



**HAL**  
open science

# Automates Cellulaires Probabilistes : mesures stationnaires, mesures de Gibbs associées et ergodicité

Pierre-Yves Louis

► **To cite this version:**

Pierre-Yves Louis. Automates Cellulaires Probabilistes : mesures stationnaires, mesures de Gibbs associées et ergodicité. Mathématiques [math]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2002. Français. NNT : . tel-00002203v2

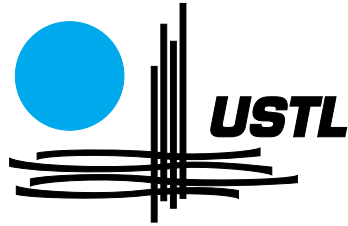
**HAL Id: tel-00002203**

**<https://theses.hal.science/tel-00002203v2>**

Submitted on 8 Jan 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**Thèse en Cotutelle**  
franco-italienne  
(*Tesi in Cotutela*)  
présentée à :



L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE  
et  
il POLITECNICO DI MILANO

**pour obtenir** (*per ottenere*)

LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ  
(*e il Diploma di Dottorato di Ricerca*)

DISCIPLINE (*Disciplina*) : MATHÉMATIQUES (*Matematica*)

SPÉCIALITÉ (*Specialità*) : PROBABILITÉS (*Probabilità*)

par

**Pierre-Yves LOUIS**

**Automates Cellulaires Probabilistes :**  
**mesures stationnaires, mesures de Gibbs associées et**  
**ergodicité**

(*Automati Cellulari Probabilistici :*  
*Misure stazionarie, misure di Gibbs associate e ergodicità*)

soutenue le 23 septembre 2002 devant le jury composé de :  
(*difesa il 23 settembre 2002 davanti alla commissione giudicatrice :*)

Président : G.B. GIACOMIN, Université Paris VII  
Directeurs de Thèse : P. DAI PRA, Università di Padova  
S. RÆLLY, CNRS, Institut Weierstraß, Berlin  
Rapporteurs : R. FERNANDEZ, Université de Rouen  
G.B. GIACOMIN, Université Paris VII  
F. MARTINELLI, Università degli Studi Roma Tre  
E. OLIVIERI, Università di Roma Tor Vergata  
Examineurs : M. FRADON, Université Lille I  
G. POSTA, Politecnico di Milano



*« Toute idée du futur est conception d'un pouvoir capable de produire quelque chose ;  
et donc quiconque envisage un plaisir à venir, doit aussi concevoir qu'il détient en  
lui-même quelque pouvoir qui lui permettra de l'obtenir »*

T. Hobbes



# Remerciements

« *Ce n'est pas assez de faire des pas qui doivent un jour conduire au but, chaque pas doit être lui-même un but en même temps qu'il nous porte en avant* », écrivit Goethe. Accomplissement d'un cursus universitaire, la thèse de Doctorat représente également une étape personnelle importante par les réflexions, les remises en question qu'elle suscite, ainsi que par les rencontres qu'elle provoque. La particularité de cette thèse d'avoir été réalisée en cotutelle entre la France et l'Italie donne à ce travail scientifique, une dimension humaine plus enrichissante encore. Elle fut ainsi l'occasion de découvrir d'autres communautés scientifiques, au delà des Alpes – certes – mais aussi de l'autre côté du Rhin, en Allemagne, ou dans les contrées plus lointaines, d'autant plus surprenantes et attachantes, d'Arménie.

Je tiens pour tout cela à exprimer ma profonde gratitude à M<sup>me</sup> Sylvie Rœlly qui a accepté de diriger ce travail de thèse et a eu l'idée originelle de partager cette direction dans le cadre d'une cotutelle. Je lui sais gré d'avoir su, avec la grande culture qui est sienne, me montrer l'intérêt et la richesse des modèles probabilistes issus de la Physique Statistique lorsqu'étudiant en Maîtrise de Mathématiques et en Maîtrise de Physique, j'étais à la recherche d'une thématique à la croisée de ces deux disciplines. Je tiens à témoigner ici de l'accueil chaleureux et enthousiaste qui fut alors le sien, du soutien de tous les instants qu'elle m'accorda par la suite afin de mener à bien ce travail en se jouant des éloignements géographiques occasionnels. Mes profonds remerciements s'adressent également à M. Paolo Dai Pra qui partagea la direction de cette thèse. À sa compétence, il ajouta la sympathie et l'entrain, guidant au plus près mes recherches. Son intuition mathématique et sa perspicacité dans de très nombreux domaines furent précieuses. Je salue ici le soutien patient qu'il sut toujours me témoigner. Je tiens enfin à remercier conjointement M<sup>me</sup> Sylvie Rœlly, et M. Paolo Dai Pra pour tout le temps qu'ils ont su généreusement me consacrer.

J'adresse mes plus vifs remerciements à M. Giambattista Giacomini pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant le jury de soutenance, après avoir au préalable accepté d'être rapporteur de ce travail. C'est également avec reconnaissance que je remercie M. Roberto Fernández, d'avoir été rapporteur de ce travail. L'intérêt qu'il manifesta, en particulier lors d'un congrès à Rome, pour mes activités mathématiques fut pour moi source d'encouragements. Ses commentaires nombreux et précis ont permis d'améliorer certaines parties de ce travail, en particulier les terminologies liées aux systèmes ferromagnétiques. Je le remercie également pour les nombreux développements ultérieurs envisageables à partir de cette thèse sur lesquels il a attiré mon attention. Mes remerciements vont aussi à M. Fabio Martinelli et à M. Enzo Olivieri qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse.

Je souhaite formuler de vifs remerciements à M<sup>me</sup> Myriam Fradon et à M. Gustavo Posta pour l'intérêt qu'ils ont témoigné à mon travail, en particulier en acceptant de participer au jury. Je suis reconnaissant envers M<sup>me</sup> Myriam Fradon pour sa compréhension des difficultés de la cotutelle. Je remercie M. Gustavo Posta qui contribua à l'atmosphère accueillante que je trouvai à mon arrivée à Milan, et pour m'avoir signalé la Remarque 5.2.4.

Une thèse repose également sur les conditions de travail dans lesquelles elle peut être réalisée, et sur les relations cordiales et amicales que le doctorant peut nouer avec son entourage professionnel. Je remercie ainsi les membres du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université des Sciences et Technologies de Lille. Je pense en particulier à M<sup>me</sup> Nelly Hanoune pour son soutien constant et ses conseils avisés et à M. Daniel Flipo pour nos discussions autour de Linux et  $\text{\LaTeX}$ . Je remercie M. Maurice Porchet, et à travers lui l'ensemble du personnel du Centre d'Initiation à l'Enseignement Supérieur Nord – Pas de Calais – Picardie. Ma gratitude va également à l'ensemble des personnels enseignants-chercheurs, administratifs et techniques de l'UFR de Mathématiques, et plus généralement à ceux de l'Université de Lille I que j'ai eu plaisir à côtoyer durant cette thèse, à l'occasion de mes activités d'enseignement, et auparavant. La réalisation d'une thèse en cotutelle n'est pas chose aisée, et l'aide ainsi que le soutien de nombreuses personnes furent appréciables.

Je remercie les personnes que j'ai rencontrées lors de mes séjours et passages au sein de différents établissements pour l'amabilité de leur accueil. Je pense au département de Mathématiques du Politecnico de Milan, au département de Mathématiques de l'Université de Padoue, à l'équipe « Systèmes aléatoires en interaction » de l'Institut Weierstraß de Berlin, et également à l'équipe du doctorat de Mathématiques et Statistique de l'Université de Pavie, et du Centre de Mathématiques Appliquées de l'École Polytechnique.

Je ne saurais oublier dans mes remerciements les personnes qui en aval ont été mes enseignants au lycée F. Darchicourt d'Hénin-Beaumont, en classes préparatoires et à l'Université de Lille I. Je pense en particulier à M. R. Gergondey, M<sup>me</sup> F. Kurzawski, M. M. Murcia, M. A. Pillons, M<sup>me</sup> M. Queffélec, M. H. Zessin, ainsi que M. L. Flaminio que je remercie également ici pour avoir encadré la réalisation de mon mémoire de DEA.

Mes remerciements vont également à l'ensemble des doctorants et jeunes docteurs dont les parcours croisèrent le mien ici ou là, en particulier ceux amicalement cotoyés à Lille : Jean-Christophe, Mohamedou, Frédéric, Octave, Abbas, sans oublier David pour nos entretiens mathématiques et discussions diverses lors de nos tribulations, et aussi Élodie, Christophe, et Guillaume. J'associe également à ces remerciements ceux qui nous précédèrent de peu dans cette voie : Bruno, les deux Emmanuel, Cristian, Désiré, et Olivier que je remercie pour sa lecture attentive de ce travail et sa participation active lors de la soutenance de cette thèse.

Je remercie aussi particulièrement Nicolas, mon frère, pour nos discussions informatiques autour de Matlab. Je remercie ma mère pour son soutien de tous les instants, mon père qui sait me montrer le chemin, et tous deux pour leur présence indéfectible. Enfin, j'associe à ces remerciements mes ami(e)s et toute ma famille, leur amitié et leur présence permanente me furent précieuses. À toutes et tous, un grand *grazie!*

Berlin, le 3 octobre 2002.





# Table des matières

Remerciements	v
Liste des figures	xiii
Résumé de la thèse	xv
Résumé de la thèse en italien ( <i>Riassunto della tesi</i> )	xvii
Résumé de la thèse en anglais ( <i>Abstract</i> )	xxi
<b>1 Introduction aux Automates Cellulaires</b>	<b>1</b>
1.1 Définition	1
1.2 Historique	3
1.3 Utilisation et applications	4
1.4 Classes d'Automates Cellulaires Probabilistes	5
1.4.1 Automates cellulaires Probabilistes purement stochastiques	6
1.4.2 Automates Cellulaires Probabilistes dégénérés	7
1.5 Plan de cette étude	8
<b>2 Cadre mathématique et notations</b>	<b>9</b>
2.1 Espaces d'états	10
2.1.1 Espace des sites	11
2.1.2 Espaces des configurations	11
2.1.3 Fonctions sur $S^{\mathbb{Z}^d}$	14
2.2 Mesures de probabilité	16
2.2.1 Définition et topologie	16
2.2.2 Mesures de Gibbs sur $S^{\mathbb{Z}^d}$ associées à une interaction	17
2.2.3 Ordre stochastique sur les mesures, mesure de Gibbs monotone, inégalité FKG	23
2.3 Dynamiques parallèles	25
2.3.1 Dynamiques parallèles à volume fini	26
2.3.2 Définition de la dynamique parallèle à volume infini	27
2.3.3 Dynamique attractive	30
<b>3 États d'équilibre de PCA généraux</b>	<b>35</b>
3.1 Définitions générales des états d'équilibre	36
3.2 États d'équilibre des dynamiques à volume fini	37

3.3	Mesures stationnaires/réversibles à volume infini . . . . .	37
3.4	Caractérisation gibbsienne des états d'équilibre . . . . .	40
3.4.1	Caractérisation gibbsienne sur $S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}}$ des lois des trajectoires . . . . .	40
3.4.2	Aspect gibbsien sur $S^{\mathbb{Z}^d}$ des mesures stationnaires invariantes par translation . . . . .	42
3.5	Classe des PCA réversibles . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Étude d'une famille spécifique de PCA</b>	<b>51</b>
4.1	Définition et étude fine à volume fini . . . . .	51
4.1.1	Définition de la classe $\mathcal{C}$ de PCA . . . . .	52
4.1.2	Mesures réversibles / de Gibbs à volume fini . . . . .	56
4.1.3	Cas monotone . . . . .	63
4.2	Mesures de Gibbs naturellement associées . . . . .	73
4.2.1	Transition de Phase à basse température en dimension 2 . . . . .	74
4.2.2	Cas particulier de l'interaction propre nulle (cas $\mathcal{K}(0) = 0$ ) . . . . .	82
4.3	Action de la dynamique sur l'ensemble des mesures de Gibbs . . . . .	87
4.3.1	Cas attractif . . . . .	88
4.3.2	Cas répulsif . . . . .	89
4.3.3	Cas du couplage propre nul $\mathcal{K}(0) = 0$ . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Couplage croissant de plusieurs PCA</b>	<b>97</b>
5.1	Couplage synchrone d'automates cellulaires probabilistes . . . . .	98
5.2	Couplage synchrone croissant de $N$ PCA . . . . .	100
5.2.1	$N$ -uplet croissant d'automates cellulaires probabilistes . . . . .	100
5.2.2	Construction d'un PCA, couplage croissant de PCA . . . . .	101
5.2.3	Propriétés du couplage croissant . . . . .	104
5.3	Couplage synchrone croissant d'un nombre quelconque de PCA identiques . . . . .	107
5.3.1	Construction . . . . .	107
5.3.2	Quelques propriétés . . . . .	108
5.4	Couplage synchrone croissant de dynamiques PCA à volume fini et infini . . . . .	109
5.4.1	Conditions au bord extrémales et couplage spécifique associé . . . . .	110
5.4.2	Comparaisons volume fini/volume infini . . . . .	111
5.5	Quelques idées d'utilisation . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Convergence vers l'équilibre de PCA</b>	<b>115</b>
6.1	Critères usuels d'ergodicité pour les PCA . . . . .	116
6.1.1	Définition de l'ergodicité . . . . .	116
6.1.2	Critère de Dobrushin-Vasershtein . . . . .	116
6.1.3	Autres critères . . . . .	120

6.2	Ergodicité de tout PCA attractif admettant une unique mesure stationnaire . . . . .	122
6.2.1	Mesures stationnaires à volume fini et infini . . . . .	122
6.2.2	Fonction de contrôle de l'ergodicité : $\rho(n)$ . . . . .	128
6.2.3	Preuve de l'ergodicité . . . . .	130
6.3	Tout PCA attractif ergodique à vitesse polynomiale est ergodique à vitesse exponentielle . . . . .	132
6.3.1	Énoncé du résultat . . . . .	132
6.3.2	Preuve du résultat . . . . .	133
6.4	Ergodicité exponentielle des PCA attractifs de la classe $\mathcal{C}$ . . . . .	136
6.4.1	Énoncé du résultat . . . . .	136
6.4.2	Condition de faible mélange . . . . .	137
6.4.3	Preuve de l'ergodicité à vitesse exponentielle . . . . .	141
6.5	Généralisation et commentaires généraux . . . . .	149
<b>7</b>	<b>Simulations numériques pour certains PCA de la classe <math>\mathcal{C}_0</math></b>	<b>151</b>
7.1	Langage et matériel utilisé . . . . .	151
7.2	Estimation de la température critique pour l'hamiltonien associé . . . . .	152
7.2.1	Algorithme utilisé . . . . .	153
7.2.2	Données des simulations . . . . .	153
7.2.3	Résultats . . . . .	154
7.3	Ergodicité/non ergodicité de dynamiques PCA . . . . .	155
7.3.1	Données des simulations . . . . .	156
7.3.2	Résultats . . . . .	156
7.4	Simulation par la dynamique parallèle du modèle d'Ising . . . . .	158
<b>A</b>	<b>Programme TransitionDePhase.m</b>	<b>159</b>
A.1	Programme principal . . . . .	159
A.2	Programmes secondaires . . . . .	163
A.2.1	Fonction voisinage . . . . .	163
A.2.2	Création de toutes les configurations sur 13 sites . . . . .	163
A.2.3	identification du voisinage d'un site . . . . .	163
A.2.4	périodisation des bords . . . . .	164
A.2.5	Poids affecté à un site en fonction de son voisinage . . . . .	164
<b>B</b>	<b>Programme DynParallele.m</b>	<b>165</b>
<b>C</b>	<b>Programme IsingParallel.m</b>	<b>169</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>173</b>



# Liste des figures

1.1	Schéma espace-temps de la dépendance d'un site $k \in \mathbb{Z}^d$ , à l'instant $n$ , en les valeurs aux sites voisins $V_k$ à l'instant précédent ( $n - 1$ ) ( $n \geq 1$ )	2
1.2	Cas où $G = \mathbb{Z}$ et $V_k = \{k - 1, k, k + 1\}$ , entre deux instants successifs $n - 1$ et $n$	2
2.1	Ensemble $\overline{\{0\}}^{(n)}$ des sites de $\mathbb{Z}^d$ à l'instant 0 ayant une influence potentielle sur la valeur du spin à l'origine au temps $n$	28
3.1	Position respective de $\mathcal{R}, \mathcal{R}_i, \mathcal{S}, \mathcal{S}_i, \mathcal{G}(\varphi), \mathcal{G}_i(\varphi)$ pour une dynamique PCA sur $S^{\mathbb{Z}^d}$ purement stochastique, réversible et invariante par translation	47
4.1	Contour	76
7.1	Variation de la magnétisation selon le paramètre $\beta$ , cas $\mathcal{K}(0) = 0$	154
7.2	Variation de la magnétisation selon le paramètre $\beta$ , cas $\mathcal{K}(0) = +1$	155
7.3	Variation de la magnétisation, bord +1 et -1, cas $\mathcal{K}(0) = 0$	157
7.4	Variation de la magnétisation, bord +1 et -1, cas $\mathcal{K}(0) = +1$	157



# Résumé de la thèse

Utilisés dans de nombreux domaines scientifiques, les Automates Cellulaires Probabilistes, usuellement abrégés en PCA, de l'anglais *Probabilistic Cellular Automata*, constituent, au sein des dynamiques aléatoires à temps discret, une classe de processus stochastiques markoviens à valeurs dans un espace infini  $S^G$  où  $S$  désigne un ensemble fini et  $G$  est un graphe infini. On considère ici toujours le cas où  $G = \mathbb{Z}^d$ . La particularité de ces dynamiques est l'évolution en parallèle, ou synchrone, de chacune des coordonnées ou composants élémentaires en interaction.

Nous nous intéressons dans un premier temps à l'existence et à l'unicité des mesures stationnaires pour les dynamiques PCA non dégénérées *i.e.* dont le comportement local n'est jamais déterministe, ainsi qu'à la caractérisation de ces états d'équilibre en tant que mesures gibbsiennes. Nous fondant sur les résultats de Dai Pra, Kozlov, Künsch, Lebowitz, Vasilyev *et al.*, nous précisons, pour la classe des dynamiques PCA réversibles, les relations existant entre les mesures stationnaires, les mesures réversibles et les mesures de Gibbs associées à un potentiel dont le lien avec la dynamique est explicité.

Pour une famille paramétrée de dynamiques PCA réversibles, nous démontrons l'existence d'un phénomène de transition de phase et explicitons dans ce cas le comportement de différentes mesures de Gibbs sous l'action de ces dynamiques. En particulier, nous exhibons des mesures de Gibbs non-stationnaires.

Dans un second temps, nous étudions l'ergodicité, *i.e.* la convergence vers l'équilibre des dynamiques PCA qui sont de plus attractives. Nous construisons à cet effet un couplage de ces dynamiques préservant l'ordre stochastique. En nous référant aux travaux de Martinelli et Olivieri pour les dynamiques de Glauber, nous établissons qu'en l'absence de transition de phase, dès que l'unique mesure de Gibbs vérifie une condition de faible mélange, il y a ergodicité et convergence à vitesse exponentielle vers cet unique état d'équilibre, améliorant en cela grandement les critères d'ergodicité pour les PCA existant dans la littérature.

Enfin, nous illustrons ces résultats par la réalisation de simulations numériques de certaines des dynamiques réversibles précédemment étudiées, et présentons un algorithme parallèle convergeant vers les mesures de Gibbs extrémales du modèle d'Ising.





# Riassunto della tesi

Usati in diversi campi scientifici, gli Automi Cellulari Probabilistici, abbreviati in PCA dal inglese *Probabilistic Cellular Automata* costituiscono una classe di dinamiche aleatorie a tempo discreto, e sono processi stocastici markoviani a valori nello spazio infinito  $S^G$  dove  $S$  è un insieme finito e  $G$  un grafo infinito. Qui, supponiamo sempre  $G = \mathbb{Z}^d$ . La caratteristica principale di queste dinamiche è l'evoluzione in parallelo, o sincrona, di ognuna delle coordinate o componenti elementari in interazione. Per ogni  $k \in \mathbb{Z}^d$ , e per ogni stato  $\sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}$ , una probabilità  $p_k(\cdot|\sigma)$  sullo spazio  $S$  costituisce la regola locale di evoluzione nel sito  $k$ , sapendo che al tempo precedente lo stato era  $\sigma$ .

**Nel primo capitolo** presentiamo la storia di questi modelli e diamo diversi esempi dove gli automi cellulari, deterministici o probabilistici sono usati. Spieghiamo l'ipotesi di non degenricità  $\forall s \in S, \forall \sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}, p_k(s|\sigma) > 0$ , cioè che una tale dinamica non ammette mai evoluzioni locali deterministiche.

**Nel secondo capitolo**, le due prime sezioni danno le definizioni matematiche che costituiscono il quadro di questo studio, e un riassunto sulle misure di Gibbs. La sezione 2.3 definisce i PCA e cosa si intende con dinamica a volume finito o volume infinito. La Proposizione 2.3.1 (p. 29) spiega con cura come si passa dal volume finito  $\Lambda$  ( $\Lambda$  sottoinsieme finito di  $\mathbb{Z}^d$ ) al volume infinito  $\mathbb{Z}^d$ , cioè da diverse dinamiche  $P_\Lambda^\tau$  su  $S^\Lambda$  con condizione al bordo  $\tau \in S^{\mathbb{Z}^d}$  a un'unica dinamica parallela  $P$  su  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . La sotto-sezione 2.3.2 definisce le dinamiche PCA attrattive.

Ci interessiamo, nei capitoli 3 e 4, all'esistenza e a l'unicità delle misure stazionarie per le dinamiche parallele non degeneri su  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , e anche alla caratterizzazione di questi stati di equilibrio come misure di Gibbs. Questi capitoli sviluppano risultati pubblicati in [DPLR02]. **Nel terzo capitolo**, dopo aver richiamato il caso del volume finito (catene di Markov su  $S^\Lambda$  con  $\Lambda$  finito) nella Proposizione 3.2.1 (p. 37), spieghiamo, nella Proposizione 3.3.1 (p. 38), come la stazionarietà (o reversibilità) di una misura  $\nu_\Lambda^\tau$  a volume finito per una dinamica  $P_\Lambda^\tau$  si trasferisce al volume infinito, per la dinamica  $P$  su  $S^{\mathbb{Z}^d}$ .

Nella sezione 3.4, richiamiamo un risultato di Dai Pra (1992, [DP92]) (p. 42) dove si stabilisce che, se esiste una misura stazionaria, invariante per traslazione, che è di Gibbs per un potenziale  $\varphi$  su  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , allora tutte le misure stazionarie per la dinamica  $P$ , invariante per traslazione sono di Gibbs per lo stesso potenziale  $\varphi$ .

Consideriamo poi, nella sezione 3.5, il caso delle dinamiche parallele che ammettono almeno una misura reversibile, chiamate dinamiche PCA reversibili. Richiamiamo un risultato (p. 46) di Kozlov-Vasyliov (1980, [KV80]), completato da Künsch (1984, [Kün84b]), che identifica esattamente la forma di queste dinamiche e mostra

che ogni misura reversibile è di Gibbs per un potenziale  $\varphi$  canonicamente associato alla dinamica. Reciprocamente, stabilisce che ogni misura di Gibbs è reversibile, oppure periodica di periodo 2. Per le dinamiche parallele reversibili esplicitiamo allora (Corollario 3.5.2, p. 47) relazioni precisi tra l'insieme delle  $\mathcal{S}$  delle misure stazionarie, l'insieme  $\mathcal{R}$  delle misure reversibili, e l'insieme  $\mathcal{G}(\varphi)$  delle misure di Gibbs per il potenziale  $\varphi$  associato naturalmente alla dinamica (cf. figura 3.1, p. 47).

**Nel quarto capitolo**, studiamo più precisamente una famiglia parametrizzata di dinamiche PCA reversibili su  $\{-1; +1\}^{\mathbb{Z}^d}$  (cf. forma dei  $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  definiti in (4.1) p. 52 o (4.6) p. 53). Per  $P$  una qualsiasi dinamica di questa famiglia, abbiamo precisamente identificato le misure  $\nu_\Lambda^\tau$  reversibili (quindi stazionarie) per le dinamiche a volume finito  $P_\Lambda^\tau$  associate (cf. Proposizione 4.1.5 p. 57). Il potenziale  $\varphi$  naturalmente associato ha quindi la forma esplicita (4.34) (p. 60). Siamo allora in grado di sviluppare un'analisi precisa tra le misure di Gibbs associate a  $\varphi$  e le misure stazionarie  $\nu_\Lambda^\tau$  (cf. Prop. 4.1.8 p. 61, Prop. 4.1.9 p. 63, Prop. 4.1.11 p. 66, Corollario 4.1.14 p. 72 e Proprietà 4.1.16 p. 73).

L'esistenza di transizione di fase per questo potenziale  $\varphi$  è dimostrata nel Teorema 4.2.1 (p. 75) usando un'argomento di *contour* del tipo usato da Peierls per il modello di Ising. Però il nostro modello è più complicato perché il potenziale non è solo a due corpi. In un caso particolare si possono usare risultati del modello di Ising per dare un valore esatto del parametro critico (Teorema 4.2.4 p. 84), e identificare esattamente l'insieme  $\mathcal{G}(\varphi)$  delle misure di Gibbs (Corollario 4.2.5 p. 85). Quando c'è transizione di fase, studiamo nella sezione 4.3 il comportamento delle diverse misure di Gibbs di  $\mathcal{G}(\varphi)$  estremale sotto l'azione della dinamica parallela  $P$ . In particolare, diamo esempi di misure di Gibbs che non sono stazionarie (Proposizione 4.3.2). Poi nei capitoli 5 e 6 ci interessiamo alla convergenza all'equilibrio (ergodicità) di dinamiche PCA non degeneri generali su  $\{-1; +1\}^{\mathbb{Z}^d}$  che sono attrattive.

Costruiamo per questo, **nel quinto capitolo**, un accoppiamento di un numero finito di dinamiche PCA che preserva l'ordine stocastico. Relazioni utili tra dinamiche a volume finito e infinito sono dimostrate nelle Proprietà 5.4.2 p. 111, Proprietà 5.4.3 p. 111.

**Nel sesto capitolo**, si stabilisce nella Proposizione 6.2.1 (p. 122) che per una dinamica PCA attrattiva, le misure stazionarie a volume finito  $\nu_\Lambda^\tau$  sono crescenti stocasticamente quando la condizione al bordo  $\tau$  cresce. Proviamo anche, nella Proposizione 6.2.3 (p. 125) l'ugualianza tra limite nel volume  $\lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \nu_\Lambda^+$  (resp.  $\lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \nu_\Lambda^-$ ) e limite temporale  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{-1} P^{(n)}$  (resp.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{+1} P^{(n)}$ ). Facendo riferimento ai lavori di Martinelli e Olivieri [MO94a] stabiliamo, nel Teorema 6.4.1 (p. 137) per dinamiche PCA reversibili, che quando non c'è transizione di fase per il potenziale canonicamente associato, e che l'unica misura di Gibbs verifica una condizione di *weak mixing* (cf. Definizione 6.4.3 p.139), c'è ergodicità della dinamica PCA e convergenza a l'equilibrio con una velocità esponenziale. Questo risultato migliora quelli apparsi in letteratura per dinamiche a tempo discreto (richiamati nella sezione 6.1).

Per dimostrare tale risultato, mostriamo prima che una successione  $(\rho(n))_{n \in \mathbb{N}}$  (definita in (5.5) p. 108) controlla la velocità di convergenza a l'equilibrio. Si usano poi i Teoremi 6.2.10 (p. 130) e 6.3.1 (p. 132) dove mostriamo rispettivamente che se c'è l'unicità della misura stazionaria a volume infinito allora c'è ergodicità, e che

se c'è convergenza a l'equilibrio con velocità polinomiale di grado sufficientemente elevato, allora la velocità è in realtà esponenziale. Si stabilisce per concludere, che sotto la condizione di *weak mixing*, la successione  $\rho(n)_{n \in \mathbb{N}}$  verifica una disuguaglianza di ricorrenza (lemma 6.4.8, p. 142) che basta per concludere che questa successione va a zero con velocità polinomiale di grado sufficiente per applicare quanto appena descritto (lemma 6.4.9 p. 146).

Il Teorema 6.5.1 (p. 149) dà finalmente una generalizzazione dell'ergodicità con velocità esponenziale nel caso di dinamiche parallele che non sono necessariamente reversibili.

**Nel capitolo 7** illustriamo questi risultati con simulazioni numeriche di alcune dinamiche PCA reversibili studiate, e presentiamo un algoritmo parallelo che converge verso la misura di Ising.



# Abstract

Used in many scientific areas, the discrete time random dynamics called Probabilistic Cellular Automata (P.C.A.) are Markov stochastic processes with values in an infinite space  $S^G$  where  $S$  is a finite set and  $G$  an infinite graph. Here we assume  $G = \mathbb{Z}^d$ . The main feature of these dynamics is the parallel, or synchronous, evolution of all the coordinates or interacting elementary components.

We are first interested in the existence and uniqueness of stationary measures for non degenerated PCA dynamics, *i.e.* whose local behaviour is never deterministic. Based on results of Dai Pra, Kozlov, Künsch, Lebowitz, Vasilyev *et al.*, we give for the class of reversible PCA dynamics precise relations between the sets of stationary measures, reversible measures and some Gibbs measures.

For a typical parametrized family of reversible PCA dynamics, we prove the existence of a phase transition phenomenon and establish the behaviour of the different Gibbs measures under the dynamics' action. In particular, we exhibit non-stationary Gibbs measures.

Secondly, we study the convergence to equilibrium for PCA dynamics which are attractive (so called ergodicity). One of our tools is a special coupling of these dynamics, preserving the stochastic order. When there is no phase transition, inspired by the ideas of Martinelli and Olivieri on Glauber dynamics, we prove the ergodicity of PCA dynamics, and more precisely, the convergence exponentially fast to the unique equilibrium state. This result truly improves previous ones existing in the litterature.

Finally, we present some numerical simulations of reversible PCA dynamics, and, in particular, a parallel algorithm which converges to extremal Gibbs measures associated to the Ising model.



# Chapitre 1

## Introduction aux Automates Cellulaires

### 1.1 Définition

Un automate cellulaire est un **système dynamique composé d'entités élémentaires ou cellules ou encore sites**, généralement organisés en réseau régulier, **qui évoluent en temps discret**. Chaque cellule est caractérisée par une valeur qui appartient à un ensemble dénombrable. **L'évolution de ces valeurs au cours du temps se fait de manière parallèle** (ou synchrone), chaque cellule voyant sa valeur actualisée selon une règle locale dans laquelle interviennent les valeurs des cellules voisines.

Formellement, on désigne par  $S$  l'ensemble des valeurs pouvant être prises par une cellule. On identifie la structure de répartition spatiale des cellules avec un **graphe**  $G$  sur lequel sont définis des **voisinages**  $V_g$  pour tout  $g \in G$ . Pour chaque cellule  $g \in G$ , on définit la **règle locale d'évolution**  $u_g$  comme une fonction de l'espace produit  $S^G$  vers  $S$  définissant l'évolution de l'état de la cellule  $g$  en fonction de la valeur de ses cellules voisines :

$$\sigma_{\{g\}}(n+1) = u_g(\sigma_{V_g}(n)), \quad (1.1)$$

où  $\sigma_V(n)$  représente l'ensemble des valeurs à l'instant  $n$  des cellules de  $V \subset G$ . Les voisinages  $(V_g)_{g \in G}$  sont toujours des ensembles finis de cellules. Les règles d'évolution  $(u_g)_{g \in G}$  sont ainsi toujours choisies locales. La figure 1.1 schématise, dans le cas  $G = \mathbb{Z}^d$  réseau de dimension  $d \geq 1$ , la dépendance de la valeur de la cellule  $k$  en les valeurs, à l'instant précédent, des cellules de  $V_k$ .

La principale caractéristique des automates cellulaires est que l'évolution des valeurs des différentes cellules se fait de manière parallèle : entre un instant  $(n-1)$  et l'instant suivant  $n$  toutes les valeurs des cellules peuvent être modifiées. Considérons un exemple pour lequel  $G = \mathbb{Z}$ . On définit les voisinages  $(V_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  par  $V_k = \{k-1, k, k+1\}$ . Examinons plus particulièrement trois sites  $k-1, k$  et  $k+1$ . Cette situation est décrite par la figure 1.2. À l'instant  $n$ , la valeur  $\sigma_k(n)$  de la cellule  $k$  est obtenue grâce à la règle de calcul  $u_k$  où interviennent les valeurs

$$\sigma_{V_k}(n-1) = \{\sigma_{k-1}(n-1), \sigma_k(n-1), \sigma_{k+1}(n-1)\}$$



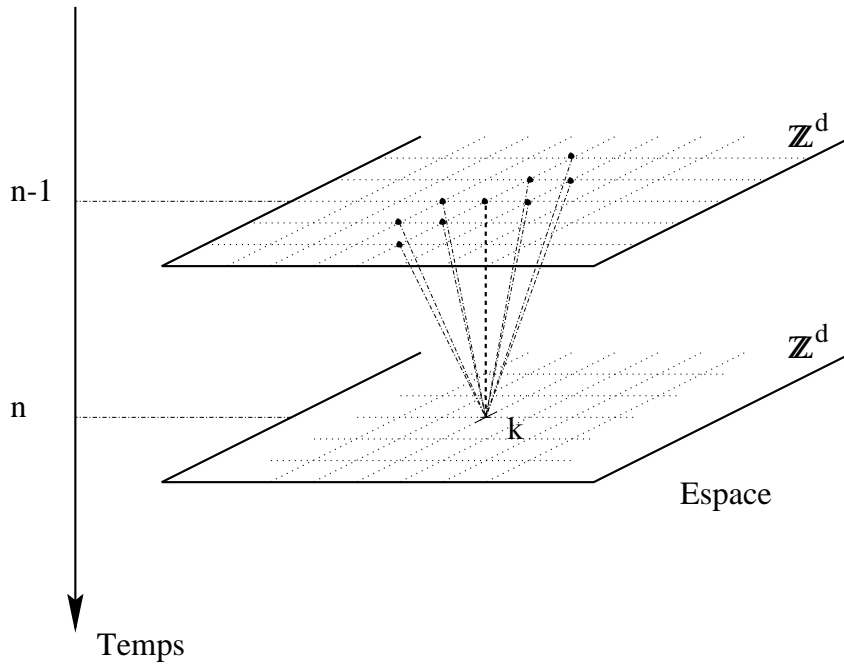


FIG. 1.1 – Schéma espace-temps de la dépendance d'un site  $k \in \mathbb{Z}^d$ , à l'instant  $n$ , en les valeurs aux sites voisins  $V_k$  à l'instant précédent ( $n - 1$ ) ( $n \geq 1$ )

des cellules  $k - 1, k$  et  $k + 1$  à l'instant ( $n - 1$ ). De même, la valeur  $\sigma_{k-1}(n)$  est déterminée en fonction de  $\sigma_{k-2}(n - 1)$ ,  $\sigma_{k-1}(n - 1)$ ,  $\sigma_k(n - 1)$  et la valeur  $\sigma_{k+1}(n)$  en fonction de  $\sigma_k(n - 1)$ ,  $\sigma_{k+1}(n - 1)$ ,  $\sigma_{k+2}(n - 1)$ .

L'**évolution synchrone** de toutes les cellules se représente comme l'action globale d'une transformation  $U$  sur l'ensemble des valeurs associées aux cellules  $S^G = (s_g)_{g \in G}$  de la forme :

$$U\left((\sigma_g(n))_{g \in G}\right) = \left(u_g(\sigma_{V_g}(n - 1))\right)_{g \in G}. \quad (1.2)$$

De manière générale, des conditions supplémentaires sont imposées aux règles  $(u_g)_{g \in G}$

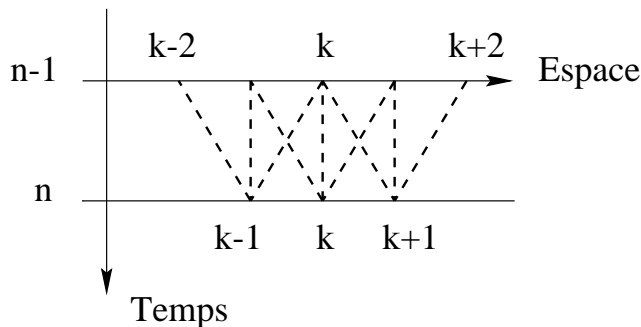


FIG. 1.2 – Cas où  $G = \mathbb{Z}$  et  $V_k = \{k - 1, k, k + 1\}$ , entre deux instants successifs  $n - 1$  et  $n$

de telle sorte que **chaque cellule évolue selon la même règle**. Cela signifie que

les règles  $(u_g)_{g \in G}$  sont en fait une seule et même règle  $u$ . Cette homogénéité spatiale fait écho à l'homogénéité temporelle. En effet, on remarque que les règles locales d'évolution ne dépendent pas du temps et sont donc les mêmes à tous les instants.

Précisons que **ces règles d'évolution peuvent être déterministes**, ce qui correspond au cas présenté ci-avant, **ou bien probabilistes**. Dans ce cas, on remplace les règles  $(u_g)_{g \in G}$  par des probabilités  $(p_g)_{g \in G}$  d'obtenir chacune des valeurs  $\sigma_g(n)$  de  $S$  en fonction des valeurs des cellules voisines à l'instant précédent  $\sigma_{V_g}(n-1)$  soit :  $p_g(\sigma_g(n) | \sigma_{V_g}(n-1))$ .

On parle ainsi respectivement d'**automates cellulaires déterministes**, abrégés en DCA de l'anglais *Deterministic Cellular Automata*, et d'**automates cellulaires probabilistes**, abrégés en PCA de l'anglais *Probabilistic Cellular Automata*.

## 1.2 Historique

Lorsqu'à la fin des années 40, **J. Von Neumann** travaille à la conception des premiers ordinateurs, il introduit le concept d'automates cellulaires (déterministes). Son idée originelle était de réaliser des machines pouvant générer des comportements complexes et variés à partir de lois simples de fonctionnement, et d'imiter le fonctionnement du cerveau humain. S'inspirant de la biologie, il conçoit ces modèles de dynamiques à temps discret dans lesquelles différentes entités élémentaires évoluent simultanément, en interaction et selon des règles identiques, telle la structure cérébrale des neurones. L'idée de considérer un ensemble discret d'entités élémentaires, et non continu comme les modèles usuels de la physique, remonte à S. Ulam (cf. [Ula52]). Le concept d'automate cellulaire a ensuite été utilisé sous des terminologies différentes, dans des contextes disciplinaires divers (analyse de l'image, ingénierie électrique, etc.).

La popularisation de ces modèles trouve son origine dans le **jeu de la vie** introduit par J. Conway en 1970 (cf. [Gar70]). Pour cet automate cellulaire déterministe, on a  $S = \{0; 1\}$  et  $G = \mathbb{Z}^2$ . La valeur 0 désigne une cellule dite « morte », la valeur 1 une cellule « vivante ». Les voisinages considérés contiennent le site lui-même et ses 8 voisins sur  $\mathbb{Z}^2$  définis par :

$$V_k = \{k, k - e_1, k + e_1, k - e_2, k + e_2, k + e_1 + e_2, k + e_1 - e_2, k - e_1 + e_2, k - e_1 - e_2\} \quad (1.3)$$

où  $k \in \mathbb{Z}^2$  et  $(e_1, e_2)$  désignent les deux vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . La règle locale d'évolution est établie de la sorte :

- naissance : si une cellule est morte (état 0) à un instant, elle devient vivante (état 1) à l'instant suivant si elle est entourée par exactement 3 cellules vivantes dans le voisinage  $V_k$  ;
- mort par isolement ou surpopulation : si une cellule est vivante, elle meurt à l'instant suivant si elle est entourée par moins de 2 ou plus de 3 cellules vivantes.

Cela se traduit par la formule suivante :  $\forall k \in \mathbb{Z}^2$ ,

$$u_k(\sigma_k(n)) = \mathbb{1}_{\{\sigma_k(n-1)=0\}} \cdot \mathbb{1}_{\{\sum_{k' \in V_k} \sigma_{k'}(n-1)=3\}} + \mathbb{1}_{\{\sigma_k(n-1)=1\}} \cdot \mathbb{1}_{\{\sum_{k' \in V_k} \sigma_{k'}(n-1)=3\}} \cdot (1.4)$$

Pensée comme modélisation de l'évolution de populations de cellules (vivantes ou mortes), cette règle simple a, de manière inattendue, révélé des comportements divers

et remarquables. Une vaste littérature lui est consacrée, actualisée sans cesse, et l'on se référera à [CD98] pour plus de précisions à ce propos.

De nombreux travaux étudient les DCA dans le cas où  $G = \mathbb{Z}$  ou bien  $G = \mathbb{Z}^2$ . On se reportera aux références [CD98, MT87] pour une bibliographie très complète à ce sujet. En particulier, dans les années 80, S. Wolfram entreprend une étude systématique des automates cellulaires déterministes en dimension 1 ( $G = \mathbb{Z}$ ) (cf. [Wol86]).

Différents auteurs, comme T. Toffoli, N. H. Margolus, E. Fredkin prônent alors l'emploi des automates cellulaires comme outil de modélisation pour des situations physiques, biologiques ... Si jusque là, l'intérêt était porté presque essentiellement aux automates cellulaires déterministes, l'introduction des automates cellulaires probabilistes offre alors une plus grande souplesse pour modéliser les phénomènes de la physique statistique (cf. [Dom84, DK84, GJH85, Wol83]). À la différence des DCA, on introduit dans la règle d'évolution locale un paramètre régulant la quantité d'aléatoire, ce qui permet d'obtenir des comportements aussi variés que la phénoménologie considérée.

De manière indépendante, dans les années 70, l'école probabiliste soviétique, sous l'impulsion de I. M. Gelfand et M. L. Tsetlin, publie de nombreux travaux sur des modèles probabilistes de type dynamiques markoviennes, avec application à la biologie et l'ingénierie. Entre autres, les PCA furent étudiés sous les terminologies de *locally interacting Markov systems* ou *discrete local Markov systems*. Les premiers résultats les concernant sont dûs à R. L. Dobrushin, O. Kozlov, G. L. Kurdyumov, L. G. Mityushin, S. A. Pirogov, O. N. Stavskaya, A. L. Toom, L. N. Vasershtein, N. B. Vasilyev... Ces travaux furent regroupés pour l'essentiel et publiés en langue anglaise en 1978 dans la référence [TVS<sup>+</sup>78]. Dans [MM91] les auteurs appliquent également les techniques de développement en amas (*cluster expansion*) aux PCA.

Indépendamment, D. Dawson établit durant la même période différents résultats relatifs aux PCA [Daw73, Daw74a, Daw74b, Daw75, Daw77], qu'il désigne par *synchronous dynamics*. Quelques publications furent produites dans les années 80 sur ce thème; nous les mentionnerons plus avant. Un regain d'intérêt mathématique pour les PCA fut ensuite suscité dans les années 90 par la publication de l'article [GLD89] de A. Georges et P. Le Doussal, ainsi que des articles de J. L. Lebowitz, C. Maes, S. Shlosman, E. R. Speer *et al.* [LMS90, GKLM89]. Ces dernières références réalisent un lien entre l'étude strictement probabiliste des automates cellulaires et leur emploi au sein de la physique statistique.

Bien que les dynamiques parallèles soient des dynamiques à temps discret plus faciles à définir que des dynamiques à temps continu, l'étude de ces dernières a longtemps prévalu. Cela explique le peu de résultats généraux concernant les PCA.

### 1.3 Utilisation et applications

Introduits à l'origine pour l'informatique, les automates cellulaires en demeurent un concept important pour développer des algorithmes pouvant être mis en œuvre sur

des machines à architecture parallèle. D'autre part, comme nous l'avons signalé précédemment, les Automates Cellulaires constituent un objet mathématique fécond pour la modélisation de divers phénomènes.

En physique, ils sont utilisés, par exemple, pour l'étude de la croissance de cristaux, ou l'apparition de structures d'interfaces (cf. [Vic84]). Ils sont également utilisés comme alternative aux équations différentielles de l'hydrodynamique, car leur implémentation est plus aisée. Maxwell (cf. [Max90]) avait déjà évoqué l'emploi de tels modèles discrets pour étudier les gaz et les écoulements de fluide. Des modèles d'automates cellulaires permettent effectivement de retrouver des comportements prédits par les équations de Navier-Stokes (cf. [CM87, FHP86, CdLP86, Tof84]).

Le concept d'automates cellulaires est apparu pour imiter le comportement des cellules neuronales. La biologie se prête ainsi à une description en terme de composants élémentaires en interaction, évoluant de manière simultanée. (cf. [Bag97, Bag98, Bez99, EvC]).

De même, en sciences sociales, la représentation de populations par un grand nombre d'individus répartis dans l'espace, dont le comportement est codé par une valeur et régi par l'interaction avec les individus proches, permet d'avoir recours aux automates cellulaires.

En finance, l'utilisation des modèles markoviens est fondamentale : ainsi, les PCA y jouent un rôle, comme en atteste la référence [Föl94].

Les PCA jouent également un rôle important dans d'autres branches mathématiques que les probabilités. Ainsi par exemple, dans la référence [GM00], l'étude d'un système dynamique composé de transformations couplées (*coupled maps*) se fonde sur celle d'un PCA qui lui est associé (cf. également [Sak88]).

En probabilité, on peut se servir des connaissances que l'on a pour les PCA pour les appliquer à d'autres processus stochastiques. Par exemple, certains systèmes de particules à temps continu se laissant approximer par des PCA, on peut transposer les propriétés fines des uns vers les autres (cf. par exemple [MS93] pour des propriétés d'ergodicité).

## 1.4 Classes d'Automates Cellulaires Probabilistes

Les automates cellulaires probabilistes sont un type spécifique de systèmes de particules, c'est-à-dire de dynamiques stochastiques markoviennes sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , dites **dynamiques parallèles**, pour lesquelles l'évolution simultanée des spins est indépendante conditionnellement au passé, ce qui se traduit par une probabilité de transition de la forme produit.

Nous allons maintenant souligner une différence fondamentale avec les dynamiques à temps continu, pour lesquelles l'évolution est séquentielle (cf. [Bré99, Guy92, Lig85]).

Si l'on se donne une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $S^\Lambda$ , où  $\Lambda$  est une partie finie de  $\mathbb{Z}^d$ , qui soit une mesure de Gibbs à volume fini pour une interaction donnée (ces notions

seront précisées au Chapitre 2), il est aisé de construire une chaîne de Markov sur  $S^\Lambda$  avec une dynamique séquentielle qui admette  $\mu$  comme mesure réversible, donc comme état invariant sous l'action de la dynamique. La situation des dynamiques parallèles est toute autre. Il n'existe pas de méthodes générales permettant de construire une dynamique PCA qui admettrait une mesure de Gibbs donnée comme état stationnaire. On sait même plus précisément, d'après un résultat de Dawson (cf. Th. 4.2 *in* [Daw74b]), que si  $\mu$  est une mesure de Gibbs par rapport à un potentiel de portée 1 (*i.e.* aux plus proches voisins) sur  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ , alors, il n'existe pas de dynamique PCA invariante par translation qui admette  $\mu$  comme mesure réversible.

Cela témoigne de l'originalité des dynamiques parallèles par opposition aux dynamiques séquentielles.

### 1.4.1 Automates cellulaires Probabilistes purement stochastiques

Jusqu'à présent, deux grandes classes d'automates cellulaires ont été considérées : les **automates cellulaires déterministes** et les **automates cellulaires probabilistes**. Des situations intermédiaires méritent cependant d'être précisées.

Un automate cellulaire probabiliste qui vérifie la condition :

$$\forall g \in G, \forall s \in S, \forall \sigma \in S^G, \quad p_g(s | \sigma) > 0, \quad (1.5)$$

est dit **purement stochastique**. En chaque site, tout état de  $S$  peut être atteint en un instant avec une probabilité non nulle. De tels PCA ne possèdent ainsi aucune « composante » dynamique déterministe. Notre étude se concentrera sur eux dans les chapitres à venir.

**Cas particulier où  $S = \{-1; +1\}$  et  $G = \mathbb{Z}^d$**

Ce cas sera celui considéré à partir du Chapitre 4.

On remarque que les règles locales  $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  d'un automate cellulaire probabiliste sur  $\{-1; +1\}^{\mathbb{Z}^d}$  peuvent toujours s'écrire sous la forme :

$$p_k(s | \sigma) = \frac{1}{2}(1 + s h_k(\sigma)) \quad (1.6)$$

où  $s \in S, \sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}$  et  $h_k(\cdot)$  est une fonction de  $S^{\mathbb{Z}^d}$  vers  $\mathbb{R}$  qui satisfait pour tout  $\sigma$  :

$$|h_k(\sigma)| \leq 1, \quad (1.7)$$

et qui traduit la dépendance du site  $k$  en ses sites voisins. Le fait que la dynamique PCA considérée soit purement stochastique est alors équivalent à la condition :

$$\forall \sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}, \quad |h_k(\sigma)| < 1. \quad (1.8)$$

### 1.4.2 Automates Cellulaires Probabilistes dégénérés

La situation opposée au cas purement stochastique est celle d'un automate cellulaire probabiliste de règles  $(p_g)_{g \in G}$  satisfaisant

$$\forall g \in G, \forall s \in S, \forall \sigma \in S^G, \quad p_g(s | \sigma) = 0 \text{ ou } 1, \quad (1.9)$$

qui est en réalité un automate cellulaire déterministe.

Entre ces deux situations extrêmes se trouvent des automates cellulaires probabilistes tels que :

$$\exists g \in G, \exists s_0 \in S, \exists \sigma_0 \in S^G, \quad p_g(s_0 | \sigma_0) = 0 ; \quad (1.10)$$

c'est-à-dire qu'il existe au moins un état qui, pour une certaine configuration initiale du système, n'est presque-sûrement jamais atteint. De tels automates cellulaires probabilistes seront alors dits **dégénérés**. Les références [KKT, FT01] en étudient certains exemples.

Une classe particulière de ces PCA dégénérés est constituée par les dynamiques parallèles telles que, pour au moins un site  $g \in G$ , il existe une valeur  $s_0 \in S$  et une configuration  $\sigma_0 \in S^G$  telles que :

$$p_g(s_0 | \sigma_0) = 1 . \quad (1.11)$$

Citons comme exemple de telles dynamiques PCA le **modèle de Stavskaja** (cf. exemple 1.2 *in* [TVS<sup>+</sup>78]) : on suppose  $S = \{0; 1\}$ ,  $G = \mathbb{Z}$ , les voisinages  $(V_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  sont définis par  $\{k-1; k\}$  et les règles locales d'évolution sont définies, pour  $k \in \mathbb{Z}$ , par :

$$\begin{cases} p_k(1 | \sigma) = 1 & \text{si } \sigma_k = \sigma_{k-1} = 1 \\ & = \varepsilon \in [0, 1] \text{ sinon.} \end{cases} \quad (1.12)$$

Ce PCA est homogène spatialement car tous les sites  $k \in \mathbb{Z}$  évoluent suivant la même règle d'évolution locale  $p_k$ . Cette règle est en fait la composée successive de deux opérations : l'une déterministe,  $\sigma_k(n) = \sigma_k(n-1)\sigma_{k-1}(n-1)$  ; l'autre probabiliste, puisque tous les sites se trouvant dans l'état 0 peuvent prendre la valeur 1 avec une probabilité de  $\varepsilon$ , indépendamment des autres sites et de leur état passé. Ce modèle a été étudié en détail dans la référence [SPS71]. Citons en quelques propriétés.

Lorsque  $\varepsilon = 1$ , l'état du système où tous les sites prennent la valeur 1, est invariant sous l'action de la dynamique et est atteint dès l'instant 1, indépendamment de l'état initial.

Lorsque  $\varepsilon = 0$ , la situation est encore celle d'un automate cellulaire déterministe et on peut montrer qu'il existe différentes répartitions statistiques invariantes sous l'action de la dynamique.

Plus précisément, il a été établi qu'il existe un paramètre  $\varepsilon^*$  tel que si  $\varepsilon > \varepsilon^*$ , alors cette dynamique PCA est ergodique : pour tout état initial, le système converge vers l'état où l'on a 1 en chaque site. Et si  $\varepsilon < \varepsilon^*$ , il a été établi que le système est non-ergodique.

Pour d'autres exemples de PCA dégénérés, et résultats à leur propos, on se reportera aux références [BKM93, Pir86, TVS<sup>+</sup>78, Too95].

## 1.5 Plan de cette étude

Dans toute cette étude nous nous placerons dans le cas où l'ensemble des sites est le graphe régulier  $G = \mathbb{Z}^d$  et l'ensemble  $S$  est fini.

Les questions naturelles qui se posent à propos des automates cellulaires sont celles usuelles pour tout système dynamique : évolution au cours du temps, comportement asymptotique en temps, existence et unicité d'états invariants ou réversibles sous l'action de la dynamique (dans un sens qui sera précisé au Chapitre 2). Comme le modèle de Stavskaja l'atteste, différents comportements asymptotiques peuvent avoir lieu.

Pour les dynamiques à temps continu sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , un lien étroit entre les états d'équilibre de ces dynamiques et certains types de distribution statistique, comme des mesures de Gibbs, est établi depuis longtemps. Il permet de considérer l'influence du phénomène de transition de phase sur le comportement de la dynamique associée ([Spi74, DR79, Dur81, HS81]). La motivation de ce travail est de mettre en valeur et de développer une telle correspondance pour les dynamiques parallèles.

Dans le Chapitre 2, nous définissons le cadre mathématique utile à notre étude. Nous rappelons la notion de mesure de Gibbs et définissons rigoureusement les dynamiques PCA qui nous intéressent. Notre attention se concentre ensuite sur les dynamiques parallèles purement stochastiques.

Dans les Chapitres 3 et 4 nous nous intéressons à l'existence et à l'unicité des mesures stationnaires de ces dynamiques PCA, ainsi qu'à la caractérisation de leurs états d'équilibre comme mesures de Gibbs. Ces chapitres développent et complètent des résultats que nous venons de publier (cf. [DPLR02]). Nous étudions plus particulièrement des dynamiques dites réversibles, et le Chapitre 4 est consacré à l'analyse d'une famille paramétrée de telles dynamiques sur  $\{-1; +1\}^{\mathbb{Z}^d}$ . Pour ces dynamiques les relations entre les états d'équilibre (mesures stationnaires, réversibles) et les mesures de Gibbs pour un potentiel naturellement associé à la dynamique, sont explicitées. L'existence d'un phénomène de transition de phase est démontrée et son influence sur le comportement asymptotique de la dynamique précisé.

Dans les Chapitres 5 et 6, nous nous intéressons à la convergence vers l'équilibre des dynamiques PCA sur  $\{-1; +1\}^{\mathbb{Z}^d}$  qui sont, de plus, attractives. À cette fin, dans le Chapitre 5 on construit un couplage d'un nombre fini de dynamiques parallèles ayant la particularité de préserver l'ordre stochastique. Dans le Chapitre 6, nous prouvons la convergence à vitesse exponentielle vers l'équilibre.

Enfin, le Chapitre 7 illustre, par des simulations numériques, les résultats précédemment développés et présente un algorithme parallèle convergeant vers des mesures de Gibbs du modèle d'Ising.

Le lecteur trouvera dans les introductions respectives de chacun des chapitres de plus amples précisions sur leur contenu et leur organisation interne.

# Chapitre 2

## Cadre mathématique et notations

La Mécanique Statistique s'attache à étudier et décrire le ou les états macroscopiques dans lesquels peut se trouver un système composé d'un grand nombre de constituants qui interagissent entre eux au niveau microscopique. La formalisation actuelle de cette théorie au sein des Probabilités nous offre un cadre rigoureux pour préciser et développer notre étude des automates cellulaires probabilistes. Bien plus, elle nous fournit le concept fondamental de mesure de Gibbs qui sera introduit dans le présent chapitre. Brièvement, une mesure de Gibbs est un modèle mathématique permettant de préciser la répartition statistique des diverses configurations possibles d'un système, configurations résultant de phénomènes coopératifs entre les entités élémentaires constitutives du système. Les automates cellulaires, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, sont des systèmes dont l'essence même est d'être composés de «cellules» élémentaires s'influençant mutuellement au cours du temps.

L'aspect principal de l'étude des dynamiques parallèles aléatoires que nous menons présentement est donc de mettre en lumière les liens pouvant exister entre ces dynamiques et ce concept général d'état statistique macroscopique d'un *système de particules* en interaction. La terminologie particule est à considérer comme analogue à un automate élémentaire, *i.e.* à une entité microscopique mentionnée ; l'origine de cette terminologie est à situer en Physique où ces concepts sont nés. En particulier, il est établi que pour certaines classes de dynamiques stochastiques, on peut naturellement associer des mesures de Gibbs qui constituent exactement les états d'équilibre de ces dynamiques. Certains résultats dorénavant usuels de la théorie des mesures de Gibbs permettent alors de préciser l'étude des états d'équilibre de ces dynamiques : question de l'existence de tels états, de leur éventuelle multiplicité, de leurs propriétés qualitatives, et question de l'évolution, et de la vitesse d'évolution, de la dynamique vers ces états. Les dynamiques parallèles, que sont les PCA, sont ainsi considérées dans cette étude comme des dynamiques stochastiques particulières : des dynamiques markoviennes, et les résultats présentés expliciteront les engrenages fondamentaux entre ces dynamiques et la théorie des mesures de Gibbs, caractérisant l'état statique d'un système.

Nous précisons dans ce chapitre le formalisme mathématique probabiliste utilisé, établi sur la modélisation usuelle par un espace produit  $S^{\mathbb{Z}^d}$  de l'espace des états possibles de systèmes de particules. Compte tenu de la richesse évoquée au chapitre précédent



de tels modèles, nous considérons ici le cas où les particules, c'est à dire les automates, ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs (éléments de  $S$ ), et sont indexés par les éléments d'un réseau sous-jacent, que l'on assimile ici à  $\mathbb{Z}^d$ . Dans la section 2.1 nous rappelons quelques propriétés quant à la structure topologique de cet espace, propriétés qui seront à la base des résultats à venir. Dans la section 2.2 nous définissons les mesures de probabilité sur cet espace de configurations. Ce sont les lois statistiques de tout modèle probabiliste des systèmes auxquels nous nous intéressons. Nous définissons dans cette section (sous-section 2.2.2) le concept de mesure de Gibbs associée à une interaction sur le réseau  $\mathbb{Z}^d$ , et mentionnons les résultats usuels dans ce cadre. Nous définissons également le concept de *système ferromagnétique*, *i.e.* de système au sein duquel les états statistiques macroscopiques réalisés donnent une probabilité plus forte aux agencements locaux favorisant des valeurs égales pour des particules voisines. Dans la section 2.3, nous modélisons les automates cellulaires probabilistes par des dynamiques stochastiques markoviennes à temps discret particulières, prenant leurs valeurs dans l'espace des configurations  $S^{\mathbb{Z}^d}$  introduit. Nous y précisons les rapports existants entre les dynamiques pouvant être définies pour un ensemble fini de particules en interaction, et pour un ensemble infini qui est l'objet de notre étude. En effet, comme les résultats le justifieront *a posteriori*, et comme le motivent les résultats de la théorie des mesures de Gibbs, seule la modélisation d'une grande quantité de particules par une infinité mathématique permet d'obtenir des résultats rendant compte de toute la phénoménologie observée dans la réalité. Nous introduisons enfin dans la sous-section 2.3.3 l'analogie dynamique des systèmes ferromagnétiques : les dynamiques attractives, *i.e.* favorisant au cours du temps l'évolution de particules voisines vers le même état.

## 2.1 Espaces d'états

Dans cette première section, nous définissons (sous-section 2.1.1) l'espace des sites indexant les particules. Chaque particule prend un nombre fini de valeurs, valeurs que l'on regroupe au sein d'un même espace fini  $S$ , qui sera appelé **espace de spins**. La terminologie choisie se réfère à nouveau aux origines physiques de tels modèles, puisqu'un des premiers problèmes abordé par la Physique Statistique fut l'étude des propriétés magnétiques de cristaux. Le magnétisme macroscopique trouve en effet son origine dans la considération de l'électron sous son aspect quantique, plus précisément dans la prise en compte de la valeur du moment magnétique résultant des spins des électrons. Nous définissons ensuite (sous-section 2.1.2) l'espace des configurations, qui est un espace produit de l'espace des spins  $S$ . Une configuration est un des états microscopiques pouvant être réalisés par le système. Nous précisons la structure topologique, ainsi que la structure d'espace mesurable usuelle, ainsi que les transformations agissant sur cet espace qui sont utiles ultérieurement. Enfin, on modélise les observations pouvant être réalisées sur le modèle par les fonctions à valeurs réelles définies sur l'espace des configurations (sous-section 2.1.3) et on énonce la Proposition 2.1.4 contrôlant les fluctuations d'une fonction d'observation et qui sert aux chapitres suivants. Pour plus de précisions, se référer à l'annexe A du livre de Ellis [Ell85], et aux références qui y sont mentionnées.

### 2.1.1 Espace des sites

#### Définitions et normes sur l'espace des sites

Soit  $d$  un entier non nul. On considère comme **espace des sites** l'ensemble  $\mathbb{Z}^d$ . On appelle **volume fini** toute partie finie  $\Lambda$  de  $\mathbb{Z}^d$ , ce que l'on désigne par  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ ; l'expression **volume infini** est utilisée comme synonyme pour l'espace des sites  $\mathbb{Z}^d$  dans son intégralité. On note  $\#\Lambda$  le cardinal de toute partie finie  $\Lambda$  de  $\mathbb{Z}^d$ . Soit  $k \in \mathbb{Z}^d$ . La notation  $\triangleq$  signifie « égal par définition ». Notons  $k = (k_1, k_2, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ . On définit les normes suivantes :

$$\|k\|_1 \triangleq \sum_{i=1}^d |k_i|, \quad (2.1)$$

$$\|k\|_2 \triangleq \sqrt{\sum_{i=1}^d |k_i|^2}, \quad (2.2)$$

$$\|k\|_{\max} \triangleq \max_{1 \leq i \leq d} |k_i|. \quad (2.3)$$

Soit  $L \in \mathbb{R}^*$ . La boule de centre 0 et de rayon  $L$  au sens de la norme  $\|\cdot\|_{\max}$  est ici notée :

$$\mathcal{B}_L \triangleq \mathcal{B}_{\|\cdot\|_{\max}}(0, L) = \{k \in \mathbb{Z}^d : \|k\|_{\max} \leq L\} = \bigcap_{i=1}^d \{k \in \mathbb{Z}^d : -L \leq k_i \leq L\}. \quad (2.4)$$

On note les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^d$  :  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ .

### 2.1.2 Espaces des configurations

#### Définitions et notations

Soit  $S$  un espace fini de cardinal supérieur ou égal à deux qui est appelé **espace des spins**. Les espaces d'état des variables aléatoires et processus stochastiques markoviens, qui seront considérés, sont les espaces produit :

$$\forall \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d, S^\Lambda \triangleq \underbrace{S \times \dots \times S}_{\#\Lambda \text{ fois}} = \bigotimes_{k \in \Lambda} S. \quad (2.5)$$

On considère principalement comme espace d'état l'espace  $S^{\mathbb{Z}^d}$  ( $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ ) dont les éléments seront appelés **configurations** (éventuellement **configuration à volume infini**) et désignés par les lettres grecques :  $\sigma, \eta, \xi, \zeta \dots$ . Pour une configuration  $\sigma$ , élément de  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , on utilise la notation  $\sigma_k$  pour désigner la valeur de la configuration au site  $k$ , *i.e.* la valeur du spin au site  $k$ . La notation  $\omega_k(n)$  est utilisée lorsqu'il s'agit de considérer une configuration  $\omega(n) = (\omega_k(n))_{k \in \mathbb{Z}^d}$  à un instant  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour l'étude sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , on est également amené à considérer les **configurations à volume fini**  $\Lambda$  ( $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ ) notée par  $\sigma_\Lambda \in S^\Lambda$ . On définit la projection  $\wp_\Lambda$  :

$$\begin{aligned} \wp_\Lambda & : S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^\Lambda \\ \sigma & \mapsto \wp_\Lambda(\sigma) \triangleq \sigma_\Lambda, \end{aligned}$$

autrement dit la restriction de  $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  à  $(\sigma_k)_{k \in \Lambda}$ . Pour toute valeur de spin  $s$ , élément de  $S$ , on utilise également la notation  $\mathbf{s}$  pour signifier la configuration de  $S^{\mathbb{Z}^d}$  égale à  $s$  en tout site  $k$  :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathbf{s}_k = s .$$

Ainsi, si  $S = \{-1, +1\}$ ,  $-\mathbf{1}$ , respectivement  $+\mathbf{1}$ , désignent les configurations égales en tout site de  $\mathbb{Z}^d$  à  $-1$ , respectivement  $+1$ .

Par ailleurs, soient  $\Lambda, \Delta$  deux parties disjointes de  $\mathbb{Z}^d$ . On parlera de **concaténation** de deux configurations  $\sigma_\Lambda$  et  $\eta_\Delta$  (resp. dans  $S^\Lambda$  et  $S^\Delta$ ) pour désigner la configuration  $\xi$  de  $S^{\Lambda \cup \Delta}$  telle que :

$$\xi_k = \begin{cases} \sigma_k & \text{si } k \in \Lambda \\ \eta_k & \text{si } k \in \Delta \end{cases} .$$

En particulier, pour toute partie finie  $\Lambda$  de  $\mathbb{Z}^d$ ,  $\sigma_\Lambda \eta_{\Lambda^c}$  désigne la configuration :

$$(\sigma_\Lambda \eta_{\Lambda^c})_k = \begin{cases} \sigma_k & \text{si } k \in \Lambda \\ \eta_k & \text{si } k \in \Lambda^c \end{cases} . \quad (2.6)$$

Comme l'ensemble  $S$  est fini, il est muni d'une relation d'ordre total ( $\leq$ ) et on définit l'**ordre partiel**  $\preceq$  sur  $S^\Lambda$  ( $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ ) pour  $\sigma, \eta \in S^\Lambda$  par :

$$\sigma \preceq \eta \quad \text{si} : \quad \forall k \in \Lambda, \quad \sigma_k \leq \eta_k . \quad (2.7)$$

On introduit dans ce cas les configurations suivantes :  $\sigma \wedge \eta$  et  $\sigma \vee \eta$  définies, pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}^d$ , par :

$$(\sigma \wedge \eta)_k = \min(\sigma_k, \eta_k) \quad \text{et} \quad (\sigma \vee \eta)_k = \max(\sigma_k, \eta_k) . \quad (2.8)$$

On précise que l'on fait l'abus de notation suivant : la notation  $\sigma_\Lambda$  désignera autant l'image d'une configuration  $\sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}$  définie sur le réseau tout entier, qu'un élément de l'espace  $S^\Lambda$  ( $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ ) pour lequel l'indice  $\Lambda$  rappelle l'espace auquel appartient la configuration à volume fini.

## Structures topologiques

L'espace fini  $S$  étant muni de la topologie discrète, on munit le produit d'espace  $S^\Lambda$  de la topologie produit. Dans le cas où  $\Lambda$  est une partie finie,  $S^\Lambda$  est un espace discret fini, et la topologie produit coïncide dans ce cas avec la topologie discrète. Dans le cas où  $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ , l'espace  $S^{\mathbb{Z}^d}$  est un espace de cardinal infini. Le concernant, on introduit les ensembles  $\mathcal{N}_V(\sigma)$  définissant une base de voisinages de la topologie produit : pour  $\sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}$  et  $V \Subset \mathbb{Z}^d$ ,

$$\mathcal{N}_V(\sigma) = \{\eta \in S^{\mathbb{Z}^d} : \eta_V = \sigma_V\} .$$

Pour  $\sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}$ , on notera  $\mathcal{N}_L(\sigma) = \mathcal{N}_{B_L}(\sigma)$ . Les ensembles  $\mathcal{N}_L(\cdot)$ ,  $L \in \mathbb{N}^*$ , constituent une base de voisinage pour la topologie produit considérée sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ .

Remarquons que  $S^{\mathbb{Z}^d}$  est un **espace compact**, puisque produit infini dénombrable d'espaces compacts.

L'espace  $S^{\mathbb{Z}^d}$  est également un **espace métrique**. En effet, on peut vérifier que, pour toute bijection  $n : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$ , la distance  $\mathfrak{d}$  définie pour  $\sigma, \eta \in S^{\mathbb{Z}^d}$  par

$$\mathfrak{d}(\sigma, \eta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{2^{n(k)}} \mathbb{1}_{\sigma_k \neq \eta_k} \quad (2.9)$$

(où  $\mathbb{1}$  désigne la fonction indicatrice) est une métrique sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  dont la topologie associée correspond à la topologie produit précédemment évoquée sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ .

On précise qu'en tant qu'espace métrique compact,  $S^{\mathbb{Z}^d}$  est également un **espace complet** pour la métrique  $\mathfrak{d}$ .

**Remarque 2.1.1** *L'espace métrique  $(S^{\mathbb{Z}^d}, \mathfrak{d})$  est homéomorphe à une partie compacte de  $[0, 1]$ , totalement discontinue, non connexe<sup>1</sup>. En particulier, si  $S = \{-1, +1\}$ ,  $S^{\mathbb{Z}^d}$  est homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor.*

## Transformations sur l'espace des configurations

### – Translations

Soit un site  $k_0$  de  $\mathbb{Z}^d$ . On définit  $\theta_{k_0}(\sigma)$  la translation d'une configuration  $\sigma$  de  $S^{\mathbb{Z}^d}$  par

$$\theta_{k_0}(\sigma) \triangleq (\sigma_{k-k_0})_{k \in \mathbb{Z}^d}. \quad (2.10)$$

– **Retournements de spins** Dans le cas où l'espace des spins  $S$  est symétrique ( $-s \in S \iff s \in S$ ) on définit la transformation  $T_{k_0}$  par :  $T_{k_0}(\sigma) \triangleq \sigma^{k_0}$  avec

$$\sigma_k^{k_0} = \begin{cases} \sigma_k & \text{si } k \neq k_0 \\ -\sigma_k & \text{si } k = k_0 \end{cases}. \quad (2.11)$$

Cette transformation  $T_{k_0}$  est appelée le **retournement de spin** au site  $k_0$ . Dans la littérature, cette transformation apparaît souvent sous la dénomination anglo-saxonne de *spin flip* en un site  $k_0$ .

## L'espace des configurations comme espace mesurable

- Soit  $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ .  $S^\Lambda$  étant un espace fini de cardinal  $\#S^\Lambda$  muni de la topologie discrète, on le considérera muni de la tribu constituée par l'ensemble de ses parties.
- Concernant l'espace des configurations (à volume infini)  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , il faut préciser que la **tribu borélienne** sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  associée à la topologie produit est engendrée par les événements cylindriques (cylindres) c'est à dire les parties de  $S^{\mathbb{Z}^d}$  de la forme :

$$\{\eta : \eta_\Lambda = \sigma_\Lambda\}, \quad \text{pour tout } \Lambda \in \mathbb{Z}^d, \text{ et } \sigma \in S^{\mathbb{Z}^d} \text{ fixés,}$$

qui sont exactement les voisinages  $\mathcal{N}_\Lambda(\sigma)$ . La tribu produit  $\mathfrak{P}(S)^{\otimes \mathbb{Z}^d}$  (où  $\mathfrak{P}(S)$  désigne l'ensemble des parties de  $S$ ) coïncide donc avec la tribu borélienne. On utilise la notation  $\mathfrak{F}$  pour désigner cette tribu sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ .

---

<sup>1</sup>Ces propriétés motivent l'emploi d'une notation « non discrète » des lois de probabilité sur cet espace.

- Tribus sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  des événements dépendant d'un nombre fini de sites : Pour tout  $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ , on désigne par  $\mathfrak{F}_\Lambda$  la sous-tribu de  $\mathfrak{F}$  engendrée par la projection  $\wp_\Lambda$ , soit encore la tribu engendrée par les événements cylindriques de la forme  $\mathcal{N}_\Lambda(\sigma)$ ,  $\sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}$  ( $\Lambda$  fixé). On remarque que pour  $\Delta, \Lambda$  deux parties finies de  $\mathbb{Z}^d$ , telles que  $\Delta \subset \Lambda$ , on a pour tout  $\sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}$  :  $\mathcal{N}_\Delta(\sigma) \subset \mathcal{N}_\Lambda(\sigma)$ ; d'où :

$$\mathfrak{F}_\Lambda \subset \mathfrak{F}_\Delta .$$

### 2.1.3 Fonctions sur $S^{\mathbb{Z}^d}$

#### Fonctions sur $S^{\mathbb{Z}^d}$ à valeurs réelles

Donnons à présent quelques définitions concernant les fonctions  $f$  définies sur l'espace des configurations  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On précise que de telles fonctions sont parfois également désignées par l'appellation **observable**.

Soit  $f$  une fonction sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , à valeurs réelles. On introduit l'opérateur gradient discret, pour  $k \in \mathbb{Z}^d$  :

$$\nabla_k f \triangleq f \circ T_k - f , \quad (2.12)$$

soit pour tout  $\sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}$  :

$$(\nabla_k f)(\sigma) = f(\sigma^k) - f(\sigma) .$$

On remarque que si  $f$  est une fonction continue, pour tout  $k$  appartenant à  $\mathbb{Z}^d$ ,  $\nabla_k f$  l'est également. On introduit maintenant le concept fondamental de fonction locale :

**Définition 2.1.2** *On dit qu'une fonction  $f$  est une **fonction locale** si elle ne dépend que de la valeur des configurations en un nombre fini de sites, i.e. :*

$$\exists \Delta \in \mathbb{Z}^d, \forall \sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}, f(\sigma) = f(\sigma_\Delta) .$$

L'ensemble de sites minimal  $\Lambda$  pour lequel  $f$  satisfait la propriété ci-dessus sera appelé **support** de la fonction locale  $f$  et noté  $\Lambda_f$ . Une fonction  $f$  locale est donc  $\mathfrak{F}_{\Lambda_f}$ -mesurable, et n'est pas  $\mathfrak{F}_\Delta$ -mesurable pour  $\Delta \subsetneq \Lambda_f$ . On vérifie aisément que, si  $f$  est locale, alors c'est également le cas de  $\nabla_k f$  pour tout site  $k$  de  $\mathbb{Z}^d$ ; en particulier,  $\forall k \in \mathbb{Z}^d, \Lambda_{\nabla_k f} = \Lambda_f$  et  $\forall k \notin \Lambda_f, \nabla_k f \equiv 0$ .

#### Fonctions continues sur $S^{\mathbb{Z}^d}$

On définit, pour  $f$  fonction continue sur le compact  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , la norme uniforme :

$$\|f\|_\infty \triangleq \sup_{\sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}} |f(\sigma)| \quad (2.13)$$

qui définit la topologie de la convergence uniforme sur les fonctions continues. De plus, l'espace des fonctions à valeurs réelles continues sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  :  $(\mathcal{C}(S^{\mathbb{Z}^d}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach et l'on a la propriété suivante très utile en pratique :

#### Proposition 2.1.3

*Toute fonction locale sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est continue, et toute fonction continue est limite uniforme, au sens de  $\|\cdot\|_\infty$ , de fonctions locales.*

**Preuve :**

Puisque  $S^{\mathbb{Z}^d}$  est un espace compact, ce résultat est une simple application du théorème de Stone-Weierstraß. Toutefois, nous préférons donner ici une preuve plus constructive, qui évite le recours à ce théorème. Soit  $f$  une fonction continue sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  à valeurs réelles. Soit  $\tau$  une configuration fixée de  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , et soit, pour toute partie finie  $\Lambda$  de  $\mathbb{Z}^d$ ,  $G_\Lambda^\tau$  la transformation de  $S^{\mathbb{Z}^d}$  qui associe à toute configuration  $\sigma$  la configuration  $G_\Lambda^\tau(\sigma) = \sigma_\Lambda \tau_{\Lambda^c}$ . Si l'on considère une suite croissante  $(\Lambda_n)_n$  tendant vers  $\mathbb{Z}^d$ , alors il est aisé de vérifier que la suite de transformation  $(G_{\Lambda_n}^\tau)_n$  converge uniformément vers la transformation identité. De plus,  $f$  étant continue sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  compact, elle est donc uniformément continue; ce qui, conjugué au résultat précédent, permet de conclure que la suite de fonctions – locales –  $(f \circ G_{\Lambda_n}^\tau)_n$  converge uniformément vers la fonction continue  $f$ . ■

De plus, comme  $S^{\mathbb{Z}^d}$  est un espace métrique compact, on remarque que l'espace des fonctions continues  $(\mathcal{C}(S^{\mathbb{Z}^d}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  est **séparable**.

Par ailleurs, pour toute fonction continue  $f$ , on définit en outre la norme  $\|\!\| f \|\!\|$  par :

$$\|\!\| f \|\!\| \triangleq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \|\nabla_k f\|_\infty, \quad (2.14)$$

et on remarque que, pour toute fonction  $f$  locale :

$$\|\!\| f \|\!\| \leq 2\#\Lambda_f \|f\|_\infty. \quad (2.15)$$

On établit alors la proposition suivante :

**Proposition 2.1.4** *Soit  $S = \{-1, +1\}$ . Soit  $f$  une fonction locale; pour tout couple de configurations  $\sigma, \eta$  de  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , on a :*

$$\left| f(\eta) - f(\sigma) \right| \leq \sum_{k \in \Lambda_f} \|\nabla_k f\|_\infty \cdot \mathbb{1}_{\{\sigma_k \neq \eta_k\}} \leq \|\!\| f \|\!\|.$$

**Preuve :**

Comme  $f$  est locale, seules importent les valeurs de  $\sigma$  et  $\eta$  en les sites (en nombre fini) de  $\Lambda_f$ . Ainsi,  $\sigma_{\Lambda_f}$  et  $\eta_{\Lambda_f}$  ne diffèrent qu'en un nombre fini de sites. Comme  $S = \{-1, +1\}$ , il suffit d'appliquer successivement, pour tous les  $k$  en lesquels  $\sigma_{\Lambda_f}$  et  $\eta_{\Lambda_f}$  diffèrent,  $T_k$  à  $\sigma_{\Lambda_f}$  pour obtenir  $\eta_{\Lambda_f}$ . Ordonnons ces sites, et nommons les  $k_1, k_2, \dots, k_M$  où  $M = \#\{k : (\eta_{\Lambda_f})_k \neq (\sigma_{\Lambda_f})_k\}$ . Notons :

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= \sigma, \quad \sigma^1 = T_{k_1}(\sigma), \quad \sigma^2 = T_{k_2}(T_{k_1}(\sigma)), \dots \\ \dots \sigma^M &= T_{k_M}(T_{k_{M-1}} \dots T_{k_2}(T_{k_1}(\sigma))) = \eta_{\Lambda_f} \sigma_{\Lambda_f^c}. \end{aligned}$$

Ces configurations seront appelées **configurations interpolantes**. On a alors :

$$f(\eta) - f(\sigma) = f(\sigma^M) - f(\sigma) = \sum_{i=0}^{M-1} (f(\sigma^{i+1}) - f(\sigma^i)).$$

En remarquant que  $f(\sigma^{i+1}) - f(\sigma^i) = \nabla_{k_{i+1}} f(\sigma^i)$ , on conclut alors :

$$\left| f(\eta) - f(\sigma) \right| \leq \sum_{k : (\eta_{\Lambda_f})_k \neq (\sigma_{\Lambda_f})_k} \|\nabla_k f\|_\infty = \sum_{k \in \Lambda_f} \|\nabla_k f\|_\infty \mathbb{1}_{\{\sigma_k \neq \eta_k\}} .$$

■

## 2.2 Mesures de probabilité

Dans cette sous-section nous définissons les lois statistiques macroscopiques précédemment évoquées, *i.e.* les mesures de probabilité sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  et la topologie adéquate (sous-section 2.2.1). Nous nous attardons sur le concept de mesure de Gibbs et ses premières propriétés qui seront importants dans les chapitres à venir (sous-section 2.2.2). Nous précisons également le concept de système ferromagnétique (sous-section 2.2.3).

