Analyticité et algébricité d'applications de Cauchy-Riemann

Sylvain Damour

Université de Provence — Aix-Marseille I

U.F.R. de Mathématiques, Informatique et Mécanique

Thèse

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Provence

Discipline : **Mathématiques**

présentée et soutenue publiquement

par

Sylvain DAMOUR

le 12 novembre 2001

Titre :

Analyticité et algébricité d'applications de Cauchy-Riemann

Directeur de thèse :

Bernard COUPET

JURY

M. François Berteloot	Université de Toulouse III,	Rapporteur
M. Bernard Coupet	Université d'Aix-Marseille I	
M. Klas Diederich	Université de Wuppertal (Allemagne),	Rapporteur
M. Thierry Gallouët	Université d'Aix-Marseille I,	Président
M. Joël Merker	Université d'Aix-Marseille I	
M. Alexandre Sukhov	Université de Lille I	

Université de Provence — Aix-Marseille I

U.F.R. de Mathématiques, Informatique et Mécanique

Thèse

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Provence

Discipline : **Mathématiques**

présentée et soutenue publiquement

par

Sylvain DAMOUR

le 12 novembre 2001

Titre :

Analyticité et algébricité d'applications de Cauchy-Riemann

Directeur de thèse :

Bernard COUPET

JURY

M. François Berteloot	Université de Toulouse III,	Rapporteur
M. Bernard Coupet	Université d'Aix-Marseille I	
M. Klas Diederich	Université de Wuppertal (Allemagne),	Rapporteur
M. Thierry Gallouët	Université d'Aix-Marseille I,	Président
M. Joël Merker	Université d'Aix-Marseille I	
M. Alexandre Sukhov	Université de Lille I	

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude à Bernard Coupet, qui a été mon directeur de thèse durant ces trois années de doctorat. Sa vision des mathématiques, claire, concrète et synthétique, a été un modèle pour moi, et sa profonde connaissance du domaine m'a permis d'avancer rapidement. Je lui suis infiniment reconnaissant du soutien constant et de la grande disponibilité qu'il a pu m'accorder, malgré les nombreuses tâches administratives qui lui incombaient, comme directeur du laboratoire puis comme directeur de l'UFR.

Je remercie très chaleureusement François Berteloot d'avoir été rapporteur de ma thèse. Je suis très fier de l'intérêt qu'il a montré pour mon travail et de l'attention qu'il a apportée à la lecture du manuscrit.

Je voudrais adresser mes vifs remerciements à Klas Diederich, qui a accepté d'être rapporteur de ma thèse. Je suis très honoré de l'intérêt qu'il a rapidement manifesté pour mes résultats, ainsi que de ses chaleureux encouragements.

Je remercie sincèrement Thierry Gallouët pour l'honneur qu'il me fait d'avoir accepté de présider ce jury. J'en suis très heureux.

Je souhaite exprimer tous mes remerciements à Joël Merker pour de nombreuses et fructueuses conversations et pour ses relectures attentives de mes manuscrits. Je lui suis très redevable de son soutien constant, de sa grande disponibilité et de ses puissantes intuitions.

Je désire remercier très chaleureusement Alexandre Sukhov pour les nombreux moments qu'il a pu me consacrer, en particulier lors de mon séjour à Urbana-Champaign, Illinois. De plus, sa gentillesse et ses encouragements m'ont beaucoup soutenu tout au long de ces trois années.

Je voudrais exprimer mes remerciements les plus chaleureux à tous les membres de l'équipe d'analyse, géométrie et dynamique complexe du LATP, avec qui j'ai pu entretenir des rapports très cordiaux.

Je souhaite aussi remercier mes collègues du bureau R116 et des autres bureaux, Romain Bondil, Cyrille Domenichino, Patrick Lahondes, Régine Marchand, Dan Zaffran, ..., pour nos nombreuses conversations mathématiques et amicales.

Je suis également très reconnaissant envers toutes les personnes avec qui j'ai eu l'occasion d'enseigner, pour m'avoir fait profiter de leur expérience, de leur aide et de leur gentillesse. J'apprécie tout particulièrement cette composante du métier d'enseignant-chercheur et je suis très heureux du travail que nos avons accompli en équipe.

Enfin, je remercie infiniment les ingénieurs systèmes, les bibliothécaires et tout le personnel du CMI pour leur compétence, leur sérieux et leur gentillesse.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Le travail présenté dans cette thèse concerne l'analyticité et l'algébricité d'applications de Cauchy-Riemann (CR) de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre variétés CR analytiques ou algébriques réelles. Ce sujet a trait aux propriétés de prolongement d'applications et a récemment connu un regain d'activité. Notre contribution porte principalement sur l'étude du cas non équidimensionnel et sur le passage à la codimension supérieure à un.

Dans la première partie de la thèse (Chapitre 1), nous considérons la question de l'algébricité d'une application holomorphe locale f envoyant une sous-variété algébrique réelle générique minimale $M \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, dans un sous-ensemble algébrique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. Ce problème a pour origine les travaux de H. Poincaré [64] (1907) sur l'extension rationnelle automatique de tout biholomorphisme local entre deux ouverts connexes de la sphère unité de $\mathbb{C}^2$. Plus récemment, S. M. Webster [74] (1977) a généralisé ce phénomène à la catégorie algébrique et a établi que tout biholomorphisme local entre deux hypersurfaces algébriques réelles Levi-non dégénérées de $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, se prolonge en une application algébrique sur tout $\mathbb{C}^n$. Dans le Chapitre 1, l'introduction des notions de "première et seconde variétés caractéristiques" associées aux ensembles M et M' ainsi qu'à l'application f nous permet de donner deux nouvelles conditions qui assurent que f est algébrique.

Dans la deuxième partie de la thèse (Chapitre 2), nous étudions le problème de l'analyticité d'une application CR $\mathcal{C}^\infty$ $f : M \to M'$ entre une sous-variété analytique réelle générique minimale $M \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. La première avancée dans cette direction fut le principe de réflexion de H. Lewy et S. Pinchuk [50, 62] (1975–77), qui énonce que toute application holomorphe locale $\mathcal{C}^1$ jusqu'au bord, entre deux domaines strictement pseudo-convexes à bords analytiques réels de $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, se prolonge holomorphiquement à un voisinage du bord. Ce résultat est l'analogue en plusieurs dimensions du classique principe de symétrie de Schwarz [66] (1869). Dans le Chapitre 2, nous établissons une généralisation de ce principe de réflexion et nous prouvons que si la "variété caractéristique" associée aux ensembles M et M' et à l'application f est de dimension zéro, f est analytique réelle (et se prolonge alors holomorphiquement à un voisinage de M dans $\mathbb{C}^n$).

Dans la troisième partie de la thèse (Chapitre 3), nous traitons la situation plus générale où la variété caractéristique est de dimension arbitraire. Nous démontrons que si M' ne contient pas de courbe complexe, f est analytique sur un ouvert dense de M. Plus généralement, nous établissons une estimation supérieure de l'analyticité partielle de f, en fonction de la dimension maximale des feuilletages holomorphes locaux contenus dans M' (dans l'esprit des résultats récents de B. Coupet, S. Pinchuk et A. Sukhov [**24**, **25**]).

La suite de l'Introduction est consacrée à une présentation détaillée de chacun des trois chapitres que comprend cette thèse. Pour chaque chapitre, nous posons le problème étudié et en soulignons les motivations, nous donnons un bref historique, nous énonçons le ou les résultats principaux obtenus, et enfin nous expliquons l'idée générale de la démonstration en insistant sur l'originalité de notre travail.

Chapitre 1. Algébricité d'applications holomorphes

Rappelons qu'un sous-ensemble *algébrique complexe* (resp. *réel*) de $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ est par définition le lieu d'annulation d'une famille de polynômes complexes (resp. réels) ; une sous-variété *algébrique complexe* (resp. *réelle*) est un ouvert connexe et sans singularité d'un sous-ensemble algébrique complexe (resp. réel). Par ailleurs, une application holomorphe d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^{n'}$ est dite *algébrique* si son graphe est contenu dans un sous-ensemble algébrique complexe de $\mathbb{C}^{n+n'}$ de dimension n.

Soient $M \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, une sous-variété algébrique réelle générique, $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ un sous-ensemble algébrique réel, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine contenant le point $p \in M$, et $f : \Omega \to \mathbb{C}^{n'}$ une application holomorphe telle que $f(M \cap \Omega) \subset M'$. Il est naturel de se demander sous quelles conditions f est algébrique. Soulignons que dans ce cas, f s'étend en une application algébrique complexe sur tout $\mathbb{C}^n$.

Dans le Chapitre 1, l'introduction de “variétés caractéristiques” associées aux ensembles M et M' *et* à l'application f nous permet de donner deux nouvelles conditions qui assurent que f est algébrique. Le premier résultat principal du Chapitre 1 est le suivant (voir le Théorème 1.3, page 16) :

Théorème 1. *Si M est minimale en p et si la première variété caractéristique de f en p est de dimension zéro, f est algébrique.*

Cette première condition suffisante généralise de nombreuses situations considérées par divers auteurs :

1. $M, M' \subset \mathbb{C}^n$ sont des hypersurfaces algébriques réelles Levi-non dégénérées et f est un biholomorphisme, Webster [**74**] ;

2. $M \subset \mathbb{C}^n$ et $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ sont des sous-variétés algébriques réelles génériques de dimensions arbitraires, le cône de Levi de M est d'intérieur non vide, et l'orthogonal de la variété de Segre de M en p, au sens de la forme de Levi de M' "tirée en arrière" par f, est nul, Sharipov-Sukhov [68] ;
3. $M, M' \subset \mathbb{C}^n$ sont des sous-variétés algébriques réelles génériques de même dimension, M est minimale et holomorphiquement non dégénérée, et f est un biholomorphisme, Baouendi-Ebenfelt-Rothschild [4].

Le second résultat principal du Chapitre 1 est le suivant (voir le Théorème 1.6, page 18) :

Théorème 2. *Si M est minimale en p et si la seconde variété caractéristique de f en p est de dimension zéro, f est algébrique.*

Comme la seconde variété caractéristique est un sous-ensemble algébrique complexe contenu dans M', le Théorème 2 implique le corollaire suivant : *Si M est minimale en p et si M' ne contient pas de courbe algébrique complexe, f est algébrique.* Ce corollaire généralise des situations précédemment considérées par d'autres auteurs :

1. $M \subset \mathbb{C}^n$ et $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$, $n' \geq n > 1$, sont des hypersurfaces algébriques réelles strictement pseudo-convexes, Huang [46] ;
2. $M \subset \mathbb{C}^n$ est une sous-variété algébrique réelle générique Segre-transversale et $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ est un sous-ensemble algébrique réel qui ne contient pas de sous-ensemble algébrique complexe non trivial, Coupet-Meylan-Sukhov [22] ;
3. $M \subset \mathbb{C}^n$ et $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ sont des sous-variétés CR algébriques réelles, M est générique et minimale et M' ne contient pas de disque analytique, Zaitsev [76].

Donnons un bref historique des principaux travaux traitant de la question de l'algébricité des applications holomorphes entre variétés CR algébriques réelles. Au début du siècle, Poincaré [64] démontra que tout biholomorphisme local entre deux ouverts connexes de la sphère unité de $\mathbb{C}^2$ se prolonge en un biholomorphisme global de la boule unité, et en particulier, en une application rationnelle sur tout $\mathbb{C}^2$. Ce résultat fut étendu aux sphères de plus grandes dimensions par Tanaka [71], Pelles [58] et Alexander [2]. Un pas important dans la compréhension de ce phénomène fut accompli par Webster [74]. Il prouva une extension naturelle du phénomène de Poincaré dans la catégorie algébrique : tout biholomorphisme local entre deux hypersurfaces algébriques réelles Levi-non dégénérées de $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, se prolonge en une application algébrique sur tout $\mathbb{C}^n$.

Récemment, de nombreux résultats généralisant cette idée ont été obtenus par différents auteurs. Dans le cas *équidimensionnel*, Baouendi-Rothschild [9] ont montré que tout biholomorphisme local entre deux hypersurfaces algébriques réelles holomorphiquement non dégénérées est algébrique ; Baouendi-Ebenfelt-Rothschild [4] ont généralisé ce résultat en codimension supérieure pour des sous-variétés minimales et holomorphiquement non dégénérées. Citons également le résultat de Mir [56] qui énonce que dans la situation d'un biholomorphisme f entre deux hypersurfaces algébriques réelles non Levi-plates M et M', la fonction de réflexion associée à M, M' et f est toujours algébrique, ainsi que la composante normale de f.

Dans la situation où M et M' sont de *dimensions différentes*, Huang [46] a prouvé l'algébricité d'applications holomorphes entre hypersurfaces algébriques réelles strictement pseudo-convexes. Grâce à une généralisation du principe d'algébricité séparée de Bochner-Martin [17], Sharipov-Sukhov [68] ont établi l'algébricité d'une application holomorphe entre deux sous-variétés algébriques réelles génériques de codimensions supérieures ; ils ont donné une condition suffisante en termes de formes de Levi.

Les derniers progrès réalisés dans le domaine sont tout d'abord dus à Coupet-Meylan-Sukhov [22]. Par une approche purement algébrique, ils ont donné une estimation supérieure de l'algébricité partielle d'une application holomorphe f envoyant une sous-variété algébrique réelle générique Segre-transversale M dans un sous-ensemble algébrique réel M'. En particulier, si M' ne contient pas de sous-ensemble algébrique complexe non trivial, le degré de transcendance de f est nul, et par conséquent f est algébrique. Dans un résultat récent, Merker [52] a affaibli l'hypothèse sur M en supposant simplement que M est minimale. Le résultat de Zaitsev [76], généralisant la méthode classique de réflexion de jets, énonce que f est algébrique si M est minimale et si M' ne contient pas de disque analytique.

Dans le Chapitre 1, nous introduisons la notion de "première variété caractéristique" associée aux ensembles M et M' *et* à l'application f, qui généralise en codimension supérieure et dans le cadre algébrique la notion introduite dans [24]. Cette première variété caractéristique, notée $\mathcal{V}_p^1$, est le sous-ensemble algébrique complexe de $\mathbb{C}^{n'}$ défini par l'annulation de la famille de polynômes complexes obtenus en appliquant les opérateurs CR de M aux équations de M' complexifiées et "tirées en arrière" par f. Notons que cette famille de polynômes complexes est obtenue de façon équivalente en appliquant aux équations mentionnées ci-dessus les opérateurs holomorphes tangents à la variété de Segre Q_p de M en p (voir la Définition 1.1). En d'autres termes, les équations de $\mathcal{V}_p^1$ proviennent des équations de M' complexifiées, "tirées en arrière" par f, et dérivées le long de Q_p. Pour obtenir des équations supplémentaires et construire ainsi une variété caractéristique plus fine que $\mathcal{V}_p^1$, l'idée originale de notre méthode consiste à dériver les équations complexifiées de M' le long de $\mathcal{V}_p^1$, qui est orthogonale à Q_p au sens de la forme de Levi de M' “tirée en arrière” par f (voir la Section 1.2 et le Lemme 3.5). En pratique, nous aurons donc dérivé les équations de M' selon toutes les directions tangentes complexes possibles. Nous construisons tout d'abord la sous-variété algébrique complexe $\widetilde{\mathcal{V}}_p^1$ de plus grande dimension contenue dans $\mathcal{V}_p^1$, passant par le point $f(p)$ et dépendant de façon algébrique du jet de f en p, pour un point $p \in M$ générique. La “seconde variété caractéristique”, notée $\mathcal{V}_p^2$, est alors le sous-ensemble algébrique complexe de $\mathbb{C}^{n'}$ défini par l'annulation de la famille des polynômes complexes définissant $\widetilde{\mathcal{V}}_p^1$ *et* des polynômes complexes obtenus en appliquant les opérateurs holomorphes tangents à $\widetilde{\mathcal{V}}_p^1$ aux équations complexifiées de M' (voir la Définition 1.2). Cette seconde variété caractéristique vérifie en outre la propriété très intéressante d'être contenue dans M'.

Expliquons maintenant l'idée générale de la démonstration des Théorèmes 1 et 2. Pour le Théorème 1, l'hypothèse selon laquelle la première variété caractéristique est de dimension zéro implique, d'une façon classique qui utilise la *relation fondamentale* $f(M \cap \Omega) \subset M'$, que chaque fonction composante $f_j(z)$ satisfait une équation polynômiale à coefficients holomorphes et algébriques par rapport à z, à $\overline{w}$ et à un jet d'ordre fini de $\overline{f(w)}$, où w est un point de $\mathbb{C}^n$ “astreint à se déplacer” sur la variété de Segre Q_z de M en z. Cette idée remonte au principe de réflexion de Lewy-Pinchuk-Webster [**50**, **62**, **74**] (voir aussi le Chapitre 2 pour une méthode analogue dans le cadre analytique). Dans notre situation (contrairement au Chapitre 2 où l'on souhaite obtenir l'analyticité de f *au point* p), nous pouvons nous permettre de “délocaliser” le problème en un point $q \in M$ arbitrairement proche de p ; l'extension *automatique à tout* $\mathbb{C}^n$ de la propriété d'algébricité de l'application holomorphe f permet quand même de conclure. Appliquant le théorème des fonctions implicites (algébrique) au système d'équations polynômiales vérifié par les f_j (en un point $q \in M$ convenablement choisi), nous obtenons alors que l'application holomorphe $f(z)$ est algébrique par rapport à z, à $\overline{w}$ et à un jet d'ordre fini de $\overline{f(w)}$, pour $w \in Q_z$ (voir la Proposition 3.1). Remarquons qu'à ce stade de la démonstration, il est clair en fixant le point w que f est algébrique sur les variétés de Segre de M. Pour conclure que f est algébrique sur tout $\mathbb{C}^n$, on peut alors utiliser le théorème d'algébricité séparée courbe de [**68**] si M est Segre-transversale, ou de [**52**] si M est simplement supposée minimale (ces deux résultats sont des généralisations du principe d'algébricité séparée de Bochner-Martin [**17**]). Dans le Chapitre 1, nous concluons que f est algébrique sur tout $\mathbb{C}^n$ en utilisant la minimalité de M et en suivant la méthode de [**4**], que nous réécrivons sous un formalisme simplificateur.

Pour le Théorème 2, l'idée de la démonstration est similaire, bien qu'un peu plus compliquée. En particulier, nous prouvons que f dépend algébriquement de ses jets en *deux* points. Plus précisément, l'hypothèse selon laquelle la seconde variété caractéristique est de dimension zéro implique que $f(z)$ est algébrique par rapport à z, à $\overline{w}$, à t, et aux jets d'ordre fini de $\overline{f(w)}$ et $f(t)$, pour $w \in Q_z$ et $t \in Q_w$ (voir la Proposition 4.1). La minimalité de M permet alors de conclure que f est algébrique, grâce à une légère adaptation de la méthode précédente (voir aussi [**76**]).

Chapitre 2. Analyticité d'applications CR $\mathcal{C}^\infty$

Soient $M \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, une sous-variété analytique réelle générique, $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ un sous-ensemble analytique réel et $f : M \to M'$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ définie près du point $p \in M$. Il est naturel de se demander sous quelles conditions f est analytique réelle (et se prolonge alors holomorphiquement à un voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$).

Dans le cas équidimensionnel, de nombreux auteurs ont considéré la situation où f est un difféomorphisme [**62**, **50**, **75**, **39**, **44**, **30**, **6**]. La situation plus générale où f est simplement de multiplicité finie a été étudiée dans [**3**, **35**, **7**]. Quand M et M' sont de dimensions différentes, des résultats plus récents donnent aussi des conditions suffisantes [**41**, **24**]. En outre, de nombreux auteurs se sont intéressés à la situation plus restreinte où les variétés M et M' sont algébriques réelles [**5**], ou bien lorsque uniquement M' est algébrique réelle [**54**, **57**, **25**]. Citons également des travaux proches traitant de la continuité höldérienne au bord des applications (ou correspondances) holomorphes propres entre domaines de $\mathbb{C}^n$ [**45**, **61**, **33**, **14**, **12**, **13**, **15**], ou traitant de la régularité des applications CR continues entre hypersurfaces de $\mathbb{C}^n$ [**63**, **23**, **26**, **21**]. Par ailleurs, mentionnons le résultat final récent sur le prolongement analytique d'une application holomorphe propre entre domaines bornés à bords analytiques réels de $\mathbb{C}^2$ [**37**] (voir aussi [**31**, **32**, **34**, **36**]), ainsi que le résultat partiel dans $\mathbb{C}^n$ [**38**].

Dans le Chapitre 2, nous donnons une condition suffisante, qui s'inspire du résultat récent de Coupet-Pinchuk-Sukhov (voir [**24**], Théorème 1), pour l'analyticité d'une application CR $\mathcal{C}^\infty$ $f : M \to M'$ entre une sous-variété analytique réelle générique $M \subset \mathbb{C}^n$ et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. Le résultat principal du Chapitre 2 est le suivant (voir le Théorème 1.2, page 41) :

Théorème 3. *Si M est minimale en $p \in M$ et si la variété caractéristique de f en p est de dimension zéro, f est analytique réelle sur un voisinage de p dans M.*

Ce résultat généralise de nombreuses situations précédemment considérées par d'autres auteurs :

1. $M, M' \subset \mathbb{C}^n$ sont des hypersurfaces analytiques réelles strictement pseudo-convexes et f est un difféomorphisme CR, Lewy [50] et Pinchuk [62] ;

2. $M, M' \subset \mathbb{C}^n$ sont des sous-variétés analytiques réelles génériques, M est minimale, M' est essentiellement finie et f est un difféomorphisme CR, Baouendi-Jacobowitz-Trèves [6] ;

3. $M, M' \subset \mathbb{C}^n$ sont des hypersurfaces analytiques réelles, M' est essentiellement finie et f est de multiplicité finie, Diederich-Fornæss [35] et Baouendi-Rothschild [7].

Soulignons que le Théorème 3 s'applique à des situations qui ne sont pas mentionnées ci-dessus, en particulier lorsque M et M' sont de dimensions différentes. Le Théorème 3 semble être également nouveau dans le cas équidimensionnel, lorsque $M, M' \subset \mathbb{C}^n$ sont des sous-variétés de *codimension supérieure*. Dans ce cas, notre condition suffisante généralise la condition de multiplicité finie de [35, 7].

Notre travail (Théorème 3) s'inspire du résultat récent de Coupet-Pinchuk-Sukhov (voir [24], Théorème 1). La nouveauté réside essentiellement dans le passage en codimension supérieure. La difficulté principale qui en découle est que l'extension holomorphe des fonctions CR sur la sous-variété CR minimale M a lieu dans un domaine de type "wedge", à bord non régulier et dont l'"arête" est M (théorème de Tumanov, voir [73]), alors que dans la situation où M est une hypersurface, le domaine d'extension est régulier de bord M (théorème de Trépreau, voir [72]). De par leur géométrie, les wedges sont clairement plus délicats à manipuler que les domaines à bords réguliers et nécessitent des techniques plus élaborées, comme l'utilisation du théorème de l'"edge of the wedge" (voir [59, 10, 1]). En outre, les domaines d'extension donnés par [72, 73] *dépendent de l'ouvert connexe* de M sur lequel la fonction CR est définie ; pour une hypersurface, il n'y a que deux directions d'extension (côtés) possibles, mais pour une sous-variété de codimension $d \geq 2$, l'ensemble des directions d'extension possibles est isomorphe à la sphère unité de $\mathbb{R}^d$, ce qui complique nettement la situation (voir aussi les remarques 3.9 et 3.10).

Dans le Chapitre 2, nous introduisons la notion de "variété caractéristique" associée aux ensembles M et M' *et* à l'application f, qui généralise en codimension supérieure la notion introduite dans [24]. Cette variété caractéristique est le sous-ensemble analytique complexe de $\mathbb{C}^{n'}$ défini par l'annulation de la famille de fonctions holomorphes obtenues en appliquant les opérateurs CR de M aux équations de M' complexifiées et "tirées en arrière" par f (voir la Définition 1.1). Cette définition est identique à la notion de "première variété caractéristique" introduite dans le cadre algébrique au Chapitre 1.

Expliquons maintenant l'idée de la démonstration du Théorème 3. Tout d'abord, l'hypothèse selon laquelle la variété caractéristique est de dimension zéro implique, d'une façon classique qui utilise la *relation fondamentale* $f(M) \subset M'$ (et qui remonte au principe de réflexion de Lewy-Pinchuk [**50**, **62**]), que chaque fonction composante f_j satisfait une équation polynômiale avec des coefficients qui sont des quotients de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur M, analytiques par rapport à z, à $\overline{z}$ et à un jet d'ordre fini de $\overline{f(z)}$ (voir le Lemme 4.3). Raisonnant par l'absurde, nous démontrons que ces coefficients sont CR sur M en dehors de leur lieu singulier (voir le Lemme 4.4). Soulignons qu'une des principales difficultés du problème considéré dans le Chapitre 2 provient du fait que nous traitons de la question de l'analyticité de f *au point* p. Cela se traduit par le fait que les coefficients mentionnés ci-dessus peuvent réellement être des *quotients* de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur M ; en d'autres termes, des singularités en p peuvent apparaître, et il est clair que des outils techniques adaptés sont nécessaires (voir la Remarque 4.5 pour de plus amples précisions). C'est ce que nous exposons dans le paragraphe suivant.

L'outil technique permettant d'appréhender le problème des singularités au point p s'énonce comme suit : si M est minimale en p, les coefficients définis précédemment s'étendent méromorphiquement à un voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$ (voir la Proposition 3.4). Ceci est la proposition technique principale du Chapitre 2 ; nous croyons que ce résultat est intéressant par lui-même et qu'il pourrait être utile dans d'autres situations proches. La démonstration de cette proposition est divisée en deux étapes. Dans la première étape, utilisant une symétrie par rapport à M ainsi que le théorème de méromorphie séparée de Rothstein [**65**], nous établissons l'extension méromorphe au "wedge" $\mathcal{W}_p^s$, qui est le symétrique du wedge $\mathcal{W}_p$ donné par le théorème d'extension de Tumanov [**73**] en p. La seconde étape est cruciale. Par un théorème d'Ivashkovich [**47**], l'enveloppe de méromorphie et l'enveloppe d'holomorphie de $\mathcal{W}_p^s$ coïncident ; il suffit donc de prouver qu'une fonction h holomorphe dans $\mathcal{W}_p^s$ s'étend à un voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$. L'idée est alors d'étendre h holomorphiquement à $\mathcal{W}_p$ par le théorème de Tumanov, puis de conclure par le théorème de l'"edge of the wedge". Mais, le problème crucial (voir la Remarque 3.9) est que la direction d'extension à un wedge d'une fonction CR définie sur un voisinage U_p de p dans M *dépend de* U_p. Dans notre situation, nous avons réellement besoin de contrôler cette direction d'extension, mais l'ouvert U_p que nous considérons, défini comme l'arête du wedge $\mathcal{W}_p^s$, est arbitrairement petit. L'originalité de notre méthode, pour venir à bout de cette difficulté, est de raisonner *en chaque point* $q \in M$. En collant ensemble les wedges $\mathcal{W}_q^s$

associés, nous obtenons un “wedge attaché” à M (voir la Section 3.4, ou [55]) dont l'arête est tout M. Ainsi, nous travaillons avec ce wedge attaché et raisonnons comme si la direction d'extension était constante.

Finalement, le dernier ingrédient que nous utilisons est un théorème de Malgrange [51], qui assure que le graphe de chaque f_j est analytique réel, puisque par la construction ci-dessus il est contenu dans un sous-ensemble analytique réel de $M \times \mathbb{C}$ de la même dimension que M (voir le Lemme 4.6).

Chapitre 3. Feuilletages holomorphes locaux et analyticité partielle

Soient $M \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, une sous-variété analytique réelle générique, $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ un sous-ensemble analytique réel, $p \in M$, $p' \in M'$, et $f : M \to M'$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(p) = p'$. Nous nous intéressons au même problème que celui considéré au Chapitre 2, c'est-à-dire, établir des conditions assurant l'analyticité de f. Toutefois, nous considérons une situation plus générale, où la “variété caractéristique” de f en p (voir le Chapitre 2) n'est pas nécessairement de dimension zéro. En contrepartie, nous ne pouvons établir l'analyticité de f que sur un ouvert dense de M.

L'énoncé du résultat principal du Chapitre 3 nécessite d'introduire les notions suivantes. Soit $\mathcal{T}_p(f)$ le germe en (p, p') du plus petit sous-ensemble analytique complexe de $\mathbb{C}^{n+n'}$ contenant le graphe de f au voisinage de (p, p'). Le *degré d'analyticité partielle* de f en p est par définition l'entier naturel $\deg_p f := \dim \mathcal{T}_p(f) - n$ (voir [24]). Par ailleurs, le sous-ensemble analytique réel M' est dit (r, s)*-plat* en p' (voir [22, 52, 24, 25]) s'il contient une sous-variété analytique réelle de dimension r, passant par p', et biholomorphe au produit cartésien $N \times \mathcal{D}$, où N est une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, et $\mathcal{D}$ est un domaine borné de $\mathbb{C}^s$.

Dans le Chapitre 3, nous établissons une estimation supérieure du degré d'analyticité partielle de f, en fonction des feuilletages holomorphes locaux contenus dans M', dans l'esprit de [22, 52, 24, 25]. Le résultat principal du Chapitre 3 est le suivant (voir le Théorème 1.1, page 68) :

Théorème 4. *Si M est minimale et si le degré d'analyticité partielle de f est constant égal à s, M' est (r', s)-plat en $f(q)$, pour tout point q appartenant à un ouvert dense de M et pour un certain entier $r' \geq r$, où r désigne le rang maximal de f.*

De plus, dans ce cas, la sous-variété analytique réelle contenue dans M', de dimension r', passant par le point $f(q)$ et biholomorphe à $N \times \mathcal{D}$ *contient l'image $f(M)$ de l'application f*, dans un voisinage de $f(q)$.

Comme corollaire du Théorème 4, nous obtenons une estimation supérieure du degré d'analyticité partielle de f : *Si M est minimale et si*

M' ne contient pas de variété complexe de dimension s, $\deg_q f < s$, pour tout point q appartenant à un ouvert dense de M. En particulier, comme f est analytique sur un ouvert dense de M si son degré d'analyticité partielle est nul, on obtient le corollaire suivant : *Si M est minimale et si M' ne contient pas de courbe complexe, f est analytique réelle sur un ouvert dense de M.*

Ce dernier corollaire généralise la situation suivante, considérée par Forstnerič [41] : $M \subset \mathbb{C}^n$ et $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$, $n' > n > 1$, sont des hypersurfaces analytiques réelles pseudo-convexes, M ne contient pas de courbe complexe et M' est strictement pseudo-convexe. Il est important de noter que notre résultat s'applique à des situations bien plus générales, en particulier dans le cas où M et M' sont des variétés de *codimensions supérieures*.

La nouveauté de notre travail (Théorème 4) par rapport à [24], Théorème 2, réside principalement dans le passage en codimension supérieure. Comme au Chapitre 2, des difficultés techniques importantes découlent de cette généralisation ; nous exploitons ici les idées et les résultats du Chapitre 2, qui reposent sur la manipulation de domaines de type "wedge" et sur l'utilisation d'outils adaptés. Signalons enfin que les résultats de ce chapitre font suite à ceux du Chapitre 2. En effet, la technique de base est similaire ; elle repose sur l'écriture analytique de la relation fondamentale $f(M) \subset M'$, à laquelle on applique les opérateurs CR de M.

Expliquons maintenant l'idée principale de la démonstration du Théorème 4. Supposons donc que M est minimale en p, que le degré d'analyticité partielle de f est constant égal à s et que r désigne le rang maximal de f. L'originalité de la méthode consiste à travailler sur le graphe Γ_f de f, ainsi que sur le plus petit sous-ensemble analytique complexe $\mathcal{T}_p(f) \subset \mathbb{C}^{n+n'}$ qui le contient, dans un voisinage de (p, p'). La technique exposée ci-dessous suit les grandes lignes de [24], où les auteurs considèrent le cas hypersurface. Notant $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'} \to \mathbb{C}^n$ et $\pi' : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'} \to \mathbb{C}^{n'}$ les projections canoniques, nous définissons la restriction $\mathcal{T}_p(f)|_M$ comme l'ensemble analytique réel $\mathcal{T}_p(f) \cap \pi^{-1}(M)$.

Nous démontrons tout d'abord (voir la Proposition 5.1) que ce sous-ensemble analytique réel de $\mathbb{C}^{n+n'}$ "contient toute l'information" sur l'analyticité partielle de f ; en effet, il est localement feuilleté par des variétés complexes de dimension s. Par ailleurs, chacune de ces variétés complexes se projette de façon biholomorphe sur $\mathbb{C}^{n'}$ par π', et *tout le feuilletage $\mathcal{T}_p(f)|_M$ se transfère ainsi à $\mathbb{C}^{n'}$.* Notons enfin que comme $\Gamma_f \subset \mathcal{T}_p(f)|_M$, le rang générique r' de $\pi'|_{\mathcal{T}_p(f)|_M}$ est $\geq r$. Par le théorème du rang, l'ensemble $N' := \pi'(\mathcal{T}_p(f)|_M)$ est donc "génériquement" une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^{n'}$ de dimension $r' \geq r$.

Le second résultat essentiel que nous établissons (voir la Proposition 4.4), énonce que la sous-variété N' obtenue précédemment est en fait incluse dans

M'. C'est le point crucial de la démonstration ; il consiste à remplacer dans la *relation fondamentale* $f(M) \subset M'$ un certain nombre de composantes de f (s, exactement) par des variables complexes indépendantes et "libres" de parcourir tout un domaine de $\mathbb{C}$, ce qui prouve que tout l'ensemble $\mathcal{T}_p(f)|_M$ se projette dans M' par π'. (C'est lorsque chacune de ces variables décrit ce domaine de $\mathbb{C}$ qu'apparaît le feuilletage de $\mathcal{T}_p(f)|_M$ par des variétés complexes de dimension s.) La preuve de ce point crucial est une des parties techniques de notre travail. Nous utilisons ici l'hypothèse selon laquelle le degré d'analyticité partielle de f est constant égal à s. Par ailleurs, nous exploitons les idées du Chapitre 2, en particulier, la propriété d'extension méromorphe en p pour une certaine classe de fonctions CR $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert dense de M (voir le Chapitre 2, Proposition 3.4). Nous utilisons également notre résultat sur l'analyticité d'une fonction CR $\mathcal{C}^\infty$ se prolongeant comme correspondance propre au voisinage de p, qui généralise [**11**], Lemma 1, en codimension supérieure (voir le Chapitre 2, Lemme 4.6).

CHAPITRE 1

Algébricité d'applications holomorphes entre variétés CR algébriques réelles

Depuis les travaux de Poincaré [**64**] (1907), la détermination de conditions assurant l'algébricité d'une application holomorphe locale f envoyant une sous-variété algébrique réelle générique $M \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, dans un sous-ensemble algébrique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ a retenu l'intérêt de nombreux auteurs [**74**, **46**, **68**, **4**, **22**, **76**]. Dans ce chapitre, l'introduction de "variétés caractéristiques" associées à la fois aux ensembles M et M' et à l'application f nous permet de donner deux nouvelles conditions pour que f soit algébrique [1].

Rappelons que la présentation détaillée de ce chapitre se trouve dans l'Introduction, page 2. Décrivons brièvement le plan de ce chapitre. Dans la Section 1, nous fixons tout d'abord les notations et donnons les définitions précises de la première et de la seconde variété caractéristique. Ensuite, nous énonçons les deux résultats principaux de ce chapitre (premier et second principe de réflexion), et nous illustrons les notions introduites par des exemples. La Section 2 expose des résultats préliminaires. Tout d'abord, nous énonçons des propriétés de base sur les applications holomorphes algébriques. Puis, nous étudions les variétés de Segre d'une sous-variété analytique réelle générique. Enfin, nous introduisons la notion de "réflexion de Segre" (par rapport à M') d'une sous-variété complexe de $\mathbb{C}^{n'}$, qui généralise les notions de variété de Segre, de première et de seconde variété caractéristique. Nous nous en servons pour étudier la relation entre première variété caractéristique et finitude essentielle, ainsi que pour démontrer que la seconde variété caractéristique est contenue dans M'. La Section 3 donne la démonstration du premier principe de réflexion, et étudie l'orthogonalité, au sens de la forme de Levi de M' "tirée en arrière" par f, entre première variété caractéristique et variété de Segre. Enfin, la Section 4 est consacrée à la démonstration du second principe de réflexion, et détaille les calculs permettant de vérifier les exemples mentionnés ci-dessus.

[1] Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une note [**29**] publiée dans la revue *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série I, Mathématique.*

1. Enoncés des résultats

1.1. Notations et définitions

Soit $M \subset \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$, $n > 1$, une sous-variété algébrique réelle définie dans un voisinage du point $p \in M$ par les équations $p_k(z) = 0$, $k = 1, \ldots, d$, où les p_k sont des polynômes réels satisfaisant $dp_1 \wedge \cdots \wedge dp_d \neq 0$ en p ; l'entier d est la codimension de M. Soit T_zM l'espace tangent réel à M en $z \in M$ et $T^c_zM := T_zM \cap i\,T_zM$ l'espace tangent complexe. Nous supposons que la sous-variété M est *de Cauchy-Riemann* (CR), c'est-à-dire, que T^c_zM est de dimension complexe constante, appelée dimension CR de M et notée m. Nous écrivons les équations définissantes de M sous la forme habituelle

$$P_k(z, \overline{z}) = 0, \quad k = 1, \ldots, d, \tag{1.1}$$

où les P_k sont des polynômes complexes de $2n$ variables satisfaisant $P_k(z, \overline{z}) \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, d$. Nous supposons que M est *générique*, c'est-à-dire, que $\overline{\partial} P_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\partial} P_d \neq 0$ en p, où de façon équivalente, $m = n - d$. La *variété de Segre* Q_w de M associée à un point w proche de p est alors la sous-variété algébrique complexe définie près de p par les équations (1.1) complexifiées $P_k(z, \overline{w}) = 0$, $k = 1, \ldots, d$ (voir, par exemple, [**67, 74, 39, 35**], et la Section 2.2). La sous-variété M est *minimale* en p (au sens de Tumanov [**73**]) si elle ne contient pas de sous-variété CR stricte passant par p et de même dimension CR m. Rappelons que puisque M est en particulier analytique réelle, elle est minimale en p, si et seulement si, elle est de *type fini* en p au sens de Bloom-Graham [**16**] ; par conséquent, si M est minimale en p, M est minimale en tout point, en dehors d'un sous-ensemble algébrique réel strict. Par le théorème des fonctions implicites (algébriques), nous pouvons écrire les équations de M près de p sous la forme

$$y_k = \phi_k(x, \overline{x}, \overline{y}), \quad k = 1, \ldots, d, \tag{1.2}$$

où

$$\mathbb{C}^n \ni z = (x, y) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d \tag{1.3}$$

est un système de coordonnées holomorphes algébriques locales près de $p = (x_p, y_p)$ et les $\phi_k(x, \xi, \eta)$ sont des fonctions holomorphes algébriques près de $(x_p, \overline{x_p}, \overline{y_p})$ satisfaisant $\phi_k(x_p, \xi, \eta) \equiv \phi_k(x, \overline{x_p}, \eta) \equiv \eta_k$, $k = 1, \ldots, d$. Les opérateurs

$$L_j(z, \overline{z}) = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j}(x, \overline{x}, \overline{y}) \frac{\partial}{\partial y_k}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.4}$$

forment une base (commutant) des opérateurs CR $(1,0)$ de M, à coefficients algébriques réels, et les opérateurs $\mathcal{L}_j(z) := L_j(z, \overline{p})$, $j = 1, \ldots, m$, forment une base des opérateurs holomorphes tangents à Q_p.

Comme pour M, on définit le sous-ensemble algébrique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'} \simeq \mathbb{R}^{2n'}$ par les équations polynômiales réelles $P'_k(z', \overline{z'}) = 0$, $k = 1, \ldots, d'$. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine contenant le point p et $f : \Omega \to \mathbb{C}^{n'}$ une application holomorphe telle que $f(M \cap \Omega) \subset M'$. On cherche des conditions suffisantes assurant que f est *algébrique*, c'est-à-dire, que son graphe est contenu dans un sous-ensemble algébrique complexe de $\mathbb{C}^{n+n'}$ de dimension n (voir la Section 2.1). Dans ce cas, f s'étend en une application algébrique sur tout $\mathbb{C}^n$. La technique que l'on présente dans ce chapitre remonte au principe de réflexion de Lewy-Pinchuk-Webster [**50, 62, 74**] (1975–77) ; elle repose sur la définition suivante qui généralise la variété caractéristique de [**24**] en codimension supérieure, dans le cadre algébrique (voir aussi le Chapitre 2, pour une généralisation dans le cadre analytique). Pour $k = 1, \ldots, d'$ et $\alpha \in \mathbb{N}^m$, on note $\Phi_k^\alpha(z')$ le polynôme anti-holomorphe $\mathcal{L}^\alpha P'_k(f(\cdot), \overline{z'})|_p$, où $\mathcal{L}^\alpha$ désigne l'opérateur composé $\mathcal{L}^\alpha := \mathcal{L}_1^{\alpha_1} \ldots \mathcal{L}_m^{\alpha_m}$.

Définition 1.1. La *première variété caractéristique* de f en p est le sous-ensemble algébrique complexe $\mathcal{V}_p^1$ défini au voisinage de $p' := f(p)$ par les équations polynômiales complexes $\Phi_k^\alpha(z') = 0$, pour tous $k = 1, \ldots, d'$ et $\alpha \in \mathbb{N}^m$.

