Déformation de la surface de Fermi pour un système fortement anisotrope d'électrons en interaction

Sebastien Dusuel

▶ **To cite this version:**

Sebastien Dusuel. Déformation de la surface de Fermi pour un système fortement anisotrope d'électrons en interaction. Physique mathématique [math-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2002. Français. NNT : . tel-00002124

HAL Id: tel-00002124

https://theses.hal.science/tel-00002124

Submitted on 13 Dec 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Denis Diderot

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : PHYSIQUE THÉORIQUE

présentée par

Sébastien DUSUEL

pour obtenir le titre de docteur de l'Université Paris VII.

Sujet :

Déformation de la surface de Fermi pour un système fortement anisotrope d'électrons en interaction

Soutenue le 14 Novembre 2002 devant la commission d'examen composée de :

Benoît DOUÇOT	Directeur de thèse
Nicolas DUPUIS	Examinateur
Thierry GIAMARCHI	Rapporteur
Didier POILBLANC	Rapporteur
Bernard ROULET	Président
Dražen ZANCHI	Examinateur

A Cécile

Remerciements

Je tiens à dire que c'est avec grand plaisir que j'écris les lignes qui suivent, et j'espère qu'elles reflèteront sans trop de déformation la réalité de mes sentiments. Je suis conscient de la chance que j'ai eue de travailler dans un laboratoire où règne la bonne humeur, et où il est possible de discuter d'autre chose que de physique.

Je ne peux commencer qu'en exprimant un grand Merci à Benoît Douçot, qui m'a proposé ce sujet de thèse et m'a fait profiter de sa compréhension exceptionnelle de la physique. La liberté qu'il m'a accordée, les contacts que nous avons eus, ainsi que la difficulté du sujet de thèse qu'il m'a proposé, m'ont donné l'impression de ne pas être qu'un étudiant.

C'est à Bertrand Delamotte qu'est revenue la tâche de me remonter le moral pendant les moments difficiles. S'il n'avait pas été là pour me remettre sur les rails, j'aurais probablement tout arrêté en cours de route. Je le remercie pour cela, pour le temps qu'il a passé à répondre à mes questions de physique, et pour sa bonne humeur. Bonne humeur qui n'a d'égale que celle de Dominique Mouhanna sans qui l'ambiance ne serait pas du tout ce qu'elle est. Je tiens à le remercier, notamment pour son aide dans la diagonalisation de Mulholland Drive !

Les journées n'auraient pas été aussi gaies sans les mangeurs de sandwiches du midi et/ou les buveurs de thé de tea time, Matthieu Tissier, qui a relu mon manuscrit en détail et m'a aidé en LaTeX, Dražen Zanchi qui a accepté d'être membre du Jury, Julien Vidal, Léonie Canet, Alain Laverne, Rémy Mosseri et Bernard Diu.

Merci à Marco Picco qui a pris sur son temps et m'a aidé à résoudre mes problèmes informatiques, à Bertrand Roehner pour nos deux mois passés à l'éconophysique, ainsi qu'à Annie Richard, Sylvie Dalla-Foglia et Marie-Christine Lévy pour leur travail.

J'ai eu la chance que les moments noirs de recherche coïncident avec des périodes heureuses en enseignement (et réciproquement !). Je garderai un excellent souvenir de ma première expérience d'enseignement, tant pour la gentillesse des étudiants que pour la sympathie de mes collègues.

Je suis reconnaissant à Nicolas Dupuis et à Bernard Roulet d'avoir accepté d'être membres du Jury, et tout particulièrement à Thierry Giamarchi et Didier Poilblanc pour le temps qu'ils ont passé à étudier mon travail en tant que rapporteurs.

Last, but not least, mes pensées vont à mes amis et camarades, à ma famille, en particulier à ma grand-mère et à ma mère, et enfin à Cécile.

Table des matières

Introduction **11**

1 Modèles utilisés et notations **21**

1.1 Le Hamiltonien libre 21

1.1.1 Modèle sur réseau 21

1.1.2 Limite continue 24

1.2 Les interactions 27

1.2.1 Forme générale 27

1.2.2 Forme de basse énergie 30

2 Groupe de Renormalisation à deux boucles pour les fermions en une dimension **37**

2.1 La théorie des perturbations et ses divergences à une boucle 38

2.1.1 Modèle utilisé 38

2.1.2 Mise en œuvre simpliste de la théorie des perturbations 40

2.1.3 Prise en compte du spin. 47

2.2 Le Groupe de Renormalisation à une boucle 50

2.2.1 Notion de contre-terme sur des exemples triviaux 50

2.2.2 Utilisation des contre-termes pour les fermions 53

2.2.3 La Renormalisation à une boucle, enfin 57

2.2.4 Une dernière subtilité 63

2.3 Le Groupe de Renormalisation à deux boucles 63

2.3.1 La self-énergie à deux boucles : nécessité de la renormalisation du champ . . . 64
2.3.2 Le vertex à deux boucles . . . 72
2.3.3 Pertinence du 2 boucles . . . 83
2.3.4 Limitations de la méthode . . . 84

3 Déformations de la surface de Fermi : un cas simple 87

3.1 Quelques généralités et définitions . . . 87
3.2 Se faire une intuition . . . 88
3.2.1 Le modèle . . . 89
3.2.2 Perturbations au premier ordre . . . 90
3.2.3 Perturbations au deuxième ordre . . . 94
3.3 Résultats obtenus avec la self-énergie . . . 97
3.3.1 Problèmes avec la théorie des perturbations habituelle . . . 97
3.3.2 Comment mettre la théorie des perturbations en œuvre ? . . . 100
3.3.3 Théorie des perturbations indépendante du temps, pour un état couplé à un continuum . . . 104
3.4 Le Groupe de Renormalisation de théorie des champs et ses limitations. 109
3.4.1 Les couplages à une boucle . . . 109
3.4.2 Le propagateur . . . 119
3.5 Le Groupe de Renormalisation dans sa version "cut-off scaling" . . . 126
3.5.1 Idée générale . . . 126
3.5.2 Application à la déformation de la surface de Fermi. . . . 128

4 Extension à un système quasi-1D de N chaînes 135

4.1 Établissement des équations de RG dans le cas non commensurable . . 135
4.1.1 Flot des vertexs . . . 135
4.1.2 Calculs de la self-énergie, flot de la surface de Fermi et renormalisation du propagateur . . . 139
4.2 Prise en compte des Umklapps . . . 142
4.3 Exploitation des équations de RG . . . 143

5 Guide de lecture de l'article "Renormalization group for two-dimensional fermions with a flat Fermi surface" [DVD02] 147

Conclusion 153

A A propos des différentes paramétrisations des interactions 157

A.1 Notations de la "g-ologie" 157

A.2 A propos des Umklapps 158

A.3 Valeurs des couplages pour une interaction de type Hubbard 159

A.4 Paramétrisation singulet et triplet des interactions 160

Introduction

En physique comme dans tout domaine de recherche scientifique, les avancées ne se font pas de manière linéaire. Ceci est vrai tant au niveau de l'individu (qui n'a pas vécu et apprécié ces moments où tout ce qui bloquait depuis des mois se met à former un tout cohérent ?) qu'au niveau de la communauté scientifique elle-même. Bien sûr les échelles de temps sont différentes. Il a ainsi fallu attendre plus de 45 ans entre la découverte de la supraconductivité, en 1911 par Kammerlingh Onnes, et son explication, la théorie BCS de Bardeen, Cooper et Schrieffer [BCS57]. Cela peut a priori paraître étrange, puisque la théorie microscopique à la base de la physique de la matière condensée, à savoir la Mécanique Quantique, était connue et maîtrisée (si tant est que l'on maîtrise la Mécanique Quantique, même aujourd'hui !) depuis la fin des années 20. Mais si l'on y pense, il n'est pas étonnant qu'il ait fallu de l'ordre de 30 ans pour réussir à expliquer un phénomène qui exhibe des propriétés quantiques au niveau macroscopique, et qui met en jeu un très grand nombre d'électrons corrélés (problème à N corps).

De même, une théorie satisfaisante des propriétés des électrons dans un métal, la théorie du liquide de Fermi, n'a été formulée qu'à la fin des années 50 par Landau [Lan57a, Lan57b, Lan59]. Pour être bref, cette théorie montre que les propriétés d'un liquide de Fermi sont dues à l'existence de quasi-particules (les électrons entourés d'un nuage d'autres électrons avec lesquels ils interagissent), de statistique fermionique. Malgré toutes les complications microscopiques possibles, on n'a besoin que de quelques paramètres (dits de Landau), ajustés en fonction du matériau, pour décrire les résultats expérimentaux.

Cette théorie phénoménologique a par la suite été dérivée, en partant de considérations microscopiques, par des méthodes de théorie quantique des champs (voir par exemple [AGD63, Noz63]). Le faible nombre de paramètres nécessaires à la description d'un liquide de Fermi est maintenant compris, depuis le travail de Wilson sur le groupe de renormalisation (RG[1]) [Wil75], expliquant l'universalité observée expérimentalement, ainsi que l'absence d'influence de la plupart des paramètres microscopiques.

[1] L'abréviation RG vient du nom anglais Renormalization Group. Je m'excuse auprès des lecteurs qui ne supportent pas l'incursion de l'Anglais dans la langue française pour cette notation ainsi que les autres qui suivront (comme SDW ou self-énergie par exemple). Mais étant donné que toute la littérature scientifique est aujourd'hui écrite en Anglais, j'ai décidé de ne pas me plier au snobisme franco-français qui voudrait me faire parler de mâchouillons !

Nous renvoyons le lecteur aux travaux récents [Sha94, Dup98] sur l'application du RG aux fermions, et en particulier à la théorie du liquide de Fermi.

La théorie du liquide de Fermi et la théorie BCS ont expliqué de manière tout à fait satisfaisante les expériences jusqu'au milieu des années 70. Les difficultés ont commencé à ce moment là, en ce qui concerne l'interprétation des résultats expérimentaux. La plupart des expériences qui ne rentraient pas dans ce cadre théorique avaient comme point commun la faible dimensionnalité des composés étudiés. Ainsi la supraconductivité a haute température critique (HTC) découverte par Bednorz et Müller en 1986 [BM86], met en jeu, dans les cuprates, des plans formés d'atomes de cuivre et d'oxygène (voir l'article de revue [SD95] pour plus de détails). La physique de ces composés est donc essentiellement bidimensionnelle (2D). Les conducteurs (et supraconducteurs) organiques sont quant à eux constitués d'empilements de molécules organiques, formant des chaînes (voir l'article de revue [JS82], ainsi que [Jér91]). Ces composés sont tels que les déplacements des électrons le long des chaînes sont beaucoup plus faciles que ceux entre les chaînes. Ils ont donc un caractère presque unidimensionnel, et sont appelés quasi-1D. La basse dimensionnalité de ces derniers composés implique une grande complexité de la physique qui leur est associée. En particulier, leur diagramme de phase de basse température comporte plusieurs phases ordonnées différentes. Par exemple, les sels de Bechgaard (le premier découvert étant le tétraméthyltetrasélénafulvalène $(TMTSF)_2PF_6$ [BJM$^+$80]) et leurs dérivés à base de soufre ($(TMTTF)_2X$) (l'ensemble étant dénoté TM_2X) ont un diagramme de phase (cf par exemple [Jér91]) qui comporte entre autres, à basse énergie, une phase spin-Peierls, une phase supraconductrice, ainsi qu'une phase onde de densité de spin (SDW) [Grü94].

Du point de vue théorique, il était connu depuis longtemps que la physique à une dimension est complètement différente de celle à trois dimensions. Une description de la physique en termes d'électrons, ainsi qu'en termes de quasi-particules, est inadéquate. Les "bonnes excitations" de ces systèmes sont des modes collectifs bosoniques, de type onde de densité (voir les articles [Lut63, Tom50, ML63, Hal81], ainsi que les articles de revue [Sch91, Voi95]). Ces systèmes ne sont plus des liquides de Fermi, mais des liquides de Luttinger. Les effets de basse dimension sont si drastiques que, par exemple, le spin et la charge des électrons se découplent, et se propagent à des vitesses différentes, c'est la fameuse séparation spin-charge.[2] Notons que la dimension 1 autorise un traitement exact de beaucoup de systèmes, que ce soit par la méthode de bosonisation, ou par Ansatz de Bethe (cf par exemple la solution exacte du modèle de Hubbard 1D par Lieb et Wu [LW68, LW02]).

Étant donné que les systèmes 2D et quasi-1D ont une dimensionnalité à mi-chemin entre celle (1D) donnant une physique de liquide de Luttinger et celle (3D) donnant lieu aux propriétés de liquide de Fermi, il n'est finalement pas si étonnant que la théorie du liquide de Fermi puisse être mise en défaut. Pour des raisons similaires, la théorie du liquide de Luttinger n'explique pas de façon satisfaisante les propriétés

[2]Notons que d'autres effets aussi drastiques existent, comme la fractionalisation de la charge dans l'effet Hall quantique fractionnaire (FQEH).

des matériaux quasi-1D. De même le statut d'une théorie de liquide de Luttinger bi-dimensionnelle (cf par exemple [And90] ou la méthode de bosonisation en dimension d [Lut79]) est toujours sujet à débat. Ainsi la nature exacte de ces systèmes physiques n'est pas encore complètement élucidée, ce qui se traduit d'ailleurs par l'appellation générique de Non Liquide de Fermi (NFL) de tout système exhibant des propriétés non prédites par la théorie du liquide de Fermi.[3]

Les supras HTC et les matériaux quasi-1D ont des propriétés magnétiques, optiques et de transport inhabituelles. Étant donné que ma thèse a surtout été consacrée aux matériaux quasi-1D, je me focaliserai sur ceux-ci.[4] Une des propriétés (bien connue et utilisée par tous au moins une fois par jour) des métaux est qu'ils réfléchissent la lumière. On sait aussi que la valeur limite de la fréquence lumineuse au-delà de laquelle les métaux ne sont plus de bons miroirs dépend du métal considéré (le seuil étant la fréquence plasma). De telles mesures de réflectivité ont été effectuées sur les quasi-1D (voir par exemple l'article de Vescoli et al [VDH$^+$98] qui regroupe beaucoup de résultats, ainsi que les références qui y sont données pour les résultats plus restreints antérieurs, comme [JTB81]). Pour des champs électriques polarisés le long des chaînes (direction a), tous les composés de la famille TM_2X montrent un caractère métallique habituel, avec une rapide chute de la réflectivité pour des fréquences plus grandes que la fréquence plasma. Le cas de champs électriques polarisés le long de la direction orthogonale aux chaînes (direction b)[5] est différent (cf figure 1 de [VDH$^+$98]). Pour des températures de l'ordre de 20K, les composés de la famille TMTSF exhibent un caractère métallique habituel (i.e. une brusque diminution de la réflectivité à la fréquence plasma), ce qui n'est pas le cas des composés de la famille TMTTF. Les résultats peuvent être interprétés par la différence entre les valeurs de t_b pour ces différents composés (voir note de bas de page numéro 5 pour les valeurs numériques). En fait on peut mettre tous les composés TM_2X sur un même diagramme de phase, en considérant que le changement des ions X entre les chaînes est équivalent à une variation de pression (cf figure 3 de [VDH$^+$98]). Remarquons de plus que l'on observe la disparition du caractère métallique habituel de $(TMTSF)_2PF6$ au fur et à mesure que la température augmente (cf figure 1 de [JTB81]). Ces transitions métal-isolant sont induites par le changement de dimensionnalité du système. Le système se comporte comme un métal habituel quand la température est faible (le saut inter-chaînes t_b et la courbure de la surface de Fermi sont alors visibles) et que le saut inter-chaînes est supérieur au gap de charge (gap de Mott, induit par les interactions entre les électrons). Le système a alors un caractère

[3] Comme le dit si justement Boris Altschuler, ne me demandez pas ce qu'est un non liquide de Fermi. Dans le cas contraire je me verrai forcé de vous demander ce qu'est une non banane !

[4] Je ne rentrerai toutefois pas dans les détails des résultats expérimentaux pour la bonne et simple raison que je n'ai pas eu suffisamment de temps pour les étudier en profondeur. Nous avons en effet mis longtemps à mettre en œuvre le RG pour la surface de Fermi, et par conséquent nous avons manqué de temps pour calculer les prédictions de notre théorie en ce qui concerne les quantités mesurées, autre que la surface de Fermi elle-même.

[5] Il y a bien sûr deux telles directions. Mais les données expérimentales montrent que les sauts électroniques le long de la direction c sont beaucoup moins favorables que dans les deux autres directions. En termes d'intégrales de transfert on a en effet : $t_a : t_b : t_c = 250 : 10 : 1$ meV pour les TMTTF et $t_a : t_b : t_c = 250 : 25 : 1$ meV pour les TMTSF [JS82]. La direction c commence par conséquent à jouer un rôle non négligeable pour des températures inférieures à 10K, ce qui ne nous concernera pas.

bidimensionnel. Dans le cas contraire, il se trouve dans une phase qui manifeste des caractères unidimensionnels. Il semble donc que ces systèmes exhibent une transition confinement-déconfinement, entre une phase unidimensionnelle dans laquelle les électrons restent confinés (le saut inter-chaînes effectif devenant nul) ou tout du moins le transport transverse est incohérent, et une phase bidimensionnelle déconfinée dans laquelle les électrons peuvent sauter de manière cohérente d'une chaîne à l'autre.

Les choses ne sont toutefois pas aussi simples qu'il peut paraître. Les propriétés de transport de la phase bidimensionnelle, sondées par des mesures de résistivité (en courant continu) ne sont en effet pas compatibles avec une physique de liquide de Fermi [MGAS+98]. Les mesures de conductivité optique le long des chaînes des sels de Bechgaard, effectuées à haute température (au-dessus de la température de transition vers l'onde de densité de spin) [SDG+98] montrent l'existence d'un pic de Drude dont le poids est très faible (1% du poids spectral) et d'un mode de fréquence fini contenant 99% du poids spectral. Ce poids spectral peut, dans une vision physique simple, être interprété comme résultant d'une phase isolant de Mott dopé [Gia97], si l'on considère que le saut inter-chaînes agit similairement au dopage, sur les différentes chaînes. Toutefois, une telle interprétation n'est pas exempte de problème. En particulier, les résultats dépendent crucialement du remplissage utilisé pour décrire le système. Les sels de Bechgaard sont en effet quart remplis, mais à cause d'une légère dimérisation, on peut aussi les considérer comme demi-remplis. Les deux descriptions donnent des prédictions qui semblent correctes et en accord avec d'autres expériences (mesures de conductivité dc, de magnétorésistance, de résonance magnétique nucléaire), et d'autres qui paraissent incorrectes (nous renvoyons le lecteur à la discussion détaillée de [SDG+98], section IV). Pour être bref, disons qu'un des problèmes majeurs est de déterminer dans quel domaine de température on peut considérer le système comme étant unidimensionnel. En fait, ce qui est troublant, c'est que les mesures de résonance magnétique nucléaire semblent indiquer une température de transition (de crossover) de l'ordre de 10-15K [Bou93, Wzi93], alors que les mesures de conductivité (en courant continu) inter-chaînes [MGAS+98] donnent un comportement unidimensionnel jusqu'à environ 100K. On comprend donc la difficulté d'élaborer une théorie qui rende compte de ces deux échelles différentes.

Les théoriciens de la matière condensée sont donc confrontés à des données expérimentales qui ne rentrent pour l'instant dans aucun cadre unique et clair.[6] Les méthodes utilisées pour tenter de décrire la physique en deux dimensions sont par conséquent assez nombreuses, ce qui est d'ailleurs intéressant, puisque cela donne des éclairages différents sur un même sujet. Je vais très brièvement résumer la situation théorique.

Étant donné l'importance des interactions dans les systèmes de fermions fortement corrélés, un des points de vue est de dire qu'il faut traiter les interactions de manière non perturbative. Les quasi-1D peuvent ainsi être considérés comme des liquides de Luttinger (si le remplissage est non commensurable), couplés par un terme

[6] Les théoriciens des hautes énergies ne sont donc pas les seuls à pouvoir prétendre ne pas avoir une théorie du tout (TOE) !

de saut inter-chaînes qui est traité perturbativement [BBT95, Arr00]. Dans le cas d'un système dont le remplissage est commensurable, les processus Umklapp donnent une physique de type isolant de Mott. Il est alors possible, dans le même esprit, de considérer le saut inter-chaînes comme une perturbation agissant sur des isolants de Mott découplés [ET02]. De telles études peuvent notamment être menées après avoir bosonisé le système, et en utilisant le RG dans la version bosonisée (cf par exemple [TS99] pour l'étude du problème à deux chaînes). Bien qu'il soit possible d'utiliser la bosonisation en dimension deux (cf par exemple [Lut79, Wen90, HM93]), afin d'avoir directement une interprétation en terme de liquide de Luttinger [And91], la mise en place d'une telle méthode dans un cas complexe tel que le modèle de Hubbard 2D (supposé être une bonne modélisation des supras HTC) à remplissage quelconque ne me semble pas évidente.

Néanmoins, l'existence de régimes intermédiaires de type liquide de Fermi, incite à garder une description en termes de fermions.[7] Notons aussi que même dans le régime de haute énergie (haute température par exemple) où les systèmes quasi-1D deviennent vraiment 1D, les fermions permettent encore une assez bonne description de la physique (si on pense en terme de groupe de renormalisation Wilsonien, la physique du liquide de Luttinger n'est retrouvée qu'une fois que tous les modes de haute et basse énergie sont intégrés). De plus, un des résultats les plus frappants obtenus expérimentalement, est l'existence d'une notion de surface de Fermi pour des systèmes dont les propriétés ne sont pas celles (ou dévient fortement) du liquide de Fermi [And95]. Dans le cas des supras HTC de type cuprate, les études expérimentales ont été effectuées à l'aide de la spectroscopie résolue en angle (ARPES). La détermination de la forme de la surface de Fermi (en fonction des interactions, qui la déforment par rapport au cas libre) est cruciale, car la surface de Fermi détermine le lieu des excitations de basse énergie, et en particulier c'est par rapport à la forme de la surface de Fermi que se fait la distinction entre les couplages pertinents et les couplages non pertinents. La surface de Fermi détermine aussi une partie des échelles d'énergie (par exemple, le saut inter-chaînes renormalisé est lié à la surface de Fermi habillée), et comme nous l'avons déjà discuté, il est important de pouvoir les évaluer. Or la surface de Fermi est une propriété essentiellement fermionique. Même dans un système purement unidimensionnel où les modes collectifs bosoniques fournissent la meilleure description physique, la surface de Fermi existe (bien que le saut dans la distribution de particule s'annule, et qu'il ne reste qu'une singularité en loi de puissance), et elle donne encore une distinction entre les excitations de type "essentiellement particule" ou de type "essentiellement trou". Il est donc assez naturel de se concentrer sur une description fermionique, si l'on a en vue de calculer la forme de la surface de Fermi.

L'application des méthodes fermioniques aux études des déformations de la sur-

[7] Bien évidemment, l'idéal serait de pouvoir trouver un formalisme dans lequel la description s'adapterait automatiquement au caractère plutôt fermionique ou plutôt bosonique du système selon la température, pression, etc... Mais une telle description n'existe pas encore, même si des progrès sont faits dans ce sens là pour des systèmes de fermions relativistes (et donc la surface de Fermi est réduite à un seul point), cf par exemple [RVW01].

face de Fermi sont pour la plupart[8] basées sur la théorie des perturbations, ce qui implique que la validité des résultats est limitée au couplage faible. Néanmoins la prise en compte du saut inter-chaînes n'est plus perturbative. La limitation des méthodes fermioniques au couplage faible peut paraître être un sérieux handicap pour la description de systèmes fortement corrélés où les interactions jouent un grand rôle. Néanmoins, nous verrons qu'en qui concerne les déformations de la surface de Fermi, il y a des situations où ceci n'est pas trop gênant.

Avant de passer à la description des différentes approches fermioniques et en particulier de mon travail de thèse qui en fait partie, je mentionnerais une méthode qui n'est basée sur aucun des points de vue précédents, et est exacte : le calcul numérique. Comme expliqué dans l'introduction de [FS96], l'outil numérique est devenu, dès l'apparition des ordinateurs dans le monde non militaire, indispensable pour tester les modèles physiques qui sont presque invariablement basés sur des approximations. Les méthodes exactes (i.e. qui peuvent donner des résultats aussi précis que l'on veut à condition d'y mettre le temps de calcul nécessaire) sont particulièrement utiles. C'est par exemple le cas des méthodes de diagonalisation exacte. Cette technique a en particulier été appliquée au cas d'une échelle de fermions avec spin([PEM$^+$96], où il est aussi fait usage de la méthode de Monte Carlo quantique) ou sans spin([CPM96, CPA98]). Ces travaux ont étudié l'effet d'un terme de saut transverse sur un système de deux chaînes de fermions. La limitation naturelle (du fait des temps de calculs) de ces méthodes aux petits systèmes peut en partie être contournée par des études de scaling de taille finie (finite size scaling). Ces travaux ont permis de vérifier les prédictions théoriques des valeurs du saut inter-chaînes renormalisé en fonction des interactions ([CPA98]). De plus ils ont permis de tester la notion de cohérence transverse ([PEM$^+$96]). Enfin, disons que le lien entre la valeur du saut inter-chaînes renormalisé et les propriétés de transport transverse a été analysé dans [CPM96], et cette étude a en particulier montré qu'une valeur non nulle du saut inter-chaînes renormalisé ne garantit pas que le transport transverse soit essentiellement cohérent (ce qui pourrait d'ailleurs expliquer les propriétés anormales observés expérimentalement dans les sels de Bechgaard).

Le calcul des déformations de la surface de Fermi par des méthodes fermioniques, même perturbatives, n'est pas une tâche facile. Les difficultés de ce problème ont été identifiées dès les années 60 par Kohn et Luttinger [KL60] et par Nozières [Noz63], et ont mené Nozières à écrire en conclusion de son paragraphe sur les déformations de la surface de Fermi : "En pratique, nous n'essaierons jamais de *calculer* la surface de Fermi, car c'est beaucoup trop difficile. Ce qui nous importe avant tout, c'est de savoir qu'elle existe (c'est à dire que le système est normal)". Il a fallu attendre une trentaine d'années pour que la situation se débloque. La difficulté est expliquée en détails par Nozières, et j'y ai consacrée une partie non négligeable de ce manuscrit, c'est pourquoi je n'expliquerai que très brièvement ce qui pose problème. La théorie des perturbations est basée sur l'hypothèse d'un branchement adiabatique des interactions, qui n'est possible que si le fondamental reste non dégénéré tout au long du branchement des interactions.

[8] Je me concentrerai sur ces méthodes perturbatives. Mais il est à noter que ce ne sont pas les seules disponibles. Des résultats intéressants ont par exemple été obtenus à l'aide de la théorie du champ moyen dynamique (DMFT) [GGS00].

Or ceci n'est pas le cas, à cause de la déformation de la surface de Fermi. Le seul remède possible à ce problème, est d'effectuer la théorie des perturbations en partant d'un système ayant la bonne surface de Fermi, que l'on fixe à l'aide de contre-termes adaptés. Autrement dit, on doit utiliser une théorie des perturbations renormalisée. On est donc amené à faire les calculs de perturbations avec un état dont la surface de Fermi est a priori inconnue. Ceci nous force à nous donner une surface de Fermi d'essai, de faire les calculs (de self-énergie), et de vérifier si oui ou non la surface de Fermi calculée coïncide bien avec la surface de Fermi d'essai. Si ce n'est pas le cas, il faut changer de surface de Fermi. On peut en fait réinterpréter ces calculs en disant que ce qui est calculé, c'est la surface de Fermi nue, en fonction de la surface de Fermi habillée. Mais ce qui est connu, c'est la théorie nue, et on est donc amené à inverser la relation entre les surfaces de Fermi nue et habillée. Il a été démontré qu'il est en théorie possible d'inverser cette relation [FST98]. Ce qui ne résout évidemment pas les problèmes liés à son inversion, en pratique ! Notons enfin que ces problèmes de croisement de niveau ne "polluent" pas uniquement les méthodes perturbatives fermioniques. Dans le cas où l'on part d'une situation de liquides de Luttinger (ou d'isolants de Mott) découplés, et que l'on branche le saut inter-chaînes comme une perturbation, la surface de Fermi est initialement plate, et acquiert une courbure au fur et à mesure du branchement. Les croisements de niveaux ont toutes les chances de créer des difficultés. C'est d'ailleurs peut-être la raison pour laquelle la surface de Fermi calculée dans [ET02] n'a pas la même forme[9] que celle trouvée, par exemple par le DMFT (voir la figure 5 de [BGLG01] pour la comparaison).

Une première étape dans la réalisation de ce programme de théorie des perturbations renormalisée est d'effectuer un calcul autocohérent, basé directement sur la méthode Hartree-Fock [VV01]. Ce travail concerne le modèle de Hubbard 2D, avec interaction au plus proche voisin et saut au second plus proche voisin. Ces calculs ont montré qu'un changement de la topologie de la surface de Fermi est possible. Nojiri [Noj99] a effectué un calcul sophistiqué de la self-énergie au second ordre, de façon autocohérente, pour le modèle de Hubbard 2D avec une interaction purement locale. Aucun changement de topologie n'a été observé, et la différence avec un calcul standard [ZSS95, HM97] (non autocohérent) est faible. Malgré les mérites de ces théories, il leur manque un ingrédient essentiel. Elles sont en effet incapable de prendre en compte la croissance de certains couplages quand l'échelle d'énergie typique est abaissée. Ces effets jouent un rôle crucial, aussi bien pour le modèle de Hubbard 2D que pour la physique des quasi-1D.

L'outil adapté à la prise en compte de cette croissance de certains couplages est bien entendu le groupe de renormalisation. L'usage de celui-ci pour les systèmes de fermions, en physique de la matière condensée, a été popularisé par Shankar [Sha94]. Le RG a été utilisé dans la version Wilsonienne (dans le formalisme de Polchinski, ou dans la version une particule irréductible (1PI)), par différents groupes [ZS96, ZS00, HM00, HSFR01] pour l'étude du modèle de Hubbard 2D. L'application des idées de RG aux

[9] Les prédictions de ces calculs sont que la surface de Fermi est formée de poches disjointes de trous et de particules.

calculs de surface de Fermi a été mise en œuvre notamment par [PF79, Bou85, KY98, HSFR01], et des études similaires ont été menées dans le cas du système plus simple de deux chaînes [Fab93, TS99, Le 01]. Pour autant que nous comprenions ces travaux, le point de départ est la théorie des perturbations standard, et non la théorie des perturbations renormalisée. Or il semble crucial d'utiliser une théorie des perturbations dont la validité est assurée (point sur lequel Neumayr et Metzner [NM02], Ledowski et Kopietz [LK02] ont très récemment insisté, ainsi que Benoît Douçot et moi-même [DD02]). Notons toutefois que bien que les résultats précédemment cités ne font pas usage de la théorie des perturbations renormalisée, leurs résultats sont probablement physiquement corrects (à des erreurs petites près).

Néanmoins, nous pensions dès le début de ma thèse, et sommes toujours convaincus, qu'il est souhaitable de pouvoir avoir pleinement confiance dans les résultats que l'on obtient (même si ceux-ci sont perturbatifs et donc sujet à caution). C'est pourquoi, dans l'optique de calculer des déformations de la surface de Fermi par le RG, le sujet de ma thèse, nous nous sommes fixés le but de respecter les contraintes imposées par la théorie des perturbations renormalisée. Nous avons cherché à appliquer le RG dans sa version de théorie des champs pour le calcul de la surface de Fermi, mais nous nous sommes rendus compte qu'il n'est en fait pas possible de l'utiliser dans ce but. Ce qui ne veut pas dire pour autant qu'il faut l'oublier, car il donne des informations intéressantes, comme par exemple la forme des propagateurs renormalisés.[10] Nous avons donc opté pour l'utilisation d'un autre RG simple, celui dit de "cut-off scaling", pour calculer la surface de Fermi, et avons montré comment grâce à des approximations physiques raisonnables, il est possible de surmonter les difficultés liées à l'usage de la théorie des perturbations renormalisée, dans le cas des systèmes quasi-1D. Cette méthode présente l'avantage indéniable d'être simple, et je pense qu'au cours de son élaboration, nous avons développé une vision physique des déformations de la surface de Fermi, à savoir :

i) les interactions qui tendent à déformer la surface de Fermi, sont celles qui sont irrelevantes à basse énergie, au sens du RG, la notion d'irrelevance étant définie par la forme de la surface de Fermi.

ii) ces déformations ont majoritairement lieu aux grandes échelles d'énergie pour lesquelles la courbure de la surface de Fermi n'est pas ressentie, et pour lesquelles les processus classifiés irrelevants au *i*) (du point de vue de la physique de basse énergie) ne sont pas encore irrelevants.

Notons que les calculs de surface de Fermi, dans notre formalisme perturbatif, seront d'une précision acceptable uniquement si la renormalisation de la surface de Fermi s'arrête avant que les couplages n'aient eu le temps de trop croître. Néanmoins,

[10] Notons que le choix du RG de théorie des champs, qui est une théorie de température nulle, a été fait dans un souci de simplicité. Ce RG, contrairement à un RG Wilsonien, ne peut traiter qu'une classe restreinte de théories, à savoir les théories renormalisables, mais c'est justement pour cela qu'il est bien plus simple à utiliser. Le formalisme de température nulle est de plus particulièrement bien adapté à l'étude de la surface de Fermi, puisque à température finie, la singularité de la distribution de particules disparaît.

même dans un régime de couplage intermédiaire ou fort, nous pensons que le RG donne des renseignements qui sont qualitativement corrects.

Nous aurions souhaité pouvoir calculer certaines quantités physiques mesurées expérimentalement, comme la conductivité transverse, mais par manque de temps, cela n'a pas été possible. Nous avons aussi dû remettre à plus tard l'utilisation d'un RG plus puissant, de type Wilsonien, et qui devrait permettre de décrire plus précisément l'extinction des couplages non pertinents. Nous pensons pouvoir calculer la surface de Fermi, dans ce formalisme, sans avoir recours à l'inversion dont il a été fait mention plus haut.[11] Un RG Wilsonien devrait de plus nous permettre d'étudier aussi bien le modèle de Hubbard 2D, que les quasi-1D auxquels nous sommes limités avec notre méthode plus élémentaire.

Le plan de ce manuscrit est le suivant. Nous commençons par établir le modèle que nous étudions, ainsi que nos notations, dans le chapitre 1. Nous détaillons ensuite l'usage du RG pour les fermions en une dimension, à deux boucles, en insistant particulièrement sur l'usage des contre-termes, qui sont introduits de façon pédagogique (en tout cas je l'espère). Ceci est l'objet du chapitre 2. Ces deux premiers chapitres sont tout à fait basiques, et ont été écrits pour les lecteurs qui ne connaissent rien, mis à part les bases de la théorie des champs, au RG appliqué aux fermions. Les experts dans le domaine peuvent donc se permettre de survoler très rapidement ces deux chapitres, uniquement afin de prendre connaissance de nos notations. J'ai volontairement détaillé les calculs dans ce deuxième chapitre, et ne les ai pas reportés dans une annexe.[12] La raison de ce choix est que j'ai personnellement souffert de ne pas trouver plus souvent, dans la littérature, le genre de considérations élémentaires que j'expose sur les contre-termes, ainsi que des calculs détaillés. Si un jour quelqu'un consulte cette thèse et lit ce chapitre dans le but d'apprendre les techniques du RG fermionique, mon but aura été atteint. Le chapitre 3 qui suit est consacré aux déformations de la surface de Fermi dans le cas d'un système de deux chaînes. C'est le cœur de ce manuscrit. Nous passons ensuite (4) au cas d'un système de N chaînes. Je dois insister sur le fait que la lecture de ces deux chapitres n'est pas suffisante pour avoir une vue complète de notre travail sur la surface de Fermi, mais que celle-ci ne peut être obtenue qu'en lisant aussi notre article [DD02]. Celui-ci est très détaillé, et c'est d'ailleurs la raison pour laquelle je n'ai pas tout réécrit dans mon manuscrit de thèse, car cela aurait été trop redondant avec la lecture de l'article. J'ai essayé de limiter les répétitions aux aspects les plus simples mais fondamentaux, sur lesquels j'ai pensé qu'il était bon d'insister. Enfin, le dernier chapitre (5) est un guide de lecture très bref de notre premier article [DVD02], qui est lui aussi très détaillé, et dont la lecture est elle aussi indispensable pour qui veut prendre pleinement connaissance de notre travail. Le guide de lecture a seulement été conçu pour donner un autre éclairage de l'article (j'y expose en effet l'ordre chronologique dans lequel nous avons compris les choses). Le sujet de cet article est l'étude des flots de RG d'un système bidimensionnel dont la surface de Fermi possède des portions

[11] Cette possibilité nous a été suggérée par Dražen Zanchi.

[12] La seule annexe que j'ai écrite concerne les différentes paramétrisations des interactions que nous avons considérées, et elle devrait permettre de faire le lien entre nos notations et celles que l'on trouve dans la littérature.

complètement plates en regard (c'est le même système que celui étudié dans [ZYD97]). Le but principal était d'analyser précisément les flots, en partie en fonction du nombre de patchs servant à discrétiser la surface de Fermi, et de comprendre l'origine de la transition d'un état onde de densité de spin vers un état supraconducteur, qui a lieu à basse énergie, et observée dans [VD01]. Nous avons en fait montré que cette transition est un effet de discrétisation de la surface de Fermi en patchs, et disparaît quand est prise la limite d'une surface de Fermi continue.

Je tiens finalement à préciser, après avoir insisté sur la nécessité de lire nos deux articles pour avoir une vision globale de notre travail, que je n'ai pas inclus ceux-ci dans mon manuscrit. Les deux raisons principales qui m'ont poussé à faire ce choix sont les suivantes. A une époque où l'internet joue un si grand rôle, ces articles sont accessibles de n'importe quel endroit de la planète, soit dans leur version publiée, pour le premier article pour l'instant, soit dans leur version preprint (ce qui est important pour les personnes n'ayant pas les ressources financières nécessaires pour avoir accès aux articles).[13] La deuxième raison est de nature écologique. Ces articles étant longs, le nombre de feuilles supplémentaires nécessaires rien que pour ces articles, dans la production d'une vingtaine de copies de ma thèse, consommerait de l'ordre de 700 feuilles de papier. Bien sûr on pourrait me rétorquer que pour respecter l'environnement il aurait suffi d'écrire des articles plus courts. Je crois que la première raison, à savoir le développement de l'internet, coupe l'herbe sous les pieds à un tel argument.

[13]Les deux preprints sont accessibles sous les références cond-mat/0107548 et cond-mat/0208434 aux adresses `http://xxx.lanl.gov` ou `http://xxx.lpthe.jussieu.fr`.

Chapitre 1

Modèles utilisés et notations

Dans ce premier chapitre, nous présentons les modèles que nous avons étudiés et nous donnons les notations qui seront utilisées tout au long de cette thèse. Nous commençons par la description d'un système d'électrons libres dans la section 1.1, puis nous nous intéresserons aux interactions, et en particulier nous sélectionnerons celles qui existent à basse énergie (1.2). Cette sélection nous permettra de limiter le nombre total d'interactions à prendre en compte (ce qui simplifie énormément les choses, en particulier numériquement), tout en gardant les ingrédients essentiels de la physique de basse énergie.

1.1 Le Hamiltonien libre

1.1.1 Modèle sur réseau

Débutons par la présentation de la base de tous nos modèles, à savoir le Hamiltonien sans interaction (entre les électrons). Nous considérons des électrons se mouvant dans un plan, et soumis au potentiel périodique dû au réseau sous-jacent. Pour décrire la physique associée à ce système, nous utiliserons un Hamiltonien de liaisons fortes, pour des électrons qui sont supposés se déplacer sur un réseau carré.[1] Nous étudions donc le système représenté sur la figure 1.1. Les électrons peuvent sauter d'un site à un des quatre sites plus proches voisins (nous ne considérons pas dans ce travail de saut aux voisins suivants, selon les diagonales). Les amplitudes tunnel pour sauter d'un site à l'autre dans les directions x et y peuvent être différentes et sont notées t_x et t_y. Notre travail s'est focalisé sur deux cas limites de ce modèle général. Le premier est celui pour lequel il existe une direction privilégiée selon laquelle le saut des électrons est beaucoup plus facile. Cette situation correspond à la physique des matériaux quasi-1D, où le saut intra-chaînes est plus favorable que le saut inter-chaînes. Par convention les

[1] Nous renvoyons le lecteur à la littérature sur la physique de la matière condensée pour plus de détails, par exemple [AM76].

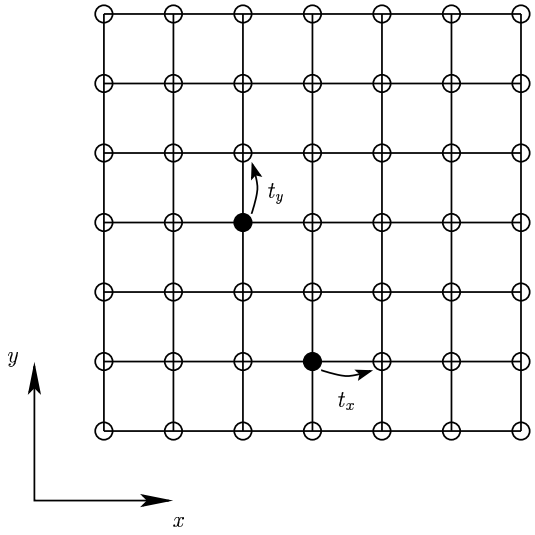


Fig. 1.1 – Réseau carré bidimensionnel. Les ronds vides représentent les sites libres, et les ronds pleins les sites occupés. On note t_x et t_y les amplitudes tunnel pour sauter d'un site à l'autre dans les directions x et y.

chaînes seront choisies parallèles à l'axe x, et on notera $t_{\|}$ le terme de saut le long des chaînes (i.e. t_x) et $t_\perp$ celui dans la direction transverse (i.e. t_y). Nous nous sommes aussi intéressés au cas isotrope pour lequel $t_x = t_y = t$. Ceci correspond à la physique bidimensionnelle des supras HTC, si on néglige le saut aux voisins suivants.

Voyons maintenant la forme du Hamiltonien libre, c'est-à-dire du Hamiltonien cinétique, pour les quasi-1D. Toute notre discussion, sauf mention contraire explicite, se fera désormais sur cet exemple. Nous prendrons dans tout ce qui suit un pas de réseau égal à 1. Ainsi, la longueur du système dans une direction, et le nombre de sites dans cette même direction seront égaux. Nous noterons L la taille dans la direction x, et N celle dans la direction y. Ces notations évoquent le fait que l'on considère un nombre N de chaînes, de longueur L. Le Hamiltonien libre H_0 s'écrit alors :

$$H_0 = -\sum_{i_x=1}^{L}\sum_{i_y=1}^{N}\sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow}\Big[t_{\|}\left(c^\dagger_{i_x,i_y,\sigma}c_{i_x+1,i_y,\sigma} + c^\dagger_{i_x+1,i_y,\sigma}c_{i_x,i_y,\sigma}\right) + t_\perp\left(c^\dagger_{i_x,i_y,\sigma}c_{i_x,i_y+1,\sigma} + c^\dagger_{i_x,i_y+1,\sigma}c_{i_x,i_y,\sigma}\right)\Big]. \tag{1.1}$$

Dans la formule ci-dessus, $c_{i_x,i_y,\sigma}$ (resp. $c^\dagger_{i_x,i_y,\sigma}$) est un opérateur d'annihilation (resp. de création) d'un électron de spin σ, au site de coordonnées (i_x, i_y).

L'invariance par translation (si on oublie les bords) nous incite à passer dans l'espace réciproque, si on veut diagonaliser cet Hamiltonien. Nous posons, pour les opérateurs de destruction (les formules pour les opérateurs de création se déduisent

par conjugaison hermitique) :

$$c_{i_x,i_y,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{NL}} \sum_{p_x,p_y} e^{\mathrm{i}(p_x i_x + p_y i_y)} c_{p_x,p_y,\sigma}, \text{ et} \tag{1.2}$$

$$c_{p_x,p_y,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{NL}} \sum_{i_x,i_y} e^{-\mathrm{i}(p_x i_x + p_y i_y)} c_{i_x,i_y,\sigma}. \tag{1.3}$$

Nous considérerons dans toute la suite des conditions aux limites périodiques. Ceci, dans la direction x, veut dire que le site $L+1$ est équivalent au site L. La formule (1.2) nous donne alors la condition $\exp(-\mathrm{i}p_x L) = 1$, qui implique $p_x = \frac{2\pi}{L} m_x$, avec $m_x \in \mathbb{Z} \cap]-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$. De même, les conditions aux limites périodiques, dans la direction y nous donnent : $p_y = \frac{2\pi}{N} m_y$, avec $m_y \in \mathbb{Z} \cap]-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$. Nous nous sommes limités à la première zone de Brillouin. Il est facile de vérifier que le Hamiltonien est, comme prévu, diagonal dans l'espace de Fourier :

$$H_0 = \sum_{p_x,p_y} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \varepsilon^{(0)}(p_x,p_y) c^\dagger_{p_x,p_y,\sigma} c_{p_x,p_y,\sigma}, \text{ avec} \tag{1.4}$$

$$\varepsilon^{(0)}(p_x,p_y) = -2\left[t_{\|}\cos(p_x) + t_\perp \cos(p_y)\right], \text{ indépendant du spin } \sigma. \tag{1.5}$$

L'état à N_e électrons sera bien sûr obtenu en remplissant les états de plus basse énergie (avec deux électrons par état $|p_x,p_y\rangle_0$ de l'espace réciproque, puisque les électrons ont un spin 1/2 et qu'ils sont donc soit $\uparrow$ soit $\downarrow$). L'énergie du dernier état occupé (celui de plus haute énergie) est appelée potentiel chimique (libre). C'est l'énergie à payer si on veut rajouter un électron au système.[2] A la limite thermodynamique, les écarts entre les différentes énergies propres successives tendent vers 0. On obtient dans cette limite non plus un état de plus haute énergie, mais un ensemble d'états. La ligne joignant ces états est appelée surface de Fermi. Le mot surface vient du fait que si le système était tridimensionnel, on aurait une surface et non une ligne. A une dimension la surface de Fermi n'est ni une surface ni une ligne, mais se réduit à deux points. Remarquons qu'il existe un lien entre le remplissage n, définit comme le rapport entre le nombre d'électrons et le nombre total d'états ($n = N_\mathrm{e}/(2NL)$), et le potentiel chimique. Le nombre d'électrons est en effet égal au nombre total d'états dont l'énergie est plus petite que le potentiel chimique.

Nous avons représenté, sur la figure 1.2, la relation de dispersion (1.5) pour un système quasi-1D dont l'anisotropie est $t_\perp/t_{\|} = 0.2$. Nous avons de plus représenté les différentes surfaces de Fermi (ainsi que leurs projections sur le plan xy) pour des potentiels chimiques égaux à $\alpha\varepsilon^{(0)}_{\max}$, avec α =-3/4, -1/2, 0, 1/2 et 3/4. $\varepsilon^{(0)}_{\max}$ est l'énergie maximale, c'est-à-dire $2(t_{\|}+t_\perp)$, soit $2.4t_{\|}$ ici. On observe donc trois topologies distinctes de surface de Fermi, correspondant à trois types de remplissages. Pour les remplissages faibles, la surface de Fermi consiste en une seule ligne fermée. Pour les grands remplissages, on observe quatre morceaux de lignes qui sont des morceaux de

[2] A des termes correctifs de taille finie près.

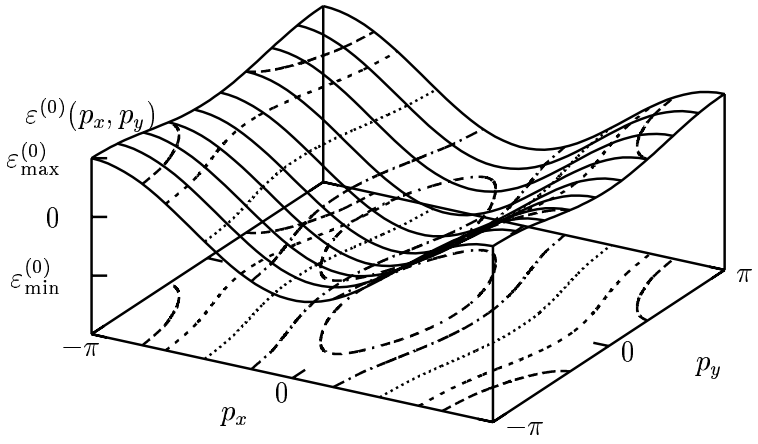


Fig. 1.2 – Relation de dispersion pour un système quasi-1D avec $t_\perp/t_\parallel = 0.2$. Sont aussi représentées différentes surfaces de Fermi, et leur projections sur le plan xy. Nous avons de plus indiqué quelques lignes à p_y=constante, sur la surface de Fermi, afin d'insister sur le caractère quasi-1D.

lignes de Fermi fermées, si on ne se restreint pas à la première zone de Brillouin.[3] Enfin pour des remplissages intermédiaires, on obtient deux lignes de Fermi légèrement ondulées, et qui seraient strictement plates si $t_\perp = 0$. C'est sur ces dernières configurations de surface de Fermi que nous avons porté notre attention.

Avant d'étudier le passage à la limite continue pour les quasi-1D, nous montrons aussi ce que l'on obtient dans le cas isotrope, sur la figure 1.3. Nous n'avons pas représenté ici les surfaces de Fermi mais uniquement leur projection (pour α =-3/4, -1/4, 0, 1/4 et 3/4). On observe, pour les systèmes 2D isotropes, deux régimes selon le remplissage. Remarquons aussi que dans le cas particulier du demi-remplissage (séparant les deux régimes), la surface de Fermi est un carré, et possède donc des portions plates en regard.

1.1.2 Limite continue

Comme nous nous intéressons à la physique de basse énergie, il est en fait inutile de garder toute l'information microscopique, en particulier d'utiliser un système sur réseau. Le passage à la limite continue, dans laquelle on ne voit plus le réseau, est une simplification appréciable. Dans le cas bien connu de la chaîne d'oscillateurs classiques, le passage à la limite continue, dans lequel la description mathématique passe d'équations différentielles discrètes à une équation aux dérivées partielles, revient simplement à ne garder que la partie linéaire du spectre à impulsion petite, et à l'étendre à l'infini.

[3]Notons que pour ce deuxième type de remplissage, on peut se ramener au premier cas en échangeant les trous et les particules, et en décalant l'origine de (π, π).

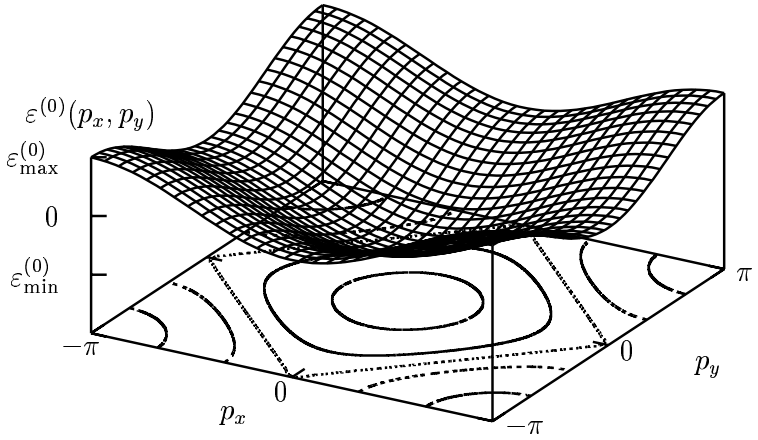


Fig. 1.3 – Relation de dispersion pour un système isotrope (i.e. $t_\perp/t_\parallel = 1$). Sont aussi représentées les projections de différentes surfaces de Fermi sur le plan xy. Nous avons ici utilisé un quadrillage pour montrer le caractère isotrope.

De même pour le système qui nous intéresse, à basse énergie, seuls les états proches de la surface de Fermi vont jouer un rôle, et il est donc naturel de linéariser la relation de dispersion au voisinage de la surface de Fermi.[4]

Pour les quasi-1D, nous ne passerons à la limite continue que dans la direction x, et garderons le caractère discret dans la direction y. On pourra ainsi décrire les systèmes physiques possédant un nombre fini de chaînes, ainsi que les vrais systèmes quasi-1D ayant un nombre infini de chaînes, en passant à la limite $N \to \infty$. Notons qu'il n'est pas forcément facile de prendre cette limite. Une partie de ma thèse a été d'éclaircir certains aspects liés à ce problème (cf [DVD02] et le guide de lecture de cette article que constitue le chapitre 5). De toute façon, si l'on veut simuler numériquement de tels systèmes possédant un nombre infini de chaînes, il est nécessaire de discrétiser la surface de Fermi en un nombre $2N$ de points de Fermi, et donc de se ramener à un nombre fini N de chaînes. Dans la littérature, les points de Fermi discrets ainsi obtenus sont appelés "patchs" (on trouvera l'idée de cette discrétisation dans [Lut79], même si le nom patch n'apparaît pas explicitement).

Notons $\mu^{(0)}$ le potentiel chimique libre, supposé donné, et tel que la surface de Fermi soit constituée de deux lignes presque plates. Pour un p_y donné, on aura alors deux points de Fermi, définis par une valeur de p_x que nous notons $p_{\mathrm{F}}^{(0)}(p_y)$, et situés en $(p_{\mathrm{F}}^{(0)}(p_y), p_y)$ et $(-p_{\mathrm{F}}^{(0)}(p_y), p_y)$. $p_{\mathrm{F}}^{(0)}(p_y)$ se trouve en écrivant que :

$$-2\left[t_\parallel \cos\left(p_{\mathrm{F}}^{(0)}(p_y)\right) + t_\perp \cos(p_y)\right] = \mu^{(0)}. \tag{1.6}$$

Pour obtenir la relation de dispersion linéarisée, il faut aussi connaître la pente de

[4] En fait la courbure de la relation de dispersion est non pertinente au sens du RG, du moins au point fixe libre (voir par exemple [Sha94]), ce qui "justifie" la linéarisation de la relation de dispersion.

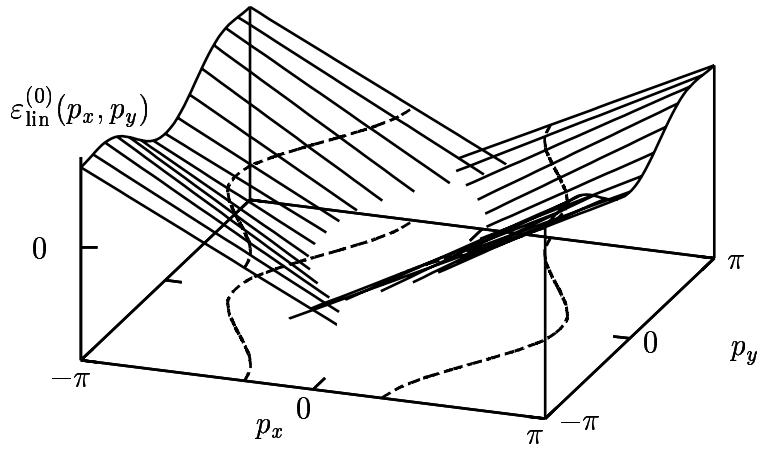


Fig. 1.4 – Représentation de la relation de dispersion linéarisée. Les paramètres sont : $\mu^{(0)} = 0$ et $t_\perp/t_{||} = 0.6$.

celle-ci, qui n'est autre que la vitesse de Fermi libre. On obtient facilement que :

$$v_{\rm F}^{(0)}(p_y) = \left.\frac{\partial \varepsilon^{(0)}(p_x,p_y)}{\partial p_x}\right|_{p_x = p_{\rm F}^{(0)}(p_y)} = 2t_{||}\sin\left[p_{\rm F}^{(0)}(p_y)\right]. \tag{1.7}$$

Au final, la relation de dispersion linéarisée, quelque soit la valeur du spin, s'écrit :

$$\varepsilon^{(0)}_{\rm lin,R}(p_x,p_y) = \mu^{(0)} + v_{\rm F}^{(0)}(p_y)\left[p_x - p_{\rm F}^{(0)}(p_y)\right], \tag{1.8}$$

$$\varepsilon^{(0)}_{\rm lin,L}(p_x,p_y) = \mu^{(0)} - v_{\rm F}^{(0)}(p_y)\left[p_x + p_{\rm F}^{(0)}(p_y)\right]. \tag{1.9}$$

Dans les formules ci-dessus le R (resp. L) signifie "Right" (resp. "Left") et fait référence à la branche "de droite" (resp. "de gauche"), c'est-à-dire la droite qui passe par le point $(p_{\rm F}^{(0)}(p_y), p_y)$ (resp. $(-p_{\rm F}^{(0)}(p_y), p_y)$). La relation de dispersion linéarisée est représentée sur la figure 1.4. Nous avons choisi le cas simple et symétrique $\mu^{(0)} = 0$, correspondant au demi-remplissage. Pour que les différences de vitesse de Fermi soient visibles sur la figure, nous avons pris $t_\perp/t_{||}$ pas trop petit, égal à 0.6. Les droites sont habituellement étendues de $-\infty$ à $+\infty$, en supposant que les états de haute énergie ainsi introduits ne changent pas la physique de basse énergie.

Dans la suite, nous adopterons le plus souvent une notation un peu différente de celle utilisée jusqu'ici, qui sera en particulier plus commode pour les simulations numériques. Le changement consiste à numéroter les chaînes dans l'espace de Fourier par un indice $I \in \{1,\ldots,N\}$, plutôt que par l'impulsion $p_y = \frac{2\pi}{N} m_y$, avec $m_y \in \mathbb{Z} \cap]-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$. Nous ne parlerons plus d'impulsion transverse mais de numéro de chaîne. Ce numéro de chaîne sera indiqué en indice dans les opérateurs de création/annihilation, et ne sera donc plus sur un pied d'égalité avec l'impulsion parallèle aux chaînes. Cet indice aura un rôle identique à celui du spin, et nous nous y référerons parfois en tant qu'"indice de couleur". Avec cette convention, le Hamiltonien libre linéarisé, à la limite

continue, s'écrit :

$$H_0 = \sum_k \sum_{I=1}^{N} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \Big\{ \left[\mu^{(0)} + v_{\mathrm{F},I}^{(0)}(k - k_{\mathrm{F},I}^{(0)})\right] c_{\mathrm{R},I,\sigma}^{\dagger}(k) c_{\mathrm{R},I,\sigma}(k) + \left[\mu^{(0)} - v_{\mathrm{F},I}^{(0)}(k + k_{\mathrm{F},I}^{(0)})\right] c_{\mathrm{L},I,\sigma}^{\dagger}(k) c_{\mathrm{L},I,\sigma}(k) \Big\}. \tag{1.10}$$

Nous avons appelé k l'impulsion le long des chaînes, et la somme sur k se fait pour k multiple de $2\pi/L$. A chaque chaîne de l'espace réciproque correspond un opérateur de création et d'annihilation dans l'espace réel :

$$\psi_{\mathrm{R(L)},I,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{\mathrm{i}kx} c_{\mathrm{R(L)},I,\sigma}(k). \tag{1.11}$$

Il faut bien comprendre que cet opérateur, dans le langage du réseau, est un opérateur obtenu à partir de $c_{i_x,i_y,\sigma}$ par transformation de Fourier sur i_y uniquement. Quand le problème était sur le réseau, nous n'avions pas d'opérateurs R et L. Le lien entre l'opérateur de champ "physique" et ceux-ci est[5] :

$$\psi_{\mathrm{phys},I,\sigma}(x) = \psi_{\mathrm{R},I,\sigma}(x) + \psi_{\mathrm{L},I,\sigma}(x) \tag{1.12}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{\mathrm{i}kx} c_{\mathrm{R},I,\sigma}(k) + \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{\mathrm{i}kx} c_{\mathrm{L},I,\sigma}(k). \tag{1.13}$$

Et on pourrait définir de même le champ physique dans l'espace réel $\psi_{\mathrm{phys},\sigma}(x, i_y)$.

1.2 Les interactions

1.2.1 Forme générale

Nous cherchons ici la forme la plus générale d'une interaction à 2 électrons, qui soit *i*) locale, *ii*) invariante par translation et *iii*) invariante par rotation dans l'espace de spin :

i) L'interaction est choisie locale, bien que l'interaction électromagnétique entre les électrons soit à longue portée, car on suppose que celle-ci est écrantée, et qu'ainsi l'interaction effective est locale. Nous ne nous préoccupons pas non plus du caractère non instantané de l'écrantage, qui se fait sur des temps suffisamment petits.

ii) Le système que nous considérons étant invariant par translation (d'un multiple du pas du réseau dans le cas sur réseau, ou quelconque pour le système dans la limite

[5] A l'origine, quand on avait un réseau, les sommations sur k dans la formule (1.13) ne pouvaient pas porter sur l'ensemble des multiples de $2\pi/L$ puisque ces états n'existaient pas, mais sur les k positifs et dans la première zone de Brillouin pour R et sur les k négatifs pour L.

continue), les interactions n'ont aucune raison de dépendre d'autre chose que de la position relative des deux électrons qui interagissent.

iii) L'orientation des spins des électrons doit être sans influence dans leur interaction, puisqu'aucune direction (dans l'espace de spin) n'est privilégiée dans notre système.

Afin de simplifier les notations et la discussion, nous considérerons un système continu invariant par toute translation. L'impulsion est alors une quantité conservée. Nous considérons de plus pour commencer le cas de fermions sans spin (d'opérateur de destruction $\psi(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}$ étant le vecteur position). Il est alors bien connu (voir n'importe quel cours de théorie des champs) que l'interaction la plus générale à 2 électrons s'écrit :

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^D\boldsymbol{x} \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^D\boldsymbol{x}'\ U(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\psi^\dagger(\boldsymbol{x}')\psi^\dagger(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}'), \tag{1.14}$$

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\boldsymbol{q}} U(\boldsymbol{q})c^\dagger(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})c^\dagger(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q})c(\boldsymbol{k}')c(\boldsymbol{k}). \tag{1.15}$$

Dans les formules ci-dessus, $\mathcal{V}$ est le volume du système, D la dimension d'espace, et dans la formule (1.15) écrite dans l'espace de Fourier, on a :

$$c(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}}\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^D\boldsymbol{x}\ e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\psi(\boldsymbol{x}), \tag{1.16}$$

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}}\sum_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}c(\boldsymbol{k}), \tag{1.17}$$

$$U(\boldsymbol{q}) = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^D\boldsymbol{x}\ e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}U(\boldsymbol{x}), \tag{1.18}$$

$$U(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{q}} e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}U(\boldsymbol{q}), \tag{1.19}$$

où les sommes sur les vecteurs d'onde portent sur les vecteurs autorisés compte tenu des conditions aux limites.

Si nous travaillions sur un réseau, les formules ci-dessus devraient être modifiées de deux façons. Premièrement les intégrales sont à remplacer par des sommes. Deuxièmement, l'impulsion n'est plus conservée strictement, mais uniquement à un vecteur du réseau réciproque près. Un processus d'interaction dans lequel l'impulsion change d'un vecteur du réseau réciproque est appelé processus *Umklapp*. Nous laissons les Umklapps de côté pour l'instant, mais nous y reviendrons à la section 1.2.2.

En introduisant l'opérateur densité de fermions ainsi que sa transformée de Fou-

rier[6] :

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \psi^\dagger(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\mathcal{V}}\sum_q e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}\rho(\boldsymbol{q}), \tag{1.20}$$

$$\rho(\boldsymbol{q}) = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^D\boldsymbol{x} e^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}\rho(\boldsymbol{x}) = \sum_k c^\dagger(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})c(\boldsymbol{k}), \tag{1.21}$$

le Hamiltonien d'interaction s'écrit typiquement comme une interaction densité-densité (les : . . . : représentent l'ordre normal) :

$$H_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^D\boldsymbol{x}\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^D\boldsymbol{x}'\, U(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') : \rho(\boldsymbol{x}')\rho(\boldsymbol{x}) : \tag{1.22}$$

$$= \frac{1}{2\mathcal{V}}\sum_{\boldsymbol{q}} U(\boldsymbol{q}) : \rho(\boldsymbol{q})\rho(-\boldsymbol{q}) : . \tag{1.23}$$

On obtiendra une interaction locale[7] et invariante par translation si $U(\boldsymbol{x}) = u\delta^{(D)}(\boldsymbol{x})$ (u=constante), et donc si $U(\boldsymbol{q}) = U$=constante. L'interaction sera alors automatiquement invariante par rotation.

Voyons maintenant ce qu'il en est dans le cas de vrais électrons avec un spin 1/2. Pour cela, commençons par considérer deux spins $\boldsymbol{S}_1$ et $\boldsymbol{S}_2$, et cherchons la forme la plus générale d'un Hamiltonien H d'interaction, invariant par rotation, c'est-à-dire commutant avec le spin total $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2, \text{ et } [H, \boldsymbol{S}] = 0. \tag{1.24}$$

On se place pour cela dans la base propre de H, $\boldsymbol{S}^2$ et $\boldsymbol{S}^z$ (base $|S, m_S\rangle$ bien connue), et avec les notations habituelles :

$$\begin{cases} |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow,\downarrow\rangle - |\downarrow,\uparrow\rangle\right) \\ |1,1\rangle = |\uparrow,\uparrow\rangle \\ |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow,\downarrow\rangle + |\downarrow,\uparrow\rangle\right) \\ |1,-1\rangle = |\downarrow,\downarrow\rangle \end{cases} . \tag{1.25}$$

Si on utilise le fait que H est diagonal dans cette base, ainsi que la commutation des opérateurs d'échelle $\boldsymbol{S}^\pm = \boldsymbol{S}^x \pm \mathrm{i}\boldsymbol{S}^y$ avec H, on montre aisément que les valeurs propres de H ne sont pas quelconques et que dans la base $|S, m_S\rangle$, H s'écrit :

$$H = \begin{pmatrix} E_{\mathrm{A}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{\mathrm{S}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{\mathrm{S}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{\mathrm{S}} \end{pmatrix} . \tag{1.26}$$

[6]Nous utilisons ici pour la transformée de Fourier une convention de signe différente de celle pour les fonctions comme $U(\boldsymbol{x})$.

[7]Il n'existe en fait pas d'interaction strictement locale pour des fermions sans spin, à cause du principe de Pauli.

$E_{\rm A}$ (A=Anti-symétrique) et $E_{\rm S}$ (S=Symétrique) sont les énergies de l'état singulet et triplet respectivement. Il ne reste plus alors qu'à réexprimer H en utilisant la formule classique $\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 = S(S+1)/2 - 3/4$ ($= -3/4$ si $S = 0$ et $= 1/4$ si $S = 1$) pour obtenir :

$$H = \frac{1}{4}(E_{\rm A} + 3E_{\rm S})\mathbb{I} + (E_{\rm A} - E_{\rm S})\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2, \tag{1.27}$$

où $\mathbb{I}$ est l'identité (2×2). Le seul terme d'interaction non trivial que l'on trouve est ainsi le produit scalaire des deux spins. Ceci est en fait presque une évidence, si l'on considère que l'on a deux vecteurs et que l'on veut obtenir un scalaire (sachant que $\boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_i = 3/4$=constante).

Tournons nous maintenant vers le problème plus général à $N_{\rm e}$ électrons en interaction locale, invariante par translation. L'ensemble des considérations précédentes nous indiquent que les deux seuls termes d'interaction possibles sont les interactions *densité de charge - densité de charge* et *densité de spin - densité de spin*. Si nous notons

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \sum_{\tau,\tau'} \psi^\dagger_\tau(\boldsymbol{x}) \mathbb{I}_{\tau,\tau'} \psi_{\tau'}(\boldsymbol{x}) \text{ et} \tag{1.28}$$

$$S^i(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} \sum_{\tau,\tau'} \psi^\dagger_\tau(\boldsymbol{x}) \sigma^i_{\tau,\tau'} \psi_{\tau'}(\boldsymbol{x}). \tag{1.29}$$

les densités de charge et de spin ($i = x, y, z$ et les σ^i sont les matrices de Pauli usuelles), l'interaction s'écrit :

$$g^{\rm c} \int {\rm d}\boldsymbol{x} \ : \rho(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x}) : + g^{\rm s} \int {\rm d}\boldsymbol{x} \ : \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) : . \tag{1.30}$$

$g^{\rm c}$ sera appelé couplage de charge, et $g^{\rm s}$ couplage de spin.

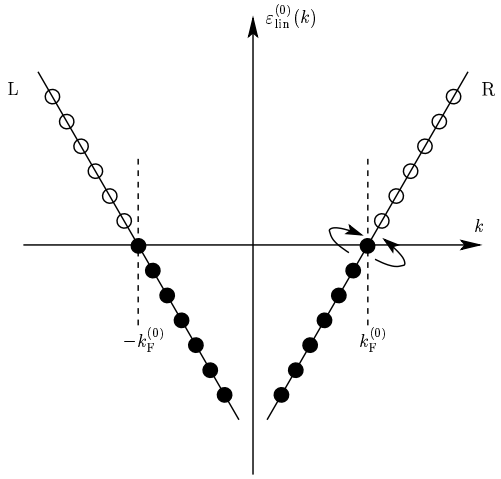
1.2.2 Forme de basse énergie

Comme discuté précédemment (cf. section 1.1.2), à basse énergie le spectre est linéarisé, et on obtient des fermions R et L, le lien avec les "vrais" fermions étant : $\psi_{\rm phys}(x) = \psi_{\rm R}(x) + \psi_{\rm L}(x)$. Nous oublions volontairement les indices de spin ici pour faire simple. Pour la même raison, nous considérons des fermions en une dimension, pour n'avoir qu'une seule chaîne. Cela simplifiera par exemple la discussion sur les processus Umklapps, car il n'y a que deux points de Fermi, à $\pm k_{\rm F}$. La densité est alors une somme de 4 termes :

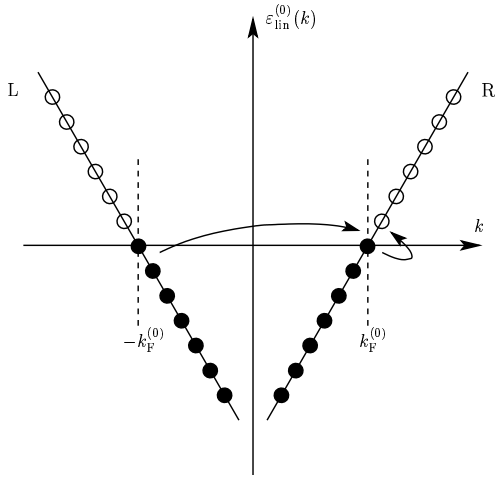
$$\rho(x) = \psi^\dagger_{\rm R}(x)\psi_{\rm R}(x) + \psi^\dagger_{\rm L}(x)\psi_{\rm L}(x) + \psi^\dagger_{\rm R}(x)\psi_{\rm L}(x) + \psi^\dagger_{\rm L}(x)\psi_{\rm R}(x) \tag{1.31}$$

Si l'on écrit maintenant le produit densité-densité, on obtiendra $2^4 = 16$ termes différents, du type (pour le terme à quatre fermions R) :

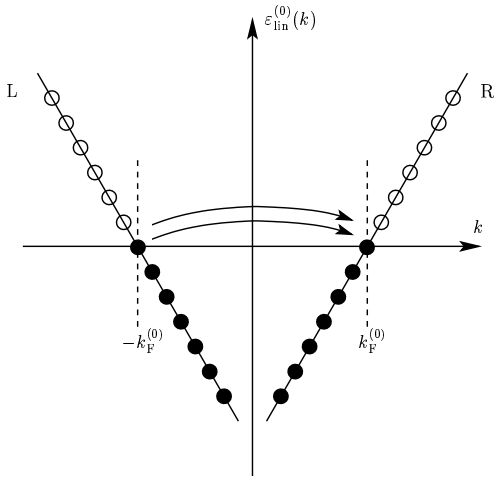
$$\frac{1}{L} \sum_{k,k',q} \sum_{m \in \mathbb{Z}} U^{(m)}_{R,R,R,R} \ c^\dagger_R(k + q + m\pi) c^\dagger_R(k' - q + m\pi) c_R(k') c_R(k). \tag{1.32}$$

Terme $c_R^\dagger c_R^\dagger c_R c_R$.	
Impulsion transférée : $(k_{\mathrm{F}}^{(0)}) + (k_{\mathrm{F}}^{(0)}) - (k_{\mathrm{F}}^{(0)}) - (k_{\mathrm{F}}^{(0)}) = 0$.	
Représentation graphique du processus	Processus "équivalents"
	$c_L^\dagger c_L^\dagger c_L c_L$

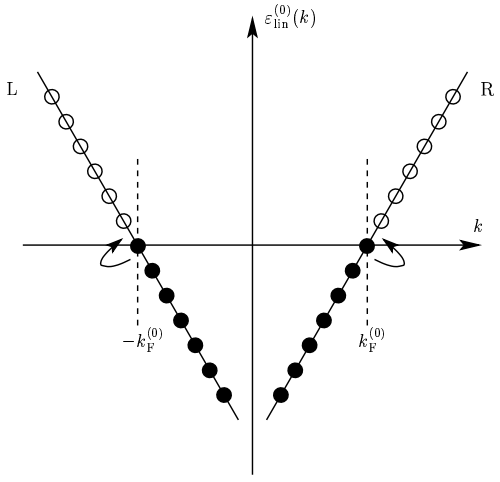
TAB. 1.1 – Processus de basse énergie de type g_4, ne faisant intervenir que des fermions droits. Ces processus existent à énergie nulle, puisque l'impulsion transférée est nulle.

