & \psi'_x(x, y) = -\psi'_x(x, \psi'_y(x, y)) \end{cases} \quad (2.5)$$

D'autre part, avec l'écriture (2.3) on a

$$\Gamma Uu(x, h) = \frac{2^{1/4} e^{-i\pi/8}}{\sqrt{2\pi h}} \int e^{-\frac{i}{h}\psi(x, y)} \overline{\sigma(x, y, h) u(y)} dy \quad (2.6)$$

et

$$AUu(x, h) = \frac{2^{1/4} e^{i\pi/8}}{\sqrt{2\pi h}} \int \int e^{\frac{i}{h}(\psi(x, \eta) - y\eta)} \sigma(x, \eta, h) d\eta \overline{u(y)} dy. \quad (2.7)$$

On élimine l'intégrale en  $\eta$  à l'aide de la phase stationnaire dans (2.7). Les égalités (2.5) montrent que :

le point critique de la phase  $\psi(x, \eta) - y\eta$  est  $\eta_c(x, y) = \psi'_y(x, y)$ ,  
la valeur critique de cette phase est  $-\psi(x, y)$ ,

et on trouve

$$UAu(x, y) = \frac{2^{1/4} e^{-i\pi/8}}{\sqrt{2\pi h}} \int e^{-i\psi(x, y)/h} \left[ \frac{\sigma_0(x, \psi'_y(x, y))}{|\psi''_{yy}(x, \psi'_y(x, y))|^{1/2}} + O(h) \right] \bar{u}(y) dy.$$

Avec (2.6),  $\Gamma U = UA$  donne

$$\Gamma[\sigma_0(x, y)] = \frac{\sigma_0(x, \psi'_y(x, y))}{|\psi''_{yy}(x, \psi'_y(x, y))|^{1/2}}.$$

On dérive alors une fois par rapport à  $y$  l'égalité (2.5) *i*) pour obtenir le lemme.  $\square$

Revenons à la recherche de solutions de (2.1). Grâce à la transformation FBI du théorème 3.2.1, on est ramené à la recherche de solutions de

$$Q_0 u^0 = \rho' u^0. \quad (2.8)$$

En effet, si  $u^0$  est solution de (2.8), alors  $Uu^0 = u$  est solution de (2.1) , avec

$$\rho' = F(\rho, h). \quad (2.9)$$

(pour  $h < h_0$ ,  $F(\rho, h)$  est inversible près de zéro).

On commence donc par étudier les solutions de (2.8). C'est l'objet de la partie suivante.

### 3.3 Etude de $Q$ et $Q_0$

On résume ici les résultats de [11] concernant l'opérateur  $Q_0$ .

On peut calculer les solutions de (2.8) :

$$u_{\pm}^0(x, \rho') = u_{\pm}^0(x) = H(\pm x) |x|^{1/2+i\rho'/h},$$

où  $H(x) = 1$  si  $x > 0$  et  $H(x) = 0$  sinon.

Une deuxième base de solutions est donnée par

$$v_{\pm}^0(x) = Bu_{\pm}^0(x), \quad B = \mathcal{F}^{-1}\Gamma = \Gamma\mathcal{F}.$$

Ces solutions sont reliées par la matrice de transition :

$$\begin{pmatrix} u_+^0 \\ u_-^0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_+^0 \\ v_-^0 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

où  $M = M(\rho', h) = (m_{ij})$  est la matrice définie par :

$$m_{11} = m_{22} = e^{i\frac{\rho'}{h}\log h} e^{-i\pi/4} e^{\pi\rho'/2h} \frac{\Gamma(1/2 + i\rho'/h)}{\sqrt{2\pi}},$$

$$m_{12} = m_{21} = e^{i\frac{\rho'}{h}\log h} e^{i\pi/4} e^{-\pi\rho'/2h} \frac{\Gamma(1/2 + i\rho'/h)}{\sqrt{2\pi}}.$$

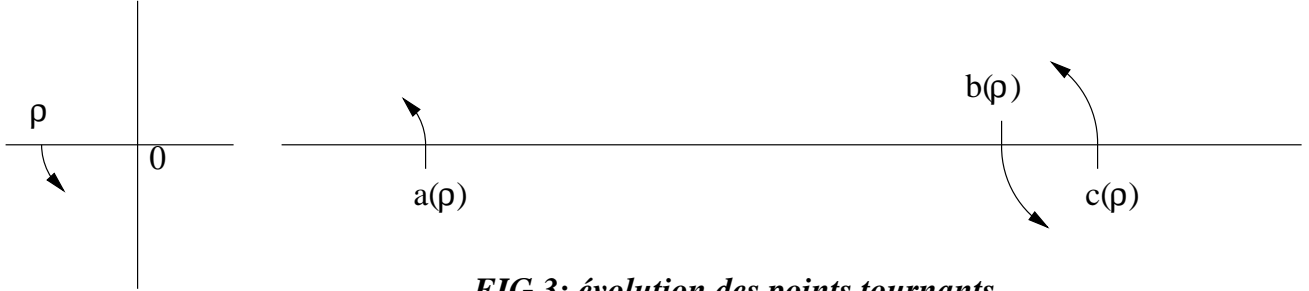
On calcule  $M^{-1} = (m_{ij}^{-1})$  :

$$m_{11}^{-1} = m_{22}^{-1} = e^{-i\frac{\rho'}{h}\log h} e^{i\pi/4} e^{\pi\rho'/2h} \frac{\Gamma(1/2 - i\rho'/h)}{\sqrt{2\pi}},$$

$$m_{12}^{-1} = m_{21}^{-1} = e^{-i\frac{\rho'}{h}\log h} e^{-i\pi/4} e^{-\pi\rho'/2h} \frac{\Gamma(1/2 - i\rho'/h)}{\sqrt{2\pi}}.$$

Remarquons que  $M$  est unitaire pour  $\rho' \in \mathbb{R}$ .

On prend désormais  $\rho$  dans un domaine  $\mathcal{D} = \{\Im z \leq 0\} \cap D(rh)$ . On note  $a(\rho) < b(\rho) < c(\rho)$  les points tournants pour  $\rho < 0$ . Par analyticité du potentiel, on peut prolonger ces fonctions à  $\mathcal{D}$  pour  $h_0$  assez petit,  $h \in ]0, h_0]$  :



**FIG 3: évolution des points tournants**

La transformation FBI donne quatre solutions formelles de  $Qu = \rho u$  près de zéro :

$$u_{\pm}(x, \rho, h) = U u_{\pm}^0(x, \rho', h),$$

$$v_{\pm}(x, \rho, h) = U v_{\pm}^0(x, \rho', h),$$

où la relation entre  $\rho$  et  $\rho'$  est donnée par (2.9).

La matrice de transition entre  $(u_+, u_-)$  et  $(v_+, v_-)$  est la même que celle entre  $(u_+^0, u_-^0)$  et  $(v_+^0, v_-^0)$  donnée en (3.1).

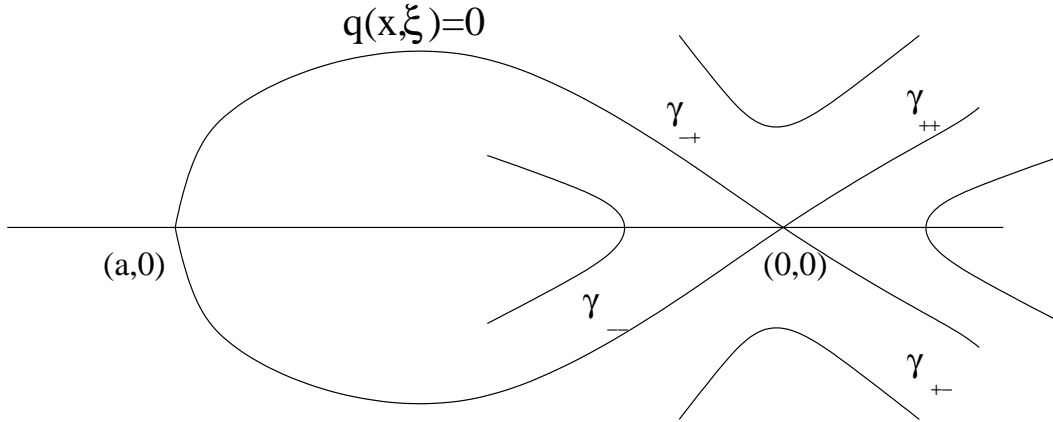
De plus,  $\Gamma U = UA$  donne pour  $\rho \in \mathbb{R}$ ,

$$v_- = \bar{u}_+; \quad v_+ = \bar{u}_-.$$

On a noté  $\bar{u}_{\pm} = \Gamma(u_{\pm})$ .

Les microsupports de ces solutions au voisinage de  $(0, 0)$  sont les images par  $\kappa$  des microsupports des solutions de (2.8) au voisinage de  $(0, 0)$ . Donc

$u_+$  a son microsupport dans  $\gamma \setminus \gamma_{--}$ ,  
 $u_-$  a son microsupport dans  $\gamma \setminus \gamma_{++}$ ,  
 $v_+$  a son microsupport dans  $\gamma \setminus \gamma_{+-}$ ,  
 $v_-$  a son microsupport dans  $\gamma \setminus \gamma_{-+}$ ,  
 où  $\gamma_{\pm\pm}$  sont dessinés ci dessous :



**FIG 4: les micro supports**

La solution de Jost sortante à droite a donc un développement asymptotique proportionnel à  $v_+$  lorsque  $x > 0$ . On construit alors une vraie solution ayant le même développement asymptotique que  $v_+$  à l'ordre un (par exemple à l'aide de la méthode de l'Appendice 1 du chapitre 2 (partie 2.6), ou en suivant C. März [11] Appendice A3). Cette solution est exponentiellement décroissante quand  $x$  tend vers  $+\infty$  dans  $\mathbb{R}e^{i\theta}$ , donc elle est proportionnelle à  $J_+$ . On note encore cette solution  $v_+$ .

La proposition 3.1.2 de l'introduction montre qu'il suffit maintenant de chercher un équivalent de  $v_+$  quand  $h$  tend vers 0 lorsque  $x < 0$  et de l'exprimer dans la base  $(u_a^-, u_a^+)$ .

### 3.4 Equivalent de $v_+$

**On prend désormais  $\rho \in \mathbb{R}$ .** On étendra ensuite par analyticité les résultats à  $\mathcal{D}$ .

Comme  $v_+ = \bar{u}_-$ , on commence par étudier  $u_-$  pour  $x < 0$ . La réalisation (2.3) de  $U$  mène à

$$u_- = Uu_-^0(x, h) = 2^{1/4} e^{i\pi/8} (2\pi h)^{-1/2} \int_{-\infty}^0 e^{\frac{i}{h}\psi(x,y)} \sigma(x, y, h) |y|^{1/2+i\rho'/h} dy.$$

Si  $\rho'_0 = f_0(\rho)$ , le théorème 3.2.1 donne  $\rho' = F(\rho, h) = \rho'_0 + O(h^2)$ . On écrit donc  $u_-$  :

$$u_- = 2^{1/4} e^{i\pi/8} (2\pi h)^{-1/2} \int_{-\infty}^0 e^{\frac{i}{h}(\psi(x,y)+\rho'_0 \log|y|)} \sigma(x, y, h) |y|^{1/2} e^{(i/h)(\rho'-\rho'_0) \log|y|} dy,$$

où on choisit la détermination de  $\log$  réelle sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .



On va appliquer la méthode de la phase stationnaire pour obtenir un équivalent de  $u_-$  quand  $h$  tend vers 0. Pour cela, étudions la phase de l'intégrale ci-dessus notée :

$$\Psi(x, y, \rho) = \psi(x, y) + \rho'_0 \log|y| = \psi(x, y) + \rho'_0 \log(-y). \quad (4.1)$$

**Lemme 3.4.1** *Pour  $0 < \epsilon_0 < x_0$  petits, il existe  $C_0 > 0$  tel que si  $-x_0 \leq x \leq -\epsilon_0$  et  $|\rho| \leq C_0$ , la fonction  $y \rightarrow \Psi(x, y, \rho)$  a un unique point critique  $y_c(x, \rho)$  holomorphe en  $x$  et  $\rho$ . De plus,  $y_c(x, \rho) < 0$ .*

**Preuve :** On considère d'abord le cas  $\rho'_0 = 0$ . Alors  $\rho = f_0^{-1}(\rho'_0) = 0$  et donc  $\Psi(x, y, 0) = \psi(x, y)$ . Le théorème des fonctions implicites appliqué à la fonction  $y \mapsto \psi'_y(x, y)$  en  $(0, 0)$  donne pour  $|x| \leq x_0$  l'existence d'une application holomorphe  $y_c(x)$  telle que  $\psi'_y(x, y_c(x)) = 0$ . Le développement de  $\psi$  donné dans le théorème 3.2.1 implique

$$y_c(x) = \sqrt{2}x + O(x^2).$$

Remarquons que pour  $x_0$  assez petit et  $-x_0 \leq x \leq -\epsilon_0 < 0$ ,  $y_c(x) < -\epsilon_0$ .

Si on restreint  $x$  à  $-x_0 \leq x \leq -\epsilon_0$ , la fonction

$$(x, y, \rho) \mapsto \Psi'_y(x, y, \rho)$$

est holomorphe au voisinage de  $(x, y_c(x), 0)$ .

Le théorème des fonctions implicites en ce point donne l'existence de  $y_c(z, \rho)$  holomorphe en  $(z, \rho)$  telle que  $\Psi'_y(z, y_c(z, \rho), \rho) = 0$ , pour  $|z - x| < \epsilon$ ,  $|\rho| < \epsilon$ ,  $\epsilon = \epsilon(x)$ .

$x$  étant dans le compact  $-x_0 \leq x \leq -\epsilon_0$ , on obtient la première partie du lemme et en particulier la constante  $C_0$ .

$y_c(x, \rho) < 0$  découle de  $y_c(x) < -\epsilon_0$ , quitte à diminuer  $C_0 > 0$  (dans la suite, on va diminuer un nombre fini de fois  $x_0$  et  $C_0$ ).  $\square$

Pour  $-x_0 \leq x \leq -\epsilon_0$  et  $|\rho| \leq C_0$ , on note

$$\Phi(x, \rho) = \Psi(x, y_c(x, \rho), \rho) = \psi(x, y_c(x, \rho)) + \rho'_0 \log(-y_c(x, \rho))$$

la valeur critique de la phase  $\Psi(x, y, \rho)$ .

La phase stationnaire sur  $\gamma_{--} \cap \pi_x^{-1}([-x_0, -\epsilon_0])$  donne :

$$u_-(x, h, \rho) = \frac{2^{1/4} e^{-i\pi/8} e^{i\Phi(x, \rho)/h}}{|y_c(x, \rho)|^{1/2} |\Psi''_{yy}(x, y_c(x, \rho), \rho)|^{1/2}} [\sigma_0(x, y_c(x, \rho)) + O(h)].$$

On en déduit le développement de  $v_+$  sur  $\gamma_{-+} = \bar{\gamma}_{--}$  en prenant le conjugué de cette expression :

$$v_+(x, h, \rho) = \frac{2^{1/4} e^{i\pi/8} e^{-i\bar{\Phi}(x, \rho)/h}}{|y_c(x, \rho)|^{1/2} |\Psi''_{yy}(x, y_c(x, \rho), \rho)|^{1/2}} [\Gamma[\sigma_0(x, y_c(x, \rho))] + O(h)]. \quad (4.2)$$

On calcule maintenant le développement de  $v_+$  sur  $\gamma_{--}$ . Pour cela, on utilise la matrice de passage  $M$  donnée dans (3.1), ou plutôt son inverse :

$$v_+ = m_{11}^{-1} u_+ + m_{12}^{-1} u_-.$$

Sur  $\gamma_{--}$ , on a donc  $v_+ = m_{12}^{-1}u_-$  soit :

$$v_+(x, h, \rho) = \frac{2^{1/4} e^{-i\pi/8} e^{i\Phi(x, \rho)/h} e^{-(i/h)\rho' \log h} e^{-i\pi/4} e^{-\pi\rho'/2h} (2\pi)^{-1/2} \Gamma(1/2 - i\rho'/h)}{|y_c(x, \rho)|^{1/2} |\Psi''_{yy}(x, y_c(x, \rho), \rho)|^{1/2}} [\sigma_0(x, y_c(x, \rho)) + O(h)]. \quad (4.3)$$

Les formules (4.2) et (4.3) donnent un développement asymptotique complet de  $v_+$  sur  $[-x_0, -\epsilon_0]$ . Afin d'exprimer  $v_+$  dans la base  $(u_a^-, u_a^+)$ , il faut écrire les phases  $\Phi(x, \rho)$  et  $-\overline{\Phi}(x, \rho)$  qui interviennent dans le développement de  $v_+$  en fonction des phases  $\pm \int_a^x |V - E|^{1/2} dt$  de  $u_a^\pm$ . On étudie donc la fonction  $\Phi(x, \rho)$ .

### 3.4.1 Etude de $\Phi(x, \rho)$

**Lemme 3.4.2**  $\Phi(x, \rho)$  vérifie l'équation éiconale  $q(x, \Phi'_x(x, \rho)) = \rho$ , pour  $-x_0 \leq x \leq -\epsilon_0$ ,  $|\rho| \leq C_0$ . Sur cet ensemble,  $\Phi'_x(x, \rho) < 0$ .

**Preuve :** Prenons  $-x_0 \leq x \leq -\epsilon_0$  et  $|\rho| < C_0$  pour avoir le lemme 3.4.1. Par définition de la phase  $\Psi(x, y, \rho)$ , le point critique  $y_c(x, \rho)$  vérifie

$$\psi'_y(x, y_c(x, \rho)) + \rho'_0/y_c(x, \rho) = 0, \text{ soit } y_c(x, \rho)(-\psi'_y(x, y_c(x, \rho))) = \rho'_0,$$

ce qui s'écrit

$$q_0(y_c(x, \rho), -\psi'_y(x, y_c(x, \rho))) = \rho'_0.$$

Rappelons que  $\kappa$  est la transformation canonique associée à  $\psi(x, y)$  et  $f_0(\rho) = \rho'_0$ . L'égalité  $f_0 \circ q \circ \kappa = q_0$  donne donc

$$q(x, \psi'_x(x, y_c(x, \rho))) = \rho.$$

Or on calcule

$$\Phi'_x(x, \rho) = \psi'_x(x, y_c(x, \rho)),$$

d'où la première assertion du lemme.

On a d'autre part  $\psi'_x(x, y) = \sqrt{2}y - x + O(x^2, y^2)$  et  $y_c(x, \rho) = \sqrt{2}x + O(\rho, x^2)$  comme on le voit dans la démonstration du lemme 3.4.1. Ainsi  $\psi'_x(x, y_c(x, \rho)) = x + O(\rho, x^2)$  est bien négative pour  $-x_0 \leq x \leq -\epsilon_0$  et  $|\rho| < C_0$  si  $x_0$  et  $C_0$  sont assez petits.  $\square$

On calcule à présent  $\Phi(x, \rho)$  à l'aide de la fonction réelle analytique  $\varphi$ , définie par :

$$\varphi(x) = \int_{a(\rho)}^x |2(W - \rho)|^{1/2} dt, \quad x \in I_\rho. \quad (4.4)$$

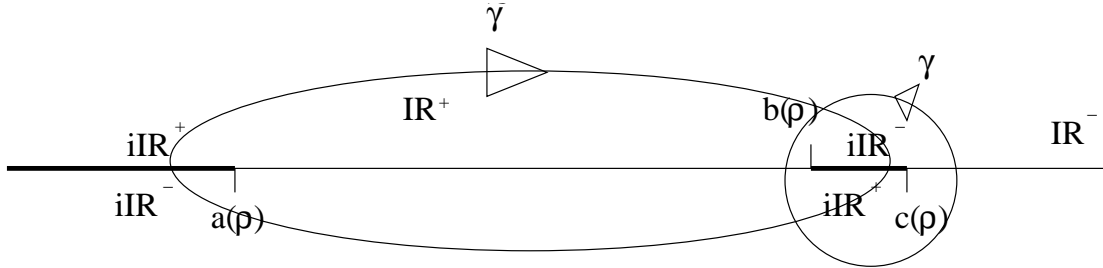
où

$$I_\rho = \begin{cases} a(\rho) \leq x \leq b(\rho) & \text{si } \rho < 0 \\ a(\rho) \leq x \leq 0 & \text{si } \rho > 0 \end{cases}.$$

Le lemme 3.4.2 donne immédiatement pour  $-x_0 \leq x \leq \epsilon_0$  et  $|\rho| \leq C_0$

$$\Phi'_x(x, \rho) = -(2(\rho - W(x)))^{1/2},$$

où la détermination de la racine carrée est choisie réelle positive sur  $]a(\rho), b(\rho)[$  et est prolongée par analyticité dans  $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, a(\rho)] \cup [b(\rho), c(\rho)[)$ . On note sur la figure ci-dessous les valeurs prises par cette racine carrée le long de l'axe réel.



**FIG 5: Détermination de  $(2(\rho - W))^{1/2}$**

Avec la même détermination, on a

$$\varphi(x) = \int_{a(\rho)}^x (2(\rho - W(t)))^{1/2} dt$$

et donc  $\Phi'_x(x, \rho) = -\varphi'(x)$ . Il existe donc une constante  $C(\rho)$  indépendante de  $x$  telle que

$$\Phi(x, \rho) = -\varphi(x) + C(\rho). \quad (4.5)$$

**Remarque 3.4.3** La formule (4.5) permet de prolonger  $\Phi(x, \rho)$  sur  $I_\rho$ . On note encore  $\Phi(x, \rho)$  ce prolongement.

On détermine  $C(\rho)$  en prenant (4.5) en  $x = b(\rho)$ . Pour cela, on calcule d'une part  $\varphi(b(\rho))$  et d'autre part  $\Phi(b(\rho), \rho)$ .

**Etude de  $\varphi(b(\rho))$  :**

Pour  $\rho < 0$ , les points tournants sont réels et

$$\varphi(\rho) \equiv \varphi(b(\rho)) = \int_{a(\rho)}^{b(\rho)} (2(\rho - W))^{1/2} dt > 0.$$

On prolonge cette expression pour  $|\rho|e^{i\theta}$ ,  $-\pi \leq \theta \leq 0$  grâce à l'intégrale d'action

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\gamma}} (2(\rho - W))^{1/2} dt$$

où  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_\rho$  est un contour entourant le segment  $[a, b]$  comme en (FIG5).

