UNIVERSITÉ de CAEN/BASSE-NORMANDIE
U.F.R Sciences.
ÉCOLE DOCTORALE S.I.M.E.M.

THÈSE

présentée par

CHAU Huu-Tai Pierre

et soutenue le

17 octobre 2002

en vue de l'obtention du

DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN
Spécialité : Constituants élémentaires
(Arrêté du 30 Mars 1992)

Sujet :

Symétrie et géométrie du problème à N-corps Application à la physique nucléaire

Jury :

M.	**Pieter VAN ISACKER**, chercheur CEA, GANIL Caen	Directeur de thèse
M.	**Jean-François BERGER**, chercheur CEA, BIII Bruyères-le-Chatel	Rapporteur
M.	**Alejandro FRANK**, professeur d'Université, UNAM México	Rapporteur
M.	**Oriol BOHIGAS**, directeur de recherche CNRS, LPTMS Orsay	
M.	**Jacques MEYER**, professeur d'Université, IPNL Lyon	
M.	**Oscar NAVILIAT-CUNCIC**, professeur d'Université, LPC Caen	

Table des matières

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier les directeurs du Ganil MM. Guerreau et Fouan ainsi que leurs successeurs MM. Goutte et Lewitovicz qui m'ont accueilli pendant ces trois années.

J'adresse également mes remerciements aux membre du jury : en particulier, je suis reconnaissant à Jean-François Berger et Alejandro Frank pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je remercie MM. Bohigas, Meyer et Naviliat.

Je remercie énormément Piet pour m'avoir permis de faire une thèse de physique nucléaire dans un formalisme utilisant la théorie des groupes et la géométrie. J'ai beaucoup apprécié sa rigueur scientifique et en particulier son insistance pour procéder à des vérifications du code sur des exemples facilement contrôlables ainsi que les discussions sur les théorèmes de Descartes, Gauss-Bonnet, les angles extérieurs...Je lui suis également reconnaissant de m'avoir accordé une grande liberté.

Je remercie très chaleureusement Nadya Smirnova pour la collaboration que nous avons eue pendant ces trois années et pour son amitié : spaciba ! Merci notamment pour les papiers écrits ensemble (surtout pour ceux qui ont été refusés !), pour les discussions, pour les thés à Leuven, pour la relecture du manuscrit (la correction des fautes de français !) et surtout son soutien dans des moments difficiles. I would like to thank Nadya and Dmitry for their kindness and for welcoming me in their home in Belgium.

À nouveau, je remercie les rapporteurs :
- Jean-François Berger pour le travail que j'ai effectué sous sa direction lorsque j'étais scientique du contingent et pour tous ses commentaires sur le manuscrit
- et Alejandro Frank, "the stubborn Mexican" si je puis me permettre, pour notre collaboration sur les interactions aléatoires : c'est en voulant démontrer que la matrice de covariances des énergies *ne sert absolument à rien* que j'ai fini par découvrir les expressions du cas diagonal. Merci pour les discussions devant le tableau "à la Moshinsky" : muchas gracias señor Frank !

Je remercie celles et ceux qui ont apporté un concours "technique" à la rédaction de cette thèse : les experts en Paw, Nicolas L. et surtout Sylvie, les experts en LaTeX, Nicolas M. et Stéphane.

Je remercie également Armelle Latour pour son aide précieuse dans la gestion des tâches admistratives. Merci aussi à Michel Lion et à François Dujardin.

Merci aux doctorants et aux jeunes docteurs du Ganil et du L.P.C. :

– les "très vieux" : Denis, Olivier J., Karim, Jean-Michel, Frédéric, Anne-Sophie, María, Alain, Yannick ;
– les "vieux" : Olivier M., Sylvie, Bertrand, Jacques ;
– les "contemporains" : Benoît, Stéphane B. (Babas), Nicolas M., Stéphane G., Jean-Luc, avec une mention particulière pour "mon chauffeur presque officiel", Babas. Merci Jean-Luc : je ne suis pas le seul à avoir des idées en dormant.
– les "p'tits jeunes" : Alexis, Carmen, Jimmy, Charles-Édouard, Lydie, Josquin, Cédric et Vincent. Qui va sonner le rassemblement pour le déjeuner ?

J'adresse aussi mes remerciements à mes quatre collègues de bureau successifs, María, Christelle, Frank et Nicolas L. ainsi qu'à François De Oliveira Santos.

Un immense merci à tous mes parisiens favoris et plus particulièrement à Laëtitia, Philippe, Thierry dit Delta-Zoulou, Gwénola, Anne-Fleur, Marguerite, Sandrine, David, Éric dit la taupe masquée, Corinne, Élodie, Bernard dit le Portos, toutes les personnes que j'ai croisées à ABO et toutes celles que j'omets de citer. Merci pour ces moments passés en Ile de France !

Enfin je remercie toute ma famille et en premier lieu mes parents. Je remercie très fort Patrick pour tout plein de choses mais je lui conseille de s'entrainer au bowling et de ne plus jeter son portable du cinquième étage ! Je remercie aussi très fort Yves, le vrai docteur, Tijania, Chloé et Marie-Noëmie.

Chapitre 1

Introduction

De nombreux systèmes (le système solaire, les noyaux, les molécules...) font intervenir plusieurs corps en interaction. Pour connaître leurs propriétés comme leur mouvement, leur stabilité, leur spectre..., il est donc nécessaire de résoudre un problème à N-corps. Malheureusement ce problème est compliqué voire insoluble et il faut parfois avoir recours à des approximations.

En physique nucléaire, la situation est rendue encore un peu plus compliquée en raison de notre connaissance imparfaite de l'interaction entre nucléons. Néanmoins des techniques ont été mises au point ; elles permettent de prédire la structure des noyaux en tirant profit de leur structure en couches constatée expérimentalement : on peut ainsi considérer dans une première approximation que les protons et le neutrons baignent dans un champ moyen et qu'ils sont quasiment libres de se déplacer dans le noyau indépendamment les uns des autres ; ce champ moyen est cependant complexe puisqu'il est créé par les nucléons eux-même et va évoluer avec leurs configurations.

Dans les sections suivantes sont rapidement présentées deux des méthodes permettant d'approximer le problème à N-corps en physique nucléaire : la méthode Hartree-Fock et le modèle en couches. Ces deux méthodes sont très efficaces mais pour des raisons qui seront un peu plus développées dans la troisième section, il est nécessaire de tenir compte des symétries et de la géométrie du problème à N-corps quantique.

1.1 La méthode Hartree-Fock et extensions

Dans cette approche champ moyen (cf par exemple [Rin80, Ber85, Ber91]), on part d'une interaction nucléon-nucléon effective (Skyrme [Sky59, Vau72, Cha97], Gogny [Gog75, Gog77, Dec80]...) dépendant de la densité nucléaire. L'état fondamental est obtenu en minimisant la fonctionnelle $\mathcal{F} = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle/\langle\psi|\psi\rangle$ par un principe variationnel dans l'espace des déterminants de Slater. On aboutit alors à l'équation auto-cohérente de Hartree-Fock :

$$[h, \rho] = 0\,, \tag{1.1}$$

où ρ est l'opérateur densité et $h = \partial\mathcal{F}/\partial\tilde{\rho}$ ($\tilde{\rho}$ est la transposée de ρ). La résolution de (1.1) permet d'une part d'obtenir le champ moyen optimal et d'autre part les états de particules indépendantes ainsi que leurs énergies respectives. L'énergie totale du système est alors la somme des N énergies "simple-particule".

Cette approche ne prend cependant pas en considération les interactions résiduelles entre nucléons. Pour les traiter, il est nécessaire d'aller au-delà de l'approche de champ moyen et d'employer des méthodes qui tiennent compte notamment des excitations particules-trous ou des interactions d'appariement entre nucléons qui sont dans des états renversés du temps les uns des autres. Parmi ces extensions, on peut citer par exemple les méthodes Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) [Bar57a, Bar57b] et Hartree-Fock-Bogolyubov (HFB) (cf par exemple [Rin80, Ber85, Ber91]).

HF (et ses extensions) est donc un formalisme basé sur une approche de type champ moyen totalement microscopique et dont le seul ingrédient est une interaction effective dépendant de la densité. HFB offre ainsi un cadre théorique commun permettant :

- de reproduire la majorité des situations rencontrées en physique nucléaire puisque de très bons accords entre les calculs HFB et les résultats expérimentaux ont été obtenus aussi bien pour des noyaux de la vallée de stabilité que pour des noyaux exotiques : par exemple, la méthode HFB a proposé une bonne description des bandes superdéformées autour de la masse $A \sim 190$ [Mey92, Per97, Dan98, Lib99], des isotopes riches en neutrons du nickel [Gir88] ;
- d'interpréter les effets de phénomènes physiques tels que l'appariement notamment sur les propriétés du fondamental de noyaux proches de la drip-line [Dob96] ou sur l'oscillation des masses des noyaux pairs-impairs [Dug02a, Dug02b] ;
- et de prédire de nouveaux états de la matière nucléaire comme les noyaux bulles [Ber01a].

1.2 Le modèle en couches

Depuis son succès dans l'interprétation des nombres magiques en terme de fermetures de couches des niveaux d'un hamiltonien à particules indépendantes ayant un fort couplage spin-orbite [Goe48, Hax49, Goe49, Goe50a, Goe50b], le modèle en couches (cf par exemple [Rin80, Mon01]) a été largement adopté pour décrire la structure des noyaux (spectroscopie, transitions électromagnétiques...).

L'interaction nucléaire étant à courte portée, les nucléons doivent être proches pour pouvoir interagir mais en raison du principe de Pauli, le libre parcours moyen des nucléons est relativement important (environ la taille du noyau). Par conséquent la probabilité de trouver plusieurs particules proches donc interagissant ensemble diminue avec le nombre de participants impliqués ; on peut ainsi se limiter à des termes à un- et deux-corps dans l'hamiltonien nucléaire. L'équation de Schrödinger s'écrit donc

$$\hat{H}|\psi(x_1,\cdots,x_N)\rangle = \left(\sum_{i=1}^{N} T_i + \sum_{i<j}^{N} V_{ij}\right)|\psi(x_1,\cdots,x_N)\rangle\,, \tag{1.2}$$

où x_i désigne l'ensemble des variables (variables spatiales, spin, isospin...) associées à la particule i, T_i est l'opérateur d'énergie cinétique et V_{ij} désigne l'interaction à deux-corps.

La résolution de (1.2) se fait en plusieurs étapes :

1. Choix d'un champ moyen.

   On ré-écrit l'équation de Schrödinger en faisant intervenir un champ moyen auxiliaire U_i :

   $$\hat{H} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} T_i + U_i}_{H_0} + \underbrace{\sum_{i<j}^{N} V_{ij} - \sum_{i=1}^{N} U_i}_{H_1}\,. \tag{1.3}$$

   U_i est choisi afin de minimiser H_1 par rapport à H_0. En général on choisit un oscillateur harmonique ou un potentiel de Woods-Saxon. On résout alors l'équation de Schrödinger

   $$\hat{H}_0\phi(x_1,\cdots,x_N) = E_0\phi(x_1,\cdots,x_N)\,, \tag{1.4}$$

   où $\phi(x_1,\cdots,x_N)$ est un déterminant de Slater à N particules :

   $$\phi(x_1,\cdots,x_N) = \begin{vmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \cdots & \phi_N(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \cdots & \phi_N(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_1(x_N) & \phi_2(x_N) & \cdots & \phi_N(x_N) \end{vmatrix}\,.$$

   Il suffit donc de trouver les solutions "simple-particule" $\phi_i(x)$ de l'équation $\hat{H}_0\phi_i(x) = \varepsilon_i\phi_i(x)$. L'énergie d'un déterminant de Slater ϕ est alors la somme de N énergies "simple-particule" ε_i.

2. Traitement de l'interaction résiduelle.

   Les déterminants de Slater obtenus constituent une base de l'espace des états de N fermions dans laquelle on peut ensuite calculer les éléments de matrices de l'interaction résiduelle H_1. Une fois cette matrice obtenue, on diagonalise l'hamiltonien complet et on obtient alors le spectre et les fonctions d'onde du système.

Cependant la dimension de la matrice augmente très rapidement avec le nombre de particules et avec l'espace de valence si bien qu'il devient impossible de procéder à la diagonalisation.

Des techniques ont été mises au point pour contourner cette difficulté :

1. On peut tronquer l'espace de valence en séparant les nucléons en deux catégories : les nucléons de cœur qui restent inertes sur leur couche et les nucléons de valence qui interagissent avec le cœur et entre eux. La diagonalisation se fait uniquement dans l'espace de valence. La taille des matrices à diagonaliser peut demeurer malgré cette première troncature trop importante et des troncatures additionnelles doivent être envisagées : ainsi la séniorité généralisée [Gam69, Pit82, All88, Mon01] est une approximation du modèle en couches considérant que les états de basses énergies sont bien décrits dans l'espace des états ayant un maximum de paires couplées à $J = 0$. Cela permet de réduire davantage la taille des matrices et de bons accords entre les calculs et les mesures expérimentales ont été obtenus par exemple pour les isotopes du Nickel et pour les noyaux de la ligne isotonique N=82 [Mon01, Mon02]. Cette troncature est phénoménologique et s'appuie des considérations physiques dont la pertinence ne peut être vérifiée qu'a posteriori.

2. D'autres approches proposent des troncatures basées sur des techniques numériques dépendant moins d'hypothèses a priori. C'est notamment le cas de Shell Model Monte Carlo [Joh93, Lan93] et de Quantum Monte Carlo Diagonalization [Hon95] qui tirent profit de la complétude des états propres de l'hamiltonien et de la transformation d'Hubbard-Stratonovich [Hub59] pour déterminer un espace réduit dans lequel les calculs seront menés.

   SMMC permet de déterminer l'énergie du fondamental par un calcul d'intégrale effectué à l'aide d'un processus Monte Carlo. Elle a été appliquée à la couche *sd* [Orm94] et au noyau ^{54}Fe [Alh94] pour lesquels la diagonalisation complète était difficilement réalisable. Cette méthode rencontre néanmoins quelques difficultés techniques comme le problème de signe.

   La seconde technique, QMCD, consiste à construire par itération les états qui contribuent le plus aux niveaux de plus basses énergies : la diagonalisation de l'hamiltonien se fait dans ce sous-espace restreint. Cette méthode de résolution du problème à N-corps permet non seulement d'obtenir le fondamental et son énergie mais aussi les états excités. Elle a été testée avec succès sur la couche *sd* [Hon96]. Le gain sur la dimension des matrices à diagonaliser est considérable et permet de déterminer la spectroscopie et les propriétés électromagnétiques de noyaux pour lesquels la dimension des espaces demeure à l'heure actuelle trop grande et rend impossible la diagonalisation complète (même avec une méthode de Lanczos) :

   – ainsi alors qu'en schéma-m, le calcul pour le ^{48}Cr dans le sous-espace $M = 0$ fait intervenir une matrice 1963461×1963461, QMCD converge lorsque la base construite par itération contient environ 600 vecteurs [Ots99].
   – pour le noyau exotique ^{64}Ge, QMCD [Hon96, Ots99] donne accès aux ni-

veaux de plus basses énergies ainsi qu'aux transitions électromagnétiques sans avoir à diagonaliser l'hamiltonien complet qui est une matrice $1087455228 \times 1087455228$.

Des améliorations ont été apportées [Miz96] ; elles permettent en projetant sur les états de bons moments angulaires d'accélérer la convergence en réduisant davantage la dimension des matrices et de simplifier le calcul des états. Dans cette version, QMCD a permis d'étudier la disparition de la fermeture de couche N=28 dans le noyau de ^{56}Ni [Ots98, Ots99] et d'effectuer des calculs autour de la couche N=20 [Uts99].

Néanmoins tous les calculs modèle en couches reposent sur le choix d'une interaction. La détermination des éléments de matrice de l'hamiltonien peut se faire de diverses manières :

- La méthode la plus phénoménologique calcule ces éléments de matrice en minimisant l'écart quadratique entre les énergies expérimentales et les énergies calculées. Par exemple cette procédure est employée par Cohen et Kurath pour la couche p [Coh65]. Les termes de l'interaction USD de Wildenthal pour la couche sd sont obtenus de façon analogue [Wil84]. Dernièrement Honma et collaborateurs [Hon02] ont employé cette technique afin de construire une interaction effective pour la couche pf.
- Une seconde façon de procéder consiste à construire une interaction nucléon-nucléon dans le vide à l'aide des données sur les diffusions neutron-proton et proton-proton puis à déduire de cette interaction dans le vide l'interaction entre nucléons dans la matière nucléaire en employant le formalisme de la matrice G [Bru55]. La partie monopolaire de l'interaction obtenue par cette procédure n'est pas correcte si bien qu'il faut ensuite la réajuster [Duf96, Zuk94] et la remplacer par des termes permettant de reproduire les données expérimentales comme l'énergie de liaison.
- L'approche la plus fondamentale essaie d'utiliser l'interaction entre les quarks constituant les nucléons pour bâtir le potentiel nucléaire. Elle ne donne actuellement que peu de résultats quantitatifs [Ord96].

1.3 La problématique

Toutes ces méthodes permettent de résoudre de façon approchée le problème à N-corps même pour des noyaux exotiques. Néanmoins en dépit de leur efficacité, des questions demeurent quant à leur interprétation et la compréhension que l'on peut en tirer sur la matière nucléaire. En particulier, Zelevinsky et Volya écrivent en conclusion de [Zel01] : "*[...]The blunt diagonalization of huge shell-model matrices cannot be an optimal way of solving the nuclear many-body problem. Even randomly taken but geometrically correct interactions generate some features of observed regular spectra[...]*" !

Se posent donc deux séries de questions :

- D'une part le choix de l'interaction nucléaire qui constitue a priori une étape importante dans la résolution du problème à N-corps - notamment dans le modèle en couches - est-il si crucial ? Ou bien le simple fait de se placer dans un espace de valence donné restreint-il le spectre du système ? Quelles propriètés d'un système conditionnent son spectre ?
- D'autre part que peut nous apprendre la résolution du problème à N-corps avec une interaction réaliste sur la nature du mouvement des nucléons au sein de la matière nucléaire ?

Les deux premiers chapitres de cette thèse tentent d'apporter des réponses à la première série de questions. Des propriétés importantes d'un système physique sont ses symétries ; aussi le premier chapitre de ce mémoire est consacré à l'usage que l'on peut faire des symétries en mécanique quantique. On rappelle notamment que, dans des cas particuliers, le problème à N-corps peut être résolu intégralement et analytiquement en utilisant des arguments de symétrie. Ce chapitre relativement formel propose une revue assez détaillée d'un certain nombre de résultats bien connus en théorie des groupes. On s'intéressera plus particulièrement sur la notion clef de représentations et la construction de bases de représentations irréductibles des algèbres unitaires qui, comme on le verra, occupent une place priviligiée en mécanique quantique.

Le second chapitre démontre qu'en plus de ses propriétés de symétrie, un système quantique possède une géométrie intrinsèque qui impose des conditions parfois très restrictives aux solutions du problème à N-corps notamment en ce qui concerne à la fois les candidats possibles pour l'état fondamental et la séquence des niveaux d'un opérateur à un- et deux-corps. Cette étude fera intervenir des interactions aléatoires.

Dans le troisième chapitre, nous tentons d'interpréter le mouvement des nucléons dans les noyaux lorsque des interactions réalistes sont utilisées pour approximer le problème à N-corps : nous présentons des critères permettant de savoir si ce mouvement est régulier ou chaotique.

Chapitre 2

Symétrie et mécanique quantique

> *[...] Si loin que la vue pût s'étendre, on n'apercevait que les abattoirs, le mur d'enceinte et quelques rares façades d'usines, pareilles à des casernes ou à des monastères ; partout des baraques et des plâtras, de vieux murs noirs comme des linceuls, des murs neufs blancs comme des suaires ; partout des rangées d'arbres parallèles, des bâtisses tirées au cordeau, des constructions plates, de longues lignes froides et la tristesse lugubre des angles droits. Pas un accident de terrain, pas un caprice d'architecture, pas un pli. C'était un ensemble glacial, régulier, hideux. Rien ne serre le cœur comme la symétrie. C'est que la symétrie, c'est l'ennui, et l'ennui est le fond même du deuil. Le désespoir bâille. On peut rêver quelque chose de plus terrible qu'un enfer où l'on souffre, c'est un enfer où l'on s'ennuierait. [...]*
> *Les Misérables - Victor Hugo.*

Dans ce chapitre, nous présentons un certain nombre de résultats relatifs aux groupes qui nous seront utiles par la suite. Nous débutons par un rappel de quelques définitions et propriétés puis nous nous intéressons au cas particuliers des groupes discrets. Nous nous arrêtons un assez long moment sur les groupes continus pour lesquels nous présentons quelques théorèmes. Nous focaliserons ensuite notre attention sur la notion fondamentale de représentation et sur les lemmes de Schur.

Après ce formalisme, nous présentons comment la notion de groupe et d'algèbre intervient au niveau de la mécanique quantique notamment grâce au théorème de Wigner et à la notion de symétrie dynamique. Nous nous intéressons ensuite plus particulièrement à l'algèbre unitaire et à la construction de vecteurs sous-tendant des représentations irréductibles de cette algèbre.

Nous clôturons le chapitre par une application à la spectroscopie nucléaire avec le formalisme IBM, en espérant que le lecteur ne se sera pas trop ennuyé...

2.1 Notions générales sur les groupes et les algèbres

2.1.1 Introduction

Les groupes constituent des structures algébriques relativement simples mais pour lesquels il demeure nécessaire de définir certaines notions pour pouvoir les utiliser et employer les résultats existants. Dans les sections suivantes, je me propose de présenter ces notions d'un point de vue formel. Ces résultats sont exposés en détail :

1. dans [Coh57, Bou60, Bas78, Pic73, Smi01] pour les groupes de Lie ;
2. dans [Jon96, Ham62, Bla97, Smi01] pour les groupes finis et les représentations des groupes de Lie ;
3. dans [Coh57, Pic73, Ber86, Tal93] pour tout ce qui concerne la géométrie différentielle.

2.1.2 Définitions

Définition 2.1.2.1 (loi de composition interne sur un ensemble)
Soit un ensemble E. On appelle loi de composition interne sur E toute application de $E \times E$ dans E, c'est à dire une application qui à tout couple d'éléments de E associe un élément du même ensemble E.

Définition 2.1.2.2 (groupe)
On appelle groupe tout couple $(G, \cdot)$ où G est un ensemble et $\cdot$ une loi de composition interne sur G qui vérifie les propriétés suivantes :

1. *associativité :*
$$\forall g_1, g_2, g_3 \in G, (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \,.$$
2. *élément neutre :*
$$\exists e, \forall g,\ g \cdot e = e \cdot g = g \,.$$
3. *inverse :*
$$\forall g, \exists g',\ g \cdot g' = g' \cdot g = e \,.$$
On appelle cet élément l'inverse de l'élément g et on le note g^{-1} (notation multiplicative).

Exemples :

1. L'ensemble des entiers relatifs muni de l'addition, $(\mathbb{Z}, +)$, est un groupe. Ce groupe est en plus commutatif (l'ordre des opérandes n'a pas d'importance : $\forall a, b,\ a + b = b + a$), on dit que c'est un groupe *commutatif* ou *abélien.*

2. L'ensemble des matrices inversibles de dimension n à coefficients complexes muni du produit est aussi un groupe dont l'élément neutre est la matrice identité. Ce groupe est noté $GL(n, \mathbb{C})$ et si le corps de base est le corps des réels alors on le note $GL(n, \mathbb{R})$. Notons que ces deux derniers groupes ne sont pas commutatifs dès que n est supérieur à 1.
3. L'ensemble des translations agissant sur l'espace "usuel" quadri-dimensionnel (espace-temps introduit par Einstein) est un groupe.

4. De même les matrices 4×4 qui conservent la forme bilinéaire $(x^0)^2-((x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2)$ forment un groupe : c'est le groupe des transformations de Lorentz et elles vérifient :
$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda \,.$$
La matrice η est le tenseur métrique :
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$
5. Un groupe occupe une importance toute particulière en physique, il s'agit du groupe de Poincaré constitué par les transformations de Lorentz et les translations et sur lequel est définie la loi de composition interne suivante : soit deux couples formés d'une transformée de Lorentz et d'une translation, $P_1 = (\Lambda_1, a_1)$ et $P_2 = (\Lambda_2, a_2)$ (les Λ_i sont des matrices de Lorentz 4×4 et les a_i sont des vecteurs dans l'espace quadri-dimensionnel), la composée de P_1 et P_2 est donnée par : $P_3 = P_2 \cdot P_1 = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$.
6. Les permutations de n objets munies de la loi de composition usuelle des applications est un groupe, c'est le groupe symétrique noté $\mathcal{S}_n$.
7. Les rotations planes d'angle $2\pi/n$, où n est un entier, forment un groupe noté C_n. Pour $n = 4$, le groupe est constitué des quatre rotations planes d'angle 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$. On aura souvent l'occasion d'utiliser ce groupe pour illustrer les notions rencontrées.

Les deux premiers exemples proposés nous permettent d'introduire la notion de groupe commutatif et de sous groupe.

Définition 2.1.2.3 (groupe abélien)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On dit que c'est un groupe abélien *ou* commutatif *si :*
$$\forall g_1, g_2, g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1 \,.$$

Définition 2.1.2.4 (sous groupe)
Soit un groupe $(G, \cdot)$ et H un sous ensemble de G. On dit que H constitue un sous groupe de G si :

1. *H est non vide.*
2. *H est stable pour la loi $\cdot$ c'est à dire si :*

$$\forall h_1, h_2,\ h_1 \cdot h_2 \in H$$

3. *l'inverse de tout élément de H est encore un élément de H.*

Proposition 2.1.2.1
Un sous ensemble non vide d'un groupe est un sous groupe de ce groupe si et seulement si :

$$\forall h_1, h_2 \in H,\ h_1 \cdot h_2^{-1} \in H\,.$$

Démonstration : Soit un ensemble non vide tel que

$$\forall h_1, h_2 \in H,\ h_1 \cdot h_2^{-1} \in H\,.$$

Vérifions que les propriétés définissant un sous groupe sont satisfaites.

1. Tout d'abord on a supposé que l'ensemble était non vide donc le premier point est bien satisfait.
2. Ensuite soit un élément de H, h. Comme h est dans H, le produit $h \cdot h^{-1} = e$ est aussi dans H. Donc pour tout élément h de H, le produit $e \cdot h^{-1} = h^{-1}$ est dans H. Ceci établit le troisième point de la définition d'un sous groupe.
3. Pour voir que le second point de la définition d'un sous groupe est aussi vrai, on remarque que d'après ce qui vient d'être établi : $\forall h_2 \in H, h_2^{-1} \in H$ par conséquent le produit $h_1 \cdot \left(h_2^{-1}\right)^{-1} = h_1 \cdot h_2$ est aussi un élément de H.

Les trois propriétés caractérisant un sous groupe sont donc satisfaites et donc tout sous ensemble non vide tel que :

$$\forall h_1, h_2 \in H,\ h_1 \cdot h_2^{-1} \in H\,,$$

est un sous groupe de G.

Réciproquement, soit un sous groupe H du groupe G. Par hypothèse il est non vide. Soit deux éléments h_1 et h_2 de ce sous groupe. La troisième propriété des sous groupes nous permet de dire que h_2^{-1} est aussi dans H et la stabilité par le produit permet d'affirmer que le produit $h_1 \cdot h_2^{-1}$ est encore dans H. Ceci achève la démonstration.

Le groupe $GL(n, \mathbb{C})$ possèdent de nombreux sous groupes intéressants en physique.
Exemples :

1. $U(n)$, groupe unitaire, est le sous groupe de $GL(n, \mathbb{C})$ constitué des matrice unitaires de dimension n, c'est à dire des matrices dont l'inverse est égal à l'hermitien conjugué :
$$A \in U(n) \Leftrightarrow A^\dagger = A^{-1} \, .$$
2. $SU(n)$, groupe spécial unitaire, est le sous groupe de $GL(n, \mathbb{C})$ constitué des matrices unitaires de dimension n et de déterminant $+1$, c'est également un sous groupe de $U(n)$:
$$A \in SU(n) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} A^\dagger & = & A^{-1} \\ \det(A) & = & +1 \end{array} \right. \, .$$
3. $SO(n)$, groupe spécial orthogonal, est le sous groupe de $SU(n)$ formé par les matrices réelles. C'est le groupe des matrices orthogonales de déterminants $+1$.
$$A \in SO(n) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} {}^tA & = & A^{-1} \\ \det(A) & = & +1 \end{array} \right. \, .$$
Ainsi $SO(3)$ est le groupe spécial orthogonal des matrices de dimension 3.

DÉFINITION 2.1.2.5 (CLASSE DE CONJUGAISON)
Soit un groupe G et a un élément de G. On appelle classe de conjugaison de a l'ensemble (a) défini par :
$$(a) = \left\{ b \in G, \exists g \in G \, , b = gag^{-1} \right\} \, .$$
Pour les groupes commutatifs, il y a autant de classes de conjugaison que d'éléments dans le groupe. Ainsi pour C_4 il y a 4 classes de conjugaison. On illustrera cette notion de classe de conjugaison dans la section 2.2.

DÉFINITION 2.1.2.6 (CO-ENSEMBLE)
Soit un sous groupe H d'un groupe $(G, \cdot)$ et a un élément du groupe. L'ensemble aH des éléments de G qui sont de la forme ah, $h \in H$, est appelé co-ensemble à gauche de H dans G.

On peut aussi définir de manière analogue les co-ensembles à droite.

Il faut noter qu'en général les co-ensembles ne sont pas des sous groupes : en effet le co-ensemble de a est un sous groupe de G si et seulement si l'élément a appartient à H.

Démonstration : Si le co-ensemble est un sous groupe alors il contient l'élément neutre du groupe donc il existe un élément $b \in H$ tel que $a \cdot b = e$ donc $a = b^{-1} \in H$ parce que H est un sous groupe et que b est un élément de ce sous groupe donc son inverse aussi.

Et réciproquement si $a \in H$ alors le co-ensemble aH est l'ensemble H qui est un sous groupe.

Théorème 2.1.2.1 (comparaison de co-ensembles)
Soit un sous groupe H d'un groupe $(G, \cdot)$ et soit deux co-ensembles à gauche a_1H et a_2H de ce sous groupe. Alors ces deux co-ensembles sont soit confondus soit disjoints.

Démonstration : Si les deux co-ensembles ont au moins un point en commun alors il existe h et h' dans H tels que

$$a_1 h = a_2 h' \Leftrightarrow a_1 = a_2 h' h^{-1} \Leftrightarrow a_2 = a_1 h \left(h'\right)^{-1} .$$

Soit $v = a_1 t, t \in H$ un élément de a_1H alors cet élément s'écrit aussi $v = a_2 h' h^{-1} t$ et le produit $h'h^{-1}t$ est un produit d'éléments de H donc est aussi dans H donc v est dans le co-ensemble a_2H ; on en conclut que $a_1H \subset a_2H$. Réciproquement si on considère $u = a_2 s, s \in H$, un élément de a_2H alors on écrit $u = a_1 h \left(h'\right)^{-1} s$ avec $h \left(h'\right)^{-1} s$ dans H donc $u \in a_1H$ et $a_2H \subset a_1H$. Donc des deux inclusions on déduit que deux co-ensembles qui ont une intersection non vide sont égaux.

Donc deux co-ensembles sont soit égaux soit d'intersection vide (c'est à dire disjoints).

Nous utiliserons ce résultat dans la démonstration du théorème de Lagrange (cf 2.2.3.1 page 29).

Quelques sous groupes possèdent des propriétés supplémentaires. C'est le cas des groupes que l'on appelle sous groupes distingués.

Définition 2.1.2.7 (sous groupe distingué)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On appelle sous groupe distingué tout sous groupe H qui vérifie :

$$\forall g \in G, g \cdot H = H \cdot g.$$

Ceci revient à dire que :

$$\forall g \in G, \forall h \in H, g \cdot h \cdot g^{-1} \in H .$$

Dans la suite, on omettra le point symbolisant la loi du groupe en gardant à l'esprit que ce n'est pas seulement l'ensemble qui détermine la structure du groupe mais bien la combinaison de l'ensemble et de la loi.

Remarque : Tout sous groupe d'un groupe commutatif est distingué.

Définition 2.1.2.8 (homomorphisme)
Soit deux groupes G_1 et G_2. On appelle homomorphisme ϕ de G_1 dans G_2 toute application de G_1 dans G_2 qui conserve la structure des groupes :

$$\forall h_1, g_1 \in G_1, \phi(h_1 g_1) = \phi(h_1)\phi(g_1)\,.$$

Définition 2.1.2.9 (isomorphisme, automorphisme)
Soit deux groupes G_1 et G_2 et ϕ un homorphisme de G_1 dans G_2. Si ϕ est une bijection de G_1 sur G_2 alors on dit que ϕ est un isomorphisme *de G_1 sur G_2 et que les groupes sont isomorphes. Si les deux groupes sont identiques, on parle d'*automorphisme.

Exemple : C_4 est isomorphe au groupe $\{1, i, -1, -i\}$ muni de la multiplication entre nombres complexes.

Définition 2.1.2.10 (image d'un homomorphisme, noyau d'un homomorphisme)
Soit deux groupes G_1 et G_2 et ϕ un homomorphisme de G_1 dans G_2. L'image de ϕ, notée $Im(\phi)$, est le sous ensemble de G_2 défini par :

$$g_2 \in Im(\phi) \Leftrightarrow \exists g_1 \in G_1, \phi(g_1) = g_2\,.$$

Le noyau de ϕ est le sous ensemble de G_1 noté $Ker(\phi)$ et défini par :

$$g_1 \in Ker(\phi) \Leftrightarrow \phi(g_1) = e_2\,.$$

On a noté e_2 l'élément neutre du groupe G_2.

Proposition 2.1.2.2
L'image d'un homomorphisme ϕ est un sous groupe de G_2.

Démonstration : Il est facile de vérifier les trois points suivants :

1. Tout d'abord il s'agit bien d'un sous ensemble non vide du groupe d'arrivée : $Im(\phi) \subset G_2, Im(\phi) \neq \emptyset$ car $\phi(e_1) = e_2 \in Im(\phi)$
2. Soit g_2 et h_2 deux éléments de $Im(\phi)$, il existe g_1 et h_1 tels que

$$\phi(g_1) = g_2\,, \phi(h_1) = h_2\,.$$

   Par conséquent $\phi(g_1 h_1) = g_2 h_2$ et $g_2 h_2$ est aussi un élément de $Im(\phi)$.
3. Et si $g_2 = \phi(g_1)$ est un élement de $Im(\phi)$ alors $g_2^{-1} = (\phi(g_1))^{-1} = \phi(g_1^{-1})$ est aussi un élément de $Im(\phi)$.

Proposition 2.1.2.3
Le noyau d'un homomorphisme ϕ est un sous groupe distingué de G_1.

Démonstration : On montre tout d'abord que le noyau est bien un sous groupe de G_1 puis on s'intéresse à son caractère distingué.

1. Sous groupe :
   (a) Le noyau est non vide car il contient au moins l'élément neutre de l'ensemble de départ.
   (b) Soit deux éléments du noyau, leur produit a pour image le produit des images donc c'est encore un élément du noyau.
   (c) Enfin l'image de l'inverse étant l'inverse de l'image, les inverses des éléments du noyau sont aussi dans le noyau.
2. Caractère distingué du noyau : soit un élément du groupe de départ, g et un élément quelconque du noyau k alors $\phi(gkg^{-1}) = \phi(g)\phi(k)\phi(g^{-1}) = \phi(g)\phi(k)\phi(g)^{-1} = \phi(g)e_2\phi(g)^{-1} = e_2$. Donc gkg^{-1} est aussi un élément du noyau quelque soit g dans G_1 et k dans le noyau donc le noyau est distingué.

Définition 2.1.2.11 (groupe quotient)
Soit G un groupe et H un sous groupe distingué *de G. On définit la relation suivante :*

$$g \equiv k \Leftrightarrow \exists a, b \in H, agb^{-1} = k.$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence[1] *et on peut définir sur l'ensemble de ses classes d'équivalence une loi de composition interne, notée $\cdot$, par :*

$$\forall a, b \in G, cl(a) \cdot cl(b) = cl(ab)\,.$$

L'ensemble des classes d'équivalence munie de cette loi est un groupe. C'est le groupe quotient que l'on note $(G/H, \cdot)$

Démonstration : Il faut démontrer que la relation ainsi définie est bien une relation d'équivalence puis établir que la loi définie $\cdot$ sur l'ensemble des classes d'équivalence de cette relation $\equiv$ ne dépend pas du choix des représentants des classes et qu'elle confère à l'ensemble G/H une structure de groupe.

1. $\equiv$ est une relation d'équivalence car elle est :
   (a) Réflexive : soit a un élément de G, $a = eae^{-1}$ donc $a \equiv a$.
   (b) Symétrique : soit a et b deux éléments de G tels que $a \equiv b$ donc il existe c et d dans H tel que : $cad^{-1} = b$. On peut en déduire que $a = c^{-1}bd$ donc il existe $c' = c^{-1} \in H$ et $d' = d^{-1} \in H$ (car H est un sous groupe de G) tel que $a = c'b(d')^{-1}$ et que $b \equiv a$.

[1] Une relation est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive.

(c) Transitive :

$$\begin{aligned}\forall a, b, c \in G, a \equiv b, b \equiv c, \quad &\exists g_1, g_2, h_1, h_2 \in H, \quad a = g_1 b g_2^{-1}, b = h_1 c h_2^{-1} \\ \Rightarrow a = g_1 h_1 c (g_2 h_2)^{-1} \qquad &\Rightarrow \qquad a \equiv c\,.\end{aligned}$$

Une fois encore on a utilisé le fait que H était un sous groupe de G donc stable par produit.

2. La loi ne dépend pas du choix des représentants de chaque classe. En effet si on considère deux classes de la relation $\equiv$, $cl(a)$ et $cl(b)$ et si on choisit a' et b' deux autres représentants de ces classes alors il existe c, d et f, g dans H tels que :

$$a = c a' d^{-1}\,, b = f b' g^{-1}\,.$$

Et le produit ab vérifie :

$$ab = c a' d^{-1} f b' g^{-1}\,.$$

Or H est un sous groupe donc $d^{-1}f$ est dans H. On note ce produit r et comme H est distingué, il existe s dans H tel que $rb' = b's^{-1}$. Donc $ab = ca'b's^{-1}g^{-1} = ca'b'(gs)^{-1}$. Et comme g et s sont deux éléments de H leur produit est encore un élément de H et ceci prouve que ab et $a'b'$ sont dans la même classe d'équivalence. La loi sur l'ensemble quotient ne dépend donc pas du choix des représentants et définit donc bien une loi de composition interne sur l'ensemble quotient.

3. Cette loi vérifie les propriétés de groupe : elle est associative, admet un élément neutre, le sous groupe H lui-même, et tout élément est inversible.

Maintenant que l'on a parlé de groupe quotient on est tenté de définir le produit direct de deux groupes.

Définition 2.1.2.12
Soit un groupe $(G, .)$ et des sous groupes $\{H_i\}_{i=1\cdots p}$ de $(G, .)$. On dit que $(G, .)$ est le produit direct des sous groupes $\{H_i\}_{i=1\cdots p}$ si :

1. *les éléments des sous groupes $\{H_i\}_{i=1\cdots p}$ commutent entre eux.*
2. *tout élément g de $(G, .)$ s'écrit de façon unique sous forme d'un produit :*

$$g = g_1 g_2 \cdots g_p\,, \forall i\, g_i \in H_i\,.$$

Définition 2.1.2.13 (groupe produit direct)
On peut définir à partir de deux groupes A_1 et A_2 leur groupe produit direct $G = A_1 \times A_2$ en définissant la loi suivante :

$$(a_1, a_2) \cdot (a_1', a_2') = (a_1 a_1', a_2 a_2')\,.$$

Ce groupe est le produit direct des sous groupes (e_1, A_2) et (A_1, e_2).

2.2 Groupes finis et groupes symétriques.

2.2.1 Définitions et exemples.

Définition 2.2.1.1 (groupe fini)
Un groupe fini est un groupe ayant un nombre fini d'éléments.

Définition 2.2.1.2 (ordre d'un groupe fini)
Soit un groupe fini. On appelle ordre de ce groupe le nombre d'éléments du groupe.

Exemples :

1. Les permutations de 4 objets constituent un groupe pour la loi de composition usuelle des applications. Ce groupe est fini, il comprend $4! = 24$ éléments.
2. Les rotations qui laissent invariant un triangle équilatéral orienté forment un groupe : elles sont au nombre de trois : ce sont les rotations de centre O (O est le centre de gravité du triangle) d'angle 0, $2\pi/3$ et $4\pi/3$.
3. Les racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité, c'est à dire les nombres complexes $e^{i2k\pi/n}$, forment un groupe fini à n éléments pour la multiplication.

Les deux derniers exemples sont en outre des groupes *cycliques.*

Définition 2.2.1.3 (groupe cyclique)
Soit un groupe fini d'ordre n. Ce groupe est dit cyclique s'il existe un élément a tel que tout élément du groupe s'écrit comme une puissance de a,

$$\mathcal{G} = \left\{a^0; a^1; a^2; \ldots ; a^{(n-1)}\right\} .$$

Définition 2.2.1.4 (sous groupe engendré par un élément)
Soit $\mathcal{G}$ un groupe fini d'ordre n et a un élément de ce groupe. Il existe un entier p tel que $a^{p-1} \neq e$ et $a^p = e$, on dit que cet entier est l'ordre de a dans le groupe et on définit le sous groupe de $\mathcal{G}$ engendré par a par l'ensemble suivant : $\{a; a^2; \ldots ; a^{p-1}; a^p = e\}$.

Démonstration : L'existence d'un tel entier p provient du fait que les puissances de a sont toutes dans le groupe et comme le groupe est fini il y a nécessairement deux puissances a^{n_1} et a^{n_2} qui sont identiques donc il existe au moins un entier $k =\mid n_1 - n_2 \mid$ tel que $a^k = e$ et si on prend le plus petit des ces entiers k alors on obtient un entier, appelons le p, tel que $a^{p-1} \neq e$ et $a^p = e$.

On peut définir un groupe fini en donnant sa table de multiplication : on numérote les éléments du groupe de 1 à n et dans un tableau à n lignes et n colonnes, on place dans la case correspondant à la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne le produit $a_i \cdot a_j$. Pour les groupes abéliens, le tableau ainsi construit est symétrique par rapport à la diagonale.

Exemples :

1. Si on reprend le cas des 3 rotations qui laissent un triangle équilatéral orienté invariant et si on appelle la rotation d'angle 0 l'élément e, celle d'angle $2\pi/3$ l'élément a et celle d'angle $4\pi/3$ l'élément $b = a^2$ alors la table de multiplication est donnée par le tableau 2.1.

$\rightarrow$	e	a	a^2
e	e	a	a^2
a	a	a^2	e
a^2	a^2	e	a

TAB. 2.1 – Exemple de table de multiplication. Il s'agit de la table de multiplication entre rotations laissant invariant un triangle équilatéral. La flèche indique que l'élément de la colonne est à gauche dans le produit et celui de la ligne est le terme de droite, ici l'ordre n'a pas d'importance car le groupe est commutatif mais ce n'est pas toujours le cas.

2. Pour C_4 que l'on identifie au groupe $\{1, i, -1, -i\}$, la table de multiplication est donnée par le tableau 2.2.

$\rightarrow$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

TAB. 2.2 – Table de multiplication de C_4.

Sur chaque ligne, il n'apparaît qu'une et une seule fois chaque élément du groupe. De même sur chaque colonne, chaque élément du groupe n'est écrit qu'une et une seule fois. En effet la $i^{\text{ème}}$ ligne correspond à l'ensemble des produits $a_i \cdot g$ avec g décrivant tout le groupe donc $a_i \cdot g_1 = a_i \cdot g_2$ implique que $g_1 = g_2$ donc les produits placés sur une même ligne mais pour des indices de colonnes distincts sont différents et comme il y a exactement autant de colonnes que d'éléments dans le groupe, les produits de la forme $a_i \cdot g, g \in \mathcal{G}$ recouvrent tout le groupe (Une autre façon de voir que tout le groupe est recouvert est la suivante : soit a_p, $a_q = a_i^{-1} \cdot a_p$ vérifie $a_i \cdot a_q = a_p$ donc a_p apparaît sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $q^{\text{ème}}$ colonne du tableau).

Définition 2.2.1.5 (groupe symétrique)
On appelle groupe symétrique le groupe, noté $\mathcal{S}_n$, formé par les permutations de n objets.

Ce groupe occupe une place importante en physique puisque pour les systèmes constitués de n particules *identiques*, $\mathcal{S}_n$ est un groupe de symétrie pour l'hamiltonien. On va ainsi pouvoir classer les fonctions d'onde de systèmes nucléaires ou atomiques en fonction de leur propriétés en termes de symétrie par rapport à $\mathcal{S}_n$.

Proposition 2.2.1.1 (ordre du groupe $\mathcal{S}_n$)
Le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ est d'ordre $n!$, c'est à dire qu'il y a $n!$ façons différentes de permuter n objets distincts.

Démonstration : Supposons que l'on ait n boîtes et n objets à placer dans ces boîtes en ne mettant qu'un et un seul objet par boîte. On peut placer le premier objet dans l'une quelconque des n boîtes, après en avoir choisi une, pour le second objet il ne nous reste qu'un choix parmi $(n-1)$ et après avoir choisi la boîte pour cet objet, il ne reste plus qu'un choix parmi $(n-2)$ pour le troisième objet ... Et finalement il y a au total $n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$ choix possibles pour permuter les n objets.

Une façon de représenter une permutation σ de n objets consiste à écrire sous chaque élément son image :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_{\sigma(1)} & a_{\sigma(2)} & \cdots & a_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

Avec une telle écriture, l'inverse de la permutation σ est

$$\begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} & a_{\sigma(2)} & \cdots & a_{\sigma(n)} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Une écriture encore plus réduite consiste à n'écrire que les indices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Exemple : Si on considère une permutation des 6 premiers entiers non nuls, on peut prendre par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut mettre n'importe quelle permutation σ sous forme de produits de cycles indépendants : en effet on s'intéresse tout d'abord au cycle de 1, c'est à dire on regarde comment 1 se transforme puis comment $\sigma(1)$ se transforme... jusqu'à retomber sur 1 (il existe au moins un entier p tel que $\sigma^p(1) = 1$ car c'est au moins vrai pour $p = n$). Si $\left(1\,\sigma(1)\,\sigma^2(1)\,\sigma^{(p-1)}(1)\right)$ est strictement inclus dans $\{1, 2, \cdots, n\}$ alors on cherche le cycle d'un élément n'apparaissant pas dans le cycle de 1 et on recommence jusqu'à ce que la réunion de tous ces cycles disjoints soit égal à $\{1, 2, \cdots, n\}$.

Exemple : Si on reprend la permutation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} .$$

Sa décomposition en cycles indépendants est :

$$(1256)\,(34) .$$

Dans une telle écriture en cycles indépendants, l'ordre des cycles n'a pas d'importance car les cycles sont disjoints.

Les cycles ne comprenant que deux éléments $(i\,\sigma(i))$ sont appelés *transpositions* et tout p-cycle peut s'écrire comme un produit de $(p-1)$ tranpositions (un p-cycle est un cycle ayant p éléments). En effet :

$$\left(j\,\sigma(j)\,\sigma^2(j)\,\cdots\sigma^{(p-1)}(j)\right) = \left(j\,\sigma^{(p-1)}(j)\right)\left(j\,\sigma^{(p-2)}(j)\right)\cdots\left(j\,\sigma^1(j)\right) .$$

Exemple : Si on reprend à nouveau la permutation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} .$$

Une décomposition en produit de transpositions est :

$$(16)\,(15)\,(12)\,(34) .$$

Exemple : Dans le tableau suivant figurent les 6 permutations constituant le groupe $\mathcal{S}_3$ ainsi que leur inverse :

g	(123)	(132)	(12)(3)	(13)(2)	(23)(1)	(1)(2)(3)
g^{-1}	(132)	(123)	(12)(3)	(13)(2)	(23)(1)	(1)(2)(3)

À partir de ces résultats, on peut déterminer les classes de conjugaison de $\mathcal{S}_3$ puisque

$$(a) = \left\{gag^{-1},\, g \in \mathcal{S}_3\right\} .$$

Pour $a = (123)$, on obtient

g	(123)	(132)	(12)(3)	(13)(2)	(23)(1)	(1)(2)(3)
gag^{-1}	(132)	(123)	(132)	(132)	(132)	(123)

La classe de conjugaison de (123) est donc constituée des deux éléments (123) et (132). Pour $a = (12)(3)$, les calculs donnent

g	(123)	(132)	(12)(3)	(13)(2)	(23)(1)	(1)(2)(3)
gag^{-1}	(12)(3)	(12)(3)	(12)(3)	(23)(1)	(13)(2)	(12)(3)

On en déduit que $\mathcal{S}_3$ compte trois classes de conjugaison :

$$\{(1)(2)(3)\}\ ;\{(12)(3)\,,(13)(2)\,,(32)(1)\}\ ;\{(123)\,,(132)\}\ .$$

2.2.2 Théorème de Cayley.

Théorème 2.2.2.1 (théorème de Cayley)
Tout groupe fini $\mathcal{G}$ d'ordre n est isomorphe à un sous groupe du groupe symétrique, $\mathcal{S}_n$.

Démonstration : Le groupe étant fini, on peut numéroter ses éléments : $a_1, a_2, \ldots a_n$ Soit g un élément du groupe, on définit la permutation ϕ_g par :

$$\phi_g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ ga_1 & ga_2 & \cdots & ga_n \end{pmatrix}.$$

Deux permutations associées à des éléments g_1 et g_2 différents sont différentes : en effet on ne peut avoir $g_1a_i = g_2a_i$ que si et seulement si $g_1 = g_2$.

De plus l'application qui à un élément g du groupe associe la permutation ϕ_g est un homomorphisme de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{S}_n$:

$$\phi_b\phi_c = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b(ca_1) & b(ca_2) & \cdots & b(ca_n) \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\phi_b\phi_c = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ bca_1 & bca_2 & \cdots & bca_n \end{pmatrix}.$$

Et ainsi $\phi_b\phi_c = \phi_{bc}$ ce qui assure l'homomorphie de cette application de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{S}_n$. Or on l'a vu un peu plus haut que cette application est injective donc elle réalise une bijection de $\mathcal{G}$ sur $\phi\left(\mathcal{G}\right)$ qui est un sous groupe de $\mathcal{S}_n$. On vient donc de démontrer le théorème de Cayley.

En fait comme cela est expliqué par exemple dans [Ham62], les sous groupes de $\mathcal{S}_n$ qui apparaissent dans la démonstration sont en fait constitués de permutations particulières car aucune d'entre elles, hormis l'identité qui est associée à l'élément neutre du groupe, ne laisse un élément du groupe invariant : on parle de permutations *régulières*.

De plus si on considère un sous groupe $\mathcal{T}$ de $\mathcal{S}_n$ constitué uniquement de l'identité et de permutations régulières alors deux permutations distinctes de ce groupe ne peuvent associer la même image à un même point, c'est à dire si $\phi_1(a) = \phi_2(a)$ (ϕ_1 et ϕ_2 étant deux permutations appartenant à ce sous groupe $\mathcal{T}$de $\mathcal{S}_n$) alors nécessairement $\phi_1 = \phi_2$: si on considère la permutation $\phi_1\phi_2^{-1}$ alors elle laisse l'élément a invariant et doit être dans le sous groupe (comme produit de deux éléments du sous groupe $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}_n$) donc c'est soit l'identité soit une permutation régulière. La seconde situation est exclue car cette permutation laisse a invariant donc ce ne peut être que l'identité et $\phi_1\phi_2^{-1} = \mathbb{1} \Leftrightarrow \phi_1 = \phi_2$, ce qui prouve le résultat annoncé. Un tel sous groupe de $\mathcal{S}_n$ composé de l'identité et de permutations régulières est appelé sous groupe régulier de $\mathcal{S}_n$.

Les cycles indépendants construits comme précédemment d'une permutation régulière appartenant à un sous groupe régulier de $\mathcal{S}_n$ sont tous de même longueur (remarquons néanmoins que deux permutations distinctes d'un même sous groupe régulier peuvent avoir des cycles de longueurs différentes, la longueur étant la même pour les cycle associés à la même permutation régulière).

En effet si on avait pour une même permutation deux cycles de longueurs différentes l_1 et l_2 avec par exemple $l_1 < l_2$ alors en appliquant l_1 fois cette permutation le cycle de longueur l_1 serait décomposé en l_1 cycles de longueur 1 tandis que le cycle de longueur l_2 ne serait pas décomposé en cycles de longueur 1 donc cette nouvelle permutation serait dans le groupe mais aurait des éléments invariants et serait distincte de l'identité ; ce qui est en contradiction avec la définition de sous groupe régulier. Donc il ne peut y avoir deux cycles de longueurs distinctes et toute permutation d'un sous groupe régulier est décomposable en cycles indépendants de longueur identique.

2.2.3 Théorème de Lagrange.

THÉORÈME 2.2.3.1 (THÉORÈME DE LAGRANGE)
Soit $(\mathcal{G}, \cdot)$ un groupe fini d'ordre n et $\mathcal{H}$ un sous groupe de $(\mathcal{G}, \cdot)$ alors l'ordre de $\mathcal{H}$ est un diviseur de n.

Démonstration : D'après le théorème 2.1.2.1 page 20, un élément de $\mathcal{G}$ appartient à un et un seul co-ensemble et deux co-ensembles différents sont disjoints. Il existe donc $a_1, a_2 \cdots a_p$ éléments se trouvant dans des co-ensembles disjoints et dont la réunion des co-ensembles $a_i\mathcal{H}$ est égale au groupe tout entier : si le groupe n'était pas recouvert complètement, on prendrait un élément a_{p+1} dans le complémentaire de $\cup_{i=1}^{p} a_i\mathcal{H}$ et on en formerait le co-ensemble et on recommencerait la procédure jusqu'à recouvrir le groupe entièrement ; ce procédé est fini car il n'y a qu'un nombre fini d'éléments dans le groupe. Ainsi on a :

$$\cup_{i=1}^{p} a_i\mathcal{H} = \mathcal{G}\,,$$
$$\text{avec } a_i\mathcal{H} \cap a_j\mathcal{H} = \emptyset\,\forall i \neq j\,.$$

Et chaque co-ensemble a le même nombre d'éléments que $\mathcal{H}$ donc en appliquant le "principe des bergers" on en conclut que $ph = n$ où h est l'ordre du sous groupe $\mathcal{H}$. Ainsi h divise n , ce qui achève la démontration du théorème de Lagrange.

2.3 Groupes de Lie et algèbres de Lie.

2.3.1 Introduction.

Les groupes continus appelés maintenant les groupes de Lie en hommage à Sophus Lie (1842-1899) ont tout d'adord été utilisés et étudiés pour résoudre des problèmes liés aux systèmes d'équations différentielles et de systèmes dynamiques. Ces groupes avant d'être considérés comme des objets abstraits étaient alors appréhendés comme des groupes de transformations de l'espace.

En effet considérons un exemple simple de système dynamique dans lequel on s'intéresse au devenir d'une particule de fluide au cours du temps. Un fluide s'écoule d'une source S se trouvant dans un plan et cet écoulement se fait de façon isotrope et à une vitesse radiale constante. Compte tenu de la géométrie de ce système et de son invariance par rotation de centre S et d'angle quelconque, on peut ne s'intéresser qu'aux particules de fluide se trouvant sur une demie-droite passant par la source. Où va se trouver après un intervalle Δt une particule de fluide se trouvant initialement en un point P ? La vitesse de l'écoulement étant constante et radiale, cette particule va se trouver en un point P' tel que $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{v}\Delta t$. Donc $\overrightarrow{SP}' = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{v}\Delta t$. On est donc amené à considérer la transformation du plan qui au point P associe le point P' : $\psi_{\Delta t}(P) = P'$ tel que $\overrightarrow{SP}' = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{v}\Delta t$. Donc si on applique ensuite au point P' une transformation $\psi_{\Delta t'}$ alors on obtient un point P'' tel que $\overrightarrow{SP''} = \overrightarrow{SP'} + \overrightarrow{v}\Delta t'$ ainsi ce point vérifie $\overrightarrow{SP''} = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{v}\,(\Delta t + \Delta t')$. Donc $\psi_{\Delta t'} \circ \psi_{\Delta t} = \psi_{\Delta t + \Delta t'}$. Par conséquent on constate que le point P'' peut être soit obtenu à partir du point P après un intervalle $\Delta t + \Delta t'$ soit à partir du point P' après un intervalle de temps Δt, ce dernier point ayant lui même été obtenu à partir du point P après un intervalle de temps Δt.

On remarque aussi que $\psi_{-\Delta t}(P') = \psi_{-\Delta t}\psi_{\Delta t}(P) = P \Rightarrow \psi_{-\Delta t} \circ \psi_{\Delta t} = \mathbb{1}$. La transformation $\psi_{\Delta t}$ admet donc un inverse qui est $\psi_{-\Delta t}$.

Et il y a une transformation qui laisse tous les points du plan invariants, c'est $\psi_0 = \mathbb{1}$.

On voit donc que les transformations ψ_t constituent un groupe pour la loi de composition usuelle des applications et que ce groupe est isomorphe à l'ensemble des réels muni de l'addition.

De plus on pourrait décomposer toute transformation ψ_t en un produit de transformation infinitésimale un peu comme s'il y avait un générateur du groupe et que chaque élément était une puissance de ce générateur.

Cet exemple très simple est en fait une illustration des transformations pouvant intervenir pour de nombreux systèmes d'équations différentielles. En effet si on avait à résoudre un système du type

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i\left(x\right) \ ,$$

alors à condition que l'on ait su l'intégrer, on obtient les coordonnées x' de la "particule de fluide" après un instant t et qui initialement se trouvait en x : $x'_i = f_i\left(x,t\right)$. Et au point P on associe un point $S_t\left(P\right) = P'$ et ces transformations vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{c} S_{t+t'} = S_t \circ S_{t'} \\ S_{-t} \circ S_t = \mathbb{1} \\ S_0 = \mathbb{1} \end{array} \right. \quad .$$

Elles constituent donc un groupe isomorphe au groupe des réels muni de l'addition (à condition que le système ne revienne jamais au bout d'un temps positif à sa position initiale). On a donc fait apparaître une paramétrisation (ici à un seul paramètre, t) du groupe et l'indice du produit de deux transformations respectivement indicées par t et t' est obtenu par une fonction analytique des indices t et t'. Cette paramétrisation est valable partout dans ce cas mais il pourrait arriver que cette paramétrisation ne soit valable qu'autour de certaines valeurs de paramètres aussi il est intéressant de faire intervenir la notion de voisinage et de topologie. On passe ainsi d'un point de vue global à une étude plus locale voire infinitésimale.

Il est donc intéressant de rappeler certaines notions concernant la topologie, les variétés analytiques. Nous présenterons donc dans une première section des éléments de topologie générale, puis dans une seconde section nous dirons ce qu'est une variété analytique, puis nous aborderons les groupes topologiques et plus particulièremnt les groupes de Lie enfin nous discuterons des algèbres de Lie associées aux groupes de Lie. Des approfondissements sur toutes ces notions pourront être trouvés dans les ouvrages de référence [Coh57, Bou60, Bas78, Pic73].

