



HAL
open science

Etude de la géométrie optimale des zones de contrôle dans des problèmes de stabilisation

Pascal Hébrard

► **To cite this version:**

Pascal Hébrard. Etude de la géométrie optimale des zones de contrôle dans des problèmes de stabilisation. Mathématiques [math]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2002. Français. NNT : 2002NAN10188 . tel-01746730v2

HAL Id: tel-01746730

<https://theses.hal.science/tel-01746730v2>

Submitted on 13 Dec 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Etude de la géométrie optimale des zones de contrôle dans des problèmes de stabilisation

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 8 novembre 2002

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré – Nancy I
(Spécialité Mathématiques appliquées)

par

Pascal HEBRARD

Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	Mark Asch	Professeur, Université de Toulon et du Var
	Marc Schoenauer	Directeur de Recherche, INRIA Rocquencourt
<i>Examineurs :</i>	Francis Conrad	Professeur, Université Henri Poincaré, Nancy
	Bopeng Rao	Professeur, Université Louis Pasteur, Strasbourg
	Marius Tucsnak	Professeur, Université Henri Poincaré, Nancy
<i>Directeur de thèse :</i>	Antoine Henrot	Professeur, Ecole des Mines de Nancy, INPL

Mis en page avec la classe TheseCRIN.

Remerciements

Je tiens, tout d'abord, à remercier les rapporteurs de cette thèse : Mark Asch, Marc Schoenauer mais aussi Pedro Freitas avec qui j'ai pu avoir de nombreuses discussions fructueuses à Nancy comme à Lisbonne.

Bopeng Rao, mais également Francis Conrad et Marius Tucsnak qui m'ont enseigné les e.d.p. en maîtrise en en DEA, ont accepté d'être examinateurs qu'ils en soient ici remerciés.

Cette thèse a été encadrée par Antoine Henrot, je voudrais lui exprimer ici toute ma gratitude, pour sa disponibilité, ses conseils et tout simplement pour tout ce que j'ai appris et compris pendant ces trois ans.

Je pense également aux (très) jeunes docteurs Edouard et Manu. Merci aussi à tout ceux qui ont fait le voyage pour être avec moi en ce jour de soutenance. Enfin, merci pour tout à Agathe bien plus forte qu'un bon paquet de kilomètres...

Cette thèse a été financée par une Bourse de Docteur Ingénieur du CNRS et de la Région Lorraine.

Table des matières

Introduction	1
1 Présentation du problème et choix des critères	5
1.1 Propriétés des solutions	5
1.1.1 Régularités des solutions	5
1.1.2 Valeurs propres de l'opérateur \mathcal{A}	7
1.2 Le taux de décroissance exponentielle	8
1.2.1 Cas monodimensionnel	8
1.2.2 Cas bidimensionnel	8
1.3 Influence du paramètre k	10
1.3.1 Phénomène d'overdamping	10
1.3.2 Dérivabilité à l'origine	11
1.3.3 Définition du critère J	12
1.4 Motivations physiques	14
2 Etude théorique des critères F et J	15
2.1 Etude du critère F	15
2.1.1 Existence	15
2.1.2 Propriétés générales de F	18
2.1.3 Optimisation des K premiers modes propres	19
2.1.4 Extensions possibles	27
2.2 Etude de J dans le cas monodimensionnel	28
2.2.1 Existence	28
2.2.2 Majoration et cas d'égalité	29
2.2.3 Résultats de non-existence	30
2.2.4 Propriétés de J	33
2.2.5 Cas d'un intervalle	36
2.3 Etude de J dans le cas bidimensionnel	42
2.3.1 Existence	42

2.3.2	Majoration et cas d'égalité	43
3	Etude théorique de la quantité géométrique g	47
3.1	Etude des rayons géométriques	47
3.1.1	Dépliage	48
3.1.2	Cas des rayons ouverts	50
3.1.3	Cas des rayons fermés	53
3.2	Une seconde expression de g	56
3.3	Calcul exact de g	57
3.3.1	Influence de l'angle α	57
3.3.2	Représentation du domaine ω	60
3.3.3	Rayons influents	61
3.3.4	Synthèse	64
3.4	Quelques familles de domaines ω	68
3.4.1	“La croix“	70
3.4.2	“La bande“	71
4	Les algorithmes génétiques	73
4.1	Principes de base des AG	73
4.2	Cas d'une fonctionnelle définie sur une partie de \mathbb{R}^N	75
4.3	Cas de l'optimisation de forme	77
4.3.1	Tableaux de bits	77
4.3.2	Représentation non structurée	79
5	Optimisation numérique de J dans le cas monodimensionnel	83
5.1	Cas d'un intervalle	83
5.1.1	Calcul de $J(\alpha, l)$	83
5.1.2	Mise en place d'un AG	85
5.1.3	Résultats	86
5.2	Cas de deux intervalles	88
5.2.1	Calcul de $J(\alpha_1, \alpha_2, l_1)$	88
5.2.2	Mise en place d'un AG	89
5.2.3	Résultats	91
6	Optimisation numérique de J et de g dans le cas bidimensionnel	95
6.1	Evaluation numérique des critères	95
6.1.1	Calcul de $g(\omega)$	95
6.1.2	Calcul de $J(\omega)$	96

6.2	Optimisation numérique de J	101
6.2.1	Représentation par tableaux de bits	101
6.2.2	Représentation non structurée	103
6.3	Optimisation numérique de g (et de $\min\{J,g\}$)	106
6.3.1	Représentation par tableaux de bits	106
6.3.2	Représentation non structurée	108
6.3.3	Optimisation numérique de $\min\{J,g\}$	110
7	Optimisation numérique de l'abscisse spectrale μ	111
7.1	Evaluation numérique de μ	111
7.2	Allure des courbes $k \mapsto \mu(k,\omega)$	113
7.3	Erreur engendrée par le critère J	114
7.4	Optimisation de μ pour d'autres critères	116
7.4.1	Contraintes $ \omega = l$ et $k = k^*(\omega)$	116
7.4.2	Contrainte $k \cdot \omega = a$	118
7.4.3	Contraintes $k \cdot \omega = a$ et $ \omega \leq 1/2$	119
	Conclusions et perspectives	121
	Annexe	123
	Bibliographie	131

Introduction

Ce travail traite d'un problème de stabilisation interne de l'équation des ondes à l'aide d'un feedback en vitesse. Nous étudions les solutions du problème :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + 2k\chi_\omega(x)u_t(x,t) = 0, & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

où Ω est un ouvert connexe de \mathbb{R}^d , $d = 1$ ou 2 , χ_ω est la fonction indicatrice de ω un sous-ensemble mesurable de Ω et k un réel positif. Le feedback est donc limité à un sous ensemble ω du domaine Ω .

Le but de cette étude est de choisir la zone de contrôle ω pour que l'énergie $E(t)$ des solutions de ce problème, d'une part décroisse exponentiellement et uniformément, et d'autre part que cette décroissance soit la plus rapide possible. C'est-à-dire, que le taux de décroissance exponentielle, quantité indépendante des perturbations initiales u_0 et u_1 , définie par :

$$\tau(k,\omega) = \sup\{\tau' \text{ tel que } \exists C > 0 \mid \forall (u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), E(t) \leq CE(0)e^{-2\tau' t}\} \quad (2)$$

soit strictement positif et le plus grand possible. Ce taux est très lié aux valeurs propres de l'opérateur des ondes amorties \mathcal{A} associé au problème (1).

Dans le cas monodimensionnel ($d = 1$), S. Cox et E. Zuazua ont montré dans [9] que si χ_ω est à variation bornée *i.e.* la zone de contrôle ω est la réunion d'un nombre fini d'intervalles, alors le taux de décroissance est égal à l'opposé de l'abscisse spectrale de l'opérateur \mathcal{A} :

$$\tau(k,\omega) = -\mu(k,\omega) = -\sup\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in Sp(\mathcal{A})\} \quad (3)$$

Dans le cas bidimensionnel ($d = 2$), il n'existe pas de résultat théorique dans le cas d'un contrôle $k\chi_\omega(x)$ discontinu, mais pour un domaine Ω et un contrôle $a(x)$ réguliers, G. Lebeau a montré dans [25] que :

$$\tau(a) = \min\{-\mu(a), C(a)\} \quad (4)$$

Où $\mu(a)$ est toujours l'abscisse spectrale de l'opérateur \mathcal{A} , et où $C(a)$ est définie par :

$$C(a) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \inf_{\rho_0 \in \Gamma} \frac{1}{t} \int_0^t a(\gamma_{\rho_0}(s)) ds \right\} \quad (5)$$

Où $\gamma_{\rho_0} : s \mapsto \gamma_{\rho_0}(s)$ est le rayon géométrique au sens de Melrose-Sjöstrand (cf [28]) issu de $\gamma_0 = (x_0, \vec{u}_0)$ et où Γ désigne l'ensemble des rayons géométriques.

Dans les deux cas, nous étudierons l'abscisse spectrale $\mu(k, \omega)$ et en dimension 2, nous étudierons la quantité suivante dite géométrique :

$$g(\omega) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \inf_{\rho_0 \in \Gamma} \frac{1}{t} \int_0^t \chi_\omega(\gamma_{\rho_0}(s)) ds \right\}. \quad (6)$$

Remarquons que même si l'égalité n'est pas prouvée dans le cas général, l'inégalité suivante est toujours vérifiée :

$$\tau(k, \omega) \leq \min\{ -\mu(k, \omega), k.g(\omega) \} \quad (7)$$

A cause du phénomène d'overdamping, les grandes valeurs de k ne donnent pas un taux de décroissance intéressant. Nous nous limiterons donc aux petites valeurs de k et nous effectuons un développement au premier ordre de μ par rapport à k au voisinage de l'origine :

$$\mu(k, \omega) \simeq \mu(0, \omega) + k \frac{\partial \mu}{\partial k}(0, \omega) \quad (8)$$

et nous posons :

$$J(\omega) = -\frac{\partial \mu}{\partial k}(0, \omega) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\Omega} \chi_\omega(x) \phi_n^2(x) dx \quad (9)$$

où les ϕ_n sont les fonctions propres du laplacien-dirichlet sur Ω normalisées dans $L^2(\Omega)$.

Nous allons dans ce travail :

- étudier et maximiser J dans le cas monodimensionnel,
- étudier et maximiser successivement les trois critères J , g et $\min\{J, g\}$ dans le cas bidimensionnel.

Voici un plan détaillé de ce rapport :

- **Dans le premier chapitre**, nous rappelons les résultats de la théorie du contrôle des e.d.p. sur le taux de décroissance et le phénomène d'overdamping et nous définissons les différents critères : τ , μ , J , g et enfin F critère pour lequel on ne prend en compte qu'un nombre fini de valeurs propres de l'opérateur \mathcal{A} :

$$F(\omega) = - \left(\frac{\partial}{\partial k} \min\{Re(\lambda) \mid \lambda \in \{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \dots, \lambda_{k_N}\} \subset Sp(\mathcal{A})\} \right)_{k=0} \quad (10)$$

soit :

$$F(\omega) = \min_{1 \leq n \leq N} \int_{\Omega} \chi_{\omega}(x) \phi_{k_n}^2(x) dx \quad (11)$$

Ce critère F est souvent utilisé par les ingénieurs pour choisir les zones de contrôles.

- **Dans le deuxième chapitre**, nous étudions les critères F et J . Nous montrons en particulier que, dans le cas monodimensionnel, le critère F admet un maximum unique et symétrique ω^* et que cet optimum possède au plus $\max\{k_1, k_2, \dots, k_N\}$ composantes connexes. Nous montrons également que la méthode qui consiste à ne contrôler que les N premiers modes du système est mauvaise car le $(N + 1)$ -ième mode est alors très mal contrôlé.

En ce qui concerne le critère J , nous étudions les cas d'égalité dans l'inégalité : $J(\omega) \leq |\omega|$. En dimension 1, il y a en a trois : $\omega = \emptyset$, $\omega = [0, 1]$ ou $1 - \omega = \omega^c$ ce qui implique que $|\omega| = 1/2$. En dimension 2, les domaines qui vérifient l'égalité $J(\omega) = |\omega|$ dans le cas $\Omega = (0, 1)^2$ sont d'aire 0, 1/4, 1/2, 3/4 ou 1, nous les caractérisons complètement.

Nous prouvons l'existence du maximum $J_N(l)$ du critère J pour les domaines ω de longueur l qui sont la réunion d'au plus N intervalles. En revanche, nous obtenons pour l différent de 0, 1/2 ou 1 le résultat de non-existence suivant :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \exists K > N \mid J_K(l) > J_N(l) \quad (12)$$

- **Dans le troisième chapitre**, nous étudions la quantité géométrique g dans le cas du carré $\Omega = (0, 1)^2$. Nous donnons quelques propriétés des rayons géométriques γ_{ρ_0} , puis nous montrons le théorème d'inversion suivant :

$$g(\omega) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \inf_{\rho_0 \in \Gamma} \frac{1}{t} \int_0^t \chi_{\omega}(\gamma_{\rho_0}(s)) ds \right\} = \inf_{\rho_0 \in \Gamma} \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \chi_{\omega}(\gamma_{\rho_0}(s)) ds \right\} \quad (13)$$

Il nous permet de mettre au point un algorithme de calcul **exact** de la quantité géométrique dans le cas d'un domaine ω obtenu à partir d'un maillage régulier de Ω .

- **Dans le quatrième chapitre**, nous présentons les algorithmes génétiques. En effet, ce sont les algorithmes qui conviennent le mieux à nos problèmes d'optimisation globale de critères le plus souvent non différentiables. Nous précisons les choix que nous avons été amenés à faire : pour l'optimisation d'une fonction définie sur une partie de \mathbb{R}^N et pour l'optimisation de forme : soit à l'aide d'algorithmes génétiques avec tableaux de bits, soit à l'aide d'algorithmes génétiques avec une représentation des individus non structurée à l'aide de sites de Voronoi.

- **Dans le cinquième chapitre**, nous exposons les résultats de l'optimisation numérique de J dans le cas monodimensionnel lorsque le contrôle est constitué d'un intervalle ($J_1(l)$) et de deux intervalles ($J_2(l)$). Les résultats obtenus ne sont pas intuitifs et permettent un gain conséquent

sur le taux de décroissance par rapport à des positions de contrôles plus naturelles tel que l'intervalle au centre de Ω .

• **Dans le sixième chapitre**, nous optimisons numériquement les critères J , g et $\min\{J,g\}$ dans le cas du carré $\Omega = (0,1)^2$. Ici, les algorithmes génétiques avec tableaux de bits donnent de meilleurs résultats pour ces problèmes que les algorithmes génétiques avec une représentation des individus non structurée. La situation est donc différente de celle décrite dans d'autres travaux, en élasticité par exemple.

On obtient également que la quantité géométrique $g(\omega)$ est en générale plus grande que le critère $J(\omega)$, si bien que les domaines optimaux pour le critère $\min\{J,g\}$ sont les domaines optimaux pour la quantité géométrique g .

• **Dans le septième et dernier chapitre**, nous évaluons, à l'aide de la méthode des éléments finis, l'abscisse spectrale $\mu(k,\omega)$. Ce qui nous permet de justifier l'usage du critère J comme approximation du taux de décroissance exponentiel. Nous étudions également les courbes $k \mapsto \mu(k,\omega)$. Pour une étude du spectre de l'opérateur \mathcal{A} en dimension 2, nous renvoyons à [1].

Chapitre 1

Présentation du problème et choix des critères

Nous nous intéressons au problème de la stabilisation uniforme des solutions de l'équation aux dérivées partielles suivante dite équation des ondes amorties :

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + 2k\chi_\omega(x)u_t(x,t) = 0, x \in \Omega, t > 0 \quad (1.1)$$

associée à la condition au bord de Dirichlet homogène :

$$u(x,t) = 0, x \in \partial\Omega, t > 0 \quad (1.2)$$

et aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega \\ u_t(x,0) = u_1(x), x \in \Omega \end{cases} \quad (1.3)$$

Nous considérons deux cas : ou bien Ω est un segment de \mathbb{R} et dans ce cas $\partial\Omega$ désigne ses extrémités. Ou bien Ω est un ouvert borné et connexe de \mathbb{R}^2 , et alors $\partial\Omega$ est sa frontière qui sera supposée de classe $C^{1,1}$ pour l'instant. Dans les deux cas, les inconnues de ce problème sont un sous ensemble mesurable ω de Ω de fonction indicatrice χ_ω et une constante positive k .

Remarquons tout d'abord que par changements de variables de type translations et homothéties (ce que nous détaillons dans un cas particulier dans la partie 1.4), il est toujours possible de se ramener aux équations (1.1), (1.2), (1.3) avec pour le cas monodimensionnel $\Omega = (0,1)$ et pour le cas bidimensionnel un ouvert Ω d'aire unité. Par conséquent, pour simplifier les notations et les équations, nous choisissons de considérer uniquement de tels domaines Ω .

1.1 Propriétés des solutions

1.1.1 Régularités des solutions

Classiquement, l'équation (1.1) s'écrit aussi sous la forme d'une équation vectorielle du premier ordre en temps :

$$U_t + \mathcal{A}U = 0 \quad (1.4)$$

Où $U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} = (u, u_t)^t$ ($.^t$ est l'opérateur de transposition) et où \mathcal{A} est l'opérateur défini par :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & -2k\chi_\omega \end{pmatrix} = \mathcal{A}_0 + k\mathcal{A}_1 \quad (1.5)$$

Avec \mathcal{A}_0 (l'opérateur des ondes non amorties) et \mathcal{A}_1 définis par :

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\chi_\omega \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

La théorie des opérateurs permet d'affirmer les résultats suivants :

Théorème 1.1.1 *Pour tout $(u_0, u_1) \in D = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$, le système (1.1)-(1.2)-(1.3) admet une unique solution u dite solution forte avec la régularité :*

$$u \in C([0, \infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0, \infty); L^2(\Omega))$$

Pour tout $(u_0, u_1) \in H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, le système (1.1)-(1.2)-(1.3) admet une unique solution u dite solution faible avec la régularité :

$$u \in C([0, \infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega))$$

Preuve : L'opérateur des ondes \mathcal{A}_0 , associé à la condition au bord de Dirichlet homogène, peut être considéré : ou bien comme un opérateur de $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ de domaine dense $D(\mathcal{A}_0) = D$; ou bien, par des arguments de prolongement par densité, comme un opérateur \mathcal{A}'_0 de $X = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ de domaine $D(\mathcal{A}'_0) = H$. Dans les deux cas, il génère un C^0 groupe d'isométries (cf, par exemple le chapitre X de [4]).

$k\mathcal{A}_1$ est un opérateur borné de H (resp. de X), par conséquent d'après le théorème sur la perturbation d'un opérateur, générateur infinitésimal d'un C^0 semi-groupe (Théorème 10, page 410 de [11]), \mathcal{A} (resp. $\mathcal{A}' = \mathcal{A}'_0 + k\mathcal{A}_1$) est le générateur d'un C^0 semi-groupe de H (resp. de X).

Par conséquent, d'après la théorie de Hille-Yosida (cf [4], théorème VII.4), si $U_0 = (u_0, u_1)^t$ appartient au domaine de l'opérateur, l'équation (1.4) admet une solution unique U avec la régularité : $U \in C([0, \infty), D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, \infty), H)$ (resp. $U \in C([0, \infty), D(\mathcal{A}')) \cap C^1([0, \infty), X)$). D'où la régularité annoncée sur u . \square

Comme Ω est borné, l'inégalité de Poincaré est vérifiée et nous choisissons sur l'espace $H_0^1(\Omega)$ le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v$$

Par définition, le carré de la norme de $U(t)$ dans H est l'énergie de la solution u au temps t :

$$E(t) = E_u(t) = \|U(t)\|_H^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + u_t^2 \quad (1.7)$$

Pour des données initiales dans $D(\mathcal{A})$, l'énergie est dérivable et :

$$E'(t) = \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 + u_{tt}u_t = -4k \int_{\Omega} \chi_\omega u_t^2 \leq 0$$

Donc l'énergie des solutions fortes est décroissante.

Soit maintenant u une solution faible, en multipliant l'équation (1.1) par $2u_t$, puis en intégrant sur Ω et entre deux instants t_1 et t_2 ($t_1 < t_2$), on obtient :

$$E(t_1) - E(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} 4k\chi_\omega(x)u_t^2(x,s)dx ds \geq 0$$

Par conséquent, l'énergie d'une solution faible est également une fonction décroissante. Le but est de quantifier la décroissance de l'énergie de toute solution et en particulier de savoir si elle est aussi rapide que celle d'une fonction exponentielle. En tout cas, il existe deux constantes C positive et τ' positive **ou nulle**, telles que :

$$\forall (u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \forall t \geq 0, E(t) \leq C E(0) e^{-2\tau' t} \quad (1.8)$$

Définition 1.1.1 *On appelle taux de décroissance exponentielle la quantité suivante (qui dépend uniquement de ω et de k et pas des données initiales) :*

$$\tau(\omega, k) = \sup\{\tau' \geq 0, \text{ tel que } \exists C > 0 \text{ pour laquelle (1.8) soit vérifiée}\}$$

Si $\tau(\omega, k) > 0$, le système est dit uniformément stabilisable.

Plus le taux de décroissance est grand, plus la décroissance de l'énergie est rapide en un certain sens. **Par conséquent l'objectif de cette thèse est de maximiser parmi certaines familles de couples (ω, k) , le taux de décroissance exponentielle $\tau(\omega, k)$.**

Avant de préciser ces notions dans la partie suivante, signalons que dans le cas monodimensionnel, dès que ω est d'intérieur non vide, le système est uniformément stabilisable (citons par exemple [7] ou [9]).

En revanche, dans le cas bidimensionnel, même pour des ω de grandes tailles par rapport à Ω , le système peut ne pas être uniformément stabilisable. Par contre, si ω est d'intérieur non vide, il y a stabilisation forte, c'est-à-dire que pour toute donnée initiale dans H , l'énergie de la solution tend vers 0 (résultat de C.M. Dafermos [10], amélioré par A. Haraux [19]).

1.1.2 Valeurs propres de l'opérateur \mathcal{A}

L'opérateur \mathcal{A} possède un inverse compact et son spectre $\sigma(\mathcal{A})$ est constitué uniquement de valeurs propres isolées d'ordre de multiplicité algébrique fini. C'est-à-dire que si λ est une valeur propre de \mathcal{A} , il existe un vecteur propre $U_0 = (u_0, v_0) = (u_0, \lambda u_0)$ appartenant à $D(\mathcal{A}) - \{0\}$ tel que $\mathcal{A}U_0 = \lambda U_0$.

Posons $U(t) = U_0 \exp(\lambda t)$, alors U est solution de (1.4) associée aux conditions initiales $U(0) = U_0 = (u_0, \lambda u_0)$.

Notons que si λ est valeur propre de \mathcal{A} , $\bar{\lambda}$ l'est également et \bar{U}_0 est un vecteur propre associé à $\bar{\lambda}$. Posons maintenant $U(t) = U_0 \exp(\lambda t) + \bar{U}_0 \exp(\bar{\lambda} t)$, alors U est solution de (1.4) associé aux conditions initiales **réelles** $U(0) = U_0 + \bar{U}_0 = (u_0 + \bar{u}_0, \lambda u_0 + \bar{\lambda} \bar{u}_0)$. L'énergie de cette solution est par définition :

$$E(t) = \int_{\Omega} |\nabla u_0 \exp(\lambda t) + \nabla \bar{u}_0 \exp(\bar{\lambda} t)|^2 + |\lambda u_0 \exp(\lambda t) + \bar{\lambda} \bar{u}_0 \exp(\bar{\lambda} t)|^2 \quad (1.9)$$

$$= \exp(2\operatorname{Re}(\lambda)t) \int_{\Omega} \operatorname{Re}(\nabla u_0 \exp(i\operatorname{Im}(\lambda)t))^2 + \operatorname{Re}(\lambda u_0 \exp(i\operatorname{Im}(\lambda)t))^2 \quad (1.10)$$

Où $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$ désignent respectivement la partie réelle et imaginaire du nombre complexe z . Par conséquent si $\operatorname{Im}(\lambda) = 0$, $\forall t \geq 0, E(t) = \exp(2\operatorname{Re}(\lambda)t)E(0)$ et si $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$, posons $t_n = 2n\pi/\operatorname{Im}(\lambda)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, E(t_n) = \exp(2\operatorname{Re}(\lambda)t_n)E(0)$. Dans les deux cas, nous obtenons $\tau(\omega, k) \leq -\lambda$.

Définition 1.1.2 *On appelle abscisse spectrale de l'opérateur \mathcal{A} la quantité suivante :*

$$\mu(\mathcal{A}) = \sup\{\operatorname{Re}(\lambda), \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}$$

Nous avons donc obtenu l'inégalité :

$$\tau(\omega, k) \leq -\mu(\mathcal{A}) \quad (1.11)$$

1.2 Le taux de décroissance exponentielle

Dans cette partie, nous rappelons les principaux résultats qui vont nous permettre d'étudier le taux de décroissance exponentielle des solutions.

1.2.1 Cas monodimensionnel

Si Ω est un segment de \mathbb{R} , S. Cox et E. Zuazua ont montré en 1994 dans [9] le théorème suivant :

Théorème 1.2.1 *Si χ_ω est à variation bornée, alors le taux de décroissance exponentielle est égal à l'opposé de l'abscisse spectrale :*

$$\tau(\omega, k) = -\mu(\mathcal{A}) \quad (1.12)$$

Une fonction $a : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ est à variation bornée si et seulement si (cf par exemple [4], p. 125) il existe une constante C telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour toute suite croissante $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k \leq 1$:

$$\sum_{i=0}^{k-1} |a(t_{i+1}) - a(t_i)| \leq C$$

Par conséquent, χ_ω est à variation bornée si et seulement si ω est la réunion d'un nombre fini d'intervalles. Dans le cadre de l'étude du cas monodimensionnel, nous nous placerons toujours dans ce cas, de sorte que (1.12) soit vérifiée.

Signalons, par ailleurs, que A. Benaddi et B. Rao ont étendu ce résultat à une classe d'équations aux dérivées partielles plus large [3].

1.2.2 Cas bidimensionnel

Le cas d'un domaine de \mathbb{R}^2 , et à plus forte raison d'une variété riemannienne (M, g) , est bien plus compliqué. Les premiers résultats de stabilisation uniforme pour les variétés sans bord ont été obtenus par J. Rauch et M. Taylor dans [32], puis le cadre général a été traité par C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch dans [2].

Le théorème que nous énonçons ici, qui donne la valeur du taux de décroissance exponentielle est dû à G. Lebeau (cf. [25], théorème 2).

Soit (M, g) une variété C^∞ riemannienne compacte, connexe, à bord C^∞ ∂M , $\Delta = \Delta_g$ le laplacien sur M pour la métrique g et $a \in C^\infty(\bar{M}, \mathbb{R}_+)$. Considérons le problème :

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) + 2a(x)u_t(x, t) = 0, & x \in M, t > 0 \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial M, t > 0 \\ u(., 0) = u_0 \in H_0^1(M) \\ u_t(., 0) = u_1 \in L^2(M) \end{cases} \quad (1.13)$$

Il possède bien une unique solution $u(x, t) \in C^0(\mathbb{R}, H_0^1) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2)$, obtenue en appliquant le théorème de Hille-Yosida à l'opérateur non borné sur l'espace de Hilbert $H = H_0^1(M) \times L^2(M)$:

$$\mathcal{A}_a = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & -2a \end{pmatrix} \quad D(\mathcal{A}_a) = (H_0^1 \cap H^2) \times H_0^1.$$

Introduisons les rayons géométriques : il s'agit des géodésiques généralisées au sens de Melrose-Sjöstrand (cf [28]) parcourue à vitesse 1 : pour tout $\rho_0 = (x_0, u_0) \in T\bar{M}$ avec $|u_0| = 1$ (et u_0 appartient au demi-espace fermé défini par \bar{M} si $x_0 \in \partial M$), il existe une unique géodésique généralisée, $s \mapsto \gamma_{\rho_0}(s)$ de \bar{M} issu de ρ_0 i.e. vérifiant :

$$\gamma_{\rho_0}(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\gamma_{\rho_0}(s) - \gamma_{\rho_0}(0)}{s} = u_0$$

Pour $t > 0$, on pose :

$$C_a(t) = \inf_{\rho_0} \frac{1}{t} \int_0^t a(\gamma_{\rho_0}(s)) ds.$$

La fonction C_a possède les propriétés suivantes : elle est positive, majorée par $\|a\|_\infty$ et elle est sous additive ($tC_a(t) + sC_a(s) \leq (t+s)C_a(t+s)$) par conséquent elle admet une limite $C_a(\infty)$ quand t tend vers $+\infty$, notons $C_a(\infty)$ cette limite.

Le théorème de G. Lebeau affirme que :

Théorème 1.2.2 *Pour le problème (1.13), le taux de décroissance exponentiel $\tau(a)$ est donné par :*

$$\tau(a) = \min\{-\mu(\mathcal{A}_a), C_a(\infty)\}$$

Considérons à nouveau l'équation (1.1), pour un domaine Ω qui est un ouvert régulier borné et connexe du plan. L'application γ , qui porte le nom de rayon géométrique, correspond à l'équation du rayon lumineux issu de x_0 dans la direction u_0 , qui se réfléchit sur le bord de Ω selon les lois de l'optique géométrique si la lumière se propage à la vitesse 1. Elle correspond également à l'équation du mouvement d'un point matériel qui se déplace sans frottement dans Ω (à la vitesse 1) et qui rebondit sur la frontière de Ω selon les lois des chocs élastiques comme c'est le cas dans l'étude mathématique des billards.

Introduisons la quantité dite géométrique g :

Définition 1.2.1 *Soit :*

$$m_{\rho_0}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \chi_\omega(\gamma_{\rho_0}(s)) ds$$

la proportion de temps passé par le rayon géométrique défini par ρ_0 dans le sous-ensemble ω entre les instants 0 et t. On appelle quantité géométrique la quantité suivante ne dépendant que de ω :

$$g(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\rho_0 \in \Gamma} m_{\rho_0}(t)$$

Dans ce cadre, les hypothèses du théorème 1.2.2 ne sont pas satisfaites, en particulier parce que la fonction $a(x) = k\chi_\omega(x)$ n'est pas suffisamment régulière, mais si c'était le cas le taux de décroissance des solutions du problème (1.1)-(1.2)-(1.3) serait donné par :

$$\tau(\omega, k) = \min\{-\mu(\mathcal{A}), kg(\omega)\} \tag{1.14}$$

L'objectif de cette thèse n'est pas de répondre à la question difficile de savoir quelles sont les hypothèses minimales sur Ω et ω pour que l'équation (1.14) soit satisfaite. Aussi nous supposons que cette égalité (1.14) est bien satisfaite et nous introduirons uniquement les hypothèse sur Ω et

ω nécessaires à l'étude des différents critères. De plus, l'étude des critères μ et g est intéressante, car l'inégalité suivante est toujours vérifiée :

$$\tau(\omega, k) \leq \min\{-\mu(k, \omega), kg(\omega)\}$$

Il est à noter que N. Burq dans [5] a fortement réduit les hypothèses de régularité sur l'ouvert Ω pour un problème semblable de contrôlabilité frontière de l'équation des ondes.

En conclusion, l'étude du taux de décroissance de l'énergie reviendra donc à l'étude du spectre d'un opérateur non borné, étude qui doit être complétée par le calcul d'une quantité purement géométrique en dimension 2.

1.3 Influence du paramètre k

Reprenons la décomposition de l'opérateur \mathcal{A} introduite en (1.5) :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(k) = \mathcal{A}_0 + k\mathcal{A}_1 \quad (1.15)$$

où \mathcal{A}_0 est l'opérateur des ondes non amorties et \mathcal{A}_1 un opérateur d'amortissement borné de X , définis en (1.6). Le but de cette partie est de discuter l'influence du paramètre d'intensité k sur l'abscisse spectrale (la quantité géométrique ne dépendant, comme son nom l'indique, que du domaine w).

Rappelons que λ est valeur propre de \mathcal{A} si et seulement si il existe un vecteur non nul (u, v) de $D(\mathcal{A})$ tel que $\mathcal{A}(u, v)^t = \lambda(u, v)^t$ ce qui est équivalent à l'existence d'un vecteur non nul u de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ satisfaisant l'équation suivante dite équation aux valeurs propres :

$$\Delta u - (\lambda^2 + 2k\lambda\chi_\omega)u = 0 \quad (1.16)$$

Il suffit en effet de poser ensuite $v = \lambda u$ pour obtenir le vecteur propre de \mathcal{A} associé.

1.3.1 Phénomène d'overdamping

Proposition 1.3.1 *Soit ω un sous-ensemble de Ω d'intérieur non vide, alors :*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(k, \omega) = 0$$

Preuve : La démonstration utilise le fait que pour k suffisamment grand, \mathcal{A} possède au moins deux valeurs propres réelles, dont une tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$, et repose sur une méthode proposée par J. Rauch et M. Taylor dans [32] et utilisée dans [9] et [14].

Les valeurs propres λ et les fonction propres u de l'opérateur \mathcal{A} satisfont (1.16). Introduisons maintenant comme dans [14] un paramètre p et considérons les valeurs propres μ et les fonctions propres v de l'opérateur autoadjoint $\Delta + p\chi_\omega(x)I$, qui vérifient :

$$\Delta v + p\chi_\omega v = \mu v. \quad (1.17)$$

Ces valeurs propres sont réelles, numérotons les par ordre décroissant $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ et intéressons nous à la première, elle vérifie la formule variationnelle suivante :

$$\mu_1(p) = \sup_{\psi \in H_0^1(\Omega)} \frac{-\int_{\Omega} |\nabla \psi(x)|^2 dx + p \int_{\Omega} \chi_\omega(x) \psi^2(x) dx}{\int_{\Omega} \psi^2(x) dx} \quad (1.18)$$

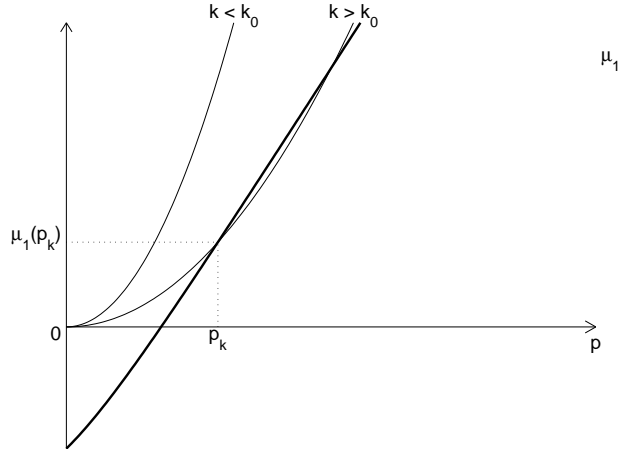


FIG. 1.1 – Graphe de μ_1 et paraboles $p \mapsto \mu = \frac{p^2}{4k^2}$

L'application $p \mapsto \mu_1(p)$ est donc croissante, convexe comme supremum de fonctions affines et $\mu_1(p) \rightarrow +\infty$ quand $p \rightarrow +\infty$ en effet il suffit de considérer une fonction ψ_0 de $H_0^1(\Omega)$ strictement positive sur l'intérieur de ω et nulle ailleurs.

Notons γ_1 la courbe représentative de la fonction μ_1 , les propriétés de la fonction μ_1 impliquent qu'il existe un réel $k_0 > 0$ tel que pour $k > k_0$, la parabole d'équation $\mu = \frac{p^2}{4k^2}$ intersecte la courbe γ_1 en exactement deux points (cf. figure 1.1). Soit p_k l'abscisse du premier point d'intersection et $\mu_1(p_k)$ son ordonnée. Soit également $\lambda = -\frac{p_k}{2k} = -\sqrt{\mu_1(p_k)}$, il est immédiat de vérifier que λ est une valeur propre réelle de (1.16) associée à la même fonction propre que $\mu_1(p_k)$. Or, quand $k \rightarrow +\infty$, la parabole d'équation $\mu = \frac{p^2}{4k^2}$ devient de plus en plus plate et par conséquent $\mu_1(p_k)$ tend vers 0 ce qui démontre la proposition puisque $\lambda = -\sqrt{\mu_1(p_k)}$. \square

Par conséquent, les "grandes" valeurs de k ne sont pas celles qui donnent le meilleur taux de décroissance.

1.3.2 Dérivabilité à l'origine

Soit $(\nu_n)_{n \geq 1}$ la suite croissante des valeurs propres positives de l'opérateur autoadjoint $-\Delta$ sur Ω et $(\phi_n)_{n \geq 1}$ la suite des fonctions propres associées normalisées dans $L^2(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} |\phi_n|^2 = 1$$

D'après l'équation aux valeurs propres (1.16), les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}(0)$ sont les imaginaires purs :

$$\lambda_{\pm n}(0) = \pm i\sqrt{\nu_n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

et les fonctions propres associées sont :

$$\Phi_{\pm n}(0) = (\phi_n, \lambda_{\pm n}(0)\phi_n)^t$$

Dans un premier temps, considérons uniquement le cas monodimensionnel : $\Omega = (0,1)$, dans ce cas la suite (ν_n) est strictement croissante : $\nu_n = n^2$ et les valeurs propres de l'opérateur \mathcal{A}_0

sont toutes simples. Nous utilisons les résultats de T. Kato sur la perturbation des opérateurs linéaires (cf. [24], pages 375 et suivantes et pages 421-422). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme la valeur propre $\lambda_{\pm n}$ est simple pour $k = 0$, elle reste simple pour les petites valeurs de k (il est possible d'obtenir une borne uniforme en n à partir de la norme de résolvante $(\mathcal{A}(k) - \xi I)^{-1}$, cf. [24]) et il est donc possible de définir sur un intervalle $[0, a]$, des fonctions continues $\lambda_{\pm n}$ telles $\lambda_{\pm n}(k)$ soit valeur propre de $\mathcal{A}(k)$.

Au sens de Kato, la famille $(\mathcal{A}(k))$ est une famille holomorphe de type A, par conséquent $\lambda_{\pm n}$ est de classe C^1 et :

$$\dot{\lambda}_{\pm n}(k) = \frac{\partial \lambda_{\pm n}}{\partial k}(k) = - \frac{\lambda_{\pm n}(k) \int_{\Omega} \chi_{\omega} \phi_{n,k}^2}{\lambda_{\pm n}(k) \int_{\Omega} \phi_{n,k}^2 + k \int_{\Omega} \chi_{\omega} \phi_{n,k}^2},$$

où $\phi_{n,k}$ est la première composante de la fonction propre $\Phi_{\pm n,k} = (\phi_{n,k}, \lambda_{\pm n}(k) \phi_{n,k})^t$ associée à la valeur propre $\lambda_{\pm n}(k)$.

En particulier, nous obtenons pour $k = 0$:

$$\dot{\lambda}_{\pm n}(0) = - \int_{\Omega} \chi_{\omega} \phi_n^2 \quad (1.19)$$

qui est un nombre réel négatif.

Dans le cas de la dimension 2, si la suite (ν_n) est toujours strictement croissante, la même démonstration s'applique. En revanche, il est possible que certaines valeurs propres soient multiples mais la famille $(\mathcal{A}(k))$ est toujours une famille holomorphe de type A. D'après Kato, toutes les valeurs propres sont d'ordres de multiplicité finis, et il est possible de numérotter les valeurs propres $\lambda_{\pm n}(k)$ et de choisir un vecteur propre normé $\phi_{n,k}$ quand l'espace propre associé est de dimension plus grande que 1, en sorte qu'elles soient toutes des fonctions de k dérivables à l'origine dont la dérivée est donné par (1.19), qui reste donc valable dans le cas bidimensionnel.

1.3.3 Définition du critère J

Commençons à nouveau par le cas monodimensionnel : $\Omega = (0,1)$. Nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Proposition 1.3.2 *Soit ω un sous-ensemble mesurable de $[0,1]$ tel que $1 - \omega \neq \omega^c$, alors l'abscisse spectrale $\mu(k, \omega)$ de l'opérateur \mathcal{A} est dérivable par rapport à k en $k = 0$ et la dérivée est donnée par :*

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial k} \right)_{k=0} = - \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \int_0^1 \chi_{\omega}(x) \phi_n^2(x) dx$$

Remarque 1.3.1 *L'hypothèse $1 - \omega \neq \omega^c$ est liée à un point de la démonstration et semble être purement technique. Les domaines qui vérifient $1 - \omega = \omega^c$ sont de longueur 1/2 et ce sont les domaines anti-symétriques par rapport au milieu de Ω . Pour ces domaines, on ne sait pas montrer la dérivabilité de μ mais numériquement les fonction $k \mapsto \mu(k, \omega)$ sont très régulières (cf. chapitre 7).*

Preuve : Les cas $\omega = \emptyset$ et $\omega = [0,1]$ sont faciles car les valeurs propres se calculent explicitement (cf. [9]). Dans les autres cas, la preuve utilise le résultat suivant (cf. Théorème 3.4 de [15]) :

$$\exists k_1 > 0, \exists C_0 > 0 \text{ telles que } \forall k < k_1, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |Re(\lambda_{\pm n}(k)) + k| \leq \frac{2C_0 k}{n\pi} \quad (1.20)$$

et le théorème 2.2.1 du chapitre 2 qui affirme que si $1 - \omega \neq \omega^c$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\delta > 0$ tels que :

$$\inf_{n \in \mathbb{N}^*} \int_0^1 \chi_\omega(x) \phi_n^2(x) dx = \int_0^1 \chi_\omega(x) \phi_{n_0}^2(x) dx = l - \delta < l \quad (1.21)$$

Par continuité de la fonction $k \mapsto \dot{\lambda}_{n_0}(k)$, il existe $k_2 > 0$, tel que :

$$0 \leq k \leq k_2 \implies \operatorname{Re}(-\dot{\lambda}_{n_0}(k)) \leq l - \delta/2.$$

Par intégration, on obtient :

$$\operatorname{Re}(\lambda_{n_0}(k)) \geq -(l - \delta/2)k.$$

Pour $n_1 \geq \frac{6C_0}{\pi\delta}$ et d'après (1.20), pour tout $n \geq n_1$: $\operatorname{Re}(\lambda_{n_0}(k)) \geq \operatorname{Re}(\lambda_{n_1}(k))$, car par construction $n_0 \leq n_1$, donc :

$$\forall k < \inf(k_1, k_2) \quad \mu(k) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \operatorname{Re}(\lambda_n(k)) = \max_{n \leq n_1} \operatorname{Re}(\lambda_n(k)).$$

Soit $\epsilon > 0$, par équicontinuité en 0 de la famille $\{\dot{\lambda}_n(k), n \leq n_1\}$, il existe k_3 tel que :

$$\forall n \leq n_1, \forall k \leq k_3 \quad |\dot{\lambda}_n(k) - \dot{\lambda}_n(0)| < \epsilon$$

Ce qui donne après intégration :

$$(\dot{\lambda}_n(0) - \epsilon)k \leq \operatorname{Re}(\lambda_n(k)) \leq (\dot{\lambda}_n(0) + \epsilon)k$$

En prenant le maximum pour $n \leq n_1$, on obtient :

$$\sup_{n \leq n_1} (\dot{\lambda}_n(0) - \epsilon)k \leq \mu(k) \leq \sup_{n \leq n_1} (\dot{\lambda}_n(0) + \epsilon)k$$

ce qui s'interprète comme :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\mu(k, \omega)}{k} = \sup_{n \leq n_1} \dot{\lambda}_n(0) = - \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \int_0^1 \chi_\omega(x) \phi_n^2(x) dx.$$

L'abscisse spectrale de \mathcal{A} est donc bien une fonction dérivable en 0. □

Définition 1.3.1 Pour un sous-ensemble ω de Ω , le critère J est défini par :

$$J(\omega) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \int_\Omega \chi_\omega(x) \phi_n^2(x) dx$$

Dans le cadre monodimensionnel, le taux de décroissance exponentielle des solutions de (1.1)-(1.2)-(1.3) est tel que : $\tau(k, \omega) = -\mu(k, \omega)$. Pour les petites valeurs de k , nous allons linéariser le taux de décroissance par rapport à k :

$$\tau(k, \omega) = -\mu(k, \omega) \simeq - \left[\mu(0, \omega) + k \left(\frac{\partial \mu(k, \omega)}{\partial k} \right)_{k=0} \right] = k \cdot J(\omega)$$

C'est-à-dire qu'au lieu de chercher un domaine ω , qui maximise le taux $\tau(k, \omega)$, nous allons chercher un domaine ω qui maximise $J(\omega)$. Cette approximation est justifiée par plusieurs points :

- Dans le cas très particulier, $\omega = \Omega$, avant l'overdamping, l'abscisse spectrale est telle que : $\mu(k, \Omega) = -k$, on ne commet donc aucune erreur dans cette plage de valeurs en linéarisant τ ;

- A cause du phénomène d'overdamping mis en évidence à la proposition 1.3.1, ce sont les "petites" valeurs de k qui vont donner le meilleur taux de décroissance.
- Enfin, comme nous le verrons dans la partie 7.3 du chapitre 7, la justification est également numérique.

Pour le cas bidimensionnel, il n'y a pas toujours un comportement asymptotique clair de $Re(\lambda_{\pm n}(k))$ quand $|Im(\lambda_{\pm n}(k))| \rightarrow +\infty$. Par conséquent, nous ne pouvons démontrer la dérivabilité de l'abscisse spectrale par rapport à k en $k = 0$. Néanmoins, il est intéressant d'étudier la quantité J pour des sous-ensembles ω d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Nous étudierons donc théoriquement puis nous maximiserons numériquement les trois fonctionnelles : J , g et $\min\{J, g\}$.

1.4 Motivations physiques

Maintenant que nous avons présenté le problème qui nous intéresse et introduit en détail les notations utilisées, nous exposons quelques raisons qui peuvent motiver cette étude, notamment les équations qui proviennent de la physique.

Considérons une corde de longueur L , de masse linéique μ , soumise à une tension T fixée à ses extrémités. En l'absence de frottement, et sous l'hypothèse de petits mouvements qui s'effectuent uniquement dans la direction verticale, le déplacement vertical de la corde u satisfait l'équation des ondes monodimensionnelle ou équation des cordes vibrantes :

$$\begin{cases} \mu u_{tt}(x,t) - T\Delta u(x,t) = 0, & x \in (0,L), t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Supposons maintenant qu'à l'aide d'un dispositif dit d'actionneurs, conçu par exemple à l'aide d'aimants comme décrit dans [8], il s'applique sur une partie ω de la corde une force proportionnelle à sa vitesse en tout point : $\vec{F} = -K\vec{v}$, avec K coefficient d'amortissement par unité de longueur. Le déplacement vertical de la corde u satisfait maintenant :

$$\begin{cases} \mu u_{tt}(x,t) - T\Delta u(x,t) + K\chi_{\omega}(x)u_t(x,t) = 0, & x \in (0,L), t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

$c = \sqrt{T/\mu}$ est la célérité des ondes dans la corde. Par changement de variable :

$$x' = \frac{x}{L}, \quad t' = \frac{L}{c}t, \quad k = \frac{cLK}{2T} \quad (1.22)$$

Cette équation est rendue adimensionnelle et u satisfait alors le système (1.1)-(1.2) pour $\Omega = (0,1)$.

L'énergie $E(t)$, comme définie dans (1.7), est alors l'énergie de la corde à l'instant t , somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Le problème que nous étudions correspond donc au placement optimal des actionneurs pour la stabilisation de la corde et les hypothèses faites sur k sont reliées aux constantes physiques du problème par les équations (1.22).

Le cas bidimensionnel correspond physiquement à une membrane fixée sur son bord type tambour, soumise sur une certaine partie ω à l'action d'actionneurs.

Ce problème peut donc être considéré comme un problème modèle de contrôle actif de structures, car il concerne le placement optimal d'actionneurs pour des structures simples.

Chapitre 2

Etude théorique des critères F et J

Soit (λ_n) la suite des valeurs propres de l'opérateur des ondes \mathcal{A}_0 sur Ω dont les parties imaginaires sont positives ($0 < \text{Im}\lambda_1 < \text{Im}\lambda_2 \leq \text{Im}\lambda_3 \leq \dots$), on sait alors que (λ_n^2) est la suite des valeurs propres réelles négatives du laplacien sur Ω . Soit ϕ_n les fonctions propres associés normalisés pour la norme $L^2(\Omega)$. Rappelons que le critère J est défini pour un sous-ensemble ω dont la fonction indicatrice χ_ω est à variation bornée par :

$$J(\omega) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\Omega} \chi_\omega(x) \phi_n^2(x) dx \quad (2.1)$$

Tandis que le critère F est défini pour une sous-famille finie de fonctions propres $\Phi = \{\phi_{k_1}, \phi_{k_2}, \dots, \phi_{k_N}\}$ par :

$$F(\omega) = \min_{\phi \in \Phi} \int_{\Omega} \chi_\omega(x) \phi^2(x) dx \quad (2.2)$$

2.1 Etude du critère F

Dans cette partie, nous ne considérons que le cas monodimensionnel : $\Omega = (0,1)$, et nous étudions le critère F . Néanmoins, nous expliquerons dans la section 2.1.4 quels sont les résultats qui s'étendent en dimension supérieure.

2.1.1 Existence

Le problème qui nous intéresse est la maximisation de F parmi les ensembles de mesure fixée. Pour prouver l'existence d'une solution, nous allons devoir travailler dans une classe plus large (relaxée). Finalement, nous prouverons que le maximum dans cette classe est bien une fonction caractéristique et que, de surcroit, il est unique. Plus précisément, soit $\Phi = \{\phi_{k_1}, \phi_{k_2}, \dots, \phi_{k_N}\}$ un ensemble fini de fonctions propres, considérons le problème de la stabilisation uniforme de l'équation des ondes amorties à l'aide d'un feedback $a(x)$:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + 2a(x)u_t(x,t) = 0, & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

Où a est une fonction de l'espace suivant (c est un constante de $(0,1)$) :

$$L = \left\{ a \in L^\infty(0,1), 0 \leq a \leq 1, \int_0^1 a(x) dx = c \right\}$$

L n'est autre que l'enveloppe convexe de l'ensemble des fonctions caractéristiques d'ensemble de longueur c (cf, par exemple, [21]). Le but est alors de trouver, si elle existe, une fonction a^* de L qui maximise F et nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.1.1 F admet un unique maximum a^* sur L , et il existe $\omega^* \subset \Omega$, symétrique par rapport à $1/2$ ($1 - \omega^* = \omega^*$) tel que :

$$a^* = \chi_{\omega^*} \text{ p.p.}$$

Remarque 2.1.1 Soit $M > 0$, si l'on cherche à maximiser F non pas sur L mais sur l'ensemble :

$$L_M = \left\{ a \in L^\infty(0,1), 0 \leq a \leq M, \int_0^1 a(x)dx = cM \right\}$$

En divisant les équations (2.3) par M et en posant $v = u/M$, on se ramène au cadre du théorème 2.1.1, si bien que F admet un unique maximum sur L_M et il existe ω^* symétrique par rapport à $1/2$ tel que $a^* = M\chi_{\omega^*}$.

Preuve :

Point 1 : Pour ϕ fixé, notons $j_\phi(a) = \int_\Omega a(x)\phi^2(x)$, il s'agit d'une fonction continue pour la topologie L^∞ faible *, donc F est également continue car le minimum est pris sur un nombre fini de fonctions. Or L est compact pour la topologie L^∞ faible *, ce qui assure l'existence d'un maximum.

Point 2 : Par ailleurs, F est une fonction concave comme minimum de fonctions linéaires, il s'en suit, qu'étant donné deux maxima a_1^* et a_2^* , tout le segment $[a_1^*, a_2^*]$ est composé de maxima.

Point 3 : Soit a^* l'un des maxima, notons ϕ_1 l'une des fonctions pour laquelle le minimum sur Φ est atteint. Il existe un réel c_1 tel que la mesure de l'ensemble $A_1 = \{x \mid \phi_1^2(x) > c_1\}$ soit égale à c . Ou bien sur A_1 , a^* est égale à 1 (ce qui est bien sûr le cas quand Φ ne contient qu'une fonction propre), et alors $a^* = \chi_{A_1}$ a bien la forme annoncée dans le théorème, et seules l'unicité et la symétrie restent à vérifier ce qui sera fait au point 6 ; ou bien ce n'est pas le cas et alors il existe une fonction ϕ_2 de Φ différente de ϕ_1 telle que :

$$j_{\phi_1}(a^*) = j_{\phi_2}(a^*)$$

En effet, si on avait :

$$j_{\phi_1}(a^*) < \min_{\phi \in \Phi - \{\phi_1\}} j_\phi(a^*)$$

il serait possible de construire a_t par :

$$a_t(x) = \begin{cases} a^*(x) + t & \text{si } x \in B_1 \\ a^*(x) - t & \text{si } x \in B_2 \\ a^*(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Où $B_1 \subset A_1$ et $B_2 \subset A_1^c$ tels que B_1 et B_2 aient même mesure et tels qu'il existe $\varepsilon > 0$ avec $a^*(x) < 1 - \varepsilon$ sur B_1 et $a^*(x) > \varepsilon$ sur B_2 . Pour $t \leq \varepsilon$, $a_t \in L$, or pour t suffisamment petit :

$$j_{\phi_1}(a_t) = \min_{\phi \in \Phi} j_\phi(a_t) > j_{\phi_1}(a^*) = \min_{\phi \in \Phi} j_\phi(a^*)$$

D'où l'existence de ϕ_2 , ce qui fournit la contradiction.