**Remarque 3.4.4** Comme dans [3], on peut montrer l'existence d'une fonction holomorphe  $R(\rho)$  vérifiant pour  $|\rho|$  petit :

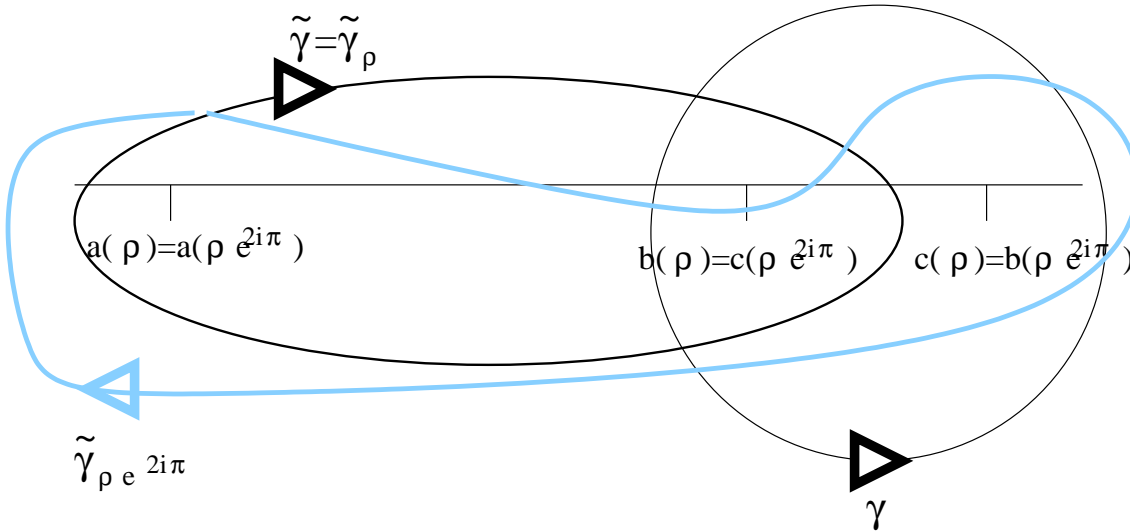
$$\varphi(\rho) = \frac{1}{2} \left[ \frac{S(\rho)}{2\pi} \log \rho + R(\rho) \right], \quad (4.6)$$

où  $S(\rho)$  est l'application holomorphe définie par l'intégrale d'action

$$S(\rho) = \frac{1}{i} \int_{\gamma} (2(\rho - W(t)))^{1/2} dt,$$

$\gamma = \{\epsilon e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi\}$  est un chemin entourant les deux points tournants près de zéro (FIG5). Ici, on a choisi la détermination habituelle du log sur  $\mathbb{R}^{+*}$  prolongée dans le demi plan  $\{\Im z < 0\}$ , de sorte que si  $\rho < 0$ ,  $\log \rho \in -i\pi + \mathbb{R}$ .

**Preuve :** Notons la dépendance des contours en  $\rho$ . Quand  $\rho$  tourne une fois autour de 0 dans le sens trigonométrique à partir de  $\rho < 0$  (Cf (FIG3)), les points tournants  $b(\rho)$  et  $c(\rho)$  échangent leur position en tournant dans le sens trigonométrique autour de 0. Le chemin d'intégration  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{\rho}$  et transformé en un chemin  $\tilde{\gamma}_{\rho e^{2i\pi}}$  dessiné ci-dessous.



**FIG6: les contours**

On voit que les chemins  $\tilde{\gamma}_{\rho e^{2i\pi}}$  et  $\tilde{\gamma}_{\rho} + \gamma$  sont homotopes et donc  $\varphi(\rho e^{2i\pi}) = \varphi(\rho) + \frac{i}{2} S(\rho)$ , ce qui mène au résultat.  $\square$

**Lemme 3.4.5** On a  $S(\rho) = -2\pi\rho + O(\rho^2)$ . De plus,  $S(\rho) \in \mathbb{R}^{\pm}$  si  $-\rho \in \mathbb{R}^{\pm}$ .

**Preuve :**  $(2(\rho - W))^{1/2} = (-2W)^{1/2} \left(1 + \frac{\rho}{-W}\right)^{1/2}$ , où d'après la détermination choisie  $(-2W)^{1/2} = -x + O(x^2)$ . D'où

$$S(\rho) = \frac{1}{i} \int_{\gamma} \left[ (-2W)^{1/2} + \frac{\rho}{(-2W)^{1/2}} + O\left(\frac{\rho^2}{-2W}\right) \right] dt$$

On conclut la première partie du lemme grâce au théorème des résidus.

La deuxième assertion est due au choix de la détermination de la racine carrée et du contour  $\gamma$ .  $\square$

**Etude de  $\Phi(b(\rho), \rho)$  :**

Soit  $-x_0 \leq x \leq -\epsilon_0$  et  $|\rho| \leq C_0$ . On reprend le point critique  $y_c(x, \rho)$  défini dans le lemme 3.4.1. Posons  $\xi(x, \rho) = \psi'_x(x, y_c(x, \rho))$ . On a vu dans la démonstration du lemme 3.4.2 que

$$\begin{cases} q(x, \xi(x, \rho)) = \rho \\ y_c(x, \rho) = \pi_y \circ \kappa^{-1}(x, \xi(x, \rho)) \end{cases}.$$

La première égalité permet de prolonger  $x \mapsto \xi(x, \rho)$  pour  $x \in I_\rho$ .

La deuxième permet de prolonger  $y_c(x, \rho)$  sur le même intervalle. Remarquons que cette fois  $y_c(x, \rho)$  n'est plus nécessairement négatif mais complexe.

Si on pose  $\eta(x, \rho) = -\psi'_y(x, y_c(x, \rho))$ , on a bien sûr

$$q_0(y_c(x, \rho), \eta(x, \rho)) = \rho'_0. \quad (4.7)$$

Définissons

$$\Phi_2(x, \rho) = \psi(x, y_c(x, \rho)) + \rho'_0 \log(-y_c(x, \rho)), \quad x \in I_\rho.$$

On a bien sûr  $\Phi_2 = \Phi$  si  $-x_0 \leq x \leq -\epsilon_0$ . De plus (4.7) ci-dessus implique

$$(\Phi_2)'_x = \psi'_x(x, y_c(x, \rho)) = \xi(x, \rho) = -(2(\rho - W))^{1/2} = \Phi'_x \text{ pour } x \in I_\rho,$$

et donc  $\Phi_2 = \Phi$  sur  $I_\rho$ . On va utiliser l'écriture  $\Phi_2(x, \rho)$  pour calculer  $\Phi(b(\rho), \rho)$ . On doit d'abord calculer  $y_c(b(\rho), \rho) \equiv y(\rho)$  :

**Lemme 3.4.6** *On a*

$$y(\rho) = -i\sqrt{\rho'_0},$$

où la racine carrée est positive sur  $\mathbb{R}^+$  et est prolongée analytiquement dans  $\{\Im z \leq 0\}$ , donc si  $\rho'_0 < 0$ ,  $\sqrt{\rho'_0} \in -i\mathbb{R}^+$ .

**Preuve :** Soit  $\eta(\rho) = \eta(b(\rho), \rho)$ ,  $\xi(\rho) = \xi(b(\rho), \rho) = 0$ .

On note toujours  $\kappa_\Gamma$  et  $\kappa_A$  les transformations canoniques associées à la conjugaison  $\Gamma$  et à  $A$  (définie dans le théorème 3.2.1).

On a

$$\kappa_\Gamma(b(\rho), \xi(\rho)) = \kappa_\Gamma(b(\rho), 0) = (b(\rho), 0)$$

donc

$$\kappa_\Gamma \circ \kappa(y(\rho), \eta(\rho)) = \kappa_\Gamma(b(\rho), 0) = (b(\rho), 0) = \kappa(y(\rho), \eta(\rho)).$$

Avec  $\kappa \circ \kappa_A = \kappa_\Gamma \circ \kappa$ , on obtient  $\kappa \circ \kappa_A(y(\rho), \eta(\rho)) = \kappa(y(\rho), \eta(\rho))$ , soit en composant par  $\kappa^{-1}$  :

$$\kappa_A(y(\rho), \eta(\rho)) = (y(\rho), \eta(\rho)).$$

Comme  $\kappa_A(y, \eta) = (-\eta, -y)$ , on a  $\eta(\rho) = -y(\rho)$ . Ainsi  $q_0(y(\rho), \eta(\rho)) = \rho'_0$ , donné par (4.7), implique

$$y(\rho)^2 = -\rho'_0.$$

Pour trouver l'argument de  $y(\rho)$ , on remarque que

$$\kappa(x, \xi) = \left( \frac{x - \xi}{\sqrt{2}}, \frac{x + \xi}{\sqrt{2}} \right) + O(x^2, \xi^2)$$

et donc

$$(b(\rho), 0) = \kappa(y(\rho), \eta(\rho)) = \kappa(y(\rho), -y(\rho)) = (\sqrt{2}y(\rho), 0) + O(y(\rho)^2).$$

Si  $\rho$  est négatif on sait que  $b(\rho)$  l'est aussi donc dans ce cas  $y(\rho) = -\sqrt{-\rho'_0} < 0$ .

Si  $\rho > 0$ ,  $b(\rho) \in i\mathbb{R}^-$  et  $y(\rho) = -i\sqrt{\rho'_0}$ . Cela donne le lemme.  $\square$

On peut maintenant calculer  $\Phi(b(\rho), \rho) = \Phi_2(b(\rho), \rho)$ .

**Proposition 3.4.7** *On a*

$$\Phi(b(\rho), \rho) = \frac{\rho'_0}{2} [\log \rho'_0 - 1 + i\pi],$$

où la détermination du log est choisie réelle sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et est prolongée analytiquement dans  $\{-\pi \leq \text{Arg}z \leq 0\}$ .

**Preuve :** On calcule explicitement  $\frac{\partial}{\partial \rho'_0} [\Phi_2(b(\rho), \rho)]$  :

$$\text{d'un côté } \frac{\partial \Psi}{\partial x}(b(\rho), y(\rho), \rho) = \psi'_x(b(\rho), y(\rho)) = \xi(\rho) = 0,$$

$$\text{et de l'autre } \frac{\partial \Psi}{\partial y}(b(\rho), y(\rho), \rho) = \psi'_y(b(\rho), y(\rho)) + \rho'_0/y(\rho) = -\eta(\rho) + \rho'_0/y(\rho) = 0.$$

Par définition de  $\Phi_2(x, \rho) = \Psi(x, y_c(x, \rho), \rho)$ , cela donne

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho'_0}(b(\rho), \rho) = \log(-y(\rho)).$$

Comme  $\Phi_2(b(0), 0) = \Phi_2(0, 0) = \psi(0, 0) = 0$ , on a

$$\Phi_2(b(\rho), \rho) = \int_0^{\rho'_0} \log(-y(\rho)) d\rho.$$

L'expression de  $y(\rho)$  donnée dans le lemme précédent permet de conclure.  $\square$

On a besoin d'un dernier lemme pour exprimer  $C(\rho)$  :

**Lemme 3.4.8**  $\rho'_0 = \frac{-1}{2\pi} S(\rho)$ , où  $S(\rho)$  est défini dans la remarque 3.4.4.

**Preuve :** Considérons l'intégrale d'action

$$I = \int_{\mathcal{O}} \eta dy$$

où  $\mathcal{O} = \{(y(t), \eta(t)), y(t) = r_0 e^{it}, \eta(t) = \frac{\rho'_0}{y(t)}, 0 \leq t \leq 2\pi\} \subset q_0^{-1}(\rho'_0)$ .

On calcule facilement  $I = 2i\pi\rho'_0$ .

Faisons le changement de variable  $(y, \eta) \longrightarrow (x, \xi) = \kappa(y, \eta)$ . Comme  $\kappa$  est proche de la rotation d'angle  $\pi/4$ , on a

$$\{(x(t), \xi(t)) = \kappa(y(t), \eta(t))\} = \kappa(\mathcal{O}) \sim \{(x'(t), \xi'(t)), x'(t) = r_0 e^{it}/\sqrt{2} = \xi'(t)\}.$$

Avec  $f_0 \circ q \circ \kappa = q_0$ , on a de plus  $q(x(t), \xi(t)) = \rho$  et en particulier

$$\xi(t) = \pm(2(\rho - W(x(t))))^{1/2}.$$

On détermine le signe de  $\xi(t)$  en  $t = 0$  :  $\xi(0) \sim \frac{r_0}{\sqrt{2}} > 0$  et donc  $\xi(t) = -(2(\rho - W(x(t))))^{1/2}$  avec la détermination de la racine carrée donnée dans (FIG5).

Ainsi

$$I = \int_0^{2\pi} \xi(t) \frac{dx(t)}{dt} dt = -iS(\rho).$$

Ces deux expressions de  $I$  mènent au lemme.  $\square$

On peut maintenant écrire  $C(\rho) = \varphi(\rho) + \Phi(b(\rho), \rho)$  ou encore

$$C(\rho) = \varphi(\rho) - \frac{S(\rho)}{4\pi} [\log(-S(\rho)/2\pi) - 1 + i\pi]. \quad (4.8)$$

Avec cette expression de  $C(\rho)$ , on a montré :

**Proposition 3.4.9** *La phase  $\Phi(x, \rho)$  intervenant dans le développement de  $v_+$  s'exprime en fonction de  $\varphi(x)$  définie en (4.4) et de  $C(\rho)$  :*

$$\Phi(x, \rho) = -\varphi(x) + C(\rho).$$

On termine cette partie par un résultat sur la constante  $C(\rho)$  :

**Lemme 3.4.10**  $C(\rho) \in \mathbf{R}$  si  $\rho \in \mathbf{R}$ .

**Preuve :** Si  $\rho < 0$ , on a vu que  $\varphi(\rho) > 0$ ,  $S(\rho) > 0$  donc le choix de la détermination du log entraîne  $C(\rho) \in \mathbf{R}$ .

Si  $\rho > 0$ , la remarque 3.4.4 donne  $\varphi(\rho)$  en fonction de  $S(\rho)$  :

$$\varphi(\rho) = \frac{S(\rho)}{4\pi} \log \rho + \frac{1}{2}R(\rho).$$

On montre facilement qu'il existe une fonction réelle analytique  $R_0(\rho)$  telle que  $R(\rho) = \frac{i}{2}S(\rho) + R_0(\rho)$  (d'abord pour  $\rho < 0$ , donc pour  $\rho > 0$ ).

Ainsi

$$\varphi(\rho) = \frac{S(\rho)}{4\pi} \log \rho + \frac{i}{4}S(\rho) + \frac{1}{2}R_0(\rho)$$

et

$$C(\rho) = \frac{S(\rho)}{4\pi} \log \rho + \frac{1}{2}R_0(\rho) - \frac{S(\rho)}{4\pi} \left[ \log \left( \frac{-S(\rho)}{2\pi} \right) - 1 \right] \in \mathbb{R}.$$

□

### 3.4.2 Développement asymptotique de $v_+$

On écrit maintenant  $v_+$  avec la phase  $\varphi(x)$  : si  $-x_0 \leq x \leq -\epsilon_0$  et  $|\rho| \leq C_0$ ,

$$v_+ = A(h, \rho) e^{i\varphi(x)/h} b_+(x, \rho, h) + B(h, \rho) e^{-i\varphi(x)/h} b_-(x, \rho, h); \quad b_{\pm}(x, \rho, h) = \sum_{n \geq 0} h^n b_{\pm, n}(x, \rho). \quad (4.9)$$

Les fonctions  $A(h, \rho)$ ,  $B(h, \rho)$ ,  $b_{\pm, n}(x, \rho)$  sont connues grâce aux développements (4.2), (4.3) et à la proposition 3.4.9, pour  $-x_0 \leq x \leq -\epsilon_0$  et  $|\rho| \leq C_0$ . On obtient

$$\begin{cases} A(h, \rho) = 2^{1/4} e^{i\pi/8} e^{-iC(\rho)/h} \\ B(h, \rho) = 2^{1/4} e^{-3i\pi/8} e^{iC(\rho)/h} e^{-i\rho'(\log h)/h} e^{-\pi\rho'/2h} \frac{\Gamma(1/2 - i\rho'/h)}{\sqrt{2\pi}} \end{cases} \quad (4.10)$$

et

$$\begin{cases} b_{+,0}(x, \rho) = \frac{\Gamma[\sigma_0(x, y_c(x, \rho))]}{|y_c(x, \rho)|^{1/2} |\Psi''_{yy}(x, y_c(x, \rho))|^{1/2}} \\ b_{-,0}(x, \rho) = \frac{\sigma_0(x, y_c(x, \rho))}{|y_c(x, \rho)|^{1/2} |\Psi''_{yy}(x, y_c(x, \rho))|^{1/2}} \end{cases}. \quad (4.11)$$

$v_+$  est solution de  $Qu = \rho u$  et  $\pm\varphi$  vérifient l'équation éiconale donc nécessairement les fonctions  $b_{\pm, n}$  satisfont les équations de transport usuelles. Cela permet de les prolonger sur  $[a(\rho) + \epsilon_0, -\epsilon_0]$  pour  $\epsilon_0 > 0$  fixé. Le développement de  $v_+$  (4.9) peut donc être étendu sur  $[a(\rho) + \epsilon_0, -\epsilon_0]$ . Sur cet intervalle, on écrit

$$v_+ = \alpha u_a^- + \beta u_a^+,$$

où les fonctions  $u_a^{\pm}$  sont définies dans la première partie. On les réécrit maintenant avec  $\bar{h}$  et  $W$  plutôt qu'avec  $h$  et  $V$  : (on note toujours  $h = \bar{h}$ )

$$u_a^{\pm}(x, h, \rho) = e^{\pm \frac{i}{h}\varphi(x)} \sqrt{\frac{\bar{h}}{2}} [\pm i |W - \rho|^{-1/4} (2)^{-1/4} + O(h)].$$

Afin d'expliciter  $\alpha$  et  $\beta$ , on a besoin du lemme :

**Lemme 3.4.11**  $\sigma_0(x, y_c(x, \rho)) \in \mathbb{R}$  si  $\rho \in \mathbb{R}$ .



**Preuve :** On écrit l'équation de transport satisfaite par  $b_{\pm,0}$  :

$$\varphi'(x)b'_0 + \frac{1}{2}\varphi''(x)b_0 = 0, \quad -x_0 \leq x \leq -\epsilon_0.$$

Cela montre que  $\text{Arg}b_{\pm,0}$  est indépendant de  $x$ . Si on remplace  $b_{\pm,0}$  par leur expression en fonction de  $\sigma_0$  (4.11) on obtient le même résultat pour  $\text{Arg}\sigma_0(x, y_c(x, \rho))$ .

En particulier, avec les notations précédentes :

$$\text{si } \rho < 0, \quad \text{Arg}\sigma_0(x, y_c(x, \rho)) = \text{Arg}\sigma_0(b(\rho), y(\rho))$$

De plus, d'après la démonstration du lemme 3.4.6,

$$y(\rho) = -\eta(\rho) = \psi'_y(b(\rho), y(\rho)).$$

Avec l'égalité (2.4) démontrée au début de ce chapitre, cela entraîne

$$\sigma_0(b(\rho), y(\rho)) \in \mathbb{R},$$

et donc  $\sigma_0(x, y_c(x, \rho)) \in \mathbb{R}$ , si  $\rho < 0$ . Par analyticité, cette propriété s'étend à  $\rho \geq 0$ .  $\square$

On calcule à présent, avec ce lemme et les formules de  $A(\rho, h)$ ,  $B(\rho, h)$  (4.10) :

$$\begin{aligned} \alpha &= D e^{-i\frac{\rho'}{h}\log h} e^{-\rho'\pi/2h} (2\pi)^{-1/2} \Gamma(1/2 - i\rho'/h) e^{iC(\rho)/h}, \\ \beta &= D e^{-iC(\rho)/h} (-i), \end{aligned}$$

où

$$D = e^{i\pi/8} \frac{\sigma_0(x, y_c(x, \rho))}{|y_c(x, \rho)|^{1/2} |\Psi''_{yy}(x, y_c(x, \rho), \rho)|^{1/2}} \frac{|2(W - \rho)|^{1/4}}{\sqrt{h/2}}$$

est nécessairement indépendant de  $x$ .

On peut enfin écrire une équation de quantification grâce à la proposition 3.1.2 de la première partie : il suffit d'écrire  $\frac{\alpha}{\beta} = -i$ . C'est ce qu'on fait dans la partie suivante.

### 3.5 Equation des résonances

La condition

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{e^{-i\pi/4}}{e^{i\pi/4}} = -i,$$

se traduit par

$$e^{-i\frac{\rho'}{h}\log h} e^{-\rho'\pi/2h} (2\pi)^{-1/2} \Gamma(1/2 - i\rho'/h) e^{2iC(\rho)/h} = -1,$$

ou encore :

$$\frac{S(\rho)}{2\pi} \log h - i \frac{S(\rho)}{4} + 2C(\rho) + (h/i) \log \left[ \frac{\Gamma(1/2 + iS(\rho)/2\pi h)}{\sqrt{2\pi}} \right] = [2k + 1]\pi h.$$

Avec l'expression de  $C(\rho)$  (4.8), cela donne la condition de quantification :

$$2\varphi(\rho) - \frac{S(\rho)}{2\pi} \log\left(\frac{iS(\rho)}{2\pi h e}\right) + \frac{h}{i} \log\left(\frac{\Gamma(1/2 + iS(\rho)/2\pi h)}{\sqrt{2\pi}}\right) = (2k+1)\pi h.$$

On prolonge cette expression pour  $\rho \in \mathcal{D}$ ,  $-\pi \leq \text{Arg}\rho \leq 0$  par analyticité. On a démontré :

**Théorème 3.5.1** *On considère un opérateur de Schrödinger  $P$  dont le potentiel vérifie (1.1), (1.2), (1.4) et (1.5). Pour tout  $r_0 > 0$ , les résonances de  $P$  dans  $D(r_0 h) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < r_0 h\}$  sont données par  $E = |V''(0)|\rho$  et l'équation de quantification :*

$$2\varphi(\rho) - \frac{S(\rho)}{2\pi} \log\left(\frac{iS(\rho)}{2\pi h e}\right) + \frac{h}{i} \log\left(\frac{\Gamma(1/2 + iS(\rho)/2\pi h)}{\sqrt{2\pi}}\right) = (2k+1)\pi h. \quad (5.1)$$

Le développement limité de  $S(\rho)$  du lemme 3.4.5 et la remarque 3.4.4 qui donne  $\varphi(\rho)$  en fonction de  $S(\rho)$  mènent à

$$2\varphi(0) - \rho \log h + K\rho + \frac{h}{i} \log\left(\frac{\Gamma(1/2 - i\rho/h + O(\rho^2/h))}{\sqrt{2\pi}}\right) = (2k+1)\pi h + \epsilon(\rho, h) \quad (5.2)$$

où

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \int_a^0 (-2W)^{1/2} dt \in \mathbb{R}, \\ K &= R'_0(0) + \log(-i/e), \\ \epsilon(\rho, h) &= O(\rho^2) \log h = O(h^2) \log h \text{ car } \rho \in D(rh). \end{aligned}$$

Comme dans [3], on précise le lieu des résonances déterminées par l'équation de quantification (5.2) :

**Lemme 3.5.2** *Si  $\rho$  vérifie (5.1), alors il existe  $C > 0$  et  $h_0 > 0$  tel que*

$$\forall h < h_0, \left| \rho \frac{\log(h)}{h} \right| > C.$$

**Preuve :** Supposons que le lemme ne soit pas vérifié. Il existe alors une suite  $(h_j)_{j \geq 1}$  tendant vers 0 telle que  $|\rho(h_j)| \leq (h_j/(j \log h_j))$ .

Alors

$$\log\left(\frac{\Gamma(1/2 - i\rho(h_j)/h_j)(1 + O(\rho(h_j)))}{\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{1}{2} \log 2 + O(1/j \log h_j).$$

Dans (5.2) cela donne

$$2\varphi(0) = (2k+1)\pi h_j - \frac{h_j}{2i} \log 2 + O(h_j/j)$$

et la partie imaginaire de cette expression implique  $\log 2 = 0$  : on a une contradiction.  $\square$

**Lemme 3.5.3**  $\Im \rho = O(h/\log h)$ .

**Preuve :** En prenant la partie imaginaire de (5.2), on obtient :

$$-\Im \rho \log h = h \Re \log \left( \frac{\Gamma(1/2 - i\rho(1 + O(\rho))/h)}{\sqrt{2\pi}} \right) - \Im(K\rho) + \Im \epsilon(\rho, h)$$

où  $\epsilon(\rho, h) = O(h^2 \log h)$ .