Remarquons tout d'abord que $\mathcal{V}_p^1 \subset Q'_{p'}$; il suffit de considérer les équations définissantes de $\mathcal{V}_p^1$ pour $\alpha = (0, \ldots, 0)$. Remarquons par ailleurs que $p' \in \mathcal{V}_p^1$; il suffit s'appliquer les opérateurs $\mathcal{L}_j$ aux équations $P'_k(f(z), \overline{p'}) = 0$, $k = 1, \ldots, d'$, $z \in Q_p$ proche de p. Ces équations proviennent de la propriété d'invariance des variétés de Segre (voir le Lemme 2.3 (i)), qui prouve que $f(Q_p \cap \Omega_1) \subset Q'_{p'}$, où $\Omega_1 \subset \Omega$ est un voisinage de p suffisamment petit.

Cette notion de “(première) variété caractéristique” a été introduite par Coupet-Pinchuk-Sukhov [**24**] dans la situation où M est une hypersurface analytique réelle. Nous l'utilisons également au Chapitre 2, en codimension supérieure et dans le cadre analytique (voir le Chapitre 2, Définition 1.1).

La Définition 1.1 montre que les équations de $\mathcal{V}_p^1$ proviennent des équations de M' complexifiées, “tirées en arrière” par f, et dérivées le long de Q_p. Pour obtenir des équations supplémentaires et construire ainsi une variété caractéristique plus fine que $\mathcal{V}_p^1$, l'idée originale de notre méthode consiste à dériver les équations complexifiées de M' le long de $\mathcal{V}_p^1$, qui est orthogonale à Q_p au sens de la forme de Levi de M' “tirée en arrière” par f (voir les Sections 1.2 et 3.2). En pratique, nous aurons ainsi dérivé les équations de M' selon toutes les directions tangentes complexes possibles. Dans un premier temps, nous construisons (voir la Section 4.1), pour un point $p \in M$ générique, la variété algébrique complexe $\widetilde{\mathcal{V}}_p^1$ de plus grande dimension (notée a) qui vérifie $f(p) \in \widetilde{\mathcal{V}}_p^1 \subset \mathcal{V}_p^1$ et qui dépend algébriquement du jet de f en p.

Soient $\widetilde{\Phi}_k(z') = 0$, $k = 1, \ldots, n' - a$, des équations définissantes polynômiales complexes de $\widetilde{\mathcal{V}}^1_p$ et $(\mathcal{K}_j)_{j=1,\ldots,a}$ une base des opérateurs holomorphes tangents à $\widetilde{\mathcal{V}}^1_p$ (cf. figure 1). Pour $l = 1, \ldots, d'$ et $\beta \in \mathbb{N}^a$, on note $\Psi^\beta_l(z')$ le

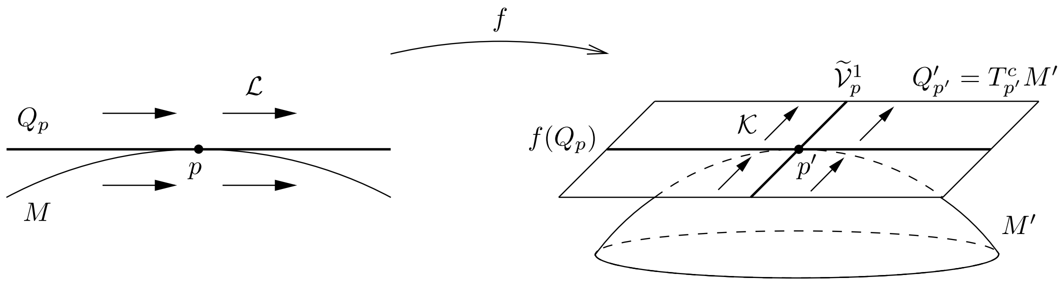

FIGURE 1. Construction de la seconde variété caractéristique $\mathcal{V}^2_p$, dans le cas où M' est lisse : $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_m)$ et $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_a)$ sont des bases des champs de vecteurs holomorphes tangents respectivement à Q_p et à $\widetilde{\mathcal{V}}^1_p$

polynôme anti-holomorphe $\mathcal{K}^\beta P'_l(\cdot, \overline{z'})|_{p'}$, où $\mathcal{K}^\beta$ désigne l'opérateur composé $\mathcal{K}^\beta := \mathcal{K}_1^{\beta_1} \ldots \mathcal{K}_a^{\beta_a}$.

Définition 1.2. La *seconde variété caractéristique* de f en p est le sous-ensemble algébrique complexe $\mathcal{V}^2_p \subset \mathcal{V}^1_p$ défini au voisinage de $p' := f(p)$ par les équations polynômiales complexes $\widetilde{\Phi}_k(z') = \Psi^\beta_l(z') = 0$, pour tous $k = 1, \ldots, n' - a$, $l = 1, \ldots, d'$ et $\beta \in \mathbb{N}^a$.

Remarquons que $p' \in \mathcal{V}^2_p$. En effet, d'une part $p' \in \widetilde{\mathcal{V}}^1_p$, par construction. D'autre part, puisque $\widetilde{\mathcal{V}}^1_p \subset Q'_{p'}$, on peut appliquer les opérateurs $\mathcal{K}_j$ aux équations $P'_l(z', \overline{p'}) = 0$, $l = 1, \ldots, d'$, $z' \in Q'_{p'}$ proche de p'.

1.2. Enoncé du premier principe de réflexion

Le premier résultat principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème 1.3. *Soient $M \subset \mathbb{C}^n$ une sous-variété algébrique réelle générique, $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ un sous-ensemble algébrique réel, $p \in M$ et $p' \in M'$. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine contenant le point p et $f : \Omega \to \mathbb{C}^{n'}$ une application holomorphe telle que $f(M \cap \Omega) \subset M'$ et $f(p) = p'$. Si M est minimale en p et si la dimension de $\mathcal{V}^1_p$ en p' est zéro, f est algébrique (et s'étend donc en une application algébrique complexe sur tout $\mathbb{C}^n$).*

La démonstration de ce théorème est donnée à la Section 3.1.

Cette première condition suffisante généralise des énoncés connus [74, 68, 4]. Supposons que $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ est une sous-variété algébrique réelle générique, définie au voisinage du point $p' \in M'$ par des équations polynômiales réelles du type (1.1), $P'_k(z', \overline{z'}) = 0$, $k = 1, \dots, d'$, avec $\overline{\partial} P'_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\partial} P'_d \neq 0$ en p'. La *forme de Levi* de M' en p' est la forme hermitienne (à valeurs dans $\mathbb{C}^{d'}$) $\Lambda_{p'} := (\Lambda^1_{p'}, \dots, \Lambda^{d'}_{p'})$, définie sur l'espace tangent complexe $T^c_{p'}M'$ de M' en p' où les $\Lambda^k_{p'}$, $k = 1, \dots, d'$, désignent les formes hermitiennes définies sur $T^c_{p'}M' \times T^c_{p'}M'$ par :

$$\Lambda^k_{p'}(z', \zeta') := \sum_{\mu,\nu=1}^{n'} \left. \frac{\partial^2 P'_k(z', \overline{z'})}{\partial z'_\mu \, \partial \overline{z'}_\nu} \right|_{(p', \overline{p'})} z'_\mu \, \overline{\zeta'}_\nu.$$

Soit $X' \subset \mathbb{C}^{n'}$ une sous-variété complexe passant par p' telle que son espace tangent (complexe) $T_{p'}X'$ soit contenu dans $T^c_{p'}M'$. L'*orthogonal* de X' pour la forme de Levi de M' en p' est par définition l'espace affine complexe

$$\{\zeta' \in T^c_{p'}M' : \ \Lambda^k_{p'}(z', \zeta') = 0, \quad z' \in T_{p'}X', \ k = 1, \dots, d'\}.$$

En outre, nous définissons la forme de Levi de M' en p' “tirée en arrière” par f par $f^*\Lambda_{p'} := (f^*\Lambda^1_{p'}, \dots, f^*\Lambda^{d'}_{p'})$, où

$$f^*\Lambda^k_{p'}(z, \zeta') := \Lambda^k_{p'}(df_p(z), \zeta'),$$

pour tous $(z, \zeta') \in T^c_pM \times T^c_{p'}M'$ et $k = 1, \dots, d'$. Soit $X \subset \mathbb{C}^n$ une sous-variété complexe passant par p telle que son espace tangent (complexe) T_pX soit contenu dans T^c_pM. L'orthogonal de X pour la forme de Levi de M' en p' “tirée en arrière” par f est par définition l'espace affine complexe

$$\{\zeta' \in T^c_{p'}M' : \ f^*\Lambda^k_{p'}(z, \zeta') = 0, \quad z \in T_pX, \ k = 1, \dots, d'\}.$$

Nous démontrons que si l'orthogonal de la variété de Segre de M en p, au sens de la forme de Levi de M' en p' “tirée en arrière” par f, est nul, la dimension de $\mathcal{V}^1_p$ en p' est nécessairement zéro (voir le Lemme 3.5), et donc :

Corollaire 1.4. *Soient $M \subset \mathbb{C}^n$ et $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ deux sous-variétés algébriques réelles génériques, $p \in M$ et $p' \in M'$. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine contenant le point p et $f : \Omega \to \mathbb{C}^{n'}$ une application holomorphe telle que $f(M \cap \Omega) \subset M'$ et $f(p) = p'$. Si M est minimale en p et si l'orthogonal de la variété de Segre de M en p, au sens de la forme de Levi de M' en p' “tirée en arrière” par f, est nul, f est algébrique.*

Ce résultat a été obtenu par Sharipov-Sukhov [68], sous l'hypothèse légèrement plus forte que M est *Segre-transversale* en p (au lieu de seulement minimale), c'est-à-dire, que les espaces tangents (complexes) en p, à toutes les variétés de Segre de M passant par p, engendrent tout $\mathbb{C}^n$ (voir [68, 22]).

Lorsque M' est une sous-variété algébrique réelle générique, on note $Q'_{z'}$ ses variétés de Segre et on dit que M' est *essentiellement finie* en $p' \in M'$ si le sous-ensemble algébrique complexe $A'_{p'} := \{z' : Q'_{z'} = Q'_{p'}\}$ est de dimension zéro en p' (voir [**39, 6, 35**], et aussi le Chapitre 2, Section 1). Dans la situation où f est un biholomorphisme qui induit un difféomorphisme CR de M sur M' avec $f(p) = p'$, nous démontrons que $\mathcal{V}_p^1$ coïncide avec $A'_{p'}$ dans un voisinage de p' (voir le Lemme 2.10, et aussi le Chapitre 2, Lemme 5.1, pour un résultat identique dans le cadre analytique), et donc :

Corollaire 1.5. *Soient $M, M' \subset \mathbb{C}^n$ deux sous-variétés algébriques réelles génériques, $p \in M$ et $p' \in M'$. Soient $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}^n$ deux domaines contenant respectivement les points p et p' et soit $f : \Omega \to \Omega'$ un biholomorphisme tel que $f(M \cap \Omega) = M' \cap \Omega'$ et $f(p) = p'$. Si M est minimale en p et si M' est essentiellement finie en p', f est algébrique.*

Cet énoncé est dû à Baouendi-Ebenfelt-Rothschild [**4**]. Le premier résultat de ce type (sur l'algébricité d'un biholomorphisme induisant un difféomorphisme CR entre deux sous-variétés algébriques réelles génériques) a été établi en 1977 par Webster [**74**], pour des hypersurfaces algébriques réelles M et M' Levi-non dégénérées.

1.3. Enoncé du second principe de réflexion

Si la dimension de $\mathcal{V}_p^1$ en p' est strictement positive, le Théorème 1.3 ne s'applique plus (voir les Exemples 1.9, 1.10 et 1.12). Le second résultat principal de ce chapitre affine le Théorème 1.3 :

Théorème 1.6. *Soient $M \subset \mathbb{C}^n$ une sous-variété algébrique réelle générique, $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ un sous-ensemble algébrique réel, $p \in M$ et $p' \in M'$. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine contenant le point p et $f : \Omega \to \mathbb{C}^{n'}$ une application holomorphe telle que $f(M \cap \Omega) \subset M'$ et $f(p) = p'$. Si M est minimale en p et si la dimension de $\mathcal{V}_p^2$ en p' est zéro, f est algébrique (et s'étend donc en une application algébrique complexe sur tout $\mathbb{C}^n$).*

La démonstration de ce théorème est donnée à la Section 4.1.

Nous démontrons que $\mathcal{V}_p^2 \subset M'$, dans un voisinage de p' (voir le Lemme 2.11), et donc :

Corollaire 1.7. *Soient $M \subset \mathbb{C}^n$ une sous-variété algébrique réelle générique, $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ un sous-ensemble algébrique réel, $p \in M$ et $p' \in M'$. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine contenant le point p et $f : \Omega \to \mathbb{C}^{n'}$ une application holomorphe telle que $f(M \cap \Omega) \subset M'$ et $f(p) = p'$. Si M est minimale en p et si M' ne contient pas de courbe algébrique complexe au voisinage de p', f est algébrique.*

Ce résultat a récemment été démontré par Zaitsev [76], lorsque M' est une sous-variété algébrique réelle qui ne contient pas de disque analytique. Dans la situation où M est Segre-transversale (voir [68, 22], et la Section 1.2), Coupet-Meylan-Sukhov [22] ont donné une estimation supérieure du degré de transcendance de f par des méthodes purement algébriques. En particulier, si M' ne contient pas de courbe algébrique complexe, le degré de transcendance de f est nul, et par conséquent f est algébrique. Dans un résultat récent, Merker [52] a affaibli l'hypothèse sur M en supposant simplement que M est minimale. L'énoncé de Huang [46] pour des hypersurfaces strictement pseudo-convexes de dimensions différentes découle également du Corollaire 1.7.

La condition suffisante du Théorème 1.6 est nouvelle. Bien que proche de celle de [76], Theorem 1.1, elle en diffère (voir aussi [53]) : on peut comme dans [76] ne pas réduire $\mathcal{V}_p^1$ en $\widetilde{\mathcal{V}}_p^1$ et on note alors $\mathcal{W}_p^2$ l'analogue de la seconde variété caractéristique obtenue dans ce cas.

Remarque 1.8. Les conditions $\dim \mathcal{V}_p^2 = 0$ et $\dim \mathcal{W}_p^2 = 0$ sont indépendantes (voir les Exemples 1.9 et 1.10).

Les deux exemples suivants sont dus à J. Merker [53] :

Exemple 1.9. Soient $M : 2 \operatorname{Im} z_1 = |z_2|^2 \subset \mathbb{C}^2$, $M' : 2 \operatorname{Im} z_1' = |z_2'|^2 + 2 \operatorname{Re}({z_2'}^2 \overline{z_3' z_4'}) \subset \mathbb{C}^4$ et $f(z_1, z_2) = (z_1, z_2, 0, 0)$. Pour tout $p \in M$, $\dim \mathcal{V}_p^2 = 0$ mais $\dim \mathcal{W}_p^2 = 1$.

Exemple 1.10. Soient $M : 2 \operatorname{Im} z_1 = |z_2|^2 \subset \mathbb{C}^2$, $M' : 2 \operatorname{Im} z_1' = |z_2'|^2 + 2 \operatorname{Re}({z_2'}^2 \overline{z_3' z_4'} + {z_3'}^2 \overline{z_5'}^2 + {z_3'}^3 \overline{z_4'}^3) \subset \mathbb{C}^5$ et $f(z_1, z_2) = (z_1, z_2, 0, 0, 0)$. Pour tout $p \in M$, $\dim \mathcal{V}_p^2 = 1$ et $\dim \mathcal{W}_p^2 = 0$.

Remarque 1.11. $\dim \mathcal{W}_p^2$ n'est pas nécessairement semi-continue supérieurement (voir l'Exemple 1.12). Ainsi, pour l'analogue du Théorème 1.6 il faut supposer que $\dim \mathcal{W}_p^2 = 0$, *pour tout* $p \in M$ (voir [76]).

Exemple 1.12. Soient $M : 2 \operatorname{Im} z_1 = |z_2|^2 \subset \mathbb{C}^2$, $M' : 2 \operatorname{Im} z_1' = |z_2'|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_4'(z_3' - z_1' {z_2'}^3)(\overline{z_4'} - \overline{z_3'} + \overline{z_2'}^2 (z_4' - z_3'))) \subset \mathbb{C}^4$ et $f(z_1, z_2) = (z_1, z_2, z_1 z_2^3, 0)$. Ici, $\dim \mathcal{W}_0^2 = 0$ mais pour tout $p \in M \setminus \{0\}$, $\dim \mathcal{W}_p^2 = 1$. Par ailleurs, pour tout $p \in M$, $\dim \mathcal{V}_p^2 = 0$.

Dans les Exemples 1.9 et 1.12, le Théorème 1.6 prouve l'algébricité de f, alors que [76] ne s'applique pas.

Les calculs permettant de vérifier les exemples précédents sont donnés à la Section 4.2.

2. Préliminaires

2.1. Applications holomorphes algébriques

Soient $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine et $f : \Omega \to \mathbb{C}^{n'}$ une application holomorphe. Rappelons que f est *algébrique* si son graphe est contenu dans un sous-ensemble algébrique complexe de $\mathbb{C}^{n+n'}$ de dimension n.

La définition équivalente suivante est purement algébrique ; elle a été utilisée dans [22], puis, dans le même esprit, elle a été généralisée au cadre analytique (voir [24], et aussi le Chapitre 3, Section 3.3). La fonction holomorphe $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ est algébrique si c'est un élément algébrique sur le corps $\mathcal{F} := \mathbb{C}(z_1, \ldots, z_n)$ des fractions rationnelles en n variables complexes. L'application holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}^{n'}$ est algébrique si l'extension de corps $\mathcal{F}(f_1, \ldots, f_{n'})/\mathcal{F}$ est algébrique, ou de façon équivalente, si chaque fonction composante f_k est algébrique sur $\mathcal{F}$. (Voir le Chapitre 3, Section 3.3, pour les définitions précises des éléments algébriques et des extensions de corps.) De cette seconde définition (équivalente) de l'algébricité d'une application holomorphe, il découle directement que la somme et le produit de deux applications holomorphes algébriques est algébrique, et que l'inverse d'une application holomorphe algébrique qui ne s'annule pas est algébrique.

Le lemme suivant énonce des propriétés élémentaires sur les applications holomorphes algébriques, que nous utiliserons fréquemment par la suite :

Lemme 2.1. *Notons Δ_ϵ^n le polydisque de $\mathbb{C}^n$ de centre 0 et de rayon $\epsilon > 0$. Soit $f : \Delta_\epsilon^n \to \Delta_{\epsilon'}^{n'}$ une application holomorphe algébrique.*

(i) (Application dérivée). *Pour tout $j = 1, \ldots, n$, $\partial f / \partial z_j$ est algébrique ;*

(ii) (Application réciproque). *Si de plus f est biholomorphe, f^{-1} est algébrique ;*

(iii) (Application composée). *Si $g : \Delta_{\epsilon'}^{n'} \to \mathbb{C}^{n''}$ est aussi une application holomorphe algébrique, $g \circ f$ est algébrique ;*

(iv) (Théorème des fonctions implicites algébrique). *Supposons que $f(0) = 0$ et que $w = \phi(v)$ est une solution de l'équation $f(v, w) = 0$ au voisinage de $(0, 0)$, avec $\mathbb{C}^n \ni z = (v, w) \in \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b$ et $\phi : \Delta_\delta^a \to \mathbb{C}^b$ une application holomorphe telle que $\phi(0) = 0$. Alors, ϕ est algébrique ;*

(v) (Algébricité partielle). *L'application holomorphe : $\Delta_\epsilon^1 \to \mathbb{C}^{n'}$, $z_j \mapsto f(z_1^0, \ldots, z_{j-1}^0, z_j, z_{j+1}^0, \ldots, z_n^0)$, est algébrique, pour tout $j = 1, \ldots, n$ et pour tout $(z_1^0, \ldots, z_{j-1}^0, z_{j+1}^0, \ldots, z_n^0) \in \Delta_\epsilon^{n-1}$;*

(vi) (Principe d'algébricité séparée). *Supposons que $f : \Delta_\epsilon^n \to \Delta_{\epsilon'}^{n'}$ est une application holomorphe telle que $v \mapsto f(v, w^0)$ est algébrique, pour tout $w^0 \in \Delta_\epsilon^b$, et $w \mapsto f(v^0, w)$ est algébrique, pour tout $v^0 \in \Delta_\epsilon^a$, avec $\mathbb{C}^n \ni z = (v, w) \in \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b$. Alors, f est algébrique.*

Démonstration. Les démonstrations des assertions (i) à (v) sont élémentaires ; pour l'assertion (vi), nous nous référons au livre de Bochner-Martin [17], Chap. IX, §5, Theorem 6. □

2.2. Variétés de Segre

Soit $M \subset \mathbb{C}^n$ une sous-variété analytique réelle générique, définie au voisinage du point $p \in M$ par les équations analytiques réelles $\rho_k(z, \overline{z}) = 0$, $k = 1, \ldots, d$, avec $\overline{\partial}\rho_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}\rho_d \neq 0$ en p. Rappelons que la *variété de Segre* Q_w de M associée à un point w proche de p est la sous-variété complexe définie au voisinage de p par les équations complexifiées $\rho_k(z, \overline{w}) = 0$, $k = 1, \ldots, d$ (voir le Chapitre 2, Section 1, pour une utilisation des variétés de Segre dans le cadre analytique). Si M est une sous-variété *algébrique* réelle générique, ses variété de Segre sont des sous-variété *algébriques* complexes (voir la Section 1.1).

Nous donnons dans cette section les propriétés essentielles des variétés de Segre, qui sont bien connues et qui ont été largement utilisées par de nombreux auteurs (voir [74, 39, 35], pour n'en citer que quelques uns). Les deux assertions du lemme suivant évoquent l'idée d'une symétrie par rapport à M :

Lemme 2.2. *Pour tous points $z, w \in \mathbb{C}^n$, suffisamment proches de p, on a (cf. figure 2) :*

(i) (Involutivité). $\quad z \in Q_w \iff w \in Q_z$ *;*

(ii) (Invariance de M). $\quad z \in Q_z \iff z \in M$.

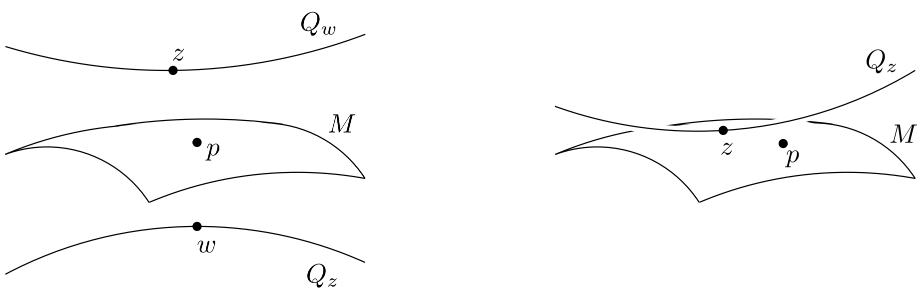

Figure 2. La variété de Segre Q_z de M associée au point z proche de p vérifie les propriétés d'une symétrie par rapport à M

Démonstration. Ces assertions se démontrent facilement grâce à l'égalité fondamentale $\overline{\rho_k(z, \overline{w})} = \rho_k(w, \overline{z})$, due au fait que $\rho_k(z, \overline{z}) \in \mathbb{R}$, pour tous $k = 1, \ldots, d$ et $z \in \mathbb{C}^n$ proche de p. □

Lemme 2.3 (Invariance des variétés de Segre)**.** *Soient deux sous-variétés analytiques réelles génériques $M \subset \mathbb{C}^n$ et $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$, p un point de M et p' un point de M'. Notons Q_w et $Q'_{w'}$ les variétés de Segre respectives de M et M'. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine contenant le point p et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}^{n'}$ une application holomorphe telle que $f(M \cap \Omega) \subset M'$ et $f(p) = p'$.*

(i) Pour tout point $w \in \mathbb{C}^n$ suffisamment proches de p,

$$f(Q_w \cap \Omega_1) \subset Q'_{f(w)},$$

où $\Omega_1 \subset \Omega$ est un voisinage de p suffisamment petit.

(ii) Dans la situation où $n = n'$, $\Omega' \subset \mathbb{C}^n$ est un domaine contenant le point p' et $f : \Omega \to \Omega'$ est un biholomorphisme tel que $f(M \cap \Omega) = M' \cap \Omega'$ et $f(p) = p'$, on a le résultat plus fort suivant. Pour tout point $w \in \mathbb{C}^n$ suffisamment proches de p,

$$f(Q_w \cap \Omega_1) = Q'_{f(w)} \cap \Omega'_1,$$

où $\Omega_1 \subset \Omega$ et $\Omega'_1 \subset \Omega'$ sont des voisinages respectifs de p et p' suffisamment petits.

Démonstration. Dans la suite, nous écrirons les équations définissantes analytiques réelles de M, $\rho_k(z, \overline{z}) = 0$, $k = 1, \dots, d$, sous la forme vectorielle $\rho := (\rho_1, \dots, \rho_d)$; de même $\rho'(z', \overline{z'}) = 0$ sera une équation définissante analytique réelle vectorielle de M'.

(i) L'hypothèse $f(M \cap \Omega) \subset M'$ s'écrit

$$\rho(z, \overline{z}) = 0 \;\Rightarrow\; \rho'(f(z), \overline{f(z)}) = 0, \qquad \text{pour } z \text{ proche de } p.$$

Puis, grâce au lemme de division des fonctions analytiques réelles et car $d\rho_1 \wedge \dots \wedge d\rho_d \neq 0$ en p, cela est équivalent à :

$$\rho'(f(z), \overline{f(z)}) \equiv \lambda(z, \overline{z})\ \rho(z, \overline{z}), \qquad \text{pour } z \text{ proche de } p, \tag{2.1}$$

où λ est une matrice $d \times d'$ à coefficients analytiques réels près de p. Les deux membres de l'équation (2.1) étant analytiques réels, on peut complexifier (2.1) :

$$\rho'(f(z), \overline{f(w)}) \equiv \lambda(z, \overline{w})\ \rho(z, \overline{w}), \qquad \text{pour } z \text{ et } w \text{ proches de } p. \tag{2.2}$$

Puis, (2.2) est équivalent à :

$$z \in Q_w \;\Rightarrow\; f(z) \in Q'_{f(w)}, \qquad \text{pour } z \text{ et } w \text{ proches de } p.$$

(ii) Dans la situation où f est un biholomorphisme qui induit un difféomorphisme CR de M sur M', λ est une matrice $d \times d$ inversible. □

Remarque 2.4. Le Lemme 2.3 (ii) montre que les variétés de Segre sont des invariants biholomorphes de M.

2.3. Réflexion de Segre

Dans cette section, nous généralisons la notion de variétés de Segre étudiée ci-dessus (voir la Section 2.2), ce qui nous permet de donner une vision plus géométrique des variétés caractéristiques $\mathcal{V}_p^1$ et $\mathcal{V}_p^2$. Nous donnons les définitions, les résultats et les démonstrations dans le cadre algébrique, mais ces notions peuvent facilement être généralisées au cadre analytique.

Soit $M \subset \mathbb{C}^n$ une sous-variété algébrique réelle générique, définie au voisinage du point $p \in M$ par les équations polynômiales réelles $P_k(z, \overline{z}) = 0$, $k = 1, \dots, d$, avec $\overline{\partial} P_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\partial} P_d \neq 0$ en p. Notons Q_w les variétés de Segre de M. Soient z_0 et w_0 deux points de $\mathbb{C}^n$ suffisamment proches de p, tels que $z_0 \in Q_{w_0}$ (ou, de façon équivalente, $w_0 \in Q_{z_0}$). Soit $V \subset Q_{w_0}$ une sous-variété complexe passant par le point z_0, de dimension a, et soit $(\mathcal{X}_j)_{j=1,\dots,a}$ une base des opérateurs holomorphes tangents à V. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^a$, $\mathcal{X}^\alpha$ désigne l'opérateur composé $\mathcal{X}^\alpha := \mathcal{X}_1^{\alpha_1} \dots \mathcal{X}_a^{\alpha_a}$.

Définition 2.5. La *réflexion de Segre* de V par rapport à M, associée au couple (z_0, w_0), est le sous-ensemble algébrique complexe $S(V)$ défini au voisinage de w_0 par les équations polynômiales anti-holomorphes en w : $\mathcal{X}^\alpha P_k(\cdot, \overline{w})|_{z_0} = 0$, pour tous $k = 1, \dots, d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^a$.

Remarquons tout d'abord que $S(V) \subset Q_{z_0}$; il suffit de considérer les équations définissantes de $S(V)$ pour $\alpha = (0, \dots, 0)$. Remarquons par ailleurs que $w_0 \in S(V)$; puisque $V \subset Q_{w_0}$, on peut appliquer les opérateurs $\mathcal{X}_j$ aux équations $P_k(z, \overline{w_0}) = 0$, $k = 1, \dots, d$, $z \in Q_{w_0}$ proche de z_0.

Remarque 2.6. Dans la situation où V est réduit au singleton $\{z_0\}$, $S(z_0)$ coïncide avec Q_{z_0} dans un voisinage de w_0. (Réciproquement, si $V = Q_{w_0}$, $S(Q_{w_0}) = \{w_0\}$.)

Lemme 2.7. *$S(V)$ est l'ensemble des points $w \in \mathbb{C}^n$, suffisamment proches de w_0, tels que $V \subset Q_w$ dans un voisinage de z_0.*

Démonstration. L'inclusion $V \subset Q_w$ signifie que $P_k(\cdot, \overline{w})|_V \equiv 0$, pour tout $k = 1, \dots, d$. Ceci équivaut à $\mathcal{X}^\alpha P_k(\cdot, \overline{w})|_{z_0} = 0$, pour tous $k = 1, \dots, d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^a$. (Voir le Chapitre 2, Lemme 5.3, pour un énoncé de cette version "courbe" du principe d'unicité pour les fonctions holomorphes.) □

Corollaire 2.8. *Si $V \subset Q_p$ est une sous-variété complexe passant par le point p, et si S désigne la réflexion de Segre par rapport à M associée au couple (p, p), $V \cap S(V) \subset M$ dans un voisinage de p.*

Démonstration. Soit $w \in V$, suffisamment proche de p. Si de plus $w \in S(V)$, le Lemme 2.7 implique que $V \subset Q_w$ dans un voisinage de p. Finalement, $w \in Q_w$, ce qui entraîne que $w \in M$, par le Lemme 2.2 (ii). □

Remarque 2.9. Nous avons défini la réflexion de Segre par rapport à une sous-variété algébrique réelle générique, mais il est facile de vérifier que la Définition 2.5 est aussi valable pour un sous-ensemble algébrique réel, de même que le Lemme 2.7 et le Corollaire 2.8.

Lemme 2.10. *Soient $M, M' \subset \mathbb{C}^n$ deux sous-variétés algébriques réelles génériques, $p \in M$ et $p' \in M'$. Soient $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}^n$ deux domaines contenant respectivement les points p et p' et soit $f : \Omega \to \Omega'$ un biholomorphisme tel que $f(M \cap \Omega) = M' \cap \Omega'$ et $f(p) = p'$. Alors, $\mathcal{V}_p^1$ coïncide avec $A'_{p'}$ dans un voisinage de p'.*

(Voir le Chapitre 2, Lemme 5.1, pour un résultat analogue dans le cadre analytique.)

Démonstration. D'une part, le Lemme 2.7 appliqué à $V = Q'_{p'}$ montre que $S'(Q'_{p'})$ coïncide avec $A'_{p'}$ dans un voisinage de p', où S' désigne la réflexion de Segre par rapport à M', associée au couple (p', p').

D'autre part, vu la propriété d'invariance des variétés de Segre (voir le Lemme 2.3 (ii)), il existe $\Omega_1 \subset \Omega$ et $\Omega'_1 \subset \Omega'$ des voisinages respectifs de p et p', suffisamment petits, tels que $f(Q_p \cap \Omega_1) = Q'_{p'} \cap \Omega'_1$. Ainsi, comme les opérateurs $\mathcal{L}_j$, $j = 1, \dots, m$, forment une base des opérateurs holomorphes tangents à Q_p, les opérateurs $f_*\mathcal{L}_j$, $j = 1, \dots, m$, "poussés en avant" des $\mathcal{L}_j$ par f, forment une base des opérateurs holomorphes tangents à $Q'_{p'}$. Par conséquent, dériver les fonctions $P'_k(f(\cdot), \overline{z'})$, $k = 1, \dots, d$, par les opérateurs $\mathcal{L}_j$, $j = 1, \dots, m$, revient à dériver les fonctions $P'_k(\cdot, \overline{z'})$, $k = 1, \dots, d$, par les opérateurs $f_*\mathcal{L}_j$, $j = 1, \dots, m$. Par définition (voir les Définitions 1.1 et 2.5), ceci signifie que $\mathcal{V}_p^1$ coïncide avec $S'(Q'_{p'})$ dans un voisinage de p'.

Finalement, nous avons prouvé que $\mathcal{V}_p^1$ coïncide avec $A'_{p'}$ (et également avec $S'(Q'_{p'})$) dans un voisinage de p'. □

Lemme 2.11. *Soient $M \subset \mathbb{C}^n$ une sous-variété algébrique réelle générique, $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ un sous-ensemble algébrique réel, $p \in M$ et $p' \in M'$. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine contenant le point p et $f : \Omega \to \mathbb{C}^{n'}$ une application holomorphe telle que $f(M \cap \Omega) \subset M'$ et $f(p) = p'$. Alors, $\mathcal{V}_p^2 \subset M'$ dans un voisinage de p'.*

Démonstration. Le Corollaire 2.8 (voir aussi la Remarque 2.9) appliqué à $V = \widetilde{\mathcal{V}}_p^1$ (voir la Section 1.1) montre que $\widetilde{\mathcal{V}}_p^1 \cap S'(\widetilde{\mathcal{V}}_p^1) \subset M'$, dans un voisinage de p', où S' désigne la réflexion de Segre par rapport à M' associée au couple (p', p').

Vu la Définition 1.2, il est clair que $\mathcal{V}_p^2$ coïncide avec $\widetilde{\mathcal{V}}_p^1 \cap S'(\widetilde{\mathcal{V}}_p^1)$ dans un voisinage de p', et donc $\mathcal{V}_p^2 \subset M'$ dans un voisinage de p'. □

3. Premier principe de réflexion

3.1. Démonstration du Théorème 1.3

Dans toute cette section, nous considérons la situation suivante. Soient $M \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, une sous-variété algébrique réelle générique, $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ un sous-ensemble algébrique réel, $p \in M$ et $p' \in M'$. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine contenant le point p et $f : \Omega \to \mathbb{C}^{n'}$ une application holomorphe telle que $f(M \cap \Omega) \subset M'$ et $f(p) = p'$. Nous dirons que le point $q \in M$ est *générique* s'il peut être choisi arbitrairement dans M privée d'un sous-ensemble algébrique réel strict. Par ailleurs, nous introduisons la notation suivante. Pour $A \in \mathbb{N}$, le vecteur

$$D^A f = \left(\frac{\partial^{|\beta|} f_j}{\partial z^\beta} \right)_{|\beta| \leq A,\ j=1,\dots,n'}$$

désigne toutes les dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre A ; $D^A f$ est parfois appelé le *jet d'ordre* A de f. Le nombre de composantes du vecteur $D^A f$ est

$$\kappa(A) := n' \binom{n+A}{n}. \tag{3.1}$$

Pour vérifier (3.1), il suffit de calculer le nombre $\lambda(A)$ de composantes du vecteur $D^A f_j$, pour une composante f_j :

$$\lambda(A) = \#\{(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n :\ \beta_1 + \dots + \beta_n \leq A\}.$$

Ajoutons $\beta_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\beta_0 + \dots + \beta_n = A$. Alors,

$$\lambda(A) = \#\{(\beta_0, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^{n+1} :\ \beta_0 + \dots + \beta_n = A\}.$$

Finalement, $\lambda(A)$ est donc le nombre de façon de choisir n éléments dans un ensemble à $A + n$ éléments, c'est-à-dire, $\binom{n+A}{n}$; puis $\kappa(A) = n'\lambda(A)$.

La démonstration du Théorème 1.3 est divisée en deux étapes (Propositions 3.1 et 3.4).

Proposition 3.1. *Si la dimension de $\mathcal{V}_p^1$ en p' est 0, il existe un point $q \in M$ générique arbitrairement proche de p, un entier $A \geq 0$ et une application $\mathcal{A}$ holomorphe algébrique près de $(q, \overline{q}, \overline{D^A f(q)})$ tels que, pour tous $z, w \in \mathbb{C}^n$ suffisamment proches de q vérifiant $w \in Q_z$,*

$$f(z) = \mathcal{A}(z, \overline{w}, \overline{D^A f(w)}). \tag{3.2}$$

Démonstration. (Voir le Chapitre 2, Lemme 4.3, pour un résultat et une démonstration analogues, dans le cadre analytique.)

Dans la suite, tous nos raisonnements seront localisés en p. Par hypothèse $f(M \cap \Omega) \subset M'$, autrement dit $P'_k(f(z), \overline{f(z)}) = 0$, pour tous $k = 1, \dots, d'$ et $z \in M \cap \Omega$. Par complexification $P'_k(f(w), \overline{f(z)}) = 0$, pour tous $k = 1, \dots, d'$ et $z, w \in \mathbb{C}^n$ proches de p tels que $w \in Q_z$. Fixons $z_0, w_0 \in \mathbb{C}^n$ proches de p

tels que $w_0 \in Q_{z_0}$. Les opérateurs $\mathcal{L}_j(w) = L_j(w, \overline{z_0})$, $j = 1, \dots, m$, forment une base des opérateurs holomorphes tangents à Q_{z_0} (voir la Section 1.1) ; comme $P'_k(f(\cdot), \overline{f(z_0)}) = 0$ sur Q_{z_0},

$$\mathcal{L}^\alpha P'_k(f(\cdot), \overline{f(z_0)})|_{w_0} = 0, \quad k = 1, \dots, d', \ \alpha \in \mathbb{N}^m. \tag{3.3}$$

On réécrit (3.3), après conjugaison complexe, sous la forme

$$\mathcal{F}_k^\alpha(z_0, \overline{w_0}, \overline{D^{|\alpha|} f(w_0)}, f(z_0)) = 0, \quad k = 1, \dots, d', \ \alpha \in \mathbb{N}^m, \tag{3.4}$$

où les $\mathcal{F}_k^\alpha$ sont des fonctions holomorphes algébriques près du point $P := (p, \overline{p}, \overline{D^{|\alpha|} f(p)}, p')$. Les équations $\mathcal{F}_k^\alpha(p, \overline{p}, \overline{D^{|\alpha|} f(p)}, \cdot) = 0$ sont des équations définissantes de $\mathcal{V}_p^1$ et il est clair vu (3.4) que $p' \in \mathcal{V}_p^1$. Par nœthérianité, on peut se ramener à un nombre fini d'équations définissantes : $\mathcal{F}(p, \overline{p}, \overline{D^A f(p)}, \cdot) = 0$, où $A \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_k^\alpha)_{k=1,\dots,d', |\alpha| \le A}$. Soit $\mathcal{V}^1_{(z_0,w_0)}$ le sous-ensemble algébrique complexe passant par $f(z_0)$ et défini par l'équation $\mathcal{F}(z_0, \overline{w_0}, \overline{D^A f(w_0)}, \cdot) = 0$.

Remarque 3.2. Puisque dans (3.3) on peut remplacer w_0 par un point $\omega \in Q_{z_0}$ quelconque, $\mathcal{V}^1_{(z_0,w_0)}$ est en fait indépendant du point w_0, et peut être défini par l'équation $\mathcal{F}(z_0, \overline{\omega}, \overline{D^A f(\omega)}, \cdot) = 0$. Pour $\alpha = 0$, cette équation prouve que $\mathcal{V}^1_{(z_0,w_0)} \subset Q'_{f(\omega)}$.

Dans $\mathbb{C}^{2n+\kappa(A)+n'}$ muni des coordonnées (z, ζ, Δ, z'), on considère l'ensemble algébrique complexe $\mathcal{V}^1$ défini dans un voisinage du point P par $\mathcal{F}(z, \zeta, \Delta, z') = 0$. Par hypothèse, la fibre $\mathcal{V}_p^1$ de $\mathcal{V}^1$ au-dessus du point $(p, \overline{p}, \overline{D^A f(p)})$ est de dimension zéro. D'après le théorème fondamental de représentation locale des ensembles algébriques complexes (voir par exemple [19], §5.6, Proposition 4), $\mathcal{V}^1$ est contenu dans un ensemble algébrique $\mathcal{Q}$ défini au voisinage de P par l'annulation de polynômes de Weierstrass en z'_j, $Q_j(z, \zeta, \Delta)(z'_j)$, $j = 1, \dots, n'$, à coefficients algébriques en (z, ζ, Δ). On a donc $Q_j(z, \overline{w}, \overline{D^A f(w)})(f_j(z)) = 0$, $j = 1, \dots, n'$, pour z, w tels que $w \in Q_z$. Quitte à remplacer Q_j par $\partial Q_j / \partial z'_j$, on peut supposer que $\partial Q_j / \partial z'_j (z, \overline{w}, \overline{D^A f(w)})(f_j(z)) \not\equiv 0$ pour z, w vérifiant $w \in Q_z$. On peut donc choisir un point $q \in M$ générique arbitrairement proche de p tel que le théorème des fonctions implicites (algébriques) s'applique et tel que M soit encore minimale en q. Alors, pour tous $z, w \in \mathbb{C}^n$ suffisamment proches de q tels que $w \in Q_z$,

$$f(z) = \mathcal{A}(z, \overline{w}, \overline{D^A f(w)}), \tag{3.5}$$

où $\mathcal{A}$ est une application holomorphe algébrique près de $(q, \overline{q}, \overline{D^A f(q)})$. $\square$

Remarque 3.3. L'équation (3.5) prouve directement que f est algébrique sur les variétés de Segre de M (en fixant w). Pour conclure que f est algébrique sur tout $\mathbb{C}^n$, on peut alors utiliser le théorème d'algébricité séparée de [68] si M est Segre-transversale, ou de [52] si M est simplement supposée minimale.

