Monodromie du problème de Cauchy ramifié et ramification autour d'un ensemble analytique

Renaud Camales

MONODROMIE DU PROBLÈME DE CAUCHY RAMIFIÉ
&
RAMIFICATION AUTOUR D'UN ENSEMBLE ANALYTIQUE

Remerciements

Je tiens à remercier Claude Wagschal pour m'avoir encadré durant cette thèse tout en ayant su m'encourager et me laisser libre dans l'élaboration de mes propres idées.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance à Jean Vaillant de me faire l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je remercie Philippe Charpentier et Masatake Miyake d'avoir bien voulu s'acquitter de la tâche ingrate d'évaluer ce travail, chose qu'ils ont faite avec autant de rapidité que d'efficacité.

Je prie Jean-Pierre Ramis de trouver ici mes remerciements pour avoir accepté de participer au jury.

Naturellement, mes premières pensées vont vers mes parents qui m'ont toujours soutenu et encouragé quelles qu'aient été mes décisions. Sans eux cette thèse ne serait pas.

Merci à Téquila qui par ses siestes de vingt heures et son (sale) caractère m'a fait comprendre une chose importante : CARPE DIEM.

Je voudrais finir par tous mes AMIS, mathématiciens ou non, sans qui le déroulement de cette thèse ne se serait jamais aussi bien passé :
Pierre & Marie pour toutes les soirées accompagnées de si bons vins ; Olivier & Florence pour les analyses rugbystiques d'après matches ; Pascal & Titi pour des moments inoubliables en voiture (n'est-ce-pas Pascal ?) ; Pawomoudom pour toutes les soirées foot ; Hélène et son fameux régime alimentaire du midi (chorizo-pizza-crème au chocolat) ; Claudia pour sa bonne humeur permanente et son accent aussi délicieux que ses chaussures sont originales ; Steph & Tine pour les innombrables soirées ; Marc, Coco & Charlotte (on attend le surnom !) pour les profiteroles faites

maison ; Laurence et tous ces morceaux d'Arthur si délicieux ; Fred pour les soirées bières à la descente de l'avion ; Kiki & Mumu pour les tarots jusqu'au bout de la nuit ; Karim, Jihène, Olivier, Sandrine, Tof, Guillaume, Sophie, Nico, Marion, J-P, Jean-Michel, Mathieu & Stouf, Magali, José, Lolo, Philou & Gaëlle, Seb & Sophie, Frédéric...Merci à tous pour tous les moments partagés et de me supporter, chose pas toujours facile. (Je m'excuse auprès de ceux que j'ai oubliés, mais c'est uniquement un oubli sur papier et non pas du cœur !)

Last but not least : Mention spéciale à Jean-Philippe pour les quinze années d'amitié passées et pour toutes les autres à venir.

It's a long way to the top.
AC/DC

Introduction

La première partie de cette thèse consiste en l'étude de la monodromie de la solution du problème de Cauchy ramifié. Plus précisément, nous donnons une estimation du spectre de la monodromie de la solution du problème suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} a(x,D)u(x) & = & v(x), \\ \\ D_0^h u(x) & = & w_h(x') \quad \text{pour } x_0 = 0,\ 0 \leq h \leq m-1 \end{array}\right. \tag{1}$$

où $a(x,D)$ est un opérateur d'ordre m à caractéristiques multiples de multiplicité constante, v est ramifié autour des caractéristiques de l'opérateur issues de $T : x_0 = x_1 = 0$ et les w_h sont ramifiés autour de T. On sait, d'après le théorème de Leichtnam [12, 19], que la solution de ce problème est aussi ramifiée autour de la réunion K des caractéristiques issues de T. On peut montrer alors le théorème suivant.

Théorème *Il existe Ω', voisinage ouvert de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$, tel que le problème (1) admette une solution $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}(\Omega' \setminus K))$ et tel que si les données v, w_h sont de détermination finie, alors u est aussi de détermination finie et on a, pour tout lacet γ tracé dans $\Omega' \setminus K$*

$$\sigma_\gamma(v) \subset \sigma_\gamma(u) \subset \sigma_\gamma(v) \cup \bigcup_{i=1}^{d} \sigma_{\gamma_i}(v) \cup \bigcup_{i=1}^{d} \sigma_{\gamma_i}(w)$$

où γ_i désigne le lacet $s \mapsto (0, k_i(\gamma(s)), a'')$ ($k_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, d$, désignant les équations locales des hypersurfaces caractéristiques issues de T), où $\sigma_\delta(f)$ désigne le spectre de la monodromie de f le long du lacet δ et où $w = (w_0, \ldots, w_{m-1})$. De plus, si v est à monodromie résoluble, alors la solution est à monodromie résoluble.

Naturellement, toutes ces notions seront détaillées plus précisément au chapitre 2 de la partie 1.

La preuve de ce théorème passe tout d'abord par la résolution de ce théorème dans le cas où $v \equiv 0$. On est alors amené à étudier la monodromie de solutions de problèmes intégro-différentiels étudiés par Pongérard-Wagschal [19]. Ce sont des problèmes de la forme

$$\begin{cases} (D_0^m - A_m(x,D))u(t,x) = \displaystyle\sum_{l\in\mathcal{L}} A_l^m(x,D)D_t^{-l}u(t,x) + w_m(t,x), \\ \\ (D_0^h - A_h(x,D))u(t,x) \\ \qquad\qquad = \displaystyle\sum_{l\in\mathcal{L}} A_l^h(x,D)D_t^{-l}u(t,x) + w_h(t,x) \text{ pour } x_0 = 0,\ 0 \le h < m. \end{cases}$$

Les hypothèses liées à ces problèmes sont les suivantes : les opérateurs A_h et A_l^h sont des opérateurs différentiels linéaires à coefficients holomorphes dans un voisinage ouvert Ω_1 de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$; l'ensemble $\mathcal{L}$ est une partie finie de $\mathbf{Z}^*$. On suppose enfin que les ordres des opérateurs vérifient pour tout $0 \le h \le m$

$$\text{ordre } A_h \le h, \qquad \text{ordre}_{x_0} A_h < h,$$

$$\text{ordre } A_l^h \le \begin{cases} h+l-1 & \text{si } l < 0, \\ h+l & \text{si } l > 0. \end{cases}$$

Enfin, les données w_h $(0 \le h \le m)$ sont supposées holomorphes sur $\mathcal{R}(O) \times \Omega$ où O est un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et Ω un voisinage simplement connexe de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$.

Lorsque $v \equiv 0$, on résoud en fait la monodromie dans le cadre du théorème d'Hamada-Takeuchi, sous certaines hypothèses concernant l'ouvert O. La preuve du théorème général est alors une conséquence relativement facile du cas $v \equiv 0$.

On précise ensuite la solution du problème lorsque $v \equiv 0$ dans le cadre du théorème d'Hamada-Leray-Wagschal [5, 19]. Pour cela, on utilise la structure des fonctions de détermination finie dans un disque pointé. Ce sont les fonctions qui s'écrivent sous la forme

$$\sum_{m\in M} t^{p_m} \sum_{k=0}^{q_m} a_{km}(t)[\ln t]^k$$

où M est un ensemble fini, $p_m \in \mathbf{C}$ et $a_{km} \in \mathcal{H}(\dot{D}_\omega)$ avec $\dot{D}_\omega = \{z \in \mathbf{C};\ 0 < |z| < \omega\}$. On définit des espaces $h(p,q)$ de la manière suivante.

Définition *Soient $p \in \mathbf{C}$ tel que $\mathcal{R}e(p) \in [0,1[$ et $q \in \mathbf{N}$. On dit que $u \in h(p,q)$ si il existe un réel $\omega > 0$ et Ω un voisinage ouvert simplement connexe de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$ tels que $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}(\dot{D}_\omega) \times \Omega)$ soit de la forme suivante*

$$\sum_{k=0}^{q} t^p a_k(t,x)[\ln t]^k$$

où les fonctions a_k sont holomorphes sur $\dot{D}_\omega \times \Omega$ et où $a_q \in \mathcal{H}(D_\omega \times \Omega)$ lorsque $p = 0$.

On prouve alors le théorème suivant

Théorème *Si les germes w_h sont dans un même espace $h(p,q)$ et $v \equiv 0$, alors la solution u du problème (1) pourra s'écrire*

$$u(x) = \sum_{i=1}^{d} u_i(k_i(x), x)$$

avec $u_i \in h(p,q)$ pour $i = 1, \ldots, d$.

Il est à noter que C. Wagschal [21] a montré un résultat analogue dans le cas d'un opérateur à caractéristiques simples. Il définit des espaces $\tilde{h}(p,q)$ par

Définition *Soient $p \in \mathbf{C}$ et $q \in \mathbf{N}$. On dit que $u \in \tilde{h}(p,q)$ si il existe un réel $\omega > 0$ et Ω un voisinage ouvert simplement connexe de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$ tels que $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}(\dot{D}_\omega) \times \Omega)$ soit de la forme suivante*

$$\begin{cases} t^p P_q(x, [\ln t]) & \text{si } p \text{ n'est pas un entier } <0 \\ t^p P_{q-1}(x, [\ln t]) + P_q(x, [\ln t]) & \text{si } p \text{ est un entier } <0 \text{ et } q>1 \\ P_0(x) & \text{si } p \text{ est un entier } <0 \text{ et si } q = 0. \end{cases}$$

où les fonctions $P_i(x,\xi)$, $\xi \in \mathbf{C}$ sont des polynômes en ξ de degré $\leq i$, dont les coefficients sont holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$.

Il obtient alors le théorème

Théorème *Si les germes w_h sont dans un même espace $\tilde{h}(p,q)$ et $v \equiv 0$, alors la solution u du problème (1) pourra s'écrire*

$$u(x) = \sum_{i=1}^{d} u_i(k_i(x), x)$$

avec $u_i \in \tilde{h}(p,q)$ pour $i = 1, \ldots, d$.

Ce théorème donne aussi un résultat concernant l'ordre de la singularité polaire de la solution, résultat qui ne peut être obtenu pour un opérateur à caractéristiques multiples de multiplicité constante. En effet, Y. Hamada [4] a donné l'exemple d'un opérateur à caractéristiques multiples de multiplicité constante dont les données de Cauchy présentent des singularités polaires mais dont la solution n'admet que des singularités essentielles

$$\begin{cases} [D_0^2 - D_1]u(x) = 0, \\ u(x) = 0 \quad \text{pour } x_0 = 0, \\ D_0 u(x) = \dfrac{1}{x_1} \quad \text{pour } x_0 = 0. \end{cases}$$

La solution s'écrit alors

$$u(x) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{(2n)!}\Big(\frac{x_0^2}{x_1}\Big)^n;$$

les singularités de u sont bien des singularités essentielles sur l'hypersurface caractéristique double

$$K = \{x;\ x_1 = 0\}.$$

Dans la deuxième partie, nous abordons l'étude du problème de Cauchy ramifié non caractéristique

$$\begin{cases} a(x,D)u(x) = v(x), \\ D_0^h u(x) = 0 \quad \text{pour } x_0 = 0,\ 0 \leq h \leq m-1 \end{cases}$$

où v est ramifié autour d'un ensemble analytique L de codimension 1. Les hypothèses concernant l'opérateur $a(x,D)$ sont les suivantes : on suppose que c'est un opérateur d'ordre 2 dont les hypersurfaces caractéristiques sont en involution et que l'on peut l'écrire sous la forme

$$a(x,D) = a_1(x,D)a_2(x,D) + b(x,D)$$

où les $a_i(x,D)$ sont des opérateurs du premier ordre et $b(x,D)$ est un opérateur d'ordre 1. Via un changement de coordonnées locales, on pourra supposer que $a_1(x,D) = D_0$. Le principe, ici, est d'écrire la solution sous la forme d'une intégrale double au voisinage d'un point $a = (0,a')$ d'holomorphie de v. Plus précisément, en notant $k(x) = (k_1(x),\ldots,k_n(x))$ où k_i est la solution du problème

$$\begin{cases} a_2(x,D)k_i(x) = 0, \\ k_i(x) = x_1 \text{ pour } x_0 = 0, \end{cases}$$

on a le théorème suivant.

Théorème *Il existe un voisinage ouvert connexe Ω' de l'origine de $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^{n+1}$ et un germe holomorphe f, au point $(0,0,a)$, se prolongeant en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\Omega' \setminus L')$, où $L' = \{(t_1, t_2, x) \in \Omega';\ (x_0 - t_1 - t_2, k(t_2, x')) \in L\}$, tel que, au voisinage du point a, on ait*

$$u(x) = \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0 - t_2} f(t_1, t_2, x)dt_1 = \int_{\Delta_2} x_0^2 f(s_1 x_0, s_2 x_0, x)ds \tag{2}$$

où Δ_2 est le simplexe euclidien réel standard de dimension 2 et $ds = ds_1 \wedge ds_2$.

On étudie ensuite le prolongement analytique de cette intégrale. Nous n'avons écrit que le cas d'un opérateur d'ordre 2 ; pour un opérateur d'ordre quelconque dont les hypersurfaces caractéristiques sont en involution et s'écrivant sous la forme

$$a(x, D) = \prod_{i=1}^{m} a_i(x, D) + b(x, D)$$

où les $a_i(x, D)$ sont des opérateurs du premier ordre et $b(x, D)$ est un opérateur d'ordre $m-1$, on peut écrire la solution, au voisinage d'un point d'holomorphie de v, sous la forme d'une somme finie d'intégrales multiples

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{\Delta_i} x_0^i f_i(s x_0, x)ds$$

où $s \in \Delta_i$, simplexe euclidien standard de dimension i, et f_i holomorphe sur $\mathcal{R}(\Omega_i \setminus L_i)$, avec Ω_i voisinage ouvert de l'origine de $\mathbf{C}_t^i \times \mathbf{C}_x^{n+1}$ et L_i ensemble analytique de codimension 1 dans Ω_i.

Pour effectuer le prolongement analytique de l'intégrale (2), nous utiliserons les méthodes classiques dans l'étude des fonctions définies par des intégrales telles qu'elles sont développées dans [2, 11, 14, 15, 17, 18] ; ces méthodes consistent essentiellement à déformer continûment la classe d'homologie relative du simplexe d'intégration. Pour cela, nous reprenons l'étude faite par T. Kobayashi [11] qui utilise la notion de fibration localement triviale ainsi que le premier lemme d'isotopie de Thom. Il est à noter que nous ne pouvons pas utiliser directement le lemme d'isotopie de Thom et que nous devrons passer par un lemme d'isotopie local [3].

Différents auteurs ont déjà étudié des problèmes de Cauchy dont les racines caractéristiques sont en involution [4, 6, 10, 20]. Il semble que l'hypothèse d'involution sur les racines caractéristiques soit essentielle pour la réduction de la solution à une intégrale multiple finie. En effet, C. Wagschal [27] a étudié la cas d'un opérateur à caractéristiques tangentes dont le symbole principal est de la forme

$$\xi_0(\xi_0 - q x_0^{q-1} \xi_1)$$

où $q \geq 2$. L'écriture de la solution du problème envisagé est alors de la forme

$$u(x) = \sum_{m=2}^{\infty} I_m(x)$$

où

$$I_m(x) = \int_{\alpha_m} f_m(t, x) dt,$$

α_m étant un simplexe singulier de dimension m tracé dans $\mathbf{C}_t^m$. Pour étudier le prolongement analytique, il a dû construire, pour tout m, explicitement la déformation du simplexe initial α_m, d'où des difficultés techniques importantes.

On peut noter que, pour un problème de la forme

$$\begin{cases} a(x, D)u(x) &= 0, \\ D_0^h u(x) &= w_h(x') \quad \text{pour } x_0 = 0, \ 0 \leq h < m \end{cases}$$

où m est l'ordre de l'opérateur $a(x, D)$, opérateur à caractéristiques holomorphes, C. Wagschal [26] a écrit, au voisinage d'un point d'holomorphie, la solution sous la forme

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(x)$$

où I_m est un germe s'écrivant sous la forme d'une intégrale d'ordre m. Malheureusement, cette écriture ne permet pas (pour l'instant), dans le cas général, d'en étudier le prolongement analytique.

Table des matières

Première partie

Monodromie du problème de Cauchy ramifié

Chapitre 1

Introduction

Cette première partie a pour objet l'étude de la monodromie du problème de Cauchy ramifié lorsque la ramification du second membre autour des hypersurfaces caractéristiques est quelconque.

Rappelons, avant tout, de quel problème il s'agit. On se donne un opérateur différentiel linéaire d'ordre m

$$a(x,D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$, soit $a_\alpha \in \mathbf{C}\{x\}$ (où on a noté $x = (x_0, \ldots, x_n)$ la variable de $\mathbf{C}^{n+1}$ et on notera $x' = (x_1, \ldots, x_n)$ et $x'' = (x_2, \ldots, x_n)$). On note $g(x,\xi)$ son symbole principal et on suppose l'hyperplan $S : x_0 = 0$ non caractéristique à l'origine : ceci signifie que $g(0; 1, 0, \ldots, 0) \neq 0$, c'est-à-dire $a_{(m,0,\ldots,0)} \neq 0$; par division par la fonction $a_{(m,0,\ldots,0)}$, on peut supposer que le coefficient de D_0^m est égal à 1. Nous noterons Ω_0 un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$ tel que toutes les fonctions a_α soient définies et holomorphes sur Ω_0. Nous supposerons que l'opérateur $a(x,D)$ est un opérateur à caractéristiques multiples de multiplicité constante : ceci signifie qu'il existe des fonctions $(x,\xi') \mapsto \lambda_i(x,\xi')$, où $i = 1, \ldots, d$, holomorphes au voisinage du point $\overline{x} = 0$, $\overline{\xi}' = (1, 0, \ldots, 0)$ et des entiers $m_i \ge 1$ tels que

$$g(x,\xi) = \prod_{i=1}^{d} (\xi_0 - \lambda_i(x,\xi'))^{m_i} \text{ pour } (x,\xi') \text{ voisin de } (\overline{x}, \overline{\xi}')$$

et en posant $\lambda_i = \lambda_i(\overline{x}, \overline{\xi}')$,

$$\lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j.$$

On peut alors résoudre le problème de Cauchy non linéaire du premier ordre

$$\begin{cases} D_0 k_i(x) &= \lambda_i(x, D' k_i(x)), \\ k_i(x) &= x_1 \qquad\qquad \text{pour } x_0 = 0, \end{cases}$$

où $D'k_i(x) = (D_1 k_i(x), \ldots, D_n k_i(x))$. Ce problème admet une unique solution holomorphe au voisinage de l'origine. On notera que $Dk_i(0) = (\lambda_i, 1, 0, \ldots, 0)$; on peut donc supposer les fonctions k_i définies et holomorphes sur Ω_0 et $Dk_i(x) \neq 0$ pour $x \in \Omega_0$. Ceci permet de définir des hypersurfaces $K_i = \{x \in \Omega_0; k_i(x) = 0\}$; si T désigne l'hyperplan $x_0 = x_1 = 0$ de S, ces hypersurfaces vérifient $K_i \cap S = \Omega_0 \cap T$: ce sont donc les hypersurfaces caractéristiques issues de T.

L'étude du problème de Cauchy ramifié est l'étude du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a(x,D)u(x) & = & v(x), \\ & & \\ D_0^h u(x) & = & w_h(x') \quad \text{pour } x_0 = 0,\ 0 \leq h < m, \end{array} \right. \tag{1.1}$$

où les données v et w_h vérifient les hypothèses suivantes. Étant donné un voisinage ouvert connexe $\Omega \subset \Omega_0$ de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$ tel que $\Omega \cap S$ soit connexe et un point $a \in \Omega \cap S \setminus T$, nous supposerons que les germes w_h, holomorphes au point a, se prolongent en des fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}(\Omega \cap S \setminus T)$ (où $\mathcal{R}(X)$ désigne le revêtement universel de l'ouvert connexe X) : nous dirons que les germes w_h sont ramifiés autour de T. Quant à v, nous supposerons que c'est un germe holomorphe au point a se prolongeant en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\Omega \setminus K)$, $K = \bigcup_{i=1}^{d} K_i$: nous dirons que v est ramifié autour de K. D'après le théorème de Cauchy-Kowalevski, le problème (1.1) définit un germe solution u au point a et on a le résultat suivant dû à E. Leichtnam [12, 19] :

Théorème 1.0.1 *Soit $\Omega \subset \Omega_0$ un voisinage ouvert connexe de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$ tel que $\Omega \cap S$ soit connexe, il existe un voisinage ouvert connexe $\Omega' \subset \Omega$ de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$ tel que :*
soient $a \in \Omega' \cap S \setminus T$, v un germe au point a se prolongeant en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\Omega \setminus K)$, et w_h des germes se prolongeant en des fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}(\Omega \cap S \setminus T)$, alors le germe au point a, solution du problème de Cauchy (1.1), se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\Omega' \setminus K)$.

E. Leichtnam montre aussi dans [12] que si les germes v et w_h sont de détermination finie alors, il en est de même pour la solution et, de plus, que si la monodromie de v est résoluble alors la monodromie de la solution est encore résoluble.

Pour obtenir ce résultat, E. Leichtnam le prouve tout d'abord dans le cadre du théorème d'Hamada-Leray-Wagschal [5] en utilisant la structure des fonctions de détermination finie dans un disque pointé. Pour cela, il reprend la preuve du théorème d'Hamada-Leray-Wagschal faite dans [5] en montrant qu'à chaque étape on est toujours dans l'espace des fonctions de détermination finie, grâce à leur structure.

Nous nous proposons, ici, de relier le spectre de la monodromie de la solution à celui des données du problème. Nos méthodes se basent uniquement sur l'existence et l'unicité de solutions de problèmes intégro-différentiels, étudiés par Pongérard-Wagschal [19] et des techniques d'algèbre linéaire : ceci nous permettra de préciser le spectre de la monodromie dans le cadre du théorème d'Hamada-Takeuchi [7, 8, 19], puis d'en déduire celui de la solution du problème (1.1). Il est à noter que la résolubilité de la monodromie sera une conséquence facile de nos résultats.

Chapitre 2

Notations et énoncé des résultats

Étant donné une variété holomorphe connexe X et un espace de Banach complexe E, on note $\mathcal{H}(X;E)$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes $f : X \to E$ et $\mathcal{O}_a = \mathcal{O}_a(X;E)$ l'espace vectoriel des germes de fonctions holomorphes en un point $a \in X$ à valeurs dans E.

Si $u \in \mathcal{O}_a$ se prolonge analytiquement le long d'un chemin $\gamma : I \to X$, où $I = [0,1]$, d'origine a et d'extrémité b, on note $u_\gamma \in \mathcal{O}_b$ le germe au point b obtenu par prolongement analytique du germe u le long de γ.

Notons $\Gamma_a = \Gamma_a(X)$ l'espace des lacets $\gamma : I \to X$ d'origine a et soit $u \in \mathcal{O}_a$ un germe se prolongeant analytiquement le long de tout lacet $\gamma \in \Gamma_a$. On notera F_a^u le sous-espace vectoriel de $\mathcal{O}_a$ engendré par l'ensemble $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_a}$ des diverses déterminations de u au point a et $A_\gamma^u \in GL(F_a^u)$ l'automorphisme

$$A_\gamma^u : \theta \in F_a^u \longmapsto \theta_\gamma \in F_a^u.$$

Cet automorphisme ne dépend que de la classe d'homotopie $[\gamma]$ du lacet $\gamma \in \Gamma_a$, d'où une représentation linéaire du groupe de Poincaré $\pi_1(X,a)$

$$A^u : [\gamma] \in \pi_1(X,a) \longmapsto A_\gamma^u \in GL(F_a^u) \text{ où } \gamma \in [\gamma],$$

appelée monodromie du germe u.

On dit que le germe u est de détermination finie si l'espace vectoriel F_a^u est de dimension finie. L'ensemble $\mathcal{O}_a^f$ des germes de détermination finie est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{O}_a$. En effet, si $u, v \in \mathcal{O}_a$ sont deux germes se prolongeant analytiquement le long de tout lacet $\gamma \in \Gamma_a$, il en est de même du germe $\lambda u + \mu v$ et

$$(\lambda u + \mu v)_\gamma = \lambda u_\gamma + \mu v_\gamma \in F_a^u + F_a^v,$$

d'où

$$F_a^{\lambda u + \mu v} \subset F_a^u + F_a^v$$

et ceci prouve bien le résultat annoncé.

Pour $u \in \mathcal{O}_a^f$, on notera $\sigma_\gamma(u)$ le spectre de l'automorphisme A_γ^u. Lorsque u se prolonge en une fonction holomorphe sur X, on a $u_\gamma = u$ pour tout $\gamma \in \Gamma_a$, d'où

$F_a^u = \mathbf{C}u$ et A_γ^u est l'application identité. Lorsque u n'est pas le germe nul, F_a^u est de dimension 1 et $\sigma_\gamma(u) = \{1\}$; lorsque $u = 0$, on conviendra que $\sigma_\gamma(u) = \emptyset$.

Enfin, on dira qu'un germe $u \in \mathcal{O}_a^f$ est à monodromie résoluble si $u = 0$ ou bien, lorsque $u \neq 0$, s'il existe une base de F_a^u telle que, pour tout $\gamma \in \Gamma_a$, la matrice représentative de A_γ^u dans cette base soit triangulaire supérieure. On notera $\mathcal{O}_a^r$ l'espace des germes $u \in \mathcal{O}_a^f$ à monodromie résoluble.

Plus généralement, on peut donner la définition suivante.

Définition 2.0.1 *Soit F un espace vectoriel de dimension finie, une famille $\mathcal{A}$ d'endomorphismes de F est dite résoluble si $F = \{0\}$ ou bien, lorsque $dimF > 0$, s'il existe une base de F telle que la matrice représentative dans cette base de tout $A \in \mathcal{A}$ soit triangulaire supérieure.*

Lemme 2.0.1 *Une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(F)$ est résoluble si, et seulement si, il existe une suite croissante $(F_j)_{0 \leq j \leq k}$ de sous-espaces vectoriels de F où k=$dimF$, invariants par tout $A \in \mathcal{A}$ et telle que $dimF_j$=j.*

Preuve On peut supposer F non réduit à $\{0\}$.

La condition est nécessaire. Si $B = (e_1, \ldots, e_k)$ est une base de F telle que la matrice représentative de tout $A \in \mathcal{A}$ soit triangulaire supérieure, il suffit de définir F_j pour $1 \leq j \leq k$ comme le sous-espace engendré par $(e_1, \ldots, e_j)$.

La condition est suffisante. On construit par récurrence sur $j \in [1, k]$ une base $(e_1, \ldots, e_j)$ de F_j ; $(e_1, \ldots, e_k)$ est alors une base de F ayant les propriétés voulues. ■

Nous rappelons, à présent, le théorème d'Hamada-Takeuchi [7, 8].

Théorème 2.0.2 *On considère le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} a(x, D)u(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} v_i(k_i(x), x), \\ \\ D_0^h u(x) = w_h(x_1, x) \qquad \text{pour } x_0 = 0,\ 0 \leq h < m. \end{cases} \tag{2.1}$$

Soit Ω un voisinage ouvert simplement connexe de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$, alors il existe $\Omega' \subset \Omega$ voisinage ouvert simplement connexe de 0 et $\eta > 0$ tels que :
soient O un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ de diamètre inférieur à η, $a \in S \cap \Omega'$ tel que $a_1 \in O$, v_i, w_h des germes au point $(t, x) = (a_1, a)$, se prolongeant en des fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}(O) \times \Omega$, alors le germe au point a solution du problème (2.1) se prolonge sur $\mathcal{R}(\Omega'_a)$, où Ω'_a est la composante connexe de $\bigcap_{i=1}^{d} \{x \in \Omega';\ k_i(x) \in O\}$ qui contient le point a.

Plus précisément, le germe u s'écrit $u(x) = \sum_{i=1}^{d} u_i(x)$, $u_i(x) = U_i(t, x)_{|t=k_i(x)}$ où U_i est un germe au point (a_1, a) qui se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(O) \times \Omega'$.

Nous noterons h_i l'application $x \mapsto (k_i(x), x) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{n+1}$ pour tout $i = 1, \ldots, d$.

Le résultat suivant montre que la détermination finie de la solution ne dépend que de celle des données et de la nature topologique de l'ouvert O. On se place dans les hypothèses du théorème d'Hamada-Takeuchi.

Théorème 2.0.3 *Il existe Ω', voisinage ouvert de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$, tel que le problème (2.1) admette une solution $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}(\Omega'_a))$ et tel que si le groupe fondamental $\pi_1(O)$ de l'ouvert O est de type fini et si les données v_i, w_h sont de détermination finie, alors la solution du problème (2.1) est aussi de détermination finie et on a pour tout $\gamma \in \Gamma_a(\Omega'_a)$*

$$\sigma_\gamma(\tilde{v}_i) \subset \sigma_\gamma(u_i) \subset \sigma_{h_i \circ \gamma}(v) \cup \sigma_{h_i \circ \gamma}(w) \cup \{1\}$$

où $\tilde{v}_i(x) = v(k_i(x), x)$, $v = (v_1, \ldots, v_d)$ et $w = (w_0, \ldots, w_{m-1})$.
De plus, si les données sont à monodromie résoluble, alors la solution est à monodromie résoluble.

Note Il faut remarquer que l'écriture de la solution n'est pas unique (à l'ajout près de fonctions holomorphes φ_i sur Ω' à chaque u_i, telles que $\sum_{i=1}^d \varphi_i = 0$). Toutefois, si O est un disque pointé (on est alors dans les hypothèses du théorème d'Hamada-Leray-Wagschal [5]), on peut trouver une écriture de la solution telle que

$$\sigma_\gamma(\tilde{v}_i) \subset \sigma_\gamma(u_i) \subset \sigma_{h_i \circ \gamma}(v) \cup \sigma_{h_i \circ \gamma}(w).$$

Nous montrerons, aussi, que le théorème 2.0.3 ne subsiste pas dans le cas où $\pi_1(O)$ n'est pas de type fini.

Enfin, comme indiqué dans l'introduction, nous nous servirons du théorème précédent pour montrer le

Théorème 2.0.4 *Il existe Ω', voisinage ouvert de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$, tel que le problème (1.1) admette une solution $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}(\Omega' \setminus K))$ et tel que si les données v, w_h sont de détermination finie, alors u est aussi de détermination finie et pour tout $\gamma \in \Gamma_a(\Omega' \setminus K)$, on a*

$$\sigma_\gamma(v) \subset \sigma_\gamma(u) \subset \sigma_\gamma(v) \cup \bigcup_{i=1}^d \sigma_{\gamma_i}(v) \cup \bigcup_{i=1}^d \sigma_{\gamma_i}(w)$$

où γ_i désigne le lacet $s \mapsto (0, k_i(\gamma(s)), a'')$. De plus, si v est à monodromie résoluble, alors la solution est à monodromie résoluble.

Nous allons maintenant montrer deux résultats topologiques qui nous seront utiles pour la preuve des théorèmes 2.0.3 et 2.0.4.

Proposition 2.0.1 *Il existe un système fondamental de voisinages ouverts simplement connexes de l'origine de* $\mathbf{C}^{n+1}$ *de la forme*

$$U = D_r \times D_s \times \Omega_{n-1}$$

où $D_\omega = \{z \in \mathbf{C};\ |z| < \omega\}$ *et* Ω_{n-1} *est un voisinage ouvert simplement connexe de l'origine de* $\mathbf{C}^{n-1}$*, tel qu'il existe des lacets*

$$\gamma_i \in \Gamma_a(U \setminus K), \quad a \in U \cap S \setminus T, \quad 1 \leq i \leq d,$$

dont les classes d'homotopie engendrent le groupe $\pi_1(U \setminus K, a)$ *et tel que*

$$[\gamma_1][\gamma_i] = [\gamma_i][\gamma_1] \qquad 1 \leq i \leq d;$$

de plus, le lacet γ_1 *est tracé dans* $U \cap S \setminus T$ *et sa classe d'équivalence* $[\gamma_1]$ *engendre le groupe* $\pi_1(U \cap S \setminus T, a)$.

Preuve Soient Ω un voisinage ouvert de $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ tel que les fonctions k_i, $1 \leq i \leq d$, y soient définies et holomorphes et $K_i = \{x \in \Omega;\ k_i(x) = 0\}$. Modulo un choix de coordonnées locales, on peut supposer que $k_1(x) = x_1$ et que $K_i \cap K_j = T \cap \Omega$ si $i \neq j$.