Terme $c_R^\dagger c_R^\dagger c_R c_L$.	
Impulsion transférée : $(k_{\mathrm{F}}^{(0)}) + (k_{\mathrm{F}}^{(0)}) - (k_{\mathrm{F}}^{(0)}) - (-k_{\mathrm{F}}^{(0)}) = 2k_{\mathrm{F}}^{(0)}$.	
Représentation graphique du processus	Processus "équivalents"
	$c_R^\dagger c_R^\dagger c_L c_R$ $c_L^\dagger c_L^\dagger c_L c_R$ $c_L^\dagger c_L^\dagger c_R c_L$ $c_R^\dagger c_L^\dagger c_R c_R$ $c_L^\dagger c_R^\dagger c_R c_R$ $c_L^\dagger c_R^\dagger c_L c_L$ $c_R^\dagger c_L^\dagger c_L c_L$

TAB. 1.2 – Cette interaction ne peut être de basse énergie que si l'impulsion transférée, i.e. $2k_{\mathrm{F}}^{(0)}$ est un multiple de 2π, soit $k_{\mathrm{F}}^{(0)} = \pi$. Ceci correspond au remplissage complet.

Terme $c_R^\dagger c_R^\dagger c_L c_L$.	
Impulsion transférée : $(k_{\mathrm{F}}^{(0)}) + (k_{\mathrm{F}}^{(0)}) - (-k_{\mathrm{F}}^{(0)}) - (-k_{\mathrm{F}}^{(0)}) = 4k_{\mathrm{F}}^{(0)}$.	
Représentation graphique du processus	Processus "équivalents"
	$c_L^\dagger c_L^\dagger c_R c_R$

TAB. 1.3 – Processus Umklapp (g_3) envoyant deux particules gauche sur la branche de droite. Cette interaction est de basse énergie à condition que $k_{\mathrm{F}}^{(0)} = \pi/2$, c'est-à-dire si on est au demi-remplissage.

Terme $c_R^\dagger c_L^\dagger c_L c_R$.	
Impulsion transférée : $(k_{\mathrm{F}}^{(0)}) + (-k_{\mathrm{F}}^{(0)}) - (-k_{\mathrm{F}}^{(0)}) - (k_{\mathrm{F}}^{(0)}) = 0$.	
Représentation graphique du processus	Processus "équivalents"
	$c_R^\dagger c_L^\dagger c_R c_L$ $c_L^\dagger c_R^\dagger c_L c_R$ $c_L^\dagger c_R^\dagger c_R c_L$

TAB. 1.4 – Processus de diffusion vers l'avant (g_2), et processus équivalent $c_R^\dagger c_L^\dagger c_R c_L$ de diffusion vers l'arrière (g_1). Ces processus existent toujours à basse énergie.

Le paramètre m permet de prendre les processus Umklapps en compte (rappel : pas du réseau=$a = 1$).

Mais nous ne garderons pas tous les 16 termes, car nous voulons uniquement des termes de basse énergie. Le principe de Pauli, la symétrie droite-gauche ainsi que la conjugaison hermitique nous permet de n'étudier que 4 termes parmi les 16, les autres s'en déduisant facilement. Dans les tableaux 1.1, 1.2, 1.3 et 1.4 nous donnons les 4 termes (sous forme schématique, où seuls les R et L sont indiqués), les processus "équivalents" ainsi qu'une représentation graphique du processus d'interaction, où les 4 impulsions k, k', $k' - q + m\pi$ et $k + q + m\pi$ sont choisies aux points de Fermi. Nous indiquons de plus l'impulsion transférée $(k + q + m\pi) + (k' - q + m\pi) - (k') - (k)$.

Dans la suite, nous travaillerons loin du remplissage complet pour lequel le système est un isolant, donc nous laisserons les termes de type $c_R^\dagger c_R^\dagger c_R c_L$ de côté. Les processus notés g_1 et g_2 dans la terminologie de la "g-ologie", i.e. les interactions de diffusion vers l'arrière (backward scattering) et vers l'avant (forward scattering), sont à prendre en compte. Les Umklapps, notés g_3, devront être incorporés dans le Hamiltonien d'interaction si le remplissage est proche de un demi[8]. Quand aux processus dits g_4, nous verrons plus tard (cf section 2.3.2) qu'ils restent finis dans le RG à une boucle, et sont donc des termes correctifs, que nous les négligerons.

Il nous reste finalement à voir à quoi ressemble l'interaction de basse énergie, pour le problème à N chaînes. Nous supposerons, comme précédemment, que l'interaction est locale, dans la direction parallèle aux chaînes. Nous n'émettrons par contre aucune hypothèse en ce qui concerne la direction transverse (nous verrons que même si on part d'une interaction locale, le RG donne une non localité, d'où la nécessité de garder des notations générales). On a cette fois la liberté de changer les indices de couleur, avec cependant une règle de conservation. En effet, il ne faut pas oublier que la couleur était, à l'origine, l'impulsion selon la direction transverse, et celle-ci est conservée, tout comme l'impulsion longitudinale, à un vecteur du réseau réciproque près. Dans le langage des chaînes numérotées de 1 à N, cette relation de conservation est plus simplement la conservation de la somme des couleurs, modulo N.

Remarquons aussi que si la surface de Fermi n'est pas strictement plate, la grande majorité des couplages retenus ci-dessous n'existeront pas à une énergie strictement nulle, comme c'était le cas pour un système unidimensionnel. Il ne faut toutefois pas négliger de tels couplages, car nous verrons que la surface de Fermi se déformera sous l'effet des interactions, dans le sens d'un aplatissement. Par conséquent, le critère de sélection des couplages par rapport à la surface de Fermi nue, doit être assoupli pour prendre en compte les couplages qui peuvent exister à énergie nulle, pour la surface de Fermi habillée. Nous obtenons donc au final le Hamiltonien d'interaction suivant :

$$H_{\text{int}} = H_{\text{int}}^{(G)} + H_{\text{int}}^{(U)}, \text{ avec :} \tag{1.33}$$

[8]Les Umklapps peuvent aussi jouer au quart remplissage, mais dans ce cas, il faut faire intervenir une suite de quatre interactions, faisant passer quatre électrons de la branche gauche à la branche droite. Nous ne nous préoccuperons pas de ce phénomène dans ce travail.

$$H_{\rm int}^{(G)} = \frac{1}{NL}\sum_{I,J,\delta}\sum_{k,k',q}\sum_{\tau,\tau'}\sum_{\rho,\rho'} \tag{1.34}$$

$$\left\{ G_\delta^{\rm c}(I,J)\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'}\ c^\dagger_{{\rm R},I+\delta,\tau}(k+q)c^\dagger_{{\rm L},J-\delta,\rho}(k'-q)c_{{\rm L},J,\rho'}(k')c_{{\rm R},I,\tau'}(k) + \right.$$

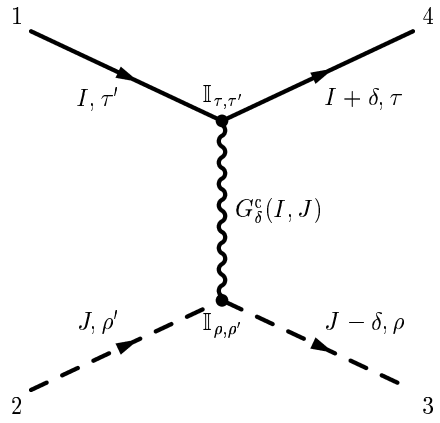
$$\left. G_\delta^{\rm s}(I,J)\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}\ c^\dagger_{{\rm R},I+\delta,\tau}(k+q)c^\dagger_{{\rm L},J-\delta,\rho}(k'-q)c_{{\rm L},J,\rho'}(k')c_{{\rm R},I,\tau'}(k) \right\}$$

$$H_{\rm int}^{(U)} = \frac{1}{2NL}\sum_{I,J,\delta}\sum_{k,k',q}\sum_{\tau,\tau'}\sum_{\rho,\rho'} \tag{1.35}$$

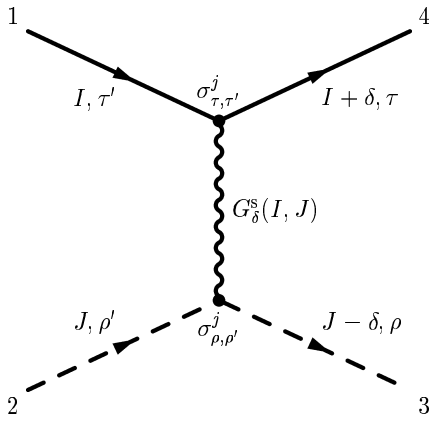
$$\left\{ U_\delta(I,J)\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'}\ c^\dagger_{{\rm R},I+\delta,\tau}(k+q)c^\dagger_{{\rm R},J-\delta,\rho}(k'-q)c_{{\rm L},J,\rho'}(k')c_{{\rm L},I,\tau'}(k) + \text{ h. c. } \right\}.$$

Le premier terme (couplages de charge et de spin $G^{\rm c}$ et $G^{\rm s}$) contient les g_1 et les g_2, tandis que le deuxième terme (couplages U) contient les Umklapps. Tous les couplages écrits ici sont réels. L'hermiticité est assurée dans le cas des Umklapps, puisqu'on ajoute l'hermitique conjugué, par contre pour les autres couplages, elle impose que $G_\delta^{\rm c(s)}(I,J) = G_{-\delta}^{\rm c(s)}(J,I)$. Une telle relation est aussi valable dans le cas des Umklapps, à savoir $U_\delta(I,J) = U_{-\delta}(J,I)$, puisque les deux fermions R, ainsi que les deux L, jouent des rôles parfaitement symétriques dans le terme d'interaction Umklapp. L'interaction $U_\delta(I,J)$ est donc présente deux fois, le facteur $1/2$ en tient compte. Nous n'avons pas utilisé un couplage de charge $U^{\rm c}$ et un couplage de spin $U^{\rm s}$ pour les Umklapps. La justification détaillée de ceci est donnée dans l'annexe A (cf section A.2), consacrée aux différentes paramétrisations possibles des interactions dont nous aurons besoin. Par exemple, pour les fonctions de réponses, c'est plutôt une paramétrisation en singulet-triplet qui est intéressante, et non charge-spin. On trouvera aussi dans cette annexe le dictionnaire de passage entre nos notations et celles de la g-ologie. Nous avons préféré consacrer une annexe à ce problème, plutôt que de délayer les différentes notations à divers endroits. En ce qui concerne les Umklapps, disons simplement ici que les couplages de charge et de spin sont redondants, à cause du principe de Pauli (les deux fermions détruits sont sur la même branche, ainsi que les deux créés).

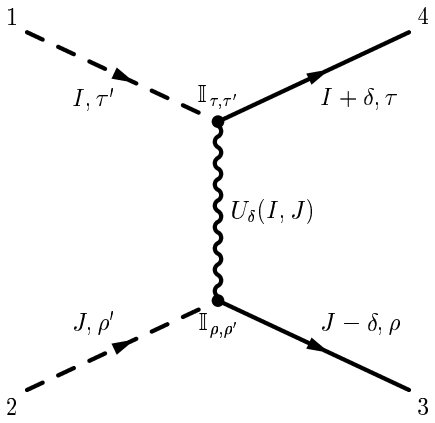
Comme il est habituel en théorie des champs, nous associons un graphe de Feynman à chaque interaction (cf 2.1 pour plus de détails). Ceux-ci sont représentés figure 1.5. Nous avons ici représenté l'interaction par une ligne ondulée. A côté de celle-ci nous écrivons de quel type d'interaction il s'agit, mais nous ne mettons aucun préfacteur numérique (qu'il faudra prendre en compte au moment où on associe une expression à un graphe). Nous avons aussi représenté 4 exemples de processus d'interaction sur la figure 1.6, afin de rendre nos notations un peu plus concrètes.



(a) Terme G^{c}

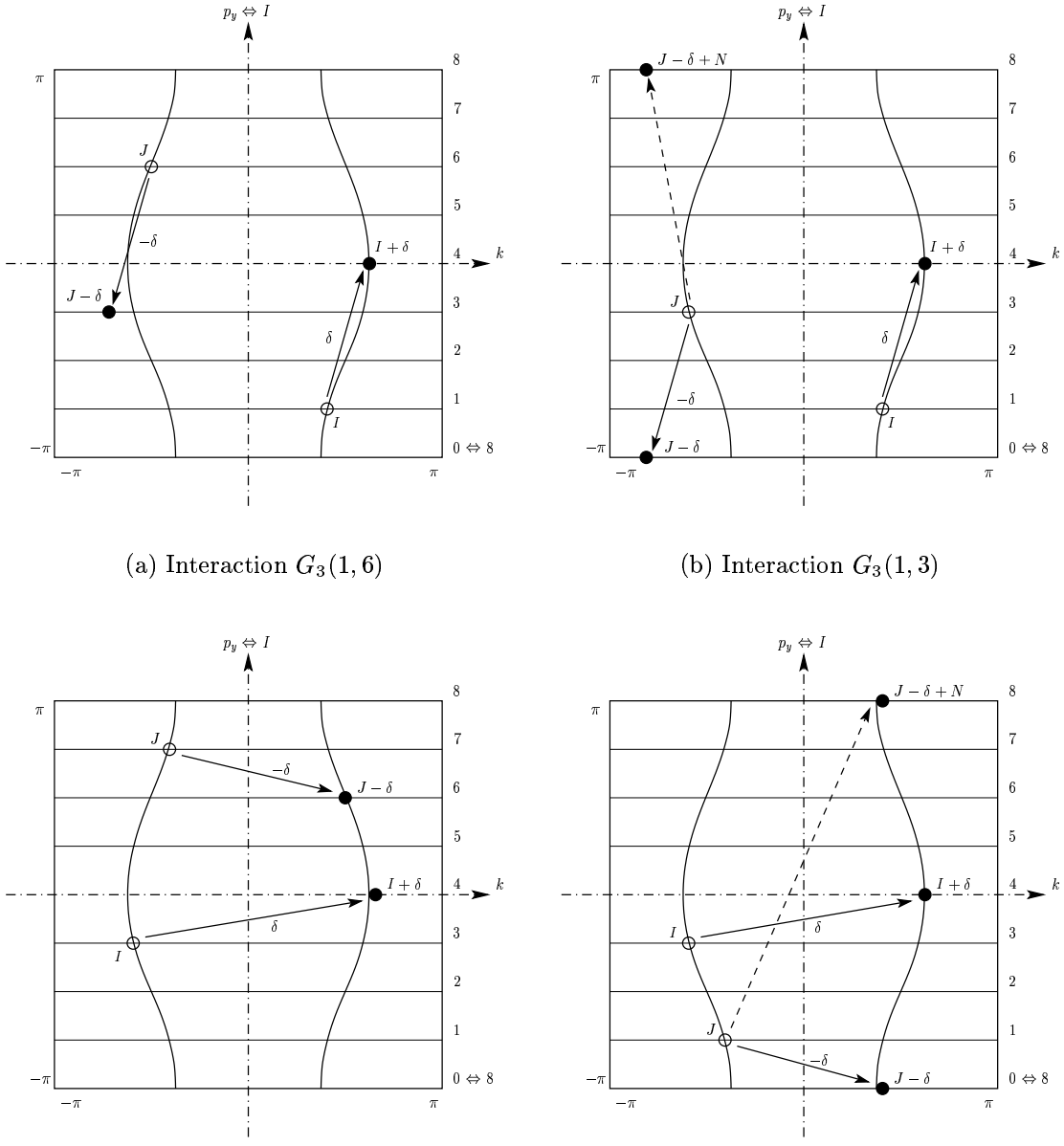


(b) Terme G^{s}



(c) Terme U

Fig. 1.5 – Diagrammes de Feynman pour les trois types d'interactions. Les traits pleins représentent des fermions R, et les pointillés des fermions L. Les chiffres 1, 2, 3 et 4 correspondent à des interactions écrites sous la forme (schématique) : $c_4^\dagger c_3^\dagger c_2 c_1$.



(a) Interaction $G_3(1,6)$

(b) Interaction $G_3(1,3)$

(c) Interaction $U_1(3,7)$

(d) Interaction $U_{-1}(3,1)$

Fig. 1.6 – Représentation, dans la première zone de Brillouin, de quatre exemples d'interactions, pour $N = 8$ chaînes. Les flèches en pointillés montrent comment exploiter la périodicité de la zone de Brillouin, i.e. travailler avec les entiers modulo N.

Chapitre 2

Groupe de Renormalisation à deux boucles pour les fermions en une dimension

Nous allons, dans ce chapitre, dériver les équations du Groupe de Renormalisation dans sa version de théorie des champs, à 2 boucles, pour des fermions en une dimension. Nous travaillerons uniquement avec le formalisme à température nulle. Nous le ferons pour une seule espèce de fermions, sans spin et avec spin. Le but de ce chapitre est de montrer comment donner un sens à la théorie des perturbations sur un cas simple et connu. Ce sera la base de tout le reste de notre travail, en particulier la renormalisation de la surface de Fermi. Nous allons à l'ordre de 2 boucles, non pour le plaisir de faire des calculs, mais car cela nous permettra de comprendre pourquoi nous pourrons nous permettre de ne pas calculer l'ensemble des diagrammes à deux boucles, pour la renormalisation de la surface de Fermi. Cela nous permettra aussi de vérifier en passant la nullité de la fonction β pour le couplage de charge.[1] Nous introduisons de plus la notion de contre-terme (d'une façon que nous espérons pédagogique), qui sera nécessaire pour l'étude des déformations de la surface de Fermi. Ce chapitre est principalement destiné aux débutants (connaissant les bases de théorie des champs) désireux d'apprendre le RG dans sa version théorie des champs, pour les fermions, ce qui explique en partie le choix de détailler tous les graphes de Feynman.

[1] Ce résultat est exact à tous les ordres dans le cas des fermions sans spin [GL72]. Dans le cas des fermions de spin 1/2, ceci est aussi vrai, au moins à 3 boucles, comme cela a été vérifié explicitement dans [RST79]. Dans cette dernière référence, il est fait mention de ce résultat comme d'un théorème vrai à tous les ordres, mais aucune référence n'est donnée. Je n'ai pas réussi à trouver l'article dans lequel ce théorème est démontré.

2.1 La théorie des perturbations et ses divergences à une boucle

2.1.1 Modèle utilisé

Nous reprenons le modèle du chapitre 1, à la limite continue, mais avec une seule espèce de fermions (i.e. avec un seul indice de couleur I, que nous n'indiquerons donc plus). Nous allons pour l'instant uniquement considérer des fermions sans spin. L'incorporation de la physique du spin, qui n'est pas très compliquée mais qui alourdit les notations, est reportée à plus tard, à la sous-section 2.1.3. Nous supposerons de plus que le remplissage est suffisamment loin de la valeur 1/2, afin de pouvoir négliger les Umklapps, dans un but de simplicité.

Nous avons donc un Hamiltonien cinétique qui vaut simplement (cf équation (1.10)) :

$$H_0 = \sum_k \left\{ \left[\mu^{(0)} + v_{\mathrm{F}}^{(0)}(k - k_{\mathrm{F}}^{(0)})\right] c_{\mathrm{R}}^\dagger(k) c_{\mathrm{R}}(k) + \left[\mu^{(0)} - v_{\mathrm{F}}^{(0)}(k + k_{\mathrm{F}}^{(0)})\right] c_{\mathrm{L}}^\dagger(k) c_{\mathrm{L}}(k) \right\}. \tag{2.1}$$

La somme sur k porte toujours sur les multiples de $\frac{2\pi}{L}$, L étant la taille du système. Ce serait une intégrale à la limite thermodynamique. Le Hamiltonien d'interaction, puisque nous ne considérons pas les Umklapps, ni le spin, est (cf équation (1.33)) :

$$H_{\mathrm{int}} = \frac{g_{\mathrm{B}}}{L} \sum_{k,k',q} c_{\mathrm{R}}^\dagger(k+q) c_{\mathrm{L}}^\dagger(k'-q) c_{\mathrm{L}}(k') c_{\mathrm{R}}(k). \tag{2.2}$$

L'indice B de g_{B}, qui est la première lettre de Bare en Anglais, nous rappelle que g_{B} est la constante de couplage nue (de haute énergie), autrement dit non renormalisée.

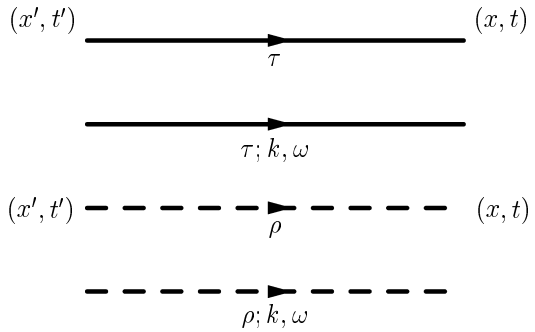


Fig. 2.1 – Propagateurs libres dans l'espace réel ainsi que dans l'espace de Fourier. Les propagateurs R sont représentés par des traits pleins, et les L par des pointillés. Les indices τ et ρ sont des indices de spin.

Les propagateurs libres des fermions R et L, dans l'espace réel, sont par définition :

$$G_R^{(0)}(x,t;x',t') = \frac{1}{\mathrm{i}}\,{}_0\langle 0|\mathrm{T}\left[\psi_\mathrm{R}(x,t)\psi_\mathrm{R}^\dagger(x',t')\right]|0\rangle_0, \text{ et} \tag{2.3}$$

$$G_L^{(0)}(x,t;x',t') = \frac{1}{\mathrm{i}}\,{}_0\langle 0|\mathrm{T}\left[\psi_\mathrm{L}(x,t)\psi_\mathrm{L}^\dagger(x',t')\right]|0\rangle_0. \tag{2.4}$$

Dans les deux équations ci-dessus, $|0\rangle_0$ est le ket d'état de l'état fondamental libre (i.e. la mer de Fermi libre). T est le T-produit, c'est-à-dire qu'il ordonne (de la droite vers la gauche) les opérateurs de création et d'annihilation dans le sens des temps croissants (avec un signe moins à chaque anticommutation de deux opérateurs fermioniques). Pour un système invariant par translation dans le temps et dans l'espace, comme celui que nous considérons, les propagateurs ne dépendent que des différences des temps et des positions : $G_{\mathrm{R,L}}^{(0)}(x,t;x',t') = G_{\mathrm{R,L}}^{(0)}(x-x',t-t')$. Nous utiliserons aussi les propagateurs dans l'espace de Fourier. Dans toute l'utilisation que nous en ferons, à savoir l'évaluation des graphes de Feynman de la théorie des perturbations, nous supposerons que le système est suffisamment grand pour pouvoir utiliser la limite thermodynamique. Nous avons donc :

$$G_{\mathrm{R,L}}^{(0)}(k,\omega) = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}x\; e^{-\mathrm{i}(kx-\omega t)} G_{\mathrm{R,L}}^{(0)}(x,t), \text{ et} \tag{2.5}$$

$$G_{\mathrm{R,L}}^{(0)}(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\; e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} G_{\mathrm{R,L}}^{(0)}(k,\omega). \tag{2.6}$$

Nous associons une notation graphique, i.e. un graphe de Feynman à chacun de ces propagateurs, comme indiqué dans la figure 2.1. Nous avons indiqué les indices de spin (τ et ρ), mais ceux-ci sont à oublier pour l'instant. Nous les laisserons d'ailleurs sur tous les graphes de Feynman que nous dessinerons, et devront être omis tant que nous ne parlerons pas du spin. Les propagateurs libres dans l'espace de Fourier ont une expression simple (voir par exemple le livre d'Abrikosov et al [AGD63]) :

$$G_\mathrm{R}^{(0)}(k,\omega) = \frac{1}{\omega - \left[\mu^{(0)} + v_\mathrm{F}^{(0)}(k-k_\mathrm{F}^{(0)})\right] + \mathrm{i}\eta\,\mathrm{sgn}(k-k_\mathrm{F}^{(0)})}, \text{ et} \tag{2.7}$$

$$G_\mathrm{L}^{(0)}(k,\omega) = \frac{1}{\omega - \left[\mu^{(0)} - v_\mathrm{F}^{(0)}(k+k_\mathrm{F}^{(0)})\right] - \mathrm{i}\eta\,\mathrm{sgn}(k+k_\mathrm{F}^{(0)})}. \tag{2.8}$$

Enfin, nous associons aussi un graphe de Feynman à l'interaction. Nous représenterons simplement l'interaction par un rond noir, sans mettre de ligne ondulée comme au 1.2.2. Ceci est indiqué sur la figure 2.2. La raison pour laquelle nous ne mettons pas de ligne ondulée est la suivante. La ligne ondulée permet de savoir quel fermion est transformé en quel fermion, i.e., dans une interaction de type $c_4^\dagger c_3^\dagger c_2 c_1$, 1 devient 4, et 2 devient 3. Il était nécessaire à propos des Umklapps, pour lesquels 3 et 4, ainsi que 1 et 2, n'étaient pas distinguables par leur chiralité, de montrer explicitement ce qui se passait. Mais pour les interactions auxquelles nous nous sommes limités ici, il est clair que le seul fermion R qui arrive au vertex d'interaction est transformé en le seul fermion R qui en part.

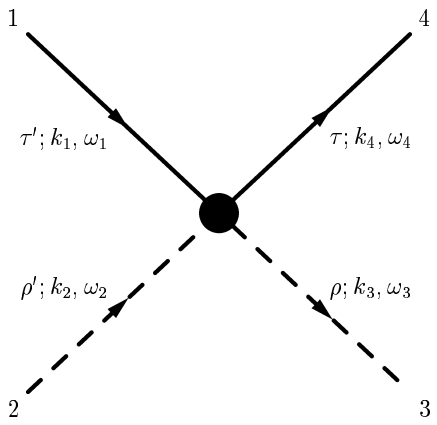


Fig. 2.2 – Représentation de l'interaction.

2.1.2 Mise en œuvre simpliste de la théorie des perturbations

Nous voulons obtenir des expressions perturbatives pour deux quantités[2] : les propagateurs habillés (autrement dit les fonctions de Green à 2 points) et les fonctions de Green à 4 points, définis ci-dessous :

$$G_{\mathrm{R,L}}(X, X') = \frac{1}{\mathrm{i}}\langle 0|\mathrm{T}\left[\psi_{\mathrm{R,L}}(X)\psi^{\dagger}_{\mathrm{R,L}}(X')\right]|0\rangle, \text{ et} \tag{2.9}$$

$$G^{I\!I}(X_4, X_3, X_2, X_1) = -\langle 0|\mathrm{T}\left[\psi_{\mathrm{R}}(X_4)\psi_{\mathrm{L}}(X_3)\psi^{\dagger}_{\mathrm{L}}(X_2)\psi^{\dagger}_{\mathrm{R}}(X_1)\right]|0\rangle. \tag{2.10}$$

Dans les équations ci-dessus, $|0\rangle$ est le fondamental en interaction. Nous avons de plus utilisé un raccourci de notation : $X = (x, t)$. Dans tout ce qui suit, nous considérerons en général plutôt les transformées de Fourier de ces quantités.

Le calcul perturbatif de ces fonctions de Green, est basé sur la formule de Gell-Mann et Low (voir l'article original [GML51] et aussi [AGD63]) :

$$\langle 0|T\left(A^{(n)}_{\mathrm{H}}(t_n)\dots A^{(1)}_{\mathrm{H}}(t_1)\right)|0\rangle = \frac{{}_0\langle 0|\mathrm{T}\left[A^{(n)}_{\mathrm{I}}(t_n)\dots A^{(1)}_{\mathrm{I}}(t_1)S(+\infty,-\infty)\right]|0\rangle_0}{{}_0\langle 0|S(+\infty,-\infty)|0\rangle_0}, \tag{2.11}$$

avec :

$$S(+\infty,-\infty) = \mathrm{T}\exp\left(-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t H_{\mathrm{int,I}}(t)\right). \tag{2.12}$$

Les indices H et I indiquent si les opérateurs A sont utilisés dans la représentation de Heisenberg ou d'interaction.

Commençons par l'application de cette formule au propagateur droit. A l'ordre 0 en la constante de couplage (ou à 0 boucle ici), on retrouve bien évidemment le

[2]Nous ne cherchons pas à calculer les autres fonctions de Green, à plus de points, car celles-ci ne divergent pas. Il est en effet facile de montrer que le degré superficiel de divergence d'un graphe à E pattes externes, en dimension 2, est : $2 - E/2$, qui n'est positif ou nul que pour $E = 2$ et $E = 4$.

propagateur libre. Le terme à une boucle vaut, si on appelle Y le point d'espace-temps du vertex :

$$\frac{1}{\mathrm{i}}(-\mathrm{i}g_{\mathrm{B}})\int \mathrm{d}^2Y\,{}_0\langle 0|\mathrm{T}\left[\psi_{\mathrm{R}}(X)\psi_{\mathrm{R}}^\dagger(X')\left(\psi_{\mathrm{R}}^\dagger\psi_{\mathrm{L}}^\dagger\psi_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}}\right)_Y\right]|0\rangle_0. \tag{2.13}$$

Comme cela est bien connu, grâce à la présence du dénominateur dans l'équation (2.11), seul les termes connexes survivent et nous nous limitons donc à l'évaluation de ceux-ci. La contraction de Wick correspondante est indiquée sur la figure 2.3. Les

$$\overbrace{\psi_{\mathrm{R}}(X)\psi_{\mathrm{R}}^\dagger(X')}\left(\overbrace{\psi_{\mathrm{R}}^\dagger\psi_{\mathrm{L}}^\dagger}\overbrace{\psi_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}}}\right)_Y$$

Fig. 2.3 – Exemple de contraction de Wick

anticommutations d'opérateurs contractés, pour les mettre côte à côte, et dans l'ordre annihilation-création, donnent un signe moins. Il faut introduire un facteur $1 = \mathrm{i}^3(1/\mathrm{i})^3$ afin d'obtenir les 1/i présents dans les définitions des propagateurs. Au final, nous obtenons[3] :

$$-\mathrm{i}g_{\mathrm{B}}\int \mathrm{d}^2Y G_{\mathrm{R}}^{(0)}(X-Y)G_{\mathrm{R}}^{(0)}(Y-X')G_{\mathrm{L}}^{(0)}(Y^- - Y^+). \tag{2.14}$$

En Fourier ceci se lit :

$$G_{\mathrm{R}}^{(0)}(k,\omega)\left[g_{\mathrm{B}}\int\frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}\omega_q}{2\mathrm{i}\pi}G_{\mathrm{L}}^{(0)}(q,\omega_q)e^{\mathrm{i}\omega_q 0^+}\right]G_{\mathrm{R}}^{(0)}(k,\omega), \tag{2.15}$$

où il faut comprendre que k, q et ω sont les impulsions et énergies mesurées relativement à $k_{\mathrm{F}}^{(0)}$, $-k_{\mathrm{F}}^{(0)}$ et $\mu^{(0)}$. Ainsi, nous aurions par exemple dû écrire $G_{\mathrm{R}}^{(0)}(k+k_{\mathrm{F}}^{(0)},\omega+\mu^{(0)})$ et non[4] $G_{\mathrm{R}}^{(0)}(k,\omega)$. Le graphe de Feynman associé, appelé tadpole dans la littérature, est indiqué sur la figure 2.4.

Avant de passer à l'évaluation numérique de (2.15), faisons une remarque. Nous avons dans cette expression bien mis en évidence deux propagateurs R $G_{\mathrm{R}}^{(0)}(k,\omega)$ à gauche et à droite. Nous pourrons le faire pour tous les graphes qui apparaîtront dans le calcul du propagateur. En fait, si l'on ne considère que les graphes 1PI (une particule irréductible), et qu'on les ampute des pattes externes, on obtient la self-énergie. C'est

[3] Le terme $Y^- - Y^+$ dans lequel $Y^\pm = (y, t^\pm)$ et que l'on trouve en raisonnant trop simplement égal à 0, est nécessaire pour le passage dans le monde de Fourier, afin d'obtenir une intégrale convergente. La justification de ce terme est simple : puisque les formules font apparaître le T-produit, et que nous avons un problème aux instants coïncidents, il faut par exemple réécrire l'interaction (en "splittant" le temps) sous la forme : $\psi_{\mathrm{R}}^\dagger(t+2\varepsilon)\psi_{\mathrm{L}}^\dagger(t+\varepsilon)\psi_{\mathrm{L}}(t-\epsilon)\psi_{\mathrm{R}}(t-2\epsilon)$, et considérer la limite $\varepsilon\to 0^+$.

[4] Nous utiliserons souvent cet abus de notation afin d'alléger les équations, mais nous ne le ferons pas toujours. Cela ne devrait toutefois pas poser trop de problème de compréhension.

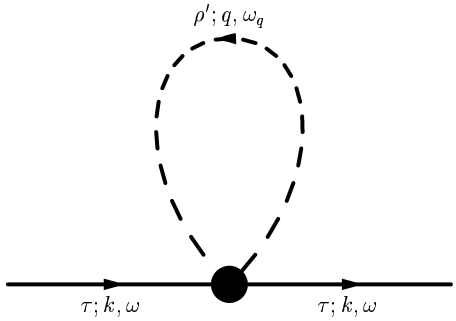


Fig. 2.4 – Graphe de Feynman, dit tadpole, pour le propagateur R à une boucle.

cet objet (et non le propagateur dans sa totalité) que nous calculerons dorénavant. Le lien entre tous ces objets est l'équation de Dyson :

$$G_{\mathrm{R,L}}(k,\omega) = \frac{G^{(0)}_{\mathrm{R,L}}(k,\omega)}{1 - G^{(0)}_{\mathrm{R,L}}(k,\omega)\Sigma_{\mathrm{R,L}}(k,\omega)}, \text{ ou } G^{-1}_{\mathrm{R,L}}(k,\omega) = {G^{(0)}_{\mathrm{R,L}}}^{-1}(k,\omega) - \Sigma_{\mathrm{R,L}}(k,\omega). \tag{2.16}$$

Graphiquement, si l'on représente les propagateurs habillés par des doubles lignes, et la self-énergie par un rond marqué Σ, cette équation devient l'équation graphique de la figure 2.5 (pour les fermions R).

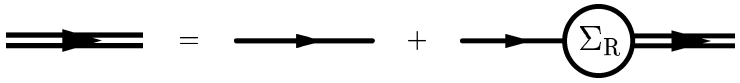


Fig. 2.5 – Equation de Dyson graphique, pour les fermions R.

L'évaluation de la self-énergie dans (2.15) est aisée. L'intégrale sur ω_q est calculée par la méthode des résidus. C'est ici que le terme $e^{\mathrm{i}\omega_q 0^+}$ joue son rôle : il nous indique de compléter l'intégrale sur $\mathbb{R}$ avec un contour dans le demi-plan complexe supérieur, afin que l'exponentielle tende vers 0 quand la partie imaginaire de ω_q tend vers l'infini. Ainsi :

$$\int_{\mathcal{C}^+} \frac{\mathrm{d}\omega_q}{2\mathrm{i}\pi} \frac{e^{\mathrm{i}\omega_q 0^+}}{\omega_q + v^{(0)}_{\mathrm{F}} q - \mathrm{i}\eta\,\mathrm{sgn}(q)} = n^{(0)}_{\mathrm{L}}(q), \tag{2.17}$$

où $n^{(0)}_{\mathrm{L}}(q)$ est la distribution de particules dans l'état fondamental, pour les fermions L, et vaut 1 si $q \geqslant 0$ et 0 sinon. Nous obtenons donc la contribution suivante à la self-énergie :

$$\Sigma^{(1)}_{\mathrm{R}}(k,\omega) = g_{\mathrm{B}} \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} n^{(0)}_{\mathrm{L}}(q), \tag{2.18}$$

c'est-à-dire une quantité infinie, puisque dans le modèle que nous considérons les branches droite et gauche sont infinies et contiennent donc une infinité de particules dans l'état fondamental. Il nous faut donc régulariser la théorie. Nous utiliserons pour

cela un cut-off (une coupure) Λ : nous supposerons que les seuls états accessibles au système sont ceux situés à une distance au plus égale à Λ des points de Fermi. Cette hypothèse est physiquement raisonnable, car dans les systèmes physiques, l'inverse du pas du réseau ($2\pi/a$) joue le rôle de cut-off. On parle de cut-off ultra-violet (UV) car on a coupé les hautes énergies. Anticipons un peu et disons que le but du RG est de se débarrasser du cut-off que l'on a envie de faire tendre vers l'infini, afin d'obtenir une théorie dans le continu. La nécessité d'introduire le cut-off nous montre qu'il n'est pas aussi simple que nous aurions pu le croire de passer d'une théorie sur réseau à une théorie continue, car il est nécessaire de réintroduire une "taille de réseau", le cut-off. Nous avons représenté la façon dont nous mettons le cut-off sur la figure 2.6. Nous

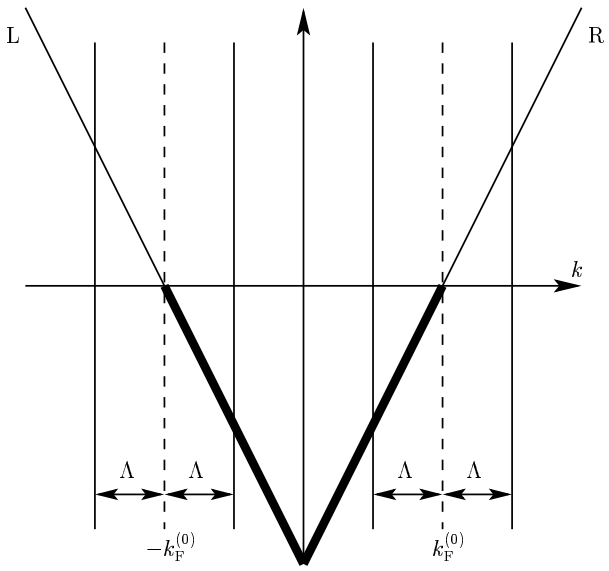


Fig. 2.6 – Sur cette figure, nous indiquons la façon dont nous régularisons la théorie en mettant un cut-off Λ.

obtenons alors un résultat fini pour la self-énergie :

$$\Sigma_{\mathrm{R}}^{(1)}(k,\omega) = g_{\mathrm{B}}\frac{\Lambda}{2\pi}. \tag{2.19}$$

Cette self-énergie est indépendante de k et de ω. Il est facile de voir que l'on obtient exactement la même expression pour les fermions L.

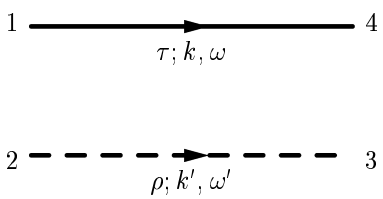


Fig. 2.7 – Ordre 0 pour la fonction de Green G^{II}

Passons maintenant à la deuxième fonction de Green, celle à quatre points. A l'ordre 0, nous obtenons simplement $G_{\mathrm{R}}^{(0)}(X4-X1)G_{\mathrm{L}}^{(0)}(X3-X2)$, représenté graphiquement sur la figure 2.7 dans l'espace de Fourier. A l'ordre 1, nous obtenons :

$$-(-\mathrm{i}g_{\mathrm{B}})\int \mathrm{d}^2Y\,{}_0\langle 0|\mathrm{T}\left[\psi_{\mathrm{R}4}\psi_{\mathrm{L}3}\psi^\dagger_{\mathrm{L}2}\psi^\dagger_{\mathrm{R}1}\left(\psi^\dagger_{\mathrm{R}}\psi^\dagger_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}}\right)_Y\right]|0\rangle_0, \tag{2.20}$$

avec des notations évidentes. Nous obtenons donc un seul terme, et après avoir effectué les contractions de Wick et tenu compte des signes, on trouve :

$$\mathrm{i}g_{\mathrm{B}}\int \mathrm{d}^2Y G_{\mathrm{R}}^{(0)}(X_4-Y)G_{\mathrm{L}}^{(0)}(X_3-Y)G_{\mathrm{R}}^{(0)}(Y-X_2)G_{\mathrm{R}}^{(0)}(Y-X_1). \tag{2.21}$$

La transformée de Fourier de $G^{I\!I}$ se déduit alors facilement, et on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{i}g_{\mathrm{B}}2\pi\delta(w_4+w_3-w_2-w_1)2\pi\delta(k_4+k_3-k_2-k_1)\\ \times G_{\mathrm{R}}^{(0)}(k_4,\omega_4)G_{\mathrm{L}}^{(0)}(k_3,\omega_3)G_{\mathrm{L}}^{(0)}(k_2,\omega_2)G_{\mathrm{R}}^{(0)}(k_1,\omega_1).\end{aligned} \tag{2.22}$$

Comme il est habituel, on définit le vertex à 4 points (l'"équivalent" de la self-énergie) dans l'espace de Fourier comme suit. C'est la fonction de Green $G^{I\!I}$, calculée sans tenir compte de l'ordre 0, puis amputée des propagateurs externes habillés, et divisé par le facteur i. On obtient à chaque fois des facteurs $2\pi\delta$ qui traduisent la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Nous les supprimerons aussi, et calculerons le vertex pour des énergie-impulsion externes vérifiant ces relations de conservation. A l'ordre 1, il ne reste donc plus que g_B. Nous désignerons le vertex par la lettre Γ, et nous pouvons donc résumer le calcul à l'ordre 1 (0 boucle) par :

$$\Gamma^{(1)}(K_1,K_2,K_3,K_4=K_1+K_2-K_3)=g_{\mathrm{B}}. \tag{2.23}$$

La représentation en terme de graphe de Feynman n'est rien d'autre que la figure 2.2 page 40 que nous avons déjà vue. L'intérêt du vertex est qu'il donne la constante de couplage nue, à l'ordre 1, et qu'à un ordre plus élevé, il pourra être interprété comme un couplage effectif de basse énergie.

Passons maintenant à l'ordre 2 en constante de couplage, c'est-à-dire à 1 boucle, et calculons le vertex. Dans l'espace réel, le terme d'ordre 2 dans le développement perturbatif de $G^{I\!I}$ est :

$$-\frac{1}{2}(-\mathrm{i}g_{\mathrm{B}})^2\int \mathrm{d}^2Y_1\mathrm{d}^2Y_2\,{}_0\langle 0|\mathrm{T}\left[\psi_{\mathrm{R}4}\psi_{\mathrm{L}3}\psi^\dagger_{\mathrm{L}2}\psi^\dagger_{\mathrm{R}1}\left(\psi^\dagger_{\mathrm{R}}\psi^\dagger_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}}\right)_{Y_1}\left(\psi^\dagger_{\mathrm{R}}\psi^\dagger_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}}\right)_{Y_2}\right]|0\rangle_0. \tag{2.24}$$

Nous devons ici aussi ne considérer que les contractions de Wick qui donnent des graphes connexes, et elles sont ici au nombre de 2. Nous obtenons les graphes particule-particule (pp) et particule-trou (pt)[5], que nous indiquons sur les figures 2.8 et 2.9, ainsi

[5]Ces dénominations proviennent du fait que dans la boucle, appelée aussi à l'ordre 1, la bulle, si les flèches des deux propagateurs vont dans le même sens, on a la propagation de deux excitations du même type (particule-particule ou trou-trou), alors que dans le cas contraire, les deux excitations sont de type contraire (particule-trou ou trou-particule)

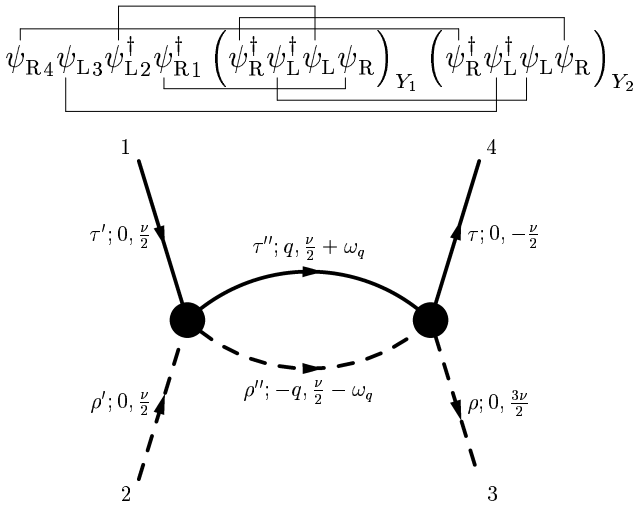


Fig. 2.8 – Bulle particule-particule, et contractions de Wick correspondantes.

que les contractions correspondantes[6]. Notons que les graphes de Feynman sont donnés dans l'espace de Fourier. De plus, nous anticipons ici encore sur la suite (i.e. le RG, cf la note de bas de page numéro 11), et nous ne calculons pas le vertex pour un jeu quelconque d'énergies-impulsions externes, mais nous mettons toutes les impulsions à la surface de Fermi, et nous prenons les énergies externes suivantes :

$$\omega_1 = \frac{\nu}{2}, \quad \omega_2 = \frac{\nu}{2}, \quad \omega_3 = \frac{3\nu}{2}, \quad \text{et } \omega_4 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 = -\frac{\nu}{2}. \tag{2.25}$$

ν est l'énergie typique à laquelle l'interaction a lieu. Les permutations nécessaires donnent dans les deux cas un signe plus. En introduisant un facteur $1 = \mathrm{i}^6(1/\mathrm{i})^6$ pour obtenir des propagateurs, en amputant des pattes externes et en divisant par i, on obtient au final les contributions suivantes au vertex pour les deux canaux pp et pt :

$$\text{(pp)} \quad : \quad -{g_{\mathrm{B}}}^2 \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}\omega_q}{2\mathrm{i}\pi} G^{(0)}_{\mathrm{R}}(q, \frac{\nu}{2} + \omega_q) G^{(0)}_{\mathrm{L}}(-q, \frac{\nu}{2} - \omega_q), \tag{2.26}$$

$$\text{(pt)} \quad : \quad -{g_{\mathrm{B}}}^2 \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}\omega_q}{2\mathrm{i}\pi} G^{(0)}_{\mathrm{R}}(q, \frac{\nu}{2} + \omega_q) G^{(0)}_{\mathrm{L}}(q, \frac{3\nu}{2} + \omega_q). \tag{2.27}$$

La première étape pour évaluer ces expressions est de remplacer les propagateurs par leurs expressions, et d'effectuer l'intégrale sur ω_q par la méthode des résidus. Les deux contributions se réécrivent ainsi :

$$\text{(pp)} \quad : \quad {g_{\mathrm{B}}}^2 \left[\int_{q \geqslant 0} \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \frac{1}{\nu - 2v^{(0)}_{\mathrm{F}} q + \mathrm{i}\eta} - \int_{q \leqslant 0} \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \frac{1}{\nu - 2v^{(0)}_{\mathrm{F}} q - \mathrm{i}\eta} \right], \tag{2.28}$$

$$\text{(pt)} \quad : -{g_{\mathrm{B}}}^2 \left[\int_{q \geqslant 0} \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \frac{1}{\nu - 2v^{(0)}_{\mathrm{F}} q + \mathrm{i}\eta} - \int_{q \leqslant 0} \frac{\mathrm{d}q}{2\pi} \frac{1}{\nu - 2v^{(0)}_{\mathrm{F}} q - \mathrm{i}\eta} \right]. \tag{2.29}$$

[6]Nous considérons le cas où l'opérateur $\psi^\dagger_{\mathrm{R}1}$ est associé à l'opérateur ψ_{R} en Y_2. La contraction avec celui en Y_1 donne une contribution identique, ce qui supprimera le facteur 1/2 de (2.24)

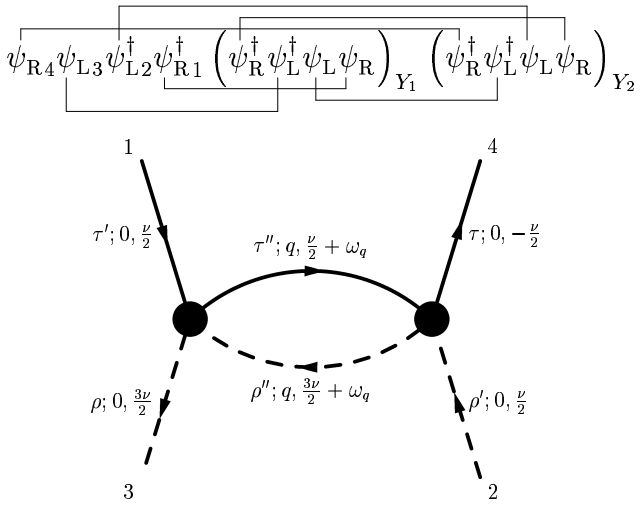


Fig. 2.9 – Bulle particule-trou, et contractions de Wick correspondantes.

Autrement dit, la contribution particule-trou est l'exact opposé (pour le jeu d'énergies-impulsions choisies !) de celle dans le canal particule-particule. Avant d'en déduire que leur somme vaut 0 (ce qui est vrai car on regarde le cas de fermions sans spin, et ce ne sera plus le cas quand interviendront des facteurs différents dans chaque canal, à cause du spin), il faut tout de même regarder ces expressions d'un peu plus près. Les intégrales dans (2.28) sont logarithmiquement divergentes. Il est nécessaire ici aussi d'introduire le cut-off UV Λ pour les régulariser. Les impulsions des propagateurs (i.e. q et $-q$) doivent être dans le domaine autorisé, ce qui nous donne les conditions : $-\Lambda \leqslant q \leqslant \Lambda$. On peut maintenant calculer (2.28) qui est finie :

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^{(1),\mathrm{pp}}(\nu) &= {g_{\mathrm{B}}}^2 \left[\int_0^\Lambda \frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\frac{1}{\nu - 2v_{\mathrm{F}}^{(0)}q + \mathrm{i}\eta} - \int_{-\Lambda}^0 \frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\frac{1}{\nu - 2v_{\mathrm{F}}^{(0)}q - \mathrm{i}\eta}\right] && (2.30)\\
&= \frac{{g_{\mathrm{B}}}^2}{4\pi v_{\mathrm{F}}^{(0)}} \ln\left[\frac{(\tilde\nu + \mathrm{i}\eta)(\tilde\nu - \mathrm{i}\eta)}{(\tilde\nu - 1 + \mathrm{i}\eta)(\tilde\nu + 1 - \mathrm{i}\eta)}\right] \text{ avec } \tilde\nu = \frac{\nu}{2v_{\mathrm{F}}^{(0)}\Lambda} && (2.31)\\
&= \frac{{g_{\mathrm{B}}}^2}{2\pi v_{\mathrm{F}}^{(0)}}\left[\ln(\tilde\nu) - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right] + O(\tilde\nu) && (2.32)\\
&= \frac{{g_{\mathrm{B}}}^2}{2\pi v_{\mathrm{F}}^{(0)}}\ln(\tilde\nu) + O(1). && (2.33)
\end{aligned}$$

Nous avons donné l'expression exacte en fonction de l'énergie adimensionnée $\tilde\nu$, ainsi que les expressions à l'ordre 1 et 0 en $\tilde\nu$, qui nous servirons pour le RG puisque le cut-off sera beaucoup plus grand que toutes les énergies du problème, en particulier ν. Retenons aussi finalement que dans le cas sans spin qui nous a préoccupé jusqu'à présent :

$$\delta\Gamma^{(1),\mathrm{pt}}(\nu) = -\delta\Gamma^{(1),\mathrm{pp}}(\nu) \Rightarrow \delta\Gamma^{(1)}(\nu) = 0. \quad (2.34)$$

Voyons maintenant la conclusion de ces calculs perturbatifs. L'équation ci-dessus

nous dit que le vertex est inchangé à l'ordre de 1 boucle, et le vertex habillé est donc égal au vertex nu, i.e. à $g_{\rm B}$. Les calculs de self-énergie (cf équation (2.19)) et l'équation de Dyson nous disent quant à eux que l'inverse propagateur habillé vaut :

$$\begin{aligned} G_{\rm R}^{-1}(k,\omega) &= \omega - \left[\mu^{(0)} + v_{\rm F}^{(0)}(k-k_{\rm F}^{(0)})\right] + {\rm i}\eta\,{\rm sgn}(k-k_{\rm F}^{(0)}) - g_{\rm B}\frac{\Lambda}{2\pi} && (2.35)\\ &= \omega - \left[\mu^{(1)} + v_{\rm F}^{(0)}(k-k_{\rm F}^{(0)})\right] + {\rm i}\eta\,{\rm sgn}(k-k_{\rm F}^{(0)}), && (2.36)\\ &\quad \text{avec : } \mu^{(1)} = \mu^{(0)} + g_{\rm B}\frac{\Lambda}{2\pi}. && (2.37)\end{aligned}$$

Sur les deux dernières équations nous comprenons donc que le seul effet des interactions, à l'ordre où nous travaillons, est de modifier la valeur du potentiel chimique, d'une quantité $\delta\mu^{(1)} = g_{\rm B}\frac{\Lambda}{2\pi}$.

2.1.3 Prise en compte du spin.

Nous allons maintenant regarder comment il faut modifier les résultats précédents afin de tenir compte du spin 1/2 des électrons. Tout d'abord, il faut que nous changions le Hamiltonien. La partie cinétique s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned} H_0 = \sum_k \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \Bigg\{ &\left[\mu^{(0)} + v_{\rm F}^{(0)}(k-k_{\rm F}^{(0)})\right] c^\dagger_{{\rm R},\sigma}(k)c_{{\rm R},\sigma}(k) \\ &+ \left[\mu^{(0)} - v_{\rm F}^{(0)}(k+k_{\rm F}^{(0)})\right] c^\dagger_{{\rm L},\sigma}(k)c_{{\rm L},\sigma}(k)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Quant au Hamiltonien d'interaction, il faut simplement rajouter un terme densité de spin - densité de spin, comme nous l'avons déjà vu (cf équation (1.33)). On a donc :

$$\begin{aligned} H_{\rm int} = &\frac{g_{\rm B}^{\rm c}}{L}\sum_{k,k',q}\sum_{\tau,\tau'}\sum_{\rho,\rho'} \mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'}\; c^\dagger_{{\rm R},\tau}(k+q)c^\dagger_{{\rm L},\rho}(k'-q)c_{{\rm L},\rho'}(k')c_{{\rm R},\tau'}(k) \\ &+\frac{g_{\rm B}^{\rm s}}{L}\sum_{k,k',q}\sum_{\tau,\tau'}\sum_{\rho,\rho'} \boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}\; c^\dagger_{{\rm R},\tau}(k+q)c^\dagger_{{\rm L},\rho}(k'-q)c_{{\rm L},\rho'}(k')c_{{\rm R},\tau'}(k). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Pour la théorie libre, il n'y a quasiment rien de changé. Les propagateurs portent maintenant un indice de spin : $G^{(0)}_{R,\tau}(k,\omega)$. Les propagateurs libres des fermions $\uparrow$ et $\downarrow$ sont égaux, et sont identiques au propagateur R du cas sans spin. Le propagateur libre où un électron de spin $\uparrow$ est créé, et un de spin $\downarrow$ détruit vaut 0, à cause de l'invariance de H_0 par rotation dans l'espace de spin. Autrement dit, on peut écrire :

$$\begin{aligned} G^{(0)}_{{\rm R},\tau,\tau'}(x-x',t-t') &= \frac{1}{\rm i}\,{}_0\langle 0|{\rm T}\left[\psi_{{\rm R},\tau}(x,t)\psi^\dagger_{{\rm R},\tau'}(x',t')\right]|0\rangle_0 && (2.40)\\ &= \delta_{\tau,\tau'}G^{(0)}_{\rm R}(x-x',t-t'), && (2.41)\end{aligned}$$

où δ est l'indice de Kronecker.

Pour les propagateurs habillés, on peut écrire exactement les mêmes équations, en enlevant les $^{(0)}$. Néanmoins, dans la deuxième équation, le propagateur, habillé, bien qu'il ne porte plus d'indice de spin, n'a pas de raison d'être égal au propagateur habillé du cas sans spin ! Considérons le calcul de la self-énergie à 1 boucle, et le graphe de Feynman de la figure 2.4 page 42. Sur ce graphe, nous avons mis le même indice de spin τ en entrée et en sortie. Que cet indice soit forcément le même est dû à l'invariance du Hamiltonien total par rotation dans l'espace de spin. Nous allons ici toutefois supposé que l'indice de spin est τ' en sortie et allons remontrer que $\tau' = \tau$. L'équation (2.15) qui donne la self-énergie (entre les []) devient maintenant :

$$G^{(0)}_{\mathrm{R},\tau'}(k,\omega)G^{(0)}_{\mathrm{R},\tau}(k,\omega) \times \left[\sum_{\rho'} (g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho',\rho'} + g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho',\rho'}) \int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\int \frac{\mathrm{d}\omega_q}{2\mathrm{i}\pi} G^{(0)}_{\mathrm{L},\rho'}(q,\omega_q)e^{\mathrm{i}\omega_q 0^+}\right]. \quad (2.42)$$

Or $\sum_{\rho'}\mathbb{I}_{\rho',\rho'} = \mathrm{Tr}(\mathbb{I}) = 2$ et $\sum_{\rho'}\sigma^j_{\rho',\rho'} = \mathrm{Tr}(\sigma^j) = 0$ pour $j = x, y, z$. Il ne reste donc qu'un terme $2g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\mathbb{I}_{\tau,\tau'}$, qui comme nous le disions force $\tau = \tau'$. Dans toute la suite, nous écrirons dès le début τ en entrée et en sortie. Nous obtenons donc pour la self-énergie le résultat suivant :

$$\Sigma^{(1)}_{\mathrm{R}}(k,\omega) = g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\frac{\Lambda}{\pi}, \quad (2.43)$$

et la même chose pour les fermions L. Cette formule étant valable pour les électrons de spin $\uparrow$ et $\downarrow$, nous n'indiquons pas d'indice de spin, et ne le ferons d'ailleurs pour aucun des résultats de self-énergie à venir. Remarquons que (2.43) est identique au résultat (2.19) du cas spinless, à un facteur 2 près qui vient de la somme sur les deux états de spin du propagateur L intermédiaire.

Voyons maintenant ce qu'il en est du vertex. A 0 boucle, nous avons le graphe de Feynman représenté sur la figure 2.2 page 40. L'évaluation est facile : nous retrouvons simplement les constantes d'interaction de charge et de spin affectés de leur matrices identité ou de Pauli :

$$\Gamma^{(0)}_{\tau',\rho',\rho,\tau}(K_1,K_2,K_3,K_4 = K_1+K_2-K_3) = g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'} + g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}. \quad (2.44)$$

A 1 boucle, nous reprenons les graphes de Feynman des figures 2.8 et 2.9 page 46. Les formules obtenues sont les mêmes que (2.26) et (2.27), avec pour seul changement le remplacement des termes ${g_{\mathrm{B}}}^2$ par des expressions plus compliquées, données ci-dessous :

$$\text{(pp)} \quad : \quad \sum_{\tau'',\rho''} (g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\mathbb{I}_{\tau,\tau''}\mathbb{I}_{\rho,\rho''} + g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau''}\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho''})(g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\mathbb{I}_{\tau'',\tau'}\mathbb{I}_{\rho'',\rho'} + g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\sigma}_{\tau'',\tau'}\boldsymbol{\sigma}_{\rho'',\rho'}), \quad (2.45)$$

$$\text{(pt)} \quad : \quad \sum_{\tau'',\rho''} (g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\mathbb{I}_{\tau,\tau''}\mathbb{I}_{\rho'',\rho'} + g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau''}\boldsymbol{\sigma}_{\rho'',\rho'})(g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\mathbb{I}_{\tau'',\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho''} + g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\sigma}_{\tau'',\tau'}\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho''}). \quad (2.46)$$

L'interaction étant invariante par rotation, les résultats ci-dessus, une fois les sommes effectuées, doivent redonner un terme densité de charge - densité de charge et un terme

densité de spin - densité de spin. Vérifions-le. Il faut développer les deux équations, ce qui donne 4 termes pour chacune : cc, cs, sc et ss, avec des notations parlant d'elles-mêmes. Les évaluations des sommes sur τ'' et ρ'' pour les trois premiers termes ne posent aucun problème. Pour le dernier terme spin-spin, il faut manipuler un peu les matrices de Pauli. En ce qui concerne le canal pp, nous devons calculer :

$$\sum_{\tau'',\rho''} (\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau''} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho''})(\boldsymbol{\sigma}_{\tau'',\tau'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho'',\rho'}) = \sum_{\tau'',\rho''} \sum_{i,j} (\sigma^i_{\tau,\tau''}\sigma^i_{\rho,\rho''})(\sigma^j_{\tau'',\tau'}\sigma^j_{\rho'',\rho'}) \quad (2.47)$$

$$= \sum_{\tau'',\rho''} \sum_{i,j} (\sigma^i_{\tau,\tau''}\sigma^j_{\tau'',\tau'})(\sigma^i_{\rho,\rho''}\sigma^j_{\rho'',\rho'}) \quad (2.48)$$

$$= \sum_{i,j} (\sigma^i\sigma^j)_{\tau,\tau'}(\sigma^i\sigma^j)_{\rho,\rho'}. \quad (2.49)$$

Nous appliquons maintenant la relation $\sigma^i\sigma^j = \delta_{i,j}\mathbb{I} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\sigma^k$ à chacun des deux produits de matrices de Pauli. Il faut comprendre ici qu'il y a une somme sur l'indice répété k. Nous n'écrirons dorénavant plus les sommes sur les indices répétés, qui seront donc implicites. Nous obtenons, en développant les équations obtenues :

$$\delta_{i,j}\delta_{i,j}\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'} + \mathrm{i}\delta_{i,j}(\varepsilon^{ijl}\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\sigma^l_{\rho,\rho'} + \varepsilon^{ijk}\mathbb{I}_{\rho,\rho'}\sigma^k_{\tau,\tau'}) - \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijl}\sigma^k_{\tau,\tau'}\sigma^l_{\rho,\rho'}. \quad (2.50)$$

Le premier terme donne ainsi une contribution $3\mathbb{I}_{\tau,\tau'}$. Le deuxième terme est nul, car ε^{ijk} est nul dès que deux des indices sont égaux. Pour évaluer le troisième terme, il faut utiliser la relation : $\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijl} = 2\delta_{k,l}$, et il reste donc : $-2\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}$. Dans le canal particule-trou, il est assez facile de voir que l'on obtient le deuxième membre de (2.48), avec les indices i et j échangés dans la deuxième parenthèse. Ceci aura pour unique effet de changer le signe du terme en produit de matrices de Pauli. Le tableau 2.1 résume tous les résultats. Dans le canal pp (resp. pt), il faut multiplier les résultats

	cc	cs	sc	ss
pp	${g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}}^2\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'}$	$g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}$	$g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}$	${g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}}^2(3\mathbb{I}_{\tau,\tau'} - 2\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'})$
pt	${g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}}^2\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'}$	$g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}$	$g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}$	${g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}}^2(3\mathbb{I}_{\tau,\tau'} + 2\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'})$

Tab. 2.1 – Résumé de l'algèbre de spin, pour les calculs à une boucle du vertex.

que nous venons juste d'obtenir, par l'expression (resp. son opposé) entre crochets de l'équation (2.30), que nous noterons ici $\gamma(\tilde{\nu})$:

$$\delta\Gamma^{(1),\mathrm{pp}}_{\tau',\rho',\rho,\tau}(\nu) = \left\{({g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}}^2 + 3{g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}}^2)\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'} + 2(g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}} - {g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}}^2)\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}\right\} \times \gamma(\tilde{\nu}) \quad (2.51)$$

$$\delta\Gamma^{(1),\mathrm{pt}}_{\tau',\rho',\rho,\tau}(\nu) = -\left\{({g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}}^2 + 3{g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}}^2)\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'} + 2(g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}} + {g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}}^2)\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}\right\} \times \gamma(\tilde{\nu}). \quad (2.52)$$

Si nous faisons maintenant la somme de ces deux équations, il est évident que seul le terme en ${g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}}^2$ va survivre, car c'est le seul à avoir changé de signe deux fois. Au final,

nous obtenons donc l'expression suivante pour le vertex à une boucle :

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(1)}_{\tau',\rho',\rho,\tau}(\nu) &= \Gamma^{(0)}_{\tau',\rho',\rho,\tau}(\nu) + \delta\Gamma^{(1)}_{\tau',\rho',\rho,\tau}(\nu) && (2.53)\\
&= (g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'} + g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}) + \left(-4{g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}}^2\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}\times\gamma(\tilde{\nu})\right) && (2.54)\\
&= g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'} + \left(g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}} - 4{g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}}^2\gamma(\tilde{\nu})\right)\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}. && (2.55)
\end{aligned}$$

Nous avons maintenant tous les résultats dont nous avons besoin, et il ne nous reste plus qu'à les commenter. Pour la self-énergie, nous obtenons comme dans le cas sans spin un nouveau potentiel chimique, qui vaut cette fois-ci : $\mu^{(1)} = \mu^{(0)} + g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\frac{\Lambda}{\pi}$. En ce qui concerne le vertex, les choses sont différentes. Pour les fermions sans spin, le vertex était inchangé à une boucle. Pour les électrons de spin 1/2, les équations (2.53) à (2.55) nous montrent que l'interaction effective dans le secteur de charge est inchangée, ce qui est l'analogue de l'invariance du vertex des fermions sans spin. Par contre, l'interaction effective dans le secteur de spin change, avec un facteur qui dépend d'ailleurs de l'échelle d'énergie typique ν :

$$g^{\mathrm{c}(1)}(\nu) = g^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}},\ \text{et}\ g^{\mathrm{s}(1)}(\nu) = g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}} - 4{g^{\mathrm{s}}_{\mathrm{B}}}^2\gamma(\tilde{\nu}), \tag{2.56}$$

où, rappelons-le : $\gamma(\tilde{\nu}) = \frac{1}{2\pi v^{(0)}_{\mathrm{F}}}\ln(\tilde{\nu}) + O(1)$ et $\tilde{\nu} = \frac{\nu}{2v^{(0)}_{\mathrm{F}}\Lambda}$.

Lorsque nous cherchons à prendre la limite $\Lambda \to \infty$, nous voyons donc apparaître des problèmes : les expressions perturbatives obtenues divergent (c'était d'ailleurs déjà vrai pour le potentiel chimique). C'est le but du RG de rendre la théorie des perturbations non singulière, et nous allons voir comment dans la section qui vient.

2.2 Le Groupe de Renormalisation à une boucle

Dans cette section consacrée au RG, nous introduisons la notion de contre-terme, d'abord sur des exemples très simples n'ayant rien à voir avec la théorie des champs. Puis nous utilisons ces contre-termes pour donner un sens à la théorie des perturbations pour les fermions. Nous passons enfin à la dérivation des équations de flot du RG.

2.2.1 Notion de contre-terme sur des exemples triviaux

Nous nous plaçons dans cette sous-section, hors du cadre de la théorie des champs. Nous voulons montrer au lecteur qu'il est possible de régulariser certaines théories des perturbations, qui sont divergentes si l'on s'y prend mal. Cette régularisation peut parfois se faire à l'aide de contre-termes.

Nous considérons pour commencer l'équation différentielle absolument triviale suivante :

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + {\omega_0}^2 y = 0, \tag{2.57}$$

dont la solution est, pour $\varepsilon < \omega_0$:

$$y(t) = Ae^{-(\varepsilon + \mathrm{i}\sqrt{{\omega_0}^2 - \varepsilon^2})t} + \text{ c. c.} \tag{2.58}$$

Nous supposerons toutefois que nous ne connaissons pas la solution (2.58) de l'équation (2.57) pour ε quelconque, mais uniquement pour $\varepsilon = 0$. Nous ferons donc l'hypothèse que ε est petit (devant ω_0 bien sûr), et chercherons une solution perturbative de cette équation différentielle. Nous posons donc comme c'est l'usage : $y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \ldots$. Si nous injectons cette forme dans (2.57), et que nous identifions les différentes puissances de ε, nous obtenons :

$$\begin{cases} (0) \ : \ \ddot{y_0} + {\omega_0}^2 y_0 = 0 \\ (1) \ : \ \ddot{y_1} + 2\dot{y_0} + {\omega_0}^2 y_1 = 0 \\ \vdots \end{cases} . \tag{2.59}$$

L'équation d'ordre 0 admet pour solution $y_0(t) = Ae^{-\mathrm{i}\omega_0 t} + \text{ c. c. }$. Si nous injectons cette solution d'ordre 0 dans celle d'ordre 1, nous obtenons la solution $y_1(t) = A_1 e^{-\mathrm{i}\omega_0 t} + \text{ c. c. } - (Ate^{-\mathrm{i}\omega_0 t} + \text{ c. c.})$. Nous pouvons toujours choisir $A_1 = 0$, car nous avons déjà un terme purement oscillant à ω_0 à l'ordre 0 (cela revient à faire $(A + A_1) \leftarrow A$). Ainsi, à l'ordre 1 : $y^{(1)} = A(1 - \varepsilon t)e^{-\mathrm{i}\omega_0 t} + \text{ c. c. }$. Nous retrouvons le résultat connu que la théorie des perturbations diverge ($|y(t)| \to \infty$ quand $t \to \infty$), ce qui se comprend bien, puisqu'à l'ordre 1, on obtient une équation d'oscillateur harmonique excité à sa pulsation propre. Cette théorie des perturbations est parfaitement valable tant que $\varepsilon t \ll 1$), mais ne l'est plus aux grands temps.