Avec  $\left| \frac{\rho}{h} \right| \leq r$ , et en multipliant l'équation précédente par  $1/h$  on trouve que  $-\Im \rho \frac{\log h}{h}$  est borné d'où le résultat.  $\square$

**Proposition 3.5.4** *i) Il existe un intervalle  $J_k$  de  $]0, h_0]$  tel que si  $h \in J_k$ , il y a une unique résonance dans  $D(0, r_0 h)$  donnée par*

$$\rho_k(h) = \frac{2\varphi(0) - (2k+1)\pi h}{\log h} + O\left(\frac{h}{\log h}\right)$$

où  $O(h/\log h)$  est uniforme en  $k$ .

*ii) Si de plus  $\Re \rho = O(h/\log h)$ , cette résonance est donnée pour  $h \in J_k$  par :*

$$\rho_k = \frac{2\varphi(0) - (2k+1)\pi h + i(h/2)\log 2}{\log h} + O\left(\frac{h}{(\log h)^2}\right).$$

En particulier

$$\Im \rho_k = -\frac{h \log 2}{|2 \log h|} + O\left(\frac{h}{(\log h)^2}\right).$$

**Preuve :** On commence par montrer *ii)*. Si  $\Re \rho = O(h/\log h)$ , alors  $\rho = O(h/\log h)$  grâce au lemme précédent. De plus

$$\log \left( \frac{\Gamma(1/2 - i\rho(1 + O(\rho))/h)}{\sqrt{2\pi}} \right) = -\frac{\log 2}{2} + O\left(\frac{1}{\log h}\right).$$

L'équation (5.2) devient

$$2\varphi(0) - \rho \log h + i \frac{h}{2} \log 2 - (2k+1)\pi h = \epsilon_1(\rho, h),$$

où  $\epsilon_1(\rho, h) = O(h/\log h)$  est une fonction analytique en  $\rho$  près de zéro.

Il existe  $J_k$  un intervalle de  $]0, h_0]$  tel que si  $h \in J_k$ , le membre de droite de l'équation a une unique racine dans  $D(rh)$  :

$$\tilde{\rho}_k = \frac{2\varphi(0) - (2k+1)\pi h + i(h/2)\log 2}{\log h}.$$

Quitte à diminuer  $h_0$ , on obtient *ii)* avec le théorème de Rouché.  $\square$

Pour montrer le premier point, on répète la démonstration précédente en négligeant les termes en  $h/\log h$ .  $\square$

### 3.6 Zone de résonance

On détermine maintenant une "zone de résonance", comme dans [3], au voisinage de laquelle se trouvent les résonances.

**Définition 3.6.1** Soit  $x$  dans l'ensemble d'analyticité  $\mathcal{S}$  du potentiel. On définit les lignes Stokes passant par  $x$  comme étant l'ensemble

$$\left[ y \in \mathcal{S}, \Im \int_x^y (2(\rho - W))^{1/2} dt = 0 \right].$$

On reprend de [3] la proposition

**Proposition 3.6.2** Soit  $\rho \in \mathbb{C}$  indépendant de  $h$ . Soit  $C_\theta$  les chemins de  $\mathcal{S}$  qui coïncident avec  $\operatorname{Re}^{i\theta}$  hors d'un compact. S'il existe  $\gamma \in C_\theta$  toujours transverse aux lignes de Stokes, avec  $\theta \in ] - (1/2)\operatorname{Arg}(V_0 + \rho), \theta_0[$ , alors  $\rho$  n'est pas une résonance pour  $h < h_0$  petit.

**Preuve :** Soit  $\gamma$  un tel chemin. On utilise simplement le fait que l'opérateur  $P - \rho$  est elliptique le long de  $\gamma$ .  $\square$

Soit  $A = \{ \rho \in \mathbb{C}, \exists \gamma \in C_\theta \text{ transverse aux lignes de Stokes} \}$  et  $B$  le complémentaire de  $A$ . On voit que  $B = \{ \rho \in \mathbb{C}, \text{ il existe une ligne de Stokes qui relie } a(\rho) \text{ à } b(\rho) \text{ ou bien } a(\rho) \text{ à } c(\rho) \}$ . Avec la définition de  $\varphi(\rho)$  et la figure (FIG6), cela conduit au lemme

**Lemme 3.6.3**  $B = \{ \rho, -\pi \leq \operatorname{Arg} \rho \leq 0, \Im \varphi(\rho) = 0 \} \cup \{ \rho, -\pi \leq \operatorname{Arg} \rho \leq 0, \Im \varphi(\rho e^{-2i\pi}) = 0 \}$ .

On cherche à présent à décrire  $B$  quand  $\rho$  tend vers zéro. On a

$$\varphi(\rho) = \varphi(0) - \frac{\rho}{2} \log \rho + \frac{R'(0)}{2} \rho + O(\rho^2 \log \rho),$$

où on calcule  $R'(0) = -i\pi + R'_0(0)$ ,  $R'_0(0) \in \mathbb{R}$ . Ainsi  $\Im \varphi(\rho) = 0$  donne

$$\Im[\rho(\log \rho + i\pi - K)] = O(|\rho^2 \log \rho|), \quad K = -R'_0(0) \in \mathbb{R}. \quad (6.1)$$

( $\varphi(0) \in \mathbb{R}$ )

Ecrivons  $\rho = e^{\alpha+i\beta}$ ,  $\beta \in [-\pi, 0] \cup [-3\pi, -2\pi]$ ,  $\alpha \rightarrow -\infty$ . L'équation (6.1) ci-dessus devient

$$e^\alpha [\beta \cos \beta + \alpha \sin \beta + \pi \cos \beta + K \sin \beta] = O(e^{2\alpha} |\alpha|),$$

soit

$$(\beta + \pi) \cos \beta + (\alpha + K) \sin \beta = O(e^\alpha |\alpha|) \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow -\infty.$$

Nécessairement,  $\sin \beta$  tend vers zéro quand  $\alpha$  tend vers  $-\infty$ . Pour  $-\pi \leq \beta \leq 0$ , la seule solution est  $\beta = -\pi$  car d'une part si  $\beta$  tend vers  $-\pi$  sans être identiquement  $-\pi$ , on obtient  $\alpha = O(1)$  et si d'autre part  $\beta$  tend vers zéro, on trouve

$$\alpha \sim -\frac{\pi}{\beta} > 0, \quad \beta \leq 0$$

donc  $\alpha \rightarrow +\infty$ . Dans les deux cas  $\alpha$  ne tend pas vers  $-\infty$  donc ces solutions ne sont pas acceptables.

Les mêmes arguments donnent une unique solution lorsque  $-3\pi \leq \beta \leq -2\pi$  :

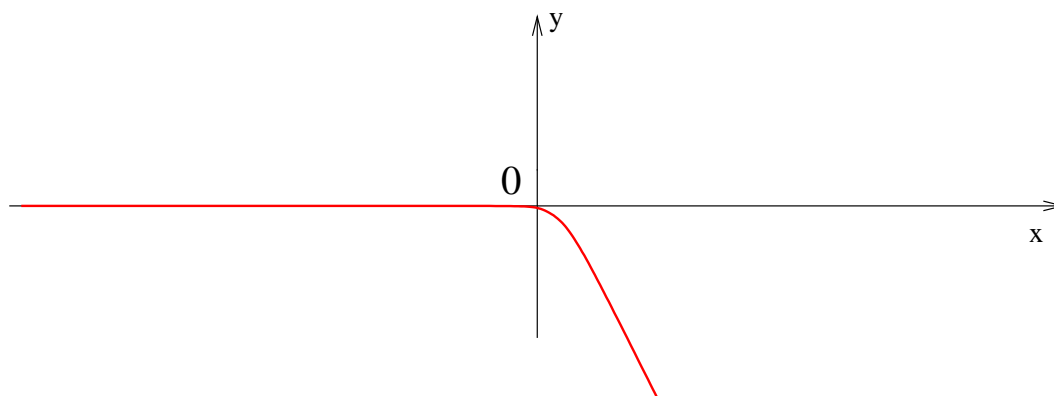
$$\alpha \sim \frac{\pi}{\beta + 2\pi} \rightarrow -\infty, \beta \rightarrow -2\pi. \quad (6.2)$$

Si on écrit maintenant  $\rho = e^{\alpha+iy} = x + iy$ , l'ensemble donné par (6.2) s'écrit

$$y = \frac{\pi x}{\log|x|} + O\left(\frac{x}{(\log|x|)^2}\right).$$

Près de zéro,  $B$  est donc de la forme :

$$B = [x + iy, y = 0, x \leq 0] \cup \left[ x + iy, y = \frac{\pi x}{\log|x|} + O\left(\frac{x}{(\log|x|)^2}\right), x \geq 0 \right].$$



**FIG7: graphe de B**

# B-La dimension quelconque

## 3.1 Hypothèses et Notations

### 3.1.1 Géométrie globale

On considère l'opérateur de Schrödinger dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$P = -\hbar^2 \Delta + V$$

où le potentiel  $V$  est analytique sur  $\mathbb{R}^n$  et a un maximum strict en zéro :

$$V(0) = \nabla V(0) = 0, \quad V''(0) < 0.$$

On note  $p(y, \eta) = \eta^2 + V(y)$  le symbole principal de cet opérateur. Le champ hamiltonien  $H_p = 2\eta \frac{\partial}{\partial y} - \nabla V(y) \frac{\partial}{\partial \eta}$  s'annule en  $(0, 0)$  et le théorème des variétés stables [1] nous donne l'existence de deux variétés lagrangiennes entrante et sortante  $\Gamma_{\pm}$  dans  $p^{-1}(0)$  données par  $\eta = \nabla \varphi_{\pm}(y)$ , lorsque  $y$  est dans un voisinage de zéro noté  $\Omega$ .

0 est un maximum strict du potentiel, c'est donc un zéro isolé.

On note

$$N = \{y \in \mathbb{R}^n, V(y) = 0\} \setminus \{0\}$$

le reste des points de  $\mathbb{R}^n$  pour lesquels le potentiel s'annule.

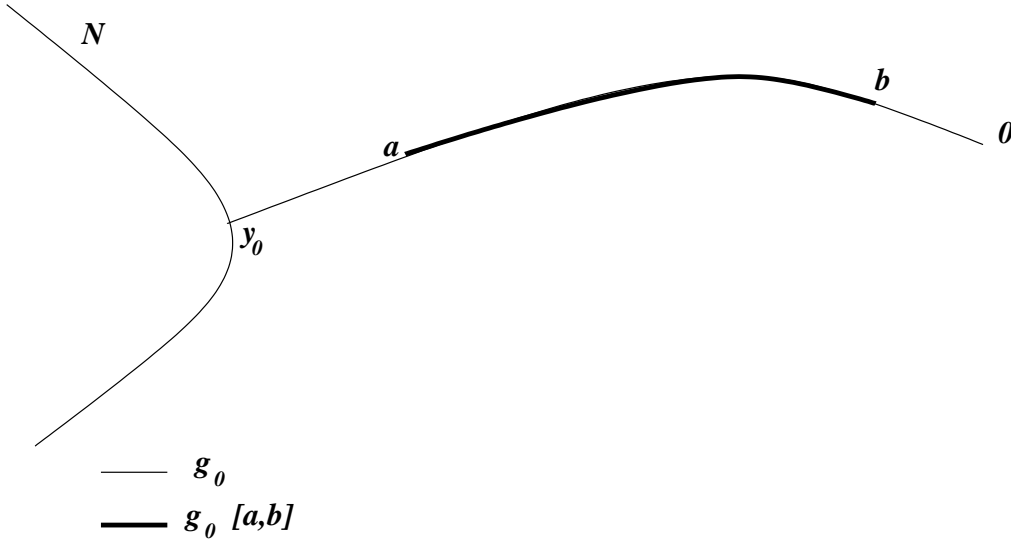
**Définition 3.1.1** Une courbe  $\gamma$  joignant  $y_1$  à  $y_2$  est une géodésique minimale pour une métrique  $d$  si et seulement si sa longueur pour  $d$  est minimale parmi les courbes joignant  $y_1$  à  $y_2$ .

On fait une première hypothèse sur  $V$  :

**(H1)** Il y a une unique géodésique minimale pour la métrique  $d_0 = (-V)_+ dy^2$  joignant  $\{0\}$  à  $N$ . On la note  $g_0$ , et on note  $y_0 = g_0 \cap N$ . On suppose de plus que  $\nabla V(y_0) \neq 0$ .

**Proposition 3.1.2**  $t \mapsto \pi_y e^{tH_p}(y_0, 0)$ ,  $t \leq 0$  est une paramétrisation de  $g_0$ .

**Preuve :** On commence par étudier  $g_0$  au voisinage de 0. Si  $a$  et  $b$  sont deux points sur  $g_0$ , on note  $g_0[a, b]$  la courbe  $g_0$  restreinte au segment  $[a, b]$  :



**Lemme 3.1.3** On peut choisir  $\beta_0 \in g_0 \cap \Omega$ ,  $\beta_0 \neq 0$  tel que  $g_0[\beta_0, 0]$  soit paramétrée par  $\pi_y[e^{tH_p}(\beta_0, \nabla\varphi_+(\beta_0))]$ ,  $t \leq 0$ .

**Preuve :** Il suffit d'utiliser le résultat suivant de [7] (proposition 3.1) : on peut fixer  $\varphi_+$  tel que  $\varphi_+(0) = 0$  et alors dans  $\Omega$   $\varphi_+(y) = d_0(y, 0)$ . Pour  $\beta_0 \in g_0 \cap \Omega$ ,  $\beta_0 \neq 0$ , la longueur de la courbe  $\pi_y[e^{tH_p}(\beta_0, \nabla\varphi_+(\beta_0))]$ ,  $t \leq 0$  qui va de  $\beta_0$  à 0 est  $\varphi_+(\beta_0) = d_0(0, \beta_0)$ . Cette courbe est donc minimale et par unicité de  $g_0$ , c'est  $g_0[\beta_0, 0]$ . On a le lemme.  $\square$

Reprenons la démonstration de la proposition.

On fixe maintenant  $\beta_0 \in g_0 \cap \Omega$ ,  $\beta_0 \neq 0$  et on va montrer qu'on peut paramétrer la géodésique entre  $\beta_0$  et  $y_0$  par  $\pi_y[e^{tH_p}(\beta_0, \nabla\varphi_+(\beta_0))]$ ,  $0 \leq t \leq t_0$  pour  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Cela donnera la proposition.

Soit  $\langle, \rangle$  le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$ . On considère sur  $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$  :

$$L(v) = \langle (-V(y))_+^{1/2} v, v \rangle^{1/2}, \quad v \in T_y \mathbb{R}^n.$$

Soit  $\mathcal{O} = \{y \in \mathbb{R}^n, d_0(y, 0) < |g_0|_0\} \setminus \{0\}$ , où  $|\gamma|_0$  désigne la longueur du chemin  $\gamma$  pour la métrique  $d_0$ . Dans  $\mathcal{O}$ ,  $V(y) < 0$  donc  $L$  définit la métrique riemannienne donnée par  $d_0$  [10]. Les composantes de cette métrique sont

$$g_{i,j}(y) = (-V(y))^{1/2} \delta_{i,j}, \quad y \in \mathcal{O}.$$

Il existe alors une unique connexion riemannienne notée  $\tilde{\nabla}$  et on montre que les géodésiques pour cette métrique sont les courbes  $\sigma(t)$  vérifiant  $\tilde{\nabla} \sigma'(t) = 0$  soit :

$$\sigma''(t) = \frac{1}{2V(\sigma(t))} \left[ 2(-\nabla V(\sigma(t))\sigma'(t))\sigma'(t) + \sigma'(t)^2 \nabla V(\sigma(t)) \right].$$

Ainsi, si  $\zeta(t) = -\frac{V(\sigma(t))}{2}\sigma'(t)$ , on a après reparamétrisation  $(\sigma(t), \zeta(t)) = e^{tH_p}(\sigma(0), \zeta(0)) \subset p^{-1}(0)$ . Remarquons que  $|\zeta(0)|$  est défini par  $p(\sigma(0), \zeta(0)) = 0$  et  $\zeta(0) = \frac{|\zeta(0)|}{|\sigma'(0)|}\sigma'(0)$ .

Soit  $(y_j)_j \subset g_0$  une suite tendant vers  $y_0$  telle que  $V(y_j) < 0$ . Alors

$$d_0(0, y_j) = d_0(0, y_0) - d_0(y_0, y_j) < d_0(0, y_0) = |g_0|_0$$

donc  $y_j \in \mathcal{O}$ . On a également  $\beta_0 \in \mathcal{O}$  donc la géodésique minimale joignant  $y_j$  à  $\beta_0$  se paramètre par  $\pi_y e^{tH_p}(\beta_0, \nabla\varphi_+(\beta_0))$ ,  $0 \leq t \leq t_j$ . L'unicité de  $g_0$  montre qu'il s'agit de  $g_0[\beta_0, y_j]$ .

Si  $(t_j)_j$  est bornée, il existe une sous suite convergente. Soit  $t_0$  sa limite. On a alors  $(y_0, \eta_0) = e^{t_0 H_p}(\beta_0, \nabla\varphi_+(\beta_0))$ . Comme  $p(y_0, \eta_0) = 0$ ,  $\eta_0 = 0$  et on a la proposition.

Si  $(t_j)_j$  n'est pas bornée, il existe une sous suite encore notée  $(t_j)_j$  qui tend vers  $+\infty$ . Pour  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ ,

$$\pi_y e^{tH_p}(\beta_0, \nabla\varphi_+(\beta_0)) \in g_0[y_j, y_{j+1}]$$

donc nécessairement  $e^{tH_p}(\beta_0, \nabla\varphi_+(\beta_0))$  tend vers  $(y_0, 0)$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Ainsi  $\eta(t) = \pi_\eta e^{tH_p}(\beta_0, \nabla\varphi_+(\beta_0))$  tend vers 0 et  $\eta'(t) = -\nabla V(y(t))$  tend vers  $-\nabla V(y_0) \neq 0$ . Ce n'est pas possible, on a donc démontré la proposition.  $\square$

On note  $(y(t), \eta(t)) = \gamma_0(t) = e^{tH_p}(y_0, 0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . On a un premier résultat sur  $\gamma_0$  :

**Lemme 3.1.4** *On a  $y(-t) = y(t)$ ,  $\eta(-t) = -\eta(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Preuve :** Soit  $z(t) = y(-t)$ ,  $\zeta(t) = -\eta(-t)$ . Ces fonctions vérifient

$$\begin{cases} z'(t) = -y'(-t) = -2\eta(-t) = 2\zeta(t) \\ \zeta'(t) = \eta'(-t) = -\nabla V(y(-t)) = -\nabla V(z(t)) \end{cases},$$

et

$$\begin{cases} z(0) = y_0 \\ \zeta(0) = 0 \end{cases}.$$

On obtient le lemme par unicité de la solution.  $\square$

On suppose

$$\text{(H2)} \quad \Lambda_{0,+} \cap \Lambda_{0,-} = \{(0, 0)\} \cup \gamma_0.$$

On écrira désormais  $\bar{\gamma}_0 = \Lambda_{0,-} \cap \Lambda_{0,+}$ . Par hypothèse sur le potentiel, il existe un voisinage de  $\gamma_0$  dans  $p^{-1}(\{|\rho| < \epsilon_0\})$  noté  $\tilde{W}_0$  où  $dp(y, \eta) \neq 0$  si  $(y, \eta) \neq (0, 0)$ .

On termine cette section en prolongeant les fonctions  $\varphi_\pm$  dans un voisinage de  $g_0 \setminus \{y_0\}$ .



**Proposition 3.1.5** *Il existe un voisinage  $W_0$  de  $g_0 \setminus \{y_0\}$  et un voisinage  $\tilde{W}_{0,\pm}$  de  $\{\gamma_0(t), \pm t < 0\}$  tels que  $\pi_y(\tilde{W}_{0,\pm}) = W_0$  et*

*i) les fonctions  $\varphi_{\pm}$  se prolongent dans  $W_0$  par  $\varphi_{\pm}(y) = \pm d_0(0, y)$ ,*

*ii) les lagrangiennes  $\Lambda_{0,\pm}$  sont encore données par  $\eta = \nabla\varphi_{\pm}(y)$  dans  $\tilde{W}_{0,\pm}$ .*

**Preuve :** Montrons *i)*. Dans  $\Omega$ , on a déjà  $\varphi_{\pm} = \pm d_0(0, y)$  ([7], proposition 3.1).

Comme les fonctions  $y \mapsto \pm d_0(0, y)$  sont analytiques dans un voisinage  $W_0$  de  $g_0 \setminus \{y_0, 0\}$ , elles donnent bien un prolongement de  $\varphi_{\pm}$ .

Montrons *ii)*. Les variétés lagrangiennes  $\Lambda_{0,+}$  et  $\Lambda_{d_0} = \{(y, \eta), \eta = \nabla d_0(0, y)\}$  sont confondues dans un voisinage de  $\{\gamma_0(t), t < 0\} \cap \Omega$ . Comme la fonction  $y \mapsto d_0(0, y)$  vérifie dans  $W_0$  l'équation éiconale

$$p(y, \nabla d_0(0, y)) = 0,$$

elle donne bien un prolongement de  $\Lambda_{0,+}$  sur un voisinage de  $\{\gamma_0(t), t < 0\}$ . Il en va de même pour  $\Lambda_{0,-}$ .  $\square$

### 3.1.2 Géométrie près de 0

On étudie ici les fonctions  $\varphi_{\pm}$  qui définissent les variétés lagrangiennes entrante et sortante dans respectivement  $\tilde{W}_{0,\pm}$ .

**Lemme 3.1.6** *On peut choisir les coordonnées  $y$  et  $\varphi_{\pm}$  tels que*

$$\varphi_{\pm}(y) = \pm \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{4} y_j^2 + O(y^3),$$

où  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  sont les valeurs propres positives de la matrice fondamentale de  $H_p$  en  $(0, 0)$ . Ainsi

$$\varphi_{\pm}''(0) = \pm \begin{pmatrix} \lambda_1/2 & & & \\ & \lambda_2/2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n/2 \end{pmatrix}.$$

**Preuve :** Quitte à faire un changement de variables orthonormé en  $y$  (et donc symplectique si on fait le changement orthonormé correspondant en  $\eta$ , ce qui ne change pas le symbole  $p(y, \eta)$  en  $\eta$ ), on peut supposer que

$$V''(0) = - \begin{pmatrix} \lambda_1^2/2 & & & \\ & \lambda_2^2/2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n^2/2 \end{pmatrix},$$

où  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ .

Soit alors le changement de variables symplectique

$$\begin{cases} \tilde{y}_j = \sqrt{\frac{\lambda_j}{2}} y_j \\ \tilde{\eta}_j = \sqrt{\frac{2}{\lambda_j}} \eta_j \end{cases}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Le symbole de l'opérateur s'écrit  $p(\tilde{y}, \tilde{\eta}) = \sum_j \frac{\lambda_j}{2} (\tilde{\eta}_j^2 - \tilde{y}_j^2) + O(\tilde{y}^3)$  et donc

$$H_p = \sum_j \lambda_j \left[ \tilde{\eta}_j \frac{\partial}{\partial \tilde{y}_j} + \tilde{y}_j \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}_j} \right] + O(\tilde{y}^2, \tilde{\eta}^2).$$

Si  $F_p$  est la matrice fondamentale de  $H_p$  en  $(0, 0)$ ,

$$F_p = \begin{pmatrix} & & \lambda_1 & & \\ & & & \dots & \\ \lambda_1 & & & & \lambda_n \\ & \dots & & & \\ & & \lambda_n & & \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $F_p$  sont donc  $\pm \lambda_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , et les vecteurs propres associés sont engendrés respectivement par  $\tilde{v}_j^\pm = (e_j, \pm e_j)$ , où  $(e_j)_j$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . On peut donc choisir

$$\varphi_\pm(\tilde{y}) = \pm \tilde{y}^2/2 + O(\tilde{y}^3).$$

Si on revient aux coordonnées  $(y, \eta)$  on trouve bien le lemme.  $\square$

Remarquons que les vecteurs propres de  $F_p$  sont maintenant donnés par

$$v_j^\pm = \left( \sqrt{\frac{2}{\lambda_j}} e_j, \pm \sqrt{\frac{\lambda_j}{2}} e_j \right) \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (1.1)$$

Soit  $\gamma_\pm = \gamma_0|_{\pm t \geq B}$ , où  $B$  est assez grand pour que  $\pi_y(\gamma_\pm) \subset \Omega$ .