### 2.2.1 Définition et topologie

On note  $\mathcal{P}(S^{\mathbb{Z}^d})$  l'ensemble des mesures de probabilité sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  (en toute rigueur, sur  $(S^{\mathbb{Z}^d}, \mathfrak{F})$ ). On vérifie aisément le fait suivant :

**Proposition 2.2.1**  $\mathcal{P}(S^{\mathbb{Z}^d})$  est une partie convexe **compacte** du dual topologique de  $\mathcal{C}(S^{\mathbb{Z}^d}, \mathbb{R})$ .

Ayant défini précédemment les translations  $\theta_k$  sur l'espace des configurations, on introduit alors le sous-ensemble  $\mathcal{P}_i(S^{\mathbb{Z}^d})$  de  $\mathcal{P}(S^{\mathbb{Z}^d})$ , constitué par les mesures de probabilités sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  qui demeurent égales à elle-même sous l'action des translations  $\theta_k$  (**probabilités invariantes par translation**), c'est à dire les probabilités  $\mu$  telles que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad \mu \circ \theta_k^{-1} = \mu .$$

### Convergence de mesures de probabilité

Soit  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ . On définit sur  $\mathcal{P}(S^\Lambda)$  la topologie de la **convergence faible**, et on dira que la suite de mesures de probabilité  $\mu_n$  de cet espace converge faiblement vers une mesure de probabilité  $\mu$  si :

$$\forall f \in \mathcal{C}(S^\Lambda, \mathbb{R}) \quad \mu_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(f) ,$$

où l'on utilise la notation  $\mu(f) = \int f d\mu$ .  $\mathcal{P}(S^{\mathbb{Z}^d})$  muni de cette topologie est un espace compact métrisable (cf. Théorème A.11.2 de l'Annexe A de [Ell85]). De plus,  $\mathcal{P}_i(S^{\mathbb{Z}^d})$  est une partie convexe compacte de  $\mathcal{P}(S^{\mathbb{Z}^d})$  relativement à cette même topologie de la convergence faible.

Nous sommes amenés par la suite à considérer des parties convexes de  $\mathcal{P}(S^{\mathbb{Z}^d})$ , et  $\mathcal{P}_i(S^{\mathbb{Z}^d})$  : mesures stationnaires et mesures réversibles pour une dynamique, mesures

de Gibbs ... Aussi est-il opportun de rappeler à l'attention le résultat suivant : **toute partie de  $\mathcal{P}(S^{\mathbb{Z}^d})$ , ou  $\mathcal{P}_i(S^{\mathbb{Z}^d})$ , non vide, convexe, fermée** (au sens de la topologie de la convergence faible) **est compacte, admet des éléments extrémaux, et coïncide avec la fermeture de l'enveloppe convexe de ces points extrémaux.**

### Notations

Lorsque  $\#\Lambda = \infty$ , on privilégie pour les mesures de probabilité sur  $S^\Lambda$ , une notation continue  $\mu(d\sigma)$ , ainsi :

$$\mu(f) \triangleq \int f(\sigma)\mu(d\sigma) \text{ pour toute fonction } f : S^\Lambda \rightarrow \mathbb{R} .$$

Lorsque  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ , comme l'espace  $S^\Lambda$  est un espace discret, on note  $\tilde{\mu}_\Lambda$  les éléments de  $\mathcal{P}(S^\Lambda)$ , et on privilégie cette fois une notation discrète :  $\tilde{\mu}_\Lambda(\sigma_\Lambda)$  désigne le poids de la configuration  $\sigma_\Lambda$  de  $S^\Lambda$  respectivement à  $\tilde{\mu}_\Lambda$ , et pour toute fonction  $f$  définie sur  $S^\Lambda$  :

$$\tilde{\mu}_\Lambda(f) \triangleq \sum_{\sigma_\Lambda \in S^\Lambda} f(\sigma_\Lambda)\tilde{\mu}_\Lambda(\sigma_\Lambda) .$$

On désigne par ailleurs les mesures de Dirac par le symbole  $\delta_s$  (où  $s \in S$ ) pour la mesure de Dirac sur  $S$ , et de même  $\delta_\sigma$  pour la mesure de Dirac sur  $S^\Lambda$  associée à la configuration  $\sigma \in S^\Lambda$ , pour tout  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ .

### 2.2.2 Mesures de Gibbs sur $S^{\mathbb{Z}^d}$ associées à une interaction

L'idée de considérer des systèmes physiques complexes comme une association de sous-systèmes dont on connaît les interactions réciproques, et de les étudier à l'aide de lois statistiques, remonte aux travaux novateurs à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle dans le domaine de la thermodynamique de Maxwell, Boltzmann et Gibbs. L'oeuvre [Gib60] de Gibbs en 1902 marqua un tournant dans ce domaine et fut une des pierres fondatrices de la Physique Statistique qui se développa dès lors.

La formalisation probabiliste dorénavant bien établie et succinctement introduite ci-après, est issue des travaux indépendants et concomitants de Dobrushin [Dob68b, Dob68a] et de Lanford et Ruelle [LR69, Rue78]. Pour cette raison, les mesures de Gibbs sont également appelées « états DLR » dans la littérature. Citons également les travaux de Preston [Pre76] et de Georgii [Geo88] qui ont largement contribué à l'édification et à la généralisation de l'aspect probabiliste de ces objets.

Afin de quantifier les phénomènes d'influence locale mutuelle, la théorie usuelle de la Mécanique Statistique introduit la notion d'Hamiltonien associé à une fonction d'interaction entre les constituants élémentaires. Une mesure de Gibbs associée à cet Hamiltonien décrit alors une loi statistique globale du système qui rend les plus probables les états minimisant l'Hamiltonien, *i.e.* l'énergie du système. Nous détaillons le cas du volume fini puis le cas du volume infini qui sera central pour notre étude. Enfin, après avoir présenté diverses propriétés concernant l'ensemble des mesures de Gibbs, nous précisons l'intérêt que revêtent les mesures de Gibbs extrémales au sens de la modélisation concrète, et en donnons une interprétation.



On se réfère principalement pour cette sous-section à l'ouvrage de Georgii [Geo88]. Mentionnons également l'introduction au domaine réalisée par Minlos [Min00], et les références suivantes : [Guy92, Sim93]. Les références [Bov01, GHM01] développent de belles introductions succinctes au sujet avant d'aborder ses développements les plus récents : cas du milieu aléatoire *in* [Bov01], cas des phénomènes de percolation *in* [GHM01].

### Potentiel d'interaction et Hamiltonien associé

Comme nous l'avons annoncé, nous introduisons à présent la formalisation du concept de potentiel d'interaction qui quantifie l'interaction qui a lieu entre différents sites du réseau  $\mathbb{Z}^d$ , en fonction des valeurs de spin prises en ces sites. On associe alors à cette grandeur une famille de fonctions sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , indicées par les volumes finis de  $\mathbb{Z}^d$  : l'Hamiltonien. L'Hamiltonien associé à un volume fait correspondre à chaque configuration sur ce volume une certaine énergie qui est la somme des interactions des spins concernés. Précisons cela : soit  $(\varphi_A)_{A \in \mathbb{Z}^d}$  une famille de fonctions définies sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  à valeurs réelles indicée par des ensembles finis  $A$  de sites de  $\mathbb{Z}^d$ .

**Définition 2.2.2** *On dit que la famille  $(\varphi_A)_{A \in \mathbb{Z}^d}$  définit un potentiel d'interaction sur  $\mathbb{Z}^d$  si pour tout  $A \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\varphi_A$  est une fonction  $\mathfrak{F}_A$ -mesurable, c'est à dire :*

$$\forall \sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}, \quad \varphi_A(\sigma) = \varphi_A(\sigma_A) .$$

On dit que les fonctions  $\varphi_{\{k\}}$  sont les fonctions d'**interaction propre**, et que les fonctions  $\varphi_{\{k,k'\}}$  (où  $(k,k') \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ ) sont des fonctions d'**interaction par paires**.

On précise qu'un potentiel d'interaction est dit **à portée finie** s'il existe un réel  $L$  tel que  $\varphi_A \equiv 0$  pour tout  $A$  tel que  $A \not\subseteq \mathcal{B}(0, L)$ . On appelle portée  $R$  le plus petit des réels  $L$  tel que cette condition soit vérifiée. Afin de simplifier l'introduction présente à propos des mesures de Gibbs, **on supposera dès lors que tout potentiel d'interaction considéré sera de portée finie**.

Un potentiel d'interaction  $\varphi$  est en outre dit **potentiel invariant par translation** si ce potentiel vérifie la propriété :

$$\forall A \in \mathbb{Z}^d, \forall k \in \mathbb{Z}^d, \varphi_{A+k} \circ \theta_{-k} = \varphi_A \quad , \quad (2.16)$$

où  $A + k = \{k' + k : k' \in A\}$ .

### Exemple : le potentiel d'Ising aux plus proches voisins

Ce potentiel fut introduit par Lenz ([Len20]) et Ising ([Isi25]) dans les années 1920 afin de mener des études sur les propriétés magnétiques de certains cristaux. La constante  $\beta$  représente l'inverse de la température du système,  $h$  représente l'intensité d'un champ magnétique extérieur au système et  $J$  est une constante de couplage entre les particules, mesurant l'intensité de l'interaction magnétique entre elles.

On appelle potentiel d'Ising (aux plus proches voisins) un potentiel composé uniquement d'une interaction propre et d'une interaction par paire entre sites premiers voisins sur  $\mathbb{Z}^d$ . Soit  $\beta \in \mathbb{R}^+$ , soient  $(J, h) \in \mathbb{R}^2$ . Le potentiel d'Ising  $\varphi^{\beta, J, h}$  est défini par :

$$\begin{cases} \varphi_A^{\beta, J, h}(\sigma) = \beta J \sigma_k \sigma_{k'} \text{ si } A = \{k, k'\} \text{ où } \|k - k'\|_1 = 1 \\ \varphi_A^{\beta, J, h}(\sigma) = \beta h \sigma_k \text{ si } A = \{k\} \end{cases} \quad (2.17)$$

On définit enfin l'Hamiltonien par :

**Définition 2.2.3** On appelle **Hamiltonien** associé au potentiel  $(\varphi_A)_{A \in \mathbb{Z}^d}$  la famille de fonctions  $(H_\Lambda^\varphi)_{\Lambda \in \mathbb{Z}^d}$  telle que :

$$\forall \sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}, H_\Lambda^\varphi(\sigma) = \sum_{\substack{A \in \mathbb{Z}^d \\ A \cap \Lambda \neq \emptyset}} \varphi_A(\sigma). \quad (2.18)$$

### Mesure de Gibbs à volume fini

Soit  $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ . Soit  $\tau \in S^{\mathbb{Z}^d}$  une configuration. On dénomme mesure de Gibbs à volume fini, associée à l'hamiltonien  $H_\Lambda^\varphi$ , avec condition au bord  $\tau$ , la mesure de probabilité  $\tilde{\mu}_\Lambda^\tau$  sur l'espace discret  $S^\Lambda$ , perturbation de la mesure uniforme sur  $S^\Lambda$ , définie par :

$$\tilde{\mu}_\Lambda^\tau(\cdot) \triangleq \frac{1}{Z_\Lambda^\tau} \sum_{\sigma_\Lambda \in S^\Lambda} e^{-H_\Lambda^\varphi(\sigma_\Lambda \tau_{\Lambda^c})} \delta_{\sigma_\Lambda}(\cdot), \quad (2.19)$$

où  $Z_\Lambda^\tau$  est une constante de renormalisation, c'est à dire :

$$Z_\Lambda^\tau \triangleq \sum_{\sigma_\Lambda \in S^\Lambda} e^{-H_\Lambda^\varphi(\sigma_\Lambda \tau_{\Lambda^c})}. \quad (2.20)$$

On définit également la mesure  $\mu_\Lambda^\tau$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  :

$$\mu_\Lambda^\tau = \tilde{\mu}_\Lambda^\tau \otimes \delta_{\tau_{\Lambda^c}}. \quad (2.21)$$

Dorénavant, on identifie par abus de notation la mesure  $\tilde{\mu}_\Lambda^\tau$  sur  $S^\Lambda$  avec la mesure  $\mu_\Lambda^\tau$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . Le symbole  $\mu_\Lambda^\tau$  désignera donc l'une comme l'autre de ces mesures. Pour  $\sigma_\Lambda \in S^\Lambda$ , la quantité  $\mu_\Lambda^\tau(\sigma_\Lambda)$  :

$$\mu_\Lambda^\tau(\sigma_\Lambda) = \frac{1}{Z_\Lambda^\tau} e^{-H_\Lambda^\varphi(\sigma_\Lambda \tau_{\Lambda^c})} \quad (2.22)$$

signifiera donc en l'absence d'ambiguïté le poids de la configuration  $\sigma_\Lambda$  dans  $S^\Lambda$ , ou bien le poids sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  de la configuration  $\sigma_\Lambda \tau_{\Lambda^c}$ .

On remarque la propriété suivante de compatibilité de la famille de mesures  $(\mu_\Lambda^\tau)_{\Lambda \in \mathbb{Z}^d}$  dont la preuve est usuelle et immédiate :

### Propriété 2.2.4

$$\forall \Lambda, \Delta \in \mathbb{Z}^d, \Delta \subset \Lambda, \forall \tau \in S^{\mathbb{Z}^d}, \mu_\Lambda^\tau(d\sigma_\Delta \mid \sigma_{\Lambda \setminus \Delta}) = \mu_\Delta^{\tau_{\Lambda^c} \sigma_{\Lambda \setminus \Delta}}(d\sigma_\Delta) \quad (2.23)$$

En plus des conditions au bord fixées  $\tau$  précédemment considérées, nous aurons recours à d'autres types de conditions au bord : les conditions au bord vide, et les conditions au bord périodiques.

On parle de **mesure de Gibbs** à volume fini  $\Lambda$  avec **condition au bord vide** pour désigner la mesure  $\mu_\Lambda^\emptyset$  sur  $S^\Lambda$  définie par :

$$\forall \sigma_\Lambda \in S^\Lambda, \mu_\Lambda^\emptyset(\sigma) \triangleq \frac{1}{Z_\Lambda^\emptyset} e^{-\sum_{A \subset \Lambda} \varphi_A(\sigma_\Lambda)} \quad (2.24)$$

La notion de mesure de Gibbs à volume fini  $\Lambda$  avec condition au bord périodique est ensuite définie. Soit  $L \in \mathbb{N}^*$  un entier fixé. On définit sur  $\mathbb{Z}^d$  la relation d'équivalence suivante :

$$k \sim k' \text{ si } \forall i, 1 \leq i \leq d, k_i \equiv k'_i [2L + 1] \quad (2.25)$$

La classe d'équivalence du site  $k$  est alors constituée par tous les sites de  $\mathbb{Z}^d$  dont au moins une coordonnée diffère de la coordonnée respective de  $k$  d'un multiple entier de  $2L + 1$ . On a alors que  $\mathbb{Z}^d / \sim$  est isomorphe à  $\mathcal{B}_L$ . Soit une configuration  $\sigma$  de  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . On définit la **configuration  $\tilde{\sigma}$ , périodisée** sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  de  $\sigma_{\mathcal{B}_L}$  sur  $\mathcal{B}_L$  par :

$$\tilde{\sigma}_k = \begin{cases} \sigma_k & \text{si } k \in \mathcal{B}_L \\ \sigma_{k'} & \text{si } k \notin \mathcal{B}_L, \text{ où } k' \text{ est le représentant} \\ & \text{dans } \mathcal{B}_L \text{ de la classe d'équivalence de } k \end{cases} \quad (2.26)$$

En considérant la projection :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^d & \longrightarrow & \mathcal{B}_L \simeq \mathbb{Z}^d / \sim \\ \sigma & \longmapsto & \sigma_{\mathcal{B}_L} \end{array}$$

$\tilde{\sigma}$  n'est autre que le relevé de  $\sigma_{\mathcal{B}_L}$  par cette projection.

Si  $\varphi$  est un potentiel invariant par translation, on peut alors définir la **mesure de Gibbs** à volume fini  $\mathcal{B}_L$  avec **condition au bord périodique**, associée au potentiel d'interaction  $\varphi$  :

$$\mu_{\mathcal{B}_L}^{per}(\sigma_{\mathcal{B}_L}) \triangleq \frac{1}{Z_{\mathcal{B}_L}^{per}} e^{-H_{\mathcal{B}_L}^\varphi(\tilde{\sigma}_{\mathcal{B}_L})} . \quad (2.27)$$

### Mesure de Gibbs sur $S^{\mathbb{Z}^d}$

**Définition 2.2.5** *On appelle mesure de Gibbs sur l'espace infini  $S^{\mathbb{Z}^d}$  associée à l'Hamiltonien  $(H_\Lambda^\varphi)_{\Lambda \in \mathbb{Z}^d}$  une mesure  $\mu$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  telle que, pour tout volume  $\Lambda$  fini et pour toute configuration au bord  $\tau$  fixée, une version de sa probabilité conditionnelle soit égale à  $\mu_\Lambda^\tau$  ; c'est à dire telle que l'on ait :*

$$\mu \in \mathcal{G}(\varphi) \iff \forall \Lambda \in \mathbb{Z}^d, \forall \tau \in S^{\mathbb{Z}^d} \mu((\cdot)_\Lambda \mid \tau_{\Lambda^c}) = \mu_\Lambda^\tau(\cdot) . \quad (2.28)$$

Cette définition signifie qu'une mesure de Gibbs  $\mu$  est une mesure vérifiant :

$$\forall \Lambda \in \mathbb{Z}^d, \mu(\cdot) = \int \mu_\Lambda^{\tau_{\Lambda^c}}(\cdot) \mu(d\tau) . \quad (2.29)$$

L'équation précédente (2.29) est appelée équation DLR d'après Dobrushin, Lanford et Ruelle. On note  $\mathcal{G}(\varphi)$  l'ensemble des mesures de Gibbs par rapport à l'Hamiltonien  $(H_\Lambda^\varphi)_{\Lambda \in \mathbb{Z}^d}$  associé au potentiel d'interaction  $(\varphi_A)_{A \in \mathbb{Z}^d}$ .

Là où le théorème classique de Kolmogorov définit une mesure de probabilité sur un espace infini par la donnée d'une famille de lois compatibles et destinées à être les marginales fini-dimensionnelles de la loi sur l'espace infini, l'approche DLR met en

avant la définition d'une mesure sur l'espace infini par la donnée de ses lois conditionnelles. Les questions d'existence et d'unicité d'une mesure définie de la sorte sont alors centrales. L'approche est en réalité très différente car la liberté de choix possible quant aux conditions au bord, rendra possible dans certains cas l'existence de plusieurs mesures présentant cette propriété, ce que l'on désigne par l'appellation d'origine physique de **transition de phase**.

Cela nous conforte dans l'approche favorisant la modélisation des systèmes physiques par l'espace  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , plutôt que par une étude à volume fini, *i.e.* sur  $S^\Lambda$ . En effet, cette possibilité d'existence de plusieurs états sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  présentant les mêmes propriétés locales, permet de rendre compte de toute la variété de phénomènes observés sur les modèles réels.

Comme l'espace des spins  $S$  est dans notre étude fini, le problème de l'existence d'une telle mesure ne se pose pas. En effet, d'après le théorème 4.23 p. 72 *in* [Geo88], on sait qu'**il existe au moins une mesure de Gibbs  $\mu$  vérifiant (2.28) ou (2.29)**. Bien plus, il est également établi dans cette référence que  $\mathcal{G}(\varphi)$  **est une partie convexe compacte non vide de  $\mathcal{P}(S^{\mathbb{Z}^d})$** .

Cependant, s'il existe au moins une mesure  $\mu$  vérifiant (2.28) ou (2.29), il est établi que cette propriété ne suffit pas à en assurer l'unicité. On donne alors la définition suivante :

**Définition 2.2.6** *On dit qu'il y a transition de phase quand il existe plusieurs mesures de Gibbs associées au même potentiel.*

De plus, comme  $\mathcal{G}(\varphi)$  est un convexe, on a la dichotomie :

$$\#\mathcal{G}(\varphi) = 1 \text{ ou bien } +\infty . \quad (2.30)$$

On note également  $\mathcal{G}_i(\varphi)$  l'ensemble des mesures de Gibbs associées au potentiel  $\varphi$  qui sont également invariantes par translation. D'après le Corollaire 5.16 p. 88 *in* [Geo88], on sait que si le potentiel  $\varphi$  considéré est invariant par translation, alors il existe au moins une mesure de Gibbs invariante par translation, *i.e.*  $\mathcal{G}_i(\varphi) \neq \emptyset$ . Cependant, on n'a pas nécessairement  $\mathcal{G}_i(\varphi) = \mathcal{G}(\varphi)$ . Citons en exemple le cas de l'Hamiltonien d'Ising en dimension 3 pour lequel il a été prouvé (cf. [Dob72]) que, bien que le potentiel d'Ising soit invariant par translation, il existe des mesures de Gibbs associées qui ne sont pas invariantes par translation.

D'après les résultats du Théorème 4.17 p. 67 *in* [Geo88] et de 4.20 p. 69, on peut énoncer le résultat suivant qui, dans le cas qui nous intéresse ici où l'espace de spins est fini, est dû aux travaux de Dobrushin (cf. [Dob68a, Dob68b]). Nous reformulons ce résultat dans le cadre de la présente discussion :

### **Théorème (Dobrushin)**

Soit  $(\varphi_A)_{A \in \mathbb{Z}^d}$  un potentiel d'interaction. Soit  $\tau$  une condition au bord fixée ( $\tau \in S^{\mathbb{Z}^d}$ ). Toute suite de mesures de Gibbs à volume fini  $(\mu_\Lambda^\tau)_{\Lambda \in \mathbb{Z}^d}$  (sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ ), associée au potentiel  $\varphi$ , admet au moins un point d'adhérence qui est une mesure de Gibbs  $\mu$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . En particulier, lorsqu'elle existe,  $\lim_{L \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{B}_L}^\tau$  est un élément de  $\mathcal{G}(\varphi)$ .

De manière analogue, si  $\lim_{L \rightarrow \infty} \mu_\Lambda^\emptyset$  existe, c'est une mesure de Gibbs. Et si le potentiel  $\varphi$  est invariant par translation, alors la limite  $\lim_{L \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{B}_L}^{pe\tau}$ , si elle existe, est une mesure de Gibbs. ♦

## Mesures de Gibbs extrémales

L'ensemble  $\mathcal{G}(\varphi)$  (où  $\varphi$  est un potentiel d'interaction à portée finie) étant un convexe, le sous-ensemble de ses éléments extrémaux, noté  $\text{ex } \mathcal{G}(\varphi)$ , est l'objet d'un intérêt tout particulier. Soit  $\mathfrak{M}$  la tribu définie par :

$$\mathfrak{M} = \bigcap_{\Lambda \in \mathbb{Z}^d} \mathfrak{F}_{\Lambda^c} \quad (2.31)$$

qui constitue la tribu des événements macroscopiques. En effet, dire qu'une fonction  $f$ , définie sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , est  $\mathfrak{M}$ -mesurable signifie que les valeurs de  $f$  ne sont pas affectées par une modification d'un nombre fini de spins. Un exemple typique d'événements de  $\mathfrak{M}$  est :

$$\left\{ \sigma : \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k \in \mathcal{B}_L} \sigma_k}{\#\mathcal{B}_L} \text{ existe} \right\}$$

Les quantités physiques observables correspondent à des fonctions  $f$   $\mathfrak{M}$ -mesurables. Le résultat suivant éclaire alors l'importance que possèdent les mesures de Gibbs extrémales en terme d'interprétation physique du modèle décrit par des mesures de Gibbs : toute mesure de Gibbs  $\mu$  (pour un potentiel  $\varphi$ ) est extrémale si et seulement si elle est triviale sur  $\mathfrak{M}$  (i.e.  $\mu(E) = 0$  ou  $1$ , pour tout  $E$  de  $\mathfrak{M}$ ), et si et seulement si toute fonction  $f$   $\mathfrak{M}$ -mesurable est  $\mu$ -p.p. constante. Les mesures de Gibbs extrémales correspondent donc à des états macroscopiques observables, déterministes, non sujets aux fluctuations locales microscopiques et aléatoires. Bien plus, il est immédiat compte tenu du résultat précédent que deux mesures de Gibbs extrémales, associées au même potentiel, distinctes, ne peuvent être qu'étrangères l'une à l'autre. Ce que l'on peut alors interpréter en disant que ces deux mesures de Gibbs extrémales offrent donc des descriptions statistiques macroscopiques différentes.

Ces états extrémaux sont obtenus en considérant des limites de mesures de Gibbs à volume fini  $\mu_\Lambda^\tau$  avec certaines conditions au bord déterministes  $\tau$ . En effet, le résultat précédent de Dobrushin peut être précisé puisque, pour toute mesure de Gibbs extrémale  $\mu$  il existe une configuration  $\tau \in S^{\mathbb{Z}^d}$  (en fait pour  $\mu$ -presque toute configuration  $\tau$ ) telle que  $\mu$  soit la limite de la suite  $(\mu_{\mathcal{B}_L}^\tau)_L$  (cf. Théorème. 7.12 in [Geo88]). En outre, il est établi que  $\mathcal{G}(\varphi)$ , plus précisément qu'un convexe est un simplexe de Choquet, ce qui signifie que toute mesure de Gibbs peut être écrite comme l'intégrale de mesures de Gibbs extrémales respectivement à une mesure adéquate.

**Remarque 2.2.7** *On a présenté ici le cas de mesures de Gibbs sur l'espace  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , c'est-à-dire indexées par le réseau  $\mathbb{Z}^d$ . Dans les chapitres à venir, nous avons aussi recours à des mesures de Gibbs indexées par le réseau  $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{d+1}$ , ainsi que par le graphe  $\mathbb{Z}^d \times \{0, 1\}$ . Pour ce dernier, les définitions et propriétés introduites précédemment pour le cas  $S^{\mathbb{Z}^d}$  demeurent valables, sauf celles où l'invariance par translation sur  $\mathbb{Z}^d$  est utilisée (cf. [Geo88]).*

### 2.2.3 Ordre stochastique sur les mesures, mesure de Gibbs monotone, inégalité FKG

#### Ordre stochastique

On suppose dans cette section que l'espace des spins  $S$  est muni d'un ordre total noté  $\leq$ . Comme précédemment (cf. (2.7)) cela induit un ordre partiel  $\preceq$  sur l'espace des configurations  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . On peut alors définir sur l'espace des probabilités  $\mathcal{P}(S^{\mathbb{Z}^d})$  un ordre partiel, noté également  $\preceq$ , entre les mesures. Cet ordre trouve son origine dans les travaux de Fortuin, Kasteleyn et Ginibre (cf. [FKG71]) où il fut initialement introduit pour l'étude de dynamiques avant de connaître un développement important au sein des mesures d'équilibre; il est appelé **ordre stochastique** (*stochastic domination*). Introduisons au préalable la définition suivante :

**Définition 2.2.8** Soit  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ . Soit  $f$  une fonction sur  $S^\Lambda$  à valeurs réelles. On dit que  $f$  est croissante si, pour tout couple  $(\sigma, \eta)$  de  $S^\Lambda$  :

$$\sigma \preceq \eta \quad \Rightarrow \quad f(\sigma) \leq f(\eta) . \quad (2.32)$$

On peut alors énoncer la définition suivante :

**Définition 2.2.9** Soient  $\nu_1$  et  $\nu_2$  deux mesures de probabilité sur  $S^\Lambda$  ( $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$  ou bien  $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ ). On dit que  $\nu_1 \preceq \nu_2$  si pour toute fonction  $f : S^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ , mesurable, bornée et croissante, on a :

$$\int f(\sigma) \nu_1(d\sigma) \leq \int f(\sigma) \nu_2(d\sigma) . \quad (2.33)$$

On mentionne également le résultat suivant, pour la preuve duquel on pourra par exemple se référer à [GHM01] (Corollaire 4.7) : **l'inégalité  $\preceq$  est préservée par passage à la limite faible**. Adaptée à notre contexte, compte tenu de la Proposition 2.1.3, la définition précédente peut alors être reformulée en prenant comme **classe de fonctions test, les fonctions locales croissantes** :

$$\nu_1 \preceq \nu_2 \quad \iff \quad \forall f \text{ locale, croissante, } \int f d\nu_1 \leq \int f d\nu_2 . \quad (2.34)$$

De plus, dans le cas où  $\#S = 2$ , un critère suffisant, dû à Holley, pour établir l'existence d'un ordre stochastique entre deux mesures sera rappelé à la sous-section 4.1.3. On peut également se référer à l'article : [dHK86] qui reprend et généralise les inégalités de corrélation, ainsi qu'aux chapitres 4 et 5 du livre de Prum ([Pru86]).

#### Mesure de Gibbs monotone

La relation d'ordre partiel introduite précédemment est utile pour définir une certaine catégorie de mesures de Gibbs, dites monotones.

#### Définition 2.2.10

Soit  $\mu$  une mesure de Gibbs définie sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . Elle est dite monotone si les mesures de Gibbs à volume fini présentent la monotonie suivante :

$$\forall \Lambda \in \mathbb{Z}^d, \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in S^{\mathbb{Z}^d} \text{ tels que } \tau_1 \preceq \tau_2, \quad \mu_\Lambda^{\tau_1} \preceq \mu_\Lambda^{\tau_2} . \quad (2.35)$$

Il est connu qu'une telle mesure a des corrélations positives – cf. Théorème 4.11 in [GHM01] – c'est-à-dire qu'elle satisfait la propriété suivante :

**Propriété 2.2.11** *Soit  $\mu$  une mesure de Gibbs monotone. Elle admet des corrélations positives, ou encore satisfait l'inégalité suivante souvent appelée inégalité FKG : pour toutes fonctions  $f, g$  croissantes, mesurables et bornées,*

$$\int f(\sigma)g(\sigma) d\mu \geq \int f(\sigma)d\mu \int g(\sigma)d\mu . \quad (2.36)$$

Une propriété importante de ces mesures de Gibbs monotones est la conséquence suivante de (2.35) : désignons par  $M$  l'élément maximal de  $S$  et  $m$  l'élément minimal (rappelons que  $S$  est supposé fini et que dans cette sous-section il est de plus supposé muni d'un ordre total). Alors, les limites :

$$\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \mu_\Lambda^m \quad \text{et} \quad \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \mu_\Lambda^M ,$$

pour toute suite croissante de  $\Lambda$  (au sens de  $\subset$ ), existent et définissent deux mesures de Gibbs sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , notées  $\mu^m$  et  $\mu^M$ , éventuellement confondues. Ces limites sont des mesures de Gibbs extrémales pour l'ordre stochastique, au sens où toute autre mesure de Gibbs  $\mu$  vérifie :

$$\mu^m \preceq \mu \preceq \mu^M . \quad (2.37)$$

On a alors la proposition suivante, extrêmement utile pour caractériser en pratique la transition de phase de mesures de Gibbs monotones :

### Proposition 2.2.12

*Soit  $S$  une partie finie de  $\mathbb{R}$ . Soit  $(\varphi_A)_{A \subset \mathbb{Z}^d}$  un potentiel invariant par translation tel que les mesures de Gibbs associées soient monotones. Soient  $\mu^m$  et  $\mu^M$  définies comme précédemment. On a :*

$$\#\mathcal{G}(\varphi) = 1 \iff \#\mathcal{G}_i(\varphi) = 1 \iff \forall r \in \mathbb{R}, \mu^m(\{\sigma : \sigma_0 \leq r\}) = \mu^M(\{\sigma : \sigma_0 \leq r\}). \quad (2.38)$$

*En particulier, si  $\#S = 2$ , cette dernière condition est équivalente à :*

$$\mu^m(\{\sigma : \sigma_0 = M\}) = \mu^M(\{\sigma : \sigma_0 = M\}). \quad (2.39)$$

Ce résultat est originellement dû aux travaux de Lebowitz et Martin-Löf [LML72] et de Ruelle [Rue72]. On se reportera au livre de Ellis [Ell85], Chapitre V Section 6 pour des éléments de preuve des résultats ci-avant évoqués, et aux Chapitres IV et V de cette même référence pour plus d'informations sur les modèles monotones. Pour d'autres inégalités stochastiques, dont nous ne nous servons pas ici, on se référera par exemple à l'article de Lebowitz [Leb74], ainsi qu'à l'article de Cartier [Car73].

## Potentiel ferromagnétique

Lorsque l'espace  $S$  est réduit à  $\{-1, +1\}$ , on peut exhiber directement sur les potentiels une condition assurant que les mesures de Gibbs associées sont monotones.

De tels potentiels ont la particularité de favoriser des états macroscopiques dont la structure locale la plus probable est celle de sites voisins ayant la même valeur.

Soit  $(\varphi_A)_{A \in \mathbb{Z}^d}$  un potentiel d'interaction à portée finie sur  $\{-1, +1\}$ . On peut l'écrire de manière unique sous la forme suivante :

$$\forall A \in \mathbb{Z}^d, \forall \sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}, \quad \varphi_A(\sigma) = - \sum_{BCA} J_B \prod_{k \in B} \sigma_k. \quad (2.40)$$

Cela signifie que l'hamiltonien associé à  $\varphi$  peut être écrit sous la forme :

$$H_\Lambda(\sigma) = - \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset} \sum_{BCA} J_B \pi_B(\sigma), \quad \text{où } \pi_B(\sigma) = \prod_{k \in B} \sigma_k.$$

Autrement dit, pour définir les mesures de Gibbs associées, on peut remplacer, le potentiel  $(\varphi_A)_{A \in \mathbb{Z}^d}$  par le potentiel  $(\tilde{\varphi}_B)_{B \in \mathbb{Z}^d}$  défini pour tout  $\sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}$  par :

$$\tilde{\varphi}_B(\sigma) = -\tilde{J}_B \prod_{k \in B} \sigma_k. \quad (2.41)$$

Les potentiels  $\varphi$  et  $\tilde{\varphi}$  sont dits **potentiels équivalents**, c'est à dire qu'ils définissent le même ensemble de mesures de Gibbs associées :  $\mathcal{G}(\varphi) = \mathcal{G}(\tilde{\varphi})$ . À titre d'exemple, on remarque que le potentiel d'Ising évoqué précédemment est défini sous la forme (2.41). On peut alors énoncer la définition suivante :

### Définition 2.2.13

Un potentiel d'interaction  $(\varphi_A)_{A \in \mathbb{Z}^d}$  est dit **ferromagnétique** si le potentiel équivalent  $(\tilde{\varphi}_B)_{B \in \mathbb{Z}^d}$  défini de manière unique par  $\tilde{\varphi}_B(\sigma) = -\tilde{J}_B \prod_{k \in B} \sigma_k, \sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}$ , est tel que :

$$\forall B \in \mathbb{Z}^d, \quad \tilde{J}_B \geq 0. \quad (2.42)$$

Considérant les mesures de Gibbs associées à un potentiel ferromagnétique, on emploie la terminologie de **système ferromagnétique**. En effet, la propriété suivante est vérifiée : Toute mesure de Gibbs associée à un potentiel ferromagnétique est une mesure de Gibbs monotone, au sens donné par la définition 2.2.10. Cependant, la réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple 4.1.7. Par ailleurs, il existe un autre critère sur les coefficients  $\tilde{J}_B$  (cf. [vEFS94]) entraînant une propriété plus forte que (2.36) dite propriété de convexité (cf. section 4.2 in [dHK86]).

## 2.3 Dynamiques parallèles

Le but de cette sous-section est de définir précisément les automates cellulaires probabilistes sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  en tant que dynamiques markoviennes. A travers la littérature cet aspect est rarement détaillé, et nous nous référons pour cela à l'unique référence précise en la matière : [TVS<sup>+</sup>78], Chapitre 2. Cependant, partant d'une même règle locale d'évolution, plusieurs dynamiques parallèles peuvent être définies : sur  $S^\Lambda$  ( $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ ) dans un premier temps, sur l'espace infini  $S^{\mathbb{Z}^d}$  ensuite. Les relations entre ces différentes dynamiques, et l'importance des conditions au bord n'ont jamais été précisées



avec exactitude. Cette sous-section explicite ces non-dits. Dans un premier temps (sous-section 2.3.1), nous définissons les dynamiques parallèles sur  $S^\Lambda$ , où  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ , c'est à dire des dynamiques parallèles sur un espace d'états discret. Dans un second temps (sous-section 2.3.2), nous définissons la dynamique parallèle engendrée par les règles locales d'évolution sur l'espace des configurations à volume infini  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . Nous y précisons alors le lien entre cette dynamique, qui sera centrale dans notre travail, et les dynamiques à volume fini « associées ». Enfin (sous-section 2.3.3), nous définissons la propriété d'attractivité que revêtiront certaines de ces dynamiques, c'est à dire la tendance à favoriser au cours du temps l'évolution des spins vers des valeurs égales à celles de leur voisinage. Ces dynamiques feront par la suite l'objet de considérations particulières.

### Règle locale d'évolution

On définit une **règle locale d'évolution** de la valeur du spin en chaque site  $k$  de  $\mathbb{Z}^d$  par la donnée, connaissant l'état du système à l'instant précédent (markovianité), d'une mesure de probabilité sur  $S$ . Soit  $k \in \mathbb{Z}^d$ , soit  $\eta$  une configuration de  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . Posons :

$$p_k(\cdot \mid \eta) \text{ une mesure de probabilité sur } S. \quad (2.43)$$

Cette loi de probabilité détermine la valeur du spin au site  $k$  à l'instant  $n+1$  compte tenu de l'état  $\eta$  du système à l'instant  $n$  précédent.

Précisons que le qualificatif « local » est utilisé car on suppose de plus, dorénavant, que cette loi  $p_k(\cdot \mid \eta)$  ne dépend en réalité que des valeurs de spins de la configuration  $\eta$  en des sites proches du site  $k$ . Pour  $k \in \mathbb{Z}^d$ , on définit ainsi précisément  $V_k$  comme une partie finie de  $\mathbb{Z}^d$  telle que :

$$\forall s \in S, \quad p_k(s \mid \eta) = p_k(s \mid \eta_{V_k}). \quad (2.44)$$

### Exemple :

Par la suite, nous considérons en particulier le cas où :

$$V_k = \{k' : \|k - k'\|_1 \leq 1\} = \{k + \epsilon e_i, \text{ avec } 1 \leq i \leq d, \text{ et } \epsilon = 0, +1 \text{ ou } -1\}$$

c'est à dire le cas où l'évolution de la dynamique au site  $k$  se fait en fonction de la valeur des spins au site  $k$ , et en les sites premiers voisins sur  $\mathbb{Z}^d$ , à l'instant précédent.

### 2.3.1 Dynamiques parallèles à volume fini

Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ , et soit  $\tau$  une configuration de  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . On appelle dynamique synchrone, ou dynamique parallèle à volume fini  $\Lambda$ , et avec condition au bord  $\tau$ , la donnée d'un noyau de transition markovien homogène agissant sur  $S^\Lambda$  :

$$\tilde{P}_\Lambda^\tau(\sigma_\Lambda \mid \eta_\Lambda) = \prod_{k \in \Lambda} p_k(\sigma_k \mid \eta_\Lambda \tau_{\Lambda^c}), \quad (2.45)$$

où les  $p_k$  sont les probabilités conditionnelles définies au (2.43). On définit la dynamique markovienne homogène en appliquant successivement au cours du temps le noyau de transition précédemment introduit. On définit ainsi :

$$\tilde{P}_\Lambda^{\tau(2)}(\sigma_\Lambda \mid \eta_\Lambda) \triangleq \sum_{\xi_\Lambda \in S^\Lambda} \tilde{P}_\Lambda^\tau(\sigma_\Lambda \mid \xi_\Lambda) \tilde{P}_\Lambda^\tau(\xi_\Lambda \mid \eta_\Lambda) \quad (2.46)$$

et par récurrence :

$$\tilde{P}_\Lambda^\tau (n)(\sigma_\Lambda | \eta_\Lambda) \triangleq \sum_{\xi_\Lambda \in S^\Lambda} \tilde{P}_\Lambda^\tau (n-1)(\sigma_\Lambda | \xi_\Lambda) \tilde{P}_\Lambda^\tau (\xi_\Lambda | \eta_\Lambda) . \quad (2.47)$$

Pour toute configuration initiale déterministe  $\eta$ , on peut alors définir un processus de Markov à temps discret  $(\omega_\Lambda(n))_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $S^\Lambda$  de loi :

$$\tilde{P}_\Lambda^\tau (\omega_\Lambda(n) = \cdot | \omega_\Lambda(0) = \eta_\Lambda) = \tilde{P}_\Lambda^\tau (n)(\cdot | \eta_\Lambda) . \quad (2.48)$$

La configuration aléatoire  $\omega_\Lambda(n)$ , sachant que  $\omega_\Lambda(0) = \eta_\Lambda$  désigne l'état du système de spins sur le volume fini  $\Lambda$  à l'instant  $n$  sous l'effet de la dynamique parallèle  $\tilde{P}_\Lambda^\tau$ , sachant qu'à l'instant initial le système était dans la configuration initiale déterministe  $\eta_\Lambda$ .

On définit également la dynamique PCA avec condition au bord périodique, notée  $P_\Lambda^{per}$ , par  $p_k(\cdot | \tilde{\sigma})$  (pour tout  $k \in \Lambda$ ) où  $\tilde{\sigma}$  est la configuration  $\sigma$  périodisée sur  $\Lambda$  définie en (2.26)

Nous avons ainsi défini différentes dynamiques parallèles à volume fini, toutes associées aux mêmes règles locales d'évolution  $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ . Toutefois, comme nous l'avons vu à propos des mesures de Gibbs, seul le volume infini, *i.e.*  $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ , permet de s'affranchir des conditions au bord et de définir un objet associé de manière univoque aux règles d'évolution locales et suffisamment riche pour être intéressant comme modélisation de la réalité.

### 2.3.2 Définition de la dynamique parallèle à volume infini

La dynamique parallèle  $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ , ou dynamique PCA sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , est définie comme une dynamique markovienne dont le noyau de transition s'écrit comme un **produit indépendant de mesures** sur chacun des espaces de spin ; pour toute configuration  $\eta \in S^{\mathbb{Z}^d}$ , on pose :

$$P(d\sigma | \eta) = \bigotimes_{k \in \mathbb{Z}^d} p_k(d\sigma_k | \eta) . \quad (2.49)$$

Plus précisément, on peut considérer l'action de la dynamique markovienne homogène  $P$  (*i.e.* le noyau de transition) sur l'espace  $S^{\mathbb{Z}^d}$  en tant qu'opérateur, noté  $P$  également, sur  $\mathcal{C}(S^{\mathbb{Z}^d}, \mathbb{R})$ , en établissant, pour  $f$  fonction continue sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  :

$$\forall \eta \in S^{\mathbb{Z}^d}, \quad P(f)(\eta) = \int f(\sigma) P(d\sigma | \eta) . \quad (2.50)$$

Compte tenu de la Proposition 2.1.3 qui assure de la densité des fonctions locales dans  $\mathcal{C}(S^{\mathbb{Z}^d}, \mathbb{R})$ , l'**opérateur**  $P$  peut être défini de manière équivalente comme l'application linéaire continue de  $\mathcal{C}(S^{\mathbb{Z}^d}, \mathbb{R})$  vers  $\mathcal{C}(S^{\mathbb{Z}^d}, \mathbb{R})$  définie sur les fonctions locales par :

$$P(f)(\eta) = \sum_{\sigma_{\Lambda_f} \in S^{\Lambda_f}} \left( f(\sigma_{\Lambda_f}) \prod_{k \in \Lambda_f} p_k(\sigma_k | \eta) \right) , \quad (2.51)$$

où  $f$  est une fonction locale (et  $\Lambda_f$  son support,  $\Lambda_f \in \mathbb{Z}^d$ ). On remarque aisément que si  $f$  est une fonction à support fini  $\Lambda_f$  alors  $P(f)$  est également une fonction à support fini, donc continue. Le support de  $P(f)$  étant alors  $\cup_{k \in \Lambda_f} V_k$ .

En effet, précisons la « portée » de la dynamique parallèle. Puisque l'on a supposé que les probabilités  $p_k(\cdot | \eta)$  sont locales en  $\eta$ , on pose

$$\bar{\Lambda} = \cup_{k \in \Lambda} V_k, \quad (2.52)$$

où  $V_k$  a été défini en (2.44). On définit alors le **rayon de portée de la dynamique parallèle**  $R$ , par :

$$R = \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \max_{k' \in V_k} \|k' - k\|_1. \quad (2.53)$$

En posant :

$$\partial_R \Lambda = \{k' \in \mathbb{Z}^d : \exists k \in \Lambda, \|k - k'\|_1 \leq R\}, \quad (2.54)$$

on précise alors :

$$\bar{\Lambda} \subset \partial_R \Lambda. \quad (2.55)$$

Une des particularités des dynamiques PCA, *a contrario* des dynamiques de spins à temps continu, est que l'on sait déterminer avec exactitude les sites qui à un instant  $n_0$  peuvent avoir une influence sur les valeurs du spin des sites d'un volume fini  $\Lambda$  donné à un instant  $n_0 + n$  ultérieur. On définit en conséquence :

$$\bar{\Lambda}^{(2)} \triangleq \bar{\bar{\Lambda}} = \cup_{k \in \bar{\Lambda}} V_k, \quad (2.56)$$

et par récurrence :

$$\bar{\Lambda}^{(n)} \triangleq \bar{\bar{\Lambda}^{(n-1)}}, \quad (2.57)$$

ensemble représenté à la figure 2.1 pour  $\Lambda = \{0\}$ .

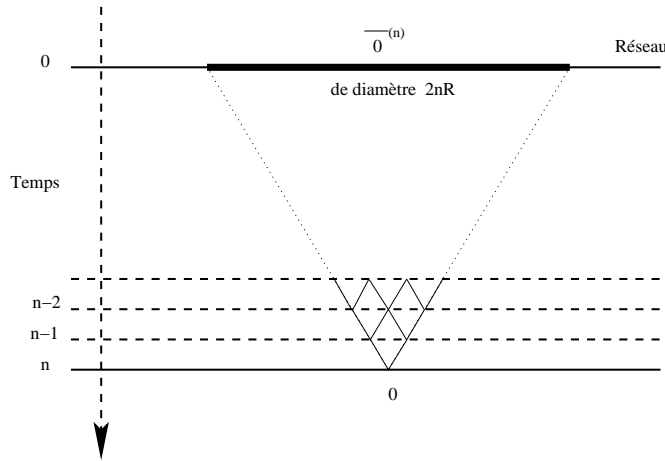


FIG. 2.1 – Ensemble  $\bar{\Lambda}^{(n)}$  des sites de  $\mathbb{Z}^d$  à l'instant 0 ayant une influence potentielle sur la valeur du spin à l'origine au temps  $n$

Comme précédemment on définit le noyau itéré  $P^{(n)}$  par récurrence :

$$P^{(2)}(\cdot | \eta) = \int P(\cdot | \xi) P(d\xi | \eta) \quad (2.58)$$

et

$$P^{(n)}(\cdot | \eta) = \int P^{(n-1)}(\cdot | \xi) P(d\xi | \eta) . \quad (2.59)$$

Pour toute configuration initiale déterministe  $\eta$ , le processus de Markov à temps discret  $(\omega(n))_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  admet pour loi :

$$P(\omega(n) = \cdot | \omega(0) = \eta) = P^{(n)}(\cdot | \eta) , \quad (2.60)$$

où  $\eta \in S^{\mathbb{Z}^d}$ . La configuration aléatoire  $\omega(n)$ , sachant que  $\omega(0) = \eta$  désigne de manière analogue au cas volume fini, l'état du système de spin sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  à l'instant  $n$  sous l'effet de la dynamique PCA  $P$ , sachant qu'à l'instant initial le système était dans la configuration déterministe  $\eta$ .

Soit  $\mu \in \mathcal{P}(S^{\mathbb{Z}^d})$ . On définit également l'image de cette mesure sous l'action d'un pas de la dynamique :

$$\mu P \triangleq \int P(d\sigma | \eta) \mu(d\eta) , \quad (2.61)$$

et comme précédemment, l'image de  $\mu$  sous l'action de la dynamique  $P$  au bout de  $n$  instants, est définie par récurrence :

$$\mu P^{(n)} = (\mu P^{(n-1)}) P . \quad (2.62)$$

On précise qu'il y a cohérence entre les définitions introduites pour l'action du noyau markovien sur les mesures de probabilités et sur les fonctions sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  car on vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mu P^{(n)}(f) = \mu(P^{(n)}(f)) . \quad (2.63)$$

### Passage du volume fini au volume infini : conditions au bord

Afin de pouvoir utiliser des résultats sur les dynamiques parallèles à volume  $\Lambda$  fini pour l'étude de la dynamique sur  $\mathbb{Z}^d$  entier, on définit le plongement des dynamiques  $\tilde{P}_\Lambda^\tau$  en des dynamiques  $P_\Lambda^\tau$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , ayant sur les sites de  $\Lambda$  la même action que  $\tilde{P}_\Lambda^\tau$  et maintenant presque sûrement les sites hors de  $\Lambda$  dans l'état défini par la condition au bord  $\tau$ . Soient  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  un volume fini fixé, et  $\tau$  une configuration de  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . On définit ainsi la dynamique markovienne homogène  $P_\Lambda^\tau$  à l'aide du noyau markovien suivant :

$$P_\Lambda^\tau(d\sigma | \eta) \triangleq \tilde{P}_\Lambda^\tau(d\sigma_\Lambda | \eta) \otimes \delta_{\tau_{\Lambda^c}}(d\sigma_{\Lambda^c}) , \quad (2.64)$$

c'est à dire :

$$P_\Lambda^\tau(d\sigma | \eta) \triangleq \left( \bigotimes_{k \in \Lambda} p_k(d\sigma_k | \eta_\Lambda \tau_{\Lambda^c}) \right) \otimes \delta_{\tau_{\Lambda^c}}(d\sigma_{\Lambda^c}) . \quad (2.65)$$

#### Proposition 2.3.1

Soit  $P = (p_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  une dynamique PCA sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . Soit  $f$  une fonction locale, définie sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  à valeurs réelles. Pour tout volume fini  $\Delta$  tel que  $\bar{\Lambda}_f \subseteq \Delta$ , et pour toute configuration  $\tau$  de  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , on a :

$$P(f) \equiv P_\Delta^\tau(f) \equiv \tilde{P}_\Delta^\tau(f) . \quad (2.66)$$

**Preuve :**

Établissons dans un premier temps la seconde égalité. Soit  $\eta \in S^{\mathbb{Z}^d}$ . On vérifie que :

$$\begin{aligned} P_\Delta^\tau(f)(\eta) &= \int f(\sigma) P_\Delta^\tau(d\sigma \mid \eta) \\ &= \iint f(\sigma_{\Lambda_f}) \tilde{P}_\Delta^\tau(d\sigma_\Delta \mid \eta) \otimes \delta_{\tau_{\Delta^c}}(d\sigma_{\Delta^c}) \\ &= \sum_{\sigma_\Delta} f(\sigma_\Delta) \tilde{P}_\Delta^\tau(d\sigma_\Delta \mid \eta_\Delta \tau_{\Delta^c}) = \tilde{P}_\Delta^\tau(f)(\eta). \end{aligned}$$

Pour la seconde égalité, nous rappelons le fait que, pour tout site  $k$ , et pour toute configuration  $\eta$ ,  $p_k(\cdot \mid \eta)$  est une probabilité sur  $S$ . On calcule alors :

$$\begin{aligned} P(f)(\eta) &= \int f(\sigma) P(d\sigma \mid \eta) \\ &= \iint f(\sigma_{\Lambda_f}) \otimes_{k \in \Lambda_f} p_k(d\sigma_k \mid \eta) \otimes_{k \in \Lambda_f^c} p_k(d\sigma_k \mid \eta) \\ &= \int f(\sigma_{\Lambda_f}) \otimes_{k \in \Lambda_f} p_k(d\sigma_k \mid \eta_{\Lambda_f}) \\ &= \int f(\sigma_{\Lambda_f}) \otimes_{k \in \Delta} p_k(d\sigma_k \mid \eta_\Delta \tau_{\Delta^c}) = \tilde{P}_\Delta^\tau(f)(\eta) = P(f)(\eta). \end{aligned}$$

■

**Remarque 2.3.2** *Compte tenu du résultat précédent, dorénavant nous ferons l'abus de notation et l'abus de langage suivant : le symbole  $P_\Lambda^\tau$  sera également utilisé pour désigner  $\tilde{P}_\Lambda^\tau$ , et l'expression dynamique parallèle ou PCA à volume fini désignera autant la dynamique  $\tilde{P}_\Lambda^\tau$  sur  $S^\Lambda$  que la dynamique  $\tilde{P}_\Lambda^\tau(d\sigma_\Lambda \mid \eta) \otimes \delta_{\tau_{\Lambda^c}}(d\sigma_{\Lambda^c})$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ .*

### Invariance par translation de la dynamique

On dit que la dynamique PCA (à volume infini) est **invariante par translation** si les règles locales d'évolution  $p_k$  le sont, c'est à dire si l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \forall s \in S, \forall \eta \in S^{\mathbb{Z}^d}, \quad p_k(s \mid \eta) = p_0(s \mid \theta_{-k}\eta). \quad (2.67)$$

On attire l'attention sur le fait que, sous cette condition, les dynamiques parallèles à volume fini  $P_\Lambda^\tau$  ne sont pas invariantes par translation, essentiellement car c'est la quantité  $p_0(s \mid \theta_{-k}(\eta_\Lambda \tau_{\Lambda^c}))$  et non  $p_0(s \mid \theta_{-k}\eta)$  qui intervient dans cette dynamique. Cependant les dynamiques  $(P_\Lambda^{per})_\Lambda$  le sont, ainsi que la dynamique  $P$  à volume infini.

### 2.3.3 Dynamique attractive

Dans cette sous-section, nous supposons de nouveau que l'espace des spins  $S$  est muni d'un ordre total  $\leq$ , ce qui permet alors de définir l'ordre partiel  $\preceq$  sur les configurations et les mesures de probabilité. Concernant les systèmes monotones (cf. Définition

2.2.13), nous avons vu que si l'ordre FKG est préservé en un certain sens, alors on accède à diverses inégalités permettant de préciser avec efficacité des conditions nécessaires et suffisantes : Proposition 2.2.12. De manière analogue, il est intéressant de définir parmi les dynamiques parallèles celles qui préserveront l'ordre FKG, et que nous dénommerons **dynamiques attractives**. La définition générale que nous en donnons, adaptée au cas PCA — condition nécessaire et suffisante (2.70) de la Proposition 2.3.4 — signifie que les règles locales d'évolution favorisent les valeurs de spin semblables aux valeurs des spins au voisinage du site. Le terme « attractif » fit sa première apparition au début des années 70 dans l'article [Hol72] de Holley. On pourra également se reporter à [Lig85], III.2 pour des éléments à propos des dynamiques attractives à temps continu, et à la référence [FLM88] pour d'autres inégalités stochastiques concernant les PCA.

Énonçons la définition d'une dynamique attractive, et précisons l'attractivité dans le cas d'une dynamique parallèle par la Proposition 2.3.4. L'origine de ce résultat est à trouver dans les références [TVS<sup>+</sup>78, LMS90].

**Définition 2.3.3** Soit  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ . On dit qu'une dynamique markovienne sur  $S^\Lambda$  est attractive si, pour toute fonction  $f : S^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  croissante, la fonction  $P(f)$  est aussi croissante.

**Proposition 2.3.4**

Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  ou bien  $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ . Une dynamique parallèle  $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  sur  $S^\Lambda$ , notée  $P$ , est attractive si et seulement si, l'une des conditions suivantes, équivalentes, est vraie :

(i) pour toutes mesures  $\mu_1, \mu_2$  de  $\mathcal{P}(S^\Lambda)$ , on a :

$$\mu_1 \preceq \mu_2 \Rightarrow \mu_1 P \preceq \mu_2 P ; \quad (2.68)$$

(ii) pour tout couple  $(\sigma, \eta)$  de configurations de  $S^\Lambda$  telles que  $\sigma \preceq \eta$

$$P(\cdot | \sigma) \preceq P(\cdot | \eta) ; \quad (2.69)$$

(iii) pour tout couple  $(\sigma, \eta)$  tel que  $\sigma \preceq \eta$ , pour tout site  $k \in \Lambda$ ,

$$p_k(\cdot | \sigma) \preceq p_k(\cdot | \eta) . \quad (2.70)$$

**Preuve :**

Prouvons que la définition d'attractivité implique (i) : Soit  $f$  une fonction sur  $S^\Lambda$  croissante. Comme la dynamique est attractive,  $P(f)$  est une fonction croissante, et puisque  $\mu_1 \preceq \mu_2$ , on a :  $\mu_1(P(f)) \leq \mu_2(P(f))$  ce qui signifie encore :  $(\mu_1 P)(f) \leq (\mu_2 P)(f)$ , d'où (i).

Établissons ensuite que (i) implique (ii) : Il suffit pour cela de remarquer que si  $\sigma \preceq \eta$ , alors  $\delta_\sigma \preceq \delta_\eta$ , et que :

$$\delta_\sigma P(\cdot) = P(\cdot | \sigma) . \quad (2.71)$$

Vérifions que (ii) entraîne l'attractivité telle que définie précédemment : Soit  $f$  une fonction croissante sur  $S^\Lambda$ . Soient  $\sigma, \eta$  deux configurations telles que  $\sigma \preceq \eta$ . La condition (ii) implique alors l'ordre suivant :  $P(\cdot | \sigma) \preceq P(\cdot | \eta)$ , ce qui signifie pour  $f$  croissante :  $P(f | \sigma) \leq P(f | \eta)$ ; et comme :

$$P(f | \sigma) = \int f(\xi) P(d\xi | \sigma) = Pf(\sigma) , \quad (2.72)$$

on conclut que  $Pf(\sigma) \leq Pf(\eta)$ .

Établissons enfin que (iii) est équivalent à (ii). Pour cela il suffit de remarquer que, pour  $\sigma, \eta$  fixés (tels que  $\sigma \preceq \eta$ )  $P(\cdot | \sigma)$  et  $P(\cdot | \eta)$  sont de la forme produit, et d'utiliser le résultat suivant, énoncé et démontré dans [TVS<sup>+</sup>78] (cf. Proposition 2.9 in [TVS<sup>+</sup>78]) :

**Théorème (Toom *et al.*)**

Soit  $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$  ou  $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ . Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures de probabilité sur  $S^\Lambda$  de la forme produit, c'est à dire qu'il existe deux familles  $(\mu_k)_{k \in \Lambda}$  et  $(\nu_k)_{k \in \Lambda}$  de probabilité sur  $S$  telles que :

$$\mu = \bigotimes_{k \in \Lambda} \mu_k \quad \text{et} \quad \nu = \bigotimes_{k \in \Lambda} \nu_k .$$

On a alors :

$$\mu \preceq \nu \quad \iff \quad \forall k \in \Lambda, \quad \mu_k \preceq \nu_k . \quad (2.73)$$

◆

Ce qui conclut la preuve des équivalences de la proposition. ■

**Remarque 2.3.5** *Si la dynamique parallèle  $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  est attractive sur  $S^\Lambda$ , alors on a également de manière évidente :*

$$\mu_1 \preceq \mu_2 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mu_1 P^{(n)} \preceq \mu_2 P^{(n)} \quad (2.74)$$

La Proposition 2.3.6 suivante permet de transformer, dans le cas où  $S = \{-1, +1\}$ , les critères précédents en une condition immédiate à vérifier, et qui sera d'une grande utilité dans les chapitres à venir.

**Proposition 2.3.6**

*Soit  $S = \{-1, +1\}$ . Une dynamique parallèle  $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  sur  $S^\Lambda$  ( $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$  ou bien  $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ ) est attractive si et seulement si :*

$$\forall k \in \Lambda, \quad \forall \sigma, \eta \in S^{\mathbb{Z}^d} \text{ tels que } \sigma \preceq \eta, \quad p_k(+1|\sigma) \leq p_k(+1|\eta) \quad (2.75)$$

**Preuve :**

Cette caractérisation de l'attractivité dans le cas où l'espace des spins  $S$  est égal à  $\{-1, +1\}$  s'établit aisément compte tenu de la condition nécessaire et suffisante d'attractivité (2.70) établie précédemment. Il suffit de remarquer que, à  $k \in \mathbb{Z}^d$  fixé, à  $\sigma$  fixé, si  $f$  est une fonction sur  $S$ , alors :

$$p_k(f|\sigma) = \sum_{s \in S} f(s) p_k(s|\sigma) = (f(+1) - f(-1)) p_k(+1|\sigma) + f(-1) .$$

Ce qui permet de conclure à la preuve du sens (2.75) implique (2.70), la réciproque étant évidente. ■

Pour un caractérisation analogue à (2.75) dans le cas où  $\#S > 2$ , on pourra consulter le lemme 2.3 in [Mez97]. Donnons enfin quelques précisions sur une autre classe de dynamiques parallèles définie par rapport à l'ordre FKG : les **dynamiques répulsives**.

**Définition 2.3.7**

Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  ou bien  $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ . On dit qu'une dynamique markovienne sur  $S^\Lambda$  est répulsive si, pour toutes mesures  $\mu_1, \mu_2$  de  $\mathcal{P}(S^\Lambda)$ , on a :

$$\mu_1 \preceq \mu_2 \Rightarrow \mu_2 P \preceq \mu_1 P \quad (2.76)$$

On peut démontrer pour ces dynamiques des caractérisations analogues à celles de la Proposition 2.3.4 relatives aux dynamiques attractives. En particulier, il est aisé de vérifier qu'une dynamique est répulsive si et seulement si, pour tout couple  $(\sigma, \eta)$  tel que  $\sigma \preceq \eta$ , pour tout site  $k \in \Lambda$ , on a :

$$p_k(\cdot \mid \eta) \preceq p_k(\cdot \mid \sigma) . \quad (2.77)$$

Précisons cependant qu'on a alors, pour tout couple de mesures de probabilité  $(\mu_1, \mu_2)$  tel que  $\mu_1 \preceq \mu_2$  :

$$\forall n \text{ pair} \quad \mu_1 P^{(n)} \preceq \mu_2 P^{(n)}$$

et

$$\forall n \text{ impair} \quad \mu_2 P^{(n)} \preceq \mu_1 P^{(n)} .$$

Des exemples de dynamiques parallèles attractives et répulsives sur  $\{-1, +1\}$  sont présentés et développés au Chapitre 4. De plus, le cas de dynamiques attractives est particulièrement considéré aux Chapitres 5 et 6.

**Avertissement :**

Dorénavant  $\Lambda$  désigne par défaut une partie finie de  $\mathbb{Z}^d$  que l'on dénommera volume fini. Dans le Chapitre 3 suivant, le cardinal de  $S$  est fini quelconque. A compter du Chapitre 4, l'espace des spins est de cardinal 2 et égal à  $S = \{-1, +1\}$ .

En outre, afin de développer l'étude annoncée des relations entre la théorie des mesures de Gibbs et les dynamiques parallèles  $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , nous considérons à partir de la section 3.4 du Chapitre 3 uniquement des **PCA purement stochastiques**, c'est à dire, rappelons le, tels que les règles locales d'évolution vérifient (1.5) :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \forall \eta \in S^{\mathbb{Z}^d}, \forall s \in S, \quad p_k(s \mid \eta) > 0 .$$





# Chapitre 3

## États d'équilibre de PCA généraux

Comme nous l'avons annoncé au Chapitre 1, la première question naturelle concernant l'étude de dynamiques est l'existence d'états d'équilibre et leur dénombrement. Dans ce chapitre nous énonçons différents résultats généraux qui précisent l'existence d'états d'équilibre pour les dynamiques PCA, et les cas d'éventuelle unicité de ces états.

Dans la première section nous définissons les mesures stationnaires et les mesures réversibles pour une dynamique markovienne générale, qui représentent les distributions statistiques des états d'équilibre. Dès lors, notre propos se focalisera sur les dynamiques d'automates cellulaires probabilistes purement stochastiques sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  où  $S$  est une partie finie de  $\mathbb{R}$ . Dans la section 3.2 nous énonçons un premier résultat d'existence et d'unicité d'une mesure stationnaire pour de telles dynamiques PCA à volume fini, *i.e.* agissant sur  $S^\Lambda$  où  $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ . Dans la section 3.3, nous explicitons le passage d'une dynamique  $P_\Lambda^\tau$  à volume fini  $\Lambda$  et condition au bord  $\tau$  à la dynamique à volume infini  $P$  possédant les mêmes règles d'évolution locale, nous permettant en cela de nous affranchir d'un choix arbitraire de condition au bord. La Proposition 3.3.1 met en évidence la préservation de l'existence d'un état d'équilibre à volume fini lors du passage à la dynamique à volume infini *i.e.* sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . Néanmoins, l'unicité d'un tel état est perdue lors de ce passage à la limite spatiale.

Nous rappelons alors dans la section 3.4 des résultats exhibant diverses propriétés gibbsiennes des états d'équilibre (au niveau des lois des processus, et au niveau des mesures d'équilibre elles-mêmes). Cela permet d'envisager l'approche de la question de l'unicité des états d'équilibre à volume infini comme conséquence d'un phénomène de non transition de phase pour certains potentiels.

Enfin, dans la section 3.5 nous introduisons une classe de dynamiques PCA dites « réversibles » pour chacune desquelles il existe au moins une mesure, qui, choisie comme condition initiale à la dynamique, rend celle-ci invariante par retournement du temps (mesure réversible). Un premier résultat dû à Kozlov et Vasilyev assure que ces dynamiques sont canoniquement définies par une famille  $\phi = (\phi_k, \phi_{k,j})_{k,j}$  de fonctions. De même qu'un résultat célèbre dû à de Kolmogorov exhibe la forme spécifique des diffusions browniennes qui admettent des mesures réversibles (diffusions dites « gradient »), ce résultat montre ici qu'une dynamique PCA ne peut être réversible que si les règles d'évolution  $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  sont d'une forme spécifique (cf. formule (3.19)) construite à partir des fonctions  $\phi = (\phi_k, \phi_{k,j})_{k,j}$ . En cela, la propriété d'être réver-

sible est bien intrinsèque à la dynamique PCA. Nous rappelons ensuite un résultat qui précise une caractérisation des mesures réversibles pour ces dynamiques en tant que mesures de Gibbs pour un certain potentiel  $\varphi$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  naturellement associé aux fonctions  $\phi = (\phi_k, \phi_{k,j})_{k,j}$ . Enfin, forts d'un regard nouveau porté simultanément sur les résultats des sections 3.4 et 3.5, nous dépeignons pour ces dynamiques PCA réversibles un panorama nouveau (cf. figure 3.1) des situations respectives des divers états d'équilibre et des mesures de Gibbs associées au potentiel « naturel »  $\varphi$  de ces dynamiques.

### 3.1 Définitions générales des états d'équilibre

Au coeur des préoccupations quant à l'étude des dynamiques markoviennes que sont les PCA, nous introduisons deux concepts d'états d'équilibre pour ces dynamiques, l'un plus restreint que l'autre.

**Définition 3.1.1** Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  ou  $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ . Soit  $P$  une dynamique markovienne à temps discret sur  $S^\Lambda$ . On dit que la mesure de probabilité  $\nu$  sur  $S^\Lambda$  est stationnaire si :

$$\int P(d\sigma|\eta)\nu(d\eta) = \nu(d\sigma). \quad (3.1)$$

D'après la formule (2.61), (3.1) signifie que l'on appelle mesure stationnaire, toute mesure de probabilité  $\nu$  invariante sous l'action de la dynamique  $P$  i.e. telle que  $\nu P = \nu$ . On définit également la notion plus forte de mesure réversible.

**Définition 3.1.2** Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  ou  $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ . Soit  $P$  une dynamique markovienne à temps discret sur  $S^\Lambda$ . On dit que la mesure de probabilité  $\nu$  sur  $S^\Lambda$  est réversible pour  $P$  si la chaîne de Markov  $(\nu, P)$  est réversible, c'est à dire si :

$$P(d\sigma|\eta)\nu(d\eta) = P(d\eta|\sigma)\nu(d\sigma). \quad (3.2)$$

L'équation (3.2) est généralement appelée en anglais *detailed balance condition*. Elle signifie que si l'on considère une mesure réversible  $\nu$  comme condition initiale à la dynamique  $P$ , le processus stochastique ainsi défini sera invariant par **retournement du temps**, c'est à dire invariant sous l'action de la transformation définie, pour  $\sigma(0)$  et  $\sigma(1)$  deux configurations, aux instants 0 et 1, par :  $(\sigma(0), \sigma(1)) \mapsto (\sigma(1), \sigma(0))$ .

Désignons par  $\mathcal{S}$  l'ensemble des mesures stationnaires pour  $P$  et par  $\mathcal{R}$  l'ensemble des mesures réversibles pour  $P$ . Désignons également par  $\mathcal{S}_i$  et  $\mathcal{R}_i$  les parties respectives de ces ensembles constituées par les mesures invariantes par translation. De manière immédiate, on vérifie que **toute mesure  $\nu$  réversible pour une dynamique  $P$  est stationnaire pour  $P$** , c'est à dire :

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{S} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_i \subset \mathcal{S}_i. \quad (3.3)$$

On vérifie également aisément que **l'ensemble des mesures stationnaires, et l'ensemble des mesures réversibles sont des parties convexes** (éventuellement réduites à l'ensemble vide) de  $\mathcal{P}(S^\Lambda)$ .

## 3.2 États d'équilibre des dynamiques à volume fini

Abordons maintenant le cas des dynamiques parallèles purement stochastiques sur  $S^\Lambda$  ( $S$  de cardinal fini quelconque). La Proposition 3.2.1 fournit un premier résultat d'**existence et d'unicité d'état d'équilibre pour de telles dynamiques à volume fini** *i.e.* sur  $S^\Lambda$  ( $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ ). Bien plus, ce résultat assure la convergence (au sens de la topologie de la convergence faible des mesures de probabilité) de toute mesure initiale quelconque vers cet unique état d'équilibre lorsque la dynamique PCA à volume fini agit sur elle un grand nombre de fois.

**Proposition 3.2.1** *Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  et soit  $\tau \in S^{\mathbb{Z}^d}$  une configuration au bord. Si la dynamique parallèle à volume fini  $P_\Lambda^\tau$  est purement stochastique alors il existe une unique mesure stationnaire  $\nu_\Lambda^\tau$  sur  $S^\Lambda$ . De plus, la dynamique  $P_\Lambda^\tau$  est ergodique, c'est à dire que pour toute condition initiale  $\pi_\Lambda$ , mesure de probabilité sur  $S^\Lambda$ , on a, au sens de la convergence faible :*

$$\pi_\Lambda P_\Lambda^{\tau(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \nu_\Lambda^\tau . \quad (3.4)$$

**Preuve :**

Ce résultat découle des propriétés usuelles des chaînes de Markov à espace d'états fini, irréductibles, apériodiques (cf. VIII.7 in [Fel71]). En effet, tout PCA à volume fini purement stochastique appartient à cette classe. ■

Prêtons attention au fait que le résultat précédent présente l'inconvénient majeur d'être **non constructif**. Plus précisément, il ne fournit aucun renseignement sur la forme exacte de la mesure stationnaire  $\nu_\Lambda^\tau$  et ne délivre aucune information quant à la vitesse de convergence de la dynamique vers cet état d'équilibre lorsque le temps s'écoule. Dans la suite de ce travail, on remédiera à ces points faibles dans des situations qui seront précisées aux Chapitres 4 et 6.

Un autre inconvénient de ce résultat à volume fini réside dans le fait qu'étudier une dynamique parallèle de règles d'évolution  $(p_k)_{k \in \Lambda}$  à volume  $\Lambda$  fini impose le recours à un choix arbitraire d'une condition au bord *i.e.* à l'extérieur de ce volume  $\Lambda$ . Le passage à l'étude de la dynamique  $P = (p_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  permet de se libérer de cette contrainte. Nous verrons que cette situation, qui sera une de nos problématiques, si elle est plus difficile et délicate à traiter, n'en est que plus riche de comportements variés, offrant en cela un outil au spectre plus large pour la modélisation de phénomènes réels divers.

## 3.3 Mesures stationnaires/réversibles à volume infini

On s'intéresse dans cette sous-section aux mesures stationnaires et réversibles pour une dynamique PCA à volume infini. Étant donné des règles d'évolution  $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ , la Proposition 3.3.1 explicite le passage d'une dynamique  $P_\Lambda^\tau$  à volume fini  $\Lambda$  et condition au bord  $\tau$  vers la dynamique à volume infini  $P$ . Le caractère stationnaire

et réversible d'états d'équilibre à volume fini est maintenu lors du passage à la limite spatiale, assurant ainsi de l'existence de tels états pour la dynamique à volume infini. Néanmoins, l'unicité de tels états qui prévaut pour les dynamiques à volume fini est perdue lors de ce passage. Précisons cela :

**Proposition 3.3.1** *Soit  $P = (p_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  une dynamique PCA. Soit  $\tau \in S^{\mathbb{Z}^d}$  une configuration au bord et soit  $(\nu_\Lambda^\tau)_{\Lambda \in \mathbb{Z}^d}$  une famille de mesures de probabilité stationnaires pour les dynamiques à volume fini  $P_\Lambda^\tau$ . Pour toute suite croissante  $(\Lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de volumes finis, la suite  $(\nu_{\Lambda_j}^\tau \otimes \delta_{\tau_{\Lambda_j^c}})_{j \in \mathbb{N}}$  de mesures de probabilité sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  admet au moins un point d'adhérence, et tout point d'adhérence est une probabilité sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  stationnaire pour  $P$ .*

*En particulier, toute dynamique PCA purement stochastique sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  admet donc au moins une probabilité stationnaire :  $\mathcal{S} \neq \emptyset$ .*

*Si les mesures à volume fini  $(\nu_{\Lambda_j}^\tau)_j$  sont de plus réversibles pour  $(P_{\Lambda_j}^\tau)_j$ , alors leurs points d'adhérence sont des mesures de probabilité sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  réversibles pour  $P$ .*

**Preuve :**

Soit  $P = (p_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  une dynamique PCA purement stochastique. Soit  $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ , soit  $\tau \in S^{\mathbb{Z}^d}$  une condition au bord. D'après la Proposition 3.2.1, on sait que la dynamique à volume fini  $P_\Lambda^\tau$  admet une unique mesure stationnaire  $\nu_\Lambda^\tau$ . Montrons successivement que stationnarité et réversibilité sont des propriétés maintenues lors du passage à la limite  $\Lambda$  tendant vers  $\mathbb{Z}^d$  :

– Cas stationnaire :

D'après les résultats présentés dans les sous-sections 2.1.3 et 2.2.1, pour vérifier que les mesures de probabilités  $\int P(\cdot | \eta) \nu(d\eta)$  et  $\nu(\cdot)$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  coïncident, il suffit de vérifier que pour toute fonction  $f$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  locale, on a :

$$\int f(\sigma) \int P(d\sigma | \eta) \nu(d\eta) = \int f(\sigma) \nu(d\sigma).$$

Soit  $f$  une fonction locale sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , et soit un volume fini  $\Delta$  tel que  $\Lambda_f \subset \Delta$ . Écrivons alors :

$$\begin{aligned} \int f(\sigma) \int P(d\sigma | \eta) \nu_\Delta^\tau \otimes \delta_{\tau_{\Delta^c}}(d\eta) &= \int f(\sigma_{\Lambda_f}) \int P(d\sigma_{\Lambda_f} | \eta_\Delta \tau_{\Delta^c}) \nu_\Delta^\tau(d\eta_\Delta) \\ &= \int f(\sigma_{\Lambda_f}) \sum_{\eta_\Delta} P_\Delta^\tau(d\sigma_\Delta | \eta_\Delta) \nu_\Delta^\tau(\eta_\Delta) \quad (3.5) \end{aligned}$$

$$= \int f(\sigma_{\Lambda_f}) \nu_\Delta^\tau(d\sigma_\Delta) \quad (3.6)$$

$$= \int f(\sigma_{\Lambda_f}) \nu_\Delta^\tau \otimes \delta_{\tau_{\Delta^c}}(d\sigma) \quad (3.7)$$

où pour passer de (3.5) à (3.6), on a utilisé le fait que  $\nu_\Delta^\tau$  est stationnaire pour  $P_\Delta^\tau$ . Considérons la suite de mesures  $(\nu_{\Lambda_j}^\tau \otimes \delta_{\tau_{\Lambda_j^c}})_{j \in \mathbb{N}}$  du compact  $\mathcal{P}(S^{\mathbb{Z}^d})$ . Elle admet donc au moins un point d'adhérence, noté  $\nu$ , qui est une mesure de probabilité. On a alors  $\nu = \lim_k \nu_{\Lambda_{j_k}}^\tau \otimes \delta_{\tau_{\Lambda_{j_k}^c}}$  où  $(\Lambda_{j_k})_k$  est une suite extraite de  $(\Lambda_j)_j$ . Comme les fonctions  $\sigma \mapsto f(\sigma)$  et  $\eta \mapsto \int f(\sigma) P(d\sigma | \eta)$  sont locales (de supports respectifs  $\Lambda_f$

et  $\overline{\Lambda_f}$ ), par définition de la convergence faible, on peut prendre  $\Delta = \Lambda_{j_k}$  et passer à la limite en  $k$  dans l'égalité (3.7), ce qui permet d'obtenir :

$$\int f(\sigma) \int P(d\sigma|\eta)\nu(d\eta) = \int f(\sigma)\nu(d\sigma).$$

D'après la Proposition 3.2.1 et ce résultat, on a également  $\mathcal{S} \neq \emptyset$ .

