UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

Thèse de doctorat de l'université Paris 6

Spécialité :

Physique Théorique

présentée par

Florent KRZAKALA

pour obtenir le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Aspects géométriques et paysage d'énergie des verres de spins

Étude d'un système désordonné et frustré en dimension finie

Soutenue le 12 Novembre 2002
devant la commission d'examen composée de

Messieurs	*A. BILLOIRE*	Rapporteur
	R. CORI	Examinateur
	B. DERRIDA	Président du jury
	O.C. MARTIN	Directeur de thèse
	M. MÉZARD	Examinateur
	H. RIEGER	Rapporteur

Hunc mundum tipice laberinthus denotat ille, récita le vieillard d'un air absorbé. Intranti largus, reunti sed nimis artus.
La bibliothèque est un grand labyrinthe, signe du labyrinthe du monde. Tu entres et tu ne sais pas si tu en sortiras.

Umberto Eco—*Le nom de la rose* (1980)

FINALLY , may I add that the main purpose of my teaching has not been to prepare you for some examination -it was not even to prepare you to serve industry or the military. I wanted most to give you some appreciation of the wonderful world and the physicist's way of looking at it, which, I believe, is a major part of the true culture of modern times. (There are probably professors of other subjects who would object, but I believe that they are completely wrong.)
Perhaps you will not only have some appreciation of this culture; it is even possible that you may want to join in the greatest adventure that the human mind has ever begun.

Richard P. FEYNMAN
The Feynman Lectures on Physics, Addison Wesley, Reading (1964), R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands

AVOIR le loisir de passer huit ans de sa vie dans des études supérieures, dont trois sur un travail de recherche fondamentale, fut un plaisir, une chance et un privilège que je dois à de nombreuses personnes.

A l'ensemble de ma famille tout d'abord; à mon père et à ma mère —sans qui je ne serais pas là— mes frères, ma sœur, mes parents et grands-parents. C'est en particulier avec amour et reconnaissance que je pense à Ange —parti le jour où j'ai commencé ce travail— et Blanche à l'heure où j'ecris ces lignes. J'espère qu'ils y verront un aboutissement de leurs efforts patients. Olivier, même si je le soupçonne fortement de se sentir très éloigné des signes cabalistiques qui ornent cette thèse, a par ailleurs été le premier à avoir éveillé en moi un goût de la curiosité qui ne s'est jamais démenti depuis.

Avec la fin, fût-elle symbolique, de mes études, je repense ensuite à quelques professeurs qui ont su m'aider et me communiquer leur passion et leur interêt dans des conditions d'enseignement qui n'étaient pas toujours très faciles. Je garde un souvenir ému de la plupart d'entres eux, notamment de Mme Raimond et de Mme Dentella, puis plus tard de mes enseignants au collège M. Bourri et M. Tarès. Au lycée, j'ai beaucoup apprecié les cours de Mme Roux, de M. Pariente, de M. Paba, de M. Lechaine ainsi, et surtout, que ceux pleins d'inspiration de M. et Mme Guilliani. Désolé pour ce que j'ai dû vous faire subir, de mon coté je me sens une dette infinie envers vous.

A la faculté des sciences de Saint-Jérôme, à Marseille, je n'aurai sans doute jamais suivi cette voie sans l'influence des cours magistraux (dans tous les sens du terme) de Jean-Marie Bermond, de Roger Petit, de George Rasigni et d'Olivier Thomas. Jean-Marc Debierre m'a alors, le premier, fait confiance et m'a encadré pour mon premier projet de recherche; Arnaud Entringer fut alors mon premier collaborateur; mes discussions prolongées avec lui et Jean-Dominique Seris furent pour beaucoup à l'origine de l'idée de me lancer dans la recherche. Enfin en DEA, les cours de Bertrand Delamotte m'ont beaucoup marqué.

Je voudrais aussi citer ici, pour des raisons très diverses et qui n'appartiennent qu'à moi, Cyrille, Jérôme, Julie, Kamel, Laurence, Laurent, Nordine, Olivia, Sandra et Sandrine.

Enfin, je me souviens avoir lu dans une thèse d'un ancien étudiant d'origine allemande une expression originale pour nommer, affectueusement, son directeur de thèse: il l'appellait DoctorVater ... Aucun mot ne pourrait mieux convenir pour remercier Olivier Martin de m'avoir encadré lors de ces trois dernieres années.

Eux tous, ainsi, me précèdent dans le discours qui va suivre. Je me permet de leur dédier ce travail, et les remercie de m'avoir aidé à entrer avec Guillaume et Adso dans la bibliothèque, et du privilège rare d'y avoir laissé quelques mots.

F.K.
Rome, le 19 Novembre 2002

Remerciements

Cette chanson vous est un peu dédiée...
Les ogres de Barback
I've had my share, I'll help you with the pain
You're not alone.
David Bowie

Sait-on jamais où les vents nous mènent?
Les ogres de Barback
Tous les chemins mènent à Rome.
Vieil adage populaire

Ma thèse s'est déroulée au sein du (jeune) Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, sur le campus d'Orsay, et j'en remercie les directeurs successifs **Alain Comtet** et **Stephane Ouvry** pour m'y avoir acceuilli.

Mes remerciements vont ensuite, bien sûr, à **Olivier Martin** qui a été mon directeur de thèse pendant ces trois ans. Je me souviens encore comment, alors étudiant en DEA, j'avais été tout de suite séduit par son enthousiasme, son humour et sa bonne humeur. Je ne vais pas, ici, faire son hagiographie qui serait pourtant justifiée; qu'il me soit donc juste permit d'évoquer ses qualités de chercheur, d'enseignant, de directeur de thèse et plus généralement ses qualités humaines que j'ai eu tout le loisir de découvrir et d'apprecier.

Alain Billoire et **Heiko Rieger** ont bien voulu participer à mon jury, et ont en particulier accepté la lourde et ingrate tache de rapporter ma thèse. Leurs travaux respectifs ayant souvent influencé les études présentées ici, je suis heureux de fermer la boucle par l'intermédiaire de leurs rapports de thèse. Merci, donc, d'avoir pris la peine de lire cet essai.

Bernard Derrida m'a fait l'honneur d'accepter de présider ce jury de thèse et je l'en remercie profondément. Je me souviens que lorsque j'ai commencé à travailler avec Olivier vers la fin du siècle dernier, le premier séminaire auquel j'ai assisté était le sien et, par une magie que je n'ai toujours pas très bien saisie, il avait réussi à rendre compréhensible son exposé au béotien que j'étais. Je suis ainsi heureux, et extremement flatté, de le retrouver dans mon jury ces quelques trois ans plus tard.

Le choix de **Marc Mézard**, ensuite, s'imposait de lui même puisqu'il est un peu devenu, après son arrivé au laboratoire, mon "second" directeur de thèse. Les discussions que j'ai pu avoir avec lui, sa connaissance quasi exhausitive des systèmes vitreux, sa compréhension sans concession de la physique, ses conseils ainsi, aussi, que ses rires et son humour ont souvent été d'un grand secours pendant ces deux ans.

Robert Cori, enfin, a bien voulu accepter de s'interesser à mon travail; son regard exterieur, ses jugements et ses questions très pertinentes furent elles aussi utiles et m'ont aidé à prendre de la distance avec mes résultats; je l'en remercie de tout cœur.

Les travaux présentés dans cette thèse m'ont par ailleurs permis de collaborer avec plusieurs personnes qui m'ont beaucoup appris. J'ai notamment apprecié les réunions du groupe de travail de Saclay, avec Marc, Olivier et **Jean-Philippe Bouchaud**. J'ai aussi eu l'opportunité de collaborer avec **Enzo Marinari** ainsi qu'avec il maestro **Giorgio Parisi**; je me considère donc très chanceux d'avoir eu de

pareils maîtres. Je remercie enfin très sincérement **Jérôme Houdayer** et **Markus Müller**: j'ai en particulier commencé ma thèse à partir des travaux de Jérôme et de son superbe travail sur l'algorithme de renormalisation génetique, et la plupart de mes études n'auraient sans doute pas été possibles sans cela. Markus, ensuite, fut pour moi un très agréable compagnon de travail étant donné que nous sommes l'un pour l'autre ce qu'il est convenu d'appeler des personnes aux caractères opposés(·1) et donc, j'ose du moins le croire, complémentaires.

Enfin, plus généralement, les échanges scientifiques divers et variés, brefs ou prolongés, que j'ai eus pendant ces trois ans avec **A. Ajdari**, **A. Barrat**, **L. Berthier**, **E. Bertin**, **G. Biroli**, **A. Bray**, **I. Campbell**, **L. Cugliandolo**, **V. Dupuis**, **I. Giardinna**, **A. Hartmann**, **D. Herisson**, **H. Hilorst**, **W. Kob**, **J. Kurchan**, **J. Lamarck**, **A. Lefevre**, **V. Orlyanchik**, **A. Pagnani**, **M. Palassini**, **D. Petit**, **M. Moore**, **D. Relkin**, **F. Ricci-Tersinghi**, **F. Ritort**, **M. Sales**, **M. Sasaki**, **V. Viasnoff**, **E. Vincent**, **E. Westhof**, **P. Young**, **H. Yoshino** et **F. Zuliani** m'ont beaucoup m'aidé dans ma tâche, et je les en remercie. Je suis par ailleurs encore infiniment redevable à **Félix Ritort** pour m'avoir sorti d'une situation très embarassante à Barcelone ... J'en garde un amour immoderé de la Catalogne et des Catalans, qu'ils soient tous remerciés ici pour lui !

J'ai eu aussi la chance inouie à la fin de ma thèse de participer à une école d'été dans les Alpes, aux Houches donc, sur les systèmes vitreux hors-équilibre. Ce fut une experience inoubliable et enrichissante, tant d'un point de vue humain que scientifique, et je remercie les organisateurs de m'y avoir convié, en particulier **Jorge Kurchan** et **Jean Louis Barrat**. Cela m'a permis en outre de rencontrer **Olivia White** qui m'a, entre autres, eclairé en quelques jours sur bien des questions sur lesquelles je buttais depuis plusieurs mois. Elle et Markus m'ont également fait l'amitié de bien vouloir relire mon manuscrit original et leurs très nombreux commentaires détaillés m'ont réellement été utiles. Si l'on trouve quelques qualités à cette présentation, elles leurs sont dues pour une grande part.

Enfin, je remercie aussi toutes celles et tous ceux qui ont contribué à la qualité des conditions de travail dont j'ai pu disposer : **Nadine Rohart** et **Martine Thouvenot** au secrétariat, l'ensemble des membres du LPTMS et notamment mes camarades thésards **Olivier Brodier**, **Olivier Giraud**, **Raphael Voituriez** et mon mon voisin de bureau **Sophian Teber** qui partagea bien malgré lui ces trois dernières années avec moi. Le bâtiment 100 abritant aussi l'IPN, ces années furent aussi sous le signe des noyaux atomiques... J'y ai eu de nombreux amis, notamment mes camarades de promotion **Cynthia, Muriel et Stephanie** qui furent comme des sœurs pour moi pendant les quatre années que l'on y a passé ensemble. J'ai aussi pu compter sur l'amitié de **Franck, Jerôme, Diego, Thomas** et bien d'autres (désolé pour ceux que j'oublie, mais vous êtes si nombreux) ! Je ne saurais enfin conclure ce paragraphe sans aussi remercier **Jacqueline Dufournet** à qui je dois beaucoup. Elle fut la (savoureuse) secrétaire de mon DEA avant **Agnies Fercoq**, et je me souviendrai longtemps de l'agréable organisation, avec **Anne-Isabelle Etienvre**, de son inoubliable(·2) soirée de départ où j'ai pu, entre autre, accompagner les directeurs successifs de mon DEA **Luc Valentin, Yves Charon** et **Pierre Binetruy** à la guitare pour un chant ... mémorable.

D'un point de vue technique, **Laurent Leguillou**, **Colin Bernet**, **Alexandre Amblard** et surtout **Francesco Zuliani** furent pour moi une source (inépuisable) d'informations et de conseils sur Tex, Latex, linux, Unix, le C et le C++ et encore bien d'autres choses. De même, les pré-cités Dorothée Petit, Jérôme Houdayer ainsi qu'**Amory Mouchet** m'ont considérablement simplifié la tâche pour la rédaction de ce manuscrit. Je ne vois pas très bien comment j'aurai pu me dépatouiller au milieu de cet univers étrange sans leur aide amicale.

Enfin, pour finir cette section professionnelle, je voudrais remercier toutes les personnes avec qui

(·1)De maniere imagée, disons que je suis dingue de jazz et lui de musique classique.
(·2)Certains savent de quoi je parle ...

j'ai pu enseigner pendant ces trois ans, à Orsay bien sûr, mais aussi à Paris, au Panthéon et à Jussieu, ainsi qu'à Saint-Denis pour EDF.

Doit-on *vraiment* dire pourquoi l'on remercie sa famille ? Je vous aime et merci à tous, Papa et Maman, Grands-Pères et Grands-Mères, Cousins et Cousines, Oncles et Tantes, Frangins et Frangine([·3]) ! Je me dois de mentionner explicitement, ou bien ils ne me parlerons plus jamais, mes frères et soeurs **Olivier**, **Peggy**, **Nicolas**([·4]) et le petit **Paul**. Je ne peux résister non plus à l'envie de remercier aussi mes oncles et tantes, en particulier -honneur au dames- **Josée**, **Maryse**, **Jean-Francois**, **Marc** et sa délicieuse et adorable petite famille **Mylène**, **Benjamin**, **Louise** et **Jeanne** qui m'ont accueilli tant de fois à bras ouverts.

Enfin, comme le dit si bien David Bowie, we're not alone ! Je voudrais donc adresser à mes amis qui m'ont accompagné durant ces années franciliennes ma reconnaissance pour leur soutien et leur amitié. **Jérôme** fut en particulier comme un frère pour moi. **Arnaud, Colin, Cyrille, Fabien et Stephanie, Julien(s)** et **Guillaume** furent aussi les compagnons de bien des sorties et de bien des soirées prolongées, de même que **Sandrine**([·5]) ainsi que tous mes amis des promotions **1999** et **2000** du **DEA CPM**. Ce fut aussi un plaisir, que j'espère partagé, de jouer et de tourner dans les salles parisiennes avec **Anne-Laure**, **Anthony**, **Fred**, **Guillaume**, **Jean-David** et **Regis**, les membres d'*Hi-Hat*, mon "Reggea-Rock band". Les mois d'août furent souvent pretextes à des voyages mémorables avec Jérôme, **Fabrice**, Guillaume, Julien et Cyrille à travers l'Europe du sud et de la Turquie, puis dans toute l'Europe de l'est; ils me resteront dans la mémoire comme des moments inoubliables (je crois bien depuis être tombé amoureux d'Istanbul et des montagnes Bulgares ...) et priviligiés.

J'ai gardé de nombreux amis à Marseille que je remercie tous sincérement, en particulier l'adorable **Cécile**, mes camarades d'université **Arnaud**, **Cerise**, **Delphine**, **Jean-dominique** et **Nicolas**, mes vieux amis **Fabrice**, **Kamel**, **Laurent**, **Mathias** et **Nordine**, ainsi que mon "professeur" de math **Jean-Francois**. Je remercie aussi **Laurence** du fond du coeur pour sa patience et pour tout ce qu'elle a fait pour moi.

Je crois bien enfin que je n'aurais *rien* pu faire sans l'amitié de **Sandra**; merci à elle donc, ainsi qu'à FranceTelecom, Tele2 et à monsieur Bell pour avoir parfois réduit les distances qui nous séparait.

Enfin, tous les autres, vieux amis ou personnes croisées à l'occasion d'une rencontre impromptue, vous que j'ai honteusement négligé de citer ici, et qui vous reconnaîtriez, je vous prie de me pardonner et vous remercie de votre indulgence.

À toutes et à tous un grand **MERCI**.

([·3])Si j'avais un marteau ...

([·4])C'est après tout sur SON canapé dans SON appartement à Nancy que le scaling du Re-Rem est apparu une soirée de décembre 2001 ...

([·5])Elle s'en defendra surement, mais elle est aussi un peu responsable des bandes dessinées que l'on pourra trouver dans cette thèse ... Aussi, si vous ne les aimez pas, plaignez vous-en à *elle* !

Table des matières

Principales notations

$\neq$	différent de
$\propto$	proportionnel à
$\simeq$ ou $\approx$	approximativement égal à
$\sim$	asymptotiquement égal à
$R \to \infty$	Quand R tend vers l'infini
$Tr(A)$	Trace de la matrice A
N, P et NP	Classes de complexité algorithmique
$\mathcal{C}$	Ensemble des configurations
$\{x\}$	Ensemble des réalisations du désordre
$H(\mathcal{C})$	Hamilitonien défini sur $\mathcal{C}$
$H(\{x\})$	Hamilitonien défini sur x
$P(\mathcal{C})$	Probabilité définie sur $\mathcal{C}$
F	Énergie libre du système
U ou E	Énergie du système
S	Entropie du système
$< A >$	Moyenne thermique de A
$[A]_{av}$ ou $\overline{A}$	Moyenne sur le désordre de A
$F\{x\}$	Energie libre définie sur x
$[F\{x\}]_{av}$	Energie libre moyennée sur x
d_u	Dimension critique supérieure
d_l	Dimension critique inférieure
EA	Edwards et Anderson
DPRM	Directed Polymer in Random Media
MK	Migdal et Kadanoff
REM	Random Energy Model
Re-Rem	Random energy Random entropy model
SK	Sherrington et Kirkpatrick
S-REM	Scaling Random Energy Model
RSB	Replica Symmetry Breaking, ou brisure de la symétrie des répliques
TNT	Trivial-Non Trivial, scénario pour les verres de spins
MAD	Magnetization And Droplet, scénario pour les verres de spins

Introduction générale

Le monde était si récent, que beaucoup de choses
étaient dépourvues de nom
et pour les mentionner, il fallait les montrer du doigt.
Tout les ans, vers le mois de mars, une famille
de Gitan faisaient connaître les nouvelles inventions.
D'abord, ils amenèrent l'aimant.
Gabriel García Márquez, *Cent ans de solitude.*

Pour étudier l'ordre,
il ne faut pas étudier le désordre.
Lautréamont *Les chants de Maldoror*

LA NATURE nous offre nombre d'exemples de systèmes condensés dans des phases amorphes, l'exemple le plus commun étant celui des verres, connus et utilisés depuis plusieurs millénaires([1]). Au contraire d'un solide cristallin dont toutes les molécules sont disposées dans l'espace d'une manière régulière, une phase amorphe est caractérisée par son absence apparente d'organisation. De fait, si on le refroidit assez vite, presque tout liquide peut avoir une telle phase amorphe et devenir un verre (Angell, 1995), chacunes des particules se gelant dans des positions semblant aléatoires. Comprendre le comportement collectif d'un tel système est alors un problème très difficile pour le physicien; en particulier l'absence de symétrie, qui est la définition même d'une phase amorphe, rend le problème très délicat.

C'est par l'étude des systèmes désordonnés que beaucoup de progrès ont pu être faits. Du point de vue du physicien statisticien un système est, en toute généralité, une collection ou un ensemble d'objets en interaction. Il peut être considéré comme "désordonné" soit parce que chacun de ses constituants (qui peuvent être des particules, des spins, des neurones, des molécules, des monomères, des excitations dans un champ quantique ou bien encore des agents économiques …) sont très différents les uns des autres, soit encore parce que chacun d'entre eux voit un environnement qui diffère énormément l'un à l'autre. On voit qu'avec une définition aussi large, le terme "système désordonné" peut recouvrir tout une gamme de phénomènes. Ainsi l'étude de ces modèles peut être pertinente dans beaucoup de domaines en physique mais aussi en chimie, en informatique théorique, en biologie et même en sciences économiques. Cependant, si la physique théorique a permis de calculer les propriétés de systèmes de plus en plus complexes, avec des degrés de liberté de plus en plus nombreux, à l'aide par exemple de

([1])A l'âge de pierre, l'homme utilisait déjà l'obsidienne, un verre naturel d'origine volcanique, comme instrument tranchant. Le procédé de fabrication du verre fut sans doute découvert par hasard, grâce à la fusion de sable calcique avec de la soude lors de la cuisson de poteries. Le verre manufacturé le plus ancien que l'on connaissent sont des perles de verre trouvées dans des tombes royales égyptiennes, datant d'environ 3500 ans av. J.-C.. Vers 1500 av. J.-C., on fabrique en Egypte et en Mésopotamie les premiers verres creux coulés sur un noyau de sable. Il semble que les premiers verres transparents datent du règne d'Aménophis IV ou de celui de son fils Toutankhamon, vers 1300 AV-JC.

la théorie des champs, les mêmes systèmes dans leurs versions désordonnées restent encore loin d'être compris. Si les physiciens savent maintenant gérer les théories à N corps en physique moléculaire ou nucléaire, ou encore les théories quantiques des champs en physique des particules(^{2}), les théories équivalentes en présence de désordre restent difficiles. Or, dans la nature, on trouve très souvent des situations où le désordre joue un rôle, qui peut être simplement de changer un peu le comportement par rapport au cas "pur", soit parfois être complètement prédominant.

Pendant les trois dernières décennies, ce domaine fut l'un des principaux développements de la physique statistique. Partant du problème canonique des verres de spins, les études se sont tournées dans de nombreuses et nouvelles directions pour atteindre l'optimisation combinatoire, les réseaux de neurones, les verres structuraux ou bien les systèmes d'agents économiques en interaction. Cette thèse se situe dans ce cadre, et porte sur l'étude du modèle initial des "verres de spins" qui, pour parodier une expression du prix Nobel P.W. Anderson (Anderson, 1972) "offrent encore d'intéressants problèmes de principes". En effet, bien qu'il y ait eu de nombreux développements, le problème initial, qui est un des paradigmes des systèmes désordonnés, reste encore loin d'être compris.

– .1 – Systèmes désordonnés

a) Amour, désordre et frustrations ...

Le sage doit rechercher le point de départ de tout désordre.
Et tout commence par un manque d'amour.
Mo-Tzu, *Proverbe chinois*

Avant de commencer à rentrer dans les détails je voudrais présenter un petit modèle simple et instructif pour illustrer les deux définitions que nous avons données des systèmes désordonnés, et ainsi présenter la notion fondamentale de frustration. Considérons trois jeunes personnes, que nous allons nommer Paul, Nicolas et Julie(^{3}) qui se connaissent entre eux mais se retrouvent dans une soirée où ils ne connaissent personne, et où deux groupes se sont déjà formés. Lequel vont-ils rejoindre? Vont-ils vouloir rester ensemble et rejoindre le même groupe ou au contraire se séparer? Tout dépend bien sûr de leurs amitiés et inimités respectives. En bon physicien, nous modélisons ce problème simple, ce qui nous sera utile quand nous étudierons un problème plus complexe. Nous dessinons un triangle, et plaçons chacune des trois personnes sur un sommet -disons Julie en haut, Nicolas à droite et Paul à gauche- et nous leur attribuons une flèche qui peut aller soit vers le haut soit vers le bas (la règle numéro un de la physique statistique étant de prendre des flèches quand on peut prendre des flèches) selon que cette personne choisisse de rejoindre le groupe $\mathcal{A}$ ou le groupe $\mathcal{B}$. Chacune de ces trois personnes ayant un sentiment ou une affection particulière avec les deux autres, nous modélisons cette relation en y attribuant un signe $+$ si ces deux personnes s'entendent plutôt bien, et un signe $-$ dans le cas contraire, que nous plaçons sur les arêtes du triangle. Armé de ce petit modèle, nous pouvons maintenant examiner les différentes situations. Imaginons par exemple que ces trois personnes sont les meilleurs amis du monde, et dans ce cas, nous allons leur attribuer, pour leurs relations, un signe $+$. Dans la figure –1, considérons donc le cas (a).

Evidemment dans cette situation nos trois amis voudront rester ensemble et aller dans le même groupe. Dans notre représentation, cela signifie qu'il existe deux solutions pour que les liens soient tous satisfaits : toutes les flèches en haut (voir fig –2), ou toutes les flèches en bas ! Ergo, tout le monde dans

(^{2})Encore que ...
(^{3})Toute ressemblance avec des personnes ou des situations existantes ne saurait être que fortuite.

le même groupe, que se soit $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$. Il est donc possible dans ce cas idéal de rendre tout le monde heureux. Remarquons aussi que si l'on multiplie le signe des trois liens ensemble on obtient $+$. Jusqu'à présent tout cela reste trivial mais considérons maintenant une nouvelle situation où Julie n'est guère appréciée de Paul et Nicolas qui eux, par contre, s'apprécient beaucoup mutuellement. Que devient notre triangle? Nous devons maintenant considérer le cas b) de la figure –1. Là encore, on peut trouver

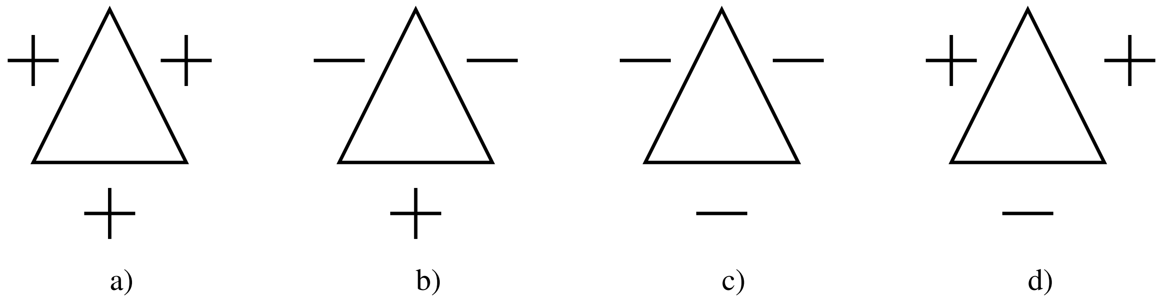


FIG. –1 – *Les différentes modélisations des affinités. Julie est en Haut, Nicolas à droite et Paul à gauche. Les liaisons notées + symbolisent une amitié tandis que celles notées − une inimité.*

deux solutions à notre problème(4) où Julie va dans l'un des groupes et les garçons dans l'autre (voir fig –2). Là encore, si l'on multiplie les trois liens ensemble, on obtient $+$.

Essayons encore une nouvelle situation où les trois jeunes gens ne s'entendent pas, nous dessinons des $-$ pour leurs interactions, le produit des trois liens devient négatif, et considérons le triangle (c) de la figure –1. Si tout ce petit monde se hait cordialement, que nous dit notre modèle? La réponse est bien sûr qu'il n'y a pas moyen de satisfaire tout le monde (Essayez!) et quelqu'un va être frustré (voir fig –2). Puisqu'il n'y a que deux groupes, et trois personnes qui ne s'aiment pas, il y a une difficulté insurmontable! La physique statistique étudie ce genre de modèle sous le nom d'*anti-ferromagnétisme sur un réseau triangulaire*, qui est donc un système où il y a de la frustration(5). Ce genre de système frustré sans désordre pose déjà des problèmes intéressants.

Passons maintenant à un autre cas: imaginons que Paul et Nicolas soient tous deux amoureux de Julie et qu'ainsi ils ne s'entendent pas; le triangle correspondant est le (d) de la figure –1. Là encore, il y pas de réponse satisfaisante. Dans le meilleur des cas, il y a toujours deux personnes qui ne sont pas satisfaites ... En effet, soit Julie reste avec un seul des garçons, et l'autre se retrouve seul, soit Paul et Nicolas viennent avec elle, mais bien sûr ils n'aiment guère se voir l'un et l'autre. Avec un peu de bon sens notre modèle prévoit ainsi facilement la plupart des grands textes dramatiques de notre littérature et la frustration inhérente à ce genre de situation. Cet exemple est de fait très général; il y a frustration quand le produit des liens sur une “plaquette”(6) -ou une boucle d'interaction- est négatif. C'est ce que l'on nomme le critère de Toulouse (Toulouse, 1977). Cela peut arriver dans les systèmes où il y a des $+$ et des $-$ comme le précédent, mais aussi dans des systèmes parfaitement homogènes (comme celui où il n'y a que des $-$). Si l'on considère maintenant le même problème avec plus de personnes, et donc avec plus de flèches et de liens, on voit qu'il y aura plusieurs boucles possibles, et pour peu que tout le

(4)Les deux solutions sont dues à une symétrie: l'équivalence entre le groupe $\mathcal{A}$ et le groupe $\mathcal{B}$. Cette symétrie peut être brisée par l'introduction d'un groupe favorisé, par exemple en supposant que ce groupe est plus proche du buffet ...

(5)La physique statistique, toujours prodigue en situations complexes, étudie aussi la situation avec plus de deux groupes qui sont appelés modèles *de Potts*.

(6)Voila deux mots d'origine française largement utilisés par les anglo-saxons: le mot “plaquette” est dû à Claude Itzcikson dans le cadre des théorie quantiques des champs sur réseaux et celui de “frustration” est dû à Gérard Toulouse dans son article fondateur (lui-même déclare cependant le tenir d'Edwards, le mot ayant la même signification en anglais).

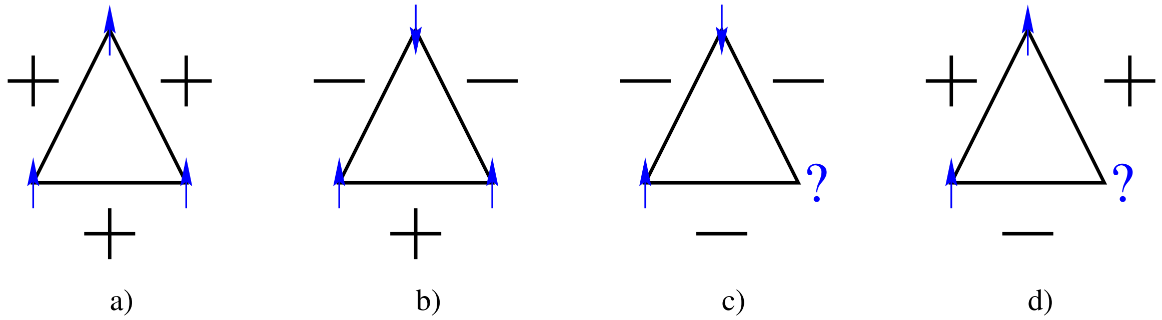


FIG. –2 – *Quelques solutions possibles aux problèmes posés. Dans les cas c) et d), il est impossible de satisfaire les trois personnes à la fois, et l'une d'elle se retrouve frustré.*

D

monde ne s'apprécie pas, il y aura forcement quelques boucles qui seront frustrées. Donc, si un groupe de N personnes rejoint la soirée (Il faut imaginer maintenant N flèches et N^2 liens avec des signes $+$ et $-$ disposés entre toutes ces flèches), et que l'on décide de modéliser leurs amitiés en tirant au hasard les $+$ et les $-$, la frustration sera non seulement inévitable mais aussi très grande puisqu'une boucle a une chance sur deux d'être frustrée.

Ceci est une illustration de frustration induite par un désordre "gelé", ou encore intrinsèque, que l'on a tous déjà expérimenté, en particulier quand nos amis ne sont pas amis entre eux ou encore, pour prendre un exemple plus littéraire, comme dans *Le Cid* de Corneille(7) : Rodrigue et Chimène s'aiment mais ne peuvent concrétiser leur amour à cause de la rivalité entre leurs pères (voir la figure –3).

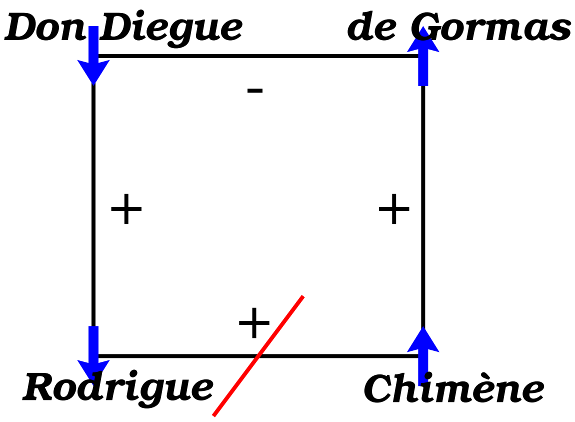


FIG. –3 – *Rodrigue et Chimène s'aiment et aiment leurs pères, qui sont malheureusement rivaux. Cette plaquette est frustrée et quelque soit la solution choisie, l'un des liens sera non satisfait. Dans Le Cid, Rodrigue tue le père de Chimène en combat singulier, et c'est sa relation avec Chimène qui est brisée "Contre mon propre honneur mon amour s'intéresse, Il faut venger un père, et perdre une maîtresse." Le dilemme Cornélien était né.*

(7)Cet exemple m'a été suggéré par Jérôme Houdayer. Il a aussi été montré que dans les grandes pièces de Shakespeare, la frustration est faible au début, augmente ensuite pour atteindre un maximum au milieu de l'oeuvre et décroître à la fin (Mézard et al., 1987).

Une autre situation intéressante est quand, comme nous l'avons dit dans le cas des verres, le désordre est absent au départ mais présent à l'arrivée. On dit alors qu'il est auto induit. Une façon de se le représenter dans notre petit modèle est la suivante: considérons un cas où les invités sont des musiciens de Jazz et de musique classique et où il y a deux pièces. Bien évidement, les musiciens de Jazz aimeraient êtres ensemble dans une pièce, pour parler entre eux de leurs morceaux préférés, ainsi que les musiciens classiques qui préférent éviter les Jazzmen ... Cependant, comme il y a beaucoup de monde arrivé en même temps, il peut arriver qu'il se forme deux groupes plutôt homogènes, et qu'ainsi la bonne solution qui consisterait à avoir deux groupes séparés ne soit pas adoptée. Dans ce cas, il y aura toujours de la frustration, puisque les différentes personnes que l'on aimerait avoir pour compagnie vont se disperser dans les deux salles. De plus comme il y a beaucoup de monde et qu'il n'est pas aisé de changer de salle, cette frustration induite par le désordre va durer pour toute la soirée. Ce désordre là est dit auto induit (c'est ce qui apparaît dans les verres): il existe une solution sans frustration, mais le système, de fait de sa dynamique particulière, ne la trouve pas.

Nous pouvons voir là l'illustration de notre propos introductif sur les systèmes frustrés complexes. Soit le désordre est intrinsèque, parce que tous les éléments du modèle sont très différents, soit le désordre est auto induit par la dynamique, et même s'il était absent au départ, il se retrouve à l'arrivée. Dans les deux cas, nous avons de la frustration. On peut cependant montrer qu'avec un peu d'organisation, les choses peuvent être meilleures. Ainsi, en indiquant clairement les salles "Jazz" et "Classique" dans notre second exemple, on pourra forcer la dynamique à atteindre rapidement l'état sans frustration. De même pour le premier problème, on peut aussi démontrer qu'il est possible, si l'on considère un grand nombre d'individus, de créer deux groupes de N personnes où chacun s'entend avec $N/2 + 0.76\sqrt{N}$ autres personnes dans le même groupe, ce qui est mieux que le $N/2$ qui serait obtenu en tirant les groupes au hasard([8]).

b) Les verres

Ce genre de phénomènes avec désordre auto induit apparaît donc dans les phases vitreuses. Considérons par exemple un liquide refroidi assez vite à une température assez basse et nous obtenons un verre -alors que la phase cristalline est la meilleure énergétiquement parlant -à cause de l'existence d'un grand nombre de configurations plus ou moins stables.

Ces états métastables sont communs en physique des transitions de phases; l'exemple le plus populaire est bien sûr celui de l'eau surfondue: en s'y prenant bien (absence de poussières, manipulations sans heurts), on peut maintenir l'eau sous forme liquide *au dessous* de 0^o Celsius (où l'état stable est bien entendue la glace). Pourtant, une petite perturbation (comme un simple coup de pied dans le baquet !) provoque la transformation en glace quasi-instantanément avec un claquement sec et sonore([9]). L'existence d'états métastables très longs (on connaît des verres vieux de plusieurs millénaires qui ne semblent pas avoir envie de devenir cristallin([10])) est ainsi responsable de la formation de certains

([8])Même si pour trouver cette solution, c'est à dire la composition des groupes connaissant les relations entre les personnes, il faudra un temps plus grand que l'âge de l'univers aux meilleurs ordinateurs actuels si le nombre de personne est plus grand que quelques centaines.

([9])Un autre exemple célèbre est celui de la *peste de l'étain*. L'étain existe en deux variétés : l'étain gris, stable au dessus de 13^oC, et l'étain blanc. En hiver, rien de mauvais n'arrive à nos ustensiles puisque l'état étain gris est métastable avec un temps de vie très long, cependant durant la campagne de Russie, à cause du froid intense et prolongé, les soldats de Napoléon virent leurs boutons et leurs vaisselles partir en poussières à la suite de leur transformation brusque en étain blanc.

([10])Contrairement à une opinion largement répandue, le fait que les verres des vieilles cathédrales soient plus épais en bas qu'en haut n'est *pas* dû au fait que le verres coulent, les simulations de (Zanotto, 1998) montrant que l'échelle de temps où les verres peuvent s'écouler est plus proche du milliard d'années que de quelques siècles ...

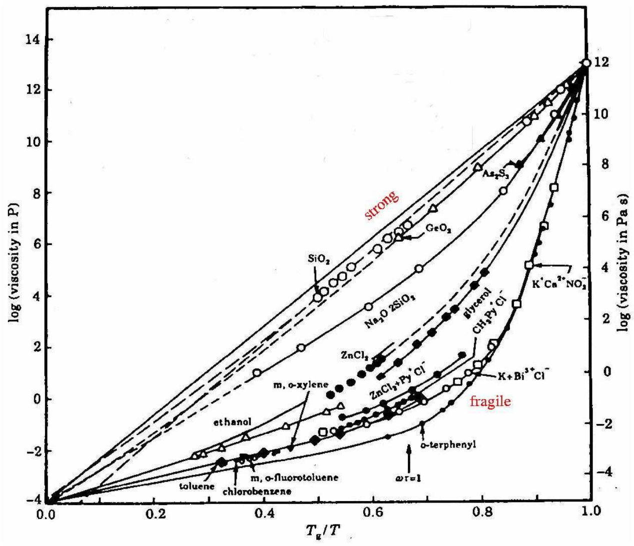


FIG. –4 – *Diagramme de Angell (Angell, 1995) : logarithme de la viscosité (une autre façon de mesurer le temps de relaxation) pour plusieurs exemples de verres en fonction de T_g/T. Les verres "forts", comme le GeO2, sont régis par une loi dite d'Arrhenius dans laquelle les barrières d'énergies dans l'espace des phases ne divergent pas avec la température. Il existe aussi des verres dits "fragiles" dont le temps de relaxation grandit beaucoup plus vite qu'avec une loi d'Arrhenius et semble diverger à une température donnée, suggérant l'apparition de barrières d'énergies divergente signature d'une transition de phase.*

verres, la phase liquide surfondue étant de plus en plus visqueuse, avec une durée de vie de plus en plus longue.

Il existe cependant une catégorie de verres, dits *fragiles*, où une véritable transition de phase semble se produire (voir figure –4) puisque le temps de relaxation semble diverger et devenir infini à une température à peu près bien définie ce qui indique que la phase surfondue devient stable et non plus métastable.

Est-ce réellement une nouvelle phase thermodynamique ou simplement une transition dynamique? D'un point de vue théorique, savoir s'il existe vraiment une transition de phase due au désordre auto induit, ou bien si le système est simplement hors-équilibre et qu'à la limite des temps très longs il relaxerait vers l'état cristallin, est une question très intéressante. D'un point de vue plus pragmatique, il suffit peut être de se dire qu'aux temps accessibles expérimentalement, les modèles avec une *vraie* transition de phase sont pertinents. Pour une bonne introduction en ce qui concerne la description des verres d'un point de vue de la physique statistique des systèmes désordonnés on peut se référer à (Mézard & Parisi, 1999; Mézard, 2000; Kurchan, 2001). Des modèles issus des verres de spins *avec* désordre gelé ont été utilisés avec succès (Kirkpatrick & Wolynes, 1987; Kirkpatrick & Thirumalai, 1987*a*; Kirkpatrick & Thirumalai, 1987*b*; Kirkpatrick et al., 1989), renforçant la cohérence entre les descriptions avec désordre auto induit et désordre gelé ainsi que l'intérêt général pour les systèmes avec désordre gelé (on consultera aussi (Franz et al., 2000)).

c) Verres de spins

Les verres de spins, eux, sont les paradigmes des systèmes avec désordre intrinsèque et sont en fait très proches du modèle des deux groupes décrit dans l'introduction (de fait, ce système est un verre de spins de Sherrington-Kirkpatrick à température nulle). Ils sont nommés ainsi à cause des similarités -notamment la dynamique lente- qui existent entre eux et les vrais verres; plus généralement, on désigne par *Verre de Spins* la phase basse température des matériaux magnétiques qui passent, à une température inférieure à une valeur T_g, d'un état paramagnétique à un état où les spins semblent figés dans des directions aléatoires. Ces systèmes présentent une transition de gel vers un état possédant un *type d'ordre particulier*. Le but de cette thèse étant précisément d'étudier la nature de cette phase, nous reviendrons plus longuement sur les verres de spins dès le paragraphe suivant.

d) Hétéro-polymères

Au vu de la généralité de notre définition, on peut trouver beaucoup de systèmes qui sont désordonnés ... Les hétéro-polymères par exemple, qui sont des chaînes formées de molécules différentes. On les trouve notamment dans la biologie, comme par exemple l'ADN, l'ARN ou encore les protéines. Dans ces dernières, il y a ainsi des monomères hydrophobes et des monomères hydrophiles. Dans un milieu aqueux, les hydrophobes veulent se mettre à l'intérieur lors du repliement tandis que les monomères hydrophiles ont tendance à se placer à la surface, ce qui crée de la frustration. On peut se référer à l'excellente revue (Garel et al., 1998).

Un cas particulièrement intéressant et très étudié en ce moment est celui du repliement de l'ARN. Une molécule d'ARN est constituée de quatre types de (ribo-)nucléotides. Chaque nucléotide contient un groupe phosphate (dont le lien forme le polymère), un groupe sucre (le ribose) et une base. Seule la base diffère d'un monomère à l'autre; il en existe quatre : l'adénine (A), la cytosine (C), la guanine (G) et l'uracile (U) qui est remplacée par la thymine dans l'ADN. Les bases C-G et A-U sont complémentaires et, en créant des liens hydrogènes, forment des paires de bases stables appelées paires de “Watson Crick”. L'ARN aura ainsi tendance à se replier sur lui même pour former des paires entre ses monomères, mais cela implique de la frustration puisque, du fait de sa structure tridimensionnelle, il n'est pas possible de satisfaire toutes les paires. Je reviendrai parfois sur ce modèle dans cette thèse.

e) Et d'autres systèmes physiques ...

Il y a encore beaucoup d'autres exemples dans le champ de la physique, comme par exemple

- *Les verres de vortex* dans les supraconducteurs de type II où l'application d'un champ magnétique ne détruit pas la phase supraconductrice, mais crée des vortex magnétiques contenant un demi quantum de flux. Ces vortex se repoussent et conduisent à la formation d'un réseau (appelé réseau d'Abrikosov). Les impuretés présentes dans les matériaux ont cependant tendance à attirer les vortex. Il y a donc compétition entre ces deux tendances, ce qui conduit à de la frustration.
- *Les réseaux de neurones* qui sont un autre bel exemple d'application de la théorie des verres de spins, en particulier le modèle de Hopfield (Hopfield, 1982; Hopfield, 1984). Une introduction pourra être trouvée dans (Hertz & Palmer, 1991).
- *Le Modèle d'Ising avec Champs Aléatoires* (en anglais Random Field Ising Model (RFIM)) qui est un modèle d'Ising ferromagnétique où l'on applique un champ aléatoire sur chaque spin. C'est un modèle particulièrement intéressant bien qu'assez différent des verres de spins, et l'on pourra aussi se référer aux deux revues dans (Young, 1998).

- *Les verres d'électrons* qui consistent en des matériaux isolants avec localisation d'Anderson fortement désordonnés et où le mécanisme de frustration est encore partiellement incompris (voir par exemple (Orlyanchik et al., 2002)).
- Et bien d'autres choses, les notions introduites dans l'étude de ces systèmes ayant montrées leur utilité dans les milieux granulaires, les pâtes et gels ou encore dans les suspensions colloïdales.

f) ... ou pas.

Actuellement, les applications se tournent vers d'autres domaines *a priori* éloignés de la physique, comme par exemple

- *En Economie ou en Finance* à travers le domaine naissant de l'écono-physique et notamment de l'étude d'agents économiques en interaction (voir par exemple (Bouchaud, 2000; Bouchaud & Mézard, 2000)).
- *En optimisation combinatoire* où les questions posées peuvent être misent en correspondance avec des problèmes de physique statistique et vice versa puisque l'on peut aussi se servir de l'optimisation combinatoire en physique (On pourra consulter le livre de revue (Hartmann & Rieger, 2002)). Nous y reviendrons plus loin.

— .2 — Qu'est-ce qu'un verre de spins ?

Le but de cette thèse est donc l'étude des verres de spins en dimension finie. Il s'agit d'un système caractérisé par la présence de désordre gelé et de frustration. Comme dans notre exemple initial, la frustration est induite par le désordre des couplages. Si l'on se place sur un réseau dont les nœuds sont occupés par un spin (une flèche pointant vers le haut ou vers le bas) et où les interactions entre spins plus proches voisins sont aléatoires et tendent soit à les aligner, soit à les anti-aligner, on obtient le système représenté sur la figure –5). D'après le critère de Toulouse, une plaquette comportant un nombre pair d'interactions antiferromagnétiques n'est pas frustrée : les quatre couplages peuvent être satisfaits simultanément. Si, par contre, le nombre de liens antiferromagnétiques est impair, aucune des configurations des spins ne peut satisfaire simultanément toutes les contraintes et la plaquette est alors frustrée. Ce système que nous venons de décrire est le modèle d'Edwards et Anderson (Edwards & Anderson, 1975) des verres de spins. Le but premier de cette thèse est d'étudier ce modèle proposé en 1975, pour lequel peu de choses sont connues avec certitude malgré des années d'étude.

a) Les *vrais* verres de spins

D'un point de vue expérimental, un matériau "verre de spins" résulte souvent de la dilution à très faible pourcentage d'impuretés magnétiques (métaux de transition : Mn, Fe) dans une matrice non magnétique (métaux nobles : Ag, Au, Cu, Pt). Les impuretés ont des moments magnétiques (des spins) produisant une polarisation magnétique des électrons de conduction du milieu hôte induisant une interaction effective entre spins dépendant fortement de la distance. Plus précisément, les interactions entre les spins peuvent être modélisées par des interactions dites RKKY (pour Ruderman-Kittel-Kosuda-Yosida):

$$J(R) = J_0 \frac{\cos(2k_F R + \varphi_0)}{(k_F R)^3} \qquad R \to \infty. \tag{.2–1}$$

J_0 et φ_0 sont des constantes et k_F est le vecteur d'onde de Fermi des électrons de conduction du métal hôte. Puisque les distances entre les spins sont aléatoires, certaines interactions entre spins favoriseront

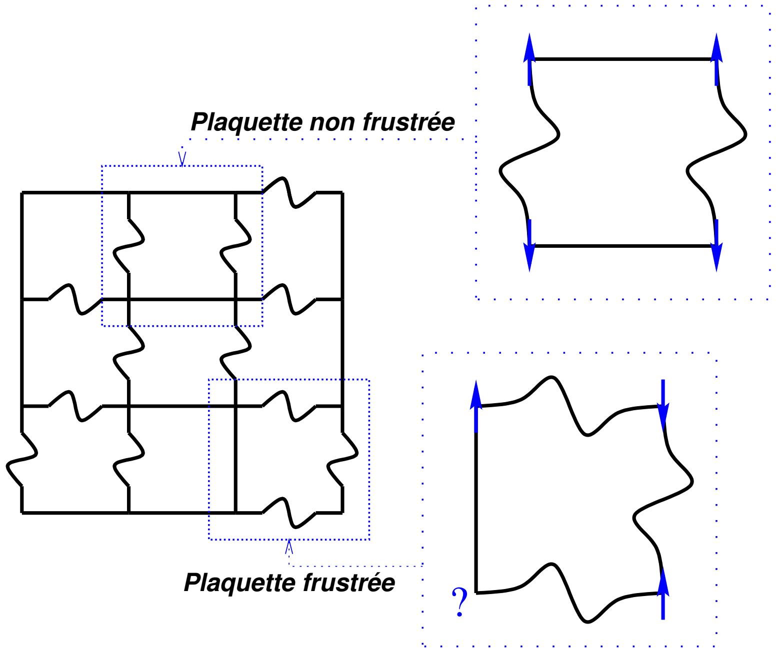


FIG. –5 – *Exemple de système frustré par le désordre des interactions : le réseau carré avec interactions $\pm J$ aléatoires. Les liens tordus sont des (-) et les liens droits des (+).*

un alignement antiparallèle, tandis que d'autres favoriseront un alignement parallèle. C'est ainsi une réalisation physique du système décrit précédemment.

On peut aussi créer des verres de spins en utilisant la structure désordonnée du matériau (comme par exemple dans les composés tels que $(Fe_xNi_{1-x})_{75}P_{16}B_6Al_3$) ou encore dans certains isolants (par exemple le $CdCr_{2x}In_{2-2x}S_4$), en créant de la frustration grâce à la compétition entre interactions diluées ferromagnétiques entre premiers voisins et antiferromagnétiques entre seconds voisins.

b) Propriétés caractéristiques des verres de spins

Cette section ne prétend pas établir une liste exhaustive des propriétés expérimentales des verres de spins, mais seulement présenter les plus importantes (l'existence d'une transition de phase avec des propriétés magnétiques non triviales) et les plus surprenantes (le vieillissement et les phénomènes de mémoire et rajeunissement). Pour une revue détaillée, on peut consulter par exemple (Mydosh, 1993; Nordblad & Svedlindh, 1998).

b.1) Transition de phase

Les évidences expérimentales pour une transition de phase dans les verres de spins sont nombreuses et la plupart d'entres elles concernent des mesures de susceptibilités magnétique χ effectuées habituellement en divisant l'aimantation M par le champ H (avec H petit). On peut aussi appliquer un faible champ alternatif h, et mesurer χ en dérivant ensuite $\partial M/\partial h$ à une fréquence ω. Ces deux méthodes conduisent à l'existence d'un pic à une température de transition séparant deux régimes.

A suffisamment haute température un verre de spins se comporte comme un paramagnétique standard et la susceptibilité suit une loi de Curie-Weiss du type $\chi = \frac{C}{T-\theta}$. Quand l'on baisse la température en dessous d'un seuil T_g il apparaît des phénomènes d'irréversibilité magnétique. Ainsi l'aimantation mesurée sous l'application d'un champ statique H est *différente* selon que l'on a préalablement refroidi l'échantillon sous champ (procédure FC pour *Field Cooled*) ou en champ nul (procédure ZFC, pour *Zero Field Cooled*) comme on peut le voir sur la figure –6, ce qui semble indiquer la présence d'un certain ordre. L'aimantation FC présente ainsi un plateau en dessous de cette température et

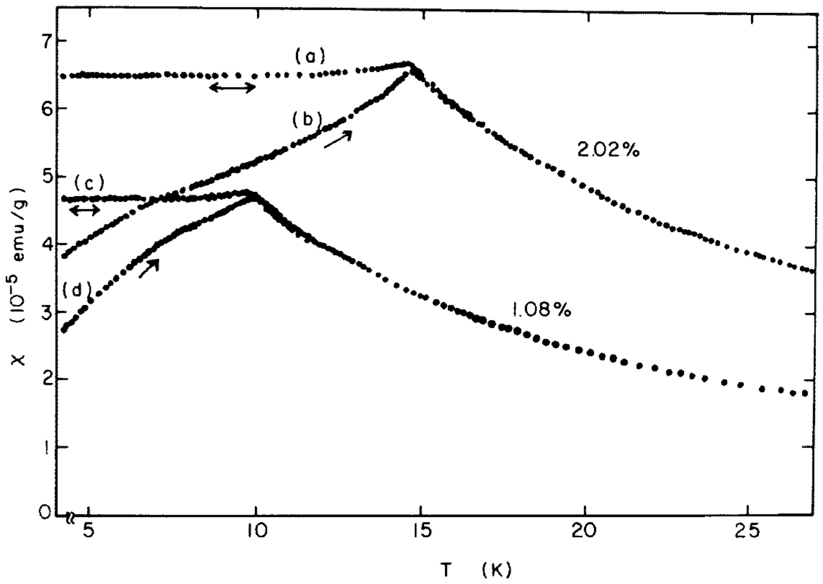


FIG. –6 – *Mesure de susceptibilité pour deux alliages CuMn avec 1.08 et 2.02 % de Mn. Les courbes (a) et (c) ont été obtenues en refroidissant avec le champ magnétique appliqué (FC) alors que (b) et (d) sont obtenues en refroidissant puis en appliquant le champ (ZFC) (Nagata et al., 1979)*

dérive peu en fonction du temps. L'aimantation ZFC présente elle un pic à T_g d'autant plus important que le champ magnétique appliqué est faible, et s'écarte très rapidement de l'aimantation FC en dessous de T_g. Si l'on coupe rapidement le champ, l'aimantation ZFC revient pratiquement à zéro alors que si le champ est maintenu, elle tend à se rapprocher très lentement de la courbe FC (*i.e.* $M_{ZFC}(t \to \infty) \approx M_{FC}$) acquérant ainsi une composante irréversible qui diminuera très lentement si l'on coupe ensuite le champ. En conclusion le champ magnétique crée un état métastable et irréversible ; on peut alors définir T_g comme la température d'apparition de ces irréversibilités, i.e comme la température en dessous de laquelle $\chi_{FC} - \chi_{ZFC}$ est non nul. Comme mentionné plus haut, la courbe ZFC dépend du temps de mesure, typiquement de l'ordre de la minute pour ce type d'expériences. La température T_g dépend donc elle aussi très légèrement du temps et ce comportement se retrouve dans les mesures de susceptibilité alternative (avec une dépendance sur la fréquence cette fois). On peut donc s'interroger sur l'existence d'une véritable transition à T_g finie. Les expérimentateurs s'accordent pourtant aujourd'hui pour dire que $\lim_{\omega \to 0} T_g(\omega) = T_g^{\mathrm{STATIQUE}} \neq 0$ et qu'il existe ainsi une vraie phase verre de spins à basse température.

b.2) Dynamique lente et vieillissement

Les verres de spins se présentent à nous, du moins dans leur phase basse température, perpétuellement hors-équilibre. De très nombreuses expériences ont été effectuées pour étudier leurs propriétés dynamiques et les caractéristiques essentielles sont les suivantes : la relaxation est lente, certainement non exponentielle, et dépend très fortement du temps t_w passé en dessous de T_g avant d'effectuer les mesures (il y a brisure de l'invariance par translation dans le temps, ce qui signale une phase hors-équilibre); le système a un *âge*, c'est ce que l'on appelle le *vieillissement*.

Une procédure expérimentale standard pour étudier la dynamique est d'utiliser des mesures à deux temps. L'on peut par exemple mesurer la relaxation de l'aimantation thermorémanente (TRM), en refroidissant le système sous un faible champ H d'une température supérieure à T_g à une température $T < T_g$ et l'on attend alors un temps t_w (pour le franglais t-waiting) avant de couper le champ magnétique, puis l'on observe la variation de l'aimantation en fonction du temps t. Sur la figure (–7) sont reportées des courbes de relaxation de $M_{TRM}(t)$ mesurées par (Vincent et al., 1997) pour différents t_w dans un échantillon d'AgMn 2.6%. La relaxation s'étend sur plusieurs décades de temps et dépend de plus du temps d'attente t_w; plus ce dernier est grand, et plus la relaxation est lente: c'est le phénomène de vieillissement (comme dans la nature plus le système est vieux, moins il a envie de bouger !). C'est un phénomène très similaire avec celui qui a été observé dans la relaxation du

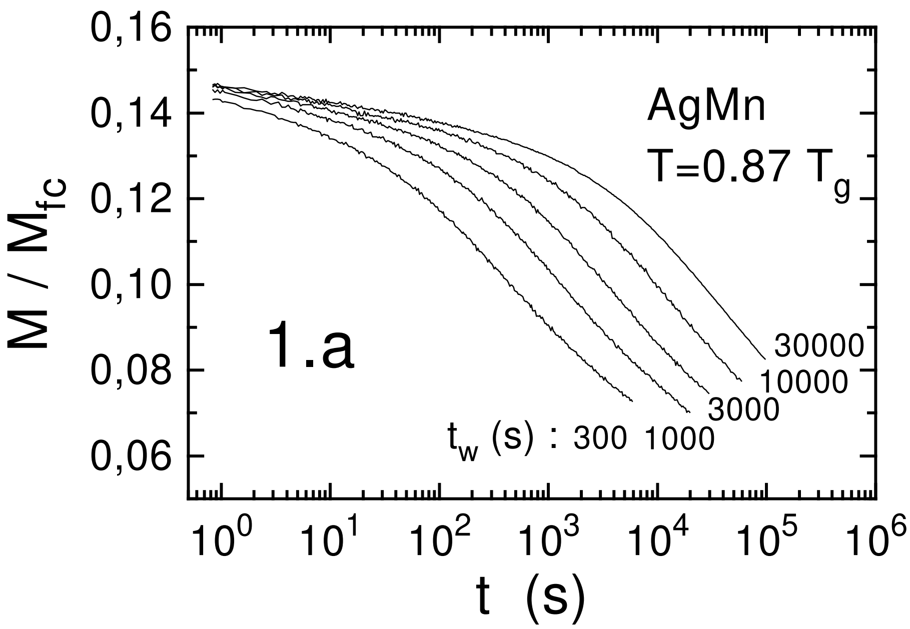


FIG. –7 – *Aimantation thermorémanente en fonction du temps pour différents temps d'attente t_w pour un échantillon d'AgMn 2.6%, d'après (Vincent et al., 1997).*

module élastique des polymères vitreux (Struik, 1978). On a ainsi des courbes à deux temps t et t_w qui présentent un point d'inflexion à $t \sim t_w$, suggérant un scaling approximatif en t/t_w. Ce scaling en t/t_w est souvent appelé vieillissement simple (simple ageing). Dans les verres de spins, comme dans d'autres systèmes, il y a en fait du sub-ageing (sous-vieillissement) et pour le voir la bonne variable à utiliser est

$$\lambda(t, t_w) = \frac{t_w}{1-\mu}\left[\left(1+\frac{t}{t_w}\right)^{1-\mu} - 1\right], \qquad (.2\text{–}2)$$

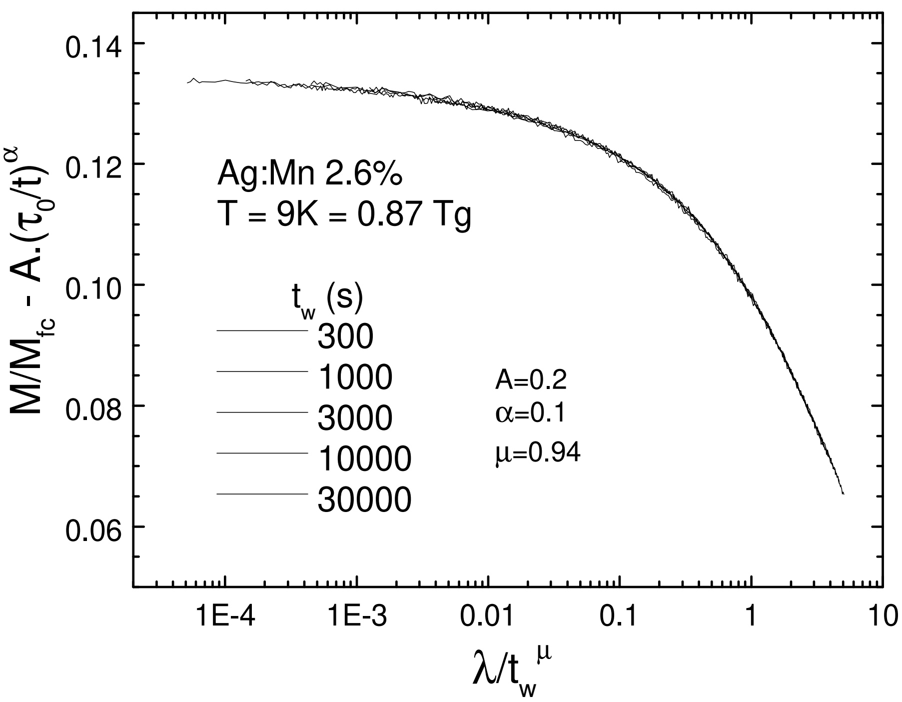


FIG. –8 – *Partie vieillissante de l'aimantation thermorémanente d'un échantillon d'AgMn* 2.6% *en fonction de la variable* λ/t_w^μ*, d'après (J.Hammann et al., 2000).*

avec $d\lambda/t_w^\mu = dt/(t_w+t)^\mu$, avec $\mu \sim 0.9$. Le fait d'avoir un exposant $\mu < 1$ signifie que l'âge du système est en fait *plus petit* que t_w (d'où le nom de sous-vieillissement). La partie vieillissante de M_{TRM} est représentée en fonction de λ/t_w^μ sur la figure (–8) : les courbes se superposent très bien.

Ces expériences de vieillissement avec un scaling en λ/t_w^μ ont été faites dans de nombreux systèmes (citons, sans soucis d'exhaustivité, les polymères vitreux, les verres, les verres d'électrons, les colloïdes...) et se retrouvent dans plusieurs modèles (verres de spins en champ moyen, modèle de croissance de domaines ou modèles de pièges (Bouchaud et al., 1998)). Elles sont la signature du fait que le système s'équilibre de plus en plus avec le temps et qu'il possède un *âge*; il est même possible d'observer cela dans des systèmes relativement simples comme par exemple lors de la croissance de domaines dans un ferromagnétique (Bray, 1994), on peut même y trouver du sous-vieillissement (Berthier, 2000)).

b.3) Effets de cycles en température : mémoire et rajeunissement

Les effets de mémoire et de rajeunissement sont à mon sens les résultats expérimentaux les plus impressionnants (on peut se reporter, pour une discussion detaillée, à la revue (Berthier et al., 2002), incluse en annexe). Sur la figure (–9) est représentée la susceptibilité du $CdCr_{1.7}In_{0.3}S_4$ mesurée (J.Hammann et al., 2000) lors du cycle en température suivant : refroidissement à $T = T_1 = 12K$, attente pendant t_1, refroidissement à $T_2 = 10K < T_1$, attente pendant t_2, puis réchauffement à T_1.

Le redémarrage de la relaxation lors du refroidissement de T_1 à T_2 est appellé “rajeunissement”, l'état de la relaxation à T_2 étant la même que si le système avait directement été refroidi de $T > T_g$ à T_2, sans avoir attendu et veilli à T_1. Le second point remarquable est que lorsque l'on revient à la température initiale T_1, la relaxation reprend exactement comme si le cycle à la température T_2 n'avait

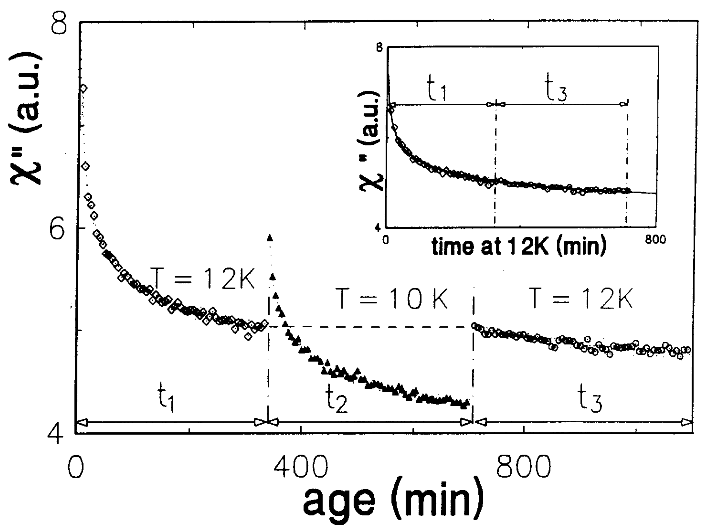


FIG. –9 – *Effet d'un cycle négatif en température $\Delta T = 2K$ sur la susceptibilité χ'' du $CdCr_{1.7}In_{0.3}S_4$, d'après (J.Hammann et al., 2000).*

pas existé. L'abaissement de la température et la relaxation à T_2 n'ont pas affecté l'état du système à T_1, une propriété nommé "mémoire". Les choses sont a peine différentes quand l'on effectue des cycles en température où le ΔT est faible, (Lefloch et al., 1992) ayant par exemple montré qu'un cycle négatif en température de $0.3K$ nécessite pour "recoller" les courbes de χ'' entre t_1 et t_3, d'introduire un temps effectif t_{eff}. Le temps réel t_2 passé à $T - \delta T$ est équivalent à un temps $t_{\text{eff}} < t_2$ passé à T.

Des résultats semblables sont visibles lorsque l'on fait une mesure de χ'' tandis que la température est graduellement abaissée à vitesse constante d'une température initiale $T > T_g$ à $T_1 < T_g$. On attend à cette température pendant t_{w1}, puis la procédure de refroidissement est reprise jusqu'à $T_2 < T_1$ où on attend un temps t_{w2}, et puis l'on refroidit à nouveau jusqu'à $T < T_2$. Le système est ensuite réchauffé à vitesse constante, sans arrêt jusqu'à $T > T_g$. Cette procédure est illustrée à gauche de la figure (–10), et les résultats obtenus sont reproduits.

On observe comme dans le cas de mesures de $\chi''(t)$ qu'après chaque arrêt à T_1 et T_2, quand le refroidissement est repris, la courbe de susceptibilité revient très rapidement sur la courbe de référence obtenue en refroidissant sans arrêt. Le vieillissement à T_1 et T_2 n'a pas affecté la dynamique du système à des températures inférieures. Lorsque l'on réchauffe le système à vitesse constante, on observe de plus que la marque des arrêts effectués à T_1 et T_2 n'a pas été effacée : les creux obtenus au refroidissement sont exactement retrouvés en réchauffant. Le système peut en fait conserver la mémoire de plusieurs vieillissements à des températures différentes (ici à $9K$ et $12K$), pourvu qu'elles soient suffisamment éloignées. (Jonason et al., 1998) ont aussi montré que l'effet de la vitesse de refroidissement est très faible, et qu'il est en fait dû seulement à la vitesse à laquelle le système est refroidi dans les derniers kelvins avant d'atteindre la température de mesure.