On fait une nouvelle hypothèse :

**(H3)** Il existe un voisinage de  $\gamma_+ \tilde{V}_+$  tel que la projection  $\pi_y$  soit un difféomorphisme de  $\tilde{V}_+ \cap \Lambda_{0,+}$  sur son image.

Ainsi, il existe une fonction  $\Phi$  définie sur  $V_+ = \pi_y(\tilde{V}_+)$  telle que  $\tilde{V}_+ \cap \Lambda_{0,+} = \{(y, \eta), \eta = \nabla \Phi(y), y \in V_+\}$ .

De plus  $\Lambda_{0,+} \subset p^{-1}(0)$  donc  $p(y, \nabla \Phi(y)) = 0$ ,  $y \in V_+$ .

**Lemme 3.1.7** Si  $y \in \pi_y(\gamma_+)$ ,  $\nabla \bar{\Phi}(y) = \nabla \varphi_-(y)$ . On peut donc choisir  $\Phi$  telle que sur  $\pi_y(\gamma_+)$ ,  $\Phi = \varphi_-$ .

**Preuve :** Soit  $y \in \pi_y(\gamma_+)$ , et soit  $\eta \in \mathbb{R}^n$  tel que  $(y, \eta) \in \gamma_+$ .

Comme  $\gamma_+ \subset \Gamma_- \cap \Lambda_{0,+}$ , on a à la fois  $\eta = \nabla \bar{\Phi}(y)$  et  $\eta = \nabla \varphi_-(y)$ .  $\square$

A partir de la fonction  $\Phi$  on va construire une phase auxiliaire puis des solutions asymptotiques de  $(P - \rho)u = 0$  au voisinage de 0.

Auparavant, donnons un exemple pour lequel l'hypothèse **(H3)** est vérifiée.

**Exemple 3.1.8** On se place en dimension deux afin de simplifier les notations, mais l'exemple qu'on étudie ici s'étend en dimension quelconque. On considère un potentiel  $V$  vérifiant les hypothèses **(H1)** et **(H2)**. On suppose qu'il existe un voisinage de 0 encore noté  $\Omega$  sur lequel la géodésique  $g_0$  se paramétrise par :

$$y_2 = f(y_1), \quad y_1 \geq 0,$$

pour une fonction  $f$  régulière dans un voisinage de 0 et telle que  $f(0) = f'(0) = 0$ .

(On verra dans la suite qu'une telle paramétrisation existe pour une fonction  $f$  régulière hors de 0 et vérifiant  $f(y_1) = O(y_1^\mu)$ ,  $\mu > 1$ .)

On fait le changement de variables :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= \frac{y_1 + (f(y_1)/y_1)y_2}{(1 + (f(y_1)/y_1)^2)^{1/2}} \\ \tilde{y}_2 &= \frac{y_2 - f(y_1)}{(1 + (f(y_1)/y_1)^2)^{1/2}}, \end{aligned}$$

Dans ces coordonnées,  $g_0 \subset \{\tilde{y}_2 = 0\}$ .

On fait le changement de variables dual en  $\eta$  pour obtenir  $\tilde{\eta}$  tel que  $(\eta)^2 = (\tilde{\eta})^2$ . Le symbole de l'opérateur s'écrit maintenant :

$$q(\tilde{y}, \tilde{\eta}) = p(y, \eta) = (\tilde{\eta})^2 + W(\tilde{y}),$$

où  $W(\tilde{y}) = V(y)$ . On calcule :

$$\frac{\partial W}{\partial \tilde{y}_j}(0) = \frac{\partial V}{\partial y_j}(0), \quad j = 1, 2$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \tilde{y}_1^2}(0) &= \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}(0) + \frac{\partial V}{\partial y_2}(0) f''(0)/2, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \tilde{y}_1 \partial \tilde{y}_2}(0) &= \frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2}(0) - \frac{\partial V}{\partial y_1}(0) f''(0)/4, \end{aligned}$$

et enfin

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \tilde{y}_2^2}(0) = \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}(0).$$

En particulier,  $\nabla W(0) = 0$ ,  $W''(0) = V''(0)$ . On suppose que le potentiel  $W$  s'écrit sous la forme :

$$W(\tilde{y}) = W_1(\tilde{y}_1) + W_2(\tilde{y}_2),$$

où on fixe les fonctions  $W_j$  telles que  $W_1(0) = W_2(0) = 0$ . L'équation éiconale pour les fonctions  $\varphi_\pm$  devient :

$$(\nabla \varphi_\pm)^2 + W_1(\tilde{y}_1) + W_2(\tilde{y}_2) = 0$$

et un développement limité en 0 de  $\varphi_\pm$  (lemme 3.1.6) montre que

$$\left(\frac{\partial\varphi_{\pm}}{\partial\tilde{y}_1}(\tilde{y}_1, 0)\right)^2 + W_1(\tilde{y}_1) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_{\pm}}{\partial\tilde{y}_2}(0, \tilde{y}_2)\right)^2 + W_2(\tilde{y}_2) = 0.$$

On définit la fonction  $\Phi$  par

$$\Phi(\tilde{y}) = \varphi_-(\tilde{y}_1, 0) + \varphi_+(0, \tilde{y}_2).$$

D'après ce qui précède,  $\Phi$  vérifie l'équation éiconale. Il suffit donc de montrer que dans un voisinage de  $(0, 0)$ , la lagrangienne  $\Lambda_{\Phi} = \{(\tilde{y}, \tilde{\eta}), \tilde{\eta} = \nabla\Phi(\tilde{y})\}$  est contenue dans  $\Lambda_{0,+}$ .

L'hypothèse sur  $W$  implique une certaine linéarité du flot :

$$e^{tH_a}(\tilde{y}, \tilde{\eta}) = e^{tH_a}((\tilde{y}_1, 0), (\tilde{\eta}_1, 0)) + e^{tH_a}((0, \tilde{y}_2), (0, \tilde{\eta}_2))$$

En particulier,

$$e^{tH_a}(\tilde{y}, \nabla\Phi(\tilde{y})) = e^{tH_a}((\tilde{y}_1, 0), \nabla\varphi_-(\tilde{y}_1, 0)) + e^{tH_a}((0, \tilde{y}_2), \nabla\varphi_+(0, \tilde{y}_2)).$$

Si  $\tilde{y}_1$  est assez petit, alors il existe  $t'$  tel que  $\tilde{y}_1 = \pi_y(\gamma_0(t'))$  et donc

$$e^{tH_a}(\tilde{y}, \nabla\Phi(\tilde{y})) = \gamma_0(t + t') + e^{tH_a}((0, \tilde{y}_2), \nabla\varphi_+(0, \tilde{y}_2)).$$

Lorsque  $t$  tend vers  $-\infty$ ,  $\gamma_0(t + t')$  et  $e^{tH_a}((0, \tilde{y}_2), \nabla\varphi_+(0, \tilde{y}_2))$  tendent vers  $(0, 0)$  donc on a bien  $\Lambda_{\Phi} \subset \Lambda_{0,+}$  et par suite on a l'égalité entre ces deux variétés lagrangiennes. Comme  $\Lambda_{\Phi}$  est définie sur tout le voisinage de  $\{\gamma_0(t), t > 0\}$  noté  $\tilde{W}_{0,-}$  (défini dans la proposition 3.1.5), on obtient l'hypothèse **(H3)** sur  $\tilde{W}_{0,-}$ .

En particulier,

$$V(y_1, y_2) = \frac{(y_1 - 1)^3}{3} - (y_1 - 1) - 3y_2^2$$

vérifie toutes les hypothèses sur  $W$  : la géodésique minimale pour ce potentiel est donnée par :

$$g_0 = \{y \in \mathbb{R}^2, y_2 = 0, 0 \leq y_1 \leq 3\}.$$

En effet, si  $(y_{01}, y_{02}) \neq (0, 0)$  et  $V(y_{01}, y_{02}) = 0$ , alors,  $y_{01}^3/3 - y_{01}^2 = 3y_{02}^2 \geq 0$  donc  $y_{01} \geq 3$ .

Si  $(y_1(t), y_2(t))$ ,  $0 \leq t \leq 1$  est un chemin qui réalise la distance entre 0 et  $(y_{01}, y_{02})$ , avec  $(y_1(0), y_2(0)) = (0, 0)$  et  $(y_1(1), y_2(1)) = (y_{01}, y_{02})$ , on a :

$$\begin{aligned} d(0, (y_{01}, y_{02})) &= \int_0^1 [-y_1(t)^3/3 + y_1(t)^2 + 3y_2(t)^2]^{1/2} [y_1'(t)^2 + y_2'(t)^2]^{1/2} dt \\ &\geq \int_0^{t_0} [-y_1(t)^3/3 + y_1(t)^2]^{1/2} [y_1'(t)^2]^{1/2} dt, \end{aligned}$$

où  $t_0$  est défini par  $y_1(t_0) = 3$ . D'où :

$$d(0, (y_{01}, y_{02})) \geq d(0, (0, 3)),$$

et  $g_0 = \{(y_1(t), 0), 0 \leq t \leq t_0\} = \{y \in \mathbb{R}^2, y_2 = 0, 0 \leq y_1 \leq 3\}$ .

Pour un tel potentiel, la variété lagrangienne sortante admet donc une projection en  $y$  qui lui est difféomorphe sur un voisinage de  $\{\gamma_0(t), t > 0\}$ . Cette propriété se conserve si on perturbe un peu le potentiel.

## 3.2 Construction d'une phase auxiliaire

Dans cette partie, on rappelle et on approfondit les résultats de [8].

Soient  $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$  les différentes combinaisons linéaires sur  $\mathbb{N}$  des  $\lambda_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ . On a  $\mu_1 = \lambda_1$ . On note  $\mu_0 = 0$ .

On commence par rappeler brièvement la construction de la phase auxiliaire de [8](paragraphe 3). Tout d'abord, on reprend quelques résultats généraux sur la développabilité. Soit  $\hat{\Omega}$  un voisinage de zéro assez petit.

**Définition 3.2.1** Une fonction  $u(t, z) \in C^\infty([B, +\infty[\times\hat{\Omega})$  est dite développable s'il existe des fonctions  $u_j \in C^\infty([B, +\infty[\times\hat{\Omega})$  polynômes en  $t$  telles que

$$u(t, z) \sim \sum_{j \geq n} e^{-\mu_j t} u_j(t, z),$$

c'est à dire que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $\epsilon > 0$ ,

$$D_t^k D_z^\alpha \left( u(t, z) - \sum_{j=1}^N e^{-\mu_j t} u_j(t, z) \right) = O\left(e^{-(\mu_{N+1}-\epsilon)t}\right),$$

uniformément sur  $[B, +\infty[\times\hat{\Omega}$ .

Soit  $\tilde{v}(t, z, \partial/\partial z) = A(t, z)z \frac{\partial}{\partial z}$  un champ de vecteurs tel que  $A(t, z) = A(z) + \Delta A(t, z)$  où  $\Delta A(t, z)$  est régulière, développable, et  $A(0)$  est la matrice diagonale  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

On reprend de [8] le théorème

**Théorème 3.2.2** Si  $v \in C^\infty([B, +\infty[\times\hat{\Omega})$  est développable, et si pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $v(t, z) = O(e^{\epsilon t} |z|^N)$ ,  $N \geq 1$ , alors la solution du problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \tilde{v}u = v, \quad u|_{t=B} = 0 \tag{2.1}$$

est développable.

On en déduit le corollaire

**Corollaire 3.2.3** Si  $w \in C^\infty(\hat{\Omega})$ ,  $w = O(|z|^N)$ ,  $N \geq 1$ , la solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \tilde{v}u = 0, \quad u|_{t=B} = w \quad (2.2)$$

est développable.

**Preuve :** Soit  $\chi$  une fonction troncature valant 0 en  $B$  et 1 si  $t \geq B + 1$ . Soit  $u$  une solution de (2.2) et  $\hat{u} = \chi u$ . Alors  $\hat{u}$  est solution de (2.1) avec  $v = -\frac{\partial \chi}{\partial t} u(t, z) = -\frac{\partial \chi}{\partial t} w(\Phi_{B,t}(z))$  où  $\Phi_{s,t}(z)$ , est définie pour  $z \in \hat{\Omega}$ ,  $B \leq s \leq t$  par

$$\frac{\partial \Phi_{s,t}(z)}{\partial s} = \tilde{v}(s, \Phi_{s,t}(z)), \quad \Phi_{t,t}(z) = z.$$

[8] donne  $\Phi_{B,t}(z) = O(e^{(\epsilon-\lambda_1)t}|z|)$ ,  $\partial_t^k \partial_y^\alpha \Phi_{B,t}(z) = O(e^{(\epsilon-\lambda_1)t})$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . On a donc  $v = O(|z|^N)$ . De plus  $t \rightarrow v(t, z)$  est à support compact, donc  $v$  est développable. Il suffit maintenant d'appliquer le théorème précédent.  $\square$

**Corollaire 3.2.4** Le flot  $e^{t\tilde{v}}(z)$  est développable.

**Preuve :** Il suffit de prendre  $w(z) = z_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  dans le corollaire précédent.  $\square$

On va maintenant appliquer ces résultats de développabilité aux chemins  $\gamma_\pm$ .

Dans [8], l'étude se faisait au voisinage d'un minimum du potentiel. Si  $q(y, \eta)$  est le symbole de l'opérateur considéré, B. Helffer et J. Sjostrand étudient  $p(y, \eta) = -q(y, i\eta)$  où le symbole  $p$  a exactement les propriétés de notre opérateur, au voisinage du maximum local 0. On peut donc appliquer directement leurs résultats à notre étude. Comme eux, faisons le changement de variables symplectique centré en  $(0, 0)$  :  $(y, \eta) \rightarrow (\hat{y}, \hat{\eta})$  tel que  $\Gamma_-$  soit donnée par  $\hat{y} = 0$  et  $\Gamma_+$  par  $\hat{\eta} = 0$ . Alors le symbole principal devient  $\hat{p}(\hat{y}, \hat{\eta}) = A(\hat{y}, \hat{\eta})\hat{y} \cdot \hat{\eta}$ , et on peut prendre  $A(0, 0)$  la matrice diagonale  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .  $\gamma_+$  est maintenant donné par :

$$\gamma_+(t) = (0, \hat{\eta}(t)), \quad t \geq B \text{ car } \gamma_+ \subset \Gamma_-,$$

$$\frac{d\hat{\eta}}{dt} = -\frac{\partial \hat{p}(0, \hat{\eta})}{\partial \hat{y}} = -{}^t A(0, \hat{\eta})\hat{\eta},$$

où  ${}^t$  désigne la matrice transposée.

On augmente  $B$  pour avoir  $\pi_{\hat{\eta}}(\gamma_+) \subset \hat{\Omega}$ . Le corollaire ci dessus appliqué au champs  $\tilde{v} = -{}^t A(0, z) \frac{\partial}{\partial z}$  montre que  $\gamma_+(t)$  est développable :

$$\gamma_+(t) \sim \sum_{j \geq 1} e^{-\mu_j t} f_j^+(t). \quad (2.3)$$

De même, pour  $t \leq -B$ , on obtient

$$\gamma_-(t) \sim \sum_{j \geq 1} e^{\mu_j t} f_j^-(t). \quad (2.4)$$

Ici  $f_j^\pm$  sont des polynômes en  $t$ .

Revenons aux coordonnées  $(y, \eta)$ . Si on écrit le développement (2.3) dans l'équation  $\frac{d\gamma_+}{dt} = H_p(\gamma_+)$ , on montre que  $f_1^+$  est indépendant de  $t$  et est un vecteur propre de  $F_p$  pour la valeur propre  $-\lambda_1$ . On suppose que  $f_1^+ \neq 0$  et que la plus petite valeur propre positive  $\lambda_1$  de la matrice fondamentale  $F_p$  est simple. Cela revient à faire l'hypothèse :

**(H4)** La plus grande des valeurs propres de  $V''(0)$  (qui sont strictement négatives) est simple.

Quitte à faire une translation en  $t$  et le changement symplectique  $(y, \eta) \rightarrow (-y, -\eta)$ , on peut supposer  $f_1^+ = v_1^- = \left(\sqrt{\frac{2}{\lambda_1}}e_1, -\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}e_1\right)$ .

Les mêmes raisonnements pour  $\gamma_-$  donnent  $f_1^-$  indépendant de  $t$  et vecteur propre de  $F_p$  pour  $\lambda_1$ . Le lemme 3.1.4 donne dans (2.4)

$$f_1^- = v_1^+. \quad (2.5)$$

**Remarque 3.2.5** Ce développement asymptotique montre que pour  $t$  assez grand,  $\pi_y(\gamma_0(t))$  se paramètre par  $y_j = f_j(y_1)$ ,  $y_1 \geq 0$ , pour des fonctions  $f_j(y_1) = O(y_1^{\mu_2/\mu_1})$ . Or  $\mu_2/\mu_1 > 1$  : on a le résultat annoncé dans l'exemple 3.1.8.

On peut maintenant construire la phase auxiliaire. Notons  $\Lambda_\Phi = \Lambda_{0,+} \cap \tilde{V}_+$ . Soient  $\Gamma_0 = \{y \in V_+, \Phi(y) = \Phi(\gamma_+(B))\}$ ,  $\tilde{\Gamma}_0 = \{(y, \eta), y \in \Gamma_0, \eta = \nabla\Phi(y)\}$ . Soit  $\Lambda_0$  une variété lagrangienne intersectant proprement  $\Lambda_\Phi$  en  $\tilde{\Gamma}_0$ . On a dans  $V_+$  :

$$\begin{aligned} p(y, \nabla\Phi(y)) &= 0, \\ \Phi - \varphi_- &= 0 \text{ à l'ordre deux sur } \pi_y(\gamma_+). \end{aligned}$$

Si on reprend les coordonnées  $(\hat{y}, \hat{\eta})$ , on a donc [8] (théorème 3.13) :

**Proposition 3.2.6** Si  $B > 0$  est assez grand et  $\hat{\Omega}$  assez petit, on définit

$$\Lambda_t = \left\{ e^{tH_{\hat{p}}}(\hat{y}, \hat{\eta}), (\hat{y}, \hat{\eta}) \in \Lambda_0, \pi_{\hat{y}}(e^{sH_{\hat{p}}}(\hat{y}, \hat{\eta})) \in \hat{\Omega} \text{ pour } B \leq s \leq t \right\}.$$

Alors il existe une fonction régulière  $f(t, \hat{y})$  telle que  $\Lambda_t$  est donnée par  $\hat{\eta} = f(t, \hat{y})$ ,  $\hat{y} \in \hat{\Omega}$ . De plus,

$$\forall t \geq B, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \hat{y} \in \hat{\Omega}, \forall \epsilon > 0, \partial_t^k \partial_{\hat{y}}^\alpha f = O(e^{-(\lambda_1 - \epsilon)t}).$$

Enfin  $f$  vérifie l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\eta}_j}(\hat{y}, f) \frac{\partial f}{\partial \hat{y}_j} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}}(\hat{y}, f) = 0.$$

Posons  $\varphi(t, \hat{y}) = \int_0^{\hat{y}} f(t, \hat{z}) d\hat{z}$ , où on intègre le long d'un chemin joignant 0 à  $\hat{y}$  dans  $\hat{\Omega}$ . En intégrant en  $\hat{y}$  l'équation vérifiée par  $f$  entre 0 et  $\hat{y}$ , on obtient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \hat{p}(\hat{y}, \nabla_{\hat{y}} \varphi) = 0.$$

Grâce au théorème 3.2.2 et au corollaire 3.2.3, on arrive à

**Théorème 3.2.7** *La fonction  $\varphi(t, \hat{y})$  définie ci-dessus est développable.*

En revenant aux coordonnées  $(y, \eta)$ , si on note  $\Omega$  un voisinage de zéro petit, la lagrangienne  $\Lambda_t$  est définie par une fonction régulière  $\varphi(t, y)$ , pour  $y \in \Omega$ ,  $t \geq B$ . Cette fonction est développable. On résume les propriétés de  $\varphi$  [8] (lemme 3.14 et formule (3.41)) :

(P1) i)  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + p\left(y, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0,$   
ii) Si  $y \in V_+$ ,  $\inf_{t \geq B} \varphi(t, y) = \Phi(y)$ .

(P2)  $\varphi(t, y)$  est développable :

$$\varphi(t, y) \sim \varphi_+(y) + \sum_{j \geq 1} e^{-\mu_j t} \varphi_j(t, y).$$

où  $\varphi_j(t, y)$  est un polynôme en  $t$ .

(P3) On a  $\varphi_1(t, y) = \varphi_1(y)$  et  $\frac{\partial p}{\partial \eta}(y, \nabla \varphi_+(y)) \cdot \nabla \varphi_1(y) = 2 \nabla \varphi_+ \cdot \nabla \varphi_1 = \mu_1 \varphi_1(y)$ .

(P4) Pour  $\epsilon > 0$  petit, fixé, soient  $\Omega_{\pm} = \{r = (r', r_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, \pm r_n < -|r'|^{|\mu_1/(2\mu_1 - \mu_2 + \epsilon)|}\}$ , où  $r$  désigne des coordonnées locales centrées en 0 telles que  $r_n = \varphi_1(y)$ . On a alors :

- i) Dans  $\Omega_-$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} < 0$  pour  $t \geq B$ .
- ii)  $\forall y \in \Omega_+$ ,  $\exists ! t_y \geq B$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_y, y) = 0$ . De plus,  $t \rightarrow \varphi(t, y)$  est strictement décroissante pour  $B \leq t \leq t_y$  et strictement croissante pour  $t \geq t_y$ . Enfin,  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t_y, y) > 0$ .
- iii)  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(B, y) < 0$ ,  $y \in \Omega$ .

Avec  $\Phi(y) = \inf_{t \geq B} \varphi(t, y)$  sur  $V_+$ , cette fonction  $\varphi$  permet de prolonger  $\Phi$  de manière régulière sur  $\Omega_{\pm}$ . On a maintenant :

$$\begin{aligned} \forall y \in \Omega_-, \Phi(y) &= \varphi_+(y), \\ \forall y \in \Omega_+, \Phi(y) &= \varphi(t_y, y). \end{aligned} \tag{2.6}$$

De plus, ce prolongement vérifie dans  $\Omega_{\pm}$  l'équation éiconale. On étudie un peu  $\Phi$  :

**Proposition 3.2.8** *Si on note  $\Phi''(0^+) = \lim_{y \rightarrow 0, y \in \Omega_+} \Phi''(y)$ , alors*

$$\Phi''(0^+) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$



**Preuve :** On reprend le résultat de [8] (paragraphe 3) qui se démontre grâce à des développements limités de  $\varphi(t, y)$  :

**Lemme 3.2.9** Si  $y \in \Omega$ ,  $\varphi_1(y) = -\sqrt{2\lambda_1}y_1 + O(y^2)$ .

Soit  $y \in \Omega_+$ . Dérivons l'égalité  $\Phi(y) = \varphi(t_y, y)$  : on obtient avec **(P4)ii**  $\nabla\Phi(y) = \nabla\varphi(t_y, y)$ . Une nouvelle dérivation donne

$$\Phi''(y) = \varphi''(t_y, y) + \nabla t_y \partial_t \nabla \varphi(t_y, y),$$

où on note  $\varphi''(t, y)$  la dérivée seconde en  $y$ .