Proposition 3.4. *Si M est minimale en p et si l'application holomorphe f vérifie (3.2), f est algébrique.*

Démonstration. Nous suivons la méthode de [4], que nous réécrivons en quatre étapes sous un formalisme simplificateur.

Etape 1 : Notations et définitions. Ecrivons les fonctions définissantes polynômiales réelles de M sous la forme vectorielle $P := (P_1, \ldots, P_d)$. Notons * la conjugaison complexe, dans le sens suivant : pour un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}^N$, $E^* := \{\overline{z} : z \in E\}$, et pour une application holomorphe F, $F^*(\zeta) := \overline{F(\overline{\zeta})}$; pour $\mu \in \mathbb{N}$, notons $^{*\mu}$ la conjugaison complexe * itérée μ fois. Pour $\mu \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, soit $M^\mu \subset \mathbb{C}^n_{Z_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^n_{Z_\mu}$ la sous-variété algébrique complexe définie dans un voisinage de $q^\mu := (q^{*1}, \ldots, q^{*\mu})$ par les équations $\rho^{*j}(Z_j, Z_{j+1}) = 0$, $j = 1, \ldots, \mu - 1$.

Etape 2 : Dérivation. Dans la suite, tous nos raisonnements seront localisés en q lorsqu'il s'agit de M (dans $\mathbb{C}^n$), et en q^μ lorsqu'il s'agit de M^μ (dans $\mathbb{C}^{n\mu}$). Remarquons que $w \in Q_z$, si et seulement si, $(\overline{w}, z) \in M^2$. Ainsi, (3.2) s'écrit

$$f(Z_2) = \mathcal{A}(Z_2, Z_1, D^A f^*(Z_1)), \quad (Z_1, Z_2) \in M^2. \tag{3.6}$$

Il est clair que $\pi_2|_{M^2}$ est une submersion, où $\pi_2 : (Z_1, Z_2) \mapsto Z_2$ est la deuxième projection. Ainsi, pour tout $j = 1, \ldots, n$, l'opérateur $\partial/\partial Z_{2,j}$ de $\mathbb{C}^n$ se “remonte” en un opérateur holomorphe tangent à M^2,

$$\mathcal{X}_j := \frac{\partial}{\partial Z_{2,j}} + \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}(Z_1, Z_2) \frac{\partial}{\partial Z_{1,k}},$$

à coefficients $a_{j,k}$ holomorphes algébriques. Pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, l'opérateur composé $\mathcal{X}^\beta = \mathcal{X}_1^{\beta_1} \ldots \mathcal{X}_n^{\beta_n}$ appliqué à (3.6) donne :

$$\frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial z^\beta}(Z_2) = \mathcal{A}_2^\beta(Z_1, Z_2, D^{A+|\beta|} f^*(Z_1)), \quad (Z_1, Z_2) \in M^2, \tag{3.7}$$

où $\mathcal{A}_2^\beta$ est une application holomorphe algébrique près de $(\overline{q}, q, \overline{D^{A+|\beta|} f(q)})$. Ecrivons (3.7) pour tout $|\beta| \leq B$ sous forme vectorielle :

$$D^B f(Z_2) = \mathcal{A}_2^B(Z_1, Z_2, D^{A+B} f^*(Z_1)), \quad (Z_1, Z_2) \in M^2, \tag{3.8}$$

où $\mathcal{A}_2^B$ est holomorphe algébrique et $B \geq 0$ est un entier.

Etape 3 : Itération. Montrons par récurrence sur $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ que pour tout $B' \in \mathbb{N}$,

(3.9)
$$D^{B'} f^{*\mu}(Z_\mu) = \mathcal{A}_\mu^{B'}(Z_1, \ldots, Z_\mu, D^{(\mu-1)A+B'} f^*(Z_1)), \quad (Z_1, \ldots, Z_\mu) \in M^\mu,$$

où $\mathcal{A}_\mu^{B'}$ est holomorphe algébrique.

Pour $\mu = 2$, c'est (3.8). Supposons le résultat acquis à l'ordre μ et considérons un point $(Z_1, \ldots, Z_{\mu+1}) \in M^{\mu+1}$. Il est clair que $(Z_\mu^{*\mu+1}, Z_{\mu+1}^{*\mu+1}) \in M^2$; en conjuguant (3.8) $\mu + 1$ fois, on obtient alors :

$$D^B f^{*\mu+1}(Z_{\mu+1}) = \mathcal{A}_2^{B*\mu+1}(Z_\mu, Z_{\mu+1}, D^{A+B} f^{*\mu}(Z_\mu)). \tag{3.10}$$

En remplaçant dans (3.10) l'hypothèse de récurrence (3.9) pour $B' = A + B$, on obtient :

$$D^B f^{*\mu+1}(Z_{\mu+1}) = \mathcal{A}_{\mu+1}^B(Z_1, \ldots, Z_{\mu+1}, D^{\mu A+B} f^*(Z_1)),$$

où $\mathcal{A}_{\mu+1}^B$ est holomorphe algébrique, ce qui termine la récurrence.

Etape 4 : Minimalité. Pour $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $w \in \mathbb{C}^n$ suffisamment proche de q, notons $S_{\overline{w}}^\mu := \pi_\mu(M_{\overline{w}}^\mu)$, où $M_{\overline{w}}^\mu := M^\mu \cap \pi_1^{-1}(\overline{w})$ et $\pi_1 : (Z_1, \ldots, Z_\mu) \mapsto Z_1$, $\pi_\mu : (Z_1, \ldots, Z_\mu) \mapsto Z_\mu$, désignent la première et la dernière projection. Les sous-ensemble $S_{\overline{w}}^\mu \subset \mathbb{C}^n$ ne sont pas en général algébriques (ni analytiques) complexes, et sont appelés *ensemble de Segre* dans [4]. On peut supposer que M est minimale en q (voir la Section 1.1). Il existe alors un entier $\mu_0 \geq 1$ tel que $S_{\overline{q}}^{\mu_0}$ contient un voisinage (ouvert non vide) de $q^{*\mu_0}$ dans $\mathbb{C}^n$ (voir [**4, 52**]). Ainsi, l'application $\pi_\mu|_{M_{\overline{q}}^\mu}$ est de rang générique n. On peut supposer, sans perte de généralité, qu'elle est de rang n en q^μ. Elle est donc inversible à droite en q^μ, c'est-à-dire, il existe un voisinage U de q dans $\mathbb{C}^n$ et une application holomorphe algébrique

$$\begin{array}{rccl} \psi : & U^{*\mu} & \longrightarrow & M_{\overline{q}}^\mu \\ & Z_\mu & \longmapsto & (\overline{q}, \psi_2(Z_\mu), \ldots, \psi_{\mu-1}(Z_\mu), Z_\mu), \end{array}$$

telle que $\pi_\mu|_{M_{\overline{q}}^\mu} \circ \psi = \mathrm{id}_{U^{*\mu}}$. Ecrivons (3.9) pour $B' = 0$ et $(Z_1, \ldots, Z_\mu) = \psi(Z_\mu)$:

$$f^{*\mu}(Z_\mu) = \mathcal{A}_\mu^0(\overline{q}, \psi_2(Z_\mu), \ldots, \psi_{\mu-1}(Z_\mu), Z_\mu, \overline{D^{(\mu-1)A} f(q)}), \quad Z_\mu \in U^{*\mu}.$$

On conclut que $f^{*\mu}$ est algébrique sur $U^{*\mu}$, et donc que f est algébrique sur U. $\square$

Fin de la démonstration du Théorème 1.3. On peut appliquer la Proposition 3.1 ; puis, comme M est minimale, la Proposition 3.4 permet alors de conclure que f est algébrique. $\square$

3.2. Orthogonalité entre première variété caractéristique et variété de Segre

Le lemme suivant montre que dans la situation considérée par Sharipov-Sukhov [68] (voir le Corollaire 1.4), la première variété caractéristique est de dimension zéro :

Lemme 3.5. *Soient $M \subset \mathbb{C}^n$ et $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ deux sous-variétés algébriques réelles génériques, $p \in M$ et $p' \in M'$. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine contenant le point p et $f : \Omega \to \mathbb{C}^{n'}$ une application holomorphe telle que $f(M \cap \Omega) \subset M'$ et $f(p) = p'$. Si l'orthogonal de la variété de Segre de M en p, au sens de la forme de Levi de M' en p' "tirée en arrière" par f, est nul, la dimension de $\mathcal{V}_p^1$ en p' est nécessairement zéro.*

Démonstration. La démonstration se décompose en trois étapes.

Etape 1 : Notations et réduction du problème. Supposons que $p = 0$ et utilisons des coordonnées holomorphes algébriques du type (1.3), $\mathbb{C}^n \ni z = (x, y) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$, telles que M est donnée près de 0 par des équations du type (1.2), $y_k = \phi_k(x, \overline{x}, \overline{y})$, $k = 1, \ldots, d$, où les $\phi_k(x, \xi, \eta)$ sont des fonctions holomorphes algébriques près de $(0, 0, 0)$ satisfaisant $\phi_k(0, \xi, \eta) \equiv \phi_k(x, 0, \eta) \equiv \eta_k$, $k = 1, \ldots, d$. Nous utiliserons aussi les équations polynômiales réelles de M du type (1.1), $P_k(z, \overline{z}) = 0$, $k = 1, \ldots, d$, avec $\overline{\partial} P_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\partial} P_d \neq 0$ en 0. Suivons les mêmes notations pour M', en ajoutant des "primes" partout, et écrivons $f = (g, h) \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$ dans ces coordonnées.

Notons que la variété de Segre de M en 0 est $Q_0 = T_0^c M = \mathbb{C}_x^m \times \{0\}$, et que de même pour M', $Q'_0 = T_0^c M' = \mathbb{C}_{x'}^{m'} \times \{0\}$. En outre, pour tout $j = 1, \ldots, m$, $\mathcal{L}_j|_0 = \partial/\partial x_j$ (voir (1.4)) et $\mathcal{L}_j h|_0 = \partial h/\partial x_j|_0 = 0$.

Etape 2 : Calcul de l'orthogonal de la variété de Segre. Notons E_0 l'orthogonal de la variété de Segre Q_0 de M en 0, au sens de la forme de Levi de M' en 0 "tirée en arrière" par f. Par définition (voir la Section 1.2),

$$E_0 = \{x' \in \mathbb{C}^{m'} : f^* \Lambda_0^k(x, 0, \overline{x'}, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{C}^m, \ k = 1, \ldots, d'\}.$$

Or, dans notre situation, la forme de Levi Λ_0^k s'écrit :

$$\Lambda_0^k(x', \xi') = \sum_{l,\lambda=1}^{m'} \left. \frac{\partial^2 P'_k(x', 0, \overline{x'}, 0)}{\partial x'_l \, \partial \overline{x'}_\lambda} \right|_{(0,0)} x'_l \, \overline{\xi'}_\lambda,$$

pour tout $(x', \xi') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{m'}$. L'équation $f^* \Lambda_0^k(x, 0, \overline{x'}, 0) = 0$ équivaut donc à

$$\sum_{\substack{l,\lambda=1,\ldots,m' \\ j=1,\ldots,m}} \left. \frac{\partial^2 P'_k(x', 0, \overline{x'}, 0)}{\partial x'_l \, \partial \overline{x'}_\lambda} \right|_{(0,0)} \left. \frac{\partial g_l}{\partial x_j} \right|_0 x_j \, \overline{x'}_\lambda = 0,$$

que l'on réécrit sous la forme matricielle

$$ {}^t x \; A_k \; \overline{x'} = 0, $$

où A_k est la matrice $m \times m'$ d'élément générique

$$ \left(\sum_{l=1}^{m'} \frac{\partial^2 P'_k(x', 0, \overline{x'}, 0)}{\partial x'_l \, \partial \overline{x'}_\lambda} \bigg|_{(0,0)} \; \frac{\partial g_l}{\partial x_j}\bigg|_0 \right)_{j=1,\ldots,m}^{\lambda=1,\ldots,m'} . $$

Ainsi,

$$ E_0 = \{ x' \in \mathbb{C}^{m'} : {}^t x \; A_k \; \overline{x'} = 0, \quad x \in \mathbb{C}^m, \; k = 1, \ldots, d' \}. $$

Or, ${}^t x \; A_k \; \overline{x'} = 0$, pour tout $x \in \mathbb{C}^m$, équivaut à $A_k \; \overline{x'} = 0$. Si l'on note A la matrice $md' \times m'$ définie par

$$ A := \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{d'} \end{pmatrix}, $$

l'hypothèse du Lemme 3.5 signifie alors que

$$ E_0 = \{ x' \in \mathbb{C}^{m'} : A \; \overline{x'} = 0 \} = \{0\}. $$

En d'autres termes, A est injective.

Soient U un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{m'}$ suffisamment petit et $\Psi : U \to \mathbb{C}^{md'}$ l'application holomorphe (polynômiale) définie par

$$ \Psi_{j,k}(\overline{x'}) := \sum_{l=1}^{m'} \frac{\partial P'_k(x', 0, \overline{x'}, 0)}{\partial x'_l} \bigg|_0 \; \frac{\partial g_l}{\partial x_j}\bigg|_0 , $$

pour tous $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, d'$ et $\overline{x'} \in U$. Il est clair que A est la matrice jacobienne de Ψ en 0, et donc l'hypothèse du Lemme 3.5 équivaut à dire que Ψ est une immersion en 0.

Etape 3 : Calcul de la première variété caractéristique. Soit $\mathcal{V}_0^{1,1}$ le sous-ensemble algébrique complexe défini dans un voisinage de 0 par les équations du premier ordre en z' suivantes : $P'_l(0, \overline{z'}) = 0$ et $\mathcal{L}_j P'_k(f(\cdot), \overline{z'})|_0 = 0$, pour tous $l, k = 1, \ldots, d'$ et $j = 1, \ldots, m$. Il est clair que $\mathcal{V}_0^1 \subset \mathcal{V}_0^{1,1}$ au voisinage de 0. Le système d'équations $P'_l(0, \overline{z'}) = 0$, $l = 1, \ldots, d'$, est équivalent à $z' \in Q'_0 = \mathbb{C}^{m'}_{x'} \times \{0\}$, c'est-à-dire, $z' = (x', 0)$. Par ailleurs, $\mathcal{L}_j P'_k(f(\cdot), \overline{z'})|_0$ est égal à

$$ \frac{\partial}{\partial x_j} P'_k(f(\cdot), \overline{z'})|_0 \quad = \quad \sum_{l=1}^{n'} \frac{\partial P'_k(z', \overline{z'})}{\partial z'_l} \bigg|_0 \; \frac{\partial f_l}{\partial x_j}\bigg|_0 . $$

Puis, vu que $z' = (x', 0)$ et que $\partial h/\partial x_j|_0 = 0$, on obtient que

$$\mathcal{L}_j P'_k(f(\cdot), \overline{z'})|_0 \quad = \quad \sum_{l=1}^{m'} \left.\frac{\partial P'_k(x', 0, \overline{x'}, 0)}{\partial x'_l}\right|_0 \left.\frac{\partial g_l}{\partial x_j}\right|_0 \quad = \quad \Psi_{j,k}(\overline{x'}).$$

Ainsi, $\mathcal{V}_0^{1,1}$ est l'ensemble des $(x', 0)$ proches de 0 tels que $\Psi(\overline{x'}) = 0$. Vu l'étape 2, ceci implique que $\mathcal{V}_0^{1,1}$ est réduit au singleton $\{0\}$, et donc $\mathcal{V}_0^1 \subset \mathcal{V}_0^{1,1}$ aussi. □

4. Second principe de réflexion

4.1. Démonstration du Théorème 1.6

Nous considérons la même situation et suivons les mêmes conventions qu'à la Section 3.1.

La démonstration du Théorème 1.6 est divisée en deux étapes (Propositions 4.1 et 4.3).

Proposition 4.1. *Si la dimension de $\mathcal{V}_p^2$ en p' est 0, il existe un point $q \in M$ générique arbitrairement proche de p, un entier $A \geq 0$ et une application $\mathcal{B}$ holomorphe algébrique près de $(q, \overline{q}, q, \overline{D^A f(q)}, D^A f(q))$ tels que, pour tous $z, w, t \in \mathbb{C}^n$ suffisamment proches de q vérifiant $w \in Q_z$ et $t \in Q_w$,*

$$f(z) = \mathcal{B}(z, \overline{w}, t, \overline{D^A f(w)}, D^A f(t)). \tag{4.1}$$

Nous aurons besoin du lemme suivant, qui permet de résoudre localement (et partiellement) des équations algébriques complexes :

Lemme 4.2. *Soit A un sous-ensemble algébrique complexe de $\mathbb{C}_Z^\mu \times \mathbb{C}_W^\nu$ et soit $X \subset A$ une sous-variété connexe analytique réelle. Alors, il existe un point $P \in X$ (générique) et une sous-variété algébrique complexe $\widetilde{A}_P$ passant par P, tels que $X \subset \widetilde{A}_P \subset A$ près de P et tels que $\widetilde{A}_P$ est définie près de P par les équations $V = \psi_P(U, Z)$ et $\theta_P(Z) = 0$, avec $\mathbb{C}^\nu \ni W = (U, V) \in \mathbb{C}^\alpha \times \mathbb{C}^\beta$ un système de coordonnées holomorphes algébriques locales et ψ_P, θ_P deux applications holomorphes algébriques (θ_P étant une submersion).*

Démonstration. On obtient $\widetilde{A}_P$ de façon constructive par un algorithme qui se compose de trois étapes. La première étape consiste à choisir la composante irréductible de A qui contient X. Dans la deuxième étape, quitte à remplacer A par son lieu singulier $\operatorname{Sing} A$, on peut supposer que $X \not\subset \operatorname{Sing} A$. On choisit alors un point de X régulier pour A. La troisième étape est analogue à la deuxième et concerne le lieu de branchement de la projection canonique π de A sur $\mathbb{C}^\mu_Z$. On choisit alors le point $P \in X$ tel que π soit de rang constant au voisinage de P. On note $\widetilde{A}_P$ la sous-variété algébrique complexe de A passant par le point P ainsi construite. D'après le théorème du rang (algébrique), $\pi(\widetilde{A}_P)$ est une sous-variété algébrique complexe de $\mathbb{C}^\mu_Z$. On note $\theta_P(Z) = 0$ des équations définissantes holomorphes algébriques pour $\pi(\widetilde{A}_P)$. Enfin, dans $\pi(\widetilde{A}_P) \times \mathbb{C}^\nu_W$, on écrit $\widetilde{A}_P$ sous la forme d'un graphe $V = \psi_P(U, Z)$, avec $W = (U, V) \in \mathbb{C}^\alpha \times \mathbb{C}^\beta$. □

Démonstration de la Proposition 4.1. Dans la suite, tous nos raisonnements seront localisés en p.

On applique le Lemme 4.2 au sous-ensemble algébrique complexe $\mathcal{V}^1 \subset \mathbb{C}^{2n+\kappa(A)} \times \mathbb{C}^{n'}$, défini dans la démonstration de la Proposition 3.1, et à la variété analytique réelle $X = \{(z, \overline{z}, \overline{D^A f(z)}, f(z)),\ z \in M\} \subset \mathcal{V}^1$. Il existe donc un point $p \in M$ (générique) et une sous-variété algébrique complexe $\widetilde{\mathcal{V}}^1$ définie au voisinage de $P := (p, \overline{p}, \overline{D^A f(p)}, f(p))$ par les équations holomorphes algébriques $v' = \psi(u', z, \zeta, \Delta)$ et $\theta(z, \zeta, \Delta) = 0$, dans le système de coordonnées holomorphes algébriques locales $\mathbb{C}^{n'} \ni w' = (u', v') \in \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b$. De plus, la variété $\widetilde{\mathcal{V}}^1$ vérifie $X \subset \widetilde{\mathcal{V}}^1 \subset \mathcal{V}^1$ au voisinage de P. Soit $\mathcal{X}$ la sous-variété complexe définie comme l'ensemble des points $(z, \overline{w}, \overline{D^A f(w)}, f(z))$, pour z, w proches de p tels que $w \in Q_z$. Comme X est générique dans $\mathcal{X}$, on a $\mathcal{X} \subset \widetilde{\mathcal{V}}^1$. La variété algébrique complexe $\widetilde{\mathcal{V}}^1_p$ introduite à la Section 1.1 est définie par les équations $v' = \psi(u', p, \overline{p}, \overline{D^A f(p)})$. On fixe z_0, w_0, t_0 proches de p tels que $w_0 \in Q_{z_0}$ et $t_0 \in Q_{w_0}$. Soit $\widetilde{\mathcal{V}}^1_{(w_0,t_0)}$ la variété algébrique complexe passant par $f(w_0)$ et définie par les équations $v'_l = \psi_l(u', w_0, \overline{t_0}, \overline{D^A f(t_0)})$, $l = 1, \ldots, b$. Les opérateurs

$$\mathcal{K}_j = \frac{\partial}{\partial u'_j} + \sum_{l=1}^{b} \frac{\partial \psi_l}{\partial u'_j}(u', w_0, \overline{t_0}, \overline{D^A f(t_0)}) \frac{\partial}{\partial v'_l}, \quad j = 1, \ldots, a,$$

forment une base des opérateurs holomorphes tangents à $\widetilde{\mathcal{V}}^1_{(w_0,t_0)}$. Vu la Remarque 3.2 (pour $\omega = z_0$) et vu que $\widetilde{\mathcal{V}}^1 \subset \mathcal{V}^1$, les polynômes $P'_l(\cdot, \overline{f(z_0)})$ s'annulent sur $\widetilde{\mathcal{V}}^1_{(w_0,t_0)}$. Donc $\mathcal{K}^\beta P'_l(\cdot, \overline{f(z_0)})|_{f(w_0)} = 0$ pour tout $\beta \in \mathbb{N}^a$. On réécrit ces équations (après conjugaison) sous la forme

$$\mathcal{G}^\beta_l(\overline{w_0}, t_0, \overline{f(w_0)}, D^A f(t_0), f(z_0)) = 0,$$

où les $\mathcal{G}^\beta_l$ sont algébriques complexes. Comme dans la démonstration de la Proposition 3.1, on peut se ramener par nœthérianité à un nombre fini d'équations, notées $\mathcal{G}(\overline{w_0}, t_0, \overline{f(w_0)}, D^A f(t_0), f(z_0)) = 0$. Dans $\mathbb{C}^{3n+2\kappa(A)+n'}$ muni des coordonnées $(z, \zeta, t, \Delta, D, w')$, on considère l'ensemble algébrique complexe $\mathcal{V}^2$ défini au voisinage du point $(p, \overline{p}, p, \overline{D^A f(p)}, D^A f(p), p')$ par les équations $v' = \psi(u', z, \zeta, \Delta)$ et $\mathcal{G}(\zeta, t, \Delta, D, w') = 0$. Par hypothèse, la fibre

$\mathcal{V}_p^2$ de $\mathcal{V}^2$ au-dessus du point $(p, \overline{p}, p, \overline{D^A f(p)}, D^A f(p))$ est de dimension zéro. Comme dans la démonstration de la Proposition 3.1, on en déduit que

$$f(z) = \mathcal{B}(z, \overline{w}, t, \overline{D^A f(w)}, D^A f(t)), \tag{4.2}$$

où $\mathcal{B}$ est une application holomorphe algébrique et où $w \in Q_z$ et $t \in Q_w$. $\square$

Proposition 4.3. *Si M est minimale en p et si l'application holomorphe f vérifie (4.1), f est algébrique.*

Démonstration. Nous procédons par une légère généralisation de la méthode utilisée pour démontrer la Proposition 3.4 (voir aussi [**4, 76**]). Dans la suite, tous nos raisonnements seront localisés en q lorsqu'il s'agit de M (dans $\mathbb{C}^n$), et en q^μ lorsqu'il s'agit de M^μ (dans $\mathbb{C}^{n\mu}$).

Remarquons que $w \in Q_z$ et $t \in Q_w$, si et seulement si, $(\bar{t}, w, \bar{z}) \in M^3$. Ainsi, (4.1) s'écrit

$$f^*(Z_3) = \mathcal{B}(Z_3, Z_2, Z_1, D^A f(Z_2), D^A f^*(Z_1)), \quad (Z_1, Z_2, Z_3) \in M^3.$$

Puis, en appliquant les opérateurs holomorphes tangents à M^3, on obtient l'analogue de (3.8) :

$$D^B f^*(Z_3) = \mathcal{B}_3^B(Z_1, Z_2, Z_3, D^{A+B} f(Z_2), D^{A+B} f^*(Z_1)), \quad (Z_1, Z_2, Z_3) \in M^3,$$

où $\mathcal{B}_3^B$ est holomorphe algébrique. Ensuite, on montre par récurrence sur $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ l'analogue de (3.9), c'est-à-dire, pour tout $B' \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} D^{B'} f^{*\mu}(Z_\mu) = \mathcal{B}_\mu^{B'}(Z_1, \dots, Z_\mu, D^{(\mu-2)A+B'} f(Z_2), D^{(\mu-2)A+B'} f^*(Z_1)),& \\ (Z_1, \dots, Z_\mu) \in M^\mu,& \end{aligned} \tag{4.3}$$

où $\mathcal{B}_\mu^{B'}$ est holomorphe algébrique. Enfin, la minimalité de M implique que $\pi_{\mu+1}|_{M^{\mu+1}_{(\bar{q},q)}}$ est de rang n, où $M^{\mu+1}_{(\overline{w},z)} := M^{\mu+1} \cap \pi_1^{-1}(\overline{w}) \cap \pi_2^{-1}(z)$. Notons ψ' son inverse à droite sur le voisinage U' de q dans $\mathbb{C}^n$. Finalement, (4.3) donne, pour $\mu + 1$, $B' = 0$ et $(Z_1, \dots, Z_{\mu+1}) = \psi'(Z_{\mu+1})$,

$$\begin{aligned} f^{*\mu+1}(Z_{\mu+1}) = \mathcal{B}^0_{\mu+1}(\bar{q}, q, \psi_3'(Z_{\mu+1}), \dots, \psi_\mu'(Z_{\mu+1}), Z_{\mu+1},& \\ D^{(\mu-1)A} f(q), \overline{D^{(\mu-1)A} f(q)}), \quad Z_{\mu+1} \in U'^{*\mu+1},& \end{aligned}$$

et on conclut que $f^{*\mu+1}$ est algébrique sur $U'^{*\mu+1}$, et donc que f est algébrique sur U. $\square$

Fin de la démonstration du Théorème 1.6. On peut appliquer la Proposition 4.1 ; puis, comme M est minimale, la Proposition 4.3 permet alors de conclure que f est algébrique. $\square$

4.2. Vérification des exemples

Cette section détaille les calculs qui permettent de vérifier les exemples donnés à la Section 1.3.

Vérification de l'Exemple 1.9. On considère $M : z_1 = \overline{z}_1 + iz_2\overline{z}_2 \subset \mathbb{C}^2_z$, $M' : P'(Z, \overline{Z}) = \overline{Z}_1 - Z_1 + iZ_2\overline{Z}_2 + iZ_2^2\overline{Z}_3\overline{Z}_4 + i\overline{Z}_2^2 Z_3Z_4 = 0 \subset \mathbb{C}^4_Z$ et $f : (z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_2, 0, 0)$. L'opérateur

$$\mathcal{L}(w) = \frac{\partial}{\partial w_2} + i\overline{z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}$$

forme une base des opérateurs holomorphes tangents à Q_z. Calculons les fonctions définissantes de $\mathcal{V}^1$. Tout d'abord,

$$P'(f(w), \overline{Z}) = \overline{Z}_1 - w_1 + iw_2\overline{Z}_2 + iw_2^2\overline{Z}_3\overline{Z}_4.$$

Puis, les dérivées successives de cette fonction par $\mathcal{L}$ sont :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}P'(f(w), \overline{Z}) &= -i\overline{z}_2 + i\overline{Z}_2 + 2iw_2\overline{Z}_3\overline{Z}_4 \ ; \\ \mathcal{L}^2P'(f(w), \overline{Z}) &= 2i\overline{Z}_3\overline{Z}_4 \ ; \\ \mathcal{L}^\alpha P'(f(w), \overline{Z}) &= 0, \quad \text{pour tout } \alpha \geq 3. \end{aligned}$$

Les équations définissantes de $\mathcal{V}^1 \subset \mathbb{C}^3_{(z,\zeta,Z)}$ sont donc :

$$\begin{cases} Z_1 - \zeta_1 - i\zeta_2 Z_2 - i\zeta_2^2 Z_3Z_4 = 0 \\ iz_2 - iZ_2 - 2i\zeta_2 Z_3Z_4 = 0 \\ -2iZ_3Z_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} Z_1 = \zeta_1 + i\zeta_2 Z_2 \\ Z_2 = z_2 \\ Z_3 = 0 \text{ ou } Z_4 = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout point $p \in M$ (c'est-à-dire, $p_1 = \overline{p}_1 + ip_2\overline{p}_2$), la première variété caractéristique $\mathcal{V}^1_p$ est le sous-ensemble algébrique complexe définie par :

$$Z_1 = p_1, \quad Z_2 = p_2 \quad \text{et} \quad (Z_3 = 0 \text{ ou } Z_4 = 0),$$

de dimension 1 en $f(p)$. Par ailleurs, le sous-ensemble algébrique complexe $\widetilde{\mathcal{V}}^1_p$ (voir la Section 1.1) est défini par :

$$Z_1 = p_1, \quad Z_2 = p_2 \quad \text{et} \quad Z_3 = Z_4 = 0 \ ;$$

nécessairement, la seconde variété caractéristique $\mathcal{V}^2_p$ est réduite au singleton $\{f(p)\}$, et sa dimension en $f(p)$ est 0.

Revenons au sous-ensemble algébrique complexe $\mathcal{V}^1$ et notons $\mathcal{V}^{1,1}$ (resp. $\mathcal{V}^{1,2}$) la composante irréductible associée à l'équation $Z_3 = 0$ (resp. $Z_4 = 0$). L'opérateur $\mathcal{K}(W) = \partial/\partial W_4$ forme une base des opérateurs holomorphes tangents à $\mathcal{V}^{1,1}_p := \{(p_1, p_2, 0, W_4) : W \in \mathbb{C}\}$. Appliquant l'opérateur $\mathcal{K}$ à la fonction

$$P'(W, \overline{Z}) = \overline{Z}_1 - W_1 + iW_2\overline{Z}_2 + iW_2^2\overline{Z}_3\overline{Z}_4 + i\overline{Z}_2^2 W_3W_4,$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}P'(W,\overline{Z}) &= i\overline{Z}_2^2W_3\ ; \\ \mathcal{K}^\beta P'(W,\overline{Z}) &= 0, \qquad \text{pour tout } \beta \geq 2. \end{aligned}$$

En évaluant ces équations au point $W = f(p)$, on obtient que le sous-ensemble algébrique complexe $S'(\mathcal{V}_p^{1,1})$ est défini par :

$$Z_1 - \overline{p}_1 - i\overline{p}_2Z_2 - i\overline{p}_2^2Z_3Z_4 = 0,$$

où S' désigne la réflexion de Segre par rapport à M', associée au couple (p', p') (voir la Section 2.3). De même, pour la composante irréductible $\mathcal{V}_p^{1,2}$ et l'opérateur holomorphe tangent $\mathcal{J}(W) = \partial/\partial W_3$, on obtient que $S'(\mathcal{V}_p^{1,2})$ est défini par :

$$Z_1 - \overline{p}_1 - i\overline{p}_2Z_2 - i\overline{p}_2^2Z_3Z_4 = 0.$$

Finalement, le sous-ensemble algébrique complexe $\mathcal{W}_p^2 = \mathcal{V}_p^1 \cap S'(\mathcal{V}_p^{1,1}) \cap S'(\mathcal{V}_p^{1,2})$ est défini par :

$$\begin{cases} Z_1 = p_1, \quad Z_2 = p_2, \quad Z_3Z_4 = 0, \\ Z_1 = \overline{p}_1 + i\overline{p}_2Z_2 + i\overline{p}_2^2Z_3Z_4 = p_1. \end{cases}$$

Donc, $\mathcal{W}_p^2 = \mathcal{V}_p^1$ et sa dimension en $f(p)$ est 1. □

Vérification de l'Exemple 1.10. On considère la même variété M, et donc le même opérateur holomorphe $\mathcal{L}$, que dans l'Exemple 1.9 ; par contre : $M' : P'(Z,\overline{Z}) = \overline{Z}_1 - Z_1 + iZ_2\overline{Z}_2 + iZ_2^2\overline{Z}_3\overline{Z}_4 + i\overline{Z}_2^2Z_3Z_4 + iZ_3^2\overline{Z}_5^2 + i\overline{Z}_3^2Z_5^2 + iZ_3^3\overline{Z}_4^3 + i\overline{Z}_3^3Z_4^3 = 0 \subset \mathbb{C}_Z^5$ et $f : (z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_2, 0, 0, 0)$. On a :

$$\begin{aligned} P'(f(w),\overline{Z}) &= \overline{Z}_1 - w_1 + iw_2\overline{Z}_2 + iw_2^2\overline{Z}_3\overline{Z}_4\ ; \\ \mathcal{L}P'(f(w),\overline{Z}) &= -i\overline{z}_2 + i\overline{Z}_2 + 2iw_2\overline{Z}_3\overline{Z}_4\ ; \\ \mathcal{L}^2P'(f(w),\overline{Z}) &= 2i\overline{Z}_3\overline{Z}_4\ ; \\ \mathcal{L}^\alpha P'(f(w),\overline{Z}) &= 0, \qquad \text{pour tout } \alpha \geq 3. \end{aligned}$$

Ainsi, les équations définissantes de $\mathcal{V}^1 \subset \mathbb{C}^3_{(z,\zeta,Z)}$ sont les mêmes que pour l'Exemple 1.9, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} Z_1 = \zeta_1 + i\zeta_2Z_2 \\ Z_2 = z_2 \\ Z_3 = 0 \text{ ou } Z_4 = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, $\mathcal{V}_p^1$ est définie par :

$$Z_1 = p_1, \quad Z_2 = p_2 \quad \text{et} \quad (Z_3 = 0 \text{ ou } Z_4 = 0),$$

et est donc de dimension 2 en $f(p)$. En outre, $\widetilde{\mathcal{V}}_p^1$ est défini par : $Z_1 = p_1$, $Z_2 = p_2$ et $Z_3 = Z_4 = 0$, et est donc de dimension 1. L'opérateur holomorphe

$\mathcal{K} = \partial/\partial W_5$ tangent à $\widetilde{\mathcal{V}}_p^1$ appliqué à la fonction

$$(4.4)\quad P'(W,\overline{Z}) = \overline{Z}_1 - W_1 + iW_2\overline{Z}_2 + iW_2^2\overline{Z}_3\overline{Z}_4 + i\overline{Z}_2^2W_3W_4 + iW_3^2\overline{Z}_5^2 + i\overline{Z}_3^2W_5^2 + iW_3^3\overline{Z}_4^3 + i\overline{Z}_3^3W_4^3$$

donne

$$\begin{aligned} \mathcal{K}P'(W,\overline{Z}) &= 2i\overline{Z}_3^2W_5 \ ; \\ \mathcal{K}^2P'(W,\overline{Z}) &= 2i\overline{Z}_3^2 \ ; \\ \mathcal{K}^\beta P'(W,\overline{Z}) &= 0, \quad \text{pour tout } \beta \geq 3. \end{aligned}$$

En évaluant ces équations au point $W = f(p)$, on obtient que $S'(\widetilde{\mathcal{V}}_p^1)$ est défini par : $Z_1 = \overline{p}_1 + i\overline{p}_2Z_2$, $Z_3 = 0$. Au total, $\mathcal{V}_p^2 = \widetilde{\mathcal{V}}_p^1$ est de dimension 1.

Comme dans l'Exemple 1.9, notons $\mathcal{V}^{1,1}$ (resp. $\mathcal{V}^{1,2}$) la composante irréductible de $\mathcal{V}^1$ associée à l'équation $Z_3 = 0$ (resp. $Z_4 = 0$). La base des opérateurs holomorphes tangents à $\mathcal{V}^{1,1}$ est composée ici de deux opérateurs, par exemple $\mathcal{K}_1 = \partial/\partial W_4$ et $\mathcal{K}_2 = \partial/\partial W_5$. En les appliquant à (4.4), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{(1,0)}P'(W,\overline{Z}) &= i\overline{Z}_2^2W_3 + 3i\overline{Z}_3^3W_4^2 \ ; \\ \mathcal{K}^{(2,0)}P'(W,\overline{Z}) &= 6i\overline{Z}_3^3W_4 \ ; \\ \mathcal{K}^{(3,0)}P'(W,\overline{Z}) &= 6i\overline{Z}_3^3 \ ; \\ \mathcal{K}^{(0,1)}P'(W,\overline{Z}) &= 2i\overline{Z}_3^2W_5 \ ; \\ \mathcal{K}^{(0,2)}P'(W,\overline{Z}) &= 2i\overline{Z}_3^2 \ ; \\ \mathcal{K}^{\beta}P'(W,\overline{Z}) &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Ceci implique que $S'(\mathcal{V}_p^{1,1})$ est défini par : $Z_1 = \overline{p}_1 + i\overline{p}_2Z_2$, $Z_3 = 0$. Pour $\mathcal{V}^{1,2}$, et en utilisant les opérateurs $\mathcal{J}_1 = \partial/\partial W_3$ et $\mathcal{J}_2 = \partial/\partial W_5$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{(1,0)}P'(W,\overline{Z}) &= i\overline{Z}_2^2W_4 + 2iW_3\overline{Z}_5^2 + 3iW_3^2\overline{Z}_4^3 \ ; \\ \mathcal{J}^{(2,0)}P'(W,\overline{Z}) &= 2i\overline{Z}_5^2 + 6iW_3\overline{Z}_4^3 \ ; \\ \mathcal{J}^{(3,0)}P'(W,\overline{Z}) &= 6i\overline{Z}_4^3 \ ; \\ \mathcal{J}^{(0,1)}P'(W,\overline{Z}) &= 2i\overline{Z}_3^2W_5 \ ; \\ \mathcal{J}^{(0,2)}P'(W,\overline{Z}) &= 2i\overline{Z}_3^2 \ ; \\ \mathcal{J}^{\gamma}P'(W,\overline{Z}) &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Ceci implique que $S'(\mathcal{V}_p^{1,2})$ est défini par : $Z_1 = \overline{p}_1 + i\overline{p}_2Z_2$, $Z_3 = Z_4 = Z_5 = 0$. Au total, $\mathcal{W}_p^2$ coïncide nécessairement avec le singleton $\{f(p)\}$ et sa dimension est 0. □

Vérification de l'Exemple 1.12. On considère la même variété M, et donc le même opérateur holomorphe $\mathcal{L}$, que dans les Exemples 1.9 et 1.10 ; par contre : $M' : P'(Z,\overline{Z}) = \overline{Z}_1 - Z_1 + iZ_2\overline{Z}_2 + iA(\overline{Z}_4 - \overline{Z}_3 + \overline{Z}_2{}^2B) +$

$i\overline{A}(Z_4 - Z_3 + {Z_2}^2\overline{B}) \subset \mathbb{C}^4_Z$, où $A := Z_4(Z_3 - Z_1{Z_2}^3)$ et $B := Z_4 - Z_3$, et $f : (z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_2, z_1 z_2^3, 0)$. On a :

$$\begin{array}{ll} P'(f(w), \overline{Z}) & = \overline{Z}_1 - w_1 + i w_2 \overline{Z}_2 + i\overline{A}(-w_1 w_2^3 + {w_2}^2\overline{B})\ ; \\ \mathcal{L}P'(f(w), \overline{Z}) & = -i\overline{z}_2 + i\overline{Z}_2 + i\overline{A}(-i\overline{z}_2 w_2^3 - 3w_1 w_2^2 + 2w_2\overline{B})\ ; \\ \mathcal{L}^2 P'(f(w), \overline{Z}) & = i\overline{A}(-6i\overline{z}_2 w_2^2 - 6w_1 w_2 + 2\overline{B})\ ; \\ \mathcal{L}^3 P'(f(w), \overline{Z}) & = i\overline{A}(-18i\overline{z}_2 w_2 - 6w_1)\ ; \\ \mathcal{L}^4 P'(f(w), \overline{Z}) & = 24\overline{A}\overline{z}_2\ ; \\ \mathcal{L}^\alpha P'(f(w), \overline{Z}) & = 0, \quad \text{pour tout } \alpha \geq 5. \end{array}$$

Ainsi, les équations définissantes de $\mathcal{V}_0^1$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1 = 0 \\ Z_2 = 0 \\ AB = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} Z_1 = 0 \\ Z_2 = 0 \\ Z_3 = 0 \text{ ou } Z_4 = 0 \text{ ou } Z_4 = Z_3, \end{array} \right.$$

et celles de $\mathcal{V}_p^1$, $p \in M \setminus \{0\}$, sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1 = p_1 \\ Z_2 = p_2 \\ Z_3 = p_1{p_2}^3 \text{ ou } Z_4 = 0. \end{array} \right.$$

Dans tous les cas (pour tout $p \in M$), la dimension de $\mathcal{V}_p^1$ en $f(p)$ est 1 et celle de $\widetilde{\mathcal{V}}_p^1$ est 0, car $\widetilde{\mathcal{V}}_p^1$ est réduit au singleton $\{(p_1, p_2, p_1{p_2}^3, 0)\}$. Ainsi, pour tout $p \in M$, la dimension de $\mathcal{V}_p^2$ en $f(p)$ est 0.

