Déformation et quantification par groupoïde des variétés toriques

Frédéric Cadet

Thèse

PRÉSENTÉE

À L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

discipline : mathématiques

PAR

FRÉDÉRIC CADET

Déformation et quantification par groupoïde des variétés toriques

Soutenue en public à l'université d'Orléans le vendredi 30 novembre 2001

Directeur de thèse :	J. Renault	(Université d'Orléans)
Rapporteurs :	J. Bellissard	(Université de Toulouse 1)
	N. P. Landsman	(Université d'Amsterdam)
Jury :	C. Anantharaman-Delaroche	(Université d'Orléans, rapporteur)
	J. Bellissard	(Université de Toulouse 1)
	G. Hains	(Université d'Orléans)
	J. Renault	(Université d'Orléans)
	G. Skandalis	(Université Paris 7)
	D. Sternheimer	(CNRS, Université de Bourgogne, président)

Table des matières

Introduction

Dans le cadre de la mécanique classique hamiltonienne sur des variétés de Poisson ou symplectiques, deux approches principales ont été développées pour la quantification, à savoir la quantification géométrique [Woo] et la quantification par déformation [DS, Ste]. Je m'intéresse ici à la seconde, qui semble plus proche de l'approche traditionnelle des physiciens. Dans les années 1970, Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz et Sternheimer [BFFLS, Wei95] ont, les premiers, formalisé le concept de quantification par déformation en termes de séries formelles ; cette formalisation a connu des développements nombreux et importants, qui ont culminé notamment dans les travaux de Kontsevich [Kon97a, Kon97b, Kon99a, Kon99b, Kon01, Oes98]. Plus récemment, au début des années 1990, Rieffel a donné une formulation de la quantification par déformation dans le cadre de la théorie des C^*-algèbres, et obtenu des résultats intéressants [Rie93, Rie89b, Rie89a]. La définition de Rieffel est par ailleurs assez proche de celle proposée dans les années 1970 par Berezin [Ber74, Ber75b, Ber75a, Ber73]. Cependant cette approche pose aussi beaucoup de nouvelles questions [Rie98] ; en particulier un certain nombre d'exemples n'ont pu être traités que dans le cadre de variantes affaiblies de cette définition, introduites, en particulier par Sheu [She91], puis par Landsman [Lan98, Lan93] et Ramazan [LR99, Ram98]. En définitive, le débat ne semble pas tranché sur la question de savoir quelle est la bonne définition de la quantification par déformation, dans le cadre des C^*-algèbres.

Par ailleurs, les travaux de Connes [Co94, CCFGRV] ont mis en avant, pour la première fois en quantification, l'utilité du concept de groupoïde, à travers l'exemple du groupoïde tangent. Cette approche a été reprise et adaptée à l'exemple de $\mathbb{C}^n$ par Bellissard et Vittot [BV90], puis au cas des variétés de Lie-Poisson, par Landsman et Ramazan [LR99, Ram98], moyennant un large usage des résultats obtenus depuis le début des années 1980, d'une part sur la géométrie des variétés de Poisson et des groupoïdes, notamment par Weinstein [CdS-W, NWX99, Wei97, Wei96a, Wei96b, MOW94, Wei91a, WX91, Wei91b, Wei87, Wei83, ŚW83, Wei73, Wei71] et le séminaire de Géométrie Sud-Rhodanienne [DW91, CDW87, DS88], et, d'autre part, sur les C^*-algèbres de groupoïdes, notamment par Renault [Ren, Ren91, Ren87, Ren82]. D'autres approches de la quantification suggèrent aussi l'intérêt des groupoïdes pour la quantification, comme celle de Sheu [She98a, She98b, She97b, She97c, She97a, She91] par les groupes quantiques. Cependant, là encore ces travaux n'ont pas encore permis de dégager le lien précis entre les groupoïdes et la quantification par déformation.

Le présent travail propose une réponse à ces deux questions. Plus que dans les résultats généraux, l'intérêt principal de cette thèse réside dans les exemples, notamment celui des variétés toriques, car ce sont eux qui justifient les choix effectués. Ce mémoire se décompose en trois parties : rappels, étude théorique et premiers exemples, exemple des variétés toriques.

Dans la première partie je rappelle ce qu'il faut savoir sur les groupoïdes pour comprendre la suite, notamment sur les groupoïdes étales. Je rappelle aussi la notion importante de champ continu de C^*-algèbres [Dix, DF], et j'indique, d'après [Bla96, Ram98], à quelles conditions un champ de groupoïdes engendre un champ continu de C^*-algèbres.

La deuxième partie est le cœur du travail. Je propose d'abord une définition de la quantification par déformation qui permet d'exprimer le passage à la limite semi-classique, qui est le passage du quantique au classique quand on fait tendre la constante de Planck $\hbar$ vers 0. Je formalise ces notions, à l'aide d'un champ continu paramétré par $\hbar$, de la manière suivante :

Définition 0.0.1 — Une *déformation* est un champ continu de C^*-algèbres $\mathcal{A}$, sur une partie X de $\mathbb{R}$ localement compacte contenant 0 comme point d'accumulation, qui possède, de plus, une sous-algèbre involutive de sections continues $\mathcal{Q} \subset \mathrm{C}_0(X, \mathcal{A})$ telle que :

(i) $\mathcal{Q}_0$ est dense dans $\mathcal{A}_0$;

(ii) il existe une application «crochet» bilinéaire $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \xrightarrow{\{.,.\}} \mathrm{C}_0(X, \mathcal{A})$ qui, pour tout $\hbar \in X$, passe au quotient en $\mathcal{Q}_\hbar \times \mathcal{Q}_\hbar \xrightarrow{\{.,.\}_\hbar}{}_\hbar$, telle que :

– pour $\hbar = 0$:

$$\{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}\}_0 \subset \mathcal{Q}_0,$$

– pour $\hbar \neq 0$:

$$\{f, f'\}_\hbar = \frac{1}{\imath\hbar}(f * f' - f' * f)_\hbar.$$

Une *déformation d'une variété de Poisson*, $(M, \{.,.\}_M)$, est une déformation $(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ telle que $\mathcal{A}_0$ soit isomorphe à $\mathrm{C}_0(M)$, de sorte que les éléments de $\mathcal{Q}_0$ correspondent à des fonctions de classe C^1 sur M, et que :

$$\{f_0, f_0'\}_0 = \{f_0, f_0'\}_M .$$

La quantification est le procédé de passage inverse, c'est-à-dire du classique au quantique :

Définition 0.0.2 — Une *quantification* de la déformation $(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ est une section T de la projection $\mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}_0$, linéaire, et qui commute avec l'involution.

Cette nouvelle définition est, en fait, intermédiaire entre les définitions existantes, de Rieffel et Landsman ; son intérêt essentiel réside dans le fait qu'elle admet une traduction directe en termes de groupoïdes. Ainsi apparaît la notion, centrale dans cette thèse, de *groupoïde de déformation* qui est un champ de groupoïdes $G = \bigsqcup_{\hbar \in X} G_\hbar$ qui engendre un champ continu de C^*-algèbre possédant, lui-même, une structure de déformation.

J'établis ensuite un résultat général (théorème 2.2.7) qui donne une condition suffisante sur les groupoïdes non nécessairement de Lie, mais contenus dans une variété, pour qu'ils soient des groupoïdes de déformation ; j'obtiens au passage une caractérisation des groupoïdes de déformation de Lie. Puis je spécialise mon étude au cas qui m'intéressera par la suite, celui des groupoïdes de déformation étales (théorème 2.3.1), voire des sous-groupoïdes d'un groupoïde produit croisé de l'action d'un groupe discret sur une variété (théorème 2.3.6).

Pour quantifier une variété de Poisson M par groupoïdes étales, il faut pouvoir établir un isomorphisme «intéressant» entre la C^*-algèbre commutative $\mathrm{C}_0(M)$, et la C^*-algèbre d'un groupoïde étale G_0. Dans le cas où M est munie de l'action d'un groupe compact commutatif $\mathtt{G}$, je construis un tel groupoïde étale, qui en fait n'est rien d'autre qu'un sous-groupoïde de ${}^{M}\!\big/_{\mathtt{G}} \rtimes \widehat{\mathtt{G}}$, le groupoïde de l'action triviale sur ${}^{M}\!\big/_{\mathtt{G}}$ de $\widehat{\mathtt{G}}$, le groupe dual de $\mathtt{G}$. J'obtiens alors un isomorphisme entre $\mathrm{C}_0(M)$ et $\mathrm{C}^*(G_0)$ par une sorte de transformation de Fourier-Gel'fand partielle portant sur la variable dans $\widehat{\mathtt{G}}$ (proposition 2.4.6).

Ce résultat permet d'aboutir au théorème 2.5.4 (resp. à la proposition 2.5.5), qui est le résultat principal de cette thèse. En effet ce théorème (resp. cette proposition) fournit, sous certaines hypothèses, des groupoïdes de déformation (resp. des quantifications par déformation au sens de Rieffel) pour une large classe de variétés de Poisson munies de l'action d'un tore $\mathtt{G}$. En effet, d'après la transformation de Fourier-Gel'fand construite précédemment, si $\mathtt{G}$ est un tore, alors $\widehat{\mathtt{G}}$ est un réseau dans $\mathbb{R}^n$, et la donnée d'une action de $\mathbb{R}^n$ sur un espace contenant ${}^{M}\!\big/_{\mathtt{G}}$ permet de déformer l'action triviale de $\widehat{\mathtt{G}}$ sur ${}^{M}\!\big/_{\mathtt{G}}$ de sorte que l'on obtient, moyennant un certain nombre d'hypothèses techniques *ad hoc*, un champ de groupoïdes qui se révèle être un groupoïde de déformation, d'après les théorèmes généraux établis précédemment.

La deuxième partie s'achève par des exemples d'applications directes — c'est-à-dire qu'il suffit de vérifier les hypothèses techniques sus-mentionées — mais importantes chacune, du théorème 2.5.4 : on retrouve ainsi les résultats de Bellissard et Vittot [BV90] sur $\mathbb{C}^n$, et de Rieffel [Rie93] sur les tores non commutatifs. Enfin on obtient aussi des résultats sur l'exemple des sphères $\mathbb{S}^4_\theta$ non commutatives introduites récemment par Connes et Landi [CL01], à savoir que ces sphères fournissent une quantification stricte par déformation au sens de Rieffel, par groupoïdes, vers une structure de Poisson particulière sur $\mathbb{S}^4$ que je calcule explicitement ; on retrouve ainsi des résultats récents de Varilly [Var01].

Enfin la troisième partie est consacrée à l'exemple complexe des variétés toriques. Dans les deux premiers paragraphes je commence par rappeler les résultats étonnants sur la géométrie des variétés possédant une application moment, obtenus dans les années 1980 par Atiyah, Guillemin et Sternberg [Ati, GS82], puis Delzant [Del88]. Je montre ensuite que les variétés toriques — c'est-à-dire les variétés symplectiques compactes connexes de dimension $2n$ qui sont munies de l'action effective et hamiltonienne d'un tore de dimension n, et qui, à ce titre, possèdent donc un moment — peuvent être traitées à l'aide du théorème 2.5.4 ; cependant les conditions techniques du dit théorème se révèlent plus ardues à vérifier que pour les exemples de la deuxième partie, ce qui justifie le traitement séparé de ce cas. Ce cadre général permet par exemple de traiter la quantification de tous les espaces projectifs complexes $P_n\mathbb{C}$, munis de leur structure symplectique standard. Je conclus en donnant le calcul explicite du groupoïde de la sphère $\mathbb{S}^2$, munie de sa structure symplectique standard — qui n'est autre que $P_1\mathbb{C}$. Je retrouve ainsi les résultats, non publiés, de Jean Bellissard concernant la quantification de $\mathbb{S}^2$.

Remerciements

En tout premier lieu je tiens à exprimer ma reconnaissance envers ceux sans qui cette thèse n'existerait pas. Le premier d'entre eux est Jean Renault qui a encadré cette thèse avec constance, patience et bienveillance ; il m'a tout appris sur les groupoïdes et bien d'autres choses, sans compter son temps ; je lui en suis profondément reconnaissant. Cette thèse doit aussi beaucoup à Georges Skandalis qui, le premier, m'a initié aux algèbres d'opérateurs, lors de son cours de DEA à Paris 7, et qui, par la suite, m'a permis d'améliorer nombre d'énoncés grâce aux conseils, nombreux et toujours pertinents, qu'il m'a prodigués. C'est Jean Bellissard qui porte la paternité du sujet de cette thèse qui est un prolongement de l'article [BV90] et des résultats non publiés qu'il m'a exposés, en particulier, chez lui à Toulouse et lors de nos rencontres en congrès, et je tiens à l'en remercier, ainsi que Valerio Toledano qui, au détour d'une conversation sur la plage de l'Institut Scientifique de Cargèse, a attiré mon attention sur les variétés toriques. Merci enfin à Kroum Tzanev, Birant Ramazan et Joseph Varilly qui m'ont apporté leur aide en lisant attentivement ma thèse ; leurs remarques, sur la forme, le fond ou la bibliographie m'ont été très précieuses.

Mes remerciements vont aussi a Klaas Landsman et, à nouveau, à Jean Bellissard qui ont accepté de lire ma thèse et d'en être rapporteur. Je remercie également Claire Anantharaman, Daniel Sternheimer, et à nouveau Jean Bellissard et Georges Skandalis qui me font l'honneur de faire partie du jury de ma thèse.

Ce travail n'aurait pas été mené à terme sans l'accueil exceptionnel, humain et scientifique, de l'équipe du département de mathématiques de l'université d'Orléans. Mes remerciements vont plus particulièrement à Claire Anantharaman, Laurent Boudin, François Combes, Claire Debord, Yves Denizeau, Philippe Jaming, Stéphanie Léger, avec une mention spéciale pour Christelle Morillon et Anne Liger pour leur dynamisme et leur bonne humeur. Je suis également redevable à l'équipe d'algèbre d'opérateurs de l'Institut Mathématique de Jussieu, qui m'a généreusement accueilli d'abord à Jussieu, puis à Chevaleret ; merci à Etienne Blanchard, Michel Enock, Emmanuel Germain, Vincent Lafforgue, Jean-Michel Vallin et aux autres. Enfin ce travail a bénéficié de l'excellente organisation du Groupe de Recherche (GdR) en algèbres d'opérateurs, aussi bien pour la qualité scientifique, que pour l'ambiance chaleureuse de ses rencontres annuelles ; j'en remercie notamment Saad Baaj, Pierre-Yves Le Gall, Pierre Julg et Bertrand Monthubert.

Lors de ce travail, j'ai été entouré par de nombreux autres thésards, dont le contact permanent a été une motivation constante et importante pour continuer à chercher. Je remercie tout particulièrement pour leur amitié Stéphane Vassout avec qui j'ai échangé régulièrement questions, problèmes et recettes de cuisine, et Kroum Tzanev avec qui j'ai discuté de maths et de bien autre chose lors de nos nombreux aller-et-retours entre Paris et Orléans. Le séminaire hebdomadaire des thésards en algèbres d'opérateurs de Chevaleret fut aussi une manière particulièrement agréable et détendue d'échanger, autour du thé et des petits gateaux, des connaissances mathématiques avec (outre Stéphane Vassout) Benoit Collins, Stéphane Damaville, Franck Lesieur, Roland Vergnioux et Yi-Jun Yao. Merci enfin aux thésards d'Orléans Barbara, Florent, Laurent, Stéphanie ; aux thésards du bureau 7C14, en particulier Mathieu, Pedro, Patrick et Roland et aux thésards du bureau 7C10 : Bertrand, Charles, François et Marie-Noëlle.

Je m'excuse auprès de ceux que j'ai injustement oubliés dans cette page.

Je ne saurais terminer ces remerciements sans dire que cette thèse n'aurait sans doute pas vu le jour sans l'affection et le soutien constant de Catherine qui n'a jamais douté de moi.

Conventions et notations

Ensembles : Les surjections et les injections sont signalées, respectivement, par les flèches suivantes :

$$\twoheadrightarrow \; ; \; \hookrightarrow$$

Si B est une partie d'un espace A, et f une fonction sur A, je note $f|_B$ la restriction de f à B. Si $\mathcal{A}$ est un espace de fonctions (resp. de sections) sur l'espace A (resp. sur un fibré de base A), je note

$$\mathcal{A}|_B = \{\, f|_B \mid f \in \mathcal{A} \} .$$

Si A et B sont deux parties d'un ensemble, je note

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ et } x \notin B \} .$$

Algèbre : L'ensemble des nombres réels (resp. complexes) est noté $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Je note $\imath = \sqrt{-1}$ — i sans point — le nombre complexe de carré -1. Le tore de dimension 1 est identifié aux nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{T} = \left\{ z = e^{\imath\theta} \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = 1 \right\} .$$

La dualité entre un groupe localement compact $\mathtt{G}$ et son dual $\widehat{\mathtt{G}}$, et en particulier entre un espace vectoriel V et son dual V^*, est notée

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathtt{G}} \times \mathtt{G} & \longrightarrow & \mathbb{T} \\ (\chi, g) & \longmapsto & \langle \chi | g \rangle , \end{array}$$

Topologie : Dans ce qui suit, même si cela n'est pas précisé et sauf indication contraire, les espaces topologiques considérés, par exemple les variétés, seront *séparés* (Hausdorff). Ainsi, par exemple, un espace est compact (resp. localement compact) si et seulement s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue pour les recouvrements ouverts (resp. tout point admet un voisinage qui vérifie cette propriété).

Je dis qu'une application entre deux espaces topologiques $X \xrightarrow{f} Y$ est ouverte en un point $y \in f(X)$, si tout voisinage d'un point de $f^{-1}\{y\}$ est envoyé par f sur un voisinage de y.

Si X est un espace topologique et Y une partie, je note $\overline{Y}$ son adhérence, et $\overset{\circ}{Y}$ son intérieur.

Si $X \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ est une fonction sur X, je note son support

$$\operatorname{Supp} f = \overline{\{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \}}.$$

Si X est un espace topologique (resp. localement compact), je désigne par $\mathrm{C}(X)$ (resp. $\mathrm{C_c}(X), \mathrm{C_0}(X)$) les fonctions continues sur X et à valeurs complexes (resp. continues et à support compact, resp. continues et qui tendent vers 0 à l'infini).

Géométrie : Par sous-variété, j'entends ici une sous-variété au sens de [BouVAR, §5 n°8 5.8.3 p. 48], *i.e.* une sous-variété plongée.

Je désigne par $\mathrm{C}^\infty(M)$ (resp. $\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(M)$, resp. $\mathrm{C}^\infty_0(M)$) l'espace des fonctions complexes de classe C^∞ (resp. de classe C^∞ à support compact, resp. de classe C^∞ qui tendent vers 0 à l'infini) sur une variété M (*n.b.* : ces notations sont étendue dans le texte à des parties A de M).

1 Rappels et notations sur les groupoïdes

1.1 Définitions générales

Qu'est-ce qu'un groupoïde ?

DÉFINITION 1.1.1 — Une structure de *groupoïde* sur un ensemble G est la donnée

– d'une loi de composition interne, appelée multiplication ou composition, définie partiellement :

$$\begin{array}{ccc} G \times G \supset G^{(2)} & \xrightarrow{\quad m \quad} & G \\ (\gamma, \delta) & \longmapsto & \gamma\delta, \end{array}$$

– d'une involution, appelée inverse, définie sur G tout entier

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\quad i \quad} & G \\ \gamma & \longmapsto & \gamma^{-1}, \end{array}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

– associativité : si les produits $\gamma\delta$ et $\delta\varepsilon$ existent alors $(\gamma\delta)\varepsilon, \gamma(\delta\varepsilon)$ aussi et ils sont égaux.

– simplification des unités : les deux éléments γ et γ^{-1} sont toujours composables (*i.e.* $(\gamma, \gamma^{-1}) \in G^{(2)}$), et si γ et δ le sont aussi, on a :

$$\gamma^{-1}(\gamma\delta) = \delta.$$

Et de manière analogue on a :

$$(\delta\gamma)\gamma^{-1} = \delta.$$

On peut alors définir les objets suivants :

– L'ensemble $G^{(0)} = \left\{ u = \gamma\gamma^{-1} \mid \gamma \in G \right\}$ est appelé *espace des unités* du groupoïde.

– Les deux applications surjectives

$$G \underset{b,s}{\rightrightarrows} G^{(0)}$$

appelées *but*, b, et *source*, s définies par :

$$b(\gamma) = \gamma\gamma^{-1} \quad s(\gamma) = \gamma^{-1}\gamma.$$

– L'injection $G^{(0)} \overset{j}{\hookrightarrow} G$.

Et on a

$$G^{(2)} = \left\{ (\gamma, \delta) \in G^2 \mid s(\gamma) = b(\delta) \right\}.$$

On peut schématiser la multiplication sur un graphe :

$$\begin{tikzcd} & s(\gamma) = b(\delta) \arrow[dl, "\gamma"'] & \\ b(\gamma) & & s(\delta) \arrow[ul, "\delta"'] \arrow[ll, "\varepsilon = \gamma\delta"] \end{tikzcd}$$

Donnons quelques exemples usuels de groupoïdes :

Exemples.

(0) Structure de *groupoïde trivial* sur un ensemble X. On prend $G = X$, et $G^{(2)}$ est la diagonale de $X \times X$ avec le produit défini par $\gamma.\gamma = \gamma$ et l'inverse $\gamma^{-1} = \gamma$; alors $G^{(0)} = X$.

(1) Tout groupe $\mathtt{G}$ est un groupoïde, avec $G = \mathtt{G}$, $G^{(2)} = \mathtt{G} \times \mathtt{G}$, $G^{(0)} = \{1\}$. Le produit et l'inverse sont ceux de $\mathtt{G}$.

(2) Le *groupoïde des paires* sur un ensemble X.
C'est le groupoïde $G = X \times X$ muni du produit et de l'inverse définis par :

$$(x, y)(y, z) = (x, z), \qquad (x, y)^{-1} = (y, x),$$

i.e. (x, y) et (y', z) sont composables si et seulement si $y = y'$. Les applications but et source sont alors

$$b(x, y) = (x, x), \ \ s(x, y) = (y, y).$$

Et l'espace des unités s'identifie naturellement avec X par :

$$\begin{array}{ccc} G^{(0)} & \longrightarrow & X \\ (x, x) & \longmapsto & x. \end{array}$$

(3) Le *groupoïde de l'action d'un groupe sur un ensemble* .
Si un groupe $\mathtt{G}$ agit à gauche sur un ensemble X par

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathtt{G} & \longrightarrow & X \\ (x, g) & \longmapsto & g.x, \end{array}$$

on prend $G = X \times \mathtt{G}$; $G^{(2)}$ est défini par la donnée des applications but et source

$$b(x, g) = g.x \ ; \ s(x, g) = x.$$

Et on a le produit et l'inverse

$$(y, h)(x, g) = (x, hg), \ \text{si } y = g.x \ ; \ (x, g)^{-1} = (g.x, g^{-1}).$$

Le groupoïde G est noté $X \rtimes \mathtt{G}$. On peut aussi le voir de la manière plus naturelle suivante :

$$G = \{\, (y, g, x) \in X \times \mathtt{G} \times X \mid y = g.x \,\},$$

muni de la multiplication, de l'inverse et des applications but et source suivants :

$$(z, h, y)(y, g, x) = (z, hg, x), \ \ (y, g, x)^{-1} = (x, g^{-1}, y),$$
$$b((y, g, x)) = (y, 1, y), \ \ s((y, g, x)) = (x, 1, x).$$

On remarquera que, dans le cas où l'action est libre, *i.e.* telle que $\mathtt{G} \times X$ s'injecte dans $X \times X$ par l'application $(g, x) \mapsto (x, g.x)$, alors $X \rtimes \mathtt{G}$ s'identifie avec un sous-groupoïde du groupoïde $X \times X$ des paires sur X.

Groupoïdes topologiques, systèmes de Haar

On étend naturellement la définition des groupes topologiques :

Définition 1.1.2 — On appelle *groupoïde topologique* un groupoïde G muni d'une topologie compatible avec les lois du groupoïde *i.e.* telle que les applications inverse, produit (et donc but et source)

$$G^{(2)} \xrightarrow{m} G \xrightarrow{i} G \overset{b,s}{\rightrightarrows} G^{(0)}$$

soient continues, où $G^{(2)}$ est muni de la topologie induite par $G \times G$, et $G^{(0)}$ de la topologie induite par G.

Exemple. — Soit un groupe topologique $\mathtt{G}$ agissant continûment sur un espace topologique X. Alors le groupoïde $X \rtimes \mathtt{G}$ est un groupoïde topologique si on le munit de la topologie induite par $X \times \mathtt{G}$. C'est toujours cette topologie que l'on considérera par la suite.

La notion analogue à celle de mesure de Haar sur un groupe prend la forme suivante sur les groupoïdes :

Définition 1.1.3 — Si G est un groupoïde topologique, on appelle *système de Haar* (à gauche) une famille $(\mu^u)_{u\in G^{(0)}}$ de mesures boréliennes complexes, qui dans les cas étudiés ici seront positives réelles, sur les fibres de l'application but :

$$G^u = \{\gamma \in G \mid b(\gamma) = u\}\,,\ u \in G^{(0)},$$

qui est invariante par translations (à gauche) *i.e.* si $f \in \mathrm{C_c}(G)$ et $\gamma \in G$ alors

$$\int_{G^{s(\gamma)}} f(\gamma\delta)\mu^{s(\gamma)}(\delta) = \int_{G^{b(\gamma)}} f(\varepsilon)\mu^{b(\gamma)}(\varepsilon).$$

Un système de Haar sera dit *continu* lorsque, pour toute fonction f dans $\mathrm{C_c}(G)$, l'application suivante est continue :

$$u \in G^{(0)} \mapsto \int_{G^u} f\mu^u.$$

Un système de Haar sera dit *plein* si chaque mesure μ^u a pour support G^u.

On définit de même un système de Haar *à droite* (resp. continu) comme une famille de mesures $(\mu_u)_{u\in G^{(0)}}$ sur les fibres $G_u = \{\gamma \in G \mid s(\gamma) = u\}$ de l'application source, invariante par translations à droite *i.e.*

$$\int_{G_{b(\delta)}} f(\gamma\delta)\mu_{b(\delta)}(\gamma) = \int_{G_{s(\delta)}} f(\varepsilon)\mu_{s(\delta)}(\varepsilon),$$

si $f \in \mathrm{C_c}(G)$ et $\delta \in G$ (resp. et continu).

En particulier tout système de Haar à gauche induit un système de Haar à droite, par la formule :

$$\int_{G_u} f(\gamma)\mu_u(\gamma) = \int_{G^u} f(\beta^{-1})\mu^u(\beta),$$

et réciproquement.

Pour les groupes localement compacts on a un résultat d'existence et d'unicité, à un facteur multiplicatif près, d'une mesure de Haar non nulle sur les boréliens. Par contre, c'est faux pour des groupoïdes plus généraux. J. Renault [Ren, prop. 2.4 p .17] a montré la condition nécessaire suivante :

Proposition 1.1.4 — Si un groupoïde possède un système de Haar continu, alors, l'application but b (resp. source s) est ouverte.

En particulier, un sous-groupoïde d'un groupoïde qui possède un système de Haar continu n'en possède, lui, pas forcément. Par ailleurs la réciproque de cette proposition est fausse, sauf dans certaines classes de groupoïdes particulières que l'on verra plus loin.

Groupoïdes de Lie

On généralise la définition des groupes de Lie :

Définition 1.1.5 — On appelle *groupoïde de Lie* un groupoïde muni d'une structure de variété de classe C^∞ compatible avec les lois du groupoïde c'est-à-dire :

- L'application inverse $G \xrightarrow{i} G$ est de classe C^∞.
- Les unités $G^{(0)}$ forment une sous-variété de G. Les applications but et source $G \overset{b,s}{\rightrightarrows} G^{(0)}$ sont des submersions.
- L'application produit $G^{(2)} \xrightarrow{m} G$ est de classe C^∞, où $G^{(2)}$ est bien une sous-variété de $G \times G$ d'après les hypothèses sur s et b.

Proposition 1.1.6 — Tout groupoïde de Lie est un groupoïde topologique localement compact et possède un système de Haar (plein).