Les verres de spins paraîssent ainsi capables de mémoriser des informations relatives à des vieillissements effectués à des températures suffisamment différentes. Si certains verres semblent être différents sur ce point (un liquide surfondu comme le glycérol par exemple ne semble pas présenter ces ef-

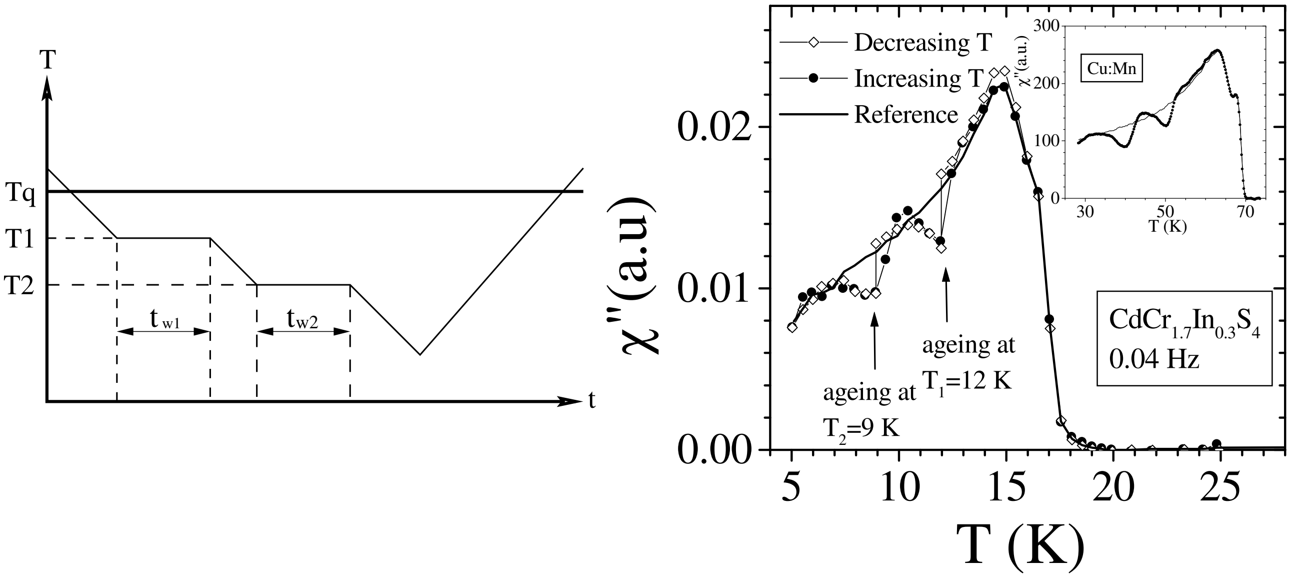


FIG. –10 – *A droite : mesure de χ'' en fonction de la température pour le $CdCr_{1.7}In_{0.3}S_4$ en suivant la procédure décrite à gauche, avec $T_1 = 12K$, $T_{w1} = 7h$, $T_2 = 9K$, $t_{w2} = 40h$, d'après (Jonason et al., 1998).*

fets (Leheny & Nagel, 1998)) d'autres systèmes présentent eux aussi des propriétés fort semblables comme le PMMA -un verre polymérique- (Bellon et al., 2002), les verres d'électrons (Orlyanchik et al., 2002) ou les verres colloïdaux (Viasnoff & Lequeux, 2002). L'intérêt des verres de spins pour la compréhension des verres est donc à la fois dans leur simplicité de modélisation, qui permet des études analytiques et numériques, mais aussi dans la compréhension de l'espace des phases qu'ils nous apportent et dans l'interprétation de ces expériences de mémoire et de rajeunissement. De plus, d'un point de vue expérimental, ils permettent d'effectuer des mesures de magnétisme très très fines (puisque l'on utilise des SQUID supra-conducteur) et le temps microscopiques τ_0 est très très petit, ce qui permet d'équilibrer le système pous vite que dans les vrais verres : ainsi les expériences y sont souvent plus faciles.

b.4) Le diagramme de phase des verres de spins

Nous le verrons dans le chapitre suivant consacré aux modèles théoriques : deux modèles, qui prédisent des résultats assez différents, sont depuis longtemps en concurrence pour décrire l'état verre de spins. L'un prévoit par exemple que l'application d'un champ détruit l'état ordonné tandis que l'autre autorise l'état verre de spins à exister en dessous d'un champ critique. Savoir si oui on non il existe une phase ordonnée sous champ serait donc une façon non équivoque de trancher entre ces deux modèles. Cependant les réponses expérimentales et numériques ne sont pas claires, nous y reviendrons aux chapitres suivants.

— .3 — Méthodes, outils et concepts

a) La description statistique

Un système macroscopique a en général des dimensions au moins de l'ordre du millimètre, et compte tenu des dimensions atomiques tout système macroscopique contient ainsi un nombre énorme de constituants "élémentaires" (atomes ou molécules), au sens de la physique des basses énergies. Cette constatation peut se résumer à la valeur du nombre d'Avogadro $\mathcal{N} \approx 10^{23}$. Comme il n'est pas possible([11]) de résoudre les 10^{23} équations régissant le comportement de $\mathcal{N}$ molécules, le physicien s'intéresse au comportement à une autre échelle, la notre, par l'intermédiaire de la physique statistique.

a.1) Élements

Les manuels de physique statistique sur les transitions de phase ne manquant pas, je vais me contenter d'un bref rappel. En physique statistique, un système est décrit par la fonction Hamiltonien $H(\mathcal{C})$ qui est l'énergie du système dans la configuration $\mathcal{C}$. Sous quelques hypothèse générales([12]) on défini l'équilibre thermodynamique (que l'on atteint si l'on attend suffisamment longtemps, le mot "suffisamment" prenant toute sa saveur dans les verres de spins où cet état n'est *jamais* atteint ...) que l'on décrit par la probabilité $P(\mathcal{C})$ qu'a alors le système d'être dans une configuration C donnée.

Dans le système canonique dans lequel nous allons travailler, l'on suppose que nous travaillons à énergie constante dans un système équilibré à la température T (disons plongé dans un bain thermique de température T dont la perturbation due au système est négligeable). Dans ce cas $P(\mathcal{C})$ est telle qu'elle maximise le désordre, ou l'*entropie*([13]), définie par

$$S = -\sum_{\mathcal{C}} P(\mathcal{C}) \ln P(\mathcal{C}). \tag{.3–1}$$

Il faut maximiser S sous contrainte, en utilisant par exemple un multiplicateur de Lagrange β et l'on maximise alors

$$S - \beta U \tag{.3–2}$$

où

$$U = \langle H \rangle = \sum_{\mathcal{C}} H(\mathcal{C}) P(\mathcal{C}) \tag{.3–3}$$

est l'énergie interne (la moyenne thermique de H notée $\langle H \rangle$). Ceci est équivalent à la minimisation de l'énergie libre F définie par

$$F = U - TS \tag{.3–4}$$

où $T = 1/\beta$ est la température. Un calcul aisé montre alors que

$$P(\mathcal{C}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H(\mathcal{C})} \tag{.3–5}$$

([11])Ni même vraiment utile...

([12])Et pourtant non triviales... personnellement, je trouve que le point de vue de Bricmont est particulièrement intéressant (http://cdfinfo.in2p3.fr/~bouquet/Bricmont/bricmont.html).

([13])Simplement le logarithme du nombre d'états accessibles au système comme le résume si bien l'épitaphe de Boltzmann $S = k \log \Omega$.

où Z est la *fonction de partition* définie par

$$Z = \sum_{\mathcal{C}} e^{-\beta H(\mathcal{C})}. \tag{.3–6}$$

Finalement on arrive à la formule fondamentale

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z. \tag{.3–7}$$

Il est ensuite possible de calculer toutes les fonctions thermodynamiques à l'équilibre à partir de F et de ses dérivées (par exemple $U = \frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta}$ et $S = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta}$). La dernière étape est de prendre *limite thermodynamique* en travaillant dans la limite où la taille du système est infinie.

a.2) Transitions de phase, paramètre d'ordre

De façon générale, on appelle transition de phase le passage d'un corps d'un état physique donné à un autre état physique, comme la transformation de l'eau en glace ou en vapeur. Expérimentalement en effet, une petite variation d'un paramètre extérieur (comme la température, la pression, le champ magnétique ...) peut provoquer une modification qualitative très spectaculaire de ces propriétés (en dessous de zéro degré l'eau devient glace, mais à 1 degré, c'est toujours de l'eau). Cette notion de transition de phase, avec celle de la renormalisation, est peut être l'une des plus importante de la physique statistique.

Puisque toute grandeur thermodynamique peut s'exprimer en fonction de l'énergie libre F, un tel changement de comportement revient à supposer que F n'est pas analytique et a des singularités en des points qui seront dit “critiques”. Or, F étant analytique en tout point (d'après les équations .3–7 et .3–6 F est simplement la somme de fonctions analytiques), cela n'est possible qu'à la limite thermodynamique.

Il existe plusieurs manières de classer les transitions de phase, par exemple en fonction de l'ordre de la dérivé de l'énergie libre dans laquelle intervient la discontinuité comme l'a proposé Ehrenfest. Une remarque importante due à Lev Landeau est que les transitions sans chaleur latente (qui sont du second ordre selon Ehrenfest) s'accompagnent d'un changement, d'une brisure de symétrie à laquelle on peut associer un paramètre d'ordre (une fonction ou un nombre dont les valeurs changent radicalement lors du changement de phase).

Typiquement, dans une transition de phase de premier ordre, on a une énergie interne discontinue, une chaleur latente, co-existence de plusieurs phases différentes au point critique et une transition “brutale”: lors de la transition liquide-solide, à 0.01°C l'eau est ainsi liquide et rien n'indique qu'elle va geler si on refroidit (comme on l'a dit plus haut, on peut même réussir à abaisser la température sous 0°C sans qu'elle ne gèle). Par contre, dans une transition de second ordre, la transition est plus progressive : il y a une longueur de corrélation qui diverge à la température critique (dit autrement, la longueur de corrélation des fluctuations thermiques diverge à la transition et celle-ci est un véritable phénomène collectif) et c'est par exemple la chaleur spécifique ou la susceptibilité magnétique qui sont singulières, comme dans la transition paramagnétique-ferromagnétique où l'aimantation moyenne de l'échantillon est un paramètre d'ordre : elle est nulle dans la phase paramagnétique et non nulle dans la phase ferromagnétique.

a.3) Renormalisation et universalité

Un des concepts les plus intéressants en physique statistique est l'idée de *renormalisation* qui consiste à éliminer les degrés de liberté (par exemple en les intégrant en théorie des champs) pour donner naissance, à partir du système original, à un système possédant moins de degrés de liberté que l'on peut approximer par un système semblable au système d'origine mais à une échelle différente. L'idée est d'avoir des paramètres effectifs pour chaque échelle, tout en se souvenant que, pour une transition du second ordre où la longueur de corrélation est infinie à la transition, le système devait être invariant sous chaque changement d'échelle. Si l'on défini alors un *flot de renormalisation* dans l'espace des paramètres caractérisant la façon dont changent ces paramètres en fonction de l'échelle, on peut alors s'intéresser aux points fixes qui correspondent aux transitions de phases du second ordre.

Une notion qui en découle naturellement est celle d'*universalité*, puisqu'en intégrant les degrés de liberté, il semble intuitif que l'on perd la mémoire des détails microscopiques du système. Ainsi, deux systèmes à peu près semblable (disons un ferromagnétique à $2d$ sur un réseau carré et un autre sur un réseau triangulaire) vont avoir le même point fixe et vont ainsi avoir le même comportement critique. On dit alors qu'ils appartiennent à la même *classe d'universalité*. On s'attend à ce que le détail précis du réseau et la nature exacte des interactions soient sans effet alors que la dimension de l'espace et la nature des symétries présentes ont une influence. La validité de ces considérations en présence de désordre, en particulier dans les verres de spins, est toujours sujette a débat. En particulier savoir si les exposants dépendent de la nature des couplages est une question ouverte.

a.4) Approximation de champ moyen et dimensions critiques

Il sera beaucoup question par la suite d'approximations et de modèles "champ moyen". L'approximation champ moyen est souvent la première chose que l'on fait en physique statistique pour étudier un système. C'est une méthode en général simple et rapide et qui permet d'obtenir des résultats souvent pertinents. Elle consiste à approximer une grandeur dans le système par sa valeur *moyenne* (au sens de Boltzmann) et ainsi de négliger ses fluctuations ou ses corrélations spatiales. On considère souvent que le champ moyen est une approximation de grande dimension, puisque plus la dimension est grande et plus les degrés de liberté sont couplés à beaucoup d'autres, moins leurs fluctuations sont importantes. D'autre part l'approximation de champ moyen peut souvent être vue comme le premier terme d'un développement suivant une méthode du col et peut donc être la base d'un développement perturbatif.

Dans les systèmes "purs" (comprendre sans désordre), les résultats obtenus par l'approximation champ moyen sont qualitativement bon au dessus d'une certaine dimension appelé *dimension critique supérieure* d_u : ils donnent le bon diagramme des phases (sans pour autant donner des quantités comme T_c) et les bons exposants critiques. En dessous de cette dimension, les exposants critiques donnés par le champ moyen ne sont plus corrects, et d'autre méthodes sont nécessaires (comme justement le développement perturbatif par exemple). Enfin en dessous d'une autre dimension dite *dimension critique inférieure* d_l il n'y a plus de transition de phase à température finie et T_c tend vers 0. Pour le modèle d'Ising ferromagnétique ces dimensions sont ainsi $d_u = 4$ et $d_l = 1$ puisqu'il n'y a pas de transition de phase en $d = 1$. On parlera souvent dans la suite de "modèle champ moyen". Ce sont des modèles où l'approximation champ moyen est (supposée) exacte.

b) La physique du désordre

b.1) Désordre et limite thermodynamique

Si l'on considère un système désordonné, l'Hamiltonien dépend alors non seulement de la configuration mais aussi de la réalisation du désordre. On aura alors, pour un échantillon donné un Hamiltonien $H(\mathcal{C}, \mathcal{J})$, où J représente une réalisation particulière du désordre gelé. Toutes les quantités thermodynamique définies précédemment dépendent alors à leur tour de la réalisation du désordre : on aura ainsi un $U_{\mathcal{J}}$, un $S_{\mathcal{J}}$, un $F_{\mathcal{J}}$. Pour le théoricien, la difficulté essentielle pour étudier ces systèmes désordonnés est alors -Lapalissade- la présence ... du désordre. En effet, que calculer dans un système dont on ne connaît pas explicitement les interactions ? L'idée est de supposer que le système a un comportement générique à grande taille et qu'ainsi, à la limite thermodynamique, son comportement est indépendant du tirage aléatoire des interactions. Les quantités qui possèdent cette qualité sont dites *"auto-moyennantes"*. De manière générale, on s'attend à ce que les variables extensives soient auto-moyennantes ([14]) Ainsi, nous pouvons calculer le comportement de l'échantillon "moyen" en faisant la moyenne sur toutes les réalisation possible du désordre.

b.2) La méthode des répliques

De fait, dans beaucoup de modèles, calculer $[Z]_{av}$ ne pose pas de difficultés insurmontables, mais la vrai quantité intéressante est bien sûr $[\log Z]_{av}$, à partir de laquelle on peut trouver l'énergie libre, et en déduire toutes les propriétés du système. La quantité pertinente est donc :

$$F = [F\{x\}]_{av} = -k_B T [\ln \mathcal{Z}\{x\}]_{av}. \qquad (.3–8)$$

Nous voudrions donc plutôt calculer $[\log Z]_{av}$. Or cela est une toute autre tâche analytiquement que de calculer $[Z]_{av}$. C'est la qu'intervient l'astuce des répliques. Il est en effet presque aussi facile de calculer la moyenne sur le désordre du n-ieme moment, Z^n, de la fonction de partition -ce qui est en fait la fonction de partition de n répliques qui n'interagissent pas- que de calculer $\bar{Z}$.

On utilise ensuite l'identité $\mathcal{Z}^n = \exp(n \ln \mathcal{Z}) \sim 1 + n \ln \mathcal{Z}$ quand $n \to 0$. Puisque $[\mathcal{Z}^n]_{av}$ peut être calculé pour tout entier n positif aussi simplement que $[\mathcal{Z}]_{av}$, on calcule $\mathcal{Z}^n\{x\}$, la fonction de partition de n répliques (et donc avec le même désordre) identiques du système, et en prenant ensuite un prolongement analytique en faisant $n \to 0$, on exprime $\bar{\mathcal{Z}}$ par

$$[\log \mathcal{Z}]_{av} = \lim_{n \to 0} \frac{[\mathcal{Z}^n]_{av} - 1}{n}. \qquad (.3–9)$$

D'un point de vue mathématique, ce genre de prolongement analytique n'est pas réellement récent. Giorgio Parisi aime à faire remarquer que la méthode était déjà utilisée par l'évêque de Lisieux Nicolas d'Oresme (1325-1382) pour définir les puissances non entières. Plus près de nous, le célèbre calcul de De Gennes pour trouver les exposants critiques des marches aléatoires auto-évitantes est un autre exemple([15]).

De manière générale, c'est une méthode très utilisée dans l'étude des systèmes désordonnés, qui permet de calculer l'énergie libre moyennée sur le désordre d'un système pour lequel ce désordre, décrit par un jeu de variables $\{x\}$, est gelé.

c) Les simulations numériques

La théorie des verres de spins, et plus généralement celle des états amorphes, s'est développée en parallèle avec les simulations numériques et cette approche duale devrait continuer dans les prochaines

([14])Il ne s'agit là au départ que d'une hypothèse qui est souvent prouvée à posteriori ! Pour des systèmes avec interactions à courte portée cependant, il existe un argument très convainquant : on peut toujours diviser le système en n sous-systèmes, chacun interagissant faiblement avec les autres. L'énergie libre totale est alors la somme de celle des sous-systèmes, plus un terme dû aux interactions aux bords entre ces sous-systèmes qui varie comme $n^{1/2}$. $\delta F/F$ varie donc comme $n^{-1/2}$ et toute fluctuation disparaît à la limite thermodynamique. On se reportera à (Lifshitz et al., 1988) pour une discussion plus détaillée et les références aux démonstrations rigoureuses; pour les systèmes à longue portée l'argument n'est pas pertinent.

([15])Les propriétés critiques des modèles $O(n)$ quand $n \to 0$ sont les même que ceux des marches aléatoires auto-évitantes.

années. En effet, le comportement collectif des systèmes désordonnés est parfois si complexe, si surprenant et contre intuitif que les simulations sont nécessaires pour comprendre la théorie, la clarifier ou l'interpréter, soit parfois pour tester des idées ou des modèles phénoménologiques, soit encore pour simplement essayer de visualiser et comprendre les phénomènes. Dans ce domaine, les simulations ont ainsi un rôle aussi important que la théorie et les expériences. La méthode numérique principale en physique statistique est la simulation Monte-Carlo; elle a donné lieu à de nombreux résultats dans les verres de spins.

c.1) Les méthodes Monte-Carlo

Pour une introduction pédagogique aux principes de la méthode Monte-Carlo, on peut se reporter à (Krauth, 1998). C'est certainement la méthode numérique la plus utilisée en physique pour les calculs d'intégrales, les simulations dynamiques et statiques en matière condensée ou encore pour les calculs de théories -quantiques ou non- des champs sur réseaux. Dans les systèmes désordonnés, l'état de l'art est le *parallel tempering* qui consiste à équilibrer en même temps plusieurs copies du système à plusieurs températures et à les échanger avec les précautions habituelles. On peut se reporter à la revue (Marinari, Parisi & Ruiz-Lorenzo, 1998) pour les résultats Monte Carlo dans les verres de spins. Cependant, malgré toutes ses qualités, cette méthode ne permet pas de thermaliser les systèmes à assez basse température. Il serait idéal de pouvoir coupler cette méthode à des algorithmes de création d'amas (Swendsen & Wang, 1986) mais cela n'a été réussi de façon efficace qu'en dimension 2 (Houdayer, 2001). Dans cette thèse, nous allons souvent utiliser une autre stratégie pour faire des simulations numériques.

c.2) L'optimisation combinatoire

L'approche alternative qui sera utilisée est de caractériser le système à température nulle, ce qui correspond à un problème d'optimisation combinatoire. De fait, la plupart des problèmes complexes que l'on peut rencontrer dans la vie peuvent être vus comme des problèmes d'optimisation combinatoire, où l'on doit trouver les paramètres qui minimisent une fonction([16]). Un problème typique d'optimisation est définit par deux éléments : premièrement un ensemble de *configurations* comme pour la physique statistique, et deuxièmement une *fonction de coût* qui, à chaque configuration, associe un coût représentant la valeur de l'alternative correspondante (ce qui nous évoque l'énergie ou la fonction Hamiltonien en physique.). Il faut ensuite trouver la configuration pour laquelle la fonction de coût est minimale et le parallèle avec la physique statistique à température nulle est immédiat. En utilisant le tableau.1 on aura une correspondance univoque entre la physique statistique à température nulle et l'optimisation combinatoire, on pourra aussi se reporter à (Martin et al., 2001) pour une introduction pédagogique et une revue de ces liens ou encore au récent livre (Hartmann & Rieger, 2002) pour son utilisation en physique.

Nombre de problèmes pratiques d'organisation et de gestion se formulant de cette façon, cette question est très générale et souvent d'un intérêt pratique très important. Pour l'exemple, on peut citer la création de l'emploi du temps d'une école ou d'une entreprise, le dessin d'un circuit intégré en partant du schéma de principe ou bien encore celui du trajet des véhicules d'une entreprise de livraison.

Les plus célèbres problèmes d'optimisation combinatoire sont : 1) le problème du *voyageur de commerce* où l'on a N villes par lesquelles doit passer un voyageur de commerce pendant sa tournée. Il s'agit de trouver le chemin fermé de longueur minimale passant par chaque ville une fois et une seule; 2) les problèmes de *coloriage des cartes* comme la célèbre conjecture des quatre couleurs et 3) le

([16])Comme par exemple dans l'introduction où un problème de sociologie -comment créer deux groupes de gens où les amis sont ensembles mais pas les ennemis- était mappé sur le problème des verres de spins de Sherrington-Kirkpatrick.

physique statistique	optimisation combinatoire
état fondamental	optimum
énergie du fondamental	coût de l'optimum
hamiltonien, énergie	fonction de coût
micro-état	configuration
espace de phase	ensemble des configurations
premiers états excités	configurations quasi optimales

TAB. 1 – *Correspondance physique statistique / optimisation combinatoire.*

problème de *la satisfiabilité* . Ce dernier cas représente l'archétype du problème décisionnel (voir par exemple (Hayes, 1997)). On peut l'énoncer comme "le problème de l'ambassadeur" qui devrait inviter une liste de personnalités, chacun ayant ses propres desideratas: le président d'un pays X voulant par exemple être à coté de celui du pays Y, mais surtout pas à coté du roi de Z, et voudrait que le banquet se déroule un samedi, tandis que le roi de Z réclame la présence du prince de W à ses cotés, mais pas celle du président de Y, et veut que le banquet n'est pas lieu en fin de semaine. S'il est possible de satisfaire tout le monde, on dit que la liste de clauses est satisfiable (et ce n'est pas le cas ici). Ce problème ést habituellement posé sous la forme de la conjonction de M clauses et l'on parlera du problème de k-satisfiabilité (k-SAT) quand toutes les clauses contiennent k variables.

c.3) Complexité algorithmique : problèmes P, N et NP

Cela nous amène à définir la complexité d'un algorithme ou d'un problème. La complexité d'un algorithme est facile à définir : il suffit de considérer comment varie le nombre d'opérations à effectuer pour résoudre le problème posé avec sa taille. Par exemple, si l'on veut trier un tableau de N dans l'ordre croissant on peut choisir l'algorithme du tri en tas (*heap sort*) qui, dans le pire des cas([17]) cela nécessite un nombre d'opérations de l'ordre de $N \log N$, on dit alors que sa complexité est $N \log N$. On peut choisir aussi d'utiliser un algorithme plus simple à programmer comme le tri à bulle mais sa complexité est alors N^2. Un algorithme sera dit *polynomial* si sa complexité est inférieure à une loi de puissance, comme les deux que nous venons de voir. Il est aussi possible d'avoir des algorithmes exponentiels et il faut bien se rendre compte que l'on se heurte à un moment ou un autre à un mur infranchissable dans ce cas là. Si l'on considère par exemple qu'il faille 1ms pour résoudre le cas où $N = 1$, il faudrait à un algorithme en N^2 environ 100ms pour $N = 10$ et 10s pour $N = 100$, alors que pour un algorithme exponentiel il faudra déjà $8s$ pour $N = 10$ et un temps plus grand que l'âge de l'univers pour résoudre le cas $N = 100$!

Il serait ensuite très commode de pouvoir définir la complexité d'un problème comme étant celle de l'algorithme le plus rapide pour le résoudre, mais puisqu'il n'est pas possible de savoir si l'algorithme que l'on utilise est le meilleur, cette définition se révèle inutilisable. Pour avancer, il faut utiliser le concept de problème décisionnel introduit dans SAT. Il ne s'agit alors plus de trouver la solution du problème mais simplement de tester une solution qui nous serait donnée par un « oracle » pour vérifier si elle est bonne.

On défini la classe NP(*Non-deterministic Polynomial*) comme celle contenant tous les problèmes décisionnels pour lesquels il existe un algorithme *polynomial* permettant de déterminer si la configuration

([17])On défini la complexité d'un algorithme en considérant l'instance la plus difficile à chaque N ce qui est parfois problématique car l'instance typique peut être beaucoup plus facile que cette dernière.

proposée est une solution du problème. Cette classe contient ainsi SAT : pour savoir si une proposition est vraie, il faut simplement un temps proportionnel à sa longueur([18]).

Une sous-classe de NP est la classe P (*Polynomial*) qui contient les problèmes "faciles", ce sont ceux pour lesquels il existe un algorithme polynomial (connu ou non) pour résoudre le problème, comme par exemple la recherche dans une base de données, le tri de N valeurs en ordre croissant ou encore la recherche du fondamental d'un verre de spins sur un graphe planaire. Il a été montré par Cook en 1971 que tous les problèmes NP sont réductible à 3-Sat (c.a.d. qu'ils sont *traduisibles* en un temps polynomial), ce problème est donc le plus *difficile*. Peut-il être résolu en un temps polynomial([19])? Si oui, alors il n'y aurait pas de problèmes difficiles et NP serait égal à P. Il a été conjecturé que cela n'était *pas* le cas, et qu'il fallait créer une nouvelle sous classe appelée NP-complet qui regroupe les problèmes les plus durs. Dire alors qu'un problème décisionnel est NP-complet signifie que si l'on trouve un algorithme polynomial pour le résoudre, alors P = NP. 3-Sat est NP-complet, ainsi que le voyageur de commerce et ... malheureusement le problème de trouver le fondamental d'un verre de spins en dimension supérieure ou égale à trois. Un problème décisionnel NP-complet est alors associé à un problème d'optimisation combinatoire NP-Hard.

On peut utiliser les techniques de l'optimisation combinatoire pour calculer l'état fondamental de systèmes physique désordonnés (Rieger, 1998; Angles d'Auriac & Sourlas, 1997) mais aussi utiliser les méthodes de la physique pour travailler sur l'optimisation combinatoire. D'un point de vue strictement numérique, on peut citer le recuit simulé (Kirkpatrick et al., 1983) ou la renormalisation dont l'on va parler plus loin. D'un point de vue analytique, voir le problème d'optimisation comme un problème de physique statistique permet d'utiliser les concepts habituels: énergie libre, transition de phase, méthodes des répliques, approximation de champ moyen etc ... (Vannimenus & Mézard, 1984; Mézard & Parisi, 1985; Orland, 1985; Kirkpatrick & Selman, 1994). Cette approche a notamment permis récemment une solution analytique de 3-sat dans sa version aléatoire (Mézard et al., 2002).

c.4) Repliement de l'ARN : un exemple polynomial

Un exemple de système où il est facile de trouver le fondamental est celui du repliement de l'ARN. En fait, le calcul de la fonction de partition elle même est polynomial, ce qui en fait un problème très intéressant du point de vue numérique. On peut définir le modèle simplifié suivant : soit un polymère constitué d'une séquence aléatoire de deux lettres A et B, avec une interaction attractive entre A et B et répulsives entre A-A et B-B (On peut se contenter d'une description simplifiée à cause de l'universalité des résultats (Müller et al., 2002)). On peut ensuite négliger la structure tridimensionnelle (la structure ternaire comme disent les biologistes) puisque son échelle d'énergie est beaucoup plus petite que celle impliquée dans les appariements de bases de Crick Watson (Zuker & Sankoff, 1984). De plus, les noeuds (ou plutôt pseudo nœuds : ce sont les appariements entre les bases $\{i, j\}$ et $\{k, l\}$ avec $i < k < j < l$) sont rares dans l'ARN, pour des raisons topologiques. Nous pouvons donc les exclure (on pourrait en tenir compte avec l'approche de (Orland & Zee, 2001)).

C'est cette condition qui fait la simplicité du problème comparé par exemple à celui de repliement des protéines. On a alors un modèle où l'énergie, quand on connaît la liste des appariement (la structure secondaire $\mathcal{S}$), est $H(\mathcal{S}) = \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{S}} e_{i,j}$. La fonction de partition est de même $Z_N = \sum_{\mathcal{S}_N} \exp[-\beta H(\mathcal{S}_N)]$. Pour déterminer le fondamental, il suffit de remarquer que le fondamental du système à N monomères, c'est soit celui constitué par $N-1$ monomère auquel on ajoute simplement le dernier au bout, soit celui constitué du fondamental des $k-1$ premiers monomères, du fondamental

([18])Pour le problème du voyageur de commerce une version décisionnelle serait de savoir si la tournée proposée est *plus petite* qu'une certaine longueur.

([19])C'est l'une des 6 questions fondamentales ouvertes en mathématique, voir http://www.claymath.org/prizeproblems.

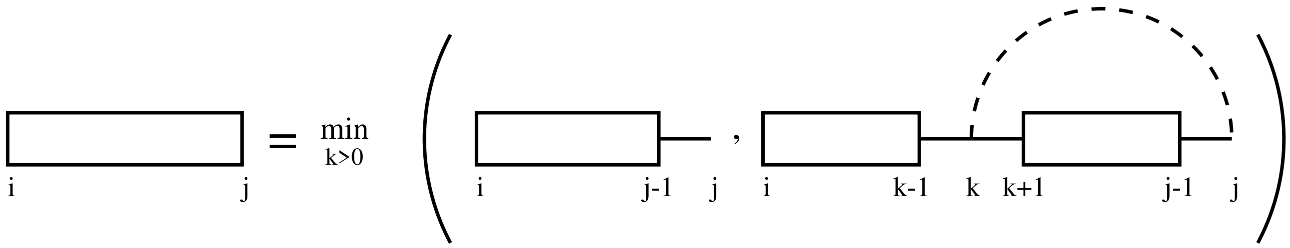


FIG. –11 – *Représentation diagrammatique de l'algorithme permettant de calculer le fondamental du problème de repliement de l'ARN.*

des monomères $k+1$ à $N-1$, avec un lien entre k et N (voir fig –11). Cette opération est linéaire en N, mais elle nécessite de connaître N^2 fondamentaux plus petits : l'algorithme est donc en N^3.

c.5) Verres de spins : l'algorithme de renormalisation génétique

Pour les verres de spins en dimensions $d > 2$, le problème est donc plus difficile. J'ai utilisé un algorithme dû à Houdayer et Martin (Houdayer & Martin, 1999*b*; Houdayer & Martin, 2001) qui utilise à la fois les idées de renormalisation et d'algorithmes génétiques([20]), et qui est l'état de l'art en tant que méthode pour résoudre les fondamentaux. Il s'agit d'un algorithme heuristique qui trouve le fondamental d'un verre de spins jusqu'à des tailles relativement importantes (plus de 1000 spins) dans un temps très raisonnable (jusqu'à quelques minutes pour un verre de spins EA3d 12^3) avec une très bonne probabilité (environ 95 pourcent dans le cas précedent).

Son idée principale est d'utiliser la renormalisation : plutôt que de résoudre le problème directement, on va créer un autre problème, à une échelle supérieure (un peu comme lorsque l'on fait une renormalisation Wilsonienne dans l'espace direct), et « résoudre le problème » à cette échelle et ainsi de suite jusqu'à arriver à une échelle où le problème est facile à résoudre. Ce qui fait la qualité de cette approche est que l'on traite le problème à toutes les échelles. Une fois l'instance « résolue », ou plutôt « optimisée », à toutes les échelles on peut redescendre au problème initial.

Pour une description détaillée de l'algorithme, on peut se reporter aux articles cités plus haut ou encore à (Houdayer, 1999). Une bonne façon de voir comment l'algorithme fonctionne est de considérer le problème du voyageur de commerce. Considérons ainsi une instance de ce problème (voir la figure –12). Pour la résoudre, c'est à dire trouver le chemin le plus court qui passe par toutes les villes, nous générons deux tournées non optimales (en choissant aléatoirement le chemin et en faisant une optimisation locale par exemple), et nous allons ensuite créer un problème renormalisé à partir des liens en communs dans ces deux tournées. Le problème obtenu alors est plus facile à résoudre, il a notamment moins de degrés de liberté. et l'on peut donc proposer une bonne solution. Une fois ceci fait, on peut revenir en arrière et l'on obtient une tournée nouvelle, qui est bien meilleure que les deux originales.

De ce point de vue, puisque l'on *croise* des solutions, il s'agit donc d'un algorithme génétique, les tournées initiales étant les tournées *parents* et la tournée finale un *enfant* (dans la pratique, le nombre de parents n'est pas forcement deux mais doit être optimisé). L'avantage de cette méthode est qu'elle nous permet d'être récursif : une fois que l'on a obtenu le problème renormalisé, on peut le résoudre lui même par le même méthode, c'est à dire re-tirer des parents aléatoirement pour ce nouveau problème et re-renormaliser et ainsi de suite jusqu'à arriver à une taille où le problème est facilement résoluble,

([20])Je remercie Jérôme Houdayer pour avoir bien voulu me fournir la source de son code.

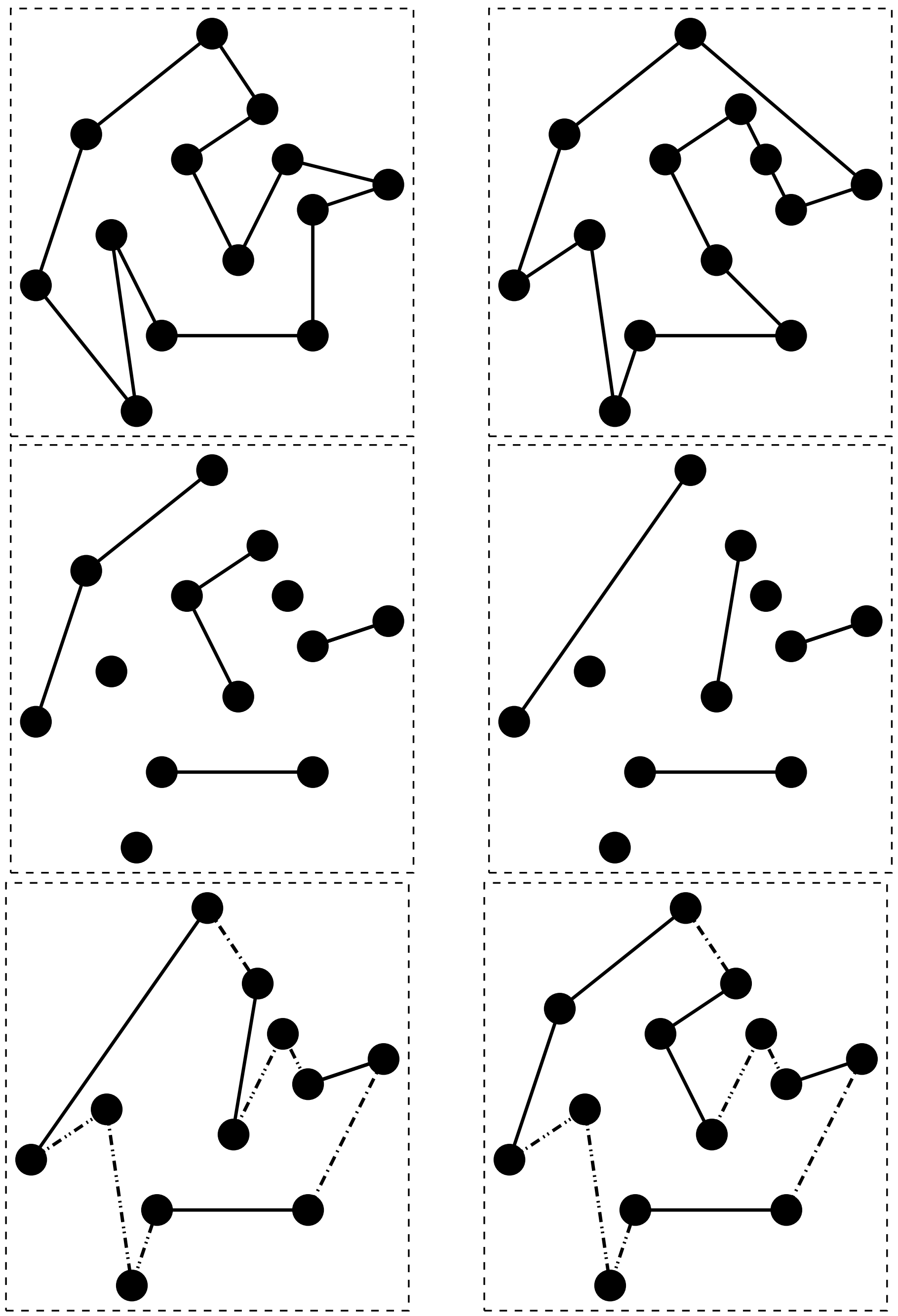


Fig. –12 – *Illustration de la renormalisation dans l'ARG. En haut: considérons une instance à résoudre, on commence par générer deux tournées assez bonnes. Au milieu: on crée ensuite le problème renormalisé en considérant tout d'abord les liens en communs dans les deux tournées précédentes (à gauche) pour créer un nouveau graphe (à droite) par décimation. En bas: ce nouveau problème est plus simple à résoudre ; une fois cela fait (à gauche), on revient à l'instance originale : la tournée obtenue (à droite) est meilleure que les deux premières.*

par exemple en dénombrant toutes les solutions. La seule chose qui change pour les verres de spins est le schéma de renormalisation. Si l'on veut résoudre une instance donné on va cette fois ci tirer les k parents avec des spins haut et bas au hasard, puis de manière analogue on va créer un nouveau problème renormalisé en groupant les blocs de spins dont l'orientation relative est la même chez les 2 parents dans un super-spin. On crée alors également un nouveau réseau, qui pourra lui même être traité de la même manière.

En pratique, il faut aussi préciser comment l'on gère la population puisque l'on doit partir avec une population initiale de M parents complètement aléatoires et arriver avec un seul enfant qui est sensé être le fondamental. Quand on discute une algorithme récursif, il est plus simple de parler du comportement de la fonction principale que l'on appellera ici "NextGeneration", à qui l'on passe une instance (i.e. un Hamiltonien) et une population de configurations (les parents) et qui retourne, en sortie, une population de configurations meilleures que celles en entrée (les enfants). L'algorithme fonctionne de la façon suivante :

(*i*). S'il n'y a qu'une configuration en entrée, il retourne cette configuration en sortie, et donc ne fait rien.

(*ii*). Sinon, il applique la procédure de renormalisation parmis les configurations en entrée et produit ainsi à partir d'elles un nouveau jeu de k configurations renormalisées.

(*iii*). Ces k configurations sont alors optimisées par un algorithme de recherche locale, puis l'on lance (c'est là qu'est la récursivité) NextGeneration avec l'instance renormalisée et les configurations renormalisées. En sortie on récupère les configurations optimisées, auxquels on re-applique l'algorithme de recherche locale.

(*iv*). Ces configurations sont ajoutées aux "enfants" en sortie.

(*v*). On revient à l'étape (ii) tant que toutes les configurations initiales n'ont pas été utilisées comme parents au moins une fois.

(*vi*). On envoie en sortie tous les enfants produits.

L'idée de cette fonction est que chaque configuration en entrée donne naissance a une configuration meilleure en sortie qui est, en gros, celle en entrée optimisée à toutes les échelles par la procédure de renormalisation. Ainsi l'on démarre avec M configurations aléatoires, on les envoie dans la fonction NextGeneration. On fait de même avec les configurations récupérées jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'une, qui est le résultat final. Il ne reste ensuite qu'à adapter M, le nombre initial de configuration, pour avoir une grande chance de trouver le fondamental.

En pratique la probabilité de le trouver, pour des valeurs de M assez grande, semble se comporter comme $1 - e^{-M/a}$. Dans un verre de spins en $3d$, a vaut ainsi 5 pour $L = 4$, 200 pour $L = 10$, 650 pour $L = 12$ et plus de 2000 pour $L = 14$! Nous devrons donc nous limiter, à cause de l'explosion exponentielle du nombre de parents, à des tailles maximales autour de $L = 12$. Dans ce qui suivra on utilisera au moins une valeur de M autour de $2a$, ce qui nous donne une probabilité de plus de 85 pourcent de trouver le fondamental. Tous les résultats présentés dans cette thèse seront obtenus dans un régime où la probabilité de trouver le fondamental est plus grande que 95 pourcent (lorsque l'on calculera des excitations par exemple, une comparaison avec le fondamental nous permettra d'atteindre cette qualité, et lorsque l'on s'intéressera aux fondamentaux exclusivement l'on fera plusieurs runs indépendants pour augmenter la probabilité). Les limites de l'algorithme se situent un peu au dessus de $L = 100$ en $2d$, aux environs de $L = 12$ en $3d$ et de $L = 5$ en $4d$, ce qui en fait le plus performant actuellement pour des verres de spins gaussiens (un autre algorithme permet d'aller un peu plus loin dans le cas de couplages discrets (Hartmann, 1997)).

– .4 – Problématique

a) Où en sommes-nous ?

La problématique de cette thèse se situe principalement dans l'étude des verres de spins en dimension finie, et son objet principal est de tenter de répondre à une question vieille de plus de 20 ans: *quelle est la nature de la phase verre de spins ?* Plus particulièrement, nous aimerions pouvoir trancher entre les approches concurrentes qui seront présentées dans le chapitre suivant. L'une des idées récurrentes sera de se placer à température nulle et ainsi d'essayer d'obtenir des résultats numériques pertinents en utilisant les méthodes issues de l'optimisation combinatoire. La seconde sera d'essayer de concevoir une phénoménologie des excitations en tenant compte de leurs propriétés géométriques.

b) Mon apport personnel, un survol de la thèse

Moi ... Je parle encore de moi ...
Jacques Brel *Les bourgeois*

Dans l'intérêt de la clarté de la présentation et de la cohérence du propos, cette thèse pourra parfois se référer à d'autres travaux ; j'ai aussi choisi de ne présenter que l'aspect verre de spins de mes différents résultats pour les mêmes raisons. Ainsi s'il m'arrive de me référer à d'autres aspects de mon travail, ils seront volontairement en retrait et je ne m'y référerai que pour souligner tels ou tels points. Afin que le lecteur puisse facilement apprécier mon apport personnel et afin de faciliter la lecture de cette thèse voici un rapide survol des différentes parties de cet essai.

Les deux premières parties visent à poser les bases et à exposer les questions abordées.

Après une brève introduction vulgarisée([21]), le chapitre préliminaire présente la thématique générale des systèmes désordonnés et des verres de spins, ainsi qu'une brève revue des expériences et des outils théoriques. On présente notamment l'optimisation combinatoire et l'algorithme de renormalisation génétique qui sera utilisé tout au long de ce travail.

Le premier chapitre a pour but d'exposer le modèle d'Edwards et Anderson, sujet principal de cette thèse. La situation théorique des verres de spins et de ce modèle est ensuite exposée et l'on y trouvera une rapide revue des approches "champ moyen" et "gouttelettes" qui sont concurrentes dans la description du modèle. On y trouvera enfin un résumé des controverses principales et de la situation numérique actuelle.

Les quatre chapitres suivants présentent ma contribution à l'étude de ces systèmes. Ses axes principaux sont la phénoménologie des verres de spins en dimension finie, les effets entre géométrie et paysage d'énergie et enfin l'étude numérique à température nulle.

Le chapitre II, *Température nulle, tailles finies et statistiques des extrêmes*, peut être considéré comme un travail d'approche aux propriétés comparées des verres de spins réels et dans les deux écoles concurrentes champ moyen et gouttelettes, à travers l'étude de leurs fondamentaux ou de leurs excitations. Les effets de tailles finies, les fluctuations d'instance à instance et les distributions d'énergie des fondamentaux sont étudiés analytiquement dans l'approximation de Migdal-Kadanoff et numériquement dans les modèles champ moyen et Edwards-Anderson. On montre notamment que la renormalisation de Migdal-Kadanoff semble décrire correctement ces différents aspects pour les modèles réels, et l'on discute des liens entre statistiques extrêmes et modèles de systèmes désordonnés.

Le chapitre III, *Fluctuation d'entropie et chaos*, discute des effets des fluctuations entropiques

([21])Je dédie ces premières pages à tout ceux, parents et amis, qui m'ont un jour demandé ce que je faisais pendant ma thèse.

sur essentiellement deux aspects: la nature de la fonction $P(q)$ à température nulle et la dépendance chaotique de la phase d'équilibre avec la température. Pour cela on y présente notamment un modèle vitreux à entropies et énergies aléatoires, soluble analytiquement. Ses prédictions sont d'une part une loi d'échelle pour le $P(q)$ des systèmes de spins discrets à température nulle, qui a été depuis confirmée numériquement dans plusieurs modèles plus réalistes, et d'autre part la présence de chaos en température dans la phase verre de spins et sa relative difficulté à être observée en taille finie dans les systèmes réels. Pour confirmer les prédictions de ce modèle une étude numérique en température finie d'un modèle de verre de spins défini par l'approximation des équations Curie-Weiss, ou champ moyen naïf, est effectué, suggérant effectivement la présence de chaos en température dans les systèmes réels. Pour conclure les effets expérimentaux de mémoire et de rajeunissement sont brièvement discutés.

Le chapitre IV, *Nature de la phase verre de spins en dimension finie*, est une tentative de réponse à la question principale de cette thèse. Une phénoménologie des excitations et de leurs propriétés énergétiques et topologiques y est développée d'après les prédictions champ moyen et gouttelettes; on y propose aussi un nouveau scénario pour les verres de spins en dimension finie, appelé TNT, dans lequel il existe des grandes excitations spogieuses et compactes d'énergie d'ordre un. Enfin l'on introduit une méthode numérique générale pour générer des excitations dans les systèmes désordonnés. L'essentiel de ce chapitre est ensuite une étude numérique de la nature de ces excitations et l'on montre notamment (a) l'existence d'excitations de topologie non triviale de la taille du système, appelées *éponges*, et d'énergie $O(1)$ qui semblent survivrent à la limite thermodynamique, comme prévu par la théorie champ moyen, et (b) que les propriétés géométriques de ces objets semblent indiquer qu'ils sont compacts avec une surface de dimension fractale inférieure à celle du système, ce qui par contre est contraire à ce que prévoit le champ moyen. Ces différents résultats sont par contre attendus dans le scénario TNT qui se révèle de plus à posteriori compatible avec *l'ensemble* des résultats numériques. C'est donc une image mixte, entre champ moyen et gouttelettes, qui ressort de ce chapitre.

Le Chapitre V enfin, *Étude du diagramme des phases*, utilise les outils et les notions introduites dans le chapitre IV pour étudier numériquement le diagramme des phases généralisé du modèle Edwards-Anderson à trois dimensions et à température nulle. Après avoir exposé les prédictions des différents modèles, champ moyen, TNT et gouttelettes, on y étudie la possible existence d'une phase verre de spins en champ magnétique et de la coexistence d'une phase verre de spins avec une phase ferromagnétique quand on fait varier la concentration de liens ferromagnétiques. Nos résultats favorisent encore un diagramme des phases trivial, sans phase verre de spins en champ et sans coexistence avec un ordre ferromagnétique, et avantage donc fortement le scénario TNT.

Après la conclusion, les différents articles auxquels ont donné lieu ces travaux sont inclus. On y trouvera aussi mes articles traitant du repliement de l'ARN et l'on pourra s'y référer indifféremment comme à autre exemple d'application de la physique statistique et des verres de spins aux systèmes désordonnés et frustrés ou comme à une étude des bio-polymères; on y applique notamment nombre de notions analogues à ce que l'on pourra lire dans cette thèse. Une transition vitreuse dont le paysage en énergie est comparable a un système de type “gouttelette” y est ainsi mise en évidence, de même que l'universalité des résultats et du comportement du système par rapport à la réalisation microscopique du désordre. On y expose enfin une théorie de scaling pour les caractéristiques de la structure secondaire d'un bio-polymère d'ARN aléatoire sous l'application d'une force qui est ensuite étudié et vérifié numériquement. On trouvera enfin dans ces articles un compte rendu du groupe de travail sur la mémoire et le rajeunissement auquel j'ai participé à l'école d'été des Houches en juillet 2002.

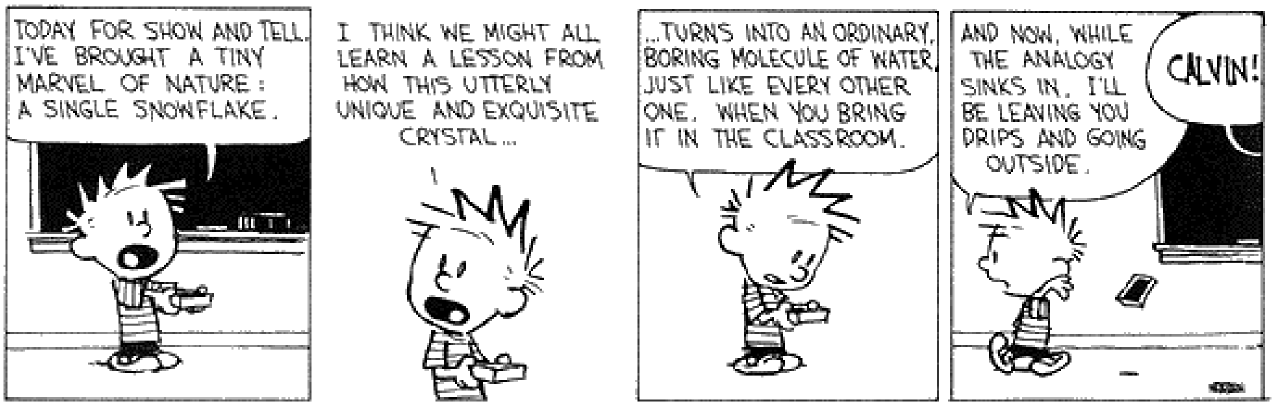
Une bibliographie et un index closent ensuite cette thèse.

Chapitre I

Les modèles canoniques des verres de spins

Dans ce chapitre de rappel, nous allons exposer les deux modèles de référence des verres de spins, correspondant à deux écoles bien séparées. La première est dite l'école champ moyen parce qu'elle fait intervenir la solution du modèle avec l'approximation de champ moyen. La seconde est l'école des gouttelettes, qui propose une approche plus phénoménologique mais qui obtient des résultats très différents.

Un rappel des problèmatiques et des questions ouvertes sera fait à la fin de ce chapitre.



Vous arrivez devant la nature avec des théories
Et la nature flanque tout par terre.
Auguste Renoir

Le modèle d'Edwards-Anderson est le paradigme des verres de spins et n'est pas loin d'être celui des systèmes fortement désordonnés en général. C'est celui que nous aimerions résoudre, cependant le calcul de la fonction de partition n'est pas encore envisageable en trois dimensions([1]). Pour l'étudier analytiquement des méthodes approchées ont été utilisées conduisant aux deux modèles classiques des verres de spins que nous allons exposer ici : le modèle *champ moyen* et le modèle des *gouttelettes.*

Nous allons d'abord exposer le modèle d'Edwards-Anderson, puis ensuite sa version champ moyen (le modèle de Sherrington-Kirkpatrick) et sa solution, due à Giorgo Parisi en utilisant l'astuce des répliques. Enfin, nous exposerons le modèle des gouttelettes de Fisher-Huse et Bray-Moore et l'on insistera sur les différences majeures entre ces modèles sur le diagramme des phases et la nature de la phase verre de spins.

– I.1 – Modèle d'Edwards et Anderson

L'un des articles fondateurs de la discipline des verres de spins est le "Theory of spin glasses" de J. Edwards et P.W. Anderson paru en 1975 (Edwards & Anderson, 1975). Les questions posées dans cet article sont toujours débattues et sont l'objet de cette thèse, plus de 25 ans après. Dans ce papier, les auteurs tentent de répondre à une question simple : comment décrire l'apparente transition de phase des spins à basse température ? Ce sont les premiers à proposer l'image de *gel* des spins où chaque spin S_i se retrouve, à basse température, bloqué dans une direction dont l'orientation est aléatoire. Pour signer la phase verre de spin, il suffit donc de prendre la moyenne, non pas sur les m_i (ou m_i est la moyenne temporelle de S_i) mais bien sûr les m_i^2. Edwards et Anderson ont proposé d'utiliser les corrélations temporelles lorsque le système est dans sa phase basse température : si l'on observe un spin i donné à un instant $t = 0$, qui se trouve dans un état $S_i(0)$, ce spin est gelé si l'on peut le retrouve dans un état $S_i(t)$ identique à un temps $t > 0$. De façon plus mathématique, le paramètre d'ordre d'Edwards-Anderson est défini comme

$$q_{EA} = \lim_{t\to\infty} \lim_{N\to\infty} [\langle S_i(0) \cdot S_i(t)\rangle]_{av} \qquad \text{(I.1–1)}$$

Dans ces notations, $< A >$ représente la moyenne thermique d'une observable, alors que $[A]_{av}$ est sa moyenne sur le désordre. Ce paramètre est nul dans la phase paramagnétique et non nul dans la phase verre de spins. Aujourd'hui, on a plus tendance à voir q_{EA} comme étant la moyenne des aimantations au carré. En effet, si l'on peut, comme en champ moyen, définir une aimantation moyenne sur le site i, pour un spin particulier on passe de $m_i = 0$ dans la phase haute température à $m_i \neq 0$ dans la phase basse température. Bien sûr $\frac{\sum m_i}{N} = 0$ puisque les directions sont aléatoires, mais l'on a bien alors $q_{EA} = \frac{\sum m_i^2}{N}$ différent de zero.

Cette image pour représenter les verres de spins est effectivement efficace. Ainsi, il est parfois commode de se représenter les spins et leurs aimantations comme dans la figure I–1. Ce que l'on nomme aujourd'hui modèle d'Edwards et Anderson c'est l'équivalent du modèle d'Ising (alors que

([1])Ni même en 2 dimensions; rappelons que même pour le modèle d'Ising sans désordre, on ne sait calculer la fonction de partition qu'en 1 dimension ainsi qu'en 2 dimensions en l'absence de champ depuis la solution de Lars Onsager (Onsager, 1965).

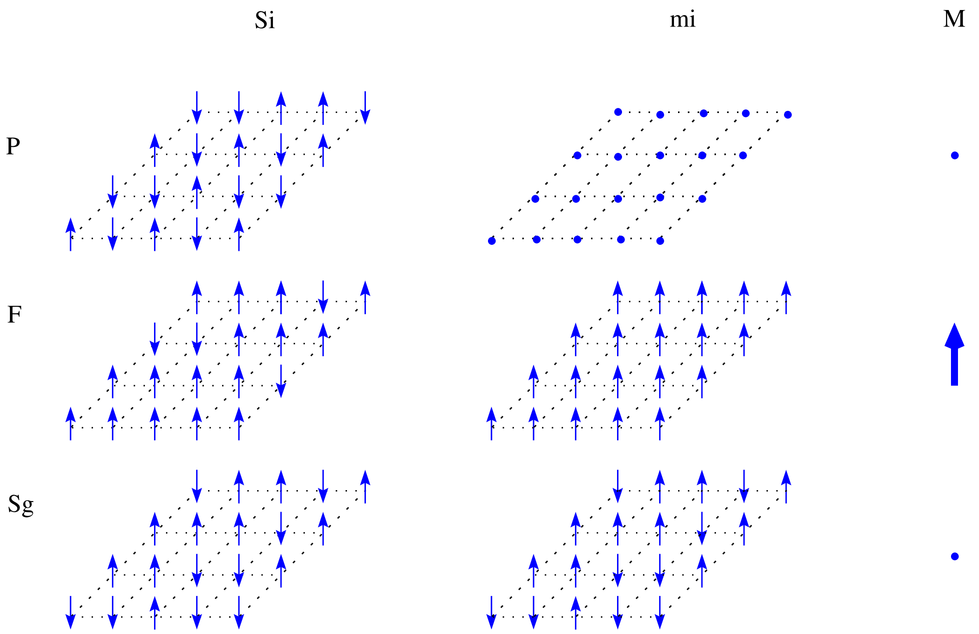


FIG. I–1 – *De gauche à droite : états des spins à un instant t, aimantation moyenne par spin et aimantation globale moyenne pour, de haut en bas) un paramagnétique, un ferromagnétique et un verre de spins. Dans ce dernier, l'aimantation moyenne d'un spin donné est non nulle, bien qu'elle soit différente d'un spin à un autre.*

dans leur papier initial, ce sont des spins Heisenberg qui sont considérés) sur un réseau hyper cubique de dimension d, c'est à dire tout modèle de verre de spins placés sur un réseau régulier et où les interactions sont à courte portée et dont l'intensité est donnée par l'intermédiaire d'une distribution de probabilité $P(J_{ij})$ qui est souvent prise gaussienne

$$P(J_{ij}) = \frac{1}{(2\pi\Delta_{ij})^{\frac{1}{2}}} \ \exp\left(-\frac{(J_{ij}-\overline{J}_{ij})^2}{2\Delta}\right) \tag{I.1–2}$$

symétrique (si $\overline{J}_{ij}=0$) ou non, ou bien encore d'une double fonction delta

$$P(J_{ij}) = \frac{1}{2}\delta(J_{ij}-\Delta^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}\delta(J_{ij}+\Delta^{\frac{1}{2}}) \tag{I.1–3}$$

auquel cas on parlera de verre de spins “discret” ou parfois encore de “$\pm J$”. D'un point de vue historique, si Edwards et Anderson rendent bien compte qualitativement du pic observé expérimentalement dans la susceptibilité, les résultats obtenus par leur approche générale en ce qui concerne la chaleur spécifique ne correspondent pas avec les expériences(2). Il est clair qu'il faut donc travailler directement sur le modèle EA, et que pour cela nous devons faire des approximations. Deux possibilités classiques ont été principalement utilisées. La première est de passer à un modèle à portée infinie, et non plus premier voisins, ce qui conduit au modèle de SK (Sherrington & Kirkpatrick, 1975) dont la solution champ-moyen est exacte. La seconde est d'utiliser une approche plus phénoménologique (ou encore de

(2)Ils prévoient un pic prononcé de la chaleur spécifique à T_g, ce qui n'est pas le cas expérimentalement où aucune singularité n'est visible.

résoudre le modèle sur un réseau hiérarchique, ce qui conduit à des résultats équivalents), donnant lieu aux modèles des gouttelettes (Fisher & Huse, 1986) ou de lois d'échelle (McMillan, 1983; Bray & Moore, 1986).

– I.2 – Les verres de spins en champ moyen

Commençons par le système à longue portée. C'est Sherrington et Kirkpatrick qui ont les premiers proposé d'étudier ce modèle, en remarquant que l'approximation champ moyen (plus précisément la méthode du col) devait permettre de le résoudre. Il y a d'autre façon de définir des réseaux champ moyen qui ont l'avantage d'être à connectivité finie, notamment celle de (Viana & Bray, 1985) ou celle utilisé par (Mézard & Parisi, 2001) et nous y reviendrons plus tard. À propos du modèle champ moyen la littérature est abondante, et l'on pourra se référer au classique (Mézard et al., 1987) entièrement consacré aux verres de spin champ-moyen et à leur applications qui vont des réseaux de neurones à l'optimisation combinatoire, ainsi qu'à d'autres livres très pédagogiques (Dotsenko, 2000; Fischer & Hertz, 1991).

a) Modèle de Sherrington et Kirkpatrick

Le modèle de Sherrington et Kirkpatrick (SK) est donc la version à portée infinie du modèle EA pour une assemblée de N spins d'Ising, et son Hamiltonien s'écrit :

$$H = -\sum_{i<j} J_{ij} S_i S_j, \quad S_i = \pm 1. \tag{I.2–1}$$

Les interactions sont aléatoires et sont spécifiées par la loi de probabilité $P(J_{ij})$ gaussienne :

$$P(J_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}J} \exp\left(-\frac{(J_{ij} - J_0)^2}{2J^2}\right). \tag{I.2–2}$$

Tous les spins interagissent entre eux et il n'y a donc plus de géométrie. La variance et la moyenne doivent être correctement normalisées pour tenir compte de la portée infinie des interactions : J_0 et J sont tels que $J_0 = \widetilde{J}_0/N$ et $J = \widetilde{J}/N^{1/2}$, ce qui permet de garantir les propriétés d'extensivité voulues pour l'énergie ou l'énergie libre.

a.1) La méthode des répliques

Comme discuté dans le chapitre précédent, la méthode dite “des répliques” est une astuce très générale qui peut être *a priori* utilisée dans l'étude de tout système désordonné. Son but est de calculer l'énergie libre moyennée sur le désordre, en supposant que cette énergie est auto-moyennante. Dans notre cas, pour les verres de spins donc, les variables désordonnées décrivent les interactions entre les spins. Pour une réalisation particulière de désordre (désignons par $\{x\}$ l'ensemble des couplages) on aura

$$F\{x\} = -k_B T \ln \mathcal{Z}\{x\}. \tag{I.2–3}$$

$F\{x\}$, l'énergie libre, est une variable extensive dont on va supposer l'auto-moyenance([3]), c'est à dire que la valeur de l'énergie libre par spin $F\{x\}/N$ ne dépend pas d'une réalisation particulière du désordre

([3])Encore une fois, cela est au départ une hypothèse hautement non triviale; de fait la démonstration de l'existence de la limite thermodynamique et de l'auto-moyenance de l'énergie libre dans le modèle SK est très récente (Guerra & Toninelli, 2002; Guerra, 2002). La démonstration en dimension finie est due originellement à Pastur; on peut trouver les réferences (en russe !) dans (Lifshitz et al., 1988).

à la limite thermodynamique. Nous voudrions donc calculer

$$F = [F\{x\}]_{av} = -k_B T [\ln \mathcal{Z}\{x\}]_{av}, \tag{I.2–4}$$

où $[\ ]_{av}$ représente la moyenne sur le désordre. Mathématiquement, c'est un problème bien défini, mais malheureusement quasi-insurmontable alors qu'il est par contre souvent possible de calculer la moyenne de $\mathcal{Z}$. Le problème est que la moyenne du log n'est pas en général le log de la moyenne([4]).

La méthode des répliques permet de faciliter cette tâche. Elle utilise l'identité suivante

$$[\ln \mathcal{Z}\{x\}]_{av} = \lim_{n\to 0} \frac{[\mathcal{Z}^n\{x\}]_{av} - 1}{n} = \lim_{n\to 0} \frac{\partial}{\partial n} [\mathcal{Z}^n\{x\}]_{av}. \tag{I.2–5}$$

L'idée est ensuite de calculer $[\mathcal{Z}^n]_{av}$ pour tout n positif, ce qui est un problème simple et bien défini, le calcul de $[\mathcal{Z}^n]_{av}$ n'etant en général pas plus difficile que celui de $[\mathcal{Z}]_{av}$ si n est entier, pour ensuite en déduire $[\mathcal{Z}^n]_{av}$ pour tout n *réel* par prolongement analytique. On peut alors en déduire $[\log \mathcal{Z}]_{av}$ en prenant la limite $n \to 0$.

D'un point de vue mathématique, $\mathcal{Z}^n\{x\}$ est en fait la moyenne sur le désordre de n copies indépendantes d'une même réalisation du désordre (d'ou le nom de la méthode) et l'on a

$$\mathcal{Z}^n\{x\} = \prod_{\alpha=1}^{n} \mathcal{Z}_\alpha\{x\} = \prod_{\alpha=1}^{n} \sum_{S_i^\alpha} \exp\left(-\beta \mathcal{H}\{x, S_i^\alpha\}\right) \tag{I.2–6}$$

où $\mathcal{Z}_\alpha$ est la fonction de partition de la $\alpha^{\text{ème}}$ réplique du système, soit

$$\mathcal{Z}^n\{x\} = \sum_{S_i^\alpha} \exp\left(-\sum_{\alpha=1}^{n} \beta \mathcal{H}\{x, S_i^\alpha\}\right). \tag{I.2–7}$$

On peut ensuite intégrer sur le désordre $[\ ]_{av}$ en utilisant la distribution de probabilité $P\{x\}$. Il vient alors

$$[\mathcal{Z}^n\{x\}]_{av} = \int d\{x\} P\{x\} \mathcal{Z}^n\{x\}. \tag{I.2–8}$$

Cela peut se reformuler, après quelques calculs, en fonction d'un Hamiltonien effectif $\mathcal{H}_{eff}(n)$ qui ne contient plus de désordre. Le désordre a été éliminé au prix de l'introduction d'une interaction entre les répliques. On dit alors que le désordre a été *intégré*.

$$[\mathcal{Z}^n\{x\}]_{av} = Tr \exp\left(-\frac{\mathcal{H}_{eff}(n)}{k_B T}\right). \tag{I.2–9}$$

Ces résultats sont pour l'instant exacts, mais pour appliquer la formule des répliques (I.2–5) et obtenir $[F\{x\}]_{av}$, il faut pouvoir faire un prolongement analytique à n non entier, et donc étendre la définition de $\mathcal{H}_{eff}(n)$ à tout réel positif n pour pouvoir prendre la limite $n \to 0$. C'est là que les subtilités apparaîssent. D'un point de vue historique, il semble que le premier à avoir utilisé cette méthode en physique statistique soit Mark Kac (Kac, 1968; Kac & Lin, 1970), et qu'elle fut re-découverte par la suite par Edwards (Edwards, 1970; Edwards & Anderson, 1975).