Pour trouver le remède à ces problèmes, regardons la solution exacte (2.58), et voyons les effets de l'introduction d'un terme de frottement fluide. Premièrement la solution est exponentiellement amortie, ce que notre théorie des perturbations a capturé de manière approchée, puisque $e^{-\varepsilon t} \simeq 1 - \varepsilon t$ pour $\varepsilon t \ll 1$). Mais de plus, la pseudo-pulsation a changé : le terme oscillant bat à la pulsation $\sqrt{{\omega_0}^2 - \varepsilon^2}$, et non plus ω_0. Ceci n'est pas obtenu dans notre approche perturbative à l'ordre 1, mais le serait à l'ordre 2 (sous une forme compliquée). Cela nous suggère quand même, puisque le problème est qu'on excite l'oscillateur harmonique à sa pulsation propre, de modifier, à la main, cette pulsation. Nous réécrivons donc (2.57) sous la forme :

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + \omega^2 y + \varepsilon\delta\omega_{\mathrm{ct}}^2 y = 0. \tag{2.60}$$

Nous appellerons $\delta\omega_{\mathrm{ct}}^2$ un contre-terme, pour la pulsation. Évidemment, si on veut que (2.60) soit identique à (2.57), il faut que :

$$\omega^2 + \varepsilon\delta\omega_{\mathrm{ct}}^2 = {\omega_0}^2. \tag{2.61}$$

Nous supposerons de plus que le contre-terme admet un développement perturbatif : $\delta\omega_{\mathrm{ct}}^2 = \delta\omega_{\mathrm{ct},1}^2 + \varepsilon\delta\omega_{\mathrm{ct},2}^2 + \ldots$. Nous pouvons maintenant recommencer notre théorie des perturbations, qui se lit maintenant :

$$\begin{cases} (0) \ : \ \ddot{y_0} + \omega^2 y_0 = 0 \\ (1) \ : \ \ddot{y_1} + 2\dot{y_0} + \omega^2 y_1 + \delta\omega_{\mathrm{ct},1}^2 y_0 = 0 \\ \vdots \end{cases} . \tag{2.62}$$

La solution d'ordre 0 est cette fois-ci $y_0(t) = Ae^{-\mathrm{i}\omega t} +$ c. c. (seule la pulsation a changé). Ceci injecté dans (1) donne maintenant :

$$\ddot{y_1} + \omega^2 y_1 = -(2\dot{y_0} + \delta\omega^2_{\mathrm{ct},1} y_0). \tag{2.63}$$

Dans cette équation, le terme $-2\dot{y_0}$ du membre de droite joue encore le rôle d'une excitation à la pulsation propre ω de l'oscillateur harmonique dans le membre de gauche. Cependant, nous avons cette fois la possibilité de compenser ce terme, grâce au contre-terme (c'est de la que vient le nom de contre-terme !), en imposant que le terme de pulsation ω du membre de droite soit nul. Ceci nous donne la condition :

$$\delta\omega^2_{\mathrm{ct},1} = 2\mathrm{i}\omega. \tag{2.64}$$

Ainsi, à l'ordre 1 où nous travaillons, il faut que la pulsation ω vérifie (cf (2.61)) : $\omega^2 + 2\mathrm{i}\omega - {\omega_0}^2 = 0$. Cette équation est exactement l'équation que l'on obtient si on demande que $e^{-\mathrm{i}\omega t}$ soit solution de (2.57). Donc la théorie des perturbations est ici exacte à l'ordre 1, et tous les contre-termes suivants seront simplement nuls. Remarquons que nous avons en fait introduit non pas un contre-terme, mais une infinité de contre-termes, qui doivent être évalués ordre par ordre en perturbation. Cet exemple complètement trivial a la mérite de montrer comment il faut s'y prendre. Nous allons encore considérer un exemple un peu moins trivial, pour convaincre le lecteur.

Nous considérons à présent un oscillateur faiblement anharmonique, et cherchons la solution perturbative de l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y} + {\omega_0}^2 y + \varepsilon y^3 = 0. \tag{2.65}$$

Le problème étant non linéaire, la solution que nous obtiendrons à l'ordre 1 ne sera pas la solution exacte (qui n'est de toute façon pas connue). Forts de notre expérience précédente, nous réécrivons cette équation en introduisant un contre-terme pour la pulsation, exactement comme avant. En injectant une solution perturbative, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} (0) \ : \ \ddot{y_0} + \omega^2 y_0 = 0 \\ (1) \ : \ \ddot{y_1} + \omega^2 y_1 = -({y_0}^3 + \delta\omega^2_{\mathrm{ct},1} y_0) \\ \vdots \end{cases} . \tag{2.66}$$

Or ${y_0}^3 = A^3 e^{-3\mathrm{i}\omega t} + 3A|A|^2 e^{-\mathrm{i}\omega t} +$ c. c. . Le terme de pulsation 3ω ne pose aucun problème (il donnera un terme oscillant à cette pulsation dans la solution, mais nous ne chercherons pas à exprimer la solution, mais uniquement le développement perturbatif de ω, donc nous le laissons de côté). Celui de pulsation ω doit quant à lui être éliminé grâce au contre-terme, ce qui nous fournit la condition : $\delta\omega^2_{\mathrm{ct},1} + 3|A|^2 = 0$. Autrement dit, à cet ordre la pulsation doit vérifier : $\omega^2 = {\omega_0}^2 + 3\varepsilon|A|^2$. Nous laissons le lecteur montrer que ce résultat est bien correct, en le comparant, par exemple, avec les résultats connus pour le pendule pesant. Enfin, il est aussi clair que la dernière formule n'est cette fois valable qu'à l'ordre 1. Il faudra une infinité de contre-termes, $\delta\omega^2_{\mathrm{ct},i}$, $i = 1, \ldots$, pour avoir une théorie des perturbations finie à chaque ordre.

2.2.2 Utilisation des contre-termes pour les fermions

Les exemples d'utilisation de contre-termes précédents, bien qu'instructifs, ne règlent pas tous les problèmes quand on passe à la théorie des champs. Néanmoins, c'est une première étape. Nous considérons ici le cas des fermions avec spin.

Nous avons trouvé à la section 2.1.3 précédente le résultat, à l'ordre 1 (équation (2.56)), que nous redonnons ici (pour le couplage de spin) en prenant l'ordre le plus bas en ν/Λ et en enlevant le $^{(1)}$: $g^{\rm s}(\nu) = g^{\rm s}_{\rm B} - 4{g^{\rm s}_{\rm B}}^2 \frac{1}{2\pi v_{\rm F}^{(0)}} \ln(\frac{\nu}{2v_{\rm F}^{(0)}\Lambda})$. Ce résultat ne pose aucun problème pour des énergies ν de l'ordre du cut-off Λ. Par contre, pour les énergies faibles devant le cut-off, le résultat est logarithmiquement divergent. Cela nous rappelle les problèmes que nous avions aux grands temps dans les exemples triviaux. On donne un sens au résultat divergent en notant que, physiquement, ce qui nous intéresse et ce qui est mesuré, ce sont les propriétés de basse énergie. Autrement dit c'est $g^{\rm s}(\nu)$ à l'échelle typique faible ν et non $g^{\rm s}_{\rm B}$ (égal, du moins perturbativement, à $g^{\rm s}(\nu = 2v_{\rm F}^{(0)}\Lambda)$) qui est fini. On inverse alors la relation perturbative, en écrivant que $g^{\rm s}_{\rm B}$ admet un développement en puissance de $g^{\rm s}(\nu)$, que nous écrirons maintenant plus simplement $g^{\rm s}$. On obtient facilement que : $g^{\rm s}_{\rm B} = g^{\rm s}_{\rm B}(g^{\rm s}, \nu, \Lambda) = g^{\rm s} + 4{g^{\rm s}}^2 \frac{1}{2\pi v_{\rm F}^{(0)}} \ln(\frac{\nu}{2v_{\rm F}^{(0)}\Lambda})$. Le couplage nu $g^{\rm s}_{\rm B}$ est devenu une fonction de $g^{\rm s}$, ν et Λ, et est ajusté, quitte à être infini, de la manière écrite précédemment. Les quantités physiques de basse énergie sont maintenant finies. Pour l'instant, nous avons enlevé la divergence à un endroit pour la remettre à un autre, un peu moins dérangeant, mais ce n'est pas encore vraiment satisfaisant. C'est le rôle du RG d'expliquer comment enlever la divergence, et nous verrons cela à la section suivante 2.2.3.

Jusque là, nous n'avons toujours pas parlé de contre-termes en théorie des champs ! Mais le moment est venu. La relation $g^{\rm s}_{\rm B}(g^{\rm s}, \nu, \Lambda) = g^{\rm s} + 4{g^{\rm s}}^2 \frac{1}{2\pi v_{\rm F}^{(0)}} \ln(\frac{\nu}{2v_{\rm F}^{(0)}\Lambda})$ est désagréable, car on aimerait ne voir apparaître que des quantités de basse énergie dans le membre de droite. Ce n'est pas le cas, car la vitesse de Fermi $v_{\rm F}^{(0)}$ est une quantité nue, donc de haute énergie. Nous avons vu que le seul effet des interactions, en ce qui concerne le propagateur, est une modification du potentiel chimique. Il n'y a par contre aucune modification, à 1 boucle en tout cas, de la vitesse de Fermi. On a donc simplement, en appelant $v_{\rm F}$ la vitesse de Fermi mesurée à basse énergie, $v_{\rm F} = v_{\rm F}^{(0)}$, et donc on peut écrire $g^{\rm s}_{\rm B}(g^{\rm s}, \nu, \Lambda) = g^{\rm s} + 4{g^{\rm s}}^2 \frac{1}{2\pi v_{\rm F}} \ln(\frac{\nu}{2v_{\rm F}\Lambda})$. Il est donc possible de tout écrire en fonction des quantités de basse énergie, mais on comprend aussi que les choses risquent de se compliquer sérieusement si l'on va à un ordre plus grand en perturbation. Autant effectuer tout de suite la théorie des perturbations avec les quantités de basse énergie, tout comme il était beaucoup plus intéressant de travailler avec $e^{-{\rm i}\omega t}$ qu'avec $e^{-{\rm i}\omega_0 t}$ dans les exemples d'oscillateurs. Nous réécrivons donc les Hamiltoniens cinétique

et d'interaction comme suit :

$$H_0 = \sum_{k,\sigma} \Big\{ \left[\mu + v_{\rm F}(k-k_{\rm F})\right] c^\dagger_{{\rm R},\sigma}(k) c_{{\rm R},\sigma}(k) + \left[\mu - v_{\rm F}(k+k_{\rm F})\right] c^\dagger_{{\rm L},\sigma}(k) c_{{\rm L},\sigma}(k) \Big\} + H^{(\mu)}_{0,{\rm ct}} + H^{(v)}_{0,{\rm ct}}, \tag{2.67}$$

avec

$$H^{(\mu)}_{0,{\rm ct}} = \delta\mu \sum_{k,\sigma} c^\dagger_{{\rm R},\sigma}(k) c_{{\rm R},\sigma}(k) + \delta\mu \sum_{k,\sigma} c^\dagger_{{\rm L},\sigma}(k) c_{{\rm L},\sigma}(k), \text{ et} \tag{2.68}$$

$$H^{(v)}_{0,{\rm ct}} = \delta v \sum_{k,\sigma} (k-k_{\rm F}) c^\dagger_{{\rm R},\sigma}(k) c_{{\rm R},\sigma}(k) - \delta v \sum_{k,\sigma} (k+k_{\rm F}) c^\dagger_{{\rm L},\sigma}(k) c_{{\rm L},\sigma}(k). \tag{2.69}$$

$$H_{\rm int} = \frac{1}{L} \sum_{k,k',q} \sum_{\tau,\tau'} \sum_{\rho,\rho'} (g^{\rm c} \mathbb{I}_{\tau,\tau'} \mathbb{I}_{\rho,\rho'} + g^{\rm s} \boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}) \times c^\dagger_{{\rm R},\tau}(k+q) c^\dagger_{{\rm L},\rho}(k'-q) c_{{\rm L},\rho'}(k') c_{{\rm R},\tau'}(k) + H_{\rm int,ct}, \tag{2.70}$$

avec

$$H_{\rm int,ct} = \frac{1}{L} \sum_{k,k',q} \sum_{\tau,\tau'} \sum_{\rho,\rho'} (\delta g^{\rm c} \mathbb{I}_{\tau,\tau'} \mathbb{I}_{\rho,\rho'} + \delta g^{\rm s} \boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}) \times c^\dagger_{{\rm R},\tau}(k+q) c^\dagger_{{\rm L},\rho}(k'-q) c_{{\rm L},\rho'}(k') c_{{\rm R},\tau'}(k). \tag{2.71}$$

Il nous faut expliquer plusieurs choses en ce qui concerne ces équations. Les quantités de basse énergie sont notées sans exposant ni indice autre que $_{\rm F}$ (μ, $v_{\rm F}$, $k_{\rm F}$, et $g^{\rm c,s}$). Nous n'avons pas mis de contre-terme pour les vecteurs de Fermi, car le Théorème de Luttinger [Lut60] nous dit que le volume de la surface de Fermi ne peut pas changer avec la force de l'interaction.[7] Or ici, le volume est la distance entre les deux points de Fermi. Les vecteurs de Fermi sont donc inchangés par les interactions, et nous noterons maintenant $k_{\rm F}$ l'impulsion de Fermi. Les déformations de la surface de Fermi qui sont l'objet de cette thèse, et qui compliquent les choses, seront étudiées ultérieurement à la section 3. Le Hamiltonien devant être le même qu'on l'écrive comme ci-dessus, ou comme (2.38) et (2.39), on obtient les relations suivantes (nous donnons aussi les notations pour les développements perturbatifs des contre-termes) :

$$\mu^{(0)} = \mu + \delta\mu, \text{ avec } \delta\mu = \delta\mu^{(1)} + \delta\mu^{(2)} + \ldots = g^{\rm c}\delta\mu^{\rm c}_1 + g^{\rm s}\delta\mu^{\rm s}_1 + \ldots \tag{2.72}$$

$$v^{(0)}_{\rm F} = v_{\rm F} + \delta v, \text{ avec } \delta v = \delta v^{(1)} + \delta v^{(2)} + \ldots = g^{\rm c}\delta v^{\rm c}_1 + g^{\rm s}\delta v^{\rm s}_1 + \ldots \tag{2.73}$$

$$g^\alpha_{\rm B} = g^\alpha + \delta g^\alpha, \text{ avec } \delta g^\alpha = \delta g^{\alpha(2)} + \delta g^{\alpha(3)} + \ldots = \Delta_2^{\alpha\beta\gamma} g^\beta g^\gamma + \ldots \tag{2.74}$$

Remarquons que dans la dernière équation, $\alpha, \beta, \gamma = {\rm c}, {\rm s}$ et on somme sur les indices répétés. Nous avons mis des exposants $^{(i)}$ référant à la puissance totale des constantes de

[7] Nous renvoyons le lecteur à la fin de la section introductive 3.1 pour plus de détails sur le théorème de Luttinger.

couplage, et non au nombre de boucles. C'est pourquoi, pour les couplages eux-mêmes, les exposants commencent au chiffre 2 et non 1 comme pour le reste.

Il nous faut maintenant associer une notation graphique à chaque terme du Hamiltonien. Nous garderons les mêmes notations graphiques pour les propagateurs et pour les interactions, mais il faut bien voir que leur signification change : ils concernent les quantités de basse énergie maintenant. Ainsi le rond noir correspondra à g et non plus à g_{B}. De même les lignes correspondront aux propagateurs libres, mais de basse énergie. Ces propagateurs serons notés avec une étoile. Ainsi, par exemple, le propagateur libre de fermion R dans l'espace réciproque vaudra[8] :

$$G^{*}_{\mathrm{R}}(k,\omega) = \frac{1}{\omega - [\mu + v_{\mathrm{F}}(k-k_{\mathrm{F}})] + \mathrm{i}\eta\,\mathrm{sgn}(k-k_{\mathrm{F}})}. \tag{2.75}$$

Nous représenterons les autres contre-termes pour le potentiel chimique, la vitesse de Fermi et l'interaction, par respectivement, un carré, un hexagone, et un rond, vides, avec à l'intérieur un chiffre i, donnant l'exposant $^{(i)}$ du contre-terme en question. Il faut prendre garde au fait que pour la vitesse, l'expression à associer à un hexagone inséré sur un propagateur R ($\delta v(k-k_{\mathrm{F}})$) n'est pas la même que celle pour l'insertion sur un propagateur L ($-\delta v(k+k_{\mathrm{F}})$). Nous donnons nos notations graphiques sur la figure 2.10, pour les premiers contre-termes de chaque sorte.

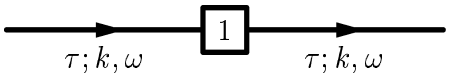
Enfin, reste à voir comment mettre en œuvre notre "nouvelle" théorie des perturbations. A l'ordre le plus bas (0 boucle), les propagateurs obtenus sont les propagateurs libres (de basse énergie), et le vertex vaut simplement :

$$\Gamma^{(0)}_{\tau',\rho',\rho,\tau}(K_1,K_2,K_3,K_4 = K_1+K_2-K_3) = g^{\mathrm{c}}\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'} + g^{\mathrm{s}}\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}. \tag{2.76}$$

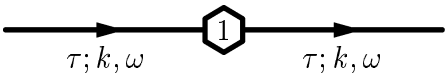
A une boucle, les différents termes de self-énergie (R) possibles sont ceux représentés sur les figures 2.4 page 42, 2.10(a) et 2.10(b). Le premier donne une contribution facilement déductible par simple changement de notation de (2.43), et égale à : $\Sigma^{(1)}_{\mathrm{R}}(k,\omega) = g^{\mathrm{c}}\frac{\Lambda}{\pi}$. Il est aussi facile de voir que le second donne un terme $\Sigma^{(1),\mathrm{ct}(\delta\mu)}_{\mathrm{R}}(k,\omega) = \delta\mu^{(1)}$ et le dernier une contribution $\Sigma^{(1),\mathrm{ct}(\delta v)}_{\mathrm{R}}(k,\omega) = \delta v^{(1)}(k-k_{\mathrm{F}})$. Remarquons que seule cette dernière expression change quand il s'agit des fermions L : $\Sigma^{(1),\mathrm{ct}(\delta v)}_{\mathrm{L}}(k,\omega) = -\delta v^{(1)}(k+k_{\mathrm{F}})$. Comme d'habitude, tous ces résultats sont valables pour les spins $\uparrow$ et $\downarrow$. Avant de voir ce qu'il advient du vertex, faisons encore une remarque. Nous avons dit que nous calculions à 1 boucle. Or les figures 2.10(a) et 2.10(b) ne contiennent manifestement aucune boucle de fermions ! Il faut en fait comprendre que nous allons à une boucle pour les diagrammes "classiques" comme celui de la figure 2.4 page 42, et que nous allons à un ordre en puissance des constantes de couplage égal, pour les autres contributions qui contiennent des contre-termes.

Les résultats pour le vertex sont aussi très facilement déductibles de tout ce qui précède. Nous obtenons les graphes de Feynman des figures 2.8, 2.9 page 46 et

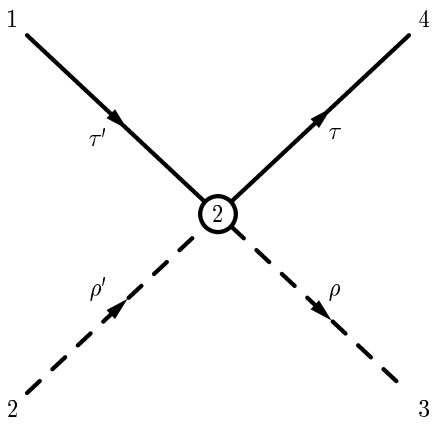
[8] Cette équation est l'analogue de l'équation $y_0(t) = Ae^{-\mathrm{i}\omega t} + \text{c. c.}$ du problème trivial.



(a) Contre-terme $\delta\mu^{(1)}$



(b) Contre-terme $\delta v^{(1)}$



(c) Contre-terme $\delta g^{\alpha(2)}$

FIG. 2.10 – Diagrammes de Feynman pour les différents contre-termes. Les chiffres i à l'intérieur des carrés, hexagones et cercles, donnent l'ordre $^{(i)}$ des contre-termes correspondants.

2.10(c). Pour les deux premiers nous reprenons les expressions (2.51) et (2.52), avec nos nouvelles notations :

$$\delta\Gamma^{(1),\mathrm{pp}}_{\tau',\rho',\rho,\tau}(\nu) = \left\{(g^{\mathrm{c}2}+3g^{\mathrm{s}2})\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'}+2(g^{\mathrm{c}}g^{\mathrm{s}}-g^{\mathrm{s}2})\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}\right\}\times\gamma(\tilde{\nu}) \quad (2.77)$$

$$\delta\Gamma^{(1),\mathrm{pt}}_{\tau',\rho',\rho,\tau}(\nu) = -\left\{(g^{\mathrm{c}2}+3g^{\mathrm{s}2})\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'}+2(g^{\mathrm{c}}g^{\mathrm{s}}+g^{\mathrm{s}2})\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}\right\}\times\gamma(\tilde{\nu}). \quad (2.78)$$

Ici, $\tilde{\nu}=\frac{\nu}{2v_{\mathrm{F}}\Lambda}$ et la fonction γ a cette fois pour expression :

$$\gamma(\tilde{\nu}) = \int_0^{\Lambda}\frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\frac{1}{\nu-2v_{\mathrm{F}}q+\mathrm{i}\eta}-\int_{-\Lambda}^{0}\frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\frac{1}{\nu-2v_{\mathrm{F}}q-\mathrm{i}\eta} \quad (2.79)$$

$$= \frac{1}{2\pi v_{\mathrm{F}}}\left[\ln(\tilde{\nu})-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right]+O(\tilde{\nu}) \quad (2.80)$$

$$= \frac{1}{2\pi v_{\mathrm{F}}}\ln(\tilde{\nu})+O(1). \quad (2.81)$$

Il est de plus évident que le contre-terme contribue pour :

$$\delta\Gamma^{(1),\mathrm{ct}(\delta g)}_{\tau',\rho',\rho,\tau}(\nu)=\delta g^{\mathrm{c}(2)}\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'}+\delta g^{\mathrm{s}(2)}\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}. \quad (2.82)$$

Il nous faut maintenant écrire les conditions qui nous donneront des résultats de basse énergie non divergents[9]. Considérons pour commencer le vertex. Il ne faut

[9]Tout comme nous avions écrit $\delta\omega^2_{\mathrm{ct},1}=2\mathrm{i}\omega$ pour le problème trivial.

pas oublier que les couplages $g^{c,s}$, avec lesquels la théorie des perturbations est faite, sont les couplages à l'échelle d'énergie ν. Ainsi, nous devons demander que la condition ci-dessous soit satisfaite à tous les ordres :

$$\Gamma_{\tau',\rho',\rho,\tau}(\nu) = g^{c}\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'} + g^{s}\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}. \tag{2.83}$$

Cette condition est bien satisfaite à l'ordre de 0 boucle. Par conséquent, à 1 boucle, elle impose que $\delta\Gamma^{(1),\mathrm{pp}}_{\tau',\rho',\rho,\tau}(\nu) + \delta\Gamma^{(1),\mathrm{pt}}_{\tau',\rho',\rho,\tau}(\nu) + \delta\Gamma^{(1),\mathrm{ct}(\delta g)}_{\tau',\rho',\rho,\tau}(\nu) = 0$. Ceci nous donne les deux équations suivantes que doivent vérifier les contre-termes $\delta g^{c,s}$:

$$\delta g^{c(2)} = 0, \text{ et } \delta g^{s(2)} = 4g^{s2}\gamma(\tilde{\nu}). \tag{2.84}$$

Ainsi, si l'on se souvient de la définition des contre-termes, on retrouve les conditions déjà obtenues : $g^{c}_{B} = g^{c}$ et $g^{s}_{B} = g^{s} + 4g^{s2}\frac{1}{2\pi v_F}\ln(\frac{\nu}{2v_F\Lambda})$. Nous voyons que cette fois, le membre de droite ne fait intervenir, et c'est automatique, que les quantités de basse énergie. C'était bien le but que nous nous étions fixés. Regardons enfin ce qui se passe pour les autres contre-termes. L'inverse propagateur R s'écrit, à 1 boucle :

$$\begin{aligned} G^{(1)^{-1}}_{R}(k,\omega) &= \omega - [\mu + v_F(k-k_F)] - \Sigma^{(1)}_{R}(k,\omega) + i\eta\,\mathrm{sgn}(k-k_F) && (2.85)\\ &= \omega - \left[\left(\mu + \delta\mu^{(1)} + g^{c}\frac{\Lambda}{\pi}\right) + (v_F + \delta v^{(1)})(k-k_F)\right] \\ &\qquad + i\eta\,\mathrm{sgn}(k-k_F). && (2.86)\end{aligned}$$

Afin de maintenir les potentiel chimique et vitesse de Fermi aux valeurs avec lesquels la théorie des perturbations est effectuée, il est donc nécessaire d'imposer $\delta\mu^{(1)} + g^{c}\frac{\Lambda}{\pi} = 0$ et $\delta v^{(1)} = 0$. Nous retrouvons donc que la vitesse de Fermi est inchangé à cet ordre, car $v^{(0)}_F = v_F + \delta v$. Le potentiel chimique est quant à lui modifié, selon $\mu^{(0)} = \mu - g^{c}\frac{\Lambda}{\pi}$. Nous avions déjà trouvé ce résultat à la fin de la section 2.1.3, mais écrit sous une forme légèrement différente, qui faisait intervenir g^{c}_{B} et non g^{c}. Mais comme $g^{c}_{B} = g^{c}$, les deux expressions sont identiques. L'utilisation des contre-termes a simplement permis de tout exprimer en fonction des grandeurs de basse énergie.

2.2.3 La Renormalisation à une boucle, enfin

Nous arrivons maintenant au coeur du sujet qu'est le RG. Jusqu'à présent quand nous avons écrit le lien entre les grandeurs nues (i.e. de haute énergie) et les grandeurs habillées, dites aussi renormalisées (i.e. de basse énergie), nous avons obtenu des relations qui font intervenir le cut-off Λ. Par exemple, en ce qui concerne le couplage de spin :

$$g^{s}_{B}(g^{c}, g^{s}, v_F, \nu, \Lambda) = g^{s} + 4g^{s2}\frac{1}{2\pi v_F}\ln(\frac{\nu}{2v_F\Lambda}). \tag{2.87}$$

Nous avons ici pris soin d'indiquer toutes les dépendances possibles[10] de g^{s}_{B} en les grandeurs habillées. Nous avons rendu la théorie de basse énergie finie, en mettant les

[10]Notons que les variables μ et k_F sont superflues, puisqu'elles ne servent que de référence d'énergie et d'impulsion, et n'apparaissent donc nulle part. Nous ne les avons donc pas indiquées.

divergences "sous le tapis", c'est-à-dire en rendant les quantités nues infinies. Ceci n'est que moyennement satisfaisant.

Une première étape pour régler le sort des divergences est de constater ce qui suit. Nous avons défini notre théorie à une échelle d'énergie faible ν. Mais cette échelle d'énergie est arbitraire, nous aurions aussi bien pu tout faire à l'échelle ν'. Dans ce cas, nous aurions eu des quantités de basse énergie $g^{c\prime}$, $g^{s\prime}$, v_F', μ' et k_F'. Or si nous voulons garder la même théorie, il faut que le Hamiltonien de départ soit le même, autrement dit que les quantités physiques nues restent inchangées. Pour le couplage de spin nous obtenons donc la relation :

$$g_B^s(g^{c\prime}, g^{s\prime}, v_F'; \nu', \Lambda) = g_B^s(g^c, g^s, v_F; \nu, \Lambda), \text{ soit, à 1 boucle :} \tag{2.88}$$

$$g^{s\prime} + 4g^{s\prime 2}\frac{1}{2\pi v_F'}\ln(\frac{\nu'}{2v_F'\Lambda}) = g^s + 4g^{s2}\frac{1}{2\pi v_F}\ln(\frac{\nu}{2v_F\Lambda}). \tag{2.89}$$

Ceci nous définit le lien entre les couplages de spin à des énergies différentes. Écrivons des équations similaires pour toutes les autres quantités (nous donnons aussi les résultats impliqués à 1 boucle) :

$$g_B^c(g^{c\prime}, g^{s\prime}, v_F'; \nu', \Lambda) = g_B^c(g^c, g^s, v_F; \nu, \Lambda) \Rightarrow g^{c\prime} = g^c, \tag{2.90}$$

$$v_F^{(0)}(g^{c\prime}, g^{s\prime}, v_F'; \nu', \Lambda) = v_F^{(0)}(g^c, g^s, v_F; \nu, \Lambda) \Rightarrow v_F' = v_F, \tag{2.91}$$

$$\mu^{(0)}(g^{c\prime}, g^{s\prime}, v_F'; \nu', \Lambda) = \mu^{(0)}(g^c, g^s, v_F; \nu, \Lambda) \Rightarrow \mu' - g^{c\prime}\frac{\Lambda}{\pi} = \mu - g^c\frac{\Lambda}{\pi} \tag{2.92}$$

$$\Rightarrow \mu' = \mu, \tag{2.93}$$

où la dernière égalité a été obtenue en utilisant $g^{c\prime} = g^c$. Notons que toutes les égalités écrites entre deux échelles d'énergies nous permettent de relier les quantités habillées à l'échelle ν' en fonction de celles à l'échelle ν :

$$\begin{cases} g^{c\prime} = \overline{g^c}(g^c, g^s, v_F; \nu, \nu', \Lambda) \\ g^{s\prime} = \overline{g^s}(g^c, g^s, v_F; \nu, \nu', \Lambda) \\ v_F' = \overline{v_F}(g^c, g^s, v_F; \nu, \nu', \Lambda) \\ \mu' = \overline{\mu}(g^c, g^s, v_F; \nu, \nu', \Lambda) \end{cases}. \tag{2.94}$$

Nous avons vu que trois de ces quatre fonctions sont l'identité. Seul $\overline{g^s}$ est non triviale. Comme tout ce que nous faisons est perturbatif, il est évident que nous allons évaluer cette fonction en perturbation. Si donc nous supposons que $g^{s\prime}$ admet un développement en puissance de g^s (et de g^c, mais qui n'intervient pas ici), nous obtenons :

$$g^{s\prime} = \overline{g^s}(g^c, g^s, v_F; \nu, \nu', \Lambda) = g^s + 4g^{s2}\frac{1}{2\pi v_F}\ln(\frac{\nu}{\nu'}). \tag{2.95}$$

Cette expression est indépendante de Λ. C'est le premier résultat fini que nous obtenons ! On dit que la théorie que nous avons considéré est perturbativement renormalisable. Nous avons donc trouvé le lien entre les quantités habillés à deux énergies différentes. Remarquons que si nous faisons $\nu' = 2v_F\Lambda$, nous obtenons le couplage nu, autrement dit : $\overline{g^s}(g^c, g^s, v_F; \nu, \nu' = 2v_F\Lambda, \Lambda) = g_B^s(g^c, g^s, v_F; \nu, \Lambda)$. Mais nous revenons

tout simplement à une équation divergente déjà connue. Nous n'avons donc pas encore trouvé de lien entre les couplages à haute et basse énergie, qui ne soit pas divergent. C'est le but du Groupe de Renormalisation dont nous allons parler à présent.

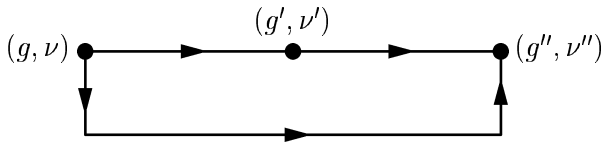
L'idée principale est très simple et nous allons l'illustrer sur un exemple trivial avant de nous attaquer à la théorie des champs. Supposons que nous ne sachions pas résoudre l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{y}{\tau} = 0$, mais que nous nous souvenons que la dérivée n'est rien d'autre que la limite d'un taux d'accroissement. Nous cherchons la solution entre les instants 0 et t, avec pour condition initiale $y(0) = y_0$. Nous discrétisons alors l'intervalle $[0, t]$ en $N + 1$ temps $t_i = i\Delta t = it/N$, $i = 0, \ldots N$. L'équation différentielle est alors remplacée par une équation aux différences, et on obtient, par exemple : $y(t_1) = (1 - \Delta t/\tau)y_0 = (1 - t_1/\tau)y_0$. Un raisonnement simpliste et trop rapide nous inciterai alors à écrire : $y(t) = (1 - t/\tau)y_0$. Nous avons simplement écrit que la solution est égale à sa tangente à l'origine. Nous obtenons un résultat manifestement divergent si $t \to \infty$, alors que nous savons que la solution stationnaire est $y = 0$. Le remède est bien évident, et il faut écrire :

$$y(t_2) = (1 - \Delta t/\tau)y_1 = (1 - \Delta t/\tau)^2 y_0 \tag{2.96}$$

$$\vdots$$

$$y(t_N) = y(t) = (1 - \Delta t/\tau)^N y_0 = (1 - t/(N\tau))^N y_0 \to e^{-t/\tau} y_0 \text{ quand } N \to \infty. \tag{2.97}$$

Pour notre exemple de théorie des champs, le problème est très similaire. Nous avons trouvé le lien entre les couplages de spin à deux énergies ("instants") ν et ν' différents. La relation est parfaitement valable en perturbation si $\nu' \simeq \nu$, car alors $\ln(\nu/\nu') \ll 1$. Essayer de faire $\nu' = 2v_{\mathrm{F}}\Lambda$ revient exactement à approximer la fonction par sa tangente dans le problème trivial étudié ci-dessus ! Il nous faut ici aussi passer progressivement d'une échelle à une autre. Nous pourrons alors écrire une équation différentielle dans laquelle le rôle du temps sera joué par l'énergie[11]. La méthode la plus simple pour trouver l'équation différentielle est la suivante. Nous introduisons une troisième échelle d'énergie ν'' et cherchons à passer de l'échelle ν à l'échelle ν'', mais en passant par l'échelle intermédiaire ν' :



Nous avons noté de manière schématique g pour les différentes quantités physiques. Pour le cas qui nous intéresse, seul g^{s} change quand l'échelle d'énergie change, donc

[11] Remarquons que nous avons ici l'explication de pourquoi nous avons calculé le vertex pour un jeu fixé d'impulsions et pour des énergies faisant intervenir une seule énergie typique. Nous voulons en effet écrire une équation différentielle, et pour cela, nous ne pouvons avoir qu'un seul temps !

nous ne nous préoccuperons plus des autres grandeurs. Nous ne les écrirons d'ailleurs même plus dans les arguments de $\overline{g^{\rm s}}$, afin d'alléger les notations. Nous pouvons donc écrire :

$$g^{\rm s\prime} = \overline{g^{\rm s}}(g^{\rm s};\nu,\nu',\Lambda), \tag{2.98}$$
$$g^{\rm s\prime\prime} = \overline{g^{\rm s}}(g^{\rm s\prime};\nu',\nu'',\Lambda), \text{ et} \tag{2.99}$$
$$g^{\rm s\prime\prime} = \overline{g^{\rm s}}(g^{\rm s};\nu,\nu'',\Lambda). \tag{2.100}$$

Les deux premières équations peuvent être combinées pour donner $g^{\rm s\prime\prime}$ en fonction de $g^{\rm s}$. Or c'est aussi ce que donne la troisième équation. Nous obtenons ainsi la relation :

$$\overline{g^{\rm s}}(g^{\rm s};\nu,\nu'',\Lambda) = \overline{g^{\rm s}}(\overline{g^{\rm s}}(g^{\rm s};\nu,\nu',\Lambda);\nu',\nu'',\Lambda). \tag{2.101}$$

Cette équation est exactement équivalente à (2.96) que nous avions écrit pour le problème d'équation différentielle du premier ordre. Mais ici, nous voulons obtenir l'équation différentielle, et non itérer la relation ci-dessus. Nous dérivons donc cette équation par rapport à la variable ν'', puis nous évaluons le résultat en $\nu'' = \nu'$:

$$\frac{\partial}{\partial\nu''}\overline{g^{\rm s}}(g^{\rm s};\nu,\nu'',\Lambda)\bigg|_{\nu''=\nu'} = \frac{\partial}{\partial\nu''}\overline{g^{\rm s}}(\overline{g^{\rm s}}(g^{\rm s};\nu,\nu',\Lambda);\nu',\nu'',\Lambda)\bigg|_{\nu''=\nu'} \tag{2.102}$$

Nous utilisons maintenant la relation perturbative (2.95) pour évaluer la dérivée dans le membre de droite, et nous réécrivons plus simplement le membre de gauche avec une dérivée par rapport à ν' :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\nu'}\overline{g^{\rm s}}(g^{\rm s};\nu,\nu',\Lambda) &= \frac{\partial}{\partial\nu''}\overline{g^{\rm s}}(\overline{g^{\rm s}}(g^{\rm s};\nu,\nu',\Lambda);\nu',\nu'',\Lambda)\bigg|_{\nu''=\nu'} &(2.103)\\
&= \frac{\partial}{\partial\nu''}\left[\overline{g^{\rm s}}(g^{\rm s};\nu,\nu',\Lambda) + 4\overline{g^{\rm s}}^2(g^{\rm s};\nu,\nu',\Lambda)\frac{1}{2\pi v_{\rm F}}\ln(\frac{\nu'}{\nu''})\right]\bigg|_{\nu''=\nu'} &(2.104)\\
&= -\frac{1}{\nu'}\frac{1}{2\pi v_{\rm F}}4\overline{g^{\rm s}}^2(g^{\rm s};\nu,\nu',\Lambda). &(2.105)
\end{aligned}$$

Nous donnons une touche finale à ce résultat en posant $t = \ln(\frac{2v_{\rm F}\Lambda}{\nu})$,[12] et $\tilde{g}^{\rm s} = \frac{g^{\rm s}}{2\pi v_{\rm F}}$. Si nous ne marquons plus la dépendance en Λ (qui n'existe de toute façon pas puisque le résultat perturbatif (2.95) ne dépend pas de Λ) nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t'}\overline{\tilde{g}^{\rm s}}(\tilde{g}^{\rm s};t,t') = 4\overline{\tilde{g}^{\rm s}}^2(\tilde{g}^{\rm s};t,t') \tag{2.106}$$

Cette équation, avec la condition $\overline{\tilde{g}^{\rm s}}(\tilde{g}^{\rm s};t,t'=t) = \tilde{g}^{\rm s}$ (cf la définition de $\overline{g^{\rm s}}$) est simple à résoudre :

$$\overline{\tilde{g}^{\rm s}}(\tilde{g}^{\rm s};t,t') = \frac{\tilde{g}^{\rm s}}{1+4\tilde{g}^{\rm s}(t-t')}, \text{ i.e. } \quad \overline{\tilde{g}^{\rm s}}(\tilde{g}^{\rm s};\nu,\nu') = \frac{\tilde{g}^{\rm s}}{1+4\tilde{g}^{\rm s}\ln(\frac{\nu'}{\nu})} \tag{2.107}$$

[12] Nous prenons cette définition qui nous permet d'avoir $t = 0$ si $\nu = 2v_{\rm F}\Lambda$, i.e. pour les hautes énergies, et $t \to +\infty$ si $\nu \to 0$, c'est-à-dire pour les faibles énergies. La présence du facteur $2v_{\rm F}\Lambda$ n'est pas gênante, et est même nécessaire car nous pouvons uniquement prendre le logarithme de quantités sans dimension.

Comme indiqué en note de bas de page numéro 12, le facteur Λ utilisé dans la définition de t n'est pas gênant : il a disparu dans l'équation ci-dessus, où seul le rapport entre les énergies ν et ν' intervient.

Il ne nous reste plus qu'à interpréter (2.107). Le flot de la constante de couplage, quand l'énergie ν' diminue, dépend du signe du couplage $\tilde{g}^{\mathrm{s}}$ à l'échelle ν. Nous avons représenté les deux flots obtenus sur les figures 2.11 et 2.12, en prenant comme référence des temps $t = 0$, c'est-à-dire les hautes énergies. Nous voyons que dans le cas

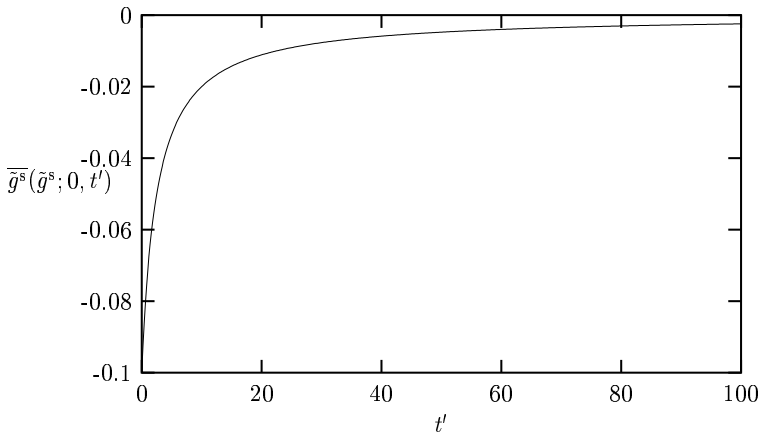


Fig. 2.11 – Flot à 1 boucle de la constante de couplage de spin, pour une valeur de haute énergie négative ($\tilde{g}^{\mathrm{s}} = -0.1$).

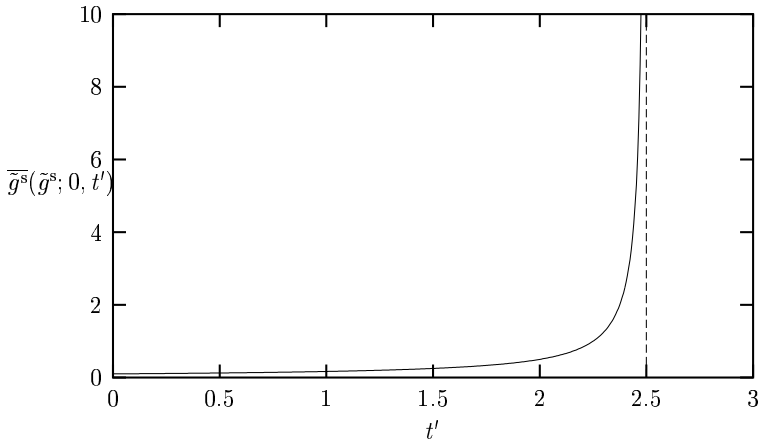


Fig. 2.12 – Flot à 1 boucle de la constante de couplage de spin, pour une valeur de haute énergie positive ($\tilde{g}^{\mathrm{s}} = +0.1$). L'asymptote verticale à $t' = 2.5$ est représentée en pointillés.

où le couplage de haute énergie est négatif, le système part à couplage faible, car la constante de couplage de spin tend vers 0 aux basses énergies. Nous avons donc obtenu un lien entre les valeurs du couplage à haute et à basse énergie, totalement exempt de

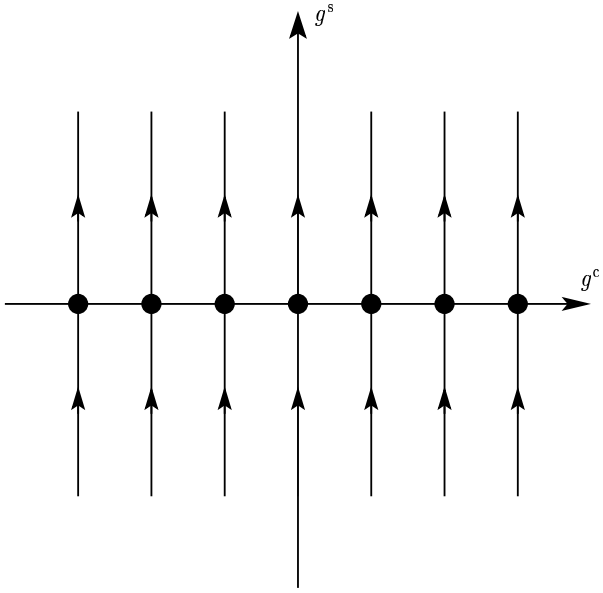


Fig. 2.13 – Diagramme de phase à 1 boucle, dans l'espace (g^c, g^s). Les ronds noirs représentes les points fixes, pour les trajectoires de RG considérées.

divergence. Le seul endroit où le cut-off apparaît encore est dans le temps de RG. Nous avons ainsi la relation suivante entre les hautes et les faibles énergies :

$$\overline{\tilde{g}^s}(\tilde{g}^s; 2v_F\Lambda, \nu) = \frac{\tilde{g}^s}{1 + 4\tilde{g}^s \ln(\frac{\nu}{2v_F\Lambda})}. \tag{2.108}$$

A strictement parler, il n'est pas possible d'envoyer le cut-off à l'infini (On obtiendrait un membre de droite toujours nul, correspondant à la valeur limite du couplage à très faible énergie). Néanmoins, cette relation n'est plus divergente dans la limite $\nu \ll 2v_F\Lambda$, et le RG a donc réussi à donner un sens à la théorie des perturbations. Passons au cas où le couplage de haute énergie est positif. Dans ce cas, le couplage diverge à l'échelle d'énergie $t' = 1/(4\tilde{g}^s)$, c'est-à-dire pour $\nu' = 2v_F\Lambda \exp(-1/(4\tilde{g}^s))$. Le système va donc à couplage fort. La divergence que nous observons ici n'a rien à voir avec les problèmes de la théorie des perturbations. C'est le signe physique d'une instabilité du système, dans lequel va avoir lieu une transition de phase vers un état de type supraconducteur[13].

[13]Un couplage de spin positif et un couplage de charge qui est son opposé donne un modèle de Hubbard attractif (cf annexe A). L'attraction entre les électrons donne lieu à un état supraconducteur. Notons toutefois que la transition de phase que le système semble posséder n'existe pas d'après le théorème de Mermin-Wagner. C'est un artefact du RG. Lorsque le système part à couplage fort, il ne faut pas oublier que la validité de la méthode perturbative que nous utilisons doit être mise en doute. Néanmoins, pour un système qui n'est pas complètement 1D comme les quasi-1D, les couplages aux autres directions pourront stabiliser l'état de symétrie brisée quand la température sera suffisamment faible. Remarquons finalement que dans l'approche de RG, le système ouvre un gap, correspondant à l'énergie de l'état lié formé d'une paire d'électrons, et qui est typiquement l'échelle d'énergie de la singularité. Ce gap existe, bien qu'il n'y ait pas de transition de phase. Nous renvoyons le lecteur au superbe article [Wit78].

Toutefois, notre théorie des perturbations qui est un développement en constante de couplage, n'a plus aucune raison d'être valide une fois que le couplage a dépassé une valeur typique de l'ordre de 1, et il nous faudra arrêter le flot à ce moment là. Pour finir cette partie, nous montrons sur la figure 2.13 le diagramme de phase qui résume les flots observés pour g^{s}, et la constance de g^{c}. On obtient une ligne de points fixes sur l'axe $g^{\mathrm{s}} = 0$.

2.2.4 Une dernière subtilité

Dans tout ce que nous avons raconté depuis le début de la section 2.2, nous avons utilisé l'approximation (2.81) pour la fonction $\gamma(\tilde{\nu})$. Nous avons justifié ceci en disant que nous prenions des énergies telles que $\tilde{\nu} \ll 1$. Cette hypothèse n'est malheureusement plus vraie lorsque $\nu = 2v_{\mathrm{F}}\Lambda$ (i.e. $\tilde{\nu} = 1$), et nous avons utilisé de telles énergies lorsque nous avons relié les couplages de haute et basse énergie. Le problème devient encore plus aigu lorsqu'on remarque sur les formules suivantes que γ n'est même pas défini à l'énergie $2v_{\mathrm{F}}\Lambda$, et que si l'on garde ne serait-ce que les termes finis, γ est un complexe, non un réel :

$$\gamma(\nu) = \frac{1}{4\pi v_{\mathrm{F}}} \ln\left[\frac{(\nu+\mathrm{i}\eta)(\nu-\mathrm{i}\eta)}{(\nu-2v_{\mathrm{F}}\Lambda+\mathrm{i}\eta)(\nu+2v_{\mathrm{F}}\Lambda-\mathrm{i}\eta)}\right] \tag{2.109}$$

$$= \frac{1}{2\pi v_{\mathrm{F}}}\left[\ln(\frac{\nu}{2v_{\mathrm{F}}\Lambda}) - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right] + O\left(\frac{\nu}{2v_{\mathrm{F}}\Lambda}\right). \tag{2.110}$$

En fait nous aurions très bien pu garder l'expression exacte de γ dans nos calculs. L'équation (2.95), par exemple, aurait alors été :

$$g^{\mathrm{s}\prime} = \overline{g^{\mathrm{s}}}(g^{\mathrm{c}}, g^{\mathrm{s}}, v_{\mathrm{F}}; \nu, \nu', \Lambda) = g^{\mathrm{s}} + 4{g^{\mathrm{s}}}^2[\gamma(\nu) - \gamma(\nu')]. \tag{2.111}$$

L'équation différentielle donnant le flot de RG (2.105) devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial\nu'}\overline{g^{\mathrm{s}}}(g^{\mathrm{s}};\nu,\nu',\Lambda) = -\frac{1}{4\pi v_{\mathrm{F}}}4\overline{g^{\mathrm{s}}}^2(g^{\mathrm{s}};\nu,\nu',\Lambda)$$
$$\times\left(\frac{1}{\nu'+\mathrm{i}\eta} + \frac{1}{\nu'-\mathrm{i}\eta} - \frac{1}{\nu'-2v_{\mathrm{F}}\Lambda+\mathrm{i}\eta} - \frac{1}{\nu'+2v_{\mathrm{F}}\Lambda-\mathrm{i}\eta}\right). \tag{2.112}$$

Nous étudierons à la section 3.4.1 l'influence d'une échelle caractéristique dans les flots de RG. Nous montrerons que l'on peut remplacer $1/(\nu'-2v_{\mathrm{F}}\Lambda+\mathrm{i}\eta)+1/(\nu'+2v_{\mathrm{F}}\Lambda-\mathrm{i}\eta)$ par 0 si $\nu \leqslant 2v_{\mathrm{F}}\Lambda$, sans que les résultats soient qualitativement affectés. Nous retrouvons alors l'équation de RG (2.105).

2.3 Le Groupe de Renormalisation à deux boucles

Nous avons déjà énormément appris du calcul à une boucle. En particulier, nous savons que selon le signe du couplage de spin de haute énergie, le couplage de spin

effectif va soit à couplage faible, soit à couplage fort. On peut donc se demander, à juste titre, quel est l'intérêt de faire un calcul à deux boucles, puisque dans le cas où le couplage diminue (en valeur absolue), le terme à deux boucles devient de plus en plus petit relativement au terme à une boucle. Et dans le cas contraire, le système partant à couplage fort, la théorie des perturbations est de toute façon vouée à l'échec.

La raison pour laquelle il est physiquement intéressant d'aller à deux boucles, ne peut pas être trouvée en ne considérant que les couplages. En fait, le propagateur va subir des modifications non triviales à deux boucles, qui ne sont pas du tout présentes à une boucle : la renormalisation de la fonction d'onde.

Nous calculerons néanmoins (en détail !) la renormalisation du vertex à deux boucles pour deux raisons : la première est que nous pourrons ainsi vérifier la non renormalisation du couplage de charge, que l'on sait être un résultat exact à tous les ordres. La seconde est de montrer au lecteur que les calculs sont déjà compliqués dans le cas 1D, et qu'il vaut donc la peine de trouver une raison physique de ne pas calculer les vertexs à deux boucles dans le cas de N chaînes, où les calculs seront bien plus lourds ! De plus, certains aspects du RG ne peuvent être réellement assimilés qu'à deux boucles, car le RG à une boucle est un cas très particulier. Notons pour les puristes qu'il faudrait en toute rigueur aller à trois boucles, qui est le premier ordre à partir duquel la fonction β devient non universelle. A ce propos, nous laissons le lecteur consulter l'article de Rezayi et al [RST79], et nous nous contenterons du calcul à deux boucles.

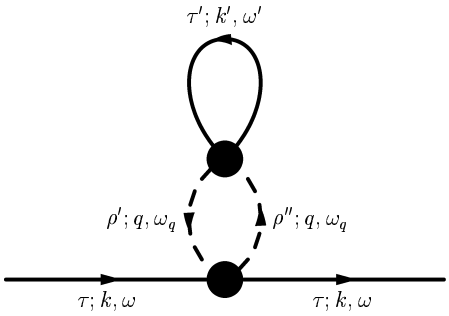
2.3.1 La self-énergie à deux boucles : nécessité de la renormalisation du champ

Nous commençons par regarder la renormalisation du propagateur. Nous allons voir que ce que nous avons fait à une boucle ne suffit pas à régulariser de nouvelles divergences qui apparaissent à 2 boucles. Commençons par dessiner les graphes de Feynman possibles : voir figures 2.14, 2.15 et 2.16. Le diagramme 2.14(a) est nul[14]. En effet, dans la boucle de fermions L, les deux propagateurs ont les mêmes impulsions et énergies, et nous avons donc une intégrale du type :

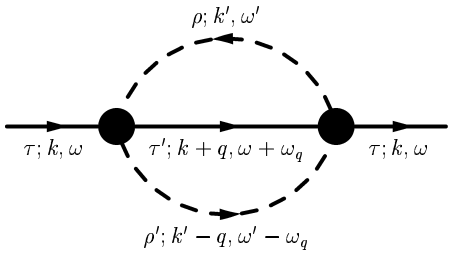
$$\int \frac{\mathrm{d}\omega_q}{2\mathrm{i}\pi} \frac{1}{\omega_q + v_\mathrm{F} q - \mathrm{i}\eta\,\mathrm{sgn}(q)} \frac{1}{\omega_q + v_\mathrm{F} q - \mathrm{i}\eta\,\mathrm{sgn}(q)}. \tag{2.113}$$

Ainsi les 2 pôles sont du même côté de l'axe réel, et nous pouvons calculer l'intégrale en bouclant dans le demi-plan opposé à celui des pôles. Le résultat est alors bien 0 comme annoncé. Pour la même raison, les diagrammes 2.15(a) et 2.15(b) sont nuls. Notons

[14]Le diagramme de Kohn-Luttinger[KL60] est dit anormal, car il est nul dans notre théorie qui est une théorie de température nulle. Par contre, le même graphe apparaît aussi dans la théorie des perturbations à température finie, et il est alors non nul. Le lecteur trouvera une bonne description de ceci dans le chapitre 3.3 du livre de Negele et Orland [NO88]. De plus, sa limite (pour un système à la limite thermodynamique) quand $T \to 0$ n'est pas égal à 0, ce qui lui vaut le qualificatif d'anormal. Le problème est donc celui de la non commutation des limites $T \to 0$ et $L \to \infty$.



(a) Diagramme dit "de Kohn-Luttinger"



(b) Diagramme dit "sunrise" (soleil levant)

Fig. 2.14 – Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour la self-énergie, ne faisant pas intervenir de contre-terme.

que le second aurait de toute façon été nul, puisque $\delta v^{(1)} = 0$ (cf fin de la section 2.2.2). Le diagramme 2.15(c) quant à lui donne une contribution identique à celle du diagramme 2.4 page 42 avec g^{c} remplacé par $\delta g^{\mathrm{c}(2)}$, soit : $\Sigma_{\mathrm{R}}^{(2),\mathrm{ct}(\delta g^{\mathrm{c}})}(k,\omega) = \delta g^{\mathrm{c}(2)} \frac{\Lambda}{\pi}$. Mais nous avons vu (cf équation (2.84)) que $\delta g^{\mathrm{c}(2)} = 0$. La contribution de ce diagramme est elle aussi nulle.

Les autres termes ne sont pas nuls. Les diagrammes 2.16(a) et 2.16(b) donnent des contributions identiques à celles des graphes 2.10(a) et 2.10(b) page 56, avec l'indice 1 remplacé par un indice 2 : $\Sigma_{\mathrm{R}}^{(2),\mathrm{ct}(\delta\mu)}(k,\omega) = \delta\mu^{(2)}$ et $\Sigma_{\mathrm{R}}^{(2),\mathrm{ct}(\delta v)}(k,\omega) = \delta v^{(2)}(k-k_{\mathrm{F}})$. Passons donc au plus intéressant, le diagramme sunrise 2.14(b).

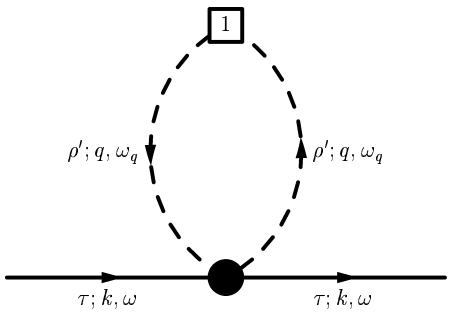
Regardons tout de suite ce qui concerne les constantes de couplage et le spin. Nous avons à évaluer $(g^{\mathrm{c}}\mathbb{I}_{\tau',\tau}\mathbb{I}_{\rho',\rho} + g^{\mathrm{s}}\boldsymbol{\sigma}_{\tau',\tau}\boldsymbol{\sigma}_{\rho',\rho})(g^{\mathrm{c}}\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'} + g^{\mathrm{s}}\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'})$. Seul le terme spin-spin est non trivial. Il est cependant facile de voir qu'il vaut : $g^{\mathrm{s}2}(\sigma^i\sigma^j)_{\tau,\tau}\mathrm{Tr}(\sigma^i\sigma^j) = 2g^{\mathrm{s}2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\tau,\tau} = 6g^{\mathrm{s}2}$. Nous obtenons un facteur total $2(g^{\mathrm{c}2} + 3g^{\mathrm{s}2})$. Nous écrirons ce facteur dans les expressions finales, mais oublions le pour l'instant et concentrons nous sur le calcul des intégrales. Il nous faut calculer[15] :

$$-\int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\frac{\mathrm{d}k'}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\omega_q}{2\mathrm{i}\pi}\frac{\mathrm{d}\omega'}{2\mathrm{i}\pi} G^*_{\mathrm{R}}(k+q,\omega+\omega_q)G^*_{\mathrm{L}}(k',\omega')G^*_{\mathrm{L}}(k'-q,\omega'-\omega_q) \tag{2.114}$$

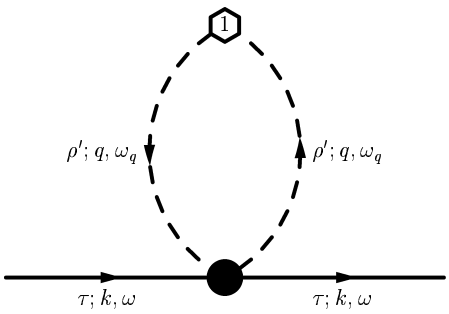
$$= -\int \frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\frac{\mathrm{d}k'}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\omega_q}{2\mathrm{i}\pi}\frac{\mathrm{d}\omega'}{2\mathrm{i}\pi}\frac{1}{\omega+\omega_q - v_{\mathrm{F}}(k+q) + \mathrm{i}\eta\,\mathrm{sgn}(k+q)} \times\frac{1}{\omega' + v_{\mathrm{F}}k' - \mathrm{i}\eta\,\mathrm{sgn}(k')} \times \frac{1}{\omega'-\omega_q + v_{\mathrm{F}}(k'-q) - \mathrm{i}\eta\,\mathrm{sgn}(k'-q)}. \tag{2.115}$$

Commençons par regarder la boucle de fermions L, et l'intégrale sur ω'. La méthode

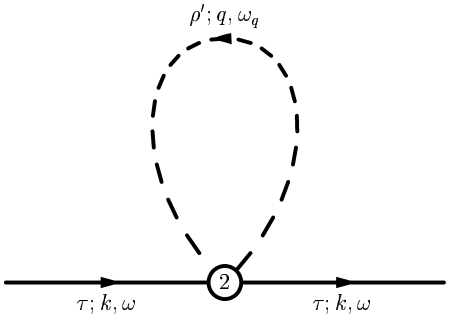
[15] Le signe - provient des contractions de Wick



(a) Diagramme faisant intervenir le contre-terme d'ordre 1 pour le potentiel chimique.



(b) Diagramme faisant intervenir le contre-terme d'ordre 1 pour la vitesse de Fermi.



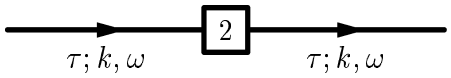
(c) Diagramme faisant intervenir le contre-terme d'ordre 2 pour le couplage.

Fig. 2.15 – Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour la self-énergie, avec insertion de contre-terme de l'ordre précédent.

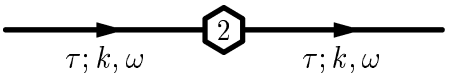
des résidus nous dit que l'intégrale des deux propagateurs L donne l'intégrand :

$$\frac{-1}{\omega_q + v_{\mathrm{F}} q - \mathrm{i}\eta}, \text{ pour } 0 \leqslant k' \leqslant q, \quad \text{et} \quad \frac{1}{\omega_q + v_{\mathrm{F}} q + \mathrm{i}\eta}, \text{ pour } q \leqslant k' \leqslant 0. \tag{2.116}$$

Nous pouvons ensuite effectuer l'intégrale sur ω_q, toujours par la méthode des résidus. Nous régularisons tout de suite les intégrales sur q et k' en demandant que toutes les impulsions de propagateurs du graphe soient à une distance au plus Λ des points de Fermi. Nous obtenons l'expression finale totale (mais toujours sans les constantes de



(a) Contre-terme d'ordre 2 pour le potentiel chimique.



(b) Contre-terme d'ordre 2 pour la vitesse de Fermi.

Fig. 2.16 – Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour la self-énergie, dus aux nouveaux contre-termes.

couplage) :

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\left(\int_{\substack{0\leqslant k'\leqslant\Lambda\\ -\Lambda\leqslant k'-q\leqslant 0\\ 0\leqslant k+q\leqslant\Lambda}} \mathrm{d}q\,\mathrm{d}k'\,\frac{1}{\omega - v_{\mathrm{F}}(k+2q)+\mathrm{i}\eta} + \int_{\substack{-\Lambda\leqslant k'\leqslant 0\\ 0\leqslant k'-q\leqslant\Lambda\\ -\Lambda\leqslant k+q\leqslant 0}} \mathrm{d}q\,\mathrm{d}k'\,\frac{1}{\omega - v_{\mathrm{F}}(k+2q)-\mathrm{i}\eta}\right). \tag{2.117}$$

Nous avons aussi la condition $-\Lambda \leqslant k \leqslant \Lambda$. Les domaines d'intégration ont été représentés pour chacune des deux intégrales sur la figure 2.17. Nous voyons que le domaine dépend du signe de k. Nous supposerons par la suite que $k \geqslant 0$. Ce qui nous importera le plus sera la valeur de la self-énergie pour $k = 0$, ainsi que sa dérivée par rapport à k, à $k = 0$. La connaissance de la self-énergie pour $k \geqslant 0$ sera donc suffisante. Nous effectuons alors l'intégrale sur k' en premier, et trouvons :

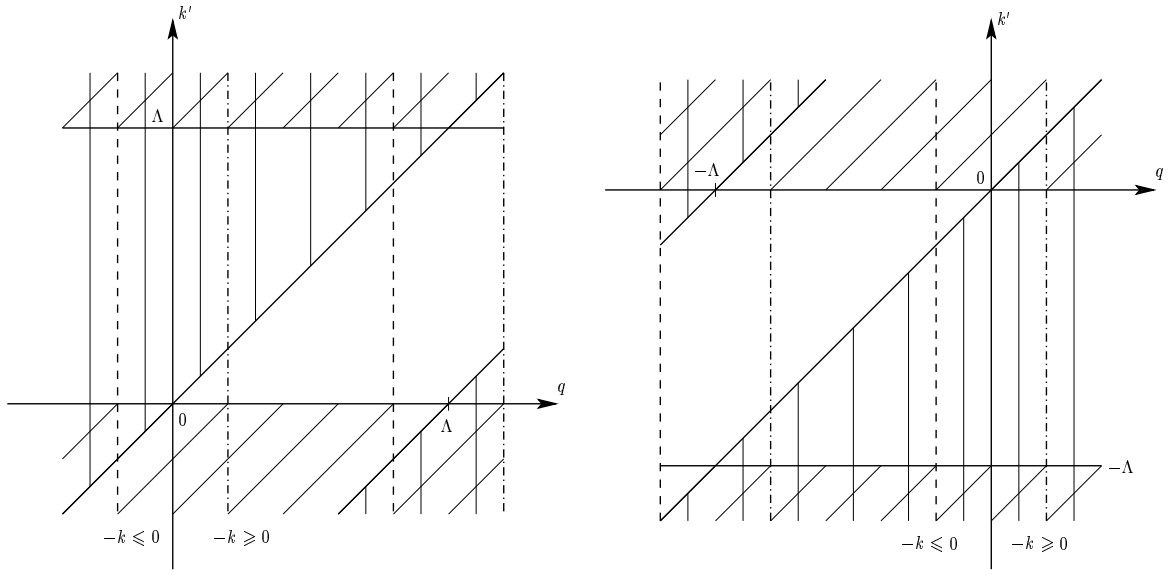
$$\frac{1}{(2\pi)^2}\left(\int_0^{\Lambda-k}\mathrm{d}q\,\frac{q}{\omega - v_{\mathrm{F}}(k+2q)+\mathrm{i}\eta} + \int_{-\Lambda-k}^{-\Lambda}\mathrm{d}q\,\frac{2\Lambda+q}{\omega - v_{\mathrm{F}}(k+2q)-\mathrm{i}\eta} \tag{2.118}$$

$$+\int_{-\Lambda}^{-k}\mathrm{d}q\,\frac{-q}{\omega - v_{\mathrm{F}}(k+2q)-\mathrm{i}\eta}\right). \tag{2.119}$$

Remarquons que nous pouvons écrire cette somme d'intégrale en faisant apparaître une densité spectrale à 2 particules 1 trou, et une densité spectrale à 2 trous 1 particule. On obtient le résultat suivant :

$$\frac{1}{(2\pi v_{\mathrm{F}})^2}\int \mathrm{d}\omega'\left[\frac{\rho_{\mathrm{2p1t}}(k,\omega')}{\omega - v_{\mathrm{F}}k - \omega' + \mathrm{i}\eta} + \frac{\rho_{\mathrm{1p2t}}(k,\omega')}{\omega - v_{\mathrm{F}}k - \omega' - \mathrm{i}\eta}\right] \tag{2.120}$$

$$= \quad \frac{1}{(2\pi v_{\mathrm{F}})^2}\int \mathrm{d}\omega'\frac{\rho(k,\omega')}{\omega - v_{\mathrm{F}}k - \omega' + \mathrm{i}\eta\,\mathrm{sgn}(\omega')}. \tag{2.121}$$



(a) Première intégrale ($k' \geqslant 0$). (b) Deuxième intégrale ($k' \leqslant 0$).

Fig. 2.17 – Domaines d'intégration pour les intégrales apparaissant dans le calcul du sunrise. Les hachures verticales et en biais représentent les domaines interdits par les deux premières inégalités. Le domaine d'intégration est ensuite trouvé en prenant la zone non hachurée comprise entre les pointillés (resp. les points-tirés) si $k \geqslant 0$ (resp. $k \leqslant 0$).

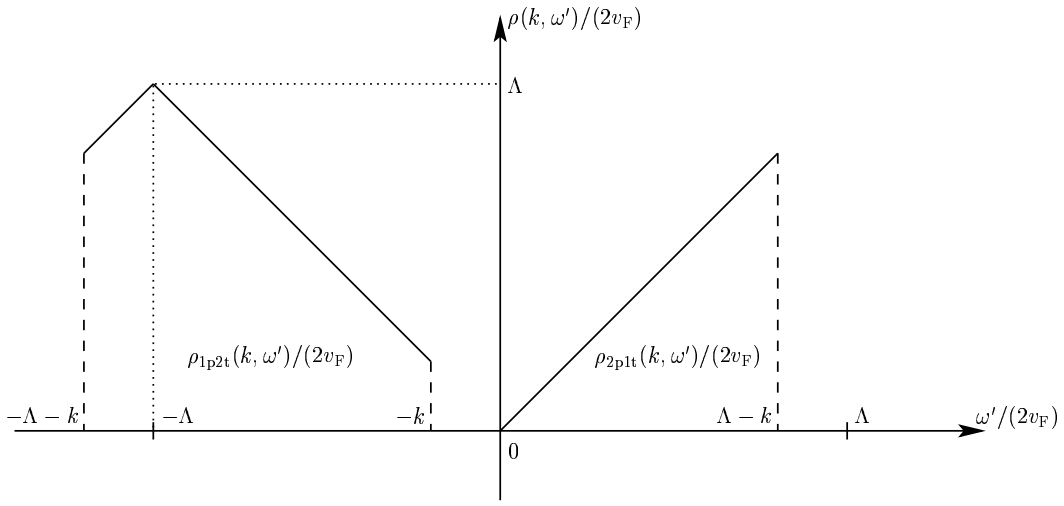


Fig. 2.18 – Densité spectrale de la self-énergie à 2 boucles (sunrise).

La densité spectrale totale, qui est simplement la somme des deux densités spectrales (qui sont à supports disjoints), est représentée figure 2.18, pour $k \geqslant 0$. Chacune des intégrales de (2.118) s'évalue facilement, et le résultat final est (pour $k \geqslant 0$, et toujours pour k et ω mesurés par rapport à $k_{\rm F}$ et μ) :

$$\begin{aligned}\Sigma_{\rm R}^{(2)}(k,\omega) &= \frac{g^{\rm c2}+3g^{\rm s2}}{2(2\pi v_{\rm F})^2}\times[-2v_{\rm F}k \\ &\quad +(\omega-v_{\rm F}k)\ln\left(\frac{(\omega-v_{\rm F}k+{\rm i}\eta)(\omega+v_{\rm F}k-{\rm i}\eta)}{(\omega+v_{\rm F}k-2v_{\rm F}\Lambda+{\rm i}\eta)(\omega-v_{\rm F}k+2v_{\rm F}\Lambda-{\rm i}\eta)}\right) \\ &\quad +(4v_{\rm F}\Lambda+\omega-v_{\rm F}k)\ln\left(\frac{\omega+v_{\rm F}k+2v_{\rm F}\Lambda-{\rm i}\eta}{\omega-v_{\rm F}k+2v_{\rm F}\Lambda-{\rm i}\eta}\right)\Big] \qquad (2.122) \\ &\underset{\Lambda\to\infty}{\sim} \frac{g^{\rm c2}+3g^{\rm s2}}{2(2\pi v_{\rm F})^2}(\omega-v_{\rm F}k)\ln\left(\frac{|\omega^2-(v_{\rm F}k)^2|}{(2v_{\rm F}\Lambda)^2}\right). \qquad (2.123)\end{aligned}$$

Que déduisons-nous ce dernier résultat ? Premièrement, cette self-énergie est nulle au point $(k=0,\omega=0)$, c'est-à-dire en réalité si nous revenons aux variables "absolues", si $(k=k_{\rm F},\omega=\mu)$. Le contre-terme $\delta\mu^{(2)}$ pour le potentiel chimique est donc nul, puisque la valeur du potentiel chimique est inchangée[16]. Deuxièmement, si l'on se donne une valeur de k, cette self-énergie s'annule pour une énergie vérifiant $\omega-\mu=v_{\rm F}(k-k_{\rm F})$. Par conséquent, la vitesse de Fermi est elle aussi inchangée à 2 boucles, et le contre-terme $\delta v^{(2)}$ est lui-aussi nul. Troisièmement et dernièrement, puisque les deux contre-termes qui étaient à notre disposition sont nuls, il nous faut faire appel à un autre argument si nous voulons nous débarrasser de la divergence de la self-énergie (2.123), quand $\Lambda\to\infty$.