Soit $2 \leq i \leq d$, par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert $A_i \times B_i \subset \Omega$ de $0 \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ et une fonction holomorphe $l_i : B_i \to A_i$ tels que

$$\text{pour tout } (x_0, x') \in A_i \times B_i, \quad k_i(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = l_i(x').$$

Pour tout voisinage ouvert $A \times B$ de $0 \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ tel que

$$A \subset \bigcap_{i=2}^{d} A_i, \qquad B \subset \bigcap_{i=2}^{d} l_i^{-1}(A),$$

on a alors :

$$\forall (x_0, x') \in A \times B, \qquad k_i(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = l_i(x').$$

Il en résulte qu'il existe un système fondamental de voisinages ouverts de $0 \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ de la forme

$$U = D_r \times D_s \times \Omega_{n-1}, \quad r, s > 0,$$

où Ω_{n-1} est un voisinage ouvert simplement connexe de l'origine de $\mathbf{C}^{n-1}$ tel que pour $2 \leq i \leq d$,

$$\forall x \in U \quad k_i(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = l_i(x')$$

où les fonctions $l_i : D_s \times \Omega_{n-1} \to D_r$ sont holomorphes (voir la figure 2.1).
Montrons qu'un tel ouvert U vérifie la proposition. Vu que $l_i(x') \neq l_j(x')$ si $i \neq j$ lorsque $x_1 \neq 0$, on en déduit ceci : notons $\pi : \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}^n$ la projection $\pi(x) = x'$,

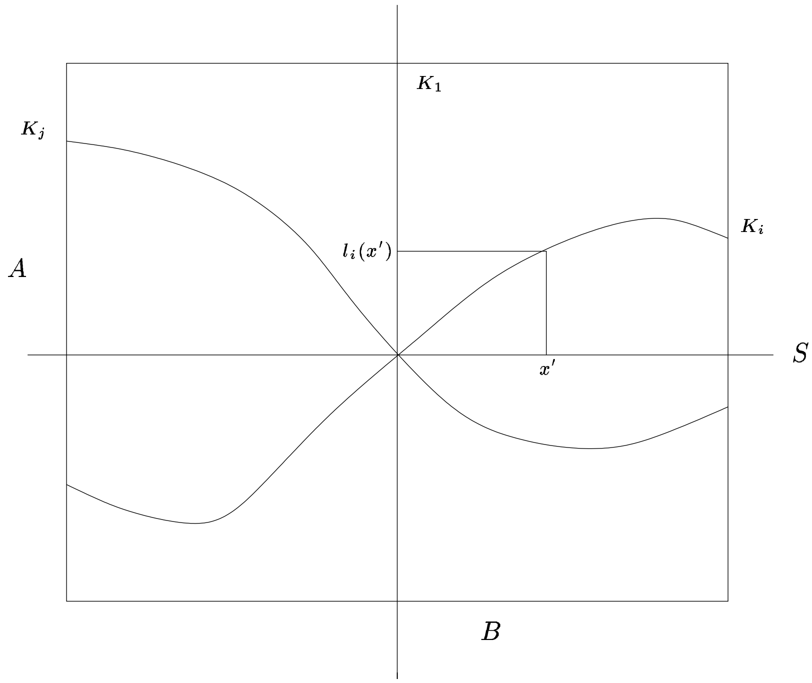

FIG. 2.1 – Configuration géométrique

$X = U \setminus K$, $B = \dot{D}_s \times \Omega_{n-1}$, où $\dot{D}_s = \{z \in \mathbf{C};\ 0 < |z| < s\}$, alors $\pi : X \to B$ est un espace fibré, la fibre au dessus de $a' \in B$ étant

$$F_{a'} = D_r \setminus \bigcup_{i=2}^{d} \{l_i(a')\}.$$

Notons $i : B \to X$ l'injection canonique, alors $\pi \circ i = Id_B$ (i est une section au dessus de B), d'où $\pi_* \circ i_* = Id_{\pi_1(B,a')}$. Posons $H = \operatorname{Ker} \pi_*$, $G = \operatorname{Im} i_*$; H et G sont des sous-groupes de $\pi_1(X, (0, a'))$; H est un sous-groupe distingué et $i_* : \pi_1(B, a') \to G$ est un isomorphisme.

Lemme 2.0.2 *Tout $\gamma \in \pi_1(X, (0, a'))$ s'écrit de manière unique $\gamma = \delta\varepsilon$ où $\delta \in G$, $\varepsilon \in H$.*

Peuve Si γ s'écrit sous la forme $\delta\varepsilon$, $\delta \in G$ et $\varepsilon \in H$, l'application i_* étant un isomorphisme, on pose $\delta = i_*(\delta')$; on a nécessairement $\gamma = i_*(\delta')\varepsilon$, d'où $\pi_*(\gamma) = \delta'$ et $\delta = (i_* \circ \pi_*)(\gamma)$.
On vérifie ensuite que $\varepsilon = \delta^{-1}\gamma$ appartient à H. On a $\gamma = \delta\varepsilon$, d'où $\pi_*(\gamma) = \pi_*(\delta)\pi_*(\varepsilon)$ où $\pi_*(\delta) = \pi_*(\gamma)$, ce qui permet de conclure. ■

Lemme 2.0.3 *Soit $j : F_{a'} \to X$ l'injection canonique, alors $j_* : \pi_1(F_{a'}, 0) \to H$ est un isomorphisme.*

Preuve On considère la suite exacte d'homotopie

$$\pi_2(X,(0,a')) \xrightarrow{\pi_*} \pi_2(B,a') \xrightarrow{\Delta} \pi_1(F_{a'},0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X,(0,a')) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(B,a').$$

Alors $\pi_* \circ i_* = Id_{\pi_2(B,a')}$, donc $\pi_* : \pi_2(X,(0,a')) \to \pi_2(B,a')$ est surjectif, d'où $\Delta = e$ et j_* est injectif ; vu que Im j_*=Ker π_*=H, ceci prouve le lemme. ■

En termes de lacets, ces deux lemmes montrent que tout lacet $\gamma \in \Gamma_{(0,a')}(X)$ est homotope à un lacet de la forme $\delta\varepsilon$ où $\delta \in \Gamma_{a'}(B)$, $\varepsilon \in \Gamma_0(F_{a'})$. Montrons à présent que les classes d'homotopie des lacets δ et ε commutent.

Étant donné que pour tout $i = 2, \dots, d$, $l_i(0) = 0$ et que, d'après le théorème des fonctions implicites, on a $D_1 l_i(0) = -\lambda_i^{-1}$, on peut écrire $l_i(x') = x_1 \tilde{l}_i(x')$, avec $\tilde{l}_i(0) = -\lambda_i^{-1}$. Quitte à diminuer s et réduire Ω_{n-1}, on peut supposer qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x' \in D_s \times \Omega_{n-1}$, pour tout $i = 2, \dots, d$, on ait

$$\begin{cases} \tilde{l}_i(x') \in \overline{D}(-\lambda_i^{-1}, \eta), \\ 0 \notin \overline{D}(-\lambda_i^{-1}, \eta), \\ \overline{D}(-\lambda_i^{-1}, \eta) \cap \overline{D}(-\lambda_j^{-1}, \eta) = \emptyset \text{ si } i \neq j, \\ \bigcup_{i=2}^d \overline{D}(-x_1\lambda_i^{-1}, |x_1|\eta) \subset D_r. \end{cases}$$

Donc, pour tout $a' \in B$, on a $D_r \setminus \bigcup_{i=2}^d \overline{D}(-a_1\lambda_i^{-1}, |a_1|\eta) \subset F_{a'}$. On pose, pour $i = 2, \dots, d$,

$$\begin{array}{rccc} \psi_i : & \overline{D}(-a_1\lambda_i^{-1}, |a_1|\eta) \setminus \{-a_1\lambda_i^{-1}\} \times [0,1] & \longrightarrow & \overline{D}(-a_1\lambda_i^{-1}, |a_1|\eta) \setminus \{-a_1\lambda_i^{-1}\} \\ & (-a_1\lambda_i^{-1} + \alpha, s) & \longmapsto & (-a_1\lambda_i^{-1} + \frac{|a_1|\eta s\alpha}{|\alpha|} + (1-s)\alpha). \end{array}$$

ψ_i est une rétraction par déformation de $\overline{D}(-a_1\lambda_i^{-1}, |a_1|\eta) \setminus \{-a_1\lambda_i^{-1}\}$ sur le cercle de centre $-a_1\lambda_i^{-1}$ et de rayon $|a_1|\eta$. On pose à présent

$$\begin{array}{rccl} \psi : & F_{a'} \times [0,1] & \longrightarrow & F_{a'} \\ & (x,s) & \longmapsto & \begin{cases} \psi_i(x,s) & \text{si } x \in \overline{D}(-a_1\lambda_i^{-1}, |a_1|\eta), \\ x & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

ψ est une rétraction par déformation de $F_{a'}$ sur $D_r \setminus \bigcup_{i=2}^d D(-a_1\lambda_i^{-1}, |a_1|\eta)$. Donc, l'injection canonique

$$i : D_r \setminus \bigcup_{i=2}^{d} D(-a_1\lambda_i^{-1}, |a_1|\eta) \hookrightarrow F_{a'}$$

induit un isomorphisme i_*. On pose $[\varepsilon_0] = i_*([\varepsilon])$, on choisit un représentant ε_0 de $[\varepsilon_0]$ et on peut choisir le lacet δ de la forme $t \in [0,1] \mapsto (0, a_1 e^{2i\pi nt}, a'')$, $n \in \mathbf{Z}$.

Construisons à présent une homotopie dans X entre $(\delta\varepsilon_0)\delta^{-1}$ et ε_0. Pour cela, on pose

$$H(s,t) = \begin{cases} (0, a_1 e^{2i\pi n 4t(1-s)}, a'') & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{4}, \\[2ex] (e^{2i\pi n(1-s)}\varepsilon_0(4t-1), a_1 e^{2i\pi n(1-s)}, a'') & \dfrac{1}{4} \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \\[2ex] (0, a_1 e^{2i\pi n 2(1-t)(1-s)}, a'') & \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

H réalise une homotopie entre $(\delta\varepsilon_0)\delta^{-1}$ et $(e_{a'}\varepsilon_0)e_{a'}$ où $e_{a'}$ désigne le lacet constant $s \mapsto a'$, car H est bien une application continue, $H(0,\cdot) = (\delta\varepsilon_0)\delta^{-1}$, $H(1,\cdot) = (e_{a'}\varepsilon_0)e_{a'}$ et pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$, on a $H(s,t) \in X$. En effet, pour tout $s \in [0,1]$ et tout $i = 1, \ldots, d$,

$$\text{si } t \in [0, \frac{1}{4}], \text{ alors } k_i(H(s,t)) = a_1 e^{2i\pi n 4t(1-s)} \neq 0,$$

$$\text{si } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \text{ alors } H_0(s,t) \in D_r \setminus D(-a_1 e^{2i\pi n(1-s)}\lambda_i^{-1}, |a_1|\eta) \Rightarrow k_i(H(s,t)) \neq 0$$

où $H(s,t) = (H_0(s,t), \ldots, H_n(s,t))$,

$$\text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1], \text{ alors } k_i(H(s,t)) = a_1 e^{2i\pi n 2(1-t)(1-s)} \neq 0.$$

Vu que ε_0 est homotope à ε dans $F_{a'}$, $\varepsilon\delta$ est homotope à $\delta\varepsilon$ dans X. ■

Remarque 2.0.1 D'après la construction du système fondamental, on peut choisir les ouverts U tels que, quitte à diminuer s et réduire Ω_{n-1}, pour tout $x' \in D_s \times \Omega_{n-1}$, on ait

$$l_i(x') \in D_{r'} \quad \text{où } r' < r.$$

Corollaire 2.0.1 *Il existe un système fondamental de voisinages ouverts simplement connexes de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$ tel que, pour tout voisinage U du système fondamental, on ait*

$$\pi_1(U \setminus K, a) \simeq \mathbf{Z} \times \underbrace{(\mathbf{Z} \star \cdots \star \mathbf{Z})}_{d-1 \text{ fois}}$$

où $a \in U \cap S \setminus T$.

Preuve On choisit le système fondamental de voisinages comme dans la proposition précédente. On a

$$\pi_1(U \cap S \setminus T, a') \simeq \mathbf{Z} \text{ et } \pi_1(F_{a'}, 0) \simeq \underbrace{(\mathbf{Z} \star \cdots \star \mathbf{Z})}_{d-1 \text{ fois}}.$$

Or tout $\delta \in \pi_1(U \cap S \setminus T, a')$ commute avec tout $\varepsilon \in \pi_1(F_{a'}, 0)$ et, d'après le lemme 2.0.2, tout $\gamma \in \pi_1(U \setminus K, a)$ s'écrit sous la forme $\delta\varepsilon$. On en déduit donc que

$$\pi_1(U \setminus K, a) \simeq \pi_1(U \cap S \setminus T, a') \times \pi_1(F_{a'}, 0),$$

ce qui permet de conclure. ∎

Proposition 2.0.2 *Il existe un système fondamental de voisinages ouverts simplement connexes de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$ tel que pour tout voisinage U du système fondamental et tout $i = 1, \dots, d$, on ait*

$$\pi_1(U \setminus K_i, a) \simeq \mathbf{Z}$$

où $a \in U \cap S \setminus T$. De plus, la classe d'homotopie du lacet tracé dans $U \cap S \setminus T$, $s \mapsto (0, a_1 e^{2i\pi s}, a'')$ engendre les groupes $\pi_1(U \setminus K_i, a)$.

Preuve On choisit pour système fondamental, un système fondamental de voisinages vérifiant la proposition 2.0.1 et la remarque 2.0.1. Notons U un ouvert de ce système fondamental. On a donc

$$U = D_r \times D_s \times \Omega_{n-1}$$

avec $l_i(x') \in D_{r'}$ où $r' < r$ et $x' \in D_s \times \Omega_{n-1}$. On note $R_{i,x'}$ la rétraction par déformation de $D_r \setminus \{l_i(x')\}$ sur le cercle $\mathcal{C}(0, r')$ définie par

$$\begin{array}{rccc} R_{i,x'} : & (D_r \setminus \{l_i(x')\}) \times [0,1] & \longrightarrow & D_r \setminus \{l_i(x')\} \\ & (x_0, t) & \longmapsto & (1-t)x_0 + t u_{l_i(x')}(x_0) \end{array}$$

où $\{u_{l_i(x')}(x_0)\} = \mathcal{C}(0, r') \cap \{y = l_i(x') + t(x_0 - l_i(x'));\ t \in \mathbf{R}^+\}$. Enfin, il est clair que l'application $(x_0, x') \in U \setminus K_i \mapsto u_{l_i(x')}(x_0)$ est continue. Donc l'application

$$R_i : (x, t) \in (U \setminus K_i) \times [0,1] \longmapsto (R_{i,x'}(x_0, t), x')$$

est une rétraction par déformation de $U \setminus K_i$ sur $\mathcal{C}(0, r') \times D_s \times \Omega_{n-1}$. Par conséquent, $\pi_1(U \setminus K_i, a)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$.

Montrons à présent que $\pi_1(U \setminus K_i, a)$ admet un lacet générateur tracé dans S. Pour cela, nous allons prouver que tout lacet tracé dans $U \setminus K_i$ est homotope à un lacet tracé dans S.

L'application $\tilde{h}_i : x \mapsto (x_0, k_i(x), x'')$ est un difféomorphisme au voisinage de l'origine. Donc il existe un voisinage ouvert $O_i \subset U$ de $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ et un polydisque ouvert $Q_i \subset \mathbf{C}^{n+1}$ centré à l'origine tels que $\tilde{h}_{i|O_i} : O_i \mapsto Q_i$ soit un difféomorphisme. On choisit enfin $a = (0, a') \in \bigcap_{i=1}^d O_i$ et $r'' > 0$ tels que $l_i(a') \in D_{r''}$ et $\overline{D}_{r''} \times \{a'\} \subset O_i$ pour tout $i = 1, \dots, d$.

Soit $\gamma \in \Gamma_a(U \smallsetminus K_i)$. On définit l'homotopie suivante

$$h(s,t) = \begin{cases} (1-3s)a + 3sR_i(\gamma(0),t) & s \in [0, \frac{1}{3}], \\ \\ R_i(\gamma(3s-1),t) & s \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \\ (3s-2)a + 3(1-s)R_i(\gamma(1),t) & s \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$ on a $h(s,t) \in U \smallsetminus K_i$, donc γ est homotope au lacet $\gamma^1 : s \mapsto h(s,1)$. De plus, $D_s \times \Omega_{n-1}$ étant simplement connexe, γ^1 est homotope au lacet $\gamma^2 : s \mapsto (\gamma_0^1(s), a')$. Comme précédemment, en utilisant une rétraction de $(\overline{D}_{r'} \smallsetminus \{l_i(a')\}) \times \{a'\}$ sur $\mathcal{C}(0,r'') \times \{a'\}$, on en déduit que γ^2, donc γ, est homotope, dans $U \smallsetminus K_i$, à γ^3, lacet tracé dans $\overline{D}(0,r'') \times \{a'\} \subset O_i$. Or, compte-tenu du choix de O_i et Q_i, γ^3 est homotope à un lacet tracé dans $U \cap S \smallsetminus T$ via l'homotopie

$$H_i : (s,t) \in [0,1]^2 \mapsto \tilde{h}_i^{-1}\Big((1-t)\big(\tilde{h}_i(\gamma^3(s))\big)_0, \big(\tilde{h}_i(\gamma^3(s))\big)'\Big).$$

En effet, H_i est bien une application continue, $H_i(\cdot,0) = \gamma^3$ et $H_i(\cdot,1)$ est un lacet tracé dans $U \cap S \smallsetminus T$. Il suffit à présent de vérifier que pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$, $H_i(s,t) \in U \smallsetminus K_i$.
Pour tout s dans $[0,1]$, $\gamma^3(s)$ appartient à $O_i \smallsetminus K_i$, donc $\tilde{h}_i(\gamma^3(s))$ appartient à $Q_i \smallsetminus \{x_1 = 0\}$. Q_i étant un polydisque, on a

$$\Big((1-t)\big(\tilde{h}_i(\gamma^3(s))\big)_0, \big(\tilde{h}_i(\gamma^3(s))\big)'\Big) \in Q_i \smallsetminus \{x_1 = 0\}$$

pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$. Par conséquent $H_i(s,t) \in O_i \smallsetminus K_i \subset U \smallsetminus K_i$. Donc tout lacet tracé dans $U \smallsetminus K_i$ est homotope à un lacet tracé dans $U \cap S \smallsetminus T$. On en déduit que le morphisme

$$[s \mapsto \delta(s)] \in \pi_1(U \cap S \smallsetminus T, a) \mapsto [s \mapsto (0, \delta(s))] \in \pi_1(U \smallsetminus K_i, a)$$

est surjectif, donc est un isomorphisme car $\pi_1(U \cap S \smallsetminus T, a) \simeq \pi_1(U \smallsetminus K_i, a) \simeq \mathbf{Z}$. On peut noter que cet isomorphisme est le morphisme i_* induit par l'injection canonique

$$i : U \cap S \smallsetminus T \hookrightarrow U \smallsetminus K.$$

Par conséquent, il existe un lacet générateur de $\pi_1(U \smallsetminus K_i, a)$ s'écrivant sous la forme $s \mapsto (0, a_1 \exp(2i\pi s), a'')$. De plus, ce lacet est générateur pour tous les $\pi_1(U \smallsetminus K_i, a)$, $i = 1, \ldots, d$. $\blacksquare$

Chapitre 3

Résultats préliminaires

Le but de ce chapitre est d'établir des résultats qui seront utiles pour la résolution des théorèmes 2.0.3 et 2.0.4.

3.1 Compléments sur la monodromie

Lemme 3.1.1 *Soient $G \subset F$ un sous-espace vectoriel de F et $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(F)$ une famille résoluble telle que G soit invariant par tout $A \in \mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}_G = \{A_{|G};\ A \in \mathcal{A}\}$ est une famille résoluble d'endomorphismes de G.*

Note On a évidemment $\sigma(A_{|G}) \subset \sigma(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Preuve Soit $(F_j)_{0 \leq j \leq k}$ une suite de sous-espaces vectoriels de F vérifiant les propriétés du lemme 2.0.1. On pose $G_j = F_j \cap G$; on obtient ainsi une suite croissante de sous-espaces vectoriels de G invariants par tout $B \in \mathcal{A}_G$.

Soit m=dim$G$, par récurrence on construit une sous-suite $(G_{j_l})_{0 \leq l \leq m}$ telle que dimG_{j_l}=l. On pose $j_0 = 0$; supposons $(j_0, \ldots, j_l)$ construits où $0 \leq l < m$; on note alors $j_{l+1} \in]j_l; k]$ le plus petit entier tel que $G_{j_{l+1}} \neq G_{j_l}$; on a alors dim$G_{j_{l+1}}$=$l+1$, ce qui permet de conclure. ■

Lemme 3.1.2 *Soient F un espace vectoriel de dimension finie supérieure à 1 et $S = (e_1, \ldots, e_n)$ un système de générateurs de cet espace, alors il existe une base $B \subset S$ de F telle que, si un endomorphisme $A \in \mathcal{L}(F)$ admet une représentation dans le système de générateurs S par une matrice triangulaire supérieure, c'est à dire si*

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{j} a_{ij} e_i \quad 1 \leq j \leq n,$$

alors la matrice représentative de A dans la base B est triangulaire supérieure et

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{a_{ii}\}.$$

Preuve Si S n'est pas une base, il existe une relation de liaison de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$. Soit $i_0 \in [1, n]$ l'entier vérifiant $\lambda_{i_0} \neq 0$ et $\lambda_i = 0$ pour $i_0 < i \leq n$. On en déduit une relation de liaison de la forme

$$e_{i_0} = \sum_{i=1}^{i_0-1} \lambda_i' e_i,$$

d'où

$$Ae_j = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{j} a_{ij} e_i & \text{si } 1 \leq j < i_0, \\[2ex] \displaystyle\sum_{i=1}^{i_0-1} (a_{ij} + \lambda_i' a_{i_0 j}) e_i + \sum_{i=i_0+1}^{j} a_{ij} e_i & \text{si } i_0 < j \leq n. \end{cases}$$

Dans le système de générateurs $(e_1, \ldots, \hat{e}_{i_0}, \ldots, e_n)$, on obtient une représentation de A par une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont les a_{ii} pour $i \neq i_0$, ce qui permet de conclure. ■

Corollaire 3.1.1 *Soient F un espace vectoriel de dimension finie ≥ 1, $A \in \mathcal{L}(F)$ un endomorphisme admettant une représentation dans un système de générateurs $(e_1, \ldots, e_n)$ par une matrice M, alors $\sigma(A) \subset \sigma(M)$.*

Preuve Soit $P = (p_{ij})$ une matrice $n \times n$ inversible telle que la matrice $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure. On pose $f_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$. Dans le système de générateurs $(f_1, \ldots, f_n)$, $P^{-1}MP$ est une matrice représentative de A et, d'après le lemme 3.1.2, $\sigma(A) \subset \sigma(P^{-1}MP) = \sigma(M)$. ■

Remarque 3.1.1 Soient $u \in \mathcal{O}_a(X; E)$, F un espace de Banach complexe et T dans $\mathcal{L}(E; F)$, alors $T \circ u \in \mathcal{O}_a(X; F)$ et, pour tout $\gamma \in \Gamma_a(X)$, $(T \circ u)_\gamma = T \circ u_\gamma$. Il en résulte que

$$F_a^{T \circ u} = \{T \circ \theta;\ \theta \in F_a^u\}.$$

Supposons le germe u de détermination finie, alors le germe $T \circ u$ est de détermination finie. Soient $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de F_a^u et M la matrice représentative de l'automorphisme A_γ^u dans cette base, alors M est une matrice représentative de l'automorphisme $A_\gamma^{T \circ u}$ dans le système de générateurs $(T \circ \varphi_i)_{1 \leq i \leq p}$. D'après le corollaire qui précède, il en résulte que

$$\sigma_\gamma(T \circ u) \subset \sigma_\gamma(u) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma_a(X).$$

Nous dirons qu'un sous-espace vectoriel F de l'espace $\mathcal{O}_a$ est invariant par prolongement analytique si tout germe $\theta \in F$ se prolonge analytiquement le long de tout lacet $\gamma \in \Gamma_a$ et si $\theta_\gamma \in F$. Lorsque F est de dimension finie, on notera $\sigma_\gamma(F)$ le spectre de l'automorphisme $\theta \mapsto \theta_\gamma$. Si $u \in \mathcal{O}_a^f$ est un germe de détermination finie, on a donc

$$\sigma_\gamma(u) = \sigma_\gamma(F_a^u).$$

De plus, si G est un sous-espace vectoriel de F invariant par prolongement analytique, on a évidemment $\sigma_\gamma(G) \subset \sigma_\gamma(F)$.

Proposition 3.1.1 *Soient $u, v \in \mathcal{O}_a^f$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$, alors*

$$\sigma_\gamma(\lambda u + \mu v) \subset \sigma_\gamma(u) \cup \sigma_\gamma(v), \quad \textit{pour tout } \gamma \in \Gamma_a.$$

Preuve On peut supposer $\lambda = \mu = 1$ et $u \neq 0, v \neq 0$. L'espace $F = F_a^u + F_a^v$ est invariant par prolongement analytique. Étant donné un lacet $\gamma \in \Gamma_a$, soit $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq p}$ [resp. $(\psi_j)_{1 \leq j \leq q}$] une base de F_a^u [resp. F_a^v] et M_γ^u [resp. M_γ^v] la matrice représentative de l'automorphisme A_γ^u [resp. A_γ^v] dans ces bases. Dans le système de générateurs (φ_i, ψ_j), l'automorphisme de F, $\theta \mapsto \theta_\gamma$, admet une représentation matricielle de la forme

$$\begin{pmatrix} M_\gamma^u & 0 \\ 0 & M_\gamma^v \end{pmatrix}.$$

D'après le corollaire 3.1.1, on en déduit que $\sigma_\gamma(F) \subset \sigma_\gamma(F_a^u) \cup \sigma_\gamma(F_a^v)$ et ceci permet de conclure. ■

Corollaire 3.1.2 *L'ensemble $\mathcal{O}_a^r$ des germes à monodromie résoluble est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{O}_a^f$.*

Preuve Il est évident que λu, $\lambda \in \mathbf{C}$, est à monodromie résoluble lorsque le germe u l'est.

Soient $u, v \in \mathcal{O}_a^r$, on peut supposer $u \neq 0$ et $v \neq 0$. Reprenons les notations utilisées dans la démonstration de la proposition précédente. On peut choisir les bases (φ_i) et (ψ_j) telles que, pour tout $\gamma \in \Gamma_a$, les matrices M_γ^u et M_γ^v soient triangulaires supérieures. Il en résulte que, dans le système de générateurs (φ_i, ψ_j), les automorphismes de F, $\theta \mapsto \theta_\gamma$, admettent une représentation par une matrice triangulaire supérieure. D'après le lemme 3.1.2, la famille d'automorphismes de F, $\theta \mapsto \theta_\gamma$, lorsque γ décrit Γ_a est résoluble et, le sous-espace F_a^{u+v} étant invariant par ces automorphismes, le lemme 3.1.1 prouve que le germe $u + v$ est à monodromie résoluble. ■

Corollaire 3.1.3 *Soient E_j, $1 \leq j \leq p$, des espaces de Banach et des germes $u_j \in \mathcal{O}_a^f(X; E_j)$, alors $u = (u_j) \in \mathcal{O}_a^f(X; E)$ où $E = \prod_{j=1}^p E_j$ et*

$$\sigma_\gamma(u) = \bigcup_{j=1}^p \sigma_\gamma(u_j) \ \textit{pour tout } \gamma \in \Gamma_a. \tag{3.1}$$

De plus, u est à monodromie résoluble si tous les germes u_j sont à monodromie résoluble.

Preuve Vu que $u_\gamma = ((u_j)_\gamma)$, on a

$$F_a^u \subset F = \prod_{j=1}^{p} F_a^{u_j}$$

et le germe u est donc de détermination finie. Notons $\pi_j : E \to E_j$ la projection d'indice j et $\lambda_j : E_j \mapsto E$ l'injection linéaire définie comme suit : si $e \in E_j$, on a $\pi_j(\lambda_j(e)) = e$ et $\pi_k(\lambda_j(e)) = 0$ pour $k \neq j$. Si B_j est une base de $F_a^{u_j}$, l'ensemble $B = \bigcup_{j=1}^{p} \lambda_j(B_j)$ est une base de F et dans cette base, l'automorphisme de F, $\theta \mapsto \theta_\gamma$, a une matrice représentative diagonale par blocs, le bloc d'indice j étant la matrice représentative de l'automorphisme $A_\gamma^{u_j}$. On en déduit que

$$\sigma_\gamma(u) \subset \bigcup_{j=1}^{p} \sigma_\gamma(u_j).$$

Lorsque les u_j sont à monodromie résoluble, on choisit les bases B_j telles que les matrices représentatives des $A_\gamma^{u_j}$ soient triangulaires supérieures, alors u est à monodromie résoluble d'après le lemme 3.1.2.

Le fait qu'on ait égalité dans (3.1) résulte de $u_j = \pi_j \circ u$: d'après la remarque précédente, on a en effet $\sigma_\gamma(u_j) \subset \sigma_\gamma(u)$. ■

3.2 Image réciproque

Soient X et Y des variétés holomorphes connexes, $h : X \to Y$ une application holomorphe, $a \in X$, $b = h(a) \in Y$ et $u \in \mathcal{O}_b(Y)$, alors $u \circ h$ définit un germe au point a noté $h^*(u) \in \mathcal{O}_a(X)$; on définit ainsi une application linéaire $h^* : \mathcal{O}_b(Y) \to \mathcal{O}_a(X)$. Soit $\gamma \in \Gamma_a(X)$, si le germe u se prolonge analytiquement le long du lacet $h \circ \gamma$, le germe $h^*(u)$ se prolonge analytiquement le long de γ et

$$h^*(u)_\gamma = h^*(u_{h\circ\gamma}). \tag{3.2}$$

Si u est de détermination finie, il en est de même de $h^*(u)$. L'espace vectoriel $F = h^*(F_b^u)$ est invariant par prolongement analytique d'après (3.2) et la matrice représentative de l'automorphisme $A_{h\circ\gamma}^u$, $\gamma \in \Gamma_a(X)$, dans une base B est une représentation matricielle de l'automorphisme de F, $\theta \mapsto \theta_\gamma$, dans le système de générateurs $h^*(B)$. D'après le corollaire 3.1.1, on en déduit que

$$\sigma_\gamma(h^*(u)) \subset \sigma_{h\circ\gamma}(u) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma_a(X).$$

Lorsque u est à monodromie résoluble, on en déduit également (lemme 3.1.2) que $h^*(u)$ est à monodromie résoluble.

Remarque 3.2.1 On notera que $F_a^{h^*(u)} = h^*(F_b^u)$ si tout lacet $\delta \in \Gamma_b(Y)$ est homotope à un lacet de la forme $h\circ\gamma$ où $\gamma \in \Gamma_a(X)$. L'application linéaire $h^* : F_b^u \to F_a^{h^*(u)}$

est alors surjective et, si elle est injective, c'est à dire si $h^*(u) = 0$ implique $u = 0$, il s'agit d'un isomorphisme et $\sigma_\gamma(h^*(u)) = \sigma_{h\circ\gamma}(u)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_a(X)$.

Par exemple, soient X et Y des variétés holomorphes connexes, $p : X \times Y \to X$ la première projection, $(a,b) \in X \times Y$ et $u \in \mathcal{O}_a(X)$, alors $U = p^*(u) \in \mathcal{O}_{(a,b)}(X \times Y)$: ce germe est simplement le germe u considéré comme un germe au point (a,b) indépendant de y. Tout lacet $\gamma \in \Gamma_a(X)$ peut s'écrire $\gamma = p \circ (\gamma, e_b)$ où $e_b : I \to Y$ est le lacet constant b. On a donc $F^U_{(a,b)} = p^*(F^u_a)$ et l'application $p^* : F^u_a \to F^U_{(a,b)}$ est injective vu que $U = 0$ implique $u = 0$. Ceci prouve que $\sigma_\gamma(u) = \sigma_{(\gamma,\delta)}(U)$ pour tout $(\gamma,\delta) \in \Gamma_{(a,b)}(X \times Y)$.

Ce qui précède s'applique en particulier dans la situation suivante. On considère une sous-variété connexe Y de X et on note $i : Y \to X$ l'injection canonique ; si $u \in \mathcal{O}_a(X; E)$ est un germe en un point $a \in Y$, le germe $i^*(u) \in \mathcal{O}_a(Y; E)$, que nous noterons $u_{|Y}$, s'appelle la trace de u sur Y. Si le germe u est de détermination finie, il en est de même de $u_{|Y}$ et

$$\sigma_\gamma(u_{|Y}) \subset \sigma_\gamma(u) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma_a(Y).$$

De plus, si u est à monodromie résoluble, $u_{|Y}$ est à monodromie résoluble.