2.3.2 Rappels de topologie générale.

On rappelle brièvement ce qu'est un ouvert, une topologie sur un ensemble, un fermé et on redonne aussi la définition de la continuité en terme d'ouverts et de fermés et on s'intéresse à certains espaces topologiques qui ont des propriétés remarquables comme d'être connexes par exemple.

Définition 2.3.2.1 (topologie)
Soit $\mathcal{E}$ un ensemble, on appelle topologie sur $\mathcal{E}$ toute partie, notée $\mathcal{T}$, de $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ (qui est l'ensemble de parties de $\mathcal{E}$) qui vérifie :

1. *$\emptyset \in \mathcal{T}$ et $\mathcal{E} \in \mathcal{T}$.*
2. *La réunion quelconque d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$.*
3. *L'intersection d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{T}$ est encore un élément de $\mathcal{T}$.*

On dit alors que $\mathcal{E}$ est un espace topologique de topologie $\mathcal{T}$.

Exemples :

1. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble quelconque, si on considère la partie de $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ formée par l'ensemble lui-même et la partie vide alors on a construit une topologie sur $\mathcal{E}$: c'est la topologie triviale.
2. Si on considère dans l'ensemble des nombres réels les parties formées par une réunion quelconque d'intervalles ouverts alors on a construit un topologie sur l'ensemble des réels.

Définition 2.3.2.2 (ouverts d'une topologie)
Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique de topologie $\mathcal{T}$. Les parties $\mathcal{O}$ de $\mathcal{E}$ qui appartiennent à $\mathcal{T}$ sont appelés les ouverts de la topologie $\mathcal{T}$. Ainsi la réunion d'ouverts est encore un ouvert; l'intersection d'un nombre fini d'ouverts est aussi un ouvert et le vide et l'ensemble lui-même sont des ouverts.

Définition 2.3.2.3 (espace topologique séparé ou espace de Haussdorf)
Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique. On dit que cet espace topologique est séparé ou un espace de Haussdorf si quelque soit x et y deux points distincts de $\mathcal{E}$ il existe deux ouverts disjoints contenant respectivement x et y.

Exemple : L'ensemble des nombres réels muni de la topologie décrite précédemment est un espace topologique séparé.

Définition 2.3.2.4 (fermé)
Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique de topologie $\mathcal{T}$. Une partie $\mathcal{F}$ est un fermé de $\mathcal{E}$ pour la topologie concernée si son complémentaire est un ouvert.

Proposition 2.3.2.1 (propriétés des fermés)
Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique de topologie $\mathcal{T}$. Les fermés de cet ensemble vérifient les propriétés suivantes :

1. *L'ensemble $\mathcal{E}$ et la partie vide sont des fermés.*
2. *L'intersection quelconque de fermés est aussi un fermé.*

3. La réunion fini de fermés reste un fermé.

Démonstration : Le premier point se démontre en constatant que la partie vide et l'ensemble tout entier sont complémentaires l'un de l'autre et que ce sont deux ouverts donc ce sont des complémentaires d'ouverts donc ce sont des fermés.

Pour le second point, on considère les complémentaires des fermés apparaissant dans l'intersection : $\mathcal{O} = \mathcal{C}(\mathcal{F})$, ce sont des ouverts. Et on a :

$$\cap\mathcal{F} = \cap\left(\mathcal{C}(\mathcal{O})\right) = \mathcal{C}\left(\cup\mathcal{O}\right).$$

Or $\cup\mathcal{O}$ est une réunion d'ouverts donc c'est un ouvert et son complémentaire est un fermé.

Enfin pour le troisième point, une réunion fini de fermés s'écrit comme le complémentaire d'une intersection finie d'ouverts :

$$\cup_{i=1}^{n}\mathcal{F}_i = \cup_{i=1}^{n}\left(\mathcal{C}\mathcal{O}_i\right) = \mathcal{C}\left(\cap_{i=1}^{n}\mathcal{O}_i\right).$$

On a donc le complémentaire de l'intersection d'un nombre fini d'ouverts donc le complémentaire d'un ouvert donc c'est bien un fermé.

Définition 2.3.2.5 (voisinage)
Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique de topologie $\mathcal{T}$. Soit x un élément de cet ensemble $\mathcal{E}$. On appelle voisinage de x toute partie, V, de $\mathcal{E}$ qui contient un ouvert contenant lui-même x.

Il existe des voisinages de n'importe quel point (l'ensemble lui-même en est un exemple) et la réunion comme l'intersection de deux voisinages d'un même point sont aussi des voisinages de ce point. De plus toute partie contenant un voisinage d'un point est encore un voisinage de ce point.

Théorème 2.3.2.1 (ouvert en terme de voisinage)
Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique de topologie $\mathcal{T}$. Une partie Ω de $\mathcal{E}$ est un ouvert de $\mathcal{E}$ si et seulement si c'est un voisinage de chacun de ses points.

Démonstration : Soit un ouvert Ω. Soit x un élément de cet ouvert, on a alors de façon évidente :

$$\{x\} \subset \Omega \subset \Omega.$$

On a donc trouvé un ouvert de $\mathcal{E}$ contenant x et contenu dans Ω. Donc l'ouvert Ω est un voisinage pour chacun de ses points.

Réciproquement soit une partie Ω qui est un voisinage de chacun de ses points. Soit x un élément de Ω, il existe un ouvert V_x tel que $\{x\} \subset V_x \subset \Omega$ si bien que la réunion de ces parties V_x quand x décrit Ω est égale à Ω, cette réunion d'ouverts est un ouvert donc Ω est un ouvert.

Définition 2.3.2.6 (continuité en un point)
Soit $\mathcal{E}_1$ un espace topologique de topologie $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{E}_2$ un espace topologique de topologie $\mathcal{T}_2$ et f une application définie sur un ouvert Ω de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_2$.

Soit x un élément de Ω, l'application f est continue en x si pour tout voisinage V_2 de $f(x)$ il existe un voisinage U_1 de x tel que $f(U_1) \subset V_2$.

Définition 2.3.2.7 (continuité)
Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique de topologie $\mathcal{T}$ et $\mathcal{E}'$ un espace topologique de topologie $\mathcal{T}'$. Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$. On dit que cette application est continue sur $\mathcal{E}$ si elle est continue en tout point de $\mathcal{E}$.

Théorème 2.3.2.2 (continuité en terme d'ouverts)
Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique de topologie $\mathcal{T}$ et $\mathcal{E}'$ un espace topologique de topologie $\mathcal{T}'$. Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$. L'application f est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de $\mathcal{E}'$ est un ouvert de $\mathcal{E}$.

Démonstration : Soit une application continue de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ et un ouvert W de $\mathcal{E}'$. On pose $V = f^{-1}(W)$. Il s'agit de montrer que V est un ouvert de $\mathcal{E}$, pour cela on va montrer que c'est un voisinage de chacun de ses points. Soit x un élément de V, $f(x)$ appartient à W qui est un ouvert donc un voisinage de $f(x)$. Et comme f est continue en x, il existe V_x tel que $f(V_x) \subset W$ (d'après la définition que l'on a faite de la continuité en un point) et V_x est un voisinage de x. De l'inclusion $f(V_x) \subset W$ on déduit que $V_x \subset V$. Donc pour l'élément x on a trouvé un voisinage contenu dans V donc V est aussi un voisinage de x donc c'est un voisinage pour chacun de ses points donc c'est un ouvert. Donc si f est continue alors l'image réciproque de tout ouvert de $\mathcal{E}'$ est un ouvert de $\mathcal{E}$.

Réciproquement soit une application telle que l'image réciproque de tout ouvert de $\mathcal{E}'$ soit un ouvert de $\mathcal{E}$. Montrons qu'elle est continue sur $\mathcal{E}$. Soit x un élément de $\mathcal{E}$. Soit W un voisinage de $f(x)$, il existe $\Omega_{f(x)}$ un ouvert tel que : $\{f(x)\} \subset \Omega_{f(x)} \subset W$. Et $V = f^{-1}\left(\Omega_{f(x)}\right)$ est l'image réciproque d'un ouvert donc c'est un ouvert qui contient x c'est donc un voisinage de x. De plus ce voisinage ,V, vérifie $f(V) \subset W$ donc f est continue en x.

Définition 2.3.2.8 (homéomorphisme)
Un homéomorphisme est une application bijective continue telle que son application réciproque est aussi continue.

On s'intéresse maintenant à quelques types d'espaces topologiques particuliers comme les espaces topologiques compacts, connexes. On se contente d'en donner simplement les définitions et quelques propriétés.

Définition 2.3.2.9 (compacité (Borel-Lebesgue))
Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique de topologie $\mathcal{T}$. On dit que $\mathcal{E}$ est compact si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini, c'est à dire si :

$$\mathcal{E} = \cup_{i\in I}\mathcal{O}_i \Rightarrow \exists i_1\,, \cdots, i_n\,, \mathcal{E} = \cup_{j=1}^{n}\mathcal{O}_{i_j}\,.$$

Cette définition est équivalente à la définition suivante.

Définition 2.3.2.10 (compacité en terme de fermés)
Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique de topologie $\mathcal{T}$. On dit que $\mathcal{E}$ est compact si :

$$\cap_{i\in I}\mathcal{F}_i = \emptyset \Rightarrow \exists i_1\,, \cdots, i_n\,, \cap_{j=1}^{n}\mathcal{F}_{i_j} = \emptyset\,.$$

Passons maintenant à la notion de connexité.

Définition 2.3.2.11 (connexité.)
Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique de topologie $\mathcal{T}$. On dit que cet espace est connexe si les seules parties qui sont à la fois ouverte et fermée sont le vide et l'espace tout entier. Ceci est équivalent à dire que si deux ouverts disjoints recouvrent l'espace $\mathcal{E}$ alors l'un est vide et l'autre est l'espace tout entier.

La notion de connexité correspond à l'idée "intuitive" que l'on se fait d'un espace en un seul morceau.

Définition 2.3.2.12 (partie connexe)
Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique de topologie $\mathcal{T}$ et A une partie de $\mathcal{E}$. On dit que la partie A est connexe si quelque soit les ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$

$$\left\{\begin{array}{c} A\subset \mathcal{O}_1\cup\mathcal{O}_2 \\ A\cap\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2=\emptyset \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} A\subset \mathcal{O}_1 \\ A\cap\mathcal{O}_2=\emptyset \end{array}\right. \quad ou \quad \left\{\begin{array}{c} A\subset \mathcal{O}_2 \\ A\cap\mathcal{O}_1=\emptyset \end{array}\right. .$$

Proposition 2.3.2.2 (réunion de parties connexes non disjointes)
Soit des parties connexes d'intersection non vide, alors leur réunion est encore une partie connexe.

Démonstration : Soit des parties connexes, A_α telles que $\cap A_\alpha \neq \emptyset$, on appelle A leur réunion. Soit deux ouverts O_1 et O_2 tels que :

$$\left\{\begin{array}{c} A\subset O_1\cup O_2 \\ A\cap O_1\cap O_2=\emptyset \end{array}\right. .$$

Pour chaque A_α, qui est une partie connexe, on a soit $A_\alpha \subset O_1$ et $A_\alpha \cap O_2 = \emptyset$ soit $A_\alpha \subset O_2$ et $A_\alpha \cap O_1 = \emptyset$. Soit A_{α_1} et A_{α_2}. Comme l'intersection des A_α est non vide, il existe x appartenant à la fois à A_{α_1} et à A_{α_2} et si pour α_1, $A_{\alpha_1} \subset O_1$ et $A_{\alpha_1} \cap O_2 = \emptyset$ et l'inverse pour α_2 alors x serait à la fois dans A, O_1 et O_2 ce qui est impossible. Donc l'ouvert qui contient les A_α est le même pour toutes les valeurs de α et l'ouvert qui est disjoint avec les A_α est le même pour toutes les valeurs de α. Donc A est contenu dans l'un des ouverts et disjoint avec l'autre donc c'est une partie connexe.

Proposition 2.3.2.3 (connexité et continuité)
Soit A une partie connexe d'un espace topologique $\mathcal{E}$ et f une application continue de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$, un autre espace topologique. L'image de A par f, $f(A)$, est une partie connexe de $\mathcal{E}'$.

Démonstration : Soit O'_1 et O'_2 deux ouverts de $\mathcal{E}'$ tels que $f(A) \subset O'_1 \cup O'_2$ et $f(A) \cap O'_1 \cap O'_2 = \emptyset$. Soit $O_1 = f^{-1}(O'_1)$ et $O_2 = f^{-1}(O'_2)$, ce sont deux ouverts (image réciproque par une fonction continue d'ouverts) qui vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{c} A \subset O_1 \cup O_2 \\ A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset \end{array} \right. .$$

Or A est une partie connexe donc l'un des deux O_i contient A tandis que l'autre est disjoint avec A et par conséquent c'est aussi le cas entre $f(A)$ et les O'_i ce qui prouve que $f(A)$ est connexe.

Ce théorème est intéressant dans la mesure où il permet de dire si un espace est non connexe. Par exemple si on considère l'ensemble des matrices orthogonales $O(n)$ et si on considère l'application qui à chaque matrice associe son déterminant, cette application est continue de $O(n)$ sur l'ensemble $\{1; -1\}$ (il s'agit d'une surjection) qui n'est pas un ensemble connexe de $\mathcal{R}$. Donc $O(n)$ n'est pas connexe. En fait cet ensemble possède deux composantes connexes $SO(n)$, composante connexe à l'identité et l'ensemble des matrices orthogonales de déterminants -1. Cet exemple nous amène à introduire la composante connexe à un élément d'un ensemble.

Définition 2.3.2.13 (composante connexe)
Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique et x un élément de cet ensemble. On appelle composante connexe à x la plus grande partie connexe contenant $\{x\}$.

Cette notion va être particulièrement intéressante pour les groupes topologiques car dans ce cas, la composante connexe à l'élément neutre va être un sous groupe : en effet comme on le verra dans la suite, l'application qui associe à un élément son inverse est supposée continue pour les groupes topologiques donc l'image par cette application de la composante connexe à l'élément neutre est une partie connexe qui contient aussi cet élément neutre donc cette image est contenue dans la composante connexe à l'identité ; de même le produit est supposé continu donc le produit de deux éléments de la composante connexe à l'élément neutre est dans une partie connexe à cet élément neutre donc dans la composante connexe. En s'intéressant à la composante connexe à l'élément neutre d'un groupe topologique, on s'occupe donc du plus grand sous groupe connexe à l'élément neutre. Dans le cas de $O(n)$ par exemple ceci prouve que $SO(n)$ est bien un sous groupe de $O(n)$ (ce que l'on savait déjà) et on passe de cette composante connexe à la deuxième composante connexe en multipliant les éléments de $SO(n)$ par une matrice orthogonale quelconque de déterminant -1 et il faut remarquer que cette deuxième composante connexe n'est pas un sous groupe car elle ne contient pas l'identité.

2.3.3 Variétés analytiques

La notion de variété analytique [Coh57, Pic73, Ber86, Tal93] permet de passer localement d'un espace topologique quelconque, donc éventuellement courbe, à un espace vectoriel réel de dimension fini.

Définition 2.3.3.1 (carte)
Soit un espace topologique séparé $\mathcal{E}$, et un ouvert Ω de cet espace topologique. On appelle carte sur Ω tout homéomorphisme de Ω dans une partie ouverte X de R^n.

$$\begin{aligned} \sigma : \Omega &\rightarrow X \\ p &\rightarrow \sigma(p) = (x_1(p), x_2(p), \cdots, x_n(p)) \;. \end{aligned}$$

Localement l'espace $\mathcal{E}$ se comporte donc comme un partie de R^n et on peut utiliser la paramétrisation ainsi définie pour décrire l'ouvert Ω. Les nombres $x_i(p)$ constituent les coordonnées de p (suivant la carte σ) et n est la dimension de la carte.

Soit Φ un homémorphisme entre X et Y un autre ouvert de R^n. On note son inverse Ψ. La composition de Φ et la carte σ de Ω dans X définit donc une autre carte de Ω sur Y. Réciproquement si on considére deux cartes respectivement de Ω sur deux ouverts X et Y de R^n alors il existe un homémorphisme entre X et Y qui s'apparente à un changement de coordonnées entre ces deux ouverts de R^n. Ceci nous permet de définir la notion de cartes liées analytiquement.

Définition 2.3.3.2 (cartes liées analytiquement en un point)
Deux cartes σ et τ sont liées analytiquement au point p s'il existe un homéomorphisme analytique qui est défini sur un voisinage de p et qui fait passer des coordonnées suivant la carte σ aux coordonnées suivant la carte τ.

Définition 2.3.3.3 (cartes liées analytiquement)
Deux cartes σ et τ sont liées analytiquement si elles sont liées analytiquement en chaque point de l'espace $\mathcal{E}$.

Définition 2.3.3.4 (variété)
Un espace topologique $\mathcal{E}$ est dit localement euclidien en un point p s'il existe une carte définie sur un voisinage de p. Un espace de Haussdorf qui est localement euclidien en tous ses points est une variété.

Dans une variété, pour chaque point p il existe une carte définie sur un voisinage de p.

DÉFINITION 2.3.3.5 (STRUCTURE ANALYTIQUE)
Soit $\mathcal{V}$ un espace de Haussdorf. Une structure analytique *sur $\mathcal{E}$ est une famille $\mathcal{F}$ de cartes définies sur $\mathcal{V}$ telle que :*

1. *En tout point de $\mathcal{V}$ il y a une carte qui appartient à $\mathcal{F}$.*
2. *Tout couple de cartes de $\mathcal{F}$ sont liées analytiquement.*
3. *Toute carte qui est liée analytiquement à toutes les cartes de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$.*

La troisième propriété signifie que la structure $\mathcal{E}$ est maximale et la seconde indique que la structure est analytique.

Un espace qui possède une structure analytique est forcément une variété et cet espace muni de cette structure est appelé une *variété analytique.*

Il est en général quasiment impossible de construire une structure analytique de façon explicite néanmoins il existe un moyen de contourner cette difficulté. En effet le théorème suivant nous dit qu'il suffit de construire une famille analytique recouvrant l'espace.

THÉORÈME 2.3.3.1 (EXISTENCE ET UNICITÉ)
Soit $\mathcal{E}$ un espace de Haussdorf et $\mathcal{C}$ une famille analytique de carte recouvrant $\mathcal{E}$. Il existe une unique famille analytique maximale qui contient $\mathcal{C}$.

Exemples :

1. La sphère dans l'espace tri-dimensionnel est une variété analytique.
2. L'espace R^n est lui-même une variété analytique.

DÉFINITION 2.3.3.6 (FONCTIONS RÉELLES SUR UNE VARIÉTÉ)
Soit $\mathcal{V}$ une variété, f une fonction définie sur une partie de $\mathcal{V}$ et un point p de la variété où cette fonction est définie. Soit σ une carte définie sur un voisinage de ce point, on dira que f est continue en p si c'est une fonction continue en $\sigma(p)$. Si $\mathcal{V}$ est analytique alors on dira que f est analytique en p si elle est analytique en terme des coordonnées de p.

Une fonction analytique en tout point de $\mathcal{V}$ sera dite analytique.

DÉFINITION 2.3.3.7 (VECTEURS TANGENTS)
Soit $\mathcal{V}$ une variété analytique, p un point de $\mathcal{V}$ et une carte en p telle que les coordonnées de p soient les réels $(x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^n)$. On choisit une direction en considérant n nombres réels λ^i et on définit alors une courbe dépendant d'un paramètre t par

$$x^i(t) = x_0^i + \lambda^i t + o(t)\,. \tag{2.1}$$

Ainsi pour tout fonction analytique définie en p sa dérivée en fonction du paramètre t est donnée par :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} f(x(t))\right)_{t=0} &= \sum_i \lambda^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p \\ &= \lambda^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p . \end{aligned}$$

On adopte la convention de sommation d'Einstein dans la dernière ligne c'est à dire que l'on somme sur les indices qui sont répétés deux fois.

On définit alors un vecteur tangent en p par tout opérateur $L = \sum_i \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ où les λ^i sont des nombres réels.

L'ensemble des vecteurs tangents en p est noté $\mathcal{L}_p$, c'est un espace vectoriel.

Théorème 2.3.3.2 (base de $\mathcal{L}_p$)
Les n vecteurs tangents $\partial/\partial x^i$ forment une base de $\mathcal{L}_p$.

Une des conséquences de ce théorème est que les cartes admissibles en un point donné ont toutes même dimension.

Théorème 2.3.3.3 (changement de coordonnées)
Soit x^i et y^i deux systèmes de coordonnées en p, le changement de coordonnées s'effectue par

$$\frac{\partial}{\partial y^k} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial}{\partial x^i} .$$

La matrice des $(\partial x^i/\partial y^k)^i_k$ est la matrice jacobienne du changement de coordonnées.

Définition 2.3.3.8 (champs de vecteurs tangents)
Un champ de vecteurs tangents sur une variété $\mathcal{V}$ défini sur un ouvert ω de $\mathcal{V}$ est une application de ω dans l'espace des vecteurs tangents qui à un point de la variété associe le vecteur tangent :

$$T(x) = \sum_{i=1}^n T^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

où les T^i sont des fonctions numériques dépendant des coordonnées de x.

Définition 2.3.3.9 (formes linéaires)
Soit un espace vectoriel E sur l'ensemble des réels, on appelle forme linéaire ϕ sur E toute application de E dans R qui vérifie :

$$\phi(\alpha u + \beta v) = \alpha\phi(u) + \beta\phi(v) . \tag{2.2}$$

On note $\phi(v) = \langle v, \phi \rangle$.

Définition 2.3.3.10 (espace vectoriel dual)
L'espace dual d'un espace vectoriel E est l'espace noté E^* des formes linéaires sur E. C'est également un espace vectoriel.

Définition 2.3.3.11 (base duale)
Soit $\{e_i, i = 1, n\}$ une base de E, on définit la base duale, $\{\varepsilon^j, j = 1, n\}$, par

$$\langle v, \varepsilon^j \rangle = v^j, \forall j \tag{2.3}$$

si $v = \sum_i v^i e_i$. en particulier, $\langle e_i, \varepsilon^j \rangle = \delta_i^j$.

La notion d'espace vectoriel dual sera utilisée par la suite lorsque l'on considèrera des niveaux d'énergies dépendant linéairement des paramètres de l'hamiltonien (cf section 3.4, page 106).

Définition 2.3.3.12 (transposée)
Soit E et F deux espaces vectoriel réels et ψ une application linéaire de E dans F. On appelle transposée de ψ l'application, ψ^*, de F^* dans E^* qui vérifie :

$$\langle e, \phi^*(\tau) \rangle = \langle \phi(e), \tau \rangle,$$

où e est un vecteur de E et τ une forme linéaire appartenant à F^*.

Notons que la matrice de ψ^* dans la base duale est la matrice transposée de celle de ψ.

2.3.4 Groupes topologiques, groupes de Lie.

Définition 2.3.4.1 (groupe topologique)
Un groupe topologique est un ensemble G vérifiant

1. *Il possède une multiplication qui lui donne une structure de groupe.*
2. *C'est un espace de Haussdorf.*
3. *L'application de $G \times G$ dans G qui à (x, y) associe xy^{-1} est continue.*

Théorème 2.3.4.1 (homogénéité)
Soit un groupe topologique G et deux points de ce groupe, g_1 et g_2. Il existe un homéomorphisme qui envoie g_1 en g_2.

Ainsi si une propriété est satisfaite au voisinage d'un des points du groupe par exemple autour de l'élément neutre alors elle est aussi vérifiée en un voisinage de n'importe quel autre point du groupe.

Définition 2.3.4.2 (translation à gauche, translation à droite)
Soit G un groupe topologique, a un élément de ce groupe. On appelle translation à gauche (respectivement translation à droite) l'application de G dans G qui à tout x de G associe ax (xa).

Proposition 2.3.4.1
Dans un groupe topologique les translations à gauche et à droite sont des homéomorphisme de G sur G.

Théorème 2.3.4.2 (composante connexe à l'élément neutre)
La composante connexe à l'élément neutre d'un groupe topologique G est un sous-groupe de G. Ce sous-groupe est fermé.

Définition 2.3.4.3 (groupe de Lie)
Un groupe de Lie est un ensemble G vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. *Il possède une multiplication qui lui confère une structure de groupe.*
2. *C'est une variété analytique.*
3. *L'application de $G \times G$ dans G qui à (x, y) associe xy est analytique.*

Le second point de cette définition permet donc de paramétriser les éléments du groupe de Lie par des réels $x = (x_1, \cdots, x_r)$ et cette paramétrisation est analytique. Le nombre de paramètres intervenant pourrait dépendre a priori de l'élément du groupe autour duquel on se place, en réalité on peut démontrer que la dimension est la même en tout point du groupe. On désignera cette dimension par la dimension du groupe de Lie. L'élément du groupe paramétrisé par x sera noté T_x. De plus on supposera que le vecteur nul correspond à l'élément neutre du groupe : $T_0 = e$.

Théorème 2.3.4.3
Dans un groupe de Lie, l'application de G dans G définie par $g \to g^{-1}$ est analytique.

Théorème 2.3.4.4
Un groupe de Lie est un groupe topologique.

Pour chaque paramètre x, il existe un paramètre que l'on *notera* x^{-1} tel $T_{x^{-1}} = T_x^{-1}$.
Exemples :

1. L'ensemble de réels muni de l'addition est un groupe de Lie.
2. Le groupe linéaire des matrices $n \times n$ inversibles réelles est un groupe de Lie de dimension n^2.
3. L'ensemble des matrices $n \times n$ orthogonales muni du produit matriciel est un groupe de Lie de dimension $n(n-1)/2$.
4. L'ensemble des matrices unitaires $n \times n$ est un groupe de Lie de dimension n^2.

Proposition 2.3.4.2
Dans un groupe de Lie de dimension r, si on note ϕ_i les fonctions analytiques qui relient les coordonnées du produit de deux éléments du groupe aux coordonnées de x et y :

$$(xy)_i = \phi_i(x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_r)$$

(c'est à dire que $T_{\phi(x,y)} = T_x T_y$) alors elles vérifient :

1. $\phi_i(x, 0) = x_i$;
2. $\phi_i(0, y) = y_i$;
3. $\phi_i(x, x^{-1}) = 0$;
4. $\phi_i(xy, z) = \phi_i(x, yz)$;
5. $$\phi_i(x, y) = x_i + y_i + \sum_{\alpha\beta} \lambda_i^{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \,.$$

PROPOSITION 2.3.4.3
Soient les matrices des dérivées partielles par rapport aux composantes du second paramètre pour $x = y^{-1}$ et $y = 0$:

$$v_{ij}(y) = \left(\frac{\partial\phi_i(x,y)}{\partial y_j}\right)_{x=y^{-1}} \tag{2.4}$$

$$s_{ij}(x) = \left(\frac{\partial\phi_i(x,y)}{\partial y_j}\right)_{y=0} \,. \tag{2.5}$$

Alors on a

$$v_{ij}(0) = \delta_{ij} \tag{2.6}$$

et

$$s_{ij}(0) = \delta_{ij} \tag{2.7}$$

Démonstration : Par définition,

$$s_{ij}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\phi_i(x_1, \cdots, x_r, 0, \cdots, h, \cdots, 0) - \phi_i(x_1, \cdots, x_r, 0, \cdots, 0, \cdots, 0)\right]$$

où h apparaît à la place $r + j$. Pour $x = 0$, on obtient donc

$$s_{ij}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\phi_i(0, \cdots, h, \cdots, 0) - \phi_i(0, \cdots, \cdots, 0)\right] \,.$$

Le second terme est nul et le premier terme est égale à h si $i = j$ ou 0 si $i \neq j$ puisque $\phi(x, 0) = x$. Par conséquent on trouve bien que $s_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

La démonstration est analogue pour $v_{ij}(0)$.

THÉORÈME 2.3.4.5 (PREMIER THÉORÈME DE LIE)
Les fonctions $\phi_i(x, y)$ prises comme des fonctions des y_j vérifient un système d'équations aux dérivées partielles

$$\sum_k v_{ik}(\phi) \frac{\partial \phi_k}{\partial b_j} = v_{ij}(b) \tag{2.8}$$

avec les conditions aux limites $\phi_i(x, 0) = x_i$.

Démonstration : On pose $z = \phi(x, y)$ et $z + k = \phi(x, y + h)$ ainsi :

$$k_i = \sum_j \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j}(x, y) h_j \,. \tag{2.9}$$

Or

$$T_{y+h}T_{y^{-1}} = T_{y+h}T_y^{-1} = T_{y+h}T_xT_x^{-1}T_y^{-1} = (T_{y+h}T_x)\,(T_yT_x)^{-1} = T_{z+k}T_{z^{-1}} \,,$$

ce qui veut dire que

$$\phi_i(y^{-1}, y + h) = \phi_i(z^{-1}, z + k) \,. \tag{2.10}$$

Le terme de gauche de (2.10) s'écrit :

$$\phi_i(y^{-1}, y + h) = \sum_j \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j}(x = y^{-1}, y) h_j$$

ce qui signifie que

$$\phi_i(y^{-1}, y + h) = \sum_j v_{ij}(y) h_j \,.$$

Le terme de droite de (2.10) vaut

$$\phi_i(z^{-1}, z + k) = \sum_j \frac{\partial \phi_i}{\partial z_j}(x = z^{-1}, z) k_j$$

ainsi

$$\phi_i(z^{-1}, z + k) = \sum_j v_{ij}(z) k_j = \sum_j v_{ij}(\phi) k_j \,.$$

On trouve donc en remplaçant dans (2.10) :

$$\sum_j v_{ij}(y) h_j = \sum_j v_{ij}(\phi) k_j \,.$$

On remplace k_j par son expression trouvée en (2.9)

$$\sum_j v_{ij}(y) h_j = \sum_j v_{ij}(\phi) \sum_k \frac{\partial \phi_j}{\partial y_k}(x, y) h_k \,.$$

Donc on en déduit

$$\sum_j v_{ij}(y) h_j = \sum_{kj} v_{ij}(\phi) \frac{\partial \phi_j}{\partial y_k}(x, y) h_k \,.$$

En changeant les noms des indices dans le terme de droite

$$\sum_j v_{ij}(y) h_j = \sum_{jk} v_{ik}(\phi) \frac{\partial \phi_k}{\partial y_j}(x, y) h_j \,,$$

on trouve donc

$$v_{ij}(y) = \sum_k v_{ik}(\phi)\frac{\partial\phi_k}{\partial y_j}(x,y)\,.$$

Théorème 2.3.4.6 (premier corollaire)
Les matrices s et v sont inverses l'une de l'autre :

$$\sum_j v_{ij}(x)s_{jk}(x) = \delta_{ik}\,. \tag{2.11}$$

Théorème 2.3.4.7 (second corollaire)
Comme les matrices s et v sont inverses l'une de l'autre, l'égalité (2.8) peut s'écrire :

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial y_k} = \sum_j s_{ij}(\phi)v_{jk}(y)\,. \tag{2.12}$$

Théorème 2.3.4.8 (deuxième théorème de Lie - Constantes de structure)
Il existe des constantes c_{ilm} telles que

$$\frac{\partial v_{ij}}{\partial y_k} - \frac{\partial v_{ik}}{\partial y_j} = \sum_{lm} c_{ilm}v_{lj}v_{mk}\,. \tag{2.13}$$

Ces constantes sont les constantes de structure *du groupe. Ces équations peuvent se ré-écrire :*

$$\sum_l \left(s_{lk}\frac{\partial s_{ij}}{\partial y_l} - s_{lj}\frac{\partial s_{ik}}{\partial y_l}\right) = \sum_m c_{mkj}s_{im}\,. \tag{2.14}$$

Démonstration : L'ordre de dérivation n'importe pas donc :

$$\forall i,\ \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial y_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial y_k}\right)$$

et on remplace les différentielles premières par les expressions obtenues en (2.12) :

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\sum_l s_{il}(\phi)v_{lj}(y)\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\sum_l s_{il}(\phi)v_{lk}(y)\right)\,.$$

En faisant passer le terme de droite à gauche et en effectuant la différentiation, on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{lm}\left(\frac{\partial s_{il}}{\partial\phi_m}(\phi)\frac{\partial\phi_m}{\partial y_k}v_{lj}(y) - \frac{\partial s_{il}}{\partial\phi_m}(\phi)\frac{\partial\phi_m}{\partial y_j}v_{lk}(y)\right) \\ &+ \sum_l s_{il}(\phi)\left(\frac{\partial v_{lj}}{\partial y_k} - \frac{\partial v_{lk}}{\partial y_j}\right)\,. \end{aligned}$$

On remplace à nouveau les dérivées partielles des ϕ_m par rapport aux y_t par les expressions données (2.12) et on met en facteur $\partial s_{il}/\partial\phi_m$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\sum_{lmn} \frac{\partial s_{il}}{\partial \phi_m}(\phi)\left[s_{mn}(\phi)v_{nk}(y)v_{lj}(y) - s_{mn}(\phi)v_{nj}(y)v_{lk}(y)\right] \\ = \sum_l s_{il}(\phi)\left(\frac{\partial v_{lk}}{\partial y_j}(y) - \frac{\partial v_{lj}}{\partial y_k}(y)\right) .\end{aligned} \tag{2.15}$$

Pour $y = 0$, $\phi = x$ et (2.15) devient :

$$\begin{aligned}\sum_{lmn} \frac{\partial s_{il}}{\partial x_m}(x)\left[s_{mn}(x)v_{nk}(0)v_{lj}(0) - s_{mn}(x)v_{nj}(0)v_{lk}(0)\right] \\ = \sum_l s_{il}(x)\left(\frac{\partial v_{lk}}{\partial y_j} - \frac{\partial v_{lj}}{\partial y_k}\right)_{y=0} .\end{aligned}$$

On multiplie par $s_{jj'}(0)$ et $s_{kk'}(0)$ et on somme sur j et k. On utilise ensuite le second corollaire établissant que les matrices s et v sont inverses l'une de l'autre, ainsi on trouve que

$$\begin{aligned}\sum_{lmnjk} \frac{\partial s_{il}}{\partial x_m}(x)s_{mn}(x)\left[v_{nk}(0)s_{kk'}(0)v_{lj}(0)s_{jj'}(0) - v_{nj}(0)s_{jj'}(0)v_{lk}(0)s_{kk'}(0)\right] \\ = \sum_{ljk} s_{il}(x)s_{jj'}(0)s_{kk'}(0)\left(\frac{\partial v_{lk}}{\partial y_j} - \frac{\partial v_{lj}}{\partial y_k}\right)_{y=0} .\end{aligned}$$

On obtient donc en sommant sur j et k :

$$\begin{aligned}\sum_{lmn} \frac{\partial s_{il}}{\partial x_m}(x)s_{mn}(x)\left[\delta_{nk'}\delta_{lj'} - \delta_{nj'}\delta_{lk'}\right] \\ = \sum_{ljk} s_{il}(x)s_{jj'}(0)s_{kk'}(0)\left(\frac{\partial v_{lk}}{\partial y_j} - \frac{\partial v_{lj}}{\partial y_k}\right)_{y=0} .\end{aligned}$$

On réduit le premier terme en sommant sur l et n :

$$\begin{aligned}\sum_m \left[\frac{\partial s_{ij'}}{\partial x_m}(x)s_{mk'}(x) - \frac{\partial s_{ik'}}{\partial x_m}(x)s_{mj'}(x)\right] \\ = \sum_{ljk} s_{il}(x)s_{jj'}(0)s_{kk'}(0)\left(\frac{\partial v_{lk}}{\partial y_j} - \frac{\partial v_{lj}}{\partial y_k}\right)_{y=0} .\end{aligned} \tag{2.16}$$

Dans le premier terme, on remplace l'indice m par l tandis que dans le second terme, on somme sur j et k et on remplace l'indice l par m. On trouve donc l'équation (2.14) ;

les constantes étant fonctions des valeurs des v_{st} en $x = 0$ et de leurs dérivées partielles en ce point.

On obtient (2.13) d'abord en multipliant (2.16) par $v_{i'i}v_{j'j}v_{k'k}$ ensuite en utilisant l'égalité suivante :

$$\sum_{j'} s_{ij'} \frac{\partial v_{j'j}}{\partial x_m} + \sum_{j'} v_{j'j} \frac{\partial s_{ij'}}{\partial x_m} = 0$$

qui résulte du fait que les matrices s et v sont inverses l'une de l'autre. La sommation sur i', j' et k' donne finalement (2.13).

Théorème 2.3.4.9 (troisième théorème de Lie)
Les constantes de structure du groupe sont antisymétriques par rapport aux deux derniers indices et satisfont les relations de Jacobi :

$$c_{ijk} + c_{ikj} = 0\,, \tag{2.17}$$

$$\sum_k c_{ijk}c_{klm} + c_{ilk}c_{kmj} + c_{imk}c_{kjl} = 0\,. \tag{2.18}$$

Définition 2.3.4.4
Les transformation T_x sont supposées agir sur un espace vectoriel $\mathcal{E}$ de dimension n en transformant un point p en un point p' :

$$p'_i = f_i(p, x)\,. \tag{2.19}$$

On définit alors les fonctions de p suivantes :

$$\xi_{i\alpha} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}\right)_{x=0}\,. \tag{2.20}$$

Théorème 2.3.4.10
Les fonctions $p'_i = f_i$ sont solution du système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\frac{\partial p'_i}{\partial x_\alpha} = \sum_\beta v_{\beta\alpha}(x)\xi_{i\alpha}(p')\,. \tag{2.21}$$

avec les conditions initiales $p'_i = p_i$ pour $x = 0$.

Démonstration : En intercalant convenablement T_x et son inverse, on peut montrer que

$$T_{x+h} = T_{\phi(x^{-1},x+h)}T_x\,.$$

Donc en faisant agir ces transformations sur les points, on obtient :

$$f(p, x + h) = f\left[f(p, x), \phi(x^{-1}, x + h)\right]\,.$$

Ceci est vrai pour chaque composante, par conséquent la précédente égalité s'écrit :

$$f_i(p, x+h) = f_i\left[f(p,x), \phi(x^{-1}, x+h)\right] . \tag{2.22}$$

Pour h suffisant petit, on peut faire un développement limité :

$$f_i(p, x+h) = f_i(p,x) + \sum_\beta \frac{\partial f_i(p,x)}{\partial x_\beta} h_\beta + \cdots$$

et dans le terme de droite

$$\phi_\alpha(x^{-1}, x+h) = \phi_\alpha(x^{-1}, x) + \sum_\beta \left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial y_\beta}\right)_{y=x^{-1}} h_\beta + o(h) .$$

Comme

$$\left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial y_\beta}\right)_{y=x^{-1}} = v_{\alpha\beta}$$

et que $\phi_\alpha(x^{-1}, x) = 0$, on trouve :

$$\phi_\alpha(x^{-1}, x+h) = \sum_\beta v_{\alpha\beta} h_\beta + \cdots$$

De plus comme $f_i(p,x) = p'_i$, l'égalité (2.22) devient

$$f_i(p,x) + \sum_\beta \frac{\partial p'_i}{\partial x_\beta} h_\beta = f_i\left[\underbrace{f_1(p,x)}_{p'_1}, \cdots, \underbrace{f_n(p,x)}_{p'_n}, \underbrace{\sum_\alpha v_{1\alpha} h_\alpha}_{k_1}, \cdots, \underbrace{\sum_\alpha v_{r\alpha} h_\alpha}_{k_r}\right] .$$

En différentiant à nouveau, le second membre s'écrit :

$$\begin{aligned} f_i\left[f_1(p,x), \cdots, f_n(p,x), k_1, \cdots, k_r\right] = f_i\left[f_1(p,x), \cdots, f_n(p,x), 0, \cdots, 0\right] \\ + \sum_\beta \left(\frac{\partial f_i(p',x)}{\partial x_\beta}\right)_{x=0} k_\beta \end{aligned}$$

qui devient en remplaçant les k_β par leurs expressions

$$\begin{aligned} f_i\left[f_1(p,x), \cdots, f_n(p,x), k_1, \cdots, k_r\right] = f_i\left[f_1(p,x), \cdots, f_n(p,x), 0, \cdots, 0\right] \\ + \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial f_i(p',x)}{\partial x_\beta}\right)_{x=0} v_{\beta\alpha} h_\alpha . \end{aligned}$$

Or T_0 est la transformation identique c'est à dire $f(p,0) = p$. On en déduit que

$$f_i\left[f_1(p,x), \cdots, f_n(p,x), k_1, \cdots, k_r\right] = f_i(p,x) + \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial f_i(p',x)}{\partial x_\beta}\right)_{x=0} v_{\beta\alpha} h_\alpha .$$

Donc

$$f_i(p,x) + \sum_\alpha \frac{\partial p'_i}{\partial x_\alpha} h_\alpha = f_i(p,x) + \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial f_i(p',x)}{\partial x_\beta}\right)_{x=0} v_{\beta\alpha} h_\alpha \,.$$

Et comme

$$\xi_{i\alpha} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}\right)_{x=0} ,$$

on aboutit à

$$\frac{\partial p'_i}{\partial x_\alpha} = \sum_\beta v_{\beta\alpha}(x)\xi_{i\alpha}(p') \,.$$

Définition 2.3.4.5 (opérateurs infinitésimaux)
On appelle opérateurs infinitésimaux les r opérateurs X_α définis par :

$$X_\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_i} \,. \tag{2.23}$$

Pour de petits paramètres x, les transformations du groupe s'écrivent alors :

$$T_x = \mathbb{1} + \sum_\alpha x_\alpha X_\alpha \,. \tag{2.24}$$

L'action des transformations infinitésimales d'un groupe de Lie peuvent donc être obtenues en faisant agir les opérateurs infinitésimaux.

Démonstration : Pour une fonction F différentiable, une transformation T_x qui fait passer de p à p' remplace $F(p)$ par $F(p') = F(T_x p)$.

$$\begin{aligned} F(p') - F(p) &= F(f(p,x)) - F(p) \\ &= F\left(f(p,0) + \sum_\alpha x_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\right)_{x=0}\right) - F(p) \,. \end{aligned}$$

Or $f(p,0) = p$ et $(\partial f/\partial x_\alpha)_{x=0} = \xi_{i\alpha}$.

$$\begin{aligned} F(p') - F(p) &= F(f(p,x)) - F(p) \\ &= F\left(p + \sum_\alpha x_\alpha \xi_{i\alpha}\right) - F(p) \\ &= F(p) + \sum_{\alpha i} x_\alpha \xi_{i\alpha} \frac{\partial F}{\partial x_i} - F(p) \\ &= \sum_{\alpha i} x_\alpha \xi_{i\alpha} \frac{\partial F}{\partial x_i} \,. \end{aligned}$$

Donc

$$T_x F = F + \sum_{\alpha i} x_\alpha \xi_{i\alpha} \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

et

$$T_x = \mathbb{1} + \sum_{\alpha i} x_\alpha \xi_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_i} \, .$$

DÉFINITION 2.3.4.6 (COMMUTATEUR OU CROCHET DE LIE)
Soit deux champs de vecteurs tangents X et Y définis respectivement par $X = \sum_i \lambda_i \partial/\partial x_i$ et $Y = \sum_i \mu_i \partial/\partial x_i$, le commutateur de X et Y est le champ de vecteur défini par :

$$[X, Y]\, f = XYf - YXf \tag{2.25}$$

$$= \sum_{ij} \lambda_i \frac{\partial \mu_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} - \mu_i \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \, . \tag{2.26}$$

THÉORÈME 2.3.4.11 (PROPRIÉTÉS DU CROCHET DE LIE)
Le crochet de Lie est bilinéaire :

$$[X, \lambda Y + \mu Z] = \lambda \, [X, Y] + \mu \, [X, Z]$$

et

$$[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda \, [X, Z] + \mu \, [Y, Z] \; .$$

De plus il vérifie l'identité de Jacobi :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \, .$$

THÉORÈME 2.3.4.12 (CROCHETS DE LIE DES OPÉRATEURS INFINITÉSIMAUX)
Les opérateurs infinitésimaux vérifient les relations de commutation

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_\lambda c_{\lambda\alpha\beta} X_\lambda \tag{2.27}$$

où les $c_{\lambda\alpha\beta}$ sont les constantes de structure du groupe.

2.3.5 Algèbres de Lie

DÉFINITION 2.3.5.1 (ALGÈBRE DE LIE D'UN GROUPE DE LIE)
Les opérateurs infinitésimaux sont linéairement indépendants, sont stables sous les crochets de Lie (ie que leurs crochets de Lie sont des combinaisons linéaires d'opérateurs infinitésimaux) et satisfont les relations de Jacobi. Ils engendrent l'algèbre de Lie du groupe.

On peut construire à partir des opérateurs de l'algèbre les transformations infinitésimales du groupe et reconstituer le groupe à partir de ses sous groupes à un paramètres.

2.4 Notion de représentations.

2.4.1 Rappels et définitions.

Définition 2.4.1.1 (groupe d'opérateurs sur un espace vectoriel)
Soit un ensemble d'opérateurs sur un espace vectoriel. Le produit de deux opérateurs A et B est défini par :

$$C\overrightarrow{x} = A(B\overrightarrow{x})\,.$$

Cet ensemble est un groupe pour ce produit s'il vérifie les propriétés caractéristiques d'un groupe.

Définition 2.4.1.2 (représentation d'un groupe)
Soit un groupe ,G, et un espace vectoriel, $\mathcal{L}$, on appelle représentation de ce groupe sur $\mathcal{L}$ tout homomorphisme, D, de G dans un groupe d'opérateurs agissant sur $\mathcal{L}$. Cet homomorphisme, D, est tel qu'à chaque élément, g,du groupe est associé un opérateur $D(g)$ et D vérifie :

$$\begin{aligned} \forall g_1, g_2 \in G,\, D(g_1g_2) &= D(g_1)D(g_2)\,, && (2.28)\\ D(e) &= \mathbb{1}\,, && (2.29)\\ D(g^{-1}) &= (D(g))^{-1}\,. && (2.30) \end{aligned}$$

Définition 2.4.1.3 (représentation linéaire d'un groupe)
Une représentation est dite linéaire si tous les opérateurs $D(g)$ sont linéaires.

Dans la suite on dira représentation pour représentation linéaire.

Si l'espace vectoriel sur lequel agissent les opérateurs est de dimension finie égale à n alors on dit que la représentation est de degré n ou que c'est une représentation n-dimensionnelle.

Si on choisit une base dans cet espace de dimension n, alors à chaque opérateur linéaire est associée une matrice dans cette base et par l'intermédiaire de la représentation il y a un homomorphisme entre le groupe G et l'ensemble des matrices inversibles $GL(n)$.

Dans ce cas, la matrice associée à l'élément neutre est la matrice identité :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & 0 & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Et la matrice associée au produit de deux éléments du groupe est le produit des matrices représentant ces deux éléments :

$$\forall i,j,\ (D(SR))_{ij} = \sum_k D(S)_{ik}D(R)_{kj}\,.$$

Définition 2.4.1.4 (représentation fidèle)
Une reprèsentation D d'un groupe G est dite fidèle s'il s'agit d'un isomorphisme du groupe G sur le groupe $D(G)$.

Définition 2.4.1.5 (représentations équivalentes)
Soit $\mathcal{L}$ un espace vectoriel de dimension n et un groupe G. Soit une base $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$de cet espace et $\{D(R)\}_{R\in G}$ les matrices d'une représentation du groupe G dans cette base. Si on change de base $\{e_i'\}_{1\leq i\leq n}$ alors les matrices $\{D'(R)\}_{R\in G}$de la même représentation dans cette nouvelle base peuvent s'écrire en fonction des $\{D(R)\}_{R\in G}$:

$$\exists C,\,\forall R\in G,\,D(R)'=C^{-1}D(R)C.$$

On dit que les deux représentations matricielles sont équivalentes.

Définition 2.4.1.6 (caractères d'une représentation)
On cherche des quantités qui ne dépendent pas du choix d'une base dans l'espace vectoriel support de la représentation. Or si on considère les traces des matrices constituant la représentation matricielle du groupe alors ces traces sont les mêmes pour deux représentations équivalentes. Ces traces constituent ce que l'on appelle les caractères de la représentation.

Soit deux représentations matricielles équivalentes, *$D^{(1)}$ et $D^{(2)}$, d'un même groupe :*

$$\forall R\,,\chi(R)=Tr(D^{(1)}(R))=Tr(D^{(2)}(R))\,.$$

On présente maintenant quelques rappels sur les espaces vectoriels complexes pour pouvoir ensuite parler d'orthogonalité.

Définition 2.4.1.7 (produit hermitien sur un espace vectoriel complexe)
Soit un espace vectoriel $\mathcal{L}$ sur le corps des complexes de dimension finie, on peut définir sur $\mathcal{L}$ un produit scalaire hermitien noté $\langle\,|\,\rangle$qui est une application de $\mathcal{L}^2$ dans C et qui vérifie :

1. $\forall(x,y)\in\mathcal{L}^2\,,\langle x\mid y\rangle=(\langle y\mid x\rangle)^*\,,$
2. $\forall(x,y)\in\mathcal{L}^2\,,\langle x\mid \alpha y\rangle=\alpha\langle x\mid y\rangle\,,$
3. $\forall(x,y)\in\mathcal{L}^2\,,\langle x_1+x_2\mid y\rangle=\langle x_1\mid y\rangle+\langle x_2\mid y\rangle\,,$
4. $\forall x\in\mathcal{L}\,,\langle x\mid x\rangle\geq 0\,.$

On définit à partir de ce produit hermitien une norme : $\forall x\,,\parallel x\parallel^2=\langle x\mid x\rangle$
On parle d'espace hermitien (c'est à dire espace Hilbertien [2] de dimension finie).

[2] Un espace Hilbertien est un espace vectoriel complexe pas nécessairement de dimension finie sur lequel est défini un produit scalaire hermitien et qui est complet pour la métrique associée à ce produit scalaire.

Exemple : Soit un espace vectoriel sur le corps des complexes de dimension n, on choisit une base $\{e_i\}$ sur cet espace et on définit le produit scalaire hermitien de la façon suivante :

$$\forall x = \sum_i x_i e_i,\ y = \sum_i y_i e_i,\ \langle x \mid y \rangle = \sum_i x_i^* y_i\,.$$

On peut également définir sur des espaces vectoriels complexes de dimensions infinies des produits scalaires hermitiens. Par exemple sur l'espaces des fonctions d'une variable réelle de module carré intégrable, on peut définir le produit suivant :

$$\forall f,\ g,\ \langle f \mid g \rangle = \int f^*(x) g(x) dx\,.$$

DÉFINITION 2.4.1.8 (BASE ORTHONORMÉE)
Soit un espace hermitien de dimension n muni d'un produit scalaire hermitien noté $\langle | \rangle$, *une base orthonormée pour ce produit hermitien est une base* $\{e_i\}_{1 \le i \le n}$ *telle :*

$$\forall i, j,\ \langle e_i \mid e_j \rangle = \delta_{ij}\,.$$

Il existe toujours une base orthonormée pour un tel espace hermitien (on applique la méthode de construction de Graam-Schmitd).

DÉFINITION 2.4.1.9 (OPÉRATEUR UNITAIRE.)
Soit un espace hermitien muni d'un produit scalaire hermitien noté $\langle | \rangle$. *On appelle opérateur unitaire pour ce produit scalaire hermitien tout opérateur linéaire* $\tilde{U}$ *tel que :*

$$\forall x_1, x_2,\ \langle x_1 \mid x_2 \rangle = \langle \tilde{U}(x_1) \mid \tilde{U}(x_2) \rangle\,.$$

Un tel opérateur est bijectif et son application réciproque est l'opérateur adjoint.

Si on se place dans une base orthonormée *du produit hermitien alors la matrice* U *d'un tel opérateur unitaire est telle que son inverse est la matrice transposée et complexe conjuguée :*

$$U^{-1} = U^\dagger\,.$$

On peut maintenant introduire la notion de représentation unitaire.

DÉFINITION 2.4.1.10 (REPRÉSENTATION UNITAIRE.)
Soit un espace hermitien, un groupe G. *On appelle représentation unitaire toute représentation dont les constituants sont des opérateurs unitaires.*

THÉORÈME 2.4.1.1 (ÉQUIVALENCE REPRÉSENTATION-REPRÉSENTATION UNITAIRE)
Soit G *un groupe* fini *et* D *une représentation de ce groupe sur un espace hermitien* $\mathcal{L}$ *dont on note le produit hermitien* $\langle | \rangle$. *Il existe un produit hermitien,noté* $\{|\}$, *pour lequel cette représentation est unitaire et par conséquent il existe une représentation unitaire pour le produit scalaire* $\langle | \rangle$ *équivalente à* D.

Démonstration : On désigne par $[g]$ le nombre d'éléments du groupe et on définit sur $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$, l'application suivante :

$$\forall x, y,\ \{x \mid y\} = \frac{1}{[g]} \sum_{R \in G} \langle D(R)x \mid D(R)y \rangle \,.$$

Cette application est un produit hermitien sur $\mathcal{L}$: cela résulte directement des propriétés du produit hermitien initial. De plus la représentation D est unitaire pour ce nouveau produit scalaire hermitien :

$$\begin{aligned}
\forall x, y,\ \forall S \in G,\ \{D(S)x \mid D(S)y\} &= \frac{1}{[g]} \sum_{R \in G} \langle D(R)D(S)x \mid D(R)D(S)y \rangle \,, \\
\forall x, y,\ \forall S \in G,\ \{D(S)x \mid D(S)y\} &= \frac{1}{[g]} \sum_{R \in G} \langle D(RS)x \mid D(RS)y \rangle \,.
\end{aligned}$$

Or quand R parcourt tout le groupe G alors RS parcourt aussi tout le groupe donc dans la somme, on peut remplacer RS par R' qui parcourt tout le groupe si bien que :

$$\begin{aligned}
\forall x, y,\ \forall S \in G,\ \{D(S)x \mid D(S)y\} &= \frac{1}{[g]} \sum_{R' \in G} \langle D(R')x \mid D(R')y \rangle \,, \\
\forall x, y,\ \forall S \in G,\ \{D(S)x \mid D(S)y\} &= \{x \mid y\} \,.
\end{aligned}$$

Ceci prouve que la représentation D est unitaire pour ce nouveau produit hermitien $\{|\}$. Soit $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée pour $\{|\}$ et $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée pour $\langle|\rangle$. Il existe un opérateur linéaire qui fait passer de la dernière base à la première : $v_i = \tilde{T} u_i$. On sait qu'en raison de leur caractère d'orthogonalité :

$$\forall i,\ j,\ \{v_i \mid v_j\} = \langle u_i \mid u_j \rangle = \delta_{ij} \,.$$

Et si $x = \sum_i x_i u_i$, alors $\tilde{T}x = \sum_i x_i v_i$. Donc

$$\forall x, y,\ \langle x \mid y \rangle = \sum_i x_i^* y_i = \{\tilde{T}x \mid \tilde{T}y\} \,. \tag{2.31}$$

On définit la représentation D' de la façon suivante :

$$\forall R \in G,\ D'(R) = \tilde{T}^{-1} D(R) \tilde{T} \,. \tag{2.32}$$

Ainsi pour n'importe quels vecteurs x et y et n'importe quel élément R du groupe G, l'utilisation de (2.31) donne :

$$\{\tilde{T}D'(R)x \mid \tilde{T}D'(R)y\} = \langle D'(R)x \mid D'(R)y \rangle \,. \tag{2.33}$$

De plus

$$\begin{aligned}\{\tilde{T}D'(R)x \mid \tilde{T}D'(R)y\} &= \{D(R)\tilde{T}x \mid D(R)\tilde{T}y\}\,, &(2.34)\\ &= \{\tilde{T}x \mid \tilde{T}y\}\,, &(2.35)\\ &= \langle x \mid y\rangle\,. &(2.36)\end{aligned}$$

Le passage entre (2.34) et (2.35) est obtenu en utilisant le fait que la représentation D est unitaire pour le produit scalaire hermitien $\{|\}$ et la passage de l'équation (2.35) à l'équation (2.36) se fait en utilisant (2.31). Et en comparant (2.33) et (2.36), on obtient finalement :

$$\langle D'(R)x \mid D'(R)y\rangle \;=\; \langle x \mid y\rangle\,. \tag{2.37}$$

Cette dernière équation (2.37) établit l'unitarité de la représentation D' pour le produit scalaire hermitien initial,$\langle|\rangle$, et cette représentation est équivalente à la représentation D (cf (2.32)).

Ce résultat peut être étendu aux groupes compacts. Ce théorème est fondamental car il prouve au moins pour les groupes finis que l'on peut se contenter de l'étude des représentations unitaires. De plus ce théorème a une conséquence importante en ce qui concerne la réductibilité d'une représentation, notion que nous allons définir maintenant.

Définition 2.4.1.11 (réductibilité)
Soit $\tilde{D}$ une représentation d'un groupe sur un espace vectoriel $\mathcal{L}$. Cette représentation est réductible s'il existe un sous espace vectoriel $\mathcal{E}$ de $\mathcal{L}$ stable par tous les opérateurs de la représentation c'est à dire si

$$\forall u \in \mathcal{E}, \forall R \in G,\ \tilde{D}(R)u \in \mathcal{E}\,.$$

Si on choisit une base de $\mathcal{E}$, $\{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ que l'on complète pour avoir une base de $\mathcal{L}$ avec des vecteurs $\{e_i\}_{p+1\leq i\leq n}$ alors les matrices $D(R)$ des opérateurs $\tilde{D}(R)$ de la représentation sont de la forme :

$$\forall R \in G,\ D(R) = \begin{bmatrix} A(R) & C(R) \\ 0 & B(R)\end{bmatrix}.$$

Définition 2.4.1.12 (réductibilité complète)
Soit $\tilde{D}$ une représentation d'un groupe sur un espace vecoriel $\mathcal{L}$. Cette représentation est complètement réductible s'il existe deux sous espaces vectoriels $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ supplémentaires l'un de l'autre dans $\mathcal{L}$ stables par tous les opérateurs de la représentation c'est à dire si

$$\begin{aligned}&\forall u_1 \in \mathcal{E}_1, \forall R \in G,\ \tilde{D}(R)u_1 \in \mathcal{E}_1\,,\\ &\forall u_2 \in \mathcal{E}_2, \forall R \in G,\ \tilde{D}(R)u_2 \in \mathcal{E}_2\,.\end{aligned}$$

Si on choisit une base de $\mathcal{E}_1$, $\{e_i^{(1)}\}_{1\leq i\leq p_1}$, et une base de $\mathcal{E}_2$, $\{e_i^{(2)}\}_{1\leq i\leq p_2}$, alors la réunion de ces deux bases donne un base de $\mathcal{L}$ (car les deux sous espaces sont supplémentaires), on ordonne la base en plaçant en premier les vecteurs $\{e_i^{(1)}\}_{1\leq i\leq p_1}$ suivi des vecteurs $\{e_i^{(2)}\}_{1\leq i\leq p_2}$.Dans cette base, les matrices $D(R)$ des opérateurs $\tilde{D}(R)$ de la représentation sont de la forme :

$$\forall R \in G,\ D(R) = \begin{bmatrix} A(R) & 0 \\ 0 & B(R) \end{bmatrix}.$$

THÉORÈME 2.4.1.2
Toute représentation unitaire réductible est complètement réductible.