Point 4: Soit Φ_1 le sous ensemble de Φ (de cardinal supérieur ou égal à 2) sur lequel le minimum est atteint :

$$\begin{cases} \text{Pour } \phi, \psi \in \Phi_1, j_\phi(a^*) = j_\psi(a^*) \\ \text{Pour } \phi \in \Phi_1, \psi \in \Phi_1^c, j_\phi(a^*) < j_\psi(a^*) \end{cases}$$

Renombrons les fonctions propres :

$$\Phi_1 = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\} \text{ et } \Phi_1^c = \{\phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \dots, \phi_N\}$$

a^* est alors solution du problème :

$$\max_a \left\{ \min \{j_{\phi_1}(a), j_{\phi_{m+1}}(a), \dots, j_{\phi_N}(a)\} \right\} \quad (2.4)$$

sous les contraintes :

$$a \in E = \{a \in L \mid j_{\phi_1}(a) = j_{\phi_2}(a) = \dots = j_{\phi_m}(a)\}. \quad (2.5)$$

En effet a^* satisfait bien les contraintes et pour toute fonction a de E :

$$\min_{k \in \{1, m+1, \dots, N\}} j_{\phi_k}(a) = \min_{\phi \in \Phi} j_\phi(a) \leq \min_{\phi \in \Phi} j_\phi(a^*) = \min_{k \in \{1, m+1, \dots, N\}} j_{\phi_k}(a^*).$$

Point 5: Fixons nous $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Le but de ce point 5 est de montrer que l'ensemble $A_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon\}$ est de mesure nulle pour tout $\varepsilon > 0$, si tel est le cas, a^* satisfiera bien $a^* = 0$ ou 1 *p.p.*. Supposons donc A_ε de mesure strictement positive et écrivons les conditions d'optimalité de Lagrange pour le problème (2.4)-(2.5). Etant donné qu'au point a^* :

$$j_{\phi_1}(a^*) < \min \{j_{\phi_{m+1}}(a^*), j_{\phi_{m+2}}(a^*), \dots, j_{\phi_N}(a^*)\}$$

il existe un voisinage de a^* sur lequel cette inégalité reste vraie, c'est-à-dire qu'il existe $t_0 > 0$ tel que pour $t < t_0$, $a = a^* + th$ satisfasse cette inégalité si h est de norme 1.

Si de plus h est à support dans A_ε , alors pour t suffisamment petit :

$$0 \leq a^*(x) + t.h(x) \leq 1, \forall x \in \Omega$$

Les conditions d'optimalités de Lagrange s'écrivent donc : il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall h \quad \langle d_{j_1}(a^*), h \rangle &= \sum_{k=2}^m \lambda_k \langle d_{j_1}(a^*) - d_{j_k}(a^*), h \rangle + \lambda_1 \int_0^1 h(x) dx \\ \iff \int_0^1 \phi_1^2(x) h(x) dx &= \int_0^1 \left[\lambda_1 + \sum_{k=2}^m \lambda_k (\phi_1^2(x) - \phi_k^2(x)) \right] h(x) dx \end{aligned}$$

Ce qui se traduit par :

$$\left(1 - \sum_{k=2}^m \lambda_k \right) \phi_1^2(x) - \sum_{k=2}^m \lambda_k \phi_k^2(x) = \lambda_1, \text{ pour presque tout } x \in A_\varepsilon \quad (2.6)$$

Si A_ε est de mesure strictement positive, cette égalité s'étend à tout le domaine par analyticité des fonctions propres. Mais ceci est impossible si les λ_k ne sont pas tous nuls car le système $\{1, \phi_1^2, \dots, \phi_k^2\} = \{1, 2 \sin^2 n_1 \pi x, \dots, 2 \sin^2 n_m \pi x\}$ est linéairement indépendant. Par conséquent

pour tout ε , A_ε est de mesure nulle donc a^* est bien de la forme annoncée.

Point 6 : Supposons qu'il existe deux maxima distincts a_1^* et a_2^* , d'après ce qui vient d'être établi, il existe deux sous ensembles de Ω : ω_1 et ω_2 tels que $a_1^* = \chi_{\omega_1}$ et $a_2^* = \chi_{\omega_2}$. D'après le point 2, tout point du segment $[a_1^*, a_2^*]$ est également un maximum. Or comme a_1^* et a_2^* sont différents, tout point intérieur de ce segment ne peut être de la forme : χ_ω , par conséquent il ne peut s'agir d'un maximum. En conclusion le problème admet bien un maximum unique. Par ailleurs, comme $F(1 - \omega) = F(\omega)$ si le maximum n'est pas symétrique par rapport à $1/2$, $1 - \omega$ est un second maximum distinct, ce qui est bien sûr exclu. \square

2.1.2 Propriétés générales de F

Commençons par adopter les notations :

Définition 2.1.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $a \in L$, nous posons : $I_n(a) = \int_0^1 a(x) \phi_n^2(x) dx = 2 \int_0^1 a(x) \sin^2(n\pi x) dx$

Définition 2.1.2 Soit $c \in [0, 1]$, nous posons : $f(c) = \max_{a \in L} F(a)$

f et ω^* possèdent alors les propriétés suivantes :

Proposition 2.1.1 Soit $c \in [0, 1]$ alors :

$$c \leq f(c) \leq 1$$

Si $K = \max\{k_1, k_2, \dots, k_N\}$ est le plus grand indice des fonctions propres de l'ensemble Φ , alors le domaine ω^* qui maximise F sur L a au plus K composantes connexes.

Preuve : Soit n_0 un entier tel que $F(\omega^*) = I_{n_0}(\chi_{\omega^*})$. On a vu dans la démonstration du théorème 2.1.1 que ω^* est également solution de problème suivant : maximiser sur L la fonctionnelle $I_{n_0}(a)$ sous les contraintes :

$$\begin{cases} I_{n_i}(a) = I_{n_0}(a) & 1 \leq i \leq p \\ I_{m_j}(a) > I_{n_0}(a) & 1 \leq j \leq q \\ \int_0^1 a(x) dx = l \end{cases}$$

Posons :

$$\Psi_\Lambda(x) = 2 \left(1 - \sum_{i=1}^p \lambda_i \right) \sin^2 n_0 \pi x + 2 \sum_{i=1}^p \lambda_i \sin^2 n_i \pi x$$

Le lagrangien de ce problème s'écrit alors :

$$L(a, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p) = \int_0^1 a(x) \Psi_\Lambda(x) dx + \lambda_0 \left(\int_0^1 a(x) dx - l \right)$$

χ_{ω^*} étant le maximum, pour une fonction h admissible et pour ε positif et suffisamment petit :

$$L(\chi_{\omega^*} + \varepsilon h, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p) - L(\chi_{\omega^*}, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \leq 0$$

Soit compte-tenu de la linéarité de L par rapport à la première variable :

$$L(h, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \leq 0, \text{ pour } h \text{ admissible}$$

Or les fonctions h admissibles sont caractérisées par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \omega^*, h(x) &\leq 0 \\ \forall x \in \omega^{*c}, h(x) &\geq 0 \\ \int_0^1 h(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \forall x \in \omega^*, \Psi_\Lambda + \lambda_0 &\geq 0 \\ \forall x \in \omega^{*c}, \Psi_\Lambda + \lambda_0 &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\psi_\Lambda(x) + \lambda_0) \chi_{\omega^*}(x) dx &= f(c) + \lambda_0 c \geq 0 \\ \int_0^1 (\psi_\Lambda(x) + \lambda_0) \chi_{\omega^{*c}}(x) dx &= 1 - f(c) + \lambda_0(1 - c) \leq 0 \end{aligned}$$

Ces deux dernières inégalités impliquent que $(1 - f(c))/(1 - c) \leq -\lambda_0 \leq f(c)/c$ donc $f(c) \geq c$.

Par continuité de ψ_Λ , les équations (2.7) impliquent que pour tout $x \in \partial\omega^* \cap (0,1)$, $\psi_\Lambda(x) + \lambda_0 = 0$. Or :

$$\begin{aligned} \psi_\Lambda(x) &= \left(1 - \sum_{i=1}^p \lambda_i\right) (1 - \cos 2n_0\pi x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i (1 - \cos 2n_i\pi x) \\ &= \left(1 - \sum_{i=1}^p \lambda_i\right) (1 - T_{n_0}(\cos 2\pi x)) + \sum_{i=1}^p \lambda_i (1 - T_{n_i}(\cos 2\pi x)) \end{aligned}$$

où T_k est le k^{ieme} polynôme de Tchebisev, donc $\psi_\Lambda(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à K en $\cos 2\pi x$ par conséquent l'équation $\psi_\Lambda(x) + \lambda_0 = 0$ admet au plus $2K$ racines dans $]0,1[$ et ω^* a au plus K composantes connexes sauf si ω^* admet comme composante connexe un intervalle de la forme $[0,\varepsilon]$ (et un intervalle de la forme $[1 - \varepsilon,1]$ par symétrie). Or ce dernier cas est impossible car pour tout a et pour tout entier n , $\int_0^\varepsilon \phi_n(x) dx \leq \int_a^{a+\varepsilon} \phi_n(x) dx$. \square

2.1.3 Optimisation des K premiers modes propres

Nous considérons maintenant le cas $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_K\}$, c'est-à-dire le cas où l'optimisation porte sur les K premiers modes propres. C'est une situation souvent envisagée par les ingénieurs pour placer les actionneurs, notre but est de montrer que cette méthode présente des inconvénients.

Définition 2.1.3 Lorsque $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_K\}$, on pose :

$$f_K(l) = f(l) = \max\{F(a), a \in L^\infty(0,1), 0 \leq a \leq 1, \int_0^1 a(x) dx = l\}$$

D'après le théorème 2.1.1 et la proposition 2.1.1, le domaine optimal $\omega^*(l)$ de longueur l est symétrique et possède au plus K composantes connexes. Par conséquent, dans le cas où $K = 2N$ est pair, il existe $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_N \leq 1/2$ et $l_1, l_2, \dots, l_N > 0$ tels que :

$$\omega^* = \left(\bigcup_{i=1}^N [\alpha_i - l_i/2, \alpha_i + l_i/2] \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^N [1 - \alpha_i - l_i/2, 1 - \alpha_i + l_i/2] \right)$$

Et dans le cas où $K = 2N + 1$ est impair, il existe $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_N \leq 1/2$ et $l_1, l_2, \dots, l_{N+1} > 0$ tels que :

$$\begin{aligned} \omega^* &= \left(\bigcup_{i=1}^N [\alpha_i - l_i/2, \alpha_i + l_i/2] \right) \cup [1/2 - l_{N+1}/2, 1/2 + l_{N+1}/2] \\ &\quad \cup \left(\bigcup_{i=1}^N [1 - \alpha_i - l_i/2, 1 - \alpha_i + l_i/2] \right) \end{aligned}$$

On admet que ω^* possède exactement K composantes connexes et qu'il vérifie :

$$j_1(\omega^*) = j_2(\omega^*) = \dots = j_K(\omega^*) \quad (2.8)$$

Cette hypothèse repose sur deux arguments : le premier est heuristique, le second numérique. Tout d'abord, on sait que ω^* possède au plus K composantes connexes, donc il est caractérisé par K variables. Il est donc envisageable de chercher à résoudre un système de K équations non-linéaires à K inconnues. De plus, pour un domaine ω pour lequel l fonctionnelles j_{n_i} sont égales avec $l < K$, il est probable qu'il soit possible de modifier ω pour garder ces l fonctionnelles égales mais d'augmenter la valeur commune.

Appellons ici les K variables, qui caractérisent ω , x_1, x_2, \dots, x_K sans plus de précision. D'un point de vue géométrique, il est possible de voir l'ensemble des $(K+1)$ -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_K, j_i(\omega^*))$ comme une hypersurface S_i de \mathbb{R}^{K+1} de dimension K ; la remarque précédente revient à se déplacer sur l'hypersurface, de dimension $K-l$, $j_{n_1}(\omega) = j_{n_2}(\omega) = \dots = j_{n_l}(\omega)$ pour augmenter la $(K+1)^{ieme}$ composante. Ainsi, on doit rencontrer une des hypersurfaces restante, notons là $j_{n_{l+1}}$, et on se déplacera sur l'hypersurface, de dimension $K-l-1$, $j_{n_1}(\omega) = j_{n_2}(\omega) = \dots = j_{n_{l+1}}(\omega)$ et ainsi de suite pour atteindre un point où les K fonctionnelles sont égales.

Le second argument est de nature numérique. L'étude de l'optimisation de $f_K(l)$ a été menée numériquement à l'aide d'un algorithme génétique sans imposer la topologie de ω^* et les résultats obtenus sont ceux que l'on suppose ici à savoir que ω^* possède exactement K composantes connexes et que toutes les fonctionnelles sont égales.

Théorème 2.1.2 *Lorsque l tend vers 0, le domaine optimal $w_K^*(l)$ pour les K premiers modes propres se concentre autour des noeuds du $(K+1)^{ieme}$ mode propre, par conséquent $I_{K+1}(w_K^*(l))$ est très petit.*

Plus précisément, quand $l \rightarrow 0^+$:

$$\forall i, \alpha_i(l) \rightarrow \frac{i}{K+1}, \quad l_i(l) \sim \frac{l}{K}, \quad \text{et} \quad I_{K+1}(w_K^*(l)) = o(l)$$

Ce théorème montre bien le résultat annoncé, à savoir que le domaine optimal pour les K premiers modes propres s'avère catastrophique si on décide de prendre en compte le $(K+1)^{ieme}$ mode propre.

Preuve : La preuve sera donnée dans le cas où $K = 2N$ est pair, les mêmes idées fonctionnent à l'identique dans le cas K impair.

Les $2N$ variables $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ et (l_1, l_2, \dots, l_N) satisfont donc, par notre hypothèse (2.8), le système non-linéaire de $2N$ équations suivant :

$$\begin{cases} j_2(\omega^*) = j_1(\omega^*) \\ j_3(\omega^*) = j_2(\omega^*) \\ \dots \\ j_{2N}(\omega^*) = j_{2N-1}(\omega^*) \\ l_1 + l_2 + \dots + l_N = l/2 \end{cases} \quad (2.9)$$

Les $2N-1$ premières équations de ce système s'écrivent :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{n\pi} \sin n\pi l_i \cos 2n\pi \alpha_i - \frac{1}{(n-1)\pi} \sin(n-1)\pi l_i \cos(2n-2)\pi \alpha_i \right] = 0 \\ \text{pour } n = 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (2.10)$$

Asymptotiquement, quand l tend vers 0, les (α_i) et les (l_i) sont donc solution du système linéarisé au voisinage de $l = 0$:

$$\sum_{i=1}^N l_i (\cos 2n\pi\alpha_i - \cos(2n-2)\pi\alpha_i) = 0, \quad \text{pour } n = 2, 3, \dots, N \quad (2.11)$$

Soit (l_n) une suite qui tend vers 0 par valeurs positives. Posons $l_i^n = t_i(l_n) \cdot l_n$ avec $t_i(l_n) \in [0, 1]$ qui est compact et comme $\alpha_i(l_n)$ appartient à $[0, 1/2]$ qui est aussi compact, pour une suite extraite $t_i^{(l_k)} \rightarrow t_i$ et $\alpha_i(l_k) \rightarrow \alpha_i$ quand $l_k \rightarrow 0$, on est alors conduit à l'équation : $t_1 + t_2 + \dots + t_N = 1/2$ et au système de $2N - 1$ équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 \sin \pi\alpha_1 \sin 3\pi\alpha_1 + t_2 \sin \pi\alpha_2 \sin 3\pi\alpha_2 + \dots + t_N \sin \pi\alpha_N \sin 3\pi\alpha_N = 0 \\ t_1 \sin \pi\alpha_1 \sin 5\pi\alpha_1 + t_2 \sin \pi\alpha_2 \sin 5\pi\alpha_2 + \dots + t_N \sin \pi\alpha_N \sin 5\pi\alpha_N = 0 \\ \dots \\ t_1 \sin \pi\alpha_1 \sin(2k+1)\pi\alpha_1 + t_2 \sin \pi\alpha_2 \sin(2k+1)\pi\alpha_2 + \dots \\ \quad + t_N \sin \pi\alpha_N \sin(2k+1)\pi\alpha_N = 0 \\ \dots \\ t_1 \sin \pi\alpha_1 \sin(4N-1)\pi\alpha_1 + t_2 \sin \pi\alpha_2 \sin(4N-1)\pi\alpha_2 + \dots \\ \quad + t_N \sin \pi\alpha_N \sin(4N-1)\pi\alpha_N = 0 \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Ce système peut être considéré comme un système linéaire d'inconnues t_1, t_2, \dots, t_N . Or ces inconnues ne peuvent être toutes nulles car $t_1 + t_2 + \dots + t_N = 1/2$, donc la matrice A du système 2.12 doit être de rang inférieur ou égal à $N - 1$, et tous les déterminants $N \times N$ extraits de A doivent être nuls.

Notons $l_1, l_2, \dots, l_{2N-1}$, les lignes de la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} \sin \pi\alpha_1 \sin 3\pi\alpha_1 & \dots & \sin \pi\alpha_N \sin 3\pi\alpha_N \\ \sin \pi\alpha_1 \sin 5\pi\alpha_1 & \dots & \sin \pi\alpha_N \sin 5\pi\alpha_N \\ \vdots & & \vdots \\ \sin \pi\alpha_1 \sin(4N-1)\pi\alpha_1 & \dots & \sin \pi\alpha_N \sin(4N-1)\pi\alpha_N \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow l_1 \\ \rightarrow l_2 \\ \vdots \\ \rightarrow l_{2N-1} \end{array} \quad (2.13)$$

Puis calculons le déterminant $N \times N$ suivant :

$$D_0 = \det(l_N + l_N, l_{N-1} + l_{N+1}, \dots, l_1 + l_{2N-1}).$$

- En développant D_0 par multilinéarité du déterminant, on fait apparaître une somme de déterminants $N \times N$ extraits de la matrice A , d'où $D_0 = 0$.

- Par ailleurs, pour $k = 0, 1, \dots, N - 1$ et $i = 1, 2, \dots, N$:

$$\sin(2(N-k)+1)\pi\alpha_i + \sin(2(N+k)+1)\pi\alpha_i = 2 \sin(2N+1)\pi\alpha_i \cos 2k\pi\alpha_i$$

Donc :

$$D_0 = 2^N \left(\prod_{i=1}^N \sin \pi\alpha_i \right) \left(\prod_{i=1}^N \sin(2N+1)\pi\alpha_i \right) D'_0$$

Où D'_0 est le déterminant :

$$D'_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cos 2\pi\alpha_1 & \cos 2\pi\alpha_2 & \dots & \cos 2\pi\alpha_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos 2(N-1)\pi\alpha_1 & \cos 2(N-1)\pi\alpha_2 & \dots & \cos 2(N-1)\pi\alpha_N \end{vmatrix}$$

Le déterminant D'_0 se calcule en utilisant les polynômes de Tchebisev T_k , déjà introduits : $\cos kx = T_k(\cos x)$ où T_k est un polynôme de degré k et de terme de plus haut degré $2^{k-1}X^k$, $k \geq 1$. La famille $(T_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ forme donc une famille de degré échelonné, par conséquent, en utilisant la multilinéarité du déterminant :

$$D'_0 = \left(\prod_{k=1}^{N-1} 2^{k-1} \right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cos 2\pi\alpha_1 & \cos 2\pi\alpha_2 & \dots & \cos 2\pi\alpha_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos^{N-1} 2\pi\alpha_1 & \cos^{N-1} 2\pi\alpha_2 & \dots & \cos^{N-1} 2\pi\alpha_N \end{vmatrix}$$

Or ce dernier déterminant n'est autre qu'un déterminant de Van der Monde, d'où :

$$\begin{aligned} D'_0 &= 2^{\frac{(N-1)(N-2)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\cos 2\pi\alpha_i - \cos 2\pi\alpha_j) \\ &= 2^{\frac{(N-1)(N-2)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq N} 2(\cos^2 \pi\alpha_i - \cos^2 \pi\alpha_j) \\ &= 2^{(N-1)^2} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\cos^2 \pi\alpha_i - \cos^2 \pi\alpha_j) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Remarquons que D'_0 ne peut pas être nul car les (α_i) forment une suite strictement croissante parce que ω^* possède exactement $2N$ composantes connexes et $0 < \pi\alpha_i < \pi/2$ or \cos^2 est injectif sur $[0, \pi/2]$. De plus, le produit $\prod_{i=1}^N \sin \pi\alpha_i$ n'est pas nul car pour tout i , $\alpha_i \in]0, 1/2[$. En conclusion, il existe $p \in \{1, 2, \dots, N\}$ tel que $\sin(2N+1)\pi\alpha_p = 0$, c'est-à-dire il existe $q \in \{1, 2, \dots, N\}$ tel que $\alpha_p = \frac{q}{2N+1}$.

Calculons maintenant le déterminant $N \times N$ suivant :

$$D_1 = \det(l_N + l_N, l_{N-1} + l_{N+1}, \dots, l_2 + l_{2N-2}, l_1).$$

• En développant D_1 par multilinéarité du déterminant, on fait apparaître une somme de déterminants $N \times N$ extraits de la matrice A , d'où $D_1 = 0$.

• Par ailleurs, $i = 2, 3, \dots, N$:

$$\sin \frac{(2(N-k)+1)iq\pi}{2N+1} + \sin \frac{(2(N+k)+1)iq\pi}{2N+1} = 0$$

Donc :

$$D_1 = 2^N \left(\prod_{i=1}^N \sin \pi\alpha_i \right) \left(\prod_{i=1, 2, \dots, N; i \neq p} \sin(2N+1)\pi\alpha_i \right) D'_1$$

Où D'_1 est le déterminant :

$$D'_1 = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \cos 2\pi\alpha_1 & \dots & 0 & \dots & \cos 2\pi\alpha_N \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cos 2(N-1)\pi\alpha_1 & \dots & \sin \frac{3\pi q}{2N+1} & \dots & \cos 2(N-1)\pi\alpha_N \end{vmatrix}$$

En développant, D'_1 par rapport à sa p^{ieme} colonne, on fait apparaître un déterminant semblable à D'_0 mais de taille $N-1 \times N-1$, ce qui montre que D'_1 n'est pas nul. Ainsi, il existe r différent de p tel que $\sin(2N+1)\pi\alpha_r = 0$, c'est-à-dire il existe $s \in \{1, 2, \dots, N\}$ tel que $\alpha_r = \frac{s}{2N+1}$.

En calculant successivement, les déterminants D_2, D_3, \dots, D_{N-1} , avec :

$$\begin{aligned} D_2 &= \det(l_N + l_N, l_{N-1} + l_{N+1}, \dots, l_3 + l_{2N-3}, l_2, l_1) \\ D_3 &= \det(l_N + l_N, l_{N-1} + l_{N+1}, \dots, l_3, l_2, l_1) \\ &\vdots \\ D_{N-1} &= \det(l_N + l_N, l_{N-1}, \dots, l_3, l_2, l_1) \end{aligned}$$

on montre que pour tout i compris entre 1 et N , il existe p_i tel que $\alpha_i = \frac{p_i\pi}{2N+1}$. Compte-tenu de la stricte croissance de la suite (α_i) , on en déduit :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad \alpha_i = \frac{i\pi}{2N+1}.$$

Montrons maintenant que le rang de la matrice A est égal à $N-1$ en calculant le déterminant D , de taille $N-1 \times N-1$, obtenu en sélectionnant les $N-1$ premières lignes de la matrice A et en supprimant la dernière colonne :

$$D = \left[\prod_{i=1}^{N-1} \sin \frac{i\pi}{2N+1} \right] \det \left(\left(\sin \frac{(2i+1)\pi j}{2N+1} \right)_{1 \leq i, j \leq N-1} \right)$$

Soit U_n les polynômes de Tchebisev de seconde espèce : $\sin n\theta = \sin \theta U_n(\cos \theta)$, on a alors :

$$D = \left[\prod_{i=1}^{N-1} \sin \frac{i\pi}{2N+1} \right] \det \left(\left(U_j \left(\sin \frac{(2i+1)\pi}{2N+1} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq N-1} \right)$$

Comme U_n est un polynôme de degré n et de terme de plus haut degré $2^n X^n$, $n \geq 1$, on en déduit :

$$D = 2^{\frac{(N-2)(N-3)}{2}} \left(\prod_{i=1}^{N-1} \sin \frac{i\pi}{2N+1} \right) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq N-1} \left(\cos \frac{(2i+1)\pi}{2N+1} - \cos \frac{(2j+1)\pi}{2N+1} \right) \right)$$

Ce qui montre que D n'est pas nul et que donc A est de rang $N-1$. Par conséquent, le noyau de A est de dimension 1.

Montrons alors que $(1, 1, \dots, 1)^t$ appartient au noyau de A , ce qui revient à montrer, pour tout k compris entre 1 et $2N-1$, la nullité de la somme :

$$S_k = 2 \sum_{l=1}^N \sin \frac{l\pi}{2N+1} \sin \frac{(2k+1)l\pi}{2N+1} = \sum_{l=1}^N \left[\cos \frac{2lk\pi}{2N+1} - \cos \frac{2l(k+1)\pi}{2N+1} \right]$$

Or pour tout $\theta \neq 0[2\pi]$:

$$\sum_{l=1}^N \cos l\theta = \cos \frac{(N+1)\theta}{2} \cdot \frac{\sin \frac{N\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

Donc S_k est nulle si et seulement si :

$$\cos \frac{(N+1)k\pi}{2N+1} \sin \frac{Nk\pi}{2N+1} \sin \frac{(k+1)\pi}{2N+1} = \cos \frac{(N+1)(k+1)\pi}{2N+1} \sin \frac{N(k+1)\pi}{2N+1} \sin \frac{k\pi}{2N+1}$$

En développant les cosinus et les sinus, on vérifie que cette égalité est bien satisfaite pour tout k .

En conclusion, comme $(t_1, t_2, \dots, t_N)^t$ appartient au noyau de A et $t_1 + t_2 + \dots + t_N = 1/2$, on en déduit $t_1 = t_2 = \dots = t_N = 1/(2N)$. Par conséquent, pour toute suite (l_k) qui tend vers 0, $(t_i(l_k))$ admet une unique valeur d'adhérence et donc converge vers cette valeur d'adhérence et les fonctions $t_i(l)$ tendent vers $1/K$ quand l tend vers 0 par valeur positive. De même, les fonctions $\alpha_i(l)$ tendent vers $i/(K+1)$ quand l tend vers 0 par valeur positive. \square

Nous avons résolu le système d'équations non-linéaires satisfait par les α_i et les l_i :

$$j_1(\omega^*) = j_2(\omega^*) = \dots = j_N(\omega^*) \quad \text{et} \quad |\omega^*| = l$$

numériquement par l'algorithme de Newton pour plusieurs valeurs de l et de N . Les figures 2.1 à 2.6 présentent, pour K compris entre 1 et 6 : d'une part les graphes des fonctions α_i (en pointillés), $a_i = \alpha_i - l_i/2$ et $b_i = \alpha_i + l_i/2$ (en traits continus). Ainsi, sur les verticales $l = l_0$, on obtient le contrôle optimal de longueur $l = l_0$ pour les N premiers modes propres (Le contrôle optimal pour $l_0 = 0.5$ est représenté en gras). Et d'autre part, les graphes des fonctions $f_K = I_1 = \dots = I_K$ ainsi que le graphe de la fonction I_{K+1} .

Le théorème 2.1.2 et les figures 2.1 à 2.6 mettent en évidence l'inconvénient de la stratégie qui consiste à optimiser uniquement les K premiers modes : dès le $(K+1)^{ieme}$ mode, le taux de décroissance est très mauvais : or le choix de K est souvent arbitraire, puisqu'il sert juste à éviter de travailler avec une infinité de modes propres.

Remarque 2.1.2 *La théorie du degré topologique permet de montrer que le système d'équations :*

$$j_1(\omega^*) = j_2(\omega^*) = \dots = j_K(\omega^*) \quad \text{et} \quad |\omega^*| = l$$

possède une solution pour les petites valeurs de l

En effet, par exemple dans le cas où $K = 2N$ est pair, soit $C = \{a_i \in \mathbb{R}^{2N} \mid 0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_K \leq 1/2\}$ et O son intérieur, et soit l fixé, posons :

$$\psi((a_i)) = \left(\begin{array}{c} \sum_{i=1}^N (a_{2i} - a_{2i-1})(\cos(k+1)\pi(a_{2i-1} + a_{2i}) - \cos k\pi(a_{2i-1} + a_{2i})) \\ \text{pour } k = 1, 2, \dots, K-1 \\ \sum_{i=1}^N (a_{2i} - a_{2i-1} - l) \end{array} \right)$$

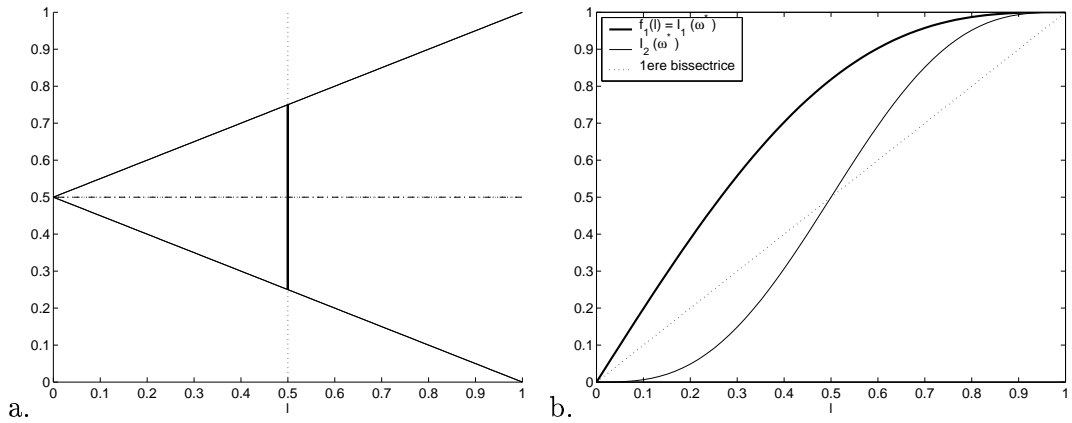


FIG. 2.1 – a. Contrôles optimaux pour 1 mode propre ; b. graphes de f_1 et $I_2(\omega^*)$

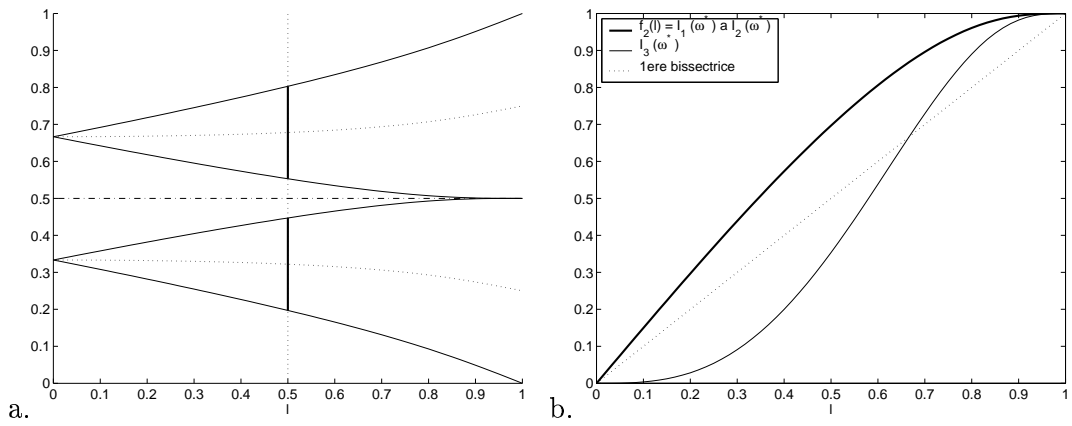


FIG. 2.2 – a. Contrôles optimaux pour 2 modes propres ; b. graphes de f_2 et $I_3(\omega^*)$

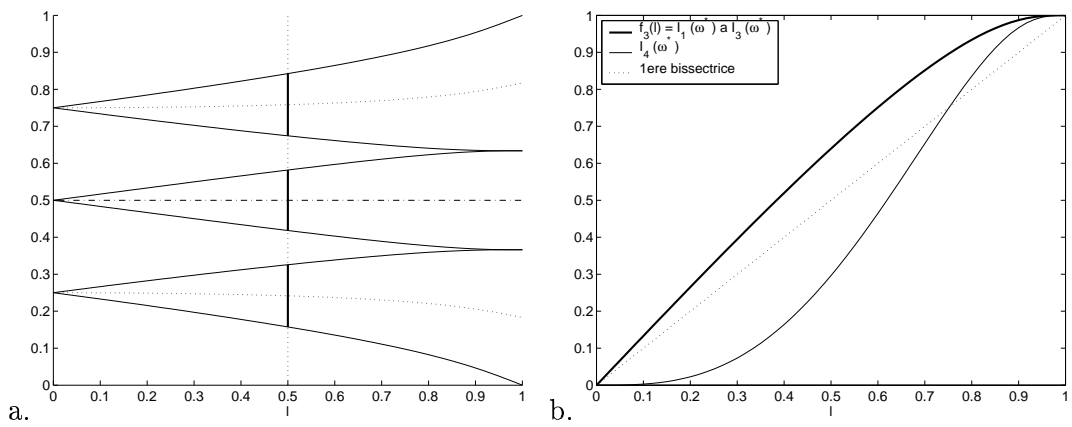


FIG. 2.3 – a. Contrôles optimaux pour 3 modes propres ; b. graphes de f_3 et $I_4(\omega^*)$

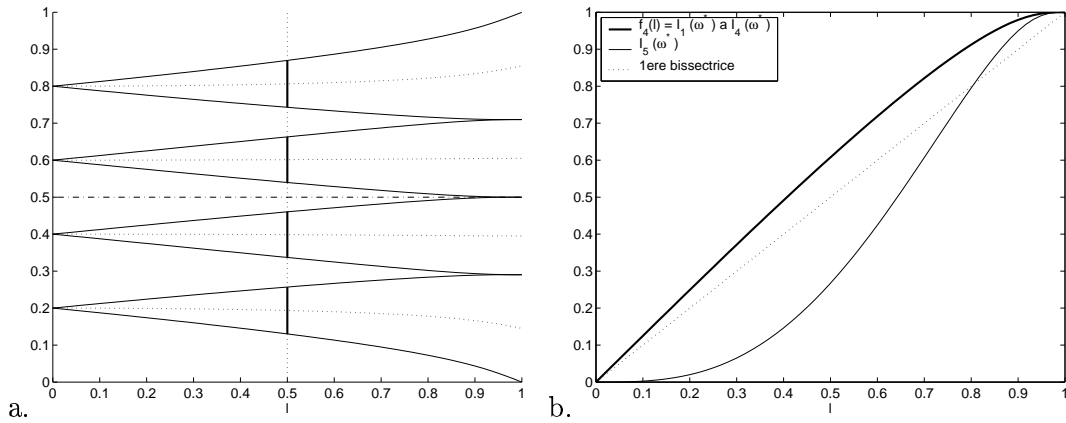


FIG. 2.4 – a. Contrôles optimaux pour 4 modes propres ; b. graphes de f_4 et $I_5(\omega^*)$

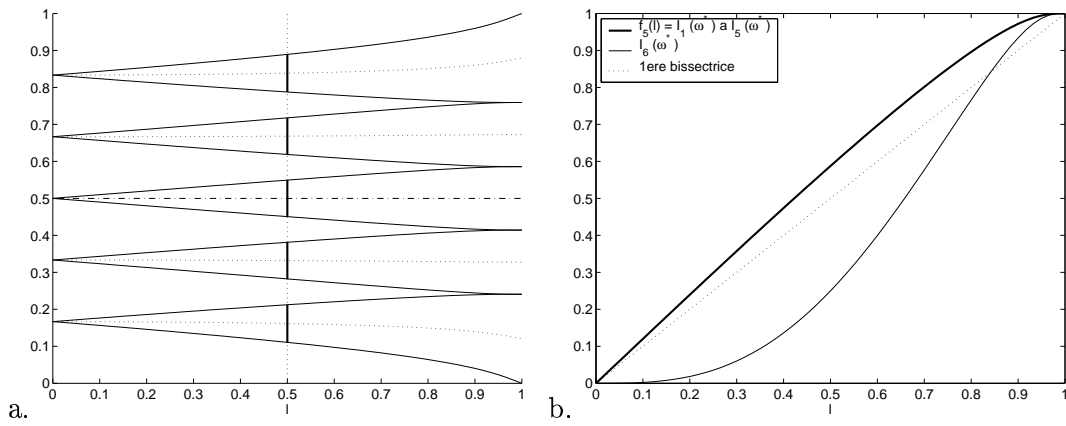


FIG. 2.5 – a. Contrôles optimaux pour 5 modes propres ; b. graphes de f_5 et $I_6(\omega^*)$

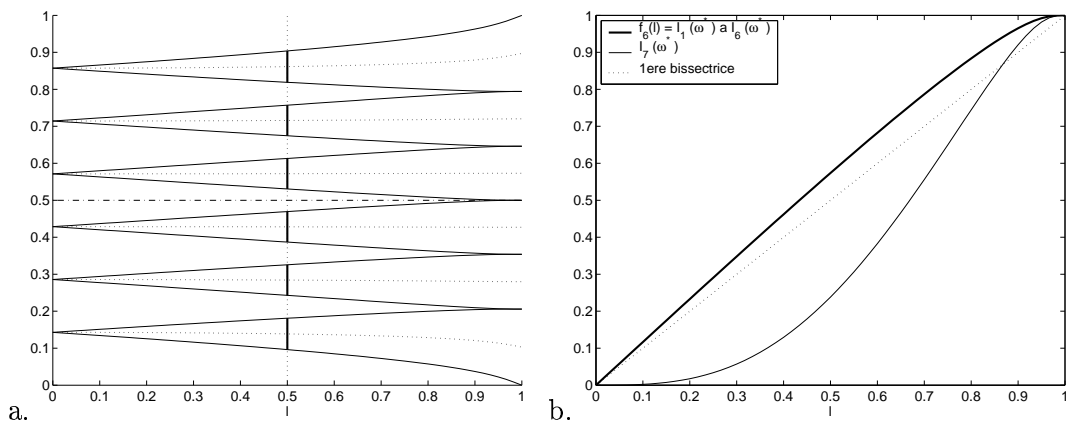


FIG. 2.6 – a. Contrôles optimaux pour 6 modes propres ; b. graphes de f_6 et $I_7(\omega^*)$

Et :

$$\varphi((a_i)) = \left(\begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \frac{1}{(k+1)\pi} \sin(k+1)\pi(a_{2i} - a_{2i-1}) \cos(k+1)\pi(a_{2i-1} + a_{2i}) \\ - \frac{1}{k\pi} \sin k\pi(a_{2i} - a_{2i-1}) \cos k\pi(a_{2i-1} + a_{2i}) \\ \text{pour } k = 1, 2, \dots, K-1 \\ \sum_{i=1}^N (a_{2i} - a_{2i-1}) - l \end{array} \right)$$

Comme nous avons montré que l'équation $\psi((a_i))$ admet une unique solution dans l'intérieur de C , donc le degré topologique de ψ par rapport à 0 et à O est égal à 1 :

$$d(\psi, 0, O) = 1$$

Il existe donc un voisinage V de cette solution qui ne touche pas le bord de C tel que sur V et son adhérence, $\max_{k \in \{1, 2, \dots, K\}} |\psi^k(x)| \geq c_0$

Posons $\varphi_t = (1-t)\psi + t\varphi$. On sait que $d(\varphi_1, 0, O) = d(\varphi_0, 0, O) = 1$, si pour tout t compris entre 0 et 1, 0 n'appartient pas à $\varphi_t(\partial\omega)$.

Or comme $|\sin x - x| \leq |x|^3/6$,

$$|\varphi_t^k(x) - \psi^k(x)| \leq |\varphi^k(x) - \psi^k(x)| \leq \frac{(N+1)^2 \pi^2}{3} l^3$$

Donc pour $l < l_0 = \frac{3c_0}{(N+1)^2 \pi^2}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet au moins une solution dans V donc au moins une solution dans O .

2.1.4 Extensions possibles

L'étude du critère F a été menée, pour l'instant, dans le cadre monodimensionnel. Présentons ici quelques propriétés qui peuvent s'appliquer dans le cadre bidimensionnel, soit pour Ω ouvert du plan d'aire unité.

Notre démonstration du fait que le maximum sur la classe :

$$L = \left\{ a \in L^\infty(0,1), 0 \leq a \leq 1, \int_0^1 a(x) dx = c \right\}$$

est une fonction caractéristique repose sur le fait que les carrés des valeurs propres du laplacien sur Ω considérées et la fonction constante égale à 1 forment un système libre. L'auteur ignore si cette propriété est vraie en général dans le cas 2D mais il est clair qu'elle reste vérifiée par des domaines classiques comme par exemple le carré $\Omega = (0,1)^2$ du fait de l'indépendance linéaire des fonctions $\sin^2 n\pi x \sin^2 m\pi y$.

Par ailleurs, la technique des multiplicateurs de Lagrange permet toujours de montrer que le nombre maximal de composantes connexes du domaine optimal est lié au nombre de maximum relatifs des fonctions propres considérées.

2.2 Etude de J dans le cas monodimensionnel

Rappelons que le critère J est défini pour un ensemble ω par :

$$J(\omega) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\Omega} \chi_{\omega}(x) \phi_n^2(x) dx$$

Soit dans le cas monodimensionnel :

$$J(\omega) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} 2 \int_0^1 \chi_{\omega}(x) \sin^2 n\pi x dx = |\omega| - \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \int_0^1 \chi_{\omega}(x) \cos 2n\pi x dx$$

2.2.1 Existence

Le critère J étant défini à un ensemble de mesure nulle près, nous décidons de ne considérer que des sous-ensembles ω fermés (χ_{ω} étant à variation bornée, ω est la réunion d'un nombre fini d'intervalles et la mesure de sa frontière est nulle).

Définition 2.2.1 Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $l \in [0,1]$, on note E_N^l l'ensemble des sous-ensembles de $[0,1]$ de longueur totale l , réunion d'au plus N intervalles fermés.

La classe E_N^l ainsi définie fournit un premier résultat d'existence :

Proposition 2.2.1 Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $l \in [0,1]$, J est majoré sur E_N^l , et de plus il existe $\omega_0 \in E_N^l$, tel que :

$$J(\omega_0) = \sup_{\omega \in E_N^l} J(\omega)$$

Posons :

$$J_N(l) = \max_{\omega \in E_N^l} J(\omega).$$

Preuve : ω appartient à E_N^l si et seulement si il existe $2N$ réels x_1, x_2, \dots, x_{2N} de $[0,1]$ tels que :

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2N} \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N (x_{2i} - x_{2i-1}) = l \quad (2.15)$$

avec :

$$\omega = \bigcup_{i=1}^N [x_{2i-1}, x_{2i}]$$

Et $K = \{(x_1, x_2, \dots, x_{2N}) \in [0,1]^{2N}, \text{ tels que (2.15) soit satisfaite}\}$ est un compact de \mathbb{R}^{2N} .

De plus, les applications f_n définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ sur K par :

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_{2N}) = 2 \int_0^1 \chi_{\omega}(x) \sin^2 n\pi x dx = 2 \sum_{i=1}^N \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} \sin^2 n\pi x dx$$

sont continues, donc J qui à $(x_1, x_2, \dots, x_{2N})$ fait correspondre :

$$\inf_{n \in \mathbb{N}^*} f_n(x_1, x_2, \dots, x_{2N})$$

est semi-continu supérieurement sur K , par conséquent il est majoré sur K et le suprémum est atteint. \square

Remarque 2.2.1 Du fait de la symétrie de la fonction sinus, $J(\omega) = J(1 - \omega)$, si $1 - \omega$ désigne le symétrique de ω par rapport à $1/2$. Par conséquent si l'optimum n'est pas symétrique, il n'est pas unique. Numériquement, on constate en effet qu'il est en général non symétrique.

2.2.2 Majoration et cas d'égalité

Théorème 2.2.1 Soit $l \in [0,1]$, $N \in \mathbb{N}^*$, et $\omega \in E_N^l$, alors les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$0 \leq J(\omega) \leq l \quad \text{et donc} \quad 0 \leq J_N(l) \leq l \quad (2.16)$$

De plus, il n'y a que trois cas d'égalité $J_N(l) = l$ qui sont :

- $l = 0$, atteint pour $\omega = \emptyset$,
- $l = 1$, atteint pour $\omega = [0,1]$,
- $l = 1/2$, atteint pour ω tel que ω et $1 - \omega$ forment un partition de $[0,1]$, i.e. $\omega^c = 1 - \omega$.

Preuve : Quand n tend vers l'infini, $\sin^2 n\pi x$ tend vers $1/2$ pour la topologie $L^\infty(0,1)$ faible*, donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_0^1 \chi_\omega(x) \sin^2 n\pi x dx = \int_0^1 \chi_\omega(x) dx = l$$

D'où $J(\omega) \leq l$.

Considérons maintenant les cas d'égalité. $J(\omega) = l$ si et seulement si :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \int_0^1 \chi_\omega(x) \cos 2n\pi x dx = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^* \int_0^1 \chi_\omega(x) \cos 2n\pi x dx \leq 0 \quad (2.17)$$

car $\int_0^1 \chi_\omega(x) \cos 2n\pi x dx \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Introduisons D l'espace de Dirichlet des fonctions de la variable réelle, 1-periodiques, dérivables par morceaux et telles que: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^+) + f(x^-) = 2f(x)$.

Soit ω appartenant à E_N^l tel que: $J(\omega) = l$, construisons la fonction f définie sur \mathbb{R} , 1-periodique et telle que :

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2}(\chi_\omega(0^+) + \chi_\omega(1^-)) \\ f(x) &= \frac{1}{2}(\chi_\omega(x^+) + \chi_\omega(x^-)), \quad \forall x \in (0,1) \end{aligned}$$

Par construction f appartient à D et, sauf sur $\partial\omega$, c'est à dire en un nombre fini de points, $f(x) = \chi_\omega(x)$ sur $(0,1)$, donc f est égale à 0 ou 1 presque partout sur \mathbb{R} .

Soit f_p la partie paire de f : $f_p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$, f_p est également une fonction de D et f_p est égale à 0, $1/2$ ou 1 presque partout sur \mathbb{R} .

Considérons les coefficients de Fourier de f_p :

$$\begin{aligned} A_0 &= 2 \int_0^1 \chi_\omega(x) dx = 2l \\ A_n &= 2 \int_0^1 \chi_\omega(x) \cos 2n\pi x dx, \quad n \in \mathbb{N}^* \\ B_n &= 0, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Comme f_p appartient à D , la série $\sum_{n \geq 1} A_n \cos 2n\pi x$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, en particulier la série $\sum_{n \geq 1} A_n$ est convergente et de plus (cf, par exemple [26]) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_p(x) = l + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos 2n\pi x$$

Comme ω vérifie $J(\omega) = l$ et d'après 2.17 : pour tout $n \geq 1$, $A_n \leq 0$, donc la série $\sum_{n \geq 1} A_n$ est absolument convergente, par conséquent la série de fonction $\sum_{n \geq 1} A_n \cos 2n\pi x$ converge normalement sur \mathbb{R} et la fonction f_p est continue sur \mathbb{R} comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Or f_p est égale à 0, 1/2 ou 1 presque partout sur \mathbb{R} , d'où les trois cas :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_p(x) = 0$, donc $\forall x \in [0,1]$, $\chi_\omega(x) = 0$, d'où $\omega = \emptyset$ et $l = 0$. Et on a bien $J(\emptyset) = 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_p(x) = 1$, donc $\forall x \in [0,1]$, $\chi_\omega(x) = 1$, d'où $\omega = [0,1]$ et $l = 1$. Et on a bien $J([0,1]) = 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_p(x) = 1/2$, donc

$$\forall x \in [0,1], \chi_\omega(x) + \chi_\omega(1-x) = \chi_\omega(x) + \chi_{1-\omega}(x) = 1$$

d'où ω et $1-\omega$ forment une partition de $[0,1]$, et donc $l = 1/2$ car il s'agit de deux ensembles de longueur l .

Réciproquement, si ω satisfait $\chi_\omega + \chi_{1-\omega} = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_n(\omega) &= 2 \int_0^1 \chi_\omega(x) \sin^2 n\pi x \, dx \\ &= 2 \int_0^1 (1 - \chi_\omega(1-x)) \sin^2 n\pi x \, dx = 1 - I_n(\omega) \end{aligned}$$

D'où $J(\omega) = I_n(\omega) = 1/2 = l$.

□

Remarque 2.2.2 Si ω de longueur l satisfait $J(\omega) = l$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $I_n(\omega) = l$

2.2.3 Résultats de non-existence

Le but de cette partie est d'établir que la prise en compte du nombre de composantes connexes de ω dans la définition de $J_N(l)$ est nécessaire pour le résultat d'existence en général.

Définition 2.2.2 Pour ω appartenant à E_N^l , posons :

$$I'_n(\omega) = \int_0^1 \chi_\omega(x) \cos 2n\pi x \, dx \quad \text{et} \quad J'(\omega) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} I'_n(\omega)$$

Ainsi $J(\omega) = |\omega| - J'(\omega)$.

Théorème 2.2.2 Soit $l \in]0, 1/2[\cup]1/2, 1[$, soit $N \in \mathbb{N}^*$, alors il existe un entier P plus grand que N tel que $J_P(l) > J_N(l)$. En particulier le problème de maximisation :

$$\max\{J(\omega), \text{ où } \omega \text{ est la réunion d'un nombre fini d'intervalles de longueur totale } l\}$$

n'a pas de solution pour $l \neq 0, 1/2, 1$.