Voici également une situation utile dans l'étude du problème de Cauchy. On considère un ouvert connexe O de $\mathbf{C}$, un ouvert Ω de $\mathbf{C}^{n+1}$, une fonction holomorphe $k : \Omega \to \mathbf{C}$ et un point $a \in \Omega$ tel que $b = k(a) \in O$; on note Ω' la composante connexe de $\Omega \cap k^{-1}(O)$ du point a et h l'application holomorphe

$$h : x \in \Omega' \to (k(x), x) \in O \times \Omega'.$$

Soit $U \in \mathcal{O}_{(b,a)}(O \times \Omega')$, alors $u = h^*(U) \in \mathcal{O}_a(\Omega')$ est un germe au point a : on a $u(x) = U(k(x), x)$ pour x voisin de a. Si U est de détermination finie [resp. à monodromie résoluble], il en est de même de u et

$$\sigma_\gamma(u) \subset \sigma_{h\circ\gamma}(U) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma_a(\Omega').$$

3.3 Action d'un opérateur différentiel

Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbf{C}^{n+1}$, $a \in \Omega$ et $u \in \mathcal{O}_a(\Omega)$ un germe se prolongeant analytiquement le long de tout lacet $\gamma \in \Gamma_a$, alors les germes $D^\alpha u$, $\alpha \in \mathbf{N}^{n+1}$, se prolongent analytiquement le long de tout $\gamma \in \Gamma_a$ et $(D^\alpha u)_\gamma = D^\alpha(u_\gamma)$; il en résulte que

$$F^{D^\alpha u}_a = \{D^\alpha\theta;\ \theta \in F^u_a\}.$$

Si le germe u est de détermination finie, il en est donc de même du germe $D^\alpha u$ et la matrice représentative M de A^u_γ dans une base $(\varphi_i)_{1\le i\le p}$ est une matrice représentative de $A^{D^\alpha u}_\gamma$ dans le système de générateurs $(D^\alpha\varphi_i)_{1\le i\le p}$. Ceci prouve que

$$\sigma_\gamma(D^\alpha u) \subset \sigma_\gamma(u) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma_a(\Omega)$$

et que $D^\alpha u$ est à monodromie résoluble lorsque u l'est.

Étant donné deux espaces de Banach complexes E et F et une application bilinéaire continue $(b,u) \in E \times F \mapsto bu \in F$, soient $b : \Omega \to E$ une fonction holomorphe et $u \in \mathcal{O}_a(\Omega; F)$ un germe se prolongeant analytiquement le long de tout lacet $\gamma \in \Gamma_a$, alors le germe $bu \in \mathcal{O}_a(\Omega; F)$ se prolonge analytiquement le long de tout lacet $\gamma \in \Gamma_a$ et $(bu)_\gamma = bu_\gamma$; il en résulte que

$$F_a^{bu} = \{b\theta;\ \theta \in F_a^u\}.$$

Comme précédemment, on en déduit que, si le germe u est de détermination finie [resp. à monodromie résoluble], il en est de même du germe bu et que

$$\sigma_\gamma(bu) \subset \sigma_\gamma(u) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma_a(\Omega).$$

On peut remarquer que si $b \neq 0$ alors une base de F_a^{bu} est donnée par $(b\theta_j)_{1 \leq j \leq p}$ où $(\theta_j)_{1 \leq j \leq p}$ est une base de F_a^u. En effet, d'après ce qui précède, F_a^{bu} est engendré par $(b\theta_j)_{1 \leq j \leq p}$; ensuite, soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbf{C}^p$ tel que $\sum_{j=1}^p \lambda_j b\theta_j = 0$. On a $b\sum_{j=1}^p \lambda_j \theta_j = 0$; par conséquent, b étant non nul, on en déduit que $\sum_{j=1}^p \lambda_j \theta_j = 0$, donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = 0$. Par conséquent, si $b \neq 0$, $(b\theta_j)_{1 \leq j \leq p}$ est une base de F_a^{bu} et on a

$$\sigma_\gamma(bu) = \sigma_\gamma(u) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma_a(\Omega).$$

Considérons maintenant un opérateur différentiel linéaire

$$a(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha \text{ où } a_\alpha \in \mathcal{H}(\Omega; E).$$

D'après ce qui précède

$$u \in \mathcal{O}_a^f(\Omega; F) \text{ [resp. } \mathcal{O}_a^r(\Omega; F)] \ \Rightarrow\ a(x,D)u \in \mathcal{O}_a^f(\Omega; F) \text{ [resp. } \mathcal{O}_a^r(\Omega; F)]$$

et

$$\sigma_\gamma(a(x,D)u) \subset \sigma_\gamma(u) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma_a(\Omega).$$

Notons S l'hyperplan $x_0 = 0$, supposons $\Omega \cap S$ non vide et connexe et prenons $a \in \Omega \cap S$. Soit $u \in \mathcal{O}_a(\Omega; F)$ et $w_h \in \mathcal{O}_a(\Omega \cap S; F)$; ce qui précède permet d'affirmer que

$$u \in \mathcal{O}_a^f(\Omega; F) \Rightarrow v \in \mathcal{O}_a^f(\Omega; F) \text{ et } w_h \in \mathcal{O}_a^f(\Omega \cap S; F),$$

$$u \in \mathcal{O}_a^r(\Omega; F) \Rightarrow v \in \mathcal{O}_a^r(\Omega; F) \text{ et } w_h \in \mathcal{O}_a^r(\Omega \cap S; F),$$

$$\begin{cases} \sigma_\gamma(v) \subset \sigma_\gamma(u) & \text{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma_a(\Omega), \\ \sigma_\delta(w_h) \subset \sigma_\delta(u) & \text{pour tout} \quad \delta \in \Gamma_a(\Omega \cap S). \end{cases}$$

3.4 Primitive

Pour formuler des problèmes intégro-différentiels, nous aurons besoin de définir les primitives par rapport à une variable complexe t. Soient O un ouvert connexe de $\mathbf{C}$, X une variété holomorphe simplement connexe, $(b,a) \in O \times X$ et u appartenant à $\mathcal{O}_{(b,a)}(O \times X)$. On définit la primitive de u par rapport à t s'annulant pour $t = b$ en posant pour (t,x) voisin de (b,a)

$$D_t^{-1}u(t,x) = \int_b^t u(\tau,x)d\tau,$$

l'intégrale s'effectuant le long du segment $[b,t]$. On obtient ainsi un germe primitive $D_t^{-1}u \in \mathcal{O}_{(b,a)}$ et, par récurrence, des germes $D_t^{-l}u \in \mathcal{O}_{(b,a)}$ pour tout entier $l \in \mathbf{N}$.

Nous supposerons que le germe, au point (b,a), u se prolonge analytiquement le long de tout lacet $\gamma \in \Gamma_{(b,a)}(O \times X)$, il en est alors de même des germes $D_t^{-l}u$.

Lemme 3.4.1 *Soit $\gamma \in \Gamma_{(b,a)}(O \times X)$, alors, pour tout $l \in \mathbf{N}$, le germe $P_\gamma^l(u) \in \mathcal{O}_{(b,a)}(O \times X)$ défini par*

$$P_\gamma^l(u) = (D_t^{-l}u)_\gamma - D_t^{-l}(u_\gamma)$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur $O \times X$ qui est un polynôme en t de degré $\leq l-1$ (donc se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} \times X$). De plus, lorsque O est simplement connexe, $P_\gamma^l(u) = 0$.

Preuve 1. Lorsque $l = 0$, $P_\gamma^0(u) = 0$. Lorsque $l = 1$, posons $v = D_t^{-1}u$, on a $D_t v = u$, d'où $D_t v_\gamma = u_\gamma$, ce qui prouve que $D_t P_\gamma^1(u) = 0$. Le germe $P_\gamma^1(u)$ est donc indépendant de t et il se prolonge analytiquement le long de tout chemin d'origine (b,a) de la forme $s \in I \mapsto (b, \delta(s)) \in O \times X$; l'espace X étant simplement connexe, le germe $P_\gamma^1(u)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur X.

On raisonne ensuite par récurrence sur l. On peut écrire

$$\begin{aligned}
\left(D_t^{-(l+1)}u\right)_\gamma &= \left(D_t^{-1}(D_t^{-l}u)\right)_\gamma \\
&= D_t^{-1}\left((D_t^{-l}u)_\gamma\right) + P_\gamma^1\left(D_t^{-l}u\right) \\
&= D_t^{-1}\left(D_t^{-l}(u_\gamma) + P_\gamma^l(u)\right) + P_\gamma^1\left(D_t^{-l}u\right) \\
&= D_t^{-(l+1)}(u_\gamma) + P_\gamma^{l+1}(u)
\end{aligned}$$

où

$$P_\gamma^{l+1}(u) = P_\gamma^1\left(D_t^{-l}u\right) + D_t^{-1}\left(P_\gamma^l(u)\right),$$

ce qui permet de conclure.

2. Lorsque l'ouvert O est simplement connexe, les germes u et $D_t^{-l}u$ se prolongent en des fonctions holomorphes sur $O \times X$, d'où $u_\gamma = u$, $\left(D_t^{-l}u\right)_\gamma = D_t^{-l}u$ et par conséquent $P_\gamma^l(u) = 0$. ∎

Proposition 3.4.1 *On suppose que le groupe fondamental $\pi_1(O, b)$ est un groupe de type fini, alors pour tout $l \in \mathbf{N}$*

$$u \in \mathcal{O}^f_{(b,a)}(O \times X)\ [resp.\ \mathcal{O}^r_{(b,a)}(O \times X)]$$
$$\Rightarrow\ D_t^{-l}u \in \mathcal{O}^f_{(b,a)}(O \times X)\ [resp.\ \mathcal{O}^r_{(b,a)}(O \times X)]$$

et, pour tout $\gamma \in \Gamma_{(b,a)}(O \times X)$

$$\sigma_\gamma(u) \subset \sigma_\gamma(D_t^{-l}u) \subset \sigma_\gamma(u) \cup \{1\}.$$

Preuve Notons $\gamma_1, \ldots, \gamma_p \in \Gamma_b(O)$ des lacets tels que tout lacet de $\Gamma_b(O)$ soit homotope à un lacet de la forme

$$\gamma_{i_1} \ldots \gamma_{i_k}, \quad 1 \leq i_j \leq p.$$

Tout lacet de $\Gamma_{(b,a)}(O \times X)$ est homotope à un lacet de la forme

$$\gamma' : s \in I \mapsto (\gamma(s), a) \text{ où } \gamma \in \Gamma_b(O);$$

notons γ_i' le lacet ainsi associé au lacet γ_i.

Soit $(\theta_j)_{1\leq j\leq q}$ une base de l'espace vectoriel $F^u_{(b,a)}$. D'après le lemme 3.4.1, il existe des fonctions holomorphes

$$\psi^l_{ij} : \mathbf{C} \times X \to E, \quad 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q,$$

telles que

$$(D_t^{-l}\theta_j)_{\gamma_i'} = D_t^{-l}((\theta_j)_{\gamma_i'}) + \psi^l_{ij}.$$

Ceci montre que l'espace vectoriel $F^{D_t^{-l}u}_{(b,a)}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel G engendré par les germes

$$\psi^l_{ij}\ (1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q) \text{ et } D_t^{-l}\theta_j\ (1 \leq j \leq q). \tag{3.3}$$

En effet, $(\theta_j)_{\gamma_i'}$ est une combinaison linéaire des germes $(\theta_k)_{1\leq k\leq q}$ et tout lacet de $\Gamma_{(b,a)}(O \times X)$ est homotope à un produit fini de lacets γ_i' : l'espace G est donc invariant par prolongement analytique et $F^{D_t^{-l}u}_{(b,a)}$ en est un sous-espace.

Dans le système de générateurs (3.3), l'automorphisme de G, $\theta \mapsto \theta_{\gamma_i'}$ admet une représentation matricielle de la forme

$$\begin{pmatrix} Id & M \\ 0 & M^u_{\gamma_i'} \end{pmatrix}$$

où $M^u_{\gamma_i'}$ est la matrice représentative de l'automorphisme $A^u_{\gamma_i'}$ dans la base $(\theta_j)_{1\leq j\leq q}$. Ceci permet de montrer la première partie de la proposition ainsi que l'inclusion $\sigma_\gamma(D_t^{-l}u) \subset \sigma_\gamma(u) \cup \{1\}$.

Pour la deuxième inclusion, il suffit de poser $v = D_t^{-l}u$. On a alors $D_t^l v = u$ et, d'après les résultats du paragraphe 3.3, $\sigma_\gamma(u) \subset \sigma_\gamma(v)$, ce qui termine la preuve. ■

Remarque 3.4.1 On a pour tous $l' \in \mathbf{N}$ et $\gamma \in \Gamma_{(b,a)}(O \times X)$, $P_\gamma^{l'}(\psi_{ij}^l) = 0$.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.4.2 *Pour tout* $\gamma, \delta \in \Gamma_{(b,a)}(O \times X)$, *on a* $P_{\gamma\delta}^l(u) = P_\gamma^l(u) + P_\delta^l(u_\gamma)$.

Preuve On a en effet

$$\begin{aligned} P_{\gamma\delta}^l(u) &= (D_t^{-l}u)_{\gamma\delta} - D_t^{-l}(u_{\gamma\delta}) \\ &= (P_\gamma^l(u) + D_t^{-l}(u_\gamma))_\delta - D_t^{-l}(u_{\gamma\delta}) \\ &= P_\gamma^l(u) + (D_t^{-l}(u_\gamma))_\delta - D_t^{-l}(u_{\gamma\delta}) \\ &= P_\gamma^l(u) + P_\delta^l(u_\gamma). \end{aligned}$$

■

Chapitre 4

Monodromie de la solution d'un problème intégro-différentiel

On considère le problème (4.2) de [19] où t désigne une seule variable complexe, soit

$$\begin{cases} (D_0^m - A_m(x,D))u(t,x) = \displaystyle\sum_{l\in\mathcal{L}} A_l^m(x,D)D_t^{-l}u(t,x) + w_m(t,x), \\ \\ (D_0^h - A_h(x,D))u(t,x) \\ \qquad\qquad = \displaystyle\sum_{l\in\mathcal{L}} A_l^h(x,D)D_t^{-l}u(t,x) + w_h(t,x) \text{ pour } x_0 = 0,\ 0 \le h < m. \end{cases} \tag{4.1}$$

Les hypothèses liées à ce problème sont les suivantes : les opérateurs A_h et A_l^h sont des opérateurs différentiels linéaires à coefficients holomorphes dans un voisinage ouvert Ω_1 de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$; l'ensemble $\mathcal{L}$ est une partie finie de $\mathbf{Z}^*$. On suppose enfin que les ordres des opérateurs vérifient pour tout $0 \le h \le m$

$$\text{ordre } A_h \le h, \qquad \text{ordre}_{x_0} A_h < h,$$

$$\text{ordre } A_l^h \le \begin{cases} h + l - 1 & \text{si } l < 0, \\ h + l & \text{si } l > 0. \end{cases}$$

De plus, les primitives en t sont définies comme au paragraphe précédent.

D'après la proposition 4.8 de [19], pour tout voisinage ouvert simplement connexe $\Omega \subset \Omega_1$ de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$, il existe des voisinages ouverts simplement connexes $\Omega'' \subset \Omega' \subset \Omega$ de $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ et un réel $\eta > 0$ tels que, si O est un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ de diamètre $\le \eta$, pour toutes fonctions holomorphes

$$w_h : \mathcal{R}(O) \times \Omega \to F \text{ [resp. } w_h : \mathcal{R}(O) \times \Omega' \to F],$$

le problème (4.1) admet une unique solution holomorphe

$$u : \mathcal{R}(O) \times \Omega' \to F \text{ [resp. } u : \mathcal{R}(O) \times \Omega'' \to F].$$

Autrement dit, si $w \in \mathcal{O}_{(b,0)}(O \times \Omega)$ [resp. $w \in \mathcal{O}_{(b,0)}(O \times \Omega')$], où $w = (w_h)_{0 \leq h \leq m}$, est un germe au point $(b, 0)$ se prolongeant analytiquement le long de tout lacet $\gamma \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega)$ [resp. $\gamma \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega')$], le problème (4.1) admet une unique solution $u \in \mathcal{O}_{(b,0)}(O \times \Omega')$ [resp. $u \in \mathcal{O}_{(b,0)}(O \times \Omega'')$] qui se prolonge analytiquement le long de tout lacet $\gamma \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega')$ [resp. $\gamma \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega'')$].

Notons $u = S(w)$ la solution de (4.1), on se propose de relier le spectre de u à celui des données w. Étant donné que seules interviennent les traces $w_{h|x_0=0}$ pour $0 \leq h < m$, nous supposerons que ces germes w_h sont indépendants de x_0 ; nous supposerons donc que les ouverts Ω, Ω' et Ω'' sont de la forme $U \times V$ où U et V sont des voisinages ouverts simplement connexes de l'origine de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}^n$ respectivement.

On a alors le

Théorème 4.0.1 *Si le groupe fondamental $\pi_1(O, b)$ est un groupe de type fini, on a*

$$w \in \mathcal{O}^f_{(b,0)}(O \times \Omega) \ [\textit{resp. } \mathcal{O}^r_{(b,0)}(O \times \Omega)] \\ \Rightarrow \ u = S(w) \in \mathcal{O}^f_{(b,0)}(O \times \Omega') \ [\textit{resp. } \mathcal{O}^r_{(b,0)}(O \times \Omega')],$$

$$\sigma_\gamma(w) \cup \{1\} = \sigma_\gamma(u) \cup \{1\} \ \textit{pour tout } \gamma \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega').$$

Preuve Soit $\gamma \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega'')$; on remarquera d'abord que $\sigma_\gamma(w) \subset \sigma_\gamma(u) \cup \{1\}$ d'après les propriétés établies au chapitre précédent.

Le germe u_γ peut se décomposer sous la forme

$$u_\gamma = u_1^\gamma + u_2^\gamma$$

où

$$u_1^\gamma = S(w_\gamma), \ u_2^\gamma = S(Q_\gamma u)$$

avec

$$(Q_\gamma u)_h = \sum_{l \in \mathcal{L}_+} A_l^h(x, D) P_\gamma^l(u), \ \mathcal{L}_+ = \{l \in \mathcal{L}; l > 0\}.$$

Les applications $u \mapsto u_i^\gamma$ sont linéaires.

1. Soient $(\theta_j)_{1 \leq j \leq q}$ une base de $F^w_{(b,0)}$, $\alpha_j = S(\theta_j)$ et H l'espace vectoriel de dimension finie engendré par ces germes ; les germes α_j se prolongent en des fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}(O) \times \Omega'$ et u_1^γ appartient à H, espace vectoriel de dimension finie.

2. Posons $O' = \mathbf{C} \setminus C$ où C est la composante connexe non bornée de $\mathbf{C} \setminus O$; cet ouvert O' est simplement connexe, $O \subset O'$ et diamO'=diam$O \leq \eta$ (voir la figure 4.1). Étant donné que $Q_\gamma u$ est un polynôme en t à coefficients holomorphes dans Ω', la proposition 4.8 de [19] montre, vu le choix de η, que les germes $u_2^\gamma = S(Q_\gamma u)$ se prolongent en des fonctions holomorphes sur $O' \times \Omega''$, donc sur $O \times \Omega''$.

Montrons qu'il existe un sous-espace vectoriel $G \subset \mathcal{H}(O \times \Omega'')$ de dimension finie tel que

$$u_2^\gamma = S(Q_\gamma u) \in G \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega'').$$

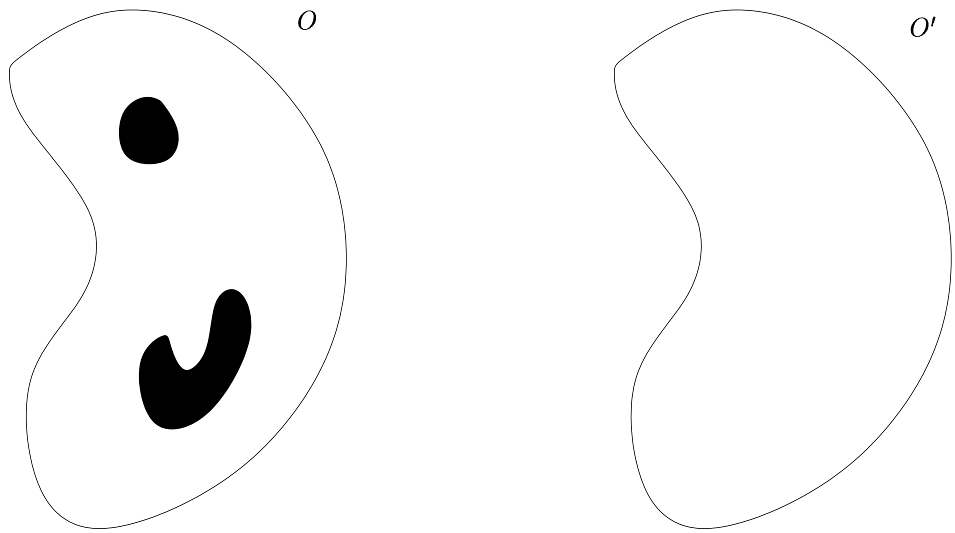

FIG. 4.1 –

Notons $\gamma_i \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega''), 1 \leq i \leq p$, des lacets tels que tout lacet $\gamma \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega'')$ soit homotope à un lacet de la forme

$$\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_k},\ 1 \leq i_j \leq p.$$

D'après le lemme 3.4.2,

$$P^l_\gamma(u) = \sum_{j=1}^{k} P^l_{\gamma_{i_j}}(u_{\tilde{\gamma}_j})$$

où $\tilde{\gamma}_j = \gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_{j-1}},\ \tilde{\gamma}_1$ désignant le lacet constant $e_{(b,0)}$. D'après le lemme 3.4.1, $P^l_{\gamma_{i_j}}(u_2^{\tilde{\gamma}_j}) = 0$, d'où

$$P^l_\gamma(u) = \sum_{j=1}^{k} P^l_{\gamma_{i_j}}(u_1^{\tilde{\gamma}_j}).$$

Il en résulte que $Q_\gamma u$ appartient à l'espace vectoriel engendré par les germes $Q_{\gamma_i}\alpha_j$, où $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$. Ces germes sont des polynômes en t à coefficients holomorphes dans Ω' ; les germes

$$\alpha_{ij} = S(Q_{\gamma_i}\alpha_j)$$

sont donc holomorphes sur $O \times \Omega''$ et u_2^γ appartient à l'espace vectoriel G de dimension finie engendré par ces germes. Ceci prouve que l'espace vectoriel engendré par $(u_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega'')}$ est inclus dans $G + H$; on en déduit que $u \in \mathcal{O}^f_{(b,0)}(O \times \Omega'')$.

3. Montrons que l'espace $G + H$ est invariant par prolongement analytique. On remarque d'abord que $(\alpha_{ij})_\gamma = \alpha_{ij}$.

On a ensuite $\alpha_j = S(\theta_j)$, d'où

$$(\alpha_j)_\gamma = (\alpha_j)_1^\gamma + (\alpha_j)_2^\gamma \text{ où } (\alpha_j)_1^\gamma = S\Big((\theta_j)_\gamma\Big) \in H.$$

D'après la définition de l'espace G, on en déduit que

$$(\alpha_j)_2^\gamma = S\Big(Q_\gamma \alpha_j\Big) \in G.$$

Ceci montre que l'espace $G + H$ est invariant par prolongement analytique et que l'automorphisme $\theta \mapsto \theta_\gamma$ admet dans le système de générateurs

$$(\alpha_{ij}), (\alpha_j),\ 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q,$$

une représentation matricielle de la forme

$$\begin{pmatrix} Id & B \\ 0 & M_\gamma^w \end{pmatrix}$$

où M_γ^w est la matrice représentative de l'automorphisme A_γ^w. Ceci prouve que

$$\sigma_\gamma(G + H) \subset \sigma_\gamma(w) \cup \{1\}.$$

Si les germes $w_h \in \mathcal{O}_{(b,0)}(O \times \Omega)$ sont à monodromie résoluble, d'après le corollaire 3.3 le germe $w = (w_h)_{0 \leq h \leq m}$ est à monodromie résoluble. Donc il existe une base (θ_j) de $F_{(b,0)}^w$ telle que M_γ^w soit triangulaire supérieure pour tout $\gamma \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega)$. Par conséquent, dans le système de générateurs (α_{ij}, α_j), l'automorphisme $\theta \mapsto \theta_\gamma$ admet une matrice représentative triangulaire supérieure pour tout lacet $\gamma \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega'')$. On conclut grâce au lemme 2.0.1, que u est à monodromie résoluble.

4. Soit $\gamma \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega')$, alors il existe $\delta \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega'')$ homotope à γ dans $O \times \Omega'$ car $\Omega'' \subset \Omega'$ et Ω'', Ω' sont deux ouverts simplement connexes (par exemple $\delta(s) = (\gamma_0(s), 0)$). On a donc $(u_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega'')} = (u_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega')}$ car u est holomorphe sur $\mathcal{R}(O) \times \Omega'$. Donc $F_{(b,0)}^u$ est de dimension finie, autrement dit $u \in \mathcal{O}_{(b,0)}^f(O \times \Omega')$. De plus, $\sigma_\gamma(u)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ, on a donc

$$\sigma_\gamma(u) \cup \{1\} = \sigma_\gamma(w) \cup \{1\}$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega')$.
A présent, si $u \in \mathcal{O}_{(b,0)}^r(O \times \Omega'')$, il existe alors une base $(u_1, \dots, u_n)$ de l'espace vectoriel engendré par $(u_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega'')}$ $(= F_{(b,0)}^u)$ telle que, pour tout $\gamma \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega'')$, la représentation matricielle, dans la base $(u_1, \dots, u_n)$, de l'application linéaire A_γ^u soit triangulaire supérieure. Or cet automorphisme ne dépend que de la classe d'homotopie de γ. Par conséquent, pour tout $\gamma \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega')$, A_γ^u admet comme représentation matricielle , dans la base $(u_1, \dots, u_n)$, une matrice triangulaire supérieure. On a donc $u \in \mathcal{O}_{(b,0)}^r(O \times \Omega')$. ■

Nous allons, à présent, montrer un exemple prouvant que l'inclusion

$$\sigma_\gamma(u) \subset \sigma_\gamma(w) \cup \{1\}$$

peut être une égalité. Pour cela, il suffit de considérer le problème intégro-différentiel suivant

$$\begin{cases} D_0 u(t,x) &= D_0 D_t^{-1} u(t,x) + \sqrt{t} \\ \\ u(t,x) &= 0 \text{ pour } x_0 = 0. \end{cases}$$

où $\sqrt{t}$ est le germe au point 1 vérifiant $(\sqrt{t})^2 = t$ et $\sqrt{1} = 1$. $D_t^{-1} u$ est le germe primitive en t du germe u s'annulant en $t = 1$. Ce germe se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\mathbf{C}^*)$. Le germe solution au point $(1, 0)$ est donné par

$$u(t,x) = x_0 \left[\sqrt{t}\, G(t) - \frac{G(1) - 1}{e}\, e^t \right]$$

où

$$G(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n \quad \text{ avec } a_0 = 1 \text{ et } a_{n+1} = \frac{2}{2n+3} a_n.$$

G est une fonction entière et $G(1) \neq 1$. u se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\mathbf{C}^*) \times \mathbf{C}$ et on a par le théorème de structure 8.2.1 des fonctions de détermination finie sur le disque pointé

$$\sigma_\delta(u) = \{-1, 1\}$$

où δ est le lacet $s \mapsto (\exp(2i\pi t), 0)$, et

$$\sigma_\delta(w) = \{-1\}.$$

On a donc bien (dans ce cas)

$$\sigma_\delta(u) = \sigma_\delta(w) \cup \{1\}.$$

Chapitre 5

Preuve du théorème 2.0.3

On revient au problème (2.1)

$$\begin{cases} a(x,D)u(x) & = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} v_i(k_i(x),x), \\ D_0^h u(x) & = w_h(x_1,x) \text{ pour } x_0=0,\ 0\le h<m. \end{cases}$$

La solution du problème (2.1) est de la forme

$$u(x) = \sum_{i=1}^{d} U_i(t,x)_{|t=k_i(x)} = \sum_{i=1}^{d} [D_0^{m-m_i} D_t^{m_i} U_i'(t,x)]_{|t=k_i(x)}$$

où U_i' est un germe au point (a_1,a) se prolongeant en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(O)\times\Omega'$ où Ω' est l'un des ouverts du système fondamental de voisinages de la proposition 2.0.2. $U=(U_1',\dots,U_d')$ est solution d'un problème intégro-différentiel de la forme

$$\begin{cases} (D_0^m - A_m(x,D))U(t,x) = \displaystyle\sum_{l\in\mathcal{L}} A_l^m(x,D)D_t^{-l}U(t,x) + y_m(t,x), \\ (D_0^h - A_h(x,D))U(t,x) \\ \qquad\qquad = \displaystyle\sum_{l\in\mathcal{L}} A_l^h(x,D)D_t^{-l}U(t,x) + y_h(t,x) \text{ pour } x_0=0,\ 0\le h<m \end{cases}$$

avec

$$y_m(t,x) = (a_1(x)D_t^{-m}v_1(t,x),\dots,a_d(x)D_t^{-m}v_d(t,x))$$

où les a_i sont des fonctions holomorphes sur Ω et pour $0\le h\le m-1$

$$y_h(t,x) = \Big(\sum_{k=0}^{m-1} P_{1,k,h}(x',D_t^{-1})w_k(t,x),\dots,\sum_{k=0}^{m-1} P_{d,k,h}(x',D_t^{-1})w_k(t,x)\Big)$$

où $P_{i,j,h}(x', \xi)$ est un polynôme en $\xi \in \mathbf{C}$ à coefficients holomorphes en la variable x'. On en déduit d'après les différents résultats du chapitre 3, que si les v_i, w_h sont de détermination finie [resp. à monodromie résoluble] alors les y_h, $(0 \leq h \leq m)$ sont aussi de détermination finie [resp. à monodromie résoluble]. Donc, compte-tenu du théorème 4.0.1, U sera aussi de détermination finie [resp. à monodromie résoluble]. Par conséquent, il en sera de même pour la solution u du problème (2.1).
De plus, d'après le corollaire 3.1.3 et la proposition 3.4.1, on a, pour tout δ appartenant à $\Gamma_{(a_1,a)}(O \times \Omega)$,

$$\sigma_\delta(y_m) \subset \sigma_\delta(v) \cup \{1\}$$

où $v = (v_1, \ldots, v_d)$ et

$$\sigma_\delta(y_h) \subset \sigma_\delta(w) \cup \{1\} \text{ pour } 0 \leq h \leq m-1$$

où $w = (w_0, \ldots, w_{m-1})$.

Soit $\gamma \in \Gamma_a(\Omega'_a)$. D'après la définition de Ω'_a et des fonctions h_i, on a $h_i(\Omega'_a) \subset O$, donc $h_i \circ \gamma \in \Gamma_{(a_1,a)}(O \times \Omega')$. On a, par conséquent,

$$u_\gamma(x) = \sum_{i=1}^{d} (D_0^{m-m_i} D_t^{m_i} (U'_i)_{h_i \circ \gamma}(t,x))_{|t=k_i(x)}$$

et on en déduit d'après le théorème 4.0.1 que

$$\sigma_{h_i \circ \gamma}(U'_i) \subset \sigma_{h_i \circ \gamma}(v) \cup \sigma_{h_i \circ \gamma}(w) \cup \{1\}.$$

D'autre part, $x \mapsto u_i(x) = U_i(t,x)_{|t=k_i(x)}$ vérifie

$$a(x, D) u_i(x) = \tilde{v}_i(x)$$

où $\tilde{v}_i(x) = v_i(k_i(x), x)$. On a donc, compte-tenu des résultats des paragraphes 3.1 et 3.2

$$\sigma_\gamma(\tilde{v}_i) \subset \sigma_\gamma(u_i) \subset \sigma_{h_i \circ \gamma}(U'_i).$$

Par conséquent, on a

$$\sigma_\gamma(\tilde{v}_i) \subset \sigma_\gamma(u_i) \subset \sigma_{h_i \circ \gamma}(v) \cup \sigma_{h_i \circ \gamma}(w) \cup \{1\}, \tag{5.1}$$

ce qui termine la preuve du théorème 2.0.3.

Nous allons montrer à présent que dans le cas où $O = \dot{D}_\omega$, on peut trouver une écriture $u(x) = \sum_{i=1}^{d} u_i(x)$ de la solution vérifiant pour tout $i = 1, \ldots, d$ et tout $\gamma \in \Gamma_a(\Omega'_a)$

$$\sigma_\gamma(\tilde{v}_i) \subset \sigma_\gamma(u_i) \subset \sigma_{h_i \circ \gamma}(v) \cup \sigma_{h_i \circ \gamma}(w). \tag{5.2}$$

Montrons tout d'abord un lemme ainsi que son corollaire dont nous aurons besoin par la suite.