Sous-groupoïdes et quotients de groupoïdes

On peut généraliser la notion de morphismes de groupes :

Définition 1.1.7 — Une application $G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2$ entre deux groupoïdes est un *morphisme* si elle est compatible avec le but, la source, la multiplication et l'inverse *i.e.* on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
G_1^{(2)} \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, "\varphi^{(2)} = (\varphi\times\varphi)|_{G_1^{(2)}}"'] & G_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\varphi"'] & G_1 \arrow[r, shift left, "b_1"] \arrow[r, shift right, "s_1"'] \arrow[d, "\varphi"'] & G_1^{(0)} \arrow[d, "\varphi^{(0)} = \varphi|_{G_1^{(0)}}"] \\
G_2^{(2)} \arrow[r, "m_2"] & G_2 \arrow[r, "i_2"] & G_2 \arrow[r, shift left, "b_2"] \arrow[r, shift right, "s_2"'] & G_2^{(0)}
\end{tikzcd}$$

Définition 1.1.8 — On appelle *sous-groupoïde* d'un groupoïde G toute partie $H \subset G$ qui est stable pour le produit et l'inverse. En particulier deux éléments de H sont composables dans H dès qu'ils le sont dans G ; de plus l'injection $H \hookrightarrow G$ est un morphisme de groupoïdes.

Notons alors :

$$G * H = G^{(2)} \cap (G \times H) = \{ (\gamma, \delta) \in G \times H \mid s(\gamma) = b(\delta) \},$$

le produit fibré de G et H, et ${}^{G}\!/_{H}$ le quotient de l'action à droite de H sur G :

$$\begin{array}{ccc} G * H & \longrightarrow & G \\ \gamma, \delta & \longmapsto & \gamma\delta. \end{array}$$

Comme, dans le cas des groupes les opérations de G ne passent pas toujours au quotient sur ${}^{G}\!/_{H}$ pour en faire un groupoïde ; on a cependant le cas particulier suivant :

Définition 1.1.9 — Soit G un groupoïde. On appelle *sous-groupoïde normal* tout sous-groupoïde H de G tel qu'il existe un groupoïde G' et un morphisme de groupoïdes surjectif :

$$G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} G',$$

vérifiant $\pi^{-1}\left\{ G'^{(0)} \right\} = H$.

On obtient alors facilement que ${}^{G}\!/_{H}$ possède une structure naturelle de groupoïde isomorphe à G'.

Sur le plan topologique, on a immédiatement, pour les sous-groupoïdes :

Proposition 1.1.10 — Soit G est un groupoïde topologique. Tout sous-groupoïde H de G est un groupoïde topologique pour la topologie induite. Si de plus G est à base dénombrable d'ouverts, il en est de même de H. Si G est localement compact et H localement fermé, alors H est localement compact. Si les applications but et source b_G, s_G de G sont ouvertes, et si H est ouvert dans G, alors les applications but et source b_H, s_H de H sont ouvertes.

En particulier, tout sous-groupoïde ouvert d'un groupoïde topologique, localement compact, à base dénombrable d'ouverts, avec but et source ouverts a lui-même ces propriétés.

Démonstration.

La seule chose non triviale est la transmission du caractère ouvert du but et de la source. L'injection $H \hookrightarrow G$ est ouverte, donc, d'après le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, shift left, two heads, "b_G"] \arrow[r, shift right, two heads, "s_G"'] & G^{(0)} \\ H \arrow[u, hook] \arrow[r, shift left, two heads, "b_H"] \arrow[r, shift right, two heads, "s_H"'] & H^{(0)}, \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

les applications b_H et s_H, qui sont le but et la source de H, sont ouvertes. CQFD

Et pour les quotients de groupoïdes :

Proposition 1.1.11 — Soient G est un groupoïde topologique et H un sous-groupoïde normal. On munit ${}^{G}/_{H}$ de la topologie quotient, c'est-à-dire la topologie la plus fine rendant $G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} {}^{G}/_{H}$ continue. Si l'application π est propre [BouTG, chap. I, §10, n°1, déf. 1 p. 72], alors ${}^{G}/_{H}$ est un groupoïde topologique et les applications but et source b, s de ${}^{G}/_{H}$ sont propres. Si de plus G est localement compact à base dénombrable d'ouverts, il en est de même de ${}^{G}/_{H}$. En outre si les applications but et source b_G, s_G de G sont ouvertes, alors b et s sont ouvertes.

Remarques. —

1. Il existe cependant des quotients de groupoïdes qui forment un groupoïde topologique sans pour autant que l'application π soit propre, par exemple avec $G = \mathbb{R}$ et $H = \mathbb{Z}$.
2. La condition π propre est équivalente à b_H et s_H toutes les deux propres, ce qui est plus fort que H *sous-groupoïde propre* de G, *i.e.* l'application $H \times H \xrightarrow{b_H \times s_H} H^{(0)} \times H^{(0)}$ est propre.

Démonstration.

Les résultats de topologie cités ici proviennent de Bourbaki [BouTG].

– ***${}^{G}/_{H}$ est un groupoïde topologique :***
Il suffit de montrer que le produit m et l'inverse i sont continues. En effet, on a les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} G^{(2)} \arrow[r, "m_G"] \arrow[d, "\pi^{(2)}"'] \arrow[dr] & G \arrow[d, "\pi"] \\ {}^{G}/_{H}{}^{(2)} \arrow[r, "m"] & {}^{G}/_{H} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "i_G"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr] & G \arrow[d, "\pi"] \\ {}^{G}/_{H} \arrow[r, "i"] & {}^{G}/_{H} \end{tikzcd}$$

Comme la multiplication m_G (resp. l'inverse i_G) de G est continue, il en est de même de $\pi \circ m_G = m \circ \pi^{(2)}$ (resp. $\pi \circ i_G = i \circ \pi$).
Par ailleurs, comme un produit d'applications propres est propre (chap. I, §10, n°1, prop. 4 p. 72), il s'ensuit que $\pi \times \pi$ est propre, donc fermée, puisque toute application propre est fermée (chap. I, §10, n°1, prop. 1 p. 72). Or les applications b et s sont continues, donc $G^{(2)}$ est fermé dans $G \times G$; ainsi, comme la restriction d'une application propre à un fermé est fermée (chap. I, §10, n°1 cor. 1 p. 74), $\pi^{(2)}$ est fermée.
Comme $m \circ \pi^{(2)}$ (resp. $i \circ \pi$) est continue et que $\pi^{(2)}$ (resp. π) est surjective fermée, on déduit que m (resp. i) est continue, puisque l'image réciproque de tout fermé F de G est fermée, d'après :

$$m^{-1}(F) = \pi^{(2)}((m \circ \pi^{(2)})^{-1}(F)).$$

$$(\text{resp. } i^{-1}(F) = \pi((i \circ \pi)^{-1}(F))\ ).$$

– ***Le but et la source de ${}^{G}/_{H}$ sont propres (resp. ouvertes) :***

En effet, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, two heads, "\pi"] \arrow[dr, "b_G, s_G"'] & & {}^{G}\!/_{H} \arrow[dl, "b, s"] \\ & G^{(0)}. & \end{tikzcd}$$

Comme π est surjective et continue, et que les applications $b_G = b \circ \pi$ et $s_G = s \circ \pi$ sont propres (resp. ouvertes), alors b et s sont propres (resp. ouvertes), d'après la proposition 5 (b) p. 73, chap. I, §10, n°1 (resp. prop. 1 (b) p. 30, chap. I, §5, n°1).

– ${}^{G}\!/_{H}$ *est l.c. à base dénombrable d'ouverts :*

  On sait que G est localement compact, et que $G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} {}^{G}\!/_{H}$ est propre ; or le quotient d'un espace localement compact est localement compact dès que la projection canonique est propre (chap. I, §10, n°4, prop. 9 p. 78) ; donc ${}^{G}\!/_{H}$ est localement compact. Le caractère héréditaire, par quotient, de l'existence d'une base dénombrable d'ouverts est immédiat. CQFD

1.2 Groupoïdes étales

On généralise la notion de groupe discret.

Notations : Si S et T sont deux parties d'un groupoïde on notera

$$ST = \left\{ r \;\middle|\; \exists (s,t) \in (S \times T) \cap G^{(2)},\ r = st \right\} \quad \text{et} \quad S^{-1} = \left\{ s^{-1} \mid s \in S \right\}.$$

Définition 1.2.1 — On appelle *bissection* d'un groupoïde toute partie S sur laquelle les applications but et source sont injectives. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "b|_S"'] \arrow[dr, "s|_S"] & \\ b(S) \arrow[rr, dashed, "\sim"] & & s(S). \end{tikzcd}$$

Définition 1.2.2 — On appelle *semi-groupe avec inverse* un ensemble

- muni d'une loi de composition interne (produit) toujours définie et associative
- muni d'une involution (inverse) qui anticommute avec le produit (*i.e.* $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$)
- on suppose de plus que les éléments de la forme $S^{-1}S$ ou SS^{-1} sont des unités (*i.e.* $(SS^{-1})S = S(S^{-1}S) = S$).

Exemples.

1. Soit G un ensemble ; l'espace $bij(G)$ des bijections entre deux parties de G est un semi-groupe avec inverse. Le produit est la composition des fonctions avec restriction des domaines, l'inverse d'une fonction est sa réciproque.

2. Il en est de même de l'espace $bij(G)^0$ des homéomorphismes entre deux parties d'un espace topologique G.
3. Si G est un groupoïde, l'ensemble des bissections est un semi-groupe avec inverse pour les lois :
$$(S,T) \longmapsto ST \quad \text{et} \quad S \longmapsto S^{-1}.$$
4. Si G est un groupoïde topologique, l'ensemble de ses bissections *ouvertes* avec les mêmes lois *n'est pas*, en général, un semi-groupe avec inverse, car le produit de deux bissections ouvertes n'est pas forcément ouvert. Néanmoins, si le produit m est une application ouverte, on obtient un semi-groupe avec inverse.

Démontrons que les exemples 3, et 4 avec m ouverte, fournissent bien des semi-groupes avec inverse :

Démonstration.

- *Le produit de deux bissections est une bissection :*
Soient S et T deux bissections, alors b est injective sur ST car, si $b(st) = b(s't')$, alors
$$b(s) = b(st) = b(s't') = b(s') \Rightarrow s = s',$$
puisque b est injective sur S. Donc
$$b(t) = s(s) = s(s') = b(t') \Rightarrow t = t'$$
puisque b est injective sur T. Ainsi $st = s't'$. La démonstration de l'injectivité de s sur ST est analogue.
- *L'inverse d'une bissection est une bissection :*
Cela provient directement de la propriété : $b(s^{-1}) = s(s)$.
- *Propriétés du produit et de l'inverse :*
L'associativité du produit et l'anticommutation entre l'inverse et le produit découlent trivialement de l'associativité du produit des éléments du groupoïde et de la propriété $(st)^{-1} = t^{-1}s^{-1}$. Seule la propriété d'idempotence est plus délicate : il suffit de remarquer que $SS^{-1} = b(S)$ (resp. $S^{-1}S = s(S)$). En effet si $st \in SS^{-1}$, avec $s \in S$ et $t \in S^{-1}$, on a $s(t) = b(s)$. Or la source s est injective sur la bissection S^{-1} donc il existe au plus un élément t de S^{-1} tel que $s(t) = b(s)$; et $t = s^{-1}$ convient. Donc
$$SS^{-1} = \left\{ ss^{-1} \mid s \in S \right\} = b(S).$$
- *Propriétés des bissections ouvertes :*
L'inverse d'une bissection ouverte est ouverte car i est un homéomorphisme. En outre si S, T sont des bissections ouverte alors ST est l'image de l'ouvert-trace $(S \times T) \cap G^{(2)}$ par l'application produit m qui est ouverte donc ST est ouvert. CQFD

DÉFINITION 1.2.3 — Un groupoïde localement compact à base dénombrable d'ouverts G est dit *étale* s'il vérifie l'une des propriétés suivantes équivalentes :

1. $G^{(0)}$ est une partie ouverte de G, et G admet un système de Haar continu.
2. Les fibres G^u $(u \in G^{(0)})$ sont discrètes et la mesure de comptage est un système de Haar continu.
3. Les applications but et source $G \underset{b,s}{\rightrightarrows} G^{(0)}$ sont des homéomorphismes locaux.

4. Les applications but et source sont ouvertes et le groupoïde est la réunion de ses bissections ouvertes.
5. L'application produit $G^{(2)} \xrightarrow{m} G$ est ouverte et le groupoïde est la réunion de ses bissections ouvertes.
6. L'application produit est un homéomorphisme local.

Par la suite, pour un tel groupoïde, c'est toujours le système de Haar de la mesure de comptage sur les fibres que l'on considérera.

Je renvoie à [Ren, lemme 2.7 et prop. 2.8, p. 18 à 20] pour la preuve de l'équivalence de ces propriétés. Dans le cadre différentiable on a la définition suivante :

Définition 1.2.4 — J'appelle *groupoïde de Lie étale* un groupoïde de Lie G tel que les applications but et source $G \underset{b,s}{\rightrightarrows} G^{(0)}$ sont des difféomorphismes locaux.

Remarques. —

1. Un groupoïde étale n'est pas nécessairement la réunion *disjointe* de certaines bissections ouvertes, connexes maximales par exemple. Un contre exemple est fourni par le groupoïde :

$$G = \left\{ (e^{2\pi\imath\theta}, n\theta) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}, \theta \in]1, 2] \right\}$$

$$(s, x)(s', x') = (s, x + x') \text{ si } s = s' \ ; \ (s, x)^{-1} = (s, -x),$$

muni de la topologie induite par $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$.

2. Un sous-groupoïde d'un groupoïde étale n'est pas forcément étale ; par exemple le groupoïde étale $\widetilde{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ avec le produit et l'inverse

$$(x, n)(x', n') = (x, n + n') \text{ si } x = x' \ ; \ (x, n)^{-1} = (x, -n),$$

a un sous-groupoïde fermé $G = \mathbb{R}^* \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{Z}$ qui n'est pas étale. Néanmoins on a on a la caractérisation suivante :

Proposition 1.2.5 — Un sous-groupoïde G d'un groupoïde $\widetilde{G}$ localement compact et à base dénombrable d'ouverts, est étale si et seulement si

1. G peut s'écrire comme une réunion de certaines des ses bissections ouvertes : $G = \bigcup_k S_k$, de sorte que les $b(S_k)$ (ou les $s(S_k)$) soient ouverts dans $G^{(0)}$
2. Les réciproques de b et s restreintes aux S_k sont continues :

$$b(S_k) \xrightarrow{b|_{S_k}^{-1}} S_k, \ s(S_k) \xrightarrow{s|_{S_k}^{-1}} S_k.$$

3. G est localement compact (*i.e.* localement fermé dans $\widetilde{G}$).

Démonstration.

Remarquons d'abord que, pour tout ouvert S de $\widetilde{G}$, $b(S)$ est ouvert dans $G^{(0)}$ si et seulement si $s(S)$ est ouvert dans $G^{(0)}$; cela provient du fait que l'inverse i est un homéomorphisme de $\widetilde{G}$, donc de G, et de $s(S) = b(i(S))$.

Les conditions énoncés dans la proposition sont évidemment nécessaires pour que G soit étale. Pour qu'elles soient suffisantes, la seule chose non triviale à vérifier est que b (resp. s) est une application ouverte. Or, pour tout ouvert O de G, on a :

$$b(O) = \bigcup_k b(O \cap S_k).$$

Et chaque $b(O \cap S_k)$ est ouvert dans $b(S_k)$, car c'est l'image réciproque de l'ouvert $O \cap S_k$ par la fonction continue $b|_{S_k}^{-1}$. Donc chaque $b(O \cap S_k)$ est ouvert dans $G^{(0)}$ puisque $b(S_k)$ est ouvert dans $G^{(0)}$. CQFD

Corollaire. — Un sous-groupoïde G d'un groupoïde étale $\widetilde{G}$ est étale si et seulement si :
- G est localement fermé dans $\widetilde{G}$;
- l'image par b (ou s) de toute bissection ouverte de G (ou seulement d'un ensemble de bissections ouvertes formant un recouvrement de G) est ouverte dans $G^{(0)}$.

En particulier tout sous-groupoïde ouvert d'un groupoïde étale est étale.

1.3 C*-algèbres d'un groupoïde

Généralisant la notion de C*-algèbre (resp. réduite) d'un groupe, J. Renault [Ren] a construit, pour un groupoïde G tel que
- G est un groupoïde topologique localement compact avec une base dénombrable d'ouverts,
- G possède un système de Haar continu $(\mu^u)_{u \in G^{(0)}}$.

la C*-algèbre de G, notée $\mathrm{C}^*(G, \mu)$, ou plus simplement $\mathrm{C}^*(G)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur μ (resp. la C*-algèbre réduite, notée $\mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(G, \mu)$ voire $\mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(G)$).

Cette construction s'applique en particulier aux exemples suivants :
- Les groupoïdes de Lie.
- Les groupoïdes étales.
- Les groupoïdes continûment fibrés, et en particulier les fibrés en groupes commutatifs continus (cf. définition 1.5.5 et proposition 1.5.6).
- Les groupes localement compacts à base dénombrable d'ouverts.

L'algèbre $\mathrm{C}^*(G, \mu)$ (resp. $\mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(G, \mu)$) est obtenue par complétion de l'algèbre de convolution $\mathrm{C_c}(G, \mu)$ pour une certaine C*-norme. Par ailleurs, comme G est à base dénombrable d'ouverts, la C*-algèbre ainsi obtenue est nécessairement séparable.

Proposition 1.3.1 — Dans les conditions précédentes pour G, l'espace, noté $\mathrm{C_c}(G, \mu)$, ou plus simplement $\mathrm{C_c}(G)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur μ, des fonctions continues à support compact sur G, que l'on a muni du produit et de la convolution définis par :

$$f * f'(\gamma) = \int f(\gamma\delta) f'(\delta^{-1}) \mu^{s(\gamma)}(\delta)$$

$$f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})},$$

est une algèbre involutive [Ren, prop 1.1 p. 48].

Proposition 1.3.2 — Soit la norme $\|\cdot\|_I$ sur $\mathrm{C_c}(G)$ définie par :

$$\|f\|_I = \max\left\{ \sup_{u\in G^{(0)}} \int_{G^u} |f(\gamma)|\mu^u(\gamma);\ \sup_{u\in G^{(0)}} \int_{G^u} |f^*(\gamma)|\mu^u(\gamma) \right\}.$$

Soit A une C*-algèbre séparable et $\mathrm{C_c}(G) \xrightarrow{L} A$ un morphisme d'algèbres involutives, où G est un groupoïde. Alors L est continu pour la norme $\|\cdot\|_I$, *i.e.*

$$\exists C > 0,\ \forall f,\ \|L(f)\| \leq C\|f\|_I,$$

si et seulement si L est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts *i.e.*

$$\forall K \subset G,\ K \text{ compact},\ \exists C_K > 0,\ \operatorname{Supp} f \subset K \Rightarrow \|L(f)\| \leq C_K\|f\|_\infty.$$

Alors la C*-seminorme :

$$\|f\|_{\mathrm{C}^*(G)} = \sup_L \|L(f)\|,$$

où le sup porte sur tous les *-morphismes L continus au sens précédent, est une norme.

Idée de la preuve : l'implication ⇒ est immédiate ; la réciproque est une conséquence du théorème de J. Renault [Ren, th. 1.21 p.65] de désintégration des représentations de $\mathrm{C_c}(G)$. Le fait que l'on obtienne une norme provient de l'existence d'une représentation continue fidèle, par exemple la représentation régulière gauche λ [Ren, déf. 1.8 p. 55].

On peut donc définir plusieurs C*-algèbres de la manière suivante. On notera bien que, dans la suite, pour éviter cette multiplicité des C*-algèbres pour un même groupoïde avec système de Haar continu, on se placera dans des hypothèses de moyennabilité (cf. Anantharaman,Renault [AR]) :

Définition 1.3.3 — La C*-algèbre pleine (resp. réduite) d'un groupoïde est la complétion de $\mathrm{C_c}(G)$ par la norme $\|.\|_{\mathrm{C}^*(G)}$ (resp. $\|f\|_r = \|\lambda(f)\|$, où λ est toujours la représentation régulière gauche).

En particulier $\mathrm{C}^*(G)$ est la C*-algèbre enveloppante de $L^I(G)$, l'algèbre de Banach involutive qui est le complété de $\mathrm{C_c}(G)$ pour la norme $\|\cdot\|_I$.

Proposition 1.3.4 — Si G est un groupoïde *moyennable* (voir [AR] pour la définition), alors $\mathrm{C}^*(G) = \mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(G)$.

Je rappelle quelques exemples standard de groupoïdes moyennables :
- groupes commutatifs ;
- groupoïde de l'action d'un groupe moyennable, commutatif par exemple, sur un espace ;
- groupoïde des paires.

1.4 Champs continus de C*-algèbres de groupoïdes

Champs continus de C*-algèbres

Je rappelle ici le vocabulaire et quelques propriétés des champs continus de C*-algèbres.

Notations : Dans ce qui suit X désigne un espace topologique localement compact. Si $\mathcal{A} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} X$ est un fibré, pour tout $\hbar \in X$, on note $\mathcal{A}_\hbar = \pi^{-1}\{\hbar\}$ la fibre au dessus de $\hbar$; on a donc $\mathcal{A} = \bigsqcup_{\hbar \in X} \mathcal{A}_\hbar$. Une section de ce fibré est notée $f \in \prod_{\hbar \in X} \mathcal{A}_\hbar$ ou encore

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & \bigsqcup_{\hbar \in X} \mathcal{A}_\hbar \\ \hbar & \longmapsto & f_\hbar \in \mathcal{A}_\hbar. \end{array}$$

Si $\mathcal{Q}$ est un espace de sections, on note $\mathcal{Q}_\hbar = \{f_\hbar \mid f \in \mathcal{Q}\}$. Le produit fibré par π de $\mathcal{A}$ par lui-même est noté :

$$\mathcal{A} *_\pi \mathcal{A} = \left\{ (a,b) \in \mathcal{A}^2 \mid \pi(a) = \pi(b) \right\}.$$

Pour ce qui suit, les références sont Fell et Doran [DF, chap. II n°13 et chap. VII n°8] pour la version «fibrés» *i.e.* une axiomatique sur l'espace total, et Dixmier [Dix, chap. 10] pour la version «champs» *i.e.* une axiomatique sur la famille des fibres.

Définition 1.4.1 — Un *fibré en* C*-*algèbres* sur un espace X est un fibré $\mathcal{A} \xrightarrow{\pi} X$ muni d'opérations

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} & \qquad & \mathcal{A} *_\pi \mathcal{A} & \xrightarrow{+,*} & \mathcal{A} \\ (\lambda, a) & \longmapsto & \lambda a & & (a,b) & \longmapsto & \begin{cases} a+b \\ a*b \end{cases} \\ \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} & & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ a & \longmapsto & a^* & & a & \longmapsto & \|a\| \end{array}$$

qui induisent sur chaque fibre $\mathcal{A}_\hbar$ une structure de C*-algèbre.

C'est équivalent à la donnée de la famille de C*-algèbres $(\mathcal{A}_\hbar)_{\hbar \in X}$, appelée *champ de* C*-*algèbres*
.

L'espace des sections du fibré (resp. des éléments du produit $\prod_{\hbar \in X} \mathcal{A}_\hbar$) possède alors une structure naturelle d'algèbre involutive pour les opérations point par point $(f * g)_\hbar = (f_\hbar) * (g_\hbar)$, $(f^*)_\hbar = (f_\hbar)^*$, etc. .

Définition 1.4.2 — Soient X un espace localement compact (resp. et $\hbar$ un élément de X donné), et $\mathcal{A} \xrightarrow{\pi} X$ un fibré en C*-algèbres dont l'espace total $\mathcal{A}$ est muni d'une topologie. On dit que $\mathcal{A}$ est un *fibré continu en* C*-*algèbres* (resp. en $\hbar$), ou encore que $(\mathcal{A}_\hbar)_{\hbar \in X}$ est un *champ continu en* C*-*algèbres* (resp. en $\hbar$), si :

- la projection π est ouverte (resp. en $\hbar$).
- les opérations sont continues (resp. en tout point de $\mathcal{A}_\hbar$, ou de $\mathcal{A}_\hbar \times \mathcal{A}_\hbar$ pour le produit et l'addition).
- pour tout $\hbar \in X$ (resp. pour le $\hbar$ donné seulement), si $\|a_i\| \xrightarrow[i]{} 0$ et $\pi(a_i) \xrightarrow[i]{} \hbar$, alors $a_i \xrightarrow[i]{} 0_\hbar$.

En particulier la dernière condition entraîne que la section nulle est continue. En outre, si $\mathcal{A} \xrightarrow{\pi} X$ est un fibré continu en C^*-algèbres, on a [DF, prop. II.13.14 et rem. VII.8.2] :
- l'espace $C(X, \mathcal{A})$ des section continues est une algèbre involutive ;
- l'espace $C_0(X, \mathcal{A})$, des sections continues dont la norme tend vers 0 à l'infini, est une C^*-algèbre si on le munit de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{A}} = \sup_{\hbar \in X} \|f_\hbar\|.$$

Définition 1.4.3 — La C^*-algèbre $C_0(X, \mathcal{A})$ est appelée la C^*-*algèbre du fibré continu* , ou encore la C^*-*algèbre du champ continu* .

Remarque. — Pour le fibré trivial $\mathcal{A} = X \times \mathbb{C}$ on retrouve les espaces usuels $C(X)$ et $C_0(X)$.

Réciproquement, on a une caractérisation (cf. Dixmier [Dix]) :

Proposition 1.4.4 — Un champ de C^*-algèbres est continu si et seulement s'il existe une famille de sections, notée $C(X, \mathcal{A})$, telle que :
(i) pour toute f dans $C(X, \mathcal{A})$, l'application $\hbar \longmapsto \|f\|$ est continue ;
(ii) pour tout $\hbar$, $C(X, \mathcal{A})_\hbar$ est dense dans $\mathcal{A}_\hbar$ — on dit alors que $C(X, \mathcal{A})$ est *total* dans $\mathcal{A}$;
(iii) $C(X, \mathcal{A})$ est une sous-algèbre involutive de $\mathcal{A}$;
(iv) une section $f \in \mathcal{A}$ est dans $C(X, \mathcal{A})$ si et seulement si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes

$$\forall \hbar_0 \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists f' \in C(X, \mathcal{A}),\ \exists V(\hbar_0),\ \hbar \in V(\hbar_0) \Rightarrow \|f_\hbar - f'_\hbar\| < \varepsilon,$$

$$\forall f' \in C(X, \mathcal{A}),\ \hbar \longmapsto \|f_\hbar - f'_\hbar\| \text{ est continue.}$$

Ayant une telle algèbre de sections, on obtient un fibré continu en munissant $\mathcal{A}$ de la topologie la moins fine qui rend ces sections continues.

Remarques. —

1. Soient $\mathcal{A}$ un champ continu, et $\mathcal{Q}$ un *sous-espace vectoriel* total de $C(X, \mathcal{A})$. Alors $f \in C(X, \mathcal{A})$ équivaut à :

$$\forall \hbar_0 \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists f' \in \mathcal{Q},\ \exists V(\hbar_0),\ \hbar \in V(\hbar_0) \Rightarrow \|f_\hbar - f'_\hbar\| < \varepsilon.$$

2. Inversement, si $\mathcal{Q}$ est un ensemble de sections qui satisfait aux conditions (i) (ii) et (iii) de la définition , alors il existe un prolongement unique $C(X, \mathcal{A}) \supset \mathcal{Q}$ qui fasse de $\mathcal{A}$ un champ continu de C^*-algèbres. En fait l'existence de $C(X, \mathcal{A})$ est donnée par :

$$C(X, \mathcal{A}) = \left\{ f \mid \forall f' \in \mathcal{Q},\ \hbar \longmapsto \|f_\hbar - f'_\hbar\| \text{ est continue} \right\},$$

et l'unicité s'en déduit immédiatement (cf. Dixmier [Dix, prop. 10.2.3 et 10.3.2]).

3. Si $\mathcal{Q}$ est un espace vectoriel qui vérifie (i) et (ii) alors il existe un tel $C(X, \mathcal{A}) \supset \mathcal{Q}$ si et seulement si les éléments de l'algèbre involutive engendrée par $\mathcal{Q}$ sont continus en norme. En particulier si chaque $\mathcal{Q}_\hbar$ est une sous-*-algèbre de $\mathcal{A}_\hbar$ il faut et il suffit que les éléments de la forme $f + f'^*$ et $f * f' - f''$ $(f, f', f'' \in \mathcal{Q})$ soient continus en norme (cf. Rieffel [Rie93, prop 9.1 p. 62]).

Dans ces cas je parlerai de la structure de champ continu de C*-algèbres *engendrée* par $\mathcal{Q}$.

Proposition 1.4.5 — $\mathrm{C}(X, \mathcal{A})$ (et donc $\mathrm{C}_0(X, \mathcal{A})$) est un $\mathrm{C}(X)$-module [Dix, prop. 10.1.9].

Champs continus associés à des groupoïdes

La notion de sous-groupoïde permet de définir facilement celle de réduction, puis de groupoïde fibré.