Regardons le propagateur inverse habillé R[17]. Dans les variables impulsion et énergie relatives, il s'écrit :

$$G_{\rm R}^{(2)^{-1}}(k,\omega)=(\omega-v_{\rm F}k)\left[1-\frac{g^{\rm c2}+3g^{\rm s2}}{2(2\pi v_{\rm F})^2}\ln\left(\frac{|\omega^2-(v_{\rm F}k)^2|}{(2v_{\rm F}\Lambda)^2}\right)\right]. \qquad (2.124)$$

Si nous nous plaçons à la surface de Fermi, i.e. à $k=0$, et à l'énergie typique $\omega=\nu$, nous obtenons :

$$G_{\rm R}^{(2)^{-1}}(k=0,\omega=\nu)=\nu\left[1-\frac{g^{\rm c2}+3g^{\rm s2}}{(2\pi v_{\rm F})^2}\ln\left(\frac{\nu}{2v_{\rm F}\Lambda}\right)\right]. \qquad (2.125)$$

Nous voyons sur ces deux expressions que l'effet des interactions est de multiplier l'inverse propagateur libre par un facteur admettant un développement en constantes

[16] Rappelons que le potentiel chimique est l'énergie d'une particule ajoutée à la surface de Fermi. Or les pôles du propagateur donne le spectre des états à une particule. Ainsi, le pôle à $k=k_{\rm F}$ se situe à $\omega=\mu$. Comme l'inverse propagateur libre, ainsi que celui calculé à l'ordre de 1 boucle s'annule en $(k_{\rm F},\mu)$, et que la self-énergie due au sunrise s'y annule aussi, ce point est bien un pôle du propagateur calculé à 2 boucles, si le contre-terme $\delta\mu^{(2)}$ est nul.

[17] Ou plus précisément sa partie réelle. Nous oublions la partie imaginaire, car celle-ci ne contient aucune divergence.

de couplage. On définit les propagateurs renormalisés comme suit :

$$G^{(\mathcal{R})}_{\mathrm{R,L}}(k,\omega) = \frac{1}{Z_{\mathrm{R,L}}} G_{\mathrm{R,L}}(k,\omega) \;\Leftrightarrow\; {G^{(\mathcal{R})}_{\mathrm{R,L}}}^{-1}(k,\omega) = Z_{\mathrm{R,L}} G^{-1}_{\mathrm{R,L}}(k,\omega). \tag{2.126}$$

Et on demande à ce que ces propagateurs renormalisés soient finis. Le facteur multiplicatif Z est ajusté en conséquence. L'usage est de demander que la prescription de renormalisation suivante soit vérifiée :

$${G^{(\mathcal{R})}_{\mathrm{R,L}}}^{-1}(k=0,\omega=\nu) = Z_{\mathrm{R,L}} G^{-1}_{\mathrm{R,L}}(k=0,\omega=\nu) = \nu. \tag{2.127}$$

Cette condition est vérifiée à l'ordre 0, avec $Z=1$. A un ordre plus élevée, elle définit $Z(g^{\mathrm{c}}, g^{\mathrm{s}}, v_{\mathrm{F}}; \nu, \Lambda)$. Ici, nous trouvons :

$$Z^{(2)}_{\mathrm{R}}(g^{\mathrm{c}}, g^{\mathrm{s}}, v_{\mathrm{F}}; \nu, \Lambda) = 1 + \frac{g^{\mathrm{c}2} + 3g^{\mathrm{s}2}}{(2\pi v_{\mathrm{F}})^2} \ln\left(\frac{\nu}{2v_{\mathrm{F}}\Lambda}\right). \tag{2.128}$$

On peut de plus vérifier que $Z_{\mathrm{L}} = Z_{\mathrm{R}}$.

L'interprétation de ce facteur est celle d'une renormalisation du champ : les champs dont les fonctions de Green sont finies sont $\Psi_{\mathrm{R,L}}$ définis par $\psi_{\mathrm{R,L}} = Z^{1/2}_{\mathrm{R,L}} \Psi_{\mathrm{R,L}}$, et non les champs $\psi_{\mathrm{R,L}}$ eux-mêmes. La raison est que les opérateurs de création de fermions nus ψ ne sont pas les opérateurs qui créent les excitations physiques de basse énergie du système.

Considérons pour commencer le cas d'un liquide de Fermi (pour lequel le facteur Z tend est fini). On sait que ce sont les quasi-particules et non les électrons eux-mêmes qui sont les bonnes excitations de basse énergie. Ces quasi-particules sont physiquement assez proches des électrons (on peut les voir comme des électrons habillés d'un nuage d'autres électrons avec lesquels ils interagissent). Z donne la taille du saut entre le nombre d'occupation pour les états juste en-dessous et juste au-dessus du vecteur de Fermi. Dans le cas libre, le nombre d'occupation prend les valeurs 1 et 0, et le saut vaut donc 1. Quand il y a des interactions, ce saut devient plus petit que 1, et est égal à Z. La renormalisation du champ permet donc de redonner une valeur 1 au saut, pour les opérateurs physiques Ψ. Nous renvoyons le lecteur au livre [Noz63] pour plus de détails.

Dans le cas du liquide de Luttinger qui nous intéresse, la situation est plus dramatique : le poids de quasi-particule est non seulement divergent avec Λ, mais il tend vers 0 si nous faisons tendre ν vers 0 (l'expression (2.128) nous ferait plutôt penser que ce poids tend vers $-\infty$, mais c'est sur l'expression améliorée par le RG qu'il faut raisonner, cf par exemple [Col84]). C'est pourquoi nous avons été obligés de donner des prescriptions de renormalisation à une valeur finie de ν. Ni les électrons, ni les quasi-particules ne sont les bonnes excitations de basse énergie. On sait en fait que ce sont des modes collectifs bosoniques de densité (cf [Tom50]).

Nous complétons cette discussion en montrant comment on peut obtenir des informations plus précises sur le propagateur renormalisé. Le propagateur non renormalisé

$G_{\mathrm{R,L}}$ ne dépend en fait que des constantes d'interactions nues. En effet, il ne faut pas oublier que c'est le propagateur des fermions ψ, pour un Hamiltonien définit par les quantités de hautes énergies. Que nous ayons fait notre théorie des perturbations avec les grandeurs de basse énergie ne change rien au Hamiltonien de départ. Nous avons simplement scindé ce dernier en deux morceaux, afin de faire apparaître une partie de basse énergie, et les contre-termes. Le propagateur renormalisé et les Z dépendent quant à eux des quantités de basse énergie. Nous avons donc, si nous notons bien les dépendances dans les différentes quantités :

$$G_{\mathrm{R,L}}^{(\mathcal{R})^{-1}}(k,\omega;g^\alpha;\nu,\Lambda) = Z_{\mathrm{R,L}}(g^\alpha;\nu,\Lambda) G_{\mathrm{R,L}}^{-1}(k,\omega;g_{\mathrm{B}}^\alpha(g^\beta;\nu,\Lambda);\Lambda). \tag{2.129}$$

En fait, pour simplifier les notations, nous n'avons pas du tout écrit les dépendances dans la vitesse de Fermi, ni dans le potentiel chimique, qui n'ont de toute façon pas de flot. L'équation ci-dessus aurait tout aussi bien pu être écrite à une échelle ν'. Mais alors, puisque $g_{\mathrm{B}}^\alpha(g^\beta;\nu,\Lambda) = g_{\mathrm{B}}^\alpha(g^{\beta\prime};\nu',\Lambda)$, le propagateur non renormalisé est inchangé. Si on fait le quotient membre à membre des équations obtenues aux échelles ν et ν', on obtient le lien suivant entre les propagateurs renormalisés à deux échelles différentes :

$$G_{\mathrm{R,L}}^{(\mathcal{R})^{-1}}(k,\omega;g^\alpha;\nu,\Lambda) = \varphi_{\mathrm{R,L}}(g^\alpha;\nu,\nu',\Lambda)\, G_{\mathrm{R,L}}^{(\mathcal{R})^{-1}}(k,\omega;g^{\alpha\prime};\nu',\Lambda), \text{ avec} \tag{2.130}$$

$$\varphi_{\mathrm{R,L}}(g^\alpha;\nu,\nu',\Lambda) = \frac{Z_{\mathrm{R,L}}(g^\alpha;\nu,\Lambda)}{Z_{\mathrm{R,L}}(g^{\alpha\prime};\nu',\Lambda)} = \frac{Z_{\mathrm{R,L}}(g^\alpha;\nu,\Lambda)}{Z_{\mathrm{R,L}}(\overline{g^\alpha}(g^\beta;\nu,\nu',\Lambda);\nu',\Lambda)}. \tag{2.131}$$

L'intérêt d'écrire tout ceci est que si l'on évalue l'avant dernière équation pour $k=0$ et $\omega=\nu'$, qu'on utilise la prescription de renormalisation (2.127) à l'échelle ν', puis qu'on remplace ν' par ω, on obtient :

$$G_{\mathrm{R,L}}^{(\mathcal{R})^{-1}}(k=0,\omega;g^\alpha;\nu,\Lambda) = \omega\, \varphi_{\mathrm{R,L}}(g^\alpha;\nu,\omega,\Lambda). \tag{2.132}$$

Nous pouvons donc porter notre attention sur la fonction φ. Pour obtenir une équation différentielle vérifiée par φ (tout comme nous l'avions fait pour les $\overline{g^\alpha}$) nous remarquons que :

$$\varphi_{\mathrm{R,L}}(g^\alpha;\nu,\nu'',\Lambda) = \varphi_{\mathrm{R,L}}(g^\alpha;\nu,\nu',\Lambda)\varphi_{\mathrm{R,L}}(g^{\alpha\prime};\nu',\nu'',\Lambda) \tag{2.133}$$

$$= \varphi_{\mathrm{R,L}}(g^\alpha;\nu,\nu',\Lambda)\varphi_{\mathrm{R,L}}(\overline{g^\alpha}(g^\beta;\nu,\nu',\Lambda);\nu',\nu'',\Lambda). \tag{2.134}$$

Nous dérivons ensuite cette relation par rapport à ν'', puis faisons $\nu''=\nu'$. Nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial\nu'}\varphi_{\mathrm{R,L}}(g^\alpha;\nu,\nu',\Lambda) = \varphi_{\mathrm{R,L}}(g^\alpha;\nu,\nu',\Lambda)\left[\frac{\partial}{\partial\nu''}\varphi_{\mathrm{R,L}}(\overline{g^\alpha}(g^\beta;\nu,\nu',\Lambda);\nu',\nu'',\Lambda)\right]\Bigg|_{\nu''=\nu'}. \tag{2.135}$$

La condition initiale est bien sûr : $\varphi_{\mathrm{R,L}}(g^\alpha;\nu,\nu,\Lambda)=1$.

Que trouvons-nous pour notre exemple ? Puisque nous travaillons à 2 boucles, nous devons nous limiter pour la fonction φ à une précision d'ordre 2 en constante de

couplage. En utilisant le résultat (2.128) à 2 boucles pour Z, et en remplaçant $g^{\alpha\prime 2}$ par $g^{\alpha 2}$, nous obtenons :

$$\varphi^{(2)}_{\mathrm{R,L}}(g^\alpha;\nu,\nu',\Lambda) = 1 + \frac{g^{\mathrm{c}2}+3g^{\mathrm{s}2}}{(2\pi v_{\mathrm{F}})^2}\ln\left(\frac{\nu}{\nu'}\right), \tag{2.136}$$

qui ne contient plus aucune divergence. (2.135) devient ici :

$$\frac{\partial}{\partial\nu'}\varphi_{\mathrm{R,L}}(g^\alpha;\nu,\nu',\Lambda) = \varphi_{\mathrm{R,L}}(g^\alpha;\nu,\nu',\Lambda)\left[-\frac{1}{\nu'}\frac{\overline{g^{\mathrm{c}}}^2(g^\alpha;\nu,\nu',\Lambda)+3\overline{g^{\mathrm{s}}}^2(g^\alpha;\nu,\nu',\Lambda)}{(2\pi v_{\mathrm{F}})^2}\right], \tag{2.137}$$

soit aussi :

$$\frac{\partial}{\partial t'}\ln\left[\varphi_{\mathrm{R,L}}(g^\alpha;t,t',\Lambda)\right] = \overline{g}^{\mathrm{c}2}(g^\alpha;t,t',\Lambda)+3\overline{g}^{\mathrm{s}2}(g^\alpha;t,t',\Lambda). \tag{2.138}$$

Afin de pouvoir trouver φ, et donc le propagateur renormalisé, il nous faut d'abord connaître l'évolution des couplages, et ce aussi, a priori, à l'ordre de 2 boucles. C'est ce à quoi nous nous attaquons maintenant.

2.3.2 Le vertex à deux boucles

Étant donné que le nombre de graphes de Feynman est assez important, nous allons étudier les graphes les plus simples à évaluer en premier. Nous commencerons donc par les graphes de Feynman faisant intervenir des contre-termes, puisque leur évaluation se déduit des résultats à 1 boucle. Le graphe de Feynman de la figure 2.19 fait intervenir le nouveau contre-terme $\delta g^{(3)}$. Son expression est simplement :

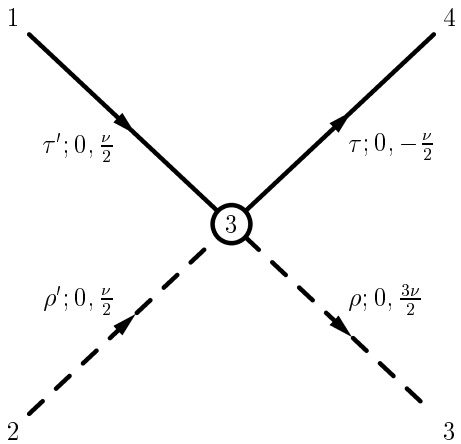


Fig. 2.19 – Graphe de Feynman pour le vertex (pour le jeu de pattes externes habituel, mais l'expression associée est indépendante de celui-ci), faisant intervenir le nouveau contre-terme $\delta g^{(3)}$.

$$\delta\Gamma^{(2),\mathrm{ct}(\delta g^{(3)})}_{\tau',\rho',\rho,\tau}(\nu) = \delta g^{\mathrm{c}(3)}\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'} + \delta g^{\mathrm{s}(3)}\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}. \tag{2.139}$$

Nous avons ensuite les 4 graphes de Feynman des figures 2.20 et 2.21, qui ne sont autres que les graphes de type bulle pp et pt, dans lesquels une des interactions est remplacée par le contre-terme de l'ordre précédent, $\delta g^{(2)}$. Les graphes 2.20(a) et 2.20(b), ainsi que

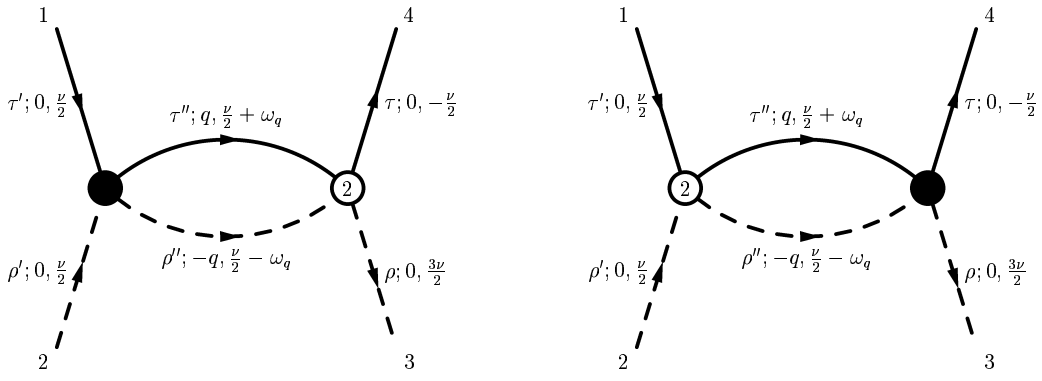


Fig. 2.20 – Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour le vertex, dus au contre-terme de type $\delta g^{(2)}$ insérés dans une bulle pp.

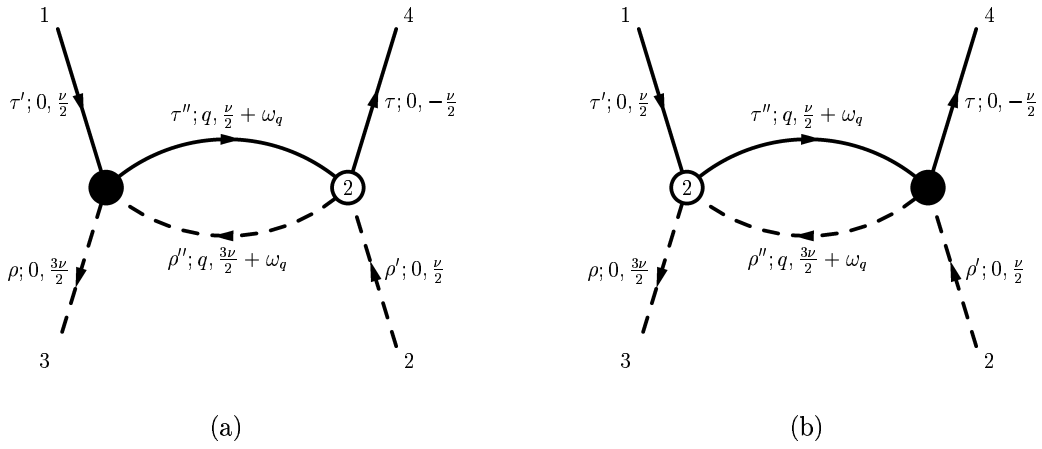


Fig. 2.21 – Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour le vertex, dus au contre-terme de type $\delta g^{(2)}$ insérés dans une bulle pt.

2.21(a) et 2.21(b) sont de manière évidente égaux, tout comme l'étaient les graphes avec deux ronds noirs (cf note de bas de page 6). Les expressions de ces différents graphes se déduisent de plus des équations (2.77) et (2.78), en remplaçant un carré $g^{\alpha 2}$ par $g^{\alpha}\delta g^{\alpha(2)}$. Étant donné les valeurs (2.84) trouvées à l'ordre précédent pour les

contre-termes, la somme des quatre graphes de Feynman considérés ici vaut :

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^{(2),\mathrm{ct}(\delta g^{(2)})}_{\tau',\rho',\rho,\tau}(\nu) &= -4\delta g^{\mathrm{s}(2)} g^{\mathrm{s}}\gamma(\tilde{\nu})\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'} && (2.140)\\
&= -16 g^{\mathrm{s}3}\gamma^2(\tilde{\nu})\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'} && (2.141)\\
&= -16 g^{\mathrm{s}3}\frac{1}{(2\pi v_{\mathrm{F}})^2}(\ln^2(\tilde{\nu}) - \mathrm{i}\pi\ln(\tilde{\nu}) + O(1))\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}. && (2.142)
\end{aligned}$$

Remarquons qu'il était nécessaire de calculer la bulle en prenant les termes finis en compte, car une fois la bulle élevée au carré, ces termes donnent une contribution divergente sous-dominante. Nous ne cherchons par contre pas à trouver les termes finis des graphes à 2 boucles, car ceux-ci seraient uniquement importants si nous avions prévu d'aller à 3 boucles, ce que nous ne ferons pas.

Nous pouvons maintenant passer aux graphes de Feynman qui sont une bulle pp ou pt, mais dont un des propagateurs est "décoré" par une insertion de self-énergie de l'ordre 1 boucle. Ceux-ci sont représentés sur les figures 2.22 page suivante, 2.23 page 76, 2.24 page 77 et 2.25 page 78. La contribution totale de tous ces graphes est nulle. En effet, considérons par exemple les trois graphes de la figure 2.22. Le graphe de Feynman 2.22(c) est nul car le contre-terme $\delta v^{(1)}$ est nul. De plus, la somme de 2.22(a) et 2.22(b) vaut zéro, puisque le contre-terme $\delta\mu^{(1)}$ avait justement été ajusté, à l'ordre précédent, pour compenser la modification du potentiel chimique due à la self-énergie à une boucle insérée dans 2.22(a).

Regardons à présent les graphes de Feynman dans lesquels aucun contre-terme n'apparaît. Ils font donc intervenir trois interactions. On génère une partie de ces graphes en considérant une bulle pp ou pt, dans lequel on remplace une des interactions par une autre bulle pp ou pt. Les diagrammes les plus simples ainsi engendrés, lorsque le caractère pp ou pt des deux bulles est le même, sont des bulles mises en série, comme indiqué sur la figure 2.26 page 79. Nous indiquons en légende ce que vaut chaque graphe. Nous le ferons d'ailleurs pour tous les graphes à venir. En ce qui concerne les intégrales à calculer, c'est très simple, il suffit d'élever le résultat pour une bulle au carré. Les facteurs de spin sont légèrement plus difficile à calculer qu'à 1 boucle, à cause du cas où les trois interactions sont du type spin-spin.

Si nous insérons une bulle pt dans une bulle pp ou réciproquement, nous pouvons obtenir 4 nouveaux graphes, représentés figures 2.27 page 80, et dits graphes "parquet". Les calculs sur les matrices de Pauli sont de la même difficulté que pour les séries de bulles. Par contre, les intégrales sont beaucoup plus difficiles à évaluer. Ceci est dû au fait que les intégrales sont imbriquées, et les divergences sont plus difficiles à extraire. Dans la littérature en Anglais, on parle d'"overlapping divergencies". Nous ne donnons ici que les résultats sans aucune justification (nous demandons au lecteur de nous croire ou de refaire les calculs lui-même). Si nous calculons la somme des contributions des 6 derniers graphes étudiés (à savoir les séries de bulles (s) et les graphes parquets (p)),

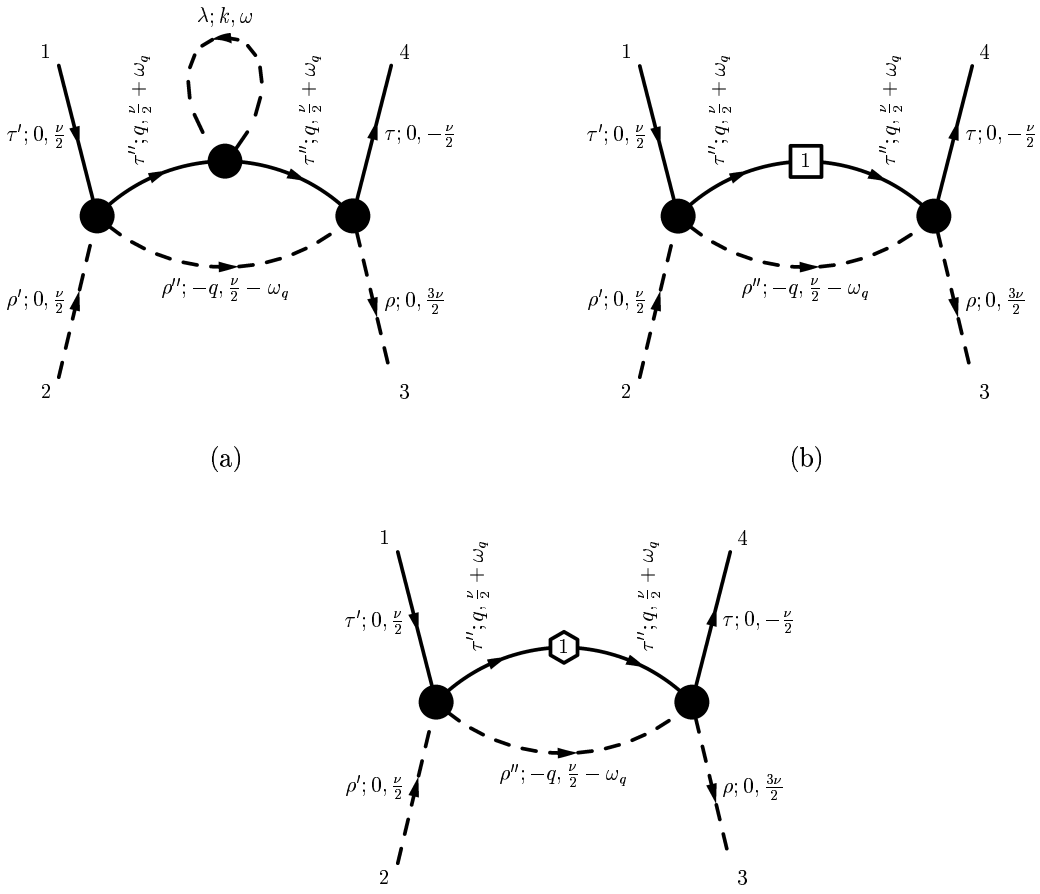


Fig. 2.22 – Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour le vertex, dus à une insertion de self-énergie sur la branche droite de la bulle pt.

nous obtenons un grand nombre de simplifications, et le résultat est :

$$\delta\Gamma^{(2),\mathrm{s+p}}_{\tau',\rho',\rho,\tau}(\nu) = 16 g^{\mathrm{s}3}\frac{1}{(2\pi v_{\mathrm{F}})^2}(\ln^2(\tilde{\nu}) - \mathrm{i}\pi\ln(\tilde{\nu}) + O(1))\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'} \quad (2.143)$$

$$= -\delta\Gamma^{(2),\mathrm{ct}(\delta g^{(2)})}_{\tau',\rho',\rho,\tau}(\nu). \quad (2.144)$$

Les graphes faisant intervenir les contre-termes $\delta g^{(2)}$ viennent donc exactement compensé les 6 derniers graphes que nous avons vus.

Mais nous n'avons pas encore épuisé tous les graphes de Feynman possibles. Pour les trouver, nous allons utiliser des nouvelles bulles que nous n'avons pas encore dessinées, car nous les avons négligées sans le dire, à une boucle. Cette bulle donne une contribution de type g_4 (cf Tab. 1.1) et comme nous avions fait l'hypothèse (cf section 1.2.2) que nous négligions les interactions g_4, nous n'en avons pas parlé jusqu'ici. La bulle dont il est question est représentée sur la figure 2.28 page 80. Nous n'avons pas

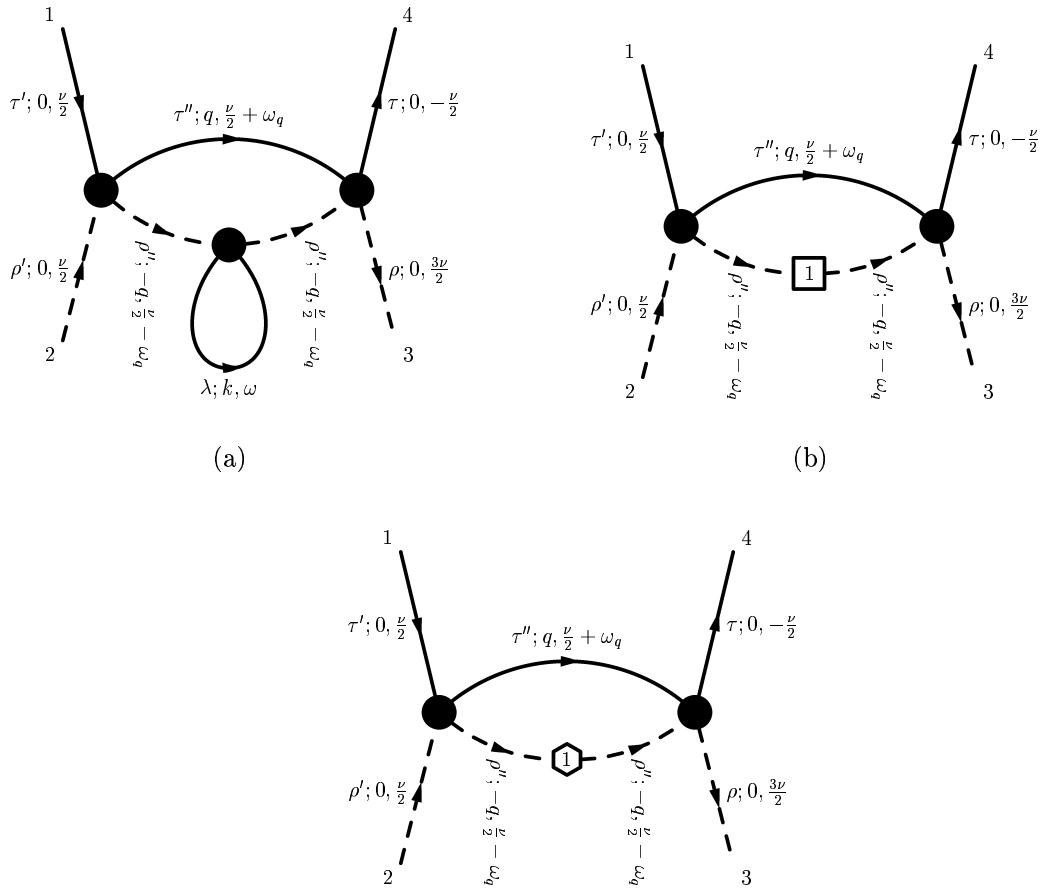


Fig. 2.23 – Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour le vertex, dus à une insertion de self-énergie sur la branche droite de la bulle pt.

représenté la bulle où les caractères R et L des lignes sont inversées, mais il faudra se souvenir qu'elle existe, quand nous voudrons regarder les graphes à 2 boucles. Cette bulle avec le jeu habituel d'impulsions et d'énergies des pattes externes, est exactement égale à zéro (puisque les deux propagateurs de la bulle sont identiques, cf argumentation au début de la section 2.3.1). Pour des impulsions et énergies quelconques, ceci n'est plus vrai, mais l'intégrale donne un résultat fini. Aucune divergence n'apparaît dans ce graphe, ce qui justifie que nous n'avons pas pris en compte les interactions de type g_4[18]. Faisons une dernière remarque. Quand nous avons calculé le diagramme

[18]En fait il faudrait être plus rigoureux que cela, les garder, et on verrait qu'ils changent quand même la physique, mais nous ne le ferons pas, afin de simplifier notre discussion. On peut montrer que ces termes en g_4 sont renormalisés à 2 boucles, et qu'ils ne changent les flots des autres couplages qu'à 3 boucles, ordre auquel nous n'irons jamais dans ce travail. De plus, étant donné que pour l'étude de la surface de Fermi nous nous restreindrons à une boucle pour les couplages, ces termes peuvent (et, pour rester à un ordre cohérent, doivent) être négligés. Nous renvoyons le lecteur à l'article [RST79]

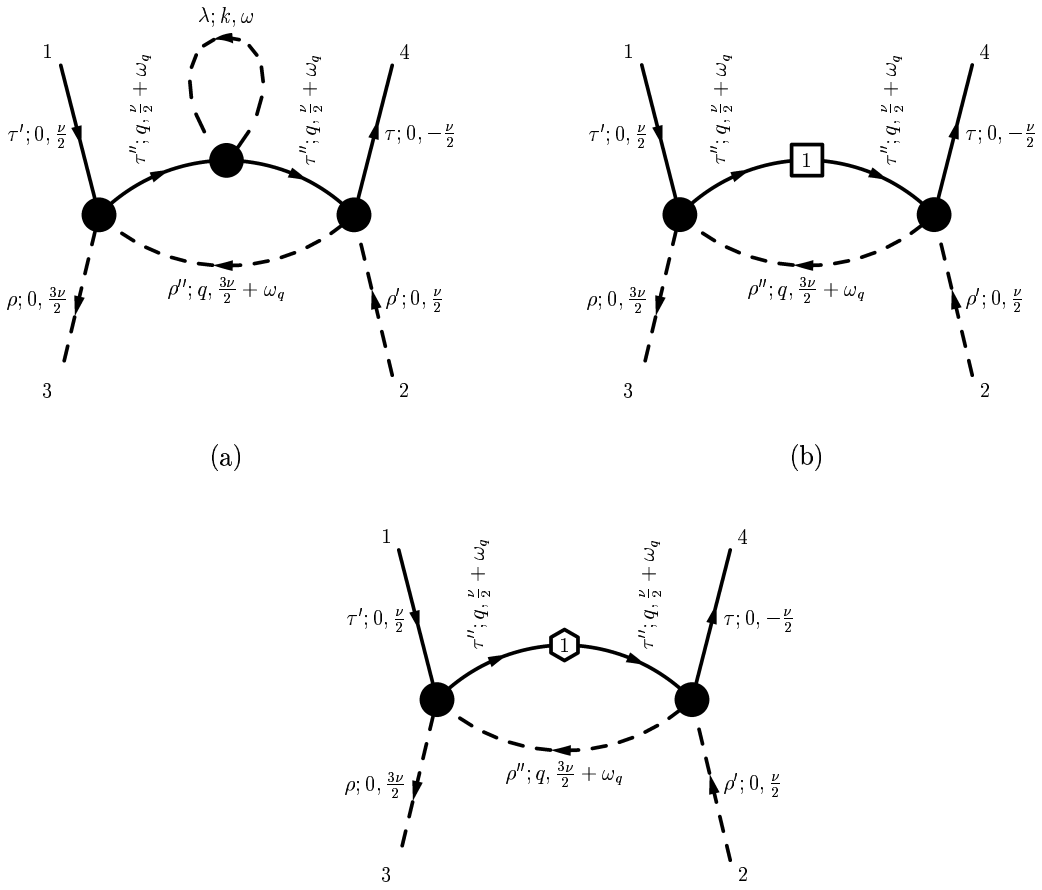


Fig. 2.24 – Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour le vertex, dus à une insertion de self-énergie sur la branche droite de la bulle pt.

sunrise pour la self-énergie, nous avons déjà rencontré cette bulle. Elle était formée par les deux propagateurs L. C'est d'ailleurs pourquoi cette self-énergie ne diverge que logarithmiquement, et non comme un logarithme au carré. Le sunrise ne présente pas ici d'"overlapping divergencies".

Bien que nous négligeons les g_4, nous pouvons quand même utiliser la bulle dessinée à 1 boucle pour trouver de nouveaux graphes contribuant à la renormalisation de notre vertex de type g_2. Nous avons premièrement la série de bulles g_4 (cf figure 2.29 page 81)qui donne une contribution elle aussi finie, donc que nous négligeons. Mais nous trouvons aussi deux graphes de type parquet (cf figure 2.30 page 81), qui donnent une contribution divergente indiquée en légende. La correction à 2 boucle

et les références qui s'y trouvent, pour plus de détails.

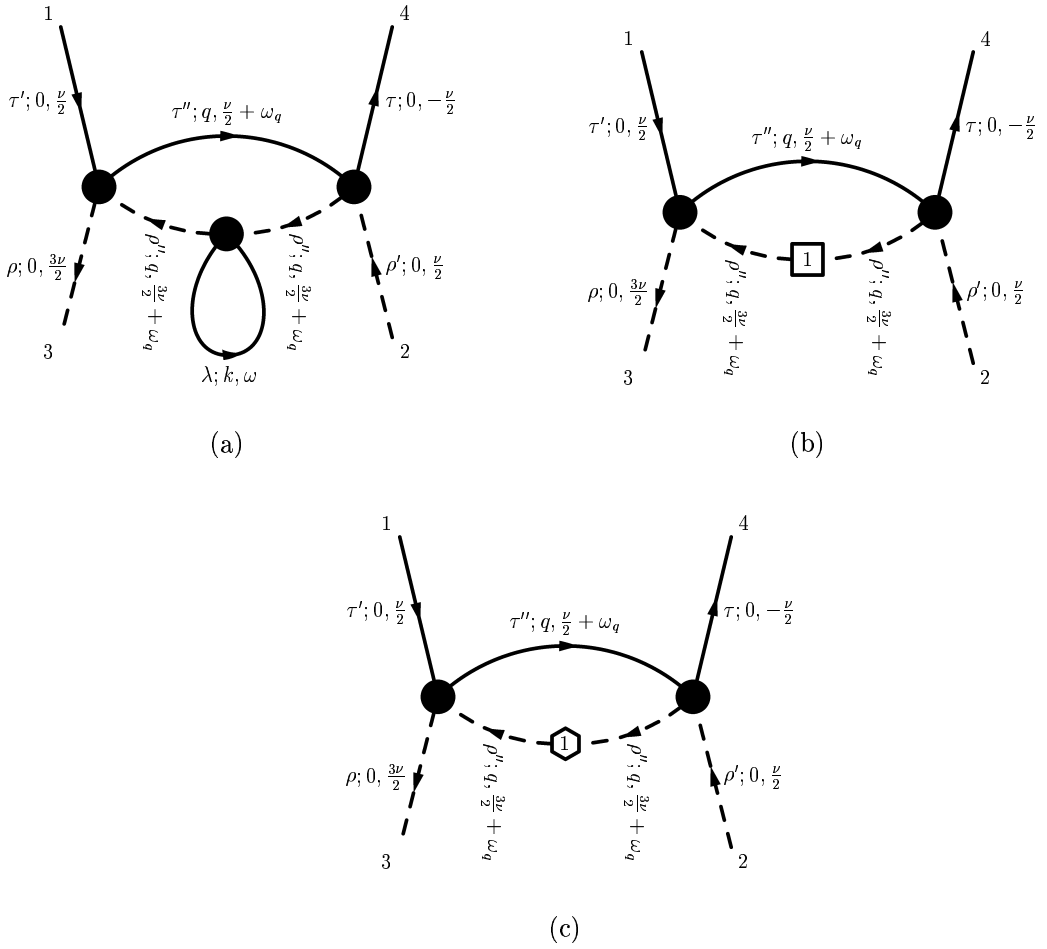


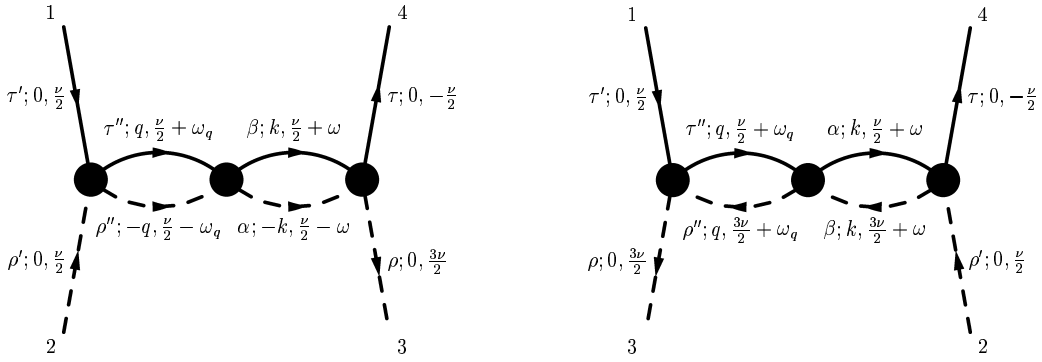
Fig. 2.25 – Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour le vertex, dus à une insertion de self-énergie sur la branche droite de la bulle pt.

au vertex, due à ces deux derniers graphes vaut :

$$\delta\Gamma^{(2),\mathrm{p},\text{“}g_4\text{”}}_{\tau',\rho',\rho,\tau}(\nu) = \left[2(g^{\mathrm{c}3} + 3g^{\mathrm{c}}g^{\mathrm{s}2})\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'} + 2(g^{\mathrm{c}2}g^{\mathrm{s}} - g^{\mathrm{s}3})\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}\right] \times \left[-\frac{1}{(2\pi v_{\mathrm{F}})^2}\ln(\tilde{\nu})\right]. \quad (2.145)$$

Étant données les diverses simplifications entre graphes, il ne reste au final que la contribution ci-dessus et celle donnée par le contre-terme d'ordre 3 (cf (2.139)) :

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^{(2)}_{\tau',\rho',\rho,\tau}(\nu) &= \left[\delta g^{\mathrm{c}(3)} + 2g^{\mathrm{c}}(g^{\mathrm{c}2} + 3g^{\mathrm{s}2}) \times \left\{ -\frac{1}{(2\pi v_{\mathrm{F}})^2}\ln(\tilde{\nu})\right\}\right]\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'} \\ &+ \left[\delta g^{\mathrm{s}(3)} + g^{\mathrm{s}}(2g^{\mathrm{c}2} - 2g^{\mathrm{s}2}) \times \left\{ -\frac{1}{(2\pi v_{\mathrm{F}})^2}\ln(\tilde{\nu})\right\}\right]\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}. \quad (2.146)\end{aligned}$$



(a) $= \{(g^{c\,3}+9g^c g^{s\,2}-6g^{s\,3})\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'}+ (3g^{c\,2}g^s-6g^c g^{s\,2}+7g^{s\,3})\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}\}\times \{\frac{1}{(2\pi v_F)^2}\left(\ln^2(\tilde{\nu})-i\pi\ln(\tilde{\nu})\right)+O(1)\}$

(b) $= \{(g^{c\,3}+9g^c g^{s\,2}+6g^{s\,3})\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'}+ (3g^{c\,2}g^s+6g^c g^{s\,2}+7g^{s\,3})\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}\}\times \{\frac{1}{(2\pi v_F)^2}\left(\ln^2(\tilde{\nu})-i\pi\ln(\tilde{\nu})\right)+O(1)\}$

Fig. 2.26 – Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour le vertex, de type bulles en série.

Nous ne devons pas encore identifier les contre-termes, car nous n'avons pas tenu compte de la renormalisation du champ pour l'instant. Tous nos calculs ont été effectués en prenant les champs ψ et non les Ψ. Nous avons donc utilisé la fonction de Green $G^{I\!I}$, puis le vertex défini en passant dans l'espace de Fourier, en divisant par i, et en amputant des quatre propagateurs habillés G. Si nous utilisons les champs renormalisés Ψ, la fonction de Green à 4 points renormalisée est $G^{I\!I\,(\mathcal{R})} = G^{I\!I}/(Z_R Z_L)$. Le vertex renormalisé $\Gamma^{(\mathcal{R})}$ est défini par l'amputation de $G^{I\!I\,(\mathcal{R})}$ des propagateurs renormalisés $G^{(\mathcal{R})} = G/Z$. Nous avons donc la relation $\Gamma^{(\mathcal{R})} = Z_R Z_L \Gamma$. Si nous utilisons tout ce que nous avons calculé, nous trouvons que le vertex renormalisé à 2 boucles vaut :

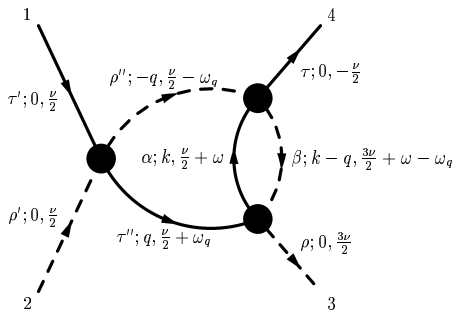
$$\begin{aligned}\Gamma^{(\mathcal{R},2)}_{\tau',\rho',\rho,\tau}(\nu) &= \left[g^c+\delta g^{c(3)}\right]\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'} \\ &+ \left[g^s+\delta g^{s(3)}+8g^{s3}\times\left\{\frac{1}{(2\pi v_F)^2}\ln(\tilde{\nu})\right\}\right]\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}. \qquad (2.147)\end{aligned}$$

Il est maintenant temps d'ajuster les contre-termes pour annuler les divergences qui restent (i.e. qui n'ont ni été supprimés par les contre-termes des ordres précédents, ni par la renormalisation du champ) et faire en sorte que le vertex renormalisé vaille $g^c\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'} + g^s\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}$:

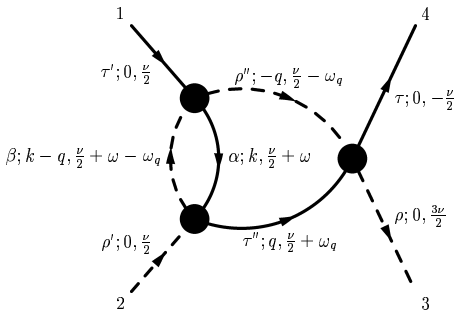
$$\delta g^{c(3)} = 0, \text{ et } \delta g^{s(3)} = -8g^{s3}\times\left\{\frac{1}{(2\pi v_F)^2}\ln(\tilde{\nu})\right\}. \qquad (2.148)$$

Nous vérifions donc bien que la constante de couplage de charge ne se renormalise pas non plus à 2 boucles.

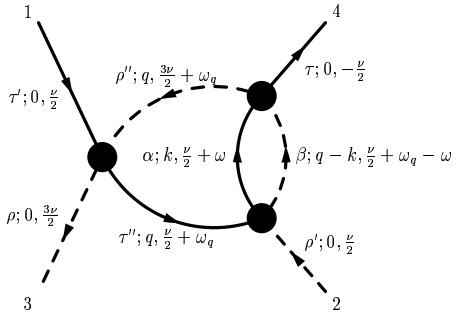
L'étape suivante est de trouver l'équation différentielle donnant le flot de renormalisation du couplage de spin. Nous laissons le lecteur reprendre la méthode exposée



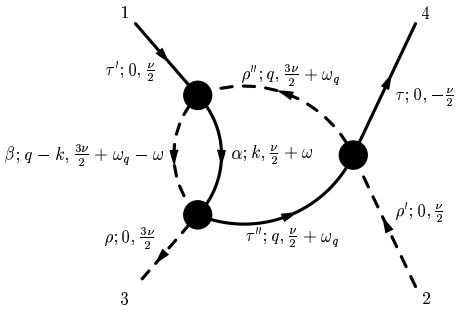
(a) $=\{(g^{c\,3}+9g^c g^{s\,2}+6g^{s\,3})\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'}+(3g^{c\,2}g^s-2g^c g^{s\,2}-g^{s\,3})\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}\}\times\{-\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi v_F)^2}\left(\ln^2(\tilde{\nu})-i\pi\ln(\tilde{\nu})\right)+O(1)\}$



(b) $=\{(g^{c\,3}+9g^c g^{s\,2}+6g^{s\,3})\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'}+(3g^{c\,2}g^s-2g^c g^{s\,2}-g^{s\,3})\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}\}\times\{-\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi v_F)^2}\left(\ln^2(\tilde{\nu})-i\pi\ln(\tilde{\nu})\right)+O(1)\}$



(c) $=\{(g^{c\,3}+9g^c g^{s\,2}-6g^{s\,3})\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'}+(3g^{c\,2}g^s+2g^c g^{s\,2}-g^{s\,3})\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}\}\times\{-\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi v_F)^2}\left(\ln^2(\tilde{\nu})-i\pi\ln(\tilde{\nu})\right)+O(1)\}$



(d) $=\{(g^{c\,3}+9g^c g^{s\,2}-6g^{s\,3})\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'}+(3g^{c\,2}g^s+2g^c g^{s\,2}-g^{s\,3})\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}\}\times\{-\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi v_F)^2}\left(\ln^2(\tilde{\nu})-i\pi\ln(\tilde{\nu})\right)+O(1)\}$

Fig. 2.27 – Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour le vertex, de type parquet

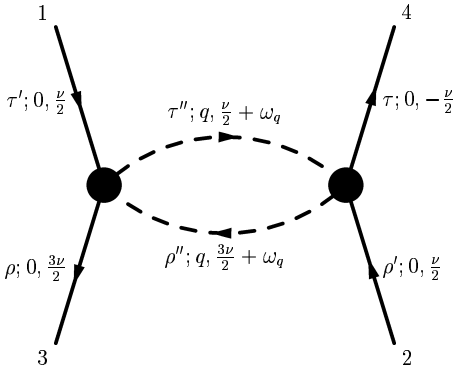


Fig. 2.28 – Bulle donnant une contribution g_4.

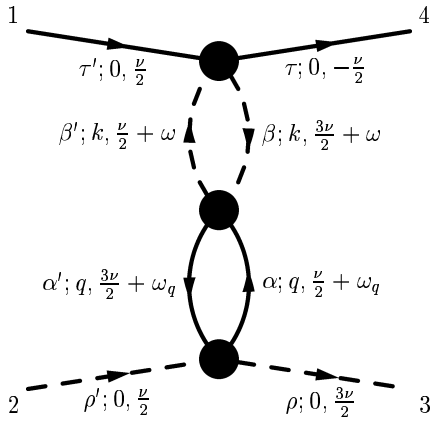
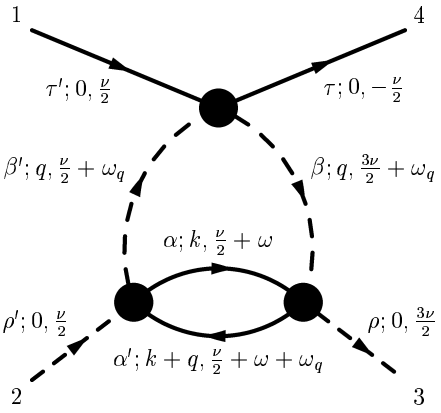
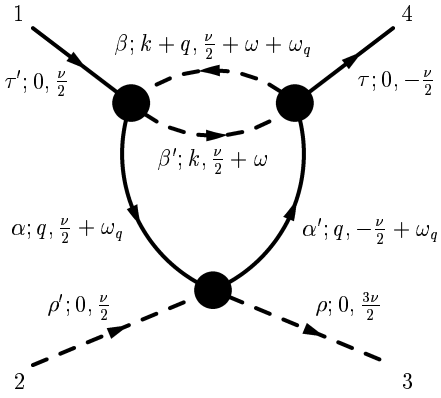


Fig. 2.29 – Série de bulles g_4, donnant une contribution finie.



(a) $=\{(2g^{c3} + 6g^c g^{s2})\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'} + (2g^{c2}g^s - 2g^{s3})\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}\} \times \{-\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi v_F)^2}\ln(\tilde{\nu})\}$



(b) $=\{(2g^{c3} + 6g^c g^{s2})\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'} + (2g^{c2}g^s - 2g^{s3})\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'}\} \times \{-\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi v_F)^2}\ln(\tilde{\nu})\}$

Fig. 2.30 – Diagrammes de Feynman à 2 boucles de type parquet, faisant intervenir une bulle de type g_4.

à la section 2.2.3, pour 1 boucle. En simplifiant les notations (nous ne notons plus les variables dont elles dépendent) nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t'}\overline{\tilde{g}^s} = 4\overline{\tilde{g}^s}^2 - 8\overline{\tilde{g}^s}^3. \tag{2.149}$$

La différence principale avec le flot à 1 boucle est l'apparition d'une ligne de points fixes à couplage fort, pour $\overline{\tilde{g}^c}$ quelconque et $\overline{\tilde{g}^s} = 1/2$. Ces points fixes sont stables puisque le flot linéarisé autour des points fixes s'écrit (on pose $\overline{\tilde{g}^s} = 1/2 + \delta\overline{\tilde{g}^s}$) : $\partial_{t'}\delta\overline{\tilde{g}^s} = -2\delta\overline{\tilde{g}^s}$. Il est possible d'intégrer le flot exactement, mais nous ne pouvons qu'exprimer le temps

en fonction des couplages et pas l'inverse. On trouve que :

$$t' = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\overline{\tilde{g}^{\mathrm{s}}}} - \frac{1}{\tilde{g}^{\mathrm{s}}}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\overline{\tilde{g}^{\mathrm{s}}}}{\tilde{g}^{\mathrm{s}}} \times \frac{1-2\overline{\tilde{g}^{\mathrm{s}}}}{1-2\tilde{g}^{\mathrm{s}}}\right). \tag{2.150}$$

Nous avons établi cette équation avec pour seule intention de pouvoir comparer les

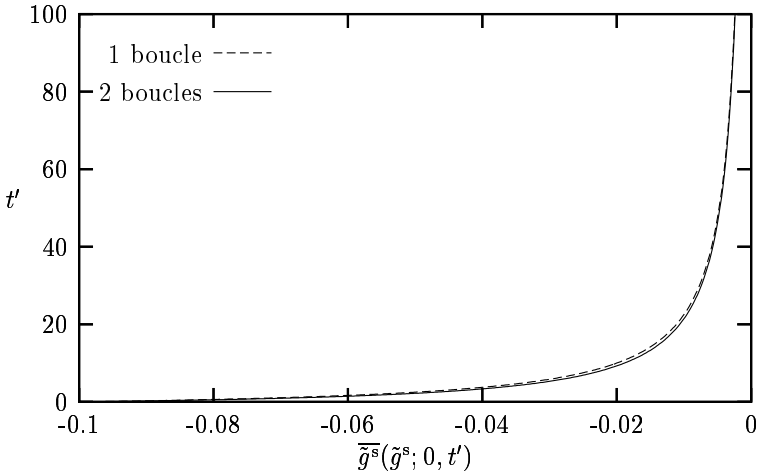


Fig. 2.31 – Flot à 2 boucles de la constante de couplage de spin, pour une valeur de haute énergie négative ($\tilde{g}^{\mathrm{s}} = -0.1$).

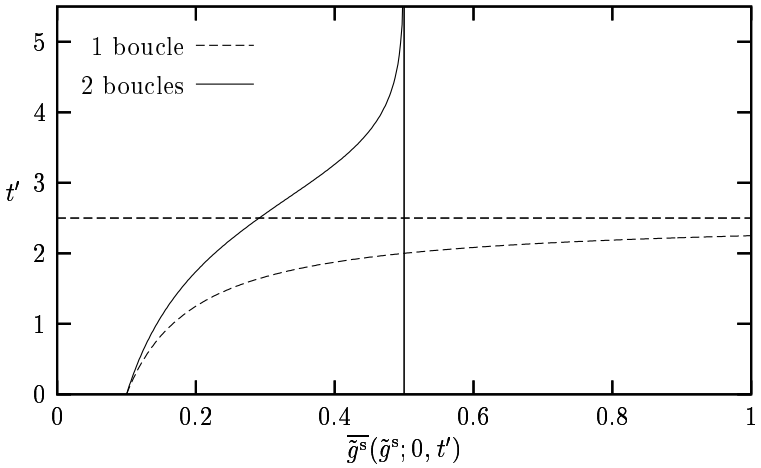


Fig. 2.32 – Flot à 2 boucles de la constante de couplage de spin, pour une valeur de haute énergie positive ($\tilde{g}^{\mathrm{s}} = +0.1$). Les droites représentent les asymptotes de chacune des courbes.

flots à 1 et 2 boucles. Ceux-ci sont représentés sur les figures 2.31 et 2.32, où les axes ont été inversés par rapport à la figure 2.11 page 61 donnant le flot à 1 boucle. Les courbes en pointillés sont les courbes à 1 boucle, et celles en traits pleins les courbes à

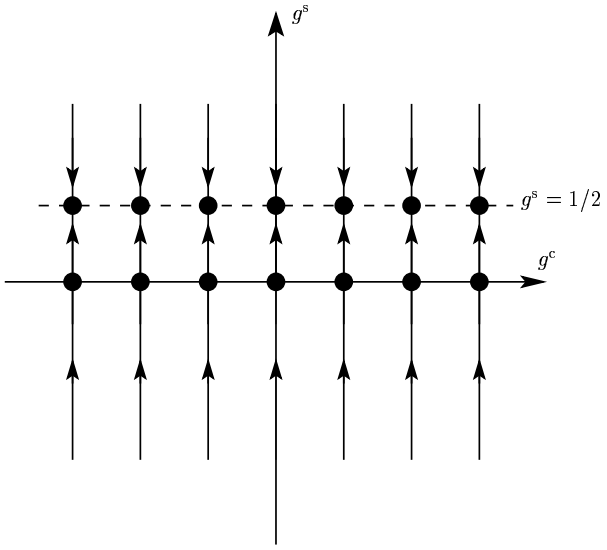


Fig. 2.33 – Diagramme de phase à 2 boucles, dans l'espace (g^c, g^s). Les ronds noirs représentent les points fixes, pour les trajectoires de RG considérées.

2 boucles. Nous donnons aussi pour être complets le diagramme de phase dans l'espace (g^c, g^s) : voir figure 2.33.

Lorsque le système reste à coulage faible (couplage de spin initial négatif), nous constatons donc que l'approximation à 1 boucle est tout à fait satisfaisante (comme nous nous en doutions déjà dès l'introduction de ce chapitre). Lorsque le système part à couplage fort les flots à 1 et 2 boucles diffèrent assez rapidement. Néanmoins, cela ne veut pas dire que le flot à 1 boucle est complètement faux. Par exemple, pour l'effet Kondo, la physique correspond à un point fixe où le couplage est infini [AYH70, Wil75]. Le RG à une boucle donne lieu à un tel point fixe, alors que le RG à deux boucles donne un point fixe de couplage fort mais fini [FZ71, AM70]. En un sens donc, il peut arriver que le RG à une boucle donne de meilleurs résultats que le RG à deux boucles. Il n'y a aucune façon de savoir quelle approximation sera la meilleure. Comme nous l'avons déjà dit, dans une situation où les flots partent à couplage fort, la validité du RG, quelque soit l'ordre auquel on va, doit être mise en doute. L'intérêt des flots de RG à une boucle est que l'on obtient des directions fixes, qui donnent la forme du Hamiltonien de basse énergie, sans pour autant donner la force de l'interaction effective. Cela donne une bonne idée qualitative de la physique de basse énergie du système étudié.

2.3.3 Pertinence du 2 boucles

La dernière discussion justifie que pour la suite de ce travail, quand nous considérerons le cas plus complexe où la surface de Fermi peut se déformer, nous ne calculerons le vertex qu'à l'ordre de 1 boucle. Ceci allégera notablement les calculs, et aura des

chances, comme nous venons de le voir, de ne pas être une si mauvaise approximation que cela.

Pouvons-nous nous permettre de n'aller qu'à 1 boucle pour la self-énergie et le propagateur ? Nous verrons (cf chapitre 3) qu'en ce qui concerne la surface de Fermi et ses déformations, énormément de physique est contenue dans le diagramme sunrise, donc il nous faudra aller à 2 boucles pour la self-énergie. Mais, sans même invoquer la de déformation de la surface de Fermi, nous pouvons dire que la physique du propagateur ne commence à être capturée qu'à 2 boucles. En effet, à 1 boucle, nous avons vu que rien ne se passe, mis à part le changement $\mu^{(0)} \to \mu$. A 2 boucles, par contre, nous avons été obligés de renormaliser le champ. Calculons maintenant la fonction ϕ vérifiant l'équation différentielle (2.138). Pour simplifier, nous utiliserons l'expression à 1 boucle des couplages pour évaluer le membre de droite. Il est facile de montrer que dans ce cas :

$$\phi_{\mathrm{R,L}}(g^\alpha;\nu,\nu',\Lambda) = \left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^{-\tilde{g}^{\mathrm{c}\,2}} \exp\left[\frac{3\tilde{g}^{\mathrm{s}}}{4}\left(\frac{1}{1-4\tilde{g}^{\mathrm{s}}t'} - \frac{1}{1-4\tilde{g}^{\mathrm{s}}t}\right)\right]^{-\frac{3}{4}}. \tag{2.151}$$

Le facteur faisant intervenir $\tilde{g}^{\mathrm{s}}$ décrit l'extinction du couplage non pertinent $\tilde{g}^{\mathrm{s}}$, quand celui-ci est initialement négatif, et son explosion quand il est positif. Dans le premier cas, si nous supposons que ν et ν' sont très petits devant $2v_{\mathrm{F}}\Lambda$, i.e. que t et t' sont grands, ce facteur est quasiment égal à 1, et nous pouvons l'oublier. Dans ce cas l'équation (2.132) donne :

$$G^{(\mathcal{R})}_{\mathrm{R,L}}(k=0,\omega;g^\alpha;\nu,\Lambda) = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\omega}{\nu}\right)^{\tilde{g}^{\mathrm{c}\,2}}. \tag{2.152}$$

Ainsi, si le couplage initial de spin est négatif, le propagateur renormalisé se comporte comme $\omega^{-1+\tilde{g}^{\mathrm{c}\,2}}$ pour ω faible. Aucune échelle d'énergie n'apparaît : la théorie est critique, et on a un exposant de ω différent de -1 pour le propagateur. De plus, le résidu du propagateur à la surface de Fermi est nul, puisque c'est la valeur à $\omega = 0$ de $\omega G^{(\mathcal{R})}_{\mathrm{R,L}}$! Les quasi-particules ont disparu : notre système n'est pas un liquide de Fermi, mais un liquide de Luttinger (voir par exemple les articles [Lut63, Tom50, ML63, Hal81], ainsi que les articles de revue [Sch91, Voi95]). Il est en fait bien connu que les excitations élémentaires sont des modes collectifs (ondes de densité), de caractère bosonique. Notre approche perturbative, qui se fait en termes de fermions, est ainsi capable de nous dire qu'il est préférable de ne pas utiliser les fermions ! Si au contraire, le couplage de spin est positif, le propagateur devient exponentiellement petit, à l'échelle d'énergie donnant le gap, et de même, nous apprenons qu'il vaudrait mieux changer de description.

Nous voyons donc que le passage à 2 boucles pour la self-énergie est crucial. Bien sûr, nous n'obtenons pas les résultats exacts pour les exposants des fonctions de corrélations, mais nous avons au moins le premier terme d'un développement limité.

2.3.4 Limitations de la méthode

Faisons ici quelques remarques sur le RG tel que nous l'avons présenté, et ses limitations. Il est connu que les liquides de Luttinger ont la propriété que les excitations

élémentaires de charge et de spin, ont des vitesses différentes. C'est la séparation spin-charge. Dans tous les calculs que nous avons faits, nous avons vu que la vitesse de Fermi ne se renormalise pas. En un sens c'est en fait heureux. En effet, notre théorie est une théorie relativiste (modèle de Thirring sans masse), avec une vitesse de la lumière égale à v_{F}. Nous sommes donc satisfaits par l'invariance de la vitesse de la lumière ! Mais nous n'obtenons pas de séparation spin-charge, ni même la renormalisation de vitesse de Fermi habituelle pour le modèle sans spin. En fait, ces renormalisations de vitesse sont des effets de réseaux (même dans la bosonisation, il est nécessaire d'introduire un cut-off pour supprimer certaines divergences), et sont donc capturables uniquement si le cut-off n'est pas strictement infini. Ayant en tête les complications dues aux déformations de la surface de Fermi, nous avons pris le parti d'utiliser une méthode simple, qui ne capture pas de tels effets de réseau. Nous utilisons la propriété de renormalisabilité de la théorie, ce qui apporte des simplifications appréciables. Il serait bien sûr plus satisfaisant de pouvoir tout prendre en compte, mais il faudrait pour cela utiliser un RG Wilsonien qui est plus complexe à mettre en œuvre, puisqu'il permet de traiter toutes les variables, qu'elles soient pertinentes, marginales ou irrelevantes.

Si nous regardons la self-énergie à 2 boucles, il est aussi clair qu'elle a une partie imaginaire finie. Autrement dit, la densité spectrale ne comporte plus de vrais pics de Dirac, mais des pics élargis, donnant un temps de vie fini aux excitations. Ceci n'est pas non plus pris en compte par notre RG.

Chapitre 3

Déformations de la surface de Fermi : un cas simple

Le présent chapitre et le suivant font l'objet de notre deuxième article [DD02]. Cet article est long et détaillé, mais étant donné qu'il s'agit du cœur de ma thèse, j'ai quand même tenu à rédiger ces deux chapitres, quitte à ce qu'il y ait des répétitions avec cet article. Toutefois, l'ordre dans lequel les choses sont expliquées dans l'article et dans ma thèse n'est pas tout à fait le même, et je pense que les deux textes peuvent se compléter avantageusement. La partie sur le calcul par RG des déformations de la surface de Fermi est plus détaillée ici que dans l'article, et je conseille donc au lecteur de lire cette partie dans la thèse, d'autant plus que la thèse traite essentiellement du système de deux chaînes de fermions sans spin, qui est le cas le plus simple.

Nous commençons par donner une interprétation énergétique (en termes de théorie des perturbations indépendante du temps de Mécanique Quantique) des déformations de la surface de Fermi, qui sera la base physique de tous nos calculs plus complexes. Nous nous intéresserons ensuite au formalisme de la théorie des champs, et verrons que le calcul habituel de la self-énergie (dont le point de départ est le fondamental *libre*) souffre de divergences qui ne sont curables que si l'on utilise une théorie des perturbations renormalisée (le point de départ sera un état ayant la surface de Fermi*habillée*). Nous verrons enfin comment implémenter les idées du RG dans le cadre des déformations de la surface de Fermi.

3.1 Quelques généralités et définitions

Nous avons vu au chapitre 1 comment la surface de Fermi est définie quand il n'y a pas d'interactions. Si les électrons interagissent, il n'y a aucune raison pour que la surface de Fermi reste identique à celle quand les électrons sont libres. Nous devons pour commencer préciser ce que nous entendons par surface de Fermi d'un système d'électrons en interaction. Dans le cas libre, nous avions défini la surface de Fermi

comme étant la surface (ligne en 2D) que forment les derniers états à une particule occupés, dans l'état fondamental. Bien sûr, puisque nous étudions le fondamental, toute la discussion se fait à température nulle. La distribution de particules dans l'espace réciproque est alors telle que le nombre de particules par état est 1 (pour des fermions sans spin) ou 2 (avec spin) pour les états à l'intérieur de la surface de Fermi, et 0 à l'extérieur. A température non nulle, la distribution aurait un bord moins franc, et la transition entre états occupés et états vides se fait sur quelques $k_{\mathrm{B}}T$. Comme notre but est d'étudier la surface de Fermi, nous avons décidé de travailler à *température nulle*[1]. Quand nous branchons des interactions entre électrons, les ondes planes ne sont plus des états propres du Hamiltonien, et la distribution de particules n'a plus aucune raison d'avoir un bord franc[2], par conséquent la position d'un tel bord ne peut donc servir de définition de la surface de Fermi. En fait, la surface de Fermi pour des électrons libres, est aussi un ensemble isoénergétique d'états à une particule, pour une énergie qui est le potentiel chimique (libre). Si on rajoute une particule au système, l'énergie minimale à fournir est ce potentiel chimique. Nous définirons la surface de Fermi en interaction exactement de cette manière : le lieu des états à une particule de même énergie, appelée potentiel chimique (en interaction cette fois-ci), et qui est l'énergie la plus petite qu'il faut fournir pour rajouter une particule (ou en enlever une). Cette définition a été donnée par Luttinger dans [Lut60].

Bien que peu de choses soient connues sur le calcul de la surface de Fermi en interaction, il existe quand même des résultats très généraux, dont le suivant, toujours dû à Luttinger [Lut60] dont nous avons déjà parlé (cf 2.2.2), et qui est appelé théorème de Luttinger : le volume de la surface de Fermi d'un système en interaction est le même que celui du système libre associé. Ce théorème qui traduit la conservation du nombre de particules n'est pas une trivialité, puisque le nombre d'occupation dans les états à une particule, n'est pas simplement égal à 0 ou 1. Nous ne démontrons pas ce résultat dans sa généralité dans ce travail. Nous montrerons néanmoins que ce théorème est vrai dans le cas simple qui suit, à l'ordre 2 en perturbation où nous travaillons.

3.2 Se faire une intuition

Dans cette section, et dans la suivante 3.3, afin d'alléger les notations, nous ne noterons pas les indices B qui indiquent que les constantes de couplages sont celles de haute énergie. Il faut toutefois retenir que tous les couplages qui apparaîtront ici sont des couplages "bare".

[1] On peut bien sûr aussi travailler à température finie et prendre la limite de température nulle quand on s'intéresse à la surface de Fermi. Mais nous verrons que les problèmes principaux de la théorie des perturbations sont les mêmes dans les deux formalismes. De plus, nous pensons qu'il y a des leçons à apprendre des problèmes particuliers du formalisme à température nulle.

[2] Comme nous l'avons déjà dit au chapitre précédent, pour un liquide de Fermi, il existe encore une discontinuité de la distribution de particules, mais celle-ci n'est plus de 1 mais de $Z \leqslant 1$. Pour un liquide de Luttinger, il n'y a plus du tout de discontinuité, mais il reste une singularité en loi de puissance.

Le problème des déformations de la surface de Fermi est suffisamment complexe pour mériter qu'on commence par étudier un cas simple, avec une méthode simple. Ceci fut l'objet de mon stage de DEA. Les résultats que nous avions obtenus sont la base sur laquelle nous nous sommes reposés tout le long de mon travail de thèse. Je vais donc réexposer ici ces résultats (légèrement modifiés et améliorés par la compréhension gagnée pendant la thèse), en commençant par un résumé succinct des idées principales.

Les déformations de la surface de Fermi sont comprises d'un point de vue énergétique. La première chose à comprendre est que le branchement adiabatique des interactions ne fonctionne pas, à cause des multiples croisements de niveaux qui ont lieu au fur et à mesure que l'interaction augmente. En particulier, *le fondamental en interaction n'est pas obtenu à partir du fondamental libre.* L'idée est alors de calculer, grâce à la théorie des perturbations habituelle de mécanique quantique, l'énergie de plusieurs états du système en interaction, obtenus à partir d'états libres excités, possédant des distributions de particules (i.e. des surfaces de Fermi) différentes. L'état en interaction de plus basse énergie sera alors le fondamental en interaction, obtenu à partir d'un état excité libre. Nous aurons alors obtenu la surface de Fermi en interaction, comme étant la surface de Fermi de cet état excité libre.

3.2.1 Le modèle

Nous étudions le système le plus simple qui soit, dont la surface de Fermi peut se déformer : un système de deux chaînes (i.e. une échelle) de fermions sans spin. Nous renvoyons le lecteur au chapitre 1 pour le détail des notations. Nous utiliserons des vitesses de Fermi identiques pour les deux branches, pour faire simple. Nous ne considérons pas les Umklapps. Seules les interactions représentées sur la figure 3.1 sont prises en compte. Pour simplifier, nous n'utilisons pas les notations très générales $G_\delta(I,J)$, mais nous appelons les 5 interactions de basse énergie possibles A, B, C, D et F[3]. Nous noterons de plus les chaînes 0 et π, qui sont les impulsions transverses, et non 1 et 2. Les interactions C, D et F apparaissent deux fois à cause de la symétrie droite gauche, ou à cause de l'hermiticité du Hamiltonien. L'interaction de type D ne peut exister à énergie nulle (i.e. toutes les particules détruites et créées le sont à la surface de Fermi) que si les vecteurs de Fermi des deux chaînes sont égaux. En effet, considérons l'interaction D de la figure 3.1, à gauche, et supposons que la particule R est détruite et créée à la surface de Fermi, et que la particule L est détruite à la surface de Fermi. Par conservation de l'impulsion, cette particule L doit être créée à impulsion k telle que (nous notons ici k_0 et k_π les impulsions de Fermi sur les deux chaînes) $k_0 - k_\pi = k_\pi + k$. Soit $k = k_0 - 2k_\pi$. Il est donc évident que $k = -k_0$ n'est possible que si $k_0 = k_\pi$. Il serait donc tentant de négliger cette interaction D dans le cas d'une surface de Fermi qui n'est pas plate, puisque nous sommes intéressés par la physique de basse énergie. Nous allons voir que ce serait une grossière erreur, car ce sont justement ces processus

[3] Nous n'avons pas mis de facteur $1/N = 1/2$ dans le Hamiltonien d'interaction. Il y a donc des facteurs $1/2$ à prendre en compte. Par exemple : $D = G_1(1,2)/2$. Notons aussi que nous n'avons pas utilisé la lettre E mais F, car E est réservée pour l'énergie.