Soit un point $p \in M \setminus \{0\}$ fixé et notons $\mathcal{V}_p^{1,1}$ (resp. $\mathcal{V}_p^{1,2}$) la composante irréductible de $\mathcal{V}_p^1$ associée à l'équation $Z_3 = p_1{p_2}^3$ (resp. $Z_4 = 0$). En appliquant l'opérateur holomorphe $\mathcal{K} = \partial/\partial W_4$ tangent à $\widetilde{\mathcal{V}}_p^{1,1}$ à la fonction $P'(W, \overline{Z})$, puis en évaluant en $W = f(p)$, on montre que $S'(\mathcal{V}_p^{1,1})$ est défini par : $Z_1 = \overline{p}_1 + i\overline{p}_2 Z_2$, $A = 0$. On obtient les même équations pour $S'(\mathcal{V}_p^{1,2})$, en utilisant l'opérateur $\mathcal{J} = \partial/\partial W_3$. Au total, $\mathcal{W}_p^2 = \mathcal{V}_p^1$ est de dimension 1 (pour $p \neq 0$).

Pour le point $p = 0 \in M$, $\mathcal{V}_0^1$ est la réunion des *trois* composantes irréductibles $\mathcal{V}_0^{1,1}$, $\mathcal{V}_0^{1,2}$ et $\mathcal{V}_0^{1,3}$ associées respectivement aux équations $Z_3 = 0$, $Z_4 = 0$ et $Z_4 = Z_3$. On obtient facilement que $S'(\mathcal{V}_0^{1,1}) = S'(\mathcal{V}_0^{1,2})$ sont définis par : $Z_1 = 0$, $Z_3 Z_4 = 0$. Puis, en appliquant l'opérateur holomorphe $\mathcal{K} = \partial/\partial W_3 + \partial/\partial W_4$ tangent à $\mathcal{V}_0^{1,3}$, on obtient que $S'(\mathcal{V}_0^{1,3})$ est défini par : $Z_1 = 0$, $Z_4 = Z_3$. Au total, $\mathcal{W}_0^2 = \{0\}$ est de dimension 0. $\square$

CHAPITRE 2

Analyticité d'applications CR $\mathcal{C}^\infty$ entre variétés CR analytiques réelles

Soit $f : M \to M'$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ entre une sous-variété analytique réelle générique minimale $M \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de "variété caractéristique" associée aux ensembles M et M' et à l'application f et nous établissons que si elle est de dimension zéro, f est analytique réelle [1].

Rappelons que la présentation détaillée de ce chapitre se trouve dans l'Introduction, page 6. Décrivons brièvement le plan de ce chapitre. Dans la Section 1, nous donnons précisément les notations, les définitions et les énoncés des résultats. La Section 2 expose des notions et résultats préliminaires, qui seront utilisés par la suite. La Section 3 est consacrée à la démonstration de la propriété d'extension méromorphe pour les coefficients des équations polynômiales vérifiées par les fonctions composantes f_j. Dans la Section 4, nous établissons un principe de réflexion "généralisé", qui est un énoncé plus général que notre résultat principal. Dans la Section 5, nous étudions la relation entre les notions de variété caractéristique et de finitude essentielle. Finalement, dans la Section 6, nous donnons les démonstrations des corollaires de notre résultat principal.

1. Enoncés des résultats

Soit $M \subset \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$, $n > 1$, une sous-variété analytique réelle définie dans un voisinage du point $p \in M$ par les équations $r_k(z) = 0$, $k = 1, \ldots, d$, où les r_k sont des fonctions analytiques réelles à valeurs réelles satisfaisant $dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_d \neq 0$ en p ; l'entier d est la codimension de M. Soit T_zM l'espace tangent réel à M en $z \in M$ et $T_z^cM := T_zM \cap i\,T_zM$ l'espace tangent complexe. Nous supposons que la sous-variété M est *de Cauchy-Riemann* (CR) c'est-à-dire, que T_z^cM est de dimension complexe constante, appelée

[1] Les résultats de ce chapitre font l'objet d'un article [28] accepté pour publication dans la revue *Michigan Mathematical Journal*.

dimension CR de M et notée m. Nous écrivons les équations définissantes de M sous la forme habituelle

$$\rho_k(z,\overline{z}) = 0, \quad k = 1,\dots,d,$$

où les ρ_k sont des fonctions holomorphes de $2n$ variables satisfaisant $\rho_k(z,\overline{z}) \in \mathbb{R}$, $k = 1,\dots,d$. Nous supposons de plus que M est *générique*, c'est-à-dire, que $\overline{\partial}\rho_1\wedge\cdots\wedge\overline{\partial}\rho_d \neq 0$ en p, où de façon équivalente, $m = n-d$. La sous-variété M est *minimale* en p (au sens de Tumanov [73]) si elle ne contient pas de sous-variété CR stricte passant par p et de même dimension CR m. Rappelons que puisque M est analytique réelle, elle est minimale en p, si et seulement si, elle est de *type fini* en p au sens de Bloom-Graham [16] ; par conséquent, si M est minimale en p, M est minimale en tout point, en dehors d'un sous-ensemble analytique réel strict. Par le théorème des fonctions implicites holomorphe, nous pouvons écrire les équations de M près de p sous la forme

$$\overline{y_k} = \phi_k(\overline{x}, x, y), \quad k = 1,\dots,d, \tag{1.1}$$

où

$$\mathbb{C}^n \ni z = (x,y) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d \tag{1.2}$$

est un système de coordonnées holomorphes locales près de $p = (x_p, y_p)$ et les $\phi_k(\xi, x, y)$ sont des fonctions holomorphes près de $(\overline{x_p}, x_p, y_p)$ satisfaisant $\phi_k(\overline{x_p}, x, y) \equiv \phi_k(\xi, x_p, y) \equiv y_k$, $k = 1,\dots,d$. Dans la suite, nous utiliserons la notation vectorielle $\phi = (\phi_1,\dots,\phi_d)$. Les opérateurs

$$L_j = \frac{\partial}{\partial \overline{x_j}} + \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \phi_k}{\partial \overline{x_j}}(\overline{x}, x, y)\frac{\partial}{\partial \overline{y_k}}, \quad j = 1,\dots,m,$$

forment une base (commutant) des opérateurs CR de M, à coefficients analytiques réels. Rappelons qu'une fonction $\mathcal{C}^1$ ψ définie sur M est dite *de Cauchy-Riemann* (CR) si $L_j\psi = 0$ sur M, pour tout $j = 1,\dots,m$. Une application est CR si toutes ses fonctions composantes sont CR.

Comme pour M, on définit le sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'} \simeq \mathbb{R}^{2n'}$ dans un voisinage du point $p' \in M'$ par les équations analytiques réelles $\rho'_k(z', \overline{z'}) = 0$, $k = 1,\dots,d'$. Soit $f : M \to M'$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ définie sur un voisinage de p dans M et telle que $f(p) = p'$. Pour tous $k = 1,\dots,d'$, $\alpha \in \mathbb{N}^m$ et pour un point $z' \in \mathbb{C}^{n'}$ fixé, nous pouvons appliquer l'opérateur composé $L^\alpha := L_1^{\alpha_1}\dots L_m^{\alpha_m}$ à la fonction $\mathcal{C}^\infty$ $\rho'_k(z', \overline{f(\cdot)})$ définie sur M :

Définition 1.1. La *variété caractéristique* de f en p est le sous-ensemble analytique complexe $\mathcal{V}_p(f) \subset \mathbb{C}^{n'}$ défini au voisinage de p' par les équations en z',

$$L^\alpha \rho'_k(z', \overline{f(\cdot)})|_p = 0, \quad \text{pour tous } k = 1,\dots,d' \text{ et } \alpha \in \mathbb{N}^m.$$

Remarquons que $p' \in \mathcal{V}_p(f)$, puisque f est CR et $\rho'_k(f(z), \overline{f(z)}) = 0$, pour tous $k = 1, \ldots, d'$ et $z \in M$.

Cette notion de "variété caractéristique" a été introduite par Coupet-Pinchuk-Sukhov [**24**] dans la situation où M est une hypersurface. Nous l'utilisons également au Chapitre 1, en codimension supérieure et dans le cas algébrique (voir la Définition 1.1). La notion de variété caractéristique est reliée à la détermination analytique "partielle" de f par son jet d'ordre A, pour un certain entier $A \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire, la détermination analytique *finie* de certaines fonctions composantes de f en fonction des autres fonctions composantes et du jet d'ordre A de f. Dans le cas où la variété caractéristique est de dimension zéro, nous prouvons que f est déterminée de façon finie et analytique par son jet d'ordre A (voir le Lemme 4.3). Cette condition est satisfaite dans de nombreuses situations connues [**62, 50, 6, 7, 35, 24, 48**], ainsi que dans de nombreux nouveaux cas, en particulier lorsque M et M' sont de dimensions différentes, et même, dans le cas équidimensionnel pour des sous-variétés $M, M' \subset \mathbb{C}^n$ de codimension supérieure.

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème 1.2. *Soit $f : M \to M'$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ entre une sous-variété analytique réelle générique $M \subset \mathbb{C}^n$ et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$, $p \in M$, $p' \in M'$ et $f(p) = p'$. Si M est minimale en p et si la dimension de $\mathcal{V}_p(f)$ en p' est zéro, f est analytique réelle sur un voisinage de p dans M (et se prolonge donc holomorphiquement à un voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$).*

Cet énoncé donne une condition suffisante, qui s'inspire du résultat récent de Coupet-Pinchuk-Sukhov (voir [**24**], Théorème 1), pour l'analyticité d'une application CR $\mathcal{C}^\infty$ $f : M \to M'$ entre une sous-variété analytique réelle générique $M \subset \mathbb{C}^n$ et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. La nouveauté de notre travail réside essentiellement dans le passage en codimension supérieure. La difficulté principale qui en découle est que l'extension holomorphe des fonctions CR sur la sous-variété CR M a lieu sur un domaine de type "wedge", à bord non régulier et dont l'"arête" est M (théorème de Tumanov, voir [**73**]), alors que dans la situation ou M est une hypersurface, le domaine d'extension est régulier de bord M (théorème de Trépreau, voir [**72**]). De par leur géométrie, les wedges sont clairement plus délicats à manipuler que les domaines à bords réguliers et nécessitent des techniques plus élaborées, comme l'utilisation du théorème de l'"edge of the wedge" (voir [**60, 1, 10**]). En outre, les domaines d'extension donnés par [**72, 73**] *dépendent de l'ouvert connexe* de M sur lequel la fonction CR est définie ; pour une hypersurface, il n'y a que deux directions d'extension (côtés) possibles, mais pour une sous-variété de codimension $d \geq 2$, l'ensemble des directions d'extension possibles est isomorphe à la sphère unité de $\mathbb{R}^d$, ce qui complique nettement la situation (voir aussi les remarques 3.9 et 3.10).

La démonstration du Théorème 1.2 est donnée au début de la Section 4 ; elle utilise les résultats des Sections 3 et 4. En fait, nous prouvons à la Section 4 un principe de réflexion "généralisé" (voir le Théorème 4.2), qui est un énoncé plus général que le Théorème 1.2. Ce résultat montre que la relation *fondamentale* $f(M) \subset M'$, équivalente à $\rho'_k(f(z), \overline{f(z)}) = 0$, pour tous $k = 1, \ldots, d'$ et $z \in M$, n'est pas nécessaire. Il est suffisant de supposer que $f : M \to \mathbb{C}^{n'}$ est une application CR $\mathcal{C}^\infty$ qui satisfait un système d'équations de la forme $R_l(f(z), \overline{g(z)}) = 0$, pour tous $l = 1, \ldots, D$ et $z \in M$, où $g = (g_1, \ldots, g_{N'})$ sont des fonctions CR $\mathcal{C}^\infty$ sur M arbitraires et $R_1, \ldots, R_D$ sont des fonctions holomorphes arbitraires de $n' + N'$ variables.

Si M' est une *sous-variété* analytique réelle générique de $\mathbb{C}^{n'}$, la *variété de Segre* de M' associée au point z' proche de p' est la sous-variété complexe $Q'_{z'}$ définie au voisinage de p' par les équations $\rho'_k(\cdot, \overline{z'}) = 0$, $k = 1, \ldots, d'$. (Pour les propriétés de base des variétés de Segre, voir, par exemple, [**67, 74, 39, 35**], et aussi le Chapitre 1, Section 2.2.) La sous-variété M' est dite *essentiellement finie* en p' si l'ensemble analytique complexe $A'_{p'} := \{z' : Q'_{z'} = Q'_{p'}\}$ est de dimension zéro en p' (voir, par exemple, [**39, 6, 35, 7**], et aussi le Chapitre 1, Section 1.2). Le résultat suivant, dû à Baouendi-Jacobowitz-Trèves [**6**], est un corollaire du Théorème 1.2 :

Corollaire 1.3. *Soit $f : M \to M'$ un difféomorphisme CR $\mathcal{C}^\infty$ entre des sous-variétés analytiques réelles génériques $M, M' \subset \mathbb{C}^n$, $p \in M$, $p' \in M'$ et $f(p) = p'$. Si M est minimale en p et si M' est essentiellement finie en p' (ou, de façon équivalente, si M est essentiellement finie en p), f est analytique réelle sur un voisinage de p dans M.*

Le premier résultat dans le cas difféomorphe a été établi par Lewy [**50**] et Pinchuk [**62**]. Ils ont prouvé le *principe de réflexion* suivant : tout difféomorphisme CR $\mathcal{C}^1$ local entre des hypersurfaces analytiques réelles strictement pseudo-convexes est analytique réel. Mentionnons également le principe de réflexion obtenu par Webster [**75**] en utilisant le théorème de l'"edge of the wedge" et les variétés de Segre associées à une hypersurface analytique réelle Levi-non dégénérée. Le principe de réflexion de Lewy-Pinchuk-Webster [**50, 62, 75**] est une conséquence du Corollaire 1.3 dans la situation où f est $\mathcal{C}^\infty$, parce qu'en codimension un, la stricte pseudo-convexité (et plus généralement, la Levi-non dégénérescence) implique à la fois la minimalité et la finitude essentielle. Remarquons que dans ce contexte, le sous-ensemble analytique complexe défini par les équations du premier ordre $L_j \rho'_k(z', \overline{f(\cdot)})|_p = 0$, pour tous $k = 1, \ldots, d'$ et $j = 1, \ldots, m$, est déjà de dimension zéro en p'.

L'énoncé suivant est un corollaire du Théorème 1.2 dans la situation où $M, M' \subset \mathbb{C}^n$ sont des hypersurfaces et f est de *multiplicité finie* ; il a été prouvé par Diederich-Fornæss [35] et Baouendi-Rothschild [7]. Nous nous référons à [7] pour une définition algébrique précise de la multiplicité finie.

Corollaire 1.4. *Soit $f : M \to M'$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ entre des hypersurfaces analytiques réelles $M, M' \subset \mathbb{C}^n$, $p \in M$, $p' \in M'$ et $f(p) = p'$. Si M est minimale en p, si M' est essentiellement finie en p' et si f est de multiplicité finie en p, f est analytique réelle sur un voisinage de p dans M.*

Dans la situation générale définie à la Section 1, f est dite *K-non dégénérée* en p, pour un entier $K > 0$, si l'espace vectoriel complexe engendré par les gradients $\partial/\partial z' \, L^\alpha \rho'_k(z', \overline{f(\cdot)})|_p$ en $z' = p'$, pour $k = 1, \ldots, d'$ et $|\alpha| \leq K$, est tout $\mathbb{C}^{n'}$. L'énoncé suivant, établi dans [48], est un corollaire facile du Théorème 1.2 puisque dans cette situation, le théorème des fonctions implicites holomorphe s'applique :

Corollaire 1.5. *Soit $f : M \to M'$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ entre une sous-variété analytique réelle générique $M \subset \mathbb{C}^n$ et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$, $p \in M$, $p' \in M'$ et $f(p) = p'$. Si M est minimale en p et si f est K-non dégénérée en p, f est analytique réelle sur un voisinage de p dans M.*

En combinant les résultats de ce chapitre (Théorème 1.2) et du Chapitre 1 (Théorème 1.3), nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 1.6. *Soit $f : M \to M'$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ entre une sous-variété algébrique réelle générique $M \subset \mathbb{C}^n$ et un sous-ensemble algébrique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$, $p \in M$, $p' \in M'$ et $f(p) = p'$. Si M est minimale en p et si la dimension de $\mathcal{V}_p(f)$ en p' est zéro, f se prolonge en une application holomorphe algébrique sur un voisinage de p dans M (et se prolonge donc en une application algébrique complexe sur tout $\mathbb{C}^n$).*

(Nous nous référons au Chapitre 1, Section 1.1, pour les définitions ayant trait à l'algébricité.) Ce résultat généralise des situations considérées par d'autres auteurs [68, 5].

2. Préliminaires

Soit $M \subset \mathbb{C}^n$ une sous-variété analytique réelle générique définie près de point $p \in M$ par les équations (1.1) dans le système de coordonnées holomorphes locales (1.2). La variété M peut aussi être définie près de p par les équations

$$\operatorname{Im} y_k = \mathcal{G}_k(x, \overline{x}, \operatorname{Re} y), \quad k = 1, \ldots, d, \tag{2.1}$$

où les $\mathcal{G}_k$ sont des fonctions analytiques réelles à valeurs réelles près de $(x_p, \overline{x_p}, \operatorname{Re} y_p)$ vérifiant $d\mathcal{G}_k|_{(x_p,\overline{x_p},\operatorname{Re} y_p)} = 0$, $k = 1, \ldots, d$. Dans la suite, nous utiliserons la notation vectorielle $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_d)$.

Définition 2.1. Un "*wedge*" associé à la sous-variété M au point $q \in M$ est un domaine de $\mathbb{C}^n$ de la forme

$$\mathcal{W}(\mathcal{N}, C) := \{z \in \mathcal{N} : \ \operatorname{Im} y - \mathcal{G}(x, \overline{x}, \operatorname{Re} y) \in C\}, \tag{2.2}$$

où $\mathcal{N}$ est un voisinage de q dans $\mathbb{C}^n$ suffisamment petit et C est un cône convexe ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ (de sommet 0). L'*arête* (ou "*edge*") de $\mathcal{W}(\mathcal{N}, C)$ est l'ouvert $M \cap \mathcal{N}$ de M.

Le théorème d'extension suivant est bien connu ; nous aurons besoin d'un énoncé précis :

Théorème 2.2 (Tumanov [73]). *Soit q un point de M et V un voisinage de q dans M. Si M est minimale en q, il existe $\mathcal{N} = \mathcal{N}(q, V)$ un voisinage de q dans $\mathbb{C}^n$ et $C = C(q, V)$ un cône convexe ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ tels que toute fonction CR continue sur V s'étend holomorphiquement au wedge $\mathcal{W}(\mathcal{N}, C)$ (cf. figure 3).*

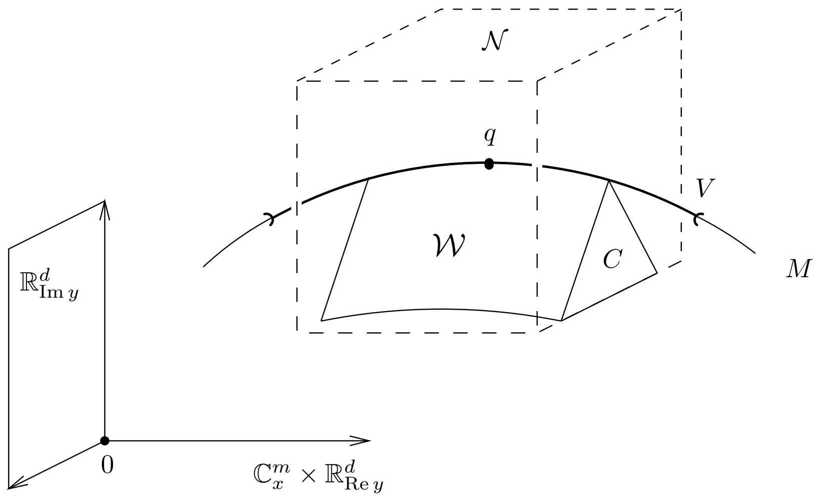

Figure 3. Toute fonction CR continue sur V s'étend holomorphiquement au wedge $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathcal{N}, C)$

Dans le but d'étudier les propriétés d'extension de certaines classes de fonctions définies sur M (voir la Section 3), il est nécessaire de "découper" l'espace affine complexe $\mathbb{C}^n$ en "tranches" : pour $a \in \mathbb{C}^m$ suffisamment proche de x_p, nous noterons $E_a \subset \mathbb{C}^n$ le sous-espace affine complexe $\{x = a\}$ de dimension complexe d. La sous-variété CR $M_a := M \cap E_a$ est analytique réelle, *totalement réelle* (c'est-à-dire, de dimension CR nulle) et de dimension réelle maximale dans E_a. En effet, comme M est générique dans $\mathbb{C}^n$, $M \cap E_a$ est générique dans E_a ; de plus, les équations de $M \cap E_a$ sont $\operatorname{Im} y_k = \mathcal{G}_k(a, \overline{a}, \operatorname{Re} y)$, $k = 1, \ldots, d$, et donc $\operatorname{codim}_{E_a} M \cap E_a = d$. Si $\mathcal{W}$ est un wedge associé à M, $\mathcal{W}_a := \mathcal{W} \cap E_a$ est un wedge associé à M_a dans E_a.

L'application $s : z \mapsto (x, \overline{\phi(\overline{x}, x, y)})$ définie près de p est analytique réelle en x et anti-holomorphe en y. De plus, s est une involution sur un voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$ et M est invariante par s ; nous dirons donc que s est une *symétrie par rapport à M*, analytique réelle et partiellement anti-holomorphe. Les deux assertions précédentes caractérisant une symétrie par rapport à M sont faciles à vérifier :

(i) On a $\phi(\overline{x}, x, \overline{\phi(\overline{x}, x, y)}) - \overline{y} \equiv 0$, car pour $x \in \mathbb{C}^m$ proche de x_p fixé, cette application est anti-holomorphe et s'annule sur la sous-variété générique $M_x \subset E_x$;

(ii) Vu (1.1), il est trivial que s laisse M invariante.

Remarque 2.3. Nous pouvons donner une autre construction, plus géométrique, de la symétrie s. Soit $a \in \mathbb{C}^m$ suffisamment proche de x_p. Il existe un voisinage V^R (resp. V^I) de $\operatorname{Re} y_p$ (resp. $\operatorname{Im} y_p$) dans $\mathbb{R}^d$, tel que M_a est définie sous la forme d'un graphe $\operatorname{Im} y = \mathcal{G}(a, \overline{a}, \operatorname{Re} y)$ dans $V := V^R + i\, V^I$. Alors, l'application

$$\begin{array}{rcll} \Phi_a : & V^R \subset \mathbb{R}^d & \longrightarrow & M_a \subset E_a \simeq \mathbb{C}^d \\ & r & \longmapsto & r + i\, \mathcal{G}(a, \overline{a}, r) \end{array}$$

est un difféomorphisme analytique réel entre V^R et M_a. Par complexification, nous définissons l'extension holomorphe de Φ_a à l'ouvert V (que nous notons toujours Φ_a par abus de notation),

$$\begin{array}{rcll} \Phi_a : & V \subset \mathbb{C}^d & \longrightarrow & E_a \simeq \mathbb{C}^d \\ & \eta & \longmapsto & y = \eta + i\, \mathcal{G}(a, \overline{a}, \eta), \end{array}$$

qui est biholomorphe et analytique réelle par rapport à a. Remarquons qu'après le changement de variables holomorphe $\Phi_a^{-1} : E_a \simeq \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d, y \mapsto \eta$, analytique réel par rapport à a, M_a est définie dans $V \subset \mathbb{C}^d$ par $\operatorname{Im} \eta = 0$.

Nous définissons alors la symétrie σ par rapport à M par $\sigma : z \mapsto (x, \Phi_x(\overline{\Phi_x^{-1}(y)}))$. Cette symétrie σ a les mêmes propriétés que s. En fait, $\sigma \equiv s$, puisque pour tout x fixé, ces deux applications sont anti-holomorphes dans E_x et coïncident sur la sous-variété analytique réelle générique M_x.

Pour un wedge $\mathcal{W}$ associé à M, le *wedge symétrique* de $\mathcal{W}$ est par définition $\mathcal{W}^s := s(\mathcal{W})$. Ce n'est pas exactement un wedge, selon la Définition 2.1, mais il contient de "vrais" wedges de cônes arbitrairement grands mais toujours strictement inclus dans $-C$ (voir [42], p. 170). Remarquons que la relation réciproque $\mathcal{W} = s(\mathcal{W}^s)$ est également vraie, du moment que $\mathcal{W}$ est suffisamment petit.

Terminons ces définitions et résultats préliminaires par l'observation suivante :

Lemme 2.4. *Soient $M \subset \mathbb{C}^n$ une sous-variété analytique réelle, générique, minimale en $p \in M$, et ϕ une fonction CR $\mathcal{C}^\infty$ sur M. Alors, ϕ est analytique réelle au voisinage de p dans M, si et seulement si, ϕ est holomorphe au voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$.*

Démonstration. La condition suffisante est triviale. Pour la condition nécessaire, écrivons les équations définissantes de M près de p sous la forme (2.1), et notons $M_p \subset M$ la sous-variété analytique réelle, totalement réelle de dimension maximale et passant par p, définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Im} y = \mathcal{G}(x, \overline{x}, \operatorname{Re} y), \\ \operatorname{Im} x = \operatorname{Im} x_p. \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Il est clair que $\phi|_{M_p}$ se prolonge en une fonction $\widetilde{\phi}_p$ holomorphe dans un voisinage Ω de p dans $\mathbb{C}^n$. (En effet, M_p est biholomorphe à $\mathbb{R}^n$.) D'autre part, comme ϕ est CR, elle se prolonge en une fonction $\widetilde{\phi}$ holomorphe sur le wedge $\mathcal{W}$ associé à (p, M) (voir le Théorème 2.2). On a donc deux fonctions holomorphes $\widetilde{\phi}_p|_{\mathcal{W}\cap\Omega}$ et $\widetilde{\phi}|_{\mathcal{W}\cap\Omega}$ définies sur le wedge $\mathcal{W} \cap \Omega$ et coïncidant sur la sous-variété $M_p \cap \Omega$, totalement réelle de dimension maximale, contenue dans l'edge de $\mathcal{W} \cap \Omega$. Par le principe d'unicité au bord (voir [**60**, **20**]), ces deux fonctions coïncident alors sur tout $\mathcal{W} \cap \Omega$, ce qui prouve par continuité au bord que $\widetilde{\phi}_p|_{M\cap\Omega} \equiv \widetilde{\phi}|_{M\cap\Omega} \equiv \phi|_{M\cap\Omega}$; d'où le prolongement holomorphe $\widetilde{\phi}_p$ de ϕ dans le voisinage Ω de p dans $\mathbb{C}^n$. □

3. Extension méromorphe

3.1. Définition et premières propriétés de l'anneau de fonctions $\mathcal{R}_p(M)$

Soit $\mathcal{R}_p(M)$ l'anneau des germes en p des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur M de la forme

$$h(z) = H(z, \overline{z}, \overline{g(z)}), \tag{3.1}$$

où $g = (g_1, \ldots, g_K)$ sont des germes en p de fonctions CR $\mathcal{C}^\infty$ sur M et H est une fonction holomorphe près de $(p, \overline{p}, \overline{g(p)})$. Remarquons que les opérateurs CR L_j sont des dérivations de l'anneau $\mathcal{R}_p(M)$. Soit h un représentant d'un germe de $\mathcal{R}_p(M)$ défini sur un voisinage ouvert connexe U de p dans M. Supposons que M est minimale en p et soient respectivement $\mathcal{U} := \mathcal{N}(p, U)$, $\Gamma := C(p, U)$ et $\mathcal{W} := \mathcal{W}(\mathcal{U}, \Gamma)$ le voisinage de p, le cône et le wedge donnés par le théorème de Tumanov (voir le Théorème 2.2). Soient $U' := M \cap \mathcal{U} \subset U$ l'edge et $\mathcal{W}^s := s(\mathcal{W})$ le wedge symétrique (voir la Section 2).

Nous pouvons maintenant énoncer un premier résultat d'extension :

Lemme 3.1. *Si M est minimale en p, la fonction h s'étend en une fonction analytique réelle $\widetilde{h}$ dans $\mathcal{W}$ (resp. $\widetilde{h}^s$ dans $\mathcal{W}^s$), $\mathcal{C}^\infty$ jusqu'à l'edge U', et anti-holomorphe (resp. holomorphe) par rapport à y.*

Démonstration. Tout d'abord, nous prolongeons h à $\mathcal{W}$ en utilisant l'extension holomorphe à un wedge des fonctions CR. Puis, nous prouvons l'extension à $\mathcal{W}^s$; cette propriété est l'analogue du principe de symétrie de Schwarz pour des wedges dans $\mathbb{C}^n$, au lieu de demi-domaines dans $\mathbb{C}$.

Etape 1 : Extension à un wedge des fonctions CR. Supposons que la fonction h est donnée par (3.1), pour $z \in U$. Puisque chaque g_j est une fonction CR sur U, elle admet un prolongement holomorphe $\widetilde{g}_j$ à $\mathcal{W}$ (voir le Théorème 2.2). Alors, en notant $\widetilde{g} = (\widetilde{g}_1, \dots, \widetilde{g}_K)$, l'extension de h à $\mathcal{W}$ donnée par

$$\widetilde{h}(z) := H(s(z), \overline{z}, \overline{\widetilde{g}(z)})$$

est clairement analytique réelle et anti-holomorphe par rapport à y.

Etape 2 : Principe de réflexion. L'extension de h à $\mathcal{W}^s$ donnée par

$$\widetilde{h}^s(z) := \widetilde{h}(s(z)) \tag{3.2}$$

est analytique réelle et holomorphe par rapport à y. □

Les fonctions de $\mathcal{R}_p(M)$ ne sont ni CR, ni analytiques réelles. Néanmoins, elles vérifient le principe d'unicité au bord suivant :

Lemme 3.2. *Soit h définie comme ci-dessus et supposons que M est minimale en p. Si h s'annule sur un ouvert non vide V de U', $h \equiv 0$ sur U'.*

Démonstration. D'après le Lemme 3.1, h admet une extension $\widetilde{h}$ dans $\mathcal{W}$, analytique réelle et anti-holomorphe par rapport à y. Bien que $\widetilde{h}$ s'annule sur la sous-variété générique V, cela ne prouve pas que $\widetilde{h} \equiv 0$, car le principe d'unicité sur une sous-variété générique du bord (du type [**60, 20**]) est faux pour les fonctions *analytiques réelles* de plusieurs variables. Soit V' la projection de V sur $\mathbb{C}^m_x$ par $\pi : (x, y) \mapsto x$. Pour tout $a \in V'$, $\widetilde{h}$ est anti-holomorphe dans $\mathcal{W}_a$ et s'annule sur $V \cap E_a$, qui est un ouvert non vide de M_a, sous-variété totalement réelle de dimension maximale de E_a. Le principe d'unicité au bord (voir [**60, 20**]) implique alors que $\widetilde{h}|_{\mathcal{W}_a} \equiv 0$. Puisque M est un graphe au-dessus de $\mathbb{C}^m_x \times \mathbb{R}^d_{\mathrm{Re}\, y}$ (voir (2.1)), V' est un ouvert non vide de $\mathbb{C}^m_x$. Par conséquent, lorsque a décrit V', $\mathcal{W}_a$ remplit un ouvert de $\mathcal{W}$. Ainsi, la fonction analytique réelle $\widetilde{h}$ s'annule sur un ouvert non vide de $\mathcal{W}$; elle s'annule donc identiquement sur $\mathcal{W}$. Par continuité jusqu'à l'edge, $h|_{U'} \equiv 0$. □

Corollaire 3.3. *Si M est minimale en p, $\mathcal{R}_p(M)$ est un anneau intègre.*

Démonstration. Soient h_1 et h_2 des germes de fonctions de $\mathcal{R}_p(M)$ tels que $h_1 h_2 = 0$. Supposons que $h_1 \not\equiv 0$ au voisinage de p dans M, c'est-à-dire, que *pour tout* voisinage W de p dans M, $h_1|_W \not\equiv 0$. Il existe alors un ouvert non vide V de M, suffisamment proche de p, tel que h_2 s'annule sur V. Finalement, le Lemme 3.2 s'applique et $h_2 \equiv 0$ au voisinage de p dans M. □

3.2. Enoncé de la propriété d'extension méromorphe

Soit $\widehat{\mathcal{R}}_p(M)$ le corps quotient de l'anneau intègre $\mathcal{R}_p(M)$ (voir le Corollaire 3.3) et $\mathcal{S}_p(M)$ le sous-corps de $\widehat{\mathcal{R}}_p(M)$ constitué des fonctions CR sur M, en dehors de leur lieu singulier. Plus précisément, les éléments de $\mathcal{S}_p(M)$ sont de la forme $\psi = h_1/h_2$ où $h_1, h_2 \in \mathcal{R}_p(M)$, $h_2 \not\equiv 0$ et ψ est CR sur $M \setminus \Sigma$ près de p avec $\Sigma := \{z \in M \text{ près de } p : h_2(z) = 0\}$. Par le principe d'unicité ci-dessus (voir le Lemme 3.2), Σ est un fermé *d'intérieur vide* de M. Pour le vérifier, raisonnons par l'absurde. Si l'intérieur $\mathrm{Int}(\Sigma)$ de Σ n'était pas vide, nous pourrions appliquer le Lemme 3.2 à un point q du bord $\partial(\mathrm{Int}(\Sigma))$ de $\mathrm{Int}(\Sigma)$. Ceci prouverait que Σ contient un voisinage de q dans M, et contredirait le fait que $q \in \partial(\mathrm{Int}(\Sigma))$.

Le résultat principal de la Section 3 est le suivant :

Proposition 3.4. *Si M est minimale en p, tout germe $\psi \in \mathcal{S}_p(M)$ s'étend méromorphiquement à un voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$.*

La démonstration (technique) de cette proposition est détaillée dans les Sections 3.3–3.5 ci-dessous.

Dans la situation où ψ n'a pas de singularité en p, nous avons le résultat plus fort suivant :

Proposition 3.5. *Si M est minimale en p, tout germe $\psi \in \mathcal{R}_p(M)$, CR sur un voisinage de p dans M, s'étend holomorphiquement à un voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$.*

La démonstration de ce résultat est bien plus simple (voir la Section 3.5) que celle de la Proposition 3.4. Toutefois, nous avons réellement besoin de la Proposition 3.4 pour démontrer le Théorème 1.2 (voir la Remarque 4.5, qui souligne la nécessité de diviser des éléments de $\mathcal{R}_p(M)$ entre eux, dans la démonstration du Lemme 4.4).

3.3. Théorème de l'"edge of the wedge" et méromorphie séparée

Proposition 3.6. *Soit $\psi \in \mathcal{S}_p(M)$. Si M est minimale en p, il existe un wedge $\mathcal{W}^s$ en p tel que ψ s'étend méromorphiquement à $\mathcal{W}^s$.*

Démonstration. La démonstration de cette proposition est divisée en trois étapes.

Etape 1 : Théorème de Tumanov et principe de réflexion. Soient h_1 et $h_2 \not\equiv 0$ des représentants de germes de $\mathcal{R}_p(M)$ définis dans un voisinage ouvert connexe de p dans M. Quitte à réduire le voisinage de p considéré, on peut supposer que h_1 et h_2 sont définis sur tout M et que M est minimale en tout point $q \in M$; en effet, la minimalité est une propriété ouverte sur une sous-variété CR analytique réelle (car dans ce cas, être minimale équivaut à être de type fini, au sens [16] ; voir aussi la Section 1). Soit $\Sigma := \{z \in M : h_2(z) = 0\}$ et supposons que le quotient $\psi := h_1/h_2$ est CR sur $M \setminus \Sigma$; en d'autres termes, $\psi \in \mathcal{S}_p(M)$. Soit $U \Subset M$ un voisinage ouvert, connexe et relativement compact de p dans M. Comme à la Section 3.1, soient respectivement $\mathcal{U}$, Γ, $\mathcal{W}$, U' et $\mathcal{W}^s$ le voisinage de p, le cône, le wedge, l'edge et le wedge symétrique associés à (p, U) par le théorème de Tumanov (voir le Théorème 2.2).

D'après le Lemme 3.1, h_j admet une extension $\widetilde{h}_j^s$ à $\mathcal{W}^s$, qui est analytique réelle et holomorphe par rapport à y, pour $j = 1, 2$. Par conséquent, $m := \widetilde{h}_1^s/\widetilde{h}_2^s$ est une extension de ψ à $\mathcal{W}^s$, méromorphe par rapport à y.

Etape 2 : Théorème de l'"edge of the wedge" dans chaque tranche. Nous utilisons les notations suivantes : pour $a \in \mathbb{C}^m$, $E_a := \{x = a\}$ désigne une "tranche" de $\mathbb{C}^n$ comme à la Section 2 ; $\Delta^k(a, \rho)$ désigne le polydisque ouvert de $\mathbb{C}^k$ de centre a et de rayon $\rho > 0$ et si $a = 0$, nous écrivons $\Delta_\rho^k := \Delta^k(0, \rho)$; $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{D})$, $\mathcal{O}(\mathcal{D})$ et $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ désignent respectivement l'anneau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, holomorphes et méromorphes sur le domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^n$.

Soit q un point de $U' \setminus \Sigma$ et soit V un voisinage de q dans $U' \setminus \Sigma$. Puisque M est minimale en q (voir l'étape 1), le théorème de Tumanov (voir le Théorème 2.2) donne un voisinage $\mathcal{V} := \mathcal{N}(q, V)$ de q, un cône convexe ouvert $\Lambda := C(q, V)$ et un wedge $\mathcal{W}^* := \mathcal{W}(\mathcal{V}, \Lambda)$ d'edge $V' := M \cap \mathcal{V}$, tels que toute fonction CR continue sur V s'étend holomorphiquement à $\mathcal{W}^*$. En particulier, ψ s'étend holomorphiquement à $\mathcal{W}^*$ (cf. figure 4) ; par abus de notation, nous notons aussi m cette extension.

Par un souci de simplification des notations, nous supposerons que q est l'origine 0. Nous pouvons de plus supposer que m n'a pas de singularité dans le wedge $\mathcal{W}^{s\prime} := \mathcal{W}^s \cap \mathcal{V}$ (quitte à réduire $\mathcal{V}$). Soit $\Gamma^\sharp$ un sous-cône strict, arbitrairement grand, de l'enveloppe convexe de $-\Gamma \cup \Lambda$ et soit $\mathcal{W}^\sharp$ le wedge $\mathcal{W}(\mathcal{V}, \Gamma^\sharp)$. (Rappelons que $-\Gamma$ est le cône du wedge $\mathcal{W}^s$.) Pour tout

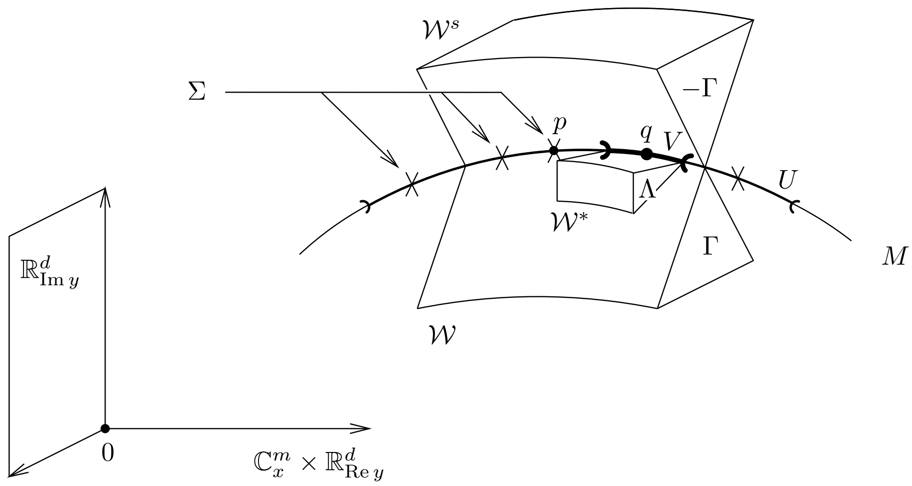

FIGURE 4. La fonction ψ s'étend holomorphiquement au wedge $\mathcal{W}^*$

$a \in \Delta^m_\epsilon$, $\epsilon > 0$ suffisamment petit, nous utilisons les notations suivantes : $\mathcal{W}^{s\prime}_a := \mathcal{W}^{s\prime} \cap E_a$, $\mathcal{W}^*_a := \mathcal{W}^* \cap E_a$, $\mathcal{W}^\sharp_a := \mathcal{W}^\sharp \cap E_a$ et $V'_a := V' \cap E_a$.