Définition 1.4.6 —

1. Si A est une partie de l'espace des unités $G^{(0)}$ d'un groupoïde G, alors
$$G|_A = b^{-1}(A) \cap s^{-1}(A),$$
est un sous-groupoïde de G, appelé *réduction* de G à A. Son espace des unités est $G|_A^{(0)} = A$.
2. On appelle *partie invariante*, une partie A de l'espace des unités $G^{(0)}$ d'un groupoïde G, telle que
$$b^{-1}(A) = s^{-1}(A).$$

Du point de vue des C*-algèbres de groupoïdes, on a (cf. Ramazan [Ram98, prop. 2.4.2 p. 59]) :

Proposition 1.4.7 — Soient G un groupoïde localement compact, à base dénombrable d'ouverts, qui possède un système de Haar continu $(\mu^u)_{u\in G^{(0)}}$, et O un ouvert invariant de $G^{(0)}$; on note F son complémentaire. La suite exacte d'espaces vectoriels
$$0 \hookrightarrow \mathrm{C_c}(G|_O) \hookrightarrow \mathrm{C_c}(G) \twoheadrightarrow \mathrm{C_c}(G|_F) \twoheadrightarrow 0,$$
se prolonge en suite exacte de C*-algèbres :
$$0 \hookrightarrow \mathrm{C}^*(G|_O, (\mu^u)_{u\in O}) \hookrightarrow \mathrm{C}^*(G, (\mu^u)_{u\in G^{(0)}}) \twoheadrightarrow \mathrm{C}^*(G|_F, (\mu^u)_{u\in F}) \twoheadrightarrow 0.$$

Définition 1.4.8 — Un *groupoïde fibré* (resp. *continûment fibré* , resp. *de Lie fibré* est un groupoïde (resp. localement compact, à base dénombrable d'ouverts et avec système de Haar continu, resp. de Lie) muni de l'une des données équivalentes suivantes :

- Un morphisme de groupoïdes (resp. continu et ouvert, resp. une submersion) surjectif sur un espace (resp. topologique, resp. une variété) X muni de la structure de groupoïde trivial ($X = X^{(0)}$) :
$$G \overset{p}{\twoheadrightarrow} X.$$
- Une application (resp. continue et ouverte, resp. une submersion) surjective
$$G^{(0)} \overset{p^{(0)}}{\twoheadrightarrow} X,$$

telle que $p^{(0)} \circ b = p^{(0)} \circ s$; la valeur commune est notée p. Alors l'image réciproque par $p^{(0)}$ de tout point de X est une partie invariante de $G^{(0)}$, c'est-à-dire que les $G_\hbar = G|_{(p^{(0)})^{-1}\{\hbar\}} = p^{-1}\{\hbar\}$ sont des sous-groupoïdes (resp. avec système de Haar continu, resp. de Lie) qui recouvrent G :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, shift left, two heads, "b"] \arrow[r, shift right, two heads, "s"'] \arrow[dr, "p"'] & G^{(0)} \arrow[d, "p^{(0)}"] \\ & X \end{tikzcd} \qquad G = \bigsqcup_{\hbar \in X} G_\hbar.$$

En particulier, comme tout groupoïde étale possède un système de Haar continu, j'appellerai *groupoïde étale fibré* un groupoïde $G \overset{p}{\twoheadrightarrow} X$ étale et fibré avec p continue et ouverte. Si de plus c'est en fait un groupoïde de Lie fibré, je parlerai de *groupoïde de Lie étale fibré* .

Certains groupoïdes fibrés induisent automatiquement des champs continus de C*-algèbres. Le théorème suivant de Ramazan [Ram98, p. 62, cor. 2.4.8] étend, grâce aux travaux de Blanchard [Bla96], un résultat établi auparavant par Rieffel [Rie89a].

Théorème 1.4.9 — *Soit G un groupoïde continûment fibré et moyennable,* i.e. *dont chaque fibre est moyennable (cf. Anantharaman,Renault [AR]). Alors, sur la famille $(\mathrm{C}^*(G_\hbar))_{\hbar\in X}$, l'espace $\mathrm{C}_c(G)$ engendre une structure de champ continu de C^*-algèbres dont la C^*-algèbre est $\mathrm{C}^*(G)$:*

$$\mathrm{C}^*\left(X, \prod_{\hbar\in X} \mathrm{C}^*(G_\hbar)\right) = \mathrm{C}^*(G).$$

Remarque. — Si G n'est pas supposé moyennable, le champ $(\mathrm{C}^*(G_\hbar))_{\hbar\in X}$ est seulement semi-continu supérieurement, et le champ $(\mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(G_\hbar))_{\hbar\in X}$ semi-continu inférieurement [Ram98, th. 2.4.6 p.62].

1.5 Commutativité des C*-algèbres de groupoïdes

Isomorphisme de Gel'fand

Je rappelle d'abord un résultat classique [BouTS] :

Définition 1.5.1 — Soit A une algèbre commutative (resp. avec unité, resp. de Banach). On appelle *caractère* de A un morphisme d'algèbres non nul de A dans $\mathbb{C}$ (resp. qui préserve l'unité, resp. continu).

L'ensemble des caractères sera noté $\mathrm{Sp}\,A$.

Définition 1.5.2 — Soit A une algèbre de Banach commutative (resp. avec unité). Alors l'espace $\mathrm{Sp}\,A$ muni de la topologie faible du dual est localement compact (resp. compact). On appelle *transformation de Gel'fand* le morphisme continu :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\mathcal{G}_A} & \mathrm{C}_0(\mathrm{Sp}\, A) \\ f & \longmapsto & (\chi \mapsto \chi(f)). \end{array}$$

Théorème 1.5.3(Gel'fand) — *Si A est une C^*-algèbre commutative la transformation de Gel'fand est un isomorphisme de C^*-algèbre.*

On a ainsi la définition plus générale naturelle :

Définition 1.5.4 — Si A est une C^*-algèbre commutative, j'appelle *isomorphisme de Gel'fand* tout isomorphisme

$$A \xrightarrow[\sim]{\mathcal{G}} \mathrm{C}_0(X),$$

où X est un espace topologique localement compact.

Par exemple, si $(\mathcal{A}_\hbar)_{\hbar\in X}$ est un champ continu de C^*-algèbres commutatives, alors $\mathrm{C}_0(X,\mathcal{A})$ est commutative et on peut définir l'application

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\hbar\in X} \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_\hbar & \longrightarrow & \mathrm{Sp}\,\mathrm{C}_0(X,\mathcal{A}) \\ \chi_\hbar & \longmapsto & \chi \end{array}$$

avec $\chi(f) = \chi_\hbar(f_\hbar)$. D'après Dixmier [Dix, th. 10.4.3 p. 220] c'est une bijection. Ainsi, si on munit $\bigsqcup_{\hbar\in X} \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_\hbar$ de la topologie de $\mathrm{Sp}\,\mathrm{C}_0(X,\mathcal{A})$, alors on a un isomorphisme de Gel'fand :

$$\mathrm{C}_0(X,\mathcal{A}) \xrightarrow[\sim]{} \mathrm{C}_0\left(\bigsqcup_{\hbar\in X} \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_\hbar\right).$$

De plus, d'après Blanchard [Bla96, th. 3.3 p. 14], si les $\mathcal{A}_\hbar$ sont séparables, l'application

$$\mathrm{Sp}\,\mathrm{C}_0(X,\mathcal{A}) \simeq \bigsqcup_{\hbar\in X} \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_\hbar \twoheadrightarrow X$$

est continue et ouverte.

Cas des C^*-algèbres de groupoïdes

Pour que la C^*-algèbre $A = \mathrm{C}^*(G)$ d'un groupoïde G soit commutative, il faut que ce groupoïde soit d'un type particulier.

Définition 1.5.5 — Un groupoïde (resp. localement compact à base dénombrable d'ouverts avec système de Haar continu) est appelé un *fibré en groupes* (resp. *fibré continu en groupes*) si $b = s$. Un fibré (resp. continu) en groupes est un *fibré en groupes commutatifs* (resp. un *fibré continu en groupes commutatifs*) si, pour tout $u \in G^{(0)}$, le groupe $G(u) = G^u = G_u$ est commutatif.

Un fibré (resp. continu) en groupes est un cas particulier de groupoïde (resp. continûment) fibré sur $X = G^{(0)}$ avec la projection $p = b = s$ *i.e.* $p^{(0)} = Id_{G^{(0)}}$. Réciproquement un groupoïde (resp. continûment) fibré $G \xrightarrow{p} X$ est un fibré (resp. continu) en groupes si et seulement si $p^{(0)}$ est injective, car elle est alors bijective (resp. un homéomorphisme) de $G^{(0)}$ sur X et on a $b = s = (p^{(0)})^{-1} \circ p$.

Par ailleurs, J. Renault [Ren91, lemme 1.3 p.7] a montré que :

Proposition 1.5.6 — Un fibré en groupes G est continu si et seulement si c'est un groupoïde topologique localement compact à base dénombrable d'ouverts tel que $b = s$ est ouverte.

Idée de la preuve : La proposition 1.1.4 dit que si un groupoïde topologique possède un système de Haar continu, alors l'application b est ouverte. Réciproqyement il suffit juste de montrer que $p = b = s$ ouverte entraîne l'existence d'un système de Haar continu. Ce système de Haar est obtenu en normalisant la mesure de Haar μ sur chaque groupe $G(u) = G_u = G^u$ de sorte que

$$\int_{G(u)} f\mu^u = 1$$

où f est une fonction définie sur G, continue, strictement positive sur $G^{(0)}$ et telle que chaque restriction $f|_{G(u)}$ est à support compact dans $G(u)$; l'existence d'une telle fonction équivaut au caractère ouvert de p.

Proposition 1.5.7 — Soit G est groupoïde localement compact, à base dénombrable d'ouverts, qui possède un système de Haar continu. Alors $\mathrm{C}^*(G)$ est commutative si et seulement si G est un fibré continu en groupes commutatifs.

Démonstration.

Remarquons d'abord que si G est un fibré continu en groupes, alors $p = b = s$ et

$$O = p^{-1}\left(G^{(0)} - \{\, u \,\}\right)$$

est un ouvert invariant de $G^{(0)}$ donc, d'après la proposition 1.4.7, il existe un morphisme d'algèbres surjectif

$$\mathrm{C}^*(G) \twoheadrightarrow \mathrm{C}^*(G|_{O^c}) = \mathrm{C}^*(G(u)),$$

donc $\mathrm{C}^*(G(u))$ est commutative, ce qui équivaut à la commutativité de $G(u)$.

Réciproquement, par l'absurde, si G n'est pas un fibré en groupes, il existe $\gamma_0 \in G$ tel que $b(\gamma_0) \neq s(\gamma_0)$. Par continuité de b et s, comme $G^{(0)}$ est séparé, il existe alors un voisinage U de γ_0 tel que $b(U)$ et $s(U)$ sont disjoints. Soit $f \in \mathrm{C_c}(G)$ non nulle telle que $\mathrm{Supp}\, f \in U$; alors

$$f * f(\gamma) = \int_{G^{b(\gamma)}} f(\gamma\delta) f(\delta^{-1}) \mu^{b(\gamma)}(\delta) = 0,$$

car $\left\{\, \gamma\delta, \delta^{-1} \,\right\} \subset U$ est impossible, puisque sinon on aurait $s(\gamma\delta) = s(\delta) \in s(U)$ et $s(\delta) = b(\delta^{-1}) \in b(U)$. Or, si $\mathrm{C}^*(G)$ est commutative, on a $\mathrm{C}^*(G) = \mathrm{C}_0(\mathrm{Sp}\,\mathrm{C}^*(G))$, donc $f * f = 0$ entraîne $f = 0$, ce qui n'est pas le cas ici. CQFD

2 Déformation, quantification et groupoïdes

2.1 Définitions

Notations : Si M est une variété et $\omega \in \bigwedge^n T^*M$ est une n-forme différentielle, on note $TM \xrightarrow{i\omega} (TM^{\otimes n-1})^*$ l'application définie par

$$\langle i\omega(X) | X_2, \dots, X_n \rangle = i_X\omega(X_2, \dots, X_n) = \omega(X, X_2, \dots, X_n).$$

Rappels de géométrie symplectique

Je rappelle d'abord les définitions fondamentales de la géométrie symplectique.

Définition 2.1.1 — On appelle *algèbre de Poisson* (resp. *variété de Poisson* , resp. *variété symplectique*) une algèbre complexe commutative A (resp. une variété M) avec la donnée et les propriétés suivantes, pour tous $\mathtt{f}, \mathtt{f}', \mathtt{f}''$ éléments de A (resp. si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ coordonnées locales sur M) :

Algèbre de Poisson	Variété de Poisson	Variété symplectique
• crochet bilinéaire $\begin{array}{ccc} A \times A & \to & A \\ \mathtt{f}, \mathtt{f}' & \mapsto & \{\mathtt{f}, \mathtt{f}'\}_A \end{array}$	• champ de bivecteurs $\Omega \in TM \otimes TM$	• 2-forme différentielle $\omega \in \bigwedge^2 T^*M$
• action par dérivation $\{\mathtt{f}\mathtt{f}', \mathtt{f}''\}_A = \mathtt{f}\,\{\mathtt{f}', \mathtt{f}''\}_A + \{\mathtt{f}, \mathtt{f}''\}_A\,\mathtt{f}'$	$\Omega = \sum_{i,j} \Omega_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_j}$	$\omega = \sum_{i,j} \omega_{i,j} dx_i \otimes dx_j$
• de Lie (antisymétrique) $\{\mathtt{f}, \mathtt{f}'\}_A = -\{\mathtt{f}', \mathtt{f}\}_A$	• antisymétrique $\Omega_{i,j} = -\Omega_{j,i}$	$\omega = \sum_{i<j} \omega_{i,j} dx_i \wedge dx_j$
(identité de Jacobi) $\{\{\mathtt{f}, \mathtt{f}'\}_A, \mathtt{f}''\}_A + \{\{\mathtt{f}', \mathtt{f}''\}_A, \mathtt{f}\}_A + \{\{\mathtt{f}'', \mathtt{f}\}_A, \mathtt{f}'\}_A = 0$	• crochet de Schouten nul $[\Omega, \Omega]_S = 0$	• fermée $d\omega = 0$
		• non dégénérée $TM \underset{\sim}{\xrightarrow{i\omega}} T^*M$ (isomorphisme)

Une algèbre de Poisson involutive est une algèbre de Poisson munie d'une involution antilinéaire * telle que $\{\mathtt{f}, \mathtt{f}'\}_A^* = \left\{\mathtt{f}^*, \mathtt{f}'^*\right\}_A$.

Proposition 2.1.2 — Toute variété symplectique est une variété de Poisson ; toute variété de Poisson induit une algèbre de Poisson involutive $A = \mathrm{C}^\infty(M)$.

n.b. : les propriétés du tableaux se correspondent alors ligne par ligne.

Démonstration.
Il suffit d'expliquer la correspondance entre les définitions :

$$\{\mathtt{f}, \mathtt{f}'\}_M = \langle d\,\mathtt{f} \otimes d\,\mathtt{f}' | \Omega \rangle = \omega(\nabla_{\mathtt{f}}, \nabla_{\mathtt{f}'})$$

où $\nabla_{\mathtt{f}} = (i\omega)^{-1}(d\,\mathtt{f})$ (gradient symplectique de $\mathtt{f}$), soit en coordonnée locales :

$$\left(\{\,x_i, x_j\,\}_M\right)_{i,j} = (\Omega_{i,j})_{i,j} = (\omega_{i,j})_{i,j}^{-1}$$

si $\{\,\mathtt{f}, \mathtt{f}'\,\}_M = \sum_{i,j} \{\,x_i, x_j\,\}_M \frac{\partial \mathtt{f}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathtt{f}'}{\partial x_j}$. CQFD

On a alors des notions naturelles de morphismes qui se correspondent (par : $\Phi(\mathtt{f}) = \mathtt{f} \circ \varphi$) :

Définition 2.1.3 —

1. *morphisme d'algèbres de Poisson*

$$(A_1, \{\,\cdot,\cdot\,\}_{A_1}) \xleftarrow{\Phi} (A_2, \{\,\cdot,\cdot\,\}_{A_2}) \ni \mathtt{f}, \mathtt{f}'$$

$$\left\{\,\Phi(\mathtt{f}), \Phi(\mathtt{f}')\,\right\}_{A_1} = \Phi \left\{\,\mathtt{f}, \mathtt{f}'\,\right\}_{A_2}$$

2. *morphisme de variétés de Poisson*

$$x \in (M_1, \Omega_1) \xrightarrow{\varphi} (M_2, \Omega_2)$$

$$(d_x\varphi)(\Omega_1(x)) = \Omega_2(\varphi(x))$$

3. *morphisme symplectique,* ou *symplectomorphisme*

$$(M_1, \omega_1) \xrightarrow{\varphi} (M_2, \omega_2)$$

$$\omega_1 = \varphi^*(\omega_2)$$

Principes physiques

La définition de ce qu'est une quantification repose sur les principes physiques suivants :

- En mécanique classique, dans le formalisme de Hamilton, un système est décrit par
  - une variété de Poisson M, appelée *espace des phases*, qui représente tous les états dynamiques position+impulsion ; par exemple $M = T^*N$ si N est la variété des configurations/positions du système. Alors une fonction $\mathtt{f} \in \mathrm{C}^\infty(M)$, appelée *observable* en physique, est une mesure physique qui associe un nombre à tout état.
  - une observable particulière, appelée *énergie* $M \xrightarrow{\mathtt{e}} \mathbb{R}_+$, qui décrit les forces exercées sur le système.
  - une équation d'évolution :

$$\frac{d\mathtt{f}}{dt} = \{\,\mathtt{e}, \mathtt{f}\,\}_M .$$

- En mécanique quantique, dans le formalisme de la mécanique des matrices de Heisenberg, les états sont remplacés par la donnée d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$; l'énergie devient e un opérateur autoadjoint positif sur $\mathcal{H}$; l'équation d'évolution s'écrit

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{\imath\hbar}(ef - fe),$$

  où $\hbar \simeq 6{,}63\,10^{-34} Js$ est une constante physique «petite», appelée *constante de Planck*

– Le passage d'une modélisation classique à une modélisation quantique s'appelle une *quantification* et le passage inverse, appelé *passage à la limite semi-classique* suit les principes suivants, postulés par Dirac :
  – $\mathtt{f} \longmapsto f$ est linéaire
  – «les effets quantiques disparaissent si on néglige $\hbar$»

Mes définitions

Depuis Dirac les mathématiciens ont cherché à donner une définition précise de ces principes, de sorte qu'il y ait le plus possible de quantifications des variétés de Poisson. L'idée de la *quantification par déformation* [BFFLS] est de considérer $\hbar$ comme une variable formelle et d'associer à chaque valeur de $\hbar$ une algèbre $\mathcal{A}_\hbar$ telle que
– si $\hbar = 0$, $\mathcal{A}_0 = \mathrm{C}^\infty(M)$;
– si $\hbar \neq 0$, $\mathcal{A}_\hbar$ est une algèbre non commutative

En suivant cette idée d'utiliser un champ d'algèbres, dans le cadre des C*-algèbres, Rieffel [Rie89b] a introduit la notion de *quantification stricte par déformation* . Cette définition de Rieffel a ensuite été généralisée par Sheu [She91, déf. 2.2 p 223], puis dans un sens proche de Sheu, par la *quantification stricte* de Landsman [Lan98, Lan93, LR99]. Je propose ici une définition dans un cadre C*-algébrique, inspirée de celle de Rieffel, et légèrement plus générale — mais pas au point d'englober les généralisations, faîtes par Rieffel dans [Rie93], de sa propre définition à des algèbres de Poisson non commutatives, au sens de Xu [Xu94] — de sorte qu'elle s'applique aux exemples que je vais étudier.

Définition 2.1.4 — J'appelle *champ de déformation* , ou plus simplement *déformation,* la donnée $(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ de
– un champ continu de C*-algèbres sur une partie X de $\mathbb{R}$, localement compacte, et qui contient 0 comme point d'accumulation : $\mathcal{A} \twoheadrightarrow X$.
– une sous-algèbre involutive de sections continues $\mathcal{Q} \subset \mathrm{C}_0(X, \mathcal{A})$

tels que
(i) $\mathcal{Q}_0$ est dense dans $\mathcal{A}_0$;
(ii) il existe une application bilinéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} & \longrightarrow & \mathrm{C}_0(X, \mathcal{A}) \\ (f, f') & \longmapsto & \{ f, f' \} \end{array}$$

telle que
– si $\hbar \neq 0$, le crochet vaut :

$$\{ f, f' \}_\hbar = \frac{1}{\imath\hbar}(f * f' - f' * f)_\hbar$$

– le crochet passe aussi au quotient en $\hbar = 0$ et est à valeurs dans $\mathcal{Q}_0$ *i.e.* il existe un crochet bilinéaire $\{\cdot,\cdot\}_0$ sur $\mathcal{Q}_0$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Q}\times\mathcal{Q} \arrow[r, "\{\cdot,\cdot\}"] \arrow[d] & \{\mathcal{Q},\mathcal{Q}\}\subset\mathcal{A} \arrow[d] \\
\mathcal{Q}_0\times\mathcal{Q}_0 \arrow[r, dashed, "\{\cdot,\cdot\}_0"] & \mathcal{Q}_0
\end{tikzcd}$$

On notera que la condition $\{\mathcal{Q},\mathcal{Q}\}_0\subset\mathcal{Q}_0$ est vérifiée si le crochet $\{\cdot,\cdot\}$ est en fait à valeurs dans $\mathcal{Q}$, ce qui sera le cas dans les constructions effectuées dans cette thèse.

Proposition 2.1.5 — Si $(\mathcal{A},\mathcal{Q})$ est une déformation, il est immédiat que :

- le crochet $\{\cdot,\cdot\}$ est unique, puisque $\mathcal{A}-\mathcal{A}_0$ est dense dans $\mathcal{A}$, d'après le lemme 2.2.5.
- $\mathcal{A}_0$ est commutative, d'après $f*f'=f'*f+\hbar\{f,f'\}$ et la densité de $\mathcal{Q}_0$.
- $(\mathcal{Q}_0,\{\cdot,\cdot\}_0)$ est une algèbre de Poisson involutive puisque, dans une algèbre involutive les commutateurs
$$[f,f']=f*f'-f'*f$$
vérifient :
$$\begin{aligned}
[f,f'] &= -[f',f]\\
[f_1*f_2,f'] &= f_1*[f_2,f']+[f_1,f']*f_2\\
\left(\frac{1}{\imath\hbar}[f,f']\right)^* &= \frac{1}{\imath\hbar}[f^*,f'^*]
\end{aligned}$$

En particulier je définis :

Définition 2.1.6 — J'appelle *déformation d'une algèbre de Poisson involutive* $(A,\{\cdot,\cdot\}_A)$ (resp. *d'une variété de Poisson* M) une déformation $(\mathcal{A},\mathcal{Q})$ munie d'un morphisme d'algèbres involutives *injectif* : $A\xhookrightarrow{\mathfrak{I}}\mathcal{A}_0$ (resp. $\mathrm{C}_0(M)\xhookrightarrow{\mathfrak{I}}\mathcal{A}_0$) tel que :

1. $\mathcal{Q}_0\subset\mathfrak{I}(A)$ (resp. $\mathcal{Q}_0\subset\mathfrak{I}(C^1_0(M))$).
2. Pour tous $f_0,f_0'\in\mathcal{Q}_0$ on a l'égalité :
$$\{f_0,f_0'\}_{\mathcal{Q}_0}=\mathfrak{I}\{\mathfrak{I}^{-1}(f_0),\mathfrak{I}^{-1}(f_0')\}_A.$$

Remarques. —

1. Dans le cas des variétés de Poisson, $\mathcal{A}_0$ et $\mathrm{C}_0(M)$ sont des C^*-algèbres, donc $\mathfrak{I}$ est un morphisme de C^*-algèbres, injectif d'image dense, donc un isomorphisme.
2. Question ouverte : dans le cas des variétés de symplectiques, a-t-on nécessairement
$$\mathcal{Q}_0\subset\mathfrak{I}(\mathrm{C}^\infty_0(M))\ ?$$

Définition 2.1.7 — J'appelle *quantification* d'une déformation $(\mathcal{A} \twoheadrightarrow X, \mathcal{Q})$ toute section T de la projection sur la fibre en zéro, linéaire, et qui commute avec l'involution :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Q} \arrow[r, two heads, shift left] & \mathcal{Q}_0 \arrow[l, dashed, shift left, "T"] \end{tikzcd}.$$

J'appelle *quantification fidèle* une quantification T telle que, pour tout $\hbar \in X$, la composée suivante est injective :

$$\mathcal{Q}_0 \xrightarrow{T} \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}_\hbar.$$

Comme il n'y a aucune condition topologique, l'existence de quantifications, mais non nécessairement fidèles, est une conséquence de l'axiome du choix.

Exemple. — Toute variété M, munie du crochet de Poisson nul, admet une déformation :
- $X = \mathbb{R}$,
- $\mathcal{A} = \mathrm{C}_0(M) \times \mathbb{R}$ fibré trivial,
- $\mathcal{Q} = \mathrm{C}_0^\infty(M \times \mathbb{R})$,
- $\{f, f'\} = 0$,
- Pour tout choix de fonction $\varphi \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R})$ qui vaut 1 en 0, on a une quantification définie, pour $f_0 \in \mathcal{Q}_0 = \mathrm{C}_0^\infty(M)$, par

$$T(f_0)(\hbar, x) = f_0(x)\varphi(\hbar).$$

Comparaison avec les définitions existantes

Cette définition de la quantification généralise la quantification *stricte* par déformation introduite par Rieffel [Rie93] :

Définition 2.1.8 — On appelle *quantification stricte par déformation* d'une variété de Poisson M la donnée de :
- une sous-*-algèbre V de $\mathrm{C}_0(M)$, dense et stable par crochet de Poisson ;
- une partie X de $\mathbb{R}$ localement compacte, et qui contient 0 comme point d'accumulation ;
- pour chaque $\hbar \in X$ un produit, une involution et une C*-norme : $(*_\hbar, {}^{*_\hbar}, \|\cdot\|_\hbar)$, sur V, vu comme espace vectoriel ;

tels que :

1. pour $\hbar = 0$, $(*_\hbar, {}^{*_\hbar}, \|\cdot\|_\hbar)$ est la structure commutative usuelle induite sur V par $C_0(M)$;
2. l'espace V, identifié aux sections constantes $\{\hbar \longmapsto f_0 \mid f_0 \in V\}$, engendre une structure de champ continu sur $(\mathcal{A}_\hbar)_{\hbar \in X} = \left(\overline{V}^{\|\cdot\|_\hbar}\right)_{\hbar \in X}$;
3. pour tous $f_0, f_0' \in V$, on a :

$$\lim_{\hbar \to 0} \left\| \frac{1}{\imath\hbar}(f_0 *_\hbar f_0' - f_0' *_\hbar f_0) - \{f_0, f_0'\}_M \right\|_\hbar = 0.$$

PROPOSITION 2.1.9 — Une variété de Poisson M admet une quantification par déformation stricte si et seulement si elle admet une déformation qui possède une quantification fidèle.

Démonstration.

Étant donnée une quantification par déformation stricte de M, on construit le champ de déformation de M suivant :

– Champ continu d'algèbres formé par les $\mathcal{A}_\hbar = \overline{V}^{\|\cdot\|_\hbar}$.

– Sous-algèbre

$$\mathcal{Q} = V + \hbar \mathrm{C}_0(X, \mathcal{A}).$$

Alors, comme $\mathcal{Q}$ contient les sections constantes à valeurs dans V, on a $\mathcal{Q}_0 = V$, qui est dense.

– Crochet défini par :

$$\{f, f'\}_\hbar = \begin{cases} \{f_0, f_0'\}_M & \text{si } \hbar = 0 \\ \frac{1}{\imath\hbar}(f * f' - f' * f)_\hbar, & \text{si } \hbar \neq 0. \end{cases}$$

Alors le crochet de deux éléments f, f' de $\mathcal{Q}$ est dans $\mathrm{C}_0(X, \mathcal{A})$. En effet il est trivialement continue en $\hbar \neq 0$; il l'est aussi $\hbar = 0$ puisque pour

$$f = f_0 + \hbar g, \quad f' = f_0' + \hbar g'$$

on a

$$\lim_{\hbar \to 0} \left\| \frac{1}{\imath\hbar}(f * f' - f' * f)_\hbar - \frac{1}{\imath\hbar}(f_0 *_\hbar f_0' - f_0' *_\hbar f_0) \right\|_\hbar = 0,$$

d'après

$$[f, f'] - [f_0, f_0'] = \hbar\left([f_0, g'] + [g, f_0'] + \hbar[g, g']\right),$$

et on sait que

$$\lim_{\hbar \to 0} \left\| \frac{1}{\imath\hbar}(f_0 *_\hbar f_0' - f_0' *_\hbar f_0) - \{f_0, f_0'\}_M \right\|_\hbar = 0.$$

– Morphisme $\mathfrak{I}$ donné par l'identité de $\mathcal{A}_0 = C_0(M)$.