([4])Si l'on calculait la moyenne de $\mathcal{Z}$, les variables $\{x\}$ et S_i seraient traitées toutes deux comme des variables thermodynamiques capables de prendre les valeurs qui vont minimiser l'énergie totale. Cela conduirait à ne compter dans la fonction de partition que les réalisations du désordre qui ont le moins de frustration; tout le poids serait alors concentré dans les jeux de désordre les moins frustrés … Cela revient finalement à calculer l'énergie libre d'un système non désordonné. Cette opération est appelée "calcul de la moyenne recuite F_{recuit}", qui se trouve être juste dans certains cas mais qui est la plupart du temps très différente de $[F\{x\}]_{av}$.

a.2) La solution symétrique

En continuant le calcul précèdent, on arrive en appliquant la méthode du col, justifié à grand N, à

$$f = \frac{F}{N} = -\frac{\widetilde{J}^2}{4k_BT} - k_BT \lim_{n\to 0}\frac{1}{n}\max\Bigg\{ -\sum_{(\alpha\beta)}\frac{1}{2}(y^{(\alpha\beta)})^2 - \sum_{\alpha}\frac{1}{2}(x^{\alpha})^2$$
$$+ \ln Tr \exp\left[\frac{\widetilde{J}}{k_BT}\sum_{(\alpha\beta)} y^{(\alpha\beta)}S^{\alpha}S^{\beta} + \left(\frac{\widetilde{J}_0}{k_BT}\right)^{1/2}\sum_{\alpha} x^{\alpha}S^{\alpha}\right]\Bigg\} \tag{I.2–10}$$

où α et β désignent les n répliques du système. Les solutions $y^{(\alpha\beta)}$ et x^{α} doivent aussi vérifier les équations du col :

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(\alpha\beta)}} = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} = 0. \tag{I.2–11}$$

L'approche la plus naturelle et intuitive pour progresser consiste ensuite à supposer que l'énergie libre finale soit invariante par permutation des différentes répliques, et donc à rechercher les solutions en se restreignant au *sous espace* où $y^{(\alpha\beta)}$ et x^{α} sont indépendants des indices des répliques :

$$y^{(\alpha\beta)} = \frac{\widetilde{J}}{k_BT}\langle S^{\alpha} \quad S^{\beta}\rangle = \frac{\widetilde{J}q}{k_BT}, \tag{I.2–12}$$

et

$$x^{\alpha} = \left(\frac{\widetilde{J}_0}{k_BT}\right)^{1/2}\langle \quad S^{\alpha}\rangle = \left(\frac{\widetilde{J}_0}{k_BT}\right)^{1/2} m. \tag{I.2–13}$$

On obtient alors l'énergie libre *symétrique dans les répliques* :

$$\beta\frac{F}{N} = -\frac{\widetilde{J}^2(1-q)^2}{(2k_BT)^2} + \frac{\widetilde{J}_0 m^2}{2k_BT}$$
$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dz \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right)\ln\left[2\cosh\left(\beta\widetilde{J}q^{1/2}z + \beta\widetilde{J}_0 m\right)\right]. \tag{I.2–14}$$

Enfin, en utilisant encore la condition d'extremum de l'énergie libre $\partial f/\partial q = 0$ et $\partial f/\partial m = 0$, on obtient les équations auto cohérentes pour q et m :

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right)\tanh^2\left(\frac{\widetilde{J}q^{1/2}}{k_BT}z + \frac{\widetilde{J}_0 m}{k_BT} + \frac{H}{k_BT}\right)dz \tag{I.2–15}$$

et

$$m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right)\tanh\left(\frac{\widetilde{J}q^{1/2}}{k_BT}z + \frac{\widetilde{J}_0 m}{k_BT} + \frac{H}{k_BT}\right)dz. \tag{I.2–16}$$

Il est alors facile de se rendre compte que m est toujours nul en l'absence de champ, mais que q devient non nul quand $T < J$ et qu'il existe dans ce cas une transition de phase du second ordre entre une phase paramagnétique quand $T > J$ et une phase où les spins sont gelés sans ordre apparent quand

$T < J$, alors qu'il n'y a pas de transition en champ. On peut aussi calculer la susceptibilité magnétique (c'est la limite quand $H \to 0$ de $\partial m / \partial H$) qui vaut

$$\chi_{SK} = \frac{1 - q(T)}{k_B T - \widetilde{J}_0 (1 - q(T))}. \tag{I.2–17}$$

Cette susceptibilité est en bon accord avec l'expérience puisqu'elle prévoit un pic à la transition qui s'émousse et dont la position se déplace vers les plus basses températures lorsque l'on applique un champ magnétique. Tout semble bien marcher, et la théorie des verres de spin serait bien simple si tout devait s'arrêter là ... Malheureusement si l'on calcule la valeur de l'entropie, on se rend compte qu'elle prend une valeur négative à température nulle:

$$S(T = 0) \approx -0.16. \tag{I.2–18}$$

La méthode des répliques conduit donc finalement à un désastre en contredisant les principes fondamentaux de la thermodynamique([5]). C'est l'hypothèse d'indiscernabilité des répliques dans le calcul de Sherrington et Kirkpatrick qui est responsable de ces pathologies à basse température. La solution SK, ou symétrique par permutation des répliques, est par contre valide au dessus et près de T_g (On pourrait ainsi en dériver les exposants critiques près de T_g assez facilement).

b) Instabilité de la solution SK - Ligne dAT

Les travaux de Thouless, Anderson et Palmer en 1977 (Thouless et al., 1977) ont effectivement confirmé que la solution SK était valable près et au dessus de T_g, mais que le comportement à basse température est très différent. Enfin (de Almeida & Thouless, 1978) ont fait remarquer que pour appliquer la méthode du col, il faut que les valeurs propres de la matrice à minimiser soient positives. En analysant la stabilité des solutions SK, on montre qu'elles deviennent instables quand

$$\left(\frac{k_B T}{J}\right)^2 < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dz \exp(-\frac{1}{2} z^2) sech^4 \left(\frac{J q^{1/2} z}{k_B T} + \frac{J_0 m}{k_B T}\right). \tag{I.2–19}$$

Ainsi, dès que $T < J$, on doit briser la symétrie des répliques pour obtenir une solution stable. De plus sous un champ magnétique H, et dans le cas où J_0 est nul, cette condition d' instabilité s'écrit :

$$\left(\frac{k_B T}{J}\right)^2 < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dz \exp(-\frac{1}{2} z^2) sech^4 \left(\frac{J q^{1/2} z}{k_B T} + \frac{H}{k_B T}\right). \tag{I.2–20}$$

Cette équation définit une ligne d'instabilité dans le plan (H, T), équivalente à une ligne d'instabilité dans le plan (J_0, T). Pour H et q petit, cette condition s'écrit

$$H^2 < \frac{4J^2}{3} \left(1 - \frac{T}{T_g}\right)^3. \tag{I.2–21}$$

Ce résultat montre qu'il existe une transition de phase en champ magnétique et en température; en dessous de la ligne de de Almeida-Thouless(dAT), il est nécessaire de briser la symétrie des répliques.

([5])L'entropie étant positive par définition.

c) Brisure de la symétrie des répliques

L'hypothèse de symétrie entre les répliques qui consistait à prendre égaux tous les éléments $y^{(\alpha\beta)}$ de la matrice $n \times n$ apparaîssant dans l'énergie libre I.2–10 n'est donc pas vérifiée en dessous de T_c; il faut ainsi faire d'autres hypothèses sur la forme de cette matrice, et sur la façon dont la symétrie entre les répliques est brisée. C'est Giorgio Parisi qui, en 1979, a trouvé la bonne façon de briser la symétrie des répliques et le bon anzatz pour $y^{(\alpha\beta)}$.

c.1) Préliminaires - One-step RSB

Soit Q la matrice telle que $Q_{(\alpha\beta)} = y^{(\alpha\beta)}$. Le premier pas proposé par (Parisi, 1979*b*) pour briser la symétrie des répliques consiste à diviser cette matrice Q qui contient n répliques (c'est une matrice $n \times n$) en n/m_1 groupes qui contiennent m_1 répliques (on suppose m_1 et n/m_1 entiers). La matrice Q est ainsi définie par :

$$Q_{\alpha\beta} = \begin{cases} q_1 & \text{si } I(\frac{\alpha}{m_1}) = I(\frac{\beta}{m_1}) \\ \\ q_0 & \text{si } I(\frac{\alpha}{m_1}) \neq I(\frac{\beta}{m_1}) \end{cases} \tag{I.2–22}$$

où $I(x)$ est le plus petit entier supérieur ou égal à x (voir I–2). L'énergie libre dépend maintenant de

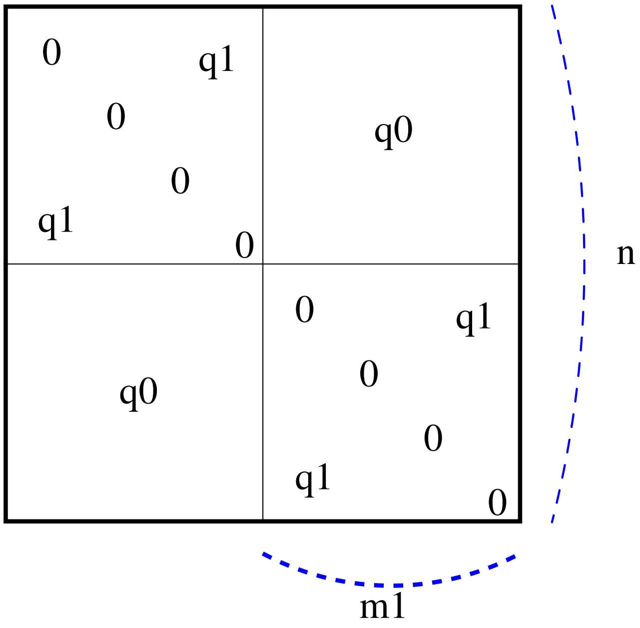


FIG. I–2 – *Illustration de la structure de la matrice $Q_{\alpha\beta}$ dans le cas d'une brisure de symétrie des répliques à une étape (one-step RSB).*

nouveaux paramètres q_0, q_1 et m_1. On défini $P(q)$ comme la fraction d'éléments de la matrice Q qui prend la valeur q. Deux valeurs sont possibles : q_0 et q_1. Parmi les $n-1$ éléments non diagonaux de chacune des n lignes de la matrice Q, $m_1 - 1$ éléments sont égaux à q_1 et $n - m_1$ sont égaux à q_0, $P(q)$

vaut donc :

$$\begin{aligned} P(q) &= \frac{m_1 - 1}{n-1}\delta(q-q_1) + \frac{n-m_1}{n-1}\delta(q-q_0) \\ &\to (1-m_1)\delta(q-q_1) + m_1\delta(q-q_0) \text{ quand } n \to 0. \end{aligned} \tag{I.2–23}$$

Ici intervient une astuce due, encore, à Parisi : pour que $P(q)$ soit positive quand $n \to 0$, il propose que m_1 devienne continu, et qu'il soit défini dans l'intervalle $[0-1]$. L'extrapolation de l'énergie libre à des valeurs non entières de m_1 est alors possible. La condition $\partial F/\partial m_1 = \partial F/\partial q_0 = \partial F/\partial q_1$ donne cette fois pour l'entropie à température nulle

$$S(0) \approx -0.01. \tag{I.2–24}$$

L'entropie est toujours négative, mais bien plus proche de zero que pour la solution symétrique. On est ainsi sans doute plus proche d'une solution physiquement acceptable.

c.2) La solution complète de Parisi - Continuous RSB

L'amélioration de la stabilité des résultats obtenus sur le modèle SK à l'aide d'une brisure à une étape de la symétrie des répliques suggèrent de généraliser la méthode (Parisi, 1979*a*; Parisi, 1980*b*; Parisi, 1980*a*) en itérant le schéma décrit plus haut dans chacun des blocs de la matrice. On introduira alors un ensemble de nombres entiers m_i $(i = 0, \cdots, K+1)$ tels que $m_0 = n$, $m_{K+1} = 1$, et m_i/m_{i+1} est un entier pour $i = 1, \cdots, K$, et on commence par diviser les n répliques en n/m_1 groupes de m_1 répliques (one-step) ; chaque sous groupe de m_1 répliques est ensuite divisé en m_1/m_2 groupes de m_2 répliques (two-steps), etc... La méthode est illustrée sur la figure (I–3). Plus formellement, la matrice $Q_{\alpha\beta}$ est définie par :

$$Q_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = \beta \\ \\ q_i & \text{si } I(\frac{\alpha}{m_i}) \neq I(\frac{\beta}{m_i}) \text{ et } I(\frac{\alpha}{m_{i+1}}) = I(\frac{\beta}{m_{i+1}}) \end{cases} \tag{I.2–25}$$

La matrice $Q_{\alpha\beta}$ dépend donc de $K+1$ paramètres réels q_i et de K entiers m_i. $K = 0$ correspond à une matrice Q symétrique, $K = 1$ correspond à la brisure one-step de la symétrie des répliques, ...

Tant que n est entier, on a $1 \leq m_{i+1} \leq m_i \leq n$. On définit encore $P(q_i)$ comme la fraction d'éléments de la matrice Q qui valent q_i, on voit aisément que sur chacune des n lignes de Q, q_i apparaît $m_i - m_{i+1}$ fois. $P(q_i)$ vaut donc $(m_i - m_{i+1})/(n-1)$, et dans la limite $n \to 0$,

$$P(q) = \sum_{i=0}^{K} (m_{i+1} - m_i)\delta(q - q_i). \tag{I.2–26}$$

Pour que P(q) soit positive quand $n \to 0$, les inégalités précédentes s'inversent et deviennent : $0 \leq m_i \leq m_{i+1} \leq 1$. On calcule alors l'énergie libre, fonction cette fois des q_is et m_is et l'on prend la limite $n \to 0$. Les équations $\partial f/\partial q_i = \partial f/\partial m_i = 0$ sont solubles numériquement pour des valeurs de K pas trop grandes. Pour $K = 2$, l'entropie à température nulle vaut :

$$S(0) \approx -0.004, \tag{I.2–27}$$

toujours négative mais encore moins que la solution (I.2–24) obtenue par une brisure one-step de la symétrie des répliques, suggérant que cette opération doit être effectuée un nombre infini de fois pour

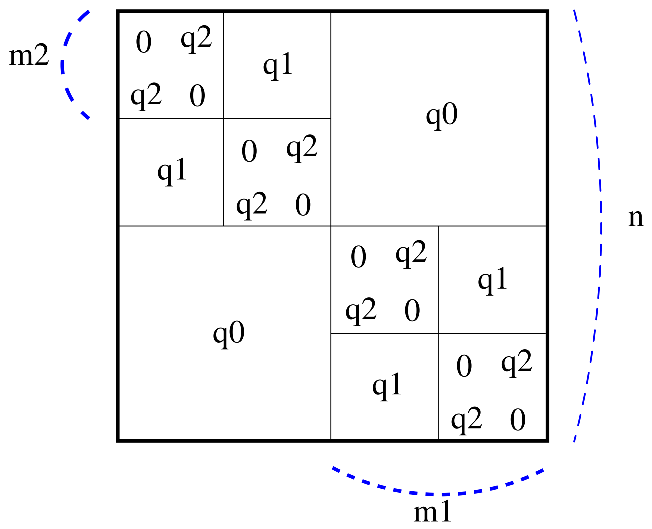


FIG. I–3 – *Illustration de la structure de la matrice $Q_{\alpha\beta}$ dans le cas d'une brisure de symétrie des répliques à deux étape (two-step RSB).*

décrire correctement la phase basse température des verres de spin en champ moyen. On répète alors la même opération dans chaque sous bloc diagonal de la matrice Q. Les q_i forment une séquence croissante, i.e $q_{i+1} > q_i$ et on introduit la fonction

$$q(x) = q_i \text{ pour } 0 \leq m_i \leq x \leq m_{i+1} \leq 1. \tag{I.2–28}$$

La fonction $P(q)$ est reliée à $q(x)$ par :

$$P(q) = \frac{dx(q)}{dq} \quad \text{où } q(x(q)) = q, \tag{I.2–29}$$

i.e

$$x(q) = \int_0^q dq' P(q'). \tag{I.2–30}$$

Quand $K \to \infty$, la fonction $q(x)$ devient une fonction monotone de x. La stabilité de cette solution a été vérifié (de Dominicis et al., 1983).

c.3) Interprétation physique de la RSB

L'interprétation physique de brisure de la symétrie des répliques a longtemps été sujet de débat, mais les choses semblent clarifiées maintenant depuis les articles fondateurs (Parisi, 1983; Young, 1983) jusqu'à la compréhension de la structure ultramétrique (Mézard et al., 1984) et la re-dérivation de la solution SK à l'aide de la méthode de la cavité (Mézard, Parisi & Virasoro, 1986). On pourra se référer à l'article récent de Parisi (Parisi, 1999). La clé de l'interprétation est l'identification de la fonction $P(q)$ définie plus haut, qui est le paramètre d'ordre de la transition, avec celle donnant la probabilité des recouvrements des différents états du système (Parisi, 1983). Introduisons la quantité $q_{\alpha\beta}$ appelée recouvrement, ou "overlap" en anglais, qui décrit la façon dont deux états sont proches l'un de l'autre([6]) :

$$q_{\alpha\beta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_i^\alpha m_i^\beta. \tag{I.2–31}$$

La valeur maximale de $q_{\alpha\beta}$ est obtenue quant les deux états coïncident, et si les deux états ne sont pas corrélés du tout, leur recouvrement est alors nul. Pour décrire la statistique de ces recouvrement, on introduit la distribution de probabilité $P(q)$:

$$P(q) = \sum_{\alpha\beta} w_\alpha w_\beta \delta(q_{\alpha\beta} - q) \tag{I.2–32}$$

avec $w_\alpha = \frac{\exp(-\beta F_\alpha)}{\mathcal{Z}}$, le poid de l' « état » α.

Commençons par étudier le cas d'un système Ising ferromagnétique. A haute température, dans la phase paramagnétique, il n'y a qu'un seul état d'équilibre correspondant à $m = 0$: $P(q)$ est alors une fonction δ en $q = 0$. En dessous de la température de transition et en champ nul, il y a deux états possibles $+m$ et $-m$. Deux répliques α et β du système auront une aimantation $m_{\alpha,\beta}$ aléatoirement $+m$ ou $-m$. Le recouvrement $q_{\alpha\beta}$ entre ces deux états pourra donc prendre la valeur $+m^2$ (si $m^\alpha = m_\beta$) ou $-m^2$ (si $m^\alpha = -m_\beta$) avec la même probabilité. $P(q)$ consiste alors en deux fonctions δ en $\pm m^2$. En ce cas $P(q)$ est trivial. Dans le cas des verres de spin, on montre (Parisi, 1983) que cette fonction $P(q)$

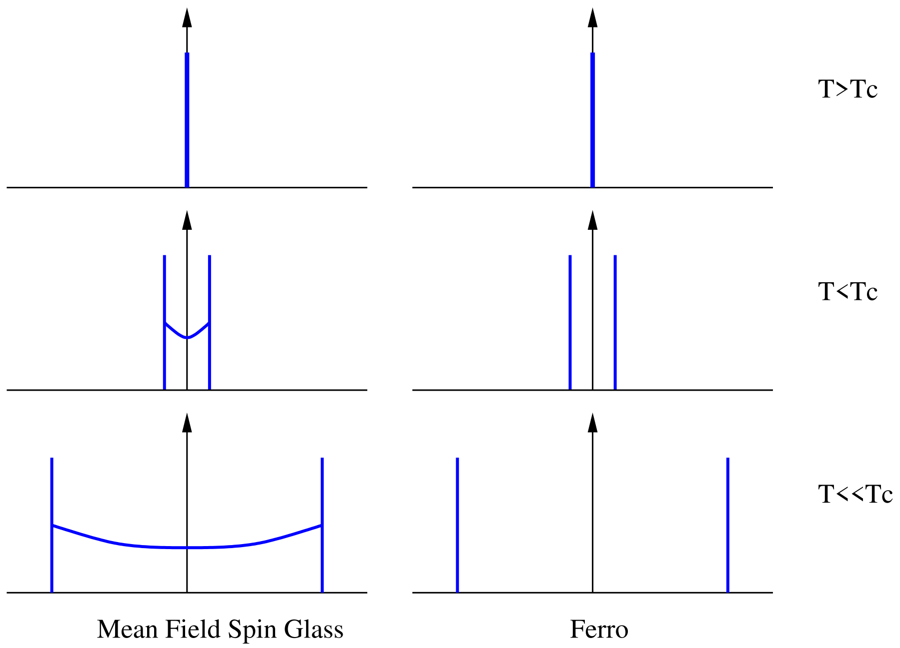


FIG. I–4 – *Représentation de la fonction $P(q)$ pour différentes températures dans un verre de spins SK (à gauche) et dans un ferromagnétique (à droite).*

est la même que celle définie dans le cadre de la brisure de la symétrie des répliques, i.e la fraction

([6]) $1 - q$ est d'ailleurs une mesure de distance dans l'espace des phases : quand $q = 1$ cette distance est nulle et les états sont les mêmes.

d'éléments de la matrice $Q_{\alpha\beta}$ qui prennent la valeur q :

$$P(q) = \lim_{n \to 0} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\alpha \neq \beta} \delta(Q_{\alpha\beta} - q). \tag{I.2–33}$$

La structure de ce $P(q)$ peut être obtenue analytiquement près de T_c ou bien numériquement à plus basse température. En terme de distribution de recouvrement, la transition verre de spins dans le modèle de champ moyen apparaît très différente des transitions magnétiques usuelles. Sur la figure (I–4) sont représentées les fonctions $P(q)$ pour différentes températures en champ nul. À $T > T_c$, $P(q)$ est une unique fonction delta à $q = 0$, mais en dessous de T_c, entre deux pics à $\pm q_M(T)$, il existe une courbe continue, indiquant qu'il existe tous les recouvrements possibles entre les différents états existants.

La valeur de q_M dépend de la température et correspond au recouvrement maximum possible entre deux différentes répliques, obtenu pour l'auto recouvrement. $q_M(T)$ augmente quand la température diminue, indiquant que de nouveaux états sont crées qui sont encore plus proches entre eux que les précédents (recouvrement plus grand). Qualitativement, en dessous d'une certaine température T_c, l'espace des états se divise en de nombreuses vallées séparées par des barrières d'énergie infinie (Mézard et al., 1984; Mézard, Sourlas & Toulouse, 1986; Mézard & Virasoro, 1985; Rammal et al., 1985) Si la température est encore diminuée, chaque vallée se divise en d'autres vallées plus petites séparées par des barrières d'énergie infinie. Ce processus de fragmentation de l'espace des états se produit de

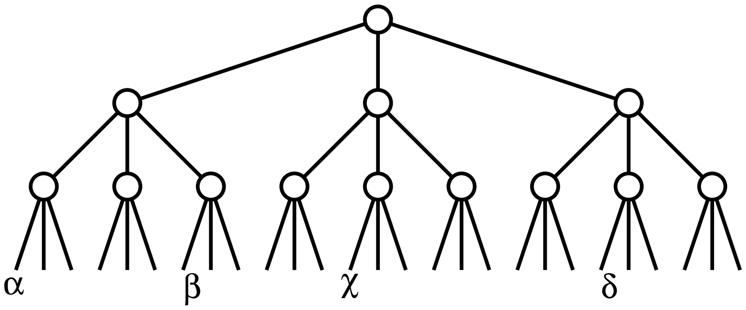


FIG. I–5 – *Représentation schématique de la brisure de la symétrie des répliques avec ultramétricité.*

façon continue quand la température diminue. En d'autre termes, le système est critique à chaque température en dessous de T_c. Cet espace des états possède la propriété d'être ultramétrique : la distance d entre deux états (definie comme $1 - q$) α et β est telle que

$$d_{\alpha\beta} \leq \max(d_{\alpha\delta}, d_{\beta\delta}). \tag{I.2–34}$$

Cela s'interprète de façon naturelle en représentant le paramètre d'ordre $q_{\alpha\beta}$ par un arbre, comme sur la figure (I–5). Chaque nouveau processus de brisure de la symétrie des répliques dans les sous blocs diagonaux précédemment obtenus de la matrice Q subdivise la branche en branches plus petites. Les recouvrements entre différentes répliques correspondent à la valeur de q à l'endroit où elles se sont séparées.

c.4) Cas particulier du one-step et des modèles p-spins

Dans d'autres systèmes champ moyen, tel celui des p-spins (Derrida, 1980; Gross & Mézard, 1984)([7]) il suffit de briser une seule fois la symétrie des répliques pour obtenir une solution stable. Il est donc intéressant à ce niveau de l'exposé d'en résumer les principales caractéristiques. D'après les paragraphes précédents, une brisure à une étape de la symétrie des répliques correspond formellement à briser une seule fois la symétrie de la matrice Q. Deux valeurs de $Q_{\alpha\beta}$ sont alors possibles : q_0 et q_1. Le $P(q)$ correspondant sera donc formé de deux pics delta en ces deux valeurs de recouvrement. Dans ce cas, l'arbre ultramétrique représenté sur la figure (I–5) ne présente qu'un sous niveau. Outre son intérêt théorique indéniable, les p-spins sont de plus très utiles dans l'étude des verres fragiles (Kirkpatrick & Wolynes, 1987; Kirkpatrick & Thirumalai, 1987*a*; Mézard & Parisi, 1999).

c.5) Les modèles à connectivité finie

Il y a d'autres façons de définir des modèles où l'approximation champ moyen est valide. Il suffit de considérer une portée toujours infinie, mais de ne coupler entre eux qu'un nombre fini de spin; on obtient le modèle de (Viana & Bray, 1985) en couplant un nombre aléatoire de spins tandis que le cas où la connectivité est fixée est justement nommée modèle à connectivité fixe. Mézard et Parisi ont récemment réussi à calculer l'énergie libre pour ce genre de système champ moyen avec connectivité finie sous l'approximation one-step (Mézard & Parisi, 2001). Les résultats sont qualitativement les même que pour le modèle SK, c.a.d. qu'il y a RSB et une ligne dAT. Cela est très important et ce pour plusieurs raisons : (i) le calcul champ moyen en connectivité fixe permet une comparaison directe avec les modèles sur réseau, (ii) les problèmes d'optimisation combinatoire sont souvent défini sur des graphes à connectivité fixe et (iii) cela montre que la RSB n'est *pas* un artefact de la connectivité infinie comme on peut l'entendre parfois (bien que cela puisse être un artefact du champ moyen.). Dans le chapitre suivant nous montrerons numériquement que l'approximation one-step donne de bons résultats pour l'énergie du fondamental en connectivité finie.

c.6) La dynamique

Des équations exactes décrivant la dynamique des modèles champ moyen (Sompolinski & Zippelius, 1981; Sompolinski & Zippelius, 1982) ont été obtenues en utilisant le formalisme décrit par (Martin et al., 1973; de Dominicis, 1978). Ce n'est cependant que plus récement que ces équations purent être résolues asymptotiquement (Cugliandolo & Kurchan, 1993; Cugliandolo & Kurchan, 1994; Cugliandolo & Kurchan, 1995; Franz & Mézard, 1994*a*; Franz & Mézard, 1994*b*), permettant l'introduction de concepts nouveaux comme la violation du Théorème de Fluctuation-Dissipation (FDT) qui doit être remplacé par une forme plus générale où apparaît une température effective (Cugliandolo et al., 1997) relié à la fonction $P(q)$ statique du système. Pour les modèles champ moyen la statique (la nature de la fonction $P(q)$ ou encore la nature de la brisure de la symétrie des répliques) et la dynamique (la présence d'une température effective dans le FDT et la nature des fonctions de corrélation à deux temps) sont donc reliées. Sous la contrainte d'une hypothèse suplémentaire (appelée stabilitée stochastique) l'on montre que les modèles en dimension finie devraient aussi obéir à une telle relation. Il est donc d'autant plus intéressant dans ce cas de connaître la statique, même pour des systèmes hors-équilibre, puisque la dynamique peut en principe en être déduite. On pourra se référer, pour une introduction détaillée à ces concepts, à (Bouchaud et al., 1998; Cugliandolo, 2002).

([7])Le modèle p-spins est semblable au modèle SK à ceci près que les interactions font intervenir p spins au lien de 2. En un sens, le model SK est un modèle p-spins avec p=2.

d) Les dimensions critiques inférieures et supérieures

On défini la dimension critique supérieure (d_u) comme la dimension de l'espace à partir de laquelle les propriétés d'un système sont correctement décrites par l'approximation de champ moyen, en particulier les exposants critiques sont donnés exactement. Dans le cas des transitions de phase ferromagnétique on a ainsi $d_u = 4$. Dans la théorie des verres de spins, il est très difficile de calculer d_u ! Il faut déjà savoir si à grande dimension *finie* le champ moyen est un bon départ pour pouvoir faire une théorie des champs et des développements pertubatifs, ce qui est loin d'être prouvé. Dans la revue encore assez récente de de Dominicis, Kondor et Temesvàri (de Dominicis et al., 1998) on trouvera l'état de l'art sur les théories statistiques des champs avec répliques pour les verres de spins. À cause de la brisure de la symétrie des répliques, le calcul des fluctuations autour de cet état est un travail énorme et difficile et cet article résume ce travail de longue haleine. Le résultat est que la théorie RSB semble valide quand elle est appliquée à grande dimension sur les systèmes à courte portée. Plus précisément, au dessus de $d = 8$, tout comme en champ moyen et entre $d = 6$ et $d = 8$, même si les exposants changent, tout est encore très champ moyen et la dimension critique supérieure est $d = 6$. Au dessous de d_u, il faut utiliser le groupe de renormalisation et, à cause du grand nombre de modes d'énergie nulle, les difficultés techniques restent toujours insurmontées.

La dimension critique inférieure d_l est la dimension d'espace à partir de laquelle le système ne possède plus de transition de phase à température finie. Dans la transition ferromagnétique, elle vaut 1 si on considère des spins Ising et 2 si le nombre de composantes des spins m est supérieur ou égal à 2. Cette dimension d_l n'est pas exactement connue dans le cadre de la théorie champ moyen des verres de spin puisque l'on ne sait pas traiter le cas $d < 6$. Cependant quelques travaux placent d_l entre 2 et 3 (Franz et al., 1994)

e) Le champ moyen en dimension finie

Il est à noter que peu de résultats rigoureux sont disponibles pour les verres de spins en dimension finie. S'il a été montré que l'énergie libre est bien auto-moyenante (voir par exemple (Lifshitz et al., 1988)), la façon dont l'on doit par exemple définir les états purs est loin d'être triviale (Newman & Stein, 1997; Newman & Stein, 1998); il est ainsi sans doute nécessaire de définir la notion d'état pur en taille finie (Marinari et al., 2000) dont la cohérence mathématique est encore à démontrer (Newman & Stein, 2001).

La nature des prédictions champ moyen en dimension finie est détaillée dans un récent article de revue (Marinari et al., 2000). Elles sont claires en terme d'espace des phases ou de fonction de corrélation mais il est loin d'être évident de comprendre ce qu'elles signifient dans l'espace direct. L'idée centrale de la présentation de cette thèse est de comprendre les caractéristiques géométriques des verres de spins, ou encore leurs propriétés en termes d'excitations dans l'espace direct; nous seront donc amenés à une re-interprétation de ces prédictions.

Les principales sont les suivantes : 1) Le paysage en énergie est complexe et le $P(q)$, ainsi que le $P(q_{liens})$ qui est défini par le recouvrement en *liens* et non en *spins*, est non trivial; cela se traduit à température nulle par l'existence d'excitations d'énergie $O(1)$ de la taille du système. Nous montrerons de plus qu'exiger un $P(q_{liens})$ non trivial revient à imposer que les amas correspondant à ces excitations aient une surface de dimension fractale égale à celle de l'espace. 2) Les différents états sont relié par une structure ultramétrique, comme pour le modèle SK, et enfin 3) Le diagramme des phases est lui aussi non trivial puisque la phase verre de spins peut survivre en champ (ligne dAT) et qu'il peut exister une phase mixte où co-existent ferromagnétisme et ordre verre de spins. Nous montrerons plus loin comment interpréter ces prédictions en terme d'excitations dans l'espace réel.

– I.3 – Gouttelettes et théorie d'échelle

L'autre approche concurrente pour la description de la phase verre de spins en dimension finie est essentiellement constituée de quatre théories dans le même esprit : (i) le modèle des gouttelettes de Fisher et Huse (Fisher & Huse, 1986) (ii) la théorie de scaling ou loi d'échelle de Bray et Moore (Bray & Moore, 1986) (iii) l'approche de renormalisation de McMillan (McMillan, 1984) et enfin (iv) l'approche qui consiste à utiliser le schéma de renormalisation de Migdal-Kadanov (Young & Southern, 1977; Ney-Nifle & Hilhorst, 1992). Cette dernière approche sera approfondie au chapitre suivant, et nous décrirons donc ici le modèle des gouttelettes([8]) . L'image des verres de spins qui en émerge est qualitativement très différente de celle qui ressort des théories de champ moyen. La principale particularité de l'image champ moyen des verres de spin est la coexistence de très nombreux états dont les énergies libres sont quasi-dégénérées. Au contraire, la principale hypothèse de la théorie d'échelle est la présence d'un unique fondamental.

a) Modèle des gouttelettes

L'approche des gouttelettes de Fisher et Huse est la suivante: plaçons nous à température basse ou nulle, et prenons pour hypothèse que nous avons un fondamental unique, à un renversement des spins près. Si l'on considère maintenant un amas connecté de spins, que nous appellerons une *gouttelette*, son énergie -ou son énergie libre si l'on est à basse température- sera forcement positive puisque nous étions dans le fondamental. Une gouttelette de taille caractéristique l contient donc environ l^d spins.

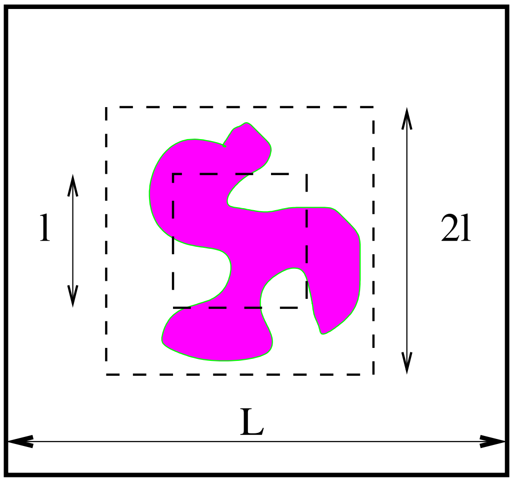


Fig. I–6 – *Représentation schématique d'une gouttelette de taille l à la Fischer-Huse. Une gouttelette est l'objet connexe de plus faible énergie compris entre un cube de taille l est de taille $2l$.*

De façon plus précise, une gouttelette de taille l est l'objet connexe de faible énergie compris dans un (hyper)-cube de taille $2l$ et non compris dans un (hyper)-cube de taille l(voir I–6). La seconde hypothèse, très naturelle, est que la valeur typique de l'énergie, ou de l'énergie libre, nécessaire pour retourner cette gouttelette est en loi de puissance, i.e. $F_L \sim L^\theta$.

([8])On pourra aussi se reporter à (Fischer & Hertz, 1991) pour une très belle présentation de la théorie de scaling.

a.1) L'exposant θ dans les théories de scaling

Le rôle joué par l'exposant θ, appelé en anglais *stiffness exponent* (exposant de rigidité) dans la théorie est primordial. Nous verrons plus loin comment il a été estimé numériquement pour les modèles d'Edwards et Anderson. On peut le voir comme un mesure de la robustesse de la phase verre de spins aux perturbations. En gros, soit l'énergie des gouttelettes augmente avec leurs tailles et les fluctuations thermiques ne pourrons *pas* détruire la phase verre de spins, ou bien l'énergie décroît avec la taille, et dans ce cas des fluctuations thermiques infinitésimales vont pouvoir exciter des objets de tailles arbitraires et vont détruire la phase ordonnée. Voyons comment cela marche ...

- **Dans un ferromagnétique**

Dans un ferromagnétique d'Ising, le fondamental est l'état où tous les spins sont dans la même direction. Dans ce cas, retourner une gouttelette de taille l va coûter une énergie de surface (ce sont les spins sur les bords qui vont coûter de l'énergie), souvent estimée par les calculs de paroi de domaine dans un système de taille finie. Si l'on contraint les L^{d-1} spins d'une face à pointer dans la direction opposée à celle de l'autre face, il apparaît une paroi de domaine dont l'augmentation d'énergie peut s'écrire :

$$\Delta E(L) \sim J L^{d-1} \tag{I.3–1}$$

où J est la constante de couplage. Si l'exposant $d-1$ est positif, l'énergie nécessaire pour retourner un domaine de taille L croît avec L. Il n'est donc pas favorable de créer de telles excitations, et la phase ordonnée peut subsister à température non nulle. Cette approche prédit donc (avec raison) que la dimension critique inférieure des ferromagnétique Ising est $d_l = 1$([9]).

- **Dans un verre de spins**

Dans les verres de spin, c'est McMillian (McMillan, 1983) qui a le premier utilisé cette approche pour mesurer θ. Si l'on considère l'état fondamental à température nulle d'un verre de spins de taille L en dimension d, et qu'on lui fait subir le même type de contrainte, on va créer un mur de domaine séparant un domaine où les spin sont dans le fondamental et un domaine ou les spins sont renversés par rapport au fondamental. On s'attend alors à une énergie de la forme $E = \Upsilon L^{\theta}$, avec un exposant θ plus petit que dans le cas ferromagnétique (on peut même démontrer que $\theta \leq (d-1)/2$). De plus, comme la paroi doit ajuster sa forme pour minimiser son énergie, on s'attend aussi à ce que sa surface ait une dimension fractale $d_s > d-1$. Notons aussi que l'un des avantages de cette méthode, c'est qu'elle respecte la symétrie de jauge de l'Hamiltonien original, et qu'ainsi le mur de domaine ne dépend *pas* de l'endroit ou l'on impose le retournement (ce qui est agréable quand on travaille en condition aux limites périodiques), bien que cette qualité soit brisée par le champ magnétique.

A travers ces considérations se cache l'hypothèse (naturelle dans le cadre de la renormalisation) qu'il existe *une et une seule* branche d'excitation dans les verres de spins, et qu'ainsi toutes les méthodes pour mesurer l'exposant θ donnerons le même résultat. Ce point est loin d'être évident, nous y reviendrons tout au long de cette thèse, de même que reviendrons aussi sur les calculs numériques destinés à mesurer θ. Pour le moment, acceptons le consensus comme quoi que θ est bien défini par θ_{dw}; Les mesures les plus récentes pour le modèle gaussien donnent (Hartmann & Young, 2001; Carter et al., 2002)

([9])Et la même approche nous dit que les modes de Goldstones vont détruire la phase ordonnée à $d = 2$ pour des spins XY ou Heiseinberg.

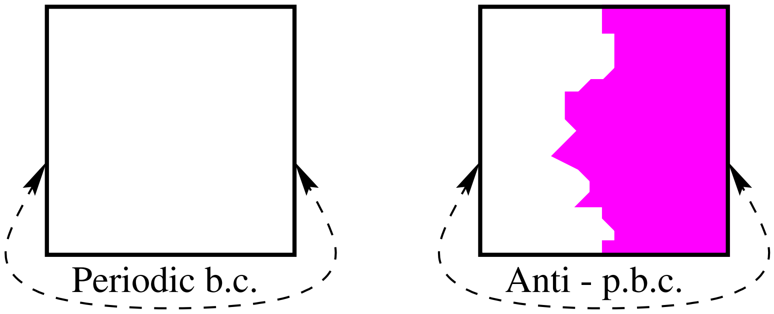


FIG. I–7 – *Principe des calculs numériques "Periodic-AntiPeriodic" pour generer une paroi de domaine.*

$\theta_{dw} = -0.282(3)$ en $d = 2$, tandis qu'en $d = 3$ la valeur la plus récente est alors $\theta_{dw} = 0.23(3)$ (Palassini & Young, 1999*b*), alors qu'une d'approche différente des effets de tailles finie penche plutôt pour $\theta_{dw} = 0.27(3)$. Le tout place la dimension critique inférieure entre $2 < d_l < 3$ dans ce modèle. Enfin, dans le modèle discret, il semble bien qu'a deux dimension $\theta_{dw} = 0$ (Hartmann & Young, 2001; Houdayer, 2001) et que la dimension critique inférieure soit exactement 2, alors que les mesures en $d = 3$ sont consistantes avec le résultat gaussien ($\theta_{dw} = 0.19(3)$ (Hartmann, 1999*b*)). Il est surprenant que d_l soit différent dans système discret et le système continu, et nous reviendrons la dessus des le chapitre suivant.

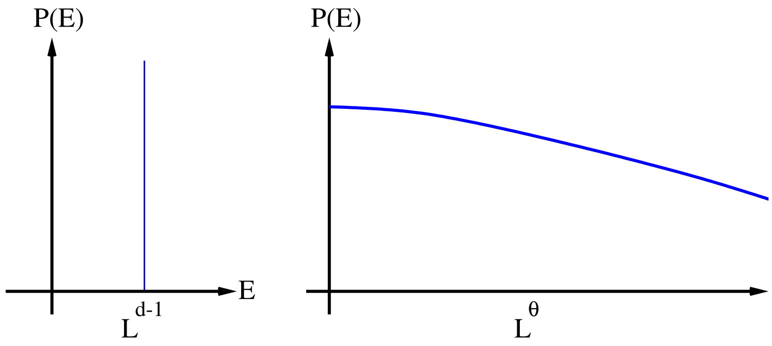


FIG. I–8 – *Probabilité d'obtenir une excitation d'énergie E à une taille l donnée dans les ferromagnétiques et dans les verres de spins selon le modèle des gouttelettes. Dans le cas d'un verre de spins, la probabilité d'obtenir une excitation d'énergie nulle décroît en $L^{-\theta}$, contrairement au cas ferromagnétique, même désordonné, où cette probabilité est nulle.*

a.2) Scaling des excitations

Dans la théorie de scaling le comportement de la fréquence des événements rares est très différente de celle d'un ferromagnétique([10]), est très importante. En effet, l'hypothèse de scaling est que la distribution des énergies libres des gouttelettes de taille L se comporte, pour L grand, comme

$$\rho_L(F_L) = \frac{1}{\Upsilon L^\theta}\bar{\rho}\left(\frac{F_L}{\Upsilon L^\theta}\right) \tag{I.3–2}$$

([10])À ce titre, l'expression "ferromagnétique caché" que l'on entend parfois pour qualifier la théorie des gouttelettes me semble un peu abusive et inappropriée .

L'hypothèse suplémentaire fondamentale pour obtenir le comportement verre de spins est un $\bar{\rho}(0)$ prenant une valeur finie. Ainsi, et cela est la grande différence avec le cas ferromagnétique, il est possible de trouver des excitations de taille L et d'énergie $O(1)$, mais leur fréquence décroît comme $1/L^{\theta}$, alors qu'elle est strictement nulle (ou encore décroit exponentiellement) dans un système ferromagnétique, même désordonné (voir I–8). Cela permet d'obtenir une susceptibilité verre de spins infinie comme dans le champ moyen et contrairement aux modèles ferromagnétique. En effet, la susceptibilité verre de spins définie comme

$$\frac{\chi_{SG}}{N} =< q^2 > - < q >^2 \tag{I.3–3}$$

peut s'obtenir par le calcul de la fonction de corrélation

$$G_{SG}(i,j) =< S_i S_j >^2 - < S_i >^2 < S_j >^2 \tag{I.3–4}$$

puisque

$$\frac{\chi_{SG}}{N} = \sum_{ij} \frac{G_{SG}(i,j)}{N^2}. \tag{I.3–5}$$

Or, le calcul de $\sum_j G_{SG}(i,j)$ nous donne ξ^d, où l'on définit ξ comme une "longueur de corrélation" dans la fonction de corrélation (c'est un résultat intuitif qui se comprend facilement en considérant que $\sum_j G_{SG}(i,j) = \int r^{d-1} e^{-\frac{r}{\xi}} dr = \xi^d$), d'ou $\frac{\chi_{SG}}{N} = \frac{\xi^d}{N}$. On peut finalement identifier cette "longueur de corrélation" à la taille moyenne $< V >$ des gouttelettes que l'on peut retourner :

$$\chi_{SG} = < V >. \tag{I.3–6}$$

Ainsi un $< V >$ divergent quand $N \to \infty$ correspond à l'apparition d'une phase verre de spins (cette quantité diverge à la fois en champ moyen et en théorie des gouttelettes) C'est ainsi que ce qui *fait* la théorie des gouttelettes, notamment la phase verre de spins et sa susceptibilité infinie, c'est bien le fait que $\bar{\rho}(0)$ soit fini.

b) Température finie et énergie libre

Une autre subtilité de la théorie des gouttelettes est que, si l'on travaille à température finie, les gouttelettes de spins sont difficiles à définir. Basée sur des idées de point fixe dans un flot de renormalisation, la théorie suppose que le scaling I.3–2, faisant alors intervenir un $\Upsilon(T)$([11]), est toujours valable quand $T < T_c$; la susceptibilité restant infinie. On peut avoir une bonne représentation de l'image gouttelettes en imaginant un état fondamental "renormalisé" à toutes températures, en travaillant avec des aimantations et avec des gouttelettes ayant maintenant une énergie libre qui varie comme L^{θ} (plutôt qu'une énergie).

Le point important est que ce $F \sim L^{\theta}$ est obtenue par des subtils effets de compensations entre l'énergie et l'entropie de la gouttelette. De façon plus précise, si on prend une gouttelette à température T, son énergie libre $F = E - TS$ sera d'ordre L^{θ} bien que son énergie et son entropie seront d'ordre $L^{d_s/2}$. Un modèle où ce comportement me semble particulièrement explicite est le Random-energy Random-entropy model (Krzakala & Martin, 2002*b*) où la première excitation à température finie a une énergie libre d'ordre 1 (ou $N^{\theta/d}$) bien que son énergie et son entropie soit d'ordre $\sqrt{N}$. Ainsi le fait de passer

([11])Où $\Upsilon(T)$ s'annule à Tc.

en température finie ne change rien au scaling des énergies I.3–2, bien que le "fondamental effectif" change completement quand on change la température (une propriété appellée *chaos en température*). Des que l'on est *sous* la température critique, on a donc une phase avec une longueur de corrélation ξ infinie, et avec un flot de renormalisation qui vous ramène au point fixe à $T = 0$ (Puisque $\xi \sim \infty$ la phase verre de spins est toujours critique)([12]).

c) Absence de phase verre de spins en champ

Il est facile de se rendre compte que la phase verre de spins est instable en champ magnétique par l'utilisation de l'argument Imry-Ma (Imry & Ma, 1975). En effet, Une gouttelette de taille L a une aimantation de l'ordre de $L^{d/2}$, tandis que l'énergie de domaine est toujours en L^{θ}. Si $\theta < d/2$, un champ magnétique va donc retourner les gouttelettes favorables, et ainsi détruire l'ordre à longue distance. En utilisant l'inégalité $\theta < (d-1)/2$, on voit qu'en toutes dimensions l'état verre de spins est instable en champ magnétique. Notons que cet argument semble plutôt indiquer que l'application d'un champ magnétique *change* la phase à $h = 0$ plutôt qu'elle ne la détruit, mais l'absence de phase verre de spins en champ en théorie des gouttelettes peut être confirmée par les calculs sur réseaux de Migdal-Kadanoff (se reporter par exemple à (Fischer & Hertz, 1991)).

d) La dynamique

La dynamique dans le cadre du modèle des gouttelettes a été étudiée par (Fisher & Huse, 1986; Fisher & Huse, 1988) et fournit un cadre théorique élaboré de la phase verre de spins hors-équilibre. Basée sur un ansatz naturel sur la distribution des barrières d'énergies, cette théorie fait apparaître une longueur dépendante du temps $\ell(t)$ séparant les gouttelettes plus petites que $\ell(t)$, qui sont équilibrées, et celles plus grandes, qui sont gelées. Les gouttelettes de tailles ℓ ayant un temps de relaxation $\propto \exp\left(cst\beta L^{\psi}\right)$([13]) on aura $\ell(t) \propto [T\ln(t/\tau_0)]^{1/\psi}$([14]). La dynamique activée, car dominée par les gouttelettes de faibles énergies et de grandes tailles, est alors extremement lente, comme il se doit dans les systèmes vitreux, la fonction d'autocorrélation spin-spin étant $\propto 1/\ell(t)^{\theta} \propto 1/\left[T\ln(t/\tau_0)\right]^{\theta/\psi}$, ce qui rend impossible l'observation de l'état d'équilibre à des temps accessibles expérimentalement.

Il a aussi été suggéré récemment (Barrat & Berthier, 2001) que la relation statique-dynamique donnant la température effective dans le FDT (voir section c.6) dans I.2) est valable en taille finie, ainsi que dans les expériences, pourvu que l'on interprète un système avec un âge τ comme étant constitué par une collection de sous-systèmes équilibrés de taille $\ell(\tau)$. Dans ce cas la nature des excitations, même en taille finie, est importante pour la compréhension des expériences où cette taille semble être $O(100)$. De même les corrections de tailles finies au modèle des gouttelettes pourraient elles aussi être pertinentes pour la description de la dynamique, nous donnant une motivation suplémentaire pour les études de la statique, même à des tailles relativement petites.

([12])Cela est vrai aussi en champ moyen, mais dans ce cas il se produit une nouvelle division dans l'arbre ultramétrique à toute température; il y a en quelque sorte une transition de phase à toute température.

([13])Bien qu'avec l'approche de scaling à la Migdal-Kadanoff ψ et θ soit égaux, Fisher et Huse laissent ouverte la possiblité qu'ils soient différents dans un système réel.

([14])Dans cette image on a donc une sorte de croissance de domaines corrélés, proche de celle des ferromagnétiques bien que la nature des domaines et de la loi de croissance soient très différentes. De plus on s'attend à une dépendance chaotique en température permetant des effets non triviaux lorsque l'on change T.

– I.4 – Résumé du chapitre et nature de la controverse

Si d'autres approches ont été proposées (voir par exemple (Binder & Young, 1986) pour une revue), les deux principaux modèles concurrents pour décrire les verres de spins sont le modèle champ moyen et le modèle des gouttelettes. Nous allons dans cette section rappeler les principales caractéristiques et prévisions de ces modèles.

a) Nature de la phase basse température

• Champ moyen

D'après la théorie de champ moyen, la phase basse température des verres de spins est caractérisée par l'existence de vallées macroscopiquement différentes (dont les configurations de spins diffèrent par un nombre extensif de spins), lié par une structure ultramétrique, et dont la différence d'énergie libre est $O(1)$ (voir l'image I–9. Diminuer la température dans la phase verre de spins crée de façon continue une nouvelle fragmentation de l'espace des phase en des vallées plus petites avec un recouvrement de plus en plus grand. L'existence de nombreux états implique une structure non triviale de la fonction $P(q)$ qui décrit la statistique du recouvrement entre ces différents états (cf figure (I–4).

• Gouttelettes

Le modèle des gouttelettes prévoit par contre l'existence d'un seul état fondamental (avec son symétrique) et donc une fonction $P(q)$ triviale comme dans le cas ferromagnétique (cf figure (I–4). Le modèle prévoit l'existence d'excitations de grande taille, les gouttelettes, dont le temps de vie est très long, et qui sont responsables de la dynamique très lente des verres de spins. De façon imagé, on peut retenir la différence entre ces modèles en consultant la représentation de l'espace des phases(voir fig.I–9

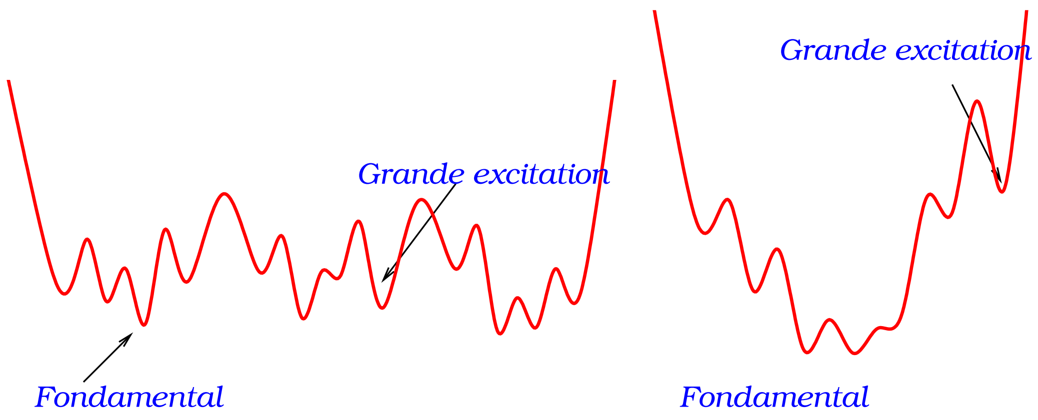


FIG. I–9 – *Paysages d'énergie prévus en dimension finie par le modèle champ moyen (à gauche avec des grandes excitations dont l'énergie est d'ordre 1) et par la théorie des gouttelettes (à droite où les excitations ont une énergie qui augmente avec leurs tailles).*

b) Effet d'un champ magnétique

• Champ moyen

Ce modèle prévoit l'existence d'un état verre de spins caractérisé par la brisure de la symétrie des répliques sous champ magnétique. Dans le diagramme des phases, une ligne dAT sépare les deux phases, voir fig.I–10.

• Gouttelettes

Au contraire, dans ce modèle, un champ magnétique détruit totalement la phase verre de spins. Pas de ligne dAT ici, toute transition apparente expérimentalement ne serait qu'artificielle et due à des effets dynamiques.

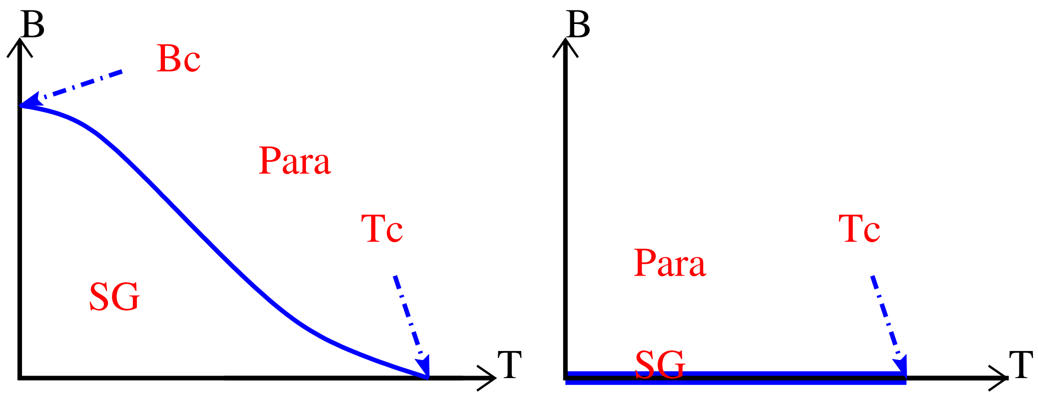


FIG. I–10 – *Diagrammes des phases prévus en dimension finie par le modèle champ moyen (à gauche avec sa phase verre de spins en champ) et par la théorie des gouttelettes (à droite).*

c) Effet d'un terme ferromagnétique

• Champ moyen

En champ moyen, en faisant varier la concentration de liens ferromagnétiques, on peut obtenir une phase ou la RSB co-existe avec une magnétisation positive. Cette phase mixte est prévue à la fois en SK (voir l'identification des équations I.2–19 et I.2–20) et en connectivité finie (Kwon & Thouless, 1988).

• Gouttelettes

La théorie prédit qu'il ne peut exister, en même temps, un ordre ferromagnétique et un ordre verre de spins (voir par exemple le diagramme de phase dans (Young & Southern, 1977)).

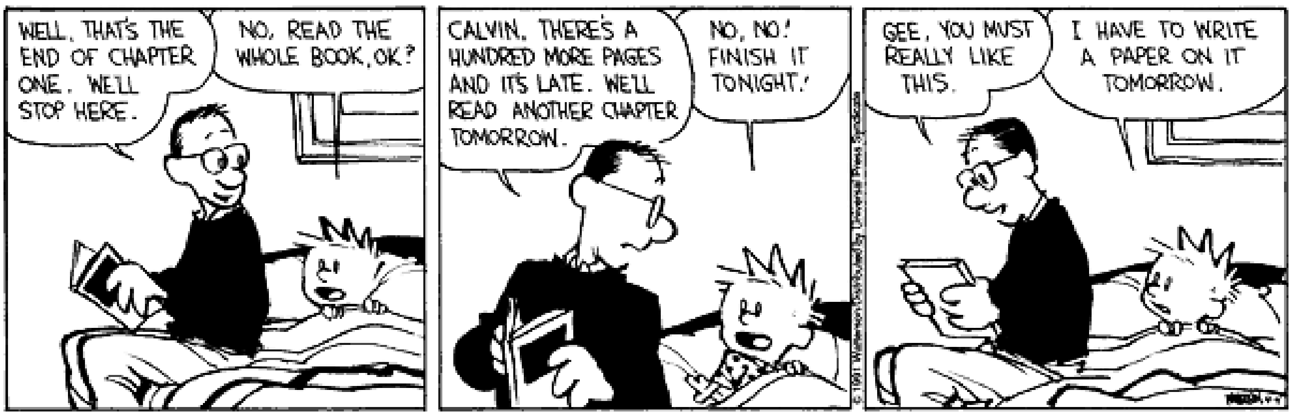
d) États des connaissances

Je rappelle ici rapidement les résultats numériques connus pour l'étude du système 3d EA. Je n'évoquerai ici que brièvement le cas $2d$ bien qu'il y aient là aussi des questions très intéressantes sur lesquelles nous reviendrons plus tard.

- **Transition de phase et dimension critique inférieure**
  Il semble exister maintenant un consensus *en faveur* de l'existence d'une transition de phase à température finie en $d = 3$ pour les verres de spins. En particulier les simulations Monte-Carlo les plus récentes (voir (Marinari, Parisi & Ruiz-Lorenzo, 1998) pour une revue, ainsi que (Palassini & Caracciolo, 1999; Palassini & Caracciolo, 2000)) me semble particulièrement convaincantes. On peut aussi citer une approche de groupe renormalisation plus originale (Parisi et al., 2001) qui semble elle aussi indiquer clairement l'existence d'une transition de phase. En $4d$, les évidences numériques sont encore plus fortes (Marinari, Parisi & Ruiz-Lorenzo, 1998).
  Une question reste cependant problématique : quel est la dimension critique inférieure d_l ? Des récentes simulations (Houdayer, 2001; Hartmann & Young, 2001) suggèrent que d_l vaut exactement 2 pour les systèmes $\pm J$ et serait supérieur à 2 pour les systèmes continus, ce qui serait assez surprenant. Ce point sera évoqué dans le chapitre suivant, on l'on montrera comment d_l possède déjà un comportement très surprenant dans les modèles Migdal-Kadanoff.
- **Nature de la phase ordonnée**
  Cette question est toujours sujette à de vives controverses entre les tenants du champ moyen et ceux des gouttelettes. La plupart des simulations Monte-Carlo semblent être plutôt en faveur de l'existence d'un $P(q)$ non trivial comme prédit par le champ moyen (la littérature est très abondante, on se réfèrera aux articles de revues (Marinari, Parisi & Ruiz-Lorenzo, 1998; Marinari et al., 2000)), mais les défenseurs de la théorie des gouttelettes expliquent, simulations à l'appui, que l'influence du point critique et les tailles réduites expliquent ces résultats (Drossel et al., 2000). Ainsi, la nature de la phase verre de spins et même l'interprétation des simulations est encore un sujet de débat. Ce point très délicat sera abordé en détail dans le chapitre IV.
- **Diagramme des phases**
  La nature du diagramme des phases, pour peu que l'on admette l'existence d'une transition de phase en température, est elle aussi problématique. Même du point de vue expérimental, il n'est pas clair s'il y a ou non une phase verre de spins quand un champ magnétique est appliqué (Ito & Katori, 1994; Mattsson et al., 1995)([15]). Cela reste une question ouverte, ce problème étany aussi très difficile numériquement (Houdayer & Martin, 1999*a*; Houdayer & Martin, 2000*b*; Marinari et al., 1999).
  Une autre question, moins abordée numériquement bien qu'importante expérimentalement (Vincent et al., 2000; Dupuis et al., 2002), est de savoir si une phase ferromagnétique peut co-exister avec un ordre verre de spins. Ces questions seront abordées dans le chapitre V, qui concerne le diagramme des phases.
- **Dynamique, chaos et rajeunissement**
  La dynamique des verres de spins en dimension finie est encore sujette à d'intenses débats tant expérimentaux que numériques. En particulier il n'est pas clair si les lois d'échelle des gouttelettes suffisent à expliquer toutes les observations expérimentales; d'un autre coté l'ultramétricité

([15])Très récemment, des manips sur des échantillons Heisenberg semblent montrer la présence d'une phase verre de spins en champ (Petit et al., 1999; Petit et al., 2002) mais qui semble disparaître quand on augmente l'anisotropie pour se rapprocher d'un comportement Ising (Merci à Dorothée Petit pour ses précisions).

dynamique prévue par le champ moyen ne semble pas être observé (Berthier, Barrat & Kurchan, 2001). Enfin, dans l'interprétation des expériences de cycle de température, on entend souvent parler de *chaos* en température pour interpréter le phénomène de rajeunissement. Savoir si effectivement la dépendance de l'état d'équilibre est chaotique avec la température est toujours une question ouverte. Alors que le modèle des gouttelettes prédit l'existence du chaos en température pour les verres de spins (Fisher & Huse, 1986; Banavar & Bray, 1987; Ney-Nifle & Hilhorst, 1992), ainsi que pour d'autres systèmes vitreux comme le polymère dirigé en milieu aléatoire (Fisher & Huse, 1991; Sales & Yoshino, 2002*b*), les prédictions du champ moyen ne sont pas claires. Si les premiers travaux conduisaient à la présence de chaos (Kondor, 1983; Kondor & Véguö, 1993), des travaux plus récents vont contre ces résultats -par exemple des calculs analytiques autour de T_c dans le modèle SK (Rizzo, 2001). De plus, d'un point de vue numérique, les simulations Monte-Carlo ne trouvent de chaos ni en $3d$ ni pour les modèles champ moyen (Billoire & Marinari, 2000; Billoire & Marinari, 2002). Ce point sera abordé au chapitre III.



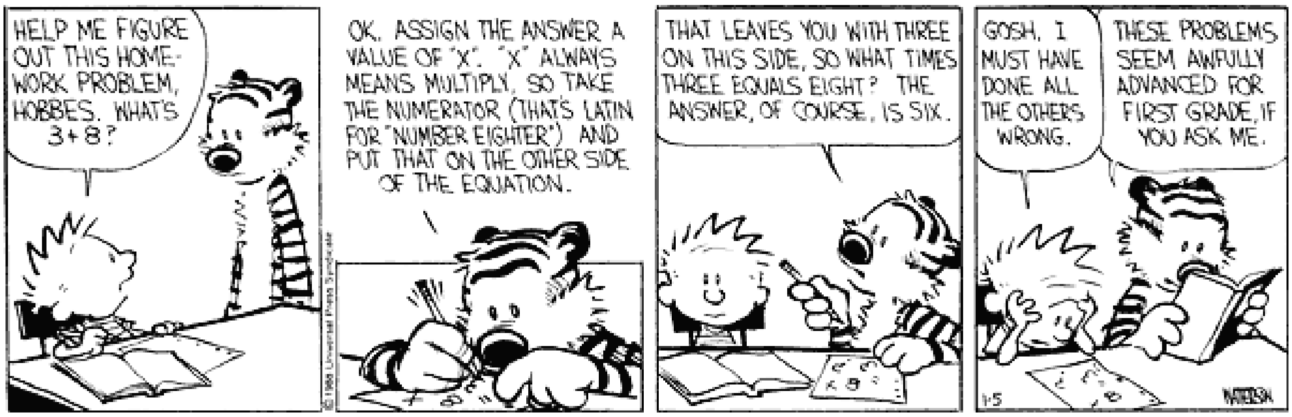
Chapitre II

Verres de spins à température nulle et statistique des extrêmes

L'UN DES OBJECTIFS de cette thèse est la compréhension du comportement des fondamentaux et des excitations de basse énergie dans les verres de spins en dimension finie. Il est clair qu'avant de se lancer dans cette tâche, une bonne compréhension du comportement de ces objets dans les modèles canoniques est requise; c'est le premier but de ce chapitre.

Nous allons étudier ici, par des moyens numériques et analytiques, le comportement des fondamentaux et des excitations des verres de spins en champ moyen et sur les réseaux hierarchiques (où la physique est proche de celle du modèle des gouttelettes). De plus, cela nous permettra d'étudier les problèmes de statistiques des extrêmes, de discuter des liens avec des modèles à énergies aléatoires (dont une variante sera présentée et étudiée analytiquement) et le problème du polymère dirigé en $(1+1)d$.

Enfin, nous aborderons finalement les mêmes questions pour le modèle d'Edwards-Anderson en dimensions 2 et 3.



Il faut construire à partir des fondamentaux.
Aimé Jacquet; *Les yeux dans les Bleus*

En physique quantique ou statistique, on appelle "fondamental" d'un système l'état de plus basse énergie. Sa connaissance apporte souvent des informations très pertinentes sur le système et sur ses symétries; par exemple dans les modèles ferromagnétiques les fondamentaux sont les configurations où les spins sont alignés dans la même direction. De même dans les théories quantiques associées au champ (bosonique) de Higgs, les fondamentaux brisent la symétrie associée à la phase ϕ. En règle générale, connaître le comportement à température infinie et à température nulle est toujours utile pour l'intuition du physicien qui peut alors spéculer sur les symétries brisées et les transitions de phases.