Soient X une variété holomorphe connexe et $a \in X$. On suppose que le groupe fondamental $\pi_1(X,a)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$ et on note $\delta \in \Gamma_a(X)$ un lacet dont la classe d'homotopie engendre le groupe $\pi_1(X,a)$. Si $u \in \mathcal{O}_a^f(X)$, on pose $u_n = u_{\delta^n}$ pour $n \in \mathbf{Z}$. On a alors le

Lemme 5.0.3 *Soit $n \in \mathbf{N}$ le plus grand entier tel que la famille $(u_0, \ldots, u_n)$ soit libre, alors $(u_0, \ldots, u_n)$ est une base de F_a^u. De plus, $1 \in \sigma_\delta(u)$ si, et seulement si*

$$u_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i u_i \text{ où } \lambda_i \in \mathbf{C} \text{ et } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1.$$

Preuve On note F le sous-espace vectoriel de F_a^u engendré par $(u_0, \ldots, u_n)$. Montrons tout d'abord par récurrence que pour tout $m \geq n+1$, $u_m \in F$. Si $m = n+1$, alors $u_m \in F$ par définition de n. On suppose, maintenant, que $u_m \in F$ $(m \geq n+1)$, alors $u_{m+1} = (u_m)_\delta = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (u_i)_\delta$ car $u_m \in F$. Donc $u_{m+1} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i u_{i+1} \in F$ car $u_1, \ldots, u_{n+1}$ appartiennent à F.

Montrons, à présent, que pour tout $m < 0$, $u_m \in F$. On a $u_{n+1} - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i u_i = 0$ avec $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$. De plus, on peut remarquer qu'alors $\lambda_0 \neq 0$ sinon on aurait

$$(u_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i)_{\delta^{-1}} = u_n - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_{i+1} u_i = 0$$

et donc u_n appartiendrait à l'espace vectoriel engendré par $(u_0, \ldots, u_{n-1})$, ce qui contredit la définition de n ; d'où $\lambda_0 \neq 0$. On en déduit que

$$(u_{n+1} - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i u_i)_{\delta^{-1}} = u_n - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i u_{i-1} = 0.$$

Donc $u_{-1} \in F$ car $\lambda_0 \neq 0$. A présent, si $u_{-m} \in F$, on a $u_{-m-1} = (u_{-m})_{\delta^{-1}}$. Par conséquent, $u_{-m-1} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (u_i)_{\delta^{-1}} = \sum_{i=-1}^{n-1} \lambda_{i+1} u_i \in F$ car $u_{-1}, \ldots, u_{n-1}$ appartiennent à F. Donc $(u_0, \ldots, u_n)$ est une base de F_a^u.

Montrons ensuite que $1 \in \sigma_\delta(u)$ si, et seulement si,

$$u_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i u_i \text{ où } \lambda_i \in \mathbf{C} \text{ et } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1.$$

La matrice représentative de l'automorphisme $\theta \mapsto \theta_\delta$ de F_a^u dans la base $(u_0, \ldots, u_n)$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & & \lambda_0 \\ 1 & & & \lambda_1 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et $1 \in \sigma(M)$ si et seulement si $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ car le polynôme caractéristique de la matrice M est égal à $(-1)^n (X^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i)$. ■

Corollaire 5.0.1 *Soit $u \in \mathcal{O}_a^f(X)$. On suppose que $1 \notin \sigma_\delta(u)$, soit $v \in \mathcal{H}(X)$ alors*

$$v = 0 \Leftrightarrow 1 \notin \sigma_\delta(u+v).$$

Preuve D'après le lemme précédent, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel qu'une base de F_a^{u+v} soit donné par $(u_0 + v, \ldots, u_n + v)$.
Supposons $v \neq 0$, on a alors $u_{n+1} + v = \sum_{i=0}^n \lambda_i(u_i + v)$. Donc

$$u_{n+1} - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i u_i = (\sum_{i=0}^{n} \lambda_i - 1)v.$$

Par conséquent si $\sum_{i=0}^n \lambda_i \neq 1$, on a $u_{n+1} - \sum_{i=0}^n \lambda_i u_i \in \mathcal{H}(\Omega)$, donc est un vecteur propre de F_a^u associé à la valeur propre 1 pour l'application linéaire $\theta \mapsto \theta_\delta$, ce qui est impossible d'après les hypothèses. Donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Donc $1 \in \sigma_\delta(u+v)$ d'après le lemme précédent.
Si $v = 0$, alors $u + v = u$ et $1 \notin \sigma_\delta(u)$, donc $1 \notin \sigma_\delta(u+v)$. ■

On choisit, à présent, pour Ω', un ouvert du système fondamental de voisinages de la proposition 2.0.2 qui vérifie $k_i(\Omega') \subset D_\omega$, pour $i = 1, \ldots, d$. On a alors $\Omega'_a = \Omega' \setminus K$. Ainsi, pour tout lacet $\gamma \in \Gamma_a(\Omega' \setminus K)$, on a $h_i \circ \gamma \in \Gamma_{(a_1,a)}(\dot{D}_\omega \times \Omega')$, pour $i = 1, \ldots, d$. Notons δ un lacet dont la classe d'homotopie engendre $\pi_1(\dot{D}_\omega \times \Omega')$.

Supposons tout d'abord que $1 \in \sigma_\delta(v) \cup \sigma_\delta(w)$.

Soit $\gamma \in \Gamma_a(\Omega' \setminus K)$, il existe alors $n_i \in \mathbf{Z}$ tel que $h_i \circ \gamma$ soit homotope à δ^{n_i}. Étant donné que $1 \in \sigma_\delta(v) \cup \sigma_\delta(w)$, on a $1 \in \sigma_{\delta^{n_i}}(v) \cup \sigma_{\delta^{n_i}}(w)$. Par conséquent, on a

$$\sigma_{h_i \circ \gamma}(v) \cup \sigma_{h_i \circ \gamma}(w) = \sigma_{h_i \circ \gamma}(v) \cup \sigma_{h_i \circ \gamma}(w) \cup \{1\},$$

ce qui prouve (5.2).

Supposons à présent que $1 \notin \sigma_\delta(v) \cup \sigma_\delta(w)$.
Posons $y = (y_h)_{0 \leq h \leq m}$ et montrons tout d'abord qu'il existe un espace vectoriel F invariant par prolongement analytique contenant $F_{(a_1,a)}^y$ et qu'une matrice représentative de l'automorphisme de F, $\theta \mapsto \theta_\delta$ dans un certain système de générateurs soit

$$\begin{pmatrix} Id & B \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

où M est une matrice diagonale par blocs avec chaque bloc de la forme $M_\delta^{v_i}$ ou $M_\delta^{w_h}$, où $M_\delta^{v_i}$ [resp. $M_\delta^{w_h}$] est la matrice représentative de $A_\delta^{v_i}$ [resp. $A_\delta^{w_h}$] dans une base de $F_{(a_1,a)}^{v_i}$ [resp. $F_{(a_1,a)}^{w_h}$].
Pour cela nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 5.0.4 *Soient X une variété holomorphe, $a \in X$ et $E_j \subset \mathcal{O}_a^f(X)$, $1 \leq j \leq p$, des espaces vectoriels invariants par prolongement analytique, alors $E = \prod_{j=1}^p E_j$ est* *invariant par prolongement analytique. De plus, si M_j est une matrice représentative, dans un système de générateurs, de l'automorphisme de E_j, $\theta \mapsto \theta_\gamma$ où $\gamma \in \Gamma_a(X)$, il existe un système de générateurs de E tel qu'une représentation matricielle de l'automorphisme de E, $\theta \mapsto \theta_\gamma$ dans ce système de générateurs soit*

$$\begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_p \end{pmatrix}.$$

Preuve Soient $\theta \in E$ et $\gamma \in \Gamma_a(X)$. On a $\theta = (\theta_j)_{0\leq j\leq p}$ et $\theta_\gamma = ((\theta_j)_\gamma)_{0\leq j\leq p} \in E$ car les E_j sont invariants par prolongement analytique. Donc E est bien invariant par prolongement analytique.

Notons $\pi_j : E \to E_j$ la projection d'indice j et $\lambda_j : E_j \to E$ l'injection linéaire définie comme suit : si $e \in E_j$, $\pi_j(\lambda_j(e)) = e$ et $\pi_k(\lambda_j(e)) = 0$ pour $k \neq j$. Si S_j est un système de générateurs de E_j, $S = \bigcup_{j=1}^p \lambda_j(S_j)$ est un système de générateurs de E. Enfin, si M_j est une matrice représentative de $\theta \mapsto \theta_\gamma$ dans S_j alors une matrice représentative de l'automorphisme de E, $\theta \mapsto \theta_\gamma$ dans S est donnée par

$$\begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_p \end{pmatrix}.$$

■

On rappelle que

$$y_m(t,x) = (a_1(x)D_t^{-m}v_1(t,x), \ldots, a_d(x)D_t^{-m}v_d(t,x))$$

où les a_i sont des fonctions holomorphes sur Ω. Compte-tenu des résultats du chapitre 3, il existe, pour tout $i = 1, \ldots, d$, un espace vectoriel G_i, contenant $F_{(a_1,a)}^{a_i(x)D_t^{-1}v_i}$, invariant par prolongement analytique et un système de générateurs de G_i, (φ_k^i, ψ_l^i), où $\varphi_k^i \in \mathcal{H}(D_\omega \times \Omega)$, tel qu'une matrice représentative de l'automorphisme de G_i, $\theta \mapsto \theta_\delta$ soit de la forme

$$M_i = \begin{pmatrix} Id & B_i \\ 0 & M_\delta^{v_i} \end{pmatrix}$$

où $M_\delta^{v_i}$ est la matrice représentative de $A_\delta^{v_i}$ dans une base de $F_{(a_1,a)}^{v_i}$.
Donc, d'après le lemme 5.0.4, il existe un espace vectoriel F_m, contenant $F_{(a_1,a)}^{y_m}$ et un système de générateurs S_m de F_m tel qu'une représentation matricielle de l'automorphisme de F_m, $\theta \mapsto \theta_\delta$ dans S_m soit

$$\begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_d \end{pmatrix}.$$

De plus, quitte à réarranger S_m, on peut l'écrire sous la forme (α_k^m, β_l^m) où α_k^m appartient à $\mathcal{H}(D_\omega \times \Omega)$, et une matrice représentative de l'automorphisme de F_m, $\theta \mapsto \theta_\delta$, dans ce système de générateurs est

$$\begin{pmatrix} Id & & & B_1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & Id & & & B_d \\ & & & M_\delta^{v_1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & M_\delta^{v_d} \end{pmatrix}.$$

Maintenant, on rappelle que pour $0 \leq h \leq m-1$ on a

$$y_h(t,x) = \Big(\sum_{k=0}^{m-1} P_{1,k,h}(x', D_t^{-1}) w_k(t,x), \ldots, \sum_{k=0}^{m-1} P_{d,k,h}(x', D_t^{-1}) w_k(t,x) \Big)$$

où $P_{i,j,h}(x', \xi)$ est un polynôme en $\xi \in \mathbf{C}$ à coefficients holomorphes en la variable x'. Donc toute composante de y_h s'écrit sous la forme

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{l_k} a_{kl}(x') D_t^{-l} w_k(t,x).$$

En utilisant à nouveau les résultats du chapitre 3 et en raisonnant comme précédemment, on peut construire un espace vectoriel F_h contenant $F_{(a_1,a)}^{y_h}$, invariant par prolongement analytique, et un système de générateurs de F_h de la forme (α_k^h, β_l^h) où $\alpha_k^h \in \mathcal{H}(D_\omega \times \Omega)$. Une représentation matricielle de l'automorphisme de F_h, $\theta \mapsto \theta_\delta$, dans ce système de générateurs est

$$\begin{pmatrix} Id & B^h \\ 0 & M^h \end{pmatrix}$$

où M^h est une matrice diagonale par blocs, chaque bloc étant de la forme $M_\delta^{w_k}$, qui est la matrice représentative de $A_\delta^{w_k}$ dans une base de $F_{(a_1,a)}^{w_k}$.
Donc, en utilisant à nouveau le lemme 5.0.4 et quitte à réarranger le système de générateurs que l'on obtient, on a un système de générateurs d'un espace vectoriel F, invariant par prolongement analytique, contenant $F_{(a_1,a)}^{y}$, de la forme (α_k, β_l) où $\alpha_k \in \mathcal{H}(D_\omega \times \Omega)$. Enfin, une matrice représentative de l'automorphisme de F, $\theta \mapsto \theta_\delta$ dans ce système de générateurs est de la forme

$$\begin{pmatrix} Id & B \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

où M est une matrice diagonale par blocs, avec chaque bloc de la forme $M_\delta^{v_i}$ ou $M_\delta^{w_h}$. On peut remarquer que l'on a $\sigma(M) \subset \sigma_\delta(v) \cup \sigma_\delta(w)$, et donc que $1 \notin \sigma(M)$. On a, enfin,

$$\sigma(M^n) \subset \sigma_{\delta^n}(v) \cup \sigma_{\delta^n}(w) \text{ pour tout } n \in \mathbf{Z}.$$

D'après la preuve du théorème 4.0.1, l'espace vectoriel $\tilde{F}$, engendré par

$$(S(Q_{\delta^{\pm 1}}S(\alpha_k)), S(Q_{\delta^{\pm 1}}S(\beta_l)), S(\alpha_k), S(\beta_l))$$

est invariant par prolongement analytique et contient $F^U_{(a_1,a)}$. Il est à noter que $Q_{\delta^{\pm 1}}S(\alpha_k) = 0$ car $\alpha_k \in \mathcal{H}(D_\omega \times \Omega)$, donc $\tilde{F}$ est engendré par

$$(S(Q_{\delta^{\pm 1}}S(\beta_l)), S(\alpha_k), S(\beta_l)).$$

Une matrice représentative de l'automorphisme de $\tilde{F}$, $\theta \mapsto \theta_\delta$ dans ce système de générateurs est donnée par

$$\begin{pmatrix} Id & 0 & \tilde{B} \\ 0 & Id & B \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id & B' \\ 0 & M \end{pmatrix}.$$

Puisque $1 \notin \sigma(M)$, on a $M - Id$ qui est inversible. De là, on tire

$$\begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id & B'(Id - M)^{-1} \\ 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id & B' \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id & B'(M - Id)^{-1} \\ 0 & Id \end{pmatrix}.$$

Il existe donc un système de générateurs de $\tilde{F}$ de la forme

$$(S(Q_{\delta^{\pm 1}}S(\beta_l)), S(\alpha_k), \psi_l)$$

tel qu'une matrice représentative de l'automorphisme de $\tilde{F}$, $\theta \mapsto \theta_\delta$, dans ce système de générateurs soit

$$\begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}.$$

On a

$$U'_i = \sum \lambda_l \psi^i_l + \sum \mu_k S(\alpha_k)^i + \sum \nu_l S(Q_{\delta^{\pm 1}}(\beta_l))^i$$

et on pose

$$\tilde{U}'_i = \sum \lambda_l \psi^i_l.$$

On note $\tilde{F}_i$ l'espace vectoriel engendré par

$$(S(Q^{\pm 1}_\delta S(\beta_l))^i, S(\alpha_k)^i, \psi^i_l).$$

Le sous-espace vectoriel de $\tilde{F}_i$ engendré par (ψ^i_l) est invariant par prolongement analytique. En effet, soit $\delta' \in \Gamma_{(a_1,a)}(\dot{D}_\omega \times \Omega')$; il existe alors $n \in \mathbf{Z}$ tel que δ' soit homotope à δ^n. De plus, on a $(\psi^i_l)_{\delta'} = \sum \lambda_{nkl} \psi^i_k$ où $(\lambda_{nkl})_{k,l}$ est la matrice M^n et une matrice représentative dans le système de générateurs (ψ^i_l) de l'automorphisme de $\tilde{F}_i$, $\theta \mapsto \theta_{\delta'}$ est M^n. On a donc

$$\sigma_{\delta'}(\tilde{U}'_i) \subset \sigma(M^n).$$

Posons

$$\tilde{u}_i(x) = [D_0^{m-m_i} D_t^{m_i} \tilde{U}_i'(t,x)]_{|t=k_i(x)},$$
$$w_h^i(x') = [D_0^h u_i(x)]_{|S} \quad \text{pour tous } 0 \leq h < m,\ 1 \leq i \leq d,$$

et

$$W_h^i(t,x) = w_h^i(t,x'').$$

Le germe u_i est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(x,D)u_i(x) = v_i(k_i(x),x), \\ \\ D_0^h u_i(x) = W_h^i(x_1,x) \text{ pour } x_0 = 0, 0 \leq h < m. \end{cases}$$

Or, étant donné que u est solution du problème de Cauchy (2.1) et que $u = \sum_{i=1}^d u_i$, on a $(\sum_{i=1}^d W_h^i(x_1,x))_{|S} = w_h(x_1,x)_{|S}$. De plus, vu que $U_i' - \tilde{U}_i' \in \mathcal{H}(D_\omega \times \Omega')$, $\tilde{u}_i$ est solution d'un problème de Cauchy de la forme

$$\begin{cases} a(x,D)\tilde{u}_i(x) = v_i(k_i(x),x) + \varphi_m^i(k_i(x),x), \\ \\ D_0^h \tilde{u}_i(x) = W_h^i(x_1,x) + \varphi_h^i(k_i(x),x) \text{ pour } x_0 = 0,\ 0 \leq h < m \end{cases}$$

où $\varphi_h^i \in \mathcal{H}(D_\omega \times \Omega')$ pour tous $0 \leq h \leq m$, $1 \leq i \leq d$. On rappelle que les germes $x \mapsto v_i(k_i(x),x)$ [resp. $x \mapsto \varphi_m^i(k_i(x),x)$] sont les germes $x \mapsto h_i^*(v_i)(x)$ [resp. $x \mapsto h_i^*(\varphi_m^i)(x)$].

On choisit à présent $\gamma \in \Gamma_a(\Omega' \cap S \smallsetminus T)$ de la forme $s \mapsto (0, a_1 e^{2i\pi s}, a'')$. D'après la proposition 2.0.2, la classe d'homotopie de γ engendre tous les $\pi_1(\Omega' \smallsetminus K_i, a)$, et de plus, on peut supposer, quitte à changer l'orientation de γ, que $h_i \circ \gamma$ est homotope à δ. On a alors

$$\sigma_\gamma(h_i^*(v_i + \varphi_m^i)) \subset \sigma_\gamma(\tilde{u}_i) \subset \sigma_\delta(\tilde{U}_i') \subset \sigma(M). \tag{5.3}$$

On a $h_i^*(v_i) + h_i^*(\varphi_m^i) \in \mathcal{O}_a^f(\Omega' \smallsetminus K_i)$ et $\pi_1(\Omega' \smallsetminus K_i, a) \simeq \mathbf{Z}$. Par hypothèse, $1 \notin \sigma_\delta(v_i)$, d'où $1 \notin \sigma_\gamma(h_i^*(v_i))$ et on sait que $\varphi_m^i \in \mathcal{H}(\dot{D}_\omega \times \Omega')$, donc $h_i^*(\varphi_m^i) \in \mathcal{H}(\Omega' \smallsetminus K_i)$. Enfin, d'après (5.3), on a $1 \notin \sigma_\gamma(h_i^*(v_i) + h_i^*(\varphi_m^i))$ car $1 \notin \sigma(M)$; on peut donc appliquer le corollaire 5.0.1 et en déduire que $h_i^*(\varphi_m^i) = 0$.

Ensuite, on a $D_0^h \tilde{u}_i(x)_{|S} = (h_i^*(W_h^i) + h_i^*(\varphi_h^i))_{|S}$; d'où

$$\sigma_\gamma((h_i^*(W_h^i) + h_i^*(\varphi_h^i))_{|S}) \subset \sigma_\gamma(\tilde{u}_i) \subset \sigma(M), \tag{5.4}$$

ce qui entraîne que $1 \notin \sigma_\gamma((h_i^*(W_h^i) + h_i^*(\varphi_h^i))_{|S})$ car $1 \notin \sigma(M)$. Par conséquent, on a, d'après le lemme 3.1.1, $1 \notin \sigma_\gamma((h_i^*(w_h) + h_i^*(\varphi_h))_{|S})$ où $\varphi_h = \sum_{i=1}^d \varphi_h^i$. De plus, le germe $h_i^*(w_h)_{|S} + h_i^*(\varphi_h)_{|S} \in \mathcal{O}_a^f(\Omega' \cap S \smallsetminus T)$ et $\pi_1(\Omega' \cap S \smallsetminus T, a) \simeq \mathbf{Z}$ est engendré par la classe d'homotopie de γ.

Par hypothèse, $1 \notin \sigma_\delta(w_h)$, d'où $1 \notin \sigma_\gamma(h_i^*(w_h)_{|S})$ et on sait que $\varphi_h \in \mathcal{H}(\dot{D}_\omega \times \Omega')$, par conséquent $h_i^*(\varphi_h)_{|S} \in \mathcal{H}(\Omega' \cap S \smallsetminus T)$. D'après (5.4), on a $1 \notin \sigma_\gamma(h_i^*(w_h)_{|S} + h_i^*(\varphi_h)_{|S})$; on peut donc à nouveau appliquer le corollaire 5.0.1 et en déduire que $h_i^*(\varphi_h)_{|S} = 0$.

Ceci montre que $\sum_{i=1}^{d} \tilde{u}_i$ est solution du problème (2.1).

A présent, soit $\tilde{\gamma} \in \Gamma_a(\Omega' \setminus K)$. On a

$$\tilde{u}_{\tilde{\gamma}} = \sum_{i=1}^{d} (\tilde{u}_i)_{\tilde{\gamma}} = \sum_{i=1}^{d} [D_0^{m-m_i} D_t^{m_i} (\tilde{U}_i')_{h_i \circ \tilde{\gamma}}(t,x)]_{|t=k_i(x)}.$$

Donc, étant donné qu'il existe $n_i \in \mathbf{Z}$ tel que $h_i \circ \tilde{\gamma}$ soit homotope à δ^{n_i}, on en déduit que $\sigma_{h_i \circ \tilde{\gamma}}(\tilde{U}_i') \subset \sigma(M^{n_i}) \subset \sigma_{h_i \circ \tilde{\gamma}}(v) \cup \sigma_{h_i \circ \tilde{\gamma}}(w)$, d'où

$$\sigma_{\tilde{\gamma}}(\tilde{v}_i) \subset \sigma_{\tilde{\gamma}}(\tilde{u}_i) \subset \sigma_{h_i \circ \tilde{\gamma}}(v) \cup \sigma_{h_i \circ \tilde{\gamma}}(w),$$

ce qui prouve (5.2).

Chapitre 6

Un contre-exemple

Nous montrons, ici, grâce à un contre-exemple que le théorème 2.0.3 ne subsiste pas si $\pi_1(O)$ n'est pas de type fini.
On pose $a_n = 1/n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $O = \mathbf{C} \setminus \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n\}}$
On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccll} D_0(D_0+D_1)u(x) & = & v_1(k_1(x),x), & \\ u(x) & = & 0 & \text{pour } x_0=0, \\ D_0u(x) & = & w(x_1,x) & \text{pour } x_0=0, \end{array}\right.$$

où $k_1(x) = x_1$, $k_2(x) = x_1 - x_0$ et

$$v_1(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x_0+a_{n+1}-t)^n/(n!(a_{n+1}-t)),$$

$$w(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-t)^n/n!.$$

On a $v_1, w \in \mathcal{H}(O\times\mathbf{C}^2)$. Ce sont donc des germes, au point $(0,i)$, de détermination finie. Le germe solution $u \in \mathcal{O}_{(0,i)}(\mathbf{C}^2)$ est donné par

$$u(x) = u_1(k_1(x),x) + u_2(k_2(x),x)$$

avec

$$u_1(t,x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}(x_0+a_n-t)^n[\ln(a_n-t)],$$

$$u_2(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}(a_n-t)^n[\ln(a_n-t)].$$

u_1 et u_2 appartiennent à $\mathcal{O}_{(i;(0,i))}(O\times\mathbf{C}^2)$ et se prolongent en des fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}(O)\times\mathbf{C}^2$.

Montrons que u n'est pas de détermination finie. Pour cela, on pose

$$K_n = \{x \in \mathbf{C}^2;\ a_n - x_1 = 0\} \qquad K'_n = \{x \in \mathbf{C}^2;\ x_0 + a_n - x_1 = 0\}$$

et on note $\gamma_k \in \Gamma_{(0,i)}(\mathbf{C}^2 \setminus (\bigcup_n K_n \cup K'_n))$ un lacet tel que sa classe d'homotopie dans $\mathbf{C}^2 \setminus K_k$ engendre $\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus K_k, (0,i)) \simeq \mathbf{Z}$ et tel que sa classe d'homotopie dans $\mathbf{C}^2 \setminus (\bigcup_{n \neq k} K_n \cup \bigcup_n K'_n)$ soit nulle. On suppose de plus que les γ_k sont orientés de manière à ce que

$$u_{\gamma_k}(x) = u(x) - \frac{2i\pi}{(k-1)!}(x_0 + a_k - x_1)^k.$$

Montrons que l'espace vectoriel F engendré par $(u_{\gamma_j})_{k \in \mathbf{N}^*}$ est de dimension infinie. Supposons le contraire, il existe alors $k_1, \ldots, k_n \in \mathbf{N}^*$ tels que $u_{\gamma_{k_1}}, \ldots, u_{\gamma_{k_n}}$ engendrent F. Soit $k > \max\{k_1, \ldots, k_n\}$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ tels que

$$u_{\gamma_k} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_{\gamma_{k_j}}.$$

D'où

$$\left(1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right) u(x) = \frac{2i\pi}{(k-1)!}(x_0 + a_k - x_1)^k - \sum_{j=1}^{n} \frac{2i\pi\lambda_j}{(k_j-1)!}(x_0 + a_{k_j} - x_1)^{k_j}.$$

Le second membre de cette égalité étant holomorphe au voisinage de l'origine et u n'étant pas holomorphe au voisinage de l'origine, cette égalité n'est possible que si $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$; autrement dit si

$$\frac{2i\pi}{(k-1)!}(x_0 + a_k - x_1)^k - \sum_{j=1}^{n} \frac{2i\pi\lambda_j}{(k_j-1)!}(x_0 + a_{k_j} - x_1)^{k_j} = 0.$$

Mais ceci est impossible compte tenu du choix de k. F est donc de dimension infinie et u n'est pas de détermination finie.

Chapitre 7

Preuve du théorème 2.0.4

On considère d'abord le problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(x,D)u(x) &= v(x), \\ \\ D_0^h u(x) &= 0 \qquad \text{pour } x_0 = 0,\ 0 \le h < m \end{cases} \tag{7.1}$$

où $v \in \mathcal{O}_a^f(\Omega \smallsetminus K)$; on note $u = S(v)$ la solution de (7.1) : cette solution se prolonge analytiquement le long de tout lacet $\gamma \in \Gamma_a(\Omega' \smallsetminus K)$.

D'après les propositions 2.0.1 et 2.0.2, on choisit $U_1 \subset U_2 \subset \Omega'$, deux voisinages ouverts simplement connexes de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$ de la forme

$$U_j = D_{r_j} \times D_{s_j} \times \Omega_{n-1}^j \qquad j = 1, 2,$$

tels qu'il existe des lacets $\delta_i \in \Gamma_a(U_1 \smallsetminus K)$, $a \in U_1 \cap S \smallsetminus T$, $1 \le i \le d$ dont les classes d'homotopie engendrent le groupe $\pi_1(U_1 \smallsetminus K, a)$ et tels que

$$[\delta_1][\delta_i] = [\delta_i][\delta_1] \qquad 1 \le i \le d.$$

De plus, le lacet δ_1 est tracé dans $U_1 \cap S \smallsetminus T$ et sa classe d'homotopie engendre les groupes $\pi_1(U_j \cap S \smallsetminus T, a)$ $j = 1, 2$ (donc engendre les $\pi_1(U_j \smallsetminus K_i, a)$ d'après la proposition 2.0.2). Enfin, on peut supposer que les difféomorphismes $\tilde{h}_i : x \mapsto (x_0, k_i(x), x'')$ sont définis sur Ω' pour $1 \le i \le d$ et (en choisissant U_1 et U_2 suffisament petit) que

$$\bigcup_{i=1}^{d} \tilde{h}_i(U_1) \subset U_2, \qquad \bigcup_{i=1}^{d} \tilde{h}_i^{-1}(U_2) \subset \Omega'.$$

Soient $(v_j)_{1 \le j \le p}$ une base de F_a^v, $u_j = S(v_j)$ et G l'espace vectoriel engendré par $(u_j)_{1 \le j \le p}$; on notera que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{O}_a$ et que $(u_j)_{1 \le j \le p}$ en est une base : en effet, toute relation de la forme $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j u_j = 0$ impliquerait $S(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j v_j) = 0$, d'où $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j v_j = 0$, l'application S étant injective d'après l'unicité de la solution de (7.1).

On vérifie d'abord que

$$\theta \in G \Rightarrow \theta_{\delta_1^{\pm 1}} \in G. \tag{7.2}$$

Le lacet δ_1 étant tracé dans $U_1 \cap S \setminus T$, on a

$$(u_j)_{\delta_1^{\pm 1}} = S((v_j)_{\delta_1^{\pm 1}})$$

où $(v_j)_{\delta_1^{\pm 1}} \in F_a^v$, d'où $(u_j)_{\delta_1^{\pm 1}} \in G$, ce qui prouve (7.2). De plus, dans la base (u_j), l'automorphisme $\theta \mapsto \theta_{\delta_1^{\pm 1}}$ de G admet pour matrice représentative, la matrice représentative $M^v_{\delta_1^{\pm 1}}$ de l'automorphisme $A^v_{\delta_1^{\pm 1}}$ dans la base (v_j).

Lorsque $2 \leq i \leq d$, on peut écrire

$$a(x, D)(u_j)_{\delta_i^{\pm 1}} = (v_j)_{\delta_i^{\pm 1}} = \sum_{k=1}^{p} \lambda^{\pm}_{ijk} v_k$$

où $(\lambda^{\pm}_{ijk})_{j,k}$ est la matrice représentative de l'automorphisme $A^v_{\delta_i^{\pm 1}}$ dans la base (v_j). On pose

$$U^{\pm}_{ij} = (u_j)_{\delta_i^{\pm 1}} - \sum_{k=1}^{p} \lambda^{\pm}_{ijk} u_k;$$

ces germes, au point a, se prolongent analytiquement le long de tout lacet appartenant à $\gamma \in \Gamma_a(U_2 \setminus K)$.