Pour toute fonction $\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$ de classe C^∞, qui vaut 1 en 0, ne s'annule jamais, et tend vers 0 à l'infini — par exemple $\varphi(\hbar) = \frac{1}{1+\hbar^2}$ — on obtient une quantification fidèle de cette déformation donnée par :

$$f_0 \in V = \mathcal{Q}_0 \overset{T}{\longmapsto} f_0 \varphi \in \mathcal{Q}.$$

Réciproquement, soit $(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ une déformation de M, avec l'isomorphisme :

$$\mathrm{C}_0(M) \underset{\sim}{\xrightarrow{\mathfrak{I}}} \mathcal{A}_0$$

et une quantification fidèle T. Alors $V = \mathfrak{I}^{-1}(\mathcal{Q}_0) \subset \mathrm{C}_0^1(M)$ est une sous-*-algèbre de Poisson dense de $\mathrm{C}_0(M)$. On a, pour tout $\hbar \in X$, un produit, une involution et une C^*-norme sur V induits par ceux de $\mathcal{Q}_\hbar$ *via* l'injection

$$V \simeq \mathcal{Q}_0 \xrightarrow{T} \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}_\hbar.$$

Les conditions pour avoir une quantification stricte par déformation proviennent alors directement des hypothèses de déformation. CQFD

Ma définition est par contre plus forte que la définition de *quantification stricte* de N. Landsman [Lan98, déf. 1.1.1. p. 108 et déf. 1.2.5. p. 112] :

DÉFINITION 2.1.10 — Une *quantification stricte* (resp. une *quantification stricte continue*) d'une variété de Poisson $(M, \{\cdot, \cdot\}_M)$ est la donnée de :

- une sous-*-algèbre V de $C_0^\infty(M)$, dense et stable par crochet de Poisson ;
- une partie X de $\mathbb{R}$ localement compacte, et qui contient 0 comme point d'accumulation ;
- un champ (resp. continu) de C^*-algèbres $(\mathcal{A}_\hbar)_{\hbar\in X}$ tel que $\mathcal{A}_0 = C_0(M)$ — on note $\Sigma(X,\mathcal{A})$ les sections du champ , et $\varphi_\hbar$ la projection de $\Sigma(X,\mathcal{A})$ sur $\mathcal{A}_\hbar$;
- une application linéaire $V \xrightarrow{T} \Sigma(X,\mathcal{A})$ qui commute avec l'involution — on note $T_\hbar = \varphi_\hbar \circ T$ — telle que, pour toute $f \in V$, l'application $\hbar \longmapsto \|T_\hbar(f)\|$ soit continue, et $T_0(f) = f$ (resp. une application linéaire qui commute avec l'involution $V \xrightarrow{T} C_0(X,\mathcal{A})$, telle que pour toute $f \in V$, $T_0(f) = f$) ;

vérifiant de plus, pour toutes $f, f' \in V$:

$$\lim_{\hbar\to 0} \left\|T_\hbar(f)T_\hbar(f') - T_\hbar(ff')\right\| = 0, \qquad {}^{1}$$

$$\lim_{\hbar\to 0} \left\| \frac{1}{\imath\hbar}\left(T_\hbar(f)T_\hbar(f') - T_\hbar(f')T_\hbar(f)\right) - T_\hbar\left(\{f,f'\}_M\right) \right\| = 0.$$

Quitte à restreindre les $\mathcal{A}_\hbar$ à la C^*-algèbre engendrée par les $T_\hbar(f)$ $(f \in V)$, on peut supposer de plus que $\{T_\hbar(f) \mid f \in V\}$ est dense dans $\mathcal{A}_\hbar$, pour tout $\hbar$.

Proposition 2.1.11 — Si une variété de Poisson M admet une déformation alors elle admet une quantification stricte continue.

Démonstration.

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ une déformation de M, avec l'isomorphisme

$$C_0(M) \xrightarrow[\sim]{\mathfrak{I}} \mathcal{A}_0$$

et une quantification T. Alors $V = \mathfrak{I}^{-1}(\mathcal{Q}_0) \subset C_0^1(M)$ est une sous-algèbre de Poisson involutive et dense de $C_0^\infty(M)$. On obtient ainsi, de manière évidente une quantification stricte continue.

CQFD

Déformation en zéro

En fait dans les définitions précédentes, c'est le comportement au voisinage de 0 qui est crucial. Je formalise ce point de vue de la manière suivante.

Définition 2.1.12 — J'appelle *champ de déformation en zéro* (resp. d'une algèbre de Poisson, resp. d'une variété de Poisson) tout couple $(\mathcal{A}, \mathcal{Q})$ formé d'un champ de C^*-algèbres continu *en zéro*, $\mathcal{A}$, et d'une sous-algèbre involutive de l'algèbre des sections continues *en zéro*, $\mathcal{Q}$, qui vérifient les mêmes conditions que celles imposées à un champ de déformation.

Proposition 2.1.13 — Une algèbre (resp. une variété) de Poisson admet un champ de déformation si et seulement si elle admet un champ de déformation en zéro.

[1] automatique si T à valeurs dans $C_0(X,\mathcal{A})$ et $T_0(f) = f$

Démonstration.

Le sens direct est trivial, puisqu'un champ continu est, en particulier, continu en zéro. Donc si on a un champ de déformation alors $\mathcal{Q} \subset \mathrm{C}_0(X, \mathcal{A})$ est inclus dans l'espace des sections continues en zéro et convient.

Réciproquement, remarquons qu'un champ de C^*-algèbres est continu si et seulement s'il est continu en tout point ; et de plus un champ est toujours continu en un point isolé de X. Donc si on a un champ de déformation en zéro $\mathcal{A} \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\rightarrow X$, on considère Y une partie de X telle que ;

- Y est localement compact ;
- $0 \in Y$;
- Le champ $(\mathcal{A}_\hbar)_{\hbar \in X}$ est continu en tout point de Y, par exemple si tout point de Y, différent de zéro, est isolé.
- 0 est point d'accumulation de Y.

Une telle partie Y existe toujours ; il suffit de prendre les valeurs d'une suite qui converge vers 0. Alors le champ restreint $\mathcal{A}|_Y \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\rightarrow Y$ possède évidemment une structure de champ continu (partout). En fait la restriction de X à Y fournit une surjection :

$$\mathrm{C}_0(X, \mathcal{A}) \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{C}_0(Y, \mathcal{A}|_Y).$$

Et $\mathcal{Q}|_Y$ fournit une sous-algèbre convenable pour avoir un champ de déformation, puisque

$$(\mathcal{Q}|_Y)_0 = \mathcal{Q}_0.$$

CQFD

Groupoïdes de déformation

Comme tout groupoïde continûment fibré moyennable induit un champ continu de C^*-algèbres, il est naturel de prendre la définition suivante :

Définition 2.1.14 — J'appelle *groupoïde de déformation* (resp. d'une algèbre de Poisson A, resp . d'une variété de Poisson M, resp. en zéro) la donnée $(G, \mathcal{Q})$ de :

- un groupoïde moyennable et continûment fibré (resp. en zéro) sur une partie X de $\mathbb{R}$, localement compacte, et qui a 0 comme point d'accumulation : $G \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\rightarrow X$;
- une sous-algèbre involutive $\mathcal{Q} \subset \mathrm{C}^*(G)$;

tels que $(\mathrm{C}^*(G), \mathcal{Q})$ soit un champ de déformation (resp. de A, resp. de M, resp. en zéro).

Remarque. — Si G est un groupoïde qui admet une structure de groupoïde de déformation, comme $\mathrm{C}^*(G_0)$ est commutative, alors G_0 est un fibré continu en groupes commutatifs.

Dans ce qui suit, on utilisera les définitions précédentes sous la forme :

Proposition 2.1.15 — Soient $(M, \{\cdot,\cdot\}_M)$ une variété de Poisson donnée, et $(G, \mathcal{Q})$ un groupoïde de déformation. Pour que G soit un groupoïde de déformation de M, il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme $\mathrm{C}_0(M) \xrightarrow[\sim]{\mathfrak{I}} \mathrm{C}^*(G_0)$ tel que :

- $\mathcal{Q}_0 \subset \mathfrak{I}(\mathrm{C}^1_0(M))$;
- $\forall f, f' \in \mathcal{Q}, \quad \{f_0, f'_0\}_0 = \mathfrak{I}\left\{\mathfrak{I}^{-1}(f_0), \mathfrak{I}^{-1}(f'_0)\right\}_M.$

Exemple. — Quantification des variétés de Lie-Poisson. C'est la construction de N. Landsman et B. Ramazan [Lan98, Ram98] ; on notera que dans ce cas il n'est aps nécessaire de supposer le groupoïde moyennable.

2.2 Un théorème de déformation des groupoïdes

En regard de la définition précédente, il est naturel de chercher à caractériser les groupoïdes de déformation. Dans ce qui suit je donne une condition *suffisante* assez large pour englober un grand nombre d'exemples. Il est pour cela nécessaire d'étendre la notion usuelle de fonction de classe C^∞ à des fonctions définies sur une partie A d'une variété M. On rappelle que tous les espaces topologiques considérés sont séparés, sauf mention du contraire.

Définition 2.2.1 — Soient M une variété, et A une partie de M. Une fonction $A \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ est dite C^∞ en un point x de $\overline{A}$ s'il existe V_x, un voisinage ouvert de x dans M, et une fonction $V_x \xrightarrow{\widetilde{f}_x} \mathbb{C}$ de classe C^∞ (au sens usuel) tels que :

$$f = \widetilde{f}_x \text{ sur } V_x \cap A.$$

Une fonction $A \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ est dite C^∞ sur A si elle est C^∞ en tout point $x \in \overline{A}$.

Notations : Avec les hypothèses de la définition précédente, je note $\mathrm{C}^\infty(A \subset M)$, l'espace des fonctions de classe C^∞ sur A, ou plus simplement $\mathrm{C}^\infty(A)$, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur M. On fera attention à ce que, pour A ouvert de M, l'espace $\mathrm{C}^\infty(A \subset M)$ ainsi défini ne coïncide pas avec l'espace $\mathrm{C}^\infty(A)$ usuel. De plus je note :

$$\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(A) \quad = \quad \mathrm{C}^\infty(A) \cap \mathrm{C}_{\mathrm{c}}(A).$$

Rappel important : si A est une partie de M et $\widetilde{f}$ une fonction définie sur M, en général on a l'inclusion :

$$\mathrm{Supp}\ \widetilde{f}\Big|_A \subset A \cap \mathrm{Supp}\, \widetilde{f},$$

mais l'égalité peut être fausse. En particulier, en général $\mathrm{C}_{\mathrm{c}}(M)|_A \neq \mathrm{C}_{\mathrm{c}}(A)$. Cependant, si M est un espace topologique séparé (resp. une variété séparée), et Ω un ouvert de M, toute fonction continue (resp. C^∞) définie sur Ω et à support compact admet un prolongement (unique s'il est nul hors de Ω) continu (resp. C^∞). Par exemple, on a :

$$\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega \cap A \subset M) \quad = \quad \mathrm{C}^\infty(A \subset M) \cap \mathrm{C}_{\mathrm{c}}(\Omega \cap A).$$

Lemme 2.2.2 — Soient M une variété paracompacte et A une partie de M. Notons toujours $\mathrm{C}^\infty(M)$, l'espace usuel de fonctions C^∞ sur M. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}^\infty(A) &= \mathrm{C}^\infty(M)|_A \\
\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(A) &= \left\{ f \in \mathrm{C}_{\mathrm{c}}(A) \;\middle|\; \exists \Omega \text{ ouvert de } M,\ \mathrm{Supp}\, f \subset \Omega, \text{ et } \exists \widetilde{f} \in \mathrm{C}^\infty(M),\ \widetilde{f}\Big|_{\Omega \cap A} = f|_{\Omega \cap A} \right\} \\
&= \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(M)|_A \cap \mathrm{C}_{\mathrm{c}}(A)
\end{aligned}$$

Si, de plus, M_0 est une sous-variété *fermée* de M et $A_0 = A \cap M_0$, les notations $\mathrm{C}^\infty(A_0)$ et $\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(A_0)$ ne sont pas ambigües, car :

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}^\infty(A_0 \subset M_0) &= \mathrm{C}^\infty(A_0 \subset M) \\
\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(A_0 \subset M_0) &= \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(A_0 \subset M) \\
\text{et } \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(A_0) &= \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(A)|_{A_0}
\end{aligned}$$

Si $\mathcal{S}$ est un recouvrement ouvert de M, on a :

$$\mathrm{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(A) = \sum_{\Omega \in \mathcal{S}} \mathrm{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(A \cap \Omega).$$

Si, de plus, A est localement fermée dans M, on a :

$$\mathrm{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(A) \quad = \quad \left\{ \widetilde{f} \in \mathrm{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(M) \;\middle|\; A \cap \operatorname{Supp} \widetilde{f} \text{ compact } \right\}\Big|_A,$$

et dans ce dernier cas, $\mathrm{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(A)$ est dense dans $\mathrm{C}_{\mathrm{c}}(A)$ pour la topologie de la norme uniforme.

Démonstration.

- $f \in \mathrm{C}^{\infty}(A)$ ***si et seulement si*** $f = \widetilde{f} \in \mathrm{C}^{\infty}(M)$ ***sur*** A ***:***
  En effet, si $f \in \mathrm{C}^{\infty}(A)$, pour tout $x \in \overline{A}$, il existe V_x et $V_x \xrightarrow{\widetilde{f}_x} \mathbb{C}$ de classe C^{∞} tels que $\widetilde{f}_x = f$ sur $V_x \cap A$. Alors les $(V(x))_{x \in \overline{A}}$ et $M - \overline{A}$ forment un recouvrement ouvert de M. Donc il existe une partition de l'unité de classe C^{∞} subordonnée à un sous-recouvrement localement fini [War, th. 1.11 p. 10] :

$$M \xrightarrow{\rho_i} \mathbb{R}_+ \;\; \mathrm{C}^{\infty} \;;\; \operatorname{Supp} \rho_0 \subset M - \overline{A} \;;\; \operatorname{Supp} \rho_i \subset V_{x_i} \;;\; \rho_0 + \sum_{i \in I} \rho_i = 1.$$

  Alors, comme $(\operatorname{Supp} \rho_i)_{i \in I}$ est une famille localement finie, on a $\widetilde{f} = \sum_{i \in I} \rho_i \widetilde{f}_{x_i} \in \mathrm{C}^{\infty}(M)$; et $\widetilde{f}$ coïncide avec f sur A.
- ***Expressions de*** $\mathrm{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(A)$ ***:***
  Si $f \in \mathrm{C}_{\mathrm{c}}(A)$ et Ω est un voisinage de $\operatorname{Supp} f$ dans M, il existe une fonction de classe C^{∞} :

$$\rho \in \mathrm{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(M, \mathbb{R}_+), \quad \rho = \begin{cases} 0 & \text{hors de } \Omega \\ 1 & \text{sur } \operatorname{Supp} f. \end{cases}$$

  Si $\widetilde{f} \in \mathrm{C}^{\infty}(M)$ et $\widetilde{f} = f$ sur $\Omega \cap A$, alors $\rho \widetilde{f} \in \mathrm{C}^{\infty}(\Omega)$ coïncide avec f sur tout A. On en tire trois conséquences :
  - on a l'inclusion :

$$\left\{ f \in \mathrm{C}_{\mathrm{c}}(A) \;\middle|\; \exists \Omega \text{ ouvert, } \operatorname{Supp} f \subset \Omega, \text{ et } \exists \widetilde{f} \in \mathrm{C}^{\infty}(M),\; f|_{\Omega \cap A} = \widetilde{f}\Big|_{\Omega \cap A} \right\} \subset \mathrm{C}^{\infty}(M)|_A,$$

    d'où l'égalité :

$$\left\{ f \in \mathrm{C}_{\mathrm{c}}(A) \;\middle|\; \exists \Omega \text{ ouvert, } \operatorname{Supp} f \subset \Omega, \text{ et } \exists \widetilde{f} \in \mathrm{C}^{\infty}(M),\; f|_{\Omega \cap A} = \widetilde{f}\Big|_{\Omega \cap A} \right\} = \mathrm{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(A),$$

    puisque l'inclusion inverse est évidente si on prend $\Omega = M$ et $\widetilde{f}$ un prolongement de $f \in \mathrm{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(A) \subset \mathrm{C}^{\infty}(M)|_A$.
  - Si de plus $f \in \mathrm{C}^{\infty}(A) = \mathrm{C}^{\infty}(M)|_A$, $\widetilde{f}$ est un prolongement de f ($\widetilde{f} = f$ sur A), et Ω est un voisinage relativement compact de $\operatorname{Supp} f$ — il en existe toujours car M est localement compact, alors $\rho \widetilde{f} \in \mathrm{C}^{\infty}(\Omega) = \mathrm{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(\Omega)$ *i.e.* $f \in \mathrm{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(M)|_A$. Compte-tenu de l'inclusion évidente :

$$\mathrm{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(A) \supset \mathrm{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(M)|_A \cap \mathrm{C}_{\mathrm{c}}(A),$$

    ceci prouve l'égalité :

$$\mathrm{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(A) = \mathrm{C}_{\mathrm{c}}(A) \cap \mathrm{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(M)|_A.$$

– Si T est un ouvert de M donné, f un élément de $\mathrm{C}^\infty(A) \cap \mathrm{C_c}(A \cap T)$, $\widetilde{f}$ un prolongement de f, et Ω est un voisinage relativement compact de $\operatorname{Supp} f$ *dans* T, alors :

$$\rho\widetilde{f} \in \mathrm{C}^\infty(\Omega) = \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\Omega) \subset \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(T).$$

Ceci prouve :

$$\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A \cap T) = \mathrm{C_c}(A) \cap \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(T)|_A .$$

– $\mathrm{C}^\infty(A_0 \subset M_0) = \mathrm{C}^\infty(A_0 \subset M)$ *(resp.* $\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}$*) :*
Comme M_0 est une sous-variété fermée de M, d'après la version C^∞ du théorème d'Urysohn [War, prop. 1.36 p. 29], on a :

$$\mathrm{C}^\infty(M_0) = \mathrm{C}^\infty(M)|_{M_0} .$$

Ainsi, d'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{C}^\infty(A_0 \subset M) &= \mathrm{C}^\infty(M)|_{A_0} \\ &= \mathrm{C}^\infty(M)|_{M_0}\big|_{A_0} \text{ car } A_0 \subset M_0 \\ &= \mathrm{C}^\infty(M_0)|_{A_0} \\ &= \mathrm{C}^\infty(A_0 \subset M_0). \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement $\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A_0 \subset M_0) = \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A_0 \subset M)$, d'après $\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A) = \mathrm{C}^\infty(A) \cap \mathrm{C_c}(A)$.

– $\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A_0) = \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A)|_{A_0}$ *:*
Comme A_0 est fermé dans A, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A)|_{A_0} &= (\mathrm{C}^\infty(M)|_A \cap \mathrm{C_c}(A))|_{A_0} \\ &= (\mathrm{C}^\infty(M)|_A)|_{A_0} \cap \mathrm{C_c}(A)|_{A_0} \\ &= \mathrm{C}^\infty(M)|_{A_0} \cap \mathrm{C_c}(A_0) \\ &= \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A_0) \end{aligned}$$

– $\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A) = \sum_{\Omega \in \mathcal{S}} \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A \cap \Omega)$ *:*
On a :

$$\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A \cap \Omega) = \mathrm{C}^\infty(A) \cap \mathrm{C_c}(A \cap \Omega) \subset \mathrm{C}^\infty(A) \cap \mathrm{C_c}(A) = \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A),$$

d'où $\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A) \supset \sum_{\Omega \in \mathcal{S}} \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A \cap \Omega)$.
Soit $f \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A)$, montrons que :

$$\exists \Omega_1, \ldots, \Omega_n \in \mathcal{S},\ \exists f_i \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A \cap \Omega_i),\ f = f_1 + \cdots + f_n.$$

Comme $\operatorname{Supp} f$ est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts $\Omega_1, \ldots, \Omega_n \in \mathcal{S}$. Comme M est paracompact il existe une partition de l'unité de classe C^∞ subordonné au recouvrement $M - \operatorname{Supp} f, \Omega_1, \ldots, \Omega_n$:

$$M \xrightarrow{\rho_i} \mathbb{R}_+ \text{ ; } \operatorname{Supp} \rho_0 \subset M - \operatorname{Supp} f \text{ ; } \operatorname{Supp} \rho_i \subset \Omega_i, \quad \rho_0 + \sum_{i=1}^{n} \rho_i = 1.$$

Soit $\widetilde{f} \in \mathrm{C}^\infty(M)$, un prolongement de f, il est clair que $f_i = \rho_i\widetilde{f}\Big|_A$ appartient à $\mathrm{C}^\infty(\Omega_i)|_A \cap \mathrm{C_c}(A) = \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A \cap \Omega_i)$ avec $f = f_1 + \cdots + f_n$.

– *Cas où A est localement fermé :*
Alors, par définition, il existe un ouvert T de M tel que $A = \overline{A} \cap T$. Donc, d'après ce qui précède :

$$\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A) = \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A \cap T) = \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(T)|_A \cap \mathrm{C_c}(A).$$

Or, si $\widetilde{f} \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(T)$, on a $\overline{A} \cap \operatorname{Supp} \widetilde{f} \subset \overline{A} \cap T = A$, donc

$$A \cap \operatorname{Supp} \widetilde{f} = \overline{A} \cap \operatorname{Supp} \widetilde{f} \text{ compact.}$$

Ainsi $\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A)$ est inclus dans $\left\{ \widetilde{f} \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(M) \;\middle|\; A \cap \operatorname{Supp} \widetilde{f} \text{ compact} \right\}\Big|_A$, et l'inclusion inverse provient directement de $\operatorname{Supp} \left.\widetilde{f}\right|_A \subset A \cap \operatorname{Supp} \widetilde{f}$.

– *Densité de* $\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A)$ *:*
Soit $f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}(A)$; montrons qu'on peut l'approcher uniformément sur A par des fonctions dans $\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A)$. D'abord f admet un prolongement $\widetilde{f} \in \mathrm{C}_\mathrm{c}(M)$ tel que $\operatorname{Supp} \widetilde{f} \cap A$ est compact. En effet A est ouvert dans $\overline{A}$, puisque A est localement fermé dans M, donc $\mathrm{C}_\mathrm{c}(A) \subset \mathrm{C}_\mathrm{c}(\overline{A})$. Par ailleurs, comme M est normal et $\overline{A}$ fermé, on a $\mathrm{C}_\mathrm{c}(\overline{A}) = \mathrm{C}_\mathrm{c}(M)|_{\overline{A}}$. Ainsi $\mathrm{C}_\mathrm{c}(A) \subset \mathrm{C}_\mathrm{c}(M)|_A$ *i.e.* f admet un prolongement continu sur M ; comme au point précédent quitte à multiplier ce prolongement par une fonction ρ continue à support compact qui vaut 1 sur $\operatorname{Supp} f$ et 0 hors de T, on voit que f admet un prolongement continue sur M tel que $\operatorname{Supp} \widetilde{f} \cap A$ est compact.
Alors on peut approcher $\widetilde{f}$ uniformément sur M, par des fonctions $\widetilde{f}_n \in \mathrm{C}^\infty(M)$, avec $\operatorname{Supp} \widetilde{f}_n \subset \operatorname{Supp} \widetilde{f}$. On a :

$$\operatorname{Supp} \left.\widetilde{f}_n\right|_A \subset A \cap \operatorname{Supp} \widetilde{f}, \text{ compact inclus dans } A,$$

et donc $\left.\widetilde{f}_n\right|_A \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A)$ avec :

$$\sup_{x \in A} \left| f(x) - \widetilde{f}_n(x) \right| \leq \sup_M |\widetilde{f} - \widetilde{f}_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

CQFD

Pour ce qui est des dérivations on a la définition et le résultat suivants :

Définition 2.2.3 — Soient M une variété paracompacte, et A une partie de M. Je dirai qu'une dérivation ∂ sur $\mathrm{C}^\infty(M)$ (resp. un champ de vecteurs $\mathcal{X}$ sur M) *passe au quotient sur* A s'il existe une dérivation $\partial|_A$ (resp. $\mathcal{X}|_A$) qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}^\infty(M) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & \mathrm{C}^\infty(M) \arrow[d] \\ \mathrm{C}^\infty(M)|_A = \mathrm{C}^\infty(A) \arrow[r, "\partial|_A"] & \mathrm{C}^\infty(A) \end{tikzcd}$$

Alors, j'appellerai $\partial|_A$ (resp. $\mathcal{X}|_A$) la *dérivation induite* par ∂ (resp. le *champ de vecteurs induit* par $\mathcal{X}$).

Proposition 2.2.4 — Dans les conditions de la définition, si $A \subset \overline{\mathring{A}}$, alors toutes les dérivations ∂ sur $\mathrm{C}^\infty(M)$ passent au quotient sur A. Si, de plus, A est localement fermée dans M, les dérivations induites $\partial|_A$ laissent $\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A)$ stable.

Démonstration.
En effet, si $\widetilde{f}, \widetilde{f}' \in \mathrm{C}^\infty(M)$ vérifient $\widetilde{f} = \widetilde{f}'$ sur A, alors, par continuité, c'est encore vrai sur $\overline{A}$, donc sur l'ouvert $\overset{\circ}{\overline{A}}$ de M ; ainsi $\partial\widetilde{f} = \partial\widetilde{f}'$ sur cet ouvert, donc, par continuité, sur $\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$, donc sur A, par hypothèse. Ainsi, $\widetilde{f} \longmapsto \partial\widetilde{f}\big|_A$ passe au quotient sur A, et donc ∂ aussi.
Si A est localement fermée, on sait d'après le lemme 2.2.2 que toute fonction $f \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A)$ admet un prolongement $\widetilde{f} \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(M)$ tel que $\mathrm{Supp}\,\widetilde{f} \cap A$ est compact. Alors on a :

$$\mathrm{Supp}\ \partial|_A f = \mathrm{Supp}\ \partial\widetilde{f}\Big|_A \subset \mathrm{Supp}\,\partial\widetilde{f} \cap A \subset \mathrm{Supp}\,\widetilde{f} \cap A,$$

donc $\partial|_A f$ est à support compact. CQFD

Si de plus M est fibré, je définis une application δ utile pour la suite.

Lemme 2.2.5 — Soient X une partie de $\mathbb{R}$ qui a 0 comme point d'accumulation, et A un espace topologique. Si $A \xrightarrow{p} X$ est une application surjective ouverte (resp. en zéro *i.e.* tout voisinage d'un point de $A_0 = p^{-1}\{0\}$ est envoyé par p sur un voisinage de 0), alors $A - A_0$ est dense dans A.

Démonstration.
Il suffit de montrer que tout point de A_0 est adhérent à $A - A_0 = \bigsqcup_{\hbar \neq 0} A_\hbar$. Or si U est un voisinage d'un point de A_0, il est envoyé par p sur un voisinage de 0 dans X. Comme 0 est point d'accumulation de X, $p(U)$ contient un $\hbar \neq 0$ *i.e.* $U \cap A_\hbar \neq \emptyset$. CQFD

Proposition 2.2.6 — Soient M une variété paracompacte, A une partie, et $M \xrightarrow{p} \mathbb{R}$ une submersion tels que :
- $X = p(A)$ a 0 comme point d'accumulation ;
- $A \xrightarrow{p|_A} p(A) = X$ est ouverte (resp. en zéro) ;
- il existe un champ de vecteurs $\mathcal{X}$ sur M vérifiant :
  - $dp(\mathcal{X}) = 1$.
  - toute courbe intégrale de $\mathcal{X}$ qui rencontre A ne peut rencontrer M_0 que dans A_0.

Alors :
1. Pour toute fonction $\widetilde{f} \in \mathrm{C}^\infty(M)$ nulle sur A_0, il existe des fonctions $\delta\widetilde{f} \in \mathrm{C}^\infty(M)$ telles que $\delta\widetilde{f} = \frac{1}{\imath p}\widetilde{f}$ sur $A - A_0$.
2. Pour toute fonction $f \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A)$ telle que $f = 0$ sur A_0, il existe une *unique* fonction $\delta f \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A)$ telle que $\delta f = \frac{1}{\imath p} f$ sur $A - A_0$.
3. Si $f \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(A)$ et $x \in A_0$, pour tout prolongement $V_x \xrightarrow{\widetilde{f}_x} \mathbb{C}$ de classe C^∞ de f au voisinage de x, on a $\delta f(x) = d_x\widetilde{f}_x(\mathcal{X})$.