Dans ce chapitre, nous allons étudier les propriétés de ces états fondamentaux dans différents modèles de verres ou de verres de spins. Savoir en particulier à quel point les propriétés des fondamentaux d'un système se ressemblent pour différentes réalisations du désordre, connaître la dépendance de leurs propriétés avec la taille ainsi que la recherche de lois universelles sera au cœur de la discussion. De plus, pour les systèmes désordonnés, les fondamentaux peuvent être considéré comme des états extrêmes de distributions statistiques, pour lesquels peu de choses sont connues alors que leur importance est primordiale (Bouchaud & Mézard, 1997).

De façon générale, les exposants et les corrections aux lois d'échelles jouent un rôle important dans les systèmes de physique statistique. Si on considère par exemple la dépendance des quantités thermodynamiques avec la taille L du système (à grand L), les corrélations seront à courte portée dans une phase paramagnétique et les mesures convergeront très rapidement, de façon exponentielle, vers leurs valeurs thermodynamiques. Dans les phases vitreuses "à la" verre de spins par contre, les corrélations sont à longues portées, et donc les corrections de taille finie seront importantes. Ainsi les quantités extensives (comme l'énergie ou l'énergie libre) convergerons vers leurs valeurs limites avec une loi de puissance et un exposant de *décalage* (en anglais *shift*). De façon plus précise, on peut définir les quantités qui vont nous intéresser pour l'étude de ces fondamentaux, et plus particulièrement trois exposants. Les deux premiers seront associés à l'énergie du fondamental et seront défini par :

$$\overline{E} = e_o L^d + \beta L^{\Theta_s} + \dots \qquad \text{(II.0–1)}$$

$$\sqrt{\overline{E^2} - \overline{E}^2} = \gamma L^{\Theta_f} + \dots \qquad \text{(II.0–2)}$$

Ainsi Θ_s (s pour *shift*) nous donne les corrections de taille finie à l'énergie du fondamental, et Θ_f (f pour *fluctuation*) la variation de cette énergie d'échantillon à échantillon. On utilise un grand Θ puisque le petit θ est d'ordinaire réservé aux énergies des excitations, et on alors définira ce dernier par l'échelle d'énergie $O(L^\theta)$ de l'excitation la plus basse de la taille du système. Les questions que l'on peut alors se poser sont : ces exposants sont-t-ils indépendants ? Certains sont-ils égaux entre eux ? Plus généralement, on peut aussi se demander combien d'exposants sont nécessaires pour décrire un système désordonné.

— II.1 — Modèles simples et statistiques des extrêmes

Pour répondre à ces questions, nous allons considérer tout d'abord des modèles simples. Le schéma idéal de la transition vitreuse est donné par l'image d'un système qui a un grand nombre d'états disponibles à haute température mais seulement un nombre fini en dessous d'une certaine température critique. Le modèle le plus simple permettant de comprendre et d'illustrer ce comportement est le modèle à énergie aléatoire de Derrida (Derrida, 1980; Derrida, 1981) que nous allons présenter dans la prochaine section, ainsi qu'un modèle similaire plus général mimant le comportement énergétique des modèles de gouttelettes (Krzakala & Martin, 2002*b*). Nous allons voir que l'étude des statistiques extrêmes sur ces modèles, qui a été initiée par (Bouchaud & Mézard, 1997), ainsi que d'autres résultats issus de la théorie des polymères dirigés en milieu aléatoire, suggèrent d'intéressantes égalités entre exposants *a priori* non reliés.

a) Le REM : Modèle à énergie aléatoire

Le modèle à énergie aléatoire (en anglais *Random Energy Model* (REM)), proposé et résolu par Derrida (Derrida, 1980; Derrida, 1981), est le modèle le plus simple de verre de spins et de transition vitreuse mais il capture déjà beaucoup du comportement des verres. Je vais reproduire ici les résultats dont nous aurons besoin.

a.1) Le modèle et sa transition de phase

Le REM est défini de la façon suivante : considérons 2^N états, chacun avec une énergie aléatoire E_i tirée dans une distribution avec une loi de probabilité gaussienne de moyenne nulle et d'écart type $\sigma = \sqrt{\frac{N}{2}}$. Plus précisement, on a :

$$P(E) = \frac{\exp\left(-\frac{E^2}{N}\right)}{\sqrt{N\pi}}. \tag{II.1–1}$$

Comme le remarque Derrida, la densité de niveaux dans un intervalle d'énergie dépend de façon critique de l'énergie à grand N. En effet, la densité de niveau possédant une énergie E est

$$\rho(E) = 2^N \frac{\exp\left(-\frac{E^2}{N}\right)}{\sqrt{N\pi}} = \frac{\exp\left(N\ln 2 - \frac{E^2}{N}\right)}{\sqrt{N\pi}}. \tag{II.1–2}$$

Il convient donc de distinguer le cas $|E| > |E_0|$ et le cas $|E| < |E_0|$ où

$$E_0 = -N\sqrt{\ln 2}. \tag{II.1–3}$$

Si on se restreint aux valeurs négatives, et que l'on utilise la densité d'énergie $e = E/N$, on voit que si $e < e_0 = -\sqrt{\ln 2}$ il n'y a aucun niveau avec cette densité d'énergie à la limite thermodynamique tandis que si $e > e_0$ cette densité augmente exponentiellement. On peut aussi déduire l'entropie à partir de II.1–2 : Si $E < E_0$, $S(E) = 0$ et si $E > E_0$ alors $S(E) = N\ln 2 - \frac{E^2}{2{\sigma_E}^2}$.

Ce modèle présente donc le prototype même de la transition vitreuse. En effet, à l'équilibre thermodynamique la température correspondant à une énergie E est donnée par $T^{-1} = \partial S/\partial E$. Ainsi, tant que T est plus grand que T_0, défini par $T_0^{-1} = \partial S/\partial E$ évaluée en $E = E_0$, le nombre de niveaux accessibles est exponentiellement grand en N. Mais quand T devient plus petit que T_0, le système n'accède qu'à un nombre fini de niveaux, ceux avec l'énergie minimale (voir fig II–1). Un calcul rapide montre que

$$T_c = \frac{1}{2\sqrt{\ln 2}}. \tag{II.1–4}$$

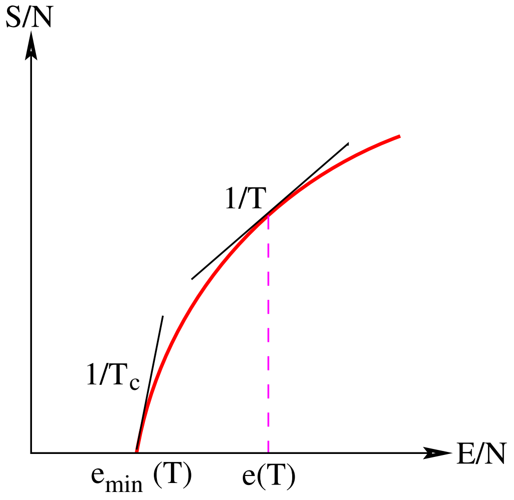


FIG. II–1 – *Logarithme du nombre de configurations (entropie configurationnelle) en fonction de l'énergie dans le REM. En dessous d'une valeur critique, il n'y a plus d'états et le système reste piégé dans l'état d'énergie la plus basse. La tangente donne l'inverse de la température. Ce scénario qui apparaît dans le REM est la transition vitreuse idéale*

a.2) Énergie du fondamental et correction de taille finie

Pour obtenir la dépendance de l'énergie du fondamental avec la taille, on peut faire un calcul rapide de statistique des extrêmes: si on a k tirages aléatoires dans une distribution $P(y)$, la valeur typique X de la valeur minimale est donnée, pour les grandes valeurs de k, par

$$\int_{-\infty}^{X} P(y)dy \sim \frac{1}{k}. \tag{II.1–5}$$

Dans notre cas où $P(y)$ est une gaussienne et où on cherche la valeur minimale E_0, cette équation s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{\pi N}} \int_{-\infty}^{E_0} e^{-\frac{y^2}{N}} dy = \frac{1}{2^N}. \tag{II.1–6}$$

Par le changement de variable $\frac{y}{\sqrt{N}} \to t$ il vient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{E_0}{\sqrt{N}}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2^N} \tag{II.1–7}$$

soit en utilisant le développement classique de la fonction erreur $\int_x^\infty e^{-t^2}dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x} + O(\frac{e^{-x^2}}{x^3})$

$$\frac{e^{-\frac{E_0^2}{N}}}{-2\sqrt{\pi}\frac{E_0}{\sqrt{N}}} + O\left(\frac{e^{-\frac{E_0^2}{N}}}{\left(\frac{E_0}{\sqrt{N}}\right)^3}\right) = \frac{1}{2^N}. \tag{II.1–8}$$

Il vient alors au premier ordre

$$-\frac{E_0^2}{N} - \ln(-2E_0) \sim \frac{\ln \pi}{2} - \frac{\ln N}{2} - N \ln 2. \tag{II.1–9}$$

Si l'on néglige tout d'abord le terme en $\ln(-2E_0)$, on trouve que le terme dominant de E_0 est $-N\sqrt{\ln 2}$ et donc si on fait l'approximation qui consiste à remplacer $\ln(-2E_0)$ par $\ln\left(2\sqrt{\ln 2}\right) + \ln N$ on trouve

$$-\frac{E_0^2}{N} - \ln(2\sqrt{\ln 2}) \sim \frac{\ln(\pi)}{2} + \frac{\ln(N)}{2} - N\ln 2 \qquad \text{(II.1–10)}$$

il vient alors rapidement que

$$E_0 = -N\sqrt{\ln 2} + \frac{\ln N}{4\sqrt{\ln 2}} + cst + O(\frac{\ln N}{N}). \qquad \text{(II.1–11)}$$

Le résultat exact à été obtenu par (Derrida, 1981); il est identique mis à part la valeur de la constante

$$E_0 = -N\sqrt{\ln 2} + \frac{\ln N}{4\sqrt{\ln 2}} + \frac{\ln(4\pi\ln 2) + 2\Gamma'(1)}{4\sqrt{\ln 2}} + O(\frac{\ln N}{N}). \qquad \text{(II.1–12)}$$

Le résultat principal est que les corrections de taille finie sont logarithmiques, et qu'ainsi, d'après notre définition de Θ_s(Eq. II.0–1), on a $\Theta_s = 0$.

a.3) Énergie d'excitation et exposant θ

Il est aussi facile d'obtenir une idée de la différence entre l'énergie du fondamental et celle de la première excitation. Si l'on fait en effet 2^N tirages successifs et que l'on considère finalement la liste des valeurs tirées les plus basses, la valeur minimale est celle du fondamental tandis que celle de la première excitation est la deuxième "meilleure" valeur i.e. la valeur qui était considérée comme la plus extrême avant que l'on ne tire celle qui est effectivement le fondamental. Or, si on fait n tirages et que l'on garde la valeur tirée la plus basse, combien de nouveaux tirages devons nous effectuer avant de trouver une valeur encore plus basse ? Il est clair qu'après encore n nouveaux tirages, l'on a une chance sur deux de trouver une valeur plus basse que la première ! Ainsi la seconde valeur la plus basse quand on fait $2n$ tirages aléatoires est en moyenne la meilleure valeur obtenue après n tirages. Si on a fait 2^N tirages, la seconde meilleure valeur était donc celle obtenue après 2^{N-1} tirages; cela permet de calculer la densité d'énergie de la première excitation de la même manière que nous avons calculé celle du fondamental et l'on trouve

$$(N-1)\ln 2 = \frac{E_{excit}^2}{N} \qquad \text{(II.1–13)}$$

soit

$$E_{excit}^2 = (N^2 - N)\ln 2 \qquad \text{(II.1–14)}$$

soit encore en développant E_{excit}

$$E_{excit}^2 = E_0^2 + 2E_0\Delta(E) = (N^2 - N)\ln 2 \qquad \text{(II.1–15)}$$

d'où finalement

$$\Delta(E) = E_{excit} - E_0 \sim 2\sqrt{\ln 2}. \qquad \text{(II.1–16)}$$

Ainsi le gap est d'$O(1)$, et indépendant de N, comme dans les modèles champ moyen de verre de spins avec brisure de la symétrie des répliques (Mézard et al., 1987). De fait, le REM peut être considéré comme la limite à p infini des modèles de p-spins (Derrida, 1981; Gross & Mézard, 1984), pour lesquels on sait qu'il y a effectivement brisure de la symétrie des répliques (à un pas de brisure) et donc, si l'on considère la définition de θ des modèles de scaling, qui nous disent que l'énergie typique d'une excitation grandit comme $N^{\theta/d}$, l'on trouve ici $\theta = 0$. De ce point de vue, le REM est donc un modèle champ moyen, au sens du chapitre précédent, particulièrement simple.

a.4) Distribution du minimum

La loi de distribution pour le minimum, qui est donc une statistique des extrêmes, peut aussi s'obtenir facilement (Bouchaud & Mézard, 1997) par un autre calcul standard de statistique des extrêmes que je reproduis ici. Considérons k tirages de variables aléatoires indépendantes E_i dans une loi de distribution qui décroît plus vite que toute loi de puissance

$$P(E) \sim \frac{A}{|E|^\alpha} \exp[-B|E|^\delta] \qquad B, \delta > 0 \ ; \quad E \to -\infty \tag{II.1–17}$$

et intéressons-nous à la statistique de l'état de plus basse valeur à grand k. Si on définit $\mathcal{P}_<(E)$ comme la fonction de répartition de E

$$\mathcal{P}_<(E) = \int_{-\infty}^{E} dE' P(E') \tag{II.1–18}$$

on peut exprimer la distribution P_k de E_0 comme étant :

$$P_k(E_0) = kP(E_0)[1 - \mathcal{P}_<(E_0)]^{k-1}. \tag{II.1–19}$$

Pour les grandes valeurs de k, le minimum E_0 étant alors négatif et très grand, on aura

$$[1 - \mathcal{P}_<(E_0)]^k \simeq \exp[-k\mathcal{P}_<(E_0)]. \tag{II.1–20}$$

La fonction de répartition de E_0 devient donc très petite quand E_0 est plus petit qu'une valeur critique donnée par $k\mathcal{P}_<(E_c) = 1$, ce qui nous donne

$$E_c \simeq -\left(\frac{\ln k}{B}\right)^{1/\delta}. \tag{II.1–21}$$

Le changement de variable $E_0 = E_c + \epsilon$, avec $\epsilon \ll |E_c|$, nous donne au premier ordre :

$$[1 - \mathcal{P}_<(E^*)]^k \simeq \exp[-\exp(B\delta|E_c|^{\delta-1}\epsilon)]. \tag{II.1–22}$$

Enfin, en introduisant la variable re-scalée $u = B\delta|E_c|^{\delta-1}\,\epsilon$ on obtient la distribution universelle de 'Gumbel' (Gumbel, 1958)

$$P^*(u) = \exp(u - \exp u). \tag{II.1–23}$$

Comme on vient de le voir, la loi de Gumbel n'est pas spécifique au REM([1]).

a.5) Fluctuations d'instance à instance

Ces fluctuations ont été étudiées en détail (Derrida & Toulouse, 1985); en particulier la variance du minimum est finie. Dans notre notation, cela signifie ainsi que $\Theta_f = 0$. Ce résultat est assez naturel dans le sens où l'on s'attend à ce que les fluctuations d'instance à instance soit du même ordre que l'énergie entre le fondamental et le premier état excité. En effet, les énergies étant décorrélées, tirer deux fois un minimum semble intuitivement être assez proche que tirer la première et la seconde excitation.

([1])C'est en fait l'une des trois classes d'universalité pour les valeurs extrêmales de variables aléatoires et décorélées. Si la distribution de ces valeurs a une queue qui décroît plus vite que toute loi de puissance la distribution de la valeur extrêmale est la distribution de Gumbel. Les autres classes sont la loi dite de Fisher-Tippett-Frechet pour les queues en loi de puissance et la loi de Weibull pour les queues où il existe un cut-off.

a.6) Egalité des exposants dans le REM

Maintenant on remarque que dans le REM que tous les exposants que nous avons définis sont nuls et égaux. En effet, (i) l'énergie de la première excitation est $O(1)$ d'où $\theta = 0$; (ii) les corrections de taille finie à l'énergie sont logarithmiques d'où $\Theta_s = 0$ et (iii) la distribution de Gumbel à une variance finie et par conséquent $\Theta_f = 0$. Pour conclure on trouve :

$$\theta = \Theta_s = \Theta_f = 0 \tag{II.1–24}$$

ce qui est une égalité non-triviale entre exposants *a priori* non reliés, bien que dans ce genre de modèle où les énergies sont décorrélées, l'égalité entre Θ_f et θ semble intuitive. De plus, ici θ est nul, il serait donc intéressant de pouvoir retrouver cette égalité sur un système où θ est non nul.

b) Le Scaling-REM : Un REM avec un exposant θ

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, le modèle des gouttelettes (Bray & Moore, 1986; Fisher & Huse, 1988) est construit de façon à ce que l'énergie entre le fondamental et la première grande excitation soit $O(L^\theta)$. Est-il possible de construire un modèle aussi simple que le REM qui possède ce comportement en loi d'échelle? La réponse est oui. Nous avons construit (Krzakala & Martin, 2002*b*) un modèle à énergie aléatoire avec loi d'échelle (en anglais *Scaling Random Energy Model*, j'ai donc nommé ce modèle le (S-REM)), où nous voulions imposer une énergie extensive pour le fondamental et une énergie d'$O(N^{\theta/d})$ pour le premier état excité([2]).

b.1) Le modèle et sa transition de phase

Naïvement, il semblerait suffisant de changer le scaling de la variance du REM pour changer les échelles d'énergie, mais alors nous changerions aussi le scaling du fondamental, que nous aimerions pourtant garder extensif. Dans le REM, il était considéré 2^N niveaux d'énergie, pour mimer un modèle à N spins et ses 2^N configurations possibles, mais il n'est pas nécessaire de considerer toutes les configurations de spins comme des états. L'important pour la transition vitreuse, c'est la distribution exponentielle des niveaux de plus basses énergies. Nous considérons ainsi non pas 2^N états, mais $2^{N\beta}$ (avec $\beta < 1$). Cela nous impose immédiatement, dans le même formalisme que pour le REM

$$2{\sigma_E}^2 = N^{1+\frac{\theta}{d}} \tag{II.1–25}$$

et donc

$$S(E) = N^\beta \ln 2 - \frac{E^2}{2{\sigma_E}^2}. \tag{II.1–26}$$

Comme dans le REM, il vient $T_c = \sigma_E / \sqrt{2N^\beta \ln 2}$ et $E_0 = -\sigma_E \sqrt{2N^\beta \ln 2}$. Comme nous voulons une énergie extensive pour le fondamental, la relation

$$E_0 = -\sqrt{N^\beta \ln 2}\sqrt{N^{1+\frac{\theta}{d}}} \propto -N^{\frac{1+\beta+\frac{\theta}{d}}{2}} \tag{II.1–27}$$

([2])Nous avons introduit de façon artificielle le facteur θ/d pour faire apparaître un scaling en L^θ, même si L n'existe alors que formellement puisqu'il n'y a pas vraiment de dimension, ceci pour pouvoir comparer ce modèle avec les systèmes réels et garder la même notation.

nous impose $\beta = 1 - \frac{\theta}{d}$. La température critique est alors donnée par

$$T_c = \frac{N^{\theta/d}}{2\sqrt{\ln 2}}. \tag{II.1–28}$$

Ainsi, nous avons dans ce modèle une température critique positive (et donc une phase vitreuse à température finie) seulement si $\theta \geq 0$ comme dans le modèle de gouttelettes. Cependant dans ce modèle, si $\theta > 0$ la température de transition est infinie. Comme nous allons le voir plus tard, c'est ce qui se passe également dans les polymères dirigés en milieu aléatoire en $(1+1)$ dimensions. Nous allons maintenant refaire les calculs pour notre modèle(^{3}).

b.2) Énergie du fondamental et correction de taille finie

En utilisant l'approche qui nous avait permis le calcul de E_0 dans le REM, on obtient cette fois

$$\frac{1}{\sqrt{\pi N^{1+\frac{\theta}{d}}}} \int_{-\infty}^{E_0} e^{-\frac{y^2}{N^{1+\frac{\theta}{d}}}} dy = \frac{1}{2^{N^\beta}}. \tag{II.1–29}$$

Par le même genre changement de variable $\frac{y^2}{N^{1+\frac{\theta}{d}}} \to t^2$ il vient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{E_0}{\sqrt{N^{1+\frac{\theta}{d}}}}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2^{N^\beta}} \tag{II.1–30}$$

soit en utilisant encore le développement de la fonction erreur

$$\frac{1}{-2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{{E_0}^2}{N^{1+\frac{\theta}{d}}}}}{\frac{E_0}{\sqrt{N^{1+\frac{\theta}{d}}}}} \sim \frac{1}{2^{N^\beta}}. \tag{II.1–31}$$

Il vient alors

$$-\frac{{E_0}^2}{N^{1+\frac{\theta}{d}}} - \ln(-2E_0) \sim \frac{\ln \pi}{2} - \frac{(1+\frac{\theta}{d}) \ln N}{2} - N^\beta \ln 2. \tag{II.1–32}$$

Si l'on néglige encore une fois le terme en $\ln(-2E_0)$, on trouve en utilisant $\beta = 1 - \theta/d$ que le terme dominant de E_0 est toujours $-N\sqrt{\ln 2}$ et la même approximation que pour le REM conduit à

$$-\frac{{E_0}^2}{N^{1+\frac{\theta}{d}}} - \ln(2\sqrt{\ln 2}) \sim \frac{\ln(\pi)}{2} + \frac{(1-\frac{\theta}{d}) \ln N}{2} - N^\beta \ln 2. \tag{II.1–33}$$

Il vient alors rapidement que

$$E_0 \sim -N\sqrt{\ln 2} + \frac{(1-\frac{\theta}{d}) N^{\frac{\theta}{d}} \ln N}{4\sqrt{\ln 2}} + cst. \tag{II.1–34}$$

Par conséquent l'exposant de *shift* est $\Theta_s = \theta$.

(^{3})Si ce modèle paraît simpliste il est tout de même extrêmement utile puisqu'il est un peu l'équivalent du REM pour les modèle de scaling, ce qui nous sera utile plus loin quand nous étudierons d'autres généralisations du REM. De plus, nous verrons qu'il décrit presque parfaitement la physique du polymère dirigé en milieu aléatoire en $(1+1)d$.

b.3) Énergie d'excitation et exposant θ

Là encore, on peut ré-effectuer l'approche de scaling et chercher l'énergie de la première excitation en calculant le fondamental quand la moitié des 2^{N^β} niveaux sont tirés, soit $2^{N^\beta-1}$. Le calcul donne immédiatement que les excitations sont bien $O(N^{\frac{\theta}{d}})$.

b.4) Fluctuations d'instance à instance

Comme nous l'avons dit précédemment, la distribution de Gumbel de statistique des extrêmes est universelle, et donc nous nous attendons ici également à trouver une distribution de Gumbel centrée autour de E_0 pour les minimums. Cependant, la variance n'est plus d'O(1), et le calcul mène à $\Theta_f = \theta$.

b.5) Egalité des exposants dans le S-REM

L'égalité entre exposants découverte dans le REM n'est donc *pas* un artefact provenant de la valeur nulle de θ, et l'on trouve ici encore.

$$\theta = \Theta_s = \Theta_f. \tag{II.1–35}$$

Pour revenir à cette égalité, les deux modèles que nous venons de décrire sont un peu artificiels et surtout sans géométrie. Y-a-t-il d'autres modèles, plus physiques, où cette égalité est valable?

c) Cas du polymère dirigé en milieu aléatoire

Le problème du polymère dirigé en milieu aléatoire, du moins en $1+1$ dimension, est encore un autre exemple de système, cette fois plus physique et avec une vraie géométrie, où cette égalité est valide. Nous allons voir en effet qu'il se comporte comme un S-REM avec $\theta = 1/3$ à ceci près que la loi de distribution du minimum n'est pas donnée par une distribution de Gumbel (Halpin-Healy & Zhang, 1995).

c.1) Le modèle

Le polymère dirigé en milieu aléatoire (DPRM, voir (Halpin-Healy & Zhang, 1995) pour une revue) est un modèle pour lequel la littérature est abondante. Je ne vais pas ici détailler les calculs ni les résultats numériques mais je me contenterai de rappeler la définition du modèle et les résultats sur les exposants. Le DPRM est un système qui, comme le S-Rem, est dans une phase vitreuse à toute température, et ses propriétés sont dominées par le point fixe à $T = 0$. Il s'agit d'une marche aléatoire dirigée dans un plan désordonné (voir figure II–2), mais on peut le voir aussi comme une croissance de polymère dans un milieu désordonné, ou encore comme une interface dans un milieu désordonné.

c.2) Résultats connus pour les exposants

La théorie de scaling (Fisher & Huse, 1991) avec exposants pour ce système permet ici aussi de décrire les trois quantités avec le même exposant (Halpin-Healy & Zhang, 1995), comme cela a été vérifié encore très récemment numériquement (Sales & Yoshino, 2002*a*):

$$\theta = \Theta_s = \Theta_f = \frac{1}{3}. \tag{II.1–36}$$

Mis à part la distribution du fondamental il est amusant de constater à quel point ce modèle se comporte comme le S-Rem avec $\theta = \frac{1}{3}$.

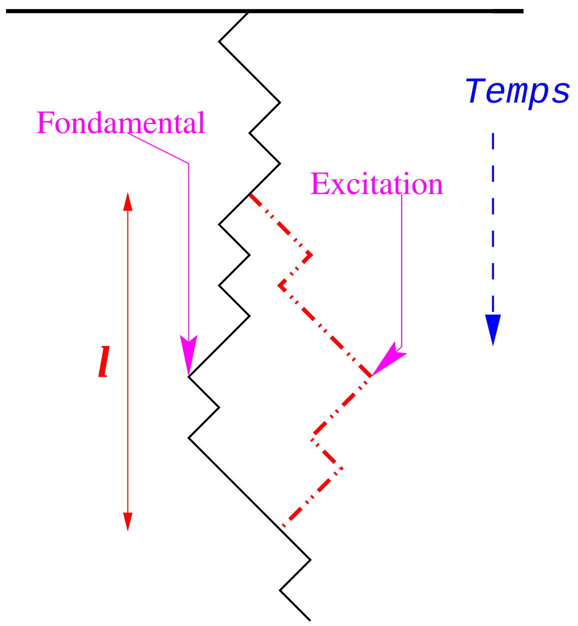


FIG. II–2 – *Une marche aléatoire dirigée vers le bas dans un milieu désordonné est une bonne représentation du DPRM. Une fois que le meilleur chemin est trouvé, les excitations de taille l ont une énergie en $l^{1/3}$.*

d) Quelques conjectures

Au vue de cette introduction, on peut se demander si cette égalité n'est pas une propriété générale des systèmes désordonnés. Si cela est le cas, vu l'importance des mesures des exposants θ, cette égalité se révèlerait sans nul doute très intéressante. C'était initialement l'une des motivations principales de ce travail et la réponse à cette question est en fait négative ! Comme nous allons le voir les comportements dans d'autres systèmes désordonnés (des verres de spins mais aussi le repliement de l'ARN...) seront plus subtils et violeront souvent cette égalité. L'autre motivation pour ce travail était d'étudier les lois de distribution des minimums dans d'autres modèles de systèmes désordonnés. L'une des conjectures (Bouchaud & Mézard, 1997) étant que pour chaque type de RSB l'on ait une loi de distribution particulière (Gumbel pour one-step RSB). Là encore, on va voir que cette conjecture s'est révelée fausse et l'on aura souvent des distributions simplement gaussiennes. Enfin l'on a aussi étudié l'influence de la réalisation microscopique du désordre et plus précisement les différences entres systèmes discrets et continus. Il semble en effet que les différents exposants que nous avons introduits en dépendent parfois fortement. Par exemple nous trouvons qu'en $2d$ θ prend une valeur finie négative sur un réseau hiérarchique avec couplages gaussiens tandis qu'il prend une valeur négative infinie avec des couplages discrets ! Nous commenterons l'importance de ce résultat sur la dépendance de la dimension critique inférieure.

Nous allons donc maintenant rentrer dans le vif du sujet et présenter l'étude des modèles de verres de spins introduits dans le chapitre précédent (champ moyen, gouttelettes et Edwards-Anderson). Les exposants et les lois de distributions du minimum ont été calculé analytiquement ou numériquement et l'on montrera les analogies et les égalités qui apparaîssent dans les différents modèles. Enfin l'on discutera d'une façon critique sur la présence de plusieurs branches d'excitations dans le modèle d'Edwards et Anderson.

– II.2 – Les verres de spins sur réseau hiérarchique

Commençons par un modèle dans l'esprit de la théorie des gouttelettes : l'approximation de Migdal-Kadanoff (Migdal, 1975; Kadanoff, 1976) ou, de façon équivalente, les verres de spins sur réseaux hiérarchiques. L'avantage d'un étude de ce système est que nous pouvons comprendre presque tout de façon analytique, et quand nous serons contraints de calculer une quantité numériquement les problèmes seront simples et faciles([4]). Les premiers à avoir étudié ce système semblent être (Young & Southern, 1977); l'idée est d'utiliser le schéma de renormalisation dans l'espace direct de Migdal-Kadanoff(MK), qui donne des résultats excellents dans les ferromagnétiques en basse dimension, pour les verres de spins.

a) Renormalisation de Migdal-Kadanoff

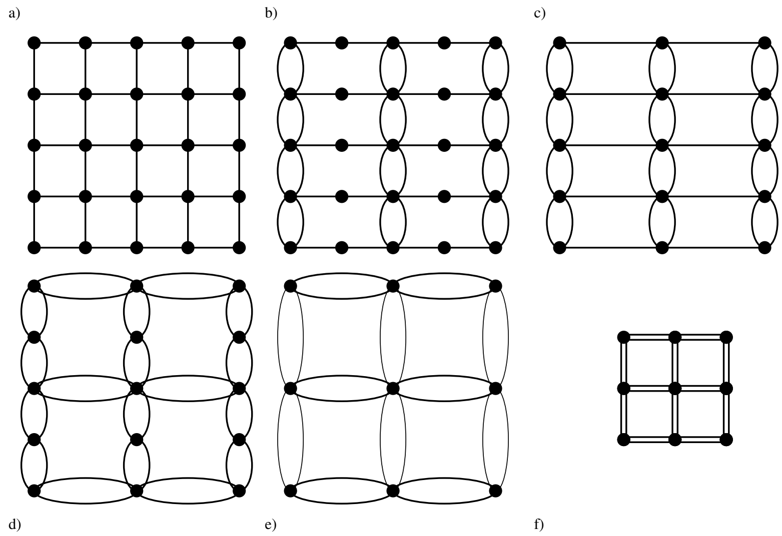


FIG. II–3 – *La procédure de renormalisation de Migdal-Kadanoff pour un réseau carré. D'abord (a) $b-1$ liens parallèles à l'axe y sont cassés et déplacés vers la droite (b) pour créer des nouveaux liens effectifs avec une nouvelle valeur de couplage. Ensuite (c) les $b-1$ sites non connectés avec les nouveaux liens sont décimées. Le processus est ensuite répété pour l'axe des x (d et e) et enfin on change l'échelle de longueur pour revenir à un problème équivalent à celui considéré initialement, mais avec des valeurs de couplages renormalisées (f).*

Le schéma de renormalisation de Migdal-Kadanoff est une procédure de récursion dans l'espace réel équivalente au calcul de la fonction de partition sur un réseau hiérarchique. On pourra se reporter à (Kadanoff, 1999) pour plus de détails sur la renormalisation MK. Il s'agit d'une procédure de renormalisation (voir la figure II–3) dans laquelle on déplace des liens puis on détruit des spins par décimation, pour éliminer les degrés de libertés. Puisque l'on retrouve au terme d'une récursion un

([4])Cela est suffisamment rare dans les verres de spins pour être souligné.

réseau identique au réseau initial, la forme de l'Hamiltonien est invariante par la procédure de renormalisation. Cela permet d'écrire un groupe de renormalisation sur la constante de couplage J entre spins plus proches voisins.

Il est souvent commode de considérer la renormalisation MK comme un calcul d'une fonction de partition sur un réseau hiérarchique. En effet calculer une quantité thermodynamique dans l'approximation MK en dimension d est équivalent exactement à la calculer sur un tel réseau où l'on remplace chaque lien par 2^d liens (voir la figure II–4 pour le cas en $d = 2$). On construit généralement ces réseaux en transformant chaque segment en b lignes de ℓ segments, avec $\ell = 2$. Ainsi le cas $b = 2$ correspond à $d = 2$ et le cas $b = 4$ à $d = 3$; le nombre de liens après I itérations est le même que le nombre de sites sur un réseau hyper-cubique de taille $L = 2^I$. Il est simple d'écrire une formule de récursion sur l'interaction effective entre spins à chaque niveau. Sur une seule branche, pour $\ell = 2$, c'est un problème unidimensionnel et pour calculer le nouveau J, il faut faire une trace sur le spin central, c'est la décimation, ce qui donne

$$\sum_{S_2=\pm 1} e^{-\beta J_{ab} S_1 S_2} e^{-\beta J_{bc} S_2 S_3} = e^{-\beta J_{ac} S_1 S_3}. \tag{II.2–1}$$

L'élimination du spin central conduit à une interaction effective J_{ac} entre les spins latéraux avec

$$\tanh \beta J_{ac} = \tanh \beta J_{ab} \tanh \beta J_{bc}. \tag{II.2–2}$$

Une autre simplification est que nous travaillons à température nulle et qu'ainsi

$$J_{ac} = signe(J_{ab} J_{bc}) \min(|J_{ab}|, |J_{bc}|). \tag{II.2–3}$$

Calculer l'interaction entre spins renormalisés, ou encore calculer le J effectif pour le lien à gauche dans la figure II–4 connaissant les J du réseau au centre se réduit ainsi, à température finie dans le cas général à b branches, à

$$\beta J'_{ij} = \sum_{l=1}^{b} \beta J'_l = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{b} \ln \left(\frac{\cosh \beta (J_{il} + J_{lj})}{\cosh \beta (J_{il} - J_{lj})} \right). \tag{II.2–4}$$

A température nulle, c'est encore plus simple:

$$J'_{ij} = \sum_{l=1}^{b} signe(J_{il} J_{lj}) \min(|J_{il}|, |J_{lj}|). \tag{II.2–5}$$

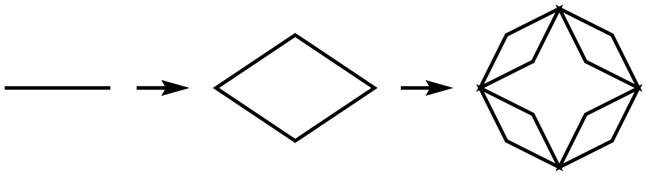


Fig. II–4 – *Si l'on définit un réseau hiérarchique de la façon suivante, en transformant* 1 *lien en* b *branches de* ℓ *segments, le calcul de la fonction de partition est équivalent à l'approximation de Migdal-Kadanoff pour un réseau hyper cubique. Ici le cas correspondant à d=2.*

Pour notre approche numérique nous avons plutôt renormalisé le $P(J)$ à $T = 0$, c'est à dire la probabilité d'obtenir un J à un niveau donné en partant d'une distribution de J initiale; il suffit pour cela de considerer le $P(J)$ et d'intégrer sur toutes les réalisations possibles, ce qui est faisable dans ces réseaux. De plus cela a l'avantage de nous éviter de faire des moyennes sur le désordre. Pour des distributions $P(J)$ initialement discrètes, cette procédure se fait ainsi *sans approximation* jusqu'à des tailles extrêmement importantes, parfois plus de 200000 spins si la connectivité est faible !

Ce qui est intéressant avec l'approche MK, c'est qu'elle est une bonne représentation des théories de scaling (Bray & Moore, 1984; Bray & Moore, 1985) en fournissant un modèle où une procédure de renormalisation est bien définie. Les verres de spins sur réseau hiérarchique sont ainsi très utile puisqu'ils permettent une étude approfondie et quantitative des théories gouttelettes/loi d'échelles. Il est ainsi assez simple de se rendre compte que l'exposant θ dans la théorie des gouttelettes et l'exposant θ_{dw} de l'approche de McMillian, sont équivalent sur ce genre de réseau. Dans tout ce qui suit, nous travaillerons à température nulle.

b) Égalités entre exposants.

Intéressons-nous maintenant aux exposants associés au fondamentaux. Comme discuté dans notre article (Bouchaud et al., 2002), il est assez simple de se rendre compte que $\theta = \Theta_s$ et que $\Theta_f = \frac{d}{2}$ dans le système MK en considérant la distribution des énergies des fondamentaux E_p (resp. E_a, voir figure II–5.) quand on fixe les conditions aux limites à être périodiques (resp. antipériodiques) en imposant les deux spins à chaque extrémité. Si σ^2 est la variance de l'énergie du fondamental à un niveau particulier de la construction hiérarchique, il faut, pour aller au niveau suivant, considérer une itération dans la renormalisation MK, ou encore considérer le calcul d'un lien effectif quand on *re-monte* dans la création du réseau hiérarchique. Dans la figure II–4, cela revient à considérer le réseau à droite et à calculer les liens renormalisés sur le réseau central. Renormalisons donc ! Dans un réseau où il y a b branches

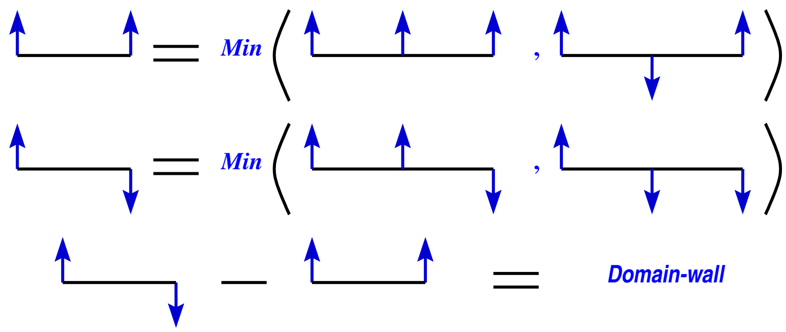


FIG. II–5 – *Lors d'une itération, on calcule la nouvelle énergie pour le lien effectif parallèle et anti-parallèle. La différence entre ces deux énergies représente l'énergie de domaine à cette echelle.*

de ℓ segments, pour calculer le nouveau lien effectif, il faut remplacer les ℓb segments, c'est à dire quatre dans notre exemple, par 1 seul segment en utilisant la formule de récursion à température nulle. Techniquement, on peut calculer le nouveau E_a et le nouveau E_p du segment final, puis déterminer quel est le meilleur des deux pour trouver le fondamental(voir fig. II–6)([5]).

Lors du calcul de l'énergie du nouveau lien renormalisé (calculons par exemple le meilleur choix

([5])Toutefois, en renormalisant à chaque fois E_a *et* E_p, on peut formellement avoir des résultats avec conditions aux limites périodiques tandis que considérer le meilleur des deux nous donne des résultats avec conditions aux limites libres.

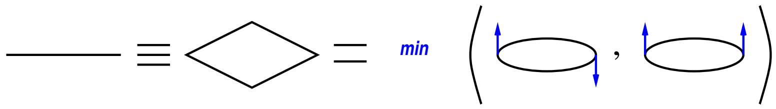


FIG. II–6 – *Le calcul du nouveau lien.*

entre E_p final et E_a final) on va devoir choisir le minimum entre les configurations avec les spins extrêmes parallèles ou anti-parallèles (voir figure II–6). Dans les b branches indépendantes (c'est bien l'indépendance des branches qui conduit à ce résultat) cela conduit à prendre en moyenne b fois le minimum et à rajouter la différence avec l'énergie du fondamental de cette branche une fois sur deux; cette différence étant justement donnée par l'énergie de domain-wall (l'énergie d'une paroi de domaine obtenu en passant des conditions aux limites périodiques aux anti-périodiques) dans cette branche (voir figure II–5). Ainsi l'énergie finale pour une branche est la somme des énergies des fondamentaux

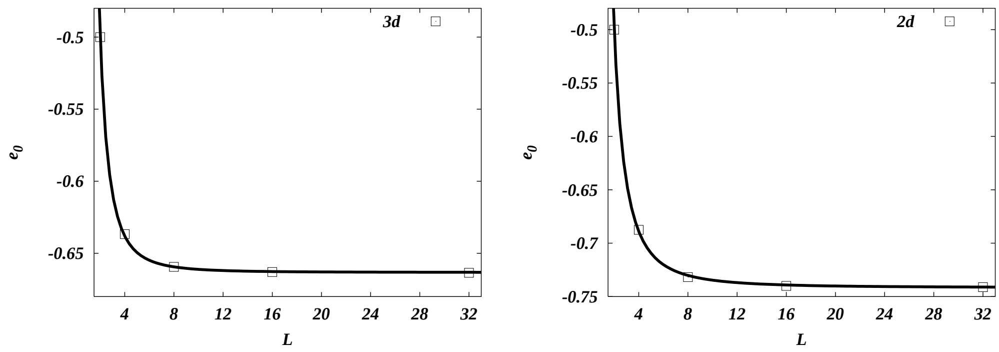


FIG. II–7 – *Densités d'énergies du fondamental en fonction de L pour les modèle gaussiens en MK* 2d *et* 3d*, fitées par une loi en* $a + bL^{\theta_{dw}-d}$*. Le fit est excellent, confirmant bien* Θ_s=θ_{dw}

des ℓ segments plus celle des énergies de parois de domaine une fois sur deux. Encore une fois puisque nous ajoutons des contributions *indépendantes*, on arrive ainsi à E_p et E_a pour le niveau suivant et l'énergie du fondamental de ce niveau est simplement $min(E_p, E_a)$. On a donc l'important résultat à grand b:

$$E_{new} = b\min(E_{branches}) + \frac{b}{2}E_{dw}. \tag{II.2–6}$$

On aura $\overline{E} = e_0V + \beta L^{\theta_{dw}}$ à comparer avec la définition $E_0 + \beta L^{\Theta_s}$ et donc Θ_s=θ_{dw}. Nous avons confirmé ce résultat pour différentes valeurs de ℓ et de b en calculant Θ_s et θ_{DW} et en effectuant des fits aux moments de $P(E_p, E_a)$ (que nous déterminons *sans* erreurs statistiques, voir fig.II-7. De plus, on voit que les corrections de taille finie sont données par θ et sont ainsi très faibles. Si l'on les néglige, ce qui semble parfaitement justifié, la variance σ^2 de l'énergie du fondamental à un niveau suivant est simplement lb fois plus grande que celle du niveau précédent; donc, en utilisant le théorème de la limite centrale puisque encore une fois les contributions sont indépendantes, on obtient $\sqrt{\overline{E^2} - \overline{E}^2} = \gamma\sqrt{N} = \gamma L^{\Theta_f}$ ce qui nous donne Θ_f=$\frac{d}{2}$. L'étude numérique confirme également cette relation pour tous les choix de ℓ et de b, même pour $b = \ell = 2$ (qui correspond à un verre de spins en 2d) pour lequel les corrections sont a priori les moins négligeables, voir figure II.-8).

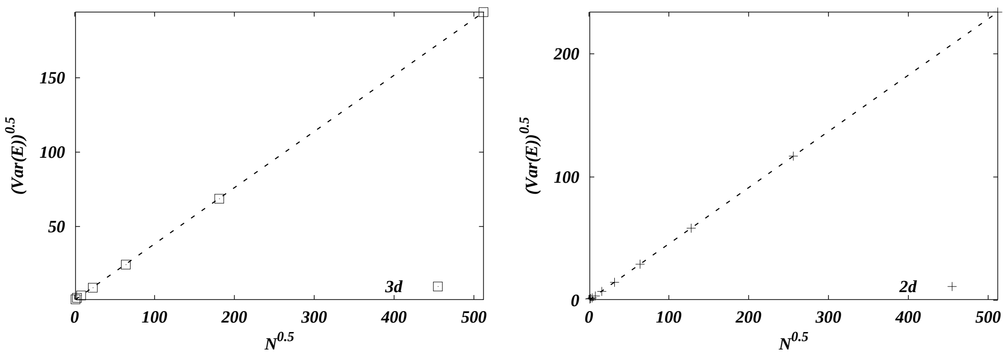


FIG. II–8 – $\sqrt{\overline{E^2} - \overline{E}^2}$ *en fonction de* $\sqrt{N}$ *en MK pour les cas où* $d = 2$ *et* $d = 3$ *dans le modèle gaussien. Le comportement en* $\Theta_f = \frac{d}{2}$ *est très clair.*

En résumé, nous avons montré dans cette section que tous les exposants associés à des énergies d'excitations sont les mêmes en MK, et qu'ils donnent aussi les corrections de taille finie à l'énergie du fondamental, et ainsi :

$$\theta = \theta_{dw} = \Theta_s. \tag{II.2–7}$$

Cependant, et c'est la principale différence avec les modèles précédents, on trouve pour les fluctuations d'instance à instance un résultat différent :

$$\Theta_f = \frac{d}{2}. \tag{II.2–8}$$

L'égalité entre exposants est ainsi violée dans ce système. Le même résultat pour la fluctuation d'instance à instance du fondamental a aussi été trouvé numériquement dans un autre système désordonné qui semble avoir un comportement gouttelettes : le repliement de l'ARN (Krzakala et al., 2002; Müller et al., 2002). Cela semble indiquer que ce résulat pour Θ_f, différent de celui trouvé dans le polymère dirigé qui semble ainsi appartenir à une autre classe, est sans doute assez universel. Nous y reviendrons plus loin.

c) Calcul analytique de θ.

La section b) a fait apparaître le rôle très important de θ en MK. À grand b, le $P(J)$ restant alors gaussien à cause de l'ajout d'un grand nombre de termes indépendants, il est assez simple d'obtenir une valeur de θ en calculant simplement la nouvelle variance à chaque pas et en supposant que la distribution reste gaussienne. À température nulle le calcul du nouveau lien à partir de l'equation II.2–5 se fait en deux étapes.

Pour chaque sous-branche l'application de l'equation II.2–3 à une distribution gaussienne a pour effet de multiplier la variance par un facteur constant. Pour le voir il suffit de calculer comment la variance est multipliée quand on applique cette équation à une distribution de variance unité

$$\lambda = \int\int dxdyP(x)P(y)\left(\min\left(|x|,|y|\right)signe\left(xy\right)\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int\int e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\left(\min\left(|x|,|y|\right)\right)^2. \tag{II.2–9}$$

Par un changement de variable $(x, y) \to (r, \alpha)$ on a

$$\lambda = 1/\pi \int_0^\infty r dr \int_0^\pi d\alpha \; r^2 e^{-\frac{r^2}{2}} \left(\min\left(|\sin\alpha|, |\cos\alpha|\right)\right)^2 \tag{II.2–10}$$

puis enfin en jouant avec les relations trigonométriques

$$\lambda = \frac{8}{2\pi} \int_0^\infty dr \; r^3 e^{-r^2/2} \int_0^{\pi/4} d\alpha \; \sin^2\alpha = 1 - \frac{2}{\pi}. \tag{II.2–11}$$

La seconde étape est d'ajouter des branches *indépendantes*. Cela ne fait que doubler encore la valeur de cette variance à chaque fois que l'on double le nombre de branches. En d-dimension on doit, dans l'approche MK (voir figure II–3) faire cela $d-1$ fois, on a donc au bout de l récursions $\sigma^2(J_{l+1}) = 2^{d-1}\lambda\sigma^2(J_l)$ et puisque $\sigma^2(J_l) \propto 2^{\theta l}$ on retrouve le résultat déjà ancien de (Young & Southern, 1977):

$$\theta_{b\to\infty}^{\ell=2}(d) = \frac{d}{2} + \left(\log_2\left(1 - 2/\pi\right) - 1\right)/2. \tag{II.2–12}$$

On peut aller plus loin : l'application de l'équation II.2–3 dans le cas où il y a plus de 2 segments va ainsi donner une valeur plus petite de λ. De fait, pour tout ℓ, l'équation II.2–3 devient $J_{a_1 \ldots a_l} = signe\left(\Pi J_{a_1 a_2} \ldots J_{a_{l-1} a_l}\right) \min\left(|J_{a_1 a_2}|, ..., |J_{a_{l-1} a_l}|\right)$. Si on calcule le facteur $\lambda(\ell)$ quand $\ell \to \infty$ on aura à prendre le minimum d'une série infinie de valeurs absolues de variables dont la distribution est centrée en 0; on a alors $\lambda \to 0$ quand $\ell \to \infty$ et donc

$$\theta_{b\to\infty}^{\ell\to\infty}(d) = \frac{d}{2} - 1/2. \tag{II.2–13}$$

Cette approche peut ensuite être développée à l'ordre suivant, et permet de faire une extension de θ_{DW} en $1/b$ (voir l'article (Bouchaud et al., 2002) en annexe pour les calculs). Pour ℓ et b donnés on obtient ainsi un developpement perturbatif en $\theta_{DW}(\ell, b) = d/2 - x(\ell) + O(1/b)$.

Dans le cas où $\ell = 2$ le résultat est ainsi

$$\theta_b^{\ell=2}(d) = \frac{d}{2} + \frac{\log_2\left(1 - 2/\pi\right) - 1}{2} - \frac{0.07395}{b} + O(\frac{1}{b^2}) \tag{II.2–14}$$

avec $\left(\log_2\left(1 - 2/\pi\right) - 1\right)/2 \approx -1.2302$. Notons que l'ensemble de ces résultats confirment bien que $\Theta_s < \Theta_f$ et justifie ainsi à posteriori que nous ayons négligé le terme de correction dans la section b) pour trouver $\Theta_f = d/2$. De plus, les corrections à θ étant $O(1/b)$, et donc exponentiellement faible en d, on s'attend à ce que ces calculs perturbatifs soient très bons même pour $d = 3$, ce que confirment nos calculs numériques qui nous permettent aussi d'estimer numériquement (voir la figure II.-9) le terme suivant dans la série en $1/b$: on trouve ainsi $\theta_{DW}(\ell = 2, b) = d/2 - 1.2302 - 0.07395/b + 0.045/b^2 + O(1/b^3)$. Cette formule nous donne une valeur de θ très satisfaisante, l'erreur étant de 2% par rapport à nos estimations numériques dans le cas où $(\ell = 2, b = 4)$.

d) Distribution des énergies du fondamental

Si le théorème de la limite centrale est bien valide, comme argumenté dans la section b), nous devons trouver que $P_N(E_J)$ devient gaussien à grand L. Nous avons bien vérifié que cela était le cas analytiquement à grand b, ainsi que pour tout b numériquement.

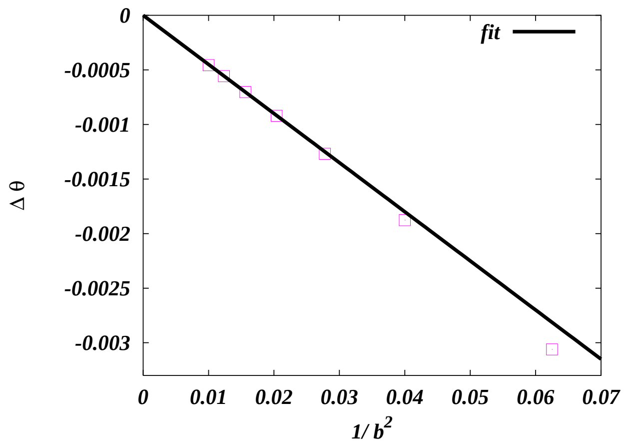


FIG. II–9 – *Estimation numérique du terme $O(1/b^2)$; la différence entre la prediction perturbative et le résultat numérique semble bien être presque linéaire en $1/b^2$ confirmant la validité de notre developpement en puissance de $1/b$.*

e) Dimension critique inférieure et modèles $\pm J$

Le calcul de θ dans la section c) est basé sur des grandeurs continues et n'est donc pas forcément valable dans le cas des systèmes discrets. Savoir ce qui est ou non indépendant de la réalisation microscopique du désordre est une question importante et l'on s'attend à ce que θ, pour des excitations assez grandes, n'en dépende *pas*. Nous confirmons ici numériquement que c'est bien le cas si $\theta > 0$ dans le modèle gaussien: on trouve en effet dans ce cas $\theta_{\pm J} = \theta_{gauss}$ (voir la fig.II-10 et le tableau II.1) dans la limite de nos barres d'erreurs.

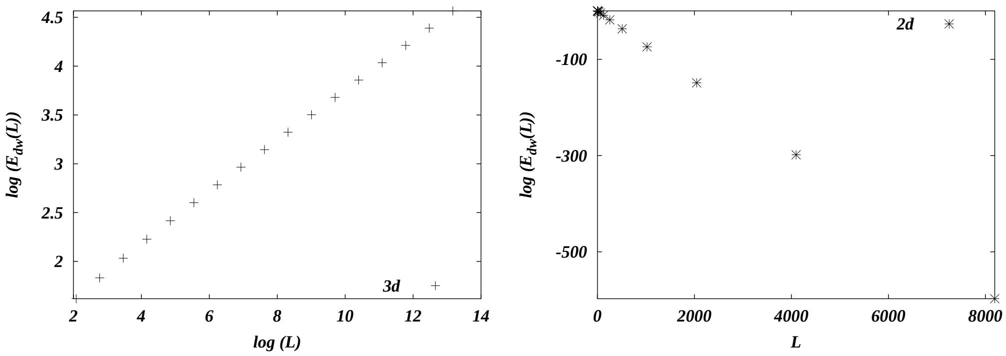


FIG. II–10 – *Dans les modèles MK $\pm J$ on trouve un θ identique que dans le modèle MK gaussien en 3d, où $\theta > 0$. On trouve par contre $\theta = -\infty$ dans modèle MK 2d $\pm J$, ce qui est très différent du $\theta = -0.22$ en MK gaussien.*

On trouve par contre un résultat très différent quand θ est négatif dans le modèle gaussien: en effet en dimension 2 en MK, quand $\ell = b = 2$, les calculs numériques montrent que l'énergie décroît exponentiellement avec la taille dans le modèle discret, et qu'ainsi $\theta^{2d}_{\pm J} = -\infty$. Comme dans le modèle d'Edwards et Anderson en $d = 2$ (Hartmann & Young, 2001), θ est différent dans les deux modèles

Dimension	gaussien	$\pm J$
2	-0.22	$-\infty$
3	0.26	0.26
4	0.76	0.76

TAB. II.1 – *Valeurs de θ trouvées numériquement pour les systèmes gaussiens et discrets dans MK. Dans le cas où $\theta > 0$, il ne depend pas de la réalisation microscopique du désordre. En $d = 2$, par contre, $\theta < 0$ pour le modèle gaussien et $-\infty$ dans le modèle $\pm J$.*

quand il est négatif. Il a ainsi été suggéré sur la base de simulations Monte-Carlo (Houdayer, 2001) et du fait que θ semble être exactement 0 (Hartmann & Young, 2001) pour EA en $2d$ en $\pm J$, que les modèles gaussien et discret auraient une dimension critique inférieure différente puisque dans le modèle des gouttelettes indépendantes il n'y a une transition de phase à température finie que pour $\theta > 0$. On aurait ainsi $d_l = 2$ pour le modèle discret et $2 < d_l < 3$ dans le modèle gaussien. Nos résultats sur le modèle MK suggèrent deux commentaires :

(i). Tout d'abord, nous confirmons qu'il est bien possible d'avoir des θs différents en fonction de la réalisation du désordre. L'universalité dans les verres de spins étant toujours en question il est bon de savoir qu'il existe des quantités qui sont universelles quand $T_c > 0$ mais pas quand $T_c = 0$. Ainsi il n'est pas étonnant, à posteriori, de trouver deux valeurs distinctes de θ en $d = 2$ pour le modèle EA.

(ii). Ensuite, le fait que dans ce modèle θ ne dépende plus de la réalisation du désordre dès que θ_{gauss} est positif suggère que d_l soit en fait identique pour les deux modèles (gaussien et discret), mais que quand $\theta_{gauss} \leq 0$ alors $\theta_{\pm J}$ est aussi négatif ou nul, mais simplement différent (en l'occurence infini ici). S'il n'est pas évident qu'il en soit de même pour le modèle EA, cela devrait quand même relativiser les interrogations théoriques sur la présence éventuelle de deux d_ls différents.

f) Conclusion pour MK

En conclusion le cas MK marque une différence très nette avec les modèles précédents pour les fluctuations d'instances à instances. En effet dans ce cas on trouve un $\Theta_f = d/2$ et donc une fluctuation gaussienne. La prédiction REM, S-REM et DPRM ($\theta = \Theta_f$) ne marche pas quand elle est appliquée sur un réseau réel avec des spins. Dans ce cas, il semble en effet que l'on puisse séparer le système en sous-systèmes faiblement couplés et qu'ainsi le théorème de la limite centrale soit valide.

Par contre, il n'y a qu'un seul exposant ensuite, et l'on trouve $\theta = \theta_{dw} = \Theta_s$. En particulier les effets de taille finie sont donnés par l'exposant de paroi de domaine. Enfin notons encore, à propos de l'universalité, que θ ne semble pas dépendre de la réalisation microscopique du désordre s'il est positif.

– II.3 – Les verres de spins champ moyen

Après avoir étudié un modèle proche des gouttelettes, il est naturel de se demander ce que prédit le champ moyen. Les calculs analytiques sont très difficiles dans ce cas et cette section sera essentiellement numérique. Nous étudierons les fondamentaux en les calculant numériquement à l'aide de l'algorithme de renormalisation génétique (Houdayer & Martin, 1999b; Houdayer & Martin, 2001). Nous avons calculé un très grand nombre; par exemple pour le modèle SK gaussien notres statistique est de 30000 instances pour $N = 50$ jusqu'a 1000 pour $N = 300$. De même pour les modèles à connectiovité finie nous avons calculé de 500000 instances à $N = 40$ jusqu'à 80000 à $N = 300$ pour la connectivité 10. Le cas discret posant plus de problèmes numériques nous disposons de moins d'échantillons; par exemple pour $z = 3$ la statistique était de 10000 pour $N = 40$ jusqu'à 500 pour $N = 500$. Pour la plupart de nos calculs ces statistiques étaient suffisantes.

a) Fluctuations et Θ_f

Dans les systèmes champ moyen nous identifions L avec $N^{1/d}$ et ainsi

$$\left[\ \overline{E_J^2(L)} - \overline{E_J(L)}^2\ \right]^{1/2} = \sigma_0 N^{\Theta_f/d} + \cdots \qquad \text{(II.3–1)}$$

Nous trouvons bien dans ce dernier cas $\Theta_f/d = 0.5$, comme pour le modèle MK, dans la limite de nos barres d'erreurs ($0.48 < \Theta_f/d < 0.52$ dans tous les cas), et pour toutes les connectivités étudiées (3, 4, 6 et 10). Par contre, pour le modèle SK, puisqu'il y a $O(N^2)$ terme qui contribuent à l'Hamiltonien, un argument naïf donnerait $\Theta_f/d = 1$ mais c'est le contraire qui apparaît : nous trouvons sans ambiguités que $\Theta_f/d < 0.5$, et donc que le cas à connectivité infinie est plutôt subtil.

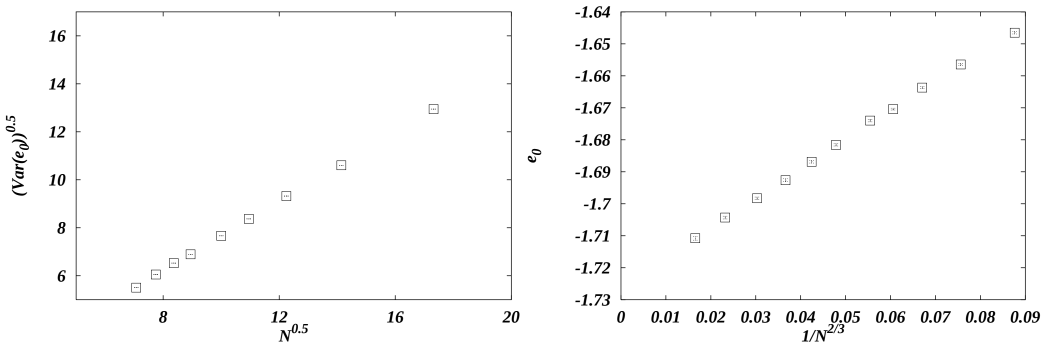


FIG. II–11 – *Gauche :* $\sqrt{\overline{E^2} - \overline{E}^2}$ *en connectivité* 6 *dans le modèle champ moyen en fonction de* $\sqrt{N}$. *Droite : densité d'energie* e_0 *du fondamental en fonction de* $\frac{1}{N^{2/3}}$.

Les calculs de (Kondor, 1983) (voir aussi (Crisanti et al., 1992)) montrent que les fluctuations de l'énergie libre sont en $N^{1/6}$ autour de T_c. On peut supposer que les fluctuations de l'énergie sont aussi en 1/6, bien que l'on puisse s'attendre a priori à des fluctuations d'énergie plus grandes; il n'y a aucune prédiction analytique pour les fondamentaux. Cependant, une étude numérique (Cabasino et al., 1988) semble montrer que $\Theta_f/d < 0.5$, le meilleur fit donnant $\Theta_f/d \approx 0.28$. L'analyse de nos données par l'équation II.0–2 donne un résulat de $\Theta_f/d = 0.2(0.1)$ compatible avec $\Theta_f/d = 1/6$.

Puisque nous trouvons $\Theta_f/d = 0.5$ en toute connectivité finie (z) ce résultat suggère que le σ_0 de l'équation II.0–2 se comporte en $\sigma_0(z) \simeq z^\mu$ avec μ égal à la valeur SK de Θ_f/d. Une analyse de $\sigma_0(z)$ donne ainsi bien $\mu \approx 0.2$ ce qui est en bon accord avec notre estimation de Θ_f/d dans SK.

b) Tailles finies et Θ_s

Dans le cas de ces modèles il est impossible d'introduire des domaines, nous nous concentrons donc sur Θ_s. Dans le modèle SK il est connu analytiquement qu'à la température critique T_c, ainsi que sur toute la ligne de Almeida-Thouless, les corrections de taille finie sont en $N^{-2/3}$ (Parisi et al., 1993).

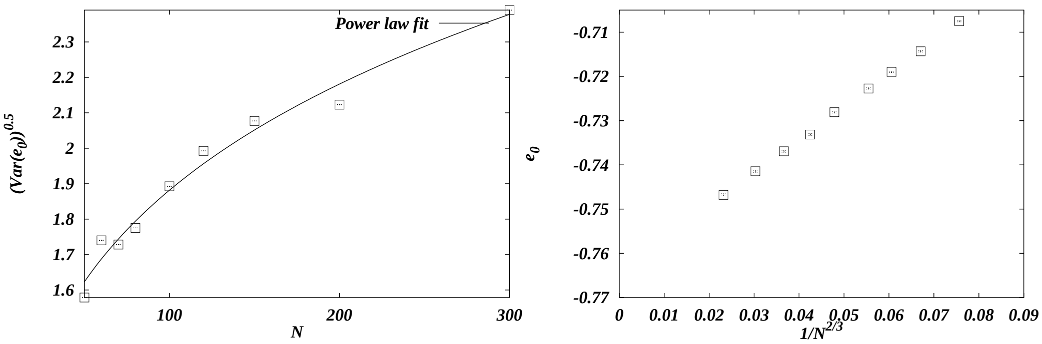


FIG. II–12 – *Gauche :* $\sqrt{\overline{E^2}-\overline{E}^2}$ *en fonction de* N *en SK; le comportement est très différent. Droite : densité d'energie* e_0 *du fondamental en fonction de* $\frac{1}{N^{2/3}}$*.*

Ce qui est remarquable, c'est que le même exposant semble aussi décrire les effets de taille finie à $T = 0$! Un fit de nos données dans le modèle SK donne $\Theta_s/d = 0.34 \pm 0.02$ complètement compatible avec 1/3. En fait, lorsqu'on affiche les données en fonction de $N^{-2/3}$ (voir fig.II.-12) nous obtenons une droite à partir de $N = 40$. De plus, un fit linéaire nous donne alors la densité d'énergie à $N = \infty$: $e_0 = -0.7638(3)$ à comparer au résultat analytique $e_0 = -0.7633$ (Mézard et al., 1987).

Une autre surprise est que Θ_s/d est le même dans le modèle SK et dans le modèle à connectivité fixe. Par exemple en connectivité 6 (voir fig.II.-11) on trouve $\Theta_s/d \approx 0.34$ avec un χ^2 par degré de liberté inférieur à 1. Cette valeur marchant très bien pour toutes les connectivités essayées, l'on peut conjecturer que ce soit un résultat exact :

$$\Theta_s = \frac{d}{3}. \tag{II.3–2}$$

Ceci est un résultat non trivial et assez intéressant; il n'était pas évident a priori que les effets de tailles finies soient les mêmes pour le point fixe à $T = 0$ et sur le point critique. Il semble pourtant que cela soit le cas. Très recemment une étude numérique indépendante (Boettcher, 2002) a confirmé ce scaling particulier dans une large gamme de connectivités.

c) Distribution des énergies du fondamental

Les mesures d'asymétries et de kurtosis de l'énergie du fondamental dans les modèles champ moyens à connectivité finie montrent que ces deux quantités diminuent quand N augmente, et sont parfaitement compatible avec une extrapolation vers 0 quand $N \to \infty$. Notons quand même que le kurtosis est très difficile à mesurer précisement; cependant il semble que les données pour les modèles champ moyens tendent vers un $P_N(E_J)$ gaussien.

Encore une fois, le modèle SK va se comporter différement. Non seulement non trouvons que $\Theta_f \neq d/2$ mais en plus la distribution $P_N(E_J)$ est clairement non gaussiene. Nous trouvons en particulier une asymétrie non nulle égale à $-0.43(1)$ à grand N. La fluctuation d'échantillon à échantillon dans le modèle SK est donc réellement différente des autres cas considérés; la loi correspondant aux statistiques des extrêmes est ainsi non gaussienne dans ce cas.

d) Exposants dans le cas discret

On a vu qu'il fallait être prudent quand on considérait des modèles discrets dans le chapitre III. De plus le cas MK nous a aussi montré les possibles différences entre modèles gaussiens et $\pm J$. En champ moyen, trouvons-nous encore une fois des différences? Puisque ce système a $T_c > 0$, on pourrait s'attendre à ce que cette fois les exposants soient universels. C'est pourtant le contraire qui se passe.