Lemme 3.7. *Soit $h \in \mathcal{O}(\mathcal{W}^*)$ tel que pour tout $a \in \Delta^m_\epsilon$, $h_a := h|_{E_a} \in \mathcal{O}(\mathcal{W}^{s\prime}_a \cup \mathcal{W}^*_a) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathcal{W}^{s\prime}_a \cup \mathcal{W}^*_a \cup V'_a)$. Alors, h s'étend holomorphiquement à $\mathcal{W}^\sharp$ près de 0.*

DÉMONSTRATION. Soit $a \in \Delta^m_\epsilon$ et notons $y_a := 0 + i\,\mathcal{G}(a, \bar{a}, 0) \in E_a \simeq \mathbb{C}^d_y$ le point de M_a tel que $\mathrm{Re}\, y_a = 0$. D'après le théorème de l'“edge of the wedge” d'Aĭrapetyan [1] (voir aussi [10]), il existe un voisinage $\mathcal{N}_a$ de y_a dans $E_a \simeq \mathbb{C}^d$ tel que h_a s'étend holomorphiquement à $\mathcal{W}^\sharp_a \cap \mathcal{N}_a$ (cf. figure 5). Quitte à réduire $\epsilon > 0$, nous pouvons supposer que pour tout $a \in \Delta^m_\epsilon$, $\mathcal{N}_a \supset \Delta^d_\delta$, $\delta > 0$, puisque pour $a = 0$, $0 \in \mathcal{N}_0$. Donc, h est holomorphe en y dans $\mathcal{W}^\sharp \cap (\Delta^m_\epsilon \times \Delta^d_\delta)$ et holomorphe en toutes les variables dans $\mathcal{W}^*$. Par le théorème de Hartogs, h est donc holomorphe dans $\mathcal{W}^\sharp$ près de 0. □

En appliquant le Lemme 3.7 à la fonction m, nous obtenons que m est holomorphe dans $\mathcal{W}^\sharp$ près de 0. En particulier, m est holomorphe dans un domaine non vide $\Omega' \subset \mathcal{W}^s$.

Etape 3 : Propagation de la méromorphie et méromorphie séparée. Le lemme suivant prouve que la propriété de méromorphie d'un quotient de fonctions analytiques réelles se propage automatiquement à tout le domaine de définition :

Lemme 3.8. *Soient $\Omega' \subset \Omega$ des domaines non vides de $\mathbb{C}^n$ et soient h_1 et $h_2 \not\equiv 0$ des fonctions analytiques réelles dans Ω. Si $m := h_1/h_2$ est méromorphe dans Ω', m est méromorphe dans tout Ω.*

DÉMONSTRATION. Quitte à réduire Ω', nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que h_2 ne s'annule pas dans Ω'.

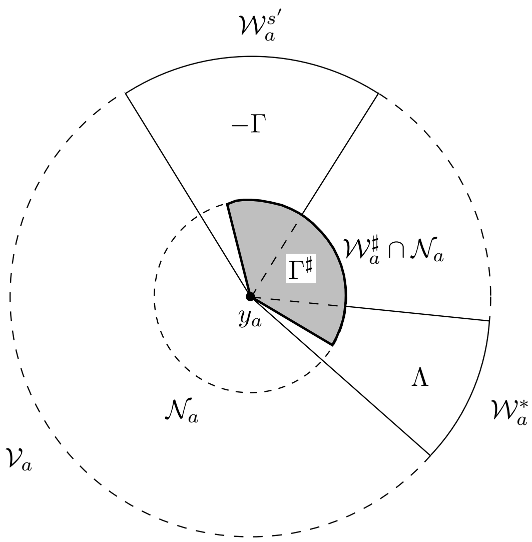

FIGURE 5. Le théorème de l'"edge of the wedge" s'applique dans chaque tranche E_a

Cas 1 : $n = 1$, Ω' et Ω sont des disques. Ce cas est traité dans [25], Lemma 3.6. Soit c' le centre de Ω'. Pour $\zeta \in \Omega$, notons γ le segment fermé $[c', \zeta]$. Soit $\widetilde{h}_1$ (resp. $\widetilde{h}_2$) l'extension holomorphe de $h_1|\gamma$ (resp. $h_2|\gamma$) à un voisinage Γ de γ (cf. figure 6). Nous pouvons supposer que $\widetilde{h}_2$ ne s'annule pas

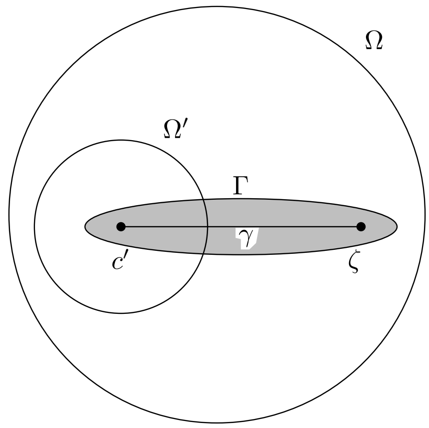

FIGURE 6. Cas 1 : Ω' et Ω sont des disques de $\mathbb{C}$

dans $\Omega' \cap \Gamma$ (quitte à réduire Γ). Par conséquent, $\widetilde{m} := \widetilde{h}_1/\widetilde{h}_2$ est holomorphe dans $\Omega' \cap \Gamma$ et coïncide avec m sur $\Omega' \cap \gamma$. Par le principe d'unicité, $\widetilde{m} = m$ dans $\Omega' \cap \Gamma$. Ainsi, la fonction $\widetilde{h}_1 h_2 - \widetilde{h}_2 h_1$, analytique réelle dans Γ, s'annule sur $\Omega' \cap \Gamma$. Elle s'annule donc dans tout Γ et $m|_\Gamma \equiv \widetilde{m}$ est méromorphe. (Notons que l'on avait réellement besoin que cette fonction analytique réelle s'annule sur un ouvert de $\mathbb{C}$, car le principe d'unicité est faux pour une fonction analytique réelle dans $\mathbb{C}$ s'annulant simplement sur une courbe.) Ce raisonnement étant valable pour tout $\zeta \in \Omega$, cela démontre que m est méromorphe dans tout Ω.

Cas 2 : $n \geq 2$, Ω' et Ω sont des polydisques. Supposons que $\Omega' = \Delta^n(c', R')$ et $\Omega = \Delta^n(c, R)$. Nous prouvons par récurrence que la méromorphie de m se propage successivement à chaque direction complexe de $\mathbb{C}^n$. Raisonnant par récurrence sur $k = 0, \dots, n$, nous supposons que m est méromorphe dans $\Delta^k((c_1, \dots, c_k), R) \times \Delta^{n-k}((c'_{k+1}, \dots, c'_n), R')$, pour un certain $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Pour chaque $\zeta \in \Delta^k((c_1, \dots, c_k), R)$ et $\zeta' \in \Delta^{n-k-1}((c'_{k+2}, \dots, c'_n), R')$ tels que h_2 ne s'annule pas identiquement sur $\Delta' := \{\zeta\} \times \Delta^1(c'_{k+1}, R') \times \{\zeta'\}$, nous appliquons le cas 1 à Δ' et $\Delta := \{\zeta\} \times \Delta^1(c_{k+1}, R) \times \{\zeta'\}$ (cf. figure 7), ce qui prouve que $m|_\Delta$ est

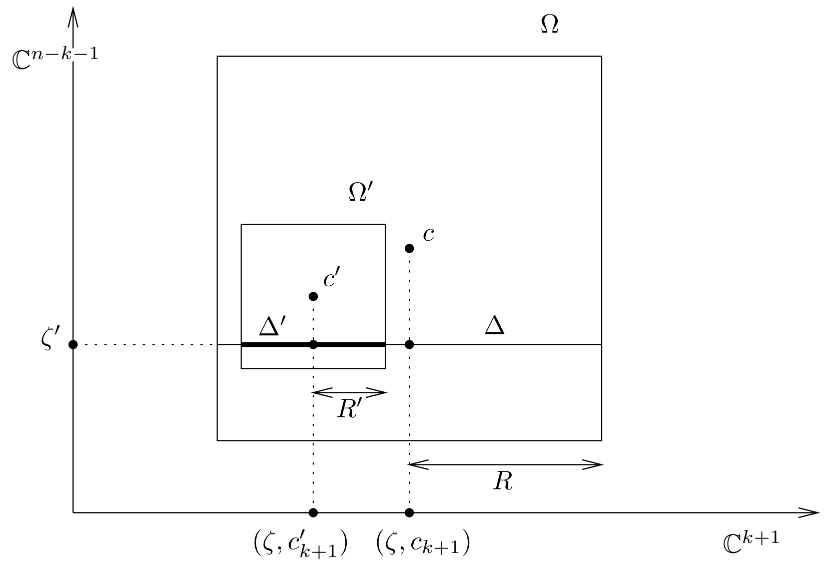

FIGURE 7. Cas 2 : Ω' et Ω sont des polydisques de $\mathbb{C}^n$

méromorphe. Par conséquent, d'après le théorème de méromorphie séparée de Rothstein (voir [65] ou [69]), nous obtenons que m est méromorphe dans $\Delta^{k+1}((c_1, \dots, c_{k+1}), R) \times \Delta^{n-k-1}((c'_{k+2}, \dots, c'_n), R')$.

Cas 3 : Cas général. Soit c' un point de Ω'. Pour chaque $\zeta \in \Omega$, soit γ une courbe simple $\mathcal{C}^\infty$ compacte joignant c' et ζ et soit $(\Delta_1^n, \dots, \Delta_r^n)$ un recouvrement fini de γ par des polydisques de Ω. Le cas 2 implique que la méromorphie de m se propage de Δ_ν^n à $\Delta_{\nu+1}^n$ et nous obtenons que m est méromorphe dans un voisinage de ζ, pour tout $\zeta \in \Omega$. □

Le Lemme 3.8 s'applique à la fonction m et aux domaines $\Omega' \subset \mathcal{W}^s$ (voir les étapes 1 et 2) et prouve que m est méromorphe dans tout $\mathcal{W}^s$, ce qui termine la démonstration de la Proposition 3.6. $\square$

REMARQUE 3.9. A ce stade de la démonstration, nous pourrions facilement conclure que m s'étend méromorphiquement près de p, si la direction d'extension à un wedge en p des fonctions CR sur $U \subset M$ était indépendante de U. Cette condition est satisfaite, par exemple, si la sous-variété M est de type fini en p avec tous les nombres de Hörmander égaux (voir [**18**] et les travaux proches de [**8**]). Sous cette hypothèse, "poussant" M à l'intérieur de $\mathcal{W}^s$ selon la direction opposée à la direction d'extension (c'est-à-dire, selon une direction quelconque contenue dans le cône de $\mathcal{W}^s$; voir aussi la Section 3.4 ci-dessous), on voit facilement que toutes les fonctions holomorphes dans $\mathcal{W}^s$ s'étendent holomorphiquement près de p. Un théorème d'Ivashkovich [**47**] assure alors la même propriété d'extension pour les fonctions méromorphes et permet de conclure la Proposition 3.4.

REMARQUE 3.10. Par ailleurs, dans la situation où M est une hypersurface, le wedge $\mathcal{W}^s$ est un côté de M et le théorème de Trépreau [**72**] prouve directement que toute fonction holomorphe sur le "côté $\mathcal{W}^s$" de M s'étend holomorphiquement à travers M.

3.4. Extension méromorphe à un "wedge attaché" à M

Notons $NM := T\mathbb{C}^n|_M/TM$ le fibré normal à M. Soient q un point de M, $n_q \in N_qM$ un vecteur normal à M en q et $\mathcal{W}_q = \mathcal{W}(\mathcal{N}_q, C_q)$ un wedge en q. Identifiant N_qM avec $\mathbb{R}^d$, nous pouvons écrire que $C_q \subset N_qM$. Nous dirons que $\mathcal{W}_q$ *est de direction* n_q si $n_q \in C_q$. Par définition, "$\mathcal{W}_q$ est de direction $n_q = 0$" signifiera que $\mathcal{W}_q$ est un voisinage de q dans $\mathbb{C}^n$.

Définition 3.11. Soit Ω un ouvert connexe de M. Le domaine $\omega \subset \mathbb{C}^n$ est un *wedge attaché à* Ω (voir [**55**]) s'il existe une section $\mathcal{C}^\infty$ $n : \Omega \to N\Omega$ du fibré normal telle que pour tout $q \in \Omega$, ω contient un wedge en q de direction $n(q)$.

Cette notion de wedge attaché nous autorise à donner un résultat d'extension méromorphe *globale* :

Proposition 3.12. *Soit $M \subset \mathbb{C}^n$ une sous-variété analytique réelle, générique et minimale en tout point $p \in M$. Soit $\Sigma \subset M$ un fermé d'intérieur vide et soit ψ une fonction CR $\mathcal{C}^\infty$ sur $M \setminus \Sigma$. Supposons que pour tout point $p \in M$ il existe un wedge $\mathcal{W}_p$ d'edge un voisinage U_p de p dans M et une extension $m_p \in \mathcal{M}(\mathcal{W}_p)$ de $\psi|_{U_p\setminus\Sigma}$. Alors, pour tout ouvert connexe relativement compact $\Omega \Subset M$, il existe un wedge ω attaché à Ω contenant $\mathcal{W}_p$ pour chaque $p \in \Omega$ et il existe une extension $m \in \mathcal{M}(\omega)$ de $\psi|_{\Omega\setminus\Sigma}$.*

La démonstration de la Proposition 3.12 nécessite quelques lemmes techniques. Le premier lemme est un principe d'unicité au bord (du type [**60**, **20**]) avec des singularités sur l'edge :

Lemme 3.13. *Soit $\mathcal{W}$ un wedge d'edge U et soit $m \in \mathcal{M}(\mathcal{W})$ une extension de $\psi \in \mathcal{C}^\infty(U \setminus \Sigma)$. Si $\psi \equiv 0$, $m \equiv 0$.*

Démonstration. Soit $p \in U \setminus \Sigma$. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de p tel que m est holomorphe dans $\mathcal{W} \cap \mathcal{V}$. D'après le principe d'unicité au bord (voir [**60**, **20**]), $m|_{\mathcal{V}} \equiv 0$. Alors, par le principe d'unicité pour les applications holomorphes entre deux variétés complexes connexes ($\mathcal{W}$ et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ici), $m \equiv 0$. □

Remarque. Nous utiliserons toujours les conventions suivantes :

(i) Tous les cônes sont supposés convexes ;

(ii) La phrase "un cône C *contient presque* un cône C'" signifie que C contient un sous-cône strict de C'. En pratique, ce sous-cône peut être choisi arbitrairement grand ; ainsi, ce léger abus de notation ne pose pas de problème dans la suite.

(iii) L'*enveloppe convexe* d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^d$ sera notée $\mathrm{co}(E)$.

Le lemme suivant est un théorème de l'"edge of the wedge" avec des singularités sur l'edge :

Lemme 3.14. *Soit $M \subset \mathbb{C}^n$ une sous-variété analytique réelle, générique, minimale en un point $p \in M$, et soit U un voisinage ouvert connexe de p dans M. Soit $\Sigma \subset M$ un fermé d'intérieur vide et soit ψ une fonction CR $\mathcal{C}^\infty$ sur $M \setminus \Sigma$. Supposons qu'il existe des wedges $\mathcal{W}_j$ d'edge U et de cônes C_j et des extensions $m_j \in \mathcal{M}(\mathcal{W}_j)$ de $\psi|_{U\setminus\Sigma}$, pour $j = 1, 2$. Alors, il existe un wedge $\mathcal{W}$ d'edge $U' \subset U$ un voisinage de p dans M et de cône C qui contient presque $\mathrm{co}(C_1 \cup C_2)$ et il existe une extension $m \in \mathcal{M}(\mathcal{W})$ de $\psi|_{U'\setminus\Sigma}$.*

Démonstration. Soit h_1 une fonction holomorphe dans $\mathcal{W}_1$. Puisque M est minimale en p, il existe un wedge $\mathcal{W}'$ d'edge $U' \subset U$ un voisinage de p dans M et de cône C tel que toutes les fonctions CR sur U s'étendent holomorphiquement à $\mathcal{W}'$.

Nous pouvons supposer que le demi-axe des $\mathrm{Im}\, z_n$ positifs est à l'intérieur du cône C_1. Pour $d > 0$, soit t^d la translation selon $\mathrm{Im}\, z_n$ de longueur $+d$ et soit $U^d := t^d(U)$. Alors, $h_1|_{U^d}$ est CR et s'étend donc holomorphiquement à $\mathcal{W}'^d := t^d(\mathcal{W}')$. Selon le théorème de l'"edge of the wedge" d'Aĭrapetyan [**1**], il existe un voisinage $U_1' \subset U'$ de p dans M et un cône C_1' qui contient presque $\mathrm{co}(C_1 \cup C')$ tels que h_1 s'étend holomorphiquement au wedge $\mathcal{W}_1'^d$ d'edge $U_1'^d := t_d(U_1')$ et de cône C_1'. Remarquons que $\mathcal{W}_1'^d = t_d(\mathcal{W}_1')$ où $\mathcal{W}_1'$ est le wedge d'edge U_1' et de cône C_1'. Faisant tendre d vers zéro, nous obtenons que h_1 s'étend holomorphiquement à $\mathcal{W}_1'$. Par un théorème d'Ivashkovich [47], l'enveloppe d'holomorphie et l'enveloppe de méromorphie de l'ouvert $\mathcal{W}_1$ coïncide. Par conséquent, m_1 s'étend méromorphiquement à $\mathcal{W}_1'$. De façon similaire, m_2 s'étend méromorphiquement au wedge $\mathcal{W}_2'$ d'edge $U_2' \subset U'$ un voisinage de p dans M et de cône C_2' qui contient presque $\mathrm{co}(C_2 \cup C'')$. Nous pouvons supposer que $U_1' = U_2' =: U_p'$. Par le principe d'unicité (voir le Lemme 3.13), les extensions de m_1 et m_2 coïncident sur $\mathcal{W}_1' \cap \mathcal{W}_2'$, et nous obtenons donc une extension $m \in \mathcal{M}(\mathcal{W}_1' \cup \mathcal{W}_2')$ de $\psi|_{U_p' \setminus \Sigma}$.

Toutefois, le cône $C_1' \cup C_2'$ du wedge $\mathcal{W}_1' \cup \mathcal{W}_2'$ ne contient pas nécessairement $\mathrm{co}(C_1 \cup C_2)$ (il n'est même pas nécessairement convexe). Pour remédier à cela, nous procédons comme précédemment en appliquant les théorèmes d'Aĭrapetyan et d'Ivashkovich à $\mathcal{W}_1' \cup \mathcal{W}_2'$. Ceci prouve que m s'étend méromorphiquement au wedge $\mathcal{W}''$ d'edge $U'' \subset U_p'$ un voisinage de p dans M et de cône C'' qui contient presque $\mathrm{co}(C_1' \cup C_2')$ (cf. figure 8). Nous

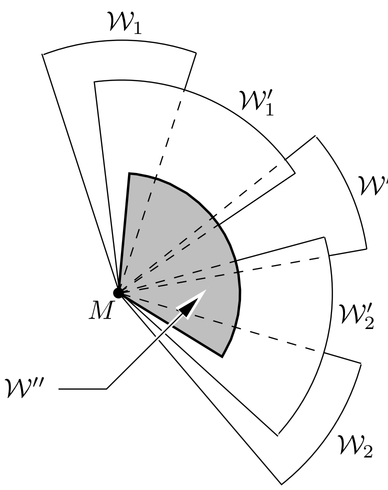

FIGURE 8. La fonction m s'étend méromorphiquement au wedge $\mathcal{W}''$

avons donc obtenu l'extension $m \in \mathcal{M}(\mathcal{W}'')$ de $\psi|_{U'' \setminus \Sigma}$ désirée. □

Conservant les notations de la Proposition 3.12, nous pouvons supposer que les U_p sont des traces sur M de boules de $\mathbb{C}^n$, c'est-à-dire, $U_p = B(p, R_p) \cap M$, avec $R_p > 0$. Pour $\epsilon > 0$, nous définissons le *ϵ-rétrécissement* de U_p par $U_p^\epsilon := B(p, R_p - \epsilon) \cap M$. Dans la suite, quand un wedge ω est attaché à un ouvert connexe relativement compact $\Omega \Subset M$, nous supposerons toujours que Ω est une réunion finie de certains U_p, c'est-à-dire, $\Omega = \cup_{k=1}^s U_{p_k}$. Ainsi, nous pouvons aussi définir le *ϵ-rétrécissement* de Ω par $\Omega^\epsilon := \cup_{k=1}^s U_{p_k}^\epsilon$.

Remarque 3.15. Soit K un compact de M et $(U_{p_k})_{k=1,\dots,s}$ un recouvrement de K par des ouverts. Alors, il existe $\epsilon > 0$ tel que $(U^\epsilon_{p_k})_{k=1,\dots,s}$ est aussi un recouvrement de K.

Le lemme suivant permet de "coller" deux wedges attachés :

Lemme 3.16. *Soit $M \subset \mathbb{C}^n$ une sous-variété analytique réelle, générique, minimale en tout point $p \in M$. Soient $\Sigma \subset M$ un fermé d'intérieur vide et ψ une fonction CR $\mathcal{C}^\infty$ sur $M \setminus \Sigma$. Soit ω_j un wedge attaché à un ouvert connexe relativement compact $\Omega_j \Subset M$ et soit $m_j \in \mathcal{M}(\omega_j)$ une extension de $\psi|_{\Omega_j \setminus \Sigma}$, pour $j = 1, 2$. Supposons que $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, il existe un wedge ω^ϵ attaché à $\Omega^\epsilon := \Omega_1^\epsilon \cup \Omega_2^\epsilon$, contenant la restriction de ω_j à Ω_j^ϵ pour $j = 1, 2$ et il existe une extension $m^\epsilon \in \mathcal{M}(\omega^\epsilon)$ de $\psi|_{\Omega^\epsilon \setminus \Sigma}$.*

Démonstration. D'après la Définition 3.11, pour tous $p \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ et $j = 1, 2$, il existe un wedge $\mathcal{W}_{p,j} \subset \omega_j$ d'edge $U_{p,j}$, de cône $C_{p,j}$ et de direction $n_j(p)$, où n_j est la section $\mathcal{C}^\infty$ de $N\Omega_j$ associée à ω_j. D'après le Lemme 3.14, il existe un wedge $\mathcal{W}_p$ d'edge $U_p \subset U_{p,1} \cap U_{p,2}$ et de cône C_p qui contient presque $\mathrm{co}(C_{p,1} \cup C_{p,2})$ et il existe une extension $m_p \in \mathcal{M}(\mathcal{W}_p)$ de $\psi|_{U_p \setminus \Sigma}$.

Soit $\epsilon > 0$ et ω_j^ϵ la restriction de ω_j à Ω_j^ϵ, pour $j = 1, 2$. Soit $(U_{p_k})_{k=1,\dots,s}$ un recouvrement par des ouverts de l'adhérence $\mathrm{Adh}(\Omega_1^\epsilon \cap \Omega_2^\epsilon) \Subset M$ de $\Omega_1^\epsilon \cap \Omega_2^\epsilon$. Le domaine $\omega^\epsilon := \omega_1^\epsilon \cup \omega_2^\epsilon \cup \mathcal{W}_{p_1} \cup \cdots \cup \mathcal{W}_{p_s}$ est un wedge attaché à $\Omega^\epsilon := \Omega_1^\epsilon \cup \Omega_2^\epsilon$. En effet, nous construisons une section $\mathcal{C}^\infty$ du fibré normal en utilisant une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité associée au recouvrement de $\mathrm{Adh}(\Omega_1^\epsilon \cup \Omega_2^\epsilon) \Subset M$ par Ω_1 et Ω_2 et en utilisant le fait que C_{p_k} contient presque $\mathrm{co}(C_{p_k,1} \cup C_{p_k,2})$, pour $k = 1, \dots, s$. Vu le Lemme 3.13, les fonctions m_j sur ω_j, $j = 1, 2$, et m_{p_k} sur $\mathcal{W}_{p_k}$, $k = 1, \dots, s$, coïncident sur les intersections de ces wedges, ce qui donne une extension méromorphe m^ϵ de $\psi|_{\Omega^\epsilon \setminus \Sigma}$ à ω^ϵ. □

Fin de la démonstration de la Proposition 3.12. On considère $(U_{p_k})_{k=1,\dots,s}$ un recouvrement par des ouverts de $\mathrm{Adh}(\Omega)$ et soit $\epsilon > 0$ tel que $(U^\epsilon_{p_k})_{k=1,\dots,s}$ est toujours un recouvrement de $\mathrm{Adh}(\Omega)$ (voir la Remarque 3.15). Nous prouvons par récurrence sur $\nu \in \{1, \dots, s\}$ qu'il existe un wedge ω_ν attaché à $\Omega_\nu = U_{p_1}^{\nu\epsilon/s} \cup \cdots \cup U_{p_\nu}^{\nu\epsilon/s}$, contenant les $\mathcal{W}_{p_k}$, $k = 1, \dots, \nu$, et une extension $m_\nu \in \mathcal{M}(\omega_\nu)$ de $\psi|_{\Omega_\nu \setminus \Sigma}$. Pour $\nu = 1$, l'énoncé est clair avec $\omega_1 = \mathcal{W}_{p_1}$ et $m_1 = m_{p_1}$. Supposons que l'énoncé est vérifié pour un certain $\nu \geq 1$. Selon le Lemme 3.16, nous pouvons coller ensemble les wedges $\mathcal{W}_{p_{\nu+1}}$ et ω_ν, pour ϵ/s. Ceci donne l'énoncé pour $\nu + 1$.

Pour $\nu = s$, nous obtenons un wedge ω_s attaché à $\Omega_s \supset \Omega$, et une extension $m_s \in \mathcal{M}(\omega_s)$ de $\psi|_{\Omega_s \setminus \Sigma}$. Finalement, nous prenons pour ω la restriction de ω_s à Ω et $m := m_s|\omega$. Pour raffiner le résultat, nous collons ω avec tous les $\mathcal{W}_p$, $p \in \Omega$, et étendons m à ce domaine plus grand (le Lemme 3.14 suffit). □

3.5. Déformation de la sous-variété M

Fin de la démonstration de la Proposition 3.4. On suit les notations de la Section 3.3 ; nous supposons que M est minimale en tout point $q \in M$ et que $U \Subset M$ est un voisinage de p dans M, ouvert, connexe et relativement compact. Alors, pour tout point $q \in U$, la Proposition 3.6 s'applique et il existe un wedge $\mathcal{W}_q^s$ d'edge U_q et une extension méromorphe m_q de $\psi|_{U_q \setminus \Sigma}$ à $\mathcal{W}_q^s$.

Puis, par la Proposition 3.12, nous pouvons "coller ensemble" les wedges $\mathcal{W}_q^s$ et obtenir un wedge ω^s attaché à U tel que $\psi|_{U \setminus \Sigma}$ s'étend à ω^s en une fonction méromorphe m^s et tel que ω^s contient le wedge $\mathcal{W}_p^s$.

Enfin, à l'aide d'une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité (comme pour le Lemme 3.16), nous pouvons appliquer une petite déformation $\mathcal{C}^\infty$ à U dans la direction de n^s, la section $\mathcal{C}^\infty$ du fibré normal à U associée au wedge attaché ω^s. Nous supposons que cette déformation dépend de façon $\mathcal{C}^\infty$ du paramètre $d \geq 0$ et que la déformation est l'identité pour $d = 0$. Nous notons $U^d \subset \omega^s$ la déformation de U.

Comme le wedge $\mathcal{W}_p$ est obtenu par des disques analytiques attachés à U (voir [73]), il existe encore un disque analytique attaché à U^d, engendrant le wedge $\mathcal{W}_p^d$ qui est une petite déformation $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{W}_p$. En particulier, $\mathcal{W}_p^d$ tend vers $\mathcal{W}_p$ quand d tend vers zéro. Pour $d > 0$ suffisamment petit, $\mathcal{W}_p^d$ est donc "presque symétrique" à $\mathcal{W}_p^s$, dans le sens où les cônes de $\mathcal{W}_p^d$ et $\mathcal{W}_p$ sont d'intersection non vide. Quitte à réduire $d > 0$, nous pouvons même supposer que le cône de $\mathcal{W}_p^d$ contient la direction $-n^s(p)$, et par conséquent, que $p \in \mathcal{W}_p^d$ (cf. figure 9). Ainsi, une fonction h holomorphe sur ω^s étant

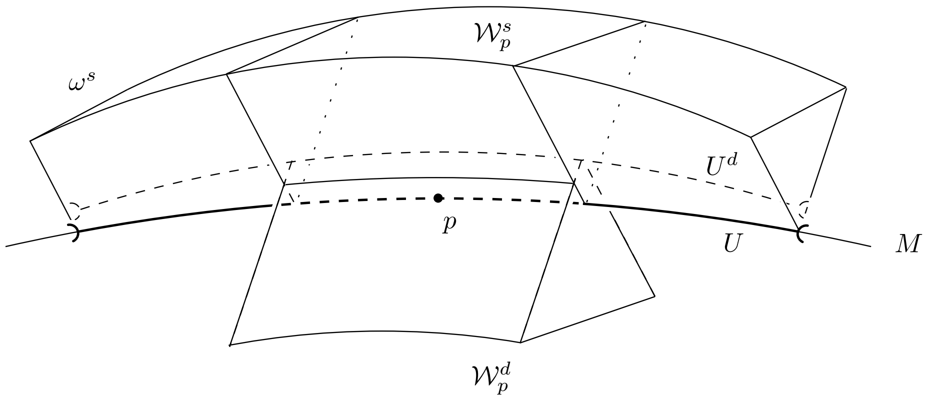

Figure 9. Le point p appartient au wedge $\mathcal{W}_p^d$

CR sur U^d, elle s'étend holomorphiquement à $\mathcal{W}_p^d$, qui contient p pour $d > 0$ suffisamment petit. Nous obtenons donc que l'enveloppe d'holomorphie de

ω^s contient un voisinage de p, et par le théorème d'Ivashkovich [47], nous concluons que m^s s'étend méromorphiquement à ce voisinage de p. □

Dans la situation où ψ n'a pas de singularité en p, la démonstration de la propriété d'extension (holomorphe) est grandement simplifiée :

Démonstration de la Proposition 3.5. Soit ψ le représentant d'un germe de $\mathcal{R}_p(M)$ défini sur un voisinage ouvert connexe U de p dans M et supposons que ψ est CR sur U. Par le théorème de Tumanov (voir Théorème 2.2), ψ s'étend holomorphiquement à $\mathcal{W}$ et par le Lemme 3.1, ψ s'étend à $\mathcal{W}^s$ comme fonction holomorphe en y, où $\mathcal{W}$ est le wedge associé à (p, U) et $\mathcal{W}^s$ est le wedge symétrique. Maintenant, par le théorème de l'"edge of the wedge" *classique* (voir [59]) appliqué dans chaque tranche E_a et par le théorème de Hartogs, nous concluons que ψ s'étend holomorphiquement à un voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$. □

4. Principe de réflexion généralisé

Soient $M \subset \mathbb{C}^n$ une sous-variété analytique réelle générique, p un point de M et P un point de l'espace affine complexe $\mathbb{C}^N$, $N \geq 1$. Soient $G = (G_1, \dots, G_{N'})$ des fonctions CR $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de p dans M et $R_l(Z, W)$, $l = 1, \dots, D$, des fonctions holomorphes sur un voisinage de $(P, \overline{G(p)})$ dans $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{N'}$. Nous considérons le système d'équations en F

$$(S) \qquad R_l(F(z), \overline{G(z)}) = 0, \quad l = 1, \dots, D, \quad z \in M,$$

où $F : M \to \mathbb{C}^N$ est une application CR $\mathcal{C}^\infty$ définie près de p telle que $F(p) = P$.

Définition 4.1. La *variété caractéristique* en p du système d'équations (S) est le sous-ensemble analytique complexe $\mathcal{V}_p(S) \subset \mathbb{C}^N$ défini au voisinage de P par les équations en Z,

$$L^\alpha R_l(Z, \overline{G(\cdot)})|_p = 0, \qquad \text{pour tous } l = 1, \dots, D \text{ et } \alpha \in \mathbb{N}^m.$$

Le principe de réflexion "généralisé" suivant généralise [24], Proposition 3, en codimension supérieure :

Théorème 4.2. *Soit $F : M \to \mathbb{C}^N$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ avec $F(p) = P$ satisfaisant le système d'équations (S). Si M est minimale en p et si la dimension de $\mathcal{V}_p(S)$ en P est zéro, F est analytique réelle sur un voisinage de p dans M.*

Ce théorème s'applique au problème de l'analyticité d'une application CR $\mathcal{C}^\infty$ entre variétés analytiques réelles défini à la Section 1 ; le Théorème 1.2 s'obtient comme un cas particulier du Théorème 4.2 :

Fin de la démonstration du Théorème 1.2. La principale hypothèse du problème considéré est la condition *fondamentale* $f(M) \subset M'$, équivalente au système d'équations :

$$\rho'_k(f(z), \overline{f(z)}) = 0, \quad k = 1, \dots, d', \quad z \in M.$$

Ce système d'équations est un cas particulier du système (S) avec $F = G = f$ et $R_k = \rho'_k$, $k = 1, \dots, d'$. Clairement, $\mathcal{V}_p(f) = \mathcal{V}_p(S)$ et le Théorème 4.2 s'applique, prouvant que f est analytique réelle sur un voisinage de p dans M (et se prolonge donc holomorphiquement à un voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$, d'après le Lemme 2.4). □

La démonstration du Théorème 4.2 est divisée en trois lemmes, que nous énonçons et prouvons maintenant :

Lemme 4.3. *Soit $F : M \to \mathbb{C}^N$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ avec $F(p) = P$ satisfaisant le système d'équations (S). Si la dimension de $\mathcal{V}_p(S)$ en P est zéro, chaque fonction composante F_j, $j = 1, \dots, N$, est algébrique sur l'anneau $\mathcal{R}_p(M)$.*

Démonstration. (Voir le Chapitre 1, Proposition 3.1, pour un résultat et une démonstration analogues, dans le cadre algébrique.)

Dans la suite, tous nos raisonnements seront localisés en p. Appliquant les opérateurs $L^\alpha = L_1^{\alpha_1} \dots L_m^{\alpha_m}$ au système d'équations (S), nous obtenons

$$L^\alpha R_l(F(z), \overline{G(z)}) = 0, \quad l = 1, \dots, D, \ \alpha \in \mathbb{N}^m, \ z \in M. \tag{4.1}$$

Puisque F est CR, nous pouvons réécrire (4.1) sous la forme

$$H_l^\alpha(z, \overline{z}, \overline{D^{|\alpha|}G(z)}, F(z)) = 0, \quad l = 1, \dots, D, \ \alpha \in \mathbb{N}^m, \ z \in M, \tag{4.2}$$

où les H_l^α sont des fonctions holomorphes près de $(p, \overline{p}, \overline{D^{|\alpha|}G(p)}, P)$ et

$$D^A G = \left(\frac{\partial^{|\beta|} G_\nu}{\partial z^\beta} \right)_{|\beta| \le A, \ \nu = 1, \dots, N'}$$

désigne les dérivées partielles de G jusqu'à l'ordre A ; $D^A G$ est parfois appelé le *jet d'ordre A* de G. Les équations de $\mathcal{V}_p(S)$ sont clairement équivalentes aux suivantes :

$$H_l^\alpha(p, \overline{p}, \overline{D^{|\alpha|}G(p)}, Z) = 0, \quad l = 1, \dots, D, \ \alpha \in \mathbb{N}^m.$$

Vu (4.2), ces équations sont vérifiées pour $Z = P$, et donc, $P \in \mathcal{V}_p(S)$. Puisque l'anneau $\mathcal{O}_P$ des germes en P des fonctions holomorphes sur un voisinage de P dans $\mathbb{C}^N$ est nœthérien, il existe un entier naturel A tel que $\mathcal{V}_p(S)$ est donné près de P par les équations

$$H_l^\alpha(p,\overline{p},\overline{D^{|\alpha|}G(p)},Z)=0, \quad l=1,\ldots,D,\ |\alpha|\leq A. \tag{4.3}$$

Modifiant légèrement les fonctions H_l^α, nous pouvons réécrire (4.3) sous la forme plus pratique

$$H_l^\alpha(p,\overline{p},\overline{D^{A}G(p)},Z)=0, \quad l=1,\ldots,D,\ |\alpha|\leq A.$$

Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble analytique complexe défini près de $\Pi:=(p,\overline{p},\overline{D^AG(p)},P)$ par les équations

$$H_l^\alpha(z,\zeta,\Delta,Z)=0, \quad l=1,\ldots,D,\ |\alpha|\leq A,$$

où (z,ζ,Δ,Z) désigne les coordonnées canoniques de $\mathbb{C}^{2n+\kappa+N}$, κ désignant le nombre de composantes du vecteur D^AG, c'est-à-dire,

$$\kappa:=N'\binom{n+A}{n}.$$

(Voir le Chapitre 1, Section 3.1, (3.1), pour un calcul détaillé de ce nombre κ.) Remarquons que $\mathcal{V}_p(S)$ coïncide avec la fibre

$$\mathcal{V}_{(p,\overline{p},\overline{D^AG(p)})}=\{Z \text{ près de } P:\ (p,\overline{p},\overline{D^AG(p)},Z)\in\mathcal{V}\}.$$

Puisque cette fibre est supposée de dimension zéro en Π, nous pouvons appliquer le théorème fondamental de représentation locale des ensembles analytiques complexes (voir [19], §5.6, Proposition 4). Ce théorème énonce que $\mathcal{V}$ est contenu dans l'ensemble analytique complexe $\mathcal{Q}$ défini près de Π par les équations

$$Q_j(z,\zeta,\Delta)(Z_j)=0, \quad j=1,\ldots,N, \tag{4.4}$$

où $Q_j(z,\zeta,\Delta)(Z_j)$ est un polynôme de Weierstrass en Z_j avec des coefficients holomorphes en (z,ζ,Δ). Combinant (4.2), (4.4) et la relation $\mathcal{V}\subset\mathcal{Q}$, nous obtenons

$$Q_j(z,\overline{z},\overline{D^AG(z)})(F_j(z))=0, \quad j=1,\ldots,N,\ z\in M. \tag{4.5}$$

Nous pouvons interpréter ce résultat comme une détermination analytique finie de F par le jet d'ordre A de G.

La condition (4.5) signifie que chaque F_j annule sur M un polynôme à coefficients dans $\mathcal{R}_p(M)$, ce qui termine la démonstration du Lemme 4.3. □

Lemme 4.4. *Soit ϕ une fonction CR $\mathcal{C}^\infty$ définie dans un voisinage de p dans M. Supposons que M est minimale en p. Si ϕ est algébrique sur le corps $\widehat{\mathcal{R}}_p(M)$, ϕ est algébrique sur le corps $\mathcal{M}_p$ des germes en p de fonctions méromorphes.*

Démonstration. L'hypothèse signifie qu'il existe $d \geq 1$ et $\alpha_k \in \widehat{\mathcal{R}}_p(M)$, $k = 0, \dots, d-1$, tels que

$$\phi^d + \alpha_{d-1}\phi^{d-1} + \cdots + \alpha_0 = 0, \qquad \text{sur } M \text{ près de } p, \tag{4.6}$$

en dehors du lieu singulier des α_k. Considérons

$$\phi^\delta + \beta_{\delta-1}\phi^{\delta-1} + \cdots + \beta_0 = 0, \qquad \text{sur } M \text{ près de } p, \tag{4.7}$$

une équation polynômiale de la forme (4.6) de *degré minimal* δ. Pour tout $j = 1, \dots, m$, nous appliquons l'opérateur CR L_j, qui est une dérivation du corps $\widehat{\mathcal{R}}_p(M)$, à (4.7). Puisque ϕ est CR, nous obtenons

$$(L_j\beta_{\delta-1})\phi^{\delta-1} + \cdots + (L_j\beta_0) = 0, \qquad \text{sur } M \text{ près de } p. \tag{4.8}$$

Nécessairement, pour tout $k = 0, \dots, \delta-1$, $L_j\beta_k \equiv 0$ au voisinage de p dans M, en dehors du lieu singulier β_k. Sinon, soit $k_0 \geq 1$ le plus grand entier tel que $L_j\beta_{k_0} \not\equiv 0$ et divisons alors (4.8) par $L_j\beta_{k_0}$. Nous obtenons une contradiction avec le fait que (4.7) est de degré minimal.

Remarque 4.5. Signalons que le fait de diviser entre eux des éléments de $\widehat{\mathcal{R}}_p(M)$ dans (4.8) est inévitable, comme cela apparaît clairement dans le raisonnement par l'absurde précédent. Remarquons que l'apparition de singularités en p est un phénomène tout à fait naturel et prévisible dans notre situation. En effet, nous traitons dans ce chapitre du problème de l'analyticité de f *au point* p, et il nous est donc “interdit” d'éviter les singularités en p en nous plaçant en un autre point de M, arbitrairement proche de p. Tout cela justifie la nécessité de la proposition technique d'extension méromorphe au point p (voir la Proposition 3.4).