Démonstration : Soit une représentation unitaire réductible. Soit $\mathcal{E}$ un sous espace stable par tout opérateur $\tilde{U}(R)$ de la représentation. Soit le supplément orthogonal de ce sous espace $\mathcal{E}^{\perp}$.

$$\begin{aligned} \forall R \in G,\, \forall x \in \mathcal{E},\, \forall y \in \mathcal{E}^{\perp},\, \langle x \mid y\rangle &= \langle \tilde{U}(R)x \mid \tilde{U}(R)y\rangle\,, \\ \Rightarrow \forall R \in G,\, \forall x \in \mathcal{E},\, \forall y \in \mathcal{E}^{\perp},\, 0 &= \langle \tilde{U}(R)x \mid \tilde{U}(R)y\rangle\,, \\ \forall R \in G,\, \forall x \in \mathcal{E},\, \tilde{U}(R)x \in \mathcal{E}\,, &\Rightarrow \forall R \in G,\, \forall x \in \mathcal{E},\, \forall y \in \mathcal{E}^{\perp},\, \tilde{U}(R)y \in \mathcal{E}^{\perp}\,. \end{aligned}$$

Donc le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{E}$ est aussi stable par tout opérateur de la représentation. Il existe donc deux sous espaces vectoriels supplémentaires l'un de l'autre stables par la représentation ce qui signifie que cette représentation est complètement réductible.

Or pour les groupes finis (ainsi que pour les groupes compacts), toute représentation est équivalente à une représentation unitaire. Il suffit donc pour les groupes finis de se restreindre à la réduction des représentations unitaires. Remarquons qu'une représentation pour laquelle il n'existe pas de sous espace (différent de l'espace tout entier ou du vecteur nul) stable par l'ensemble des éléments la constituant est dite *irréductible.*

On va s'intéresser maintenant aux deux *lemmes de Schur* qui sont des résultats fondamentaux dans la théorie des représentations. Ces lemmes donnent des critères permettant de dire si une représentation est réductible et servent également de point de départ pour établir les relations d'orthogonalité des caractères, relations que l'on verra par la suite et qui seront employées pour caractériser les représentations irréductibles non-équivalentes du groupe (notamment dans la construction de la table des caractères du groupe).

2.4.2 Les lemmes de Schur.

LEMME 2.4.2.1 (PREMIER LEMME DE SCHUR)
Soit D une représentation unitaire d'un groupe. Cette représentation est irréductible si et seulement si tout opérateur linéaire qui commute avec tout élément $\tilde{D}(R)$ est

proportionnel à l'identité.

Démonstration : On appelle $\mathcal{L}$ l'espace complet support de la représentation.

Soit une représentation unitaire et irréductible et soit $\tilde{O}$ un opérateur linéaire qui commute avec tous les éléments de la représentation. Alors tout sous espace propre de cet opérateur est stable par la représentation donc tout sous espace propre est soit le vecteur nul, ce qui est exclu par la définition même du sous espace propre, soit l'espace vectoriel tout entier. Donc l'opérateur $\tilde{O}$ est bien proportionnel à l'identité.

Réciproquement soit une représentation unitaire telle que tout opérateur qui commute avec les éléments constituant la représentation est proportionel à l'identité. Soit $\mathcal{E}$ un sous espace stable par la représentation. Il s'agit de montrer que c'est soit l'espace tout entier soit le vecteur nul. Comme la représentation est unitaire, le supplément orthogonal de ce sous espace stable est aussi stable. Par conséquent $\tilde{P}$ le projecteur orthogonal sur $\mathcal{E}$ commute avec tout élément de la représentation. En effet :

$$\forall x \in \mathcal{L},\ \exists!(x_1, x_2) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}^{\perp},\ x = x_1 + x_2\,.$$

$$\tilde{P}(x) = x_1 \Rightarrow \forall R \in G,\ \tilde{D}(R)P(x) = \tilde{D}(R)(x_1)\,.$$

Et

$$\tilde{D}(R)(x) = \tilde{D}(R)(x_1) + \tilde{D}(R)(x_2)\,.$$

Or $\tilde{D}(R)(x_1) \in \mathcal{E}$ car ce sous espace est stable par la représentation et $\tilde{D}(R)(x_2) \in \mathcal{E}^{\perp}$ car la représentation étant unitaire ce sous espace est aussi stable. Donc si on applique le projecteur orthogonal alors le deuxième vecteur donne une contribution nulle tandis que le premier vecteur reste inchangé. Ainsi $\forall x \in \mathcal{L},\ \tilde{P}\tilde{D}(R)x = \tilde{D}(R)(x_1)$. Ce qui montre que ce projecteur commute avec tous les éléments de la représentation donc il est proportionnel à l'identité donc c'est soit l'identité elle-même soit l'application nulle (car les seules valeurs propres d'un projecteur sont 0 et 1). Donc $\mathcal{E}$ est soit le vecteur nul soit l'espace tout entier. Ceci achève la démonstration.

Lemme 2.4.2.2 (deuxième lemme de Schur)
Soit $\tilde{D}$ et $\tilde{D}'$ deux représentations irréductibles non équivalentes d'un même groupe G, alors tout opérateur $\tilde{A}$ qui vérifie :

$$\forall R \in G,\ \tilde{D}(R)\tilde{A} = \tilde{A}\tilde{D}'(R) \tag{2.38}$$

est nul.

Démonstration : On appelle $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ les espaces vectoriels supports respectivement des représentations $\tilde{D}$ et $\tilde{D}'$. Les dimensions respectives de ces espaces vectoriels sont notées n et n'. L'opérateur $\tilde{A}$ agit de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$.

1. Premier cas : $n < n'$. Le noyau de l'opérateur $\tilde{A}$ n'est pas réduit au vecteur nul car $dim(Ker(\tilde{A})) + dim(Im(\tilde{A})) = n'$ et comme $dim(Im(\tilde{A})) \leq n$ alors $dim(Ker(\tilde{A})) = n' - dim(Im(\tilde{A})) \geq n' - n > 0$. Or ce sous espace vectoriel est stable par les éléments de la représentation $\tilde{D}'$ en raison (2.38) :

$$\begin{aligned}
\forall x \in Ker(\tilde{A}),\, \forall R \in G,\, \tilde{A}\tilde{D}'(R)(x) &= \tilde{D}(R)\tilde{A}x\,, \\
\forall x \in Ker(\tilde{A}),\, \forall R \in G,\, \tilde{A}\tilde{D}'(R)(x) &= \tilde{D}(R)\underbrace{\left(\tilde{A}x\right)}_{=0}, \\
\Rightarrow \forall x \in Ker(\tilde{A}),\, \forall R \in G,\, \tilde{A}\left(\tilde{D}'(R)(x)\right) &= 0\,, \\
\Rightarrow \forall x \in Ker(\tilde{A}),\, \forall R \in G,\, \tilde{D}'(R)(x) &\in Ker(\mathcal{E}')\,.
\end{aligned}$$

   Donc comme la représentation est irréductible et que le noyau n'est pas réduit au vecteur nul, la seule possibilité pour le noyau est d'être égal à l'espace $\mathcal{E}'$ tout entier et l'opérateur $\tilde{A}$ est nul.

2. Second cas : $n > n'$. L'image de l'espace $\mathcal{E}'$, $Im(\tilde{A})$, est un sous espace vectoriel de $\mathcal{E}$ stable par la représentation $\tilde{D}$ du groupe G, en effet :

$$\begin{gathered}
\forall y \in Im(\tilde{A})\mathcal{E},\, \exists x \in \mathcal{E}',\, \tilde{A}(x) = y\,, \\
\Rightarrow \forall y \in Im(\tilde{A}),\, \tilde{D}(R)(y) = \tilde{D}(R)\left(\tilde{A}(x)\right)\,, \\
\Rightarrow \forall y \in Im(\tilde{A}),\, \tilde{D}(R)(y) = \tilde{A}\left(\tilde{D}'(R)(x)\right)\,, \\
\Rightarrow \forall y \in Im(\tilde{A}),\, \tilde{D}(R)(y) \in Im(\tilde{A})\,.
\end{gathered}$$

   Et comme $n > n'$, $Im(\tilde{A})$ est strictement inclus dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}$. Donc ce ne peut pas être l'espace tout entier. Or par hypothèse, la représentation $\tilde{D}$ est irréductible donc les seuls sous espaces stables par cette représentation sont $\mathcal{E}$ et le vecteur nul. Donc $Im(\tilde{A})$ ne peut être que le vecteur nul ce qui signifie que tout vecteur de $\mathcal{E}'$ a pour image par $\tilde{A}$ le vecteur nul de $\mathcal{E}$ et que $\tilde{A}$ est identiquement nul de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$.

3. Troisième cas : $n = n'$. Dans ce cas le noyau ne peut pas être réduit à l'espace engendré par le vecteur nul sinon cela signifierait qu'il existe une bijection entre les deux représentations ce qui est exclus car les représentations ne sont pas équivalentes par hypothèse. Donc comme la représentation $\tilde{D}'$ est irréductible et comme le noyau est stable sous l'action du groupe, le noyau est l'espace tout entier par conséquent l'opérateur $\tilde{A}$ est identiquement nul.

On a donc envisagé toutes les situations possibles et on a toujours abouti à la conclusion suivante : l'opérateur $\tilde{A}$ est identiquement nul si les deux représentations sont irréductibles et non équivalentes ; c'est ce que le lemme prévoyait.

Ces deux lemmes de Schur servent de base pour établir des relations d'orthogonalité entre les caractères et certaines égalités comme par exemple celle qui lie le nombre de classes de conjugaison et le nombre de représentations irréductibles dans le cas des groupes finis.

2.4.3 Théorème fondamental d'orthogonalité.

Les résultats présentés dans cette section sont établis pour des groupes finis. En réalité il est possible d'obtenir des relations analogues pour les groupes compacts en remplaçant les sommations par des intégrations sur les paramètres du groupe :

$$\frac{1}{[g]}\sum_{g\in\mathcal{G}} \longrightarrow \int d\mu(g)$$

où $[g]$ est le nombre d'éléments du groupe fini et $d\mu$ désigne la mesure invariante de Haar du groupe (cf par exemple l'annexe E dans [Ste94]).

Proposition 2.4.3.1
Soit $\tilde{A}$ un opérateur de $\mathcal{E}_\mu$ dans $\mathcal{E}_\nu$ espaces vectoriels supports respectifs de deux représentations irréductibles et non équivalentes, $\tilde{T}^{(\mu)}$ et $\tilde{T}^{(\nu)}$, d'un même groupe fini $\mathcal{G}$. Si

$$\tilde{B} = \sum_{g\in\mathcal{G}} \tilde{T}^{(\mu)}(g)\,\tilde{A}\tilde{T}^{(\nu)}\left(g^{-1}\right) .$$

alors

$$\tilde{B} = \sum_{g\in\mathcal{G}} \tilde{T}^{(\mu)}(g)\,\tilde{A}\tilde{T}^{(\nu)}\left(g^{-1}\right) = \delta_{\mu\nu}\lambda^{\mu}_{(\tilde{A})}\mathbb{1}\,,$$

où $\lambda^{\mu}_{(\tilde{A})}$ est une constante qui dépend de l'opérateur $\tilde{A}$ et de la représentation $\tilde{T}^{(\mu)}$.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le premier et le second lemme de Schur. En effet si on calcule :

$$\begin{aligned}
\forall h,\, \tilde{T}^{(\mu)}(h)\,\tilde{B} &= \sum_{g\in\mathcal{G}} \tilde{T}^{(\mu)}(h)\,\tilde{T}^{(\mu)}(g)\,\tilde{A}\tilde{T}^{(\nu)}\left(g^{-1}\right) ,\\
&= \sum_{g\in\mathcal{G}} \tilde{T}^{(\mu)}(hg)\,\tilde{A}\tilde{T}^{(\nu)}\left(g^{-1}\right) ,\\
&= \sum_{g'=hg,\,g\in\mathcal{G}} \tilde{T}^{(\mu)}(g')\,\tilde{A}\tilde{T}^{(\nu)}\left(g^{-1}\right) ,\\
&= \sum_{g'=hg,\,g\in\mathcal{G}} \tilde{T}^{(\mu)}(g')\,\tilde{A}\tilde{T}^{(\nu)}\left(\left(h^{-1}g'\right)^{-1}\right) ,\\
&= \sum_{g'\in\mathcal{G}} \tilde{T}^{(\mu)}(g')\,\tilde{A}\tilde{T}^{(\nu)}\left((g')^{-1}h\right) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{g' \in \mathcal{G}} \tilde{T}^{(\mu)}(g') \tilde{A} \tilde{T}^{(\nu)} \left((g')^{-1} \right) \tilde{T}^{(\nu)}(h) \ , \\
&= \tilde{B} \tilde{T}^{(\nu)}(h) \ .
\end{aligned}$$

Si les deux représentations sont irréductibles et non équivalentes alors le second lemme de Schur 2.4.2.2 s'applique et si les indices sont les mêmes alors l'irréductibilité de la représentation implique que l'opérateur $\tilde{B}$ est diagonal.

Théorème 2.4.3.1
Si on note $D^{(\mu)}(g)$ les matrices de la représentation $\tilde{T}^{(\mu)}$ et $D^{(\nu)}(g)$ les matrices de la représentation $\tilde{T}^{(\nu)}$ après des choix de bases dans les espaces supports correspondants alors ces matrices vérifient la relation suivante :

$$\forall i, j, r, s \sum_{g \in \mathcal{G}} D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{sj}^{(\nu)} \left(g^{-1} \right) = \lambda_{rs}^{(\mu)} \delta_{\mu\nu} \delta_{ij} \ .$$

On montre que

$$\lambda_{rs}^{(\mu)} = \frac{[g]}{n_\mu} \delta_{rs} \ .$$

n_μ est la dimension de l'espace support de la représentation $\tilde{T}^{(\mu)}$. On peut donc écrire la relation fondamentale d'orthogonalité :

$$\forall i, j, r, s \sum_{g \in \mathcal{G}} D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{sj}^{(\nu)} \left(g^{-1} \right) = \frac{[g]}{n_\mu} \delta_{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{rs} \ . \tag{2.39}$$

Théorème 2.4.3.2 (orthogonalité des caractères)
Si on note $\chi^{(\mu)}(g)$ les caractères des matrices de la représentation $\tilde{T}^{(\mu)}$ et $\chi^{(\nu)}(g)$ ceux pour la représentation $\tilde{T}^{(\nu)}$ alors :

$$\frac{1}{[g]} \sum_{g \in \mathcal{G}} \chi^{(\mu)}(g) \chi^{(\nu)} \left(g^{-1} \right) = \delta_{\mu\nu} \ .$$

Comme les représentations sont supposées unitaires et que l'inverse d'une matrice unitaire est sa transposée conjuguée, on obtient :

$$\frac{1}{[g]} \sum_{g \in \mathcal{G}} \chi^{(\mu)}(g) \chi^{(\nu)^\star}(g) = \delta_{\mu\nu} \ .$$

Démonstration : On déduit ce théorème en prenant la trace des matrices des deux représentations irréductibles et en utilisant (2.39).

PROPOSITION 2.4.3.2
Il y a autant de classes de conjugaison que de représentations irréductibles non-équivalentes d'un groupe fini [Ham62, Jon96].

PROPOSITION 2.4.3.3
Si on note n_μ les dimensions des représentations irréductibles non-équivalentes alors

$$\sum_\mu n_\mu^2 = [g] \ . \tag{2.40}$$

Exemple : On considère à nouveau C_4. Ce groupe étant commutatif, il compte 4 classes de conjugaison donc 4 représentations irréductibles non-équivalentes. La relation (2.40) nous permet de dire que ces représentations sont toutes de dimension égale à 1 puisque ces 4 dimensions sont des entiers dont la somme vaut 4. Ce résultat est vrai pour tout groupe commutatif.

Une façon de répertorier les représentations irréductibles est d'énumérer les caractères des classes de conjugaison. Cette énumération se fait à l'aide de la table des caractères dont les colonnes sont associées aux différentes classes de conjugaisons du groupe et les lignes aux différentes représentations irréductibles non-équivalentes. Une table de caractère comporte donc autant de lignes que de colonnes.

Exemple : Les quatre représentations irréductibles non-équivalentes de C_4 sont de dimension 1, on les note $\tilde{T}^{(1)}$, $\tilde{T}^{(2)}$, $\tilde{T}^{(3)}$, $\tilde{T}^{(4)}$. $\tilde{T}^{(1)}$ désigne la représentation triviale. Donner les caractères d'une des représentation revient donc à donner les images des éléments du groupe par cette représentation. La table des caractères s'écrit :

	1	i	-1	$-i$
$\tilde{T}^{(1)}$	1	1	1	1
$\tilde{T}^{(2)}$	1	$-i$	-1	i
$\tilde{T}^{(3)}$	1	i	-1	$-i$
$\tilde{T}^{(4)}$	1	-1	1	-1

On peut contrôler que les relations d'orthogonalité sont vérifiées : par exemple, le produit scalaire entre caractères de la première représentation avec ceux d'une des $\tilde{T}^{(i)}$ avec $i \geq 2$ est la somme des caractères de cette $\tilde{T}^{(i)}$; cette somme est bien nulle. On constate également que la somme des modules au carré de chaque ligne vaut bien l'ordre du groupe, 4.

La relation d'orthogonalité sert aussi dans la décomposition d'une représentation en somme de représentations irréductibles et dans la détermination de la multiplicité de ces différentes représentations dans la décomposition.

Théorème 2.4.3.3 (décomposition d'une représentation réductible)
Soit un représentation réductible $\tilde{T}$ d'un groupe $\mathcal{G}$. Cette représentation peut s'écrire comme une somme de représentations irréductibles

$$\tilde{T} = \bigoplus_{\mu} a_\mu \tilde{T}^{(\mu)} \,, \tag{2.41}$$

c'est à dire que les matrices de $\tilde{T}$ peuvent s'écrire comme une matrice formée de blocs diagonaux qui appartiennent aux différentes $\tilde{T}^{(\mu)}$:

$$\forall R \in \mathcal{G},\ D(R) = \begin{bmatrix} D^{\mu}(R) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & D^{\nu}(R) \end{bmatrix} . \tag{2.42}$$

Les entiers a_ν indiquant le nombre de fois où chaque représentation $\tilde{T}^{(\nu)}$ apparaît dans cette décomposition, sont donnés par :

$$a_\nu = \frac{1}{[g]} \sum_{g \in \mathcal{G}} \chi\,(g)\, \chi^{(\nu)}\,(g) \ . \tag{2.43}$$

Démonstration : Si on prend la trace de (2.42) alors on obtient

$$\chi(g) = \sum_{\mu} a_\mu \chi^{(\mu)}(g) \,,$$

puis on multiplie par $\chi^{(\nu)}(g^{-1})$ et on somme sur les éléments du groupe. La relation d'orthogonalité appliquée au membre de droite donne alors :

$$\sum_{g \in \mathcal{G}} \chi(g)\chi^{(\nu)}(g^{-1}) = [g] a_\nu \,.$$

Donc on obtient bien

$$a_\nu = \frac{1}{[g]} \sum_{g \in \mathcal{G}} \chi\,(g)\, \chi^{(\nu)}\,(g) \ .$$

Exemple : Soit une représentation $\mathcal{T}$ dans un espace vectoriel de dimension 3 de C_4 définie par les quatre matrices 3×3 suivantes :

$$D(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \qquad D(i) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

$$D(-1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad D(-i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Ces matrices sont les matrices des rotations d'axe O_z d'angle 0, $\pi/2$, π et $3\pi/2$.

Les caractères de cette représentation sont : $\chi(1) = 3$, $\chi(i) = 1$, $\chi(-1) = -1$ et $\chi(-i) = 1$.

D'après (2.41), on peut écrire que $\mathcal{T} = a_1\tilde{T}^{(1)} \oplus a_2\tilde{T}^{(2)} \oplus a_3\tilde{T}^{(3)} \oplus a_4\tilde{T}^{(4)}$. Les multiplicités peuvent être calculées en utilisant (2.43) ainsi que la table des caractères de C_4 calculée précédemment :

$$a_1 = \frac{1}{4}\,(3 + 1 - 1 + 1) = 1\,,$$
$$a_2 = \frac{1}{4}\,(3 + i - 1(-1) + (-i)) = 1\,,$$
$$a_3 = \frac{1}{4}\,(3 + i + 1 - i) = 1\,,$$
$$a_4 = \frac{1}{4}\,(3 - 1 - 1 - 1)) = 0\,.$$

Donc $\mathcal{T} = \tilde{T}^{(1)} \oplus \tilde{T}^{(2)} \oplus \tilde{T}^{(3)}$. Cela signifie qu'il existe une base de R^3 dans laquelle les matrices de cette représentation sont toutes diagonales (les blocs diagonaux se réduisent ici des nombres car les représentations irréductibles sont de dimension 1) et valent :

$$D(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D(i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix},$$
$$D(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D(-i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}.$$

2.5 Mécanique quantique et les groupes et algèbres de Lie

2.5.1 Rappel des postulats de la mécanique quantique

Un système quantique est décrit à l'aide d'une fonction d'onde, ϕ, qui est un élément d'un espace vectoriel, $\mathcal{E}$. L'évolution d'un système non relativiste est régie par une équation aux dérivées partielles, l'équation de Schrödinger :

$$\hat{H}(x,t)\phi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,t)\,, \tag{2.44}$$

où x désigne l'ensemble des degrés de liberté (coordonnées spatiales, spin...) dont dépend le système et $\hat{H}(x,t)$, l'hamiltonien, est un opérateur agissant sur $\mathcal{E}$.

Si l'hamiltonien ne dépend pas du temps alors résoudre (2.44) revient à déterminer le spectre de $\hat{H}(x)$, c'est à dire trouver ses fonctions et les valeurs propres, notées respectivement ϕ_E et E :

$$\hat{H}(x)\phi_E(x) = E\phi_E(x)\,. \tag{2.45}$$

Les solutions de (2.44) s'ecrivent alors comme une combinaison linéaire des solutions stationnaires, $\phi_E(x)\exp(-iEt/\hbar)$:

$$\phi(x,t) = \sum_E \alpha_E \phi_E(x) e^{-iEt/\hbar}\,. \tag{2.46}$$

Comme l'hamiltonien est un opérateur hermitien, ses fonctions propres forment une base orthonormée de $\mathcal{E}$ et les coefficients α_E sont les produits scalaires de $\phi(.,t=0)$ avec les ϕ_E :

$$\alpha_E = \langle \phi(.,0) \mid \phi_E \rangle = \int \phi^*(x,t=0)\phi_E(x)dx\,.$$

À toute grandeur physique, $\mathcal{O}$, est associée un opérateur hermitien $\hat{O}$. Le résultat de la mesure de $\mathcal{O}$ est l'une des valeurs propres, λ_n, de $\hat{O}$. Si le système est décrit par la fonction d'onde $\phi(x,t)$ alors on peut l'exprimer comme une superposition des vecteurs propres de $\hat{O}$:

$$\phi(x,t) = \sum_n p_n(t)\psi_n(x)\,.$$

Le coefficient $|p_n(t)|^2$ est la probabilité de trouver la valeur λ_n lors de la mesure à l'instant t de $\mathcal{O}$. Le produit scalaire $\langle \phi \mid \hat{O} \mid \phi \rangle$ est la valeur moyenne des mesures de $\mathcal{O}$ si on réalise ces mesures au même instant sur un ensemble infini de systèmes quantiques préparés dans des conditions initiales identiques.

2.5.2 Transformations de symétrie

Supposons que les coordonnées du système se transforment sous l'action d'un groupe $\mathcal{G}$ de la façon suivante :

$$x \longrightarrow x' = gx\,, g \in \mathcal{G}\,, \tag{2.47}$$

alors cette transformation induit une transformation des fonctions d'onde :

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = D(g)\phi(x) = \phi(g^{-1}x)\,. \tag{2.48}$$

Ces transformations doivent conserver les probabilités de transition par conséquent

$$|\langle \phi' | \psi' \rangle|^2 = |\langle \phi | \psi \rangle|^2\,. \tag{2.49}$$

Théorème 2.5.2.1 (Théorème de Wigner[Wig49, Kne98, Ste94])
Toutes les transformations $D(g)$ qui vérifient (2.49) sont

– *soit unitaires et linéaires :*

   1. $D(g)\{|\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2\rangle\} = \lambda_1 D(g)|\psi_1\rangle + \lambda_2 D(g)|\psi_2\rangle$.
   2. $\langle\phi'|\psi'\rangle$ *donc* $D(g)^{-1} = D(g)^\dagger$.
- *soit anti-unitaires et anti-linéaires :*
   1. $D(g)\{|\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2\rangle\} = \lambda_1^* D(g)|\psi_1\rangle + \lambda_2^* D(g)|\psi_2\rangle$.
   2. $\langle\phi'|\psi'\rangle^*$.

On se limitera aux cas des transformations linéaires et les $D(g)$ forment donc une représentation projective du groupe $\mathcal{G}$ (c'est à dire que les $D(g)$ ne sont définies qu'à une phase près dépendant de g) ; on s'affranchit de ce problème de phase en plongeant éventuellement $\mathcal{G}$ dans un groupe plus grand si bien que l'on est finalement ramené à une représentation linéaire du groupe. Cette représentation étant unitaire, elle est donc complètement réductible.

Un opérateur $\hat{O}$ est transformé en $\hat{O}'$:

$$\hat{O}' = D(g)\hat{O}D(g)^{-1} . \tag{2.50}$$

puisque $\langle\phi \mid \hat{O} \mid \phi\rangle = \langle\phi' \mid \hat{O}' \mid \phi'\rangle$ et que les opérateurs $D(g)$ sont unitaires.

L'opérateur est invariant si

$$\hat{O}' = \hat{O} , \tag{2.51}$$

ce qui signifie que

$$\forall g , D(g)\hat{O}D(g)^{-1} = \hat{O} . \tag{2.52}$$

L'opérateur est donc invariant si et seulement s'il commute avec tous les éléments de la représentation. On appelle ces opérateurs *les opérateurs de Casimir* du groupe.

Supposons que $\hat{H}$, l'hamiltonien du système, soit invariant sous l'action d'un groupe $\mathcal{G}$. Il commute avec tous les éléments de $\mathcal{G}$ et ses sous espaces-propres sont stables pour l'ensemble des transformations : en effet si on considère une énergie E dégénérée d fois et si on note les fonctions propres $\phi_i^{(E)}$ $(i = 1 \cdots d)$ alors $D(g)\phi_i^{(E)}$ est également une fonction propre de $\hat{H}$ avec la même énergie E si bien que c'est une combinaison linéaire des $\phi_i^{(E)}$ $(i = 1 \cdots d)$:

$$D(g)\phi_i^{(E)} = \sum_k D_{ki}(g)\phi_k^{(E)} .$$

Les sous-espaces propres de l'hamiltonien sous-tendent donc différentes représentations du groupes et en général, sauf dans le cas de dégérescence accidentelle, ces représentations sont irréductibles. L'espace des fonctions d'ondes se décompose ainsi en somme directe de sous-espaces orthogonaux entre eux et sous-tendant différentes représentations irréductibles du groupe :

$$\mathcal{E} = \bigoplus_k a_k \mathcal{E}_k ,$$

les a_k désignant le nombre de fois où chaque représentation apparaît.

Cette décomposition permet de classer les états propres du système en fonction de la représentation dans laquelle ils se trouvent :

$$\hat{H}|\lambda\mu\rangle = E_\lambda|\lambda\mu\rangle \, ,$$

où λ sert à distinguer les différentes représentations irréductibles de $\mathcal{G}$ et les indices μ permetent de différentier les états d'une même représentation et peuvent être choisis suivant une chaîne algébrique

$$\mathcal{G} \supset \mathcal{H} \, .$$

En effet puisque l'hamiltonien commute avec tous les éléments de $\mathcal{G}$ il commute aussi avec les éléments de $\mathcal{H}$ on peut donc séparer ses sous-espaces propres suivant différentes représentations irréductibles de $\mathcal{H}$ qui ne se mélangent pas. Les états propres de $\hat{H}$ sont simultanément états propres d'opérateurs de Casimir de $\mathcal{G}$ et d'opérateur de Casimir de $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{C}_\mathcal{G}|\lambda\mu\rangle = f_\lambda|\lambda\mu\rangle$$

et

$$\mathcal{C}_\mathcal{H}|\lambda\mu\rangle = g_\mu|\lambda\mu\rangle \, .$$

2.5.3 Brisure de symétrie dynamique

Supposons maintenant que la symétrie associée au groupe $\mathcal{G}$ soit brisée : $\hat{H}$ ne commute plus avec tous les éléments de $\mathcal{G}$ mais seulement avec une partie d'entre eux formant un sous groupe $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$. $\hat{H}$ peut s'écrire comme la somme d'un opérateur de Casimir de $\mathcal{G}$ et d'un opérateur de Casimir de $\mathcal{H}$

$$\hat{H} = \mathcal{C}_\mathcal{G} + \mathcal{C}_\mathcal{H}$$

si bien que ses états propres demeurent les $|\lambda\mu\rangle$ mais on dit qu'il y a *brisure de symétrie dynamique* puisque l'énergie de l'état dépend de λ et de μ :

$$\hat{H}|\lambda\mu\rangle = (f_\lambda + g_\mu)|\lambda\mu\rangle \, .$$

Cette notion de brisure de symétrie dynamique est largement utilisée en spectroscopie atomique [Del83, Del86], moléculaire (cf par exemple [Fra86, Lem91a, Lem91b, Lem91c]), nucléaire [Ari75, Iac87] et en physique des particules [Bij94]. Nous l'illustrerons dans la section 2.7 page 89 pour les noyaux avec le modèle de bosons en interaction.

2.6 L'algèbre $U(n)$

2.6.1 Introduction

Nous avons vu précédemment que l'algèbre unitaire intervenait dans le théorème de Wigner (cf page 63) et que toute représentation linéaire était équivalente à une représentation unitaire (cf page 52). Ceci nous montre la place prépondérante qu'occupe

$U(n)$ en mécanique quantique. De plus dès que l'on se place en seconde quantification, les relations de commutations caractéristiques de cette algèbre apparaissent quasi naturellement.

Dans cette partie, nous rappelons donc en premier lieu la définition de l'algèbre $U(n)$ ainsi qu'un certain nombre de ses propriétés.

Ensuite nous nous intéressons à la description d'un système quantique en seconde quantification et nous montrons comment engendrer $U(n)$ à partir des opérateurs de création et d'annihilation. Nous nous proposons alors de construire les vecteurs de l'espace de Fock sous-tendant une Représentation Irréductible (RI) de $U(n)$. La construction de ces espaces est importante dans la mesure où il suffit de savoir y calculer les matrices des observables pour déterminer les valeurs possibles des grandeurs physiques. Pour cela nous développons la méthode proposée par Moshinsky ([Mos62],[Mos63] et [Mos68]) basée sur l'existence d'un vecteur dit de poids maximal à partir duquel peut être générée toute la base. Nous donnons une nouvelle façon d'obtenir l'expression de ce vecteur [Cha00] ainsi qu'une interprétation graphique inédite à notre connaissance qui permet de manipuler avec plus de facilité les expressions entrant en jeu. Cette description présente aussi l'avantage d'être transposable en language informatique assez facilement.

Enfin nous illustrons ce formalisme à travers trois exemples : nous commençons par le cas très simple de $U(2)$ puis nous nous intéressons à l'algèbre $U_{ST}(4) \supset U_S(2) \otimes U_T(2)$ et enfin au cas d'une couche j (j demi-entier).

2.6.2 Définitions

Définition

On peut définir le groupe unitaire [Fra94] comme étant le groupe des matrices de $M_n(C)$ qui conservent la norme hermitienne usuelle c'est à dire qui transforment un vecteur $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ en un vecteur $(z'_1, z'_2, \cdots, z'_n)$:

$$\overrightarrow{z'} = \mathbf{U}\overrightarrow{z}$$

en vérifiant :

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbb{1}\,.$$

Si on s'intéresse aux transformations infinitésimales alors

$$\mathbf{U} = \mathbb{1} + i\varepsilon\mathbf{S} + \cdots$$

où $\mathbf{S}$ est une matrice hermitienne c'est à dire que $\mathbf{S} = \mathbf{S}^\dagger$.

Cette matrice peut être interprétée comme la matrice d'un opérateur $\hat{S}$ qui agit sur une fonction de z_i de la façon suivante :

$$\hat{S}f(\overrightarrow{z}) = f(\overrightarrow{z'}) = f(\overrightarrow{z} + i\varepsilon\mathbf{S}\overrightarrow{z}) = f(\overrightarrow{z}) + i\varepsilon\sum_{ij}\mathbf{S}_{ij}z_j\frac{\partial f}{\partial z_i}$$

La transformation infinitésimale est donc engendrée par les opérateurs $\mathcal{G}_j^i$ définis par :

$$\mathcal{G}_j^i = z_j \frac{\partial}{\partial z_i} .$$

Ces n^2 opérateurs sont les générateurs infinitésimaux de l'algèbre et obéissent aux relations de commutations suivantes :

$$\left[\mathcal{G}_i^j, \mathcal{G}_k^l\right] = \delta_{jk}\mathcal{G}_i^l - \delta_{il}\mathcal{G}_k^j . \tag{2.53}$$

Diagrammes de Young

On peut montrer de différentes façons (voir par exemple [Ham62]) que les RI de $U(n)$ sont caractérisées par n entiers λ_i qui vérifient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_n$ et que l'on note sous forme de partition de Young $[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$. Pour décrire ces partitions, on utilise souvent des diagrammes de Young :

$$\begin{array}{l} \overbrace{\square\square\cdots\square\cdots\square}^{\lambda_1} \\ \overbrace{\square\square\cdots\square}^{\lambda_2} \\ \overbrace{\square\cdots\square}^{\lambda_n} \end{array}$$

Cette notation est particulièrement commode notamment lorsque l'on cherche à déterminer les RI contenues dans le produit tensoriel de deux algèbres : les règles de calcul sont présentées dans [Fra94].

Casimir du premier et second ordre

Les opérateurs de Casimir du premier et second ordre qui commutent avec l'ensemble des générateurs infinitésimaux et qui d'après le lemme de Schur seront diagonaux dans les représentations irréductibles ont respectivement pour expression :

$$\mathcal{C}_1 = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{G}_i^i \tag{2.54}$$

$$\mathcal{C}_2 = \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{G}_i^j \mathcal{G}_j^i . \tag{2.55}$$

Comme on le verra par la suite, ce sont principalement ces deux types d'opérateurs qui interviendront si on se limite à des interactions à 1- et 2-corps.

2.6.3 Seconde quantification et algèbre unitaire

Seconde quantification

On peut décrire un système constitué de p particules pouvant occuper n états individuels à l'aide d'opérateurs de création, $a_i^\dagger$, et d'annihilation, a_i, (l'indice i servant à distinguer les n différents états accessibles des particules du système) et dont la fonction est respectivement de créer ou d'annihiler une particule dans l'état i en agissant sur le vide : $\mid i\rangle = a_i^\dagger \mid 0\rangle$.

Dans le cas de fermions, ces opérateurs satisfont les relations d'anticommutation suivantes :

$$\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij} \qquad \{a_i, a_j\} = \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0$$

tandis que pour des bosons, ce sont des commutateurs qui interviennent

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \qquad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0\,.$$

On définit alors n^2 opérateurs quadratiques en fonction des $a_i^\dagger$ et des a_j :

$$\mathcal{G}_i^j = a_i^\dagger a_j\,.$$

Ces opérateurs que l'on appelle les générateurs infinitésimaux satisfont les relations de commutation (pour les fermions comme pour les bosons) :

$$[\mathcal{G}_i^j, \mathcal{G}_k^l] = \delta_{jk}\mathcal{G}_i^l - \delta_{il}\mathcal{G}_k^j\,,$$

qui sont exactement les relations (2.53) caractérisant l'algèbre unitaire.

C'est donc très naturellement que la structure algèbrique unitaire intervient dans la description quantique d'un système.

De plus dans de nombreuses situations ([Ham62, Iac87, Fra94]), on peut exprimer les grandeurs physiques (comme l'Hamiltonien ou les opérateurs de transition) en fonction des invariants de $U(n)$. Or ces invariants sont précisemment diagonaux dans les RI (cf le lemme de Schur). Il devient donc crucial de savoir construire les sous-espaces sous-tendant ces RI.

Générateurs et invariants

C'est ce que propose Moshinshy dans [Mos62]. Pour cela, il considère n types de particules pouvant occuper n états individuels. Ce sont donc n^2 opérateurs de création, $a_{\mu s}^\dagger$, ainsi que n^2 opérateurs d'annihilation, $a_{\mu s}$, qui vont nous servir pour construire les RI de $U(n)$ (l'indice grec, $\mu = 1\cdots n$, sert à caractériser l'état tandis que l'indice latin, $s = 1\cdots n$, sert à repérer le type de particule). Ils satisfont dans le cas de bosons les relations :

$$[a_{\mu s}, a_{\mu' s'}^\dagger] = \delta_{\mu\mu'}\delta_{ss'} \qquad [a_{\mu s}, a_{\mu' s'}] = [a_{\mu s}^\dagger, a_{\mu' s'}^\dagger] = 0\,. \tag{2.56}$$

On définit alors deux ensembles d'opérateurs quadratiques :

– Tout d'abord les générateurs infinitésimaux de l'algèbre $\mathcal{G}_\mu^{\mu'}$, obtenus en sommant sur le type de particules :

$$\mathcal{G}_\mu^{\mu'} = \sum_{s=1}^{n} a_{\mu s}^\dagger a_{\mu' s} \,. \tag{2.57}$$

Les relations de commutation pour ces opérateurs sont bien évidemment :

$$[\mathcal{G}_\mu^\nu, \mathcal{G}_{\mu'}^{\nu'}] = \delta_{\nu\mu'} \mathcal{G}_\mu^{\nu'} - \delta_{\mu\nu'} \mathcal{G}_{\mu'}^\nu \,. \tag{2.58}$$

On remarque notamment que les $\mathcal{G}_\mu^\mu$ et $\mathcal{G}_\nu^\nu$ commutent entre eux :

$$\left[\mathcal{G}_\mu^\mu, \mathcal{G}_\nu^\nu\right] = 0 \,. \tag{2.59}$$

Les opérateurs $\mathcal{G}_\mu^\mu$ comptent le nombre de particules dans l'état μ quelque soit leur type.

– On peut ensuite définir des opérateurs dits invariants du premier ordre :

$$C_{ss'} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu s}^\dagger a_{\mu s'} \,. \tag{2.60}$$

Ces opérateurs possèdent deux propriètés importantes :

1. d'une part ils commutent avec l'ensemble des générateurs infinitésimaux de l'algèbre :
$$\left[C_{ss'}, \mathcal{G}_\mu^{\mu'}\right] = 0 \,, \tag{2.61}$$
2. et d'autre part ils satisfont entre eux les mêmes relations de commutation que des générateurs infinitésimaux de $U(n)$:
$$[C_{st}, C_{s't'}] = \delta_{ts'} C_{st'} - \delta_{st'} C_{s't} \,. \tag{2.62}$$
Ainsi les C_{ss} commutent avec les C_{tt} :
$$[C_{ss}, C_{tt}] = 0 \,. \tag{2.63}$$

Comme ces derniers sont hermitiens, il existe une base de l'espace où ils sont tous diagonaux. Dans les espaces sous-tendant les représentations irréductibles, ils devront en outre être proportionnels à l'identité.

Pour déterminer les RI de $U(n)$, on est donc amené à résoudre le problème consistant trouver une base diagonalisant simultanément les $\mathcal{G}_\mu^\mu$ et les C_{ss} et où les C_{ss} sont proportionnels à l'identité. En revanche les valeurs propres des $\mathcal{G}_\mu^\mu$ ne sont pas toutes nécessairement identiques.

Moshinsky propose de construire les états de l'espace de Fock sous forme de polynômes homogènes de degrés p, p étant le nombre de particules du système :

$$| P\rangle = P(a^\dagger_{11}, a^\dagger_{21}, \ldots, a^\dagger_{nn}) \mid 0\rangle\,.$$

L'action des opérateurs d'annihilation sur ces vecteurs peut par conséquent être assimilée à une dérivée partielle par rapport à $a^\dagger_{\mu s}$ (ceci d'un point de vue purement formel) :

$$a_{\mu s} \equiv \frac{\partial}{\partial a^\dagger_{\mu s}}\,.$$

En effet si on considère un vecteur sous la forme $\left(a^\dagger_{11}\right)^{n_{11}}\left(a^\dagger_{21}\right)^{n_{12}}\ldots\left(a^\dagger_{nn}\right)^{n_{nn}} \mid 0\rangle$ avec $\sum_{ij} n_{ij} = p$ alors deux situations se présentent lorsque l'on va appliquer $a_{\mu_0 s_0}$ sur le vecteur :

- soit $n_{\mu_0 s_0}$ vaut zéro et le résultat est le vecteur nul ;
- soit $n_{\mu_0 s_0}$ est non nul et il faut appliquer les relations de commutation entre $a_{\mu_0 s_0}$ et les $n_{\mu_0 s_0}$ opérateurs $a^\dagger_{\mu_0 s_0}$ ce qui donne au final $n_{\mu_0 s_0}\left(a^\dagger_{\mu_0 s_0}\right)^{n_{\mu_0 s_0}-1}$.

Les polynômes P doivent satisfaire

$$C_{ss}P = h_s P \quad \text{pour} \quad s = 1, \ldots, n \tag{2.64}$$

$$C_{ss'}P = 0 \quad \text{pour} \quad s < s' \quad s, s' = 1, \ldots, n \tag{2.65}$$

$$\mathcal{G}^\mu_\mu P = k_\mu P \quad \text{pour} \quad \mu = 1, \ldots, n\,. \tag{2.66}$$

Les équations (2.64) signifient simplement que la représentation est irréductible et que par conséquent les invariants hermitiens C_{ss} sont diagonaux dans cette base. Les équations (2.66) proviennent des relations de commutation des $\mathcal{G}^\mu_\mu$ et des C_{ss} : on peut donc se placer dans une base commune où ils sont tous diagonaux. Les équations (2.65) constituent une condition supplémentaire. Insistons sur le fait que les h_s sont des constantes uniquement liées à la représentation et sont indépendantes du vecteur tandis que les k_μ dépendent du vecteur.

Poids d'un polynôme, classification des générateurs infinitésimaux et polynôme de poids maximal.

Pour un polynôme P une solution des équations (2.66), on désigne l'ensemble $[k_1, k_2, \ldots, k_n]$ comme étant son poids.

Si maintenant on considère deux polynômes P et P' solutions de (2.66) et de poids respectifs $[k_1, k_2, \ldots, k_n]$ et $[k'_1, k'_2, \ldots, k'_n]$, alors on dira que P est de poids supérieur à P' si le premier coefficient non nul de $[(k_1 - k'_1), (k_2 - k'_2), \ldots, (k_n - k'_n)]$ est positif.

Ceci va nous permettre de classer les générateurs en trois catégories.

En effet si on considère P solution des équations (2.66) de poids $[k_1, \ldots, k_n]$ alors $Q_{\mu\mu'} = \mathcal{G}^{\mu'}_\mu P$ est également solution de (2.66) avec un poids

1. $[k_1, \ldots, k_\mu{+}1, \ldots, k_{\mu'}{-}1, \ldots, k_n]$ si $\mu < \mu'$ donc $Q_{\mu\mu'} = \mathcal{G}^{\mu'}_\mu P$ a un poids supérieur à P ;

2. $[k_1,\ldots,k_\mu,\ldots,k_n]$ si $\mu=\mu'$ c'est à dire que $Q_{\mu\mu}=\mathcal{G}_\mu^\mu P$ a le même poids que P ;
3. $[k_1,\ldots,k_{\mu'}-1,\ldots,k_\mu+1,\ldots,k_n]$ si $\mu>\mu'$ et par conséquent $Q_{\mu\mu'}=\mathcal{G}_\mu^{\mu'}P$ est de poids inférieur à P.

puisqu'en raison des relations de commutation des générateurs :

$$\mathcal{G}_\nu^\nu Q_{\mu\mu'}=(k_\nu+\delta_{\nu\mu}-\delta_{\nu\mu'})\,Q_{\mu\mu'}$$

et que par conséquent pour des indices μ et μ' égaux, $Q_{\mu\mu}$ vérifiera les mêmes équations (2.66) avec les mêmes valeurs tandis que pour des indices μ et μ' différents deux valeurs propres sont modifiées : celle indicée par μ' diminue de 1 et celle indicée par μ augmente de 1.

Remarquons que si P est aussi solution de (2.65) alors $Q_{\mu\mu'}$ est également solution de ces équations avec exactement les mêmes valeurs pour les h_s[3].

On peut donc dire que

1. les $\mathcal{G}_\mu^{\mu'}$ pour lesquels $\mu<\mu'$ sont les "générateurs d'incrément" ;
2. les $\mathcal{G}_\mu^{\mu'}$ pour lesquels $\mu=\mu'$ sont les "générateurs de poids" ;
3. les $\mathcal{G}_\mu^{\mu'}$ pour lesquels $\mu>\mu'$ sont les "générateurs de décrément".

Ainsi en appliquant les opérateurs d'incrément à n'importe quelle solution de (2.66), (2.65) et (2.64), on peut obtenir un *polynôme de poids maximal* qui vérifiera les équations :

$$\begin{aligned}
C_{ss}\mathcal{P} &= h_s\mathcal{P} \quad \text{pour} \quad s=1,\ldots,n && (2.67)\\
C_{ss'}\mathcal{P} &= 0 \quad \text{pour} \quad s<s' \quad s,s'=1,\ldots,n && (2.68)\\
\mathcal{G}_\mu^\mu\mathcal{P} &= k_\mu\mathcal{P} \quad \text{pour} \quad \mu=1,\ldots,n && (2.69)\\
\mathcal{G}_{\mu'}^\mu\mathcal{P} &= 0 \quad \text{pour} \quad \mu,\mu'=1,\ldots,n \quad \mu<\mu'\,. && (2.70)
\end{aligned}$$

La dernière équation (2.70) résulte du fait que le poids de $\mathcal{P}$ est maximal.

Expression du polynôme de poids maximal et une justication "intuituive".

Une solution des équations (2.67), (2.68), (2.69) et (2.70) peut s'écrire

$$\mathcal{P}=\left(\Delta_1^1\right)^{h_1-h_2}\left(\Delta_{12}^{12}\right)^{h_2-h_3}\cdots\left(\Delta_{12\ldots n}^{12\ldots n}\right)^{h_n-h_{n+1}} \tag{2.71}$$

où $h_{n+1}=0$ et les déterminants sont définis par

$$\Delta_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r}^{s_1s_2\ldots s_r}=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}(r)}\varepsilon(\sigma)a_{\mu_1s_{\sigma(1)}}^\dagger a_{\mu_2s_{\sigma(2)}}^\dagger\cdots a_{\mu_rs_{\sigma(r)}}^\dagger\,, \tag{2.72}$$

[3]Ceci est d'une grande importance lorsque l'on se place dans une RI de l'algèbre $U(n)$ puisque les invariants doivent alors être proportionnels à l'identité.

ce qui peut aussi s'écrire sous forme "matricielle"

$$\Delta^{12\ldots r}_{12\ldots r} = \begin{vmatrix} a^\dagger_{11} & a^\dagger_{21} & \cdots & a^\dagger_{\mu 1} & \cdots & a^\dagger_{r1} \\ a^\dagger_{12} & a^\dagger_{22} & \cdots & a^\dagger_{\mu 2} & \cdots & a^\dagger_{r2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^\dagger_{1s} & a^\dagger_{2s} & \cdots & a^\dagger_{\mu s} & \cdots & a^\dagger_{rs} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^\dagger_{1r} & a^\dagger_{2r} & \cdots & a^\dagger_{\mu r} & \cdots & a^\dagger_{rr} \end{vmatrix}.$$

Les h_i sont des entiers constituant une partition du nombre p de particules et vérifient $h_1 \geq h_2 \geq \cdots \geq h_n$.

On peut appeler ce résultat le théorème de Moshinsky puisque c'est l'expression qu'il propose dans [Mos62].

La vérification de la validité de cette expression est quasi immédiate et repose sur le fait qu'un déterminant est une forme multi-linéaire *alternée* c'est à dire qui s'annule dès que deux colonnes ou deux lignes sont identiques. Un autre argument intuitif qui nous incite à faire intervenir des déterminants consiste à remarquer que ce sont des polynômes homogènes en fonction de leurs paramètres.

1. Déterminons tout d'abord l'action des invariants de premier ordre sur le polynôme $\mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} C_{ss'}\mathcal{P} &= \sum_{\mu=1}^{n} a^\dagger_{\mu s} \frac{\partial}{\partial a^\dagger_{\mu s'}} \left\{ \left(\Delta^1_1\right)^{h_1-h_2} \cdots \left(\Delta^{12\ldots n}_{12\ldots n}\right)^{h_n-h_{n+1}} \right\} \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} a^\dagger_{\mu s} \sum_{k=1}^{n} \left(\Delta^1_1\right)^{h_1-h_2} \cdots \frac{\partial \left(\Delta^{12\ldots k}_{12\ldots k}\right)^{h_k-h_{k+1}}}{\partial a^\dagger_{\mu s'}} \cdots \left(\Delta^{12\ldots 2J+1}_{12\ldots n}\right)^{h_n-h_{n+1}} \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} a^\dagger_{\mu s} \sum_{k=1}^{n} \left(\Delta^1_1\right)^{h_1-h_2} \cdots \\ &\quad \times (h_k - h_{k+1}) \left(\Delta^{12\ldots k}_{12\ldots k}\right)^{h_k-h_{k+1}-1} \frac{\partial \Delta^{12\ldots k}_{12\ldots k}}{\partial a^\dagger_{\mu s'}} \cdots \left(\Delta^{12\ldots n}_{12\ldots n}\right)^{h_n-h_{n+1}}. \end{aligned}$$

Si l'indice k est plus petit que μ ou que s' alors $\partial \Delta^{12\ldots k}_{12\ldots k}/\partial a^\dagger_{\mu s'}$ s'annule (puisque pour ces valeurs de k il n'y a pas de $a^\dagger_{\mu s'}$ dans le déterminant) par conséquent la seconde somme sur k se fait sur $k \geq \mu$ et $k \geq s'$. Pour k plus grand que μ et que s' l'opérateur $a^\dagger_{\mu s'}$ n'apparaît qu'une seule fois dans chaque monôme du développement du déterminant et l'action de $\sum_\mu a^\dagger_{\mu s}\partial/\partial a^\dagger_{\mu s'}$ consiste *à remplacer* *la ligne s' par la ligne s :*

$$\begin{vmatrix} a^\dagger_{11} & a^\dagger_{21} & \cdots & a^\dagger_{\mu 1} & \cdots & a^\dagger_{k1} \\ a^\dagger_{12} & a^\dagger_{22} & \cdots & a^\dagger_{\mu 2} & \cdots & a^\dagger_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^\dagger_{1s'} & a^\dagger_{2s'} & \cdots & a^\dagger_{\mu s'} & \cdots & a^\dagger_{ks'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^\dagger_{1k} & a^\dagger_{2k} & \cdots & a^\dagger_{\mu k} & \cdots & a^\dagger_{kk} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a^\dagger_{11} & a^\dagger_{21} & \cdots & a^\dagger_{\mu 1} & \cdots & a^\dagger_{k1} \\ a^\dagger_{12} & a^\dagger_{22} & \cdots & a^\dagger_{\mu 2} & \cdots & a^\dagger_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^\dagger_{1s} & a^\dagger_{2s} & \cdots & a^\dagger_{\mu s} & \cdots & a^\dagger_{ks} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^\dagger_{1k} & a^\dagger_{2k} & \cdots & a^\dagger_{\mu k} & \cdots & a^\dagger_{kk} \end{vmatrix} .$$

Donc si $s < s'$, ce dernier déterminant a deux lignes identiques et s'annule pour tout k. Ainsi $C_{ss'}\mathcal{P} = 0$ et $\mathcal{P}$ vérifie l'équation (2.68).
Si $s = s'$, alors aucun déterminant n'est modifié et la sommation sur k donne

$$C_{ss}\mathcal{P} = \sum_{k=s}^{n} \left\{ (h_k - h_{k+1})\,\mathcal{P} \right\} = \left\{ \sum_{k=s}^{n} (h_k - h_{k+1}) \right\} \mathcal{P} = h_s \mathcal{P} .$$

$\mathcal{P}$ satisfait donc aussi (2.67).

2. Si on considère maintenant l'action des générateurs alors on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\mu^{\mu'}\mathcal{P} &= \sum_{s=1}^{n} a^\dagger_{\mu s} \frac{\partial}{\partial a^\dagger_{\mu' s}} \left\{ \left(\Delta_1^1\right)^{h_1-h_2} \cdots \left(\Delta_{12\ldots n}^{12\ldots n}\right)^{h_n-h_{n+1}} \right\} \\ &= \sum_{s=1}^{n} a^\dagger_{\mu s} \sum_{k=1}^{n} \left(\Delta_1^1\right)^{h_1-h_2} \cdots \frac{\partial \left(\Delta_{12\ldots k}^{12\ldots k}\right)^{h_k-h_{k+1}}}{\partial a^\dagger_{\mu' s}} \cdots \left(\Delta_{12\ldots n}^{12\ldots n}\right)^{h_n-h_{n+1}} \\ &= \sum_{s=1}^{n} a^\dagger_{\mu s} \sum_{k=1}^{n} \left(\Delta_1^1\right)^{h_1-h_2} \cdots \\ &\quad \times (h_k - h_{k+1}) \left(\Delta_{12\ldots k}^{12\ldots k}\right)^{h_k-h_{k+1}-1} \frac{\partial \Delta_{12\ldots k}^{12\ldots k}}{\partial a^\dagger_{\mu' s}} \cdots \left(\Delta_{12\ldots n}^{12\ldots n}\right)^{h_n-h_{n+1}} . \end{aligned}$$

Si k est plus petit que μ' ou que s alors $\partial \Delta_{12\ldots k}^{12\ldots k} / \partial a^\dagger_{\mu' s}$ est nul, la seconde sommation se fait donc sur $k \geq \mu'$ et $k \geq s$. Lorsque k est plus grand que μ' et s, l'opérateur $a^\dagger_{\mu' s}$ n'apparaît qu'une seule fois dans chaque monôme du développement du déterminant et l'action de $\sum_\mu a^\dagger_{\mu s} \partial / \partial a^\dagger_{\mu' s}$ consiste *à remplacer la colonne μ' par la colonne μ :*

$$\begin{vmatrix} a^\dagger_{11} & a^\dagger_{21} & \cdots & a^\dagger_{\mu' 1} & \cdots & a^\dagger_{k1} \\ a^\dagger_{12} & a^\dagger_{22} & \cdots & a^\dagger_{\mu' 2} & \cdots & a^\dagger_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^\dagger_{1s} & a^\dagger_{2s} & \cdots & a^\dagger_{\mu' s} & \cdots & a^\dagger_{ks} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^\dagger_{1k} & a^\dagger_{2k} & \cdots & a^\dagger_{\mu' k} & \cdots & a^\dagger_{kk} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a^\dagger_{11} & a^\dagger_{21} & \cdots & a^\dagger_{\mu 1} & \cdots & a^\dagger_{k1} \\ a^\dagger_{12} & a^\dagger_{22} & \cdots & a^\dagger_{\mu 2} & \cdots & a^\dagger_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^\dagger_{1s} & a^\dagger_{2s} & \cdots & a^\dagger_{\mu s} & \cdots & a^\dagger_{ks} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^\dagger_{1k} & a^\dagger_{2k} & \cdots & a^\dagger_{\mu k} & \cdots & a^\dagger_{kk} \end{vmatrix} .$$

Le déterminant s'annule donc pour $\mu < \mu'$ puisque deux colonnes sont identiques et ainsi $\mathcal{P}$ est solution de (2.70).

Pour $\mu = \mu'$, le déterminant reste inchangé et on obtient

$$\mathcal{G}_{\mu}^{\mu'}\mathcal{P} = \sum_{k=\mu'}^{n} \{(h_k - h_{k+1})\,\mathcal{P}\} = \left\{\sum_{k=\mu}^{n} (h_k - h_{k+1})\right\}\mathcal{P} = h_\mu \mathcal{P}\,.$$

$\mathcal{P}$ vérifie donc également (2.69) et on trouve en outre que $k_\mu = h_\mu$.

Pourquoi des déterminants ?

Dans la section précédente, nous avons considéré l'expression donnée par Moshinsky et avons vérifié qu'elle satisfaisait les équations caractérisant le polynôme de poids maximal. Nous avons justifié de façon assez intuitive les raisons pour lesquelles intervenaient des déterminants. Il existe une autre façon d'aborder le problème : elle permet d'introduire ces déterminants en utilisant le fait que l'inverse d'une matrice peut être obtenu à l'aide de la matrice des co-facteurs qui sont justement des déterminants. Nous proposons dans cette section de retrouver l'expression du polynôme de poids maximal en inversant des "matrices".

On note dorénavant $a^\dagger_{\mu s} = x_{\mu s}$ où les variables $x_{\mu s}$ sont assimilables à n^2 variables réelles.

Écrivons sous forme matricielles les équations (2.67)–(2.68).

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_{11}} & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_{1n}} \\ \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_{21}} & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_{n1}} & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_{n2}} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_{nn}} \end{pmatrix} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \star & h_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \star & \cdots & \star & h_n \end{pmatrix}.$$

Les étoiles désignent des fonctions inconnues qui dépendent des variables $x_{\mu s}$ et qui sont liées à l' action des C_{ij} pour $i > j$ sur le polynôme de poids maximal.

On définit alors formellement une nouvelle fonction Q par $Q = \ln(\mathcal{P})$. Cette fonction Q vérifie les équations :

$$\frac{\partial Q}{\partial x_{ij}} = \frac{1}{\mathcal{P}} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_{ij}}\,.$$

C'est donc une solution du système d'équations aux dérivées partielles linéaires suivant :

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x_{11}} & \frac{\partial Q}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial Q}{\partial x_{1n}} \\ \frac{\partial Q}{\partial x_{21}} & \frac{\partial Q}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial Q}{\partial x_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial x_{n1}} & \frac{\partial Q}{\partial x_{n2}} & \cdots & \frac{\partial Q}{\partial x_{nn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & h_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn-1} & h_n \end{pmatrix}$$

où α_{ij} des fonctions indéterminées des x_{ij}. En multipliant à gauche cette équation matricielle par l'inverse de la matrice (x_{ij}) on obtient l'ensemble suivant d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x_{11}} & \frac{\partial Q}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial Q}{\partial x_{1n}} \\ \frac{\partial Q}{\partial x_{21}} & \frac{\partial Q}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial Q}{\partial x_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial x_{n1}} & \frac{\partial Q}{\partial x_{n2}} & \cdots & \frac{\partial Q}{\partial x_{nn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & h_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn-1} & h_n \end{pmatrix}.$$

On fait la même chose pour (2.69) et (2.70) ce qui donne les expressions matricielles :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_{11}} & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_{1n}} \\ \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_{21}} & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_{n1}} & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_{n2}} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} k_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & k_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & k_n \end{pmatrix}.$$

Là encore les étoiles représentent l'action indéterminée des $\mathcal{G}_{\mu\mu'}$ pour $\mu > \mu'$, c'est à dire celle des opérateurs de décrément, sur le polynôme de poids maximal.