Preuve : On rappelle que, pour une fonction f de classe C^2 sur $[a, b]$, la méthode d'intégration du point milieu donne une erreur majorée par la norme infinie de f'' :

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \|f''\|_\infty$$

Soit $\omega \in E_N^l$ tel que $J_N(l) = J(\omega)$. La technique de cette démonstration repose sur l'idée

suivante: il s'agit de "supprimer" en différents endroits de petits intervalles à ω , pour ensuite les replacer en des points du complémentaire de ω qui sont donc libres. Ceci augmente de façon importante le nombre de composantes connexes du contrôle mais permet de gagner sur le critère. Plus précisément, comme $J_N(l) < l$ et $I_n(\omega)$ tend vers l quand n tend vers l'infini, il existe un ensemble **fini** d'entier \mathcal{N} tel que:

$$J(\omega) = I_n(\omega) = l - I'_n(\omega) \iff n \in \mathcal{N}$$

Soient deux subdivisions S_1 de ω et S_2 de l'adhérence de son complémentaire $\overline{\omega^c}$:

$$\omega = \bigcup_{i=1}^K [a_i, b_i] \quad \text{et} \quad \overline{\omega^c} = \bigcup_{j=1}^L [c_j, d_j]$$

La méthode du point milieu, nous donne:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \chi_\omega(x) \cos 2n\pi x \, dx - \sum_{i=1}^K (b_i - a_i) \cos \left(2n\pi \frac{a_i + b_i}{2} \right) \right| &\leq \frac{\|f''\|_\infty}{24} \sum_{i=1}^K (b_i - a_i)^3 \\ &\leq \frac{n^2 \pi^2}{6} \sum_{i=1}^K (b_i - a_i)^3 \\ \left| \int_0^1 \chi_{\omega^c}(x) \cos 2n\pi x \, dx - \sum_{j=1}^L (d_j - c_j) \cos \left(2n\pi \frac{c_j + d_j}{2} \right) \right| &\leq \frac{n^2 \pi^2}{6} \sum_{j=1}^L (d_j - c_j)^3 \end{aligned}$$

Posons:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{a_i + b_i}{2}, \quad h_i = (1-l)(b_i - a_i) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq K \\ y_j &= \frac{c_j + d_j}{2}, \quad l_j = l(d_j - c_j) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq L \end{aligned}$$

Comme $\chi_{\omega^c} = 1 - \chi_\omega$, $\int_0^1 \chi_{\omega^c}(x) \cos 2n\pi x \, dx = -I'_n(\omega)$, il est donc possible de choisir les subdivisions S_1 et S_2 telles que, pour tout $n \in \mathcal{N}$:

$$\left| I'_n(\omega) - \frac{1}{1-l} \sum_{i=1}^K h_i \cos 2n\pi x_i \right| \leq \frac{J'(\omega)}{2} \quad (2.18)$$

$$\left| I'_n(\omega) + \frac{1}{l} \sum_{j=1}^L l_j \cos 2n\pi y_j \right| \leq \frac{J'(\omega)}{2} \quad (2.19)$$

Le but est maintenant de construire un domaine meilleur que ω , pour cela définissons pour $\varepsilon > 0$:

$$\omega_\varepsilon = \left(\omega - \bigcup_{i=1}^K]x_i - h_i \frac{\varepsilon}{2}, x_i + h_i \frac{\varepsilon}{2}[\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^L]y_j - l_j \frac{\varepsilon}{2}, y_j + l_j \frac{\varepsilon}{2}[\right)$$

ω_ε s'obtient donc en effectuant des "trous" aux points x_i et en "plaçant le contrôle" autour des points y_j . En effet, pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = \min\{\frac{1}{l}, \frac{1}{1-l}\}$, ω_ε a $N + K + L$ composantes connexes et :

$$\begin{aligned} |\omega_\varepsilon| &= |\omega| - \varepsilon \sum_{i=1}^K h_i + \varepsilon \sum_{j=1}^L l_j = |\omega| - \varepsilon(1-l) \sum_{i=1}^K (b_i - a_i) + \varepsilon l \sum_{j=1}^L (d_j - c_j) \\ &= |\omega| - \varepsilon(1-l)l + \varepsilon l(1-l) = |\omega| \end{aligned}$$

Donc pour $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, ω_ε appartient à E_{N+K+L}^l . Or :

$$I_n(\omega_\varepsilon) = I_n(\omega) - \sum_{i=1}^K \int_{x_i - \frac{h_i \varepsilon}{2}}^{x_i + \frac{h_i \varepsilon}{2}} \cos 2n\pi x \, dx + \sum_{j=1}^L \int_{y_j - \frac{l_j \varepsilon}{2}}^{y_j + \frac{l_j \varepsilon}{2}} \cos 2n\pi x \, dx$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{dI_n(\omega_\varepsilon)}{d\varepsilon}(\varepsilon) &= \sum_{j=1}^L \frac{l_j}{2} \left(\cos 2n\pi \left(y_j + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \cos 2n\pi \left(y_j - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^K \frac{h_i}{2} \left(\cos 2n\pi \left(x_i + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \cos 2n\pi \left(x_i - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

En particulier :

$$\frac{dI_n(\omega_\varepsilon)}{d\varepsilon}(0) = \sum_{j=1}^L l_j \cos 2n\pi y_j - \sum_{i=1}^K h_i \cos 2n\pi x_i$$

D'après (2.18) et (2.19), on en déduit pour tout $n \in \mathcal{N}$:

$$\frac{dI_n(\omega_\varepsilon)}{d\varepsilon}(0) \leq l \left(\frac{J'(\omega)}{2} - I'_n(\omega) \right) + (1-l) \left(\frac{J'(\omega)}{2} - I'_n(\omega) \right) \leq -\frac{J'(\omega)}{2} < 0$$

Par conséquent il existe $\varepsilon > 0$, tel que $J(\omega_\varepsilon) < J(\omega)$, et $J_{N+K+L}(l) < J_N(l)$ □

Comme nous n'avons pas d'existence de maximum sans la contrainte d'un nombre fixe de composantes connexes, il est possible d'envisager une technique de relaxation (cf. [21], chapitre 6, paragraphe 2). En effet, l'adhérence de l'ensemble des fonctions caractéristiques d'ensembles de longueur l pour la topologie L^∞ faible* est l'ensemble suivant (qui n'est autre que son enveloppe convexe) :

$$F^l = \overline{\bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} E_N^l} = \left\{ a \in L^1(0,1) \mid \forall x \in [0,1], 0 \leq a(x) \leq 1 \text{ et } \int_0^1 a(x) \, dx = l \right\}$$

Pour $a \in F^l$, le critère J s'étend de façon naturelle à :

$$J^*(a) = \inf_{N \in \mathbb{N}^*} 2 \int_0^1 a(x) \sin^2 n\pi x \, dx$$

Le problème de la maximisation de J^* sur F^l est maintenant bien posé et admet de nombreuses solutions, la plus simple étant la fonction constante $a_0(x) = l$. Mais l'extension J^* ne convient

pas, il est clair qu'elle est semi-continue supérieurement, or il est possible de montrer qu'elle est **strictement** semi-continue supérieurement et donc pas continue. Considérons, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la suite d'ensemble :

$$\omega_k = \bigcup_{p=0}^{k-1} \left[\frac{p}{k}, \frac{p}{k} + \frac{l}{k} \right]$$

Pour la norme L^∞ faible * :

$$\chi_{\omega_k} \rightharpoonup a_0$$

Or pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} I_n(\omega_k) &= l - \sum_{p=0}^{k-1} \int_{\frac{p}{k}}^{\frac{p}{k} + \frac{l}{k}} \cos 2n\pi x \, dx \\ &= l - \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi l}{k} \sum_{p=0}^{k-1} \cos 2n\pi \left(\frac{p}{k} + \frac{l}{2k} \right) \\ &= l - \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi l}{k} \operatorname{Re} \left(\exp \left(\frac{in\pi l}{k} \right) \sum_{p=0}^{k-1} \exp \left(\frac{2in\pi p}{k} \right) \right) \\ &= \begin{cases} l & \text{si } n \neq mk \text{ pour tout } m, \\ l - \frac{\sin m\pi l \cos m\pi l}{m\pi l} & \text{si } n = mk \end{cases} \end{aligned}$$

Donc pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé on retrouve bien que $I_n(\omega_k) \rightarrow l = I_n(a_0)$ quand $k \rightarrow \infty$ (comme l'impose le fait que $\chi_{\omega_k} \rightharpoonup a_0$). En revanche :

$$J^*(\omega_k) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} I_n(\omega_k) = \inf_{m \in \mathbb{N}^*} l - \frac{\sin m\pi l \cos m\pi l}{m\pi l} = \inf_{m \in \mathbb{N}^*} I_n([0, l]) = J([0, l])$$

Donc pour l différent de $0, 1/2$ ou 1 , la suite $(J^*(\omega_k))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est constante et strictement inférieure à $l = J^*(a_0)$.

Nous avons fait ces calculs avec d'autres suites (ω_k) moins régulières mais pour aucune le critère J^* n'était continu.

Par ailleurs, la suite $(J_N(l))_{N \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante car $P > N \Rightarrow E_N^l \subset E_P^l$, elle est également majorée par l par conséquent elle converge, notons $J_\infty(l)$ sa limite. Pour $l = 0, 1/2$ ou 1 , la suite est constante et $J_\infty(l) = l$, en revanche pour une autre valeur de l , le théorème 2.2.2 montre que la limite n'est pas atteinte, mais nous ne savons pas si $J_\infty(l) = l$ ou $J_\infty(l) < l$.

2.2.4 Propriétés de J

Proposition 2.2.2

$$\forall \omega \in E_N^l, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \mid J(\omega) = I_{n_0}(\omega)$$

De plus, si ω réalise le maximum de J sur E_N^l i.e. $J(\omega) = J_N(l)$, alors il existe 2 entiers distincts n_1 et n_2 tels que :

$$J(\omega) = I_{n_1}(\omega) = I_{n_2}(\omega)$$

Preuve : Si ω est tel que $J(\omega) = l$, alors d'après la remarque 2.2.2, la proposition est évident. Si ω est tel que $J(\omega) < l$, alors comme $I_n(\omega)$ tend vers l quand n tend vers l'infini, il existe un entier n_1 tel que :

$$\begin{aligned} n \geq n_1 &\Rightarrow |I_n(\omega) - l| < (l - J(\omega))/2 \\ &\Rightarrow I_n(\omega) > J(\omega) + (l - J(\omega))/2 \end{aligned}$$

Et :

$$J(\omega) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} I_n(\omega) = \inf_{1 \leq n \leq n_1} I_n(\omega) = \min_{1 \leq n \leq n_1} I_n(\omega)$$

Donc il existe un entier $n_0 \leq n_1$ tel que $J(\omega) = I_{n_0}(\omega)$.

Supposons maintenant que ω réalise le maximum de J sur E_N^l et possède K composantes connexes et posons :

$$\omega_\varepsilon = \omega + \varepsilon = \bigcup_{i=1}^K [a_i + \varepsilon, b_i + \varepsilon] \quad \text{si} \quad \omega = \bigcup_{i=1}^K [a_i, b_i],$$

alors pour ε suffisamment petit ω_ε appartient à E_N^l .

On sait qu'il existe n_0 tel que $J(\omega) = I_{n_0}(\omega) < l$; supposons que pour tout n différent de n_0 , $I_n(\omega) > I_{n_0}(\omega)$. Comme, quand $n \rightarrow \infty$, $I_n(\omega) \rightarrow l$, on en déduit :

$$\exists \delta > 0 \mid n \neq n_0 \Rightarrow I_n(\omega) \geq I_{n_0}(\omega) + \delta$$

Pour tout entier n (cf, preuve de la proposition 2.2.3) :

$$|I_n(\omega_\varepsilon) - I_n(\omega)| \leq 2|\omega \Delta \omega_\varepsilon| = 4K\varepsilon$$

Donc pour $|\varepsilon| < \frac{\delta}{12K}$:

$$n \neq n_0 \Rightarrow I_n(\omega_\varepsilon) \geq I_{n_0}(\omega) + 2\delta/3 \quad \text{et} \quad I_{n_0}(\omega_\varepsilon) \leq I_{n_0}(\omega) + \delta/3 ;$$

d'où $\inf_{n \in \mathbb{N}^*} I_n(\omega_\varepsilon) = I_{n_0}(\omega_\varepsilon)$.

Or :

$$\begin{aligned} \frac{dI_{n_0}(\omega_\varepsilon)}{d\varepsilon}(0) &= 2 \sum_{i=1}^K \sin n_0 \pi (b_i - a_i) \sin n_0 \pi (a_i + b_i) \\ \frac{d^2 I_{n_0}(\omega_\varepsilon)}{d\varepsilon^2}(0) &= 2 \sum_{i=1}^K \sin n_0 \pi (b_i - a_i) \cos n_0 \pi (a_i + b_i) = (2n_0 \pi)^2 (l - I_{n_0}(\omega)) > 0 \end{aligned}$$

Donc, ou bien, si la dérivée première n'est pas nulle il existe ε dans $] -\delta/(12K), \delta/(12K)[$, tel que $I_{n_0}(\omega_\varepsilon) > I_{n_0}(\omega)$; ou bien, si la dérivée première est nulle, ω est un minimum local de I_{n_0} car la dérivée seconde est positive. Dans tous les cas, on arrive à une contradiction car on trouve un domaine ω_ε tel que $J(\omega_\varepsilon) > J(\omega) = J_N(l)$. \square

Remarque 2.2.3 Si ω réalise le maximum de J sur E_N^l i.e. $J(\omega) = J_N(l)$, et si ω a K composantes connexes, alors, en général, il existe $2K$ entiers distincts n_1, n_2, \dots, n_{2K} tels que :

$$J(\omega) = I_{n_i}(\omega), \quad 1 \leq i \leq 2K$$

L'argumentation suivante est heuristique : si ω s'écrit : $\omega = \bigcup_{i=1}^K [a_i, b_i]$, il est possible de voir l'ensemble des points $(a_1, b_1, \dots, a_K, b_K, I_n(\omega))$ comme une hypersurface de dimension $2K$ de \mathbb{R}^{2K+1} . La contrainte de longueur oblige les points $(a_1, b_1, \dots, a_K, b_K)$ à rester dans l'hyperplan affine : $\sum_{i=1}^K b_i - a_i = l$ de vecteur normal $\nu = 1/\sqrt{2K}(-1, 1, \dots, -1, 1)^t$. Soit W le point de \mathbb{R}^{2K} correspondant à l'optimum ω . Supposons que $J(\omega)$ soit atteint pour p indices avec $p \leq 2K - 1$. Soit e_i la projection du gradient $\nabla I_{n_i}(W)$ sur l'hyperplan vectoriel \vec{V} parallèle à V . Si on trouve un vecteur e de \vec{V} , tel que pour tout i , $e \cdot e_i > 0$ alors on tiendra une contradiction car $W + t \cdot e$ sera meilleur pour une certaine valeur de t . Or il suffit que les vecteurs $\nabla I_{n_1}(W), \nabla I_{n_2}(W), \dots, \nabla I_{n_p}(W)$ et ν soient indépendants sur \mathbb{R}^{2K} , pour que le vecteur e existe. C'est donc en ce sens que génériquement, si $p < 2K$, le système est libre.

On s'intéresse maintenant à la régularité de J et de J_N .

Proposition 2.2.3 *Soit deux sous-domaines distincts $\omega_1 \in E_{N_1}^{l_1}$ et $\omega_2 \in E_{N_2}^{l_2}$, on note $\omega_1 \Delta \omega_2 = \omega_1 \cup \omega_2 - \omega_1 \cap \omega_2$ leur différence symétrique, alors :*

$$|J(\omega_1) - J(\omega_2)| < 2|\omega_1 \Delta \omega_2| = 2|\omega_1 - \omega_2| + 2|\omega_2 - \omega_1|$$

De plus si $\omega_1 \subsetneq \omega_2$, alors $J(\omega_1) < J(\omega_2)$ donc J est strictement croissant pour l'inclusion.

Soit $N \in \mathbb{N}^$ et $(l_1, l_2) \in [0, 1]^2$ tels que $l_1 > l_2$, alors :*

$$0 < J_N(l_1) - J_N(l_2) < 2(l_1 - l_2)$$

J_N est donc une fonction croissante et lipschitzienne de rapport 2, elle est en particulier presque partout dérivable.

Remarque 2.2.4 *Cette proposition 2.2.3 implique notamment qu'avec les notations de la preuve de la proposition 2.2.1, J est une fonction lipschitzienne de rapport 1 par rapport à chacune des variables x_1, x_2, \dots, x_{2N} sur E_N^l . On savait déjà J semi-continu supérieurement, il est en fait continu et presque partout dérivable sur E_N^l .*

Preuve : D'après la proposition 2.2.2, il existe deux entiers n_1 et n_2 tels que :

$$\begin{aligned} J(\omega_1) &= \inf_{n \in \mathbb{N}^*} I_n(\omega_1) = I_{n_1}(\omega_1) \\ J(\omega_2) &= \inf_{n \in \mathbb{N}^*} I_n(\omega_2) = I_{n_2}(\omega_2) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} J(\omega_1) - J(\omega_2) &= I_{n_1}(\omega_1) - I_{n_2}(\omega_2) \leq I_{n_2}(\omega_1) - I_{n_2}(\omega_2) \\ &\leq 2 \int_0^1 |\chi_{\omega_1}(x) - \chi_{\omega_2}(x)| \sin^2 n_2 \pi x \, dx \\ &\leq 2 \int_0^1 |\chi_{\omega_1}(x) - \chi_{\omega_2}(x)| \, dx = 2|\omega_1 \Delta \omega_2| \end{aligned}$$

Le rôle symétrique de ω_1 et ω_2 permet de prouver la première inégalité.

Si $\omega_1 \subsetneq \omega_2$ alors $\chi_{\omega_1} - \chi_{\omega_2} \leq 0$ avec inégalité stricte sur un ouvert donc $\int_0^1 (\chi_{\omega_1}(x) - \chi_{\omega_2}(x)) \sin^2 n_2 \pi x \, dx < 0$ et $J(\omega_1) < J(\omega_2)$.

Soit maintenant $(l_1, l_2) \in [0, 1]^2$ tels que $l_1 > l_2$, alors d'après la proposition 2.2.1, il existe deux sous-domaines ω_1 et ω_2 appartenant respectivement à $E_N^{l_1}$ et $E_N^{l_2}$ tels que :

$$J_N(l_1) = \sup_{\omega \in E_N^{l_1}} J(\omega) = J(\omega_1) \quad \text{et} \quad J_N(l_2) = \sup_{\omega \in E_N^{l_2}} J(\omega) = J(\omega_2)$$

Soit ω'_1 un sous-domaine de $E_N^{l_2}$ tel que $\omega'_1 \subset \omega_1$, un tel domaine peut s'obtenir par exemple de la façon suivante :

$$\text{Si } \omega_1 = \bigcup_{i=1}^N [\alpha_i - h_i/2, \alpha_i + h_i/2], \text{ on pose : } \omega'_1 = \bigcup_{i=1}^N [\alpha_i - \frac{l_2}{l_1} h_i/2, \alpha_i + \frac{l_2}{l_1} h_i/2]$$

Quitte à modifier légèrement ω'_1 ainsi obtenu, on impose $\omega'_1 \neq \omega_2$, à l'aide de la première partie de la proposition, on en déduit :

$$\begin{aligned} J_N(l_1) - J_N(l_2) &= J(\omega_1) - J(\omega_2) \leq J(\omega_1) - J(\omega'_1) \\ &\leq 2|\omega_1 \Delta \omega'_1| = 2|\omega_1 - \omega'_1| = 2(l_1 - l_2) \end{aligned}$$

Soit maintenant ω'_2 un sous-domaine de $E_N^{l_1}$ tel que $\omega'_2 \supseteq \omega_2$, un tel domaine peut s'obtenir en dilatant les composantes connexes de ω_2 de façon à augmenter sa longueur totale de l_2 à l_1 , sans changer le nombre de composantes connexes. D'après la proposition 2.2.2, il existe un entier n_0 tel que $J(\omega'_2) = I_{n_0}(\omega'_2)$, on en déduit :

$$\begin{aligned} J_N(l_1) - J_N(l_2) &= J(\omega_1) - J(\omega_2) \geq J(\omega'_2) - J(\omega_2) \\ &\geq I_{n_0}(\omega'_2) - I_{n_0}(\omega_2) = 2 \int_0^1 (\chi_{\omega'_2}(x) - \chi_{\omega_2}(x)) \sin^2 n_0 \pi x \, dx > 0 \end{aligned}$$

□

2.2.5 Cas d'un intervalle

On s'intéresse dans cette partie au cas où le contrôle se limite à un intervalle. La longueur l étant considérée comme un paramètre pour la recherche du contrôle optimal, le plus pratique est de repérer l'intervalle ω par son centre α , c'est-à-dire : $\omega = [\alpha - l/2, \alpha + l/2]$. Et α peut varier dans l'intervalle $[l/2, 1 - l/2]$, mais d'après la remarque 2.2.1, changer ω en $1 - \omega$ ne modifie pas la valeur du critère, il est donc possible de se limiter à l'intervalle $[l/2, 1/2]$. Les résultats obtenus pourront être étendus par symétrie par rapport à $1/2$.

Dans un souci de concision des notations, on modifie légèrement, pour cette troisième partie, les notations introduites jusqu'à présent (cf. définition 2.2.2). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in E_1^l$, on pose :

$$\begin{aligned} I'_n(\alpha, l) &= I'_n([\alpha - l/2, \alpha + l/2]) \\ &= \int_{\alpha - l/2}^{\alpha + l/2} \cos 2n\pi x \, dx = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi l \cos 2n\pi\alpha \\ I_n(\alpha, l) &= I_n([\alpha - l/2, \alpha + l/2]) = l - \frac{1}{n\pi} \sin n\pi l \cos 2n\pi\alpha \\ J(\alpha, l) &= J([\alpha - l/2, \alpha + l/2]) \\ J'(\alpha, l) &= J'([\alpha - l/2, \alpha + l/2]) \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.2.1, pour tout $l \in [0,1]$:

$$J_1(l) = \max_{\omega \in E_1^l} J(\omega) = \max_{\frac{l}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}} J(\alpha, l)$$

Par conséquent pour tout $l \in [0,1]$, il existe α^* appartenant à $[l/2, 1/2]$, tel que :

$$J(\alpha^*, l) = J_1(l) = \max_{\frac{l}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}} J(\alpha^*, l) \quad (2.20)$$

En faisant un choix s'il existe plusieurs réels α^* satisfaisant (2.20), on construit une fonction α^* de $[0,1]$ dans $[0, 1/2]$ telle que pour tout l de $[0,1]$, $\alpha^*(l)$ satisfasse (2.20).

On déduit directement des propositions de l'étude du cas général les propriétés suivantes :

- $J_1(l) = l$ si et seulement si :
 - $l=0$, atteint pour $\omega = \emptyset$,
 - $l=1$, atteint pour $\omega = [0,1]$,
 - $l=1/2$, atteint dans $E_1^{1/2}$ pour $\omega = [0, 1/2]$ ou $\omega = [1/2, 1]$.
- J et J' sont lipschitziennes par rapport aux deux variables α et l :
 - $|J(\alpha_1, l) - J(\alpha_2, l)| \leq 2|\alpha_1 - \alpha_2|$
 - $|J(\alpha, l_1) - J(\alpha, l_2)| \leq 2|l_1 - l_2|$
 - $|J'(\alpha_1, l) - J'(\alpha_2, l)| \leq 2|\alpha_1 - \alpha_2|$
 - $|J'(\alpha, l_1) - J'(\alpha, l_2)| \leq |l_1 - l_2|$
- Il existe pour tout l , deux entiers distincts n_1 et n_2 tels que :

$$J(\alpha^*(l), l) = I_{n_1}(\alpha^*(l), l) = I_{n_2}(\alpha^*(l), l) \quad (2.21)$$

Proposition 2.2.4 Soit l_0 tel qu'il existe un unique réel $\alpha^*(l_0)$ satisfaisant (2.20) et un unique couple d'entiers distincts n_1 et n_2 satisfaisants (2.21), alors il existe un voisinage V de l_0 tel que pour $l \in V$, $J_1(l)$ et $\alpha^*(l)$ soient donnés par les équations implicites :

$$J_1(l) = I_{n_1}(\alpha^*(l), l) = I_{n_2}(\alpha^*(l), l)$$

Soit :

$$J_1'(l) = \frac{1}{n_1\pi} \sin n_1\pi l \cos 2n_1\pi\alpha^*(l) = \frac{1}{n_2\pi} \sin n_2\pi l \cos 2n_2\pi\alpha^*(l)$$

On en déduit, en particulier, par le théorème des fonctions implicites, que J_1 et α^* sont indéfiniment dérivables en l_0 , et que :

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha^*}{dl}(l) &= \frac{1}{2} \frac{\cos n_1\pi l \cos 2n_1\pi\alpha^*(l) - \cos n_2\pi l \cos 2n_2\pi\alpha^*(l)}{\sin n_1\pi l \sin 2n_1\pi\alpha^*(l) - \sin n_2\pi l \sin 2n_2\pi\alpha^*(l)} \\ \frac{dJ_1}{dl}(l) &= \cos n_1\pi l \cos 2n_1\pi\alpha^*(l) - 2 \sin n_1\pi l \sin 2n_1\pi\alpha^*(l) \frac{d\alpha^*}{dl}(l) \end{aligned}$$

Preuve :

- Comme $\alpha^*(l_0)$ est l'unique solution de (2.20), pour tout voisinage V de $\alpha^*(l_0)$ dans $[l_0/2, 1/2]$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\alpha \in [l_0/2, 1/2] - V \Rightarrow J'(\alpha, l_0) \leq J'(\alpha^*(l_0), l_0) - \delta = J_1'(l_0) - \delta$$

– Comme n_1 et n_2 sont les deux unique entiers satisfaisant (2.21), il existe $\delta_1 > 0$ tel que :

$$n \neq n_1 \text{ et } n \neq n_2 \Rightarrow I'_n(\alpha^*(l_0), l_0) \leq J'_1(l_0) - \delta_1$$

Soit $V = (\alpha^*(l_0) - \frac{\delta_1}{8}, \alpha^*(l_0) + \frac{\delta_1}{8})$, puisque I'_n est lipschitzienne de rapport 2 pour la première variable, pour $i = 1$ ou 2 :

$$\forall \alpha \in V \quad I'_{n_i}(\alpha, l_0) \geq I'_{n_i}(\alpha^*(l_0), l_0) - 2|\alpha - \alpha^*(l_0)| = J'_1(l_0) - \frac{\delta_1}{4}$$

Et pour $n \neq n_1, n \neq n_2$ et $\alpha \in V$:

$$I'_n(\alpha, l_0) \leq I'_n(\alpha^*(l_0), l_0) + 2\frac{\delta_1}{8} = J'_1(l_0) - \frac{3\delta_1}{4}$$

D'après le premier point, il existe $\delta_2 > 0$, tel que :

$$\alpha \in [l_0/2, 1/2] - V \Rightarrow J'(\alpha, l_0) \leq J'(\alpha^*(l_0), l_0) - \delta = J'_1(l_0) - \delta_2$$

– Soit l tel que $|l - l_0| < \lambda = \min\{\frac{\delta_1}{6}, \frac{\delta_2}{6}\} > 0$. Comme J' est lipschitzienne de rapport 1 pour la deuxième variable, on déduit pour α appartenant à $[l_0/2, 1/2] - V$:

$$J'(\alpha, l) \leq J'(\alpha, l_0) + \frac{\delta_2}{6} \leq J'_1(l_0) - \frac{5\delta_2}{6}$$

et :

$$J'(\alpha^*(l_0), l) \geq J'_1(l_0) - \frac{\delta_2}{6}$$

Par conséquent le supremum de $J'(\cdot, l)$ semble être atteint sur V , mais quand l est plus petit que l_0 l'intervalle de variation de α s'agrandit, il faut donc s'assurer que l'intervalle $[l/2, l_0/2]$ ne pose pas de problème quand l est plus petit que l_0 . On distingue pour cela deux cas :

1. Si $l_0/2$ appartient à V , comme V est un ouvert la distance δ_3 de $l_0/2$ à la borne gauche de V : $\alpha^*(l_0) - \frac{\delta_1}{8}$ est strictement positive, et on modifie λ en $\lambda = \min\{\frac{\delta_1}{6}, \frac{\delta_2}{6}, \delta_3\}$, ainsi $[l/2, l_0/2]$ est inclus dans V .
2. Si $l_0/2$ n'appartient pas à V , soit α appartenant à $[l/2, l_0/2]$:

$$\begin{aligned} J'(\alpha, l) &\leq J'(l_0/2, l) + 2|\alpha - \alpha^*(l_0)| \leq J'(l_0/2, l) + \frac{\delta_2}{6} \\ &\leq J'(l_0/2, l_0) + \frac{\delta_2}{6} + \frac{\delta_2}{6} \\ &\leq J'_1(l_0) - \frac{2\delta_2}{3} \end{aligned}$$

Donc dans les deux cas :

$$\sup_{\alpha \in [l/2, 1/2]} J'(\alpha, l) = \sup_{\alpha \in V} J'(\alpha, l)$$

– Or pour α appartenant à V et $i = 1$ ou 2 :

$$I'_{n_i}(\alpha, l) \geq I'_{n_i}(\alpha, l_0) - \frac{\delta_1}{6} \geq J'_1(l_0) - \frac{5\delta_1}{12}$$

Et pour $n \neq n_1$ et $n \neq n_2$:

$$I'_n(\alpha, l) \leq I'_n(\alpha, l_0) + \frac{\delta_1}{6} \leq J'_1(l_0) - \frac{7\delta_1}{12}$$

D'où $J'(\alpha, l) = \max\{I'_{n_1}(\alpha, l), I'_{n_2}(\alpha, l)\}$. Donc pour l tel que $|l - l_0| < \lambda$, $J'_1(l) = \min_{\alpha \in V} J'(\alpha, l) = J'(\alpha^*(l), l)$ satisfait :

$$J_1(l) = I_{n_1}(\alpha^*(l), l) = I_{n_2}(\alpha^*(l), l)$$

□

Les points $l_0 = 0, 1/2$ ou 1 ne sont pas concernés par la proposition 2.2.4, parce qu'en ces trois points le critère est atteint pour tout n . Néanmoins, il est quand même possible de montrer que :

Proposition 2.2.5 – J_1 et α^* sont dérivables en 1 et :

$$\begin{aligned} \frac{dJ_1}{dl}(1) &= 1 - \max_{a \in [0,1]} \left\{ \min_{x \geq 0} \frac{\sin x \cos ax}{x} \right\} = 1 - \min_{x \geq 0} \frac{\sin x \cos a_0 x}{x} \simeq 1.05950 \\ \frac{d\alpha^*}{dl}(1) &= a_0/2 \simeq 0.36049 \end{aligned}$$

– J_1 et α^* sont dérivables à droite en $1/2$ et :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dJ_1}{dl} \right)_d (1/2) &= 0 \\ \left(\frac{d\alpha^*}{dl} \right)_d (1/2) &= a_1 \simeq 3.06570, \text{ avec } a_1 \text{ tel que : } \inf_{x \geq 0} \frac{\cos x \sin 2a_1 x}{x} = 1 \end{aligned}$$

– J_1 et α^* sont dérivables à gauche en $1/2$ et :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dJ_1}{dl} \right)_g (1/2) &= 1 - \max_{a \leq 1/2} \left\{ \min_{x \geq 0} \left\{ \inf_{x \geq 0} \frac{\sin x \cos 2ax}{x}, 2a \right\} \right\} \simeq 1.16020 \\ \left(\frac{d\alpha^*}{dl} \right)_g (1/2) &= a_2 \simeq -0.08389, \text{ avec } a_2 \text{ tel que : } \inf_{x \geq 0} \frac{\sin x \cos 2a_2 x}{x} = 2a_2 \end{aligned}$$

– J_1 est dérivable en 0 et :

$$\frac{dJ_1}{dl}(0) = 0$$

Numériquement, on retrouvera ces résultats théoriques : cf. les figures 5.3, 5.4 et 5.5.

Preuve : Seule l'étude de la dérivabilité de J_1 et α^* en 1 sera menée ici, mais les mêmes idées permettent de conclure pour l'étude en $1/2$ et en 0. La preuve se fait en 4 étapes :

– Soit la fonction de deux variables suivante :

$$\begin{aligned} \Theta : [0,1] \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, x) &\mapsto \frac{\sin x \cos ax}{x} \end{aligned}$$

Soit a appartenant à $[0,1]$, la fonction qui à x associe $\Theta(a, x)$ est continue sur \mathbb{R}^+ , et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, de plus il existe x appartenant à \mathbb{R}^+ tel que $\Theta(a, x) < 0$

(pour $a \neq 1/2$, on peut choisir x dans un voisinage de π , et pour $a = 1/2$, on peut choisir x dans un voisinage de 4π). D'où :

$$\forall a \in [0,1] \exists x_a \in \mathbb{R}^+ \mid \Theta(a, x_a) = \min_{x \geq 0} \Theta(a, x) = \xi(a)$$

On construit ainsi une fonction ξ de $[0,1]$ dans \mathbb{R} .

Pour $l = 1$, la position optimale (qui est la seule position possible) est donnée par $\alpha^*(1) = 1/2$, on s'intéresse aux dérivée en 1 de Θ selon les directions admissibles pour le problème d'optimisation. Pour $a \in [0,1]$, on considère la fonction :

$$\begin{aligned} f_a : [0,1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ l &\mapsto J'(1/2 + a/2(l-1), l) \end{aligned}$$

Posons $h = 1 - l > 0$, alors

$$\frac{f_a(l) - f_a(1)}{l - 1} = \frac{-f_a(1 - h)}{h} = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin n\pi h \cos n\pi a h}{n\pi h} = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \Theta(a, n\pi h)$$

Or si on pose $n(h) = E\left(\frac{x_a}{\pi h}\right)$, alors :

$$\inf_{x \geq 0} \Theta(a, x) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \Theta(a, n\pi h) \leq \Theta(a, n(h)\pi h)$$

Soit :

$$0 \leq \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \Theta(a, n\pi h) - \xi(a) \leq \Theta(a, n(h)\pi h) - \Theta(a, x_a)$$

Pour tout $x > 0$ et pour tout $a \in [0,1]$, on a :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}(a, x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \cos ax - a \frac{\sin x}{x} \sin ax$$

La fonction qui à x associe $(x \cos x - \sin x)/x^2$ est continue sur $(0, +\infty)$ et admet une limite nulle en 0 et en $+\infty$, par conséquent il existe M tel que :

$$\sup_{x \geq 0} \left| \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \right| \leq M$$

Soit $C = M + 1$, alors :

$$\forall x \geq 0, \forall a \in [0,1], \left| \frac{\partial \Theta}{\partial x}(a, x) \right| \leq C$$

Donc pour tout $h \geq 0$ et pour tout $a \in [0,1]$:

$$|\Theta(a, n(h)\pi h) - \Theta(a, x_a)| \leq C |n(h)\pi h - x_a| \leq C\pi h$$

Soit :

$$0 \leq \frac{f_a(l) - f_a(1)}{l - 1} - \xi(a) \leq \pi C(1 - l) \quad (2.22)$$

Ce qui implique en particulier que pour tout a , f_a est dérivable à gauche en 1 de dérivée $\xi(a)$.

– Pour tout $(a_1, a_2) \in [0, 1]^2$:

$$\forall x \geq 0, \quad |\Theta(a_1, x) - \Theta(a_2, x)| \leq |a_1 - a_2|$$

Or :

$$\begin{aligned} \xi(a_1) &= \Theta(a_1, x_{a_1}) \leq \Theta(a_1, x_{a_2}) \\ \xi(a_2) &= \Theta(a_2, x_{a_2}) \leq \Theta(a_2, x_{a_1}) \end{aligned}$$

Donc :

$$\xi(a_1) - \xi(a_2) = \Theta(a_1, x_{a_1}) - \Theta(a_2, x_{a_2}) \leq \Theta(a_1, x_{a_2}) - \Theta(a_2, x_{a_2}) \leq |a_1 - a_2|$$

Par symétrie entre a_1 et a_2 , on en déduit que ξ est lipschitzienne de rapport 1, elle est donc continue sur $[0, 1]$, on en déduit :

$$\exists a_0 \in [0, 1] \mid \xi(a_0) = \max_{a \in [0, 1]} \xi(a)$$

On vérifie numériquement que a_0 est unique.

– Pour tout α appartenant à $[l/2, 1/2]$, il existe un unique a appartenant à $[0, 1]$, tel que $\alpha = 1/2 + a/2(l - 1)$. On construit ainsi une fonction a^* qui envoie $[0, 1]$ dans lui-même telle que pour tout l :

$$\alpha^*(l) = \frac{1}{2} + \frac{a^*(l)}{2}(l - 1) \quad (2.23)$$

– Soit (l_k) une suite de $[0, 1]$ qui tend vers 1, alors $a^*(l_k)$ est une suite de $[0, 1]$, qui est compact elle admet donc une suite extraite convergente :

$$\exists a_\infty \in [0, 1] \mid a^*(l_{k'}) \rightarrow a_\infty \text{ quand } k' \rightarrow \infty$$

Et :

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_{a^*(l_{k'})}(l_{k'})}{l_{k'} - 1} - \xi(a_\infty) \right| &\leq \left| \frac{f_{a^*(l_{k'})}(l_{k'})}{l_{k'} - 1} - \xi(a^*(l_{k'})) \right| + |\xi(a^*(l_{k'})) - \xi(a_\infty)| \\ &\leq \pi C(1 - l_{k'}) + |\xi(a^*(l_{k'})) - \xi(a_\infty)| \end{aligned}$$

Par continuité de ξ en a_∞ , on en déduit que le rapport $(f_{a^*(l_{k'})}(l_{k'}))/(l_{k'} - 1)$ tend vers $\xi(a_\infty)$ quand k' tend vers l'infini.

Or pour tout $\alpha \in [l/2, 1/2]$:

$$J'(\alpha^*(l)) \leq J'(\alpha, l)$$

Donc pour tout $a \in [0, 1]$:

$$\frac{f_{a^*(l_{k'})}(l_{k'})}{l_{k'} - 1} \geq \frac{f_a(l_{k'})}{l_{k'} - 1}$$

Donc par passage à la limite quand k' tend vers l'infini :

$$\forall a \in [0, 1], \quad \xi(a_\infty) \geq \xi(a)$$

Comme le maximum de ξ est atteint une fois et une seule, on en déduit $a_\infty = a_0$. La suite $(a^*(l_k))$, qui admet une unique valeur d'adhérence, converge vers a_0 ; donc a^* est continue

en 1. On en déduit, avec (2.23), que α^* est dérivable en 1 de dérivée $a_0/2$.
Or :

$$\begin{aligned} \left| \frac{J'(l)}{l-1} - \xi(a_0) \right| &\leq \left| \frac{f_{\alpha^*(l)}(l) - f_{a_0}(l)}{l-1} \right| + \left| \frac{f_{a_0}(l)}{l-1} - \xi(a_0) \right| \\ &\leq 2 |a^*(l) - a_0| + \left| \frac{f_{a_0}(l)}{l-1} - \xi(a_0) \right| \end{aligned}$$

Donc J' est dérivable en 1 de dérivée $\xi(a_0)$. □

2.3 Etude de J dans le cas bidimensionnel

2.3.1 Existence

La contrainte de périmètre, qui est équivalente au nombre de composantes connexe en dimension 1, permet d'avoir existence du problème de maximisation de J en dimension 2. Plus précisément, pour un domaine ω de Ω mesurable, notons $|\partial\omega|$ son périmètre généralisé défini par (cf. [21]) :

$$\begin{aligned} |\partial\omega| &= \sup \left\{ \int_{\omega} \operatorname{div}(\phi) dx ; \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \|\phi\|_{\infty} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ - \langle \nabla \chi_{\omega}, \phi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)} ; \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \|\phi\|_{\infty} \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

et soit :

Définition 2.3.1

$$K_L^a = \{ \omega \in \Omega, \text{ tel que } \int_{\Omega} \chi_{\omega} = a \text{ et } |\partial\omega| \leq L \}$$

l'ensemble des sous domaine de Ω d'aire a et de périmètre généralisé inférieur ou égal à L .

Proposition 2.3.1 *Pour tout $L > 0$ et $a \in [0,1]$, J est majoré sur K_L^a , et de plus il existe $\omega_0 \in K_L^a$, tel que :*

$$J(\omega_0) = \sup_{\omega \in K_L^a} J(\omega)$$

Posons :

$$J_L(a) = \max_{\omega \in K_L^a} J(\omega).$$

Preuve : La preuve repose exactement sur les mêmes idées que dans le cas monodimensionnel. Les application de K_L^a dans \mathbb{R} qui à ω font correspondre $\int_{\Omega} \chi_{\omega}(x) \phi_n^2(x) dx$ sont continues pour la norme $L^1(\Omega)$, donc J est semi-continue supérieurement, en particulier si une suite (ω_n) tend vers ω^* , alors $J(\omega^*) \geq \limsup J(\omega_n)$. Or K_L^a satisfait la propriété suivante (cf. [21]) :

Soit Ω_n une suite de parties mesurables d'un ouvert D de \mathbb{R}^N de volume fini, telle que $P(\Omega_n) \leq C$. Alors, il existe $\Omega \subset D$ mesurable et une suite extraite Ω_{n_k} tel que :

$$\chi_{\Omega_{n_k}} \rightarrow \chi_{\Omega} \quad \text{dans } L^1(\Omega)$$

Donc pour toute suite (ω_n) de K_L^a , il existe ω^* appartenant à K_L^a et une suite extraite (ω_{n_k}) tels que $\chi_{\omega_{n_k}} \rightarrow \chi_{\omega^*}$ dans $L^1(\Omega)$. De plus, il existe une suite (ω_n) telle que $J(\omega_n)$ tende

vers $\sup_{\omega \in K_L^a} J(\omega)$. Ainsi, il existe ω_0 appartenant à K_L^a et une suite extraite (ω_{n_k}) , tels que $(\omega_{n_k}) \rightarrow \omega_0$ donc :

$$J(\omega_0) \geq \limsup J(\omega_{n_k}) = \sup_{\omega \in K_L^a} J(\omega)$$

D'où : $J(\omega_0) = \sup_{\omega \in K_L^a} J(\omega)$. □

2.3.2 Majoration et cas d'égalité

La majoration $J(\omega) \leq l$, établie dans le cas monodimensionnel, est une simple conséquence de la convergence de la suite du carré des fonctions propres normalisées du laplacien ϕ_n^2 vers 1 pour la norme L^∞ faible *. Cette convergence n'est plus systématique dans le cadre de la dimension 2, néanmoins P. Gérard a montré que si le domaine Ω est un billard ergodique alors cette convergence, pour une suite extraite, a bien lieu ([16]) et la majoration $J(\omega) \leq |\omega|$ est vérifiée.

Dans cette partie, nous nous restreignons au plus simple des billards ergodiques, c'est à dire au carré : $\Omega = (0,1)^2$, et nous adoptons une double indexation des valeurs propres :

$$\phi_{n,m}(x,y) = 4 \sin^2 n\pi x \sin^2 m\pi y \quad n,m \in \mathbb{N}^*, x,y \in (0,1)$$

On retrouve bien directement que pour la norme L^∞ faible *, $\phi_{n,m} \rightarrow 1$ quand $n,m \rightarrow \infty$, donc l'inégalité $J(\omega) \leq |\omega|$ est bien vérifiée. Intéressons nous maintenant aux cas d'égalité.

Théorème 2.3.1 *Soit ω une réunion de rectangles parallèles aux axes :*

$$\omega = \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$$

alors $J(\omega) = l$ si et seulement si la fonction :

$$f(x,y) = \chi_\omega(x,y) + \chi_\omega(x,1-y) + \chi_\omega(1-x,y) + \chi_\omega(1-x,1-y)$$

est constante p.p. sur Ω (i.e. il existe une constante C telle que $f=C$ sur Ω sauf sur un ensemble de mesure nulle). En particulier, l'aire de ω est égale à 0, 1/4, 1/2, 3/4 ou 1.

Preuve : Ecrivons tout d'abord que :

$$\int_{\Omega} \chi_\omega \phi_{n,m}^2 = \int_{\Omega} \chi_\omega(x,y) (1 - \cos 2n\pi x) (1 - \cos 2m\pi y) dx dy$$

Puis cherchons des conditions nécessaire pour que $J(\omega) = |\omega|$, pour cela fixons $n \in \mathbb{N}^*$, et faisons tendre m vers ∞ , nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \chi_\omega(x,y) (1 - \cos 2n\pi x) dx dy \geq |\omega|$$

Et faisons de même, en échangeant les rôles de n et m et si :

$$p_1(x) = \int_0^1 \chi_\omega(x,y) dy \quad \text{et} \quad p_2(y) = \int_0^1 \chi_\omega(x,y) dx$$

nous obtenons finalement les deux conditions nécessaires suivantes :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 p_1(x) \cos 2n\pi x dx \leq 0 \text{ et } \int_0^1 p_2(y) \cos 2m\pi y dy \leq 0 \quad (2.24)$$

Or si ω est une réunion de rectangles parallèles aux axes, les fonctions p_1 et p_2 sont des fonctions en escaliers, donc les arguments de la preuve du théorème 2.2.1 s'appliquent et les conditions (2.24) sont vérifiées si et seulement si $p_1(x) + p_1(1-x)$ et $p_2(y) + p_2(1-y)$ sont deux fonctions constantes sur $(0,1)$. Ce qui implique en particulier (cf. remarque 2.2.2) que :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 p_1(x) \cos 2n\pi x dx = \int_0^1 p_2(y) \cos 2m\pi y dy = 0 \quad (2.25)$$

Donc si $J(\omega) = l$ alors :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \int_{\Omega} \chi_{\omega}(x, y) \cos 2n\pi x \cos 2m\pi y dx dy \geq 0 \quad (2.26)$$

Soit f la fonction 1-périodique en x et en y définie sur $[0,1] \times [0,1]$ par :

$$f(x, y) = \chi_{\omega}(x, y) + \chi_{\omega}(x, 1-y) + \chi_{\omega}(1-x, y) + \chi_{\omega}(1-x, 1-y)$$

et soit pour $n, m \in \mathbb{N}$, $A_{n,m}$, $B_{n,m}$, $C_{n,m}$ et $D_{n,m}$ ses coefficients de Fourier :

$$\begin{aligned} A_{n,m} &= 4 \int_{\Omega} f(x, y) \cos 2n\pi x \cos 2m\pi y dx dy = \int_{\Omega} \chi_{\omega}(x, y) \cos 2n\pi x \cos 2m\pi y dx dy \\ B_{n,m} &= 4 \int_{\Omega} f(x, y) \sin 2n\pi x \cos 2m\pi y dx dy = 0 \\ C_{n,m} &= 4 \int_{\Omega} f(x, y) \cos 2n\pi x \sin 2m\pi y dx dy = 0 \\ D_{n,m} &= 4 \int_{\Omega} f(x, y) \sin 2n\pi x \sin 2m\pi y dx dy = 0 \end{aligned}$$

Compte-tenu de (2.25), la série double de Fourier de f se limite à :

$$\frac{1}{4} A_{0,0} + \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} \cos 2n\pi x \cos 2m\pi y$$

Le but est de montrer que cette série converge en tout point. La régularité supposée sur ω implique en particulier qu'en tout point (x_0, y_0) , il existe $\delta_0 > 0$ tel que si $\delta < \delta_0$ alors :

$$\begin{aligned} f(x_0 + \delta, y_0) &= f(x_0^+, y_0) \\ f(x_0 - \delta, y_0) &= f(x_0^-, y_0) \\ f(x_0, y_0 + \delta) &= f(x_0, y_0^+) \\ f(x_0, y_0 - \delta) &= f(x_0, y_0^-) \end{aligned}$$

Montrons alors que f satisfait les hypothèses du théorème de convergence des séries de Fourier double (cf [36], th. 168, p. 450) au point (x_0, y_0) :

- f est à variation bornée, car par hypothèse χ_{ω} est à variation bornée.
- il existe $\delta > 0$ tel que les quatre fonctions de u et v suivantes :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{uv} \{f(x_0 + u, y_0 + v) - f(x_0 + u, y_0^+) - f(x_0^+, y_0 + v) + f(x_0^+, y_0^+)\} \\ &\frac{1}{uv} \{f(x_0 - u, y_0 + v) - f(x_0 - u, y_0^+) - f(x_0^-, y_0 + v) + f(x_0^-, y_0^+)\} \\ &\frac{1}{uv} \{f(x_0 - u, y_0 - v) - f(x_0 - u, y_0^-) - f(x_0^-, y_0 - v) + f(x_0^-, y_0^-)\} \\ &\frac{1}{uv} \{f(x_0 + u, y_0 - v) - f(x_0 + u, y_0^-) - f(x_0^+, y_0 - v) + f(x_0^+, y_0^-)\} \end{aligned}$$

soient intégrables sur le carré de sommets $(0,0)$, $(\delta,0)$, (δ,δ) et $(0,\delta)$. En effet, pour δ inférieur à δ_0 , ces quatre fonctions sont nulles sur le carré considéré.

– Pour un $\delta > 0$, les huit relations suivantes sont vérifiées :

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_0^\delta f(x_0 \pm u, y_0^\pm) \frac{\sin hu}{\sin u} du = \frac{\pi}{2} f(x_0^\pm, y_0^\pm)$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_0^\delta f(x_0^\pm, y_0 \pm v) \frac{\sin hv}{\sin v} dv = \frac{\pi}{2} f(x_0^\pm, y_0^\pm)$$

Ce qui est clair car si $\delta < \delta_0$, les fonctions $f(x_0 \pm u, y_0^\pm)$ et $f(x_0^\pm, y_0 \pm v)$ sont constantes et égales à $f(x_0^\pm, y_0^\pm)$.

Par conséquent la série double de Fourier de f converge au point (x_0, y_0) et à pour somme :

$$s(x_0, y_0) = \frac{f(x_0^+, y_0^+) + f(x_0^-, y_0^+) + f(x_0^-, y_0^-) + f(x_0^+, y_0^-)}{4}$$

Remarquons que si (x_0, y_0) n'appartient pas à la frontière de ω alors $s(x_0, y_0)$ est égal à $f(x_0, y_0)$. La convergence de la série de Fourier à l'origine implique que la série double $\sum_{n, m \geq 1} A_{n, m}$ est convergente mais comme tous ses termes sont positifs elle est également absolument convergente et s est une fonction continue, or s ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs donc s est constante. Ce qui implique que f est p.p. constante.

La réciproque se fait par un calcul direct par changements de variables. □

Pratiquement les domaines ω qui satisfont les hypothèses du théorème 2.3.1 s'obtiennent en choisissant deux suites finies :

$$0 = a_1 < a_2 < \dots < a_n = 1/2 \text{ et } 0 = b_1 < b_2 < \dots < b_m = 1/2$$

Puis pour chaque couple (i, j) avec $1 \leq i \leq n - 1$ et $1 \leq j \leq m - 1$, on choisit parmi les quatre rectangles $[a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$, $[1/2 - a_i, 1/2 - a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$, $[a_i, a_{i+1}] \times [1/2 - b_j, 1/2 - b_{j+1}]$ et $[1/2 - a_i, 1/2 - a_{i+1}] \times [1/2 - b_j, 1/2 - b_{j+1}]$ (représentés en grisé sur la figure 2.7.a, pour $i = 1$ et $j = 2$), un, deux ou trois rectangle pour constituer ω selon qu'on veuille un domaine d'aire $1/4$, $1/2$ ou $3/4$.

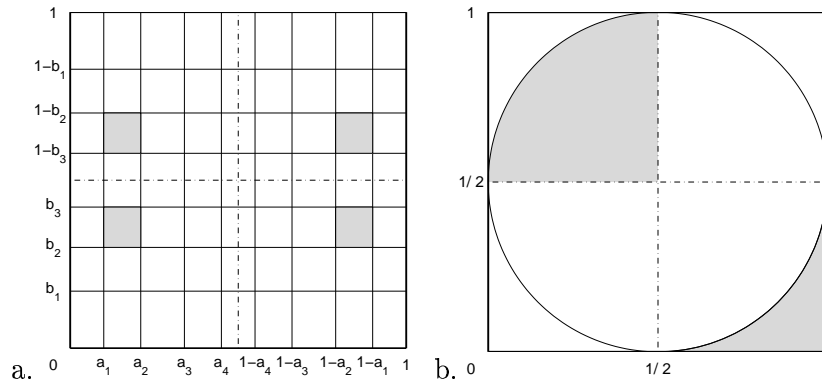


FIG. 2.7 – a. Méthode pour obtenir un domaine optimal qui est une réunion de rectangles ; b. Domaine optimal qui n'est pas une réunion de rectangle

Remarque 2.3.1 Nous obtenons à nouveau que si ω est tel que $J(\omega) = |\omega|$ alors pour tout n et m :

$$\int_{\Omega} \chi_{\omega} \phi_{n, m}^2 = |\omega|$$

La condition s constante est bien sûr suffisante, ce qui donne une famille de domaines ω qui satisfont $J(\omega) = |\omega|$ et qui ne sont pas nécessairement une réunion de rectangles parallèles aux axes mais qui sont toujours d'aire $1/4$, $1/2$ ou $3/4$; par exemple le domaine de la figure 2.7.b, d'aire $1/4$, est tel que s soit constante et $J(\omega) = |\omega|$.

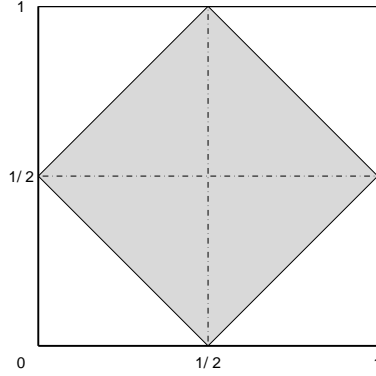


FIG. 2.8 – *Domaine non optimal satisfaisant (2.24)*

Par contre, les conditions (2.24) qui sont nécessaires ne sont pas suffisantes. Considérons, en effet, la boule de centre $(1/2, 1/2)$ et de rayon $1/2$ pour la norme $\|\cdot\|_1$ (représentée figure 2.8) :

$$\omega = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \text{ tels que } |x - 1/2| + |y - 1/2| \leq 1/2\}$$

Par symétrie :

$$\int_{\Omega} \chi_{\omega} \phi_{n,m}^2 = 4 \int_0^{1/2} \int_{1/2-x}^{1/2} (1 - \cos 2n\pi x)(1 - \cos 2m\pi y) dy dx$$

Soit en calculant les deux intégrales :

$$\int_{\Omega} \chi_{\omega} \phi_{n,m}^2 = |\omega| + \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi^2} + \frac{1 - (-1)^m}{m^2 \pi^2} - \delta_{n,m} \frac{(-1)^n - (-1)^m}{(n^2 - m^2) \pi^2}$$

Les deuxièmes et troisièmes termes du membre de droite sont positifs ou nuls, en revanche le dernier terme est nul quand n et m ont la même parité et peut-être négatif quand n et m sont de parités différentes, or dans ce cas un des deuxièmes et troisièmes termes est nul si bien que la somme est parfois négative, par exemple :

$$\int_{\Omega} \chi_{\omega} \phi_{2,3}^2 = \int_{\Omega} \chi_{\omega} \phi_{3,2}^2 = \frac{1}{2} - \frac{8}{45\pi^2} < \frac{1}{2}$$

En conclusion, bien que ω satisfasse les conditions (2.24) car $p_1(x) = p_2(x) = 1 - 2|x - 1/2|$ et :

$$\int_0^1 p_1(x) \cos 2n\pi x dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2} \leq 0$$

nous avons montré $J(\omega) < |\omega|$.