Démonstration.

- *Construction de $\delta\widetilde{f}$:*
  Grâce à l'existence de partitions de l'unité de classe C^∞, il suffit de trouver une fonction $\delta\widetilde{f}$ de classe C^∞, définie seulement sur un voisinage W de M_0, et qui vaut $\delta\widetilde{f}(x) = \frac{1}{\imath p(x)}\widetilde{f}(x)$ sur $(A - A_0) \cap W$. Soit U l'ensemble des points x de M par lequel passe une courbe intégrale de $\mathcal{X}$ qui

croise M_0, en un point noté $\pi(x)$. C'est un voisinage de M_0. Sur tout voisinage W de M_0 inclus dans U on définit alors une fonction $\delta\widetilde{f}$ par :

$$\delta\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\imath p(x)}\Big(\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(\pi(x))\Big) & \text{sur } (M - M_0) \cap W \\ \frac{1}{\imath} d_x\widetilde{f}(\mathcal{X}) & \text{sur } M_0 \cap W. \end{cases}$$

L'hypothèse sur les courbes intégrales de $\mathcal{X}$ indique que π envoie $A \cap U$ dans A_0. Comme $\widetilde{f}$ est nulle sur A_0, on a $\delta\widetilde{f}(x) = \frac{1}{\imath p(x)}\widetilde{f}(x)$ sur $(A - A_0) \cap W$. Il reste à montrer que $\delta\widetilde{f}$ est de classe C^∞ pour un choix convenable de W.

Pour donner une expression explicite de π, j'introduis $V \xrightarrow{\Psi} M$, le flot de $\mathcal{X}$, défini sur un voisinage V de $\{0\} \times M$ dans $\mathbb{R} \times M$; je note $\hbar$ la coordonnée réelle dans $\mathbb{R} \times M$ (resp. V). Alors dans M, il existe un voisinage ouvert W de M_0 tel que :

$$M_0 \subset W \subset \{ x \in M \mid [-p(x), 0] \times \{x\} \subset V \},$$

et, quitte à remplacer W par $W \cap U$, on a $W \subset U$. Si $x \in W$ et $\hbar \in [-p(x), 0]$ on peut alors calculer :

$$\begin{aligned} p(\Psi(\hbar, x)) &= p(\Psi(0, x)) + \int_0^\hbar \frac{\partial}{\partial\hbar}(p \circ \Psi)(u, x)du \\ &= p(x) + \int_0^\hbar dp\left(\frac{\partial}{\partial\hbar}\Psi(u, x)\right)du \\ &= p(x) + \int_0^\hbar dp(\mathcal{X})du \\ &= p(x) + \hbar, \end{aligned}$$

et donc $p(\Psi(-p(x), x)) = 0$ *i.e.* $\Psi(-p(x), x) \in M_0$, d'où $\pi(x) = \Psi(-p(x), x)$. Il s'ensuit que $\delta\widetilde{f}$ est de classe C^∞ d'après la formule :

$$\begin{aligned} \delta\widetilde{f}(x) &= \frac{1}{\imath}\int_{-1}^0 \frac{\partial(\widetilde{f} \circ \Psi)}{\partial\hbar}(up(x), x)\,du \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\imath p(x)}\Big[\widetilde{f}(\Psi(0, x)) - \widetilde{f}(\Psi(-p(x), x))\Big] & \text{si } p(x) \neq 0 \\ \frac{1}{\imath} d_x\widetilde{f}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\hbar}\Big|_{\hbar=0}\right) & \text{si } p(x) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

– ***Existence et unicité de δf :***
Si $f \in C_c^\infty(A)$, je considère un prolongement $\widetilde{f} \in C^\infty(M)$. En prenant :

$$\delta f = \delta\widetilde{f}\Big|_A,$$

l'existence est assurée, puisque $\delta f \in C^\infty(A)$ par construction, et que δf et f ont même support, compact. En effet si $x \notin \operatorname{Supp} f$, alors il existe un voisinage O de x où $f = 0$; donc $\delta f = \frac{1}{\imath p} f = 0$ sur $O \cap (A - A_0)$, donc sur O par densité de $O \cap (A - A_0)$ dans O, *i.e.* $x \notin \operatorname{Supp} \delta f$; et réciproquement. L'unicité provient du lemme 2.2.5. En effet, puisque $A - A_0$ est dense dans A, δf, qui vaut $\frac{1}{\imath p} f$ sur $A - A_0$, ne dépend pas du choix du prolongement $\widetilde{f}$.

CQFD

Si $A = G$ est un groupoïde, on en déduit immédiatement le théorème

THÉORÈME 2.2.7 — *Soient X une partie de $\mathbb{R}$ localement compacte qui a 0 comme point d'accumulation, $G \xrightarrow{p_G} X$ un groupoïde continûment fibré (resp. en zéro) moyennable dont le système de Haar est noté $(\mu^u)_{u \in G^{(0)}}$, M une variété paracompacte, $M \xrightarrow{p} \mathbb{R}$ une submersion, tels que :*

1. $G \subset M$ *avec* $p_G = p|_G$ *;*

2. il existe un champ de vecteurs $\mathcal{X}$ *sur* M *vérifiant :*
   – $dp(\mathcal{X}) = 1$,
   – *toute courbe intégrale de* $\mathcal{X}$ *qui rencontre* G *ne peut rencontrer* M_0 *que dans* G_0,

3. $\mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(G \subset M)$ *est une sous-algèbre involutive de* $\mathrm{C}_c(G, \mu)$.

Alors $(G, \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(G))$ *est un groupoïde de déformation, et le crochet sur* $\mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(G)$ *vaut :*

$$\{ f, f' \}_G = \delta(f * f' - f' * f).$$

Démonstration.

– $\mathcal{Q}_0 = \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(G_0)$ *est dense dans* $\mathrm{C}^*(G_0)$ *:*
D'après la description par J. Renault de la topologie de $\mathrm{C}^*(G)$, la topologie induite sur $\mathrm{C}_\mathrm{c}(G)$ est celle de la convergence uniforme. Comme $\mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(G)$ est dense dans $\mathrm{C}_\mathrm{c}(G)$, et $\mathrm{C}_\mathrm{c}(G)$ est déjà dense dans $\mathrm{C}^*(G)$, par définition de $\mathrm{C}^*(G)$, on obtient que $\mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(G)$ est dense dans $\mathrm{C}^*(G)$. En particulier $\mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(G_0)$ est dense dans $\mathrm{C}^*(G_0)$.
– *Passage au quotient en* $\hbar = 0$ *:*
Si $f, f' \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(G)$ et $f = 0$ sur G_0, on a $f = \hbar\delta f$. Donc, pour $\hbar \neq 0$ on a

$$(\{ f, f' \}_G)_\hbar = \frac{1}{\imath\hbar}(f * f' - f' * f) = \frac{1}{\imath}(\delta f * f' - f' * \delta f).$$

L'égalité entre les membres extrêmes reste vraie, par continuité, en $\hbar = 0$, et comme $\mathrm{C}^*(G_0)$ est commutative cela signifie : $(\{ f, f' \}_G)_0 = 0$. CQFD

On applique le théorème avec $G = M$:

Corollaire. — Soit $G \xrightarrow{p} \mathbb{R}$ un groupoïde de Lie fibré sur $\mathbb{R}$, à base dénombrable d'ouverts. Alors $(G, \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(G))$ est un groupoïde de déformation si et seulement si G_0 est un fibré en groupes commutatifs. Dans ce cas le crochet vaut :

$$\{ f, f' \}_G = \delta(f * f' - f' * f),$$

Remarques. —

1. Même si G est un ouvert de M, il peut ne pas vérifier la condition d'existence d'un champ de vecteurs $\mathcal{X}$. Par exemple pour $M = \mathbb{R}^2$ est fibré par la première projection $p(x, y) = x$, et $G = M - \{ (0, y) \mid y \geq 0 \}$ avec la structure de groupoïde trivial, si $\widetilde{f} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ nulle sur $\{ (0, y) \mid y \leq 0 \}$ mais non nulle sur $\{ (0, y) \mid y > 0 \}$, alors $\frac{1}{\imath p}\widetilde{f}$ n'admet pas de prolongement dans $\mathrm{C}^\infty(M)$.
2. Néanmoins cette propriété d'existence d'un champ de vecteurs est vérifiée si G est une sous-variété à coins immergée dans M.

On remarque de plus le résultat suivant, important pour la suite :

Proposition 2.2.8 — Avec les hypothèses du théorème précédent, si de plus :
– X est compact (c'est toujours vrai, quitte à restreindre X) ;

– p est une fibration triviale :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, "p"'] & \simeq & \mathbb{R} \times M_0 \arrow[dl, "pr_1"] \\ & \mathbb{R}, & \end{tikzcd}$$

ce qui est équivalent à ce que le flot de $\mathcal{X}$ soit défini sur $\mathbb{R} \times M$ tout entier ;

– dans cette trivialisation on a $G \simeq X \times G_0$, en tant qu'espaces topologiques ;

alors l'algèbre de Poisson $(\mathcal{Q}_0, \{\cdot,\cdot\}_{G_0})$ admet une quantification stricte par déformation, au sens de Rieffel.

Démonstration.

D'après la proposition 2.1.9, il suffit de montrer qu'il existe une quantification fidèle T. D'après les hypothèses, pour tout $\hbar \in X$, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels : $\mathrm{C}_c^\infty(G_0) \simeq \mathrm{C}_c^\infty(G_\hbar)$. On définit donc T, pour $f_0 \in \mathrm{C}_c^\infty(M_0)$, par

$$\forall(\hbar, x) \in X \times G_0 \simeq G,\ T(f_0)(\hbar, x) = f_0(x),$$

de sorte que $T(f_0)$ appartienne à $\mathcal{Q} = \mathrm{C}_c^\infty(G)$. CQFD

2.3 Groupoïdes de déformation étales

Dans le théorème de déformation 2.2.7, toutes les conditions se lisent géométriquement sur le groupoïde, sauf la dernière portant sur la convolution et l'involution dans $\mathrm{C}_c^\infty(G)$, qui sont plus difficiles à vérifier. Cependant, si $\widetilde{G}$ est un groupoïde de Lie étale, et G un sous-groupoïde, cette dernière condition est automatique. Dans le cas des actions de groupes discrets, il est même alors possible, en plus, de donner une expression du crochet de Poisson sur $\mathcal{Q}_0 = \mathrm{C}_c^\infty(G_0)$.

Notations : Dans le cas où une ambiguïté est possible, je note $\underset{G}{*}$ le produit sur $\mathrm{C}^*(G)$, au lieu de $*$.

Théorème 2.3.1 — *Soit $\widetilde{G} \overset{p}{\longrightarrow\!\!\!>} \mathbb{R}$ un groupoïde fibré de Lie étale tel que $\widetilde{G}_0$ soit un fibré en groupes commutatifs. Soit G un sous-groupoïde étale tel que :*

1. *$X = p(G)$ a 0 comme point d'accumulation ;*
2. *la restriction*
$$G \overset{p|_G}{\longrightarrow\!\!\!>} X$$
est ouverte ;
3. *il existe un champ de vecteurs $\mathcal{X}$ sur $\widetilde{G}$ vérifiant :*
   - *$dp(\mathcal{X}) = 1$,*
   - *toute courbe intégrale de $\mathcal{X}$ qui rencontre G ne peut rencontrer $\widetilde{G}_0$ qu'en G_0.*

Alors $(G \longrightarrow\!\!\!> X, \mathrm{C}_c^\infty(G))$ est un groupoïde de déformation.

Je donne d'abord un lemme qui permet de calculer des produits de convolution. Si S, T sont deux bissections, et si $\gamma \in ST$, alors il existe d'uniques $(\gamma_1, \gamma_2) \in S \times T$ tels que $\gamma = \gamma_1\gamma_2$; on définit alors des applications $\varphi^b_{ST\to S}$ et $\varphi^s_{ST\to T}$ telles que $\varphi^b_{ST\to S}(\gamma)=\gamma_1$ et $\varphi^s_{ST\to T}(\gamma)=\gamma_2$, soit de manière plus formelle :

Lemme 2.3.2 — Soient U, V deux bissections (resp. ouvertes) d'un groupoïde G (resp. étale, resp. de Lie étale). Alors on a deux bijections (resp. homéomorphismes, resp. difféomorphismes) :

$$\begin{array}{ccccccc} U\supset UV^{-1}V & \xrightarrow{\varphi^s_{U\to V}} & VU^{-1}U \subset V, & U\supset VV^{-1}U & \xrightarrow{\varphi^b_{U\to V}} & UU^{-1}V \subset V \\ \gamma & \longmapsto & s|_V^{-1}(s(\gamma)) & \gamma & \longmapsto & b|_V^{-1}(b(\gamma)). \end{array}$$

Soient S, T deux bissections ouvertes d'un groupoïde G étale. Alors, si $f\in \mathrm{C_c}(S)$ et $f'\in \mathrm{C_c}(T)$, on a :

$$f*f'=\begin{cases}(f\circ\varphi^b_{ST\to S})(f'\circ\varphi^s_{ST\to T}) & \text{sur } ST=(ST)T^{-1}T=SS^{-1}(ST)\\ 0 & \text{hors de } ST.\end{cases}$$

Démonstration.

On vérifie facilement que tout élément de $ST^{-1}T=Ss(T)$, $\gamma=s.s(t)$ (resp. $\gamma=b(t).s\in TT^{-1}S=b(T)S$) est envoyé par $\varphi^s_{S\to T}$ (resp. $\varphi^b_{S\to T}$) sur $t.s(s)\in TS^{-1}ST=Ts(S)$ (resp. $b(s).t\in SS^{-1}T=b(S)T$). Ainsi :

$$\varphi^s_{S\to T}\circ\varphi^s_{T\to S}=Id_{TSS^{-1}}=\varphi^b_{S\to T}\circ\varphi^b_{T\to S},$$
$$\varphi^s_{T\to S}\circ\varphi^s_{S\to T}=Id_{STT^{-1}}=\varphi^b_{T\to S}\circ\varphi^b_{S\to T},$$

d'où la bijectivité (resp. l'homéomorphie, resp. la difféomorphie). Pour la formule du produit on a :

$$\forall\gamma\in ST,\ \exists!\delta\in G,\ \gamma\delta\in S \text{ et } \delta^{-1}\in T,$$

et alors

$$\gamma\delta=b|_S^{-1}(b(\gamma\delta))=b|_S^{-1}(b(\gamma)),$$
$$\delta^{-1}=s|_T^{-1}(s(\delta^{-1}))=s|_T^{-1}(s(\gamma)).$$

Donc

$$\begin{aligned} f*f'(\gamma) &= \sum_{\delta\in G^{s(\gamma)}} f(\gamma\delta)f'(\delta^{-1})\\ &= \begin{cases}0 & \text{si } \gamma\notin ST\\ (f\circ\varphi^b_{ST\to S})\times(f'\circ\varphi^s_{ST\to T})(\gamma) & \text{si } \gamma\in ST.\end{cases}\end{aligned}$$

CQFD

Le théorème 2.3.1 résulte alors directement du théorème 2.2.7 avec $M=\widetilde{G}$, et de la proposition suivante :

Proposition 2.3.3 — Soit G est un sous-groupoïde étale d'un groupoïde de Lie étale $\widetilde{G}$. Alors l'espace $\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(G)$ est une sous-algèbre involutive de $\mathrm{C}^*(G)$ — dense, d'après les arguments donnés pour démontrer le théorème 2.2.7. De plus, pour tout couple de bissections ouvertes S, T de $\widetilde{G}$, et tout couple de fonctions $(\widetilde{f},\widetilde{f}')\in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(S)\times \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(T)$ telles que $f=\widetilde{f}\big|_G\in \mathrm{C_c}(G)$ et $f'=\widetilde{f}'\big|_G\in \mathrm{C_c}(G)$, on a :

$$f\underset{G}{*}f'=\widetilde{f}\underset{\widetilde{G}}{*}\widetilde{f}' \text{ sur } (S\cap G)(T\cap G).$$

Démonstration.

- $f \underset{G}{*} f' = \widetilde{f} \underset{\widetilde{G}}{*} \widetilde{f}'$ *sur* $(S \cap G)(T \cap G)$:
  D'après le lemme 2.3.2 on a :

$$f \underset{G}{*} f' = \begin{cases} 0 & \text{hors de } (S \cap G)(T \cap G) \\ (f \circ \varphi^b_{(S\cap G)(T\cap G)\to S\cap G}) \times (f' \circ \varphi^s_{(S\cap G)(T\cap G)\to T\cap G}) & \text{sur } (S \cap G)(T \cap G), \end{cases}$$

$$\widetilde{f} \underset{\widetilde{G}}{*} \widetilde{f}' = \begin{cases} 0 & \text{hors de } ST \\ (\widetilde{f} \circ \varphi^b_{ST\to S}) \times (\widetilde{f}' \circ \varphi^s_{ST\to T}) & \text{sur } ST. \end{cases}$$

  Sur $(S \cap G)(T \cap G)$ on a aussi :

$$\varphi^b_{(S\cap G)(T\cap G)\to S\cap G} = b|^{-1}_{S\cap G} \circ b = b|^{-1}_{S}\, b = \varphi^b_{ST\to S}$$
$$\varphi^s_{(S\cap G)(T\cap G)\to T\cap G} = \varphi^s_{ST\to T},$$

  d'où $f \underset{G}{*} f' = \widetilde{f} \underset{\widetilde{G}}{*} \widetilde{f}'$.
- *Stabilité de* $\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(G)$ *par involution :*
  L'inverse i est un difféomorphisme de $\widetilde{G}$ tel que :

$$\forall \gamma \in G,\ \gamma^{-1} = i(\gamma).$$

  Donc si $f \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\widetilde{G})$ admet un prolongement $\widetilde{f} \in \mathrm{C}^\infty(\widetilde{G})$, alors $\overline{\widetilde{f} \circ i}$ est un prolongement de f^*. Ainsi $f^* \in \mathrm{C}^\infty(\widetilde{G})\Big|_G$.
- *Stabilité par produit :*
  Comme G est un groupoïde étale, il est recouvert par ses bissections ouvertes $S \in \mathcal{S}$, donc d'après le lemme 2.2.2, on a :

$$\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(G) = \sum_{S\in\mathcal{S}} \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(S \cap G).$$

  Il suffit ainsi de montrer que, pour tout couple de bissections ouvertes $S, T \in \mathcal{S}$, et toutes $f \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(S \cap G)$ et $f' \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(T \cap G)$, alors $f * f' \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(G)$.
  Soient $\widetilde{f} \in \mathrm{C_c}(S)$ et $\widetilde{f}' \in \mathrm{C_c}(T)$ des prolongements respectifs de f et f'. On a vu que $f \underset{G}{*} f' = \widetilde{f} \underset{\widetilde{G}}{*} \widetilde{f}'$ sur $(S\cap G)(T\cap G)$. On a $(S\cap G)(T\cap G) \subset ST \cap G$, mais l'égalité est fausse en général ; cependant, comme le produit de deux bissections ouvertes d'un groupoïde étale l'est aussi, $(S \cap G)(T \cap G)$ est un ouvert de G, *i.e.* il existe U ouvert de $\widetilde{G}$ tel que $(S \cap G)(T \cap G) = U \cap G$. Alors U est un voisinage de $\operatorname{Supp} f \underset{G}{*} f'$, et $f \underset{G}{*} f'$ coïncide avec $\widetilde{f} \underset{\widetilde{G}}{*} \widetilde{f}' \in \mathrm{C}^\infty(\widetilde{G})$ sur $U \cap G$, donc, d'après le lemme 2.2.2, cela entraîne $f \underset{G}{*} f' \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(G)$. CQFD

On se place désormais dans un cas particulier :

Proposition 2.3.4 — Un groupoïde étale (resp. de Lie étale) admet un recouvrement par des bissections ouvertes disjointes qui forment un groupe $\mathcal{S}$, si et seulement si c'est le groupoïde de l'action d'un groupe discret dénombrable sur un espace localement compact (resp. une variété) à base dénombrable d'ouverts, par homéomorphismes (resp. difféomorphismes).

Démonstration.

Le groupoïde de l'action d'un groupe discret $\mathcal{S}$ sur un espace $G^{(0)}$ satisfait aux hypothèses puisque

$$G^{(0)} \rtimes \mathcal{S} = \bigsqcup_{S \in \mathcal{S}} G^{(0)} \times \{S\}.$$

Inversement, si on considère l'action d'un groupe $\mathcal{S}$ de bissections ouvertes disjointes sur $G^{(0)}$ donnée par :

$$T.u = b\left(s|_T^{-1}(u)\right),$$

on peut vérifier qu'on a un isomorphisme de groupoïdes (resp. de Lie) étales :

$$\begin{array}{ccc} G^{(0)} \rtimes \mathcal{S} & \longrightarrow & G \\ (u, T) & \longmapsto & \varphi_T^s(u) = s|_T^{-1}(u). \end{array}$$

CQFD

Notations : Dans les hypothèses de la proposition précédente, pour tout couple de bissections $S, T \in \mathcal{S}$, l'application $\varphi^b_{ST \to S}$ (resp. $\varphi^s_{TS \to S}$) est un homéomorphisme (resp. difféomorphisme) de ST sur $S = ST(ST)^{-1}S$ (resp . TS sur $S = S(TS)^{-1}TS$). On peut donc définir les applications :

$$\begin{array}{ccc} G = \bigsqcup_{S \in \mathcal{S}} ST & \xrightarrow{\varphi_T^b} & \bigsqcup_{S \in \mathcal{S}} S = G \\ \gamma \in ST & \longmapsto & \varphi^b_{ST \to S}(\gamma) = b|_S^{-1}(b(\gamma)), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G = \bigsqcup_{S \in \mathcal{S}} TS & \xrightarrow{\varphi_T^s} & \bigsqcup_{S \in \mathcal{S}} S = G \\ \gamma \in TS & \longmapsto & \varphi^s_{TS \to S}(\gamma) = s|_S^{-1}(s(\gamma)). \end{array}$$

Proposition 2.3.5 — Soit un groupoïde de Lie fibré étale $\widetilde{G} \overset{p}{\twoheadrightarrow} \mathbb{R}$, tel que $\widetilde{G}_0$ est un fibré en groupes commutatifs, et tel que $\widetilde{G}$ admet un recouvrement par un groupe $\mathcal{S}$ de bissections ouvertes disjointes. Alors, pour toute bissection $T \in \mathcal{S}$ et tout champ de vecteur $\mathcal{X}$ sur $\widetilde{G}$ tel que $dp(\mathcal{X}) = 1$, la fonction $\mathcal{X}^T$ sur $\widetilde{G}_0$ définie par la formule :

$$\mathcal{X}^T(\gamma) = d\varphi_T^b(\mathcal{X}({\varphi_T^b}^{-1}(\gamma))) - \varphi_T^s(\mathcal{X}({\varphi_T^s}^{-1}(\gamma))),$$

est un champ de vecteur sur $\widetilde{G}_0$.

Démonstration.

La définition de $\mathcal{X}^T$ fait que, pour tout point $\gamma \in \widetilde{G}_0$, on a $\mathcal{X}^T(\gamma) \in T_\gamma \widetilde{G}$; il suffit donc de montrer que le vecteur $\mathcal{X}^T$ est en fait tangent à $\widetilde{G}_0$. Comme p est une submersion et $\widetilde{G}_0 = p^{-1}\{0\}$, on a $T\widetilde{G}_0 = \ker dp$; par ailleurs p est une fibration de groupoïde, donc $p \circ b = p$ (resp. $p \circ s = p$), d'où, sur ST :

$$p \circ \varphi_T^b = p \circ b \circ \varphi_T^b = p \circ (b \circ b|_S^{-1}) \circ b = p \circ b = p,$$

d'où, pour $\gamma' = {\varphi_T^b}^{-1}(\gamma)$:

$$dp(d_{\gamma'}\varphi_T^b(\mathcal{X}(\gamma'))) = dp(\mathcal{X}(\gamma')) = 1,$$

et de même, comme $\gamma' = {\varphi_T^s}^{-1}(\gamma)$, d'après la commutativité de $\widetilde{G}_0$, on a :

$$dp(d_{\gamma'}\varphi_T^s(\mathcal{X}(\gamma'))) = dp(\mathcal{X}(\gamma')) = 1,$$

donc :

$$dp(\mathcal{X}^T(\gamma)) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{X}^T(\gamma) \in T_\gamma \widetilde{G}_0.$$

CQFD

Théorème 2.3.6 — *Dans les conditions du théorème 2.3.1, si de plus :*

- $G_0 \subset \overset{\circ}{\overline{G_0}}$ *; en particulier, d'après la proposition 2.2.4, tous les champs de vecteurs sur* $\widetilde{G}_0$ *passent au quotient sur* G_0*, au sens de la définition 2.2.3 ;*
- $\widetilde{G}$ *est le groupoïde de l'action d'un groupe discret dénombrable sur une variété à base dénombrable d'ouverts, par difféomorphismes ;*

alors, pour toutes $f_0, f_0' \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(G_0)$*, on a :*

$$\{\, f_0, f_0' \,\}_{G_0} = \frac{1}{\imath} \sum_{T \in \mathcal{S}} \left(\left(\mathcal{X}^T\big|_{G_0} \right) f_0 \underset{G_0}{*} f_0'\big|_T - f_0\big|_T \underset{G_0}{*} \left(\mathcal{X}^T\big|_{G_0} \right) f_0' \right).$$

Démonstration.

- *Réduction à des fonctions supportées par des bissections :*
Comme $\mathcal{S}$ est un recouvrement de $\widetilde{G}$ par des ouverts *disjoints*, d'après le lemme 2.2.2, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(G) &= \bigoplus_{S \in \mathcal{S}} \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(G \cap S), \\ f_0 &= \sum_{S \in \mathcal{S}} f_0|_S\,. \end{aligned}$$

Par bilinéarité du crochet de Poisson, on a alors :

$$\{\, f_0, f_0' \,\}_{G_0} = \sum_{S,T \in \mathcal{S}} \{\, f_0|_S\,, f_0'|_T \,\}_{G_0}\,.$$

Il suffit donc de montrer que, pour tout couple de bissections ouvertes $S, T \in \mathcal{S}$ et tout couple de fonctions $f_0 \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(S \cap G_0)$, $f_0' \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(T \cap G_0)$, on a :

$$\{\, f_0, f_0' \,\}_{G_0} = \frac{1}{\imath} \left(\mathcal{X}^T\big|_{G_0} f_0 \underset{G_0}{*} f_0' - f_0 \underset{G_0}{*} \mathcal{X}^S\big|_{G_0} f_0' \right).$$

- *Expression de* $\{\, f_0, f_0' \,\}_{G_0}$ *à partir de prolongements :*
Pour tous les prolongements $\widetilde{f} \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(S)$ et $\widetilde{f}' \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(T)$ de f_0 et f_0' tels que $f = \widetilde{f}\Big|_G$ et $f' = \widetilde{f}'\Big|_G$ appartiennent à $\mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(G)$, d'après la proposition précédente, on sait que :

$$f \underset{G}{*} f' = \widetilde{f} \underset{\widetilde{G}}{*} \widetilde{f}' \text{ sur } (S \cap G)(T \cap G) \text{ et } f' \underset{G}{*} f = \widetilde{f}' \underset{\widetilde{G}}{*} \widetilde{f} \text{ sur } (T \cap G)(S \cap G).$$

Donc, comme G_0 est un fibré en groupes *commutatif*, d'après le troisième point de la proposition 2.2.6, en tout point γ de l'ouvert :

$$(T \cap G_0)(S \cap G_0) = ((S \cap G)(T \cap G) \cap (T \cap G)(S \cap G)) \cap G_0,$$

on a :

$$\begin{aligned}
\{f_0, f_0'\}_{G_0}(\gamma) &= \{f, f'\}_G(\gamma) \\
&= \delta(f \underset{G}{*} f' - f' \underset{G}{*} f)(\gamma) \\
&= d_\gamma(\widetilde{f} \underset{\widetilde{G}}{*} \widetilde{f}' * \widetilde{f}' \underset{\widetilde{G}}{*} \widetilde{f})(\mathcal{X}).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, si $\gamma \notin \overline{(T \cap G_0)(S \cap G_0)}$, il existe un voisinage de γ et des prolongements $f, f' \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\widetilde{G})$ de f_0 et f_0' tels que $f * f' - f' * f$ soit nulle sur ce voisinage ; donc :

$$\begin{aligned}
\{f_0, f_0'\}_{G_0}(\gamma) &= \{f, f'\}_G(\gamma) \\
&= \delta(f \underset{G}{*} f' - f' \underset{G}{*} f)(\gamma) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Et, par continuité, cela reste vrai pour tout $\gamma \notin (T \cap G_0)(S \cap G_0)$.