Montrons que ces germes $U^{\pm}_{ij}$ sont de détermination finie. Vu que

$$a(x, D)U^{\pm}_{ij} = 0,$$

il s'agit de vérifier que les germes

$$W^{\pm}_{ijh} = (D_0^h U^{\pm}_{ij})_{|S},\ 0 \leq h < m,$$

sont de détermination finie. On remarque que le germe $W^{\pm}_{ijh}$ appartient à l'espace $H^{\pm}_{ih}$ engendré par les germes

$$(D_0^h u_k)_{|S}, \qquad (D_0^h((u_k)_{\delta_i^{\pm 1}}))_{|S},\ 1 \leq k \leq p, \tag{7.3}$$

germes qui se prolongent analytiquement le long de tout lacet $\gamma \in \Gamma_a(U_2 \cap S \setminus K)$. On observe que $H^{\pm}_{ih}$ est invariant par prolongement analytique, c'est à dire que

$$\theta \in H^{\pm}_{ih} \Longrightarrow \theta_{\delta_1^{\pm 1}} \in H^{\pm}_{ih}.$$

Vu que δ_1 est tracé dans S et que $[\delta_1]$ commute avec $[\delta_i]$ pour $i = 1, \ldots, d$, on a

$$((D_0^h(u_k))_{|S})_{\delta_1^{\pm 1}} = (D_0^h((u_k)_{\delta_1^{\pm 1}}))_{|S},$$

et

$$((D_0^h(u_k)_{\delta_i^{\pm 1}})_{|S})_{\delta_1^{\pm 1}} = (D_0^h((u_k)_{\delta_1^{\pm 1}\delta_i^{\pm 1}}))_{|S}.$$

Or, étant donné que $(u_k)_{\delta_1^{\pm 1}} \in G$, on en déduit que

$$F_a^{W_{ijh}^{\pm}} \subset H_{ih}^{\pm};$$

les germes $W_{ijh}^{\pm}$ sont donc bien de détermination finie. De plus, l'automorphisme $\theta \mapsto \theta_{\delta_1}$ de $H_{ih}^{\pm}$ admet dans le système de générateurs (7.3) une matrice représentative de la forme

$$\begin{pmatrix} M_{\delta_1}^v & 0 \\ 0 & M_{\delta_1}^v \end{pmatrix}$$

car $M_{\delta_1}^v$ est la matrice représentative de l'automorphisme $\theta \mapsto \theta_{\delta_1}$ de G dans la base (u_j). Il en résulte que

$$\sigma_{\delta_1}(W_{ijh}^{\pm}) \subset \sigma_{\delta_1}(H_{ih}^{\pm}) \subset \sigma_{\delta_1}(v).$$

Vu que la classe d'homotopie de δ_1 engendre le groupe $\pi_1(U_2 \cap S \setminus T)$, on en déduit

$$\sigma_\gamma(W_{ijh}^{\pm}) \subset \sigma_\gamma(v) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma_a(U_2 \cap S \setminus T).$$

Les germes $U_{ij}^{\pm}$ sont solutions de

$$\begin{cases} a(x, D)U_{ij}^{\pm}(x) = 0, \\ \\ D_0^h U_{ij}^{\pm}(x) = W_{ijh}^{\pm}(x') \quad \text{pour } x_0 = 0,\ 0 \leq h < m. \end{cases}$$

En posant $\tilde{W}_{ijh}^{\pm}(t, x) = W_{ijh}^{\pm}(t, x'')$, il résulte du théorème 2.0.3 que

$$\sigma_\gamma(U_{ij}^{\pm}) \subset \bigcup_{l=1}^{d} \bigcup_{h=0}^{m-1} \sigma_{\gamma_l'}(\tilde{W}_{ijh}^{\pm}) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma_a(U_1 \setminus K)$$

où $\gamma_l' \in \Gamma_(a_1, a)(\dot{D}_{s_2} \times U_2)$ désigne le lacet $s \mapsto (k_l(\gamma(s)), a)$. Il faut noter que d'après le choix des ouverts U_1 et U_2, les germes $\tilde{W}_{ijh}^{\pm}$ se prolongent bien analytiquement le long des lacets γ_l'. On a d'autre part

$$\sigma_{\gamma_l'}(\tilde{W}_{ijh}^{\pm}) \subset \sigma_{\gamma_l}(v)$$

où $\gamma_l \in \Gamma_a(U_2 \cap S \setminus T)$ désigne le lacet $s \mapsto (0, k_l(\gamma(s)), a'')$, d'où

$$\sigma_\gamma(U_{ij}^{\pm}) \subset \bigcup_{l=1}^{d} \sigma_{\gamma_l}(v) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma_a(U_1 \setminus K).$$

De plus, on peut noter que γ_l est homotope à γ dans $\Omega' \setminus K_l$. En effet, en posant

$$H(s, t) = \tilde{h}_l^{-1}((1-t)\gamma_0(s), k_l(\gamma(s)), h(s, t))$$

où l'application $h : (s, t) \mapsto h(s, t)$ est une homotopie dans Ω_{n-1}^1 entre γ'' et le lacet constant $e_{a''} : s \mapsto a''$, on obtient une homotopie dans $\Omega' \setminus K$ entre γ et γ_l.

On pose
$$G_{ij}^{\pm}=F_a^{U_{ij}^{\pm}}$$
et on vérifie que
$$F_a^u\subset G+\sum_{ij}(G_{ij}^{+}+G_{ij}^{-})=\mathcal{F}. \tag{7.4}$$
En effet, $u\in G$ et il suffit de vérifier que l'espace $\mathcal{F}$ est invariant par prolongement analytique. Les espaces $G_{ij}^{\pm}$ le sont car les germes $U_{ij}^{\pm}$ sont de détermination finie. Quant à G, d'après (7.2), il est invariant par prolongement analytique le long de $\delta_1^{\pm}$ et pour $2\leq i\leq d$ on a
$$(u_j)_{\delta_i^{\pm}}=U_{ij}^{\pm}+\sum_{k=1}^{p}\lambda_{ijk}^{\pm}u_k$$
où $U_{ij}^{\pm}\in G_{ij}^{\pm}$ et $\sum_{k=1}^{p}\lambda_{ijk}^{\pm}u_k\in G$. Ceci prouve (7.4).

Il en résulte que u est de détermination finie.

Notons $B=\{u_1,\ldots,u_p\}$ la base de G et $B_{ij}^{\pm}$ une base de l'espace vectoriel $G_{ij}^{\pm}$. Dans le système de générateurs $\bigcup_{i,j}(B_{ij}^{+}\cup B_{ij}^{-})\cup B$, l'automorphisme de $\mathcal{F}$, $\theta\mapsto\theta_{\delta_l^{\pm1}}$, $1\leq l\leq d$ admet une représentation matricielle de la forme
$$\begin{pmatrix} M_{\delta_l^{\pm1}}^{U_{ij}^{\pm}} & & & C_{ij}^{\pm} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & M_{\delta_l^{\pm1}}^{U_{i'j'}^{\pm}} & C_{i'j'}^{\pm} \\ 0 & & 0 & M_{\delta_l^{\pm1}}^{v} \end{pmatrix}$$
où $M_{\delta_l^{\pm1}}^{v}$ est la matrice représentative de $A_{\delta_l^{\pm1}}^{v}$ dans la base $\{v_1,\ldots,v_p\}$ et $M_{\delta_l^{\pm1}}^{U_{ij}^{\pm}}$ est la matrice représentative de $A_{\delta_l^{\pm1}}^{U_{ij}^{\pm}}$ dans la base $B_{ij}^{\pm}$.

Tout lacet $\gamma\in\Gamma_a(U_1\smallsetminus K)$ étant homotope à un produit de lacet $\delta_l^{\pm}$, on en déduit que l'automorphisme $\theta\mapsto\theta_\gamma$ de $\mathcal{F}$ admet une représentation matricielle de la forme
$$\begin{pmatrix} M_{\gamma}^{U_{ij}^{\pm}} & & C_{ij\gamma} \\ & \ddots & \\ 0 & & M_\gamma^v \end{pmatrix}.$$
D'où
$$\sigma_\gamma(v)\subset\sigma_\gamma(u)\subset\sigma_\gamma(v)\cup\bigcup_{l=1}^{d}\sigma_{\gamma_l}(v).$$
Maintenant, si v est à monodromie résoluble, il existe une base $(v_j)_{1\leq j\leq p}$ de F_a^v telle que toute matrice représentative M_γ^v de A_γ^v dans la base $(v_j)_{1\leq j\leq p}$ soit triangulaire supérieure pour tout $\gamma\in\Gamma_a(U_1\smallsetminus K)$. On rappelle, de plus, que $F_a^{W_{ijh}^{\pm}}\subset H_{ih}^{\pm}$ et

que dans le système de générateurs (7.3), une matrice représentative de l'automorphisme $\theta \mapsto \theta_\gamma$ de $H^{\pm}_{ih}$, où $\gamma \in \Gamma_a(U_1 \cap S \setminus T)$, est de la forme

$$\begin{pmatrix} M^v_\gamma & 0 \\ 0 & M^v_\gamma \end{pmatrix}.$$

Donc les germes $W^{\pm}_{ijh}$ sont à monodromie résoluble, si v est à monodromie résoluble. On en déduit, d'après le théorème 2.0.3 que les germes $U^{\pm}_{ij}$ sont à monodromie résoluble. Par conséquent, il existe une base $B^{\pm}_{ij}$ de l'espace $G^{\pm}_{ij}$ telle que la représentation matricielle de l'automorphisme $\theta \mapsto \theta_\gamma$ de $G^{\pm}_{ij}$ soit triangulaire supérieure pour tout $\gamma \in \Gamma_a(U_1 \setminus K)$. D'où, dans le système de générateurs $\bigcup_{i,j}(B^+_{ij} \cup B^-_{ij}) \cup B$, l'automorphisme de $\mathcal{F}$, $\theta \mapsto \theta_{\delta_l^{\pm 1}}$, $1 \leq l \leq d$ admet une représentation matricielle triangulaire supérieure ; donc u est à monodromie résoluble.

On considère maintenant le cas général

$$\begin{cases} a(x,D)u(x) &= v(x), \\ D_0^h u(x) &= w_h(x') \quad \text{pour } x_0 = 0, \quad 0 \leq h < m. \end{cases}$$

On a donc, pour tout $\gamma \in \Gamma_a(U_1 \setminus K)$, $\sigma_\gamma(v) \subset \sigma_\gamma(u)$. De plus, $u = u_1 + u_2$ où u_1 est solution de

$$\begin{cases} a(x,D)u_1(x) &= v(x), \\ D_0^h u_1(x) &= 0 \quad \text{pour } x_0 = 0, \quad 0 \leq h < m \end{cases}$$

et où u_2 est solution de

$$\begin{cases} a(x,D)u_2(x) &= 0, \\ D_0^h u_2(x) &= \tilde{w}_h(x_1, x) \quad \text{pour } x_0 = 0, \quad 0 \leq h < m. \end{cases}$$

avec $\tilde{w}_h(t,x) = w_h(t,x'')$. On en déduit, compte-tenu des résultats précédents que

$$\sigma_\gamma(v) \subset \sigma_\gamma(u) \subset \sigma_\gamma(v) \cup \bigcup_{i=1}^{d} \sigma_{\gamma_i}(v) \cup \bigcup_{i=1}^{d} \bigcup_{h=0}^{m-1} \sigma_{h_i \circ \gamma}(\tilde{w}_h).$$

Or, $h_i \circ \gamma$ est homotope à $h_i \circ \gamma_i$, et pour tout lacet $\tilde{\gamma}$ tracé dans S on a

$$\sigma_{\tilde{\gamma}}(w_h) = \sigma_{h_i \circ \tilde{\gamma}}(\tilde{w}_h) \quad \text{pour tout } i = 1, \ldots, d.$$

Par conséquent, on a

$$\sigma_{h_i \circ \gamma}(\tilde{w}_h) = \sigma_{h_i \circ \gamma_i}(\tilde{w}_h) = \sigma_{\gamma_i}(w_h).$$

On a donc
$$\sigma_\gamma(v) \subset \sigma_\gamma(u) \subset \sigma_\gamma(v) \cup \bigcup_{i=1}^{d} \sigma_{\gamma_i}(v) \cup \bigcup_{i=1}^{d} \bigcup_{h=0}^{m-1} \sigma_{\gamma_i}(w_h).$$

De plus, si le germe v est à monodromie résoluble, alors le germe u_1 est à monodromie résoluble. Les germes w_h sont à monodromie résoluble car $\pi_1(U_1 \cap S \setminus T, a)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$. Donc u_2 est à monodromie résoluble. On en déduit que $u = u_1 + u_2$ est à monodromie résoluble, car $\mathcal{O}_a^r(U_1 \setminus K)$ est un espace vectoriel, ce qui achève la preuve du théorème 2.0.4.

Chapitre 8

Cas du disque pointé

8.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la solution du théorème d'Hamada-Leray-Wagschal [5], c'est-à-dire à la solution du théorème d'Hamada-Takeuchi dans le cas où l'ouvert O est un disque pointé. On sait que toute fonction de détermination finie dans un disque pointé s'écrit sous la forme

$$\sum_{m \in M} t^{p_m} \sum_{k=0}^{q_m} a_{km}(t)[\ln t]^k \tag{8.1}$$

où M est un ensemble fini, $p_m \in \mathbf{C}$ et les a_{km} sont holomorphes sur le disque pointé. En fait, une telle écriture caractérise les fonctions de détermination finie sur un disque pointé. Nous allons montrer, dans ce chapitre, comment le théorème 2.0.3 (ou plus précisément, la note le suivant) et la connaissance de l'écriture (8.1) des fonctions de détermination finie, nous permettent de mieux caractériser la solution du problème (2.1)

$$\left\{ \begin{array}{lcll} a(x, D)u(x) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{d} v_i(k_i(x), x), & \\ D_0^h u(x) & = & w_h(x_1, x) & \text{pour } x_0 = 0,\ 0 \le h < m, \end{array} \right.$$

dans le cadre du théorème d'Hamada-Leray-Wagschal.

Nous allons, tout d'abord définir des espaces $h(p, q)$.

Définition 8.1.1 *Soit $p \in \mathbf{C}$ tel que $\mathcal{R}e(p) \in [0, 1[$ et $q \in \mathbf{N}$. On dit que $u \in h(p, q)$ si il existe un réel $\omega > 0$ et Ω un voisinage ouvert simplement connexe de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$ tels que $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}(\dot{D}_\omega) \times \Omega)$ soit de la forme suivante*

$$\sum_{k=0}^{q} t^p a_k(t, x)[\ln t]^k$$

où les fonctions a_k sont holomorphes sur $\dot{D}_\omega \times \Omega$ et où $a_q \in \mathcal{H}(D_\omega \times \Omega)$ lorsque $p = 0$.

On se place dans les hypothèses du théorème d'Hamada-Leray-Wagschal.

Théorème 8.1.1 *Si les germes v_i, w_h sont dans un même espace $h(p,q)$, alors la solution u du problème (2.1) pourra s'écrire*

$$u(x) = \sum_{i=1}^{d} u_i(k_i(x), x)$$

avec $u_i \in h(p,q)$ pour $i = 1, \ldots, d$.

Remarque 8.1.1 Soient $u \in h(p,q)$ et k une fonction holomorphe au voisinage de l'origine, alors, pour tout opérateur différentiel $a(x,D)$, on a

$$a(x,D)u(k(x),x) = v(k(x),x)$$

où $v \in h(p,q)$. Ceci tient au fait que les espaces $h(p,q)$ sont stables par dérivation.

Cette remarque nous permet de nous ramener, dans le théorème 8.1.1, à des w_h nuls.

8.2 Monodromie des fonctions $h(p,q)$

Soient $(a_1, a) \in \dot{D}_\omega \times \Omega$ et δ le lacet défini par $s \mapsto (a_1 e^{2i\pi s}, a)$. Il faut noter que δ est un lacet générateur de $\pi_1(\dot{D}_\omega \times \Omega, a) \simeq \mathbf{Z}$.

On rappelle le théorème de structure suivant.

Théorème 8.2.1 *Un germe $u \in \mathcal{O}_{(a_1,a)}(\mathcal{R}(\dot{D}_\omega) \times \Omega)$ est de détermination finie si, et seulement si, il peut s'écrire*

$$u(t,x) = \sum_{m \in M} t^{p_m} \sum_{k=0}^{q_m} a_{mk}(t,x)[\ln t]^k \tag{8.2}$$

où M est un ensemble fini, $\mathcal{R}e(p_m) \in [0,1[$, $p_m \neq p_{m'}$ si $m \neq m'$ et les fonctions $a_{mk} : \dot{D}_\omega \times \Omega \to \mathbf{C}$ sont holomorphes, $a_{mq_m} \not\equiv 0$.

De plus, les nombres complexes $\lambda_m = e^{2i\pi p_m}$ sont les valeurs propres de l'automorphisme de $F^u_{(a_1,a)}$, $\theta \mapsto \theta_\delta$, à chaque valeur propre λ_m est associé un unique bloc de Jordan de dimension $q_m + 1$ et

$$dim\, F^u_{(a_1,a)} = \sum_{m \in M} (q_m + 1).$$

A présent, soit

$$u(t,x) = t^p \sum_{k=0}^{q} a_k(t,x)[\ln t]^k$$

où les fonctions $a_k : \dot{D}_\omega \times \Omega \to \mathbf{C}$ sont holomorphes, $a_q \not\equiv 0$, un germe au point (a_1, a). Alors, d'après le théorème 8.2.1, le germe u est de détermination finie, $\dim F^u_{(a_1,a)} = q+1$ et l'automorphisme A^u_δ admet $e^{2i\pi p}$ pour unique valeur propre. De plus, on peut montrer que pour toute base $(\psi_0, \dots, \psi_q)$ de $F^u_{(a_1,a)}$, telle que la représentation matricielle de A^u_δ dans cette base soit

$$\begin{pmatrix} e^{2i\pi p} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & e^{2i\pi p} & 1 \\ & & & e^{2i\pi p} \end{pmatrix},$$

on a $\psi_0 = Ct^p a_q$ où $C \in \mathbf{C}^*$.

Nous avons vu que si les données vérifient $1 \notin \sigma_\delta(v) \cup \sigma_\delta(w)$, alors la solution u de (2.1) peut s'écrire

$$u(x) = \sum_{i=1}^{d} u_i(k_i(x), x)$$

et pour tout i, $F^{u_i}_{(a_1,a)} \subset F_i$ où F_i est un espace vectoriel invariant par prolongement analytique et une matrice représentative de l'automorphisme de F_i, $\theta \mapsto \theta_\delta$ dans un système de générateurs est M où M est une matrice diagonale par blocs avec chaque bloc de la forme M^{v_j} [resp. M^{w_h}], où M^{v_j} [resp. M^{w_h}] est la matrice représentative de l'automorphisme $A^{v_j}_\delta$ [resp. $A^{w_h}_\delta$] dans une base de $F^{v_j}_{(a_1,a)}$ [resp. $F^{w_h}_{(a_1,a)}$].
Nous allons à présent montrer un résultat analogue dans le cas où $1 \in \sigma_\delta(v) \cup \sigma_\delta(w)$. En reprenant les notations des chapitres précédents, on a : $F^U_{(a_1,a)} \subset \tilde{F}$ où $\tilde{F}$ est un espace vectoriel invariant par prolongement analytique. Supposons que $\tilde{F}$ soit engendré par un système de générateurs de la forme $(\varphi_k, \psi_l)_{kl}$ où $\varphi_k \in \mathcal{H}(\dot{D}_\omega \times \Omega)$, $\psi_l \in \mathcal{H}(\mathcal{R}(\dot{D}_\omega) \times \Omega)$, tel qu'une matrice représentative de l'automorphisme de $\tilde{F}$, $\theta \mapsto \theta_\delta$ soit de la forme

$$\begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

où M est sous forme de blocs de Jordan. On note $M = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1}, \dots, J_{\lambda_n})$ où J_{λ_j} est une matrice de Jordan associée à la valeur propre λ_j. On suppose que $\lambda_1 = 1$. Nous allons montrer que la solution du problème (2.1) peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^{d} u_i(k_i(x), x)$$

avec $F^{u_i}_{(a_1,a)} \subset F_i$ où F_i est un espace vectoriel invariant par prolongement analytique tel qu'une matrice représentative de l'application $\theta \mapsto \theta_\delta$ dans un système de

générateurs de F_i soit M.
On a, pour tout $i=1,\ldots,d$,

$$U_i'(t,x)=\sum_k \lambda_k\varphi_k^i+\sum_l \mu_l\psi_l^i.$$

On pose $\varphi=(\sum_k \lambda_k\varphi_k^i)_{1\leq i\leq d}$ et $(\psi_1,\ldots,\psi_{l'})$ le système de générateurs associé au bloc de Jordan J_1. Si, pour $l=1,\ldots,l'$, $\mu_l=0$, on pose alors $\tilde{\psi}_1=\varphi$ et on complète $\tilde{\psi}_1$ avec des vecteurs $\tilde{\psi}_2,\ldots,\tilde{\psi}_{l'}$ de manière à former un espace vectoriel invariant par prolongement analytique tel que la matrice représentative de l'automorphisme $\theta\mapsto\theta_\delta$, dans la base, $(\tilde{\psi}_1,\ldots,\tilde{\psi}_{l'})$ soit J_1. On pose, pour $l>l'$, $\tilde{\psi}_l=\psi_l$. On a alors

$$U_i'=\sum_l \mu_l'\tilde{psi}_l^i.$$

On a donc $F_{(a_1,a)}^{U_i'}\subset\tilde{F}_i$ où $\tilde{F}_i$ est un espace invariant par prolongement analytique et tel qu'une matrice représentative de l'application $\theta\mapsto\theta_\delta$, dans le système de générateurs $(\tilde{\psi}_l)$, soit M. On a donc $F_{(a_1,a)}^{u_i}\subset F_i$ où F_i est un espace vectoriel invariant par prolongement analytique et tel qu'une matrice représentative de l'application $\theta\mapsto\theta_\delta$ soit M.

A présent, on pose $l_0=\max\{l=1,\ldots,l';\ \mu_l\neq 0\}$. On pose alors

$$\begin{cases}\tilde{\psi}_l=\psi_l \text{ si } l>l',\\[2ex] \tilde{\psi}_l=\psi_l \text{ si } l<l_0,\\[2ex] \tilde{\psi}_{l_0}=\psi_{l_0}+\dfrac{1}{\mu_{l_0}}\varphi\end{cases}$$

et on complète $(\tilde{\psi}_1,\ldots,\tilde{\psi}_{l_0})$ avec des vecteurs $(\tilde{\psi}_{l_0+1},\ldots,\tilde{\psi}_{l'})$ de manière à former un espace vectoriel invariant par prolongement analytique tel que la matrice représentative de l'automorphisme $\theta\mapsto\theta_\delta$ dans la base $(\tilde{\psi}_1,\ldots,\tilde{\psi}_{l'})$ soit J_1. On a alors

$$U_i'=\sum_l \mu_l\tilde{\psi}_l^i.$$

On a donc $F_{(a_1,a)}^{U_i'}\subset\tilde{F}_i$ où $\tilde{F}_i$ est un espace vectoriel invariant par prolongement analytique et tel qu'une matrice représentative de l'application $\theta\mapsto\theta_\delta$, dans le système de générateurs $(\tilde{\psi}_l)$, soit M. On a donc $F_{(a_1,a)}^{u_i}\subset F_i$ où F_i est un espace vectoriel invariant par prolongement analytique et tel qu'une matrice représentative de l'application $\theta\mapsto\theta_\delta$ soit M, ce qui montre le résultat anoncé.

8.3 Preuve du théorème 8.1.1

Par linéarité, on peut supposer que $v_1 \in h(p,q)$, $v_1 \neq 0$ et $v_2, \ldots, v_d, w_h = 0$.

On s'intéresse tout d'abord au cas $p \neq 0$.
D'après ce qui a été fait au paragraphe 8.2, il existe une base de $F^{v_1}_{(a_1,a)}$ telle que la représentation matricielle de l'automorphisme $\theta \mapsto \theta_\delta$ dans cette base soit

$$M = \begin{pmatrix} e^{2i\pi p} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & e^{2i\pi p} & 1 \\ & & & e^{2i\pi p} \end{pmatrix}.$$

De plus $\begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ est une matrice représentative de l'application $\theta \mapsto \theta_\delta$ dans un système de générateurs de $\tilde{F}$ car $1 \notin \sigma(M)$. On sait alors que la solution du problème (2.1) est de détermination finie et peut s'écrire sous la forme

$$u(x) = \sum_{i=1}^{d} u_i(k_i(x), x)$$

où $F^{u_i}_{(a_1,a)} \subset F_i$ où F_i est un espace vectoriel de dimension finie invariant par prolongement analytique et tel qu'une matrice représentative de l'automorphisme de F_i, $\theta \mapsto \theta_\delta$ soit M. On en déduit, d'après le théorème 8.2.1, que $u_i \in h(p,q)$.

On regarde à présent le cas $p = 0$.
On a

$$v_1(t,x) = \sum_{k=0}^{q} a_k(t,x)[\ln t]^k$$

avec $a_q \in \mathcal{H}(D_\omega \times \Omega)$. Encore une fois par linéarité, on va distinguer deux cas :

1. $v_1(t,x) = a_k(t,x)[\ln t]^k$ avec $k \leq q-1$,
2. $v_1(t,x) = a_q(t,x)[\ln t]^q$.

Premier cas– Soit $(\theta_0, \ldots, \theta_k)$ une base de $F^{v_1}_{(a_1,a)}$ telle que la matrice représentative de l'automorphisme de $F^{v_1}_{(a_1,a)}$, $\theta \mapsto \theta_\delta$, dans cette base, soit

$$M_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que $\theta_0 = Ka_k$ où $K \in \mathbf{C}^*$.
D'après les résultats du chapitre 5, un système de générateurs de l'espace vectoriel

$\tilde{F}$ est donné par

$$\Big(S(Q_{\delta^{\pm 1}}S(\beta_l)), S(P^m_{\delta^{\pm 1}}(D_t^m \beta_l)), S(\beta_l)\Big)_{0\leq l\leq k}$$

où $\beta_l = (b(x)D_t^{-m}\theta_l, 0\ldots, 0)$ avec $b \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Remarque 8.3.1 On peut montrer que $\tilde{F}$ est engendré par

$$(S(Q_\delta S(\beta_l)), S(P^m_\delta(D_t^m \beta_l)), S(\beta_l))_l. \tag{8.4}$$

En effet, d'après le lemme 3.4.2, on a

$$P^l_e(u) = P_{\delta^{-1}\delta}(u) = P^l_{\delta^{-1}}(u) + P^l_\delta(u_{\delta^{-1}});$$

or $P^l_e(u) = 0$. Par conséquent $P^l_{\delta^{-1}}(u) = -P^l_\delta(u_{\delta^{-1}})$. On en déduit que

$$P^m_{\delta^{-1}}(D_t^m \beta_l) = -P^m_\delta((D_t^m \beta_l)_{\delta^{-1}}).$$

Or, l'espace vectoriel engendré par $(D_t^m \beta_l)_l$ étant invariant par prolongement analytique (car $D_t^m \beta_l = (b\theta_l, 0\ldots, 0)$), $P^m_{\delta^{-1}}(D_t^m \beta_l)$ appartient à l'espace vectoriel engendré par

$$(S(Q_{\delta^{\pm 1}}S(\beta_l)), S(P^m_\delta(D_t^m \beta_l)), S(\beta_l))_l.$$

Enfin, on a, d'après la définition des opérateurs Q_γ,

$$\begin{array}{rcl} Q_{\delta^{-1}}S(\beta_l) & = & -Q_\delta((S(\beta_l))_{\delta^{-1}}) \\ & = & -Q_\delta S((\beta_l)_{\delta^{-1}}) - Q_\delta(S(Q_{\delta^{-1}}(\beta_l))) \\ & = & -Q_\delta S((\beta_l)_{\delta^{-1}}) \end{array}$$

car $S(Q_{\delta^{-1}}(\beta_l)) \in \mathcal{H}(D_\omega \times \Omega')$. Maintenant, puisque l'espace vectoriel engendré par $(P^m_\delta(D_t^m \beta_l), \beta_l)_l$ est invariant par prolongement analytique et que $P^m_\delta(D_t^m \beta_l)$ est holomorphe sur $\mathcal{H}(D_\omega \times \Omega')$, $Q_\delta S((\beta_l)_{\delta^{-1}})$ appartient à l'espace vectoriel engendré par

$$(S(Q_\delta S(\beta_l)), S(P^m_\delta(D_t^m \beta_l)), S(\beta_l))_l.$$

Donc, $\tilde{F}$ est bien engendré par ce système de générateurs.

Une matrice représentant l'application $\theta \mapsto \theta_\delta$ dans le système de générateurs (8.4) est donnée par

$$\left(\begin{array}{cc} Id & B \\ 0 & M_{k+1} \end{array}\right) \tag{8.5}$$

où

$$B = \left(\begin{array}{c} Id \\ Id \end{array}\right).$$

Cette matrice est semblable à la matrice de Jordan suivante

$$\begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & M_{k+2} \end{pmatrix}, \tag{8.6}$$

la matrice de changement de base étant de la forme

$$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 & Id_{k+1} \end{pmatrix}$$

où Id_{k+1} est la matrice identité de dimension $k+1$. Notons $(\psi_0, \ldots, \psi_{k+1})$ le système de générateur associé au bloc de Jordan M_{k+2}. D'après la forme de la matrice de passage, ψ_0 est holomorphe sur $D_\omega \times \Omega'$. La matrice (8.6) étant sous forme de Jordan, on en déduit, compte-tenu de ce qui a été dit au paragraphe 8.2, que l'on peut écrire

$$u(x) = \sum_{i=1}^{d} u_i(k_i(x), x)$$

avec $F^{u_i}_{(a_1,a)} \subset F_i$ où F_i est un espace vectoriel invariant par prolongement analytique et dont une matrice représentative dans un système de générateurs est donnée par M_{k+2}. Donc, d'après le théorème 8.2.1, on a

$$u_i(t,x) = \sum_{j=0}^{k+1} a_j(t,x)[\ln t]^j$$

où $a_j \in \mathcal{H}(\dot{D}_\omega \times \Omega')$ et $a_k = K_i \psi_0^i \in \mathcal{H}(D_\omega \times \Omega')$. Donc $u_i \in h(0, k+1)$.

Deuxième cas– D'après les résultats du chapitre 5 et la remarque 8.3.1, un système de générateurs de l'espace vectoriel $\tilde{F}$ est donné par

$$\Big(S(Q_\delta S(\beta_l)), S(P^m_\delta(D^m_t \beta_l)), S(\beta_l)\Big)_{0 \le l \le q}$$

où $\beta_l = (a(x) D_t^{-m} \theta_l, 0 \ldots, 0)$ avec $a \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Il faut noter ici que, puisque $\theta_0 \in \mathcal{H}(D_\omega \times \Omega)$, on a $S(\beta_0) \in \mathcal{H}(D_\omega \times \Omega)$ et, par conséquent, $S(Q_\delta S(\beta_0)) = S(P^m_{\tilde{\delta}}(D^m_t \beta_0)) = 0$.
Un système de générateurs de $\tilde{F}$ est donc donné par

$$\Big(S(Q_\delta S(\beta_l)), S(P^m_\delta(D^m_t \beta_l)), S(\beta_0), S(\beta_l)\Big)_{1 \le l \le q}$$

et une matrice représentative de l'application $\theta \mapsto \theta_\delta$ dans ce système de générateurs est donnée par

$$\begin{pmatrix} Id & B' \\ 0 & M_{q+1} \end{pmatrix} \tag{8.7}$$

où

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & \end{pmatrix}.$$

Maintenant, (8.7) est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & M_{q+1} \end{pmatrix}, \tag{8.8}$$

la matrice de passage étant de la forme

$$\begin{pmatrix} C & D \\ E & Id_{q+1} \end{pmatrix}$$

où

$$E = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{2q} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons $(\varphi_1, \dots, \varphi_{2q}, \psi_0, \dots, \psi_q)$ le système de générateurs obtenu via le changement de base. D'après la forme de la matrice de passage, pour tout $j = 1, \dots, 2q$, φ_j est holomorphe sur $D_\omega \times \Omega'$ ainsi que ψ_0.
La matrice (8.8) étant sous forme de Jordan, on en déduit, compte-tenu de ce qui a été dit au paragraphe 8.2, que l'on peut écrire

$$u(x) = \sum_{i=1}^{d} u_i(k_i(x), x)$$

avec $F^{u_i}_{(a_1,a)} \subset F_i$ où F_i est un espace vectoriel invariant par prolongement analytique et dont une matrice représentative dans un système de générateurs est donnée par M_{q+1}. Donc, d'après le théorème 8.2.1, on a

$$u_i(t, x) = \sum_{j=0}^{k} a_j(t, x)[\ln t]^j$$

où $a_j \in \mathcal{H}(\dot{D}_\omega \times \Omega')$ et $a_q = K_i \psi_0^i \in \mathcal{H}(D_\omega \times \Omega')$. Donc $u_i \in h(0, q)$.

Deuxième partie

Problème de Cauchy ramifié pour une classe d'opérateurs dont les racines caractéristiques sont en involution

Dans cette partie, comme annoncé dans l'introduction générale de la thèse, on aborde l'étude du problème de Cauchy ramifié non caractéristique

$$\left\{\begin{array}{rcl} a(x,D)u(x) & = & v(x), \\ \\ D_0^h u(x) & = & w_h(x') \quad \text{pour } x_0 = 0, 0 \leq h < m \end{array}\right.$$

où v est ramifié de manière quelconque autour d'un lieu singulier défini par un ensemble analytique L et les w_h sont ramifiés autour de $L \cap \{x;\ x_0 = 0\}$.

Dans le premier chapitre, on écrit, grâce aux hypothèses faites sur l'opérateur $a(x,D)$, la solution sous forme d'une intégrale multiple. Le deuxième chapitre montre comment déterminer le prolongement analytique de la solution u à partir de l'écriture intégrale. Quelques exemples sont donnés dans le chapitre 3. Dans l'appendice, on trouvera le rappel et la preuve d'un lemme d'isotopie local, dont nous nous servirons au chapitre 2.

Chapitre 9

Écriture intégrale de la solution du problème de Cauchy ramifié

Dans ce chapitre, nous allons, grâce à l'hypothèse d'involution sur les racines caractéristiques, montrer comment on peut écrire la solution du problème de Cauchy, au voisinage d'un point d'holomorphie, sous la forme d'une intégrale multiple. Nous verrons, par la suite, comment se servir de cette écriture intégrale afin d'étudier le prolongement anlytique de la solution.