Après avoir divisé par $\mathcal{P}$ et en multipliant à droite par l' inverse de la matrice (x_{ij}), on obtient

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x_{11}} & \frac{\partial Q}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial Q}{\partial x_{1n}} \\ \frac{\partial Q}{\partial x_{21}} & \frac{\partial Q}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial Q}{\partial x_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial x_{n1}} & \frac{\partial Q}{\partial x_{n2}} & \cdots & \frac{\partial Q}{\partial x_{nn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ 0 & k_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}^{-1}$$

les β_{ij} sont des fonctions des x_{ij} à déterminer.

De la structure des matrices α et β on déduit les équations

$$\frac{\partial Q}{\partial x_{ij}} = \sum_{k \geq j} y_{ik} \alpha_{kj} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x_{ij}} = \sum_{k \geq i} \beta_{ik} y_{kj}$$

où l'inverse de la matrice (x_{ij}) est désigné par (y_{ji}). Puisque l'inverse d'une matrice est la transposée de la matrice des *co-facteurs* [Ait59] (qui sont les déterminants obtenus lorsque l'on a enlevé la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice x_{ij} et que l'on note ici à l'aide de $(-1)^{i+j} \Delta^{1\ldots j-1j+1\ldots n}_{1\ldots i-1i+1\ldots n}$) divisée par le déterminant et en employant le *développement de Cramer d'un déterminant* [Ant94], on peut affirmer que

$$y_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\Delta^{1\ldots j-1j+1\ldots n}_{1\ldots i-1i+1\ldots n}}{\Delta^{1\ldots n}_{1\ldots n}} = \frac{\partial \ln(\Delta^{1\ldots n}_{1\ldots n})}{\partial x_{ij}} \tag{2.73}$$

où $\Delta^{1\ldots n}_{1\ldots n}$ est le déterminant de la matrice (x_{ij}).

On peut donc résoudre les équations matricielles précédentes par itération en commençant par $i = n$ et $j = n$ puis en diminuant les indices.

On a ainsi

$$\frac{\partial Q}{\partial x_{in}} = h_n y_{in} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x_{nj}} = k_n y_{nj}$$

d'où

$$\frac{\partial Q}{\partial x_{in}} = h_n \frac{\partial \ln(\Delta_{1\ldots n}^{1\ldots n})}{\partial x_{in}} \tag{2.74}$$

et

$$\frac{\partial Q}{\partial x_{nj}} = k_n \frac{\partial \ln(\Delta_{1\ldots n}^{1\ldots n})}{\partial x_{nj}}\,. \tag{2.75}$$

Pour $i = n$ et $j = n$, on trouve que $k_n = h_n$ et que

$$Q = \ln\left(\left(\Delta_{1\ldots n}^{1\ldots n}\right)^{h_n} P_0\right) \tag{2.76}$$

où P_0 est indépendant de x_{nn}. En ré-injectant cette expression dans les équations (2.74)–(2.75), on montre facilement que P_0 ne dépend ni des x_{in} ni des x_{nj}.

Un premier déterminant apparaît dans l'expression du polynôme de poids maximal et il résulte de l'inversion de la matrice (x_{ij}).

Nous avons donc abouti à

$$Q = \ln\left(\left(\Delta_{1\ldots n}^{1\ldots n}\right)^{h_n} P_0\right) = \ln\left(\Delta_{1\ldots n}^{1\ldots n}\right)^{h_n} + \ln(P_0)\,,$$

la fonction P_0 ne dépendant ni des x_{nj} ni des x_{in}.

En introduisant la fonction $Q' = \ln(P_0)$ indépendante des variables x_{nj} et x_{in}, l'équation matricielle initiale devient donc

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q'}{\partial x_{11}} + h_n \frac{\partial \ln(\Delta_{1\ldots n}^{1\ldots n})}{\partial x_{11}} & \frac{\partial Q'}{\partial x_{12}} + h_n \frac{\partial \ln(\Delta_{1\ldots n}^{1\ldots n})}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial Q'}{\partial x_{1n}} + h_n \frac{\partial \ln(\Delta_{1\ldots n}^{1\ldots n})}{\partial x_{1n}} \\ \frac{\partial Q'}{\partial x_{21}} + h_n \frac{\partial \ln(\Delta_{1\ldots n}^{1\ldots n})}{\partial x_{21}} & \frac{\partial Q'}{\partial x_{22}} + h_n \frac{\partial \ln(\Delta_{1\ldots n}^{1\ldots n})}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial Q'}{\partial x_{2n}} + h_n \frac{\partial \ln(\Delta_{1\ldots n}^{1\ldots n})}{\partial x_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q'}{\partial x_{n1}} + h_n \frac{\partial \ln(\Delta_{1\ldots n}^{1\ldots n})}{\partial x_{n1}} & \frac{\partial Q'}{\partial x_{n2}} + h_n \frac{\partial \ln(\Delta_{1\ldots n}^{1\ldots n})}{\partial x_{n2}} & \cdots & \frac{\partial Q'}{\partial x_{nn}} + h_n \frac{\partial \ln(\Delta_{1\ldots n}^{1\ldots n})}{\partial x_{nn}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & h_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn-1} & h_n \end{pmatrix}.$$

On peut séparer la matrice de "gauche" en deux parties (après avoir multiplié à gauche par la matrice des (x_{ij})) :

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q'}{\partial x_{11}} & \frac{\partial Q'}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial Q'}{\partial x_{1n-1}} & 0 \\ \frac{\partial Q'}{\partial x_{21}} & \frac{\partial Q'}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial Q'}{\partial x_{2n-1}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Q'}{\partial x_{n-11}} & \frac{\partial Q'}{\partial x_{n-12}} & \cdots & \frac{\partial Q'}{\partial x_{n-1n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+\frac{h_n}{\Delta^{1\ldots n}_{1\ldots n}} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta^{1\ldots n}_{1\ldots n}}{\partial x_{11}} & \frac{\partial \Delta^{1\ldots n}_{1\ldots n}}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial \Delta^{1\ldots n}_{1\ldots n}}{\partial x_{1n}} \\ \frac{\partial \Delta^{1\ldots n}_{1\ldots n}}{\partial x_{21}} & \frac{\partial \Delta^{1\ldots n}_{1\ldots n}}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial \Delta^{1\ldots n}_{1\ldots n}}{\partial x_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Delta^{1\ldots n}_{1\ldots n}}{\partial x_{n1}} & \frac{\partial \Delta^{1\ldots n}_{1\ldots n}}{\partial x_{n2}} & \cdots & \frac{\partial \Delta^{1\ldots n}_{1\ldots n}}{\partial x_{nn}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & h_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn-1} & h_n \end{pmatrix}.$$

Or la matrice $(\partial \ln(\Delta^{1\ldots n}_{1\ldots n})/\partial x_{ij})$ est précisément l'inverse de la matrice (x_{ij}). Le second terme de la partie gauche de l'égalité est donc proportionnel à l'identité et on obtient :

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q'}{\partial x_{11}} & \frac{\partial Q'}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial Q'}{\partial x_{1n-1}} & 0 \\ \frac{\partial Q'}{\partial x_{21}} & \frac{\partial Q'}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial Q'}{\partial x_{2n-1}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Q'}{\partial x_{n-11}} & \frac{\partial Q'}{\partial x_{n-12}} & \cdots & \frac{\partial Q'}{\partial x_{n-1n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} h_1 - h_n & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & h_2 - h_n & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn-1} & h_n - h_n \end{pmatrix},$$

ce qui se ramène à

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n-11} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n-12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n-1} & x_{2n-1} & \cdots & x_{n-1n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q'}{\partial x_{11}} & \frac{\partial Q'}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial Q'}{\partial x_{1n-1}} \\ \frac{\partial Q'}{\partial x_{21}} & \frac{\partial Q'}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial Q'}{\partial x_{2n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q'}{\partial x_{n-11}} & \frac{\partial Q'}{\partial x_{n-12}} & \cdots & \frac{\partial Q'}{\partial x_{n-1n-1}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} h_1 - h_n & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & h_2 - h_n & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_{n-11} & \cdots & \alpha_{n-1n-2} & h_{n-1} - h_n \end{pmatrix}.$$

En faisant de même avec la matrice (β_{ij}), on aboutit à :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q'}{\partial x_{11}} & \frac{\partial Q'}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial Q'}{\partial x_{1n-1}} \\ \frac{\partial Q'}{\partial x_{21}} & \frac{\partial Q'}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial Q'}{\partial x_{2n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q'}{\partial x_{n-11}} & \frac{\partial Q'}{\partial x_{n-12}} & \cdots & \frac{\partial Q'}{\partial x_{n-1n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n-11} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n-12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n-1} & x_{2n-1} & \cdots & x_{n-1n-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} k_1 - k_n & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n-1} \\ 0 & k_2 - k_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta_{n-2n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & k_{n-1} - k_n \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que Q' satisfait le même type d'équation matricielle que Q mais avec une dimension de moins et les termes diagonaux ayant été remplacés par $h_i - h_n$ ou $k_i - k_n$.

On peut donc répéter exactement la même procédure pour trouver une expression de Q' similaire à (2.76) :

$$Q' = \ln\left(\left(\Delta^{1\ldots n-1}_{1\ldots n-1}\right)^{h_{n-1}-h_n} P_1\right) \tag{2.77}$$

et dans ce cas, la fonction P_1 ne dépend pas des variables x_{n-1j} ni des x_{in-1}.

On continue jusqu'à l'obtention de l'expression finale du polynôme de poids maximal

$$\mathcal{P} = \left(\Delta^1_1\right)^{h_1-h_2}\left(\Delta^{12}_{12}\right)^{h_2-h_3}\cdots\left(\Delta^{12\ldots n}_{12\ldots n}\right)^{h_n-h_{n+1}}. \tag{2.78}$$

Cette façon d'obtenir l'expression du polynôme de poids maximal permet de bien voir comment les déterminants interviennent et pourquoi ils sont à la puissance $h_i - h_{i+1}$.

Une interprétation graphique

La manipulation des expressions peut être grandement simplifiée en introduisant l'interprétation graphique suivante : à chaque monôme $(a^\dagger_{11})^{\lambda_{11}}(a^\dagger_{12})^{\lambda_{12}}\cdots(a^\dagger_{nn})^{\lambda_{nn}}$, on associe un tableau à n lignes et n colonnes. Dans la case repérée par les indices μs (où, contrairement à la notation usuelle, μ désigne l'indice de colonnes et s l'indice de ligne) on met l'entier $\lambda_{\mu s}$:

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
\lambda_{11} & \lambda_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_{n1} \\
\hline
\lambda_{12} & \lambda_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_{n2} \\
\hline
\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\
\hline
\lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_{nn} \\
\hline
\end{array}\ .
$$

Et tout polynôme peut s'écrire comme une combinaision linéaire de monômes :

$$
P = \sum_{(\lambda_{\rho i})} \alpha_{(\lambda_{\rho i})} \left(a^\dagger_{11}\right)^{\lambda_{11}} \left(a^\dagger_{21}\right)^{\lambda_{21}} \cdots \left(a^\dagger_{nn}\right)^{\lambda_{nn}} \ ,
$$

ce qui donne graphiquement :

$$
P = \sum_{(\lambda_{\rho i})} \alpha_{(\lambda_{\rho i})}
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
\lambda_{11} & \lambda_{21} & \cdots & \lambda_{\mu 1} & \cdots & \lambda_{n1} \\
\hline
\lambda_{12} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{\mu 2} & \cdots & \lambda_{n2} \\
\hline
\cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\
\hline
\lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \cdots & \lambda_{\mu n} & \cdots & \lambda_{nn} \\
\hline
\end{array}\ .
$$

L'action des $a^\dagger_{\mu s} a_{\nu s}$ sur un monôme est de soustraire 1 à l'élément de la case indicée par νs et d'ajouter 1 à celui de la case repérée par μs, c'est à dire que l'on remplace une particule dans un état ν par une particule dans un état μ en conservant le type de particule :

$$
\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|}
\cline{2-7}
 & \lambda_{11} & \lambda_{21} & \cdots & \lambda_{\mu 1} & \cdots & \lambda_{n1} \\
\cline{2-7}
 & \lambda_{12} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{\mu 2} & \cdots & \lambda_{n2} \\
\cline{2-7}
 & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cline{2-7}
\lambda_{\nu s} & \cdot & \lambda_{\nu s}-1 & \cdots & \lambda_{\mu s}+1 & \cdots & \cdot \\
\cline{2-7}
 & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cline{2-7}
 & \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \cdots & \lambda_{\mu n} & \cdots & \lambda_{nn} \\
\cline{2-7}
\end{array}\ .
$$

L'action des opérateurs $\mathcal{G}^\mu_\mu$ sur un monôme est obtenue en sommant toutes les puissances $\lambda_{\mu s}$ sur l'indice de ligne s :

$$\left(\sum_{s=1}^{n}\lambda_{\mu s}\right)\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline \lambda_{11} & \lambda_{21} & \cdots & \lambda_{\mu 1} & \cdots & \lambda_{n1} \\ \hline \lambda_{12} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{\mu 2} & \cdots & \lambda_{n2} \\ \hline \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \hline \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \hline \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \hline \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \cdots & \lambda_{\mu n} & \cdots & \lambda_{nn} \\ \hline \end{array}.$$

Par conséquent si le polynôme P est solution des équations (2.66) pour tout μ alors la sommation sur les indices de lignes des éléments du tableau est égale à k_μ quelque soit μ c'est à dire pour chaque colonne. Cela signifie que le nombre total de particules occupant un état μ est équal à k_μ pour tout monôme.

L'action des $a^\dagger_{\mu s}a_{\mu t}$ sur un monôme est de soustraire 1 à l'élément de la case indicée par μt et d'ajouter 1 à celui de la case repérée par μs, c'est à dire que l'on remplace une particule de type t dans un état μ par une particule de type s dans le même état μ :

$$\lambda_{\mu t}\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline \lambda_{11} & \lambda_{21} & \cdots & \lambda_{\mu 1} & \cdots & \lambda_{n1} \\ \hline \lambda_{12} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{\mu s}+1 & \cdots & \lambda_{n2} \\ \hline \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \hline \cdot & \cdots & \cdots & \lambda_{\mu t}-1 & \cdots & \cdot \\ \hline \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \hline \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \cdots & \lambda_{\mu n} & \cdots & \lambda_{nn} \\ \hline \end{array}.$$

Ainsi l'action des C_{ss} sur un monôme s'écrit :

$$\left(\sum_{\mu=1}^{n}\lambda_{\mu s}\right)\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline \lambda_{11} & \lambda_{21} & \cdots & \lambda_{\mu 1} & \cdots & \lambda_{n1} \\ \hline \lambda_{12} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{\mu 2} & \cdots & \lambda_{n2} \\ \hline \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \hline \lambda_{1s} & \lambda_{2s} & \cdots & \cdot & \cdots & \lambda_{ns} \\ \hline \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \hline \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \cdots & \lambda_{\mu n} & \cdots & \lambda_{nn} \\ \hline \end{array}.$$

Ces opérateurs comptent donc le nombre de particules de type s. Si le polynôme P est solution de (2.64) alors cela veut dire que pour chacun des monômes utilisés dans le développement de P la somme des éléments de la $s^{\text{ème}}$ ligne vaut h_s, ceci étant vrai pour toutes les valeurs de s.

Illustrons cette interprétation graphique à l'aide de petits exemples en considérant l'algèbre $U(3)$. Dans ce cas, un monôme est assimilé à un tableau 3×3.

Le déterminant $(\Delta_1^1)^4$ se résume à :

$$\left(\Delta_1^1\right)^4 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

C'est le polynôme de poids maximal de la représentation totalement symétrique utilisée pour décrire des systèmes à 4 bosons.

Le polynôme de poids maximal associé à la partition [11] servant dans l'étude d'un système à deux fermions devient :

$$\left(\Delta_{12}^{12}\right) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

Chaque monôme de la somme vérifie les remarques faites précédemment à savoir que la somme des éléments des colonnes est égale à 0 ou 1 ainsi que la somme des éléments des lignes puisqu'il s'agit du poids [11].

Le carré de ce polynôme est :

$$\left(\Delta_{12}^{12}\right)^2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} - 2\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

L'interprétation graphique du poids [41] est :

$$\left(\Delta_{1}^{1}\right)^{4-1}\left(\Delta_{12}^{12}\right)^{1-0} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \otimes \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}\right).$$

Le calcul d'un produit tensoriel de ces vecteurs s'obtient simplement en développant les expressions et en notant que le produit tensoriel de monômes se fait en sommant les éléments de chaque case des deux tableaux décrivant les monômes considérés, ce qui donne finalement pour l'expression du polynôme de poids maximal de le RI [41] de $U(3)$:

$$\left(\Delta_{1}^{1}\right)^{3}\left(\Delta_{12}^{12}\right) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

De nouveau, le calcul de la somme des nombres placés sur la première ligne de chaque tableau donne 4 tandis que, pour la seconde ligne, on trouve 1, ce à quoi on s'attendait ; de même pour les colonnes puisque dans le cas du polynôme de poids maximal les h_s sont égaux aux k_s.

Grâce à cette interprétation graphique, il devient plus aisé de manipuler les vecteurs associés à une représentation irréductible de l'algèbre unitaire.

De plus on peut facilement la mettre en œuvre d'un point de vue informatique : c'est ce qui a été réalisé dans le code SPACIBA, acronyme de "SPecial Algorithm for Calculations in Interacting Boson Approximation".

Construction de la base.

À partir du polynôme de poids maximal on peut construire l'ensemble des vecteurs sous-tendant une représentation donnée de $U(n)$. Il suffit d'appliquer les opérateurs de décrément comme lorsque l'on construit les vecteurs de moment angulaire à partir de l'état $\mid J\, m_J = J\rangle$ en appliquant l'opérateur $\hat{J}_-$. C'est la méthode proposée par Moshinsky dans [Mos62] et qui a été employée dans [Kur00] pour construire une réalisation bosonique d'un modèle de Lipkin généralisé succeptible de faire intervenir des représentations autres que celle associée à la partition $[1^p]$ qui est totalement anti-symétrique et sert dans la description des systèmes de fermions identiques et autres que celle qui est totalement symétrique $[p]$ et que l'on utilise pour des bosons.

Un modèle simple : $U(2)$

Dans cette partie, nous nous intéressons à un système constitué de particules *identiques* pouvant prendre deux états $\mid 1\rangle$ et $\mid 2\rangle$.

Cet exemple qui, comme nous allons le voir, va faire intervenir l'algèbre $U(2)$ permet, en dépit de sa simplicité, d'introduire la plupart des notions qui seront utilisées lorsqu'il s'agit de décrire des systèmes faisant intervenir un plus grand nombre d'états. Il présente en outre l'avantage de s'appliquer directement à la physique nucléaire car c'est cette même algèbre $U(2)$ qui intervient dans la description des degrés de liberté de spin et d'isospin puisque compte tenu de la grande similitude entre les propriétés des protons et des neutrons vis à vis de l'interaction forte, on peut les assimiler à deux états d'une seule entité, le nucléon.

Considérons comme dans [Fra94] un système de bosons pouvant occuper deux états. En seconde quantification, ces états sont obtenus en appliquant des opérateurs de création sur un état de vide, $\mid 0\rangle$: $\mid i\rangle = b_i^\dagger \mid 0\rangle$, et dont les opérateurs conjugués sont les opérateurs d'annihilation.

Ces opérateurs bosoniques vérifient les relations de commutation[4] :

$$\left[b_i, b_j^\dagger\right] = \delta_{ij}\,,$$

les autres commutateurs étant nuls.

On définit alors les 4 opérateurs $G_i^j = b_i^\dagger b_j$ dont l'action consistent à faire passer une particule d'un état j à un état i. Ces opérateurs vérifient les relations de commutation caractérisant l'algèbre $U(2)$ (2.53) et en sont donc les générateurs infinitésimaux.

$$\left[G_i^j, G_k^l\right] = \delta_{jk} G_i^l - \delta_{il} G_k^j\,.$$

On suppose que le système est invariant sous cette algèbre par conséquent l'hamiltonien commute avec l'ensemble des générateurs infinitésimaux et peut s'ecrire sous la forme

[4] d'anticommuation s'il s'agissait de fermions

suivante :

$$\begin{aligned}\hat{H} &= E_0 + \varepsilon_1 b_1^\dagger b_1 + \varepsilon_2 b_2^\dagger b_2 \\ &+ e_1 b_1^\dagger b_1^\dagger b_1 b_1 + e_2 b_2^\dagger b_2^\dagger b_2 b_2 + e_3 \left(b_1^\dagger b_1^\dagger b_2 b_2 + b_2^\dagger b_2^\dagger b_1 b_1\right) + e_4 b_1^\dagger b_2^\dagger b_1 b_2 \,. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Cette interaction à 1- et 2-corps conserve le nombre de particules ainsi que le nombre particules dans les états $\mid 1\rangle$ et $\mid 2\rangle$. On peut alors définir l' opérateur :

$$\hat{n}_1 = b_1^\dagger b_1 \quad (2.80)$$

qui compte le nombre de particules dans l'état $\mid 1\rangle$ et qui permet d'engendrer une sous-algèbre $U(1)$. On peut également introduire les trois opérateurs :

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2}\left(b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2\right) , \quad (2.81)$$

$$\hat{J}_y = \frac{1}{2}\left(b_1^\dagger b_2 + b_2^\dagger b_1\right) \text{ et} \quad (2.82)$$

$$\hat{J}_z = \frac{i}{2}\left(b_2^\dagger b_1 - b_1^\dagger b_2\right) . \quad (2.83)$$

Ces opérateurs vérifient les relations de commutation usuelles des composantes d'un moment angulaire

$$\left[\hat{J}_i, \hat{J}_j\right] = \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k \,, \quad (2.84)$$

ils engendrent donc une sous-algèbre $SU(2)$.

On peut alors définir les opérateurs de Casimir du premier et second ordre associés à chacune des sous-algèbres :

$$n_t^2 \,, \quad (2.85)$$

$$J^2 = \sum_{i=1}^{3} J_i^2 \,. \quad (2.86)$$

L'opérateur $\hat{J}_z$ est associé à une algèbre $SO(2)$

L'hamiltonien (2.79) peut être ré-écrit en fonction ces opérateurs (2.85), (2.86) et de l'opérateur nombre total de particules, $\hat{n} = b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2$:

$$\hat{H} = E_0 + \varepsilon \hat{n}_1 + \alpha \hat{n}_1^2 + \beta J_3^2 \,. \quad (2.87)$$

Les trois coefficients ε, α et β se déduisent des cofficients de l'expression (2.79) et du nombre total de bosons du système. Une simplification apparaît si on suppose en outre que le système possède l'un des deux symétries $U(1)$ ou $SU(2)$. Dans le premier cas le coefficient β est nul tandis que dans la seconde situation, les termes ε et α valent zéro.

1. La chaîne algèbrique $U(2) \supset U(1)$.

   Le terme β est alors nul. Les vecteurs de base s'obtiennent à partir du vecteur de poids maximal contenant le maximum de bosons dans l'état $\mid 1\rangle$: $\frac{1}{\sqrt{N!}}\left(b_1^\dagger\right)^N \mid 0\rangle$. En faisant agir l'opérateur de décrément $b_2^\dagger b_1$ qui remplace un boson dans un état $\mid 1\rangle$ par un boson dans un état $\mid 2\rangle$ on engendre la base complète :

   $$\mid [N] n_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{(N-n_1)!n_1!}}\left(b_1^\dagger\right)^{n_1}\left(b_2^\dagger\right)^{N-n_1}\mid 0\rangle\,. \tag{2.88}$$

   Le nombre quantique n_1 est associé à la représentation irréductible de la sous algèbre $U(1)$.

   Le spectre est un spectre anharmonique :

   $$E_{[N]n_1} = \varepsilon n_1 + \alpha n_1^2\,. \tag{2.89}$$

2. La chaîne algèbrique $U(2) \supset SU(2) \supset SO(2)$.

   Dans ce cas les coefficients ε et α sont nuls. Les vecteurs de base sont les vecteurs propres des opérateurs $\hat{J}^2$ et $\hat{J}_z$ et peuvent être indicés par des nombres quantiques j et μ respectivement associés aux représentations irréductibles des sous algèbres $SU(2)$ et $SO(2)$ contenues dans l'algèbre $U(2)$:

   $$\begin{array}{ccccc} U(2) & \supset & SU(2) & \supset & U(1) \\ [N] & & j = N/2 & & \mu \end{array}\,.$$

   On peut démontrer que ces vecteurs s'écrivent [Fra94] :

   $$\mid j\mu\rangle = \frac{\left(b_2^\dagger - i b_1^\dagger\right)^{j-\mu}\left(b_2^\dagger + i b_1^\dagger\right)^{j+\mu}}{2^j\sqrt{(j-\mu)!(j+\mu)!}}\mid 0\rangle\,. \tag{2.90}$$

   Ils s'obtiennent en faisant agir sur le vecteur de poids maximal $\mid jj\rangle$ l'opérateur de décrément $\hat{J}_-$.

   Ils ont pour énergies $E_{[N]j\mu} = \beta\mu^2$.

Dans cet exemple simple, on a vu d'une part qu'il était possible de construire deux types de spectres en faisant intervenir les symétries dynamiques du système et d'autre part, nous avons été en mesure de déterminer les vecteurs de base des chaînes algébriques à partir d'un vecteur de poids maximal en lui appliquant successivement des opérateurs de décrément.

Base de $U(4) \supset U(2) \otimes U(2)$

Dans ce paragraphe, nous construisons les bases des représentations irréductibles totalement symétrique de $U_{ST}(4)$ qui présentent en outre une symétrie $U_S(2) \otimes U_T(2)$.

Considérons un système de bosons décrit à l'aide de 4 états individuels : $b_i^\dagger \mid 0\rangle$, $i = 1 \cdots 4$. Les représentations irréductibles de l'algèbre $U(4)$ engendrée par ces bosons sont totalement symétriques et caractérisées par $[N]$ où N est le nombre de bosons du système. On s'intéresse plus particulièrement à la chaîne algébrique :

$$U_{ST}(4) \supset U_S(2) \otimes U_T(2) \supset SU_S(2) \otimes SU_T(2) \supset SO_S(2) \otimes SO_T(2)$$

car on suppose que les bosons sont porteurs d'un nombre quantique de spin et d'un nombre quantique d'isospin :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} b_1^\dagger & = & b^\dagger_{1/2,\,1/2} \\ b_2^\dagger & = & b^\dagger_{-1/2,\,1/2} \\ b_3^\dagger & = & b^\dagger_{1/2,-1/2} \\ b_4^\dagger & = & b^\dagger_{-1/2,-1/2} \end{array} \right. .$$

où le premier indice correspond au moment magnétique de spin m_s et le second au moment magnétique d'isospin m_t.

Les opérateurs associés à $SU_S(2)$ sont donc définis par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \hat{S}_+ & = & b_1^\dagger b_2 + b_3^\dagger b_4 \\ \hat{S}_- & = & b_2^\dagger b_1 + b_4^\dagger b_3 \\ \hat{S}_0 & = & \frac{1}{2}\left(b_1^\dagger b_1 + b_3^\dagger b_3 - b_2^\dagger b_2 - b_4^\dagger b_4\right) \end{array} \right. .$$

On effectue un changement de numérotation pour revenir à une notation "type Moshinsky" :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline b_1^\dagger & b_2^\dagger \\ \hline b_3^\dagger & b_4^\dagger \\ \hline \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline b_{11}^\dagger & b_{21}^\dagger \\ \hline b_{12}^\dagger & b_{22}^\dagger \\ \hline \end{array} .$$

Les opérateurs $\hat{S}_+$, $\hat{S}_-$ et $\hat{S}_0$ s'expriment donc en fonction des $\mathcal{G}_\mu^\nu = \sum_{s=1}^2 b_{\mu s}^\dagger \frac{\partial}{\partial b_{\nu s}^\dagger}$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \hat{S}_+ & = & \mathcal{G}_1^2 \\ \hat{S}_- & = & \mathcal{G}_2^1 \\ \hat{S}_0 & = & \frac{1}{2}\left(\mathcal{G}_1^1 - \mathcal{G}_2^2\right) \end{array} \right. .$$

De même les opérateurs $\hat{T}_+$, $\hat{T}_-$ et $\hat{T}_0$ s'écrivent en fonction des $C_s^{s'} = \sum_{\mu=1}^2 b_{\mu s}^\dagger \frac{\partial}{\partial b_{\mu s'}^\dagger}$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \hat{T}_+ & = & C_1^2 \\ \hat{T}_- & = & C_2^1 \\ \hat{T}_0 & = & \frac{1}{2}\left(C_1^1 - C_2^2\right) \end{array} \right. .$$

Les vecteurs de base peuvent être indicés par des nombre quantiques $\mid [N]\,\{N_1N_2\}J\,m_s\,m_t\,\rangle$ qui sont respectivement associés aux algèbres $U_{ST}(4)$, $U_S(2)$ ($U_T(2)$), $SU_S(2)$ ($SU_T(2)$), $SO_S(2)$ et $SO_T(2)$. Les représentations irréductibles des algèbres $U_S(2)$ et $U_T(2)$ contenues dans la RI de $U(4)$ sont identiques car on s'occupe des RI totalement symétriques de $U(4)$.

Les règles de sélection sont :
- $N_1 + N_2 = N$, $N_1 \geq N_2$,
- $2J = N_1 - N_2$,
- $-J \leq m_s \leq J$ et $-J \leq m_t \leq J$.

Des vecteurs sous-tendant l'espace associé à $\{N_1N_2\} \otimes \{N_1N_2\}$ s'obtiennent en faisant agir les opérateurs de décrément $\hat{S}_-$ et $\hat{T}_-$ sur le polynôme de poids maximal :

$$\mid \Delta N_2\rangle = \frac{\left(b_{11}^\dagger\right)^\Delta (\Delta_{12}^{12})^{N_2}}{\sqrt{\Delta! N_2! (N_2+1)!}} \mid 0\rangle \tag{2.91}$$

où on note $\Delta = N_1 - N_2 = 2J$. Dans la suite on oubliera la constante de normalisation.

On calcule l'action des opérateurs $\hat{S}_0$, $\hat{T}_0$, $\hat{S}_-$ et $\hat{T}_-$ sur le vecteur $\mid \Delta N_2\rangle$:

$$\begin{aligned}
\hat{S}_0 \mid \Delta N_2\rangle &= J \mid \Delta N_2\rangle\,, \\
\hat{T}_0 \mid \Delta N_2\rangle &= J \mid \Delta N_2\rangle\,, \\
\hat{S}_- \mid \Delta N_2\rangle &= \Delta \left(b_{11}^\dagger\right)^{\Delta-1} b_{21}^\dagger \left(\Delta_{12}^{12}\right)^{N_2} \mid 0\rangle\,, \\
\hat{T}_- \mid \Delta N_2\rangle &= \Delta \left(b_{11}^\dagger\right)^{\Delta-1} b_{12}^\dagger \left(\Delta_{12}^{12}\right)^{N_2} \mid 0\rangle\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mid \Delta N_2\rangle$ est simultanément vecteur propre de $\hat{T}^2$ et $\hat{S}^2$ avec la valeur propre $J(J+1)$ et comme les opérateurs $\mathcal{G}_\mu^\nu$ commutent avec les C_i^j, les vecteurs obtenus par l'action de tous ces opérateurs sur $\mid \Delta N_2\rangle$ sont aussi des vecteurs propres de $\hat{T}^2$ et $\hat{S}^2$ avec la valeur propre $J(J+1)$. Les vecteurs obtenus ont des moments magnétiques de spin et d'isospin qui diminuent de 1 à chaque fois que l'on applique les opérateurs de décrément.

Illustrons cette façon de construire la base de $U(4)$ en considérant par exemple la représentation [3] de $U(4)$. Cet espace compte 20 vecteurs et se décompose en la somme suivante :

$$[3] = \{3\} \otimes \{3\} \oplus \{21\} \otimes \{21\}\,.$$

Le premier sous-espace est de dimension 16 et le second de dimension 4.

Les vecteurs de $\{3\} \otimes \{3\}$ sont obtenus par action des opérateurs de décrément $\hat{T}_-$ et $\hat{S}_-$ sur le vecteur de poids maximal $(b_{11}^\dagger)^3$, ce qui graphiquement se traduit par :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\begin{array}{|c|c|}\hline 3&0\\\hline 0&0\\\hline\end{array} & \to & \begin{array}{|c|c|}\hline 2&0\\\hline 1&0\\\hline\end{array} & & & \to & \begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 2&0\\\hline\end{array} & & & \to & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline 3&0\\\hline\end{array} \\
\downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
\begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 0&0\\\hline\end{array} & \to 2 & \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 1&0\\\hline\end{array} & + & \begin{array}{|c|c|}\hline 2&0\\\hline 0&1\\\hline\end{array} & \to & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 2&0\\\hline\end{array} & +\,2 & \begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 1&1\\\hline\end{array} & \to & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline 2&1\\\hline\end{array} \\
\downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \quad . \\
\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 0&0\\\hline\end{array} & \to & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&2\\\hline 1&0\\\hline\end{array} & +\,2 & \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 0&1\\\hline\end{array} & \to 2 & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 1&1\\\hline\end{array} & + & \begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 0&2\\\hline\end{array} & \to & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline 1&2\\\hline\end{array} \\
\downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
\begin{array}{|c|c|}\hline 0&3\\\hline 0&0\\\hline\end{array} & \to & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&2\\\hline 0&1\\\hline\end{array} & & & \to & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 0&2\\\hline\end{array} & & & \to & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline 0&3\\\hline\end{array}
\end{array}
$$

Les flèches $\rightarrow$ et $\downarrow$ représentent respectivement l'action de $\hat{T}_-$ et de $\hat{S}_-$.

De même les vecteurs de $\{21\} \otimes \{21\}$ sont calculés en faisant agir $\hat{T}_-$ et $\hat{S}_-$ sur le vecteur de poids maximal $b_{11}^{\dagger}\Delta_{12}^{12}$, ce qui graphiquement se résume à :

$$
\begin{array}{ccccccc}
\begin{array}{|c|c|}\hline 2&0\\\hline 0&1\\\hline\end{array} & - & \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 1&0\\\hline\end{array} & \to & \begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 1&1\\\hline\end{array} & - & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 2&0\\\hline\end{array} \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \quad . \\
\begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 0&1\\\hline\end{array} & - & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&2\\\hline 1&0\\\hline\end{array} & \to & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 1&1\\\hline\end{array} & - & \begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 0&2\\\hline\end{array}
\end{array}
$$

On peut facilement vérifier que les vecteurs de $\{3\} \otimes \{3\}$ sont orthogonaux à ceux de $\{21\} \otimes \{21\}$.

Cette procédure se généralise à n'importe quelle algèbre $U(P^2) \supset U(P) \otimes U(P)$. La construction est cependant plus compliquée en raison du plus grand nombre d'opérateurs de décrément $\mathcal{G}_\mu^\nu$ et C_i^j. De plus comme les $\mathcal{G}_\mu^\nu$ ne commutent pas entre eux (tout comme les C_i^j), l'action successive de plusieurs de ces opérateurs sur le vecteur de poids maximal peut aboutir à des états non linéairement indépendants si bien qu'il est nécessaire de construire à partir des états obtenus par décrément une famille libre. Pour cela, on peut calculer la matrice des recouvrements de tous les vecteurs obtenus par décrément c'est à dire la matrice dont les éléments sont les produits scalaires entre ces vecteurs. La diagonalisation de cette matrice symétrique donne un ensemble de vecteurs propres dont les valeurs propres sont non nulles et qui forment une famille libre génératrice orthogonale (donc une base) du sous-espace $\{N_1, N_2, \cdots N_P\} \otimes \{N_1, N_2, \cdots N_P\}$.

Fermions sur une couche j

Un système de N fermions placés sur une couche j (demi-entier car il s'agit du moment angulaire individuel d'un fermion) engendrent la représentation totalement antisymétrique de $U(2j+1)$ notée $[1^N]$. Le vecteur de poids maximal de cette représentation est $\Delta_{1\cdots N}^{1\cdots N}$. La construction de la base se fait en appliquant les opérateurs $\mathcal{G}_\mu^\nu$ sur ce vecteur jusqu'à ce que l'on atteigne un vecteur nul.

On utilise les relations d'anticommutation des opérateurs de création et d'annihilation pour ré-exprimer les $a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l$ en fonction des générateurs infinitésimaux. Le calcul des opérateurs à deux-corps se ramène donc à un produit de générateurs (plus éventuellement une somme avec un générateur) pour lesquels il est facile de déterminer les éléments de matrice. La diagonalisation de la matrice obtenue donne les valeurs possibles de cette observable.

Cette technique a été utilisée notamment pour obtenir les spectres de fermions placés sur la couche $j = 7/2$ comme on le verra dans le chapitre suivant.

Procédure générale

Le calcul de la base par action des générateurs de décrément est d'une grande souplesse et permet de traiter de façon quasi-identique n'importe quelle représentation :

1. On détermine les partitions ordonnées du nombre de particules du système.

2. Pour chaque partition, on calcule le polynôme de poids maximal.

3. On fait agir les générateurs de décrément sur ce vecteur jusqu'à ce que l'on atteigne toujours le vecteur nul.

4. On orthonormalise les vecteurs en supprimant les éventuels états redondants en diagonalisant la matrice des recouvrements ; on obtient alors une base d'états orthogonaux sous-tendant la représentation irréductible souhaitée.

5. Dans cette base, on calcule les matrices des observables du système en les décomposant en sommes et produits de générateurs.

2.7 Exemples d'applications physiques

2.7.1 Le modèle de bosons en interaction (Interacting Boson Model)

Un exemple d'utilisation d'une approche algébrique en physique nucléaire est le modèle de bosons en interaction. Introduit par Iachello et Arima [Ari75], il permet de décrire les états collectifs à basse énergie des noyaux en terme de bosons monopolaires (bosons s) et quadripolaires (bosons d). Ce modèle peut être vu comme une troncation du modèle en couches dans la mesure où des paires de nucléons couplées à 0 et 2 vérifient approximativement les relations de commutation des bosons et elles peuvent donc être assimilées à des bosons s et d. Ces bosons engendrent une algèbre $U(6)$; les états d'un système de N bosons sous-tendent la représentation irréductible totalement symétrique de $U(6)$.

L'hamiltonien à un- et deux-corps conservant le moment angulaire s'écrit :

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_j \varepsilon_j \sqrt{2j+1}\left[b_j^\dagger \otimes \tilde{b}_j\right]^{(0)} \\ &+ \sum_{\substack{j_1 \leq j_2 \\ j_3 \leq j_4 \\ J}} \frac{\nu^J_{j_1 j_2 j_3 j_4}\sqrt{2J+1}}{\sqrt{(1+\delta_{j_1 j_2})(1+\delta_{j_3 j_4})}} \left[\left[b_{j_1}^\dagger \otimes b_{j_2}^\dagger\right]^{(J)} \otimes \left[\tilde{b}_{j_3} \otimes \tilde{b}_{j_4}\right]^{(J)}\right]^{(0)}, \quad (2.92)\end{aligned}$$

où $\tilde{b}_l = (-1)^{l-m} b_{l-m}$. Cet hamiltonien compte 9 termes - 2 pour la partie à un-corps et 7 pour la partie à deux-corps.

On peut montrer [Iac87] qu'il n'existe que trois chaînes algébriques de $U(6)$ contenant l'algèbre de moment angulaire $SO(3)$:

$$\begin{aligned} U(6) &\supset U(5) \supset SO(5) \supset SO(3)\,(I) \\ U(6) &\supset U(3) \supset SO(3)\,(II) \\ U(6) &\supset SO(6) \supset SO(5) \supset SO(3)\,(III) \end{aligned}$$

On peut ré-exprimer (2.92) en fonction des opérateurs de Casimir des différentes chaînes algébriques :

$$\begin{aligned}\hat{H} &= e_0 + e_1 \mathcal{C}_1(U(6)) + e_2 \mathcal{C}_2(U(6)) + \varepsilon \mathcal{C}_1(U(5)) + \alpha \mathcal{C}_2(U(5)) \\ &+ \beta \mathcal{C}_2(SO(5)) + \gamma \mathcal{C}_2(SO(3)) + \delta \mathcal{C}_2(SU(3)) + \eta \mathcal{C}_2(SO(6)) \,. \quad (2.93)\end{aligned}$$

Les coefficients de (2.93) sont des combinaisons linéaires des coefficients de l'expression (2.92). L'intérêt d'une telle expression est de mettre en évidence les trois chaînes algébriques contenant $SO(3)$ pour lesquelles il existe des expressions analytiques pour les vecteurs propres et pour leurs énergies.

$U(5)$	$SO(5)$	$SO(6)$	$SU(3)$
$\left[d^\dagger \otimes \tilde{d}\right]^{(J)}_M$	$\left[d^\dagger \otimes \tilde{d}\right]^{(J)}_M$	$\hat{Q}^{\chi=0}_\mu$ et $\left[d^\dagger \otimes \tilde{d}\right]^{(J)}_M$	$\hat{Q}^{\chi=\sqrt{7}/2}_\mu$ et $\hat{L}_\nu$
$J = 0, \cdots, 4$	$J = 1, 3$	$\mu = -2, \cdots, 2$ et $J = 1, 3$	$\mu = -2, \cdots, 2$
$-J \leq M \leq J$	$-J \leq M \leq J$	$-J \leq M \leq J$	$\nu = -1, \cdots, 1$

TAB. 2.3 – Les différents générateurs des chaînes (I), (II) et (III) sont respectivement donnés dans les colonnes 1-2, 2-3 et 4 de ce tableau. Les cinq opérateurs $\hat{Q}^\chi_\mu = \left[s^\dagger \otimes \tilde{d} + d^\dagger \otimes \tilde{s}\right]^{(2)}_\mu + \chi \left[d^\dagger \otimes \tilde{d}\right]^{(2)}_\mu$ correspondent aux composantes du moment quadripolaire. Les trois opérateurs $\hat{L}_\nu = \sqrt{10} \left[d^\dagger \otimes \tilde{d}\right]^{(1)}_\nu$ sont les composantes du moment angulaire.

Chaîne (I) : spectres vibrationnels

Dans ce cas δ et η sont nuls et l'hamiltonien se réduit à une somme des opérateurs de Casimir associés à (I). Les générateurs des sous-algèbres intervenant dans cette chaîne sont donnés dans les deux premières colonnes du tableau 2.3.

Les états propres peuvent être caractérisés par 6 nombres quantiques :

$$\begin{array}{ccccccccc} U(6) & \supset & U(5) & \supset & S0(5) & \supset & SO(3) & \supset & SO(2) \\ & & & & & & & & \\ |[N] & & n_d & & \nu\, \tilde{n}_\Delta & & L & & M_L\rangle \end{array} \tag{2.94}$$

dont les énergies sont

$$E([N], n_d, \nu, L, M_L) = \varepsilon n_d + \alpha n_d(n_d + 4) + \beta\nu(\nu + 3) + 2\gamma L(L + 1)\,. \tag{2.95}$$

N est le nombre de bosons du système, n_d le nombre de bosons d, ν est le nombre quantique de séniorité associé aux bosons d (c'est à dire le nombre de paires de bosons d non couplées à 0), le nombre quantique n_Δ est relié au nombre de triplets de bosons d couplées à 0, L est le moment angulaire total et M_L sa projection. Les règles de sélection des nombres quantiques sont explicitées en détail dans [Iac87]. Les spectres obtenus permettent de décrire les noyaux vibrationnels. À titre d'exemple, sur la figure 2.1, en haut, on compare le spectre mesuré expérimentalement pour le ^{110}Cd avec le spectre théorique obtenu pour N=7 bosons (cf [Iac87] page 42).

Chaîne (II) : spectres rotationnels

Les états propres sont indicés par les 6 nombres quantiques suivants :

$$\begin{array}{ccccccc} U(6) & \supset & SU(3) & \supset & SO(3) & \supset & SO(2) \\ & & & & & & \\ |[N] & & (\lambda\mu)\,\chi & & L & & M_L\rangle \end{array} \tag{2.96}$$

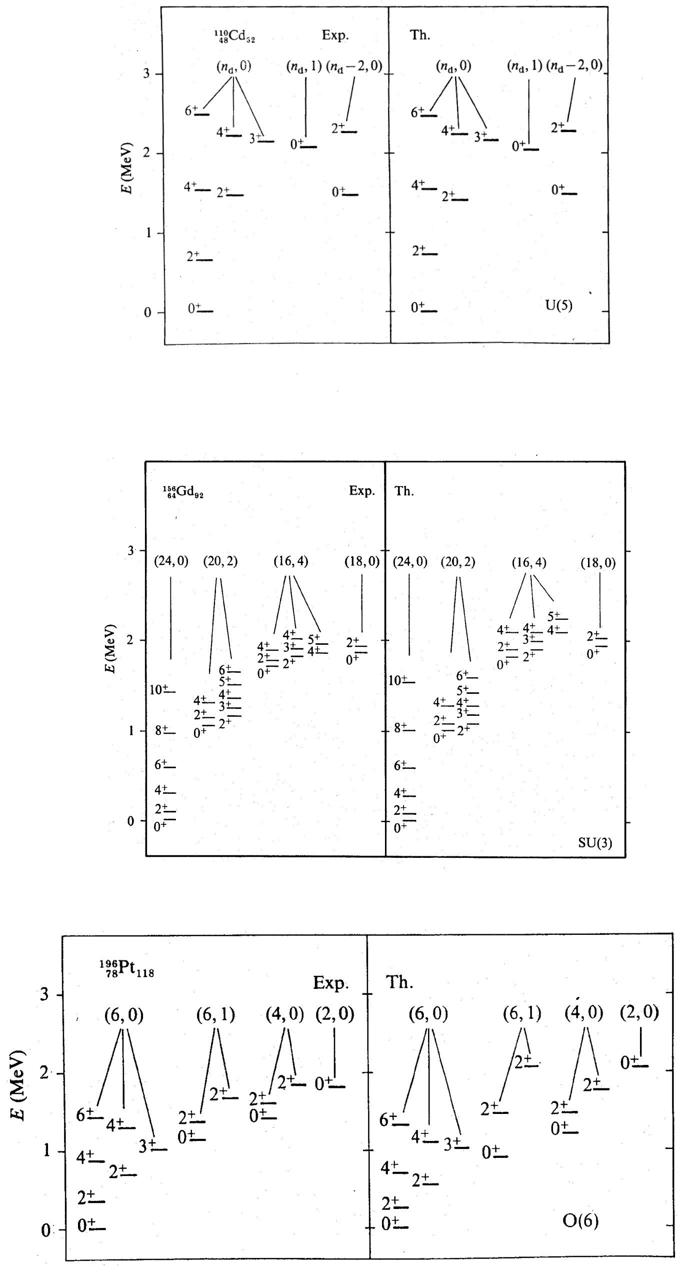


FIG. 2.1 – Spectres du haut : comparaison entre le spectre expérimental du Cadmium 110 et le spectre obtenu par un calcul IBM à partir des expressions 2.95. Spectres du milieu : à gauche figure le spectre expérimental du Gadolinium 156 et à droite le spectre obtenu par un calcul IBM pour la chaîne (II) avec 12 bosons. Spectres du bas : on compare le spectre expérimental du Platine 196 et le spectre obtenu par un calcul IBM pour la chaîne (III) avec 6 bosons.

et leurs énergies valent

$$E([N], \lambda, \mu, \chi, L, M_L) = \frac{2}{3}\delta(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu) + 2\gamma L(L+1)\,. \qquad (2.97)$$

Ce type de spectre rotationnel est illustré par la figure 2.1, au milieu, où l'on compare le spectre expérimental du ^{156}Gd avec le spectre théorique obtenu pour 12 bosons, les paramètres de l'hamiltonien, γ et δ, valant respectivement 3.8 keV et -20.1 keV (cf [Iac87] page 43).

Chaîne (III) : spectres γ-soft

Lorsque ε, α et δ sont nuls, les états propres du système peuvent être indicés à l'aide des nombres quantiques

$$\begin{array}{ccccc} U(6) \supset & SO(6) \supset & SO(5) \supset & SO(3) \supset & SO(2) \\ \\ |[N] & \sigma & \tau\ \tilde{\nu}_\Delta & L & M_L\rangle \end{array} \qquad (2.98)$$

dont les énergies valent

$$E([N], \sigma, \tau, L, M_L) = \eta\sigma(\sigma+4) + 2\beta\tau(\tau+3) + 2\gamma L(L+1)\,. \qquad (2.99)$$

Ce type de spectre est illustré par la figure 2.1, en bas, sur laquelle sont représentés le spectre expérimental du ^{196}Pt et le spectre théorique calculé avec 6 bosons et pour les paramètres $\eta = -171/8$ keV, $\gamma = 5$ keV et $\beta = 25$ keV (cf [Iac87] page 43).

Ces trois symétries peuvent être rassemblées sur un diagramme unique, le triangle de Casten [Cas81], où chaque hamiltonien est représenté par un point dont les coordonnées barycentriques sont $(\varepsilon, \delta, \eta)$. Les sommets du triangle correspondent donc aux trois symétries (I), (II) et (III) et les points entre les sommets représentent des transitions entre ces limites. Les points intérieurs décrivent les hamiltoniens les plus généraux.

Il existe trois autres versions plus élaborées faisant intervenir des bosons s et d :

- IBM-2 (cf par exemple [Iac87] deuxième partie) où deux types de bosons interviennent : les bosons associées à des paires de neutrons et ceux associés à des paires de protons.
- IBM-3 (cf [Ell80], [Iac87] troisième partie) où les bosons correspondent à des paires couplées à $(ST) = (01)$. Cette version a fait l'objet d'études théoriques approfondies (voir par exemple [Ell96a, Eva97, Gar99] et les références données à l'intérieur) et a par exemple permis de calculer les spectres des isotopes pairs-pairs du Ni, Zn et Ge [Ell96b] proches de la ligne $N = Z$ ainsi que les transitions électromagnétiques.
- IBM-4, introduit par Elliott et Evans [Ell81], permet de tenir compte en outre du couplage isoscalaire $(ST) = (10)$ afin de traiter complètement l'appariement

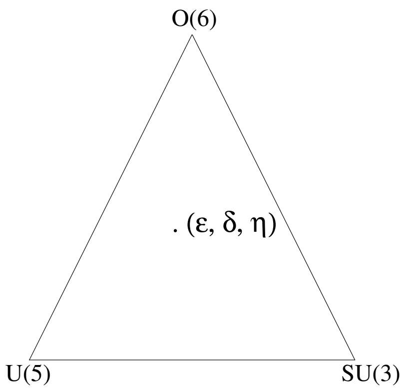


FIG. 2.2 – Triangle de Casten.

neutron-proton. Ce formalisme a été imaginé pour étudier les noyaux légers $N \sim Z$ pour lesquels on s'attend à ce que les composantes isovectorielle et isoscalaire de l'appariement entre nucléons soient toutes les deux importantes.

2.7.2 Calculs en IBM-4.

Bosons et chaînes algébriques

Outre un moment cinétique orbital pouvant valoir 0 ou 2, les bosons en IBM-4 possèdent des degrés de liberté de spin et d'isospin (st) valant (01) ou (10). Les opérateurs de création et d'annihilation s'écrivent donc de la façon suivante : $b^{\dagger}_{lm_lsm_stm_t}$ et $b_{lm_lsm_stm_t}$ où $l = 0$ ou 2, $-l \leq m_l \leq l$ et $(st) = (01)$ ou (10), $-s \leq m_s \leq s$ et $-t \leq m_t \leq t$. Ces 36 bosons engendrent l'algèbre $U(36)$ et le système de N bosons sous-tend la représentation totalement symétrique $[N]$ de $U(36)$. On impose en outre la conservation du moment angulaire total $\hat{J} = \hat{L}+\hat{S}$ et de l'isospin $\hat{T}$ dont les composantes sont définies par :

$$\begin{aligned} \hat{J}_\mu &= \sqrt{10}\left[b^{\dagger}_{2,0,1}\tilde{b}_{2,0,1} + b^{\dagger}_{2,1,0}\tilde{b}_{2,1,0}\right]^{(L=1,S=0,T=0)}_{M_L=\mu,M_S=0,M_T=0} \\ &+ \sqrt{2}\left[b^{\dagger}_{0,1,0}\tilde{b}_{0,1,0} + \sqrt{5}\,b^{\dagger}_{2,1,0}\tilde{b}_{2,1,0}\right]^{(L=0,S=1,T=0)}_{M_L=0,M_S=\mu,M_T=0} \end{aligned} \tag{2.100}$$

et

$$\hat{T}_\mu = \sqrt{2}\left[b^{\dagger}_{0,0,1}\tilde{b}_{0,0,1} + b^{\dagger}_{2,0,1}\tilde{b}_{2,0,1}\right]^{L=0,S=0,T=1}_{M_L=\mu,M_S=0,M_T=\mu} \tag{2.101}$$

qui engendrent respectivement les algèbres $SO_J(3)$ et $SO_T(3)$. Par conséquent les états du système sont caractérisés par la chaîne algébrique suivante :

$$\begin{array}{cccc} U(36) \supset & \cdots \supset & SO_J(3) \otimes SO_T(3) \\ |[N] & \cdots & JM_J\, TM_T\rangle \end{array} . \tag{2.102}$$

Les différentes chaînes algébriques contenant le produit $SO_J(3) \otimes SO_T(3)$ sont répertoriées dans [Kot00]. Parmi toutes les chaînes possibles, nous nous sommes concentrés sur la chaîne suivante

$$\begin{array}{ll} U(36) \supset & \left[U_L(6) \supset \left\{ \begin{array}{ll} U_L(5) \supset & SO_L(5) \\ SU_L(3) & \\ SO_L(6) \supset & SO_L(5) \end{array} \right\} \supset SO_L(3) \right] \otimes \\ U_{ST}(6) & \supset SO_{ST}(6) \simeq SU_{ST}(4) \supset SU_S(2) \otimes SU_T(2) \end{array} \tag{2.103}$$

parce qu'elle préserve le couplage $L - S$ et qu'elle fait intervenir une algèbre de spin-isospin de Wigner $SU_{ST}(4)$ [Wig37] qui semble proposer en modèle en couches une assez bonne classification des états de certains noyaux (cf [Jui99] chapitre 2).

Spectroscopie

Nous avons construit les vecteurs classifiés suivant l'une des chaînes (2.103) en appliquant la méthode présentée dans la section 2.6 page 65 et en diagonalisant les opérateurs de Casimir adéquats. Ces vecteurs sont caractérisés par des nombres quantiques orbitaux semblables à ceux d'IBM-1 et des nombres quantiques de spin-isospin :

$$\begin{array}{cccc} U_{ST}(6) \supset & SO_{ST}(6) \simeq SU_{ST}(4) \supset & SU_S(2) \otimes & SU_T(2) \\ [N_1, \cdots, N_6] & (\lambda, \mu, \nu) & SM_S & TM_T \end{array} . \tag{2.104}$$

Par exemple les états associés à la chaîne $U(5)$ sont indicés de la façon suivante :

$$|[N_1, \cdots, N_6]\, \nu_5\, \tilde{n}_\Delta\, L\, M_L\, (\lambda, \mu, \nu)\, SM_S\, TM_T\rangle\,. \tag{2.105}$$

En couplant L et S, on obtient le moment angulaire total J de chaque état. La figure 2.3 donne le spectre que l'on obtient dans cette base pour trois bosons en diagonalisant les opérateurs de Casimir associés à cette chaîne. Les chiffres sur les trois flèches du bas indiquent la représentation de $U_L(6)$ et $U_{ST}(6)$, les nombres entre parenthèses sont associés à la représentation de $SU_{ST}(4)$ et les états ont un bon isospin T et un bon J. Les deux spectres donnés sur la figure 2.4 correspondent aux niveaux de plus basses énergies obtenues pour les chaînes (I) et (III) ; les paramètres des opérateurs

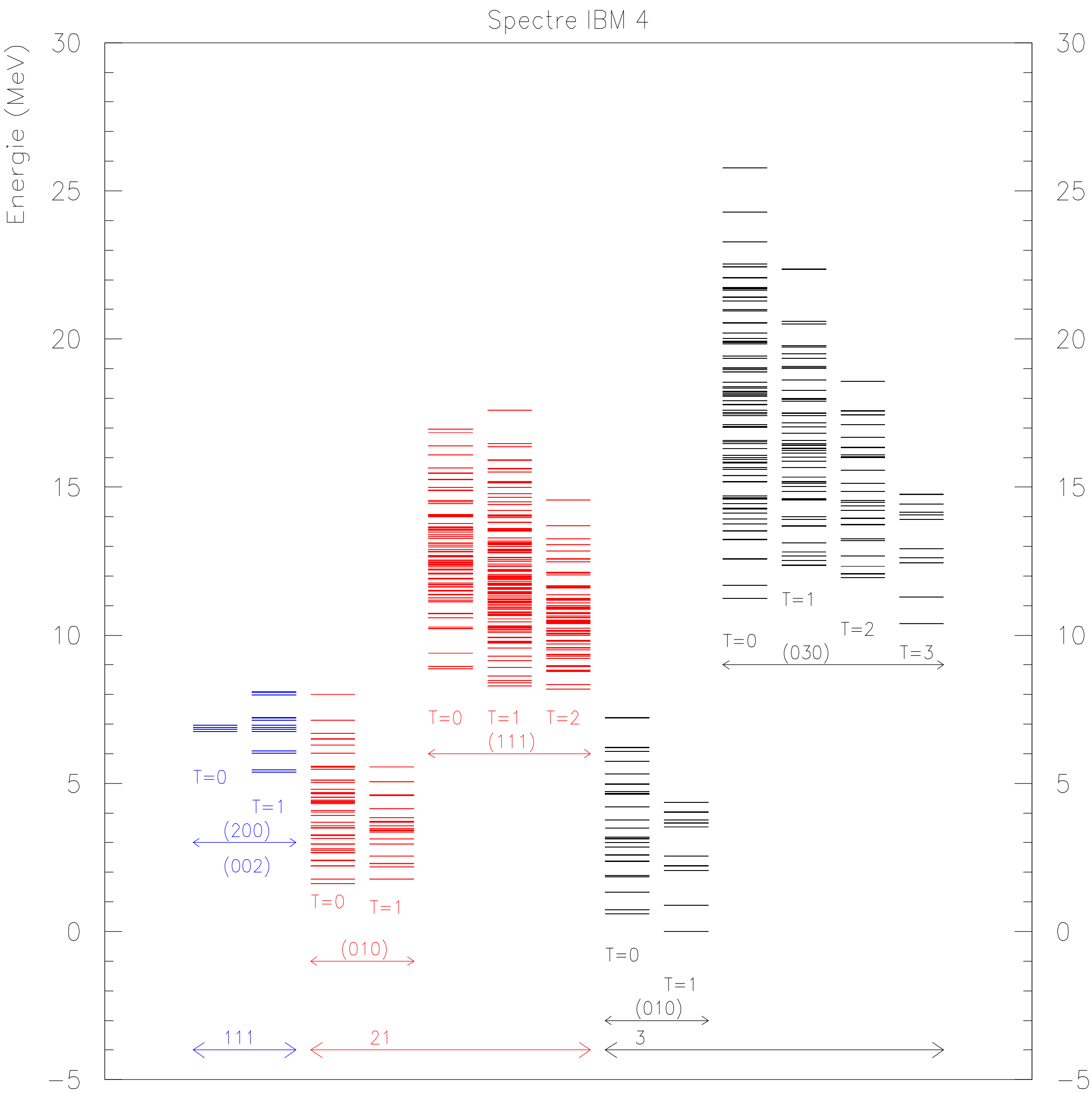


FIG. 2.3 – Spectre obtenu pour un système de trois bosons.