Nous avons prouvé que les β_k sont dans $\mathcal{S}_p(M)$; d'après la Proposition 3.4, il existe donc une extension méromorphe m_k de β_k au voisinage de p, pour tout k. Ainsi, ϕ satisfait l'équation polynômiale à coefficients méromorphes

$$\phi^\delta + m_{\delta-1}\phi^{\delta-1} + \cdots + m_0 = 0, \qquad \text{sur } M \text{ près de } p, \tag{4.9}$$

en dehors du lieu singulier des m_k, c'est-à-dire, ϕ est algébrique sur le corps $\mathcal{M}_p$ des germes en p des fonctions méromorphes sur un voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$. □

Lemme 4.6. *Soit ϕ une fonction CR $\mathcal{C}^\infty$ définie dans un voisinage de p dans M. Supposons qu'il existe $\delta \geq 1$ et h_k, $k = 0, \dots, \delta$, des fonctions holomorphes près de p dans $\mathbb{C}^n$, tels que*

$$h_\delta\phi^\delta + \cdots + h_0 = 0, \qquad \text{sur } M \text{ près de } p. \tag{4.10}$$

Alors, ϕ est analytique réelle sur un voisinage de p dans M.

Démonstration. Soit $\Psi : (M,p) \to (\mathbb{R}^l, 0)$, $l = 2m+d$, un difféomorphisme analytique réel local. La fonction $\psi := \phi \circ \Psi^{-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$ près de 0 et les $a_j := h_j \circ \Psi^{-1}$ sont analytique réels près de 0. Dans ces coordonnées, (4.10) est transformée en

$$a_\delta \psi^\delta + \cdots + a_0 = 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}^l \text{ près de } 0. \tag{4.11}$$

Nous pouvons supposer que $\psi(0) = 0$ et que les a_j n'ont pas de facteur commun (en tant qu'éléments de l'anneau des séries entières convergentes $\mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_l\}$). Notons Γ_ψ le graphe de ψ au-dessus d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^l$. C'est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^{l+2}$ passant par 0. Notons Y le sous-ensemble analytique réel de $\mathbb{R}^l_x \times \mathbb{C}_w \simeq \mathbb{R}^{l+2}$ défini dans un voisinage de 0 par l'équation

$$a_\delta(x) w^\delta + \cdots + a_0(x) = 0. \tag{4.12}$$

Vu (4.11), $\Gamma_\psi \subset Y$ dans un voisinage de 0.

Lemme 4.7. *Γ_ψ et Y ont la même dimension en 0.*

Alors, d'après un théorème de Malgrange [51], Chapter VI, Proposition 3.11, Γ_ψ est une sous-variété analytique réelle et par conséquent ψ est analytique réelle sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^l$. □

Remarque 4.8. La méthode utilisée pour démontrer le Lemme 4.6 suit les idées de [5], Lemma 2.7. Cependant, la démonstration concise du Lemme 4.7 que nous donnons ci-dessous utilise uniquement des notions de base d'algèbre commutative (voir, par exemple, [78]) et simplifie la méthode basée sur la théorie de l'élimination appliquée dans [5], Lemma 2.7, et [6], Lemma 5.1.

Démonstration du Lemme 4.7. La dimension de Γ_ψ en 0 est l. Notons que (4.12) se décompose en deux équations réelles. Par conséquent, la dimension de Y en 0 est l ou $l+1$. Soit S l'ensemble des zéros communs des a_j. Pour $x \notin S$, (4.12) détermine w à un nombre fini de possibilités près, c'est-à-dire que Y est un revêtement analytique ramifié à d feuillets au-dessus de $\mathbb{R}^l \backslash S$ près de 0. Ainsi, la dimension de Y en de tels points est l. Nous étudions maintenant l'ensemble singulier S. Clairement, $S \times \mathbb{C} \subset Y$. Donc, pour prouver que $\dim Y = l$, il suffit de prouver que $\dim S \le l-2$. Il est plus facile (et suffisant) de prouver que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} \le l-2$, où $\mathcal{S}$ est le sous-ensemble analytique complexe de $\mathbb{C}^l$ défini près de 0 par les équations $a_j(z) = 0$, $j = 0, \ldots, \delta$. Dans ces équations, nous considérons les a_j comme des éléments de l'anneau des séries entières convergentes $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_l\}$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que pour tout $j = 0, \ldots, \delta$, $a_j \not\equiv 0$, $a_j(0) = 0$ (sinon, un tel a_j n'apporte aucune contribution dans les équations définissantes de $\mathcal{S}$), et a_j est irréductible (sinon, nous ferions le raisonnement suivant avec chaque facteur irréductible de a_j). Soit A_j le sous-ensemble analytique complexe irréductible $\{a_j(z) = 0\}$ de dimension $l-1$ dans $\mathbb{C}^l$. Puisque les a_j sont sans facteur commun, il existe deux indices $j_1 \neq j_2$ tels que $a_{j_1} \not\equiv a_{j_2}$ à une unité de $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_l\}$ près, c'est-à-dire, A_{j_1} et A_{j_2} ne coïncident pas près de 0. Alors, $\dim_0 A_{j_1} \cap A_{j_2} = l - 2$ (voir [78], Chapter VIII, §9, Corollary 2) et $\dim_0 \mathcal{S} \leq l - 2$. □

Fin de la démonstration du Théorème 4.2. On montre que pour tout $j = 1, \ldots, N$, F_j est algébrique sur le corps $\widehat{\mathcal{R}}_p(M)$, en appliquant le Lemme 4.3. Puis, le Lemme 4.4 prouve que F_j est algébrique sur le corps $\mathcal{M}_p$, c'est-à-dire, vérifie une équation polynômiale à coefficients méromorphes du type (4.9). Multipliant cette équation par le plus petit commun multiple des dénominateurs des coefficients, nous obtenons une équation polynômiale à coefficients holomorphes du type (4.10). Alors, le Lemme 4.6 implique que chaque F_j est analytique réelle sur un voisinage de p dans M. □

5. Variété caractéristique et finitude essentielle

Pour un difféomorphisme CR $\mathcal{C}^\infty$, la notion de variété caractéristique est reliée à la notion de finitude essentielle, de la façon suivante :

Lemme 5.1. *Si $f : M \to M'$ est un difféomorphisme CR $\mathcal{C}^\infty$ entre des sous-variétés $M, M' \subset \mathbb{C}^n$ analytiques réelles génériques, $p \in M$, $p' \in M'$ et $f(p) = p'$, $\mathcal{V}_p(f)$ coïncide avec $A'_{p'}$ dans un voisinage de p'.*

Remarque 5.2. Ce résultat est bien entendu l'analogue dans le cas analytique du Chapitre 1, Lemme 2.10, où l'on démontre que $\mathcal{V}_p(f) = A'_{p'}$ pour f un biholomorphisme induisant un difféomorphisme CR entre deux sous-variétés algébriques réelles.

Démonstration. Soit $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ une sous-variété analytique réelle générique de codimension d' et de dimension CR m'. Comme à la Section 1, nous pouvons écrire les équations de M' près du point $p' \in M'$ sous la forme

$$\overline{y'_k} = \phi'_k(\overline{x'}, x', y'), \quad k = 1, \ldots, d', \tag{5.1}$$

où $\mathbb{C}^{n'} \ni z' = (x', y') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$ est un système de coordonnées holomorphes locales près de $p' = (x'_p, y'_p)$ et les $\phi'_k(\xi', x', y')$ sont des fonctions holomorphes près de $(\overline{x'_p}, x'_p, y'_p)$ satisfaisant $\phi'_k(\overline{x'_p}, x', y') \equiv \phi'_k(\xi', x'_p, y') \equiv y'_k$,

$k = 1, \ldots, d'$. Les opérateurs

$$L'_j(z', \overline{z'}) = \frac{\partial}{\partial \overline{x'_j}} + \sum_{k=1}^{d'} \frac{\partial \phi'_k}{\partial \overline{x'_j}}(\overline{x'}, x', y') \frac{\partial}{\partial \overline{y'_k}}, \quad j = 1, \ldots, m',$$

forment une base (commutant) des opérateurs CR de M' et les opérateurs conjugués de façon complexe, puis complexifiés,

$$\mathcal{L}'_j(z') = \frac{\partial}{\partial x'_j} + \sum_{k=1}^{d'} \frac{\partial \overline{\phi'_k}}{\partial x'_j}(x', \overline{x'_p}, \overline{y'_p}) \frac{\partial}{\partial y'_k}, \quad j = 1, \ldots, m', \tag{5.2}$$

forment une base (commutant) des opérateurs holomorphes tangents à $Q'_{p'}$, la variété de Segre de M' associée au p' (voir la Section 1). Dans (5.2), nous avons utilisé la notation $\overline{\phi}(Z) := \overline{\phi(\overline{Z})}$ pour une fonction holomorphe ϕ quelconque. Par ailleurs, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{m'}$, nous notons $\mathcal{L}'^\alpha$ l'opérateur composé $\mathcal{L}'^\alpha := {\mathcal{L}'_1}^{\alpha_1} \ldots {\mathcal{L}'_{m'}}^{\alpha_{m'}}$. Il est facile de prouver la version "courbe" suivante du principe d'unicité pour les fonctions holomorphes :

Lemme 5.3. *Une fonction R holomorphe près de p' s'annule identiquement sur $Q'_{p'}$, si et seulement si, $\mathcal{L}'^\alpha R|_{p'} = 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{m'}$.*

Nous ne donnerons pas la démonstration de ce lemme qui est triviale.

Puisque $f : M \to M'$ est un difféomorphisme CR $\mathcal{C}^\infty$, $n = n'$, $m = m'$ et $d = d'$. Remarquons que $A'_{p'}$ est l'ensemble des points z' proches de p' tels que $\rho'_k(\cdot, \overline{z'})$ s'annule identiquement sur $Q'_{p'}$, pour tout $k = 1, \ldots, d$. Vu le Lemme 5.3, $z' \in A'_{p'}$, si et seulement si,

$$\mathcal{L}'^\alpha \rho'_k(\cdot, \overline{z'})|_{p'} = 0, \quad k = 1, \ldots, d, \ \alpha \in \mathbb{N}^m, \tag{5.3}$$

ce qui est clairement équivalent (après conjugaison complexe) à

$$L'^\alpha \rho'_k(z', \bar{\cdot})|_{p'} = 0, \quad k = 1, \ldots, d, \ \alpha \in \mathbb{N}^m. \tag{5.4}$$

Les "tirés en arrière" $K_j := f^* L'_j$, $j = 1, \ldots, m$, forment une base des opérateurs CR de M. Puisque (5.4) est équivalent à

$$K^\alpha \rho'_k(z', \overline{f(\cdot)})|_p = 0, \quad k = 1, \ldots, d, \ \alpha \in \mathbb{N}^m,$$

(5.4), et par conséquent (5.3), est équivalent à

$$L^\alpha \rho'_k(z', \overline{f(\cdot)})|_p = 0, \quad k = 1, \ldots, d, \ \alpha \in \mathbb{N}^m. \tag{5.5}$$

Ceci prouve que $A'_{p'}$ coïncide avec $\mathcal{V}_p(f)$ près de p'. □

Remarque 5.4. Dans la démonstration du Lemme 5.1, nous avons remplacé l'égalité $Q'_{z'} = Q'_{p'}$ entre ensembles analytiques complexes (voir la Section 1) par un système infini d'équations analytiques complexes (5.3) qui représente l'égalité des *germes* en p' des ensembles analytiques complexes $Q'_{z'}$ et $Q'_{p'}$. Notons que par le théorème de Nœther, on peut remplacer (5.3) par un sous-système fini, représentant alors l'égalité des *jets d'ordre* A en p' des ensembles $Q'_{z'}$ et $Q'_{p'}$, pour un certain entier $A \in \mathbb{N}$.

Le Lemme 5.1 permet de donner une nouvelle caractérisation de la finitude essentielle :

Proposition 5.5. *La sous-variété $M \subset \mathbb{C}^n$ analytique réelle générique est essentiellement finie en p, si et seulement si, la dimension de $\mathcal{V}_p(\mathrm{id}_M)$ en p est zéro, où id_M désigne l'application identité de M.*

Démonstration. C'est direct, vu le Lemme 5.1. □

6. Fin des démonstrations

Nous donnons maintenant la fin des démonstrations des corollaires du Théorème 1.2.

Démonstration du Corollaire 1.3. Vu le Théorème 1.2, le Lemme 5.1 donne directement la conclusion. □

Démonstration du Corollaire 1.4. Supposons que $p = p' = 0$ et utilisons des coordonnées du type (1.2), $z' = (x', y') \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$, telles que M' est donnée près de 0 par des équations du type (1.1), $\overline{y'} = \phi'(\overline{x'}, x', y')$, où $\phi'(\xi', x', y')$ est holomorphe près de $(0, 0, 0)$ et satisfait

$$\phi'(0, x', y') \equiv \phi'(\xi', 0, y') \equiv y'. \tag{6.1}$$

Ecrivons $f = (f', f_n)$ dans ces coordonnées. Par un raisonnement sur les séries formelles, on montre que si f est de multiplicité finie en p et si M' est essentiellement finie en p', le sous-ensemble analytique complexe $\mathcal{W}_0(f) \subset \mathbb{C}^{n-1}$ défini par les équations en x',

$$L^\alpha \phi'(\overline{f'(\cdot)}, x', 0)|_0 = 0, \qquad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^{n-1},$$

est de dimension zéro (voir [7]). Rappelons que la variété caractéristique $\mathcal{V}_0(f)$ est donnée par les équations en z',

$$L^\alpha \rho'(z', \overline{f(\cdot)})|_0 = 0, \qquad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^{n-1}, \tag{6.2}$$

où nous pouvons choisir $\rho'(z', \overline{z'}) := \phi'(\overline{x'}, x', y') - \overline{y'}$ comme fonction définissante de M'. Pour $\alpha = (0, \ldots, 0)$, (6.2) implique que $\phi'(0, x', y') - 0 = y' = 0$. Donc, (6.2) est équivalent à $L^\alpha(\phi'(\overline{f'(\cdot)}, x', 0) - \overline{f_n(\cdot)})|_0 = 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$. Vu (6.1), $L^\alpha \overline{f_n}|_0 = 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, ce qui implique que $\mathcal{V}_0(f)$ coïncide avec $\mathcal{W}_0(f)$ près de 0, et est donc de dimension zéro en 0. Le Théorème 1.2 s'applique donc, prouvant que f est analytique réelle sur un voisinage de p dans M.

Notons que l'hypothèse de minimalité sur M est superflue. En effet, si M' est essentiellement finie en p' et si f est de multiplicité finie en p, M est essentiellement finie en p (voir [7], Theorem 3). Puis, comme M est une hypersurface, M est alors nécessairement minimale en p. $\square$

Démonstration du Corollaire 1.5. Le fait que f soit K-non dégénérée en p implique directement par le théorème des fonctions implicites holomorphe que la dimension de la variété caractéristique $\mathcal{V}_p(f)$ est zéro en p' ; le Théorème 1.2 donne alors la conclusion. $\square$

Remarque 6.1. Dans la situation du Corollaire 1.5, la démonstration du Théorème 1.2 est grandement simplifiée : dans le Lemme 4.3, le théorème des fonctions implicites holomorphe montre que $f_j(z) = H_j(z, \overline{z}, \overline{D^A f(z)})$, pour $j = 1, \dots, n'$ et $z \in M$, où les H_j sont holomorphes près de $(p, \overline{p}, \overline{D^A f(p)})$ et $D^A f(z)$ désigne le jet d'ordre A de f en z ; en d'autres termes, $f_j \in \mathcal{R}_p(M)$. Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser notre outil technique principal (Proposition 3.4) dans cette situation, et la version simplifiée (Proposition 3.5) qui traite du cas non singulier prouve directement que chaque f_j s'étend holomorphiquement au voisinage de p.

Démonstration du Corollaire 1.6. Il suffit de remarquer que la variété caractéristique $\mathcal{V}_p(f)$ définie dans ce chapitre (Définition 1.1) et la première variété caractéristique $\mathcal{V}_p^1$ définie au Chapitre 1 (Définition 1.1) coïncident pour une application f holomorphe au voisinage de p. $\square$

CHAPITRE 3

Feuilletages holomorphes locaux et analyticité partielle d'applications CR $\mathcal{C}^\infty$

Soit $f : M \to M'$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ entre une sous-variété analytique réelle générique $M \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. Dans ce chapitre, nous prouvons que si M est minimale et si M' ne contient pas de courbe complexe, f est analytique sur un ouvert dense de M. Plus généralement, nous établissons une estimation supérieure de l'analyticité partielle de f, en fonction des feuilletages holomorphes locaux contenus dans M'[1].

Rappelons que la présentation détaillée de ce chapitre se trouve dans l'Introduction, page 9. Décrivons brièvement le plan de ce chapitre. La Section 1 donne des énoncés précis de notre résultat principal et de ces corollaires. Dans la Section 2, en exploitant les résultats et les idées du Chapitre 2, nous établissons des résultats techniques préliminaires, essentiels pour la démonstration de notre résultat principal. La Section 3 est consacrée à l'étude du "degré d'analyticité partielle" de l'application f ; nous étudions en particulier sa régularité, son lien avec l'analyticité de f, et nous le comparons au "degré de transcendance" de f (voir [**25**]). Dans la Section 4, nous décrivons la géométrie du plus petit ensemble analytique complexe $\mathcal{T}_p(f)$ contenant le graphe de f et prouvons que l'ensemble analytique réel $\mathcal{T}_p(f) \cap \pi^{-1}(M)$ se projette dans M' par π', où $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'} \to \mathbb{C}^n$ et $\pi' : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'} \to \mathbb{C}^{n'}$ désignent les projections canoniques. La Section 5 concerne la propriété de feuilletage local par des variétés complexes de $\mathcal{T}_p(f) \cap \pi^{-1}(M)$, et le transfert de ce feuilletage par π'. Enfin, nous donnons à la Section 6 la fin des démonstrations de notre résultat principal et de ces corollaires.

1. Enoncés des résultats

Soient $M \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, une sous-variété analytique réelle générique, $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ un sous-ensemble analytique réel, $p \in M$, $p' \in M'$, et $f : M \to M'$

[1] Les résultats de ce chapitre font l'objet d'un article [**27**] prépublié et soumis pour publication.

une application CR $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(p) = p'$. Désignons par $\mathcal{T}_p(f)$ le germe en (p, p') de l'ensemble analytique complexe défini par l'intersection de tous les sous-ensembles analytiques complexes de $\mathbb{C}^{n+n'}$ contenant le graphe de f au voisinage de (p, p'). Le *degré d'analyticité partielle* de f en p est par définition l'entier naturel $\deg_p f := \dim \mathcal{T}_p(f) - n$ (voir [**24**]). La variété CR M est dite *minimale* en p (au sens de Tumanov [**73**]) si elle ne contient pas de sous-variété CR stricte passant par p et de même dimension CR que M. L'ensemble analytique réel M' est dit (r, s)-*plat* en p', $s \geq 1$, $r \geq 2s$ (voir [**22, 52, 24, 25**]), s'il contient une sous-variété analytique réelle N' de dimension r et passant par p', *feuilletée* par des variétés complexes de dimension s, c'est-à-dire biholomorphe au produit cartésien $N \times \mathcal{D}$, où N est une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, et $\mathcal{D}$ est un domaine borné de $\mathbb{C}^s$.

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème 1.1. *Soit $f : M \to M'$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ entre une sous-variété analytique réelle générique $M \subset \mathbb{C}^n$ et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$, $p \in M$, $p' \in M'$ et $f(p) = p'$. On suppose que M est minimale en p et que le degré d'analyticité partielle de f est constant égal à s sur un voisinage de p dans M ; on note r le rang maximal de f sur ce voisinage. Alors, il existe un fermé d'intérieur vide $\Sigma \subset M$ tel que pour tout $q \in M \setminus \Sigma$ suffisamment proche de p, M' est (r', s)-plat en $f(q)$, pour un entier $r' \geq r$. En particulier, M' est (r', s)-plat en des points de $f(M)$ arbitrairement proches de p'.*

Ce théorème généralise en codimension supérieure le résultat récent de Coupet-Pinchuk-Sukhov (voir [**24**], Théorème 2). La nouveauté de notre travail réside principalement dans le passage en codimension supérieure, qui implique, comme au Chapitre 2, des difficultés techniques importantes. Nous exploitons ici les idées et les résultats du Chapitre 2, Sections 3 et 4, qui reposent sur la manipulation de domaines de type "wedge" et sur l'utilisation d'outils adaptés.

Remarque 1.2. Sous les hypothèses du Théorème 1.1, on obtient en fait la conclusion plus forte suivante : pour tout $q \in M \setminus \Sigma$ suffisamment proche de p, M' contient une sous-variété analytique réelle N' de dimension r', passant par $f(q)$, et biholomorphe au produit cartésien $N \times \mathcal{D}$, où N est une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, et $\mathcal{D}$ est un domaine borné de $\mathbb{C}^s$. De plus, *N' contient l'image $f(M)$ de l'application f*, dans un voisinage de $f(q)$.

L'énoncé suivant est un corollaire du Théorème 1.1 ; il donne une estimation supérieure du degré d'analyticité partielle de f sous une hypothèse géométrique simple :

Corollaire 1.3. *Soit $f : M \to M'$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ entre une sous-variété analytique réelle générique $M \subset \mathbb{C}^n$ et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$, $p \in M$, $p' \in M'$ et $f(p) = p'$. Si M est minimale en p et si M' ne contient pas de variété complexe de dimension s au voisinage de p', il existe un fermé d'intérieur vide $\Sigma \subset M$ tel que pour tout $q \in M \setminus \Sigma$ suffisamment proche de p, $\deg_q f < s$.*

En particulier, comme f est analytique sur un ouvert dense de M si son degré d'analyticité partielle est nul, on obtient :

Corollaire 1.4. *Soit $f : M \to M'$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ entre une sous-variété analytique réelle générique $M \subset \mathbb{C}^n$ et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$, $p \in M$, $p' \in M'$ et $f(p) = p'$. Si M est minimale en p et si M' ne contient pas de courbe complexe au voisinage de p', il existe un voisinage V de p dans M tel que f est analytique réelle sur un ouvert dense de V (et se prolonge donc holomorphiquement à un voisinage dans $\mathbb{C}^n$ de cet ouvert dense de V).*

Dans le cas particulier où $M \subset \mathbb{C}^n$ et $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$, $n' > n > 1$, sont des hypersurfaces analytiques réelles pseudo-convexes, telles que M ne contient pas de courbe complexe et M' est strictement pseudo-convexe, l'analyticité de f sur un ouvert dense de M a été démontrée par Forstnerič [**41**]. Il est important de noter que notre résultat (Corollaire 1.4) s'applique à des situations bien plus générales, en particulier dans le cas où M et M' sont des variétés de *codimensions supérieures*.

Nous insistons sur le fait que le Théorème 1.1 prouve des résultats plus forts que les Corollaires 1.3 et 1.4, où l'hypothèse géométrique sur M' est réduite à la propriété de *ne pas contenir de feuilletage holomorphe local* ; c'est ce que nous exposons dans le paragraphe suivant.

En combinant les résultats de ce chapitre (Corollaire 1.4) et du Chapitre 1 (Corollaire 1.7), nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 1.5. *Soit $f : M \to M'$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ entre une sous-variété algébrique réelle générique $M \subset \mathbb{C}^n$ et un sous-ensemble algébrique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$, $p \in M$, $p' \in M'$ et $f(p) = p'$. Si M est minimale en p et si M' ne contient pas de courbe complexe au voisinage de p', f se prolonge en une application holomorphe algébrique sur un voisinage dans $\mathbb{C}^n$ d'un ouvert dense de M près de p (et se prolonge donc en une application algébrique complexe sur tout $\mathbb{C}^n$).*

(Nous nous référons au Chapitre 1, Section 1.1, pour les définitions ayant trait à l'algébricité.) Ce résultat généralise, par exemple, la situation considérée dans [**46**].

Nous raffinons maintenant les Corollaires 1.3 et 1.4 et donnons une hypothèse plus faible sur M' qui porte sur la propriété de ne pas être localement feuilleté par des variétés complexes, au lieu de simplement ne pas contenir de variété complexe. La sous-variété CR analytique réelle $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ est dite *s-holomorphiquement dégénérée en $p' \in M'$* s'il existe s champs de vecteurs holomorphes indépendants, à coefficients holomorphes, tangents à M' dans un voisinage de p' ; lorsque $s = 1$, nous dirons simplement que M' est *holomorphiquement dégénérée en p'* (voir [**70**, **9**, **4**, **52**, **22**, **25**]). Remarquons que si M' est s-holomorphiquement dégénérée en p', M' est (r, s)-plate pour $r = \dim M'$ en tout point $q' \in M' \setminus \Sigma'$ suffisamment proche de p', où Σ' est un sous-ensemble analytique réel strict de M'. Réciproquement, il est évident que si M' est (r, s)-plate en p' pour $r = \dim M'$, M' est s-holomorphiquement dégénérée en p'. Bien entendu, nous dirons que M' est *s-holomorphiquement non dégénérée en p'* si elle n'est pas s-holomorphiquement dégénérée en p', et qu'elle est *s-holomorphiquement non dégénérée* si elle est s-holomorphiquement non dégénérée en tout point.

Cette notion de non dégénérescence holomorphe nous permet de donner une condition sur M' plus faible que celle du Corollaire 1.3, et tout aussi géométrique, pour l'analyticité partielle de f :

Corollaire 1.6. *Soit $f : M \to M'$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ entre deux sous-variétés analytiques réelles génériques $M \subset \mathbb{C}^n$ et $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$, $p \in M$, $p' \in M'$ et $f(p) = p'$. Si M est minimale en p, si f est une submersion en p et si M' est s-holomorphiquement non dégénérée, il existe un fermé d'intérieur vide $\Sigma \subset M$ tel que pour tout $q \in M \setminus \Sigma$ suffisamment proche de p, $\deg_q f < s$.*

En particulier, lorsque $s = 1$, on obtient une condition géométrique sur M' plus faible que celle du Corollaire 1.4 :

Corollaire 1.7. *Soit $f : M \to M'$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ entre deux sous-variétés analytiques réelles génériques $M \subset \mathbb{C}^n$ et $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$, $p \in M$, $p' \in M'$ et $f(p) = p'$. Si M est minimale en p, si f est une submersion en p et si M' est holomorphiquement non dégénérée, il existe un voisinage V de p dans M tel que f est analytique réelle sur un ouvert dense de V (et se prolonge donc holomorphiquement à un voisinage dans $\mathbb{C}^n$ de cet ouvert dense de V).*

Signalons enfin que l'hypothèse selon laquelle M' ne contient pas de courbe complexe au voisinage de p' (voir le Corollaire 1.4) est une condition *nécessaire* à l'analyticité de toutes les applications CR $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans M', comme le montre l'exemple classique suivant :

Exemple 1.8. Soit $M \subset \mathbb{C}^n$ une sous-variété analytique réelle, générique, minimale en $p \in M$, telle qu'il existe une fonction ϕ CR $\mathcal{C}^\infty$ sur M, non analytique en p. (Sinon, il est bien évidemment vain de chercher à construire une application $f : M \to M'$, CR $\mathcal{C}^\infty$ et non analytique !) On peut supposer, sans perte de généralité, que $\phi(p) = 0$. Soit, par ailleurs, $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ un sous-ensemble analytique réel contenant une courbe complexe $\mathcal{C}$ passant par le point $p' \in M'$. Il existe un biholomorphisme $\Phi : D_1 \to D_2$ entre deux domaines bornés $D_1 \ni p'$ et $D_2 \ni 0$ de $\mathbb{C}^{n'}$, $\Phi(p') = 0$, tel que $\Phi(\mathcal{C} \cap D_1) = \{(0,\ldots,0)\} \times \Delta$, où Δ désigne le disque unité de $\mathbb{C}$. Alors, l'application $f : M \to M'$ définie par $f(z) = \Phi^{-1}(0,\ldots,0,\phi(z))$ pour $z \in M$ suffisamment proche de p, est CR $\mathcal{C}^\infty$, mais n'est pas analytique en p.

2. Résultats préliminaires

Les notations et définitions suivantes sont essentiellement les mêmes que celles du Chapitre 2, Section 1. Ecrivons les équations définissantes de la sous-variété analytique réelle $M \subset \mathbb{C}^n$, près de $p \in M$, sous la forme usuelle

$$\rho_k(z,\overline{z}) = 0, \quad k = 1,\ldots,d,$$

où d dénote la codimension de M et où les ρ_k sont des fonctions analytiques réelles, à valeurs réelles, vérifiant $d\rho_1 \wedge \cdots \wedge d\rho_d \neq 0$ en p. Nous supposons de plus que M est générique, c'est-à-dire que $\overline{\partial}\rho_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}\rho_d \neq 0$ en p, ou de façon équivalente, que la dimension CR de M est $m := n-d$. Par le théorème des fonctions implicites holomorphe, nous pouvons écrire les équations de M près de p sous la forme

$$\overline{y_k} = \phi_k(\overline{x}, x, y), \quad k = 1,\ldots,d,$$

où $\mathbb{C}^n \ni z = (x,y) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ est un système de coordonnées holomorphes locales près de $p = (x_p, y_p)$ et les $\phi_k(\xi, x, y)$ sont des fonctions holomorphes près de $(\overline{x_p}, x_p, y_p)$ satisfaisant $\phi_k(\overline{x_p}, x, y) \equiv \phi_k(\xi, x_p, y) \equiv y_k$, $k = 1,\ldots,d$. Dans la suite, nous utiliserons la notation vectorielle $\phi = (\phi_1,\ldots,\phi_d)$. Les opérateurs

$$L_j = \frac{\partial}{\partial \overline{x_j}} + \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \phi_k}{\partial \overline{x_j}}(\overline{x}, x, y)\frac{\partial}{\partial \overline{y_k}}, \quad j = 1,\ldots,m,$$

forment une base des opérateurs CR de M, à coefficients analytiques réels.

Dans cette section (et les suivantes), nous supposerons toujours que la sous-variété analytique réelle générique $M \subset \mathbb{C}^n$ est minimale en $p \in M$ (au sens de Tumanov [73], voir Section 1). Rappelons que comme M est analytique réelle, elle est minimale en p, si et seulement si, elle est de type fini en p (au sens de Bloom-Graham [16]). La variété M est alors minimale en tout point suffisamment proche de p ; quitte à réduire le voisinage de p considéré, on supposera dans toute cette section (ainsi que dans les suivantes) que M est minimale en tout point.

Par ailleurs, nous emploierons toujours la convention suivante : soient $\mathcal{M}$ une variété $\mathcal{C}^\infty$, P un point de $\mathcal{M}$ et F une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}$; la phrase "$F \not\equiv 0$ au voisinage de P dans $\mathcal{M}$" signifiera que *pour tout* voisinage V de P dans $\mathcal{M}$, $f|_V \not\equiv 0$. En pratique, c'est donc la non nullité du germe de F en P qui nous intéressera. Remarquons que nous emploierons aussi la phrase "$F \equiv 0$ au voisinage de P dans $\mathcal{M}$" ; mais cette dernière ne pose aucun problème d'interprétation.

Le résultat suivant donne une condition suffisante pour que le degré d'analyticité partielle de s fonctions CR $\mathcal{C}^\infty$ sur M soit non maximal, c'est-à-dire strictement inférieur à s :

Lemme 2.1. *Soient $g = (g_1, \ldots, g_s)$ et $u = (u_1, \ldots, u_t)$, $s, t \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$, des fonctions CR $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de p dans M et $H(z, \zeta, \nu, w)$ une fonction holomorphe au voisinage de $(p, \overline{p}, \overline{u(p)}, g(p))$ dans $\mathbb{C}^n_z \times \mathbb{C}^n_\zeta \times \mathbb{C}^t_\nu \times \mathbb{C}^s_w$. On suppose que*

$$H(z, \overline{z}, \overline{u(z)}, g(z)) \equiv 0 \tag{2.1}$$

au voisinage de p dans M_z et que

$$H(z, \overline{z}, \overline{u(z)}, w) \not\equiv 0 \tag{2.2}$$

au voisinage de $(p, g(p))$ dans $M_z \times \mathbb{C}^s_w$.

Alors, il existe une suite $q_n \to p$ de points de M tels que $\deg_{q_n} g < s$.

Remarque 2.2. La démonstration de ce résultat crucial est assez technique. C'est ici qu'intervient l'hypothèse selon laquelle le degré d'analyticité partielle de f est constant égal à s. En outre, nous exploitons ici les idées et les résultats du Chapitre 2, Sections 3 et 4.

Démonstration du Lemme 2.1. L'idée essentielle de la démonstration est de chercher à appliquer le théorème de préparation de Weierstrass à $H(z, \zeta, \nu, w)$ par rapport à la dernière variable w_s. Pour cela, il est tout d'abord nécessaire de se placer en un point $(z^0, \zeta^0, \nu^0, w^0)$ tel que $H(z^0, \zeta^0, \nu^0, w^0_1, \ldots, w^0_{s-1}, \cdot) \not\equiv 0$. On obtient alors un polynôme en $g_s(z)$ dans (2.1). Raisonnant sur un tel polynôme, de degré minimal, et appliquant itérativement les opérateurs CR L_j de M qui font baisser son degré, on démontre que les coefficients de ce polynôme sont nécessairement CR. On obtient finalement une relation holomorphe liant les composantes de g et permettant donc de conclure.

Nous raisonnons par récurrence sur $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

Pour $s = 1$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $p = 0$, $u(p) = 0$ et $g(p) = 0$. On développe H sous forme de série entière en w,

$$H(z, \zeta, \nu, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z, \zeta, \nu)\; w^k,$$

où les c_k sont des fonctions holomorphes près de $(0,0,0)$. L'hypothèse (2.2) implique que les fonctions $c_k(z,\overline{z},\overline{u(z)})$, $k\in\mathbb{N}$, ne sont pas toutes identiquement nulles au voisinage de 0 dans M. Ainsi, il existe $k_0\in\mathbb{N}$ tel que $c_{k_0}(z,\overline{z},\overline{u(z)}) =: \psi(z)\in\mathcal{R}_0(M)$ n'est pas identiquement nulle (voir le Chapitre 2, Section 3.1, pour la définition de l'anneau de fonctions $\mathcal{R}_0(M)$). D'après le Chapitre 2, Lemme 3.2, et puisque M est minimale en 0, $\Sigma := \{z\in M : \psi(z)=0\}$ est un fermé d'intérieur vide dans M.

Fixons un point q, arbitrairement proche de 0, dans l'ouvert dense $M\setminus\Sigma$ de M. Sans perte de généralité, on peut de nouveau supposer que $q=0$, $u(q)=0$ et $g(q)=0$. Comme $H(0,0,0,0)=0$ et $H(0,0,0,w)\not\equiv 0$ au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}_w$, le théorème de préparation de Weierstrass s'applique à $H(z,\zeta,\nu,w)$ par rapport à la variable w. On obtient alors, compte tenu de (2.1), que

$$g^d(z)+\sum_{k=0}^{d-1} a_k(z,\overline{z},\overline{u(z)})\; g^k(z)\equiv 0$$

au voisinage de 0 dans M, où $d\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et les a_k sont des fonctions holomorphes près de $(0,0,0)$ vérifiant $a_k(0,0,0)=0$. Comme $a_k(z,\overline{z},\overline{u(z)})\in\mathcal{R}_0(M)$, $k=0,\dots,d-1$, et comme M est minimale en 0, le Chapitre 2, Lemme 4.4, s'applique et prouve que g vérifie une équation polynômiale à coefficients méromorphes au voisinage de 0 dans M. En multipliant les deux membres de cette équations par le plus petit commun multiple des dénominateurs, on obtient une équation polynômiale à coefficients holomorphes annulant g. Ceci prouve que $\deg_0 g=0$.

On suppose le résultat démontré pour $s-1$ (et pour tout $t\in\mathbb{N}$). Comme pour le cas $s=1$, on peut supposer, sans perte de généralité, que $p=0$, $u(p)=0$ et $g(p)=0$. On écrit $w=(w',w_s)\in\mathbb{C}^{s-1}\times\mathbb{C}$, $g=(g',g_s)$, et on développe H sous forme de série entière en w_s au voisinage de $(0,0,0,0,0)$:

$$H(z,\zeta,\nu,w',w_s)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z,\zeta,\nu,w')\; w_s^k,$$

où les c_k sont des fonctions holomorphes près de $(0,0,0,0)$. Deux cas se présentent :

Cas 1. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $c_k(z,\overline{z},\overline{u(z)},g'(z))\equiv 0$ au voisinage de 0 dans M. L'hypothèse (2.2) implique par ailleurs qu'il existe $k_0\in\mathbb{N}$ tel que $c_{k_0}(z,\overline{z},\overline{u(z)},w')\not\equiv 0$ au voisinage de $(0,0)$ dans $M_z\times\mathbb{C}^{s-1}_{w'}$. Ainsi, l'hypothèse de récurrence pour $s-1$ s'applique à g' et c_{k_0} et prouve que $\deg_{q_n} g'<s-1$, pour une suite $q_n\to 0$ de points de M. On a donc $\deg_{q_n} g<s$ et la démonstration est terminée.

Cas 2. Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $c_{k_0}(z, \overline{z}, \overline{u(z)}, g'(z)) \not\equiv 0$ au voisinage de 0 dans M. Fixons donc un point $q \in M$, arbitrairement proche de 0, tel que $c_{k_0}(q, \overline{q}, \overline{u(q)}, g'(q)) \neq 0$. Sans perte de généralité, on peut de nouveau supposer que $q = 0$, $u(q) = 0$, $g'(q) = 0$ et $g_s(q) = 0$. Comme $H(0,0,0,0,0) = 0$ et $H(0,0,0,0,w_s) \not\equiv 0$ au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}_{w_s}$, le théorème de préparation de Weierstrass s'applique à $H(z, \zeta, \nu, w', w_s)$ par rapport à la variable w_s. On obtient alors, compte tenu de (2.1), que

$$g_s^d(z) + \sum_{k=0}^{d-1} a_k(z, \overline{z}, \overline{u(z)}, g'(z)) \; g_s^k(z) \equiv 0 \tag{2.3}$$

au voisinage de 0 dans M, où $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et les a_k sont des fonctions holomorphes près de $(0,0,0,0)$ vérifiant $a_k(0,0,0,0) = 0$.

On procède alors de façon analogue au Chapitre 2, Lemme 4.4 : on démontre par l'absurde que pour un polynôme (unitaire) de degré minimal de type (2.3) annulant g_s, les coefficients sont nécessairement CR. Puis, on conclut par l'hypothèse de récurrence. Soit donc

$$g_s^\delta(z) + \sum_{k=0}^{\delta-1} b_k(z, \overline{z}, \overline{\gamma(z)}, g'(z)) \; g_s^k(z) \equiv 0 \tag{2.4}$$

au voisinage de η dans M, une équation polynômiale de type (2.3) de degré $\delta \geq 1$ minimal. Dans l'ensemble des équations polynômiales de type (2.3) considérées, on fait varier le nombre τ de fonctions CR $\mathcal{C}^\infty$ $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_\tau)$ et le point $\eta \in M$ proche de 0 (du moment que le degré δ est aussi atteint pour des points de M *arbitrairement proches de* 0).

Par souci de simplification des notations, et sans perte de généralité, nous pouvons de nouveau supposer que $\eta = 0$, $\gamma(\eta) = 0$, $g'(\eta) = 0$ et $g_s(\eta) = 0$. Pour tout $j = 1, \ldots, m$, on applique l'opérateur CR L_j de M à (2.4) et on obtient

$$\sum_{k=0}^{\delta-1} L_j \; b_k(z, \overline{z}, \overline{\gamma(z)}, g'(z)) \; g_s^k(z) \equiv 0 \tag{2.5}$$

au voisinage de 0 dans M. Les coefficients de (2.5) s'écrivent sous la forme

$$L_j \; b_k(z, \overline{z}, \overline{\gamma(z)}, g'(z)) = \beta_{j,k}(z, \overline{z}, \overline{\Gamma(z)}, g'(z)), \tag{2.6}$$

où $\Gamma = ((\gamma_\nu)_{\nu=1,\ldots,\tau}, (\partial\gamma_\nu/\partial z_\mu)_{\nu=1,\ldots,\tau,\ \mu=1,\ldots,n})$ sont $\tau + n\tau$ fonctions CR $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 dans M et les $\beta_{j,k}$ sont des fonctions holomorphes près de $(0,0,0,0)$. Ainsi, les coefficients de (2.5) sont du même type que ceux de (2.3) et (2.4).

Supposons, par l'absurde, qu'il existe des indices j_0 et k_0 tels que $\beta_{j_0,k_0}(z, \overline{z}, \overline{\Gamma(z)}, g'(z)) \not\equiv 0$ au voisinage de 0 dans M. On choisit le plus grand indice k_0 vérifiant cette propriété. On fixe un point $\eta' \in M$, *arbitrairement* *proche de* 0, tel que $\beta_{j_0,k_0}(\eta',\overline{\eta'},\overline{\Gamma(\eta')},g'(\eta'))\neq 0$; la fonction holomorphe β_{j_0,k_0} admet donc un inverse holomorphe près de $(\eta',\overline{\eta'},\overline{\Gamma(\eta')},g'(\eta'))$. Ainsi, (2.5) entraîne que

$$g_s^{k_0}(z)+\sum_{k=0}^{k_0-1}(\beta_{j_0,k_0}^{-1}\beta_{j_0,k})(z,\overline{z},\overline{\Gamma(z)},g'(z))\; g_s^k(z)\equiv 0 \tag{2.7}$$

au voisinage de η' dans M. L'équation polynômiale (2.7), du même type que (2.4), est de degré $k_0<\delta$; c'est en contradiction avec le choix de (2.4).