9.1 Introduction

On considère, au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$, le problème de Cauchy holomorphe non caractéristique

$$\left\{ \begin{array}{l} p(x,D)u(x) = v(x), \\ \\ u \text{ s'annule 2 fois sur } S \end{array} \right.$$

où S est un hyperplan non caractéristique en l'origine et $p(x,D)$ est un opérateur différentiel du second ordre tel que

$$p(x,D) = a_1(x,D)a_2(x,D) + b(x,D)$$

où a_1, a_2 et b sont des opérateurs différentiels linéaires du premier ordre, a_1 et a_2 étant homogènes. On suppose que $p(x,D)$ est un opérateur dont les racines caractéristiques sont en involution : ceci signifie, dans notre cas, que

$$a_1(x,D)a_2(x,D) = a_2(x,D)a_1(x,D).$$

Quant à v, nous supposerons qu'il est ramifié autour d'un ensemble analytique L, contenant 0, de codimension 1 et tel que $S \cap L$ soit un ensemble analytique de codimension 1 dans S : autrement dit, il existe un voisinage ouvert connexe Ω de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$ tel que $\Omega \cap S$ soit connexe et il existe un point $a \in \Omega \cap S$ tel que v soit holomorphe au voisinage du point a et se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\Omega \setminus L)$ (où $\mathcal{R}(X)$ désigne le revêtement universel d'une variété analytique connexe X).

Notre but est d'écrire sous forme d'une intégrale double la solution de ce problème au voisinage du point a, puis d'étudier la ramification de la solution, connaissant L.

9.2 Notation et énoncé du théorème

Les coordonnées d'un point x de $\mathbf{C}^{n+1}$ seront notées $x = (x_0, \ldots, x_n) = (x_0, x')$; on note D_i l'opérateur de dérivation par rapport à la variable complexe x_i.

Le problème auquel nous nous intéressons étant local, on peut, via un changement de variables, se ramener au problème suivant

$$\begin{cases} [D_0 a(x,D) + b(x,D)]u(x) = v(x), \\ \\ u \text{ s'annule 2 fois sur } S \end{cases} \tag{9.1}$$

où $S : x_0 = 0$. D'après les hypothèses, D_0 et $a(x,D) = D_0 + \sum_{i=1}^n a_i(x) D_i$ commutent, donc

$$D_0 a(x,D) - a(x,D) D_0 = \sum_{i=1}^n D_0 a_i(x) D_i \equiv 0.$$

Par conséquent, pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a $D_0 a_i(x) \equiv 0$.

On note k_j, pour $j = 1, \ldots, n$, la solution du problème suivant

$$\begin{cases} a(x,D) k_j(x) &= 0, \\ \\ \quad k_j(x) &= x_j \quad \text{pour } x_0 = 0 \end{cases}$$

et $\Sigma : x \mapsto (x_0, k(x)) = (x_0, k_1(x), \ldots, k_n(x))$. Σ est un difféomorphisme au voisinage de l'origine. On note Ψ le difféomorphisme inverse de Σ.

On peut remarquer que les hypersurfaces, au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$, $K_j = \{x;\ k_j(x) = 0\}$ sont les hypersurfaces caractéristiques de $a(x,D)$ issues de l'hyperplan $T_j : x_0 = x_j = 0$. De même, les hypersurfaces $H_j = \{x;\ x_j = 0\}$ sont les hypersurfaces caractéristiques de D_0 issues de T_j. On en déduit que H_j et K_j sont les hypersurfaces caractéristiques de $p(x,D)$ issues de T_j.

Le lemme suivant va nous permettre d'écrire explicitement Ψ.

Lemme 9.2.1 *On a, au voisinage de l'origine de* $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^{n+1}$,

$$k_j(s, k(x)) = k_j(x_0 + s, x').$$

Preuve En effet, $x \mapsto k_j(s, k(x))$ est solution du problème

$$\begin{cases} a(x, D)u(x) &= \quad 0, \\ \\ u(x) &= k_j(s, x') \quad \text{pour } x_0 = 0. \end{cases}$$

Or $x \mapsto k_j(x_0 + s, x')$ est solution du même problème car les coefficients de $a(x, D)$ sont indépendants de x_0. Donc, par unicité de la solution, on a

$$k_j(s, k(x)) = k_j(x_0 + s, x').$$

■

On déduit aisément de ce lemme que $\Psi(x) = (x_0, k(-x_0, x'))$. On en vient, à présent, au théorème principal.

Théorème 9.2.1 *Il existe un voisinage ouvert connexe* Ω' *de l'origine de* $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^{n+1}$ *et un germe holomorphe* f*, au point* $(0, 0, a)$*, se prolongeant en une fonction holomorphe sur* $\mathcal{R}(\Omega' \setminus L')$*, où* $L' = \{(t_1, t_2, x);\ (x_0 - t_1 - t_2, k(t_2, x')) \in L\}$*, tel que, au voisinage du point* a*, on ait*

$$u(x) = \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0 - t_2} f(t_1, t_2, x) dt_1.$$

Dans le paragraphe suivant, nous écrirons formellement la solution sous forme d'une série, puis ensuite nous montrerons, à l'aide du formalisme des séries majorantes, la convergence de cette série.

9.3 Solution formelle

Afin de faciliter les calculs, on écrira $p(x, D)$ sous la forme

$$p(x, D) = [D_0 + b(x)]a(x, D) - r(x, D')$$

où $r(x, D') = \sum_{i=1}^n r_i(x) D_i$ est un opérateur du premier ordre ne contenant pas de dérivation en x_0. On étudie, par conséquent, le problème suivant

$$\begin{cases} \Big[[D_0 + b(x)]a(x, D) - r(x, D')\Big]u(x) = v(x), \\ \\ u \text{ s'annule 2 fois sur } S. \end{cases} \tag{9.2}$$

On note u_0 la solution, au voisinage du point a, du problème

$$\begin{cases} \Big[[D_0 + b(x)]a(x,D)\Big] u_0(x) = v(x), \\ \\ u_0 \text{ s'annule 2 fois sur } S. \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy-Kowalevski, u_0 est holomorphe sur un voisinage du point a. De même, on note u_p ($p \in \mathbf{N}^*$) la solution, au voisinage du point a, de

$$\begin{cases} \Big[[D_0 + b(x)]a(x,D)\Big] u_p(x) = r(x,D')u_{p-1}(x), \\ \\ u_p \text{ s'annule 2 fois sur } S. \end{cases}$$

Donc, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, il existe un voisinage ouvert du point a sur lequel u_p est holomorphe. De plus, la serie

$$\sum_{p=0}^{\infty} u_p \tag{9.3}$$

est la solution formelle du problème (9.2).

Nous allons expliciter, sous forme intégrale, chaque terme u_p, puis nous montrerons, au paragraphe suivant, la convergence de cette série au voisinage du point a. On montre tout d'abord la

Proposition 9.3.1 *On peut écrire, au voisinage du point a,*

$$u_0(x) = \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0 - t_2} l_{t_1}(y)v(y)\Big|_{y=\phi(t,x)} dt_1$$

où $t = (t_1, t_2) \in \mathbf{C}^2$, $\phi : (t,x) \mapsto (x_0 - t_1 - t_2, k(t_2, x'))$ et

$$l_{t_1}(x) = \exp\left(- \int_0^{t_1} b(s + x_0, x')ds \right).$$

(Toutes les intégrales s'effectuant sur le segment joignant les bornes.)

Preuve u_0 est solution du problème suivant

$$\begin{cases} a(x,D)u_0(x) = \varphi(x), \\ \\ u_0 \text{ s'annule sur } S \end{cases}$$

où φ est la solution du problème

$$\begin{cases} [D_0 + b(x)]\varphi(x) = v(x), \\ \\ \varphi \text{ s'annule sur } S, \end{cases}$$

ces deux problèmes étant étudiés au voisinage du point a.

On a

$$\varphi(x) = \int_0^{x_0} \exp\left(-\int_0^{x_0-t_1} b(s+t_1,x')ds\right) v(t_1,x')dt_1$$

et

$$u_0(x) = \int_0^{x_0} \varphi(t_2, k(x_0-t_2,x'))dt_2;$$

on en déduit que

$$u_0(x) = \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{t_2} \exp\left(-\int_0^{t_2-t_1} b(s+t_1, k(x_0-t_2,x'))ds\right) v(t_1, k(x_0-t_2,x'))dt_1.$$

En faisant les changements de variables $\tilde{t}_1 = t_2 - t_1$ et $\tilde{t}_2 = x_0 - t_2$, on obtient

$$u_0(x) = \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0-t_2} l_{t_1}(\phi(t,x))v(\phi(t,x))dt_1,$$

d'où le résultat. ■

Nous montrons, maintenant, deux lemmes qui nous seront utiles pour l'écriture explicite des u_p.

Lemme 9.3.1 *Soient $w, t \in \mathbf{C}^2$ et $x \in \mathbf{C}^{n+1}$ tels que $\phi(t-w,x)$, $\phi(t,x)$, $\phi(w,x)$ et $\phi(t-w,\phi(w,x))$ soient définis. On a alors*

$$\phi(t-w,\phi(w,x)) = \phi(t,x).$$

Preuve On rappelle que $\phi(t,x) = (x_0 - t_1 - t_2, k(t_2,x'))$; d'où

$$\phi(t-w,\phi(w,x)) = (x_0 - w_1 - w_2 - (t_1 + t_2 - w_1 - w_2), k(t_2 - w_2, k(w_2,x'))).$$

Or, d'après le lemme 9.2.1, on a

$$k(t_2 - w_2, k(w_2,x')) = k(t_2,x');$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} \phi(t-w,\phi(w,x)) &= (x_0 - t_1 - t_2, k(t_2,x')) \\ &= \phi(t,x) \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. ■

Lemme 9.3.2 *Soit u holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$. Il existe alors un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^{n+1}$ tel que pour tout (t,x) dans ce voisinage, on ait*

$$r(x,D')\Big(u(y)_{\big|y=\phi(t,x)}\Big) = \tilde{r}(t,y,D')u(y)_{\big|y=\phi(t,x)}$$

où $\tilde{r}(t,y,D')$ est un opérateur du premier ordre à coefficients holomorphes.

Preuve On a

$$\begin{aligned} r(x,D')\Big(u(y)_{\big|y=\phi(t,x)}\Big) &= \sum_{k=1}^{n} r_k(x) \sum_{i=1}^{n} (D_k\phi_i)(t,x) D_{y_i} u(y)_{\big|y=\phi(t,x)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} (D_k\phi_i)(t,x) r_k(x) \Big) D_{y_i} u(y)_{\big|y=\phi(t,x)} \end{aligned}$$

où on a noté $\phi(t,x) = (\phi_0(t,x), \ldots, \phi_n(t,x))$. On a donc, en utilisant le lemme 9.3.1,

$$\begin{aligned} r(x,D')\Big(u(y)_{\big|y=\phi(t,x)}\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} (D_k\phi_i)(t,\phi(-t,y)) r_k(\phi(-t,y)) \Big) D_{y_i} u(y)_{\big|y=\phi(t,x)} \\ &= \tilde{r}(t,y,D')u(y)_{\big|y=\phi(t,x)} \end{aligned}$$

où D_{y_i} désigne l'opérateur de dérivation par rapport à la variable complexe y_i. Ceci termine la preuve du lemme. ■

Montrons, à présent, la proposition suivante

Proposition 9.3.2 *On a, au voisinage du point a,*

$$u_p(x) = \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0-t_2} r_p(t,y,D')v(y)_{\big|y=\phi(t,x)} dt_1$$

où $r_p(t,y,D')v(y)$ est donné pour $p=1$ par

$$\int_0^{t_1} dw_1^1 \int_0^{t_2} \tilde{r}_{w^1}(t,y,D')(l_{t_1-w_1^1}.v)(y) dw_2^1$$

et pour $p \geq 2$ par

$$\int_0^{t_1} dw_1^p \int_0^{t_2} dw_2^p \int_{w_1^p}^{t_1} dw_1^{p-1} \int_{w_2^p}^{t_2} dw_2^{p-1} \ldots \int_{w_1^2}^{t_1} dw_1^1 \int_{w_2^2}^{t_2}$$
$$\tilde{r}_{w^p}(t,y,D') \prod_{i=1}^{p-1} \tilde{r}_{w^i - w^{i+1}}(t-w^{i+1},y,D')(l_{t_1-w_1^1}.v)(y) dw_2^1$$

avec les notations suivantes
- $w^i = (w_1^i, w_2^i)$,
- $\tilde{r}_w(t,y,D') = l_{w_1}(\phi(w-t,y))\tilde{r}(t-w,y,D')$.

On convient que, pour k opérateurs différentiels $a_i(y, D)$, $i = 1, \ldots, k$,

$$\prod_{i=1}^{k} a_i(y, D) = a_k(y, D) \ldots a_1(y, D).$$

Preuve Montrons, par récurrence, que l'on peut écrire, au voisinage du point a,

$$u_p(x) = \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0 - t_2} r_p(t, y, D')v(y)\Big|_{y=\phi(t,x)} dt_1.$$

Déterminons, tout d'abord, u_1. On a

$$\begin{aligned} r(x, D')u_0(x) &= \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0 - t_2} r(x, D')\Big(l_{t_1}(y)v(y)\Big|_{y=\phi(t,x)}\Big) dt_1 \\ &= \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0 - t_2} \tilde{r}(t, y, D')(l_{t_1}.v)(y)\Big|_{y=\phi(t,x)} dt_1 \end{aligned}$$

car $r(x, D')$ est un opérateur ne contenant pas de dérivation par rapport à x_0. On a donc

$$\begin{aligned} u_1(x) = & \int_0^{x_0} dw_2 \int_0^{x_0 - w_2} dw_1 \int_0^{x_0 - w_2 - w_1} dt_2 \int_0^{x_0 - w_2 - w_1 - t_2} \\ & \qquad l_{w_1}(z)\Big(\tilde{r}(t, y, D')(l_{t_1}.v)(y)\Big|_{y=\phi(t,z)}\Big)\Big|_{z=\phi(w,x)} dt_1. \end{aligned}$$

On effectue les changements de variables $\tilde{t}_j = t_j + w_j$ $(j = 1, 2)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} u_1(x) = & \int_0^{x_0} dw_2 \int_0^{x_0 - w_2} dw_1 \int_{w_2}^{x_0 - w_1} dt_2 \int_{w_1}^{x_0 - t_2} \\ & \qquad l_{w_1}(z)\Big(\tilde{r}(t - w, y, D')(l_{t_1 - w_1}.v)(y)\Big|_{y=\phi(t-w,z)}\Big)\Big|_{z=\phi(w,x)} dt_1. \end{aligned}$$

Supposons, à présent, que $x_0 \in \mathbf{R}$. Vu que toutes les intégrales s'effectuent sur l'intervalle joignant les bornes, en appliquant le théorème de Fubini, on obtient, compte-tenu des changements de bornes,

$$\begin{aligned} u_1(x) = & \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0 - t_2} dt_1 \int_0^{t_1} dw_1 \int_0^{t_2} \\ & \qquad l_{w_1}(z)\Big(\tilde{r}(t - w, y, D')(l_{t_1 - w_1}.v)(y)\Big|_{y=\phi(t-w,z)}\Big)\Big|_{z=\phi(w,x)} dw_2. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Cette égalité est valable pour tout $x \in V \cap (\mathbf{R} \times \mathbf{C}^n)$ où V est un voinage du point a. De plus, chaque membre de (9.4) définit une fonction holomorphe sur V (quitte, pour cela, à réduire V). Par conséquent, par prolongement analytique, l'égalité (9.4) est valable pour tout $x \in V$. On a alors, d'après le lemme 9.3.1,

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0-t_2} dt_1 \int_0^{t_1} dw_1 \int_0^{t_2} \\
&\quad \Big(l_{w_1}(\phi(w-t,y))\tilde{r}(t-w,y,D')(l_{t_1-w_1}.v)(y)\big|_{y=\phi(t-w,z)} \Big)\Big|_{z=\phi(w,x)} dw_2 \\
&= \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0-t_2} dt_1 \int_0^{t_1} dw_1 \int_0^{t_2} \\
&\qquad l_{w_1}(\phi(w-t,y))\tilde{r}(t-w,y,D')(l_{t_1-w_1}.v)(y)\big|_{y=\phi(t,x)} dw_2,
\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat pour $p=1$ grâce à l'écriture des opérateurs $\tilde{r}_w(t,x,D')$. Supposons, maintenant, le résultat vrai à l'ordre p, et montrons-le à l'ordre $p+1$. On a, d'après le lemme 9.3.2,

$$\begin{aligned}
r(x,D')u_p(x) &= \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0-t_2} r(x,D')\Big(r_p(t,y,D')v(y)\big|_{y=\phi(t,x)} \Big) dt_1 \\
&= \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0-t_2} \tilde{r}(t,y,D') r_p(t,y,D')v(y)\big|_{y=\phi(t,x)} dt_1.
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$\begin{aligned}
u_{p+1}(x) &= \int_0^{x_0} dw_2^{p+1} \int_0^{x_0-w_2^{p+1}} dw_1^{p+1} \int_0^{x_0-w_2^{p+1}-w_1^{p+1}} dt_2 \int_0^{x_0-w_2^{p+1}-w_1^{p+1}-t_2} dt_1 \\
&\quad \int_0^{t_1} dw_1^p \int_0^{t_2} dw_2^p \ldots \int_{w_1^2}^{t_1} dw_1^1 \int_{w_2^2}^{t_2} \\
&\quad l_{w_1^{p+1}}(z)\Big(\tilde{r}(t,y,D')\tilde{r}_{w^p}(t,y,D') \\
&\qquad \prod_{i=1}^{p-1} \tilde{r}_{w^i-w^{i+1}}(t-w^{i+1},y,D')(l_{t_1-w_1^1}.v)(y)\big|_{y=\phi(t,z)} \Big)\Big|_{z=\phi(w^{p+1},x)} dw_2^1.
\end{aligned}$$

En utilisant les changements de variables $\tilde{t}_j = t_j + w_j^{p+1}$ pour $j=1,2$, on obtient

$$\begin{aligned}
u_{p+1}(x) &= \int_0^{x_0} dw_2^{p+1} \int_0^{x_0-w_2^{p+1}} dw_1^{p+1} \int_{w_2^{p+1}}^{x_0-w_1^{p+1}} dt_2 \int_{w_1^{p+1}}^{x_0-t_2} dt_1 \\
&\quad \int_0^{t_1-w_1^{p+1}} dw_1^p \int_0^{t_2-w_2^{p+1}} dw_2^p \ldots \int_{w_1^2}^{t_1-w_1^{p+1}} dw_1^1 \int_{w_2^2}^{t_2-w_2^{p+1}} \\
&\quad l_{w_1^{p+1}}(z)\Big(\tilde{r}(t-w^{p+1},y,D')\tilde{r}_{w^p}(t-w^{p+1},y,D') \\
&\qquad \prod_{i=1}^{p-1} \tilde{r}_{w^i-w^{i+1}}(t-w^{i+1}-w^{p+1},y,D') \\
&\qquad\qquad (l_{t_1-w_1^1-w_1^{p+1}}.v)(y)\big|_{y=\phi(t-w^{p+1},z)} \Big)\Big|_{z=\phi(w^{p+1},x)} dw_2^1.
\end{aligned}$$

On montre, de la même manière qu'au cas $p=1$, en utilisant le théorème de Fubini, que l'on peut écrire, au voisinage du point a,

$$\begin{aligned} u_{p+1}(x) &= \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0-t_2} dt_1 \int_0^{t_1} dw_1^{p+1} \int_0^{t_2} dw_2^{p+1} \\ &\int_0^{t_1-w_1^{p+1}} dw_1^p \int_0^{t_2-w_2^{p+1}} dw_2^p \dots \int_{w_1^2}^{t_1-w_1^{p+1}} dw_1^1 \int_{w_2^2}^{t_2-w_2^{p+1}} \\ &\quad l_{w_1^{p+1}}(z)\Big(\tilde{r}(t-w^{p+1},y,D')\tilde{r}_{w^p}(t-w^{p+1},y,D') \\ &\qquad \prod_{i=1}^{p-1} \tilde{r}_{w^i-w^{i+1}}(t-w^{i+1}-w^{p+1},y,D') \\ &\qquad\quad (l_{t_1-w_1^1-w_1^{p+1}}.v)(y)\Big|_{y=\phi(t-w^{p+1},z)}\Big)\Big|_{z=\phi(w^{p+1},x)} dw_2^1. \end{aligned}$$

En effectuant, à présent, les changements de variables $\tilde{w_j^i} = w_j^i + w_j^{p+1}$ pour $j=1,2$ et $i=1,\dots,p$, on a

$$\begin{aligned} u_{p+1}(x) &= \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0-t_2} dt_1 \int_0^{t_1} dw_1^{p+1} \int_0^{t_2} dw_2^{p+1} \\ &\int_{w_1^{p+1}}^{t_1} dw_1^p \int_{w_2^{p+1}}^{t_2} dw_2^p \dots \int_{w_1^2}^{t_1} dw_1^1 \int_{w_2^2}^{t_2} \\ &\quad l_{w_1^{p+1}}(z)\Big(\tilde{r}(t-w^{p+1},y,D') \prod_{i=1}^{p} \tilde{r}_{w^i-w^{i+1}}(t-w^{i+1},y,D') \\ &\qquad\quad (l_{t_1-w_1^1}.v)(y)\Big|_{y=\phi(t-w^{p+1},z)}\Big)\Big|_{z=\phi(w^{p+1},x)} dw_2^1. \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le lemme 9.3.1 de la même manière qu'au cas $p=1$, on obtient

$$\begin{aligned} u_{p+1}(x) &= \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0-t_2} dt_1 \int_0^{t_1} dw_1^{p+1} \int_0^{t_2} dw_2^{p+1} \\ &\int_{w_1^{p+1}}^{t_1} dw_1^p \int_{w_2^{p+1}}^{t_2} dw_2^p \dots \int_{w_1^2}^{t_1} dw_1^1 \int_{w_2^2}^{t_2} \\ &\quad l_{w_1^{p+1}}(\phi(w^{p+1}-t,y))\tilde{r}(t-w^{p+1},y,D') \\ &\qquad \prod_{i=1}^{p} \tilde{r}_{w^i-w^{i+1}}(t-w^{i+1},y,D')(l_{t_1-w_1^1}.v)(y)\Big|_{y=\phi(t,x)} dw_2^1. \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat d'après la définition des opérateurs $\tilde{r}_w(t,x,D')$. ■

9.4 Convergence de la série

Nous allons tout d'abord rappeler quelques résultats sur les séries majorantes tels qu'ils sont exposés dans [28] par exemple. Soit E un espace de Banach complexe. On note $E[[x]]$ l'espace vectoriel des séries formelles en $n+1$ indéterminées à coefficients dans E et $E\{x\}$ le sous-espace vectoriel des séries convergentes en l'origine.

Proposition 9.4.1 *Soit $\phi \in \mathbf{R}_+\{x\}$ une fonction majorante et $u \in E[[x]]$ une série formelle telle que $u << \phi$, son domaine de convergence contient le domaine de convergence Ω_0 de ϕ et*

$$||u(x)|| \leq \phi(|x_0|, \ldots, |x_n|) \text{ pour tout } x \in \Omega_0.$$

A toute série formelle $\phi \in \mathbf{R}_+[[x]]$, on peut associer un espace de Banach complexe de la façon suivante. On pose

$$B_\phi = \Big\{u \in E[[x]];\ (\exists c \geq 0)(u << c\phi)\Big\}.$$

B_ϕ est un sous-espace vectoriel de $E[[x]]$ sur lequel on définit une norme par

$$||u||_\phi = \inf \Big\{c \geq 0;\ u << c\phi\Big\}.$$

Proposition 9.4.2 $(B_\phi, ||\bullet||_\phi)$ *est un espace de Banach.*

Proposition 9.4.3 *Soit $u : \Delta(0, R) \mapsto E$ une fonction holomorphe bornée par M, alors*

$$u << M\frac{R}{R-\xi} \text{ où } \xi = \sum_{j=0}^{n} x_j.$$

Proposition 9.4.4 *Soit $\Phi \in \mathbf{R}_+[[\xi]]$ donnée par*

$$\Phi(\xi) = \frac{R}{R-\xi} \quad (R > 0).$$

Alors, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a

$$(R-\xi)D^k\Phi(\xi) >> 0.$$

Proposition 9.4.5 *Soient E, F et G des espaces de Banach complexes, une application bilinéaire $(a, u) \in E \times F \mapsto au \in G$ de norme ≤ 1,*

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$$

un opérateur différentiel dont les coefficients $a_\alpha \in E\{x\}$ sont holomorphes et bornés par M sur le polydisque $\Delta(0, \eta R)$, $\eta > 1$. Alors, il existe une constante positive $c = c(m, M, \eta, R)$ telle que pour tout $\phi \in \mathbf{R}_+[[\xi]]$ tel que $(R-\xi)\phi(\xi) >> 0$ où $R > 0$ et tout $u \in F[[x]]$

$$u << \phi \Rightarrow A(x, D)u << cD^m\phi.$$

Nous pouvons, à présent, montrer la convergence de la série (9.3). Pour cela, nous allons prouver la convergence de la série

$$\sum_p r_p(t,y,D')v(y)\Big|_{y=\phi(t,x)}. \tag{9.5}$$

On peut, tout d'abord, remarquer que pour tout $i \geq 1$

$$\tilde{r}_{w^i - w^{i+1}}(t - w^{i+1}, y, D')$$

ainsi que

$$\tilde{r}_{w^i}(t, y, D')$$

définissent des opérateurs différentiels à coefficients holomorphes que l'on peut supposer bornés par M sur $\Delta(0,R) \subset \mathbf{C}^4_{w^i,w^{i+1}} \times \mathbf{C}^2_t \times \mathbf{C}^{n+1}_y$ et $\Delta(0,R) \subset \mathbf{C}^2_{w^i} \times \mathbf{C}^2_t \times \mathbf{C}^{n+1}_y$ respectivement. De même, on peut supposer que $l_{t_1 - w^1_1}(y)$ est holomorphe et bornée par M sur $\Delta(0,R) \subset \mathbf{C}_{w^1_1} \times \mathbf{C}_{t_1} \times \mathbf{C}^{n+1}_y$. On peut aussi supposer (car on étudie le problème localement) que v est holomorphe sur $\mathcal{R}(\Delta_y(0,R) \setminus L)$. On note $\pi : \mathcal{R}(\Delta_y(0,R) \setminus L) \to \Delta_y(0,R) \setminus L$ la surjection canonique du revêtement. Soit $z \in \mathcal{R}(\Delta_y(0,R) \setminus L)$; v définit, au voisinage du point $\pi(z) = y^0$, un germe holomorphe que l'on note encore v et que l'on peut supposer borné par M' sur le polydisque $\Delta_y(y^0, \eta r) \subset \Delta_y(0,R) \setminus L$ où $\eta > 1$ et $r > 0$ sont fixés.

Nous allons, à présent, majorer indépendemment de p

$$r_p(t,y,D')v(y)$$

sur un voisinage de $(0, y^0) \in \mathbf{C}^2_t \times \mathbf{C}^{n+1}_y$ indépendant lui aussi de p.

On note, pour tout $p \geq 1$,

$$\tilde{r}_p(w^1,\ldots,w^p,t,y,D')v(y) = \\ \tilde{r}_{w^p}(t,y,D') \textstyle\prod_{i=1}^{p-1} \tilde{r}_{w^i - w^{i+1}}(t - w^{i+1}, y, D')(l_{t_1 - w^1_1}.v)(y)$$

(avec $\prod_{i=1}^{0} \equiv 1$).

Montrons, à présent, le lemme fondamental suivant

Lemme 9.4.1 *Il existe une constante c positive telle que, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, pour tout $(w^1,\ldots,w^p,t) \in \Delta(0,R) \subset \mathbf{C}^{2p}_w \times \mathbf{C}^2_t$, on ait*

$$\tilde{r}_p(w^1,\ldots,w^p,t,y,D')v(y) << c^{p+1} D^p \Phi$$

où

$$\Phi(\xi) = M' \frac{r}{r-\xi} \quad \textit{avec } \xi = \sum_{i=0}^{n} (y_i - y^0_i).$$

Preuve Nous ne montrerons que le cas $p \geq 2$, le cas $p = 1$ étant d'une adaptation évidente. On note tout d'abord

$$c = \max\Big\{c(0, M, \eta, r), c(1, M, \eta, r)\Big\}$$

où les constantes $c(0, M, \eta, r)$ et $c(1, M, \eta, r)$ sont données par la proposition 9.4.5. On fixe, à présent, $p \in \mathbf{N}^*$ et $(w^1, \ldots, w^p, t) \in \Delta(0, R) \subset \mathbf{C}_w^{2p} \times \mathbf{C}_t^2$.

v est holomorphe sur $\Delta_y(y^0, r)$ et est bornée par M' car $\eta > 1$, donc $v \in \mathbf{C}\{y - y^0\}$ et d'après la proposition 9.4.3, on a

$$v << \Phi.$$

On peut voir la fonction holomorphe à valeurs dans $\mathbf{C}$, $y \mapsto l_{t_1 - w_1^1}(y)$ (on rappelle que $(w^1, \ldots, w^p, t)$ est fixé) comme un opérateur d'ordre 0 dont le coefficient est borné par M sur le polydisque $\Delta_y(y^0, \eta r)$; de plus, on a $(r - \xi)\Phi(\xi) >> 0$ d'après la proposition 9.4.4. Par conséquent, vu que $v << \Phi$, on en déduit, d'après la proposition 9.4.5, que

$$l_{t_1 - w_1^1}.v << c\Phi.$$

Montrons, à présent, par récurrence sur j, que

$$\left[\prod_{i=1}^{j} \tilde{r}_{w^i - w^{i+1}}(t - w^{i+1}, y, D')\right]\big(l_{t_1 - w_1}.v\big) << c^{j+1} D^j \Phi.$$

Pour $j = 1$, on a

$$l_{t_1 - w_1^1}.v \in \mathbf{C}\{y - y^0\} \tag{9.6}$$

et

$$\tilde{r}_{w^1 - w^2}(t - w^2, y, D')$$

est un opérateur holomorphe d'ordre 1 dont les coefficients (à valeurs dans $\mathbf{C}$ car $(w^1, \ldots, w^p, t)$ est fixé) sont bornés par M sur le polydisque $\Delta_y(y^0, \eta r)$. De plus, on a $(r - \xi)(c\Phi(\xi)) >> 0$ d'après la proposition 9.4.4. Donc, vu que (9.6) est majorée par $c\Phi$, on a, d'après la proposition 9.4.5,

$$\tilde{r}_{w^1 - w^2}(t - w^2, y, D')\big(l_{t_1 - w_1^1}.v\big)(y) << c^2 D\Phi,$$

ce qui prouve le résultat pour $j = 1$. On suppose le résultat vrai à l'ordre $j - 1$ et montrons-le à l'ordre j.

$$\left[\prod_{i=1}^{j-1} \tilde{r}_{w^i, w^{i+1}}(t - w^{j+1}, y, D')\right]\big(l_{t_1 - w_1^1}.v\big) \tag{9.7}$$

appartient à $\mathbf{C}\{y - y^0\}$ et

$$\tilde{r}_{w^j - w^{j+1}}(t - w^{j+1}, y, D')$$

est un opérateur holomorphe d'ordre 1 dont les coefficients (à valeurs dans $\mathbf{C}$ car $(w^1,\dots,w^p,t)$ est fixé) sont bornés par M sur le polydisque $\Delta_y(y^0,\eta r)$. De plus, on a $(r-\xi)(c^jD^{j-1}\Phi(\xi)) >> 0$ d'après la proposition 9.4.4. Donc, vu que, par hypothèse de récurrence, (9.7) est majorée par $c^jD^{j-1}\Phi$, on a, d'après la proposition 9.4.5,

$$\left[\prod_{i=1}^{j}\tilde r_{w^i-w^{i+1}}(t-w^{j+1},y,D')\right]\left(l_{t_1-w_1^1}.v\right) << c^{j+1}D^j\Phi,$$

ce qui prouve le résultat.

En réitérant le même raisonnement pour

$$\tilde r_{w^p}(t,y,D'),$$

on termine aisément la preuve du lemme. ■

On déduit de ce qui précède qu'il existe une constante $c_1>0$ telle que pour tout $y\in\Delta_y(y^0,r')$, où $r'<r/(n+1)$ et pour tout $(w^1,\dots,w^p,t)\in\Delta(0,R)\subset\mathbf{C}_w^{2p}\times\mathbf{C}_t^2$, on ait, d'après la proposition 9.4.1,

$$|\tilde r_p(w^1,\dots,w^p,t,y,D')v(y)|\le c_1^p p!$$

car pour tout $y\in\Delta_y(y^0,r')$, $D^p\Phi(|\xi_0|,\dots,|\xi_n|)\le M'r'\tilde c^{p+1}p!$, où $\tilde c$ est une constante ne dépendant que de r'.