Considérons ainsi les graphes à connectivités finies avec des couplages $J_{ij} = \pm 1$: nous trouvons sans ambiguités que Θ_f est différent du cas gaussien. On est donc dans une situation intrigante puisque les fluctuations divergent quand N grandit (Θ_f est positif dans les deux cas) et pourtant il n'y a pas d'universalité : la situation est pire que dans les systèmes en dimension finie ! Comment pouvons nous comprendre cela?

Dans les systèmes champ moyen $\pm J$ l'environnement "local" d'un spin donné n'a pas de désordre à distance finie; la frustration n'apparaît ainsi que quand on considère des boucles de taille $\ln N$ (voir par exemple (Mézard & Parisi, 2001)). Ainsi les signes des J_{ij}, et donc la frustration, peuvent être eliminés par une transformation de jauge, les fluctuations se développant alors "à l'infini". À cause de cela, les fluctuations d'échantillon à échantillon ne sont *pas* décrite par le théorème de la limite centrale, et donc $\Theta_f/d \neq 1/2$. Numériquement, nous trouvons ainsi $\Theta_f/d \approx 1/3$. Θ_f n'est donc pas universel, et, sans surprise, nous trouvons aussi que $P_N(E_J)$ n'est pas gaussien, son asymétrie étant finie.

e) Conclusion pour le champ moyen

Au vu de la qualité des résultats on peut conjecturer que la relation $\Theta_s = \frac{d}{3}$, qui semble marcher en toute connectivité finie ou infinie, est exacte. Savoir pourquoi Θ_s est le même que celui décrivant les effets de taille finie pour l'énergie libre près de $T = T_c$ dans le modèle SK est une question ouverte.

Pour les modèles à connectivité finie on trouve de plus, dans le cas gaussien, que $\Theta_f = \frac{d}{2}$ comme dans le système MK. Encore une fois les corrélations ne sont pas assez fortes pour violer le théorème de la limite centrale. Dans le cas $\pm J$ par contre le comportement est différent, ainsi que pour le modèle SK qui semble donc assez subtil de ce point de vue.

Les différences constatées entre modèle champ moyen en connectivité finie et modèle SK nous incitent à la prudence quand l'on cherche à comprendre les prédictions champ moyen en dimension finie. S'il est clair que le cas à connectivité finie est de toute façon plus adapté que le modèle SK (il à notamment une valeur du champ magnétique critique *finie* en $T = 0$), cette étude a montré que les prédictions SK peuvent être complétement fausses (voir par exemple la distribution du fondamental ou encore la valeur de Θ_f) sans que cela soit un artefact du champ moyen, mais bien un artefact de la connectivité infinie.

– II.4 – Les verres de spins Edwards-Anderson

Dans cette section nous allons nous intéresser au modèle EA et tenter de répondre à la (difficile) question "Comment les prédictions précédentes se comparent avec ce qui se passe dans le modèle d'Edwards-Anderson en $d = 2$ et $d = 3$?". Nous avons, là aussi, calculé des fondamentaux pour différentes valeurs de L avec des J_{ij} gaussiens. Passons en revue nos résultats ...

a) Fluctuations d'échantillon à échantillon

Comme attendu d'après nos résultats en MK et SK, les fluctuations d'échantillon à échantillon sont bien en $L^{d/2}$, nos fits donnant de bons résultats en $2d$ et en $3d$. D'autres résultats en $4d$ (Hartmann, 1999*a*) sont aussi compatibles avec cette égalité. De fait, peu après avoir trouvé ces résultats, nous avons appris([6]) l'existence d'un théorème (Wehr & Aizenman, 1990) montrant que les fluctuations d'échantillon à échantillon sont telles que la variance augmente comme le volume dans le système EA. Ce théorème, ainsi que nos résultats, sonnent donc le glas d'un "one-parameter-scaling" simple comme dans le REM ou le DPRM.

b) Distribution des énergies du fondamental

Là encore, le consensus entre MK et champ moyen (en connectivité finie) semble ne laisser aucun choix. Nos résultats confirment donc que $P_N(E_J)$ est gaussien et que c'est seulement dans le cas SK que les variables deviennent suffisamment corrélées pour violer le théorème de la limite centrale.

c) Corrections de taille finie

Puisque les prédictions sont différentes en champ moyen et en MK, les valeurs de Θ_s sont très intéressantes en dimension finie. La première chose qu'il faut mettre en avant, c'est que les Θ_s trouvées numériquement sont du même ordre que θ_{dw}, et sont par contre très différents de $\Theta_s/d = 1/3$: la prédiction champ moyen est fausse. La question intéressante est maintenant de savoir si oui ou non $\Theta_s = \theta_{dw}$ en dimension finie. Cette relation marche, trivialement, dans le cas où $d = 1$.

Passons donc au cas $d = 2$ avec des couplages gaussiens. Ce cas est d'autant plus intéressant qu'il y a une vive controverse pour la valeur de l'exposant des gouttelettes θ. Alors que l'exposant des parois de domaine est $\theta_{DW} = -0.281(2)$ (Rieger et al., 1996), une valeur confirmée par de multiples approches plus récentes (Hartmann & Young, 2001; Carter et al., 2002), et trouvée aussi par d'autres techniques numériques visant à calculer l'exposant des gouttelettes plus directement (voir par exemple le récent travail de (Hartmann & Young, 2002) avec la méthode dite ϵ-coupling), d'autres travaux indiquent que le θ relié aux gouttelettes (et non pas le θ_{DW}) aurait une valeur différente (Kawashima et al., 1992; Kawashima, 2000; Picco, Ritort & Sales, 2001) et vaudrait environ $-0.47(5)$. Ce débat pose deux questions importantes (1) "est-ce que le calcul de θ_{DW} est une bonne méthode pour calculer θ ?", l'égalité entre les deux étant triviale dans MK mais non évidente dans EA, et (2) "N'y aurait-il pas plusieurs branches d'excitations dans les verres de spins, c.a.d. plusieurs types de gouttelettes ?" Dans ce cas la théorie des gouttelettes simple se révèlerait incomplète; nous y reviendrons.

Si l'on fite nos données avec l'équation II.0–1, où e_0, e_1 et Θ_s sont nos paramètres libres, on trouve $\Theta_s = -0.36 \pm 0.03$ (voir la figure II–13). Ainsi nos barres d'erreurs semblent exclure la prédiction MK mais pas de beaucoup; nous prenons ainsi le point de vue que cela est du à la faiblesse des valeurs de L considérées et qu'il est très difficile d'aller contre cet effet : l'erreur statistique sur $\overline{E_J}$ grandissant comme $L^{d/2}$, et le temps de calcul grandissant encore plus vite, il est difficile d'obtenir de bons résultats à grand L. De plus, un fit ou l'on impose $\Theta_s = \theta_{DW}$ donne des résultats très corrects. Ainsi notre conclusion est qu'en $d = 2$, θ_{DW} semble au moins très proche de Θ_s, et qu'ils sont sans doute égaux comme prévu par MK. Par contre la prédiction champ moyen est completement exclue; cependant cela n'est pas vraiment surprenant puisqu'il n'y a *pas* de phase verre de spins en $d = 2$ contrairement au cas champ moyen, il est difficile de faire appel au champ moyen au *dessous* de la dimension critique inférieure.

Passons au cas $d = 3$ qui est à la fois plus difficile et plus intéressant puisqu'il possède une transition de phase avec $T_c > 0$. Avec la même procédure (Eq. II.0–1) nous trouvons $E = -1.68N + 1.2N^{\Theta_s/d}$ avec $\Theta_s = 0.135 \pm 0.037$. Encore une fois la prédiction champ moyen est complétement éliminée alors

([6])Merci à Daniel Fisher pour nous avoir mentionné l'existence de cet article.

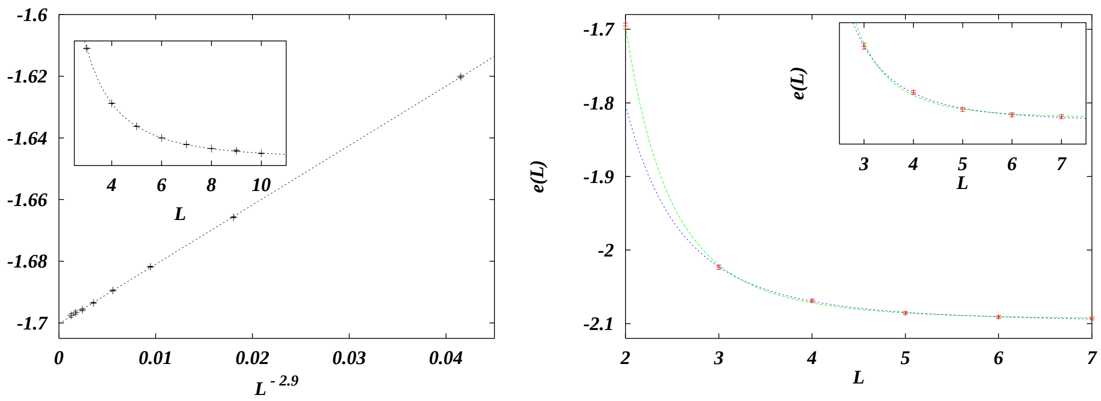


FIG. II–13 – *Gauche : densité d'énergie moyenne du fondamental pour un verre de spins en* 2d *(en insertion) et en* 3d*, avec couplages gaussiens. Les meilleurs fits donnent* $\Theta_s(d=2) \approx -0.3$ *et* $\Theta_s(d=3) \approx 0.1$. *Droite : résultats de (Hartmann, 1999*a) *en* $d = 4$ *et* $\pm J$ *avec le fit original incluant le point* $L = 2$ *(en haut), puis sans ce point (en bas) en utilisant une forme où* $\Theta_s = \theta_{DW}$ *: les résultats sont alors parfaitement compatibles.*

que la prédiction MK est assez bonne ($\theta_{DW} \approx 0.2$ (Palassini & Young, 1999*b*)). Pouvons nous en dire plus ?

La mesure la plus précise pour le cas gaussien est $\theta_{DW} \approx 0.19(2)$; la même valeur étant par ailleur trouvée par (Hartmann, 1999*b*) dans le cas discret, cela confirme nos conclusions et c'est bien seulement quand $T_c = 0$, et donc en $d = 2$ pour le modèle EA, que l'on obtient des différences. Puisque nous trouvons $\Theta_s = 0.135 \pm 0.037$ dans le modèle gaussien, il semble que nos mesures ne soient pas compatibles avec $\Theta_s = \theta_{DW}$; cependant un fit où l'on impose $\Theta_s = \theta_{DW}$ donne un très bon résulat. De plus si on se réfère aux données publiées de (Hartmann, 1999*b*) en $\pm J$, on trouve encore que $\Theta_s = \theta_{DW}$ donne d'excellent résultats (notamment un χ^2 par degré de liberté aux alentours de 1).

Pour finir, passons au cas en $d = 4$ pour le modèle $\pm J$, où il existe aussi des données publiées (Hartmann, 1999*a*), et pour lequel il a été trouvé, dans nos notations, $\Theta_s \approx 0.2 \pm 0.1$ et $\theta_{DW} = 0.7 \pm 0.1$. Il semble par contre cette fois qu'en $d = 4$ la différence soit très claire, et que $\Theta_s \neq \theta_{DW}$. Cependant un examen attentif des données montre que pour trouver $\Theta_s \approx 0.2 \pm 0.1$ l'auteur a inclu le point à $L = 2$. Puisque la valeur maximale de L reste assez petite dans ce modèle ($L \leq 7$) cela peut avoir des conséquences importantes; ainsi en essayant d'estimer les données et en faisant un fit utilisant la valeur de θ_{DW} pour Θ_s, et en supprimant le point à $L = 2$, on trouve un très bon accord (voir la figure II–13).

Ces différentes mesures suggèrent qu'il est difficile de séparer Θ_s et θ_{DW} dans les verres de spins en d dimensions. Si l'analyse favorise *systèmatiquement* des Θ_s *plus petits* que θ_{DW} il est quand même honnête de dire que pour tous les modèles étudiés l'on trouve que cette égalité est compatible. Dans ce cas les effets de tailles finies sondent donc bien les mêmes caracteristiques du système que les calculs de parois de domaine, comme prévu en MK.

d) Discussion

Pour conclure, nos résultats et nos ré-analyses des données publiées par ailleurs suggèrent que, comme dans le système MK

$$\theta_{dw} = \Theta_s \tag{II.4–1}$$

que les fluctuations d'instance à instance sont

$$\Theta_f = \frac{d}{2} \tag{II.4–2}$$

et que la distribution des énergies des fondamentaux est gaussienne. Enfin on remarque aussi que, comme dans le modèle MK, θ_{DW} n'est universel que quand il est positif.

Nos résultats indiquent que, si l'approximation MK n'est sans doute pas la panacée pour étudier le modèle EA, elle permet de donner des résultats semble-t-il exacts et extrêmement intéressants du seul fait qu'elle soit vraiment en dimension finie, et ce là où le champ moyen semble plutôt mauvais. Un autre résultat donnant du poids à cette conjecture ($\Theta_s = \theta_{DW}$ en EA) est que les changements qui se produisent dans la configuration des spins quand un système est agrandit par l'ajouts de nouveaux spins (Middleton, 1999) et quand on change les conditions aux limites (Palassini & Young, 1999*a*) sont très similaires en $2d$ et mènent en particulier à la même dimension fractale pour la surface des amas retournés.

Cependant, il faut bien noter que, du point de vue physique, l'égalité importante dans MK n'est pas tellement $\theta_{DW} = \Theta_s$ mais bien $\theta_{DW} = \theta$! C'est elle qui nous assure que faire des calculs Périodique-Anti Périodique nous donnent des informations physiques sur le système. Le fait que, déjà en $d = 2$ EA, l'égalité $\theta_{DW} = \theta$ soit mise en doute suggère une hypothétique différence avec le modèle MK : la présence de plusieurs branches d'excitations. Nous reviendrons là dessus plus loin dans la thèse et notamment au chapitre IV.

— II.5 — Conclusion

Le but de ce chapitre était de comprendre les effets de tailles finies et des fluctuations d'échantillon à échantillon dans différents types de verres de spins. L'analyse sur réseau hiérarchique nous a ainsi permis de dégager des prédictions sur les trois exposants qui nous intéressaient : (a) l'exposant θ_{DW} donnant l'énergie d'une paroi de domaine est égal à a celui Θ_s donnant les effets de taille finie et (b) la fluctuation d'instance à instance est gaussienne et $\Theta_f = d/2$. L'analyse numérique confirme ces prédictions pour le modèle EA sur un réseau hyper-cubique. En ce sens il semble que l'approximation MK capture bien certains aspects de la géométrie dans le système réel; elle confirme de plus que nous devons nous attendre à un exposant θ universel, c.a.d. ne dépendant pas de la réalisation microscopique, seulement pour le cas où $\theta > 0$.

L'analyse pour les modèles champ moyen est aussi intéressante pour plusieurs raisons. Premièrement nous trouvons que, pour tous les modèles étudiés, $\Theta_s = d/3$; il serait intéressant de pouvoir démontrer ce résulat, déjà trouvé analytiquement pour l'énergie libre près de T_c. Pour les modèles en connectivité finie avec couplages gaussiens l'on trouve aussi, comme dans les cas précédents, une fluctuation d'instance à instance gaussienne et un $\Theta_f = d/2$. Le modèle $\pm J$ en connectivité finie et surtout le modèle SK sont un peu pathologiques puisqu'ils échappent à cette propriété; la distribution des énergies de leurs fondamentaux n'étant absolument pas gaussienne.

Enfin, nous devons rejeter la conjecture de (Bouchaud & Mézard, 1997) sur la correspondance entre la distribution des énergies du fondamental, les statistiques des extrêmes, et le type de RSB, les modèles champ moyen en connectivité finie n'ayant pas une distribution des énergies particulières, et le cas SK etant notablement différent du cas en connectivité finie bien que ces deux modèles semblent posseder une phase avec RSB continue.

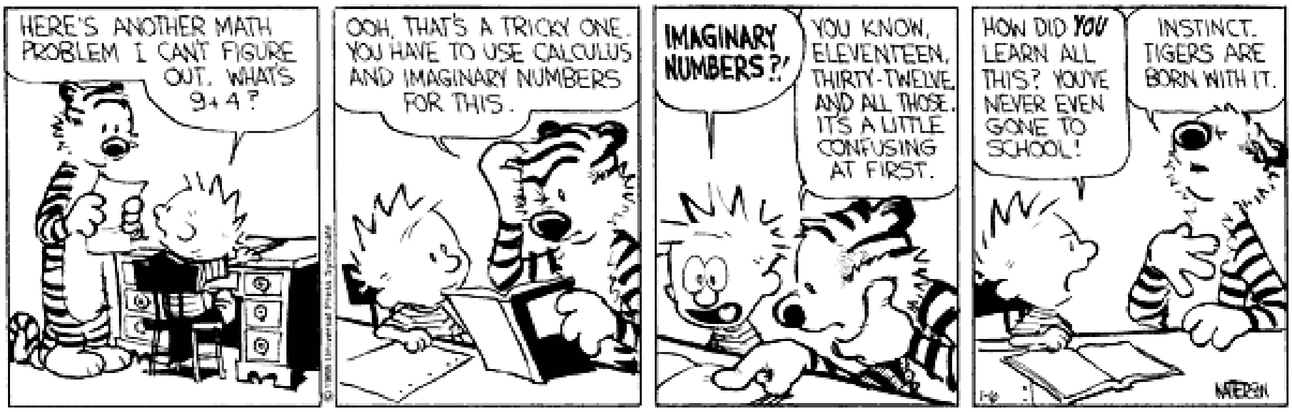
Modèle	θ_{global}	θ_{DW}	Θ_s	Θ_f	Commentaires
Random Energy Model					
	0	n.d.	0		n.d. $\rightarrow$ non défini.
Scaling Random Energy Model					
	θ	n.d.	θ		
Directed Polymer in Random Media					
	1/3	n.d.	1/3		
Renormalisation de Migdal-Kadanoff ($\ell = 2$)					
$b = 2\ \pm J\ (2d)$	$-\infty$			$d/2$	
$b = 2$ gauss $(2d)$	-0.26			$d/2$	L'égalité est démontrée en MK.
$b = 3$	0.0268			$d/2$	Indépendant de gaussien où $\pm J$ pour $b \geq 3$.
$b = 4\ (3d)$	0.2552			$d/2$	
$b = 5$	0.4196			$d/2$	Le théorème de la limite centrale
$b = 6$	0.5533			$d/2$	s'applique.
$b = 7$	0.6660			$d/2$	
$b = 8\ (4d)$	0.7633			$d/2$	
Champ moyen en connectivité finie					
Gaussien	0	n.d.	$d/3$	$d/2$	Pas de θ_{dw}, le $d/3$ est conjecturé.
$\pm J$	0	n.d.	$d/3$	$\approx d/3$	Le t.l.c. ne s'applique pas.
Champ moyen Sherrington-Kirkpatrick					
Gaussien	0	n.d.	$d/3$	≈ 0.2	Le t.l.c. ne s'applique pas.
Edwards-Anderson					
$d = 2\ \pm J$	??	≈ 0		$d/2$	θ n'est pas vraiment connu en EA ...
$d = 2$ gauss	??	$\approx -0.282(3)$		$d/2$	L'égalité est conjecturée
$d = 3$	??	≈ 0.19		$d/2$	Semble indépendant de gaussien ou $\pm J$ quand $d > 2$
$d = 4\ \pm J$	??	≈ 0.7		$d/2$	$\Theta_f = d/2$ est démontré en toute dimension

Chapitre III

Fluctuations d'entropie et chaos

Un modèle à entropies et énergies aléatoires est introduit et résolu dans ce chapitre. Il permet de discuter de l'effet des fluctuations entropiques de vallées à vallées, et en particulier sur la nature du $P(q)$ à température nulle et sur le chaos en température.

L'importance de la nature des couplages -discrets ou continus- dans les systèmes désordonnés est toujours sujette à débat. Nous montrerons comment, à cause des fluctuations entropiques, les modèles discrets peuvent avoir un comportement particulier, notamment un $P(q)$ trivial à $T = 0$ même en cas de brisure de la symétrie des répliques à $T > 0$. On discutera ensuite de l'origine du chaos en température dans les systèmes désordonnés et l'on testera ensuite ces idées -avec succès- sur un modèle de verre de spins sous l'approximation de Curie-Weiss.



Le désordre est bien plus puissant
lorsqu'il s'organise.
André Suares *Idées et visions*

L'avantage du désordre,
c'est qu'il se transforme en ordre tôt ou tard
Jean Basile *La jument des mongols*

Les fluctuations entropiques sont très importantes en physique statistique, particulièrement dans le système canonique où l'état d'équilibre est un compromis entre énergie et entropie. Dans les systèmes désordonnés l'état d'équilibre est souvent considéré comme étant très sensible à des perturbations infinitésimales : il y a tellement d'états (méta-)stables, possédant une différence d'énergie libre faible (grandissant beaucoup moins vite que le volume) qu'une perturbation extensive (dont l'énergie grandit comme le volume et ainsi vite que la différence d'énergie libre) aussi infinitésimale soit elle, peut faire passer le système d'un état à un autre.

Le rôle des fluctuations entropiques dans cette sensibilité a été analysé en détail par (Bray & Moore, 1987) qui en ont déduit que la phase d'équilibre des verres de spins change complètement quand on varie la température, une propriété appelée *chaos en température* déjà présente chez (Fisher & Huse, 1986) . On peut aussi se demander, vu cette sensibilité, dans quelle mesure toutes les propriétés des systèmes étudiés dépendent de la réalisation microscopique de l'Hamiltonien, et en particulier de la nature des couplages.

Nous discutons d'abord en général de la nature de la fonction $P(q)$ dans les systèmes discrets. Ensuite, pour analyser les effets des fluctuations entropiques de vallée à vallée nous introduirons un modèle simple où la dépendance avec la température peut être analysée (Krzakala & Martin, 2002*b*). Ses résultats principaux sont (i) que le $P(q)$ à température nulle des systèmes désordonnés peut être *trivial*(¹) même en présence de RSB à température finie (Krzakala & Martin, 2001) et (ii) que la présence du chaos, semblant inévitable, ne devrait apparaître dans les simulations qu'à des tailles au dessus de quelques milliers de spins, Enfin, nous présenterons une étude numérique dans l'approximation des équations champ moyen naïves validant cette approche, et nous discuterons et passerons en revue les travaux récents.

– III.1 – Entropie et $P(q)$ dans les systèmes discrets

Dans les systèmes fortement désordonnés on peut rencontrer le phénomène de la "brisure de la symétrie des répliques" (RSB). Comme nous l'avons dit, cela s'interprète par l'existence de vallées macroscopiquement différentes du fondamental et dont la différence d'énergie libre est $O(1)$. L'observable classique pour identifier la RSB est la distribution de la probabilité du recouvrement $P(q)$ entre deux copies, qui est alors non triviale (Parisi, 1980*a*). C'est bien sûr dans le modèle SK que ce comportement a été découvert et vérifié numériquement (Young, 1983). Cependant, à basse température, dans les systèmes avec couplages continus, la contribution inter-vallées décroît comme $\exp(-\frac{a}{T})$(²) et le $P(q)$ est donc trivial à $T=0$.

Il est souvent argumenté que dans les modèles discrets où il y a RSB, le fondamental étant dégénéré, $P(q)$ doit redevenir alors non trivial à $T=0$. Si cela est vrai, cela signifie d'une part qu'à basse température il y a des différences importantes entre les systèmes discrets et continus et d'autre part que le calcul numérique de $P(q)$ à $T=0$ est une bonne méthode pour savoir s'il y a RSB dans un système discret. C'est ainsi que nombre d'études ont été effectuées pour tester la brisure de la symétrie

(¹)Se reporter au chapitre I: un $P(q)$ trivial est constitué de deux pics en $\pm q_{EA}$ tandis qu'un $P(q)$ non trivial, qui apparaît dans les modèles avec RSB, possède en plus un fond continu.

(²)Ce qui provient simplement de l'unicité du fondamental dans le modèle avec couplages continus. Le poids des excitations est $O(\exp-\frac{\Delta E}{T})$, ce qui s'annule à $T=0$.

des répliques en calculant ce $P(q)$ à $T = 0$ dans les systèmes continus. Nous allons montrer que cette méthode n'est pourtant *pas* pertinente! De fait ces calculs de $P(q)$ étant souvent au centre des débats dans la communauté des systèmes désordonnés, il est important de clarifier ce comportement.

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'étude du $P(q)$ à température nulle dans les systèmes désordonnés, et plus particulièrement l'étude de l'effet de la discrétisation et de la dégénérescence du fondamental. Il est largement inspiré par l'article (Krzakala & Martin, 2001). La conclusion principale est que le paramètre d'ordre $P(q)$ pour les systèmes désordonnés et frustrés avec un fondamental dégénéré, les modèles discrets donc, est *trivial* à température nulle -comme dans le cas continu- même s'il existe des grandes excitations d'énergie nulle, et ce à cause des fluctuations entropiques. De fait, contrairement à ce que suggère l'intuition, les modèle discrets et continus semblent se comporter de la même façon.

Après avoir exposé l'argument pour la trivialité du $P(q)$, ainsi que le mécanisme qui le rend non trivial quand $T > 0$, je passerai en revue les travaux numériques et analytiques inspirés par ce travail, qui le confirme pour une grande part.

a) $P(q)$ à température nulle

Pour simplifier la discussion, nous allons nous placer sans perte de généralité dans le cas du modèle EA en 3 dimensions avec des couplages $\pm J$ et son Hamiltonien classique :

$$H = -\sum_{<ij>} J_{ij} S_i S_j \qquad \text{(III.1–1)}$$

où les J_{ij} sont donc distribués aléatoirement à partir d'une distribution bimodale discrète $J_{ij} = \pm 1$ et où l'on est sur un réseau cubique. Nous allons partir de l'hypothèse qu'il y a RSB dans ce modèle et donc qu'il existe des excitations de la taille du système d'énergie nulle. Naïvement cela nous semble impliquer un $P(q)$ non trivial puisque l'on aura des recouvrement entre états très différents. Nous allons pourtant voir que ce n'est pas le cas et que le $P(q)$ est trivial à $T = 0$ et non trivial à $0 < T < T_c$ comme dans le modèle continu.

L'argument est le suivant: dans ce système, les J_{ij} étant discret, l'énergie l'est aussi, ainsi que le champ local que *voit* un spin donné, qui peut prendre les valeurs $\pm 6, \pm 4, \pm 2$ ou encore 0. Si le champ local ressenti par un spin est nul, alors ce spin peut flipper sans coup énergétique, on nommera par la suite *spins fous* les spins ayant cette propriété. Dans les fondamentaux des systèmes discrets, le nombre de spin en champ nul représente une fraction finie de l'ensemble des spins([3]), et donc la dégénérescence grandit au moins exponentiellement avec la taille du système. La notion de vallée différente (dit autrement : un état qui diffère macroscopiquement du fondamental que l'on a choisi) est alors ambiguë à cause de la densité finie d'amas connexes d'énergie nulle : si l'on retourne tous les spins fous en champ nul, est-ce une excitation d'énergie nulle *macroscopique*? La réponse est clairement *non*!

Si nous nous plaçons à grand L et que l'on fasse tendre $L \to \infty$, alors si deux fondamentaux diffèrent seulement de 1,2,3, … ,k spins, k restant fini, on peut dire qu'ils appartiennent à la même famille de fondamentaux. Autrement dit, si nous nous restreignons à une même famille, le $P(q)$ sera une fonction delta à $q_{EA} < 1$. Considérons un fondamental particulier et une excitation d'énergie nulle de la taille du système (en supposant qu'elle existe puisque dans toute cette discussion on suppose qu'il y a RSB dans le modèle EA à 3d et donc existence de gouttelettes de la taille du système et d'énergie nulle): i.e. un autre fondamental qui diffère du précédent par une gouttelette de la taille du

([3])Je ne sais pas démontrer en toute rigueur ce résultat, mais il est semble être vrai numériquement (l'une des particularité du modèle discret sur le modèle continu étant que $q_{EA} < 1$ à cause des spins fous) et il est assez intuitif.

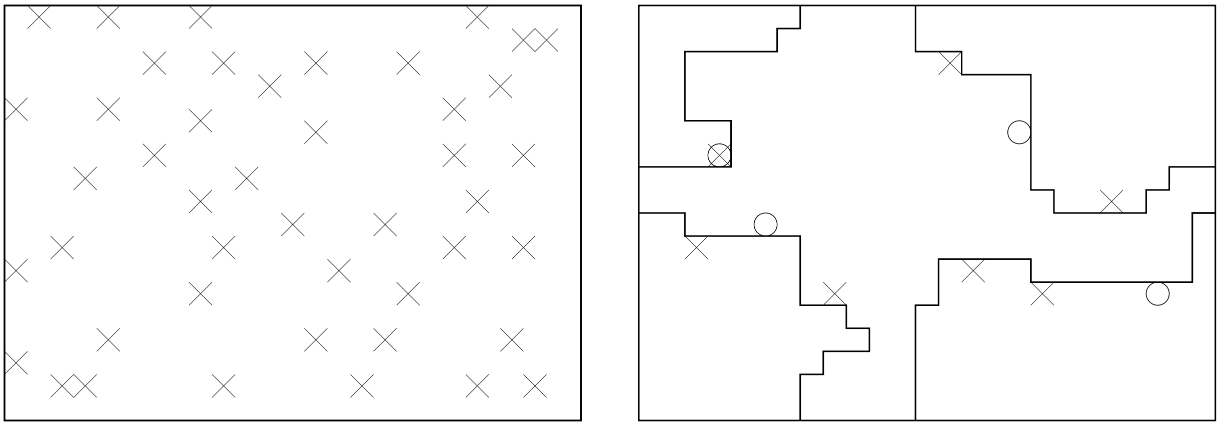


FIG. III–1 – *a: spins du fondamental* 1 *avec un champ local nul (croix). b : l'on retourne une fraction finie du système et l'on est dans le fondamental* 2*; la ligne représente les bords de l'amas retourné. Seuls les spins en champ nul qui touchent ce bord sont pertinents pour la différence en entropie des deux familles de fondamentaux.*

système *plus* des gouttelettes de taille finie([4]). Cela est illustré sur la figure III–1.b où la ligne solide représente le bord d'un amas de la taille du système(pour une section d'un réseau 3d). S'il n'y avait que ces deux fondamentaux, le $P(q)$ à $T = 0$ serait une fonction constitué d'un pic en $q_{EA} = 1$ et d'un pic inter-vallée en $q < 1$. Comme on l'a dit, pour chacun de ces fondamentaux dans le modèle $\pm J$, il en existe d'autres qui en diffèrent par des excitations de k spins d'énergie nulle, ce qui a pour effet de rendre $q_{EA} < 1$. Voila pour l'effet de ces spins fous pour la contribution intra-vallée, mais *quel est l'effet de ces spins fous sur le q inter-vallées ?*

Supposons que dans les deux familles il y ait, à L donné, $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ fondamentaux. Pour comparer les $\mathcal{V}_i$, l'on considère que chaque famille est obtenue à partir d'un fondamental de référence $\mathcal{C}_i$ en flippant ses gouttelettes d'énergie nulle. $\mathcal{N}_i^{(k)}$ est alors le nombre de gouttelettes d'énergie nulle contenant k spins de $\mathcal{C}_i$. On a alors, en supposant avec Fisher et Huse l'indépendance des gouttelettes, $Log_2 \mathcal{V}_i = \mathcal{N}_i^{(1)} + \mathcal{N}_i^{(2)} + \cdots$; $\mathcal{V}_i$, qui est crucial pour la structure du $P(q)$, qui est donc très sensible au nombre exact de gouttelettes d'énergie nulle dans la famille. Bien entendu, nous nous attendons à ce que $\mathcal{N}_i^{(k)}$ soit auto moyennant (et qu'il grandisse comme L^3) mais en supposant que le théorème de la limite centrale est valide, les fluctuations autour de la valeur moyenne grandiront comme $L^{3/2}$, et donc le nombre total de gouttelettes d'énergie nulle $\mathcal{N}_i$ de $\mathcal{C}_i$ est de la forme

$$\mathcal{N}_i = \sum_k \mathcal{N}_i^{(k)} = \alpha L^3 + x_i \sqrt{f L^3} \qquad \text{(III.1–2)}$$

ou x_i est une variable gaussienne aléatoire.

Retournons au $P(q)$. On se rend compte que la contribution intra-vallée, à l'intérieur d'une famille donnée, est donnée par les $\mathcal{V}_1^2 + \mathcal{V}_2^2$ paires possible, et $2\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2$ paires vont donner la contribution inter-vallée. On se rend compte alors que la contribution intra-vallée domine la contribution inter-vallée par un facteur $2^{(x_1 - x_2)\sqrt{fL^3}}$ (on a choisi $x_1 > x_2$), et puisque ce facteur diverge, le $P(q)$ n'a pas de contribution inter-vallée, et est donc trivial.

([4])Pour une discussion détaillé sur la façon de grouper les fondamentaux en famille, on peut se reporter à l'article ou à (Hartmann, 2000).

En fait, nous devons être plus précis sur les fluctuations puisqu'il est possible que $x_1 \approx x_2$. Sur la figure III–1.a, on a dessiné par des croix les spins du fondamental 1 ($\mathcal{C}_1$) qui ont une énergie nulle. Sur III–1.b, on a dessiné par une ligne le bord B de l'amas que l'on a retourné pour changer de famille. Il est évident qu'à l'exception des sites qui touchent B, le champ local des spins n'est pas changé. Ces spins ne contribuent donc *pas* à la différence $\mathcal{N}_1^{(1)} - \mathcal{N}_2^{(1)}$. Ce sont ceux qui touchent la ligne B qui nous intéressent.

Si $\mathcal{A}$ est le nombre de spins touchés par B, il semble maintenant que $\mathcal{N}_1^{(1)} - \mathcal{N}_2^{(1)}$ grandit comme $\sqrt{\mathcal{A}}$(5). Si l'on étend ce raisonnement aux gouttelettes de toutes tailles, on obtient

$$\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2 \approx y_{12}\sqrt{\mathcal{A}} \tag{III.1–3}$$

ou y_{12} est une variable gaussienne avec une variance finie. Ainsi, *la contribution intra-vallée domine la contribution inter-vallée puisque $\mathcal{A}$ diverge quand $L \to \infty$.*

On peut facilement étendre cet argument à n'importe quel nombre fini de familles. Ce qui est vraiment important est que $\mathcal{N}_i - \mathcal{N}_j$ diverge pour chaque paire de familles, ce qui arrivera si le nombre de famille ne grandit pas trop vite avec L, ce qui est le cas en RSB. Le $P(q)$ dans la limite thermodynamique est alors trivial (deux fonctions delta en $\pm q_{EA}$) à cause des fluctuations entropiques, même s'il existe des excitations de taille finie d'énergie $O(1)$.

Enfin, puisque y_{12} a une densité de probabilité finie en 0, cela veut dire qu'avec une probabilité décroissant comme $1/\sqrt{\mathcal{A}}$ les deux contributions sont d'importance comparable. Ainsi, la dépendance en taille de $P(0)$ devrait se comporter comme $1/\sqrt{\mathcal{A}}$. Cela nous offre une voie pour déterminer numériquement la dimension fractale de la surface des grandes excitations. Dit autrement, on devrait avoir $P(0) \propto L^{-ds/2}$ en suposant encore l'indépendance des spins fous.

Il est aussi possible d'étendre ce calcul en supposant que les énergies des états excités sont en L^{θ}, et dans ce cas la probabilité d'avoir une contribution inter-vallée comparable à la contribution intra-vallée est modifié par un facteur $L^{-\theta}$ (la probabilité d'obtenir une excitation de grande taille d'énergie nulle n'est plus finie) comme dans le modèle des gouttelettes. En conclusion, le $P(q)$ dans les systèmes discrets devrait toujours être trivial à $T = 0$, et le poids en $P(0)$ devrait décroître comme $L^{-\frac{d_s}{2}-\theta}$.

Ces prédictions ont été testées avec succès dans un modèle de verre de spins par (Drossel & Moore, 2001) qui confirment que le $P(q)$ décroît bien comme $L^{-\frac{d_s}{2}-\theta}$ à $T = 0$ sous l'approximation Migdal-Kadanoff en 3d en $\pm J$ (dans ce cas $\theta \approx 0.26$ et $d_s = 2$, et l'on trouve bien que $P(0) \propto L^{-1.26}$). De plus, cette image propose une façon de comprendre les résultats numériques contradictoires (Hartmann, 1997; Hartmann, 2000; Hed, Hartmann, Stauffer & Domany, 2001) qui trouvent un système complexe avec des grandes excitations de d'énergie nulle *et* un $P(q)$ trivial. Ainsi re-interprétés, ces résultats sur les fondamentaux suggèrent en effet la présence de RSB et puisque le $P(0)$ y décroît comme $1/L^{1.25}$ (Hartmann, 2000); cela semble indiquer, si $\theta = 0$ que $d_s \approx 2.5$, en accord avec le scénario TNT qui sera présenté plus loin (voir chapitre IV).

b) $P(q)$ à température finie

Est-ce que cette image est compatible avec un $P(q)$ non trivial à température finie? Naïvement, il semble que l'argument précédent peut toujours s'appliquer, mais cela n'est pas le cas puisqu'à température finie nous devons maintenant considérer *tous* les états possibles, et non seulement ceux avec la plus basse énergie. Le fait de ne plus considérer un nombre fini, ou grandissant lentement, d'état va détruire l'argument, et va nous redonner un $P(q)$ non trivial.

(5)Cela est vrai en toute rigueur si l'on admet qu'il n'y a pas d'interaction entre les spins fous.

Une façon simple de le montrer est la suivante : dans notre système complexe, le nombre de vallées augmente avec l'énergie. Dans le modèle à énergies aléatoires (Derrida, 1981) et dans le modèle SK, la densité $\rho_E(E)$ de vallées dont l'énergie est E grandit ainsi exponentiellement avec E, mais nous n'avons pas (encore) besoin d'être aussi précis. On peut se contenter de

$$\rho_E(E) = e^{S(E)} = e^{S(E^*)+(E-E^*)S'(E^*)+\cdots} \tag{III.1–4}$$

ou $S(E)$ est une fonction "gentille" et E^* est arbitraire. L'hypothèse importante est que $S(E)$ ne grandit pas trop vite avec L comme cela doit être le cas s'il y a une nombre fini de vallées avec une énergie (discrète) interne E. Maintenant, quelle est la densité ρ_F d'énergie libre de ces vallées quand la température est T ? On défini l'énergie libre d'une vallée comme

$$e^{-\frac{F_i(T)}{T}} = e^{-\frac{E_i}{T}} \sum_{\mathcal{C}}{}' e^{-\frac{E(\mathcal{C})-E_i}{T}} \tag{III.1–5}$$

ou $\sum_{\mathcal{C}}'$ est la somme sur toutes les configurations $\mathcal{C}$ appartenant à la vallée i, et E_i est l'énergie de la vallée (l'énergie de son fondamental de plus basse énergie).

Ensuite, supposons que l'énergie libre $F_i(T)$ d'une vallée i est aussi une variable aléatoire se comportant comme

$$F_i(T) = E_i + L^3 f(T) + x_i\sqrt{L^3} \tag{III.1–6}$$

ou $f(T)$ est la densité (auto-moyennante) de l'énergie libre et x_i une variable (gaussienne) aléatoire dont la variance dépend de T. Ces hypothèses sont basées sur l'idée que chaque vallée est indépendante, et qu'ainsi le second facteur du terme de droite dans l'Eq III.1–5 ne contient pas de dépendance envers E_i, ou dit autrement, qu'il n'y aucun moyen de savoir si une vallée contient ou non le fondamental. Avec cette anzatz, la densité $\rho_F(F)$ de la vallée i peut être calculée à partir d'une convolution de $\rho_E(E)$ avec une distribution gaussienne $G(x)$:

$$\rho_F(F) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_E(E)dE \int_{-\infty}^{\infty} G(x)\ \delta(F - E - L^3 f(T) - x\sqrt{L^3})dx. \tag{III.1–7}$$

En utilisant alors Eq. III.1–4, avec $1/T^* = S'(E^*)$, on trouve rapidement après quelques calculs que

$$\rho(F) = e^{\frac{F-F^*(T)}{T^*}} \tag{III.1–8}$$

ou $F^*(T) \approx L^3 f(T)$ est l'énergie libre de référence. Nous obtenons alors la forme donnée par le REM et le champ moyen : pour un ρ_F de cette forme, les différence d'énergie libre sont $O(1)$ et le $P(q)$ est non trivial. Ainsi, pour n'importe quelle température finie en dessous de T^*, il y a RSB et un $P(q)$ non-trivial([6]).

c) Présentation alternative

Ce petit calcul suggère une autre façon de voir les choses, qui permet de comprendre l'essence du modèle à énergies et entropies aléatoires qui sera présenté dans la prochaine section. Considérons d'abord le modèle à énergies aléatoires (REM) en assignant à chaque paires d'états un *recouvrement*

([6])Dans l'Eq. III.1–6, les x_i des différentes vallée sont en fait corrélées. Comme pour les fondamentaux, il faut donc considérer les différences entre l'énergie libre, et remplacer l'Eq. III.1–6 par $F_i(T) - F_j(T) = E_i - E_j + y_{ij}\sqrt{\mathcal{A}_{ij}}$ ce qui, après quelques calculs, ne change pas le résultat.

nul. Le $P(q)$ à l'équilibre, en dessous de T_c est alors typique des systèmes one-step : il est constitué d'un pic en $q_{EA} = 1$ et d'un pic en $q = 0$. Bien entendu, à température nulle, seul q_{EA} est présent puisqu'il ne faut alors considérer que l'état d'énergie minimale.

Considérons maintenant le même REM mais avec une distribution d'énergie discrète : dans ce cas il est possible d'avoir plusieurs (mais en nombre fini) états avec la même énergie minimale et le $P(q)$ est non trivial *même à température nulle.* Cependant, en s'inspirant de tout ce que l'on vient de dire et en introduisant une entropie, si l'on défini les niveaux avec une *énergie libre* $F_i = E_i - TS_i$ où E_i *et* S_i sont aléatoires, il est clair qu'à température très basse, puisque le poids est alors donné par $S_i e^{-\frac{E_i}{kT}}$, il faut considérer tous les états avec l'énergie minimale mais avec un poids donné par leur entropie S_i. Comme argumenté dans cette section, la variance de la distribution des S_is diverge, et donc les fluctuations entropiques *rendent trivial le* $P(q)$ *à température nulle.*

Si l'on se place à température finie dans ce même modèle on rend compte que l'énergie libre, étant la somme de deux variables aléatoires gaussienne, est aussi une variable aléatoire gaussienne : le modèle à température finie est donc équivalent à un REM, il y a RSB et un $P(q)$ non trivial. Le modèle que nous venons de présenter résume bien les arguments de cette section; il va de plus nous permettre dans la prochaine d'étudier l'importance du chaos en température.

d) Discussions

Pour conclure et résumer ces arguments sur les systèmes avec désordre gelé, nous pouvons utiliser la formule suivante : *"Un système qui a des vallées avec une différence d'énergie* $O(1)$ *conduit à un paysage en énergie libre possédant des vallées avec une différence d'énergie libre* $O(1)$*, et donc à la RSB, tout en ayant un* $P(q)$ *trivial à* $T = 0$*."* On peut aussi généraliser cet argument à des modèles de gouttelettes et l'on aura alors *"Un système qui a des vallées avec une différence d'énergie* L^θ *conduit à un paysage en énergie libre possédant des vallées avec une différence d'énergie libre en* L^θ*".* De plus notre argument prédit que le poids du $P(q)$ en $q = 0$ décroît comme $L^{-\frac{d_s}{2}-\theta}$ pour les systèmes discrets. Ce n'est donc pas pertinent de regarder ni le $P(q)$ à $T = 0$ ni le $P(q)$ entre états excités (qui sont aussi en nombre fini) mais le $P(q)$ correctement équilibré à température finie est bien une bonne observable: c'est le paysage en énergie lui même qu'il faut étudier pour distinguer entre gouttelettes et RSB. Nous tirerons profit de ce résultat dans le chapitre suivant lorsque nous étudierons le modèle EA en $3d$.

D'autres travaux inspirés par ces résultats ont suivi ces développements. En plus de l'article précité (Drossel & Moore, 2001), Sasaki et Martin ont également confirmé, en étudiant analytiquement une généralisation du GREM (Sasaki & Martin, 2002*a*) avec couplages discrets et fluctuations entropiques (il s'agit donc d'un modèle où il y a brisure de la symétrie des répliques), la validité de cette approche, ainsi que celle du mécanisme qui rétablit RSB à température finie. Leur modèle a en effet un $P(q)$ trivial à $T = 0$, dont la loi de scaling est bien celle attendue, et un $P(q)$ non trivial quand $T_c > T > 0$. Ainsi à chaque fois que notre argument a été testé dans de bonnes conditions (analytiquement par (Sasaki & Martin, 2002*a*) et numériquement avec une précision arbitraire par (Drossel & Moore, 2001)): *la validité de l'argument a pu être confirmée.* Une étude numérique sur les modèles SK et à connectivité finie à basse température avec couplages discret serait aussi la bienvenue.

Savoir comment se comporte le $P(q)$ à température nulle dans le modèle EA à 3d est encore une question ouverte, puisque la présence ou l'absence de RSB est toujours sujette à débat. Si l'on suppose qu'il y a RSB, c.a.d. des vallées macroscopiquement différentes dont les différences en énergies sont $O(1)$, et que l'on accepte aussi notre argument, on peut comprendre les résultats contradictoires (Hartmann, 1997; Hartmann, 2000; Hartmann & Ricci-Tersenghi, 2001) qui trouvent, dans le modèle EA $\pm J$ en trois dimensions, à la fois un $P(q)$ trivial à $T = 0$ et un paysage d'énergie complexe avec des excitations de la tailles du système et d'énergie $O(1)$ comme dans les système où il y a RSB. D'autres simulations Monte-Carlo plus récentes tendent elles aussi à confirmer le fait que $P(q)$ des systèmes discrets est trivial à $T = 0$ mais pas à $T > 0$ (Palassini & Young, 2001; Hartmann & Ricci-Tersenghi, 2001; Hed, Hartmann & Domany, 2001; Hed, Hartmann, Stauffer & Domany, 2001). En plus de clarifier considérablement la situation numérique, nos résultats indiquent (a) qu'il faut être prudent dans l'analyse du $P(q)$ des modèles discrets et (b) qu'il est important de bien contrôler la limite $L \to \infty$ avant de prendre $T \to 0$ (Katzgraber et al., 2001).

Pour finir, notons un débat de numéricien assez important. Lorsque l'on applique la loi de scaling où le $P(0)$ décroît avec un exposant $\frac{d_s}{2} - \theta$ aux données de Hartmann, dans le modèle EA $3d$ discret, on trouve comme on l'a dit, en supposant $\theta = 0$, que $d_s \approx 2.5$. Il y a alors une apparente contradiction avec (Palassini & Young, 2001) qui, s'ils trouvent bien de façon convaincante que le $P(q)$ est non trivial à $T > 0$ mais trivial à $T = 0$, trouvent aussi une décroissance en $L^{-0.9}$. L'égalité $\frac{d_s}{2} - \theta = 0.9(0.1)$ ne peut alors être satisfaite que si $\theta < 0$! Si une telle mesure de θ a déjà été trouvée dans ce modèle (par exemple (Lamarcq et al., 2002) trouvent $\theta \approx -0.15$ ce qui peut éventuellement nous réconcilier avec $d_s \approx 2.3$), il est quand même difficile de réconcilier ce résultat avec d'autres qui trouvent $d_s \approx 2.6$. Plus d'études sont nécessaires pour clarifier ce point([7]).

Enfin, il me semble important de souligner que l'argument du $P(q)$ trivial a souvent été utilisé *contre* la présence de RSB dans d'autres modèles, ou encore pour calculer un exposant θ, par exemple dans les modèles de repliement de l'ARN (Pagnani et al., 2000; Hartmann, 2001; Pagnani et al., 2001). Encore une fois, la bonne méthode pour étudier ces modèles à $T = 0$ n'est donc pas de calculer tous les états fondamentaux et de tracer le $P(q)$, mais bien d'étudier directement le paysage en énergie (Krzakala et al., 2002; Marinari et al., 2002).

– III.2 – Le Re-Rem et le chaos en température

Comme nous l'avons vu précédemment, les fluctuations d'entropie qui rendent le $P(q)$ trivial à $T = 0$ sont aussi à l'origine du mécanisme qui re-installe RSB à température finie. Cela peut suggérer la présence de chaos en température (Fisher & Huse, 1986; Bray & Moore, 1987) puisque les niveaux pertinents à température finie ne sont pas ceux à température nulle, et nous allons donc reprendre ici les idées précédentes et présenter un modèle soluble où la dépendance avec la température peut être facilement analysée. Le résultat principal est qu'effectivement la présence du chaos dépend du seul paramètre libre du modèle associé à la fluctuation entropique de vallées à vallées. En extrapolant ces résultats aux modèles de verres de spins, nous montrerons aussi que le chaos ne devrait apparaître dans les simulations qu'à des tailles au dessus de quelques milliers de spins, ce qui peut expliquer pourquoi les simulations actuelles (Billoire & Marinari, 2000; Billoire & Marinari, 2002) ne montrent pas de trace de chaos en température.

a) Argument de Bray-Moore

Si la présence de chaos est attendue dans les verres de spins c'est à cause des compensations entre énergies et entropies (Fisher & Huse, 1986) que l'on peut quantifier avec l'argument suivant (Bray & Moore, 1987) : considérons deux états à température T qui diffèrent par une gouttelette de taille l. Leurs énergies libres différent par un facteur $\Delta F(T) = \Delta E - T\Delta S$. Que se passe t-il quand on change

([7])Pour Drossel et Moore un crossover à de plus grandes tailles, déjà vu dans le système MK, permet de réconcilier les différentes mesures (Drossel & Moore, 2001). Il est aussi possible que des corrélations entre spins fous et murs de domaines soient responsables d'une correction à l'argument.

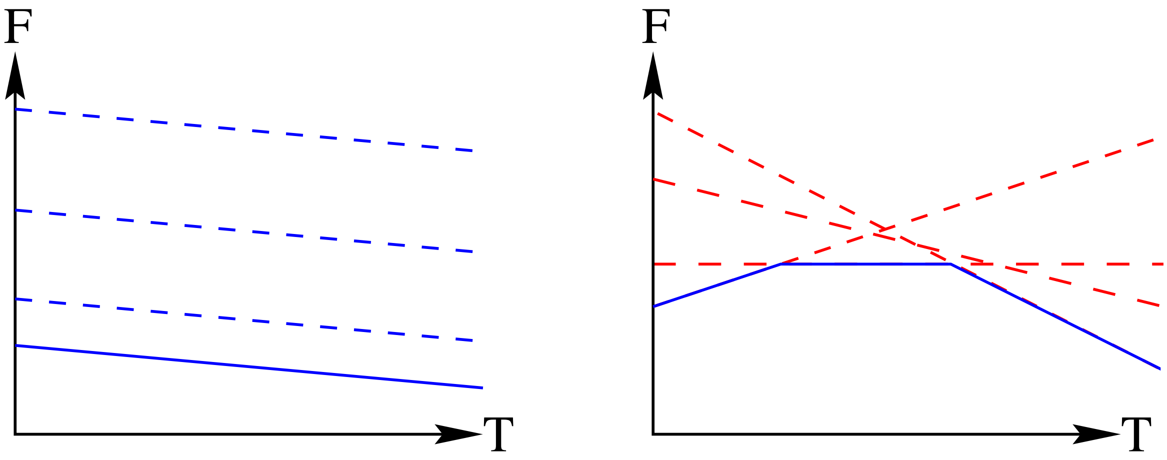


FIG. III–2 – *Energie libre des états les plus bas en fonction de la température : (a) s'il n'y a pas de fluctuations entropiques comme dans le p-spin sphérique et (b) avec des fluctuations, on peut s'attendre à des croisements de niveau.*

la température? On obtient alors $\Delta F(T+\delta T) = \Delta E - (T+\delta T)\Delta F(T) = \Delta F(T) - \delta T \Delta S$. D'après la théorie des gouttelettes ces deux états ont des énergies libres qui diffèrent par un facteur $\Delta F(T)$ qui va comme Υl^{θ}.

Comme argumenté dans la section précédente la différence en entropie est relié à la surface de la gouttelette, ainsi ΔS a un signe aléatoire et une valeur typique autour de $l^{\frac{d_s}{2}}$, où d_s est la dimension fractale de sa surface. Ainsi, si $d_s/2 > \theta$ (ce qui est toujours vrai si $\theta < (d-1)/2$), la différence en énergie libre $\Delta F(T+\delta T)$ peut changer de signe entre T et $T+\delta T$, et donc l'état d'équilibre entre T et $T+\delta T$ doit changer à partir d'une longueur $\ell(\delta T) \propto \delta T^{-1/(\frac{d_s}{2}-\theta)}$ tandis que l'overlap entre les deux états décroît comme

$$q_{T,T+\delta T} \approx \left(\frac{l\,(\delta T)}{L}\right)^{d/2} \qquad \text{(III.2–1)}$$

où L est la taille du système([8]).

La base de l'argument est ainsi qu'il y a une compensation entre E et S pour obtenir F, qui est donc très sensible aux changements de température. Cela marche très bien pour les verres de spins sur réseau hiérarchique (Banavar & Bray, 1987; Ney-Nifle & Hilhorst, 1992) ou pour le DPRM (Halpin-Healy & Zhang, 1995; Fisher & Huse, 1991; Sales & Yoshino, 2002*b*). Est-ce toujours valable pour le modèle EA en $3-d$? Si le raisonnement me semble imparable quand on passe de $T=0$ à $T=\epsilon$ il n'est pas évident qu'il fonctionne à température finie; étendre l'argument suppose d'accepter, avec les tenants de la théorie des gouttelettes, l'existence d'une procédure de renormalisation permettant de travailler avec un fondamental effectif à toute température. L'analyse de la section suivante a pour but d'étudier ce problème.

b) Modèle à énergie et entropie aléatoire : le Re-Rem

([8])Le recouvrement ne peut *pas* décroître plus vite puisque même pour deux configurations aléatoires de N spins le recouvrement décroît comme $N^{-1/2}$.

Il a bossé pendant des jours, tachant avec amour d'améliorer le modèle ...
Boris Vian *La java des bombes atomiques.*

Dans les théories champ-moyen des systèmes verres de spins l'espace des phases est divisé en composants non ergodiques non reliés par une symétrie particulière. On les appelles souvent des *vallées* par une analogie avec l'image du paysage d'énergie. On peut voir une de ces vallées comme un état, même si cette association peut être ambiguë dans un système fini ou non champ moyen; cependant cette image existe aussi dans la description des gouttelettes où l'on doit considérer alors des états métastables.

Si l'on considère un ferromagnétique sous la température critique il existe ainsi deux vallées avec des aimantations $\pm m(T)$. Dans les systèmes vitreux ce nombre de vallées augmente exponentiellement avec la taille, on peut imaginer alors suivre dans un diagramme température-énergie libre les différentes vallées (voir la figure III–2). Dans certains modèles, ces vallées ne se *croisent pas*([9]). L'état de plus basse énergie libre à $T_2 > T_1$ est aussi l'état d'énergie libre la plus basse à T_1. Dans les modèles réalistes, on peut imaginer, en s'inspirant de l'argument de Bray et Moore, que ces vallées se croisent. Un nombre infini de croisements à une température donnée signifie ainsi présence de chaos en température.

Le modèle que nous allons considérer (Krzakala & Martin, 2002*b*) est inspiré du REM (Derrida, 1980), et est défini comme suit: considérons 2^N états avec une énergie libre pour chacun donnée par

$$F_i = E_i - TS_i \tag{III.2–2}$$

où E_i et S_i sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes de moyenne nulle est d'écart type $\sigma_E = N^{0.5}/\sqrt{2}$ et $\sigma_S = N^{\alpha}/\sqrt{2}$ respectivement, où α est un paramètre du modèle. Plus précisément, les distributions de probabilités sont

$$\rho_E(E_i) = \frac{\exp\left(-\frac{E_i^2}{N}\right)}{\sqrt{N\pi}} \quad \rho_S(S_i) = \frac{\exp\left(-\frac{S_i^2}{N^{2\alpha}}\right)}{\sqrt{N^{2\alpha}\pi}}. \tag{III.2–3}$$

Pour E_i, la distribution est la même que dans le REM. On peut visualiser ce modèle en pensant à 2^N lignes dans un diagramme température-énergie-libre comme dans la figure III–2 où la coordonnée en y à l'origine et la pente sont des variables aléatoires.

Notons que l'énergie libre est la somme de deux variables gaussienne aléatoires non corrélées, elle a donc elle aussi une distribution gaussienne, une moyenne nulle et une variance ${\sigma_F}^2 = {\sigma_E}^2 + {\sigma_S}^2$. Ainsi, la variance de l'énergie libre s'écrit

$$2{\sigma_F}^2 = N + T^2 N^{2\alpha} \tag{III.2–4}$$

Si $\alpha = 1/2$, les deux termes contribuent de la même façon à grand N alors que si $\alpha < 1/2$ la variance est dominée par σ_E. Suivant les considérations précédentes, on identifiera α avec $\frac{d_s}{2d}$, et l'on aura donc $\alpha \leq 1/2$.

c) Solution du modèle

Il est facile de résoudre analytiquement ce modèle en procédant comme dans le REM (on peut se reporter au chapitre II pour la solution du REM) puisqu'à chaque température il y a une équivalence entre le Re-Rem, en considérant son énergie libre, et un REM à condition de bien changer la variance

([9])c'est le cas par exemple du p-spin dans l'approximation sphérique (Barrat et al., 1997).

comme exposé plus haut. En procédant ainsi on peut montrer que la densité de niveau avec une énergie libre F est

$$\rho_F(F) = 2^N \frac{e^{-\frac{F^2}{2\sigma_F{}^2}}}{\sigma_F\sqrt{2\pi}} \tag{III.2–5}$$

puis remarquer que pour $|F| < F_0 = \sigma_F\sqrt{2N\ln 2}$ il y a une densité exponentielle d'état et une entropie configurationnelle extensive

$$S_C(F) = N\ln 2 - \frac{F^2}{2\sigma_F{}^2} \tag{III.2–6}$$

tandis que pour $|F| > F_0$ il n'y a aucun niveau à la limite thermodynamique et qu'ainsi $S_C(F) = 0$. La relation entre entropie configurationnelle et température $T^{-1} = \partial S_C/\partial F$ donne alors la température critique $T_c = \frac{\sigma_F}{\sqrt{2N\ln 2}}$. Elle doit donc satisfaire à l'équation auto-consistante

$$T_c = \frac{\sqrt{N + T_c{}^2 N^{2\alpha}}}{2\sqrt{N\ln 2}} = \sqrt{\frac{1 + T_c{}^2 N^{2\alpha-1}}{4\ln 2}}. \tag{III.2–7}$$

On peut se reporter à l'article pour les détails, je vais donner ici les résultats principaux, qui se résument à quatre cas possibles :

(i). Si $\alpha = 0$ (donc en l'absence de fluctuations entropiques), on retombe sur un REM et le système subit une transition à la température $T_c = 1/(2\sqrt{\ln 2})$ avec une phase vitreuse à basse température, dominé par les états d'énergies minimales, dans laquelle la densité d'entropie est nulle, et une phase à haute température où le nombre d'états qui contribuent à la fonction de partition est exponentiel. Dans la phase basse température, les excitations ont une énergie $O(1)$.

(ii). Si $0 < \alpha < 0.5$ les fluctuations entropiques *ne changent pas* ces résultats : on a toujours $T_c = 1/(2\sqrt{\ln 2})$ et les excitations sont encore $O(1)$.

(iii). Si $\alpha = 0.5$ la physique est encore à peu près la même, mais l'on trouve $T_c = \frac{1}{\sqrt{4\ln 2 - 1}} \approx 0.75$. Les excitations sont alors $O(\sqrt{1+T^2})$, ce qui n'est guère différent.

(iv). Enfin, si $\alpha > 0.5$ le modèle est un peu pathologique puisque $T_c = +\infty$ et le système est dans la phase critique à toutes températures. De plus, l'énergie des excitations diverge avec N et l'énergie libre n'est pas extensive. Si l'on suit cependant la prescription $\alpha = \frac{d_s}{2d}$ ce cas n'arrive jamais.

Dans tous les cas, l'énergie libre du plus bas niveau à chaque température est donnée, au premier ordre, par

$$F_0 \sim -\sigma_f\sqrt{2N\log 2} \sim -N\sqrt{\log 2(1 + T^2 N^{2\alpha-1})} \tag{III.2–8}$$

et l'on peut aussi obtenir l'entropie et l'énergie de ce même niveau

$$S_0 \sim \frac{\sqrt{\log 2}\; T N^{2\alpha}}{\sqrt{1 + T^2 N^{2\alpha-1}}} \quad E_0 \sim -\frac{N\sqrt{\log 2}}{\sqrt{1 + T^2 N^{2\alpha-1}}}. \tag{III.2–9}$$

L'énergie est extensive pour $\alpha \leq 0.5$ et l'entropie pour $\alpha < 0.5$. Pour finir, il y a brisure de la symétrie des répliques one-step dans ce modèle pour la phase vitreuse, comme dans le REM.

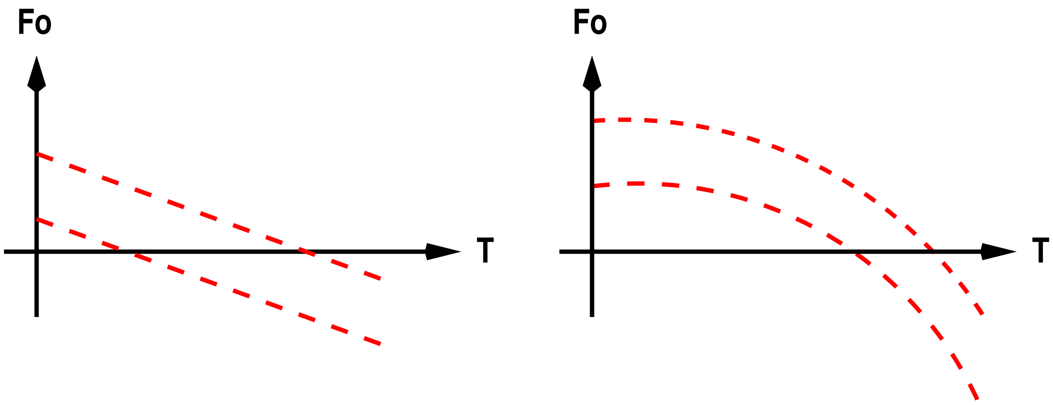


Fig. III–3 – *L'état d'énergie libre minimale dans le Re-Rem reste contraint à l'intérieur d'un "tube". Dans le cas $\alpha > 0.5$ (à gauche) le tube est linéaire tandis que si $\alpha \leq 0.5$ (à droite) le tube est courbé. Cela impose de sévères contraintes sur le nombre de croisements*

d) Chaos en température dans le Re-Rem

L'avantage de ce modèle est que l'on peut facilement analyser le comportement des croisements de niveaux, pour le niveau le plus bas, à chaque température. Si l'on suppose que le nombre de croisements dans un intervalle δT est, à grand N, de la forme

$$\mathcal{N}_N(T, T+\delta T) = N^{\gamma(\alpha)} \delta T g\left(\frac{T}{N^{\kappa(\alpha)}}\right) \tag{III.2–10}$$

on peut écrire de fortes contraintes sur les valeurs des exposants et ainsi les déterminer analytiquement. On se reportera encore à l'article pour les détails; les deux étapes sont les suivantes: premièrement on utilise l'invariance du nombre de croisements lors des transformations $\alpha_1 \to \alpha_2$ et $T \to TN^{\alpha_1-\alpha_2}$, qui est une propriété du modèle, ce qui donne

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha_1) - \gamma(\alpha_2) &= \alpha_1 - \alpha_2 \\ \kappa(\alpha_1) - \kappa(\alpha_2) &= \alpha_2 - \alpha_1 \end{aligned} \tag{III.2–11}$$

et donc

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha) &= \alpha + \beta_1 \\ \kappa(\alpha) &= -\alpha + \beta_2. \end{aligned} \tag{III.2–12}$$

Deuxièmement on remarque que l'équation III.2–8 nous donne la valeur moyenne de l'énergie libre du niveau le plus bas à chaque température, ses fluctuations d'échantillon à échantillon étant $O(1)$. L'état de plus basse énergie libre réside ainsi dans un "tube" (voir la figure III–3) dans un diagramme température-énergie libre. Si le tube n'est pas linéaire il *doit* y avoir des croisements de niveaux. On montre alors que l'équation III.2–8 impose que pour $\alpha = 0$ le nombre total de croisements est fini et que $\alpha > 0.5$ le nombre de croisements à $T > 0$ doit tendre vers 0 avec N. Ces deux propriétés imposent ensuite $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0.5$ et un $g(x)$ qui decroît plus vite que toute loi de puissance à grand x.