– Cas réversible :

De manière analogue, afin de montrer que :

$$P(d\sigma|\eta)\nu(d\eta) = P(d\eta|\sigma)\nu(d\sigma),$$

il suffit de vérifier, pour toute fonction  $F$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d} \times S^{\mathbb{Z}^d}$  locale, que :

$$\iint F(\sigma, \eta)P(d\sigma|\eta)\nu(d\eta) = \iint F(\sigma, \eta)P(d\eta|\sigma)\nu(d\sigma).$$

Soit  $F$  une fonction sur  $S^{\mathbb{Z}^d} \times S^{\mathbb{Z}^d}$  locale. Soit  $\Lambda_1 \times \Lambda_2$  contenant le support  $\Lambda_F$  de  $F$ , c'est à dire que pour tout couple  $(\sigma, \eta)$ , on a :  $F(\sigma, \eta) = F(\sigma_{\Lambda_1}, \eta_{\Lambda_2})$ .

Soit  $\Delta \Subset \mathbb{Z}^d$  tel que  $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \subset \Delta$ . Comme précédemment, écrivons :

$$\iint F(\sigma_{\Lambda_1}, \eta_{\Lambda_2})P(d\sigma|\eta)\nu_{\Delta}^{\tau} \otimes \delta_{\tau_{\Delta^c}}(d\eta) = \tag{3.8}$$

$$= \iint F(\sigma_{\Lambda_1}, \eta_{\Lambda_2})P(d\sigma_{\Lambda_1}|\eta_{\Delta}\tau_{\Delta^c})\nu_{\Delta}^{\tau}(d\eta_{\Delta})$$

$$= \iint F(\sigma_{\Lambda_1}, \eta_{\Lambda_2})P_{\Delta}^{\tau}(d\sigma_{\Delta}|\eta_{\Delta})\nu_{\Delta}^{\tau}(d\eta_{\Delta}) \tag{3.9}$$

$$= \iint F(\sigma_{\Lambda_1}, \eta_{\Lambda_2})P_{\Delta}^{\tau}(d\eta_{\Delta}|\sigma_{\Delta})\nu_{\Delta}^{\tau}(d\sigma_{\Delta}) \tag{3.10}$$

$$= \iint F(\sigma_{\Lambda_1}, \eta_{\Lambda_2})P(d\eta|\sigma)\nu_{\Delta}^{\tau} \otimes \delta_{\tau_{\Delta^c}}(d\sigma) \tag{3.11}$$

où l'on passe de (3.9) à (3.10) en utilisant la réversibilité de  $(\nu_{\Delta}^{\tau}, P_{\Delta}^{\tau})$ , et de (3.10) à (3.11) en faisant les mêmes manipulations que pour passer de (3.8) de à (3.9) mais en faisant jouer des rôles inversés à  $\sigma$  et  $\eta$ .

Comme dans le cas stationnaire, en passant à la limite dans une sous-suite adéquate, on obtient :

$$\iint F(\sigma, \eta)P(d\sigma|\eta)\nu(d\eta) = \iint F(\sigma, \eta)P(d\eta|\sigma)\nu(d\sigma).$$

■

Il est alors important de remarquer qu'à volume infini, l'unicité de la mesure stationnaire n'est plus assurée. En particulier, nous exhibons à la section 4.3 du Chapitre 4 une famille de dynamiques PCA sur  $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$  qui présente dans certaines situations plusieurs mesures stationnaires distinctes. Les caractérisations gibbsiennes présentées à la section suivante fournissent des critères permettant d'obtenir de plus amples informations quant au nombre de mesures stationnaires, ou réversibles.

Au préalable, introduisons la définition suivante :

**Définition 3.3.2** *On dit qu'une dynamique parallèle  $P$  est réversible s'il existe au moins une mesure  $\nu$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  réversible pour  $P$ , c'est à dire si :*

$$\mathcal{R} \neq \emptyset .$$

Remarquons cependant qu'une dynamique PCA ainsi dite réversible admet évidemment également des mesures  $\pi$  telles que  $(\pi, P)$  ne soit pas une chaîne de Markov réversible.

Attirons enfin l'attention sur un dernier fait. Soit  $\pi$  une mesure de probabilité sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . Considérons la loi  $P(d\sigma|\eta)\pi(d\eta)$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d} \times S^{\mathbb{Z}^d}$ , entre deux instants successifs, du processus de dynamique markovienne parallèle  $P$  et de mesure initiale  $\pi$ . Désignons par  $\hat{P}_\pi$  le conditionnement de cette loi respectivement à  $\sigma$ . On obtient ainsi la probabilité de transition de la dynamique image de la dynamique  $P$  sous l'action de la transformation du retournement du temps. La terminologie de **probabilité de transition retournée** – *backward transition probability* en anglais – désigne cette quantité. Dire qu'une mesure de probabilité  $\nu$  est réversible pour  $P$  est donc également équivalent, d'après la formule (3.2), à dire que la dynamique retournée  $\hat{P}_\nu$  est la même que  $P$ , ce qui signifie qu'elle définit la même dynamique PCA que  $P$ . En particulier, **la probabilité de transition retournée  $\hat{P}_\nu$  doit donc être de la forme produit**. Ce dernier fait met en exergue le caractère plus fort de la réversibilité d'un PCA par rapport à la réversibilité d'une simple chaîne de Markov, pour laquelle il est seulement requis de la dynamique retournée qu'elle soit markovienne.

## 3.4 Caractérisation gibbsienne des états d'équilibre

Dans cette section, nous présentons différents résultats existant qui permettent de caractériser du point de vue de la théorie des mesures de Gibbs les états d'équilibre des dynamiques PCA considérées, supposées de plus invariantes par translation. Un premier résultat (sous-section 3.4.1) se situe au niveau des trajectoires espace-temps des processus, *i.e.* sur l'espace  $S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}}$ . Il met en bijection les trajectoires des processus stationnaires invariants par translation (sur  $\mathbb{Z}^d$ ) avec les mesures de Gibbs sur  $S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}}$  associées à un potentiel  $\Phi$  déduit de la dynamique PCA considérée. Un second résultat (sous-section 3.4.2), sous une hypothèse supplémentaire introduisant un potentiel  $\varphi$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , caractérise directement les mesures stationnaires, invariantes par translation, en tant que mesures de Gibbs associées au potentiel  $\varphi$ .

### 3.4.1 Caractérisation gibbsienne sur $S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}}$ des lois des trajectoires

L'idée de considérer l'évolution spatio-temporelle d'un PCA comme un système de la mécanique statistique à l'équilibre, *i.e.* de caractériser ces évolutions grâce à des mesures de Gibbs associées à un potentiel sur l'espace-temps, est apparue originellement au sein de la physique, et a été abordée en particulier chez des auteurs comme Rujan ([Ruj87]) et Georges et Le Doussal ([GLD89]). L'étude mathématique précise de cette

idée, et sa considération du point de vue rigoureux de la théorie probabiliste des mesures de Gibbs ont ensuite été réalisées dans les articles [GKLM89, LMS89, LMS90] dont le résultat principal et essentiel est présenté ci-après.

Soit  $P$  une dynamique PCA sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , invariante par translation, purement stochastique. On définit une **configuration de l'espace-temps**  $S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}}$  par :

$$\xi_k(n) \in S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}}, \quad \text{où } n \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in \mathbb{Z}^d.$$

On définit les **translations temporelles**  $\Theta_m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) par :

$$\forall \xi \in S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}}, \quad \Theta_m(\xi) = (\xi_k(m+n))_{k \in \mathbb{Z}^d, n \in \mathbb{Z}} \quad (3.12)$$

ainsi que les **translations spatiales** sur  $S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}}$ , notées  $(\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  par abus de langage, de la même manière que les translations sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \forall \xi \in S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}}, \quad \theta_k(\xi) = (\theta_k \xi(n))_{n \in \mathbb{Z}} = (\xi_{k'-k}(n))_{k' \in \mathbb{Z}^d, n \in \mathbb{Z}}. \quad (3.13)$$

L'ensemble  $\mathcal{P}_i(S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}})$  est constitué par les mesures de probabilité sur  $S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}}$  invariantes sous l'action des translations  $(\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  et  $(\Theta_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ .

On définit l'application  $\mathcal{L}_P$  de  $\mathcal{P}(S^{\mathbb{Z}^d})$  vers  $\mathcal{P}(S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}})$  qui, à une mesure de probabilité  $\pi$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , associe la loi sur  $S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}}$  du processus de dynamique  $P$  et de mesure initiale  $\pi$ . Restreinte à  $\mathcal{S}_i$  comme ensemble de départ, cette application est telle que, à chaque instant, la marginale de  $\mathcal{L}_P(\nu)$  soit  $\nu$ , et puisque la dynamique PCA est homogène en temps, on a :

$$\mathcal{L}_P(\mathcal{S}_i) \subset \mathcal{P}_i(S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}}). \quad (3.14)$$

On définit alors le potentiel  $\Phi$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}}$  par :

$$\begin{cases} \Phi_{\{(k,n)\} \cup (V_k, n-1)}(\xi) = -\ln p_k(\xi_k(n) \mid \xi_{V_k}(n-1)) \\ \Phi_A(\xi) = 0 \text{ pour tout } A \Subset \mathbb{Z}^d, \text{ tel que } \nexists(k,n), A = \{(k,n)\} \cup (V_k, n-1) \end{cases} \quad (3.15)$$

où

$$(V_k, n) \triangleq \cup_{k' \in V_k} \{(k', n)\}. \quad (3.16)$$

Ce potentiel  $\Phi$  est invariant sous l'action des translations spatiales  $(\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ , et invariant sous l'action des translations temporelles  $(\Theta_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ ; c'est à dire qu'il est invariant sous l'action des translations de  $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}$ . On peut alors énoncer le résultat, pour la preuve duquel on se réfère à [GKLM89] :

### **Théorème (Goldstein *et al.*, 1989)**

Soit  $P = (p_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  une dynamique PCA sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , invariante par translation, purement stochastique. Les mesures de Gibbs sur  $S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}}$ ,  $\mathcal{G}_i(\Phi)$ , associées au potentiel  $\Phi$  (défini en (3.15)) et invariantes sous l'action des translations sur  $S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}}$ , sont exactement les lois des processus à dynamique parallèle  $P$  et de condition initiale  $\nu$ , stationnaire pour  $P$  et invariante par translation sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . C'est à dire que  $\mathcal{L}_P$  définit une bijection de  $\mathcal{S}_i$  vers  $\mathcal{G}_i(\Phi)$ . ♦



Comme conséquence immédiate, on remarque que **si le potentiel  $\Phi$  vérifie les conditions d'unicité de Dobrushin** (cf. Théorème 8.7 *in* [Geo88]), ce qui se produit dès lors que la dynamique est proche d'une situation d'indépendance spatiale et temporelle entre les sites, **alors l'unicité de la mesure de Gibbs associée au potentiel  $\Phi$  assure l'unicité de la mesure stationnaire sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , invariante par translation**, de la dynamique PCA considérée.

Comme le montre ce corollaire, ce théorème présente l'avantage de transposer la question de l'unicité des mesures stationnaires sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , invariantes par translation, en une question de transition de phase pour un potentiel sur  $S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}}$ . Cependant la forme spécifique du potentiel  $\Phi$ , où l'interaction est à plusieurs corps, rend l'étude systématique de la transition de phase pour ce potentiel très difficile en l'état des connaissances relatives aux mesures de Gibbs. Cette **interaction  $\Phi$  à plusieurs corps** est en effet très différente des interactions par paires, aux plus proches voisins, pour lesquelles l'étude de la transition de phase est assez bien développée. Ainsi, en l'absence de nouveaux résultats généraux concernant l'étude des transitions de phase, ce théorème ne permet d'avoir une information sur le nombre de mesures stationnaires invariantes par translation pour la dynamique PCA que dans des **régimes de fonctionnement extrêmes** : situation proche de l'indépendance entre les sites déjà évoquée (zone dite de « haute température » pour  $\Phi$ ) ou situation de très forte dépendance (zone dite de « basse température » pour  $\Phi$ ) pour lesquelles on peut recourir à la théorie de Pirogov-Sinai.

Le résultat suivant propose une approche gibbsienne alternative des mesures stationnaires invariantes par translation des dynamiques PCA.

### 3.4.2 Aspect gibbsien sur $S^{\mathbb{Z}^d}$ des mesures stationnaires invariantes par translation

Dans cette sous-section, le théorème mentionné permet de caractériser directement les mesures stationnaires invariantes par translation en tant que mesures de Gibbs sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . Il présente l'alternative de situer l'analyse gibbsienne au niveau des états d'équilibre et non plus au niveau des trajectoires des processus stationnaires. On se réfère pour sa preuve à la référence [DP92] (cf. également [MVV94]). Succinctement, ce résultat se fonde sur une **technique de décroissance de l'énergie libre**, et une estimation exacte du taux de décroissance en fonction de la probabilité de transition retournée de la dynamique PCA.

#### Théorème (Dai Pra, 1992)

S'il existe un potentiel  $\varphi$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  tel qu'au moins une mesure  $\nu$  stationnaire, invariante par translation, soit de Gibbs pour ce potentiel  $\varphi$  alors toutes les mesures stationnaires pour  $P$ , invariantes par translation, seront gibbsiennes par rapport à ce même potentiel. Ce qui signifie :

$$\mathcal{G}(\varphi) \cap \mathcal{S}_i \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{S}_i \subset \mathcal{G}(\varphi) . \quad (3.17)$$



Une conséquence immédiate de ce théorème est la dichotomie suivante : **ou bien toutes les mesures stationnaires invariantes par translation sont de Gibbs pour le même potentiel, ou bien aucune n'est de Gibbs.** Remarquons qu'une telle dichotomie apparaît aussi pour certaines dynamiques séquentielles à temps continu (cf. [Kün84a]). Ce résultat est d'une grande importance pratique. En particulier, dans la section suivante, conjugué à une caractérisation gibbsienne des mesures réversibles, il nous permettra d'établir le Corollaire 3.5.2 concernant les dynamiques parallèles réversibles.

Il faut également remarquer qu'à la différence du résultat de la sous-section 3.4.1 précédente ce résultat ne requiert pas de lien *a priori* entre le potentiel  $\varphi$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  et la dynamique PCA étudiée. À la section suivante, nous introduisons une classe de dynamiques PCA pour lesquelles le potentiel  $\varphi$  sera déterminé par la forme de la règle locale d'évolution.

Précisons enfin que la preuve de ce théorème établi en fait le résultat suivant, plus fort : **soit  $\varphi$  un potentiel sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  tel qu'il existe une mesure  $\nu$ , élément de  $\mathcal{G}_i(\varphi)$ , stationnaire pour  $P$ , alors  $\mathcal{G}_i(\varphi)$  est stable sous l'effet de la dynamique  $P$ , i.e. que toute l'image  $\mu P$  de toute mesure  $\mu$  de Gibbs, invariante par translation, demeure une mesure de Gibbs pour le même potentiel** (cf. Remarque 6.3.4 *in* [DP92] et Proposition 2.1 *in* [DPLR02]).

### 3.5 Classe des PCA réversibles

Cette section concerne l'étude des états d'équilibre (mesures stationnaires, mesures réversibles) de dynamiques PCA purement stochastiques, à volume infini (sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ ,  $S$  de cardinal fini quelconque), réversibles au sens défini dans la Section 3.1, non nécessairement invariantes par translation dans un premier temps (elles ne le seront supposées qu'à partir du Corollaire 3.5.2). Deux résultats importants sont évoqués. Le premier permet de caractériser la forme nécessaire et suffisante des règles locales d'évolution afin qu'une dynamique PCA puisse être réversible, introduisant en cela un potentiel  $\varphi$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  ainsi naturellement associé à de telles dynamiques. Le second caractérise principalement les mesures réversibles pour une de ces dynamiques en tant que mesures de Gibbs pour ce potentiel  $\varphi$ . Ces résultats, conjointement au Théorème rappelé à la sous-section 3.4.2, nous permettent alors de formuler le résultat nouveau du Corollaire 3.5.2, associé à la situation présentée à la Figure 3.1, qui précise les inclusions et situations respectives des ensembles de différents types d'états d'équilibre pour ces dynamiques (mesures stationnaires, réversibles, munies de la propriété d'invariance par translation ou non) par rapport à l'ensemble des mesures de Gibbs pour le potentiel  $\varphi$ .

#### Définition des dynamiques parallèles $\mathcal{D}(\phi)$

On désigne par le symbole  $\phi$  l'ensemble de deux familles de fonctions  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  et  $(\phi_{k,j})_{(k,j) \in (\mathbb{Z}^d)^2}$  :

$$\phi_k : S \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\phi_{k,j} : S \times S \longrightarrow \mathbb{R},$$

telles que l'on ait :

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad \{j : \phi_{k,j} \neq 0\} \subseteq \mathbb{Z}^d ; \\ \forall (k, j) \in (\mathbb{Z}^d)^2, \quad \forall s, s' \in S, \quad \phi_{k,j}(s, s') = \phi_{j,k}(s', s) . \end{cases} \quad (3.18)$$

On introduit le symbole  $\mathcal{D}(\phi)$  pour désigner la dynamique PCA sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  dont les règles d'évolution locales sont de la forme :  $\forall k \in \mathbb{Z}^d, \forall \sigma_k \in S, \forall \eta \in S^{\mathbb{Z}^d}$ ,

$$p_k(\sigma_k | \eta) = \frac{\exp\left(-\phi_k(\sigma_k) - \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \phi_{k,j}(\sigma_k, \eta_j)\right)}{\sum_{s \in S} \exp\left(-\phi_k(s) - \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \phi_{k,j}(s, \eta_j)\right)} . \quad (3.19)$$

On vérifie aisément que la dynamique parallèle ainsi définie est bien locale, et que :

$$V_k = \{j : \phi_{k,j} \neq 0\} . \quad (3.20)$$

De plus, vu la forme de (3.19), il est immédiat qu'une telle dynamique est purement stochastique. Le résultat suivant trouve son origine dans [Sta73] et est dû pour le cas du volume infini à Kozlov et Vasilyev. Il assure que ces dynamiques  $\mathcal{D}(\phi)$  sont des dynamiques parallèles réversibles, et que, bien plus, cette forme décrit toutes les dynamiques parallèles purement stochastiques réversibles sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . Pour la preuve de ce résultat essentiel, le lecteur se réfèrera à [KV80] (en particulier Théorème 1 de cette référence et Théorème 18.10 de [TVS<sup>+</sup>78]).

### Théorème (Kozlov-Vasilyev, 1980)

Une dynamique parallèle  $P$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  est réversible si et seulement s'il existe  $\phi = (\phi_k, \phi_{k,j})_{k,j}$  vérifiant (3.18) de telle sorte que  $P = \mathcal{D}(\phi)$ . ♦

On constate grâce à ce résultat que le **caractère réversible d'une dynamique PCA**, lié à l'existence d'au moins une mesure  $\nu$  telle que la chaîne de Markov  $(\nu, P)$  soit une chaîne réversible, est en réalité **intrinsèque aux règles locales d'évolution** *i.e.* ne dépend que de la forme de la seule dynamique. Précisons bien évidemment comme précédemment que le caractère réversible de la dynamique n'interdit pas à la chaîne de Markov  $(\pi, P)$  de ne pas être réversible si la mesure  $\pi$  considérée comme mesure initiale n'est pas une mesure réversible.

### Bi-espace, bi-potentiel

Afin de mieux comprendre l'origine du résultat précédent, et la portée du résultat qui suit, précisons le sens des fonctions  $\phi$  introduites précédemment. À cette fin, on introduit le graphe  $S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}} \simeq S^{\mathbb{Z}^d} \times S^{\mathbb{Z}^d}$  appelé **bi-espace**. On note ses éléments

$$\bar{\xi} \in S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}},$$

qui s'écrivent également comme  $\bar{\xi} = (\xi^0, \xi^1)$  où  $\xi^0$  et  $\xi^1$  sont des éléments de  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , ou encore  $\bar{\xi}(0) = \xi^0$  et  $\bar{\xi}(1) = \xi^1$ .

Soit  $\pi$  une mesure de probabilité sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . On associe à  $\pi$  la mesure de probabilité  $\bar{\pi}$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}}$  définie par :

$$\bar{\pi}(d\bar{\xi}) = P(d\xi^1 \mid \xi^0) \pi(d\xi^0). \quad (3.21)$$

La mesure de probabilité  $\bar{\pi}$  correspond en fait à la **loi sur deux instants successifs** du processus PCA de dynamique parallèle  $P$  et de mesure à l'instant initial  $\pi$ .

On peut alors énoncer le résultat suivant :

**Proposition 3.5.1**

*La famille de fonctions  $(\phi_k, \phi_{k,j})_{(k,j) \in (\mathbb{Z}^d)^2}$  vérifiant (3.18), définit un potentiel  $\phi$  sur le graphe  $S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}}$ , à portée finie, que l'on appelle **bi-potentiel**.*

**Preuve :**

On pose  $\tilde{\phi}$ , défini par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad \tilde{\phi}_{\{(k,1)\}}(\bar{\xi}) = \phi_k(\bar{\xi}_{(k,1)}) \quad (3.22)$$

$$\forall (k,j) \in (\mathbb{Z}^d)^2, \quad \tilde{\phi}_{\{(k,1); (j,0)\}}(\bar{\xi}) = \phi_{k,j}(\bar{\xi}_{(k,1)}, \bar{\xi}_{(j,0)}) \quad (3.23)$$

Il est alors aisé de remarquer que  $\tilde{\phi}$  est bien une famille de fonctions sur  $S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}}$ , indicées par des parties finies de  $S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}}$  (ici des singletons ou bien un certain type de paires de sites), et qui vérifie la condition de mesurabilité :  $\tilde{\phi}_A(\bar{\xi}) = \tilde{\phi}_A(\bar{\xi}_A)$ , pour toute configuration  $\bar{\xi}$  de  $S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}}$  et toute partie finie  $A$  de  $S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}}$ . Conformément à la Définition 2.2.2,  $\tilde{\phi}$  définit bien un potentiel sur le bi-espace  $S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}}$ . La notation  $\phi$  désignera dorénavant le potentiel  $\tilde{\phi}$ .

Enfin, on remarque que la condition :  $\forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad \{j : \phi_{k,j} \neq 0\} \in \mathbb{Z}^d$  de (3.18) implique que le potentiel  $\phi$  est à portée finie. ■

La condition :

$$\forall (k,j) \in (\mathbb{Z}^d)^2, \quad \forall (s,s') \in (S)^2, \quad \phi_{k,j}(s,s') = \phi_{j,k}(s',s)$$

dans (3.18) peut alors également être considérée du point de vue du bi-potentiel, et réécrite sous la forme :

$$\forall \bar{\xi} \in S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}}, \quad \tilde{\phi}_{\{(k,1); (j,0)\}}(R(\bar{\xi})) = \tilde{\phi}_{\{(k,0); (j,1)\}}(\bar{\xi}), \quad (3.24)$$

où l'application  $R$  est définie par :

$$R : \quad S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}} \longrightarrow S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}} \\ \bar{\xi} = (\xi^0, \xi^1) \quad \mapsto \quad R(\bar{\xi}) = (\xi^1, \xi^0). \quad (3.25)$$

Cette reformulation de la deuxième condition de (3.18) sous la forme (3.24) signifie requérir une propriété de symétrie sous retournement du temps pour le bi-potentiel et laisse présager l'importance de cette condition pour la réversibilité de la dynamique PCA définie à partir de ce bi-potentiel par la formule (3.19).

Par ailleurs, il est en fait établi plus précisément dans [KV80] qu'il y a bijection entre l'ensemble des mesures de Gibbs sur le graphe  $S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}}$  associées au bi-potentiel  $\phi$  et un ensemble de mesures de Gibbs sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  associé à un certain potentiel  $\varphi$  déduit du potentiel  $\phi$ . À  $\phi = (\phi_k, \phi_{k,j})_{k,j}$ , on associe en effet le potentiel  $(\varphi_A)_{A \in \mathbb{Z}^d}$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{V_k}(\sigma) = -\ln \left( \sum_{s \in S} \exp \left( -\phi_k(s) - \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \phi_{k,j}(s, \sigma_j) \right) \right) \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d \\ \varphi_{\{k\}}(\sigma) = \phi_k(\sigma_k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d \\ \varphi_A \equiv 0 \text{ pour tous les autres ensembles } A \in \mathbb{Z}^d \end{array} \right. \quad (3.26)$$

En se fondant sur les références précédemment citées, on énonce alors le résultat suivant : **l'application de  $\mathcal{P}(S^{\mathbb{Z}^d})$  vers  $\mathcal{P}(S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}})$ , qui à  $\pi$  associe  $\bar{\pi}$  définit une bijection entre  $\mathcal{G}(\varphi)$  et  $\mathcal{G}(\phi)$ .**

On attire ici l'attention sur le fait que les ensembles  $V_k$  sont, dans les situations dignes d'intérêt, de cardinal bien supérieur à 2. Ainsi le potentiel  $\varphi$  est à considérer comme un potentiel pour lequel l'interaction a lieu entre plusieurs corps, et donc d'une complexité plus élevée que le potentiel d'Ising présenté au chapitre précédent (cf. formule (2.17)). Cependant, bien que  $\phi$  soit un potentiel ne comportant que des interactions au plus par paires, l'étude de la transition de phase éventuelle pour ces ensembles  $\mathcal{G}(\varphi)$  et  $\mathcal{G}(\phi)$  sera par la suite réalisée dans le Chapitre 4 pour le potentiel  $\varphi$ , potentiel sur le réseau  $\mathbb{Z}^d$  et non pour  $\phi$ , qui présente l'inconvénient d'être un potentiel sur un graphe (ici  $S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}}$ ).

Enfin, avant d'énoncer le résultat suivant, également dû à Kozlov et Vasilyev (cf. [KV80]), et complété par les travaux de Künsch (cf. [Kün84b]), précisons qu'une mesure  $\pi$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  est **2-périodique** sous l'action de  $P$  si elle satisfait :

$$\pi P \neq \pi \text{ et } \pi P^{(2)} = \pi . \quad (3.27)$$

Énonçons alors :

### **Théorème (Kozlov-Vasilyev 1980, Künsch 1984)**

Soit  $P$  une dynamique parallèle réversible, associée au bi-potentiel  $\phi$ . Soit  $\varphi$  le potentiel sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  canoniquement associé à  $\phi$  par les formules (3.26). Alors :

- il existe au moins une mesure de Gibbs associée à  $\varphi$  qui soit réversible pour  $P$  ;
- toute mesure réversible est une mesure de Gibbs associée à  $\varphi$  :  $\mathcal{R} \subset \mathcal{G}(\varphi)$  ;
- toute mesure de Gibbs associée à  $\varphi$ , est soit réversible, soit périodique de période 2.

◆

Ce théorème explicite exactement les liens entre l'ensemble des mesures de Gibbs pour le potentiel  $\varphi$  naturellement associé à la dynamique PCA réversible et l'ensemble des mesures réversibles pour cette dernière.

Dans le cas où la dynamique PCA est de plus invariante par translation, nous pouvons associer ce résultat au résultat de la sous-section 3.4.2 concernant les mesures stationnaires invariantes par translation, et formuler le Corollaire 3.5.2.

Précisons pour cela que si l'on demande à la famille de fonctions  $(\phi_k, \phi_{k,j})_{(k,j) \in (\mathbb{Z}^d)^2}$  de vérifier, en plus de (3.18), les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{Z}^d, & \phi_k = \phi_0 \\ \forall (k,j) \in (\mathbb{Z}^d)^2, & \phi_{k,j}(\cdot, \cdot) = \phi_{0,j}(\cdot, \theta_{-k}(\cdot)) \end{cases} \quad (3.28)$$

alors la dynamique PCA réversible  $\mathcal{D}(\phi)$  ainsi définie est invariante par translation. Ce qui permet d'affirmer :

**Corollaire 3.5.2**

*Soit  $P$  une dynamique PCA sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , réversible, invariante par translation. Elle est définie par le bi-potentiel  $\phi$  grâce à (3.19), où  $\phi$  vérifie (3.18) et (3.28). Soit  $\varphi$  le potentiel sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  canoniquement associé à  $\phi$  par (3.26).*

*Alors, les mesures réversibles pour la dynamique parallèle  $P$  sont exactement les mesures de Gibbs associées à  $\varphi$ , qui sont également stationnaires :*

$$\mathcal{R} = \mathcal{S} \cap \mathcal{G}(\varphi) . \quad (3.29)$$

*Et de plus, le sous-ensemble des mesures réversibles invariantes par translation est égal à l'ensemble des mesures stationnaires invariantes par translation :*

$$\mathcal{R}_i = \mathcal{S}_i . \quad (3.30)$$

*C'est à dire que la situation représentée par la figure 3.1 a lieu.*

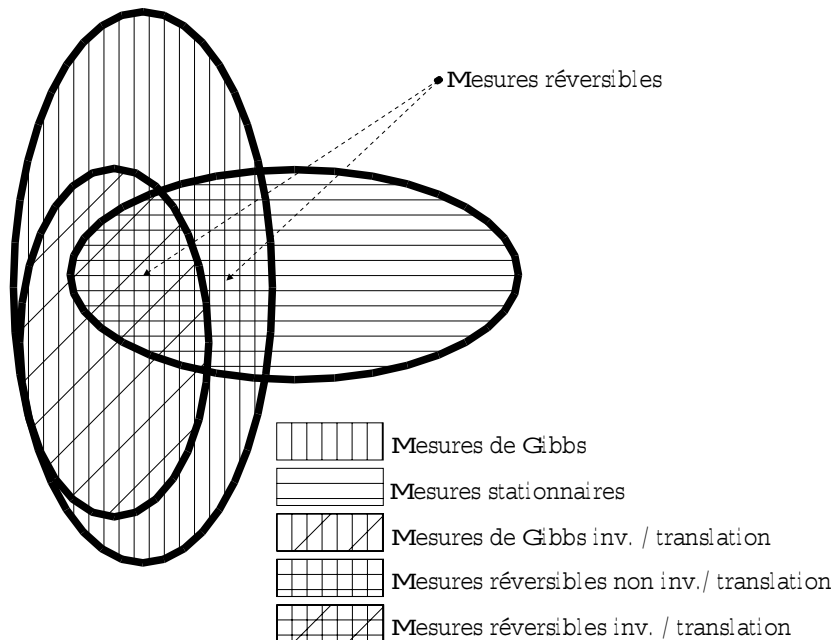


FIG. 3.1 – Position respective de  $\mathcal{R}, \mathcal{R}_i, \mathcal{S}, \mathcal{S}_i, \mathcal{G}(\varphi), \mathcal{G}_i(\varphi)$  pour une dynamique PCA sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  purement stochastique, réversible et invariante par translation

**Preuve :**

Puisque de manière évidente on a  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ , d'après le premier Théorème rappelé dans cette section, comme  $\mathcal{R} \subset \mathcal{G}(\varphi)$ , on a :  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{G}(\varphi)$ . Pour l'inclusion réciproque, d'après ce même résultat, toute mesure de Gibbs est, ou bien réversible, ou bien de période 2. Un élément de  $\mathcal{S} \cap \mathcal{G}(\varphi)$  ne pouvant être 2-périodique, on a donc :  $\mathcal{S} \cap \mathcal{G}(\varphi) \subset \mathcal{R}$ .

Afin de prouver la seconde affirmation (3.30), remarquons que, toujours d'après le premier Théorème de cette section, il existe au moins une mesure réversible pour  $P$ , qui soit également une mesure de Gibbs pour le potentiel  $\varphi$ . D'après la preuve du Corollaire 5.16 in [Geo88], pour  $\mu \in \mathcal{G}(\varphi) \cap \mathcal{S}$  on peut construire, en moyennant les translatés de  $\mu$ , une mesure  $\mu_i$ , invariante par translation, appartenant à  $\mathcal{G}_i(\varphi) \cap \mathcal{S}$ . On en déduit qu'il existe au moins une mesure sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  stationnaire pour  $P$ , invariante par translation, qui soit également une mesure de Gibbs pour le potentiel  $\varphi$ . Ainsi, grâce au Théorème de la sous-section 3.4.2, on sait que :  $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{G}(\varphi)$ . D'après le premier résultat (3.29) de ce corollaire, on sait de plus que :  $\mathcal{R}_i = \mathcal{S}_i \cap \mathcal{G}_i(\varphi)$ . La seconde assertion  $\mathcal{R}_i = \mathcal{S}_i$  de ce corollaire s'en déduit alors. ■

Pour les dynamiques PCA réversibles, ce Corollaire permet de dire que si le potentiel  $\varphi$  canoniquement associé à cette dynamique ne présente pas de transition de phase (*i.e.*  $\mathcal{G}(\varphi)$  réduit à une unique mesure de Gibbs  $\mu$ ), alors on a :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_i = \mathcal{S}_i = \mathcal{G}_i(\varphi) = \mathcal{G}(\varphi) = \{\mu\}, \quad (3.31)$$

c'est à dire que dans la figure 3.1 tous les ensembles représentés se réduisent au singleton  $\{\mu\}$  sauf *a priori* l'ensemble  $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_i$ .

Ainsi, pour les dynamiques PCA invariantes par translation réversibles, **la question de l'unicité des mesures réversibles pour la dynamique à volume infini (*i.e.* sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ ) se déduit d'une non-transition de phase pour un potentiel sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$** , canoniquement construit à partir des règles locales d'évolution  $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  de la dynamique. La question de l'unicité des mesures stationnaires ( $\mathcal{S} = \mathcal{G}(\varphi)$ ?) n'est certes pas ici résolue de manière générale, mais lorsque la dynamique  $P$  sera de plus attractive, sous une hypothèse supplémentaire (cf. (6.40)) pour l'unique mesure de Gibbs, le Théorème 6.4.1 démontré au Chapitre 6, assurera de l'ergodicité (cf. Définition 6.1.1) de la dynamique, et en cela de l'unicité de la mesure stationnaire.

La question de transition de phase ou non pour un potentiel du type  $\varphi$  se pose alors avec intérêt pour l'étude des états d'équilibre des dynamiques PCA réversibles, et le chapitre suivant abordera donc cette question, dans le cas où  $S = \{-1, +1\}$ .

Signalons également le travail [You96], dans lequel les dynamiques markoviennes parallèles sont généralisées à des fins de traitement de l'image à des dynamiques à mémoire finie, *i.e.* non markoviennes, pour lesquelles l'évolution aléatoire du réseau ne dépend plus seulement de l'état du réseau à l'instant précédent mais de  $N$  ( $N \geq 1$ ) instants précédents. Des états  $(N - 1)$  périodiques sont alors mis en évidence. Ceci nous permet ainsi de **relier la 2-périodicité possible pour les mesures de Gibbs associées à la dynamique avec le caractère markovien de cette dernière**. Afin

de préciser la situation de la figure 3.1, nous mettrons donc en exergue au chapitre suivant des mesures de Gibbs non stationnaires (donc, 2-périodiques).

Enfin, précisons que le cas de dynamiques PCA non-réversibles est laissé en perspective pour une étude ultérieure. La première généralisation en ce sens, consiste à considérer des dynamiques PCA dont la probabilité de transition retournée ne définit pas la même dynamique PCA (cas réversible) mais définit tout de même une dynamique PCA (différente de la dynamique non retournée), c'est à dire est, conditionnellement à l'instant précédent, de la forme produit. Ce cas a été introduit par Vasilyev dans la référence [Vas78] sous la terminologie de PCA **quasi-réversible**. Un résultat analogue au second théorème de cette section y est établi. La caractérisation gibbsienne qui y est mise en évidence y est cependant moins complète que dans le cas réversible qui nous intéresse principalement dans ce chapitre et le suivant. Signalons que pour de telles dynamiques PCA, à la différence du cas réversible, le caractère quasi-réversible n'est pas intrinsèque à la dynamique et dépend très fortement de la mesure initiale considérée. Cela a pour effet que le potentiel gibbsien associé canoniquement à la dynamique dans le cas réversible, est, dans le cas quasi-réversible, également lié au caractère gibbsien de la mesure prise comme mesure initiale. Il n'est plus alors canoniquement associé à la dynamique parallèle  $P$ , mais canoniquement associé à la chaîne de Markov  $(\mu, P)$  considérée.





# Chapitre 4

## Étude d'une famille spécifique de PCA

Dorénavant, dans ce chapitre, ainsi que dans les suivants, on considérera toujours le cas  $S = \{-1, +1\}$ .

Nous définissons (sous-section 4.1.1) sur  $\{-1; +1\}^{\mathbb{Z}^d}$  une famille paramétrée de dynamiques PCA réversibles, appelée classe  $\mathcal{C}$  pour laquelle nous exhibons la forme exacte de l'unique mesure  $\nu_\Lambda^\tau$  stationnaire (car réversible) pour un volume  $\Lambda$  fini donné. Nous déterminons d'autre part la forme explicite des mesures de Gibbs  $\mu_\Lambda^\tau$  à volume  $\Lambda$  fini, associées au potentiel  $\varphi$  canoniquement défini pour une dynamique réversible, d'après les résultats du Chapitre précédent. Nous faisons alors, dans la suite de la section 4.1, une étude précise comparative de ces deux familles de mesures à volume fini.

Dans la section 4.2, l'étude des mesures de Gibbs sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  associées à cette famille de dynamiques est développée. Principalement, nous prouvons, en dimension 2, qu'il y a transition de phase pour le potentiel  $\varphi$ , dès lors qu'un des paramètres caractéristiques de la famille est suffisamment grand. Un cas particulier mérite également attention (sous-section 4.2.2) grâce à ses liens forts avec le potentiel d'Ising usuel.

Enfin, dans la section 4.3, lorsqu'il y a transition de phase, l'action de ces dynamiques sur leurs diverses mesures de Gibbs associées est mise en évidence lorsque ces dynamiques sont attractives ou bien répulsives. Des mesures de Gibbs non stationnaires sont en particulier mises en évidence, et le phénomène de 2-périodicité du résultat de Kozlov-Vasilyev mentionné à la sous-section 3.5 (p. 44) est alors illustré. Le cas particulier lié au modèle d'Ising, introduit en sous-section 4.2.2, est également considéré en sous-section 4.3.3, cette fois du point de vue dynamique. Des mesures stationnaires non invariantes par translation sont alors également exhibées.

Précisons que nous avons publié les principaux résultats de ce chapitre dans la référence [DPLR02]. Ils sont ici détaillés et complétés.

### 4.1 Définition et étude fine à volume fini

Nous introduisons dans la sous-section 4.1.1 la famille paramétrée de dynamiques PCA à laquelle ce chapitre est consacré, en précisons le degré de généralité et étudions

l'effet des différents paramètres  $\beta$ ,  $h$  et  $\mathcal{K}(\cdot)$  introduits.

Dans la sous-section 4.1.2, la Proposition 4.1.5 détermine la forme explicite des mesures réversibles à volume fini associées à chacune des dynamiques de la famille introduite. S'agissant de dynamiques réversibles, d'après les résultats du Chapitre précédent, on leur associe canoniquement un potentiel  $\varphi$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , dont les mesures de Gibbs à volume fini associées sont comparées aux mesures réversibles (Proposition 4.1.8).

Lorsque la fonction d'interaction  $\mathcal{K}$  est positive ou négative ( $\mathcal{K}(\cdot) \leq 0$  ou bien  $\mathcal{K}(\cdot) \geq 0$ ), dans la sous-section 4.1.3 on établit le caractère monotone des mesures de Gibbs à volume fini  $\mu_\Lambda^\tau$  considérées, par rapport à la condition au bord  $\tau$  (Proposition 4.1.9). Plus particulièrement, lorsque  $\mathcal{K}(\cdot) \geq 0$  – ce qui aura été établi comme correspondant au cas où la dynamique PCA est attractive – les mesures réversibles  $\nu_\Lambda^\tau$  vérifient une propriété analogue (Proposition 4.1.11); les Propriétés 4.1.12 et 4.1.15 ainsi que le Corollaire 4.1.14 ordonnent entre elles différentes mesures réversibles  $\nu_\Lambda^\tau$  et mesures de Gibbs  $\mu_\Lambda^\tau$ , ainsi que la projection à volume fini de toute mesure de Gibbs  $\mu$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , associée à  $\varphi$  (Proposition 4.1.16).

### 4.1.1 Définition de la classe $\mathcal{C}$ de PCA

#### Définition

La famille spécifique de PCA introduite ci-après trouve son origine, sous une forme simplifiée, dans la référence [LMS90] (formule (1.29) de la section 1.6). La forme plus générale donnée ici apparaît dans la référence [BCLS99], où une étude de la métastabilité de dynamiques PCA à volume fini est développée.

On introduit la classe  $\mathcal{C}$  d'automates cellulaires probabilistes sur  $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$  constituée par les dynamiques PCA dont la règle locale d'évolution  $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  s'écrit, pour tout site  $k$  de  $\mathbb{Z}^d$ , pour toute configuration  $\eta \in S^{\mathbb{Z}^d}$ , et pour tout  $s \in S$ , sous la forme :

$$p_k(s \mid \eta) = \frac{1}{2} \left( 1 + s \tanh(\beta \sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{K}(k' - k) \eta_{k'} + \beta h) \right), \quad (4.1)$$

où  $\mathcal{K}(\cdot)$  est une fonction d'interaction entre les sites, *i.e.* entre les différents automates :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : \mathbb{Z}^d &\rightarrow \mathbb{R} \\ k &\mapsto \mathcal{K}(k) \end{aligned}$$

qui vérifie les conditions :

- $\mathcal{K}(\cdot)$  est une fonction paire ;
- $\mathcal{K}(\cdot)$  est une fonction à portée finie  $R > 0$ , c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d \text{ tel que } \|k\|_1 > R, \quad \mathcal{K}(k) = 0 ; \quad (4.2)$$

et où  $\beta$  est un paramètre réel strictement positif,  $h$  un réel quelconque.

La condition de parité requise pour  $\mathcal{K}(\cdot)$  trouvera sa justification dans la remarque 4.1.1. Soit  $k \in \mathbb{Z}^d$ . Compte tenu de la définition (2.44) de  $V_k$ , la condition (4.2) assure la localité de la dynamique PCA ainsi définie, et plus précisément, on a :

$$V_k = \{k' \in \mathbb{Z}^d : \mathcal{K}(k' - k) \neq 0\} . \quad (4.3)$$

Pour  $k \in \mathbb{Z}^d$  et  $\eta \in S^{\mathbb{Z}^d}$ , on note  $\mathcal{C}_k(\sigma)$  le **coefficient d'interaction** entre les sites de l'ensemble  $V_k$  :

$$\mathcal{C}_k(\eta) \triangleq \sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{K}(k' - k) \eta_{k'} + h = \mathcal{C}_k(\eta_{V_k}) \quad (4.4)$$

ce qui permet de reformuler (4.1) sous la forme :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \forall \eta \in S^{\mathbb{Z}^d}, \forall s \in S, \quad p_k(s \mid \eta) = \frac{1}{2} \left( 1 + s \tanh(\beta \mathcal{C}_k(\eta)) \right). \quad (4.5)$$

Cette forme (4.5) renvoie à la forme générale (1.6) annoncée au Chapitre 1 pour les règles locales d'évolution  $p_k$  quand  $\#S = 2$  :

$$\forall s \in S, \forall \eta \in S^{\mathbb{Z}^d}, \quad p_k(s \mid \eta) = \frac{1}{2} (1 + s h_k(\eta)),$$

pour laquelle la condition (1.5) de pure stochasticité est équivalente à  $|h_k(\cdot)| < 1$  (cf. 1.8). Ici cette condition est vérifiée puisqu'on a donc  $h_k(\eta) = \tanh(\beta \mathcal{C}_k(\eta))$ .

La forme (4.1) implique donc que les dynamiques parallèles de la classe  $\mathcal{C}$  ainsi définies sont **purement stochastiques** et **invariantes par translation**.

On précise en outre les liens de la classe  $\mathcal{C}$  avec les modèles généraux présentés à la section 3.5 grâce à la remarque suivante :

#### Remarque 4.1.1

Puisque  $s = \pm 1$ , on a :

$$p_k(s \mid \eta) = \frac{e^{s\beta\mathcal{C}_k(\eta)}}{2 \cosh(\beta\mathcal{C}_k(\eta))} \quad (4.6)$$

pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}^d$ , tout  $\eta$  de  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , et tout  $s$  de  $S$ .

En effet, l'égalité, pour les règles locales  $p_k$ , entre la forme (4.6) et la définition (4.1) se vérifie successivement pour  $s = -1$  et  $s = +1$ , en utilisant le fait que la fonction cosinus hyperbolique est une fonction paire.

La classe  $\mathcal{C}$  est alors en particulier une sous-classe de la classe des PCA réversibles introduits en (3.19) : toute dynamique parallèle  $P$  de  $\mathcal{C}$  est une dynamique parallèle  $\mathcal{D}(\phi)$  où  $\phi = (\phi_k, \phi_{k,j})$  est défini par :

$$\begin{cases} \phi_k(s) = \beta h s \\ \phi_{k,j}(s, s') = \beta \mathcal{K}(j - k) s s' \end{cases} \quad (4.7)$$

pour tout  $s, s'$  éléments de  $S$ , et vérifie (3.18).

#### Généralité de la classe $\mathcal{C}$

Précisons enfin que sur  $S = \{-1; +1\}$ , la classe  $\mathcal{C}$  décrit la quasi-totalité des dynamiques PCA réversibles. En effet, d'après le résultat de Kozlov rappelé à la page 46, on sait que toute dynamique PCA réversible est de la forme  $\mathcal{D}(\phi)$  où  $\phi = (\phi_k, \phi_{k,j})_{k,j}$ ,  $\phi_k$  étant définie sur  $S$  et  $\phi_{k,j}$  définie sur  $S \times S$ . Comme  $\#S = 2$ , toute fonction

$r_1$  définie sur  $S$  à valeurs réelles est définie par  $r_1(+1)$  et  $r_1(-1)$ . Ici en définissant  $\phi_k(s) = \beta h s$ , on impose uniquement en plus  $r_1(+1) = -r_1(-1)$ . D'autre part, toute fonction  $r_2$  définie sur  $S \times S$  est définie par la donnée de  $r_2(-1, -1)$ ,  $r_2(-1, +1)$ ,  $r_2(+1, -1)$ ,  $r_2(+1, +1)$ , ce qui signifie qu'elle s'écrit nécessairement sous la forme, pour tout  $(s, s') \in S \times S$  :

$$r_2(s, s') = a_1 s s' + a_2 s + a_3 s' + a_4 ,$$

où  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  sont des constantes réelles. Vu la normalisation de  $p_k$  en mesure de probabilité sur  $S$ , il apparaît que les termes ne dépendant pas de  $s$  entrent dans la constante de normalisation. Différents termes de la forme  $a_3 s' + a_4$  définissent donc la même règle locale d'évolution. On peut donc toujours se ramener, sans perte de généralité, à considérer  $a_3 = a_4 = 0$ . Toute fonction  $r$  sur  $S \times S$  utile à la définition d'une dynamique PCA réversible est donc de la forme

$$r_2(s, s') = s(a_1 s' + a_2) .$$

On choisit ici  $a_1$  de la forme  $\beta \mathcal{K}(\cdot)$  et  $a_2 = \beta h$ . La particularité de la classe  $\mathcal{C}$  se restreint alors au choix spécifique de l'interaction propre qui doit satisfaire

$$r_1(+1) = -r_1(-1) = a_2 .$$

On peut donc considérer que **la classe  $\mathcal{C}$  décrit, sur  $\{-1; +1\}^{\mathbb{Z}^d}$ , l'ensemble le plus général (à l'interaction propre près) de dynamiques PCA locales, purement stochastiques, réversibles, invariantes par translation.**

## Effet des paramètres

### Paramètre $\beta$ de température

Le paramètre  $\beta$  introduit dans la définition de la classe  $\mathcal{C}$  de dynamiques PCA permet d'en contrôler le degré d'aléatoire. Il apparaîtra plus clairement dans la Proposition 4.1.6 que ce paramètre  $\beta$  joue au sein du potentiel  $\varphi$  canoniquement associé à la dynamique PCA un rôle similaire à celui de l'inverse de la température dans le potentiel d'Ising. Heuristiquement, plus  $\beta$  sera grand, plus la dynamique PCA sera proche d'une dynamique déterministe, et plus  $\beta$  sera petit, plus la part d'aléatoire sera importante.

En effet, lorsque  $\beta = 0$ , on obtient  $p_k(s|\eta) = \frac{1}{2}$ , ce qui signifie une complète indépendance entre les automates sur  $\mathbb{Z}^d$  et également du point de vue temporel, indépendance entre l'état d'un automate à un instant et son état à l'instant précédent. Dans ce cas, à chaque instant strictement positif, l'état du système est représenté par  $\otimes_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{\delta_{-1} + \delta_{+1}}{2}$ .

De plus, lorsque  $\beta$  est proche de 0, le résultat de Lebowitz *et al.* rappelé au Chapitre 3 permet d'identifier le nombre de mesures invariantes par translation, stationnaires pour la dynamique PCA sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , avec le nombre de mesures de Gibbs de l'ensemble  $\mathcal{G}_i(\Phi)$  où (cf. formule (3.15)), pour  $\xi \in S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}}$  :

$$\begin{cases} \Phi_{\{(k,n)\} \cup (V_k, n-1)}(\xi) = -\ln p_k(\xi_k(n) \mid \xi_{V_k}(n-1)) , \\ \Phi_A(\xi) = 0 \text{ pour tout } A \Subset \mathbb{Z}^d, \text{ tel que } \nexists(k, n), A = \{(k, n)\} \cup (V_k, n-1) ; \end{cases}$$

soit ici, le potentiel  $\Phi$ , invariant par translation sur l'espace-temps  $S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}}$  :

$$\Phi_{\{(k,n)\} \cup (V_k, n-1)}(\xi) = -\beta \xi_k(n) \mathcal{C}_k(\xi_{V_k}(n-1)) + \ln \left( 2 \cosh \left( \beta \mathcal{C}_k(\xi_{V_k}(n-1)) \right) \right). \quad (4.8)$$

On sait, par exemple d'après la Proposition 8.8 *in* [Geo88], qu'une condition suffisante pour que le critère d'unicité de Dobrushin (cf. Théorème 8.7 *in* [Geo88]) soit satisfait est :

$$\sup_{(k,n) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}} \sum_{A \ni (k,n)} \left( (\#A) - 1 \right) \sup_{\xi, \xi' \in S^{\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}}} |\Phi_A(\xi) - \Phi_A(\xi')| < 2. \quad (4.9)$$

Ici, ce coefficient, membre de gauche de l'inégalité (4.9), est grossièrement majoré par

$$((\#V_k) + 1) (\#V_k) q(\mathcal{K}) \beta, \quad (4.10)$$

où  $q(\mathcal{K})$  ne dépend que de  $\max_{\eta_{V_0}} \left| \sum_{k' \in V_0} \mathcal{K}(k') \eta_{k'} \right|$ . Donc, lorsque  $\beta$  est suffisamment proche de 0, ce critère est vérifié, il y a unicité de la mesure de Gibbs associée à  $\Phi$ , et donc la dynamique PCA de la classe  $\mathcal{C}$  correspondant à ce paramètre  $\beta$  n'admet qu'une seule mesure stationnaire invariante par translation.

D'autre part, lorsque  $\beta$  est au voisinage de l'infini, la fonction  $\tanh(\cdot)$  prend des valeurs proches de  $-1$  ou  $+1$ , et donc  $p_k(s|\eta)$  prend des valeurs proches de 0 ou 1. Cela signifie que la dynamique PCA est alors proche de la dynamique d'automate cellulaire déterministe suivante :  $\forall \eta \in S^{\mathbb{Z}^d}$ ,

$$\begin{cases} p_k(+1|\eta) = 1 & \text{si } \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \eta_{k'} \geq 0 \\ & = 0 & \text{si } \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \eta_{k'} \leq 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

### Signe de la fonction d'interaction $\mathcal{K}(\cdot)$

La fonction  $\mathcal{K}(\cdot)$  définit pour les dynamiques PCA de la classe  $\mathcal{C}$  la dépendance en les valeurs à l'instant précédent des automates voisins. L'aspect important de ce paramètre consiste en les signes respectifs des différentes valeurs de  $\mathcal{K}(\cdot)$ . En particulier, lorsque tous les couplages  $\mathcal{K}(\cdot)$  sont positifs, la dynamique PCA est attractive (cf. sous-section 2.3.3 pour la définition), alors que s'ils sont tous négatifs, la dynamique est répulsive. C'est ce que démontre la proposition suivante :

#### Propriété 4.1.2 (CNS d'attractivité / répulsivité de la dynamique)

Soit  $P$  une dynamique PCA de la classe  $\mathcal{C}$ . Elle est attractive si et seulement si :

$$\mathcal{K}(\cdot) \geq 0. \quad (4.12)$$

Elle est par ailleurs répulsive si et seulement si :

$$\mathcal{K}(\cdot) \leq 0. \quad (4.13)$$

**Preuve :**

Attractivité

D'après la Proposition 2.3.6, l'attractivité est équivalente à montrer que pour tout couple  $(\sigma, \eta)$  tel que  $\sigma \preceq \eta$ , on a  $p_k(+1|\sigma) \leq p_k(+1|\eta)$ . Soient  $(\sigma, \eta)$  tels que  $\sigma \preceq \eta$ . En utilisant la forme (4.1) initiale de  $p_k$ , la condition  $p_k(+1|\sigma) \leq p_k(+1|\eta)$  est alors équivalente à  $\mathcal{C}_k(\sigma) \leq \mathcal{C}_k(\eta)$ . Il faut et suffit donc alors de montrer que, pour tout  $k$ , et pour tout couple  $\sigma \preceq \eta$ , on a :

$$\sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \sigma_{k'} \leq \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \eta_{k'} \quad (4.14)$$

Si l'on suppose (4.12), comme  $\sigma \preceq \eta$  signifie que pour tout site  $k'$  de  $\mathbb{Z}^d$   $\sigma_{k'} \leq \eta_{k'}$ , il est alors immédiat que (4.14) est vérifiée, d'où l'attractivité de la dynamique PCA.

Réciproquement, si la dynamique est supposée attractive, on sait alors que pour tout  $(\sigma, \eta)$  tel que  $\sigma \preceq \eta$ , (4.14) est vérifiée. Soit  $k \in \mathbb{Z}^d$ . Appliquons cela au voisinage de 0, à une configuration  $\sigma$  fixée telle que  $\sigma_k = -1$ , et prenons  $\eta = \sigma^k$  (cf. (2.11)), de telle sorte que  $\sigma \preceq \eta$ . (4.14) s'écrit alors :

$$\sum_{k' \in V_0, k' \neq k} \mathcal{K}(k') \sigma_{k'} + \mathcal{K}(k) \sigma_k \leq \sum_{k' \in V_0, k' \neq k} \mathcal{K}(k') \sigma_{k'}^k + \mathcal{K}(k) \sigma_k^k = \sum_{k' \in V_0, k' \neq k} \mathcal{K}(k') \sigma_{k'} - \mathcal{K}(k) \sigma_k$$

soit  $-\mathcal{K}(k) \leq \mathcal{K}(k)$ , donc  $\mathcal{K}(k) \geq 0$ . La nécessité de (4.12) est alors établie.

Répulsivité

D'après la définition 2.3.7, la dynamique  $P$  est dite répulsive si, pour tout couple de configurations  $(\sigma, \eta)$  tel que  $\sigma \preceq \eta$ , on a, pour tout  $k \in \mathbb{Z}^d$ ,  $p_k(+1|\eta) \leq p_k(+1|\sigma)$ . De manière analogue au cas précédent, si  $\mathcal{K}(\cdot) \leq 0$ ,  $\mathcal{C}_k(\eta) \leq \mathcal{C}_k(\sigma)$  pour  $\sigma \preceq \eta$ , d'où la condition de répulsivité. La réciproque se vérifie par le même raisonnement que précédemment, les inégalités étant retournées. ■

**Sous-classe  $\mathcal{C}_0$  :**

On définit également la classe  $\mathcal{C}_0$  comme la sous classe de  $\mathcal{C}$  telle que  $h = 0$ , soit l'ensemble des dynamiques PCA de règle locale d'évolution, pour  $s = \pm 1$  et  $\eta \in S^{\mathbb{Z}^d}$ ,

$$p_k(s|\eta) = \frac{1}{2} \left( 1 + s \tanh(\beta \sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{K}(k' - k) \eta_{k'}) \right) = \frac{e^{s\beta \sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{K}(k' - k) \eta_{k'}}}{2 \cosh(\beta \sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{K}(k' - k) \eta_{k'})} . \quad (4.15)$$

## 4.1.2 Mesures réversibles / de Gibbs à volume fini

Dans cette sous-section nous établissons, pour toute dynamique PCA de la classe  $\mathcal{C}$ , la forme explicite des mesures stationnaires  $\nu_\Lambda^\tau$  pour les dynamiques à volume fini  $P_\Lambda^\tau$  (Proposition 4.1.5) ainsi que la forme explicite des mesures de Gibbs  $\mu_\Lambda^\tau$  à volume fini associées au potentiel  $\varphi$  canoniquement obtenu grâce à la dynamique, et dont on donne la forme (Proposition 4.1.6). Un premier résultat (Proposition 4.1.8) permet de préciser le lien entre ces familles de mesures.

### Forme explicite des mesures réversibles

Précisons au préalable quelques définitions et résultats. Les deux lemmes à venir sont utiles pour la démonstration de la Proposition 4.1.5. On définit :

$$\partial_e \Lambda \triangleq \{k \in \Lambda^c : V_k \cap \Lambda \neq \emptyset\}, \quad (4.16)$$

ainsi que :

$$\partial_i \Lambda \triangleq \{k \in \Lambda : V_k \cap \Lambda^c \neq \emptyset\}. \quad (4.17)$$

On remarque que  $\partial_i \Lambda \subset \Lambda$  et que  $\Lambda \cup \partial_e \Lambda$  est une union disjointe. On énonce alors le lemme suivant, dont la preuve est immédiate :

#### Lemme 4.1.3

Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ . Puisque la fonction de couplage  $\mathcal{K}$  est paire, alors comme, pour tout  $k \in \mathbb{Z}^d$ ,  $V_k = \{k' \in \mathbb{Z}^d : \mathcal{K}(k' - k) \neq 0\}$  (cf. (4.3)), les voisinages  $(V_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  vérifient la propriété suivante :

$$\forall k, k' \in (\mathbb{Z}^d)^2, \quad k' \in V_k \iff k \in V_{k'}. \quad (4.18)$$

Il est également aisé de montrer que :

#### Lemme 4.1.4

Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  et soit  $\Lambda_2$  la partie finie de  $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$  associée définie par :

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= \{(k, k') \in (\mathbb{Z}^d)^2 : k \in \Lambda, k' \in V_k \subset \Lambda\} \\ &\cup_{\text{disjoint}} \{(k, k') \in (\mathbb{Z}^d)^2 : k \in \Lambda, V_k \cap \Lambda^c \neq \emptyset, k' \in V_k \cap \Lambda\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Elle vérifie :

$$\Lambda_2 = \{(k, k') \in \Lambda_2 : \mathcal{K}(k - k') \neq 0\} \quad (4.20)$$

En particulier,  $\Lambda_2$  est une partie symétrique, c'est à dire qu'elle vérifie :

$$(k, k') \in \Lambda_2 \iff (k', k) \in \Lambda_2. \quad (4.21)$$

On peut alors énoncer la propriété remarquable des dynamiques PCA de la classe  $\mathcal{C}$  : l'identification explicite des mesures stationnaires (car réversibles) à volume fini, dont l'existence est, de manière générale, assurée de manière non-constructive (cf. section 3.2).

#### Proposition 4.1.5 (Forme explicite des mesures réversibles à volume fini)

Soit, pour tout  $k \in \mathbb{Z}^d$ ,  $p_k$  défini par (4.1). Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ .

– Soit  $\tau \in S^{\mathbb{Z}^d}$  une condition au bord. La dynamique parallèle  $P_\Lambda^\tau$  à volume fini  $\Lambda$  et condition au bord  $\tau$  fixée (définie par :  $p_k(\cdot | \sigma_\Lambda \tau_{\Lambda^c})$ ,  $\forall k \in \Lambda$ ) admet comme unique mesure stationnaire la mesure de probabilité sur  $S^\Lambda$  notée  $\nu_\Lambda^\tau$  définie, pour tout  $\sigma_\Lambda \in S^\Lambda$ , par :

$$\nu_\Lambda^\tau(\sigma_\Lambda) = \frac{1}{\mathcal{W}_\Lambda^\tau} \prod_{k \in \Lambda} e^{\beta h \sigma_k} \cosh \left( \beta \sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{K}(k' - k) (\sigma_\Lambda \tau_{\Lambda^c})_{k'} + \beta h \right) e^{\beta \sigma_k \sum_{k' \in \Lambda^c} \mathcal{K}(k' - k) \tau_{k'}} \quad (4.22)$$

où  $\mathcal{W}_\Lambda^\tau$  est la constante de normalisation.



– La dynamique PCA à volume fini  $\Lambda$  et condition au bord périodique  $P_\Lambda^{per}$  admet comme unique mesure stationnaire la mesure de probabilité, notée  $\nu_\Lambda^{per}$ , définie par :

$$\nu_\Lambda^{per}(\sigma_\Lambda) = \frac{1}{\mathcal{W}_\Lambda^{per}} \prod_{k \in \Lambda} e^{\beta h \sigma_k} \cosh \left( \beta \sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{K}(k' - k) (\tilde{\sigma}_\Lambda)_{k'} + \beta h \right) \quad (4.23)$$

où  $\mathcal{W}_\Lambda^{per}$  est la constante de normalisation.

**Preuve :**

Cas de la condition au bord fixée

Soit  $\tau \in S^{\mathbb{Z}^d}$ . D'après la Définition 3.1.2, vérifier que  $(\nu_\Lambda^\tau, P_\Lambda^\tau)$  est une chaîne réversible signifie vérifier l'équation (3.2) ; c'est à dire que la quantité  $P_\Lambda^\tau(\sigma_\Lambda | \eta_\Lambda) \nu_\Lambda^\tau(\eta_\Lambda)$  est symétrique en  $(\sigma_\Lambda, \eta_\Lambda)$ . Par définition,  $P_\Lambda^\tau(\sigma_\Lambda | \eta_\Lambda) = \prod_{k \in \Lambda} p_k(\sigma_k | \eta_\Lambda \tau_{\Lambda^c})$ , et puisque les règles locales d'évolution sont également définies par (4.6), on a :

$$\begin{aligned} P_\Lambda^\tau(\sigma_\Lambda | \eta_\Lambda) \nu_\Lambda^\tau(\eta_\Lambda) = \\ \prod_{k \in \Lambda} \frac{e^{\sigma_k \beta \mathcal{C}_k(\eta_\Lambda \tau_{\Lambda^c})}}{2 \cosh(\beta \mathcal{C}_k(\eta_\Lambda \tau_{\Lambda^c}))} \frac{1}{\mathcal{W}_\Lambda^\tau} \prod_{k \in \Lambda} \cosh(\beta \mathcal{C}_k(\eta_\Lambda \tau_{\Lambda^c})) e^{\beta h \eta_k} \prod_{k \in \partial_i \Lambda} e^{\eta_k \beta \sum_{k' \notin \Lambda} \mathcal{K}(k' - k) \tau_{k'}} . \end{aligned} \quad (4.24)$$

En simplifiant l'écriture précédente, et en utilisant la définition (4.4) de  $\mathcal{C}_k(\cdot)$ , la réversibilité est équivalente à montrer que

$$\sum_{k \in \Lambda} \sum_{k' \in \tilde{V}_k} \mathcal{K}(k' - k) (\eta_\Lambda \tau_{\Lambda^c})_{k'} \sigma_k + \sum_{k \in \partial_i \Lambda} \sum_{k' \notin \Lambda} \mathcal{K}(k' - k) \eta_k \tau_{k'} + h \sum_{k \in \Lambda} (\eta_k + \sigma_k) \quad (4.25)$$

est symétrique en  $(\sigma, \eta)$ . La partie  $h \sum_{k \in \Lambda} (\eta_k + \sigma_k)$  étant clairement symétrique, il faut et il suffit alors de prouver la symétrie de

$$\sum_{k \in \Lambda} \sum_{k' \in \tilde{V}_k} \mathcal{K}(k' - k) (\eta_\Lambda \tau_{\Lambda^c})_{k'} \sigma_k + \sum_{k \in \partial_i \Lambda} \sum_{k' \notin \Lambda} \mathcal{K}(k' - k) \eta_k \tau_{k'} . \quad (4.26)$$

Afin de préciser le terme  $(\eta_\Lambda \tau_{\Lambda^c})_{k'}$ , on décompose (4.26) en :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \Lambda \setminus \partial_i \Lambda} \sum_{k' \in \tilde{V}_k} \mathcal{K}(k' - k) \eta_{k'} \sigma_k + \sum_{k \in \partial_i \Lambda} \sum_{k' \in \tilde{V}_k \cap \Lambda} \mathcal{K}(k' - k) \eta_{k'} \sigma_k + \\ \underbrace{\sum_{k \in \partial_i \Lambda} \sum_{k' \in \tilde{V}_k \cap \Lambda^c} \mathcal{K}(k' - k) \tau_{k'} \sigma_k}_{(I)} + \underbrace{\sum_{k \in \partial_i \Lambda} \sum_{k' \in \tilde{V}_k \cap \Lambda^c} \mathcal{K}(k' - k) \eta_k \tau_{k'}}_{(II)} . \end{aligned} \quad (4.27)$$

Puisque (I) + (II) se réécrit de manière symétrique en :

$$(I) + (II) = \sum_{k \in \partial_i \Lambda} \sum_{k' \in \tilde{V}_k \cap \Lambda^c} \mathcal{K}(k' - k) \tau_{k'} (\sigma_k + \eta_k) , \quad (4.28)$$

la réversibilité est alors équivalente à la symétrie en  $(\sigma, \eta)$  de la formule

$$\sum_{k \in \Lambda \setminus \partial_i \Lambda} \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \eta_{k'} \sigma_k + \sum_{k \in \partial_i \Lambda} \sum_{k' \in V_k \cap \Lambda} \mathcal{K}(k' - k) \eta_{k'} \sigma_k, \quad (4.29)$$

qui se réécrit encore, en utilisant la définition (4.19), sous la forme :

$$\sum_{(k, k') \in \Lambda_2} \mathcal{K}(k' - k) \eta_{k'} \sigma_k. \quad (4.30)$$

Compte tenu du Lemme 4.1.4, la partie  $\Lambda_2$  est symétrique (cf. (4.21)). En réalisant alors un changement d'indice, et en utilisant la parité de  $\mathcal{K}$ , on vérifie que (4.30) est symétrique en  $(\sigma, \eta)$ , ce qui permet de conclure quant à la réversibilité.

Cas de la condition au bord périodique

Comme précédemment, la réversibilité de la chaîne  $(\nu_\Lambda^{per}, P_\Lambda^{per})$  est équivalente à montrer que :

$$\sum_{k \in \Lambda} \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \tilde{\eta}_{k'} \sigma_k + h \sum_{k \in \Lambda} (\tilde{\eta}_k + \sigma_k) = \sum_{k \in \Lambda} \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \tilde{\sigma}_{k'} \eta_k + h \sum_{k \in \Lambda} (\tilde{\sigma}_k + \eta_k).$$

Le terme en facteur de  $h$  étant toujours linéaire, cette équation est équivalente à :

$$\sum_{k \in \Lambda} \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \tilde{\eta}_{k'} \sigma_k = \sum_{k \in \Lambda} \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \tilde{\sigma}_{k'} \eta_k. \quad (4.31)$$

En décomposant comme précédemment  $\{(k, k') : k \in \Lambda, k' \in V_k\}$  en différents sous-ensembles, on montre que (4.31) est équivalent à :

$$\begin{aligned} \sum_{(k, k') \in \Lambda_2} \mathcal{K}(k' - k) \eta_{k'} \sigma_k + \sum_{k \in \partial_i \Lambda} \sum_{k' \in V_k \cap \Lambda^c} \mathcal{K}(k' - k) \tilde{\eta}_{k'} \sigma_k = \\ \sum_{(k, k') \in \Lambda_2} \mathcal{K}(k' - k) \sigma_{k'} \eta_k + \sum_{k \in \partial_i \Lambda} \sum_{k' \in V_k \cap \Lambda^c} \mathcal{K}(k' - k) \tilde{\sigma}_{k'} \eta_k; \end{aligned} \quad (4.32)$$

et, puisque  $\Lambda_2$  symétrique et  $\mathcal{K}$  paire, encore équivalent à :

$$\sum_{k \in \partial_i \Lambda} \sum_{k' \in V_k \cap \Lambda^c} \mathcal{K}(k' - k) \tilde{\eta}_{k'} \tilde{\sigma}_k = \sum_{k \in \partial_i \Lambda} \sum_{k' \in V_k \cap \Lambda^c} \mathcal{K}(k' - k) \tilde{\sigma}_{k'} \tilde{\eta}_k. \quad (4.33)$$

On se convainc alors aisément de la véracité de (4.33) en utilisant les faits suivants :  $\mathcal{K}$  est paire, et la propriété (4.21) est vérifiée, donc, modulo l'action de la périodisation, on peut considérer tout couple  $(k, k')$  tel que  $k \in \partial_i \Lambda, k' \in V_k \cap \Lambda^c$  également comme  $k' \in \partial_i \Lambda, k \in V_{k'} \cap \Lambda^c$ . D'où la réversibilité. ■

### Potentiel gibbsien associé à la dynamique PCA et forme des mesures de Gibbs à volume fini associées à $\varphi$

D'après la Remarque 4.1.1 les dynamiques PCA de la classe  $\mathcal{C}$  sont des dynamiques du type  $\mathcal{D}(\phi)$ , définies par un ensemble de fonctions  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ , auquel est associé canoniquement, d'après (3.26), un potentiel  $\varphi$ . Grâce au Corollaire 3.5.2, l'étude de  $\mathcal{G}(\varphi)$

permet alors de préciser l'étude des états d'équilibre pour la dynamique PCA sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . La proposition suivante met en évidence la forme du potentiel  $\varphi$  ainsi canoniquement associé à une dynamique PCA de la classe  $\mathcal{C}$ .

**Proposition 4.1.6 (Forme explicite du potentiel canoniquement associé)**

Soit  $P$  une dynamique PCA de la classe  $\mathcal{C}$  définie par (4.1). Le potentiel  $\varphi$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  canoniquement associé à  $P$  s'écrit :

$$\begin{cases} \varphi_{\{k\}}(\sigma_k) &= -\beta h \sigma_k ; \\ \varphi_{V_k}(\sigma_{V_k}) &= -\ln \cosh \left( \beta \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \sigma_{k'} + \beta h \right) ; \\ \varphi_A(\sigma_A) &= 0 \text{ pour tous les autres ensembles } A. \end{cases} \quad (4.34)$$

La distribution de Gibbs à volume fini  $\Lambda$  et condition au bord  $\tau$  associée à  $\varphi$  s'écrit, pour tout  $\sigma_\Lambda \in S^\Lambda$  :

$$\mu_\Lambda^\tau(\sigma_\Lambda) = \frac{1}{Z_\Lambda^\tau} \prod_{k \in \Lambda \cup \partial_e \Lambda} \cosh \left( \beta \sum_{k'} \mathcal{K}(k' - k) (\sigma_\Lambda \tau_{\Lambda^c})_{k'} + \beta h \right) \prod_{k \in \Lambda} e^{\beta h \sigma_k} \quad (4.35)$$

où  $Z_\Lambda^\tau$  est la fonction de partition normalisant  $\mu_\Lambda^\tau$  en une mesure de probabilité sur  $S^\Lambda$ . Avec la condition au bord périodique, la distribution gibbsienne à volume fini  $\Lambda$  associée à  $\varphi$  s'écrit :

$$\mu_\Lambda^{per}(\sigma_\Lambda) = \frac{1}{Z_\Lambda^{per}} \prod_{k \in \Lambda} e^{\beta h \sigma_k} \cosh \left( \beta \sum_{k'} \mathcal{K}(k' - k) (\tilde{\sigma}_\Lambda)_{k'} + \beta h \right). \quad (4.36)$$

En particulier, on a :  $\mu_\Lambda^{per} = \nu_\Lambda^{per}$ .

On remarque que, lorsque  $h = 0$ , les dynamiques PCA de la classe  $\mathcal{C}_0$  sont alors plus précisément canoniquement associées au potentiel :

$$\begin{cases} \varphi_{V_k}(\sigma_{V_k}) &= -\ln \cosh \left( \beta \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \sigma_{k'} \right) ; \\ \varphi_A(\sigma_A) &= 0 \text{ pour tous les autres ensembles } A. \end{cases} \quad (4.37)$$

**Preuve :**

D'après la remarque 4.1.1, la forme (4.1) des règles locales définit une dynamique parallèle  $\mathcal{D}(\phi)$  où le bi-potentiel  $\phi$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}}$  est défini par (4.7). Compte tenu de la formulation générique (3.26), le potentiel  $\varphi$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  canoniquement associé à  $P$  s'écrit sous la forme (4.34).

La définition générale de la distribution de Gibbs associée à un potentiel  $\varphi$  sur un volume fini avec condition au bord  $\tau$  ou condition au bord périodique (cf. sous-section 2.2.2, en particulier (2.19) et (2.27)) nous fournit alors les formes (4.35) et (4.36). Enfin, vu les formes (4.23) et (4.36) définissant respectivement les mesures  $\nu_\Lambda^{per}$  et  $\mu_\Lambda^{per}$ , mesures de probabilités sur  $S^\Lambda$ , on a que  $\mu_\Lambda^{per} = \nu_\Lambda^{per}$ . ■

On attire l'attention sur le fait que le potentiel  $(\varphi_A)_{A \subset \mathbb{Z}^d}$  défini en (4.34) est invariant par translation. On remarque que la forme explicite de  $\mu_\Lambda^\tau$  fait intervenir  $k \in \Lambda \cup \partial_e \Lambda$ , ensemble de sites qui coïncide, lorsque  $k \in V_k$ , avec l'ensemble  $\bar{\Lambda}$  défini par (2.52).

Par ailleurs, c'est un **potentiel multi-corps** ; plus précisément, à la différence du potentiel d'Ising (cf. (2.17)), le potentiel  $\varphi$  ne pondère pas uniquement des couples de sites. Nous verrons par exemple que même lorsque  $\mathcal{K}$  est de portée 1,  $2d$  à  $2d + 1$  sites interagissent entre eux, sans que cette interaction puisse être décomposée uniquement en interactions par couples de sites. Ce potentiel est donc nettement plus complexe que le potentiel d'Ising usuel.

Remarquons ici, et cela sera utile par la suite, que **le changement de  $\mathcal{K}(\cdot)$  en  $-\mathcal{K}(\cdot)$  laisse  $\varphi$  inchangé**. Cependant, nous savons aussi déjà qu'une telle manipulation sur la fonction  $\mathcal{K}(\cdot)$  modifie le comportement de la dynamique (cf. Propriété 4.1.2).

Enfin, l'exemple suivant témoigne également de la complexité d'un tel potentiel puisqu'il n'est pas ferromagnétique (cf. sous-section 2.2.3), et que l'on ne peut donc envisager de le comparer stochastiquement de manière générale à un potentiel qui serait un potentiel par paires usuel.

### Exemple 4.1.7

Dans la référence [BCLS99], il est établi que dans le cas particulier de la dimension  $d = 2$ , lorsque  $h = 0$ ,  $\mathcal{K}(0) = 0$  et  $\mathcal{K}(e_1) = \mathcal{K}(e_2) = K$ , l'interaction est à 4 corps et l'on a :

$$\varphi_{V_k}(\sigma) = -J_0 - J_2 \sum_{(k,k') \in \Lambda_2} \sigma_k \sigma_{k'} - J_4 \prod_{k' \in V_k} \sigma_{k'} , \quad (4.38)$$

où, pour tout  $\beta > 0$  et  $K \in \mathbb{R}$ ,

$$J_0 = \frac{1}{8} \ln (\cosh(4\beta K) \cosh^4(2\beta K)) \geq 0,$$

$$J_2 = \frac{1}{8} \ln (\cosh(4\beta K)) \geq 0,$$

$$J_4 = \frac{1}{8} \ln \left( \frac{\cosh(4\beta K)}{\cosh^4(2\beta K)} \right) \leq 0 .$$

Précisons que bien que cet exemple atteste du fait que  $\varphi$  n'est pas un potentiel ferromagnétique, nous réussissons cependant à établir dans la sous-section 4.1.3 à venir, sous certaines conditions pour  $\mathcal{K}$ , que les mesures de Gibbs associées sont monotones.

### Comparaison des mesures réversibles/de Gibbs à volume fini

En considérant attentivement la forme donnée en (4.22) des mesures réversibles  $\nu_\Lambda^\tau$ , et en la comparant à la forme des mesures de Gibbs  $\mu_\Lambda^\tau$  donnée par (4.35), il apparaît que les mesures  $\nu_\Lambda^\tau$  sont exactement les mesures  $\mu_\Lambda^\tau$  auxquelles on ajoute un effet de bord. La proposition suivante confirme cette intuition. Elle établit de plus le fait que la famille de mesures  $(\nu_\Lambda^\tau)_{\Lambda \in \mathbb{Z}^d}$  n'est pas une famille compatible, au sens où elle ne vérifie pas la relation (2.23), et ne peut donc être une famille de mesures de Gibbs à volume fini pour un quelconque potentiel.