On choisit, à présent, un polydisque $\Delta\subset\Delta_t(0,R)\times\Delta_x(0,R)$ centré en l'origine de $\mathbf{C}_t^2\times\mathbf{C}_x^{n+1}$ tel que

$$\phi(\Delta)\subset\Delta_y(0,R).$$

On a alors pour tout $\hat z\in\mathcal{R}(\Delta\smallsetminus L')$, l'existence d'un voisinage V de $\hat\pi(\hat z)=(t^0,x^0)$ (où $\hat\pi:\mathcal{R}(\Delta\smallsetminus L')\to\Delta\smallsetminus L'$ désigne la surjection canonique) inclus dans $\Delta\smallsetminus L'$ et d'une constante c_2 tels que pour tout $(t,x)\in V$

$$\left|\tilde r_p(w^1,\dots,w^p,t,y,D')v(y)_{\big|y=\phi(t,x)}\right|\le c_2^p p!.$$

On a donc, pour tout $(t,x)\in V$,

$$\begin{aligned}\left|r_p(t,y,D')v(y)_{\big|y=\phi(t,x)}\right| &\le \int_0^1 ds_1^p\int_0^1 ds_2^p\int_{s_1^p}^1 ds_1^{p-1}\int_{s_2^p}^1 ds_2^{p-1}\dots\int_{s_1^2}^1 ds_1^1\int_{s_2^2}^1\\ &\qquad\left|t_1^pt_2^p\tilde r_p(s_1t_1,s_2t_2,t,y,D')v(y)_{\big|y=\phi(t,x)}\right|ds_2^1\\ &\le \int_0^1 ds_1^p\int_0^1 ds_2^p\int_{s_1^p}^1 ds_1^{p-1}\int_{s_2^p}^1 ds_2^{p-1}\dots\\ &\qquad\dots\int_{s_1^2}^1 ds_1^1\int_{s_2^2}^1 c_3^p p!\,ds_2^1\\ &\le \frac{c_3^p}{p!}\end{aligned}$$

où $s_it_i = (s_i^1t_i, \dots, s_i^pt_i)$ pour $i = 1, 2$. La dernière inégalité provenant du fait que pour $i = 1, 2$

$$\int_0^1 ds_i^p \int_{s_i^p}^1 ds_i^{p-1} \dots \int_{s_i^2}^1 ds_i^1 = \frac{1}{p!}.$$

La convergence de la série (9.5) sur $\mathcal{R}(\Delta \smallsetminus L')$ découle de l'inégalité

$$\left| r_p(t, y, D')v(y)\Big|_{y=\phi(t,x)} \right| \leq \frac{c_3^p}{p!}.$$

On a ainsi l'existence d'une fonction holomorphe f sur $\mathcal{R}(\Delta \smallsetminus L')$ telle que l'on ait, au voisinage du point a,

$$u(x) = \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0 - t_2} f(t, x) dt_1.$$

Chapitre 10

Étude de la ramification d'une intégrale

Nous abordons, ici, l'étude de la ramification d'une intégrale. Nous reprenons, pour cela, la preuve faite par T. Kobayashi [11]. Cette preuve utilise la notion de fibration loacalement triviale et le premier lemme d'isotopie de Thom que nous allons rappeler dans ce chapitre. Il est à noter que, pour cette preuve, on a besoin d'un lemme d'isotopie local montré par T. Fukuda et T. Kobayashi [3]. Nous rappelons ce lemme dans l'appendice.

10.1 Prolongement analytique d'une intégrale

Soit Ω un voisinage ouvert connexe de l'origine de $\mathbf{C}_t^m \times \mathbf{C}_x^{n+1}$ et L un ensemble analytique de codimension 1 que l'on peut supposer, quitte à réduire Ω, défini par

$$L = \{(t,x) \in \Omega;\ \varphi(t,x) = 0\}$$

où $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $\varphi(0,0) = 0$. On suppose, de plus, que $\varphi(0,x) \not\equiv 0$, que Ω est un polydisque $T \times X = \Delta(0,d) \times \Delta(0,d')$ et que $D(0,d_0')$ est relativement compact dans $D(0,d_i)$ pour $i = 1,\ldots,m$.

Soit $v : (t,x) \in \mathbf{C}_t^m \times \mathbf{C}_x^{n+1} \mapsto v(t,x)$ un germe holomorphe au voisinage d'un point $(0;0,a') = (0;a) \in T \times X$ se prolongeant en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\Omega \setminus L)$. Enfin, on note $\pi : T \times X \to X$ la projection canonique et, pour tout $1 \leq i \leq m+1$, $W_i = \{(t,x);\ t_i = t_{i-1}\}$ où $t_0 = 0$ et $t_{m+1} = x_0$.

On définit un germe u, au point a, par

$$u(x) = \int_0^{x_0} dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1} \ldots \int_0^{t_2} v(t,x)dt_1,$$

soit

$$u(x) = \int_{\Delta_m} x_0^m (\alpha(x)^* v)(s,x) ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m$$

où $\Delta_m = \{s \in \mathbf{R}^m;\ s_i \geq 0 \text{ et } s_1 \leq \ldots \leq s_m \leq 1\}$ et

$$\alpha(x) : s \in \Delta_m \mapsto (s_1 x_0, s_2 x_0, \ldots, s_m x_0) \in \mathbf{C}_t^m.$$

On note par Δ_m^i, $i = 1, \ldots, m+1$, les faces du simplexe Δ_m, c'est-à-dire

$$\Delta_m^i = \{s \in \Delta_m;\ s_i = s_{i-1}\} \text{ pour } i = 1, \ldots, m+1, \text{ avec } s_0 = 0 \text{ et } s_{m+1} = 1.$$

D'après le théorème 1.3 de [11], on sait que le germe u est prolongeable le long d'un chemin γ d'origine a tracé dans $\mathbf{C}_x^{n+1}$ si le m-simplexe $\alpha(a) \equiv 0$ peut être déformé continûment le long de γ. Plus précisément, si il existe une famille de m-simplexes $\alpha_r : \Delta_m \to \mathbf{C}_t^m$ pour $r \in [0,1]$ tels que :

1. $\alpha_0 = \alpha(a) \equiv 0$,
2. $(\alpha_r(s), \gamma(r)) \in (T \times X) \setminus L$,
3. $(\alpha_r(s), \gamma(r)) \in W_i$ si $s \in \Delta_m^i$,
4. $\alpha : (r,s) \in [0,1] \times \Delta_m \longmapsto \alpha_r(s) \in \mathbf{C}_t^m$ soit une application continue.

On rappelle à présent quelques définitions et le premier lemme d'isotopie de Thom.

Définition 10.1.1 *Soient E et F deux espaces topologiques, $S_1, \ldots, S_k$ des sous ensembles de E et $f : E \to F$ une application continue. On dit que $f : E \to F$ est une fibration localement triviale relativement à $S_1, \ldots, S_k$ si pour tout point b de F, il existe un voisinage ouvert V de b et un homéomorphisme $h_b : E_V \to E_b \times V$ tel que $h_b(S_{iV}) = S_{ib} \times V$ où $E_V = f^{-1}(V)$, $E_b = f^{-1}(b)$, $S_{iV} = S_i \cap E_V$ et $S_{ib} = S_i \cap E_b$. De plus, le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} (E_V, S_{iV}) & \xrightarrow{h_b} & (E_b \times V, S_{ib} \times V) \\ f \searrow & & \swarrow p \\ & V & \end{array}$$

où $p : E_b \times V \to V$ est la projection canonique.

Soient M et N deux sous-variétés lisses dans $\mathbf{R}^d$ et $b \in \overline{M} \cap N$. La paire (M,N) satisfait à la condition (B) de Whitney au point b, si pour toute suite (a_n, b_n) de (M,N), $(a_n \neq b_n)$, telle que $(a_n, b_n, \widehat{a_n b_n}, T_{a_n}M) \to (b, b, l, \tau) \in \overline{M} \times N \times \mathbf{P}^{d-1} \times \mathbf{G}_{dr}$, on a $l \subset \tau$ où $\widehat{a_n b_n}$ désigne la droite vectorielle parallèle à celle joignant a_n et b_n et où $\mathbf{G}_{dr}$ est la Grassmannienne des r-plans de $\mathbf{R}^d$.

On dit que la paire (M,N) satisfait à la condition (B) de Whitney si elle la satisfait en tout point $b \in \overline{M} \cap N$.

Définition 10.1.2 *Une stratification de Whitney d'un sous-ensemble $E \subset \mathbf{R}^d$ est une partition $\mathcal{S}(E) = \{M_\mu\}$ de E en sous-variétés connexes vérifiant*

1. $E = \coprod M_\mu$ *union disjointe et localement finie,*
2. *toute paire* (M_μ, M_ν) *de* $\mathcal{S}(E)^2$ *satisfait à la condition* (B) *de Whitney,*
3. *si* $\overline{M}_\mu \cap M_\nu \neq \emptyset$ *alors* $M_\nu \subset \overline{M}_\mu \setminus M_\mu$ *pour* $\mu \neq \nu$.

Tout élément de la stratification est appelé strate. Un sous-ensemble S de E est dit stratifié par rapport à $\mathcal{S}(E)$ si S est une union de strates de $\mathcal{S}(E)$.

Exemple Soit S la surface de $\mathbf{R}^3$ d'équation $y(y - z^2) + x^2 = 0$ (Fig. 2.1).

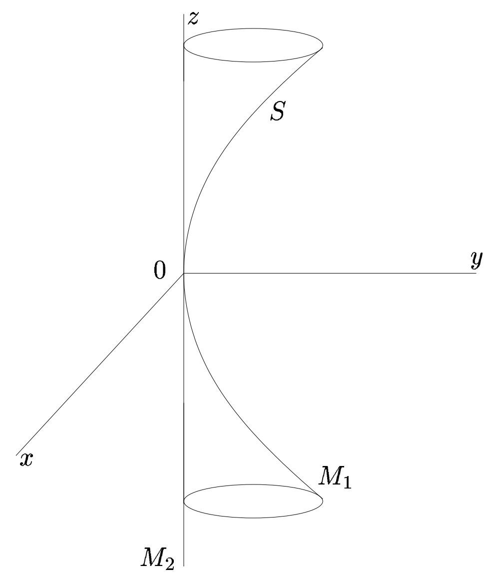

FIG. 10.1 – $S : y(y - z^2) + x^2 = 0$

On considère la partition de S suivante

$$M_1 = \{(0,0,z);\ z \in \mathbf{R}\}, \qquad M_2 = S \setminus M_1.$$

L'ensemble $\{M_2, M_1\}$ ne forme pas une stratification de Whitney. En effet, la paire (M_2, M_1) ne vérifie pas la condition (B) de Whitney au point 0. Considérons les suites $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*} = (0,0,1/n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de M_1 et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*} = (0, 1/n^2, 1/n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de M_2. $\widehat{a_n b_n}$ est engendré par le vecteur $(0,1,0)$ et le vecteur normal à $T_{a_n}M_2$ est donné par $(0,1,-2/n)$ qui converge vers $(0,1,0)$. Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{a_n b_n} \not\subset \lim_{n\to\infty} T_{a_n} M_2,$$

et donc, $\{M_2, M_1\}$ n'est pas une stratification de Whitney. Par contre, on obtient une stratification de Whitney de S en considérant la partition suivante

$$M_1 = \{0\}, \qquad M_2 = \{(0,0,z);\ z > 0\},$$
$$M_3 = \{(0,0,z);\ z < 0\}, \qquad M_4 = S \setminus \{(0,0,z);\ z \in \mathbf{R}\}.$$

Définition 10.1.3 *Soient $\mathcal{S}(E)$ une stratification de Whitney de E et $\mathcal{S}(F) = \{F\}$ la stratification de Whitney triviale de F. $f : E \to F$ est dite stratifiée par rapport à $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{S}(F)$ si*

$$f_{|M} : M \longrightarrow F$$

est une submersion pour tout $M \in \mathcal{S}(E)$.

Théorème 10.1.1 (1^er lemme d'isotopie de Thom) *Soient $\mathcal{S}(E)$ une stratification de Whitney de E et $\mathcal{S}(F) = \{F\}$ la stratification de Whitney triviale de F. Si $f : E \to F$ est une application propre et stratifiée par rapport à $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{S}(F)$, et si $S_1, \ldots, S_k$ sont des sous-ensembles stratifiés de E, alors $f : E \to F$ est une fibration localement triviale relativement à $S_1, \ldots, S_k$.*

A présent, soit $\mathcal{S} = \{M_\mu\}$ une stratification de Whitney de L. On définit une partition de $T \times X$ par

$$\begin{cases} (M_\mu \cap \bigcap_{i\in K} W_i) \smallsetminus \bigcup_{j\in K'} W_j, \\ \bigcap_{i\in K} W_i \smallsetminus (\bigcup_{j\in K'} W_j \cup L), \\ (T\times X) \smallsetminus (L \cup \bigcup_{i\in\{1,\ldots,m+1\}} W_i) \end{cases}$$

où $K \subset \{1, \ldots, m+1\}$ et K' est le complémentaire de K. On suppose que c'est encore une stratification de Whitney de $T \times X$ (ce qui est toujours possible quitte à raffiner la stratification $\mathcal{S}$) que l'on note $\mathcal{S}(T \times X)$.

Soit M une strate de $\mathcal{S}(T \times X)$. On pose

$$\Sigma_M = \{x \in X;\ \exists t \in T;\ Rang(i_M^*\pi)(t,x) \le n\},$$

où $i_M : M \hookrightarrow T \times X$ est l'injection canonique, et

$$\Sigma_0 = \overline{\bigcup_{M\in\mathcal{S}'} \Sigma_M}$$

où $\mathcal{S}' = \{M \in \mathcal{S}(T\times X);\ M \not\subset \bigcap_{i=1}^{m+1} W_i\}$. Soit $\rho_0 : T \to \mathbf{R}^+$ une fonction lisse et propre. On note ρ la fonction définie pour tout $(t,x) \in T \times X$ par $\rho(t,x) = \rho_0(t)$. On note, pour tout $x \in X \smallsetminus \Sigma_0$ et tout $M \in \mathcal{S}(T \times X)$,

$$D_M(x,\rho) = \left\{\text{valeurs critiques de } \rho_{|M\cap(T\times\{x\})}\right\}$$

et

$$D(x,\rho) = \bigcup_{M\in\mathcal{S}(T\times X)} D_M(x,\rho).$$

On peut remarquer que, d'après la définition de Σ_0, pour tout x appartenant à $X \setminus \Sigma_0$, $M \cap (T \times \{x\})$ est une sous-variété de $T \times X$.
On note

$$\mathcal{M}_0 = \{\rho_0 : T \to \mathbf{R}^+ \text{ lisse et propre telle que } \rho_0(0) = 0\}$$

et

$$\mathcal{M} = \{\rho : T \times X \to \mathbf{R}^+;\ \rho = \rho_0 \circ \pi_T;\ \rho_0 \in \mathcal{M}_0\}$$

où $\pi_T : T \times X \to T$ est la projection canonique. On définit un ensemble Σ_∞ par l'ensemble des $x \in X \setminus \Sigma_0$ tels que pour toute fonction $\rho \in \mathcal{M}$, et pour tout voisinage ouvert U de x dans $X \setminus \Sigma_0$

$$D(U, \rho) = \bigcup_{y \in U} D(y, \rho)$$

ne soit pas relativement compact dans $\mathbf{R}^+$.

Théorème 10.1.2 *Le germe u, au point $a \in X \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_\infty)$, se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(X \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_\infty))$.*

Preuve Soit $\alpha_0 = \alpha(a)$ le m-simplexe singulier constant et égal à zéro, et soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow X \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_\infty)$ un chemin d'origine a. On note J l'ensemble des $\tau \in [0,1]$ tels que α_0 puisse être déformé le long du chemin γ jusqu'au point $\gamma(\tau)$, tout en satisfaisant aux hypothèses du prolongement. Il suffit donc de montrer que $J = [0,1]$. Or $0 \in J$, de plus on a le lemme 1.2 de [11] suivant,

Lemme 10.1.1 *Soit $p \in X \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_\infty)$ et α_p un simplexe vérifiant*
- *$(\alpha_p(s), p) \in (T \times X) \setminus L$,*
- *$(\alpha_p(s), p) \in W_i$ si $s \in \Delta^i_m$.*

Alors, il existe un ouvert U de p dans $X \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_\infty)$ et une extension continue de α (que nous noterons encore α) telle que pour tout $q \in U$
- *$(\alpha_q(s), q) \in (T \times X) \setminus L$,*
- *$(\alpha_q(s), q) \in W_i$ si $s \in \Delta^i_m$.*

Par conséquent, J est un ensemble ouvert. Donc, par connexité, il suffit de montrer que J est fermé.

D'après les définitions de Σ_M et de Σ_0

$$\pi_{|M \cap (T \times (X \setminus \Sigma_0))} : M \cap (T \times (X \setminus \Sigma_0)) \longrightarrow X \setminus \Sigma_0$$

est une submersion pour tout $M \in \mathcal{S}'$. On peut remarquer que si $M \notin \mathcal{S}'$ alors on a $M \subset \{(0; 0, x') \in T \times X\}$.
Soit $(\tau_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite de J telle que $\tau_i \to \tau$. Montrons que $\tau \in J$. Pour cela nous distinguerons deux cas :

1. $\gamma(\tau) \in \{x; x_0 \neq 0\} \cap (X \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_\infty))$,
2. $\gamma(\tau) \in \{x; x_0 = 0\} \cap (X \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_\infty))$.

Premier cas – Vu que $\gamma(\tau) \notin \Sigma_\infty$, il existe une fonction $\rho \in \mathcal{M}$ lisse et propre, et un voisinage ouvert U de $\gamma(\tau)$ dans $X \setminus \Sigma_0$ tel que $D(U,\rho)$ soit relativement compact dans $\mathbf{R}^+$. De plus, quitte à réduire U, on peut supposer que $U \cap \{x;\ x_0 = 0\} = \emptyset$ (il faut noter que $D(U,\rho)$ est toujours relativement compact dans T). La restriction de π à $T \times U$ est alors une application stratifiée relativement aux stratifications

$$\mathcal{S}(T \times U) = \{M \cap (T \times U);\ M \in \mathcal{S}(T \times X)\} \text{ et } \mathcal{S}(U) = \{U\}.$$

Soit τ_i tel que $\gamma([\tau_i, \tau]) \subset U$, et on choisit enfin $r > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que

- $D(U,\rho) \cap (B(r+\varepsilon) \setminus \overline{B}(r-\varepsilon)) = \emptyset$,
- $\alpha_{\tau_i}(\Delta_m) \subset B(r)$.

On a donc

$$\Big(U \times]r-\varepsilon, r+\varepsilon[\Big) \cap D = \emptyset$$

où $D = \bigcup_{y \in U} \{y\} \times D(y,\rho)$. D'après le théorème A.1.1

$$\pi_{|\overline{B}(r)\times U} : \overline{B}(r) \times U \longrightarrow U \tag{10.1}$$

est une application propre et stratifiée et les ensembles $L \cap (\overline{B}(r) \times U)$, $W_i \cap (\overline{B}(r) \times U)$ pour $i = 1, \dots, m+1$ sont stratifiés ; donc d'après le premier lemme d'isotopie de Thom, (10.1) est une fibration localement triviale relativement à $L \cap (\overline{B}(r) \times U)$, $W_i \cap (\overline{B}(r) \times U)$ pour $i = 1, \dots, m+1$. Ceci va nous permettre d'effectuer la déformation du m-simplexe α_{τ_i} jusqu'au point $\gamma(\tau)$.

En effet, $\gamma([\tau_i, \tau])$ est un compact de U, on peut donc le recouvrir par des ouverts $V_1, \dots, V_k$ trivialisants pour la fibration. On choisit des τ_{i_j} tels que

$$\gamma([\tau_{i_j}, \tau_{i_{j+1}}]) \subset V_j$$

où $\tau_{i_1} = \tau_i$ et $\tau_{i_{k+1}} = \tau$. On note h_j, $j = 1, \dots, k$, l'homéomorphisme

$$h_j : \overline{B}(r) \times V_j \longrightarrow (\overline{B}(r) \times \{\gamma(\tau_{i_j})\}) \times V_j$$

tel que

- $h_j(L \cap (\overline{B}(r) \times V_j)) = (L \cap (\overline{B}(r) \times \{\gamma(\tau_{i_j})\})) \times V_j$,
- $h_j(W_i \cap (\overline{B}(r) \times V_j)) = (W_i \cap (\overline{B}(r) \times \{\gamma(\tau_{i_j})\})) \times V_j$ pour $i = 1, \dots, m+1$.

De plus, h_j vérifie pour tout $(t,x) \in \overline{B}(r) \times V_j$,

$$h_j(t,x) = (h_{j,1}(t,x), x)$$

car $\pi_{|\overline{B}(r)\times V_j} = p_j \circ h_j$ où $p_j : (\overline{B}(r) \times \{\gamma(\tau_{i_j})\}) \times V_j \to V_j$ est la projection canonique.
Posons, pour $\mu \in [\tau_i, \tau_{i_2}]$, β^1_μ tel que

$$(\beta^1_\mu(s), \gamma(\mu)) = h_1^{-1}(h_{1,1}(\alpha_{\tau_i}(s), \gamma(\tau_i)), \gamma(\mu))$$

et montrons que β^1_μ est une déformation continue de α_{τ_i} jusqu'au point $\gamma(\tau_{i_2})$. En effet, on a

- $\beta^1_{\tau_i} = \alpha_{\tau_i}$ car $(h_{1,1}(\alpha_{\tau_i}(s), \gamma(\tau_i)), \gamma(\tau_i)) = h_1(\alpha_{\tau_i}(s), \gamma(\tau_i))$.
- $(\beta^1_\mu(s), \gamma(\mu))$ n'appartient pas à $L \cap (\overline{B}(r) \times V_1)$. En effet, $(\alpha_{\tau_i}(s), \gamma(\tau_i))$ n'appartient pas à $L \cap (\overline{B}(r) \times V_1)$, donc $h_{1,1}(\alpha_{\tau_i}(s), \gamma(\tau_i))$ n'appartient pas à $L \cap (\overline{B}(r) \times \{\gamma(\tau_i)\})$, d'où $(\beta^1_\mu(s), \gamma(\mu))$ n'appartient pas à $L \cap (\overline{B}(r) \times V_1)$.
- $(\beta^1_\mu(s), \gamma(\mu))$ appartient à $W_i \cap (\overline{D}(0,r) \times V_1)$. En effet, $(\alpha_{\tau_i}(s), \gamma(\tau_i))$ appartient à $W_i \cap (\overline{B}(r) \times V_1)$, pour tout s dans Δ^i_m, donc $h_{1,1}(\alpha_{\tau_i}(s), \gamma(\tau_i))$ appartient à $W_i \cap (\overline{B}(r) \times \{\gamma(\tau_i)\})$, d'où $(\beta^1_\mu(s), \gamma(\mu))$ appartient à $W_i \cap (\overline{D}(0,r) \times V_1)$.

β^1_μ est donc bien une déformation continue de α_{τ_i} jusqu'au point $\gamma(\tau_{i_2})$ et, par récurrence, on pose, pour $j = 2, \ldots, k$ et $\mu \in [\tau_{i_j}, \tau_{i_{j+1}}]$, β^j_μ tel que

$$(\beta^j_\mu(s), \gamma(\mu)) = h_j^{-1}(h_{j,1}(\beta^{j-1}_{\tau_{i_j}}(s), \gamma(\tau_{i_j})), \gamma(\mu)).$$

β^j_μ est une déformation continue de β^{j-1}_μ jusqu'au point $\gamma(\tau_{i_{j+1}})$. Maintenant, en posant $\beta_\mu(s) = \beta^j_\mu(s)$ pour $\mu \in [\tau_{i_j}, \tau_{i_{j+1}}]$, on obtient une déformation continue de α_{τ_i} le long de γ jusqu'au point $\gamma(\tau)$; donc $\tau \in J$.

Deuxieme cas – Vu que $\gamma(\tau) \notin \Sigma_\infty$, il existe une fonction $\rho \in \mathcal{M}$, et un voisinage ouvert U de $\gamma(\tau)$ dans $X \setminus \Sigma_0$ tel que $D(U, \rho)$ soit relativement compact dans $\mathbf{R}^+$. De plus, quitte à réduire U, on peut supposer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi(t,x) \neq 0$ pour tout $(t,x) \in \overline{B(0,4\varepsilon) \times U}$ (c'est-à-dire $L \cap (\overline{B(0,4\varepsilon) \times U}) = \emptyset$, où $B(0,r)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon r). On choisit τ_i tel que $\gamma([\tau_i, \tau]) \subset U$ et tel que $|\gamma_0(\mu)| \leq |\gamma_0(\tau_i)|$ pour tout $\mu \in [\tau_i, \tau]$, puis $r > 0$ et $\eta > 0$ tels que
- $D(U, \rho) \cap (B(r+\eta) \setminus \overline{B}(r-\eta)) = \emptyset$,
- $\alpha_{\tau_i}(\Delta_m) \subset B(r)$,
- $\overline{B}(0, 2\varepsilon) \subset B(r)$.

Lemme 10.1.2 *Pour tout $\varepsilon' < \varepsilon$, la partition suivante*

$$\begin{aligned}\mathcal{S}((\overline{B}(r) \setminus B(0,\varepsilon')) \times U) = \\ \{M \cap ((B(r) \setminus \overline{B}(0,\varepsilon')) \times U), M \cap (S(r) \times U), M \cap (S(0,\varepsilon') \times U); \\ M \in \mathcal{S}(T \times X)\}\end{aligned}$$

est une stratification de Whitney.

Preuve Il suffit, pour cela, de reprendre la preuve du lemme A.2.2, et de remarquer que $S(0,\varepsilon') \times U$ est transverse à toute strate de $\mathcal{S}(T \times X)$ car $M \cap (S(0,\varepsilon') \times U) = \emptyset$ si $M \subset L$ et $S(0,\varepsilon') \times U$ est transverse à toute strate incluse dans $\bigcup_{i \in K} W_i$, $K \subset \{1, \ldots, m+1\}$. ■

Soit $\varepsilon' < \varepsilon$. Vu que, pour tout $\tilde{M} \in \mathcal{S}((\overline{B}(r) \setminus B(0,\varepsilon')) \times U)$, $\pi_{|\tilde{M}}$ est une submersion et vu que $L \cap ((\overline{B}(r) \setminus B(0,\varepsilon')) \times U)$, $W_i \cap ((\overline{B}(r) \setminus B(0,\varepsilon')) \times U)$ pour $i = 1, \ldots, m+1$, sont des ensembles stratifiés, alors

$$\pi_{|(\overline{B}(r) \setminus B(0,\varepsilon')) \times U} : (\overline{B}(r) \setminus B(0,\varepsilon')) \times U \longrightarrow U$$

est une fibration localement triviale relativement à $L \cap ((\overline{B}(r) \setminus B(0,\varepsilon')) \times U)$ et $W_i \cap ((\overline{B}(r) \setminus B(0,\varepsilon')) \times U)$ pour $i = 1, \ldots, m+1$. On construit, comme précédemment, une application β_μ, pour $\mu \in [\tau_i, \tau]$, définie uniquement pour les $s \in \Delta_m$ tels que $\alpha_{\tau_i}(s) \in \overline{B}(r) \setminus B(0,\varepsilon')$. De plus, d'après la construction de β_μ, on peut remarquer, quitte à choisir ε' suffisament petit et grâce au fait que $\rho(0,x) = 0$, que l'on a $\beta_\mu(s) \in B(0, 2\varepsilon)$ pour tout s tel que $\alpha_{\tau_i}(s) \in B(0,2\varepsilon') \setminus B(0,\varepsilon')$. On construit, à présent, une application ξ_μ, pour $\mu \in [\tau_i, \tau]$, définie uniquement pour les $s \in \Delta_m$ tels que $\alpha_{\tau_i}(s) \in B(2\varepsilon')$. Pour cela, on pose

$$\xi_\mu(s) = \alpha_{\tau_i}(s) \text{ si } \gamma_0(\tau_i) = 0,$$

$$\xi_\mu(s) = \frac{\gamma_0(\mu)}{\gamma_0(\tau_i)} \alpha_{\tau_i}(s) \text{ sinon.}$$

Notons (π_1, π_2) une partition de l'unité de $\overline{B}(r)$ comme suit

- $\pi_1 \equiv 1$ sur $\overline{B}(r) \setminus B(0, 2\varepsilon')$ et $\pi_1 \equiv 0$ sur $B(0,\varepsilon')$,
- $\pi_2 \equiv 0$ sur $\overline{B}(r) \setminus B(0, 2\varepsilon')$ et $\pi_2 \equiv 1$ sur $B(0,\varepsilon')$,

et on définit δ_μ par

$$\delta_\mu(s) = \pi_1(\alpha_{\tau_i}(s))\beta_\mu(s) + \pi_2(\alpha_{\tau_i}(s))\xi_\mu(s).$$

δ_μ est continu et vérifie $\delta_{\tau_i} = \alpha_{\tau_i}$. De plus , si

- $\alpha_{\tau_i}(s) \in \overline{B}(r) \setminus B(0,2\varepsilon')$, on a $\delta_\mu(s) = \beta_\mu(s)$, donc $(\delta_\mu(s), \gamma(\mu)) \in (T \times X) \setminus L$;
- $\alpha_{\tau_i}(s) \in B(0, 2\varepsilon')$, on a $\delta_\mu(s) \in B(0, 4\epsilon)$, or $\varphi(t,x) \neq 0$ pour tout (t,x) dans $B(0,4\epsilon) \times U$, donc $(\delta_\mu(s), \gamma(\mu)) \in (T \times X) \setminus L$;
- $s \in \Delta_m^i$, on a $(\beta_\mu(s), \xi_\mu(s)) \in W_i^2$, d'où $\delta_\mu(s) \in W_i$.

Donc δ_μ est bien une déformation continue de α_{τ_i} le long de γ jusqu'au point $\gamma(\tau)$, ce qui termine la preuve du théorème. ■

10.2 Cas d'une intégrale simple

Nous allons, ici, calculer le lieu singulier d'un germe holomorphe, déterminé par une intégrale simple.

Déterminons tout d'abord Σ_0. Soit M une strate de $\mathcal{S}(T \times X)$.

- Si $M = (T \times X) \setminus (L \cup W_1 \cup W_2)$ alors $\pi_{|M}$ est une submersion, donc $\Sigma_M = \emptyset$.
- Si $M = W_1 \setminus (L \cup W_2)$ ou $W_1 \setminus (L \cup W_1)$ alors $\pi_{|M}$ est une submersion, donc $\Sigma_M = \emptyset$.
- Si $M = M_\mu \setminus (W_1 \cup W_2)$ et M_μ est de dimension $n+1$, alors

$$\Sigma_M = \left\{ x \in X;\ \exists t \in T;\ \varphi(t,x) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) = 0 \text{ avec } (t,x) \in M_\mu \right\}.$$

- Si $M = (M_\mu \cap W_1) \setminus W_2$ et M_μ est de dimension $n+1$, alors

$$\Sigma_M = \left\{ x \in X;\ \varphi(0,x) = 0 \text{ avec } (0,x) \in M_\mu \right\}.$$

– Si $M = (M_\mu \cap W_2) \smallsetminus W_1$ et M_μ est de dimension $n+1$, alors

$$\Sigma_M = \{x \in X;\ \varphi(x_0, x) = 0 \text{ avec } (x_0, x) \in M_\mu\}\,.$$

– Si M est adhérente à M_μ avec M_μ de dimension inférieure à n alors

$$\Sigma_M \subset \pi(M_\mu).$$

Donc si toutes les strates de $\mathcal{S}(T \times X)$ de dimension inférieure à n sont adhérentes à des strates de la forme $(M_\mu \cap W_1) \smallsetminus W_2$ ou $(M_\mu \cap W_2) \smallsetminus W_1$ avec M_μ de dimension $n+1$ alors, Σ_0 est l'adhérence de l'ensemble

$$\{x \in X;\ \varphi(0,x)\varphi(x_0,x) = 0\} \cup \left\{x \in X; \exists t \in T;\ \varphi(t,x) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) = 0\right\}.$$

Déterminons, à présent, dans quelques cas, Σ_∞. Ici, vu que $L \cap (T \times \{x\})$ est discret, l'ensemble Σ_∞ se réduit à l'ensemble des $x \in X \smallsetminus \Sigma_0$ tel que pour tout voisinage ouvert U de x dans $X \smallsetminus \Sigma_0$

$$D(U) = \bigcup_{y \in U} D(y)$$

n'est pas relativement compact dans T où $D(y) = \{t \in T;\ \varphi(t,y) = 0\}$.
Supposons que $\varphi(\cdot, 0) \not\equiv 0$, alors, d'après le théorème de préparation de Weierstrass, on a, au voisinage de l'origine

$$\varphi(t,x) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{p} a_i(x) t^i = 0 \text{ où } a_p \equiv 1$$

avec $a_i(0) = 0$ pour $i = 0, \ldots, p-1$. Donc, pour tout r suffisament petit, il existe un voisinage ouvert Ω de l'origine de $\mathbf{C}_x^{n+1}$ tel que

$$x \in \Omega \Longrightarrow (\varphi(t,x) = 0 \Rightarrow t \in D(0,r))\,.$$

Par conséquent, en choisissant $\Omega \subset X$ et $\overline{D}(0,r) \subset T$, on a $\Sigma_\infty = \emptyset$.