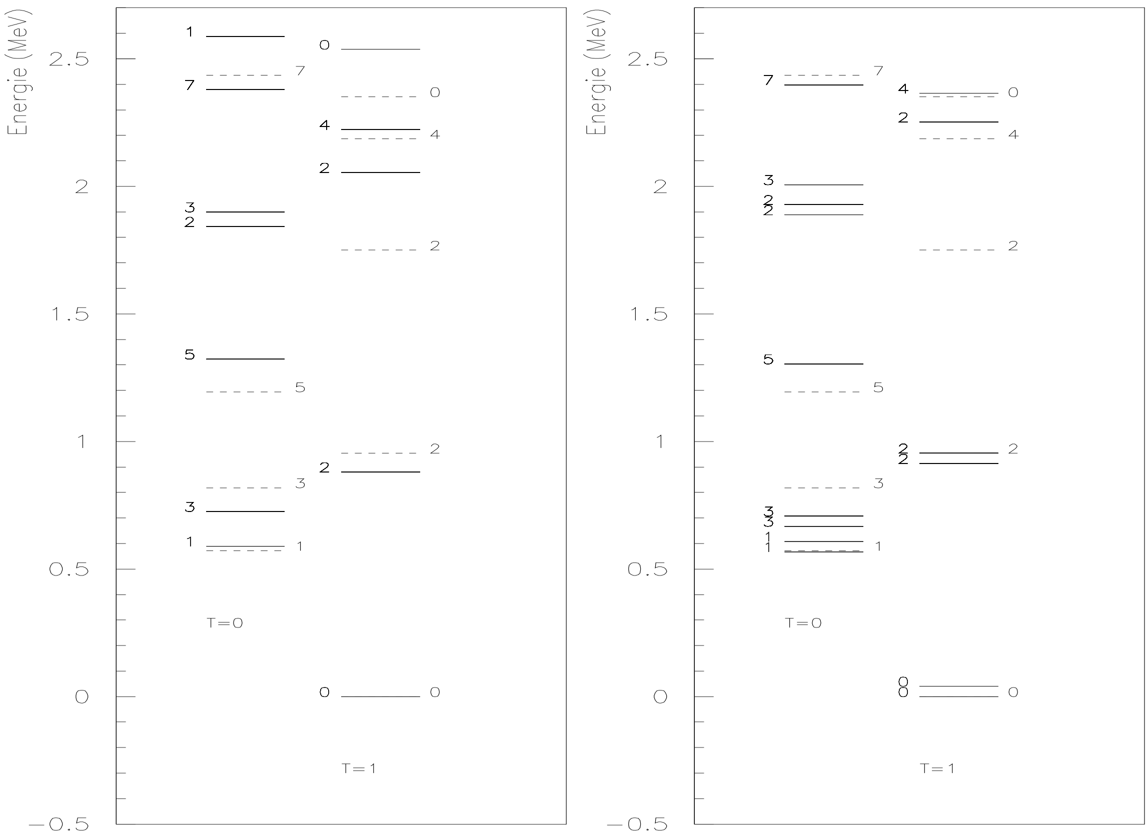


FIG. 2.4 – Spectres obtenus pour un système de trois bosons : à gauche, les niveaux en traits pleins ont été obtenus dans le cadre de la limite (I) et ceux de droite dans la limite (III) ; les niveaux en pointillés correspondent aux niveaux expérimentaux du ^{62}Ga.

de Casimir étant choisis afin de réduire les écarts entre les niveaux théoriques et les niveaux expérimentaux du ^{62}Ga qui sont tracés en pointillés. À côté de chaque niveau est indiqué le moment angulaire total.

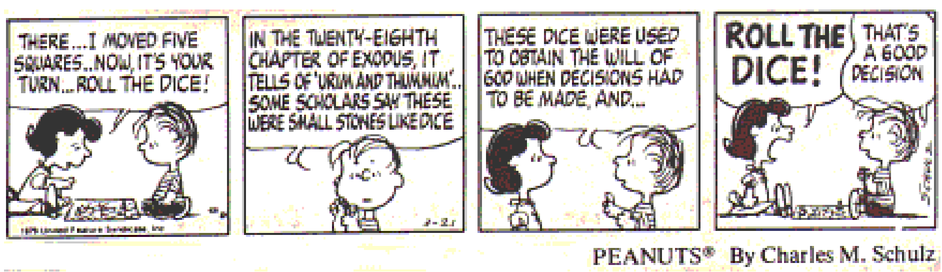
L'accord entre l'expérience et les calculs théoriques est assez bon pour ces deux chaînes même s'il y a des niveaux superflus. En revanche pour la chaîne (II), on ne retrouve pas la séquence des niveaux. Si on prend les mêmes paramètres pour un système de 2 bosons, on obtient des spectres dont le fondamental est aussi un état d'isospin $T = 1$ alors qu'expérimentalement le ^{58}Cu a un état fondamental d'isospin $T = 0$.

Il se pose alors la question du choix des paramètres de l'hamiltonien. Existe-t-il des paramètres qui permettraient avec ce type d'hamiltoniens d'obtenir simultanément un spectre à 2 bosons avec un état fondamental d'isospin $T = 0$ et un spectre à 3 bosons avec un état fondamental d'isospin $T = 1$ ou au contraire les corrélations entre les hamiltoniens à 2 et 3 bosons résultant de la conservation de l'isospin et du rang de l'interaction (à un- et deux-corps) interdissent-elles de reproduire de tels résultats expérimentaux ?

Plus généralement qu'est ce qui conditionne les propriétés spectrales d'un système soumis à une interaction à un- et deux-corps ? Dans le chapitre suivant, nous montrons que le simple fait de choisir un certain espace de valence peut restreindre fortement les spectres possibles notamment en ce qui concerne les valeurs possibles du moment angulaire de l'état fondamental.

Chapitre 3

Propriétés spectrales d'un opérateur à 1- et 2-corps conservant le moment angulaire



It's chaos but organized chaos.
Charles Mingus.

3.1 Introduction

Une propriété remarquable de la physique nucléaire est que *tous* les noyaux pairs-pairs connus ont un état fondamental caractérisé par un moment angulaire nul. Il est également possible d'opérer une classification des spectres expérimentaux de basse énergie en trois grandes catégories [Cas93, Zam94] : spectres rotationnels, vibrationnels et spectres présentant un schéma de séniorité. Ces propriétés spectrales sont généralement expliquées en faisant intervenir des interactions spécifiques comme une interaction quadripolaire pour les bandes rotationnelles ou une interaction d'appariement attractive. Ces régularités sont aussi interprétées comme des manifestations de différentes symétries au sein des noyaux ce qui justifie l'utilisation de modèles du type IBM.

Cependant de telles propriétés ont été observées même lorsque l'on considère des interactions à deux-corps aléatoires aussi bien en modèle en couches qu'en IBM. Quelle est la raison fondamentale de ces observations ?

Dans une première partie, je présente le cadre formel du problème. Je donne ensuite un aperçu des résultats obtenus en modèle en couches et en IBM. Dans une troisième partie, je propose une méthode permettant de prédire dans certains cas (désignés par la suite par l'appellation générique de "cas diagonal") les résultats et donc de comprendre les raisons de leur émergence. Cette méthode met en évidence l'existence d'une géométrie sous-jacente au problème qui est complètement contenue dans l'espace de valence, le rang de l'interaction (c'est à dire sa nature à deux-corps) et dans la conservation du moment angulaire total. On montre ainsi que c'est la façon dont les états à une particule vont se coupler pour donner un état à N particules ayant un certain moment angulaire total qui va dicter la possibilité pour cet état d'être ou non un état de plus basse énergie. Ce couplage est purement déterministe et dépend de la symétrie de l'espace considéré. Dans une dernière partie, je présente des résultats numériques que j'ai obtenus et qui incitent à penser que la méthode développée dans le cas diagonal pourrait être étendue et s'appliquer au cas général.

3.2 Hamiltoniens aléatoires à un- et deux-corps conservant le moment angulaire

Nous considérons un système quantique décrit par un hamiltonien à un- et deux-corps conservant le moment angulaire. Cet opérateur s'écrit en seconde quantification :

$$\hat{H} = \sum_j \varepsilon_j \left[a_j^\dagger \otimes \tilde{a}_j\right]^{(0)} + \sum_{\substack{j_1\leq j_2 \\ j_3 \leq j_4 \\ J}} v^J_{j_1j_2j_3j_4} \sqrt{\frac{2J+1}{(1+\delta_{j_1j_2})(1+\delta_{j_3j_4})}} \left[\left[a^\dagger_{j_1}\otimes a^\dagger_{j_2}\right]^{(J)} \otimes \left[\tilde{a}_{j_3}\otimes\tilde{a}_{j_4}\right]^{(J)}\right]^{(0)},$$

où les $a_j^\dagger$ sont les opérateurs de création de particules de moment angulaire j, les $\tilde{a}_{jm}$ valent $(-1)^{j-m}a_{j-m}$, les a_{jm} étant les opérateurs d'annihilation, les ε_j désignent les énergies simples particules et les $v^J_{j_1j_2j_3j_4}$ sont les éléments de matrices réduits à deux-corps.

En "Two Body Random Ensemble" (TBRE) introduit simultanément par French et Wong [Fre70] et Bohigas et Flores [Boh71], les éléments de matrice $v^J_{j_1j_2j_3j_4}$ sont des paramètres aléatoires et les ε_j sont nulles. En général ils suivent la même loi de distribution, qui est souvent la loi normale, et sont indépendants. Il existe de légères variantes qui font notamment intervenir des termes à un-corps ou des largeurs différentes en fonction du moment angulaire [Joh98, Joh99, Dea01]. Les résultats ne sont pas fondamentalement affectés.

3.3 Robustesse de certaines propriétés

3.3.1 Le cas des fermions

La ré-utilisation des interactions aléatoires en modèles en couches par Johnson et collaborateurs [Joh98, Joh99] révèle que certaines propriétés qui jusqu'à présent étaient supposées dépendre fortement des termes de l'interaction semblent en réalité être intrinsèques au modèle et relativement peu sensibles au détail de l'interaction. Différents types d'ensembles statistiques ont été introduits, ils diffèrent principalement dans le choix de la variance des éléments de matrice $\langle v^J_{\alpha,\alpha'}\rangle = c_J(1+\delta_{\alpha,\alpha'})\overline{v^2}$:

1. En RQE (Random Quasi-particle Ensemble), l'invariance par transformation particules-quasi-particules impose $c_J = 1/(2J+1)$.
2. En TBRE (Two-Body Random Ensemble), $c_J = 1$.
3. En RQE-NP (Random Quasi-particle Ensemble-No Pairing), on impose en outre que $c_0 = 0$ ceci en vue de tester le rôle que peut avoir le terme d'interaction c_0 sur les phénomènes observés.
4. En RQE-SPE (Random Quasi-particle Ensemble with Single Particle Energies), les échelles en énergies définies à partir de la valeur de $\overline{v^2}$ sont prises à partir des résultats obtenus avec des interactions réalistes : dans le cas de la couche sd, l'interaction de Wildenthal donne $\overline{v^2} = 3,84$ et pour la couche pf l'interaction KB3 modifiée donne $\overline{v^2} = 4,43$. On ajoute en outre à l'interaction des termes à un-corps qui correspondent aux énergies simple-particules réalistes.

Différents espaces de valence ont été considérés :

1. des systèmes avec 4, 6 et 8 neutrons de valence sur une couche sd correspondant respectivement aux noyaux ^{20}O, ^{22}O et ^{24}O ;
2. des systèmes avec 4, 6, 8 et 10 neutrons de valence sur une couche pf correspondant respectivement aux noyaux ^{44}Ca, ^{46}Ca, ^{48}Ca et ^{50}Ca ;
3. et des systèmes avec 4, 6 et 8 neutrons de valence sur une couche sd et 4 protons de valences sur cette même couche, qui correspondent donc respectivement aux noyaux ^{24}Mg, ^{26}Mg et ^{28}Mg.

Pour l'ensemble de ces interactions aléatoires, en calculant plus de 1000 spectres pour chaque espace de valence, une majorité de spectres a un fondamental de moment angulaire nul alors que le nombre d'états ayant ce moment angulaire est relativement faible par rapport au nombre total d'états (par exemple dans le cas de la couche pf avec 6 neutrons de valence, 512 états sont des 2^+ contre 137 états 0^+). Ainsi en moyenne sur l'ensemble des espaces de valence considérés, 5,81% des états sont des 0^+ alors qu'en RQE, 66,7% des spectres ont un fondamental de moment angulaire nul et de parité positive. En RQE-NP, cette proportion est de 58,8% (les calculs avec 4 neutrons et 4 protons de valence n'ont pas été effectués pour cet ensemble) ; en TBRE,

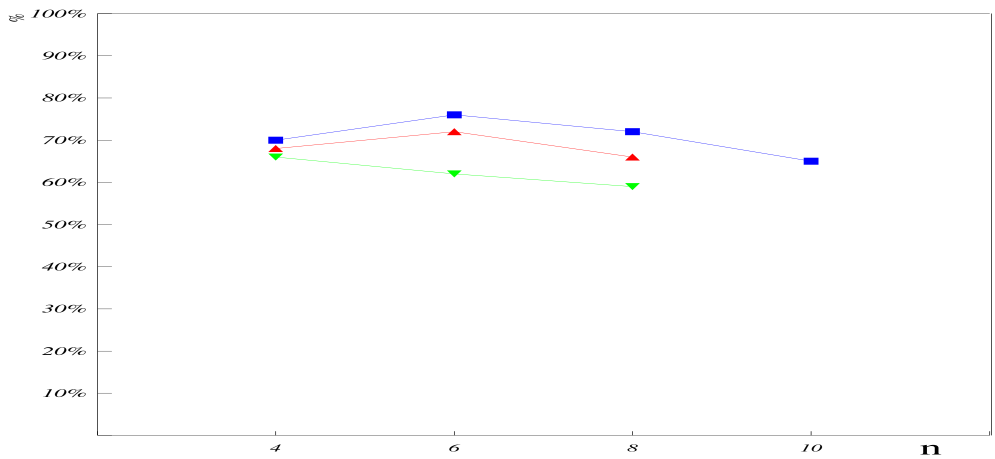


FIG. 3.1 – Les pourcentages de 0^+ comme état fondamental (d'après [Joh98, Joh99]) en fonction du nombre de neutrons de valence : la courbe avec des carrés correspond aux proportion obtenues pour des isotopes de Ca (couche *pf*) , celle avec des triangles correspond aux proportions obtenues pour des isotopes d'O (couche *sd*) et la courbe avec des triangles inversés donne les proportions pour des isotopes de Mg (couche *sd* avec des protons et neutrons de valence).

le pourcentage est de 51,8% et en RQE-SPE, il atteint 64,4%. Sur la figure 3.1, sont représentés en détail les pourcentages obtenus par Johnson et collaborateurs en RQE pour les différents espaces de valence :

– La ligne avec des carrés donne les pourcentages de spectres dont le fondamental est un 0^+ pour les isotopes de Ca en fonction du nombre de neutrons de valence sur la couche *pf*.
– La ligne avec des triangles représente ces pourcentages pour les isotopes d'oxygène qui correspondent à des systèmes avec des neutrons de valence sur une couche *sd*.
– Enfin le trait avec des triangles inversés donne le pourcentage pour les isotopes de Mg, ce qui correspond à 4 protons de valences sur une couche *sd* et un nombre variable de neutrons de valence également sur une couche *sd*.

Ce pourcentage est donc anormalement élevé et cette tendance ne dépend pas énormément de l'ensemble statistique considéré, ni de l'espace de valence.

De plus les spectres dont l'état de plus basse énergie est de moment angulaire nul présentent des régularités surprenantes que l'on ne retrouve pas dans les autres spectres. Il apparaît en effet que les spectres dont le fondamental est un 0^+ présentent une grande différence entre le fondamental et le premier niveau excité par rapport à l'écart moyen entre deux niveaux successifs. Un tel gap n'existe pas lorsque le fondamental a un moment angulaire non nul. Ainsi sur l'ensemble spectres déterminés pour les isotopes de Ca et d'O, en RQE, ce gap est en moyenne plus 3,23 fois plus grand que l'écart moyen entre le premier excité et le deuxième excité, en RQE-NP, il est 2,8 fois plus grand, en TBRE 2,75 fois plus grand et en RQE-SPE il est 3,38 fois plus grand. Sur la figure 3.2, je donne à titre d'exemple deux spectres typiques obtenus par Jonhson et collaborateurs pour 6 neutrons sur la couche *sd* : celui de gauche est un spectre dont le fondamental est un 0^+ et celui de droite son fondamental n'est pas un 0^+ (ici il s'agit d'un 2^+). On voit très nettement le gap entre le fondamental et le premier niveau excité.

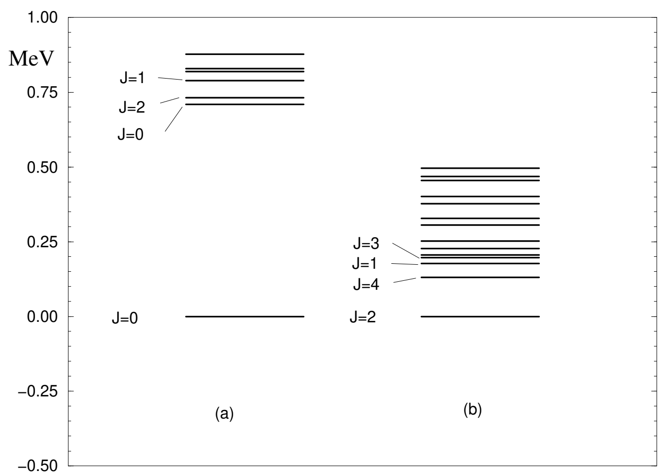


FIG. 3.2 – La colonne (a) représente un spectre typique [Joh99] lorsque le fondamental est de moment angulaire nul et la colonne (b) un spectre typique lorsque le fondamental a un moment angulaire non nul.

Le long d'une chaîne isotopique, la probabilité d'obtenir des spectres pour tous les noyaux pairs-pairs avec un moment angulaire nul est plus élevée que le produit des probabilités d'avoir chacun des noyaux dont le fondamental a un moment angulaire nul, ce qui correspondrait à la probabilité si ces évènements étaient indépendants. De plus on passe pratiquement de l'état fondamental du noyau à A nucléon au fondamental du noyau à A-2 nucléons en retirant une paire couplée à zéro. Il apparaît donc un schéma de séniorité généralisée avec un hamiltonien aléatoire.

Enfin on retrouve une oscillation de l'énergie de liaison entre systèmes pairs-pairs et systèmes impairs-impairs même lorsque l'interaction est aléatoire ce qui a été confirmé par une étude plus récente [Pap02].

Néanmoins on ne détecte pas de phénomènes collectifs dans les spectres, contrairement à ce qui est observé en IBM (cf infra).

Ces résultats ont été confirmés par d'autres travaux [Mul00, Hor01] qui font cependant apparaître des différences entre les interactions réalistes et aléatoires :

1. Tout d'abord les auteurs montrent que le recouvrement entre les fonctions d'onde obtenues avec les interactions aléatoires et celles obtenues avec les interactions réalistes est en moyenne assez faible. Ce recouvrement demeure cependant supérieur à celui qui serait obtenu pour une situation purement aléatoire.
2. Ensuite l'entropie calculée à partir des recouvrements est plus faible pour les fonctions d'onde obtenus à partir des interactions réalistes que celle trouvée pour les interactions aléatoires.
3. Enfin la valeur du B(E2) est beaucoup plus faible pour des interactions aléatoires que pour les interactions réalistes.

3.3.2 Le cas des bosons

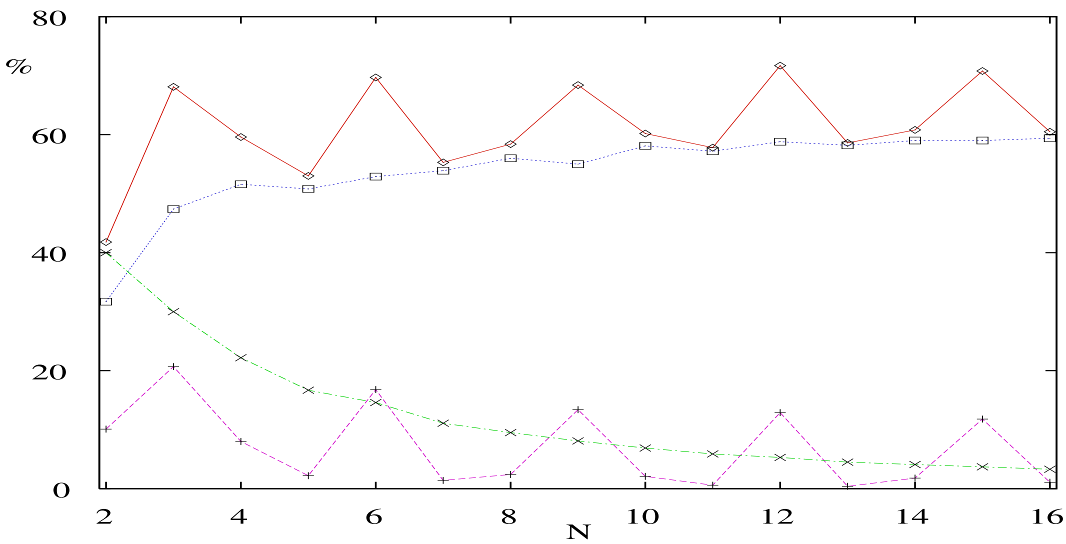


FIG. 3.3 – En traits pleins avec des $\diamond$: le pourcentage de 0^+ comme état fondamental en fonction du nombre de bosons, N. En tirets-pointillés avec des $\times$: la proportion d'états de moment angulaire nul dans l'espace complet. En pointillés avec des $\square$: le pourcentage de spectre dont le fondamental est de moment angulaire nul et dont le rapport $[E(4_1^+) - E(0_1^+)]/[E(2_1^+) - E(0_1^+)]$ est supérieur à 1 . En tirets avec des $+$: le pourcentage de ceux pour lesquels ce rapport est compris entre 0 et 1 [Bij00b].

Après les observations faites pour des systèmes fermioniques, des études similaires ont été menées pour des systèmes de bosons en IBM [Bij00a, Bij00b, Bij01] et en "vibron modèle" [Bij02].

En IBM, on constate tout d'abord que pour 1000 spectres, les états 0^+ sont majoritairement les niveaux de plus basse énergie même s'ils ne sont pas les états les plus nombreux dans l'espace vectoriel (cf figure 3.3). Sur cette figure, le trait continu représente le pourcentage d'états fondamentaux qui ont un moment angulaire nul. Le trait en tirets donne le pourcentage de ces états dans l'espace considéré. En pointillé est indiqué le pourcentage de spectre dont le fondamental est de moment angulaire nul et dont le rapport $[E(4_1^+) - E(0_1^+)]/[E(2_1^+) - E(0_1^+)]$ est supérieur à 1 et en tiret-pointillé, on donne le pourcentage de ceux pour lesquels ce rapport est compris entre 0 et 1.

Le pourcentage de spectre de moment angulaire nul fluctue autour de 60% et atteint des valeurs plus élevées pour les nombres de bosons qui sont des multiples de 3, phénomène qui est interprété comme résultant d'un couplage au moment angulaire nul de triplets de bosons d. La proportion d'états 0^+ dans tout l'espace n'est jamais supérieure à 20% pour des systèmes ayant plus de 4 bosons.

Les calculs montrent également que le pourcentage de spectres dont le fondamental a un moment angulaire maximal est relativement élevé : ainsi pour un système de 16 bosons, 18,6% des spectres ont un fondamental de moment angulaire égal à 32 alors qu'il n'y a qu'un seul niveau de ce type (ce n'est donc pas la répulsion de niveaux qui est responsable de ce phénomène). On peut aussi voir que certains moments angulaires ne sont jamais fondamentaux.

Outre le fait que la majorité des spectres a un fondamental de moment angulaire nul, ces spectres peuvent être classé pratiquement en deux catégories (cf la figure 3.4) :

– les spectres vibrationnels pour lesquels le rapport $[E(4_1^+) - E(0_1^+)]/[E(2_1^+) - E(0_1^+)]$ est proche de 2,
– et les spectres quasi-rotationnels pour lesquels ce rapport est proche de 10/3.

Ce caractère collectif des spectres va en s'amplifiant lorsque le nombre de bosons augmente. Même lorsque l'on ajoute des termes à un- et trois-corps, on retrouve les mêmes tendances. Ces deux types de spectres correspondent à des classifications selon des chaînes associées respectivement aux sous-algèbres $U(5)$ et $SU(3)$. On constate l'absence de spectres dont les propriétés seraient proches de celle de l'algèbre dynamique $SO(6)$.

Finalement, comme en modèle en couches, des propriétés qui ont été jusqu'à présent attribuées à un choix particulier d'interactions telles que l'appariement attractif ou une force quadripolaire, peuvent être obtenues même en choisissant aléatoirement les paramètres de l'hamiltonien.

Même si un certain nombre de travaux ont été menés pour expliquer ces résultats, voir par exemple [Kap00] où les auteurs proposent une interprétation en termes de largeurs des distributions, voir aussi les travaux de Zhao et collaborateurs [Zha01] qui proposent des méthodes phénoménologiques pour déterminer les pourcentages, la compréhension actuelle de ces phénomènes demeure très incomplète. Dans la partie suivante, je présente une méthode géométrique qui met en évidence le rôle intrinsèque que jouent l'espace et le couplage des moments angulaires. Cette méthode permet de prédire les pourcentages et de savoir *a priori* quels sont les niveaux succeptibles d'être l'état fondamental. Cela montre ainsi que de nombreuses propriétés sont dictées par la

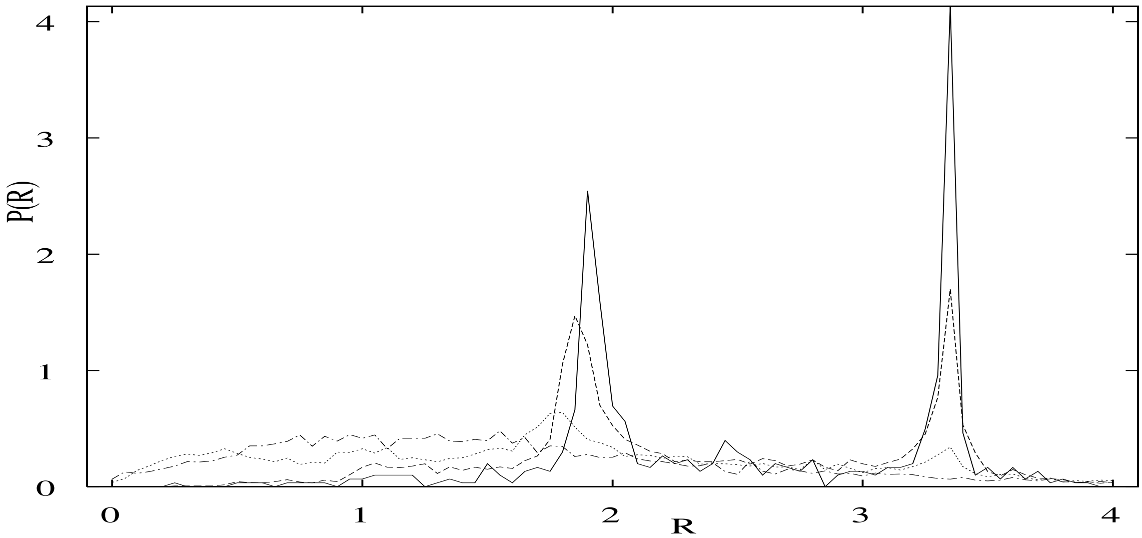


FIG. 3.4 – Distribution du rapport $[E(4_1^+) - E(0_1^+)]/[E(2_1^+) - E(0_1^+)]$ pour les spectres dont le fondamental est de moment angulaire nul pour différents nombres de bosons : en traits pleins, N=16, en tirets, N=10, en pointillés, N=6 et en tirets-pointillés, N=3 [Bij00b].

géométrie du système.

3.4 Cas diagonal : une approche géométrique du problème

Par cas diagonal on entend cas pour lequel les énergies du système sont des combinaisons linéaires des paramètres de l'hamiltonien. Dans ce cas, nous avons intégralement résolu le problème c'est à dire que nous savons d'une part comment trouver les niveaux qui pourront être fondamentaux et d'autre part nous pouvons prédire quels seront les pourcentages et ceci uniquement à partir des expressions des énergies. Dans une première sous-partie, la méthode générale est explicitée puis dans la seconde sous-partie elle est appliquée à deux systèmes particuliers : les bosons d et des fermions placés sur la couche $j = 7/2$. Dans une troisième sous-partie, les résultats que nous avons obtenus pour un ensemble discret de niveaux sont étendus à un ensemble continu de niveaux.

3.4.1 Méthode générale

On suppose que le système est décrit à l'aide de P paramètres aléatoires notés G_j. Ces paramètres ont des distributions identiques et sont indépendants. Ils sont dans un espace vectoriel, noté $\mathcal{E}$, isomorphe à $\mathbb{R}^P$. Considérons N niveaux, E_i, fonctions linéaires des G_j :

$$E_i(G_1, \cdots, G_P) = \sum_{j=1}^{P} \alpha_{ij} G_j \,. \tag{3.1}$$

Ce sont donc des formes linéaires agissant sur l'espace vectoriel engendré par les G_k. Les α_{ij} sont les coordonnées des E_i dans l'espace vectoriel dual (voir par exemple [Del00]), noté $\mathcal{E}^\star$, engendré par les formes linéaires $G_i^\star$ définies par :

$$G_i^\star(G_1, \cdots, G_P) = G_i \,.$$

L'espace vectoriel $\mathcal{E}^\star$ est de dimension P. En général, les coefficients α_{ij} sont connus (calculables à partir des coefficients de recouplage [Van02]), positifs et vérifient $\sum_j \alpha_{ij} = 1$ quelque soit i. Ainsi on obtient

$$\left[E_i - G_1^\star\right](G_1, \cdots, G_P) = \sum_{j=2}^{P} \alpha_{ij}(G_j - G_1) \,. \tag{3.2}$$

On peut donc se ramener dans un sous-espace de $\mathcal{E}^\star$ de dimension $P-1$ dont une base est générée par les $G_j^\star - G_1^\star$, j variant de 2 à P.

Notons que cette base n'est plus orthonormée mais oblique. Par exemple pour $P = 3$, on se place dans un espace de dimension 2 dont une base est formée par les vecteurs $G_2^\star - G_1^\star$ et $G_3^\star - G_1^\star$. Ces deux vecteurs font un angle $\pi/3$ entre eux. Dans le cas où $P = 4$, on utilisera un espace vectoriel de dimension 3 dont les vecteurs font aussi des angles $\pi/3$ entre eux.

Les coordonnées des formes linéaires $E_i - G_1^\star$ dans la base $\left\{G_j^\star - G_1^\star\right\}_{j\geq 2}$ sont les α_{ij}, j étant supérieur ou égal à 2. On peut donc voir ces formes linéaire $E_i - G_1^\star$ comme des points dont les coordonnées sont les α_{ij}, $j \geq 2$ [Cha02a]. Dorénavant on désignera $E_i - G_1^\star$ par E_i.

Détermination des niveaux pouvant être le fondamental

On cherche à éliminer les niveaux E_i pour lesquels il n'existe pas de G_k tels que

$$E_i(G_1, \cdots, G_P) \leq E_j(G_1, \cdots, G_P) \,, \forall j \neq i \,.$$

Supposons qu'une forme linéaire E_i peut s'écrire comme le barycentre d'autres formes linéaires E_k avec des poids β_k *positifs dont la somme vaut 1* :

$$E_i = \sum_{k=1}^{K} \beta_k E_k \text{ avec } \beta_k \geq 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{K} \beta_k = 1 \,. \tag{3.3}$$

On peut alors affirmer que *le niveau indicé par i ne sera jamais de plus basse énergie.*

En effet il y aura toujours une différence $E_{k_0} - E_i$ qui sera de signe opposé à celui des autres différences $E_k - E_i$, $k \neq k_0$. Si on ajoute et soustrait E_i dans le membre de droite de (3.3), on obtient :

$$E_i = \sum_{k=1}^{K} \beta_k (E_k - E_i + E_i) \,.$$

Donc

$$E_i = \sum_{k=1}^{K} \beta_k (E_k - E_i) + \sum_{k=1}^{K} \beta_k E_i \,.$$

Or $\sum_k^K \beta_k$ vaut 1, par conséquent :

$$\sum_{k=1}^{K} \beta_k (E_k - E_i) = 0 \,.$$

Donc si les différences $(E_k - E_i)$ sont négatives pour $k \neq k_0$ alors $(E_{k_0} - E_i)$ est positive puisque

$$\beta_{k_0}(E_{k_0} - E_i) = - \sum_{k \neq k_0}^{K} \beta_k (E_k - E_i) \tag{3.4}$$

et que les β_k sont tous positifs. Ceci montre que le niveau i ne peut être un niveau fondamental.

La première étape va donc consister à éliminer tous les niveaux qui vérifient une relation du type (3.3). Pour cela, rappellons sa signification géométrie : un tel barycentre de deux points A et B est un point du segment $[AB]$, pour trois points A,B et C, c'est un point à l'intérieur du triangle ABC, pour quatre points A, B, C et D, c'est un point dans le tetraèdre ABCD...On va donc chercher les niveaux qui sont à l'intérieur d'un polytope (ie un triangle en dimension 2, un tétraèdre en dimension 3...) dont les sommets sont parmi les formes linéaires E_i (qui sont des points dans un espace vectoriel de dimension $P-1$). Ces niveaux seront éliminés.

La procédure d'élimination est la suivante :

1. On choisit un niveau. Par exemple supposons que l'on souhaite savoir si E_{i_0} peut être fondamental.
2. Ensuite nous construisons tous les hyper-volumes (ou polytopes) formés par P autres niveaux. Si E_{i_0} est dans l'un de ces hyper-volumes alors il ne sera jamais fondamental. Techniquement la construction des hyper-volumes se fait de la façon suivante :
   (a) Choix de P niveaux distincts de E_{i_0} : ce sont les sommets de l'hyper-volume. Ils sont notés $S_1, S_2, \cdots, S_P$.

(b) À partir de $P-1$ sommets, on construit un hyper-plan limitant l'hyper-volume et on compare la position de E_{i_0} par rapport au sommet restant.
Une équation de l'hyper-plan $\mathcal{H}_1^P$ caractérisé par les $P-1$ vecteurs $(\overrightarrow{S_PS_2}\cdots\overrightarrow{S_PS_{P-1}})$ et le sommet S_P est

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{S_PM} & \overrightarrow{S_PS_2} & \cdots & \overrightarrow{S_PS_{P-1}} \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix} = 0\,.$$

Cet hyper-plan découpe l'espace en deux domaines et S_1 est uniquement dans l'un des deux. E_{i_0} et S_1 sont du même coté si :

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{S_PS_1} & \overrightarrow{S_PS_2} & \cdots & \overrightarrow{S_PS_{P-1}} \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \overrightarrow{S_PE_{i_0}} & \overrightarrow{S_PS_2} & \cdots & \overrightarrow{S_PS_{P-1}} \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix} = \sigma(1) \geq 0 \quad .$$

On construit ainsi les $P-1$ hyper-plans, $\mathcal{H}_k^P$, contenant S_P :

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{S_PS_1} & \cdots & \overrightarrow{S_PM} & \cdots & \overrightarrow{S_PS_{P-1}} \\ & & & & \\ & & & & \end{vmatrix} = 0\,,$$

où le vecteur $\overrightarrow{S_PM}$ occupe le colonne k. On calcule les nombres :

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{S_PS_1} & \overrightarrow{S_PS_2} & \cdots & \overrightarrow{S_PS_{P-1}} \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \overrightarrow{S_PS_1} & \cdots & \overrightarrow{S_PE_{i_0}} & \cdots & \overrightarrow{S_PS_{P-1}} \\ & & & & \\ & & & & \end{vmatrix} = \sigma(k) \quad .$$

On détermine un dernier nombre :

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{S_1S_2} & \overrightarrow{S_1S_3} & \cdots & \overrightarrow{S_1S_{P-1}} \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \overrightarrow{S_1E_{i_0}} & \overrightarrow{S_1S_3} & \cdots & \overrightarrow{S_1S_{P-1}} \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix} = \sigma(P) \quad .$$

(c) Si les P nombres $\sigma(k)$ sont positifs alors le niveau E_{i_0} est à l'intérieur de l'hyper-volume et on peut arrêter la procédure sinon on choisit de nouveaux sommets. Si finalement aucun hyper-volume ne contient le niveau E_{i_0}, cela signifie qu'il peut être fondamental

3. On revient à l'étape 1 jusqu'à ce que tous les niveaux aient été examinés.

On obtient à la fin de cette procédure un ensemble de niveaux formant un hyper-polyèdre convexe : c'est l'hyper-polyèdre convexe maximal contenant tous les niveaux.

Calcul des pourcentages

Supposons maintenant que nous ayons construit cet hyper-polyèdre convexe que l'on note $\mathcal{P}$. La seconde étape est la détermination du pourcentage d'être le niveau de plus faible énergie pour chaque sommet. Pour des variables gaussiennes, quand on intègre, on peut séparer la partie angulaire de la partie radiale : la sommation sur la partie radiale donne 1 et le pourcentage est donné par l'angle extérieur [Grü67] associé au sommet considéré, S. Cet angle extérieur est l'"hyper-angle au solide" de l'hyper-cône, $\mathcal{C}$, dont les faces sont orthogonales aux côtés de $\mathcal{P}$ passant par S. Pour connaître le pourcentage il suffit donc de construire cet hyper-cône, ce qui peut être fait de la façon suivante :

1. On connaît les faces externes à $\mathcal{P}$ contenant S. Chacune d'elles est définie par $P-2$ vecteurs. Le produit vectoriel de ces vecteurs est le vecteur normal à la face considérée. Ce vecteur est un côté de $\mathcal{C}$. On construit ainsi tous les côtés de l'hyper-cône.
2. À partir de ces côtés, on peut trouver les faces externes de $\mathcal{C}$.
3. L'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'hyper-sphère unité donne l'angle extérieur qui, normalisé à la surface totale de l'hyper-sphère de dimension $P-1$, est le pourcentage du sommet S d'être le niveau fondamental.

3.4.2 Application aux bosons d

Lorsque l'on considère un système de bosons d interagissant via une force à 2-corps conservant le moment angulaire, les états propres de l'hamiltonien peuvent être indicés à l'aide des nombres quantiques $N\nu L$ de la chaîne $U(5) \supset SO(5) \supset SO(3)$ et les énergies sont des combinaisons linéaires de $G_0 \equiv \langle d^2L = 0 \mid \hat{H} \mid d^2L = 0\rangle$, $G_2 \equiv \langle d^2L = 2 \mid \hat{H} \mid d^2L = 2\rangle$ et $G_4 \equiv \langle d^2L = 4 \mid \hat{H} \mid d^2L = 4\rangle$ (cf [Bri65, Ari76]) :

$$
\begin{aligned}
E_{N\nu L} &= G_4 + \frac{N(N+3)-\nu(\nu+3)}{5N(N-1)}(G_0 - G_4) \\
&+ \frac{2N(N-2)+2\nu(\nu+3)-L(L+1)}{7N(N-1)}(G_2 - G_4)\,.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

En réalité ces énergies ont été renormalisées afin d'avoir une somme des coefficients égale à 1. Cette renormalisation ne fait intervenir que le nombre quantique N donc n'a pas d'influence puisque c'est le nombre de bosons du système. On peut alors effectuer la différence $E_{N\nu L} - G_4$ que l'on interprète comme un vecteur dans le repère $(G_4, \overrightarrow{G_4G_0}, \overrightarrow{G_4G_2})$ dont les coordonnées sont respectivement $(N(N+3)-\nu(\nu+3))/(5N(N-1))$ et $(2N(N-2)+2\nu(\nu+3)-L(L+1))/(7N(N-1))$. Comme on l'a vu dans la section précédente ce repère est oblique, les deux vecteurs de base faisant un angle de $\pi/3$.

Par exemple, prenons un système de 5 bosons d. Il compte 12 niveaux. Plaçons-les dans le triangle équilatéral formé par G_0, G_2 et G_4 : ce sont les points de la figure 3.5. Nous pouvons maintenant tracer le plus grand polygone convexe les contenant : il s'agit du quadrilatère en traits épais gris. Les niveaux qui correspondent aux points intérieurs ne pourront pas avoir la plus basse énergie, seuls les sommets associés aux moments angulaires 10, 2 et 0 sont des candidats possibles (deux des sommets ont un moment angulaire égal à 2).

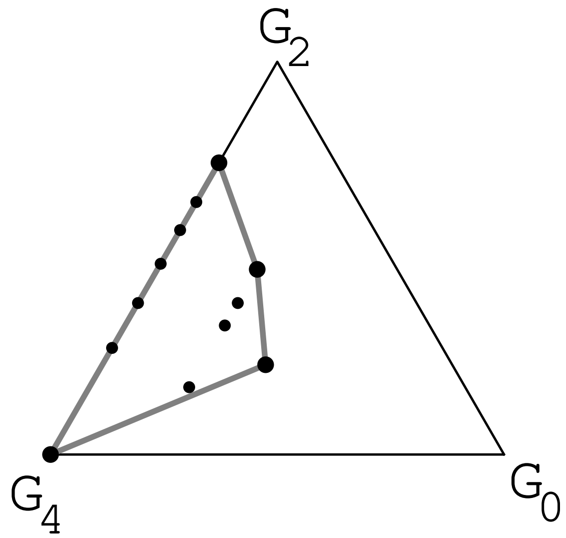


FIG. 3.5 – La figure géométrique pour un systèmes de 5 bosons : les niveaux associés aux points les plus petits ne seront pas fondamentaux, seuls ceux associés aux sommets du quadrilatère sont succeptibles d'avoir l'énergie la plus basse.

Le pourcentage est donné par l'angle extérieur de chaque sommet divisé par 2π :

$$p(\theta) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) , \tag{3.6}$$

où θ est l'angle entre les deux cotés associés au sommet considéré.

On peut voir cela de façon un peu plus empirique puisque si le polygone obtenu avait été régulier alors tous les sommets auraient été équivalents et auraient eu la même probabilitité d'être le fondamental. Les pourcentages pour de tels polygones sont donnés dans le tableau 3.1 colonne (a). Nous retrouvons ainsi la loi de probabilité donnée en (3.6).

Nous avons utilisé cette formule pour différents systèmes de bosons. Les résultats sont résumés dans le tableau 3.2. Nous l'avons testée numériquement pour une distribution gaussienne (colonne (b)) et une distribution uniforme (colonne (c)) en tirant

Polygone régulier	Nbre de sommets	Angle θ	%
Triangle	3	$\pi/3$	1/3
Carré	4	$\pi/2$	1/4
Pentagone	5	$3\pi/5$	1/5
Hexagone	6	$2\pi/3$	1/6
...			...
Polygone	n	$(n-2)\pi/n$	$1/n$

TAB. 3.1 – Pourcentages pour des polygones réguliers.

aléatoirement 20000 triplets (G_0, G_2, G_4). On constate un bon accord entre les résultats numériques et analytiques, en particulier pour les pourcentages très faibles (comme c'est le cas pour le niveau indicé par les nombres quantiques $N = 10$, $\nu = 6$ et $L = 0$). Notons enfin que les niveaux qui ne figurent pas dans le tableau sont ceux que nous avions prédit comme ne pouvant pas être des niveaux de plus basse énergie, ce qui est vérifié numériquement.

3.4.3 Application aux fermions

Quatre fermions sur la couche $j = 7/2$

Pour quatre fermions placés sur la couche $j = 7/2$, les coefficients de couplage entre moments angulaires [Bru77] permettent de déterminer analytiquement les énergies en fonction des 4 éléments de matrice à 2-corps, $G_0 = \langle (7/2)^2 J = 0 \mid \hat{H} \mid (7/2)^2 J = 0 \rangle$, $G_2 = \langle (7/2)^2 J = 2 \mid \hat{H} \mid (7/2)^2 J = 2 \rangle$, $G_4 = \langle (7/2)^2 J = 4 \mid \hat{H} \mid (7/2)^2 J = 4 \rangle$ et $G_6 = \langle (7/2)^2 J = 6 \mid \hat{H} \mid (7/2)^2 J = 6 \rangle$. Ce système compte 8 niveaux, $E_{J(\nu)}$, repérés par leur moment angulaire J et leur séniorité ν :

$$
\begin{aligned}
E_{0(0)} &= \frac{3}{2}G_0 + \frac{5}{6}G_2 + \frac{3}{2}G_4 + \frac{13}{6}G_6 \quad ; E_{2(2)} &&= \frac{1}{2}G_0 + \frac{11}{6}G_2 + \frac{3}{2}G_4 + \frac{13}{6}G_6 \\
E_{2(4)} &= G_2 + \frac{42}{11}G_4 + \frac{13}{11}G_6 \quad ; E_{4(2)} &&= \frac{1}{2}G_0 + \frac{5}{6}G_2 + \frac{5}{2}G_4 + \frac{13}{6}G_6 \\
E_{4(4)} &= \frac{7}{3}G_2 + G_4 + \frac{8}{3}G_6 \quad ; E_{5(4)} &&= \frac{8}{7}G_2 + \frac{192}{77}G_4 + \frac{26}{11}G_6 \\
E_{6(2)} &= \frac{1}{2}G_0 + \frac{5}{6}G_2 + \frac{3}{2}G_4 + \frac{19}{6}G_6 \quad ; E_{8(4)} &&= \frac{10}{21}G_2 + \frac{129}{77}G_4 + \frac{127}{33}G_6 \,.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Nous avons déterminé tout d'abord les niveaux qui sont dans le fondamental suivant la procédure présentée plus haut : ainsi le niveau de moment angulaire 4 et de séniorité

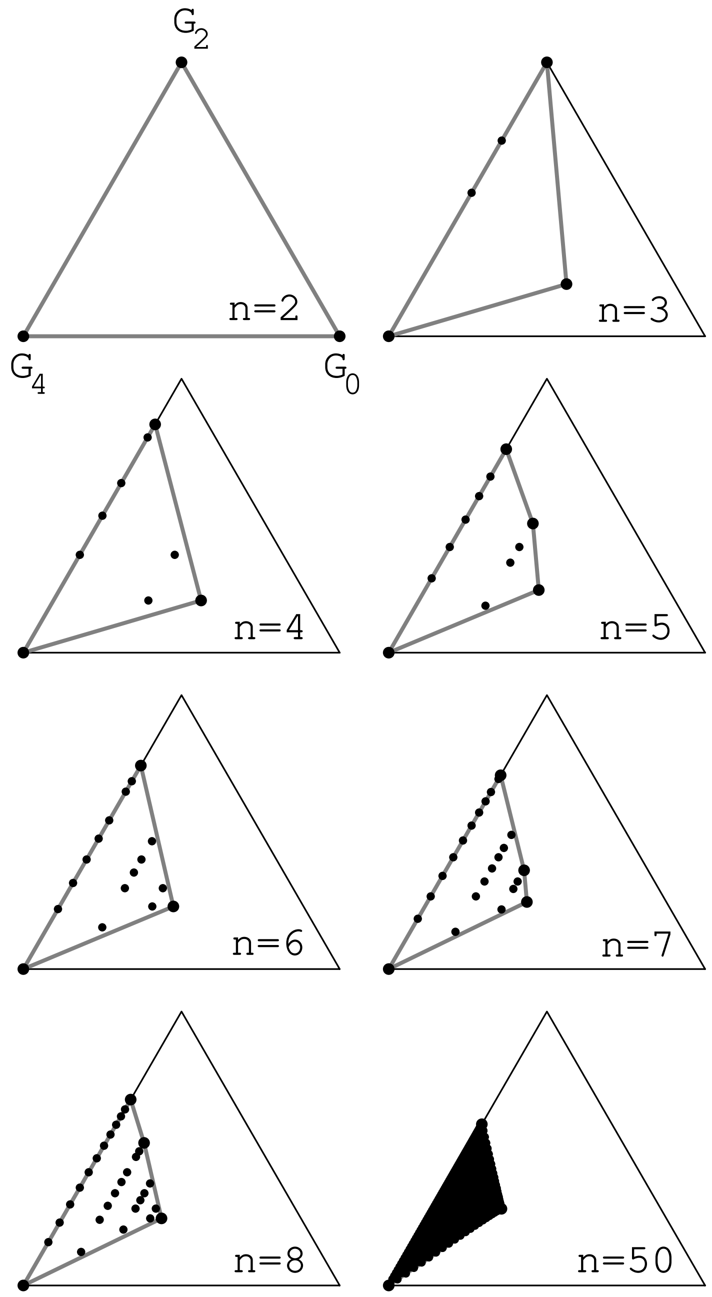


FIG. 3.6 – Polygones associés à différents systèmes de bosons d en interaction. Les niveaux sont représentés par des points. Les gros points représentent les sommets tandis que les points plus petits des niveaux sur le bord ou à l'intérieur du polygone. Les cotés sont tracés en gris. La probabilité est proportionnelle à l'angle pour chacun des sommets.

N	ν	J	(a)	(b)	(c)
4	0	0	25.49878%	25.410%	24.250%
	4	2	36.62329%	36.975%	37.030%
	4	8	37.87792%	37.615%	38.720%
5	3	0	4.077811%	3.960%	3.975%
	1	2	20.108965%	19.960%	19.130%
	5	2	36.187180%	36.590%	36.575%
	5	10	39.626043%	39.490%	40.320%
6	0	0	22.319481%	22.135%	21.355%
	6	0	38.054476%	38.375%	38.325%
	6	12	39.626043%	39.490%	40.320%
10	0	0	20.869662%	20.770%	20.150%
	6	0	0.498152%	0.410%	0.535%
	10	0	37.556347%	37.965%	37.790%
	10	10	41.075839%	40.855%	41.525%
18	0	0	19.889835%	19.875%	19.295%
	18	0	37.556347%	38.375%	38.325%
	18	36	42.055696%	41.750%	42.380%

TAB. 3.2 – Pourcentages pour des systèmes de N bosons d. La colonne (a) correspond aux résultats obtenus à partir de la formule 3.6, la colonne (b) et (c) donnent respectivement les résultats obtenus numériquement en tirant aléatoirement les paramètres de l'hamiltonien suivant des lois gaussiennes et uniformes.

2 et celui de moment angulaire 5 et de séniorité 4 ne seront jamais dans le fondamental puisqu'ils sont à l'intérieur du polyèdre le plus grand constitué par l'ensemble des énergies (cf figure 3.7).

Dans l'exposé de la méthode, nous avons dit que, pour des variables gaussiennes, la probabilité était égale à l'angle extérieur associé au sommet considéré. C'est donc l'angle au solide du cône polyèdral que l'on avait noté $\mathcal{C}$ divisé par 4π. Or on sait que l'angle au solide d'un cône polyèdral est égal à la somme des angles entre les plans formant ce cône moins π [Lax46, page 20]. Pour le cône $\mathcal{C}$, les angles entre les faces valent π moins les angles entre côtés du polyèdre "initial" $\mathcal{P}$ puisque justement les faces de $\mathcal{C}$ sont orthogonales aux côtés de $\mathcal{P}$. La probabilité est donc donnée par

$$p = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sum_i \theta_i}{2\pi}\right) , \tag{3.8}$$

où les θ_i sont les angles entre les côtés passant par le sommet considéré.

On peut déduire cette loi par un raisonnemment plus empirique en considérant des polyèdres réguliers (cf tableau (3.3)), loi qui peut ensuite être extrapolée aux polyèdres quelconques.

Polyèdre régulier	Nbre de sommets	$\sum_i \theta_i$	%
Tetraèdre	4	$1/3\pi$	1/4
Octaèdre	6	$4/3\pi$	1/6
Cube	8	$3/2\pi$	1/8
Cuboctaèdre	12	$5/3\pi$	1/12
Octaèdre tronqué	24	$11/6\pi$	1/24
Cube tronqué	24	$11/6\pi$	1/24
Rhumbicuboctaèdre	24	$11/6\pi$	1/24
Cuboctaèdre tronqué	48	$23/12\pi$	1/48
Icosaèdre	12	$5/3\pi$	1/12
Dodecaèdre	20	$9/5\pi$	1/20
Icosidodecaédre	30	$28/15\pi$	1/30
Icosaèdre tronqué	60	$29/15\pi$	1/60
Dodecaèdre tronqué	60	$29/15\pi$	1/60

TAB. 3.3 – Pourcentage pour des polyèdres réguliers.

Nous avons appliqué ce résultat au cas des fermions et nous avons réalisé un test numérique pour une distribution gaussienne avec 20000 tirages. Les résultats sont rassemblés dans le tableau (3.4) où nous comparons également nos pourcentages avec ceux proposés par Zhao et Arima ([Zha01]) qui ont effectué un calcul d'intégrales multiples en huit dimensions. Dans la colonne (a), nous avons mis les résultats analytiques déduits de (3.8), dans la colonne (b), les résultats numériques, le code ne distinguant pas les états de moment angulaire identique mais de séniorités différentes, le pourcentage obtenu correspond à la somme sur la séniorité. Dans les colonnes (c) et (d), il y a respectivement les résultats numériques et analytiques proposés par Zhao et Arima. Nous constatons un accord global entre leurs pourcentages et les nôtres même si les leurs sont toujours inférieurs à nos résultats. Notons cependant que la somme de leurs pourcentages est inférieure à 1 : 99,46%. Remarquons enfin que les niveaux 4(2) et 5(4) pour lequels nous avons *prédit* un pourcentage nul sont effectivement absents du fondamental aussi bien dans les tests numériques et par le calcul des intégrales gaussiennes.

Trois fermions sur la couche $j = 7/2$

Comme précédemment, les 6 énergies d'un système de trois fermions sur une couche $j = 7/2$ peuvent être repérés à l'aide du moment angulaire et de la séniorité et on peut les calculer analytiquement à partir des coefficients de couplage entre moments

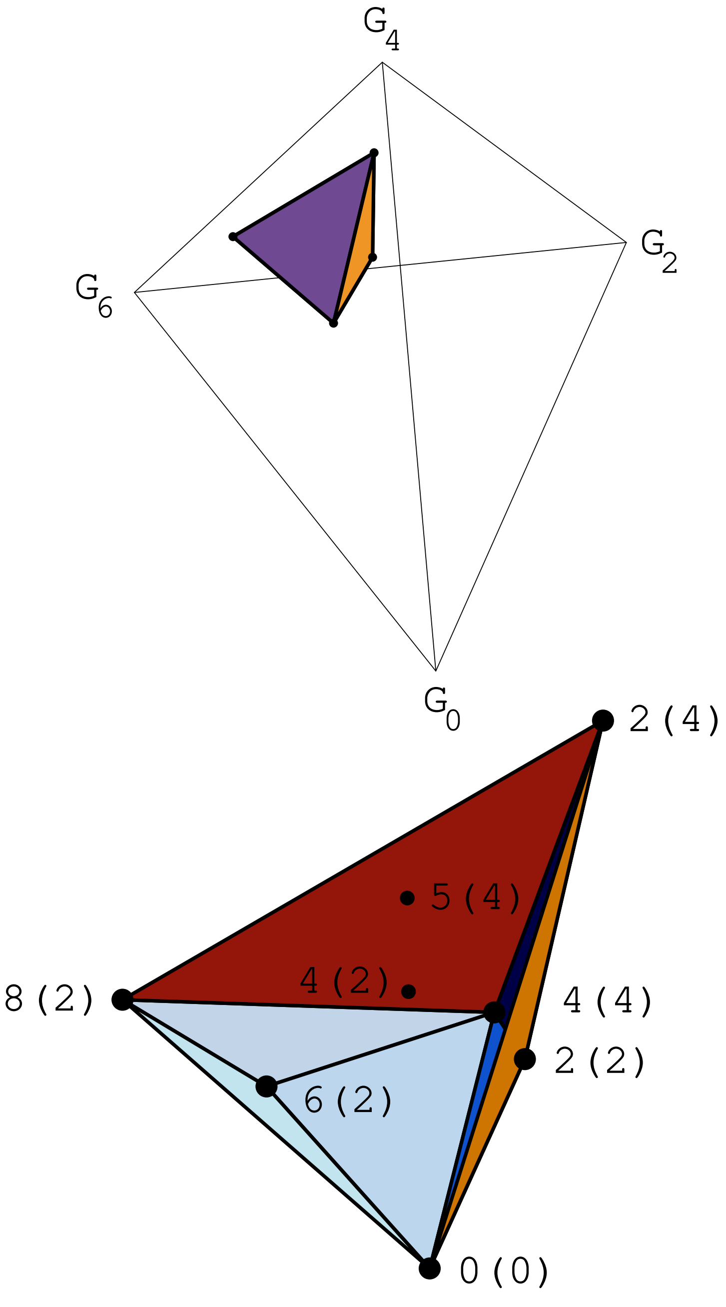


Fig. 3.7 – Polyèdre pour un système de 4 fermions sur une couche $j = 7/2$. La figure du haut représente la position de ce polyèdre dans le tétraèdre de base. Sur la figure du bas sont indiqués à l'aide des gros points les états $J(\nu)$ qui seront dans le fondamental. Les deux états $J(\nu) = 4(2)$ et $5(4)$ se situent dans ce polyèdre et ne seront jamais fondamentaux.

$J(\nu)$	(a)	(b)	(c)	(d)
0(0)	18.33%	18.38%	19.9%	18.19%
2(2)	1.06%	-	1.2%	0.89%
2(4)	33.22%	-	31.7%	33.25%
2(2) & 2(4)	34.26%	34.88%	32.9%	34.14%
4(2)	0.00%	-	0.00%	0.00%
4(4)	23.17%	-	25.0%	22.96%
4(2) & 4(4)	23.17%	22.83%	25.00%	22.96%
5(4)	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
6(2)	0.05%	0.07%	0.00%	0.02%
8(2)	24.16%	23.83%	22.2%	24.15%
Somme	99.99%	99.99%	100.0%	99,46%

TAB. 3.4 – Pourcentage analytique (a) et numérique (b) pour un état de moment angulaire J d'être le fondamental pour un système de 4 fermions sur une couche $j = 7/2$. Les deux dernières colonnes contiennent les résultats publiés par Zhao et Arima dans [Zha01].

angulaires individuels :

$$\begin{aligned}
E_{3/2(3)} &= \frac{3}{14}G_2 + \frac{11}{14}G_4 &;\ E_{5/2(3)} &= \frac{11}{18}G_2 + \frac{2}{33}G_4 + \frac{65}{198}G_6 \\
E_{7/2(1)} &= \frac{1}{4}G_0 + \frac{5}{36}G_2 + \frac{1}{4}G_4 + \frac{13}{36}G_6 &;\ E_{9/2(3)} &= \frac{13}{126}G_2 + \frac{50}{77}G_4 + \frac{49}{198}G_6 \\
E_{11/2(3)} &= \frac{5}{18}G_2 + \frac{13}{66}G_4 + \frac{52}{99}G_6 &;\ E_{15(3)} &= \frac{5}{22}G_2 + \frac{17}{22}G_4 + \frac{26}{11}G_6\,.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

On construit alors le polyèdre à partir de ces expressions (cf figure 3.8). Aucun des niveaux n'est à l'intérieur par conséquent pour chaque niveau, il existe des paramètres pour lesquels il est le plus petit. Le calcul des angles des faces du polyèdre donne les pourcentages. Nous avons comparé ces pourcentages avec une simulation numérique réalisée en tirant 50000 jeux de paramètres (G_0, G_2, G_4, G_6) suivant des lois gaussiennes centrées indépendantes. Comme on peut le constater dans le tableau 3.5, les prédictions sont en bon accord avec le test numérique.