### Proposition 4.1.8 (Comparaison mesures réversibles/ de Gibbs)

Soient  $\Lambda, \Lambda'$  deux parties finies de  $\mathbb{Z}^d$ , telles que  $\Lambda \subset \Lambda'$  et  $\partial_i \Lambda \cap \partial_i \Lambda' = \emptyset$ . Soit  $\tau$  une condition au bord de  $\Lambda'$  :  $\tau \in S^{\Lambda'^c}$ . On a alors :

$$\nu_{\Lambda'}^\tau(\sigma_\Lambda | \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda}) = \mu_\Lambda^{\sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} \tau_{\Lambda'^c}}(\sigma_\Lambda) . \quad (4.39)$$

En particulier, pour  $\Lambda = \{k\} \subset \Lambda'$  tel que  $k \notin \partial_i \Lambda'$ , on obtient, pour tout  $\sigma_k \in S$  :

$$\nu_{\Lambda'}^{\tau}(\sigma_k | \sigma_{\Lambda' \setminus k}) = \mu_{\{k\}}^{\sigma_{\Lambda' \setminus k} \tau_{\Lambda'^c}}(\sigma_k) . \quad (4.40)$$

D'autre part, pour  $k \in \partial_i \Lambda'$  fixé, on a, pour tout  $\sigma_k \in S$  :

$$\nu_{\Lambda'}^{\tau}(\sigma_k | \sigma_{\Lambda' \setminus k}) = \frac{1}{\widetilde{\mathcal{W}}_{\Lambda', k}^{\tau, \sigma_{\Lambda' \setminus k}}} e^{\beta h \sigma_k} \prod_{k' \in V_k \cap \Lambda'} \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}(\sigma_k \sigma_{\Lambda' \setminus k} \tau_{\Lambda'^c})) e^{\beta \sigma_k \sum_{j \in V_k \cap \Lambda'^c} \mathcal{K}(j-k) \tau_j} , \quad (4.41)$$

(où  $\widetilde{\mathcal{W}}_{\Lambda', k}^{\tau, \sigma_{\Lambda' \setminus k}}$  est la constante de normalisation) alors que :

$$\mu_{\Lambda'}^{\tau}(\sigma_k | \sigma_{\Lambda' \setminus k}) = \mu_{\{k\}}^{\sigma_{\Lambda' \setminus k} \tau_{\Lambda'^c}}(\sigma_k) = \frac{1}{\mathcal{Z}_{\{k\}}^{\sigma_{\Lambda' \setminus k} \tau_{\Lambda'^c}}} e^{\beta h \sigma_k} \prod_{k' \in V_k} \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}(\sigma_k \sigma_{\Lambda' \setminus k} \tau_{\Lambda'^c})) . \quad (4.42)$$

**Preuve :**

Par définition, on a :

$$\nu_{\Lambda'}^{\tau}(\sigma_{\Lambda} | \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda}) = \frac{\nu_{\Lambda'}^{\tau}(\sigma_{\Lambda} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda})}{\sum_{\eta_{\Lambda}} \nu_{\Lambda'}^{\tau}(\eta_{\Lambda} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda})} .$$

Par ailleurs, compte tenu de la définition (4.22) de  $\nu_{\Lambda'}^{\tau}$  :

$$\begin{aligned} \nu_{\Lambda'}^{\tau}(\sigma_{\Lambda} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda}) &= \\ &= \frac{1}{\mathcal{W}_{\Lambda'}^{\tau}} \prod_{k_1 \in \Lambda \cup \partial_e \Lambda} \cosh(\beta \mathcal{C}_{k_1}(\sigma_{\Lambda} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} \tau_{\Lambda'^c})) \prod_{k_2 \in \Lambda' \setminus (\Lambda \cup \partial_e \Lambda)} \cosh(\beta \mathcal{C}_{k_2}(\sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} \tau_{\Lambda'^c})) \\ &\quad \prod_{k_3 \in \Lambda} e^{\beta h \sigma_{k_3}} \prod_{k_4 \in \Lambda' \setminus \Lambda} e^{\beta h \sigma_{k_4}} \prod_{k_5 \in \partial_i \Lambda'} e^{\beta \sigma_{k_5} \sum_{j \in \Lambda'^c} \mathcal{K}(k-j) \tau_j} . \end{aligned}$$

On remarque alors que, dans l'écriture de  $\nu_{\Lambda'}^{\tau}(\sigma_{\Lambda} | \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda})$ , seule la quantité :

$$\prod_{k_1 \in \Lambda \cup \partial_e \Lambda} \cosh(\beta \mathcal{C}_{k_1}(\sigma_{\Lambda} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} \tau_{\Lambda'^c})) \prod_{k_3 \in \Lambda} e^{\beta h \sigma_{k_3}}$$

fait intervenir les valeurs de  $\sigma_{\Lambda}$ . On peut alors écrire :

$$\nu_{\Lambda'}^{\tau}(\sigma_{\Lambda} | \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda}) = \Upsilon(\Lambda, \Lambda', \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda}, \tau) \prod_{k_1 \in \Lambda \cup \partial_e \Lambda} \cosh(\beta \mathcal{C}_{k_1}(\sigma_{\Lambda} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} \tau_{\Lambda'^c})) \prod_{k_3 \in \Lambda} e^{\beta h \sigma_{k_3}}$$

où  $\Upsilon(\Lambda, \Lambda', \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda}, \tau)$  désigne le produit des autres termes ne dépendant pas de  $\sigma_{\Lambda}$ . Or, on sait par ailleurs (cf. (4.35)) que :

$$\mu_{\Lambda}^{\sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} \tau_{\Lambda'^c}}(\sigma_{\Lambda}) = \frac{1}{\mathcal{Z}_{\Lambda}^{\sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} \tau_{\Lambda'^c}}} \prod_{k_1 \in \Lambda \cup \partial_e \Lambda} \cosh(\beta \mathcal{C}_{k_1}(\sigma_{\Lambda} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} \tau_{\Lambda'^c})) \prod_{k_3 \in \Lambda} e^{\beta h \sigma_{k_3}}$$

et comme  $\nu_{\Lambda'}^{\tau}(\sigma_{\Lambda}|\sigma_{\Lambda'\setminus\Lambda})$  et  $\mu_{\Lambda}^{\sigma_{\Lambda'\setminus\Lambda}\tau_{\Lambda'c}}$  sont des mesures de probabilité sur  $S^{\Lambda}$ , alors :

$$\Upsilon(\Lambda, \Lambda', \sigma_{\Lambda'\setminus\Lambda}, \tau) = \frac{1}{Z_{\Lambda}^{\tau\sigma_{\Lambda'\setminus\Lambda}}}$$

d'où le résultat.

Enfin, (4.41) s'obtient par un calcul analogue au précédent d'une version de la probabilité conditionnelle, et (4.42) s'obtient en utilisant la forme explicite du potentiel  $\varphi$  et le fait qu'il s'agit d'une mesure de Gibbs. ■

### 4.1.3 Cas monotone

On désigne par cas monotone le cas où toutes les interactions  $\mathcal{K}(\cdot)$  entre les sites sont de même signe, c'est à dire lorsque l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathcal{K}(k) \geq 0, \quad (4.43)$$

ou bien

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathcal{K}(k) \leq 0. \quad (4.44)$$

En effet, nous établissons que dans ces cas, bien que le potentiel ne soit pas nécessairement ferromagnétique, les mesures de Gibbs associées sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  sont quand même monotones (cf. exemple 4.1.7).

Compte tenu de l'invariance déjà remarquée de  $\varphi$  par le changement de  $\mathcal{K}(\cdot)$  en  $-\mathcal{K}(\cdot)$ , il est évident que la Proposition 4.1.9 concernant les mesures de Gibbs  $\mu_{\Lambda}^{\tau}$  sera valable sous l'une ou l'autre des conditions (4.43) ou (4.44).

Cependant, les mesures  $\nu_{\Lambda}^{\tau}$  diffèrent des mesures  $\mu_{\Lambda}^{\tau}$  par des termes de bord, de telle sorte que les mesures  $\nu_{\Lambda}^{\tau}$  ne sont pas, elles, invariantes par le changement  $\mathcal{K}(\cdot) \mapsto -\mathcal{K}(\cdot)$ . Cette remarque est cohérente avec la Propriété 4.1.2, où il a été établi que le signe de la fonction de couplage  $\mathcal{K}$  revêt une grande importance pour le comportement général de la dynamique PCA.

On appelle donc plus précisément « cas monotone », le cas où (4.43) ou bien (4.44) est vérifiée (et pour lequel la dynamique PCA peut donc être attractive ou répulsive); et « **cas attractif** » le cas où seul (4.43) est supposé vraie (cas où la dynamique PCA est attractive).

### Monotonie des mesures

Nous établissons deux résultats de monotonie en la condition au bord  $\tau$  des mesures à volume fini, l'un concernant les mesures de Gibbs  $\mu_{\Lambda}^{\tau}$  et l'autre concernant les mesures réversibles  $\nu_{\Lambda}^{\tau}$ . Ces deux résultats se fondent sur le Lemme 4.1.10.

#### Proposition 4.1.9 (monotonie des mesures de Gibbs)

*Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  et soit  $\tau$  une configuration au bord. Si l'on suppose que la condition (4.43) ou bien (4.44) est vérifiée, alors la mesure de Gibbs à volume fini  $\mu_{\Lambda}^{\tau}$  vérifie, pour deux configurations au bord  $\tau_1$  et  $\tau_2$  telles que  $\tau_1 \preceq \tau_2$  :*

$$\mu_{\Lambda}^{\tau_1} \preceq \mu_{\Lambda}^{\tau_2}. \quad (4.45)$$

On a également :

$$\mu_{\Lambda}^{-} \preceq \mu_{\Lambda}^{per} \preceq \mu_{\Lambda}^{+} . \quad (4.46)$$

En particulier, (4.45) signifie que toute mesure de Gibbs associée à  $\varphi$  est monotone et que

$$\forall \mu \in \mathcal{G}(\varphi), \quad \mu^{-} \preceq \mu \preceq \mu^{+} . \quad (4.47)$$

**Preuve :**

Soit  $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ . Soient  $\tau_1, \tau_2$  deux configurations de  $S^{\Lambda^c}$  telles que  $\tau_1 \preceq \tau_2$ . On souhaite prouver que  $\mu_{\Lambda}^{\tau_1} \preceq \mu_{\Lambda}^{\tau_2}$ . Afin de prouver cette inégalité entre deux mesures, on va utiliser un critère suffisant établi à l'origine par Holley ([Hol74]). On l'utilise ici sous une forme un peu plus forte due à Häggström (cf. Théorème 3.2 de [Häg98]).

**Théorème (Holley 1974, Häggström 1998)**

Soit  $\Lambda$  une partie finie de  $\mathbb{Z}^d$ . Soient  $\mu, \mu'$  deux mesures de probabilité sur  $S^{\Lambda}$  ( $S = \{-1, +1\}$ ) qui donnent un poids strictement positif à tous les éléments de  $S^{\Lambda}$ . Une condition suffisante pour avoir  $\mu \preceq \mu'$  est :

$$\forall k \in \Lambda, \forall \sigma, \sigma' \in S^{\mathbb{Z}^d}, \sigma_{\Lambda \setminus k} \preceq \sigma'_{\Lambda \setminus k} \Rightarrow \mu(+1|\sigma_{\Lambda \setminus k}) \leq \mu'(+1|\sigma'_{\Lambda \setminus k}) \quad (4.48)$$

◆

Il suffit donc de montrer que, pour tout  $k \in \Lambda$ , pour tout couple  $\sigma, \sigma'$  de configurations de  $S^{\Lambda \setminus \{k\}}$  telles que  $\sigma_{\Lambda \setminus k} \preceq \sigma'_{\Lambda \setminus k}$ , on a :

$$\mu_{\Lambda}^{\tau_1}((+1)_k|\sigma_{\Lambda \setminus k}) \leq \mu_{\Lambda}^{\tau_2}((+1)_k|\sigma'_{\Lambda \setminus k}) . \quad (4.49)$$

Soient ainsi  $k \in \mathbb{Z}^d$  fixé, et  $\sigma, \sigma'$  deux configurations de  $S^{\Lambda \setminus \{k\}}$  telles que  $\sigma_{\Lambda \setminus k} \preceq \sigma'_{\Lambda \setminus k}$ . S'agissant de mesures de Gibbs, la propriété fondamentale (2.23) permet de réécrire (4.49) sous la forme :

$$\mu_{\{k\}}^{\tau_1 \sigma_{\Lambda \setminus k}}((+1)_k) \leq \mu_{\{k\}}^{\tau_2 \sigma'_{\Lambda \setminus k}}((+1)_k) . \quad (4.50)$$

On vérifie que  $\{k\} \cup \partial_e \{k\} = \{k\} \cup V_k$ . Compte tenu de la forme (4.35) des mesures de Gibbs, on explicite alors (4.50) :

$$\begin{aligned} & \frac{\prod_{k' \in \{k\} \cup V_k} \cosh(\beta C_{k'}((+1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k} \tau_{\Lambda^c}^1)) e^{\beta h}}{\sum_{s=\pm 1} \prod_{k' \in \{k\} \cup V_k} \cosh(\beta C_{k'}((s)_k \sigma_{\Lambda \setminus k} \tau_{\Lambda^c}^1)) e^{\beta h s}} \\ & \leq \frac{\prod_{k' \in \{k\} \cup V_k} \cosh(\beta C_{k'}((+1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} \tau_{\Lambda^c}^2)) e^{\beta h}}{\sum_{s=\pm 1} \prod_{k' \in \{k\} \cup V_k} \cosh(\beta C_{k'}((s)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} \tau_{\Lambda^c}^2)) e^{\beta h s}} . \quad (4.51) \end{aligned}$$

De la forme  $\frac{p_1}{p_1+q_1} \leq \frac{p_2}{p_2+q_2}$  (où  $(p_1, q_1, p_2, q_2)$  sont des réels), l'inégalité (4.51) est alors équivalente à :

$$\begin{aligned} & \prod_{k' \in \{k\} \cup V_k} \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}((+1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k} \tau_{\Lambda^c}^1)) e^{\beta h} \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}((-1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} \tau_{\Lambda^c}^2)) e^{-\beta h} \\ & \leq \prod_{k' \in \{k\} \cup V_k} \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}((+1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} \tau_{\Lambda^c}^2)) e^{\beta h} \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}((-1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k} \tau_{\Lambda^c}^1)) e^{-\beta h} . \end{aligned} \quad (4.52)$$

Les termes en  $e^{\pm\beta h}$  se simplifiant, on en conclut qu'il suffit d'avoir, pour tout  $k' \in \{k\} \cup V_k$ , l'inégalité :

$$\begin{aligned} & \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}((+1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k} \tau_{\Lambda^c}^1)) \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}((-1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} \tau_{\Lambda^c}^2)) \\ & \leq \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}((+1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} \tau_{\Lambda^c}^2)) \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}((-1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k} \tau_{\Lambda^c}^1)) , \end{aligned} \quad (4.53)$$

pour démontrer (4.45). Le Lemme 4.1.10 nous assure alors cette conclusion, puisque  $\sigma_{\Lambda \setminus k} \tau_{\Lambda^c}^1 \preceq \sigma'_{\Lambda \setminus k} \tau_{\Lambda^c}^2$ , et que l'on a supposé (4.43) ou (4.44).

#### Cas de la condition au bord périodique

Comme précédemment, afin d'établir  $\mu_{\Lambda}^{per} \preceq \mu_{\Lambda}^+$ , il suffit de montrer que, pour tout  $k \in \Lambda$ , pour tout couple de configurations  $\sigma_{\Lambda \setminus k} \preceq \sigma'_{\Lambda \setminus k}$ , on a

$$\mu_{\Lambda}^{per}((+1)_k | \sigma_{\Lambda \setminus k}) \leq \mu_{\Lambda}^+((+1)_k | \sigma'_{\Lambda \setminus k}) .$$

Il suffit ensuite pour cela de prouver que, pour tout  $k' \in V_k$  :

$$\begin{aligned} & \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}(((+1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k})^{per})) \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}((-1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} (+1)_{\Lambda^c})) \\ & \leq \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}((+1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} (+1)_{\Lambda^c})) \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}((-1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k}^{per})) , \end{aligned} \quad (4.54)$$

ce que nous affirme le Lemme 4.1.10 puisque  $(\sigma_{\Lambda \setminus k})^{per} \preceq \sigma'_{\Lambda \setminus k} (+1)_{\Lambda^c}$ .

De manière symétrique, puisque  $\sigma_{\Lambda \setminus k} (-1)_{\Lambda^c} \preceq (\sigma'_{\Lambda \setminus k})^{per}$ , on vérifie que  $\mu_{\Lambda}^- \preceq \mu_{\Lambda}^{per}$ . ■

Établissons maintenant :

#### Lemme 4.1.10

On suppose que (4.43) ou bien (4.44) est vraie. Soit  $k \in \mathbb{Z}^d$  fixé. Soient deux configurations  $\sigma_{\{k\}^c}, \sigma'_{\{k\}^c}$  sur  $S^{\{k\}^c}$  telles que  $\sigma_{\{k\}^c} \preceq \sigma'_{\{k\}^c}$ , et notées respectivement  $\sigma_{k^c}$  et  $\sigma'_{k^c}$ . Pour tout  $k' \in \{k\} \cup V_k$ , l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}((+1)_k \sigma_{k^c})) \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}((-1)_k \sigma'_{k^c})) \\ & \leq \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}((-1)_k \sigma_{k^c})) \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}((+1)_k \sigma'_{k^c})) . \end{aligned} \quad (4.55)$$

#### Preuve :

Calculons dans un premier temps :

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}_{k'}((+1)_k \sigma_{k^c}) + \mathcal{C}_{k'}((-1)_k \sigma'_{k^c}) \\ & = \sum_{j \in V_{k'}, j \neq k} \mathcal{K}(j - k') \sigma_j + \mathcal{K}(k - k') + h + \sum_{j \in V_{k'}, j \neq k} \mathcal{K}(j - k') \sigma'_j - \mathcal{K}(k - k') + h \\ & = \sum_{j \in V_{k'}, j \neq k} \mathcal{K}(j - k') (\sigma_j + \sigma'_j) + 2h . \end{aligned}$$



Ainsi, on a :

$$\mathcal{C}_{k'}((+1)_k \sigma_{k^c}) + \mathcal{C}_{k'}((-1)_k \sigma'_{k^c}) = \mathcal{C}_{k'}((+1)_k \sigma'_{k^c}) + \mathcal{C}_{k'}((-1)_k \sigma_{k^c}). \quad (4.56)$$

En utilisant ce résultat, conjointement à la formule classique

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \cosh(a) \cosh(b) = \frac{1}{2} \left( \cosh(a+b) + \cosh(a-b) \right), \quad (4.57)$$

on obtient que (4.55) est équivalente à

$$\begin{aligned} \cosh \left( \beta (\mathcal{C}_{k'}((+1)_k \sigma_{k^c}) - \mathcal{C}_{k'}((-1)_k \sigma'_{k^c})) \right) \\ \leq \cosh \left( \beta (\mathcal{C}_{k'}((+1)_k \sigma'_{k^c}) - \mathcal{C}_{k'}((-1)_k \sigma_{k^c})) \right), \end{aligned} \quad (4.58)$$

soit encore équivalente à

$$\left| \mathcal{C}_{k'}((+1)_k \sigma_{k^c}) - \mathcal{C}_{k'}((-1)_k \sigma'_{k^c}) \right| \leq \left| \mathcal{C}_{k'}((+1)_k \sigma'_{k^c}) - \mathcal{C}_{k'}((-1)_k \sigma_{k^c}) \right|. \quad (4.59)$$

En développant  $\mathcal{C}_{k'}(\cdot)$ , on obtient que (4.55) est équivalente à

$$\begin{aligned} \left| 2\mathcal{K}(k-k') + \sum_{j \in V_{k'}, j \neq k} \mathcal{K}(j-k')(\sigma_j - \sigma'_j) \right| \\ \leq \left| 2\mathcal{K}(k-k') + \sum_{j \in V_{k'}, j \neq k} \mathcal{K}(j-k')(\sigma'_j - \sigma_j) \right| \end{aligned} \quad (4.60)$$

c'est à dire à une inégalité du type

$$|x - y| \leq |x + y| \quad (4.61)$$

où  $x = 2\mathcal{K}(k-k')$  et  $y = \sum_{j \in V_{k'}, j \neq k} \mathcal{K}(j-k')(\sigma'_j - \sigma_j)$ .

Comme  $\sigma \preceq \sigma'$ , on rappelle que l'on a, pour tout  $j \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\sigma_j \leq \sigma'_j$ . On en conclut alors le résultat, puisque :

- si  $\forall k \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\mathcal{K}(k) \geq 0$ , alors  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ , et donc (4.61) est vraie.
- si  $\forall k \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\mathcal{K}(k) \leq 0$ , alors  $x \leq 0$  et  $y \leq 0$ , et (4.61) est également vraie.

■

De manière analogue à la Proposition précédente, on a :

**Proposition 4.1.11 (monotonie des mesures réversibles)**

Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  et soit  $\tau$  une configuration au bord. Si l'on suppose que la condition (4.43) ( $\mathcal{K}(\cdot) \geq 0$ ) est vérifiée, alors la mesure stationnaire à volume fini  $\nu_\Lambda^\tau$  vérifie, pour deux configurations au bord  $\tau^1$  et  $\tau^2$  telles que  $\tau^1 \preceq \tau^2$  :

$$\nu_\Lambda^{\tau^1} \preceq \nu_\Lambda^{\tau^2}. \quad (4.62)$$

**Preuve :**

Soient  $k \in \mathbb{Z}^d$  fixé, et  $\sigma, \sigma'$  deux configurations de  $S^{\Lambda \setminus \{k\}}$  telles que  $\sigma_{\Lambda \setminus k} \preceq \sigma'_{\Lambda \setminus k}$ . Comme précédemment, compte tenu du critère suffisant de Holley-Häggström, il suffit de montrer que,

$$\nu_{\Lambda}^{\tau^1}((+1)_k | \sigma_{\Lambda \setminus k}) \leq \nu_{\Lambda}^{\tau^2}((+1)_k | \sigma'_{\Lambda \setminus k}). \quad (4.63)$$

Considérons deux situations :  $k \in \Lambda \setminus \partial_i \Lambda$  et  $k \in \partial_i \Lambda$ .

– Si  $k \in \Lambda \setminus \partial_i \Lambda$ , alors, d'après (4.40), (4.63) se réécrit :

$$\mu_{\{k\}}^{\tau^1 \sigma_{\Lambda \setminus k}}((+1)_k) \leq \mu_{\{k\}}^{\tau^2 \sigma'_{\Lambda \setminus k}}((+1)_k),$$

ce qui, sous l'hypothèse (4.43), nous est assuré par la Proposition 4.1.9.

– Si  $k \in \partial_i \Lambda$ , d'après la formule explicite (4.41), (4.63) se réécrit sous une forme équivalente :

$$\begin{aligned} & e^{\beta h} \prod_{k' \in V_k \cap \Lambda} \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}((+1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k} \tau_{\Lambda^c}^1)) e^{+\beta \sum_{j \in V_k \cap \Lambda^c} \mathcal{K}(j-k) \tau_j^1} \\ & e^{-\beta h} \prod_{k' \in V_k \cap \Lambda} \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}((-1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} \tau_{\Lambda^c}^2)) e^{-\beta \sum_{j \in V_k \cap \Lambda^c} \mathcal{K}(j-k) \tau_j^2} \\ & \leq e^{\beta h} \prod_{k' \in V_k \cap \Lambda} \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}((+1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} \tau_{\Lambda^c}^2)) e^{+\beta \sum_{j \in V_k \cap \Lambda^c} \mathcal{K}(j-k) \tau_j^2} \\ & e^{-\beta h} \prod_{k' \in V_k \cap \Lambda} \cosh(\beta \mathcal{C}_{k'}((-1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k} \tau_{\Lambda^c}^1)) e^{-\beta \sum_{j \in V_k \cap \Lambda^c} \mathcal{K}(j-k) \tau_j^1}. \quad (4.64) \end{aligned}$$

Compte tenu du Lemme 4.1.10, il suffit alors d'avoir

$$\sum_{j \in V_k \cap \Lambda^c} \mathcal{K}(j-k) \tau_j^1 \leq \sum_{j \in V_k \cap \Lambda^c} \mathcal{K}(j-k) \tau_j^2 \quad (4.65)$$

pour conclure à la validité de (4.64). Or on a supposé que  $\mathcal{K}(\cdot) \geq 0$  et que  $\tau^1 \preceq \tau^2$ , donc cette dernière inégalité est vérifiée, nous assurant alors du résultat recherché.

■

Précisons ici que la Proposition 6.2.1 au Chapitre 6 établira le même résultat pour une dynamique PCA attractive quelconque sur  $\{-1; +1\}^{\mathbb{Z}^d}$ , non nécessairement réversible. La preuve de la Proposition 4.1.11 est uniquement statique, et repose sur la forme explicite des mesures réversibles  $\nu_{\Lambda}^{\tau}$  pour les dynamiques PCA de la classe  $\mathcal{C}$ , alors que la preuve de la Proposition 6.2.1 utilisera uniquement les propriétés de la dynamique et l'existence et les propriétés du couplage qui sera développé au Chapitre 5.

### Raffinement de la comparaison des mesures réversibles à volume fini avec les mesures de Gibbs dans le cas attractif

Dans cette partie, nous nous situons uniquement dans le cas attractif. Principalement, nous établissons le Corollaire 4.1.14 qui sera utilisé dans la suite de ce chapitre et la Propriété 4.1.16 qui permet d'encadrer la projection de toute mesure de Gibbs de  $\mathcal{G}(\varphi)$  sur un volume fini  $\Lambda$  entre les mesures réversibles à volume fini  $\Lambda$ ,  $\nu_{\Lambda}^{-}$  et  $\nu_{\Lambda}^{+}$ , extrémales au sens de l'ordre stochastique. Du point de vue des simulations numériques, cet encadrement sera également utile.

Les propriétés 4.1.12 et 4.1.15 sont des résultats intermédiaires.

#### Propriété 4.1.12

On suppose (4.43) :  $\mathcal{K}(\cdot) \geq 0$ . Soient  $\Lambda, \Lambda'$  deux parties finies de  $\mathbb{Z}^d$  telles que  $\Lambda \subset \Lambda'$ . Alors, pour toute configuration  $\sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} \in S^{\Lambda' \setminus \Lambda}$ , on a les inégalités suivantes :

$$\nu_{\Lambda'}^{+}((\cdot)_{\Lambda} | \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda}) \preceq \nu_{\Lambda}^{+}(\cdot) ; \quad (4.66)$$

$$\nu_{\Lambda'}^{-}((\cdot)_{\Lambda} | \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda}) \succeq \nu_{\Lambda}^{-}(\cdot) . \quad (4.67)$$

**Remarque 4.1.13** On remarquera que (4.66) et (4.67) sont en quelque sorte des propriétés de sous-, resp. sur-, gibbsianité.

#### Preuve :

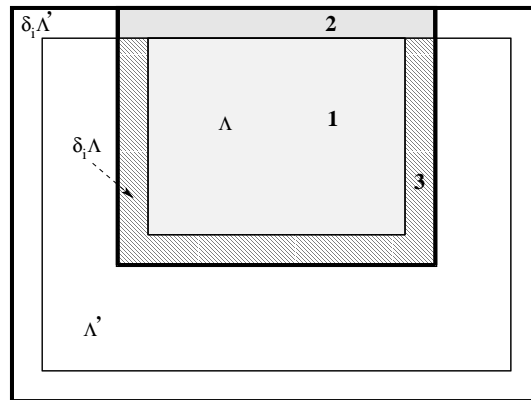
Traisons dans un premier temps l'inégalité (4.66) :

Afin de prouver cette inégalité entre deux mesures, on utilise à nouveau le critère suffisant de Holley-Häggström, précédemment rappelé.

Considérons  $\Lambda, \Lambda'$  deux parties finies de  $\mathbb{Z}^d$  telles que  $\Lambda \subset \Lambda'$  et  $\sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} \in S^{\Lambda' \setminus \Lambda}$ . Soit  $k \in \Lambda$ , et soient  $\sigma_{\Lambda \setminus k}, \sigma'_{\Lambda \setminus k}$  tels que :  $\sigma_{\Lambda \setminus k} \preceq \sigma'_{\Lambda \setminus k}$ . D'après le critère suffisant précédemment rappelé, il suffit alors de montrer que :

$$\nu_{\Lambda'}^{+}((+1)_k | \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} \sigma_{\Lambda \setminus k}) \leq \nu_{\Lambda}^{+}((+1)_k | \sigma'_{\Lambda \setminus k}) \quad (4.68)$$

pour conclure. On va alors considérer différents cas, selon la position du site  $k$  dans  $\Lambda$  et prouver (4.68) dans chacun d'eux :



1. Cas où  $k \in \Lambda \setminus \partial_i \Lambda$  :

Dans ce cas, compte tenu de l'équation (4.40), l'inégalité (4.68) est équivalente à :

$$\mu_{\{k\}}^{\sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} \sigma_{\Lambda \setminus k} (+1)_{\Lambda'^c}} ((+1)_k) \leq \mu_{\{k\}}^{\sigma'_{\Lambda \setminus k} (+1)_{\Lambda^c}} ((+1)_k) . \quad (4.69)$$

On utilise alors l'hypothèse (4.43), et puisque  $\sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} \sigma_{\Lambda \setminus k} (+1)_{\Lambda'^c} \preceq \sigma'_{\Lambda \setminus k} (+1)_{\Lambda^c}$ , le résultat (4.45) de la Proposition 4.1.9 nous permet de conclure que (4.69) est vérifiée.

2. Cas où  $k \in \partial_i \Lambda \cap \partial_i \Lambda'$  :

Dans ce cas, on ne peut plus utiliser (4.40). On va alors s'attacher à montrer directement l'inégalité (4.68). Comme  $\nu_{\Lambda'}^+(\cdot | \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} \sigma_{\Lambda \setminus k})$  et  $\nu_{\Lambda}^+(\cdot | \sigma'_{\Lambda \setminus k})$  sont des mesures de probabilités sur  $S = \{-1, +1\}$ , l'inégalité (4.68) est équivalente à :

$$\nu_{\Lambda'}^+((+1)_k | \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} \sigma_{\Lambda \setminus k}) \cdot \nu_{\Lambda}^+((-1)_k | \sigma'_{\Lambda \setminus k}) \leq \nu_{\Lambda'}^+((-1)_k | \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} \sigma_{\Lambda \setminus k}) \cdot \nu_{\Lambda}^+((+1)_k | \sigma'_{\Lambda \setminus k}) .$$

Compte tenu des formulations explicites, (il faut et) il suffit alors de prouver que :

$$\begin{aligned} & e^{+\beta h} \prod_{j \in V_k \cap \Lambda'} \cosh [\beta \mathcal{C}_j((+1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} (+1)_{\Lambda'^c})] e^{+\beta \sum_{j \notin \Lambda'} \mathcal{K}(k-j)} \\ & e^{-\beta h} \prod_{j \in V_k \cap \Lambda} \cosh [\beta \mathcal{C}_j((-1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} (+1)_{\Lambda^c})] e^{-\beta \sum_{j \notin \Lambda} \mathcal{K}(k-j)} \\ & \leq e^{-\beta h} \prod_{j \in V_k \cap \Lambda'} \cosh [\beta \mathcal{C}_j((-1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} (+1)_{\Lambda'^c})] e^{-\beta \sum_{j \notin \Lambda'} \mathcal{K}(k-j)} \\ & e^{+\beta h} \prod_{j \in V_k \cap \Lambda} \cosh [\beta \mathcal{C}_j((+1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} (+1)_{\Lambda^c})] e^{+\beta \sum_{j \notin \Lambda} \mathcal{K}(k-j)} . \end{aligned}$$

Puisque, pour  $j \in \Lambda$ ,

$$\sigma_{\Lambda \setminus k} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} (+1)_{\Lambda'^c} \preceq \sigma'_{\Lambda \setminus k} (+1)_{\Lambda^c} ,$$

le Lemme 4.1.10 à venir établit que :

$$\begin{aligned} & \cosh [\beta \mathcal{C}_j((+1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} (+1)_{\Lambda'^c})] \cdot \cosh [\beta \mathcal{C}_j((-1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} (+1)_{\Lambda^c})] \\ & \leq \cosh [\beta \mathcal{C}_j((-1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} (+1)_{\Lambda'^c})] \cdot \cosh [\beta \mathcal{C}_j((+1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} (+1)_{\Lambda^c})] . \end{aligned}$$

Pour vérifier (4.68) dans ce cas, il suffit alors d'avoir :

$$e^{-2\beta \sum_{j \in \Lambda' \setminus \Lambda} \mathcal{K}(k-j)} \leq \prod_{j \in V_k \cap (\Lambda' \setminus \Lambda)} \frac{\cosh [\beta \mathcal{C}_j((-1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} (+1)_{\Lambda'^c})]}{\cosh [\beta \mathcal{C}_j((+1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} (+1)_{\Lambda'^c})]} . \quad (4.70)$$

On remarque qu'en prenant

$$D = \sum_{l \notin \Lambda'} \mathcal{K}(l-j) + \sum_{l \in \Lambda' \setminus k} \mathcal{K}(l-j) (\sigma_{\Lambda \setminus k} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda})_l + h ,$$

le membre de droite de cette inégalité peut s'écrire astucieusement sous la forme :

$$\prod_{j \in V_k \cap (\Lambda' \setminus \Lambda)} \frac{e^{\beta D} e^{-\beta \mathcal{K}(k-j)} + e^{-\beta D} e^{\beta \mathcal{K}(k-j)}}{e^{\beta D} e^{\beta \mathcal{K}(k-j)} + e^{-\beta D} e^{-\beta \mathcal{K}(k-j)}}. \quad (4.71)$$

On remarque alors que, pour tous réels  $x, y, p, q$  tels que  $p > 0, q > 0, p + q = 1$ , on a :

$$\frac{\min(x, y)}{\max(x, y)} \leq \frac{px + qy}{py + qx}.$$

Soit  $j \in V_k \cap (\Lambda' \setminus \Lambda)$ . Appliquons le résultat précédent à la situation présente en prenant :

$$p = \frac{e^{\beta D}}{e^{\beta D} + e^{-\beta D}} \quad q = \frac{e^{-\beta D}}{e^{\beta D} + e^{-\beta D}}$$

on obtient ainsi :

$$\frac{\min(e^{-\beta \mathcal{K}(k-j)}, e^{\beta \mathcal{K}(k-j)})}{\max(e^{-\beta \mathcal{K}(k-j)}, e^{\beta \mathcal{K}(k-j)})} \leq \frac{e^{\beta D} e^{-\beta \mathcal{K}(k-j)} + e^{-\beta D} e^{\beta \mathcal{K}(k-j)}}{e^{\beta D} e^{\beta \mathcal{K}(k-j)} + e^{-\beta D} e^{-\beta \mathcal{K}(k-j)}}$$

soit encore, puisque l'on a supposé  $\mathcal{K}(\cdot) \geq 0$  :

$$e^{-2\beta \mathcal{K}(k-j)} \leq \frac{e^{\beta D} e^{-\beta \mathcal{K}(k-j)} + e^{-\beta D} e^{\beta \mathcal{K}(k-j)}}{e^{\beta D} e^{\beta \mathcal{K}(k-j)} + e^{-\beta D} e^{-\beta \mathcal{K}(k-j)}}.$$

En effectuant le produit, pour  $j \in V_k \cap (\Lambda' \setminus \Lambda)$  de toutes ces inégalités strictement positives, et en remarquant que  $\sum_{j \in \Lambda' \setminus \Lambda} \mathcal{K}(k-j) = \sum_{j \in V_k \cap (\Lambda' \setminus \Lambda)} \mathcal{K}(k-j)$ , par définition de  $V_k$ , on obtient donc l'inégalité (4.70). La validité de (4.68) dans ce cas en découle alors.

### 3. Cas où $k \in (\partial_i \Lambda) \cap (\Lambda' \setminus \partial_i \Lambda')$ :

Comme dans le cas précédent, l'inégalité (4.68) est équivalente à :

$$\nu_{\Lambda'}^+((+1)_k | \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} \sigma_{\Lambda \setminus k}) \nu_{\Lambda}^+((-1)_k | \sigma'_{\Lambda \setminus k}) \leq \nu_{\Lambda'}^+((-1)_k | \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} \sigma_{\Lambda \setminus k}) \nu_{\Lambda}^+((+1)_k | \sigma'_{\Lambda \setminus k})$$

ce qui est encore équivalent à :

$$\begin{aligned} & e^{+\beta h} \prod_{j \in V_k \cap \Lambda'} \cosh [\beta \mathcal{C}_j((+1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} (+1)_{\Lambda^c})] \\ & e^{-\beta h} \prod_{j \in V_k \cap \Lambda} \cosh [\beta \mathcal{C}_j((-1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} (+1)_{\Lambda^c})] e^{-\beta \sum_{j \notin \Lambda} \mathcal{K}(k-j)} \\ & \leq e^{-\beta h} \prod_{j \in V_k \cap \Lambda'} \cosh [\beta \mathcal{C}_j((-1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} (+1)_{\Lambda^c})] \\ & e^{+\beta h} \prod_{j \in V_k \cap \Lambda} \cosh [\beta \mathcal{C}_j((+1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} (+1)_{\Lambda^c})] e^{+\beta \sum_{j \notin \Lambda} \mathcal{K}(k-j)}. \end{aligned}$$

On notera l'absence de certains termes par rapport à l'inégalité analogue dans le cas précédent. L'absence de ces termes fait que ce cas est encore plus favorable que le cas précédent, et donc, on démontre de manière identique la validité de (4.68) dans ce cas.

L'inégalité (4.66) étant prouvée, l'inégalité (4.67) (conditions au bord négatives) se prouve de manière similaire :

Soit  $k \in \Lambda$  et soient  $\sigma_{\Lambda \setminus k} \preceq \sigma'_{\Lambda \setminus k}$ . Comme précédemment, il suffit de montrer que :

$$\nu_{\Lambda}^{-}((+1)_k | \sigma_{\Lambda \setminus k}) \leq \nu_{\Lambda'}^{-}((+1)_k | \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} \sigma'_{\Lambda \setminus k})$$

dont la preuve se subdivise en les trois mêmes cas :  $k \in (\Lambda \setminus \partial_i \Lambda)$ ,  $k \in \partial_i \Lambda \cap \partial_i \Lambda'$ , et  $k \in (\partial_i \Lambda) \cap (\Lambda' \setminus \partial_i \Lambda')$ . Le premier cas revient à montrer l'inégalité suivante sur les mesures de Gibbs :

$$\mu_{\{k\}}^{(-1)_{\Lambda^c} \sigma_{\Lambda \setminus k}}((+1)_k) \leq \mu_{\{k\}}^{(-1)_{\Lambda'^c} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} \sigma'_{\Lambda \setminus k}}((+1)_k)$$

qui découle du fait que les mesures de Gibbs à volume fini sont monotones croissantes lorsque la condition au bord l'est (cf. (4.45)). Le second cas est équivalent à montrer que :

$$\begin{aligned} & e^{-\beta h} \prod_{j \in V_k \cap \Lambda'} \cosh [\beta \mathcal{C}_j((-1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} (-1)_{\Lambda'^c})] e^{+\beta \sum_{j \notin \Lambda'} \mathcal{K}(k-j)} \\ & e^{+\beta h} \prod_{j \in V_k \cap \Lambda} \cosh [\beta \mathcal{C}_j((+1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k} (-1)_{\Lambda^c})] e^{-\beta \sum_{j \notin \Lambda} \mathcal{K}(k-j)} \\ & \leq e^{+\beta h} \prod_{j \in V_k \cap \Lambda'} \cosh [\beta \mathcal{C}_j((+1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} (-1)_{\Lambda'^c})] e^{-\beta \sum_{j \notin \Lambda'} \mathcal{K}(k-j)} \\ & e^{-\beta h} \prod_{j \in V_k \cap \Lambda} \cosh [\beta \mathcal{C}_j((-1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k} (-1)_{\Lambda^c})] e^{+\beta \sum_{j \notin \Lambda} \mathcal{K}(k-j)}. \end{aligned}$$

Pour  $j \in \Lambda$ , on sait également que :

$$\begin{aligned} & \cosh [\beta \mathcal{C}_j((-1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} (-1)_{\Lambda'^c})] \cdot \cosh [\beta \mathcal{C}_j((+1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k} (-1)_{\Lambda^c})] \\ & \leq \cosh [\beta \mathcal{C}_j((+1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} (-1)_{\Lambda'^c})] \cdot \cosh [\beta \mathcal{C}_j((-1)_k \sigma_{\Lambda \setminus k} (-1)_{\Lambda^c})]. \end{aligned}$$

Il suffit alors de montrer que :

$$e^{-2\beta \sum_{j \in \Lambda' \setminus \Lambda} \mathcal{K}(k-j)} \leq \prod_{j \in V_k \cap (\Lambda' \setminus \Lambda)} \frac{\cosh [\beta \mathcal{C}_j((+1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} (-1)_{\Lambda'^c})]}{\cosh [\beta \mathcal{C}_j((-1)_k \sigma'_{\Lambda \setminus k} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda} (-1)_{\Lambda'^c})]}. \quad (4.72)$$

On vérifie cette inégalité comme dans le cas des conditions au bord positives en réécrivant le membre de droite sous la forme :

$$\prod_{j \in V_k \cap (\Lambda' \setminus \Lambda)} \frac{e^{\beta D'} e^{-\beta \mathcal{K}(k-j)} + e^{-\beta D'} e^{\beta \mathcal{K}(k-j)}}{e^{\beta D'} e^{\beta \mathcal{K}(k-j)} + e^{-\beta D'} e^{-\beta \mathcal{K}(k-j)}} \quad (4.73)$$

avec cette fois :

$$D' = \sum_{l \notin \Lambda'} \mathcal{K}(l-j) - \sum_{l \in \Lambda' \setminus k} \mathcal{K}(l-j) (\sigma'_{\Lambda \setminus k} \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda})_l + h.$$

Finalement, le dernier cas ( $k \in (\partial_i \Lambda) \cap (\Lambda' \setminus \partial_i \Lambda')$ ) est, ici encore, plus favorable que le second. ■

Compte tenu du résultat précédent, on peut alors énoncer :

**Corollaire 4.1.14**

On suppose  $\mathcal{K}(\cdot) \geq 0$ . Soit  $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ . Les inégalités suivantes sont alors vraies :

$$\nu_{\Lambda}^{-} \preceq \mu_{\Lambda}^{-} \preceq \mu_{\Lambda}^{per} = \nu_{\Lambda}^{per} \preceq \mu_{\Lambda}^{+} \preceq \nu_{\Lambda}^{+} . \quad (4.74)$$

**Preuve :**

Soit  $\Lambda' \in \mathbb{Z}^d$  tel que  $\Lambda \subset \Lambda'$  et  $\partial_i \Lambda \cap \partial_i \Lambda' = \emptyset$ . D'après la Proposition 4.1.8, on sait que, pour tout  $\sigma_{\Lambda} \in S^{\Lambda}$  :

$$\nu_{\Lambda'}^{+}(\sigma_{\Lambda} | + \mathbf{1}_{\Lambda' \setminus \Lambda}) = \mu_{\Lambda}^{+}(\sigma_{\Lambda}) .$$

D'autre part, la Propriété 4.1.12, nous assure que :

$$\nu_{\Lambda'}^{+}((\cdot)_{\Lambda} | + \mathbf{1}_{\Lambda' \setminus \Lambda}) \preceq \nu_{\Lambda}^{+}(\cdot) .$$

On en conclut donc que  $\mu_{\Lambda}^{+} \preceq \nu_{\Lambda}^{+}$ .

De manière analogue, le résultats symétrique (4.67) associé à la Proposition 4.1.8 fournit  $\nu_{\Lambda}^{-} \preceq \mu_{\Lambda}^{-}$ . Enfin, la Proposition 4.1.9 a comme conséquence  $\mu_{\Lambda}^{-} \preceq \mu_{\Lambda}^{per} \preceq \mu_{\Lambda}^{+}$ , et la Proposition 4.1.6 atteste de  $\nu_{\Lambda}^{per} = \mu_{\Lambda}^{per}$ . ■

D'autre part, la Propriété 4.1.12 assure également :

**Propriété 4.1.15 (Comparaison des mesures réversibles extrémales sur des volumes emboîtés)**

On suppose  $\mathcal{K}(\cdot) \geq 0$ . Soient  $\Lambda, \Lambda'$  deux parties finies de  $\mathbb{Z}^d$  telles que  $\Lambda \subset \Lambda'$ . Les mesures réversibles à volume fini  $\nu_{\Lambda}^{+}$  et  $\nu_{\Lambda}^{-}$  vérifient :

$$\wp_{\Lambda} \nu_{\Lambda'}^{+} \preceq \nu_{\Lambda}^{+} ; \quad (4.75)$$

$$\wp_{\Lambda} \nu_{\Lambda'}^{-} \succeq \nu_{\Lambda}^{-} . \quad (4.76)$$

**Preuve :**

Soit  $f$  une fonction sur  $S^{\Lambda}$  croissante. En utilisant que  $\nu_{\Lambda}^{+}$  est égale au mélange de ses probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned} \wp_{\Lambda} \nu_{\Lambda'}^{+}(f) &= \iint f(\sigma_{\Lambda}) \nu_{\Lambda'}^{+}(d\sigma_{\Lambda} | \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda}) (\wp_{\Lambda' \setminus \Lambda} \nu_{\Lambda'}^{+})(d\sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda}) \\ &= \int \nu_{\Lambda'}^{+}(f | \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda}) (\wp_{\Lambda' \setminus \Lambda} \nu_{\Lambda'}^{+})(d\sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda}) . \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la Propriété 4.1.12 qui nous assure, pour tout  $\sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda}$ , que

$$\nu_{\Lambda'}^{+}(f | \sigma_{\Lambda' \setminus \Lambda}) \leq \nu_{\Lambda}^{+}(f) ,$$

on en conclut que

$$\wp_{\Lambda} \nu_{\Lambda'}^{+}(f) \leq \nu_{\Lambda}^{+}(f) .$$

La preuve de l'inégalité (4.76) provient de manière analogue de l'inégalité (4.67) du lemme 4.1.12 . ■

Enfin, le lien annoncé entre les mesures à volume fini  $\nu_{\Lambda}^{-}$  et  $\nu_{\Lambda}^{+}$ , et toute mesure de Gibbs de  $\mathcal{G}(\varphi)$  est établi :

**Propriété 4.1.16**

On suppose  $\mathcal{K}(\cdot) \geq 0$ . Pour toute mesure de Gibbs  $\mu$  associée à  $\varphi$ , on a, pour tout volume fini  $\Lambda$  :

$$\nu_{\Lambda}^{-} \preceq \wp_{\Lambda} \mu \preceq \nu_{\Lambda}^{+} . \quad (4.77)$$

**Preuve :**

Soit  $L$  un entier tel que  $\Lambda \subset \mathcal{B}_L$ . La Propriété 4.1.15 nous assure alors du fait que  $\wp_{\Lambda} \nu_{\mathcal{B}_L}^{+} \preceq \nu_{\Lambda}^{+}$ . Par ailleurs, l'utilisation conjointe des résultats établis en (4.74) et (4.45) permet d'affirmer que, pour toute configuration au bord  $\tau$ ,  $\mu_{\mathcal{B}_L}^{\tau} \preceq \mu_{\mathcal{B}_L}^{+} \preceq \nu_{\mathcal{B}_L}^{+}$ , soit encore

$$\wp_{\Lambda} \mu_{\mathcal{B}_L}^{\tau} \preceq \nu_{\Lambda}^{+} . \quad (4.78)$$

Soit  $\mu$  une mesure de Gibbs extrémale de  $\mathcal{G}(\varphi)$ . D'après les résultats usuels de la théorie des mesures de Gibbs, on sait qu'il existe  $\tau$ , condition au bord telle que  $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{B}_{L_n}}^{\tau}$  (où  $(\mathcal{B}_{L_n})_n$  est une suite extraite adéquate). En utilisant alors l'inégalité précédente (4.78), appliquée à la sous-suite  $(\mathcal{B}_{L_n})_n$ , et en passant à la limite ( $n \rightarrow \infty$ ), on obtient  $\wp_{\Lambda} \mu \preceq \nu_{\Lambda}^{+}$ .

Cette inégalité étant démontrée pour toute mesure de Gibbs extrémale, comme elle est stable par combinaison linéaire convexe, elle est alors vraie pour toute mesure de Gibbs  $\mu$  de  $\mathcal{G}(\varphi)$ .

D'autre part, compte tenu de (4.76), et des résultats (4.74) et (4.45), on prouve la partie gauche de (4.77) de manière similaire. ■

## 4.2 Mesures de Gibbs naturellement associées

Après avoir décrit pour une dynamique parallèle  $P$  de la classe  $\mathcal{C}$  la situation à volume fini, abordons maintenant l'étude de cette dynamique sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . S'agissant d'une dynamique du type  $\mathcal{D}(\phi)$ , le Corollaire 3.5.2 s'applique, et on a la situation décrite par la figure 3.1 où le potentiel  $\varphi$  est précisément de la forme (4.34) présentée et discutée à la sous-section précédente. La forme du potentiel  $\varphi$  étant explicite, un des intérêts de considérer une dynamique de la classe  $\mathcal{C}$  est alors de pouvoir préciser l'existence ou non de transition de phase pour  $\varphi$ , et d'en déduire, grâce au résultat général rappelé précédemment des résultats concernant les états d'équilibre pour la dynamique PCA considérée. Ce dernier point sera l'objet de la section 4.3. Nous nous intéressons dans la section présente à l'étude du phénomène de transition de phase pour  $\varphi$ , selon les différentes valeurs du paramètre  $\beta$ .

On a vu que lorsque  $\beta$  est proche de 0, il n'y a pas de transition de phase pour le potentiel espace-temps  $\Phi$ . De manière identique, **lorsque  $\beta$  est proche de 0** (zone dite de « hautes températures »), le potentiel  $\varphi$  vérifie les conditions d'unicité de Dobrushin (cf. Théorème 8.7 in [Geo88]), et on a donc **unicité de la mesure de Gibbs associée à  $\varphi$** .

**Lorsque la dimension  $d = 1$** , on sait qu'il y a unicité des mesures de Gibbs invariantes par translation associées à un potentiel à portée finie sur un espace de spin  $S$



compact (cf. Théorème 8.39 *in* [Geo88]). Puisqu'ici  $\varphi$  est un potentiel invariant par translation à portée finie, on a, **pour tout  $\beta \in \mathbb{R}^+$  et tout  $h \in \mathbb{R}$ , unicité de la mesure de Gibbs associée à  $\varphi$ .**

La complexité annoncée du potentiel  $\varphi$ , potentiel à plusieurs corps, nous amène alors dans cette section à nous restreindre au cas où la portée de la dynamique est de 1, c'est à dire au cas où  $V_k$  est de la forme :

$$V_k = \{k' \in \mathbb{Z}^d : \|k - k'\|_1 \leq 1\},$$

ce qui revient à prendre  $R = 1$  dans la formule (4.2), c'est à dire encore que les seuls termes  $\mathcal{K}(k)$  non nuls sont les  $\mathcal{K}(e_i)$ , pour  $1 \leq i \leq d$ , et éventuellement  $\mathcal{K}(0)$ . On se restreint également au cas où  $h = 0$ , ce qui signifie que l'on considère, dans le reste de cette section, une dynamique PCA de la classe  $\mathcal{C}_0$ .

On considère le cas de la dimension  $d = 2$ . Dans la première sous-section 4.2.1, nous établissons (Théorème 4.2.1) qu'il existe un  $\beta_0$  à partir duquel, pour tout  $\beta > \beta_0$ , on a transition de phase pour le potentiel  $\varphi$ , et ceci pour toute interaction  $\mathcal{K}$ . La seconde sous-section est consacrée à l'étude du cas particulier où, de plus, l'interaction propre est nulle ( $\mathcal{K}(0) = 0$ ). Nous montrons alors (Propriété 4.2.3 et Lemme 4.2.4) que le système se scinde en deux sous-systèmes identiques et indépendants, qui peuvent se ramener à l'étude du potentiel d'Ising. Cette particularité avait déjà été mentionnée précédemment dans la référence [KV80] (et exemple 18.7 *in* [TVS<sup>+</sup>78]). Cela permet alors de formuler le Théorème 4.2.5, où l'ensemble  $\mathcal{G}(\varphi)$  est clairement identifié en fonction de la position du paramètre  $\beta$  par rapport à un paramètre critique  $\beta_c$  connu avec exactitude.

### 4.2.1 Transition de Phase à basse température en dimension 2

Cette sous-section est consacrée à l'énoncé et à la preuve de la transition de phase pour le potentiel  $\varphi$  lorsque  $\beta$  est assez grand.

La technique utilisée se fonde principalement sur un argument géométrique de contour. Une telle technique fut initiée par Peierls pour l'étude du modèle d'Ising en 1936 (cf. [Pei36]) et plus précisément ensuite formalisée pour ce modèle par Griffiths et Dobrushin (cf. [Dob65, Gri64]). Pour plus de renseignements à propos de cette technique et de ses généralisations (en particulier à la théorie de Pirogov-Sinaï, cf. [Sin82]) on se réfère à [Fer97]. Des références récentes pour l'utilisation de telles techniques en dimension  $d \geq 3$  sont également [FFG01, LM98].

Remarquons au préalable que si  $\mathcal{K}(e_1) = \mathcal{K}(e_2) = 0$ , alors  $V_k = \{k\}$ , c'est à dire qu'il y a indépendance entre les sites, et donc unicité de la mesure de Gibbs associée à  $\varphi$  sur  $S^{\mathbb{Z}^2}$ . Si  $\mathcal{K}(e_1) = 0$  et  $\mathcal{K}(e_2) \neq 0$  (ou bien la situation symétrique), alors le système se ramène à une juxtaposition de systèmes 1-dimensionnels indépendants. Comme il n'y a pas transition de phase en dimension 1, on en déduit également que dans ce cas, il y a unicité de la mesure de Gibbs associée à  $\varphi$ .

Cela nous amène alors à considérer le cas pour lequel  $\mathcal{K}(e_1) \neq 0$  et  $\mathcal{K}(e_2) \neq 0$  qui est celui considéré par le théorème suivant :

**Théorème 4.2.1 (Transition de phase)**

Soit  $\varphi$  le potentiel sur  $S^{\mathbb{Z}^2}$  défini par (4.37). On suppose de plus que

$$\begin{cases} \mathcal{K}(+e_1) = \mathcal{K}(-e_1) \neq 0, \mathcal{K}(+e_2) = \mathcal{K}(-e_2) \neq 0, \\ \mathcal{K}(0) \in \mathbb{R}, \mathcal{K}(k) = 0 \text{ pour les autres } k; \end{cases} \quad (4.79)$$

alors, il existe  $\beta_0 > 0$  tel que :

$$\forall \beta > \beta_0, \quad \#\mathcal{G}(\varphi) > 1 \text{ (transition de phase)}. \quad (4.80)$$

**Preuve :**

Au préalable, précisons que dans ce cas, le voisinage  $V_k$  est égal si  $\mathcal{K}(0) \neq 0$  à

$$V_k = \{k; k - e_1; k + e_1; k - e_2; k + e_2\},$$

et si  $\mathcal{K}(0) = 0$  égal à

$$V_k = \{k - e_1; k + e_1; k - e_2; k + e_2\}.$$

On décompose la preuve selon les signes de  $\mathcal{K}(e_1)$ ,  $\mathcal{K}(e_2)$  et  $\mathcal{K}(0)$  en les trois cas suivants.

cas où  $\mathcal{K}(0) \geq 0$ ,  $\mathcal{K}(e_1) > 0$  et  $\mathcal{K}(e_2) > 0$

Soit un volume fini  $\mathcal{B}_L$  de  $\mathbb{Z}^2$  fixé. Soit  $\sigma$  une configuration de  $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^2}$  fixée, telle que  $\sigma_{\Lambda^c} = +\mathbf{1}$ . Posons  $\mathbb{Z}_*^2 = \mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Rappelons dans un premier temps la notion usuelle de **contour de Peierls** associé à la configuration  $\sigma$ . La notation  $[a, b]$  désigne le segment entre deux sites  $a$  et  $b$  voisins et appartenant au réseau dual  $\mathbb{Z}_*^2$  et voisins (au sens de « plus proche voisin »). On désigne comme « marqué » tout segment joignant deux sites  $a$  et  $b$  du réseau dual  $\mathbb{Z}_*^2$ , voisins, si ce segment sépare deux sites  $k$  et  $k'$  voisins dans  $\mathbb{Z}^2$ , tels que  $\sigma_k \sigma_{k'} = -1$  (*i.e.* tels que  $\sigma_k$  et  $\sigma_{k'}$  ont des valeurs de spins opposées). Les segments marqués forment alors une famille finie de courbes linéaires par morceaux, fermées, ne s'intersectant pas. Ces courbes sont appelées contours de Peierls. Remarquons que tout segment constitutif d'un contour  $\gamma$  sépare deux sites proches voisins, possédant des valeurs de spins opposées, et appartenant nécessairement à  $\mathcal{B}_L \cup \partial_e \mathcal{B}_L$ . Si  $k$  et  $k'$  sont deux sites proches voisins de  $\mathbb{Z}^2$ , séparés par un segment de  $\gamma$ , et tels que  $\sigma_k = -1$ , on pose  $k \in \partial^- \gamma$  et  $k' \in \partial^+ \gamma$ . On appelle l'union des ensembles de sites de  $\partial^- \gamma$  et  $\partial^+ \gamma$  le **bord du contour**  $\gamma$ , désigné par  $\partial \gamma$ . Enfin, pour tout  $k \in \mathcal{B}_L$  tel que  $\sigma_k = -1$ , il existe un **contour de Peierls minimal** l'entourant, *i.e.* tel que  $k$  appartienne à l'intérieur délimité par la courbe fermée  $\gamma$ .

Cette notion de contour minimal est celle définie usuellement pour la preuve de la transition de phase à basse température pour le potentiel d'Ising en dimension 2. Le potentiel considéré ici est, nous l'avons signalé, plus complexe, car l'interaction a lieu, dans le cas présent, entre 5 sites. Nous adaptons donc la notion de contour minimal à notre étude. Deux contours de Peierls  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont dits **adjacents** si leurs bords (sites de  $\partial \gamma$ ) possèdent au moins un site en commun. Nous disons que deux contours de Peierls  $\gamma$  et  $\gamma'$  **communiquent** s'ils appartiennent à une suite de contours de

Peierls  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  tels que pour tout  $l$ ,  $\gamma_l$  et  $\gamma_{l+1}$  sont adjacents. Cette relation de communication est une relation d'équivalence. Le **contour minimal**, pour l'étude présente du potentiel  $\varphi$ , autour d'un site  $k$  tel que  $\sigma_k = -1$  est constitué par la classe d'équivalence au sens de cette relation de communication qui contient le contour de Peierls minimal (au sens de Ising, précédemment évoqué) entourant  $k$ . Le bord  $\partial\gamma = \partial^+\gamma \cup \partial^-\gamma$  d'un contour  $\gamma$  est alors simplement l'union des bords des contours de Peierls qui constituent  $\gamma$ . La figure 4.1 illustre ces définitions de contours.

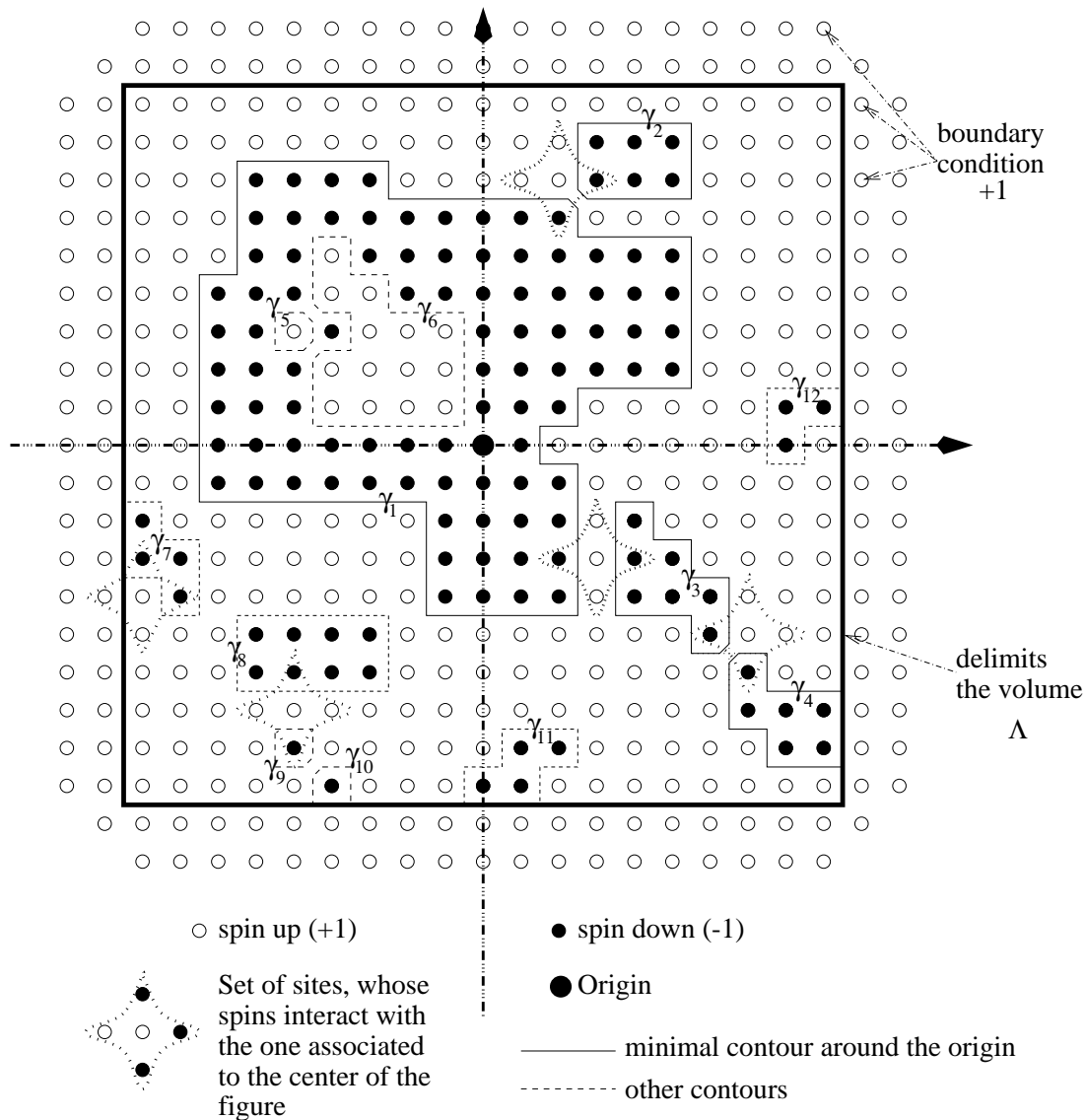


FIG. 4.1 – Contour

Considérons maintenant la mesure de Gibbs  $\mu_{B_L}^+$ , associée au potentiel  $\varphi$ , que nous

réécrivons, en changeant quelque peu le facteur de normalisation, sous la forme :

$$\mu_{\mathcal{B}_L}^+(\sigma_{\mathcal{B}_L}) = \frac{1}{\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathcal{B}_L}^+} \prod_{\mathcal{B}_L \cup \partial_e \mathcal{B}_L} \frac{\cosh\left(\beta \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \sigma_{k'}^+\right)}{\cosh\left(\beta \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k)\right)} \quad \text{où } \sigma^+ = \sigma_{\mathcal{B}_L} (+\mathbf{1})_{\mathcal{B}_L^c} .$$

À toute configuration du type  $\sigma^+$  est associée, comme introduit précédemment, une collection de contours  $\Gamma = \{c_1, \dots, c_m\}$ . Chacun des  $c_l$  est une union de contours de Peierls, et des contours de Peierls appartenant à différents contours  $c_l$  ne communiquent pas. De plus, les  $c_l$  étant définis comme des classes d'équivalence disjointes, leurs bords respectifs sont disjoints :  $\forall l, l', l \neq l', \partial c_l \cap \partial c_{l'} = \emptyset$ . Remarquons également, puisque  $\sigma_{\mathcal{B}_L^c}^+ = +\mathbf{1}$ , que, pour tout  $l$ ,  $\partial c_l \subset \mathcal{B}_L \cup \partial_e \mathcal{B}_L$ .

Remarquons que, pour un site  $k \in \mathcal{B}_L \cup \partial_e \mathcal{B}_L$  fixé, s'il n'existe pas de contour  $c_l$  tel que  $k \in \partial c_l$ , alors, ou bien  $\sigma_{V_k}^+ \equiv +1$ , ou bien  $\sigma_{V_k}^+ \equiv -1$  (c'est à dire que dans ce cas les valeurs de spins sont identiques sur  $V_k$ ). Dans ce cas, on a :

$$\frac{\cosh\left(\beta \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \sigma_{k'}^+\right)}{\cosh\left(\beta \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k)\right)} = 1 .$$

On peut donc réécrire  $\mu_{\mathcal{B}_L}^+$  sous la forme :

$$\mu_{\mathcal{B}_L}^+(\sigma_{\Lambda}) = \frac{1}{\tilde{\mathcal{Z}}_{\Lambda}^+} \prod_{l=1}^m F(c_l),$$

où

$$F(c_l) = \prod_{k \in \partial c_l} \frac{\cosh\left(\beta \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \sigma_{k'}^+\right)}{\cosh\left(\beta \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k)\right)} .$$

Utilisons la notation  $c_l \sqsupset 0$  pour signifier que le contour  $c_l$  entoure l'origine 0 du réseau  $\mathbb{Z}^2$ . Rappelons que les définitions géométriques de contours introduites nous permettent de définir une bijection entre l'ensemble des configurations  $\sigma^+$  telles que  $\sigma_0^+ = -1$ , et l'ensemble des collections  $\Gamma = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$  de contours  $c_l$  telles que pour chacune de ces collections  $\Gamma$ , un des contours  $c_l$  (le contour minimal de  $\sigma^+$  au sens précédemment précisé) entoure l'origine. On désigne de manière générique par  $c_1$  ce contour minimal autour de l'origine. Ainsi, on peut reformuler la quantité  $\mu_{\mathcal{B}_L}^+(\{\sigma_{\mathcal{B}_L} : \sigma_0 = -1\})$ , notée  $\mu_{\mathcal{B}_L}^+(\sigma_0 = -1)$ , de la manière suivante :

$$\mu_{\mathcal{B}_L}^+(\sigma_0 = -1) = \sum_{\sigma_{\mathcal{B}_L} : \sigma_0 = -1} \mu_{\mathcal{B}_L}^+(\sigma_{\mathcal{B}_L}) = \frac{1}{\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathcal{B}_L}^+} \sum_{\Gamma = \{c_1, \dots, c_m\}, c_1 \sqsupset 0} F(\Gamma) ,$$

où, pour  $\Gamma = \{c_1, \dots, c_m\}$ ,  $F(\Gamma) \triangleq \prod_{l=1}^m F(c_l)$ . On remarque que  $\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathcal{B}_L}^+$  peut ainsi également être écrit

$$\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathcal{B}_L}^+ = \sum_{\sigma_{\mathcal{B}_L}} \mu_{\mathcal{B}_L}^+(\sigma_{\mathcal{B}_L}) = \sum_{\Gamma} F(\Gamma) . \quad (4.81)$$

Fort de cette reformulation en terme de contours, et non plus de configurations, on écrit alors :

$$\mu_{B_L}^+(\sigma_0 = -1) = \frac{1}{\tilde{Z}_{B_L}^+} \sum_{c_1 \sqsupset 0} F(c_1) \sum_{\Gamma \ni c_1} F(\Gamma \setminus c_1), \quad (4.82)$$

où, pour  $\Gamma = c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_m$ , on pose  $F(\Gamma \setminus c_1) = \prod_{l=2}^m F(c_l)$ . Précisons que si  $\Gamma$  est une collection de contours associée à une configuration  $\sigma^+$ ,  $\Gamma \setminus c_1$  l'est également, et correspond à la configuration obtenue à partir de  $\sigma^+$  en retournant tous les spins  $-1$  à l'intérieur de  $c_1$  (une telle opération « efface » le contour  $c_1$  de la collection  $\Gamma$  de contours). Il est alors immédiat, vu (4.81), que :

$$\sum_{\Gamma \ni c_1} F(\Gamma \setminus c_1) \leq \sum_{\Gamma} F(\Gamma) = \tilde{Z}_{B_L}^+.$$

D'où :

$$\mu_{B_L}^+(\sigma_0 = -1) \leq \sum_{c_1 \sqsupset 0} F(c_1). \quad (4.83)$$

Par ailleurs, comme la fonction de couplage  $\mathcal{K}(\cdot)$  ne prend dans ce premier cas considéré que des valeurs positives, la valeur maximale de  $|\sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \sigma_{k'}|$  est  $B = \sum_{k' \in V_0} \mathcal{K}(k')$  et est obtenue pour les seules configurations  $(+1)_{V_k}$  et  $(-1)_{V_k}$ . Notons également  $A$  la valeur maximale de

$$|\sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \sigma_{k'}|$$

pour  $\sigma_{V_k} \in S^{V_k}$  tel que  $\sigma_{V_k} \not\equiv (+1)_{V_k}$  et  $\sigma_{V_k} \not\equiv (-1)_{V_k}$ . Il est alors immédiat que  $A < B$ .

Soit  $k \in \partial c_1$ . Ce site étant au bord du contour  $c_1$ , on sait donc que les spins de  $V_k$  ne peuvent être tous du même signe, *i.e.*  $\sigma_{V_k} \not\equiv (+1)_{V_k}$  et  $\sigma_{V_k} \not\equiv (-1)_{V_k}$ . D'où :

$$\frac{\cosh(\beta \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \sigma_{k'}^+)}{\cosh(\beta \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k))} \leq \frac{\cosh(\beta A)}{\cosh(\beta B)} < 1.$$

Ce qui permet d'obtenir la majoration suivante :

$$F(c_1) \leq \left( \frac{\cosh(\beta A)}{\cosh(\beta B)} \right)^{\#\partial c_1}.$$

On veut alors, étant donné un contour minimal  $c_1$ , comparer le cardinal du bord  $\partial c_1$  de ce contour à sa longueur  $L(c_1)$ . En remarquant qu'à chaque site  $k$  de  $\partial c_1$  on peut associer au plus 4 segments marqués de  $\mathbb{Z}_*^2$ , constitutifs de  $c_1$ , on en déduit que  $L(c_1) \leq 4\#\partial c_1$ . Il s'en suit

$$F(c_1) \leq \left( \frac{\cosh(\beta A)}{\cosh(\beta B)} \right)^{\#\partial c_1} \leq \left( \frac{\cosh(\beta A)}{\cosh(\beta B)} \right)^{\frac{L(c_1)}{4}},$$

et donc, en reportant dans (4.82) :

$$\mu_{BL}^+(\sigma_0 = -1) \leq \sum_{l \geq 0} \#C_1(l) \left( \frac{\cosh(\beta A)}{\cosh(\beta B)} \right)^{\frac{l}{4}}, \quad (4.84)$$

où  $C_1(l) = \{\text{contour minimal } c_1 : c_1 \sqsupset 0 \text{ et } L(c_1) = l\}$ .

Soit  $l$  un entier fixé. Majorons la grandeur  $\#C_1(l)$ .

On définit la transformation  $\varkappa$  qui à tout contour de  $C_1(l)$  associe un ensemble connexe de segments  $[a, b]$  ( $a, b$  éléments voisins de  $\mathbb{Z}_*^2$ ), coloriés chacun d'une couleur rouge ou verte, par la construction  $\varkappa$  définie ci-après. On désigne par  $\mathcal{D}$  l'ensemble de tous les graphes connexes constitués d'au plus  $2l$  segments coloriés (en rouge ou en vert). Pour  $c \in C_1(l)$ ,  $\varkappa(c)$  désigne plusieurs éléments possibles de  $\mathcal{D}$ , chacun étant obtenu comme la réunion des segments constitutifs de  $c$  coloriés en vert, auxquels on rajoute de nouveaux segments coloriés en rouge (au plus au nombre de  $l$ ) de telle sorte que l'ensemble de segments  $\varkappa(c)$  soit connexe. Ceci peut effectivement être réalisé en rajoutant – en rouge – au plus  $l$  segments. Précisons que l'on peut rajouter de différentes manières des segments rouges pour obtenir un graphe connexe bicolore « autorisé » ;  $\varkappa(c)$  n'est donc pas – *a priori* – réduit à un seul élément de  $\mathcal{D}$ . On note  $\varkappa(C_1(l))$  la sous-partie de  $\mathcal{D}$  définie par :  $\varkappa(C_1(l)) = \{\varkappa(c) : c \in C_1(l)\}$ . Plus précisément,  $\varkappa(C_1(l))$  est une sous-partie de l'ensemble  $\mathcal{C}_2$ , définie comme l'ensemble des graphes connexes de segments coloriés, au nombre au plus de  $2l$ , chacun de ces segments étant à une distance inférieure à  $l$  de l'origine. Par ailleurs, le coloriage des segments assure du fait que tous les éléments de  $\varkappa(c)$  proviennent bien du même contour  $c$ , ce qui, puisque  $\varkappa(C_1(l)) \subset \mathcal{C}_2$ , donne :

$$\#C_1(l) \leq \#\varkappa(C_1(l)) \leq \#\mathcal{C}_2.$$

On définit alors  $\mathcal{C}_3$  l'ensemble des graphes connexes d'au plus  $2l$  segments (non coloriés), chacun d'entre eux se trouvant au plus à la distance  $l$  de l'origine. Puisque chaque segment peut être colorié de deux manières, on obtient :

$$\#\mathcal{C}_2 \leq 2^{2l} \#\mathcal{C}_3.$$

On cherche alors à estimer  $\#\mathcal{C}_3$ . Pour cela, on introduit la notion de segment  $[a, b]$  orienté, noté  $\overrightarrow{[a, b]}$  pour signifier que l'on parcourt ce segment du site  $a$  vers le site  $b$  du réseau dual  $\mathbb{Z}_*^2$ . On dit également que  $a$  est un point du contour  $c$  s'il existe un point  $b$  tel que le segment  $[a, b]$  soit constitutif de  $c$ . On énonce le lemme suivant, dont la démonstration sera réalisée ultérieurement (cf. p.82) :

**Lemme 4.2.2** *Soit  $c$  un graphe connexe constitué d'un nombre fini de segments du type  $\{a, b\}$  où  $a$  et  $b$  sont deux sites voisins du réseau dual  $\mathbb{Z}_*^2$ . Soit  $a$  un point de  $\mathbb{Z}_*^2$  appartenant à  $c$ . Alors il existe une suite  $\Sigma$  de segments orientés adjacents (au sens où ils possèdent une extrémité commune)  $\overrightarrow{[a, a_1]}, \overrightarrow{[a_1, a_2]}, \dots, \overrightarrow{[a_{n-2}, a_{n-1}]}, \overrightarrow{[a_{n-1}, a]}$  telle que :*

- $c = [a, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-2}, a_{n-1}] \cup [a_{n-1}, a]$  ;
- chaque segment  $\overrightarrow{[a_i, a_{i+1}]}$  constitutif de  $c$  apparaît dans  $\Sigma$  au plus deux fois sous une des formes  $\overrightarrow{[a_i, a_{i+1}]}$  ou  $\overrightarrow{[a_{i+1}, a_i]}$ .

On désigne alors par  $\mathcal{C}_4$  l'ensemble des suites  $\Sigma$  de la forme  $(a, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{n-2}, a_{n-1}), (a_{n-1}, a)$  pour lesquelles  $n-1 \leq 2 \cdot 2l = 4l$ . On déduit alors de l'application du Lemme précédent la majoration :

$$\#\mathcal{C}_3 \leq l^2 \#\mathcal{C}_4 ,$$

où le terme  $l^2$  correspond au nombre de choix possibles du site  $a$ , à distance au plus  $l$  de l'origine.

Enfin, on remarque que :

$$\#\mathcal{C}_4 \leq 4^{4l} ,$$

ce qui permet de conclure que :

$$\#\mathcal{C}_1(l) \leq l^2 4^{5l} . \quad (4.85)$$

La majoration (4.84) devient alors :

$$\mu_{\mathcal{B}_L}^+(\sigma_0 = -1) \leq \sum_{l \geq 0} l^2 4^{5l} \left( \frac{\cosh(\beta A)}{\cosh(\beta B)} \right)^{\frac{l}{4}} , \quad (4.86)$$

où l'on vérifie aisément que le majorant tend vers 0 lorsque  $\beta$  tend vers l'infini. Ainsi, pour  $\beta$  assez grand (disons,  $\beta > \beta_0$ ), on a, par exemple,  $\mu_{\mathcal{B}_L}^+(\sigma_0 = -1) \leq \frac{1}{4}$ . En considérant une suite extraite de volumes  $(\mathcal{B}_{L_n})_n$ , de telle sorte que la famille de mesures  $(\mu_{\mathcal{B}_{L_n}}^+)_n$  converge, on construit ainsi une mesure de Gibbs  $\mu^+$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , qui vérifie :

$$\mu^+(\sigma_0 = -1) < \frac{1}{2} .$$

De manière analogue, considérant la condition au bord  $-\mathbf{1}$ , on construit une mesure de Gibbs  $\mu^-$ , limite d'une suite extraite  $(\mu_{\mathcal{B}_{L_n}}^-)_n$ . La propriété de symétrie aisément vérifiable

$$\mu_{\mathcal{B}_L}^-(-\sigma_{\mathcal{B}_L}) = \mu_{\mathcal{B}_L}^+(\sigma_{\mathcal{B}_L}) \quad (4.87)$$

permet alors de vérifier que

$$\mu_{\mathcal{B}_L}^-(\sigma_0 = -1) = 1 - \mu_{\mathcal{B}_L}^+(\sigma_0 = -1) . \quad (4.88)$$

Le résultat  $\mu^+(\sigma_0 = -1) < \frac{1}{2}$  implique alors que  $\mu^-(\sigma_0 = -1) > \frac{1}{2}$  et donc :

$$\mu^+(\sigma_0 = -1) < \frac{1}{2} < \mu^-(\sigma_0 = -1) ,$$

et en particulier  $\mu^- \neq \mu^+$ , ce qui assure la transition de phase.

cas où  $\mathcal{K}(0) < 0$ ,  $\mathcal{K}(e_1) > 0$  et  $\mathcal{K}(e_2) > 0$

Définissons dans ce cas la transformation bijective  $T$  de  $\{-1; +1\}^{\mathbb{Z}^2}$  vers  $\{-1; +1\}^{\mathbb{Z}^2}$  par

$$(T\sigma)_k = \begin{cases} \sigma_k & \text{si } k \in \mathbb{Z}^{2,\mathbf{p}} \\ -\sigma_k & \text{si } k \in \mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}} , \end{cases} \quad (4.89)$$

où  $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}^{2,\mathbf{P}} \cup_{\text{disjoint}} \mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}}$  ( $\cup_{\text{disjoint}}$  désigne l'union de deux ensembles disjoints) avec :

$$\mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}} \triangleq \{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid k_1 + k_2 \text{ impair}\} \quad (4.90)$$

et

$$\mathbb{Z}^{2,\mathbf{P}} \triangleq \{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid k_1 + k_2 \text{ pair}\} . \quad (4.91)$$

Soit  $\mathcal{K}^*$  une nouvelle fonction de couplage définie par

$$\mathcal{K}^*(k) = \begin{cases} \mathcal{K}(k) & \text{si } k \neq 0 ; \\ -\mathcal{K}(0) & \text{si } k = 0 . \end{cases} \quad (4.92)$$

et soit  $\varphi^*$  le potentiel associé à  $\mathcal{K}^*$  par la formule (4.34) (où, de plus, rappelons le,  $h = 0$ ). Afin d'éviter toute confusion, nous utilisons momentanément la notation  $\mu_{\Lambda, \varphi}^\tau$  et  $\mu_{\Lambda, \varphi^*}^\tau$  pour désigner les mesures de Gibbs à volume fini  $\Lambda$  et condition au bord  $\tau$  associées respectivement au potentiel  $\varphi$  et  $\varphi^*$ . On vérifie facilement que pour tout  $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ , pour tout  $\tau \in S^{\mathbb{Z}^d}$ , et pour tout  $\sigma \in S^\Lambda$ ,

$$\mu_{\Lambda, \varphi}^\tau(\sigma) = \mu_{\Lambda, \varphi^*}^{T\tau}(T\sigma) . \quad (4.93)$$

Nous utilisons alors un résultat usuel de la théorie des mesures de Gibbs, rappelé à la sous-section 2.2.2. Les éléments extrémaux du convexe des mesures de Gibbs associées à un potentiel s'obtiennent comme limite spatiale des mesures de Gibbs à volume fini avec condition au bord fixée. La relation (4.93) permet donc de montrer que l'application  $\mu \mapsto \mu \circ T^{-1}$  définit une bijection entre les mesures extrémales de  $\mathcal{G}(\varphi)$  et celles de  $\mathcal{G}(\varphi^*)$ , et définit ainsi également une bijection entre les ensembles convexes  $\mathcal{G}(\varphi)$  et  $\mathcal{G}(\varphi^*)$ .