Chapitre 3

Etude théorique de la quantité géométrique g

Comme nous l'avons vu au premier chapitre, quand Ω est un domaine du plan, le taux de décroissance de l'énergie est fonction non seulement de l'abscisse spectrale de l'opérateur des ondes amorties mais également d'une quantité g qui ne dépend que du domaine ω et pas du coefficient k , dite géométrique; quantité que nous allons étudier dans ce chapitre.

Rappelons que pour $\rho_0 = (X_0, \vec{u})$, où X_0 est un point de Ω et \vec{u} un vecteur unitaire, un rayon géométrique est l'application γ_{ρ_0} de $[0, \infty[$ dans Ω qui correspond à la trajectoire d'un point lumineux partant de X_0 dans la direction \vec{u} qui se déplace à la vitesse unité et qui se réfléchit sur la frontière de Ω selon les lois de l'optique géométrique. De plus, nous avons noté :

$$m_{\rho_0}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \chi_{\omega}(\gamma_{\rho_0}(s)) ds$$

la moyenne du temps passé par le rayon géométrique défini par ρ_0 dans le sous-domaine ω entre les instants 0 et t . La quantité géométrique g est alors définie par :

$$g(\omega) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{\rho_0 \in \Gamma} m_{\rho_0}(t)$$

où Γ est l'ensemble des rayons géométriques de Ω .

Nous nous limiterons dans tout ce chapitre au cas où Ω est le carré unité $(0,1) \times (0,1)$, cependant tous les résultats peuvent être étendus sans problème au cas où Ω est un rectangle $(0,a) \times (0,b)$.

Si les sommets du carré Ω sont, dans le sens direct, les points O, P, Q et R , nous introduisons le repère orthonormal direct (O, \vec{i}, \vec{j}) avec $\vec{i} = \overrightarrow{OP}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OR}$. Un vecteur unitaire \vec{u} est maintenant déterminé de façon unique par l'angle α tel que : $\vec{u} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$, nous utiliserons donc la notation suivante $\rho_0 = (X_0, \vec{u}) \sim [X_0, \alpha]$ pour désigner le rayon géométrique γ_{ρ_0} .

3.1 Etude des rayons géométriques

Avant de considérer les rayons géométriques dans leur ensemble (notamment pour prendre l'infimum sur Γ pour évaluer $g(\omega)$), nous allons étudier les propriétés d'un rayon géométrique γ_{ρ_0} de Γ .

3.1.1 Dépliage

Une méthode classique dans le cas du carré (que l'on trouve par exemple dans [35]) est de déplier le domaine Ω . En effet, au lieu de réfléchir, selon les lois de l'optique géométrique, le rayon quand il rencontre un côté du carré (cf. figure 3.1) ; il est possible de réfléchir le carré lui-même par rapport à ce côté (cf figure 3.2) ; en sorte que la trajectoire du rayon géométrique devienne une demi-droite qui coupe les images par différentes symétries du carré de départ. Pour ne pas modifier la fonction m_{ρ_0} , il suffit de faire subir à ω les mêmes symétries qu'à Ω .

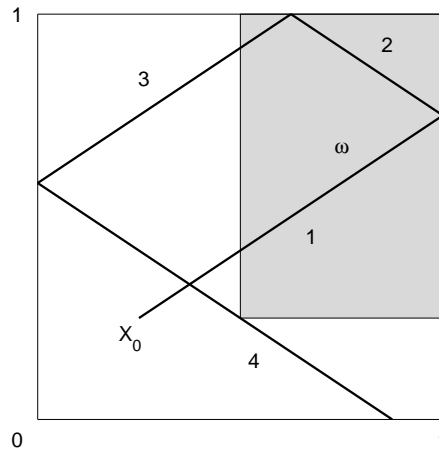


FIG. 3.1 – Rayon géométrique dans Ω

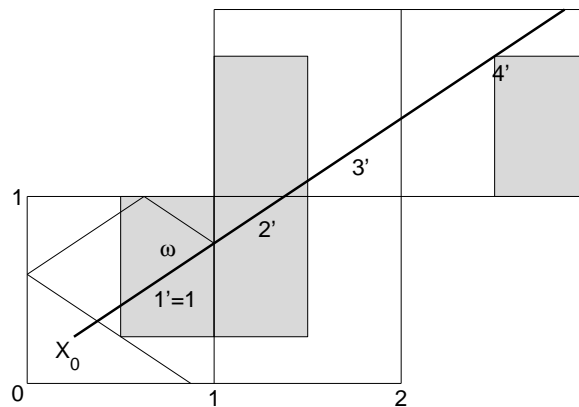


FIG. 3.2 – "Dépliage" de Ω

Ainsi on établit une identification entre les trajectoires de rayons géométriques à l'intérieur du carré Ω et les demi-droites du plan muni de l'ensemble des symétries de ω par rapport aux droites du réseau $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$.

Deux carrés unités ayant un côté commun ne sont pas identiques mais symétriques par rapport à leur côté commun. Par contre, si l'on considère le carré constitué de quatre carrés unités ayant un sommet commun, il est possible d'identifier ses côtés opposés pour former un tore plat T car deux droites du plan qui diffèrent d'un vecteur du réseau $2\mathbb{Z} + 2\mathbb{Z}$ correspondent au même rayon géométrique dans Ω . La trajectoire devient alors une géodésique du tore T .

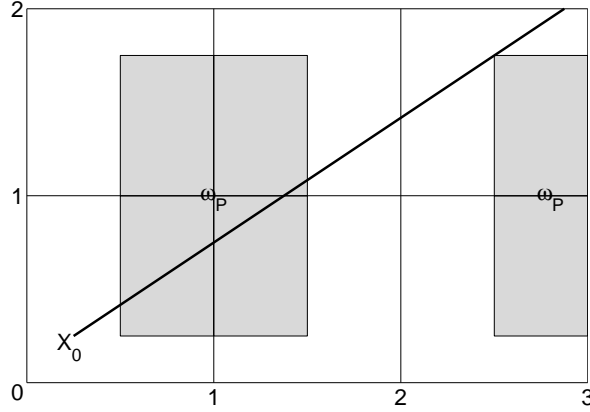


FIG. 3.3 – Point de vue plan infini

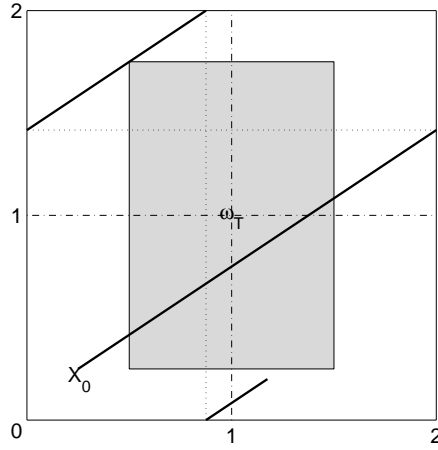


FIG. 3.4 – Point de vue tore plat

Au final, nous avons à notre disposition trois interprétations d'un rayon géométrique :

- la ligne brisée à l'intérieur du carré unité Ω comme conséquence directe de la définition (cf. figure 3.1),
- une demi-droite dans le plan muni de ω_P réunion des symétries de ω par rapport aux droites du réseau $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ (cf. figure 3.3), dans ce cas l'équation du rayon géométrique γ_{ρ_0} , défini par $\rho_0 \sim [(x_0, y_0), \alpha]$ est :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t \cos \alpha \\ y(t) = y_0 + t \sin \alpha \end{cases}$$

Et :

$$m_{\rho_0}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \chi_{\omega_P}(x_0 + s \cos \alpha, y_0 + s \sin \alpha) ds$$

- une géodésique du tore plat $T = [0, 2] \times [0, 2]$ muni de l'ensemble ω_T défini comme la réunion de ω et de ses symétries par rapport aux droites d'équation $x = 1$ et $y = 1$ d'une part et par rapport au point de coordonnées $(1, 1)$ d'autre part (cf. figure 3.4), dans ce cas l'équation

du même rayon géométrique γ_{ρ_0} est :

$$\begin{cases} x(t) = (x_0 + t \cos \alpha) [2] \\ y(t) = (y_0 + t \sin \alpha) [2] \end{cases}$$

où $x [2]$ désigne le reste dans la division de x par 2 (i.e. le réel y de $[0,2[$ tel qu'il existe un entier n avec $x = 2n + y$); et le temps moyen passé par ce rayon dans ω est alors :

$$m_{\rho_0}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \chi_{\omega_T}((x_0 + s \cos \alpha) [2], (y_0 + s \sin \alpha) [2]) ds$$

Le cas des rayons géométriques qui rencontrent un sommet de Ω est ambigu, en effet il n'existe pas de tangente à $\partial\Omega$ aux sommets du carré et il n'est pas possible d'appliquer les lois de l'optique géométrique au sens strict. Cependant, la technique du dépliage permet en considérant de tels rayons comme limites de rayon parallèles qui passent de plus en plus proche du sommet, de définir les rayons qui rencontrent un sommet en considérant que lorsqu'un rayon rencontre un sommet du carré en arrivant avec la direction \vec{v} , il est réfléchi dans la direction $\vec{w} = -\vec{v}$ (cf. [35], p. 57 et les figures 3.15.d et 3.16).

3.1.2 Cas des rayons ouverts

Un rayon géométrique qui repasse plusieurs fois au même point est dit fermé; dans le cas contraire il est dit ouvert. Nous avons la caractérisation suivante: le rayon $[X_0, \alpha]$ est ouvert si et seulement si $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ sont indépendants sur les entiers, i.e. $\tan \alpha$ est irrationnel. En effet, en choisissant, par exemple, l'interprétation du tore plat, il vient que le rayon passe plusieurs fois en un même point si, et seulement si, il existe deux instants distincts t_1 et t_2 et deux entiers n et m tels que :

$$\begin{cases} x_0 + t_1 \cos \alpha = x_0 + t_2 \cos \alpha + 2n \\ y_0 + t_1 \sin \alpha = y_0 + t_2 \sin \alpha + 2m \end{cases}$$

C'est à dire: $2m(t_1 - t_2) \cos \alpha - 2n(t_1 - t_2) \sin \alpha = 0$, qui à une solution si et seulement si $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ sont linéairement dépendant sur les entiers.

Remarque 3.1.1 *Les deux équivalences suivantes sont vérifiées: le rayon $[X_0, \alpha]$ est ouvert si et seulement si $\tan \alpha$ est irrationnelle; et le rayon $[X_0, \alpha]$ est fermé si et seulement si $\tan \alpha$ est rationnelle ou c'est un rayon vertical et donc $\alpha = \pi/2 [\pi]$*

Considérons tout d'abord les rayons ouverts, ils possèdent les propriétés suivantes :

Théorème 3.1.1 *Soit $\gamma_{\rho_0} \sim [X_0, \alpha]$ un rayon ouvert alors $\{\gamma_{\rho_0}(t), t \geq 0\}$ est dense dans T et donc dans Ω . De plus si ω est quarrable (χ_{ω} est Riemann-intégrable sur Ω) alors $m_{\rho_0}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} |\omega|$. Plus précisément, soit α tel que $\tan \alpha$ soit irrationnelle alors :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists t_0 \mid t \geq t_0 \Rightarrow \forall X_0 \in \Omega : \text{si } \gamma_{\rho_0} \sim [X_0, \alpha] \text{ alors } |m_{\rho_0}(t) - |\omega|| < \epsilon$$

C'est à dire que t_0 est indépendant de X_0 .

Preuve : Posons $X_0 = (x_d, y_d)$ et travaillons avec l'interprétation du tore plat, soit $\epsilon > 0$ et $X_f = (x_f, y_f)$ un point de Ω , il s'agit de montrer que le rayon γ_{ρ_0} passe à une distance inférieure à ϵ de X_f . Les équations du mouvement du point lumineux sont :

$$\begin{cases} x(t) = x_d + t \cos \alpha [2] \\ y(t) = y_d + t \sin \alpha [2] \end{cases}$$

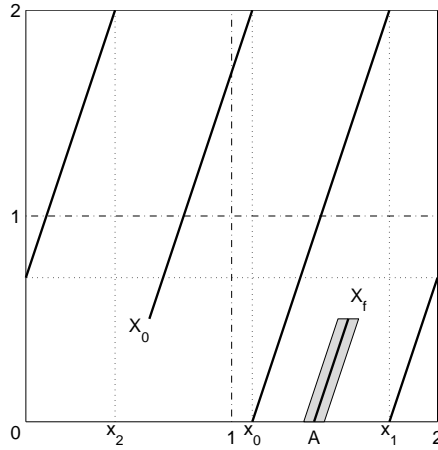


FIG. 3.5 – Rayon ouvert dans le tore plat

Le rayon géométrique coupe donc l'axe des abscisse à l'instant $t_0 = \frac{2-y_d}{\sin \alpha}$ au point d'abscisse $x_0 = x_d + (2 - y_d) \cot \alpha$ [2], puis à chaque instant $t_n = t_0 + n\Delta t$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\Delta t = \frac{2}{\sin \alpha}$ au point d'abscisse $x_n = x_0 + 2n \cot \alpha$ [2] (cf. figure 3.5).

De même si le rayon passe au point A de coordonnées $(x_a, 0)$ au temps t alors au temps $t + dt = t + \frac{y_f}{\sin \alpha}$, il sera au point X_f à condition que: $x_a + dt \cot \alpha = x_f$ [2] et si au temps t le rayon coupe l'axe des abscisses en x avec $|x - x_a| < \epsilon$ alors au temps $t + dt$, le point lumineux sera à une distance inférieure à ϵ de X_f (cf. le parallélogramme grisé de la figure 3.5).

Or, comme $\cot \alpha$ est irrationnel, la suite (x_n) est dense dans $[0, 2]$ (cf [31], Pt. II, Chap. 4, #166), et il existe $n \geq 1$ tel que $|x_n - x_a| < \epsilon$ donc la trajectoire du point lumineux est bien partout dense dans Ω .

Supposons de plus que χ_ω est Riemann-intégrable sur Ω et fixons α tel que $\tan \alpha$ soit irrationnelle. La preuve de la seconde partie du théorème s'effectue en deux étapes.

Etape 1: Le but de cette étape est de montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux polynômes trigonométrique P^+ et P^- tels que: $\forall (x, y) \in [0, 1]^2$ $P^-(x, y) \leq \chi_{\omega_T}(x, y) \leq P^+(x, y)$ et $\int_\Omega P^+ - P^- < \epsilon$.

Supposons, tout d'abord que ω_T est un pavé: $\omega_T = [a, b] \times [c, d]$, soit alors la fonction f_η définie sur T par :

$$f_\eta(x, y) = \begin{cases} 1 + \eta & \text{si } (x, y) \in \omega_T \\ \eta & \text{si } (x, y) \notin [a - \eta, b + \eta] \times [c - \eta, d + \eta] \\ \text{linéaire} & \text{si } (x, y) \in [a - \eta, b + \eta] \times [c - \eta, d + \eta] - \omega_T \end{cases}$$

Alors $\chi_{\omega_T}(x, y) \leq f_\eta(x, y) - \eta$ et il existe $C > 0$, telle que pour $\eta < 1$, $\int_T f_\eta - \chi_{\omega_T} \leq C\eta$. f_η est une fonction continue de T donc d'après le théorème de Stone-Weierstrass (cf. [12], Th. A, page 210), il existe un polynôme trigonométrique P tel que :

$$\forall (x, y) \in T, \quad |f_\eta(x, y) - P(x, y)| \leq \eta \implies \int_T |f - P| \leq 4\eta \text{ et } \chi_{\omega_T} \leq P$$

Au final, on peut choisir η tel que $\chi_{\omega_T} \leq P$ et $\int_T P - \chi_{\omega_T} \leq \epsilon$.

De même, on peut montrer l'existence d'un polynôme trigonométrique p tel que $\chi_{\omega_T} \geq p$ et $\int_T \chi_{\omega_T} - p \leq \epsilon$.

Soit maintenant, un domaine $\omega \subset [0,1]^2$ quarrable, alors χ_{ω_T} est Riemann-intégrable et (cf. [27], Théorème IV.3.5, p. 182) il existe une subdivision de T définie par les points $0 = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = 2$ et $0 = b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_m = 2$, telle que si, pour $(x,y) \in [a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$, on pose :

$$U(x,y) = \sup\{f(x,y), (x,y) \in [a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]\}$$

et

$$L(x,y) = \inf\{f(x,y), (x,y) \in [a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]\}$$

Alors : $\forall (x,y) \in T$, $L(x,y) \leq \chi_{\omega_T}(x,y) \leq U(x,y)$ et $\int_T U - L < \varepsilon/3$. Comme L et U sont la somme de fonctions indicatrices de pavés, d'après la première partie il existe deux polynômes trigonométriques P^+ et P^- tels que $U \leq P^+$ et $L \geq P^-$ d'une part et d'autre part $\int_T P^+ - U \leq \varepsilon/3$ et $\int_T L - P^- \leq \varepsilon/3$. Ce qui implique bien :

$$\forall (x,y) \in T, P^-(x,y) \leq \chi_{\omega_T}(x,y) \leq P^+(x,y) \quad \text{et} \quad \int_T P^+ - P^- \leq \varepsilon$$

Etape 2 : Pour toute fonction f définie sur \mathbb{R}^2 , on définit

$$m_{\gamma_0}(t, f) = \frac{1}{t} \int_0^t f(x_0 + s \cos \alpha, y_0 + s \sin \alpha) ds$$

Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, posons $f_{n,m}(x,y) = \exp(2i\pi(mx + ny))$ et $\bar{f}_{m,n} = \int_{\Omega} f_{n,m}$.

Si $(m,n) = (0,0)$, $f_{0,0}$ est constante égale à 1, donc trivialement pour tout t , $m_{\gamma_0}(t, f_{0,0}) = \bar{f}_{0,0}$. Supposons maintenant $(m,n) \neq (0,0)$, alors $\bar{f}_{n,m} = 0$ et :

$$\begin{aligned} m_{\gamma_0}(t, f_{n,m}) &= \frac{1}{t} \int_0^t \exp(2i\pi[n(x_0 + s \cos \alpha) + m(y_0 + s \sin \alpha)]) ds \\ &= \frac{e^{2i\pi(mx_0 + ny_0)} e^{2i\pi(m \cos \alpha + n \sin \alpha)t} - 1}{t \cdot 2i\pi(m \cos \alpha + n \sin \alpha)} \end{aligned}$$

Remarquons que le fait que $\tan \alpha$ soit irrationnelle garantit bien que le dénominateur ne s'annule pas. Et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$ et tout $(x_0, y_0) \in \Omega$:

$$|m_{\gamma_0}(t, f_{n,m}) - \bar{f}_{n,m}| \leq \frac{1}{\pi t (m \cos \alpha + n \sin \alpha)} < \varepsilon$$

Ce qui a pour conséquence directe, que pour tout polynôme trigonométrique P :

$$P(x,y) = \sum_{|n| \leq N, |m| \leq M} c_{n,m} \exp[2i\pi(nx + my)]$$

et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que pour tout $(x_0, y_0) \in \Omega$: $|m_{\gamma_0}(t, P) - \bar{P}| < \varepsilon$.

Enfin soit $\varepsilon > 0$ et soit f Riemann-intégrable sur $[0,2]^2$ et prolongée à \mathbb{R}^2 par périodicité de période 2 en x et en y . D'après l'étape 1, il existe deux polynômes trigonométriques P^+ et P^- tels que $P^-(x,y) \leq f(x,y) \leq P^+(x,y)$ et $\int_{\Omega} (P^+ - P^-) < \varepsilon/2$, ce qui implique :

$$\int_{\Omega} (P^+ - f) < \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} (f - P^-) < \varepsilon/2$$

et il existe $t_1 > 0$, tel que pour tout $(x_0, y_0) \in \Omega$, $|m_{\gamma_0}(t, P^+) - \bar{P}^+| < \varepsilon/2$, de même il existe $t_2 > 0$, tel que pour tout $(x_0, y_0) \in \Omega$, $|m_{\gamma_0}(t, P^-) - \bar{P}^-| < \varepsilon/2$. Pour $t > T = \max\{t_1, t_2\}$, et pour tout $(x_0, y_0) \in \Omega$, on en déduit :

$$\bar{f} - \varepsilon < \bar{P}^- - \varepsilon/2 < m_{\gamma_0}(t, P^-) < m_{\gamma_0}(t, f) < m_{\gamma_0}(t, P^+) < \bar{P}^+ + \varepsilon/2 < \bar{f} + \varepsilon$$

D'où $|m_{\gamma_0}(t, f) - \bar{f}| < \varepsilon$. □

3.1.3 Cas des rayons fermés

Les rayons fermés, quant à eux, vérifient :

Proposition 3.1.1 *Soit $\gamma_{\rho_0} \sim [X_0, \alpha]$ un rayon fermé, alors il existe deux entiers relatifs p et q premiers entre eux tels que :*

$$\cos \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

de plus la trajectoire est périodique de période $L = 2\sqrt{p^2 + q^2}$ et

$$m_{\rho_0}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \int_0^L \chi_{\omega}(\gamma_{\rho_0}(s)) ds$$

Preuve : Comme γ_{ρ_0} est un rayon fermé, il existe deux entiers relatifs p_0 et q_0 tels que : $q_0 \cos \alpha - p_0 \sin \alpha = 0$, en divisant cette égalité par le plus grand commun diviseur de p_0 et q_0 , on obtient deux entiers p et q premiers entre eux qui vérifient : $q \cos \alpha - p \sin \alpha = 0$, quitte à changer p en $-p$ et q en $-q$, on en déduit $\cos \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}$ et $\sin \alpha = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$. Le point lumineux se trouve à l'instant t_2 à l'endroit où il se trouvait à l'instant t_1 si et seulement si :

$$\begin{cases} (t_1 - t_2) \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} = 2n \\ (t_1 - t_2) \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} = 2m \end{cases}$$

où n et m sont des entiers, ce qui implique $mp = nq$, qui a pour solutions $m = kq$ et $n = kp$, où k est un entier. Donc le mouvement est périodique de période $L = 2\sqrt{p^2 + q^2}$.

Soit maintenant $t > 0$, il existe un entier n_t et $r_t \in [0, L[$, tels que $t = n_t L + r_t$ et :

$$\begin{aligned} m_{\rho_0}(t) &= \frac{1}{n_t L + r_t} \left(\sum_{i=0}^{n_t-1} \int_{iL}^{(i+1)L} \chi_{\omega}(\gamma_{\rho_0}(s)) ds + \int_{n_t L}^t \chi_{\omega}(\gamma_{\rho_0}(s)) ds \right) \\ &= \frac{1}{L + r_t/n_t} \int_0^L \chi_{\omega}(\gamma_{\rho_0}(s)) ds + \frac{1}{t} \int_{n_t L}^t \chi_{\omega}(\gamma_{\rho_0}(s)) ds \end{aligned}$$

Ce qui implique bien que :

$$m_{\rho_0}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \int_0^L \chi_{\omega}(\gamma_{\rho_0}(s)) ds$$

□

Remarque 3.1.2 *Pour tout $a \geq 0$:*

$$\int_a^{a+L} \chi_{\omega}(\gamma_{\rho_0}(s)) ds = \int_0^L \chi_{\omega}(\gamma_{\rho_0}(s)) ds$$

Donc si $\gamma_{\rho_1} \sim [X_1, \alpha]$ et si X_1 appartient à γ_{ρ_0} , alors m_{ρ_0} et m_{ρ_1} admettent la même limite en $+\infty$.

Une conséquence directe de la proposition 3.1.1 est la majoration suivante :

Proposition 3.1.2 *Soit $\omega \subset \Omega$, ω quarrable, alors :*

$$g(\omega) \leq |\omega|$$

Preuve : Soit γ_{ρ_x} le rayon vertical défini par $\rho_x \sim [(x,0),\pi/2]$, d'après la proposition précédent

$$m_{\rho_x}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \chi_\omega(x,s) ds$$

De façon élémentaire : $\inf_{\rho_0 \in \Gamma} m_{\rho_0}(t) \leq \inf_{x \in [0,1]} m_{\rho_x}(t)$, en prenant la limite supérieure quand t tend vers $+\infty$, il vient :

$$g(\omega) \leq \inf_{x \in [0,1]} \int_0^1 \chi_\omega(x,s) ds \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_\omega(x,s) ds \right) dx = |\omega|$$

□

Les rayons géométriques fermés possèdent une structure assez simple. Travaillons avec le point de vue du tore plat et considérons le rayon géométrique fermé γ_{ρ_0} , défini par $\rho_0 \sim [X_0, \alpha]$ avec $X_0 \in T$ et $\cos \alpha = p/\sqrt{p^2 + q^2}$, $\sin \alpha = q/\sqrt{p^2 + q^2}$, p et q étant premiers entre eux. Pour le théorème suivant, nous allons supposer que $p \geq 0$ et $q \geq 0$ (i.e $\alpha \in [0, \pi/2]$). Nous verrons à la remarque 3.3.1 qu'il suffit de considérer cette famille de rayon pour décrire tous les rayons géométriques de Ω .

Théorème 3.1.2 *Le rayon γ_{ρ_0} est constitué de $p + q$ segments parallèles de vecteur directeur $\vec{u} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$ dont p sont issus des points A_k , $1 \leq k \leq p$, les q restants sont issus des points B_k , $1 \leq k \leq q$ avec :*

$$A_k(0, y_0 + q/p(2E(x_0/2) - x_0 + 2k)) \text{ et } B_k(x_0 + p/q(2E(y_0/2) - y_0 + 2k), 0)$$

De plus, la distance entre deux segments voisins est constante et égale à $\delta = 4/L$ où $L = 2\sqrt{p^2 + q^2}$ est la période.

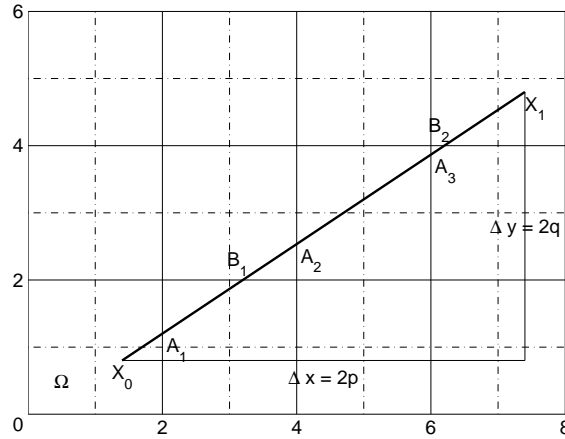
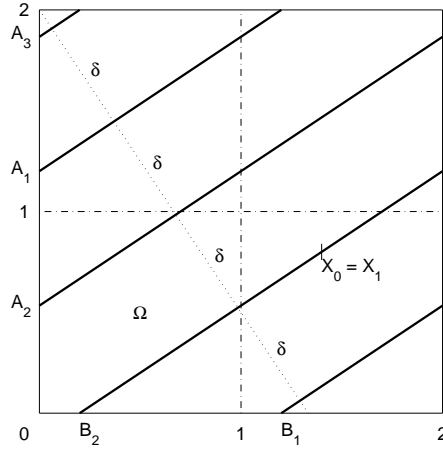


FIG. 3.6 – Rayon fermé pour $p = 3$ et $q = 2$ dans le plan infini

Preuve : Dans le plan les équations du rayon sont $x(t) = x_0 + 2tp/L$ et $y(t) = y_0 + 2tq/L$ où $L = 2\sqrt{p^2 + q^2}$ est la période et on se restreint au segment $[X_0X_1]$ de longueur L . A l'intérieur de ce segment le rayon coupe p droites d'équation $x = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, qui sont les droites $x = 2E(x_0/2) + 2k$, $1 \leq k \leq p$. Il coupe également q droites d'équation $y = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, qui sont les droites d'équation $y = 2E(y_0/2) + 2k$, $1 \leq k \leq q$. Lorsque, par translations, on se ramène au tore T , on obtient bien $p + q$ segments issus des points A_k et B_k .

FIG. 3.7 – Rayon fermé pour $p = 3$ et $q = 2$ dans le tore plat

Comme p et q sont premiers entre eux $\{kq[p], 1 \leq k \leq p\} = \{0, 1, \dots, p-1\}$ (cf. par exemple [20], théorème 56, page 51). Donc si A_{k_1} et A_{k_2} sont deux points voisins $A_{k_1}A_{k_2} = 2/p$. Par conséquent, la distance entre les droites (A_{k_1}, \vec{u}) et (A_{k_2}, \vec{u}) est :

$$\delta = \left| \overrightarrow{A_{k_1}A_{k_2}} \cdot \vec{u}^\perp \right| = \frac{2}{p} \vec{j} \cdot \frac{-q\vec{i} + p\vec{j}}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{4}{L}$$

De même, si B_{k_1} et B_{k_2} sont deux points voisins $B_{k_1}B_{k_2} = 2/q$ et la distance entre les droites (B_{k_1}, \vec{u}) et (B_{k_2}, \vec{u}) est :

$$\delta = \left| \overrightarrow{B_{k_1}B_{k_2}} \cdot \vec{u}^\perp \right| = \frac{2}{q} \vec{i} \cdot \frac{q\vec{i} - p\vec{j}}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{4}{L}$$

Soit k_1 tel que le point A_{k_1} soit le plus près de l'origine parmi les points A_k , de même soit k_2 tel que le point B_{k_2} soit le plus près de l'origine parmi les points B_k ; il reste à vérifier que la distance entre les deux rayons qui coupent l'axe des abscisses en B_{k_2} et l'axe des ordonnées en A_{k_1} est bien $\delta = 4/L$. Comme les points A_k sont distants de $2/p$, il existe un entier n tel que l'ordonnée y^* de A_{k_1} satisfasse :

$$\begin{aligned} 2n &\leq y_0 + q/p(2E(x_0/2) - x_0 + 2k_1) < 2n + 2/p \\ \implies y^* &= (y_0 + q/p(2E(x_0/2) - x_0 + 2k_1)) - 2n < 2/p \end{aligned}$$

De même, les points B_k étant distants de $2/q$, il existe un entier m tel que l'abscisse x^* de B_{k_2} satisfasse :

$$\begin{aligned} 2m &\leq x_0 + p/q(2E(y_0/2) - y_0 + 2k_2) < 2m + 2/q \\ \implies x^* &= x_0 + p/q(2E(y_0/2) - y_0 + 2k_2) - 2m < 2/q \end{aligned}$$

La distance δ entre les deux rayons est telle que :

$$\delta = \left| \overrightarrow{A_{k_1}B_{k_2}} \cdot \vec{u}^\perp \right| = \frac{|qx^* + py^*|}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{2|p(E(x_0/2) + k_2 - m) + q(E(y_0/2) + k_1 - n)|}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

δ est donc de la forme $4k/L$ où k est un entier. Or $0 \leq x^* < 2/q$ et $0 \leq y^* < 2/p$ donc $\delta < 8/L$, et finalement $\delta = 4/L$. \square

Remarque 3.1.3 Si un domaine ω quarrable est tel que $g(\omega) = |\omega|$ alors pour tout $\alpha \in [0, \pi/2]$ et pour presque tout $X_0 \in T$, $m_{\rho_0}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} |\omega|$, où $\rho_0 \sim [X_0, \alpha]$.

En effet si les rayons d'angles α sont ouverts, on sait déjà que $m_{\rho_0}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} |\omega|$, pour tout X_0 . Maintenant si les rayons d'angle α sont fermé de longueur L , soit M et N deux points du rayon tels que \overline{MN} soit orthogonal à \vec{u} et $MN = \delta$. Soit $P(t) = tM + (1-t)N$ et $\rho_t \sim [P(t), \alpha]$, alors :

$$g(\omega) \leq \inf_{t \in [0,1]} m_{\rho_t}(L) \leq \int_0^1 m_{\rho_t}(L) dt = |\omega|$$

Or la deuxième inégalité est une égalité si et seulement si $m_{\rho_t}(L)$ est presque partout égale à $|\omega|$. Si ω possède une frontière C^1 par morceaux (sans imposer que ω soit connexe), alors les points de discontinuités de $m_{\rho_t}(L)$ sont en nombre fini (il n'y en a pas si la frontière de ω ne possède pas de parties droites), donc dans ce cas pour presque tous les rayons $m_{\rho_0}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} |\omega|$.

3.2 Une seconde expression de g

Dans la partie précédente, nous avons étudié en détail les rayons géométriques, nous avons notamment montré que pour tout rayon γ_{ρ_0} , la fonction m_{ρ_0} admet une limite quand t tend vers $+\infty$ que nous avons explicitée. Par conséquent l'étude de la borne inférieure de ces limites semble plus aisée que l'étude de la limite en $+\infty$ de la fonction du temps $\inf_{\rho_0 \in \Gamma} m_{\rho_0}(t)$ qui entre dans la définition de la quantité géométrique g .

D'où l'intérêt du théorème suivant :

Théorème 3.2.1 *Soit ω un fermé dont la frontière est C^1 par morceaux, alors :*

$$g(\omega) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\inf_{\rho_0 \in \Gamma} m_{\rho_0}(t) \right) = \inf_{\rho_0 \in \Gamma} \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} m_{\rho_0}(t) \right\}$$

Preuve : Pour la démonstration, posons : $G(\omega) = \inf_{\rho_0 \in \Gamma} \{ \lim_{t \rightarrow +\infty} m_{\rho_0}(t) \}$. Il est clair que :

$$G(\omega) \geq g(\omega) \tag{3.1}$$

En effet soit γ_{ρ_0} un rayon de Γ et soit $t > 0$, alors $m_{\rho_0}(t) \geq \inf_{\rho \in \Gamma} m_{\rho}(t)$, en prenant la limite supérieure quand t tend vers $+\infty$, on obtient $\lim_{t \rightarrow +\infty} m_{\rho_0}(t) \geq g(\omega)$. Cette dernière inégalité étant satisfaite pour tout rayon γ_{ρ_0} , on en déduit bien (3.1).

Il reste à montrer :

$$G(\omega) \leq g(\omega), \tag{3.2}$$

qui est bien sûr l'inégalité difficile de la preuve. Cette partie est traitée en Annexe, il s'agit d'un projet d'article en commun avec Emmanuel Humbert de l'Institut Elie Cartan. \square

Soit ω un sous-ensemble quarrable de Ω . Puisqu'à la proposition 3.1.2 nous avons montré que $g(\omega) \leq |\omega|$ et que, si γ_{ρ_0} est un rayon ouvert alors $m_{\rho_0}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} |\omega|$ (cf. théorème 3.1.1), une conséquence directe de l'expression de la quantité géométrique établie au théorème 3.2.1 est qu'il suffit de considérer les rayons fermés : soit Γ_f l'ensemble des rayons géométriques fermés de Ω , alors :

$$g(\omega) = \inf_{\rho_0 \in \Gamma_f} \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} m_{\rho_0}(t) \right\} \tag{3.3}$$

Définition 3.2.1 *Si γ_{ρ_0} est le rayon fermé défini par $\rho_0 \sim [X_0, \alpha]$ et de période L , on pose :*

$$j(\rho_0) = \frac{1}{L} \int_0^L \chi_{\omega}(\gamma_{\rho_0}(s)) ds$$

Au final :

$$g(\omega) = \inf_{\rho_0 \in \Gamma_f} j(\rho_0) \tag{3.4}$$

3.3 Calcul exact de g

Nous allons montrer que pour une famille particulière de domaines ω , les propriétés de la quantité géométrique g qui ont été établies permettent de calculer exactement $g(\omega)$. Soit N un entier strictement positif, soit ω un sous domaine de Ω qui est la réunion d'un certain nombre de carrés de la famille $(C_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ avec :

$$C_{i,j} = \left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N} \right] \times \left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right]$$

Il s'agit bien sûr d'un domaine quarrable, fermé et dont la frontière est C^1 par morceaux.

3.3.1 Influence de l'angle α

Le premier résultat est le suivant :

Théorème 3.3.1 *Soit $\gamma \sim [X_0, \alpha]$ un rayon fermé oblique tel que $\tan \alpha = q/p$, avec p et q premiers entre eux et $p + q > 2N$, alors :*

$$|j(\gamma) - |\omega|| \leq \frac{N^2}{pq} \min\{|\omega|, 1 - |\omega|\} \leq \frac{N^2}{2pq}$$

Preuve : Nous allons considérer le rayon γ comme une géodésique du tore plat $T = [0,2]^2$. Soit, dans un premier temps, K un carré de base du maillage du tore :

$$K = C_{i_0, j_0} = \left[\frac{i_0-1}{N}, \frac{i_0}{N} \right] \times \left[\frac{j_0-1}{N}, \frac{j_0}{N} \right] = ABCD$$

Soit γ un rayon fermé défini par $\rho_0 = (X_0, \vec{u}) \sim [X_0, \alpha]$ avec $\tan \alpha = q/p$, p et q premiers entre eux. La période de ce rayon est $L = 2\sqrt{p^2 + q^2}$; posons $\delta = 4/L$, alors $\cos \alpha = p\delta/2$ et $\sin \alpha = q\delta/2$. Comme nous l'avons vu au théorème 3.1.2, le rayon géométrique est constitué de $p + q$ segments de vecteur directeur \vec{u} équidistants de δ .

Introduisons le repère orthonormal direct $\mathcal{R}_u = (X, \vec{I}_u, \vec{J}_u)$ où X est tel que $\vec{X}\vec{D} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{X}\vec{D} \cdot \vec{X}\vec{A} = 0$, $\vec{I}_u = \vec{X}\vec{D} / \|\vec{X}\vec{D}\|$, et enfin $\vec{J}_u = \vec{X}\vec{A} / \|\vec{X}\vec{A}\| = \vec{u}$ (cf. figure 3.8).

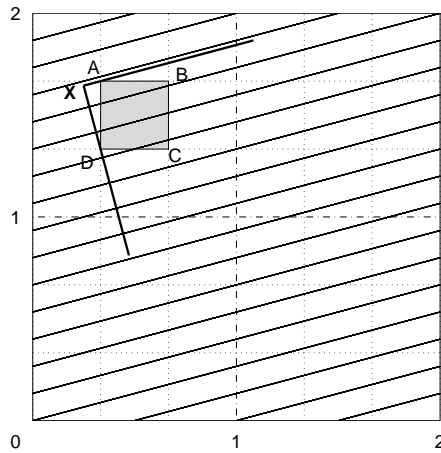


FIG. 3.8 – Rayon $\gamma \sim [0, \alpha]$ avec $\tan \alpha = 4/15$

Dans ce repère les points A, B, C et D ont pour coordonnées :

$$A\left(0, \frac{\sin \alpha}{N}\right); \quad B\left(\frac{\sin \alpha}{N}, \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{N}\right); \quad C\left(\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{N}, \frac{\cos \alpha}{N}\right); \quad D\left(\frac{\cos \alpha}{N}, 0\right)$$

Et le rayon γ est constitué de $p + q$ segments verticaux, dont R passent à l'intérieur de K (cf. figure 3.9), notons x_0, x_1, \dots, x_{R-1} leurs abscisses :

$$\begin{cases} x_0 = r \in [0, \delta] \\ x_i = x_0 + i\delta, \quad 0 \leq i \leq R-1 \end{cases}$$

Comme $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{N} = \frac{p+q}{2N}\delta > \delta$, il passe bien au moins un segment à l'intérieur de K et $R \geq 1$.

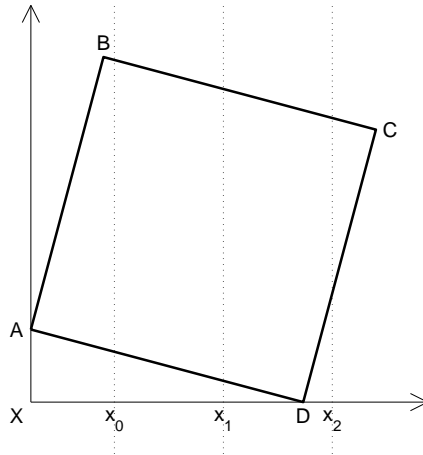


FIG. 3.9 – Segments verticaux intérieurs au carré $ABCD$

Soit les quatre fonctions affines suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \cot \alpha x + \frac{\sin \alpha}{N} = \cot \alpha \left(x - \frac{\sin \alpha}{N}\right) + \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{N} \quad \text{droite (AB)} \\ f_2(x) &= -\tan \alpha \left(x - \frac{\sin \alpha}{N}\right) + \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{N} \\ &= -\tan \alpha \left(x - \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{N}\right) + \frac{\cos \alpha}{N} \quad \text{droite (BC)} \\ g_1(x) &= -\tan \alpha x + \frac{\sin \alpha}{N} = -\tan \alpha \left(x - \frac{\cos \alpha}{N}\right) \quad \text{droite (AD)} \\ g_2(x) &= \cot \alpha \left(x - \frac{\cos \alpha}{N}\right) = \cot \alpha \left(x - \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{N}\right) + \frac{\cos \alpha}{N} \quad \text{droite (CD)}. \end{aligned}$$

Et les deux fonctions :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \alpha}{N} & \text{si } x \leq 0 \\ f_1(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\cos \alpha}{N} \\ f_2(x) & \text{si } \frac{\cos \alpha}{N} \leq x \leq \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{N} \\ \frac{\cos \alpha}{N} & \text{si } x \geq \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{N} \end{cases} \quad \text{et } g(x) = \begin{cases} \frac{\sin \alpha}{N} & \text{si } x \leq 0 \\ g_1(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\sin \alpha}{N} \\ g_2(x) & \text{si } \frac{\sin \alpha}{N} \leq x \leq \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{N} \\ \frac{\cos \alpha}{N} & \text{si } x \geq \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{N} \end{cases}.$$

Alors :

$$\int_{\mathbb{R}} f - g = \int_0^{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{N}} (f(x) - g(x)) dx = |K| = \frac{1}{N^2}.$$

Et :

$$\frac{1}{L} \int_0^L \chi_K(\gamma(s)) ds = \frac{\delta}{4} \sum_{i=0}^{R-1} f(x_i) - g(x_i).$$

Soit k le nombre de segments verticaux parmi les R qui coupent le segment $[AB]$, i.e. k tel que :

$$r + (k-1)\delta \leq \frac{\sin \alpha}{N} \leq r + k\delta$$

Si $1 \leq k \leq R-1$, c'est-à-dire si au moins un segment coupe $[AB]$ et au moins un segment coupe $[BC]$, alors :

$$\frac{1}{L} \sum_{i=0}^{R-1} f(x_i) = \frac{\delta}{4} \sum_{i=0}^{k-1} f_1(x_i) + \frac{\delta}{4} \sum_{i=k}^{R-1} f_2(x_i) \quad (3.5)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{k-1} \int_{x_i-\delta/2}^{x_i+\delta/2} f_1(x) dx + \frac{1}{4} \sum_{i=k}^{R-1} \int_{x_i-\delta/2}^{x_i+\delta/2} f_2(x) dx \quad (3.6)$$

$$= \frac{1}{4} \int_{r-\delta/2}^{r+(k-1/2)\delta} f_1(x) dx + \frac{1}{4} \int_{r+(k-1/2)\delta}^{r+(R-1/2)\delta} f_2(x) dx. \quad (3.7)$$

Car f_1 et f_2 sont des fonctions affines donc la formule d'intégration du point milieu est exacte. Si $k=0$ ou $k=R$, l'équation (3.7) reste valable donc dans tous les cas :

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{R-1} f(x_i) &= \frac{1}{4} \int_0^{(p+q)\delta/N} f(x) dx - \frac{1}{4} \int_0^{r-\delta/2} f_1(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{q\delta/N}^{r+(k-1/2)\delta} (f_1(x) - f_2(x)) dx + \frac{1}{4} \int_{(p+q)\delta/N}^{r+(R-1/2)\delta} f_2(x) dx. \end{aligned}$$

De même soit l le nombre de segments du rayon γ qui coupent le segment $[AD]$:

$$r + (l-1)\delta \leq \frac{\cos \alpha}{N} \leq r + l\delta.$$

Dans tous les cas :

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{R-1} g(x_i) &= \frac{1}{4} \int_{r-\delta/2}^{r+(l-1/2)\delta} g_1(x) dx + \frac{1}{4} \int_{r+(l-1/2)\delta}^{r+(R-1/2)\delta} g_2(x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{(p+q)\delta/N} g(x) dx - \frac{1}{4} \int_0^{r-\delta/2} g_1(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{p\delta/N}^{r+(l-1/2)\delta} (g_1(x) - g_2(x)) dx + \frac{1}{4} \int_{(p+q)\delta/N}^{r+(R-1/2)\delta} g_2(x) dx. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_0^L \chi_K(\gamma(s)) ds - \frac{1}{4N^2} &= -\frac{1}{4} \int_0^{r-\delta/2} f_1 - g_1 + \frac{1}{4} \int_{q\delta/N}^{r+(k-1/2)\delta} f_1 - f_2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{p\delta/N}^{r+(l-1/2)\delta} g_1 - g_2 + \frac{1}{4} \int_{(p+q)\delta/N}^{r+(R-1/2)\delta} f_2 - g_2 \\ &= \frac{\tan \alpha + \cot \alpha}{8} [-(r-\delta/2)^2 + (r+(k-1/2)\delta - q\delta/N)^2 \\ &\quad + (r+(l-1/2)\delta - p\delta/N)^2 - (r+(R-1/2)\delta - (p+q)\delta/N)^2]. \end{aligned}$$

Or, dans cette dernière égalité, chacun des quatre termes au carré est inférieur ou égal en valeur absolue à $\delta/2$ et $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{4}{pq\delta^2} = \frac{L^2}{4pq}$ donc :

$$\left| \frac{1}{L} \int_0^L \chi_K(\gamma(s)) ds - \frac{1}{4N^2} \right| \leq \frac{1}{4pq}. \quad (3.8)$$

Soit maintenant un domaine ω réunion de carrés de base du maillage, considérons l'ensemble ω_T :

$$\omega_T = \bigcup_{(i,j) \in E} C_{i,j}$$

où E est un sous-ensemble de $\{1, 2, \dots, 2N\}$ et $\text{card}(E) = N^2 |\omega_T| = 4N^2 |\omega|$; alors :

$$j(\gamma) = \frac{1}{L} \int_0^L \chi_{\omega_T}(\gamma(s)) ds = \sum_{(i,j) \in E} \frac{1}{L} \int_0^L \chi_{C_{i,j}}(\gamma(s)) ds$$

donc :

$$j(\gamma) - |\omega| = \sum_{(i,j) \in E} \left(\frac{1}{L} \int_0^L \chi_{C_{i,j}}(\gamma(s)) ds - \frac{1}{4N^2} \right)$$

d'où

$$|j(\gamma) - |\omega|| \leq \frac{\text{card}(E)}{4pq} = \frac{N^2}{pq} |\omega|.$$

Si l'aire de ω est plus grande que $1/2$, on considère ω' l'adhérence de son complémentaire également réunion de carrés $C_{i,j}$, donc :

$$\left| \frac{1}{L} \int_0^L \chi_{\omega'}(\gamma(s)) ds - (1 - |\omega|) \right| \leq \frac{N^2}{pq} (1 - |\omega|)$$

or :

$$\frac{1}{L} \int_0^L \chi_{\omega'}(\gamma(s)) ds = 1 - \frac{1}{L} \int_0^L \chi_{\omega}(\gamma(s)) ds.$$

On a donc bien : $|j(\gamma) - |\omega|| \leq \frac{N^2}{pq} (1 - |\omega|)$. □

3.3.2 Représentation du domaine ω

Pour travailler avec des nombres entiers plutôt que rationnels, nous allons effectuer un changement de repère. Le nouveau repère est (O, \vec{I}, \vec{J}) avec $\vec{I} = \vec{i}/(2N)$ et $\vec{J} = \vec{j}/(2N)$. Par conséquent, Ω est maintenant le carré $[0, N]^2$, et T le tore $[0, 2N]^2$, ce qui induit une modification de la longueur des rayons fermés définis par le couple d'entier premiers entre eux (p, q) tels que $\cos \alpha = p/\sqrt{p^2 + q^2}$ et $\sin \alpha = q/\sqrt{p^2 + q^2}$, la période est maintenant :

$$L = 2N\sqrt{p^2 + q^2}$$

tandis que le carré $C_{i,j}$ est tel que :

$$C_{i,j} = [i - 1, i] \times [j - 1, j].$$

Introduisons la matrice M de taille N , définie par $M_{i,j} = 1$ si $C_{j,i} \subset \omega$, et 0 sinon. Nous avons choisi cette représentation pour continuer à travailler dans un repère (O, \vec{I}, \vec{J}) classique (axe des

abscisse horizontal, axe des ordonnées vertical vers le haut) et pour que le matrice M soit la plus proche possible du domaine ω , il suffit en effet de lire les lignes de la matrice M du bas vers le haut pour retrouver directement ω . Ainsi la matrice M du domaine ω représenté à la figure 3.10 est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

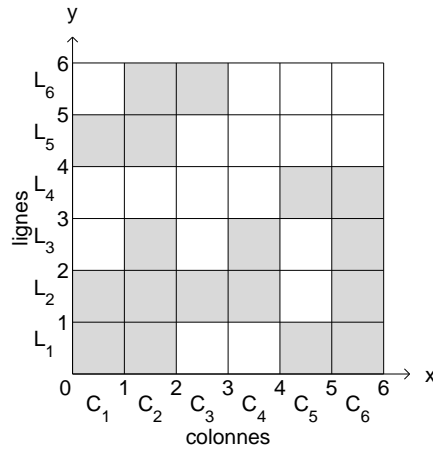


FIG. 3.10 – Un domaine ω pour $N = 6$

Introduisons également, la matrice A de taille $2N$ telle que: $A_{i,j} = 1$ si $C_{j,i} \subset \omega_T$, 0 sinon, i.e. :

$$M_{i,j} = A_{i,j} = A_{2N+1-i,j} = A_{i,2N+1-j} = A_{2N+1-i,2N+1-j} \quad (3.9)$$

3.3.3 Rayons influents

Le calcul de la moyenne du temps passé par les rayons horizontaux dans ω est immédiat, si l'ordonnée du point de départ y_0 appartient à l'ouvert $]i-1, i[$, la limite est :

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N M_{i,j}$$

Si $y_0 = k$ est un entier, comme les carrés qui constituent ω sont fermés, la moyenne du temps passé est :

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (M_{k-1,j} + M_{k,j})$$

qui est bien sûr un mauvais candidat pour le calcul de la quantité géométrique. De même pour la moyenne du temps passé par un rayon vertical dans ω , les nombres à considérer sont :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M_{i,j}, \quad 1 \leq j \leq N$$

Considérons maintenant le cas des rayons obliques et fixons pour l'instant l'angle α , c'est à dire le couple de nombre (p,q) premiers entre eux tels que $\tan \alpha = q/p$.

Remarque 3.3.1 *Il suffit de considérer les rayons définis par $\rho_0 \sim [X_0, \alpha]$ avec $X_0 \in T$ et $\alpha \in [0, \pi/2]$, i.e. $p \geq 0$ et $q \geq 0$.*

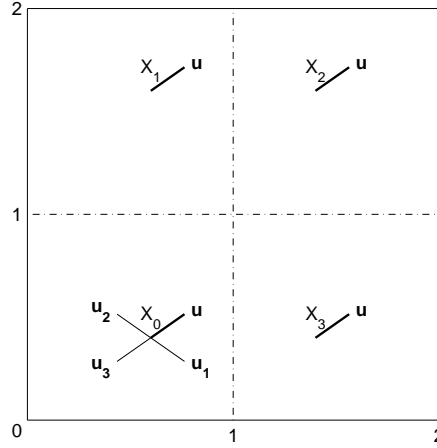


FIG. 3.11 – Points de départ avec $\alpha \in [0, \pi/2]$

En effet avec les notations de la figure 3.11, le rayon γ_1 défini par (X_0, \vec{u}_1) est équivalent au rayon γ'_1 défini par (X_1, \vec{u}) . De même, les rayons γ_2 et γ_3 définis respectivement par (X_0, \vec{u}_2) et (X_0, \vec{u}_3) sont respectivement équivalents aux rayons γ'_2 et γ'_3 définis par (X_2, \vec{u}) et (X_3, \vec{u}) .