Pour conclure, le nombre de croisements de niveaux dans un intervalle δT pour un système de taille N est donné, à grand N, par

$$\mathcal{N}_N(T, T+\delta T) = N^{\alpha} \delta T g\left(\frac{T}{N^{0.5-\alpha}}\right) \tag{III.2–13}$$

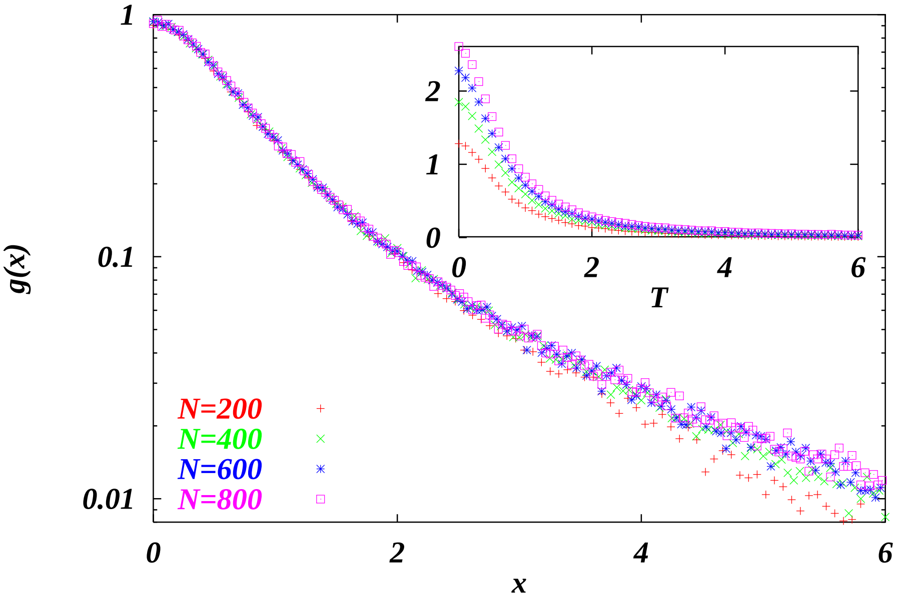


FIG. III–4 – *Fonction de scaling $g(x)$ dans le Re-Rem. En insertion on peut voir le nombre moyen de croisements entre T et $T + 0.1$ en fonction de la température pour $\alpha = 0.5$.*

où α est le paramètre entropique du Re-Rem.

Nous avons calculé la fonction de scaling en simulant un nombre de niveaux énormément grand (de l'ordre de $N = 2^{1000}$! On explique dans l'article les astuces pour parvenir à un tel résultat). Le calcul numérique confirme parfaitement cette loi de scaling et permet d'avoir accès à la fonction $g(x)$ (voir la figure III–4). Le résultat principal est bien sûr que le nombre de croisements diverge à toute température si $0 < \alpha \leq 0.5$, ce qui est le cas si l'on suit la prescription $\alpha = d_s/2d$. Le Re-Rem possède ainsi effectivement une dépendance chaotique en température. Il est à noter que si une telle dépendance est absente dans le REM, sauf près du critique, c'est à cause de l'absence d'effets entropiques. Un tel modèle, pas plus que les modèles sphériques, ne saurait alors décrire correctement un modèle plus réaliste ou cette fluctuation est attendue.

Le calcul de la fonction de scaling montre que le nombre de croisements est très faible : entre $T_c/3$ et $2T_c/3$, il y a environ $6\sqrt{N/1000}$ croisements, ce qui n'en fait que 6 pour $N = 1000$. La conclusion la plus importante est donc que le chaos, en taille finie, n'est détectable que pour des tailles suffisamment importantes.

e) Critère pour le chaos en température

De la même manière que nous avons introduit une généralisation du REM dans le chapitre précédent, nous pouvons généraliser le Re-Rem pour inclure un exposant θ et obtenir alors un Re-S-Rem mimant le modèle des gouttelettes: il suffit pour cela de considérer le S-REM introduit au chapitre II et d'y ajouter l'entropie aléatoire (on se reportera encore à l'article pour les détails). Le résultat principal est l'introduction d'un facteur θ dans la fonction de scaling. Finalement on peut arriver à un critère général pour la présence ou l'absence de chaos en température dans les systèmes désordonnés, et ce seulement à partir des valeurs de α et de θ :

- Si $\alpha - \theta/d < 0$, s'il n'y a pas de chaos, tous les croisements se passent à $T = \infty$.
- Si $\alpha - \theta/d = 0$, la densité de croisement est finie, nous appelons cette situation *chaos faible.*
- Si $0 < \alpha - \theta/d$ et $\alpha - \theta/(2d) \leq 0.5$, il y a un nombre infini de croisements à chaque température : c'est le *chaos fort.* Le nombre de croisements dans un intervalle δT est alors donné en toute généralité par

$$\mathcal{N}_N(T, T + \delta T) = N^{\alpha - \theta/d} \delta T g \left(\frac{T}{N^{0.5 - \alpha + \theta/2d}} \right). \tag{III.2–14}$$

  Ce nombre est, on l'a vu, assez faible si $N < 1000$ dans tous les cas,
- Si $\alpha - \theta/(2d) > 0.5$, il n'y a pas de chaos en température finie puisque tous les croisements se produisent à $T = 0$.

On voit que l'on retrouve aussi ici l'argument de Bray et Moore qui prévoit du chaos si $\theta/d < \alpha$.

f) Discussion

Le Re-Rem est donc un modèle soluble de verre de spins qui permet une étude du chaos en température. Dans sa version "scaling" il décrit de façon vraiment convaincante le problème du polymère dirigé (avec notamment ses trois exposants θ,Θ_f et Θ_s egaux entre eux (voir la section II.2.b du chapitre II) et sa dépendance chaotique en température). Pour les verres de spins, il prédit l'existence d'une telle dépendance chaotique et nous suggère que son absence dans le REM est due à l'absence de fluctuations entropiques ; il nous enseigne aussi que, pour voir des croisements en taille finie, un nombre *très grand* de niveaux (disons plus que 2^{1000}) est nécessaire. Or s'il y a 2^N niveaux pour N spins dans le Re-Rem, on peut douter qu'il y ait 2^N niveaux dans un système de N spins, ce qui signifie qu'il faut aller encore plus loin ! Cela peut expliquer pourquoi les simulations actuelles (Billoire & Marinari, 2000; Billoire & Marinari, 2002) ne voient pas de trace de chaos. Chercher des croisements, ou observer un $P(q)$ à deux température, ne sont sans doute donc pas les meilleures méthodes pour signer la présence de chaos, et il vaut ainsi mieux sans doute essayer de trouver directement une trace des fluctuations entropiques.

Très récemment un modèle similaire au Re-Rem (il s'agit en fait du même modèle qui confirmait la prédiction du $P(q)$ trivial à $T = 0$ et non trivial pour $0 < T < T_c$ dans les systèmes discrets avec RSB) a été développé (Sasaki & Martin, 2002*b*). Il montre les mêmes caractéristiques et confirme bien cette analyse; il permet en outre de calculer aussi la longueur $l(\delta T)$ intervenant dans la section a). Pour un changement de température de $\frac{\Delta T}{T} = 0.1$, il faut ainsi aller jusqu'à $l \approx 15$ pour voir un changement dans la structure des spins, ce qui est à peu près la limite des simulations actuelles dans les verres de spins EA, même si, là encore, ce modèle semble donner une surestimation. La même conclusion est encore apparu dans une étude très récente (Aspelmeier et al., 2002) qui montre aussi, dans l'approximation MK, que cette longueur est un peu trop grande pour la plupart des simulations.

— III.3 — Chaos en température dans les équations champ-moyen naïves

Il serait agréable de pouvoir tester ces idées directement sur le modèle SK ou le modèle EA, cependant cela nécessite de définir des "états" ou des vallées en volume fini. Une approche naturelle est ainsi l'utilisation des équations de Thouless, Anderson et Palmer (Thouless et al., 1977) dans lesquelles chaque état est donné par l'ensemble des magnétisations en chaque site $m_i = \langle S_i \rangle$. Cependant ces équations ne donnent pas de solutions *non paramagnétiques* sur le modèle 3d EA (Ling et al., 1983), et même dans le cas SK elles posent de sérieux problèmes de convergence en volume fini (Nemoto & Takayama, 1985; Nemoto, 1987).

Ces équations sont semblables à celles trouvées en champ moyen dans le cas ferromagnétique sous l'approximation de Curie-Weiss *avec* un terme de rétroaction, du à Onsager dans ce cas. C'est ce terme de rétroaction qui semble être la source des problèmes numériques, nous choisissons donc, comme plusieurs études précédentes (Ling et al., 1983; Mulet et al., 2001) de le négliger, ce qui nous donne des équations semblables à celle de Curie-Weiss. L'usage est de les nommer *équations champ moyen naives*(naïve mean field equations NMFE (Bray et al., 1986)). En utilisant ces équations, nous allons montrer numériquement que les verres de spins, du moins sous cette approximation, semblent bien être décrit par le Re-Rem.

a) Equations champ moyen naïves

Les équations champ moyen naïves peuvent être dérivées de plusieurs façons, la plus simple étant de se placer au site i et d'appliquer l'approximation de Curie-Weiss consistant à supposer l'existence d'un champ moyen h_i que *voit* le spin i. Son aimantation moyenne est alors :

$$m_i = \frac{e^{-\beta h_i} - e^{\beta h_i}}{e^{-\beta h_i} + e^{\beta h_i}} = \tanh(\beta h_i). \tag{III.3–1}$$

On reconnaît l'équation d'auto cohérence classique. Cette condition peut aussi s'obtenir par la minimisation de l'énergie libre

$$F(\{m_i\}) = E(\{m_i\}) - TS(\{m_i\}) \tag{III.3–2}$$

où l'entropie et l'énergie sont données par

$$E = -\sum_{<ij>} J_{ij} m_i m_j \tag{III.3–3}$$

$$S = -\sum_i \frac{(1+m_i)\ln(1+m_i) + (1-m_i)\ln(1-m_i)}{2}. \tag{III.3–4}$$

Considérons ces dernières équations comme définissant un modèle de verre de spins qui coïncide avec les modèles habituels à $T = 0$. Cela est important puisqu'on peut alors, dans une étude, utiliser les fondamentaux des verres de spins réels.

b) États champ moyen naïfs

Notre procédure numérique est la suivante : pour chaque réalisation du désordre nous produisons deux états champ moyen naïfs (états NMF) $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ que nous allons suivre en température. Pour cela, nous commençons par construire ces états à température nulle : $\mathcal{L}_1$ est alors le fondamental tandis que $\mathcal{L}_2$ est une excitation macroscopique (dont la taille est environ la moitié du système) et d'énergie $O(1)$ (Pour obtenir ces fondamentaux et ces excitations, nous avons utilisé la méthode décrite dans (Krzakala & Martin, 2000) avec l'algorithme habituel (Houdayer & Martin, 2001). Au risque d'anticiper, on peut se reporter au chapitre *IV* où la production des excitations de grandes tailles et de faibles énergies est expliquée en détail).

Nous avons donc nos états à température nulle, et nous allons les suivre en température en utilisant numériquement les équations NMF. En pratique, cela revient à augmenter T par un faible facteur

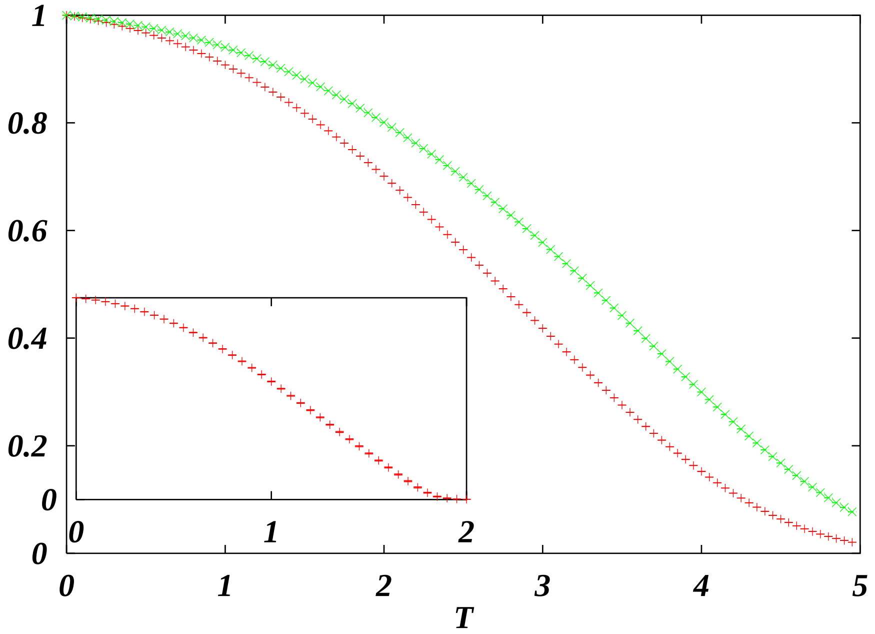


FIG. III–5 – *q_{EA} et $qT, T = 0$ (au dessus) pour un état issu d'un fondamental à $L = 10$ en $3 - d$. On a alors $T_c \approx 5$ tandis que le même genre de plot est trouvé en SK avec cette fois $T_c \approx 2$ (l'inset montre q_{EA} dans le modèle SK)*

($\Delta T = 0.05$) et à faire une descente de gradient sur la fonctionnelle d'énergie libre en utilisant comme conditions initiales les états de la magnétisation à la température précédente. Avec cette procédure où l'on "chauffe" l'état fondamental (Mulet et al., 2001), on peut suivre les deux états NMF en température. On obtient ainsi une réalisation physique de l'image Re-Rem ou encore des diagrammes température-énergie libre introduits précédemment.

Si l'on applique cette méthode et que l'on suit un état particulier on trouve, même en partant d'états aléatoires, qu'à l'intérieur de cet état il n'y a pas de grands changements, tant que l'on n'est pas trop proche de T_c, dans la structure et que seul l'intensité des m_is est changée. La procédure qui consiste à suivre un état $\mathcal{L}_i$ en température se contente donc de *renormaliser* les m_is (voir figure III–5). Enfin, notons que q_{EA}, défini comme l'autorecouvrement d'un état $\mathcal{L}_i$, s'annule des que $T > T_c \approx 5$ en 3d et $T > T_c \approx 2$ en SK. Il est auto-moyennant et ne dépend que faiblement de létat initial.

c) Étude numérique.

Les résultats numériques que nous avons obtenus montrent que tout est compatible avec le Re-Rem. Pour le modèle 3d il est même possible d'extraire un exposant α dans ce modèle et l'on peut alors en tirer d_s. Nous avons suivi pour environ 1000 instances l'état NMF issu du fondamental et l'état NMF issu d'une grande excitation d'énergie $O(1)$. Pour chacune de ces instances, nous avons calculé la différence d'énergie libre entre l'état $\mathcal{L}_1$ et l'état $\mathcal{L}_2$, puis extrait la distribution de $\delta(F)$ à chaque température. Les résultats montrent sans ambiguïté que le niveau issu du fondamental a une énergie libre *supérieure* à celui issu de l'excitation quand $T > 0$ avec une probabilité finie: les croisements de niveau et le chaos entre $T = 0$ et $T > 0$ ne font alors aucun doute.

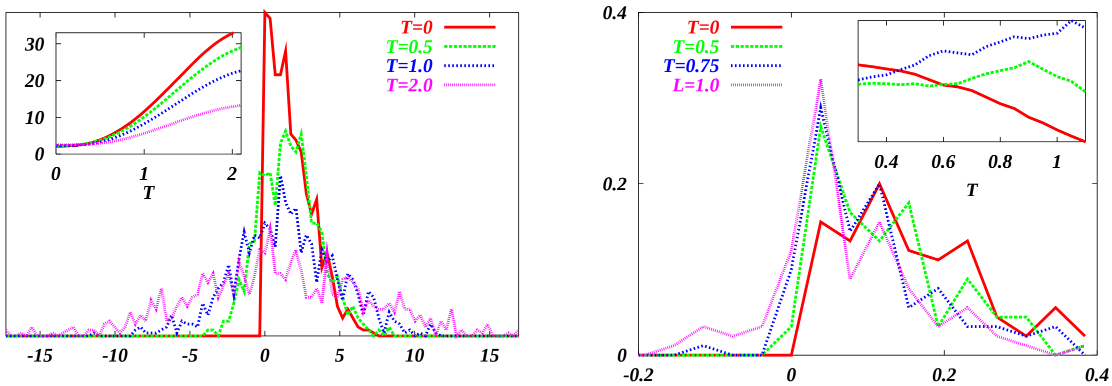


FIG. III–6 – *$P(\delta F)$ à des températures différentes pour des excitations avec $0 \leq |q| \leq 0.05$ dans le modèle EA avec $L = 12$ (à gauche) et dans le modèle SK à $N = 192$. La variance de cette distribution augmente avec la température. L'insertion montre aussi cette variance en fonction de T pour différentes tailles ($L = 8, 10, 11$ et 12 de bas en haut pour EA et $N = 64, 128$ et 192 pour SK).*

De plus, puisqu'il y a un nombre infini d'excitations à la limite thermodynamique, et puisque selon toute probabilité ces excitations se comportent toutes de la même façon, ces croisements suggèrent raisonnablement le chaos à température finie. Enfin, d'après les prédictions du Re-Rem la variance de δF devrait diverger comme $L^{2\alpha d}$ à grand L. Le meilleur fit nous donne $\alpha = 0.46$ (mais nous ne pouvons pas exclure $\alpha = 0.5$) ce qui nous donne $d_s \approx 2.76$, en accord avec d'autres calculs de d_s (Krzakala & Martin, 2000; Palassini & Young, 1999*b*) ce qui semble encore confirmer l'image Re-Rem. Pour le modèle SK cependant les choses ne sont pas aussi claires et les effets de taille finie ne nous permettent pas de calculer α. Une approche alternative serait d'utiliser un modèle champ moyen avec une connectivité finie pour pouvoir aller à des tailles plus importantes (la différence est importante : dans le modèle SK l'algorithme pour calculer les états NMF est N^2 alors qu'il est linéaire en connectivité finie) et vérifier le comportement champ moyen ($\alpha = 0.5$ puisque $d = d_s$).

En conclusion ce modèle de verre de spins défini avec les équations NMF semble bien montrer une dépendance chaotique en température et est parfaitement compatible avec l'analyse Re-Rem. Ce modèle étant par ailleurs un verre de spins honorable, il suggère très fortement l'existence du chaos dans les modèles réels.

– III.4 – Conclusion et discussion

Il est plus facile de se vieillir que de se rajeunir
Jules Renard *Journal*

a) Chaos et trivialité

Il serait intéressant de vérifier que le $P(q)$ est trivial à $T = 0$ pour les systèmes discrets avec RSB dans les modèles champ moyen (en SK ou en connectivité finie). Il faut de toute façon faire attention et éviter d'extrapoler sur la présence de RSB *à partir* des simulations de $P(q)$à température nulle. Grâce à ce concept on peut mieux comprendre les calculs numériques dans les verres de spins en dimension finie. La conclusion est qu'il semble en effet que le $P(q)$ des systèmes discrets, même en présence de RSB, soit trivial à température nulle et non trivial à température finie, et qu'ainsi la présence d'excitations de grandes tailles et d'énergies $O(1)$ soit assez claire dans les simulations numériques du modèle EA discret en $3d$. On y reviendra dans le chapitre suivant.

Cette image de fluctuations entropiques a aussi été vérifiée très récemment dans le modèle EA en $3d$ de façon très satisfaisante (Marinari et al., 2001): il semble établi que les états d'équilibre soient issus d'une subtile compensation entre entropies et énergies; numériquement on trouve que les différences d'énergie, entre états d'équilibre à une température donnée, *augmentent* avec la taille du système bien que les différences d'énergie libre restent $O(1)$. Ce résultat, ainsi que ceux confirmant notre analyse du $P(q)$ à $T=0$, indiquent de façon très forte que la phase d'équilibre des verres de spins est caractérisée par des compensations entre énergie et entropie comme déjà prédit par (Fisher & Huse, 1986). Dans ce cas, le chaos en température semble inévitable. Les doutes concernant sa présence provenaient du fait que l'on ne le voyait pas en simulation (Billoire & Marinari, 2000; Picco, Ricci-Tersenghi & Ritort, 2001; Billoire & Marinari, 2002), mais cela peut s'expliquer au vu des résultats obtenus dans le Re-Rem et présentés dans ce chapitre; les résultats récents de (Sasaki & Martin, 2002*b*; Aspelmeier et al., 2002) confirment également cette analyse([10]).

b) Mémoire et rajeunissement

Concernant maintenant l'interprétation des expériences de réjuvenation (ou de rajeunissement) comme étant une manifestation du chaos, les choses ne me semblent pas évidentes. Il a été montré qu'il est possible d'obtenir des résultats similaires aux expériences avec le chaos (par exemple (Yoshino et al., 2000), mais dans un modèle artificiel où la longueur d'équilibre pour avoir du chaos est 1.). Dans ce cas le rajeunissement est dû au fait que, lorsque l'on change la température, on doit aller chercher un état très différent de celui que l'on était en train d'équilibrer. On est alors obligé de recommencer à équilibrer à des échelles inférieures, et le système rajeunit. La mémoire vient, dans cette image, simplement du fait que, la dynamique étant très lente et notamment encore plus lente quand on baisse la température, le système n'a pas le temps de détruire l'ordre construit à la température précédente. Cette image est assez claire et reproduit bien d'autres faits expérimentaux (pas de dépendance envers la vitesse de refroidissement).

Le problème est de savoir, puisque l'on a montré que le chaos n'apparaît qu'à des tailles importantes, si ces tailles ne sont pas trop importantes pour être atteintes par la longueur de corrélation dynamique dans les expériences. De fait nos travaux sur la longueur de chaos semblent avoir attiré l'attention sur ce problème; ainsi une étude très récente (Aspelmeier et al., 2002) semble montrer que dans l'approximation MK cette longueur est un peu trop grande pour les expériences. Bien qu'il faille être très prudent (les expériences montrant les signes les plus clairs de mémoire et de rajeunissement étant faites sur des échantillons Heisenberg, la taille exacte de la longueur de corrélation atteinte expérimentalement étant très difficile à mesurer et les systèmes réels pouvant de plus être un peu plus fragiles que ne le suppose le modèle des gouttelettes) cela laisse la porte ouverte à d'autres possibilités.

Puisque d'autre part d'autres simulations montrent qu'il est aussi possible d'obtenir de semblables résultats même en l'absence de chaos (Berthier & Holdsworth, 2002; Berthier & Bouchaud, 2002), la question reste largement ouverte. De fait si l'interprétation des expériences à l'aide des arguments du type multiples échelles de longueurs (on équilibre d'autre échelles quand on change la température) semble bel et bien fonctionner, l'origine du changement d'échelle de longueur quand on change la

([10])Le dernier jour de la rédaction de cette thèse, un article (Rizzo & Crisanti, 2002) montrant la présence de chaos en température dans le modèle SK (au neuvième ordre en perturbation autour de T_c !) est arrivé sur le serveur de préprint, confirmant l'analyse de cette section.

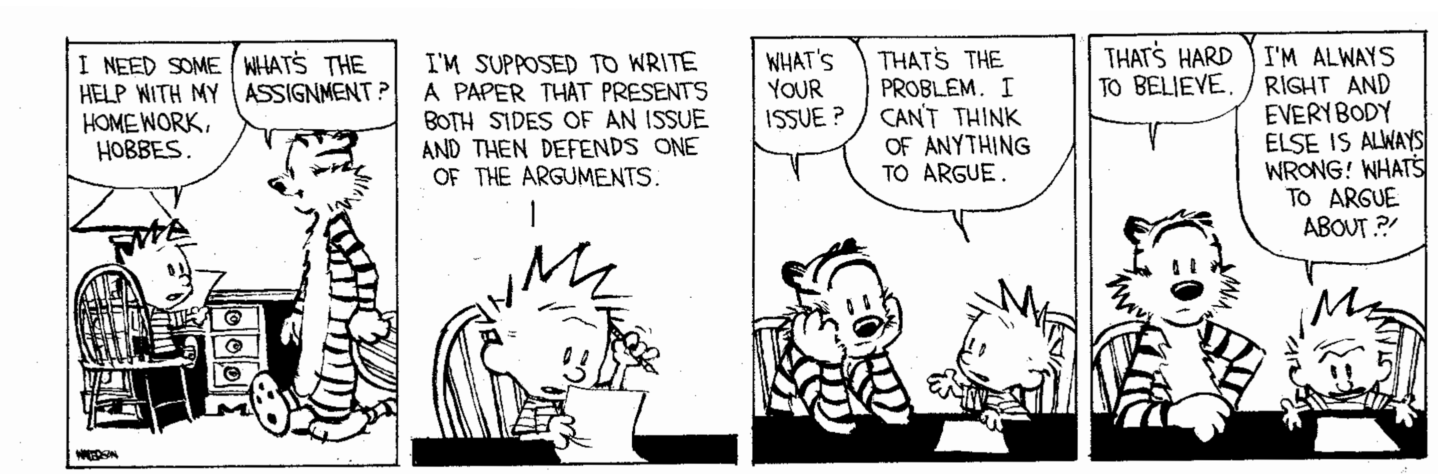
température n'est toujours pas claire; on pourra ainsi se reporter à l'article (Berthier et al., 2002) inclu en appendice pour une discussion détaillée, la conclusion principale étant encore que si le chaos en température peut être une explication naturelle, la question est toujours largement ouverte.

Chapitre IV

Nature de la phase verre de spins en dimension finie

DANS CE CHAPITRE nous introduisons une phénoménologie des excitations macroscopiques dans les verres de spins en dimension finie. En particulier, nous nous intéressons aux propriétés géométriques et énergétiques des grandes excitations de faibles énergies.

Les résultats suggèrent l'existence d'excitations de la taille du système et d'énergie finie qui survivent à la limite thermodynamique, comme prévu par la théorie champ moyen. Cependant leurs propriétés géometriques semblent différer notablement de ses prédictions, en particulier ces excitations semblent compactes. Ces deux propriétés sont par contre compatibles avec un nouveau scénario que nous appellons *TNT*.



If I believed in reincarnation, I'd come back as a sponge.
Woody Allen

Les deux approches canoniques des gouttelettes et du champ moyen nous offrent deux façons contradictoires de décrire la phase ordonnée dans les verres de spins en dimensions finie. Le débat pour savoir laquelle des deux est correcte, ou si une autre représentation est nécessaire, n'est toujours pas tranché.

La différence principale entre ces approches est, en se restreignant à température nulle, que dans le champ moyen on s'attend à trouver des excitations macroscopique d'énergie $O(1)$ avec une probabilité finie alors que dans la théorie des gouttelettes, ces excitations ne devraient exister qu'avec une probabilité qui décroît comme $L^{-\theta}$ et disparaître à la limite thermodynamique.

Certaines simulations Monte-Carlo, qui trouvaient un $P(q)$ non trivial, pouvaient ainsi être interprétées comme un signal fort en faveur du champ moyen en $3d$ et $4d$ (la littérature est abondante et l'on se référera aux articles de revues (Marinari, Parisi & Ruiz-Lorenzo, 1998; Marinari et al., 2000)), mais les défenseurs de la théorie des gouttelettes répondaient, simulations sur réseaux hiérarchiques à l'appui, que l'influence du point critique était responsable de ces résultats (Drossel et al., 2000; Bokil et al., 2000; Middleton, 2001). La motivation pour le travail de ce chapitre était donc de se placer à température nulle pour éviter d'être pollué par la proximité du point critique, et d'utiliser un algorithme d'optimisation combinatoire (en l'occurrence l'algorithme de renormalisation génétique (Houdayer & Martin, 1999*b*; Houdayer & Martin, 2001)) pour calculer des fondamentaux et des états excités à $3d$.

Le résultat principal est que, même à température nulle, les excitations macroscopiques d'énergie $O(1)$ vues dans les simulations existent, et ne sont donc point des artefacts du point critique, et semblent bien survivre à la limite thermodynamique, comme prévu par la théorie en champ moyen. Leurs propriétés *géométriques* semblent par contre être différentes.

– IV.1 – À la recherche des éponges

D'un point de vue physique l'avantage du modèle des gouttelettes est de donner des lois d'échelles et une représentation dans l'espace direct en termes géométriques alors que le champ moyen offre une description dans l'espace des phases. Il serait donc très utile de pouvoir présenter des nouvelles approches de la phase verre de spins dans l'espace *direct*. Il a ainsi été suggéré (Houdayer & Martin, 2000*a*) que les grandes excitations de basse énergie correspondant aux prédictions champ moyen devraient être des amas spongieux dans un réseau (hyper)-cubique.

De fait, le champ moyen prévoit non seulement que la distribution des recouvrements est non triviale, mais aussi que celle des recouvrements *en liens* l'est aussi. Dans le modèle SK, ces recouvrements entre les répliques α et β sont définis par

$$q = \frac{\sum_i S_i^\alpha S_i^\beta}{N} \tag{IV.1–1}$$

$$q_l = \frac{\sum_{ij} S_i^\alpha S_j^\alpha S_i^\beta S_j^\beta}{\frac{N(N-1)}{2}}. \tag{IV.1–2}$$

Il vient alors que $q_l = q^2$, et par conséquent qu'une distribution non triviale de q signifie une distribution non triviale pour q_l. Cette égalité est pourtant complètement un artefact du champ moyen : dans un espace tridimensionnel, le recouvrement en liens n'a *a priori* rien à voir avec le recouvrement en site.

	$P(q)$ Trivial	$P(q)$ Non-Trivial
$P(q_l)$ Trivial	Gouttelettes	TNT
$P(q_l)$ NonTrivial	Impossible	Champ moyen

TAB. IV.1 – *Récapitulatif des différentes possibilités entre les trois scenarii dans les verres de spins. Notons qu'un $P(q)$ trivial implique un $P(q_l)$ trivial, ce qui supprime l'une des possibilités.*

Il est par ailleurs simple de se rendre compte que le recouvrement en liens entre une configuration et une autre est donné par le nombre de liens différents (donc par la surface de l'excitation) divisé par le nombre total de liens (qui est proportionnel au volume) : $q_l = 1 - \alpha \frac{L^{d_s}}{L^d}$, où d_s est la dimension fractale de la surface. Si l'on extrapole alors directement l'image champ moyen, il faut que $\frac{L^{d_s}}{L^d}$ soit non nul pour que $P(q_l)$ soit non trivial. Ainsi, la surface des grandes excitations devrait *remplir* tout l'espace, autrement dit cette surface doit grandir comme le volume : $S \propto L^{d_s}$ avec $d_s = d$.

D'un point de vue un peu différent cela signifie, si l'on considére que les excitations ont une maille caractéristique l définie par $l \approx L^{d-d_s}$, que cette maille serait finie d'après le champ moyen. En effet pour obtenir un amas dont la surface remplie tout l'espace il suffit de considérer un amas spongieux avec une maille finie, dont une bonne représentation visuelle est le plus grand amas obtenu lors de la percolation de site à trois dimension, ou encore le grand amas formé par les spins alignés dans un ferromagnétique en $3-d$ près du point critique. Voila donc l'image champ moyen pour les grands amas et l'on se rend compte que c'est une prédiction assez précise.

De fait, cette idée que les grandes excitations sont des éponges est à la base de l'analyse de ce chapitre. Tandis que le champ moyen en dimension finie prédit $d_s = d$ et une énergie $O(1)$, les gouttelettes prévoient, en fait par hypothèse, $d_s < d$ et une énergie L^θ avec $\theta > 0$. Si l'on garde cette image d'éponge cela signifie que la maille l doit cette fois augmenter avec la taille. Enfin, si l'on veut des excitations de la taille du système, avec une maille l (finie ou non), et que l'on s'interroge sur leurs propriétés topologiques aux bords du réseau (s'enroulent elles autour des trois directions ?) en souhaitant, pour respecter la symétrie up-down, qu'elles soient identiques pour le amas correspondant à l'excitation *et pour son complémentaire*, on doit alors considérer des objets dont *e*t l'amas *e*t son complémentaire s'enroulent autour des trois directions du réseau. Notons que cela est impossible à deux dimensions : il faut pour cela $d > 2$, c'est peut être la raison pour laquelle il n'y a pas de phase verre de spin en dimension 2.

Ainsi si l'on veut étudier les grandes excitations, en taille finie, nous devons considérer les propriétés de ces amas topologiquement non triviaux : leurs propriétés énergétiques d'une part ($O(1)$ ou $O(L^\theta)$), géométriques d'autre part (longueur caractéristique l, exposant d_s). Quelles sont les possibilités ? On peut les résumer par le tableau IV.1 qui considère les distributions des recouvrements. Si les excitations sont $O(L^\theta)$, dans ce cas $P(q)$ est trivial, ce qui impose également un $P(q_l)$ trivial et nous somme alors dans le scénario gouttelettes. Si $P(q)$ est non trivial, ou encore si les excitations sont $O(1)$, un $P(q_l)$ non trivial ($d = d_s$) validerait le champ moyen. Cette façon de voir les choses suggère donc une nouvelle possibilité que nous avons proposée : un scénario où l'overlap en liens est trivial, mais pas l'overlap en spins. Nous avons baptisé cette possibilité TNT (pour **T**rivial, **N**on **T**rivial).

Pour tester ces idées nous devons nous en remettre maintenant aux calculs numériques et à l'algorithme de renormalisation génétique.

a) La méthode numérique

Je vais décrire ici la technique numérique utilisée pour générer des excitations d'énergie d'$O(1)$ que j'ai proposé et utilisé (Krzakala & Martin, 2000). L'idée principale est de recalculer un fondamental sous contraintes, qui est alors un état excité.

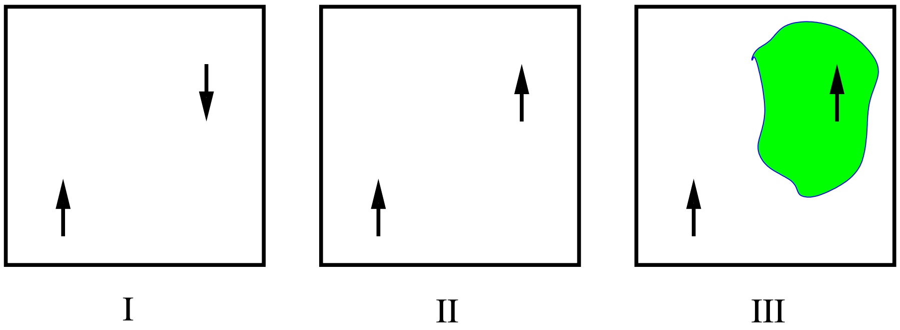


FIG. IV–1 – *Représentation de la méthode utilisée pour trouver les états excités.*

Cette méthode, applicable à toutes sortes de systèmes désordonnés pour peu que l'on ait un algorithme capable de trouver l'état fondamental sous contraintes, se déroule en trois étapes(voir figure IV–1). Une fois que l'on a une réalisation du problème, il faut :

(i). Trouver le fondamental, et choisir ensuite deux spins au hasard ...

(ii). ... fixer la direction de l'un, obliger l'autre à flipper ...

(iii). ... et re-calculer le fondamental avec ces contraintes !

La différence entre les deux configurations est alors un objet connexe dont l'énergie est plus petite ou égale à celle correspondant à l'excitation d'un spin; elle est donc d'$O(1)$. Cette méthode génère ainsi des amas de spin d'énergie $O(1)$ comme illustré sur la figure IV–2. Pour réaliser cette figure, nous avons calculé 3 excitations de cette manière pour chacun des 10000 échantillons considérés pour des verres de spins EA $3d$ de taille $L = 10$ avec conditions aux limites périodiques. Nous générons ainsi des excitations de toutes tailles (avec une majorité cependant de petites excitations). Un premier résultat est qu'à $L = 10$, nous trouvons qu'il *est* possible de trouver des excitations de grandes tailles et d'énergie d'$O(1)$. Cela est déjà un résultat en soit : on ne peut *plus* dire que les résultats numériques en faveur de l'existence de ces objets à ces tailles là sont dues à l'influence du point critique puisqu'ici ces objets existent et que $T = 0$.

Pour augmenter l'importance du nombre de grandes excitations, les spins ont cependant été tirés au hasard parmi ceux sur lequel le champ local était assez important dans le fondamental. Typiquement, les paires ont été tirées parmi les spins appartenant aux 25 pour cent les plus fixés... Nous avons ensuite vérifié que changer ce cut-off ne change pas qualitativement les résultats([1]). Enfin, le fait de tirer les spins au hasard *dans l'espace* pouvait aussi influencer les résultats, nous avons donc aussi essayé de tirer des paires dont les spins étaient à peu près à la même distance relative (disons $L/3$ par exemple), et les résultats étaient qualitativement identiques. Dans tout ce qui suit, les paires auront donc été choisies parmi les 25% les plus fixées.

La question primordiale est ensuite de connaître l'évolution de la courbe IV–2 à la limite thermodynamique: d'après la théorie de champ moyen, elle devrait garder la même apparence, et il devrait

([1])Le seul effet semble être de changer faiblement l'intensité du signal éponges i.e. de changer faiblement la proportion d'excitations spongieuses au profit d'excitations gouttelettes.

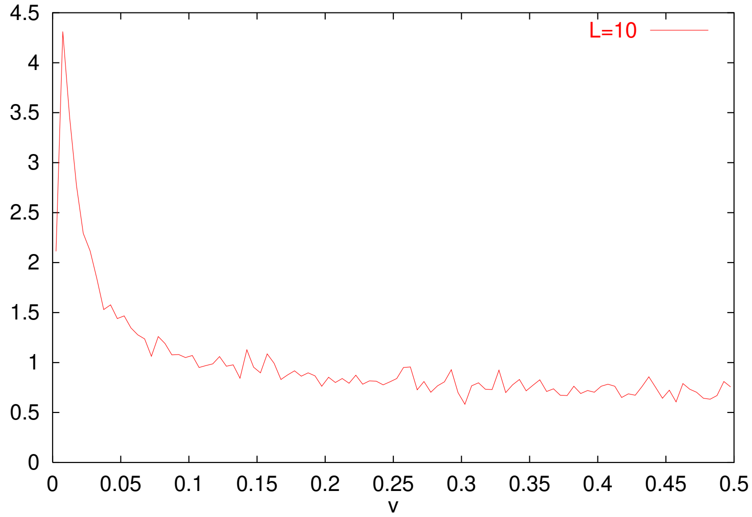


FIG. IV–2 – *Distribution de la taille des excitations trouvées en cherchant* 3 *trois amas dans* 10000 *verres de spins* 10^3 *avec condition aux limites périodiques en fonction de v, la taille de l'excitation divisée par la taille du système. Des excitations de toutes tailles sont trouvées.*

ainsi rester des excitations de toutes tailles jusqu'à la limite thermodynamique, tandis que d'après la théorie des gouttelettes, la probabilité de trouver des grandes excitations décroît comme $L^{-\theta}$, et donc cette distribution devrait tendre vers un pic de Dirac centré en 0.

Ce problème de l'extrapolation à la limite thermodynamique est bien entendu très difficile et délicat compte tenu des tailles accessibles numériquement. Nous nous sommes restreints à $L \leq 12$, ce qui est l'état de l'art pour les verres de spins gaussiens si l'on veut pouvoir obtenir assez de statistique que se soit avec des conditions aux limites libres ou périodiques([2]). Une première approche serait de regarder le comportement de la probabilité dans un intervalle donné, mais une telle approche est non conclusive, car si l'on voie bien une légère décroissance, elle est si lente qu'on ne sait s'il faut ou non l'extrapoler vers zéro.

b) Le filtre des éponges.

Pour tenter une nouvelle approche, nous allons maintenant introduire le concept crucial de cette analyse qui va nous permettre de clarifier considérablement la situation : le filtre des éponges.

Nous nous attendons à ce que les excitations pertinentes soient spongieuses, ainsi nous allons classer les excitations en trois catégories. Considérons pour fixer les choses le problème avec des conditions aux limites périodiques : un amas qui s'enroule dans les trois directions (on dira qu'un amas *s'enroule* dans une direction s'il est possible à un marcheur sur l'amas de revenir à son point de depart après avoir passé une fois à travers le bord) tandis que son complémentaire s'enroule lui aussi dans les trois directions, sera appelé une éponge. Un amas qui ne s'enroule dans aucune direction sera une gouttelette … Tout autre événement sera appelé intermédiaire.

Si l'on considère des conditions aux limites libres, on peut remplacer les enroulements par le fait

([2])Cependant le cas des couplages discrets permet d'aller jusqu'à $L = 14$ (Hartmann, 1997). Dans ce cas l'analyse des fondamentaux pose d'autres problèmes évoqués au chapitre III.

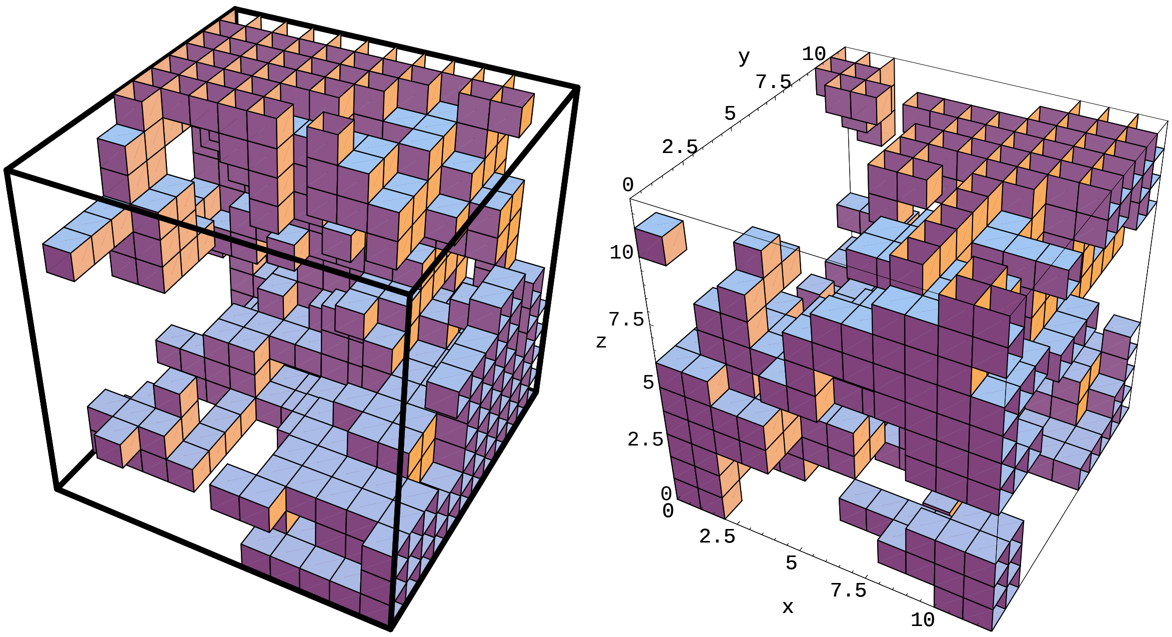


FIG. IV–3 – *Exemples d'excitations spongieuse $O(1)$ trouvée dans des verres de spins EA de taille 12^3; on notera la présence de poignées ainsi que le fait que l'excitation, et son complémentaire, touchent les six faces du cube. À gauche avec conditions aux limites libres et à droite avec conditions aux limites périodiques (avec les coordonnées pour une meilleure visualisation).*

que les amas touchent les faces opposées[3]. Il se trouve en effet que la plupart des grandes excitations sont bien des éponges, comme on peut le voir sur la figure IV–3. Par rapport à leurs tailles, les petits événements sont plutôt des gouttelettes, les moyens sont intermédiaires et les grands des éponges (voir la figure IV–4).

c) Les éponges survivent

Maintenant, si nous mesurons la fraction totale d'événements (voir la table IV.2) on peut voir que les éponges ont une fréquence d'apparition qui *augmente* avec L et qu'ainsi on peut raisonnablement extrapoler cette fréquence à une valeur non nulle à la limite thermodynamique.

Ce résultat numérique me semble être un argument très solide *en faveur* de l'existence de grandes excitations d'énergie d'ordre 1, et par conséquent *en faveur* de la brisure de la symétrie des répliques dans EA à $3d$. Les amas sont spongieux, s'enroulent autour du système et ont une topologie non triviale (ils sont pleins de trous et de poignés, voir la figure IV–3).

Des résultats similaires (i.e. la fraction d'éponges augmente) ont été obtenus sur des variantes de ce système: à trois dimensions j'ai étudié les cas avec premiers et seconds voisins, en conditions aux limites ouvertes ou périodiques, et les résultats sont identiques : la fraction d'éponges augmente toujours, de même qu'à quatre dimensions où malheureusement l'on est limité à une taille maximale de $L = 6$. Peu après la diffusion de ces résultats, Palassini et Young sont arrivés aux mêmes conclusions (à savoir : il existe des grandes excitations d'énergie $O(1)$) par une méthode algorithmique un peu

[3] En condition aux limites libres, nous appellerons ainsi éponges les excitations dont *et* l'amas correspondant *et* son complémentaire touchent les six faces du cube.

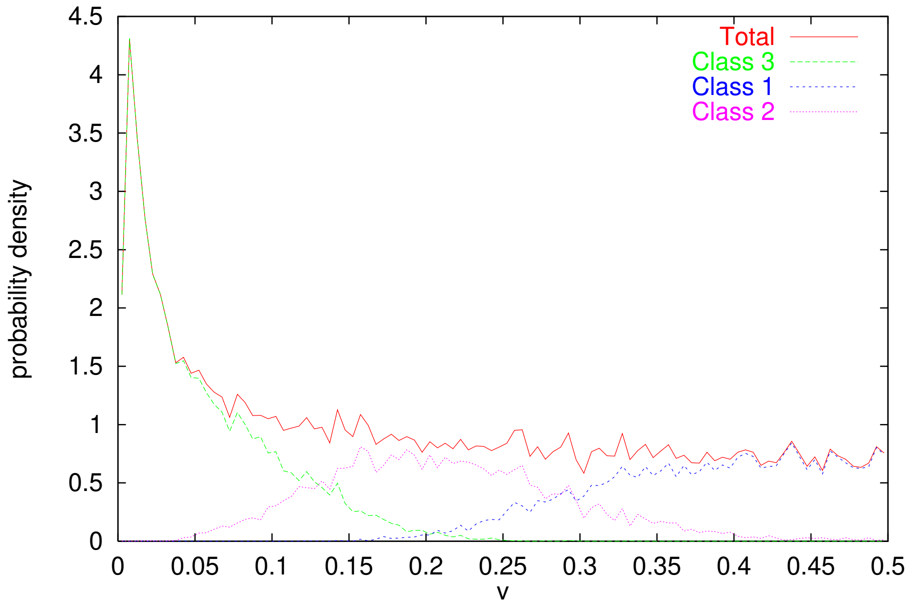


FIG. IV–4 – *Distribution des événements en fonction de leur classe topologique, v est le volume de l'amas divisé par la taille système.*

différente (Palassini & Young, 2000), confirmant ainsi nos résultats de façon indépendante. Depuis lors, plusieurs autres études à $T = 0$ ont été effectuées (Marinari & Parisi, 2001; Hed, Hartmann, Stauffer & Domany, 2001) et confirment elles aussi nos résultats.

Enfin, les simulations Monte-Carlo de (Marinari et al., 2001) montrent aussi que le concept d'éponge, et la classification introduite dans cette thèse, est utile et donne des résultats semblables en température finie. Ils montrent en effet, s'inspirant de ce travail sur les éponges, que les configurations qui conduisent à un $P(q)$ non trivial -les configurations appartenant donc à des vallées dans l'espace des phases dont la différence en énergie libre est $O(1)$- correspondent elles aussi à des amas spongieux. Ce résultat, si on le met en parallèle avec ce chapitre, me semble important pour trois raisons : (i) cela confirme qu'en étudiant la physique à température nulle on accède bien à la physique à basse température; (ii) symétriquement les résultats des simulations Monte-Carlo à basse température étudient réellement la phase basse température -ce qui répond de manière non équivoque à la question : "Est-ce que les simulations sont représentative de la physique à basse température ou alors sont-elles polluées par le point critique ?"- et (iii) cela montre l'utilité pratique du concept d'éponge pour étudier les verres de spins sur réseau hyper-cubique. Des résultats Monte-Carlo très semblables (présence de grandes excitations d'énergies finies et pertinence des éponges) ont aussi été obtenus indépendamment par (Domany et al., 2001).

Bien entendu, on peut toujours argumenter qu'il peut exister un "crossover" avec un comportement différent à des tailles plus grandes, nul ne pouvant vraiment contester ce genre d'objection, mais il faut alors expliquer et justifier l'introduction d'une longueur $l_{cross} > 12$ à partir de laquelle il y aurait un "crossover" vers cet autre comportement. De plus l'existence des éponges d'énergie $O(1)$ aux tailles accessibles par les simulations d'aujourd'hui ne semble plus faire aucun doute; en conséquence, puisque les expériences elles aussi sont loin de l'équilibre thermodynamique, les longueurs de corrélations attei-

L	éponges	gouttelettes
4	0.230(3)	0.251(3)
5	0.253(3)	0.306(3)
6	0.271(3)	0.346(3)
7	0.284(3)	0.374(3)
8	0.290(3)	0.389(3)
9	0.300(3)	0.399(3)
10	0.304(3)	0.412(3)
11	0.302(4)	0.421(4)
12	0.310(5)	0.423(5)

TAB. IV.2 – *Fractions d'éponges et de gouttelettes en fonction de la taille. Ces deux fractions augmentent, sugg'erant une valeur thermodynamique non nulle ...*

gnant difficilement $\xi \approx 100$ (Berthier & Bouchaud, 2002), ce qui n'est pas très différent sur une échelle logarithmique, il est vraisemblable que la dynamique observée par les expérimentateurs soit sensible à ces excitations. Par exemple les expériences de (Herisson & Ocio, 2001) montrant une violation du théorème fluctuation dissipation, comme attendu dans la théorie champ moyen (Cugliandolo et al., 1997) où il y a une correspondance entre un $P(q)$ non trivial et la température effective mesurée dans le FDT, s'interprètent éventuellement par la présence d'excitations d'energie d'$O(1)$ de taille $\approx \xi$([4]) et donc par un $P(q)$ non trivial à cette échelle.

d) Toutes les vallées sont-elles spongieuses?

On peut se demander si tous les événements macroscopiques sont des éponges ou non (en particulier, c'est ce qui serait prévu par le champ moyen (Houdayer & Martin, 2000*a*)), et ainsi se demander si les événements intermédiaires disparaîssent. Sur la figure IV–5, on peut voir que quand L augmente la densité de probabilité de trouver une excitation de type intermédiaire va vers les plus petites valeurs de v, le volume de l'amas de type intermédiaire divisé par le volume du système, tandis que la fraction totale d'événements diminue. Sur la même figure, à droite, on peut voir l'évolution de la fraction d'événements en fonction de $1/L$ semblant indiquer que cette fraction a une valeur non nulle à grand L. Cependant, un examen plus attentif montre que la fraction d'événements intermédiaires plus grands que $v = 0.25$ *ne peut pas* être extrapolée vers une valeur finie. Plus probablement, les événements intermédiaires disparaîssent, mais il le font d'autant plus lentement que v est petit. Cela suggère qu'il faut faire très attention quand on fait des extrapolations à grand L quand v est petit car les effets de taille finie peuvent être très subtils. La fraction d'éponges dans un intervalle donnée est ainsi à peu près stable, mais la fraction d'événements intermédiaires diminue. Cela peut expliquer le résultat (Hed, Hartmann & Domany, 2001) qui trouve un $P(q)$ non trivial à $T = 0$ pour le modèle $\pm J$ près de la région à petit v en contradiction avec d'autre résultats([5]); cela nous incite à nous focaliser sur la région proche de $v = 1/2$ ($q = 0$) où presque tous les événements sont des éponges. Cela suggère aussi que les éponges ne sont *pas* des artefacts des effets de taille finie.

([4])Ce genre de comportement, naturel si l'on considère qu'un système hors-équilibre avec une longueur de corrélation ξ comme un ensemble de systèmes de taille ξ à l'équilibre, a été observé dans un verre de spins à $2d$ (Barrat & Berthier, 2001) ainsi que dans le modèle XY à $2d$ (Berthier, Holdsworth & Sellitto, 2001)

([5])Voir le chapitre III : $P(q)$ devrait être trivial à $T = 0$.

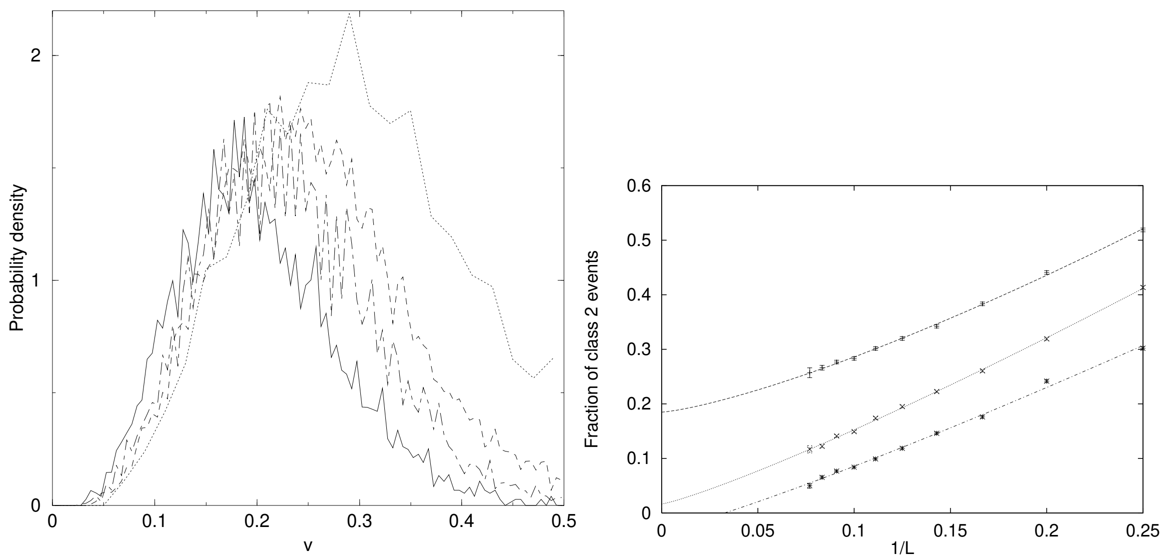


FIG. IV–5 – *Gauche: densité de probabilité des événements de taille v pour $L = 4, 6, 8, 12$ de droite à gauche et pour la classe intermédiaire. Droite: fraction des événements intermédiaires et fit en loi de puissance plus une constante ($v > 0$, $v > 0.2$, et $v > 0.25$ de haut en bas).*

e) Le scénario TNT

Comme nous l'avons rappelé, pour le champ moyen la probabilité de recouvrement en *liens*, ainsi qye celle de recouvrement dans une fenêtre finie (voir fig IV–6), elles aussi être non triviales, ce qui implique que les éponges devraient avoir une surface avec une dimension $d_s = d$. Dans ce cas, leur rapport surface sur volume devrait être fini à la limite thermodynamique.

Une autre possibilité est que le champ moyen, dans lequel $q_l = q^2$, ne soit *pas* un bon guide sur les propriétés *géométriques* fines des excitations, et que le $P(q_l)$ non trivial ne soit qu'un artefact de l'absence formelle de géométrie. Dans les graphes champ moyen, en effet, les excitations *n'ont pas d'intérieur ou d'extérieur*, l'égalité $d_s = d$ est donc imposée par la géométrie *parce que rien d'autre n'est possible.* De la même manière que d_s vaut forcement $d - 1$ dans l'approximation de Migdal-Kadanoff, d_s vaut forcement d en champ moyen. Puisqu'il n'y a *pas* vraiment de "surface" en champ moyen, on peut s'attendre à ce que, sur un réseau (hyper-)cubique, les choses soient un peu différentes. Le scénario TNT suppose que $d_s < d$, et qu'ainsi le rapport $\frac{S}{V}$ tende vers 0 quand L augmente. Ce serait un effet de la dimension finie par rapport au champ moyen. Si cela semble être une petite modification il n'en est rien ! On verra par exemple dans le chapitre suivant que le fait que $d_s < d$ nous prédit que le diagramme des phases est celui donné par la théorie des gouttelettes plutôt que celui attendu dans la théorie champ moyen.

Pour étudier la pertinence de ce scénario, nous avons donc calculé l'évolution de ce rapport surface sur volume à overlap fixé, en nous restreignant aux grandes excitations avec $q \approx 0$. Si $d_s = d$, alors ce rapport $\frac{L^{d_s}}{L^d}$ devrait converger vers une valeur finie ; au contraire, si $d_s < d$, l'on devrait trouver une décroissance en $L^{d_s - d}$. Les données (Fig. IV–7 et Fig. IV–8) semblent donner un léger avantage à cette alternative, avec un exposant d_s qui ne dépend pas de la fenêtre en overlap où sont effectué les fits, et qui vaut environ 2.6 ou 2.7 en conditions aux limites libres ou périodiques. Ce résultat a aussi été

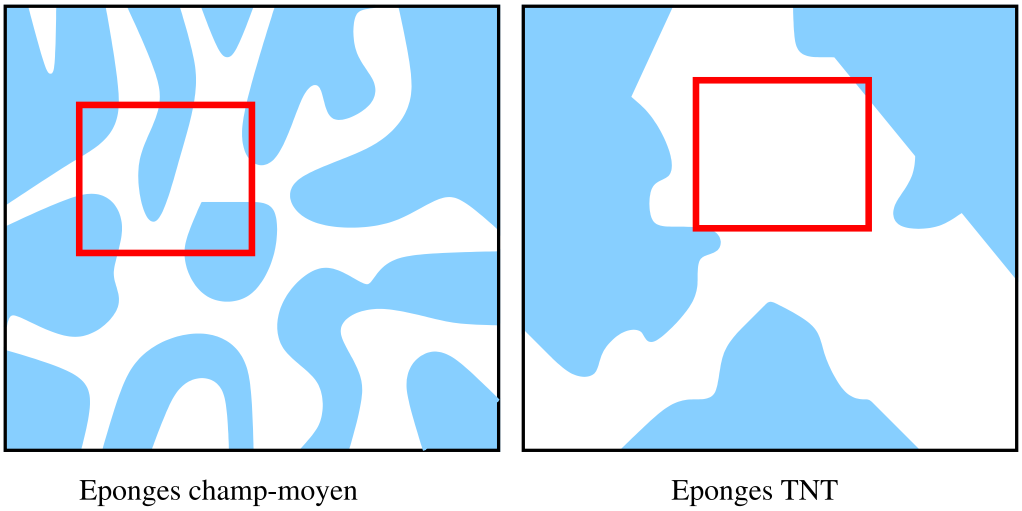


Fig. IV–6 – *Gauche: coupe d'une éponge champ moyen (avec $d_s = d$) en 3d. A l'interieur d'une fenêtre finie, retourner une telle éponge change considérablement le système. Droite: coupe d'une éponge TNT (avec $d_s < d$). Cette fois ci rien ne change dans une fenêtre finie quand on retourne l'amas spongieux.*

confirmé indépendamment (Palassini & Young, 2000)([6]). Une conjecture toute naturelle serait donc qu'à la dimension critique supérieure l'on trouve $d = d_s$, et que le champ moyen soit alors valide en accord avec les prédictions de la théories des champs (de Dominicis et al., 1998), mais qu'en dessous l'on ait le scénario TNT qui diffère lui du champ moyen.

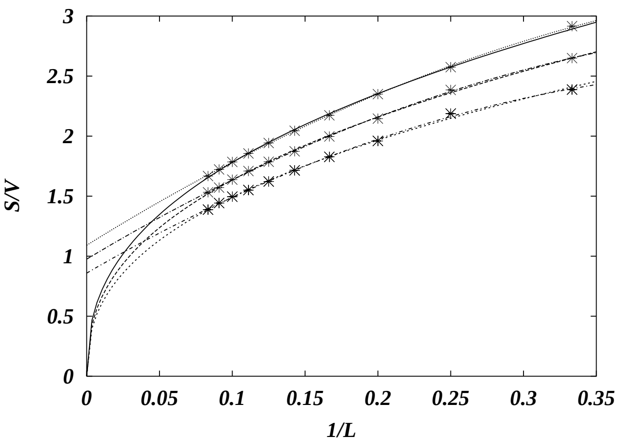


Fig. IV–7 – *Rapport surface sur volume à q fixé (trois fenêtres différentes de $x = \frac{1-q}{2}$: de haut en bas $[0.35 : 0.4], [0.4 : 0.45], [0.45 : 0.5]$) en fonction de $1/L$. Il est difficile de savoir quelle extrapolation est correcte et si la limite est finie ou nulle; le fit TNT donne cependant de meilleurs résultats.*

Palassini et Young ont également confirmé ces résultats en $4d$ où ils trouvent $d_s \approx 3.8$, ce qui confirme que $d - d_s$ diminue quand la dimension augmente, en accord avec la conjecture qui prévoit

([6])Ces excitations sont d'ailleurs parfois appelées *excitations KMPY* dans la littérature.

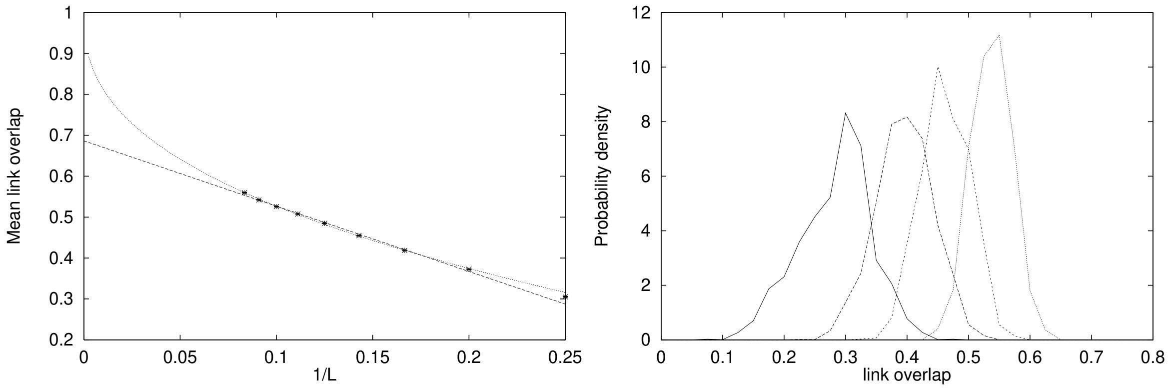


FIG. IV–8 – *Gauche : Overlap moyen en lien pour les excitations avec* $0 < q < 0.1$ *avec les fits pour une pure loi de puissance ou avec une droite avec asymptote non nulle. Droite : Distribution de l'overlap en lien pour* $L = 4, 6, 8, 12$ *de gauche à droite, avec* $0 \leq q \leq 0.1$.

$d - d_s = 0$ pour $d = 6$. Bien entendu, étant donné que nous n'avons pas accès à des tailles très grandes, il est difficile d'exclure $d = d_s$ comme l'ont remarqué (Marinari & Parisi, 2001). Il faut quand même souligner que la relation $d_s < d$ est tout de même plus avantagée par les fits, que ce soit en température nulle (en plus des références précédentes, il y a eu aussi (Hed, Hartmann, Stauffer & Domany, 2001)) comme en simulations Monte-Carlo (Katzgraber et al., 2001; Marinari et al., 2001; Domany et al., 2001). Enfin, les problèmes au niveau de la définition des états purs en présence de RSB disparaîssent quand on considère le scénario TNT (Newman & Stein, 2001; Newman & Stein, 2002) puisque dans un système de taille infini il n'y a alors localement que *deux* états; et pour finir la validité du scénario TNT a aussi été étudiée, avec des indices numériques au moins aussi bons, dans d'autres systèmes de verres de spins non Ising comme le verre de spins XY en $4d$ (Katzgraber & Young, 2002; Katzgraber, 2002) ou le verre de jauge en $3d$ (Katzgraber, 2002). Il semble donc que ce scénario soit non seulement une alternative très sérieuse aux théories canoniques, mais qu'en plus il soit un très bon résumé, naturel, de la situation numérique actuelle.

– IV.2 – Nature géométrique des éponges

Pour la seconde partie de ce chapitre, je voudrais rentrer un peu plus dans les détails en ce qui concerne les propriétés géométriques des éponges en essayant d'aller plus loin dans l'analyse numérique et d'étudier plus précisément la possibilité TNT.

a) Les scenarii possibles

Entre TNT et champ moyen, la différence se situe dans l'existence d'une longueur caractéristique qui grandit avec la taille pour le premier, et qui est finie pour le second. En résumé si la taille caractéristique des éponges est $l_c \propto L^{d-d_s}$ (et $\frac{S}{V} \to 0$) dans le *scénario TNT* alors que $l_c \approx$ quelques pas de réseau (et $\frac{S}{V} \to cst$) en *champ moyen.*

Le résultat le plus clair qui émerge de l'étude numérique est bien que les éponges ont des trous dont la taille grandit avec L, la taille du système; deux scénarii simples semblent compatibles avec nos mesures, l'un compatible avec TNT, l'autre avec le champ moyen :

(i). Les éponges épaisses (Fat sponges) : une maille $l_c \propto L^{\frac{d-d_s}{d}}$. C'est un scénario de type TNT (avec un $P(q_l)$ trivial) dans lequel les amas sont des éponges dont la maille augmente avec la taille du système.

(*ii*). Les éponges fines à trous (Cheesy thin sponges) : une maille finie, avec l_c de l'ordre de quelques pas de réseau, mais avec de grandes inhomogénéités qui expliquent que les éponges ont des trous qui grandissent avec le système. Ici $P(q_l)$ est non trivial, comme en champ moyen.

Dans le premier scénario (celui à éponge épaisse), l'existence de ces trous (de ces grandes zones où l'amas *ou* son complémentaire est compact) dont la taille augmente avec celle du système est simplement une conséquence de l'existence d'une longueur caractéristique qui augmente elle aussi avec la taille du système (voir la figure IV–9). C'est la réalisation la plus simple du scénario TNT. Une facon de se représenter ces éponges est de penser à la croissance de domaine dans un ferromagnétique Ising où il existe deux grands amas (un "up" et un "down") dont la maille grandit comme $\sqrt{t}$; on peut donc les rendre aussi grand que l'on veut.