– *Calcul de* $d\gamma(\widetilde{f} \underset{\widetilde{G}}{*} \widetilde{f}' - \widetilde{f}' \underset{\widetilde{G}}{*} \widetilde{f})$*, pour* $\widetilde{f}, \widetilde{f}' \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(S) \times \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(T)$ *:*

Soient $\widetilde{f} \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(S)$ et $\widetilde{f}' \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(T)$, on sait que le produit s'écrit :

$$\begin{aligned}
\widetilde{f} \underset{\widetilde{G}}{*} \widetilde{f}' &= \begin{cases} 0 & \text{hors de } ST \\ (f \circ \varphi^b_{ST \to S}) \times (f' \circ \varphi^s_{ST \to T}) & \text{sur } ST, \end{cases} \\
\widetilde{f}' \underset{\widetilde{G}}{*} \widetilde{f} &= \begin{cases} 0 & \text{hors de } TS \\ (f' \circ \varphi^b_{TS \to T}) \times (f \circ \varphi^s_{TS \to S}) & \text{sur } TS. \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme $\widetilde{G}_0$ est un fibré en groupes commutatifs on a $ST \cap \widetilde{G}_0 = TS \cap \widetilde{G}_0$; et $b = s$ sur G_0 entraîne que, pour $\gamma \in ST \cap \widetilde{G}_0 = TS \cap \widetilde{G}_0$, on a :

$$\varphi^s_{ST \to T}(\gamma) = \varphi^b_{TS \to T}(\gamma) \text{ noté } \gamma_T \ ; \ \varphi^s_{TS \to S}(\gamma) = \varphi^b_{ST \to S}(\gamma) \text{ noté } \gamma_S \ ;$$

et donc :

$$\begin{aligned}
&d_\gamma(\widetilde{f} \underset{\widetilde{G}}{*} \widetilde{f}' - \widetilde{f}' \underset{\widetilde{G}}{*} \widetilde{f})(\mathcal{X}) \\
&= \frac{1}{\imath} d_\gamma \left((\widetilde{f} \circ \varphi^b_{ST \to S})(\widetilde{f}' \circ \varphi^s_{ST \to T}) - (\widetilde{f}' \circ \varphi^b_{TS \to T})(\widetilde{f} \circ \varphi^s_{TS \to S}) \right) (\mathcal{X}(\gamma)) \\
&= \frac{1}{\imath} d_{\gamma_S} \widetilde{f} \left(d_\gamma \varphi^b_{ST \to S}(\mathcal{X}(\gamma)) \right) \ \widetilde{f}'(\gamma_T)) + \frac{1}{\imath} \widetilde{f}(\gamma_S) \ d_{\gamma_T} \widetilde{f}' \left(d_\gamma \varphi^s_{ST \to T}(\mathcal{X}(\gamma)) \right) \\
&\quad - \frac{1}{\imath} d_{\gamma_T} \widetilde{f}' \left(d_\gamma \varphi^b_{TS \to T}(\mathcal{X}(\gamma)) \right) \ \widetilde{f}(\gamma_S) - \frac{1}{\imath} \widetilde{f}'(\gamma_T) \ d_{\gamma_S} \widetilde{f} \left(d_\gamma \varphi^s_{TS \to S}(\mathcal{X}(\gamma)) \right) \\
&= \frac{1}{\imath} d_{\gamma_S} \widetilde{f} \left(d_\gamma \varphi^b_{ST \to S}(\mathcal{X}(\gamma)) - d_\gamma \varphi^s_{TS \to S}(\mathcal{X}(\gamma)) \right) \ \widetilde{f}'(\gamma_T) \\
&\quad - \frac{1}{\imath} \widetilde{f}(\gamma_S) \ d_{\gamma_T} \widetilde{f}' \left(d_\gamma \varphi^b_{TS \to T}(\mathcal{X}(\gamma)) - d_\gamma \varphi^s_{ST \to T}(\mathcal{X}(\gamma)) \right) \\
&= \frac{1}{\imath} \left(d_{\gamma_S} \widetilde{f}(\mathcal{X}^T(\gamma_S)) \widetilde{f}'(\gamma_T) - \widetilde{f}(\gamma_S) \, d_{\gamma_T} \widetilde{f}' \left(\mathcal{X}^S(\gamma_T) \right) \right).
\end{aligned}$$

– *Calcul du crochet de Poisson :*
Ainsi, si $\gamma \in G_0$, on a :

$$\begin{aligned}
&\{f_0, f_0'\}_{G_0}(\gamma) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\imath}\left(d_{\gamma_S}\widetilde{f}\left(\mathcal{X}^T(\gamma_S)\right)\ \widetilde{f}'(\gamma_T) - \widetilde{f}((\gamma_S))\ d_{\gamma_T}\widetilde{f}'\left(\mathcal{X}^S(\gamma_T)\right)\right) & \text{si } \gamma \in (S \cap G_0)(T \cap G_0) \\ 0 & \text{si } \gamma \notin (S \cap G_0)(T \cap G_0) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\imath}\left(\left(\mathcal{X}^T|_{G_0}(\gamma_S) f_0\right)\ f_0'(\gamma_T) - f_0((\gamma_S))\ \left(\mathcal{X}^S|_{G_0}(\gamma_T) f_0'\right)\right) & \text{si } \gamma \in (S \cap G_0)(T \cap G_0) \\ 0 & \text{si } \gamma \notin (S \cap G_0)(T \cap G_0) \end{cases} \\
&= \frac{1}{\imath}\left(\left(\mathcal{X}^T|_{G_0}\right) f_0 \underset{G_0}{*} f_0' - f_0 \underset{G_0}{*} \left(\mathcal{X}^S|_{G_0}\right) f_0'\right),
\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte du lemme 2.3.2. CQFD

2.4 Isomorphisme de Gel'fand étale

Ayant maintenant une large classe de groupoïdes de déformation, je cherche à déterminer si ces groupoïdes déforment une variété de Poisson M, et laquelle. D'après la proposition 2.1.15, il faut trouver un isomorphisme :

$$\mathrm{C}_0(M) \xrightarrow[\sim]{\mathfrak{I}} \mathrm{C}^*(G_0),$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{I}^{-1}$ est un isomorphisme de Gel'fand (cf. paragraphe 1.5.4) pour $\mathrm{C}^*(G_0)$.

Par ailleurs, comme l'algèbre $\mathrm{C}^*(G_0)$ est commutative, on a vu que G_0 est nécessairement un fibré continu en groupes commutatifs. Dans le cas particulier où G_0 est un groupe commutatif $\mathtt{G}$, on connaît une réponse au problème, fournie par la transformation de Fourier qui est un isomorphisme de Gel'fand :

$$\mathrm{C}^*(\mathtt{G}) \xrightarrow[\sim]{\mathcal{F}=\mathfrak{I}^{-1}} \mathrm{C}_0(\widehat{\mathtt{G}}).$$

Je donne ici une extension de ce résultat à certains fibrés en groupes, non nécessairement localement triviaux.

Transformation de Fourier

Dans le cas d'un groupe commutatif localement compact on a les définitions et résultats classiques suivants :

DÉFINITION 2.4.1 — Soit $\mathtt{G}$ un groupe *commutatif* localement compact ; on note $\widehat{\mathtt{G}}$ l'espace des caractères, *i.e.* les morphismes de groupes continus de $\mathtt{G}$ à valeurs dans $\mathbb{T}$.

On munit $\widehat{\mathtt{G}}$ de la topologie la moins fine qui rend les $\chi \in \widehat{\mathtt{G}} \longmapsto \langle \chi | g \rangle$ $(g \in \mathtt{G})$ continues. Elle est localement compacte, et [EMS2, prop. 8.2 p. 256-258] c'est aussi la topologie qui admet comme base de voisinages d'un point $\chi_0 \in \widehat{\mathtt{G}}$ les :

$$\left\{ \chi \in \widehat{\mathtt{G}} \;\middle|\; \sup_{g \in K} |\chi_0 - \chi|(g) < \varepsilon \right\}, \ (K \text{ compact de } \mathtt{G},\ \varepsilon > 0).$$

Alors $\widehat{\mathtt{G}}$ est un groupe topologique, et [BouTS, chap. II §1 n°1 p. 110] le crochet de dualité est continu :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathtt{G}} \times \mathtt{G} & \longrightarrow & \mathbb{T} \\ (\chi, g) & \longmapsto & \langle \chi | g \rangle \,. \end{array}$$

Proposition 2.4.2 — La transformation de Fourier :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathtt{G}} & \xrightarrow{\rho} & \operatorname{Sp} L^1(\mathtt{G}) \simeq \operatorname{Sp} \mathrm{C}^*(\mathtt{G}) \\ \chi & \longmapsto & \left(f \in L^1(\mathtt{G}) \mapsto (\mathcal{F}f)(\chi) = \int_{\mathtt{G}} f(g) \langle \chi | g \rangle \, dg \right) \end{array}$$

est un homéomorphisme [BouTS, prop. 1 p. 111 et cor. 1 p. 113].

On obtient ainsi un isomorphisme de Gel'fand pour $\mathrm{C}^*(\mathtt{G})$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}^*(\mathtt{G}) \arrow[rr, "\mathcal{G}_{\mathtt{G}}", "\sim"'] \arrow[dr] & & \mathrm{C}_0(\widehat{\mathtt{G}}) \\ & \mathrm{C}_0(\operatorname{Sp} \mathrm{C}^*(\mathtt{G})). \arrow[ur, "\rho^*"'] & \end{tikzcd}$$

Par analogie on introduit la définition suivante :

Définition 2.4.3 — J'appelle *fibré dual* d'un fibré en groupes commutatifs localement compacts $G \longrightarrow\!\!\!\!\!\to G^{(0)}$, le fibré en groupes commutatifs localement compacts :

$$\widehat{G} = \bigsqcup_{u \in G^{(0)}} \widehat{G}(u).$$

J'appelle crochet de dualité l'application :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{G} * G & \longrightarrow & \mathbb{T} \\ (\chi, \gamma) \in \widehat{G}(u) \times G(u) & \longmapsto & \langle \chi | \gamma \rangle \,, \end{array}$$

où j'ai noté $\widehat{G} * G$ le produit fibré par les projections $G \overset{p}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\to} G^{(0)}$ et $\widehat{G} \overset{\widehat{p}}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\to} G^{(0)}$:

$$\widehat{G} * G = \left\{ (\chi, \gamma) \in \widehat{G} \times G \;\middle|\; \widehat{p}(\chi) = p(\gamma) \right\}.$$

Pour toute topologie sur G et tout système de Haar μ sur $\widehat{G}$ je définis la *transformation de Fourier* $\mathcal{F}$ d'une fonction $f \in \mathrm{C_c}(G)$ par :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{G} & \xrightarrow{\mathcal{F}f} & \mathbb{C} \\ \chi & \longmapsto & \int_{\widehat{G}(\widehat{p}(\chi))} f(\gamma) \langle \chi | \gamma \rangle \, \mu^{\widehat{p}(\chi)}(\gamma) \end{array}$$

Si le système de Haar n'est pas continu, la fonction $\mathcal{F}f$ n'a *a priori* aucune régularité, et il n'y a donc pas d'isomorphisme de Gel'fand, si tant est qu'on ait muni $\widehat{G}$ d'une topologie globale naturelle qui prolonge celle des $\widehat{G(u)}$. Mais si G est un fibré continu en groupes commutatifs, tout s'arrange puisqu'on a la bijection :

$$\mathrm{Sp}\,\mathrm{C}^*(G) = \bigsqcup_{u \in G^{(0)}} \mathrm{Sp}\,\mathrm{C}^*(G(u)) \simeq \bigsqcup_{u \in G^{(0)}} \widehat{G}(u).$$

Cette bijection n'est autre que celle donnée par le théorème de décomposition des représentations de J. Renault [Ren].

Proposition 2.4.4 — Soit G un fibré *continu* en groupes commutatifs. Si on munit $\widehat{G}$ de la topologie de $\mathrm{Sp}\,\mathrm{C}^*(G)$, alors la transformation de Fourier se prolonge en isomorphisme de Gel'fand pour $\mathrm{C}^*(G)$:

$$\mathrm{C}^*(G) \xrightarrow[\sim]{\mathcal{F}} \mathrm{C}_0(\widehat{G}).$$

Pour les fibrés en groupes commutatifs étales on peut reconnaître la topologie du spectre, abstraite, au moyen du résultat suivant :

Proposition 2.4.5 — Soit G un fibré en groupes commutatifs étale. Si on munit $\widehat{G}$ d'une topologie localement compacte et normale telle que :

1. la projection $\widehat{G} \overset{\widehat{p}}{\twoheadrightarrow} G^{(0)}$ est continue et propre, ou, de manière équivalente [BouTG, chap. 1, §10, n°2, th. 1 p.75], $\widehat{p}$ est fermée et chaque $\widehat{G}(u)$ est compact ;
2. le crochet de dualité est continu ;

alors la transformation de Fourier se prolonge en isomorphisme de Gel'fand de $\mathrm{C}^*(G)$:

$$\mathrm{C}^*(G) \xrightarrow[\sim]{\mathcal{F}} \mathrm{C}_0(\widehat{G}).$$

Une autre manière de traduire ce résultat est qu'il existe une unique topologie sur $\widehat{G}$ qui réalise ces conditions, à savoir la topologie du spectre.

Démonstration.

- *Continuité de $\mathcal{F}f$ pour $f \in \mathrm{C}_c(G)$:*
  On s'inspire de la méthode de [Co79, section 2.2], reprise aussi dans [Ren, prop. 1.1 p. 48] :
  - La fonction

$$\begin{array}{ccc} G * \widehat{G} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\gamma, \chi) & \longmapsto & f(\gamma)\,\langle \gamma | \chi \rangle \end{array}$$

  est continue. Comme p et $\widehat{p}$ sont continues, $G * \widehat{G}$ est fermé dans l'espace $G \times \widehat{G}$, qui est normal, puisque G est localement compact à base dénombrable d'ouverts. D'après le théorème d'Urysohn [BouTG, chap. IX, §4, n°2 th. 2 p. 44 et cor. p. 45], cette fonction admet donc un prolongement continu k défini sur $G \times \widehat{G}$ tout entier.

– Alors, d'après [BouTG, chap. X, §3, n°4 th. 3 p. 28], la fonction suivante est continue :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{G} & \longrightarrow & \mathrm{C}_c(G) \\ \chi & \longmapsto & k(.,\chi). \end{array}$$

– Et la continuité du système de Haar donne celle de :

$$\begin{array}{ccc} G^{(0)} \times \widehat{G} & \xrightarrow{\quad l \quad} & \mathbb{C} \\ (u,\chi) & \longmapsto & \displaystyle\int_{G(u)} k(\gamma,\chi)\mu^u(\gamma). \end{array}$$

Comme $\mathcal{F}f(\chi) = l(p(\chi),\chi)$ on en déduit la continuité de $\mathcal{F}f$.

– *$\mathcal{F}f$ tend vers 0 a l'infini :*
En effet cette fonction est même à support compact puisque :

$$|\mathcal{F}f(\chi)| \leq \int |f(\gamma)|\mu(\gamma)$$

est nul en dehors du compact $\widehat{p}^{-1}(p(\operatorname{Supp} f))$.

– *$\mathcal{F}$ est un homomorphisme d'algèbres involutives de $\mathrm{C}_c(G)$ dans $\mathrm{C}_0(\widehat{G})$:*
En effet, si $u = \widehat{p}(\chi)$, on calcule :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * f')(\chi) &= \int_{G(u)} \langle \gamma|\chi \rangle \, (f * f')(\gamma)\mu(\gamma) \\
&= \int_{G(u)} \langle \gamma|\chi \rangle \left(\int_{G(u)} f(\gamma\delta) f'(\delta^{-1})\mu(\delta) \right) \mu(\gamma) \\
&= \int_{G(u)} \langle \delta^{-1}|\chi \rangle \, f'(\delta^{-1}) \left(\int_{G(u)} \langle \gamma\delta|\chi \rangle \, f(\gamma\delta)\mu(\gamma) \right) \mu(\delta) \quad \text{(th. de Fubini)} \\
&= \int_{G(u)} \langle \delta^{-1}|\chi \rangle \, f'(\delta^{-1}) \left(\int_{G(u)} \langle \varepsilon|\chi \rangle \, f(\varepsilon)\mu(\varepsilon) \right) \mu(\delta) \quad \text{(invariance à gauche)} \\
&= \int_{G(u)} \langle \varphi|\chi \rangle \, f'(\varphi) \left(\int_{G(u)} \langle \varepsilon|\chi \rangle \, f(\varepsilon)\mu(\varepsilon) \right) \mu(\varphi) \\
&= \mathcal{F}(f')(\chi)\mathcal{F}(f)(\chi),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f^*)(\chi) &= \int_{G(u)} \langle \gamma|\chi \rangle \, \overline{f(\gamma^{-1})}\mu(\gamma) \\
&= \overline{\int_{G(u)} \langle \gamma^{-1}|\chi \rangle \, f(\gamma^{-1})\mu(\gamma)} \quad \text{(unimodularité)} \\
&= \overline{\mathcal{F}(f)(\chi)}
\end{aligned}$$

– *Injectivité et continuité de $\mathcal{F}$:*
Comme $\mathrm{C}^*(G)$ est la C^*-algèbre du champ continu $\mathrm{C}^*(G(u))$ on sait que :

$$\|f\|_{\mathrm{C}^*(G)} = \sup_u \|f_u\|_{\mathrm{C}^*(G(u))}.$$

Par ailleurs, soit π_u le morphisme $f \longmapsto f_u$, j_u l'inclusion de $\widehat{G}(u)$ dans $\widehat{G}$, qui est propre car $\widehat{G}(u)$ est fermé dans $\widehat{G}$, et soit $\mathcal{F}_u$ la transformée de Fourier-Gel'fand du groupe $\widehat{G}(u)$ (c'est une isométrie). On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}^*(G) \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\pi_u"'] & \mathrm{C}_0(\widehat{G}) \arrow[d, "j_u^*"'] \\ \mathrm{C}^*(G(u)) \arrow[r, "\mathcal{F}_u"] & \mathrm{C}_0(\widehat{G}(u)) \end{tikzcd}$$

$$\|f\|_{\mathrm{C}^*(G)} = \sup_u \|\pi_u(f)\|_{\mathrm{C}^*(G(u))} = \sup_u \sup_{\widehat{G}(u)} |\mathcal{F}_u(\pi_u f)| = \|\mathcal{F}f\|_\infty.$$

Donc $\mathcal{F}$ est isométrique, et en particulier injective.

– *Surjectivité de $\mathcal{F}$:*
 Comme $\mathcal{F}(\mathrm{C}^*(G))$ est une sous-algèbre involutive fermée de $\mathrm{C}_0(\widehat{G})$, d'après le théorème de Stone-Weierstrass, il suffit de montrer qu'elle sépare les points de $\widehat{G}$.
 Soient $\chi \neq \chi' \in \widehat{G}$; deux cas se présentent :
 – $u = \widehat{p}(\chi) \neq \widehat{p}(\chi') = u'$.
 Alors il existe $f \in \mathrm{C_c}(G(u))$ telle que $(\mathcal{F}_u f)(\chi) = 1$. Comme $G(u)$ est fermé dans l'espace normal G, f se prolonge continûment ; soit φ est une fonction continue à support compact qui vaut 1 sur $\operatorname{Supp} f$ et 0 sur $G(u')$ on a $\mathcal{F}(\varphi f)$ qui sépare χ et χ'.
 – $\widehat{p}(\chi) = \widehat{p}(\chi') = u$.
 On a la séparation car $\mathcal{F}_u$ est bijective et $\mathrm{C_c}(\widehat{G}(u))$ sépare les points de $\widehat{G}(u)$ puisque c'est une sous-algèbre dense de $\mathrm{C}_0(\widehat{G}(u))$.

CQFD

Dualité pour un quotient d'un fibré trivial

Le résultat précédent s'applique en particulier lorsque les fibres du fibré en groupes G sont toutes des quotients d'un même groupe compact commutatif $\mathtt{G}$.

Notations : Soient $\mathtt{G}$ un groupe topologique, Δ un espace topologique, et $\xi \in \Delta \longmapsto \mathtt{G}_\xi \subset \mathtt{G}$, une application qui à tout point de Δ associe un sous-groupe de $\mathtt{G}$.

– L'espace quotient de l'action (à droite) sur le fibré en groupes trivial $\Delta \times \mathtt{G}$ du sous-groupoïde $\bigsqcup_{\xi\in\Delta} \mathtt{G}_\xi$ est noté :

$$\bigsqcup_{\xi\in\Delta} {}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi} = {}^{\Delta\times\mathtt{G}}\!/_{\bigsqcup \mathtt{G}_\xi}.$$

– On note $\overset{top}{\bigsqcup_{\xi\in\Delta}} {}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}$ ce même quotient lorsqu'on le munit de la topologie quotient, *i.e.* la topologie — non séparée *a priori* — la plus fine rendant continue l'application quotient $\Delta \times \mathtt{G} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \bigsqcup {}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}$.

– On note p la projection :

$$\overset{top}{\bigsqcup_{\xi\in\Delta}} {}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi} \xrightarrow{p} \Delta.$$

Si, de plus $\mathtt{G}$ est commutatif localement compact et les $\mathtt{G}_\xi$ fermés dans $\mathtt{G}$, alors les quotients ${}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}$ sont des groupes commutatifs localement compacts, et on a l'identification canonique :

$$\widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}} \simeq \left\{ \chi \in \widehat{\mathtt{G}} \;\middle|\; \chi = 1 \text{ sur } \mathtt{G}_\xi \right\} \subset \widehat{\mathtt{G}}.$$

- On note $\overset{top}{\bigsqcup_{\xi\in\Delta}} \widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}}$ le fibré en groupes commutatifs localement compacts $\bigsqcup_{\xi\in\Delta} \widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}}$ muni de la topologie induite par $\Delta \times \widehat{\mathtt{G}}$, d'après l'inclusion naturelle :
$$\bigsqcup_{\xi\in\Delta} \widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}} \subset \Delta \times \widehat{\mathtt{G}}.$$
- Pour tout $\chi \in \widehat{\mathtt{G}}$, on note :
$$\Delta(\chi) = \{\xi \in \Delta \mid \chi = 1 \text{ sur } \mathtt{G}_\xi\} = \{\xi \in \Delta \mid \ker\chi \supset \mathtt{G}_\xi\},$$
de sorte que :
$$\bigsqcup_{\xi\in\Delta} \widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}} = \bigcup_{\xi\in\Delta} \{\xi\} \times \widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}} = \bigcup_{\chi\in\widehat{\mathtt{G}}} \Delta(\chi) \times \{\chi\}.$$
- Pour tout $\chi \in \widehat{\mathtt{G}}$, on note $\widetilde{\chi}$ l'application définie par le diagramme commutatif suivant :

$$(\xi, g\mathtt{G}_\xi) \longmapsto ((\xi,\chi),(\xi,g\mathtt{G}_\xi))$$

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(\Delta(\chi)) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\widetilde{\chi}"'] & \overset{top}{\bigsqcup_{\xi\in\Delta}} \widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}} * \overset{top}{\bigsqcup_{\xi\in\Delta}} {}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi} \arrow[d, "\langle\cdot|\cdot\rangle"] \\
& \mathbb{T}
\end{tikzcd}
\qquad \widetilde{\chi}(\xi, g\mathtt{G}_\xi) = \langle \chi | g\mathtt{G}_\xi \rangle \text{ si } \chi \in \widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}}.$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 2.4.6 — Soient $\mathtt{G}$ un groupe commutatif compact, tel que $\widehat{\mathtt{G}}$ est dénombrable, et Δ un espace localement compact à base dénombrable d'ouverts. Soit $\xi \in \Delta \longmapsto \mathtt{G}_\xi \subset \mathtt{G}$ une famille de sous-groupes de $\mathtt{G}$ telle que l'application $\Delta \times \mathtt{G} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \overset{top}{\bigsqcup_{\xi\in\Delta}} {}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}$ soit fermée. Alors

- $\overset{top}{\bigsqcup_{\xi\in\Delta}} {}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}$ est un fibré continu en groupes commutatifs ; la projection p est propre ;
- pour tout $\chi \in \widehat{\mathtt{G}}$, $\Delta(\chi)$ est un ouvert de Δ ; $\overset{top}{\bigsqcup_{\xi\in\Delta}} \widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}}$ est ouvert dans $\Delta \times \widehat{\mathtt{G}}$.
- $\overset{top}{\bigsqcup_{\xi\in\Delta}} \widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}}$ est un fibré continu en groupes commutatifs, étale ;
- le crochet de dualité entre $\overset{top}{\bigsqcup_{\xi\in\Delta}} {}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}$ et $\overset{top}{\bigsqcup_{\xi\in\Delta}} \widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}}$ est continu.

Démonstration.

- $\overset{top}{\underset{\xi\in\Delta}{\bigsqcup}} {}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}$ *est un fibré continu en groupes commutatifs :*
En effet, comme $\mathtt{G}$ est commutatif, $\underset{\xi\in\Delta}{\bigsqcup} \mathtt{G}_\xi$ est un sous-groupoïde normal du fibré en groupes trivial $\Delta\times\mathtt{G}$; de plus la projection $\Delta\times\mathtt{G} \twoheadrightarrow \Delta$ est ouverte, et propre puisque $\mathtt{G}$ est compact ; et enfin $\Delta\times\mathtt{G}$ est localement compact à base dénombrable d'ouverts. Ainsi, d'après la proposition 1.1.11, $\overset{top}{\underset{\xi\in\Delta}{\bigsqcup}} {}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}$ est un groupoïde localement compact à base dénombrable d'ouverts, et la projection p est ouverte, et propre. Il s'ensuit, d'après la proposition 1.5.6, que $\overset{top}{\underset{\xi\in\Delta}{\bigsqcup}} {}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}$ est un fibré continu en groupes commutatifs.
- $\Delta(\chi)$ *est un ouvert dans* Δ *:*
Montrons que, pour $\chi\in\widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}}$ donné, il existe un voisinage V de ξ tel que :
$$\eta\in V \Rightarrow \chi\in\widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\eta}}.$$
Pour cela, on remarque que $\chi(\mathtt{G}_\eta)$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{T}$; et G. Skandalis (voir aussi [MZ]) m'a fait remarquer que les groupes de Lie n'admettent pas de petits sous-groupes non triviaux *i.e.*
$$\exists\varepsilon>0,\ \forall H\subset_{sg}\mathbb{T},\ H\subset B(1,\varepsilon)\Rightarrow H=\{1\},$$
Pour $\mathbb{T}$ on peut prendre $\varepsilon=\sqrt{2}$; on a alors :
$$\chi\in\widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\eta}} \Leftrightarrow \Big(\forall g\in\mathtt{G}_\eta,\ |\langle\chi|g\rangle-1|<\sqrt{2}\Big).$$
Par l'absurde, supposons qu'il existe une suite (ξ_n) de Δ qui converge vers ξ telle que $\chi\notin\widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_{\xi_n}}}$. Donc il existe $g_n\in\mathtt{G}_{\xi_n}$ tel que $|\chi(g_n)-1|\geq\sqrt{2}$. Alors, comme $\mathtt{G}$ est compact, on peut extraire une sous-suite g_{n_i} qui converge vers une limite g_0 ; on obtient :
$$\pi(g_{n_i},\xi_{n_i}) \underset{i\infty}{\longrightarrow} \pi(g_0,\xi).$$
Comme $\pi(g_{n_i},\xi_{n_i})=1\in{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_{\xi_{n_i}}}$, puisque $g_{n_i}\in\mathtt{G}_{\xi_{n_i}}$, et que $\overset{top}{\underset{\xi\in\Delta}{\bigsqcup}} {}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}$ est séparé, et que :
$${}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_{\xi_{n_i}}} \ni 1=\pi(1,\xi_{n_i}) \underset{i\infty}{\longrightarrow} \pi(1,\xi)=1\in{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi},$$
on déduit que $\pi(g_0,\xi)=1\in{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}$ *i.e.* $g_0\in\mathtt{G}_\xi$, d'où $\chi(g_0)=1$, ce que contredit :
$$|\chi(g_{n_i})-1|\geq\sqrt{2} \underset{i\infty}{\longrightarrow} |\chi(g_0)-1|\geq\sqrt{2}.$$
Ainsi $\Delta(\chi)$ est un ouvert dans Δ, pour tout $\chi\in\widehat{\mathtt{G}}$. Alors, comme $\widehat{\mathtt{G}}$ est discret, puisque $\mathtt{G}$ est compact, et comme
$$\overset{top}{\underset{\xi\in\Delta}{\bigsqcup}} \widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}} = \bigcup_{\chi\in\widehat{\mathtt{G}}}\Delta(\chi)\times\{\chi\}\subset\Delta\times\widehat{\mathtt{G}},$$
on déduit que $\overset{top}{\underset{\xi\in\Delta}{\bigsqcup}} \widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}}$ est ouvert dans $\Delta\times\widehat{\mathtt{G}}$.