D'autre part, si on dérive  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_y, y) = 0$ , on trouve

$$\nabla t_y = -\frac{\partial_t \nabla \varphi}{\partial_t^2 \varphi}(t_y, y), \quad (2.7)$$

et donc

$$\Phi''(y) = \varphi''(t_y, y) - \frac{(\partial_t \nabla \varphi)^t (\partial_t \nabla \varphi)}{\partial_t^2 \varphi}(t_y, y), \quad (2.8)$$

où  $^t$  désigne ici le vecteur transposé.

**Lemme 3.2.10** Quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , on a les équivalents :

- i)  $\varphi''(t, y(t)) \sim \varphi''_+(y(t))$ ,
- ii)  $\nabla \varphi(t, y(t)) \sim -\mu_1 e^{-\mu_1 t} \nabla \varphi_1(y(t))$ ,
- iii)  $\partial_t^2 \varphi(t, y(t)) \sim -\mu_1^2 e^{-\mu_1 t} \varphi_1(y(t))$ .

**Preuve :** Quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , on a grâce à **(P2)**  $\varphi(t, y) \sim \varphi_+(y) + e^{-\mu_1 t} \varphi_1(y)$ , donc

$$\begin{aligned} \varphi''(t, y) &\sim \varphi''_+(y) + e^{-\mu_1 t} \varphi''_1(y), \\ \partial_t \nabla \varphi(t, y) &\sim -\mu_1 e^{-\mu_1 t} \nabla \varphi_1(y). \end{aligned}$$

Comme  $\nabla \varphi_1(0) = -\sqrt{2\lambda_1}e_1 \neq 0$ , et  $\varphi''_+(0) \neq 0$ , on peut prendre  $y = y(t)$  dans ces expressions ce qui donne i) et ii). On ne peut pas faire le même raisonnement pour  $\partial_t^2 \varphi(t, y(t))$  car  $\varphi_1(0) = 0$ . Cependant, si on dérive l'égalité  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y(t)) = 0$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi(t, y(t))}{\partial t^2} + \partial_t \nabla \varphi(t, y(t)) y'(t) &= 0, \text{ soit} \\ \frac{\partial^2 \varphi(t, y(t))}{\partial t^2} + \partial_t \nabla \varphi(t, y(t)) 2 \nabla \Phi(y(t)) &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \varphi(t, y(t))}{\partial t^2} = -2\partial_t \nabla \varphi(t, y(t)) \nabla \varphi_-(y(t)),$$

ou encore

$$\frac{\partial^2 \varphi(t, y(t))}{\partial t^2} \sim 2\nabla \varphi_+(y(t)) \left[ -\mu_1 e^{-\mu_1 t} \nabla \varphi_1(y(t)) \right].$$

Avec la propriété **(P3)** cela donne le résultat.  $\square$

On peut terminer la démonstration de la proposition 3.2.8. L'expression de  $\Phi''$  (2.8) devient, quand  $t$  tend vers  $+\infty$  :

$$\Phi''(y(t)) \sim \varphi''_+(y(t)) - \frac{\left( -\mu_1 e^{-\mu_1 t} \nabla \varphi_1(y(t)) \right) \left( -\mu_1 e^{-\mu_1 t} \nabla \varphi_1(y(t)) \right)^t}{-\mu_1^2 e^{-\mu_1 t} \varphi_1(y(t))},$$

soit

$$\Phi''(y(t)) \sim \varphi''_+(0) - e^{-\mu_1 t} (\nabla \varphi_1(0) \nabla \varphi_1(0)^t) (\varphi_1(y(t)))^{-1}.$$

Avec  $y(t) \sim e^{-\mu_1 t} \sqrt{\frac{2}{\lambda_1}} e_1 = e^{-\mu_1 t} \sqrt{\frac{2}{\mu_1}} e_1$ , et  $\varphi_1(y) = -\sqrt{2\mu_1} y_1 + O(y^2)$ ,

$$\Phi''(0^+) = \varphi''_+(0) - \lambda_1 e_1 e_1^t \text{ et on a le résultat. } \square$$

**Remarque 3.2.11** Une étude des restes dans les développements du lemme 3.2.10 montre qu'en fait  $\Phi''(y(t)) - \Phi''(0^+) = O(e^{-(\mu_2 - \mu_1)t})$ .

**Remarque 3.2.12** Comme  $\Phi(y) = \varphi_+(y)$  si  $y \in \Omega_-$ , on a bien sûr

$$\lim_{y \rightarrow 0, y \in \Omega_-} \Phi''(y) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Le lemme 3.2.9 donne de plus

**Corollaire 3.2.13** On a  $\pi_y(\gamma_{\pm}) \subset \Omega_+$ .

On diminue le voisinage de la géodésique minimale  $g_0$   $W_0$  pour avoir  $W_0 \cap \Omega \subset \Omega_+$ .

Grâce à  $\varphi$ , on va construire une solution sortante de  $(P - \rho)u = O(h^\infty)$  où  $|\rho| \leq C_0 h$ .

Si  $D_t = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial t}$ , on commence par chercher une solution de  $(D_t + P - \rho)v = 0$ , pour  $t \geq B$ ,  $y \in \Omega$ .

### 3.3 Solution de $(D_t + P - \rho)v = 0$

On cherche une solution  $v$  sous la forme  $v = e^{i\varphi(t,y)/h} a(t, y, h, \rho)$ . Avec **(P1)** $i$ ,  $a$  doit vérifier :

$$-h^2 \Delta a + \frac{h}{i} \left( \frac{\partial a}{\partial t} + 2\nabla \varphi(y, t) \nabla a + (\Delta \varphi - \nu) a \right) = 0 \quad (3.1)$$

où  $\nu = \frac{i}{h}\rho$  (et donc  $|\nu| \leq C_0$ ). On cherche  $a$  telle que quand  $h$  tend vers 0,  $a(t, y, h, \rho) \sim \sum h^n a_n(t, y, \nu)$  dans le sens suivant :

**Définition 3.3.1** On dit que  $a(t, y, h, \rho) \sim \sum h^n a_n(t, y, \nu)$  si

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists h_0, \exists C > 0, |\partial_t^k \partial_y^\alpha (a(t, y, h, \rho) - \sum_{0 \leq k \leq N} h^k a_k(t, y, \nu))| \leq Ch^{N+1}, h < h_0.$$

(3.1) conduit à

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\nu a_0 = 0 \\ \mathcal{L}_\nu a_n = i \Delta a_{n-1} \end{cases}, \quad \mathcal{L}_\nu = \frac{\partial}{\partial t} + 2\nabla\varphi\nabla + \Delta\varphi - \nu.$$

On résout ces équations de transport, et avec le changement de variable  $z = y - y(t)$ ,  $y(t) = \pi_y(\gamma(t))$ , on montre que ([8] remarque 3.11) :

$$a_k(t, y, \nu) \sim \sum_{j \geq 0} a_{k,j}(t, y, \nu) e^{-(S_\nu + \mu_j)t}, \quad (3.2)$$

où  $a_{k,j}$  est un polynôme en  $t$  et

$$S_\nu = \Delta\varphi_+(0) - \nu = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j - \nu = S_0 - \nu. \quad (3.3)$$

**Etude des fonctions  $a_{k,j}$**

En mettant l'expression (3.2) de  $a_0(t, y, \nu)$  dans l'équation  $\mathcal{L}_\nu a_0 = 0$ , on obtient, grâce à **(P2)** :

$$\sum_{j \geq 0} e^{-(S + \mu_j)t} \left[ \frac{\partial a_{0,j}}{\partial t} + 2 \sum_{k \geq 0} e^{-\mu_k t} \nabla\varphi_k \nabla a_{0,j} + \sum_{k \geq 0} e^{-\mu_k t} \Delta\varphi_k a_{0,j} - (S_0 + \mu_j) a_{0,j} \right] \sim 0.$$

Cela donne

$$\sum_{j \geq 0} e^{-(S + \mu_j)t} \left[ \frac{\partial a_{0,j}}{\partial t} + 2 \sum_{\mu_k + \mu_l = \mu_j} (\nabla\varphi_k \nabla a_{0,l} + \Delta\varphi_k a_{0,l}) - (S_0 + \mu_j) a_{0,j} \right] \sim 0.$$

Si  $\mathcal{L}_0 = \frac{\partial}{\partial t} + 2\nabla\varphi_+ \nabla + \Delta\varphi_+ - S_0$ , on prend les fonctions  $a_{0,j}$  indépendantes de  $\nu$ , telles que

$$\mathcal{L}_0 a_{0,0} = 0$$

et

$$(\mathcal{L}_0 - \mu_j) a_{0,j} + \sum_{\mu_k + \mu_l = \mu_j, \mu_l \neq \mu_j} (2\nabla\varphi_k \nabla a_{0,l} + \Delta\varphi_k a_{0,l}) = 0. \quad (3.4)$$

On fixe  $a_{0,0}$  indépendant de  $t$ . Comme  $S_0 = \Delta\varphi_+(0)$ ,  $a_{0,0}$  doit vérifier

$$(2\nabla\varphi_+ \nabla + \Delta\varphi_+ - \Delta\varphi_+(0)) a_{0,0} = 0.$$

On détermine une solution en imposant  $a_{0,0}(0) = 1$ .

De plus, l'opérateur différentiel  $\mathcal{L}_0$  est régulier sur  $[B, +\infty[ \times \Omega$ , on peut donc définir  $a_{0,l}$ ,  $l \neq 0$  par (3.4) et  $a_{0,l}(0) = 0$ .

On obtient une fonction régulière  $a_0(t, y, \nu)$  telle que

$$a_0(t, y, \nu) \sim \sum_{j \geq 0} e^{-(S_\nu + \mu_j)t} a_{0,j}(t, y), \quad (3.5)$$

On étudie de même les fonctions  $a_{j,l}$  pour obtenir une fonction  $a_j(t, y, \nu)$  qui vérifie l'équivalent de (3.5).

On construit maintenant une réalisation de la série formelle obtenue.

Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on note  $S = S_\nu$ . On a  $\Re S = S_0 - \Re \nu$  et on s'intéresse aux résonances pour lesquelles il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que

$$\Re S_\nu \geq \epsilon_0. \quad (3.6)$$

c'est à dire telles que  $\Re \nu \leq S_0 - \epsilon_0$  ou encore  $|\Im \rho| \leq (S_0 - \epsilon_0)h$ . (3.5) donne alors pour les fonctions  $a_n$  :

$$\forall y \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}, \exists C_n, \forall k \leq n, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq n, \left| \partial_t^k \partial_y^\alpha a_n(t, y, \nu) \right| \leq C_n e^{-\epsilon_0 t/2}. \quad (3.7)$$

Soit une fonction troncature  $\hat{\chi}$  valant 1 sur  $[0, 1/4]$  et 0 sur  $[3/4, 1]$ . On choisit une suite  $(\delta_n)_n$  qui tend vers  $+\infty$  et telle que

$$\forall n \geq 0, \hat{\chi}(\delta_n h) h^n C_n \leq 2^{-n} h^{n-1}.$$

On définit alors les fonctions

$$a(t, y, \nu, h) = \sum_{n \geq 0} h^n a_n(t, y, \nu) \hat{\chi}(\delta_n h),$$

et

$$v(t, y, \nu, h) = e^{i\varphi(t,y)/h} a(t, y, \nu, h).$$

**Proposition 3.3.2** *La fonction  $v$  vérifie dans  $[B, +\infty[ \times \Omega$*

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists h_0 > 0, \exists C > 0, \left| \partial_t^k \partial_y^\alpha (D_t + P - \rho)v \right| \leq C h^N e^{-\epsilon_0 t/2}. \quad (3.8)$$

*$v$  est donc une solution asymptotique de  $(D_t + P - \rho)v = 0$ .*

**Preuve :** On calcule :

$$(D_t + P - \rho)v = e^{i\varphi(t,y)/h} h \left( \sum_{n \geq 0} h^n \hat{\chi}(\delta_n h) \mathcal{L}_\nu a_n - i \sum_{n \geq 1} h^n \hat{\chi}(\delta_{n-1} h) \Delta a_{n-1} \right).$$

Il existe  $h_N$  tel que si  $h < h_N$ , alors

$$(D_t + P - \rho)v = e^{i\varphi(t,y)/h} h^{N+1} \sum_{n \geq 1} h^n \hat{\chi}(\delta_{N+n} h) \left( \mathcal{L}_\nu a_{N+n} - i \hat{\chi}(\delta_{N+n-1} h) \Delta a_{N+n-1} \right),$$

si on choisit  $\delta_n$  tel que  $\hat{\chi}(\delta_n h)\hat{\chi}(\delta_{n-1}h) = \hat{\chi}(\delta_{n-1}h)$ . Avec (3.7) on obtient une constante  $C$  telle que

$$|\partial_t^k \partial_y^\alpha (D_t + P - \rho)v| \leq Ch^{N+1-k-|\alpha|} e^{-\epsilon_0 t/2},$$

où

$$C = C_\varphi \left( \sum_{n \geq k+|\alpha|+2} h^{n-1} 2^{-N-n} + \sum_{n \leq k+|\alpha|+2} \max_{m \leq k, |\beta| \leq |\alpha|, y \in \Omega, t \geq B} \left| e^{\epsilon_0 t/2} \partial_t^m \partial_y^\beta (\mathcal{L}_\nu a_{N+n} - i\hat{\chi}(\delta_{N+n-1}h)\Delta a_{N+n-1}) \right| \right),$$

avec  $C_\varphi$  une constante qui dépend des dérivées  $\partial_t^m \partial_y^\beta \varphi$ ,  $m \leq k$ ,  $|\beta| \leq |\alpha|$ .

Cela donne la proposition.  $\square$

Remarquons qu'on a maintenant, quand  $t$  tend vers l'infini

$$v(t, y, h, \rho) = e^{i\varphi(t,y)/h} a(t, y, h, \rho) \sim e^{i\varphi/h} \sum_{j \geq 0} e^{-(S_\nu + \mu_j)t} \tilde{a}_j(t, y, h),$$

où

$$\tilde{a}_j(t, y, h) = \sum_{k \geq 0} h^k \hat{\chi}(\delta_k h) a_{k,j}(t, y).$$

D'où

$$v \sim e^{i\varphi_\rho(t,y)/h} \sum_{j \geq 0} e^{-(S_0 + \mu_j)t} \tilde{a}_j(t, y, h), \quad (3.9)$$

où  $\varphi_\rho = \varphi + \rho t$  vérifie  $\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + p(y, \nabla \varphi_\rho) = \rho$ .

A partir de  $v$ , on construit une solution de  $(P - \rho)u = 0$ .

### 3.4 Solution de $(P - \rho)u = 0$

On commence par définir une fonction troncature  $\chi$ .

Soit  $\epsilon > 0$  fixé. La propriété **(P4) iii)** donne l'existence d'un compact voisinage de zéro  $K \subset \Omega$  tel que

$$\forall y \in K, \frac{\partial \varphi}{\partial t}(B, y) < -\epsilon < 0.$$

Pour  $y \in \Omega$ , il existe  $\tilde{t}_y > B$  tel que pour  $B \leq t \leq \tilde{t}_y$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y) < -\epsilon/2$ . Si  $t_0 = \min_{y \in K} \tilde{t}_y > B$ , on a

$$\forall y \in K, \forall B \leq t \leq t_0, \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y) < -\epsilon/2 < 0.$$

Quitte à restreindre  $\Omega$ , on peut supposer  $K = \Omega$ .

On construit alors  $\chi : [B, +\infty[ \rightarrow [0, 1]$  régulière telle que

$$\chi(t) \equiv 0 \text{ si } B \leq t \leq t_0/2$$

$$\chi(t) \equiv 1 \text{ si } t \geq t_0.$$

On définit  $u(y, h, \rho)$  dans  $\Omega$  par :

$$u(y, h, \rho) = \int_B^{+\infty} v(t, y, h, \rho)\chi(t)dt.$$

Cette intégrale est absolument convergente grâce à (3.9) et (3.6).

**Proposition 3.4.1** *La fonction  $u$  définie ci dessus est solution de  $(P - \rho)u = O(h^\infty)$  dans  $\Omega$ .*

**Preuve :**  $(P - \rho)u = \int_B^{+\infty} (P - \rho)v(t, y)\chi(t)dt$  donc

$$(P - \rho)u = \int (r(t, y) - D_t v(t, y))\chi(t)dt$$

où  $r(t, y) = (D_t + P - \rho)v$  vérifie la majoration donnée par (3.8). Ainsi

$$(P - \rho)u = O(h^\infty) - \frac{h}{i} \int \frac{\partial v}{\partial t} \chi(t)dt = O(h^\infty) - \frac{h}{i} [v\chi]_B^\infty + \frac{h}{i} \int v\chi'(t)dt.$$

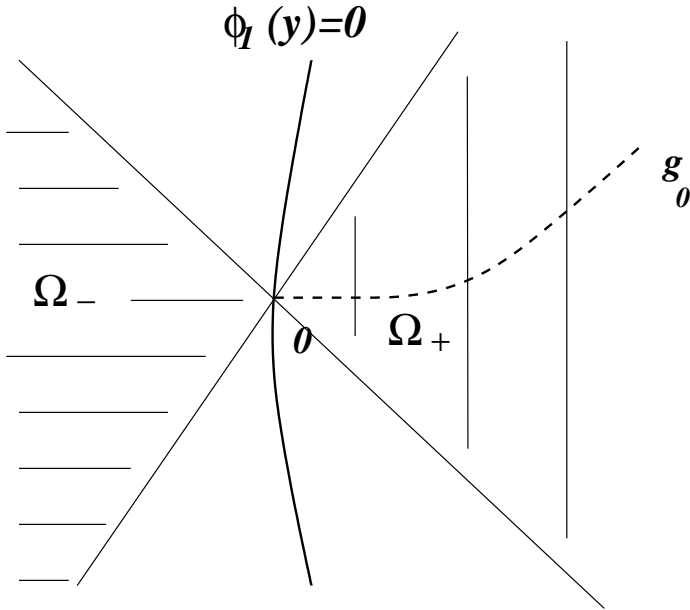
$\chi(B) = 0$  et  $|v(t, y)| \leq Ce^{-\epsilon_0 t/2}$  tend vers 0 en  $+\infty$  donc le deuxième terme du membre de droite est nul. Finalement,

$$(P - \rho)u = O(h^\infty) + \frac{h}{i} \int e^{i\varphi(t,y)/h} a(t, y, h)\chi'(t)dt.$$

Enfin sur le support de  $\chi'$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} < -\epsilon/2 < 0$  et on conclut avec la phase non stationnaire [5].

### 3.5 Développement de $u$

On calcule à présent l'équivalent de  $u$  quand  $h$  tend vers zéro dans les ensembles  $\Omega_\pm$  définis dans (P4) :



### 3.5.1 Dans $\Omega_-$

On se place dans toute cette partie dans un compact  $K_- \subset \Omega_-$ . On veut obtenir le premier terme du développement semi-classique de  $u(y, h, \rho)$ , donc il suffit d'étudier l'équivalent quand  $h$  tend vers zéro de

$$\int_B^\infty e^{i\varphi(t,y)/h} a_0(t, y, \nu) \chi(t) dt.$$

On suit la méthode de [8] (paragraphe 5), et on utilisera certains des résultats qui s'y trouvent. Fixons  $y \in K_-$ .

Dans  $\Omega_-$ , **(P4)***i* montre que  $t \rightarrow \tau = \varphi(t, y) - \varphi_+(y) > 0$  est une bijection pour  $t \geq B$ .

Soit  $\alpha(y) = \varphi(B, y) - \varphi_+(y)$ . On fait le changement de variable  $t \rightarrow \tau$  dans l'intégrale définissant  $u$  : si  $b(\tau, h, \nu) = -a(t, h, \nu) \tau \frac{dt}{d\tau}$ , on a

$$u(y, h, \rho) = \int_0^{\alpha(y)} e^{i\tau/h} b(\tau, h, \rho) \tilde{\chi}(\tau) \frac{d\tau}{\tau} e^{i\varphi_+(y)/h}, \quad (5.1)$$

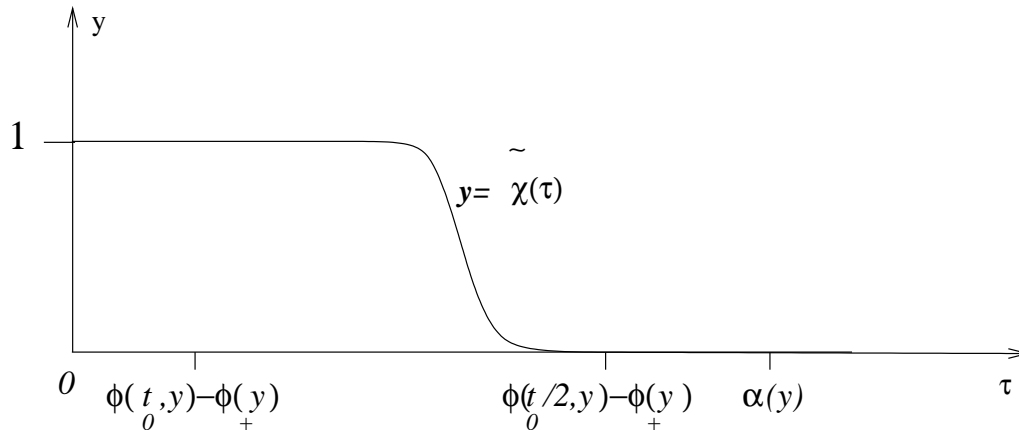
où  $\tilde{\chi}(\tau) = \chi \circ \tau^{-1}(\tau)$  vérifie  $\tilde{\chi}(\varphi(t, y) - \varphi_+(y)) = \chi(t)$ . Si  $\hat{\mu}_0 = 0$  et  $\hat{\mu}_1 < \hat{\mu}_2 < \dots$  forment l'ensemble des combinaisons linéaires des  $\mu_{j+1} - \mu_j$ , on a de plus

$$b^0(\tau, y, \nu) = -a_0(t, y, \nu) \tau \frac{dt}{d\tau} \sim \sum_{j \geq 0} \tau^{(S_\nu + \hat{\mu}_j)/\mu_1} b_j(-\log \tau, y). \quad (5.2)$$

A priori, les  $b_j$  sont des polynômes en  $\log \tau$  et le calcul montre que  $b_0$  est indépendant de  $\tau$  :

$$b_0(y) = \frac{1}{\mu_1} \varphi_1(y)^{-S_\nu/\mu_1} a_{0,0}(y).$$

On a le graphe de la fonction  $\tilde{\chi}$  :