À travers ces trois exemples, nous avons montré l'existence d'une géométrie imposée à la fois par la nature à deux-corps de l'interaction, la conservation du moment angulaire et l'espace de valence considéré (intervention des coefficients de recouplage de moments angulaires). Ainsi lorsque les énergies sont des expressions linéaires des paramètres, nous savons que certains niveaux ne participeront jamais au fondamental et nous avons

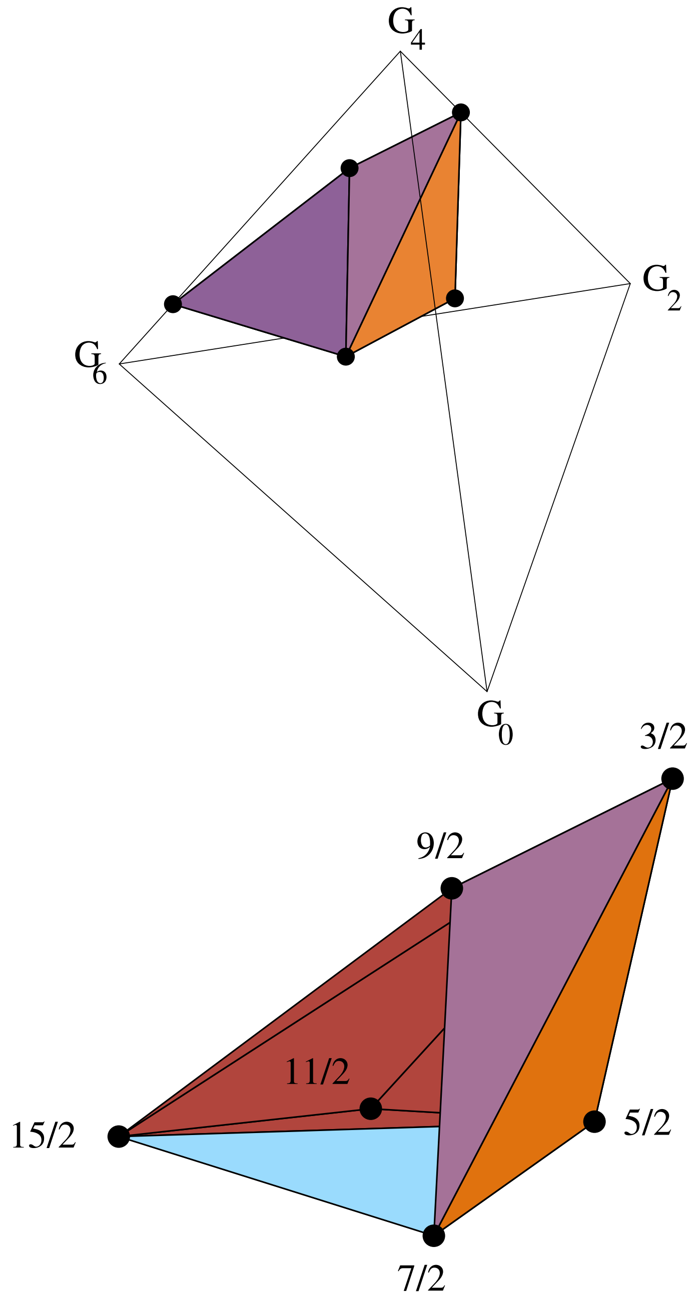


FIG. 3.8 – Polyèdre pour un système de 3 fermions sur une couche $j = 7/2$. La figure du haut représente la position de ce polyèdre dans le tétraèdre de base. Sur la figure du bas sont indiqués à l'aide des gros points les états $J(\nu)$. La face reliant les niveaux 7/2-9/2-5/2 a été retirée afin que tous les points soient visibles.

$J(\nu)$	(a)	(b)	(c)	(d)
3/2 (3)	31.37%	31.33%	31.14%	30.4%
5/2 (3)	27.85%	27.64%	27.26%	29.7%
7/2 (1)	9.03%	9.11%	9.7%	9.6%
9/2 (3)	3.67%	3.59%	3.69%	4.4%
11/2 (3)	0.07%	0.07%	0.00%	0.00%
15/2 (3)	28.01%	28.25%	28.13%	25.9%

TAB. 3.5 – Pourcentage analytique (a) et numérique (b) pour un état de moment angulaire J d'être le fondamental pour un système de 3 fermions sur une couche $j = 7/2$. Le test numérique a été fait avec 50000 évènements. Les deux dernières colonnes contiennent les résultats publiés par Zhao et Arima dans [Zha02] : les colonnes (c) et (d) correspondent respectivement à un calcul d'intégrales et à un test numérique réalisé sur 1000 tirages.

pu proposer des lois simples ((3.6) et (3.8)) pour le calcul des pourcentages.

3.5 Extension aux spectres continus dépendant d'un nombre fini de paramètres

Les calculs précédents ont été réalisés pour un nombre fini de niveaux. Que se passe t-il lorsqu'il y a un nombre infini voire continu de niveaux ? En utilisant des résultats de géométrie différentielle [Tho79, Leh82, Ber86], nous allons généraliser les lois (3.6) et (3.8). Cette généralisation va permettre d'en avoir une meilleure compréhension et va nous montrer le rôle que joue la courbure de la "surface" dans la distribution des niveaux dans le fondamental. En effet plus l'espace va être plat, moins la courbure sera grande et plus le pourcentage sera faible : ce qui se comprend assez facilement puisque dans le cas de points dans un espace plat seuls les points du bord vont contribuer au fondamental tandis que les points intérieurs ne pourront être le fondamental. Dans le cas continu, il s'agit de déterminer la densité de probabilité et non plus une probabilité.

3.5.1 Cas bi-dimensionnel

Supposons que les énergies dépendent d'un paramètre t continu selon deux lois déterministes et de deux paramètres aléatoires :

$$E(t) = x(t)G_1 + y(t)G_2\,, \tag{3.10}$$

de sorte que la courbe paramétrée d'équation $(x(t), y(t))$ soit convexe et suffisamment régulière. Les variables aléatoires G_i suivent des lois gaussiennes et sont indépendantes.

Une condition nécessaire pour que $E(t_0)$ soit minimale est :

$$\frac{\partial E}{\partial t}(t_0) = \frac{\partial x}{\partial t}(t_0)G_1 + \frac{\partial y}{\partial t}(t_0)G_2 = 0\,. \tag{3.11}$$

Cette condition peut s'écrire matriciellement :

$$(\partial_t x(t_0), \partial_t y(t_0)) \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} = 0\,,$$

ce qui signifie que l'ensemble des couples (G_1, G_2) qui permettent d'avoir le minimum pour le paramètre t_0 sont ceux qui sont sur la droite colinéaire au vecteur perpendiculaire au vecteur tangent à la courbe en t_0, c'est à dire qu'ils sont sur la droite colinéaire au vecteur normal en t_0. Si on fait varier un peu le paramètre t autour de t_0, le domaine des (G_1, G_2) permettant d'atteindre le minimum est un secteur angulaire formé des droites colinéaires à l'ensemble des vecteurs normaux. Comme la densité de probabilité est gaussienne, on peut séparer partie radiale et partie angulaire. L'intégration sur la partie radiale de 0 à ∞ donne 1 si bien que la mesure de ce domaine (au sens des probabilités) ne dépend que de l'ouverture angulaire du secteur. Par conséquent la densité de probabilité que le fondamental soit atteint autour de t_0 est proportionnelle à $\delta\theta$. Or on sait que

$$\theta(t_0) = \arctan\left(-\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}\right)\,. \tag{3.12}$$

Ainsi $\delta\theta$ est égal à

$$\begin{aligned} \delta\theta &= \frac{1}{1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2}\frac{x''y' - y''x'}{x'^2}dt \\ &= \frac{x''y' - y''x'}{x'^2 + y'^2}dt\,. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Dans cette équation, on reconnaît la courbure κ fois l'abscisse curviligne infinitésimale ds puisque

$$\kappa = \frac{x''y' - y''x'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \tag{3.14}$$

et que $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$.
Par conséquent ceci démontre que

$$dP(t_0) = \frac{1}{2\pi}\kappa(t_0)ds\,. \tag{3.15}$$

Ce résultat analytique a été testé à l'aide de trois courbes (un arc de cercle, un arc de parabole et un arc de courbe d'équation $y = x^4$) en le comparant avec des simulations numériques qui ont été réalisées de la façon suivante :

1. Tout d'abord on choisit 5000 valeurs de paramètres dans l'intervalle $[-1, 1]$: $t_i = i/2500 - 1$, i variant de 1 à 5000.
2. On tire aléatoirement les variables G_1 et G_2 et on calcule les 5000 énergies avec ces valeurs.
3. On détermine le paramètre t_i qui correspond au niveau le plus bas. On comptabilise le nombre de fois où cela se produit pour chaque paramètre sur un ensemble de 50000 tirages ; en divisant par le nombre total de tirage, cela nous donne le pourcentage que l'état indicé par le paramètre t_i soit le fondamental.
4. Comme on ne peut pas déterminer exactement une densité de distribution dans le cas numérique, on détermine une fonction de répartition en sommant les pourcentages obtenus précédemment. C'est cette fonction de répartition que l'on compare avec les résultats analytiques.

Arc de cercle

Un arc de cercle peut être paramétré par

$$\left\{ \begin{array}{rl} x(t) = & t \\ y(t) = & a - \sqrt{a^2 - t^2} \end{array} \right. \tag{3.16}$$

où a est le rayon que j'ai pris égal à 2. Le paramètre t varie de -1 à 1. Cet arc est tracé dans l'encadré de la figure 3.9.
Le produit de la courbure et de l'abscisse curviligne infinitésimale vaut :

$$\kappa(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt \quad = \quad \frac{y''}{1 + \left(y'(t)\right)^2}dt\,. \tag{3.17}$$

La probabilité de trouver le fondamental parmi les niveaux paramétrés par des t dans l'intervalle $[-t_0, t_0]$ est donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-t_0}^{t_0} \kappa(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{t_0} \kappa(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt\,.$$

Cette intégrale est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^{t_0} \kappa(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt &= \frac{1}{\pi}\arctan(y'(t_0)) \\ &= \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{t_0}{\sqrt{a^2 - t_0^2}}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{t_0}{\sqrt{4 - t_0^2}}\right)\,. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Sur la figure 3.9, j'ai tracé la courbe correspondant à l'équation (3.18) pour t_0 variant de 0 à 1 ainsi que la probabilité obtenue numériquement. Les deux courbes sont quasiment identiques. Il s'agit de droites puisque dans le cas d'un cercle complet les niveaux sont tous équiprobables ce qui correspond à une distribution uniforme donc à une fonction de répartion linéaire.

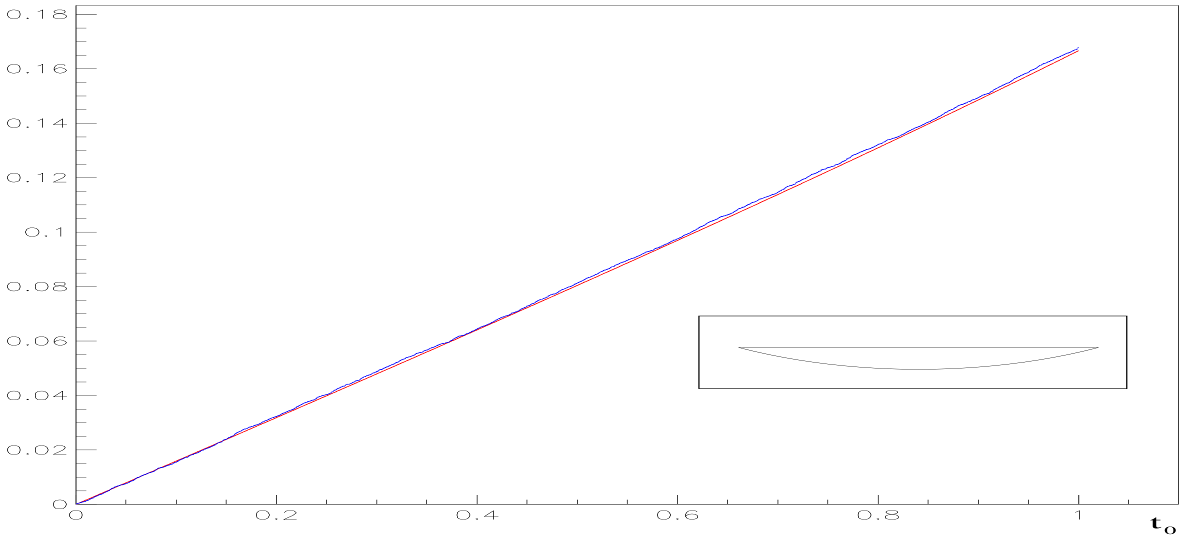


FIG. 3.9 – Comparaison entre la fonction de répartition obtenue analytiquement et le test numérique pour des niveaux formant l'arc de cercle tracé dans le petit encadré.

Arc de parabole

Une paramétrisation de l'arc de parabole est :

$$\begin{cases} x(t) = & t \\ y(t) = & t^2 \end{cases} . \tag{3.19}$$

L'allure de cette courbe est donnée dans l'encadré de la figure 3.10. La probabilité de trouver le fondamental parmi les niveaux dont le paramètre appartient à l'intervalle $[-t_0, t_0]$ est

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-t_0}^{t_0} \kappa(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{t_0} \kappa(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt\,.$$

En intégrant on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^{t_0} \kappa(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt &= \frac{1}{\pi}\arctan(y'(t_0)) \\ &= \frac{1}{\pi}\arctan(2t_0)\,. \end{aligned} \tag{3.20}$$

J'ai représenté les résultats numériques et analytiques sur la figure 3.10. Là aussi on trouve une parfaite coïncidence entre les deux courbes.

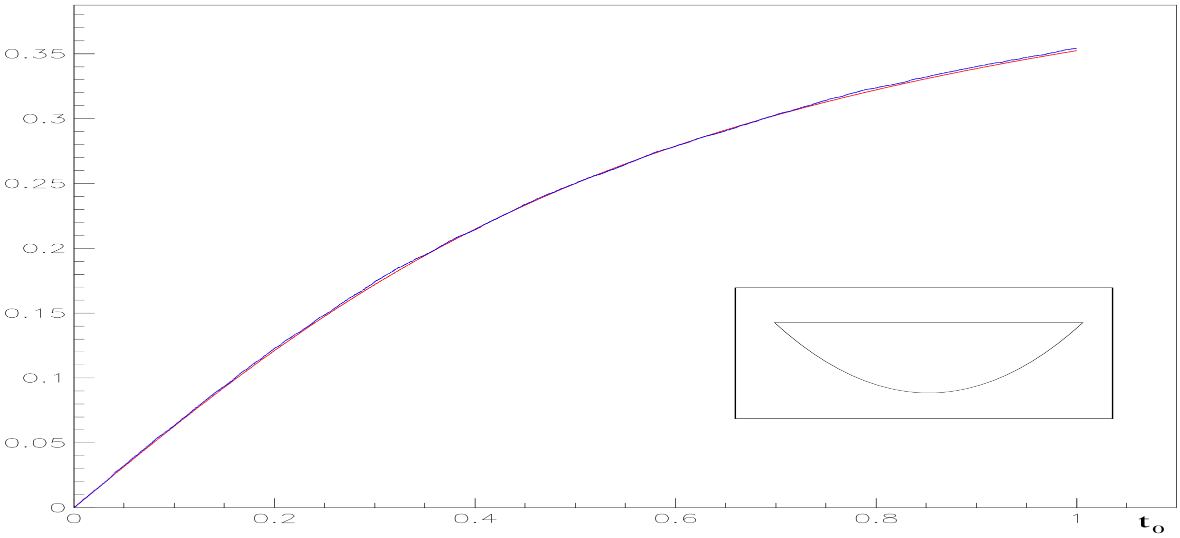


FIG. 3.10 – Comparaison entre la fonction de répartition obtenue analytiquement et le test numérique pour des niveaux formant l'arc de parabole tracé dans le petit encadré.

Arc de courbe d'équation $y = x^4$

Enfin un dernier test a été réalisé avec une courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = & t \\ y(t) = & t^4 \end{cases} . \tag{3.21}$$

La probabilité que le fondamental soit indicé par un paramètre appartenant à l'intervalle $[-t_0, t_0]$ est égale à

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-t_0}^{t_0} \kappa(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{t_0} \kappa(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt \,.$$

Cette probabilité vaut donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^{t_0} \kappa(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt &= \frac{1}{\pi}\arctan(y'(t_0)) \\ &= \frac{1}{\pi}\arctan(4t_0^3) \,. \end{aligned} \tag{3.22}$$

La comparaison entre l'expression analytique de la probabilité et le test numérique est donnée en figure 3.11 : une nouvelle fois, les deux courbes sont indiscernables. Avec

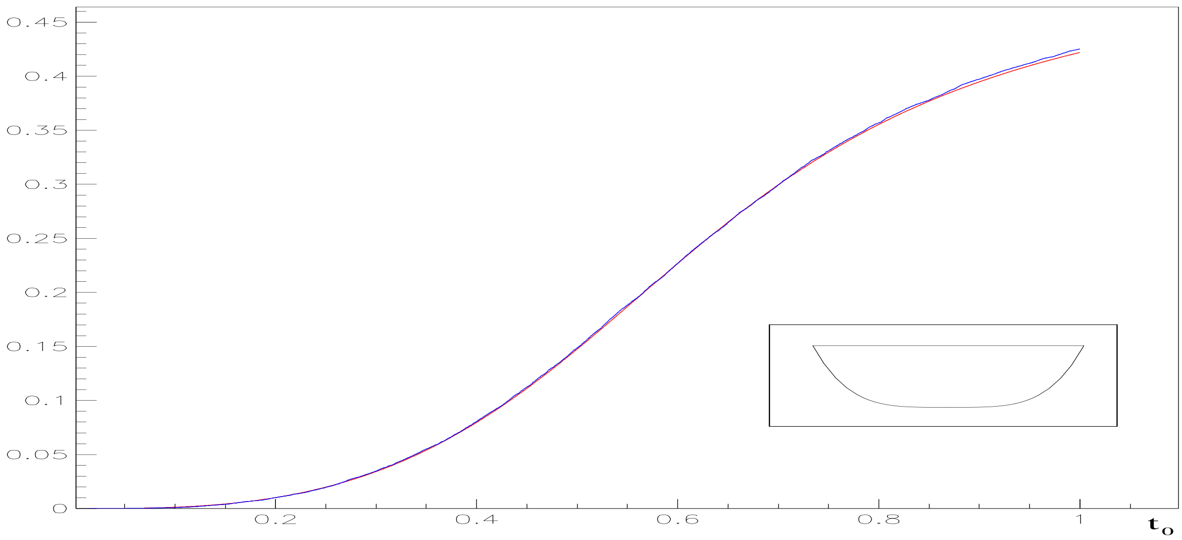


FIG. 3.11 – Comparaison entre la fonction de répartition obtenue analytiquement et le test numérique pour des niveaux formant l'arc convexe tracé dans le petit encadré.

ces trois exemples simples, on observe un accord excellent entre résultat analytique et calcul numérique. De plus cela permet de comprendre le cas où la courbe présente des points singuliers comme dans le cas d'un polygone. En effet on peut approcher un secteur angulaire par un ensemble de cercles tangents de plus en plus petits (cf figure 3.12). Ces cercles vérifient $\int_\Gamma \frac{1}{R} R d\theta = \pi - \alpha$ ainsi la probabilité associée au point singulier est donnée par $1/2(1-\alpha/\pi)$ ce qui correspond exactement à la loi donnée par l'équation (3.6).

3.5.2 Cas tri-dimensionnel

Nous nous sommes également intéressés au cas tri-dimensionnel c'est à dire au cas où les niveaux se trouvent sur une surface convexe, notée Σ, paramétrisable par deux réels u et v :

$$E(u,v) = x(u,v)G_1 + y(u,v)G_2 + z(u,v)G_3 \,. \tag{3.23}$$

Le minimum est atteint en (u_0, v_0) si les deux dérivées partielles par rapport à u et v sont nulles en (u_0, v_0) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial E}{\partial u} & = & \dfrac{\partial x}{\partial u}G_1 + \dfrac{\partial y}{\partial u}G_2 + \dfrac{\partial z}{\partial u}G_3 \\ \dfrac{\partial E}{\partial v} & = & \dfrac{\partial x}{\partial v}G_1 + \dfrac{\partial y}{\partial v}G_2 + \dfrac{\partial z}{\partial v}G_3 \end{array} \right. . \tag{3.24}$$

Les triplets (G_1, G_2, G_3) qui vérifient ces équations sont colinéaires au vecteur normal à la surface au point paramétrisé par (u_0, v_0) ; ce vecteur est le produit vectoriel $(\partial_u x, \partial_u y, \partial_u z) \wedge (\partial_v x, \partial_v y, \partial_v z)$. Donc ces triplets sont sur la droite passant par $(0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $(\partial_u x, \partial_u y, \partial_u z) \wedge (\partial_v x, \partial_v y, \partial_v z)$. Lorsque les paramètres u et v va-

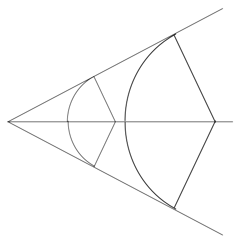


FIG. 3.12 – Approximation d'un point singulier par des arcs de cercle de plus en plus petits.

rient, ces droites vont décrire un cône et comme la distribution des variables aléatoires est gaussienne, on peut séparer la partie radiale de la partie angulaire et la mesure de ce cône ne va finalement dépendre que de son angle au solide si bien que la densité de probabilité est proportionnelle à la surface décrite par les vecteurs normaux normalisés à l'unité. Or cette surface est bien connue en géométrie différentielle : c'est l'image sphérique de la surface (appelée "Gauss map" [Tho79] en anglais). Si on construit en tout point $\vec{x}$ de la surface Σ un repère mobile orthonormé $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ dont les deux premiers vecteurs sont tangents à la surface et le troisième est normal à la surface, la variation du vecteur $\vec{x}$ peut s'écrire :

$$d\vec{x} = \sigma_1 \vec{e_1} + \sigma_2 \vec{e_2} \,.$$

La variation de $\vec{e_3}$ s'ecrit :

$$d\vec{e_3} = \omega_1 \vec{e_1} + \omega_2 \vec{e_2} \,.$$

Lorsque le point se déplace sur la surface Σ, le vecteur $\vec{e_3}$ se déplace sur la sphère unité et décrit l'image sphérique de Σ. L'élément de surface infinitésimal de Σ est la forme différentielle d'ordre 2 [Car67] $\sigma_1\sigma_2$ et celui de l'image sphèrique est la forme différentielle $\omega_1\omega_2$ (ces deux formes différentielles peuvent aussi être notées respectivement $\sigma_1 \wedge \sigma_2$ et $\omega_1 \wedge \omega_2$). On peut montrer [Lel63, Fla89] que

$$\omega_1\omega_2 = \kappa\sigma_1\sigma_2 \,, \tag{3.25}$$

où κ est la courbure de Gauss. Or cet élément de surface $\omega_1\omega_2$ est proportionnel à la densité de probabilité dP et comme le théorème de Gauss-Bonnet [Tho79, Leh82, Ber86] nous dit que

$$\int_\Sigma \kappa\sigma_1\sigma_2 = 4\pi \,, \tag{3.26}$$

on en déduit que

$$dP = \frac{1}{4\pi}\omega_1\omega_2 = \frac{1}{4\pi}\kappa\sigma_1\sigma_2\,. \tag{3.27}$$

Ellipsoïde

Nous avons appliqué ces résultats à un ellipsoïde (cf figure 3.13) défini par :

$$\left\{\begin{array}{rl} x(\theta,\phi) = & a\cos\theta\sin\phi \\ y(\theta,\phi) = & a\sin\theta\sin\phi \\ z(\theta,\phi) = & c\cos\phi \end{array}\right. . \tag{3.28}$$

En différentiant, on obtient $d\vec{x} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ où

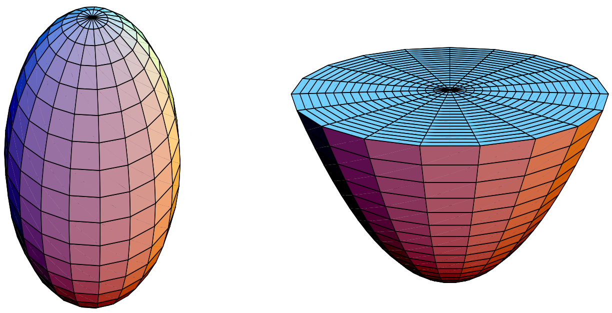


FIG. 3.13 – À gauche un ellipsoïde avec $c = 1.5$ et $a = 1$ et à droite un paraboloïde tronqué.

$$\left\{\begin{array}{rl} dx = & -a\sin\theta\sin\phi d\theta + a\cos\theta\cos\phi d\phi \\ dy = & a\cos\theta\sin\phi d\theta + a\sin\theta\cos\phi d\phi \\ dz = & -c\sin\phi d\phi \end{array}\right. .$$

En prenant pour référentiel mobile :

$$\left\{\begin{array}{rl} \vec{e_1} = & -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \\ \\ \vec{e_2} = & \dfrac{a\cos\theta\cos\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + c^2\sin^2\phi}}\vec{i} + \dfrac{a\sin\theta\cos\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + c^2\sin^2\phi}}\vec{j} - \dfrac{c\sin\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + c^2\sin^2\phi}}\vec{k} \\ \\ \vec{e_3} = & \dfrac{c\cos\theta\sin\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + c^2\sin^2\phi}}\vec{i} + \dfrac{c\sin\theta\sin\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + c^2\sin^2\phi}}\vec{j} + \dfrac{a\cos\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + c^2\sin^2\phi}}\vec{k} \end{array}\right. ,$$

on obtient $d\vec{x} = \sigma_1\vec{e_1} + \sigma_2\vec{e_2}$ avec

$$\left\{\begin{array}{ll} \sigma_1 = & a\sin\phi d\theta \\ \\ \sigma_2 = & \sqrt{a^2\cos^2\phi + c^2\sin^2\phi}d\phi \end{array}\right. .$$

Pour obtenir l'élément de surface infinitésimal de l'image sphérique, on peut par exemple différentier le vecteur $\vec{e_3}$, ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{ll} d\vec{e_3}_x = & -\dfrac{c\sin\theta\sin\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + c^2\sin^2\phi}}d\theta + \dfrac{ca^2\cos\theta\cos\phi}{(a^2\cos^2\phi + c^2\sin^2\phi)^{3/2}}d\phi \\ d\vec{e_3}_y = & \dfrac{c\cos\theta\sin\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + c^2\sin^2\phi}}d\theta + \dfrac{ca^2\sin\theta\cos\phi}{(a^2\cos^2\phi + c^2\sin^2\phi)^{3/2}}d\phi \\ d\vec{e_3}_z = & -\dfrac{ca^2\sin\phi}{(a^2\cos^2\phi + c^2\sin^2\phi)^{3/2}}d\phi \end{array}\right. .$$

Or $d\vec{e_3} = \omega_1\vec{e_1} + \omega_2\vec{e_2}$ donc on en déduit ω_1 et ω_2 :

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_1 = \dfrac{c\sin\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + c^2\sin^2\phi}}d\theta \\ \omega_2 = \dfrac{ac}{a^2\cos^2\phi + c^2\sin^2\phi}d\phi \end{array}\right. , \tag{3.29}$$

si bien que l'élément de surface de l'image sphérique est égale à :

$$\omega_1\omega_2 = \kappa\sigma_1\sigma_2 = \frac{ac^2\sin\phi}{(a^2\cos^2\phi + c^2\sin^2\phi)^{3/2}}d\phi d\theta\,. \tag{3.30}$$

La densité de probabilité est donc donnée par :

$$dP = \frac{ac^2\sin\phi}{4\pi(a^2\cos^2\phi + c^2\sin^2\phi)^{3/2}}d\phi d\theta\,. \tag{3.31}$$

En intégrant on trouve la probabilité que le fondamental soit obtenu pour des paramètres (θ, ϕ) dans l'ensemble $[0, \theta_0] \times [0, \phi_0]$:

$$P(\theta_0, \phi_0) = \int_0^{\theta_0}\int_0^{\phi_0} \frac{ac^2\sin\phi}{4\pi(a^2\cos^2\phi + c^2\sin^2\phi)^{3/2}}d\phi d\theta = \frac{\theta_0}{4\pi}\left(1 - \frac{a\cos\phi_0}{\sqrt{a^2\cos^2\phi_0 + c^2\sin^2\phi_0}}\right)\,. \tag{3.32}$$

Cette fonction de répartition est représentée sur la figure 3.14 où sont superposés les résultats numériques et analytiques : les deux surfaces sont indiscernables (l'une est en bleu, l'autre en rouge). Comme dans le cas bi-dimensionnel, le test numérique a été fait en effectuant un maillage de la surface. Pour l'ellipsoïde, on a pris en tout 13041 points. 20000 tirages ont été réalisés. Pour chaque évènement, le code a calculé les 13041 énergies puis a déterminé les paramètres pour lesquels la plus petite valeur était atteinte. On compte ainsi le nombre de fois où chaque point de la surface correspond à l'énergie la plus basse puis en sommant sur le domaine approprié, on obtient la fonction de répartition.

Paraboloïde

Un second test tri-dimensionnel a été effectué en considérant des niveaux placés sur un paraboloïde de révolution tronqué (cf figure 3.13) paramétrisé par :

$$\left\{\begin{array}{ll} x(\theta,\phi) = & u \\ y(\theta,\phi) = & v \\ z(\theta,\phi) = & u^2+v^2 \end{array}\right. . \tag{3.33}$$

On peut alors calculer le vecteur normal ainsi que sa différentielle $d\vec{e_3} = \omega_1\vec{e_1} + \omega_2\vec{e_2}$ et montrer que :

$$\left\{\begin{array}{ll} \omega_1 = & -2\dfrac{vdu-udv}{\sqrt{1+4(u^2+v^2)}\sqrt{u^2+v^2}} \\ \\ \omega_2 = & 2\dfrac{udu+vdv}{(1+4(u^2+v^2))\sqrt{u^2+v^2}} \end{array}\right. . \tag{3.34}$$

Ainsi la forme différentielle d'ordre 2 $\omega_1 \wedge \omega_2$ s'écrit :

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = 4\frac{(vdu-udv)\wedge(udu+vdv)}{(1+4(u^2+v^2))^{3/2}\,(u^2+v^2)}, \tag{3.35}$$

ce qui donne en coordonnées polaires, l'expression de l'élément de surface :

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = 4\frac{\rho d\theta d\rho}{(1+4\rho^2)^{3/2}}. \tag{3.36}$$

La densité de probabilité est donc donnée par :

$$dP = 4\frac{\rho d\rho}{(1+4\rho^2)^{3/2}}\frac{d\theta}{4\pi}. \tag{3.37}$$

En intégrant par rapport à θ et ρ, on en déduit la fonction de répartition :

$$P(\rho_0,\theta_0) = \left(1 - \frac{\rho_0}{\sqrt{1+4\rho_0^2}}\right)\frac{\theta_0}{4\pi}. \tag{3.38}$$

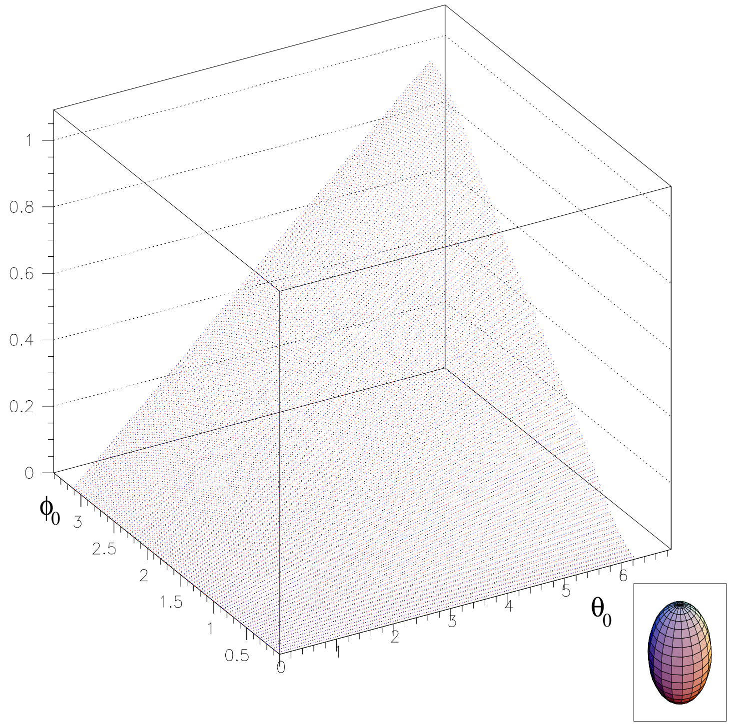


FIG. 3.14 – Fonction de répartition $P(\theta_0, \phi_0)$ donnée par (3.32) pour des niveaux répartis sur un ellipsoïde. θ_0 varie de 0 à 2π et ϕ_0 de 0 à π. On voit très bien la dépendance linéaire en fonction de θ_0.

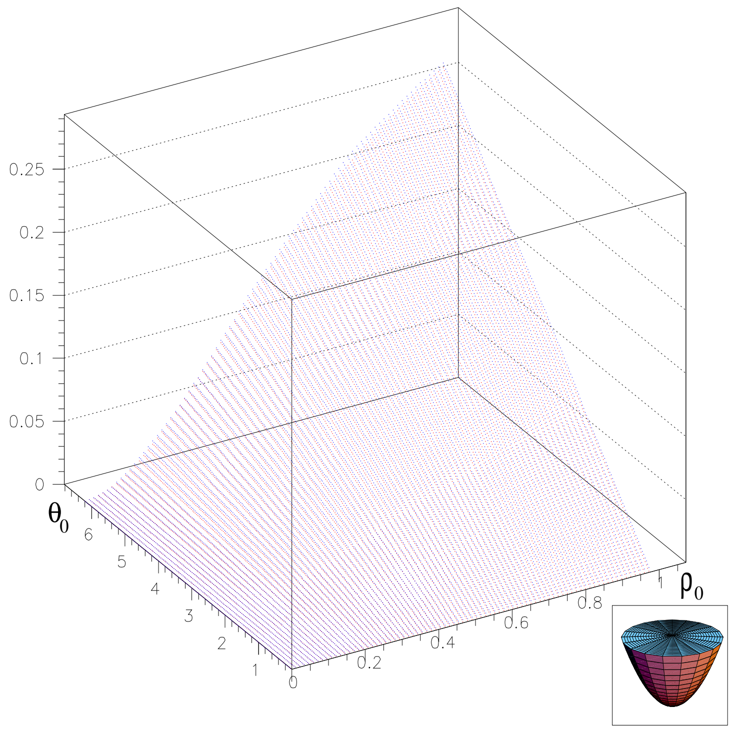


FIG. 3.15 – Fonction de répartition $P(\rho_0, \theta_0)$ donnée par l'équation (3.38) pour des niveaux répartis sur un paraboloïde de révolution tronqué. ρ_0 varie de 0 à 1 et θ_0 de 0 à 2π.

J'ai comparé cette fonction de répartition avec les résultats d'un test numérique : les deux surfaces (cf figure 3.15) sont, comme pour l'ellipsoïde, indiscernables. Le test numérique a été effectué comme pour l'ellipsoïde c'est à dire en faisant un maillage de 13041 points du paraboloïde et en tirant 20000 valeurs aléatoires pour (G_1, G_2, G_3). On peut ainsi évaluer numériquement la fonction de répartition. Notons que la formule (3.38) ne permet pas de calculer la densité de probabilité aux points singuliers mais par différence on obtient la probabilité en ces points.

Ces calculs peuvent se généraliser à des dimensions supérieures, en particulier, nous avons procédé à des calculs pour l'hyper-ellipsoïde en 4 dimensions. Ce passage d'un ensemble de niveaux discrets à un ensemble continu de niveau montre que la courbure de la surface dicte les probabilités d'obtenir tel ou tel niveau dans le fondamental. Cette courbure résulte de la nature à deux-corps de l'interaction, de la conservation du moment angulaire et de la symétrie du système. De plus ces calculs montrent que les probabilités ne dépendront pas de la nature de la loi régissant les paramètres de l'interaction : il suffit que celle-ci ne dépende que de la distance euclidienne usuelle $\sum_i G_i^2$. Ainsi dans ce cas simplifié où les énergies dépendent linéairement des paramètres de l'interaction, les pourcentages sont parfaitement calculables à partir du moment où l'on sait évaluer les coefficients de couplage entre les différents moments angulaires.

Nous pensons qu'une structure géométrique intervient même lorsque la dépendance des niveaux n'est plus linéaire en fonction des éléments de matrice à deux-corps. En particulier, nous allons présenter dans la suite des résultats numériques qui montrent que la prédominance du 0^+ dans le fondamental dépend des propriétés de symétrie des vecteurs de la base.

3.6 Cas général

3.6.1 Rôle de la statistique des particules

Les particules qui existent dans la nature sont de deux types : il y a d'une part les particules de matière appelées fermions, qui obéissent à la statistique de Fermi et dont le spin est demi-entier et d'autre part les particules qui véhiculent les interactions appelées bosons qui suivent la statisque de Bose et dont le spin est entier. En seconde quantification et en terme de représentation, cela signifie que les représentations irréductibles (RI) utilisées pour décrire des systèmes fermioniques sont totalement antisymétriques tandis que celles associées à des systèmes bosoniques sont totalement symétriques. Ainsi les fonctions d'onde associées à des systèmes de N fermions sont des combinaisons linéaires de déterminants de Slater et sont donc des fonctions totalement antisymétriques dans l'échange de particules alors que les fonctions d'onde de systèmes de N bosons restent invariantes lors de la permutation des particules. Des fermions ne peuvent donc avoir tous les mêmes nombres quantiques alors que des bosons peuvent se condenser sur un même etat.

Considérons par exemple un système de bosons possédant à la fois des degrés de liberté de spin et des degrés de liberté orbitaux. La fonction d'onde globale doit être totalement symétrique. Supposons que l'on sépare le spin de la partie spatiale. On peut donc s'intéresser à des produits tensoriels de représentations non totalement symétriques pour les algèbres de spin et spatiales qui garantissent néanmoins l'obtention de fonctions globales totalement symétriques. On peut donc être amené à considérer des représentations de l'algèbre unitaire qui ne correspondent ni à la statistique de Fermi ni à la statistique de Bose et on peut ainsi évaluer le rôle de cette statistique sur les spectres. C'est notamment le cas en IBM-4 où on peut considérer des fonctions d'onde qui sont vecteurs appartenant aux RI non totalement symétriques mais identiques $[N_1, N_2, \cdots, N_6]$ des algèbres $U_L(6)$ et $U_{ST}(6)$ (L désigne le moment angulaire orbital, S le spin et T l'isospin). J'ai réalisé des calculs avec des hamiltoniens aléatoires dans ce type de représentations en supposant que l'hamiltonien ne dépend que de la partie orbitale et conserve le moment angulaire orbital si bien que cette interaction conserve le moment angulaire total. En raison des limitations du code pour ces représentations inhabituelles, je n'ai pu traiter que des systèmes ayant un petit nombre de particules. Sur la figure 3.16, je donne les pourcentages de spectres dont le fondamental est un état $L = 0^+$ pour des systèmes ayant 2 bosons (RI [2] de $U(6)$), 3 bosons (RI [3] et [21] de $U(6)$) et 4 bosons (RI [4], [31] et [22] de $U(6)$). On constate tout d'abord que

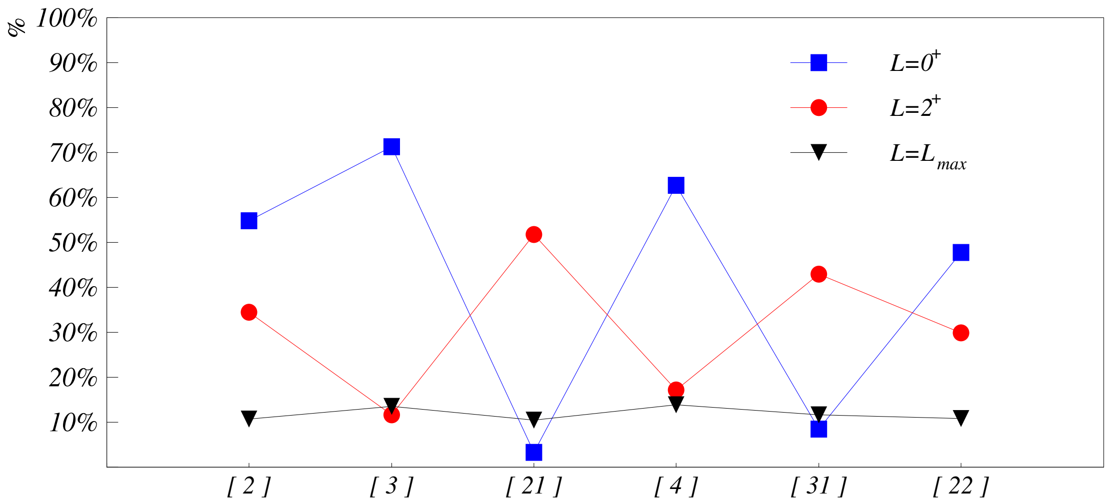


FIG. 3.16 – Pourcentages d'états 0^+, 2^+ et L^+_{max} comme état fondamental pour différentes représentations irréductibles.

les spectres n'ont pas toujours majoritairement un état 0^+ comme état fondamental. En particulier, c'est le moment angulaire 2 qui est le plus souvent celui du fondamental pour les RI [21] et [31]. Ce pourcentage dépend donc de la statistique des particules.

On remarque également que le moment angulaire maximal a un pourcentage important quelque soit la représentation.

Ces calculs effectués pour des systèmes de bosons ont été confirmés par Olivier Juillet [Jui02] pour des systèmes de 4 “fermions” sur une couche $j = 9/2$: on retrouve exactement la même oscillation.

Cela nous incite à penser que les pourcentages sont fortement liés à la structure intrinsèque de l'espace de “valence” dans lequel on se place, notamment par l'intermédiaire des coefficients de couplages entre moments angulaires individuels puisque les éléments de matrices des différents opérateurs constituant l'hamiltonien en dépendent.

3.6.2 Rôle du rang de l'interaction

Lorsque Wigner a introduit la théorie des matrices aléatoires à la fin des années 50 pour interpréter les spectres de diffusion de neutrons sur des noyaux lourds, il a utilisé des matrices dont les éléments étaient indépendants les uns des autres et dont la probabilités etaient invariantes sous les changements orthogonaux (unitaires) de bases. On peut alors montrer [Meh91] que les éléments de matrice suivent des lois gaussiennes si bien que l'on désigne ce type de matrices par ensemble gaussien orthogonal (unitaire) et que l'on notera par leur acronyme anglais GOE (GUE).

Mais ces matrices ne correspondent pas vraiment à la situation rencontrée en physique nucléaire puisque l'interaction doit d'une part conserver le moment angulaire et d'autre part être de rang fini (généralement on se limite à des interactions à un- et deux-corps). Ces deux contraintes ont pour conséquence tout d'abord de créer des corrélations bien définies entre les différents éléments de matrice de l'hamiltonien et également de rendre la matrice très creuse (c'est à dire avec beaucoup de termes nuls) ce qui signifie qu'il existe des directions privilégiées.

Quelles sont les conséquences sur le spectres ? Pour évaluer le rôle que joue le rang de l'interaction sur les propriétés spectrales d'un système à N corps, nous avons considéré des interactions aléatoires à N-corps conservant le moment angulaire. Nous avons ainsi construit des matrices aléatoires de l'ensemble gaussien orthogonal pour chaque sous espace associé à un moment angulaire donné. Les matrices correspondant à deux moments angulaires distincts sont prises indépendantes les unes des autres. Par exemple pour un système de trois bosons dans la RI [3], nous savons qu'il y a trois niveaux 0^+, trois 2^+, un 3^+, deux 4^+ et un 6^+. Par conséquent, nous avons pris deux matrices 3×3 , une matrice 2×2 et deux matrices 1×1. Nous les avons diagonalisées et comparé les plus petites valeurs propres de chacune des matrices pour attribuer le moment angulaire du niveau le plus bas. Cette procédure a été répétée 20000 fois. Ce type de calcul a été réalisé pour des systèmes de 2, 3 et 4 bosons dans les mêmes RI que dans la section précédente. Les résultats sont présentés sur la figure 3.17. On constate que le fondamental est plus souvent un 2^+ qu'un 0^+ et que l'état de moment angulaire maximal n'est pratiquement jamais l'état fondamental. Cela se comprend en comparant les dimensions des matrices : plus la dimension va être grande plus la répulsion de niveaux va s'amplifier et abaisser un des états de ce sous-espace qui va devenir le fondamental. Cela montre que lorsque l'on supprime les corrélations résultant

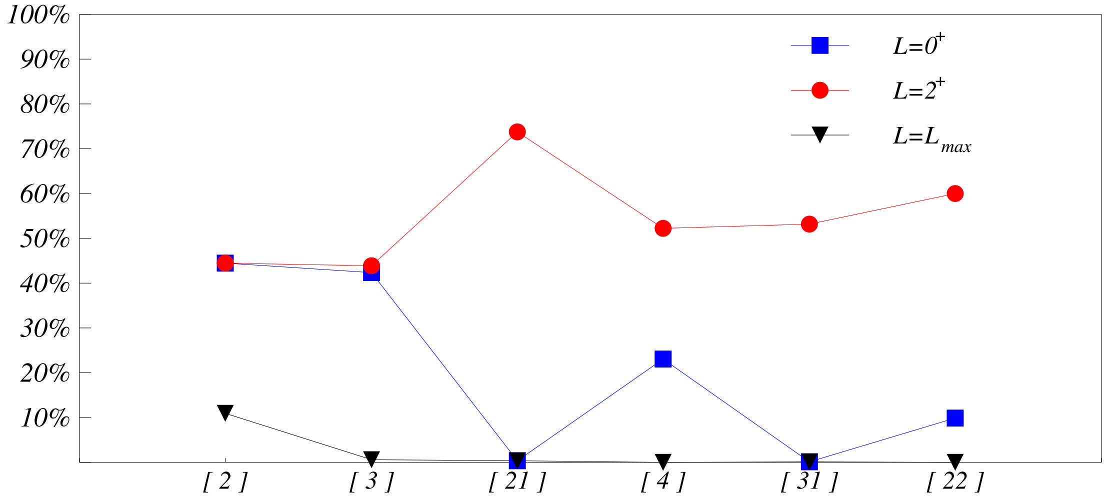


FIG. 3.17 – Pourcentages d'états 0^+, 2^+ et L_{max}^+ comme état fondamental pour différentes représentations irréductibles lorsque l'interaction est une interaction à N-corps aléatoire conservant le moment angulaire. Par exemple pour des systèmes de 3 bosons, on simule une interaction à trois corps, pour 4 bosons une interaction à 4 corps...

du caractère à deux-corps de l'interaction, le 0^+ n'est plus majoritairement l'état de plus basse énergie. Les corrélations entre sous-espaces de moments angulaires différents jouent donc un rôle capital dans les propriétés spectrales d'un système à N-corps. Mais les corrélations entre éléments de matrices dans un même sous-espace sont également très importantes puisque elles modifient la répulsion de niveaux et privilégier certaines directions.

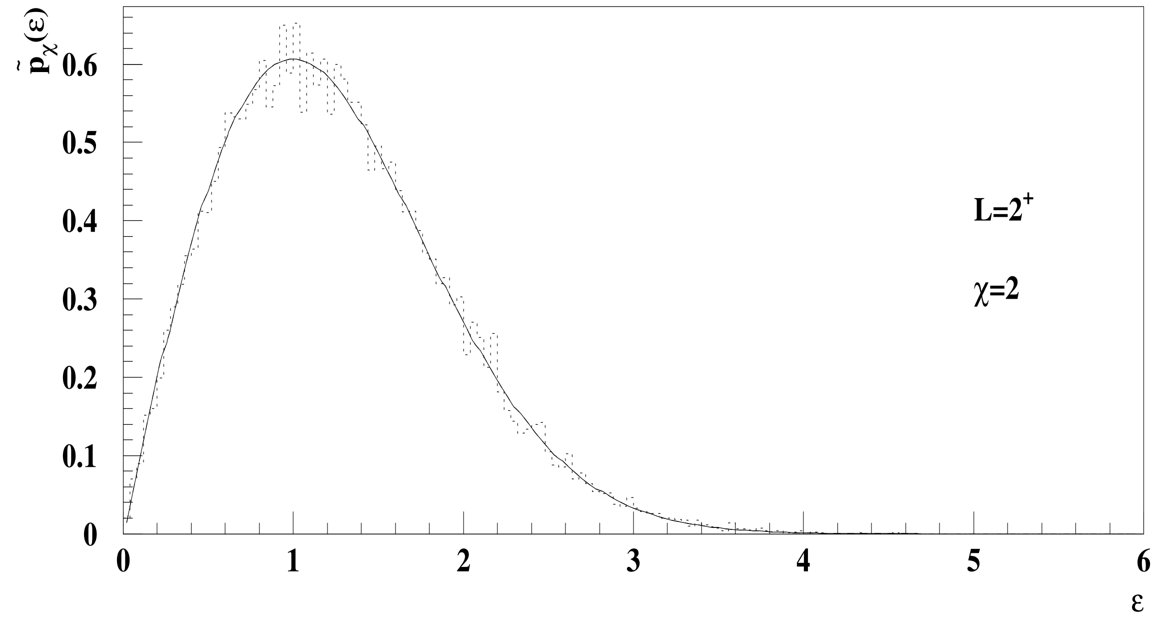
L'importance du rang de l'interaction peut être illustrée en étudiant un système de 2 bosons avec un hamiltonien comprenant des termes à un-corps et des termes à deux-corps. Il y a alors deux niveaux 0^+, deux 2^+ et un 4^+. Les matrices réduites des 0^+ et des 2^+ s'écrivent respectivement :

$$H\left(0^+\right) = \begin{pmatrix} 2\varepsilon_0 + v^0_{0000} & v^0_{0022} \\ v^0_{0022} & 2\varepsilon_2 + v^0_{2222} \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

et

$$H\left(2^+\right) = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 + \varepsilon_2 + v^2_{0202} & v^2_{0222} \\ v^2_{0222} & 2\varepsilon_2 + v^2_{2222} \end{pmatrix}, \tag{3.40}$$

où les ε_j désignent les énergies simples particules des bosons s et d et les $v^J_{j_1j_2j_3j_4}$ les termes à deux-corps. La présence de $2\varepsilon_0$ et $2\varepsilon_2$ fait que la distribution des éléments



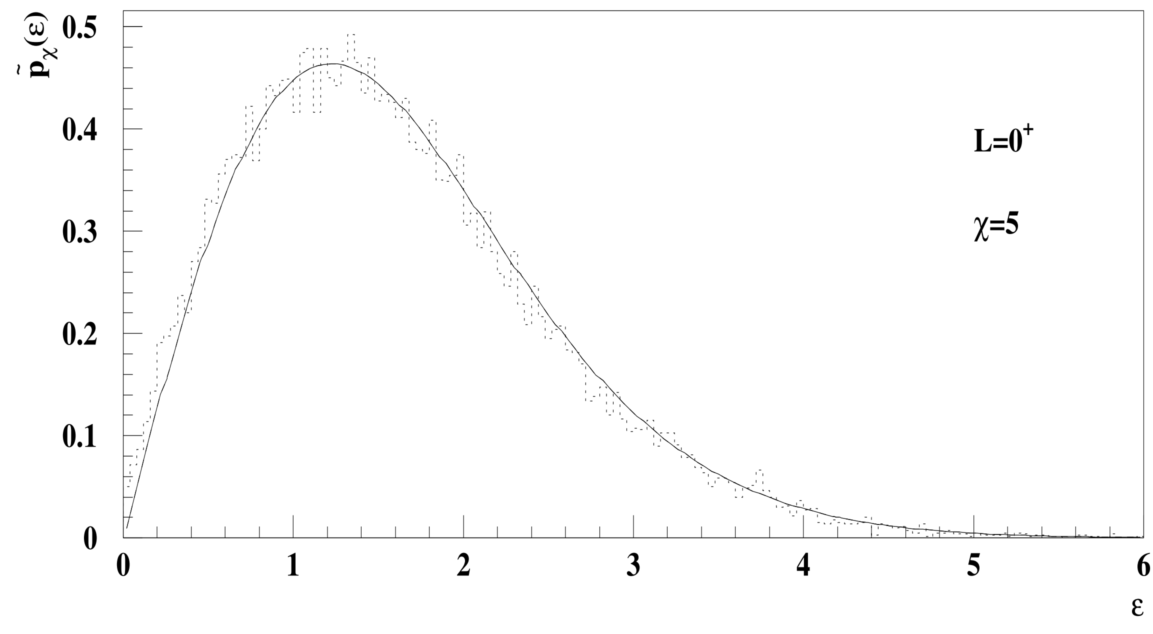


FIG. 3.18 – Distribution des écarts, ε, entre les deux 2^+ (figure du haut) et celle des écarts entre les deux 0^+ (figure du bas). L'écart moyen entre les deux 0^+ est donc plus large que celui entre les deux 2^+ ce qui permet de comprendre partiellement la prédominance des 0^+ comme état fondamental. Cet élargissement provient uniquement des énergies simple particule ce qui montre l'influence du rang de l'interaction sur les pourcentages des différents moments angulaires. χ est le rapport entre la largeur des termes diagonaux sur celle des termes non-diagonaux : $\chi = 5$ pour les 0^+ et $\chi = 2$ pour les 2^+.

de matrices diagonaux de $H(0^+)$ est 5 fois plus large que celle de ses termes non-diagonaux alors que pour $H(2^+) - \varepsilon_2 Id$ la distribution des termes diagonaux est 2 fois plus large que celle des termes non-diagonaux. Cet élargissement des distributions des termes diagonaux par rapport à celle des termes non-diagonaux provoque une augmentation de la répulsion moyenne des niveaux[1], ce qui peut expliquer en partie la prédominance des 0^+ comme états de plus basse énergie (cf la figure 3.18 où sont représentées les distributions des écarts entre les deux 0^+ (figure du bas) et les deux 2^+ (figure du haut) : en traits pleins, ce sont les courbes analytiques (distributions de Wigner généralisées (voir section 4.4 page 153)) et en traits pointillés les distributions obtenues numériquement. Notons que cette analyse ne tient cependant pas compte des corrélations entre les 0^+ et 2^+. En l'absence des énergies simples particules ou dans le cas où on les prend égales, les 0^+ et les 2^+ ont exactement les mêmes distribution et ont la même probabilité d'être le fondamental. Ainsi les termes à un-corps modifient la largeur des distributions de certains termes des matrices et favorisent tel ou tel moment angulaire. L'effet des termes à deux-corps sur les systèmes à N particules ($N \geq 3$) est vraisemblablement de cette nature.

3.6.3 Régularités des spectres

En IBM, comme nous l'avons vu plus haut, deux régimes (vibrationnel et rotationnel) semblent être très fréquents même avec des interactions aléatoires. Les spectres présentent d'autres régularités inattendues. En effet prenons par exemple 6 bosons s et d dans la représentation totalement symétrique [6] de U(6). Le spectre comporte 48 niveaux dont sept 0^+ , neuf 2^+, trois 3^+, neuf 4^+, trois 5^+, sept 6^+, deux 7^+, quatre 8^+, un 9^+, deux 10^+ et un 12^+. On a diagonalisé 5000 hamiltoniens. Pour chaque spectre, on sélectionne les niveaux yrast (ie les niveaux les plus bas pour chaque moment angulaire). Les figures 3.19, 3.20, 3.21 et 3.22 représentent $(E(L_1^+) - E(0_1^+))/(E(2_1^+) - E(0_1^+))$ en fonction de $(E(4_1^+) - E(0_1^+))/(E(2_1^+) - E(0_1^+))$ ou de $(E(6_1^+) - E(0_1^+))/(E(2_1^+) - E(0_1^+))$. On constate alors que ces rapports dépendent “presque” linéairement les uns des autres ce qui signifie que les niveaux yrast sont quasiment des combinaisons linéaires des $E(2_1^+) - E(0_1^+)$, $E(4_1^+) - E(0_1^+)$ et $E(6_1^+) - E(0_1^+)$.

Nous sommes parvenus à comprendre certaines de ces droites. Si on suppose que l'hamiltonien est celui associé à la chaîne (I) de IBM, alors les énergies [Iac87] s'écrivent pour un état caractérisé par les nombres quantiques N, n_d, ν et L :

$$E(N, n_d, \nu, L) = E_0 + \varepsilon n_d + \alpha \frac{n_d}{2}(n_d - 1) + \beta(n_d(n_d + 1) - \nu(\nu + 3)) + \gamma(L(L+1) - 6n_d)\,. \tag{3.41}$$

[1]Un rétrécissement des distributions des termes diagonaux par rapport aux termes non-diagonaux aurait provoqué le même résultat comme on peut le voir à partir des calculs présentés dans la section 4.4 page 153.