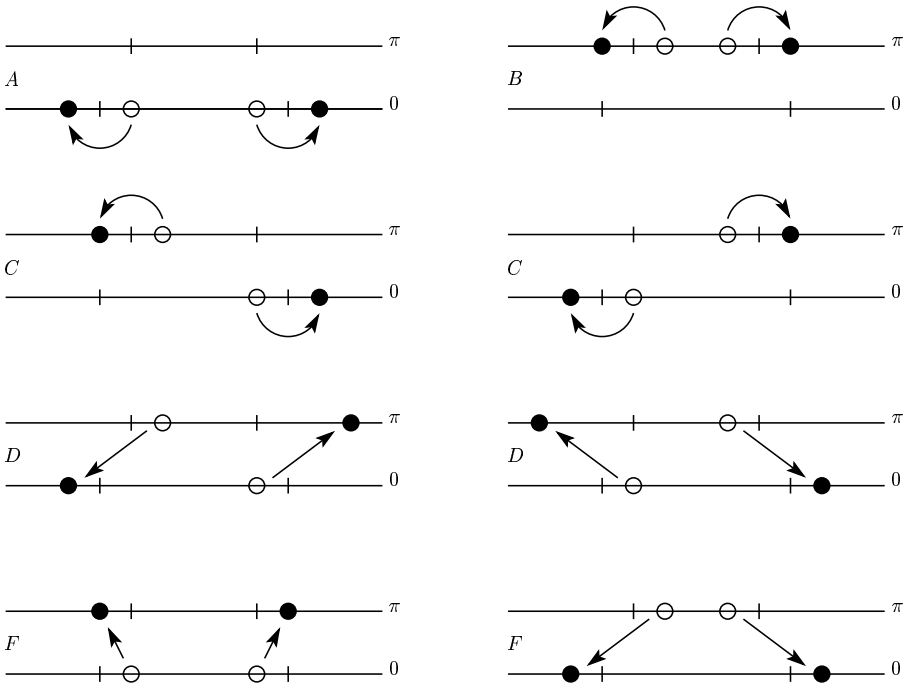


Fig. 3.1 – Interactions de basse énergie pour l'échelle.

qui sont les plus intéressants du point de vue des déformations de la surface de Fermi ! Il est de plus clair que si la surface de Fermi se déformait suffisamment, jusqu'à devenir plate, les processus D existeraient à énergie nulle, et c'est un argument de plus pour ne pas les négliger.

3.2.2 Perturbations au premier ordre

Nous allons commencer par étudier les déformations de la surface de Fermi, en utilisant la théorie des perturbations indépendante du temps, au premier ordre. A un état propre (du Hamiltonien) libre $|n\rangle_0$ d'énergie $E_n^{(0)}$ correspond un état propre en interaction $|n\rangle$ d'énergie E_n. Nous ne nous intéresserons qu'à la valeur de l'énergie en interaction, et pas à la forme du ket d'état lui-même. Il est bien connu qu'on a alors (nous donnons la formule au second ordre) :

$$E_n = E_n^{(0)} + V_{nn} + \sum_{k \neq n} \frac{V_{nk} V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} + \ldots, \text{ où } V_{nk} = {}_0\langle n|V|k\rangle_0. \tag{3.1}$$

Les états $|n\rangle_0$ dont nous calculerons les énergies propres sont les suivants. Nous appellerons $|0; k_{\mathrm{F},0}^{(0)}, k_{\mathrm{F},\pi}^{(0)}\rangle_0$ le fondamental libre. Celui-ci est tel que la branche 0 (resp. π) est remplie jusqu'à $k_{\mathrm{F},0}^{(0)}$ (resp. $k_{\mathrm{F},\pi}^{(0)}$). Le 0 à l'intérieur du ket est simplement là pour rappeler qu'il n'y a aucune excitation particule-trou. Nous notons de même $|0; k_{\mathrm{F},0}, k_{\mathrm{F},\pi}\rangle_0$ l'état libre dont les branches 0 et π sont remplies jusqu'à $k_{\mathrm{F},0}$ et $k_{\mathrm{F},\pi}$. Nous travaillons

à nombre de particules fixé, et avons donc la relation : $k_{\mathrm{F},0} + k_{\mathrm{F},\pi} = k^{(0)}_{\mathrm{F},0} + k^{(0)}_{\mathrm{F},\pi}$. Pour le choix $k_{\mathrm{F},0} = k^{(0)}_{\mathrm{F},0}$ nous retrouvons bien entendu le fondamental libre. Enfin, nous considérons aussi des états obtenus à partir de ces derniers états mais possédant une particule R supplémentaire, d'impulsion q, sur la chaîne 0, ou π. Nous les notons : $|1, q, 0(\pi); k_{\mathrm{F},0}, k_{\mathrm{F},\pi}\rangle_0$. Bien entendu, $q \geqslant k_{\mathrm{F},0(\pi)}$. Nous n'introduisons pas d'états avec une particule en plus sur la branche L, ou encore un trou au lieu d'une particule, car nous n'en aurons pas besoin. Afin de régulariser les divergences qui vont apparaître, disons dès maintenant que nous mettons un cut-off Λ autour de chacune des impulsions de Fermi *libres* (comme nous l'avions fait au chapitre 2, cf figure 2.6 page 43, quand il n'y avait qu'une seule impulsion de Fermi). Les énergies de ces états, à l'ordre 0, i.e. sans interaction, sont facilement calculables (le facteur 2 vient des deux branches R et L qui donnent la même contribution) :

$$E^{(0)}(0; k_{\mathrm{F},0}, k_{\mathrm{F},\pi}) = 2\left[\sum_{k=-\Lambda}^{k_{\mathrm{F},0}-k^{(0)}_{\mathrm{F},0}} \left(\mu^{(0)} + v^{(0)}_{\mathrm{F}} k\right) + \sum_{k=-\Lambda}^{k_{\mathrm{F},\pi}-k^{(0)}_{\mathrm{F},\pi}} \left(\mu^{(0)} + v^{(0)}_{\mathrm{F}} k\right)\right] \tag{3.2}$$

$$= 2\frac{L}{2\pi}\left[\int_{k=-\Lambda}^{k_{\mathrm{F},0}-k^{(0)}_{\mathrm{F},0}} \mathrm{d}k \left(\mu^{(0)} + v^{(0)}_{\mathrm{F}} k\right) + \int_{k=-\Lambda}^{k_{\mathrm{F},\pi}-k^{(0)}_{\mathrm{F},\pi}} \mathrm{d}k \left(\mu^{(0)} + v^{(0)}_{\mathrm{F}} k\right)\right]$$

$$= \frac{L}{\pi}(2\mu^{(0)}\Lambda - v^{(0)}_{\mathrm{F}}\Lambda^2) + \frac{v^{(0)}_{\mathrm{F}} L}{\pi}\left(k_{\mathrm{F},0} - k^{(0)}_{\mathrm{F},0}\right)^2, \tag{3.3}$$

et

$$E^{(0)}(1, q, 0(\pi); k_{\mathrm{F},0}, k_{\mathrm{F},\pi}) = E^{(0)}(0; k_{\mathrm{F},0}, k_{\mathrm{F},\pi}) + \mu^{(0)} + v^{(0)}_{\mathrm{F}}(q - k^{(0)}_{\mathrm{F},0(\pi)}). \tag{3.4}$$

Pour établir ces formules, nous avons supposé que le système est suffisamment grand pour pouvoir remplacer les sommes par des intégrales[4]. Nous avons aussi utilisé la conservation du nombre de particules, pour ne garder dans les expressions que les impulsions faisant référence à la branche 0. Notons que nous retrouvons bien le fondamental libre en demandant que l'énergie soit minimale.

Voyons ce qu'il en est à l'ordre 1. Les interactions de type D et F ne donnent rien (il faudra attendre l'ordre 2). Considérons l'interaction A. Elle fait varier l'énergie de ces états d'une quantité : $(A/L)\sum_k n_{\mathrm{R},0}(k)\sum_{k'} n_{\mathrm{L},0}(k')$, où $n_{\mathrm{R},0}(k)$ est la fonction qui donne la distribution de particules de l'état considéré, sur la branche (R,0), i.e. elle vaut 1 si l'état k est occupé, et 0 sinon. Nous laissons le lecteur montrer que la variation d'énergie totale s'écrit :

$$\Delta E^{(1)}(0; k_{\mathrm{F},0}, k_{\mathrm{F},\pi}) = \frac{L}{(2\pi)^2}\Bigg[A\left(\Lambda + (k_{\mathrm{F},0} - k^{(0)}_{\mathrm{F},0})\right)^2 + B\left(\Lambda - (k_{\mathrm{F},0} - k^{(0)}_{\mathrm{F},0})\right)^2$$

$$+2C\left(\Lambda + (k_{\mathrm{F},0} - k^{(0)}_{\mathrm{F},0})\right)\left(\Lambda - (k_{\mathrm{F},0} - k^{(0)}_{\mathrm{F},0})\right)\Bigg], \tag{3.5}$$

[4]Ce n'était pas une nécessité, mais cela simplifie les calculs.

et

$$\Delta E^{(1)}(1,q,0;k_{\mathrm{F},0},k_{\mathrm{F},\pi}) = \Delta E^{(1)}(0;k_{\mathrm{F},0},k_{\mathrm{F},\pi}) + \frac{1}{2\pi}\left[A\left(\Lambda+(k_{\mathrm{F},0}-k_{\mathrm{F},0}^{(0)})\right)+C\left(\Lambda-(k_{\mathrm{F},0}-k_{\mathrm{F},0}^{(0)})\right)\right] \tag{3.6}$$

$$\Delta E^{(1)}(1,q,\pi;k_{\mathrm{F},0},k_{\mathrm{F},\pi}) = \Delta E^{(1)}(0;k_{\mathrm{F},0},k_{\mathrm{F},\pi}) + \frac{1}{2\pi}\left[B\left(\Lambda-(k_{\mathrm{F},0}-k_{\mathrm{F},0}^{(0)})\right)+C\left(\Lambda+(k_{\mathrm{F},0}-k_{\mathrm{F},0}^{(0)})\right)\right]. \tag{3.7}$$

Afin de trouver quel état libre donne le fondamental en interaction, minimisons l'énergie des états obtenus à partir de $|0;k_{\mathrm{F},0},k_{\mathrm{F},\pi}\rangle_0$ par rapport à la distribution de particules. Il suffit pour cela de dériver $E^{(1)}=E^{(0)}+\Delta E^{(1)}$ par rapport à $k_{\mathrm{F},0}$ (puisque nous avons utilisé la conservation du nombre de particules pour éliminer $k_{\mathrm{F},\pi}$ et tout réexprimer uniquement en fonction de $k_{\mathrm{F},0}$). Nous obtenons la condition :

$$(k_{\mathrm{F},0}-k_{\mathrm{F},0}^{(0)}) + \frac{1}{4\pi v_{\mathrm{F}}^{(0)}}\left[A(\Lambda+(k_{\mathrm{F},0}-k_{\mathrm{F},0}^{(0)}))-B(\Lambda-(k_{\mathrm{F},0}-k_{\mathrm{F},0}^{(0)}))-2C(k_{\mathrm{F},0}-k_{\mathrm{F},0}^{(0)})\right]=0. \tag{3.8}$$

Cette équation nous montre que la déformation de la surface de Fermi est donnée par :

$$k_{\mathrm{F},0}^{(1)}-k_{\mathrm{F},0}^{(0)} = (B-A)\frac{\Lambda}{4\pi v_{\mathrm{F}}^{(0)}}\left(1+\frac{A+B-2C}{4\pi v_{\mathrm{F}}^{(0)}}\right)^{-1}. \tag{3.9}$$

Nous voyons donc que bien que notre calcul de perturbation est fait à l'ordre 1, nous obtenons des termes à tous les ordres. Ceci est dû à notre méthode qui est autocohérente : on se donne une surface de Fermi $(k_{\mathrm{F},0},k_{\mathrm{F},\pi})$ d'essai, avec lesquels on fait les calculs, et on vérifié à la fin que c'était bien la bonne surface de Fermi (dans le même esprit que les méthodes de champ moyen). Évaluée à l'ordre 1 en constantes de couplage,[5] la différence entre les vecteurs de Fermi habillés et nus est :

$$k_{\mathrm{F},0}^{(1)}-k_{\mathrm{F},0}^{(0)} = (B-A)\frac{\Lambda}{4\pi v_{\mathrm{F}}^{(0)}} \quad \left(=k_{\mathrm{F},\pi}^{(0)}-k_{\mathrm{F},\pi}^{(1)}\right). \tag{3.10}$$

En fait, nous allons un peu vite. Rien ne nous dit pour l'instant que les vecteurs de Fermi habillés sont les $k_{\mathrm{F},0(\pi)}$. Afin de nous en convaincre, nous allons calculer l'énergie minimale que coûte l'addition d'une particule sur la branche 0, et idem sur la branche π. Étant donné que $\Delta E^{(1)}(q)$ est indépendant de q, l'énergie sera minimale si q est le plus petit possible, i.e. si $q=k_{\mathrm{F},0}$ pour une particule ajoutée sur la branche 0, et $q=k_{\mathrm{F},\pi}$ sur la branche π. Ceci démontre que les $k_{\mathrm{F},0(\pi)}$ sont les vecteurs de Fermi habillés. Nous retrouvons donc, pour notre problème très simple et à l'ordre 1 auquel nous travaillons,

[5] On aurait aussi pu ne garder que les termes divergents quand $\Lambda\to\infty$, et dépendants de $(k_{\mathrm{F},0}-k_{\mathrm{F},0}^{(0)})$, dans les $\Delta E^{(1)}$, et le résultat aurait été le même. L'équation (3.10) peut donc être considérée comme le résultat quand on ne garde que les termes divergents.

le théorème de Luttinger (puisque nous avions la condition de conservation du nombre de particules $k_{\mathrm{F},0}+k_{\mathrm{F},\pi} = k^{(0)}_{\mathrm{F},0}+k^{(0)}_{\mathrm{F},\pi}$). De plus, si nous demandons que les énergies pour ajouter une particule en $k_{\mathrm{F},0}$ et en $k_{\mathrm{F},\pi}$ sont identiques, et égales au potentiel chimique habillé μ, nous obtenons la condition :

$$\begin{aligned} \mu^{(1)} &= \mu^{(0)} + v^{(0)}_{\mathrm{F}}(k_{\mathrm{F},0} - k^{(0)}_{\mathrm{F},0}) + \Delta E^{(1)}(1, q = k_{\mathrm{F},0}, 0; k_{\mathrm{F},0}, k_{\mathrm{F},\pi}) \qquad (3.11) \\ &= \mu^{(0)} + v^{(0)}_{\mathrm{F}}(k_{\mathrm{F},\pi} - k^{(0)}_{\mathrm{F},\pi}) + \Delta E^{(1)}(1, q = k_{\mathrm{F},\pi}, \pi; k_{\mathrm{F},0}, k_{\mathrm{F},\pi}). \qquad (3.12) \end{aligned}$$

Nous laissons le lecteur montrer que cette condition redonne bien (3.10). C'est d'ailleurs normal. Quand nous avons minimisé l'énergie, cela équivalait à demander que l'énergie ne change pas lorsque deux particules de la branche 0, une R à $k_{\mathrm{F},0}$ et une L à $k^{(0)}_{\mathrm{F},0}$, sont enlevées pour être mises à la surface de Fermi de la branche π (une à $k_{\mathrm{F},\pi}$, l'autre à $k^{(0)}_{\mathrm{F},\pi}$). Ceci veut bien dire que l'énergie pour rajouter (ou enlever, mais c'est la même chose) une particule à la surface de Fermi, est la même sur les deux branches. Les deux équations ci-dessus nous donne une information supplémentaire par rapport à la simple minimisation de l'énergie. Nous apprenons en effet que le potentiel chimique renormalisé vaut :

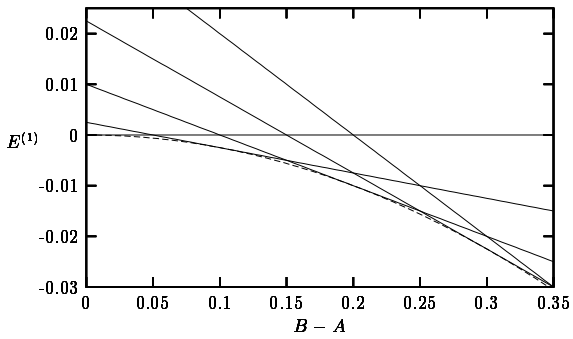
$$\mu^{(1)} = \mu^{(0)} + (A+B+2C)\frac{\Lambda}{4\pi} - (B-A)^2\frac{\Lambda}{4\pi v^{(0)}_{\mathrm{F}}}\left(1 + \frac{A+B-2C}{4\pi v^{(0)}_{\mathrm{F}}}\right)^{-1}. \qquad (3.13)$$

A l'ordre 1 en constantes de couplage, ceci vaut :

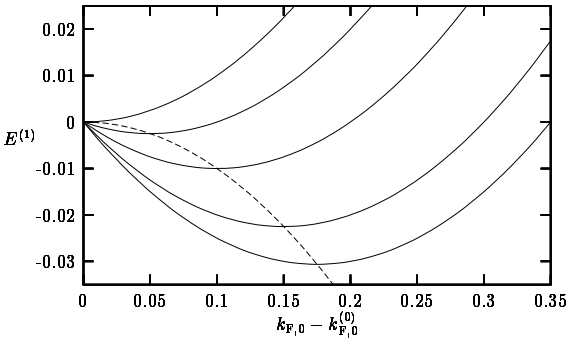
$$\mu^{(1)} = \mu^{(0)} + (A+B+2C)\frac{\Lambda}{4\pi}. \qquad (3.14)$$

Ce résultat est tout à fait semblable à ce que nous avions trouvé au chapitre 2 (fin de la section 2.1.3), si nous faisons $A = B = C = g^{\mathrm{c}}$. Ceci est normal. Nos deux indices de chaînes 0 et π peuvent tout aussi bien être considérés comme des indices de spin $\uparrow$ et $\downarrow$. Les couplages A, B et C sont alors bien identifiables à des couplages de type charge, et si nous les supposons égaux, nous retrouvons bien le bon résultat. Remarquons que le couplage D serait plutôt un couplage de spin, et que le couplage F, qui ne conserve pas le spin, n'a pas d'équivalent dans un modèle invariant par rotation. Enfin la différence des vecteurs de Fermi est équivalente à l'existence d'une aimantation, et donc à la présence d'un champ magnétique.

Le résultat (3.10) a-t-il une interprétation physique simple ? Remarquons premièrement que si les couplages A et B sont identiques, ce qui est le cas pour le modèle de Hubbard, il n'y a aucune déformation de la surface de Fermi. Dans le cas contraire, si nous supposons que les électrons subissent une répulsion, i.e. les couplages sont positifs, et que cette répulsion est plus forte sur la branche π, donc si $B - A > 0$, nous voyons que $k^{(1)}_{\mathrm{F},0} - k^{(0)}_{\mathrm{F},0} > 0$. Ainsi, on assiste à une déplétion de la branche π, ce qui est logique. Évidemment les électrons ne passent pas tous sur la branche 0, car ce passage a un coût en énergie cinétique. Afin d'avoir une image de ce qui se passe, nous montrons deux figures, pour une énergie en interaction qui serait, à l'ordre 1, de la forme : $E^{(1)} = (k_{\mathrm{F},0} - k^{(0)}_{\mathrm{F},0})^2 + (A-B)(k_{\mathrm{F},0} - k^{(0)}_{\mathrm{F},0})$ (c'est une version grossière des résultats



(a) Énergies en fonction de $B - A$, d'états avec des $(k_{\mathrm{F},0} - k^{(0)}_{\mathrm{F},0})$ différents (0, 0.05, 0.1, 0.15 et 0.2). Les croisements de niveaux nous montrent que la surface de Fermi va se déformer. La courbe en pointillés représente l'enveloppe de toutes les courbes, et c'est donc l'énergie du fondamental (en interaction) en fonction de l'interaction.



(b) Énergies en fonction de $(k_{\mathrm{F},0} - k^{(0)}_{\mathrm{F},0})$ pour différentes valeurs de $B - A$ (0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.35). La courbe en pointillés donne l'énergie du fondamental, et passe donc par les minimums des différentes courbes.

Fig. 3.2 – Interprétation graphique des déformations de la surface de Fermi, pour une énergie en interaction de la forme : $E^{(1)} = (k_{\mathrm{F},0} - k^{(0)}_{\mathrm{F},0})^2 + (A - B)(k_{\mathrm{F},0} - k^{(0)}_{\mathrm{F},0})$, avec $B \geqslant A$.

ci-dessus). La figure 3.2(a) sur laquelle sont représentés les croisements de niveaux est certainement la plus importante. C'est elle qui montre le mieux l'interprétation énergétique des déformations de la surface de Fermi. On comprend en effet qu'à cause des croisements de niveaux, qui ne sont pas évités, le fondamental en interaction ne peut pas être obtenu à partir du fondamental libre.

3.2.3 Perturbations au deuxième ordre

Venons en aux effets du second ordre. Nous allons voir que contrairement au premier ordre, la surface de Fermi va se déformer, sans que l'on ait à invoquer une différence de couplages entre les deux branches, ce qui est plus intéressant dans l'optique d'un modèle de Hubbard. Le couplage D est le plus important pour les déformations de la surface de Fermi. C'est pourquoi nous discuterons essentiellement ce couplage. Nous ne perturberons que les états $|n\rangle_0 = |0; k_{\mathrm{F},0}, k_{\mathrm{F},\pi}\rangle_0$, car nous ne chercherons pas à calculer la renormalisation du potentiel chimique. Les états $|k\rangle_0$ intermédiaires dans la formule (3.1) sont des états à 2 paires particule-trou, et sont des états propres du Hamiltonien cinétique H_0. Ce sont les états représentés sur la figure 3.1 page 90 (il suffit d'oublier les flèches). Pour le couplage D, l'énergie d'excitation d'un tel état, avec :

- une particule détruite sur (R,0) en k
- une particule créée sur (R,π) en $k + q$

– une particule détruite sur (L,π) en k'
– une particule créée sur (L,0) en $k'-q$

est simplement $E_k^{(0)} - E_n^{(0)} = 2v_{\rm F}^{(0)}q$. Remarquons que si les vitesses de Fermi sur les 2 branches n'étaient pas les mêmes, nous obtiendrions une énergie d'excitation qui dépendrait de $(k-k')$, et ceci compliquerait les calculs. Enfin, notons aussi que nous aurons des états intermédiaires avec une particule détruite en (R,π), etc. Ceux-ci donneront une contribution qui se déduira simplement de la précédente en faisant $0 \leftrightarrow \pi$.

Combien d'états excités de même q avons-nous ? Si nous nous concentrons sur les branches de droite, nous avons les conditions : $k_{\rm F,0}^{(0)} - \Lambda \leqslant k \leqslant k_{\rm F,0}$ et $k_{\rm F,\pi} \leqslant k+q \leqslant k_{\rm F,\pi}^{(0)} + \Lambda$, soit :

$$\mathrm{Max}(k_{\rm F,0}^{(0)} - \Lambda, k_{\rm F,\pi} - q) \leqslant k \leqslant \mathrm{Min}(k_{\rm F,0}, k_{\rm F,\pi}^{(0)} + \Lambda - q). \tag{3.15}$$

Nous avons donc un q limite $q_{\rm lim} = \Lambda + k_{\rm F,\pi}^{(0)} - k_{\rm F,0} = \Lambda + k_{\rm F,\pi} - k_{\rm F,0}^{(0)}$. Si $q \leqslant q_{\rm lim}$, il y a $\frac{L}{2\pi}(k_{\rm F,0} - k_{\rm F,\pi} + q)$ valeurs de k compatibles. Si au contraire $q \geqslant q_{\rm lim}$, on en trouve $\frac{L}{2\pi}(2\Lambda + k_{\rm F,\pi}^{(0)} - k_{\rm F,0}^{(0)} - q)$. Les restrictions des domaines des impulsions sur les branches de gauche donnent une condition du même type, pour k'. Nous avons de plus les bornes minimales et maximales pour le transfert d'impulsion q : $k_{\rm F,0} - k_{\rm F,\pi} \leqslant q \leqslant 2\Lambda + k_{\rm F,\pi}^{(0)} - k_{\rm F,0}^{(0)}$, en supposant que la branche 0 est toujours plus remplie que la π. Toujours avec la même hypothèse, on a que $k_{\rm F,0} \geqslant k_{\rm F,\pi}^{(0)}$, et nous obtenons la formule finale suivante :

$$\begin{aligned}
-\frac{LD^2}{2v_{\rm F}^{(0)}(2\pi)^3}\Bigg[& \int_{k_{\rm F,0}-k_{\rm F,\pi}}^{\Lambda-(k_{\rm F,0}-k_{\rm F,\pi}^{(0)})} \mathrm{d}q \frac{(q+(k_{\rm F,0}-k_{\rm F,\pi}))\,(q-(k_{\rm F,0}-k_{\rm F,\pi}))}{q} \\
& + \int_{\Lambda-(k_{\rm F,0}-k_{\rm F,\pi}^{(0)})}^{\Lambda+(k_{\rm F,0}-k_{\rm F,\pi}^{(0)})} \mathrm{d}q \frac{\Big(2\Lambda-(k_{\rm F,0}^{(0)}-k_{\rm F,\pi}^{(0)})-q\Big)\,(q-(k_{\rm F,0}-k_{\rm F,\pi}))}{q} \qquad (3.16) \\
& + \int_{\Lambda+(k_{\rm F,0}-k_{\rm F,\pi}^{(0)})}^{2\Lambda-(k_{\rm F,0}^{(0)}-k_{\rm F,\pi}^{(0)})} \mathrm{d}q \frac{\Big(2\Lambda-(k_{\rm F,0}^{(0)}-k_{\rm F,\pi}^{(0)})-q\Big)\,\Big(2\Lambda+(k_{\rm F,0}^{(0)}-k_{\rm F,\pi}^{(0)})-q\Big)}{q} \Bigg] \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Concentrons nous sur les intégrales. Si nous ne gardons que les termes divergents quand $\Lambda \to \infty$, et uniquement ceux qui dépendent des impulsions de Fermi habillées $k_{{\rm F},0(\pi)}$[6], il ne reste qu'un seul terme : $-(k_{\rm F,0}-k_{\rm F,\pi})^2 \ln(\Lambda/(k_{\rm F,0}-k_{\rm F,\pi}))$. Si nous ajoutons à cela le terme avec $0 \leftrightarrow \pi$, et que nous mettons les valeurs absolues nécessaires pour avoir un argument positif du logarithme, nous avons au final :

$$\Delta E_D^{(2)} = \frac{LD^2}{v_{\rm F}^{(0)}(2\pi)^3}(k_{\rm F,0}-k_{\rm F,\pi})^2 \ln\left(\frac{\Lambda}{|k_{\rm F,0}-k_{\rm F,\pi}|}\right). \tag{3.18}$$

La courbe de la figure 3.3 montre clairement que, pour le couplage D, il est préférable d'avoir une surface de Fermi plate, i.e. $k_{\rm F,0} - k_{\rm F,\pi} = 0$. Bien sûr, il ne faut regarder la

[6]les contributions qui ne dépendent pas de ces impulsions ne pourront pas déformer la surface de Fermi, puisqu'elles ne joueront aucun rôle dans une minimisation de l'énergie par rapport à ces impulsions.

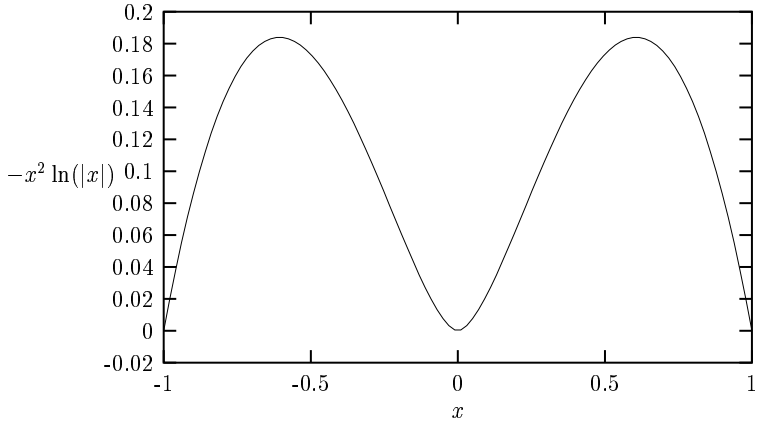


Fig. 3.3 – Allure de la courbe $-x^2 \ln(|x|)$.

courbe que pour $x \ll 1$, puisque la différence des impulsions de Fermi est très petite devant le cut-off.

En ce qui concerne les couplages A, B et C, nous laissons le lecteur montrer qu'il n'y a aucun terme divergent, dépendant des impulsions de Fermi habillées. Enfin, pour les termes F, qui sont les seuls à avoir une énergie d'excitation $2v_{\mathrm{F}}^{(0)}(q + k_{\mathrm{F},0}^{(0)} - k_{\mathrm{F},\pi}^{(0)})$ et non $2v_{\mathrm{F}}^{(0)}q$, on montre que[7] :

$$\Delta E_F^{(2)} = -\frac{LF^2}{v_{\mathrm{F}}^{(0)}(2\pi)^3}\left((k_{\mathrm{F},0} - k_{\mathrm{F},\pi}) - (k_{\mathrm{F},0}^{(0)} - k_{\mathrm{F},\pi}^{(0)})\right)^2 \ln\left(\frac{\Lambda}{|(k_{\mathrm{F},0} - k_{\mathrm{F},\pi}) - (k_{\mathrm{F},0}^{(0)} - k_{\mathrm{F},\pi}^{(0)})|}\right). \tag{3.19}$$

On obtient encore une courbe du type de la figure 3.3, à l'envers, et centrée non au point de la surface de Fermi plate, mais au point de la surface de Fermi libre.

Si nous supposons que seuls les termes D sont présents (afin de simplifier les calculs, en particulier ne pas avoir les termes du premier ordre), et en notant que $k_{\mathrm{F},0} - k_{\mathrm{F},0}^{(0)} = \frac{1}{2}\left[(k_{\mathrm{F},0} - k_{\mathrm{F},\pi}) - (k_{\mathrm{F},0}^{(0)} - k_{\mathrm{F},\pi}^{(0)})\right]$ pour réexprimer l'énergie à l'ordre 0, il est facile de montrer que :

$$k_{\mathrm{F},0}^{(0)} - k_{\mathrm{F},\pi}^{(0)} = (k_{\mathrm{F},0} - k_{\mathrm{F},\pi})\left[1 + 2\left(\frac{D}{2\pi v_{\mathrm{F}}^{(0)}}\right)^2 \ln\left(\frac{\Lambda}{|k_{\mathrm{F},0} - k_{\mathrm{F},\pi}|}\right)\right]. \tag{3.20}$$

Cette formule indique clairement que l'effet des couplages D est de rendre la surface de Fermi plus plate, et ce quelque soit le signe de D. C'est l'existence de ces couplages qui nous a poussés à aller à l'ordre 2. L'explication de cette tendance à l'aplatissement est simple. Dans la formule donnant l'écart en énergie à l'ordre 2 en perturbation, il est facile de voir que l'énergie sera d'autant plus abaissée que les dénominateurs

[7] La théorie des perturbations a ici un problème de divergence car il y a des dégénérescences. Le résultat a été obtenu en régularisant l'intégrale divergente avec une partie principale. Nous verrons plus loin (cf fin de 3.3.2 et 3.3.3)que cette façon de faire pose problème.

d'énergie deviennent plus petits, et ceci est possible si la surface de Fermi s'aplatit. Si nous supposons cette fois que seuls les couplages de type F existent, nous obtenons 3 solutions : soit la surface de Fermi est inchangée, soit :

$$k_{\mathrm{F},0}^{(0)} - k_{\mathrm{F},\pi}^{(0)} = k_{\mathrm{F},0} - k_{\mathrm{F},\pi} \pm \Lambda \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2\pi v_{\mathrm{F}}^{(0)}}{F}\right)^2 - 1\right)\right]. \tag{3.21}$$

Il y a donc en quelque sorte une brisure de symétrie, puisque nous obtenons deux solutions symétriques par rapport à la surface de Fermi libre. Remarquons aussi que la déformation de la surface de Fermi par les termes F est non analytique en F. Nous reviendrons sur ce résultat à la section 3.3.2. Nous ne parlerons pas plus de ces termes F, car nous verrons qu'en fait c'est la première solution qu'il faut retenir, à savoir qu'ils ne déforment pas la surface de Fermi.

3.3 Résultats obtenus avec la self-énergie

3.3.1 Problèmes avec la théorie des perturbations habituelle

Nous avons compris dans la section précédente que le fondamental en interaction n'est pas obtenu à partir du fondamental libre, en branchant les interactions. Ceci est dû aux croisements de niveaux entre les états de surfaces de Fermi différentes. Il est donc à peu près évident que la self-énergie ne doit pas être calculée en prenant comme propagateur libre celui calculé avec le fondamental libre. En effet, la théorie des perturbations dépendante du temps est basée sur une hypothèse de branchement adiabatique des interactions, et de non dégénerescence du fondamental libre à tous les instants. Or il est clair qu'avec nos croisements de niveaux, la deuxième hypothèse ne sera pas respectée, et nous serons confrontés à des problèmes. Vérifions le de manière explicite.

La self-énergie pour les fermions (R,0) est facile à calculer à 1 boucle. Nous l'avons déjà fait au chapitre 2 (cf figure 2.4 page 42 et équation (2.19)). Il faut seulement utiliser toutes les interactions possibles entre les deux "espèces" de fermions (les 0 et les π). Dans la boucle du tadpole, les fermions sont (L,0) si l'interaction est A et (L,π) si c'est C. Les autres interactions ne donnent pas de contribution. Pour la self-énergie des fermions (R,π) maintenant, seules les interactions de type B et C joueront. Afin de pouvoir comparer les résultats de la méthode énergétique et ceux obtenus avec la self-énergie, nous mettons ici aussi un cut-off autour de la surface de Fermi *libre*. Nous trouvons :

$$\Sigma_{\mathrm{R},0}^{(1)}(k,\omega) = (A+C)\frac{\Lambda}{2\pi}, \text{ et } \Sigma_{\mathrm{R},\pi}^{(1)}(k,\omega) = (B+C)\frac{\Lambda}{2\pi}. \tag{3.22}$$

Les parties réelles des inverses propagateurs sont alors :

$$\Re G_{\mathrm{R},0}^{(1)\,-1}(k,\omega) = \omega - \left[\mu^{(0)} + v_{\mathrm{F}}^{(0)}(k - k_{\mathrm{F},0}^{(0)})\right] - (A+C)\frac{\Lambda}{2\pi}, \text{ et} \tag{3.23}$$

$$\Re G_{\mathrm{R},\pi}^{(1)\,-1}(k,\omega) = \omega - \left[\mu^{(0)} + v_{\mathrm{F}}^{(0)}(k - k_{\mathrm{F},\pi}^{(0)})\right] - (B+C)\frac{\Lambda}{2\pi}. \tag{3.24}$$

Un tel résultat ne peut s'interpréter par une simple renormalisation du potentiel chimique, car si $A \neq B$, on obtient un potentiel chimique différent en 0 et en π. Il faut donc écrire que l'énergie pour rajouter une particule à la surface de Fermi habillée est égale au potentiel chimique renormalisé, soit :

$$\mu - \left[\mu^{(0)} + v_{\mathrm{F}}^{(0)}(k_{\mathrm{F},0} - k_{\mathrm{F},0}^{(0)})\right] - (A+C)\frac{\Lambda}{2\pi} = 0, \text{ et} \tag{3.25}$$

$$\mu - \left[\mu^{(0)} + v_{\mathrm{F}}^{(0)}(k_{\mathrm{F},\pi} - k_{\mathrm{F},\pi}^{(0)})\right] - (B+C)\frac{\Lambda}{2\pi} = 0. \tag{3.26}$$

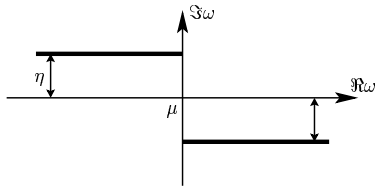
Il ne reste plus qu'à faire la somme et la différence de ces deux équations, et utiliser le théorème de Luttinger, pour obtenir les potentiel chimique et vecteurs de Fermi renormalisés. Nous trouvons alors les résultats (3.10) et (3.14) de la section 3.2.2. Remarquons toutefois que ces résultats avaient été obtenus en négligeant des termes d'ordre 2, alors qu'aucune approximation de cette sorte n'a été faite ici. Cette différence est le premier signe révélateur d'un problème avec cette méthode, puisque pour *exactement le même système*, les deux méthodes doivent donner *exactement* les mêmes résultats.

Mais le problème est encore pire en ce qui concerne la partie imaginaire du propagateur inverse. Celle-ci est incorrecte dans un tel schéma de perturbations. En effet, elle est inchangée par rapport au cas libre et vaut toujours, pour les fermions (R,0) : $\mathrm{i}\eta\,\mathrm{sgn}(k - k_{\mathrm{F},0}^{(0)})$. Le propagateur inverse habillé à l'ordre 1 s'écrit donc :

$$G_{\mathrm{R},0}^{(1)\,-1}(k,\omega) = \omega - \left[\mu^{(1)} + v_{\mathrm{F}}^{(0)}(k - k_{\mathrm{F},0}^{(1)})\right] + \mathrm{i}\eta\,\mathrm{sgn}(k - k_{\mathrm{F},0}^{(0)}). \tag{3.27}$$

Or il est bien connu (cf par exemple [AGD63]), que le propagateur habillé peut être écrit grâce à une décomposition spectrale comme :

$$G(k,\omega) = \int_{-\infty}^{\mu} \mathrm{d}\omega' \frac{\rho_-(k,\omega')}{\omega - \omega' - \mathrm{i}\eta} + \int_{\mu}^{+\infty} \mathrm{d}\omega' \frac{\rho_+(k,\omega')}{\omega - \omega' + \mathrm{i}\eta}. \tag{3.28}$$



Le propagateur habillé doit donc avoir un "point de branchement" en μ, et des pôles situés comme indiqué sur la figure ci-dessus, à côté de l'expression du propagateur. Or il est bien évident que le propagateur que nous avons calculé en perturbation n'a pas la même structure analytique, puisque la partie imaginaire du propagateur inverse change de signe sur la surface de Fermi libre, et pour cette impulsion, la partie réelle du propagateur inverse ne s'annule pas en μ, mais en une autre énergie. L'importance de l'annulation de la partie imaginaire sur la surface de Fermi habillée provient bien

entendue de ce que la partie imaginaire contrôle le temps de vie des quasi-particules, et que celui-ci doit être infini à la surface de Fermi habillée. Le lecteur désireux de voir des démonstrations générales des problèmes posés sur les parties réelles et imaginaires de la self-énergie est renvoyé aux annexes B et C de notre deuxième article [DD02].

Tout ceci est la traduction, dans le langage de la self-énergie, des problèmes rencontrés avec les croisements de niveaux. La théorie des perturbations est incapable d'ajuster la surface de Fermi toute seule lors d'un branchement adiabatique des interactions. Nous renvoyons le lecteur à la superbe discussion de Nozières de ces problèmes[Noz63]. Lors d'un croisement de niveau, on reste dans l'état obtenu à partir du fondamental libre, comme indiqué sur la figure 3.4 à gauche, alors qu'il faudrait passer à l'état excité libre donnant le fondamental en interaction, comme indiqué sur la figure 3.4 à droite. Ce problème peut se comprendre de manière très simple, comme

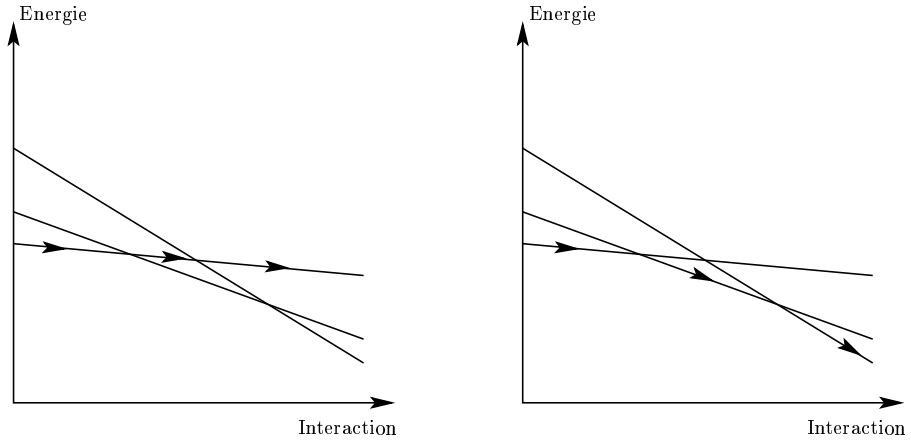


Fig. 3.4 – Figure de gauche : le branchement adiabatique ne voit pas les croisements de niveaux, et on reste sur l'état provenant du fondamental libre, qui est un état excité du système en interaction. Figure de droite : ce que la théorie des perturbations devrait faire. On suit le fondamental en interaction, donc on passe de l'état obtenu à partir du fondamental libre à d'autres états obtenus à partir d'états excités libres.

l'ont fait remarquer Kohn et Luttinger[KL60]. Considérons un Hamiltonien d'interaction qui n'en est pas un, et dont la partie pour la branche (R,0) s'écrit :

$$H_{\mathrm{int,R},0} = \sum_k \left[\mu - \mu^{(0)} + v_{\mathrm{F}}^{(0)}(k_{\mathrm{F},0}^{(0)} - k_{\mathrm{F},0})\right] c_{\mathrm{R},0}^{\dagger}(k) c_{\mathrm{R},0}(k). \tag{3.29}$$

Le Hamiltonien total est alors simplement, pour la partie (R,0) toujours :

$$H_{\mathrm{R},0} = \sum_k \left[\mu + v_{\mathrm{F}}^{(0)}(k - k_{\mathrm{F},0})\right] c_{\mathrm{R},0}^{\dagger}(k) c_{\mathrm{R},0}(k). \tag{3.30}$$

Il est alors évident que le propagateur inverse habillé est :

$$G_{\mathrm{R},0}^{\mathrm{exact}\,-1} = \omega - \left[\mu + v_{\mathrm{F}}^{(0)}(k - k_{\mathrm{F},0})\right] + \mathrm{i}\eta\,\mathrm{sgn}(k - k_{\mathrm{F},0}). \tag{3.31}$$

Il est tout aussi évident que la self-énergie (pour la théorie des perturbations effectuée avec le fondamental libre) vaut : $\Sigma_{R,0}(k,\omega) = \mu - \mu^{(0)} + v_{\rm F}^{(0)}(k_{\rm F,0}^{(0)} - k_{\rm F,0})$, de sorte que le propagateur inverse en perturbation s'écrit :

$$G_{\rm R,0}^{\rm pert\,-1} = \omega - \left[\mu + v_{\rm F}^{(0)}(k - k_{\rm F,0})\right] + {\rm i}\eta\,{\rm sgn}(k - k_{\rm F,0}^{(0)}). \tag{3.32}$$

Nous voyons donc apparaître le même problème sur cet exemple très simple. La théorie des perturbations ne peut être effectuée avec le fondamental libre, car la partie imaginaire du propagateur est fausse. Notons que cette partie imaginaire est importante, puisque c'est elle qui donne la densité spectrale des excitations à une particule ou un trou (cf [AGD63]). Redisons que le point le plus préoccupant si la partie imaginaire ne s'annule pas sur la surface de Fermi habillée, est que le temps de vie des quasi-particules, à la surface de Fermi habillée, est fini. L'hypothèse de branchement adiabatique des interactions est alors mise en défaut puisque les quasi-particules, même à la surface de Fermi habillée, se seront désintégrées avant la fin du branchement des interactions.

3.3.2 Comment mettre la théorie des perturbations en œuvre ?

La première idée qui vient à l'esprit pour remédier à ce problème est de perturber un état excité, comme nous l'avions fait dans la théorie des perturbations indépendante du temps. On considérerait alors un propagateur libre (R,0) qui serait :

$$G_{\rm R,0}^{(0)\,-1}(k,\omega) = \omega - \left[\mu^{(0)} + v_{\rm F}^{(0)}(k - k_{\rm F,0}^{(0)})\right] + {\rm i}\eta\,{\rm sgn}(k - k_{\rm F,0}), \tag{3.33}$$

et de même pour les trois autres branches. Remarquons que seule la partie imaginaire est changée, par rapport au cas habituel. Si nous calculons la self-énergie à l'ordre 1, en mettant toujours un cut-off autour de la surface de Fermi libre, nous obtenons :

$$\Sigma_{\rm R,0}^{(1)}(k,\omega) = A\frac{\Lambda + k_{\rm F,0} - k_{\rm F,0}^{(0)}}{2\pi} + C\frac{\Lambda + k_{\rm F,\pi} - k_{\rm F,\pi}^{(0)}}{2\pi}. \tag{3.34}$$

On retrouve alors exactement les résultats (3.9) et (3.13) de la section 3.2.2. Ceci confirme que nous sommes sur la bonne voie. Et cette fois-ci la partie imaginaire est correcte, puisque la self-énergie ne la change pas, et qu'elle a été choisie comme il faut à l'ordre 0.

Notons que si nous avions mis le cut-off autour de la surface de Fermi habillée, ce qui simplifie les calculs, nous aurions obtenu les expressions (3.22) pour la self-énergie. Si nous avions utilisé un tel cut-off pour la méthode énergétique, nous n'aurions pas obtenu de déformation, car la variation d'énergie aurait été indépendante des impulsions de Fermi. Il est donc apparent sur cet exemple que l'utilisation de la self-énergie n'est pas complètement équivalente à la méthode énergétique. La différence est que si on utilise la self-énergie, on fait toujours une variation sous contrainte (le cut-off reste fixe), alors que la méthode énergétique permet d'avoir le cut-off fixe ou mobile avec la surface de Fermi.

A priori, on pourrait croire que tout se passera bien si on va aux ordres suivants. En fait, ce n'est pas le cas. Nous rencontrons les difficultés dont parlent Feldman et al [FST96], liées aux insertions de self-énergie.[8] Si on calcule la self-énergie à l'ordre 2, on peut montrer qu'il n'y a aucun problème. C'est vrai parce que le seul graphe avec insertion de self-énergie est le graphe de Kohn-Luttinger, et celui-ci est nul à $T = 0$. Les problèmes commencent donc vraiment à trois boucles. Considérons par exemple le graphe de Feynman représenté sur la figure 3.5. La self-énergie à 1 boucle

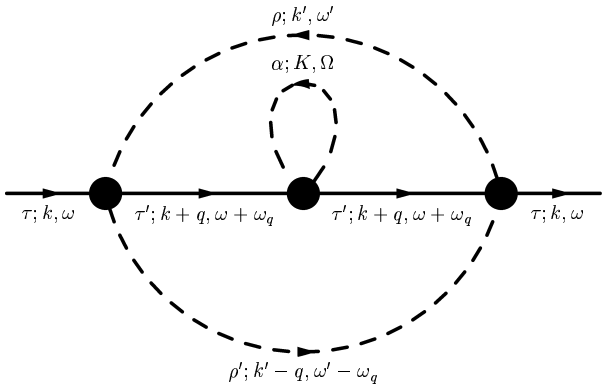


Fig. 3.5 – Exemple de graphe posant des problèmes si on utilise un état excité pour faire la théorie des perturbations : c'est le sunrise avec une insertion de self-énergie, par exemple sur le propagateur interne R.

est indépendante de l'énergie et de l'impulsion. Son effet est donc simplement de faire passer de l'expression (2.114) pour le sunrise, à la même expression avec une puissance 2=1+1 pour le propagateur R. Les calculs sont tout à fait similaires à ceux pour évaluer le sunrise, et nous trouvons pour notre nouveau graphe la même expression que (2.117), où les intégrands sont élevés au carré. L'intégrale sur k' s'effectue aisément. Le problème est alors que l'on obtient une contribution :

$$\int_0^{\Lambda-k} \mathrm{d}q \, \frac{q}{(\omega - v_{\mathrm{F}}(k+2q) + \mathrm{i}\eta)^2}. \tag{3.35}$$

Or cette intégrale évaluée pour $\omega = 0$ et $k = 0$ souffre d'une divergence pour $q = 0$. Et cette divergence serait encore pire si l'on avait inséré plusieurs self-énergies ! Autrement dit, les termes d'ordre supérieur sont de moins en moins bien définis. Le seul moyen de remédier à ce problème est d'utiliser les contre-termes comme nous l'avions fait au chapitre 2. Nous avions par exemple vu que les diagrammes 2.22(a) et 2.22(b) page 75 donnaient une contribution totale nulle. Il nous faut introduire de nouveaux contre-termes, qui serviront à ajuster la position de la surface de Fermi, pour que celle-ci soit la surface de Fermi habillée. Il est intéressant de voir que les contre-termes qui sont

[8] Un diagramme sans insertion de self-énergie est dit diagramme squelette. Les diagrammes posant problème ici sont donc les diagrammes non squelettes.

assez naturellement introduits dans ce que nous avons déjà vu, sont en fait nécessaires quand la surface de Fermi change de forme sous l'effet des interactions.

Faisons encore une remarque générale. L'équation de Dyson a généralement deux interprétations. On peut supposer que la self-énergie est calculée à l'aide du propagateur libre, auquel cas il faut considérer tous les diagrammes 1PI, qu'ils soient squelettes ou non. Ce point de vue est bien adapté au calcul perturbatif du propagateur, mais nous venons de voir que cette méthode a de sérieux problèmes lorsque la surface de Fermi se déforme. On peut aussi dire que l'on calcule la self-énergie avec le propagateur habillé, et il ne faut alors tenir compte que des diagrammes squelettes. Le propagateur habillé est alors déterminé par une équation implicite. Cette méthode autocohérente a par exemple été utilisée par Nojiri [Noj99]. En ce qui nous concerne, nous allons opter pour une méthode qui est à mi-chemin entre ces deux versions. Notre théorie des perturbations va être faite avec un propagateur libre, mais de basse énergie. Le propagateur utilisé ne sera donc pas exact mais aura les propriétés cruciales du propagateur exact, à savoir le bon potentiel chimique et la bonne surface de Fermi. Tous les diagrammes seront calculés, y compris les diagrammes non squelettes, mais les contre-termes vont tuer les divergences infra-rouge des diagrammes non squelettes (ceci sera d'ailleurs vrai pour le vertex aussi). Un graphe tel que celui représenté sur la figure 3.5 sera tué par ceux dans lesquels le tadpole est remplacé par les contre-termes. Par contre, celui dans lequel le tadpole est remplacé par un sunrise (graphe à 4 boucles), ne sera pas tué par les contre-termes, car le sunrise dépend de la fréquence, mais pas les contre-termes. Néanmoins, la somme du sunrise et des contre-termes a été choisie pour valoir 0 sur la surface de Fermi, et donc les divergences infra-rouges sont bien régularisées.

Nous allons supposer comme précédemment que les deux vitesses de Fermi sont identiques. Nous verrons alors qu'elles ne se renormalisent pas (comme dans le cas 1D), et nous n'introduirons donc aucun contre-terme pour les vitesses. Nous ne noterons d'ailleurs plus l'exposant $^{(0)}$ pour les vitesses. Nous écrirons donc le Hamiltonien cinétique sous la forme :

$$H_0 = \sum_{I=0,\pi} \sum_k \Big\{ \left[\mu + v_{\mathrm{F}}(k - k_{\mathrm{F},I})\right] c^\dagger_{\mathrm{R},I}(k) c_{\mathrm{R},I}(k) + \left[\mu - v_{\mathrm{F}}(k + k_{\mathrm{F},I})\right] c^\dagger_{\mathrm{L},I}(k) c_{\mathrm{L},I}(k) \Big\} + H^{(\mu)}_{0,\mathrm{ct}} + H^{(k)}_{0,\mathrm{ct}}, \tag{3.36}$$

avec

$$H^{(\mu)}_{0,\mathrm{ct}} = \delta\mu \sum_{I,k} c^\dagger_{\mathrm{R},I}(k) c_{\mathrm{R},I}(k) + \delta\mu \sum_{I,k} c^\dagger_{\mathrm{L},I}(k) c_{\mathrm{L},I}(k), \text{ et} \tag{3.37}$$

$$H^{(k)}_{0,\mathrm{ct}} = -v_{\mathrm{F}}\delta k_I \sum_{I,k} c^\dagger_{\mathrm{R},I}(k) c_{\mathrm{R},I}(k) - v_{\mathrm{F}}\delta k_I \sum_{I,k} c^\dagger_{\mathrm{L},I}(k) c_{\mathrm{L},I}(k). \tag{3.38}$$

Le contre-terme $\delta\mu$ est identique à ce que nous avions vu au chapitre 2, équation (2.72). En ce qui concerne δk, nous avons de façon similaire :

$$k^{(0)}_{\mathrm{F},I} = k_{\mathrm{F},I} + \delta k_I, \text{ avec } \delta k_I = \delta k^{(1)}_I + \delta k^{(2)}_I + \ldots = G^\alpha \delta k^\alpha_{I,1} + \ldots, \tag{3.39}$$

où nous avons utilisé la notation symbolique G^α pour l'ensemble des couplages A à F, et où la somme sur α est implicite. Bien entendu, les différents contre-termes δk_I ne sont pas indépendants à cause du Théorème de Luttinger, et on a la relation $\sum_I \delta k_I = 0$. Ceci doit d'ailleurs être vrai à tous les ordres, donc $\sum_I \delta k_I^{(j)} = 0$. Le propagateur libre de basse énergie, (R,0) par exemple, sera maintenant :

$$G^*_{\mathrm{R},0}(k,\omega) = \frac{1}{\omega - [\mu + v_\mathrm{F}(k - k_{\mathrm{F},I})] + \mathrm{i}\eta\,\mathrm{sgn}(k - k_{\mathrm{F},I})}. \tag{3.40}$$

Ainsi, les parties réelles et imaginaires font toutes deux références à la surface de Fermi habillée.

Comme précédemment, nous régulariserons les divergences UV en introduisant un cut-off Λ. Cette fois-ci, nous le mettrons autour de la surface de Fermi habillée, puisque tout a été fait en référence à celle-ci, et car cela simplifie les calculs. Nous n'avions jusqu'à présent gardé le cut-off autour de la surface de Fermi libre que pour pouvoir comparer les résultats donnés par les différentes méthodes, appliquées à un unique problème. Les différentes expressions pour la self-énergie aux ordres 1 et 2 sont alors (en ne gardant que les termes divergents) :

$$\Sigma^{(1)}_{\mathrm{R},0}(k,\omega) = (A+C)\frac{\Lambda}{2\pi},\ \text{et}\ \Sigma^{(1)}_{\mathrm{R},\pi}(k,\omega) = (B+C)\frac{\Lambda}{2\pi} \tag{3.41}$$

$$\Sigma^{(2)}_{\mathrm{R},0;G}(k = k_{\mathrm{F},0} + \kappa, \omega = \mu + \nu)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{G}{2\pi v_\mathrm{F}}\right)^2 (\nu - v_\mathrm{F}\kappa)\ln\left(\frac{|\nu^2 - (v_\mathrm{F}\kappa)^2|}{(2v_\mathrm{F}\Lambda)^2}\right),\ \text{pour } G = A, C, F; \tag{3.42}$$

$$\Sigma^{(2)}_{\mathrm{R},\pi;G}(k = k_{\mathrm{F},\pi} + \kappa, \omega = \mu + \nu)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{G}{2\pi v_\mathrm{F}}\right)^2 (\nu - v_\mathrm{F}\kappa)\ln\left(\frac{|\nu^2 - (v_\mathrm{F}\kappa)^2|}{(2v_\mathrm{F}\Lambda)^2}\right),\ \text{pour } G = B, C, F; \tag{3.43}$$

$$\Sigma^{(2)}_{\mathrm{R},0;D}(k = k_{\mathrm{F},0} + \kappa, \omega = \mu + \nu)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{D}{2\pi v_\mathrm{F}}\right)^2 [\nu - v_\mathrm{F}(\kappa + 2\Delta k_\mathrm{F})]\ln\left(\frac{|\nu^2 - [v_\mathrm{F}(\kappa + 2\Delta k_\mathrm{F})]^2|}{(2v_\mathrm{F}\Lambda)^2}\right), \tag{3.44}$$

$$\Sigma^{(2)}_{\mathrm{R},\pi;D}(k = k_{\mathrm{F},\pi} + \kappa, \omega = \mu + \nu)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{D}{2\pi v_\mathrm{F}}\right)^2 [\nu - v_\mathrm{F}(\kappa - 2\Delta k_\mathrm{F})]\ln\left(\frac{|\nu^2 - [v_\mathrm{F}(\kappa - 2\Delta k_\mathrm{F})]^2|}{(2v_\mathrm{F}\Lambda)^2}\right). \tag{3.45}$$

Nous avons ici noté $\Delta k_\mathrm{F} = k_{\mathrm{F},0} - k_{\mathrm{F},\pi}$.

Au premier ordre, on peut se convaincre que les résultats obtenus sont (3.10) et (3.14). Oublions les termes du premier ordre (en supposant des couplages de type Hubbard par exemple), et regardons ce qu'on obtient au second ordre. Les interactions de type F donnent ici des expressions pour la self-énergie au second ordre qui ne diffèrent en rien de celles pour les interactions A, B et C. Et comme elles valent 0 si on les évalue à la surface de Fermi habillée ($\nu = 0$ et $\kappa = 0$), il est clair qu'aucune déformation de la surface de Fermi ne peut en résulter. Seule l'interaction D donne

une déformation au deuxième ordre. Étant donné que $\Sigma^{(2)}_{\mathrm{R},0;D}(k = k_{\mathrm{F},0}, \omega = \mu) = -\Sigma^{(2)}_{\mathrm{R},\pi;D}(k = k_{\mathrm{F},\pi}, \omega = \mu)$, il est clair que le potentiel chimique est inchangé. De plus, en utilisant la conservation du nombre de particules : $k_{\mathrm{F},0} + k_{\mathrm{F},\pi} = k^{(0)}_{\mathrm{F},0} + k^{(0)}_{\mathrm{F},\pi}$, on montre facilement que l'on retrouve exactement la déformation (3.20).

Revenons sur le fait que les interactions de type F ne donnent aucune déformation de la surface de Fermi. Ceci n'est pas compatible avec ce que nous avions observé en utilisant la théorie des perturbations indépendante du temps.[9] Étant donné que pour les deux méthodes, nous n'avons retenu que les termes divergents en Λ, il est clair que la différence dans les résultats ne peut pas être imputée à la différence de choix de cut-off. De plus, nous laissons le lecteur montrer que l'utilisation de la self-énergie sans contre-terme, avec un état excité, donne une déformation de la surface de Fermi identique à celle observée par la théorie des perturbations indépendante du temps. Doit-on pour autant en conclure que notre méthode avec les contre-termes a un problème ? En fait, il nous faut nous souvenir que le résultat, pour la théorie des perturbations indépendante du temps, avait été obtenu en régularisant le résultat divergent (à cause de dégénérescences) de la théorie des perturbations non dégénérée, en utilisant une partie principale. Ceci paraissait assez raisonnable, mais est en réalité la source de notre problème. De même, l'utilisation de la self-énergie avec un état excité est une théorie des perturbations autour d'un état instable, ce qui est source d'ennui si l'on cherche à brancher adiabatiquement les interactions, car l'état a toutes les chances de se désintégrer avant la fin du branchement des interactions. L'état excité qui a la bonne surface de Fermi de basse énergie est en fait couplé, par les interactions de type F, à un continuum d'états dont certains ont une énergie identique ou plus faible. Les interactions de type A aussi couplent cet état à des états qui lui sont quasiment dégénérés, mais la différence essentielle est que leur nombre tend vers 0 aussi vite que l'énergie d'excitation. Il n'y a donc pas de problème de divergence (infra-rouge) dans ce cas là. Ceci explique pourquoi seules les interactions de type F, pour lesquelles la densité d'états quasi-dégénérés est approximativement constante, posent problème.

Pour clore la discussion, il est instructif de regarder un modèle très simple pour lequel on sait dire des choses non perturbatives, afin de bien voir où la théorie des perturbations indépendante du temps est mise en défaut. C'est le cas d'un état couplé à un continuum, de densité uniforme, que nous étudions maintenant.

3.3.3 Théorie des perturbations indépendante du temps, pour un état couplé à un continuum

Considérons donc un système formé d'un anneau dans lequel circulent des électrons sans interaction, par exemple un modèle de liaisons fortes, couplé à un état, par

[9] Remarquons toutefois que la déformation obtenue avec la théorie des perturbations indépendante du temps est exponentiellement petite en l'interaction au carré, et est non analytique en F. La différence entre les deux méthodes est donc très petite et non perturbative.

effet tunnel. Autrement dit, on regarde un problème de conduction 1D, avec une impureté. Ceci est représenté figure 3.6. Nous supposerons le couplage local dans l'espace réel, entre le site de l'impureté, noté $|*\rangle$, et le site à la position 0, noté $|0\rangle$. Le terme

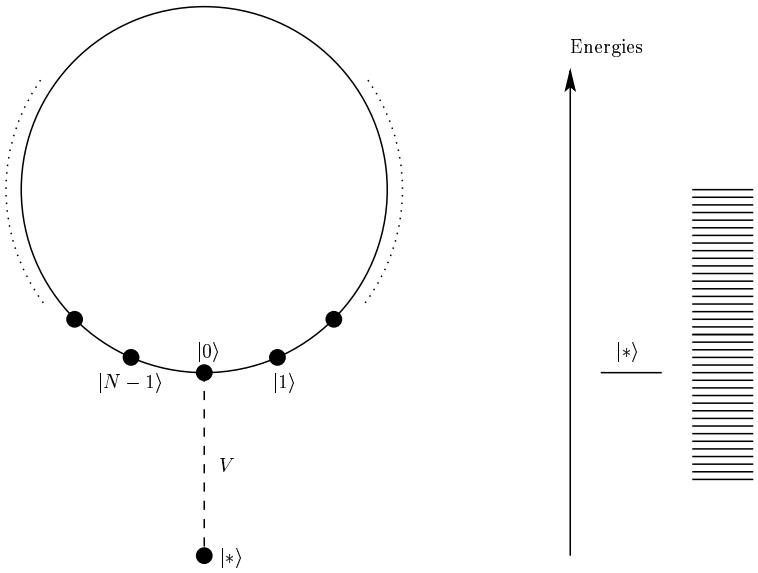


Fig. 3.6 – Système constitué d'un anneau couplé à une impureté. Les énergies représentées sont celles avant que le couplage tunnel V ne soit branché.

de couplage s'écrit dans l'espace réel $V\big(|0\rangle\langle *| + |*\rangle\langle 0|\big)$. Si nous passons dans l'espace de Fourier pour l'anneau, que nous réécrivons le couplage en utilisant les ondes planes, et que nous supposons que l'énergie de l'état $|*\rangle$ est nulle (c'est notre référence), le Hamiltonien s'écrit :

$$H = \sum_i E_i |i\rangle\langle i| + \frac{V}{\sqrt{N}}\Big(|i\rangle\langle *| + |*\rangle\langle i|\Big). \tag{3.46}$$

Nous avons pris des notations très générales : les états $|i\rangle$ sont les ondes planes et les E_i les énergies associées. Nous trouvons les énergies propres du système, en écrivant l'équation de Schrödinger $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$. Celle-ci projetée sur les différents états donnent $N+1$ équations qui se combinent facilement en une équation de compatibilité qui est :

$$E = \frac{V^2}{N}\sum_i \frac{1}{E - E_i} \tag{3.47}$$

Ainsi les énergies propres du système sont trouvées en prenant les intersections entre les courbes E/V^2 et $1/N\sum_i 1/(E-E_i)$. Ces courbes sont représentées sur la figure 3.7. L'énergie de l'état propre $|*\rangle_V$ (qui est l'état propre de H devenant $|*\rangle$ quand $V=0$) est donc comprise entre les deux énergies les plus proches de 0, et par conséquent, est de l'ordre de $1/N$, puisque ces deux énergies sont en $1/N$. Or si nous utilisons (3.47) et que nous cherchons la forme perturbative de l'énergie de $|*\rangle_V$, nous trouvons qu'elle

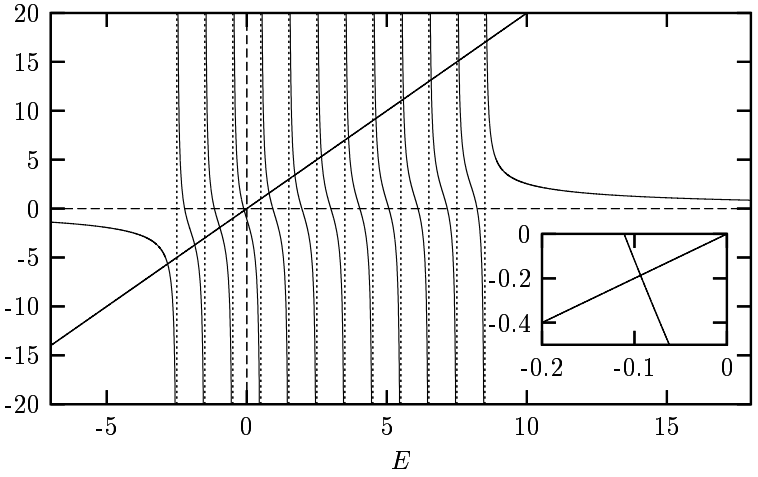


Fig. 3.7 – Résolution graphique de l'équation (3.47), pour $N = 12$, des énergies E_i = -2.5, -1.5, ... 7.5, 8.5 et $V^2/N = 0.5$. Un zoom de l'intersection proche de l'origine est inséré en bas à droite. Nous avons représentés les asymptotes verticales par des pointillés.

vaut :

$$E_*^{(4)}(V) = -V^2 \left(\frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{E_i} \right) + V^4 \left(\frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{E_i} \right) \left(\frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{E_i^2} \right). \tag{3.48}$$

A la limite thermodynamique, $N \to \infty$, et les sommes peuvent être remplacées par des intégrales. Nous voyons plusieurs problèmes apparaître. Le premier concerne déjà le terme en V^2. L'intégrale des $1/E$ n'est pas bien définie, ni en $E = 0$, i.e. l'énergie de l'impureté, ni en $E = \infty$ si les énergies dans l'anneau ne sont pas bornées. Le problème de basse énergie se règle en utilisant la partie principale, et le problème de haute énergie en mettant un cut-off (pas du réseau). Néanmoins, nous restons confrontés au fait que si $1/N \sum_i 1/E_i$ est finie, l'énergie ne sera pas d'ordre $1/N$, et la théorie des perturbations donne un résultat aberrant. Si on va à l'ordre suivant, c'est encore pire ! En effet le terme $1/N \sum_i 1/E_i^2$ souffre d'une divergence de basse énergie beaucoup plus sévère que le terme précédent, et qui ne peut même pas être régularisée par partie principale. Ainsi, la théorie des perturbations indépendante du temps donne des résultats de plus en plus mauvais. Ces difficultés sont vraiment liées à la théorie des perturbations, car on peut montrer que l'énergie des états de plus basse énergie positive est augmentée du demi écart entre les E_i, à la limite thermodynamique, pour tout V. Les divergences mentionnées ci-dessus sont donc liées à la théorie des perturbations pour ce système, et non au système en lui-même. Il est en effet impossible d'obtenir une quantité finie, un demi écart entre niveaux, lorsque $V \to 0$. Nous indiquons sur la figure 3.8 les écarts entre les énergies $E_i^{(V)}$ du système en "interaction" (calculées numériquement) et les énergies E_i, en fonction de ces dernières. Afin de simplifier les choses, nous avons supposé qu'il y a en tout $2N$ états $|i\rangle$ et que les énergies sont réparties symétriquement autour de 0 : $E_i = E_{\rm m}(-1 + \frac{2i}{2N-1})$ (donc $-E_{\rm m} \leqslant E_i \leqslant E_{\rm m}$). Ce choix est aussi tel qu'aucun E_i ne vaut 0. Sur la figure, $V/E_{\rm m} = 0.1$ et $N = 10^4$. L'énergie des niveaux

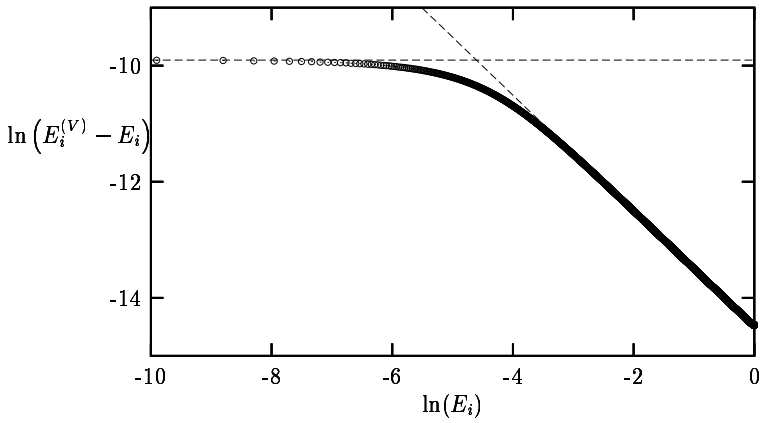


Fig. 3.8 – Différence entre les énergies en interaction et les énergies sans interaction en fonction des énergies sans interaction, en échelle ln-ln. Ici, $N = 10^4$, $E_{\rm m} = 1$ et $V = 0.1$. Les courbes en pointillés sont les asymptotes, correspondant pour l'asymptote horizontale, à la valeur d'un demi-écart entre niveau, i.e. $\ln(E_{\rm m}/(2N-1))$, et pour l'autre à ce que donne la théorie des perturbations, i.e. c'est la courbe d'équation $y = \ln[V^2/(2N)] - x$.

qui sont loin de $|*\rangle$ est bien approximée par la théorie des perturbations à l'ordre 2 : $E_i^{(V)} = E_i + V^2/(2NE_i)$, que l'on obtient sans difficulté à partir de (3.47). C'est l'asymptote que nous avons représenté sur la figure 3.8. Remarquons que la théorie des perturbations donne un bon résultat, car ici V est petit devant $E_{\rm m}$. Si ce n'était pas le cas, la théorie des perturbations ne s'appliquerait pas non plus aux états loin de $|*\rangle$. Il existe donc trois régimes distincts, en fonction de la valeur de V. Le premier est celui pour lequel V est infinitésimal, i.e. pour lequel le couplage $V/\sqrt{2N}$ est très petit devant l'écart entre les niveaux $E_{\rm m}/N$. Dans ce cas, mêmes les niveaux les plus proches de $|*\rangle$ ne sont presque pas affectés par V, et on peut appliquer la théorie des perturbations à tous les niveaux. Si V est grand devant l'écart entre les niveaux, mais petit devant la largeur totale $E_{\rm m}$, la théorie des perturbations ne s'applique plus que pour les niveaux lointains. Enfin, si V est grand devant $E_{\rm m}$, la théorie des perturbations ne s'applique plus du tout. Ces considérations nous montrent clairement que la limite thermodynamique $N \to \infty$ et la limite de couplage faible $V \to 0$ ne commutent pas. Plaçons nous par exemple dans le cas $V/E_{\rm m}$ petit. Si on prend la limite $V \to 0$ en premier, la théorie des perturbations s'applique à tous les niveaux. Ceci n'est pas vrai si la limite thermodynamique est prise d'abord.