Le but est maintenant d'étudier l'influence du point de départ du rayon X_0 , nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.3.1 *Parmi les rayons fermés obliques d'angle α , le rayon qui passe le moins de temps dans ω est un rayon qui passe par un point à coordonnées entières.*

Preuve : Soit B un point du tore tel que le rayon géométrique γ_{ρ_0} issu de B et d'angle α ne passe par aucun point à coordonnées entières. Nous allons travailler avec l'interprétation du plan infini et nous notons B_0 le premier point d'intersection du rayon avec les droites du réseau $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, puis B_1, B_2, \dots les suivants. une conséquence du théorème 3.1.2 est que : $B_0 B_{2N(p+q)} = L = 2N\sqrt{p^2 + q^2}$. $\vec{u} = (p\vec{i} + q\vec{j})/\sqrt{p^2 + q^2}$ est la direction du rayon, soit $\vec{n} = (-q\vec{i} + p\vec{j})/\sqrt{p^2 + q^2}$ la normale unitaire directe à \vec{u} , pour un point P à coordonnées entières $P = (k, l)$, calculons sa distance signée au rayon :

$$d(P, \gamma_{\rho_0}) = \overrightarrow{BP} \cdot \vec{n} = \frac{pl - qk - (py_0 - qx_0)}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

Il existe un point A à coordonnées entières qui vérifie ($d(x)$ désigne la partie décimale de x) :

$$d(A, \gamma_{\rho_0}) = \min_{d(P, \gamma_{\rho_0}) > 0} d(P, \gamma_{\rho_0}) = \begin{cases} d(py_0 - qx_0) & \text{si } py_0 - qx_0 > 0 \\ 1 - d(py_0 - qx_0) & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons A_i le point d'intersection de la droite passant par A de vecteur directeur \vec{u} (les points A solutions du problème de minimisation précédent sont bien tous sur une même droite de vecteur directeur \vec{u}) et de la droite du réseau $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ à laquelle appartient le point B_i (cf. figure 3.12, pour

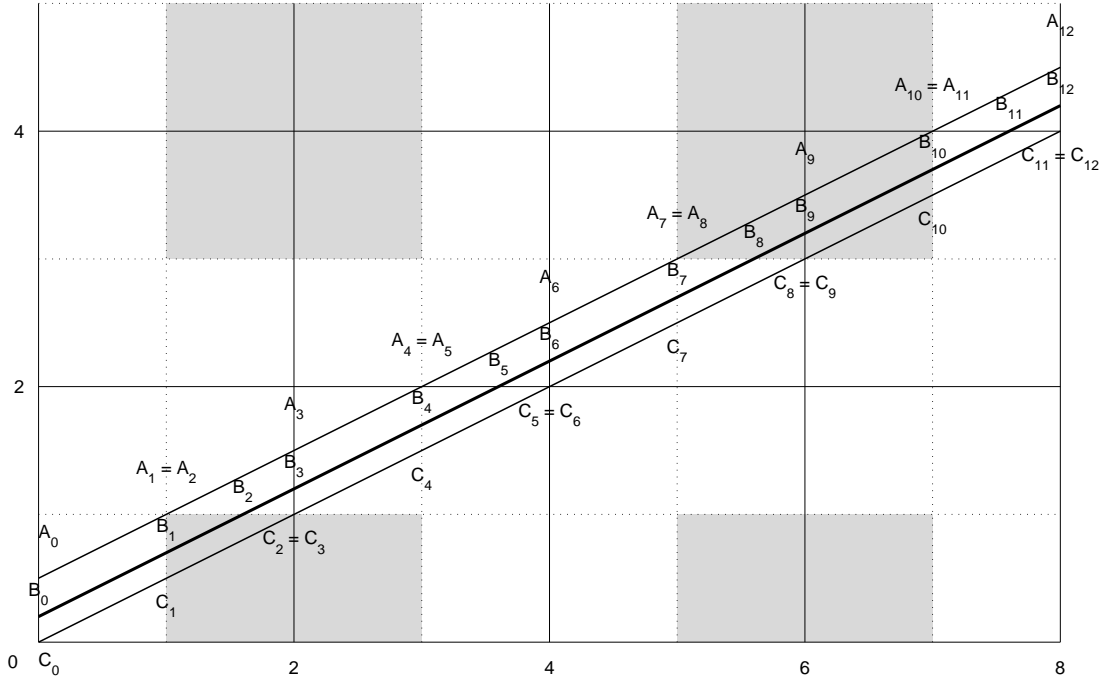


FIG. 3.12 – Encadrement d'un rayon ne passant par aucun point à coordonnées entières

laquelle $N = 2$).

De même, il existe un point C à coordonnées entières qui vérifie :

$$d(C, \gamma_{\rho_0}) = \max_{d(P, \gamma_{\rho_0}) < 0} d(P, \gamma_{\rho_0}) = \begin{cases} -d(py_0 - qx_0) & \text{si } py_0 - qx_0 < 0 \\ d(py_0 - qx_0) - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons C_i le point d'intersection de la droite passant par B de vecteur directeur \vec{u} et de la droite du réseau $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ à laquelle appartient le point B_i (cf. figure 3.12).

Nous sommes donc en présence de trois rayons obliques d'angle α : $\gamma_A \sim [A_0, \alpha]$, $\gamma_B \sim [B, \alpha] \sim [B_0, \alpha]$ et $\gamma_C \sim [C_0, \alpha]$ et du fait de la définition des points A et C les segments $[A_i A_{i+1}]$, $[B_i B_{i+1}]$ et $[C_i C_{i+1}]$ appartiennent tous les trois au même carré $C_{k,l}$ et si :

$$j(\gamma_B) = \frac{1}{L} \int_{[B_0 B_{2N(p+q)}} \chi_{\omega_T} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{2N(p+q)} \varepsilon_k B_{k-1} B_k$$

avec $\varepsilon_k = 1$ si $[B_k B_{k+1}] \subset \omega_T$, 0 sinon ; alors :

$$j(\gamma_A) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{2N(p+q)} \varepsilon_k A_{k-1} A_k \quad \text{et} \quad j(\gamma_C) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{2N(p+q)} \varepsilon_k C_{k-1} C_k$$

Les trois rayons étant parallèles, il existe un réel $t \in (0,1)$ tel que pour tout i , B_i soit le barycentre de A_i affecté du poids t et de C_i affecté du poids $1 - t$. Si le quadrilatère $A_i A_{i+1} C_i C_{i+1}$ est un trapèze (ou dans le cas dégénéré un triangle rectangle), le théorème de Thalès implique que : $B_i B_{i+1} = t A_i A_{i+1} + (1 - t) C_i C_{i+1}$, si ce quadrilatère est un parallélogramme cette égalité reste vraie car les trois longueurs sont égales. On en déduit que :

$$j(\gamma_B) = t j(\gamma_A) + (1 - t) j(\gamma_C)$$

Donc le minimum des trois quantités: $j(\gamma_A)$, $j(\gamma_B)$ et $j(\gamma_C)$ est atteint pour un des deux rayons qui part d'un point à coordonnées entières γ_A ou γ_C . \square

Il reste à déterminer, pour l'angle α tel que $\tan \alpha = q/p$, les points de départ à coordonnées entières à prendre en compte. Dans le tore plat $T = [0, 2N]^2$, il y a $4N^2$ points de départ possibles, or le rayon $\gamma_{\rho_0} \sim [(x_0, y_0), \alpha]$ avec $(x_0, y_0) \in \mathbb{N}^2$ passe par $2N$ points à coordonnées entières. En effet, γ_{ρ_0} passe par le point (x_1, y_1) si et seulement si il existe $\lambda \in [0, 2N)$ tel que :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \lambda p [2] \\ y_1 = y_0 + \lambda q [2] \end{cases}$$

Donc les points à coordonnées entières rencontrés sont exactement les $2N$ points obtenus pour $\lambda = 0, 1, \dots, 2N - 1$. Il faut donc au minimum $2N$ rayons pour passer par tous les points à coordonnées entières de T . Or :

Proposition 3.3.2 *Soit d le plus grand commun diviseur de p et de $2N$, soit d' tel que $dd' = 2N$. Alors les $2N$ rayons d'angle α issus des points de coordonnées entières (i, j) avec $0 \leq i \leq d - 1$ et $0 \leq j \leq d' - 1$ passent une fois et une seule par tous les points à coordonnées entières du tore plat T .*

Preuve : Soit p' l'entier tel que $dp' = p$, remarquons que p' et d' sont premiers entre eux. Soit également γ_1 et γ_2 les rayons issus respectivement des points A et B à coordonnées entières (k_1, k_2) et (k_3, k_4) avec $0 \leq k_1, k_3 \leq d - 1$ et $0 \leq k_2, k_4 \leq d' - 1$. Les rayons γ_1 et γ_2 passent par un même point de T à coordonnées entières si et seulement si il existe quatre entiers λ, μ, n et m tels que :

$$\begin{cases} x = k_1 + \lambda p = k_3 + \mu p + 2Nn \\ y = k_2 + \lambda q = k_4 + \mu q + 2Nm \end{cases}$$

Donc $k_1 - k_3 = (\mu - \lambda)p + 2Nn$ et $k_1 - k_3$ est divisible par d or $-(d - 1) \leq k_1 - k_3 \leq d - 1$ donc $k_1 = k_3$ et $(\mu - \lambda)p = -2Nn$, ce qui implique $(\mu - \lambda)p' = -d'n$ et comme p' et d' sont premiers entre eux: $(\mu - \lambda) = kd'$ où k est un entier. De même $k_2 - k_4 = (\mu - \lambda)q + 2Nm = kd'q + 2Nm$ donc $k_2 - k_4$ est divisible par d' or $-(d' - 1) \leq k_2 - k_4 \leq d' - 1$ donc $k_2 = k_4$ et $\gamma_1 = \gamma_2$. \square

3.3.4 Synthèse

Les différentes propriétés établies dans ce chapitre permettent de calculer **exactement** la quantité géométrique dans le cas où ω est la réunion de carrés $C_{i,j}$. Tout d'abord, d'après le théorème 3.1.1 et la proposition 3.3.1, seuls les rayons fermés sont à considérer, et parmi ceux-ci les rayons partant d'un point à coordonnées entières sont suffisants pour le calcul de $g(\omega)$.

Les entrées du programme sont la matrice M qui code le domaine bien sûr, et éventuellement un paramètre $PQmax$ qui permet de se protéger de boucles infinies (cas pour l'instant, jamais rencontré en pratique...)

L'algorithme est le suivant :

1. On calcule g le minimum des $2N$ nombres :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M_{i,j} \quad \text{et} \quad \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N M_{i,j}$$

ce qui correspond au minimum de $j(\gamma)$ où γ est un rayon vertical ou horizontal.

2. A partir de la matrice M , on construit la matrice A défini en (3.9).

3. Pour chaque couple (p, q) tel que $p \geq 1$, $q \geq 1$, $p + q \leq 2N$ et p et q premiers entre eux, on calcule à l'aide d'une fonction annexe décrite plus bas, le nombre :

$$m_{p,q} = \min_{X \in \{1,2,\dots,2N\}^2} \{j(\gamma), \gamma \sim [X, \arctan q/p]\} \quad (3.10)$$

Puis : $g \leftarrow \min\{g, m_{p,q}\}$.

4. Si à cette étape $g = |\omega|$, l'utilisateur saisit le paramètre $PQmax$ qui sera le plus grand produit pq considéré ; sinon $PQmax = E(\frac{N^2}{|\omega|-g} \min\{|\omega|, 1 - |\omega|\}) + 1$.
5. On calcule les couples (p, q) tels que $p \geq 1$, $q \geq 1$, $p + q > 2N$, $pq \leq PQmax$, et p et q premiers entre eux. On ordonne ces couples par ordre croissant du produit pq pour former la liste L qui contient n couples.
6. $i \leftarrow 1$ et tant que $|\omega| - g \geq \frac{N^2}{pq} \min\{|\omega|, 1 - |\omega|\}$ et $i \leq n$,

$$g \leftarrow \min\{g, m_{p,q}\} \text{ et } i \leftarrow i + 1$$

où (p, q) est le i -ième couple de la liste L et $m_{p,q}$ est défini plus haut, cf. (3.10).

7. Au final :

- si en sortant de cette boucle, $g = |\omega|$, alors :

$$|\omega| - \frac{N^2}{PQmax} \min\{|\omega|, 1 - |\omega|\} \leq g(\omega) \leq |\omega|,$$

c'est-à-dire que l'on est dans l'un des deux cas suivants : ou bien $g(\omega) = |\omega|$, ou bien on n'a pas considéré suffisamment de familles de rayons pour connaître exactement $g(\omega)$.

- sinon, d'après le théorème 3.3.1, $g(\omega)$ est égal à g .

Nous allons maintenant présenter la méthode de calcul de la quantité $m_{p,q}$ définie en (3.10) pour deux entiers $p \geq 1$, $q \geq 1$ et premiers entre eux. Mais intéressons nous tout d'abord au rayon $\gamma_0 \sim [0, \arctan q/p]$ et au calcul de $j(\gamma_0)$. Sa période est $L = 2N\sqrt{p^2 + q^2}$ et entre les instants $t = 0$ et $t = L$, il passe par $2N(p + q - 1) + 1$ points dont une coordonnée au moins est entière que nous noterons P_1 à $P_{2N(p+q-1)+1}$ (cf. figure 3.13), sachant que les points de la forme $P_{l(p+q-1)+1}$, $1 \leq l \leq 2N$ ont leurs deux coordonnées entières.

Soit (i_k) , (j_k) et (ε_k) les trois suites finies ($1 \leq k \leq 2N(p + q - 1)$) définies par :

$$P_k P_{k+1} \subset [i_k, i_k + 1] \times [j_k, j_k + 1]$$

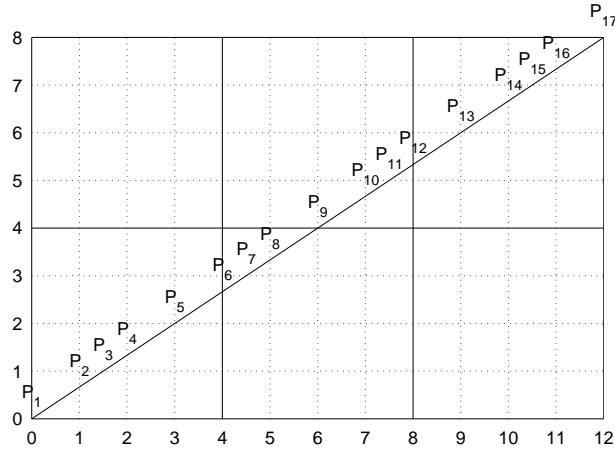
et

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{si } [i_k, i_k + 1] \times [j_k, j_k + 1] \subset \omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $j(\gamma_0) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{2N(p+q-1)} \varepsilon_k P_k P_{k+1}$, le calcul de $j(\gamma_0)$ revient donc au calcul des trois suites $(P_k P_{k+1})$, (i_k) et (j_k) .

- Calcul des longueurs $P_k P_{k+1}$:

La première remarque est qu'il suffit de calculer les longueurs $P_k P_{k+1}$ pour $1 \leq k \leq p + q - 1$, car $\overrightarrow{P_{k+(p+q-1)} P_k} = p\vec{i} + q\vec{j}$, donc la suite $(P_k P_{k+1})$ est périodique de période $p + q - 1$. Or comme p et q sont premiers entre eux, aucun des points P_1 à P_{p+q-1} n'a ses deux coordonnées entières.

FIG. 3.13 – Rayon γ_0 , pour $N = 2$, $p = 3$ et $q = 2$

Ensuite les équations paramétriques du rayon γ_0 sont $x = pt/\sqrt{p^2 + q^2}$ et $y = qt/\sqrt{p^2 + q^2}$. Il croise donc les droites verticales d'équations $x = i$ aux instants $t_i = i\sqrt{p^2 + q^2}/p$ aux points $(i, iq/p)$ et les droites horizontales d'équations $y = j$ aux instants $t'_j = j\sqrt{p^2 + q^2}/q$ aux points $(jp/q, j)$.

On définit alors la liste V^1 par :

$$V^1 = \{t'_j, 1 \leq j \leq q - 1\} \cup \{t_i, 1 \leq i \leq p - 1\}.$$

Soit V^2 la liste obtenue en classant les éléments de V^1 par ordre croissant et σ la permutation de $\{1, 2, \dots, p + q - 2\}$ telle que :

$$V^2 = \sigma(V^1) = \{V_{\sigma(1)}^1, V_{\sigma(2)}^1, \dots, V_{\sigma(p+q-2)}^1\}.$$

Soit V^3 et V^4 définies par :

$$V^3 = \{0\} \cup V^2 \cup \{\sqrt{p^2 + q^2}\} \text{ et } V^4 = \{V_2^3 - V_1^3, V_3^3 - V_2^3, \dots, V_{p+q}^3 - V_{p+q-1}^3\}$$

Soit enfin la liste V définie par :

$$V = \underbrace{V^4 \cup V^4 \cup \dots \cup V^4}_{2N \text{ fois}}$$

alors pour tout k , $1 \leq k \leq 2N(p + q - 1)$: $P_k P_{k+1} = V_k$ et :

$$j(\gamma_0) = \frac{1}{2N\sqrt{p^2 + q^2}} \sum_{k=1}^{2N(p+q-1)} \varepsilon_k V_k$$

Une remarque importante est qu'il est plus judicieux de calculer la liste $pq/\sqrt{p^2 + q^2} \cdot V$ plutôt que la liste V , ainsi : $V_1 = \{pj, 1 \leq j \leq q - 1\} \cup \{qi, 1 \leq i \leq p - 1\}$, $V_3 = \{0\} \cup V^2 \cup \{pq\}$ et donc tous les éléments de V sont des entiers. Et $j(\gamma_0)$ est alors donné par :

$$j(\gamma_0) = \frac{\sum_{k=1}^{2N(p+q-1)} \varepsilon_k V_k}{2Npq}$$

c'est donc un nombre rationnel que l'on connaît exactement si on ne fait pas la division de façon approchée.

• Calcul des suites (i_k) et (j_k) :

Soit I^1 et J^1 les deux listes suivantes :

$$I^1 = \underbrace{\{1, 1, \dots, 1\}}_{q-1 \text{ fois}}, \underbrace{\{0, 0, \dots, 0\}}_{p-1 \text{ fois}} \quad \text{et} \quad J^1 = \underbrace{\{0, 0, \dots, 0\}}_{q-1 \text{ fois}}, \underbrace{\{1, 1, \dots, 1\}}_{p-1 \text{ fois}}$$

c'est-à-dire que les 1 de la suite I^1 correspondent aux points P_k qui sont sur les horizontales et les 1 de la suite J^1 correspondent aux points P_k qui sont sur les verticales. On définit, à partir de ces deux listes et de la permutation σ , les listes :

$$I^2 = \sigma(I^1) = \{I_{\sigma(1)}^1, I_{\sigma(2)}^1, \dots, I_{\sigma(p+q-2)}^1\} \quad \text{et} \quad J^2 = \sigma(J^1) = \{J_{\sigma(1)}^1, J_{\sigma(2)}^1, \dots, J_{\sigma(p+q-2)}^1\}$$

puis :

$$I^3 = \left\{ 0, I_1^2, \sum_{k=1}^2 I_k^2, \dots, \sum_{k=1}^{p+q-2} I_k^2 \right\} \quad \text{et} \quad J^3 = \left\{ 0, J_1^2, \sum_{k=1}^2 J_k^2, \dots, \sum_{k=1}^{p+q-2} J_k^2 \right\}.$$

Soit enfin :

$$I = I^3 \cup (p + I^3) \cup \dots \cup ([2N - 1]p + I^3) \quad \text{et} \quad J = J^3 \cup (q + J^3) \cup \dots \cup ([2N - 1]q + J^3)$$

alors pour tout k , $1 \leq k \leq 2N(p + q - 1)$, $i_k = 1 + I_k$ et $j_k = 1 + J_k$.

Introduisons la matrice A définie à partir de la matrice M en (3.9) et la fonction r définie sur les entiers par :

$$r(k) \in \{1, 2, \dots, 2N\} \quad \text{et} \quad \exists l \in \mathbb{Z} \mid k = 2N.l + r(k)$$

alors pour tout k , $1 \leq k \leq 2N(p + q - 1)$, $\varepsilon_k = A_{r(i_k), r(j_k)} = A_{r(1+I_k), r(1+J_k)}$.

L'intérêt de regrouper tous les rayons d'angle $\arctan q/p$ dans le calcul de $m_{p,q}$ réside dans le fait que tous ces rayons ont la même suite V_k et que les suites (i_k) et (j_k) du rayon $\gamma \sim [(x_0, y_0), \arctan q/p]$ où x_0 et y_0 sont des entiers s'obtiennent à partir des listes I_k et J_k que l'on vient de définir pour γ_0 par : $i_k = 1 + x_0 + I_k$ et $j_k = 1 + x_0 + J_k$.

Pour deux entiers $p \geq 1$ et $q \geq 1$ premiers entre eux, le nombre $m_{p,q}$ se calcule donc de la façon suivante :

1. On calcule le plus grand commun diviseur d de p et $2N$ et à l'aide de la proposition 3.3.2, on en déduit les $2N$ points de départ à coordonnées entières à prendre en compte. Notons X_1, X_2, \dots, X_{2N} et Y_1, Y_2, \dots, Y_{2N} leurs coordonnées.
2. On calcule les trois listes à $2N(p + q - 1)$ éléments V_k , I_k et J_k définies précédemment.
3. $m_{p,q}$ est alors le minimum des $2N$ nombres :

$$\frac{\sum_{l=1}^{2N(p+q-1)} A_{r(1+X_k+I_l), r(1+Y_k+J_l)} V_l}{2Npq}$$

Le dénominateur étant le même pour toutes les fractions, il est facile de les comparer sans faire de division et au final on calcule de façon exacte $m_{p,q}$.

Par exemple, lors du calcul de la quantité géométrique pour le domaine ω représenté sur la figure 3.10. Le minimum pour les rayons verticaux et horizontaux est $g = 1/3$ puis on trouve 45 familles de rayons obliques de première série (i.e. les rayons du point 3 de l'algorithme), dont certains vérifient $j(\gamma) = 1/3$ mais aucun ne satisfait $j(\gamma) < 1/3$, donc à cette étape on a toujours $g = 1/3$. Enfin, il y a 344 familles de rayons obliques de deuxième série (i.e. les rayons du point 5 de l'algorithme), dont aucun ne vérifie $j(\gamma) = 1/3$. Au final, $g(\omega) = 1/3$.

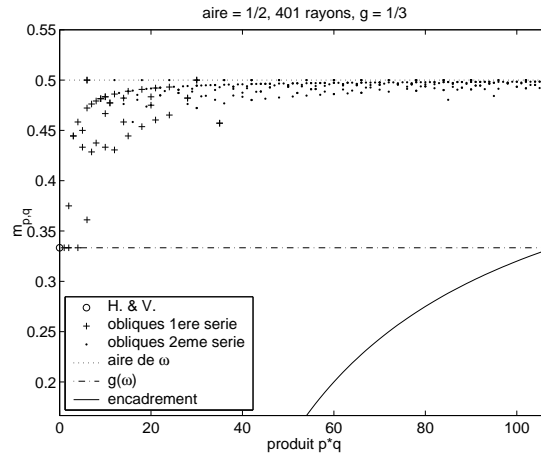


FIG. 3.14 – Un exemple de calcul de $g(\omega)$

La figure 3.14 présente les valeurs des réels $m_{p,q}$ en fonction du produit pq ainsi que l'encadrement du théorème 3.3.1. On remarque que cet encadrement est loin d'être optimal (en tout cas pour ce domaine). Or l'encadrement (3.8) pour un unique carré $C_{i,j}$ est optimal, l'erreur provient donc de la sommation des encadrements (3.8) pour tous les carrés de ω_T . Néanmoins ce résultat permet tout de même d'être certain que l'on connaît exactement $g(\omega)$.

Il y a 10 rayons qui satisfont $j(\gamma) = g(\omega)$: 6 rayons verticaux ou horizontaux (plus exactement 6 familles de rayons verticaux ou horizontaux) représentés sur la figure 3.15.a, 2 rayons inclinés de $\pi/4$ radians représentés sur la figure 3.15.b, 1 rayon incliné de $\arctan 1/2$ représenté sur la figure 3.15.c, et enfin le rayon $\gamma \sim [0, \arctan 1/4]$ représenté sur la figure 3.15.d.

Enfin le domaine ω de la figure 3.16, d'aire $|\omega| = 29/100$, est là pour rappeler que l'intuition est parfois trompeuse. En effet, si on se contente des rayons verticaux, horizontaux et fermés de petites périodes, il semble que $g(\omega) = 1/5$, or le rayon $\gamma \sim [0, \arctan 8/7]$ est tel que $j(\gamma) = 111/560$ (alors que $1/5 = 112/560$), ce qui est bien la vraie valeur de $g(\omega)$ comme le montre le calcul complet.

3.4 Quelques familles de domaines ω

Nous avons élaboré, dans la partie précédente, un algorithme d'évaluation du critère géométrique g pour certains domaines ω . Le but de cette quatrième partie est de présenter deux familles de domaines qui contrôlent tous les rayons géométriques et pour lesquels on peut calculer la valeur du critère g , afin d'avoir un premier repère lorsqu'on cherchera à optimiser le critère géométrique parmi les ensembles d'aires données.

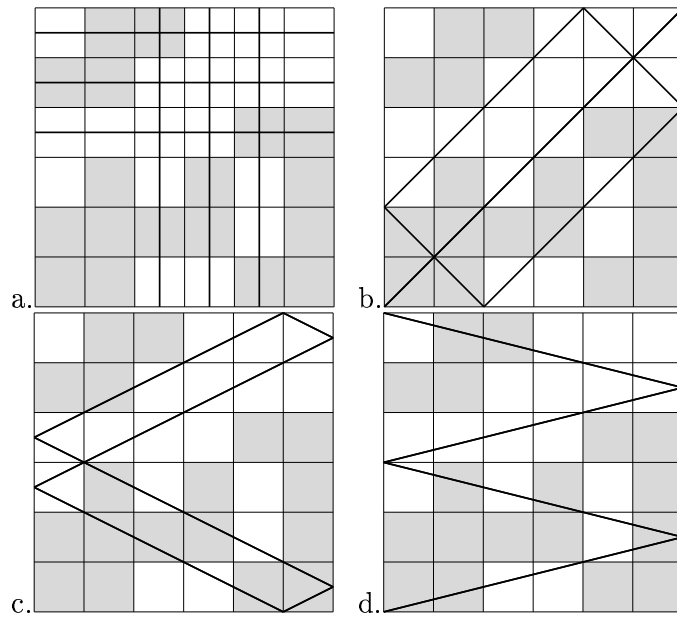


FIG. 3.15 – Rayons saturants : $j(\gamma) = g(\omega) = 1/3$

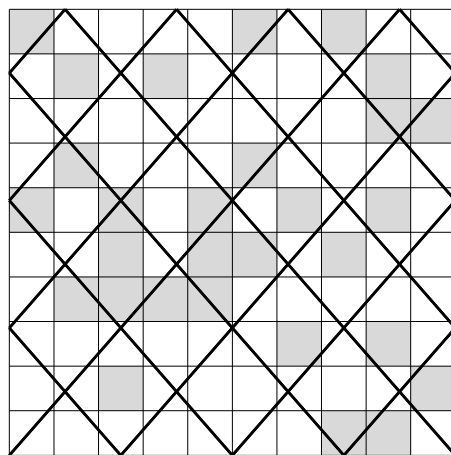


FIG. 3.16 – Rayon saturant : $j(\gamma) = g(\omega) = 111/560$

3.4.1 “La croix”

Pour obtenir un domaine qui contrôle tous les rayons géométriques, il est bien sûr nécessaire de proposer un domaine qui contrôle les rayons verticaux et horizontaux ! Pour contrôler les rayons verticaux, prenons une bande horizontale de largeur c et pour contrôler les rayons horizontaux, prenons une bande verticale de même largeur, on obtient alors une croix comme représentée sur la figure 3.17.

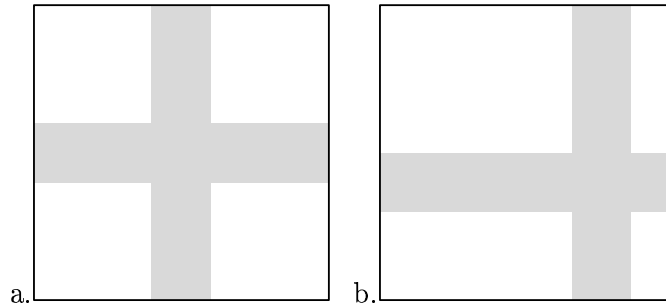


FIG. 3.17 – Deux exemples de croix : a. centrée, b. décentrée

Pour calculer, le critère géométrique de ce domaine, adoptons le point de vue du plan infini ; les rayons géométriques sont alors des demi-droites et par symétries à partir du domaine ω , on obtient deux réseaux de bandes orthogonales (cf. figure 3.18).

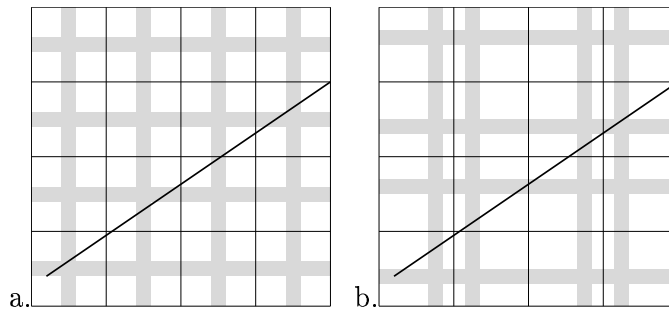


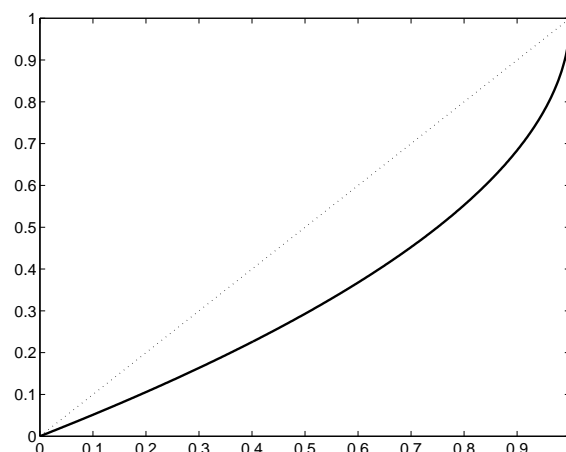
FIG. 3.18 – Les réseaux de bandes : a. pour la croix centrée, b. pour la croix décentrée

Le cas des rayons γ horizontaux ou verticaux est facile, on a : $j(\gamma) = 1$ si le rayon reste toujours dans la bande et $j(\gamma) = c$ sinon. Soit maintenant un rayon γ oblique, en considérant uniquement les bandes verticales, on obtient, par simple application du théorème de Thalès, $j(\gamma) \geq c$, en conclusion $g(\omega) = c$. Par ailleurs, l'aire de cette croix est $2c - c^2$. En inversant cette fonction, on obtient que la croix ω_a d'aire a est telle que :

$$g(\omega_a) = \varphi(a) = 1 - \sqrt{1 - a}$$

Le graphe de cette fonction φ ainsi que celui de la première bissectrice (car on sait que pour tout domaine ω : $g(\omega) \leq |\omega|$) sont représentés sur la figure 3.19.

Dans le cas de la croix, les rayons γ tels que $j(\gamma) = g(\omega)$ sont les rayons horizontaux et verticaux qui ne sont pas inclus dans la croix, ainsi qu'une diagonale du carré Ω (qui est un rayon fermé) si la croix est centrée.

FIG. 3.19 – Graphe de la fonction φ comparé à la première bissectrice

3.4.2 “La bande”

Une autre solution pour contrôler tous les rayons horizontaux et verticaux est de considérer une bande oblique ω comme représentée figure 3.20.a.

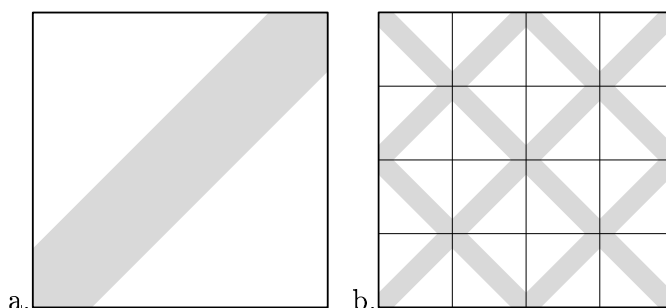


FIG. 3.20 – La bande oblique (a.) et le réseau associé (b.)

Une fois encore, pour calculer le critère géométrique de cette bande, travaillons avec le point de vue du plan infini. Par symétries, nous obtenons à nouveau un double réseau de bandes orthogonales (cf. figure 3.20.b) et donc pour une bande oblique d'aire a , le critère géométrique vaut $\varphi(a) = 1 - \sqrt{1 - a}$.

Dans, ce cas les rayons γ tels que $j(\gamma) = g(\omega)$ sont les rayons à 45 degrés dans le carré Ω initial qui ne sont pas inclus dans la bande oblique, ainsi que les rayons verticaux et horizontaux que sont les cotés de Ω .

Chapitre 4

Les algorithmes génétiques

Après une première partie dédiée à l'étude théorique de fonctionnelles, nous abordons ici la seconde partie de cette thèse consacrée à l'optimisation numérique de ces différentes fonctionnelles. Pour des raisons que nous expliquerons dans chacun des cas, les algorithmes d'optimisation que nous avons retenus appartiennent à la famille des algorithmes génétiques (AG).

L'objet de ce chapitre est, dans un premier temps, de présenter les principes généraux d'un AG ; puis d'explicitier pour les deux familles de problèmes auxquels nous serons confrontés : l'optimisation d'une fonction définie sur une partie de \mathbb{R}^n et l'optimisation d'une forme ω incluse dans un borné Ω de \mathbb{R}^2 , les choix que nous avons été amenés à faire.

4.1 Principes de base des AG

Initialement proposés par J. Holland [22], les AG ont été développés entre autres par D. Goldberg [17] et Z. Michalewicz [29] et M. Schoenauer pour les problèmes d'optimisation de forme. Ils peuvent être considérés comme une application à l'optimisation numérique d'une version extrêmement simplifiée de la théorie darwinienne de l'évolution des populations. Version selon laquelle, les individus d'une population sont en compétition que ce soit pour la recherche de nourriture, d'un abri ou d'un partenaire pour se reproduire. Ce qui a pour conséquence que le patrimoine génétique de la descendance d'une population donnée provient principalement du mélange des gènes des meilleurs individus de cette population. Brassage qui peut conduire à de nouveaux individus encore mieux adaptés au milieu de vie, ce qui explique l'évolution des espèces. Les AG reprennent donc cette vision schématique des choses, c'est pourquoi le vocabulaire est en grande partie emprunté à la biologie.

Supposons que l'on veuille maximiser une fonctionnelle J sur un ensemble E . On appelle **individu** un point de E . Un individu est caractérisé par ses **gènes** qui sont les informations nécessaires à l'évaluation de la fonctionnelle J . Historiquement $E = \{0,1\}^N$ et un individu possède N gènes qui sont N bits 0 ou 1. Un autre cas classique est $E = [0,1]^N$ où un individu possède également N gènes mais qui sont alors N réels de $[0,1]$ codés en virgule flottante. L'adaptation d'un individu ou **performance** est en première approximation la valeur de la fonctionnelle J en ce point de E .

Le principe de base des AG est le suivant : étant donné une population P_i de p individus, on génère une population P_{i+1} qui compte toujours p individus mais dont on espère que certains seront meilleurs. Les différentes étapes de la génération d'une nouvelle population sont les

suivantes :

1. **Evaluation de la performance de chaque individu.** Cette étape nécessite notamment l'évaluation de la fonctionnelle J , p fois. C'est donc elle qui est la plus coûteuse en temps de calcul. Elle est totalement déterministe.
2. **Sélection des individus qui vont se reproduire.** Lors de cette étape, $p/2$ couples sont sélectionnés. Cette procédure est probabiliste et élitiste : plus un individu est performant plus il a de chance d'être sélectionné. Un individu peut bien sûr être sélectionné plusieurs fois.
3. **Croisements.** A partir des gènes de deux individus sélectionnés dits père et mère, on définit par différentes techniques de mélange deux nouveaux individus dits **fil**s ; ainsi la taille de la population P_{i+1} sera bien de p individus. Parfois, on introduit un paramètre P_{crois} et avec une probabilité P_{crois} , on effectue le croisement, tandis qu'avec une probabilité $1 - P_{crois}$, les fils sont les copies de leurs parents.
4. **Mutations.** Quelques gènes d'une petite partie des nouveaux individus sont modifiés. Cette modification peut être faite de façon aléatoire dans le but de diversifier le patrimoine génétique de la population et ainsi d'explorer l'ensemble E . Elle peut être également faite de façon déterministe, par exemple par quelques étapes d'un algorithme d'optimisation locale si la fonctionnelle J le permet, pour améliorer la performance de quelques individus.

La population initiale est en général obtenue en tirant au hasard des individus dans l'ensemble E , ou en prenant des individus performants si on est capable d'en exhiber. Lors de l'étape 1 d'évaluation de la fonctionnelle J , on enregistre le meilleur individu rencontré depuis le début du déroulement de l'algorithme, une autre technique consistant à recopier le meilleur individu d'une génération dans la suivante si la performance n'a pas été améliorée. En ce qui concerne le test de fin de la génération de nouvelles populations, classiquement l'algorithme s'arrête quand le meilleur individu rencontré n'a pas été modifié depuis un certain nombre de générations. Critère que l'on peut mettre en parallèle avec un critère utilisé dans les algorithmes d'optimisation classiques : norme du gradient inférieure à une certaine constante. Il est également possible d'évaluer pour chaque gène la variance sur tous les individus de la population et de s'arrêter quand ces variances sont trop petites, ce qui veut dire que la population a convergé. Il est enfin préférable de se fixer un nombre maximum de générations et une durée maximale de temps de calcul.

Les principaux avantages des AG sont les suivants : tout d'abord, l'algorithme est d'ordre 0 c'est-à-dire que seule l'évaluation de la fonctionnelle J intervient, il n'est pas nécessaire d'évaluer de dérivées ou de gradient. Les AG sont donc utilisables quand les algorithmes classiques avec dérivées ne le sont plus. Deuxièmement, ces AG sont robustes par rapport aux optimums locaux, ce sont des algorithmes d'optimisation globale et il n'est pas nécessaire d'avoir une idée de la position de l'optimum global *a priori*. Ils sont également très faciles à paralléliser, car la partie coûteuse en temps de calcul est l'évaluation du critère ce qui peut être fait indépendamment pour chaque individu. Enfin, citons que le canevas des AG est le même pour toute fonctionnelle et donc qu'un AG est adaptable à de nombreuses fonctionnelles sans modification majeure.

Les inconvénients des AG sont principalement, d'une part qu'ils possèdent de nombreux paramètres qui ne sont pas toujours évidents à ajuster. Un effort systématique sera fait dans ce travail pour en diminuer le nombre. D'autre part, le nombre d'évaluations de la fonctionnelle J est important ce qui entraîne un temps de calcul élevé si cette fonctionnelle est coûteuse.

4.2 Cas d'une fonctionnelle définie sur une partie de \mathbb{R}^N

Le premier cas que nous allons rencontrer est l'optimisation d'une fonctionnelle définie sur une partie bornée de \mathbb{R}^N ; nous présentons ici la structure des AG dans ce cas.

- Codage des individus : du fait de l'origine des AG, il existe une technique de codage d'un réel x compris entre a et b à l'aide de k gènes qui sont des bits $b_0, b_1, \dots, b_{k-1} \in \{0,1\}$ par :

$$x = a + \frac{b-a}{2^k} \sum_{i=0}^{k-1} b_i 2^i$$

Ce qui permet de tester 2^k positions équidistantes entre a et b . Une technique qui donne, en général, de bien meilleurs résultats est de coder le réel x par un seul gène qui est un réel codé en virgule flottante. Une des raisons est que, pour cette seconde technique, deux individus ayant un codage voisin sont proches (au sens de la distance dans \mathbb{R}^N), ce qui n'était pas forcément le cas dans la première technique de codage. Ainsi nous coderons un individu, c'est-à-dire un point de \mathbb{R}^N , par N gènes qui sont N réels en virgule flottante [29].

- Initialisation de la population : il s'agit, dans la plupart des cas de tirer au hasard des points de \mathbb{R}^N pour lesquels la fonctionnelle est bien définie.

- Performance d'un individu : comme nous l'avons vu la performance d'un individu sera, dans un premier temps et pour un problème de maximisation, la valeur de la fonctionnelle en ce point ; pour un problème de minimisation il s'agira bien sûr de l'opposé de la fonctionnelle en ce point. Ensuite, nous utiliserons la technique dit de partage ou *sharing* qui pénalise les individus qui ont trop de voisins proches dans un but d'assurer une diversité de la population et d'éviter la convergence prématurée en un optimum local. Dans le cas de la maximisation de la fonctionnelle J , la technique du partage se met en place de la façon suivante (cf. [23]) : pour deux individus I et I' , on définit la notion de voisinage par :

$$\Pi(I, I') = \left(1 - \left(\frac{d(I, I')}{\delta} \right)^\alpha \right)^+$$

où $d(I, I')$ est la distance entre deux individus, par exemple la norme euclidienne de \mathbb{R}^N , δ est un paramètre qui permet de fixer la taille du voisinage, il dépend donc du problème traité et doit être fixé par l'utilisateur et enfin α est un second paramètre qui permet de régler la pénalisation que l'on inflige aux individus ayant des voisins trop proches, plus α est grand plus la pénalisation est importante. La performance F' d'un individu est alors définie par :

$$F'(I) = \frac{F(I)}{\sum_{I' \in P} \Pi(I, I')}$$

- Sélection des individus : nous utiliserons deux techniques de sélection. La première est dite technique de la sélection par le rang. Il s'agit tout d'abord de trier les individus par ordre de performance décroissante, puis de sélectionner les individus en fonction de leurs rangs de façon probabiliste avec une loi du type :

$$P(\text{rang} = k) = q(1-q)^{k-1}, \quad q \in]0,1[$$

Le seconde technique est la sélection par tournois. On sélectionne tout d'abord n individus dans la population avec une loi uniforme, puis l'individu réellement sélectionné est le meilleur parmi ces n . Ou éventuellement le meilleur avec une probabilité $p \in]0.5, 1[$ et un autre avec une probabilité $1 - p$. La sélection des individus est une étape primordiale d'un AG : si la pression sélective est trop forte l'algorithme convergera vers un optimum local, si elle n'est pas assez forte la convergence de la population sera trop lente. L'espérance du tournoi binaire ou de la sélection par le rang sont égales mais la variance du tournoi binaire est plus grande [23]. Aucune de ces deux méthodes n'est unanimement reconnue meilleure que l'autre mais la sélection par tournoi a l'avantage de ne pas nécessiter de tri des individus.

- Croisements : étant donné un individu père dont les gènes sont p_1, p_2, \dots, p_N et un individu mère dont les gènes sont m_1, m_2, \dots, m_N , la procédure de croisement génère deux nouveaux individus f^1 et f^2 , dits fils dont le patrimoine génétique est obtenu à partir de celui des parents selon :

$$f_k^1 = \sum_{k=1}^N t_k p_k + (1 - t_k) m_k \quad \text{et} \quad f_k^2 = \sum_{k=1}^N t'_k p_k + (1 - t'_k) m_k$$

où les réels t_k et t'_k sont choisis selon une loi uniforme sur $[0, 1]$, auquel cas les deux fils sont dans le parallélépipède dont deux sommets opposés sont le père et la mère. Il est également possible de choisir les réels t_k et t'_k dans un intervalle légèrement plus grand, typiquement $[-0.25, 1.25]$ de façon à retarder encore la convergence de la population et ainsi à mieux couvrir l'espace E . Ceci évite en particulier à la population de rester dans l'enveloppe convexe de la population initiale (si on fait abstraction des mutations). Il est à noter que si le père et la mère sont le même individu (ce qui n'est pas exclu!), les fils sont deux copies à l'identique de leurs parents. Enfin, les ensemble de définition des fonctionnelles que nous rencontrerons seront convexes donc nous n'aurons pas de problème dans le cas $t \in [0, 1]$, mais il faut faire attention de ne pas générer, lors des croisements, des individus pour lesquels il n'est pas possible d'évaluer la fonctionnelle, phénomène qui peut toujours se produire si $t \in [-0.25, 1.25]$. Dans ce cas, une politique peut être de retirer les réels t_k et t'_k jusqu'à ce que les fils permettent bien d'évaluer la fonctionnelle. Une deuxième solution est de projeter sur la frontière de E , les fils qui étaient hors de E dans un premier temps.

- Mutations : nous envisagerons deux types de mutations dont les buts sont totalement différents. Le premier sert à diversifier la population et consiste à choisir aléatoirement et à chaque nouvelle génération, quelques individus, puis pour chacun de ces individus de choisir quelques gènes et de leur donner une nouvelle valeur aléatoire. Cette procédure permet d'explorer l'espace de recherche, par ailleurs la modification de quelques gènes uniquement augmente, en général, les chances d'obtenir de bons individus à partir des individus existants. La seconde mutation a pour but d'améliorer quelques individus et repose sur des algorithmes d'optimisation locale classiques, éventuellement avec dérivées si la fonctionnelle le permet. On sélectionne donc quelques individus dans la population puis on remplace ces individus par les individus obtenus après **quelques** itérations de l'algorithme déterministe d'optimisation locale. La raison pour laquelle il ne faut pas aller jusqu'au bout de l'optimisation locale est qu'on ferait ainsi intervenir des individus artificiellement performants par rapport au reste de la population ce qui aurait pour conséquence que celle-ci converge prématurément vers un optimum local. Il s'agit seulement de regarder si un individu est prometteur et de l'améliorer modérément.

4.3 Cas de l'optimisation de forme

La seconde famille de problèmes à laquelle nous allons être confrontés est l'optimisation de forme en dimension 2. Plus précisément soit Ω un borné de \mathbb{R}^2 et un maillage de Ω en k cellules C_i qui peuvent être des triangles mais aussi des quadrangles ou n'importe quelles cellules de base, nous souhaitons maximiser une fonctionnelle J que nous savons calculer sur le maillage de Ω c'est à dire pour des formes ω comme ceci :

$$\omega = \bigcup_{i \in \mathcal{E}} C_i \quad \text{où} \quad \mathcal{E} \subset \{1, 2, \dots, k\} \quad (4.1)$$

De plus, il y a aussi, en général, une contrainte de volume $|\omega| \leq c$.

La forme ω est donc caractérisée par la suite de 0 ou 1 : b_1, b_2, \dots, b_k définie par $b_i = 1$ si $C_i \subset \omega$, 0 sinon. La fonctionnelle est ainsi définie sur un ensemble de cardinal fini mais le nombre de ces points (2^k sans la contrainte de volume, de l'ordre de $C_k^{k|\omega|/|\Omega|}$ avec) est beaucoup trop important et interdit d'évaluer la fonctionnelle en chacun de ces points ; l'optimisation se fait donc à l'aide des AG.

4.3.1 Tableaux de bits

Un cas très particulier est le cas où Ω est un carré maillé à l'aide de carrés égaux, il s'agit du premier cas d'optimisation de formes par AG étudié et du fait de la nature des fonctionnelles que nous étudions, c'est un cas que nous rencontrerons. Dans ce cas, les différentes étapes de l'AG sont les suivantes :

- Codage des individus : il est plus courant de coder la forme ω par un tableau de bits $(b_{i,j})$, $1 \leq i, j \leq n$ plutôt que par la suite b_1, b_2, \dots, b_k comme précédemment. Le codage est donc réalisé à l'aide de la matrice de 0 et de 1 introduite lors de l'étude théorique de la quantité géométrique (cf. Chap. 3, section 3.3.2).
- Initialisation de la population : il s'agit de choisir les bits de chaque individu au hasard avec la loi de probabilité $P(b=0)=1-c$ et $P(b=1)=c$, ce qui permet d'avoir une population initiale de chaque côté de l'hyperplan $|\omega| = c$.
- Performance d'un individu : la performance d'un individu reste bien sûr évaluée à partir de la valeur de la fonctionnelle. Mais, c'est à l'aide de la performance qu'on intègre la contrainte de volume : $|\omega| \leq c$. Pour un problème de maximisation, on pénalise un individu qui ne satisfait pas la contrainte de volume à l'aide de la fonction performance suivante [18] :

$$J'(I) = J(I) - \alpha(|I| - c)^+$$

où $|I|$ est le volume du domaine ω codé par l'individu I et x^+ est la partie positive du réel x . Le paramètre de pénalisation α qui joue un rôle important dans l'évolution de la population est choisi de façon **adaptative**. Plus précisément, si Θ_{OK}^i est la proportion d'individus de la population P_i qui respectent la contrainte de volume, le paramètre de pénalisation α est modifié à chaque nouvelle génération suivant la règle :

$$\alpha_{i+1} = \begin{cases} \beta \alpha_i & \text{si } \Theta_{OK}^i < \Theta_{inf} \\ \alpha_i / \beta & \text{si } \Theta_{OK}^i > \Theta_{sup} \\ \alpha_i & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec $\beta > 1$, en général : $\beta = 1.1$, $\Theta_{inf} = 0.4$ et $\Theta_{sup} = 0.8$. C'est-à-dire que l'on souhaite au minimum 40% des individus qui satisfassent la contrainte et 20% des individus qui la violent, la raison est que les contraintes de volumes sont souvent saturées (ce sera le cas dans les applications de cette thèse), c'est-à-dire que les meilleurs domaines qui satisfont $|\omega| \leq c$ sont parmi ceux qui vérifient $|\omega| = c$ et pour atteindre de tels domaines il est nécessaire d'avoir des individus de part et d'autre de l'hyperplan $|I| = c$. La pénalisation adaptative rend l'algorithme peu sensible aux paramètres et notamment à α_0 , qui doit être choisi en fonction des valeurs prises par la fonctionnelle J pour les points de la population initiale.

Si l'on souhaite, de plus, mettre en place une technique de partage, une distance $D(I, I')$ entre deux individus couramment utilisée est la distance de Hamming c'est-à-dire le nombre de bits qui diffèrent chez les individus I et I' .

- Sélection des individus : elle s'effectue toujours selon les méthodes classiques de tournois ou de sélection par le rang.
- Croisements : ils sont spécifiques à cette représentation. Historiquement, dans l'approche de Holland et Goldberg, les individus sont codés par une suite de n bits et le croisement se fait comme ceci : on tire au hasard un entier k compris entre 1 et $n - 1$, puis le premier fils s'obtient en juxtaposant les k premiers gènes du père et les $n - k$ derniers gènes de la mère ; tandis que le second fils s'obtient en échangeant les rôles du père et de la mère dans l'opération précédente, par exemple si $n = 8$ et $k = 5$:

$$\begin{array}{ccc} P = 01010|001 & M = 11001|111 & \\ & \Downarrow & \\ F_1 = 01010|111 & F_2 = 11001|001 & \end{array}$$

Mais ces croisements se révèlent inefficaces pour les problèmes en dimension 2 car ils ne permettent pas une exploration suffisante de l'espace E [23], nous avons donc retenu un autre type de croisements plus performant dit croisement 3 blocs. Il s'agit de tirer au hasard deux numéros de ligne n_1 et n_2 tels que : $1 < n_1 \leq n_2 < n$ et deux numéros de colonne m_1 et m_2 tels que : $1 < m_1 \leq m_2 < n$ qui définissent 9 blocs sur une matrice $n \times n$. On choisit alors au hasard 3 blocs parmi ces 9, qui sont les blocs d'échange. Les 3 blocs d'échange du premier fils sont ceux du père tandis que ses 6 autres blocs sont ceux de la mère. Le second fils s'obtient en échangeant les rôles du père et de la mère dans l'opération précédente. La figure 4.1 présente un exemple de croisements où tous les gènes du père sont égaux à 1 (en gris clair) et tous les gènes de la mère sont égaux à 0 (en blanc).

- Mutations : Le cardinal fini de l'espace E interdit les algorithmes d'optimisation locale avec dérivées. Les mutations sont donc uniquement des mutations diversifiantes : on sélectionne au hasard quelques individus dans la population puis quelques gènes de ces individus qu'on modifie. C'est à dire, qu'on leur donne la valeur 1 s'ils valaient 0 et réciproquement. La probabilité de mutation d'un gène évolue et est d'autant plus grande que ce gène est homogène dans la population P_i .

Le premier inconvénient des AG où la population est codée par tableaux de bits semble être qu'ils sont limités aux maillages réguliers d'un carré mais, comme nous allons le voir, il est facile de les généraliser aux domaines et maillages quelconques. Cependant, un problème plus délicat est que le nombre de gènes des individus augmente avec la finesse du maillage et donc avec la précision avec laquelle la fonctionnelle est évaluée. Or la taille de la population et le nombre de générations nécessaires sont des fonctions croissantes du nombre de gènes par individus (cf.