Ainsi pour un état $|\,[N], n_d, \nu = n_d, L = 2n_d\rangle$ l'énergie s'écrit :

$$E(L = 2n_d) - E(0) = \varepsilon\left(n_d + \frac{n_d}{2}(n_d - 1)\left(\frac{\alpha}{\varepsilon} + 8\frac{\beta}{\varepsilon}\right)\right) . \tag{3.42}$$

On en déduit que

$$\frac{E(L = 2n_d) - E(0)}{E(L = 2) - E(0)} = \left(n_d + \frac{n_d}{2}(n_d - 1)\left(\frac{\alpha}{\varepsilon} + 8\frac{\beta}{\varepsilon}\right)\right) , \tag{3.43}$$

et que

$$\frac{E(6) - E(0)}{E(2) - E(0)} = -3 + 3\frac{E(4) - E(0)}{E(2) - E(0)}, \tag{3.44}$$

$$\frac{E(8) - E(0)}{E(2) - E(0)} = -8 + 6\frac{E(4) - E(0)}{E(2) - E(0)}, \tag{3.45}$$

$$\frac{E(10) - E(0)}{E(2) - E(0)} = -15 + 10\frac{E(4) - E(0)}{E(2) - E(0)}, \tag{3.46}$$

$$\frac{E(12) - E(0)}{E(2) - E(0)} = -24 + 15\frac{E(4) - E(0)}{E(2) - E(0)}. \tag{3.47}$$

On obtient aussi

$$\frac{E(8) - E(0)}{E(2) - E(0)} = -2 + 2\frac{E(6) - E(0)}{E(2) - E(0)}, \tag{3.48}$$

$$\frac{E(10) - E(0)}{E(2) - E(0)} = -5 + \frac{10}{3}\frac{E(6) - E(0)}{E(2) - E(0)}, \tag{3.49}$$

$$\frac{E(12) - E(0)}{E(2) - E(0)} = -15 + 5\frac{E(6) - E(0)}{E(2) - E(0)}. \tag{3.50}$$

Ces droites ont été tracées sur les figures correspondantes. Les équations de ces droites ne dépendent pas du nombre de bosons du système : numériquement on les a bien retrouvées quelque soit le nombre de bosons. De tels résultats montrent que même lorsque l'hamiltonien ne s'écrit pas uniquement en fonction des opérateurs de Casimir d'une chaîne particulière, son spectre ne s'éloigne pas trop d'un des spectres schématiques correspondant aux diverses symétries dynamiques du modèle, au moins en ce qui concerne les niveaux de la ligne yrast. Ces résultats sont en accord d'une part avec les travaux de Sevrin et al [Sev87] qui ont étudié les spectres d'hamiltoniens IBM-2 comprenant des termes associés à l'algèbre $SU^*(3)$ auxquel ils ont ajouté un terme pertubatif et dont les niveaux de la bande yrast sont peu modifiés par le terme perturbatif et d'autre part avec ceux de Cejnar et Jolie [Cej98, Cej00]. Dans [Cej00], ils montrent en particulier que la transition entre les différents chaînes algèbriques est brusque.

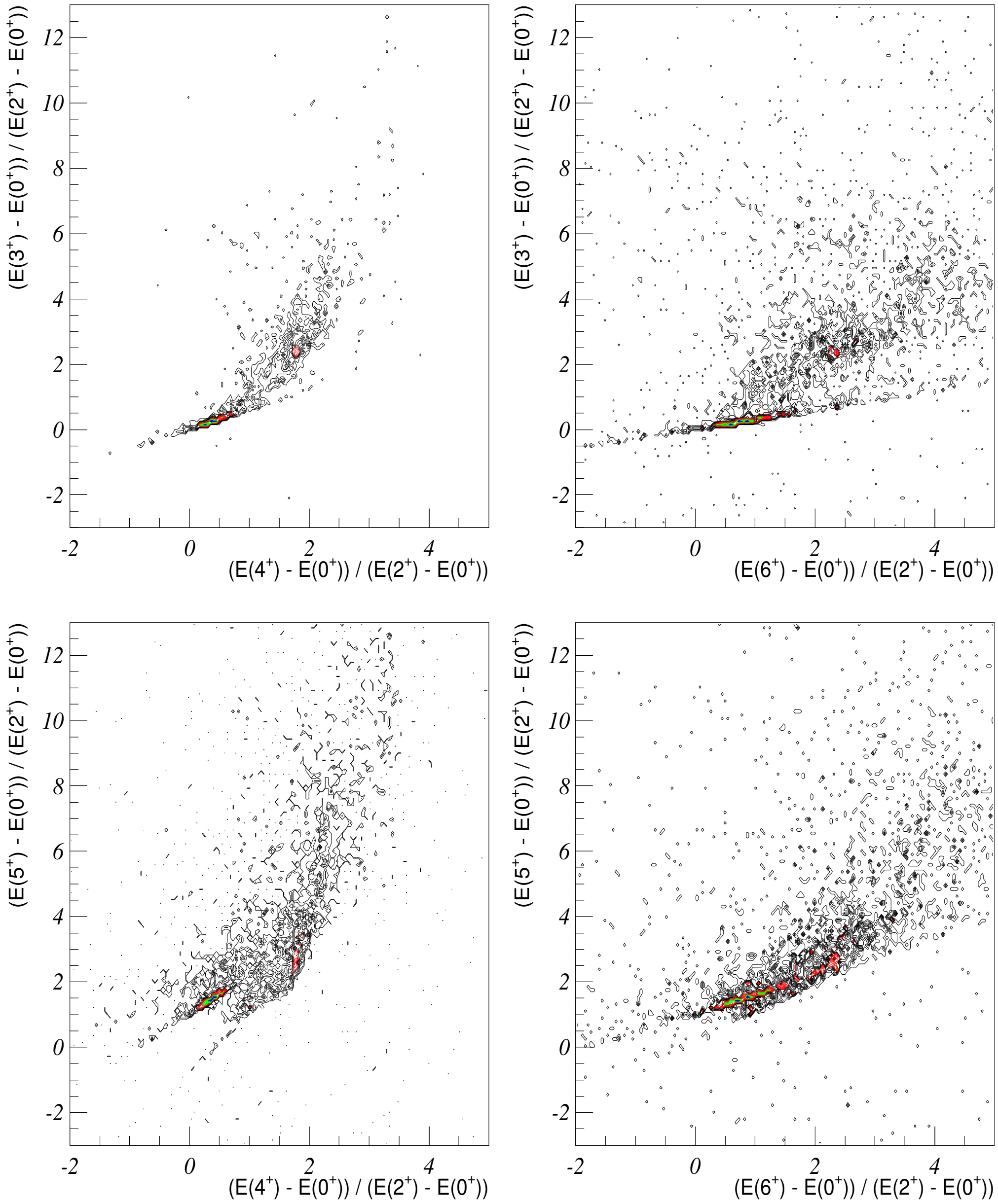


FIG. 3.19 – Dans la colonne de gauche, $(E(3_1^+) - E(0_1^+))/(E(2_1^+) - E(0_1^+))$ et $(E(5_1^+) - E(0_1^+))/(E(2_1^+) - E(0_1^+))$ sont exprimés en fonction de $(E(4_1^+) - E(0_1^+))/(E(2_1^+) - E(0_1^+))$. Dans la colonne de droite, ces deux rapports sont exprimés en fonction de $(E(6_1^+) - E(0_1^+))/(E(2_1^+) - E(0_1^+))$.

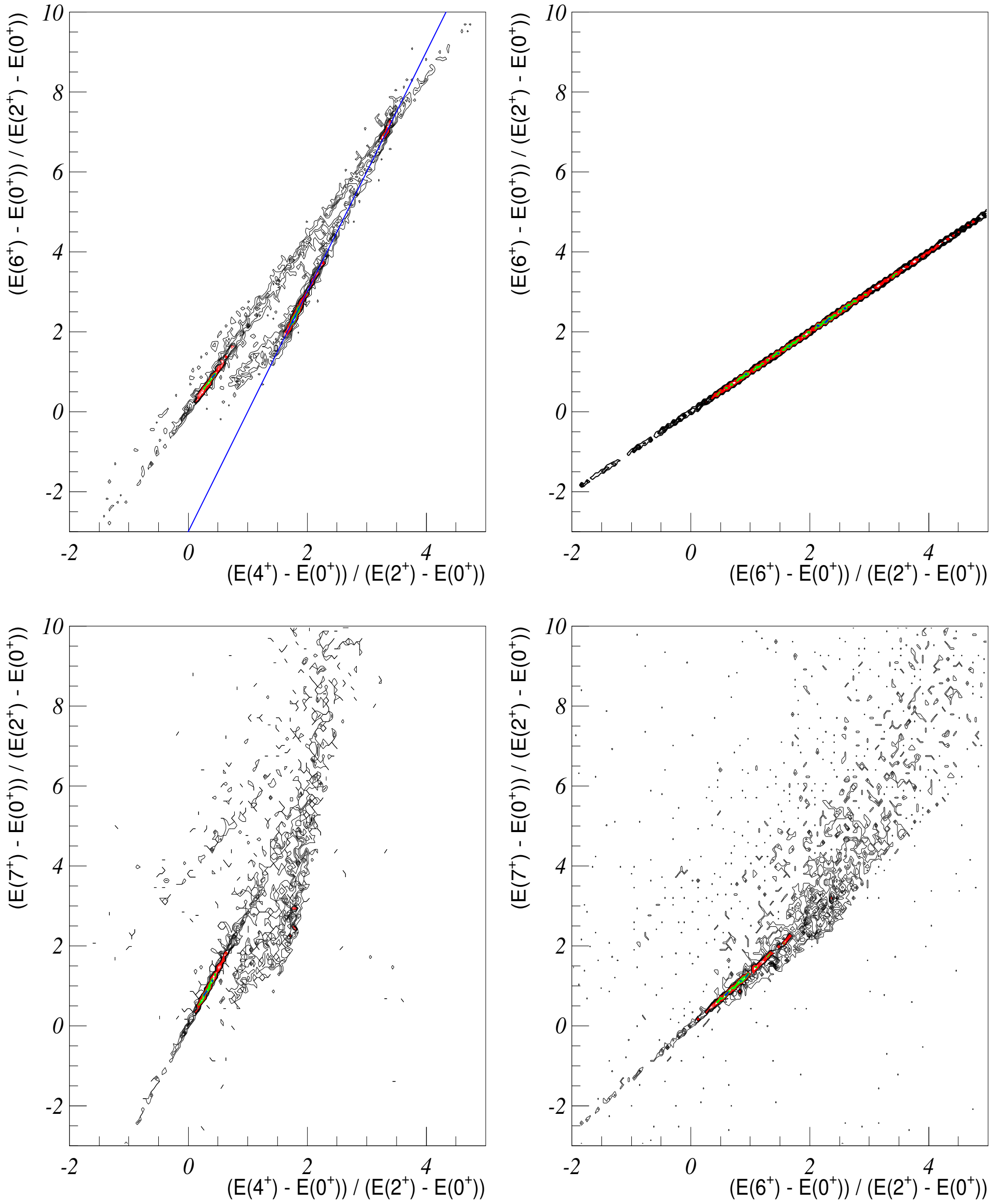


FIG. 3.20 – Même chose que pour la figure 3.19 mais pour les rapports $(E(6_1^+) - E(0_1^+))/(E(2_1^+) - E(0_1^+))$ et $(E(7_1^+) - E(0_1^+))/(E(2_1^+) - E(0_1^+))$. Évidemment on trouve une droite de pente 1 dans le quadrant en haut à droite. L'équation de la droite tracée est donnée par (3.44)

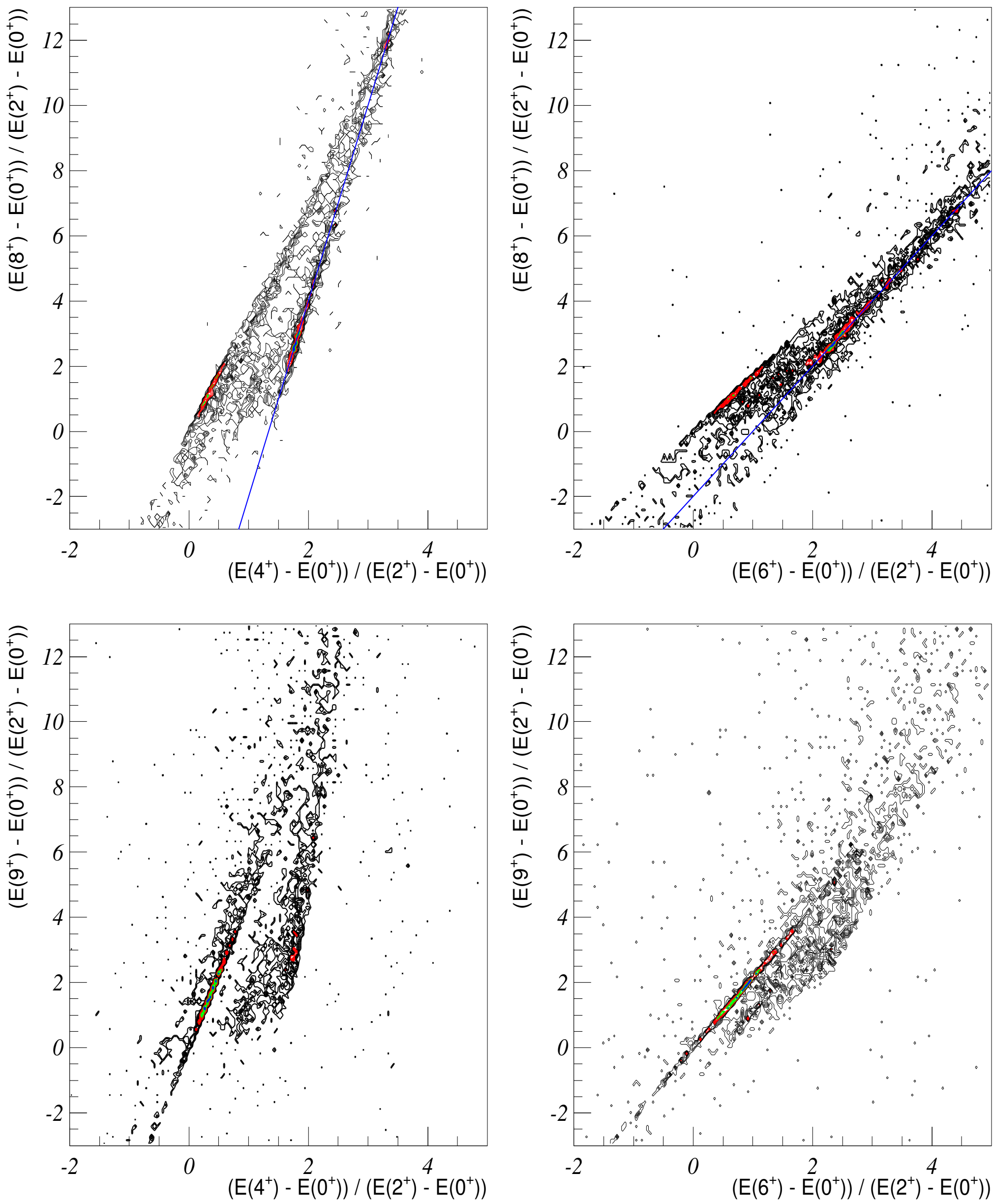


FIG. 3.21 – Même chose que pour la figure 3.19 mais pour les rapports $(E(8_1^+) - E(0_1^+))/(E(2_1^+) - E(0_1^+))$ et $(E(9_1^+) - E(0_1^+))/(E(2_1^+) - E(0_1^+))$. Les équations des droites tracées sont données en (3.45) et (3.48).

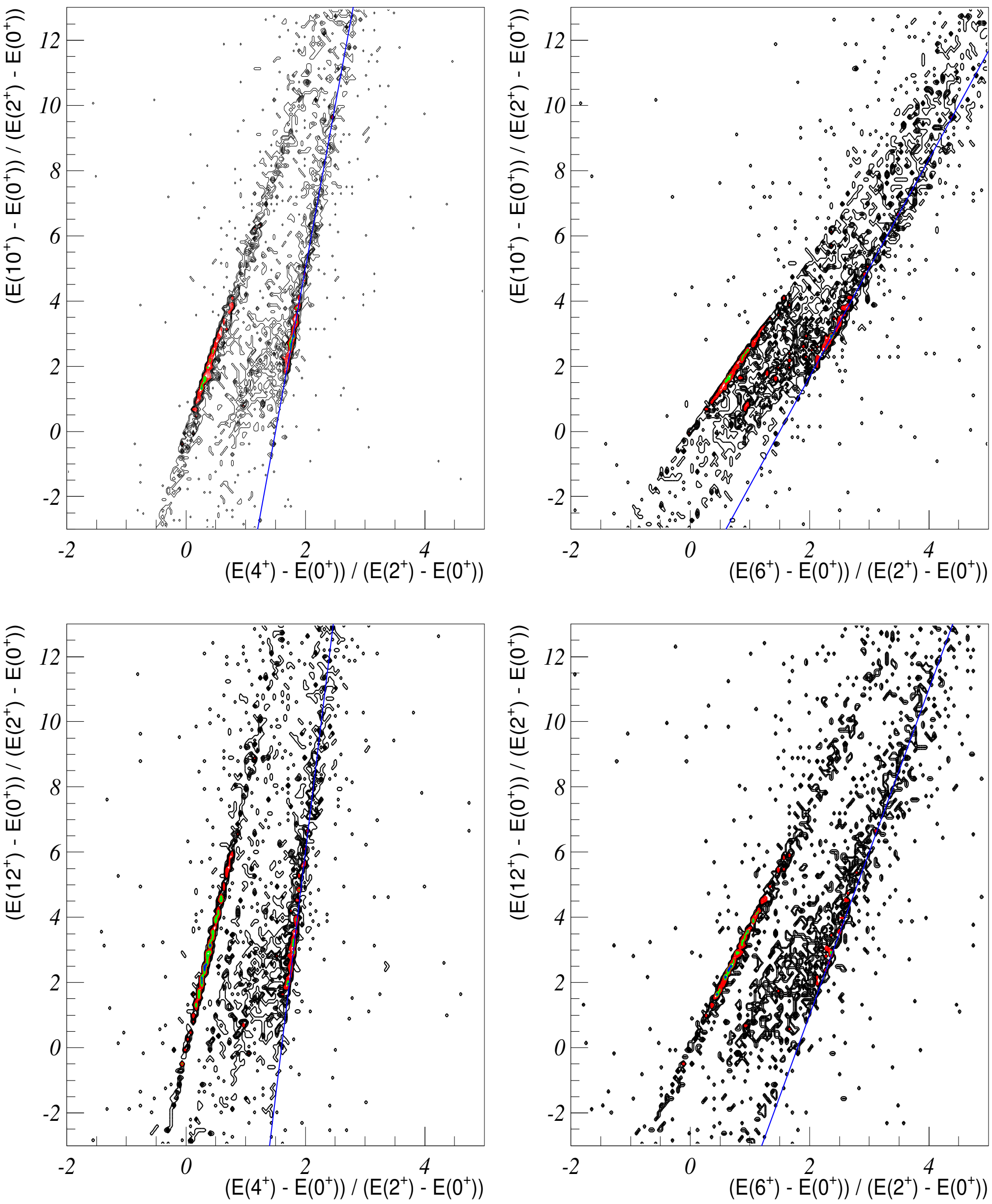


FIG. 3.22 – Même chose que pour la figure 3.19 mais pour les rapports $(E(10_1^+) - E(0_1^+))/(E(2_1^+) - E(0_1^+))$ et $(E(12_1^+) - E(0_1^+))/(E(2_1^+) - E(0_1^+))$. Les équations des droites tracées sont données en (3.46), (3.47), (3.49) et (3.50).

3.6.4 Différences entre cas diagonal et cas général

Des différences existent entre le cas diagonal et le cas général. En effet même si de nombreuses régularités ont été observées dans les spectres aléatoires obtenus en IBM, ces spectres ne sont pas aussi simples à analyser que les spectres de bosons d. Par exemple, si on s'intéresse à un système de 6 bosons s et d en interaction, l'hamiltonien conservant le moment angulaire à un- et deux-corps comporte 9 paramètres et le spectre possède 48 niveaux. Un système de 10 bosons d en a 55, l'hamiltonien ayant 3 paramètres. Les deux systèmes ont donc à peu près le même nombre de niveaux. Mais si on trace en échelle semi-logarithmique, les distributions entre niveaux successifs "normalisés" (c'est à dire que l'on divise les écarts par la différence entre le niveau le plus haut et le niveau le plus bas) on note une très nette différence entre ces deux systèmes :

- Dans le cas diagonal (bosons d), la distribution est représentée en pointillés sur la figure 3.23. On observe des pics régulièrement espacés. Ces régularités proviennent du fait que
$$\frac{E_{N\nu L} - E_{N\nu L-1}}{E_{N\nu L_{max}} - E_{N\nu L_{min}}} \propto 2L\,.$$
Il existe donc des spectres dont certains niveaux successifs qui ont mêmes nombres quantiques ν.
- Pour les bosons s et d, la distribution (traits pleins) est linéaire et ne présente pas du tout les régularités des spectres de bosons d. Cette différence résulte peut-être du fait qu'il n'est pas possible en général de repérer les états des systèmes IBM-1 par un ensemble complet de nombres quantiques. Cet étiquetage ne peut être réalisé que lorsque l'hamiltonien possède certaines symétries.

3.7 Conclusion et pistes à explorer

Pour la première fois, nous avons montré comment l'existence de propriétés géométriques provenant exclusivement de la conservation du moment angulaire et de l'espace considéré interdit à certains niveaux d'être le niveau fondamental et permet à d'autres de l'être. Dans le cas de paramètres gaussiens, nous avons même pu relier explicitement la valeur des pourcentages à ces propriétés géométriques. Nous avons montré notamment que certains niveaux ne pourront jamais avoir l'énergie la plus basse à cause de propriétés intrinsèques à l'espace de valence. Malgré la plus grande complexité des spectres du cas général par rapport à ceux du cas diagonal, certaines pistes semblent assez prometteuses compte tenu des régularités observées :

- Une approche de type champ moyen permettrait de se ramener au cas où les énergies s'écrivent comme une somme d'énergies de particules indépendantes donc à une situation assez proche du cas diagonal. Mais le problème réside dans

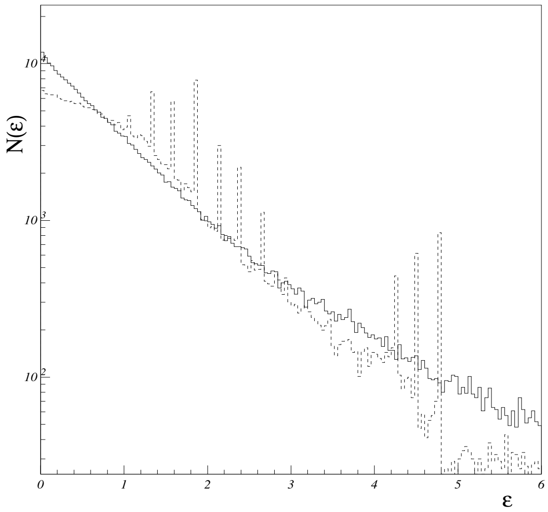


FIG. 3.23 – Distribution $N(\varepsilon)$ en échelle logarithmique des écarts ε entre niveaux successifs : en traits pleins pour 6 bosons sd (48 niveaux par spectre) et en traits pointillés pour 10 bosons d (55 niveaux par spectre). Ces deux distributions ont été calculées sur un ensemble de 5000 spectres.

la construction du champ moyen qui serait probablement auto-cohérent et par conséquent difficile à exprimer analytiquement en terme des paramètres de l'hamiltonien.

– Une seconde approche du problème serait d'essayer de voir tout simplement comment varient les spectres en modifiant non plus aléatoirement les paramètres mais en les faisant évoluer de façon "régulière" afin de tracer les "surfaces" d'énergies en fonction de ces paramètres.
– Une troisième analyse pourrait faire intervenir à la fois des considérations de symétrie et de théorie des perturbations. En réécrivant l'hamiltonien (au moins en IBM) en terme des opérateurs de Casimir des trois chaînes algébriques on pourrait peut-être considérer que certains termes prédominent et que les autres ne sont que des petites perturbations trop faibles pour bouleverser la séquence des niveaux. La pertinence d'une telle description est encouragée par la présence de régularités existant dans les spectres comme on peut le voir sur les figures 3.19, 3.20, 3.21 et 3.22.

Chapitre 4

Chaos et structure nucléaire

[...] Pour les pythagoriciens, l'harmonie s'étendait à l'univers entier ; l'ordre des cieux eux-mêmes s'exprimait par une gamme musicale. La musique des sphères ! Pour dire cela, il fallait un mot. Pythagore l'inventa : cosmos ! Le Bon Ordre et la beauté. Et l'histoire du monde se raconta comme la lutte du cosmos contre le chaos. [...]
Le théorème du perroquet - Denis Guedj.

4.1 Introduction

L'un des objectifs de la structure nucléaire est d'essayer de comprendre comment s'organisent les nucléons dans les noyaux.

Dans le domaine des basses énergies ($\leq$ 3-4 MeV) et pour des noyaux de la vallée de stabilité, on peut dégager essentiellement trois régimes associés aux mouvements collectifs des nucléons (cf par exemple [Iac87]) : les noyaux rotationnels, les noyaux vibrationnels et les noyaux "γ-soft".

Pour des énergies plus élevées, la multiplication du nombre de niveaux devient telle qu'il devient illusoire d'espérer pouvoir en extraire une quelconque régularité et il est préférable d'utiliser une approche statistique pour obtenir des informations sur le comportement des nucléons dans le noyau. Ainsi dans les années 1950-1960, Wigner [Wig55, Wig57, Wig58, Boh69] a développé une théorie des matrices aléatoires (RMT) en vue d'expliquer les spectres obtenus par diffusion des neutrons lents par des noyaux de masses moyennes ou lourdes. Les diffusions sucessives du neutron par les nucléons du noyaux pouvant être considérées comme étant aléatoires et indépendantes les unes des autres, les résonances sont interprétées comme des valeurs propres de matrices aléatoires. Principalement trois classes de matrices ont été introduites [Meh91, Dys62] :

1. L'ensemble gaussien orthogonal (GOE) qui est constitué de matrices symétriques réelles dont les éléments sont indépendants et gaussiens et dont la distribution de probabilité est invariante par transformations orthogonales.

2. L'ensemble gaussien unitaire (GUE) composé de matrices hermitiennes dont les éléments sont complexes avec des parties réelles et imaginaires distribuées suivant des lois gaussiennes indépendantes et dont la densité de probabilité est invariante sous transformations unitaires.
3. Enfin l'ensemble gaussien symplectique (GSE) constitué de matrices symplectiques.

De nombreux résultats numériques et analytiques ont pu être obtenus pour ces ensembles [Meh91].

D'autres ensembles de matrices hermitiennes ont été introduits notamment l'ensemble des matrices aléatoires correspondant à des opérateurs à deux-corps (TBRE) (voir par exemple [Boh71, Fre70]). Ce type d'ensemble semblait plus adapté pour déduire les propriétés des noyaux puisque l'interaction nucléaire est essentiellement à un- et deux-corps ce qui induit des *corrélations* entre les éléments de matrices ainsi que des distributions avec des *largeurs différentes*. En dépit de nombreux efforts, relativement peu de résultats analytiques ont été obtenus jusqu'à présent : en 1972, Gervois [Ger72] a montré que, pour des fermions, la distribution des énergies d'un tel hamiltonien était gaussien non pas semi-circulaire comme dans le cas de RMT et plus récemment Benet et collaborateurs [Ben01] ont pu déterminer quelques propriétés spectrales de ces opérateurs à partir des distributions des éléments de matrices.

Bohigas, Giannoni et Schmit [Boh84] ont proposé une conjecture qui relie le spectre d'un système quantique dont l'analogue classique serait chaotique avec les propriétés spectrales des matrices aléatoires. Ainsi la structure à haute énergie des noyaux serait associée à un mouvement non plus collectif des nucléons mais à un mouvement chaotique.

Il semblerait donc a priori que les nucléons dans le noyaux aient un comportement régulier aux basses énergies et un mouvement plus erratique pour des énergies plus importantes.

Ces deux types de comportement sont-ils compatibles ? Retrouve-t-on des traces du comportement chaotique des nucléons dans la partie à basse énergie ? Comment signe-t-on le caractère chaotique d'un système quantique et comment rendre compte quantitativement de ce comportement ? Dans les sections suivantes, nous tachons de répondre à ces questions aussi bien d'un point de vue expérimental que d'un point de vue théorique sans toutefois prétendre à l'exhaustivité.

4.2 Des preuves expérimentales d'un mouvement chaotique sur toute la gamme en énergies

Bohigas, Giannoni et Schmit ([Boh84]) ont étudié un système quantique correspondant au mouvement d'une particule libre dans un puits de potentiel infini dont le bord est un carré au milieu duquel se trouve un cercle. Dans le cas classique, le mouvement de la particule est chaotique. Pour l'analogue quantique, Bohigas et collaborateurs ont calculé 740 niveaux et ont trouvé que le spectre obtenu possède des propriétés proches de celles d'un spectre de matrices aléatoires :

1. la distribution des écarts entre niveaux successifs, s, suit une loi de Wigner :

$$P_W(s) = \frac{\pi s}{2} \exp(-\pi s^2/4) \tag{4.1}$$

2. la statistique de Dyson, $\Delta_3(L,x) = \frac{1}{L} Min_{A,B}[\int_x^{x+L}[n(e) - Ae - B]^2 de]$, qui mesure rigidité du spectre c'est à dire les corrélations entre niveaux éloignés, varie comme le logarithme de L. Dans le cas de systèmes intégrables, la rigidité varie linéairement.

Ces résultats les ont amenés à formuler la conjecture suivante : les systèmes quantiques dont l'analogue classique a un mouvement régulier ont un spectre dont la distribution des niveaux les plus proches suit une loi de Poisson :

$$P_P(s) = \exp(-s)\,, \tag{4.2}$$

tandis que ceux dont l'analogue est chaotique ont un spectre dont les propriétés sont proches de celles de matrices aléatoires (4.1).

Ce résultat permet d'interpréter les spectres expérimentaux des noyaux :

- si les donnés expérimentales s'approchent plutôt de la courbe (4.2) alors les nucléons ont un mouvement plutôt régulier sur les orbites,
- si ces données sont bien reproduites par la courbe (4.1), le mouvement sera plutôt chaotique.

Deux difficultés apparaissent lorsque l'on veut analyser les données : d'une part (i) il faut pouvoir assigner de façon non ambigüe le spin J et la parité π (et éventuellement l'isospin T) à tous les niveaux et d'autre part (ii) il faut disposer pour chacune des valeurs J^π d'une statistique suffisamment importante.

4.2.1 Les résonances de neutrons lents sur des noyaux lourds.

Les premières analyses ont été effectuées près du seuil de séparation d'un neutron où la densité de niveaux est grande. Ce domaine d'énergie peut être exploré par diffusion de neutrons lents sur des noyaux en mesurant les résonances. De telles analyses ont été effectuées par divers groupes de l'université de Columbia [Ros60, Des60, Gar64a, Gar64b, Gar65, Win68, Lio72, Rah72a, Rah72b, Lio73, Cam73, Rah74]. Le tableau 4.1 résume brièvement les résultats obtenus. La distribution de Wigner permet donc d'analyser et d'interpréter les données expérimentales. La rigidité donne également des résultats compatibles avec ceux obtenus pour l'ensemble gaussien orthogonal. Il

Noyaux	^{238}U	^{232}Th	^{127}I	^{166}Er	^{152}Sm	^{154}Sm	$^{79-81}$Br	^{75}As
Niveaux	237	223	217	109	70	27	140	128
Stat.	Wig.	Wig.	Wig.	Wig.	Wig.	Wig.	Wig.	Wig.
Noyaux	$^{107-109}$ Ag	^{133}Cs	^{151}Eu	^{153}Eu	^{183}W	^{182}W	^{184}W	^{186}W
Niveaux	198	123	73	78	49	40	29	22
Stat.	2Wig.	2Wig.	2Wig.	2Wig.	2Wig.	Wig.	Wig.	Wig.
Noyaux	^{93}Nb	^{171}Yb	^{173}Yb	^{172}Yb	^{174}Yb	^{176}Yb	^{158}Gd	^{160}Gd
Niveaux	154	30	21	54	18	20	95	56
Stat.	4Wig.	2Wig.	2Wig.	Wig.	Wig.	Wig.	Wig.	Wig.

TAB. 4.1 – La ligne “Niveaux” contient le nombre de résonances détectées pour chaque isotope et la ligne “Stat.” indique quelle loi qui reproduit le mieux la distribution des écarts entre niveaux successifs : Wig., 2 Wig. et 4 Wig. correspondent respectivement à la distribution de Wigner, à la superposition de deux distributions de Wigner indépendantes et à la superposition de quatre distributions de Wigner. La superposition est justifiée par la possibilité de peupler un état par diffusion d'ondes s ou d'ondes p.

semblerait donc qu'un grand nombre de noyaux ont un caractère chaotique dans ce domaine d'énergie.

L'analyse des résonances de neutrons lents et de protons lents a été approfondie par Haq et collaborateurs [Haq82, Boh85] qui ont regroupé 30 séquences de 27 noyaux pour constituer un ensemble de 1407 niveaux. Différentes propriétés statistiques de cet ensemble, telles que la rigidité spectrale moyenne, la variance de cette rigidité et des moments d'ordres supérieurs..., ont été comparées aux propriétés statistiques des matrices aléatoires de GOE et d'autres ensembles de matrices aléatoires (GUE notamment). Les résultats expérimentaux sont en très bon accord avec les résultats de GOE.

4.2.2 Les niveaux proches du fondamental

– Après les études réalisées pour les niveaux à haute énergie d'excitation, des études ont été faites par Brody et collaborateurs [Bro76] concernant la région proche du fondamental. Les données expérimentales comprenant 135 niveaux ont permis de conclure à l'existence d'une répulsion de niveaux dans ce domaine d'énergie. Brody dans [Bro73] a introduit une distribution intermédiaire entre la courbe de Poisson et la courbe de Wigner. Cette fonction qui ne dépend que d'un paramètre ω est définie par :

$$P_{BR}(s) = Ks^{\omega} \exp(-\alpha s^{(\omega+1)}) , \tag{4.3}$$

avec $K = (\omega + 1)\alpha$ et $\alpha = \left[\Gamma\left(\frac{\omega+2}{\omega+1}\right)\right]^{\omega+1}$. Pour ω nul, la fonction de Brody correspond à la fonction de Poisson et pour ω égal à 1, on retrouve la fonction de Wigner. Ainsi cette paramétrisation permet de passer d'un régime intégrable à un régime chaotique et de quantifier le degré de régularité ou de chaoticité des spectres.
La statistique des niveaux expérimentaux peut être approximée par une fonction de Brody avec ω valant 0.69 ± 0.21. Pour l'ensemble GOE, ω est proche de 0.98 tandis que des calculs Monte Carlo ([Cot74]) avec une interaction à deux-corps aléatoire donnent $\omega = 0.80 \pm 0.05$
L'accord serait donc meilleur avec le dernier modèle ce qui confirme que les nucléons évoluent sur les orbites d'un modèle en couches et que leur mouvement au sein du noyau serait plutôt le résultat de collisions aléatoires.

- Les conditions (i) et (ii) ont aussi pu être réunies pour l'^{26}Al qui a été étudié par Mitchell et collaborateurs [Mit88, Shi90, Shi91]. Ils ont considéré les 100 premiers niveaux de parité positive dans [Mit88] dont les énergies allaient 0 MeV jusqu'à 8 MeV d'excitation tandis que dans [Shi90] ils ont aussi tenu compte des états de parité négative. L'isospin de chacun des niveaux est également connu et les moments angulaires varient de 1 à 5. Le nombre de niveaux pour un J^π donné est compris entre 10 et 25 (cf tableau 4.2).

J^π	N	$T=0$	$T=1$	J^π	N	$T=0$	$T=1$
1^+	19	16	3	1^-	10	8	2
2^+	25	16	3	2^-	11	9	2
3^+	23	18	5	3^-	12	10	2
4^+	20	13	7	4^-	10	9	1

TAB. 4.2 – Nombre de niveaux, N, pour un moment angulaire, J, et une parité, π, donnés [Shi90].

Après s'être affranchi des fluctuations liées au domaine d'énergie étudié, il ressort que la distributions des plus proches voisins est intermédiaire entre la distribution de Wigner et la loi de Poisson avec une “préférence” pour la première loi. La rigidité est également plus proche de celle associé à GOE que de celle associée à un système régulier. Une méthode des moindres carrés permet d'obtenir les valeurs de ω paramétrisant les fonctions de Brody les plus proches des distributions expérimentales : ces valeurs sont résumées dans le tableau 4.3[1].
J'ai représenté sur la figure 4.1 les courbes correspondantes. En tirets, j'ai tracé la distribution de Poisson, en trait pleins la distribution de Wigner, en pointillés

[1]Notons que les auteurs donnent des valeurs de ω légèrement différentes dans [Mit01].

	Total	$\pi = 1$	$\pi = -1$	$T = 0$	$T = 1$
ω	0.47	0.44	0.57	0.56	0.45

TAB. 4.3 – Valeurs de ω pour tous les niveaux, pour ceux de parité, π, positive, de parité négative, d'isospin, T, 0 et 1 [Shi90].

la distribution de Brody avec $\omega = 0,47$ et en tirets-pointillés, la distribution de Brody avec $\omega = 0,56$.
Cette étude a permis de tester la symétrie d'isospin. En effet les résultats obtenus lorsque que l'isospin est un bon nombre quantique doivent être différents de ceux trouvés s'il n'est pas conservé :

- Si l'isospin est exactement conservé alors la distribution obtenue en tenant compte de toutes les valeurs de T doit être plus proche d'une loi de Poisson (les spectres ayant des isospins différents sont indépendants les uns des autres donc il n'y a pas de répulsion de niveaux entre états d'isospins différents). En revanche, pour les distributions regroupant des états de même isospin, on doit observer une répulsion de niveaux.
- Par contre si l'isospin n'est pas conservé, les bons nombres quantiques sont uniquement le moment angulaire et la parité : une distribution utilisant tous les niveaux quelque soit l'isospin doit présenter une répulsion de niveaux semblable à celle des distributions ne considérant que des états de même isospin.

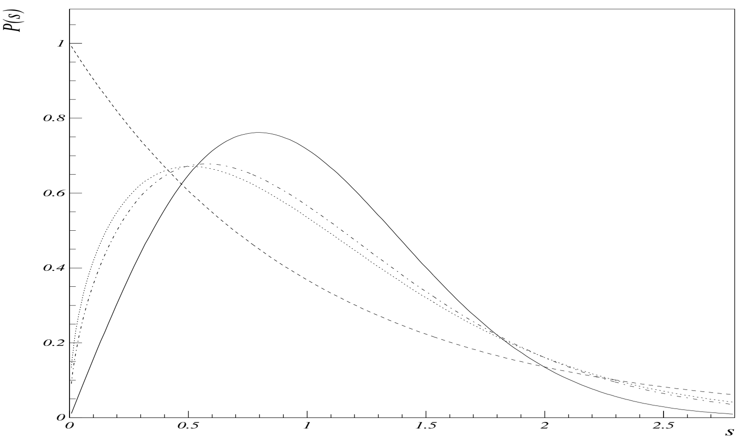


FIG. 4.1 – Courbes de Brody pour les paramètres reproduisant les données expérimentales de l'^{26}Al : en pointillés $\omega = 0.47$ et en tirets-pointillés $\omega = 0.56$. La courbe en tirets représente la distribution de Poisson et la courbe en traits pleins la distribution de Wigner.

Or expérimentalement, on observe peu de différence entre la distribution faisant

intervenir tous les niveaux et celles ne faisant intervenir que des niveaux à isospin fixé. Cela incite à penser que l'isospin n'est pas conservé pour le noyau d'^{26}Al. Mais il se peut que cette brisure de symétrie soit faible puisqu'il suffit d'une légère brisure pour que l'on retrouve un comportement type "Wigner" ([Pan81]).
Une étude similaire a été effectuée pour le ^{30}P qui se trouve également sur la ligne $N = Z$ et qui est aussi impair-impair. Il semblerait que l'isospin soit aussi brisé dans ce noyau [Mit01].

4.3 Des confirmations théoriques : calculs "modèle en couches" et calculs IBM

Des études théoriques ont également été réalisées pour savoir si un tel comportement chaotique se retrouvait dans les spectres obtenus par des calculs "modèle en couches" avec des interactions réalistes et également en IBM. Ces calculs permettent de s'affranchir des contraintes existant dans le cas expérimental puisque les niveaux ont des bons nombres quantiques et qu'il est actuellement possible de diagonaliser de matrices ayant de grandes dimensions et par conséquent d'avoir une bonne statistique : par exemple dans [Cau96] l'espace de valence pouvait compter, dans certains cas, jusqu'à 121440 états et il pouvait y avoir jusqu'à 8026 états de même $J^{\pi}T$.

4.3.1 Calculs "modèle en couches"

Les calculs "modèle en couches" ont tout d'abord été effectués pour la couche sd (c'est à dire pour les orbites $0d_{5/2}$, $0d_{3/2}$ et $1s_{3/2}$) : Ormand et Broglia dans [Orm88] ont considéré une interaction réaliste conservant la parité π et le moment angulaire J avec les noyaux impairs-impairs ^{22}Na, ^{26}Al, ^{30}P et ^{34}Cl. Lorsque l'interaction conserve en outre l'isospin, la distribution des écarts entre plus proches voisins est très proche de la distribution de Wigner. La rigidité de Dyson suit assez bien la courbe prédite par GOE pour $L \leq 60$ mais s'en écarte à partir de $L = 80$.

Des calculs ont été menés avec une interaction brisant l'isospin pour l'isotope ^{26}Al : les auteurs ont déterminés les 200 premiers états 0^+ de plus basse énergie. La comparaison entre ces calculs et ceux effectués lorsque l'isospin est conservé montre que les distributions des écarts entre plus proches voisins et la rigidité dépendent assez notablement de la conservation ou non de ce nombre quantique : dans le cas de la brisure de la symétrie d'isospin, il y a une répulsion de niveaux et la courbe est assez proche de la fonction de Wigner tandis qu'avec une interaction conservant l'isospin, une telle répulsion n'est pas observée et la distribution est intermédiaire entre une courbe de Poisson et une courbe de Wigner c'est à dire que la distribution s'approche d'une superposition de plusieurs fonctions de Wigner. La différence est encore plus remarquable pour la rigidité. Ces calculs corroborent ceux réalisés par Paar et collaborateurs [Paa89] : en effet selon leurs calculs en modèle en couches pour le ^{24}Mg avec une interaction Brown-Wildenthal, si on regroupe les niveaux 1^+ ayant des isospins différents, la distribution des niveaux successifs est proche d'une courbe de Poisson tandis lorsque l'on considère uniquement les niveaux d'isospin nul alors la distribution est proche de celle de Wigner.

Malheureusement les incertitudes sur les données expérimentales (dues au petit nombre de niveaux connus (une centaine) et à la procédure de renormalisation des spectres expérimentaux) ne permettent pas de trancher clairement en faveur de l'une ou l'autre des situations même s'il semblerait que l'isospin soit brisé pour ce noyau.

D'autres noyaux de la couche *sd*, à savoir les isotopes ^{22}O, ^{22}Ne et ^{24}Mg, ont fait l'objet d'investigation de la part de Bae et collaborateurs [Bae92]. Ces noyaux présentent aussi un caractère chaotique. Les auteurs se sont aussi intéressés à des isobares du ^{212}Pb : ^{212}Rn, ^{212}Pb, ^{212}At, ^{212}Bi et ^{212}Po. On observe alors une transition entre un régime chaotique et un régime régulier. En particulier les noyaux ^{212}Rn et ^{212}Pb n'ayant qu'un seul type de nucléons de valence ont des distributions qui peuvent être approchées par des fonctions de Brody ayant des paramètres ω inférieurs à 0.67 (cf tableaux 4.4).

Noyaux	^{46}Va	^{46}Ti	^{46}Sc	^{46}Ca	^{48}Ca	^{50}Ca	^{212}Rn	^{212}Pb	^{212}At	^{212}Bi	^{212}Po
n	3	4	5	6	8	10	0	4	1	3	2
z	3	2	1	0	0	0	4	0	3	1	2
ω	0.93	0.94	0.99	**0.51**	**0.66**	**0.62**	**0.2**	**0.58**	0.77	0.96	1.15

TAB. 4.4 – Valeurs de ω pour différents noyaux de la couche fp et pour les isobares du ^{212}Pb (d'après [Bae92] et [Cau96]). n et z sont respectivement les nombres de neutrons et de protons de valence.

Cette transition d'un régime chaotique vers un régime intégrable dans le cas de ces noyaux sphériques serait liée tout d'abord à une augmentation de la taille de noyaux alors que la portée de l'interaction reste quasiment inchangée lorsque que l'on passe de noyaux de la couches *sd* aux noyaux proches du Pb. L'intensité de la force jouerait également un rôle important : les noyaux de ^{212}Rn et ^{212}Pb seraient plus réguliers que les autres isobares parce que leurs nucléons de valence sont de même nature et que l'interaction neutron-neutron ou proton-proton est plus faible que l'interaction neutron-proton.

Plus récemment des calculs ont été réalisés pour la couche fp complète [Cau96, Góm95]. Les calculs ont concerné des noyaux de masse variant de 46 à 50 avec un cœur inerte de ^{40}Ca et une interaction de type Kuo-Brown modifiée. Contrairement à ce qui se passe pour la couche *sd* où tous les noyaux semblent avoir un comportement chaotique, des noyaux tels les isotopes ^{46}Ca, ^{48}Ca et ^{50}Ca du calcium, ne présentent pas les caractéristiques des systèmes chaotiques. En revanche les noyaux ^{46}Va, ^{46}Ti et ^{50}Sc ont des distributions proches de (4.1). Les auteurs interprètent ces résultats en remarquant que ces derniers noyaux font intervenir à la fois des neutrons et des protons de valence alors que les isotopes du calcium ne font intervenir qu'un seul type de nucléons de valence et que l'interaction neutron-proton est en général plus importante que l'interaction entre nucléon de même type. Ainsi le déplacement des niveaux du champs moyen est-il plus important pour les noyaux ^{46}Va, ^{46}Ti et ^{50}Sc que pour les isotopes du calcium et le mouvement des nucléons sur les orbites de valence devient plus important et plus désordonné. De plus si on augmente l'intensité du champ moyen, on augmente au fur et à mesure la régularité du mouvement tandis que si on tient compte des niveaux de plus en plus excités alors on obtient une distribution qui se rapproche de la courbe de Wigner.

En conclusion, les calculs modèle en couches révèlent l'existence de régime chaotique en particuliers pour le noyaux de la couche *sd*. En revanche pour la couche fp ainsi que pour des noyaux lourds, il existe des situations intermédiaires. L'émergence d'un mouvement relativement régulier des nucléons sur les orbites est fortement lié à la nature des nucléons ainsi qu'à la masse (donc à la taille) du système.

4.3.2 Calculs IBM

Le modèle IBM permet de décrire de façon satisfaisante le mouvement collectif des nucléons dans les noyaux. Paar et Vorkapić [Paa88] comparent les calculs IBM et l'analyse statistique des spectres expérimentaux faite par Abul-Magd et Weidenmüller [AM85] selon laquelle on pourrait classer les états 2^+ et 4^+ comme ayant un comportement régulier tandis que les états ayant d'autres moments angulaires (y compris 0^+) seraient chaotiques. Pour cette comparaison, les auteurs ont considéré des systèmes à 20 bosons et des hamiltoniens présentant une symétrie dynamique $SO(6)$ ou $SU(3)$ qui servent généralement à reproduire les spectres rotationnels. Dans la symétrie $SO(6)$, la rigidité, $\Delta_3(L,x)$, associée aux niveaux de moments angulaires et de parité 2^+ et 4^+ est très proche d'une droite. En revanche pour des états de moment angulaire et de parité 0^+ et 3^+, la rigidité est intermédiaire entre la droite et la courbe logarithmique.

Lorsque l'hamiltonien possède la symétrie dynamique $SU(3)$, la régularité des états 2^+ est moins nette : on observe des déviations par rapport au comportement linéaire attendu. En revanche le comportement reste linéaire dans le cas des 4^+ tandis que les états 0^+ et 3^+ conservent une rigidité très proche du logarithme.

Cette séparation entre d'une part états 2^+ et 4^+ et d'autre part états 0^+ et 3^+ de se retrouve également dans la distribution des plus proches voisins : pour les premiers, le paramètre ω vaut 0.22 alors qu'il vaut 0.41 pour les seconds.

Il y a donc un accord entre les observations expérimentales et les calculs IBM. Pour N très grand, les calculs IBM sont proches de l'intégrabilité et plus on diminue le nombre de bosons plus le système peut être chaotique.

Cette étude a été approfondie par Alhassid et collaborateurs [Alh90, Alh91a, Alh93, Whe93, Alh91b, Alh92a, Alh92b, Pat94]. Ils ont considéré une famille d'hamiltoniens permettant de décrire une transition de la chaîne (II) associée à $SU(3)$ de IBM vers la chaîne (III) associée à $SO(6)$:

$$\hat{H} = E_0 + c_1 \hat{L}^2 + c_2 \hat{Q}^\chi \cdot \hat{Q}^\chi \, ,$$

où $\hat{Q}^\chi$ est l'opérateur quadripolaire :

$$\hat{Q}^\chi = \left[d^\dagger \times \tilde{s} + s^\dagger \times \tilde{d} \right]^{(2)} + \chi \left[d^\dagger \times \tilde{d} \right]^{(2)} .$$

Lorsque $\chi = -\sqrt{7}/2 \simeq -1.32$, l'hamiltonien correspond à des noyaux rotationnels (limite $SU(3)$) et lorsque $\chi = 0$, les noyaux présentent une symétrie $SO(6)$. Trois quantités ont servi pour évaluer le degré de régularité du mouvement des nucléons dans le noyau en fonction de la valeur de χ [Alh90] :

1. la distribution des niveaux successifs ;
2. la rigidité des spectres et
3. la distribution des élements de matrice réduits de l'opérateur de transition électromagnétique $\hat{T}(E2) \propto \hat{Q}^\chi$.

Le paramètre χ varie de $-\sqrt{7}/2$ à 0 ; pour ces deux valeurs extrêmes, on s'attend à ce que les systèmes soient intégrables puisque l'on peut trouver des ensembles complets de grandeurs conservées qui correspondent à des intégrales de mouvement. C'est effectivement ce que les auteurs ont constaté pour un système de 20 bosons : aussi bien pour $\chi = -\sqrt{7}/2$ que pour $\chi = 0$, les distributions des niveaux successifs ayant même moment angulaire sont proches d'une loi de Poisson, la rigidité est quasiment linéaire et la distribution des éléments de matrice de l'opérateur $\hat{T}(E2)$ s'éloigne de la loi de Porter-Thomas qui correspond à la distribution attendue pour les systèmes non-intégrables : on remarque notamment un élargissement de ces distributions en raison de la conservation de nombres quantiques par l'opérateur de transition, ce qui interdit des transitions entre certains états. En revanche, pour les valeurs de χ intermédiaires, les distributions des écarts entre niveaux successifs se rapprochent de la courbe de Wigner : en particulier, le chaos devient maximal pour $\chi \simeq -0.6$. La rigidité perd également son caractère linéaire pour se rapprocher d'un loi logarithmique. La distribution des éléments de matrice de transition électromagnétique est de mieux en mieux reproduite par la distribution de Porter-Thomas : l'accord est maximal pour $\chi \simeq -0.7$ même si des écarts entre la distribution obtenue et la loi de Porter-Thomas persistent.

Une étude comparative entre chaos quantique et chaos classique a été faite [Alh90, Alh91b, Alh92a]. En effet on peut construire un hamiltonien classique en associant aux bosons s et d 6 paramètres liés à la déformation monopolaire et quadripolaire. La conservation du nombre de bosons et du moment angulaire sont des contraintes imposées lors de la résolution des équations du mouvement classique. Cette résolution a été effectuée à l'aide d'une méthode Monte-Carlo et elle a permis, pour chaque valeur de χ, de déterminer d'une part la fraction du volume de l'espace des phases pour laquelle le mouvement classique est chaotique et d'autre part les plus grands exposants de Lyapounov moyens. Pour les valeurs extrèmes de χ, le système classique est régulier (comme dans le cas quantique) et pour les valeurs intermédiaires, il présente une évolution vers le chaos qui est atteint pour $-0.8 \leq \chi \leq -0.4$. L'évolution est plus douce du côté de $\chi = -\sqrt{7}/2$ que du côté de $\chi = 0$.

4.4 Une autre fonction pour interpréter les distributions

La distribution de Brody permet de reproduire de façon très satisfaisante les données expérimentales et de décrire des situations intermédiaires entre l'intégrabilité et la chaoticité mais le paramètre ω n'a malheureusement pas d'interpétation physique simple.

En étudiant un modèle simple de matrices aléatoires, nous avons trouvé [Alh89, Cha02b][2] une distribution dépendant d'un seul paramètre qui pourrait aussi être employée pour décrire des systèmes chaotiques mais dont le degré d'irrégularité est moindre que celui de l'ensemble gaussien orthogonal, de sorte que, même si nous ne parvenons pas à décrire les systèmes totalement réguliers, nous pouvons interpréter les situations intermédiaires.

Considérons donc un ensemble de matrices symétriques réelles de dimension 2 :

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

On suppose que les éléments de matrices sont des variables aléatoires gaussiennes, indépendantes et de variances σ_{ij}. On peut montrer [Cha02b] que la distribution des valeurs propres, E_α et E_β, et de l'angle θ de la rotation qui permet de passer de la base initiale à la base des vecteurs propres est donnée par :

$$\begin{aligned} p\left(E_\alpha, E_\beta, \theta\right) &= \frac{E_\alpha - E_\beta}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2\sigma_{12}^2}} \exp\left\{-\frac{\left[E_\alpha\Sigma^2 - (E_\alpha - E_\beta)\left(\sigma_{11}^2\cos^2\theta + \sigma_{22}^2\sin^2\theta\right)\right]^2}{2\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2\Sigma^2}\right\} \\ &\quad \exp\left[-\frac{1}{2}(E_\alpha - E_\beta)^2\left(\frac{\cos^2(2\theta)}{\Sigma^2} + \frac{\sin^2(2\theta)}{4\sigma_{12}^2}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.5}$$

où $\Sigma^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2$ et $\varepsilon = E_\alpha - E_\beta \geq 0$.

[2] Les deux articles proposent la même loi (4.8) pour la distribution des niveaux successifs : nous avons obtenu ce résultats en ignorant que Alhassid et Levine avaient déjà travaillé sur ce type de matrices. Nos calculs sont légèrement plus généraux.

En intégrant sur l'angle et sur les valeurs propres

$$\tilde{p}\left(\varepsilon\right) \equiv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dE_\alpha \int_{-\infty}^{E_\alpha} dE_\beta \; p\left(E_\alpha, E_\beta, \theta\right) \delta\left(\varepsilon - E_\alpha + E_\beta\right), \tag{4.6}$$

nous déduisons la distributions des écarts en énergies :

$$\tilde{p}\left(\varepsilon\right) = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\Sigma^2 \sigma_{12}^2}} \exp\left[-\frac{\varepsilon^2\left(\Sigma^2 + 4\sigma_{12}^2\right)}{16\Sigma^2\sigma_{12}^2}\right] I_0\left(\frac{\varepsilon^2\left(\Sigma^2 - 4\sigma_{12}^2\right)}{16\Sigma^2\sigma_{12}^2}\right), \tag{4.7}$$

I_0 désignant la fonction de Bessel modifiée de première espèce.

Supposons maintenant que les termes diagonaux ont la même variance valant χ fois la variance des termes non-diagonaux ($\chi = \sigma_{11}^2/\sigma_{12}^2$ c'est à dire $= \sigma_{11} = \chi\sigma_{12}^2 = \chi\sigma^2$). Dans ce cas, la distribution (4.6) se simplifie :

$$\tilde{p}_\chi(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\chi}2\sigma^2} \exp\left(-\frac{\left(\chi+2\right)\varepsilon^2}{16\chi\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{(\chi-2)\varepsilon^2}{16\chi\sigma^2}\right). \tag{4.8}$$

Lorsque χ vaut 2, on retrouve très exactement la courbe de Wigner.

Cette distribution a un comportement linéaire pour les petites valeurs de ε :

$$\tilde{p}_\chi(\varepsilon) \propto \frac{1}{\sqrt{2\chi}2\sigma^2}\varepsilon, \tag{4.9}$$

et un comportement gaussien quand ε tend vers l'infini :

$$\tilde{p}_\chi(\varepsilon) \propto \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\mid \chi - 2 \mid \sigma^2}} \exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{4\chi\sigma^2}\right) & \chi \neq 2 \\ \dfrac{\varepsilon}{4\sigma^2} \exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{8\sigma^2}\right) & \chi = 2 \end{cases}. \tag{4.10}$$

Notons la singularité du comportement à l'infini pour $\chi = 2$: la décroissance est moins rapide en raison du terme multiplicatif ε. On peut calculer les moments de cette distribution et en particulier l'écart moyen, $D = \int \varepsilon \tilde{p}_\chi d\varepsilon$:

$$D = 4\chi\sqrt{2\pi}(\chi+2)^{-3/2} F\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 1, \left(\frac{\chi-2}{\chi+2}\right)^2\right],$$

où F est la fonction hypergéométrique. À partir de cette expression, nous avons déduit la distribution des écarts sans dimension :

$$q_\chi(s) = D\,\tilde{p}_\chi(sD). \tag{4.11}$$

Pour $\chi = 2$, c'est exactement la distribution de Wigner (4.1). On peut alors montrer que pour χ et $\chi' = 4/\chi$, les deux distributions sont égales. Cela signifie que l'on peut

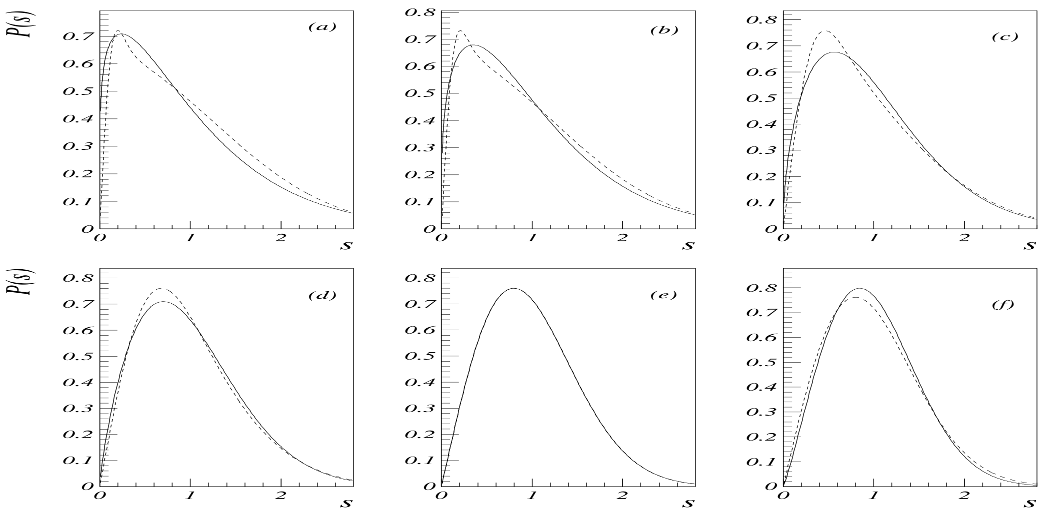


FIG. 4.2 – En traits pleins sont représentées des courbes de Brody pour différentes valeurs de ω et en pointillés la distribution (4.11) la plus proche. Les couples $(\omega\,;\,\chi)$ sont respectivement (0.2 ; 252) pour (a), (0.3 ; 220) pour (b), (0.54 ; 32.2) pour (c), (0.77 ; 8.375) pour (d), (1 ; 2) pour (e) et (1.15 ; 2.19) pour (f).

simplement s'intéresser aux distributions ayant χ supérieur ou égal à 2. La distribution (4.11) est normalisée à 1 et sa moyenne vaut également 1.

Nous avons déterminé les paramètres χ qui permettaient d'avoir les distributions (4.11) les plus proches de fonctions de Brody données en minimisant

$$\int_0^\infty \parallel q_\chi(s) - P_{BR}(s) \parallel^2 ds\,.$$

Nous présentons sur la figure 4.2, les résultats obtenus pour les couples $(\omega\,;\,\chi)$ valant respectivement (0.2 ; 252) (a), (0.3 ; 220) (b), (0.54 ; 32.2) (c), (0.77 ; 8.375) (d), (1 ; 2) (e) et (1.15 ; 2.19) (f). On constate un bon accord entre les deux types de distributions.