On a donc montré que pour tous j et k,

$$\beta_{j,k}(z,\overline{z},\overline{\Gamma(z)},g'(z))\equiv 0 \tag{2.8}$$

au voisinage de 0 dans M. On cherche à appliquer l'hypothèse de récurrence à une de ces fonctions, mais il faut tout d'abord vérifier la condition (2.2). Pour chaque indice $k=1,\dots,\delta-1$, on développe b_k sous forme de série entière en w',

$$b_k(z,\zeta,\nu,w')=\sum_{J\in\mathbb{N}^{s-1}}d_{J,k}(z,\zeta,\nu)\;{w'}^J, \tag{2.9}$$

où les $d_{J,k}$ sont des fonctions holomorphes près de $(0,0,0)$. Les équations (2.6), (2.8) et (2.9) entraînent alors que, pour tous j et k,

$$\sum_{J\in\mathbb{N}^{s-1}}L_j\;d_{J,k}(z,\overline{z},\overline{\gamma(z)})\;{g'}^J(z)\equiv 0 \tag{2.10}$$

au voisinage de 0 dans M. Comme en (2.6), pour tous j, J et k, on écrit les coefficients de (2.10) sous la forme

$$L_j\;d_{J,k}(z,\overline{z},\overline{\gamma(z)})=\delta_{j,J,k}(z,\overline{z},\overline{\Gamma(z)}), \tag{2.11}$$

où les $\delta_{j,J,k}$ sont des fonctions holomorphes près de $(0,0,0)$. Deux cas se présentent de nouveau :

Sous-cas 1. Il existe des indices j_0, J_0 et k_0 tels que $\delta_{j_0,J_0,k_0}(z,\overline{z},\overline{\Gamma(z)})\not\equiv 0$ au voisinage de 0 dans M. Alors,

$$\beta_{j_0,k_0}(z,\overline{z},\overline{\Gamma(z)},w')\not\equiv 0 \tag{2.12}$$

au voisinage de $(0,0)$ dans $M_z\times\mathbb{C}_{w'}^{s-1}$. Ainsi, vu (2.8) et (2.12), l'hypothèse de récurrence pour $s-1$ s'applique à g' et β_{j_0,k_0} et prouve que $\deg_{q_n} g'<s-1$, pour une suite $q_n\to 0$ de points de M. On a donc $\deg_{q_n} g<s$ et la démonstration est terminée.

Sous-cas 2. Pour tous j, J et k, $\delta_{j,J,k}(z,\overline{z},\overline{\Gamma(z)}) \equiv 0$ au voisinage de 0 dans M. Cela signifie que pour tous J et k, $\phi_{J,k}(z) := d_{J,k}(z,\overline{z},\overline{\Gamma(z)})$ est CR au voisinage de 0. Comme de plus $\phi_{J,k} \in \mathcal{R}_0(M)$ et comme M est minimale en 0, le Chapitre 2, Proposition 3.4, implique que $\phi_{J,k}$ se prolonge en une fonction $\Phi_{J,k}$ holomorphe au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$. En fait, la version “facile” (Chapitre 2, Proposition 3.5) du Chapitre 2, Proposition 3.4, suffit ici, car $\phi_{J,k}$ n'a aucune singularité en 0. Vu (2.4) et (2.9), on obtient que dans un voisinage de 0 dans M,

$$g_s^\delta(z) + \sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^{s-1}\\ k\in\{0,\ldots,\delta-1\}}} \Phi_{J,k}(z)\ {g'}^J(z)\ g_s^k(z) \equiv 0. \tag{2.13}$$

La relation (2.13) implique que le graphe de g est inclus au voisinage de $(0,0)$ dans une hypersurface complexe de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s$, et donc $\deg_0 g < s$. Ceci termine la démonstration du Lemme 2.1. □

Nous aurons besoin à la Section 4 du résultat suivant, dans lequel l'hypothèse (2.2) du Lemme 2.1 est affaiblie :

Lemme 2.3. *Soient $g = (g_1, \ldots, g_s)$, $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$, des fonctions CR $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de p dans M et $H(z,\zeta,\nu,w)$ une fonction holomorphe au voisinage de $(p,\overline{p},\overline{g(p)},g(p))$ dans $\mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_\zeta^n \times \mathbb{C}_\nu^s \times \mathbb{C}_w^s$. On suppose que*

$$H(z,\overline{z},\overline{g(z)},g(z)) \equiv 0 \tag{2.14}$$

au voisinage de p dans M_z et que

$$H(z,\overline{z},\nu,w) \not\equiv 0 \tag{2.15}$$

au voisinage de $(p,\overline{g(p)},g(p))$ dans $M_z \times \mathbb{C}_\nu^s \times \mathbb{C}_w^s$.

Alors, il existe une suite $q_n \to p$ de points de M tels que $\deg_{q_n} g < s$.

Démonstration. L'idée est de modifier l'hypothèse (2.15) en une condition plus forte (du type (2.2)) et d'appliquer le Lemme 2.1.

On peut supposer, sans perte de généralité, que $p = 0$ et $g(p) = 0$. On développe H sous forme de série entière en w,

$$H(z,\zeta,\nu,w) = \sum_{J\in\mathbb{N}^s} c_J(z,\zeta,\nu)\ w^J,$$

où les c_J sont des fonctions holomorphes près de $(0,0,0)$.

Cas 1. Il existe $J_0 \in \mathbb{N}^s$ tel que $c_{J_0}(z,\overline{z},\overline{g(z)}) \not\equiv 0$ au voisinage de 0 dans M. Dans ce cas, $H(z,\overline{z},\overline{g(z)},w) \not\equiv 0$ au voisinage de $(0,0)$ dans $M_z \times \mathbb{C}_w^s$ et la condition (2.2) est alors vérifiée ; le Lemme 2.1 implique la conclusion.

Cas 2. Pour tout $J \in \mathbb{N}^s$, $c_J(z, \overline{z}, \overline{g(z)}) \equiv 0$ au voisinage de 0 dans M. Comme l'hypothèse (2.15) implique par ailleurs qu'il existe $J_0 \in \mathbb{N}^s$ tel que $c_{J_0}(z, \overline{z}, \nu) \not\equiv 0$ au voisinage de $(0,0)$ sur $M_z \times \mathbb{C}^s_\nu$, le Lemme 2.1 s'applique ici à la fonction c_{J_0} et donne aussi la conclusion (après conjugaison complexe). $\square$

3. Propriétés du degré d'analyticité partielle

Comme à la Section 2, nous supposons dans toute cette section que M est minimale en tout point. Nous nous référons à la Section 1 pour les définitions du germe d'ensemble analytique complexe $\mathcal{T}_p(f)$ et du degré d'analyticité partielle $\deg_p f$ de f en p. Par abus de notation, $\mathcal{T}_p(f)$ désignera également tout représentant du germe d'ensemble analytique complexe $\mathcal{T}_p(f)$.

Dans cette section, nous étudions tout d'abord la régularité de $\deg_z f$. Puis, nous établissons l'équivalence entre l'analyticité de f et la nullité de $\deg_p f$, justifiant ainsi la dénomination *degré d'analyticité partielle*. Enfin, nous comparons les notions de degré d'analyticité partielle et de degré de transcendance (voir [25]) d'une application CR $\mathcal{C}^\infty$.

3.1. Régularité du degré d'analyticité partielle

Remarque 3.1. Vu la définition du degré d'analyticité partielle $\deg_p f$ de f en p (voir Section 1), c'est clairement un invariant biholomorphe du triplet (M, M', f). (C'est-à-dire que $\deg_p f$ est invariant par changement de variables holomorphe local, aussi bien dans l'espace de départ $\mathbb{C}^n$ que dans l'espace d'arrivée $\mathbb{C}^{n'}$.)

Lemme 3.2. *Le degré d'analyticité partielle* $\deg_z f$ *de* f *en* z *est semi-continu supérieurement par rapport à* $z \in M$.

Démonstration. Soit q un point de M et notons $\Gamma_f := \{(z, f(z)) : z \in M\}$ le graphe de f. Par définition, $\mathcal{T}_q(f)$ est un ensemble analytique complexe défini dans un voisinage $U \times V$ de $(q, f(q))$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'}$, contenant $\Gamma_f \cap (U \times V)$. Pour tout $z \in M \cap U$, l'ensemble analytique complexe $\mathcal{T}_q(f)$ passe par $(z, f(z))$ et contient Γ_f au voisinage de $(z, f(z))$. Donc, par définition, $\mathcal{T}_q(f)$ contient $\mathcal{T}_z(f)$ au voisinage de $(z, f(z))$, et donc, pour $z \in M$ *suffisamment proche de* q,

$$\begin{aligned} \deg_z f &= \dim_{(z,f(z))} \mathcal{T}_z(f) - n \\ &\le \dim_{(z,f(z))} \mathcal{T}_q(f) - n \\ &\le \dim_{(q,f(q))} \mathcal{T}_q(f) - n = \deg_q f. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ceci prouve que $\deg_z f$ est semi-continu supérieurement, puisqu'il est à valeurs entières. (Dans (3.1), nous avons utilisé le fait que la dimension d'un ensemble analytique complexe est semi-continue supérieurement.) $\square$

Exemple 3.3. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$. Alors, $\deg_0 f = 1$, mais pour tout $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\deg_q f = 0$.

Vérification de l'Exemple 3.3. Tout d'abord, pour tout $q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\widetilde{f}(z) := e^{-1/z^2}$ est une extension holomorphe de f au voisinage de q. Ainsi, le graphe Γ_f de f est inclus dans le graphe de $\widetilde{f}$ au voisinage de $(q, f(q))$, ce qui implique que $\deg_q f = 0$.

Par contre, comme f n'est pas analytique réelle en 0, il n'existe pas de sous-ensemble analytique complexe de $\mathbb{C}^2$ de codimension 1 contenant Γ_f près de $(0,0)$, et donc $\deg_0 f = 1$. Nous le prouvons par l'absurde : si $\mathcal{T}_0(f)$ était de codimension 1 dans $\mathbb{C}^2$, il serait défini par une équation holomorphe $H(z,w) = 0$ au voisinage de $(0,0)$. Comme $H(z, e^{-1/z^2})$ est une fonction holomorphe pour $z \neq 0$ proche de 0, s'annulant sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ près de 0,

$$H(z, e^{-1/z^2}) \equiv 0, \qquad \text{pour } z \neq 0 \text{ proche de } 0. \tag{3.2}$$

Comme 0 est une singularité essentielle de e^{-1/z^2}, pour tout point $w \in \mathbb{C}$, il existe une suite $z_n \to 0$ de points de $\mathbb{C}$ telle que $e^{-1/z_n^2} \to w$. Par passage à la limite dans (3.2), on obtient que

$$H(0,w) \equiv 0, \qquad \text{pour } w \text{ proche de } 0. \tag{3.3}$$

On écrit $H(z,w) = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} H_\nu(z)\, w^\nu$ et $H_\nu(z) = z^{\alpha_\nu}\, G_\nu(z)$ avec $G_\nu(0) \neq 0$, pour tout $\nu \in \mathbb{N}$. Vu (3.3), $H_\nu(0) = 0$, et donc $\alpha_\nu \geq 1$, pour tout ν ; ainsi, $\alpha := \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \alpha_\nu \geq 1$. On peut donc factoriser z^α dans H :

$$H(z,w) = z^\alpha \sum_{\nu\in\mathbb{N}} z^{\alpha_\nu - \alpha}\, G_\nu(z)\, w^\nu = z^\alpha\, G(z,w), \tag{3.4}$$

avec G holomorphe au voisinage de $(0,0)$ vérifiant $G(0,w) \not\equiv 0$. Mais, (3.2) et (3.4) entraînent alors que $G(z, e^{-1/z^2}) \equiv 0$, pour $z \neq 0$ proche de 0 ; par le même argument que pour H, on conclut que $G(0,w) \equiv 0$, ce qui est une contradiction. $\square$

Nous aurons besoin par la suite des résultats suivants, qui sont des corollaires directs du Lemme 3.2 :

Corollaire 3.4. *Si $\deg_z f$ est minimum en $q \in M$, il est constant au voisinage de q dans M. En particulier, si $\deg_q f = 0$, $\deg_z f \equiv 0$ au voisinage de q dans M.*

Démonstration. C'est direct, puisque $\deg_z f$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. $\square$

Corollaire 3.5. *Il existe un fermé d'intérieur vide $\Sigma \subset M$ tel que $\deg_z f$ est constant sur chaque composante connexe de l'ouvert dense $M \setminus \Sigma$ de M.*

Démonstration. Soit Σ l'ensemble des points de M au voisinage desquels $\deg_z f$ est non constant. C'est un fermé car son complémentaire est trivialement ouvert. Pour démontrer qu'il est d'intérieur vide, on raisonne par l'absurde en utilisant le fait que $\deg_z f$ est semi-continu supérieurement, à valeurs entières et minoré par 0. $\square$

3.2. Lien entre l'analyticité de f et la nullité de $\deg_p f$

Par le principe d'unicité au bord (voir [60, 20]), on obtient facilement le résultat suivant, qui sera fréquemment utilisé par la suite :

Lemme 3.6. *Supposons que l'ensemble analytique complexe $\mathcal{T}_p(f)$ est défini dans un voisinage $U \times V$ de (p, p') dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'}$ et que l'application f se prolonge en une application holomorphe $\widetilde{f}$ sur un domaine borné $\mathcal{D} \subset U$ vérifiant une des deux propriétés suivantes :*

(a) $N := M \cap \mathcal{D}$ est un ouvert de $M \cap U$;

(b) $\mathcal{D}$ est un "wedge" dont l'"edge" N est un ouvert de $M \cap U$.

Alors, le graphe $\Gamma_{\widetilde{f}}$ de $\widetilde{f}$ est inclus dans $\mathcal{T}_p(f)$.

Démonstration. Notons $H_l(z, z') = 0$, $l = 1, \ldots, L$, des équations définissantes holomorphes de $\mathcal{T}_p(f)$ dans $U \times V$. Pour tout $l = 1, \ldots, L$, l'application $\psi_l(z) := H_l(z, \widetilde{f}(z))$ est holomorphe sur le domaine $\mathcal{D}$ (quitte à considérer l'intersection de $\mathcal{D}$ avec un voisinage arbitrairement petit de p, on peut supposer que $\widetilde{f}(\mathcal{D}) \subset V$) et s'annule identiquement sur N. Comme N est une sous-variété analytique réelle générique de $\mathbb{C}^n$, le principe d'unicité au bord (voir [60, 20]) implique que $\psi_l \equiv 0$ sur $\mathcal{D}$, pour tout l, ce qui prouve que $\Gamma_{\widetilde{f}} \subset \mathcal{T}_p(f)$. $\square$

Le lemme suivant explicite le lien entre le degré d'analyticité partielle et l'analyticité de f :

Lemme 3.7. *Soit $f : M \to M'$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ entre une sous-variété $M \subset \mathbb{C}^n$ analytique réelle, générique, minimale en $p \in M$, et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. Si f est analytique réelle au voisinage de p dans M, $\deg_p f = 0$. Réciproquement, si $\deg_p f = 0$, il existe un voisinage V de p dans M tel que f est analytique réelle sur un ouvert dense de V.*

Remarque 3.8. Ce résultat justifie la dénomination *degré d'analyticité partielle* :

– si $\deg_p f = 0$, f est analytique sur un ouvert dense ;
– si $\deg_p f = s$, au moins s composantes de f sont non analytiques.

Remarque 3.9. Dans le cas où $\deg_p f = 0$, le Lemme 3.7 prouve simplement que f est analytique sur un ouvert dense. Ce résultat peut sembler faible ; il est toutefois suffisant dans notre situation, car les Corollaires 1.3 et 1.6 ne donnent l'estimation $\deg_q f < s$ que sur un ouvert dense de V, où V est un voisinage de p dans M.

Remarque 3.10. Dans la situation où M est une hypersurface, [11], Lemma 1, donne l'analyticité de f *au voisinage du point* p. Pour obtenir la même conclusion avec M de codimension supérieure, notre méthode (voir le Chapitre 2, Lemme 4.6) semble ne pas pouvoir convenir car elle nécessite que M soit analytique ; or, le changement de variables utilisé dans [11] détruit cette analyticité (voir Remarque 3.11). La solution semble être de réécrire entièrement la méthode de [11] en codimension supérieure.

Démonstration du Lemme 3.7. La première assertion du lemme est directe. En effet, supposons que f est analytique réelle au voisinage de p dans M. Elle se prolonge alors en une application $\widetilde{f}$ holomorphe sur un voisinage $\mathcal{D}$ de p dans $\mathbb{C}^n$ (voir le Chapitre 2, Lemme 2.4). Comme le graphe $\Gamma_{\widetilde{f}}$ de $\widetilde{f}$ est une variété complexe contenant le graphe de f au voisinage de (p,p'), $\mathcal{T}_p(f) \subset \Gamma_{\widetilde{f}}$ par définition. Vu le Lemme 3.6, il est alors clair que $\mathcal{T}_p(f) = \Gamma_{\widetilde{f}}$, et donc $\deg_p f = 0$.

Nous démontrons maintenant la seconde assertion du lemme. L'hypothèse est que le graphe Γ_f de f est inclus dans l'ensemble analytique complexe $\mathcal{T}_p(f)$ de dimension n, c'est-à-dire que f se prolonge comme *correspondance* (au sens de Bedford-Bell [11]) au voisinage de (p,p'). Si M est une hypersurface analytique réelle de $\mathbb{C}^n$, on peut appliquer [11], Lemma 1, ce qui prouve directement que f se prolonge holomorphiquement au voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$. Dans le cas général, nous montrons tout d'abord que $\pi|_{\mathcal{T}_p(f)}$ est propre, c'est-à-dire que f se prolonge comme *correspondance propre*, sur un ouvert dense O de Γ_f, où $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'} \to \mathbb{C}^n$ désigne la projection canonique. Puis, par le Chapitre 2, Lemme 4.6, on obtient que f est analytique sur $\pi(O)$.

Remarque 3.11. On aurait pu effectuer un changement de variables linéaire dans $\mathbb{C}^{n+n'}$ du type $\Phi : (z,z') \mapsto (z+L(z'),z')$ pour obtenir que $\pi|_{\mathcal{T}_p(f)}$ est propre en (p,p'), comme dans [11], Lemma 1. Mais un tel changement de variables ne conserve pas l'analyticité de M (plus précisément, la variété $\mathcal{C}^\infty$ $\pi(\Phi(\Gamma_f)) \subset \mathbb{C}^n$, jouant le rôle de M dans les nouvelles coordonnées, n'est pas nécessairement analytique réelle), ce qui interdit ensuite l'utilisation du Chapitre 2, Lemme 4.6. En revanche, ceci n'est pas gênant dans le cas de [11] où les auteurs considèrent une hypersurface $\mathcal{C}^1$.

Supposons donc que $\deg_p f = 0$. Comme M est minimale en p, l'application CR f se prolonge en une application holomorphe $\widetilde{f}$ sur le wedge $\mathcal{W}$ associé à (p,M) par le théorème du Tumanov (voir le Chapitre 2, Théorème 2.2). Par le Lemme 3.6, le graphe $\Gamma_{\widetilde{f}}$ de $\widetilde{f}$ est inclus dans $\mathcal{T}_p(f)$. On peut supposer que $\mathcal{T}_p(f)$ est irréductible. (En effet, par le principe d'unicité, il existe une unique composante irréductible $\mathcal{T}$ de $\mathcal{T}_p(f)$ qui contient $\Gamma_{\widetilde{f}}$; par continuité au bord, elle contient aussi Γ_f et on peut donc remplacer $\mathcal{T}_p(f)$ par $\mathcal{T}$.) Notons $\mathcal{T}_p(f)|_{\mathcal{W}} := \mathcal{T}_p(f) \cap \pi^{-1}(\mathcal{W})$. La restriction $\pi|_{\mathcal{T}_p(f)|_{\mathcal{W}}}$ est propre car $\Gamma_{\widetilde{f}} \subset \mathcal{T}_p(f)|_{\mathcal{W}}$, car ces deux ensembles analytiques complexes sont de même dimension n et car $\pi|_{\Gamma_{\widetilde{f}}}$ est un biholomorphisme sur son image $\mathcal{W}$. Ainsi, les fibres $\pi|^{-1}_{\mathcal{T}_p(f)}(z)$, pour $z \in \mathcal{W}$, sont de dimension zéro. Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des points $(z, z') \in \mathcal{T}_p(f)$ tels que la fibre $\pi|^{-1}_{\mathcal{T}_p(f)}(z)$ soit de dimension strictement positive. D'après [40], Theorem 3.6, $\mathcal{R}$ est un sous-ensemble analytique complexe (strict, dans notre situation) de $\mathcal{T}_p(f)$ et π est localement propre sur $\mathcal{T}_p(f) \setminus \mathcal{R}$.

Il s'agit maintenant de vérifier que $\Gamma_f \cap \mathcal{R}$ est un fermé d'intérieur vide de Γ_f au voisinage de (p, p'). C'est évidemment un fermé. Supposons, par l'absurde, qu'il existe une suite $q_n \to p$ de points de M tels que pour tout n, il existe un voisinage de $(q_n, f(q_n))$ dans Γ_f inclus dans $\mathcal{R}$. Ainsi, $\mathcal{R}$ est un ensemble analytique complexe de dimension $< n$ contenant Γ_f au voisinage de $(q_n, f(q_n))$. Vu la démonstration du Lemme 3.6, $\mathcal{R}$ doit alors aussi contenir la variété complexe $\Gamma_{\widetilde{f}}$ de dimension n ; d'où la contradiction. Puisque $\pi|_{\Gamma_f}$ est un difféomorphisme sur M, $\Sigma := \pi(\Gamma_f \cap \mathcal{R})$ est un fermé d'intérieur vide de M.

Soit $q \in M \setminus \Sigma$, suffisamment proche de p. La fibre $\pi|^{-1}_{\mathcal{T}_p(f)}(q)$ est de dimension zéro, et $\pi|_{\mathcal{T}_p(f)}$ est propre au voisinage de $(q, f(q))$ (voir [19], §3.5). On peut donc appliquer le théorème fondamental de représentation locale des ensembles analytiques complexes (voir [19], §5.6, Proposition 4, ou [43], Chapter III, Section A, Theorem 10). Ce théorème établit que $\mathcal{T}_p(f)$ est inclus au voisinage de $(q, f(q))$ dans un ensemble analytique complexe $\mathcal{Q}$ défini près de $(q, f(q))$ par les équations

$$Q_k(z;\, z'_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n', \tag{3.5}$$

où $Q_k(z;\, z'_k)$ est un polynôme de Weierstrass en z'_k à coefficients holomorphes en z. Comme $\Gamma_f \subset \mathcal{T}_p(f)$, (3.5) entraîne que

$$Q_k(z;\, f_k(z)) = 0, \quad k = 1, \dots, n', \tag{3.6}$$

pour z près de q dans M. Enfin, le Chapitre 2, Lemme 4.6, appliqué à chaque équation de (3.6), prouve que f_k est analytique réelle au voisinage de q, pour $k = 1, \dots, n'$. Ainsi, f est analytique réelle en tout point q de l'ouvert dense $M \setminus \Sigma$ de M, pour q suffisamment proche de p. □

Remarque 3.12. Dans la démonstration du Lemme 3.7, nous avons considéré l'ouvert dense des points de M au-dessus desquels la projection

$\pi|_{\mathcal{T}_p(f)}$ est propre. Nous aurions pu considérer les points de M au-dessus desquels la projection $\pi|_{\mathcal{T}_p(f)}$ est un biholomorphisme local (c'est aussi un ouvert dense de M, vu le Lemme 4.2) et la démonstration aurait été alors grandement simplifiée, puisque $\pi|^{-1}_{\mathcal{T}_p(f)}$ aurait donné directement le prolongement holomorphe local de f.

3.3. Comparaison entre le degré d'analyticité partielle et le degré de transcendance

Un rappel de certaines notions de base d'algèbre commutative est nécessaire (voir [77], Chap. I, §§17 et 18, et Chap. II, §§1, 3, 5 et 12, et aussi [49], Chap. VII, §1, et Chap. X, §1, pour les démonstrations et pour des compléments).

Soient k et K deux corps tels que $k \subset K$. Nous dirons que K est une *extension de corps* de k, et nous noterons K/k. Soit $\alpha \in K$. Nous dirons que α est *algébrique* sur k s'il existe un polynôme non nul $P \in k[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$, et *transcendant* sinon ([77], Chap. I, §17). De même, les éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in K$ seront dits *algébriquement dépendants* sur k s'il existe un polynôme non nul $P \in k[X_1, \ldots, X_t]$ tel que $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_t) = 0$, et *algébriquement indépendants* sinon ([77], Chap. I, §18). L'extension de corps K/k est dite *algébrique* si tout élément de K est algébrique sur k, et *transcendante* sinon ([77], Chap. II, §3).

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in K$. Le corps *engendré* sur k par $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ est le plus petit sous-corps de K contenant k et les α_j, $j = 1, \ldots, t$. C'est aussi le corps des fractions rationnelles en $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$, à coefficients dans k ; nous le noterons $k(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ ([77], Chap. II, §1). Plus généralement, on a la même définition pour un sous-ensemble quelconque $L \subset K$: le corps *engendré* sur k par L est le plus petit sous-corps de K contenant k et L. C'est aussi le corps des fractions rationnelles en un nombre fini d'éléments de L, à coefficients dans k ; nous le noterons $k(L)$ ([77], Chap. II, §5).

Soit K/k une extension de corps et $L \subset K$ un sous-ensemble. Nous dirons que L est un *ensemble de transcendance* sur k si tout sous-ensemble fini de L est algébriquement indépendant sur k. Nous dirons de plus que L est une *base de transcendance* de K/k si L est un ensemble de transcendance *maximal*, c'est-à-dire si L n'est pas un sous-ensemble strict d'un autre ensemble de transcendance. Un ensemble de transcendance L est une base de transcendance de K/k, si et seulement si, K est une extension algébrique de $k(L)$ ([77], Chap. II, §12). Toutes les bases de transcendance de K/k ont le même cardinal ([77], Chap. II, §12, Theorem 25), appelé *degré de transcendance* de K/k et noté $\mathrm{deg.\,tr}\, K/k$. Il est clair que K/k est une extension algébrique, si et seulement si, $\mathrm{deg.\,tr}\, K/k = 0$.

Nous appliquons maintenant cette terminologie des extensions de corps algébriques ou transcendantes au problème considéré dans ce chapitre. Soit $f : M \to M'$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ entre une sous-variété $M \subset \mathbb{C}^n$ analytique réelle, générique, minimale en $p \in M$, et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. Notons $\mathcal{C}_p^{\infty,CR}(M)$ l'anneau des germes en p des fonctions CR $\mathcal{C}^\infty$ sur M près de p. Cet anneau est intègre, d'après le principe d'unicité au bord (voir [**60, 20**]) ; nous notons $\widehat{\mathcal{C}}_p^{\infty,CR}(M)$ son corps des fractions. Nous notons également $\mathcal{O}_p$ (resp. $\mathcal{M}_p$) l'anneau (resp. le corps) des germes en p des fonctions holomorphes (resp. méromorphes) au voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$. On a donc une extension de corps $\widehat{\mathcal{C}}_p^{\infty,CR}(M)/\mathcal{M}_p$. Les f_j, $j = 1, \ldots, n'$, étant des éléments de $\mathcal{C}_p^{\infty,CR}(M)$, $\mathcal{M}_p(f_1, \ldots, f_{n'})/\mathcal{M}_p$ est une extension de corps et on appelle *degré de transcendance* de f en p le degré de transcendance de cette extension :

$$\operatorname{deg.tr}_p f := \operatorname{deg.tr} \mathcal{M}_p(f_1, \ldots, f_{n'})/\mathcal{M}_p.$$

Remarque 3.13. Les fonctions $f_1, \ldots, f_\nu$ sont algébriquement dépendantes s'il existe un polynôme $P \in \mathcal{M}_p[X_1, \ldots, X_\nu]$ tel que $P(f_1, \ldots, f_\nu) \equiv 0$ au voisinage de p dans M, en dehors des singularités des coefficients méromorphes de P. Ceci est clairement équivalent à l'existence d'un polynôme $Q \in \mathcal{O}_p[X_1, \ldots, X_\nu]$ tel que $Q(f_1, \ldots, f_\nu) \equiv 0$ au voisinage de p dans M (après multiplication par le plus petit commun multiple des dénominateurs des coefficients).

Il est clair que :

Lemme 3.14. *Soit $f : M \to M'$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ entre une sous-variété $M \subset \mathbb{C}^n$ analytique réelle, générique, minimale en $p \in M$, et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. Alors, f est analytique réelle au voisinage de p, si et seulement si,* $\operatorname{deg.tr}_p f = 0$.

Démonstration. La condition nécessaire est triviale, et il reste à voir la condition suffisante. L'hypothèse $\operatorname{deg.tr}_p f = 0$ implique que l'extension de corps $\mathcal{M}_p(f_1, \ldots, f_{n'})/\mathcal{M}_p$ est algébrique. Ainsi, chaque composante f_j est algébrique sur $\mathcal{M}_p$, et donc annule un polynôme à coefficients holomorphes, au voisinage de p dans M (voir Remarque 3.13). Le Chapitre 2, Lemme 4.6, permet alors de conclure que chaque f_j est analytique réelle au voisinage de p dans M. □

La notion de degré de transcendance de f en p a été introduite par Coupet-Pinchuk-Sukhov [**25**] dans le cas où M est une hypersurface analytique réelle et M' est un ensemble algébrique réel. Toutefois, la notion de degré de transcendance d'une extension de corps avait déjà été utilisée dans une situation proche dans [**22**] : les auteurs considéraient le corps des germes en p des *fractions rationnelles* sur $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{F}_p := \mathbb{C}(z_1, \dots, z_n)$, et l'extension $\mathcal{F}_p(f_1, \dots, f_{n'})$ engendrée par les composantes de l'application f holomorphe au voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$. Dans cette situation, le degré de transcendance de l'extension $\mathcal{F}_p(f_1, \dots, f_{n'})/\mathcal{F}_p$ est lié aux propriétés d'*algébricité* de l'application holomorphe f.

Remarque 3.15. Cette notion de degré de transcendance de f en p n'est pas un invariant biholomorphe du triplet (M, M', f). En effet, un changement de variables holomorphe local *non algébrique* de l'espace d'arrivée $\mathbb{C}^{n'}$ peut le modifier (voir l'Exemple 3.16). Notons toutefois que cette notion est parfaitement adaptée au problème étudié dans [25], où les auteurs considèrent une application CR $\mathcal{C}^\infty$, $f : M \to M'$, à valeurs dans un sous-ensemble *algébrique réel* $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. Dans ce cadre, $\deg.\mathrm{tr}_p f$ est alors un invariant (à biholomorphisme local de $\mathbb{C}^n$ près et biholomorphisme algébrique local de $\mathbb{C}^{n'}$ près).

Exemple 3.16. Soit la fonction $f : \mathbb{R}_x \to \mathbb{C}^2_{z'}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = f_2(x) = e^{-1/x^2}$. Alors, $\deg.\mathrm{tr}_0 f = 1$. Effectuons maintenant le changement de variables holomorphe (non algébrique) dans $\mathbb{C}^2_{z'}$ donné par $\Phi : z' \mapsto \widetilde{z'} = (z'_1, e^{z'_2} - 1)$. La fonction f s'écrit dans ces nouvelles coordonnées $\widetilde{f} := \Phi \circ f : x \mapsto (e^{-1/x^2}, \exp(e^{-1/x^2}) - 1)$, et $\deg.\mathrm{tr}_0 \widetilde{f} = 2$.

Vérification de l'Exemple 3.16. Tout d'abord, $\{f_1\}$ est une base de transcendance de $\mathcal{M}_0(f_1, f_2)/\mathcal{M}_0$, et donc $\deg.\mathrm{tr}_0 f = 1$. En effet, f_1 est transcendante sur $\mathcal{M}_0$ (même démonstration que pour l'Exemple 3.3), et f_1, f_2 sont algébriquement dépendantes ($f_1 - f_2 = 0$).

Par contre, il n'existe pas de polynôme $P \in \mathcal{O}_0[X_1, X_2]$ tel que $P(\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2) \equiv 0$ au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, et donc $\deg.\mathrm{tr}_0 \widetilde{f} = 2$. Nous le prouvons par l'absurde. Soit donc

$$P(z;\, X_1, X_2) = \sum_{\nu,\mu=0}^{d} c_{\nu,\mu}(z)\, X_1^\nu\, X_2^\mu$$

un polynôme en (X_1, X_2), à coefficients holomorphes en z près de 0, annulant $\widetilde{f}$ au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. La fonction $P(z;\, e^{-1/z^2}, \exp(e^{-1/z^2}) - 1)$ est holomorphe pour $z \neq 0$ proche de 0 et s'annule sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, donc

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{d} c_{\nu,\mu}(z)\, e^{-\nu/z^2}\, (\exp(e^{-1/z^2}) - 1)^\mu \equiv 0, \tag{3.7}$$

pour $z \neq 0$ proche de 0. Comme 0 est une singularité essentielle de e^{-1/z^2}, pour tout point $w \in \mathbb{C}$, il existe une suite $z_n \to 0$ de points de $\mathbb{C}$ telle que

$e^{-1/z_n^2} \to w$. Par passage à la limite dans (3.7), on obtient que

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{d} c_{\nu,\mu}(0)\, w^\nu\, (e^w - 1)^\mu \equiv 0. \tag{3.8}$$

Les fonctions $\{w^\nu, (e^w - 1)^\mu\}_{\nu,\mu\in\mathbb{N}}$ étant linéairement indépendantes, (3.8) entraîne que $c_{\nu,\mu}(0) = 0$, pour tout $\nu, \mu = 0, \ldots, d$; on peut donc factoriser $z^{\alpha_{\nu,\mu}}$ dans $c_{\nu,\mu}$, avec $\alpha_{\nu,\mu} \geq 1$, et donc factoriser z^α dans P, avec $\alpha := \inf_{\nu,\mu=0,\ldots,d} \alpha_{\nu,\mu} \geq 1$. Donc, $P(z;\, X_1, X_2) = z^\alpha\, Q(z;\, X_1, X_2)$, avec $Q(0;\, w, e^w - 1) \not\equiv 0$, et (3.7) entraîne que $Q(z;\, e^{-1/z^2}, \exp(e^{-1/z^2}) - 1) \equiv 0$, pour $z \neq 0$ proche de 0. Puis, le même argument que pour P prouve l'analogue de (3.8) pour Q, c'est-à-dire $Q(0;\, w, e^w - 1) \equiv 0$; d'où la contradiction. □

Nous énonçons maintenant une relation de comparaison entre le degré d'analyticité partielle (voir Section 1 et [24]) et le degré de transcendance (voir Section 3.3 et [25]) :

Proposition 3.17. *Soit $f : M \to M'$ une application CR $\mathcal{C}^\infty$ entre une sous-variété $M \subset \mathbb{C}^n$ analytique réelle, générique, minimale en $p \in M$, et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. Alors,*

$$\deg_p f \leq \operatorname{deg.tr}_p f. \tag{3.9}$$

L'exemple suivant prouve qu'il peut y avoir inégalité stricte dans (3.9) :

Exemple 3.18. Soit la fonction $f : \mathbb{R}_x \to \mathbb{C}^2_{z'}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = e^{-1/x^2}$ et $f_2(x) = \exp(e^{-1/x^2}) - 1$. Alors, $\deg_0 f = 1$, mais $\operatorname{deg.tr}_0 f = 2$.

Vérification de l'Exemple 3.18. On a déjà vu que $\deg_0 f_1 = 1$ (Exemple 3.3). De plus, le graphe de f est inclus dans le sous-ensemble analytique complexe de $\mathbb{C}^3_{(z,z_1',z_2')}$ défini par : $z_2' = e^{z_1'} - 1$, et donc $\dim \mathcal{T}_0(f) \leq 2$. Au total, $\deg_0 f = 1$. Par ailleurs, le fait que $\operatorname{deg.tr}_0 f = 2$ a déjà été démontré dans l'Exemple 3.16. □

Démonstration de la Proposition 3.17. Notons $t := \operatorname{deg.tr}_p f$ le degré de transcendance de f en p. Cela signifie qu'il existe une base de transcendance de $\mathcal{M}_p(f_1, \ldots, f_{n'})/\mathcal{M}_p$ à t éléments parmi $f_1, \ldots, f_{n'}$; on peut supposer qu'il s'agit de $\{f_1, \ldots, f_t\}$. Alors, pour tout $j = t+1, \ldots, n'$, $\{f_1, \ldots, f_t, f_j\}$ est algébriquement dépendant sur $\mathcal{M}_p$ (par définition d'une base de transcendance), et il existe donc un polynôme $P_j \in \mathcal{O}_p[X_1, \ldots, X_t, X_j]$ tel que $P_j(z;\, f_1(z), \ldots, f_t(z), f_j(z)) \equiv 0$ au voisinage de p dans M (voir Remarque 3.13). Il est clair que le graphe de f est inclus dans le sous-ensemble analytique complexe $\mathcal{Q}$ de $\mathbb{C}^{n+n'}$ de dimension $n+t$ défini par les équations $P_j(z;\, z_1', \ldots, z_t', z_j') = 0$, $j = t+1, \ldots, n'$; par définition, le degré d'analyticité partielle $\deg_p f$ de f en p est alors $\leq t$. □

4. Projection sur l'ensemble d'arrivée

Nous reprenons les notations de la Section 3 : M est supposée minimale en tout point, $\mathcal{T}_p(f)$ et $\deg_p f$ sont définis comme à la Section 1.

Dans cette section, nous étudions de façon plus précise la géométrie de l'ensemble analytique complexe $\mathcal{T}_p(f)$ au voisinage de (p, p') :

Lemme 4.1. *Si $\deg_z f$ est constant au voisinage de p dans M, il existe $\Sigma \subset M$ un fermé d'intérieur vide tel que pour tout point $q \in M \setminus \Sigma$ suffisamment proche de p, $\mathcal{T}_p(f)$ est régulier en $(q, f(q))$.*

Démonstration. Notons s le degré d'analyticité partielle de f en p. Soit $\mathcal{S} := \operatorname{Sing} \mathcal{T}_p(f)$ l'ensemble des points singuliers de $\mathcal{T}_p(f)$. C'est un ensemble analytique complexe de dimension strictement inférieure à $\dim \mathcal{T}_p(f) = n+s$. Il s'agit de vérifier que $\Gamma_f \cap \mathcal{S}$ est un fermé d'intérieur vide du graphe Γ_f de f au voisinage de (p, p'). C'est évidemment un fermé. Supposons, par l'absurde, qu'il existe une suite $q_n \to p$ de points de M tels que pour tout n, il existe un voisinage de $(q_n, f(q_n))$ dans Γ_f inclus dans $\mathcal{S}$. Alors, $\mathcal{S}$ est un ensemble analytique complexe de dimension $< n+s$ contenant Γ_f au voisinage de $(q_n, f(q_n))$, et donc $\deg_{q_n} f < s$. Comme $q_n \to p$, ceci est en contradiction avec le fait que $\deg_z f$ est constant égal à s au voisinage de p dans M.

Il existe donc un voisinage U de p dans $\mathbb{C}^n$ et un voisinage V de p' dans $\mathbb{C}^{n'}$ tels que $\Gamma_f \cap \mathcal{S} \cap (U \times V)$ est un fermé d'intérieur vide de $\Gamma_f \cap (U \times V)$. Notons $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'} \to \mathbb{C}^n$ la projection canonique et $\Sigma := \pi(\Gamma_f \cap \mathcal{S} \cap (U \times V))$. Comme $\pi|_{\Gamma_f}$ est un difféomorphisme sur M, Σ est un fermé d'intérieur vide de $M \cap U$ qui satisfait les propriétés demandées. □

Lemme 4.2. *Si $\deg_z f$ est constant égal à s au voisinage de p dans M, il existe $\Sigma \subset M$ un fermé d'intérieur vide tel que pour tout point $q \in M \setminus \Sigma$ suffisamment proche de p, $\mathcal{T}_p(f)$ peut être défini au voisinage de $(q, f(q))$ par*

$$v' = T_q(z, u'), \tag{4.1}$$

où $\mathbb{C}^{n'} \ni z' = (u', v') \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^t$, $t = n' - s$, est un système de coordonnées holomorphes locales, T_q est holomorphe près de $(q, g(q))$ et $f = (g, h) \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^t$.

Démonstration. On note $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'} \to \mathbb{C}^n$ la projection canonique et Γ_f le graphe de f. Soit $\Sigma \subset M$ le fermé d'intérieur vide donné par le Lemme 4.1 et fixons un point $q \in M \setminus \Sigma$ suffisamment proche de p. Comme M est minimale en q, l'application CR f se prolonge en une application $\widetilde{f}$ holomorphe sur le wedge $\mathcal{W}_q$ associé à (q, M) par le théorème de Tumanov (voir le Chapitre 2, Théorème 2.2). Le Lemme 3.6 prouve que le graphe $\Gamma_{\widetilde{f}}$ de

$\widetilde{f}$ est inclus dans $\mathcal{T}_p(f)$. Comme $\pi|_{\Gamma_{\widetilde{f}}}$ est un biholomorphisme sur $\mathcal{W}_q$, ouvert de $\mathbb{C}^n$, le rang générique de $\pi|_{\mathcal{T}_p(f)}$ est égal à n.