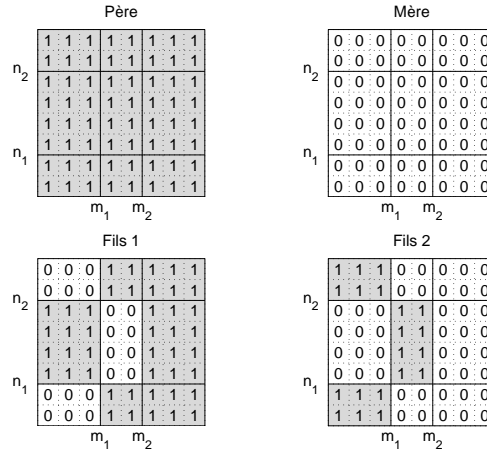


FIG. 4.1 – Exemple de croisement 3 blocs

[18], section 2.4). Ainsi, plus la fonctionnelle est évaluée finement plus le nombre de fois où cette fonctionnelle doit être évaluée est important, ce qui est un désavantage majeur.

4.3.2 Représentation non structurée

Pour pallier à ce problème, nous testerons un autre type d'AG. Nous considérons toujours un maillage de Ω en k cellules C_i sur lequel sera évaluée la fonctionnelle J .

- Codage des individus : un individu est maintenant codé par n points de Ω : $(X_p)_{1 \leq p \leq n}$ que l'on appelle les **sites de Voronoi** et n **labels** $(l_p)_{1 \leq p \leq n}$, c'est-à-dire n bits 0 ou 1 associés aux points X_p . Les gènes d'un individu sont donc n triplets formés d'un réel en virgule flottante pour l'abscisse du point X_p , d'un second réel en virgule flottante pour l'ordonnée du point X_p et d'un bit pour le label l_p .

A chaque site de Voronoi, on associe une **cellule de Voronoi** qui est l'ensemble des points du plan qui sont plus près du point X_{p_0} que des points X_p , $p \neq p_0$:

$$V_p = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, X_{p_0}) \leq d(x, X_p), 1 \leq p \leq n, p \neq p_0\}$$

Les cellules de Voronoi bornées sont des polygones. Enfin, le **diagramme de Voronoi** est la partition du plan (et donc de Ω) en cellules de Voronoi (cf. [30] pour plus de détails sur les diagrammes de Voronoi).

Les gènes d'un individu forment son **génotype**. Le décodage sur le maillage (C_i) de Ω s'appelle le **phénotype**, il s'obtient de la manière suivante : pour chaque cellule C_i , on recherche à quelle cellule de Voronoi V_k le centre de gravité de C_i appartient, si le label correspondant $l_k = 1$ alors $C_i \subset \omega$, sinon ($l_k = 0$) $C_i \subset \omega^c$. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de calculer explicitement les cellules de Voronoi : pour chaque cellule du maillage, il suffit de comparer les distance de son centre de gravité aux différents sites de Voronoi. Le génotype d'un individu code donc bien un domaine de la forme (4.1) et le nombre de gènes d'un individu est indépendant du nombre de cellules du maillage de Ω .

La figure 4.2 présente pour un domaine Ω obtenu en maillant un cercle avec des triangles un exemple de domaine ω codé par 7 sites de Voronoi.

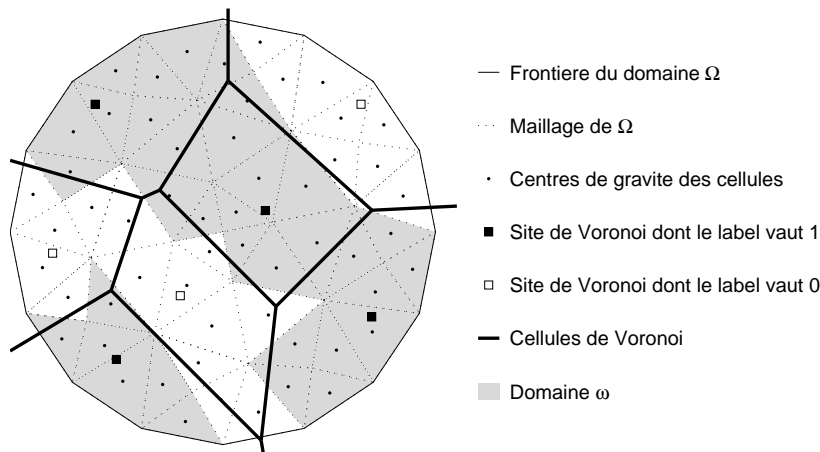


FIG. 4.2 – Codage d'un domaine ω à l'aide de 7 sites de Voronoi

- Initialisation de la population : il s'agit, pour chaque individu, du tirage du nombre de site de Voronoi (entre 1 et un nombre maximum de site donné par l'utilisateur), puis du tirage au hasard dans Ω de chaque site de Voronoi et du label associé selon la loi de probabilité : $P(l=0)=1-c$ et $P(l=1)=c$.

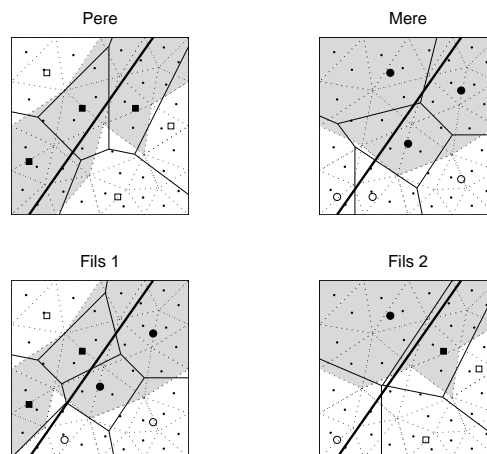
- Performance d'un individu : elle est évaluée en fonction de son phénotype. Comme dans le cas des tableaux de bits, elle prend en compte la valeur de la fonctionnelle et une pénalisation adaptative en cas de violation de la contrainte de volume. Il est également possible d'ajouter une pénalisation si l'individu a beaucoup de voisins proches, la distance entre deux individus utilisée est alors la distance de Hamming de leurs phénotypes.

- Sélection des individus : cette technique est inchangée par rapport au cas des tableaux de bits.

- Croisements : la première étape de l'opérateur de croisement est le tirage aléatoire d'une droite qui partage Ω en deux (et le plan en deux demi-plans H_1 et H_2). Puis on sépare les sites de Voronoi du père en deux familles : les sites P_1 à P_i qui appartiennent au demi-plan H_1 et les sites P_{i+1} à P_p qui sont dans le demi-plan H_2 . On fait de même avec les sites de la mère : les sites M_1 à M_j sont dans le demi-plan H_1 , les sites M_{j+1} à M_m sont dans le demi-plan H_2 . Les sites du premier fils sont alors les sites P_1 à P_i et M_{j+1} à M_m , tandis que les sites du second fils sont les sites P_{i+1} à P_p et M_1 à M_j et chaque site conserve son label pendant l'opération de croisement. La figure 4.3 présente un exemple de croisement, la légende est la même que celle de la figure 4.2 à ceci près que les sites du père ou hérités du père sont représentés par des carrés et ceux de la mère ou hérités de la mère par des disques. La droite en gras est la droite de partage.

Si jamais un des deux fils obtenait de cette façon plus de sites de Voronoi que la limite fixée par l'utilisateur, on élimine des sites au hasard jusqu'à ce que le nombre de sites soit la limite supérieure autorisée. Dans le cas où un fils n'obtiendrait aucun site, on considère que le croisement n'a pas fonctionné et on garde le père et la mère.

- Mutations : elles sont au nombre de quatre. La première consiste à faire subir une déviation log-normale à quelques sites de Voronoi dans le but de modifier légèrement la frontière du domaine ω . La deuxième consiste à changer le label d'un site de Voronoi choisi aléatoirement. Enfin les deux dernières suppriment ou au contraire ajoutent un site de Voronoi à un individu sélectionné

FIG. 4.3 – *Exemple de croisements avec droite de partage*

de façon aléatoire.

Il est à noter que les AG avec représentations non structurées permettent d'optimiser des formes en 3 dimensions [18]; les cellules de Voronoi bornées sont alors des polyèdres.

Chapitre 5

Optimisation numérique de J dans le cas monodimensionnel

Nous abordons avec ce chapitre 5 le problème de l'optimisation numérique du critère J , dont l'étude théorique a été menée au chapitre 2. Nous nous consacrons, pour l'instant, au cas monodimensionnel, c'est-à-dire au cas $\Omega = (0,1)$. Les notations seront donc celles de la section 2.2 du chapitre 2, rappelons notamment que :

$$J(\omega) = \min_{n \in \mathbb{N}^*} I_n(\omega) \quad \text{avec} \quad I_n(\omega) = 2 \int_0^1 \chi_\omega(x) \sin^2 n\pi x dx$$

et

$$J'(\omega) = |\omega| - J(\omega) = \max_{n \in \mathbb{N}^*} I'_n(\omega) \quad \text{avec} \quad I'_n(\omega) = \int_0^1 \chi_\omega(x) \cos 2n\pi x dx$$

Il s'agit de maximiser J (ce qui revient à minimiser J') parmi les ω inclus dans $[0,1]$, de longueur l fixée et réunion d'au plus N intervalles. Nous étudierons le cas $N = 1$ dans la première partie de ce chapitre puis le cas $N = 2$ dans la seconde.

5.1 Cas d'un intervalle

Cette section est à mettre plus particulièrement en parallèle avec la section 2.2.5 du chapitre 2 où est présentée l'étude théorique du cas d'un intervalle. En particulier dans ce cas, le contrôle ω de longueur l est caractérisé par la position α du centre de l'intervalle: $\omega = [\alpha - l/2, \alpha + l/2]$, aussi nous noterons à nouveau $J(\alpha, l)$ plutôt que $J(\omega)$ (et de même pour J' , I_n , et I'_n) et :

$$I'_n(\alpha, l) = \int_{\alpha-l/2}^{\alpha+l/2} \cos 2n\pi x dx = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi l \cos 2n\pi\alpha$$

$\alpha^*(l)$ désignera toujours une position du contrôle telle que :

$$J(\alpha^*(l), l) = \max_{\alpha \in [l/2, 1/2]} J(\alpha, l) = J_1(l)$$

5.1.1 Calcul de $J(\alpha, l)$

Le calcul de $J(\alpha, l)$ ou de $J'(\alpha, l)$ revient au calcul de la borne supérieure de la suite $(I'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Ceci est rendu possible par la propriété :

$$|I'_n(\alpha, l)| \leq \frac{1}{n\pi}.$$

L'algorithme de calcul de $J'(\alpha, l)$ est donc le suivant : on se fixe une limite $Nmax$ et une précision eps puis,

1. $i \leftarrow 1, s \leftarrow 0$
2. Tant que $i \leq Nmax$ et $\pi i s \leq 1$:
 - $t \leftarrow \frac{1}{i\pi} \sin i\pi l \cos 2i\pi\alpha$
 - Si $t < s - eps$
 - $s \leftarrow t$
 - $n1 \leftarrow i$
 - Sinon si $t < s + eps$
 - $n2 \leftarrow i$
 - $i \leftarrow i + 1$

3. si $n = Nmax$, alors $0 \leq J'(\alpha, l) \leq s$; sinon $J'(\alpha, l) = s$

Les boucles infinies correspondent au cas $J'(\alpha, l) = 0$ i.e. $J(\alpha, l) = l$ que l'on connaît, il s'agit ici des cas : $l = 0, l = 1$ ou $l = 1/2$ et $\alpha = 1/4$ ou $\alpha = 3/4$. Il est donc théoriquement possible de calculer exactement $J(\alpha, l)$ même si le nombre d'évaluations de fonctions $I'_n(\alpha, l)$ peut être très grand.

Nous avons remarqué que la fonction J était symétrique par rapport à $1/2$: $J(1 - \alpha, l) = J(\alpha, l)$, on restreint donc l'étude de la minimisation de $J'(\cdot, l)$ au segment $[l/2, 1/2]$. La figure 5.1 présente les courbes des fonctions $\alpha \mapsto \frac{1}{n\pi} \sin n\pi l \cos 2n\pi\alpha$ pour $l = 1/4, n$ variant de 1 à 6 et $\alpha \in [l/2, 1/2]$ en pointillés et la courbe de la fonction $\alpha \mapsto J'(\alpha, 1/4)$ en trait continu. En effet, le plus grand indice n tel qu'il existe α dans $[l/2, 1/2]$ avec $J'(\alpha, 1/4) = I'_n(\alpha, 1/4)$ est 6.

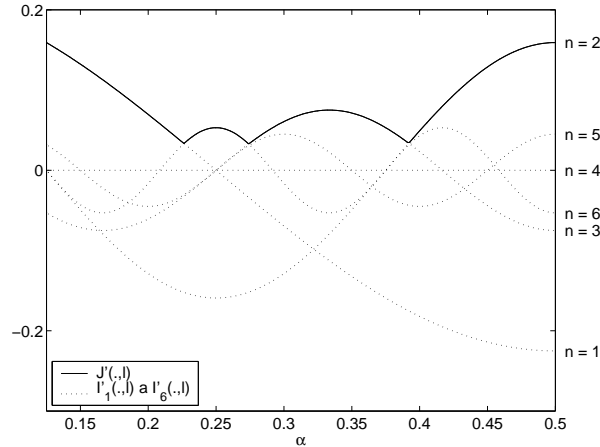
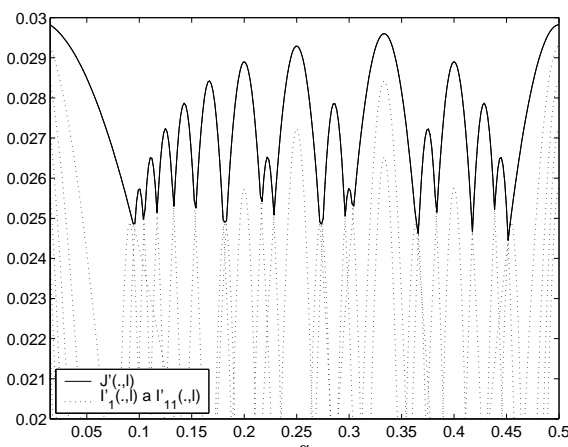


FIG. 5.1 – Graphe de $\alpha \mapsto J'(\alpha, 1/4)$

On retrouve bien une subdivision $\cup_{p=1}^k [a_p, b_p]$ de $[l/2, 1/2]$ telle que sur chaque segment $[a_p, b_p]$, $J'(\alpha, l) = I'_{n_p}(\alpha, l)$. Dans le cas $l = 1/4$ (figure 5.1), $k = 4$ et $\{n_1, n_2, n_3, n_4\} = \{1, 6, 3, 2\}$; cependant le graphe de $J'(\cdot, l)$ n'a pas toujours une allure aussi simple, par exemple la figure 5.2 présente l'allure de ce graphe dans le cas $l = 0.03$, pour lequel les indices des fonctions I'_n à considérer vont jusqu'à 11.

Compte-tenu du fait que $J'(\cdot, l)$ n'est pas dérivable en un minimum local, mais surtout parce que les minima locaux peuvent être très nombreux, l'optimisation globale de $J'(\cdot, l)$ ne peut être faite par un algorithme local et sera effectuée à l'aide d'un algorithme génétique (AG).

FIG. 5.2 – Graphe de $\alpha \mapsto J'(\alpha, 0.03)$

5.1.2 Mise en place d'un AG

Le cadre général de l'optimisation d'une fonction sur une partie bornée de \mathbb{R}^n a été présenté à la section 4.2 du chapitre 4. Nous reprenons rapidement les différents points, qui ont été présentés dans un cadre général, dans le cas particulier de la minimisation de $J'(\cdot, l)$ sur le segment $[l/2, 1/2]$:

- Codage d'un individu : chaque individu possède un unique gène qui est un réel de $[l/2, 1/2]$ codé en virgule flottante.
- Initialisation de la population : n'ayant pas d'idée a priori d'individus performants, les individus de la population initiale sont des points de $[l/2, 1/2]$ choisis selon une loi uniforme. La taille de la population sera prise entre 50 individus et 100 individus pour les cas les plus raides.
- Performance d'un individu : nous nous contenterons de la valeur de la fonctionnelle $J'(\alpha, l)$ sachant que, comme il s'agit d'un problème de minimisation, plus cette valeur est petite plus l'individu est performant.
- Sélection des individus : nous avons retenu le tournoi binaire, nous choisissons deux individus de la population selon une loi uniforme et nous gardons le meilleur pour le croisement.
- Croisement : étant donné deux individus P et M , les deux fils sont obtenus par tirage, selon une loi uniforme, de deux réels t_1 et t_2 dans $[-0.25, 1.25]$, avec :

$$F_1 = t_1 P + (1 - t_1) M \quad \text{et} \quad F_2 = t_2 P + (1 - t_2) M$$

Les réels t_1 ou t_2 sont retirés jusqu'à ce que les gènes des deux fils appartiennent bien à l'intervalle $[l/2, 1/2]$.

- Mutations : nous utilisons deux types de mutations. La première, appliquée avec une probabilité de 10%, sert à diversifier la population et consiste à remplacer un individu par un point de $[l/2, 1/2]$ choisi au hasard. La seconde, appliquée avec une probabilité de 5%, a pour but de légèrement améliorer un individu et repose sur la proposition 2.2.2. L'idée est, partant d'un point α_0 tel que $J'(\alpha_0, l) = I_{n_1}(\alpha_0, l)$, de modifier α_0 en α en sorte de diminuer $I_{n_1}(\alpha_0, l)$ jusqu'à ce qu'il existe un entier n_2 différent de n_1 tel que $J'(\alpha, l) = I_{n_2}(\alpha, l)$. Pour cela, nous disposons d'un pas h et nous testons les valeurs $\alpha = \alpha_0 - ih \operatorname{signe}(\frac{\partial I_{n_1}}{\partial \alpha}(\alpha_0, l))$, pour quelques valeurs de i , $i = 1, 2, \dots$. Si, suite à ces tests, un entier n_2 a été trouvé, nous effectuons quelques itérations de la méthode de Newton pour la résolution de l'équation, d'inconnue α , $I_{n_1}(\alpha, l) = I_{n_2}(\alpha, l)$, ce qui nous donne α_1 la nouvelle valeur du gène de l'individu et enfin nous évaluons $J'(\alpha_1, l)$. Le pas h est défini de façon adaptative : si $J'(\alpha_1, l) > J'(\alpha_0, l)$ la mutation est considérée comme un échec,

et si le taux d'échecs est trop important (supérieur à 25%) le pas h est divisé par 2, tandis que si le taux d'échecs est trop bas (inférieur à 5%) le pas h est doublé.

- Test d'arrêt : la génération de nouvelles populations s'arrête quand l'une de ces trois conditions est vérifiée : le critère n'a pas été amélioré depuis 15 générations, ou 100 générations ont déjà été générées ou enfin l'écart type de la suite des gènes des individus est trop petit, ce qui veut dire que la population a déjà convergé.

5.1.3 Résultats

L'algorithme ainsi défini est parfois dit hybride parce qu'il comporte une partie probabiliste et une partie déterministe (les mutations) ce qui le rend robuste, dans le sens où quand il est lancé plusieurs fois avec la même valeur de la longueur l il donne toujours le même minimum global. La figure 5.3 présente le graphe de J'_1 en fonction de l , on retrouve bien les cas d'égalités $J'_1(l) = 0$ prévus par la théorie.

La figure 5.4 présente le graphe de J_1 en fonction de l , valeur optimale de $J(l)$ pour un contrôle qui est constitué d'un seul intervalle de longueur l , bien évidemment on retrouve à nouveau les cas d'égalités $J_1(l) = l$ prévus par la théorie. Pour les plus grandes valeurs de l , le terme $J'_1(l)$ qui peut être considéré comme une correction par rapport à l de $J_1(l) : J_1(l) = l - J'_1(l)$ devient négligeable.

Enfin, la figure 5.5 présente le graphe de α^* centre de l'intervalle de longueur l optimal. Les résultats obtenus ne sont pas intuitifs, en particulier sauf dans les cas que l'on connaissait déjà par l'étude théorique ($l = 1/2$ et $l = 1$), l'intervalle optimal n'est jamais au bord ni au centre de Ω .

Nous observons, sur la figure 5.3, des points anguleux de J'_1 et d'autre part, le graphe de α^* de la figure 5.5 présente des discontinuités. Ces irrégularités coïncident : en effet en un point l régulier d'après la proposition 2.2.4, $\alpha^*(l)$ est unique et le maximum des $I'_n(\alpha^*(l), l)$ est atteint pour exactement deux entiers n_1 et n_2 distincts. Ainsi les fonctions J'_1 et α^* sont localement données par les équations :

$$I'_{n_1}(\alpha^*(l), l) = I'_{n_2}(\alpha^*(l), l) = J'_1(l).$$

Elles sont donc C^∞ au voisinage des points réguliers.

En revanche, il existe des points l_0 pour lesquels le minimum de $J'(\cdot, l_0)$ est atteint plusieurs fois, comme par exemple sur la figure 5.6.a où $l_0 \simeq 0.1308$, dans ce cas le minimum de $J'(\cdot, l_0)$ est atteint en deux points distincts α_1 et α_2 . Pour une longueur l légèrement plus petite que l_0 , le minimum est atteint en un seul point proche de α_1 (cf. figure 5.6.a), et J'_1 et α^* sont donnés par :

$$I'_1(\alpha^*(l), l) = I'_5(\alpha^*(l), l) = J'_1(l).$$

Puis pour $l = l_0$, le minimum de $J'(\cdot, l)$ est donc atteint en deux points, l_0 est donc caractérisée par les équations :

$$I'_1(\alpha_1, l_0) = I'_5(\alpha_1, l_0) = I'_4(\alpha_2, l_0) = I'_5(\alpha_2, l_0).$$

Enfin pour une longueur l légèrement plus grande que l_0 , le minimum est atteint en un seul point proche de α_2 (cf. figure 5.6.a), et J'_1 et α^* sont donnés par :

$$I'_4(\alpha^*(l), l) = I'_5(\alpha^*(l), l) = J'_1(l).$$

Il y a donc, en l_0 , un saut de α^* (de α_1 à α_2) et de n_1 (on n'observe pas ici de saut de n_2 mais ce phénomène peut tout à fait se produire) et un point anguleux de J'_1 et J_1 (cf. figure 5.6).

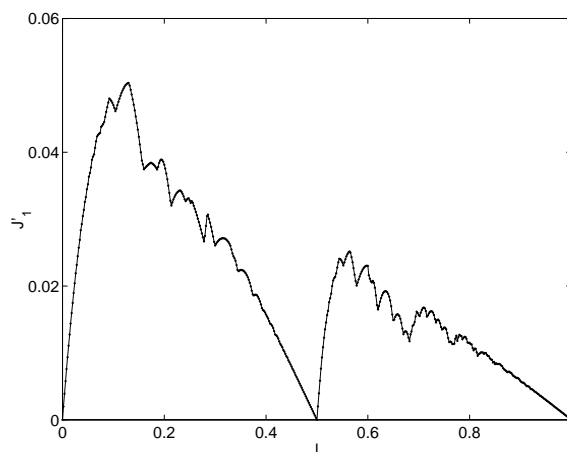


FIG. 5.3 – Graphe de $l \mapsto J'_1(l)$

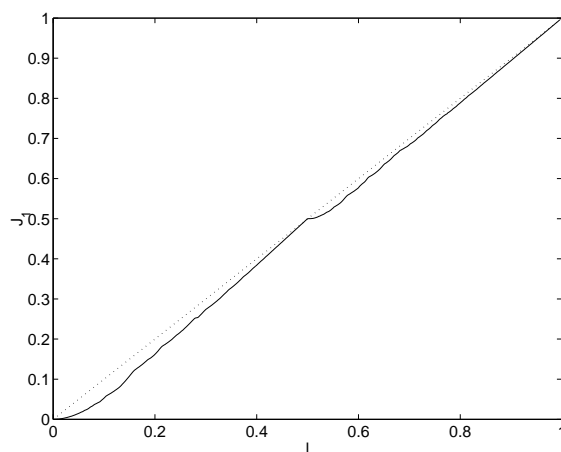


FIG. 5.4 – Graphe de $l \mapsto J_1(l)$ et de la première bissectrice (en pointillés)

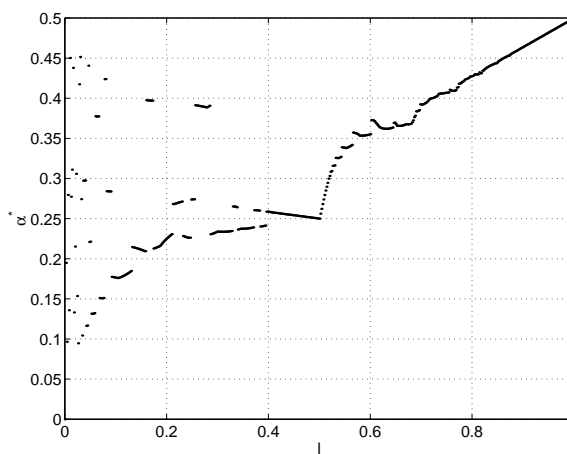


FIG. 5.5 – Graphe de $l \mapsto \alpha^*(l)$

Numériquement on retrouve bien les dérivées à droite en $1/2$, et à gauche en $1/2$ et 1 de J_1 et α^* et la dérivée à droite en 0^+ de J_1 établies à la proposition 2.2.5, notamment les dérivées horizontales de J_1 en 0^+ et $(1/2)^+$. Il est également à noter que $n_1(l) \rightarrow \infty$ en 0^+ , $(1/2)^-$ et 1^- et que $n_2(l) \rightarrow \infty$ en 0^+ , $(1/2)^-$, $(1/2)^+$ et 1^- .

Enfin, la figure 5.7 montre l'importance de l'optimisation de la position du contrôle dans le cas d'un intervalle en particulier pour les petites longueurs de contrôle. En effet les deux courbes sont les rapports $J(l/2, l)/J_1(l)$ et $J(1/2, l)/J_1(l)$ ce qui donne une idée du rapport entre le taux de décroissance pour l'intervalle de contrôle au bord ou au centre et la taux de décroissance optimal. Approximativement, pour une longueur de contrôle inférieur à 0.3, le taux de décroissance optimal est plus du double du taux de décroissance avec contrôle au bord ou au centre.

5.2 Cas de deux intervalles

Nous considérons maintenant le cas où le contrôle ω est la réunion de deux intervalles :

$$\omega = [\alpha_1 - l_1/2, \alpha_1 + l_1/2] \cup [\alpha_2 - l_2/2, \alpha_2 + l_2/2]$$

Compte-tenu de la contrainte de longueur qui s'écrit : $l_1 + l_2 = l$, le contrôle ω est caractérisé par les trois variables α_1 , α_2 et l_1 et nous noterons $J(\alpha_1, \alpha_2, l_1)$ plutôt que $J(\omega)$ (et de même pour J' , I_n et I'_n) ainsi :

$$I'_n(\alpha_1, \alpha_2, l_1) = \int_{\omega} \cos 2n\pi x dx = \frac{1}{n\pi} (\sin n\pi l_1 \cos 2n\pi \alpha_1 + \sin n\pi(l - l_1) \cos 2n\pi \alpha_2)$$

5.2.1 Calcul de $J(\alpha_1, \alpha_2, l_1)$

Le calcul de $J(\alpha_1, \alpha_2, l_1)$ repose sur le même algorithme que dans le cas d'un intervalle puisqu'on a maintenant l'inégalité :

$$|I'_n(\alpha_1, \alpha_2, l_1)| \leq \frac{2}{n\pi}$$

Cependant, on stocke jusqu'à 4 entiers : n_1, n_2, n_3 et n_4 pour lesquels le critère est atteint.

En revanche le domaine de variation des variables est plus complexe, les inégalités qui doivent être vérifiées sont les suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha_1 - l_1/2 \\ \alpha_1 + l_1/2 &\leq \alpha_2 - l_2/2 \\ \alpha_2 + l_2/2 &\leq 1 \end{aligned}$$

Par ailleurs, du fait de la symétrie $J(1 - \omega) = J(\omega)$, on impose $l_1 \leq l_2$. Ainsi, l_1 peut varier entre 0 et $l/2$ et à l_1 fixée, α_1 et α_2 peuvent varier dans le triangle rectangle isocèle (la longueur des cotés adjacents est $1 - l$) dont les sommets sont les points de coordonnées :

$$(l_1/2, (l - l_1)/2), (l_1/2, 1 - (l - l_1)/2) \text{ et } (1 - l + l_1/2, 1 - (l - l_1)/2)$$

Au final, le triplet $(\alpha_1, \alpha_2, l_1)$ varie dans un prisme dont la base est un triangle isocèle rectangle et dont les sommets ont comme coordonnées :

$$(0, l/2, 0), (0, 1 - l/2, 0), (1 - l, 1 - l/2, 0), (l/2, l, l/2), (l/2, 1, l/2), (1 - l/2, 1, l/2)$$

Ce domaine est représenté sur la figure 5.8 pour $l = 0.6$.

La figure 5.9 présente pour des longueurs l et l_1 fixées l'influence de la position des intervalles. Le problème qui nous intéresse revient donc à chercher le plus grand pic de la fonction représentée, à ceci près qu'ici la longueur l_1 est fixée alors que dans le problème initial c'est également un variable. En tout cas, cette surface montre que la fonction J' possède de nombreux optimums locaux et que la recherche de l'optimum global est un problème difficile dans ce cas.

5.2.2 Mise en place d'un AG

L'algorithme génétique est semblable au cas d'un intervalle mais est plus complexe du fait du nombre de variables qui est maintenant de trois et de leur domaine de variation qui est non trivial. En voici les principaux points :

- Codage d'un individu : chaque individu possède trois gènes qui sont trois réels codés en virgule flottante.
- Initialisation de la population : La population initiale est constituée de points du prisme de variation choisis selon une loi uniforme ; c'est-à-dire que l'on commence par choisir le réel l_1 selon une loi uniforme dans le segment $[0, l/2]$, ce qui détermine un triangle isocèle rectangle dans lequel α_1 et α_2 peuvent varier. Ils sont alors choisis en tirant selon une loi uniforme α_1 dans $[l_1/2, 1 - l + l_1/2]$ et α_2 dans $[(l - l_1)/2, 1 - (l - l_1)/2]$ jusqu'à ce que le couple (α_1, α_2) appartiennent au bon triangle isocèle. La taille de la population sera prise entre 100 individus et 200 individus pour les cas les plus raides.
- Performance d'un individu : nous nous contenterons de la valeur de la fonctionnelle $J'(\alpha, l)$ sachant que, comme il s'agit d'un problème de minimisation, plus cette valeur est petite plus l'individu est performant.
- Sélection des individus : nous avons à nouveau retenu le tournoi binaire, nous choisissons deux individus de la population selon une loi uniforme et nous gardons le meilleur pour le croisement.
- Croisement : étant donné deux individus $P = (P^1, P^2, P^3)$ et $M = (M^1, M^2, M^3)$, les deux fils sont obtenus par tirage, selon une loi uniforme, de six réels t_i^j dans $[-0.25, 1.25]$, avec :

$$F_1 = (t_1^1 P^1 + (1 - t_1^1) M^1, t_1^2 P^2 + (1 - t_1^2) M^2, t_1^3 P^3 + (1 - t_1^3) M^3)$$

et

$$F_2 = (t_2^1 P^1 + (1 - t_2^1) M^1, t_2^2 P^2 + (1 - t_2^2) M^2, t_2^3 P^3 + (1 - t_2^3) M^3)$$

Les réels t_i^j sont retirés jusqu'à ce que tous les gènes des deux fils appartiennent bien au prisme de variation.

- Mutations : nous utilisons à nouveau deux types de mutations. La première sert à diversifier la population et consiste à remplacer un individu par un point du prisme de variation choisi au hasard. La seconde a toujours pour but de légèrement améliorer un individu et repose sur la remarque 2.2.3, selon laquelle, dans le cas de deux intervalles, il est probable que pour un minimum local le critère soit atteint quatre fois :

$\exists n_1, n_2, n_3, n_4$ deux à deux distincts tels que :

$$J'(\alpha_1, \alpha_2, l_1) = I'_{n_1}(\alpha_1, \alpha_2, l_1) = I'_{n_2}(\alpha_1, \alpha_2, l_1) = I'_{n_3}(\alpha_1, \alpha_2, l_1) = I'_{n_4}(\alpha_1, \alpha_2, l_1)$$

D'un point de vue géométrique, la méthode utilisée repose sur l'idée suivante : il est possible de voir l'ensemble $(\alpha_1, \alpha_2, l_1, I_k(\alpha_1, \alpha_2, l_1))$ comme une hypersurface S_k de dimension 3 dans \mathbb{R}^4 . Si on appelle la quatrième composante d'un point de \mathbb{R}^4 altitude, le but est de trouver un point où

l'altitude de toutes les hypersurfaces est très basse.

D'un point de vue générique, partant d'un point $(\alpha_1, \alpha_2, l_1)$ pour lequel J' est atteint pour une certaine fonction I'_{n_1} , il s'agit de descendre le long de l'hypersurface S_{n_1} jusqu'à croiser une autre hypersurface S_{n_2} . L'intersection de S_{n_1} et de S_{n_2} définit une nouvelle surface T_1 (de dimension 2). Le but est alors de descendre le long de cette surface T_1 jusqu'à croiser une autre hypersurface S_{n_3} . L'intersection de T_1 et de S_{n_3} définit une courbe T_2 (de dimension 1). Enfin, on descend le long de cette courbe T_2 jusqu'à croiser une quatrième hypersurface S_{n_4} : l'intersection de T_2 et de S_{n_4} définit un point qui est en principe un minimum local de J' .

Voici d'un point de vue algorithmique, la méthode utilisée pour trouver un point où le critère est atteint quatre fois sachant que dans les mutations on n'effectue que quelques étapes de cette méthode pour ne pas faire converger la population dans un minimum local trouvé trop rapidement et donc rendu artificiellement performant. De plus, cette méthode est générique et il est possible qu'elle ne converge pas dans certain cas (sortie du prisme d'étude, pas de descente trop grand...), il est donc nécessaire de bien protéger l'algorithme.

Partant d'un point A pour lequel le critère est obtenu pour un unique entier n_1 , on évalue le critère J' pour des points obtenus en partant de A dans la direction du gradient : $A - ih\vec{\nabla}I'_{n_1}(A)$, où h est un pas fixé et i prend successivement les valeurs entières : $1, 2, 3, \dots$ jusqu'à l'obtention d'un point B pour lequel le critère est atteint pour un autre entier n_2 . On résout alors l'équation :

$$I_{n_1}(A + t(B - A)) = I_{n_2}(A + t(B - A))$$

qui possède au moins une solution dans $(0,1)$, ce qui donne un point C , on vérifie qu'en ce point le critère est bien atteint pour I_{n_1} et donc également pour I_{n_2} . Le point C est alors un point de la surface T_1 .

La deuxième étape consiste alors, partant du point C où le critère est atteint deux fois à descendre dans la direction \vec{T} vecteur unitaire et normal au vecteur $\vec{N} = \vec{\nabla}I'_{n_1}(C) - \vec{\nabla}I'_{n_2}(C)$, on obtient un point $C' = C - h\vec{T}$, que l'on projette sur l'hypersurface T_1 en résolvant l'équation :

$$I_{n_1}(C' + t\vec{N}) = I_{n_2}(C' + t\vec{N})$$

qui possède une solution proche de 0, ce qui donne un point C_1 , on itère alors ce processus de descente-projection ce qui donne les points C_2, C_3, \dots jusqu'à obtenir un point C_k , pour lequel le critère est atteint pour un troisième entier n_3 . On résout alors le système d'équations d'inconnues t_1 et t_2 :

$$I_{n_1}(C_k + t_1\vec{N} + t_2\vec{T}) = I_{n_2}(C_k + t_1\vec{N} + t_2\vec{T}) = I_{n_3}(C_k + t_1\vec{N} + t_2\vec{T})$$

Ce qui donne un point D , on vérifie que le critère J' est bien atteint en les fonctions I_{n_1} , I_{n_2} et I_{n_3} , ce qui montre que le point D est un point de la courbe T_2 .

La troisième étape consiste alors à descendre le long de cette courbe T_2 ; pour cela on pose $D' = D + h\vec{T}$ où \vec{T} est le vecteur unitaire tangent à T_2 orienté vers le bas. On projette alors le point D' sur la courbe T_2 , ce qui donne un point D_1 , en résolvant le système d'équations :

$$\begin{aligned} I_{n_1}(D' + t_1\nabla(I_{n_1} - I_{n_2}) + t_2\nabla(I_{n_1} - I_{n_3})) &= I_{n_2}(D' + t_1\nabla(I_{n_1} - I_{n_2}) + t_2\nabla(I_{n_1} - I_{n_3})) \\ &= I_{n_3}(D' + t_1\nabla(I_{n_1} - I_{n_2}) + t_2\nabla(I_{n_1} - I_{n_3})) \end{aligned}$$

On obtient ainsi un point D_1 , on itère alors ce processus de descente-projection ce qui donne les points D_2, D_3, \dots jusqu'à obtenir un point D_k , pour lequel le critère est atteint pour un quatrième entier n_4 . On résout alors, en partant du point D_k le système d'équations :

$$I_{n_1}(\alpha_1, \alpha_2, l_1) = I_{n_2}(\alpha_1, \alpha_2, l_1) = I_{n_3}(\alpha_1, \alpha_2, l_1) = I_{n_4}(\alpha_1, \alpha_2, l_1)$$

Ce qui donne le point E recherché.

- Test d'arrêt : la génération de nouvelles populations s'arrête quand l'une de ces trois conditions est vérifiée : le critère n'a pas été amélioré depuis 15 générations, ou 100 générations ont déjà été générées ou enfin l'écart type de la suite des gènes des individus est trop petit, ce qui veut dire que la population a déjà convergé.

5.2.3 Résultats

Comme le montre en partie la figure 5.9, la fonction à optimiser est très irrégulière ; cependant l'AG donne des résultats satisfaisants. Par exemple, la figure 5.9 est obtenue en évaluant la fonction $J'(\cdot, \cdot, l_1)$ en 2500 points sachant que la valeur fixée de l_1 est la valeur optimale trouvée par l'AG, le minimum de ces valeurs est environ de 0.026810. Alors que l'AG pour le problème de l'optimisation pour les trois variables donne, après environ 3000 évaluations de la fonction J' , un minimum d'environ 0.02457 soit une amélioration de 9,1%. Néanmoins, l'algorithme étant probabiliste, plusieurs simulations pour la même valeur de la longueur totale l ne donnent pas toujours le même point du prisme de variation ; mais tous les points trouvés ont des performances semblables. On obtient donc une bonne approximation de J'_2 et de bonnes configurations de contrôle.

La figure 5.10 présente, pour différentes longueurs totale l , la meilleure valeur de J' obtenue pour 10 simulations avec 200 individus. Une fois encore, on retrouve bien les seuls cas d'égalité $J'(\alpha_1, \alpha_2, l_1) = 0$ attendus ($l = 0$, $l = 1/2$ et $l = 1$). En dehors de ces trois cas, le critère pour 2 intervalles est strictement meilleur que pour 1 intervalle.

Enfin, les meilleures positions obtenues α_1^* , α_2^* et l_1^* semblent dépendre de l de façon assez irrégulière. Cependant, on observe très souvent le phénomène suivant, qui est représenté sur la figure 5.11. Le contrôle optimal dans le cas de deux intervalles est constitué d'un intervalle très grand par rapport à l'autre ($l_1 \ll l_2$). Cet intervalle étant placé dans une position assez proche de la position du contrôle optimal de longueur l , dans le cas d'un intervalle. Par exemple, dans le cas de la figure 5.11, où $l = 0.3$, le rapport l_2/l_1 vaut 17 et le gain sur la fonction J' est de 24%, ce qui correspond à un gain de 2.3% sur le critère J .

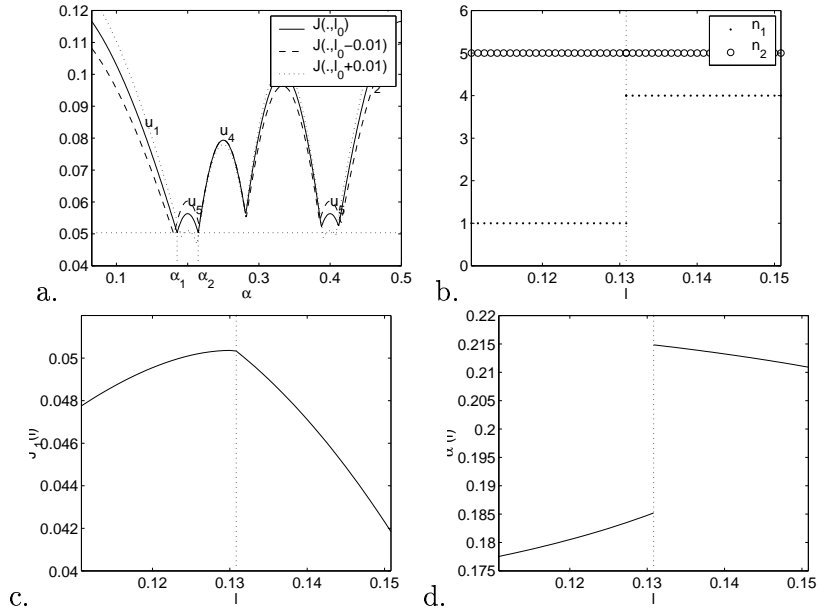


FIG. 5.6 – Graphe de $J'(\cdot, l_0)$ (a.) et irrégularités de n_1 (b.), J_1' (c.) et α^* (d.) en l_0

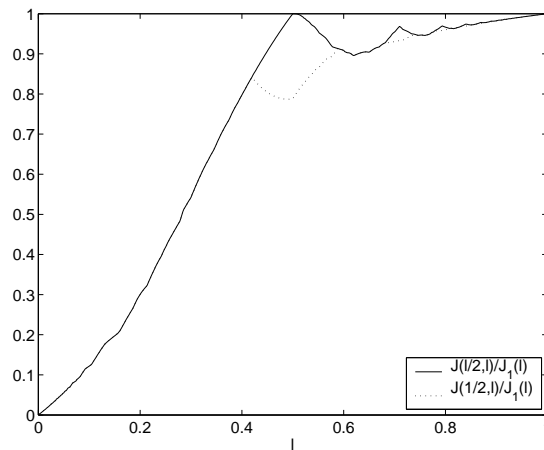


FIG. 5.7 – Graphe de $l \mapsto J(l/2, l)/J_1(l)$ et de $l \mapsto J(1/2, l)/J_1(l)$

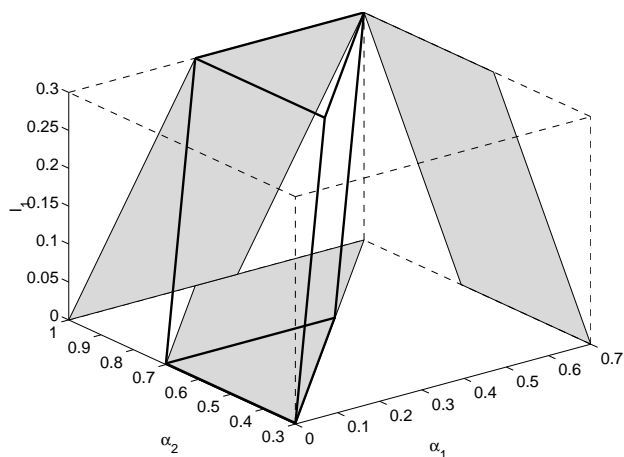


FIG. 5.8 – Prisme de variation de $(\alpha_1, \alpha_2, l_1)$ pour $l = 0.6$ et ses projections

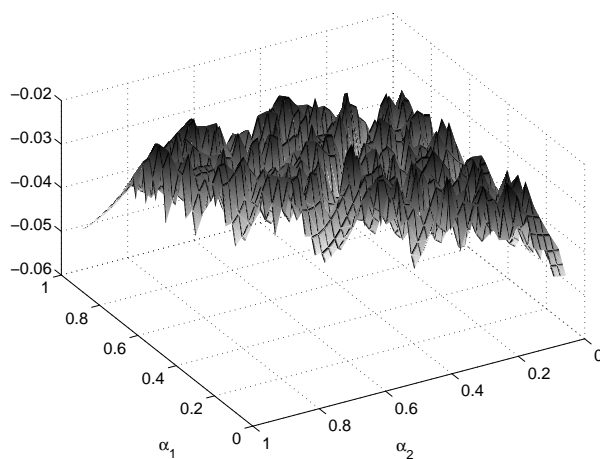


FIG. 5.9 – Surface $(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto -\mathcal{J}'(\alpha_1, \alpha_2, l_1)$ pour $l_1 \simeq 0.01345$ et $l = 0.05$

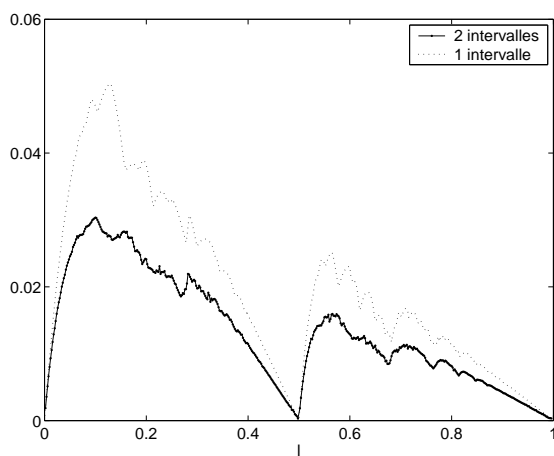


FIG. 5.10 – Graphes de $l \mapsto \mathcal{J}'_2(l)$ et de $l \mapsto \mathcal{J}'_1(l)$

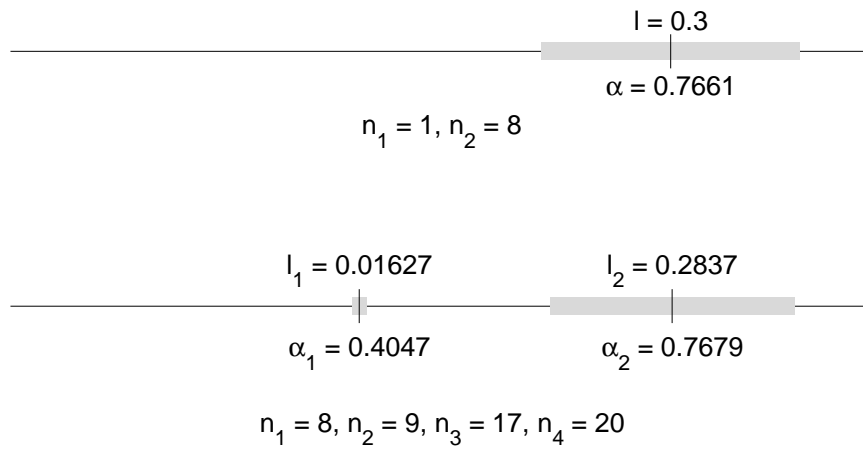


FIG. 5.11 – Positions optimales de contrôle pour $l = 0.3$ dans le cas d'un et de deux intervalles

Chapitre 6

Optimisation numérique de J et de g dans le cas bidimensionnel

Ce chapitre est dédié à l'optimisation numérique du critère J et de la quantité géométrique g (dont les études théoriques ont été menées aux chapitres 2 et 3) dans un cadre bidimensionnel, ainsi dans tout ce chapitre on prendra pour Ω la carré unité : $\Omega = (0,1)^2$.

Dans un premier temps, nous précisons comment les deux critères sont évalués, puis nous utiliserons les AG pour optimiser, sous contraintes d'aires, chacun des critères J et g , et enfin leur minimum : $\min\{J(\omega),g(\omega)\}$.

6.1 Evaluation numérique des critères

Afin d'évaluer les critères J et g , le carré Ω est maillé en N^2 carrés $C_{i,j}$:

$$C_{i,j} = \left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N} \right] \times \left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right] \quad 1 \leq i,j \leq N,$$

et nous étudions uniquement les domaines ω qui sont la réunion de certaines cellules $C_{i,j}$. Rappelons qu'un tel domaine ω est codé par une matrice M , de taille $N \times N$, définie par : $M_{i,j} = 1$ si $C_{j,i} \subset \omega$ et 0 sinon.

6.1.1 Calcul de $g(\omega)$

L'algorithme de calcul de la quantité géométrique a été présenté en détails au chapitre 3. On renvoie en particulier au paragraphe 3.3.4 en précisant juste que dans le cadre d'un AG, les familles de rayons fermés $\gamma \sim [(x_0, y_0), \arctan q/p]$ prises en compte sont calculées une fois pour toute en début de programme. En effet, nous avons vu, qu'en général, l'inégalité du type $|j(\gamma) - |\omega|| \leq C/(p.q)$ dont nous disposons est loin d'être optimale. Par conséquent, nous ne retenons a priori que les familles de rayons telles que le produit $p.q$ soit inférieur à un certain paramètre $PQmax$, ainsi on choisit de calculer le minimum sur un nombre de rayons géométriques moins important que celui donné par la majoration $|j(\gamma) - |\omega|| \leq C/(p.q)$ ce qui diminue considérablement le temps nécessaire à l'évaluation de $g(\omega)$. Puis, en fin de programme, on vérifie avec la fonction complète que la quantité géométrique du meilleur individu trouvé par l'AG est bien exacte.

Remarquons que, sur la famille de domaines ω réunion de certains carrés $C_{i,j}$ $1 \leq i, j \leq N$, le critère g est non saturant au sens où parmi les domaines d'aires inférieures ou égales à a , un domaine qui maximise g n'est pas forcément d'aire a même si a est un multiple de $1/N^2$. Par exemple, il est clair qu'il n'est pas possible de trouver un domaine ω d'aire k/N^2 , $1 \leq k \leq N-1$ tel que $g(\omega) > 0$, parce que pour un tel domaine ω , la matrice M associée possède obligatoirement une colonne nulle ce qui implique que tous les rayons verticaux ne sont pas contrôlés.

A partir de cette remarque, nous allons décrire une procédure dite de saturation: lors de l'évaluation du critère géométrique, nous sommes capable de dresser la listes des rayons saturants, c'est-à-dire des rayons γ tels que $j(\gamma) = g(\omega)$. Il est donc possible d'effectuer une partition de ω comme ceci: $\omega = \omega_1 \cup \omega_2$, où ω_1 est l'ensemble des carrés $C_{i,j}$ qui sont traversés par un rayon saturant et ω_2 , qui peut éventuellement être vide, est l'ensemble des carrés $C_{i,j}$ qui ne sont pas traversés par un rayon saturant. Il est clair que si on supprime à ω un carré de ω_1 , le critère géométrique va strictement décroître. En revanche, si on ôte un carré de ω_2 , ou bien le critère g décroît strictement ou bien il reste constant et éventuellement il y a de nouveau rayons saturants.

Un domaine, dont aucun carré $C_{i,j}$ n'est supprimable sans faire diminuer le critère géométrique, sera dit saturé. Cette procédure de saturation permettra de tester la qualité des domaines ω fournis par l'AG.

Par exemple, la figure 6.1 présente en grisé un domaine ω d'aire $a = 15/64$ dont le critère géométrique g vaut $1/8$, ainsi que les 12 rayons saturants. Pour ce domaine, ω_2 est constitué de deux carrés représentés en noir sur la figure 6.1.

Si on supprime, le carré $C_{2,7}$ situé en bas à droite, alors le domaine ω' obtenu, d'aire $a' = 14/64 = 7/32$ et représenté sur la figure 6.2, est tel que le critère géométrique g vaut toujours $1/8$. Il y a maintenant 16 rayons saturants, les 4 nouveaux rayons saturants passant bien sûr dans la cellule $C_{2,7}$. Ce domaine ω' est saturé car un des nouveaux rayons saturants passe par $C_{8,3}$, le deuxième carré de ω_2 .

En revanche, si on supprime à ω le carré $C_{8,3}$ situé en haut à gauche, le domaine ω'' obtenu, d'aire $a' = 14/64 = 7/32$, est tel que: $g(\omega'') = 11/96 < 12/96 = 1/8$, et il n'y a plus qu'un rayon saturant (cf. figure 6.3).