– $\displaystyle\bigsqcup_{\xi\in\Delta}^{top} \widehat{\mathtt{G}/\mathtt{G}_\xi}$ *est un fibré continu en groupes commutatifs, étale :*

D'après la proposition 1.1.10, comme $\displaystyle\bigsqcup_{\xi\in\Delta}^{top} \widehat{\mathtt{G}/\mathtt{G}_\xi}$ est un sous-groupoïde ouvert du groupoïde $\Delta \times \widehat{\mathtt{G}}$, c'est un groupoïde topologique, et les applications but et source sont ouvertes ; ainsi c'est un fibré continu en groupes commutatifs. En outre c'est aussi un groupoïde étale, d'après le corollaire de la proposition 1.2.5.

– *Continuité du crochet de dualité :*

Elle provient du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(\Delta \times \widehat{\mathtt{G}}) * (\Delta \times \mathtt{G}) \arrow[dr] & \\
\displaystyle\bigsqcup_{\xi\in\Delta}^{top} \widehat{\mathtt{G}/\mathtt{G}_\xi} * (\Delta \times \mathtt{G}) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, two heads, "Id * \pi"'] & \mathbb{T} \\
\displaystyle\bigsqcup_{\xi\in\Delta}^{top} \widehat{\mathtt{G}/\mathtt{G}_\xi} * \bigsqcup_{\xi\in\Delta}^{top} \mathtt{G}/\mathtt{G}_\xi . \arrow[ur, "\psi'"] &
\end{tikzcd}$$

Le crochet du fibré en groupes trivial $\Delta \times \mathtt{G}$ est continu, puisque celui de $\mathtt{G}$ l'est. L'application ψ est continue, car on a muni $\displaystyle\bigsqcup_{\xi\in\Delta}^{top} \widehat{\mathtt{G}/\mathtt{G}_\xi}$ de la topologie induite par $\Delta \times \widehat{\mathtt{G}}$. Enfin, en raisonnant comme à la proposition 1.1.11, on prouve que $id * \pi$ est surjective et fermée, car π est propre, et, sachant que $\psi' \circ (id * \pi) = \psi$ est continue, on en déduit que le crochet de dualité ψ' est continu.

CQFD

Et d'après la proposition 2.4.5 avec $G = \displaystyle\bigsqcup_{\xi\in\Delta}^{top} \widehat{\mathtt{G}/\mathtt{G}_\xi}$ et $\widehat{G} = \displaystyle\bigsqcup_{\xi\in\Delta}^{top} \mathtt{G}/\mathtt{G}_\xi$, on déduit immédiatement :

COROLLAIRE. — Dans les conditions de la proposition 2.4.6, il existe un isomorphisme :

$$\mathrm{C}^*\left(\bigsqcup_{\xi\in\Delta}^{top} \widehat{\mathtt{G}/\mathtt{G}_\xi}\right) \xrightarrow[\sim]{\mathcal{F}} \mathrm{C}_0\left(\bigsqcup_{\xi\in\Delta}^{top} \mathtt{G}/\mathtt{G}_\xi\right),$$

tel que, pour toute fonction $f \in \mathrm{C_c}\left(\displaystyle\bigsqcup_{\xi\in\Delta}^{top} \widehat{\mathtt{G}/\mathtt{G}_\xi}\right) \subset \mathrm{C_c}\left(\Delta \times \widehat{\mathtt{G}}\right)$ et tout point $x \in \displaystyle\bigsqcup_{\xi\in\Delta}^{top} \mathtt{G}/\mathtt{G}_\xi$, on a :

$$(\mathcal{F}f)(x) = \sum_{\chi\in\widehat{\mathtt{G}}} f(p(x), \chi)\widetilde{\chi}(x) \qquad (f(p(\cdot), \chi) \text{ est nulle là où } \widetilde{\chi} \text{ n'est pas définie}).$$

2.5 Déformation par l'action d'un tore

Si, dans le paragraphe précédent, on prend le groupe $\mathtt{G} = \mathbb{T}^n$, et si Δ est une partie d'une variété N munie de l'action de $\mathbb{R}^n$, le groupoïde étale $\overset{top}{\bigsqcup_{\xi\in\Delta}} \widehat{\mathtt{G}/\mathtt{G}_\xi}$ obtenu à partir de la famille de sous-groupes $\xi \longmapsto \mathbb{T}^n_\xi$ peut être déformé par un paramètre réel $\hbar$. Sous certaines conditions on obtient un groupoïde de déformation au sens des définitions précédentes.

Par ailleurs l'isotropie de l'action continue de $\mathbb{T}^n$ sur une variété M fournit une application naturelle :

$$\xi \longmapsto \mathbb{T}^n_\xi.$$

Les résultats du paragraphe précédent s'appliquent alors.

Si on combine ces deux contextes, sous certaines hypothèses techniques, on obtient alors un groupoïde de déformation de M, pour un crochet de Poisson particulier.

Notations : L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie $\mathtt{G}$ est notée $\mathfrak{g}$; pour $\mathtt{G} = \mathbb{T}^n$, on note $\mathfrak{g} = \mathfrak{t}_n$. Si le groupe de Lie $\mathtt{G}$ a une action α sur M, par difféomorphismes, l'***action infinitésimale*** , en $x \in M$ dans la direction de $X \in \mathfrak{g}$ est :

$$\xi^\alpha_X(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha_{\exp(tX)}(x).$$

Pour un tore $\mathtt{G} = \mathbb{T}^n$, l'exponentielle $\mathfrak{t}_n \overset{\exp}{\twoheadrightarrow} \mathbb{T}^n$ est un morphisme de groupes surjectif, et l'application duale suivante est injective :

$$\mathfrak{t}_n^* \simeq \widehat{\mathfrak{t}_n} \overset{\widehat{\exp}}{\hookleftarrow} \widehat{\mathbb{T}^n}.$$

Dans la suite je note $\mathbb{R}^n = \mathfrak{t}_n^*$ et $\mathbb{Z}^n$ le réseau image de $\widehat{\mathbb{T}^n}$ dans $\mathfrak{t}_n^*$, isomorphe, en tant que groupe, à $\widehat{\mathbb{T}^n}$; l'image d'un élément χ de $\widehat{\mathbb{T}^n}$ sera notée $k \in \mathbb{Z}^n$. Plus précisément, pour tout $\chi \in \widehat{\mathbb{T}^n}$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{T}^n \arrow[r, "\chi"] & \mathbb{T} & \\ \mathfrak{t}_n = & T_1\mathbb{T}^n \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "d\chi"] & T_1\mathbb{T} \arrow[u, "\exp_{\mathbb{T}}"'] & = \imath\mathbb{R}, \end{tikzcd} \qquad \imath\theta \overset{\exp_{\mathbb{T}}}{\longmapsto} e^{\imath\theta}$$

il s'ensuit que $k = \frac{1}{\imath}T_1\chi = \frac{1}{\imath}d\chi$; et plus généralement $T_g\chi = \imath k\,\langle\chi|g\rangle$, pour tout $g \in \mathbb{T}^n$.

Déformation de la dualité

Proposition 2.5.1 — Soit N une variété à base dénombrable d'ouverts, munie de l'action β par difféomorphismes du groupe $\mathbb{R}^n$. On note $\widetilde{G} = (\mathbb{R} \times N) \rtimes \mathbb{Z}^n$ le groupoïde, de Lie étale, de l'action de $\mathbb{Z}^n$ sur $(\mathbb{R} \times N)$ donnée par :

$$\beta_k(\hbar, \xi) = k.(\hbar, \xi) = (\hbar, \beta_{\hbar k}(\xi)), \text{ si } k \in \mathbb{Z}^n \text{ et } (\hbar, \xi) \in \mathbb{R} \times N.$$

Soit Δ une partie localement fermée de N, et $\xi \in \Delta \longmapsto \mathbb{T}^n_\xi \subset \mathbb{T}^n$ une application qui à tout point de Δ associe un sous-groupe fermé de $\mathbb{T}^n$. Pour tout $\chi \in \widehat{\mathbb{T}^n}$, on note toujours :

$$\Delta(k) = \Delta(\chi) = \left\{ \xi \in \Delta \;\middle|\; \mathbb{T}^n_\xi \subset \ker\chi \right\}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} G &= \left\{ (\hbar,\xi,k) \in \widetilde{G} \;\middle|\; \xi, \beta_{\hbar k}(\xi) \in \Delta(k) \right\} \\ &= \bigsqcup_{\mathtt{H}\in\left\{ \mathbb{T}^n_\xi \;|\; \xi\in\Delta \right\}} \left((\mathbb{R}\times N) \rtimes \widehat{\mathbb{T}^n/_{\mathtt{H}}} \right)\Big|_{\mathbb{R}\times\Delta_{\mathtt{H}}}, \qquad \text{avec } \Delta_{\mathtt{H}} = \left\{ \xi \in \Delta \;\middle|\; \mathbb{T}^n_\xi = \mathtt{H} \right\} \end{aligned}$$

est un sous-groupoïde de $\widetilde{G}$; G est étale si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$ les ensembles :

$$\{ (\hbar,\xi) \in \mathbb{R}\times N \mid \xi, \beta_{\hbar k}(\xi) \in \Delta_k \} = (\mathbb{R}\times\Delta(k)) \cap \beta_{-k}(\mathbb{R}\times\Delta(k))$$

sont ouverts dans $\mathbb{R}\times\Delta$. Si cette condition est vérifiée alors $(G, \mathrm{C}^\infty_c(G\subset\widetilde{G}))$ est un groupoïde de déformation.

Démonstration.

- *Égalité entre les deux expressions de G :*
  En effet, comme :
  $$\Delta(\chi) = \bigsqcup_{\mathtt{H}\subset\ker\chi} \Delta_{\mathtt{H}},$$
  on a :
  $$\begin{aligned} &\bigsqcup_{\mathtt{H}\in\left\{ \mathbb{T}^n_\xi \;|\; \xi\in\Delta \right\}} \left((\mathbb{R}\times N) \rtimes \widehat{\mathbb{T}^n/_{\mathtt{H}}} \right)\Big|_{\mathbb{R}\times\Delta_{\mathtt{H}}} \\ =\; &\bigsqcup_{\mathtt{H}} \left\{ (\hbar,\xi,k) \in \widetilde{G} \;\middle|\; \xi, \beta_{\hbar k}(\xi) \in \Delta_{\mathtt{H}} \text{ et } \chi \in \widehat{\mathbb{T}^n/_{\mathtt{H}}} \right\} \\ =\; &\bigsqcup_{\mathtt{H}} \left\{ (\hbar,\xi,k) \in \widetilde{G} \;\middle|\; \xi, \beta_{\hbar k}(\xi) \in \Delta_{\mathtt{H}} \text{ et } \ker\chi \supset \mathtt{H} \right\} \\ =\; &\bigsqcup_{\chi\in\widehat{\mathbb{T}^n}} \bigsqcup_{\mathtt{H}} \left\{ (\hbar,\xi,k) \in \widetilde{G} \;\middle|\; \xi, \beta_{\hbar k}(\xi) \in \Delta_{\mathtt{H}} \text{ et } \chi \supset \mathtt{H} \right\} \\ =\; &\bigsqcup_{\chi\in\widehat{\mathbb{T}^n}} \left\{ (\hbar,\xi,k) \in \widetilde{G} \;\middle|\; \xi, \beta_{\hbar k}(\xi) \in \Delta(\chi) \right\}. \end{aligned}$$
  En particulier, l'expression :
  $$G = \bigsqcup_{\mathtt{H}} \left((\mathbb{R}\times N) \rtimes \widehat{\mathbb{T}^n/_{\mathtt{H}}} \right)\Big|_{\mathbb{R}\times\Delta_{\mathtt{H}}}$$
  indique clairement que G est un sous-groupoïde de $\widetilde{G}$.
- *Condition pour que G soit étale :*
  Remarquons que G est recouvert par les bissections ouvertes (pour $k \in \mathbb{Z}^n$) :
  $$\begin{aligned} S_k &= G \cap (\mathbb{R}\times N\times\{k\}) \\ &= \left\{ (\hbar,\xi,k) \in \widetilde{G} \;\middle|\; \xi, \beta_{\hbar k}(\xi) \in \Delta(k) \right\} \\ &= \left\{ (\mathbb{R}\times\Delta(k)) \cap \beta_k^{-1}(\mathbb{R}\times\Delta(k)) \right\} \times \{k\}. \end{aligned}$$

D'après le corollaire de la proposition 1.2.5, G est étale si et seulement si G est localement fermé dans $\widetilde{G}$, et les $s(S_k)$ sont ouverts dans $G^{(0)} = S_0 = \mathbb{R} \times \Delta \times \{0\}$. Comme s est la projection $s(\hbar, \xi, k) = (\hbar, \xi, 0)$, si G est étale alors les :

$$s(S_k) = \{ (\mathbb{R} \times \Delta(k)) \cap \beta_k^{-1}(\mathbb{R} \times \Delta(k)) \} \times \{0\}$$

sont ouverts dans $\mathbb{R} \times \Delta \times \{0\}$. De plus, réciproquement, si les $(\mathbb{R} \times \Delta(k)) \cap \beta_k^{-1}(\mathbb{R} \times \Delta(k))$ sont ouverts dans $\mathbb{R} \times \Delta$, alors, d'une part les $s(S_k)$ sont ouverts dans $G^{(0)}$, et d'autre part chaque S_k est ouvert dans $\mathbb{R} \times \Delta \times \{k\}$ qui est lui-même localement fermé dans $\mathbb{R} \times N \times \{k\}$; donc $G = \sqcup_k S_k$ est localement fermé dans $\mathbb{R} \times N \times \mathbb{Z}^n = \widetilde{G}$.

– $(G, \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(G))$ ***est un groupoïde de déformation :***
On applique le théorème 2.3.1 avec $\widetilde{G} = (\mathbb{R} \times N) \rtimes \mathbb{Z}^n$, $X = \mathbb{R}$, $p(\hbar, \xi, k) = \hbar$, et $\mathcal{X} = \frac{\partial}{\partial \hbar}$. Il est clair que $\widetilde{G}$ est un groupoïde de Lie fibré étale, et $\widetilde{G}_0 = (\{0\} \times N) \rtimes \mathbb{Z}^n$ est un fibré en groupes commutatifs, puisque l'action de $\mathbb{Z}^n$ sur $\{0\} \times N$ est triviale. On a supposé que G est un sous-groupoïde étale de $\widetilde{G}$. Enfin on a :

1. $X = p(G) = \mathbb{R}$ est localement compact et a 0 comme point d'accumulation.
2. $G \xrightarrow{p|_G} X$ est ouverte. En effet G est étale, donc b et s sont ouvertes ; comme $p = p^{(0)} \circ b$, où $p^{(0)} = p|_{G^{(0)}}$, il suffit de vérifier que $p^{(0)}$ est ouverte. Cela provient immédiatement de $G^{(0)} = \mathbb{R} \times \Delta \times \{0\}$, et $p^{(0)}(\hbar, \xi, 0) = \hbar$.
3. Il est immédiat que $dp(\mathcal{X}) = 1$. De plus, les courbes intégrales de $\mathcal{X}$ sont données par :

$$\hbar \in \mathbb{R} \longmapsto (\hbar, \xi, k),$$

et on a :

$$G = \{ (\hbar, \xi, k) \in \mathbb{R} \times N \times \mathbb{Z}^n \mid \xi \in \Delta(\chi) \text{ et } \beta_{\hbar k}(\xi) \in \Delta(\chi) \},$$

où on note toujours, $k = \frac{1}{\imath} d\chi$, et $\Delta(\chi) = \left\{ \xi \in \Delta \;\middle|\; \mathbb{T}^n_{\sigma(\xi)} \subset \ker \chi \right\}$. Donc si une courbe intégrale de $\mathcal{X}$ passe par un point $(\hbar, \xi, k) \in G$, on a nécessairement $(0, \xi, k) \in G_0$, c'est-à-dire que l'intersection de cette courbe intégrale avec $\widetilde{G}_0$ appartient à G_0.

CQFD

Action de groupes compacts commutatifs

Notations : Si le groupe $\mathtt{G}$ agit (à gauche) sur l'espace M, on note : $\mathtt{G}.x$ l'orbite d'un point $x \in M$, ${}^{M}\!/_{\mathtt{G}}$ l'ensemble des orbites, $M \xrightarrow{p_\mathtt{G}} {}^{M}\!/_{\mathtt{G}}$ la projection canonique, et $\mathtt{G}_x = \{ g \in \mathtt{G} \mid g.x = x \}$ le sous-groupe d'isotropie de x.
Rappels : si $x = g.y$, alors $\mathtt{G}_x = g\, \mathtt{G}_y\, g^{-1}$; en particulier, pour un groupe commutatif, l'isotropie est constante sur toute orbite. Si M est une variété et $\mathtt{G}$ est un groupe de Lie qui agit librement, proprement, par exemple si $\mathtt{G}$ est compact, et différentiablement sur M, alors, d'après [AM, prop. 4.1.23 p. 266], ${}^{M}\!/_{\mathtt{G}}$ est une variété, et $p_\mathtt{G}$ une submersion de classe C^∞.

Si $\mathtt{G}$ est un groupe qui agit sur un espace M, toute application $\Delta \xrightarrow{\sigma} M$ induit une application isotropie :

$$\xi \in \Delta \longmapsto \mathtt{G}_{\sigma(\xi)}.$$

On définit alors ρ et φ de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} \displaystyle\coprod_{\xi\in\Delta}^{top} {}^{\mathtt{G}}\!/\!_{\mathtt{G}_{\sigma(\xi)}} \arrow[rr, "\rho"] & & M \\ & \Delta\times\mathtt{G}. \arrow[ul, "\pi"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd} \qquad \rho(\xi, g\mathtt{G}_{\sigma(\xi)}) = g.\sigma(\xi) = \varphi(\xi, g)$$

Proposition 2.5.2 — Soit $\mathtt{G}$ un groupe compact, non nécessairement commutatif, qui agit continûment (resp. différentiablement et librement) sur un espace localement compact (resp. une variété) M, et Δ un espace topologique (resp. une variété). Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe deux applications $\Delta \underset{J}{\overset{\sigma}{\rightleftarrows}} M$ telles que :
- σ et J sont continues (resp. de classe C^∞) ;
- $J\circ\sigma = Id_\Delta$, *i.e.* J est surjective et σ est une section de J ;
- $p_{\mathtt{G}}\circ\sigma$ est bijective (resp. et $\operatorname{Im} d\sigma \oplus \ker dp_{\mathtt{G}} = TM$) ;

(ii) on a les deux propriétés suivantes :
- Δ est homéomorphe (resp. difféomorphe) à ${}^{M}\!/\!_{\mathtt{G}}$;
- il existe une section s de $p_{\mathtt{G}}$ qui est continue (resp. de classe C^∞).

Si ces conditions sont satisfaites, alors ρ est un homéomorphisme de $\displaystyle\coprod_{\xi\in\Delta}^{top} {}^{\mathtt{G}}\!/\!_{\mathtt{G}_{\sigma(\xi)}}$ sur M, et π est fermée (resp. $\rho=\varphi$ est un difféomorphisme de $\Delta\times\mathtt{G}$ sur M) ; de plus J est invariante par $\mathtt{G}$ si et seulement si $p\circ\rho^{-1} = J$, où, comme à la proposition 2.4.6, on note toujours $\displaystyle\coprod_{\xi\in\Delta}^{top} {}^{\mathtt{G}}\!/\!_{\mathtt{G}_{\sigma(\xi)}} \overset{p}{\twoheadrightarrow} \Delta$.

Remarque. — L'hypothèse d'existence d'une section continue de $p_{\mathtt{G}}$ est une hypothèse forte qui n'est pas toujours satisfaite ; néanmoins E.T. Kehlet [Keh84] donne des exemples où elle est vérifiée.

Démonstration.

Les résultats de topologie utilisés proviennent ici encore de Bourbaki [BouTG].

- *(ii) ⇒ (i) :*

Il suffit de prendre J et σ définis par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \Delta \arrow[dr, shift right, "\sigma"'] \arrow[rr, phantom, "\simeq"] & & {}^{M}\!/\!_{\mathtt{G}} \arrow[dl, shift left, "s"] \\ & M. \arrow[ul, shift right, "J"'] \arrow[ur, shift left, "p_{\mathtt{G}}"] & \end{tikzcd}$$

- *(i) ⇒ (ii) :*

Comme σ est une section continue de J, pour tout compact K de M, on a $\sigma^{-1}(K) = J(K)$ qui est compact ; comme l'image réciproque par σ de tout compact est compact, σ est propre (prop. 7 p. 77, chap. I, §10, n°3). Comme $\mathtt{G}$ est compact et agit continûment sur M, l'application canonique de

$M \overset{p_{\mathtt{G}}}{\twoheadrightarrow} {}^{M}\!/_{\mathtt{G}}$ est propre (prop. 2 p. 28, chap. III, §4, n°1). Donc, comme la composée d'applications propres est propre (chap I, §10, n°1, prop. 5 (a) p.73), $p_{\mathtt{G}} \circ \sigma$ est propre, et bijective ; ainsi $p_{\mathtt{G}} \circ \sigma$ est un homéomorphisme (prop. 2 p. 72, chap I, §10, n°1).
Dans le cas C^∞, $p_{\mathtt{G}} \circ \sigma$ est un homéomorphisme de classe C^∞, et la condition $\operatorname{Im} d\sigma \oplus \ker dp_{\mathtt{G}} = TM$ entraîne, grâce au théorème d'inversion locale, que c'est un difféomorphisme local ; donc c'est un difféomorphisme. On obtient alors une section de $p_{\mathtt{G}}$ en prenant $s = \sigma \circ (p_{\mathtt{G}} \circ \sigma)^{-1}$.

– *ρ est un homéomorphisme (resp. un difféomorphisme) :*
L'hypothèse $p_{\mathtt{G}} \circ \sigma$ bijective entraîne immédiatement ρ bijective. Notons α l'action :

$$\begin{array}{ccc} \mathtt{G} \times M & \xrightarrow{\quad\alpha\quad} & M \\ (g, x) & \longmapsto & g.x\ . \end{array}$$

Si $\mathtt{G}$ est compact, α est propre (chap. III §4 n°2 prop. 2 (b) p. 28), donc fermée. Et on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \coprod\limits_{\xi\in\Delta}^{top} {}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_{\sigma(\xi)}} \arrow[r, "\rho", "\sim"'] & M \\ \Delta \times \mathtt{G} \arrow[u, two heads, "\pi"] \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\sigma \times Id_{\mathtt{G}}"'] & M \times \mathtt{G}. \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

On a vu que σ est propre et donc l'application produit avec l'identité de tout espace topologique est fermée (chap. I §10 n°1 déf. 1 p. 72) ; donc $\sigma \times Id_{\mathtt{G}}$ est fermée. Ainsi $\rho \circ \pi = \varphi = \alpha \circ (\sigma \times Id_{\mathtt{G}})$ est fermée ; comme de plus π est surjective et continue, alors ρ est fermée (prop. 1 (b) p. 30, chap. I §5 n°1). Ainsi ρ est une bijection continue et fermée, donc un homéomorphisme.
De plus, comme $\pi = \varphi \circ \rho^{-1}$, φ est fermée et ρ un homéomorphisme, on obtient que π est fermée.
Dans le cas C^∞, l'hypothèse $\operatorname{Im} d\sigma \oplus \ker dp_{\mathtt{G}} = TM$ entraîne que φ est un difféomorphisme local, donc un difféomorphisme.

– *J invariante par $\mathtt{G}$ ssi $p \circ \rho^{-1} = J$:*
Par définition de p, on a $p \circ \pi = pr_1$, où pr_1 est la projection canonique de $\Delta \times \mathtt{G}$ sur Δ. Donc, comme π est surjective, on a :

$$\begin{array}{lrcl} & p \circ \rho^{-1} & = & J \\ \Leftrightarrow & p & = & J \circ \rho \\ \Leftrightarrow & p \circ \pi & = & J \circ \rho \circ \pi \\ \Leftrightarrow & pr_1 & = & J \circ \varphi \\ \Leftrightarrow & \forall \xi, g \in \Delta \times \mathtt{G},\ \xi & = & J(g.\sigma(\xi)) \\ \Leftrightarrow & \forall \xi, g \in \Delta \times \mathtt{G},\ J(\sigma(\xi)) & = & J(g.\sigma(\xi)), \end{array}$$

ce qui signifie que J est invariante par $\mathtt{G}$, puisque, comme $p \circ \sigma$ est surjective, $\sigma(\Delta)$ rencontre toutes les orbites.
CQFD

Remarque. — L'application φ n'est pas forcément ouverte comme par exemple dans le cas de l'action de $\mathbb{T}$ sur $\mathbb{S}^2$ que l'on verra plus loin.

On déduit ainsi directement des propositions 2.4.6 et 2.5.2 le théorème suivant :

Théorème 2.5.3 — *Soient $\mathtt{G}$ un groupe commutatif compact agissant continûment sur M, un espace topologique localement compact à base dénombrable d'ouverts, et Δ un espace topologique.*

Pour tout couple d'applications continues $\Delta \underset{J}{\overset{\sigma}{\rightleftarrows}} M$ *telles que* $J \circ \sigma = Id_\Delta$, *$J$ invariante par* $\mathtt{G}$, *et* $p_{\mathtt{G}} \circ \sigma$ *bijective, il existe un isomorphisme :*

$$\mathrm{C}_0(M) \xrightarrow{\mathfrak{I}} \mathrm{C}^*\left(\coprod_{\xi\in\Delta}^{top} \widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_{\sigma(\xi)}}}\right),$$

tel que, pour toute fonction $f \in \mathrm{C}_c\left(\coprod_{\xi\in\Delta}^{top} \widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_{\sigma(\xi)}}}\right)$, *et tout* $x \in M$, *on a :*

$$(\mathfrak{I}^{-1} f)(x) = \sum_{\chi\in\widehat{\mathtt{G}}} f(J(x), \chi)\chi_M(x),$$

où $\chi_M(x)$ *est l'unique application continue, définie sur un ouvert de* M *:*

$$\mathrm{dom}\,(\chi_M) = \{x \in M \mid \mathtt{G}_x \subset \ker\chi\} \xrightarrow{\chi_M} \mathbb{T},$$

telle que :

$$\forall(\xi, g) \in \Delta(\chi) \times \mathtt{G},\ \chi_M(g.\sigma(\xi)) = \langle\chi|g\rangle\,.$$

Démonstration.