Retenons donc la raison physique qui donne toutes ces difficultés. Les états les plus proches en énergie de 0, qui sont quasiment dégénérés avec $|*\rangle$, devraient normalement être décalés en énergie d'une quantité $V/\sqrt{2N}$ (qui est la levée de dégénérescence pour un système à 2 niveaux dégénérés), s'ils étaient seuls. Mais comme ils sont immergés dans un continuum, il faudrait décaler tout le monde de cette énergie, ce qui aurait un coût énorme en énergie, et ce n'est donc pas ce qui se passe. Leur énergie est en

réalité décalée d'un demi écart entre niveaux. C'est donc la frustration des états de plus basse énergie, presque dégénérés avec $|*\rangle$ et obligés par le continuum à rester proche de cet état, qui est responsable des problèmes rencontrés. Notons que la difficulté apparaît car nous prenons d'abord la limite thermodynamique, comme c'est toujours le cas dans le problème à N corps.

Enfin, mentionnons que l'on peut aussi se rendre compte des problèmes en regardant les états propres. Considérons encore le cas où les $2N$ énergies E_i sont réparties symétriquement autour de 0, et où aucune énergie E_i n'est nulle. Les problèmes mentionnés précédemment à propos de la théorie des perturbations semblent disparaître, puisque $\sum_i 1/E_i = 0$. L'état $|*\rangle$ devient quand on branche V : $|*\rangle_V$. Il est clair que cet état est état propre pour une énergie qui est nulle, à cause des symétries supposées du système. Il est alors facile de montrer que l'équation de Schrödinger donne :

$$|*\rangle_V = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{N}}\frac{E_\mathrm{m}}{V}|*\rangle - \frac{1}{\pi N}\sum_{i=0}^{2N-1}\frac{E_\mathrm{m}}{E_i}|i\rangle. \tag{3.49}$$

Cet état a une norme 1, à des termes en $1/N$ près. Il est clair qu'à la limite thermodynamique, cet état a une composante nulle sur $|*\rangle$. Par contre, celle sur l'état dont l'énergie est la plus proche de 0, et positive, à savoir $|N\rangle$ d'énergie $E_N = E_\mathrm{m}/(2N-1)$, est finie et vaut $-2/\pi$. Nous avons représenté ces résultats sur la figure 3.9. Un tel état

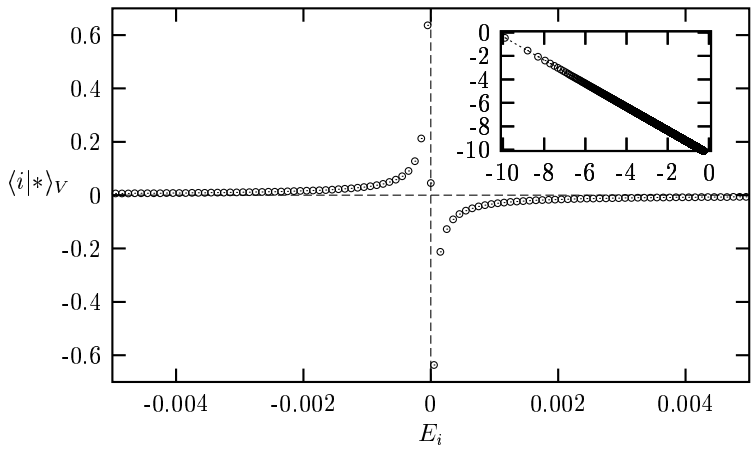


Fig. 3.9 – Composantes de l'état $|*\rangle_V$ sur les états d'énergie E_i les plus proches de 0. Ici, $N = 10^4$, $E_\mathrm{m} = 1$ et $V = 0.1$. La figure insérée est la même courbe, pour toutes les énergies strictement positives, en échelle ln-ln (on prend le logarithme de la valeur absolue des composantes sur $|i\rangle$). La droite en pointillés est celle d'équation $y = -\ln(\pi N) - x$.

ne peut clairement pas être décrit par une théorie des perturbations. Nous avons ici un exemple de catastrophe d'orthogonalité [And67].

Cet exemple nous montre bien que lorsqu'on étudie un niveau couplé à un continuum, ce qui est exactement notre cas pour la surface de Fermi, il faut être très pru-

dent quant à l'utilisation de la théorie des perturbations indépendante du temps. Nous voyons aussi sur cet exemple que la théorie des perturbations est de plus en plus mauvaise si on va à des ordres de plus en plus grands, ce qui est l'équivalent des insertions répétées de self-énergie. Enfin, si nous revenons à la surface de Fermi, nous avons dit que l'utilisation sans contre-terme de la self-énergie, en utilisant un état excité, donnait les mêmes résultats que la théorie des perturbations indépendante du temps. Puisque ces derniers posent problème, c'est une confirmation qu'il faut utiliser la méthode des contre-termes.

3.4 Le Groupe de Renormalisation de théorie des champs et ses limitations.

Nous avons à présent à notre disposition presque tous les éléments pour implémenter le RG pour ce système simple de deux chaînes de fermions sans spin. Dans les deux sections précédentes, les constantes de couplages notées $A, \ldots F$, étaient en fait des couplages nus, et auraient dus être notés A_{B}, etc. comme nous l'avions indiqué au tout début de la section 3.2. Dorénavant A désignera le couplage à l'énergie ν.

Nous allons, une fois n'est pas coutume, commencer par étudier les flots des couplages. Nous serons confrontés à deux difficultés majeures, qu'il nous faudra résoudre. Celles-ci sont toutes deux liées à des divergences dans les flots de renormalisation, mais d'origines différentes. Les premières divergences ont lieu à la traversée d'échelles d'énergies liées à la courbure de la surface de Fermi. La solution à ce problème nous sera nécessaire pour l'étude du propagateur, c'est pourquoi nous ne traitons pas celui-ci en premier. Les deuxièmes divergences sont liées aux instabilités du système par rapport à la formation d'états liés (transition de phase). Nous avons déjà vu ce deuxième type de divergences (cf figure 2.12), mais nous avions pu résoudre les flots analytiquement. Lorsque le recours aux méthodes numériques devient nécessaire, il faut réussir à traiter convenablement ces divergences.

Nous verrons de plus que le RG dans sa version de théorie des champs ne nous permettra pas d'améliorer les résultats concernant les déformations de la surface de Fermi. Il devra être secondé du RG dans la version dite de "cut-off scaling" que nous présenterons et que nous appliquerons.

3.4.1 Les couplages à une boucle

Regardons la renormalisation des couplages $A, \ldots, F$, à une boucle. Pour chaque couplage, il y a des contributions dans le canal pp et dans le canal pt. Selon le couplage considéré, les 2 couplages intervenant dans la bulle sont différents, ainsi que les couleurs (impulsions transverses) des fermions R et L de la bulle. Nous avons résumé tous les cas possibles dans le tableau 3.1.

Renormalisation du couplage	Couplages de la bulle	Canal	Couleurs R, L
A	$A-A$	pp	0, 0
		pt	0, 0
	$F-F$	pp	π, π
	$D-D$	pt	π, π
B	$B-B$	pp	π, π
		pt	π, π
	$F-F$	pp	0, 0
	$D-D$	pt	0, 0
C	$C-C$	pp	0, π
			π, 0
		pt	0, π
			π, 0
	$D-D$	pp	0, π
			π, 0
	$F-F$	pt	0, π
			π, 0
D	$A-D$	pt	0, 0
	$B-D$	pt	π, π
	$C-D$	pp	0, π
			π, 0
F	$A-F$	pp	0, 0
	$B-F$	pp	π, π
	$C-F$	pt	0, π
			π, 0

Tab. 3.1 – Les couplages et les différentes bulles intervenant dans leur renormalisation.

Les énergies des pattes externes sont choisies comme dans le cas 1D, cf équation (2.25) de la section 2.1.2. En ce qui concerne les couplages A, B, C et F, nous choisissons les impulsions des pattes externes à la surface de Fermi. Ce choix est bien compatible avec la conservation de l'impulsion. De plus, ce choix n'introduit aucune échelle d'énergie spurieuse. Par contre pour le couplage D, un tel choix violerait la conservation de l'impulsion, sauf dans le cas d'une surface de Fermi plate. Il faut donc trouver un autre jeu d'impulsion, et pour cela, nous commençons par nous laisser guider par des considérations de symétrie. Il serait ainsi souhaitable que notre choix d'impulsions respecte la symétrie R-L du système. Nous ferons le choix suivant : $k_1 = k_{\mathrm{F},0} - \Delta k_{\mathrm{F}}/2 = \overline{k_{\mathrm{F}}}$, $k_2 = -k_{\mathrm{F},\pi} - \Delta k_{\mathrm{F}}/2 = -\overline{k_{\mathrm{F}}}$, $k_3 = -k_{\mathrm{F},0} + \Delta k_{\mathrm{F}}/2 = -\overline{k_{\mathrm{F}}}$ et $k_4 = k_{\mathrm{F},\pi} - \Delta k_{\mathrm{F}}/2 = \overline{k_{\mathrm{F}}}$. Ainsi, les 4 impulsions externes sont au vecteur de Fermi moyen $\overline{k_{\mathrm{F}}}$ ou son opposé, et la conservation de l'impulsion est vérifiée. Il est aussi clair que si la surface de Fermi est plate, toutes les impulsions externes seront à la surface de Fermi, ce qui est nécessaire si on ne veut pas introduire inutilement une échelle d'énergie supplémentaire.

On peut maintenant calculer les contributions de chacune des bulles. La différence entre les impulsions de Fermi des 2 branches se fait ressentir dans certaines expressions. Considérons par exemple la bulle $D-D$ contribuant à la renormalisation de A. Son expression est :

$$-D^2\int\frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\omega_q}{2\mathrm{i}\pi}\frac{1}{\frac{\nu}{2}+\omega_q-v_\mathrm{F}(q+\Delta k_\mathrm{F})+\mathrm{i}\eta\,\mathrm{sgn}(q+\Delta k_\mathrm{F})}\times\frac{1}{\frac{3\nu}{2}+\omega_q+v_\mathrm{F}(q-\Delta k_\mathrm{F})-\mathrm{i}\eta\,\mathrm{sgn}(q-\Delta k_\mathrm{F})}. \tag{3.50}$$

On effectue l'intégrale sur ω_q, puis celle sur q en prenant en compte les restrictions dues au cut-off (qui sont $-\Lambda+\Delta k_\mathrm{F}\leqslant q\leqslant\Lambda-\Delta k_\mathrm{F}$ si $\Delta k_\mathrm{F}\geqslant 0$). Quand le cut-off est grand, et si nous gardons les $\mathrm{i}\eta$ (pour une raison qui deviendra claire plus tard), nous obtenons :

$$-\frac{1}{2}\frac{D^2}{2\pi v_\mathrm{F}}\ln\left(\frac{(\nu-2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F}+\mathrm{i}\eta)(\nu+2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F}-\mathrm{i}\eta)}{(\nu-2v_\mathrm{F}(\Lambda-\Delta k_\mathrm{F})+\mathrm{i}\eta)(\nu+2v_\mathrm{F}(\Lambda-\Delta k_\mathrm{F})-\mathrm{i}\eta)}\right) \tag{3.51}$$

$$=\quad -\frac{1}{2}\frac{D^2}{2\pi v_\mathrm{F}}\ln\left(\frac{|\nu^2-(2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F})^2|}{(2v_\mathrm{F}\Lambda)^2}\right)+\mathrm{i}\times[0(1)]. \tag{3.52}$$

Nous voyons donc clairement l'influence de Δk_F dans cette expression. Si la surface de Fermi était plate, on retrouverait l'expression habituelle en $\ln(\nu/(2v_\mathrm{F}\Lambda))$. Nous laissons le lecteur se convaincre que seules les bulles faisant intervenir D seront modifiées par rapport au cas de la surface de Fermi plate. De plus, avec notre choix d'impulsions externes, si D apparaît deux fois comme c'est le cas dans l'exemple choisi ci-dessus, c'est $2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F}$ qui intervient, et s'il n'apparaît qu'une seule fois (par exemple la bulle $A-D$ de la renormalisation de D), c'est $v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F}$.

Une fois toutes les bulles calculées, il ne reste plus qu'à dériver les équations de flot du RG à 1 boucle. Le calcul donne :

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t\widetilde{A}=\partial_t\widetilde{B}=-\partial_t\widetilde{C}=\widetilde{D}^2\widetilde{f}(t,2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F})-\widetilde{F}^2\\ \partial_t\widetilde{D}=\widetilde{D}(\widetilde{A}+\widetilde{B}-2\widetilde{C})\widetilde{f}(t,v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F})\\ \partial_t\widetilde{F}=-\widetilde{F}(\widetilde{A}+\widetilde{B}-2\widetilde{C})\end{array}\right. . \tag{3.53}$$

Rappelons que $t=\ln(2v_\mathrm{F}\Lambda/\nu)$, $\partial_t=\nu\partial_\nu$ et $\widetilde{G}=G/(2\pi v_\mathrm{F})$. Nous avons allégé les notations par rapport au chapitre 2, en ne notant plus les barres au-dessus des couplages, en écrivant t au lieu de t', et en ne notant aucune dépendance des couplages. La condition initiale est celle de haute énergie, quand $t=0$, où nous supposerons que les couplages sont les couplages nus : $\widetilde{G}(t=0)=\widetilde{G}_\mathrm{B}$. L'apparition de la fonction notée $\widetilde{f}$ est due à la différence des vecteurs de Fermi, et n'est rien d'autre que :

$$\widetilde{f}_\eta\left(t=\ln\left(\frac{\Lambda}{\nu}\right),\delta\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\nu-\delta+\mathrm{i}\eta}+\frac{\nu}{\nu+\delta-\mathrm{i}\eta}\right). \tag{3.54}$$

Nous avons noté la dépendance en η, ce que nous n'avions pas fait dans (3.53). Si nous avions utilisé (3.52) et non (3.51) pour établir les équations de flot (3.53), η ne serait

pas apparu, et on aurait simplement à utiliser f_0. A priori, on a envie de dire qu'il faut faire $\eta = 0$, pour ne pas prendre en compte les termes finis dans (3.51).

Mais ceci pose des problèmes de divergences quand ν devient égal à δ. Ces divergences ont une réalité physique, et signalent la traversée d'échelles d'énergie caractéristiques du système. Toutefois, de telles singularités ne sont pas le signe d'une transition de phase, et nous allons voir qu'il est possible de les traverser. De plus, ces divergences sont gênantes d'un point de vue numérique (difficulté de travailler avec des grands nombres) et pratique (comment être sûr que telle divergence provient d'une transition de phase ou non ?).

Ceci est la première des difficultés dont nous avons parlé dans l'introduction à cette section. Il nous faut donc trouver un moyen de traverser les singularités aux échelles caractéristiques de la surface de Fermi. Remarquons enfin que si le système n'était pas à température strictement nulle, les divergences n'auraient pas lieu, car les dénominateurs ne seraient jamais nuls, mais au pire égaux à la température si celle-ci est l'échelle d'énergie minimale. Nous allons toutefois voir qu'il est possible de traverser la singularité sans utiliser un formalisme à température finie, en utilisant une approximation dite approximation logarithmique. Bien que cette approximation soit connue, je vais décrire très simplement en quoi elle consiste.

Pour mieux comprendre ce qui se passe, regardons un cas très simple pour lequel on sait intégrer exactement le flot. Prenons donc un seul couplage, avec un flot RPA, que nous écrivons en fonction de ν :

$$\partial_\nu g(\nu) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu - \delta + \mathrm{i}\eta} + \frac{1}{\nu + \delta - \mathrm{i}\eta}\right) g^2(\nu), \tag{3.55}$$

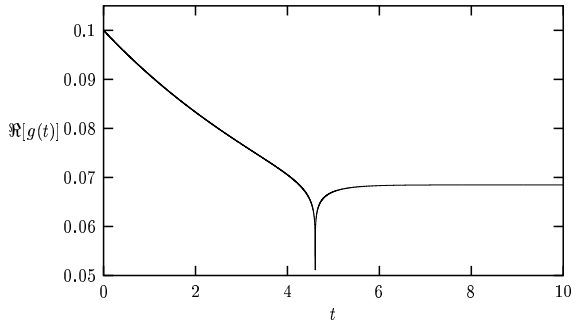
et dont la solution ayant pour condition initiale $g(\Lambda) = g_0$ est :

$$g(\nu) = \frac{g_0}{1 + g_0 \times \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(\Lambda-\delta+\mathrm{i}\eta)(\Lambda+\delta-\mathrm{i}\eta)}{(\nu-\delta+\mathrm{i}\eta)(\nu+\delta-\mathrm{i}\eta)}\right)}. \tag{3.56}$$

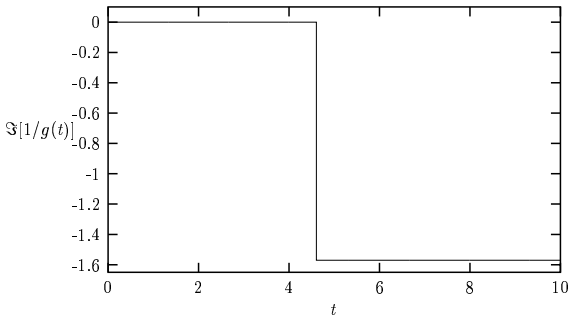
Ceci peut se réécrire en fonction de t, et en faisant apparaître la solution que l'on obtiendrait si δ était nul :

$$g(t) = \frac{g_0}{1 + g_0\left[t - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(1-\Delta(t)+\mathrm{i}\eta)(1+\Delta(t)-\mathrm{i}\eta)}{(1-\Delta_0+\mathrm{i}\eta)(1+\Delta_0-\mathrm{i}\eta)}\right)\right]}, \tag{3.57}$$

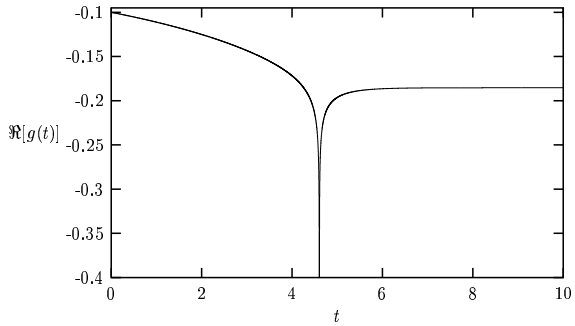
où $\Delta_0 = \delta/\Lambda$ et $\Delta(t) = \delta/\nu = \Delta_0 \exp(t)$. Nous avons tracé la partie réelle de cette solution, ainsi que l'inverse de la partie imaginaire, pour des couplages initiaux positifs et négatifs (de valeur absolue 0.1), et pour des valeurs de δ différentes, sur la figure 3.10. Si δ était nul, le couplage tendrait vers 0 s'il était initialement positif, et il deviendrait infini pour $t = -1/g_0$ (=10 ici) s'il était initialement négatif. Nous voyons sur les figures 3.10(a) et 3.10(c) que si $\delta \neq 0$, le couplage tend vers une valeur finie et non nulle quand $t \to \infty$, dans les deux cas. Si le couplage est initialement positif, il devient nul pour $t = \ln(\delta/\Lambda)$ ($\simeq 4.61$ si $\delta/\Lambda = 10^{-2}$ et $\simeq 9.21$ si $\delta/\Lambda = 10^{-4}$), et s'il est initialement



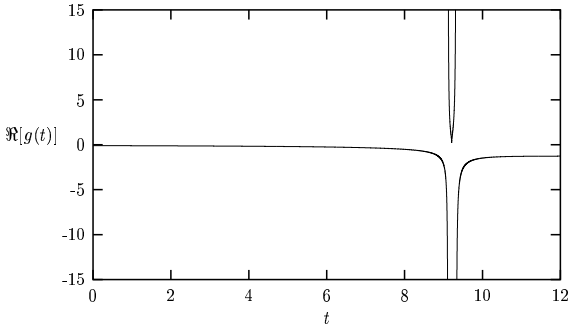
(a) Partie réelle du couplage pour une condition initiale $g_0 = 0.1 > 0$, et pour $\delta/\Lambda = 10^{-2}$.



(b) Partie imaginaire de l'inverse couplage pour une condition initiale $g_0 = 0.1 > 0$, et pour $\delta/\Lambda = 10^{-2}$.



(c) Partie réelle du couplage pour une condition initiale $g_0 = -0.1 < 0$, et pour $\delta/\Lambda = 10^{-2}$. La partie imaginaire de l'inverse couplage est la même qu'au (b).



(d) Partie réelle du couplage pour une condition initiale $g_0 = -0.1 < 0$, et pour $\delta/\Lambda = 10^{-4}$.

Fig. 3.10 – Représentation des flots pour l'équation RPA avec un seul couplage et l'énergie caractéristique δ.

négatif, il tend vers $-\infty$ pour cette valeur de t. Nous voyons donc que η permet de prolonger le flot après la singularité, avec un prix à payer : le couplage acquiert une partie imaginaire (cf figure 3.10(b)). Nous avons aussi représenté (figure 3.10(d)) ce qui se passe si $\ln(\delta/\Lambda) \simeq -1/g_0$. Le flot a alors une allure compliquée, et le couplage devient même infiniment grand (et positif!).

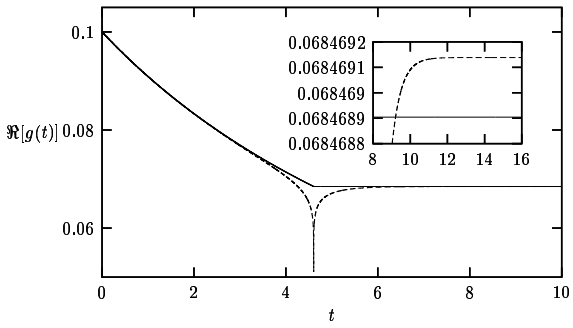
Dans notre approche de RG, nous souhaiterions en fait deux choses :
- avoir des couplages qui restent réels, puisque la partie imaginaire provenait de termes finis, et que nous ne gardons normalement que les termes infinis.
- pouvoir traverser la singularité, qui comme nous l'avons vu en laissant un η, paraît tout à fait artificielle.

La façon la plus simple d'arriver à ce but est de remplacer la fonction $\widetilde{f}$ par une fonction réelle f, ayant les mêmes comportements asymptotiques, mais n'ayant pas de singularité

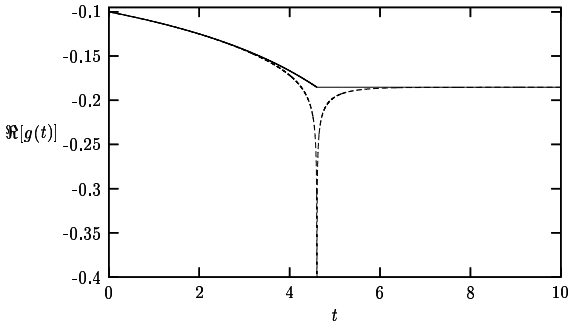
à l'échelle δ. La fonction f vérifiant ces propriétés et qui vient immédiatement à l'esprit est :

$$f(\nu,\delta) = \frac{1}{\nu} \text{ si } |\nu| \geqslant |\delta|, = 0 \text{ si } |\nu| \leqslant |\delta|. \tag{3.58}$$

Autrement dit, le début du flot est identique au flot quand $\delta = 0$, et ensuite le couplage reste constant. Nous avons représenté sur la figure 3.11 les flots ainsi obtenus, superposés aux flots précédents (figures 3.10(a) et 3.10(c)). Sur la figure 3.11(a) nous avons in-



(a) Partie réelle du couplage pour une condition initiale $g_0 = 0.1 > 0$, et pour $\delta/\Lambda = 10^{-2}$. Nous avons inséré un zoom sur ce qui se passe aux temps grands.



(b) Partie réelle du couplage pour une condition initiale $g_0 = -0.1 < 0$, et pour $\delta/\Lambda = 10^{-2}$.

Fig. 3.11 – Comparaison des flots pour la régularisation avec η (en pointillés), et le flot "par morceaux" (en trait plein).

séré un zoom pour montrer que les deux méthodes ne donnent pas exactement la même valeur limite. Avec la méthode du flot "par morceaux", la valeur limite est celle atteinte lorsque $\nu = \delta$, et vaut : $g_{\text{lim}} = g_0/[1+g_0 \ln(\Lambda/\delta)]$. Pour la méthode avec η, il faut prendre $\nu = 0$ dans la formule (3.56), et on trouve $g_{\text{lim}} = g_0/[1 + g_0 \ln(\Lambda\sqrt{1-(\delta/\Lambda)^2}/\delta)]$. Ces deux valeurs ne sont donc pas identiques, mais la différence est dans notre cas très faible, puisque δ/Λ est petit (un calcul simple montre que la différence est environ égale à $(g_{\text{lim}}\delta/\Lambda)^2/2$). La méthode du flot par morceaux semble donc tout à fait raisonnable. Tout ce que nous avons raconté ne prétend pas être une démonstration de la validité de la méthode dans toutes les situations. Néanmoins nous pensons que les résultats seront qualitativement corrects. Remarquons finalement que si nous avions pris les conditions initiales de la figure 3.10(d), notre méthode aurait donné une valeur limite égale à $g_{\text{lim}} = g_0/[1 + g_0 \ln(\Lambda/\delta)] \simeq -1.27$, tout comme la méthode utilisant η (toujours à très peu de choses près). Mais nous voyons que le couplage a dépassé l'unité, et la méthode perturbative n'a plus de justification. Il ne faut donc faire confiance à aucune des deux méthodes dans un tel cas, ce qui paraissait d'ailleurs plus évident sur la figure 3.10(d).

Il ne nous reste plus qu'à dire pourquoi cette approximation porte le nom d'approximation logarithmique. Les fonctions f apparaissent lorsque nous écrivons les

équations de RG, et une des étapes pour les obtenir contient une dérivation (par rapport à ν) de logarithmes du type $\ln[(\nu-\delta+\mathrm{i}\eta)(\nu+\delta-\mathrm{i}\eta)] = \ln(|\nu^2-\delta^2|)$ si nous oublions les η. Si nous remplaçons ce dernier logarithme par l'approximation $\ln(|\nu^2-\delta^2|) \simeq \ln[\mathrm{Max}(\nu^2,\delta^2)]$, et que nous le dérivons par rapport à ν, nous obtenons (à un facteur 2 près) la fonction f de l'équation (3.58).

Nous sommes maintenant presque en mesure de nous occuper du système (3.53), dans lequel la fonction $\widetilde{f}$ est remplacée par f (3.58). Nous allons nous concentrer sur des conditions initiales de type Hubbard, i.e. tous les couplages sont supposés égaux, ce qui correspond à une interaction locale dans la direction transverse. Ceci est physiquement raisonnable si l'écrantage est supposé se faire suffisamment rapidement, et sur des distances faibles. De toute façon, il est hors de question d'explorer toutes les conditions initiales possibles : quand nous aurons N chaînes, le nombre de couplages sera en effet de l'ordre de N^3 ! Bien que les couplages de haute énergie soient locaux, ils ne le resteront pas le long du flot de RG, comme nous allons le voir.

Le second problème dont nous avions parlé au tout début de la section et auquel nous sommes confrontés est le suivant. Supposons tous les couplages initiaux positifs pour fixer les idées. Tant que l'échelle d'énergie $2v_{\mathrm{F}}\Delta_{\mathrm{F}}$ n'est pas franchie, les couplages restent constants, puisqu'ils sont tous égaux, et que dans ce cas les membres de droite de (3.53) sont nuls. Une fois cette énergie passée, il est facile de voir que la quantité $A+B-2C$ va devenir négative, puisque sa dérivée l'est. F va alors croître, et les équations étant couplées, les couplages vont diverger. Ceci aura lieu à un "temps" t_{c}. Cette divergence est le signe physique d'une instabilité et de la formation d'états liés. Du point de vue numérique, elle est toutefois assez gênante, car il est peu pratique de travailler avec des quantités divergentes, surtout quand celles-ci sont nombreuses (ce qui n'est pas encore le cas ici). De plus, étant donné que la divergence à lieu à un temps fini, il faudrait utiliser un algorithme à pas de temps adaptatif, qui permettrait de continuer à travailler avec une précision donnée tout le long du flot. Une autre façon de faire, que nous utiliserons tout au long de la thèse, et que nous avons expliquée dans l'article [DVD02], est de travailler avec des couplages normalisés, et de ne garder qu'une seule divergence, celle de la norme du vecteur des couplages. De plus, il est utile de changer de temps de RG. Expliquons ceci en détail.

Considérons le système d'équations différentielles $\partial_t g_i = A_{ijk} g_j g_k$. Les g_i sont les couplages, A à F par exemple si nous prenons le problème à 2 chaînes sans spin. Nous utilisons une notation très générale car nous aurons besoin de tout cela dans d'autres contextes que le problème à 2 chaînes. Si les A_{ijk} sont indépendants du temps, ces équations sont homogènes et quadratiques, et nous avons la propriété simple que si $g_i(t)$ est solution, alors $g_i^{(\lambda)}(t) \equiv \lambda g_i(\lambda t)$ l'est aussi, et ce pour tout λ. Ceci implique que $g_i^{(\lambda)}(t)/g_j^{(\lambda)}(t) = g_i(\lambda t)/g_j(\lambda t)$, i.e. que la direction du vecteur des couplages suit une trajectoire indépendante de la norme de ce vecteur[10]. Il est donc naturel, dans ce

[10]Le vecteur des couplages est définis par ses composantes qui sont les couplages, rangés dans un certain ordre.

cas, d'introduire les couplages normalisés $h_i(t)$ définis par :

$$h_i(t) = \frac{g_i(t)}{\mathcal{N}(t)}, \text{ avec } \mathcal{N}(t) = \left(\sum_i g_i(t)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.59}$$

Nous avons alors pour tout λ positif, et avec des notations parlant d'elles mêmes : $\mathcal{N}^{(\lambda)}(t) = \lambda \mathcal{N}(\lambda t)$ and $h_i^{(\lambda)}(t) = h_i(\lambda t)$. Il est ensuite souhaitable d'écrire les équations différentielles satisfaites par $\mathcal{N}(t)$ et $h_i(t)$, au lieu de celles des $g_i(t)$. On montre très facilement que celles-ci sont :

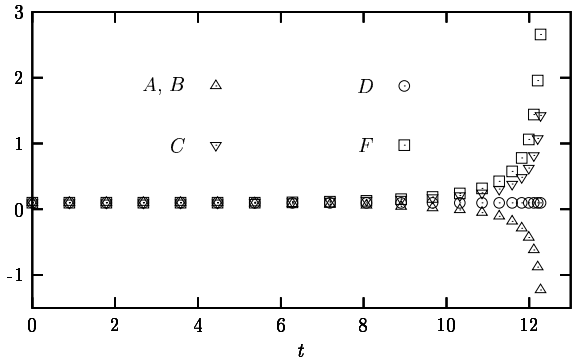
$$\begin{cases} \partial_s h_i = A_{ijk} h_j h_k - (A_{jkl} h_j h_k h_l) h_i \\ \partial_s \mathcal{N} = (A_{jkl} h_j h_k h_l) \mathcal{N} \Leftrightarrow \partial_s \ln(\mathcal{N}) = A_{jkl} h_j h_k h_l \end{cases}, \tag{3.60}$$

où s est le "temps" adapté au flot des h_i, défini par $\mathrm{d}s = \mathcal{N}(t)\mathrm{d}t$ et $s(t=0) = 0$. Le changement de t à s revient à faire un zoom sur la singularité, si il y en a une. La singularité n'a réellement lieu qu'à $s = \infty$, et on peut donc aller à des s aussi grands que l'on veut, sans que la singularité de $\mathcal{N}$ soit atteinte. Pour un pas de temps s toujours le même, il est clair que le pas de temps en t devient de plus en plus faible, et on a donc bien obtenu, de façon simple, un pas de temps adaptatif. Notons que la validité de l'approche perturbative est mise en question à l'approche d'une singularité puisque les couplages sont grands.

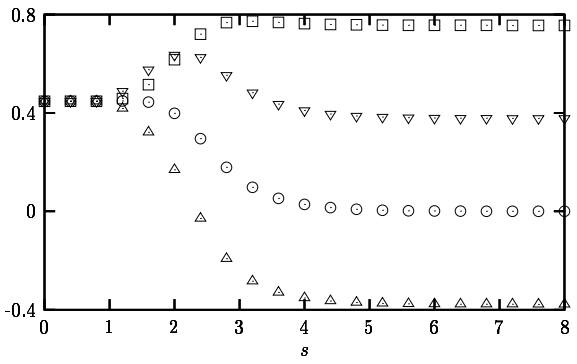
Si les A_{ijk} dépendent du temps, comme c'est le cas pour notre problème des 2 chaînes, les équations différentielles perdent la propriété que $g_i^{(\lambda)}(t)$ soit aussi solution. Néanmoins, bien que l'une des motivations qui nous pousse à étudier les flots des couplages normalisés disparaisse, ce n'est pas le cas de toutes. En particulier, cette méthode permet de régler les deux problèmes qui nous préoccupaient, à savoir le grand nombre de divergences, et le temps fini auquel celles-ci ont lieu.

Nous ne rentrerons pas dans les détails de la résolution numérique des équations différentielles. Disons seulement que nous avons utilisé un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2, dans lequel nous projetons le vecteur des couplages sur la sphère unité, après chaque pas d'intégration.

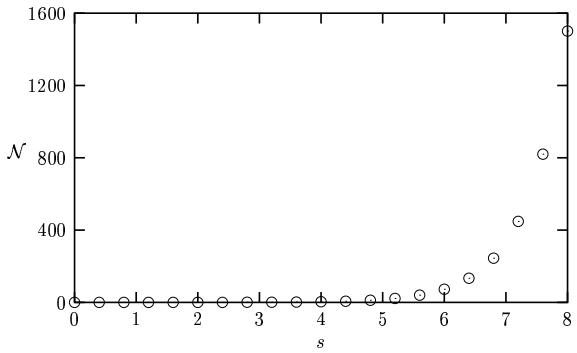
A titre d'illustration, nous montrons ce que cela donne si tous les couplages valent initialement 0.1, et si $\Delta k_{\mathrm{F}}/\Lambda = 0.01$, sur la figure 3.12. Il est clair sur la figure 3.12(b) que l'on s'approche d'une direction fixe, puisque les couplages normalisés ne varient plus, et que seule la norme continue à augmenter. Cette notion de direction fixe est importante, car dans les situations où le système part à couplage fort, elle remplace celle de point fixe. De plus, pour un système où les A_{ijk} sont indépendants de t, il est possible de rendre la norme aussi petite que l'on veut, à n'importe quel temps, en prenant des couplages initiaux suffisamment petits. Ainsi, la direction fixe pourra être atteinte dans un régime où l'approche perturbative est valable, et l'on pourra alors penser que le système ira en réalité vers un point fixe de couplage fort situé à proximité de cette direction fixe. Bien sûr, cela suppose que les couplages initiaux soient très petits, et donc cela limite notre analyse au régime de couplage faible. Si



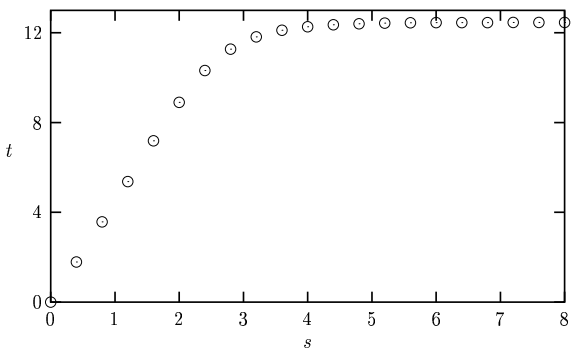
(a) Flot des "vrais" couplages en fonction du "vrai" temps t. Cette figure est obtenue en utilisant les résultats indiqués dans les trois autres figures.



(b) Flot des couplages normalisés en fonction du temps s. Les conventions sont les mêmes que sur la figure (a). Les couplages se différencient à partir de $s \simeq 1$, i.e. $t \simeq 4.6$, ce qui correspond à l'échelle $t = \ln(\Delta k_{\mathrm{F}}/\Lambda)$.



(c) Évolution de la norme en fonction de s.



(d) Lien entre t et s.

Fig. 3.12 – Flot des couplages pour une condition initiale de type Hubbard (avec tous les couplages égaux à 0.1), et pour $\Delta k_{\mathrm{F}}/\Lambda = 0.01$ (cette échelle est donc atteinte pour $t = \ln(100) \simeq 4.6$, et d'après la figure (d), pour $s \simeq 1$). Pour toutes ces figures, nous n'avons pas représenté trop de points, afin qu'elles restent lisibles. Mais bien sûr, le pas d'intégration est beaucoup plus petit que l'écart entre deux points.

les A_{ijk} dépendent du temps, la situation est plus compliquée, car la trajectoire des couplages normalisés n'est plus la même quelle que soit la norme initiale. Mais pour notre exemple on peut se convaincre que l'argument reste valable, car les couplages restent constants au début du flot, tant que l'énergie $2v_{\mathrm{F}}\Delta k_{\mathrm{F}}$ n'est pas atteinte, et qu'une fois celle-ci dépassée, les flots pour les couplages A, B, C et F deviennent indépendants du temps. Seul le couplage D sera légèrement modifié. Mais étant donné que le couplage D normalisé vaut 0 sur la direction fixe, cela ne change rien.

Profitons de l'étude de cet exemple simple pour vérifier que la direction fixe atteinte peut être trouvée analytiquement. Nous donnons la méthode dans le cas général, avec les A_{ijk} indépendants du temps. C'est cette méthode que nous avons utilisée dans l'article [DVD02] (ainsi que dans [DD02]), pour étudier des flots beaucoup plus complexe. Les équations étant quadratiques, il est évident qu'une direction fixe est telle que :

$$g_i(t) = \frac{u_i}{t_\mathrm{c} - t}, \text{ avec } u_i = A_{ijk} u_j u_k. \tag{3.61}$$

On a alors aussi :

$$\mathcal{N}(t) = \frac{c}{t_\mathrm{c} - t} \Leftrightarrow \mathcal{N}(s) = \mathcal{N}(0) \exp(s/c), \tag{3.62}$$

$$s(t) = c \ln \left[\frac{t_\mathrm{c}}{t_\mathrm{c} - t} \right] \Leftrightarrow t(s) = t_\mathrm{c}[1 - \exp(-s/c)], \tag{3.63}$$

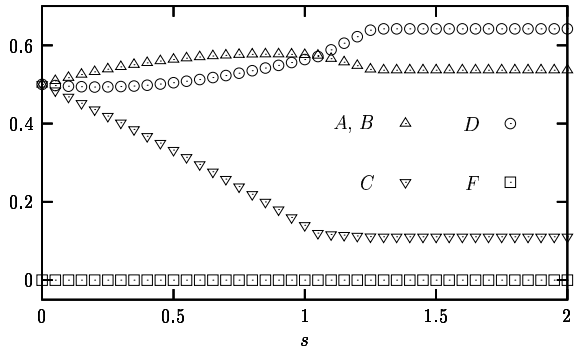
$$\text{avec : } c = (\sum_i u_i^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.64}$$

L'échelle d'énergie critique t_c est quant à elle donnée par : $t_\mathrm{c} = c/\mathcal{N}(0)$. Pour notre système de deux chaînes, il faut se placer à des échelles d'énergie petites, par conséquent la direction fixe se trouve en résolvant :

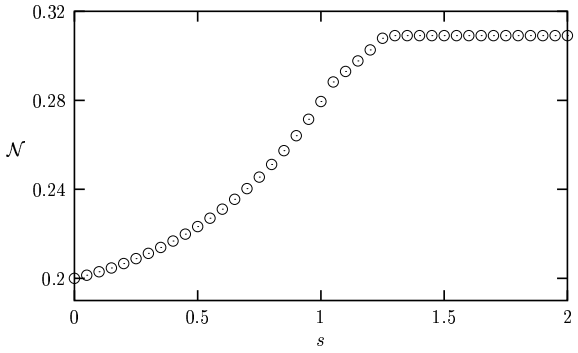
$$u_A = -u_F^2 = u_B = -u_C, \quad u_D = 0, \text{ et } u_F = -u_F(u_A + u_B - 2u_C). \tag{3.65}$$

Ainsi, $u_F = 4u_F^3$. Donc soit tout le monde est nul, ce qui ne nous intéresse pas, soit $u_A = u_B = -u_C = -1/4$, $u_D = 0$ et $u_F = 1/2$. Dans ce cas $c = \sqrt{7}/4$, et les couplages normalisés sur la direction fixe valent donc $u_A = u_B = -u_C = -1/\sqrt{7} \simeq 0.38$, $u_D = 0$ et $u_F = 2/\sqrt{7} \simeq 0.76$. Ceci correspond bien aux valeurs observées sur la figure 3.12(b).

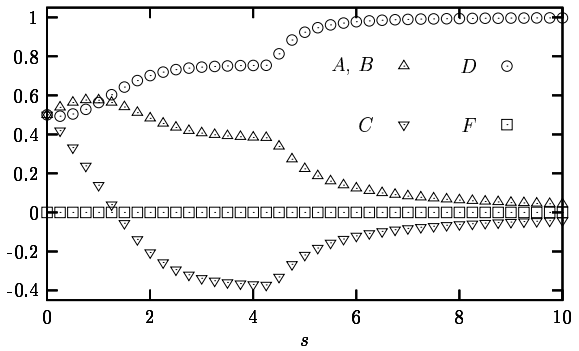
Profitons d'avoir des équations de RG simples pour regarder ce qui se passe pour un autre type de condition initiale. Les flots sont très différents si initialement le couplage F est nul (en gardant les autres couplages égaux et non nuls), situation qui est équivalente, comme nous l'avons déjà remarqué, à celle d'une chaîne de fermions de spin 1/2, sous champ magnétique, avec une interaction invariante par rotation. F restera nul, et le système pourra rester à couplage faible, ou partir à couplage fort, selon la valeur de $\Delta k_\mathrm{F}/\Lambda$. Il est en effet clair que si $\Delta k_\mathrm{F} = 0$ (système purement 1D), les couplages deviennent infinis, car le système d'équations différentielles obtenues est formellement le même que précédemment, à condition d'écrire les équations sur les opposés des couplages et non les couplages eux-mêmes. Le rôle de F sera ainsi joué par $-D$. Pour une valeur initiale des couplages de 0.1, on observe numériquement que la singularité a lieu à $t_\mathrm{c} \simeq 7.8$, i.e. $\nu_\mathrm{c}/\Lambda \simeq 4 \cdot 10^{-4}$. Si $\Delta k_\mathrm{F}/\Lambda$ est plus grand que cette valeur, la divergence n'aura pas lieu. En fait, les choses sont un peu plus compliquées, car il y a deux échelles d'énergie dans le flot : $2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F}$ et $v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F}$. Ainsi, entre la situation où la direction fixe est atteinte (Δk_F petit), avec une norme qui diverge de façon exponentielle en s, et celle où l'on reste à un point fixe (Δk_F grand), avec une norme qui reste donc constante, il existe un régime intermédiaire ($\Delta k_\mathrm{F}/\Lambda$ environ égal à $\exp(-t_\mathrm{c})$) où la norme diverge linéairement en s. Nous avons représenté ces deux derniers cas ($\Delta k_\mathrm{F}/\Lambda = 0.01$ et $\Delta k_\mathrm{F}/\Lambda = 4 \cdot 10^{-4}$) sur la figure 3.13.



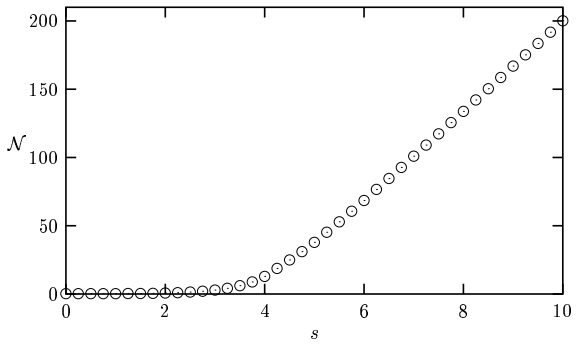
(a) Flot des couplages normalisés en fonction de s, pour $\Delta k_{\mathrm{F}}/\Lambda = 0.01$.



(b) Variation de la norme en fonction de s, correspondant à la figure (a). Elle est constante à la fin du flot.



(c) Flot des couplages normalisés en fonction de s, pour $\Delta k_{\mathrm{F}}/\Lambda = 4 \cdot 10^{-4}$.



(d) Variation de la norme en fonction de s, correspondant à la figure (c). Elle augmente linéairement à la fin du flot.

Fig. 3.13 – Flot des couplages normalisés et de la norme pour une condition initiale où tous les couplages valent 0.1, sauf F qui est nul et le reste le long du flot. Les flots sont donnés pour deux valeurs de $\Delta k_{\mathrm{F}}/\Lambda$.

3.4.2 Le propagateur

Intéressons nous maintenant à l'effet de la self-énergie sur le propagateur. Les diverses contributions à la self-énergie Σ sont celles des équations (3.41) à (3.45). Nous avons de plus les contributions des contre-termes Σ^{ct}. Les propagateurs habillés sont toujours tels que $G^{-1} = {G_*^{(0)}}^{-1} - \Sigma - \Sigma^{\mathrm{ct}}$, et les conditions fixant le potentiel chimique

et la position de la surface de Fermi habillée sont :

$$G^{-1}_{\mathrm{R},0}(k = k_{\mathrm{F},0}, \omega = \mu) = 0, \tag{3.66}$$
$$G^{-1}_{\mathrm{R},\pi}(k = k_{\mathrm{F},\pi}, \omega = \mu) = 0, \tag{3.67}$$
$$k_{\mathrm{F},0} + k_{\mathrm{F},\pi} = k^{(0)}_{\mathrm{F},0} + k^{(0)}_{\mathrm{F},\pi} \Leftrightarrow \sum_I \delta k_I^{(j)} = 0. \tag{3.68}$$

Étant donné que nous avons trois équations pour trois inconnues, le problème est bien posé. A une boucle, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} -(A+C)\frac{\Lambda}{2\pi} - \delta\mu^{(1)} + v_{\mathrm{F}}\delta k_0^{(1)} = 0 \\ -(B+C)\frac{\Lambda}{2\pi} - \delta\mu^{(1)} + v_{\mathrm{F}}\delta k_\pi^{(1)} = 0 \\ \delta k_0^{(1)} + \delta k_\pi^{(1)} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta\mu^{(1)} = -(A+B+2C)\frac{\Lambda}{4\pi} \\ \delta k_0^{(1)} = (A-B)\frac{\Lambda}{4\pi v_{\mathrm{F}}} \end{array} \right. . \tag{3.69}$$

Tout ceci est bien compatible avec ce que nous avions obtenu précédemment (cf. équations (3.10) et (3.14)). Remarquons de plus que la dernière équation peut aussi s'écrire : $\Delta k^{(0)}_{\mathrm{F}} - \Delta k_{\mathrm{F}} = (A-B)\Lambda/(2\pi v_{\mathrm{F}}) + O(G^2)$. En fait, il faut quand même faire attention au fait qu'ici les couplages sont les couplages de basse énergie, et non les couplages nus, comme dans les deux sections précédentes. Mais les équations de flot des couplages (3.53) nous montrent que $A-B$ et $A+B+2C$ sont des constantes (v_{F} aussi), et donc, par exemple, $(A-B)/(2\pi v_{\mathrm{F}}) = (A_{\mathrm{B}} - B_{\mathrm{B}})/(2\pi v^{(0)}_{\mathrm{F}})$. Les résultats sont donc exactement les mêmes. Remarquons de plus que puisque $\Delta k^{(0)}_{\mathrm{F}}$ et Δk_{F} sont constants, il fallait aussi que leur différence le soit (et de même pour le potentiel chimique).

A 2 boucles le système à résoudre est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2}\left(\frac{D}{2\pi v_{\mathrm{F}}}\right)^2 (-2v_{\mathrm{F}}\Delta k_{\mathrm{F}}) \ln\left(\frac{|\Delta k_{\mathrm{F}}|}{\Lambda}\right) - \delta\mu^{(2)} + v_{\mathrm{F}}\delta k_0^{(2)} = 0 \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{D}{2\pi v_{\mathrm{F}}}\right)^2 (2v_{\mathrm{F}}\Delta k_{\mathrm{F}}) \ln\left(\frac{|\Delta k_{\mathrm{F}}|}{\Lambda}\right) - \delta\mu^{(2)} + v_{\mathrm{F}}\delta k_\pi^{(2)} = 0 \\ \delta k_0^{(2)} + \delta k_\pi^{(2)} = 0 \end{array} \right. . \tag{3.70}$$

On obtient alors facilement que $\delta\mu^{(2)} = 0$ et $\delta k_0^{(2)} = -\left(\frac{D}{2\pi v_{\mathrm{F}}}\right)^2 \Delta k_{\mathrm{F}} \ln\left(\frac{\Delta k_{\mathrm{F}}}{\Lambda}\right)$. Le propagateur inverse (R,0) habillé à 2 boucles s'écrit au final :

$$\begin{aligned} {G^{(2)}_{\mathrm{R},0}}^{-1}(k = k_{\mathrm{F},0} + \kappa, \omega = \mu + \nu) &= \nu - v_{\mathrm{F}}\kappa \\ &-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{A}{2\pi v_{\mathrm{F}}}\right)^2 + \left(\frac{C}{2\pi v_{\mathrm{F}}}\right)^2 + \left(\frac{F}{2\pi v_{\mathrm{F}}}\right)^2\right](\nu - v_{\mathrm{F}}\kappa)\ln\left(\frac{|\nu^2 - (v_{\mathrm{F}}\kappa)^2|}{(2v_{\mathrm{F}}\Lambda)^2}\right) \\ &-\frac{1}{4}\left(\frac{D}{2\pi v_{\mathrm{F}}}\right)^2 (\nu - v_{\mathrm{F}}\kappa)\ln\left(\frac{|\nu^2 - [v_{\mathrm{F}}(\kappa + 2\Delta k_{\mathrm{F}})]^2|}{(2v_{\mathrm{F}}\Lambda)^2}\right) \\ &+\frac{1}{4}\left(\frac{D}{2\pi v_{\mathrm{F}}}\right)^2 (2v_{\mathrm{F}}\Delta k_{\mathrm{F}})\ln\left(\frac{|\nu^2 - [v_{\mathrm{F}}(\kappa + 2\Delta k_{\mathrm{F}})]^2|}{(2v_{\mathrm{F}}\Delta k_{\mathrm{F}})^2}\right). \end{aligned} \tag{3.71}$$

Remarquons tout de suite à propos de la renormalisation de la vitesse de Fermi, que si nous nous donnons un κ petit, et que nous cherchons la valeur de ν qui annule

$G^{(2)\,-1}_{\mathrm{R},0}$, sous la forme $\nu = (v_\mathrm{F} + \delta v)\kappa$, avec δv d'ordre 2 en les couplages, nous obtenons $\delta v = -[D/(2\pi v_\mathrm{F})]^2 v_\mathrm{F}/2$. Cette expression ne contient aucune divergence en Λ. Ceci justifie que nous n'ayons pas mis de renormalisation de la vitesse, et que nous ayons considéré que les vitesses de Fermi sont identiques sur les 2 chaînes.

Le facteur $Z_{\mathrm{R},0}(\widetilde{G};\nu,\Lambda)$ $(= Z_{\mathrm{L},0}(\widetilde{G};\nu,\Lambda) = Z_0)$ de renormalisation du champ se déduit de la prescription de renormalisation habituelle $G^{(\mathcal{R})\,-1}_{\mathrm{R},0}(k = k_{\mathrm{F},0}, \omega = \mu+\nu) = \nu$. Nous trouvons ici (en utilisant les couplages adimensionnés) :

$$Z_0^{-1} = 1 - \frac{1}{2}\left(\widetilde{A}^2 + \widetilde{C}^2 + \widetilde{F}^2\right)\ln\left(\frac{\nu}{2v_\mathrm{F}\Lambda}\right) - \frac{1}{4}\widetilde{D}^2\ln\left(\frac{|\nu^2 - (2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F})^2|}{(2v_\mathrm{F}\Lambda)^2}\right) + \frac{1}{4}\widetilde{D}^2\frac{2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F}}{\nu}\ln\left(\frac{|\nu^2 - (2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F})^2|}{(2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F})^2}\right). \tag{3.72}$$

On montre de même que pour la branche π :

$$Z_\pi^{-1} = 1 - \frac{1}{2}\left(\widetilde{B}^2 + \widetilde{C}^2 + \widetilde{F}^2\right)\ln\left(\frac{\nu}{2v_\mathrm{F}\Lambda}\right) - \frac{1}{4}\widetilde{D}^2\ln\left(\frac{|\nu^2 - (2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F})^2|}{(2v_\mathrm{F}\Lambda)^2}\right) - \frac{1}{4}\widetilde{D}^2\frac{2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F}}{\nu}\ln\left(\frac{|\nu^2 - (2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F})^2|}{(2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F})^2}\right). \tag{3.73}$$

Nous voyons donc que Z_π est divergent en $\nu = 2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F}$, et que Z_0, qui ne diverge pas à cette énergie, a toutefois une dérivée divergente en ce point. Ces divergences sont du même type que celles observées pour les couplages. Comme pour les couplages, il est naturel d'utiliser l'approximation logarithmique suivante :

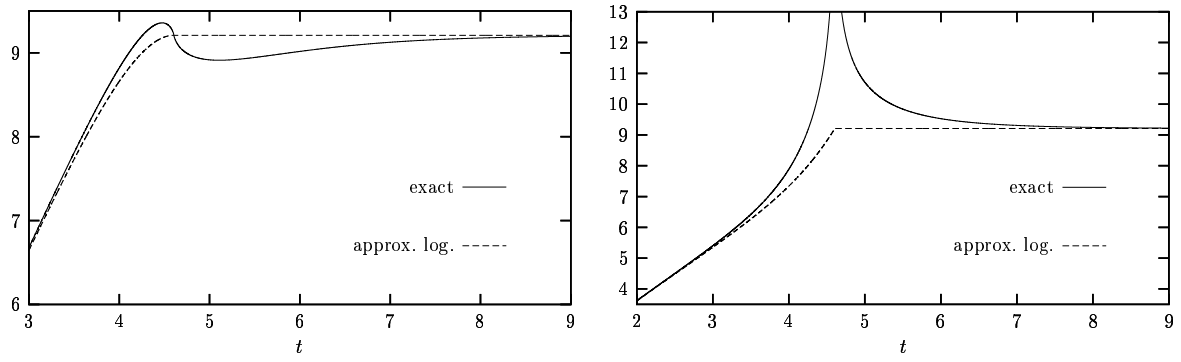
$$\ln\left(\frac{|\nu^2 - (2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F})^2|}{(2v_\mathrm{F}K)^2}\right) = \ln\left(\frac{\max(\nu^2, (2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F})^2}{(2v_\mathrm{F}K)^2}\right) \tag{3.74}$$

$$= 2\ln\left(\frac{\nu}{2v_\mathrm{F}K}\right) \text{ si } \nu \geqslant 2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F} \tag{3.75}$$

$$= 2\ln\left(\frac{\Delta k_\mathrm{F}}{K}\right) \text{ si } \nu \leqslant 2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F}, \tag{3.76}$$

où K symbolise soit Λ soit Δk_F. Nous traçons les termes en $\widetilde{D}^2$ de Z_0 et Z_π, ainsi que leur approximation logarithmique, sur la figure 3.14, afin de visualiser l'effet de cette approximation.

Tout comme nous l'avions fait dans le cas purement 1D, nous pouvons calculer les fonctions φ_0 et φ_π, définies comme rapport de deux Z, à des échelles différentes (cf. fin de la section 2.3.1), puis les équations différentielles qu'elles vérifient. On trouve



(a) Branche 0.

(b) Branche π.

FIG. 3.14 – Tracé des fonctions $-\ln\left(\frac{|\nu^2-(2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F})^2|}{(2v_\mathrm{F}\Lambda)^2}\right) \pm \frac{2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F}}{\nu}\ln\left(\frac{|\nu^2-(2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F})^2|}{(2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F})^2}\right)$ et leur approximation logarithmique, en fonction de $t = \ln(2v_\mathrm{F}\Lambda/\nu)$. Le signe + (resp. -) correspond à la branche 0 (resp. π), et à la figure (a) (resp. (b)). Nous avons choisi $\Delta k_\mathrm{F}/\Lambda = 0.01$, i.e. $\ln(\Lambda/\Delta k_\mathrm{F}) \simeq 4.6$.

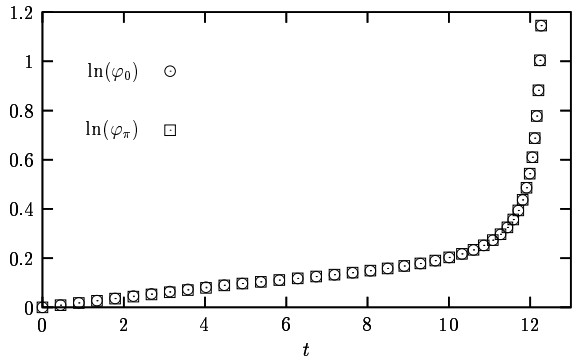
sans grand problème que :

$$\partial_t \ln(\varphi_0) = \frac{1}{2}\left\{\widetilde{A}^2 + \widetilde{C}^2 + \widetilde{F}^2 + \widetilde{D}^2\left[\left(1 - \frac{2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F}}{\nu}\right) f(\nu, 2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F}) + \frac{2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F}}{\nu} l(\nu, 2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F})\right]\right\}, \quad (3.77)$$

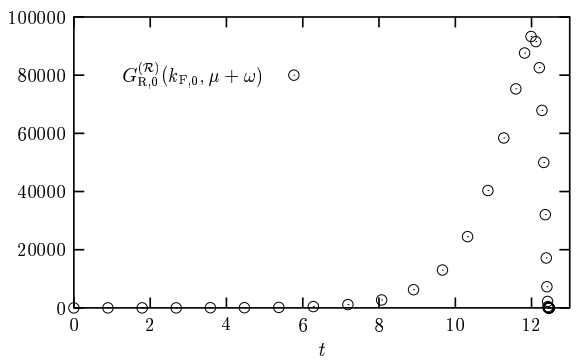
$$\partial_t \ln(\varphi_\pi) = \frac{1}{2}\left\{\widetilde{B}^2 + \widetilde{C}^2 + \widetilde{F}^2 + \widetilde{D}^2\left[\left(1 + \frac{2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F}}{\nu}\right) f(\nu, 2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F}) - \frac{2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F}}{\nu} l(\nu, 2v_\mathrm{F}\Delta k_\mathrm{F})\right]\right\}, \quad (3.78)$$

où nous avons posé $l(\nu, \delta) = \ln(|\nu/\delta|)$ si $|\nu| \geqslant |\delta|$ et $=0$ sinon. f est définie exactement comme précédemment, quand nous avons regardé les flots des couplages. Nous avons de plus simplifié les notations par rapport à la section 2.3.1, comme nous l'avions fait pour les couplages. Les conditions initiales seront que les fonctions φ valent 1 pour $t = 0$. Autrement dit, les fonctions φ sont celles définis avec une condition initiale à l'échelle de haute énergie $2v_\mathrm{F}\Lambda$ (dans le langage de la section 2.3.1, $\nu = 2v_\mathrm{F}\Lambda$).

Les fonctions φ sont calculées numériquement, en même temps que les couplages, et toujours par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2. Si nous prenons les conditions utilisées pour obtenir la figure 3.12 page 117, nous obtenons les résultats indiqués sur la figure 3.15. Les fonctions $\ln(\varphi_0)$ et $\ln(\varphi_\pi)$ sont très peu différentes, ce qui se comprend bien, car les couplages A et B sont égaux, et que le couplage D, qui est donc la seule source de différence dans les équations (3.77) et (3.78), est petit (cf. figure 3.12(a) page 117). Autrement dit, étant donné que le système est presque 1D, les



(a) Flot des logarithmes des φ, en fonction du temps de RG t.

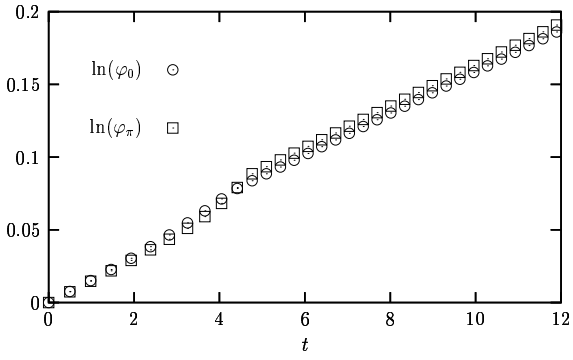


(b) Allure du propagateur renormalisé, sur la branche 0, à la surface de Fermi, et en fonction de l'énergie $t = \ln(\Lambda/\omega)$.

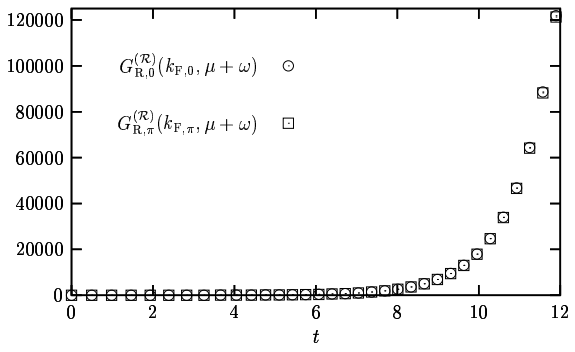
Fig. 3.15 – Résultats pour le propagateur, pour une condition initiale de type Hubbard.

effets de la petite "courbure" (ici petite différence de vecteurs de Fermi) de la surface de Fermi sont petits. On distingue clairement trois régimes dans le flot des φ. Le premier est celui de la physique du liquide de Luttinger. Les logarithmes des φ augmentent linéairement. Il y a ensuite une diminution de la pente, qui indique la présence d'un régime de type liquide de Fermi. En toute rigueur, on s'attend à une pente nulle pour un liquide de Fermi. La non nullité de la dérivée est ici dû au nombre fini de chaînes. Pour plus de détails, et une étude dans la limite d'un grand nombre de chaînes, nous renvoyons le lecteur à notre deuxième article [DD02], section IV.A. Finalement ces fonctions divergent à l'échelle d'énergie correspondant à la singularité. Le propagateur renormalisé tend alors vers 0 à cette échelle d'énergie, comme indiqué sur la figure 3.15(b), où nous avons représenté uniquement le propagateur de la branche 0, car les résultats pour la branche π sont peu différents. Même si ce n'est pas visible à cause de l'échelle, il faut voir que le propagateur vaut 1 (i.e. $2v_{\mathrm{F}}\Lambda$, mais qui est mis à 1 dans les simulations) à $t = 0$. Cette annulation du propagateur est elle aussi le signe que les fermions ne sont pas les excitations de basse énergie. On peut la voir comme un signal perturbatif de l'apparition d'un gap fermionique, avec une physique de type Gross-Neveu (cf par exemple [Wit78]).

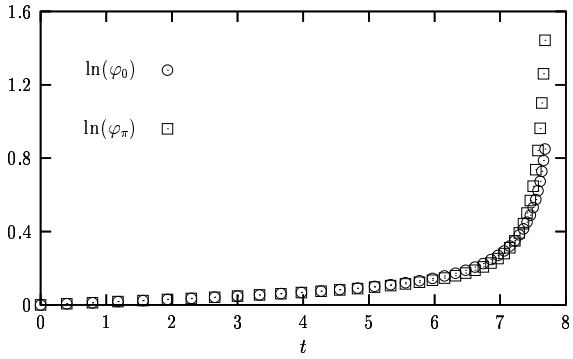
Nous montrons aussi sur la figure 3.16 ce que l'on obtient si le couplage F est choisi nul, pour les deux situations de la figure 3.13 page 119. Lorsque l'écart entre les vecteurs de Fermi est grand, nous avons vu que le système reste à couplage faible. On s'attend donc à une physique de type Luttinger. Les φ augmentent linéairement avec t (figure 3.16(a), avec une pente plus petite que 1, et par conséquent, le propagateur tend vers l'infini quand l'échelle d'énergie tend vers 0. Le propagateur a donc bien un pôle à la surface de Fermi, mais comme dans le cas purement 1D, le résidu tend vers 0, ce qui nous indique que les fermions ne sont pas, ici non plus, les excitations de basse énergie.



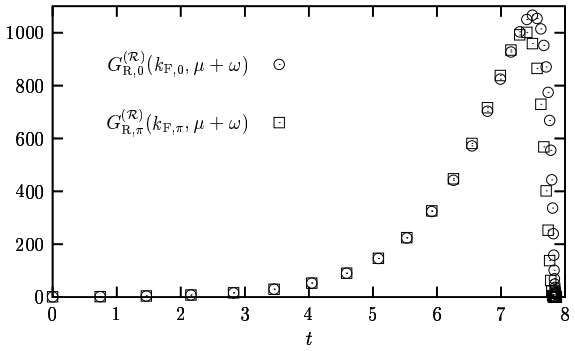
(a) Flot des logarithmes des φ, en fonction du temps t de RG, pour $\Delta k_{\mathrm{F}}/\Lambda = 0.01$.



(b) Allure des propagateurs renormalisés, à la surface de Fermi, et en fonction de l'énergie $t = \ln(\Lambda/\omega)$, correspondant à la figure (a).



(c) Flot des logarithmes des φ, en fonction du temps de RG t, pour $\Delta k_{\mathrm{F}}/\Lambda = 4 \cdot 10^{-4}$.



(d) Allure des propagateurs renormalisés, à la surface de Fermi, et en fonction de l'énergie $t = \ln(\Lambda/\omega)$, correspondant à la figure (c).

Fig. 3.16 – Résultats pour le propagateur, pour une condition initiale où le couplage F est nul et les autres valent 0.1.

Comme on s'y attendait, la physique est bien celle du liquide Luttinger. Remarquons que la différence entre les deux branches est plus sensible que dans l'exemple précédent. Lorsque la différence des vecteurs de Fermi est de l'ordre de l'énergie à laquelle se situerait la singularité si cette différence était nulle, nous obtenons les résultats des figures 3.16(c) et 3.16(d). Dans ce cas, nous voyons une différence plus marquée entre les deux branches que dans les autres situations. C'est normal, puisque comme nous l'avons vu, le système part à couplage fort, avec uniquement le terme D qui survit, et c'est celui-là même qui peut distinguer les deux branches. Puisque le système part à couplage fort, nous voyons le propagateur tendre vers 0 à une échelle d'énergie finie, comme dans le cas où F était non nul.

Une des conclusions que l'on peut tirer de la comparaison de toutes ces courbes,

est que la différence entre les propagateurs renormalisés des branches 0 et π est d'autant plus importante que le couplage D est prédominant. Or nous savons aussi que la déformation de la surface de Fermi, trouvée avec les contre-termes, est plus grande quand le couplage D augmente. Une question naturelle que nous pouvons nous poser est la suivante : y a-t-il un lien entre les déformations de la surface de Fermi et les facteurs Z, autrement dit, peut-on trouver des informations sur la déformation de la surface de Fermi à partir du propagateur renormalisé ? La réponse est à la fois oui et non ! Reprenons le lien entre le propagateur renormalisé et le propagateur habillé non renormalisé (2.129). Le propagateur habillé non renormalisé peut s'écrire :

$$G^{-1}_{\mathrm{R},0(\pi)}(k,\omega) = \omega - \varepsilon^{(0)}_{0(\pi)}(k) - \Sigma_{\mathrm{R},0(\pi)}(k,\omega). \tag{3.79}$$

Nous ne considérerons pour l'argument qui suit que la self-énergie provenant des termes D. Sur les formules (3.45) et (3.45), on peut constater que $\Sigma_{\mathrm{R},0(\pi),D}(k,\omega=\mu+2v_{\mathrm{F}}\Lambda) = 0(1/(2v_{\mathrm{F}}\Lambda))$. Si nous prenons la relation (2.129) donnant le lien entre les propagateurs renormalisé et non renormalisé, pour $\nu = 2v_{\mathrm{F}}\Lambda$ et $\omega = \mu+2v_{\mathrm{F}}\Lambda$, puis que nous utilisons la prescription de renormalisation (2.127) qui donne ici ${G^{(\mathcal{R})}_{\mathrm{R},0(\pi)}}^{-1}(k_{\mathrm{F},0(\pi)},\mu+2v_{\mathrm{F}}\Lambda) = 2v_{\mathrm{F}}\Lambda$, nous obtenons :

$$2v_{\mathrm{F}}\Lambda\, Z^{-1}_{0(\pi)}(G_{\mathrm{B}};2v_{\mathrm{F}}\Lambda,\Lambda) \simeq 2v_{\mathrm{F}}\Lambda - \varepsilon^{(0)}_{0(\pi)}(k_{\mathrm{F},0(\pi)}). \tag{3.80}$$

Nous voyons donc qu'il existe bien un lien entre les déformations de la surface de Fermi, et les facteurs Z, et en particulier que si les Z sont égaux, il n'y a pas de déformation de la surface de Fermi. On peut de plus vérifier que comme $Z^{-1}_{0(\pi)}(G_{\mathrm{B}};2v_{\mathrm{F}}\Lambda,\Lambda) = 1 \pm \widetilde{D}^2_B(2v_{\mathrm{F}}\Delta k_{\mathrm{F}})/(2\times 2v_{\mathrm{F}}\Lambda)\ln(\Delta k_{\mathrm{F}}/\Lambda)$, où le signe $+$ correspond à la branche 0, on retrouve bien la déformation de la surface de Fermi due aux termes D en faisant comme d'habitude la somme et la différence des deux équations obtenues. Nous avons ici montré le "côté oui" de la réponse à la question que nous nous posions. Voyons maintenant l'aspect qui pose problème. Nous aurions pu croire que l'application du RG nous aurait fourni des renseignements sur la déformation de la surface de Fermi, qui soient améliorés par rapport à la simple théorie des perturbations. Bien sûr, dans ce que nous venons de raconter, nous avons utilisé l'expression perturbative de Z, et il est donc normal de retrouver les résultats perturbatifs. Mais c'est exactement là qu'est le plus gros problème : *le RG ne peut pas nous donner d'informations sur Z*. La grandeur que le RG est capable d'améliorer par rapport à la théorie des perturbations est φ, qui est le rapport de deux Z, mais pas Z lui-même. Ce que cela signifie, c'est que le RG n'arrive pas à fournir d'information absolue sur Z, mais uniquement une information relative. C'est une des limitations de notre RG de théorie des champs, qui est aussi une réelle motivation pour étudier ces problèmes avec un RG à la Wilson. Faute de temps, nous n'avons pas eu la possibilité de mettre une telle approche en œuvre, mais c'est une voie que nous essaierons de suivre dans le futur.