Puisque l'on a supposé  $\mathcal{K}(0) < 0$ ,  $\mathcal{K}(e_1) > 0$  et  $\mathcal{K}(e_2) > 0$ , vu la définition de  $\mathcal{K}^*$ , le potentiel  $\varphi^*$  vérifie les conditions du cas précédent. Donc, si  $\beta > \beta_0$ , on a  $\#\mathcal{G}(\varphi^*) > 1$ , et vu la bijection établie, on en déduit  $\#\mathcal{G}(\varphi) > 1$ .

cas où  $\mathcal{K}(0) \geq 0$ ,  $\mathcal{K}(e_1) > 0$  et  $\mathcal{K}(e_2) < 0$

Remarquons que, par symétrie, cette preuve concerne également le cas où  $\mathcal{K}(0) \geq 0$ ,  $\mathcal{K}(e_1) < 0$  et  $\mathcal{K}(e_2) > 0$ .

Comme dans le cas précédent, la preuve de ce cas va être établie en se ramenant à l'existence de la transition de phase démontrée dans le premier cas. On redéfinit dans ce cas la fonction  $\mathcal{K}^b$  :

$$\mathcal{K}^b(k) = \begin{cases} -\mathcal{K}(e_2) & \text{si } k = e_2 \text{ ou } k = -e_2 ; \\ \mathcal{K}(k) & \text{si } k \notin \{e_2, -e_2\} . \end{cases} \quad (4.94)$$

L'application  $T^b$  considérée est définie par :

$$(T^b\sigma)_k = \begin{cases} \sigma_k & \text{si } k = (k_1, k_2) \text{ avec } k_2 \text{ pair} ; \\ -\sigma_k & \text{si } k = (k_1, k_2) \text{ avec } k_2 \text{ impair} . \end{cases} \quad (4.95)$$

On vérifie aisément que la relation

$$\mu_{\Lambda, \varphi}^\tau(\sigma) = \mu_{\Lambda, \varphi^b}^{T^b\tau}(T^b\sigma) \quad (4.96)$$



est alors vérifiée, ce qui permet d'affirmer que l'application  $\mu \mapsto \mu \circ T^{b-1}$  définit une bijection entre  $\mathcal{G}(\varphi)$  et  $\mathcal{G}(\varphi^b)$ . D'où le résultat. ■

Attirons l'attention sur le fait remarquable que les bijections  $\mu \mapsto \mu \circ T^{-1}$  entre  $\mathcal{G}(\varphi)$  et  $\mathcal{G}(\varphi^*)$  et  $\mu \mapsto \mu \circ T^b$  entre  $\mathcal{G}(\varphi)$  et  $\mathcal{G}(\varphi^b)$  établissent que la transition de phase a lieu pour les mêmes valeurs du paramètre  $\beta$  dans chacun des trois cas précédemment considérés.

Enfin, nous concluons cette sous-section 4.2.1 par la preuve suivante, laissée précédemment en suspens :

**Preuve du Lemme 4.2.2:**

On démontre ce résultat par récurrence sur le nombre  $m$  ( $m = n - 1$ ) de segments constitutifs de  $c$ . Si  $m = 1$ , le lemme est effectivement vérifié. Supposons dès lors que le résultat soit vérifié pour un nombre  $m - 1 \geq 1$  fixé de segments constitutifs de  $c$ . On considère alors  $[a, b]$  un segment de  $c$  et, quitte à échanger les rôles de  $a$  et de  $b$ , on considère  $x$  avec  $x \neq b$  de telle sorte que le segment  $[x, a]$  soit dans  $c$ . Soit  $c^* = c \setminus [a, b]$  et soit  $c_x^*$  l'ensemble des segments de  $c^*$  qui sont « connectés » à  $x$ , au sens où il existe une suite de segments adjacents de  $c^*$  les reliant à  $x$ . On démontre alors par l'absurde que  $c \setminus c_x^*$  est connexe.

En effet, si tel n'était pas le cas, il existerait un segment  $[\hat{a}, \hat{b}]$  de  $c \setminus c_x^*$  qui ne pourrait pas être connecté à  $[a, b]$  par des segments de  $c \setminus c_x^*$ . Mais  $c$  est connexe, donc il existe une suite de segments de  $c$  adjacents connectant  $[a, b]$  avec  $[\hat{a}, \hat{b}]$  et qui contient au moins un segment de  $c_x^*$ . Dans ce cas,  $[a, b]$  serait alors un segment de  $c_x^*$ , ce qui est impossible.

Il suffit enfin pour conclure d'appliquer dans un premier temps l'hypothèse de récurrence à  $c_x^*$  pour obtenir une suite de segments adjacents admettant  $x$  comme point de départ et d'arrivée et vérifiant la deuxième propriété énoncée dans le Lemme. Dans un second temps, l'utilisation de l'hypothèse de récurrence pour traiter de manière similaire le cas de  $c \setminus c_x^*$ , permet d'achever la preuve. ■

### 4.2.2 Cas particulier de l'interaction propre nulle (cas $\mathcal{K}(0) = 0$ )

Soit  $\varphi$  le potentiel sur  $S^{\mathbb{Z}^2}$  défini par (4.37). On suppose de plus, par rapport à la sous-section précédente, que  $\mathcal{K}(0) = 0$ , c'est à dire que :

$$\mathcal{K}(0) = 0, \quad \mathcal{K}(e_1) = \mathcal{K}(-e_1) \neq 0, \quad \mathcal{K}(e_2) = \mathcal{K}(-e_2) \neq 0, \quad \mathcal{K}(k) = 0 \text{ pour les autres } k. \quad (4.97)$$

On a alors  $V_k = \{k \pm e_1, k \pm e_2\}$  et dans ce cas,  $\forall k \in \mathbb{Z}^2, \forall \sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}$ ,

$$\mathcal{C}_k(\sigma) = \mathcal{K}(e_1)(\sigma_{k-e_1} + \sigma_{k+e_1}) + \mathcal{K}(e_2)(\sigma_{k-e_2} + \sigma_{k+e_2}). \quad (4.98)$$

On remarque que la géométrie de l'interaction entre les sites du réseau est dans ce cas particulier telle que les seules parties de  $\mathbb{Z}^2$  qui contribuent à l'énergie du système

sont les parties  $V_k$  ( $k \in \mathbb{Z}^2$ ) qui ne font intervenir que les sites d'un même sous-réseau de  $\mathbb{Z}^2$  : celui des **sites pairs**, ou celui des **sites impairs**, son complémentaire dans  $\mathbb{Z}^2$ , définis respectivement en (4.91) et (4.90) :

$$\begin{cases} V_k \subset \mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}} \text{ si } k \in \mathbb{Z}^{2,\mathbf{p}} ; \\ V_k \subset \mathbb{Z}^{2,\mathbf{p}} \text{ si } k \in \mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}} . \end{cases} \quad (4.99)$$

Pour  $\Delta$  une partie de  $\mathbb{Z}^2$ , on définit également :  $\Delta^{\mathbf{p}} \triangleq \Delta \cap \mathbb{Z}^{2,\mathbf{p}}$ ,  $\Delta^{\mathbf{i}} \triangleq \Delta \cap \mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}}$  et on remarque que :  $\Delta = \Delta^{\mathbf{i}} \cup_{\text{disjoint}} \Delta^{\mathbf{p}}$ . Soit  $U : S^{\mathbb{Z}^{2,\mathbf{p}}} \times S^{\mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}}} \longrightarrow S^{\mathbb{Z}^2} ; (\sigma^{\mathbf{p}}, \sigma^{\mathbf{i}}) \mapsto \sigma^{\mathbf{p}}\sigma^{\mathbf{i}}$  la

bijection qui identifie  $S^\Delta$  avec  $S^{\Delta^{\mathbf{p}}} \times S^{\Delta^{\mathbf{i}}}$ . On remarque que les configurations  $(\sigma^{\mathbf{p}})_\Delta$ ,  $(\sigma_\Delta)^{\mathbf{p}}$ , et  $\sigma_{(\Delta^{\mathbf{p}})}$  sont identiques. On utilise donc sans équivoque possible la notation  $\sigma_\Delta^{\mathbf{p}}$ .

Le résultat suivant montre que, compte tenu de (4.99), le système se scinde en deux sous-systèmes indépendants sur chacun des sous-réseaux  $\mathbb{Z}^{2,\mathbf{p}}$  et  $\mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}}$ .

### Propriété 4.2.3 (Découplage de deux sous-réseaux)

Soit  $\varphi$  le potentiel sur  $S^{\mathbb{Z}^2}$  défini par (4.37), où l'on suppose de plus que la fonction de couplage vérifie (4.97). Pour tout  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^2$ , et tout  $\tau \in S^{\mathbb{Z}^2}$  condition au bord, la mesure de Gibbs à volume fini  $\mu_\Lambda^\tau$  s'écrit :

$$\mu_\Lambda^\tau = \mu_\Lambda^{\tau,\mathbf{p}} \otimes \mu_\Lambda^{\tau,\mathbf{i}} \quad (4.100)$$

où  $\mu_\Lambda^{\tau,\mathbf{p}}$  et  $\mu_\Lambda^{\tau,\mathbf{i}}$  sont respectivement les mesures de Gibbs à volume fini  $\Lambda^{\mathbf{p}}$  et  $\Lambda^{\mathbf{i}}$  associées à  $\varphi$ , c'est à dire que ces mesures de probabilités s'écrivent respectivement sur  $S^{\Lambda^{\mathbf{p}}}$  et  $S^{\Lambda^{\mathbf{i}}}$  :

$$\mu_\Lambda^{\tau,\mathbf{p}}(\sigma^{\mathbf{p}}) = \frac{1}{\mathcal{Z}_\Lambda^{\tau,\mathbf{p}}} \prod_{k \in (\Lambda \cup \partial_e \Lambda)^{\mathbf{i}}} \cosh(\beta \mathcal{C}_k(\sigma_\Lambda^{\mathbf{p}} \tau_{\Lambda^c}^{\mathbf{p}})) , \quad (4.101)$$

$$\mu_\Lambda^{\tau,\mathbf{i}}(\sigma^{\mathbf{i}}) = \frac{1}{\mathcal{Z}_\Lambda^{\tau,\mathbf{i}}} \prod_{k \in (\Lambda \cup \partial_e \Lambda)^{\mathbf{p}}} \cosh(\beta \mathcal{C}_k(\sigma_\Lambda^{\mathbf{i}} \tau_{\Lambda^c}^{\mathbf{i}})) , \quad (4.102)$$

avec les fonctions de partitions  $\mathcal{Z}_\Lambda^{\tau,\mathbf{p}}$  et  $\mathcal{Z}_\Lambda^{\tau,\mathbf{i}}$ .

On attire l'attention sur le fait que plus précisément, la formule (4.100) s'écrit :

$$\mu_\Lambda^\tau = \mu_\Lambda^{\tau_{\Lambda^c}^{\mathbf{p}} \tau_{\Lambda^c}^{\mathbf{i}}} = \mu_\Lambda^{\tau_{\Lambda^c}^{\mathbf{p},\mathbf{p}}} \otimes \mu_\Lambda^{\tau_{\Lambda^c}^{\mathbf{i},\mathbf{i}}} . \quad (4.103)$$

**Preuve :**

Puisque

$$\mathcal{Z}_\Lambda^\tau = \sum_{\sigma = \sigma^{\mathbf{p}} \sigma^{\mathbf{i}} \in S^{\Lambda^{\mathbf{p}}} \times S^{\Lambda^{\mathbf{i}}}} \left( \prod_{k \in (\Lambda \cup \partial_e \Lambda)^{\mathbf{p}}} \cosh(\beta \mathcal{C}_k(\sigma^{\mathbf{i}})) \prod_{k \in (\Lambda \cup \partial_e \Lambda)^{\mathbf{i}}} \cosh(\beta \mathcal{C}_k(\sigma^{\mathbf{p}})) \right)$$

Compte tenu de la forme explicite du potentiel  $\varphi$  et de la géométrie de l'interaction, on vérifie immédiatement qu'on a bien :

$$\mathcal{Z}_\Lambda^\tau = \mathcal{Z}_\Lambda^{\tau,\mathbf{p}} \mathcal{Z}_\Lambda^{\tau,\mathbf{i}} , \quad (4.104)$$

où :

$$\mathcal{Z}_\Lambda^{\tau, \mathbf{P}} \triangleq \sum_{\sigma^{\mathbf{P}} \in S^{\Lambda^{\mathbf{P}}}} \left( \prod_{k \in (\Lambda \cup \partial_e \Lambda)^i} \cosh(\beta \mathcal{C}_k(\sigma_\Lambda^{\mathbf{P}} \tau_\Lambda^{\mathbf{P}^c})) \right) \quad (4.105)$$

et

$$\mathcal{Z}_\Lambda^{\tau, \mathbf{i}} \triangleq \sum_{\sigma^{\mathbf{i}} \in S^{\Lambda^{\mathbf{i}}}} \left( \prod_{k \in (\Lambda \cup \partial_e \Lambda)^{\mathbf{P}}} \cosh(\beta \mathcal{C}_k(\sigma_\Lambda^{\mathbf{i}} \tau_\Lambda^{\mathbf{i}^c})) \right). \quad (4.106)$$

On en déduit :  $\mu_\Lambda^\tau(\sigma) = \mu_\Lambda^\tau(\sigma^{\mathbf{P}} \sigma^{\mathbf{i}}) =$

$$\frac{\prod_{k \in (\Lambda \cup \partial_e \Lambda)^i} \cosh(\beta \mathcal{C}_k(\sigma^{\mathbf{P}}))}{\mathcal{Z}_\Lambda^{\tau, \mathbf{P}}} \frac{\prod_{k \in (\Lambda \cup \partial_e \Lambda)^{\mathbf{P}}} \cosh(\beta \mathcal{C}_k(\sigma^{\mathbf{i}}))}{\mathcal{Z}_\Lambda^{\tau, \mathbf{i}}}.$$

On a alors :  $\mu_\Lambda^\tau(\sigma^{\mathbf{P}} \sigma^{\mathbf{i}}) = \mu_\Lambda^{\tau, \mathbf{P}}(\sigma^{\mathbf{P}}) \mu_\Lambda^{\tau, \mathbf{i}}(\sigma^{\mathbf{i}})$ , c'est à dire :  $\mu_\Lambda^\tau = \mu_\Lambda^{\tau, \mathbf{P}} \otimes \mu_\Lambda^{\tau, \mathbf{i}}$ . ■

On précise alors ce résultat en remarquant que chacun des sous-systèmes indépendants est équivalent à un modèle d'Ising. Le lemme suivant détaille et exploite ainsi cette remarque.

#### Lemme 4.2.4

Soit  $\varphi$  le potentiel sur  $S^{\mathbb{Z}^2}$  défini par

$$\begin{cases} \varphi_{V_k}(\sigma_{V_k}) &= -\ln \cosh(\beta \mathcal{C}_k(\sigma)), \\ \varphi_A(\sigma_A) &= 0 \text{ pour tous les autres ensembles } A, \end{cases}$$

où  $\mathcal{C}_k(\sigma) = \mathcal{K}(e_1)(\sigma_{k-e_1} + \sigma_{k+e_1}) + \mathcal{K}(e_2)(\sigma_{k-e_2} + \sigma_{k+e_2})$ . Alors l'ensemble  $\text{ex } \mathcal{G}(\varphi)$  des éléments extrémaux de  $\mathcal{G}(\varphi)$  se décompose en le produit de deux ensembles identiques  $\text{ex } \mathcal{G}(\psi)$  où  $\psi$  est le potentiel d'Ising anisotrope suivant :

$$\begin{cases} \psi_A(\sigma) = \beta \mathcal{K}(e_1) \sigma_k \sigma_{k+e_1} \text{ si } A = \{k, k+e_1\} \text{ pour } k \in \mathbb{Z}^2, \\ \psi_A(\sigma) = \beta \mathcal{K}(e_2) \sigma_k \sigma_{k+e_2} \text{ si } A = \{k, k+e_2\} \text{ pour } k \in \mathbb{Z}^2. \end{cases} \quad (4.107)$$

#### Preuve :

Le potentiel  $\varphi$  ainsi que le bi-potentiel  $\phi$  ont été définis à la section 3.5. Il y a été de plus rappelé que  $\mathcal{G}(\varphi)$  est en bijection avec  $\mathcal{G}(\phi)$ .

D'après la preuve de la Propriété 4.2.3, en définissant  $\phi^{\mathbf{P}}$  et  $\phi^{\mathbf{i}}$  comme les restrictions de  $\phi$ , potentiel sur  $S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}}$ , respectivement sur les sous-graphes, complémentaires dans  $S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}}$  :

$$(\mathbb{Z}^{2, \mathbf{P}} \times \{1\}) \underset{\text{disjoint}}{\cup} (\mathbb{Z}^{2, \mathbf{i}} \times \{0\}) \quad \text{et} \quad (\mathbb{Z}^{2, \mathbf{i}} \times \{1\}) \underset{\text{disjoint}}{\cup} (\mathbb{Z}^{2, \mathbf{P}} \times \{0\}),$$

il est immédiat que  $\forall \bar{\xi} = (\xi^0, \xi^1) \in S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}}$ ,

$$\phi(\bar{\xi}) = \phi^{\mathbf{P}}(\xi_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{i}}^0 \xi_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{P}}^1) + \phi^{\mathbf{i}}(\xi_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{P}}^0 \xi_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{i}}^1).$$

D'où  $\text{ex } \mathcal{G}(\phi) = \text{ex } \mathcal{G}(\phi^{\mathbf{P}}) \otimes \text{ex } \mathcal{G}(\phi^{\mathbf{i}})$ . Remarquons que cette égalité n'est plus vraie si on ne se restreint pas aux éléments extrémaux.

On définit de plus l'application  $\Xi$  de  $S^{(\mathbb{Z}^{2,\mathbf{P}} \times \{1\}) \cup_{\text{disjoint}} (\mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}} \times \{0\})}$  vers  $S^{\mathbb{Z}^2}$  par

$$\left( \Xi(\xi_{\mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}}}^0, \xi_{\mathbb{Z}^{2,\mathbf{P}}}^1) \right)_k = \begin{cases} \xi_k^1 & \text{si } k \text{ pair} \\ \xi_k^0 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases} \quad (4.108)$$

et dont l'application réciproque se formule alors :  $\Xi^{-1}(\sigma) = (\sigma^{\mathbf{P}}, 1)(\sigma^{\mathbf{i}}, 0)$  pour tout  $\sigma \in S^{\mathbb{Z}^2}$ . On définit consécutivement le potentiel  $\psi$ , pour tout  $\sigma \in S^{\mathbb{Z}^2}$ , par :

$$\psi(\sigma) = \phi^{\mathbf{P}}\left(\Xi^{-1}(\sigma)\right), \quad (4.109)$$

c'est à dire, de manière explicite, pour  $\sigma \in S^{\mathbb{Z}^2}$ ,

$$\psi_{\{k,j\}}(\sigma) = \beta \mathcal{K}(j - k) \sigma_j \sigma_k \quad \text{si } \|j - k\|_1 = 1 \text{ et } j \text{ impair, } k \text{ pair}. \quad (4.110)$$

Comme  $\mathcal{K}$  est une fonction supposée paire,  $\psi$  définit bien un potentiel, qui est de plus invariant par translation. Plus précisément, on remarque que  $\psi$  est un potentiel d'Ising anisotrope. Il est alors aisé de vérifier que  $\Xi$  induit une bijection de  $\mathcal{G}(\phi^{\mathbf{P}})$  vers  $\mathcal{G}(\psi)$ , ensemble des mesures de Gibbs associées au potentiel d'Ising anisotrope en dimension 2.

De manière analogue, on démontre que  $\mathcal{G}(\phi^{\mathbf{i}})$  est en bijection avec l'ensemble  $\mathcal{G}(\psi)$ , ensemble des mesures de Gibbs associées au potentiel d'Ising en dimension 2, même ensemble que précédemment (même coefficients d'interaction pour le potentiel  $\psi$ ) puisque  $\mathcal{K}$  est paire. Le résultat est alors établi. ■

Plus précisément, les résultats connus relatifs au modèle d'Ising isotrope en dimension 2 permettent de formuler le Théorème suivant, où l'ensemble  $\mathcal{G}(\varphi)$  est identifié avec exactitude. On note :

$$\mu^{+,\mathbf{P}} = \mu_{\mathbb{Z}^{2,\mathbf{P}}}^+, \quad \mu^{+,\mathbf{i}} = \mu_{\mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}}}^+, \quad \mu^{-,\mathbf{P}} = \mu_{\mathbb{Z}^{2,\mathbf{P}}}^-, \quad \mu^{-,\mathbf{i}} = \mu_{\mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}}}^-.$$

### Théorème 4.2.5

Soit  $\varphi$  le potentiel sur  $S^{\mathbb{Z}^2}$  défini par

$$\begin{cases} \varphi_{V_k}(\sigma_{V_k}) &= -\ln \cosh(\beta \mathcal{C}_k(\sigma)), \\ \varphi_A(\sigma_A) &= 0 \quad \text{pour tous les autres ensembles } A, \end{cases}$$

avec  $\mathcal{C}_k(\sigma) = K(\sigma_{k-e_1} + \sigma_{k+e_1} + \sigma_{k-e_2} + \sigma_{k+e_2})$  où  $K \in \mathbb{R}$ . Alors il existe un unique  $\beta_c = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2K} > 0$  tel que :

$$\begin{aligned} \forall \beta \in [0, \beta_c[ & \quad \#\mathcal{G}(\varphi) = 1 \quad (\text{zone d'unicité}) ; \\ \forall \beta > \beta_c & \quad \#\mathcal{G}(\varphi) > 1 \quad (\text{zone de transition de phase}). \end{aligned}$$

De plus, l'ensemble des mesures de Gibbs  $\mathcal{G}(\varphi)$ , lorsqu'il y a transition de phase, est tel que :

$$\mathcal{G}(\varphi) = \diamond \triangleq \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \mu^{++} + \alpha_2 \mu^{-+} + \alpha_3 \mu^{+-} + \alpha_4 \mu^{--} : \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ 0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \end{array} \right\} \quad (4.111)$$

où :

$$\mu^{++} = \mu^{+,\mathbf{P}} \otimes \mu^{+,\mathbf{i}}, \quad \mu^{+-} = \mu^{+,\mathbf{P}} \otimes \mu^{-,\mathbf{i}}, \quad \mu^{-+} = \mu^{-,\mathbf{P}} \otimes \mu^{+,\mathbf{i}}, \quad \mu^{--} = \mu^{-,\mathbf{P}} \otimes \mu^{-,\mathbf{i}}. \quad (4.112)$$

**Preuve :**

Le résultat du Lemme 4.2.4 s'applique dans ce cas particulier où  $\mathcal{K}(e_1) = \mathcal{K}(e_2) = K$ . Le potentiel  $\psi$  est alors le potentiel d'Ising isotrope usuel. Comme  $\varphi$  ne dépend pas du signe de  $K$ , il est en fait toujours possible de se ramener à un potentiel d'Ising ferromagnétique ( $K > 0$ ). Il est établi, en se ramenant à  $K = 1$ , que dans ce cas le paramètre  $\beta_c$  est égal à  $\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2}$  (cf. [Geo88], p. 100 et 450), et qu'il y a donc transition de phase pour  $\psi$  si  $\beta > \beta_c$ , et unicité de la mesure de Gibbs pour  $\beta < \beta_c$ . Les bijections entre  $\text{ex } \mathcal{G}(\varphi)$ ,  $\text{ex } \mathcal{G}(\phi)$  et  $\text{ex } \mathcal{G}(\psi) \otimes \text{ex } \mathcal{G}(\psi)$  permettent alors de conclure.

D'autre part, à l'extraction d'une sous-suite de volumes adéquate près, on a

$$\mu^{+,P} = \lim_{\Lambda^P \rightarrow \mathbb{Z}^{2,P}} \mu_{\Lambda^P}^+, \mu^{+,i} = \lim_{\Lambda^i \rightarrow \mathbb{Z}^{2,i}} \mu_{\Lambda^i}^+, \mu^{-,P} = \lim_{\Lambda^P \rightarrow \mathbb{Z}^{2,P}} \mu_{\Lambda^P}^-, \mu^{-,i} = \lim_{\Lambda^i \rightarrow \mathbb{Z}^{2,i}} \mu_{\Lambda^i}^-.$$

Les mesures  $\mu^{++}, \mu^{-+}, \mu^{+-}, \mu^{--}$  sont donc des mesures de Gibbs associées au potentiel  $\varphi$ , donc  $\diamond \subset \mathcal{G}(\varphi)$ .

Afin d'établir l'inclusion réciproque, réécrivons le résultat de la Proposition précédente. Soit  $\rho_{\Lambda}^{\tau}$  la mesure de Gibbs à volume fini  $\Lambda$  et condition au bord  $\tau$  associée au potentiel d'Ising  $\psi$ , c'est à dire :

$$\rho_{\Lambda}^{\tau}(\sigma) = \frac{1}{\mathcal{N}_{\Lambda}^{\tau}} \exp \left( \beta \left( \sum_{k \in \Lambda \text{ ou } k+e_1 \in \Lambda} \mathcal{K}(e_1) \tilde{\sigma}_k \tilde{\sigma}_{k+e_1} + \sum_{k \in \Lambda \text{ ou } k+e_2 \in \Lambda} \mathcal{K}(e_2) \tilde{\sigma}_k \tilde{\sigma}_{k+e_2} \right) \right)$$

avec  $\tilde{\sigma} = \sigma_{\Lambda} \tau_{\Lambda^c}$  et  $\mathcal{N}_{\Lambda}^{\tau}$  fonction de partition. On vérifie facilement que :

$$\begin{aligned} \wp_{\Lambda^P} \rho_{\Lambda}^{\tau}(\sigma_{\Lambda^P}) &= \sum_{\sigma_{\Lambda^i}} \rho_{\Lambda}^{\tau}(\sigma) \\ &= \frac{2}{\mathcal{N}_{\Lambda}^{\tau}} \prod_{k \in \Lambda^i} \cosh \left( \beta \sum_j \mathcal{K}(j-k) \tilde{\sigma}_j \right) \\ &= \mu_{\Lambda^P}^{\tau}(\sigma_{\Lambda^P}). \end{aligned}$$

Comme  $\varphi$  est invariant par le changement  $\mathcal{K} \mapsto -\mathcal{K}$ , on peut toujours se ramener à  $\rho_{\Lambda}^{\tau}$  mesure de Gibbs associée à un potentiel d'Ising ferromagnétique en dimension 2, pour lequel il a été prouvé que toute mesure de Gibbs  $\rho$  s'écrit comme combinaison linéaire convexe de  $\rho^+$  et  $\rho^-$  où  $\rho^+ = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^2} \rho_{\Lambda}^+$  et  $\rho^- = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^2} \rho_{\Lambda}^-$ . Soit  $\mu^{,P}$  une mesure de Gibbs extrémale de  $\mathcal{G}(\varphi^P)$  où  $\varphi^P$  est la restriction du potentiel  $\varphi$  au sous-réseau  $\mathbb{Z}^{2,P}$ , *i.e.*  $\varphi^P(\sigma) = (\varphi_{V_k}(\sigma^P))_{k \in \mathbb{Z}^{2,i}}$ . On sait qu'elle s'obtient comme une limite, à l'extraction d'une sous-suite près,  $\lim_{\Lambda^P \rightarrow \mathbb{Z}^2} \mu_{\Lambda^P}^{\tau}$ , pour une certaine condition au bord  $\tau$ . D'après l'égalité précédemment remarquée, on a alors

$$\mu^{,P} = \lim_{\Lambda^P \rightarrow \mathbb{Z}^{2,P}} \wp_{\Lambda^P} \rho_{\Lambda}^{\tau} = \lim_{\Lambda^P \rightarrow \mathbb{Z}^{2,P}} \left( (1-\alpha) \wp_{\Lambda^P} \rho_{\Lambda}^- + \alpha \wp_{\Lambda^P} \rho_{\Lambda}^+ \right).$$

Comme on vérifie que  $\lim_{\Lambda^P \rightarrow \mathbb{Z}^{2,P}} \wp_{\Lambda^P} \rho_{\Lambda}^+$  est également majorant, au sens de l'ordre stochastique, des mesures de Gibbs associées à  $\varphi$  sur  $\mathbb{Z}^{2,P}$ , on en déduit que  $\lim_{\Lambda^P} \rho_{\Lambda}^+ = \mu^{+,P}$ . De manière symétrique, on a des résultats similaires avec la condition au bord  $-1$ . Donc, toute mesure de Gibbs extrémale  $\mu^{,P}$  s'écrit comme combinaison linéaire convexe de  $\mu^{+,P}$  et  $\mu^{-,P}$ , et de même alors pour toute mesure de Gibbs de  $\mathcal{G}(\varphi^P)$ .

De ce fait, toute mesure de  $\text{ex } \mathcal{G}(\varphi) = \text{ex } \mathcal{G}(\varphi^{\mathbf{P}}) \otimes \text{ex } \mathcal{G}(\varphi^{\mathbf{i}})$  est un élément de

$$\{\mu^{-,\mathbf{P}} ; \mu^{+,\mathbf{P}}\} \otimes \{\mu^{-,\mathbf{i}} ; \mu^{+,\mathbf{i}}\} .$$

D'où le résultat. ■

Il est immédiat que la famille  $\{\mu^{++}, \mu^{+-}, \mu^{-+}, \mu^{--}\}$  d'éléments de l'espace vectoriel dual de  $\mathcal{C}(S^{\mathbb{Z}^d}, \mathbb{R})$  constitue une famille libre. On peut donc représenter le convexe  $\diamond$  comme un tétraèdre.

Remarquons également que la situation où  $\mathcal{K}(0) = 0$  étant plus symétrique, son analyse permet de mieux appréhender le cas général pour lequel  $\mathcal{K}(0) \neq 0$ . Par ailleurs, dans le cas où la fonction d'interaction  $\mathcal{K}(\cdot)$  est isotrope, le lien remarquable avec le modèle d'Ising isotrope fait de ce cas un modèle où  $\mathcal{G}(\varphi)$  est connu avec précision, et cela pour toutes les valeurs de  $\beta$ , la valeur critique  $\beta_c$  étant également connue avec exactitude. Ce modèle sera particulièrement intéressant au Chapitre 7 afin de tester le bon fonctionnement des algorithmes qui y seront développés.

Bien plus, cette particularité permet également d'envisager au Chapitre 7 un algorithme parallèle, fondé sur l'évolution dynamique de cette dynamique PCA, et convergeant vers les mesures de Gibbs associées au modèle d'Ising.

Enfin, lorsque la fonction  $\mathcal{K}(\cdot)$  d'interaction n'est plus isotrope, précisons qu'on ne peut plus expliciter complètement la structure de  $\mathcal{G}(\varphi)$  car les mesures de Gibbs pour le modèle d'Ising anisotrope ne sont pas connues avec exactitude.

### 4.3 Action de la dynamique sur l'ensemble des mesures de Gibbs

Revenons maintenant au cas plus général de la dimension  $d \geq 1$  et  $h$  quelconque.

**En l'absence de transition de phase**, pour la dynamique  $P$  de la classe  $\mathcal{C}$  considérée, on sait, d'après le Chapitre 3, que l'on a (3.31) :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_i = \mathcal{S}_i = \mathcal{G}_i(\varphi) = \mathcal{G}(\varphi) = \{\mu\} .$$

**L'unique mesure de Gibbs coïncide donc avec l'unique mesure réversible, et est donc invariante sous l'action de la dynamique.** Nous savons que cette situation apparaît en dimension  $d = 1$  puisqu'il n'y a alors jamais de transition de phase.

Dans cette section, nous portons notre attention, **lorsqu'il y a transition de phase**, sur le **comportement des différentes mesures de Gibbs sous l'action de la dynamique PCA**. Nous considérons uniquement le **cas monotone** pour lequel nous disposons des diverses inégalités stochastiques établies à la première section de ce chapitre. La sous-section 4.3.1 est consacrée au cas  $\mathcal{K}(\cdot) \geq 0$ , correspondant à une dynamique  $P$  attractive. La Proposition 4.3.1 est établie pour la dimension  $d \geq 1$  et  $h$  quelconque. Plusieurs mesures de Gibbs stationnaires différentes sont identifiées et la **non-ergodicité de la dynamique PCA attractive en présence de transition de phase** mise en évidence.

La sous-section 4.3.2 considère le cas  $\mathcal{K}(\cdot) \leq 0$  pour lequel la dynamique  $P$  est répulsive. La Proposition 4.3.2 concerne le cas général d'une dynamique de la classe  $\mathcal{C}$ , alors que la Proposition 4.3.3 précise ce résultat pour une dynamique PCA de la classe  $\mathcal{C}_0$  de portée 1 en dimension  $d = 2$ , pour laquelle la transition de phase a été établie, à  $\beta$  grand, à la sous-section précédente. La non-ergodicité de la dynamique répulsive considérée est à nouveau établie. Le résultat de la Proposition 4.3.3 permet également en particulier d'exhiber des **mesures de Gibbs pour le potentiel  $\varphi$  associé à la dynamique qui ne sont pas stationnaires**, donc des mesures de Gibbs 2 périodiques, complétant en cela l'illustration de la figure 3.1.

Enfin, la sous-section 4.3.3 examine du point de vue de la dynamique le cas particulier de la dimension  $d = 2$ ,  $h = 0$ , portée 1 et interaction propre nulle  $\mathcal{K}(0) = 0$  déjà évoqué (Proposition 4.3.4). Un résultat dans un cas non monotone (*i.e.* pour lequel on n'a ni  $\mathcal{K}(\cdot) \leq 0$ , ni  $\mathcal{K}(\cdot) \geq 0$ ) y est présenté (Proposition 4.3.5). L'action de la dynamique PCA sur l'ensemble des mesures de Gibbs  $\mathcal{G}(\varphi) = \diamond$  y est détaillée. Des **mesures de Gibbs stationnaires, non invariées par translation** y sont en particulier également exhibées.

Précisons préalablement au développement de cette partie que l'on définit dans le cas monotone ( $\mathcal{K}(\cdot) \leq 0$  ou  $\mathcal{K}(\cdot) \geq 0$ ) les mesures de Gibbs extrémales sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  associées à  $\varphi$ ,  $\mu^-$  et  $\mu^+$ , éventuellement confondues, par les limites :

$$\mu^- \triangleq \lim_{L \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{B}_L}^-, \quad \mu^+ \triangleq \lim_{L \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{B}_L}^+,$$

ces limites étant bien définies dans le cas monotone, comme cela est détaillé dans la sous-section 2.2.3. De plus, compte tenu du résultat de la Proposition 4.1.9, on sait que ces mesures sont aussi extrémales au sens de l'ordre stochastique pour l'ensemble  $\mathcal{G}(\varphi)$ .

### 4.3.1 Cas attractif

De manière similaire aux mesures  $\mu^\pm$ , on pose

$$\nu^+ \triangleq \lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^+, \quad \nu^- \triangleq \lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^-. \quad (4.113)$$

En effet, la Proposition 4.1.11 fournit la monotonie des mesures  $\nu_\Lambda^\tau$  lorsque la condition au bord  $\tau$  croît, ce qui est suffisant, par analogie avec la sous-section 2.2.3, pour assurer que les limites précédentes sont bien définies.

On peut alors énoncer :

#### Proposition 4.3.1

Soit  $P$  la dynamique PCA définie par (4.1) avec  $\mathcal{K}(\cdot) \geq 0$ . On a les relations suivantes :

- (i)  $\mu^+ = \nu^+$  et  $\mu^- = \nu^-$  *i.e.* que les mesures de Gibbs extrémales et les mesures stationnaires extrémales coïncident;
- (ii) il y a transition de phase pour le potentiel canonique  $\varphi$  si et seulement si  $\nu^- \neq \nu^+$ . En particulier, la dynamique PCA sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  est alors non ergodique.

**Preuve :**

On rappelle que la Propriété 4.1.2 a établi que la dynamique PCA est attractive si et seulement si  $\mathcal{K}(\cdot) \geq 0$ . Comme  $\mathcal{K}(\cdot) \geq 0$ , nous savons, d'après la Proposition 4.1.9, que les mesures de Gibbs associées à  $\varphi$  sont monotones, et qu'alors, d'après la Proposition 2.2.12, il y a transition de phase si et seulement si  $\mu^- \neq \mu^+$ . On suppose être dans le cas de la transition de phase, donc  $\mu^-$  et  $\mu^+$  sont deux mesures distinctes.

D'autre part, le Corollaire 4.1.14 a établi que, pour un volume  $\Lambda$  fini fixé, on a :  $\mu_\Lambda^+ \preceq \nu_\Lambda^+$  et  $\nu_\Lambda^- \preceq \mu_\Lambda^-$ .

En passant à la limite dans  $\mu_\Lambda^+ \preceq \nu_\Lambda^+$ , on obtient :

$$\mu^+ \preceq \nu^+ . \quad (4.114)$$

Puisque  $\nu_\Lambda^+$  est une mesure réversible pour  $P_\Lambda^+$ , d'après la Proposition 3.3.1, on sait que  $\nu^+$  est une mesure réversible pour la dynamique parallèle à volume infini  $P$ . Comme  $P$  est une dynamique réversible du type  $\mathcal{D}(\phi)$ , on sait que toute mesure réversible pour  $P$  est de Gibbs pour le potentiel canoniquement associé  $\varphi$ . La mesure  $\nu^+$  est donc une mesure de Gibbs vérifiant (4.114). Or, d'après (4.47), toute mesure de Gibbs  $\mu$  vérifie :

$$\mu^- \preceq \mu \preceq \mu^+ .$$

Donc,  $\nu^+ \preceq \mu^+$ , ce qui, conjugué à (4.114) donne  $\nu^+ = \mu^+$ . Et de ce fait,  $\mu^+$  est une mesure réversible.

De manière analogue,  $\mu^- \preceq \mu$  pour toute mesure de Gibbs  $\mu$  associée à  $\varphi$ , et  $\nu^- = \lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{B_L}^-$  mesure réversible, donc de Gibbs, et majorée stochastiquement par  $\mu^-$ . D'où, comme précédemment  $\mu^- = \nu^-$ .

$\mu^-$  et  $\mu^+$  étant alors deux mesures stationnaires distinctes, la dynamique PCA ne peut être ergodique s'il y a transition de phase pour  $\varphi$ . ■

Bien que les dynamiques PCA à volume fini  $P_\Lambda^\tau$  soient, d'après la Proposition 3.2.1, toujours ergodiques, nous remarquons ici que la dynamique à volume infini peut ne pas être ergodique, justifiant ainsi plus précisément l'étude des dynamiques PCA sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , au comportement plus riche.

### 4.3.2 Cas répulsif

Dans le cas où la dynamique PCA de la classe  $\mathcal{C}$  considérée est répulsive, si l'on sait de plus que les mesures  $\mu^-$  et  $\mu^+$  sont non stationnaires, alors la Proposition suivante établit qu'elles sont successivement l'image l'une de l'autre sous l'action de la dynamique  $P$ .

**Proposition 4.3.2**

*Soit  $P$  la dynamique PCA définie par (4.1) répulsive ( $\mathcal{K}(\cdot) \leq 0$ ). S'il y a transition de phase pour le potentiel  $\varphi$ , et si les mesures  $\mu^-$  et  $\mu^+$ , mesures de Gibbs extrémales distinctes sont non stationnaires, alors :*

$$\mu^- P = \mu^+ \quad \text{et} \quad \mu^+ P = \mu^- . \quad (4.115)$$



**Preuve :**

D'après (4.47) on sait que, sous l'hypothèse  $\mathcal{K}(\cdot) \leq 0$ , les mesures  $\mu^-$  et  $\mu^+$  extrémales sont aussi extrémales au sens de l'ordre stochastique pour l'ensemble des mesures de Gibbs  $\mathcal{G}(\varphi)$ . Comme, sous  $\mathcal{K}(\cdot) \leq 0$ , les mesures de Gibbs sont monotones, on sait qu'il y a transition de phase pour  $\varphi$  si et seulement si  $\mu^- \neq \mu^+$ . On suppose présentement être en situation de transition de phase, donc  $\mu^-$  et  $\mu^+$  sont deux mesures distinctes.

Comme  $\mu^-$  et  $\mu^+$  sont deux mesures de Gibbs, d'après le résultat de Kozlov-Vasilyev, rappelé à la section 3.5 (p. 44) concernant les dynamiques PCA réversibles, on sait que  $\mu^-$  et  $\mu^+$  sont, ou bien stationnaires, ou bien 2-périodiques. Ayant ici supposé qu'elles ne sont pas stationnaires, on a donc :

$$\mu^+ P \neq \mu^+, \quad \mu^+ P^{(2)} = \mu^+, \quad \mu^- P \neq \mu^-, \quad \mu^- P^{(2)} = \mu^- .$$

Par ailleurs, d'après le résultat de Dai Pra rappelé à la sous-section 3.4.2 (p. 42), puisque  $\mu^+ \in \mathcal{G}(\varphi)$ , alors  $\mu^+ P \in \mathcal{G}(\varphi)$ , et de ce fait :

$$\mu^- \preceq \mu^+ P \preceq \mu^+ .$$

En faisant agir la dynamique parallèle sur l'inégalité  $\mu^- \preceq \mu^+ P$ , on obtient :

$$\mu^+ = \mu^+ P^{(2)} \preceq \mu^- P . \quad (4.116)$$

Comme d'autre part,  $\mu^- P$  est également une mesure de Gibbs, puisque  $\mu^-$  l'est, on a

$$\mu^- \preceq \mu^- P \preceq \mu^+ ;$$

la seconde inégalité, conjointement à (4.116) permettant alors de conclure à  $\mu^- P = \mu^+$ . On démontre  $\mu^+ P = \mu^-$  de manière similaire. ■

Afin de préciser le résultat précédent, on se restreint alors au cas de la dimension  $d = 2$ ,  $h = 0$ , rayon de portée de la dynamique  $R = 1$ , pour lequel on établit que les mesures  $\mu^-$  et  $\mu^+$  sont non stationnaires.

**Proposition 4.3.3**

Soit  $P$  la dynamique PCA définie par (4.1) en dimension  $d = 2$ , pour  $h = 0$  et avec de plus :

$$\mathcal{K}(\pm e_1) < 0, \quad \mathcal{K}(\pm e_2) < 0, \quad \mathcal{K}(0) \leq 0, \quad \mathcal{K}(k) = 0 \text{ pour les autres } k. \quad (4.117)$$

Si  $\beta > \beta_0$ , alors les mesures de Gibbs extrémales distinctes de  $\mathcal{G}(\varphi)$   $\mu^+$  et  $\mu^-$  sont des mesures 2-périodiques donc non stationnaires.

En particulier, la dynamique PCA sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  est non ergodique.

**Preuve :**

Comme dans le cas précédent, puisque l'on suppose que  $\mathcal{K}(\cdot) \leq 0$  (c'est à dire (4.44)), les mesures de Gibbs sont monotones, et d'après la Proposition 2.2.12, il y a transition

de phase si et seulement si  $\mu^- \neq \mu^+$ . Puisque  $\beta > \beta_0$ , on peut donc affirmer que  $\mu^-$  et  $\mu^+$  sont deux mesures de Gibbs distinctes.

Puisque  $\mathcal{K}(\cdot) \leq 0$ , la Proposition 4.1.9 établit pour les mesures de Gibbs à volume fini  $\mu_{\mathcal{B}_L}^{per}$  et  $\mu_{\mathcal{B}_L}^+$  l'inégalité  $\mu_{\mathcal{B}_L}^{per} \preceq \mu_{\mathcal{B}_L}^+$ , valable pour tout  $L \in \mathbb{N}$ . En extrayant les sous-suites adéquates à la convergence, et en passant à la limite, on obtient :

$$\mu^0 \preceq \mu^+ , \quad (4.118)$$

où  $\mu^0 = \lim_{L \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{B}_L}^{per}$ , et où l'on rappelle que  $\mu^+ = \lim_{L \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{B}_L}^+$ . Par ailleurs, comme  $\mu_{\mathcal{B}_L}^{per} = \nu_{\mathcal{B}_L}^{per}$ , on sait que  $\mu_{\mathcal{B}_L}^{per}$  est une mesure réversible, donc  $\mu^0$  est une mesure réversible donc stationnaire pour  $P$ , dynamique à volume infini, c'est à dire  $\mu^0 = \mu^0 P$ .

Comme  $P$  est répulsive, (4.118) fournit  $\mu^+ P \preceq \mu^0 P$ , d'où :

$$\mu^+ P \preceq \mu^0 P = \mu^0 \preceq \mu^+ . \quad (4.119)$$

Par ailleurs, on démontre que  $\mu^0(\sigma_0 = +1) = \frac{1}{2}$ . En effet, comme  $-(\tilde{\sigma}_{\mathcal{B}_L}) = \widetilde{(-\sigma_{\mathcal{B}_L})}$  (où  $\tilde{\sigma}_{\mathcal{B}_L}$  désigne la configuration  $\sigma_{\mathcal{B}_L}$  périodisée sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ ), on a  $\mu_{\mathcal{B}_L}^{per}(-\sigma_{\mathcal{B}_L}) = \mu_{\mathcal{B}_L}^{per}(\sigma_{\mathcal{B}_L})$ . De ce fait :

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{B}_L}^{per}(\sigma_0 = +1) &= \sum_{\sigma_{\mathcal{B}_L \setminus \{0\}}} \mu_{\mathcal{B}_L}^{per}((+1)_0 \sigma_{\mathcal{B}_L \setminus \{0\}}) \\ &= \sum_{\sigma_{\mathcal{B}_L \setminus \{0\}}} \mu_{\mathcal{B}_L}^{per}((-1)_0 \sigma_{\mathcal{B}_L \setminus \{0\}}) \\ &= \mu_{\mathcal{B}_L}^{per}(\sigma_0 = -1) = 1 - \mu_{\mathcal{B}_L}^{per}(\sigma_0 = +1) . \end{aligned}$$

D'où, pour tout  $\mathcal{B}_L$ ,  $\mu_{\mathcal{B}_L}^{per}(\sigma_0 = +1) = \frac{1}{2}$ , et donc :

$$\mu^0(\sigma_0 = +1) = \frac{1}{2} . \quad (4.120)$$

Enfin, d'après la preuve du Théorème 4.2.1, on sait que pour  $\beta > \beta_0$ ,  $\mu^+(\sigma_0 = +1) > \frac{1}{2}$ . On en déduit donc :

$$\mu^0(\sigma_0 = +1) = \frac{1}{2} < \mu^+(\sigma_0 = +1) , \quad (4.121)$$

d'où  $\mu^0 \neq \mu^+$ . En confrontant ce résultat avec l'encadrement (4.119), on en conclut que

$$\mu^+ \neq \mu^+ P ,$$

c'est à dire que  $\mu^+$  n'est pas stationnaire.

De manière analogue, on sait que  $\mu_{\mathcal{B}_L}^- \preceq \mu_{\mathcal{B}_L}^{per}$ , donc  $\mu^- \preceq \mu^0 = \mu^0 P \preceq \mu^- P$ . Et comme précédemment, pour  $\beta > \beta_0$ , on a  $\mu^-(\sigma_0 = +1) < \frac{1}{2} = \mu^0(\sigma_0 = +1)$  d'où  $\mu^- \neq \mu^0$ . Le résultat s'en suit.

En tant que mesures de Gibbs, il a été établi que  $\mu^-$  et  $\mu^+$  sont 2-périodiques, et en appliquant la Proposition 4.3.2, on a plus précisément :  $\mu^- P = \mu^+$  et  $\mu^+ P = \mu^-$ . De ce fait, on a par exemple :

$$\mu^- P^{(n)} = \begin{cases} \mu^- & \text{si } n \text{ pair,} \\ \mu^+ & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

La dynamique  $P$  ne saurait donc être ergodique. ■

### 4.3.3 Cas du couplage propre nul $\mathcal{K}(0) = 0$

Dans cette sous-section, on considère le cas déjà étudié à la sous-section 4.2.2 d'une dynamique PCA de la classe  $\mathcal{C}_0$  en dimension  $d = 2$ , de portée 1, telle que  $\mathcal{K}(0) = 0$ .

D'après la Propriété 4.2.3, compte tenu des hypothèses supposées pour  $\mathcal{K}(\cdot)$ , on sait que les mesures de Gibbs extrémales se découpent en produit d'une mesure de Gibbs extrémale sur  $\mathbb{Z}^{2,\mathbf{P}}$  et d'une mesure de Gibbs extrémale sur  $\mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}}$ . Par ailleurs, la dynamique  $P$  étant de la forme produit (PCA), on a :

$$P(d\sigma|\eta) = \left( \bigotimes_{k \in \mathbb{Z}^{2,\mathbf{P}}} p_k(d\sigma_k^{\mathbf{P}}|\eta^{\mathbf{i}}) \right) \otimes \left( \bigotimes_{k \in \mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}}} p_k(d\sigma_k^{\mathbf{i}}|\eta^{\mathbf{P}}) \right) = P(d\sigma^{\mathbf{P}}|\eta^{\mathbf{i}}) \otimes P(d\sigma^{\mathbf{i}}|\eta^{\mathbf{P}}).$$

Cela signifie que la dynamique peut être considérée comme la juxtaposition de deux dynamiques indépendantes agissant sur des sous-réseaux disjoints : une partie de la dynamique dépend de l'état du système sur  $\mathbb{Z}^{2,\mathbf{P}}$ , et actualise les sites de  $\mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}}$ , alors qu'une autre composante de la dynamique actualise les sites de  $\mathbb{Z}^{2,\mathbf{P}}$  en fonction des spins sur  $\mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}}$ .

Soit  $k \in \mathbb{Z}^{2,\mathbf{P}}$ ,  $p_k(\sigma_k|\eta_{V_k})$  régule l'actualisation de la valeur du spin au site  $k$ , sachant  $\eta_{V_k}$  où  $V_k \subset \mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}}$ . Par abus de notation, on désigne par  $\mu^{+,\mathbf{P}}P$  la quantité  $\mu^{+,\mathbf{P}}P_{\mathbb{Z}^{2,\mathbf{P}},\mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}}}$  où

$$P_{\mathbb{Z}^{2,\mathbf{P}},\mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}}} = \bigotimes_{k \in \mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}}} p_k(d\sigma_k^{\mathbf{i}}|\eta^{\mathbf{P}}).$$

Précisons que  $\mu^{+,\mathbf{P}}P$  est une mesure de  $\mathcal{P}(S^{\mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}}})$  alors que  $\mu^{+,\mathbf{P}} \in \mathcal{P}(S^{\mathbb{Z}^{2,\mathbf{P}}})$ . On rappelle également les définitions posées en (4.112) :

$$\mu^{++} = \mu^{+,\mathbf{P}} \otimes \mu^{+,\mathbf{i}}, \quad \mu^{+-} = \mu^{+,\mathbf{P}} \otimes \mu^{-,\mathbf{i}}, \quad \mu^{-+} = \mu^{-,\mathbf{P}} \otimes \mu^{+,\mathbf{i}}, \quad \mu^{--} = \mu^{-,\mathbf{P}} \otimes \mu^{-,\mathbf{i}}.$$

On sait que, pour  $\beta > \beta_c$ ,  $\mathcal{G}(\varphi) = \diamond$ , défini en (4.111).

$$\mathcal{G}(\varphi) = \diamond \triangleq \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \mu^{++} + \alpha_2 \mu^{-+} + \alpha_3 \mu^{+-} + \alpha_4 \mu^{--} : \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ 0 \leq \alpha_i \leq 1, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \end{array} \right\}.$$

La Proposition suivante détaille alors l'action de la dynamique  $P$  sur l'ensemble des mesures de Gibbs  $\diamond$ .

#### Proposition 4.3.4

Soit  $P$  la dynamique PCA définie par (4.1) en dimension  $d = 2$ , pour  $h = 0$  et avec de plus :

$$\mathcal{K}(0) = 0, \quad \mathcal{K}(e_1) = \mathcal{K}(-e_1) = \mathcal{K}(e_2) = \mathcal{K}(-e_2) \triangleq K \neq 0, \quad \mathcal{K}(k) = 0 \text{ pour les autres } k.$$

Alors, l'action de la dynamique  $P$  sur l'ensemble  $\mathcal{G}(\varphi) = \diamond$ , lorsqu'il y a transition de phase, est déterminée par les résultats suivants :

- Si  $K > 0$ , on a :

$$\mu^{++}P = \mu^{++}, \quad \mu^{--}P = \mu^{--}, \quad \mu^{-+}P = \mu^{+-}, \quad \mu^{+-}P = \mu^{-+}, \quad (4.122)$$

et l'action de  $P$  sur  $\diamond$  se traduit par une symétrie par rapport au plan engendré par  $\mu^{--}, \mu^{++}$  et  $\frac{1}{2}(\mu^{-+} + \mu^{+-})$ .

– Si  $K < 0$ , on a :

$$\mu^{++}P = \mu^{--}, \quad \mu^{--}P = \mu^{++}, \quad \mu^{-+}P = \mu^{-+}, \quad \mu^{+-}P = \mu^{+-}, \quad (4.123)$$

et l'action de  $P$  sur  $\diamond$  se traduit par une symétrie par rapport au plan engendré par  $\mu^{-+}, \mu^{+-}$  et  $\frac{1}{2}(\mu^{--} + \mu^{++})$ .

**Preuve :**

D'après les remarques introductives de cette sous-section, on sait que la dynamique se découple dans ce cas en deux sous-dynamiques PCA identiques et indépendantes, agissant alternativement sur  $\mathbb{Z}^{2,\mathbf{p}}$  et  $\mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}}$ .

Si  $K > 0$ , la Proposition 4.3.1 s'applique à chacune de ces dynamiques, avec la particularité que la mesure extrémale  $\mu^{+,\mathbf{p}}$ , de Gibbs pour  $\varphi^{\mathbf{p}}$  est transformée en la mesure extrémale  $\mu^{+,\mathbf{i}}$ , de Gibbs pour  $\varphi^{\mathbf{i}}$ . On obtient ainsi

$$\mu^{+,\mathbf{p}}P = \mu^{+,\mathbf{i}}, \quad \mu^{-,\mathbf{p}}P = \mu^{-,\mathbf{i}}, \quad \mu^{+,\mathbf{i}}P = \mu^{+,\mathbf{p}}, \quad \mu^{-,\mathbf{i}}P = \mu^{-,\mathbf{p}}.$$

D'où l'on déduit immédiatement (4.122), compte tenu de la Propriété 4.2.3.

Soit  $\mu \in \mathcal{G}(\varphi) = \diamond$ . Il existe  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , quatre éléments de  $[0, 1]$  dont la somme vaut 1 tels que :

$$\mu = \alpha_1\mu^{++} + \alpha_2\mu^{-+} + \alpha_3\mu^{+-} + \alpha_4\mu^{--}.$$

Sous l'action de la dynamique  $P$ , on a :

$$\mu P = \alpha_1\mu^{++} + \alpha_3\mu^{-+} + \alpha_2\mu^{+-} + \alpha_4\mu^{--}.$$

Les mesures stationnaires sont donc déterminées par  $\alpha_2 = \alpha_3$ , c'est à dire le plan engendré par  $\mu^{--}, \mu^{++}$  et  $\frac{1}{2}(\mu^{-+} + \mu^{+-})$ . De manière générale, l'action de la dynamique sur  $\diamond$  se traduit par l'application  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \mapsto (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_4)$ , qui correspond à la symétrie par rapport au plan des mesures stationnaires.

Par ailleurs,  $\mu^{-+}$  et  $\mu^{+-}$  ne sont pas stationnaires, et on retrouve facilement compte tenu de (4.122) que ces mesures de Gibbs sont alors 2-périodiques, ce que le théorème de Kozlov-vasilyev nous assurait.

Si  $K < 0$ , alors la Propriété 4.3.2 donne d'une part  $\mu^{+,\mathbf{p}}P = \mu^{-,\mathbf{i}}$  et  $\mu^{-,\mathbf{p}}P = \mu^{+,\mathbf{i}}$  ( $\mu^{+,\mathbf{p}}$  et  $\mu^{-,\mathbf{p}}$  sont distinctes dès lors qu'il y a transition de phase d'après la Proposition 4.2.4), et pour l'autre dynamique  $\mu^{+,\mathbf{i}}P = \mu^{-,\mathbf{p}}$  et  $\mu^{-,\mathbf{i}}P = \mu^{+,\mathbf{p}}$ . Les relations (4.123) et leurs conclusions s'en déduisent alors de manière analogue au cas précédent. ■

En particulier, ce résultat fournit également des exemples de mesures de Gibbs stationnaires, non invariantes par translation. En effet, dans le cas où  $K < 0$ , les mesures  $\mu^{-+}$  et  $\mu^{+-}$  sont de telles mesures.

### Précisions sur le cas d'interactions de signes différents

Compte tenu de l'analyse précise développée pour l'étude de la transition de phase (Théorème 4.2.1) nous développons ici le cas où les couplages  $\mathcal{K}(e_1)$  et  $\mathcal{K}(e_2)$  sont opposés. La description de  $\mathcal{G}(\varphi)$  est alors analogue au cas précédent, ainsi que l'action

de la dynamique PCA sur cet ensemble. Il suffit pour cela de considérer la transformation  $T^b$  (cf. (4.95)) pour passer de la situation où  $\mathcal{K}(\cdot)$  est de signe constant à celle considérée dans ce paragraphe.

Comme précédemment la dynamique parallèle  $P$  appartient à la classe  $\mathcal{C}_0$  en dimension  $d = 2$  avec :

$$\mathcal{K}(0) = 0, \mathcal{K}(e_1) = -\mathcal{K}(e_2) \triangleq K \neq 0, \mathcal{K}(k) = 0 \text{ pour les autres } k,$$

et donc  $\mathcal{K}(e_1)$  et  $\mathcal{K}(e_2)$  opposés.

On rappelle la fonction  $\mathcal{K}^b$  :

$$\mathcal{K}^b(k) = \begin{cases} -\mathcal{K}(e_2) & \text{si } k = e_2 \text{ ou } k = -e_2, \\ \mathcal{K}(k) & \text{si } k \notin \{e_2, -e_2\}, \end{cases}$$

et on définit l'application  $T^b$  par :

$$(T^b \sigma)_k = \begin{cases} \sigma_k & \text{si } k = (k_1, k_2) \text{ avec } k_2 \text{ pair} ; \\ -\sigma_k & \text{si } k = (k_1, k_2) \text{ avec } k_2 \text{ impair} . \end{cases}$$

On définit également  $\mathbb{Z}^2 = B_{v,\mathbf{p}} \cup_{\text{disjoint}} B_{v,\mathbf{i}}$  et  $\mathbb{Z}^2 = B_{h,\mathbf{p}} \cup_{\text{disjoint}} B_{h,\mathbf{i}}$  où :

$$B_{v,\mathbf{p}} = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 : k_1 \text{ pair}\} ; \quad B_{v,\mathbf{i}} = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 : k_1 \text{ impair}\} ;$$

$$B_{h,\mathbf{p}} = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 : k_2 \text{ pair}\} ; \quad B_{h,\mathbf{i}} = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 : k_2 \text{ impair}\} .$$

On rappelle que puisque la relation (4.96) :

$$\mu_{\Lambda, \varphi}^{\tau}(\sigma) = \mu_{\Lambda, \varphi^b}^{T^b \tau}(T^b \sigma)$$

est vérifiée, l'application  $\mu \mapsto \mu \circ T^{b-1}$  définit une bijection entre  $\mathcal{G}(\varphi)$  et  $\mathcal{G}(\varphi^b)$ . De ce fait,  $\text{ex } \mathcal{G}(\varphi) = \text{ex } \mathcal{G}(\varphi^b) \circ T^{b-1}$ . D'où

$$\mathcal{G}(\varphi) = \diamond \circ T^{b-1} .$$

Comme on a établi que les états fondamentaux de  $\varphi^b$ , (*i.e.* les configurations les plus favorisées lorsque  $\beta$  est au voisinage de 0) sont :  $+1, -1, (+1)_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{p}}(-1)_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{i}}$  et  $(-1)_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{p}}(+1)_{\mathbb{Z}^2, \mathbf{i}}$  (échiquiers), on peut de ce fait affirmer que les 4 états fondamentaux de  $\varphi$  sont :

– des lignes horizontales à signe constant, alternées, avec  $+1$  à l'origine :

$$T^b(+1) = (+1)_{B_{h,\mathbf{p}}}(-1)_{B_{h,\mathbf{i}}} ;$$

– des lignes horizontales à signe constant, alternées, avec  $-1$  à l'origine :

$$T^b(-1) = (-1)_{B_{h,\mathbf{p}}}(+1)_{B_{h,\mathbf{i}}} ;$$

– des lignes verticales à signe constant, alternées, avec  $+1$  à l'origine :

$$T^b((+1)_{\mathbb{Z}^2, \mathbb{P}}(-1)_{\mathbb{Z}^2, i}) = (+1)_{B_{v, \mathbb{P}}}(-1)_{B_{v, i}} ;$$

– des lignes verticales à signe constant, alternées, avec  $-1$  à l'origine :

$$T^b((-1)_{\mathbb{Z}^2, \mathbb{P}}(+1)_{\mathbb{Z}^2, i}) = (-1)_{B_{v, \mathbb{P}}}(+1)_{B_{v, i}} .$$

De ce fait, les mesures de Gibbs extrémales de  $\mathcal{G}(\varphi)$  sont des mesures donnant un poids prépondérant aux configurations évoquées. On note ainsi respectivement :

$$\mu^{++} \circ T^{b^{-1}} = \mu^{h,+}, \quad \mu^{--} \circ T^{b^{-1}} = \mu^{h,-}, \quad \mu^{+-} \circ T^{b^{-1}} = \mu^{v,+}, \quad \mu^{-+} \circ T^{b^{-1}} = \mu^{v,-} .$$

En présence de transition de phase,  $\mathcal{G}(\varphi)$  est donc le convexe d'éléments extrémaux

$$\{\mu^{h,+}, \mu^{h,-}, \mu^{v,+}, \mu^{v,-}\}.$$

Si on désigne par  $P^b$  la dynamique PCA définie pour  $\mathcal{K}^b$ , il est alors facilement vérifiable que, pour  $\mu \in \mathcal{G}(\varphi)$  :

$$(\mu P) \circ T^{b^{-1}} = (\mu \circ T^{b^{-1}}) P^b . \quad (4.124)$$

Puisque la dynamique  $P^b$  appartient au cas attractif considéré précédemment, l'action de  $P$  sur  $\mathcal{G}(\varphi)$  dans le cas où les constantes d'interaction sont de signes opposés se résume alors en :

- Si  $\mathcal{K}(0) = 0$ ,  $\mathcal{K}(e_1) > 0$  et  $\mathcal{K}(e_2) < 0$  alors  $\mu^{h,+}$  et  $\mu^{h,-}$  sont stationnaires, et  $\mu^{v,+}$  et  $\mu^{v,-}$  sont 2-périodiques.
- Si  $\mathcal{K}(0) = 0$ ,  $\mathcal{K}(e_1) < 0$  et  $\mathcal{K}(e_2) > 0$  alors  $\mu^{v,+}$  et  $\mu^{v,-}$  sont stationnaires et  $\mu^{h,+}$  et  $\mu^{h,-}$  sont 2-périodiques.

Cela établit donc la Proposition suivante :

**Proposition 4.3.5**

*Soit  $P$  la dynamique PCA définie par (4.1) en dimension  $d = 2$ , pour  $h = 0$  et où de plus :*

$$\mathcal{K}(0) = 0, \quad \mathcal{K}(e_1) = -\mathcal{K}(e_2) \triangleq K \neq 0, \quad \mathcal{K}(k) = 0 \text{ pour les autres } k.$$

*Alors, l'ensemble des mesures de Gibbs  $\mathcal{G}(\varphi)$  est l'enveloppe convexe des quatre mesures extrémales  $\mu^{h,+}$ ,  $\mu^{h,-}$ ,  $\mu^{v,+}$  et  $\mu^{v,-}$ . Lorsqu'il y a transition de phase, on a la situation suivante :*

- *Si  $K > 0$ , alors  $\mu^{h,+}$  et  $\mu^{h,-}$  sont stationnaires, et  $\mu^{v,+}$  et  $\mu^{v,-}$  sont 2-périodiques. L'action de  $P$  sur  $\mathcal{G}(\varphi)$  se traduit par une symétrie par rapport au plan engendré par  $\mu^{h,+}$ ,  $\mu^{h,-}$  et  $\frac{1}{2}(\mu^{v,+} + \mu^{v,-})$ .*
- *Si  $K < 0$ , alors  $\mu^{v,+}$  et  $\mu^{v,-}$  sont stationnaires et  $\mu^{h,+}$  et  $\mu^{h,-}$  sont 2-périodiques. L'action de  $P$  sur  $\mathcal{G}(\varphi)$  se traduit par une symétrie par rapport au plan engendré par  $\mu^{v,+}$ ,  $\mu^{v,-}$  et  $\frac{1}{2}(\mu^{h,+} + \mu^{h,-})$ .*



# Chapitre 5

## Couplage croissant de plusieurs PCA

Une technique féconde pour l'étude asymptotique en temps des systèmes de particules est celle du couplage de tels processus markoviens. Elle consiste à faire évoluer différentes dynamiques au sein d'un même espace de probabilité.

Par exemple, le théorème d'ergodicité pour les chaînes de Markov irréductibles, aperiodiques avec espace d'états dénombrable peut être établi de manière élégante grâce à l'existence d'un couplage adéquat. Ce résultat - et l'idée originelle de coupler deux processus stochastiques - remonte à Doeblin en 1938 ([Doe38]) mais ne commença à être perçue comme fondamentale que vers les années 50 grâce aux travaux de Dobrushin [Dob56],[Lig93]. Pour plus de détails concernant un historique des techniques de couplage et de la philosophie de ce concept, on pourra se référer à l'introduction du travail récent de [FFG] et aux références qui y sont mentionnées. L'intérêt et la puissance du couplage de systèmes de particules à temps continu ne sont plus à démontrer. On en trouve une présentation dans le livre de Liggett [Lig85], chapitre II, section 1, ou également dans le livre [Lin92]. Le livre récent (2000) de Thorisson [Tho00] plaide également pour l'étude de couplages d'objets aléatoires : ce concept y est présenté comme fondamental en théorie des probabilités, et l'auteur y prône ainsi une étude *per se* du couplage.

Rappelons que  $S = \{-1, +1\}$ . Un des résultats principaux du chapitre 6 sera d'assurer, pour certaines dynamiques PCA, la convergence vers l'équilibre à vitesse exponentielle. La preuve de ce résultat utilisera un couplage particulier préservant l'ordre stochastique.

L'objet de ce chapitre 5 est donc d'introduire ce couplage et d'en montrer certaines propriétés fines. Il s'articule de la façon suivante.

Dans la première section, nous définirons de manière exacte ce que l'on appelle couplage de deux processus markoviens, et donnerons un exemple immédiat de couplage d'un nombre fini de PCA : le couplage indépendant. Il présentera la particularité d'être lui-même un PCA sur l'espace produit. Puis nous établirons l'existence d'un autre couplage, dénommé croissant, d'un nombre fini de PCA quelconques, qui sera encore un PCA (Théorème 5.2.3). Il satisfera la propriété fondamentale (5.4) de préserver l'ordre stochastique entre les conditions initiales des différents PCA constitutifs du couplage. Dans la section 5.3 nous porterons notre attention sur le cas particulier du couplage croissant de différentes versions de la même dynamique PCA, dans le but de formuler certaines inégalités importantes pour les démonstrations du chapitre



suisant. Nous y montrerons également la Propriété 5.3.1 de stabilité du couplage croissant par projection : si l'on projette le couplage de  $N'$  automates cellulaires probabilistes sur  $N \leq N'$  composantes de l'espace produit où agit le couplage, on obtient le même résultat que celui obtenu en couplant directement les  $N$  automates cellulaires probabilistes considérés. Nous nous focaliserons ensuite, dans la section 5.4, sur un autre cas particulier : celui du couplage de différentes dynamiques PCA à volumes fini ou infini. Ce couplage particulier nous permettra de comparer l'évolution de dynamiques à volume infini avec celles à volume fini mieux connues, et les propriétés qui seront démontrées joueront un rôle important ultérieurement. Enfin, avant de clore ce chapitre, nous ferons (section 5.5) quelques remarques sur l'intérêt, dans le cadre des algorithmes de simulation parfaite, du couplage croissant d'un nombre fini de PCA étudié dans ce chapitre.

## 5.1 Couplage synchrone d'automates cellulaires probabilistes

Comme annoncé précédemment, nous nous intéresserons ici plus particulièrement aux couplages de plusieurs automates cellulaires probabilistes, couplages possédant en outre la caractéristique d'être eux-mêmes des PCA sur l'espace produit.

Rappelons d'abord la définition formelle d'un couplage de deux mesures puis de deux chaînes de Markov.

**Définition 5.1.1** Soient  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  et  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$  deux espaces de probabilités. Une mesure  $\mu$  sur l'espace produit  $\Omega_1 \times \Omega_2$  est dite **couplage** de  $\mu_1$  et  $\mu_2$  si

$$\forall A_1 \in \mathcal{A}_1, \mu(A_1 \times \Omega_2) = \mu_1(A_1) \quad \text{et} \quad \forall A_2 \in \mathcal{A}_2, \mu(\Omega_1 \times A_2) = \mu_2(A_2)$$

i.e. que les marginales de  $\mu$  sont  $\mu_1$  selon la première coordonnée, et  $\mu_2$  selon la seconde.

La mesure produit  $\mu_1 \otimes \mu_2$  est un exemple parmi d'autres de couplage de  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . On définit également :

**Définition 5.1.2 Couplage de deux dynamiques markoviennes**

Soient  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$  et  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$  deux espaces probabilisables. Soient  $P$  et  $P'$  les noyaux de deux processus de Markov à temps discret, homogènes (en temps) :

$$P : \mathcal{A}_1 \times \Omega_1 \rightarrow [0, 1] ; (A_1, \zeta^1) \mapsto P(A_1 | \zeta^1)$$

$$P' : \mathcal{A}_2 \times \Omega_2 \rightarrow [0, 1] ; (A_2, \zeta^2) \mapsto P'(A_2 | \zeta^2)$$

On définit une dynamique couplée, dite **couplage des dynamiques**  $P$  et  $P'$  par la donnée d'un noyau de transition  $Q$  :

$$Q : (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \times (\Omega_1 \times \Omega_2) \rightarrow [0, 1] ; (A_1 \times A_2, (\zeta^1, \zeta^2)) \mapsto Q(A_1 \times A_2 | (\zeta^1, \zeta^2))$$

tel que pour tout couple  $(\zeta^1, \zeta^2)$  dans  $\Omega_1 \times \Omega_2$ ,  $Q(\cdot | (\zeta^1, \zeta^2))$  soit un couplage des deux mesures  $P(\cdot | \zeta^1)$  et  $P'(\cdot | \zeta^2)$ .

On vérifie aisément que cette définition est équivalente à la définition suivante de  $Q$  en tant qu'opérateur sur l'ensemble des fonctions locales : pour toute fonction locale  $\varphi \in \mathcal{F}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ , si  $\varphi$  appartient à l'image de  $\mathcal{F}(\Omega_1)$  plongée dans  $\mathcal{F}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ , i.e. si  $\varphi$  est fonction de la seule première variable, alors  $Q(\varphi) = P(\varphi)$ . Si  $\varphi$  appartient à l'image de  $\mathcal{F}(\Omega_2)$  plongée dans  $\mathcal{F}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ , soit si  $\varphi$  est fonction de la seule seconde variable, alors  $Q(\varphi) = P'(\varphi)$ . Autrement dit, la dynamique  $Q$  couplage de  $P$  et  $P'$  est une dynamique markovienne sur l'espace produit  $\Omega_1 \times \Omega_2$  telle que les dynamiques marginales sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  coïncident respectivement avec  $P$  et  $P'$ .

Cette notion se généralise sans peine au couplage d'un nombre fini de dynamiques.

On notera que  $Q^{(n)}(\cdot | (\zeta^1, \zeta^2))$ , l'itérée  $n$ -ième de la probabilité de transition  $Q$ , est également un couplage des itérées  $n$ -ièmes de  $P$  et de  $P'$ .

Dorénavant, dans ce chapitre et dans le chapitre suivant, l'espace des spins considéré sera toujours  $S = \{-1, +1\}$ .

### Définition 5.1.3 Couplage synchrone de PCA

Soit  $P^1, P^2, \dots, P^N$   $N$  automates cellulaires probabilistes, chaque  $P^i$  étant défini sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  par sa loi d'évolution  $(p_k^i)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ . On appelle couplage synchrone des dynamiques  $P^1, P^2, \dots, P^N$  une dynamique markovienne  $Q$  qui est elle-même un PCA, c'est-à-dire dont les lois locales d'évolution  $(q_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  satisfont

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad \forall s^i \in S, \quad \forall \zeta^i \in S^{\mathbb{Z}^d},$$

$$p_k^i(s^i | \zeta^i) = \sum_{s^j \in S, j \neq i} q_k((s^1, \dots, s^N) | (\zeta^1, \dots, \zeta^N)).$$

### Exemple : le couplage indépendant

Soit  $Q$  le PCA défini par les lois locales d'évolution  $(q_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  de la manière suivante :

$$\forall (s^1, s^2, \dots, s^N) \in S^N, \quad q_k((s^1, \dots, s^N) | (\zeta^1, \dots, \zeta^N)) = \prod_{i=1}^N p_k^i(s^i | \zeta^i).$$

Alors  $Q$  noté  $P^1 \otimes P^2 \otimes \dots \otimes P^N$  est bien un couplage synchrone des PCA  $P^1, P^2, \dots, P^N$ . De plus il satisfait les deux propriétés suivantes :

- Puisque toutes les dynamiques  $P^1, \dots, P^N$  sont locales, la dynamique couplée  $P^1 \otimes \dots \otimes P^N$  est locale :  $\forall k \in \mathbb{Z}^d, \forall (\zeta^1, \dots, \zeta^N) \in (S^{\mathbb{Z}^d})^N$ ,

$$q_k(\cdot | \zeta^1, \dots, \zeta^N) = q_k(\cdot | (\zeta^1, \dots, \zeta^N)_{W_k}) = q_k(\cdot | \zeta_{V_k^1}^1, \dots, \zeta_{V_k^N}^N)$$

où  $W_k = V_k^1 \times \dots \times V_k^N$ .

- Si toutes les dynamiques  $P^1, \dots, P^N$  sont invariantes par translation, alors  $P^1 \otimes \dots \otimes P^N$  l'est également.

Ce couplage, dit indépendant car il préserve l'indépendance des dynamiques selon chaque composante de  $(S^{\mathbb{Z}^d})^N$ , ne permet cependant pas d'obtenir d'informations qui nous soient utiles à l'étude des PCA.

D'autres couplages de deux PCA sont également exposés dans l'ouvrage [TVS<sup>+</sup>78]. Nous leur préférons encore un autre couplage  $Q$  de PCA, où cette fois, les dynamiques des différentes composantes seront très fortement corrélées. Cette dépendance

stochastique sera induite par l'ordre partiel considéré sur l'espace des configurations. Ainsi, par exemple, dans le cas où l'on considérera le couplage de  $N$  fois la même dynamique  $P$  attractive, le couplage  $Q$  satisfera la propriété suivante 5.3.3, dite de coalescence : si, à un instant donné  $n_0$  et pour une réalisation du système  $\omega$ , les deux composantes  $i$  et  $j$  coïncident ( $\omega^i(n_0) = \omega^j(n_0)$ ), alors pour tous les instants successifs  $n \geq n_0$ , ces composantes coïncideront, et plus exactement, si  $i < j$  :

$$\forall n \geq n_0, \forall l, i \leq l \leq j, \omega^i(n) = \omega^l(n) = \omega^j(n).$$

## 5.2 Couplage synchrone croissant de $N$ PCA

### 5.2.1 $N$ -uplet croissant d'automates cellulaires probabilistes

Établissons dans un premier temps la définition d'un  $N$ -uplet croissant de PCA :

**Définition 5.2.1** Soit  $(P^1, P^2, \dots, P^N)$  un  $N$ -uplet d'automates cellulaires probabilistes où  $P^i = (p_k^i)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  ( $1 \leq i \leq N$ ). Il est dit **croissant** si :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \forall (\zeta^1, \zeta^2, \dots, \zeta^N) \in (S^{\mathbb{Z}^d})^N \text{ tel que } \zeta^1 \preceq \zeta^2 \preceq \dots \preceq \zeta^N$$

$$p_k^1(+1 \mid \zeta^1) \leq p_k^2(+1 \mid \zeta^2) \leq \dots \leq p_k^N(+1 \mid \zeta^N).$$

Il est alors important de remarquer que, dans le cas particulier où  $P^1 = P^2 = \dots = P^N = P$ , on a la propriété suivante :

**Propriété 5.2.2** Si  $P$  est un PCA attractif, alors pour tout  $N \geq 2$ , le  $N$ -uplet  $\underbrace{(P, P, \dots, P)}_{N \text{ fois}}$  est croissant.