Supposons à présent que $\varphi(t,x) = \sum_{i=0}^{p} a_i(x) t^i$ et que $v \in \mathcal{H}(\mathcal{R}((\mathbf{C}_t \times X) \smallsetminus L))$. Soit $x \in X \smallsetminus \Sigma_0$ tel que $a_p(x) \neq 0$; il existe alors un voisinage U de x dans $X \smallsetminus \Sigma_0$ tel que pour tout $y \in U$, $\varphi(\cdot, y)$ possède p racines distinctes dans $\mathbf{C}_t$ car

$$\{x \in X;\ \mathrm{discrim}_t \varphi(t,x) = 0\} \subset \Sigma_0.$$

Donc $D(U)$ est relativement compact dans $\mathbf{C}_t$. Par conséquent

$$\Sigma_\infty \subset \{x \in X;\ a_p(x) = 0\}\,.$$

Chapitre 11

Quelques exemples

Nous présentons, ici quelques exemples de détermination de lieux singuliers pour certains problèmes de Cauchy de la forme

$$\begin{cases} a(x,D)u(x) = v(x), \\ \\ u(x) = D_0 u(x) = 0 \text{ pour } x_0 = 0. \end{cases}$$

On désignera par $g(x,\xi)$ le symbole principal de l'opérateur $a(x,D)$.

Exemple 1 Si on a

- $g(x,\xi) = (\xi_0 - a\xi_1 - b\xi_2)\xi_0$ où $a, b \in \mathbf{C}^*$,
- $v \in \mathcal{H}(\mathcal{R}(\Omega \setminus (K_1 \cup K_2 \cup L_1 \cup L_2)))$ où Ω est un voisinage ouvert connexe de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$ et

$$K_1 = \{x_1 = 0\} \qquad K_2 = \{x_2 = 0\},$$

$$L_1 = \{x_1 + ax_0 = 0\} \qquad L_2 = \{x_2 + bx_0 = 0\}.$$

v est donc ramifié autour des caractéristiques de $a(x,D)$ issues de $T_i : x_i = x_0 = 0$ pour $i = 1, 2$.
Il existe alors un voisinage ouvert connexe $\Omega' \subset \Omega$ de l'origine tel que la solution u soit holomorphe sur $\mathcal{R}(\Omega' \setminus (K_1 \cup K_2 \cup L_1 \cup L_2 \cup \tilde{L}))$ où

$$\tilde{L} = \{bx_1 - ax_2 = 0\}.$$

Dans ce cas, on a $\Sigma_\infty = \emptyset$.

Exemple 2 Si on a

- $g(x,\xi) = (\xi_0 + x_2\xi_1)\xi_0$,
- $v \in \mathcal{H}(\mathcal{R}(\mathbf{C}^{n+1} \setminus (K_1 \cup K_2)))$ où

$$K_1 = \{x_1 = 0\} \qquad K_2 = \{x_1 - x_2x_0 = 0\},$$

– $a(x, D)$ est un opérateur différentiel à coefficients holomorphes sur tout $\mathbf{C}^{n+1}$,
La solution u est alors holomorphe sur $\mathcal{R}(\mathbf{C}^{n+1} \smallsetminus (K_1 \cup K_2 \cup \tilde{L}))$ où

$$\tilde{L} = \{x_2 = 0\}.$$

Dans ce cas, on a $\Sigma_\infty = \tilde{L}$.

Exemple 3 Si on a

- $g(x, \xi) = (\xi_0 + 2x_2\xi_1 + x_3\xi_2)\xi_0$,
- $v \in \mathcal{H}(\mathcal{R}(\mathbf{C}^{n+1} \smallsetminus (K_1 \cup K_2)))$ où

$$K_1 = \{x_1 = 0\} \qquad K_2 = \{x_1 - 2x_2x_0 + x_3x_0^2 = 0\},$$

– $a(x, D)$ est un opérateur différentiel à coefficients holomorphes sur tout $\mathbf{C}^{n+1}$,
La solution u est alors holomorphe sur $\mathcal{R}(\mathbf{C}^{n+1} \smallsetminus (K_1 \cup K_2 \cup \tilde{L}))$ où

$$\tilde{L} = \{(x_1x_3 - x_2^2)x_3 = 0\}.$$

Dans ce cas, on a $\Sigma_\infty = \{x_3 = 0\}$.

Exemple 4 Si on a

- $g(x, \xi) = (\xi_0 - \xi_1 - \xi_2)\xi_0$,
- $v \in \mathcal{H}(\mathcal{R}(\Omega \smallsetminus (K_1 \cup K_2)))$ où Ω est un voisinage ouvert connexe de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$ et

$$K_1 = \{x_1 - x_0 = 0\} \qquad K_2 = \{x_1 - x_0 - (x_2 - x_0)^2 = 0\}.$$

Il existe alors un voisinage ouvert connexe $\Omega' \subset \Omega$ de l'origine tel que la solution u soit holomorphe sur $\mathcal{R}(\Omega' \smallsetminus (K_1 \cup K_2 \cup L_1 \cup L_2 \cup \tilde{L}))$ où

$$L_1 = \{x_1 = 0\} \qquad L_2 = \{x_1 - x_2^2 = 0\}$$

et

$$\tilde{L} = \{x_1 - x_2 = 0\}.$$

Dans ce cas, on a $\Sigma_\infty = \emptyset$.

Annexe A

Un lemme d'isotopie local

A.1 Introduction

Dans cet appendice, nous reprenons la preuve d'un lemme d'isotopie local utilisé au chapitre 2, faite par T. Fukuda et T. Kobayashi [3].

On considère la situation suivante. Soient $E = T \times X$ où T et X sont des ouverts connexes de $\mathbf{R}^d$ et $\mathbf{R}^{d'}$ respectivement, $\pi : E \to X$ la projection canonique et $S_1, \ldots, S_k$ des sous-ensembles de E. On suppose qu'il existe une stratification de Whitney $\mathcal{S}(E)$ telle que

1. π soit stratifiée par rapport à $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{S}(X) = \{X\}$,
2. $S_1, \ldots, S_k$ soient des sous-ensembles de E stratifiés par rapport à $\mathcal{S}(E)$.

Remarque A.1.1 La condition 1. peut être interprétée de la manière suivante : soient M une strate de $\mathcal{S}(E)$, $m \in M$ et $g_1, \ldots, g_k$ des fonctions lisses définies sur E et à valeurs dans $\mathbf{R}$, telles que M soit définie au voisinage de m par $g^{-1}(0)$ où $g = (g_1, \ldots, g_k)$. On peut supposer, de plus, que g est une submersion au voisinage de m. Alors, $\pi_{|M}$ est une submersion en m, si et seulement si,

$$\nabla_t g_1, \ldots, \nabla_t g_k$$

sont linéairement indépendants au voisinage de m.

En effet, $T_m M$ est défini par l'ensemble

$$\left\{(X_T, X_X) \in \mathbf{R}^{d+d'};\ Dg_m(X_T, X_X) = 0\right\}$$

où Dg_m est la matrice jacobienne de g au point m. De plus, on a

$$\begin{array}{rccc} (d\pi_{|M})_m : & T_m M & \longrightarrow & T_{\pi(m)} X \simeq \mathbf{R}^{d'} \\ & (X_T, X_X) & \longmapsto & X_X. \end{array}$$

$\pi_{|M}$ est une submersion en m si $(d\pi_{|M})_m$ est surjective. On note $D_t g_m$ [resp. $D_x g_m$] la matrice dont les lignes sont les $\nabla_t g_i(m)$ [resp $\nabla_x g_i(m)$]. Montrons, à présent, que

$\pi_{|M}$ est une submersion en m si et seulement si $\nabla_t g_1(m), \ldots, \nabla_t g_k(m)$ sont linéairement indépendants.
Supposons que $\nabla_t g_1(m), \ldots, \nabla_t g_k(m)$ soient libres. $D_t g_m$ est de rang k, donc surjective. Soit $X_X \in \mathbf{R}^{d'}$. On pose X_T tel que

$$D_t g_m(X_T) = -D_x g_m(X_X)$$

(X_T existe vu que $D_t g_m$ est surjective). On a $(X_T, X_X) \in T_m M$ car

$$Dg_m(X_T, X_X) = D_t g_m(X_T) + D_x g_m(X_X);$$

par conséquent $(d\pi_{|M})_m$ est surjective.
Réciproquement, supposons que $\nabla_t g_1(m), \ldots, \nabla_t g_k(m)$ soient liés et que $(d\pi_{|M})_m$ soit surjective. Il existe donc $Y \in \mathbf{R}^{d'}$ tel que $Y \notin \mathrm{Im} D_t g_m$. Vu que Dg_m est surjective, il existe (X_T, X_X) tel que

$$D_t g_m(X_T) + D_x g_m(X_X) = Y.$$

Or, ayant supposé $(d\pi_{|M})_m$ surjective, il existe $\tilde{X}_T$ tel que $(\tilde{X}_T, X_X) \in T_m M$. Donc

$$D_t g_m(X_T - \tilde{X}_T) + D_x g_m(0) = D_t g_m(X_T - \tilde{X}_T) = Y$$

ce qui est impossible.

Géométriquement, ceci signifie que pour tout hyperplan H contenant $T_m M$, on a

$$H = \{a \cdot t + b \cdot x = c;\ a \in \mathbf{R}^d, b \in \mathbf{R}^{d'}\}$$

avec $a \neq 0$.

Soit $\rho_0 : T \to \mathbf{R}^+$ une fonction lisse et propre. On pose pour $r > \min_T \rho_0$
- $\overline{B}(r) = \{t \in T;\ \rho_0(t) \leq r\}$,
- $B(r) = \{t \in T;\ \rho_0(t) < r\}$,
- $S(r) = \{t \in T;\ \rho_0(t) = r\}$.

Définition A.1.1 *Soit $\rho = \rho_0 \circ \pi_T : T \times X \to \mathbf{R}^+$. Soient $x \in X$ et $M \in \mathcal{S}(E)$, on note*

$$D_M(x) = \{\textit{valeurs critiques de } \rho_{|M \cap (T \times \{x\})}\},$$

$$D(x) = \bigcup_{M \in \mathcal{S}(E)} D_M(x)$$

et

$$D = \bigcup_{x \in X} \Big(\{x\} \times D(x)\Big).$$

Remarque A.1.2 π étant une application stratifiée, $\pi_{|M}$ est une submersion pour tout $M \in \mathcal{S}(E)$. Par conséquent, pour tout $x \in X$, $M \cap (T \times \{x\}) = (\pi_{|M})^{-1}(x)$ est une sous-variété de M, donc de E.

On a le théorème suivant.

Théorème A.1.1 *Soient $x^0 \in X$ et $r \notin D(x^0)$; pour tout voisinage ouvert $U \subset X$ de x^0 vérifiant la condition suivante*

$$\exists\, \varepsilon > 0; \quad \Big(U \times]r-\varepsilon, r+\varepsilon[\Big) \cap D = \emptyset,$$

la projection canonique

$$\pi : \overline{B}(r) \times U \longrightarrow U$$

est stratifiée par rapport aux stratifications $\mathcal{S}(\overline{B}(r) \times U)$ et $\mathcal{S}(U)$ données par
- *$\mathcal{S}(U) = \{U\}$,*
- *$\mathcal{S}(\overline{B}(r) \times U) = \{M \cap (B(r) \times U), M \cap (S(r) \times U);\ M \in \mathcal{S}(E)\}$*

et $S_1 \cap (\overline{B}(r) \times U), \ldots, S_k \cap (\overline{B}(r) \times U)$ sont des sous-ensembles stratifiés pour $\mathcal{S}(\overline{B}(r) \times U)$.

Corollaire A.1.1 *$\pi : \overline{B}(r) \times U \to U$ est une fibration localement triviale relativement à $S_1 \cap (\overline{B}(r) \times U), \ldots, S_k \cap (\overline{B}(r) \times U)$.*

Preuve Puisque $\pi : \overline{B}(r) \times U \to U$ est une application propre, lisse et stratifiée par rapport aux stratifications $\mathcal{S}(\overline{B}(r) \times U)$ et $\mathcal{S}(U)$, il suffit d'appliquer le premier lemme d'isotopie de Thom. ■

A.2 Preuve du théorème A.1.1

Lemme A.2.1 *D est un ensemble fermé de $X \times \mathbf{R}$.*

Preuve Il suffit de montrer que pour toute suite convergente (x_n, r_n) de D, alors la limite (x, r) appartient à D.

Puisque r_n est une valeur critique de $\rho_{|M \cap (T \times \{x_n\})}$ pour une certaine strate M de $\mathcal{S}(E)$, il existe un point critique $c_n = (t_n, x_n) \in M$ de $\rho_{|M \cap (T \times \{x_n\})}$ vérifiant $\rho(c_n) = r_n$. Quitte à choisir une sous-suite de $(c_n)_n$, on peut supposer qu'elle converge vers un point $c = (t, x)$ car, pour n suffisament grand, on a $c_n \in \overline{B}(2r) \times \overline{V}$ où $\overline{V}$ est un voisinage compact de x. En effet, vu que $x_n \to x$, il existe un N tel que, pour tout $n > N$, $x_n \in \overline{V}$ et il existe N' tel que, pour tout $n > N'$, $r_n \leq 2r$, c'est-à-dire $t_n \in \overline{B}(2r)$. Puisque $\rho(c) = r$, il suffit de vérifier que $c = (t, x)$ est un point critique de $\rho_{|M' \cap (T \times \{x\})}$ où M' est une strate de $\mathcal{S}(E)$ contenant c. De plus, c est un point critique de $\rho_{|M' \cap (T \times \{x\})}$ si, et seulement si,

$$T_c(M' \cap (T \times \{x\})) \subset \operatorname{Ker} d\rho_c$$

où $d\rho_c : T_cE \to T_r\mathbf{R}$. Enfin, vu que $\mathcal{S}(E)$ est localement finie, on peut supposer, quitte à prendre une sous-suite de $(c_n)_n$, que c_n appartient à la même strate M pour tout n. Deux cas se présentent à nous.

1. $M = M'$,

2. $M' \subset \overline{M} \setminus M$.

Cas 1. On a

$$\lim_{n\to\infty} T_{c_n}(M \cap (T \times \{x_n\})) = T_c(M \cap (T \times \{x\})),$$

la convergence s'effectuant dans la Grassmannienne des r-plans de E. De plus, vu que c_n est un point critique, on a

$$T_{c_n}(M \cap (T \times \{x_n\})) \subset \operatorname{Ker} d\rho_{c_n}.$$

Par conséquent, étant donné que ρ est lisse, on en déduit que

$$T_c(M \cap (T \times \{x\})) \subset \operatorname{Ker} d\rho_c.$$

c est donc un point critique de $\rho_{|M\cap(T\times\{x\})}$.

Cas 2. On a, cette fois, d'après les conditions de Whitney sur la stratification $\mathcal{S}(E)$

$$T_c(M' \cap (T \times \{x\})) \subset \lim_{n\to\infty} T_{c_n}(M \cap (T \times \{x_n\})).$$

De plus, vu que c_n est un point critique, on a

$$T_{c_n}(M \cap (T \times \{x_n\})) \subset \operatorname{Ker} d\rho_{c_n}.$$

Par conséquent, étant donné que ρ est lisse, on en déduit que

$$T_c(M \cap (T \times \{x\})) \subset \operatorname{Ker} d\rho_c.$$

c est donc un point critique de $\rho_{|M\cap(T\times\{x\})}$. ■

A présent, soient $x^0 \in X$ et $r \notin D(x^0)$. $(x^0, r) \notin D$ et d'après le lemme précédent D est fermé, donc il existe un voisinage ouvert $U = U(x^0, r)$ de x^0 et $\varepsilon > 0$ tel que

$$\Big(U \times]r-\varepsilon, r+\varepsilon[\Big) \cap D = \emptyset. \tag{A.1}$$

Soient $\mathcal{S}(\overline{B}(r)\times U) = \{M\cap(B(r)\times U), M\cap(S(r)\times U);\ M \in \mathcal{S}(E)\}$ et $\mathcal{S}(U) = \{U\}$, nous allons prouver le théorème en le divisant en deux lemmes.

Lemme A.2.2 *1. $\mathcal{S}(U) = \{U\}$ est une stratification de Whitney,*

2. $\mathcal{S}(\overline{B}(r) \times U)$ est une stratification de Whitney telle que

$$S_1 \cap (\overline{B}(r) \times U), \ldots, S_k \cap (\overline{B}(r) \times U)$$

soient des sous-ensembles stratifiés de $\mathcal{S}(\overline{B}(r) \times U)$.

Lemme A.2.3 *$\pi : \overline{B}(r) \times U \to U$ est une application stratifiée par rapport aux stratifications $\mathcal{S}(\overline{B}(r) \times U)$ et $\mathcal{S}(U)$.*

Preuve du lemme A.2.2 **Cas 1.** Il est trivial.

Cas 2. Montrons que les éléments de $\mathcal{S}(\overline{B}(r) \times U)$ sont des sous-variétés.
Chaque élément de $\mathcal{S}(\overline{B}(r) \times U)$ est de la forme

$$M_B = M \cap (B(r) \times U)$$

qui est bien une sous-variété, car $B(r) \times U$ est un ouvert de E, ou de la forme

$$M_S = M \cap (S(r) \times U)$$

qui est aussi une sous-variété car

$$M_S = (\rho_{|M \cap (T \times U)})^{-1}(r)$$

et r n'est pas une valeur critique de $\rho_{|M \cap (T \times \{x\})}$ pour tout $x \in U$ d'après (A.1), donc n'est pas une valeur critique de $\rho_{|M \cap (T \times U)}$ d'après la définition de ρ.

Montrons, à présent, que $\mathcal{S}(\overline{B}(r) \times U)$ satisfait à la condition de frontière (condition 3 de Whitney sur les stratifications).
Puisque $M'_B \cap (\overline{\overline{M_S}} \setminus M_S) = \emptyset$ (où $\overline{\overline{M}}$ désigne l'adhérence de M dans $\overline{B}(r) \times U$ pour la topologie induite par celle de E) pour toutes strates M, M' de $\mathcal{S}(E)$, il suffit d'examiner les trois cas suivants

1. $M'_B \cap (\overline{\overline{M_B}} \setminus M_B) \neq \emptyset$,
2. $M'_S \cap (\overline{\overline{M_B}} \setminus M_B) \neq \emptyset$,
3. $M'_S \cap (\overline{\overline{M_S}} \setminus M_S) \neq \emptyset$.

Afin d'alléger les notations, nous poserons $B = B(r) \times U$, $\overline{B} = \overline{B}(r) \times U$ et enfin $S = S(r) \times U$.
Premier cas On a $\overline{\overline{M_B}} = \overline{M \cap B} \cap \overline{B} \subset \overline{M} \cap \overline{B}$, d'où

$$\begin{aligned} M'_B \cap (\overline{\overline{M_B}} \setminus M_B) &\subset M'_B \cap (\overline{M} \cap \overline{B} \setminus (M \cap B)) \\ &\subset M'_B \cap ((\overline{M} \setminus M) \cap B \cup (\overline{M} \cap S)) \\ &\subset M'_B \cap ((\overline{M} \setminus M) \cap B) \\ &\subset (M' \cap (\overline{M} \setminus M)) \cap B. \end{aligned}$$

On en déduit que $M' \cap (\overline{M} \setminus M) \neq \emptyset$ et que $M' \subset \overline{M} \setminus M$ car $\mathcal{S}(E)$ est une stratification de Whitney. On a donc

$$M' \cap B \subset (\overline{M} \cap B) \setminus (M \cap B),$$

or B étant un ouvert, on a $\overline{M} \cap B \subset \overline{M \cap B}$, d'où

$$M' \cap B \cap \overline{B} \subset (\overline{M \cap B} \cap \overline{B}) \setminus (M \cap B \cap \overline{B}),$$

soit
$$M'_B \subset (\overline{\overline{M_B}} \setminus M_B).$$

Deuxième cas De la même manière que précédemment, on a

$$\begin{array}{rcl} M'_S \cap (\overline{\overline{M_B}} \setminus M_B) & \subset & M'_S \cap (\overline{M} \cap \overline{B} \setminus (M \cap B)) \\ & \subset & M'_S \cap ((\overline{M} \setminus M) \cap B \cup (\overline{M} \cap S)) \\ & \subset & M'_S \cap (\overline{M} \cap S) \\ & \subset & (M' \cap \overline{M}) \cap B. \end{array}$$

On en déduit que $M' \subset \overline{M}$, donc soit $M' = M$, soit $M' \subset \overline{M} \setminus M$ d'après les définitions des stratifications de Whitney.

Si $M' = M$, il suffit de montrer que $M \cap S \subset \overline{M \cap B} \cap S$. Soient $m \in M \cap S$ et V un voisinage de m, on a $V \cap (M \cap S) \neq \emptyset$ et S étant transverse à M en m et de codimension 1, il existe $r' < r$ tel que $V \cap (M \cap (S(r') \times U)) \neq \emptyset$, donc $V \cap (M \cap B) \neq \emptyset$. Par conséquent $m \in \overline{M \cap B}$, d'où le résultat.

Si $M' \subset \overline{M} \setminus M$, il suffit de montrer que $(\overline{M} \setminus M) \cap S \subset \overline{M \cap B} \cap S$. Soient $m \in (\overline{M} \setminus M) \cap S$ et V un voisinage de m, on a $V \cap M \neq \emptyset$ car $m \in \overline{M}$ et S étant transverse à M en m et de codimension 1, il existe $r' < r$ tel que $V \cap (M \cap (S(r') \times U)) \neq \emptyset$, donc $V \cap (M \cap B) \neq \emptyset$. Par conséquent $m \in \overline{M \cap B}$, d'où le résultat.

Troisième cas On a $\overline{\overline{M_S}} = \overline{M \cap S \cap \overline{B}} \subset \overline{M} \cap S$; d'où, comme précédemment, $(M' \cap S) \cap ((\overline{M} \setminus M) \cap S) \neq \emptyset$. On en déduit que $M' \subset \overline{M} \setminus M$, par conséquent $M' \cap S \subset (\overline{M} \setminus M) \cap S$ et il suffit de montrer que $\overline{M} \cap S \subset \overline{M \cap S}$. Soit $m \in \overline{M} \cap S$ et V un voisinage de m ; on a $V \cap M \neq \emptyset$ car $m \in \overline{M}$. De plus, M' est transverse à S en m et $M' \subset \overline{M} \setminus M$, donc $V \cap M \cap S \neq \emptyset$, car S est de codimension 1. Par conséquent $m \in \overline{M \cap S}$ et le résultat en découle.

D'après ce qui vient d'être fait, on peut voir qu'une strate $\tilde{M}'$ de $\mathcal{S}(\overline{B}(r) \times U)$ est incidente à $\tilde{M}$ si, et seulement si, on est dans l'un des quatre cas suivants

1. $\tilde{M} = M_B, \quad \tilde{M}' = M_S \quad$ avec $M \in \mathcal{S}(E)$,
2. $\tilde{M} = M_B, \quad \tilde{M}' = M'_B \quad$ avec M' incidente à M,
3. $\tilde{M} = M_B, \quad \tilde{M}' = M'_S \quad$ avec M' incidente à M,
4. $\tilde{M} = M_S, \quad \tilde{M}' = M'_S \quad$ avec M' incidente à M.

Il reste à vérifier que toute paire d'éléments de $\mathcal{S}(\overline{B}(r) \times U)$ vérifie la condition (B) de Whitney et il suffit de le vérifier dans les quatre cas précédents.

Premier cas Soient (a_n) une suite de M_B et (b_n) une suite de M_S telles que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers un même point $b \in M_S$, $\widehat{a_n b_n}$ converge vers l et $T_{a_n} M_B$ converge vers τ. Vu que M_B et M_S sont incluses dans M qui est une variété lisse, on a clairement $l \subset \tau$. Donc (M_B, M_S) vérifie la condition (B) de Whitney.

Deuxième cas La paire (M, M') vérifie la condition (B) de Whitney, il en est alors clairement de même pour la paire (M_B, M'_B).

Troisième cas La paire (M, M') vérifie la condition (B) de Whitney et M_B étant

un ouvert de M, la paire (M_B, M'_S) vérifie la condition (B) de Whitney.
Quatrième cas Soient (a_n) une suite de M_S et (b_n) une suite de M'_S telles que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers un même point $b \in M'_S$, $\widehat{a_n b_n}$ converge vers l et $T_{a_n} M_S$ converge vers τ. M_S est une sous-variété de M donc $T_{a_n} M_S \subset T_{a_n} M$ et vu que la paire (M, M') vérifie la condition (B) de Whitney on a $l \in \lim T_{a_n} M$. Or $T_{a_n} M = T_{a_n} M_S \oplus \nabla\rho(a_n)$ et l est orthogonal à $\nabla\rho(b)$ car a_n et b_n appartiennent à $S(r) \times U$, donc $l \in \tau$. Par conséquent (M_S, M'_S) vérifie la condition (B) de Whitney.

Le fait que les ensembles $S_i \cap (\overline{B}(r) \times U)$ pour $i = 1, \ldots, k$ soient stratifiés est évident.

Toutes ces étapes entraînent le lemme. ■

Preuve du lemme A.2.3 Il suffit de montrer que $\pi_{|\tilde{M}} : \tilde{M} \to U$ est une submersion pour toute strate $\tilde{M} \in \mathcal{S}(\overline{B}(r) \times U)$.
Si $\tilde{M}$ est de la forme $M \cap (B(r) \times U)$ où $M \in \mathcal{S}(E)$ alors

$$\pi_{|\tilde{M}} : \tilde{M} \longrightarrow U$$

est une submersion car $B(r) \times U$ est un ouvert et $\pi_{|M} : M \to X$ est une submersion.
Si $\tilde{M}$ est de la forme $M \cap (S(r) \times U)$ où $M \in \mathcal{S}(E)$, soient $m = (m_t, x^0) \in \tilde{M}$ et des fonctions lisses $g_1, \ldots, g_k$ définies sur E et à valeurs dans $\mathbf{R}$ telles que M soit définie au voisinage de m par $g^{-1}(0)$ où $g = (g_1, \ldots, g_k)$. On peut supposer, de plus, que g est une submersion au voisinage de m, par conséquent, on a $\nabla g_1, \ldots, \nabla g_k$ linéairement indépendants au voisinage de m. De plus, vu que $\pi_{|M}$ est une submersion, on a

$$\nabla_t g_1, \ldots, \nabla_t g_k$$

linéairement indépendants au voisinage de m. On sait que $M \cap (T \times \{x^0\})$ est une sous-variété de M. On peut la définir, au voisinage de m, par l'équation $h^{-1}(0)$ où $h(t, x) = (g(t, x^0), x - x^0)$ et, compte-tenu de ce qui précède, h est une submersion au voisinage de m. Enfin, étant donné que $r = \rho(m)$ n'est pas une valeur critique de $\rho_{|M \cap (T \times \{x^0\})}$, on en déduit que $\tilde{h}$ est une submersion au voisinage de m où $\tilde{h}(t, x) = (h(t, x), \rho(t, x))$. Donc

$$\nabla_t g_1, \ldots, \nabla_t g_k, \nabla_t \rho$$

sont linéairement indépendants et vu que $\tilde{M}$ est définie, au voisinage de m, par $(g, \rho)^{-1}(0, r)$ et que (g, ρ) est une submersion au voisinage de m, on en déduit que

$$\pi_{|\tilde{M}} : \tilde{M} \longrightarrow U$$

est une submersion, ce qui prouve le lemme. ■

Bibliographie

[1] R. Camalès, Sur la monodromie du problème de Cauchy ramifié. *A paraître au J. Math. Pures Appl.*

[2] D. Fotiadi, M. Froissard, J. Lascoux et F. Pham, Applications of an isotopy theorem, *Topology, vol 4*, 1965, p. 159-191.

[3] T. Fukuda et T. Kobayashi, A local isotopy lemma, *Tokyo J. Math, 5*, 1982, p. 31-36.

[4] Y. Hamada, On the propagation of singularities of the solution of the Cauchy problem, *Publ. RIMS, Kyoto Univ. 6*, 1970, 357-384.

[5] Y. Hamada, J. Leray et C. Wagschal, Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié ; hyperbolicité partielle, *J. Math. Pures Appl., 55*, 1976 p. 297-352.

[6] Y. Hamada et G. Nakamura, On the singularities of the solution of the Cauchy problem for the operator with non-uniform multiple characteristics, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 4*, 1977, p.725-755.

[7] Y. Hamada et A. Takeuchi, Le domaine d'existence et le prolongement analytique des solutions des problèmes de Goursat et de Cauchy à données singulières, *C. R. Acad. Sci. Paris, 295*, 1982, p. 377-380.

[8] Y. Hamada et A. Takeuchi, Le domaine d'existence et le prolongement analytique des solutions des problèmes de Goursat et de Cauchy à données singulières, *Taniguchi Symp. HERT Katak*, 1984, p. 51-62.

[9] L. Gårding, T. Kotake et J. Leray, Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes ; analogie avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées (problème de Cauchy I bis et VI), *Bull. Soc. Math. France, 92*, 1964, p.263-361.

[10] T. Kobayashi, On the singular Cauchy problem for operators with variable involutive characteristics, *J. Fac. Sci. Tokyo 29*, 1982, p. 97-142.

[11] T. Kobayashi, On the singularities of the solution to the Cauchy problem with singular data in the complex domain, *Math. Ann. 269*, 1984, p. 217-234.

[12] E. Leichtnam, Le problème de Cauchy ramifié, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 23*, 1990, p. 369-443.

[13] J. LERAY, Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy (Problème de Cauchy I), *Bull. Soc. Math. France, 85*, 1957, p.389-429.

[14] J. LERAY, Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe, *Bull. Soc. Math. France 87*, 1959, p. 81-180.

[15] J. LERAY, Un complément au théorème de N. Nilsson sur les intégrales de formes différentielles à support singulier algébrique, *Bull. Soc. Math. France 95*, 1967, p. 313-374.

[16] G. NAKAMURA, The singular Cauchy problem for systems whose characteristics roots are non-uniform multiple, *Proc. Japan. acad. 53*, 1977, p. 135-138

[17] N. NILSSON, Some growth and ramification properties of certain integrals on algebraic manifolds, *Arkiv för Math.*, 55, 1963, p. 463-476.

[18] F. PHAM, Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau, *Mémorial des Sciences Mathématiques 164*, 1967.

[19] P. PONGÉRARD et C. WAGSCHAL, Ramification non abélienne, *J. Math. Pures Appl., 77*, 1998, p. 51-88.

[20] D. SCHILTZ, J. VAILLANT et C. WAGSCHAL, Problème de Cauchy ramifié à caractéristiques multiples en involution, *J. Math. Pures Appl., 4*, 1982, p. 423-443.

[21] C. WAGSCHAL, Problème de Cauchy analytique à données méromorphes, *J. Math. Pures Appl., 51*, 1972, p. 375-397.

[22] C. WAGSCHAL, Diverses formulations du problème de Cauchy pour un système d'équations aux dérivées partielles, *J. Math. Pures Appl., 53*, 1974, p. 51-70.

[23] C. WAGSCHAL, Une généralisation du problème de Goursat pour des systèmes d'équations intégros-différentielles holomorphes ou partiellement holomorphes, *J. Math. Pures Appl., 53*, 1974, p. 99-132.

[24] C. WAGSCHAL, Sur le problème de Cauchy ramifié, *J. Math. Pures Appl., 53*, 1974, p. 147-164.

[25] C. WAGSCHAL, Le problème de Goursat non linéaire, *J. Math. Pures Appl., 53*, 1979, p. 309-337.

[26] C. WAGSCHAL, Problème de Cauchy ramifié à caractéristiques multiples holomorphes de multiplicité variable, *J. Math. Pures Appl., 62*, 1983, p. 99-127.

[27] C. WAGSCHAL, Problème de Cauchy ramifié pour une classe d'opérateurs à caractéristiques tangentes, *J. Math. Pures Appl., 67*, 1988, p. 1-21.

[28] C. WAGSCHAL, Équations aux dérivées partielles holomorphes, *École du CIMPA-UNSA-UNESCO-VIETNAM HO CHI MINH VILLE*, 1997.

[29] H. WHITNEY, Tangents to an analytic variety, *Ann. of Math., 81*, 1965, p. 496-549.