**FIG9** : Graphe de  $\tilde{\chi}$

On prolonge  $\tilde{\chi}$  par zéro pour  $\tau \geq \alpha(y)$ . (5.1) et (5.2) montrent qu'il faut étudier deux types d'intégrales : pour  $\mu > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$I_\mu = \int_0^{+\infty} e^{i\tau/h} \tau^\mu \tilde{\chi}(\tau) \frac{d\tau}{\tau},$$

et

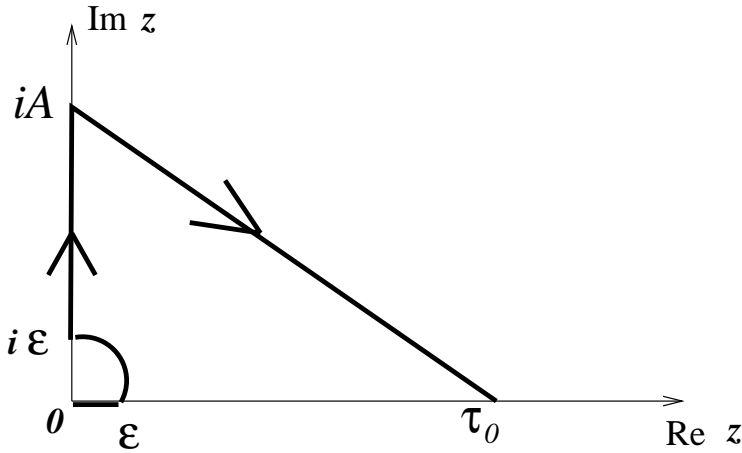
$$I_{\mu,k} = \int_0^{+\infty} e^{i\tau/h} \tau^\mu (-\log \tau)^k \tilde{\chi}(\tau) \frac{d\tau}{\tau}.$$

### Etude de $I_\mu$

On définit  $\tau_0 > 0$  par  $2\tau_0 = \min_{y \in K_-} (\varphi(t_0, y) - \varphi_+(y))$  de sorte que  $\tilde{\chi} = 1$  sur  $[0, \tau_0]$ . Ainsi :

$$I_\mu = \int_0^{\tau_0} e^{i\tau/h} \tau^\mu \frac{d\tau}{\tau} + \int_{\tau_0}^{+\infty} e^{i\tau/h} \tau^\mu \tilde{\chi}(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = K_\mu^1 + K_\mu^2$$

En utilisant l'holomorphie de  $e^{i\tau/h} \tau^{\mu-1}$ , si  $\tau \neq 0$ , on déforme le contour de  $K_\mu^1$  en :



**FIG10: Déformation de contour**

Alors pour  $\epsilon > 0$

$$K_\mu^1 = \int_0^\epsilon e^{i\tau/h} \tau^\mu \frac{d\tau}{\tau} + \int_0^{\pi/2} e^{i(\epsilon e^{i\theta})/h} (\epsilon e^{i\theta})^{\mu-1} (i\epsilon e^{i\theta}) d\theta + \int_\epsilon^A e^{-u/h} (iu)^\mu \frac{du}{u}.$$

On fait une intégration par parties dans la première intégrale pour trouver :

$$\left| \int_0^\epsilon e^{i\tau/h} \tau^\mu \frac{d\tau}{\tau} \right| = O(\epsilon^\mu + \epsilon^{\mu+1}/h).$$

Quand  $\epsilon$  tend vers 0, cette intégrale tend donc vers 0. De même,



$$\left| \int_0^{\pi/2} e^{i(\epsilon e^{i\theta})/h} (\epsilon e^{i\theta})^{\mu-1} (i\epsilon e^{i\theta}) d\theta \right| = O(\epsilon^\mu).$$

Comme de plus l'intégrale

$$\int_\epsilon^A e^{-u/h} (iu)^\mu \frac{du}{u}$$

tend vers l'intégrale absolument convergente en 0

$$\int_0^A e^{-u/h} (iu)^\mu \frac{du}{u},$$

on écrit maintenant :

$$I_\mu = \int_0^{iA} e^{i\tau/h} \tau^\mu \frac{d\tau}{\tau} + \left[ \int_{iA}^{\tau_0} e^{i\tau/h} \tau^\mu \frac{d\tau}{\tau} + \int_{\tau_0}^{+\infty} e^{i\tau/h} \tau^\mu \tilde{\chi}(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right] = I_\mu^1 + (I_\mu^2 + I_\mu^3) = I_\mu^1 + J_\mu.$$

On calcule  $I_\mu^1$  (Cf [8] lemme 5.2) :

$$I_\mu^1 = \int_0^A e^{-u/h} (iu)^\mu \frac{du}{u} = (ih)^\mu \Gamma(\mu) + O(h^\infty).$$

On paramètre le chemin définissant  $I_\mu^2$  :

$$I_\mu^2 = - \int_0^1 e^{i(\beta s + \tau_0)/h} (\beta s + \tau_0)^{\mu-1} \beta ds, \quad \beta = iA - \tau_0$$

et on fait une intégration par parties :

$$I_\mu^2 = -\frac{h}{i} \left[ e^{-A/h} (iA)^{\mu-1} - e^{i\tau_0/h} \tau_0^{\mu-1} \right] + \frac{h}{i} e^{i\tau_0/h} (\mu-1) \int_0^1 e^{i\beta s/h} (\beta s + \tau_0)^{\mu-2} \beta ds.$$

D'autre part, une intégration par parties dans  $I_\mu^3$  mène à

$$I_\mu^3 = -\frac{h}{i} e^{i\tau_0/h} \tau_0^{\mu-1} - \frac{h}{i} (\mu-1) \int_{\tau_0}^{+\infty} e^{i\tau/h} \tau^{\mu-2} \tilde{\chi} d\tau - \frac{h}{i} \int_{\tau_0}^{+\infty} e^{i\tau/h} \tau^{\mu-1} \tilde{\chi}'(\tau) d\tau$$

et comme  $\tilde{\chi}' \in C_0^\infty([\tau_0, +\infty])$ , cela donne

$$I_\mu^3 = -\frac{h}{i} e^{i\tau_0/h} \tau_0^{\mu-1} - \frac{h}{i} (\mu-1) \int_{\tau_0}^{+\infty} e^{i\tau/h} \tau^{\mu-2} \tilde{\chi} d\tau + O(h^\infty).$$

Finalement,

$$I_\mu^2 + I_\mu^3 = J_\mu = -\frac{h}{i} (\mu-1) J_{\mu-1} = \left( \frac{-h}{i} \right)^k (\mu-1) \dots (\mu-k) J_{\mu-k} + O(h^\infty),$$

pour tout  $k$ . Donc  $J_\mu = O(h^\infty)$ . On a démontré le lemme suivant :

**Lemme 3.5.1**  $I_\mu = (ih)^\mu \Gamma(\mu) + O(h^\infty)$ .

## Etude de $I_{\mu,k}$

On reprend le contour donné par la figure (*FIG10*) et on fait tendre  $\epsilon$  vers 0 pour trouver, avec des notations similaires à celles utilisées dans l'étude de  $I_\mu$  :

$$I_{\mu,k} = I_{\mu,k}^1 + (I_{\mu,k}^2 + I_{\mu,k}^3) = I_{\mu,k}^1 + J_{\mu,k}.$$

On obtient pour  $I_{\mu,k}^1$  :

$$\begin{aligned} I_{\mu,k}^1 &= \int_0^A e^{-u/h} u^{\mu-1} (-\log u - i\pi/2)^k i^\mu du \\ &= \sum_{p=0}^k C_k^p (-i\pi/2)^{k-p} i^\mu \int_0^A e^{-u/h} u^{\mu-1} (-\log u)^p du, \end{aligned}$$

car on fait une déformation continue du contour d'intégration telle que  $\log(iu) = i\pi/2 + \log u$ . Avec les résultats de [8], cela mène à

$$I_{\mu,k}^1 = \sum_{p=0}^k C_k^p (-i\pi/2)^{k-p} (ih)^\mu \left[ \Gamma(\mu) (-\log h)^p + C_p^1 \Gamma'(\mu) (-\log h)^{p-1} + \dots + \Gamma^{(p)}(\mu) \right] + O(h^\infty).$$

Pour le calcul de  $J_{\mu,k}$ , une intégration par parties donne

$$J_{\mu,k} = -\frac{h}{i} [(\mu-1)J_{\mu-1,k} - kJ_{\mu-1,k-1}] + O(h^\infty)$$

et donc  $J_{\mu,k} = O(h^\infty)$ .

Finalement,

**Lemme 3.5.2** *On a*

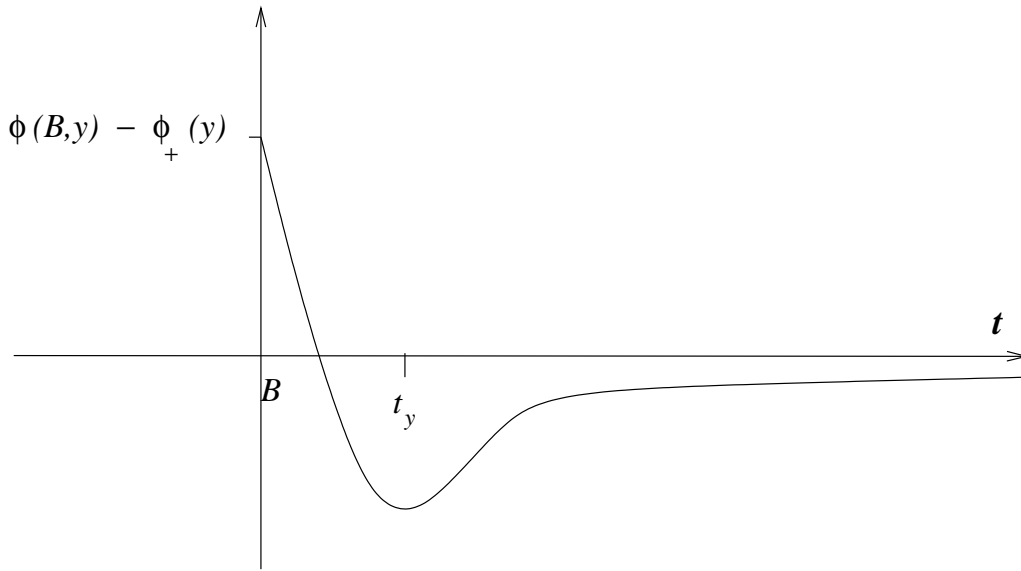
$$I_{\mu,k} = \sum_{p=0}^k C_k^p (-i\pi/2)^{k-p} (ih)^\mu \left[ \Gamma(\mu) (-\log h)^p + C_p^1 \Gamma'(\mu) (-\log h)^{p-1} + \dots + \Gamma^{(p)}(\mu) \right] + O(h^\infty).$$

Grâce à ces deux lemmes, on obtient le premier terme de  $u$  dans  $K_-$  :

$$\forall \epsilon > 0, u(y, h, \rho) = e^{i\varphi_+(y)/h} \frac{1}{\mu_1} (\varphi_1(y))^{-S/\mu_1} a_{0,0}(y) (ih)^{S/\mu_1} \Gamma(S/\mu_1) (1 + O(h^{\hat{\mu}_1/\mu_1 - \epsilon})). \quad (5.3)$$

### 3.5.2 Dans $\Omega_+$

Soit  $K_+$  un compact de  $\Omega_+$ . On peut tracer le graphe de  $t \rightarrow \varphi(t, y) - \varphi_+(y)$ , pour  $y$  fixé dans  $K_+$  :



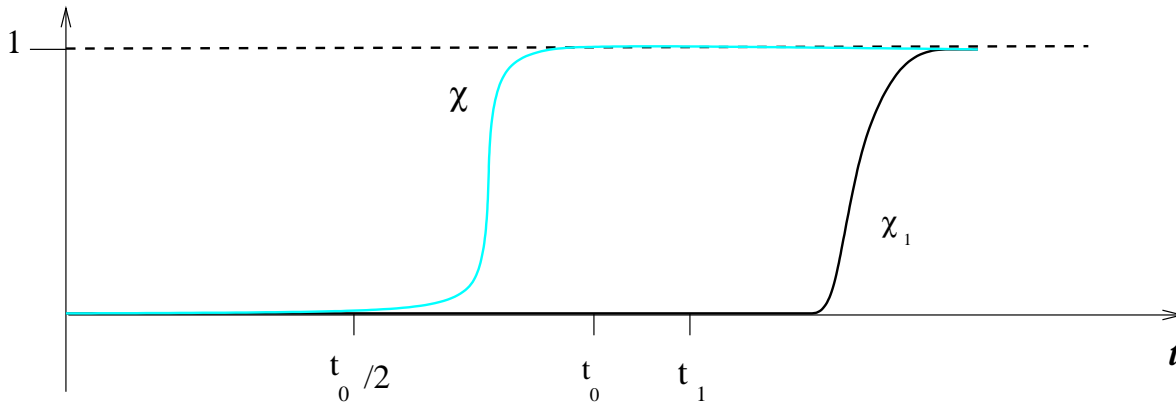
**FIG11: Graphe de  $t \longrightarrow \phi(t,y) - \phi_+(y)$**

Soit  $t_1 = \max_{K_+} t_y + 1$  où  $t_y$  est défini dans **(P4)**. Soit  $\chi_1$  régulière, définie par  $\chi_1 \equiv 0$  sur  $[B, t_1]$  et  $\chi_1 \equiv 1$  sur  $[t_1 + 1, +\infty[$ . Comme  $t_0 < t_1$ ,

$$\text{Supp } \chi_1' \cap \text{Supp } \chi' = \emptyset$$

et

$\forall y \in K_+, t_y \in \text{Supp } (\chi(1 - \chi_1))$  qui est compact.



**FIG12: Graphe de  $\chi_1$**

On écrit

$$u(y, h, \rho) = \int_B^{+\infty} e^{i\varphi/h} a(t, y, h, \nu) \chi(1 - \chi_1) dt + \int_B^{+\infty} e^{i\varphi/h} a \chi \chi_1 dt = u_1 + u_2$$

On applique la méthode de la phase stationnaire à l'intégrale définissant  $u_1$ . Pour  $y \in K_+$ , il y a un unique point critique  $t_y$ . On trouve donc, avec (2.6)

$$u_1(y, h, \nu) = (2\pi h)^{1/2} e^{i\pi/4} e^{i\Phi/h} c(y, h, \nu), \quad c = \sum_{n \geq 0} h^n c_n(y, \nu), \quad (5.4)$$

$$\text{où } c_0(y) = \frac{a_0(t_y, y, \nu)}{\left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t_y, y) \right|^{1/2}}.$$

Pour calculer  $u_2$ , il faut à nouveau faire "une phase stationnaire en  $+\infty$ ". De manière analogue à ce qu'on a fait pour  $y \in \Omega_-$ , on fait le changement de variables  $0 < \tau = \varphi_+(y) - \varphi(t, y)$ ,  $t \geq t_1$ . En effet, sur le support de  $\chi_1$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} > 0$  et  $t \rightarrow \varphi_+(y) - \varphi(t, y)$  est bijectif pour  $t \geq t_1$ .

Cette fois,  $\varphi_+(y) - \varphi(t, y) = (-\varphi_1(y))e^{-(S+\mu_1)t} - \dots$  et  $\varphi_1 < 0$  sur  $K_+ \subset \Omega_+$ .

On définit  $b(\tau, y, h)$  comme dans (5.1), avec maintenant  $b_0(y) = \frac{1}{\mu_1} (-\varphi_1(y))^{-S/\mu_1} a_{0,0}(y)$  dans (5.2). On prolonge  $\tilde{\chi}_1(\tau) = \chi_1(t)$  par zéro pour  $\tau \geq \varphi_+(y) - \varphi(t_1, y)$ . Alors

$$u_2(y, h, \nu) = \int_0^{+\infty} e^{-i\tau/h} b(\tau, h, \nu) \tilde{\chi}_1 \frac{d\tau}{\tau} e^{i\varphi_+(y)/h}.$$

On voit qu'on doit cette fois utiliser les équivalents de  $\bar{I}_\mu = (-ih)^\mu \Gamma(\mu) + O(h^\infty)$  et  $\bar{I}_{\mu,k}$  ce qui donne

$$\forall \epsilon > 0, \quad u_2 = e^{i\varphi_+(y)/h} \left[ (-\varphi_1(y))^{-S/\mu_1} \frac{1}{\mu_1} a_{0,0}(y) (-ih)^{S/\mu_1} \Gamma(S/\mu_1) (1 + O(h^{\hat{\mu}_1/\mu_1 - \epsilon})) \right].$$

Finalement, dans  $K_+$ ,

$$\begin{aligned} u(y, h, \nu) &= u_1 + u_2 = e^{i\Phi/h} (2\pi h)^{1/2} e^{i\pi/4} c(y, h, \nu) \\ &+ e^{i\varphi_+/h} \left[ (-\varphi_1)^{-S/\mu_1} \frac{a_{0,0}(y)}{\mu_1} (-ih)^{S/\mu_1} \Gamma(S/\mu_1) (1 + O(h^{\hat{\mu}_1/2\mu_1})) \right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

On va maintenant prolonger le développement de cette solution. Pour cela, on étudie les fonctions qui interviennent dans ces développements.

Dans  $\Omega_-$ , on a

$$u(y, \nu, h) = u_0(y, \nu, h) (1 + O(h^{\hat{\mu}_1/2\mu_1})),$$

où

$$u_0 = e^{i\varphi_+(y)/h} d_0 \frac{1}{\mu_1} (ih)^{S/\mu_1} \Gamma(S/\mu_1),$$

$$d_0(y) = a_{0,0}(y) (\varphi_1(y))^{-S/\mu_1}.$$

**Lemme 3.5.3** Dans  $\Omega_-$ ,  $(2\nabla\varphi_+\nabla + \Delta\varphi_+ - \nu)d_0 = 0$ .

**Preuve :** On a  $\nabla d_0 = \nabla a_{0,0}(\varphi_1)^{-S/\mu_1} - \frac{S_0}{\mu_1} a_{0,0}(\varphi_1)^{-S/\mu_1} \frac{\nabla \varphi_1}{\varphi_1}$ ,  
soit

$$\nabla d_0 = (\varphi_1)^{-S/\mu_1} \left( \nabla a_{0,0} - \frac{S}{\mu_1} a_{0,0} \frac{\nabla \varphi_1}{\varphi_1} \right).$$

Ainsi

$$(2\nabla \varphi_+ \nabla + \Delta \varphi_+ - \nu) d_0 = (\varphi_1)^{-S/\mu_1} \left( 2\nabla \varphi_+ \left[ \nabla a_{0,0} - \frac{S}{\mu_1} a_{0,0} \frac{\nabla \varphi_1}{\varphi_1} \right] + (\Delta \varphi_+ - \nu) a_{0,0} \right).$$

Avec  $S = S_0 - \nu$ , cela donne

$$(2\nabla \varphi_+ \nabla + \Delta \varphi_+ - \nu) d_0 = (\varphi_1)^{-S/\mu_1} \left[ (2\nabla \varphi_+ \nabla - S_0 + \Delta \varphi_+) a_{0,0} - a_{0,0} \left( \frac{S}{\mu_1 \varphi_1} 2\nabla \varphi_+ \nabla \varphi_1 - S_0 + \nu \right) \right].$$

Comme  $(2\nabla \varphi_+ \nabla + \Delta \varphi_+ - S_0) a_{0,0} = 0$  et  $2\nabla \varphi_+ \nabla \varphi_1 = \mu_1 \varphi_1$ , (lemme 3.2.9) on trouve bien le lemme.  $\square$

Ainsi, on peut prolonger le développement de  $u$  dans tout ouvert connexe contenant  $\Omega_-$  sur lequel la fonction  $\varphi_+$  est définie et a son gradient non nul.

Dans  $\Omega_+$ , on a

$$u(y, h, \nu) = u_1(1 + O(h)) + u_2(1 + O(h^{\hat{\mu}_1/2\mu_1}))$$

où

$$u_1 = e^{i\Phi/h} (2\pi h)^{1/2} e^{i\pi/4} c_0(y, \nu)$$

et

$$u_2 = e^{i\varphi_+/h} \frac{1}{\mu_1} (-ih)^{S/\mu_1} \Gamma(S/\mu_1) f_0,$$

$$f_0 = a_{0,0}(y) (-\varphi_1(y))^{-S/\mu_1}.$$

Alors

**Lemme 3.5.4** Dans  $\Omega_+$ ,  $2\nabla \Phi \nabla c_0 + (\Delta \Phi - \nu) c_0 = 0$ .

**Preuve :** On rappelle que  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t_y, y) > 0$  et par définition  $c_0(y) = \frac{a_0(t_y, y, \nu)}{\left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t_y, y) \right|^{1/2}}$ . Ainsi

$$\nabla c_0(y, \nu) = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)^{-1/2} \left[ \nabla t_y \frac{\partial a_0}{\partial t} + \nabla a_0(t_y, y, \nu) - \frac{a_0}{2} \left( \nabla t_y \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 \nabla \varphi}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)^{-1} \right].$$

On rappelle que

$$\nabla t_y = -\frac{\partial_t \nabla \varphi}{\partial_t^2 \varphi}(t_y, y). \quad (5.6)$$

En mettant ces deux équations dans  $\mathcal{L}_\nu a_0 = \frac{\partial a_0}{\partial t} + 2\nabla \varphi \nabla a_0 + (\Delta \varphi - \nu) a_0 = 0$ , prise en  $(t_y, y)$ , on trouve :

$$\frac{\partial a_0}{\partial t} \left[ 1 + 2\nabla\varphi \cdot \frac{\partial \nabla\varphi / \partial t}{\partial^2 \varphi / \partial t^2}(t_y, y) \right] + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)^{1/2} \left[ 2\nabla\varphi \nabla c_0 + (\Delta\varphi - \nu)c_0 \right] + c_0 \nabla\varphi \cdot \left[ \frac{\partial^2 \nabla\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial \nabla\varphi / \partial t}{\partial^2 \varphi / \partial t^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^3} \right] = 0.$$

Comme  $\nabla\varphi(t_y, y) = \nabla\Phi(y)$ , et  $\Delta\varphi(t_y, y) = \Delta\Phi(y) + \left( \frac{\partial \nabla\varphi / \partial t}{\partial^2 \varphi / \partial t^2} \right)^2(t_y, y)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a_0}{\partial t} \left[ 1 + 2\nabla\varphi \cdot \frac{\partial \nabla\varphi / \partial t}{\partial^2 \varphi / \partial t^2}(t_y, y) \right] \\ & + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)^{1/2} \left[ 2\nabla\Phi \nabla c_0 + (\Delta\Phi - \nu)c_0 \right] \\ & + c_0 \left[ \nabla\varphi(t_y, y) \cdot \left[ \frac{\partial^2 \nabla\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial \nabla\varphi / \partial t}{\partial^2 \varphi / \partial t^2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} \right] \right. \\ & \left. + \frac{(\partial \nabla\varphi / \partial t)^2}{\partial^2 \varphi / \partial t^2}(t_y, y) \right] = 0. \end{aligned}$$

Or si on dérive par rapport à  $t$  l'égalité  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + p(y, \nabla\varphi) = 0$ , on trouve

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t_y, y) + 2\nabla\varphi(t_y, y) \frac{\partial \nabla\varphi}{\partial t}(t_y, y) = 0 \quad (5.7)$$

et le terme en  $\frac{\partial a_0}{\partial t}$  est nul.

Dérivons encore une fois cette égalité :

$$\left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} + 2\nabla\varphi \frac{\partial^2 \nabla\varphi}{\partial t^2} + 2 \left( \frac{\partial \nabla\varphi}{\partial t} \right)^2 \right) = 0.$$

Comme  $\nabla\varphi(t_y, y) \frac{\partial \nabla\varphi / \partial t}{\partial^2 \varphi / \partial t^2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} = -\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3}$ , cette dernière égalité montre que  $c_0$  vérifie bien l'équation du lemme.  $\square$

Enfin, on a le lemme 3.5.3 pour  $f_0$  dans  $\Omega_+$  exactement de la même manière que pour  $d_0$  dans  $\Omega_-$ .

On étend maintenant l'hypothèse **(H3)** en

**(H5)** La projection  $\pi_y : \Lambda_{0,+} \cap \tilde{W}_{0,-} \rightarrow \mathbf{R}^n$  est un difféomorphisme sur son image.