6.1.2 Calcul de $J(\omega)$

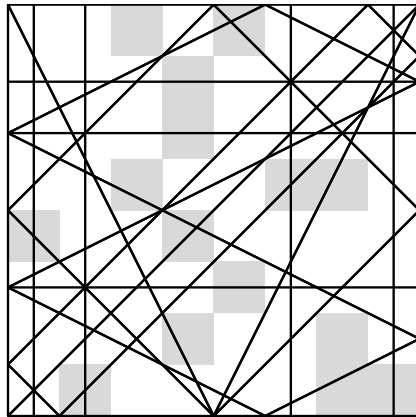
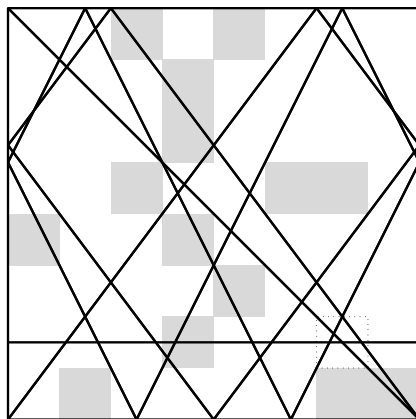
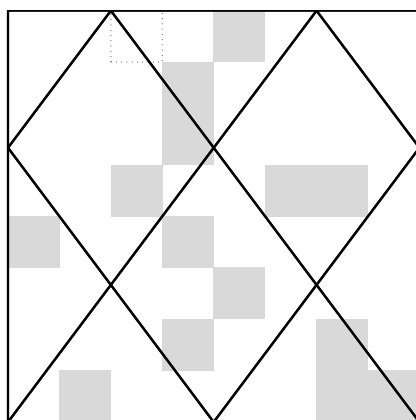
Rappelons que le critère J est défini par :

$$J(\omega) = \inf_{n,m \in \mathbb{N}^*} I_{n,m} \quad \text{avec} \quad I_{n,m} = 4 \iint_{\Omega} \chi_{\omega}(x,y) \sin^2 n\pi x \sin^2 m\pi y \, dx dy$$

Dans le cadre de ce chapitre :

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \sum_{i,j=1}^N M_{i,j} \int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} 2 \sin^2 n\pi x \, dx \int_{\frac{j-1}{N}}^{\frac{j}{N}} 2 \sin^2 m\pi y \, dy \\ &= \sum_{i,j=1}^N M_{i,j} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{N} \cos n\pi(2i-1) \right) \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{N} \cos m\pi(2j-1) \right) \end{aligned}$$

Le calcul exact de la borne inférieure des $I_{n,m}$ repose tout d'abord sur l'inégalité suivante

FIG. 6.1 – Le domaine ω et ses 12 rayons saturants (en noir, ω_2)FIG. 6.2 – Le domaine ω' et les 4 nouveaux rayons saturants (domaine saturé)FIG. 6.3 – Le domaine ω'' et son rayon saturant

valable pour n et m plus grands que N :

$$I_{n,m} \geq |\omega| - \frac{N|\omega|}{\pi} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) + \frac{N^2|\omega|}{\pi^2 nm} \quad (6.1)$$

En effet, si n et m sont plus grands que N :

$$I_{n,m} \geq \sum_{i,j=1}^N M_{i,j} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n\pi} \right) \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{m\pi} \right)$$

Car tous les termes entre parenthèses dans la somme qui définit $I_{n,m}$ sont positifs et comme $\sum_{i,j=1}^N M_{i,j} = N^2|\omega|$, on en déduit (6.1).

Une fois que l'on aura trouvé un couple (n,m) tel que $I_{n,m} < |\omega|$, cette inégalité (6.1) permettra de limiter le calcul des $I_{n,m}$ aux couples (n,m) situés sous une branche d'une hyperbole équilatère. Cependant, comme les asymptotes de cette hyperbole sont des droites d'équations $x = c$ et $y = c$, avec $c > 0$, le nombre de couples (n,m) satisfaisant cette condition est encore infini (cf. figure 6.4)

Considérons à nouveau les fonctions p_1 et p_2 qui ont été définies sur $[0,1]$ par :

$$p_1(x) = \int_0^1 \chi_\omega(x,y) dy \quad \text{et} \quad p_2(y) = \int_0^1 \chi_\omega(x,y) dx.$$

Soit alors, les deux suites (A_n) et (B_m) définies par :

$$A_n = \lim_{m \rightarrow \infty} I_{n,m} = 2 \int_0^1 p_1(x) \sin^2 n\pi x dx$$

et :

$$B_m = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,m} = 2 \int_0^1 p_2(y) \sin^2 m\pi y dy.$$

La deuxième majoration utile au calcul de $J(\omega)$ est la suivante :

$$|I_{n,m} - A_n| \leq \frac{N}{m\pi} \left| \sin \frac{m\pi}{N} \right| \cdot \|p_1\|_\infty \leq \frac{N}{m\pi} \|p_1\|_\infty. \quad (6.2)$$

En effet :

$$|I_{n,m} - A_n| = \left| \int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_\omega(x,y) (1 - 2 \sin^2 m\pi y) dy \right) 2 \sin^2 n\pi x dx \right| \leq \|f\|_\infty$$

où :

$$f(x) = \sum_{j=1}^N \int_{\frac{j-1}{N}}^{\frac{j}{N}} M_{i(x),j} \cos 2m\pi y dy = \sum_{j=1}^N M_{i(x),j} \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{N} \cos 2m\pi \frac{2j-1}{2N}.$$

Et comme $\sum_{j=1}^N M_{i(x),j} = N p_1(x)$, on retrouve bien l'inégalité annoncée.

Cette inégalité (6.2) permet, dès que l'on a trouvé un couple (n,m) tel que $I_{n,m} < A_n$, de calculer $\inf_{m \in \mathbb{N}^*} I_{n,m}$, c'est-à-dire le minimum sur une demi-droite verticale dans le plan des (n,m) . Remarquons que comme p_1 est une fonction constante par morceaux, il existe toujours m tel que $I_{n,m} < A_n$, sauf dans le cas où $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $I_{n,m} = A_n$, cas que l'on sait caractériser.

On montre, de la même façon, l'inégalité satisfaite par les B_m :

$$|I_{n,m} - B_m| \leq \frac{N}{n\pi} \left| \sin \frac{n\pi}{N} \right| \cdot \|p_2\|_\infty \leq \frac{N}{n\pi} \|p_2\|_\infty \quad (6.3)$$

Cette inégalité permet le calcul de $\inf_{n \in \mathbb{N}^*} I_{n,m}$, c'est-à-dire le minimum sur une demi-droite horizontale dans le plan des (n,m) .

A partir des trois inégalités (6.1), (6.2) et (6.3), il est possible de calculer exactement $J(\omega)$ sauf dans les cas d'égalités $J(\omega) = |\omega|$ qui sont connus (cf. Chapitre 2). Parmi les domaines ω étudiés, il s'agit des domaines d'aire 0, 1/4, 1/2, 3/4 ou 1 satisfaisant :

$$M_{i,j} = M_{N+1-i,j} = M_{i,N+1-j} = M_{N+1-i,N+1-j} = 4|\omega|$$

pour tout couple (i,j) . Pour protéger le programme des boucles infinies présentes dans ces cas d'égalités, on se fixe un paramètre $Nmax$ tel que tous les couples (n,m) considérés sans l'algorithme satisfèrent : $n \leq Nmax$ et $m \leq Nmax$. Il est donc possible de calculer exactement $J(\omega)$ pour tous les domaines ω , même si en pratique la valeur de $Nmax$ à prendre en compte peut être très grande.

Nous donnons dans un premier temps l'algorithme de calcul, qui sera ensuite illustré par la figure 6.4 :

Etant donné un domaine ω codé par une matrice M de taille $N \times N$, l'algorithme de calcul de $J(\omega)$ se décompose en quatre étapes :

1. On calcule $s = \min \{I_{n,m}(\omega), 1 \leq n, m \leq N\}$. A la fin du programme, la variable s sera égale à $J(\omega)$.
2. On évalue les normes et les limites suivantes :
 - $P1max = \max_{1 \leq i \leq N} P1(i) = \max \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N M(i,j), 1 \leq i \leq N \right\}$
 - $P2max = \max_{1 \leq j \leq N} P2(j) = \max \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M(i,j), 1 \leq j \leq N \right\}$
 - $A(n) = 2 \int_0^1 p_1(x) \sin^2 n\pi x dx \quad 1 \leq n \leq N$
 - $B(m) = 2 \int_0^1 p_2(y) \sin^2 m\pi y dy \quad 1 \leq m \leq N$

Puis $s \leftarrow \min \{s, \min_{1 \leq n \leq N} A(n), \min_{1 \leq m \leq N} B(m)\}$.

En effet, les fonctions p_1 et p_2 sont constantes par morceaux, or comme nous l'avons remarqué ceci implique qu'il existe toujours m tel que $I_{n,m} \leq A_n$ et de même, il existe toujours n tel que $I_{n,m} \leq B_m$.

3. Pour n compris entre 1 et N , on répète la procédure suivante (calcul du minimum $\min \{s, \inf_{m \geq N} I_{n,m}\}$ sur les verticales $n = 1, 2, \dots, N$) :
 - $m = 1$,
 - Tant que $\left(s > A(n) \text{ ou } m < \frac{NP1max}{\pi(A(n)-s)} \right)$ et $m \leq Nmax$:
 - Calcul de $I_{n,m}$
 - $s \leftarrow \min \{s, I_{n,m}\}$
 - $m \leftarrow m + 1$

Puis pour m compris entre 1 et N , on fait la même chose avec les termes $B(m)$ (calcul du minimum $\min \{s, \inf_{n \geq N} I_{n,m}\}$ sur les horizontales $m = 1, 2, \dots, N$) :

- $n = 1$,

- Tant que $\left(s > B(m) \text{ ou } n < \frac{NP2max}{\pi(B(m)-s)}\right)$ et $n \leq Nmax$:
 - Calcul de $I_{n,m}$
 - $s \leftarrow \min\{s, I_{n,m}\}$
 - $n \leftarrow n + 1$

4. On initialise la variable *debut* à $N + 1$ puis tant que

$$\frac{2Na}{\pi} \cdot \frac{1}{debut} + \frac{N^2a}{\pi^2 debut^2} > |\omega| - s \text{ et } debut \leq Nmax ;$$

c'est-à dire tant qu'on est sous la branche de l'hyperbole :

- $n = debut$, on calcule A_n ,
- On calcule ensuite $\min\{s, inf_{m \geq n} I_{n,m}\}$ comme dans l'étape 3.
- $m = debut + 1$, on calcule B_m ,
- On calcule ensuite $\min\{s, inf_{n \geq m} I_{n,m}\}$ comme dans l'étape 3.

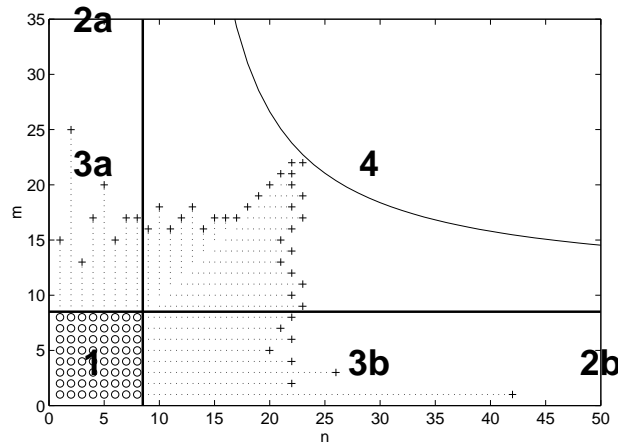


FIG. 6.4 – Les étapes de l'algorithme dans le plan (n, m)

Les différentes étapes de l'algorithme sont illustrées sur la figure 6.4 dans le cas du calcul de $J(\omega)$ pour un domaine ω avec $N = 8$:

- L'étape 1 correspond dans le plan (n, m) au carré $[1, N]^2$,
- L'étape 2 est le calcul de limites à l'infini le long des droites $n = 1, 2, \dots, N$ et $y = 1, 2, \dots, N$.
- Lors de l'étape 3, on calcule le minimum sur ces droites. Sur la figure 6.4, les croix correspondent au dernier terme évalué compte-tenu des inégalités (6.2) et (6.3).
- Enfin, au cours de l'étape 4, on évalue des limites à l'infini et le minimum des $I_{n,m}$ sur des demi-droites "en escalier" jusqu'à arriver à l'hyperbole donnée par (6.1). Il est à noter que cette hyperbole n'est pas fixe mais se rapproche des axes à chaque fois qu'on trouve un nouveau minimum pour les $I_{n,m}$.

Au cours de l'algorithme décrit précédemment, on enregistre le couple (n_0, m_0) pour lequel le minimum des $I_{n,m}$ est atteint et si l'une des boucles "tant que" se termine parce que n ou m est égal à $Nmax$, on modifie la valeur d'un booléen, pour savoir au final si le calcul de $J(\omega)$ est exact ou s'il a été limité par la constante $Nmax$.

6.2 Optimisation numérique de J

Soit a un réel de $[0,1]$, nous allons maximiser, parmi les domaines ω réunions de carrés $C_{i,j}$ et d'aires inférieures ou égales à a , le critère J . Cette optimisation sera faite à l'aide d'AG. Nous testerons deux types d'AG, dans un premier temps les individus seront représentés par un tableau de bits, puis, dans un second temps, nous opterons pour une représentation non structurée à l'aide de sites de Voronoi.

Bien que le logiciel Matlab avec lequel les codes ont été écrits ne soit pas optimisé pour le temps de calcul, le temps nécessaire pour une optimisation par l'un de ces deux algorithmes est d'environ 15 minutes sur un pentium d'un gigahertz.

6.2.1 Représentation par tableaux de bits

Le principe de l'optimisation de forme par AG, où les individus sont codés par un tableau de bits a été présenté en détail dans la partie 4.3.1 du chapitre 4. Rappelons, en particulier, que la contrainte d'aire est gérée lors de l'évaluation de la performance des individus, qui est égale à $J(I) - \alpha(|I| - c)^+$. On pénalise donc la valeur du critère J si l'aire de l'individu est plus grande que a . Cette pénalisation est dynamique (le facteur α évolue selon la loi présentée dans la section 4.3.1 du chapitre 4) de sorte qu'il existe toujours des individus satisfaisant la contrainte (au moins 40%) et des individus violant la contrainte (au moins 20%), parce que le critère J est saturant.

Nous avons étudié en détail le cas $N = 8$, soit un maillage 8×8 de Ω . Dans ce cas et comme le critère J est saturant, les valeurs de la contrainte a intéressantes sont les rationnels de la forme $k/64$, $0 \leq k \leq 64$. Pour chaque valeur de k , nous avons lancé l'algorithme génétique avec 400 individus. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 6.5 (bien que l'optimisation ait porté sur la maximisation du critère J , la figure 6.5 présente, pour que le graphe soit plus lisible, les valeurs de J' qui peuvent être considérés comme un facteur correctif par rapport à l'aire du domaine: $J(\omega) = |\omega| - J'(\omega)$, et qui doivent donc être le plus petit possible).

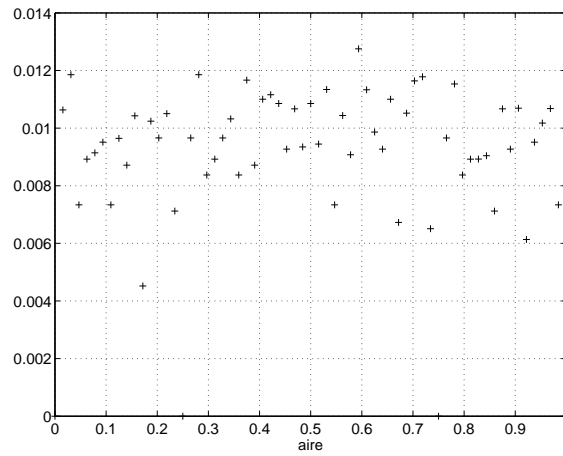
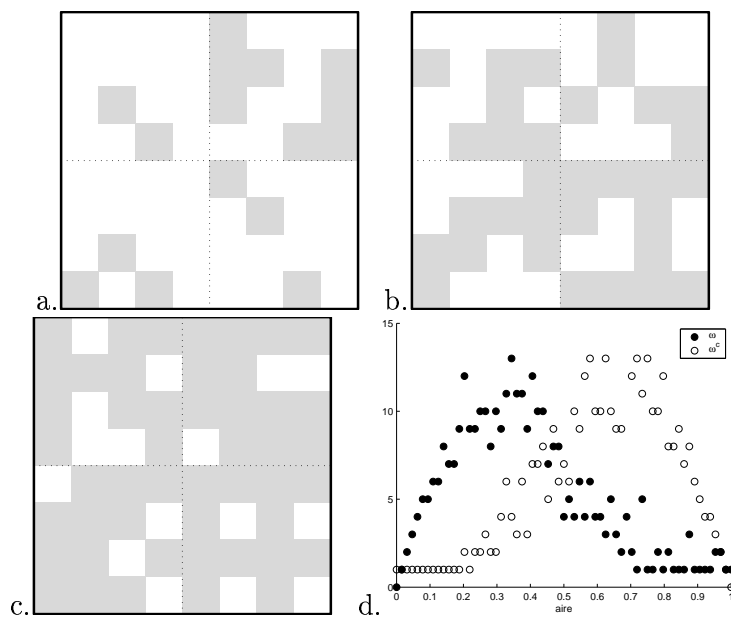
Nous notons que :

- les valeurs de J' obtenues sont très petites devant l'aire des domaines optimaux ω^* ;
- la valeur de $J'(\omega^*)$ semble varier très rapidement avec l'aire de ω^* , cette irrégularité est en partie due à la discrétisation imposée par le maillage et on observe déjà le même phénomène si on impose un maillage dans le cas de la dimension 1 : $\Omega = (0,1)$;
- parmi les trois cas d'égalités $J(\omega) = |\omega|$ non triviaux : $|\omega| = 1/4, 1/2$ ou $3/4$, l'algorithme en a obtenu deux. Les domaines optimaux correspondant sont représentés sur la figure 6.6.a et 6.6.c. Malgré leur apparente complexité, ils vérifient bien la condition d'optimalité qui s'écrit ici :

$$\forall (i,j), \quad M_{i,j} + M_{N+1-i,j} + M_{i,N+1-j} + M_{N+1-i,N+1-j} = 4|\omega|.$$

Le meilleur domaine d'aire $1/2$ obtenu n'est pas optimal, en effet on peut vérifier sur la figure 6.6.b que parmi les quatre cellules situées autour du centre de Ω , trois appartiennent à ω , alors que la condition d'optimalité impose que deux cellules appartiennent à ω .

La figure 6.6.d présente, pour chaque domaine optimal, le nombre de composantes connexes de ω^* et de son complémentaire $(\omega^*)^c$. Cette figure montre que les domaines obtenus sont relativement complexes, car la somme de ces deux nombres vaut en moyenne 10.9 et va jusqu'à 19.

FIG. 6.5 – Meilleures valeurs de $J'(\omega)$ obtenues par l'AG avec tableaux de bitsFIG. 6.6 – (a.) Meilleur domaine d'aire $1/4$, (b.) Meilleur domaine d'aire $1/2$, (c.) Meilleur domaine d'aire $3/4$, (d.) Nombre de composantes connexes des domaines optimaux (points noirs) et de leurs complémentaires (points blancs)

6.2.2 Représentation non structurée

Pour comparaison, nous avons également optimisé le critère J à l'aide d'un AG où les individus sont représentés de façon non structurée à l'aide de sites de Voronoi. Ce type d'algorithmes a été présenté lors de la section 4.3.2 du chapitre 4. Une fois encore pour chaque aire de la forme $k/64$ avec $0 \leq k \leq 64$, l'AG a été lancé avec une population de 400 individus. Chaque individu peut être codé, au maximum, par 30 sites de Voronoi ; parmi les domaines obtenus, un domaine est codé avec 29 sites et tous les autres ont moins de 24 sites, ce paramètre n'est donc pas limitant.

Les résultats obtenus J' sont présentés à l'aide de cercles sur la figure 6.7 (une fois encore, bien que l'optimisation ait porté sur la maximisation du critère J , la figure 6.7 présente, pour que le graphe soit plus lisible, les valeurs de J' qui peuvent être considérés comme un facteur correctif par rapport à l'aire du domaine : $J(\omega) = |\omega| - J'(\omega)$, et qui doivent donc être le plus petit possible). Pour comparer les algorithmes, les résultats obtenus à l'aide de l'AG avec tableaux de bits sont à nouveau présentés à l'aide de croix.

Cette figure appelle les remarques suivantes :

- les résultats obtenus sont dans le même ordre de grandeur que dans le cas des tableaux de bits et il n'existe pas d'algorithme pour lequel les résultats sont toujours meilleurs, ce qui montre que même si le meilleur individu trouvé est un bon individu, ces algorithmes ne convergent pas toujours vers un des maxima globaux.
- Les trois cas d'égalités $J(\omega) = |\omega|$ non triviaux : $|\omega| = 1/4, 1/2$ ou $3/4$, ont été obtenus par l'algorithme. Les domaines optimaux correspondant ainsi que leurs sites de Voronoi sont représentés sur les figures 6.8.a, 6.8.b et 6.8.c. Ils sont topologiquement très simples : ils sont connexes ainsi que leurs complémentaires.
- La figure 6.8.d présente pour chaque domaine optimal obtenu le nombre de composantes connexes de ω^* et de son complémentaire $(\omega^*)^c$. Cette figure montre que les domaines obtenus sont plus simples que dans le cas de l'AG avec tableaux de bits, car la somme de ces deux nombres ne dépasse pas 10 et vaut en moyenne 3.7.

Les résultats fournis par l'AG avec tableaux de bits sont légèrement meilleur que ceux de l'AG avec représentation non structurée. Pour 43 des 63 calculs effectués, la plus grande valeur du critère J obtenue par l'AG avec tableaux de bits est supérieure à celle obtenue pour l'AG avec représentation non structurée plus 10^{-4} . Pour 11, c'est l'inverse, c'est-à-dire que la plus grande valeur du critère J obtenue par l'AG avec représentation non structurée est supérieure à celle obtenue pour l'AG avec tableaux de bits plus 10^{-4} . Enfin pour les 9 restantes, les deux valeurs sont égales à 10^{-4} près.

Ceci s'explique sans doute, par la petite taille du maillage et il est possible que la conclusion soit inverse pour des maillages plus fins. Une seconde raison peut être que, contrairement au problème modèle du cantilever en mécanique où la forme optimale est connexe et pour lequel les AG avec représentation non structurée sont reconnus plus performants, dans notre cas le domaine optimal n'a aucune raison d'être connexe, bien au contraire.

La figure 6.9 présente la comparaison entre la valeur du critère J et la quantité géométrique g pour les domaines obtenus en maximisant J par l'AG avec tableaux de bits. La figure 6.10 présente la même comparaison mais pour les domaines obtenus en maximisant J par l'AG avec représentation non structurée.

La quantité géométrique est toujours inférieure au critère J surtout dans le cas de l'AG avec

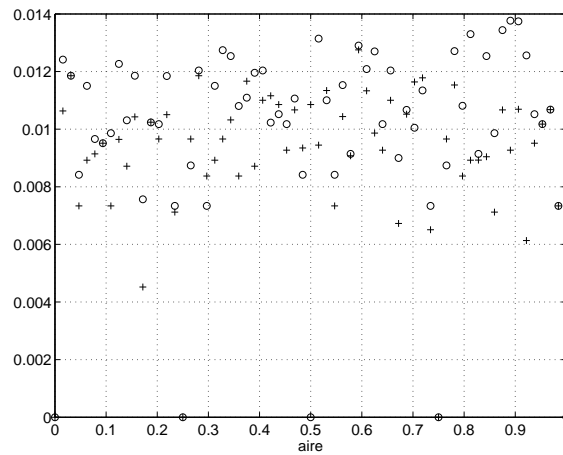


FIG. 6.7 – Meilleures valeurs de $J'(\omega)$ obtenues par l'AG avec représentation non structurée (cercles) et rappel des résultats de l'AG avec tableaux de bits (croix)

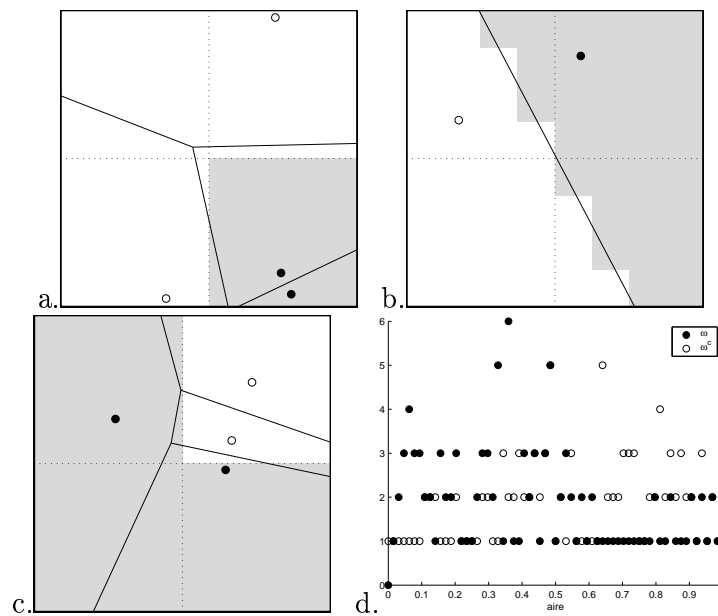


FIG. 6.8 – (a.) Meilleur domaine d'aire $1/4$, (b.) Meilleur domaine d'aire $1/2$, (c.) Meilleur domaine d'aire $3/4$, (d.) Nombre de composantes connexes des domaines optimaux (points noirs) et de leurs complémentaires (points blancs)

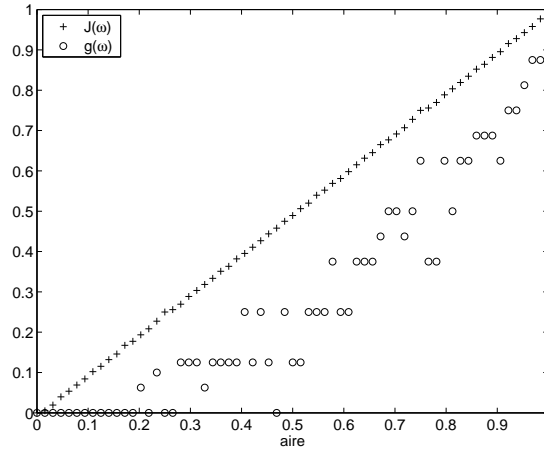


FIG. 6.9 – Valeurs de $J(\omega)$ et de $g(\omega)$ pour les domaines obtenus en maximisant J par l'AG avec tableaux de bits

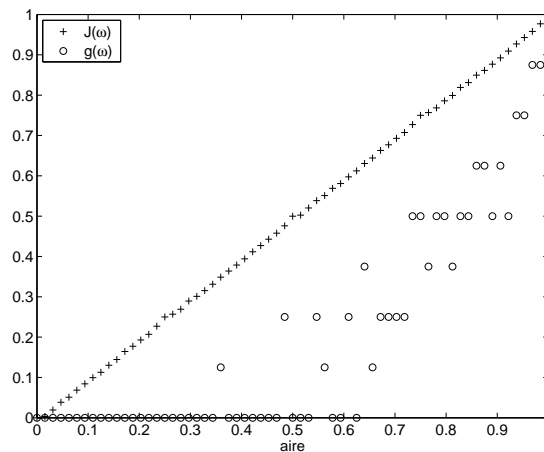


FIG. 6.10 – Valeurs de $J(\omega)$ et de $g(\omega)$ pour les domaines obtenus en maximisant J par l'AG avec représentation non structurée

représentation non structurée pour lequel plus de la moitié des domaines ne contrôlent pas tous les rayons géométriques.

6.3 Optimisation numérique de g (et de $\min\{J, g\}$)

Le même problème de maximisation parmi les domaines ω réunions de carrés $C_{i,j}$ et d'aires inférieures ou égales à a , $0 \leq a \leq 1$, mais cette fois-ci de la quantité géométrique g , a été traité à l'aide d'AG. Nous testerons à nouveau les deux types d'AG, dans un premier temps les individus seront représentés par un tableau de bits, puis, dans un second temps, nous opterons pour une représentation non structurée à l'aide de sites de Voronoi.

Comme l'évaluation du critère g est plus coûteuse que celle du critère J , le temps nécessaire pour une optimisation par l'un de ces deux algorithmes est maintenant d'environ 25 minutes sur un pentium d'un gigahertz.

6.3.1 Représentation par tableaux de bits

Toujours dans le cadre d'un maillage 8×8 de Ω , nous avons maximisé la quantité géométrique g parmi les domaines d'aire inférieure ou égale à $k/64$ avec $0 \leq k \leq 64$. Cette optimisation a donc été menée à l'aide d'un AG où les individus sont codés par tableaux de bits. La population comptait 400 individus.

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 6.11. On remarque notamment que :

- Parmi les domaines ω qui sont la réunion de cellules $C_{i,j}$, la quantité géométrique n'est pas une fonction strictement croissante de l'aire du domaine ω :

$$\omega_1 \subsetneq \omega_2 \quad \Rightarrow \quad g(\omega_1) < g(\omega_2) \quad \text{ou} \quad g(\omega_1) = g(\omega_2)$$

Ceci a pour conséquence que parmi les domaines d'aire inférieure ou égale à a , les domaines qui maximisent g ne sont pas forcément tous d'aire a ;

- Par rapport au maximum obtenu pour des domaines en bandes ou en croix (cf. la partie 3.4 du chapitre 3) qui vaut $\varphi(a) = 1 - \sqrt{1-a}$ (dont le graphe est représenté en pointillés sur la figure 6.11), l'AG trouve de meilleurs domaines sur le maillage 8×8 , sauf pour les petites valeurs de la contrainte d'aire où la discrétisation du domaine est très pénalisante comme nous l'avons déjà remarqué ;
- Nous n'obtenons pas numériquement de cas d'égalité $g(\omega) = |\omega|$ non triviaux.

La figure 6.12 présente en grisé quatre domaines optimaux obtenus par l'AG correspondant à quatre sauts importants de la fonction $g(\omega^*)$ et leurs rayons saturants :

- Le domaine de la figure 6.12.a est d'aire $13/64$, la quantité géométrique vaut $1/8 = 8/64$ et il y a 32 rayons saturants (ils ne sont pas tous représentés pour que la figure reste lisible) ;
- Le domaine de la figure 6.12.b est d'aire $23/64$, la quantité géométrique vaut $1/4 = 16/64$ et il y a 15 rayons saturants ;
- Le domaine de la figure 6.12.c est d'aire $39/64$, la quantité géométrique vaut $1/2 = 32/64$ et il y a 12 rayons saturants ;
- Le domaine de la figure 6.12.d est d'aire $51/64$, la quantité géométrique vaut $11/16 = 44/64$ et il y a 6 rayons saturants.

Pour apprécier la qualité des résultats fournis par l'AG, nous allons utiliser la fonction de saturation présentée dans la première partie de ce chapitre et qui vise à supprimer les cases par

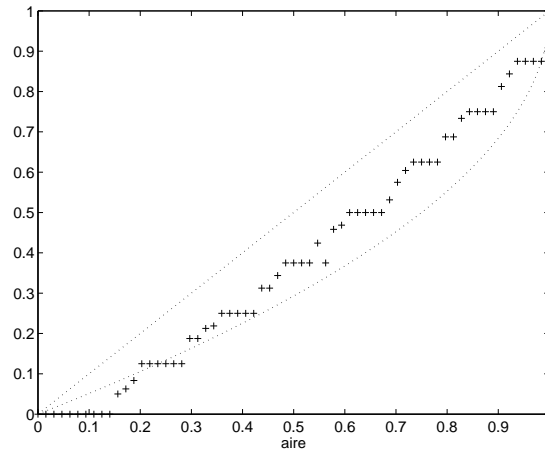


FIG. 6.11 – Meilleures valeurs de $g(\omega)$ obtenues par l'AG avec tableaux de bits

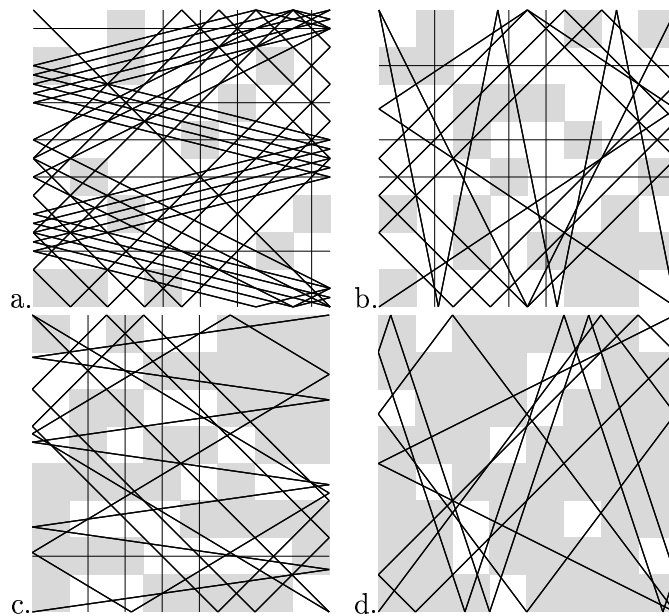


FIG. 6.12 – (a.) Meilleur domaine d'aire $13/64$, (b.) Meilleur domaine d'aire $23/64$, (c.) Meilleur domaine d'aire $39/64$, (d.) Meilleur domaine d'aire $51/64$

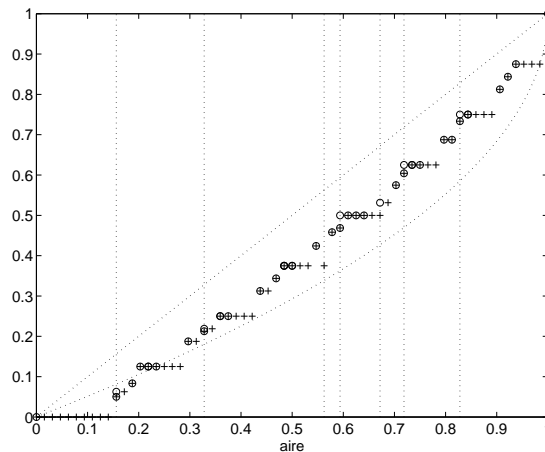


FIG. 6.13 – Valeurs de $g(\omega)$ obtenues après la fonction de saturation (cercles) et rappel des résultats de l'AG (croix)

lesquelles ne passe aucun rayon saturant pour obtenir un nouveau domaine de même quantité géométrique mais d'aire inférieure. La figure 6.13 montre à l'aide de cercle les aires des domaines obtenus à partir des domaines fournis par l'AG (à nouveau représentés avec des croix). Ceci montre que les domaines fournis par l'AG sont tout à fait satisfaisants car la fonction de saturation permet d'améliorer légèrement la meilleur valeur de g connue en uniquement 7 points (mis en valeur à l'aide de verticales sur la figure 6.13).

6.3.2 Représentation non structurée

Pour le même maillage et les mêmes contraintes d'aire nous avons également maximisé la quantité géométrique g à l'aide de l'AG où les individus sont codés de façon non structurée par les sites de Voronoi. La population est toujours de 400 individus et chaque individu possède au plus 30 sites de Voronoi.

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 6.14 et comparés aux résultats de l'AG avec tableaux de bits. Il apparaît très clairement que ces résultats sont moins bons. Par exemple, pour le meilleur domaine d'aire $23/64$ obtenu, qui est représenté figure 6.15.a, la quantité géométrique vaut $7/32$ contre $1/4 = 8/32$ pour le domaine de la figure 6.12.b obtenu par l'AG avec tableaux de bits. Il est codé avec 25 sites de Voronoi et il n'y a que deux rayons saturants. De même, le meilleur domaine d'aire $39/64$ obtenu, représenté figure 6.15.b, est tel que $g(\omega_V) = 3/8$ alors que pour le domaine de la figure 6.12.c, $g(\omega_B) = 1/2 = 4/8$. Ce domaine ω_V est codé avec 28 sites de Voronoi et il n'y a qu'un rayon saturant.

Bien que le moyenne du nombre de sites de Voronoi des meilleurs individus obtenus soit plus grande que dans le cas de l'optimisation de J : 16.5 contre 13.4, le nombre maximal de sites de Voronoi n'est pas un facteur limitant car aucun individu n'a plus de 28 sites.

Une fois encore les domaines obtenus par l'AG avec tableaux de bits sont topologiquement bien plus complexes que ceux obtenus par l'AG avec représentation non structurée. La figure 6.16 présente, dans les deux cas, le nombre de composantes connexes des domaines optimaux et de leurs complémentaires. La moyenne de la somme de ces deux nombres vaut 12.3 dans le cas de l'AG avec tableaux de bits contre 4.8 dans le cas de l'AG avec représentation non structurée.

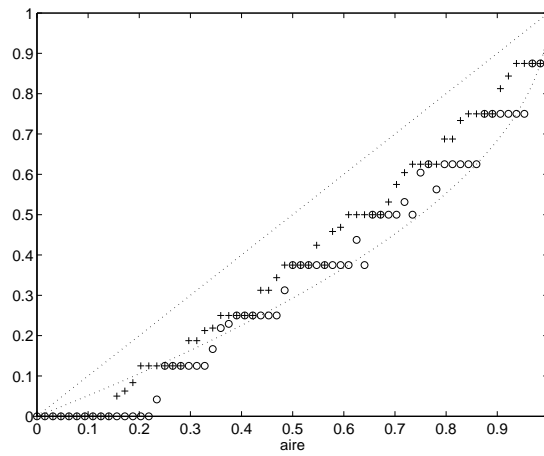


FIG. 6.14 – Valeurs de $g(\omega)$ obtenues par l'AG avec représentation non structurée (cercles) et rappel des résultats de l'AG avec tableaux de bits (croix)

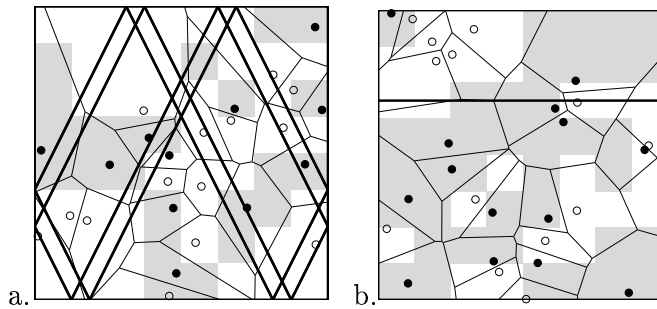


FIG. 6.15 – (a.) Meilleur domaine d'aire 23/64, (b.) Meilleur domaine d'aire 39/44

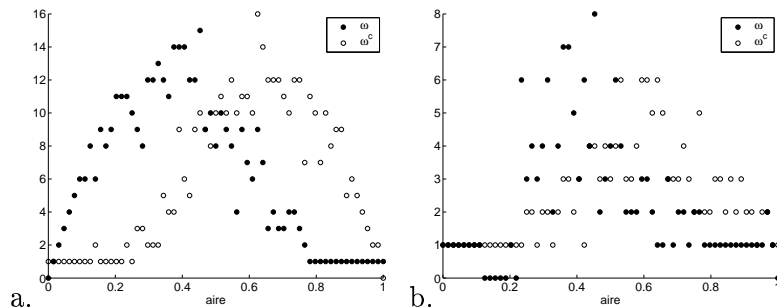


FIG. 6.16 – Nombre de composante des meilleurs domaines et de leurs complémentaires : (a.) pour l'AG avec tableaux de bits, (b.) pour l'AG avec représentation non structurée

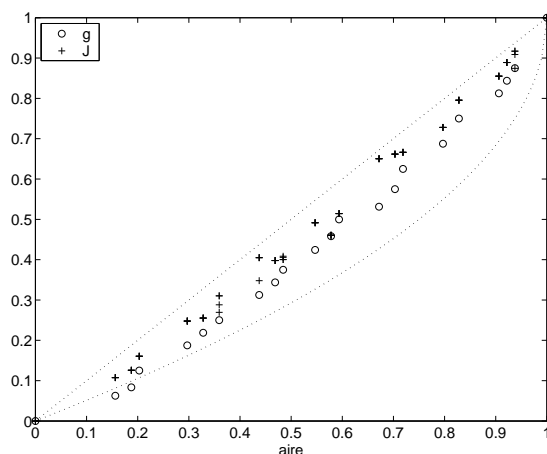


FIG. 6.17 – Meilleures valeurs de $g(\omega)$ obtenues (cercles) et valeurs de $J(\omega)$ correspondantes (croix)

6.3.3 Optimisation numérique de $\min\{J, g\}$

Pour le problème de la maximisation de la quantité géométrique, nous avons, pour chaque valeur de la contrainte d'aire, listé les meilleurs domaines connus à partir des résultats fournis par les deux AG et par la fonction de saturation. Puis nous avons calculé la valeur du critère J de ces domaines.

La figure 6.17 présente pour les valeurs de la contrainte d'aire intéressantes, c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles la fonction g présente un saut, les résultats obtenus. Comme nous connaissons parfois plusieurs domaines optimaux pour la maximisation de la quantité géométrique pour la même contrainte d'aire, il y a alors plusieurs valeurs pour le critère J .

Comme le critère J est toujours plus grand que la quantité géométrique, en maximisant la quantité géométrique, nous avons résolu le problème de la maximisation de $\min\{J, g\}$.

Chapitre 7

Optimisation numérique de l'abscisse spectrale μ

Dans toute cette thèse, nous avons approché l'abscisse spectrale $\mu(k, \omega)$ de l'opérateur des ondes amorties \mathcal{A} , par $-k \cdot J(\omega)$, où $J(\omega)$ est l'opposé la dérivée de $\mu(k, \omega)$ par rapport à k en $k = 0$. Nous allons dans ce dernier chapitre calculer de façon approchée l'abscisse spectrale μ puis, par l'étude numérique de cette fonction μ , nous validerons notre approximation.

Nous nous restreignons au cas monodimensionnel $\Omega = (0,1)$, et au cas où ω est un intervalle.

7.1 Evaluation numérique de μ

Etant donné un domaine $\omega = [a, b] = [\alpha - l/2, \alpha + l/2]$, nous allons calculer les premières valeurs propres de l'opérateur \mathcal{A} , c'est-à-dire les premières valeurs propres du problème :

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) + 2k\chi_\omega(x)u_t(x, t) = \lambda u(x, t), & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

Puis compte-tenu de la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(\lambda_n) = -\frac{|\omega|}{|\Omega|}, \quad (7.2)$$

nous approcherons l'abscisse spectrale de \mathcal{A} par :

$$\mu(k, \omega) \simeq \min_{1 \leq n \leq N} \operatorname{Re}(\lambda_n(k, \omega)) \quad (7.3)$$

Ce problème de valeurs propres se résout de façon classique par semi-discrétisation en espace (cf. par exemple [33]). Introduisons pour cela le maillage de Ω : $x_i = i/(N + 1)$, $0 \leq i \leq N + 1$ de pas $h = 1/(N + 1)$ et les éléments finis P^1 associés c'est-à-dire les N fonctions ϕ_i , $1 \leq i \leq N$, définies par $\phi_i(x_j) = \delta_{i,j}$ et ϕ_i affine par morceaux.

Nous cherchons alors u sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \phi_i(x),$$

tel que pour tout j et pour tout t , u satisfasse la formulation variationnelle du problème (7.1), à savoir :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^1 u(x,t) \phi_j(x) dx + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx + 2k \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \chi_\omega(x) u(x,t) \phi_j(x) dx = \lambda \int_0^1 u(x,t) \phi_j(x) dx$$

Posons $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^t$, nous sommes alors ramenés au problème :

$$M \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + Ra + 2kD \frac{\partial a}{\partial t} = Ma, \quad (7.4)$$

où M est la matrice de masse définie par :

$$M = \left(\int_0^1 \phi_j(x) \phi_i(x) dx \right)_{1 \leq i, j \leq N} = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & \cdots & & \\ & 1 & \cdots & 1 & \\ & & \cdots & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

où R est la matrice de rigidité définie par :

$$R = \left(\int_0^1 \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} dx \right)_{1 \leq i, j \leq N} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \cdots & & \\ & -1 & \cdots & -1 & \\ & & \cdots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

et où D est la matrice de damping définie par :

$$D = \left(\int_0^1 \chi_\omega(x) \phi_j(x) \phi_i(x) dx \right)_{1 \leq i, j \leq N}.$$

Cette matrice D est symétrique et tridiagonale. Par exemple dans le cas où le domaine $\omega = [a, b]$ est de longueur strictement plus grande que le pas h du maillage, il existe deux entiers i_1 et i_2 distincts tels que :

$$(i_1 - 1)h < a \leq i_1 h < i_2 h \leq b < (i_2 + 1)h$$

et D vérifie alors :

$$\begin{aligned} i \leq i_1 - 2 & \Rightarrow D_{i, i+1} = 0 \\ i = i_1 - 1 & \Rightarrow D_{i, i+1} = \frac{3h - 2(i_1 h - a)}{6h^2} (i_1 h - a)^2 \\ i \geq i_1 \text{ et } i \leq i_2 - 1 & \Rightarrow D_{i, i+1} = \frac{h}{6} \\ i \leq i_2 & \Rightarrow D_{i, i+1} = \frac{3h - 2(b - i_2 h)}{6h^2} (b - i_2 h)^2 \\ i \geq i_2 + 1 & \Rightarrow D_{i, i+1} = 0 \end{aligned}$$

et pour la diagonale principale :

$$\begin{aligned} i \leq i_1 - 2 & \Rightarrow D_{i, i} = 0 \\ i = i_1 - 1 & \Rightarrow D_{i, i} = \frac{(i_1 h - a)^3}{3h^2} \\ i = i_1 & \Rightarrow D_{i, i} = \frac{(i_1 h - a)(a^2 + 3ah + 3h^2 - 2ai_1 h - 3i_1 h^2 + i_1^2 h^2)}{3h^2} + \frac{h}{3} \\ i \geq i_1 + 1 \text{ et } i \leq i_2 - 1 & \Rightarrow D_{i, i} = \frac{2h}{3} \\ i = i_2 & \Rightarrow D_{i, i} = \frac{(b - i_2 h)(b^2 - 3bh + 3h^2 - 2bi_2 h + 3i_2 h^2 + i_2^2 h^2)}{3h^2} + \frac{h}{3} \\ i = i_2 + 1 & \Rightarrow D_{i, i} = \frac{(b - i_2 h)^3}{3h^2} \\ i \geq i_2 + 1 & \Rightarrow D_{i, i} = 0 \end{aligned}$$

Posons $b = \frac{\partial a}{\partial t}$, et soit A et B les matrices de taille $2N \times 2N$, définies par blocs par :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & M \\ \hline -R & -2kD \end{array} \right) \quad \text{et} \quad B = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & M \end{array} \right),$$

l'équation (7.4) s'écrit alors :

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda B \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Après semi-discrétisation, les premières valeurs propres de \mathcal{A} s'obtiennent donc par résolution d'un problème de valeurs propres généralisées dans \mathbb{R}^{2N} .

7.2 Allure des courbes $k \mapsto \mu(k, \omega)$

Par la méthode décrite dans la partie précédente, on calcule l'abscisse spectrale $\mu(k, \omega)$ pour plusieurs valeurs de k et plusieurs domaines ω .

Les figures 7.1 à 7.3 présentent les courbes $k \mapsto \lambda_{\pm n}(k, \omega)$, $k \mapsto \text{Re}(\lambda_{\pm n}(k, \omega))$ et $k \mapsto \mu(k, \omega)$ dans les trois cas : $\omega = [0, 1]$, $\omega = [1/4, 3/4]$ et $\omega = [0, 1/2]$; pour $N = 30$ fonctions dans la base des éléments finis.

Le premier cas est un cas test car si $\omega = [0, 1]$, il est possible de calculer exactement les valeurs propres (cf. [9]), on obtient :

$$\lambda_{\pm n}(k) = -k \pm \sqrt{k^2 - n^2 \pi^2}$$

Ce qui donne :

$$\mu(k, [0, 1]) = \begin{cases} -k & \text{si } k \leq \pi \\ -k + \sqrt{k^2 - \pi^2} & \text{si } k \geq \pi \end{cases}$$

Les résultats numériques obtenus, dans ce cas $\omega = [0, 1]$, sont bien en accord avec ces expressions explicites, en particulier les courbes $\lambda_{\pm n}(k)$ dans le plan complexe forment des demi-cercles.

Dans les trois cas présentés sur les figures 7.1 à 7.3, ainsi que dans tous les autres cas rencontrés, nous faisons les observations numériques suivantes :

- La valeur propre $\lambda_1(k, \omega)$ devient bien réelle et tend bien vers 0 quand k tend vers $+\infty$, comme cela a été prouvé à la proposition 1.3.1 du chapitre 1. En particulier, ceci implique que $\mu(k, \omega) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$. De plus, on observe, que pour les grandes valeurs de k , l'abscisse spectrale est toujours donnée par $\text{Re}(\lambda_1(k, \omega))$.
- On observe également que toutes les courbes $k \mapsto \mu(k, \omega)$ possède un unique minimum $\mu^*(\omega)$, atteint en un point que nous noterons $k^*(\omega)$.
- En ce minimum global, la courbe $k \mapsto \mu(k, \omega)$ peut :
 - présenter un point anguleux, car les valeurs propres $\lambda_1(k, \omega)$ et $\lambda_{-1}(k, \omega)$ sont confondues (valeur propre double) et deviennent ensuite réelles (phénomène d'*overdamping*, cas $\omega = [0, 1]$) ou car la partie réelle de la valeur propre $\lambda_1(k, \omega)$ devient plus grande que la partie réelle d'une autre valeur propre $\lambda_{n_0}(k, \omega)$ pour laquelle l'abscisse spectrale était jusqu'alors atteinte (cas $\omega = [1/4, 3/4]$).
 - posséder une tangente horizontale car la partie réelle de la valeur propre $\lambda_{n_0}(k, \omega)$, pour laquelle l'abscisse spectrale est atteinte, devient une fonction croissante de k , le point anguleux intervient alors plus tard car pour des valeurs de k suffisamment grandes, l'abscisse spectrale est toujours donnée par $\text{Re}(\lambda_1(k, \omega))$ (cas $\omega = [0, 1/2]$).

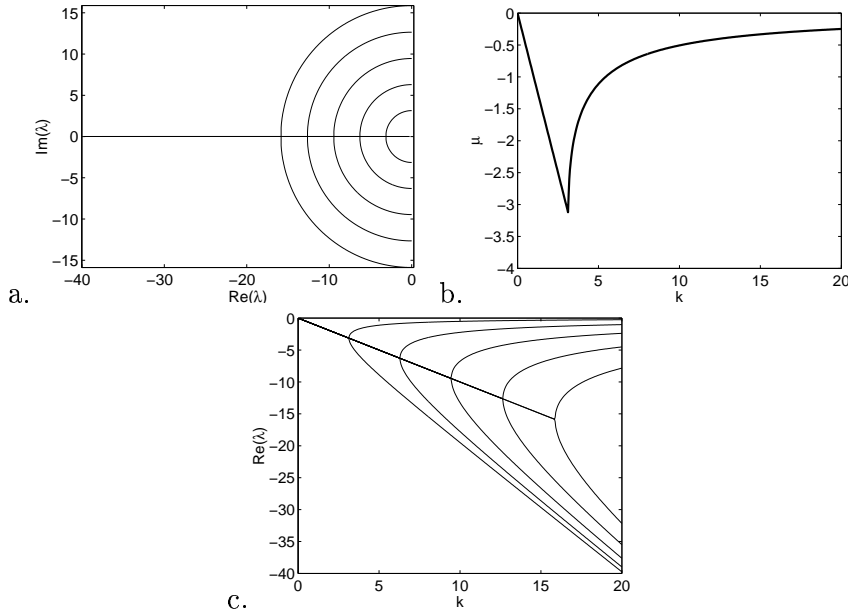


FIG. 7.1 – Cas $\omega = [0,1]$: (a.) courbes $\lambda_{\pm n}(k)$, $1 \leq n \leq 5$, dans le plan complexe, (b.) graphe de $k \mapsto \mu(k, [0,1])$, (c.) graphes de $k \mapsto \text{Re}(\lambda_{\pm n}(k))$, $1 \leq n \leq 5$

Pour avoir une idée de la variation de $k^*(\omega)$ et de $\mu^*(\omega)$ avec la longueur de ω , la figure 7.4 présente les courbes obtenues pour un intervalle collé au bord : $\omega = [0, l]$ et un intervalle centré : $\omega = [1/2 - l/2, 1/2 + l/2]$. Très grossièrement, la fonction k^* décroît avec l , en toute première approximation comme c/l . De même, de façon très approximative, la fonction μ^* décroît avec l ; mais il est surprenant de voir quelques petits intervalles dans le cas $\omega = [0, l]$ sur lesquels μ^* est croissante.

7.3 Erreur engendrée par le critère J

Dans ce cadre monodimensionnel, approcher le taux de décroissance uniforme de l'énergie $\tau(k, \omega) = -\mu(k, \omega)$ par $k \cdot J(\omega) = k \frac{\partial \tau}{\partial k}(0, \omega)$, ce qui revient à linéariser τ au voisinage de l'origine est une source d'erreur. Nous allons analyser l'erreur commise pour des coefficients k inférieurs au seuil d'overdamping $k^*(\omega)$.

Tout d'abord, remarquons que dans le cas très particulier $\omega = [0, 1]$, l'erreur induite est nulle car comme nous venons de le rappeler l'abscisse spectrale est, dans ce cas, linéaire avant l'overdamping.