**Exemple de  $N$ -uplet croissant :** Cherchons un exemple parmi la famille de dynamiques PCA définie sur  $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$  par la règle locale d'évolution, déjà évoquée dans le Chapitre 4 (cf. formule (4.5)) :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \forall s \in S, p_k^i(s \mid \eta) = \frac{1}{2} \left( 1 + s \tanh(\beta \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \eta_{k'} + \beta h_i) \right). \quad (5.1)$$

On rappelle que, d'après le Chapitre 2, sous l'hypothèse :

$$\forall k \in V_0, \mathcal{K}(k) \geq 0 \quad (5.2)$$

l'automate cellulaire probabiliste  $P^{\beta, h_i}$  défini par  $(p_k^i)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  est attractif. Si l'on considère  $N$  réels  $h_1, h_2, \dots, h_N$  ordonnés croissants

$$h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_N \quad (5.3)$$

alors le  $N$ -uplet de PCA  $(P^{\beta, h_1}, \dots, P^{\beta, h_N})$  est croissant. En effet, pour  $N$  configurations  $\zeta^1 \preceq \dots \preceq \zeta^N$ , l'hypothèse (5.2) et l'ordre des  $h_i$  (5.3) permettent d'écrire que, pour tout  $k \in \mathbb{Z}^d$  :

$$\beta \left( \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \zeta_{k'}^1 + h_1 \right) \leq \dots \leq \beta \left( \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \zeta_{k'}^N + h_N \right)$$

ce qui permet de conclure.

**Remarque :**

En opposition à l'exemple précédent, à  $\beta$  fixé et  $h_1 = \dots = h_n = h$ , l'hypothèse :

$$\forall k \in V_0, \mathcal{K}(k) \leq 0$$

donne un exemple de  $N$ -uplet de dynamiques PCA  $(P^{\beta,h}, \dots, P^{\beta,h})$  telles que, si  $\zeta^1 \preceq \dots \preceq \zeta^N$  alors, pour tout  $k \in \mathbb{Z}^d$  :

$$p_k^{\beta,h}(+1|\zeta^1) \geq \dots \geq p_k^{\beta,h}(+1|\zeta^N),$$

que l'on pourrait désigner par  $N$ -uplet décroissant. Il faut cependant remarquer que l'application répétée de la probabilité de transition, *i.e.* le déroulement de la dynamique, n'est pas décroissant mais retournerait alors l'ordre stochastique périodiquement, avec une période temporelle égale à deux.

### 5.2.2 Construction d'un PCA, couplage croissant de PCA

Dans cette section nous définissons le couplage croissant pour un  $N$ -uplet croissant d'automates cellulaires probabilistes. On trouve ce couplage déjà chez Steif [Ste91], qui l'utilise pour l'étude des propriétés asymptotiques de PCA du point de vue de la théorie ergodique (translations de Bernoulli). Cependant, il ne développe dans son article aucune des propriétés qui nous servent par la suite. Signalons aussi le travail récent de Lopez et Sanz [LS00] qui explicitent des formules de couplage croissant d'un nombre fini d'automates cellulaires probabilistes dans le cas où l'espace des spins  $S$  est un ensemble ordonné fini quelconque. Eux non plus, n'évoquent aucune des propriétés que nous établissons ici.

C'est donc l'objet de cette section que de mettre en évidence des propriétés fines du couplage croissant de PCA.

**Définition de  $[(S^{\mathbb{Z}^d})^N]_c$**

On définit maintenant le couplage annoncé au début de ce chapitre. Soit  $(P^1, \dots, P^N)$  un  $N$ -uplet croissant d'automates cellulaires probabilistes. On définira le couplage croissant d'un tel  $N$ -uplet uniquement pour des configurations initiales totalement ordonnées croissantes. De plus, pour une condition initiale croissante donnée, le couplage croissant ne chargera que des configurations totalement ordonnées croissantes. Définissons donc le sous-ensemble totalement ordonné à  $N + 1$  éléments de  $(S^{\mathbb{Z}^d})^N$  dans lequel évolue le couplage :

$$[(S^{\mathbb{Z}^d})^N]_c = \{(\zeta^1, \dots, \zeta^N) \in (S^{\mathbb{Z}^d})^N : \zeta^1 \preceq \zeta^2 \preceq \dots \preceq \zeta^N\}$$

où nous rappelons que  $S = \{-1, +1\}$ .

Par ailleurs, on précise à nouveau l'ordre  $\preceq$  sur  $S^N$  :

$$(s^1, \dots, s^N) \preceq (t^1, \dots, t^N) \text{ si } \forall i \in \{1, \dots, N\}, s^i \leq t^i.$$

Soit  $[S^N]_c$  la partie de  $S^N$  définie par :

$$[S^N]_c = \{(s^1, s^2, \dots, s^N) \in S^N : s^1 \leq s^2 \leq \dots \leq s^N\}.$$

On remarquera que  $\preceq$  est un ordre total sur  $[S^N]_c$  et que ses  $N+1$  éléments  $(a_i)_{i \in \{0, \dots, N\}}$  peuvent être listés de manière croissante, respectivement  $a_0, a_1, \dots, a_N$  :

$$\begin{aligned} & (-1, -1, \dots, -1, -1) ; (-1, -1, \dots, -1, +1) ; \dots \\ & \dots \underbrace{(-1, -1, \dots, -1)}_{(N-i) \text{ fois}} \underbrace{(+1, +1, \dots, +1)}_{i \text{ fois}} \dots \\ & \dots ; (+1, +1, \dots, +1) \end{aligned}$$

où, en fait, l'indice  $i$  de l'élément correspond au nombre de  $+1$  présents dans la « partie droite de ces  $N$ -uplets.

On attire également l'attention sur la bijection canonique entre les ensembles  $([S^N]_c)^{\mathbb{Z}^d}$  et  $[(S^{\mathbb{Z}^d})^N]_c$ .

### Construction du couplage croissant

Comme pour le couplage indépendant introduit précédemment, définir le PCA couplage croissant  $Q$  en tant que dynamique markovienne revient à se donner les lois locales d'évolution  $(q_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ . Soit  $k \in \mathbb{Z}^d$ , on définit pour  $(\zeta^1, \dots, \zeta^N) \in [(S^{\mathbb{Z}^d})^N]_c$  les quantités  $q_k((s^1, \dots, s^N) \mid \zeta^1, \dots, \zeta^N)$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} q_k((-1, -1, -1, \dots, -1, -1, -1) \mid \zeta^1, \dots, \zeta^N) & = 1 - p_k^N(+1 \mid \zeta^N) \\ q_k((-1, -1, -1, \dots, -1, -1, +1) \mid \zeta^1, \dots, \zeta^N) & = p_k^N(+1 \mid \zeta^N) - p_k^{N-1}(+1 \mid \zeta^{N-1}) \\ & \vdots \\ q_k(\underbrace{(-1, -1, \dots, -1)}_{j \text{ fois}} \underbrace{+1, \dots, +1}_{(N-j) \text{ fois}} \mid \zeta^1, \dots, \zeta^N) & = p_k^{j+1}(+1 \mid \zeta^{j+1}) - p_k^j(+1 \mid \zeta^j) \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{(N-j) \text{ème élément de } [S^N]_c : a_{N-j}} \\ & \vdots \\ q_k((-1, +1, +1, \dots, +1, +1, +1) \mid \zeta^1, \dots, \zeta^N) & = p_k^2(+1 \mid \zeta^2) - p_k^1(+1 \mid \zeta^1) \\ q_k((+1, +1, +1, \dots, +1, +1, +1) \mid \zeta^1, \dots, \zeta^N) & = p_k^1(+1 \mid \zeta^1) \end{array} \right.$$

et  $q_k((s^1, s^2, \dots, s^N) \mid \zeta^1, \dots, \zeta^N) = 0$  pour tous les éléments  $(s^1, \dots, s^N) \in S^N \setminus [S^N]_c$ .

Puisque  $(\zeta^1, \dots, \zeta^N)$  sont tels que  $\zeta^1 \preceq \dots \preceq \zeta^N$  et que le  $N$ -uplet  $(P^1, \dots, P^N)$  est croissant, les quantités  $q_k$  précédemment définies sont toutes des nombres réels de l'intervalle  $[0, 1]$ .

Par ailleurs, comme annoncé, puisque  $q_k$  ne charge que les éléments de  $[S^N]_c$ , pour toute configuration initiale dans  $[S^N]_c$ , on demeurera dans cet ensemble sous l'action de la probabilité de transition  $Q$ , ce que stigmatise le théorème suivant :

### Théorème 5.2.3 (Existence d'un couplage croissant)

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $(P^1, P^2, \dots, P^N)$  un  $N$ -uplet croissant de  $N$  automates cellulaires probabilistes. Il existe alors une dynamique PCA sur  $[(S^{\mathbb{Z}^d})^N]_c$  notée  $P^1 \otimes P^2 \otimes \dots \otimes P^N$ , couplage des dynamiques  $P^1, P^2, \dots, P^N$ , qui préserve l'ordre stochastique, c'est à dire que pour toute configuration initiale croissante  $(\sigma^1, \dots, \sigma^N)$  telle que  $\sigma^1 \preceq \sigma^2 \preceq \dots \preceq \sigma^N$  et pour tout instant  $n \geq 1$ ,

$$P^1 \otimes \dots \otimes P^N \left( \omega^1(n) \preceq \dots \preceq \omega^N(n) \mid (\omega^1, \dots, \omega^N)(0) = (\sigma^1, \dots, \sigma^N) \right) = 1. \quad (5.4)$$

Un tel couplage  $P^1 \otimes P^2 \otimes \dots \otimes P^N$  est appelé **couplage croissant** de  $(P^1, P^2, \dots, P^N)$ .

**Preuve :**

On vérifie que le PCA  $Q = P^1 \otimes P^2 \otimes \dots \otimes P^N$  défini par les  $(q_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  précédemment, est un couplage des dynamiques  $P^1, \dots, P^N$ . Pour cela, il faut et il suffit que la dynamique synchrone induite par la dynamique couplée sur la  $j^{\text{ème}}$  composante ( $j \in \{1, \dots, N\}$ ) soit bien la dynamique  $P^j = (p_k^j)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ . Soit  $k$  un site de  $\mathbb{Z}^d$ . On notera  $(\wp_j Q)_k$  le noyau markovien induit par le couplage  $Q$  sur la  $j^{\text{ème}}$  composante, au site  $k$ . Remarquons d'abord que :

$$\wp_j (\otimes_{k \in \mathbb{Z}^d} q_k) = \wp_j Q = \otimes_{k \in \mathbb{Z}^d} (\wp_j Q)_k = \otimes_{k \in \mathbb{Z}^d} (\wp_j (q_k)).$$

Soit maintenant  $j \geq 2$ , alors :

$$\begin{aligned} (\wp_j Q)_k(+1 \mid \zeta^1, \dots, \zeta^N) &= \sum_{(s^1, \dots, s^N) \in S^N} q_k((s^1, \dots, \overset{j^{\text{ème}}}{\downarrow} +1, \dots, s^N) \mid \zeta^1, \dots, \zeta^N) \\ &= \sum_{(s^1, \dots, s^{j-1})} q_k((s^1, \dots, s^{j-1}, \overset{j^{\text{ème}}}{\downarrow} +1, \dots, +1) \mid \zeta^1, \dots, \zeta^N) \\ &= \sum_{l=2}^{l=j} (p_k^l(+1 \mid \zeta^l) - p_k^{l-1}(+1 \mid \zeta^{l-1})) + p_k^1(+1 \mid \zeta^1) \\ &= p_k^j(+1 \mid \zeta^N). \end{aligned}$$

Si  $j = 1$  alors

$$(\wp_j Q)_k(+1 \mid \zeta^1, \dots, \zeta^N) = q_k((+1, +1, \dots, +1, +1) \mid \zeta^1, \dots, \zeta^N) = p_k^1(+1 \mid \zeta^1).$$

S'agissant de lois discrètes sur  $S = \{-1, +1\}$ , ces vérifications suffisent. On a donc bien :

$$(\wp_j Q)_k(\cdot \mid \zeta^1, \dots, \zeta^N) = p_k^j(\cdot \mid \zeta^j).$$

Par ailleurs, par construction, pour tout site  $k$  et pour toute configuration initiale  $(\zeta^1, \dots, \zeta^N)$  appartenant à  $[(S^{\mathbb{Z}^d})^N]_c$ , la loi  $q_k$  sur  $S^N$  charge presque-sûrement  $[S^N]_c$ , et donc  $Q = (q_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  est presque sûrement à valeurs dans  $([S^N]_c)^{\mathbb{Z}^d} = [(S^{\mathbb{Z}^d})^N]_c$ , ce qui signifie que le couplage  $Q$  est en réalité un processus à valeurs dans  $[(S^{\mathbb{Z}^d})^N]_c$ . L'ordre stochastique entre les configurations sur chaque composante sera donc préservé au cours du déroulement de la dynamique  $Q$ . ■

**Remarque 5.2.4** *On attire l'attention sur le fait que ce couplage croissant peut être également obtenu de la manière suivante. Soit  $(U_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  une famille de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées selon la loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Considérons un site  $k \in \mathbb{Z}^d$ . La loi d'évolution locale  $q_k$  au site  $k$  peut alors être obtenue par l'algorithme du type « acceptation/rejet » suivant : soit  $U_k(\omega)$  une réalisation de la variable aléatoire  $U_k$ , sur chacune des coordonnées  $i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) du couplage, si  $U_k(\omega) < p_k(+1 \mid \zeta^i)$  alors à l'instant suivant, le site  $k$ , pour la composante  $i$  du couplage prend la valeur  $+1$ , et sinon, la valeur  $-1$ .*

*Cet algorithme permet la réalisation de simulations informatiques de tels couplages.*

### 5.2.3 Propriétés du couplage croissant

Compte tenu de la construction même de ce couplage ordonné, comme pour le couplage indépendant, la propriété suivante est également facilement vérifiée :

#### Propriété 5.2.5 (invariance par translation du couplage)

Si le  $N$ -uplet croissant  $(P^1, \dots, P^N)$  est tel que les dynamiques  $P^i, i \in \{1, \dots, N\}$ , soient invariantes par translation sur le réseau  $\mathbb{Z}^d$ , alors  $P^1 \otimes \dots \otimes P^N$  est un automate cellulaire probabiliste invariant par translation sur ce réseau.

Bien plus, il est fondamental de remarquer la caractéristique suivante du couplage, propriété qui sera utilisée à maintes reprises dans le Chapitre suivant :

#### Propriété 5.2.6 (compatibilité)

Soient  $(N, N') \in (\mathbb{N}^*)^2$  tels que  $1 \leq N < N'$ . Soit un  $N'$ -uplet croissant d'automates cellulaires probabilistes  $(P^1, \dots, P^{N'})$ . Soit  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_N \leq N'$  une sous-famille ordonnée d'éléments de  $\{1, \dots, N'\}$ . La dynamique couplée  $P^{i_1} \otimes P^{i_2} \dots \otimes P^{i_N}$  coïncide alors avec la marginale sur les composantes  $(i_1, i_2, \dots, i_N)$  du couplage  $P^1 \otimes P^2 \dots \otimes P^{N'}$ .

#### Preuve :

On prouve ce résultat par récurrence sur  $N'$ . Pour cela, il suffit de remarquer que, si  $N' = 2, N = 1$  la propriété est vraie par définition du couplage ; puis de montrer que pour tout  $i \in \{1, \dots, N'\}$ , la projection du couplage  $\{1, \dots, N'\}$  sur les  $(N' - 1)$  composantes  $1, 2, \dots, \hat{i}, \dots, N'$  est le couplage  $P^1 \otimes \dots \otimes \widehat{P^i} \otimes \dots \otimes P^{N'}$ . Le symbole  $\hat{\phantom{x}}$  signifie ici que l'on supprime l'élément surmonté par ce symbole de l'énumération où il est utilisé.

Pour cela, soit  $i \in \{1, \dots, N'\}$ , soit  $k \in \mathbb{Z}^d$ , soient les configurations  $\zeta^1 \preceq \zeta^2 \preceq \dots \preceq \zeta^{N'}$ .

On souhaite donc vérifier que les deux lois discrètes sur  $S^{N'-1}$ , ci-dessus mentionnées, ne chargeant que les éléments de  $[S^{N'-1}]_c$ , coïncident pour tout élément

$$(s^1, \dots, s^i, \dots, \widehat{s^i}, \dots, s^{N'}) \in [S^{N'-1}]_c.$$

Compte tenu de l'indilage précédemment défini pour les éléments de  $[S^{N'}]_c$ , on sait qu'on peut alors associer à un tel élément  $(s^1, \dots, s^i, \dots, s^{N'})$  un indice  $j \in \{0, \dots, N' + 1\}$  de telle sorte que :

si  $(s^1, \dots, s^i, \dots, s^{N'}) \neq (+1, +1, \dots, +1)$  alors  $j \in \{1, \dots, N'\}$ , et

$$(s^1, \dots, s^i, \dots, s^{N'}) = \underbrace{(-1, -1, \dots, -1)}_{j \text{ fois}}, +1, \dots, +1, +1);$$

sinon, si :

$$(s^1, \dots, s^i, \dots, s^{N'}) = (+1, +1, \dots, +1)$$

on considérera  $j = 0$ .

On décompose alors cette vérification en plusieurs cas : selon que la composante que l'on ne considère pas pour la projection (indice  $i$ , et donc sur lequel on somme) est un indice extrême (1 ou  $N'$ ) ou non. Et une fois cette composante précisée, selon les différents éléments de  $[S^{N'}]_c$ , indicés de manière croissante par  $j$ .

On pose  $\tilde{q}_k(\cdot | \zeta^1, \dots, \widehat{\zeta^i}, \dots, \zeta^{N'})$  la loi au site  $k$  du couplage  $P^1 \otimes \dots \otimes \widehat{P^i} \otimes \dots \otimes P^{N'}$ .

– Si  $i \neq 1$  et  $i \neq N'$  alors :

– si  $j > i$  et  $j \neq N'$  ( $j$  est l'index d'un élément quelconque de  $[S^N]_c$ ) alors la somme des  $q_k$  pour les éléments de  $[S^N]_c$  dont le  $j$  vérifie cette condition vaut :

$$\begin{aligned}
& \sum_{s^i \in S} q_k((s^1, s^2, \dots, s^{N'}) \mid \zeta^1, \dots, \zeta^{N'}) \\
&= q_k((s^1, \dots, \overset{i\text{ème}}{\downarrow} -1, \dots, \overset{j\text{ème}}{\downarrow} -1, +1, \dots, +1) \mid \zeta^1, \dots, \zeta^{N'}) \\
&= p_k^{j+1}(+1 \mid \zeta^{j+1}) - p_k^j(+1 \mid \zeta^j) \\
&= \tilde{q}_k((s^1, \dots, \widehat{s^i}, \dots, s^{N'}) \mid \zeta^1, \dots, \widehat{\zeta^i}, \dots, \zeta^{N'})
\end{aligned}$$

– si  $j < i$  et  $j \neq 0$  alors :

$$\begin{aligned}
& \sum_{s^i \in S} q_k((s^1, s^2, \dots, s^{N'}) \mid \zeta^1, \dots, \zeta^{N'}) \\
&= q_k((\dots, \overset{j\text{ème}}{\downarrow} -1, +1, \dots, \overset{i\text{ème}}{\downarrow} +1, \dots, +1) \mid \zeta^1, \dots, \zeta^{N'}) \\
&= p_k^{j+1}(+1 \mid \zeta^{j+1}) - p_k^j(+1 \mid \zeta^j) \\
&= \tilde{q}_k((s^1, \dots, \widehat{s^i}, \dots, s^{N'}) \mid \zeta^1, \dots, \widehat{\zeta^i}, \dots, \zeta^{N'})
\end{aligned}$$

– si  $j = i$  alors :

$$\begin{aligned}
& \sum_{s^i \in S} q_k((s^1, s^2, \dots, s^{N'}) \mid \zeta^1, \dots, \zeta^{N'}) \\
&= q_k((\dots, \overset{j\text{ème}}{\downarrow} -1, \overset{(j+1)\text{ème}}{\downarrow} +1, \dots, +1 \mid \zeta^1, \dots, \zeta^{N'}) \\
&\quad + q_k((\dots, \overset{(j-1)\text{ème}}{\downarrow} -1, \overset{j\text{ème}}{\downarrow} +1, \dots, +1 \mid \zeta^1, \dots, \zeta^{N'}) \\
&= (p_k^{j+1}(+1 \mid \zeta^{j+1}) - p_k^j(+1 \mid \zeta^j)) + (p_k^j(+1 \mid \zeta^j) - p_k^{j-1}(+1 \mid \zeta^{j-1})) \\
&= p_k^{i+1}(+1 \mid \zeta^{i+1}) - p_k^i(+1 \mid \zeta^{i-1}) \\
&= \tilde{q}_k((s^1, \dots, \widehat{s^i}, \dots, s^{N'}) \mid \zeta^1, \dots, \widehat{\zeta^i}, \dots, \zeta^{N'})
\end{aligned}$$

– si  $j = N'$  (i.e.  $(s^1, \dots, s^{N'}) = (-1, \dots, -1)$ ) :

$$\begin{aligned}
& \sum_{s^i \in S} q_k((s^1, s^2, \dots, s^{N'}) \mid \zeta^1, \dots, \zeta^{N'}) \\
&= q_k((-1, \dots, -1 \mid \zeta^1, \dots, \zeta^{N'}) \\
&= 1 - p_k^{N'}(+1 \mid \zeta^{N'}) \\
&= \tilde{q}_k((-1, \dots, -1) \mid \zeta^1, \dots, \widehat{\zeta^i}, \dots, \zeta^{N'})
\end{aligned}$$



– si  $j = 0$  (i.e.  $(s^1, \dots, s^{N'}) = (+1, \dots, +1)$ ) :

$$\begin{aligned} & \sum_{s^i \in \mathcal{S}} q_k((s^1, s^2, \dots, s^{N'}) \mid \zeta^1, \dots, \zeta^{N'}) \\ &= q_k((+1, \dots, +1 \mid \zeta^1, \dots, \zeta^{N'}) \\ &= p_k^1(+1 \mid \zeta^1) \\ &= \tilde{q}_k((+1, \dots, +1) \mid \zeta^1, \dots, \hat{\zeta}^i, \dots, \zeta^{N'}) \end{aligned}$$

– Si la composante considérée est  $i = 1$  :

– cas  $j = N'$  :

$$\begin{aligned} & \sum_{s^i \in \mathcal{S}} q_k((s^1, s^2, \dots, s^{N'}) \mid \zeta^1, \dots, \zeta^{N'}) \\ &= q_k((-1, \dots, -1 \mid \zeta^1, \dots, \zeta^{N'}) \\ &= 1 - p_k^{N'}(+1 \mid \zeta^{N'}) \\ &= \tilde{q}_k((-1, \dots, -1) \mid \zeta^1, \dots, \hat{\zeta}^i, \dots, \zeta^{N'}) \end{aligned}$$

– cas  $1 \leq j < N'$  : identique aux cas précédemment évoqués

– cas  $j = 0$  :

$$\begin{aligned} & \sum_{s^1 \in \mathcal{S}} q_k((s^1, s^2, \dots, s^{N'}) \mid \zeta^1, \dots, \zeta^{N'}) \\ &= q_k((-1, +1, \dots, +1 \mid \zeta^1, \dots, \zeta^{N'}) \\ &\quad + q_k((+1, \dots, +1 \mid \zeta^1, \dots, \zeta^{N'}) \\ &= (p_k^2(+1 \mid \zeta^2) - p_k^1(+1 \mid \zeta^1)) + p_k^1(+1 \mid \zeta^1) \\ &= \tilde{q}_k((+1, \dots, +1) \mid \zeta^2, \dots, \zeta^{N'}) \end{aligned}$$

– Si  $i = N'$  :

– cas  $j = N'$  (i.e.  $(s^1, \dots, s^{N'}) = (-1, \dots, -1)$ ) :

$$\begin{aligned} & \sum_{s^{N'} \in \mathcal{S}} q_k((-1, -1, \dots, -1, s^{N'}) \mid \zeta^1, \dots, \zeta^{N'}) \\ &= q_k((-1, -1, \dots, -1, -1 \mid \zeta^1, \dots, \zeta^{N'}) \\ &\quad + q_k((-1, \dots, -1, +1 \mid \zeta^1, \dots, \zeta^{N'}) \\ &= (1 - p_k^{N'}(+1 \mid \zeta^{N'})) - (p_k^{N'}(+1 \mid \zeta^{N'}) - p_k^{N'-1}(+1 \mid \zeta^{N'-1})) \\ &= \tilde{q}_k((-1, \dots, -) \mid \zeta^1, \dots, \zeta^{N'-1}) \end{aligned}$$

– Pour les autres éléments de  $[S^N]_c$  : de  $(-1, -1, \dots, -1, +1)$  à  $(+1, \dots, +1)$ , on retrouve des situations similaires à celles déjà évoquées.

■

Cette dernière propriété 5.2.6 devient particulièrement remarquable lorsque la dynamique sur chacune des composantes est identique. Étudions plus précisément ce cas particulier dans la section suivante.

## 5.3 Couplage synchrone croissant d'un nombre quelconque de PCA identiques

### 5.3.1 Construction

Ainsi nous nous intéressons dans cette section 5.3 au cas particulier où l'on couple un nombre fini de fois la même dynamique PCA, c'est à dire que notre attention se portera sur le couplage de différentes trajectoires de la même dynamique markovienne. On remarque au préalable que pour un automate cellulaire probabiliste attractif  $P$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , compte tenu de la propriété 5.2.2, on peut effectivement construire pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , le couplage de  $N$  fois la même dynamique  $P$  :

$$\underbrace{P \otimes P \otimes \dots \otimes P}_{N \text{ fois}},$$

que l'on notera  $P^{\otimes N}$ .

On démontre pour ces couplages la propriété suivante, corollaire direct de la propriété 5.2.6 :

#### Propriété 5.3.1 (Compatibilité, pour une même dynamique PCA)

Soient  $(N, N') \in (\mathbb{N}^*)^2$  tels que  $1 \leq N < N'$ . Soit un automate cellulaire probabiliste attractif  $P$ . On considère le  $N$ -uplet croissant d'automates cellulaires probabilistes  $(P^1, \dots, P^{N'})$  où chaque dynamique  $P^i$  est la même que la dynamique  $P$ . Soit  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_N \leq N'$  une sous-famille ordonnée d'éléments de  $\{1, \dots, N'\}$ . La dynamique couplée  $P^{\otimes N} = P^{i_1} \otimes P^{i_2} \dots \otimes P^{i_N}$  coïncide alors avec la marginale sur les composantes  $(i_1, i_2, \dots, i_N)$  du couplage  $P^{\otimes N'} = P^1 \otimes P^2 \dots \otimes P^{N'}$ . En particulier :

$$\forall N, \forall N' \geq N, \quad P^{\otimes N} = \wp_{\{1, \dots, N\}} P^{\otimes N'}.$$

#### Preuve :

Ce résultat est immédiat compte tenu du résultat précédent, dès lors que l'on remarque que : pour  $(N, N') \in (\mathbb{N})^2$ ,  $N < N'$ , pour tout  $N$ -uplet croissant  $(i_1, \dots, i_N)$  de  $\{1, \dots, N'\}$ , on a :

$$P^{i_1} \otimes \dots \otimes P^{i_N} = P^1 \otimes \dots \otimes P^N = P^{\otimes N}$$

compte tenu de la construction du couplage ordonné et puisque les dynamiques sur chaque composante coïncident avec la même dynamique  $P$ . ■

Étant donnée la Propriété 5.3.1 précédente, on peut alors énoncer la définition suivante :

**Définition 5.3.2** Pour tout automate cellulaire probabiliste  $P$  attractif, on désignera dorénavant par  $\mathbf{IP}$  le couplage croissant de  $N$  fois la même dynamique  $P$  où  $N$  sera un nombre fini grand :

$$\mathbf{IP} = P^{\otimes N}.$$

D'après 5.3.1, on remarquera que cette définition ne dépend pas vraiment du nombre  $N$  de PCA couplés.  $\mathbf{IP}$  désignera donc aussi bien le couplage de  $N$  fois l'automate cellulaire probabiliste  $P$ , que toute projection sur un plus petit nombre de coordonnées de ce même couplage.

### 5.3.2 Quelques propriétés

Le couplage  $\mathbf{IP}$  présente alors la propriété fondamentale de coalescence suivante : si, à un instant donné, deux composantes d'une réalisation sont égales, alors dorénavant elles – ainsi que toutes les composantes comprises entre elles – demeureront égales, ce que traduit l'énoncé suivant :

**Propriété 5.3.3** *Soit  $P$  un automate cellulaire probabiliste attractif. Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ .*

*On considère  $\mathbf{IP}$  le couplage croissant de  $N$  fois ce même PCA.*

*Si  $\exists n_0, \exists (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2, i < j$  tel que  $\omega^i(n_0) = \omega^j(n_0)$ , alors :  $\forall n \geq n_0$*

$$\mathbf{IP}(\omega^i(n) = \omega^{i+1}(n) = \dots = \omega^{j-1}(n) = \omega^j(n) \mid \omega^i(n_0) = \omega^j(n_0)) = 1.$$

**Preuve :**

Compte tenu de l'ordre stochastique, s'il existe  $i$  et  $j$  tels que  $\omega^i(n_0) = \omega^j(n_0)$  alors :

$$\forall l, i \leq l \leq j, \quad \omega^i(n_0) = \omega^l(n_0) = \omega^j(n_0).$$

Dans ce cas, grâce au Théorème 5.2.3, la croissance des spins numérotés de  $i$  à  $j$  sont respectées en tout temps  $n$  pour tout site de  $\mathbb{Z}^d$ . De plus, comme le couplage  $\mathbf{IP}$  est constitué de composantes égales, il respecte également la décroissance des configurations. C'est donc qu'il y a égalité des  $\omega^i(n)$  et  $\omega^j(n)$  et de tous les spins intermédiaires. ■

Une autre propriété du couplage  $\mathbf{IP}$  est à mettre en exergue. Elle concerne la suite  $(\rho(n))_{n \in \mathbb{N}}$  qui sera au cœur de l'étude de l'ergodicité au chapitre 6. Pour tout instant  $n \in \mathbb{N}$ , on définit

$$\rho(n) = \mathbf{IP}\left(\omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, +\mathbf{1})\right). \quad (5.5)$$

Les propriétés de monotonie du couplage permettent d'obtenir une minoration de cette quantité :

**Propriété 5.3.4** *Soient  $\sigma, \eta \in S^{\mathbb{Z}^d}$  tels que  $\sigma \preceq \eta$ . On a :*

$$\mathbf{IP}\left(\omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\sigma, \eta)\right) \leq \rho(n).$$

**Preuve :**

On notera que :

$$\begin{aligned} & \mathbf{IP}\left(\omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\sigma, \eta)\right) \\ &= \mathbf{IP}\left(\omega_0^2(n) \neq \omega_0^3(n) \mid (\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4)(0) = (-\mathbf{1}, \sigma, \eta, +\mathbf{1})\right). \end{aligned}$$

Comme on a  $-\mathbf{1} \preceq \sigma \leq \eta \preceq +\mathbf{1}$ , par définition de  $\mathbf{IP}$ , on a pour tout  $n$ , sous  $\mathbf{IP}\left((\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4) \in \cdot \mid (\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4)(0) = (-\mathbf{1}, \sigma, \eta, +\mathbf{1})\right)$  :

$$\omega^1(n) \preceq \omega^2(n) \preceq \omega^3(n) \preceq \omega^4(n) ;$$

d'où :

$$\omega_0^1(n) \leq \omega_0^2(n) \leq \omega_0^3(n) \leq \omega_0^4(n) \quad \mathbf{IP} \left( \cdot \middle| (\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4)(0) = (-\mathbf{1}, \sigma, \eta, +\mathbf{1}) \right) - p.s.$$

Compte tenu de cette inégalité, on remarque alors que  $\omega_0^2(n) < \omega_0^3(n)$  implique  $\omega_0^1(n) < \omega_0^4(n)$ , d'où la conclusion :

$$\begin{aligned} & \mathbf{IP} \left( \omega_0^2(n) \neq \omega_0^3(n) \middle| (\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4)(0) = (-\mathbf{1}, \sigma, \eta, +\mathbf{1}) \right) \\ & \leq \mathbf{IP} \left( \omega_0^1(n) \neq \omega_0^4(n) \middle| (\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4)(0) = (-\mathbf{1}, \sigma, \eta, +\mathbf{1}) \right) \\ & = \mathbf{IP} \left( \omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \middle| (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, +\mathbf{1}) \right), \end{aligned}$$

grâce à la Propriété 5.3.1. ■

Une autre propriété mérite également que l'on s'y attarde. Rappelons (cf. formules (2.56) et (2.57)) que l'on a défini

$$\overline{\Lambda} \triangleq \cup_{k \in \Lambda} V_k = \overline{\Lambda}^{(1)},$$

ainsi que :

$$\overline{\Lambda}^{(2)} \triangleq \cup_{k \in \overline{\Lambda}} V_k = \overline{\overline{\Lambda}^{(1)}}^{(1)}, \dots, \overline{\Lambda}^{(n)} \triangleq \cup_{k \in \overline{\Lambda}^{(n-1)}} V_k. \quad (5.6)$$

$\overline{\Lambda}^{(n)}$  désigne l'ensemble des sites de  $\mathbb{Z}^d$ , qui à un instant  $n_0$  ont une influence sur la valeur des spins dans  $\Lambda$  à l'instant  $n_0 + n$ . On peut remarquer alors que si l'on part à l'instant 0 de deux configurations qui coïncident sur  $\overline{\Lambda}^{(n)}$ , alors, presque sûrement, elles coïncideront au temps  $n$  sur les sites de  $\Lambda$ ; ce que traduit la propriété suivante :

**Propriété 5.3.5** *Soit  $n$  fixé. Pour toute partie finie  $\Lambda$  de  $\mathbb{Z}^d$ , pour toutes configurations  $(\sigma, \eta) \in [(S^{\mathbb{Z}^d})^2]_c$  telles que  $\sigma_{\overline{\Lambda}^{(n)}} \equiv \eta_{\overline{\Lambda}^{(n)}}$  on a :*

$$\mathbf{IP} \left( \omega_{\Lambda}^1(n) \equiv \omega_{\Lambda}^2(n) \middle| (\omega^1, \omega^2)(0) = (\sigma, \eta) \right) = 1.$$

Le couplage  $\mathbf{IP}$  préservant l'ordre stochastique entre les configurations, il est clair que les configurations extrémales  $-\mathbf{1}$  et  $+\mathbf{1}$  vont jouer un rôle particulier. La section suivante s'intéressera à d'autres couplages croissants au sein desquels le rôle de ces configurations sera mis en valeur.

## 5.4 Couplage synchrone croissant de dynamiques PCA à volume fini et infini

Dans cette section, nous comparerons les effets d'une dynamique PCA attractive  $P$  avec ceux de dynamiques à volume fini  $P_{\Lambda}^{\tau}$ ,  $\tau$ , élément de  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , désignant une condition au bord de la partie finie  $\Lambda$  de  $\mathbb{Z}^d$ . Constatant l'importance du rôle des configurations extrémales, nous introduirons les couplages dont la première et la dernière composante sont les dynamiques à volume fini maintenant le système hors de ce volume dans un état extrémal, presque sûrement. Nous établirons ensuite deux propriétés permettant de comparer les dynamiques à volume fini et à volume infini.

### 5.4.1 Conditions au bord extrémales et couplage spécifique associé

On rappelle les notations suivantes précédemment introduites : Soit  $P = (p_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  un automate cellulaire probabiliste sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  et soit  $\tau \in S^{\mathbb{Z}^d}$ .  $\tilde{P}_\Lambda^\tau$  désigne la dynamique parallèle sur le volume fini  $\Lambda$  de condition au bord  $\tau_{\Lambda^c}$  :

$$\tilde{P}_\Lambda^\tau(d\sigma_\Lambda | \eta_\Lambda) = \bigotimes_{k \in \Lambda} p_k(d\sigma_k | \eta_\Lambda \tau_{\Lambda^c}),$$

tandis que  $P_\Lambda^\tau$  désigne son plongement en tant que dynamique à volume infini, sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  : pour tout  $\sigma, \eta \in S^{\mathbb{Z}^d}$ ,

$$\begin{aligned} P_\Lambda^\tau(d\sigma | \eta) &= \bigotimes_{k \in \Lambda} p_k(d\sigma_k | \eta_\Lambda \tau_{\Lambda^c}) \otimes \underbrace{\bigotimes_{k \in \Lambda^c} \delta_{\tau_k}(d\sigma_k)}_{\delta_{\tau_{\Lambda^c}}(d\sigma_{\Lambda^c})} \\ &= \tilde{P}_\Lambda^\tau(d\sigma_\Lambda | \eta_\Lambda \tau_{\Lambda^c}) \otimes \delta_{\tau_{\Lambda^c}}(d\sigma_{\Lambda^c}). \end{aligned}$$

L'on dit que  $P_\Lambda^\tau$  est la dynamique à volume fini  $\Lambda$  et condition au bord  $\tau$  associée à la dynamique PCA  $P$ . Pour  $k \in \Lambda$ , les règles locales d'évolution  $p_k$  de  $P$  et  $P_\Lambda^\tau$  qui régissent l'évolution des spins sont les mêmes, alors que sur  $\Lambda^c$ , la probabilité de transition  $P_\Lambda^\tau$  maintient presque sûrement les valeurs des spins égales à celle de  $\tau_{\Lambda^c}$ . On rappelle que l'on utilise les notations  $P_\Lambda^-$  et  $P_\Lambda^+$  pour désigner respectivement les quantités  $P_\Lambda^{-1}$  et  $P_\Lambda^{+1}$ . La proposition suivante assure l'existence des couplages  $P_\Lambda^- \otimes P \otimes P_\Lambda^+$  et  $P_\Lambda^- \otimes P \otimes P \otimes P_\Lambda^+$ , fort utiles dans la sous-section suivante pour établir des relations de comparaison entre volumes fini et infini :

#### Propriété 5.4.1 (Existence du couplage avec adjonction de dynamiques à volume fini et conditions au bord extrémales)

Soit  $P$  un automate cellulaire probabiliste attractif. Soit  $N \in \mathbb{N}^*$  quelconque. Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  un volume fini. Le  $(N+2)$ -uplet  $(P_\Lambda^-, \underbrace{P, \dots, P}_{N \text{ fois}}, P_\Lambda^+)$  est croissant. On peut donc définir le couplage croissant  $P_\Lambda^- \otimes P \otimes \dots \otimes P \otimes P_\Lambda^+$ .

#### Preuve :

On notera ici  $P^0 = P_\Lambda^-$ ,  $P^1 = P$ ,  $\dots$ ,  $P^N = P$ ,  $P^{N+1} = P_\Lambda^+$ . On notera par  $(p_k^i)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ ,  $i \in \{0, \dots, N+1\}$  les lois locales de ces PCA. Soient  $\zeta^0, \zeta^1, \dots, \zeta^N, \zeta^{N+1}$   $(N+2)$  configurations de  $S^{\mathbb{Z}^d}$  ordonnées :  $\zeta^0 \preceq \zeta^1 \preceq \dots \preceq \zeta^N \preceq \zeta^{N+1}$ . Soit  $k \in \mathbb{Z}^d$ .

– Considérons dans un premier temps le cas où  $k \in \Lambda$  :

Par définition de  $P_\Lambda^-$  et  $P_\Lambda^+$  on a alors :  $p_k^0 = p_k^1 = \dots = p_k^N = p_k^{N+1} = p_k$ , et comme le PCA  $P$  est attractif, puisque

$$\zeta_\Lambda^0(-\mathbf{1})_{\Lambda^c} \preceq \zeta^1 \preceq \dots \preceq \zeta^N \preceq \zeta_\Lambda^{N+1}(+\mathbf{1})_{\Lambda^c},$$

les lois  $p_k^0(\cdot | \zeta_\Lambda^0(-\mathbf{1})_{\Lambda^c})$ ,  $p_k^1(\cdot | \zeta^1)$ ,  $\dots$ ,  $p_k^N(\cdot | \zeta^N)$ ,  $p_k^{N+1}(\cdot | \zeta_\Lambda^{N+1}(+\mathbf{1})_{\Lambda^c})$  sont donc ordonnées croissantes.

– Dans un second temps, considérons le cas où  $k \in \Lambda^c$  :

Par définition de  $P_\Lambda^-$  et  $P_\Lambda^+$  on a alors :  $p_k^0(\cdot | \zeta_\Lambda^0(-\mathbf{1})_{\Lambda^c}) = \delta_{-1}(\cdot)$  et  $p_k^{N+1}(\cdot | \zeta_\Lambda^{N+1}(+\mathbf{1})_{\Lambda^c}) = \delta_{+1}(\cdot)$ . Comme le PCA  $P$  est attractif, le  $N$ -uplet  $p_k^1(\cdot | \zeta^1), \dots, p_k^N(\cdot | \zeta^N)$  est croissant, et donc le  $(N+2)$ -uplet  $(\delta_{-1}, p_k^1(\cdot | \zeta^1), \dots, p_k^N(\cdot | \zeta^N), \delta_{+1})$  l'est également puisque  $\delta_{-1}$  et  $\delta_{+1}$  sont des éléments extrémaux, ce qui permet de conclure.

■

## 5.4.2 Comparaisons volume fini/volume infini

Grâce à l'existence du couplage  $P_\Lambda^- \otimes P \otimes P_\Lambda^+$  établi dans la propriété 5.4.1, on peut alors comparer des propriétés de l'automate cellulaire probabiliste  $P$  à volume infini avec les PCA à volume fini associés et conditions au bord extrémales,  $P_\Lambda^-$  et  $P_\Lambda^+$  :

**Propriété 5.4.2** *Soit  $P$  un automate cellulaire probabiliste attractif. Soit  $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ . Alors, pour toute condition initiale  $\xi$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  et pour tout instant  $n$ , on a :*

$$P_\Lambda^- \otimes P \otimes P_\Lambda^+(\omega^1(n) \preceq \omega^2(n) \preceq \omega^3(n) | (\omega^1, \omega^2, \omega^3)(0) = (\xi_\Lambda(-\mathbf{1})_{\Lambda^c}, \xi, \xi_\Lambda(+\mathbf{1})_{\Lambda^c})) = 1$$

et en conséquence :

$$\begin{aligned} P_\Lambda^-(\omega(n) \in \cdot | \omega(0) = \xi_\Lambda(-\mathbf{1})_{\Lambda^c}) \\ \preceq P(\omega(n) \in \cdot | \omega(0) = \xi) \preceq P_\Lambda^+(\omega(n) \in \cdot | \omega(0) = \xi_\Lambda(+\mathbf{1})_{\Lambda^c}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

**Preuve :**

D'après le résultat précédent, comme  $P$  est attractif, le triplet  $(P_\Lambda^-, P, P_\Lambda^+)$  est croissant, et donc, selon le Théorème 5.2.3 on peut définir le couplage ordonné  $P_\Lambda^- \otimes P \otimes P_\Lambda^+$  de ces trois automates cellulaires probabilistes. Pour toute condition initiale  $\xi$  de  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , on remarque que :

$$\xi_\Lambda(-\mathbf{1})_{\Lambda^c} \preceq \xi \preceq \xi_\Lambda(+\mathbf{1})_{\Lambda^c}$$

et puisque le couplage ordonné préserve l'ordre stochastique, on a pour tout instant  $n$  le résultat souhaité.

D'autre part, l'inégalité (5.7) n'est autre que l'inégalité précédente réécrite en utilisant les propriétés du couplage, et donc le fait que la première marginale coïncide avec  $P_\Lambda^-$ , la deuxième avec  $P$ , et la troisième avec  $P_\Lambda^+$ . ■

On peut ainsi comparer le déroulement de la dynamique à volume infini avec l'évolution sous l'action des dynamiques à volume fini associées.

Nous concluons en utilisant le couplage croissant pour écrire des majorations de la suite  $(\rho(n))_{n \in \mathbb{N}}$  déjà définie précédemment en (5.5).

### Propriété 5.4.3

*Soit  $P$  un automate cellulaire probabiliste attractif. En définissant la suite :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \rho(n) \triangleq \mathbf{IP}(\omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) | (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, +\mathbf{1})) \quad (5.8)$$

*l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\rho(n) \leq P_\Lambda^- \otimes P_\Lambda^+(\omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) | (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, +\mathbf{1})).$$

**Preuve :**

D'après le résultat de la propriété 5.4.1, comme  $P$  est attractif, on peut définir le couplage ordonné  $P_{\Lambda}^{-} \otimes P \otimes P \otimes P_{\Lambda}^{+}$ . Comme  $-1 \preceq -1 \preceq +1 \preceq +1$ , et puisque le couplage préserve l'ordre stochastique, on a, à tout instant  $n$  :

$$\begin{aligned} \omega^1(n) &\preceq \omega^2(n) \preceq \omega^3(n) \preceq \omega^4(n) \\ P_{\Lambda}^{-} \otimes P \otimes P \otimes P_{\Lambda}^{+} \left( \cdot \mid (\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4)(0) = (-1, -1, +1, +1) \right) &\text{ p.s.} \end{aligned}$$

d'où, en particulier :

$$\begin{aligned} \omega_0^1(n) &\leq \omega_0^2(n) \leq \omega_0^3(n) \leq \omega_0^4(n) \\ P_{\Lambda}^{-} \otimes P \otimes P \otimes P_{\Lambda}^{+} \left( \cdot \mid (\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4)(0) = (-1, -1, +1, +1) \right) &\text{ p.s.} \end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} P_{\Lambda}^{-} \otimes P \otimes P \otimes P_{\Lambda}^{+} (\omega_0^2(n) \neq \omega_0^3(n) \mid (\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4)(0) = (-1, -1, +1, +1)) \\ \leq P_{\Lambda}^{-} \otimes P \otimes P \otimes P_{\Lambda}^{+} (\omega_0^1(n) \neq \omega_0^4(n) \mid (\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4)(0) = (-1, -1, +1, +1)) \end{aligned}$$

d'où la conclusion, en remarquant que, par les propriétés du couplage :

$$\begin{aligned} P_{\Lambda}^{-} \otimes P \otimes P \otimes P_{\Lambda}^{+} (\omega_0^2(n) \neq \omega_0^3(n) \mid (\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4)(0) = (-1, -1, +1, +1)) \\ = P \otimes P (\omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-1, +1)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_{\Lambda}^{-} \otimes P \otimes P \otimes P_{\Lambda}^{+} (\omega_0^1(n) \neq \omega_0^4(n) \mid (\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4)(0) = (-1, -1, +1, +1)) \\ = P_{\Lambda}^{-} \otimes P_{\Lambda}^{+} (\omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-1, +1)). \end{aligned}$$

■

## 5.5 Quelques idées d'utilisation

Le couplage croissant d'automates cellulaires probabilistes introduit et étudié dans ce chapitre sera essentiel pour l'étude au chapitre suivant de la vitesse de convergence à l'équilibre d'automates cellulaires probabilistes attractifs. Toutefois, ce couplage présente un intérêt plus général.

Il permet d'envisager l'adaptation au cadre PCA d'autres résultats qui existent dans le cadre des systèmes de particules en temps continu et qui se basent sur l'existence d'un couplage préservant l'ordre stochastique. Nous pensons par exemple aux résultats de Holley sur la structure d'ouvert topologique de l'ensemble des taux de saut de systèmes de particules attractifs, invariants par translation, convergeant exponentiellement vite vers l'équilibre (cf. Théorème (0.2) de la référence [Hol85]).

D'autre part une utilisation concrète du couplage croissant de PCA (Théorème 5.2.3) peut être envisagée au sein des algorithmes de simulation parfaite. Il s'agit

d'algorithmes introduits par Propp et Wilson ([PW96]) en 1996 – puis Fill ([Fil98]) en 1998 – permettant de réaliser exactement la mesure stationnaire d'une chaîne de Markov. Ces algorithmes sont particulièrement efficaces quand il existe des couplages monotones associés. Ce domaine de recherche est extrêmement actif actuellement et très prometteur. On pourra consulter avec profit les notes de cours d'Häggström à ce propos [Häg02].

Par ailleurs, au delà de l'utilisation des algorithmes de simulation parfaite existants pour réaliser des simulations de dynamiques parallèles et de leurs états d'équilibre éventuels, les automates cellulaires probabilistes peuvent jouer un rôle plus fondamental dans la construction même de ces algorithmes de simulation parfaite. En effet, par exemple, dans l'article [HS00], Häggström et Steif définissent un algorithme du type Propp-Wilson afin de réaliser une simulation parfaite de champs markoviens sur  $\mathbb{Z}^d$  dans une situation proche de l'indépendance spatiale (*régime de hautes températures*).





# Chapitre 6

## Convergence vers l'équilibre de PCA

Après avoir aux chapitres 3 et 4 étudié l'existence de plusieurs états d'équilibre pour des dynamiques PCA et s'être intéressé au caractère gibbsien de ces états pour certaines classes de dynamiques, nous porterons notre intérêt dans les pages à venir sur les questions liées à la convergence vers l'équilibre lorsque la dynamique PCA considérée ne possède qu'un unique état d'équilibre. Les questions naturelles qui se posent et qui vont être abordées sont celles des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'état d'équilibre soit effectivement unique ; et le cas échéant, déterminer si la dynamique converge vers cet état (on parlera alors d'**ergodicité**), étudier de quelle manière cela se produit et en particulier avec quelle vitesse.

Le couplage synchrone croissant de plusieurs PCA introduit et étudié précisément au chapitre précédent sera un des outils fondamentaux des résultats établis. Dans tout ce chapitre, les automates cellulaires probabilistes considérés seront des PCA **purements stochastiques, à valeurs dans l'espace d'états  $S^{\mathbb{Z}^d}$  pour lequel nous rappelons que  $S = \{-1, +1\}$ , et dont la loi locale  $p_k$  est invariante par translation.**

Après avoir défini mathématiquement ce que l'on entend par convergence vers l'équilibre, nous rappellerons (section 6.1) différents résultats d'ergodicité connus et en préciserons la portée ainsi que les techniques mathématiques sur lesquelles ils se fondent. Dans la suite du chapitre, nous nous concentrerons alors sur les PCA attractifs, invariants par translation. Dans la section 6.2 nous montrerons principalement que toute dynamique PCA de cette catégorie, sous réserve qu'elle n'admette qu'un unique état d'équilibre, est ergodique (Théorème 6.2.10). Nous établirons ensuite en section 6.3 la dichotomie suivante : ou bien une telle dynamique converge vers l'état d'équilibre strictement moins vite que  $\frac{1}{n^d}$  (où  $d$  est la dimension du réseau  $\mathbb{Z}^d$ ), ou bien la vitesse de convergence est exponentielle (Théorème 6.3.1). Les PCA attractifs de la classe  $\mathcal{C}$  seront ensuite au coeur de la section 6.4 dont le but sera essentiellement de prouver le théorème 6.4.1 grâce à l'étude fine des propriétés des mesures réversibles à volume fini  $\nu_\Lambda^\tau$ , développée au Chapitre 4. Ce théorème nous permettra d'établir que tout PCA attractif de cette classe  $\mathcal{C}$  converge à vitesse exponentielle vers son unique état d'équilibre dès lors que la mesure de Gibbs pour le potentiel canoniquement associé est unique et faiblement mélangeante (concept que l'on précisera alors). Enfin, nous conclurons sur la généralisation de ces résultats à d'autres classes de PCA.

## 6.1 Critères usuels d'ergodicité pour les PCA

Précisons dans un premier instant la définition de l'ergodicité pour un processus markovien à temps discret ; c'est à dire de la convergence vers un état d'équilibre qui ne peut en conséquence qu'être unique.

### 6.1.1 Définition de l'ergodicité

**Définition 6.1.1** *On dit qu'un processus de Markov  $P$  à valeurs dans un espace probabilisé  $\mathcal{X}$  est **ergodique** s'il existe une unique mesure stationnaire  $\nu$  telle que pour toute mesure initiale  $\pi$ , mesure de probabilité sur  $\mathcal{X}$ ,*

$$\pi P^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \nu \quad (6.1)$$

*c'est à dire, pour la topologie de la convergence faible :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int P(\omega(n) \in \cdot \mid \omega(0) = \sigma) \pi(d\sigma) = \nu(\cdot). \quad (6.2)$$

La remarque suivante nous donne un critère suffisant d'ergodicité :

#### Remarque 6.1.2

*Un processus de Markov  $P$  sur  $\mathcal{X}$  est ergodique s'il existe une unique mesure stationnaire  $\nu$  telle que pour toute fonction  $f$  locale :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\sigma} \left| \int f(\omega(n)) P(d\omega \mid \omega(0) = \sigma) - \int f d\nu \right| = 0, \quad (6.3)$$

*ou bien si la propriété suivante équivalente, dite propriété d'oubli de la condition initiale, est vérifiée :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\sigma, \eta} \mathcal{D}\left(P(\omega(n) \in \cdot \mid \omega(0) = \sigma), P(\omega(n) \in \cdot \mid \omega(0) = \eta)\right) = 0 \quad (6.4)$$

*où  $\mathcal{D}$  est une distance sur l'espace des mesures de probabilité  $\mathcal{P}(\mathcal{X})$  compatible avec la topologie de la convergence faible.*

Pour établir l'ergodicité, on montrera en fait dans la suite la validité de (6.3), ou de (6.4). Afin de mettre en relief l'originalité de nos théorèmes, évoquons maintenant les principaux résultats d'ergodicité existant et concernant des PCA à volume infini. Rappelons au préalable le résultat (3.4) de la Proposition 3.2.1, qui assure l'ergodicité des dynamiques PCA purement stochastiques à volume fini.

### 6.1.2 Critère de Dobrushin-Vasershtein

Historiquement, le premier résultat d'ergodicité pour les automates cellulaires probabilistes à volume infini est dû aux travaux de Vasershtein [Vas69] et de Dobrushin [Dob71] respectivement en 1968 et 1971. Leur résultat assure l'ergodicité à vitesse exponentielle et peut être formulé ainsi :

**Théorème (Dobrushin-Vasershtein)**

Soit  $\gamma$  le réel défini par :

$$\gamma \triangleq \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j \in V_k} \sup_{\sigma_{V_k} \in S^{V_k}} \left| p_k(+1 | \sigma_{V_k}^j) - p_k(+1 | \sigma_{V_k}^-) \right| \quad (6.5)$$

où  $\sigma^j$  a été défini en (2.11) et  $V_k$  défini en (2.44).

Si  $\gamma < 1$  alors le PCA  $P$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  est ergodique à vitesse exponentielle, c'est à dire qu'il existe une unique mesure stationnaire  $\nu$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  telle que :

$\forall f : S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathbb{R}$ , locale,  $\exists c(f) \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sup_{\sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}} \left| P(f(\omega(n)) \mid \omega(0) = \sigma) - \nu(f) \right| \leq \frac{c(f)}{1 - \gamma} e^{-(\ln \frac{1}{\gamma}) n} \quad (6.6)$$

◆

Dans l'article [LMS90], Lebowitz *et al.* proposent une démonstration élégante de ce critère. Remarquons qu'il permet d'assurer l'ergodicité à vitesse exponentielle d'un automate cellulaire probabiliste général (non nécessairement invariant par translation, non nécessairement attractif, non nécessairement purement stochastique) lorsque celui-ci est dans une situation proche de l'indépendance totale entre les différents sites (zone d'interaction faible entre les sites). Dans ce cas, la condition  $\gamma < 1$  est en effet toujours vérifiée. Examinons plus avant ce critère dans le cas de PCA de la classe  $\mathcal{C}$  afin d'avoir une idée plus précise de son champ d'application en fonction du paramètre  $\beta$  contrôlant la « stochasticité » de la dynamique (cf. section 4.1.1).

**Exemple : Critère de Dobrushin-Vasershtein pour les PCA de la classe  $\mathcal{C}_0$** 

Rappelons que la classe  $\mathcal{C}_0$  (cf. (4.15)) est constituée des automates cellulaires probabilistes réversibles définis par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \forall s \in S = \{-1, +1\}, p_k(s \mid \eta) = \frac{1}{2} \left( 1 + s \tanh(\beta \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \eta_{k'}) \right)$$

où

$$V_k = \{k' \in \mathbb{Z}^d : \mathcal{K}(k' - k) \neq 0\}$$

et où la fonction  $\mathcal{K}(\cdot)$  est supposée paire, pour que le PCA  $P$  soit alors réversible.

**Remarque 6.1.3**

Si l'on suppose que  $\mathcal{K}(k) = 0$  pour tout  $k \neq 0$ , (c'est à dire seul  $\mathcal{K}(0)$  est non nul), on remarque que dans ce cas il n'y a pas d'interaction entre les sites. Le coefficient  $\gamma$  est toujours strictement plus petit que 1 car le PCA est purement stochastique, et l'on retrouve ainsi l'ergodicité de cette juxtaposition de chaînes de Markov.

Pour les PCA de la classe  $\mathcal{C}_0$ , le critère  $\gamma$  s'écrit :

$$\gamma = \frac{1}{2} \sum_{j \in V_0} \sup_{\eta \in S^{V_0}} \left| \tanh(\beta \sum_{k' \in V_0} \mathcal{K}(k') \eta_{k'}^j) - \tanh(\beta \sum_{k' \in V_0} \mathcal{K}(k') \eta_{k'}) \right| \quad (6.7)$$

Puisque l'utilisation éventuelle de techniques d'analyse ne permet pas de mener une étude suffisamment précise, le calcul de cette quantité dans un grand degré de généralité (dimension  $d$ , portée  $R$  quelconque) devient vite fastidieux par le grand nombre de configurations différentes à considérer (de l'ordre de  $(\#V_k) 2^{(\#V_k)}$ ). Nous présentons ici deux cas particuliers (dimension 1 et 2) qui nous permettent de préciser l'ordre de grandeur de la zone de faible interaction, *i.e.* de validité de ce critère, sous lequel le processus sera exponentiellement ergodique.

– Cas de la dimension 1 :

Considérons le cas des PCA de la classe  $\mathcal{C}_0$ , attractifs, en dimension  $d = 1$ , de portée  $R = 1$  et isotropes, c'est à dire :

$$\mathcal{K}(e_1) = \mathcal{K}(-e_1) \triangleq K > 0, \mathcal{K}(0) = u > 0, \mathcal{K}(k) = 0 \text{ sinon.}$$

Le cas  $K = 0$  ayant déjà été mentionné, on suppose que  $K = 1$ ; ainsi la quantité  $\gamma$  est notée ici  $\gamma(\beta, u)$  (rappelons que  $\beta > 0$ ). Remarquons que si  $u = 0$ , tout site ne dépend que de la valeur des spins en ses premiers sites voisins à l'instant précédent. Si  $u = 1 = K$ , la dépendance sera uniforme en les sites voisins et en la valeur du site même, à l'instant précédent (interaction propre du site d'intensité égale à l'interaction avec un des sites premiers voisins). On calcule que :

$$\begin{aligned} \gamma(\beta, u) = \max \left( \left| \tanh(\beta(u+2)) - \tanh(\beta u) \right|, \left| \tanh(\beta u) - \tanh(\beta(2-u)) \right| \right) \\ + \frac{1}{2} \max \left( \left| \tanh(\beta(u+2)) - \tanh(\beta(2-u)) \right|, \left| 2 \tanh(\beta u) \right| \right) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Explicitement, dans certains cas particuliers dignes d'intérêt, on obtient les formules détaillées dans le Tableau 6.1. Précisons que  $\beta_c$  est tel que pour  $\beta > \beta_c$ , on ait transition de phase. Le cas  $\beta_c = +\infty$  signifie donc ici qu'il n'y a jamais de transition de phase, et que pour tout  $\beta > 0$  on a unicité de la mesure de Gibbs, respectivement au potentiel (4.34) naturellement associé à la dynamique.

TAB. 6.1 – Coefficient de Dobrushin-Vasershtein, cas de la dimension 1

$u$	Coefficient $\gamma(\beta, u)$	$\beta$ tel que $\gamma(\beta, u) < 1$	$\beta_c$
0	$\tanh(2\beta)$	$\beta > 0$	$\beta_c = +\infty$
1	$\tanh(3\beta)$	$\beta > 0$	$\beta_c = +\infty$
2	$2 \tanh(2\beta)$	$0 < \beta < \frac{1}{2} \text{Argtanh}(\frac{1}{2}) \simeq 0,275$	$\beta_c = +\infty$
3	$2 \tanh(3\beta) + \tanh(\beta)$	$0 < \beta \lesssim 0,151$	$\beta_c = +\infty$
-1	$2 \tanh(\beta) + \tanh(3\beta)$	$0 < \beta \lesssim 0,217$	$\beta_c = +\infty$

– Cas de la dimension 2 :

On considère ici le cas d'un PCA attractif de la classe  $\mathcal{C}_0$  en dimension  $d = 2$ , isotrope, pour lequel il y a interaction avec les seuls premiers voisins, c'est à dire :

$$\mathcal{K}(\pm e_1) = \mathcal{K}(\pm e_2) \triangleq K > 0, \mathcal{K}(0) = u > 0, \mathcal{K}(k) = 0 \text{ sinon.}$$

Comme précédemment, on considère  $K = 1$  et on pose  $\gamma = \gamma(\beta, u)$ . Par un calcul explicite, on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma(\beta, u) = & 2 \max \left( \left| \tanh(\beta(4 - u)) - \tanh(\beta(2 - u)) \right|, \right. & (6.9) \\ & \left| \tanh(\beta(4 + u)) - \tanh(\beta(2 + u)) \right|, \\ & \left| \tanh(\beta(2 - u)) + \tanh(\beta u) \right|, \left| \tanh(\beta(2 + u)) - \tanh(\beta u) \right| \Big) \\ & + \frac{1}{2} \max \left( \left| \tanh(\beta(4 + u)) - \tanh(\beta(4 - u)) \right|, \right. \\ & \left. \left| \tanh(\beta(2 + u)) - \tanh(\beta(2 - u)) \right|, 2 \left| \tanh(\beta u) \right| \right) \end{aligned}$$

ce qui pour certaines valeurs de  $u$  donne des formules explicites, regroupées au sein du Tableau 6.2.

TAB. 6.2 – Coefficient de Dobrushin-Vasershtein, cas de la dimension 2 (\* résultats issus des simulations du Chapitre 7)

$u$	Coefficient $\gamma(\beta, u)$	$\beta$ tel que $\gamma(\beta, u) < 1$	$\beta_c$
0	$2 \tanh(2\beta)$	$0 < \beta < \frac{1}{2} \text{Argtanh}(\frac{1}{2}) \simeq 0,275$	$\beta_c = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \simeq 0,441$
1	$5 \tanh(\beta)$	$0 < \beta < \text{Argtanh}(\frac{1}{5}) \simeq 0,203$	$\beta_c \simeq 0,3^*$

Grâce à ces exemples, le domaine de faible interaction où  $\gamma < 1$  peut être comparé avec la zone d'unicité de la mesure de Gibbs associée canoniquement aux PCA de cette classe  $\mathcal{C}_0$  (zone de non transition de phase, sur laquelle selon l'analyse développée au Chapitre 3 la mesure stationnaire du PCA est également unique). Cette zone d'unicité de la mesure de Gibbs est déterminée par le  $\beta_c$  déjà utilisé antérieurement, connu dans certains cas particuliers, estimé dans d'autres (cf. résultats des simulations numériques du Chapitre 7). D'après les exemples précédents, il apparaît donc que, hormis certains cas d'école, le critère  $\gamma < 1$  a une portée relativement restreinte, par rapport à la zone de non transition de phase de l'hamiltonien associé,  $\beta < \beta_c$ , zone sur laquelle devrait s'appliquer essentiellement le résultat du Théorème 6.4.1.

Précisons que Maes et Shlosman ont développé dans les articles [MS91, MS93] certaines généralisations du critère de Dobrushin-Vasershtein. La plus exploitable en pratique, reformulée avec le couplage croissant défini au Chapitre 5 assure une convergence exponentielle à l'équilibre analogue à celle de (6.6) s'il existe un instant  $N$  tel que :

$$\gamma_N = \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \sup_{\eta} P \otimes P(\omega_k^1(N) \neq \omega_k^2(N) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\eta, \eta^j)) < 1. \quad (6.10)$$

On remarque que le cas  $N = 1$  redonne le critère de Dobrushin-Vasershtein :  $\gamma_1 = \gamma$ . Le critère utilisé se fonde néanmoins sur la connaissance de la dynamique jusqu'à un instant  $N$ , en rendant son calcul concret encore plus complexe.

### 6.1.3 Autres critères

Dans l'article [LMS90], la structure d'espace-temps  $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}$ , mise en valeur pour l'étude qualitative des mesures stationnaires d'un PCA, et mentionnée dans le Chapitre 3, n'est pas utilisée dans la preuve de l'ergodicité. En effet, selon l'analyse qui y est développée, les critères d'unicité de mesures de Gibbs en régime de hautes températures, appliqués au niveau de l'espace-temps, ne permettent pas d'obtenir des critères d'ergodicité pour le PCA de portée plus large que ceux précédemment mentionnés. Il convient cependant de mentionner que dans le cadre des PCA purement stochastiques, réversibles, introduits à la section 3.5 du Chapitre 3, la structure de bi-espace  $\mathbb{Z}^d \times \{0, 1\}$  peut fournir des critères d'ergodicité, qui, au moins dans un cas particulier développé par la suite, s'avère non restreint au cadre des hautes températures. Énonçons ici ce résultat dû à Kozlov et Vasilyev (cf. Théorème 3.13 *in* [Vas78], et Corollaire 3 du Théorème 2 *in* [KV80]) :

#### Théorème (Kozlov-Vasilyev)

Soit  $P$  un PCA réversible (défini par un potentiel  $\varphi$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ ), invariant par translation. Soit  $\Phi$  le potentiel sur le bi-espace  $S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}}$ , canoniquement associé à  $\varphi$ . L'automate cellulaire probabiliste  $P$  est ergodique si et seulement s'il n'existe qu'une seule mesure de Gibbs  $\bar{\mu}$  associée au potentiel  $\Phi$ , invariante par translation sur  $S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}}$ , c'est à dire si :

$$\mathcal{G}_i(\Phi) = \{\bar{\mu}\}.$$

En particulier, si le PCA est de plus attractif, l'ergodicité est équivalente à l'égalité des mesures de Gibbs extrémales – pour l'ordre stochastique – de  $\mathcal{G}_i(\Phi)$ . ♦

Mentionnons que la preuve de ce résultat se fonde sur une technique de décroissance de l'énergie libre sur le bi-espace  $S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}}$ .

Au sein des PCA réversibles, ce théorème permet donc de relier la non-transition de phase, non plus seulement avec l'unicité de la mesure stationnaire pour le PCA, mais avec l'ergodicité de la dynamique vers la dite mesure stationnaire. Un exemple d'utilisation de ce résultat est le suivant :

#### Exemple :

Considérons  $P$  la dynamique PCA en dimension  $d = 2$  de la classe  $\mathcal{C}_0$  définie par la fonction suivante  $\mathcal{K}$  d'interaction entre sites :

$$\mathcal{K}(\pm e_1) = \mathcal{K}(\pm e_2) \triangleq K, \quad \mathcal{K}(0) = 0, \quad K(k) = 0 \text{ sinon.} \quad (6.11)$$

Dans ce cas, comme nous l'avons vu à la sous-section 4.2.2 du Chapitre 4, la mesure de Gibbs sur le bi-espace admet pour potentiel associé :

$$\forall k, k' \in \mathbb{Z}^d \text{ où } k' \in V_k, \quad \forall \bar{\xi} \in S^{\mathbb{Z}^d \times \{0,1\}}, \quad \Phi_{\{(k,1);(k',0)\}}(\bar{\xi}) = \beta \bar{\xi}_{(k,1)} \bar{\xi}_{(k',0)}. \quad (6.12)$$

Donc l'ensemble des mesures de Gibbs  $\mathcal{G}(\Phi)$  est en bijection avec l'ensemble des mesures de Gibbs pour l'hamiltonien d'Ising en dimension 2 avec interaction homogène aux plus proches voisins et champ magnétique nul. Pour cet hamiltonien, on sait qu'il y a transition de phase si et seulement si  $\beta < \beta_c$  (cf. p. 99 section 6.2 *in* [Lig85]).

D'après le théorème précédent, on conclut donc que cet automate cellulaire probabiliste  $P$  est ergodique si et seulement si  $\beta < \beta_c = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$ .

D'autres critères d'ergodicité pour les automates cellulaires probabilistes ont également été développés pour des situations spécifiques. On mentionne ici en particulier le Théorème 3.4 p. 36 in [TVS<sup>+</sup>78] où grâce à un couplage (différent de celui étudié au Chapitre 5) l'ergodicité d'un PCA peut-être déduite de celle d'un PCA annexe. On consultera le Chapitre 4 de la même référence [TVS<sup>+</sup>78] pour d'autres méthodes concernant l'ergodicité. Une autre méthode pour prouver l'ergodicité de systèmes de particules à temps discret a par ailleurs été développée par Dawson, mais peu exploitée depuis. Elle se fonde sur la décroissance d'une fonctionnelle dite **information** au cours du temps, et semble bien adaptée au cas de systèmes où l'interaction entre les sites est faible. On se référera à [Daw73, Daw74a, Daw75] à ce propos.

Mentionnons enfin un autre critère d'ergodicité, d'une portée certes assez restreinte (régimes d'interaction faible entre les sites) mais s'appliquant à une plus grande classe d'automates cellulaires probabilistes. Originellement dû à Pirogov (cf. [Pir86]), ce résultat a été publié récemment dans l'ouvrage de Malyshev et Minlos ([MM91]). Ce théorème concerne tout PCA général (local) invariant par translation sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  où  $S$  peut-être un espace fini quelconque. Il assure de l'ergodicité de tels PCA dès lors que ceux-ci sont dans une situation où il y a interaction suffisamment faible entre les sites voisins. Fondé sur des techniques de développement en amas (*cluster expansion*), il est une illustration de la puissance de ces techniques développées dans l'ouvrage [MM91]. On se référera également pour plus de détails sur l'étude de PCA généraux, dans le cas où l'interaction avec le voisinage est faible, via les techniques de développement en amas, aux travaux suivants de Ignatyuk et Malyshev : [MI87, IM88, IM89].

### **Théorème (Pirogov, Malyshev-Minlos)**

Soit  $S$  un espace fini quelconque. Soit  $P$  un PCA sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  invariant par translation. Soit  $\tilde{\gamma}$  le réel défini par :

$$\tilde{\gamma} \triangleq \sup_{\sigma, \sigma' \in S^{\mathbb{Z}^d}} \sup_{s \in S} \left| \frac{p_0(s | \sigma_{V_0})}{p_0(s | \sigma'_{V_0})} - 1 \right| \quad (6.13)$$

Il existe un réel  $\tilde{\gamma}_0$  tel que, si  $\tilde{\gamma} < \tilde{\gamma}_0$  alors le PCA est ergodique. ♦

Ainsi il apparaît que les différents critères évoqués, ou bien sont des modèles très particuliers, ou bien s'appliquent à des classes très générales de dynamiques PCA mais dans des régimes proches du cas où les sites sont indépendants. Entre ces deux situations extrêmes, il nous a semblé important de formuler un critère d'ergodicité précis (vitesse exponentielle), de portée large et concernant une classe de dynamiques PCA suffisamment grande et représentative des situations diverses que l'on peut intuitivement supposer (Théorème 6.4.1). Le théorème de Kozlov-Vasilyev est un premier pas dans cette direction. Il présente cependant l'inconvénient de ne pas donner d'information sur la vitesse de convergence à l'équilibre, et ne fait en fait que déplacer le problème de l'ergodicité vers un problème de transition de phase sur un graphe complexe  $\mathbb{Z}^d \times \{0, 1\}$  pour lequel, encore moins que sur le réseau  $\mathbb{Z}^d$ , il n'existe de théorèmes généraux.



## 6.2 Ergodicité de tout PCA attractif admettant une unique mesure stationnaire

Cette section a pour but d'établir le théorème 6.2.10 qui assure l'ergodicité de tout PCA attractif invariant par translation qui admet une unique mesure stationnaire.

La sous-section 6.2.1 présente en premier lieu (Proposition 6.2.1) une caractéristique des mesures  $\nu_\Lambda^\tau$  stationnaires respectivement pour chacune des dynamiques à volume fini  $P_\Lambda^\tau$  associées à la dynamique  $P$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . Rappelons que lorsque aucune confusion ne sera possible, le symbole  $\nu_\Lambda^\tau$  désignera autant la mesure à volume fini  $\tilde{\nu}_\Lambda^\tau$  sur  $S^\Lambda$  que la mesure  $\tilde{\nu}_\Lambda^\tau \otimes \delta_{\tau\Lambda^c}$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . En particulier, les mesures  $\nu_\Lambda^-$  et  $\nu_\Lambda^+$ , pour les conditions au bord  $-1$  et  $+1$  extrémales (au sein des configurations de  $S^{\mathbb{Z}^d}$ ) auront un rôle clé dans la suite du chapitre. Nous étudions leur limite lorsque le volume  $\Lambda$  croît vers le réseau  $\mathbb{Z}^d$ , et établissons que l'égalité de ces deux limites caractérise l'unicité de la mesure stationnaire pour le PCA à volume infini (Proposition 6.2.3). L'assertion (6.28) :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left( \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^+ - \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^- \right) = 0$$

signifie que l'espérance sous la loi de  $\nu_\Lambda^-$  de la valeur du spin en l'origine converge lorsque le volume  $\Lambda$  tend vers l'infini vers la même limite que celle de la quantité analogue définie par rapport à l'autre mesure extrême  $\nu_\Lambda^+$ . Cette hypothèse sera une condition primordiale pour les résultats à venir. Difficilement manipulable hors du contexte présent, nous établissons donc des conditions générales suffisantes qui en assurent la validité (Corollaire 6.2.5 et Lemme 6.2.6).

La sous-section 6.2.2 introduit une suite  $\rho(n)_{n \in \mathbb{N}}$ , dont nous vérifions que la convergence vers 0 assure l'ergodicité du PCA  $P$  (Proposition 6.2.8). Le contrôle de cette suite  $\rho$ , appelée fonction de contrôle de l'ergodicité, sera de ce fait central dans l'établissement des théorèmes annoncés.

Enfin, dans la dernière sous-section 6.2.3 nous démontrons le Théorème 6.2.10.

### 6.2.1 Mesures stationnaires à volume fini et infini

Pour plus d'informations sur les techniques liées à l'étude de systèmes de particules attractifs, on peut se référer à la section 2 chapitre 3 du livre de Liggett [Lig85] et également à la partie introductive de [Lig99] où le cas de systèmes attractifs à temps continu et à valeurs dans  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$  est traité.

Dans la suite de cette sous-section seuls quelques arguments développés à la proposition 6.2.3 concernant les limites  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{-1} P^{(n)}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{+1} P^{(n)}$  sont adaptés directement des résultats pour les processus à temps continu développés dans ces références. Pour le reste, les arguments se fondent principalement sur l'utilisation du couplage croissant et sur des arguments de monotonie.

La proposition suivante présente une propriété de monotonie des mesures stationnaires  $\nu_\Lambda^\tau$  lorsque la condition au bord évolue de manière monotone.

#### Proposition 6.2.1

*Soit un volume fini  $\Lambda$  fixé. Pour tout automate cellulaire probabiliste  $P$  attractif, les*

mesures stationnaires  $\nu_\Lambda^\tau$  des dynamiques associées  $P_\Lambda^\tau$ , à volume fini  $\Lambda$ , avec condition au bord  $\tau$  ( $\tau \in S^{\mathbb{Z}^d}$ ) sont telles que :

$$\tau \preceq \tau' \Rightarrow \nu_\Lambda^\tau \preceq \nu_\Lambda^{\tau'}. \quad (6.14)$$

En particulier, les mesures  $\nu_\Lambda^-$  et  $\nu_\Lambda^+$  sont les mesures extrémales de l'ensemble  $\{\nu_\Lambda^\tau : \tau \in S^{\Lambda^c}\}$ .

**Preuve :**

Soient deux conditions au bord  $\tau$  et  $\tau'$  telles que  $\tau \preceq \tau'$  et soit  $f$  une fonction de  $S^{\mathbb{Z}^d}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  croissante. On rappelle que  $P_\Lambda^\tau$  est défini par :

$$\forall (\sigma, \eta) \in (S^{\mathbb{Z}^d})^2, P_\Lambda^\tau(d\eta | \sigma) = \bigotimes_{k \in \Lambda} p_k(d\eta_k | \sigma_\Lambda \tau_{\Lambda^c}) \otimes \delta_{\tau_{\Lambda^c}}(d\eta_{\Lambda^c}).$$

Puisque le PCA  $P$  est attractif, et que  $\tau \preceq \tau'$ , on vérifie de manière immédiate que le couple  $(P_\Lambda^\tau, P_\Lambda^{\tau'})$  est croissant. On peut donc, en utilisant les résultats de la section 5.2 du chapitre 5, construire le PCA couplage  $P_\Lambda^\tau \otimes P_\Lambda^{\tau'}$ .

Soit  $\sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}$  une condition initiale. En utilisant les propriétés de monotonie du couplage croissant, démontrées au chapitre précédent, puisque :

$$\sigma_\Lambda \tau_{\Lambda^c} \preceq \sigma_\Lambda \tau'_{\Lambda^c},$$

on obtient, pour tout entier  $n$ , sous la loi  $P_\Lambda^\tau \otimes P_\Lambda^{\tau'}(\cdot | (\omega^1, \omega^2)(0) = (\sigma, \sigma))$  :

$$\omega^1(n) \preceq \omega^2(n),$$

et comme la fonction  $f$  est croissante :  $f(\omega^1(n)) \leq f(\omega^2(n))$ . Cela implique pour l'espérance sous cette loi :

$$P_\Lambda^\tau \otimes P_\Lambda^{\tau'}(f(\omega^2(n)) - f(\omega^1(n)) | (\omega^1, \omega^2)(0) = (\sigma, \sigma)) \geq 0.$$

Cela signifie alors pour tout instant  $n$ , et pour toute condition initiale  $\sigma$  :

$$P_\Lambda^\tau(f(\omega(n)) | \omega(0) = \sigma) \leq P_\Lambda^{\tau'}(f(\omega(n)) | \omega(0) = \sigma).$$

En utilisant le résultat de la Proposition 3.2.1 qui assure de l'ergodicité à volume fini, et en faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient le résultat suivant, qui permet de conclure :

$$\nu_\Lambda^\tau(f) \leq \nu_\Lambda^{\tau'}(f).$$

■

Nous étudions maintenant le cas particulier, mais essentiel, des mesures stationnaires  $\nu_\Lambda^\tau$  pour lesquelles la condition au bord  $\tau$  est choisie parmi les configurations extrémales (pour  $\preceq$ ), à savoir :  $-1$  et  $+1$ . Nous constatons, dans la Proposition 6.2.3 qui suit, que les limites à volume tendant vers l'infini de ces mesures  $\nu_\Lambda^-$  et  $\nu_\Lambda^+$  sont en fait les états asymptotiques en temps de la dynamique à volume infini  $P$  partant respectivement des configurations initiales déterministes  $\delta_{-1}$  et  $\delta_{+1}$ . Nous montrons

que ces états limites, obtenus par un passage à la limite en espace, ou un passage à la limite en temps sont des mesures stationnaires extrémales, et que donc, le fait qu'elles coïncident, caractérise l'unicité de la mesure stationnaire pour la dynamique  $P$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ .

On rappelle que la notation  $\mathcal{B}_L$  désigne la boule  $\mathcal{B}(0, L)$  pour la norme  $\|\cdot\|_1$ . On rappelle également que la notation  $P^{(n)}$  désigne le noyau markovien  $P$  itéré  $n$  fois, et que pour toute mesure de probabilité  $\pi$ ,  $\pi P^{(n)}$  désigne l'image de la mesure initiale  $\pi$  sous l'action répétée  $n$  fois de la dynamique PCA.

### Lemme 6.2.2

*Soit  $P$  un automate cellulaire probabiliste attractif. Soient  $\nu_{\mathcal{B}_L}^\tau$  les mesures stationnaires respectives des dynamiques à volume fini  $P_{\mathcal{B}_L}^\tau$  associées à  $P$ . Alors, pour toute mesure  $P$ -stationnaire  $\nu$ , et pour tout entier  $L$  :*

$$\nu_{\mathcal{B}_L}^- \otimes \delta_{(-1)_{\mathcal{B}_L^c}} \preceq \nu \preceq \nu_{\mathcal{B}_L}^+ \otimes \delta_{(+1)_{\mathcal{B}_L^c}} \quad (6.15)$$

**Preuve :**

Soit  $L$  un entier. Comme  $P$  est attractif, le triplet  $(P_{\mathcal{B}_L}^-, P, P_{\mathcal{B}_L}^+)$  est croissant, et on peut alors (cf. Propriété 5.4.1) construire le couplage  $P_{\mathcal{B}_L}^- \otimes P \otimes P_{\mathcal{B}_L}^+$ . Pour toute configuration  $\xi \in S^{\mathbb{Z}^d}$ , puisque  $-1 \preceq \xi \preceq +1$  et comme le couplage croissant préserve l'ordre stochastique, on a :

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{B}_L}^- \left( \omega(n) \in \cdot \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = -1 \right) &\preceq P \left( \omega(n) \in \cdot \mid \omega(0) = \xi \right) \\ &\preceq P_{\mathcal{B}_L}^+ \left( \omega(n) \in \cdot \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = +1 \right). \end{aligned}$$

Soit  $\nu$  une mesure stationnaire pour la dynamique PCA à volume infini  $P$ . En intégrant la condition initiale  $\xi$  par rapport à cette mesure, on obtient alors :

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{B}_L}^- \left( \omega(n) \in \cdot \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = -1 \right) &\preceq \int P \left( \omega(n) \in \cdot \mid \omega(0) = \xi \right) \nu(d\xi) \\ &\preceq P_{\mathcal{B}_L}^+ \left( \omega(n) \in \cdot \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = +1 \right) \end{aligned}$$

et comme  $\nu$  est stationnaire sous la dynamique  $P$  :

$$P_{\mathcal{B}_L}^- \left( \omega(n) \in \cdot \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = -1 \right) \preceq \nu(\cdot) \preceq P_{\mathcal{B}_L}^+ \left( \omega(n) \in \cdot \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = +1 \right)$$

En utilisant l'ergodicité à volume fini, c'est à dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\mathcal{B}_L}^- \left( \omega(n) \in \cdot \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = -1 \right) = \nu_{\mathcal{B}_L}^- (\cdot) \otimes \delta_{(-1)_{\mathcal{B}_L^c}}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\mathcal{B}_L}^+ \left( \omega(n) \in \cdot \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = +1 \right) = \nu_{\mathcal{B}_L}^+ (\cdot) \otimes \delta_{(+1)_{\mathcal{B}_L^c}},$$

on obtient pour tout  $L$  et pour toute mesure  $\nu$  stationnaire pour  $P$ , l'inégalité (6.15) recherchée :

$$\nu_{\mathcal{B}_L}^- \otimes \delta_{(-1)_{\mathcal{B}_L^c}} \preceq \nu \preceq \nu_{\mathcal{B}_L}^+ \otimes \delta_{(+1)_{\mathcal{B}_L^c}}.$$

■

Bien plus, on démontre :

**Proposition 6.2.3**

Soit  $P$  un automate cellulaire probabiliste, et soient  $\nu_{\mathcal{B}_L}^\tau$  les mesures stationnaires respectives des dynamiques à volume fini  $P_{\mathcal{B}_L}^\tau$  associées à  $P$ . Si  $P$  est attractif alors les limites à volume croissant

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^- \otimes \delta_{(-1)_{\mathcal{B}_L^c}} \text{ et } \lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^+ \otimes \delta_{(+1)_{\mathcal{B}_L^c}}$$

existent, coïncident respectivement avec les limites temporelles :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{-1} P^{(n)} \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{+1} P^{(n)}$$

et sont les éléments extrémaux (éventuellement confondus) de l'ensemble  $\mathcal{S}$  des mesures stationnaires pour l'automate cellulaire probabiliste  $P$  ; c'est à dire qu'en posant :

$$\bar{\nu} \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{+1} P^{(n)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^+ \otimes \delta_{(+1)_{\mathcal{B}_L^c}} \quad (6.16)$$

et

$$\underline{\nu} \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{-1} P^{(n)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^- \otimes \delta_{(-1)_{\mathcal{B}_L^c}} \quad , \quad (6.17)$$

pour toute mesure  $\nu$ ,  $P$ -stationnaire, on a :

$$\underline{\nu} \preceq \nu \preceq \bar{\nu} \quad . \quad (6.18)$$

En particulier,  $P$  admet une unique mesure stationnaire  $\nu$  si et seulement si :

$$\underline{\nu} = \bar{\nu} \quad (6.19)$$

**Preuve :**

1. On vérifie facilement que :  $\delta_{+1} P \preceq \delta_{+1}$ . Comme  $P$  est attractif, on a donc pour tout  $n$  :  $\delta_{+1} P^{(n+1)} \preceq \delta_{+1} P^{(n)}$  ce qui signifie dans un premier temps que la suite de mesures  $(\delta_{+1} P^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone décroissante. De manière analogue, on montre que  $(\delta_{-1} P^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite monotone croissante de mesures. On en conclut donc l'existence des limites  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{-1} P^{(n)}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{+1} P^{(n)}$ .
2. De manière analogue, les limites  $\lim_{L \rightarrow \infty} (\nu_{\mathcal{B}_L}^- \otimes \delta_{(-1)_{\mathcal{B}_L^c}})$  et  $\lim_{L \rightarrow \infty} (\nu_{\mathcal{B}_L}^+ \otimes \delta_{(+1)_{\mathcal{B}_L^c}})$  existent car les suites de mesures  $(\nu_{\mathcal{B}_L}^- \otimes \delta_{(-1)_{\mathcal{B}_L^c}})_L$  et  $(\nu_{\mathcal{B}_L}^+ \otimes \delta_{(+1)_{\mathcal{B}_L^c}})_L$  sont monotones.

En effet, si  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont deux volumes finis de  $\mathbb{Z}^d$  tels que  $\Lambda \subset \Lambda'$  alors :

$$\wp_\Lambda \nu_{\Lambda'}^+ \preceq \nu_\Lambda^+ \quad (6.20)$$

On vérifie pour cela que le couple  $(P_{\Lambda'}^+, P_\Lambda^+)$  de dynamiques PCA à volume fini, respectivement  $\Lambda$  et  $\Lambda'$ , est un couple croissant ; ce qui permet de définir le couplage croissant  $P_{\Lambda'}^+ \otimes P_\Lambda^+$ . Dès lors, soit  $f$  une fonction croissante sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  à support dans  $\Lambda$ . Soit  $\sigma$  une configuration dans  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . En remarquant que :

$$\omega^1(0) = \sigma_{\Lambda'}(+1)_{\Lambda'^c} \preceq \sigma_\Lambda(+1)_{\Lambda^c} = \omega^2(0)$$

et puisque le couplage croissant préserve l'ordre stochastique, on obtient :

$$P_{\Lambda'}^+ \left( f(\omega_{\Lambda'}(n)) \mid \omega_{\Lambda'}(0) = \sigma_{\Lambda'} \right) \leq P_{\Lambda}^+ \left( f(\omega_{\Lambda}(n)) \mid \omega_{\Lambda}(0) = \sigma_{\Lambda} \right) \quad (6.21)$$

Et comme  $f$  est à support dans  $\Lambda$ , on a :  $f(\omega_{\Lambda'}(n)) = f(\omega_{\Lambda}(n))$ . En passant à la limite vers l'infini en  $n$  dans (6.21), et en utilisant l'ergodicité des PCA à volume fini, on obtient que :

$$\wp_{\Lambda} \nu_{\Lambda'}^+(f) \leq \nu_{\Lambda}^+(f) ,$$

ce qui permet de vérifier (6.20).

3. Puisque  $\nu_{\mathcal{B}_L}^+$  est l'unique mesure stationnaire pour la dynamique à volume fini  $P_{\mathcal{B}_L}^+$ , par passage à la limite en  $L$ , on sait que  $\lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^- \otimes \delta_{(-1)\mathcal{B}_L^c}$  et  $\lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^+ \otimes \delta_{(+1)\mathcal{B}_L^c}$  sont stationnaires pour la dynamique à volume infini  $P$ . D'où, d'après l'encadrement (6.15) du Lemme 6.2.2 :

$$\forall \nu \in \mathcal{S}, \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^- \otimes \delta_{(-1)\mathcal{B}_L^c} \preceq \nu \preceq \lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^+ \otimes \delta_{(+1)\mathcal{B}_L^c} \quad (6.22)$$

4. D'autre part, par construction, les limites  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{-1}P^{(n)}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{+1}P^{(n)}$  sont des mesures stationnaires pour la dynamique PCA à volume infini  $P$  (cf. Proposition I.8(d) p. 10 [Lig85]). En particulier, d'après (6.22) on a alors :

$$\underbrace{\lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^- \otimes \delta_{(-1)\mathcal{B}_L^c}}_{(i)} \preceq \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{-1}P^{(n)} \preceq \lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^+ \otimes \delta_{(+1)\mathcal{B}_L^c} \quad (6.23)$$

et

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^- \otimes \delta_{(-1)\mathcal{B}_L^c} \preceq \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{+1}P^{(n)}}_{(ii)} \preceq \lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^+ \otimes \delta_{(+1)\mathcal{B}_L^c} \quad (6.24)$$

5. Enfin, soit  $\nu$  une mesure stationnaire pour  $P$ . Comme  $\delta_{-1} \preceq \nu \preceq \delta_{+1}$  et comme  $P$  est attractif, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \delta_{-1}P^{(n)} \preceq \nu \preceq \delta_{+1}P^{(n)}$$

D'où, pour toute mesure  $\nu \in \mathcal{S}$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{-1}P^{(n)} \preceq \nu \preceq \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{+1}P^{(n)} \quad (6.25)$$

En particulier, comme  $\lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^- \otimes \delta_{(-1)\mathcal{B}_L^c}$  et  $\lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^+ \otimes \delta_{(+1)\mathcal{B}_L^c}$  sont  $P$ -stationnaires, on obtient les inégalités suivantes :

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{-1}P^{(n)}}_{(iii)} \preceq \lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^- \otimes \delta_{(-1)\mathcal{B}_L^c} \preceq \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{+1}P^{(n)} \quad (6.26)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{-1}P^{(n)} \preceq \underbrace{\lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^+ \otimes \delta_{(+1)\mathcal{B}_L^c}}_{(iv)} \preceq \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{+1}P^{(n)} \quad (6.27)$$

6. Remarquons à présent que si deux mesures de probabilités  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont telles que  $\pi_1 \preceq \pi_2$  et  $\pi_2 \preceq \pi_1$ , alors  $\pi_1(f) = \pi_2(f)$  pour toute fonction  $f$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  continue croissante, ce qui suffit (cf. p. 135 [Lig85]) pour assurer de ce même fait pour toute fonction  $f$  continue, ce qui entérine enfin  $\pi_1 = \pi_2$ .
7. En confrontant (i) et (iii) ainsi que (ii) et (iv), et en utilisant la remarque précédente, on conclut alors que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{-1} P^{(n)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^- \otimes \delta_{(-1)_{\mathcal{B}_L^c}}$$

et que :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^+ \otimes \delta_{(+1)_{\mathcal{B}_L^c}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{+1} P^{(n)}.$$

8. Remarquons finalement que l'encadrement (6.18) provient de manière immédiate de (6.22) ou bien de (6.25). Enfin, si  $\mathcal{S}$  est réduit à un seul élément alors l'égalité (6.19) est vraie. Et réciproquement on utilise le fait que si deux mesures de probabilités  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont telles que  $\pi_1(f) = \pi_2(f)$  pour toute fonction  $f$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  continue croissante, alors elles sont égales.

■

**Remarque 6.2.4** On a, à l'occasion de cette preuve, vérifié la validité du Lemme 4.1.15 de manière générale sous l'hypothèse d'attractivité du PCA ; c'est à dire que les relations (4.75) et (4.76) vérifiées dans le cadre des dynamiques PCA de la classe  $\mathcal{C}$  sont également vraies pour toute dynamique PCA considérée dans ce chapitre.

La Proposition 6.2.3 nous permet alors de démontrer le corollaire suivant, très utile en pratique.

### Corollaire 6.2.5

Soit  $P$  un automate cellulaire probabiliste attractif, invariant par translation.  $P$  admet une unique mesure stationnaire si et seulement si  $P$  admet une unique mesure stationnaire invariante par translation ; c'est à dire :

$$\mathcal{S} = \{\nu\} \iff \mathcal{S}_i = \{\nu\}$$

#### Preuve :

Une des implications étant évidente, il suffit de vérifier que si le PCA n'admet qu'une unique mesure stationnaire invariante par translation, alors il n'admet qu'une unique mesure stationnaire. Comme  $\delta_{-1}$  et  $\delta_{+1}$  sont invariantes par translation, et comme  $P$  l'est également, alors les limites  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{-1} P^{(n)} = \underline{\nu}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{+1} P^{(n)} = \bar{\nu}$  sont invariantes par translation, c'est à dire que :  $\underline{\nu} \in \mathcal{S}_i$  et  $\bar{\nu} \in \mathcal{S}_i$ . On en conclut que s'il existe  $\nu$  telle que  $\mathcal{S}_i = \{\nu\}$ , alors  $\nu = \underline{\nu} = \bar{\nu}$  ; en vertu de l'ultime résultat de la Proposition 6.2.3, l'ensemble  $\mathcal{S}$  ne peut alors être que réduit à un singleton, soit  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_i = \{\nu\}$ . ■

Il est en effet souvent plus aisé de vérifier qu'il n'existe qu'une unique mesure stationnaire invariante par translation que de vérifier l'unicité de la mesure stationnaire de

manière générale. Ainsi par exemple, pour la classe  $\mathcal{C}$  de PCA nous pouvons associer canoniquement un hamiltonien au PCA, et avons montré (cf. Chapitre 3) que toute mesure stationnaire invariante par translation est de Gibbs pour cet hamiltonien. S'il n'y a pas transition de phase, on peut alors affirmer que l'unique mesure de Gibbs est l'unique mesure stationnaire invariante par translation, et en vertu de ce corollaire, également l'unique mesure stationnaire.

On introduit maintenant la condition (6.28) qui servira par la suite, et qui sera vérifiée dès lors que l'unicité de la mesure stationnaire (ou l'unicité de la mesure stationnaire invariante par translation) du PCA sera assurée; ce que confirme le lemme suivant dont la preuve est immédiate :

### Lemme 6.2.6

*Tout automate cellulaire probabiliste  $P$  attractif invariant par translation qui admet une unique mesure stationnaire  $\nu$  vérifie :*

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left( \int \sigma_0 d\nu_{\mathbb{B}_L}^+ - \int \sigma_0 d\nu_{\mathbb{B}_L}^- \right) = 0 \quad (6.28)$$

**Remarque 6.2.7** *La différence d'espérances qui apparaît dans la formule (6.28) est bien une quantité positive. En effet, comme  $P$  est attractif, à  $L$  fixé, d'après le résultat précédent, les mesures  $\{\nu_{\mathbb{B}_L}^\tau : \tau \in S^{\mathbb{Z}^d}\}$  satisfont (6.14), donc en particulier :  $\nu_{\mathbb{B}_L}^- \preceq \nu_{\mathbb{B}_L}^+$  et comme la fonction  $f_0 : \sigma \mapsto \sigma_0$  est croissante, on vérifie que :*

$$\int \sigma_0 d\nu_{\mathbb{B}_L}^- \leq \int \sigma_0 d\nu_{\mathbb{B}_L}^+$$

## 6.2.2 Fonction de contrôle de l'ergodicité : $\rho(n)$

Soit  $P$  un PCA attractif, invariant par translation. Comme  $P$  est attractif, on peut recourir au couplage  $\mathbf{IP}$  étudié au chapitre précédent. On rappelle, pour un instant  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction suivante déjà introduite au chapitre précédent (cf. (5.5) p. 108) :

$$\rho(n) = \mathbf{IP} \left( \omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-1, +1) \right)$$

dont l'importance pour l'étude de l'ergodicité de systèmes de particules attractifs, sera mise en lumière par la propriété qui suit. Elle sera dénommée **fonction de contrôle de l'ergodicité**.

### Proposition 6.2.8 (Contrôle de l'ergodicité)

*La suite  $(\rho(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante. De plus, pour  $n$  fixé, et pour toute fonction  $f$  locale :*

$$\forall \sigma, \eta \in S^{\mathbb{Z}^d} \quad \left| P(f(\omega(n)) \mid \omega(0) = \sigma) - P(f(\omega(n)) \mid \omega(0) = \eta) \right| \leq 2 \lll f \lll \rho(n) ,$$

*et en particulier :*

$$\sup_{\sigma} \left| P(f(\omega(n)) \mid \omega(0) = \sigma) - \nu(f) \right| \leq 2 \lll f \lll \rho(n) .$$

**Preuve :**

Le premier résultat se vérifie aisément compte tenu du fait que, d'après la définition du couplage  $\mathbf{IP}$ , s'il existe un instant  $n_0$  tel que  $\omega_0^1(n_0) = \omega_0^2(n_0)$

sous  $\mathbf{IP} \left( (\omega^1, \omega^2)(n) \in \cdot \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, +\mathbf{1}) \right)$ , alors pour tout  $n \geq n_0$ , on a  $\omega_0^1(n) = \omega_0^2(n)$ .

Concernant la seconde assertion, on peut écrire, pour  $\sigma, \eta \in S^{\mathbb{Z}^d}$  :

$$\left| P(f(\omega(n)|\omega(0) = \sigma)) - P(f(\omega(n)|\omega(0) = \eta)) \right| \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| P(f(\omega(n)|\omega(0) = -\mathbf{1})) - P(f(\omega(n)|\omega(0) = \sigma)) \right| \\ &\quad + \left| P(f(\omega(n)|\omega(0) = -\mathbf{1})) - P(f(\omega(n)|\omega(0) = \eta)) \right| \\ &= \left| \mathbf{IP} \left( f(\omega^1(n)) - f(\omega^2(n)) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, \sigma) \right) \right| \quad (6.30) \\ &\quad + \left| \mathbf{IP} \left( f(\omega^1(n)) - f(\omega^2(n)) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, \eta) \right) \right|. \end{aligned}$$

Considérons dans un premier temps la quantité :

$$\left| \mathbf{IP} \left( f(\omega^1(n)) - f(\omega^2(n)) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, \sigma) \right) \right|.$$

En appliquant le lemme 2.1.4, on a :

$$\begin{aligned} &\left| \mathbf{IP} \left( f(\omega^1(n)) - f(\omega^2(n)) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, \sigma) \right) \right| \\ &\leq \sum_{k \in \Lambda_f} \|\nabla_k(f)\|_\infty \mathbf{IP} \left( \omega_k^1(n) \neq \omega_k^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, \sigma) \right). \end{aligned}$$

Comme on a supposé la dynamique PCA invariante par translation, le couplage  $\mathbf{IP} = P \otimes P$  vérifie pour tout site  $k$  de  $\mathbb{Z}^d$  :

$$\mathbf{IP} \left( \omega_k^1(n) \neq \omega_k^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, \sigma) \right) = \mathbf{IP} \left( \omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, \theta_{-k}\sigma) \right).$$

D'où :

$$\begin{aligned} &\left| \mathbf{IP} \left( f(\omega^1(n)) - f(\omega^2(n)) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, \sigma) \right) \right| \\ &\leq \sum_{k \in \Lambda_f} \|\nabla_k(f)\|_\infty \mathbf{IP} \left( \omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, \theta_{-k}\sigma) \right) \end{aligned}$$

Alors en utilisant la propriété 5.3.4 du couplage :

$$\left| \mathbf{IP} \left( f(\omega^1(n)) - f(\omega^2(n)) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, \sigma) \right) \right| \leq \|f\| \rho(n).$$

En faisant de même avec l'autre terme de la somme du membre de droite de l'équation (6.30), on a alors :

$$\left| P(f(\omega(n)|\omega(0) = \sigma)) - P(f(\omega(n)|\omega(0) = \eta)) \right| \leq 2 \|f\| \rho(n).$$

Comme le membre de droite ne dépend alors plus des configurations initiales  $\sigma$  et  $\eta$ , on obtient le résultat recherché en passant à la borne supérieure en  $(\sigma, \eta) \in (S^{\mathbb{Z}^d})^2$  dans le membre de gauche. La propriété d'oubli de la condition initiale est alors vérifiée, ce qui implique l'ergodicité d'après le Proposition 6.1.2. ■



### 6.2.3 Preuve de l'ergodicité

Comme annoncé, cette section a pour but de démontrer le théorème d'ergodicité 6.2.10. On vérifie au préalable le lemme général 6.2.9 utile à la preuve de ce théorème, et qui sera de nouveau utilisé dans la suite de ce chapitre.

#### Lemme 6.2.9

Soit  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  un espace de probabilité, et  $X, Y$  deux variables aléatoires sur cet espace à valeurs dans  $\{-1, +1\}$ , telles que  $P(X \leq Y) = 1$ . On a alors :

$$P(X \neq Y) = \frac{1}{2}E(Y - X)$$

#### Preuve :

Les seules valeurs possibles pour  $(X, Y)$ , de  $P$ -probabilité non nulle, sont :  $(-1, -1)$ ,  $(-1, +1)$  et  $(+1, +1)$ . Donc  $P(X \neq Y) = P(Y - X = 2)$ . On en déduit alors le résultat en remarquant que :

$$E(Y - X) = 0.P(Y - X = 0) + 2.P(Y - X = 2)$$

■

Le théorème à suivre est l'analogie, pour les processus attractifs à temps discret avec évolution parallèle que sont les PCA, du résultat de Holley [Hol72] figurant dans [Lig85] pour les processus attractifs à temps continu. On trouve mentionné (mais non démontré) un résultat similaire dans [LMS90] (formule (3.14) p. 131) : Tout PCA attractif est ergodique si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( P(\omega_0(n) | \omega(0) = -\mathbf{1}) - P(\omega_0(n) | \omega(0) = +\mathbf{1}) \right) = 0$$

Cependant, notre résultat propose une preuve qui se fonde sur la condition (6.28) :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left( \int \sigma_0 d\nu_{\mathbb{B}_L}^+ - \int \sigma_0 d\nu_{\mathbb{B}_L}^- \right) = 0$$

faisant intervenir les états asymptotiques à volume  $\Lambda$  croissant des mesures stationnaires  $\nu_{\Lambda}^{\pm}$  pour les dynamiques  $P_{\Lambda}^{\pm}$  à volume fini et conditions au bord extrémales associées plutôt que les états asymptotiques en temps, sous l'action de la seule dynamique à volume infini  $P$  :  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\omega_0(n) | \omega(0) = -\mathbf{1})$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\omega_0(n) | \omega(0) = +\mathbf{1})$ . La comparaison avec le comportement des dynamiques à volume fini pour lesquelles, dans le cas de modèles explicites, comme nous le verrons par la suite, une étude fine peut être établie, nous permettra d'obtenir pour ces modèles des informations précieuses sur la vitesse de convergence à l'équilibre.

#### Théorème 6.2.10

Soit  $P$  un automate cellulaire probabiliste sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , attractif, invariant par translation. S'il admet une unique mesure stationnaire  $\nu$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\sigma \in S^{\mathbb{Z}^d}} \left| P(f(\omega(n)) \mid \omega(0) = \sigma) - \nu(f) \right| = 0$$

et en particulier,  $P$  est ergodique.

**Preuve :**

Compte tenu du Lemme 6.2.6 et de la Proposition 6.2.8, il suffit de vérifier que l'inégalité (6.28) implique  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n) = 0$ .

Soit  $\Lambda$  un volume fixé. Considérons dans un premier temps la quantité :

$$P_{\Lambda}^{-} \otimes P_{\Lambda}^{+} \left( \omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2) = (-\mathbf{1}, +\mathbf{1}) \right)$$

où l'on rappelle que  $P_{\Lambda}^{-} \otimes P_{\Lambda}^{+}$  désigne le couplage des deux PCA à volume fini avec conditions au bord extrémales. D'après les résultats du chapitre précédent (cf. sous-section 5.4.2), on sait que :

$$P_{\Lambda}^{-} \otimes P_{\Lambda}^{+} \left( \omega_0^1(n) \leq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2) = (-\mathbf{1}, +\mathbf{1}) \right) = 1$$

où  $(\omega_0^1(n), \omega_0^2(n)) \in S \times S$ . Par le lemme précédent 6.2.9 on a alors que :

$$\begin{aligned} & P_{\Lambda}^{-} \otimes P_{\Lambda}^{+} \left( \omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2) = (-\mathbf{1}, +\mathbf{1}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( P_{\Lambda}^{+}(\omega_0(n) \mid \omega(0) = +\mathbf{1}) - P_{\Lambda}^{-}(\omega_0(n) \mid \omega(0) = -\mathbf{1}) \right) \end{aligned} \quad (6.31)$$

Grâce au Lemme 5.4.3, la quantité (6.31) majore  $\rho(n)$ , et comme, d'après la Proposition 3.2.1, les dynamiques à volume fini sont ergodiques, on a également :

$$P_{\Lambda}^{+}(\omega_0(n) \mid \omega(0) = +\mathbf{1}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int \sigma_0 d\nu_{\Lambda}^{+} \quad (6.32)$$

et

$$P_{\Lambda}^{-}(\omega_0(n) \mid \omega(0) = -\mathbf{1}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int \sigma_0 d\nu_{\Lambda}^{-} ; \quad (6.33)$$

on en déduit alors que :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \rho(n) \leq \frac{1}{2} \left( \int \sigma_0 d\nu_{\Lambda}^{+} - \int \sigma_0 d\nu_{\Lambda}^{-} \right) \quad (6.34)$$

Comme on sait que :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left( \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^{+} - \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^{-} \right) = 0,$$

en faisant tendre  $L$  vers l'infini dans l'inégalité (6.34) appliquée à  $\Lambda = \mathcal{B}_L$ , on peut conclure que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n) = 0$ . ■

**Remarque 6.2.11** *On a également ainsi prouvé que la condition (6.28) :*

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left( \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^{+} - \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^{-} \right) = 0$$

**est équivalente à l'unicité de la mesure stationnaire pour la dynamique PCA à volume infini et équivalente à l'ergodicité de cette dynamique.** *En effet, on considère le lemme 6.2.6, et la preuve du théorème 6.2.10 : la véracité de (6.28) assure que la suite  $(\rho(n))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0 en  $+\infty$ , d'où l'ergodicité, qui elle-même implique l'unicité de la mesure stationnaire.*

## 6.3 Tout PCA attractif ergodique à vitesse polynomiale est ergodique à vitesse exponentielle

Dans cette section, nous établissons le Théorème 6.3.1 qui sera énoncé et discuté dans la première sous-section. La seconde sous-section sera consacrée à la preuve de ce résultat, qui se fondera sur l'utilisation de deux lemmes démontrés préalablement : Lemme 6.3.2 et Lemme 6.3.3.

### 6.3.1 Énoncé du résultat

Le Théorème 6.3.1 énoncé et démontré dans cette section pour les PCA s'inspire du résultat de Holley (cf. Théorème 0.1 dans [Hol85]) pour les systèmes de spins à temps continu sur  $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}^d}$ , à portée finie, attractifs et invariants par translation. L'idée d'utiliser une inégalité de récurrence pour la suite  $\rho(n)_{n \in \mathbb{N}}$  (Lemme 6.3.2) y trouve son origine. Notre inégalité (6.35) est, dans le cas des PCA, d'expression plus simple que l'inégalité analogue (2.5) de l'article de Holley susmentionné. La raison se trouve en la nullité d'une intégrale sur un ensemble  $A^c$  (défini en (6.38)), due au meilleur contrôle qu'offre le PCA, processus à temps discret, de la vitesse de propagation de l'information (cf. Propriété 5.3.5) par rapport aux processus à temps continu. Le couplage croissant introduit au chapitre précédent joue partout un rôle fondamental. Précisons enfin qu'un résultat similaire est évoqué dans la référence [MS91] (cf. Corollaire 3 in [MS91]), et se fonde sur une approche différente. À une condition concernant les mesures extrémales des états asymptotiques en temps  $\delta_{-1}P^{(n)}$  et  $\delta_{+1}P^{(n)}$ , nous préférons une voie qui, à l'instar des travaux de Martinelli et Olivieri, évoqués plus précisément à la section suivante, met l'accent sur les mesures stationnaires à volume fini  $\nu_{B_L}^-$  et  $\nu_{B_L}^+$ . Cette technique, pour étudier le comportement à volume infini via l'estimation précise du comportement du système à volume fini, présente l'avantage d'aller dans une direction qui a déjà fait ses preuves dans l'étude de phénomènes comme la métastabilité au voisinage de zones critiques (ici voisinage de non-unicité de la mesure stationnaire).

On rappelle que  $\rho(\cdot)$  est définie en (5.5) par :

$$\rho(n) = \mathbf{IP} \left( \omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, +\mathbf{1}) \right).$$

#### Théorème 6.3.1

Soit  $P$  un automate cellulaire probabiliste sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  attractif invariant par translation. Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^d \rho(n) = 0$  alors il existe une unique mesure  $\nu$  stationnaire pour  $P$  et il existe  $\lambda > 0$  tel que :

$\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall n \geq n_1$ ,  $\forall f : S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathbb{R}$  locale :

$$\sup_{\sigma} \left| P(f(\omega(n)) \mid \omega(0) = \sigma) - \nu(f) \right| \leq 2 \|f\| e^{-\lambda n};$$

ce qui implique que, si  $P$  est ergodique à vitesse polynomiale, alors il l'est à vitesse exponentielle.

### 6.3.2 Preuve du résultat

Les Lemme 6.3.2 et Lemme 6.3.3 démontrés ci-après seront utilisés dans la preuve qui suivra du Théorème 6.3.1. On rappelle que  $R$  désigne la portée du PCA, telle que définie en (2.53) au Chapitre 2.

Signalons que le lemme suivant sera généralisé par la suite (Lemme 6.4.8) sous certaines conditions. Néanmoins, la première étape présentée ici offre l'avantage de rendre flagrante une caractéristique des PCA : à la différence des processus à temps continu (cf. inégalité du Théorème 3.12 *in* [Mar99] (référence de la version disponible sur `mp_arc`)), nous connaissons, dans le cadre du temps discret, exactement les sites à l'instant 0 dont la valeur peut influer sur le comportement d'un site donné à l'instant  $n$  (ce qui a été défini (cf. (2.57)) comme l'ensemble des sites de  $\overline{\{0\}}^{(n)}$ ). Cela se concrétise dans la preuve de ce lemme par la nullité de l'intégrale considérée sur l'ensemble  $A^c$  introduit.

#### Lemme 6.3.2 (Inégalité de récurrence)

Soit  $P$  un automate cellulaire probabiliste attractif invariant par translation. Il existe une constante  $C \geq 1$  telle que la suite  $(\rho(n))_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \rho(2n) \leq Cn^d \rho^2(n). \quad (6.35)$$

On notera dorénavant  $\nu_n^{-,+}$  la distribution sur  $S^{\mathbb{Z}^d} \times S^{\mathbb{Z}^d}$  :

$$\nu_n^{-,+}(\cdot) = \mathbf{IP} \left( (\omega^1, \omega^2)(n) \in \cdot \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, +\mathbf{1}) \right). \quad (6.36)$$

#### Preuve :

En utilisant la propriété de Markov pour le couplage  $\mathbf{IP}$ , on écrit :

$$\begin{aligned} \rho(2n) &= \mathbf{IP} \left( \omega_0^1(2n) \neq \omega_0^2(2n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, +\mathbf{1}) \right) \\ &= \int \mathbf{IP} \left( \omega_0^1(2n) \neq \omega_0^2(2n) \mid (\omega^1, \omega^2)(n) = (\xi^-, \xi^+) \right) \\ &\quad \mathbf{IP} \left( (\omega^1, \omega^2)(n) = (d\xi^-, d\xi^+) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, +\mathbf{1}) \right) \\ &= \int \mathbf{IP} \left( \omega_0^1(2n) \neq \omega_0^2(2n) \mid (\omega^1, \omega^2)(n) = (\xi^-, \xi^+) \right) \nu_n^{-,+}(d\xi^-, d\xi^+). \end{aligned}$$

Puisque  $\nu_n^{-,+}$  ne charge que les couples  $(\xi^-, \xi^+)$  tels que  $\xi^- \preceq \xi^+$ , le couplage  $\mathbf{IP}(\cdot \mid (\omega^1, \omega^2)(n) = (\xi^-, \xi^+))$  est donc bien défini.

On rappelle que l'on note  $\mathcal{B}_L$  la boule  $\mathcal{B}(0, L)$  pour la norme  $\|\cdot\|_1$ . Soit  $A$  la sous partie de  $S^{\mathbb{Z}^d} \times S^{\mathbb{Z}^d}$  définie par :

$$A \triangleq \{(\xi^-, \xi^+) : \exists k \in \mathbb{Z}^d, \|k\|_1 \leq nR : \xi_k^- \neq \xi_k^+\}. \quad (6.37)$$

Son complémentaire s'écrit :

$$A^c = \{(\xi^-, \xi^+) : \forall k \in \mathcal{B}(0, nR), \xi_k^- = \xi_k^+\}. \quad (6.38)$$

On scinde alors  $\rho(2n)$  écrit sous la forme intégrale précédente, en la somme de deux intégrales, sur  $A$  et sur  $A^c$ .

On remarque alors que l'intégrale sur  $A^c$  est nulle. En effet, pour  $\xi_{\mathcal{B}_{nR}}^-$  et  $\xi_{\mathcal{B}_{nR}}^+$  telles que  $\xi_{\mathcal{B}_{nR}}^- \equiv \xi_{\mathcal{B}_{nR}}^+$ , puisque  $\mathcal{B}_{nR} \supset \overline{\{0\}}^{(n)}$  (cf. Figure 2.1), d'après la Propriété 5.3.5, on a :

$$\mathbf{P}\left(\omega_0^1(n) = \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\xi^-, \xi^+)\right) = 1 .$$

Donc, sur  $A^c$ , on a :

$$\mathbf{P}\left(\omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\xi^-, \xi^+)\right) = 0 .$$

D'où :

$$\rho(2n) = \int_A \mathbf{P}\left(\omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\xi^-, \xi^+)\right) \nu_n^{-,+}(d\xi^-, d\xi^+) .$$

En utilisant la Propriété 5.3.4 du couplage, on a alors :

$$\rho(2n) \leq \rho(n) \nu_n^{-,+}(A) .$$

En remarquant que  $A$  s'écrit également sous la forme :

$$A = \cup_{\{k \in \mathbb{Z}^d : \|k\|_1 \leq nR\}} \{(\xi^-, \xi^+) : \xi_k^- \neq \xi_k^+\} ,$$

on a la majoration :

$$\nu_n^{-,+}(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d, \|k\|_1 \leq nR} \mathbf{P}\left(\omega_k^1(n) \neq \omega_k^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, +\mathbf{1})\right) .$$

Comme les lois locales d'évolution  $p_k$  de la dynamique PCA sont invariantes par translation, le couplage  $\mathbf{P}$  l'est également sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  (cf. Propriété 5.2.5), et puisque les configurations  $-\mathbf{1}$  et  $+\mathbf{1}$  sont invariantes par translation, on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \mathbf{P}\left(\omega_k^1(n) \neq \omega_k^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, +\mathbf{1})\right) = \rho(n) .$$

On en conclut alors le résultat recherché :

$$\begin{aligned} \nu_n^{-,+}(A) &\leq \rho(n) \#\mathcal{B}_{nR} \\ &\leq \rho(n) \#\mathcal{B}_{\|\cdot\|_{\max}}(0, nR) = \rho(n)(2nR + 1)^d \\ &\leq \rho(n)(3R)^d n^d . \end{aligned}$$

■

Le lemme suivant permet d'affirmer que si  $\rho(n)$  converge vers 0 en l'infini, plus vite que  $\frac{1}{n^d}$ , et si l'inégalité (6.35) introduite dans le lemme précédent est vérifiée, alors  $\rho(n)$  converge exponentiellement vite vers 0.

**Lemme 6.3.3**

Si la suite  $(\rho(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est telle que :  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^d \rho(n) = 0$ , et s'il existe une constante  $C \geq 1$  telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \rho(2n) \leq C n^d \rho^2(n)$  (inégalité (6.35)) alors, pour  $n_1$  tel que :

$$(2^d C) n_1^d \rho(n_1) < 1,$$

on a :

$$\forall n \geq n_1, \rho(n) \leq e^{-\lambda n}$$

où  $\lambda = -\frac{1}{2n_1} \ln(2^d C n_1^d \rho(n_1)) > 0$ .

**Preuve :**

Soit  $(u(n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels positifs définie par :  $u(n) = n^d \rho(n)$ . Compte tenu de l'inégalité (6.35), on a :

$$u(2n) \leq (2^d C) u^2(n) .$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^d \rho(n) = 0$ , il existe  $n_1 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\forall n \geq n_1, (2^d C) n_1^d \rho(n_1) < 1$  et soit la suite  $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$  définie par  $a_m = u(2^m n_1)$ . On vérifie alors aisément que :

$$a_{m+1} \leq (2^d C) a_m^2 ,$$

d'où l'on déduit, par une récurrence immédiate :

$$\forall m \in \mathbb{N}, a_m \leq \frac{((2^d C) u(n_1))^{2^m}}{2^d C}$$

d'où :

$$\forall m \geq 1, \rho(2^m n_1) \leq \frac{e^{2^m \ln((2^d C) n_1^d \rho(n_1))}}{(2^{(m+1)d} C) n_1^d} .$$

Puisque  $C \geq 1$ , on obtient :

$$\forall m \geq 1, \rho(2^m n_1) \leq e^{-2^{m+1} n_1 \lambda} .$$

Pour étendre ce résultat de la suite extraite  $(\rho(2^m n_1))_m$  à toute la suite  $\rho(n)$ , on utilise le fait que  $\rho(\cdot)$  est une fonction décroissante (cf. Proposition 6.2.8).

Soit  $n \geq n_1$ , en remarquant qu'il existe  $m \geq m_1$ , tel que  $2^m n_1 \leq n < 2^{m+1} n_1$ , on en conclut que :

$$\rho(n) \leq \rho(2^m n_1) \leq e^{-2^{m+1} n_1 \lambda} \leq e^{-\lambda n} .$$

■

Nous pouvons maintenant prouver le théorème 6.3.1.

**Preuve du Théorème 6.3.1:**

Compte tenu des hypothèses du théorème sur la dynamique  $P$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , on sait, grâce au Lemme 6.3.2 que l'inégalité de récurrence (6.35) est vérifiée. Les hypothèses du Lemme 6.3.3 sont alors assurées, ce qui permet de conclure, en utilisant le Lemme 6.3.3, que :  $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_1, \rho(n) \leq e^{-\lambda n}$ . D'après la Proposition 6.2.8, on a alors, pour toute fonction  $f$  locale :

$$\sup_{\sigma} \left| P(f(\omega(n)) | \omega(0) = \sigma) - \nu(f) \right| \leq 2 \| f \| \rho(n) \leq 2 \| f \| e^{-\lambda n},$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

## 6.4 Ergodicité exponentielle des PCA attractifs de la classe $\mathcal{C}$

Nous démontrons dans cette section le Théorème 6.4.1 qui concerne l'ergodicité des automates cellulaires probabilistes attractifs de la classe  $\mathcal{C}$ . L'énoncé et les commentaires du théorème font l'objet de la première sous-section. Les sous-sections suivantes présentent principalement des lemmes utiles aux hypothèses et à la preuve de ce résultat, preuve qui est développée à la fin de la sous-section 6.4.3.

Dans la sous-section 6.4.2, la spécificité des PCA de la classe  $\mathcal{C}$  n'est utilisée que dans le Lemme 6.4.4. Connaissant pour les PCA de cette classe, qui sont réversibles, la formule explicite reliant les mesures stationnaires réversibles à volume fini  $\nu_{\mathcal{B}_L}^\tau$  pour les dynamiques à volume fini  $P_{\mathcal{B}_L}^\tau$  et les mesures de Gibbs à volume fini  $\mu_{\mathcal{B}_L}^\tau$  (cf. (4.40) du Lemme 4.1.8), nous sommes à même de mener une étude précise aboutissant à la condition (6.41) sur les mesures extrémales (au sens de l'ordre stochastique)  $\nu_{\mathcal{B}_L}^\pm$ , induisant la convergence (6.28) du Lemme 6.2.6. Nous relierons ainsi la condition de faible mélange de l'unique mesure de Gibbs  $\mu$  introduite dans la Définition 6.4.3, avec la condition (6.28) introduite en section 6.2 et utilisée au Théorème d'ergodicité 6.2.10. Nous discutons également le domaine de validité de cette condition de faible mélange.

Dans la sous-section 6.4.3, nous établissons ensuite trois lemmes utiles à la preuve du Théorème 6.4.1 qui y est enfin développée. Ces lemmes ne font pas appel à des caractéristiques qui seraient dues à l'appartenance du PCA à la classe  $\mathcal{C}$  sauf le Lemme 6.4.8 qui se base sur l'inégalité (6.41). La formulation du Théorème 6.4.1 dans le cadre des PCA de la classe  $\mathcal{C}$  trouve donc son origine dans la recherche de conditions suffisantes pour que l'égalité (6.41) soit satisfaite, conditions établies dans le cadre de la classe  $\mathcal{C}$  à la sous-section 6.4.2.

### 6.4.1 Énoncé du résultat

Rappelons de nouveau au préalable que la classe  $\mathcal{C}$  est constituée des automates cellulaires probabilistes réversibles définis par la formule (4.1) :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \forall s \in S = \{-1, +1\}, p_k(s | \eta) = \frac{1}{2} \left( 1 + s \tanh(\beta \sum_{k' \in V_k} \mathcal{K}(k' - k) \eta_{k'} + \beta h) \right)$$

où :

$$V_k = \{k' \in \mathbb{Z}^d : \mathcal{K}(k' - k) \neq 0\}$$

et où la fonction  $\mathcal{K}(\cdot)$  est supposée paire, pour que le PCA  $P$  soit réversible. Les PCA sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  de cette classe sont invariants par translation et on rappelle qu'un PCA de cette classe  $\mathcal{C}$  est également attractif si et seulement si la fonction  $\mathcal{K}(\cdot)$  est positive.

Le résultat principal de ce chapitre (Théorème 6.4.1) est complètement nouveau. Cependant dans l'article de Martinelli et Olivieri [MO94a], ainsi que dans le cours de Saint Flour [Mar99], un résultat analogue a été démontré pour les dynamiques de Glauber à temps continu (cf. Théorème 4.1 *in* [Mar99]). Notre résultat s'inspire de leurs méthodes en les adaptant au cadre de processus à temps discret – cadre

souvent plus complexe –, dont les PCA sont des représentants significatifs, et amplifie grandement la portée du résultat connu pour le modèle d'Ising dynamique (*Kinetic Ising Model*) à tous les PCA de la classe  $\mathcal{C}$  (cf. l'article à paraître [BM02]).

Comparons plus précisément le travail de Martinelli et Olivieri et le nôtre. Les différences essentielles résident premièrement dans notre recours à la construction d'un couplage spécifique de plusieurs PCA, préservant l'ordre stochastique, construction qui fut l'objet du Chapitre 5. En effet, dans [MO94a] les auteurs ont recours au couplage d'un nombre fini de processus à temps continu issu de la « Construction graphique » (*graphical construction*), introduite à l'origine par Harris dans [Har72, Har78], dont l'utilisation est inadéquate pour les PCA.

Deuxièmement, pour les dynamiques de Glauber, les mesures réversibles pour la dynamique à volume fini coïncident avec les mesures de Gibbs à volume fini, ce qui simplifie beaucoup les preuves dans [MO94a] et qui n'est pas le cas des dynamiques PCA. Sur ce point, l'étude précise menée précédemment (cf. principalement Chapitre 4 et section 6.4.2) sur les mesures réversibles et de Gibbs à volume fini pour les PCA de la classe  $\mathcal{C}$  trouve toute sa légitimité.

Hypothèse du théorème, la condition de faible mélange pour la mesure de Gibbs (unique dans ce cas) associée à la dynamique PCA est introduite à la section suivante dans la Définition 6.4.3 ; la portée de cette condition y est ensuite discutée. Énonçons maintenant le résultat :

#### **Théorème 6.4.1**

*Soit  $P$  un élément attractif de la famille  $\mathcal{C}$  de dynamiques PCA. Si l'ensemble des mesures de Gibbs  $\mathcal{G}(\varphi)$  associées canoniquement à  $P$  (cf. (4.34) rappelée ci-après pour la définition du potentiel  $\varphi$ ) est réduit à l'élément  $\mu$ , supposé de plus faiblement mélangeant, alors on a convergence exponentiellement rapide de la dynamique PCA vers son unique état d'équilibre  $\mu$  :  $\exists \lambda > 0, \exists n_1, \forall n \geq n_1, \forall f$  locale sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  :*

$$\sup_{\sigma} \left| P \left( f(\omega(n)) \mid \omega(0) = \sigma \right) - \mu(f) \right| \leq 2 \|f\| e^{-\lambda n}.$$

Mentionnons juste ici que la validité de ce théorème concerne en réalité une classe plus large de PCA, comme nous l'expliquerons à la section 6.5.

### **6.4.2 Condition de faible mélange**

On rappelle que  $\nu_{\Lambda}^{\tau}$  (cf. formule (4.22)) désigne la mesure réversible de la dynamique à volume fini  $P_{\Lambda}^{\tau} : \forall \sigma_{\Lambda} \in S^{\Lambda}$ ,

$$\nu_{\Lambda}^{\tau}(\sigma_{\Lambda}) = \frac{1}{\mathcal{W}_{\Lambda}^{\tau}} \prod_{k \in \Lambda} e^{\beta h \sigma_k} \cosh(\beta \mathcal{C}_k(\sigma_{\Lambda} \tau_{\Lambda^c})) \prod_{k \in \Lambda} e^{\beta \sigma_k \sum_{k' \in \Lambda^c} \mathcal{K}(k' - k) \tau_{k'}}$$

où  $\mathcal{W}_{\Lambda}^{\tau}$  est la constante de normalisation.

De manière similaire,  $\mu_{\Lambda}^{\tau}$  (cf. formule (4.35)) désigne la spécification locale à volume fini  $\Lambda$  par rapport au potentiel  $\varphi$  (cf. formule (4.34)) canoniquement associé à la



dynamique parallèle  $P$  :

$$\begin{aligned}\varphi_{\{k\}}(\sigma_i) &= -\beta h \sigma_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d \\ \varphi_{V_k}(\sigma_{V_k}) &= -\ln \cosh \left( \beta \sum_{k'} \mathcal{K}(k' - k) \sigma_{k'} \right) \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d \\ \varphi_\Lambda(\sigma_\Lambda) &= 0 \quad \text{sinon,}\end{aligned}$$

avec  $V_k = \{k' \in \mathbb{Z}^d : \mathcal{K}(k' - k) \neq 0\}$ ; ce qui signifie :  $\forall \sigma_\Lambda \in S^\Lambda$ ,

$$\begin{aligned}\mu_\Lambda^\tau(\sigma_\Lambda) &= \frac{1}{Z_\Lambda^\tau} \prod_{k \in \bar{\Lambda}} \cosh(\beta \mathcal{C}_k(\sigma_\Lambda \tau_{\Lambda^c})) \prod_{k \in \Lambda} e^{\beta h \sigma_k} \\ &= \mu(\sigma_\Lambda \mid \tau_{\Lambda^c}).\end{aligned}$$

Avant de définir la condition de faible mélange, vérifions l'inégalité (6.39) :

**Lemme 6.4.2** *Si  $\mathcal{G}(\varphi) = \{\mu\}$ , on a l'inégalité :*

$$\int \sigma_0 d\mu_{\mathcal{B}_L}^- \leq \int \sigma_0 d\mu \leq \int \sigma_0 d\mu_{\mathcal{B}_L}^+. \quad (6.39)$$

**Preuve :**

Soit  $L' \geq L \geq 1$ . On sait que :

$$\int \sigma_0 d\mu_{\mathcal{B}_{L'}}^+ = \int \int \sigma_0 d\mu_{\mathcal{B}_L}^{\sigma_{\mathcal{B}_{L'} \setminus \mathcal{B}_L} (+1)_{\mathcal{B}_{L'}^c}} \mu_{\mathcal{B}_{L'}}^+(d\tilde{\sigma}_{\mathcal{B}_L} d\sigma_{\mathcal{B}_{L'} \setminus \mathcal{B}_L}).$$

Par ailleurs, comme les mesures  $\mu_{\mathcal{B}_L}^\tau$  sont ordonnées lorsque  $\tau$  croît (cf. (4.45)), on sait que :

$$\int \sigma_0 d\mu_{\mathcal{B}_L}^{\sigma_{\mathcal{B}_{L'} \setminus \mathcal{B}_L}} \leq \int \sigma_0 d\mu_{\mathcal{B}_L}^{(+1)_{\mathcal{B}_{L'} \setminus \mathcal{B}_L}} = \int \sigma_0 d\mu_{\mathcal{B}_L}^+.$$

D'où :

$$\int \sigma_0 d\mu_{\mathcal{B}_{L'}}^+ \leq \int \sigma_0 d\mu_{\mathcal{B}_L}^+$$

En faisant alors tendre  $L'$  vers l'infini, la distribution de Gibbs à volume fini  $\mu_{\mathcal{B}_{L'}}^+$  converge vers la mesure de Gibbs  $\mu$ , et donc :

$$\int \sigma_0 d\mu \leq \int \sigma_0 d\mu_{\mathcal{B}_L}^+.$$

On démontre

$$\int \sigma_0 d\mu \geq \int \sigma_0 d\mu_{\mathcal{B}_L}^-$$

de manière analogue. ■

Introduisons maintenant une définition de faible mélange pour une mesure de Gibbs. Précisons ici que la validité de cette hypothèse implique naturellement l'**unicité de la mesure de Gibbs**.

**Définition 6.4.3**

Une mesure de Gibbs associée aux spécifications locales  $\mu_\Lambda^\tau$  est dite **faiblement mélangeante** si :

$$\exists C > 0, \exists M > 0, \forall L \in \mathbb{N}^*, \mu_{B_L}^+(\sigma_0) - \mu_{B_L}^-(\sigma_0) \leq C e^{-ML}. \quad (6.40)$$

Le Théorème 6.4.1 suppose que la mesure de Gibbs associée à la dynamique PCA de la classe  $\mathcal{C}$  étudiée soit faiblement mélangeante. Cette condition, introduite ici dans le cas attractif sous la forme (6.40), est équivalente à la condition usuelle de faible mélange pour une mesure de Gibbs, ainsi que cela est précisé dans la section 2 de [MO94a] et dans [MOS94]. Les travaux récents ([Hig93, MOS94, SS95]) concernant la zone de « température » (c'est à dire le domaine d'appartenance du  $\beta$ ) pour laquelle cette hypothèse est vraie, amènent à penser que celle-ci est **vérifiée dès lors qu'il y a non-transition de phase**, c'est à dire dès que  $\beta < \beta_c$ . Citons en particulier l'article [Hig93], où il est établi qu'en dimension  $d = 2$ , pour un hamiltonien d'Ising ferromagnétique avec champ magnétique extérieur nul, la mesure de Gibbs associée est faiblement mélangeante dès lors qu'elle est unique (*i.e.*  $\forall \beta, \beta < \beta_c$ ).

En dimension  $d = 2$ , nous avons remarqué au Chapitre 4 que dans le cas où :

$$\mathcal{K}(\pm e_1) = \mathcal{K}(\pm e_2) = K > 0, \mathcal{K}(0) = 0, \mathcal{K}(k) = 0 \text{ sinon,}$$

l'hamiltonien, associé à la dynamique PCA attractive de la classe  $\mathcal{C}_0$  ainsi définie, correspond à l'hamiltonien d'Ising. Le résultat de [MOS94] permet d'affirmer que toute mesure de Gibbs respectivement à ce potentiel sera faiblement mélangeante dès que  $\beta < \beta_c$ . Le Théorème 6.4.1 autorise alors à énoncer que **la dynamique PCA correspondante sera ergodique à vitesse exponentielle sur toute la zone d'unicité de la mesure de Gibbs associée** ; ce qui améliore considérablement (cf. Table 6.2) le critère de Dobrushin-Vasershtein dans ce cas.

La remarque précédente, jointe au résultat de Martinelli, Olivieri et Schonmann, nous encourage à penser qu'il doit être possible de vérifier qu'au moins en dimension 2 ce résultat soit vrai pour tous les PCA de la classe  $\mathcal{C}$  attractifs. En dimension  $d > 2$ , le domaine de validité de la condition de faible mélange est plus large que les résultats déjà connus d'ergodicité exponentielle. Cela nous permet de croire que le Théorème 6.4.1 améliore sensiblement les connaissances en la matière. Néanmoins, comme le précisent les travaux évoqués, il faut s'attendre en dimension  $d > 2$  à des phénomènes de transition de phase « au bord » (*boundary phase transition*), inexistant en dimension 2.

Comme annoncé, le lemme ci-après permet de relier, dans le cadre des PCA de la classe  $\mathcal{C}$ , la condition de faible mélange pour l'unique mesure de Gibbs avec la condition (6.41) sur les mesures stationnaires réversibles à volume fini extrémales  $\nu_{B_L}^\pm$ , qui sera fondamentale pour la preuve du Théorème 6.4.1.

**Lemme 6.4.4** *Si la mesure de Gibbs canoniquement associée à un automate cellulaire probabiliste attractif de la classe  $\mathcal{C}$  est faiblement mélangeante, alors les mesures*

stationnaires à volume fini  $\mathcal{B}_L$  extrémales :  $\nu_{\mathcal{B}_L}^-$  et  $\nu_{\mathcal{B}_L}^+$  vérifient aussi :  
 $\exists C > 0, \exists M > 0, \forall L \geq 2,$

$$\left( \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^+ - \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^- \right) \leq C e^{-ML} . \quad (6.41)$$

**Preuve :**

Démontrons dans un premier temps que :

$$\int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^+ \leq \int \sigma_0 d\mu_{\mathcal{B}_L}^+ . \quad (6.42)$$

Soit  $f_0$  la fonction croissante sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  définie par :  $f_0(\sigma) = \sigma_0$ . Compte tenu du rayon de portée  $R$ , soit  $L$  assez grand tel que  $0 \notin \partial_i \mathcal{B}_L$ . On remarque que :

$$\int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^+ = \nu_{\mathcal{B}_L}^+ ( \nu_{\mathcal{B}_L}^+ ( f_0 | \sigma_{\mathcal{B}_L \setminus 0} ) ) .$$

D'après le Lemme 4.1.8 et en particulier l'égalité (4.40), on sait que :

$$\nu_{\mathcal{B}_L}^+ ( ( \cdot )_0 | \sigma_{\mathcal{B}_L \setminus 0} ) = \mu_{\{0\}}^{\sigma_{\mathcal{B}_L \setminus 0} (+1)_{\mathcal{B}_L^c}} ( ( \cdot )_0 ) .$$

On a donc :

$$\nu_{\mathcal{B}_L}^+ ( f_0 ) = \nu_{\mathcal{B}_L}^+ ( \mu_{\{0\}}^{\sigma_{\mathcal{B}_L \setminus 0} (+1)_{\mathcal{B}_L^c}} ( f_0 ) ) .$$

Comme les mesures  $\mu_{\Lambda}^{\tau}$  sont ordonnées lorsque  $\tau$  croît (cf. Définition 4.45) et que la fonction  $f_0$  est croissante, on a par ailleurs :

$$\mu_{\{0\}}^{\sigma_{\mathcal{B}_L \setminus 0} (+1)_{\mathcal{B}_L^c}} ( f_0 ) \leq \mu_{\{0\}}^{(+1)_{0^c}} ( f_0 ) = \mu_{\mathcal{B}_L}^+ ( f_0 ) .$$

On en conclut donc le résultat annoncé :

$$\nu_{\mathcal{B}_L}^+ ( f_0 ) \leq \nu_{\mathcal{B}_L}^+ ( \mu_{\mathcal{B}_L}^+ ( f_0 ) ) = \mu_{\mathcal{B}_L}^+ ( f_0 ) .$$

De manière analogue on démontre que :

$$\nu_{\mathcal{B}_L}^- ( f_0 ) \geq \mu_{\mathcal{B}_L}^- ( f_0 ) . \quad (6.43)$$

En combinant alors (6.42) et (6.43), on en déduit l'inégalité :

$$\left( \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^+ - \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^- \right) \leq \left( \int \sigma_0 d\mu_{\mathcal{B}_L}^+ - \int \sigma_0 d\mu_{\mathcal{B}_L}^- \right) . \quad (6.44)$$

La conclusion du lemme suit alors de manière immédiate. ■

### Remarque 6.4.5

*D'après les résultats des sections précédentes, on peut déjà déduire que tout PCA attractif de la classe  $\mathcal{C}$  admettant une unique mesure de Gibbs est ergodique. En effet, d'après les résultats des Chapitres 3 et 4, l'unicité de la mesure de Gibbs, implique l'unicité de la mesure stationnaire invariante par translation. D'après le Corollaire 6.2.5, cela entraîne l'unicité de la mesure stationnaire; ce qui permet d'appliquer le Théorème 6.2.10.*

Cependant, nous nous intéressons ici à la vitesse de convergence vers l'équilibre qui nécessite une analyse plus fine développée dans la sous-section suivante.

### 6.4.3 Preuve de l'ergodicité à vitesse exponentielle

Nous rappelons que les lemmes démontrés ci-après interviennent dans la preuve du Théorème 6.4.1, située à la fin de cette sous-section.

#### Lemme 6.4.6

Pour toute configuration  $\eta \in S^{\mathbb{Z}^d}$ , on peut décomposer  $\rho(n)$  en :

$$\begin{aligned} \forall n, \rho(n) &= \mathbf{IP} \left( \omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2, \omega^3)(0) = (-\mathbf{1}, \eta, +\mathbf{1}) \right) \\ &+ \mathbf{IP} \left( \omega_0^2(n) \neq \omega_0^3(n) \mid (\omega^1, \omega^2, \omega^3)(0) = (-\mathbf{1}, \eta, +\mathbf{1}) \right). \end{aligned}$$

#### Preuve :

Comme pour toute configuration  $\eta$  on a :  $-\mathbf{1} \preceq \eta \preceq +\mathbf{1}$ , l'attractivité de la dynamique PCA implique la monotonie du couplage, et donc :

$\mathbf{IP} \left( (\omega^1, \omega^2, \omega^3) \in \cdot \mid (\omega^1, \omega^2, \omega^3)(0) = (-\mathbf{1}, \eta, +\mathbf{1}) \right)$  presque sûrement,

$$\omega^1(n) \preceq \omega^2(n) \preceq \omega^3(n).$$

Puisqu'alors,  $\mathbf{IP} \left( (\omega^1, \omega^2, \omega^3) \in \cdot \mid (\omega^1, \omega^2, \omega^3)(0) = (-\mathbf{1}, \eta, +\mathbf{1}) \right)$  presque sûrement :

$$\omega_0^1(n) \leq \omega_0^2(n) \leq \omega_0^3(n),$$

où ces éléments appartiennent à  $S = \{-1, +1\}$ , on vérifie que :

$$\{\omega_0^1(n) \neq \omega_0^3(n)\} = \{\omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n)\} \cup_{\text{disjoint}} \{\omega_0^2(n) \neq \omega_0^3(n)\}.$$

D'où le résultat, en remarquant que

$$\begin{aligned} &\mathbf{IP} \left( (\omega_0^1(n) \neq \omega_0^3(n)) \mid (\omega^1, \omega^2, \omega^3)(0) = (-\mathbf{1}, \eta, +\mathbf{1}) \right) \\ &= \mathbf{IP} \left( (\omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n)) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, +\mathbf{1}) \right). \end{aligned}$$

■

#### Lemme 6.4.7

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $L \in \mathbb{N}^*$ . Les fonctions  $f_{n,+}$  et  $f_{n,-}$  définies par :

$$f_{n,+}(\xi) \triangleq P_{\mathcal{B}_L}^+ \left( \omega_0(n) \mid \omega(0) = \xi \right), \quad (6.45)$$

$$f_{n,-}(\xi) \triangleq P_{\mathcal{B}_L}^- \left( \omega_0(n) \mid \omega(0) = \xi \right), \quad (6.46)$$

sont des fonctions croissantes en  $\xi$ .

**Preuve :**

Soient  $(\xi_1, \xi_2) \in (S^{\mathcal{B}_L})^2$  deux configurations sur  $\mathcal{B}_L$  telles que  $\xi_1 \preceq \xi_2$ . On a alors :

$$\xi_1(+1)_{\mathcal{B}_L^c} \preceq \xi_2(+1)_{\mathcal{B}_L^c} \quad \text{et} \quad \xi_1(-1)_{\mathcal{B}_L^c} \preceq \xi_2(-1)_{\mathcal{B}_L^c} .$$

En utilisant la monotonie des dynamiques PCA à volume fini, on obtient :

$$P_{\mathcal{B}_L}^+ \otimes P_{\mathcal{B}_L}^+ (\omega^1(n) \preceq \omega^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\xi_1(+1)_{\mathcal{B}_L^c}, \xi_2(+1)_{\mathcal{B}_L^c})) = 1,$$

$$P_{\mathcal{B}_L}^- \otimes P_{\mathcal{B}_L}^- (\omega^1(n) \preceq \omega^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\xi_1(-1)_{\mathcal{B}_L^c}, \xi_2(-1)_{\mathcal{B}_L^c})) = 1,$$

ce qui permet de conclure. ■

Après avoir établi ces lemmes techniques, nous démontrons, sous l'hypothèse (6.41), une inégalité généralisant celle obtenue en section 6.3 au Lemme 6.3.2 qui sera utile pour établir au lemme suivant la décroissance polynomiale de  $\rho$ .

**Lemme 6.4.8 (Inégalité de récurrence généralisée)**

On a l'inégalité suivante :  $\exists M, \exists C, \forall n, \forall L \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\rho(2n) \leq 2(2L+1)^d \rho^2(n) + \left( \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^+ - \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^- \right), \quad (6.47)$$

et en particulier, si l'on suppose la véracité de l'inégalité (6.41), on a :

$$\exists M, \exists C, \forall n, \forall L \in \mathbb{N}^*, \rho(2n) \leq 2(2L+1)^d \rho^2(n) + Ce^{-ML}. \quad (6.48)$$

**Preuve :**

Soit  $n$  fixé. On remarque que l'on peut écrire  $\rho(2n)$  sous la forme intégrale :

$$\rho(2n) = \int \mathbf{IP} \left( \omega_0^1(2n) \neq \omega_0^3(2n) \mid (\omega^1, \omega^2, \omega^3)(0) = (-\mathbf{1}, \eta, +\mathbf{1}) \right) \nu(d\eta)$$

où  $\nu$  désigne la mesure stationnaire du système. En utilisant le lemme 6.4.6, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \rho(2n) &= \underbrace{\int \mathbf{IP} \left( \omega_0^1(2n) \neq \omega_0^2(2n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, \eta) \right) \nu(d\eta)}_{(b)} \\ &+ \underbrace{\int \mathbf{IP} \left( \omega_0^1(2n) \neq \omega_0^2(2n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\eta, +\mathbf{1}) \right) \nu(d\eta)}_{(a)}. \end{aligned}$$

Il suffit alors pour conclure de montrer que chacun des termes de la somme de droite est majoré par :  $(2L+1)^d \rho^2(n) + \frac{1}{2}(\int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^+ - \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^-)$ . On considère d'abord :

$$(a) = \int \mathbf{IP} \left( \omega_0^1(2n) \neq \omega_0^2(2n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\eta, +\mathbf{1}) \right) \nu(d\eta) .$$

En définissant la probabilité  $\nu_n^{\eta,+}$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d} \times S^{\mathbb{Z}^d}$  par :

$$\nu_n^{\eta,+} \triangleq \mathbf{P} \left( (\omega^1, \omega^2)(n) = \cdot \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\eta, +1) \right), \quad (6.49)$$

et en utilisant la propriété de Markov :

$$\begin{aligned} (a) &= \iint \mathbf{P} \left( \omega_0^1(2n) \neq \omega_0^2(2n) \mid \omega^1(n) = \xi_1, \omega^2(n) = \xi_2 \right) \nu_n^{\eta,+}(d\xi_1, d\xi_2) \nu(d\eta) \\ (a) &= \iint \mathbf{P} \left( \omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\xi_1, \xi_2) \right) \nu_n^{\eta,+}(d\xi_1, d\xi_2) \nu(d\eta). \end{aligned}$$

Soit  $L \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $A_L = \{(\xi_1, \xi_2) \in (S^{\mathbb{Z}^d})^2 : (\xi_1)_{\mathcal{B}_L} \equiv (\xi_2)_{\mathcal{B}_L}\}$ . On décompose maintenant l'intégration par rapport à  $(\xi_1, \xi_2)$  en deux parties : l'intégration sur  $A_L^c$  (partie (I)) et l'intégration sur  $A_L$  (partie (II)). Afin de montrer que

$$(I) + (II) = (a) \leq (2L + 1)^d \rho^2(n) + \frac{C}{2} e^{-ML},$$

on va alors établir que :

$$\begin{aligned} (I) &= \iint \mathbf{P} \left( \omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\xi_1, \xi_2) \right) \mathbf{1}_{A_L^c}(\xi_1, \xi_2) \nu_n^{\eta,+}(d\xi_1, d\xi_2) \nu(d\eta) \\ &\leq (2L + 1)^d \rho^2(n) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (II) &= \iint \mathbf{P} \left( \omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\xi_1, \xi_2) \right) \mathbf{1}_{A_L}(\xi_1, \xi_2) \nu_n^{\eta,+}(d\xi_1, d\xi_2) \nu(d\eta) \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^+ - \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^- \right). \end{aligned}$$

Considérons dans un premier temps l'intégrale sur  $A_L^c$ . Puisque  $\nu_n^{\eta,+1}(\xi_1 \preccurlyeq \xi_2) = 1$ , en utilisant la propriété 5.3.4 du couplage, on obtient :

$$(I) \leq \rho(n) \int \nu_n^{\eta,+}(A_L^c) \nu(d\eta).$$

On remarque alors que

$$A_L^c = \{(\xi_1, \xi_2) : (\xi_1)_{\mathcal{B}_L} \neq (\xi_2)_{\mathcal{B}_L}\}$$

peut s'écrire également sous la forme :

$$A_L^c = \cup_{k \in \mathcal{B}_L} \{(\xi_1, \xi_2) : (\xi_1)_k \neq (\xi_2)_k\}$$

D'où :

$$\nu_n^{\eta,+}(A_L^c) \leq \sum_{k \in \mathcal{B}_L} \nu_n^{\eta,+} \{(\xi_1, \xi_2) : (\xi_1)_k \neq (\xi_2)_k\}.$$

En utilisant l'invariance par translation sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  de la dynamique PCA  $P$ , et à nouveau la propriété 5.3.4, on écrit :

$$\begin{aligned} \nu_n^{\eta,+} \{(\xi_1, \xi_2) : (\xi_1)_k \neq (\xi_2)_k\} &= \mathbf{P} \left( \omega_k^1(n) \neq \omega_k^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\eta, +\mathbf{1}) \right) \\ &\leq \mathbf{P} \left( \omega_k^1(n) \neq \omega_k^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (-\mathbf{1}, +\mathbf{1}) \right) \\ &\leq \rho(n) . \end{aligned}$$

On en déduit alors que  $\nu_n^{\eta,+}(A_L^c) \leq \rho(n) (\#\mathcal{B}_L)$  d'où la majoration recherchée :

$$(I) \leq \rho^2(n)(2L+1)^d .$$

Traitons maintenant le cas de (II). Soit  $\tau \in S^{\mathcal{B}_L}$  fixé. On définit les ensembles  $A_{L,\tau}$  par :

$$A_{L,\tau} = \{(\xi_1, \xi_2) : (\xi_1)_{\mathcal{B}_L} \equiv (\xi_2)_{\mathcal{B}_L} \equiv \tau\} .$$

Ainsi  $A_L = \bigsqcup_{\tau \in S^{\mathcal{B}_L}} A_{L,\tau}$ , soit  $\mathbb{1}_{A_L} = \sum_{\tau \in S^{\mathcal{B}_L}} \mathbb{1}_{A_{L,\tau}}$ . On écrit alors :

$$(II) = \int \sum_{\tau \in S^{\mathcal{B}_L}} \int \mathbf{P} \left( \omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\xi_1, \xi_2) \right) \mathbb{1}_{A_{L,\tau}}(\xi_1, \xi_2) \nu_n^{\eta,+}(d\xi_1, d\xi_2) \nu(d\eta) .$$

On va dès lors utiliser les dynamiques à volume fini. On sait que  $\nu_n^{\eta,+}$  presque sûrement  $\xi_1 \preceq \xi_2$ , et que :  $(\xi_1)_{\mathcal{B}_L} = (\xi_2)_{\mathcal{B}_L} = \tau$  ainsi que :

$$\xi_2 = \tau(\xi_2)_{\mathcal{B}_L^c} \preceq \tau(+\mathbf{1})_{\mathcal{B}_L^c} \text{ et } \tau(-\mathbf{1})_{\mathcal{B}_L^c} \preceq \xi_1 = \tau(\xi_1)_{\mathcal{B}_L^c} ;$$

donc :

$$P_{\mathcal{B}_L}^- \otimes P \otimes P \otimes P_{\mathcal{B}_L}^+ \left( \omega^1 \preceq \omega^2 \preceq \omega^3 \preceq \omega^4 \mid (\omega_{\mathcal{B}_L}^1, \omega^2, \omega^3, \omega_{\mathcal{B}_L}^4)(0) = (\tau, \tau(\xi_1)_{\mathcal{B}_L^c}, \tau(\xi_2)_{\mathcal{B}_L^c}, \tau) \right) = 1 .$$

*A fortiori* :

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} \left( \omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\tau\xi_{1_{\mathcal{B}_L^c}}, \tau\xi_{2_{\mathcal{B}_L^c}}) \right) \\ &\leq P_{\mathcal{B}_L}^- \otimes P_{\mathcal{B}_L}^+ \left( \omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\tau, \tau) \right) , \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire :

$$(II) \leq \int \sum_{\tau \in S^{\mathcal{B}_L}} P_{\mathcal{B}_L}^- \otimes P_{\mathcal{B}_L}^+ \left( \omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\tau, \tau) \right) \nu_n^{\eta,+}(A_{L,\tau}) \nu(d\eta) .$$

On utilise ensuite la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \nu_n^{\eta,+}(A_{L,\tau}) &= \mathbf{P} \left( \omega^1(n)_{\mathcal{B}_L} \equiv \omega_{\mathcal{B}_L}^2(n) \equiv \tau \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\eta, +\mathbf{1}) \right) \\ &\leq \nu_n^{\eta,+} \left( \{(\xi_1, \xi_2) : (\xi_1)_{\mathcal{B}_L} \equiv \tau\} \right) = P(\omega_{\mathcal{B}_L}(n) = \tau \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = \eta) . \end{aligned}$$

De plus, comme  $(\omega_0^1(n), \omega_0^2(n))$  est un couple de variables aléatoires à valeurs dans  $S \times S$  telles que

$$P_{\mathcal{B}_L}^- \otimes P_{\mathcal{B}_L}^+ \left( \omega_0^1(n) \leq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\tau, \tau) \right) = 1 ,$$

en utilisant le lemme 6.2.9, on a :

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{B}_L}^- \otimes P_{\mathcal{B}_L}^+ \left( \omega_0^1(n) \neq \omega_0^2(n) \mid (\omega^1, \omega^2)(0) = (\tau, \tau) \right) = \\ \frac{1}{2} \left( P_{\mathcal{B}_L}^+ (\omega_0(n) \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = \tau) - P_{\mathcal{B}_L}^- (\omega_0(n) \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = \tau) \right) . \end{aligned}$$

En combinant ces deux résultats à la précédente majoration, on obtient alors :

$$\begin{aligned} (II) \leq \frac{1}{2} \int \sum_{\tau \in S^{\mathcal{B}_L}} \left( P_{\mathcal{B}_L}^+ (\omega_0(n) \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = \tau) - P_{\mathcal{B}_L}^- (\omega_0(n) \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = \tau) \right) \\ P(\omega_{\mathcal{B}_L}(n) = \tau \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = \eta) \nu(d\eta) . \end{aligned}$$

On va dès lors considérer séparément les quantités :

$$\alpha = \int \sum_{\tau \in S^{\mathcal{B}_L}} P_{\mathcal{B}_L}^+ (\omega_0(n) \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = \tau) P(\omega_{\mathcal{B}_L}(n) = \tau \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = \eta) \nu(d\eta)$$

et

$$\beta = \int \sum_{\tau \in S^{\mathcal{B}_L}} P_{\mathcal{B}_L}^- (\omega_0(n) \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = \tau) P(\omega_{\mathcal{B}_L}(n) = \tau \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = \eta) \nu(d\eta) .$$

Considérons dans un premier temps le cas de  $\alpha$ , que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\alpha = \int P \left( f_{n,+}(\omega_{\mathcal{B}_L}(n)) \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = \eta \right) \nu(d\eta)$$

où  $f_{n,+}(\tau) \triangleq P_{\mathcal{B}_L}^+ (\omega_0(n) \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = \tau)$  (cf. (6.45)). Le lemme 6.4.7 et la propriété 5.4.2 nous assurant que  $f_{n,+}$  est croissante, et que :

$$\forall \eta \in S^{\mathbb{Z}^d}, P(\omega_{\mathcal{B}_L}(n) \in \cdot \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = \eta) \preceq P_{\mathcal{B}_L}^+ (\omega_{\mathcal{B}_L}(n) = \cdot \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = \eta_{\mathcal{B}_L}) ,$$

on en déduit alors la majoration suivante :

$$\alpha \leq \int \sum_{\tau \in S^{\mathcal{B}_L}} P_{\mathcal{B}_L}^+ (\omega_0(n) \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = \tau) P_{\mathcal{B}_L}^+ (\omega_{\mathcal{B}_L}(n) = \tau \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = \eta_{\mathcal{B}_L}) \nu(d\eta)$$

et en utilisant la propriété de Markov pour la dynamique à volume fini  $P_{\mathcal{B}_L}^+$ , on obtient :

$$\alpha \leq \int P_{\mathcal{B}_L}^+ (\omega_0(2n) \mid \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = \eta_{\mathcal{B}_L}) \nu(d\eta) = \nu(f_{2n,+}) .$$



D'autre part, le Lemme 6.2.2 nous assure (cf. encadrement (6.15)) du fait que :

$$\nu \preceq \nu_{\mathcal{B}_L}^+ \otimes \delta_{(+1)_{\mathcal{B}_L^c}}$$

et comme  $f_{2n,+}$  est croissante, on a :

$$\alpha \leq \nu_{\mathcal{B}_L}^+(f_{2n,+}) .$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \int P_{\mathcal{B}_L}^+(\omega_0(2n) | \omega_{\mathcal{B}_L}(0) = \eta_{\mathcal{B}_L}) \nu_{\mathcal{B}_L}^+(d\eta_{\mathcal{B}_L}) \\ &= \iint \sigma_0 \left( \delta_{\eta_{\mathcal{B}_L}} P_{\mathcal{B}_L}^{+(2n)} \right) (d\sigma) \nu_{\mathcal{B}_L}^+(d\eta_{\mathcal{B}_L}) \\ &= \int \sigma_0 \left( \nu_{\mathcal{B}_L}^+ P_{\mathcal{B}_L}^{+(2n)} \right) (d\sigma) ; \end{aligned}$$

or  $\nu_{\mathcal{B}_L}^+$  est réversible, donc stationnaire, pour la dynamique  $P_{\mathcal{B}_L}^+$ , d'où :

$$\alpha \leq \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^+ .$$

Considérons maintenant la grandeur  $\beta$ . De manière analogue, on démontre que

$$\beta \geq \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^-$$

en utilisant l'inégalité (5.7) du Lemme 5.4.2, le Lemme 6.4.7, et la minoration stochastique (6.15) du Lemme 6.2.2. On en conclut alors que :

$$(II) \leq \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \leq \frac{1}{2} \left( \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^+ - \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^- \right) ,$$

ce qui permet enfin d'affirmer que :

$$(a) = (I) + (II) \leq (2L + 1)^d \rho(n)^2 + \frac{1}{2} \left( \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^+ - \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^- \right) .$$

De manière analogue, on obtient la même majoration pour (b), ce qui conclut la démonstration de l'inégalité de récurrence (6.47).

Enfin, si l'inégalité (6.41) est vérifiée, on obtient alors l'inégalité (6.48). ■

Établissons maintenant, sous la validité de l'inégalité de récurrence généralisée précédente, la décroissance à vitesse polynomiale de  $\rho$ .