Ne pouvant poursuivre cette route, nous avons cherché une autre façon d'effectuer le calcul de déformation de la surface de Fermi grâce à un groupe de renormalisation. Le point de départ est la relation perturbative donnant la déformation de la surface de Fermi due aux termes D : $\Delta k^{(0)}_{\mathrm{F}} = \Delta k_{\mathrm{F}}[1+2\widetilde{D}^2_{\mathrm{B}}\ln(\Lambda/\Delta k_{\mathrm{F}})]$ et le constat que cette

relation est indépendante de ν (ce qui est normale puisqu'elle a été obtenue en faisant $\nu = 0$!). Ceci achève de démontrer qu'il est inutile d'espérer quoi que ce soit du RG de théorie des champs en ce qui concerne la surface de Fermi.

Néanmoins, nous voyons que le cut-off Λ apparaît dans cette équation, et à défaut de pouvoir varier ν, on peut varier Λ, et utiliser un autre RG : la théorie dite du "cut-off scaling". Celle-ci a été élaborée par Sólyom [Sól79] et est à mi-chemin entre le RG dans sa version théorie des champs, et le RG dans sa version moderne. Il est très facile de la mettre en œuvre une fois que l'on a compris le RG de théorie des champs, et on peut en tirer des informations analogues à celles fournies par un RG à la Wilson tant que nous restons dans le cadre de théories renormalisables. C'est pourquoi nous avons regardé ce qu'elle donne, et nous allons en parler dans la section suivante.

3.5 Le Groupe de Renormalisation dans sa version "cut-off scaling"

3.5.1 Idée générale

Dans le RG de théorie des champs, la théorie de haute énergie est supposée fixée, et les flots de renormalisation relient des quantités de basse énergie, par exemple les couplages, à des énergies différentes. Ces flots nous donnent alors les vertexs, pour un jeu d'impulsions externes fixées, et des énergies externes de l'ordre de ν, en fonction de ν, pour une même théorie nue. Il en va de même pour le propagateur.

Dans l'approche Wilsonienne, on procède à une élimination successive des modes de haute énergie, par intégration de ceux-ci. On suit alors l'évolution de l'action effective, au fur et à mesure de cette élimination. Autrement dit, les flots des paramètres de l'action effective se font en fonction du cut-off qui diminue de plus en plus.

La méthode du "cut-off scaling" se situe entre ces deux points de vue. On fait varier le cut-off ultra-violet, en demandant que la théorie de basse énergie ne change pas. Il n'y a aucune intégration de modes de haute énergie. Les calculs sont les mêmes que dans l'approche de théorie des champs. Lorsqu'on change le cut-off, on ajuste les grandeurs nues pour que la théorie de basse énergie soit inchangée. C'est donc l'opposé de la théorie des champs, où c'est la théorie de haute énergie qui est fixée. Il faut voir ce "cut-off scaling" comme une manière de relier des Hamiltoniens effectifs dépendant du cut-off, donnant tous la même théorie infra-rouge. Nous avons résumé la situation sur la figure 3.17, où nous indiquons ce qui se passe uniquement pour les couplages. Illustrons le cut-off scaling sur un exemple très simple : l'approximation RPA dans le canal de Cooper, pour des fermions sans spin 1D, avec une interaction de type g_2[11]. Dans la version théorie des champs, l'équation de flot pour le couplage g serait :

[11]Nous considérons la RPA afin d'avoir un flot des couplages, car nous savons que les canaux pp et pt se compensent exactement dans ce cas.

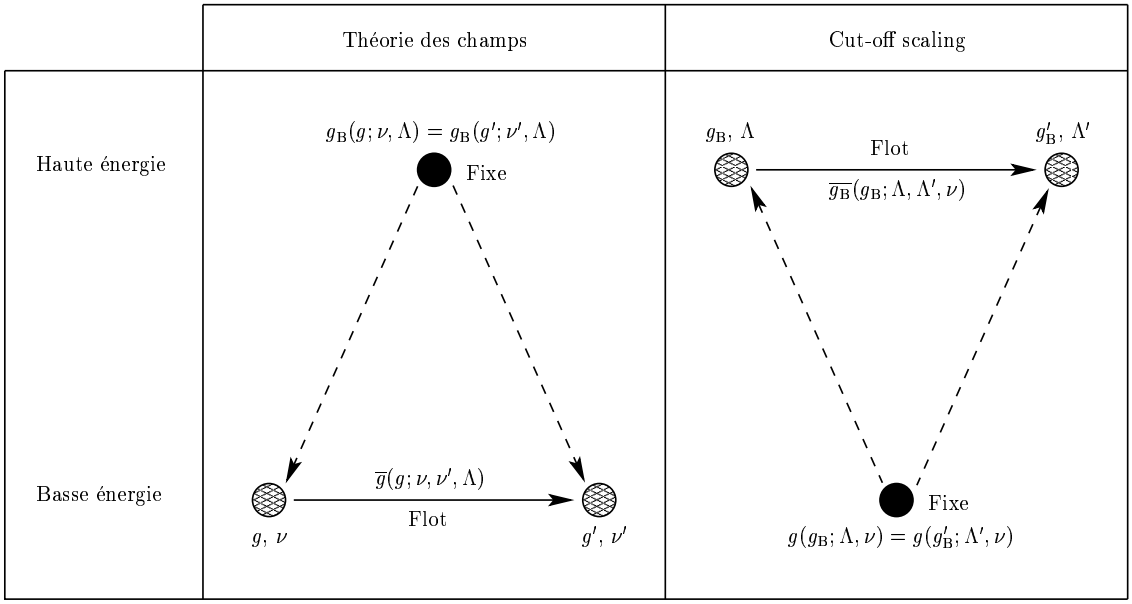


Fig. 3.17 – Résumé des différences entre la théorie des champs et le cut-off scaling.

$\partial_t g = -g^2$. Puisque c'est g_B qui aura un flot dans le cut-off scaling, nous effectuerons la théorie des perturbations avec g_B, et n'introduirons pas de contre-terme pour le couplage. La contribution au vertex de la bulle pp, pour les impulsions à la surface de Fermi, et pour les énergies (2.25) est exactement la même que dans l'équation (2.31). Nous supposerons que l'échelle d'énergie ν est petite devant le cut-off (le cut-off sera toujours supposé grand devant les autres échelles d'énergie). Le vertex à l'énergie ν à une boucle, que nous fixons à la valeur g, est donc dans l'approximation RPA (nous écrivons v_F et non $v_F^{(0)}$) :

$$g = g_B + \frac{{g_B}^2}{2\pi v_F} \ln(\frac{\nu}{2v_F\Lambda}). \tag{3.81}$$

Or, si le cut-off était Λ' et non Λ, il faudrait que le couplage nu soit g'_B, et non g_B, tel que :

$$g = g'_B + \frac{{g'_B}^2}{2\pi v_F} \ln(\frac{\nu}{2v_F\Lambda'}). \tag{3.82}$$

De ces deux équations, il est facile de tirer la relation perturbative entre g'_B et g_B :

$$g'_B = g_B + \frac{{g_B}^2}{2\pi v_F} \ln(\frac{\Lambda'}{\Lambda}). \tag{3.83}$$

Ainsi, toute référence à l'échelle d'énergie ν a disparu. C'est l'exact équivalent de la disparition du cut-off dans la théorie des champs. Si nous supposons que le cut-off initial (l'inverse du pas du réseau) est Λ_0, qui est une grandeur fixe, et que nous posons $t = \ln(\Lambda_0/\Lambda) \geqslant 0$, on montre sans problème que le couplage nu vérifie l'équation différentielle :

$$\partial_t \widetilde{g}_B = -\widetilde{g}_B^2, \text{ avec } \widetilde{g}_B = \frac{g_B}{2\pi v_F}. \tag{3.84}$$

Bien sûr, comme nous le faisions en théorie des champs, nous avons simplifié les notations[12]. Cette équation est complètement identique à celle de théorie des champs, à condition de faire les substitutions :

$$t = \ln\left(\frac{2v_{\rm F}\Lambda}{\nu}\right) \quad \Leftrightarrow \quad t = \ln\left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda}\right), \text{ et} \tag{3.85}$$

$$g \quad \Leftrightarrow \quad g_{\rm B}. \tag{3.86}$$

Il faut aussi bien voir que le cut-off Λ de la théorie des champs est devenu Λ_0.

3.5.2 Application à la déformation de la surface de Fermi.

Cette partie est traitée en grand détail dans le cas de N chaînes, dans notre article [DD02], sections III.C.1 et III.C.2. Je les inclus néanmoins dans ma thèse, dans le cas particulier plus simple considéré jusqu'ici du système à 2 chaînes, car c'est un des points les plus importants de mon travail. La présentation n'est toutefois pas la même que dans l'article. Elle sera moins rigoureuse, les justifications précises étant données dans l'article. Dans ce qui suit, je ne donnerai que les grandes lignes, afin de permettre au lecteur d'avoir une première approche grossière de notre méthode.

Comme nous l'avons déjà dit à la fin de la section 3.4.2, l'intérêt de cette méthode pour obtenir des résultats au-delà de la simple théorie des perturbations en ce qui concerne la surface de Fermi, se voit bien si nous considérons la relation perturbative (3.20) donnant la déformation de la surface de Fermi due aux couplages D : $\Delta k_{\rm F}^{(0)} = \Delta k_{\rm F}[1+2\widetilde{D}_{\rm B}^2 \ln(\Lambda/\Delta k_{\rm F})]$. En effet, cette relation ne fait pas intervenir l'échelle d'énergie ν et il est impossible d'écrire une équation de flot dans la version de théorie des champs. Par contre, le cut-off intervient, et une équation différentielle sur $t = \ln(\Lambda_0/\Lambda)$ va exister. Avec ce que nous avons déjà vu sur le RG, nous devinons que si le couplage $D_{\rm B}$ n'avait pas de flot, la relation perturbative deviendrait une loi de puissance une fois l'équation différentielle intégrée :

$$\Delta k_{\rm F}^{(0)} = \Delta k_{\rm F}\left(\frac{\Lambda}{\Delta k_{\rm F}}\right)^{2\tilde{D}_{\rm B}^2} \Leftrightarrow \frac{\Delta k_{\rm F}^{(0)}}{\Lambda} = \left(\frac{\Delta k_{\rm F}}{\Lambda}\right)^{1-2\tilde{D}_{\rm B}^2}. \tag{3.87}$$

Voyons si nous arrivons à trouver ce résultat, en supposant $D_{\rm B}$ constant. L'équation (3.20) écrite aux échelles Λ et Λ' donne :

$$\Delta k_{\rm F}^{(0)}(\Lambda) \;=\; \Delta k_{\rm F}\left[1 + 2\widetilde{D}_{\rm B}^2 \ln\left(\frac{\Lambda}{\Delta k_{\rm F}}\right)\right], \tag{3.88}$$

$$\Delta k_{\rm F}^{(0)}(\Lambda') \;=\; \Delta k_{\rm F}\left[1 + 2\widetilde{D}_{\rm B}^2 \ln\left(\frac{\Lambda'}{\Delta k_{\rm F}}\right)\right]. \tag{3.89}$$

Il faut bien voir que la quantité de basse énergie $\Delta k_{\rm F}$ est fixée, afin d'avoir une théorie des perturbations sans problème IR. Par contre, celle de haute énergie, $\Delta k_{\rm F}^{(0)}$, dépend

[12] L'équation s'écrit en toute rigueur : $\partial_{t'}\overline{\widetilde{g}_{\rm B}}(\widetilde{g}_{\rm B};t,t') = -\overline{\widetilde{g}_{\rm B}}^2(\widetilde{g}_{\rm B};t,t')$

du cut-off. Le lien entre les $\Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}$ pour les cut-off Λ et Λ' se trouve en utilisant les deux relations ci-dessus, et est (en perturbation) :

$$\Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}(\Lambda') = \Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}(\Lambda) \left[1 + 2\widetilde{D}_{\mathrm{B}}^2 \ln\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)\right]. \tag{3.90}$$

L'équation différentielle qui découle[13] d'une telle relation perturbative est alors :

$$\partial_t \Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)} = -2\widetilde{D}_{\mathrm{B}}^2 \Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}. \tag{3.91}$$

Ceci s'intègre aisément dans le cas où le couplage $\widetilde{D}_{\mathrm{B}}$ reste constant, en :

$$\Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}(\Lambda) = \Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}(\Lambda_0) \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0}\right)^{2\widetilde{D}_{\mathrm{B}}^2} \Leftrightarrow \Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}(\Lambda_0) = \Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}(\Lambda) \left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda}\right)^{2\widetilde{D}_{\mathrm{B}}^2}. \tag{3.92}$$

Bien que nous aurions pu être tentés de prolonger le flot jusqu'à $\Lambda = 0$, nous voyons sur l'expression de gauche de l'équation ci-dessus, que cela conduirait à une valeur nulle de $\Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}(0)$. De toute façon, dans le cas général où les couplages ont un flot, les équations de flot de ceux-ci sont déduites du calcul des bulles, dans l'approximation où le cut-off Λ est grand devant toutes les autres échelles d'énergie. Sachant que la plus grande des échelles d'énergie (hormis le cut-off), pour le système qui nous concerne, est la quantité habillée Δk_{F}, nous ne pouvons de toute façon pas, dans cette approximation de cut-off grand, prolonger le flot de la surface de Fermi pour un cut-off inférieur à l'échelle Δk_{F}. On pourrait chercher à raffiner les calculs et ne pas suppose que Λ est grand. Nous n'avons pas exploré cette voie, mais nous avons cherché à exploiter nos calculs simples jusqu'au bout, en rajoutant des ingrédients physiques, et quitte à utiliser des approximations.

Nous savons que le couplage D qui est responsable des déformations de la surface de Fermi, n'existe pas à énergie strictement nulle, si la surface de Fermi n'est pas strictement plate. Lorsque le cut-off est grand devant Δk_{F}, la courbure de la surface de Fermi n'est presque pas sentie, et tout se passe comme si la surface de Fermi était plate. Le couplage $D_{\mathrm{B}}(\Lambda)$ est donc une quantité pertinente à haute énergie. Mais si le cut-off devient plus petit que Δk_{F}, $D_{\mathrm{B}}(\Lambda)$ devient non pertinent, car il n'existe qu'à des énergies grandes par rapport au cut-off. Ainsi, on peut s'attendre à ce que le couplage D ne participe à la déformation de la surface de Fermi que dans le domaine d'énergie où il est pertinent, i.e. pour $\Lambda \gtrsim \Delta k_{\mathrm{F}}$. La contribution à la déformation de la surface de Fermi pour $\Lambda \leq \Delta k_{\mathrm{F}}$ n'a aucune raison d'être nulle, mais est probablement faible. Dans le formalisme que nous utilisons, nous ne pouvons pas justifier ce point, mais seulement invoquer notre intuition physique. Comme expliqué dans la section III.C.3.

[13] Nous ne prétendons à aucune rigueur mathématique. Nous n'avons pas cherché à démontrer un théorème de renormalisabilité à tous les ordres, qui justifierait l'écriture de l'équation différentielle (3.91). Ainsi, rien ne montre que le logarithme dominant d'ordre 3 a le bon coefficient, i.e. que notre équation différentielle a resommé les logarithmes dominants à tous les ordres. Il serait intéressant de démontrer un tel théorème. Nous garderons ce problème pour un travail futur, et nous nous contenterons ici d'étudier les résultats que donnent une telle équation différentielle.

de [DD02], tout ceci semble compatible avec les résultats de Fabrizio [Fab93], où un RG de type Wilsonien est utilisé, et grâce auquel les différents domaines d'énergie peuvent être décrits. Notons que dans le cas de N chaînes, le même type d'argument pourra être utilisé, car nous verrons que les termes qui déforment la surface de Fermi sont exactement les couplage irrelevants (à basse énergie), qui cherchent à devenir plus relevants en déformant la surface de Fermi afin de pouvoir exister à énergie nulle.

Si nous arrêtons le flot à $\Lambda = \Delta k_{\mathrm{F}}$, il est clair que l'on retrouve la valeur donnée par (3.87), si on a, comme nous l'avons dit plus haut :

$$\Delta k_{\mathrm{F}} = \Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}(\Lambda)\Big|_{\Lambda=\Delta k_{\mathrm{F}}}. \tag{3.93}$$

Nous avons jusqu'ici négligé les termes déformant la surface de Fermi à 1 boucle, et n'avons pas pris en compte les variations de $\widetilde{D}_{\mathrm{B}}$. Nous laissons le lecteur se convaincre que l'équation différentielle satisfaite si nous prenons tout cela en compte est :

$$\partial_t \Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)} = -(\widetilde{A}_{\mathrm{B}} - \widetilde{B}_{\mathrm{B}})\Lambda_0 e^{-t} - 2\widetilde{D}_{\mathrm{B}}^2 \Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}. \tag{3.94}$$

De plus les couplages évoluent selon le système d'équations (3.53), où comme nous l'avons déjà dit, il faut rajouter un indice $_{\mathrm{B}}$ à tous les couplages. Nous avons alors un nouveau problème avec le terme à 1 boucle. En effet, celui-ci fait intervenir les couplages A et B, qui sont pertinents à toutes les échelles d'énergie. Nous n'avons donc aucune justification pour dire que nous arrêtons le flot de la surface de Fermi dû à ces termes, quand nous croisons l'échelle Δk_{F}. Mais nous savons que les flots des couplages ne peuvent pas être poursuivis en-dessous de cette échelle, étant donné que nous avons supposé que Λ est grand devant toutes les autres échelles d'énergie. Nous pouvons toutefois nous sortir de ce problème en ne considérant pas du tout les déformations dues au terme à une boucle. Pour cela, nous constatons que dans le régime de haute énergie, les couplages A_{B} et B_{B} restent égaux s'ils le sont initialement (ce que nous supposerons car notre condition initiale sera toujours de type Hubbard). Dans le régime de basse énergie, les deux couplages différeront certainement. Toutefois, nous savons que dans le cas d'un système purement 1D, ces deux couplages resteraient égaux dans tout le domaine d'énergie. La différence entre ces deux couplages restera donc petite si le système est quasi-1D. Nous négligerons donc le terme à une boucle dans ce qui suit. Notons que nous retrouvons bien les résultats à une boucle établis par Louis et al [LAG01], si nous spécialisons leur équation (9) et (13) au cas de vitesses de Fermi identiques. Dans leur cas, où les vitesses de Fermi peuvent être différentes, négliger le terme à une boucle peut devenir une mauvaise approximation.

Dans l'étude de ces flots, nous pourrions croire que nous rencontrons encore une difficulté, que ne présentait pas la situation simplifiée que nous avons étudié précédemment ($\widetilde{D}_{\mathrm{B}}$ constant). C'est celle des conditions initiales : quelle valeur donner à $\Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}(\Lambda_0)$? Nous avons en effet vu que la surface de Fermi habillée doit être fixée. Ceci veut dire que nous connaissons la valeur de $\Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}(\Lambda)$ à une valeur de Λ de l'ordre de Δk_{F}. Nous ne pouvons donc pas donner une valeur initiale $\Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}(\Lambda_0)$ quelconque,

puisque la valeur alors obtenue pour $\Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}(\Lambda = \Delta k_{\mathrm{F}})$ n'aurait aucune chance d'être la bonne. Il faut alors raisonner à l'envers. Nous commençons par nous donner Δk_{F}, ainsi que les couplages de haute énergie. Nous calculons le flot des couplages, jusqu'à $\Lambda = \Delta k_{\mathrm{F}}$. Ces couplages peuvent alors nous servir de condition initiale de basse énergie, ainsi que Δk_{F} pour l'écart entre les vecteurs de Fermi, pour un flot dans lequel on augmente cette fois cut-off. Une fois la valeur Λ_0 atteinte, les couplages doivent avoir retrouvé leur valeur de haute énergie, et nous aurons aussi obtenu la différence entre les impulsions de Fermi de haute énergie, $\Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}(\Lambda_0)$.

Toutefois, étant donné que nous utilisons le cut-off scaling et l'approximation logarithmique, et que nous arrêtons le flot dès que le cut-off est égal à Δk_{F}, le flot pour les couplages ne fait pas intervenir la grandeur Δk_{F} dans la région de haute énergie qui est celle de déformation de la surface de Fermi. Ainsi, on peut se fixer la surface de Fermi de haute énergie $\Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}(\Lambda_0)$, calculer le flot des couplages et de $\Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}(\Lambda)$. Nous arrêtons alors le flot dès que Λ atteint $\Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}(\Lambda)$, et on aura alors obtenu la surface de Fermi de basse énergie :

$$\Delta k_{\mathrm{F}} = \Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}(\Lambda^*), \text{ avec } \Lambda^* = \Delta k_{\mathrm{F}}^{(0)}(\Lambda^*). \tag{3.95}$$

Dans le cadre d'un RG Wilsonien, on peut se poser la question de savoir s'il est possible ou non de trouver la surface de Fermi habillée en partant d'une condition initiale de haute énergie pour les couplages et la surface de Fermi. Dans la méthode de Feldman et al [FST98], il faut se fixer la surface de Fermi habillée, et faire une élimination de modes, définis par la surface de Fermi habillée, pour éviter les problèmes IR. Il faut alors introduire les contre-termes nécessaires pour fixer la surface de Fermi. La question est alors de remonter à la surface de Fermi libre, avec pour ce faire, les problèmes dont nous venons de parler. Feldman et al ont démontré que la relation entre les surfaces de Fermi nue et habillée est inversible. Il reste quand même à savoir si cela est pratiquement faisable. Dans son article [Fab93], Fabrizio ne semble pas préoccupé par cela, et obtient directement une équation de flot pour la surface de Fermi. Nous espérons étudier plus précisément comment utiliser un RG Wilsonien, afin de clarifier cette question. Nous n'en avons toutefois pas eu le temps, et je n'en parlerai donc pas plus longtemps.

Voyons maintenant ce que le cut-off scaling nous donne, pour des conditions telles que le système reste à couplage faible. Reprenons donc l'exemple que nous avions déjà étudié : tous les couplages de haute énergie égaux à 0.1, sauf F nul, et $\Delta k_{\mathrm{F}}/\Lambda_0 = 0.01$. Nous trouvons le résultat indiqué sur la figure 3.18. On voit donc que bien que les interactions ne sont pas très grandes, et même en restant à couplage faible, l'écart entre les impulsions de Fermi est réduit de 10%.

Avant de passer au cas de N chaînes, et de renvoyer le lecteur à [DD02] pour plus de détails, nous allons finir cette section en établissant les résultats obtenus dans le cas d'électrons de spin 1/2 et en montrant qu'ils sont identiques à ceux existant dans la littérature.

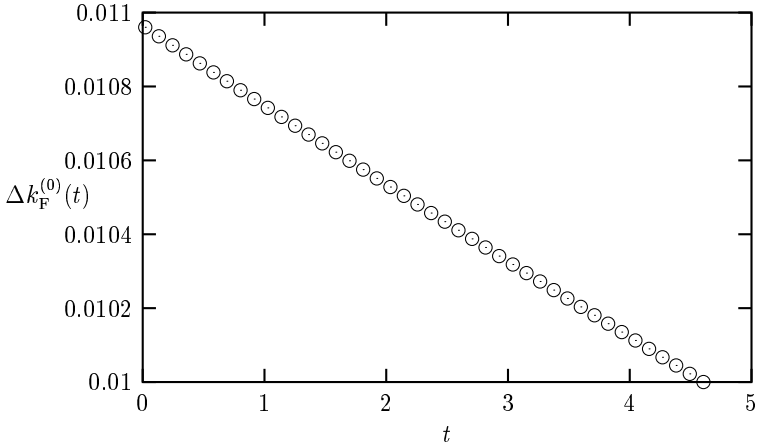


Fig. 3.18 – Flot de l'écart entre les impulsions de Fermi dans le cas $\Delta k_{\rm F}/\Lambda_0 = 0.01$, et avec des couplages initiaux tous égaux à 0.1, sauf $F = 0$.

Puisque nous voulons établir le contact avec de tels résultats, nous remettons le facteur 1/2 dans le Hamiltonien d'interaction (cf note de bas de page numéro 3). Nous considérons de plus des conditions initiales de type Hubbard. Dans un tel cas, tous les couplages de spin resteront égaux, ainsi que tous les couplages de charge. Ces derniers seront d'ailleurs constants, et les couplages de spin vérifieront l'équation : $\partial_t g^{\rm s} = 4g^{\rm s}$. Nous ne démontrons pas ces affirmations ici, mais nous le ferons dans le chapitre 4 consacré au système à N chaînes de fermions avec spin, cf équations (4.4) et (4.5) et le commentaire qui suit. L'équation de flot pour $\Delta k_{\rm F}^{(0)}$ est quant à elle obtenue à partir du cas spinless en supprimant comme justifié plus haut le terme d'ordre 1 et en remplaçant l'interaction $\widetilde{D}_{\rm B}^2$ par $2[(\widetilde{D}_{\rm B}^{\rm c}/2)^2 + 3(\widetilde{D}_{\rm B}^{\rm s}/2)^2]$. Autrement dit : $\partial_t \Delta k_{\rm F}^{(0)} = -(\widetilde{D}_{\rm B}^{\rm c}{}^2 + 3\,\widetilde{D}_{\rm B}^{\rm s}{}^2)\Delta k_{\rm F}^{(0)}$. Cette équation différentielle vérifiée par $\Delta k_{\rm F}^{(0)}$, est au signe près, exactement celle vérifiée par le logarithme de φ dans le cas 1D, cf (2.138)[14]. En utilisant la solution déjà obtenue pour φ (voir (2.151)), ainsi que (3.95) nous avons :

$$\Delta k_{\rm F}^{(0)} = \Delta k_{\rm F} \left(\frac{\Delta k_{\rm F}}{\Lambda_0}\right)^{-\widetilde{D}_{\rm B}^{\rm c}{}^2} \exp\left[\frac{3}{4}\widetilde{D}_{\rm B}^{\rm s}\left(\frac{1}{1+4\widetilde{D}_{\rm B}^{\rm s}\ln(\Delta k_{\rm F}/\Lambda_0)} - 1\right)\right]. \tag{3.96}$$

Pour un modèle de Hubbard répulsif, $\widetilde{D}_{\rm B}^{\rm s}$ est négatif, et si $\Delta k_{\rm F}$ n'est pas trop grand, on obtient en omettant des facteurs multiplicatifs constants :

$$\Delta k_{\rm F} \sim \Delta k_{\rm F}^{(0)} \left(\frac{\Delta k_{\rm F}^{(0)}}{\Lambda_0}\right)^{\widetilde{D}_{\rm B}^{\rm c}{}^2}. \tag{3.97}$$

[14] L'explication de cette identité entre les équations vérifiées par $\Delta k_{\rm F}^{(0)}$ et celle vérifiée par le logarithme de φ dans le cas 1D est donnée dans la section III.C.3 de notre article, et nous y renvoyons donc le lecteur.

Le résultat que l'on trouve dans la littérature (cf [PF79, Bou85]) est :

$$t_\perp^{\text{eff}} \sim t_\perp \left(\frac{t_\perp}{t_\parallel}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} . \tag{3.98}$$

Dans cette équation, et avec les notations de la bosonisation, $\alpha = (K_\rho + 1/K_\rho)/4 - 1/2$, avec $K_\rho = \sqrt{(1-2\tilde{g}_{\text{B}}^{\text{c}})/(1+2\tilde{g}_{\text{B}}^{\text{c}})}$. Perturbativement, $\alpha = {\tilde{g}_{\text{B}}^{\text{c}}}^2$, et les résultats (3.97) et (3.98) sont donc identiques. Le facteur supplémentaire que nous avons dans (3.96) est dû à la prise en compte de l'extinction du couplage de spin, qui est non pertinent, tout comme c'était le cas dans l'équation (2.152), où nous avions donné l'expression du propagateur renormalisé. Nous avons donc réobtenu un résultat connu, ce qui confirme que notre vision, qui consiste à arrêter le flot lorsque l'on croise l'échelle d'énergie Δk_{F}, est valable.

Chapitre 4

Extension à un système quasi-1D de N chaînes

Dans le chapitre précédent, nous avons vu comment calculer les déformations de la surface de Fermi dans le cas simple de 2 chaînes de fermions avec ou sans spin. Nous avons aussi eu accès au propagateur renormalisé. La généralisation de ces considérations au cas physiquement plus intéressant d'un système de N chaines est conceptuellement facile, mais calculatoire. Nous ajouterons quand même des ingrédients physiques supplémentaires par rapport à l'étude du système à deux chaînes, en incluant les Umklapps transverses, qui doivent être pris en compte pour des systèmes dont le remplissage est commensurable. Nous nous limiterons à la dérivation des équations de RG, et ne les étudierons pas. Cette étude a en effet été effectuée dans notre deuxième article [DD02] (sections III.C et III.D), et j'ai estimé que pour ce point particulier, le texte de la thèse aurait été une simple traduction en Français de l'article et par conséquent inutile. Je revoie donc le lecteur à notre article.

4.1 Établissement des équations de RG dans le cas non commensurable

Nous allons commencer par dériver les équations de flot sans les Umklapps, en détaillant les calculs. L'incorporation des Umklapps sera faite (succinctement) à la section 4.2.

4.1.1 Flot des vertexs

Les équations de flot pour les interactions $G_\delta^{c(s)}(I,J)$ (cf chapitre 2 pour les notations) sont obtenues en calculant les graphes de Feynman de type bulle particule-particule et bulle particule-trou, similaires à ceux des figures 2.8 page 45 et 2.8 page 45.

Il y a cependant quelques différences, que nous avons déjà vues dans le chapitre 3 dans le cadre de 2 chaînes, et que nous rappelons ici par souci de clarté. La première est qu'il existe plusieurs types de fermions, labellés par leur indice de chaîne I. Il y aura donc une somme à effectuer sur tous les types de fermions intermédiaires accessibles (cf tableau 3.1 dans le cas de 2 chaînes).

Les énergies des pattes externes sont choisies exactement comme dans le cas 1D (et celui des 2 chaînes). Nous devons néanmoins expliciter ce que valent les impulsions longitudinales. Notre choix a été dicté par quelques considérations simples. Il faut tout d'abord que les interactions pour lesquelles les 4 impulsions peuvent être à la surface de Fermi soient calculées avec les impulsions à la surface de Fermi. Il ne serait en effet par raisonnable d'introduire une échelle d'énergie supplémentaire pour de tels processus qui existent à énergie nulle. C'est ce que nous avions déjà fait pour les interactions A, B, C et F. C'est aussi ce qu'il faut vérifier pour les interactions de type BCS[1]. Pour les autres interactions, tout comme pour D, nous prenons des impulsions qui respectent la symétrie R-L, et qui sont toutes les 4 à la surface de Fermi, si cela est possible (par exemple si la surface de Fermi est plate pour les termes D). Le problème est légèrement plus compliqué que dans le cas de 2 chaînes, car l'interaction la plus générale peut mettre en jeu 4 chaînes (cf figure 1.6(a) page 36).

Regardons le cas de l'interaction $G_\delta^{\mathrm{c(s)}}(I,J)$. Les vecteurs de Fermi mis en jeu sont $k_{\mathrm{F},I}$, $-k_{\mathrm{F},J}$, $-k_{\mathrm{F},J-\delta}$, et $k_{\mathrm{F},I+\delta}$. Notons k_1, k_2, k_3 et k_4 les impulsions des 4 pattes (cf équation (2.10) pour la convention sur les numéros 1 à 4). On ne peut avoir les 4 impulsions à la surface de Fermi, i.e. $k_1 = k_{\mathrm{F},I}$, $k_2 = -k_{\mathrm{F},J}$, $k_3 = -k_{\mathrm{F},J-\delta}$, et $k_4 = k_{\mathrm{F},I+\delta}$, que si la conservation de l'impulsion $k_{\mathrm{F},I} - k_{\mathrm{F},J} = k_{\mathrm{F},I+\delta} - k_{\mathrm{F},J-\delta}$ est respectée. Dans le cas général, ce ne sera pas possible car on aura $\Delta k_\delta(I,J) = (k_{\mathrm{F},I+\delta} + k_{\mathrm{F},J}) - (k_{\mathrm{F},I} + k_{\mathrm{F},J-\delta}) \neq 0$. Nous choisissons alors les impulsions, en décalant les 4 impulsions k_i d'une même quantité (en valeur absolue), par rapport à la surface de Fermi :

$$\begin{aligned} k_1 &= k_{\mathrm{F},I} + \frac{\Delta k_\delta(I,J)}{4}, \quad k_2 = -\left(k_{\mathrm{F},J} - \frac{\Delta k_\delta(I,J)}{4}\right), \\ k_3 &= -\left(k_{\mathrm{F},J-\delta} + \frac{\Delta k_\delta(I,J)}{4}\right), \text{ et } k_4 = k_{\mathrm{F},I+\delta} - \frac{\Delta k_\delta(I,J)}{4}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Nous laissons le lecteur vérifier que ces impulsions sont bien compatibles avec la conservation de l'impulsion $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$. Le respect de la symétrie R-L du système demande que les couplages $G_\delta^{\mathrm{c(s)}}(I,J)$ et $G_{-\delta}^{\mathrm{c(s)}}(J,I)$ soient calculés pour des jeux d'impulsions qui soient symétriques. Si nous notons k_i les impulsions pour $G_\delta^{\mathrm{c(s)}}(I,J)$, données par (4.1), et par k'_i celles pour $G_{\delta'}^{\mathrm{c(s)}}(I',J') = G_{-\delta}^{\mathrm{c(s)}}(J,I)$, données par (4.1) avec les quantités primées, la symétrie sera respectée si $k'_1 = -k_2$, $k'_2 = -k_1$, $k'_3 = -k_4$, et $k'_4 = -k_3$. Une fois que l'on voit que $\Delta k_\delta(I,J)' = \Delta k_{\delta'}(I',J') = -\Delta k_\delta(I,J)$, la vérification est

[1]Ces interactions sont celles pour lesquelles I et J sont symétriques par rapport au centre de la surface de Fermi, ainsi que $I+\delta$ et $J-\delta$. Autrement dit, avec nos notations, $J = N - I + p$ ($p = 0$ si N est pair et $p = 1$ si N est impair), et δ ne doit pas être trop grand, pour ne pas décrire un Umklapp transverse.

immédiate. Nous laissons de plus le lecteur se convaincre que ce choix d'impulsions respecte aussi les deux autres symétries du problème : la symétrie haut-bas, et la symétrie particule-trou.

Toutes les informations ci-dessus sont regroupées sur les figures 4.1 et 4.2 représentant les graphes de Feynman associés aux bulles particule-particule et particule-trou (nous avons représentés les interaction par des lignes ondulées, en anticipant sur le prochain chapitre où nous mettrons aussi les Umklapps). Pour chaque propagateur,

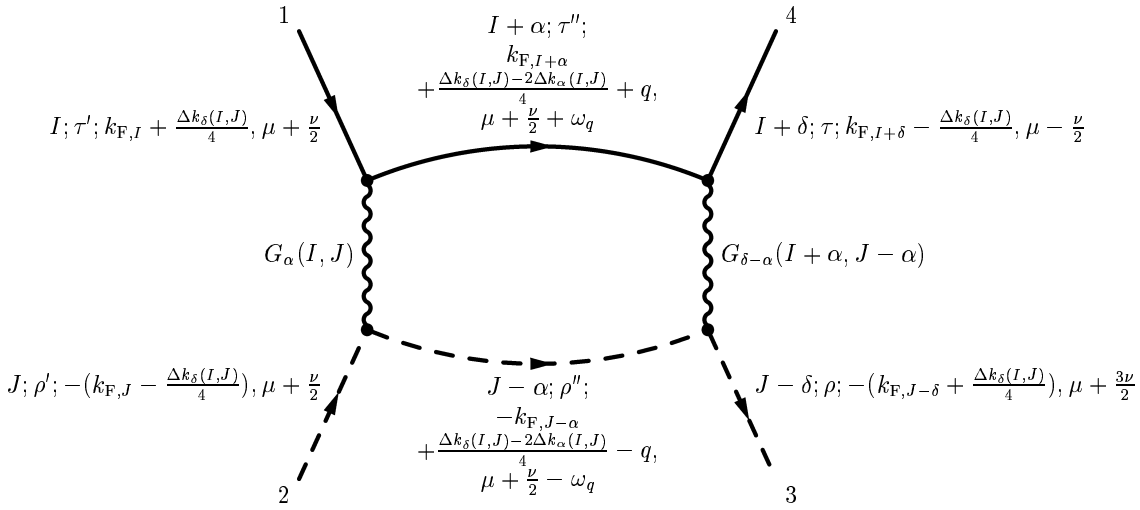


FIG. 4.1 – Bulle particule-particule renormalisant les couplages $G_\delta^{\mathrm{c(s)}}(I,J)$ pour le système à N chaînes.

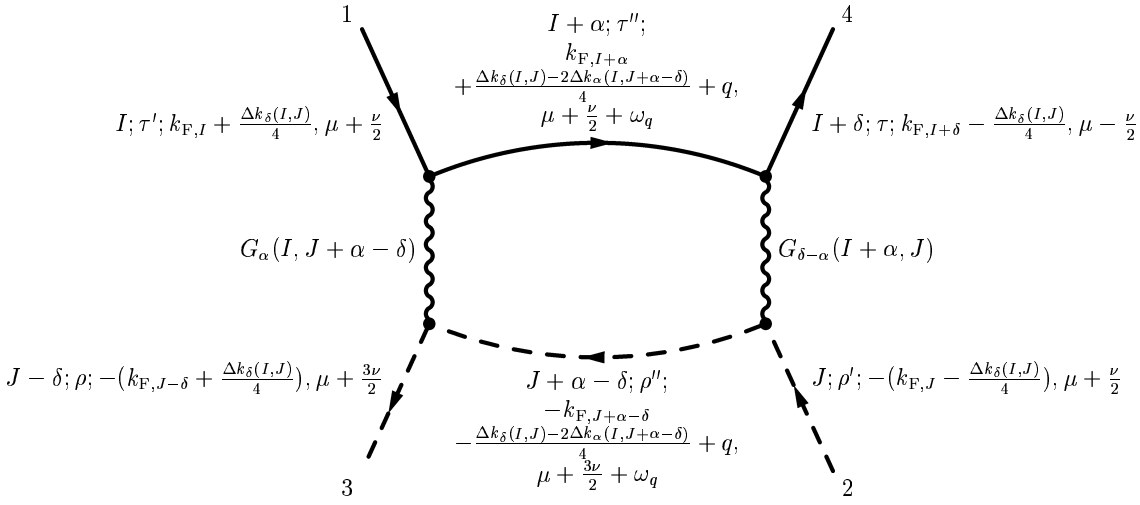


FIG. 4.2 – Bulle particule-trou renormalisant les couplages $G_\delta^{\mathrm{c(s)}}(I,J)$ pour le système à N chaînes.

le label est : couleur ; spin ; impulsion, fréquence. Pour évaluer les graphes, il faut bien

entendu faire une somme sur les spins (τ'' et ρ''), couleurs (α), impulsion (q) et fréquence (ω_q) des propagateurs internes. Il est aussi nécessaire de s'occuper de l'algèbre de spin. Le cut-off UV est mis autour de la surface de Fermi habillée, ce qui donne des contraintes sur q. Les calculs n'ont rien de plus compliqué que ce que nous avons vu jusqu'à présent, et nous ne donnerons ici que le résultat final, à savoir les équations de flot des couplages, dans le RG version théorie des champs. Nous supposerons comme nous l'avons toujours fait, pour simplifier, que les vitesses de Fermi sont identiques et non renormalisées, toutes égales à $v_{\rm F}$. Afin d'alléger les expressions, posons les deux définitions suivantes :

$$\begin{aligned} K^{\rm pp}_{\alpha;\delta}(I,J) &= \frac{\Delta k_\delta(I,J) - 2\Delta k_\alpha(I,J)}{4} \\ &= \frac{k_{{\rm F},I} + k_{{\rm F},I+\delta} + 2k_{{\rm F},J-\alpha} - (k_{{\rm F},J} + k_{{\rm F},J-\delta} + 2k_{{\rm F},I+\alpha})}{4}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

et

$$\begin{aligned} K^{\rm pt}_{\alpha;\delta}(I,J) &= \frac{\Delta k_\delta(I,J) - 2\Delta k_\alpha(I,J+\alpha-\delta)}{4} \\ &= \frac{k_{{\rm F},I} + k_{{\rm F},I+\delta} + k_{{\rm F},J} + k_{{\rm F},J-\delta} - 2(k_{{\rm F},I+\alpha} + k_{{\rm F},J+\alpha-\delta})}{4}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Remarquons tout de suite que ces deux quantités sont, en valeur absolue, au plus égales à $k_{\rm F}^{\rm max} - k_{\rm F}^{\rm min}$, différence entre le plus grand et le plus petit des vecteurs de Fermi. C'est à cette échelle d'énergie $2v_{\rm F}(k_{\rm F}^{\rm max} - k_{\rm F}^{\rm min})$ que nous devrons arrêter le flot de RG dans la version cut-off scaling.

Les flots pour les couplages de charge et de spin sont alors :

$$\begin{aligned} \partial_t G^{\rm c}_\delta(I,J) = \frac{1}{N}\sum_\alpha \Bigg\{ & f\left(t, 2v_{\rm F}K^{\rm pt}_{\alpha;\delta}(I,J)\right) \\ & \times \Big[G^{\rm c}_\alpha(I,J+\alpha-\delta)G^{\rm c}_{\delta-\alpha}(I+\alpha,J) + 3G^{\rm s}_\alpha(I,J+\alpha-\delta)G^{\rm s}_{\delta-\alpha}(I+\alpha,J)\Big] \\ & - f\left(t, 2v_{\rm F}K^{\rm pp}_{\alpha;\delta}(I,J)\right) \\ & \times \Big[G^{\rm c}_\alpha(I,J)G^{\rm c}_{\delta-\alpha}(I+\alpha,J-\alpha) - 3G^{\rm s}_\alpha(I,J)G^{\rm s}_{\delta-\alpha}(I+\alpha,J-\alpha)\Big]\Bigg\}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} \partial_t G^{\rm s}_\delta(I,J) = \frac{1}{N}\sum_\alpha \Bigg\{ & f\left(t, 2v_{\rm F}K^{\rm pt}_{\alpha;\delta}(I,J)\right) \times \Big[2G^{\rm s}_\alpha(I,J+\alpha-\delta)G^{\rm s}_{\delta-\alpha}(I+\alpha,J) \\ & + G^{\rm s}_\alpha(I,J+\alpha-\delta)G^{\rm c}_{\delta-\alpha}(I+\alpha,J) + G^{\rm c}_\alpha(I,J+\alpha-\delta)G^{\rm s}_{\delta-\alpha}(I+\alpha,J)\Big] \\ & + f\left(t, 2v_{\rm F}K^{\rm pp}_{\alpha;\delta}(I,J)\right)\Big[2G^{\rm s}_\alpha(I,J)G^{\rm s}_{\delta-\alpha}(I+\alpha,J-\alpha) \\ & - G^{\rm s}_\alpha(I,J)G^{\rm c}_{\delta-\alpha}(I+\alpha,J-\alpha) - G^{\rm c}_\alpha(I,J)G^{\rm s}_{\delta-\alpha}(I+\alpha,J-\alpha)\Big]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Nous avons ici supprimé le $\tilde{}$ sur les couplages, afin de ne pas alourdir les notations. Il faudra donc se souvenir, que les couplages G sont les couplages originaux divisés par

$2\pi v_{\mathrm{F}}$. Dans toute la suite, nous adopterons cette notation. La fonction f présente dans ces équations est la même que celle discutée dans la section 3.4.1. Elle vaut 1 ou 0 selon que l'énergie $\nu = \Lambda \exp(-t)$ est plus petite ou plus grande que la valeur absolue du deuxième argument. Les équations de renormalisation pour le cut-off scaling sont obtenues en mettant les f à 1.

Faisons un dernier commentaire. Dans le régime où toutes les fonctions f sont égales à 1 (haute énergie, et cut-off scaling), si tous les couplages de charge sont initialement égaux et les couplages de spin aussi, on voit sur les équations que les couplages de charge restent constants, et les couplages de spin restent tous égaux et varient selon $\partial_t G^{\mathrm{s}} = 4{G^{\mathrm{s}}}^2$. C'est ce résultat que nous avions utilisé à la fin de la section 3.5.2, et dont nous avions différé la démonstration.

4.1.2 Calculs de la self-énergie, flot de la surface de Fermi et renormalisation du propagateur

A une boucle, il faut évaluer les diagrammes de type tadpole, représentés sur la figure 4.3 Seuls les couplages de type G_0 contribuent. Notons de plus que les couplages

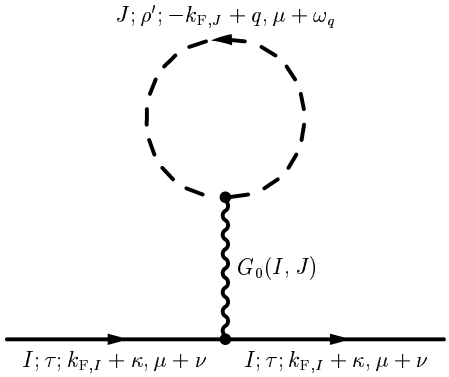


Fig. 4.3 – Tadpole pour le système à N chaînes.

de spin n'interviennent pas ici, tout comme c'était le cas pour le problème purement 1D, et l'algèbre de spin fournit simplement un facteur 2. Ainsi :

$$\Sigma^{(1)}_{\mathrm{R},I}(k = k_{\mathrm{F},I} + \kappa, \omega = \mu + \nu) = \left[\frac{1}{N}\sum_J G^{\mathrm{c}}_0(I,J)\right](2v_{\mathrm{F}}\Lambda). \tag{4.6}$$

Pour une condition initiale de type Hubbard, étant donné que tous les couplages de charge sont égaux, et qu'ils le restent le long du flot de cut-off scaling, les Σ_I sont tous égaux, et il n'y a donc aucune renormalisation de la surface de Fermi, mais uniquement du potentiel chimique. Nous laisserons donc ces termes de côté, puisque nous sommes intéressés par la renormalisation de la surface de Fermi. Notons qu'en toute rigueur il faudrait prolonger le flot même en dessous de l'échelle où nous arrêtons le flot de la

surface de Fermi. Mais tout comme dans le cas des deux chaînes, on s'attend à ce que le caractère quasi-1D du système entraîne la petitesse de la déformation provenant des termes à une boucle.

A deux boucles, les diagrammes de type Kohn-Luttinger sont ici aussi nuls, et il nous faut uniquement évaluer les diagrammes de type sunrise indiqués sur la figure 4.4. Étant donné que nous avons décidé de négliger la renormalisation de la vitesse de

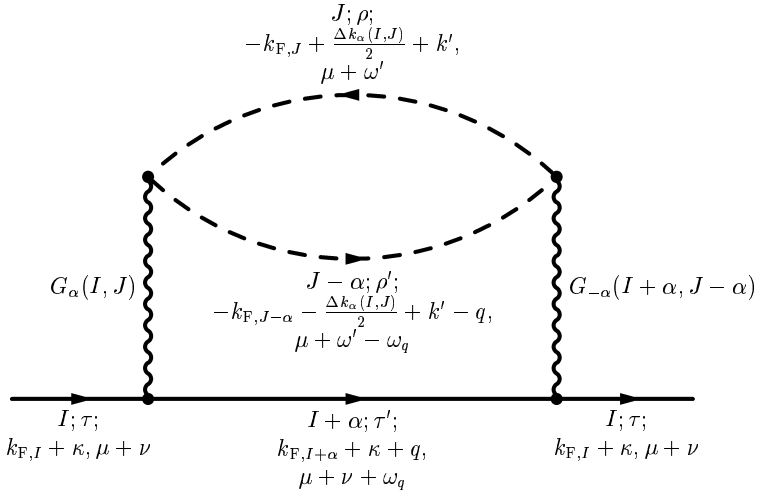


Fig. 4.4 – Sunrise pour le système à N chaînes.

Fermi, nous nous limitons au calcul du sunrise pour $\kappa = 0$. Le calcul donne :

$$\Sigma^{(2)}_{\mathrm{R},I}(k = k_{\mathrm{F},I}, \omega = \mu + \nu) = \frac{1}{2N^2}\sum_{J,\alpha}\left[G^{\mathrm{c}}_\alpha(I,J)G^{\mathrm{c}}_{-\alpha}(I+\alpha,J-\alpha) + 3G^{\mathrm{s}}_\alpha(I,J)G^{\mathrm{s}}_{-\alpha}(I+\alpha,J-\alpha)\right] \times\Big(\nu + v_{\mathrm{F}}\Delta k_\alpha(I,J)\Big)\ln\left[\frac{\left|\nu^2 - \big(v_{\mathrm{F}}\Delta k_\alpha(I,J)\big)^2\right|}{(2v_{\mathrm{F}}\Lambda)^2}\right]. \quad (4.7)$$

Il est facile de vérifier que cette expression redonne bien les résultats obtenus dans le cas de deux chaînes : mis à part les facteurs 2, $2\pi v_{\mathrm{F}}$ et $1/N$, la seule chose vraiment importante est que pour la contribution des couplages $D = G_\pi(0,\pi)$, on a $\Delta k_\alpha(I,J) = -2\Delta k_{\mathrm{F}}$.

La renormalisation du potentiel chimique et de la surface de Fermi découle alors en demandant que la singularité du propagateur soit à la surface de Fermi habillée, i.e. :

$$\forall I \in \{1,\dots,N\}, \quad -\Sigma^{(2)}_{\mathrm{R},I}(k = k_{\mathrm{F},I}, \omega = \mu) - \delta\mu^{(2)} + v_{\mathrm{F}}\delta k^{(2)}_I = 0. \quad (4.8)$$

On trouve $\delta\mu^{(2)}$ en faisant la somme de toutes ces équations, et en utilisant le théorème de Luttinger :

$$\delta\mu^{(2)} = -\frac{1}{N}\sum_I \Sigma^{(2)}_{\mathrm{R},I}(k = k_{\mathrm{F},I}, \omega = \mu). \quad (4.9)$$

En utilisant la forme (4.7) prise à $\nu = 0$ de la self-énergie, et grâce à la symétrie R-L, on obtient que $\delta\mu^{(2)} = 0$. En effet, comme nous l'avons déjà vu au 4.1.1, d'après la symétrie R-L $G_\alpha^{\mathrm{c(s)}}(I,J) = G_{-\alpha}^{\mathrm{c(s)}}(J,I)$ et $\Delta k_\alpha(I,J) = -\Delta k_{-\alpha}(J,I)$. Nous avons de même $G_{-\alpha}^{\mathrm{c(s)}}(I+\alpha, J-\alpha) = G_\alpha^{\mathrm{c(s)}}(J-\alpha, I+\alpha)$. Étant donné que dans l'expression de $\delta\mu^{(2)}$, on a schématiquement $\sum_{I,J,\alpha} G_\alpha(I,J)G_{-\alpha}(I+\alpha, J-\alpha)\Delta k_\alpha(I,J)\ln(|\Delta k_\alpha(I,J)|)$, les termes (I,J,α) et $(J,I,-\alpha)$ vont se compenser, ce qui démontre bien que $\delta\mu^{(2)} = 0$. La renormalisation du potentiel chimique n'est donc ici due qu'au tadpole.

On obtient alors aisément la valeur de $\delta k_I^{(2)} = k_{\mathrm{F},I}^{(0)} - k_{\mathrm{F},I}$:

$$\begin{aligned}\delta k_I^{(2)} &= \frac{1}{v_\mathrm{F}}\Sigma_{\mathrm{R},I}^{(2)}(k = k_{\mathrm{F},I}, \omega = \mu) \qquad (4.10)\\ &= \frac{1}{N^2}\sum_{J,\alpha}\left[G_\alpha^{\mathrm{c}}(I,J)G_{-\alpha}^{\mathrm{c}}(I+\alpha, J-\alpha) + 3G_\alpha^{\mathrm{s}}(I,J)G_{-\alpha}^{\mathrm{s}}(I+\alpha, J-\alpha)\right]\\ &\qquad \times\Delta k_\alpha(I,J)\ln\left[\frac{|\Delta k_\alpha(I,J)|}{2\Lambda}\right]. \qquad (4.11)\end{aligned}$$

Les équations de flot pour les vecteurs de Fermi, dans la version cut-off scaling, se déduisent alors sans grand problème. Il faut bien sûr se souvenir que les couplages sont maintenant les couplages nus G_B, et que le temps t est $t = \ln(\Lambda_0/\Lambda)$. Ces équations sont :

$$\begin{aligned}\partial_t k_{\mathrm{F},I}^{(0)} &= \frac{1}{N^2}\sum_{J,\alpha}\Delta k_\alpha^{(0)}(I,J) \qquad (4.12)\\ &\quad\times\left[G_{\mathrm{B},\alpha}^{\mathrm{c}}(I,J)G_{\mathrm{B},-\alpha}^{\mathrm{c}}(I+\alpha, J-\alpha) + 3G_{\mathrm{B},\alpha}^{\mathrm{s}}(I,J)G_{\mathrm{B},-\alpha}^{\mathrm{s}}(I+\alpha, J-\alpha)\right],\end{aligned}$$

où nous avons noté $\Delta k_\alpha^{(0)}(I,J) = (k_{\mathrm{F},I+\alpha}^{(0)} + k_{\mathrm{F},J}^{(0)}) - (k_{\mathrm{F},I}^{(0)} + k_{\mathrm{F},J-\alpha}^{(0)})$.

Avant d'exploiter cette équation de flot, dérivons les équations de flot des fonctions φ, donnant le propagateur renormalisé, dans la version théorie des champs. Le propagateur inverse habillé, à 2 boucles, s'obtient de ce qui précède (nous renvoyons ici aussi le lecteur au chapitre 3 pour les détails, et ne donnons ici que les grands résultats) :

$$\begin{aligned}&{G_{\mathrm{R},I}^{(2)}}^{-1}(k = k_{\mathrm{F},I}, \omega = \mu + \nu) = \nu\\ &-\frac{1}{2N^2}\sum_{J,\alpha}\left[G_\alpha^{\mathrm{c}}(I,J)G_{-\alpha}^{\mathrm{c}}(I+\alpha, J-\alpha) + 3G_\alpha^{\mathrm{s}}(I,J)G_{-\alpha}^{\mathrm{s}}(I+\alpha, J-\alpha)\right] \qquad (4.13)\\ &\times\left[\nu\ln\left(\frac{\left|\nu^2 - \left(v_\mathrm{F}\Delta k_\alpha(I,J)\right)^2\right|}{(2v_\mathrm{F}\Lambda)^2}\right) + v_\mathrm{F}\Delta k_\alpha(I,J)\ln\left(\frac{\left|\nu^2 - \left(v_\mathrm{F}\Delta k_\alpha(I,J)\right)^2\right|}{(v_\mathrm{F}\Delta k_\alpha(I,J))^2}\right)\right].\end{aligned}$$

Le facteur Z_I est trouvé en imposant la prescription de renormalisation ${G_{\mathrm{R},I}^{(\mathcal{R})}}^{-1}(k = k_{\mathrm{F},I}, \omega = \mu + \nu) = \nu$. φ_I est alors obtenu comme rapport de deux Z_I à deux échelles

différentes. L'équation de flot de φ_I est :

$$\partial_t \ln(\varphi_I) = \frac{1}{N^2}\sum_{J,\alpha}\left[G^{\rm c}_{\alpha}(I,J)G^{\rm c}_{-\alpha}(I+\alpha,J-\alpha)+3G^{\rm s}_{\alpha}(I,J)G^{\rm s}_{-\alpha}(I+\alpha,J-\alpha)\right]$$
$$\times\left[\left(1+\frac{v_{\rm F}\Delta k_\alpha(I,J)}{\nu}\right)f\big(\nu,v_{\rm F}\Delta k_\alpha(I,J)\big)-\frac{v_{\rm F}\Delta k_\alpha(I,J)}{\nu}l\big(\nu,v_{\rm F}\Delta k_\alpha(I,J)\big)\right], \quad (4.14)$$

où la fonction $l(\nu,\delta)=\ln(|\nu/\delta|)$ si $\nu \geqslant |\delta|$ et $=0$ sinon, tout comme pour le système à 2 chaînes.

4.2 Prise en compte des Umklapps

Le Hamiltonien décrivant les processus Umklapps a déjà été décrit dans le chapitre 1, Eq. (1.35). Je ne vais pas donner les calculs concernant les Umklapps en grands détails, car ils sont essentiellement similaires à ce que nous avons déjà fait pour les autres couplages. Je vais simplement donner les grandes lignes à suivre en quelques points, le lecteur devant normalement être capable de combler les lacunes.

• Il faut se donner une fonction à 4 pattes externes pour définir le vertex d'interaction. Nous avions précédemment utilisé la fonction de Green $G^{I\!I}$ de l'équation (2.10). L'équivalent est ici :

$$U^{I\!I}(X_4,X_3,X_2,X_1) = -\langle 0|{\rm T}\left[\psi_{{\rm R},I+\delta,\tau}(X_4)\psi_{{\rm R},J-\delta,\rho}(X_3)\psi^\dagger_{{\rm L},J,\rho'}(X_2)\psi^\dagger_{{\rm L},I,\tau'}(X_1)\right]|0\rangle. \quad (4.15)$$

On définit de plus la transformée de Fourier de cette fonction de Green. Il est facile de voir qu'à l'ordre 1 (0 boucle), et pour des pattes externes I, J, $I+\delta$, $J-\delta$ (cf figure 1.5(c) page 35), celle-ci est simplement égale à $U_\delta(I,J)\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'} - U_{J-I-\delta}(I,J)\mathbb{I}_{\tau,\rho'}\mathbb{I}_{\rho,\tau'}$. Le vertex sera donc défini comme le terme en $\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'}$ obtenu dans le calcul de $U^{I\!I}$.

• Il est nécessaire de se donner des prescriptions pour les fréquences et les impulsions externes. Pour les fréquences, nous gardons le même choix que dans tout ce qui précède (cf Eq. (2.25)). En ce qui concerne les impulsions, il faut ici aussi tenter de respecter les symétries du problème, comme nous l'avions fait par le choix de (4.1). Pour les Umklapps, nous avons considéré les impulsions ci-dessous :

$$k_1 = -\left(k_{{\rm F},I}+\frac{\Delta k^U_\delta(I,J)}{4}\right), \quad k_2 = -\left(k_{{\rm F},J}+\frac{\Delta k^U_\delta(I,J)}{4}\right),$$
$$k_3 = k_{{\rm F},J-\delta}+\frac{\Delta k^U_\delta(I,J)}{4}, \text{ et } k_4 = k_{{\rm F},I+\delta}+\frac{\Delta k^U_\delta(I,J)}{4}. \quad (4.16)$$

Nous avons posé $\Delta k^U_\delta(I,J) = 2\pi-(k_{{\rm F},I}+k_{{\rm F},J}+k_{{\rm F},I+\delta}+k_{{\rm F},J-\delta})$, équivalent de $\Delta k_\delta(I,J)$.

• Les Umklapps n'interviennent dans la self-énergie qu'à partir de l'ordre 2, et ce par les graphes représentés figure 4.5. Pour simplifier, nous n'avons écrit ni les

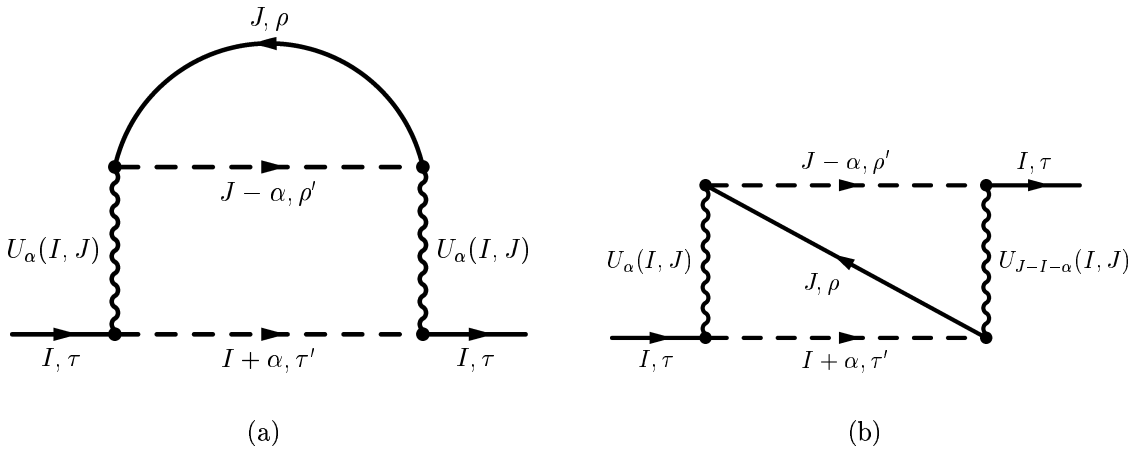


Fig. 4.5 – Contributions des Umklapps à la self-énergie.

fréquences ni les impulsions, mais uniquement les numéros de chaîne et les indices de spin. L'expression correspondante de la self-énergie est donnée dans l'annexe D de l'article, équation (D13).

• Les Umklapps changent les équations de flot à une boucle des couplages de charge et de spin, et ont eux-mêmes un flot. Les contributions aux flots des couplages de charge proviennent des 4 graphes de Feynman représentés sur la figure 4.6

La renormalisation des Umklapps est quant à elle due aux 8 graphes de Feynman représentés sur les figures 4.7 et 4.8

Les équations de flot complètes sont à consulter dans l'annexe D de l'article. Notons que les graphes GU7 et GU8 (figures 4.8(c) et 4.8(d)) donnent une contribution nulle (au terme en $\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'}$), ce qui explique que l'équation de flot de $U_\delta(I,J)$ ne fait intervenir qu'une somme de 6 termes et non 8.

4.3 Exploitation des équations de RG

Comme nous l'avons déjà dit plus haut, nous renvoyons le lecteur aux sections III.C et III.D de l'article, pour voir une exploitation analytique et numérique de ces équations. (La section III.C.1 est redondante avec le chapitre précédent, mais comme c'est le cœur du sujet, expliqué avec des mots, nous conseillons au lecteur de lire cette section.) Notons ici que les conditions initiales que nous avons considérées dans l'article sont de type Hubbard. La valeur des différents couplages de charge, de spin, et Umklapps, dans un tel cas, sont explicitées dans la section A.3 de l'annexe A.

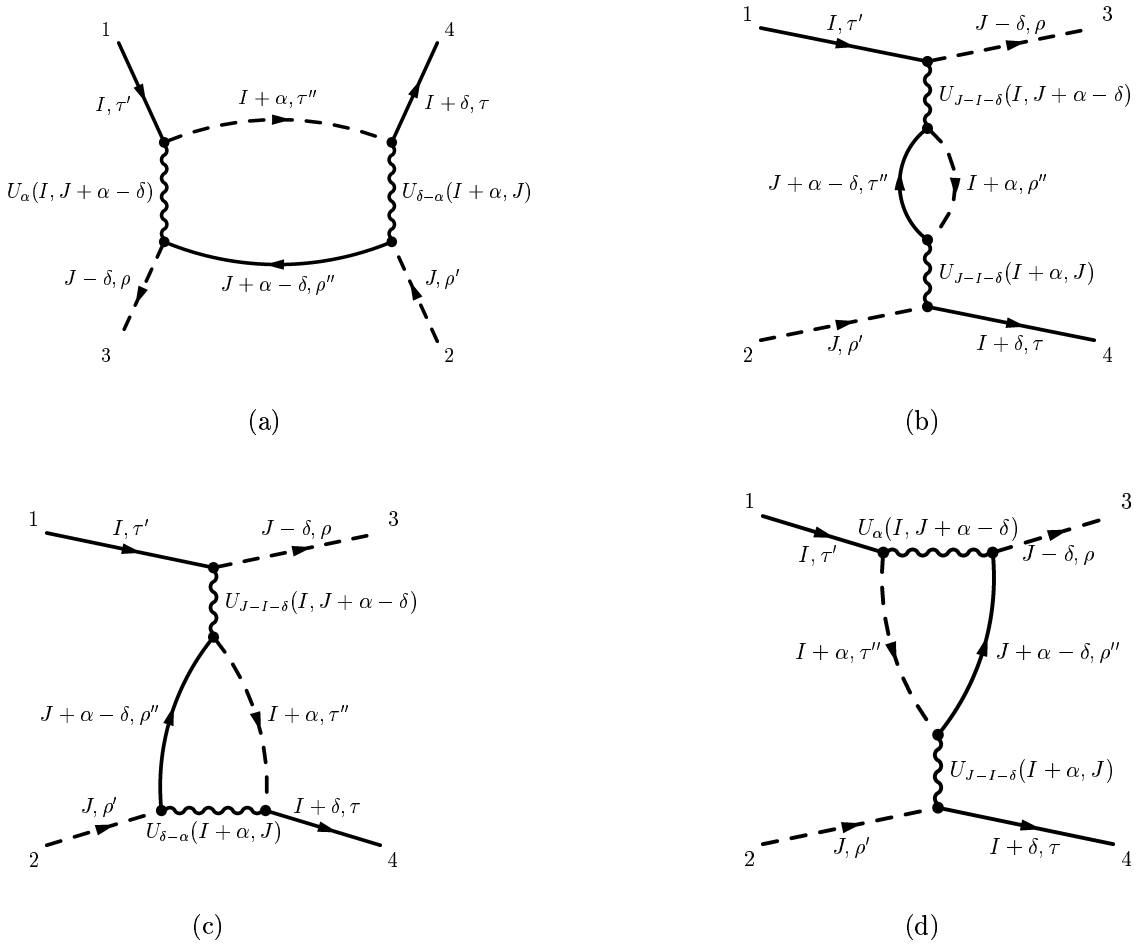
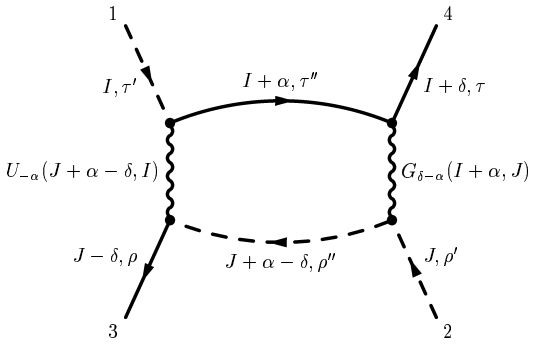
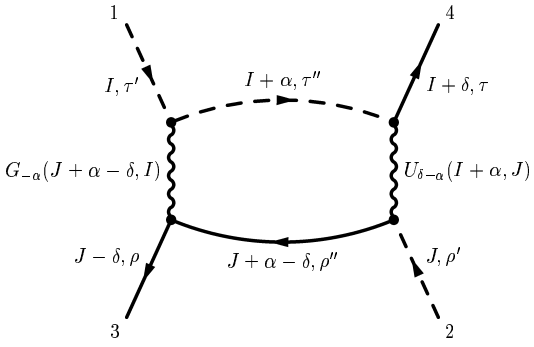


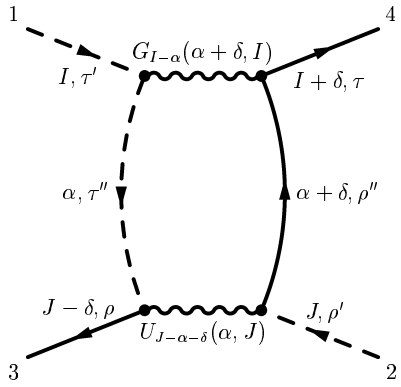
Fig. 4.6 – Contributions des Umklapps aux flots des couplages de charge et de spin.



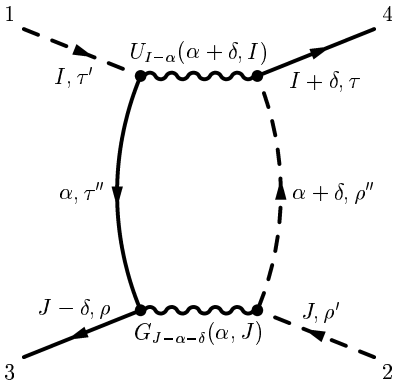
(a) GU1



(b) GU2

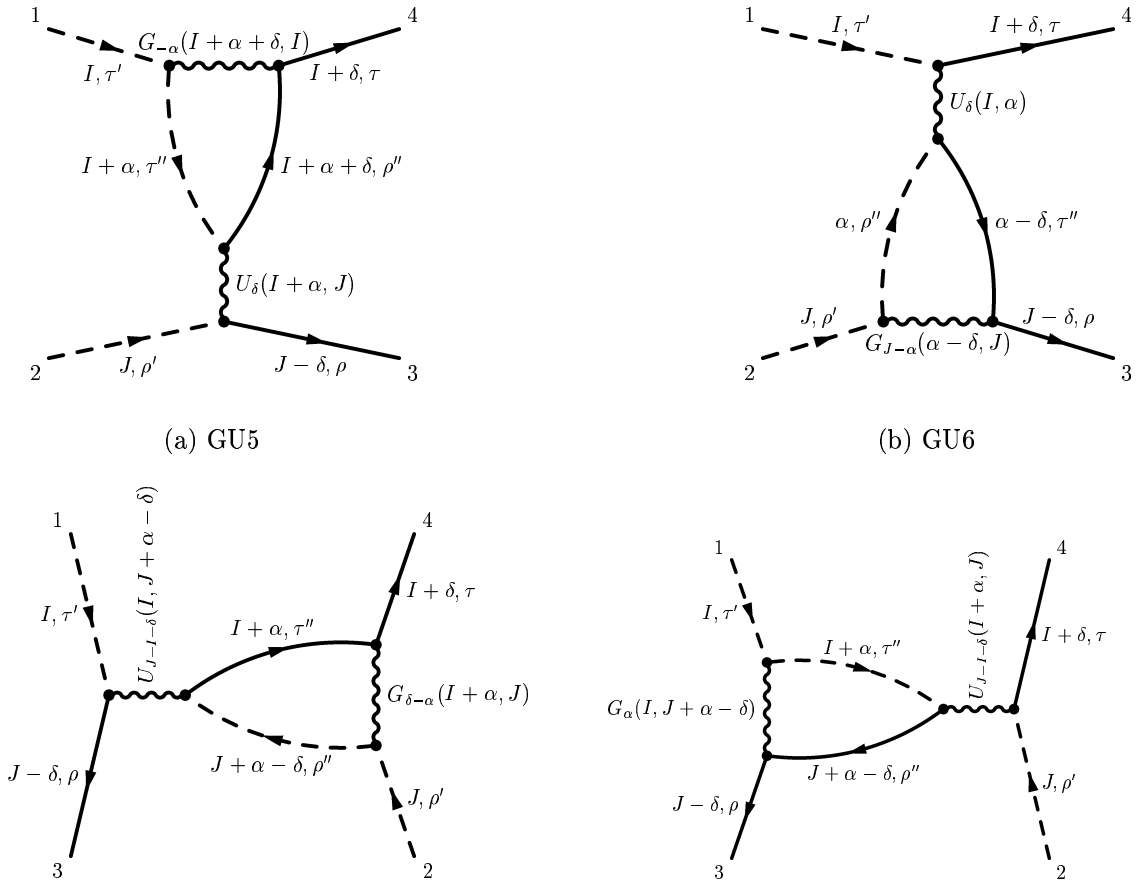


(c) GU3



(d) GU4

Fig. 4.7 – Contributions des Umklapps aux flots des couplages de charge et de spin - 4 premiers graphes.



(a) GU5

(b) GU6

(c) GU7

(d) GU8

Fig. 4.8 – Contributions des Umklapps aux flots des couplages de charge et de spin - 4 derniers graphes.