La fonction  $\Phi$  se prolonge donc sur  $W_0$  un voisinage de  $g_0 \setminus \{y_0\}$  et l'équation  $\eta = \nabla\Phi(y)$  définit  $\Lambda_{0,+}$  dans le voisinage de  $\{\gamma_0(t), t > 0\}$ ,  $\tilde{W}_{0,-}$ .

Cette hypothèse et la proposition 3.1.5 permet de prolonger le développement de  $u$  dans  $W_0$  grâce aux lemmes ci-dessus.

Lorsque  $y$  tend vers  $y_0$ ,  $y \in W_0$ , l'équation éiconale montre que  $\nabla\varphi_+$  et  $\nabla\Phi$  tendent vers 0 donc les équations différentielles ci-dessus ne permettent pas de prolonger les fonctions  $c_0$  et  $f_0$  en  $y_0$ .

Pour prolonger ces fonctions en ce point, et obtenir un développement de  $u$  sur un voisinage microlocal de  $\gamma_0$ , il faut faire une transformation FBI (associée à une transformation canonique  $\kappa$ ) qui rende la projection en  $x$  de  $\kappa(\Lambda_{0,+})$  difféomorphe sur son image dans un voisinage dans  $\mathbb{C}^{2n}$  de  $\kappa(y_0, 0)$ .

### 3.6 Transformation FBI

Soit la transformation FBI  $T$  associée à la transformation canonique :

$$\kappa : (y, \eta) \longrightarrow (x, \xi) = (y - i\eta, \eta) \text{ de phase } \Psi(x, y) = i(x - y)^2/2.$$

On a noté  $(y, \eta)$  les coordonnées avant la transformation et  $(x, \xi)$  les nouvelles coordonnées. Si  $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  vaut 1 dans un voisinage de 0, on prend une réalisation de  $T$  :

$$\forall w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}), Tw(x, h) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-y)^2/2h} \omega(x-y) w(y, h) dy.$$

Dans la suite, on n'écrit plus  $\omega$  (i.e. on pose  $\omega \equiv 1$ ) car cela modifie  $Tw$  par un terme exponentiellement petit quand  $h$  tend vers zéro. On n'a donc pas besoin ici de tenir compte de ce terme.

On commence par chercher un opérateur pseudodifférentiel  $\tilde{P}$  ayant un symbole

$$\tilde{p}(x, \xi, h) \sim \sum_{n \in \mathbb{N}/2} h^n p_n(x, \xi), \quad p_{1/2} = 0$$

et vérifiant pour tout  $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$TPw = \tilde{P}Tw. \quad (6.1)$$

Soit donc  $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Deux intégrations par parties en chacune des variables  $y_j$  mènent à

$$TPw = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-y)^2/2h} [-(x-y)^2 + nh - V(y)] w(y) dy. \quad (6.2)$$

D'autre part,

$$\tilde{P}Tw = (2\pi h)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-z)\xi/h} \tilde{p}(x, \xi, h) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(z-y)^2/2h} w(y) dy dz d\xi,$$

soit,

$$\tilde{P}Tw = (2\pi h)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} w(y) \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-z)\xi/h} \tilde{p}(x, \xi, h) e^{-(z-y)^2/2h} dz d\xi dy.$$

On écrit la phase de la deuxième intégrale

$$(x-z)\xi + i(z-y)^2/2 = i(x-y)^2/2 + i(z-x)^2/2 - (z-x)(\xi - i(x-y)),$$

et avec un changement de variables, on obtient :

$$\tilde{P}Tw = (2\pi h)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-y)^2/2h} w(y) \int_{\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - i(x-y))} e^{-u^2/2h} e^{-iu\eta/h} \tilde{p}(x, \eta + i(x-y), h) du d\eta dy.$$

Soit  $\chi$  une fonction troncature valant 1 près de 0. On a, modulo  $O(h^\infty)$  :

$$\tilde{P}Tw = (2\pi h)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-y)^2/2h} \chi(x-y) w(y) \int_{\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - i(x-y))} e^{-u^2/2h} e^{-iu\eta/h} \tilde{p}(x, \eta + i(x-y), h) du d\eta dy.$$

On suppose que  $\tilde{p}$  est analytique sur  $\mathbb{R}^{2n}$  et admet donc une extension holomorphe sur un voisinage de  $\mathbb{R}^{2n}$ . En choisissant bien  $\chi$  (en fonction de  $x$ ), on peut faire une déformation de contour pour trouver, avec  $v = u + i\eta$  :

$$\tilde{P}T w = (2\pi h)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-y)^2/2h} \chi(x-y) w(y) \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-v^2/2h} e^{-\eta^2/2h} \tilde{p}(x, \eta + i(x-y), h) dv d\eta dy.$$

On peut calculer l'intégrale en  $v$  et

$$\tilde{P}T w = (2\pi h)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-y)^2/2h} \chi(x-y) w(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2/2} \tilde{p}(x, \sqrt{h}\eta + i(x-y), h) h^{n/2} d\eta dy. \quad (6.3)$$

Etudions l'intégrale en  $\eta$ . On cherche  $\tilde{p}(x, \xi, h)$  sous la forme  $\tilde{p}(x, \xi, h) = \sum_{k \in \mathbb{N}/2} h^k \tilde{p}_k(x, \xi)$ ,  $\tilde{p}_{1/2} = 0$ , on a donc :

$$\tilde{p}(x, \sqrt{h}\eta + i(x-y), h) = \tilde{p}_0(x, \sqrt{h}\eta + i(x-y)) + h\tilde{p}_1(x, \sqrt{h}\eta + i(x-y)) + O(h^{3/2}),$$

$$\tilde{p}(x, \sqrt{h}\eta + i(x-y), h) = \tilde{p}_0(x, i(x-y)) + \sqrt{h} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \xi}(x, i(x-y)) \eta$$

$$+ (h/2)^t \eta \frac{\partial^2 \tilde{p}_0}{\partial \xi^2}(x, i(x-y)) \eta + h\tilde{p}_1(x, i(x-y)) + O(h^{3/2}),$$

et donc

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} e^{\eta^2/2} \tilde{p}(x, \sqrt{h}\eta + i(x-y)) d\eta = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2/2} \tilde{p}_0(x, i(x-y)) d\eta \\ & + h \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2/2} d\eta \left[ \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 \tilde{p}_0}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(x, i(x-y)) \eta_i \eta_j + \tilde{p}_1(x, i(x-y)) \right] + O(h^{3/2}) \end{aligned}$$

car le terme en  $\sqrt{h}$  s'annule (par imparité). Le changement de variable  $\eta_j \rightarrow -\eta_j$  donne, pour  $i \neq j$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2/2} \eta_i \eta_j d\eta = 0,$$

et une intégration par parties mène à

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2/2} \eta_i^2 d\eta = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\eta^2/2} d\eta = (2\pi)^{n/2}.$$

Finalement, si on revient à (6.3), on trouve, modulo  $O(h^\infty)$ .

$$\tilde{P}T u = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-y)^2/2h} w(y) \left[ \tilde{p}_0(x, i(x-y)) + h \left( \frac{1}{2} \text{Tr} \frac{\partial^2 \tilde{p}_0}{\partial \xi^2}(x, i(x-y)) + \tilde{p}_1(x, i(x-y)) \right) + O(h^{3/2}) \right] dy$$

En comparant avec (6.2), on a nécessairement :  $\tilde{p}_0(x, i(x-y)) = -V(y) - (x-y)^2$ , ce qui donne

$$\tilde{p}_0(x, \xi) = \xi^2 - V(x + i\xi),$$

et

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{p}_0}{\partial \xi^2}(x, i(x-y)) \right] + \tilde{p}_1(x, i(x-y)) = n$$



d'où

$$\tilde{p}_1(x, \xi) = -\frac{1}{2}\text{Tr}V''(x + i\xi).$$

A posteriori, le symbole  $\tilde{p}$  est bien analytique sur  $\mathbb{R}^{2n}$  (par hypothèse sur  $V$ ) et les calculs ci-dessus sont justifiés.

Dans la suite, on aura besoin seulement de ces deux premiers termes du développement de  $\tilde{p}(x, \xi, h)$ .

Notons  $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\Lambda}_{0,\pm}, \dots$  l'image par  $\kappa$  des ensembles qu'on a défini dans la première partie. Soit  $\tilde{\Lambda}_{0,+}^c$  le complexifié de la variété lagrangienne  $\tilde{\Lambda}_{0,+}$ . On note de plus

$$(x(t), \xi(t)) = \tilde{\gamma}_0(t) = \kappa(y(t), \eta(t)) = e^{tH_{\tilde{p}}}(y_0, 0).$$

On calcule

$$\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \xi}(x, \xi) = 2\xi - i\nabla V(x + i\xi)$$

donc il existe un voisinage de  $\bar{\gamma}_0$  sur lequel  $\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \xi}(x, \xi) \neq 0$  si  $(x, \xi) \neq (0, 0)$ . En particulier  $\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \xi}(y_0, 0) = -i\nabla V(y_0) \neq 0$  : la variété  $\tilde{\Lambda}_{0,+}^c$  a une projection en  $x$  difféomorphe sur son image au voisinage de  $(y_0, 0)$ .

L'hypothèse **(H5)** et la proposition 3.1.5 donnent alors l'existence d'un voisinage simplement connexe de  $\tilde{\gamma}_0$  noté  $\tilde{W}$  tel que la projection  $\pi_x : \tilde{\Lambda}_{0,+}^c \cap \tilde{W} \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$  est un difféomorphisme sur son image.

Ainsi il existe une fonction  $\psi_+$  définie sur  $W = \pi_x(\tilde{W})$  telle que

$$\tilde{\Lambda}_{0,+}^c = \{(x, \xi), \xi = \nabla \psi_+(x), x \in W.\}$$

Comme  $(0, 0) \in \Lambda_{0,+} \cap a(\tilde{W})$  où  $a(\tilde{W})$  est l'adhérence de  $\tilde{W}$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \nabla \psi_+(x) = 0. \quad (6.4)$$

De plus :

**Lemme 3.6.1** *Si  $y \in \Omega_+$ , alors*

- i) si  $y - i\nabla \varphi_+(y) \in W$ ,  $\nabla \psi_+(y - i\nabla \varphi_+(y)) = \nabla \varphi_+(y)$ ,*
- ii) si  $y - i\nabla \Phi(y) \in W$ ,  $\nabla \psi_+(y - i\nabla \Phi(y)) = \nabla \Phi(y)$ .*

**Preuve :** On rappelle que  $\Gamma_{\pm}$  sont les lagrangiennes entrante et sortante locales au voisinage de  $(0, 0)$ . On a d'un côté :

$$\kappa(\Gamma_+) = \kappa\{(y, \nabla \varphi_+(y)), y \in \Omega\} = \{(x, \xi), \xi = -\Im x, \Re x = \nabla \varphi_+(\Re x)\},$$

et de l'autre,  $\kappa(\mathbb{R}^{2n}) = \{(x, \xi), \xi = -\Im x\}$ ,

$$\tilde{\Lambda}_+^c = \{(x, \xi), \xi = \nabla \psi_+(x)\} \text{ dans } \tilde{W}.$$

Comme  $\Gamma_+ \subset \Lambda_{0,+}$ ,

$\kappa(\Gamma_+) \subset \kappa(\Lambda_{0,+}) \subset \tilde{\Lambda}_{0,+}^c \cap \kappa(\mathbb{R}^{2n})$ , donné dans  $\tilde{W}$  par  $\{(x, \xi), \xi = -\Im x = \nabla \psi_+(x)\}$ . Ainsi

$$\kappa(\Gamma_+) \subset \{(x, \xi), \xi = -\Im x, \Im x = -\nabla \psi_+(x)\}.$$

On a montré que  $\{x, \Im x = -\nabla \varphi_+(\Re x)\} \subset \{x, \Im x = -\nabla \psi_+(x)\}$  ce qui donne la première partie du lemme. La seconde se démontre de la même façon.  $\square$

Dans la proposition qui suit, on fixe la fonction  $\psi_+$  qui n'est définie pour le moment que par son gradient.

**Proposition 3.6.2** *On peut choisir  $\psi_+$  analytique sur  $W$  telle que*

$$\text{si } x = y - i\nabla \Phi(y) \in W, y \in \Omega_+, \psi_+(x) = -i(\Im x)^2/2 + \Phi(\Re x),$$

$$\text{si } x = y - i\nabla \varphi_+(y) \in W, y \in \Omega_+, \psi_+(x) = -C(0) - i(\Im x)^2/2 + \varphi_+(\Re x), \text{ où } C(0) = \int_{\tilde{\gamma}_0} \xi dx.$$

**Preuve :** Soit  $W_{\pm} \subset W$  des voisinages de  $\pi_x(\kappa(\gamma_{\pm}))$ . On note  $\tilde{0}^{\pm} = \lim_{x \rightarrow 0, x \in W_{\pm}} x$ . On sait que  $\nabla \psi_+$  tend vers zéro quand  $x$  tend vers  $\tilde{0}^{\pm}$ , et on choisit  $\psi_+$  telle que  $\psi_+(\tilde{0}^+) \equiv \lim_{x \rightarrow \tilde{0}^+} \psi_+(x) = 0$ . Alors, si  $y \in \Omega_+, y - i\nabla \Phi(y) \in W$ ,

$$\nabla_y [\psi_+(y - i\nabla \Phi(y))] = (1 - i\Phi''(y))\nabla \psi_+(y - i\nabla \Phi(y)) = (1 - i\Phi''(y))\nabla \Phi(y),$$

grâce au lemme 3.6.1.

En intégrant, on a pour une constante  $C$  :

$$\psi_+(y - i\nabla \Phi(y)) = -i(\nabla \Phi(y))^2/2 + \Phi(y) + C. \quad (6.5)$$

Comme  $\Phi(0) = \nabla \Phi(0) = 0$ , on obtient bien la première égalité du lemme en faisant tendre  $x$  vers  $\tilde{0}^+$ .

Si  $y \in \Omega_+, y - i\nabla \varphi_+(y) \in W$ , on a de la même manière l'équivalent de la formule (6.5) pour  $\varphi_+$  avec une autre constante  $C$ . Or  $\varphi_+(0) = \nabla \varphi_+(0) = 0$  donc

$$C = \psi_+(\tilde{0}^-) = \int_{\tilde{\gamma}_0^+}^{\tilde{\gamma}_0^-} \nabla \psi_+(z) dz$$

et on intègre le long de  $\tilde{\gamma}_0$  pour calculer  $C$ .  $\square$

On reprend maintenant la solution  $u$  de  $(P - \rho)u = O(h^\infty)$  définie dans la partie 3.3, et on va calculer un développement de  $Tu$  près de  $\tilde{\gamma}_0$ , au voisinage de zéro. On pourra prolonger ensuite  $Tu$  le long de  $\tilde{\gamma}_0$  car  $Tu$  est une solution asymptotique de  $(\tilde{P} - \rho)w = 0$  par construction de  $\tilde{P}$ .

### 3.7 Développement de $Tu$ au voisinage de zéro

Soient  $K'_\pm \subset K_\pm \subset \Omega_\pm$  des compacts. Dans cette partie, on calcule  $Tu$  lorsque  $x \in \{x \in \mathbb{C}^n, \Re x \in K'_\pm\}$  et on étudie les équations différentielles vérifiées par certaines fonctions qui interviennent dans le développement obtenu pour  $Tu$ .

#### 3.7.1 Développement de $Tu$ pour $\Re x \in K'_-$

On rappelle les notations :  $\nu = \frac{i\rho}{h}$ ,  $S = S_0 - \nu$ .

**Proposition 3.7.1** *Soit  $C_0 > 0$ ,  $C_1 > 0$  et*

$\mathcal{A} = \mathcal{A}(C_0, K'_-) = \{x \in \mathbb{C}^n, \Re x \in K'_-, |\Im x + \nabla\varphi_+(\Re x)| \leq C_0|\rho|\}$ . *Il existe  $h_0 > 0$  tel que si  $0 < h \leq h_0$ ,  $x \in \mathcal{A}$ ,  $|\rho/h| < C_1$ , alors*

$$Tu(x) = e^{(\Im x)^2/2h} e^{i\varphi_+(\Re x)/h} C(h) (\varphi_1(\Re x))^{-(S_0-\nu)/\mu_1} \frac{a_{0,0}(\Re x)}{(\det(1 - i\varphi''_+(\Re x)))^{1/2}} [1 + O(h^{\hat{\mu}_1/2\mu_1})], \quad (7.1)$$

où

$$C(h) = (ih)^{S/\mu_1} \frac{\Gamma(S/\mu_1)}{\mu_1} (2\pi h)^{n/2}$$

et  $|O(h^{\hat{\mu}_1/2\mu_1})| < C(K'_-, C_0, C_1) h^{\hat{\mu}_1/2\mu_1}$ .

**Preuve :** Soit  $x$  tel que  $\Re x \in K'_-$ . On a, modulo un  $O(h^\infty)$  qu'on n'écrira pas,

$$Tu = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-y)^2/2h} u(y) \chi_1(y) dy,$$

où  $\chi_1 \in C_0^\infty(K_-)$ ,  $\chi_1 \equiv 1$  sur  $K'_-$ .

$$Tu(x, h) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-y)^2/2h} \chi_1 e^{i\varphi_+(y)/h} e^{i(\rho/\mu_1)(\log\varphi_1(y))/h} (\varphi_1)^{-S_0/\mu_1} a_{0,0}(y) c(h) (1 + O(h^{\hat{\mu}_1/2\mu_1}))$$

où  $c(h) = (ih)^{S/\mu_1} \Gamma(S/\mu_1) / \mu_1$ .

Si  $x \in \mathcal{A}$  on l'écrit  $x = y_0 - i\nabla\varphi_+(y_0) + ih\alpha_0 = x_0 + ih\alpha_0$ , où  $\alpha_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\alpha_0| < C_0 C_1$ . Ainsi

$$Tu(x, h) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_0-y)^2/2h} \chi_1 e^{i\varphi_+(y)/h} e^{\nu/\mu_1 \log\varphi_1(y)} (\varphi_1)^{-S_0/\mu_1} a_{0,0}(y) e^{i\alpha_0(x_0-y)} e^{-h\alpha_0^2} C(h) (1 + O(h^{\hat{\mu}_1/2\mu_1})).$$

La phase de cette intégrale a un unique point critique  $y_0 = \Re x$ . La méthode de la phase stationnaire donne alors (7.1) (Cf. [13]). On choisit ici la détermination de la racine carrée du déterminant qui se déforme continuellement en 1 sous l'homotopie  $[0, 1] \ni s \rightarrow (1-s)(1 - i\varphi''_+(\Re x)) + s1$ .  $\square$

On note

$$\alpha_0(x) = \frac{a_{0,0}(\Re x) (\varphi_1(\Re x))^{-S/\mu_1}}{(\det(1 - i\varphi''_+(\Re x)))^{1/2}} = \frac{d_0(\Re x)}{(\det(1 - i\varphi''_+(\Re x)))^{1/2}}.$$

**Proposition 3.7.2** La fonction  $\alpha_0(y, \nu)$  vérifie l'équation

$$2\nabla\varphi_+\nabla\alpha_0 + \left[ \frac{1}{2}\text{Tr}\left((2 + V''(y))(1 - i\varphi_+''(y))^{-1}\varphi_+''(y) + iV''(y)\right) - \nu \right] \alpha_0 = 0$$

**Preuve :** L'expression de  $\alpha_0$  donne :

$$\ln|\alpha_0(y, \nu)| = \ln|d_0(y, \nu)| - \frac{1}{2}\ln|\det(1 - i\varphi_+''(y))|.$$

Ecrivons  $(1 - i\varphi_+''(y)) = e^B$ , pour une matrice  $B(y)$  régulière. En dérivant, on a  $-i\varphi_+'''(y) = \nabla B(y)e^B = \nabla B(1 - i\varphi_+''(y))$  et donc

$$\nabla B(y) = -i\varphi_+'''(y)(1 - i\varphi_+''(y))^{-1}.$$

De plus,  $\log(\det(1 - i\varphi_+''(y))) = \text{Tr}B(y)$ , et donc

$$\nabla \log(\det(1 - i\varphi_+''(y))) = \nabla \text{Tr}B(y) = \text{Tr}(\nabla B(y)).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\nabla\alpha_0}{\alpha_0} &= \frac{\nabla d_0}{d_0} - \frac{1}{2}\text{Tr}\nabla B(y) \\ \frac{\nabla\alpha_0}{\alpha_0} &= \frac{\nabla d_0}{d_0} - \frac{1}{2}\text{Tr}\left[-i\varphi_+'''(y)(1 - i\varphi_+''(y))^{-1}\right]. \end{aligned}$$

Cela donne

$$2\nabla\varphi_+ \frac{\nabla\alpha_0}{\alpha_0} = 2\nabla\varphi_+ \frac{\nabla d_0}{d_0} + i\text{Tr}\left[\nabla\varphi_+\varphi_+'''(y)(1 - i\varphi_+''(y))^{-1}\right].$$

Grâce au lemme 3.5.3 et avec  $\nabla\varphi_+\varphi_+''' + \varphi_+''^2 + V''/2 = 0$  (issu de  $p(y, \nabla\varphi_+(y)) = 0$ ), on obtient

$$\begin{aligned} 2\nabla\varphi_+ \frac{\nabla\alpha_0}{\alpha_0} &= -\Delta\varphi_+ + \nu - i\text{Tr}\left[(V''/2 + \varphi_+''^2)(1 - i\varphi_+''(y))^{-1}\right], \\ 2\nabla\varphi_+ \frac{\nabla\alpha_0}{\alpha_0} &= -\text{Tr}\left[\varphi_+'' + i(V''/2 + \varphi_+''^2)(1 - i\varphi_+''(y))^{-1}\right] + \nu. \end{aligned}$$

L'égalité  $(1 - i\varphi_+''(y))^{-1}(1 - i\varphi_+''(y)) = 1$ , donne  $(1 - i\varphi_+''(y))^{-1} = i(1 - i\varphi_+''(y))^{-1}\varphi_+'' + 1$  et donc

$$iV''/2(1 - i\varphi_+''(y))^{-1} = -(V''/2)(1 - i\varphi_+''(y))^{-1}\varphi_+'' + iV''/2.$$

Finalement

$$\varphi_+'' + i(V''/2 + \varphi_+''^2)(1 - i\varphi_+''(y))^{-1} = (1 - V''/2)(1 - i\varphi_+''(y))\varphi_+'' + iV''/2$$

ce qui donne la proposition.  $\square$

Si on revient à l'étude de  $Tu$ , on a

**Remarque 3.7.3** Si  $|\Im x + \nabla\varphi_+(\Re x)| \geq \epsilon$  pour  $\epsilon > 0$ , la phase non stationnaire montre que  $Tu(x) = O(h^\infty)$ .

### 3.7.2 Développement de $Tu$ pour $\Re x \in K'_+$

Soit maintenant  $x$  tel que  $\Re x \in K'_+$ . On calcule :

$$Tu = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-y)^2/2h} (u_1 + u_2) \chi_2(y) dy$$

où  $\chi_2 \in C_0^\infty(K_+)$ ,  $\chi_2 \equiv 1$  dans  $K'_+$ , et  $u_1$  et  $u_2$  sont définies dans (5.5).