Dans le second, les éponges ont bien une maille finie, comme prévu par le champ moyen, mais il y existe de grandes, mais suffisamment rares pour que $d = d_s$, inhomogénéités. Il est important de se rendre compte que ce scénario est *déjà* une certaine modification de l'image champ moyen dans laquelle il devrait y avoir non seulement une maille finie mais *aussi* une certaine homogénéité au dela de quelque pas de réseau. C'est un résultat que l'on peut montrer de la façon suivante :

L'idée est de s'intéresser aux propriétés des amas à une échelle l et avec un réseau de taille L, et plus particulièrement à la densité de l'amas à une certaine échelle. Si l'on considère par exemple une boite de taille $M \times M \times M$ et que q_M est l'overlap entre le fondamental et l'excitation dans cette boite, les fluctuations de q_M, à q fixé, nous renseignent sur les propriétés de l'amas à l'échelle M. Si $P_{M,L}(q_M)$ est la distribution de q_M moyennée sur le désordre, alors sa moyenne est ainsi q, puisque l'on travail à q fixé, et sa variance tend vers 0 quand M va vers L. La question importante est: comment se fait la convergence $P_{M,L}(q_M) \underset{L\to\infty}{\longrightarrow} P_M(q_M)$? Il est par exemple possible que ce soit une convergence uniforme, dans le sens mathématique, et que l'on obtienne la même fonction même si M varie avec L. Dans ce cas là, il n'y a *plus* de taille caractéristique dès que M est plus grand qu'une certaine longueur finie, et donc pas de fluctuation de densité plus grande que quelques pas de réseau. C'est ce qui est prévu par la théorie du champ moyen (Marinari et al., 2000) et c'est pourquoi l'on s'attend alors à ce que les éponges soient homogènes au dessus de quelques pas de réseau. Cette image, que l'on peut retrouver dans un ferromagnétique en considérant le grand amas de spins dans la même direction quand la température est autour du point du Curie, est en contradiction avec nos observations numériques et c'est pourquoi nous la remplaçons par celle des éponges fines à trous, que l'on peut se représenter par le même amas auquel ont aurait appliqué une transformation pour en faire un "gruyère" suisse à trou ! Une autre façon de voir la différence est de dire que la fonction $P_{M,L}(q_M)$ est large([7]) dans le cas "à trous", et des événements rares peuvent alors dominer la moyenne, tandis que ses queues décroîssent très rapidement dans le cas homogène.

Il est aussi possible d'imaginer bien sûr d'autres scénarii plus complexes; pour une description détaillée de ces scenarii et un comparatif détaillé avec les prédictions champ moyen de (Marinari et al., 2000) on pourra se reporter à l'article (Houdayer et al., 2000) en annexe.

b) Résultats numériques

Là encore je renvoie à (Houdayer et al., 2000) en annexe pour les détails des observables que nous avons introduites pour étudier les propriétés géométriques ainsi que pour l'exposé des résultats, et vais

([7])Une distribution large est une distribution où les queues ne décroissent pas exponentiellement, par exemple en loi de puissance; la variance est alors divergente. Voir par exemple (Bouchaud & Georges, 1990).

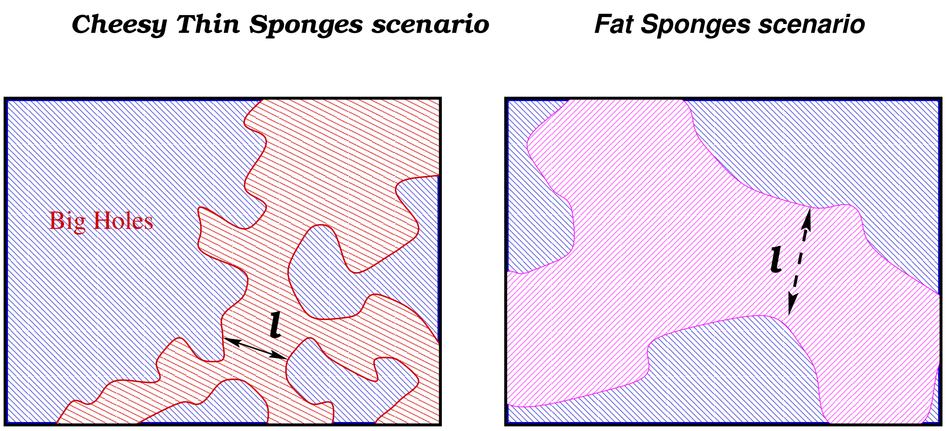


FIG. IV–9 – *Les deux scénarii pour les éponges compatibles avec nos résultats: Soit des éponges fines avec un maille finie mais de grandes inhomogénéités, soit des éponges dont la maille grossit avec la taille du système.*

me contenter de rapporter les résultats principaux.

b.1) Recouvrement en liens

On l'a dit, il semble s'extrapoler plus facilement vers 1 à q fixé, ce qui avantage le scénario TNT. En considérant la distribution du recouvrement en lien à q fixé montre un comportement très intéressant (voir figure IV–8). Si le pas du réseau était la seule échelle pertinente, on devrait s'attendre à ce que $P(q_l)$ converge vers une fonction delta (différente de 1 si l'on est champ moyen) en respectant le théorème de la limite centrale $\langle (q_l - \langle q_l \rangle)^2 \propto L^{-3}$. Cependant, on trouve plutôt que $\langle (q_l - \langle q_l \rangle)^2 \propto L^{-1.1}$, une valeur compatible avec celle trouvée dans d'autres études utilisant d'autres méthodes pour extraire les excitations (Marinari & Parisi, 2001). Cela suggère fortement l'existence d'une taille caractéristique l_c grandissant avec L. De plus, le kurtosys de la distribution montre qu'elle n'obéit pas au théorème de la limite centrale.

b.2) Fonction de corrélations

On peut définir une fonction de corrélation à quatre points $G(L, r) = \langle S^0(i)S^1(i)S^0(i+r)S^1(i+r)\rangle$, permettant d'accéder elle aussi à une longueur caractéristique. L'étude de ce $G(r, L)$ nous a ensuite permis de pouvoir rejeter quelques scenarii. Premièrement $G(r, L) = G(r/L)$, qui serait naturel dans une hypothèse où la taille L est la seule taille caractéristique du système, ne *marche pas*, le re-scaling des data conduisant alors à des courbes ne se superposant pas du tout. Ensuite $G(r, L) = G(r)$, qui serait un scénario *sans* taille caractéristique, semble complètement exclus également.

Par contre un scaling $G(r, l) = G(r/L^{\delta})$, où L^{δ} est alors la taille caractéristique du système, ne peut être exclu, même si la petitesse de la fenêtre accessible en taille ne nous permet pas une mesure précise de δ. Encore une fois il semble qu'il existe une longueur caractéristique qui grandit avec L

b.3) Recouvrement dans une boite

Plutôt que de considérer le recouvrement en liens dans le système on peut aussi regarder le comportement du recouvrement en spins q_B dans un fenêtre de taille B donnée. Cela permet en outre de déterminer les caractéristiques géométriques de l'excitation à cette taille B. Là encore, les fits sont meilleurs si l'on fait une extrapolation vers une distribution triviale comme dans le scénario TNT.

b.4) Tubes

Nous avons aussi introduit, toujours dans l'idée d'étudier directement les caractéristiques géométriques des amas, une nouvelle observable en essayant de faire passer des *tubes* d'une certaine section (un seul point, un carré, un losange de 5 points ... Voir fig.IV–10) à travers l'amas et en s'intéressant à la longueur de l'objet que l'on faire rentrer. La conclusion est alors que les amas permettent de faire passer des tubes de longueur *très importantes*.

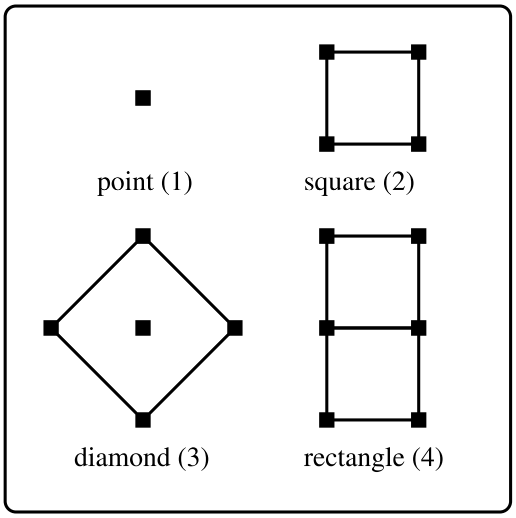


FIG. IV–10 – *Sections des tubes utilisés lors de l'analyse des propriétés géométriques des amas*

Le résultat le plus important est qu'en particulier la probabilité de trouver un tube qui traverse tout le système *augmente* avec la taille, quelque soit la section du tube ! C'est donc un indice numérique très propre (dans l'esprit de l'observable des éponges qui nous évite d'être dépendant d'une procédure de fit), qui semble éliminer définitivement une image avec des éponges fines *homogènes*: *il y a de grosses inhomogénéités dans le système*, et semble t-il même à la limite thermodynamique (voir le tableau IV.3). Une autre façon de comprendre ce résultat et d'interpréter l'observable des tubes est de dire que si l'on prend l'amas représentant une excitation spongieuse de taille $N/2$, et que l'on éclaire d'un coté avec une lampe torche alors *la lumière passe à travers et l'on peut la voir de l'autre coté.* Cela ne peut se comprendre dans une image d'éponges homogènes qui me semble donc devoir être abandonnée.

c) Conclusion

L'étude des propriétés géométriques des éponges, si elle ne nous a pas conduit à une conclusion définitive, nous a permis cependant de rejeter certains scenarii et de formuler des hypothèses simples.

Premièrement, l'image champ moyen d'une excitation homogène avec une maille finie me semble

L	Tube 2	Tube 3	Tube 4
4	0.137(7)	0.006(2)	0.008(2)
5	0.22(1)	0.028(4)	0.020(3)
6	0.32(1)	0.080(6)	0.043(5)
7	0.38(1)	0.119(8)	0.080(6)
8	0.41(1)	0.15(1)	0.11(1)
9	0.46(1)	0.18(1)	0.13(1)
10	0.47(1)	0.22(1)	0.17(1)
11	0.48(1)	0.25(1)	0.20(1)
12	0.51(2)	0.28(2)	0.24(2)

TAB. IV.3 – *Pourcentage des grandes excitations dont le q avec le fondamental est $0 < q < 0.1$ ayant au moins un tube les traversant entierement : Cette proportion augmente pour tous les types de tubes, suggérant fortement une valeur non nulle à la limite thermodynamique.*

clairement *invalidée* (elle est par exemple complètement contredite par le résultat de la “lampe torche”) : Si l'on tient à garder une maille finie, ce sera au prix de grandes hétérogénéités et de larges trous dans le système, un peu comme si l'on y faisait des trous à la manière du gruyère. Nous appelons ces excitations de type champ moyen hétérogènes des éponges fines à trous (Cheesy Thin Sponge).

Ensuite , la possibilité la plus avantagée numériquement est que les éponges aient une taille caractéristique qui grandit avec la taille du système, et qu'ainsi leur surface grandisse plus lentement que leur volume, réalisant donc l'hypothèse TNT. Ce seraient alors des éponges épaisses (Fat sponges).

– IV.3 – Discussion

Comme on l'a dit plus haut, les études numériques indépendantes confirment bien nos résultats sur l'existence d'éponges d'énergie $O(1)$. Il a été proposé une approche de correction aux lois d'échelle (Moore, 2002) qui pourrait re-concilier ces résultats avec la théorie des gouttelettes, mais ces corrections ne sont pas compatibles avec ce qui est observé à $2-d$ (Hartmann & Young, 2002). De plus les résultats les plus récents sur la dynamique hors-équilibre semblent aussi en défaveur de la théorie des gouttelettes (Berthier & Bouchaud, 2002). Il semble donc bien que, pour les excitations macroscopiques, l'on doit choisir entre TNT et Champ moyen.

a) Excitations locales et globales

Nous nous somme intéressé jusque là aux propriétés des grandes excitations, celles dont la taille est de l'ordre de celle du système. Il est aussi possible de s'intéresser directement aux gouttelettes de tailles finie, aux excitations *locales*, et de se demander quelles sont leurs énergies. D'après la théorie de scaling il est nécessaire d'avoir dans ce cas là un θ positif si l'on veut obtenir une phase verre de spins.

Il a été proposé (Houdayer & Martin, 2000*a*) qu'il pouvait exister deux échelles : les excitations de taille macroscopique coûtant une énergie finie $O(1)$ et les excitations de taille finie ayant une énergie $O(l^\theta)$ avec $\theta > 0$. L'origine de ces deux branches d'excitation est qu'en dimension 3 et plus, il est possible d'obtenir des excitations à topologie non triviale (les éponges) qui peuvent se comporter différemment des excitations locales. Dans ce genre de scénario, on doit alors considérer deux exposants θ : θ_l pour les excitations de taille finie et θ_g pour les grandes excitations. Ce comportement est sans doute le plus probable, la question étant alors de savoir si $\theta_g = \theta_l$. Cependant, au vu de récents résultats numériques et des surprises que nous ont souvent réservé les verres de spins, cela vaut la peine d'envisager d'autres possibilités.

Il est par exemple possible d'imaginer une situation où θ_l est négatif ou nul et où *il y a* une phase verre de spins à température finie (Lamarcq et al., 2002). Il suffit de tenir compte du fait que l'argument qui prévoit $T_c = 0$ si $\theta \leq 0$ ne marche que pour les gouttelettes indépendantes.

a.1) Lecture critique

Commençons par discuter de la vision gouttelettes à travers les réseaux hiérarchiques. Dans le schéma de renormalisation de Migdal-Kadanoff les excitations sont à la fois compactes (la dimension fractale de leur surface est $d_s = d-1$) et indépendantes (il n'y a pas d'interaction entre excitations de tailles différentes). C'est ce qui fait l'efficacité de la méthode puisqu'en quelque sorte l'on peut traiter toutes les échelles séparément. Si l'on considère ce qui se passe dans un ferromagnétique, c'est sans aucun doute une très bonne approximation. En effet dans ce cas si on part du fondamental et que l'on travaille à basse température, tous les spins sont soit en haut, soit en base. Si l'on veut retourner une gouttelette de taille l, l'énergie est directement donné par la surface de cette gouttelette et ainsi les excitations seront compactes pour minimiser leur surface à volume constant. C'est un phénomène bien connu, analogue à celui observé dans des mélanges binaires non miscibles([8]). À basse dimension, il est d'ailleurs bien connu que l'approximation de Migdal-Kadanoff donne de très bons résultats dans un ferromagnétique.

Si l'on considère maintenant un verre de spins en dimension finie, et que l'on se restreignent en effet à ces excitations compactes indépendantes, en supposant avec Fisher et Huse que leurs énergies sont de l'ordre de ℓ^θ, il semble que leur argumentation soit implacable, et qu'il faut $\theta > 0$ pour avoir une phase verre de spins. C'est bien ce qui se passe sur un réseau hiérarchique. Il existe cependant d'autres excitations sur un réseau hyper-cubique, en expérience de pensée on peut imaginer, en partant du fondamental et choisissant un spin, de demander comment grandit l'énergie de la gouttelette de taille ℓ en imposant par exemple que la surface possède une dimension fractale d_s. Les raisons pour lesquelles il faudrait négliger tout le spectre d'excitation ne sont pas aussi claires que dans le cas ferromagnétique.

En effet, dans un ferromagnétique, l'énergie d'une telle gouttelette serait toujours donnée par la dimension fractale de sa surface et l'on aurait donc $E_{d_s}(l) \propto \ell^{d_s}$. Ce que fait réellement le schéma de renormalisation de Migdal-Kadanoff, c'est de ne considérer que les excitations complètement compactes dont la surface a une dimension $d_s = d-1$, et qui se trouvent être en effet ici celles de plus basses énergies.

Si l'on applique cette approximation aux verres de spins l'on suppose donc implicitement que l'on doit être dans le même cas de figure. Sans doute que les excitations ne seront pas complètement compactes dans le sens $d_s = d-1$, mais on peut en effet penser avec Fisher et Huse que cela ne devrait pas être très différent([9]).

La forme de cette courbe qui donne $\theta(d_s)$ est-elle la seule permise? *A priori* il semble bien que non. On voit mal pourquoi on devrait se restreindre aux excitations compactes et il est donc possible, *a priori*, que d'autres excitations plus fractales aient une énergie plus basse. Il n'y a pas ici, contrairement au cas du ferromagnétique, d'argument *a priori* pour ne garder que des gouttelettes compactes puisqu'il

([8])Comme par exemple quand on verse de l'huile dans l'eau d'une casserole et que l'on observe la création de beaux objets compacts, du moins tant que l'on ne chauffe pas ...

([9])La grosse différences entre les deux modèles c'est que pour un ferromagnétique il n'y a pas d'excitation d'énergie d'$O(1)$ avec une taille L, alors que pour un verre de spins dans le modèle des gouttelettes on en trouve avec une probabilité qui décroît comme $L^{-\theta}$.

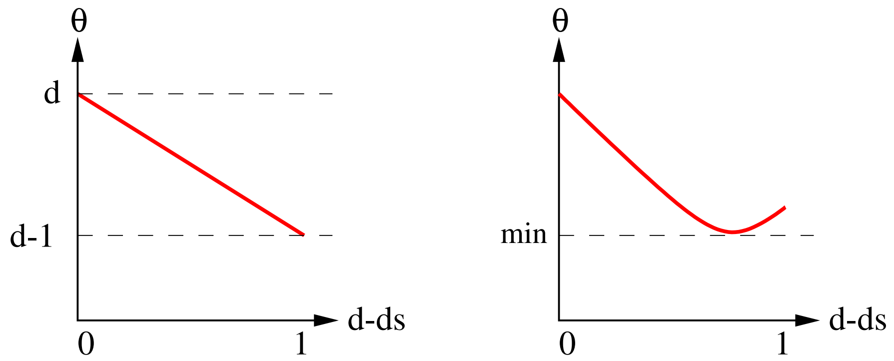


Fig. IV–11 – *Dans un ferromagnétique (à gauche), l'énergie d'une gouttelette est donnée directement par sa dimension fractale, et $\theta = d_s$. Le modèle des gouttelettes des verres de spins suppose implicitement que la forme de cette courbe est semblable dans le cas des verres de spins(à droite).*

n'y a pas de correspondance univoque entre énergie et surface. Pour la théorie des gouttelettes, il faut ainsi se concentrer sur les gouttelettes de plus faibles énergies : elle sont compactes, indépendantes et d_s est proche de $d-1$. Dans ce cas, on s'attend à ce que la courbe soit comme celle à droite dans la figure IV–11.

Comme l'ont remarqué (Lamarcq et al., 2002), il est possible d'avoir $\theta \leq 0$ et de garder une phase verre de spins pourvu que les gouttelettes ne soient pas indépendantes. Si par exemple $d = d_s$, toutes les gouttelettes entourant un spin ne peuvent *pas* être retournées ensemble avec un coût qui est simplement la somme des gouttelettes. Une situation où θ est nul pour $d = d_s$ est *parfaitement* compatible avec le champ moyen puisqu'il y aurait alors des grandes excitations d'énergie $O(1)$ avec $d = d_s$. On aurait alors une courbe comme celle à droite de la figure IV–12.

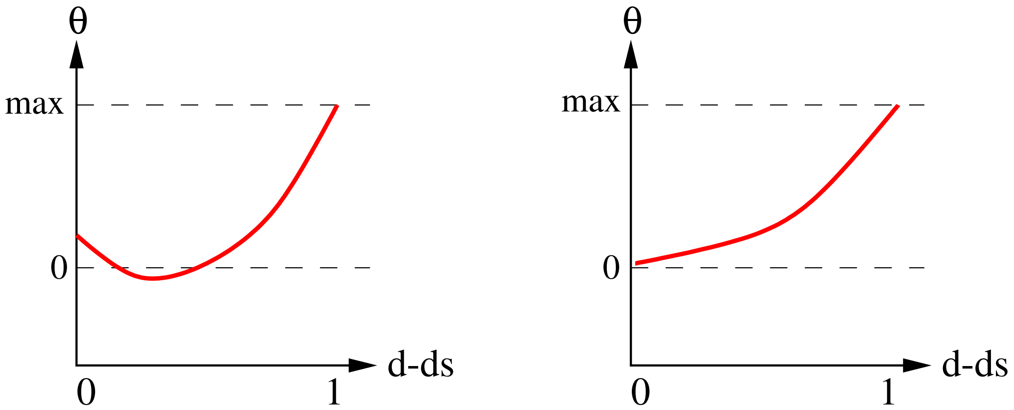


Fig. IV–12 – *Dans un verre de spin, on peut conjecturer d'autre comportements pour cette courbes. La courbe de droite donnerait raison à la théorie champ moyen tandis que la courbe de gauche donnerait le scénario TNT.*

a.2) Conjecture sur $\theta(d,d_s)$

Il a été montré numériquement (Lamarcq et al., 2002) que si l'on ne fixe pas de contrainte aux gouttelettes locales, l'on trouve alors $\theta_l \leq 0$ et des gouttelettes *non* indépendantes avec une dimension d_s proche de d. Si l'on force par contre les gouttelettes à être compacte, on trouve $\theta_l > 0$. Ce sont des études à température nulle jusqu'à des tailles de gouttelettes limitées mais non négligeables (une trentaine de spins).

Ces résultats suggèrent une conjecture sur la nature de la courbe $\theta(d-d_s)$. En effet, si le minimum est négatif ou nul *et* avec $d_s < d$ mais que les gouttelettes restent indépendantes, l'on a alors un scénario TNT, comme à gauche dans la figure IV–12. Il n'y aurait alors pas de différence entre les excitations locales et globales, mais un θ qui dépendrait de $d-d_s$ et une infinité de branches d'excitations. La chose très belle avec cette conjecture, c'est qu'elle permet aussi d'exprimer, si l'on accepte $\theta_l = \theta_g$, les trois scenarii de ce chapitre. Si le minimum de cette courbe est positif, alors il faut considérer la théorie des gouttelettes. S'il est négatif, TNT serait correct si $\theta(d=d_s) > 0$ et le champ moyen si $\theta(d=d_s) = 0$. Ainsi, l'approximation MK nous donnerait la valeur de θ pour $d_s \approx d-1$ et le champ moyen pour $d_s = d$(10). La stabilité de la phase verre de spins nécessitant les gouttelettes indépendantes avec un $\theta > 0$, cela pourrait expliquerait aussi pourquoi MK, qui prédit bien la valeur des excitations compactes, prédit bien également la dimension critique inférieure (voir chapitre II).

Cette approche très intéressante nécessite clairement plus d'études, ces considérations restant très spéculatives. Il existe (se reporter encore au chapitre II) des indices numériques en faveur de l'existence de plusieurs types d'excitations dans les verres de spin en deux ou trois dimensions. En deux dimensions notamment, il n'est toujours pas clair si un seul θ peut suffire (Kawashima, 2000; Picco, Ritort & Sales, 2001; Middleton, 2001; Bouchaud et al., 2002; Hartmann & Young, 2002) mais les simulations étant alors plus simples, puisque le problème est polynomial, il est probable que dans ce cas les choses seront plus claires dans un avenir très proche.

b) Et maintenant ?

À la fin de la lecture de ce chapitre, il semble presque qu'il reste autant de questions ouvertes sur la nature de la phase verre de spins aujourd'hui qu'il y a trois ans malgré l'abondance de résultats !! De fait ce qui a vraiment changé, c'est la nature des questions.

Ce que j'ai présenté ici, et ce que semblent confirmer *toutes* les simulations actuelles, ce sont des indices numériques *très forts* en faveur de la présence d'excitations spongieuses d'énergie $O(1)$ macroscopiques. Autrement dit $\theta_g \approx 0$. Ce sont ces excitations qui sont responsable du $P(q)$ non trivial observé dans les simulations monte-carlo, et non la proximité du point critique. Dans l'espace réel, l'amas formé par ces excitations a une topologie non triviale, faite de trous et de poignées.

Il serait utile, bien que difficile, de pouvoir confirmer ce résultat à des tailles plus grandes; il reste en outre deux grandes questions ouvertes :

(i). Le scénario TNT est-il le bon, ou dit autrement, que vaut la dimension fractale de la surface des excitations macroscopiques ? Si la possibilité $d_s < d$ semble avantagée, et si le champ moyen *homogène* semble éliminé, il faudrait pouvoir trancher définitivement entre des éponges épaisses (où d_s est vraiment plus petit que d) ou des éponges fines mais inhomogènes (où d_s est cette fois égal à d mais où les inhomogènéités perturbent le calcul de d_s).

(ii). Quelle est la nature *locale* des excitations ? Si $\theta_l \approx 0$ le scénario avec un continuum d'excitation devra être prit en considération. Sinon, il faut revenir au scénario plus classique avec $\theta_l > 0$ et un

(10)En MK les excitations ont nécessairement $d_s = d-1$ et en champ moyen $d_s = d$.

θ_g pour les grandes excitation potentiellement différent de θ_l, puis se concentrer sur la question de l'existence des éponges à la limite thermodynamique. Pour savoir quelle voie adopter, connaître la valeur de θ_l dans les modèles champ moyen serait une très précieuse information([11]).

Enfin, tout cela concerne la statique. Dans quelle mesure ces résultats peuvent affecter la dynamique reste encore à déterminer. Malgré de récentes et prometteuses études (Barrat & Berthier, 2001; Berthier & Bouchaud, 2002; Yoshino et al., 2002*a*; Yoshino et al., 2002*b*) la structure dans l'espace réel de la dynamique et la pertinence des éponges dans ce cas restent très mal comprise. Si l'idée qu'un système hors-équilibre à un temps t est équivalent à une collection de systèmes de taille $L(t)$ en équilibre est bonne, alors les propriétés des éponges en tailles finies, qu'elle s'extrapolent ou non à la limite thermodynamique, auront un rôle à jouer.

([11])Notons que θ_l ne peut pas être négatif ou nul dans les systèmes avec RSB one-step puisque cela conduirait à un $P(q)$ non trivial de type continu.

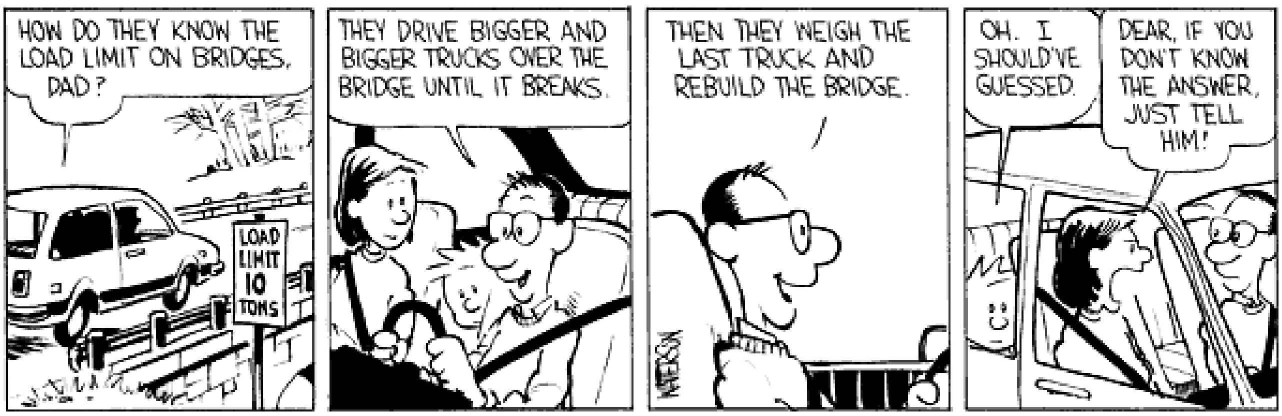
Chapitre V

Étude du diagramme des phases

Dans ce chapitre , nous essayons d'étendre l'image donnée au chapitre précèdent, de façon à comprendre le diagramme de phase. En particulier, nous étudions l'effet d'un champ magnétique ainsi que celui d'un terme ferromagnétique dans l'Hamiltonien.

Nous ne pouvons exclure la possibilité d'une phase verre de spin en champ magnétique, mais avec un B_c critique assez faible. De même, aucune trace de la phase mixte avec co-existence des ordres ferromagnétique et verre de spins n'est vue.

Un diagramme des phases trivial est ainsi favorisé par les données.



Chacun a raison de son propre point de vue,
mais il n'est pas impossible que tout le monde ait tort.
Gandhi, *Lettres à l'Ashram*

Déterminer le diagramme des phases d'un système physique est particulièrement important dans le cadre de la physique statistique. Comme nous l'avons vu, sa nature est particulièrement discutée dans les verres de spins, tant d'un point de vue théorique qu'expérimental. Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier le diagramme des phases du modèle d'Edwards-Anderson en $3d$ à l'aide des outils phénoménologiques et numériques introduits dans le chapitre précédent, et notamment des éponges. Les résultats présentés ici ont donnés lieu à deux articles (Krzakala et al., 2001; Krzakala & Martin, 2002*a*). Deux questions principales nous intéressent :

- Que se passe t-il lorsque l'on applique un champ magnétique ?
  Le champ moyen prédit alors que la phase verre de spins existe toujours jusqu'à une valeur critique B_c du champ tandis que la théorie des gouttelettes prédit qu'il ne peut exister une telle phase ordonnée en champ.
- Que se passe t-il lorsque l'on varie la concentration de liens ferromagnétiques ?
  On s'attend alors à une transition du second ordre vers un état ferromagnétique pour une certaine concentration critique, mais le champ moyen prévoit en outre une phase mixte où co-existent les ordres verre de spins et ferromagnétique.

La première question a été très discutée dans la littérature, mais la difficulté des simulations numériques et l'ampleur des effets de taille finie empêchaient une réponse définitive. C'est encore le cas ici dans une certaine mesure : les données suggèrent qu'il est possible d'avoir une phase verre de spins pour $B \leq 0.6$ ou encore pour $B \leq 0.4$ une phase avec brisure de la symétrie des répliques mais l'on ne peut cependant exclure $Bc = 0$, et au vu de la faiblesse des valeurs critiques trouvées il est honnête de dire que les données favorisent plus *l'absence* de phase verre de spins en champ que sa présence.

La seconde question a étrangement été peu étudiée alors que, comme on va le voir, elle semble beaucoup moins souffrir des effets de taille finie. Nos données suggèrent ici très clairement *l'absence* d'une telle phase mixte. Finalement, alors que dans le chapitre précédent nous trouvions un comportement champ moyen pour les excitations, le diagramme des phases semble lui est être bien prédit par la théorie des gouttelettes.

Nous montrerons qu'une façon naturelle de comprendre ces résultats contradictoires (i.e. un diagramme de phase gouttelette et une paysage d'énergie champ moyen) est encore le scénario TNT pour lequel ces deux propriétés sont attendues. En effet, c'est à mon sens le fait que les surfaces des excitations aient une dimension fractale avec $d_s < d$ qui est responsable de ce diagramme de phase.

– V.1 – Outils et concepts

a) L'ordre verre de spins

Nous allons encore considérer dans ce chapitre le modèle d'Edwards et Anderson des verres de spins (Ising) en trois dimensions. Comme nous l'avons rappellé il existe un consensus sur l'existence d'une phase verre de spins à basse température caracterisée par un ordre gelé aléatoire des aimantations locales $\langle S_i \rangle \neq 0$, où $\langle . \rangle$ représentente la moyenne thermique. En présence d'un champ magnétique les choses se compliquent un peu puisqu'il n'y a plus de symétrie haut-bas et le fait que $\langle S_i \rangle \neq 0$ n'est plus pertinent. Cela est vrai aussi dans une phase avec une aimantation spontanée et il est alors nécessaire de préciser ce que l'on entend par "ordre verre de spins". Comme rappelé dans le chapitre I, une phase verre de spins est caracterisée par une susceptibilité verre de spins infinie, tandis qu'elle est finie dans une phase paramagnétique ou ferromagnétique loin du point critique.

Puisque nous allons encore une fois étudier le système à température nulle on peut se demander quelle est la *signature* qui correspondra à $\chi_{SG} = \infty$ à température finie (voir la section I.3.a2) du chapitre I pour une discussion détaillée). Considérons ainsi le fondamental en présence d'un champ B, ses gouttelettes avec un exposant θ, et le scaling habituel (Fisher & Huse, 1986) donnant l'énergie caractéristique des gouttelettes de rayon r : $E \propto r^\theta$. Si la distribution des énergies re-scalé $P_d(E/r^\theta)$ a une densité non nulle en 0, alors il y a assez de gouttelettes actives thermiquement pour donner une susceptibilité verre de spins infinie à température finie. Nous avons trois possibilités en fonction de notre observable ξ que nous identifierons à la taille moyenne $< V >$ des gouttelettes que l'on peut retourner (voir encore la section I.3.a2) dans le chapitre I):

(1) Le scénario "champ moyen" : tant que le champ magnétique B est inférieur à une valeur critique B_{AT} il y a RSB, et dès que $B > B_{AT}$ le comportement est celui d'un paramagnétique. On obtient alors $\xi = \infty$ en dessous B_{AT}.

(2) Le scénario "scaling/gouttelettes" : dès que $B > 0$ le système est paramagnétique. De plus $\theta = 3$ à grand champ puisque l'énergie d'excitation grandit linéairement avec le nombre de spins([1]). Il semble donc, si le verre de spins à $B = 0$ est un point fixe sous le flot de renormalisation, que $\theta = 3$ pour tout $B > 0$.

(3) Un scénario intermédaire où l'ordre verre de spins survit à B positif, mais sans RSB. Une phase de type gouttelette, avec un $P_d(0)$ tendant vers 0 comme $1/L^{\theta(B)}$, existerait alors pour $B < B_c$ avec $\xi = \infty$ tandis que pour $B > B_c$ on aurait $\xi < \infty$. Nous appelons cette possibilité le scénario MAD (*M*agnetization *A*nd *D*roplets).

Ces trois possibilités sont aussi valables pour une éventuelle phase verre de spins ferromagnétique. On essaiera donc dans la suite d'étudier la fonction $P_d(0)$ ainsi que l'exposant θ.

a.1) Perturbations aux limites

Une approche naturelle pour voir si $\xi = \infty$ est de perturber les couplages J_{ij} et de voir à quel point cela perturbe le fondamental. La façon classique de faire cela est d'utiliser les calculs "périodique - anti périodique" (P-AP) où l'on calcule le fondamental avec des conditions aux limites périodiques, l'on change ensuite le signe de tous les Js qui coupent un plan vertical Π, ce qui revient à appliquer des conditions anti-périodiques au système à travers ce plan, puis l'on recalcule le fondamental de ce nouveau problême([2]).

Pour étudier la phase verre de spins (avec ou sans RSB) on va donc utiliser le fait qu'elle est sensible aux perturbations; l'énergie d'une interface crée par la méthode P-AP grandit plus doucement que L^2 (par définition comme L^θ en fait) et un autre aspect intéressant est que ces interfaces fluctuent sur une longueur d'ordre L (on définit parfois un exposant ζ appelé en anglais wandering exponent défini par la taille de la fluctuation de l'interface $\ell \propto L^\zeta$. Ici on a donc $\zeta = 1$). Cela peut être mesuré et constitue une façon de tester la présence d'un ordre verre de spins.

Pour rendre cette observable plus efficace, nous allons encore considérer qu'une interface est du type verre de spins si elle s'enroule -encore !- autour de la direction transverse à celle où l'on a flippé les

([1])Mais il n'y a plus de gouttelette d'énergie $O(1)$ et la densité de $P_d(E/r^\theta)$ est nulle en zéro, il n'y a donc plus de longueur de corrélation infinie.

([2])Contrairement au cas habituel, l'invariance de jauge qui rendait le nouveau fondamental indépendant du plan choisi n'est *pas* respectée quand $B \neq 0$ ou quand la distribution des Js n'est pas centrée en 0. Cela dit cette perturbation reste invariante envers les translations dans deux directions ce qui nous donne de bonnes statistiques sur les observables.

Js, ce qui nous donne un paramètre d'ordre simple et facile à interpréter si l'on considère la probabilité d'obtenir une telle interface à une taille et un champ (ou une concentration de liens ferromagnétiques) donnés.

b) Brisure de la symétrie des répliques

Pour étudier numériquement la brisure de la symétrie des répliques, nous allons par contre nous inspirer directement des résultats du chapitre précédent et chercher s'il existe des excitations d'énergies $O(1)$ spongieuses. Pour cela, nous allons procéder de la même manière : l'on calcule le fondamental, puis l'on force un spin à flipper tandis qu'un autre est fixé pour trouver une excitation connexe (dans le cas où un champ magnétique est appliqué, on peut simplement se contenter de forcer un spin à flipper, puisqu'il n'y a plus alors qu'un seul fondamental à cause de la brisure de la symétrie up-down).

La fraction moyenne d'éponges obtenues, pour un champ ou une concentration donnée, est alors un paramètre d'ordre pour signaler une phase avec RSB. En effet, comme on l'a déjà dit, s'il y a RSB on devrait trouver avec une probabilité finie des éponges alors que dans le cas contraire il ne doit pas y en avoir à la limite thermodynamique. Le fait que la proportion d'éponge soit un paramètre d'ordre va nous aider considérablement dans l'analyse des données.

c) Incompatibilité entre $d_s < d$ et $m > 0$

Comme on l'a dit le modèle des gouttelettes indique que le diagramme des phases est trivial. Il y a plusieurs façons de comprendre cela : on peut (i) utiliser un argument de type (Imry & Ma, 1975) comme le font (Fisher & Huse, 1986) pour montrer l'absence de phase en champ; (ii) utiliser le diagramme des phases dans l'approche bond-moving à la Migdal-Kadanoff (Young & Southern, 1977; Migliorini & Berker, 1998) et obtenir l'absence de phase en champ et l'absence de phase mixte; ou encore (iii) remarquer que le diagramme des phases serait très singulier et non génerique en présence d'une phase mixte (voir la figure V–1). Cette image gouttelette fonctionne très bien en $2d$ et en particulier correspond bien au consensus qu'il n'y ait pas de phase mixte si $d \leq 2$ (Kawashima & Rieger, 1997; Nishimori, 2001). Le scénario TNT donne aussi un diagramme de phase trivial : La

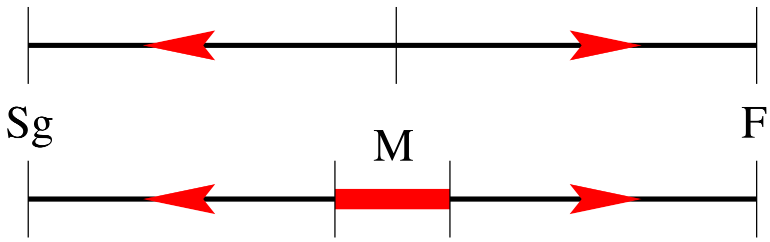


FIG. V–1 – *Haut : flot de renormalisation dans l'hypothèse où il y a deux points fixes attractifs verre de spins et ferromagnétique et un point fixe instable. Bas : une phase mixte entraîne ainsi l'existence d'une ligne de points critiques dans le diagramme de phase, comme dans le modèle XY en $2d$.*

présence d'une phase ferromagnétique, où l'aimantation par spin $m = M/N$ est auto-moyennante, est en effet incompatible avec le scénario TNT. Plus précisément, l'existence d'excitations d'énergies finies $O(1)$ avec $d_s < d$ est incompatible avec celle d'une aimantation auto-moyennante dans le système. En effet dans ce cas quand l'on considère une boite d'un volume assez important la densité d'aimantation dans la boite s'approche de celle du système entier et une contradiction apparaît alors. Il y a plusieurs façons de la voir, par exemple :

(a) Si l'on active thermiquement une des grandes excitations compactes cela ne changera pas l'aimantation localement mais cela changera celle du système, détruisant l'auto-moyennance, sauf si $m = 0$.

(b) Sans même parler de température, les différents fondamentaux du systèmes auraient une aimantation moyenne différente puisque l'on passe alors de l'un à l'autre en retournant un amas compact de spins. L'aimentation n'est plus auto-moyenante alors qu'elle est une derivé d'une l'energie libre auto-moyenante, ce qui conduit à un contradiction.

Une aimantation non pathologique avec TNT impose ainsi $m = 0$, *i.e.* pas de phase mixte, ni de ligne dAT.

d) Récapitulons

Avant de commenter les résultats numériques il va être utile de récapituler les observables et les prédictions. Les observables seront les suivantes :

- RSB : Le paramètre d'ordre est la proportion d'éponges obtenues dans la procédure où l'on retourne un spin pour générer des objets d'énergie $O(1)$.
- Verre de spins : Pour savoir si nous avons une phase verre de spins, nous utiliserons les propriétés des murs de domaine (notamment là aussi, la proportion d'éponges) ou encore la taille moyenne des gouttelettes d'energie $O(1)$.
- L'aimantation moyenne nous renseignera évidement sur la présence d'un état ferromagnétique.

Nous pouvons alors, en principe, calculer le diagramme des phases à température nulle. Les principales prédictions, sans parler du scénario MAD, sont les suivantes : (i) dans une image champ moyen nous nous attendons à avoir une phase verre de spins en champ ainsi qu'une phase où co-existent ferromagnétisme et ordre verre de spins tandis que (ii) en théorie des gouttelettes ou en TNT ces phases sont absentes.

– V.2 – Influence d'un champ magnétique

Nous allons pour commencer essayer de trouver la valeur du champ critique B_c au dessus duquel il n'y a plus de phase verre de spins. Savoir si oui ou non il existe une ligne 'de Almeida-Thouless" (de Almeida & Thouless, 1978) reste un question difficile dans les verres de spins. D'un point de vue expérimental la réponse reste controversée puisque des résultats en faveur de chaque école de pensée ont été publiés (Ito & Katori, 1994; Mattsson et al., 1995; Petit et al., 1999; Petit et al., 2002) sans qu'aucun consensus n'émerge réellement. De fait, quand une transition en champ semble apparaître c'est plutôt pour des échantillons avec spins Heisenberg; pour les spins Ising, rien de convainquant n'existe expérimentalement.

Du coté des simulations Monte-Carlo, rien n'existe non plus de très convainquant. En $3d$, à cause des effets de taille finie les simulations sont réellement difficiles (Caracciolo et al., 1990; Grannan & Hetzel, 1991; Kawashima & Ito, 1993). D'autres approches, utilisant la dynamique hors-équilibre des verres champ moyen et notamment leur façon caractéristique de violer le théorème de fluctuation dissipation, ont été effectuées en $3d$ (Marinari et al., 1999) et en $4d$ (Marinari, Parisi & Zuliani, 1998) et semblent montrer l'existence d'une phase verre de spins en champ. Cependant il a été montré (Barrat & Berthier, 2001) qu'à cause des effets de tailles finie, de tels résultats pouvait être obtenus en $2d$ alors qu'il n'y existe pas de telle transition. Un test numérique réellement à l'équilibre, et où les effets de taille finie sont moins importants, est donc nécessaire. Pour cela, nous considérons le cas où $T = 0$ qui présente moins d'effets de taille finie et qui nous permet d'éviter d'être polué par les fluctuations dues à l'influence du point critique. Une telle approche a déjà été effectuée par (Houdayer & Martin, 1999*a*) et semblait indiquer l'absence d'un $B_c > 0$, sans que pour autant un consensus n'emerge (Marinari et al., 1999; Houdayer & Martin, 2000*b*).

Dans la suite nous travaillons avec l'Hamiltonien EA sur un réseau cubique de taille L^3:

$$H_J(\{S_i\}) \equiv -\sum_{<ij>} J_{ij} S_i S_j - B \sum_i S_i \; . \tag{V.2–1}$$

B est le champ magnétique et J_{ij} sont des variables aléatoires indépendantes, de moyenne nulle et de variance unité.

a) Tailles des gouttelettes

Nous allons tout d'abord analyser la taille moyenne des gouttelettes obtenues par la méthode *one spin flip*([3]): considérons le fondamental C_0 avec un champ H; on choisit *un* spin S_{i_0}, on le retourne et l'on re-calcule le nouveau fondamental C et la différence entre C et C_0 est encore un amas connexe dont nous notons le volume V. C'est la gouttelette de plus faible énergie contenant S_{i_0}. Nous nous intéressons ici à la moyenne $\langle V \rangle$ obtenue en répetant cette opération plusieurs fois et en moyennant sur le désordre; elle est analogue à la susceptibilité verre de spins $\chi_{SG} = L^3 \langle (q - \langle q \rangle)^2 \rangle$ où q est le recouvrement habituel. Un $\langle V \rangle$ divergeant quand $L \to \infty$ est ainsi la signature d'une phase verre de spins tandis qu'un $\langle V \rangle$ fini correspond à une phase paramagnétique.

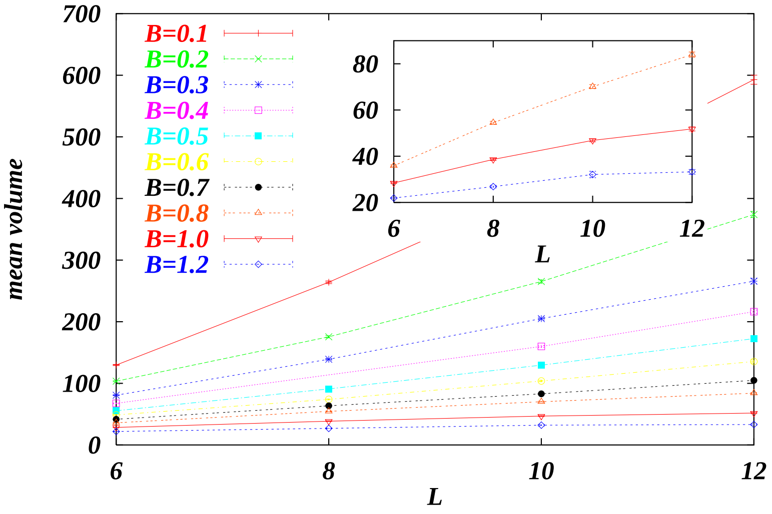


FIG. V–2 – *Volume moyen des gouttelettes obtenues par la méthode "one-spin flip" en fonction de L pour, de haut en bas,* $B = 0.1, 0.2, \cdots$. *Dans l'insert on a* $B = 0.8$, 1.0 *et* 1.2.

Pour chaque B ($0.1 \leq B \leq 1.2$, par pas de 0.1) l'on a calculé 3000 gouttelettes pour $L = 6, 8, 10$ et 1000 pour $L = 12$ (voir fig. V–2) et les spins S_{i_0} ont été choisis parmis les 25% ayant leur champ local le plus fort pour augmenter le signal. Dans le modèle des gouttelettes il existe une longueur ℓ_B

([3])On prend un fondamental en présence d'un champ, on choisit *un* spin, on le force à se retourner et l'on recalcule le fondamental.

se comportant comme un cut-off et $\langle V \rangle$ doit grandir jusqu'à $L \approx \ell_B$ puis saturer à $\ell_B \approx (\Upsilon/B)^{\frac{3-2\theta}{2}}$; au contraire s'il y a une phase verre de spins $\langle V \rangle$ diverge pour $B \leq B_c$.

Il est clair d'après la fig. V–2 que, pour $B \geq 1$, $\langle V \rangle$ sature quand L grandit, ainsi à ces valeurs de B nous somme dans la phase paramagnétique. Pour les valeurs plus petites il est difficile de trancher bien que nos valeurs de $\langle V \rangle$ semblent un peu grandes pour le modèle des gouttelettes; si l'on considère par exemple les données à $B = 1.0$ et que l'on utilise $\Upsilon \approx 1.95$ et $\theta \approx 0.19$ on trouve $\ell_B(B = 1.0) \approx 2.4$ alors que numériquement l'on trouve $\langle V \rangle = 52$ à $L = 12$, et que l'on est pas encore au régime de saturation. Il est cependant difficile d'être plus quantitatif avec cette observable; il est difficile de trancher entre un scénario où $\langle V \rangle$ diverge quand $L \to \infty$ pour des valeurs de B assez petite, comme $B < 0.6$, et un scénario où ℓ_B est un peu plus grand que la taille du réseau quand $B \leq 0.8$ et qu'ainsi il n'y ait pas de phase verre de spins en champ. Pour tenter d'aller plus loin nous allons utiliser les éponges.

b) RSB, éponges et enroulements

Dans l'image champ moyen il existe des vallées microscopiques différentes dont les énergies diffèrent par $O(1)$ pour $B < B_{AT}$. Quand $B > B_{AT}$ la probabilité de trouver ces vallées doit décroître exponentiellement en L. Comme dans le chapitre précédent nous allons chercher ces excitations en cherchant les amas qui s'enroulent autour du réseau; l'on aura alors une fraction $f(B, L)$ obtenue numériquement à partir des mêmes données que précédement. Cependant l'on observe que parfois un amas contient plus que $0.5L^3$ spins; puisque ces événements disparaîssent quand $L \to \infty$ nous les avons exclus de l'analyse pour réduire les effets de tailles finie (voir figure V–3). Cela marche très bien et semble justifié puisque (i) ces événements disparaîssent déjà pour $L = 12$ quand $B > 0.2$ et (ii) le comportement est alors beaucoup plus physique([4]).

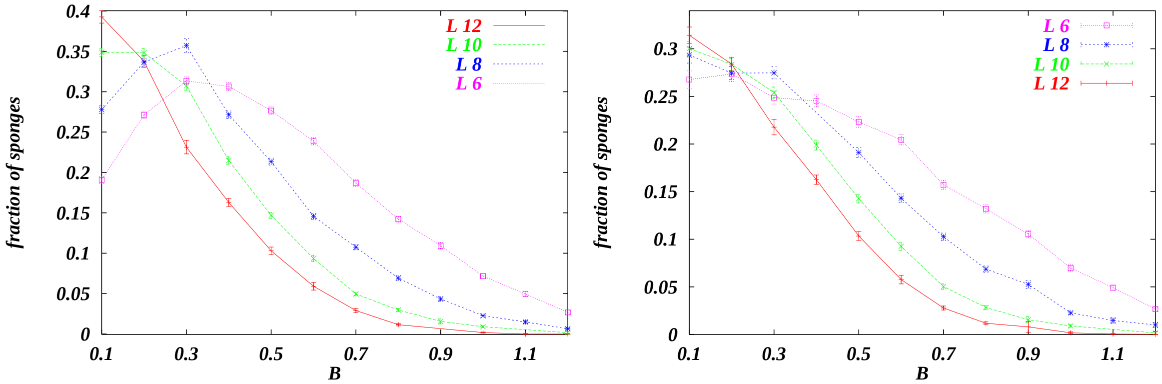


Fig. V–3 – *$f(B, L)$, fraction des excitations spongieuses en fonction de B. À gauche les données brutes avant le "cut-off". Nous choississons de ne pas prendre en compte les événements où l'excitation contient plus de la moitié des spins et l'on obtient la figure de droite, beaucoup plus physique, que l'on va utiliser pour l'analyse. Remarquons en particulier que les courbes à $L = 12$ sont presque les mêmes pour $B > 0.2$ avant et après le "cut-off".*

Considérons donc pour la suite les valeurs de $f(B, L)$ dans la figure à droite dans V–3. Le com-

([4])Cet effet, qui apparaît dans notre étude parceque l'on ne retourne qu'*un seul spin* sans fixer un autre à garder la même orientation contrairement au cas où $B = 0$, est simplement dû à la faiblesse de la contrainte imprimée par le champ quand B et L sont très petits.

portement à grand B montre bien que f va vers 0 quand L augmente. Encore une fois la présence de RSB entraîne qu'à grand L les courbes convergent vers une fonction limite $f^*(B)$ coupant l'axe x à $B_{AT} > 0$; au contraire s'il n'y a pas de RSB la courbe limite est $f^*(B) = 0$ pour tout $B > 0$.

Le paramètre d'ordre devrait se comporter comme $f^*(B) \approx (B_{AT} - B)^\beta$, où β est plus petit ou égal à sa valeur champ moyen $\beta = 1$. Ainsi nous nous attendons à ce que f^* soit convexe pour les valeurs de B assez différente de 0. Une borne supérieure de B_{AT} peut donc être obtenue en prenant la tangente à la courbe $L = 12$ ce qui nous donne $B_{AT} \leq 0.65$. Les effets de taille finie semblant encore assez important il est probable que cette borne soit bien au dessus de la vraie valeur. Si l'on suppose que les courbes convergent vers f^* de façon raisonnable l'on peut aussi extrapoler les courbes à l'oeil ce qui donne ainsi $B_{AT} \leq 0.4$, une valeur plus petite. À cause de la faiblesse de l'étendue de nos données il est difficile d'être plus précis que cela.

Nous avons essayé de faire un finite-size scaling de la forme $f(B,L) = L^{-\beta/\nu} F[(B_c - B)L^{1/\nu}]$ en considérant les deux scénarii sans RSB : $B_c = 0$ dans le modèle des gouttelettes et $B_c > 0$ dans le scénario MAD. Les meilleurs recouvrements ont été obtenus en ajustant, pour chaque valeur de B_c, β/ν pour que F soit à peu près indépendant de L autour $B = B_c$ puis en ajustant ν pour que les courbes se superposent. Le recouvrement, que ce soit pour $B_c > 0$ ou $B_c = 0$, n'est pas parfait ce qui rend impossible l'utilisation d'une analyse basé sur un χ^2 et nous oblige à juger de la qualités des recouvrements à l'oeil. Nous obtenons un résulat assez bon pour $B_c \approx 0$ avec $\nu = 1.25$ et $\beta \approx 0$ (ce qui est naturel car les éponges semblent bien présente à $B = 0$). Ceci est notre *meilleur* scaling puisqu'en augmentant B_c, la superposition se détériore notablement jusqu'à une valeur de $B_c \approx 0.65$ où elle redevient presque acceptable avec $\nu \approx 0.8$ et $\beta \approx 2.0$.

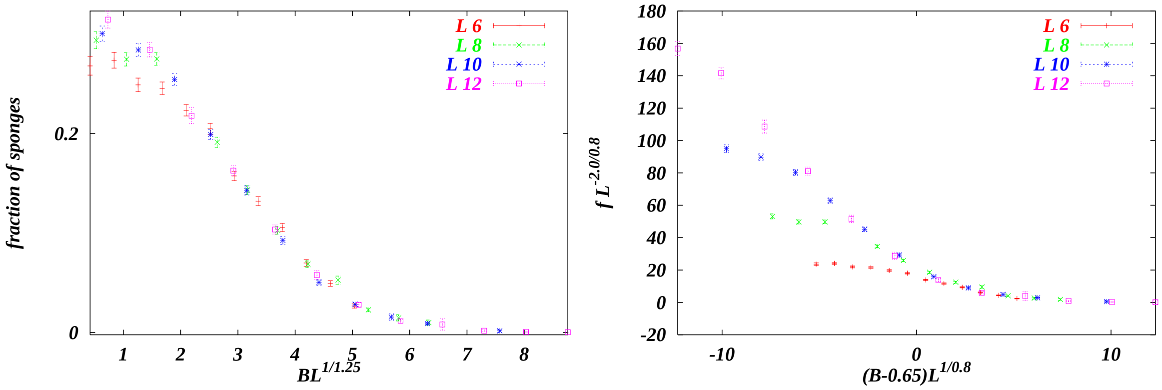


FIG. V–4 – *Finite size scaling de $f(B,L)$ et en utilisant $f(B,L) = L^{-\beta/\nu}F[(B_c - B)L^{1/\nu}]$. Le meilleur scaling (à gauche) est obtenu pour $B_c = 0$ avec $\nu = 1.25$ et $\beta \approx 0$, suggèrant l'absence de phase en champ. Le meilleur scaling avec un champ critique non nul est montrè à droite pour $B_c = 0.65$ avec $\nu = 1.8$ et $\beta \approx 2.0$; il est beaucoup moins bon mais à l'avantage d'être un peu meilleur près de B_c.*

En conclusion, si les données ne permettent pas réellement de distinguer entre les différents scénarii de façon définitive, il semble bien que la phase verre de spins n'existe potentiellement que pour $B_c \leq 0.65$, et surtout pour $B_c \leq 0.4$ si l'on exige la RSB. Enfin pour $B_c = 0$ nous obtenons un meilleur finite size scaling, ce qui suggère que B_c est très petit, sinon nul. Notons que le scénario TNT est avantagé par un scaling comme celui que nous trouvons à $B_c = 0$ pour lequel les éponges survivent à $B = 0$ à grand L.

c) Périodique et anti-périodique

Nous utilisons maintenant les calculs périodiques et anti-périodiques (P-AP). Introduisons une longueur de corrélation magnétique ℓ_P comme une mesure de la largeur de la région perturbée. À grand B, seul quelques spins seront flippés alors que quand B décroît la région affectée par la perturbation augmente. ℓ_P est ainsi finie dans la phase paramagnétique et infinie dans la phase verre de spins. Pour

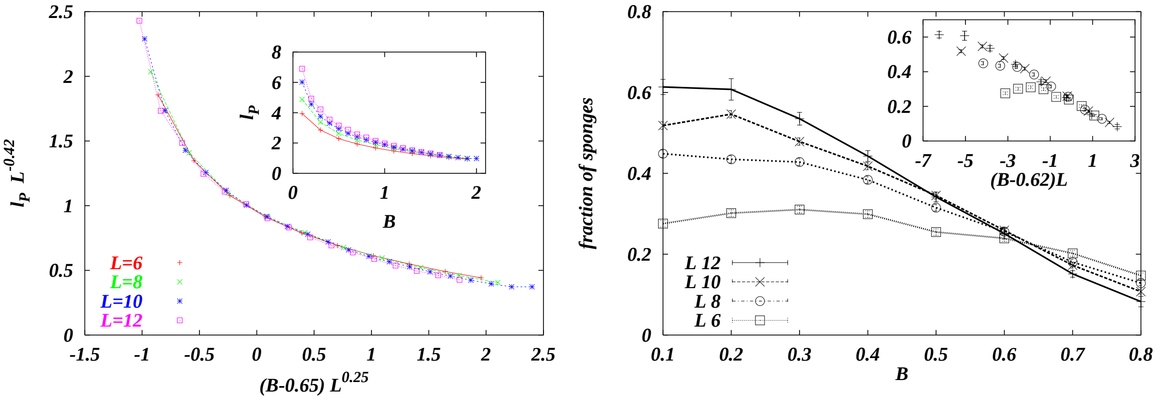


FIG. V–5 – *Gauche : ℓ_P rescalé par $L^{0.42}$ en fonction de la distance de B_c rescalé. L'insertion montre les données brutes pour ℓ_P en fonction du champ B. Droite : fraction d'excitations spongieuse en périodique-antipériodique, l'insertion montre le meilleur finite-size scaling ($B_c = 0.62$, $\nu = 1.0$).*

mesurer ℓ on mesure l'overlap q entre les deux configurations (P et AP) et l'on fait une moyenne sur chaque plan parallèle à Π, le plan de la perturbation. Soit $Q(d)$ ce recouvrement, où d est la distance par rapport à Π. Dans la phase paramagnétique $Q(d)$ tend vers 1 à grand d exponentiellement, comme $\exp(-d/\ell_P)$. Dans une phase verre de spins on s'attend au contraire à une asymptote différente de 1, tandis que la décroissance devrait être en loi de puissance. Pour chaque L et B nous avons calculé ℓ_B en fittant $Q(d)$ par $1 + A\exp(-d/\ell_B)$. Au dessus de B_c cela devrait donner la bonne valeur ℓ_B tandis qu'en dessous nous obtenons une longueur effective qui grandit avec L. Les mesures ont été faites sur 40000 échantillons à $L = 6$, 20000 à $L = 8$ pour chaque B, 5000 à $L = 10$ pour les petites valeurs de B et 12800 pour la plus grande et enfin 1000 à 7000 pour $L = 12$.

Le résultat des meilleurs fits est montré dans l'insertion de la figure V–5. ℓ_P sature clairement à grand champ alors qu'il augmente avec L pour des valeurs plus petites. Nous trouvons encore qu'il est possible d'utiliser le finite-size scaling comme on le montre dans la figure V–5 pour laquelle $B_c = 0.65$; malheureusement des résultats aussi bons peuvent être obtenus pour toutes les valeurs de $B_c < 1.0$! D'autres méthodes ont aussi été retenues pour mesurer ℓ_P, nous conduisant à des résultats comparables. Il est donc difficile de déterminer si ℓ_P diverge quand $B > 0$ et d'établir ainsi l'existence d'une phase verre de spins en champ. Ainsi il va être encore une fois pratique d'utiliser une autre observable : la fraction d'éponges parmi les amas (P-AP).

Les données brutes pour la fraction d'éponges sont montrées dans la figure V–5. Les courbes semblent encore se croiser à $B_c \approx 0.65$ ce qui suggère une transition de premier ordre. De toutes les données c'est la plus convaincante pour l'existence d'une phase verre de spins en dessous de $B_c = 0.65$. De plus, un finite-size scaling de la forme $(B - B_c)L^{1/\nu}$ marche très bien avec $B_c \approx 0.62$ et $\nu \approx 1.0$. Cependant, au vu des observations précédentes, les faits que (a) les courbes à champ faibles atteignent la courbe limite très lentement et (b) que le point de croisement se déplace vers la gauche quand L

augmente affaiblit considérablement cette conclusion et ne permet pas vraiment d'éliminer la possibilité $B_c = 0$.

d) Discussion

Nous avons montré comment utiliser une approche nouvelle pour tester la présence d'un ordre verre de spins en présence d'un champ magnétique. L'avantage de cette méthode est qu'elle évite les effets du point critique à température finie puisque nous somme ici à $T = 0$. La conclusion principale est qu'il est difficile de trouver des indices convainquant pour la présence d'une phase verre de spins en champ, mais que la phase verre de spins peut éventuellement survivre jusqu'à $B_c \approx 0.65$; au dessus de cette valeur il semble bien que le système soit paramagnétique. De plus les données suggèrent aussi que RSB peut survivre, mais jusqu'à une valeur encore plus petite $B_{RSB} \approx 0.4$. Pouvoir aller plus loin nécessite de savoir calculer des fondamentaux à une taille plus élevée, mais au vu de la faiblesse des valeurs trouvées, il semble qu'avec les approches introduites ici il n'est nécessaire, pour obtenir un consensus définitif, d'aller qu'à des tailles *à peine supérieures* pour voir si la dérive s'arrête et si les scalings introduits fonctionnent toujours, ou bien si au contraire la dérive continue et donne des valeurs critiques si basses qu'elles en deviennent improbables.

Il est aussi important de signaler que les valeurs limites trouvées sont *petites* comparées à celle des systèmes champ moyen (Houdayer & Martin, 1999a) où l'on trouve $B_{AT}^{MF} \approx 2.1$. Si l'on compare cette analyse avec d'autres précédentes (Houdayer & Martin, 1999a; Marinari et al., 1999), il semble, étant donné qu'il est difficile d'établir que $B_c > 0$, que ces valeurs doivent être considérées plutôt comme des valeurs limites supérieures et qu'au vu de leurs faiblesses, la possibilité $B_c = 0$ (pas de phase verre de spins en champ en trois dimensions) semble la plus avantagée par les simulations numériques.

Cette conclusion, et la "petitesse" d'un éventuel B_c, est aussi confirmée par de très recents travaux à température nulle (Lamarcq et al., n.d.) ainsi que par l'analyse hors-équilibre de (Cruz et al., 2002).

— V.3 — Compétition ordre verre de spins - ordre ferromagnétique

Nous allons maintenant étudier le problème de la transition entre ferromagnétisme et verres de spins. La question principale qui va nous intéresser est de savoir si un ordre verre de spins peut coexister avec une phase ferromagnétique. En plus de son intérêt théorique cette question est importante expérimentalement puisque beaucoup de verres de spins sont construits en dopant des ferromagnétiques en liens antiferromagnétiques.

Rappelons que dans l'image champ moyen du modèle SK à basse température l'on obtient successivement, lorsque la concentration de liens ferromagnétiques est augmentée (voir Fig. V–6): (a) une phase verre de spin avec RSB où $m = 0$; (b) une phase RSB avec $m > 0$ (la phase mixte) puis (c) une phase ferromagnétique standard. Le même diagramme de phase apparaît aussi dans le modèle à énergies aléatoires (Derrida, 1981). Enfin dans les modèle champ moyen à connectivité fixe (Viana & Bray, 1985; de Dominicis & Goldschmidt, 1989), s'il n'y a encore pas de calculs du diagramme de phase et des exposants critiques, la présence d'une phase verre de spin ferromagnétique est aussi attendue (Kwon & Thouless, 1988). En $1d$ il est simple de montrer que si la concentration de liens ferromagnetique est inférieure a 1, l'aimentation moyenne de l'echantillon sera nulle; connaissant ensuite le cas à connectivité 3 et le résulat géneral, on peut obtenir une vision qualitative du diagramme des phases prévu en champ moyen; la taille de la phase mixte devrait ainsi augmenter avec la connectivité (voir Fig. V–6). Dans l'approche du modèle des gouttelettes et dans le scénario TNT le diagramme des phases est différent puisqu'il n'y a pas de phase mixte.

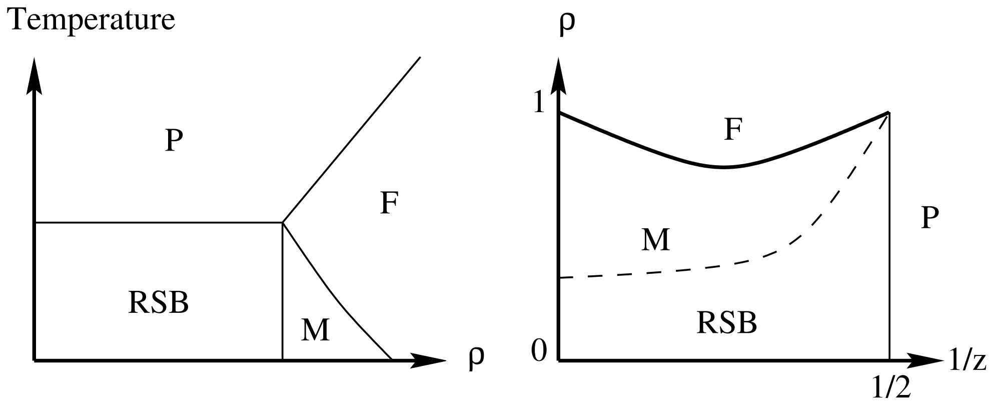


FIG. V–6 – *Gauche: Diagramme de phase dans un modèle champ moyen (ρ est le surplus de concentration de liens ferromagnétiques c.f. eq. V.3–1). Une phase mixte (M), avec à la fois un ordre ferromagnétique (F) et la brisure de la symétrie des répliques (RSB), est présente. Le système est paramagnétique à plus haute température. Droite: Le rôle de la connectivité sur la présence de la phase mixte dans l'image champ moyen à $T = 0$, le cas $z = 0$ correspondant au modèle SK, et le cas $z = 1/2$ à la situation unidimensionelle (vue d'artiste).*

Nous allons considerer par la suite l'Hamiltonien suivant sur un réseau cubique $L \times L \times L$:

$$H_J(\{S_i\}) = (1-\rho) \sum_{<ij>} J_{ij} S_i S_j - \rho \sum_{<ij>} S_i S_j \tag{V.3–1}$$

où comme d'habitude les $S_i = \pm 1$ sont des spins d'Ising et où ρ est le paramètre qui contrôle la frustration dans le système. Nous allons nous intéresser à deux modèles : dans le premier la somme porte sur tous les premiers voisins (First Neighbor Model (FNM)) et dans le second la somme porte sur les premiers et seconds voisins, soit 18 au total (Second Neighbor Model (SNM)). Pour $\rho = 0$ nous retrouvons l'Hamiltonien EA tandis que pour $\rho = 1$ l'on obtient un ferromagnétique habituel. Le champ magnétique B est nul dans toute cette section et nos limites numériques sont $L = 12$ pour le FNM et $L = 8$ pour le SNM.

a) Aimantations

Pour commencer nous allons présenter la transition ferromagnétique entre un fondamental où l'aimantation par spin m est nulle et un fondamental où $m \neq 0$. Cette fois ci l'Hamiltonien a toujours la symétrie $\{S_i\} \to \{-S_i\}$, et ainsi m peut servir de paramètre d'ordre. Pour chaque instance J nous calculons la densité d'aimantation $\pm m_J$ (puisqu'encore une fois les J_{ij} sont continus il y a seulement deux fondamentaux reliés par une symétrie haut-bas). Nous utiliserons le paramètre d'ordre suivant :

$$m = \left[\overline{m_J^2} \right]^{1/2} \tag{V.3–2}$$

ou $\overline{\cdot}$ est la moyenne sur les différentes réalisations du désordre $\{J_{ij}\}$. Si $\rho \approx 1$, m sera ainsi proche de 1 tandis que pour $\rho \approx 0$, m tendra vers 0 quand L tendra vers la limite thermodynamique.