En dehors de ce cas, $\mu(k, \omega)$ ne se calcule pas de façon explicite et la comparaison doit donc être numérique. La figure 7.5 donne l'erreur relative en % :

$$e(k, \omega) = \frac{k \cdot J(\omega) - \tau(k, \omega)}{\tau(k, \omega)} \times 100$$

pour quatre domaines ω et, à chaque fois, pour des valeurs de k comprise entre 0 et $k^*(\omega)/2$. Cette approximation est tout à fait satisfaisante pour une large plage de valeur de k . Cependant, il existe des cas défavorables, comme par exemple le cas $\omega = [\alpha^*(1/4) - 1/8, \alpha^*(1/4) + 1/8]$ (figure 7.5.c), pour lequel la fonction J possède 3 maxima locaux de hauteurs similaires et le maximum

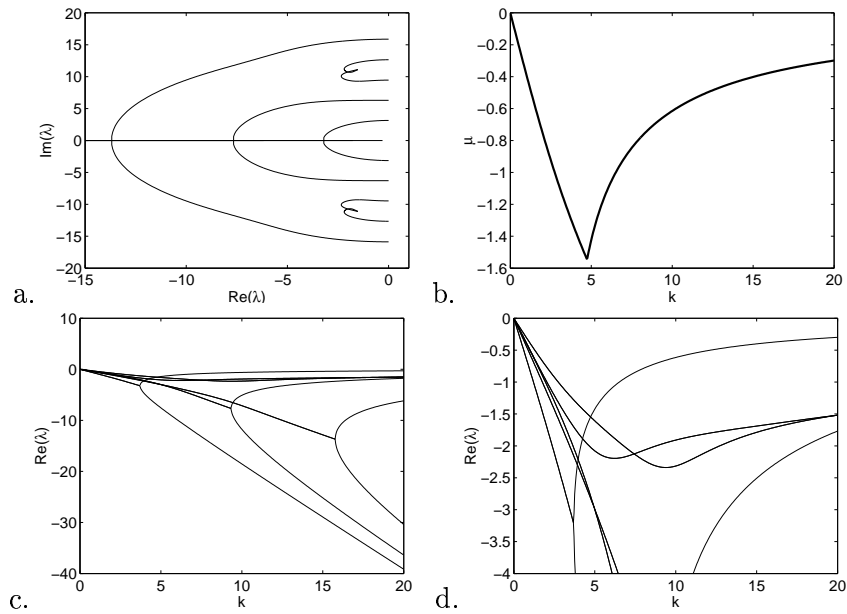


FIG. 7.2 – Cas $\omega = [1/4, 3/4]$: (a.) courbes $\lambda_{\pm n}(k)$, $1 \leq n \leq 5$, dans le plan complexe, (b.) graphe de $k \mapsto \mu(k, [0, 1])$, (c.) graphes de $k \mapsto \text{Re}(\lambda_{\pm n}(k))$, $1 \leq n \leq 5$, (d.) zoom sur (c.)

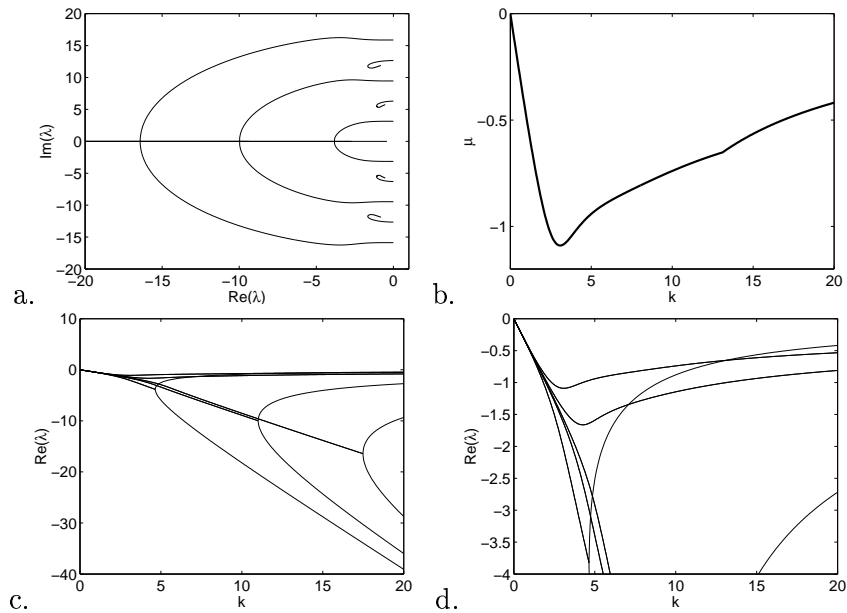


FIG. 7.3 – Cas $\omega = [0, 1/2]$: (a.) courbes $\lambda_{\pm n}(k)$, $1 \leq n \leq 5$, dans le plan complexe, (b.) graphe de $k \mapsto \mu(k, [0, 1])$, (c.) graphes de $k \mapsto \text{Re}(\lambda_{\pm n}(k))$, $1 \leq n \leq 5$, (d.) zoom sur (c.)

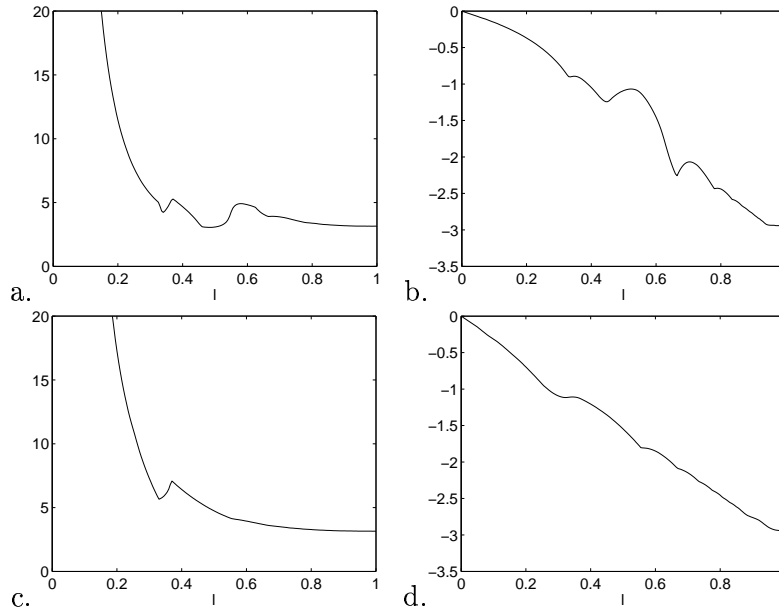


FIG. 7.4 – Pour $\omega = [0, l]$: (a.) graphe de $l \mapsto k^*(\omega)$, (b.) graphe de $l \mapsto \mu^*(\omega)$; pour $\omega = [1/2 - l/2, 1/2 + l/2]$: (a.) graphe de $l \mapsto k^*(\omega)$, (b.) graphe de $l \mapsto \mu^*(\omega)$;

global de J qui est également un maximum local de τ va décroître avec k alors que les autres maxima locaux vont croître avec k , d'où la source d'erreur (cf. figures 7.6.a et 7.6.b).

La figure 7.6 présente pour deux longueurs de domaines l et deux valeurs de k , les graphes de $\alpha \mapsto k.J(\omega)$ et $\alpha \mapsto \tau(k, \omega)$ pour $\omega = [\alpha - l/2, \alpha + l/2]$. Dans le cas d'un domaine de longueur $l = 1/4$, la différence est visible à partir de $k = 1.5$ et les deux courbes ont la même structure. Cependant, pour $k = 2$ on se rend bien compte du phénomène que nous venons de mentionner de décroissance du maximum local qui était le maximum global de J et de croissance des autres maxima locaux. Pour un domaine de longueur $l = 3/4$, la différence est visible pour $k = 1/4$ ce qui est plus petit mais comme la longueur du domaine est plus grande le phénomène d'overdamping a lieu pour de plus petites valeurs de k (environ 3.43 pour $\omega = [\alpha^*(3/4) - 3/8, \alpha^*(3/4) + 3/8]$ contre 5.95 pour $\omega = [\alpha^*(1/4) - 1/8, \alpha^*(1/4) + 1/8]$). De plus, même pour une valeur de $k = 2$, l'erreur relative est inférieure à 2%.

7.4 Optimisation de μ pour d'autres critères

Nous allons dans cette dernière partie utiliser à nouveau des AG pour étudier la position optimale d'un intervalle de contrôle pour trois autres types de contraintes. L'algorithme utilisé est l'algorithme génétique pour l'optimisation d'une fonction d'une ou de deux variables qui a été présenté au chapitre 4.

7.4.1 Contraintes $|\omega| = l$ et $k = k^*(\omega)$

Tout d'abord, nous avons vu que pour tout domaine ω , il semblait y avoir une valeur optimale $k^*(\omega)$ pour laquelle l'abscisse spectrale est minimale parmi toute les valeurs de k . Nous allons

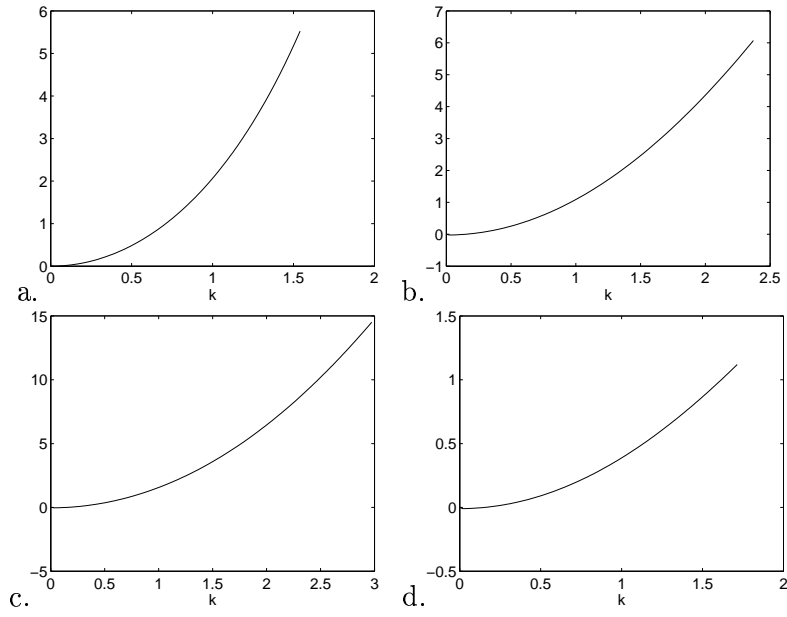


FIG. 7.5 – Erreur relative en % : $(k \cdot J(\omega) - \tau(k, \omega)) / \tau(k, \omega) * 100$ pour k compris entre 0 et $k^*(\omega)/2$ dans les 4 cas : (a.) $\omega = [0, 1/2]$, (b.) $\omega = [1/4, 3/4]$, (c.) $\omega = [\alpha^*(1/4) - 1/8, \alpha^*(1/4) + 1/8]$ et (d.) $\omega = [\alpha^*(3/4) - 3/8, \alpha^*(3/4) + 3/8]$

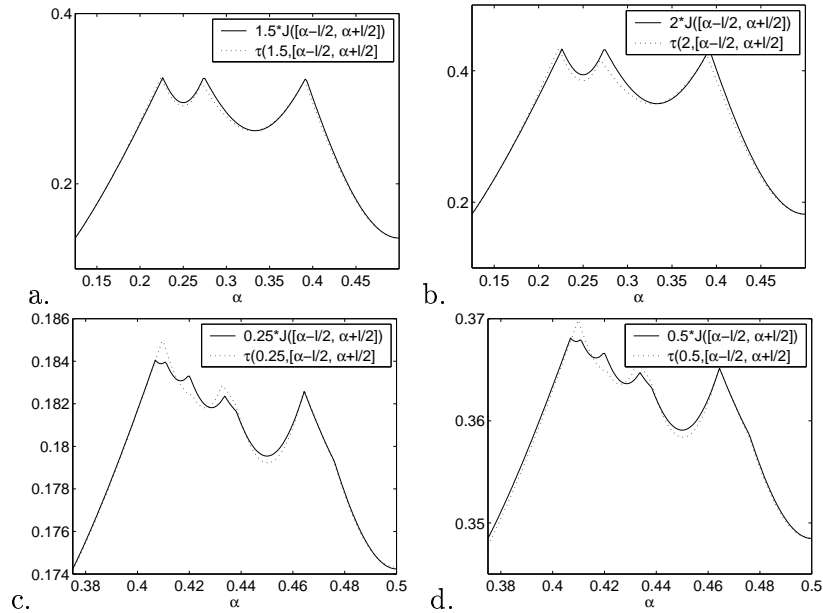


FIG. 7.6 – Erreur entre $k \cdot J([\alpha - l/2, \alpha + l/2])$ et $\tau(k, [\alpha - l/2, \alpha + l/2])$: pour $l = 0.25$ avec (a.) $k = 1.5$ et (b.) $k = 2$; et pour $l = 0.75$ avec (c.) $k = 0.25$ et (d.) $k = 0.5$

donc, pour une longueur l donnée, optimiser la position de l'intervalle de contrôle ω de longueur l sachant que le coefficient k vaut $k^*(\omega)$; c'est-à-dire que nous allons minimiser la fonction d'une variable suivante, définie sur $[l/2, 1/2]$ par :

$$\alpha \mapsto \mu(k^*([\alpha - l/2, \alpha + l/2]), [\alpha - l/2, \alpha + l/2])$$

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 7.7.

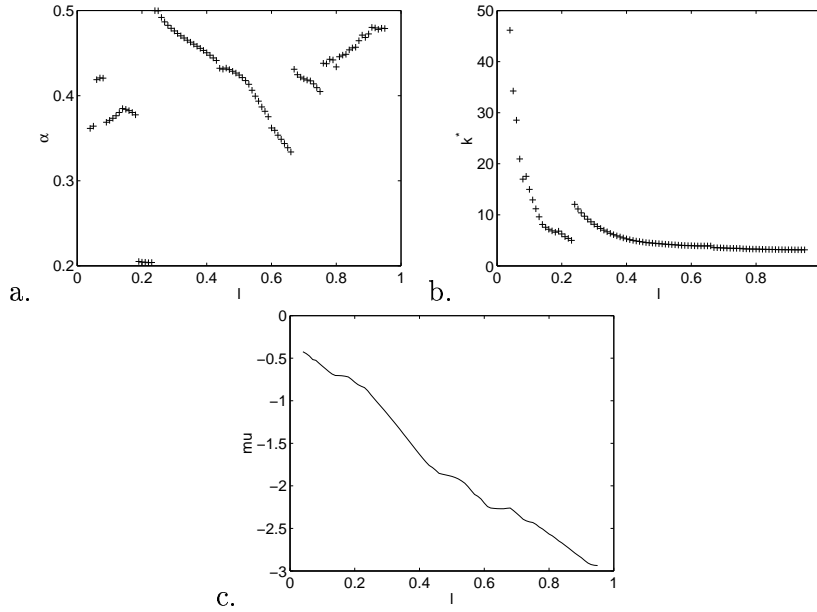


FIG. 7.7 – (a.) graphe de $l \mapsto \alpha^*(l)$, (b.) graphe de $l \mapsto k^*(l)$, (c.) graphe de $l \mapsto \mu^*(l)$

7.4.2 Contrainte $k \cdot |\omega| = a$

Au chapitre 2, nous avons rencontré, en relaxant le problème initial, un problème du type suivant : trouver une fonction a^* qui maximise le taux de décroissance uniforme des solutions du problème :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + a(x)u_t(x,t) = 0, & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

parmi les fonction a de l'ensemble :

$$L_M = \left\{ a \in L^\infty(0,1), 0 \leq a \leq M, \int_0^1 a(x)dx = cM \right\}$$

Dans ce chapitre 7, nous travaillons avec une équation du type :

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + k \cdot \chi_\omega(x)u_t(x,t) = 0, \quad x \in \Omega, t > 0,$$

où ω est un intervalle, aussi au lieu de fixer, la longueur de contrôle, il est possible de fixer l'intégrale de la fonction $k \cdot \chi_\omega(x)$, c'est-à-dire le produit $k \cdot |\omega|$. Il s'agit donc, pour une valeur donnée de l'aire $a = k \cdot |\omega|$, de minimiser la fonction de deux variables suivante :

$$(\alpha, l) \mapsto \mu(a/l, [\alpha - l/2, \alpha + l/2])$$

Les résultats sont les suivants : quelque soit la valeur de la contrainte $a = k \cdot |\omega|$, le meilleur contrôle trouvé est $w = [0,1]$ et $k = a$. Pour une contrainte a inférieure à π , ce phénomène n'est pas surprenant parce qu'alors on a $\mu = -a = -k \cdot |\omega|$ et on sait que $\mu \geq -a$. En revanche, quand a est plus grand que π , ce résultat est plus surprenant car à cause du phénomène d'overdamping, le taux de décroissance de l'énergie est une fonction décroissante de a .

Ceci implique en particulier que, bien qu'il existe des contrôles $a(x)$ pour lesquels le taux de décroissance est plus grand que π , comme l'ont montrés P.Freitas numériquement (cf. [13]) et C. Castro et S. Cox théoriquement (cf. [6]), il n'en existe pas de la forme :

$$a(x) = k \cdot \chi_{[a,b]}(x).$$

7.4.3 Contraintes $k \cdot |\omega| = a$ et $|\omega| \leq 1/2$

Enfin, comme nous avons vu que sous la seule contrainte $k \cdot |\omega| = a$, le contrôle optimal était toujours l'intervalle $[0,1]$, nous allons ajouter une contrainte de longueur par exemple $|\omega| \leq 1/2$. Il s'agit donc toujours de minimiser la fonction de deux variables :

$$(\alpha, l) \mapsto \mu(a/l, [\alpha - l/2, \alpha + l/2])$$

mais après avoir restreint son ensemble de définition.

La figure 7.8 présente les contrôles optimaux obtenus : pour un grande plage de valeurs de a la meilleur contrôle est de longueur $1/2$, puis la longueur optimale décroît doucement quand a augmente, pendant cette phase de décroissance le contrôle optimal est collé au bord de Ω . La figure 7.9 présente le graphe de l'abscisse spectrale optimale en fonction de a comparé au graphe de l'abscisse spectrale du contrôle tel que $\omega = [0,1/2]$ et $k = 2a$ (en pointillés).

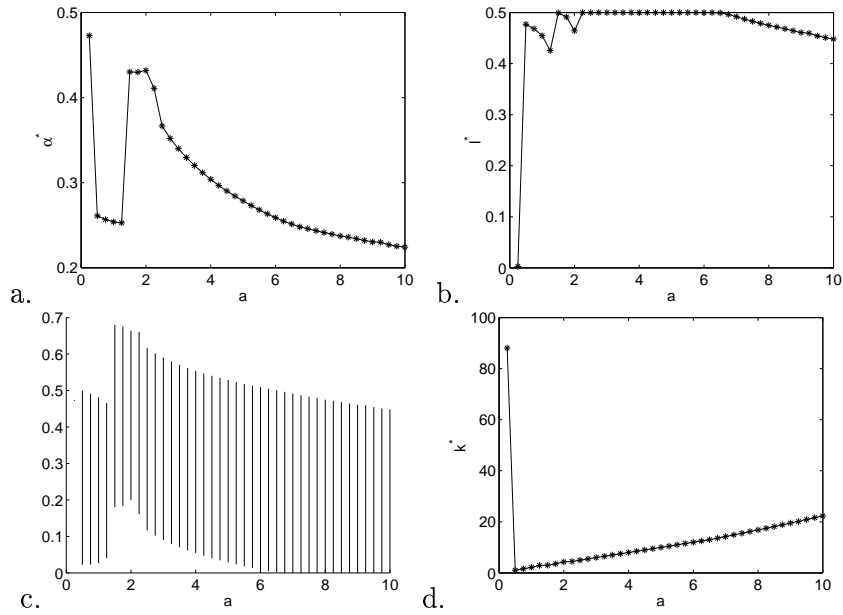


FIG. 7.8 – (a.) Graphe de la fonction $\alpha^*(a)$, (b.) Graphe de la fonction $l^*(a)$, (c.) Intervalles optimaux, (d.) Graphe de la fonction $k^*(a)$

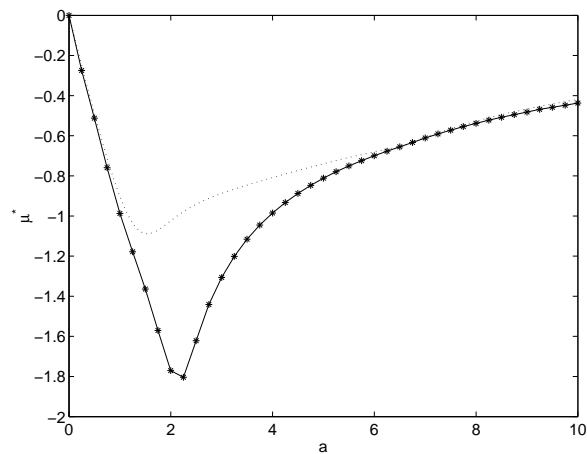


FIG. 7.9 – Graphes de la fonction $\mu^*(a)$ et de la fonction $\mu(2a, [0, 1/2])$ (en pointillé)

Conclusions et perspectives

Ce travail porte sur l'optimisation du taux de décroissance exponentiel uniforme des solutions de l'équation des ondes amorties à l'aide d'un feedback en vitesse. Ce damping est supposé concentré sur un sous-domaine, c'est-à-dire que les fonctions d'amortissements prises en compte sont constantes par morceaux. Les deux quantités qui interviennent dans ce cas sont l'abscisse spectrale de l'opérateur associé au problème μ et une quantité g dite géométrique.

Nous avons choisi d'approcher μ , et d'étudier sa dérivée par rapport au paramètre d'amortissement à l'origine, J . Pour ce critère J , nous avons obtenu des résultats d'existence dans les cas mono- et bidimensionnel. Nous sommes également en mesure de caractériser les géométries optimales. Nous avons enfin maximisé J à l'aide d'algorithmes stochastiques d'optimisation globale. Les résultats numériques obtenus ne sont pas intuitifs mais permettent un gain conséquent sur le taux de décroissance par rapport à des positions que l'on aurait pu proposer en première approche, telle que les positions centrées ou sur le bord.

Le critère J est défini comme un infimum sur les vecteurs propres du laplacien, dans les problèmes complexes, il est souvent approché par le minimum sur quelques modes propres. Nous avons mis en valeur, à la fois de façon théorique et numérique de l'inconvénient de cette méthode: à savoir que le domaine optimal pour les N premiers modes contrôle, en général, très mal le $N + 1^{ième}$ mode ce qui pose un problème si le nombre N est purement technique et arbitraire. De plus, la topologie du domaine optimal dépend fortement du nombre de modes propres pris en compte.

Dans le cas bidimensionnel, le taux de décroissance est également fonction de la quantité géométrique g . Cette quantité, qui dépend du temps moyen passé par chaque rayon géométrique dans la zone de contrôle est difficile à évaluer. Néanmoins, dans le cas particulier du carré pour lequel la zone de contrôle est une réunion de carrés, après avoir étudié en détail le comportement des rayons géométrique et démontré un théorème d'inversion, nous sommes capable de proposer un algorithme de calcul exact de g .

L'optimisation de cette quantité géométrique par les algorithmes stochastiques conduit à un résultat surprenant. La valeur du critère J pour les domaines optimaux pour g est plus grande que la valeur obtenue pour μ . Ce qui montre que dans ce cas et pour les petites valeurs du paramètre d'amortissement, le critère g est plus petit que le critère μ . Alors qu'il est généralement admis le contraire.

Les modèles physiques qui sont gouvernés par les équations étudiées dans cette thèse restent des problèmes modèles. Cependant, les résultats obtenus permettent de mettre en valeur quelques idées de comportement pour les problèmes plus complexes. Cependant, il ne me semble

pas évidant de calculer de façon exacte ou approchée la quantité géométrique g pour des géométries moins simples en s'inspirant directement du cas du carré. En revanche, l'approximation de l'abscisse spectrale par sa dérivée à l'origine J ainsi que l'optimisation numérique de J est facilement applicable aux problèmes plus complexes.

Annexe

Nous allons donner ici la preuve complète du théorème 3.2.1 du chapitre 3. Cette démonstration en anglais est tirée d'un projet d'article avec Emmanuel Humbert car elle est issue d'un travail commun. Les notations sont différentes de celles utilisées dans le reste de cette thèse :

- on note $\mathcal{Q} = [0,1]^2$ la carré unité ou le tore unité selon les points de vue,
- en paramétrisant un rayon géométrique γ par sa longueur, nous définissons une fonction également notée γ de \mathbb{R}^+ dans \mathcal{Q} ,
- l'ensemble des rayons géométriques est noté \mathcal{C} ,
- la quantité c_1 est définie par :

$$c_1(\omega) = g(\omega) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{\gamma \in \mathcal{C}} \frac{1}{t} \int_0^t \chi_\omega(\gamma(s)) ds,$$

- tandis que la quantité c_2 est définie par :

$$c_2(\omega) = G(\omega) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \chi_\omega(\gamma(s)) ds,$$

- soit γ_t l'image par l'application γ du segment $[0,t]$,
- on note alors :

$$\mathcal{C}' = \bigcup_{t > 0} \{\gamma_t | \gamma \in \mathcal{C}\},$$

- si la courbe γ de longueur t appartient à \mathcal{C}' , on pose :

$$m(\gamma) = \frac{1}{t} \int_0^t \chi_\omega(\gamma(s)) ds,$$

- il est possible d'étendre la définition de m à \mathcal{C} en posant, pour γ appartenant à \mathcal{C} :

$$m(\gamma) = \lim_{t \rightarrow +\infty} m(\gamma_t).$$

Pour la preuve, nous aurons besoin des lemmes suivants déjà démontrés dans le chapitre 3 :

Lemme 7.0.1

$$0 \leq c_2(\omega) \leq \frac{\mathcal{A}(\omega)}{\mathcal{A}(\mathcal{Q})} = \mathcal{A}(\omega) \quad (1)$$

Lemme 7.0.2 *Let $\gamma = (X, \alpha) \in \mathcal{Q} \times [0, 2\pi[$ with $\tan(\alpha) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. For all $\epsilon > 0$, there exists $N > 0$ such that*

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^t \chi_\omega(\gamma(s)) ds - \mathcal{A}(\omega) \right| \leq \epsilon$$

for all $t \geq N$. Moreover, N is independent of $X = \gamma(0)$. It depends only on α .

La preuve du théorème est alors la suivante :

First, it is clear that

$$c_1(\omega) \leq c_2(\omega) \quad (2)$$

Indeed, for all $\gamma' \in \mathcal{C}$ and all $t > 0$, we have $m(\gamma'_t) \geq \inf_{\gamma \in \mathcal{C}} m(\gamma_t)$. Hence,

$$m(\gamma') = \lim_{t \rightarrow +\infty} m(\gamma'_t) \geq \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{\gamma \in \mathcal{C}} m(\gamma_t) = c_1(\omega).$$

Since this equality is true for all $\gamma' \in \mathcal{C}$, this shows (2).

We now prove that

$$c_1(\omega) \geq c_2(\omega) \quad (3)$$

We fix $\epsilon > 0$ and we choose a sequence $(\gamma^n)_n \subset \mathcal{C}$ and a sequence $(t_n)_n$ which tends to $+\infty$ such that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m(\gamma^n_{t_n}) = c_1(\omega) \quad (4)$$

For all $n \in \mathbb{N}$, there exists $x_n \in Q$ and $\theta_n \in [0, 2\pi[$ such that $\gamma^n = (x_n, \theta_n)$. Up to a subsequence, we can assume that there exists $(x, \theta) \in Q \times [0, 2\pi]$ such that

$$\lim_n x_n = x \text{ and } \lim_n \theta_n = \theta$$

We claim that there exists $N > 0$ such that

$$m((y, \theta)_N) \geq c_2(\omega) - \epsilon \text{ for all } y \in Q \quad (5)$$

If $\tan(\theta) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, then N is given by lemma 7.0.2. Indeed, by lemma 7.0.2 and relation (1),

$$m((y, \theta)_N) \geq \mathcal{A}(\omega) - \epsilon \geq c_2(\omega) - \epsilon$$

If $\tan(\theta) \in \mathbb{Q}$ or if $\tan(\theta) = \infty$, the ray (y, θ) is periodic and the period does not depend on $y \in Q$. We have:

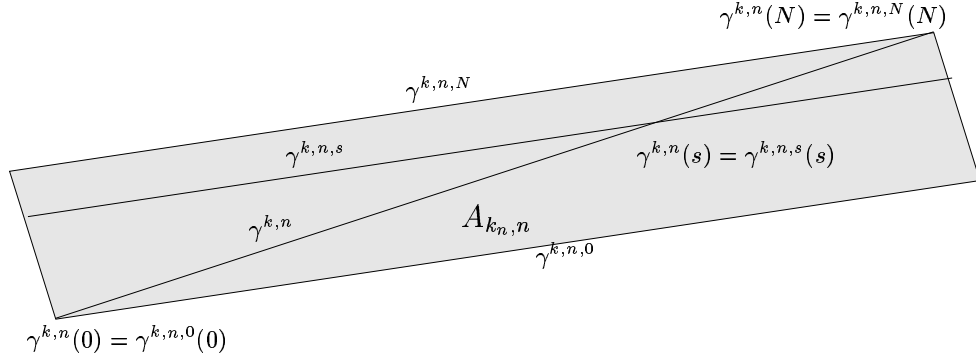
$$m((y, \theta)_N) = m((y, \theta)) \geq c_2(\omega)$$

Thus, one can take the value of this period for N . Clearly, we can assume that t_n is a multiple of N . Indeed, replacing t_n by $t_n + s_n$ where $|s_n| \leq N$ does not change the limit of $m(\gamma^n_{t_n})$. Now, assume that $\theta_n = \theta$. If $\tan(\alpha) \in \mathbb{Q}$ or if $\tan(\alpha) = \infty$, it is clear that $\lim_n m(\gamma^n_{t_n}) - m(\gamma^n) = 0$. If $\tan(\alpha) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, this relation follows from lemma 7.0.2. Then, by relation (4), we obtain that

$$c_1(\omega) \geq \liminf_n m(\gamma^n) \geq c_2(\omega)$$

This proves (3) in the case $\theta_n = \theta$. Hence, we can assume that

$$\theta_n \neq \theta \quad (6)$$



Now, we define, for $k \in \{0, \dots, \frac{t_n}{N} - 1\}$, $x_{k,n} = \gamma^n(kN)$ and $\gamma^{k,n}(t) = \gamma^n(x_{k,n} + t)$ for $t \in [0, N]$. We define also $\tilde{\gamma}^{k,n,s}$ as the unique trajectory of length N and slope θ such that $\tilde{\gamma}^{k,n,s}(s) = \gamma^{k,n}(s)$ and

$$A_{k,n} = \bigcap_{s \in [0, N]} \tilde{\gamma}^{k,n,s}$$

Now, we prove:

Step 1: There exists a sequence $(k_n)_n$ such that

$$|A_{k_n,n} \cap \partial\omega| \leq \epsilon \text{ and } m(\gamma^{k_n,n}) \leq c_1(w) + \epsilon$$

for all n large enough. Here, $|A_{k_n,n} \cap \partial\omega|$ denotes the length of the curve $A_{k_n,n} \cap \partial\omega$. In the following, the length of any curve C will be denoted by $|C|$. Let

$$\mathcal{K}_n = \left\{ k \in \{0, \dots, \frac{t_n}{N} - 1\} \text{ s.t. } m(\gamma^{k,n}) \leq c_1(w) + \epsilon \right\}$$

We then set

$$\Omega = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \left(\overline{\bigcup_{n \geq m; k \in \mathcal{K}_n} x_{k,n}} \right)$$

and

$$\tilde{\Omega} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \left(\overline{\bigcup_{n \geq m; k \in \mathcal{K}_n} \gamma^{k,n}} \right)$$

For $x \in \Omega$, we note γ_x the trajectory of length N and slope θ such that $\gamma_x(0) = x$. Note that Ω and $\tilde{\Omega}$ are not empty. Otherwise, \mathcal{K}_n would be empty too and we would have $m(\gamma^{k,n}) \geq c_1(w) + \epsilon$ and all $n \geq n_0$ and all k . Thus, we would have $m(\gamma_{t_n}^n) \geq c_1(w) + \epsilon$ that contradicts (4). Now, we prove that

$$\tilde{\Omega} = \bigcup_{y \in \Omega} \gamma_y \tag{7}$$

Take a sequence $(x_{l_n,n})_n$ such that $\lim_n x_{l_n,n} = y \in \Omega$. Then, for all $t \in [0, N]$, we have $\lim \gamma_{l_n,n}(t) = \gamma_y(t)$. We obtain that

$$\bigcup_{y \in \Omega} \gamma_y \subset \tilde{\Omega}$$

Conversely, if $z \in \tilde{\Omega}$ then there exists two sequences $(l_n)_n$ such that $l_n \in \mathcal{K}_n$ and $(s_n)_n \subset [0, N]$ such that $z = \lim_n \gamma^{l_n, n}(s_n)$. Up to a subsequence, we can assume that there exists $y \in \Omega$ and $s \in [0, N]$ such that $\lim_n x_{k_n, n} = y$ and $\lim_n s_n = s$. As one can check, this implies that $z = \lim_n \gamma^{k_n, n}(s) = \gamma_y(s)$ and therefore

$$\tilde{\Omega} \subset \bigcup_{y \in \Omega} \gamma_y$$

This proves (7).

We now distinguish two cases.

First, we assume that there exists an infinite sequence $(y_n)_n$ in Ω such that $\gamma_{y_n} \cap \gamma_{y_{n'}} = \emptyset$ if $n \neq n'$. Since $|\partial\omega|$ is finite, one can choose $y \in \Omega$ (y is one of the y_n) such that $|\gamma_y \cap \partial\omega| \leq \frac{\epsilon}{2}$. The definition of Ω implies that there exists a sequence $(k_n)_n$ such that $y = \lim_n x_{k_n, n}$ with $k_n \in \mathcal{K}_n$. Clearly, we have for all $t \in [0, N]$,

$$\lim_n \gamma_{k_n, n}(t) = \gamma_y(t) \quad (8)$$

Set $B_n = \overline{\bigcup_{m \geq n} A_{k_m, m}}$. Obviously, B_n is a decreasing sequence of sets. Moreover, by (8), $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \gamma_y$. Since $|\gamma_y \cap \partial\omega| \leq \frac{\epsilon}{2}$, for all n large enough, we have $|B_n \cap \partial\omega| \leq \epsilon$. Since $A_{k_n, n} \subset B_n$ and since $k_n \in \mathcal{K}_n$, this proves step 1 in this case.

Now, we make the assumption that, for all infinite sequences $(y_n)_n$ in Ω , there exists $n \neq n'$ such that $\gamma_{y_n} \cap \gamma_{y_{n'}} \neq \emptyset$. Then, there exists $(y_n) \subset \Omega$ with $1 \leq n \leq k$ such that $\gamma_{y_n} \cap \gamma_{y_{n'}} = \emptyset$ if $n \neq n'$. We can choose k maximum. This means that for all $y \in \Omega$, there exists $n \in \{1, \dots, k\}$ such that $\gamma_y \cap \gamma_{y_n} \neq \emptyset$. Since $|\gamma_y| = N$, we have: $\gamma_y \subset \gamma'_{y_n}$ where γ'_{y_n} is the trajectory of length $3N + 2$ and slope θ such that $\gamma'_{y_n}(N + 1) = \gamma_{y_n}(0)$. Note that instead of the γ'_{y_n} , one could have considered trajectories of length $3N$. The reason why we take $3N + 2$ will appear later. Using (7), we see that

$$\tilde{\Omega} \subset \bigcup_{n=1}^k \gamma'_{y_n} \quad (9)$$

Let n be fixed. Let

$$A_n = \left\{ t \in [0, t_n] \mid \gamma^n(t) \in \bigcup_{m=1}^k \gamma'_{y_m} \right\}$$

The set $\bigcup_{m=1}^k \gamma'_{y_m}$ is a finite union of disjoint trajectories of finite length and slope θ . Moreover, we know that $\theta_n \neq \theta$ (see (6)). Hence, A_n is a discrete set of points. Moreover, $\bigcup_{m=1}^k \gamma'_{y_m}$ is closed. Then, A_n is closed too. This shows that A_n is finite. Let now $t_1, t_2 \in A_n$ with $t_1 < t_2$. As one can check, there exists $\alpha > 0$ independent of n such that, if $t \leq \alpha |\theta_n - \theta|^{-1}$ then $\gamma^n(t_1 + t) \notin \bigcup_{m=1}^k \gamma'_{y_m}$. Indeed, $\bigcup_{m=1}^k \gamma'_{y_m}$ is a finite union of segments of slope θ . Then, it is clear that the trajectory γ_n , whose slope is θ_n , meets two different segments of $\bigcup_{m=1}^k \gamma'_{y_m}$ in a time proportional to the difference $|\theta_n - \theta|$ of the slopes. Hence $t_2 - t_1 \geq \alpha |\theta_n - \theta|^{-1}$. This proves that

$$\#A_n \leq \frac{t_n}{\alpha} |\theta_n - \theta| \quad (10)$$

Moreover,

$$m(\gamma_{t_n}^n) = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} \mathcal{X}_\omega(\gamma_{t_n}^n(t)) dt = \frac{N}{t_n} \sum_{l=1}^{\frac{t_n}{N}-1} \frac{1}{N} \int_{lN}^{(l+1)N} \mathcal{X}_\omega(\gamma_{t_n}^n(t)) dt = \frac{N}{t_n} \sum_{l=1}^{\frac{t_n}{N}-1} m(\gamma^{l,n})$$

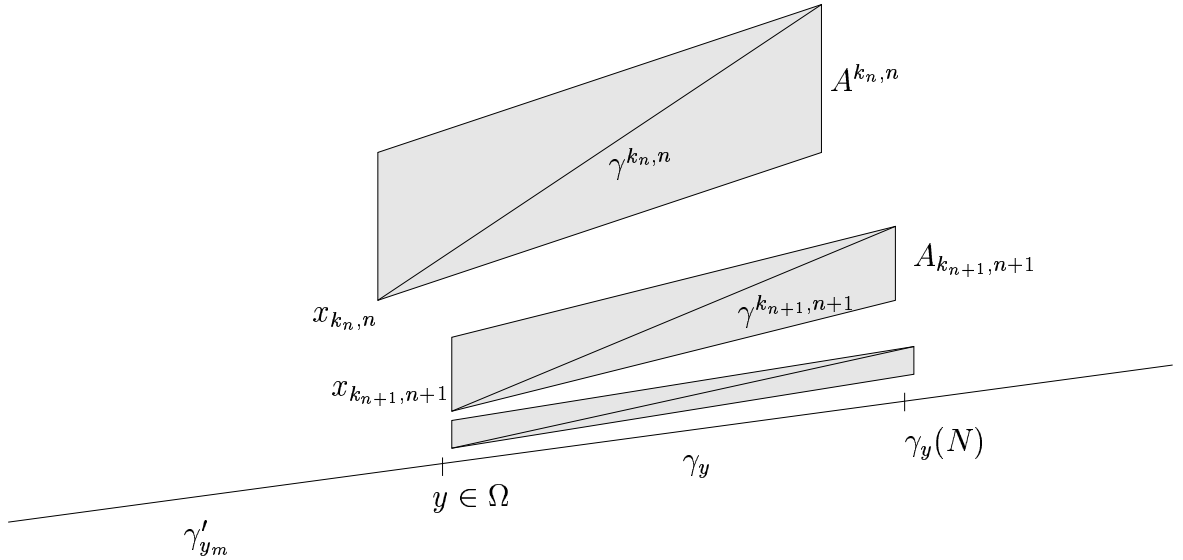
From the definition of K_n , we write that for $l \in \mathcal{K}_n$ we have $m(\gamma^{l,n}) \geq 0$ and we know that for $l \in \{0, \dots, \frac{t_n}{N} - 1\} \setminus \mathcal{K}_n$, we have $m(\gamma^{l,n}) \geq c_1(\omega) + \epsilon$. We obtain that

$$m(\gamma_{t_n}^n) \geq \frac{N}{t_n} \# \left(\{0, \dots, \frac{t_n}{N} - 1\} \setminus \mathcal{K}_n \right) (c_1(\omega) + \epsilon) = \frac{N}{t_n} \left(\frac{t_n}{N} - \#\mathcal{K}_n \right) (c_1(\omega) + \epsilon)$$

Since $\lim_n m(\gamma_{t_n}^n) = c_1(\omega)$, it comes that

$$\#\mathcal{K}_n \geq ct_n$$

where $c > 0$ is independent of n . It follows from (10) that we can choose $k_n \in \mathcal{K}_n$ such that $[k_n N, (k_n + 1)N] \cap A_n = \emptyset$. Hence, $\gamma^{k_n,n} \cap \bigcup_{m=1}^k \gamma'_{y_m} = \emptyset$. Up to a subsequence, we can assume that $\lim_n x_{k_n,n} = y \in \Omega$. Then, for all $t \in [0, N]$, we have: $\lim_n \gamma^{k_n,n}(t) = (y, \theta)(t)$. Moreover, since we have chosen the γ'_{y_m} of length $3N + 2$, we know that there exists m such that $(y, \theta)_N \subset \gamma'_{y_m}$ with $(y, \theta)(0) \neq \gamma'_{y_m}(0)$ and $(y, \theta)(N) \neq \gamma'_{y_m}(N)$. As one can check, this implies that $A_{k_n,n} \cap \bigcup_{m=1}^k \gamma'_{y_m} = \emptyset$ (see figure below).



By (8), we obtain that

$$A_{k_n,n} \cap \tilde{\Omega} = \emptyset \quad (11)$$

Now, we set

$$d_n = \text{dist}(A^{k_n,n}, \gamma'_{y_m}) = \inf_{x \in A^{k_n,n}} \text{dist}(x, \gamma'_{y_m})$$

and

$$d'_n = \sup_{x \in A^{k_n, n}} \text{dist}(x, \gamma'_{y_m})$$

We have $0 < d_n < d'_n$ and $\lim_n d'_n = \lim_n d_n = 0$. Up to a subsequence, we can assume that for all n , $d'_{n+1} < d_n$. In other words, we can assume that the sets $A^{k_n, n}$ are all disjoint. Since $|\partial\omega|$ is finite, we can find a infinite number of $A^{k_n, n}$ such that $|A^{k_n, n} \cap \partial\omega| \leq \epsilon$. Up to a subsequence, we can assume that, for all n , $|A^{k_n, n} \cap \partial\omega| \leq \epsilon$. Since $k_n \in \mathcal{K}_n$, this proves step 1 in this case.

We now let $\bar{\gamma}^n = \gamma^{k_n, n}$. Keeping the same notations than in the definition of $A^{k_n, n}$, we let also $\bar{\gamma}_0^n = \gamma^{k_n, n, 0}$. This means that $\bar{\gamma}_0^n$ is the unique trajectory of slope θ and length N such that $\bar{\gamma}_0^n(0) = \bar{\gamma}^n(0)$.

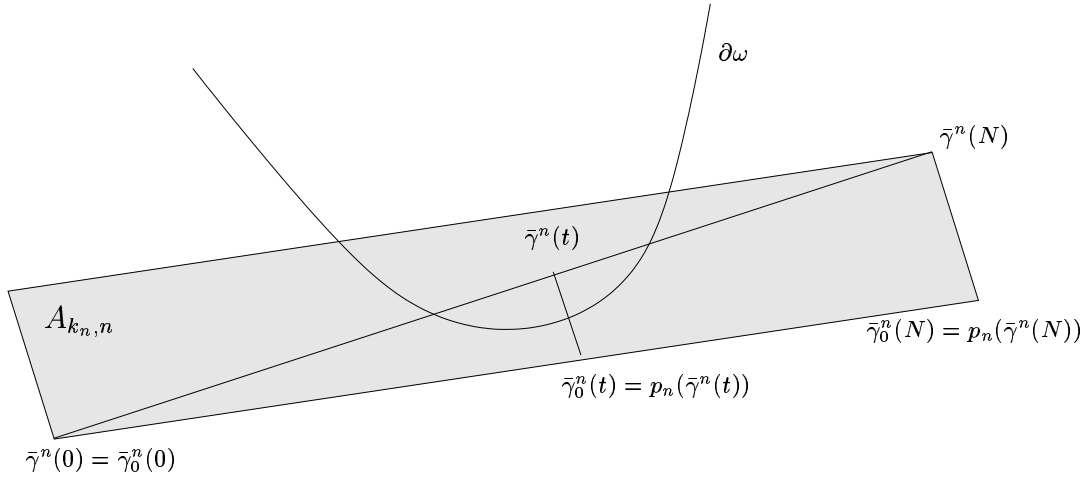
We now prove that :

Step 2 : We have

$$|m(\bar{\gamma}^n) - m(\bar{\gamma}_0^n)| \leq \frac{2}{N}\epsilon$$

for any n large enough.

We now see $\bar{\gamma}^n$ and $\bar{\gamma}_0^n$ as segments of length N in the plane. Let p_n the projection on $\bar{\gamma}_0^n$ in the direction of the line $(\bar{\gamma}^n(N) \bar{\gamma}_0^n(N))$. By Thales theorem, we have for all $t \in [0, N]$, $p_n(\bar{\gamma}^n(t)) = \bar{\gamma}_0^n(t)$.



Let now $t \in [0, N]$. Assume that $\mathcal{X}_\omega(\bar{\gamma}_0^n(t)) \neq \mathcal{X}_\omega(\bar{\gamma}^n(t))$. Then, there exists a point x of $\partial\omega$ between $\bar{\gamma}^n(t)$ and $\bar{\gamma}_0^n(t)$. Thus, $x \in [\bar{\gamma}^n(t), \bar{\gamma}_0^n(t)] \cap \partial\omega$. This shows that $p_n(x) \in p_n(\partial\omega \cap A_{k_n, n})$. Indeed, we remark that, for all $t \in [0, N]$,

$$[\bar{\gamma}^n(t), \bar{\gamma}_0^n(t)] \subset A_{k_n, n}$$

Since $\bar{\gamma}_0^n$ is parametrized by the length, we can identify the segments $[0, N]$ and $\bar{\gamma}_0^n$. We obtain that

$$\{t \in [0, N] \text{ s.t. } \mathcal{X}_\omega(\bar{\gamma}^n(t)) \neq \mathcal{X}_\omega(\bar{\gamma}_0^n(t))\} \subset p_n(\partial\omega \cap A_{k_n, n}) \quad (12)$$

Now, we write that

$$|m(\bar{\gamma}^n) - m(\bar{\gamma}_0^n)| \leq \frac{1}{N} \int_0^N |\mathcal{X}_\omega(\bar{\gamma}^n(t)) - \mathcal{X}_\omega(\bar{\gamma}_0^n(t))| dt$$

By (12), we obtain that

$$|m(\bar{\gamma}^n) - m(\bar{\gamma}_0^n)| \leq \frac{1}{N} |p_n(\partial\omega \cap A_{k_n, n})|$$

We recall that p_n is a projection whose angle tends to $\frac{\pi}{2}$. Hence, for any piece of curve C , we have $|p_n(C)| \leq 2|C|$ (in fact, the constant 2 could be replaced here by a constant c_n which goes to 1 with n). It follows that

$$|m(\bar{\gamma}^n) - m(\bar{\gamma}_0^n)| \leq |\partial\omega \cap A_{k_n, n}|$$

Step 2 is then a direct consequence of step 1.

Step 3: Conclusion

The trajectory $\bar{\gamma}_0^n$ has length N and slope θ . The definition of N (see (5)) then implies that

$$m(\bar{\gamma}_0^n) \geq c_2(\omega) - \epsilon$$

By step 1, we know that

$$m(\bar{\gamma}^n) \leq c_1(\omega) + \epsilon$$

Step 2 then shows that

$$c_2(\omega) - \epsilon \leq c_1(\omega) + \epsilon + \frac{2}{N}\epsilon$$

Note that N can be chosen greater than 1. Since ϵ is arbitrary, we obtain (3). Together with (2), this ends the proof of the theorem. \square

Bibliographie

- [1] M. Asch, G. Lebeau, *The spectrum of the damped wave operator for a bounded domain in \mathbb{R}^2* , Prépublication Université Paris-Sud Mathématiques 99-03, 1999.
- [2] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary*, *SIAM J. Control Optim.*, volume(30), pp. 1024-1065, 1992.
- [3] A. Benaddi and B. Rao *Energy decay rate of wave equations with indefinite damping*, *J. Differential Equations*, volume(161), no. 2, pp. 337- 357, 2000.
- [4] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Masson, 4ème edition, 1993.
- [5] N. Burq, *Contrôle de l'équation des ondes dans des ouverts peu réguliers*, Preprint 1054, CMAP, Ecole Polytechnique.
- [6] C. Castro and S. Cox *Achieving arbitrarily large decay in the damped wave equation*, *SIAM J. Control Optim.*, volume(39), no 6, pp. 1748-1755, 2001.
- [7] G. Chen, S.A. Fulling, F.J. Narcowich and S. Sun, *Exponential decay of energy of evolution equations with locally distributed damping*, *SIAM J. Appl. Math.*, volume(15), pp. 266-301, 1991.
- [8] S. Cox, *Aye there is a rub*, Preprint #3, <http://www.caam.rice.edu/cox/prelist.html>.
- [9] S. Cox and E. Zuazua, *The rate at which energy decays in a damped string*, *Comm. in partial differential equations*, volume(19), pp. 213-243, 1994.
- [10] C. M. Dafermos, *Asymptotic behavior of solutions of evolution equations*, *Nonlinear Evolution Equations* , pp. 103-123, Academic Press, New York, 1978.
- [11] R. Dautray, J.L.Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique : pour les sciences et les techniques*, Tome 8, Masson, Paris, 1988.
- [12] R. E. Edwards, *Functional Analysis Theory and Applications*, *Dover publications, N.Y.*, Third edition 1995.
- [13] P. Freitas *Optimizing the rate of decay of solutions of the wave equation using genetic algorithms: a counterexample to the constant damping conjecture*, *SIAM J. Control Optim.*, volume(37), no 2, pp. 376-387, 1999.
- [14] P. Freitas, *On some eigenvalue problems related to the wave equation with indefinite damping*, *J. Differential Equations*, volume(127), no 1, pp. 320-335, 1996.
- [15] P. Freitas and E. Zuazua *Stability results for the wave equation with indefinite damping*, *J. Differential Equations*, volume(132), no 2, pp. 338-352, 1996 .
- [16] P. Gérard, E. Leichtnam *Ergodic properties for the Dirichlet problem*, *Duke Math. J.*, volume 71, no 2, p 559-607, 1993.
- [17] D.E. Goldberg, *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*, Addison-Wesley, Reading MA, 1989.

- [18] H. Hamda, F. Jouve, E. Lutton, M. Schoenauer and M. Sebag, *Représentations non structurées en optimisation topologique de formes par algorithmes évolutionnaires*, *ESAIM Actes du 32ème congrès d'analyse numérique CANUM 2000*, 2000.
- [19] A. Haraux, *Semilinear hyperbolic problems in bounded domains*, *Math. Reports*, volume(3), part. 1, 1987.
- [20] G.H. Hardy, E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford science publications, Fifth Edition 1979.
- [21] A. Henrot, M. Pierre, *Optimisation de forme*, A paraître.
- [22] J. Holland, *Adaptation in natural and artificial systems*, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- [23] C. Kane, *Algorithmes génétiques et Optimisation topologique*, Thèse, Université de Paris VI, juillet 1996.
- [24] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer Verlag, 2nd edition, 1984.
- [25] G. Lebeau, Equation des ondes amorties, Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics, Mathematical Physics Studies Book Series, Kluwer's, p. 73-109.
- [26] J. Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès, *Analyse*, tome 2, Dunod Université, 1974.
- [27] J. Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès, *Equations différentielles et intégrales multiples*, tome 4, Dunod Université, 1974.
- [28] R. Melrose, J. Sjöstrand, *Singularities of boundary value problems I*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 28 (1975) 501-523.
- [29] Z. Michalewicz, *Genetic algorithms + data structures = evolution programs*, *Artificial Intelligence*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [30] A.Okabe, B. Boots, K. Sugihara, S.N. Chiu, D.G. Kendall, *Spatial tessellations: concepts and applications of Voronoi diagrams*, John Wiley & sons, 2nd edition, Chichester, 2000.
- [31] P. Pólya, G. Szego, *Problems and Theorems in Analysis I*, Springer-Verlag, 1978.
- [32] J. Rauch, M. Taylor *Decay of solutions to nondissipative hyperbolic systems on compact manifolds.*, *Comm. Pure Appl. Math.*, volume(28), no 4, pp. 501-523, 1975.
- [33] P.-A. Raviart, J.-M. Thomas *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles* Dunod, Paris, 1998.
- [34] M. Schoenauer, Z. Michalewicz, *Evolutionary Computation*, Control and Cybernetics, volume 26(3) pp. 307-338.
- [35] S. Tabachnikov, *Billiards*, SMF collection Panoramas et Synthèses, 1995.
- [36] L. Tonelli, *Serie Trigonometriche*, Ed. Nicola Zanichelli, Bologna, 1928.