Le lieu de branchement de $\pi|_{\mathcal{T}_p(f)}$, noté $\mathcal{B} := \{(z,z') \in \mathcal{T}_p(f) : \mathrm{rg}_{(z,z')}\, \pi|_{\mathcal{T}_p(f)} < n\}$, est un sous-ensemble analytique complexe strict de $\mathcal{T}_p(f)$. Le même argument que pour $\mathcal{S} = \mathrm{Sing}\, \mathcal{T}_p(f)$ dans la démonstration du Lemme 4.1 prouve que $\Gamma_f \cap \mathcal{B}$ est un fermé d'intérieur vide de Γ_f au voisinage de $(q, f(q))$ et qu'il existe un voisinage U' de q dans $\mathbb{C}^n$ et un voisinage V' de $f(q)$ dans $\mathbb{C}^{n'}$ tels que $\Sigma' := \pi(\Gamma_f \cap \mathcal{B} \cap (U' \times V'))$ est un fermé d'intérieur vide de $M \cap U'$. Pour tout point $q' \in (M \cap U') \setminus \Sigma'$, le rang de $\pi|_{\mathcal{T}_p(f)}$ est alors constant égal à n au voisinage de $(q', f(q'))$ et le théorème des fonctions implicites holomorphe termine la démonstration du Lemme 4.2. $\square$

Remarque 4.3. Nous avons pu obtenir l'écriture (4.1) de $\mathcal{T}_p(f)$ sous forme de graphe en procédant en deux étapes (Lemmes 4.1 et 4.2). Cette méthode est à rapprocher du Chapitre 1, Lemme 4.2, où de la même façon, on “évite” tout d'abord le *lieu singulier* d'un ensemble analytique complexe, puis le *lieu de branchement* de la projection canonique.

Dans la suite, on note $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'} \to \mathbb{C}^n$ et $\pi' : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'} \to \mathbb{C}^{n'}$ les projections canoniques et $\mathcal{T}_p(f)|_M$ l'ensemble analytique réel défini au voisinage de (p, p') dans $\mathbb{C}^{n+n'}$ par $\mathcal{T}_p(f) \cap \pi^{-1}(M)$.

Nous pouvons maintenant énoncer une propriété essentielle de l'ensemble analytique réel $\mathcal{T}_p(f)|_M$, qui nécessite les résultats techniques de la Section 2 et qui est essentielle pour la démonstration du Théorème 1.1 :

Proposition 4.4. *Si $\deg_z f$ est constant au voisinage de p dans M, il existe $\Sigma \subset M$ un fermé d'intérieur vide tel que pour tout point $q \in M \setminus \Sigma$ suffisamment proche de p, il existe un voisinage Ω de $(q, f(q))$ dans $\mathbb{C}^{n+n'}$ tel que*

$$\pi'(\mathcal{T}_p(f)|_M \cap \Omega) \subset M'.$$

Démonstration. Notons s le degré d'analyticité partielle de f en p. Soit $\Sigma \subset M$ le fermé d'intérieur vide donné par le Lemme 4.2 et fixons un point $q \in M \setminus \Sigma$ suffisamment proche de p. D'après le Lemme 4.2, $\mathcal{T}_p(f)$ peut être défini au voisinage de $(q, f(q))$ par (4.1), et comme le graphe de f est inclus dans $\mathcal{T}_p(f)$,

$$h(z) = T_q(z, g(z)), \tag{4.2}$$

pour tout $z \in M$ proche de p.

Par ailleurs, soient $\rho'_k(z', \overline{z'}) = 0$, $k = 1, \ldots, d'$, des équations analytiques réelles définissantes pour $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ au voisinage de p'. La relation fondamentale $f(M) \subset M'$ équivaut à

$$\rho'_k(f(z), \overline{f(z)}) = 0, \quad k = 1, \ldots, d', \tag{4.3}$$

pour tout $z \in M$. Alors, (4.2) et (4.3) entraînent que

$$\rho'_k(g(z), T_q(z, g(z)), \overline{g(z)}, \overline{T_q(z, g(z))}) = 0, \quad k = 1, \dots, d', \tag{4.4}$$

pour tout $z \in M$ proche de p. Pour chaque $k = 1, \dots, d'$, on définit la fonction H_k holomorphe près de $(q, \overline{q}, \overline{g(q)}, g(q))$ dans $\mathbb{C}^n_z \times \mathbb{C}^n_\zeta \times \mathbb{C}^s_\nu \times \mathbb{C}^s_w$ par

$$H_k(z, \zeta, \nu, w) := \rho'_k(w, T_q(z, w), \nu, \overline{T_q(\overline{\zeta}, \overline{\nu})}).$$

Vu (4.4),

$$H_k(z, \overline{z}, \overline{g(z)}, g(z)) \equiv 0, \quad k = 1, \dots, d',$$

au voisinage de q dans M_z. Par l'absurde, si $H_k(z, \overline{z}, \nu, w) \not\equiv 0$ au voisinage de $(q, \overline{g(q)}, g(q))$ dans $M_z \times \mathbb{C}^s_\nu \times \mathbb{C}^s_w$, le Lemme 2.3 démontre l'existence d'une suite $q_n \to q$ de points de M tels que $\deg_{q_n} g < s$; ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\deg_z f \equiv s$ près de p (donc près de q, pour q suffisamment proche de p). Ainsi,

$$H_k(z, \overline{z}, \nu, w) \equiv 0, \quad k = 1, \dots, d', \tag{4.5}$$

au voisinage de $(q, \overline{g(q)}, g(q))$ dans $M_z \times \mathbb{C}^s_\nu \times \mathbb{C}^s_w$.

Soit $(z_0, z'_0) \in \mathcal{T}_p(f)$, suffisamment proche de $(q, f(q))$, et notons $z'_0 = (u'_0, v'_0) \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^t$. Vu (4.1),

$$v'_0 = T_q(z_0, u'_0). \tag{4.6}$$

Si de plus $z_0 \in M$, (4.5) entraîne que

$$H_k(z_0, \overline{z_0}, \nu, w) \equiv 0, \quad k = 1, \dots, d',$$

au voisinage de $(\overline{g(q)}, g(q))$ sur $\mathbb{C}^s_\nu \times \mathbb{C}^s_w$. En particulier,

$$H_k(z_0, \overline{z_0}, \overline{u'_0}, u'_0) = 0, \quad k = 1, \dots, d',$$

ce qui équivaut, par définition de H_k, à

$$\rho'_k(u'_0, T_q(z_0, u'_0), \overline{u'_0}, \overline{T_q(z_0, u'_0)}) = 0, \quad k = 1, \dots, d'. \tag{4.7}$$

Les équations (4.6) et (4.7) impliquent que $\rho'_k(z'_0, \overline{z'_0}) = 0$, $k = 1, \dots, d'$, c'est-à-dire, que $z'_0 \in M'$. On a ainsi prouvé qu'il existe un voisinage Ω de $(q, f(q))$ dans $\mathbb{C}^{n+n'}$ tel que $\pi'(\mathcal{T}_p(f)|_M \cap \Omega) \subset M'$ (cf. figure 10, page 91). $\square$

5. Feuilletages holomorphes locaux

Nous reprenons les notations de la Section 3 : M est supposée minimale en tout point, $\mathcal{T}_p(f)$ et $\deg_p f$ sont définis comme à la Section 1. De plus, nous notons $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'} \to \mathbb{C}^n$ et $\pi' : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'} \to \mathbb{C}^{n'}$ les projections canoniques et $\mathcal{T}_p(f)|_M$ l'ensemble analytique réel défini au voisinage de (p, p') dans $\mathbb{C}^{n+n'}$ par $\mathcal{T}_p(f) \cap \pi^{-1}(M)$.

Cette section est consacrée à l'étude des propriétés de feuilletage de l'ensemble analytique réel $\mathcal{T}_p(f)|_M$.

Proposition 5.1. *On suppose que le degré d'analyticité partielle de f est constant égal à s sur un voisinage de p dans M et on note r le rang maximal de f sur ce voisinage. Alors, il existe un fermé d'intérieur vide $\Sigma \subset M$ tel que pour tout $q \in M \setminus \Sigma$ suffisamment proche de p, il existe un voisinage Ω de $(q, f(q))$ dans $\mathbb{C}^{n+n'}$ tel que*

$$\pi'(\mathcal{T}_p(f)|_M \cap \Omega)$$

est une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^{n'}$ de dimension $r' \geq r$, passant par $f(q)$, et biholomorphe au produit cartésien $N \times \mathcal{D}$, où N est une sous-variété analytique réelle générique de $\mathbb{C}^\nu$, $\nu \leq n$, et $\mathcal{D}$ est un domaine borné de $\mathbb{C}^s$.

Démonstration. Comme le problème considéré est local, on peut supposer, sans perte de généralité, que le degré d'analyticité partielle de f est constant sur tout M et que r est le rang maximal de f sur tout M. Nous procédons en quatre étapes :

Etape 1 : Minoration du rang de $\pi'|_{\mathcal{T}_p(f)|_M}$. Le rang maximal de $\pi'|_{\Gamma_f}$ est égal au rang maximal de f, c'est-à-dire, égal à r. Par ailleurs, comme $\Gamma_f \subset \mathcal{T}_p(f)|_M$, le rang maximal r' de $\pi'|_{\mathcal{T}_p(f)|_M}$ est nécessairement $\geq r$. Remarquons que r' est aussi le *rang générique* de l'application analytique réelle $\pi'|_{\mathcal{T}_p(f)|_M}$, c'est-à-dire qu'il est atteint en dehors d'un sous-ensemble analytique réel strict de $\mathcal{T}_p(f)|_M$.

Etape 2 : Feuilletage canonique de $\mathcal{T}_p(f)|_M$. Le Lemme 4.2 implique qu'il existe $\Sigma \subset M$ un fermé d'intérieur vide tel que pour tout point $q \in M \setminus \Sigma$ suffisamment proche de p, il existe un voisinage $\Omega = U \times V$ de $(q, f(q))$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'}$ tel que

$$\mathcal{T}_p(f) \cap \Omega = \{(z, z') \in U \times V : \ v' = T_q(z, u')\},$$

où $V \ni z' = (u', v') \in V_1 \times V_2 \subset \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^t$, $t = n' - s$, est un système de coordonnées holomorphes et T_q est holomorphe dans $U \times V_1$. En tant que graphe, $\mathcal{T}_p(f) \cap \Omega$ est canoniquement biholomorphe au produit cartésien

$U \times V_1$ par le biholomorphisme

$$\begin{array}{rlcl} \Phi : & U \times V_1 \ \subset \ \mathbb{C}^{n+s} & \longrightarrow & \mathcal{T}_p(f) \cap \Omega \ \subset \ \mathbb{C}^{n+s+t} \\ & (z, u') & \longmapsto & (z, u', T(z, u')). \end{array}$$

Par conséquent, la variété analytique réelle $\mathcal{T}_p(f)|_M \cap \Omega$ est canoniquement biholomorphe (toujours par Φ) au produit cartésien $(M \cap U) \times V_1$; en d'autres termes, $\mathcal{T}_p(f)|_M \cap \Omega$ est canoniquement feuilletée par des variétés complexes de dimension s (cf. figure 10).

Etape 3 : Transfert du feuilletage de $\mathcal{T}_p(f)|_M$ par π'. Notons Ψ l'application holomorphe

$$\begin{array}{rlcl} \Psi := \pi' \circ \Phi : & U \times V_1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n'} \\ & (z, u') & \longmapsto & (u', T(z, u')) \end{array}$$

et $\widetilde{\Psi}$ l'application analytique réelle $\widetilde{\Psi} := \Psi|_{(M \cap U) \times V_1}$. D'après les étapes 1 et 2, $\Phi|_{(M \cap U) \times V_1}$ est un difféomorphisme analytique réel sur $\mathcal{T}_p(f)|_M \cap \Omega$ et le rang générique de $\pi'|_{\mathcal{T}_p(f)|_M}$ est r'. Par suite, le rang générique de $\widetilde{\Psi} = (\pi' \circ \Phi)|_{(M \cap U) \times V_1}$ est r'. Par ailleurs, comme pour chaque $z \in M \cap U$, $\widetilde{\Psi}|_{\{z\} \times V_1}$ est un biholomorphisme sur son image, il existe $\Sigma' \subset M \cap U$ un fermé d'intérieur vide (c'est même un sous-ensemble analytique réel strict de $M \cap U$) tel que $\widetilde{\Psi}|_{(M \cap U \setminus \Sigma') \times V_1}$ est de rang constant égal à r'.

Soit q' un point quelconque de $M \cap U \setminus \Sigma'$. D'après le théorème du rang (analytique réel), il existe un voisinage $\Omega' = U' \times V'$ de $(q', f(q'))$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'}$, $V' = V_1' \times V_2' \subset \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^t$, tel que

$$N' := \widetilde{\Psi}((M \cap U') \times V_1') \tag{5.1}$$

est une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^{n'}$ de dimension r'. De plus, comme pour chaque $z \in M \cap U'$, $\widetilde{\Psi}|_{\{z\} \times V_1'}$ est un biholomorphisme sur son image, il existe $N \subset M \cap U'$ une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^n$ de dimension $r' - 2s$ et passant par q', telle que $\widetilde{\Psi}|_{N \times V_1'}$ est un difféomorphisme analytique réel sur N'. Enfin, comme $\Phi((M \cap U') \times V_1') = \mathcal{T}_p(f)|_M \cap \Omega'$, (5.1) équivaut à $N' = \pi'(\mathcal{T}_p(f)|_M \cap \Omega')$ (cf. figure 10). Nous avons ainsi construit une application holomorphe $\Psi : U' \times V_1' \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s \to \mathbb{C}^{n'}$ telle que la restriction $\Psi|_{N \times V_1'}$ est un difféomorphisme analytique réel sur $N' = \pi'(\mathcal{T}_p(f)|_M \cap \Omega')$, où $N \subset U'$ est une sous-variété analytique réelle passant par q'.

Etape 4 : Construction du biholomorphisme. Rappelons tout d'abord qu'une sous-variété analytique réelle $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}^{\nu}_{\zeta}$ est CR *génériquement*, c'est-à-dire en dehors d'un sous-ensemble analytique réel strict de $\mathcal{M}$. En effet, si $\tau_k(\zeta, \overline{\zeta}) = 0$, $k = 1, \ldots, \delta$, désignent des équations définissantes analytiques réelles de $\mathcal{M}$ près du point $\zeta_0 \in \mathcal{M}$ et si ρ désigne le rang maximal de $(\overline{\partial}\tau_1, \ldots, \overline{\partial}\tau_\delta)$ près de ζ_0, le lieu Σ des points $\zeta \in \mathcal{M}$ proches de ζ_0 où

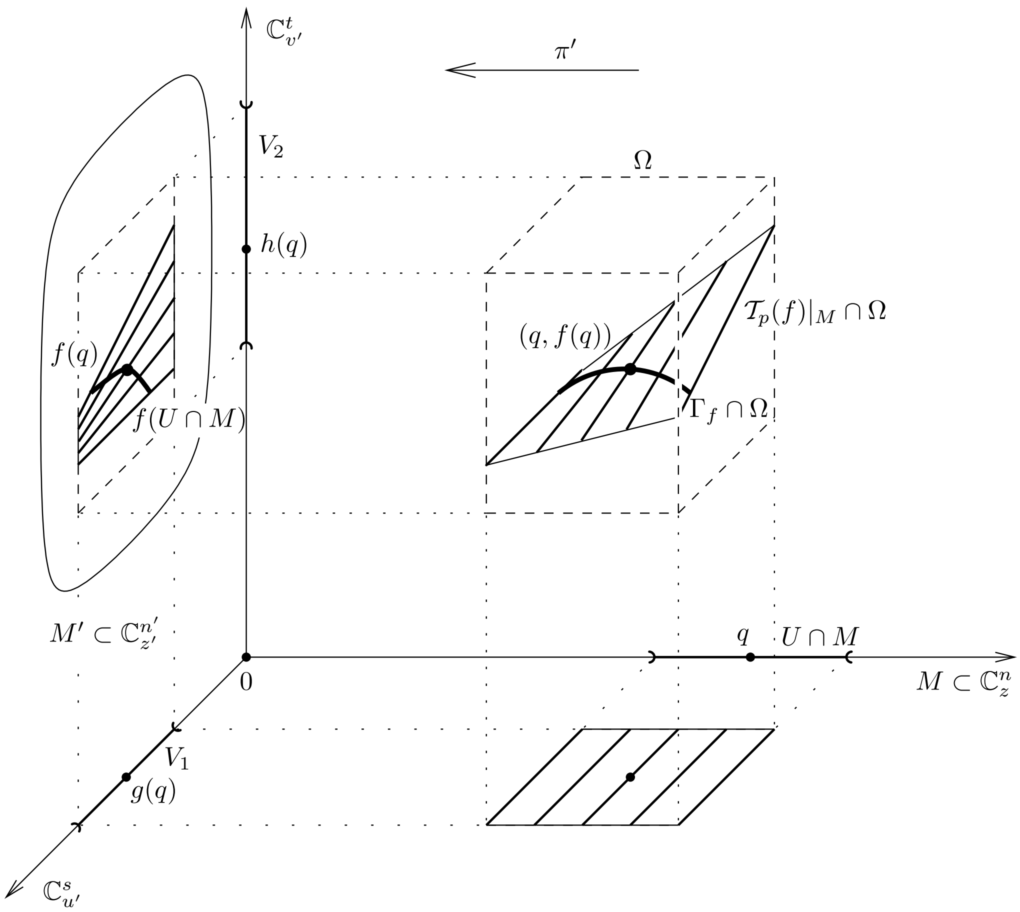

FIGURE 10. La sous-variété analytique réelle $\mathcal{T}_p(f)|_M \cap \Omega$ est feuilletée par des variétés complexes de dimension s ; cette structure de feuilletage se projette sur M' par π'

$\mathcal{M}$ n'est pas CR est le sous-ensemble analytique réel strict de $\mathcal{M}$ défini par $\mathrm{rg}_\zeta(\overline{\partial}\tau_1, \dots, \overline{\partial}\tau_\delta) < \rho$.

Fixons maintenant un point $\zeta_1 \in \mathcal{M} \setminus \Sigma$. Comme $\mathcal{M}$ est CR analytique réelle près de ζ_1, il existe une sous-variété complexe $X \subset \mathbb{C}^\nu$ définie au voisinage de ζ_1, contenant $\mathcal{M}$, et telle que $\mathcal{M}$ soit générique dans X. En particulier, il existe un système de coordonnées holomorphes locales $\mathbb{C}^\nu \ni \zeta = (\zeta', \zeta'') \in \mathbb{C}^{\nu'} \times \mathbb{C}^{\nu''}$ au voisinage de $\zeta_1 = (\zeta_1', \zeta_1'')$, tel que X est définie dans ces nouvelles coordonnées, au voisinage de (ζ_1', ζ_1''), par $\{\zeta'' = \zeta_1''\}$.

Il existe donc $\Sigma'' \subset N$ un sous-ensemble analytique réel strict tel que pour tout $q'' \in N \setminus \Sigma''$, il existe $U'' \subset \mathbb{C}^n$ un voisinage de q'' tel que $N \cap U''$ est CR. Comme Ψ est holomorphe et comme $\Psi|_{N \times V_1'}$ est un difféomorphisme sur N', $\Psi|_{(N \cap U'') \times V_1'}$ est un CR difféomorphisme analytique réel sur N' ; par conséquent, N' est CR au voisinage de $f(q'')$. De plus, quitte à effectuer un changement de variables holomorphes locales, centrées en q'' dans $\mathbb{C}^n$ (resp. centrées en $f(q'')$ dans $\mathbb{C}^{n'}$), on peut supposer que N (resp. N') est une sous-variété analytique réelle générique au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^\nu$, $\nu \leq n$ (resp. dans $\mathbb{C}^{\nu'}$, $\nu' \leq n'$).

L'application holomorphe Ψ s'écrit alors dans ces nouvelles coordonnées $\Psi^* : U^* \times V_1^* \to V^*$, où U^* (resp. V_1^*, V^*) est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^\nu$ (resp. $\mathbb{C}^s$, $\mathbb{C}^{\nu'}$) et $\Psi^*|_{N \times V_1^*}$ est un CR difféomorphisme analytique réel sur N'. Comme, de plus, $N \times V_1^*$ (resp. N') est générique dans $\mathbb{C}^{\nu+s}$ (resp. $\mathbb{C}^{\nu'}$), nécessairement $\nu' = \nu + s$ et Ψ^* est un biholomorphisme au voisinage de 0. Cela se démontre facilement en utilisant les relations $T_0(N \times V_1^*) + i\,T_0(N \times V_1^*) = \mathbb{C}^{\nu+s}$, $T_0N' + i\,T_0N' = \mathbb{C}^{\nu'}$ et $d(\Psi^*)_0(T_0(N \times V_1^*)) = T_0N'$.

Nous avons ainsi prouvé que $N' = \pi'(\mathcal{T}_p(f)|_M \cap \Omega')$ est une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^{n'}$ de dimension $r' \geq r$, passant par $f(q'')$, et biholomorphe (par Ψ^*) au voisinage de $f(q'')$ au produit cartésien $N \times V_1^*$, où N est une sous-variété analytique réelle générique de $\mathbb{C}^\nu$, $\nu \leq n$, et V_1^* est un domaine de $\mathbb{C}^s$. □

6. Fin des démonstrations

Nous terminons maintenant les démonstrations des résultats énoncés à la Section 1 :

Fin de la démonstration du Théorème 1.1. Il suffit de combiner les résultats des Sections 4 et 5. La Proposition 4.4 énonce que $N' := \pi'(\mathcal{T}_p(f)|_M \cap \Omega)$ est inclus dans M' et la Proposition 5.1 établit que N' est une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^{n'}$ de dimension $r' \geq r$, passant par $f(q)$, et biholomorphe au produit cartésien $N \times \mathcal{D}$, où N est une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, et $\mathcal{D}$ est un domaine borné de $\mathbb{C}^s$. Dans ce qui précède, q est un point quelconque d'un ouvert dense de M, suffisamment proche de p, et Ω est un voisinage de $(q, f(q))$ dans $\mathbb{C}^{n+n'}$. Ainsi, nous avons prouvé que M' est (r', s)-plat en $f(q)$, pour q dans un ouvert dense de M, q suffisamment proche de p (avec $r' \geq r$). □

Démonstration du Corollaire 1.3. Le Théorème 1.1 implique, par contraposée, que si $\deg_z f$ est constant au voisinage de p et si M' ne contient pas de variété complexe de dimension s au voisinage de $p' = f(p)$, $\deg_p f < s$. Par ailleurs, d'après le Corollaire 3.5, il existe un fermé d'intérieur vide $\Sigma \subset M$ tel que pour tout $q \in M \setminus \Sigma$, $\deg_z f$ est constant au voisinage de q. Pour un tel q, suffisamment proche de p, M' ne contient pas de variété complexe de dimension s au voisinage de $f(q)$, et donc $\deg_q f < s$. □

Démonstration du Corollaire 1.4. C'est un cas particulier du Corollaire 1.3 pour $s = 1$. On obtient qu'il existe un fermé d'intérieur vide $\Sigma \subset M$ tel que pour tout $q \in M \setminus \Sigma$, suffisamment proche de p, $\deg_q f = 0$. Le Lemme 3.7 permet de conclure qu'il existe un voisinage V_q de q dans M tel que f est analytique réelle sur un ouvert dense de V_q, pour tout $q \in M \setminus \Sigma$. Ainsi, il existe un voisinage V de p dans M tel que f est analytique réelle sur un ouvert dense de V (et se prolonge alors holomorphiquement à un voisinage dans $\mathbb{C}^n$ de cet ouvert dense de V, d'après le Chapitre 2, Lemme 2.4). $\square$

Démonstration du Corollaire 1.5. Il suffit d'appliquer le Chapitre 1, Corollaire 1.7, en un point $q \in M$ au voisinage duquel f se prolonge holomorphiquement (par le Corollaire 1.4). $\square$

Démonstration du Corollaire 1.6. Comme f est une submersion en p, le rang de f et constant égal à $r := \dim M'$ près de p. Par ailleurs, comme M' est s-holomorphiquement non dégénérée, M' n'est (r, s)-plate en aucun point. Par contraposée, le Théorème 1.1 implique alors que si $\deg_z f$ est constant au voisinage de p dans M, $\deg_p f < s$. Comme pour la démonstration du Corollaire 1.3, le Corollaire 3.5 permet de conclure en se plaçant en un point de M où $\deg_z f$ est constant au voisinage. $\square$

Démonstration du Corollaire 1.7. C'est un cas particulier du Corollaire 1.6 pour $s = 1$. Comme pour la démonstration du Corollaire 1.4, le Lemme 3.7 permet de conclure qu'il existe un voisinage V de p dans M tel que f est analytique réelle sur un ouvert dense de V (et se prolonge alors holomorphiquement à un voisinage dans $\mathbb{C}^n$ de cet ouvert dense de V, d'après le Chapitre 2, Lemme 2.4). $\square$

Conclusion

Le travail présenté dans cette thèse concerne l'analyticité et l'algébricité d'applications CR $\mathcal{C}^\infty$. Tout d'abord, nous avons établi deux nouvelles conditions en termes de "première et seconde variétés caractéristiques" qui assurent l'algébricité d'une application holomorphe locale envoyant une variété CR algébrique réelle dans une autre (voir le Chapitre 1). Par ailleurs, introduisant la notion de "variété caractéristique" associée à une variété analytique réelle générique M, à un ensemble analytique réel M' et à une application CR $\mathcal{C}^\infty$ $f : M \to M'$, nous avons prouvé que si M est minimale au point $p \in M$ et si la variété caractéristique en p est de dimension zéro, f est analytique en p (voir le Chapitre 2). Enfin, nous avons donné une estimation supérieure de l'analyticité partielle de f, en fonction des feuilletages holomorphes locaux contenus dans M', dans la situation où M est minimale ; en particulier, si M' ne contient pas de courbe complexe, f est analytique sur un ouvert dense de M (voir le Chapitre 3).

Les résultats des Chapitres 2 et 3 donnent des réponses affirmatives partielles à la conjecture suivante : *Toute application CR $\mathcal{C}^\infty$, entre une variété analytique réelle générique minimale et un ensemble analytique réel ne contenant pas de courbe complexe, est analytique (en tout point).* Nous énumérons ci-dessous des perspectives de recherche qui nous paraissent intéressantes et qui poursuivent les idées développées dans cette thèse :

1. Etudier plus précisément la seconde variété caractéristique $\mathcal{V}_p^2$ introduite au Chapitre 1 dans le cadre algébrique. La famille des $\mathcal{V}_p^2$, pour $p \in M$, est contenue dans M' ; forme-t-elle un feuilletage holomorphe (algébrique) local, dans l'esprit du Chapitre 3 ?

2. Généraliser, dans le cadre analytique des Chapitres 2 et 3, la notion de seconde variété caractéristique introduite au Chapitre 1 dans le cadre algébrique.

3. Appliquer les notions et les méthodes développées dans cette thèse au problème de la convergence d'une application formelle entre variétés CR analytiques réelles. Si la généralisation au cadre formel de la (première) variété caractéristique semble donner des résultats analogues à ceux des Chapitres 1 et 2, en revanche, nous avons rencontré jusqu'à présent des obstacles à une définition correcte de la seconde variété caractéristique et à

la construction de feuilletages holomorphes locaux contenus dans M'. Ces obstacles sont essentiellement dus à l'impossibilité dans le cadre formel de délocaliser le problème en un point générique $q \in M$, contrairement aux situations des Chapitres 1 et 3.

Bibliographie

[1] R. A. Aĭrapetyan, *Continuation of CR-functions from piecewise-smooth CR-manifolds*, Mat. Sb. **134** (1987), 108–118.

[2] H. Alexander, *Holomorphic mappings from the ball and polydisc*, Math. Ann. **209** (1974), 249–256.

[3] M. S. Baouendi, S. Bell, et L. P. Rothschild, *Mappings of three-dimensional CR manifolds and their holomorphic extension*, Duke Math. J. **56** (1988), 503–530.

[4] M. S. Baouendi, P. Ebenfelt, et L. P. Rothschild, *Algebraicity of holomorphic mappings between real algebraic sets in* $\mathbb{C}^n$, Acta Math. **177** (1996), 225–273.

[5] M. S. Baouendi, X. Huang, et L. P. Rothschild, *Regularity of CR mappings between algebraic hypersurfaces*, Invent. Math. **125** (1996), 13–36.

[6] M. S. Baouendi, H. Jacobowitz, et F. Trèves, *On the analyticity of CR mappings*, Ann. of Math. **122** (1985), 365–400.

[7] M. S. Baouendi et L. P. Rothschild, *Germs of CR maps between real analytic hypersurfaces*, Invent. Math. **93** (1988), 481–500.

[8] M. S. Baouendi et L. P. Rothschild, *Directions of analytic discs attached to generic manifolds of finite type*, J. Funct. Anal. **125** (1994), 149–171.

[9] M. S. Baouendi et L. P. Rothschild, *Mappings of real algebraic hypersurfaces*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), 997–1015.

[10] E. Bedford, *Holomorphic continuation at a totally real edge*, Math. Ann. **230** (1977), 213–225.

[11] E. Bedford et S. Bell, *Extension of proper holomorphic mappings past the boundary*, Manuscripta Math. **50** (1985), 1–10.

[12] F. Berteloot, *A remark on local continuous extension of proper holomorphic mappings*, The Madison Symposium on Complex Analysis (Madison, WI, 1991), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 79–83.

[13] F. Berteloot, *Attraction des disques analytiques et continuité höldérienne d'applications holomorphes propres*, Topics in complex analysis (Warsaw, 1992), Polish Acad. Sci., Warsaw, 1995, pp. 91–98.

[14] F. Berteloot et G. Cœuré, *Domaines de* $\mathbb{C}^2$*, pseudoconvexes et de type fini ayant un groupe non compact d'automorphismes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **41** (1991), 77–86.

[15] F. Berteloot et A. Sukhov, *On the continuous extension of holomorphic correspondences*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **24** (1997), 747–766.

[16] T. Bloom et I. Graham, *On "type" conditions for generic real submanifolds of* $\mathbb{C}^n$, Invent. Math. **40** (1977), 217–243.

[17] S. Bochner et W. T. Martin, *Several Complex Variables*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1948.

[18] A. Boggess, *The holomorphic extension of CR functions near a point of higher type*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 847–855.

[19] E. M. Chirka, *Complex analytic sets*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989.

[20] B. Coupet, *Construction de disques analytiques et régularité de fonctions holomorphes au bord*, Math. Z. **209** (1992), 179–204.

[21] B. Coupet, H. Gaussier, et A. Sukhov, *Regularity of CR maps between convex hypersurfaces of finite type*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 3191–3200.

[22] B. Coupet, F. Meylan, et A. Sukhov, *Holomorphic maps of algebraic CR manifolds*, Internat. Math. Res. Notices **1999** (1999), 1–29.

[23] B. Coupet, S. Pinchuk, et A. Sukhov, *On boundary rigidity and regularity of holomorphic mappings*, Internat. J. Math. **7** (1996), 617–643.

[24] B. Coupet, S. Pinchuk, et A. Sukhov, *Analyticité des applications CR*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **329** (1999), 489–494.

[25] B. Coupet, S. Pinchuk, et A. Sukhov, *On partial analyticity of CR mappings*, Math. Z. **235** (2000), 541–557.

[26] B. Coupet et A. Sukhov, *On CR mappings between pseudoconvex hypersurfaces of finite type in* $\mathbb{C}^2$, Duke Math. J. **88** (1997), 281–304.

[27] S. Damour, *Feuilletages holomorphes locaux et analyticité partielle d'applications CR* $\mathcal{C}^\infty$, Prépublications du LATP **11** (2001), 1–24.

[28] S. Damour, *On the analyticity of smooth CR mappings*, Michigan Math. J. **49** (2001), no. 3, à paraître.

[29] S. Damour, *Sur l'algébricité des applications holomorphes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **332** (2001), 491–496.

[30] M. Derridj, *Le principe de réflexion en des points de faible pseudo convexité, pour des applications holomorphes propres*, Invent. Math. **79** (1985), 197–215.

[31] K. Diederich et J. E. Fornaess, *Pseudoconvex domains with real-analytic boundary*, Ann. Math. **107** (1978), 371–384.

[32] K. Diederich et J. E. Fornæss, *Biholomorphic mappings between certain real analytic domains in* $\mathbb{C}^2$, Math. Ann. **245** (1979), 255–272.

[33] K. Diederich et J. E. Fornæss, *Proper holomorphic maps onto pseudoconvex domains with real-analytic boundary*, Ann. of Math. **110** (1979), 575–592.

[34] K. Diederich et J. E. Fornæss, *Applications holomorphes propres entre domaines à bord analytique réel*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **307** (1988), 321–324.

[35] K. Diederich et J. E. Fornæss, *Proper holomorphic mappings between real-analytic pseudoconvex domains in* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. **282** (1988), 681–700.

[36] K. Diederich, J. E. Fornæss, et Z. Ye, *Biholomorphisms in dimension* 2, J. Geom. Anal. **4** (1994), 539–552.

[37] K. Diederich et S. Pinchuk, *Proper holomorphic maps in dimension* 2 *extend*, Indiana Univ. Math. J. **44** (1995), 1089–1126.

[38] K. Diederich et S. Pinchuk, *Reflection principle in higher dimensions*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II, 1998, pp. 703–712.

[39] K. Diederich et S. M. Webster, *A reflection principle for degenerate real hypersurfaces*, Duke Math. J. **47** (1980), 835–843.

[40] G. Fischer, *Complex analytic geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1976, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 538.

[41] F. Forstnerič, *Extending proper holomorphic mappings of positive codimension*, Invent. Math. **95** (1989), 31–61.

[42] F. Forstnerič, *Mappings of quadric Cauchy-Riemann manifolds*, Math. Ann. **292** (1992), 163–180.

[43] R. C. Gunning et H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[44] C. K. Han, *Analyticity of CR equivalences between some real hypersurfaces in* $\mathbb{C}^n$ *with degenerate levi forms*, Invent. Math. **73** (1983), 51–69.

[45] G. M. Henkin, *An analytic polyhedron is not holomorphically equivalent to a strictly pseudoconvex domain*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **210** (1973), 1026–1029.

[46] X. Huang, *On the mapping problem for algebraic real hypersurfaces in the complex spaces of different dimensions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **44** (1994), 433–463.

[47] S. M. Ivashkovich, *The Hartogs-type extension theorem for meromorphic maps into compact Kähler manifolds*, Invent. Math. **109** (1992), 47–54.

[48] B. Lamel, *A reflection principle for real-analytic submanifolds of complex spaces*, J. Geom. Anal., à paraître.

[49] S. Lang, *Algebra*, second ed., Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Reading, MA, 1984.

[50] H. Lewy, *On the boundary behaviour of holomorphic mappings*, Accad. Naz. Lincei **35** (1977), 1–8.

[51] B. Malgrange, *Ideals of differentiable functions*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1967.

[52] J. Merker, *On the partial algebraicity of holomorphic mappings between real algebraic sets*, Bull. Soc. Math. France, à paraître.

[53] J. Merker, *Note on double reflection and algebraicity of holomorphic mappings*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **9** (2001), 689–721.

[54] J. Merker et F. Meylan, *On the Schwarz symmetry principle in a model case*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1097–1102.

[55] J. Merker et E. Porten, *On removable singularities for integrable CR functions*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), 805–856.

[56] N. Mir, *Germs of holomorphic mappings between real algebraic hypersurfaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48** (1998), 1025–1043.

[57] N. Mir, *An algebraic characterization of holomorphic nondegeneracy for real algebraic hypersurfaces and its application to CR mappings*, Math. Z. **231** (1999), 189–202.

[58] D. A. Pelles, *Proper holomorphic self-maps of the unit ball*, Math. Ann. **190** (1971), 298–305.

[59] S. Pinchuk, *Bogoljubov's "edge of the wedge" theorem for generic manifolds*, Mat. Sb. (N.S.) **94(136)** (1974), 468–482, 496.

[60] S. Pinchuk, *Boundary uniqueness for holomorphic functions of several complex variables*, Mat. Zametki **15** (1974), 205–215.

[61] S. Pinchuk, *Proper holomorphic maps of strictly pseudoconvex domains*, Sibirsk. Mat. Ž. **15** (1974), 909–917, 959.

[62] S. Pinchuk, *On the analytic continuation of holomorphic mappings*, Mat. Sb. **27** (1975), 345–392.

[63] S. Pinchuk et Sh. I. Tsyganov, *Smoothness of CR-mappings between strictly pseudoconvex hypersurfaces*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **53** (1989), 1120–1129, 1136.

[64] H. Poincaré, *Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme*, Rend. Circ. Mat. Palermo **23** (1907), 185–220.

[65] W. Rothstein, *Ein neuer Beweis des Hartogsschen Hauptsatzes und seine Ausdehnung auf meromorphe Funktionen*, Math. Z. **53** (1950), 84–95.

[66] H. A. Schwarz, *Über einige Abbildungsaufgaben*, J. Reine Angew. Math. **70** (1869), 105–120.

[67] B. Segre, *Intorno al problema di Poincaré della rappresentazione pseudoconforme*, Atti R. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **13** (1931), 676–683.

[68] R. Sharipov et A. Sukhov, *On CR-mappings between algebraic Cauchy-Riemann manifolds and separate algebraicity for holomorphic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 767–780.

[69] B. Shiffman, *Separately meromorphic functions and separately holomorphic mappings*, Several complex variables and complex geometry, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 191–198.

[70] N. K. Stanton, *Infinitesimal CR automorphisms of rigid hypersurfaces*, Amer. J. Math. **117** (1995), 141–167.

[71] N. Tanaka, *On the pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables*, J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 397–429.

[72] J.-M. Trépreau, *Sur le prolongement holomorphe des fonctions CR définies sur une hypersurface réelle de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{C}^n$*, Invent. Math. **83** (1986), 583–592.

[73] A. E. Tumanov, *Extension of CR-functions into a wedge from a manifold of finite type*, Mat. Sb. **136** (1988), 128–139.

[74] S. M. Webster, *On the mapping problem for algebraic real hypersurfaces*, Invent. Math. **43** (1977), 53–68.

[75] S. M. Webster, *On the reflection principle in several complex variables*, Proc. Amer. Math. Soc. **71** (1978), 26–28.

[76] D. Zaitsev, *Algebraicity of local holomorphisms between real-algebraic submanifolds of complex spaces*, Acta Math. **183** (1999), 273–305.

[77] O. Zariski et P. Samuel, *Commutative algebra, Volume I*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1958.

[78] O. Zariski et P. Samuel, *Commutative algebra, Volume II*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J.-Toronto-London-New York, 1960.

Index

Résumé

Le travail présenté dans cette thèse concerne l'analyticité et l'algébricité d'applications de Cauchy-Riemann (CR) de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre variétés CR analytiques ou algébriques réelles. Ce sujet a trait aux propriétés de prolongement d'applications et a récemment connu un regain d'activité. Notre contribution porte principalement sur l'étude du cas non équidimensionnel et sur le passage à la codimension supérieure à un.

Dans la première partie de la thèse, nous considérons la question de l'algébricité d'une application holomorphe locale f envoyant une sous-variété algébrique réelle générique minimale $M \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, dans un sous-ensemble algébrique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. Ce problème a pour origine les travaux de Poincaré (1907), et plus récemment de Webster (1977). L'introduction de "variétés caractéristiques" associées à la fois aux ensembles M et M' et à l'application f nous permet de donner deux nouvelles conditions pour que f soit algébrique.

Dans la deuxième partie de la thèse, nous étudions le problème de l'analyticité d'une application CR $\mathcal{C}^\infty$ $f : M \to M'$ entre une sous-variété analytique réelle générique minimale $M \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. Nous établissons une généralisation du principe de réflexion de Lewy-Pinchuk (1975–77) et prouvons que si la variété caractéristique est de dimension zéro, f est analytique réelle.

Dans la troisième partie de la thèse, nous traitons la situation plus générale où la variété caractéristique est de dimension arbitraire. Nous démontrons que si M' ne contient pas de courbe complexe, f est analytique sur un ouvert dense de M. Plus généralement, nous établissons une estimation supérieure de l'analyticité partielle de f, en fonction de la dimension maximale des feuilletages holomorphes locaux contenus dans M'.

Analyticity and algebraicity of Cauchy-Riemann mappings

Abstract. This work concerns the analyticity and the algebraicity of Cauchy-Riemann (CR) mappings of class $\mathcal{C}^\infty$ between real analytic or real algebraic CR manifolds. There has been recently a renewed activity in this subject, which deals with the extension properties of mappings. Our contribution essentially concerns the study of the non-equidimensional situation and the investigation of the case of higher codimension.

In the first part of this thesis, we consider the question of the algebraicity of a local holomorphic mapping f sending a minimal generic real algebraic submanifold $M \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, into a real algebraic subset $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. This problem was initiated by the work of Poincaré (1907), and more recently of Webster (1977). The introduction of "characteristic varieties" associated to both the sets M and M' and the mapping f allows us to give two new conditions for the algebraicity of f.

In the second part of this thesis, we study the problem of the analyticity of a $\mathcal{C}^\infty$ CR mapping $f : M \to M'$ between a minimal generic real analytic submanifold $M \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, and a real analytic subset $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. We establish a generalization of the Lewy-Pinchuk reflection principle (1975–77) and we prove that if the characteristic variety if of dimension zero, then f is real analytic.

In the third part of this thesis, we deal with the more general situation when the characteristic variety if of arbitrary dimension. We prove that if M' does not contain any complex curves, then f is analytic on a dense open subset of M. More generally, we establish an upper estimate of the partial analyticity of f, which depends on the maximal dimension of local holomorphic foliations contained in M'.

Mots-clés. Application holomorphe, algébricité, variété de Segre, application de Cauchy-Riemann, analyticité, principe de réflexion.

Classification mathématique 2000. 32H02, 32V40, 32V25, 32V35.