**Proposition 3.7.4** *Soit  $C_0 > 0$ ,  $C_1 > 0$  et*

$\mathcal{B} = \mathcal{B}(C_0, K'_+) = \{x \in \mathbb{C}^n, \Re x \in K'_+, |\Im x + \nabla \Phi(\Re x)| \leq C_0 |\rho|\}$ . *Il existe  $h_0 > 0$  tel que si  $0 < h \leq h_0$ ,  $x \in \mathcal{B}$ , et  $|\rho/h| < C_1$ , alors*

$$Tu(x) = e^{(\Im x)^2/2h} e^{i\Phi(\Re x)/h} C_1(h) \frac{c_0(\Re x, \nu)}{(\det(1 - i\Phi''(\Re x)))^{1/2}} [1 + O(h)],$$

où  $c_0(y, \nu)$  est défini après (5.4)

$$C_1(h) = (2\pi h)^{(n+1)/2} e^{i\pi/4} \quad (7.2)$$

et  $|O(h)| < C(K'_+, C_0, C_1)h$ .

**Preuve :** On écrit à nouveau  $x = y_0 - i\nabla \Phi(y_0) + ih\alpha_0$  et on utilise comme précédemment la phase stationnaire. Dans le compact  $K'_+$  qui ne contient pas 0, on a  $\nabla \varphi_+ \neq \nabla \Phi$  et la remarque 3.7.3 montre que pour  $x \in B$  et  $|\rho|$  assez petit, le terme  $Tu_2$  (avec la phase  $\varphi_+$ ) est négligeable. On obtient ainsi la proposition.  $\square$

On note

$$\beta_0 = \beta_0(\Re x, \nu) = \frac{c_0(\Re x, \nu)}{(\det(1 - i\Phi''(\Re x)))^{1/2}}$$

On démontre l'équivalent de la proposition 3.7.2 de la même manière :

**Proposition 3.7.5** *La fonction  $\beta_0$  vérifie*

$$2\nabla \Phi \nabla \beta_0 + \frac{1}{2} \text{Tr}[(2 + V'')(1 - i\Phi'')^{-1} \Phi'' + iV''] \beta_0 = \nu \beta_0.$$

On a enfin le dernier développement de  $Tu$  :

**Proposition 3.7.6** *Soit  $C_0 > 0$ ,  $C_1 > 0$  et*

$\mathcal{C} = \mathcal{C}(C_0, K'_+) = \{x \in \mathbb{C}^n, \Re x \in K'_+, |\Im x + \nabla \varphi_+(\Re x)| \leq C_0 |\rho|\}$ . *Il existe  $h_0 > 0$  tel que si  $0 < h \leq h_0$ ,  $x \in \mathcal{C}$ , et  $|\rho/h| < C_1$ , alors*

$$Tu(x) = e^{(\Im x)^2/2h} e^{i\varphi_+(\Re x)/h} C_2(h) \frac{a_{0,0}(\Re x) (-\varphi_1(\Re x))^{-S/\mu_1}}{(\det(1 - i\varphi_+''(\Re x)))^{1/2}} [1 + O(h^{\hat{\mu}_1/2\mu_1})], \quad (7.3)$$

où

$$C_2(h) = (-ih)^{\bar{S}/\mu_1} \Gamma(\bar{S}/\mu_1) \frac{(2\pi h)^{n/2}}{\mu_1}, \quad (7.4)$$

et  $|O(h^{\hat{\mu}_1/2\mu_1})| < C(K'_+, C_0, C_1)h^{\hat{\mu}_1/2\mu_1}$ .

On note

$$\delta_0(x) = \frac{a_{0,0}(\mathfrak{R}x)(-\varphi_1(\mathfrak{R}x))^{-S/\mu_1}}{|\det(1 - i\varphi_+''(\mathfrak{R}x))|^{1/2}}.$$

On a la proposition 3.7.2 pour  $\delta_0$  exactement de la même manière que pour  $\alpha_0$ .

On peut maintenant prolonger le développement  $Tu$  le long de  $\tilde{\gamma}_0$ .

### 3.8 Prolongement de $Tu$ le long de $\tilde{\gamma}_0$

Dans  $\kappa(\Omega)$ , la fonction  $w = Tu$  est une solution asymptotique de

$$(\tilde{P} - \rho)v = 0 \tag{8.1}$$

Dans ce domaine, on réécrit cette solution sous la forme

$$w = e^{i\psi_+/h}g(x, h).$$

Les propositions de la partie précédente donnent le terme principal  $g_0(x)$  du développement de  $g(x, h)$  dans  $\kappa(\Omega_\pm)$ . Grâce à (8.1) on prolonge  $g_0(x)$  au voisinage de  $\tilde{\gamma}_0$  : on a l'équation de transport pour  $g_0$  : si

$$\mathcal{L}_0 = \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \xi}(x, \nabla \psi_+(x)) \nabla + i\tilde{p}_1(x, \nabla \psi_+) + (1/2) \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \tilde{p}_0}{\partial \xi_j \partial \xi_k}(x, \nabla \psi_+) \frac{\partial^2 \psi_+}{\partial x_j \partial x_k}(x),$$

alors  $(\mathcal{L}_0 - \nu)g_0 = 0$ .

**Lemme 3.8.1** Soit  $\beta(y) = g_0(y - i\nabla\Phi(y))$ ,  $y \in \Omega_+$ ,  $y - i\nabla\Phi(y) \in W$ . Cette fonction vérifie

$$2\nabla\Phi\nabla\beta + \frac{1}{2}\text{Tr}[(2 + V'')(1 - i\Phi'')^{-1}\Phi'' + iV'']\beta = \nu\beta.$$

**Preuve :** On rappelle le résultat du lemme 3.6.1 : si  $y \in \Omega_+$   $\nabla\psi_+(y - i\nabla\Phi(y)) = \nabla\Phi(y)$ . Une dérivation donne  $(1 - i\Phi''(y))\psi_+''(y) = \Phi''(y)$  et donc

$$\psi_+''(y) = (1 - i\Phi''(y))^{-1}\Phi''(y).$$

L'équation  $(\mathcal{L} - \nu)g_0 = 0$  devient alors

$$\begin{aligned} & (2\nabla\Phi(y) + i\nabla V(y))\nabla g_0(y - i\nabla\Phi(y)) \\ & + \left[ \frac{i}{2}\text{Tr}V''(y) + \frac{1}{2}\text{Tr}((2 - V''(y))(1 - i\Phi''(y))^{-1}\Phi''(y)) - \nu \right] g_0(y - i\nabla\Phi(y)) = 0. \end{aligned}$$

Une dérivation de l'équation éiconale montre que

$$2\nabla\Phi + i\nabla V = 2(1 - i\Phi'')\nabla\Phi$$

et donc

$$2\nabla\Phi(y)((1-i\Phi''(y))\nabla g_0(y-i\nabla\Phi(y))) + \left[\frac{1}{2}\text{Tr}((2-V''(y))(1-i\Phi''(y))^{-1}\Phi''(y)+iV'')-\nu\right]g_0(y-i\nabla\Phi(y)) = 0.$$

Cela donne le lemme car  $\nabla\beta(y) = (1-i\Phi''(y))\nabla g_0(y-i\nabla\Phi(y))$ .  $\square$

On a de même :

**Lemme 3.8.2** Soit  $\delta(y) = g_0(y-i\nabla\varphi_+(y))$ ,  $y \in \Omega_+$ ,  $y-i\nabla\varphi_+(y) \in W$ . Cette fonction vérifie

$$2\nabla\varphi_+\nabla\delta + \frac{1}{2}\text{Tr}\left[(2+V'')(1-i\varphi_+'' )^{-1}\varphi_+'' + iV''\right]\delta = \nu\delta.$$

La fonction  $g_0$  ainsi définie est bien un prolongement des fonctions  $\beta_0$  et  $\delta_0$  le long de  $\tilde{\gamma}_0$  :

**Corollaire 3.8.3**  $\exists\hat{C}_1, \hat{C}_2$  tels que,

- i)  $\forall t \geq B$ ,  $\beta_0(y(t)) = \hat{C}_1 g_0(x(t))$ ,
- ii)  $\forall t \leq -B$ ,  $\delta_0(y(t)) = \hat{C}_2 g_0(x(t))$ .

**Preuve :** On va démontrer le point i) de la proposition, le point ii) se démontrant de la même manière.

Soit  $t \geq B$ . On rappelle qu'alors

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2\nabla\Phi(y(t)) \\ x(t) &= y(t) - i\nabla\Phi(y(t)) \in W \text{ et } x'(t) = 2\nabla\psi_+(x(t)). \end{aligned}$$

Les équations différentielles vérifiées par les fonctions  $\beta_0(y)$ ,  $\beta(y) = g_0(y-i\nabla\Phi(y))$  montrent que si  $t \geq B$ ,  $f_0(t) = \beta_0(y(t))$  et  $f(t) = \beta(y(t))$  vérifient une même équation différentielle d'ordre un :

$$f'(t) = [r(x(t)) + \nu]f(t),$$

où  $r(x) = -\text{Tr}[(1-V''(x)/2)\psi_+''(x) + iV''/2]$ . Ces fonctions sont donc proportionnelles et on a le corollaire.  $\square$

Avant de calculer les deux constantes  $\hat{C}_1, \hat{C}_2$ , résumons les résultats obtenus jusqu'à présent. On a construit une solution asymptotique de  $(\tilde{P} - \rho)w = 0$  au voisinage de  $\tilde{\gamma}_0$  dans  $\kappa(\Omega)$ . Grâce aux propositions 3.7.4, 3.7.6 on en a obtenu un développement asymptotique dans  $\kappa(\Omega_+)$  lorsque  $h$  tend vers 0. Le corollaire ci-dessus permet d'écrire le long de  $\gamma_{\pm}$  cette solution sous la forme :

$$\forall t \geq B, Tu(x(t)) = e^{i\psi_+/h}C_1(h)\hat{C}_1g_0(x(t),\nu)(1+O(h)),$$

$$\forall t \leq -B, Tu(x(t)) = e^{i\psi_+/h}C_2(h)\hat{C}_2g_0(x(t),\nu)(1+O(h^{\mu_1/2\mu_1})).$$

On peut donc prolonger le premier terme du développement de  $Tu$  le long de  $\tilde{\gamma}_0$  de deux façons, comme suggéré par la figure (FIG1).

La fonction  $g_0$  est définie modulo une constante multiplicative. On la choisit de sorte que  $g_0(x(0)) = 1$ . On calcule maintenant  $\hat{C}_j$ ,  $j = 1, 2$ .

On commence par le

**Lemme 3.8.4** Soit  $f(t) = g_0(x(t), \nu)$ , on a vu que

$$f'(t) = [r(x(t)) + \nu]f(t),$$

où  $r(x) = -\text{Tr}[(1 + V''(x + i\nabla\psi_+(x))/2)\psi_+''(x) - iV''(x + i\nabla\psi_+(x))/2]$ . De plus, les intégrales suivantes sont convergentes

$$A_+ = \int_0^{+\infty} (r(x(t)) + S_0 - \mu_1)dt,$$

$$A_- = \int_0^{-\infty} (r(x(t)) + S_0)dt,$$

et si  $E_{\pm} = e^{A_{\pm}}$ ,

$$f(t) \sim E_+ e^{(-S_0 + \mu_1)t} e^{\nu t}, \quad t \longrightarrow +\infty,$$

$$f(t) \sim E_- e^{-S_0 t} e^{\nu t}, \quad t \longrightarrow -\infty.$$

**Preuve :** L'équation différentielle vérifiée par  $f$  et la condition  $f(0) = 1$  donne

$$f(t) = \exp\left[\int_0^t r(x(s))ds + \nu t\right].$$

D'autre part, pour  $t \geq B$ ,  $r(x(t)) = r(y(t) - i\nabla\Phi(y(t))) = -\text{Tr}[(1 - i\Phi'')^{-1}(\Phi'' - iV''/2)(y(t))]$ . On rappelle la remarque 3.2.11 :  $\Phi''(y(t)) - \Phi''(0^+) = O(e^{-(\mu_2 - \mu_1)t})$ . Cela donne l'existence de  $C' > 0$  tel que

$$\left| r(x(t)) - r(0^+) \right| < C' e^{-(\mu_2 - \mu_1)t}.$$

Or  $r(0^+) = -S_0 + \mu_1$  grâce à la proposition 3.2.8 et on obtient bien

$$\int_0^{+\infty} |r(x(t)) + S_0 - \mu_1| dt < +\infty, \quad f(t) \sim E_+ e^{(-S_0 + \mu_1)t} e^{\nu t}, \quad t \longrightarrow +\infty.$$

Les mêmes arguments donne la deuxième moitié de ce lemme.  $\square$

On calcule maintenant les constantes  $\hat{C}_j$ ,  $j = 1, 2$  :

**Proposition 3.8.5** On a,

$$\hat{C}_2 = \left[ \sqrt{2}\mu_1 \left( \det(1 - i\Phi''(0^+)) \right)^{1/2} E_+ \right]^{-1},$$



et

$$\hat{C}_1 = \frac{2^{-S/\mu_1}}{(\det(1 - i\varphi_+''(0)))^{1/2} E_-}.$$

**Preuve :** On calcule  $\hat{C}_2$  en écrivant :

$$\hat{C}_2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\beta_0(y(t))}{g_{0,0}(y(t) - i\nabla\Phi(y(t)))}.$$

Par définition,

$$\beta_0(y(t)) = \frac{a_0(t, y(t), \nu)}{|\partial_t^2 \varphi(t, y(t))|^{1/2} (\det(1 - i\Phi''(y(t))))^{1/2}}.$$

On a les équivalents ou limite, quand  $t$  tend vers  $+\infty$  :

$$a_0(t, y(t), \nu) \sim e^{-St} = e^{-(S_0 - \nu)t}, \text{ avec (3.5) car } a_{0,0}(0) = 1,$$

$$\det(1 - i\Phi''(y(t))) \longrightarrow \det(1 - i\Phi''(0^+)),$$

$$\partial_t^2 \varphi(t, y(t)) \sim -\mu_1^2 \varphi_1(y(t)) e^{-\mu_1 t} \sim 2\mu_1^2 e^{-2\mu_1 t}.$$

Cela donne

$$\beta_0(y(t)) \sim \frac{e^{(\mu_1 - S)t}}{\sqrt{2\mu_1} \det(1 - i\Phi''(0^+))} \text{ quand } t \text{ tend vers } +\infty.$$

Avec le lemme 3.8.4, on trouve bien l'expression de  $\hat{C}_2$ .

Calculons maintenant  $\hat{C}_1$ . On a à nouveau

$$\hat{C}_1 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\delta_0(y(t))}{g_{0,0}(y(t) - i\nabla\varphi_+(y(t)))}.$$

On rappelle que

$$\delta_0(y(t)) = \frac{a_{0,0}(y(t)) (\varphi_1(y(t)))^{-S/\mu_1}}{(\det(1 - i\varphi_+''(y(t))))^{1/2}}.$$

Si  $t \geq B$ ,

$$\frac{d}{dt} \varphi_1(y(t)) = 2\nabla\varphi_+(y(t))\nabla\varphi_1(y(t)) = \mu_1 \varphi_1(y(t))$$

donc  $\varphi_1(y(t)) = Ce^{\mu_1 t}$ . Comme de plus  $\varphi_1 \sim -\sqrt{2\mu_1}y$  quand  $y$  tend vers 0, on trouve, avec l'équivalent de  $y(t)$  :

$$\forall t \leq -B, \varphi_1(y(t)) = -2e^{\mu_1 t}$$

et par suite

$$\alpha_0(y(t)) \sim \frac{2^{-S/\mu_1}}{(\det(1 - i\varphi_+''(0)))^{1/2}} e^{-St}$$

ce qui termine la démonstration de la proposition, toujours grâce au lemme 3.8.4.  $\square$

On a construit une solution asymptotique sortante de  $(\tilde{P} - \rho)w = 0$  pour  $x \in \pi_x(\kappa(\Omega))$  ayant sur  $\pi_x(\kappa(\Omega_+))$  le développement

$$w = Tu = e^{i\psi_+/h} g_0(x) (1 + O(h^{\hat{\mu}_1/2\mu_1})).$$

Ce développement se prolonge le long de  $\tilde{\gamma}_0$ . On l'écrit encore

$$w = e^{i\psi_+/h} g_0(x) (1 + O(h^{\hat{\mu}_1/2\mu_1})),$$

pour une fonction  $g_0$  qui est multiplié par  $C(\rho) = C_1(h)\hat{C}_1/C_2(h)\hat{C}_2$  lors du "passage en zéro" dans le sens  $t$  croissant. On rappelle que  $\hat{C}_j$   $j = 1, 2$  sont données dans la proposition 3.8.5 et  $C_j$ ,  $j = 1, 2$  dans les propositions 3.7.4 et 3.7.6. On calcule

$$C(\rho) = \frac{(ih/2)^{S/\mu_1} \Gamma(S/\mu_1) e^{iC(0)/h}}{[\det(1 - i\varphi_+''(0))]^{1/2} E_-} \left[ \frac{(2\pi h)^{1/2} e^{i\pi/4}}{\sqrt{2} [\det(1 - i\Phi''(0^+))]^{1/2} E_+} \right]^{-1},$$

ou encore

$$C(\rho) = \frac{e^{-i\pi/4} E_+}{\sqrt{\pi h} E_-} \left( \frac{1 + i\mu_1}{1 - i\mu_1} \right)^{1/2} \left( \frac{ih}{2} \right)^{S/\mu_1} e^{iC(0)/h} \Gamma(S/\mu_1).$$

La fonction  $w$  est analytique en  $\rho$  (car l'équation différentielle vérifiée par  $w$  est bien sûr analytique en  $\rho$ ). Le développement obtenu pour  $w$  montre qu'il existe une fonction  $\epsilon(\rho, h)$  analytique en  $\rho$ , vérifiant  $\epsilon(\rho, h) = O(h^{\hat{\mu}_1/2\mu_1})$  si  $|\rho| \leq C_0 h$  et telle que  $w$  sera une solution monovaluée seulement si  $C(\rho) = 1 + \epsilon(\rho, h)$ . Cela s'écrit :

$$(ih/2)^{-i\rho/\mu_1 h} \Gamma\left(\frac{S_0 - i\rho/h}{\mu_1}\right) = \sqrt{\pi h} e^{i\pi/4} (ih/2)^{-S_0/\mu_1} e^{-iC(0)/h} \frac{E_-}{E_+} \left(\frac{1 - i\mu_1}{1 + i\mu_1}\right)^{1/2} (1 + \epsilon(\rho, h)).$$

Motivé par le cas de la dimension un, on fait la conjecture :

**Conjecture 3.8.6** *Il existe une résonance de  $P$  dans  $\{z \in \mathbb{C}, |z - \rho| = O(h^\infty)\}$ , où  $\rho \in \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq C_0 h\}$  vérifie  $C(\rho) = 1 + \epsilon(\rho)$ . Soit*

$$C(0) - \frac{\rho}{\mu_1} \log h - \frac{\rho}{\mu_1} \log\left(\frac{i}{2}\right) + \frac{h}{i} \log \left[ \frac{\Gamma(S_0/\mu_1 - (i/h)\rho/\mu_1)}{\sqrt{2\pi}} \right] =$$

$$h\left(2k\pi + \left(\pi/4 - \frac{S_0}{i\mu_1} \log i\right) + i \log(h/2) \left(\frac{S_0}{\mu_1} - \frac{1}{2}\right) + i(A_+ - A_-) + \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1 - i\mu_1}{1 + i\mu_1}\right)\right) + \tilde{\epsilon}(\rho, h), \quad (8.2)$$

où  $\tilde{\epsilon} = h \log(1 + \epsilon(\rho, h))$  est une fonction analytique telle que  $\tilde{\epsilon}(\rho, h) = O(h^{1+\hat{\mu}_1/2\mu_1})$ .

**Remarque 3.8.7** En dimension un, on a  $S_0 = \mu_1/2$ , et donc dans cette équation,  $\pi/4 - \frac{S_0}{i\mu_1} \log i = 0$  et  $\log(h/2) \left( \frac{S_0}{\mu_1} - \frac{1}{2} \right) = 0$ . Avec  $\mu_1 = |V''(0)|$ , on retrouve l'équation de quantification donnée dans la partie A.

On étudie l'équation (8.2) :

**Proposition 3.8.8** Si  $n \geq 2$ , et si  $C' > S_0$ , il existe  $k_0 > 0$  assez grand tel que pour  $k \geq k_0$ , il existe un intervalle  $J_k$  tel que si  $h \in J_k$ , il existe une unique solution  $\rho_k(h) \in \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq C'h\}$  de (8.2). De plus

$$\Im \rho_k(h) = -\left(S_0 - \mu_1/2\right)h + O\left(\frac{h}{\log h}\right),$$

$$\Re \rho_k(h) = \frac{(C(0) - 2k\pi h)\mu_1}{\log h} + O\left(\frac{h}{\log h}\right).$$

**Preuve :** Si  $|\rho| \leq C'h$ ,  $C' > S_0$ , l'équation (8.2) s'écrit :

$$C(0) - \frac{\rho}{\mu_1} \log h - h\left(2k\pi + i \log(h) \left(\frac{S_0}{\mu_1} - \frac{1}{2}\right)\right) = \nu(\rho, h),$$

pour une fonction analytique  $\nu(\rho, h) = O(h)$  uniformément en  $k$  et  $\rho$ .

Cette équation sans second membre a une unique solution dans  $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq C'h\}$  :

$$\tilde{\rho}_k(h) = \frac{(C(0) - 2k\pi h)\mu_1}{\log h} - i\left(S_0 - \mu_1/2\right)h,$$

pour  $h$  dans un intervalle  $J_k$  tel que  $\left| \frac{(C(0) - 2k\pi h)\mu_1}{h \log h} \right| \leq (C' - S_0)/\mu_1 + 1/2$ .

Si  $h \in J_k$  est assez petit, le théorème de Rouché donne ensuite l'existence d'une unique solution  $\rho_k(h)$  de (8.2) dans  $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq C'h\}$  et de plus

$$\rho_k(h) = \frac{(C(0) - 2k\pi h)\mu_1}{\log h} - i\left(S_0 - \mu_1/2\right)h + O\left(\frac{h}{\log h}\right).$$

□

# Bibliographie

- [1] R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundation of mechanics*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, New York, (1980).
- [2] R. Abraham and J. Robbin, *Transversal Mappings and Flows*, W.A. Benjamin, New-York (1967).
- [3] S. Fujiie et T. Ramond, *Matrice de scattering et résonances associées à une orbite hétérocline*, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol.69 n°1 (1998) p.31-82.
- [4] C. Gérard et J. Sjöstrand, *Semiclassical Resonances Generated by a Closed Trajectory of Hyperbolic Type*, Commun. Math. Phys. 108, p.391-421 (1987).
- [5] A. Grigis et J. Sjöstrand, *Microlocal Analysis for Differential Operators*, London Mathematical Society, Lecture Notes series 196, Cambridge (1994).
- [6] B. Helffer and J. Sjöstrand, *Semiclassical analysis for Harper's equation III. Cantor structure of the spectrum*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) No. 39 (1989), p.1-124.
- [7] B. Helffer and J. Sjöstrand, *Multiple Wells in the Semi-Classical Limit I*, Comm. in Partial Differential Equations 9(1984) p.337-408.
- [8] B. Helffer and J. Sjöstrand, *Multiple Wells in the Semi-Classical Limit III -Interaction Through Non-Resonant Wells*, Math. Nachr. (1985) p.263-313.
- [9] B. Helffer and J. Sjöstrand, *Résonance en limite semi-classique*, Bull. Soc. Math. Fr, Tome 114 (1986).
- [10] R. Hermann, *Differential Geometry and the Calculus of Variation*, Academic Press New-York London (1968).
- [11] C. März, *Spectral asymptotics for Hill's equation near the potential maximum*, Asymptotic Analysis 5 (1992) p.221-267.
- [12] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press New-York London (1970).
- [13] J. Sjöstrand, *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque 95 (1982).