#### Lemme 6.4.9 (Décroissance polynomiale de $\rho$ )

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n) = 0$  et si :

$$\exists (C, M) \in (\mathbb{R}_*^+)^2, \forall (n, L) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \rho(2n) \leq 2(2L + 1)^d \rho(n)^2 + 2C e^{-ML} \quad (6.48)$$

alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^d \rho(n) = 0$

**Preuve :**

Soit  $n$  fixé. Posons :

$$L(n) = \llbracket -\frac{2}{M} \ln \rho(n) \rrbracket \in \mathbb{N}$$

où  $\llbracket x \rrbracket$  désigne la partie entière du réel  $x$ . Par définition de la partie entière d'un nombre réel :

$$-1 - \frac{2}{M} \ln \rho(n) \leq L(n) \leq -\frac{2}{M} \ln \rho(n) .$$

On vérifie alors aisément la validité des inégalités suivantes :

$$-ML(n) \leq M + 2 \ln \rho(n)$$

et

$$(2L(n) + 1)^d \leq \left( -\frac{4}{M} \ln \rho(n) + 1 \right)^d ;$$

ce qui permet d'écrire, compte tenu de l'inégalité dans les hypothèses :

$$\rho(2n) \leq 2 \left[ \left( -\frac{4}{M} \ln \rho(n) + 1 \right)^d + Ce^M \right] \rho(n)^2 .$$

On utilise ensuite le fait que

$$\left[ \left( -\frac{4}{M} \ln \rho(n) + 1 \right)^d + Ce^M \right] = \mathcal{O} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho(n)}} \right) .$$

En effet, on vérifie aisément que :

$$\sqrt{x} \left[ \left( -\frac{4}{M} \ln(x) + 1 \right)^d + Ce^M \right] \underset{0}{\sim} \left( \frac{4}{M} \right)^d \sqrt{x} (-\ln x)^d \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Comme on a supposé que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n) = 0$ , on sait alors que pour  $n$  assez grand :

$$\left[ \left( -\frac{4}{M} \ln \rho(n) + 1 \right)^d + Ce^M \right] \leq \frac{1}{\sqrt{\rho(n)}}$$

d'où :

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0, \rho(2n) \leq \rho(n)^{\frac{3}{2}} . \quad (6.50)$$

On a alors démontré que la suite  $(\rho(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de réels positifs, décroissante, telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n) = 0$  et telle que l'inégalité de récurrence (6.50) soit satisfaite. Soit la suite  $(v(n))_{n \in \mathbb{N}}$ , définie par  $v(n) = n^d \rho(n)$ . L'inégalité (6.50) permet alors dans un premier temps de montrer par une récurrence immédiate que :

$$\forall n \geq n_0, \forall m \in \mathbb{N}^*, \rho(2^m n) \leq \rho(n)^{\left(\frac{3}{2}\right)^m} .$$

Par ailleurs, comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n) = 0$ , on a :  $\exists n_1 \geq 1, \forall n \geq n_1, \rho(n) < 1$ . Donc, pour tout  $n_3$  tel que  $n_3 \geq n_2 \triangleq \max(n_0, n_1)$ , dorénavant fixé, on a :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \rho(2^m n_3) \leq e^{\left(\frac{3}{2}\right)^m \ln \rho(n_3)}$$

avec  $\rho(n_3) < 1$ . On en déduit que la suite  $(2^{md}n_3^d\rho(2^m n_3))_{m \in \mathbb{N}^*}$ , extraite de la suite  $(v(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  tend vers 0 quand  $m$  tend vers l'infini.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $m_n = \lceil \frac{\ln n - \ln n_3}{\ln 2} \rceil$  choisi afin que :

$$2^{m_n} n_3 \leq n \leq 2^{m_n+1} n_3 . \quad (6.51)$$

D'où, puisque  $(\rho(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante, l'inégalité :

$$0 \leq \rho(2^{m_n+1} n_3) \leq \rho(n) \leq \rho(2^{m_n} n_3),$$

qui combinée avec l'inégalité (6.51) à la puissance  $d$  donne :

$$\frac{v(2^{m_n+1} n_3)}{2^d} \leq v(n) \leq 2^d v(2^{m_n} n_3) .$$

Lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $m_n$  tend également vers l'infini, et comme on a démontré précédemment que  $\lim_{m \rightarrow \infty} v(2^m n_3) = 0$ , on en conclut que  $v(n) = n^d \rho(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  ce qui permet de conclure que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^d \rho(n) = 0$ . ■

### Preuve du théorème 6.4.1:

En premier lieu, remémorons-nous que, d'après la Proposition 6.2.8, la suite  $\rho(\cdot)$  décroît au cours du temps. Ainsi, s'il existe un instant  $n_0$  tel que  $\rho(n_0) = 0$ , alors,  $\forall n \geq n_0$ ,  $\rho(n) = 0$ , et toujours d'après la Proposition 6.2.8, le théorème sera donc dans ce cas vérifié. On supposera donc dorénavant pour prouver ce théorème, que  $\forall n$ ,  $\rho(n) > 0$ .

Puisque l'on suppose que la mesure de Gibbs est unique et faiblement mélangeante, d'après le Lemme 6.4.4, la condition (6.41) est vérifiée :

$\exists C > 0$ ,  $\exists M > 0$ ,  $\forall L \geq 2$ ,

$$\left( \int \sigma_0 d\nu_{B_L}^+ - \int \sigma_0 d\nu_{B_L}^- \right) \leq C e^{-ML} .$$

On peut alors appliquer le Lemme 6.4.8, qui assure de l'inégalité de récurrence généralisée (6.48) :

$$\exists M, \exists C, \forall n, \forall L \in \mathbb{N}^*, \rho(2n) \leq 2(2L+1)^d \rho^2(n) + C e^{-ML} .$$

Par ailleurs, on a vu qu'en vertu des résultats des chapitres 3 et 4, l'unicité de la mesure de Gibbs  $\mu$ , entraîne l'unicité de la mesure stationnaire invariante par translation, et donc, d'après le Corollaire 6.2.5, l'unicité de la mesure stationnaire  $\nu$  et sa coïncidence avec la mesure de Gibbs  $\mu = \nu$ . Le Théorème 6.2.10 (plus particulièrement sa preuve) permet alors d'affirmer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n) = 0$ .

Les hypothèses du Lemme 6.4.9 sont alors vérifiées, d'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^d \rho(n) = 0 .$$

On recourt alors au Théorème 6.3.1 qui assure que la décroissance à vitesse polynomiale implique la convergence à vitesse exponentielle vers l'équilibre, d'où la conclusion. ■

## 6.5 Généralisation et commentaires généraux

Précisons que le Théorème 6.4.1 concerne en fait une classe plus large que les PCA de la classe  $\mathcal{C}$ , qui peuvent ne pas être réversibles. C'est à dire que les différentes étapes des démonstrations de ce chapitre sont valables pour des PCA pour lesquels il n'y aurait pas de potentiel naturellement associé. On peut formuler ainsi cette généralisation :

**Théorème 6.5.1** *Tout PCA attractif sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , dont les règles d'évolution locales  $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  sont invariantes par translation, tel que la condition (6.41) soit vérifiée, converge exponentiellement vite vers une unique mesure d'équilibre  $\nu$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ .*

Néanmoins, la condition (6.41) sur la famille de mesures  $(\nu_{\mathcal{B}_L}^\pm)_{L \in \mathbb{N}}$  – mesures respectivement stationnaires (non nécessairement réversibles) pour les dynamiques à volume fini  $P_\Lambda^\pm$  – étant moins habituelle et moins étudiée que son analogue pour les mesures de Gibbs à volume fini, nous avons préféré nous restreindre ici à une présentation du résultat pour les PCA de la classe  $\mathcal{C}$ , pour lesquels la condition de faible mélange pour la mesure de Gibbs associée est plus explicite, manipulable et suffisante pour assurer (6.41).

Par ailleurs, ce chapitre s'est focalisé sur le cas des PCA attractifs car ces derniers permettent d'avoir recours aux techniques issues de la monotonie qui découle de cette hypothèse. Dans leur article [MO94b], Martinelli et Olivieri abordent le cas plus général dans lequel cette hypothèse n'est pas supposée. Ils y développent un autre type d'analyse par récurrence sur les volumes  $\mathcal{B}_L$ , inspirée des travaux sur le groupe de renormalisation (cf. [vEFS94, BCO99]), afin de prouver la convergence exponentielle à l'équilibre via l'existence d'une constante de log-Sobolev strictement positive, uniforme en le volume  $\Lambda$ . Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques et l'inégalité de Poincaré, liée à l'existence d'un « trou spectral » (*spectral gap*), on se référera aux travaux [HS87, SZ92b, Zeg92, SZ92a, DSC96, Roy99, Mic99, ABC<sup>+</sup>00] et à l'article récent [DPPP] introduisant une nouvelle inégalité intermédiaire entre l'inégalité de Poincaré et l'inégalité de Sobolev-logarithmique. Nous avons cependant pu constater l'impossibilité d'adapter directement de telles inégalités aux processus à temps discret que sont les PCA, pour lesquels la situation est sensiblement différente de celle des processus à temps continu de par l'absence pour ces processus de générateur infini-tésimal, dont les propriétés de linéarité sont au coeur des inégalités précédemment citées.



# Chapitre 7

## Simulations numériques pour certains PCA de la classe $\mathcal{C}_0$

Ce chapitre a pour but d'illustrer quelques uns des résultats établis dans les chapitres précédents par des simulations numériques. Les dynamiques PCA considérées sont ici celles de la classe  $\mathcal{C}_0$  en dimension  $d = 2$  introduites et étudiées au Chapitre 4. Les résultats présentés ici concernent le cas isotrope ( $\mathcal{K}(e_1) = \mathcal{K}(-e_1) = \mathcal{K}(e_2) = \mathcal{K}(-e_2) = K \in \mathbb{R}$ ), avec ou sans interaction propre ( $\mathcal{K}(0) = 0$  ou non).

Nous précisons dans un premier temps le langage choisi pour développer ces simulations, ainsi que le matériel qui fut utilisé (section 7.1). Dans la section 7.2, nous estimons une température critique pour les hamiltoniens associés à ces dynamiques, température critique qui sépare la zone de transition de phase de la zone d'unicité de la mesure de Gibbs. Dans la section 7.3 nous mettons en évidence un changement de comportement ergodique/non ergodique pour ces dynamiques PCA, autour de cette température critique. Enfin, la section 7.4 présente un algorithme parallèle permettant de simuler le modèle d'Ising en dimension 2 (où l'interaction est avec les plus proches voisins).

On se référera également à [Guy99] pour des commentaires quant à l'utilisation de dynamiques parallèles dans le cadre de simulations à l'aide de chaînes de Markov, ainsi que de manière plus générale à [Häg02, Sok97].

On pourra aussi consulter [BCLS99] pour des simulations de PCA de la classe  $\mathcal{C}$  du point de vue de l'étude de phénomènes de métastabilité (et plus généralement [CL98, Cir02]), ainsi que [Mak97, Mak99] pour des simulations de PCA dégénérés en relation avec l'étude de l'aspect gibbsien des mesures stationnaires.

Les simulations ici présentées se veulent un premier pas illustrant les résultats mathématiques établis. Leur utilisation et leur extension est à envisager comme outil d'investigation lorsque la dimension  $d$  est telle que  $d \geq 3$ , ou bien  $h \neq 0$ .

### 7.1 Langage et matériel utilisé

Le langage choisi pour mettre en œuvre ces simulations est le langage Matlab. L'intérêt principal de ce langage réside dans la facilité de développement des programmes, et

d'exploitation graphique des résultats, ainsi que dans sa syntaxe matricielle, dont l'efficacité est flagrante lors de la simulation des dynamiques parallèles. Néanmoins, langage non compilé, son utilisation rend les algorithmes séquentiels de la section 7.2 très lents. Notre perspective est de réaliser la migration des codes Matlab développés en langage Fortran, langage compilé, où la réalisation des opérations matricielles sont également optimales. S'agissant des dynamiques parallèles, le propos sera alors ensuite de passer du Fortran au langage HPF (*High Parallel Fortran*) qui consiste en du Fortran avec des directives de compilation permettant d'exploiter l'architecture parallèle multiprocesseurs de certaines machines. Les dynamiques PCA devraient y fournir des algorithmes d'une grande rapidité d'exécution.

La machine sur laquelle les simulations présentées dans ce chapitre ont été développées est un Serveur Transtec 2400L, muni de deux processeurs bi-pentium III à 1Ghz sous l'environnement Linux (distribution Debian Potato) du laboratoire de Statistique et Probabilités de l'Université de Lille 1. La machine à architecture parallèle, sur laquelle l'utilisation des codes déjà développés – à transcrire en langage HPF – est envisagée, est un supercalculateur à architecture parallèle IBM RS6000/SP à 4 nœuds de 16 processeurs Power III (NH2) cadencés à 375 Mhz <sup>1</sup> du Centre de Ressources de l'Université de Lille 1.

## 7.2 Estimation de la température critique pour l'hamiltonien associé

Dans cette section nous nous intéressons aux hamiltoniens associés aux dynamiques PCA de la classe  $\mathcal{C}_0$ , sur  $\{-1; +1\}^{\mathbb{Z}^2}$ , définis par la formule (4.15). On se réfère à la formule (4.37) dans la sous-section 4.1.2 pour la définition de la famille de potentiels  $\varphi$  à partir desquels les mesures de Gibbs associées aux dynamiques sont définies. Les cas considérés sont ceux pour lesquels  $\mathcal{K}(e_1) = \mathcal{K}(-e_1) = \mathcal{K}(e_2) = \mathcal{K}(-e_2) = K \in \mathbb{R}$ . On a donc :

$$\begin{cases} \varphi_{V_k}(\sigma_{V_k}) &= -\ln \cosh \left( \beta K \sum_{k' \in V_k \setminus \{k\}} \sigma_{k'} + \beta \mathcal{K}(0) \sigma_k \right) ; \\ \varphi_A(\sigma_A) &= 0 \text{ pour tous les autres ensembles } A, \end{cases} \quad (7.1)$$

avec si  $\mathcal{K}(0) \neq 0$ ,

$$V_k = \{k; k + e_1; k - e_1; k + e_2; k - e_2\},$$

ou bien si  $\mathcal{K}(0) = 0$ ,

$$V_k = \{k + e_1; k - e_1; k + e_2; k - e_2\}.$$

Plus précisément,

1. le premier cas qui est étudié correspond de plus au choix  $\mathcal{K}(0) = 0$ ; on se référera à la sous-section 4.2.2 pour les résultats théoriques à son sujet;
2. pour le second cas,  $\mathcal{K}(0) = K$ ; on se ramène au cas où  $K = +1$ ; ce modèle est monotone, comme cela est développé au Chapitre 4.

<sup>1</sup>cf. <http://ustl.univ-lille1.fr/calcul-intensif/infos.htm>

### 7.2.1 Algorithme utilisé

Afin de ne pas interférer avec l'étude des dynamiques parallèles, il a été choisi, pour simuler le phénomène de transition de phase, un algorithme séquentiel usuel (cf. [Cir98]) dont l'efficacité est reconnue. Il s'agit d'un algorithme par acceptation/rejet de retournements de spins et balayage aléatoire, dit d'Hastings-Metropolis (cf. section 2.3 *in* [Guy99], Chapitre 3 *in* [NB99] pour le potentiel d'Ising), fondé sur une dynamique de Glauber réversible à volume fini  $\mathcal{B}_L$ , pour  $L$  assez grand. On renvoie pour plus de détails au code source commenté du programme `TransitionDePhase.m` fourni en Annexe A (cf. page 159).

Principalement cet algorithme repose sur le mécanisme suivant :

1. choix au hasard, avec loi uniforme, d'un site  $k$  de  $\mathcal{B}_L$ ;
2. pour obtenir  $\sigma_k(n+1)$ , transformer la valeur  $\sigma_k(n)$  en son opposé avec la probabilité :

$$e^{-[H_{\{k\}}(\sigma^k(n)) - H_{\{k\}}(\sigma(n))]_+}, \quad (7.2)$$

où, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $[x]_+ = x$  si  $x \geq 0$ , 0 sinon, et où  $\sigma^k(n) = T_k(\sigma(n))$  avec  $T_k$  la transformation « retournement de spin au site  $k$  » définie en (2.11) p. 13.

La probabilité définie en (7.2) s'écrit dans le cas présent, avec la condition au bord périodique :

$$\exp\left(-\left[\prod_{k' \in V_k} \frac{\cosh(\beta C_{k'}(\sigma^k(n)))}{\cosh(\beta C_{k'}(\sigma(n)))}\right]_+\right). \quad (7.3)$$

Remarquons que dans le cas présent, où la portée est 1, les sites mis en jeu pour calculer cette quantité sont ceux de  $\cup_{k \in V_k} V_{k'}$ , ici au nombre maximal de 13. Afin d'optimiser le temps de calcul de l'algorithme, on calcule au préalable ces différentes probabilités, à paramètre  $\beta$  fixé, pour toutes les configurations possibles sur ces 13 sites, au nombre de  $2^{13} = 8192$ . Le programme secondaire `configuration.m` énumère ces configurations.

Comme il vient d'être précisé, le choix de la condition au bord périodique a été fait pour ces simulations, et la configuration initiale choisie pour ces dynamiques est  $(+1)_{\mathcal{B}_L}$ .

Enfin, la présence ou non de transition de phase pour le potentiel  $\varphi$  est usuellement illustrée par l'unicité, ou non, des états asymptotiques de l'algorithme mis en œuvre (cf. section 3.3 *in* [NB99]). La grandeur mesurée lors de ces simulations est ainsi la magnétisation du système, soit la moyenne sur  $\mathcal{B}_L$  des valeurs des spins. On trouve dans le code source les instructions qui estiment cette quantité.

On précise que le code source contient également les instructions relatives à l'utilisation du programme pour différents jeux de données : chargement des données de la simulation (sauvegardées au préalable sous forme de fichier matlab `.mat`), et enregistrement de manière analogue des résultats obtenus.

### 7.2.2 Données des simulations

Comme précédemment annoncé, on choisit dans les simulations développées de se restreindre au cas  $h = 0$  et l'on se ramène à  $K = +1$  sans perdre trop de généralité



au sein de la classe  $\mathcal{C}_0$ . Pour obtenir les résultats présentés ci-après, il a été choisi un volume fini  $\mathcal{B}_L$  de taille  $L = 100$  (variable `N` dans le code source). La dynamique est appliquée pendant `tfinal` instants, ici `tfinal = 10000`. Un instant correspond à  $\#\mathcal{B}_L$  retournements de spins potentiels (soit  $N*N$ ), ce que l'on dénomme par *Monte Carlo Step*. Le programme prévoit que les mesures débutent à compter de `tfinal/2`. Diverses simulations préalables ont été faites, et il semble que ceci assure, qu'à compter de cet instant, le système fournisse des réalisations de la distribution asymptotique. Le paramètre `intervalleMesures` permet de mesurer la magnétisation du système tous les `intervalleMesures` instants, assurant en cela une relative indépendance entre ces différentes réalisations de l'état asymptotique. Ici `intervalleMesures = 10`. Ce qui donne des mesures de la magnétisation obtenues finalement comme moyenne temporelle de 500 relevés.

### 7.2.3 Résultats

La quantité mesurée est la magnétisation. En prenant comme condition initiale  $(+1)_{\mathcal{B}_L}$ , une magnétisation nulle pour l'état asymptotique de la dynamique séquentielle illustre l'absence de transition de phase, alors qu'une magnétisation de  $+1$  traduit l'apparition d'un agencement majoritaire de sites valant  $+1$ , *i.e.* la présence de transition de phase.

Les figures 7.1 et 7.2 représentent la variation de la magnétisation lorsque le paramètre  $\beta$ , dit « de température » (cf. Chapitre 4) croît. Elles correspondent respectivement au cas  $\mathcal{K}(0) = 0$  et  $\mathcal{K}(0) = +1$ . Le saut mis en évidence dans ces graphiques, traduit la discontinuité théorique de la magnétisation et illustre la transition de phase pour le potentiel  $\varphi$  à partir d'une certaine valeur critique de  $\beta$ .

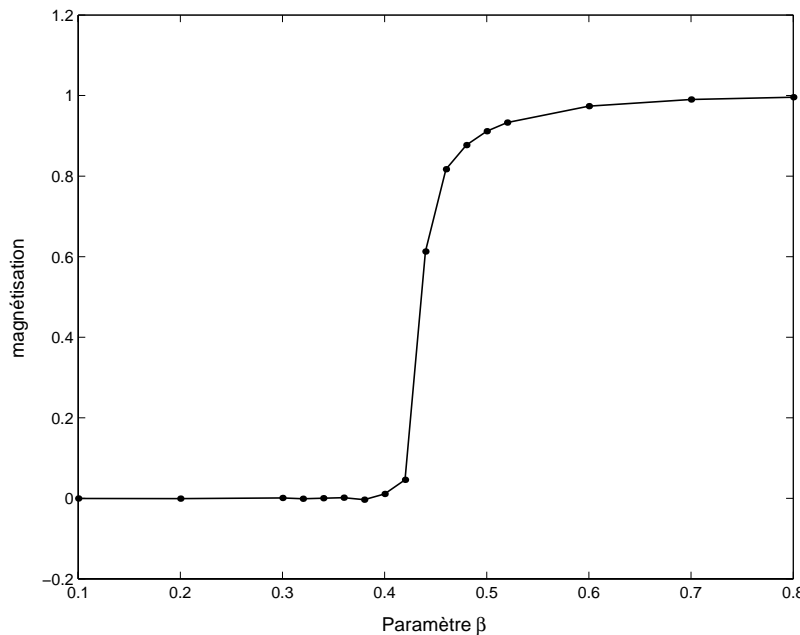


FIG. 7.1 – Variation de la magnétisation selon le paramètre  $\beta$ , cas  $\mathcal{K}(0) = 0$

Dans le cas où  $\mathcal{K}(0) = 0$ , il est remarquable de confronter cette valeur critique estimée avec celle rappelée au Théorème 4.2.5 soit  $\beta_c = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2} \simeq 0,44$ .

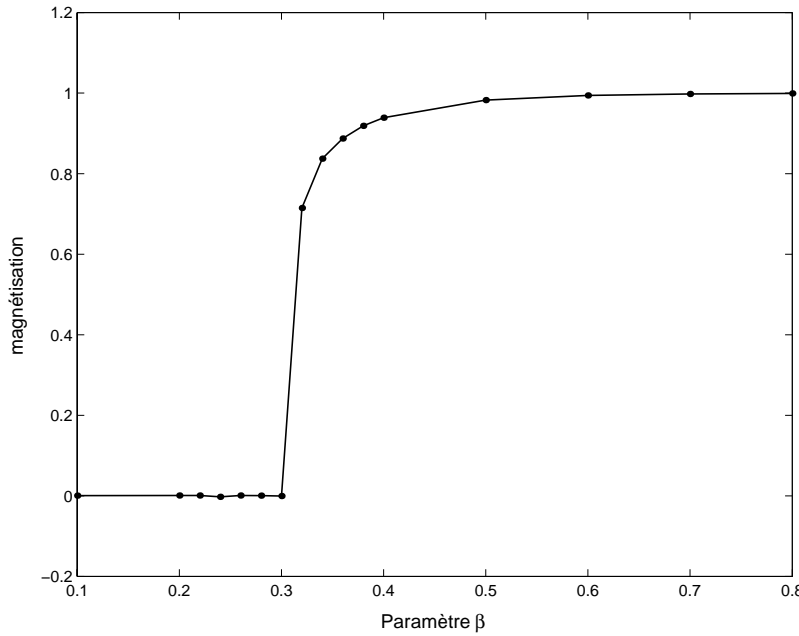


FIG. 7.2 – Variation de la magnétisation selon le paramètre  $\beta$ , cas  $\mathcal{K}(0) = +1$

Dans le cas où  $\mathcal{K}(0) = +1$ , on illustre la présence de transition de phase pour  $\varphi$  lorsque  $\beta$  est grand, résultat établi au Théorème 4.2.1. Bien plus, la présence d'un paramètre critique  $\beta_c$  est mise en évidence. Ce paramètre présente une valeur proche de 0,32, sensiblement différente et strictement inférieure à celle du cas précédent. La dynamique lorsque  $\mathcal{K}(0) > 0$  présente donc plus facilement le phénomène de transition de phase que la dynamique avec  $\mathcal{K}(0) = 0$ .

### 7.3 Ergodicité/non ergodicité de dynamiques PCA

Dans cette section, les simulations réalisent les dynamiques PCA. Les cas considérés correspondent aux potentiels pour lesquels la présence de transition de phase vient d'être illustrée. Il s'agit des cas en dimension  $d = 2$  où  $h = 0$  et  $\mathcal{K}(e_1) = \mathcal{K}(-e_1) = \mathcal{K}(e_2) = \mathcal{K}(-e_2) = +1 \in \mathbb{R}$ , avec  $\mathcal{K}(0) = 0$  ou bien  $\mathcal{K}(0) = +1$ . Rappelons que dans ce cas, la règle locale d'évolution  $p_k$  définie en (4.15) s'écrit :

$$p_k(s|\eta) = \frac{1}{2} \left( 1 + s \tanh \beta [\eta_{k+e_1} + \eta_{k-e_1} + \eta_{k+e_2} + \eta_{k-e_2} + \mathcal{K}(0)\eta_k] \right).$$

Nous nous intéressons ici au nombre d'états asymptotiques de ces dynamiques PCA qui sont attractives.

Les simulations sont réalisées à partir du programme `DynParallele.m` dont le code source est détaillé en Annexe B (cf. page 165). L'algorithme est une simple traduction

de la dynamique PCA, et la syntaxe matricielle du langage Matlab en permet une formulation simple et efficace.

Précisons que l'on simule indépendamment les deux dynamiques à volume fini  $P_{\mathcal{B}_L}^-$  et  $P_{\mathcal{B}_L}^+$  en prenant respectivement comme conditions initiales  $(-1)_{\mathcal{B}_L}$  et  $(+1)_{\mathcal{B}_L}$ .

### 7.3.1 Données des simulations

Comme dans la section précédente, le volume fini  $\mathcal{B}_L$  considéré est de taille  $L = 100$ . La variable `tfinal` détermine également le nombre d'instants pendant lesquels la dynamique agit sur le réseau. On précise qu'un instant de temps (soit 1 *Monte Carlo Step*) correspond ici exactement à  $\#\mathcal{B}_L$  retournements de spins possibles, et ceci de manière parallèle et non comme précédemment par la succession de  $\#\mathcal{B}_L$  retournements de spins choisis aléatoirement dans  $\mathcal{B}_L$ . Ici `tfinal` vaut 10000 de manière générale, et plus précisément 20000 pour  $\beta$  entre les valeurs 0,4 et 0,5 dans le cas où  $\mathcal{K}(0) = 0$  et entre les valeurs 0,2 et 0,4 dans le cas où  $\mathcal{K}(0) = +1$ . Cela correspond à des magnétisations estimées comme moyenne temporelle de 5000 relevés, calculés chacun à `intervalleMesure` instants de différence. L'algorithme étant ici beaucoup plus rapide que celui développé à la section 7.2, on peut ici réaliser cette amélioration du nombre de relevés.

### 7.3.2 Résultats

En utilisant les notations introduites au Chapitre 4 et la Proposition 3.2.1, on sait que  $\delta_{(-1)_{\mathcal{B}_L}} P_{\mathcal{B}_L}^-(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^-$  et  $\delta_{(+1)_{\mathcal{B}_L}} P_{\mathcal{B}_L}^+(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{B}_L}^+$ . Par ailleurs, la Proposition 6.2.3 établit que ces mesures approchent, pour  $L$  grand, les mesures extrémales  $\underline{\nu}$  et  $\bar{\nu}$ . De plus ce résultat prouve qu'il y a unicité de la mesure stationnaire pour la dynamique parallèle  $P$  considérée à volume infini si et seulement si ces deux mesures coïncident. Rappelons qu'il a été également établi dans la remarque 6.2.11 du Chapitre 6 que **la condition (6.28) :**

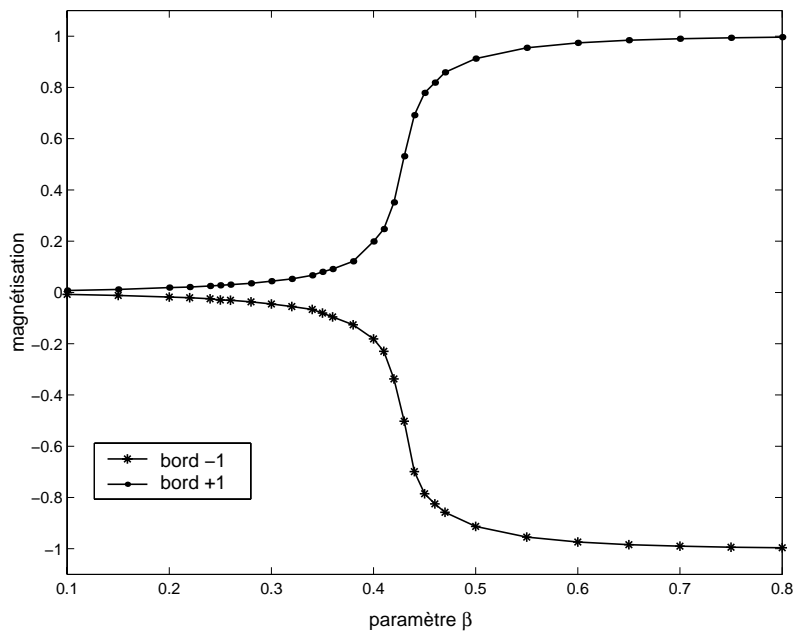
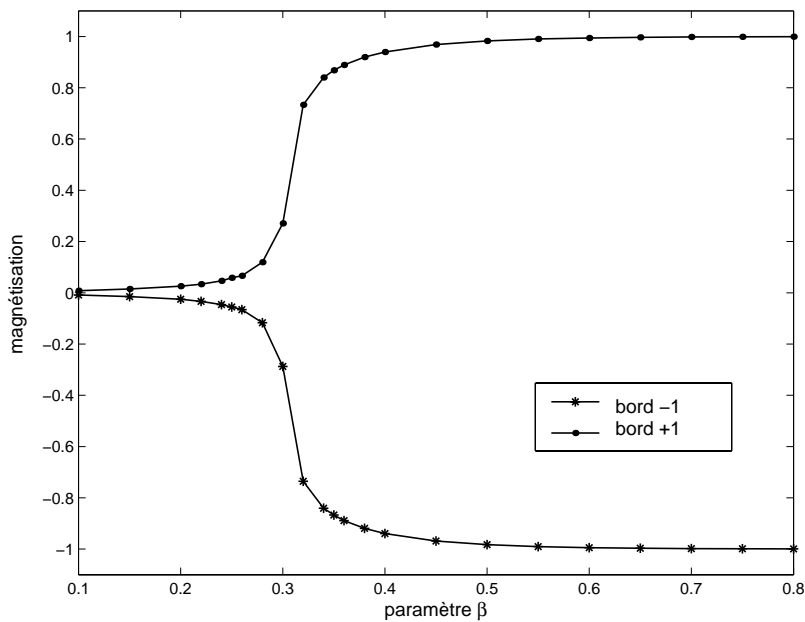
$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left( \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^+ - \int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^- \right) = 0$$

**est équivalente à l'unicité de la mesure stationnaire pour la dynamique PCA à volume infini et équivalente à l'ergodicité de cette dynamique.**

La grandeur estimée lors des simulations de cette section est la magnétisation et approxime pour la dynamique  $P_{\mathcal{B}_L}^-$  la quantité  $\int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^-$  et pour la dynamique  $P_{\mathcal{B}_L}^+$  la quantité  $\int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^+$ . Les figures 7.3 et 7.4 représentent les variations de ces deux grandeurs en fonction du paramètre  $\beta$  dans le cas où  $\mathcal{K}(0) = 0$  (figure 7.3) et dans le cas où  $\mathcal{K}(0) = +1$  (figure 7.4). Dans ces deux figures la courbe positive correspond à  $\int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^+$  et celle négative à  $\int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^-$ .

Une valeur critique  $\beta'_c$  du paramètre  $\beta$  est mise en évidence. Elle est telle que si  $\beta < \beta'_c$  on a (6.28) donc ergodicité de la dynamique; et si  $\beta > \beta'_c$ , on a  $\int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^- \simeq -1$  et  $\int \sigma_0 d\nu_{\mathcal{B}_L}^+ \simeq +1$ , d'où non ergodicité.

Bien plus, compte tenu des estimations de  $\beta_c$  de la section précédente, les résultats des simulations illustrent ici le fait que  $\beta'_c = \beta_c$ . Il a en effet été prouvé, dans les chapitres

FIG. 7.3 – Variation de la magnétisation, bord +1 et -1, cas  $\mathcal{K}(0) = 0$ FIG. 7.4 – Variation de la magnétisation, bord +1 et -1, cas  $\mathcal{K}(0) = +1$

précédents, pour ces dynamiques PCA attractives de la classe  $\mathcal{C}$  sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  qu'il y a **équivalence entre non ergodicité et transition de phase pour le potentiel  $\varphi$  associé et équivalence entre ergodicité de la dynamique et non transition de phase du potentiel associé**. Précisons ce résultat : la Proposition 4.3.1 établit qu'en zone de transition de phase la dynamique PCA de la classe  $\mathcal{C}$  est non ergodique. D'autre part, le Corollaire 3.5.2 prouve que l'unicité de la mesure de Gibbs implique l'unicité de la mesure stationnaire invariante par translation pour la dynamique. D'après le Corollaire 6.2.5 cela suffit alors à assurer l'unicité de la mesure stationnaire pour la dynamique, d'où, comme rappelé précédemment, l'ergodicité.

## 7.4 Simulation par la dynamique parallèle du modèle d'Ising

Dans cette section nous signalons un algorithme permettant de simuler de manière parallèle les mesures de Gibbs extrémales (éventuellement confondues) de deux modèles d'Ising isotropes ferromagnétiques indépendants (cf. également [FFS93, NJ01]). En langage Matlab, pour lequel la réalisation des opérations matricielles est optimisée, ce procédé fournit un algorithme plus rapide en temps d'exécution que l'algorithme séquentiel usuel de Glauber-Métropolis.

On considère une dynamique PCA attractive de la classe  $\mathcal{C}$ , telle que  $\mathcal{K}(0) = 0$ . On rappelle, d'après la sous section 4.2.2, que lorsque  $\mathcal{K}(0) = 0$ , la dynamique est découpée en deux dynamiques parallèles indépendantes, agissant sur  $(\mathbb{Z}^{2,\mathbf{p}}, \mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}})$  et  $(\mathbb{Z}^{2,\mathbf{i}}, \mathbb{Z}^{2,\mathbf{p}})$  en deux instants successifs. En utilisant la transformation  $\Xi$  introduite dans la preuve du Lemme 4.2.4, et en se référant à la preuve du Théorème 4.2.5, on construit l'algorithme dont le code source est donné à la page 169.

Par ailleurs, la dynamique étant attractive, on utilise également le fait que, d'après la Proposition 3.2.1, la condition initiale  $(+\mathbf{1})_{\mathcal{B}_L}$  converge en temps infini, sous l'action de la dynamique  $P_{\mathcal{B}_L}^+$ , vers la mesure  $\nu_{\mathcal{B}_L}^+$ , dont la limite à volume infini est la mesure réversible extrême  $\nu^+$ , qui coïncide avec la mesure de Gibbs extrême  $\mu^+$ .

Pour la réalisation pratique de cet algorithme, on se réfère au code source détaillé en Annexe C à la page 169.

# Annexe A

## Programme TransitionDePhase.m

### A.1 Programme principal

```
clear all

% il faut lancer config.m avant afin de créer
% la variable sigma(:, :, i) avec toutes les configurations utiles

load configurations
%%% sont ainsi définis les variables suivantes~:

%%% la matrice 3x3 K qui définit la fonction d'interaction

%%% N: définit la taille du volume fini considéré

%%% betadebut, betafin, et pasbeta définissent la variation du

%%% paramètre beta

%%% paramètre h de la dynamique, ici toujours h=0

%%% intervalleMesures définit le nombre d'instants
%%% (en Monte Carlo Step, soit N*N retournements de sites possibles)
%%% écoulés entre deux mesures successives

%%% tfinal: durée totale (en MonteCarlo Step) du déroulement
%%% de la dynamique.
%%% les mesures débutent à tfinal/2

format long E

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% initialisation de la sauvegarde %%%%%%%%%%%%%%%
nom_du_fichier_de_sauvegarde=['Resultats' date '_''];
load compteur_simulations;
```

```

numero=str2num(indice);
numero=numero+1;
indice=int2str(numero);
save compteur_simulations indice
nom_du_fichier_de_sauvegarde=[nom_du_fichier_de_sauvegarde indice]
commande_sauvegarde=['save ' nom_du_fichier_de_sauvegarde '
    N tfinal h K VarBeta VarMoyM '];

%%%%%%%%%%%%%% chargement du jeu de données %%%%%%%%%%%%%%%
chargement=['load donnees_simulation' indice]
eval(chargement);

%%%%%%%%%%%%%% constantes pour le programme %%%%%%%%%%%%%%%

tdebutMesures=tfinal/2

Mask=[0 0 1 0 0;0 1 1 1 0; 1 1 1 1 1; 0 1 1 1 0; 0 0 1 0 0];

% t= temps en MCStep
% 1 t=1 MCstep flips éventuels

MCStep=N*N;

% pour les différentes mesures quand beta varie
index=0;

%nombre de mesures sur lequel sera effectuée la moyenne
NbStatistique=(tfinal-tdebutMesures)/intervalleMesures

%%%%%%%%%%%%%% début de variation de la température %%%%%%%%%%%%%%%

for beta=betadebut:pasbeta:betafin
index=index+1;
%%%   initialisation

moyenneM=0;

% calcul préalable des lois d'évolution

for i=1:8192    % 8192 soit 2^13-1
    flipsigma=sigma(:,i);
    flipsigma(3,3)=-flipsigma(3,3);

    tx=exp(-2*beta*h*sigma(3,3,i))
    *cosh(beta*poids(

```

```

        flipsigma([2:4],[2:4],K,h))/cosh(beta*poids(sigma([2:4],[2:4],i),K,h));
*cosh(beta*poids(
        flipsigma([2:4],[1:3],K,h))/cosh(beta*poids(sigma([2:4],[1:3],i),K,h));
*cosh(beta*poids(
        flipsigma([2:4],[3:5],K,h))/cosh(beta*poids(sigma([2:4],[3:5],i),K,h));
*cosh(beta*poids(
        flipsigma([1:3],[2:4],K,h))/cosh(beta*poids(sigma([1:3],[2:4],i),K,h));
*cosh(beta*poids(
        flipsigma([3:5],[2:4],K,h))/cosh(beta*poids(sigma([3:5],[2:4],i),K,h));

    if tx >=1
        decroit(i)=1; tauxflip(i)=tx;
    else
        decroit(i)=0; tauxflip(i)=tx;
    end
end

% initialisation de la configuration initiale

R=ones(N+4); % ou bien
% R=-ones(N+4);

% initialisation de la magnétisation
M=mean(mean(R([3:N+2],[3:N+2])));

compt=1;
t=2;
CompteurMesures=intervalleMesures;

while t<=tfinal
n=1;

if t>tdebutMesures
    if CompteurMesures==intervalleMesures
        CompteurMesures=1;
    else
        CompteurMesures=CompteurMesures+1;
    end
end

while n<=MCStep

% bord périodique
periodize;

k=[2+unidrnd(N) 2+unidrnd(N)];

```





## A.2 Programmes secondaires

Le fichier `compteur_simulations.mat` contient la variable `indice` qui permet de gérer différentes simulations produites par le même programme `TransitionDePhase.m`. Les données relatives à chaque simulation sont contenues dans le fichier `donnees_simulation?`. Il s'agit de la taille du réseau  $N$ , du paramètre  $h$ , la matrice d'interaction  $K$ , les paramètres de variation du paramètre  $\beta$  : `betadebut`, `betafin`, `pasbeta`, ainsi que le nombre d'instants `tfinal` jusqu'auquel la dynamique évolue ( $1t = N * N$  retournements possibles d'un spin).

La fonction suivante sert à palier l'absence du module de probabilités dans la distribution standard de Matlab :

```
function x=unidrnd(n);
t=rand(1);
x=round(t*n+0.5);
```

### A.2.1 Fonction voisinage

```
function M=Vois(k,R);
% renvoie la matrice 3*3 voisinage du site k(ligne,colonne)

M=R([k(1)-1 k(1) k(1)+1],[k(2)-1 k(2) k(2)+1]);
```

### A.2.2 Création de toutes les configurations sur 13 sites

Ce programme permet de générer le fichier de données `configurations.mat`.

```
% configuration.m
% crée toutes les configurations possibles
% de l'ensemble des sites pouvant influencer sur un site k donné

var=[0:8191];
var=dec2bin(var);
var=var-48; % pour revenir du code ASCII au code normal
var=2*var-1; %pour revenir

for i=1:8192 % 8192=2^13-1

sigma(:,:,i)=[0 0 var(i,1) 0 0; 0 var(i,2) var(i,3) var(i,4) 0;
var(i,5) var(i,6) var(i,7) var(i,8) var(i,9) ;
0 var(i,10) var(i,11) var(i,12) 0; 0 0 var(i,13) 0 0];

end
```

### A.2.3 identification du voisinage d'un site

```
function num=identification(A);
```

```

% retrouver le numéro de codage du voisinage A

nb=[A(1,3) A(2,2) A(2,3) A(2,4) A(3,1)
     A(3,2) A(3,3) A(3,4) A(3,5) A(4,2) A(4,3) A(4,4) A(5,3)];
nb=(nb+1)/2;
dec=nb(1)*2^12+nb(2)*2^11+nb(3)*2^10+nb(4)*2^9;
dec=dec+nb(5)*2^8+nb(6)*2^7+
     nb(7)*2^6+nb(8)*2^5+nb(9)*2^4+nb(10)*2^3+nb(11)*2^2+nb(12)*2^1;
dec=dec+nb(13)*2^0;
num=dec+1;

```

## A.2.4 périodisation des bords

```

% periodize.m
% periodise les bords de R

% periodisation des colonnes :

R(:,2)=R(:,N+2);
R(:,1)=R(:,N+1);
R(:,N+3)=R(:,3);
R(:,N+4)=R(:,4);

% periodisation des lignes :

R(2,:)=R(N+2,:);
R(1,:)=R(N+1,:);
R(N+3,:)=R(3,:);
R(N+4,:)=R(4,:);

```

## A.2.5 Poids affecté à un site en fonction de son voisinage

```

function c=poids(V,K,h);
% calcul la fonction de couplage associée au site kk (ligne,colonne)
% M représente le réseau avec les bords

c=sum(sum(K.*V,2))+h;

```

# Annexe B

## Programme DynParallele.m

```
% DynParallele.m
% lance une dynamique PCA, condition initiale fixee
% pour tester ergodicite
%
% gère plusieurs fichiers de données de simulation
% et plusieurs fichiers de résultats dont les noms
% sont créés automatiquement
%
% fait varier beta,
% et à beta fixé, dynamique de Glauber-Metropolis
% calcule la magnetisation moyenne
%

clear all
format long E

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% initialisation de la sauvegarde %%%%%%%%%%%%%%%
nom_du_fichier_de_sauvegarde=['ResultatsDynPCA' date '_''];
load compteur_simulations;
numero=str2num(indice);
numero=numero+1;
indice=int2str(numero);
save compteur_simulations indice
nom_du_fichier_de_sauvegarde=[nom_du_fichier_de_sauvegarde indice]
commande_sauvegarde=['save ' nom_du_fichier_de_sauvegarde '
    N tfinal h K VarBeta VarMoyMplus VarMoyMmoins'];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% chargement du jeu de données %%%%%%%%%%%%%%%
chargement=['load donnees_simulation' indice]
eval(chargement);
```

```

%%%%%%%%%%%%%% constantes pour le programme %%%%%%%%%%%%%%%

% t= temps en MCStep
% 1 t=N*N flips éventuels

index=0; % pour les différentes mesures quand beta varie

tdebutMesures=tfinal/2

NbStatistique=(tfinal-tdebutMesures)/intervalleMesures
%% nombre de mesures sur lequel sera effectuée
%% la moyenne

%% condition au bord
Bplus=ones(N,1); % colonne de +1
Bmoins=-ones(N,1); % colonne de -1

%%%%%%%%%%%%%% début de variation de la température %%%%%%%%%%%%%%%

for beta=betadebut:pasbeta:betafin
index=index+1;

%%%%%%%%%%%%%%
% initialisation de la configuration initiale

Rplus=ones(N); % départ de tout +1
Rmoins=-ones(N); % départ de tout -1

%%%%%%%%%%%%%%

% mesure de la magnétisation
Mplus=mean(mean(Rplus([1:N],[1:N])));
Mmoins=mean(mean(Rmoins([1:N],[1:N])));

compt=1;
t=2;
CompteurMesures=intervalleMesures;

while t<=tfinal

%%%%%%%%%% pour effectuer une mesure tous les intervalleMesures MCStep %%
%%%%%%%%%% où 1 MCStep= actualisation de %%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% tous les sites du réseaux possibles %%%%%%%%%%%

```



```

if t>tdebutMesures
    if CompteurMesures==1
        compt=compt+1;
        Mplus=Mplus+mean(mean(Rplus([1:N],[1:N])));
        Mmoins=Mmoins+mean(mean(Rmoins([1:N],[1:N])));
    end
end

t=t+1;
end % de la boucle de temps t

moyenneMplus=Mplus/compt;
moyenneMmoins=Mmoins/compt;

% tableau de variation de grandeurs caractéristiques du système
% en fonction de la variation de beta

VarBeta(index)=beta;
VarMoyMplus(index)=moyenneMplus;
VarMoyMmoins(index)=moyenneMmoins;

%%%%%%%%%%%%% sauvegarde partielle des données %%%%%%%%%%%%%%
%%% a chaque changement de beta
eval(commande_sauvegarde);
%%%%%%%%%%%%%

end % du beta

```

# Annexe C

## Programme IsingParallel.m

```
% IsingParallele.m
% lance une dynamique PCA, condition initiale fixee
%
% avec interaction propre nulle
% simulation du Ising dim 2 nearest neighbours

clear all

format long E

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
initialisation de la sauvegarde %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
nom_du_fichier_de_sauvegarde=['ResultatsDynPCA' date '_''];
load compteur_simulations;
numero=str2num(indice);
numero=numero+1;
indice=int2str(numero);
save compteur_simulations indice
nom_du_fichier_de_sauvegarde=[nom_du_fichier_de_sauvegarde indice]
commande_sauvegarde=['save ' nom_du_fichier_de_sauvegarde ' N tfinal h K
VarBeta VarMoyM'];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% chargement du jeu de données %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
chargement=['load donnees_simulation' indice]
eval(chargement);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% constantes pour le programme

K(2,2)=0 % on s'assure que l'interaction propre est nulle

intervalleMesures=2 % on s'assure ainsi que les mesures
```



```

% auront lieu tous les deux instants, pour ne travailler que sur %
% l'un des deux Echiquiers

% t= temps en MCStep
% 1 t=1 MCstep flips éventuels

% MCStep=N*N;

    index=0; % pour les différentes mesures quand beta varie

tdebutMesures=tfinal/2

NbStatistique=(tfinal-tdebutMesures)/intervalleMesures
%% nombre de mesures sur lequel sera effectuée
%% la moyenne

%% condition au bord
B=ones(N,1); % colonne de +1
% B=-ones(N,1); % colonne de -1

%% création des échiquiers

for i = 1:N,
    for j = 1:N,
        EchiquierPair(i,j)=(mod(i+j,2)==0);
    end
end

for i = 1:N,
    for j = 1:N,
        EchiquierImpair(i,j)=(mod(i+j,2)==1);
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% début de variation de la température

for beta=betadebut:pasbeta:betafin
    index=index+1;
    beta

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% initialisation de la configuration initiale
% répartition aléatoire dans le volume Lambda

%R=2*Binornd(1,0.5,N+2,N+2)-1;
%% pour jacta

```

---

```

%R=binomiale(N+2);

%%%%%%%%%%%%%% ou bien repartition initiale fixée :

    R=ones(N);                %%%%%%%%%% départ de tout +1
% R=-ones(N);

Ising=R; % initialisation

%%%%%%%%%%%%%%

% initialisation de la mesure de la magnétisation
M=mean(mean(Ising([1:N],[1:N])));

compt=1;

t=2;

CompteurMesures=intervalleMesures;

while t<=tfinal

%%%%%%%%%% pour effectuer une mesure tous les intervalleMesures MCStep
%%%%%%%%%% où 1 MCStep= actualisation de
%%%%%%%%%% tous les sites du réseaux possibles

if t>tdebutMesures
    if CompteurMesures==intervalleMesures
        CompteurMesures=1;
    else
        CompteurMesures=CompteurMesures+1;
    end
end

%%%%%%%%%%%%%% un pas de dynamique=1MCStep=N*N flips en parallel possibles

U=rand(N,N);

nord=[B'; R(1:N-1,:)];
sud=[R(2:N,:); B'];
est=[R(:,2:N) B];
ouest=[B R(:,1:N-1)];

Vois=(K(2,2).*R)+(K(1,2).*nord)+(K(2,3).*est)+(K(3,2).*sud)+(K(2,1).*ouest);
%%% voisinage pondéré avec condition au bord Bplus

```



# Bibliographie

- [ABC+00] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, and G. Scheffer, *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, Société Mathématique de France, Paris, 2000.
- [Bag97] F. Bagnoli, *Étude de quelques modèles discrets en physique et biologie*, Ph.D. thesis, Université Paris VI Pierre et Marie Curie, 1997, <http://poincare.dma.unifi.it/~bagnoli/>.
- [Bag98] F. Bagnoli, *Dynamical Modelling in Biotechnologies*, World Scientific, 1998.
- [BCLS99] S. Bigelis, E. N. M. Cirillo, J. L. Lebowitz, and E. R. Speer, *Critical droplets in metastable states of probabilistic cellular automata*, *Phys. Rev. E* (3) **59** (1999), no. 4, 3935–3941.
- [BCO99] L. Bertini, E. N. M. Cirillo, and E. Olivieri, *Renormalization-group transformations under strong mixing conditions : Gibbsianness and convergence of renormalized interactions*, *J. Statist. Phys.* **97** (1999), no. 5-6, 831–915.
- [Bez99] M. Bezzi, *Modeling biology by cellular automata*, Ph.D. thesis, Università di Bologna, 1999, <http://poincare.dma.unifi.it/~michele/>.
- [BKM93] S. A. Berezner, M. Krutina, and V. A. Malyshev, *Exponential convergence of Toom's probabilistic cellular automata*, *J. Statist. Phys.* **73** (1993), no. 5-6, 927–944.
- [BM02] T. Bodineau and F. Martinelli, *Some new results on the kinetic Ising model in a pure phase*, Preprint, Février 2002.
- [Bov01] A. Bovier, *Statistical mechanics of disordered systems*, Advanced Course in MaPhySto, Centre for Mathematical Physics and Stochastics, University of Aarhus, April 2001.
- [Bré99] P. Brémaud, *Markov chains*, Springer-Verlag, New York, 1999, Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues.
- [Car73] P. Cartier, *Inégalités de corrélation en mécanique statistique*, no. 431, Séminaire Bourbaki, 1972/73.
- [CD98] B. Chopard and M. Droz, *Cellular automata modeling of physical systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [CdLP86] P. Clavin, D. d'Humières, P. Lallemand, and Y. Pomeau, *Automates cellulaires pour les problèmes à frontières libres en hydrodynamique à deux*

- et trois dimensions*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre **303** (1986), no. 13, 1169–1174.
- [Cir98] E. N. M. Cirillo, *Aspetti statici e dinamici delle transizioni di fase : alcuni modelli e metodologie*, Ph.D. thesis, Università degli studi di Bari, février 1998, disponible à <http://www.dmmm.uniroma1.it/~cirillo/>.
- [Cir02] E. N. M. Cirillo, *A note on the metastability of the Ising model : the alternate updating case*, J. Statist. Phys. **106** (2002), no. 1-2, 385–390.
- [CL98] E. N. M. Cirillo and J. L. Lebowitz, *Metastability in the two-dimensional Ising model with free boundary conditions*, J. Statist. Phys. **90** (1998), no. 1-2, 211–226.
- [CM87] H. Chaté and P. Manneville, *Intermittence spatio-temporelle et automates cellulaires probabilistes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre **304** (1987), no. 12, 609–613.
- [Daw73] D. A. Dawson, *Information flow in discrete Markov systems*, J. Appl. Probability **10** (1973), 63–83.
- [Daw74a] D. A. Dawson, *Information flow in some classes of Markov systems*, J. Appl. Probability **11** (1974), 594–600.
- [Daw74b] D. A. Dawson, *Synchronous and asynchronous reversible Markov systems*, Canad. Math. Bull. **17** (1974), no. 5, 633–649.
- [Daw75] D. A. Dawson, *Information flow in graphs*, Stochastic Processes Appl. **3** (1975), 137–151.
- [Daw77] D. A. Dawson, *Stable states of probabilistic cellular automata*, Information and Control **34** (1977), no. 2, 93–106.
- [dHK86] F. den Hollander and M. Keane, *Inequalities of FKG type*, Phys. A **138** (1986), no. 1-2, 167–182.
- [DK84] E. Domany and W. Kinzel, *Equivalence of cellular automata to Ising models and directed percolation*, Phys. Rev. Lett. **53** (1984), no. 4, 311–314.
- [Dob56] R.L. Dobrushin, *Central limit theorem for non-stationary Markov chains. I*, Teor. Veroyatnost. i Primenen. **1** (1956), 72–89.
- [Dob65] R. L. Dobrushin, *Existence of a phase transition in the two-dimensional and three-dimensional Ising models*, Soviet Physics Dokl. **10** (1965), 111–113.
- [Dob68a] R.L. Dobrushin, *The description of random fields by means of conditional probabilities and conditions of its regularity*, Theory Prob. Appl. **13** (1968), 2 :197–224.
- [Dob68b] R.L. Dobrushin, *Gibbsian random fields for lattice systems with pairwise interactions*, Funct. Anal. Appl. **2** (1968), 4,292–301.
- [Dob71] R. L. Dobrushin, *Markov processes with a large number of locally interacting components : Existence of a limit process and its ergodicity*, Problemy Peredači Informacii **7** (1971), no. 2, 70–87.
- [Dob72] R.L. Dobrushin, *Gibbs states describing coexistence of phases for a three dimensional Ising model*, TH. Prob. Appl. **17** (1972), 582–600.

- [Doe38] W. Doeblin, *Exposé de la théorie de chaînes simples constantes de Markov à un nombre fini d'états*, Rev. Math. Union Interbalkan. **2** (1938), 77–105.
- [Dom84] E. Domany, *Exact results for two- and three-dimensional Ising and Potts models*, Phys. Rev. Lett. **52** (1984), no. 11, 871–874.
- [DP92] P. Dai Pra, *Space-time large deviations for interacting particle systems*, Ph.D. thesis, Rutgers University, 1992.
- [DPLR02] P. Dai Pra, P.-Y. Louis, and S. Roelly, *Stationary measures and phase transition for a class of probabilistic cellular automata*, ESAIM : P & S, Probability and Statistics **6** (2002), 89–104.
- [DPPP] P. Dai Pra, A. M. Paganoni, and G. Posta, *Entropy inequalities for unbounded spin systems*, *mp\_arc* preprint septembre 2000 n° 00 – 340, à paraître à Ann. Probab. 2002.
- [DR79] H. Doss and G. Royer, *Processus de diffusion associés aux mesures de Gibbs sur  $R^{\mathbb{Z}^d}$* , Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **46** (1978/79), no. 1, 107–124.
- [DSC96] P. Diaconis and L. Saloff-Coste, *Logarithmic Sobolev inequalities for finite Markov chains*, Ann. Appl. Probab. **6** (1996), no. 3, 695–750.
- [Dur81] R. Durrett, *An introduction to infinite particle systems*, Stochastic Process. Appl. **11** (1981), no. 2, 109–150.
- [Ell85] R. S. Ellis, *Entropy, large deviations, and statistical mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [EvC] Site Web, <http://www.santafe.edu/projects/evca/>.
- [Fel71] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.
- [Fer97] R. Fernandez, *Contour ensembles and the description of gibbsian probability distributions at low temperature*, Notes de cours, 21ème Colloque brésilien de Mathématiques, IMPA, Rio de Janeiro, Juillet 1997.
- [FFG] R. Fernandez, P.A. Ferrari, and A. Galves, *Coupling, renewal and perfect simulation of chains of infinite order*, Notes for a Course in the V Brazilian School of Probability, Ubatuba 2001.
- [FFG01] R. Fernandez, P. A. Ferrari, and N. L. Garcia, *Loss network representation of Peierls contours*, Ann. Probab. **29** (2001), no. 2, 902–937.
- [FFS93] P. A. Ferrari, A. Frigessi, and R. H. Schonmann, *Convergence of some partially parallel Gibbs samplers with annealing*, Ann. Appl. Probab. **3** (1993), no. 1, 137–153.
- [FHP86] U. Frisch, B. Hasslacher, and Y. Pomeau, *Lattice gas automata for navier-stokes equation*, Phys Rev Let **56** (1986), no. 1505.
- [Fil98] J. A. Fill, *An interruptible algorithm for perfect sampling via Markov chains*, Ann. Appl. Probab. **8** (1998), no. 1, 131–162.
- [FKG71] C. M. Fortuin, P. W. Kasteleyn, and J. Ginibre, *Correlation inequalities on some partially ordered sets*, Comm. Math. Phys. **22** (1971), 89–103.

- [FLM88] P.A. Ferrari, J. L. Lebowitz, and C. Maes, *On the positivity of correlations in nonequilibrium spin systems*, J. Statist. Phys. **53** (1988), no. 1-2, 295–305.
- [Föll94] H. Föllmer, *Stock price fluctuation as a diffusion in a random environment*, Phil. Trans. Royal Society London A (1994), no. 347, 471–483.
- [FT01] R. Fernandez and A. Toom, *Non-gibbsianness of the invariant measures of non-reversible cellular automata with totally asymmetric noise*, Preprint, disponible à <http://xxx.lanl.gov/abs/math-ph/0101014>, janvier 2001.
- [Gar70] M. Gardner, *The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game life*, Scientific American (1970), 220(4) :120–123, disponible à [http://ddi.cs.uni-potsdam.de/HyFISCH/Produzieren/lis\\_projekt/proj\\_gamel%ife/ConwayScientificAmerican.htm](http://ddi.cs.uni-potsdam.de/HyFISCH/Produzieren/lis_projekt/proj_gamel%ife/ConwayScientificAmerican.htm).
- [Geo88] H.-O. Georgii, *Gibbs measures and phase transitions*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1988.
- [GHM01] H.O. Georgii, O. Häggström, and C. Maes, *The random geometry of equilibrium phases*, Phase Transitions and Critical Phenomena, vol. 18, 1–142, Academic Press, London, 2001, pp. 1–142, <http://www.math.chalmers.se/~olleh/surveys.html>.
- [Gib60] J. W. Gibbs, *Elementary principles in statistical mechanics : developed with especial reference to the rational foundation of thermodynamics*, Dover publications Inc., New York, 1960, republication de l'oeuvre de 1902, originellement publiée chez Yale University Press.
- [GJH85] G. Grinstein, C. Jayaprakash, and Yu He, *Statistical mechanics of probabilistic cellular automata*, Phys. Rev. Lett. **55** (1985), no. 23, 2527–2530.
- [GKLM89] S. Goldstein, R. Kuik, J. L. Lebowitz, and C. Maes, *From PCAs to equilibrium systems and back*, Comm. Math. Phys. **125** (1989), no. 1, 71–79.
- [GLD89] A. Georges and P. Le Doussal, *From equilibrium spin models to probabilistic cellular automata*, J. Statist. Phys. **54** (1989), no. 3-4, 1011–1064.
- [GM00] G. Gielis and R. S. MacKay, *Coupled map lattices with phase transition*, Nonlinearity **13** (2000), no. 3, 867–888.
- [Gri64] R.B. Griffiths, *Peierls proof of spontaneous magnetization in a two-dimensional Ising ferromagnet*, Phys. Rev., II. Ser. 136 (1964), A 437–A 439.
- [Guy92] X. Guyon, *Champs aléatoires sur un réseau*, Masson, 1992.
- [Guy99] X. Guyon, *Méthodes numériques par chaînes de Markov*, cours, école d'été de Mathématiques, Mérida, Venezuela, septembre 1999.
- [Häg98] O. Häggström, *Random-cluster representations in the study of phase transitions*, Markov Process. Related Fields **4** (1998), no. 3, 275–321.
- [Häg02] O. Häggström, *Finite Markov chains and algorithmic applications*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 52, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

- [Har72] T. E. Harris, *Nearest-neighbor Markov interaction processes on multidimensional lattices*, Advances in Math. **9** (1972), 66–89.
- [Har78] T. E. Harris, *Additive set-valued Markov processes and graphical methods*, Ann. Probability **6** (1978), no. 3, 355–378.
- [Hig93] Y. Higuchi, *Coexistence of infinite (\*)-clusters. II. Ising percolation in two dimensions*, Probab. Theory Related Fields **97** (1993), no. 1-2, 1–33.
- [Hol72] R. Holley, *An ergodic theorem for interacting systems with attractive interactions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **24** (1972), 325–334.
- [Hol74] R. Holley, *Remarks on the FKG inequalities*, Comm. Math. Phys. **36** (1974), 227–231.
- [Hol85] R. Holley, *Possible rates of convergence in finite range, attractive spin systems*, Particle systems, random media and large deviations (Brunswick, Maine, 1984) (Providence, RI), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985, pp. 215–234.
- [HS81] R. Holley and D. Stroock, *Diffusions on an infinite-dimensional torus*, J. Funct. Anal. **42** (1981), no. 1, 29–63.
- [HS87] R. Holley and D. Stroock, *Logarithmic Sobolev inequalities and stochastic Ising models*, J. Statist. Phys. **46** (1987), no. 5-6, 1159–1194.
- [HS00] O. Häggström and J. Steif, *Propp-Wilson algorithms and finitary codings for high noise markov random fields*.
- [IM88] I. A. Ignatyuk and V. A. Malyshev, *Cluster expansion for locally interacting Markov chains*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. **5** (1988), 3–7, 103.
- [IM89] I. A. Ignatyuk and V. A. Malyshev, *Processes with local interaction, and communication networks*, Problemy Peredachi Informatsii **25** (1989), no. 1, 65–77.
- [Isi25] E. Ising, *Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus*, Z. Phys. (1925), no. 31, 253–258.
- [KKT] M. Katori, N. Konno, and H. Tanemura, *Complete convergence theorems of the domany-kinzel model*, travail en cours.
- [Kün84a] H. Künsch, *Nonreversible stationary measures for infinite interacting particle systems*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **66** (1984), no. 3, 407–424.
- [Kün84b] H. Künsch, *Time reversal and stationary Gibbs measures*, Stochastic Process. Appl. **17** (1984), no. 1, 159–166.
- [KV80] O. Kozlov and N. Vasilyev, *Reversible Markov chains with local interaction*, Multicomponent random systems (New York), Dekker, New York, 1980, pp. 451–469.
- [Leb74] J. L. Lebowitz, *GHS and other inequalities*, Comm. Math. Phys. **35** (1974), 87–92.
- [Len20] W. Lenz, *Beitrag zum Verständnis des magnetischen Erscheinungen in festen Körpern*, Phys. Zeitsch (1920), no. 21, 613–615.



- [Lig85] T. M. Liggett, *Interacting particle systems*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [Lig93] T. M. Liggett, *The coupling technique in interacting particle systems*, Doebelin and modern probability (Blaubeuren, 1991) (Providence, RI), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, pp. 73–83.
- [Lig99] T.M. Liggett, *Stochastic interacting systems : contact, voter and exclusion processes*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Lin92] T. Lindvall, *Lectures on the coupling method*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1992, A Wiley-Interscience Publication.
- [LM98] J. L. Lebowitz and A. E. Mazel, *Improved Peierls argument for high-dimensional Ising models*, J. Statist. Phys. **90** (1998), no. 3-4, 1051–1059.
- [LML72] J. L. Lebowitz and A. Martin-Löf, *On the uniqueness of the equilibrium state for Ising spin systems*, Comm. Math. Phys. **25** (1972), 276–282.
- [LMS89] J.L. Lebowitz, C. Maes, and E.R. Speer, *Probabilistic cellular automata : Statistical mechanics considerations*, Lectures in complex systems, SFI Studies in the Sciences of Complexity (E. Jen, ed.), vol. 2, Addison-Wesley, 1989, Proceedings of 1989 Complex Systems summer school Santa Fe Institute, Santa Fe, New Mexico, pp. 401–414.
- [LMS90] J. L. Lebowitz, C. Maes, and E. R. Speer, *Statistical mechanics of probabilistic cellular automata*, J. Statist. Phys. **59** (1990), no. 1-2, 117–170.
- [LR69] O. E. Lanford and D. Ruelle, *Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics*, Comm. Math. Phys. **13** (1969), 194–215.
- [LS00] F. J. López and G. Sanz, *Stochastic comparisons for general probabilistic cellular automata*, Statist. Probab. Lett. **46** (2000), no. 4, 401–410.
- [Mak97] D. Makowiec, *Gibbsian versus non-gibbsian nature of stationary states for Toom probabilistic cellular automata via simulations*, Phys. Rev. E **55** (1997), no. 6, 6582–6588.
- [Mak99] D. Makowiec, *Stationary states of Toom cellular automata in simulations*, Phys. Rev. E **60** (1999), no. 4, 3787–3795.
- [Mar99] F. Martinelli, *Lectures on Glauber dynamics for discrete spin models*, Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1997) (Berlin), Springer, Berlin, 1999, pp. 93–191.
- [Max90] J.C. Maxwell, *Scientific paper ii*, Cambridge University Press, 1890.
- [Mez97] I. Mezić, *FKG inequalities in cellular automata and coupled map lattices*, Phys. D **103** (1997), no. 1-4, 491–504, Lattice dynamics (Paris, 1995).
- [MI87] V. A. Malyshev and I. A. Ignatyuk, *Locally interacting processes with a noncompact set of values*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. **2** (1987), 3–6, 101.
- [Mic99] L. Miclo, *Relations entre isopérimétrie et trou spectral pour les chaînes de Markov finies*, Probab. Theory Related Fields **114** (1999), no. 4, 431–485.

- [Min00] R. A. Minlos, *Introduction to mathematical statistical physics*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [MM91] V. A. Malyshev and R. A. Minlos, *Gibbs random fields*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.
- [MO94a] F. Martinelli and E. Olivieri, *Approach to equilibrium of Glauber dynamics in the one phase region. I. The attractive case*, Comm. Math. Phys. **161** (1994), no. 3, 447–486.
- [MO94b] F. Martinelli and E. Olivieri, *Approach to equilibrium of Glauber dynamics in the one phase region. II. The general case*, Comm. Math. Phys. **161** (1994), no. 3, 487–514.
- [MOS94] F. Martinelli, E. Olivieri, and R.H. Schonmann, *For 2-D lattice spin systems weak mixing implies strong mixing.*, Commun. Math. Phys. **165** (1994), no. 1, 33–47.
- [MS91] C. Maes and S. B. Shlosman, *Ergodicity of probabilistic cellular automata : a constructive criterion*, Comm. Math. Phys. **135** (1991), no. 2, 233–251.
- [MS93] C. Maes and S. B. Shlosman, *When is an interacting particle system ergodic ?*, Comm. Math. Phys. **151** (1993), no. 3, 447–466.
- [MT87] N. Margolus and T. Toffoli, *Cellular automata machines : a new environment for modeling*, Complex Syst. **1** (1987), no. 5, 967–993.
- [MVV94] C. Maes and K. Vande Velde, *The (non-)gibbsian nature of states invariant under stochastic transformations*, Physica A **206** (1994), 587–603.
- [NB99] M. E. J. Newman and G. T. Barkema, *Monte Carlo methods in statistical physics*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1999.
- [NJ01] F. D. Nobre and A. A. Junior, *the parallel updating in a fully frustrated ising model : a damage spreading analysis*, Phys. Letters A **288** (2001), 271–276.
- [Pei36] R. Peierls, *Ising’s model of ferromagnetism*, Proc. Cambridge Philos. Soc. (1936), 32 :477–481.
- [Pir86] S. A. Pirogov, *Cluster decompositions for automata systems*, Problemy Peredachi Informatsii **22** (1986), no. 4, 60–66.
- [Pre76] C. Preston, *Random fields*, Springer-Verlag, Berlin, 1976, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 534.
- [Pru86] B. Prum, *Processus sur un réseau et mesures de Gibbs*, Masson, Paris, 1986.
- [PW96] J.G. Propp and D.B. Wilson, *Exact sampling with coupled Markov chains and applications to statistical mechanics*, Random Structures and Algorithms **9** (1996), no. 1&2, 223–252.
- [Roy99] G. Royer, *Une initiation aux inégalités de Sobolev logarithmiques*, Société Mathématique de France, Paris, 1999.
- [Rue72] D. Ruelle, *Equilibrium states of infinite systems in statistical mechanics*, Mathematical aspects of statistical mechanics (Proc. Sympos. Appl. Math., New York, 1971) (Providence, R. I.), Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1972, pp. 47–53. SIAM–AMS Proceedings, Vol. V.

- [Rue78] D. Ruelle, *Thermodynamic formalism*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1978, The mathematical structures of classical equilibrium statistical mechanics.
- [Ruj87] P. Ruján, *Cellular automata and statistical mechanical models*, J. Statist. Phys. **49** (1987), no. 1-2, 139–222.
- [Sak88] H. Sakaguchi, *Phase transitions in coupled Bernoulli maps*, Prog. Theor. Phys., Progress Letters **80** (1988), no. 1, 7–12.
- [Sim93] B. Simon, *The statistical mechanics of lattice gases. Vol. I*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [Sin82] Ya. G. Sinai, *Theory of phase transitions : rigorous results*, Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [Sok97] A. Sokal, *Monte Carlo methods in statistical mechanics : foundations and new algorithms*, Functional integration (Cargèse, 1996) (New York), Plenum, New York, 1997, pp. 131–192.
- [Spi74] F. L. Spitzer, *Introduction aux processus de Markov à paramètre dans  $Z^v$* , École d'Été de Probabilités de Saint-Flour, III–1973 (Berlin), Springer, Berlin, 1974, pp. 114–189. Lecture Notes in Math., Vol. 390.
- [SPS71] O.N. Stavskaya and I. I. Piatetski-Shapiro, *On homogeneous nets of spontaneously active elements*, Systems Theory Res. **20** (1971), 75–88.
- [SS95] R. H. Schonmann and S. B. Shlosman, *Complete analyticity for 2D Ising completed*, Comm. Math. Phys. **170** (1995), no. 2, 453–482.
- [Sta73] O. N. Stavskaja, *Invariant Gibbs measures for Markov chains on finite lattices with local interaction*, Mat. Sb. (N.S.) **92(134)** (1973), 402–419, 503.
- [Ste91] J. E. Steif, *Space-time Bernoullicity of the lower and upper stationary processes for attractive spin systems*, Ann. Probab. **19** (1991), no. 2, 609–635.
- [SZ92a] D. W. Stroock and B. Zegarlinski, *The equivalence of the logarithmic Sobolev inequality and the Dobrushin-Shlosman mixing condition*, Comm. Math. Phys. **144** (1992), no. 2, 303–323.
- [SZ92b] D. W. Stroock and B. Zegarlinski, *The logarithmic Sobolev inequality for discrete spin systems on a lattice*, Comm. Math. Phys. **149** (1992), no. 1, 175–193.
- [Tho00] H. Thorisson, *Coupling, stationarity, and regeneration*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Tof84] T. Toffoli, *Cellular automata as an alternative to (rather than an approximation of) differential equations in modeling physics*, Physica D **10** (1984), 117–127.
- [Too95] A.L. Toom, *Cellular automata with errors : problems for students of probability*, Topics in contemporary probability and its applications (Boca Raton, FL), CRC, Boca Raton, FL, 1995, pp. 117–157.

- [TVS<sup>+</sup>78] A.L. Toom, N.B. Vasilyev, O.N. Stavskaya, L.G. Mityushin, G.L. Kurdyumov, and S.A. Pirogov, *Locally interacting systems and their application in biology*, Springer-Verlag, Berlin, 1978, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 653.
- [Ula52] S. Ulam, *Random processes and transformations*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950 (Providence, R. I.), Amer. Math. Soc., 1952, pp. 264–275.
- [Vas69] L. N. Vasershtein, *Markov processes over denumerable products of spaces describing large system of automata*, Problemy Peredači Informacii **5** (1969), no. 3, 64–72.
- [Vas78] N. B. Vasilyev, *Bernoulli and Markov stationary measures in discrete local interactions*, Developments in statistics, Vol. 1 (New York), Academic Press, New York, 1978, pp. 99–112.
- [vEFS94] A. C. D. van Enter, R. Fernandez, and A. D. Sokal, *Renormalization transformations : source of examples and problems in probability and statistics*, Resenhas **1** (1994), no. 2-3, 233–262, Fifth Latin American Congress of Probability and Mathematical Statistics (Sao Paulo, 1993).
- [Vic84] G.Y. Vichniac, *Simulating physics with cellular automata*, Physica D **10** (1984), 96–116.
- [Wol83] S. Wolfram, *Statistical mechanics of cellular automata*, Rev. Modern Phys. **55** (1983), no. 3, 601–644.
- [Wol86] S. Wolfram (ed.), *Theory and applications of cellular automata*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1986, Including selected papers 1983–1986.
- [You96] L. Younes, *Representation of Gibbs fields with synchronous random fields*, Markov Process. Related Fields **2** (1996), no. 2, 285–316.
- [Zeg92] B. Zegarliniski, *Dobrushin uniqueness theorem and logarithmic Sobolev inequalities*, J. Funct. Anal. **105** (1992), no. 1, 77–111.



**Author :** Pierre-Yves LOUIS

**Title :**

Probabilistic Cellular Automata :  
Stationary measures, Gibbs measures associated with and ergodicity

**Abstract :**

Used in many scientific areas, the discrete time random dynamics called Probabilistic Cellular Automata (P.C.A.) are Markov stochastic processes with values in an infinite space  $S^G$  where  $S$  is a finite set and  $G$  an infinite graph. Here we assume  $G = \mathbb{Z}^d$ . The main feature of these dynamics is the parallel, or synchronous, evolution of all the coordinates or interacting elementary components.

We are first interested in the existence and uniqueness of stationary measures for non degenerated PCA dynamics, *i.e.* whose local behaviour is never deterministic. Based on results of Dai Pra, Kozlov, Künsch, Lebowitz, Vasilyev *et al.*, we give for the class of reversible PCA dynamics precise relations between the sets of stationary measures, reversible measures and some Gibbs measures.

For a typical parametrized family of reversible PCA dynamics, we prove the existence of a phase transition phenomenon and establish the behaviour of the different Gibbs measures under the dynamics' action. In particular, we exhibit non-stationary Gibbs measures.

Secondly, we study the convergence to equilibrium for PCA dynamics which are attractive (so called ergodicity). One of our tools is a special coupling of these dynamics, preserving the stochastic order. When there is no phase transition, inspired by the ideas of Martinelli and Olivieri on Glauber dynamics, we prove the ergodicity of PCA dynamics, and more precisely, the convergence exponentially fast to the unique equilibrium state. This result truly improves previous ones existing in the litterature.

Finally, we present some numerical simulations of reversible PCA dynamics, and, in particular, a parallel algorithm which converges to extremal Gibbs measures associated to the Ising model.

**Keywords :**

Probabilistic Cellular Automata, PCA, interacting particle system, Markov chains, attractive dynamics, stationary measures, Gibbs measures, phase transition, ergodicity, coupling, FKG properties, simulation

**Auteur :** Pierre-Yves LOUIS

**Titre :**

Automates Cellulaires Probabilistes :  
mesures stationnaires, mesures de Gibbs associées et ergodicité.

**Résumé :**

Utilisés dans de nombreux domaines scientifiques, les Automates Cellulaires Probabilistes, usuellement abrégés en PCA, de l'anglais *Probabilistic Cellular Automata*, constituent, au sein des dynamiques aléatoires à temps discret, une classe de processus stochastiques markoviens à valeurs dans un espace infini  $S^G$  où  $S$  désigne un ensemble fini et  $G$  est un graphe infini. On considère ici toujours le cas où  $G = \mathbb{Z}^d$ . La particularité de ces dynamiques est l'évolution en parallèle, ou synchrone, de chacune des coordonnées ou composants élémentaires en interaction.

Nous nous intéressons dans un premier temps à l'existence et à l'unicité des mesures stationnaires pour les dynamiques PCA non dégénérées *i.e.* dont le comportement local n'est jamais déterministe, ainsi qu'à la caractérisation de ces états d'équilibre en tant que mesures gibbsiennes. Nous fondant sur les résultats de Dai Pra, Kozlov, Künsch, Lebowitz, Vasilyev *et al.*, nous précisons, pour la classe des dynamiques PCA réversibles, les relations existant entre les mesures stationnaires, les mesures réversibles et les mesures de Gibbs associées à un potentiel dont le lien avec la dynamique est explicité.

Pour une famille paramétrée de dynamiques PCA réversibles, nous démontrons l'existence d'un phénomène de transition de phase et explicitons dans ce cas le comportement de différentes mesures de Gibbs sous l'action de ces dynamiques. En particulier, nous exhibons des mesures de Gibbs non-stationnaires.

Dans un second temps, nous étudions l'ergodicité, *i.e.* la convergence vers l'équilibre des dynamiques PCA qui sont de plus attractives. Nous construisons à cet effet un couplage de ces dynamiques préservant l'ordre stochastique. En nous référant aux travaux de Martinelli et Olivieri pour les dynamiques de Glauber, nous établissons qu'en l'absence de transition de phase, dès que l'unique mesure de Gibbs vérifie une condition de faible mélange, il y a ergodicité et convergence à vitesse exponentielle vers cet unique état d'équilibre, améliorant en cela grandement les critères d'ergodicité pour les PCA existant dans la littérature.

Enfin, nous illustrons ces résultats par la réalisation de simulations numériques de certaines des dynamiques réversibles précédemment étudiées, et présentons un algorithme parallèle convergeant vers les mesures de Gibbs extrémales du modèle d'Ising.

**Mots clefs :**

Automates Cellulaires Probabilistes, PCA, systèmes de particules, dynamiques aléatoires, processus de Markov, dynamiques attractives, mesures stationnaires, mesures de Gibbs, transition de phase, ergodicité, couplage, propriétés FKG, simulation