La nouvelle distribution a une interprétation physique assez simple : pour cela, considérons maintenant la distribution des angles que font les vecteurs propres par rapport à la base canonique :

$$r_\chi\left(\theta\right) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\chi}{2}}\frac{1}{\left[1+\frac{1}{2}\left(\chi-2\right)\sin^2\left(2\theta\right)\right]}\,. \tag{4.12}$$

On a tracé cette distribution angulaire sur la figure 4.3 pour χ valant 1, 2 et 5. Pour $\chi = 2$, la distribution est uniforme : il n'y a aucune direction priviligiée (la distribution des matrices est invariante sous les transformations orthogonales). Remarquons que pour χ et $\chi' = 4/\chi$, les deux distributions sont en quadrature. Quand χ tend vers l'infini, la distribution est de plus en plus piquée autour de 0 et $\pi/2$ ce qui veut dire que la base canonique est fortement favorisée. L'interprétation physique que l'on peut donner pour des distributions ayant un paramètre χ différent de 2 est donc la suivante : dans ces situations intermédiaires, le système est chaotique mais son degré de désordre est moindre que dans le cas où $\chi = 2$. En effet $\chi = 2$ correspond à la situation de désordre maximal puisqu'il n'y a aucune direction privilégiée et $\chi > 2$ correspond à un régime moins chaotique mais qui n'est cependant jamais régulier.

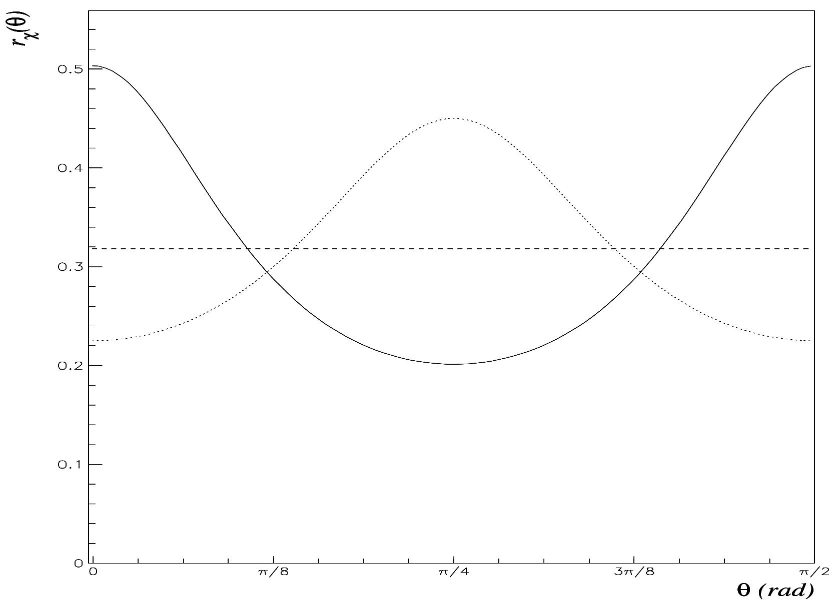


FIG. 4.3 – Distributions angulaires (4.12) pour $\chi = 1$ (pointillés), $\chi = 2$ (tirets) et $\chi = 5$ (traits pleins).

4.5 Application à d'autres domaines de la physique

La distribution (4.11) pourrait être utilisée dans des domaines autres que la physique nucléaire (cf par exemple [Bro81, Guh98]) où de nombreux systèmes présentent des spectres dont les propriétés statistiques se situent entre la statistique de Poisson et celle de Wigner.

4.5.1 Physique atomique

Ainsi en physique atomique, Jonckheere et collaborateurs [Jon98] utilisent la distribution (4.13) dite de semi-Poisson [Gré98, Bog99] pour décrire les propriétés spectrales d'un atome non-hydrogénoïde dans un champ magnétique de faible intensité.

$$\tilde{p}_{SP}(s) = 4s \exp\left(-2s\right). \tag{4.13}$$

Or cette distribution peut être approchée par la fonction de Rayleigh-Rice (4.11) pour $\chi \simeq 30$. Par conséquent on peut expliquer ces données expérimentales avec le modèle simple présenté au-dessus.

D'autres études ont été menées en spectroscopie atomique : par exemple, Main et collaborateurs [Mai98] ont calculé le spectre d'un atome d'hydrogène dans des champs électriques et magnétiques ayant des orientations mutuelles arbitraires. L'analyse statistique de leurs résultats sont résumés sur la figure 4.4. Chacune des petites vignettes correspond à la distribution obtenue pour un angle donné entre les deux champs. Ils ont calculé les paramètres ω de la fonction de Brody qui approche le mieux ces distributions : pour (a) $\omega = 0.1$, (b) $\omega = 0.2$, (c) $\omega = 0.45$, (d) $\omega = 0.3$ et pour (e) $\omega = 0.05$. Notre modèle peut donc aussi servir à interpréter ces résultats : en fonction de l'angle entre les champs le mouvement des electrons sur les orbites serait plus ou moins régulier ce qui est en accord avec les sections de Poincaré qui sont tracées dans [Mai98].

4.5.2 Billards quantiques

Comme on a vu précédemment, l'étude des billiards de Sinaï a permis à Bohigas et collaborateurs de caractériser le mouvement chaotique en mécanique quantique. Ces systèmes continuent de faire l'objet d'investigation : en changeant la forme du billiard, en ajoutant des ouvertures sur les bords..., de nombreux résultats illustrant un comportement intermédiaire entre le chaos et la régularité ont pu être obtenus (voir par exemple [Ger99, Ber01b, Rus01, Sai01]). Là encore la distribution (4.11) pourrait être utilisée.

4.6 Conclusion

Les interactions effectives qui décrivent bien le mouvement collectif des noyaux aux basses énergies peuvent présenter des caractéristiques traditionnellemnet associées au chaos. Avec une interaction semblable, d'autres ont un comportement plus régulier. Ces différences proviendraient

1. de la nature de nucléons de valence,
2. de la conservation plus ou moins exacte de certaines symétries comme l'isospin

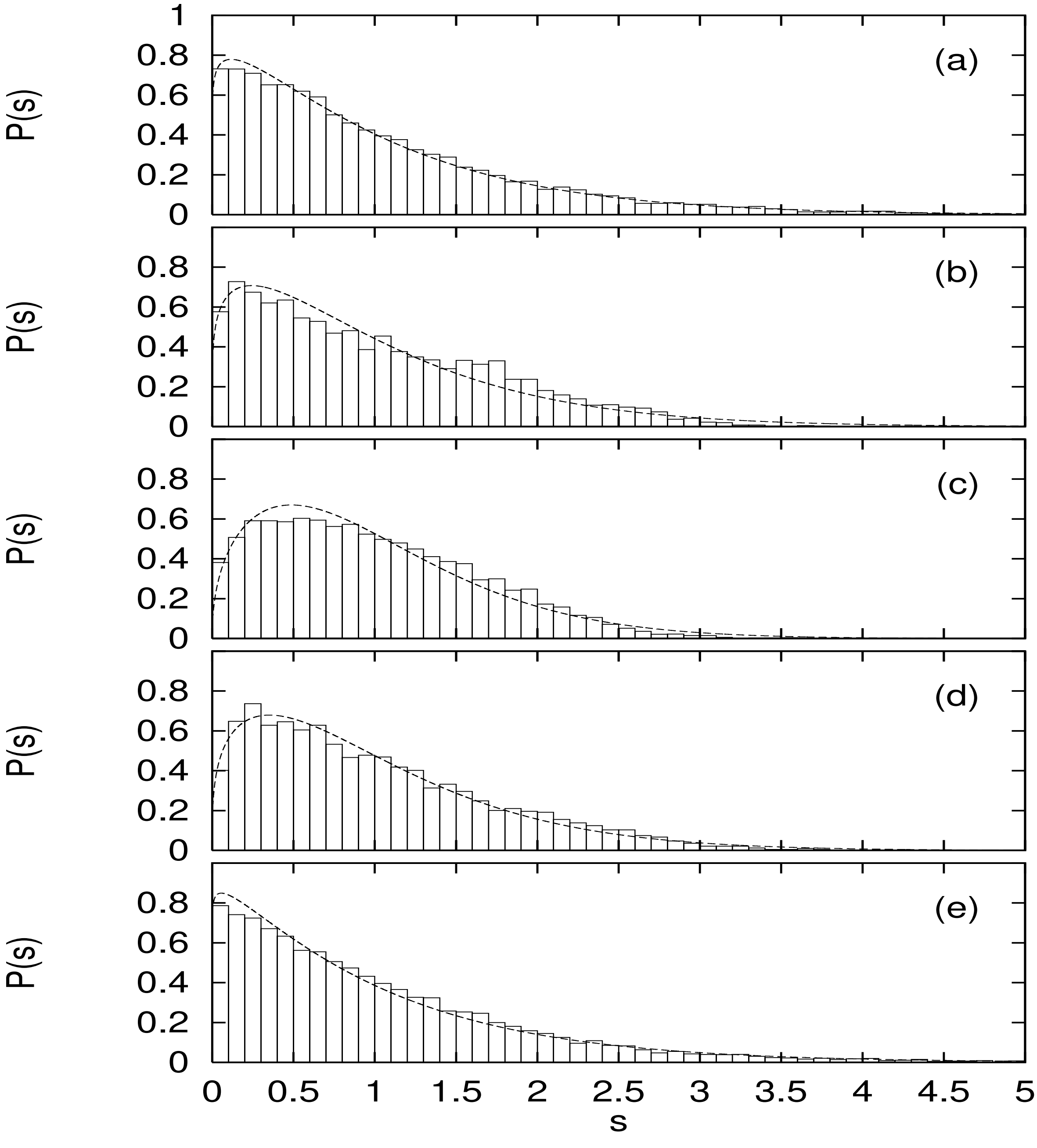


FIG. 4.4 – Distribution des écarts entre niveaux successifs d'un atome d'hydrogène placé dans un champ electromagnétique [Mai98]. Les figures (a)-(f) sont obtenues en prenant différents angles entre les champs électrique et magnétique. Chaque distribution est approximée par une fonction de Brody.

3. et de la taille des noyaux considérés.

Une certaine universalité émerge dans la caractérisation du mouvement chaotique aussi bien en physique nucléaire que dans d'autres domaines de la physique même s'il existe des systèmes chaotiques dont la signature est très éloignée de celle décrite par les matrices aléatoires [Zak95]. Nous avons proposé une distribution pour décrire les situations intermédiaire. Nous avons obtenu cette distribution à partir d'un ensemble de matrices simples mais nous pensons qu'elle pourrait aussi s'appliquer à des matrices de tailles plus grandes. Son interprétation est immédiate : les situations intermédiaires caractériseraient des systèmes quantiques chaotiques possédant des directions priviligiées. Par exemple, si on s'intéresse à des diffusions de neutrons ou de protons sur un noyau déformé, le nombre de nucléons vus par les neutrons ou les protons lorsqu'ils traversent la matière va dépendre de leur angle d'incidence donc le nombre d'interactions va en dépendre également : les matrices aléatoires utilisées pour décrire cette situation ne sont donc plus nécessairement invariantes par rotation et doivent tenir compte que toutes les directions ne sont pas équivalentes. Cela permettrait de comprendre certaines distorsions des propriétés spectrales des systèmes chaotiques par rapport à la loi de Wigner.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons essayé de comprendre ce qui régissait certaines propriétés spectrales d'un système quantique à N-corps non relativiste.

Nous avons rappelé les liens existant entre la mécanique quantique et les symétries. Nous avons notamment proposé une manière de construire les bases de représentations irréductibles de l'algèbre unitaire à partir d'un état dit de poids maximal. Cette technique a été implémentée et a servi dans le calcul de spectres de différents systèmes bosoniques tels qu'IBM-4 et fermioniques (fermions sur une seule couche j) aussi bien avec des interactions réalistes qu'avec des interactions dont les paramètres sont aléatoires.

L'utilisation des interactions aléatoires a révélé que certains propriétés spectrales pouvaient être robustes et intrinsèques aux systèmes. En particulier, pour les systèmes diagonaux, nous avons démontré l'existence d'une géométrie propre. En raison de cette géométrie, le choix de l'espace de valence et du rang de l'interaction contraignent fortement les spectres du système en interdisant notamment à l'état fondamental d'avoir certains moments angulaires et en déterminant avec quelle fréquence un moment angulaire donné peut être celui du fondamental. Ces résultats ont été obtenus analytiquement dans le cas diagonal. Dans le cas général, nous avons présenté des résultats numériques. Ceux-ci semblent confirmer ce qui a été trouvé analytiquement d'abord parce que les prédominances dépendent de la symétrie du système par l'intermédiaire du type de représentation irréductible dans laquelle on se place, ensuite parce que les interactions de rang N donnent des résultats totalement différents et qu'enfin les spectres présentent de grandes régularités. Ainsi l'agencement des niveaux suivant le moment angulaire semble obéir à des règles relativement strictes et il semblerait qu'il existe des grandes classes de spectres dont le système s'éloigne assez peu. Ces classes peuvent être déduites en considérant les différentes chaînes algébriques, au moins pour les bosons.

Ces régularités peuvent sembler en contradiction avec les résultats visant à étudier la chaoticité et la régularité des spectres obtenus avec des interactions réalistes.

En effet certaines distributions pour des niveaux de moment angulaire identique sont proches de celles obtenues avec des matrices aléatoires, ce qui signerait l'établissement d'un chaos. Comment conciler simultanément ces régularités et ce chaos ? On peut éventuellement comprendre les choses de la façon suivante : les états de même moment angulaire semblent donc pouvoir s'organiser entre eux de façon relativement chaotique à partir du moment où certaines symétries (comme par exemple la séniorité) sont brisées (même faiblement) tandis que l'organisation entre les différents moments angulaires demeure globalement bien respectée puisque le moment angulaire reste un bon nombre quantique.

Malgré les nombreuses études existant, la compréhension des résultats trouvés avec des interactions aléatoires reste incomplète.

Une méthode d'interprétation semble prometteuse : elle consisterait d'abord à réécrire l'hamiltonien en termes des opérateurs de Casimir des différentes chaînes algébriques contenant l'algèbre de moment angulaire puis à traiter certains termes comme des perturbations. Cette technique mériterait une étude approfondie et m'a semblé pertinente pour les bosons *sp* et, au vu des résultats proposés dans [Cej00], pour les bosons *sd*. Il resterait à comprendre pourquoi les transitions entre les différentes symétries sont brusques. En mécanique classique, le théorème KAM permet d'étudier les perturbations pour des systèmes quasi-periodiques. Existe-t-il un théorème équivalent en mécanique quantique ?

Nous avons également proposé une généralisation de la distribution de Wigner pour interpréter les situations intermédiaires entre le chaos et l'intégrabilité. L'intérêt d'une telle distribution est de proposer une interprétation assez simple pour les situations intermédiaires entre le chaos maximal (Wigner) et la régularité (Poisson) : dans les systèmes quantiques, le rang de l'interaction et de la conservation de certaines quantités privilégient plus ou moins certaines directions ce qui rend le système plus ou moins chaotique. Cette distribution a été calculée analytiquement pour des matrices 2×2 et il semblerait à la suite de tests numériques qu'elle reste valide pour des matrices de dimensions supérieures mais cela reste à confirmer par des études plus systématiques et plus approfondies.

Enfin il me semble que l'étude de corrélations entre les paramètres de l'hamiltonien permettant d'obtenir des spectres proches des résultats expérimentaux peut apporter des informations intéressantes sur l'interaction nucléaire.

Annexe A

Pourcentages

Dans cette annexe sont rassemblés les pourcentages qui ont été obtenus pour différents nombres de particules et pour différentes propriétés de symétries. Les niveaux sont associés deux par deux (le premier niveau et le dernier, le second niveau et l'avant dernier niveau...) : on s'attend en effet à retrouver des proportions identiques puisque si on inverse tous les signes des paramètres de l'hamiltonien, les niveaux qui ont été associés deux à deux échangent leur position dans la séquence. Le nombre de spectres calculés varie de 5000 à 80000 en fonction du temps de calcul nécessaire pour déterminer le spectre complet de chaque tirage. Ceci ne devrait pas avoir affecté de façon considérable les pourcentages présentés d'une part parce que les distributions gaussiennnes étaient assez bien reproduites avec quelques millers d'évènements et d'autre part ces pourcentages sont en accord avec les résultats proposés par d'autres auteurs.

Le moment angulaire qui apparaît le plus souvent comme état fondamental est indiqué **en gras**. Il s'agit en général de 0 sauf pour trois cas (cf tableaux A.2 page 164, A.4 page 166 et A.6 page 168) pour lesquel la majorité des spectres ont un état fondamental caractérisé par un moment angulaire égal à 2.

Il ressort en particulier que certains moments angulaires semblent être exclus du fondamental ce qui laisse penser qu'il existe des séquences interdites et des séquences permises en fonction de la symétrie et de la géométrie du système.

Cette restriction des spectres possibles pour un système donné proviendrait du rang de l'interaction et de la façon dont les moments angulaires individuels se couplent pour former le moment angulaire total.

RI de U(6)	Niveau	L	%	Niveau	L	%
[2]	1^{er} et $5^{ème}$	**0**	**54.77% 54.69%**	$3^{ème}$	0	27.66%
		2	34.46% 35.95%		2	32.10%
		4	10.77% 9.350%		4	40.22%
	$2^{ème}$ et $4^{ème}$	0	31.20% 31.68%			
		2	48.01% 49.46%			
		4	20.79% 18.85%			

TAB. A.1 – Répartition des différents moments angulaires selon les niveaux pour un système de 2 bosons . Un système de 2 bosons s et d compte 5 niveaux : deux 0^+, deux 2^+ et un 4^+. Nous avons diagonalisé 20000 hamiltoniens à un- et deux-corps avec des paramètres aléatoires conservant le moment angulaire. Pour chaque niveau, nous avons déterminé le pourcentage qu'il ait le moment angulaire, L.

RI de U(6)	Niveau	L	%	Niveau	L	%
[11]	1^{er} et $3^{ème}$	1	32.22% 30.39%	$2^{ème}$	1	37.39%
		2	**38.75% 37.80%**		2	23.44%
		3	29.02% 31.80%		3	39.17%

TAB. A.2 – Répartition des différents moments angulaires selon les niveaux pour un système de 2 particules dans une représentation non totalement symétrique. Un tel système compte 3 niveaux : un 1^+, un 2^+ et un 3^+. Nous avons diagonalisé 20000 hamiltoniens à un- et deux-corps avec des paramètres aléatoires conservant le moment angulaire. Pour chaque niveau, nous avons déterminé le pourcentage qu'il ait le moment angulaire, L.

RI de U(6)	Niveau	L	%	Niveau	L	%
[3]	1^{er} et $10^{\text{ème}}$	**0**	**71.25% 73.80%**	$4^{\text{ème}}$ et $7^{\text{ème}}$	0	16.92% 17.07%
		2	11.70% 10.28%		2	30.16% 32.06%
		3	00.00% 00.00%		3	14.13% 14.66%
		4	3.500% 3.195%		4	27.20% 25.10%
		6	13.54% 12.72%		6	11.58% 11.10%
	$2^{\text{ème}}$ et $9^{\text{ème}}$	0	17.47% 16.46%	$5^{\text{ème}}$ et $6^{\text{ème}}$	0	22.94% 20.40%
		2	53.28% 47.47%		2	32.75% 34.54%
		3	6.685% 9.480%		3	17.88% 19.40%
		4	16.23% 21.39%		4	12.85% 11.99%
		6	6.325% 5.195%		6	13.56% 13.66%
	$3^{\text{ème}}$ et $8^{\text{ème}}$	0	21.86% 21.81%			
		2	22.05% 25.68%			
		3	8.095% 9.665%			
		4	41.69% 36.83%			
		6	6.305% 6.005%			

TAB. A.3 – Répartition des différents moments angulaires selon les niveaux pour un système de 3 bosons. Un système de 3 bosons s et d possède 10 niveaux : trois 0^+, trois 2^+, un 3^+, deux 4^+ et un 6^+. Nous avons calculé 20000 spectres à partir d'hamiltoniens un- et deux-corps aléatoires conservant le moment angulaire. Pour chaque niveau, nous avons déterminé le pourcentage qu'il soit de moment angulaire, L.

RI de U(6)	Niveau	L	%	Niveau	L	%
[21]	1^{er} et $12^{\text{ème}}$	0	3.342% 3.348%	$4^{\text{ème}}$ et $9^{\text{ème}}$	0	9.386% 10.43%
		1	25.10% 27.24%		1	14.09% 12.54%
		2	**51.74% 52.95%**		2	25.57% 26.46%
		3	5.026% 4.888%		3	19.35% 19.38%
		4	4.268% 3.651%		4	22.84% 22.72%
		5	10.51% 7.916%		5	8.740% 8.445%
	$2^{\text{ème}}$ et $11^{\text{ème}}$	0	7.615% 7.497%	$5^{\text{ème}}$ et $8^{\text{ème}}$	0	9.286% 9.842%
		1	18.91% 21.17%		1	14.94% 13.97%
		2	33.06% 34.28%		2	25.99% 26.66%
		3	18.67% 17.41%		3	18.53% 18.89%
		4	16.25% 14.76%		4	21.97% 21.67%
		5	5.477% 4.867%		5	9.261% 8.948%
	$3^{\text{ème}}$ et $10^{\text{ème}}$	0	7.655% 8.653%	$6^{\text{ème}}$ et $7^{\text{ème}}$	0	11.38% 11.55%
		1	15.39% 14.59%		1	11.02% 10.98%
		2	25.70% 26.23%		2	35.99% 35.32%
		3	23.87% 23.97%		3	14.88% 15.08%
		4	20.48% 20.24%		4	15.32% 15.79%
		5	6.890% 6.302%		5	11.38% 11.25%

TAB. A.4 – Répartition des différents moments angulaires selon les niveaux pour un système de 3 particules. Ce système possède 12 niveaux : un 0^+, deux 1^+, quatre 2^+, deux 3^+, deux 4^+ et un 5^+. Nous avons diagonalisé 80000 hamiltoniens un- et deux-corps aléatoires conservant le moment angulaire. Pour chaque niveau, est indiqué le pourcentage qu'il ait le moment angulaire, L.

RI de U(6)	Niveau	L	%	Niveau	L	%
[4]	1^er^ et 18^ème^	**0**	**62.71% 62.99%**	6^ème^ et 13^ème^	0	18.17% 17.66%
		2	17.21% 17.19%		2	25.42% 25.52%
		3	00.00% 00.00%		3	9.835% 9.915%
		4	1.825% 1.815%		4	17.99% 17.42%
		5	00.00% 00.00%		5	9.385% 9.650%
		6	4.410% 4.425%		6	14.81% 15.39%
		8	13.83% 13.57%		8	4.380% 4.430%
	2^ème^ et 17^ème^	0	14.07% 14.37%	7^ème^ et 12^ème^	0	13.69% 13.82%
		2	53.70% 53.53%		2	23.06% 23.00%
		3	0.255% 0.150%		3	9.300% 9.500%
		4	15.13% 14.91%		4	32.72% 32.93%
		5	00.00% 00.00%		5	7.635% 7.330%
		6	12.51% 12.52%		6	9.360% 9.545%
		8	4.335% 4.510%		8	4.225% 3.865%
	3^ème^ et 16^ème^	0	18.05% 18.86%	8^ème^ et 11^ème^	0	16.54% 16.46%
		2	19.36% 19.10%		2	22.16% 22.37%
		3	0.690% 0.7150%		3	11.10% 11.43%
		4	48.06% 47.44%		4	28.21% 28.07%
		5	5.660% 5.540%		5	8.355% 8.400%
		6	5.740% 5.950%		6	8.045% 7.975%
		8	2.435% 2.385%		8	5.580% 5.285%
	4^ème^ et 15^ème^	0	16.19% 16.28%	9^ème^ et 10^ème^	0	20.49% 19.96%
		2	31.88% 32.06%		2	24.81% 24.74%
		3	2.300% 2.190%		3	11.06% 11.40%
		4	21.85% 22.23%		4	20.76% 20.80%
		5	5.040% 5.300%		5	7.555% 7.865%
		6	20.00% 19.20%		6	10.00% 10.24%
		8	2.725% 2.730%		8	5.305% 4.985%
	5^ème^ et 14^ème^	0	20.44% 19.21%			
		2	32.31% 32.52%			
		3	5.165% 4.985%			
		4	13.33% 14.46%			
		5	6.200% 6.085%			
		6	15.02% 14.83%			
		8	7.515% 7.900%			

TAB. A.5 – Répartition des différents moments angulaires selon les niveaux pour un système de 4 bosons. Un système de 4 bosons s et d possède 18 niveaux : quatre 0^+, cinq 2^+, un 3^+, quatre 4^+, un 5^+, deux 6^+ et un 8^+. Nous avons diagonalisé 20000 hamiltoniens un- et deux-corps aléatoires conservant le moment angulaire. Pour chaque niveau, nous avons déterminé le pourcentage qu'il soit de moment angulaire, L.

RI de U(6)	Niveau	L	%	Niveau	L	%
[31]	1^{er} et $30^{\text{ème}}$	0	8.452% 10.67%	$5^{\text{ème}}$ et $27^{\text{ème}}$	0	7.068% 7.220%
		1	18.58% 19.80%		2	11.94% 11.91%
		2	**42.92% 43.40%**		3	22.57% 23.73%
		3	5.740% 5.694%		4	18.22% 19.43%
		4	5.442% 4.828%		5	20.10% 19.93%
		5	3.028% 2.746%		6	11.39% 9.868%
		6	4.204% 3.884%		7	6.118% 5.598%
		7	11.62% 8.964%		8	2.592% 2.292%
	$2^{\text{ème}}$ et $29^{\text{ème}}$	0	9.226% 9.832%	$6^{\text{ème}}$ et $25^{\text{ème}}$	0	6.268% 6.834%
		1	17.66% 19.49%		2	12.13% 12.20%
		2	23.30% 24.43%		3	2363% 2522%
		3	21.70% 21.25%		4	19.13% 20.10%
		4	10.56% 10.88%		5	17.04% 15.75%
		5	5.284% 4.396%		6	10.89% 9.396%
		6	8.818% 7.044%		7	7.190% 7.098%
		7	3.452% 2.670%		8	3.714% 3.382%
	$3^{\text{ème}}$ et $28^{\text{ème}}$	0	7.320% 8.488%	$7^{\text{ème}}$ et $24^{\text{ème}}$	0	5.760% 6.146%
		1	14.59% 15.25%		2	1180% 1130%
		2	18.59% 20.30%		3	2523% 2630%
		3	25.82% 25.26%		4	2135% 2208%
		4	15.96% 15.94%		5	1192% 1152%
		5	10.42% 9.070%		6	1266% 1210%
		6	5.070% 3.794%		7	8.420% 7.786%
		7	2.218% 1.882%		8	2.842% 2.754%
	$4^{\text{ème}}$ et $27^{\text{ème}}$	0	8.996% 9.688%	$8^{\text{ème}}$ et $23^{\text{ème}}$	0	6.014% 5.744%
		1	11.99% 12.87%		2	11.22% 11.08%
		2	19.91% 20.86%		3	24.26% 23.33%
		3	18.57% 19.00%		4	22.94% 24.03%
		4	21.78% 21.37%		5	13.46% 13.80%
		5	11.60% 9.642%		6	11.66% 11.35%
		6	4.856% 4.302%		7	7.912% 8.282%
		7	2.294% 2.256%		8	2.502% 2.358%

TAB. A.6 – Répartition des différents moments angulaires selon les niveaux pour un système de 4 particules. Ce système compte 30 niveaux : deux 0^+, quatre 1^+, sept 2^+, six 3^+, cinq 4^+, trois 5^+, deux 6^+ et un 7^+. Nous avons diagonalisé 5000 hamiltoniens un- et deux-corps aléatoires conservant le moment angulaire. Pour chaque niveau, nous avons déterminé le pourcentage qu'il soit de moment angulaire, L.

RI de U(6)	Niveau	L	%	Niveau	L	%
[31]	9$^{\text{ème}}$ et 22$^{\text{ème}}$	0	6.072% 5.590%	13$^{\text{ème}}$ et 18$^{\text{ème}}$	0	4.818% 4.996%
		1	11.71% 12.06%		2	14.34% 15.15%
		2	22.47% 21.57%		3	20.20% 19.93%
		3	21.00% 21.28%		4	23.34% 21.99%
		4	17.64% 18.14%		5	15.62% 16.30%
		5	11.00% 11.53%		6	10.72% 10.62%
		6	6.984% 6.764%		7	7.426% 7.522%
		7	3.104% 3.048%		8	3.514% 3.470%
	10$^{\text{ème}}$ et 21$^{\text{ème}}$	0	5.502% 5.494%	14$^{\text{ème}}$ et 17$^{\text{ème}}$	0	6.288% 6.156%
		1	10.87% 11.75%		2	14.08% 13.62%
		2	20.88% 20.69%		3	20.64% 20.62%
		3	19.84% 19.41%		4	19.01% 19.40%
		4	22.37% 21.95%		5	17.61% 18.09%
		5	12.06% 11.84%		6	11.10% 10.55%
		6	6.108% 6.436%		7	8.044% 8.062%
		7	2.356% 2.406%		8	3.196% 3.490%
	11$^{\text{ème}}$ et 20$^{\text{ème}}$	0	5.446% 5.450%	15$^{\text{ème}}$ et 16$^{\text{ème}}$	0	5.580% 5.808%
		1	11.04% 11.70%		2	12.71% 12.61%
		2	20.53% 19.99%		3	19.90% 19.59%
		3	20.46% 20.50%		4	18.73% 18.52%
		4	22.47% 21.69%		5	22.25% 22.50%
		5	10.31% 10.75%		6	11.22% 11.47%
		6	7.262% 7.264%		7	6.416% 6.386%
		7	2.460% 2.630%		8	3.170% 3.098%
	12$^{\text{ème}}$ et 19$^{\text{ème}}$	0	4.444% 4.628%			
		1	11.75% 12.70%			
		2	22.69% 22.21%			
		3	23.35% 22.75%			
		4	16.45% 16.55%			
		5	10.47% 10.76%			
		6	7.532% 7.418%			
		7	3.302% 2.962%			

TAB. A.7 – Répartition des différents moments angulaires selon les niveaux pour un système de 4 particules.

RI de U(6)	Niveau	L	%	Niveau	L	%
[22]	1^{er} et $17^{\text{ème}}$	**0**	**47.70% 47.65%**	$6^{\text{ème}}$ et $12^{\text{ème}}$	0	12.83% 13.11%
		1	0.515% 0.570%		1	9.025% 8.635%
		2	29.92% 30.08%		2	20.90% 20.66%
		3	0.080% 0.075%		3	16.58% 17.09%
		4	9.830% 9.400%		4	26.93% 26.81%
		5	1.150% 1.180%		5	7.380% 7.600%
		6	10.80% 11.03%		6	6.340% 6.080%
	$2^{\text{ème}}$ et $16^{\text{ème}}$	0	19.12% 18.68%	$7^{\text{ème}}$ et $11^{\text{ème}}$	0	10.61% 10.57%
		1	1.980% 1.955%		1	7.710% 7.345%
		2	40.18% 39.05%		2	29.82% 29.52%
		3	4.730% 4.860%		3	11.38% 11.63%
		4	29.47% 30.76%		4	27.20% 27.87%
		5	1.905% 1.890%		5	8.484% 8.380%
		6	2.605% 2.795%		6	4.780% 4.675%
	$3^{\text{ème}}$ et $15^{\text{ème}}$	0	16.18% 16.40%	$8^{\text{ème}}$ et $10^{\text{ème}}$	0	19.04% 18.53%
		1	3.360% 3.460%		1	9.870% 10.51%
		2	28.60% 28.48%		2	22.40% 22.19%
		3	12.11% 12.29%		3	10.30% 10.23%
		4	32.24% 31.73%		4	21.01% 21.05%
		5	3.045% 2.940%		5	10.51% 10.76%
		6	4.450% 4.685%		6	6.859% 6.710%
	$4^{\text{ème}}$ et $14^{\text{ème}}$	0	8.710% 8.970%	$9^{\text{ème}}$	0	11.53%
		1	4.715% 4.750%		1	11.16%
		2	40.00% 40.60%		2	26.08%
		3	17.61% 17.11%		3	9.485%
		4	16.10% 15.96%		4	24.28%
		5	5.940% 5.940%		5	13.14%
		6	6.920% 6.665%		6	4.310%
	$5^{\text{ème}}$ et $13^{\text{ème}}$	0	10.24% 10.09%			
		1	7.110% 7.330%			
		2	25.42% 26.05%			
		3	22.30% 22.10%			
		4	24.97% 24.34%			
		5	4.725% 5.020%			
		6	5.230% 5.060%			

TAB. A.8 – Répartition des différents moments angulaires selon les niveaux pour un système de 4 particules. Il y a 17 niveaux : trois 0^+, un 0^+, cinq 2^+, deux 3^+, quatre 4^+, un 5^+ et un 6^+. Nous avons diagonalisé 20000 hamiltoniens un- et deux-corps aléatoires conservant le moment angulaire. Pour chaque niveau, nous avons déterminé le pourcentage qu'il soit de moment angulaire, L.

RI de U(6)	Niveau	L	%	Niveau	L	%
[5]	1^{er} et $30^{\text{ème}}$	**0**	**57.09% 57.38%**	$5^{\text{ème}}$ et $27^{\text{ème}}$	0	17.90%17.81%
		2	20.96% 21.01%		2	25.90% 26.56%
		3	00.00% 00.00%		3	5.662% 5.803%
		4	0.790% 0.606%		4	14.76% 15.04%
		5	00.00% 00.00%		5	4.183% 4.183%
		6	2.817% 3.113%		6	16.17% 15.95%
		7	00.00% 00.00%		7	2.887% 2.958%
		8	3.747% 3.338%		8	10.93% 10.45%
		10	14.60% 14.55%		10	1.605% 1.225%
	$2^{\text{ème}}$ et $29^{\text{ème}}$	0	12.95% 13.53%	$6^{\text{ème}}$ et $25^{\text{ème}}$	0	17.14% 16.70%
		2	54.16% 54.06%		2	22.38% 21.84%
		3	0.010% 0.015%		3	10.21% 10.12%
		4	9.423% 10.22%		4	17.45% 17.17%
		5	00.00% 00.00%		5	3.986% 4.141%
		6	6.620% 5.268%		6	14.38% 14.90%
		7	00.00% 00.00%		7	3.296% 3.535%
		8	13.12% 13.12%		8	6.662% 6.620%
		10	3.620% 3.648%		10	4.493% 4.958%
	$3^{\text{ème}}$ et $28^{\text{ème}}$	0	17.39% 17.43%	$7^{\text{ème}}$ et $24^{\text{ème}}$	0	13.67% 14.64%
		2	14.80% 15.53%		2	19.46% 20.17%
		3	0.831% 7.747%		3	10.83% 10.39%
		4	41.17% 40.37%		4	25.60% 24.97%
		5	3.901% 3.916%		5	5.690% 5.507%
		6	12.59% 13.07%		6	9.719% 9.494%
		7	2.563% 2.422%		7	4.859% 5.057%
		8	4.352% 4.282%		8	7.409% 6.958%
		10	2.394% 2.197%		10	2.746% 2.803%
	$4^{\text{ème}}$ et $27^{\text{ème}}$	0	14.35% 14.48%	$8^{\text{ème}}$ et $23^{\text{ème}}$	0	13.10% 13.73%
		2	22.29% 22.65%		2	20.56% 19.24%
		3	2.394% 2.352%		3	11.62% 11.73%
		4	22.83% 23.00%		4	22.79% 23.24%
		5	3.338% 3.014%		5	6.324% 6.705%
		6	26.42% 26.20%		6	12.10% 12.15%
		7	3.352% 3.338%		7	4.310% 4.099%
		8	3.958% 4.056%		8	6.676% 6.620%
		10	1.056% 0.915%		10	2.521% 2.479%

TAB. A.9 – Répartition des différents moments angulaires selon les niveaux pour un système de 5 bosons. Un système de 5 bosons s et d possède 30 niveaux : cinq 0^+, sept 2^+, deux 3^+, six 4^+, deux 5^+, quatre 6^+, deux 8^+ et un 10^+. Nous avons diagonalisé 7000 hamiltoniens un- et deux-corps aléatoires conservant le moment angulaire. Pour chaque niveau, nous avons déterminé le pourcentage qu'il soit de moment angulaire, L.

RI de U(6)	Niveau	L	%	Niveau	L	%
[5]	9$^{\text{ème}}$ et 22$^{\text{ème}}$	0	12.33% 13.19%	13$^{\text{ème}}$ et 18$^{\text{ème}}$	0	13.55% 13.46%
		2	20.52% 21.52%		2	22.66% 21.96%
		3	12.69% 12.33%		3	6.057% 6.212%
		4	21.04% 20.35%		4	18.60% 19.93%
		5	7.550% 7.409%		5	1181% 1128%
		6	11.77% 12.10%		6	1435% 1431%
		7	5.183% 4.465%		7	3.366% 3.493%
		8	6.719% 6.662%		8	6.958% 6.958%
		10	2.183% 1.958%		10	2.634% 2.394%
	10$^{\text{ème}}$ et 21$^{\text{ème}}$	0	15.07% 14.72%	14$^{\text{ème}}$ et 17$^{\text{ème}}$	0	10.48% 10.45%
		2	19.42% 19.19%		2	24.13% 23.45%
		3	11.12% 12.05%		3	5.000% 5.733%
		4	18.83% 19.11%		4	20.59% 19.35%
		5	8.663% 8.508%		5	11.65% 12.17%
		6	14.12% 13.83%		6	15.35% 16.36%
		7	4.141% 4.000%		7	4.042% 4.127%
		8	6.437% 6.733%		8	6.029% 6.071%
		10	2.183% 1.845%		10	2.732% 2.282%
	11$^{\text{ème}}$ et 20$^{\text{ème}}$	0	11.67% 11.21%	15$^{\text{ème}}$ et 16$^{\text{ème}}$	0	11.88% 11.11%
		2	20.39% 20.73%		2	19.76% 20.48%
		3	10.05% 9.776%		3	5.197% 5.057%
		4	20.49% 19.79%		4	22.74% 22.32%
		5	10.00% 10.67%		5	12.59% 12.88%
		6	14.04% 13.56%		6	16.22% 16.73%
		7	4.141% 4.338%		7	4.394% 4.141%
		8	7.099% 7.494%		8	4.634% 5.226%
		10	2.098% 2.422%		10	2.563% 2.042%
	12$^{\text{ème}}$ et 19$^{\text{ème}}$	0	11.18% 10.32%			
		2	21.59% 22.59%			
		3	7.930% 7.803%			
		4	22.80% 24.59%			
		5	10.17% 9.747%			
		6	13.33% 12.91%			
		7	3.817% 3.676%			
		8	5.493% 5.183%			
		10	3.676% 3.169%			

TAB. A.10 – Répartition des différents moments angulaires selon les niveaux pour un système de 5 bosons.

Bibliographie

[Ait59] A.C. Aitken. *Determinants and Matrices.* Oliver & Boyd, Edinburgh and London, 1959.

[All88] K. Allaart et al. *Phys. Rep.* ***169*** *(1988) 209.*

[Alh89] Y. Alhassid et R.D. Levine. *Phys. Rev. A**40** (1989) 5277.*

[Alh90] Y. Alhassid, A. Novoselsky et N. Whelan. *Phys. Rev. Lett.* ***65*** *(1990) 2971.*

[Alh91a] Y. Alhassid et N. Whelan. *Phys. Rev. Lett.* ***67*** *(1991) 816.*

[Alh91b] Y. Alhassid et N. Whelan. *Phys. Rev. C**43** (1991) 2637.*

[Alh92a] Y. Alhassid et A. Novoselsky. *Phys. Rev. C**45** (1992) 1677.*

[Alh92b] Y. Alhassid et D. Vretenar. *Phys. Rev. C**46** (1992) 1334.*

[Alh93] Y. Alhassid et N. Whelan. *Phys. Rev. Lett.* ***70*** *(1993) 572.*

[Alh94] Y. Alhassid et al . *Phys. Rev. Lett.* ***72*** *(1994) 613.*

[AM85] A.Y. Abul-Magd et H.A. Weidenmüller. *Phys. Lett.* ***B162*** *(1985) 223.*

[Ant94] H. Anton et C. Rorres. *Elementary Linear Algebra.* Wiley & sons, inc., 1994.

[Ari75] A. Arima et F. Iachello. *Phys. Rev. Lett.* ***75*** *(1975) 1069.*

[Ari76] A. Arima et F. Iachello. *Ann. Phys.* ***99*** *(1976) 253.*

[Bae92] M.S Bae, et al. *Phys. Rev. Lett.* ***69*** *(1992) 2349.*

[Bar57a] J. Bardeen, L.N. Cooper et J.R. Schrieffer. *Phys. Rev.* ***106*** *(1957) 162.*

[Bar57b] J. Bardeen, L.N. Cooper et J.R. Schrieffer. *Phys. Rev.* ***108*** *(1957) 1175.*

[Bas78] J. Bass. *Cours de Mathématiques, Tome 2.* Masson, 1978.

[Ben01] L. Benet, T. Rupp et H.A. Weidenmüller . *Ann. Phys.* ***292*** *(2001) 67.*

[Ber85] J.F. Berger. *Approche microscopique auto-consistante des processus nucléaires collectifs de grande amplitude à basse énergie. Application à la diffusion d'ions lourds et à la fission.* Thèse d'État, Université Paris-Sud, 1985.

[Ber86] M. Berger et B. Gossiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces.* Presses Universitaires de France, 1986.

[Ber91] J.F. Berger. *École Joliot-Curie de physique nucléaire, Maubisson, France*, 1991.

[Ber01a] J.F. Berger et al. *Nucl. Phys. A**685** (2001) 1c.*

[Ber01b] G. Berkolaiko, E.B. Bogomolny et J.P. Keating. *J. Phys. A :Math. Gen. **34** (2001) 335.*

[Bij94] R. Bijker, F. Iachello et A. Leviatan. *Ann. Phys. **236** (1994) 69.*

[Bij00a] R. Bijker et A. Frank. *Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 420.*

[Bij00b] R. Bijker et A. Frank. *Phys. Rev. C**62** (2000) 014303.*

[Bij01] R. Bijker et A. Frank. *nucl-th/011109 soumis à Phys. Rev. C.*

[Bij02] R. Bijker et A. Frank. *nucl-th/020180 soumis à Phys. Rev. C.*

[Bla97] J.P. Blaizot et J.C. Tolédano. *Symétries et physique microscopique.* Ellipses, 1997.

[Bog99] E.B. Bogomolny, U. Gerland et C. Schmit. *Phys. Rev. E**59** (1999) R1315.*

[Boh69] A. Bohr et B.R. Mottelson. *Nuclear Structure.* W.A. Benjamin, Inc, 1969.

[Boh71] O. Bohigas et J. Flores. *Phys. Lett. **B34** (1971) 261.*

[Boh84] O. Bohigas, M.J. Giannoni et C. Schmit. *Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1.*

[Boh85] O. Bohigas, R.U. Haq et A. Pandey. *Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 1654.*

[Bou60] N. Bourbaki. *Livre III (Topologie générale).* Hermann, Paris, 1960.

[Bri65] D.M. Brink, A.F.R. Toledo Piza et A.K. Kerman. *Phys. Lett. **19** (1965) 413.*

[Bro73] T.A. Brody. *Lett. Nuovo Cim. **7** (1973) 482.*

[Bro76] T.A. Brody et al. *Nucl. Phys. **A259** (1976) 87.*

[Bro81] T.A. Brody et al. *Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 38.*

[Bru55] K.A. Brueckner. *Phys. Rev. **97** (1955) 1353.*

[Bru77] P.J. Brussaard et P.W.M. Glaudemans. *Shell Model Applications in Nuclear Spectroscopy.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1977.

[Cam73] H.S. Camarda et al. *Phys. Rev. C**8** (1973) 1813.*

[Car67] H. Cartan. *Formes différentielles.* Hermann, Paris, 1967.

[Cas81] R.F. Casten. *Interacting Bose-Fermi Systems in Nuclei.* F. Iachello editor, Plenum, 1981.

[Cas93] R.F. Casten, N.V. Zamfir et D.S. Brenner. *Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 227.*

[Cau96] E. Caurier et al. *Phys Lett. **B365** (1996) 7.*

[Cej98] P. Cejnar et J. Jolie. *Phys. Rev. E**58** (1998) 387.*

[Cej00] P. Cejnar et J. Jolie. *Phys. Rev. E**61** (2000) 6237.*

[Cha97] E. Chabanat et al. *Nucl. Phys. A**627** (1997) 710.*

[Cha00] P. Chau Huu-Tai et P. Van Isacker. Preprint Ganil P00 40, 2000.

[Cha02a] P. Chau Huu-Tai et al. Preprint Ganil P02 11, 2002, sous presse à *Phys. Rev. C.*

[Cha02b] P. Chau Huu-Tai, N.A. Smirnova et P. Van Isacker. *J. Phys. A **35** (2002) L199.*

[Coh57] P.M. Cohn. *Lie Groups.* Cambridge University Press, 1957.

[Coh65] S. Cohen et D. Kurath . *Nucl. Phys. **73** (1965) 1.*

[Cot74] E. Cota et al. *Phys. Lett. **B53** (1974) 32.*

[Dan98] H. Dancer et al. *Phys. Rev. C**58** (1998) 2068.*

[Dea01] D.J. Dean. *Nucl. Phys. **A682** (2001) 194c.*

[Dec80] J. Dechargé et D. Gogny. *Phys. Rev. C**21** (1980) 1568.*

[Del83] D. Delande et J.C. Gay. *J. Phys. B**17** (1984) 335.*

[Del86] D. Delande et J.C. Gay. *J. Phys. B**19** (1986) 173.*

[Del00] S. Delabrière et Y. Raynaud. Analyse convexe DEA OJME 2000-2001, http ://www.ccr.jussieu.fr/eqanalyse/users/syg/. 2000.

[Des60] J.S. Desjardins et al. *Phys. Rev. **120** (1960) 2214.*

[Dob96] J. Dobaczewski et al. *Phys. Rev. C**53** (1996) 2809.*

[Duf96] M. Dufour et A.P. Zuker. *Phys. Rev. C**54** (1996) 1641.*

[Dug02a] T. Duguet et al. *Phys. Rev. C**65** (2002) 014310.*

[Dug02b] T. Duguet et al. *Phys. Rev. C**65** (2002) 014311.*

[Dys62] F.J. Dyson. *J. Math. Phys.**3** (1962) 1191.*

[Ell80] J.P. Elliott et A.P. White. *Phys. Lett. **B97** (1980) 169.*

[Ell81] J.P. Elliott et J.A. Evans. *Phys. Lett. **B101** (1981) 216.*

[Ell96a] J.P. Elliott et al. *Nucl. Phys. **A597** (1996) 341.*

[Ell96b] J.P. Elliott et al. *Nucl. Phys. **A609** (1996) 1.*

[Eva97] J.A. Evans et al. *Nucl. Phys. **A627** (1997) 71.*

[Fla89] H. Flanders. *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences.* Dover Publications Inc, New-York, 1989.

[Fra86] A. Frank et R. Lemus. *J. Chem. Phys. **84** (1986) 1.*

[Fra94] A. Frank et P. Van Isacker. *Algebraic Methods in Molecular & Nuclear Structure Physics.* Wiley & sons, inc., 1994.

[Fre70] J.B. French et S. S. M. Wong. *Phys. Lett.* ***B33*** *(1970) 449.*

[Gam69] Y.K. Gambhir, A. Rimini et T. Weber. *Phys. Rev.* ***188*** *(1969) 1573.*

[Gar64a] J.B. Garg et al. *Phys. Rev.* ***134*** *(1964) B985.*

[Gar64b] J.B. Garg et al. *Phys. Rev.* ***136*** *(1964) B177.*

[Gar65] J.B. Garg et al. *Phys. Rev.* ***137*** *(1965) B547.*

[Gar99] J.E. Garcia-Ramos et P. Van Isacker. *Ann. Phys.* ***274*** *(1999) 45.*

[Ger72] A. Gervois. *Nucl. Phys.* ***A184*** *(1972) 507.*

[Ger99] U. Gerland. *Phys. Rev. Lett.* ***83*** *(1999) 1139.*

[Gir88] M. Girod et al. *Phys. Rev. C**37** (1988) 2600.*

[Goe48] M. Goeppert-Mayer. *Phys. Rev.* ***74*** *(1948) 235.*

[Goe49] M. Goeppert-Mayer. *Phys. Rev.* ***75*** *(1949) 1969.*

[Goe50a] M. Goeppert-Mayer. *Phys. Rev.* ***78*** *(1950) 16.*

[Goe50b] M. Goeppert-Mayer. *Phys. Rev.* ***78*** *(1950) 22.*

[Gog75] D. Gogny. *Nuclear Self-Consistent Fields edited by G. Ripka and M. Porneuf (North Holland 1975)*, 1975.

[Gog77] D. Gogny et R. Padjen. *Nucl. Phys. A**293** (1977) 365.*

[Góm95] J.M.G. Gómez, V.R. Manfredi et L. Salasnich. Spectral statistics in large shell model calculations. *5th Int. Spring Seminar on Nuclear Physics, Ravello*, 1995.

[Gré98] B. Grémaud et S.R. Jain. *J. Phys. A* ***31*** *(1998) L637.*

[Grü67] B. Grümbaum. *Convex Polytopes.* Wiley, 1967.

[Guh98] T. Guhr, A. Müller-Groeling et H.A. Weidenmüller. *Phys. Rep.* ***299*** *(1998) 189.*

[Ham62] M. Hamermesh. *Group Theory and its Application to Physical Problems.* Addison-Wesley Publishing Company, 1962.

[Haq82] R.U. Haq, A. Pandey et O. Bohigas. *Phys. Rev. Lett.* ***48*** *(1982) 1086.*

[Hax49] O. Haxel, J.H.D. Jensen et H.E. Suess. *Phys. Rev.* ***75*** *(1949) 1766.*

[Hon95] M. Honma, T. Mizusaki et T. Otsuka. *Phys. Rev. Lett.* ***75*** *(1995) 1284.*

[Hon96] M. Honma, T. Mizusaki et T. Otsuka. *Phys. Rev. Lett.* ***77*** *(1996) 3315.*

[Hon02] M. Honma et al. *Phys. Rev. C**65** (2002) 061301.*

[Hor01] M. Horoi, B.A. Brown et V. Zelevinsky. *Phys. Rev. Lett.* ***87*** *(2001) 62501.*

[Hub59] J. Hubbard. *Phys. Rev. Lett.* ***3*** *(1959) 77.*

[Iac87] F. Iachello et A. Arima. *The Interacting Boson Model.* Cambridge University Press, 1987.

[Joh93] D.J. Johnson et al . *Phys. Rev. Lett.* ***69*** *(1993) 3157.*

[Joh98] C.W. Johnson, G.F. Bertsch et D.J. Dean. *Phys. Rev. Lett.* ***80*** *(1998) 2749.*

[Joh99] C.W. Johnson et al. *Phys. Rev. C**61** (1999) 014311.*

[Jon96] H.F. Jones. *Groups, Representations and Physics.* Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, 1996.

[Jon98] T. Jonckheere, B. Grémaud et D. Delande. *Phys. Rev. Lett.* ***81*** *(1998) 2442.*

[Jui99] O. Juillet. *Symétries nucléaires à isospin faible.* Thèse, Université de Caen, 1999.

[Jui02] O. Juillet. Fermions sur une couche $j = 9/2$. communication privée, 2002.

[Kap00] L. Kaplan, T. Papenbrock et C.W. Johnson. *Phys. Rev. C**63** (2000) 014307.*

[Kne98] M. Knecht. Cours de théorie quantique des champs DEA CPM 1997-1998. 1998.

[Kot00] V.K.B. Kota. *Ann. Phys.* ***280*** *(2000) 1.*

[Kur00] A. Kuriyama, C. Provindência, J. da Provindência, Y. Tsue et M. Yamamura. 2000. report LANL archive nucl-th/0011068 (2001).

[Lan93] G.H. Lang et al . *Phys. Rev. C**48** (1993) 1518.*

[Lax46] P. Lax. *Selected Topics in Geometry.* New York university, 1946.

[Leh82] D. Lehmann et C. Sacré. *Géométrie et topologie des surfaces.* Presses Universitaires de France, 1982.

[Lel63] J. Lelong-Ferrand. *Géométrie différentielle.* Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1963.

[Lem91a] R. Lemus et A. Frank. *Ann. Phys.* ***206*** *(1991) 122.*

[Lem91b] R. Lemus et A. Frank. *Symmetries in Science (1991) 122.*

[Lem91c] R. Lemus et A. Frank. *Symmetries in Science (1991) 429.*

[Lib99] J. Libert et al. *Phys. Rev. C**60** (1999) 54301.*

[Lio72] H.I. Liou et al. *Phys. Rev. C**5** (1972) 974.*

[Lio73] H.I. Liou et al. *Phys. Rev. C**7** (1973) 823.*

[Mai98] J. Main, M. Schwacke et G. Wunner. *Phys. Rev.* ***A57*** *(1998) 1149.*

[Meh91] M.L. Mehta. *Random Matrices.* Academic Press, 1991.

[Mey92] M. Meyer et al. *Phys. Rev. C**45** (1992) 233.*

[Mit88] G.E. Mitchell et al. *Phys. Rev. Lett.* ***61*** *(1988) 1473.*

[Mit01] G.E. Mitchell et J.F. Shriner Jr. *Physica Scripta **T90** (2001) 105.*

[Miz96] T. Mizusaki, M. Honma et T. Otsuka. *Phys. Rev. C**53** (1996) 2786.*

[Mon01] O. Monnoye. *Étude de la structure des noyaux exotiques semi-magiques en séniorité généralisée.* Thèse, Université de Caen, 2001.

[Mon02] O. Monnoye et al. *Phys. Rev. C**65** (2002) 44322.*

[Mos62] M. Moshinsky. *Nucl. Phys. **31** (1962) 384.*

[Mos63] M. Moshinsky. *J. Math. Phys. **4** (1963) 1128.*

[Mos68] M. Moshinsky. *Group Theory and the Many-body Problem.* Gordon and Breach, 1968.

[Pit82] S. Pittel, P.D. Duval et B.R. Barrett . *Ann. Phys. **144** (1982) 168.*

[Mul00] D. Mulhall, A. Volya et V. Zelevinsky. *Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 4016.*

[Ord96] C. Ordóñez, L. Ray et U. Van Kolck. *Phys. Rev. C**53** (1996) 2086.*

[Orm88] W.E. Ormand et R.A. Broglia. *Phys. Rev. C**46** (1988) 1710.*

[Orm94] W.E. Ormand et al . *Phys. Rev. C**49** (1994) 1422.*

[Ots98] T. Otsuka, M. Honma et T. Mizusaki. *Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 1588.*

[Ots99] T. Otsuka, T. Mizusaki et M. Honma. *J. Phys. G **25** (1999) 699.*

[Paa88] V. Paar et D. Vorkapić. *Phys. Lett. **B205** (1988) 7.*

[Paa89] V. Paar et al. *Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 2643.*

[Pan81] A. Pandey. *Ann. Phys. **34** (1981) 110.*

[Pap02] T. Papenbrock, L. Kaplan et G.F. Bertsch. *Phys. Rev. B**65** (2002) 235120.*

[Pat94] M. P. Pato et al. *Phys. Rev. C**49** (1994) 2919.*

[Per97] S. Perries et al. *Phys. Rev. C**55** (1997) 1797.*

[Pic73] G. Pichon. *Groupes de Lie. Représentations linéaires et applications.* Hermann Paris, 1973.

[Rah72a] F. Rahn et al. *Phys. Rev. C**6** (1972) 251.*

[Rah72b] F. Rahn et al. *Phys. Rev. C**6** (1972) 1854.*

[Rah74] F. Rahn et al. *Phys. Rev. C**10** (1974) 1904.*

[Rin80] P. Ring et P. Schuck. *The Nuclear Many-Body Problem.* Springer-Verlag, 1980.

[Ros60] J.L. Rosen et al. *Phys. Rev. **118** (1960) 687.*

[Rus01] S. Russ. *Phys. Rev. E**64** (2001) 056240.*

[Sai01] A.I. Saichev et al. report LANL archive nlin.CD/0111010 (2001).

[Sev87] A. Sevrin et al. *Phys. Rev. C**36** (1987) 2621.*

[Shi90] J.F. Shirner Jr. et al. *Z. Phys. A **335** (1990) 393.*

[Shi91] J.F. Shirner Jr, G.E. Mitchell et T. von Egidy. *Z. Phys. A **338** (1991) 309.*

[Sky59] T.H.R. Skyrme. *Nucl. Phys.* ***9*** *(1959) 615.*

[Smi01] N.A. Smirnova. Symmetry methods in nuclear physics, capita selecta course, http ://www.fys.kuleuven.ac.be/iks/lmr/capita.html. 2001.

[Ste94] S. Sternberg. *Group Theory and Physics.* Cambridge University Press, 1994.

[Tal93] Y Talpaert. *Leçons et applications de géométrie différentielle et de mécanique analytique.* Cépaduès-Éditions, 1993.

[Tho79] J.A. Thorpe. *Elementary Topics in Differential Geometry.* Spinger-Verlag, 1979.

[Uts99] Y. Utsuno et al. *Phys. Rev. C****60*** *(1999) 54315.*

[Van02] J. Van de Wiele. *Annales de Physique* ***26*** *(2002) 1.*

[Vau72] D. Vautherin et D.M. Brink. *Phys. Rev. C****3*** *(1972) 626.*

[Whe93] N. Whelan, Y. Alhassid et A. Leviatan . *Phys. Rev. Lett.* ***71*** *(1993) 2208.*

[Wig37] E. Wigner. *Phys. Rev.* ***51*** *(1937) 106.*

[Wig49] E.P. Wigner. *Group Theory.* Academic Press, 1949.

[Wig55] E.P. Wigner. *Ann. Math.* ***62*** *(1955) 548.*

[Wig57] E.P. Wigner. *Ann. Math.* ***65*** *(1957) 203.*

[Wig58] E.P. Wigner. *Ann. Math.* ***67*** *(1958) 325.*

[Wil84] B.H. Wildenthal. *Prog. Part. Nucl. Phys.* ***11*** *(1984) 5.*

[Win68] S. Winchank et al. *Phys. Rev.* ***166*** *(1968) 1234.*

[Zak95] J. Zakrzewski, K. Dupret et D. Delande. *Phys. Rev. Lett.* ***74*** *(1995) 522.*

[Zam94] N.V. Zamfir, R.F. Casten et D.S. Brenner. *Phys. Rev. Lett.* ***72*** *(1994) 3480.*

[Zel01] V. Zelevinsky et A. Volya. *Proceeding of 7th International Spring Seminar on Nuclear Physics, Maiori, Italy*, 2001.

[Zha01] Y.M. Zhao et A. Arima. *Phys. Rev. C****64*** *(2001) 04131.*

[Zha02] Y.M. Zhao A. Arima et N. Yoshinaga. report LANL archive nucl-th/020640 (2002).

[Zuk94] A. Zuker. *Nucl. Phys. A****576*** *(1994) 65.*