Les résultats numériques indiquent une transition du second ordre pour le FNM ainsi que pour le SNM; en particulier un examen des distributions des $|m_J|$ (voir figure V–7) montre qu'elles ont toujours

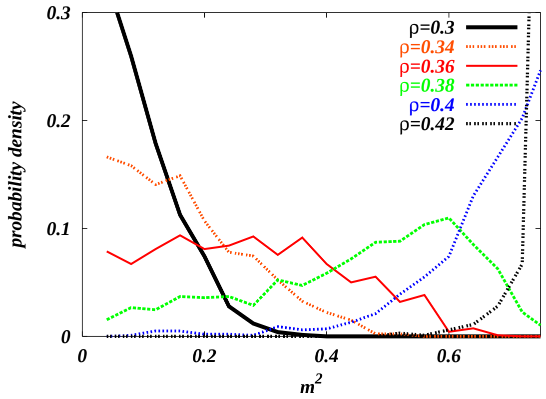


FIG. V–7 – *Distribution, sur le désordre, de la densité d'aimentation au carré à* $L = 10$ *pour plusieurs valeurs de* ρ *dans le FNM. Un seul pic est visible, suggèrant une transition du second ordre à* ρ_c.

un seul pic tandis qu'une transition du premier ordre donnerait deux pics près du point de transition. Pour déterminer la valeur critique ρ_F, pour ρ ferromagnétique, nous avons calculé le cumulant de Binder associé à la distribution des m_J:

$$g(\rho, L) = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{\overline{m_J^4}}{\overline{m_J^2}^2}\right). \tag{V.3–3}$$

Les différentes courbes se croisent très bien pour les deux modèles, et donnent ainsi $\rho_F^{FNM} = 0.385{\pm}0.005$ et $\rho_F^{SNM} = 0.236{\pm}0.005$. De plus, en utilisant le finite-size scaling, nous devrions obtenir de bon résultats avec

$$g(\rho, L) = \tilde{g}\left(L^{1/\nu}(\rho - \rho_F)\right) \tag{V.3–4}$$

et de manière similaire, pour le paramètre d'ordre

$$m(\rho, L) = L^{-\beta/\nu} F\left(L^{1/\nu}(\rho - \rho_F)\right). \tag{V.3–5}$$

Le scaling est très satisfaisant, comme on peut le voir sur la figure V–8; de plus les valeurs des exposants critiques sont très proches pour les deux modèles et sont confondues dans les barres d'erreurs: $\beta = 0.3(1)$ and $\nu = 0.9(2)$. Ces valeurs sont compatibles avec celles trouvées par (Hartmann, 1999*b*) dans le cas premier voisin avec une distribution discrete $J_{ij} = \pm 1$ où il obtient $\beta = 0.2(1)$ et $\nu = 1.1(3)$. De plus, les valeurs du cumulant de Binder au point critique sont aussi assez proches. Ces résultats constituent des indices très forts en faveur de l'universalité de cette transition dans les verres de spins.

b) Éponges et RSB

Encore une fois nous allons utiliser l'observable des éponges pour tester la présence de RSB; la présence d'objets de la taille du système à topologies non triviales nous servira une fois de plus à étudier le paysage en énergie. Comme dans le chapitre précedent nous calculons nos excitations en retournant un spin tandis qu'un autre est fixé, et en ne choisissant nos spins que parmi les 25% les plus fixés([5]). Ce paramètre d'ordre a été mesuré pour différent ρ et différent L, nous donnant

([5])Là encore nous avons verifié que changer ce cut-off ne changait pas nos conclusions.

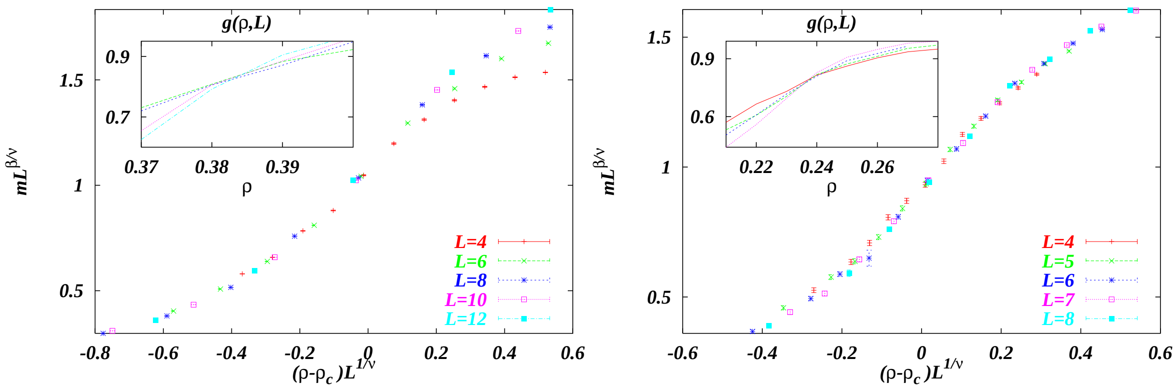


FIG. V–8 – *Scaling de m en fonction de ρ; l'insertion montre le cumulant de Binder des m_J. À gauche : modèle avec interactions premiers voisins pour $\rho_F = 0.385$, $\nu = 0.9$ et $\beta = 0.3$. À droite : modèle avec interactions premiers et seconds voisins pour $\rho_F = 0.236$, $\nu = 0.9$ et $\beta = 0.3$.*

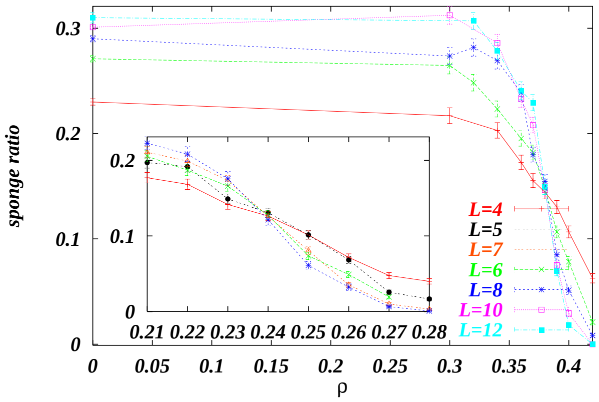


FIG. V–9 – *Fraction d'excitation spongieuse en fonction de ρ dans le FNM. (l'insertion montre les données pour le SNM), indiquant $\rho_{RSB}^{FNM} = 0.380 \pm 0.005$ ($\rho_{RSB}^{SNM} = 0.235 \pm 0.005$).*

des points numériques $f(\rho, L)$. Les résultats sont très similaires dans le FNM et dans le SNM (voir fig. V–9) et semblent indiquer une transition de phase à $\rho_{RSB}^{FNM} \approx 0.380 \pm 0.005$ dans le FNM et à $\rho_{RSB}^{SNM} \approx 0.235 \pm 0.005$ dans le SNM. De plus les extrapolations à ρ fixé se comportent très bien dans les deux modèles, indiquant par exemple une limite nulle dans le FNM pour $\rho = 0.39$ et une limite finie pour $\rho = 0.37$. Les courbes se croisent en un point bien défini dans la limite des barres d'erreurs. Enfin, notons que tant que $\rho < \rho_{RSB}$ la proportion d'éponges augmente de la même façon que dans le cas $\rho = 0$. Il semble que les excitations spongieuses avec énergie $O(1)$ survivent à la limite thermodynamique, indiquant la présence d'un paysage d'énergie complexe associé à la RSB, jusqu'à $\rho < \rho_{RSB}$. Ce comportement est bien sûr en contradiction avec le modèle des gouttelettes où il n'y a *pas* de RSB. Cependant il faut noter que ρ_{RSB} semble très proche, si ce n'est égal, à ρ_{F} dans les deux modèles. Il semble ainsi qu'il n'y a pas de phase mixte avec à la fois un ordre ferromagnétique (une aimantation spontanée) et des excitations spongieuse d'énergie $O(1)$ (ou encore brisure de la symétrie

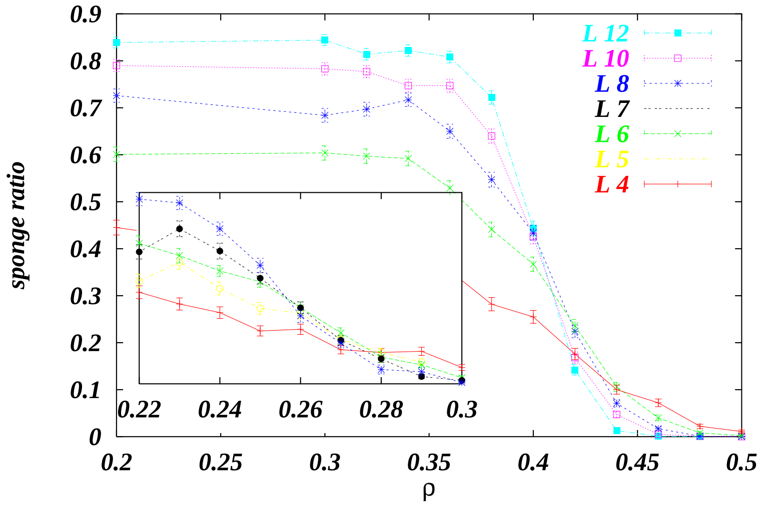


FIG. V–10 – *Fraction d'excitations spongieuses en fonction de ρ dans le FNM (l'insertion montre le modèle SNM). Le point de croisement se déplace vers la gauche, suggérant $\rho_{\mathrm{DW}} \approx \rho_{\mathrm{RSB}}$.*

des répliques). Cela est contraire à la prédiction champ moyen où une telle phase mixte est attendue.

c) Phase verre de spins

Comme dans notre étude sur l'effet d'un champ magnétique nous allons maintenant nous intéresser à l'étude d'un ordre verre de spins sans nous soucier de la (putative) brisure de la symétrie des répliques. Pour cela nous allons reprendre les calculs (P-AP) comme dans la section V.2.c.

Encore une fois les résultats sont très semblables pour les deux modèles. Dans le FNM (voir fig.V–10) on montre le pourcentage d'excitations spongieuses en fonction de ρ. Les données suggèrent une transition aux alentours de $\rho_{\mathrm{DW}} \leq 0.4$; cependant il y a, comme dans l'étude de la ligne dAT, un déplacement systèmatique du point de croisement vers la gauche. Encore une fois la façon naturelle de comprendre ce résultat est que $\rho_{\mathrm{RSB}} = \rho_F = \rho_{\mathrm{DW}}$: l'ordre verre de spins semble disparaître quand l'ordre ferromagnétique apparaît; les deux ordres ne co-existent pas et il n'y a *pas* de phase mixte.

On peut néanmoins partir du principe que le champ moyen est un bon guide et qu'une phase mixte est présente dans une petite fenêtre comme $\rho \in [0.38, 0.40]$. Si l'on accepte cela, et que l'on essaie de rendre crédible cette assomption, le plus simple est d'augmenter la connectivité et de passer au SNM, où la connectivité devient 18 au lieu de 6; dans ce cas la fenêtre devrait être plus importante. Les résulats suggèrent maintenant, dans le cas le plus optimiste (voir fig.V–10), $\rho_{\mathrm{DW}} \leq 0.255$ et ainsi la nouvelle fenêtre est $\rho \in [0.236, 0.255]$: la taille est donc sensiblement la même. De plus on observe le même déplacement du point de croisement vers la gauche et donc finalement $\rho_{\mathrm{DW}} - \rho_{\mathrm{RSB}}$ reste très petit, sinon nul. Cela est difficile à comprendre d'après les arguments champ moyen, sans parler de l'absence de RSB dans cette fenêtre.

d) Discussion

Là encore il est difficile de confirmer la prédiction champ moyen sur l'existence d'une phase mixte verre de spins-ferromagnétique. Nous avons aussi étudié brièvement le cas à $4d$ dans lequel nous trouvons un comportement très similaire au cas $3d$, avec $\rho_F = 0.315 \pm 0.005$ et $\rho_{\text{RSB}} = 0.325 \pm 0.005$; bien que nous ne pouvons acceder qu'à des tailles relativement petites ($L \leq 5$) les croisements des courbes sont assez bons, en particulier ceux des éponges $O(1)$ et du cumulant de Binder; on trouve donc dans ce cas qu'il pourrait y avoir une phase mixte entre $0.325 > \rho > 0.315$, mais au vu de nos barres d'erreurs et de la faiblesse de nos tailles il est difficile de se persuader de la pertinence d'un résultat à $4d$.

En trois dimensions donc, les valeurs des points critiques sont donc confondues dans la limite des barres d'erreurs. Pour tous nos résultats l'interprétation la plus avantagée par nos données est ainsi que $\rho_{DW} = \rho_F = \rho_{RSB}$. Nous trouvons donc que le diagramme des phase est probablement celui prévu par la théorie des gouttelettes tandis que le paysage d'énergie est celui prévu par la théorie champ moyen.

Notons que ce problème semble beaucoup plus facile numériquement que celui en champ, sans doute parce que la symétrie haut-bas n'est pas explicitement brisée. Il serait intéressant d'effectuer des calculs Monte-Carlo, les méthodes d'échanges étant particulièrement adaptées à ce problème. De plus, contrairement à la ligne dAT, peu d'analyses théoriques sont disponibles et des calculs du diagramme des phases dans les systèmes champ moyen à connectivité finie dans l'approximation one-step à la (Mézard & Parisi, 2001) seraient aussi intéressants, ainsi que des résulats en théorie des champs dans l'esprit de l'étude de la ligne dAT de (Pimentel et al., 2002). Enfin, il serait possible de tester ces résultats expérimentalement, ce problème pouvant lui aussi se révéler plus simple que celui de la ligne dAT, à condition de bien traiter les effets hors-équilibres.

– V.4 – Conclusion

En dépit de tous nos efforts pour trouver un diagramme des phases champ moyen, que nous attendions puisque nous trouvions un paysage d'énergie complexe dans le chapitre précédent, nous sommes incapable de réellement confirmer la prédiction champ moyen sur l'éxistence d'une ligne dAT et d'une phase mixte. Bien sûr il reste possible (a) que ces phases existent mais que les valeurs critiques soient anormalement basses en $d = 3$ ou $d = 4$ (ou encore, pire, que la phase verre de spins n'existe qu'en $d = 4$!!!) ou encore (b) qu'il existe une phase mixte MAD sans RSB dans une fenêtre assez réduite, mais l'interprétation la plus probable de nos données est que le diagramme des phases est sans doute trivial, sans phase verre de spins en champ ni phase mixte, comme dans la théorie des gouttelettes.

Puisque nous trouvions un signal assez clair pour la présence de RSB dans le chapitre précédent, ce résultat reste assez mystèrieux et la conclusion de nos travaux numériques semble être qu'aucune des deux théories ne soient parfaitement satisfaisante. Une explication alternative naturelle est, encore, le scénario TNT : dans cette image il y a RSB et des excitations d'énergies $O(1)$ de la taille du système, mais ces excitations sont compactes avec une surface de dimension fractale $d_s < d$, étant ainsi incompatible avec la présence d'une aimantation $m > 0$; dans cette approche il y a donc co-existence d'un diagramme de phase Trivial et d'un paysage d'énergie Non Trivial.

En conclusion, si une réponse définitive aux questions “Quel est le diagramme des phases à température nulle dans le modèle EA 3d ?” et “Quelle est la nature de la phase verre de spins dans le modèle EA 3d ?” est certes difficile, il semble quand même honnête de dire que le scénario le plus avantagé par les données numérique est le scénario TNT. Ainsi, les résultats présentés dans ce chapitre donnent encore un important soutient à ce scénario, qui est donc, au moins, un excellent résumé de la situation numérique actuelle. Si, au contraire, le champ moyen est valable, cela suggère ainsi que des tests numériques à $4d$, ou ces phases seraient alors mieux visibles, sont nécessaires.

Conclusion et perspectives

- Il n'y avait point de trame, dit Guillaume, et moi je l'ai decouverte par erreur.
- Mais en imaginant des ordres erronés, vous avez tout de même trouvé quelque chose ...
- Tu as dit là une chose très belle, Adso, je te remercie. L'ordre que notre esprit imagine est comme un filet, ou une échelle, que l'on construit pour atteindre quelque chose. Mais après, on doit jeter l'échelle, car l'on découvre que, si même elle servait, elle était dénuée de sens.

Umberto ECO
Le Nom de la Rose

LE BUT de cette étude était de comprendre et d'étudier les propriétés des verres de spins en dimension finie, ainsi que plus généralement celles des systèmes désordonnés avec désordre gelé, par une étude phénoménologique dans l'espace direct ainsi que par l'utilisation de l'optimisation combinatoire. Ont été abordées les questions relatives à la nature de la phase verre de spins en dimension finie et des excitations par rapport au fondamental, des propriétés dues aux effets entropiques comme l'éventuelle présence de chaos en température et enfin plus généralement des propriétés génerales des fondamentaux des systèmes désordonnés.

Nature de la phase verre de spins

En dimension finie la nature de la (putative) phase verre de spins est toujours une question ouverte. À travers ce travail l'on a cherché à la fois à rendre plus claire l'interprétation des simulations et des résultats numériques disponibles, ainsi qu'à apporter de nouvelles analyses pertinentes. Le résultat principal de cette thèse est la présentation d'une image nommée *TNT* compatible avec l'ensemble des résultats numériques. Dans ce scénario il existe des excitations de taille macroscopique, de topologie spongieuse et d'énergie $O(1)$, mais ces excitations sont compactes, rendant les choses différentes du scénario champ moyen habituel. On a ainsi montré comment dans ce cas on s'attend à un diagramme des phases trivial, sans phase verre de spins en champ ni co-existence avec une phase ferromagnétique.

Ce scénario fonctionne très bien avec les calculs numériques que l'on trouve dans cette thèse; en particulier ces excitations spongieuses sont mises en évidence et la dimension fractale d_s de leurs surfaces est mesurée et semble bien inférieure à d. Enfin, le diagramme des phases a été calculé, les données avantageant en effet un diagramme trivial. D'autres simulations, récentes ou plus anciennes, ont été discutées et parfois re-interprétées et reconsiderées, comme celles faisant intervenir le $P(q)$ à $T = 0$ dans les systèmes discrets; tous les résultats semblent finalement compatibles avec le scénario TNT. Il apparaît donc que ce scénario unificateur est au moins un excellent résumé de la situation numérique actuelle et qu'il est aussi en accord avec les travaux analytiques suggérant qu'en $d < 6$ un comportement différent du modèle champ moyen apparaîsse.

Chaos, mémoire et rajeunissement

À travers l'étude d'un modèle jouet à entropies et énergies aléatoires, ainsi que d'un modèle plus réel de verre de spins sous l'approximation de Curie-Weiss, l'on a montré comment le chaos en température se manifestait et pourquoi il semblait inévitable, bien que difficile à observer numériquement. Ce processus fournit de plus une explication très naturelle pour l'interprétation des effets de mémoire et de rajeunissement vus dans les expériences, même s'il n'est pas encore totalement clair qu'il en soit effectivement la cause, d'autres interprétations ayant été proposées par ailleurs.

Systèmes désordonnés

Plus généralement, nous avons étudié numériquement et analytiquement des propriétés générales des verres de spins, à température finie ou nulle, qui devraient permettre de comprendre mieux d'autres systèmes. Des méthodes pour étudier les excitations et leur nature, les effets de tailles finies, les fluctuations d'échantillon à échantillon, l'unversalité et les dimensions critiques inférieures ainsi que la nature des statistiques extrêmes ont ainsi été abordés.

Nous trouvons en particulier que les effets de tailles finies du modèle Edwards-Anderson sont bien décrits par l'approche de renormalisation de Migdal-Kadanoff. On a ainsi proposé deux conjectures, bien vérifiées numériquement: (i) les effets de tailles finies à température nulle dans le systèmes Edwards-Anderson, et plus généralement les verres de spins en dimension finie, sont donnés par les énergies des parois de domaine et (ii) les effets de tailles finies dans les graphes champ moyen sont les mêmes à température nulle que près du point critique.

Enfin une étude du $P(q)$ dans les systèmes discrets avec un fondamental dégénéré est présentée, prédisant un $P(q)$ trivial à température nulle même pour les systèmes discrets *avec* brisure de la symétrie des répliques où cette fonction est pourtant non triviale à température finie.

Perspectives

Les principaux apports de cette étude sont sans doute d'un coté le scénario TNT pour les verres de spins en dimension finie, et de l'autre l'utilisation numérique du concept d'éponge. Ainsi, les perspectives les plus intéressantes me semblent être, du point de vue théorique, l'étude des concéquences dynamiques et expérimentales du scénario TNT ainsi que l'étude de la phase mixte en dimension finie, sans doute plus simple que celle de la ligne dAT. Ces différents points, bien que déjà étudiés partiellement, semblent très prometteurs pour la suite.

Du point de vue numérique, les simulations à température nulle et des calculs d'excitations peuvent être utilisés dans d'autres systèmes. On a par exemple présenté, en annexe, des articles concernant une étude d'un tout autre modèle: le repliement d'un bio-polymère comme l'ARN; une transition de phase de type verre de spins, l'universalité du système par rapport à la réalisation microscopique du désordre ainsi qu'une théorie de scaling testée numériquement y sont notamment mises en évidence.

Et voila !
F.

Articles

Voila, précieusement relié et solennellement apporté, le premier exemplaire de ce livre [...] Il n'y manque pas le moindre de mes articles [...] parus dans je ne sais quelles annales de l'érudition, que le labeur bibliographique n'ait arrachés au tombeau de la paperasse. Toute mon évolution, avec une netteté exemplaire, degré par degré, comme un escalier bien balayé, est là reconstituée jusqu'à l'heure actuelle.

Vraiment, je serais un ingrat si cette touchante minutie ne me faisait pas plaisir.

Stefan ZWEIG
La confusion des sentiments

(*i*). **Spin and link overlaps in 3-dimensional spin glasses**
F. Krzakala et O. C. Martin
Phys. Rev. Lett., **85** : 3013–3016

(*ii*). **Large-scale low-energy excitations in 3-d spin glasses**
J.Houdayer, F. Krzakala et O. C. Martin
Euro. Phys. Jour. B, **3, 18** : 467–477 , 2000

(*iii*). **Discrete energy landscape and replica symmetry breaking at zero temperature**
F. Krzakala et O. C. Martin
Europhys. Lett., **53, 6** : 749–755 , 2001

(*iv*). **Zero-temperature responses of a 3D spin glass in a field**
F. Krzakala, J. Houdayer, E. Marinari, O.C. Martin and G. Parisi
Phys. Rev. Lett., **87** 197204, 2001

(*v*). **Nature of the glassy phase in RNA secondary structure**
F. Krzakala, M. Mézard and M. Müller
Europhys. Lett., **57, 5** : 752-758 , 2002

(*vi*). **Chaotic temperature dependence in a model of spin glasses**
F. Krzakala, O.C. Martin
Euro. Phys. Jour. B, **2, 28** : 199–208 , 2002

(*vii*). **RNA secondary structure under tension**
M. Müller, F. Krzakala and M. Mézard
Euro. Phys. Jour. E, **9** : 67–77 , 2002

(*viii*). **Absence of an equilibrium ferromagnetic spin glass phase in 3D**
F. Krzakala et O. C. Martin
Phys. Rev. Lett., **89** 267202, 2002

(*ix*). **Energy exponents and corrections to scaling in Ising spin glasses**
J.P. Bouchaud, F. Krzakala and O.C. Martin
cond-mat/0212070, soumis à Phys. Rev. B

(*x*). **Hiking through glassy phase : physics beyond aging**
L. Berthier, V. Viasnoff, O. White, V. Orlyantchik and F. Krzakala
cond-mat/0211106, Proceedings of the Les Houches 2002 LXXVII summer school

Références bibliographiques

Anderson, P. W. (1972), 'More is different', *Science* **177**, 392.

Angell, C. A. (1995), 'Formation of glasses from liquids and biopolymers', *Science* **267**, 1924.

Angles d'Auriac, J.-C. & Sourlas, N. (1997), 'The 3D random-field Ising model at zero temperature', *Europhys. Lett.* **39**, 473–478.

Aspelmeier, T., Bray, A. J. & Moore, M. A. (2002), 'Why temperature chaos in spin glasses is hard to observe'. cond-mat/0207300.

Banavar, J. R. & Bray, A. J. (1987), 'Chaos in spin glasses: A renormalization-group study', *Phys. Rev. B* **35**, 8888–8890.

Barrat, A. & Berthier, L. (2001), 'Real space application of the mean-field description of spin glass dynamics', *Phys. Rev. Lett* **87**, 087204.

Barrat, A., Franz, S. & Parisi, G. (1997), 'Temperature evolution and bifurcation of metastables states in mean-field spin glasses, with connections with structural glasses', *J. Phys. A* **30**, 5593–5612.

Bellon, L., Ciliberto, S. & C., L. (2002), 'Memory in the aging of a polymer glass', *Euro. Phys. Jour. B.* **25**, 223.

Berthier, L. (2000), 'Sub-ageing in a domain growth model', *Euro. Phys. J. B* **17**, 689.

Berthier, L., Barrat, J.-L. & Kurchan, J. (2001), 'Dynamic ultrametricity in spin glasses', *Phys. Rev. E* **63**, 016105.

Berthier, L. & Bouchaud, J.-P. (2002), 'Geometrical aspects of aging and rejuvenation in the ising spin glass: A numerical study'. cond-mat/0202069.

Berthier, L. & Holdsworth, P. C. W. (2002), 'Surfing on a critical line: Rejuvenation without chaos, memory without a hierarchical phase space', *Europhys. Lett.* **58**, 35. cond-mat/0109169.

Berthier, L., Holdsworth, P. C. W. & Sellitto, M. (2001), 'Non equilibrium critical dynamics of the 2d xy model', *J. Phys. A* **34**, 1805.

Berthier, L., Viasnoff, V., White, O., Orlyantchik, V. & Krzakala, F. (2002), Hiking through glassy phase : physics beyond aging, *in* 'Procedings of the Les Houches 2002 LXXVII summer school'. To be published.

Billoire, A. & Marinari, E. (2000), 'Evidences against temperature chaos in mean field and realistic spin glasses', *J. Phys. A* **33**, L265. cond-mat/9910352.

Billoire, A. & Marinari, E. (2002), 'Overlap among states at different temperatures in the SK model'. cond-mat/0202473.

Binder, K. & Young, A. P. (1986), 'Spin-glasses: Experimental facts, theoretical concepts and open questions', *Rev. Mod. Phys.* **58**, 801–976.

Boettcher, S. (2002), 'Numerical results for ground states of spin glasses on bethe lattices'. cond-mat/0208196.

Bokil, H., Drossel, B. & Moore, M. A. (2000), 'The influence of critical behavior on the spin glass phase', *Phys. Rev. B* **62**.

Bouchaud, J.-P. (2000), Aging in glassy systems: new experiments, simple models, and open questions, *in* M. Cates & M. Evans, eds, 'Soft and Fragile Matter: Nonequilibrium Dynamics, Metastability and Flow', IOP Publishing, Bristol and Philadelphia.

Bouchaud, J.-P., Cugliandolo, L., Kurchan, J. & Mézard, M. (1998), Out of equilibrium dynamics in spin glasses and other glassy systems, *in* A. P. Young, ed., 'Spin Glasses and Random Fields', World Scientific, Singapore.

Bouchaud, J.-P. & Georges, A. (1990), 'Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications', *Phys. Rep.* **195**, 127–293.

Bouchaud, J.-P., Krzakala, F. & Martin, O. C. (2002), 'Energy exponents and corrections to scaling in Ising spin glasses'. Cond-Mat/0212070.

Bouchaud, J.-P. & Mézard, M. (1997), 'Universality classes for extreme value statistics', *J. Phys. A* **30**, 7997–8015.

Bouchaud, J.-P. & Mézard, M. (2000), 'Wealth condensation in a simple model of economy', *Physica A* **282**, 536.

Bray, A. J. (1994), 'Theory of phase ordering kinetics', *Adv. Phys.* **43**, 357.

Bray, A. J. & Moore, M. A. (1984), 'Lower critical dimension of Ising spin-glasses: A numerical study', *J. Phys. C Lett.* **17**, L463–L468.

Bray, A. J. & Moore, M. A. (1985), 'Critical behaviour of the three-dimensional Ising spin-glass', *Phys. Rev. B* **31**, 631–633.

Bray, A. J. & Moore, M. A. (1986), Scaling theory of the ordered phase of spin-glasses, *in* J. L. van Hemmen & I. Morgenstern, eds, 'Heidelberg Colloquium on Glassy Dynamics', Vol. 275 of *Lecture Notes in Physics*, Springer, Berlin, pp. 121–153.

Bray, A. J. & Moore, M. A. (1987), 'Chaotic nature of the spin-glass phase', *Phys. Rev. Lett.* **58**, 57–60.

Bray, A. J., Sompolinsky, H. & Yu, C. (1986), 'On the naive mean-field equations for spin glasses', *J. Phys. C.* **19**, 6389–6406.

Cabasino, S., Marinari, E., Paolucci, P. & Parisi, G. (1988), 'Eigenstates and limit cycles in the SK model', *J. Phys. A* **21**, 4201–4210.

Caracciolo, S., Parisi, G., Paternallo, S. & Sourlas, N. (1990), '3-d Ising spin glasses in a magnetic field and mean field theory', *Europhys. Lett.* **11**, 783.

Carter, A. C., Bray, A. J. & Moore, M. A. (2002), 'Aspect-ratio scaling and the stiffness exponent for ising spin glasses', *Phys. Rev. Lett* **88**, 077201.

Crisanti, A., Paladin, G., Sommers, J.-J. & Vulpiani, A. (1992), 'Replica trick and fluctuations in disordered systems', *J. Physique I France* **2**, 1325–1332.

Cruz, A., Fernandez, L. A., Jimenez, S., Ruiz-Lorenzo, J. J. & Tarancon, A. (2002), 'Off-equilibrium fluctuation-dissipation relations in the 3d ising spin glass in a magnetic field'. cond-mat/0209350.

Cugliandolo, L. F. (2002), 'Slow non-equilibrium dynamics: analytical methods', *Procedings of the Les Houches 2002 LXXVII summer school* . À paraitre.

Cugliandolo, L. F. & Kurchan, J. (1993), 'Analytical solution of the off-equilibrium dynamics of a long-range spin glass model', *Phys. Rev. Lett.* **71**, 173.

Cugliandolo, L. F. & Kurchan, J. (1994), 'On the out of equilibrium dynamics of the long-range sherrington-kirkpatrick model', *J. Phys. A* **27**, 5749.

Cugliandolo, L. F. & Kurchan, J. (1995), 'Weak ergodicity breaking in mean-field spin glass models', *Philos. Mag. B* **71**, 501.

Cugliandolo, L. F., Kurchan, J. & Peliti, L. (1997), 'Energy flow, partial equilibrium and effective temperatures in systems with slow dynamics', *Phys. Rev. E* **55**, 3898.

de Almeida, J. R. L. & Thouless, D. J. (1978), 'Stability of the Sherrington-Kirkpatrick solution of a spin-glass model', *J. Phys. A* **11**, 983–990.

de Dominicis, C. (1978), 'Dynamics as a substitue for replicas in systems with quenched random impurities', *Phys. Rev. B* **18**, 4913.

de Dominicis, C. & Goldschmidt, Y. (1989), 'Replica symmetry breaking in finite connectivity systems: a large connectivity expansion at finite and zero temperature', *J. Phys. A Lett.* **22**, L775–L781.

de Dominicis, C., Kondor, I. & Temesvari, T. (1983), 'Eigenvaues of the stability matrix for parisi solution of the long-range spin-glass', *Phys. Rev. B* **27**, 606–608.

de Dominicis, C., Kondor, I. & Temesvari, T. (1998), Beyond the sherrington-kirkpatrick model, *in* A. P. Young, ed., 'Spin Glasses and Random Fields', World Scientific, Singapore.

Derrida, B. (1980), 'Random-energy model: Limit of a family of disordered models', *Phys. Rev. Lett* **45**, 79–82.

Derrida, B. (1981), 'Random-energy model: An exactly solvable model of disordered systems', *Phys. Rev. B* **24**, 2613–2626.

Derrida, B. & Toulouse, G. (1985), 'Sample to sample fluctuations in the random energy model', *J. Phys. Lett.* **46**, L223–L228.

Domany, E., Hed, G., Palassini, M. & Young, A. P. (2001), 'State hierarchy induced by correlated spin domains in short range spin glasses', *Phys. Rev. B* **64**, 224406.

Dotsenko, V. (2000), *Introduction to the Replica Theory of Disordered Statistical Systems*, Cambridge.

Drossel, B., Bokil, H., Moore, M. A. & Bray, A. J. (2000), 'The link overlap and finite size effects for the 3d ising spin glass', *Eur. Phys. J. B* **22**.

Drossel, B. & Moore, M. (2001), 'The $\pm j$ spin glass in Migdal-Kadanoff approximation', *Euro. Phys. J. B* **22**, 589–894.

Dupuis, V., Vincent, E., Alba, M. & Hammann, J. (2002), 'Aging, rejuvanation and memory in re-entrant ferromagnet'. cond-mat/0203132.

Edwards, S. F. (1970), *in* R. W. Douglas & N.-y. B. Ellis, eds, 'Proceding of the Third International Conference on Amorphous Materials'.

Edwards, S. F. & Anderson, P. W. (1975), 'Theory of spin-glasses', *J. Phys. F* **5**, 965–974.

Fischer, K. H. & Hertz, J. A. (1991), *Spin-Glasses*, Vol. 1 of *Cambridge Studies in Magnetism*, Cambridge University Press, Cambridge.

Fisher, D. S. & Huse, D. A. (1986), 'Ordered phase of short-range Ising spin-glasses', *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1601–1604.

Fisher, D. S. & Huse, D. A. (1988), 'Equilibrium behavior of the spin-glass ordered phase', *Phys. Rev. B* **38**, 386–411.

Fisher, D. S. & Huse, D. A. (1991), 'Directed path in a random potential', *Phys. Rev. B* **43**, 10728–10742.

Franz, S., Glotzer, S. C. & Sastry, S. (2000), *Unifying concepts in glass physics*, IOP. J. Phys C, Vol 12.

Franz, S. & Mézard, M. (1994*a*), 'Off equilibrium glassy dynamics : A simple case', *Europhys. Lett.* **26**, 209.

Franz, S. & Mézard, M. (1994*b*), 'On mean field glassy dynamics out of equilibrium', *Physica A* **210**, 48.

Franz, S., Parisi, G. & Virasoro, M. A. (1994), 'Interfaces and lower critical dimension in a spin glass model.', *Jour. de Phys.* **4**.

Garel, T., Orland, H. & Pitard, E. (1998), Protein folding and heteropolymers, *in* A. P. Young, ed., 'Spin Glasses and Random Fields', World Scientific, Singapore.

Grannan, E. R. & Hetzel, R. E. (1991), 'Susceptibility of two-, three-, and four-dimensional spin glasses in a magnetic field', *Phys. Rev. Lett.* **67**, 907–910.

Gross, D. & Mézard, M. (1984), 'The simplest spin glass', *Nucl. Phys. B* **240**, 431.

Guerra, F. (2002), 'Broken replica symmetry bounds in the mean field spin glass model'. cond-mat/0205123.

Guerra, F. & Toninelli, F. L. (2002), 'The thermodynamic limit in mean field spin glass models'. cond-mat/0204280.

Gumbel, E. J. (1958), *Statistics of Extremes*, Columbia University Press.

Halpin-Healy, T. & Zhang, Y. (1995), *Physics Reports* **254**, 215.

Hartmann, A. (1997), 'Evidence for nontrivial ground-state structure of 3d spin glasses', *Europhys. Lett.* **40**, 429–434. cond-mat/9704187/.

Hartmann, A. (1999*a*), 'Calculation of ground states of four-dimensional +or- j ising spin glasses', *Phys. Rev. E* **60**, 5135.

Hartmann, A. (1999*b*), 'Scaling of stiffness energy for 3D +/-J Ising spin glasses', *Phys. Rev. E* **59**, 84–87.

Hartmann, A. (2000), 'How to evaluate ground-state landscapes of spin glasses thermodynamical correctly', *Euro. Phys. Jour. B* **13**, 539–545.

Hartmann, A. (2001), 'Comment on 'glassy transition in a disordered model for the RNA secondary structure'', *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1382.

Hartmann, A. & Ricci-Tersenghi, F. (2001), 'Equilibrium sampling of complex landscapes at low temperatures: the three-dimensional $\pm j$ ising spin glass'. Cond-mat/0108307.

Hartmann, A. & Rieger, H., eds (2002), *Optimization Algorithms in Physics*, Wiley-VCH.

Hartmann, A. & Young, A. (2001), 'Lower critical dimension of ising spin glasses', *Phys. Rev. B* **64**.

Hartmann, A. & Young, A. (2002), 'Large-scale, low-energy excitations in the two-dimensional ising spin glass'. cond-mat/0205659.

Hayes, B. (1997), 'Can't get no satisfaction', *American scientist* **85**, 108–112.

Hed, G., Hartmann, A. & Domany, E. (2001), 'Correct extrapolation of overlap distribution in spin glasses', *Europhys. Lett.* **55**, 112. cond-mat/0012451.

Hed, G., Hartmann, A., Stauffer, D. & Domany, E. (2001), 'Spin domains generate hierarchical ground state structure in $J = \pm 1$ spin glasses', *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3148–3151.

Herisson, D. & Ocio, M. (2001), 'Fluctuation-dissipation ratio of a spin glass in the aging regime', *Phys. Rev. Lett.* **88**, 257202.

Hertz, J. & Palmer, A. K. R. G. (1991), *Introduction to the theory of Neural Computation*, Addison-Wesley, Redwood city, CA.

Hopfield, J. (1982), *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **79**, 2554–2558.

Hopfield, J. (1984), *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **81**, 3088–9092.

Houdayer, J. (1999), Verres de Spins et Optimisation Combinatoire, PhD thesis, Université Paris XI.

Houdayer, J. (2001), 'A cluster monte carlo algorithm for 2-dimensional spin glasses', *Eur. Phys. Jour. B* **22**, 479.

Houdayer, J., Krzakala, F. & Martin, O. C. (2000), 'Large-scale low-energy excitations in 3-d spin glasses', *Eur. Phys. J. B.* **18**, 467–477. cond-mat/0009382.

Houdayer, J. & Martin, O. C. (1999*a*), 'Ising spin glasses in a magnetic field', *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4934–4937. cond-mat/9811419.

Houdayer, J. & Martin, O. C. (1999*b*), 'Renormalization for discrete optimization', *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1030–1033. cond-mat/9901276.

Houdayer, J. & Martin, O. C. (2000*a*), 'A geometrical picture for finite dimensional spin glasses', *Euro. Phys. Lett.* **49**, 794–800. cond-mat/9909203.

Houdayer, J. & Martin, O. C. (2000*b*), 'Reply to comment on "ising spin glasses in a magnetic field"', *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1057. cond-mat/9910333.

Houdayer, J. & Martin, O. C. (2001), 'A hierarchical approach for computing spin glass ground states', *Phys. Rev. E* **64**, 056704. cond-mat/0105617.

Imry, Y. & Ma, S. (1975), 'Random-field instability of the ordered state of continuous symmetry', *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1399–1401.

Ito, A. & Katori, H. A. (1994), *J. Soc. Japan* **63**, 3122.

J.Hammann, E.Vincent, V.Dupuis, M.Alba, M.Ocio & J.-P.Bouchaud (2000), 'Comparative review of aging properties in spin glasses and other disordered materials', *J. Phys. Soc. Jpn* **69 Suppl.A**, 206–211.

Jonason, K., Vincent, E., Hammann, J., Bouchaud, J. & Nordblad, P. (1998), 'Memory and chaos effects in spin glasses', *Phys. Rev. Lett.* **81**. cond-mat/9904410.

Kac, M. (1968), Trondheim theoretical physics seminar. Nordita Publ. No. 286.

Kac, M. & Lin, T. F. (1970), *J. Math. Phys* **11**.

Kadanoff, L. (1976), *Ann. Phys.* **100**.

Kadanoff, L. P. (1999), *Statistical physics : statics, Dynamics and Renormalization*, World Scientific.

Katzgraber, H. G. (2002), 'Monte carlo simulation of vector spin glasses at low temperatures'. cond-mat/0204305.

Katzgraber, H. G., Palassini, M. & Young, A. P. (2001), 'Spin glasses at low temperatures', *Phys. Rev. B* **63**, 184422. cond-mat/0007113.

Katzgraber, H. G. & Young, P. (2002), 'Monte carlo simulations of the four-dimensional xy spin glass at low temperatures', *Phys. Rev. B* **65**, 214401.

Kawashima, N. (2000), 'Fractal droplets in two dimensional spin glasses', *Jour. Phys. Soc. of J.* **69**, 987.

Kawashima, N., Hatano, H. & Suzuki, M. (1992), 'Critical behaviour of the two-dimensional EA model with a gaussian bond distribution', *J. Phys. A* **25**, 4985.

Kawashima, N. & Ito, N. (1993), 'Critical behavior of the Three-Dimensional +-J Model in a Magnetic Field', *Jour. Phys. Soc. of J.* **62**, 435–438.

Kawashima, N. & Rieger, H. (1997), 'Finite size scaling analysis of exact ground states for +/-J spin glass models in two dimensions', *Europhys. Lett.* **39**, 85–91.

Kirkpatrick, S., Gelatt Jr., C. D. & Vecchi, M. P. (1983), 'Optimization by simulated annealing', *Science* **220**, 671–680.

Kirkpatrick, S. & Selman, B. (1994), 'Critical behavior in the satisfiability of random boolean expression', *Science* **264**, 1297–1301.

Kirkpatrick, T. & Thirumalai, D. (1987*a*), 'Dynamics of the structural glass transition and the p-spin-interaction spin-glass model', *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2091.

Kirkpatrick, T. & Thirumalai, D. (1987*b*), 'p-spin-interaction spin-glass models: Connections with the structural glass problem', *Phys. Rev. B* **36**, 5388.

Kirkpatrick, T., Thirumalai, D. & Wolynes, P. (1989), 'Scaling concepts for the dynamics of viscous liquids near an ideal glassy state', *Phys. Rev. A* **40**, 1045.

Kirkpatrick, T. & Wolynes, P. (1987), 'Connections between some kinetic and equilibrium theories of the glass transition', *Phys. Rev. A* **35**, 3072.

Kondor, I. (1983), 'Parisi's mean-field solution for spin glasses as an analytic continuation in the replica number', *J. Phys. A* **16**, L127–L131.

Kondor, I. & Véguö, A. (1993), *J. Phys. A* **26**, L641.

Krauth, W. (1998), Introduction to monte carlo algorithms, *in* 'Advances in Computer Simulation', Springer Verlag. Lecture Notes in Physics.

Krzakala, F., Houdayer, J., Marinari, E., Martin, O. C. & Parisi, G. (2001), 'Zero-temperature responses of a 3d spin glass in a field', *Phys. Rev. Lett.* **87**, 197204. cond-mat/0107366.

Krzakala, F. & Martin, O. C. (2000), 'Spin and link overlaps in three-dimensional spin glasses', *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3013–3016. cond-mat/0002055.

Krzakala, F. & Martin, O. C. (2001), 'Discrete energy landscapes and replica symmetry breaking at zero temperature', *Euro. Phys. Lett.* **6**, 749–755.

Krzakala, F. & Martin, O. C. (2002*a*), 'Absence of an equilibrium ferromagnetic spin glass phase in 3d'. Cond-Mat/0208566, à paraitre dans *Phys. Rev. Lett.*

Krzakala, F. & Martin, O. C. (2002*b*), 'Chaotic temperature dependence in a model of spin glasses', *Eur. Phys. J. B.* **28**, 199–208.

Krzakala, F., Mézard, M. & Müller, M. (2002), 'Nature of the glassy phase in RNA secondary structure', *EuroPhys. Lett.* **5**, 752–758.

Kurchan, J. (2001), 'Recent theories of glasses as out of equilibrium systems', *Special issue 'Physics of Glasses' of the Comptes Rendus de Physique de l'Academie des Science* . cond-mat/0011110.

Kwon, C. & Thouless, D. J. (1988), 'Ising spin glass at zero temperature on the bethe lattice', *Phys. Rev. B* **37**.

Lamarcq, J., Bouchaud, J.-P. & Martin, O. C. (n.d.), 'Local excitations of a spin glass in a magnetic field'. cond-mat/0208100.

Lamarcq, J., Bouchaud, J.-P., Martin, O. C. & Mézard, M. (2002), 'Non-compact local excitations in spin-glasses', *Europhys. Lett.* **58**, 321.

Lefloch, F., Hammann, J., Ocio & Vincent, E. (1992), *Europhys. Lett.* **18**, 647.

Leheny, R. L. & Nagel, S. (1998), 'Frequency-domain study of physical aging in a simple liquid', *Phys. Rev. E.* **57**, 5154.

Lifshitz, M., Gredeskul, S. A. & Pastur, L. A. (1988), *Introduction to the theory of disordered systems*, Wiley, New York.

Ling, D. D., Bowman, D. R. & Levin, K. (1983), 'Free-energy surface of spin-glasses: Thouless-anderson-palmer and bethe-peierls-weiss models', *Phys, Rev. B* **28**, 262–269.

Marinari, E., Martin, O. C. & Zuliani, F. (2001), 'Equilibrium valleys in spin glasses at low temperature', *Phys. Rev. B.* **64**, 184413. cond-mat/0103534.

Marinari, E., Pagnani, A. & Ricci-Tersenghi, F. (2002), 'Zero-temperature properties of RNA secondary structures', *Phys. Rev. E* **65**, 041919.

Marinari, E. & Parisi, G. (2001), 'On the effects of a bulk perturbation on the ground state of 3d Ising spin glasses', *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3887–3890.

Marinari, E., Parisi, G., Ricci-Tersenghi, F., Ruiz-Lorenzo, J. & Zuliani, F. (2000), 'Replica symmetry breaking in short range spin glasses: A review of the theoretical foundations and of the numerical evidence', *J. Stat. Phys.* **98**, 973. cond-mat/9906076.

Marinari, E., Parisi, G. & Ruiz-Lorenzo, J. (1998), Numerical simulations of spin glass systems, *in* A. P. Young, ed., 'Spin Glasses and Random Fields', World Scientific, Singapore.

Marinari, E., Parisi, G. & Zuliani, F. (1998), 'Four-dimensional spin glasses in a magnetic field have a mean-field-like phase', *J. Phys. A* **31**, 1181–1187.

Marinari, E., Parisi, G. & Zuliani, F. (1999), 'Comment on "Ising spin glasses in a magnetic field"', *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1056. cond-mat/9812401.

Martin, O. C., Monasson, R. & Zecchina, R. (2001), 'Statistical mechanics methods and phase transitions in optimization problems', *Theoretical Computer Science* **256**, 3–67.

Martin, P. C., Siggia, E. D. & Rose, H. A. (1973), 'Statistical dynamics of classical systems', *Phys. Rev. A* **8**, 423.

Mattsson, J., Jonsson, T., Nordblad, P., Katori, H. A. & Ito, A. (1995), 'No phase transition in a magnetic field in the ising spin glass $Fe_0.5Mn_0.5TiO_3$', *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4305–4308.

McMillan, W. L. (1983), *Phys. Rev. B* **28**, 5216–5219.

McMillan, W. L. (1984), 'Domain-wall renormalization-group study of the two-dimensional random Ising model', *Phys. Rev. B* **29**, 4026–4029.

Mézard, M. (2000), First steps in glass theory, *in* 'Proceedings of the 2000 Aspen workshop "50 years of Condensed Matter Physics"'. cond-mat/0005173.

Mézard, M. & Parisi, G. (1985), 'Replicas and optimization', *J. Physique* **46**, L771–L778.

Mézard, M. & Parisi, G. (1999), 'Thermodynamics of glasses: a first principle computation', *Phys. Rev. Lett.* **82**, 747–750.

Mézard, M. & Parisi, G. (2001), 'The Bethe lattice spin glass revisited', *Eur. Phys. J. B* **20**, 217. cond-mat/0009418.

Mézard, M., Parisi, G., Sourlas, N., Toulouse, G. & Virasoro, M. A. (1984), 'Replica symmetry breaking and the nature of the spin-glass phase', *J. Physique* **45**, 843–854.

Mézard, M., Parisi, G. & Virasoro, M. A. (1986), 'SK model: The replica solution without replicas', *Europhys. Lett.* **1**, 77–82.

Mézard, M., Parisi, G. & Virasoro, M. A. (1987), *Spin-Glass Theory and Beyond*, Vol. 9 of *Lecture Notes in Physics*, World Scientific, Singapore.

Mézard, M., Parisi, G. & Zecchina, R. (2002), 'Analytic and algorithmic solution of random satisfiability problems', *Science* **297**, 812–815.

Mézard, M., Sourlas, N. & Toulouse, G. (1986), Some remarks on ultrametricity, *in* J. L. van Hemmen & I. Morgenstern, eds, 'Heidelberg Colloquium on Glassy Dynamics', Vol. 275 of *Lecture Notes in Physics*, Springer, Berlin, pp. 238–248.

Mézard, M. & Virasoro, M. A. (1985), 'The microstructure of ultrametricity', *J. Physique* **46**, 1293–1307.

Middleton, A. (1999), 'Numerical investigation of the thermodynamic limit for ground states in models with quenched disorder', *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1672–1675.

Middleton, A. (2001), 'Energetics and geometry of excitations in random systems', *Phys. Rev. B.* **63**, 060202(R).

Migdal, A. (1975), *Sov. Phys. JETP* **42**, 423.

Migliorini, G. & Berker, A. N. (1998), 'Global random-field spin-glass phase diagrams in two and three dimensions', *Phys. Rev. B.* **57**, 426.

Moore, M. A. (2002), 'Corrections to scaling in the droplet picture of spin glasses'. cond-mat/0203469.

Mulet, R., Pagnani, A. & Parisi, G. (2001), 'Against temperature chaos in naive thouless-anderson-palmer equations', *Phys. Rev. B* **63**, 184438.

Müller, M., Krzakala, F. & Mézard, M. (2002), 'The secondary structure of RNA under tension', *Eur. Phys J. E* **9**, 67-77 (2002).

Mydosh, J. (1993), *Spin Glasses: An experimental introduction*, Taylor and Francis, London.

Nemoto, K. (1987), 'A numrical study of the pure states of the SK spin glass model', *J. Phys. C.* **20**, 1325–1336.

Nemoto, K. & Takayama, H. (1985), 'Tap free energy structure of spin glasses', *J. Phys. C.* **18**, 529–535.

Newman, C. M. & Stein, D. L. (1997), 'Metastate approach to thermodynamic chaos', *Phys. Rev. E* **55**, 5194–5211.

Newman, C. M. & Stein, D. L. (1998), 'Simplicity of state and overlap structure in finite-volume realistic spin glasses', *Phys. Rev. E* **57**, 1356–1366.

Newman, C. M. & Stein, D. L. (2001), 'Interfaces and the question of regional congruence in spin glasses', *Phys. Rev. Lett* **87**, 077201.

Newman, C. M. & Stein, D. L. (2002), 'The state(s) of replica symmetry breaking: Mean field theories vs. short-range spin glasses', *J. Stat. Phys.* **106**, 213–244.

Ney-Nifle, M. & Hilhorst, H. (1992), 'A new critical point exponent and new scaling laws for short range ising spin glasses', *Phys. Rev. Lett* **68**, 2992–2995.

Nishimori, H. (2001), *Statistical Physics of Spin Glasses and Information Processing: An Introduction*, Oxford University Press, Oxford, UK.

Nordblad, P. & Svedlindh, P. (1998), Experiments on spin glasses, *in* A. P. Young, ed., 'Spin Glasses and Random Fields', World Scientific, Singapore.

Onsager, L. (1965), 'A two dimensional model with an order-disorder transition', *Phys. Rev* **65**.

Orland, H. (1985), 'Mean-field theory for optimization problems', *J. Physique Lett.* **46**, L763–L770.

Orland, H. & Zee, A. (2001), 'RNA folding and large n matrix theory', *Nucl. Phys. B* . cond-mat/0106359.

Orlyanchik, V., Vaknin, A., Ovadyahu, Z. & Pollak, M. (2002), 'Impairing the memory of an electron-glass by ir excitation', *Physica Status Solidi* **230**, 61–66.

Pagnani, A., Parisi, G. & Ricci-Tersenghi, F. (2000), 'Glassy transition in a disordered model for the RNA secondary structure', *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2026–2030.

Pagnani, A., Parisi, G. & Ricci-Tersenghi, F. (2001), 'Reply to the comment on 'glassy transition in a disordered model for the RNA secondary structure'', *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1383.

Palassini, M. & Caracciolo, S. (1999), 'Universal finite size scaling functions in the 3D Ising spin glass'. cond-mat/9904246.

Palassini, M. & Caracciolo, S. (2000), 'Monte carlo simulation of the three-dimensional ising spin glass'. cond-mat/9911449.

Palassini, M. & Young, A. P. (1999*a*), 'Trivial ground state structure in the two-dimensional Ising spin glass', *Phys. Rev. B.* **60**, 9919. cond-mat/9904206.

Palassini, M. & Young, A. P. (1999*b*), 'Triviality of the ground state structure in Ising spin glasses', *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5126–5129. cond-mat/9906323.

Palassini, M. & Young, A. P. (2000), 'Nature of the spin glass state', *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3017. cond-mat/0002134.

Palassini, M. & Young, A. P. (2001), 'The +/-j spin glass: Effects of ground state degeneracy', *Phys. Rev. B* **63**, 140408(R). cond-mat/0012164.

Parisi, G. (1979*a*), 'Infinite number of order parameter for spin-glasses', *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1754–1756.

Parisi, G. (1979*b*), 'Toward a mean-field theory for spin-glasses', *Phys. Lett.* **73A**, 203–205.

Parisi, G. (1980*a*), 'The order parameter for spin-glasses: A function on the interval 0–1', *J. Phys. A* **13**, 1101–1112.

Parisi, G. (1980*b*), 'A sequence of approximated solutions to the SK model for spin-glasses', *J. Phys. A Lett.* **13**, L115–L121.

Parisi, G. (1983), 'Order parameter for spin-glasses', *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1946–1948.

Parisi, G. (1999), The physical meaning of replica symmetry breaking. Dirac Medail lecture, cond-mat/9801176.

Parisi, G., Petronzio, R. & Rosati, F. (2001), 'Renormalization group approach to spin glass systems', *Eur. Phys. J. B* **21**, 605–609.

Parisi, G., Ritort, F. & Slanina, F. (1993), 'Critical finite-size corrections for the sherrington-kirkpatrick spin glass', *J. Phys. A* **26**, 247–259.

Petit, D., Fruchter, L. & Campbell, I. A. (1999), 'Ordering in a spin glass under applied magnetic field', *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5130–5133.

Petit, D., Fruchter, L. & Campbell, I. A. (2002), 'Ordering in heisenberg spin glass', *Phys. Rev. Lett.* **88**, 207206.

Picco, M., Ricci-Tersenghi, F. & Ritort, F. (2001), 'Aging effects and dynamic scaling in the 3d edwards-anderson spin glasses: a comparison with experiments', *Eur. Phys. J. B* **21**, 211.

Picco, M., Ritort, F. & Sales, M. (2001), 'Statistics of lowest excitations in two dimensional gaussian spin glasses'. cond-mat/0106554.

Pimentel, I. R., Temesvari, T. & Dominicis, C. D. (2002), 'Spin glass transition in a magnetic field : a renormalization group study', *Phys. Rev. B* **65**, 224420.

Rammal, R., Angles d'Auriac, J.-C. & Doucot, B. (1985), 'On the degree of ultrametricity', *J. Physique Lett.* **46**, L945–L952.

Rieger, H. (1998), Frustrated systems: Ground state properties via combinatorial optimization, *in* J. Kertesz & I. Kondor, eds, 'Advances in Computer Simulation', Vol. 501 of *Lecture Notes in Physics*, Springer-Verlag, Heidelberg.

Rieger, H., Santen, L., Blasum, U., Diehl, M., Jünger, M. & Rinaldi, G. (1996), 'The critical exponents of the two-dimensional ising spin glass revisited: exact ground-state calculations and monte carlo simulations', *J. Phys. A* **29**, 3939–3950.

Rizzo, T. (2001), 'Against chaos in temperature in mean-field spin-glass models', *J. Phys. A* **34**, 5531–5549.

Rizzo, T. & Crisanti, A. (2002), 'Chaos in temperature in the sherrington-kirkpatrick model'. cond-mat/0209333.

S, N., Keson, P. & Harrison, H. (1979), *Phys. Rev. B* **19**, 1633.

Sales, M. & Yoshino, H. (2002*a*), 'Fragility of the free-energy landscape of a directed polymer in random media', *Phys. Rev. E* **65**.

Sales, M. & Yoshino, H. (2002*b*), 'Fragility of the glassy state of a directed polymer in random media: a replica approach'. cond-mat/0112384.

Sasaki, M. & Martin, O. C. (2002*a*), 'Discreteness and entropic fluctuations in grem-like systems'. cond-mat/0204413.

Sasaki, M. & Martin, O. C. (2002*b*), 'Temperature chaos in a replica symmetry broken spin glass model - a hierarchical model with temperature chaos -'. cond-mat/0206316.

Sherrington, D. & Kirkpatrick, S. (1975), 'Solvable model of a spin-glass', *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1792–1796.

Sompolinski, H. & Zippelius, A. (1981), 'Dynamic theory of the Ising spin-glass phase', *Phys. Rev. Lett.* **47**, 359–362.

Sompolinski, H. & Zippelius, A. (1982), 'Relaxational dynamics of the Edwards-Anderson model and the mean-field theory of spin-glasses', *Phys. Rev. B* **25**, 6860–6875.

Struik, L. C. E. (1978), *Physical aging in amorphous polymers and other materials.*, Elsevier, Houston.

Swendsen, R. H. & Wang, J.-S. (1986), 'Replica monte carlo simulation of spin-glasses', *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2607–2609.

Thouless, D. J., Anderson, P. W. & Palmer, R. G. (1977), 'Solution of 'solvable model of a spin-glass'', *Phil. Mag.* **35**, 593–601.

Toulouse, G. (1977), 'Theory of frustration effect in spin-glasses: I', *Comm. Phys.* **2**, 115–119.

Vannimenus, J. & Mézard, M. (1984), 'On the statistical mechanics of optimization problems of the travelling salesman type', *J. Physique Lett.* **45**, L1145–L1153.

Viana, L. & Bray, A. J. (1985), 'Phase diagrams for dilute spin-glasses', *J. Phys. C* **18**, 3037–3051.

Viasnoff, V. & Lequeux, F. (2002), 'Rejuvenation and overaging in a colloidal glass under shear', *Phys. Rev. Lett.* .

Vincent, E., Dupuis, V., Alba, M., Hammann, J. & Bouchaud, J. (2000), *Europhys. Lett.* **50**, 674–680.

Vincent, E., Hammann, J., Ocio, M., Bouchaud, J. P. & Cugliandolo, L. F. (1997), 'Slow dynamics and aging in spin-glasses'. cond-mat/9607224.

Wehr, J. & Aizenman, M. (1990), 'Fluctuations of extensives functions of quenched random couplings', *J. Stat. Phys.* **60**, 287–306.

Yoshino, H., Hukushima, K. & Takayama, H. (2002*a*), 'Anomalously soft droplets and aging in short-ranged spin glasses'. cond-mat/0202110.

Yoshino, H., Hukushima, K. & Takayama, H. (2002*b*), 'Extended droplet theory for aging in short-ranged spin glasses and a numerical examination'. cond-mat/0203267.

Yoshino, H., Lemaitre, A. & Bouchaud, J. (2000), 'Multiple domain growth and memory in the droplet model for spin-glasses', *Euro. Phys. J. B.* **20**, 367–395. cond-mat/0009152.

Young, A. P. (1983), 'Direct determination of the probability distribution for the spin-glass order parameter', *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1206–1209.

Young, A. P., ed. (1998), *Spin Glasses and Random Fields*, World Scientific, Singapore.

Young, A. P. & Southern, B. W. (1977), 'Real space rescaling study of spin glass behaviour in three dimensions', *J.Phys.C* **10**, 2179–2195.

Zanotto, E. D. (1998), 'Do cathedral glasses flow?', *Am. J. Phys.* **66**.

Zuker, M. & Sankoff, D. (1984), *Bull. Math. Biol.* **46**, 591.

et surtout ...

Bowie, David (1972) : *The rise and fall of Ziggy Startdust*, RCA
Brel, Jacques (1962) : *Les bourgeois*

CORNEILLE, Pierre (1637): *Le Cid*, Flamarion
ECO, Umberto (1979) : *Le nom de la rose*, Livre de poche
GARCÍA MÁRQUEZ, Gabriel (1967) : *Cent ans de solitude*, Livre de poche
LES OGRES DE BARBACK, (1999) : *Irfan : le hero*, Paris
MEUNIER, Stéphane (1998) : *Les yeux dans les bleus*
VIAN, Boris (1956) : *La java des bombes atomiques*
ZWEIG, Stéfan (1927) : *La confusion des sentiments*, Livre de poche

Index

Aspects géométriques et paysage d'énergie des verres de spins

Etude d'un système désordonné et frustré en dimension finie

Les systèmes vitreux sont caracterisés par un grand nombre d'états métastables. Cette thèse présente une étude de ces états dans les verres de spins en dimension finie - l'un des paradigmes de la physique statistique des systèmes désordonnés - à l'aide de modèles simples, d'approches phénoménologiques et de calculs numériques utilisant l'optimisation combinatoire. Nous nous interressons particulièrement à la structure du paysage d'énergie, à la nature du diagramme des phases ainsi qu'à l'éventuelle présence de chaos en température.

Nos résultats indiquent que la structure du paysage d'énergie est complexe et qu'il existe des excitations macroscopiques d'énergie $O(1)$ comme prévu par la théorie champ moyen, correspondant à des amas spongieux dont la topologie est non-triviale. Le diagramme des phases semble par contre être trivial, contrairement à ces prédictions: l'éventuelle phase verre de spins sous champ magnétique ainsi que la phase mixte où coexistent ordre ferromagnétique et ordre verre de spins semblent être absentes. Un scenario nommé TNT, pour **T**rivial - **N**on **T**rivial, pour lequel ces propriétés sont attendues, est présenté et est compatible avec l'ensemble des résultats connus.

La présence de chaos en température est mise en évidence dans deux modèles : un verre de spins sous l'approximation champ moyen de Curie-Weiss et un modèle avec énergies et entropies aléatoires soluble analytiquement.

Enfin, des propriétés générales des fondamentaux de systèmes désordonnés ont été étudiées numériquement et analytiquement. Les excitations et leur nature, les effets de tailles finies, les fluctuations d'échantillon à échantillon, l'unversalité par rapport à la réalisation du désordre, la dimension critique inférieure ainsi que la nature des statistiques extrêmes ont ainsi été abordés.

Mots-clés: Physique statistique, verres de spins, ferromagnétisme, modèle d'Edwards-Anderson, diagramme des phases, désordre, frustration, système complexe, optimisation combinatoire, répliques, théorie d'echelle, statistiques d'extrêmes.

Energy and geometry landscapes of spin glasses

Study of a finite dimensional frustrated and disordered system

Glassy materials are characterized by a plethora of metastable states. This thesis present a theoretical study of these states in the framework of finite dimensional spin glasses - one of the paradigms of disordered systems in statistical mechanics - using simple models, phenomenological approaches and numerical computations involving combinatorial optimization. Of particular interest is the structure of the energy landscape, the nature of the phase diagram and the putative presence of a chaotic temperature dependence.

Our results strongly suggest that the energy landscape is complex and that it does exist large scale low energy excitations as predict by mean field theories, corresponding to spongy clusters with non trivial topology. However, in contrast to the mean field case, the phase diagram seems to be trivial since no evidence for a spin glass phase under a magnetic field, or for a mixed phase with both ferromagnetic and spin glass ordering, are found. A scenario called TNT for **T**rivial - **N**on **T**rivial, for which these properties are expected, is presented and seems compatible with the known numerical results.

The presence of temperature chaos is illustrated in two models : a mean field like spin glass under Curie-Weiss approximation and a solvable Random energy Random entropy model. These models give strong evidences for such a chaotic temperature dependence in real systems.

Finally, general properties of ground states in disordered systems are studied both analytically and numerically. Nature of excitations, finite size effects, sample to sample fluctuations, universality and lower critical dimensions are discussed.

Key-words: Statistical physics, spin glasses, ferromagnetism, Edwards-Anderson model, phase diagram, disorder, frustration, complex systems, combinatorial optimization, replicas, scaling theories, extremal statistics.