Chapitre 5

Guide de lecture de l'article "Renormalization group for two-dimensional fermions with a flat Fermi surface" [DVD02]

Étant donné que nous avons fait un effort pédagogique au moment de la rédaction de cet article (et que le cœur de mon sujet de thèse est surtout l'étude les déformations de la surface de Fermi, dont il n'est pas question ici), j'ai décidé de ne pas réexpliquer en détail son contenu dans mon manuscrit de thèse, mais uniquement de rédiger ce très court chapitre (qui ne remplace pas l'article lui-même !). J'espère qu'il aidera à la compréhension de cet article qui constitue une partie non négligeable de mon travail de thèse (j'y ai consacré un peu moins d'un tiers de mon temps).

Ce travail fait suite à la lettre[VD01] publiée par Benoît Douçot et Fernão Vistulo de Abreu[1], dans laquelle était rapportée la découverte d'une transition entre un état onde de densité de spin (SDW) et un état supraconducteur (SC), pour un système de fermions bidimensionnel dont la surface de Fermi possède des portions plates en regard (cf Fig. 1 de [DVD02][2]). Ce scénario semblait pertinent pour les supraconducteurs HTC. Nous avons donc étudier plus en détails cette transition pour en comprendre l'origine. Cette étude a "malheureusement" débouché sur la conclusion que cette transition n'était rien d'autre qu'un artefact dû à la discrétisation de la surface de Fermi nécessaire aux calculs numériques. La démonstration de ce "non résultat" nous a néanmoins demandé d'étudier très précisément les flots de RG, et je pense que notre travail apporte des éclairages sur certains aspects non triviaux de ces flots, en particulier l'étude précise de la limite bidimensionnel d'un système quasi-1D.

Avant d'étudier le contenu de cet article, je tiens à préciser que je n'ai pas participé à l'élaboration de tous les résultats dans cet article (et que je ne commenterai donc

[1] Fernão Vistulo de Abreu était un des étudiants de Benoît Douçot

[2] Je ne mentionnerai dorénavant plus que je fais référence à cet article.

quasiment pas), à savoir : la section III.B qui traite des points fixes de type Luttinger généralisé, et l'annexe, qui démontre la conservation des symétries du système le long des flots de RG. De plus, je vais expliquer ce travail dans l'ordre chronologique, qui n'est pas celui de l'article (en espérant que cela donne un autre éclairage au sujet).

La lettre[VD01] est uniquement basée sur l'étude du système bidimensionnel dont la surface de Fermi est représentée Fig. 1, qui est un carré avec des bords ronds[3]. Le diagramme de phase observé (dans un espace couplage de charge - couplage de spin, les Umklapps n'étant jamais considérés dans notre travail) est celui représenté sur la Fig. 5. Les flots des couplages normalisés[4], pour la phase onde de densité de charge (CDW) sont ceux de la Fig. 6, et ceux pour la phase SDW cédant la place à la phase SC, sont représentés Fig. 7 (dans les deux cas les parties rondes de la surface de Fermi ont été supprimées, et la surface de Fermi était donc un carré).

Les deux premières choses à faire étaient alors de préciser la nature exacte de la direction fixe CDW, et de la direction quasi-fixe intermédiaire SDW, ainsi que d'étudier leur stabilité. Pour cela, il était beaucoup plus simple (et justifié, voir plus loin) d'étudier une surface de Fermi composée d'un seul couple de parties plates en regard, i.e. de se ramener au système unidimensionnel de la Fig. 18. Notons toutefois que ce système est différent de celui étudié jusqu'à présent dans cette thèse (cf fin du chapitre 1), car ici la surface de Fermi possède des bords : seules les chaînes 1 à N existent (il n'y a par exemple pas de chaîne 0 identique à la chaîne N), et les chaînes ne sont par conséquent pas toutes équivalentes. (Notons que nous avons toujours étudié le système sans spin en premier, car les calculs étaient plus simples.) Les équations de RG (16) sont les mêmes que celles que nous avons déjà obtenues (cf Eqs. (4.4) et (4.5)), avec les fonctions f toujours égales à 1, et en n'oubliant pas que la somme sur α est ici restreinte par le fait que *tous* les numéros de chaînes apparaissant dans le membre de droite de (16) doivent appartenir à $\{1, \ldots, N\}$. Les flots des couplages pour ce modèle 1D sont représentés sur les figures 10 à 13 (pour des couplages initiaux donnant lieu à la phase SDW intermédiaire). Tous les couplages ne sont pas représentés sur ces flots, mais seulement certains couplages particuliers de type A, C et D (cf Fig. 9 pour une définition de ces couplages, qui ne sont que la généralisation de ce que nous avions vu pour le système à deux chaînes, chapitre 3, Fig. 3.1). Les couplages représentés par un rond et par un carré sont les couplages les plus grands et les plus petits, et il y a donc énormément de couplages entre ces deux valeurs. Le couplage représenté par un triangle est le seul qui survit à la fin du flot. Nous voyons donc que le système 1D reproduit bien la transition entre deux phases observée dans le cas 2D.

Les flots montrent que les couplages ne prennent pas des valeurs totalement arbitraires, mais sont répartis par paquets de couplages ayant quasiment tous la même valeur. Il était donc naturel de chercher des directions fixes hautement symétriques (cf section V.A.). La conclusion est que les direction fixes intermédiaires CDW et SDW

[3] Cette surface de Fermi est une idéalisation des vraies surfaces de Fermi observées expérimentalement, qui n'ont jamais des portions strictement plates.

[4] L'utilisation des couplages normalisés est expliquée en détail à la fin de la section II.B.

sont très proches de directions fixes où les couplages ont une symétrie SU(N), et que la direction fixe finale (dans le cas SDW→SC), qui ne fait intervenir que les chaînes 1 et N du bord, a une symétrie SU(2). Les valeurs des couplages pour ces directions fixes sont données dans les tableaux II et III. La terminologie $(+,+)$ (pour CDW) et $(+,-)$ (pour SDW) fait référence aux signes des couplages initiaux (G^c,G^s).

J'ai ensuite étudié la stabilité linéaire de ces directions fixes (section VI.A), ce qui demandait de trouver le spectre (valeurs propres et leurs dégénérescences) de matrices $2N^2 \times 2N^2$. Ceci n'était faisable analytiquement que grâce à la très haute symétrie des directions fixes. Le résultat est indiqué dans le tableau VII. Le résultat est que la direction fixe SU(N) $(+,-)$ est instable, à cause de la présence de valeurs propres plus grandes que 1, valant $1 + 2/N^2 + \ldots$, alors que la direction fixe SU(N) $(+,+)$ (et SU(N) spinless) est marginale (valeurs propres 1). Ces résultats expliquent donc une partie des résultats numériques : l'instabilité de la direction fixe SDW. L'interprétation des directions propres associées à ces valeurs propres 1 (ou presque 1) est donnée en VI.B : elles connectent la direction fixe SU(N) aux diverses directions fixes SU($N-1$) obtenues en éteignant une des chaînes. Enfin, pour compléter l'étude de stabilité des cas $(+,+)$ et spinless, j'ai effectué une étude de stabilité non linéaire (section VI.C), qui a révélé que ces directions fixes sont elles-aussi instables (pour N fini, et marginales pour N infini) , ce que j'ai bien vérifié numériquement (l'instabilité étant beaucoup plus faible que dans le cas $(+,-)$, il faut prendre de petites valeurs de N pour la détecter). Ces études de stabilité ont en particulier montré que les directions fixes SU(N) sont marginalement instables à la limite $N \to \infty$, et que par conséquent, pour le système bidimensionnel, la physique de basse énergie est déterminée par ces directions fixes, et non les directions fixes atteintes en toute fin de flot.

La physique de basse énergie étant donc celle des directions fixes intermédiaires, il était intéressant de donner une image physique de celles-ci, ce que nous avons fait dans la section V.C. Nous avons montré qu'il n'y a pas de séparation spin-charge-couleur pour ces directions fixes SU(N) de type CDW et SDW (la couleur est l'indice de chaîne).

La direction fixe $(+,+)$ possède en fait une symétrie plus large que prévue : SU(2N) et non SU(2)×$SU(N)$ (le SU(2) étant le SU(2) de spin), et le Hamiltonien lui correspondant n'est autre que celui du modèle Gross-Neveu SU($2N$) à symétrie chirale. Ce système possède un mode de charge non gappé, et tous les autres modes (spin-couleur) sont gappés.

L'étude de la direction fixe $(+,-)$ a été effectué en étudiant l'action effective captant la physique des fluctuations de grande longueur d'onde des modes (a priori sans masse) associés au paramètre d'ordre naturel obtenu par champ moyen (cf Eq. (71)).[5]

[5]L'écriture sous la forme de l'Eq. (70) du Hamiltonien effectif, est dû à la relation $D^c = -3D^s$ valable quand N est infini, qui indique que l'interaction peut s'écrire uniquement dans le canal particule trou triplet. Nous renvoyons le lecteur à la section A.4 (en particulier le dernier paragraphe) pour les détails.

Nous oublions volontairement les modes gappés qui ne jouent pas un grand rôle dans la limite de basse énergie. Le phason $\theta(x)$ est bien un mode sans masse (ce qui assure le respect de la symétrie chirale, et donc aussi le respect du théorème Mermin-Wagner), mais la magnétisation locale $\boldsymbol{n}(x)$ a un gap (qui devient nul quand $N \to \infty$), bien que la symétrie par rapport aux rotations dans l'espace des spins est préservée. Le gap de spin ainsi obtenu à N fini n'existe pas à la limite $N \to \infty$ que nous devons prendre pour retrouver la physique d'une surface de Fermi continue.

Afin d'avoir une interprétation plus physique des flots de RG, nous avons aussi calculé et analysé les flots des fonctions de réponse, dans la section V.B, afin de déterminer quelle instabilité l'emporte, i.e. quelle susceptibilité est la plus grande. La figure 25 montre bien que pour les conditions initiales $(+,-)$, la susceptibilité maximale pour la direction fixe intermédiaire, est de type particule-trou triplet, autrement dit on a bien une onde de densité de spin. Et finalement, c'est la supraconductivité singulet (susceptibilité particule-particule singulet), de type d-wave qui l'emporte. Les équations de flot pour les fonctions de réponse sont données sans justification dans l'article. Je ne démontrerai pas ces équations dans mon manuscrit de thèse, en partie pour des raisons de place. Mais surtout, je pense que les notations graphiques intuitives de Feynman, les détails donnés dans le chapitre sur la renormalisation (chapitre 2, ainsi que la littérature dans le domaine (sur la renormalisation des opérateurs composites, autre nom des fonctions de réponse, voir par exemple le livre d'Itzykson et Zuber [IZ85], ou tout autre livre de théorie des champs), doivent permettre de démontrer ces équations sans trop de difficultés. Par contre, j'ai indiqué dans l'annexe A, section A.4, comment écrire les interactions dans les représentations singulet-triplet, qui sont naturelles car les canaux singulet et triplet ne se mélangent pas, à cause de l'invariance par rotation dans l'espace de spin. Ceci permet donc une diagonalisation partielle des équations de flot, et offre l'avantage d'une interprétation physique simple (CDW, SDW, supra singulet ou triplet).

Tout ce que nous avons fait jusqu'ici est une étude précise des directions fixes de symétrie $\mathrm{SU}(N)$. Néanmoins, il est clair quand on regarde les flots que les couplages ne vérifient pas cette symétrie exactement. La relative stabilité ou instabilité des directions fixes intermédiaires, bien que proches de celles de symétrie $\mathrm{SU}(N)$, n'a donc pas encore été totalement comprise. C'est pourquoi nous avons cherché à fournir une autre explication, et ceci est l'objet de la section IV. L'idée générale est très simple. Dans le régime intermédiaire (SDW ou CDW), la contribution au flot des couplages provient presque uniquement du canal de Peierls (voir Fig. 15 où est représenté le rapport contribution pp sur contribution pt, qui devient vite faible). Il est donc légitime de se concentrer sur l'approximation RPA (Random Phase Approximation) des flots de RG, qui consiste à ne garder les contributions que d'un seul canal (par exemple particule-trou pour ce qui nous intéresse ici, puisque les phases CDW et SDW ont des paramètres d'ordre de ce type). On peut alors étudier les directions fixes que possèdent ces flots, ainsi que leur stabilité (partie IV.A). Puis on peut chercher à voir l'influence de petits termes dans le canal de Cooper sur ces directions fixes (partie IV.B). Cette deuxième façon de voir les choses donne un autre éclairage sur les résultats précédents, en expliquant très

simplement certaines choses générales, comme les valeurs et les dégénérescences des valeurs propres du tableau VII, dans la limite $N \to \infty$. C'est entre autres pour cette raison que nous avons choisi de présenter, dans l'article, l'étude des directions fixes par cette méthode de RPA pt perturbée par le canal pp (alors que c'est la dernière chose que nous avons comprise !), car elle donne une vision globale et simple de tout le reste. Remarquons de plus que nous avons maintenant la justification du passage de 2D à 1D. En effet, les bords ronds ne contribuent que dans le canal de Cooper, et sont donc une perturbation de plus par rapport à la RPA, mais le schéma général n'est pas modifié. Les couplages entre les deux paires de parties plates en regard sont eux aussi de type Cooper, et deviennent donc pour la même raison négligeables. Ce qui nous laisse deux systèmes 1D quasi indépendants, et justifie donc notre approche.

Nous avons aussi ajouté une section sur la compétition entre la limite N grand, et le rétablissement de symétrie dans les flots de RG, pour le modèle de Gross-Neveu anisotrope. Cette section est une application des idées développées tout au long de l'article, bien que les motivations physiques (le modèle considéré) n'aient pas vraiment de rapport avec le reste de l'article. Ce qui est prouvé dans cette section, c'est qu'une interprétation naïve des flots de RG montrerait que le RG à une boucle prédit le rétablissement de symétrie dans la limite N infini. Néanmoins, une étude attentive de ces flots révèle que le RG à une boucle nous avertit lui-même qu'il ne faut plus croire en ses prédictions, parce que le rétablissement de symétrie se fait soit dans un régime de couplage fort (et le RG n'est plus valable), soit dans l'infra-rouge lointain (ce qui en rend l'observation impossible physiquement).

Conclusion

Nous avons étudié quelques aspects de la physique des systèmes de fermions fortement corrélés en deux dimensions (d'espace). Pour cela, nous avons utilisé le groupe de renormalisation, dans ses formes les plus simples, c'est-à-dire le RG dans la version de théorie des champs, et celui dit de "cut-off scaling". Notre travail peut être divisé en deux parties. L'une concerne les flots de renormalisation pour un système de fermions dont la surface de Fermi possède des portions plates en regard.[6] Ce sujet ne rentre pas complètement dans le cadre fixé par le titre de ma thèse. Néanmoins, ce que nous avons appris à ce propos nous a été utile pour l'autre partie de ma thèse, qui en est le cœur, à savoir les déformations de la surface de Fermi sous l'effet des interactions.

Une surface de Fermi carrée avec des coins arrondis est une approximation grossière des surfaces de Fermi observées dans le cas des supras HTC de type cuprate. Une telle surface de Fermi comporte néanmoins quelques ingrédients essentiels de la physique, notamment la propriété d'emboîtement[7] (nesting), propice à la formation d'ondes de densité. En particulier, nous avons vu comment les flots de RG traduisent la naissance d'une phase de type onde de densité de spin dans un tel système. Notons que la présence d'une telle phase est la bienvenue, puisque sur les diagrammes de phase des supras HTC, l'antiferromagnétisme (qui n'est autre qu'une SDW piégée sur le réseau) semble être intimement lié à la supraconductivité (voir notamment le travail de [Zha97] dans lequel les paramètres d'ordre antiferromagnétique et supraconducteur sont unifiés en une seule symétrie SO(5)). Dans un travail antérieur [VD01], Fernão Vistulo de Abreu et Benoît Douçot avaient observé, numériquement, l'instabilité de cet état SDW qui cédait la place à de la supraconductivité à plus basse énergie. Ce scénario semblait donc tout à fait intéressant dans l'optique des supras HTC, et nous avons cherché à comprendre plus précisément son origine ainsi que sa pertinence physique. Ce problème a été analysé de deux manières. Nous avons mené une étude de stabilité linéaire et non linéaire,[8] de la direction fixe hautement symétrique (correspondant à l'état SDW) approchée dans les flots de RG, et avons montré son instabilité. L'origine

[6] La surface de Fermi n'est rien d'autre qu'un carré avec des coins arrondis.

[7] Une surface de Fermi est dite emboîtée s'il existe une portion finie de celle-ci qui, après avoir été translatée d'un vecteur (dit vecteur d'emboîtement), se superpose exactement à une autre portion de la surface de Fermi.

[8] Précisons que toutes nos études ont été faites sur un système plus simple que la surface de Fermi carrée : nous n'avons considéré que deux segments plats en regard, et nous sommes donc ramenés à de la physique unidimensionnelle.

de cette instabilité a été comprise, et provient du nombre fini de patchs utilisés pour discrétiser la surface de Fermi. C'est donc un effet numérique et non physique. Ces considérations nous ont servi dans les études de la surface de Fermi, car là aussi, certains comportements observés numériquement provenaient d'effets de discrétisation, et notre expérience nous a permis de détecter leur origine très rapidement. Nous avons de plus confirmé cette interprétation en donnant une vision générale de l'instabilité, en étudiant l'effet de petits termes, dans le canal de Cooper, sur les flots dans l'approximation RPA (dans le canal particule-trou). Notre travail a donc montré l'irrelevance, du point de vue physique, de ce scénario, et a réconcilié les résultats numériques de [VD01] avec l"'ancienne sagesse" de [ZYD97], à savoir que la physique de basse énergie est décrite par l'onde de densité de spin.

Notons que la transition vers un état supraconducteur a été obtenu par Zheleznyak et al, mais pour cela, les contributions du canal particule-trou sont supprimées, une fois que le cut-off atteint une valeur telle que la courbure de la surface de Fermi, négligée dans la région de haute énergie des flots, se fait sentir (autrement dit la surface de Fermi perd sa propriété d'emboîtement à basse énergie). Il serait intéressant de reprendre cette étude avec la vision que nous avons développée lors de l'étude de la surface de Fermi, où le canal pt n'est pas éteint aussi brusquement, mais où les différentes interactions deviennent non pertinentes les unes après les autres (dans le schéma simple que nous avons utilisé, et dans lequel chaque interaction est brutalement découplée). Un tel programme serait un raffinement de celui de Zheleznyak et al, même s'il serait encore loin d'être parfait puisque les différents découplages sont décrits par une approximation logarithmique. Je pense que les résultats à la clef sont très similaires de ceux de Zheleznyak et al. Une autre direction dans laquelle nous pourrions poursuivre nos recherches serait de prendre en compte les Umklapps, y compris dans le cas dopé. Zheleznyak et al ont montré que les Umklapps ne changent pas grand chose à la physique du demi-remplissage. Il serait intéressant de voir ce qui se passe hors du demi-remplissage, ce que nous devrions être capables de faire, puisqu'une partie de notre travail sur la surface de Fermi des systèmes quasi-1D portait sur un tel cas, et permettait la description de l'extinction des Umklapps qui deviennent non pertinents à basse énergie.

L'essentiel de mon travail de thèse a consisté à implémenter les idées du groupe de renormalisation pour l'étude des déformations de la surface de Fermi, sous l'effet des interactions entre les électrons. Même si l'on ne cherche pas à utiliser le RG, le calcul des déformations de la surface de Fermi dans un cadre purement perturbatif n'est pas sans poser des problèmes. Il faut en effet utiliser, comme cela a été compris dès les années 60, une théorie des perturbations dite renormalisée, c'est-à-dire qui utilise comme point de départ un état de particules indépendantes qui n'est pas le fondamental libre, mais dont la surface de Fermi est la surface de Fermi habillée. Les difficultés proviennent donc de ce qu'il faut appliquer la théorie des perturbations à un état inconnu a priori, et qui ne peut être déterminé que de façon autocohérente à la fin du calcul. Nous avons commencé par appliquer ces idées sur le cas le plus simple possible (une chaîne de fermions sans spin), et en utilisant la méthode elle aussi la plus simple possible (la

théorie des perturbations indépendante du temps de Mécanique Quantique[9]). L'état fondamental en interaction, et donc aussi la surface de Fermi habillée, sont trouvés en imposant que l'énergie soit minimale, i.e. notre approche est de type variationnelle. Ceci nous a permis de donner une intuition physique des déformations de la surface de Fermi. Les interactions responsables de ces déformations sont celles pour lesquelles toutes les particules ne peuvent pas être choisies à la surface de Fermi (et par conséquent n'existent pas à énergie strictement nulle).

L'étape suivante a été de montrer comment on peut retrouver les résultats ainsi obtenus dans le cadre de la théorie des perturbations du problème à N corps, où la quantité physique fondamentale qui est calculée est la self-énergie. Nous avons ainsi compris que la théorie des perturbations standard effectuée en partant du propagateur libre ne redonne pas les résultats attendus. L'idée qui vient immédiatement à l'esprit est de recommencer le calcul en prenant non pas le propagateur libre calculé pour le fondamental libre, mais un propagateur libre calculé pour un état excité ayant une surface de Fermi d'essai, et d'ajuster celle-ci tout comme nous l'avons fait précédemment. Une telle méthode redonne, à l'ordre deux, la bonne surface de Fermi habillée. Néanmoins, cette façon de faire ne survit pas aux problèmes qui apparaissent à partir de l'ordre trois, qui proviennent de répétitions répétées de self-énergie, et qui se traduisent par des divergences infra-rouges. L'origine physique de ces divergences est l'instabilité de l'état excité que l'on cherche à perturber. Il est en fait nécessaire d'avoir recours à des contre-termes, qui permettent de modifier le Hamiltonien libre servant de départ à la théorie des perturbations.[10] Celui-ci est alors choisi pour que la surface de Fermi libre qui lui correspond soit la surface de Fermi habillée (inconnue à cette étape). Il est alors possible d'effectuer la théorie des perturbations, en ajustant ordre par ordre les contre-termes, de sorte que la surface de Fermi reste fixée à sa forme habillée.

Le RG de théorie des champs ne peut pas être utilisé pour améliorer les résultats purement perturbatifs ainsi obtenus, car la relation entre les surfaces de Fermi nue et habillée est obtenue en étudiant les propriétés du propagateur à énergie nulle, et par conséquent aucune échelle d'énergie typique n'apparaît dans une telle relation.[11] Il est néanmoins possible d'utiliser la théorie du "cut-off scaling", car le cut-off ultra-violet apparaît explicitement. Grâce à l'intuition physique gagnée auparavant, nous avons montré comment on peut utiliser cette méthode pour calculer la surface de Fermi habillée d'un système quasi-1D, en utilisant une hypothèse simplificatrice mais physiquement raisonnable. A savoir que la surface de Fermi n'est renormalisée qu'à haute énergie, par les couplages irrelevants (par rapport à la physique de basse énergie), et que l'on peut arrêter sa renormalisation une fois que le cut-off est de l'ordre de l'échelle d'énergie maximum définie par la courbure de la surface de Fermi. Nous avons appliqué cette méthode pour des systèmes demi-remplis, proches du demi-remplissage, ainsi que loin du demi-remplissage. Dans le cas du demi-remplissage, et pour des couplages de type Hubbard, nous avons déduit le diagramme de phase, et avons en particulier obtenu un régime confiné ainsi qu'un régime non confiné. La transition entre ces deux régimes

[9] A l'ordre 2 en perturbation.

[10] Le fondamental de cet Hamiltonien est alors stable.

[11] Ce RG est toutefois utile pour calculer les poids de quasi-particules.

est obtenue quand le saut inter-chaînes *renormalisé ou non renormalisé* est de l'ordre du gap de charge existant dans le système unidimensionnel (la raison étant qu'au point de transition, ces deux sauts renormalisés ou non sont du même ordre de grandeur, à un facteur numérique proche de l'unité près).

En fait, le confinement et le déconfinement des électrons ne peut pas être simplement vu sur la forme de la surface de Fermi. Il faudrait, pour pouvoir dire des choses plus précises, calculer des quantités physiques mesurées expérimentalement, comme la conductivité transverse ou longitudinale, ce que nous n'avons pas eu le temps de faire. C'est une voie qu'il nous faudra explorer dans le futur. Une des faiblesses de notre approche tient au type de groupe de renormalisation que nous avons utilisé. Il ne me paraît pas évident, par exemple, d'étendre notre calcul au cas du modèle de Hubbard 2D qui est le modèle supposé décrire les supras HTC, parce que la forme de la surface de Fermi ne se prête pas à un calcul aussi simple, et parce que les différences de vitesse de Fermi le long de la surface de Fermi, que nous avons négligées dans notre travail, ne sont plus du tout négligeables dans un tel cas à cause des singularités de van Hove. De plus, nous avons dû utiliser des approximations pour savoir quand arrêter la renormalisation de la surface de Fermi, ainsi que pour décrire le découplage de certaines interactions (approximation logarithmique). Je pense que ces faiblesses peuvent être surmontées si l'on utilise un groupe de renormalisation Wilsonien. Le prix à payer est bien sûr une plus grande complexité des calculs, et c'est pour cela que nous avons préféré commencer par des méthodes simples appliquées à un cas simple. L'expérience et la compréhension que nous avons gagnées nous serviront sans aucun doute dans de futurs travaux basés sur un RG de type Wilsonien. Je tiens de plus à noter que l'un des inconvénients majeurs de nos calculs, à savoir leur caractère perturbatif, pourra peut-être être éliminé. Les calculs par le groupe de renormalisation Wilsonien sont en effet basés sur des équations exactes. Bien évidemment ces équations sont si générales et si complexes (ce sont des équations fonctionnelles) qu'elles ne servent absolument à rien, tant que l'on a pas recours à des approximations. L'une d'entre elles est le développement en constante de couplage, et elle redonne bien évidemment la théorie des perturbations. Mais il est aussi possible de considérer des troncations de l'action effective, qui ne sont pas des approximations perturbatives (le statut de ces troncations n'est me semble-t-il d'ailleurs pas bien connu, puisqu'aucun paramètre petit n'apparaît). Ces idées ont été mises en œuvres et développées par Wetterich [Wet91, Wet93a, Wet93b] (voir aussi [BTW02] pour une revue), puis par d'autres groupes. Je crois que c'est un des axes vers lesquels nous pourrions nous orienter à l'avenir. Notre travail pourrait ainsi être généralisé et cela pourrait donner lieu à une description plus réaliste de la physique des systèmes de fermions fortement corrélés. Pour finir, disons que la description du passage entre la théorie de haute énergie essentiellement fermionique, et celle de basse énergie essentiellement bosonique, doit aussi pouvoir être menée à bien dans un tel cadre. C'est néanmoins un programme ambitieux et qui demandera certainement des efforts considérables avant d'arriver à maturité.

Annexe A

A propos des différentes paramétrisations des interactions

Nous nous intéressons dans cette annexe aux différentes façons de paramétrer les interactions entre les électrons. L'expression de base dont nous partirons sera celle de l'équation (1.33), limite de basse énergie d'une interaction de la forme (1.30).

A.1 Notations de la "g-ologie"

Commençons par faire le lien entre nos notations et celles de la "g-ologie", dans laquelle les couplages sont notés g_1, g_2, g_3 et g_4 (cf tableaux 1.1 page 31 à 1.4 page 32). Rappelons que nous ne considérons pas les interactions de type g_4. Nous utiliserons pour faire la comparaison les notations utilisés par Sólyom [Sól79] (voir sa formule (2.4)). La paramétrisation de Sólyom est plus générale que la nôtre, car elle peut traiter les interactions non invariantes par rotation dans l'espace de spin, grâce à la séparation entre les couplages $g_{\|}$ (les spin initiaux sont parallèles : $\uparrow\uparrow$ et $\downarrow\downarrow$), et les couplages $g_{\perp}$ (les spin initiaux sont anti-parallèles : $\uparrow\downarrow$ et $\downarrow\uparrow$). Nous retrouverons nos interactions si nous prenons $g_{\|} = g_{\perp}$.

Le cas des Umklapps est trivial, car les deux paramétrisation sont les mêmes, et nous obtenons donc l'identification $U = g_3$. Passons au cas de g_1 et g_2. Afin d'effectuer la comparaison, nous utilisons le principe de Pauli pour anticommuter les deux derniers opérateurs a et b du terme en g_1, ce qui met les opérateurs dans le même ordre que pour le terme en g_2 (mais les indices de spin ne sont pas les mêmes). Nous pouvons alors écrire l'interaction obtenue sous forme matricielle, de la façon suivante :

$$-g_1 \times \begin{array}{c} \\ |\uparrow\uparrow\rangle_{\text{out}} \\ |\uparrow\downarrow\rangle_{\text{out}} \\ |\downarrow\uparrow\rangle_{\text{out}} \\ |\downarrow\downarrow\rangle_{\text{out}} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} |\uparrow\uparrow\rangle_{\text{in}} & |\uparrow\downarrow\rangle_{\text{in}} & |\downarrow\uparrow\rangle_{\text{in}} & |\downarrow\downarrow\rangle_{\text{in}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} . \tag{A.1}$$

Les notations sont les suivantes : dans les kets, le spin de gauche correspond toujours au fermion droit et celui de droite au fermion gauche. Les kets in représentent les deux particules qui sont détruites, et les kets out celles qui sont créées, lors d'une interaction de type $c^\dagger_{\mathrm{R}} c^\dagger_{\mathrm{L}} c_{\mathrm{L}} c_{\mathrm{R}}$. Ainsi, à l'intersection de la ligne $|\tau\rho\rangle_{\text{out}}$ et de la colonne $|\tau'\rho'\rangle_{\text{in}}$, est inscrit le coefficient du terme en $c^\dagger_{\mathrm{R},\tau} c^\dagger_{\mathrm{L},\rho} c_{\mathrm{L},\rho'} c_{\mathrm{R},\tau'}$. Cette matrice n'est rien d'autre que la matrice de permutation qui échange les deux spins, et que nous noterons $\mathbb{P}$. L'interaction en g_2 s'écrit quant à elle sous la forme matricielle

$$g_2 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = g_2 \mathbb{I}. \tag{A.2}$$

Au final, nous obtenons donc $g_2\mathbb{I} - g_1\mathbb{P}$.

Dans nos notations de couplage de charge et de spin, le terme de charge donne trivialement $G^{\mathrm{c}}\mathbb{I}$, mais il reste à exprimer le produit de matrices de Pauli du couplage de spin. C'est la que la notation matricielle simplifie les calculs (jusque là, cette notation était inutile, car tout était très simple). Nous laissons au lecteur le soin de faire les calculs et de montrer que l'on a la relation suivante : $\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'} = 2\mathbb{I}_{\rho,\tau'}\mathbb{I}_{\tau,\rho'} - \mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'}$. Ainsi le terme d'interaction de spin s'écrit : $G^{\mathrm{s}}(2\mathbb{P} - \mathbb{I})$, d'où une interaction totale de la forme : $(G^{\mathrm{c}} - G^{\mathrm{s}})\mathbb{I} + 2G^{\mathrm{s}}\mathbb{P}$. Il vient donc in fine l'identification suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_2 = G^{\mathrm{c}} - G^{\mathrm{s}} \\ g_1 = -2G^{\mathrm{s}} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} G^{\mathrm{c}} = g_2 - \frac{1}{2} g_1 \\ G^{\mathrm{s}} = -\frac{1}{2} g_1 \end{array} \right. . \tag{A.3}$$

A.2 A propos des Umklapps

Dans l'équation (1.33), nous n'avons mis qu'un couplage de charge pour les Umklapps, et non un couplage de spin, ou ce qui revient au même, mais simplifie la discussion, un couplage d'échange (faisant intervenir $\mathbb{P}$) de la forme :

$$\frac{1}{2NL} \sum_{I,J,\delta} \sum_{k,k',q} \sum_{\tau,\tau'} \sum_{\rho,\rho'} U^{\mathrm{e}}_{\delta}(I,J) \mathbb{I}_{\tau,\rho'}\mathbb{I}_{\rho,\tau'}\ c^\dagger_{\mathrm{R},I+\delta,\tau}(k+q) c^\dagger_{\mathrm{R},J-\delta,\rho}(k'-q) c_{\mathrm{L},J,\rho'}(k') c_{\mathrm{L},I,\tau'}(k). \tag{A.4}$$

Ce terme est en effet équivalent à un terme direct (faisant intervenir $\mathbb{I}$). Pour le voir, il suffit :

- d'anticommuter les deux opérateurs d'annihilation.
- de faire les changements de variables $q \leftarrow q + k' - k$ et $\delta \leftarrow \delta + J - I$.
- d'échanger les variables $k \leftrightarrow k'$, $I \leftrightarrow J$ et $\rho' \leftrightarrow \tau'$.

L'interaction (A.4) peut donc se réécrire :

$$\frac{1}{2NL} \sum_{I,J,\delta} \sum_{k,k',q} \sum_{\tau,\tau'} \sum_{\rho,\rho'} U^{\mathrm{e}}_{\delta+I-J}(J,I) \mathbb{I}_{\tau,\tau'} \mathbb{I}_{\rho,\rho'} \, c^{\dagger}_{\mathrm{R},I+\delta,\tau}(k+q) c^{\dagger}_{\mathrm{R},J-\delta,\rho}(k'-q) c_{\mathrm{L},J,\rho'}(k') c_{\mathrm{L},I,\tau'}(k). \tag{A.5}$$

Il est donc tout à fait inutile de considérer un couplage de spin dans le cas des Umklapps.

A.3 Valeurs des couplages pour une interaction de type Hubbard

Le terme d'interaction de Hubbard s'écrit, en terme des opérateurs de champ "physique" (cf équation (1.13)) sous la forme :

$$H_{\mathrm{int}}^{\mathrm{Hubbard}} = \mathcal{U} \int \mathrm{d}x \, \psi^{\dagger}_{\mathrm{phys},\uparrow}(x) \, \psi^{\dagger}_{\mathrm{phys},\downarrow}(x) \, \psi_{\mathrm{phys},\downarrow}(x) \, \psi_{\mathrm{phys},\uparrow}(x). \tag{A.6}$$

On écrit alors que $\psi_{\mathrm{phys}} = \psi_{\mathrm{R}} + \psi_{\mathrm{L}}$, et on obtient ainsi 16 termes (nous avons déjà fait ce genre de calcul à la section 1.2.2). L'interaction de type Umklapp est (schématiquement, en oubliant l'intégrale sur x, etc) :

$$\mathcal{U} \left(\psi^{\dagger}_{\mathrm{R},\uparrow} \psi^{\dagger}_{\mathrm{R},\downarrow} \psi_{\mathrm{L},\downarrow} \psi_{\mathrm{L},\uparrow} + \text{ h. c.} \right). \tag{A.7}$$

Cette expression n'est pas très agréable, car il n'y a pas de somme sur les spins. Pour la faire apparaître, on remarque qu'en anticommutant les opérateurs de destruction et de création, on obtient le même terme, puisque les deux signes moins se compensent, mais que l'expression a changé (inversion des spins). L'interaction ci-dessus peut donc s'exprimer comme la demi-somme d'elle-même et de l'expression avec les fermions anticommutés :

$$\frac{\mathcal{U}}{2} \left(\psi^{\dagger}_{\mathrm{R},\uparrow} \psi^{\dagger}_{\mathrm{R},\downarrow} \psi_{\mathrm{L},\downarrow} \psi_{\mathrm{L},\uparrow} + \psi^{\dagger}_{\mathrm{R},\downarrow} \psi^{\dagger}_{\mathrm{R},\uparrow} \psi_{\mathrm{L},\uparrow} \psi_{\mathrm{L},\downarrow} + \text{ h. c.} \right). \tag{A.8}$$

On trouve donc simplement que $U = g_3 = \mathcal{U}$, après avoir constaté que pour une interaction locale, on peut ajouter à l'expression précédente (sans rien changer) l'expression nulle suivante :

$$\frac{\mathcal{U}}{2} \left(\psi^{\dagger}_{\mathrm{R},\uparrow} \psi^{\dagger}_{\mathrm{R},\uparrow} \psi_{\mathrm{L},\uparrow} \psi_{\mathrm{L},\uparrow} + \psi^{\dagger}_{\mathrm{R},\downarrow} \psi^{\dagger}_{\mathrm{R},\downarrow} \psi_{\mathrm{L},\downarrow} \psi_{\mathrm{L},\downarrow} + \text{ h. c.} \right). \tag{A.9}$$

On obtient 4 termes pour les interactions de type g_1 ou g_2, et nous laissons le lecteur vérifier que la matrice correspondante est :

$$\mathcal{U} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{U}(\mathbb{I} - \mathbb{P}). \tag{A.10}$$

Nous avons donc le résultat (cf section A.1 ci-dessus) : $g_2 = g_1 = \mathcal{U}$, soit, en utilisant les couplages de charge et de spin, et en rappelant le résultat pour les Umklapps :

$$G^{\mathrm{c}} = \frac{\mathcal{U}}{2}, \quad G^{\mathrm{s}} = -\frac{\mathcal{U}}{2} \quad \text{et} \quad U = \mathcal{U}. \tag{A.11}$$

A.4 Paramétrisation singulet et triplet des interactions

Lorsque l'on étudie les flots de fonction de réponse, la paramétrisation naturelle est celle en terme de singulet et de triplet, qui a une interprétation physique naturelle. La fonction de réponse particule-trou de type singulet (resp. triplet) correspond à l'onde de densité de charge (resp. de spin), et celle particule-particule, à la supraconductivité, singulet ou triplet. Nous allons dans cette section démontrer le dictionnaire donné dans le tableau IV de notre article [DVD02].

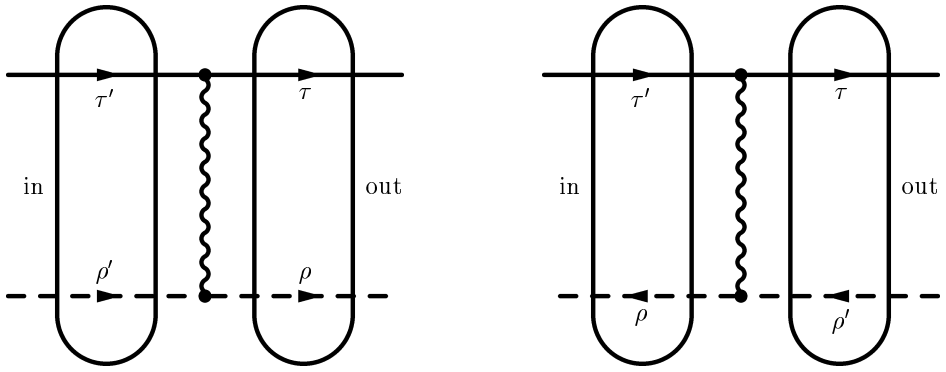
Les paramétrisations singulet et triplet sont en fait différentes dans les canaux pp et pt, car le groupe des rotations n'agit pas de la même façon dans les deux cas. Commençons par le canal pp, qui est connu dès les premiers cours sur le spin, en Mécanique Quantique. L'interaction de type $c^\dagger_{\mathrm{R},\tau} c^\dagger_{\mathrm{L},\rho} c_{\mathrm{L},\rho'} c_{\mathrm{R},\tau'}$, peut être considérée comme une propagation d'une paire de particule (une R et une L), comme indiqué sur la figure A.1(a). La matrice de l'interaction, dans la base utilisée à la section A.1, est :

$$\begin{pmatrix} G^{\mathrm{c}} + G^{\mathrm{s}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G^{\mathrm{c}} - G^{\mathrm{s}} & 2G^{\mathrm{s}} & 0 \\ 0 & 2G^{\mathrm{s}} & G^{\mathrm{c}} - G^{\mathrm{s}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G^{\mathrm{c}} + G^{\mathrm{s}} \end{pmatrix}, \tag{A.12}$$

et elle n'est pas diagonale. Par contre, on peut passer à la base habituelle singulet-triplet, déjà écrite dans l'équation 1.25, et on peut montrer que dans cette base, la matrice de l'interaction s'écrit :

$$\begin{pmatrix} G^{\mathrm{c}} - 3G^{\mathrm{s}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G^{\mathrm{c}} + G^{\mathrm{s}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G^{\mathrm{c}} + G^{\mathrm{s}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G^{\mathrm{c}} + G^{\mathrm{s}} \end{pmatrix}, \tag{A.13}$$

Voyons maintenant ce qui se passe pour le canal particule-trou, où cette fois l'interaction peut être considérée comme détruisant une paire particule-trou (RL), et



(a) Canal pp (b) Canal pt

Fig. A.1 – Représentation graphique de l'interprétation d'une interaction comme la destruction d'une paire particule-particule ou particule-trou.

en en recréant une autre, voir figure A.1(b). Cette réinterprétation vient simplement de la réécriture de l'interaction sous la forme :

$$c^\dagger_{\mathrm{R},\tau} c^\dagger_{\mathrm{L},\rho} c_{\mathrm{L},\rho'} c_{\mathrm{R},\tau'} = \left(c^\dagger_{\mathrm{R},\tau} c_{\mathrm{L},\rho'} \right) \times \left(c_{\mathrm{R},\tau'} c^\dagger_{\mathrm{L},\rho} \right) . \tag{A.14}$$

Si on utilise la base des spins 1/2, avec comme base in, les kets $|\tau'\rho\rangle'$ ($'$ est utilisé pour différencier cette base de la base habituelle utilisée jusqu'ici) et comme base out celle des kets $|\tau\rho'\rangle'$, la matrice de l'interaction s'écrit :

$$\begin{pmatrix} G^{\mathrm{c}} + G^{\mathrm{s}} & 0 & 0 & 2G^{\mathrm{s}} \\ 0 & G^{\mathrm{c}} - G^{\mathrm{s}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G^{\mathrm{c}} - G^{\mathrm{s}} & 0 \\ 2G^{\mathrm{s}} & 0 & 0 & G^{\mathrm{c}} + G^{\mathrm{s}} \end{pmatrix} , \tag{A.15}$$

Le but du jeu est à nouveau de diagonaliser cette matrice, la base propre étant la base singulet-triplet (pt) recherchée. Nous laissons le lecteur faire ce calcul (trivial). Il est clair que si la seule chose qui nous intéresse est de connaître la matrice de l'interaction dans cette base, et non la base elle-même, il suffit de trouver les valeurs propres. On obtient très facilement que la matrice d'interaction sera :

$$\begin{pmatrix} G^{\mathrm{c}} + 3G^{\mathrm{s}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G^{\mathrm{c}} - G^{\mathrm{s}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G^{\mathrm{c}} - G^{\mathrm{s}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G^{\mathrm{c}} - G^{\mathrm{s}} \end{pmatrix} , \tag{A.16}$$

qui est équivalente à la matrice obtenue dans le canal pp, à condition de faire $G^{\mathrm{s}} \leftarrow -G^{\mathrm{s}}$. Nous allons donner une interprétation intuitive, qui donnera la base singulet-triplet.

Pour cela, nous allons étudier les opérateurs $c^\dagger_{\mathrm{R},\tau} c_{\mathrm{L},\rho'}$. Le seul ket (à une phase près) sur lequel l'action de *tous* ces opérateurs donne un résultat non nul est le ket :

$$|0\rangle' = c^\dagger_{\mathrm{L},\uparrow} c^\dagger_{\mathrm{L},\downarrow} |0\rangle, \tag{A.17}$$

où $|0\rangle$ est le vide (état à 0 particule). Ce ket est un état singulet. L'action de ces opérateurs sur $|0\rangle'$ est :

$$c^\dagger_{\mathrm{R},\uparrow} c_{\mathrm{L},\downarrow} |0\rangle' = -|\uparrow\uparrow\rangle, \tag{A.18}$$
$$c^\dagger_{\mathrm{R},\downarrow} c_{\mathrm{L},\uparrow} |0\rangle' = |\downarrow\downarrow\rangle, \tag{A.19}$$
$$c^\dagger_{\mathrm{R},\uparrow} c_{\mathrm{L},\uparrow} |0\rangle' = |\uparrow\downarrow\rangle, \tag{A.20}$$
$$c^\dagger_{\mathrm{R},\downarrow} c_{\mathrm{L},\downarrow} |0\rangle' = -|\downarrow\uparrow\rangle, \tag{A.21}$$

où les kets du membre de droite sont les kets habituels, donnant le spin de l'électron R et celui de l'électron L.

Pour trouver les combinaisons linéaires qui donnent des opérateurs singulet ou triplet, il suffit alors de réécrire les kets habituels du membre de droite, sous forme singulet ou triplet, en fonction de ces opérateurs. Ceci fonctionne bien car, comme nous l'avons dit, $|0\rangle'$ est un état singulet. On obtient donc immédiatement en regardant les deux premières équations, que les états $|\uparrow\downarrow\rangle'$ et $|\downarrow\uparrow\rangle'$ sont des états triplets, ce que l'on savait aussi immédiatement en voyant que la matrice d'interaction était déjà proportionnelle à l'identité dans ce sous-espace de dimension 2. L'autre état triplet sera : $(|\uparrow\uparrow\rangle' - |\downarrow\downarrow\rangle')/\sqrt{2}$, et l'état singulet sera quant à lui : $(|\uparrow\uparrow\rangle' + |\downarrow\downarrow\rangle')/\sqrt{2}$. Nous laissons le lecteur se convaincre que cette base diagonalise bien la matrice d'interaction.

Dans le canal particule trou, on peut écrire l'interaction paramétrisée en singulet triplet sous une forme simple et qui offre une autre vision, à l'aide de matrices de Pauli. Celles-ci vérifient en effet la relation : $\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\rho'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\tau'} = 2\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'} - \mathbb{I}_{\rho,\tau'}\mathbb{I}_{\tau,\rho'}$. Ceci implique en particulier que : $\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\tau'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\rho'} = 3\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'} - 2\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\rho'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\tau'}$. Nous obtenons donc que l'interaction est $G^{\mathrm{c}} + 3G^{\mathrm{s}}$ pour le terme $\mathbb{I}_{\tau,\tau'}\mathbb{I}_{\rho,\rho'}$, et $-2G^{\mathrm{s}}$ pour le terme $\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\rho'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\tau'}$. Or nous savons que l'opérateur identité est égale à la somme du projecteur sur l'état singulet et du projecteur sur le sous-espace triplet. Nous ne réobtenons donc le bon coefficient devant le projecteur triplet (à savoir $G^{\mathrm{c}} + 3G^{\mathrm{s}}$) que si $\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\rho'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\tau'}$ est proportionnel au projecteur triplet. Plus précisément, le projecteur triplet est égal à $\boldsymbol{\sigma}_{\tau,\rho'} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\tau'}/2$, et on a donc aussi que le projecteur singulet est simplement $\mathbb{I}_{\rho,\tau'}\mathbb{I}_{\tau,\rho'}/2$, i.e. $\mathbb{P}/2$. Le Hamiltonien d'interaction s'écrit au final :

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{int}} \sim & -\frac{G^{\mathrm{c}} + 3G^{\mathrm{s}}}{2} \left(c^\dagger_{\mathrm{R},\tau} \mathbb{I}_{\tau,\rho'} c_{\mathrm{L},\rho'} \right) \times \left(c^\dagger_{\mathrm{L},\rho} \mathbb{I}_{\rho,\tau'} c_{\mathrm{R},\tau'} \right) \\ & -\frac{G^{\mathrm{c}} - G^{\mathrm{s}}}{2} \left(c^\dagger_{\mathrm{R},\tau} \boldsymbol{\sigma}_{\tau,\rho'} c_{\mathrm{L},\rho'} \right) \times \left(c^\dagger_{\mathrm{L},\rho} \boldsymbol{\sigma}_{\rho,\tau'} c_{\mathrm{R},\tau'} \right). \end{aligned} \tag{A.22}$$

Cette interaction a une interprétation physique simple, puisque c'est la somme d'une interaction densité de charge - densité de charge et une interaction densité de spin - densité de spin, écrite comme produit des composantes à $2k_{\mathrm{F}}$ de la transformée de Fourier de ces densités.

Liste des tableaux

1.1 Processus de basse énergie de type g_4, ne faisant intervenir que des fermions droits. Ces processus existent à énergie nulle, puisque l'impulsion transférée est nulle. 31

1.2 Cette interaction ne peut être de basse énergie que si l'impulsion transférée, i.e. $2k_{\mathrm{F}}^{(0)}$ est un multiple de 2π, soit $k_{\mathrm{F}}^{(0)} = \pi$. Ceci correspond au remplissage complet. 31

1.3 Processus Umklapp (g_3) envoyant deux particules gauche sur la branche de droite. Cette interaction est de basse énergie à condition que $k_{\mathrm{F}}^{(0)} = \pi/2$, c'est-à-dire si on est au demi-remplissage. 32

1.4 Processus de diffusion vers l'avant (g_2), et processus équivalent $c_R^\dagger c_L^\dagger c_R c_L$ de diffusion vers l'arrière (g_1). Ces processus existent toujours à basse énergie. 32

2.1 Résumé de l'algèbre de spin, pour les calculs à une boucle du vertex. . 49

3.1 Les couplages et les différentes bulles intervenant dans leur renormalisation. 110

Table des figures

1.1 Réseau carré bidimensionnel. Les ronds vides représentent les sites libres, et les ronds pleins les sites occupés. On note t_x et t_y les amplitudes tunnel pour sauter d'un site à l'autre dans les directions x et y. 22

1.2 Relation de dispersion pour un système quasi-1D avec $t_\perp/t_\parallel = 0.2$. Sont aussi représentées différentes surfaces de Fermi, et leur projections sur le plan xy. Nous avons de plus indiqué quelques lignes à p_y=constante, sur la surface de Fermi, afin d'insister sur le caractère quasi-1D. 24

1.3 Relation de dispersion pour un système isotrope (i.e. $t_\perp/t_\parallel = 1$). Sont aussi représentées les projections de différentes surfaces de Fermi sur le plan xy. Nous avons ici utilisé un quadrillage pour montrer le caractère isotrope. 25

1.4 Représentation de la relation de dispersion linéarisée. Les paramètres sont : $\mu^{(0)} = 0$ et $t_\perp/t_\parallel = 0.6$. 26

1.5 Diagrammes de Feynman pour les trois types d'interactions. Les traits pleins représentent des fermions R, et les pointillés des fermions L. Les chiffres 1, 2, 3 et 4 correspondent à des interactions écrites sous la forme (schématique) : $c_4^\dagger c_3^\dagger c_2 c_1$. 35

1.6 Représentation, dans la première zone de Brillouin, de quatre exemples d'interactions, pour $N = 8$ chaînes. Les flèches en pointillés montrent comment exploiter la périodicité de la zone de Brillouin, i.e. travailler avec les entiers modulo N. 36

2.1 Propagateurs libres dans l'espace réel ainsi que dans l'espace de Fourier. Les propagateurs R sont représentés par des traits pleins, et les L par des pointillés. Les indices τ et ρ sont des indices de spin. 38

2.2 Représentation de l'interaction. 40

2.3 Exemple de contraction de Wick 41

2.4 Graphe de Feynman, dit tadpole, pour le propagateur R à une boucle. . 42

2.5 Equation de Dyson graphique, pour les fermions R. 42

2.6 Sur cette figure, nous indiquons la façon dont nous régularisons la théorie en mettant un cut-off Λ. 43

2.7 Ordre 0 pour la fonction de Green G^{II} 43

2.8 Bulle particule-particule, et contractions de Wick correspondantes. . . . 45

2.9 Bulle particule-trou, et contractions de Wick correspondantes. 46

2.10 Diagrammes de Feynman pour les différents contre-termes. Les chiffres i à l'intérieur des carrés, hexagones et cercles, donnent l'ordre $^{(i)}$ des contre-termes correspondants. 56

2.11 Flot à 1 boucle de la constante de couplage de spin, pour une valeur de haute énergie négative ($\tilde{g}^{\mathrm{s}} = -0.1$). 61

2.12 Flot à 1 boucle de la constante de couplage de spin, pour une valeur de haute énergie positive ($\tilde{g}^{\mathrm{s}} = +0.1$). L'asymptote verticale à $t' = 2.5$ est représentée en pointillés. 61

2.13 Diagramme de phase à 1 boucle, dans l'espace $(g^{\mathrm{c}}, g^{\mathrm{s}})$. Les ronds noirs représentes les points fixes, pour les trajectoires de RG considérées. . . 62

2.14 Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour la self-énergie, ne faisant pas intervenir de contre-terme. 65

2.15 Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour la self-énergie, avec insertion de contre-terme de l'ordre précédent. 66

2.16 Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour la self-énergie, dus aux nouveaux contre-termes. 67

2.17 Domaines d'intégration pour les intégrales apparaissant dans le calcul du sunrise. Les hachures verticales et en biais représentent les domaines interdits par les deux premières inégalités. Le domaine d'intégration est ensuite trouvé en prenant la zone non hachurée comprise entre les pointillés (resp. les points-tirés) si $k \geqslant 0$ (resp. $k \leqslant 0$). 68

2.18 Densité spectrale de la self-énergie à 2 boucles (sunrise). 68

2.19 Graphe de Feynman pour le vertex (pour le jeu de pattes externes habituel, mais l'expression associée est indépendante de celui-ci), faisant intervenir le nouveau contre-terme $\delta g^{(3)}$. 72

2.20 Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour le vertex, dus au contre-terme de type $\delta g^{(2)}$ insérés dans une bulle pp. 73

2.21 Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour le vertex, dus au contre-terme de type $\delta g^{(2)}$ insérés dans une bulle pt. 73

2.22 Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour le vertex, dus à une insertion de self-énergie sur la branche droite de la bulle pt. 75

2.23 Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour le vertex, dus à une insertion de self-énergie sur la branche droite de la bulle pt. 76

2.24 Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour le vertex, dus à une insertion de self-énergie sur la branche droite de la bulle pt. 77

2.25 Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour le vertex, dus à une insertion de self-énergie sur la branche droite de la bulle pt. 78

2.26 Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour le vertex, de type bulles en série. 79

2.27 Diagrammes de Feynman à 2 boucles pour le vertex, de type parquet . 80

2.28 Bulle donnant une contribution g_4. 80

2.29 Série de bulles g_4, donnant une contribution finie. 81

2.30 Diagrammes de Feynman à 2 boucles de type parquet, faisant intervenir une bulle de type g_4. 81

2.31 Flot à 2 boucles de la constante de couplage de spin, pour une valeur de haute énergie négative ($\tilde{g}^{\mathrm{s}} = -0.1$). 82

2.32 Flot à 2 boucles de la constante de couplage de spin, pour une valeur de haute énergie positive ($\tilde{g}^{\mathrm{s}} = +0.1$). Les droites représentent les asymptotes de chacune des courbes. 82

2.33 Diagramme de phase à 2 boucles, dans l'espace $(g^{\mathrm{c}}, g^{\mathrm{s}})$. Les ronds noirs représentent les points fixes, pour les trajectoires de RG considérées. . . 83

3.1 Interactions de basse énergie pour l'échelle. 90

3.2 Interprétation graphique des déformations de la surface de Fermi, pour une énergie en interaction de la forme : $E^{(1)} = (k_{\mathrm{F},0} - k_{\mathrm{F},0}^{(0)})^2 + (A - B)(k_{\mathrm{F},0} - k_{\mathrm{F},0}^{(0)})$, avec $B \geqslant A$. 94

3.3 Allure de la courbe $-x^2 \ln(|x|)$. 96

3.4 Figure de gauche : le branchement adiabatique ne voit pas les croisements de niveaux, et on reste sur l'état provenant du fondamental libre, qui est un état excité du système en interaction. Figure de droite : ce que la théorie des perturbations devrait faire. On suit le fondamental en interaction, donc on passe de l'état obtenu à partir du fondamental libre à d'autres états obtenus à partir d'états excités libres. 99

3.5 Exemple de graphe posant des problèmes si on utilise un état excité pour faire la théorie des perturbations : c'est le sunrise avec une insertion de self-énergie, par exemple sur le propagateur interne R. 101

3.6 Système constitué d'un anneau couplé à une impureté. Les énergies représentées sont celles avant que le couplage tunnel V ne soit branché. . 105

3.7 Résolution graphique de l'équation (3.47), pour $N = 12$, des énergies E_i = -2.5, -1.5, ...7.5, 8.5 et $V^2/N = 0.5$. Un zoom de l'intersection proche de l'origine est inséré en bas à droite. Nous avons représentés les asymptotes verticales par des pointillés. 106

3.8 Différence entre les énergies en interaction et les énergies sans interaction en fonction des énergies sans interaction, en échelle ln-ln. Ici, $N = 10^4$, $E_{\rm m} = 1$ et $V = 0.1$. Les courbes en pointillés sont les asymptotes, correspondant pour l'asymptote horizontale, à la valeur d'un demi-écart entre niveau, i.e. $\ln(E_{\rm m}/(2N-1))$, et pour l'autre à ce que donne la théorie des perturbations, i.e. c'est la courbe d'équation $y = \ln[V^2/(2N)] - x$. . 107

3.9 Composantes de l'état $|*\rangle_V$ sur les états d'énergie E_i les plus proches de 0. Ici, $N = 10^4$, $E_{\rm m} = 1$ et $V = 0.1$. La figure insérée est la même courbe, pour toutes les énergies strictement positives, en échelle ln-ln (on prend le logarithme de la valeur absolue des composantes sur $|i\rangle$). La droite en pointillés est celle d'équation $y = -\ln(\pi N) - x$. 108

3.10 Représentation des flots pour l'équation RPA avec un seul couplage et l'énergie caractéristique δ. 113

3.11 Comparaison des flots pour la régularisation avec η (en pointillés), et le flot "par morceaux" (en trait plein). 114

3.12 Flot des couplages pour une condition initiale de type Hubbard (avec tous les couplages égaux à 0.1), et pour $\Delta k_{\rm F}/\Lambda = 0.01$ (cette échelle est donc atteinte pour $t = \ln(100) \simeq 4.6$, et d'après la figure (d), pour $s \simeq 1$). Pour toutes ces figures, nous n'avons pas représenté trop de points, afin qu'elles restent lisibles. Mais bien sûr, le pas d'intégration est beaucoup plus petit que l'écart entre deux points. 117

3.13 Flot des couplages normalisés et de la norme pour une condition initiale où tous les couplages valent 0.1, sauf F qui est nul et le reste le long du flot. Les flots sont donnés pour deux valeurs de $\Delta k_{\rm F}/\Lambda$. 119

3.14 Tracé des fonctions $-\ln\left(\frac{|\nu^2-(2v_{\rm F}\Delta k_{\rm F})^2|}{(2v_{\rm F}\Lambda)^2}\right) \pm \frac{2v_{\rm F}\Delta k_{\rm F}}{\nu}\ln\left(\frac{|\nu^2-(2v_{\rm F}\Delta k_{\rm F})^2|}{(2v_{\rm F}\Delta k_{\rm F})^2}\right)$ et leur approximation logarithmique, en fonction de $t = \ln(2v_{\rm F}\Lambda/\nu)$. Le signe + (resp. -) correspond à la branche 0 (resp. π), et à la figure (a) (resp. (b)). Nous avons choisi $\Delta k_{\rm F}/\Lambda = 0.01$, i.e. $\ln(\Lambda/\Delta k_{\rm F}) \simeq 4.6$. . . . 122

3.15 Résultats pour le propagateur, pour une condition initiale de type Hubbard. 123

3.16 Résultats pour le propagateur, pour une condition initiale où le couplage F est nul et les autres valent 0.1. 124

3.17 Résumé des différences entre la théorie des champs et le cut-off scaling. 127

3.18 Flot de l'écart entre les impulsions de Fermi dans le cas $\Delta k_{\mathrm{F}}/\Lambda_0 = 0.01$, et avec des couplages initiaux tous égaux à 0.1, sauf $F = 0$. 132

4.1 Bulle particule-particule renormalisant les couplages $G_\delta^{\mathrm{c(s)}}(I, J)$ pour le système à N chaînes. 137

4.2 Bulle particule-trou renormalisant les couplages $G_\delta^{\mathrm{c(s)}}(I, J)$ pour le système à N chaînes. 137

4.3 Tadpole pour le système à N chaînes. 139

4.4 Sunrise pour le système à N chaînes. 140

4.5 Contributions des Umklapps à la self-énergie. 143

4.6 Contributions des Umklapps aux flots des couplages de charge et de spin.144

4.7 Contributions des Umklapps aux flots des couplages de charge et de spin - 4 premiers graphes. 145

4.8 Contributions des Umklapps aux flots des couplages de charge et de spin - 4 derniers graphes. 146

A.1 Représentation graphique de l'interprétation d'une interaction comme la destruction d'une paire particule-particule ou particule-trou. 161

Bibliographie

[AGD63] A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov, and I. Ye Dzyaloshinskii, *Methods of quantum field theory in statistical physics*, Prentice Hall, New York, 1963.

[AM70] A. A. Abrikosov and A. A. Migdal, J. Low Temp. Phys. **3** (1970), 519.

[AM76] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid state physics*, Saunders, 1976.

[And67] P. W. Anderson, Phys. Rev. Lett. **18** (1967), 1049.

[And90] ———, Phys. Rev. Lett. **64** (1990), 1839.

[And91] ———, Phys. Rev. Lett. **67** (1991), 2092.

[And95] ———, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **92** (1995), 6668.

[Arr00] E. Arrigoni, Phys. Rev. B **61** (2000), 7909.

[AYH70] P. W. Anderson, G. Yuval, and D. R. Hamann, Phys. Rev. B **1** (1970), 4464.

[BBT95] D. Boies, C. Bourbonnais, and A.-M. S. Tremblay, Phys. Rev. Lett. **74** (1995), 968.

[BCS57] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108** (1957), 1175.

[BGLG01] S. Biermann, A. Georges, A. Lichtenstein, and T. Giamarchi, Phys. Rev. Lett **87** (2001), 276405.

[BJM+80] K. Bechgaard, C. S. Jacobsen, K. Mortensen, H. J. Pedersen, and N. Thorup, Solid State Commun. **33** (1980), 1119.

[BM86] J. G. Bednorz and K. A. Müller, Z. Phys. B **64** (1986), 189.

[Bou85] C. Bourbonnais, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **119** (1985), 11.

[Bou93] ———, J. Phys. I (France) **3** (1993), 143.

[BTW02] J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich, Phys. Rept **363** (2002), 223.

[Col84] J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, 1984.

[CPA98] S. Capponi, D. Poilblanc, and E. Arrigoni, Phys. Rev. B **57** (1998), 6360.

[CPM96] S. Capponi, D. Poilblanc, and F. Mila, Phys. Rev. B **54** (1996), 17547.

[DD02] S. Dusuel and B. Douçot, submitted to Phys. Rev. B (2002), cond-mat/0208434.

[Dup98] N. Dupuis, Euro. Phys. J. B **3** (1998), 315.

[DVD02] S. Dusuel, F. Vistulo de Abreu, and B. Douçot, Phys. Rev. B **65** (2002), 94505.

[ET02] F. H. L. Essler and A. M. Tsvelik, Phys. Rev. B **65** (2002), 115117.

[Fab93] M. Fabrizio, Phys. Rev. B **48** (1993), 15838.

[FS96] D. Frenkel and B. Smit, *Understanding molecular simulation*, Academic Press, 1996.

[FST96] J. Feldman, M. Salmhofer, and E. Trubowitz, J. Stat. Phys. **84** (1996), 1209.

[FST98] ———, Comm. Pure Appl. Math. **51** (1998), 1133.

[FZ71] M. Fowler and A. Zawadowski, Solid State Comm. **9** (1971), 471.

[GGS00] A. Georges, T. Giamarchi, and N. Sandler, Phys. Rev. B **61** (2000), 16393.

[Gia97] T. Giamarchi, Physica B **230-232** (1997), 975.

[GL72] M. Gomes and J. H. Lowenstein, Nucl. Phys. B **45** (1972), 252.

[GML51] M. Gell-Mann and F. Low, Phys. Rev. **84** (1951), 350.

[Grü94] G. Grüner, Rev. Mod. Phys. **66** (1994), 1.

[Hal81] F. D. M. Haldane, J. Phys. C **14** (1981), 2585.

[HM93] A. Houghton and J. B. Marston, Phys. Rev. B **48** (1993), 7790.

[HM97] C. J. Halboth and W. Metzner, Z. Phys. B **102** (1997), 501.

[HM00] ———, Phys. Rev. B **61** (2000), 7364.

[HSFR01] C. Honerkamp, M. Salmhofer, N. Furukawa, and T. M. Rice, Phys. Rev. B **63** (2001), 35109.

[IZ85] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum field theory*, McGraw-Hill, 1985.

[Jér91] D. Jérome, Science **252** (1991), 1509.

[JS82] D. Jérome and H. J. Schulz, Adv. Phys. **31** (1982), 299.

[JTB81] C. S. Jacobsen, D. B. Tanner, and K. Bechgaard, Phys. Rev. Lett. **46** (1981), 1142.

[KL60] W. Kohn and J. M. Luttinger, Phys. Rev. **118** (1960), 41.

[KY98] J. Kishine and K. Yonemitsu, J. Phys. Soc. Jpn. **67** (1998), 2590.

[LAG01] K. Louis, J. V. Alvarez, and C. Gros, Phys. Rev. B **64** (2001), 113106.

[Lan57a] L. D. Landau, Sov. Phys. JETP **3** (1957), 920.

[Lan57b] ———, Sov. Phys. JETP **5** (1957), 101.

[Lan59] ———, Sov. Phys. JETP **35** (1959), 70.

[Le 01] K. Le Hur, Phys. Rev. B **63** (2001), 165110.

[LK02] S. Ledowski and P. Kopietz, cond-mat/0208517.

[Lut60] J. M. Luttinger, Phys. Rev. **119** (1960), 1153.

[Lut63] ———, J. Math. Phys. **4** (1963), 1154.

[Lut79] A. Luther, Phys. Rev. B **19** (1979), 320.

[LW68] E. H. Lieb and F. Y. Wu, Phys. Rev. Lett. **20** (1968), 1445.

[LW02] ———, cond-mat/0207529.

[MGAS+98] J. Moser, M. Gabay, P. Auban-Senzier, D. Jérôme, K. Bechgaard, and J. M. Fabre, Eur. Phys. J. B **1** (1998), 39.

[ML63] D. C. Mattis and E. H. Lieb, J. Math. Phys. **6** (1963), 304.

[NM02] A. Neumayr and W. Metzner, cond-mat/0208431.

[NO88] J. W. Negele and H. Orland, *Quantum many-particle systems*, Addison Wesley, 1988.

[Noj99] H. Nojiri, J. phys. Soc. Jpn. **68** (1999), 903.

[Noz63] P. Nozières, *Le problème à n corps.*, Dunod, 1963.

[PEM+96] D. Poilblanc, H. Endres, F. Mila, M. G. Zacher, S. Capponi, and W. Hanke, Phys. Rev. B **54** (1996), 10261.

[PF79] V. N. Prigodin and Yu. A. Firsov, Sov. Phys. JETP **49** (1979), 369.

[RST79] E. H. Rezayi, J. Sak, and S. Talukdar, Phys. Rev. B **19** (1979), 4757.

[RVW01] L. Rosa, P. Vitale, and C. Wetterich, Phys. Rev. Lett. **86** (2001), 958.

[Sch91] H. J. Schulz, Int. J. Mod. Phys. B **5** (1991), 57.

[SD95] Z.-X. Shen and D. S. Dessau, Phys. Rep. **253** (1995), 1.

[SDG+98] A. Schwartz, M. Dressel, G. Grüner, V. Vescoli, L. Degiorgi, and T. Giamarchi, Phys. Rev. B **58** (1998), 1261.

[Sha94] R. Shankar, Rev. Mod. Phys. **66** (1994), 129.

[Sól79] J. Sólyom, Adv. Phys. **28** (1979), 201.

[Tom50] S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. **5** (1950), 544.

[TS99] M. Tsuchiizu and Y. Suzumura, Phys. Rev. B **59** (1999), 12326.

[VD01] F. Vistulo de Abreu and B. Douçot, Phys. Rev. Lett. **86** (2001), 2866.

[VDH+98] V. Vescoli, L. Degiorgi, W. Henderson, G. Grüner, K. P. Starkey, and L. K. Montgomery, Science **281** (1998), 1181.

[Voi95] J. Voit, Rep. Prog. Phys. **58** (1995), 977.

[VV01] B. Valenzuela and M. A. H. Vozmediano, Phys. Rev. B **63** (2001), 153103.

[Wen90] X. G. Wen, Phys. Rev. B **42** (1990), 6623.

[Wet91] C. Wetterich, Nucl. Phys. B **352** (1991), 529.

[Wet93a] ———, Z. Phys. C **57** (1993), 451.

[Wet93b] ———, Z. Phys. C **60** (1993), 461.

[Wil75] K. G. Wilson, Rev. Mod. Phys. **47** (1975), 773.

[Wit78] E. Witten, Nucl. Phys. B **145** (1978), 110.

[Wzi93] P. Wzietek, J. Phys. I **3** (1993), 171.

[Zha97] S. C. Zhang, Science **275** (1997), 1089.

[ZS96] D. Zanchi and H. J. Schulz, Phys. Rev. B **54** (1996), 9509.

[ZS00] ———, Phys. Rev. B **61** (2000), 13609.

[ZSS95] V. Zlatić, K. D. Schotte, and G. Schliecker, Phys. Rev. B **52** (1995), 3639.

[ZYD97] A. T. Zheleznyak, V. M. Yakovenko, and I. E. Dzyaloshinskii, Phys. Rev. B **55** (1997), 3200.

Résumé : Nous étudions certains aspects de la physique des fermions en deux dimensions, pertinente pour les conducteurs organiques quasi unidimensionnels et les supraconducteurs à haute température critique. En particulier, nous nous intéressons au calcul de la surface de Fermi de systèmes électroniques en interaction, qui est une des informations cruciales du point de vue des propriétés de basse énergie de ces systèmes. Nous commençons par donner une interprétation énergétique, sur un toy model, de la déformation de la surface de Fermi due aux interactions entre électrons, en insistant sur la nécessité d'une méthode auto-cohérente. Puis nous expliquons comment faire le même calcul dans un cadre de théorie des champs, et comment améliorer les résultats grâce à un groupe de renormalisation. Nous appliquons ce formalisme aux composés quasi unidimensionnels. Un des chapitres est un résumé d'un article dans lequel nous analysons la pertinence d'une transition d'un état onde de densité de spin à un état supraconducteur, observée dans les flots de renormalisation d'un modèle de fermions à deux dimensions, dont la surface de Fermi est un carré avec des coins arrondis.

Mots clés : Surface de Fermi, fermions fortement corrélés, conducteurs organiques quasi unidimensionels, groupe de renormalisation.

Summary : We study some aspects of the physics of fermions in two dimensions, which is relevant for quasi one-dimensional organic conductors and for high temperature superconductors. We focus on the computation of the Fermi surface of interacting electronic systems, which is one of the crucial informations concerning the low-energy properties of these systems. We first give an energetic explanation of the interaction induced deformation of a toy model's Fermi surface, and we insist on the necessity of a self-consistent method. Then we explain how to perform the same calculation in a field-theoretical framework and how to improve the results thanks to a renormalization group. We apply this formalism to the quasi one-dimensional compounds. One of the chapters is a summary of an article in which we analyse the relevance of a transition between a spin-density wave state and a superconducting state, which is observed in renormalization flows of a two-dimensional fermionic model whose Fermi surface is a square with rounded corners.

Keywords : Fermi surface, strongly correlated electrons, quasi one-dimensional organic conductors, renormalization group.