On définit $\mathfrak{I}$ par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}_0(M) \arrow[rr, "\mathfrak{I}"] \arrow[dr, "\rho^*"'] & & \mathrm{C}^*\left(\coprod_{\xi\in\Delta}^{top} \widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_{\sigma(\xi)}}}\right) \arrow[dl, "\mathcal{F}"] \\
& \mathrm{C}_0\left(\coprod_{\xi\in\Delta}^{top} {}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_{\sigma(\xi)}}\right). &
\end{tikzcd}$$

Alors, d'après la proposition 2.4.6, on a

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{I}^{-1} f)(x) &= (\mathcal{F} f)(\rho^{-1}(x)) \\
&= \sum_{\chi\in\widehat{\mathtt{G}}} f(p(\rho^{-1}(x)), \chi)\widetilde{\chi}(\rho^{-1}(x)) \\
&= \sum_{\chi\in\widehat{\mathtt{G}}} f(J(x), \chi)\chi_M(x),
\end{aligned}$$

si on pose $\chi_M = \widetilde{\chi} \circ \rho^{-1}$. D'après la définition de $\widetilde{\chi}$, on a :

$$\begin{tikzcd}
\Delta(\chi) \times \mathtt{G} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "pr_2"'] & \mathrm{dom}\,(\chi_M) \arrow[d, "\chi_M"] \\
\mathtt{G} \arrow[r, "\chi"] & \mathbb{T},
\end{tikzcd}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\operatorname{dom}(\chi_M) &= \rho(p^{-1}(\Delta(\chi))) \\
&= J^{-1}(\Delta(\chi))) \\
&= J^{-1}\left\{ \xi \in \Delta \;\middle|\; \mathtt{G}_{\sigma(\xi)} \subset \ker \chi \right\} \\
&= \left\{ x \in M \;\middle|\; \mathtt{G}_{\sigma(J(x))} \subset \ker \chi \right\} \\
&= \left\{ x \in M \mid \mathtt{G}_x \subset \ker \chi \right\},
\end{aligned}$$

car x et $\sigma(J(x))$ sont dans la même orbite, d'après :

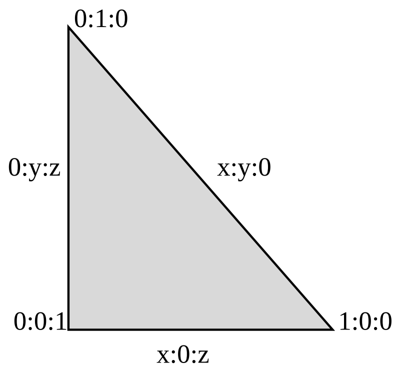
$$\begin{aligned}
& p_{\mathtt{G}} \circ \sigma \circ J = p_{\mathtt{G}} \\
\Leftrightarrow\ & p_{\mathtt{G}} \circ \sigma \circ J \circ \varphi = p_{\mathtt{G}} \circ \varphi \\
\Leftrightarrow\ & p_{\mathtt{G}} \circ \varphi = p_{\mathtt{G}} \circ \sigma \circ pr_1 \\
\Leftrightarrow\ & (\forall \xi, g,\ p(g.\sigma(\xi)) = p(\sigma(\xi))).
\end{aligned}$$

CQFD

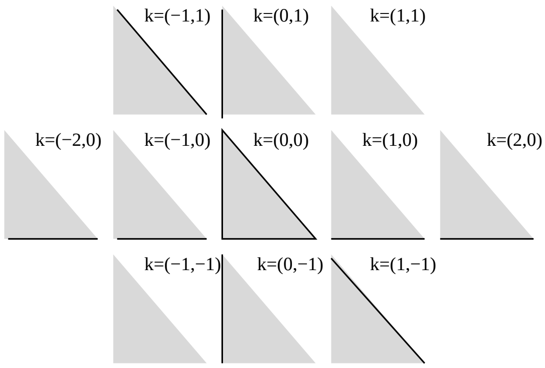
Remarque. — Les groupoïdes $\overset{top}{\underset{\xi\in\Delta}{\bigsqcup}} \widehat{{}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_{\sigma(\xi)}}}$ et $\overset{top}{\underset{\xi\in\Delta}{\bigsqcup}} {}^{\mathtt{G}}\!/_{\mathtt{G}_{\sigma(\xi)}}$ ne dépendent pas du choix de σ , puisque $\mathtt{G}_x$ est constant sur toute orbite. La topologie du premier est encore indépendante de σ, par contre celle du second dépend de π, donc de σ.

Exemple. — L'espace projectif $P_2\mathbb{C}$ est muni de l'action de $\mathbb{T}^2$, obtenue par quotient de l'action canonique de $\mathbb{T}^3$ sur $\mathbb{C}^3$. On a alors la bijection :

$$\begin{array}{ccc}
{}^{P_2\mathbb{C}}\!/_{\mathbb{T}^2} & \xrightarrow{\quad \bar{J} \quad} & \Delta = \left\{ (\xi_1, \xi_2) \in (\mathbb{R}_+)^2 \;\middle|\; \xi_1 + \xi_2 \leq 1 \right\} \\
(x:y:z) \mod \mathbb{T}^2 & \longmapsto & \left(\dfrac{|x|^2}{|x|^2+|y|^2+|z|^2}, \dfrac{|y|^2}{|x|^2+|y|^2+|z|^2} \right).
\end{array}$$



En fait cette fonction $\bar{J}$ n'est autre que l'application quotient de l'application moment $P_2\mathbb{C} \xrightarrow{J} \Delta$ qui sera introduite dans la troisième partie. Avec l'identification $\widehat{\mathbb{T}^2} = \mathbb{Z}^2$ on peut alors dessiner les $\Delta(k)$ pour $k \in \mathbb{Z}^2$:



Groupoïde dual de $M = P_2\mathbb{C}$

Groupoïde de déformation associé à l'action d'un tore

En combinant la proposition 2.5.1 et les théorèmes 2.5.3 et 2.1.15 j'obtiens un groupoïde de déformation pour une variété M munie de l'action α d'un tore $\mathbb{T}^n$, lorsque le quotient ${}^{M}\!/_{\mathbb{T}^n}$ peut être identifié, au moyen d'applications J et σ, à une partie Δ d'une variété N, où N est munie d'une action β de $\mathbb{R}^n$, ceci moyennant certaines conditions techniques motivées par les exemples. L'énoncé obtenu présente certaines analogies avec un théorème de Rieffel [Rie89b, th. 3.1 p. 544]. Pour une bonne compréhension de cette construction, il est fortement recommandé de regarder au paragraphe suivant comment elle s'applique sur les exemples.

Théorème 2.5.4 — *Soit M une variété à base dénombrable d'ouverts munie de l'action α, par difféomorphismes, d'un tore $\mathbb{T}^n$ de dimension n. On suppose que α est effective, de sorte qu'il existe un ouvert dense de M, noté M_e, invariant par $\mathbb{T}^n$, où α est libre et propre. On suppose aussi que :*

1. *il existe une variété N munie d'une action β de $\mathbb{R}^n$ par difféomorphismes ;*
2. *il existe une application $M \xrightarrow{J} N$, de classe C^∞, invariante par $\mathbb{T}^n$, d'image $J(M) = \Delta$ telle que $\Delta_e = J(M_e)$ est un ouvert de N ;*
3. *il existe une section continue σ de $M \overset{J}{\twoheadrightarrow} \Delta$, de classe C^∞ sur Δ_e, telle que $\operatorname{Im} d\sigma \oplus \ker dp_{\mathbb{T}^n} = TM$ en tout point de M_e, et telle que $p_{\mathbb{T}^n} \circ \sigma$ est bijective ;*
4. *pour tout $\chi \in \widehat{\mathbb{T}^n}$, la fonction χ_M, définie au théorème 2.5.3, est de classe C^∞ ;*
5. *pour tout $\chi \in \widehat{\mathbb{T}^n}$, l'ensemble $\{(\hbar, \xi) \in \mathbb{R} \times N \mid \xi, \beta_{\hbar k}(\xi) \in \Delta(\chi)\}$ est ouvert dans $\mathbb{R} \times \Delta$.*

Alors le sous-groupoïde

$$G = \{(\hbar, \xi, k) \in \mathbb{R} \times \Delta \times \mathbb{Z}^n \mid \xi \in \Delta(k) \text{ et } \beta_{\hbar k}(\xi) \in \Delta(k)\}$$

du groupoïde $\widetilde{G} = (\mathbb{R} \times N) \rtimes \mathbb{Z}^n$ de l'action de $\mathbb{Z}^n$, sur $\mathbb{R} \times N$ donnée par $k.(\hbar, \xi) = (\hbar, \beta_{\hbar k}(\xi))$, est étale. De plus, il existe sur M un bivecteur de Poisson Ω, tel que $(G, C_c^\infty(G \subset \widetilde{G}))$ soit un *groupoïde de déformation de la variété de Poisson (M, Ω). Enfin, l'application :*

$$\begin{array}{ccc} \Delta_e \times \mathbb{T}^n & \xrightarrow{\varphi} & M_e \\ (\xi, g) & \longmapsto & g.\sigma(\xi) \end{array}$$

est un difféomorphisme. De plus, pour toute base F_i de $\mathfrak{t}_n$, notant (F_i^*) est la base duale de $\mathbb{R}^n$ — identifié à sa propre algèbre de Lie, alors, sur M_e, on a :

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} \varphi_* \left(\xi^{\beta}_{F_i^*} \right) \wedge \xi^{\alpha}_{F_i}.$$

Démonstration.

D'après les points (1.) et (5.) et la proposition 2.5.1 $(G, \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(G))$ est un groupoïde de déformation étale.

– *$(G, \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(G))$ déforme M :*

On applique la proposition 2.1.15. Par construction de G, et comme l'action de $\mathbb{Z}^n$ sur $\{0\} \times N$ est triviale, on a :

$$G_0 = \bigsqcup_{\mathtt{H}} \left\{ \xi \mid \mathbb{T}^n_{\sigma(\xi)} = \mathtt{H} \right\} \times \widehat{\mathbb{T}^n / \mathtt{H}} = \bigsqcup_{\xi \in \Delta} \widehat{\mathbb{T}^n / \mathbb{T}^n_{\sigma(\xi)}}.$$

Donc, les points (2.) et (3.) et le théorème 2.5.3 on a un isomorphisme :

$$\mathrm{C}_0(M) \underset{\sim}{\xrightarrow{\mathfrak{I}}} \mathrm{C}^*(G_0),$$

tel que, pour $f \in \mathrm{C}_{\mathrm{c}}(G_0)$:

$$\mathfrak{I}^{-1} f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(J(x), k) \chi_M(x).$$

En particulier, pour $f \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(G_0) = \mathcal{Q}_0$, comme J et les χ_M sont de classe C^∞, d'après l'hypothèse (4.), on a $\mathfrak{I}^{-1} f \in \mathrm{C}^\infty_0(M)$. Alors le crochet $\{\cdot, \cdot\}_{G_0}$ sur $\mathrm{C}^*(G_0)$ provenant du groupoïde de déformation G induit, *via* $\mathfrak{I}$, un crochet de Poisson sur M donné, pour $\mathtt{f}, \mathtt{f}' \in \mathfrak{I}^{-1}(\mathcal{Q}_0)$, par :

$$\{\mathtt{f}, \mathtt{f}'\}_M = \mathfrak{I}^{-1} \left(\{\mathfrak{I}\mathtt{f}, \mathfrak{I}\mathtt{f}'\}_{G_0} \right).$$

Comme $\mathfrak{I}^{-1}(\mathcal{Q}_0)$ est dense dans $\mathrm{C}^\infty_0(M)$, on en déduit un bivecteur Ω de Poisson, défini sur M tout entier, tel que $\langle d\mathtt{f} \otimes d\mathtt{f}' | \Omega \rangle = \{\mathtt{f}, \mathtt{f}'\}_M$. Alors, par construction de Ω, G est un groupoïde de déformation de (M, Ω). Il reste seulement à calculer Ω

– *Passage au quotient sur G_0 des dérivations sur $\widetilde{G}_0$:*

D'après la proposition 2.2.4, on sait qu'il suffit de montrer que $\overline{\mathring{G_0}} \supset G_0$. Or :

$$G_0 = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^n} \Delta(\chi), \qquad \text{avec } k = \frac{1}{i} d\chi,$$

et, clairement, pour tout $\chi \in \widehat{\mathbb{T}^n}$, on a :

$$\Delta_e \subset \Delta(\chi) \subset \Delta,$$

avec Δ_e dense dans Δ, *i.e.* $\overline{\Delta_e} = \overline{\Delta}$, donc :

$$\overline{\mathring{G_0}} = \bigsqcup_{k = d\chi \in \mathbb{Z}^n} \overline{\mathring{\Delta}}.$$

Comme :

$$\Delta(\chi) \subset \Delta \subset \overline{\Delta} = \overline{\Delta_e} = \overline{\overset{\circ}{\Delta}_e} \subset \overline{\overset{\circ}{\Delta}},$$

on a bien $\overline{\overset{\circ}{G_0}} \supset G_0$.

– *Calcul du crochet de Poisson sur M :*
Comme les $S_k = \mathbb{R} \times N \times \{ k \}$ forment un groupe de bissections ouvertes disjointes qui recouvrent $\widetilde{G}$, et d'après $\overline{\overset{\circ}{G_0}} \supset G_0$, on peut appliquer la proposition 2.3.6, *i.e.* pour toutes $f_0, f_0{}' \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(G_0)$ on a :

$$\{ f_0, f_0{}' \}_{G_0} = \frac{1}{\imath} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^n} (\mathcal{X}^{k'}\Big|_{G_0} f_0) \underset{G_0}{*} f_0{}'|_{S_{k'}} - (\mathcal{X}^{k'}\Big|_{G_0} f_0{}') \underset{G_0}{*} f_0|_{S_{k'}} .$$

Soient (F_i) une base de $\mathfrak{t}_n$, et (F_i^*) la base de $\mathbb{R}^n$ duale. On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\varphi^b_{k'}(\hbar, \xi, k) &= (\hbar, \xi, k + k') \\
\varphi^s_{k'}(\hbar, \xi, k) &= (\hbar, \beta_{\hbar k'}(\xi), k + k') \\
\mathcal{X}^{k'}(0, \xi, k) &= d\varphi^b_{k'}(\mathcal{X}) - d\varphi^s_{k'}(\mathcal{X}) \\
&= \frac{\partial \varphi^b_{k'}}{\partial \hbar} - \frac{\partial \varphi^s_{k'}}{\partial \hbar} \\
&= \frac{\partial}{\partial \hbar} - \left(\frac{\partial}{\partial \hbar} + \xi^\beta_{k'} \right) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \langle k' | F_i \rangle \, \xi^\beta_{F_i^*} \\
\frac{1}{\imath} \left(\left(\mathcal{X}^{k'}\Big|_{G_0} f_0 \right) \underset{G_0}{*} f_0{}'|_{S_{k'}} \right) (0, \xi, k) &= \imath \left(\xi^\beta_{F_i^*}\Big|_{G_0} f_0 \right) (0, \xi, k - k') \times \left(\langle k' | F_i \rangle \, f_0{}'(0, \xi, k') \right) \\
&= \imath \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\xi^\beta_{F_i^*}\Big|_{G_0} f_0 \right) \underset{G_0}{*} \left(\langle . | F_i \rangle \, f_0{}'|_{S_{k'}} \right) \right) (0, \xi, k),
\end{aligned}$$

où $\xi^\beta_{F_i^*}$ est un champ de vecteurs sur N, donc sur $\widetilde{G}_0$, et $\langle . | F_i \rangle$ est la fonction de classe C^∞ (sur $\widetilde{G}_0$, donc sur G_0) :

$$(0, \xi, k) \longmapsto \langle k | F_i \rangle .$$

Donc finalement :

$$\begin{aligned}
\{ f_0, f_0{}' \}_{G_0} &= \imath \sum_{i=1}^{n} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^n} \left(\xi^\beta_{F_i^*}\Big|_{G_0} f_0 \right) \underset{G_0}{*} \left(\langle . | F_i \rangle \, f_0{}'|_{S_{k'}} \right) - \left(\xi^\beta_{F_i^*}\Big|_{G_0} f_0{}' \right) \underset{G_0}{*} \left(\langle . | F_i \rangle \, f_0|_{S_{k'}} \right) \\
&= \imath \sum_{i=1}^{n} \left(\xi^\beta_{F_i^*}\Big|_{G_0} f_0 \right) \underset{G_0}{*} (\langle . | F_i \rangle \, f_0{}') - \left(\xi^\beta_{F_i^*}\Big|_{G_0} f_0{}' \right) \underset{G_0}{*} (\langle . | F_i \rangle \, f_0) .
\end{aligned}$$

– *Dérivations* via $\mathfrak{I}$ *:*
La proposition 2.5.2 appliquée à l'action de $\mathbb{T}^n$ sur M_e, d'après les hypothèses de régularité sur σ et J, entraîne que l'application :

$$\begin{array}{ccc}
\Delta_e \times \mathbb{T}^n & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & M_e \\
(\xi, g) & \longmapsto & g.\sigma(\xi)
\end{array}$$

est un difféomorphisme. Par ailleurs, pour toute fonction $f_0 \in \mathrm{C_c}(G_0)$, d'après l'égalité :

$$\chi_M \circ \varphi(\xi, g) = \langle \chi | g \rangle ,$$

en notant toujours $k = \frac{1}{\imath} d\chi$, on a :

$$(\mathfrak{I}^{-1} f_0) \circ \varphi(\xi, g) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_0(\xi, k) \langle \chi | g \rangle .$$

Donc, pour $x = \varphi(\xi, g) \in M_e$, à condition de prendre ∂_i et ∂_i^*, les champs de vecteurs sur M_e, définis par :

$$\begin{aligned}
(\partial_i)_x &= \xi_{F_i}^{\alpha} \\
(\partial_i^*)_x &= d_{\varphi^{-1}(x)} \varphi(\xi_{F_i^*}^{\beta}) \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i^* = \varphi_* \left(\xi_{F_i^*}^{\beta} \right),
\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}
\partial_i (\mathfrak{I}^{-1} f_0)(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_0(\xi, k) \imath \langle k | F_i \rangle \langle \chi | g \rangle \\
&= \imath \mathfrak{I}^{-1} (f_0 \langle . | F_i \rangle)(x) \\
\partial_i^* \left(\mathfrak{I}^{-1} f_0 \right)(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} d_{\xi, k} f_0 (\xi_{F_i^*}^{\beta}) \langle \chi | g \rangle \\
&= \mathfrak{I}^{-1} \left(\xi_{F_i^*}^{\beta} \Big|_{G_0} f_0 \right)(x).
\end{aligned}$$

– *Crochet de Poisson* via $\mathfrak{I}$:
Ainsi, pour $f_0, f_0' \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(G_0)$, sur M_e, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{I}^{-1} \left\{ f_0, f_0' \right\}_{G_0} \\
&= \mathfrak{I}^{-1} \left(\imath \sum_{i=1}^{n} \left(\xi_{F_i^*}^{\beta} \Big|_{G_0} f_0 \right) \underset{G_0}{*} (f_0' \langle . | F_i \rangle) - \left(\xi_{F_i^*}^{\beta} \Big|_{G_0} f_0' \right) \underset{G_0}{*} (f_0 \langle . | F_i \rangle) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{I}^{-1} \left(\xi_{F_i^*}^{\beta} \Big|_{G_0} f_0 \right) \times \imath \mathfrak{I}^{-1} (f_0' \langle . | F_i \rangle) - \mathfrak{I}^{-1} \left(\xi_{F_i^*}^{\beta} \Big|_{G_0} f_0 \right) \times \imath \mathfrak{I}^{-1} (f_0 \langle . | F_i \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_i^* (\mathfrak{I}^{-1} f_0) \times \partial_i (\mathfrak{I}^{-1} f_0') - \partial_i^* (\mathfrak{I}^{-1} f_0') \times \partial_i (\mathfrak{I}^{-1} f_0) \\
&= \left\langle d(\mathfrak{I}^{-1} f_0) \otimes d(\mathfrak{I}^{-1} f_0') | \Omega \right\rangle ,
\end{aligned}$$

avec :

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^* \wedge \partial_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi_* (\xi_{F_i^*}^{\beta}) \wedge \xi_{F_i}^{\alpha}.$$

CQFD

D'après la proposition 2.2.8, on a le résultat complémentaire :

Proposition 2.5.5 — Dans les conditions (1.) à (4.) du théorème 2.5.4, si on remplace la condition (5.) par la condition suivante :

5'. pour tout sous-groupe $\mathtt{H}$ de $\mathbb{T}^n$, l'action β laisse l'ensemble $\Delta_{\mathtt{H}} = \left\{ \xi \mid \mathbb{T}^n_{\sigma(\xi)} = \mathtt{H} \right\}$ stable ; alors les conclusions du théorème 2.5.4 restent vraies ; de plus (M, Ω) admet une quantification stricte par déformation, au sens de Rieffel.

Démonstration.

La proposition 2.5.2, qui s'applique d'après les points (2.) et (3.), indique que l'application π est fermée ; on peut donc appliquer la proposition 2.4.6. Le deuxième point de cette dernière proposition indique que, pour tout $\chi \in \widehat{\mathbb{T}^n}$, l'ensemble $\Delta(\chi)$ est ouvert dans Δ.

Dès lors, la condition (5'.) entraîne la condition (5.) ; en effet, comme :

$$\Delta(\chi) = \bigcup_{\mathtt{H} \subset \ker \chi} \Delta_{\mathtt{H}},$$

on a immédiatement que :

$$\{ (\hbar, \xi) \in \mathbb{R} \times N \mid \xi, \beta_{\hbar k}(\xi) \in \Delta(\chi) \} = \mathbb{R} \times \Delta(\chi)$$

est ouvert dans $\mathbb{R} \times \Delta$.

Enfin, le fait que (M, Ω) admette une quantification stricte par déformation est une conséquence immédiate de la proposition 2.2.8, d'après les formes particulières de espaces topologiques $\widetilde{G}$ et G :

$$\begin{cases} \widetilde{G} = \mathbb{R} \times N \times \mathbb{Z}^n \\ G = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^n} \{ (\hbar, \xi) \in \mathbb{R} \times N \mid \xi, \beta_{\hbar k}(\xi) \in \Delta(\chi) \} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^n} \mathbb{R} \times \Delta(k) = \mathbb{R} \times G_0. \end{cases}$$

CQFD

On déduit immédiatement le cas particulier suivant :

Corollaire. — Soit M une variété à base dénombrable d'ouverts munie de deux actions par difféomorphismes : l'une libre de $\mathbb{T}^n$, l'autre de $\mathbb{R}^n$. On suppose que les actions commutent et que la submersion $M \overset{J}{\twoheadrightarrow} N = {}^{M}\!/_{\mathbb{T}^n}$ admet une section σ de classe C^∞ et transverse à J. Alors M est une variété de Poisson, qui a pour bivecteur de Poisson :

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} \xi_{F_i^*}^{\mathbb{R}^n} \wedge \xi_{F_i}^{\mathbb{T}^n},$$

où F_i est une base de $\mathfrak{t}_n$ et F_i^* la base de $\mathbb{R}^n$ duale. En outre (M, Ω) admet une quantification stricte par déformation, au sens de Rieffel.

Démonstration.

L'action de $\mathbb{R}^n$ sur M commute avec celle de $\mathbb{T}^n$, donc elle induit une action de $\mathbb{R}^n$ sur N. D'après la proposition 2.5.5 le groupoïde G de l'action de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{R} \times {}^{M}\!/_{\mathbb{T}^n}$ définie par :

$$k.(\hbar, \xi) = (\hbar, (\hbar k).\xi),$$

$$G = (\mathbb{R} \times {}^{M}\!/_{\mathbb{T}^n}) \rtimes \mathbb{Z}^n,$$

est étale, $(G, \mathrm{C}_c^\infty(G))$ est un groupoïde de déformation de (M, Ω), et (M, Ω) admet une quantification stricte par déformation. CQFD

2.6 Premiers exemples

Je présente ici quelques applications directes du théorème 2.5.4 ou de ses corollaires.

Déformation des tores par des tores non commutatifs de Rieffel

Pour tout bivecteur de Poisson Ω sur la variété $M = \mathbb{T}^d$, qui est invariant par l'action à gauche du groupe $\mathbb{T}^d$, si $(\theta_l)_{1\leq l\leq d}$ sont les coordonnées canoniques sur M, il existe deux entiers m, n tels que $d = m + n$, et un matrice réelle $(\Theta^i_j)_{i,j}$ de taille $m \times n$ tels que :

$$\Omega = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Theta^i_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\wedge\frac{\partial}{\partial\theta_{m+i}}.$$

Soient alors l'action, libre, α de $\mathbb{T}^n$ sur $M = \mathbb{T}^{m+n}$ définie par :

$$\alpha_{(u_1,\ldots,u_n)}(s_1,\ldots,s_m,s_{m+1},\ldots,s_{m+n}) = (s_1,\ldots,s_m,u_1s_{m+1},\ldots,u_ns_{m+n}),$$

et l'action β de $\mathbb{R}^n$ sur M définie par :

$$\beta_{(x_1,\ldots,x_n)}(s_1,\ldots,s_m) = (s_1e^{\imath(\Theta x)_1},\ldots,s_me^{\imath(\Theta x)_m}),\ \text{avec } (\Theta x)_j = \sum_{i=1}^{n}\Theta^i_jx_i.$$

Alors on a :

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n}\xi^{\beta}_{\frac{\partial}{\partial\theta_i}}\wedge\xi^{\alpha}_{\frac{\partial}{\partial\theta_i}}.$$

Par ailleurs les deux actions commutent. De plus l'application quotient :

$$\begin{array}{ccc} M = \mathbb{T}^{m+n} & \xrightarrow{\quad J \quad} & N = \mathbb{T}^m \\ & & \\ (s_1,\ldots,s_{m+n}) & \longmapsto & (s_1,\ldots,s_m) \end{array}$$

est surjective, de classe C^∞, invariante par $\mathbb{T}^n$, et elle admet une section de classe C^∞ :

$$\sigma(s_1,\ldots,s_m) = (s_1,\ldots,s_m,1,\ldots,1).$$

Donc, d'après le corollaire de la proposition 2.5.5, si $G = (\mathbb{R}\times\mathbb{T}^m)\rtimes\mathbb{Z}^n$ est le groupoïde de l'action de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{T}^m$ par :

$$k.(\hbar,s_1,\ldots,s_m) = (\hbar,s_1e^{\imath\hbar(\theta k)_1},\ldots,s_me^{\imath\hbar(\theta k)_m}),$$

alors $(G,\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(G))$ est un groupoïde de déformation de $(\mathbb{T}^{m+n},\Omega)$; et il induit une quantification stricte par déformation, au sens de Rieffel. On retrouve ainsi un résultat déjà établi par Rieffel [Rie89b, th. 1.3]. On notera que pour $n = m = 1$ et $\Theta = 1$, pour tout $\hbar = \Theta$, on a :

$$\mathrm{C}^*(G_\hbar) = \mathrm{C}(\mathbb{T}^2_Theta),$$

qui est l'algèbre de la rotation.

Sphères $\mathbb{S}^4_\theta$ non commutatives de Connes et Landi

Soit la sphère :

$$M = \mathbb{S}^4 = \left\{ (z, z', t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \;\middle|\; |z|^2 + |z'|^2 + t^2 = 1 \right\}.$$

Le tore $\mathbb{T}$ de dimension 1 agit de manière effective et par difféomorphismes sur $\mathbb{S}^4$:

$$u.(z, z', t) = (uz, z', t), \;\; u \in \mathbb{T}.$$

L'action est libre sur l'ouvert $M_e = \{ (z, z', t) \mid z \neq 0 \}$.

1. Soit $N = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ munie de l'action de $\mathbb{R}$, par difféomorphismes, définie par :

$$x.(t, z') = (t, e^{\imath x} z'), \quad \text{si } x \in \mathbb{R}.$$

2. On considère l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^4 & \xrightarrow{\quad J \quad} & N = \mathbb{C} \times \mathbb{R} \\ (z, z', t) & \longmapsto & (z', t). \end{array}$$

Elle est invariante par $\mathbb{T}$; et son image est le disque fermé :

$$\Delta = \mathbb{D}^3 = \left\{ (z', t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \;\middle|\; |z'|^2 + t^2 \leq 1 \right\}.$$

De plus $\Delta_e = J(M_e) = \left\{ (z', t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \;\middle|\; |z'|^2 + t^2 < 1 \right\} = \overset{\circ}{\mathbb{D}^3}$ est un ouvert de N.

3. Une section continue de J est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^3 & \xrightarrow{\quad \sigma \quad} & \mathbb{S}^4 \\ (z', t) & \longmapsto & (\sqrt{1 - |z'|^2 - t^2}, z', t), \end{array}$$

qui est de classe C^∞ sur Δ_e, transverse à J ; de plus $\sigma(\Delta)$ rencontre chaque orbite de $\mathbb{T}$ une, et une seule fois *i.e.* $p_{\mathbb{T}} \circ \sigma$ est injective.

4. Dans tous les cas, les χ_M sont de classe C^∞ puisque :
   – si $\chi = 1$, $\chi_M = 1$ est définie sur $\mathrm{dom}\,(\chi_M) = M$
   – si $\chi \neq 1$, $\chi_M(z, z', t) = \chi\left(\frac{z}{|z|}\right)$ est définie sur $\mathrm{dom}\,(\chi_M) = M_e$.

5'. L'action de $\mathbb{R}$ sur N laisse $\mathbb{S}^2 = \mathbb{D}^3 - \overset{\circ}{\mathbb{D}^3}$ et $\overset{\circ}{\mathbb{D}^3}$ stables.

Par conséquent, d'après la proposition 2.5.5, $(G, \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(G))$ est un groupoïde de déformation de $(\mathbb{S}^4, \Omega)$, et $(\mathbb{S}^4, \Omega)$ admet une quantification stricte par déformation, avec

$$\begin{aligned} G &= (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \times \{0\}) \sqcup ((\mathbb{R} \times \overset{\circ}{\mathbb{D}^3}) \rtimes \mathbb{Z}) \subset (\mathbb{R} \times \mathbb{D}^3) \rtimes \mathbb{Z}, \\ \Omega &= \frac{\partial}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial}{\partial \theta'}, \end{aligned}$$

où $\frac{\partial}{\partial\theta}$ (resp. $\frac{\partial}{\partial\theta'}$) est la dérivation le long des orbites de l'action initiale $\mathbb{T}$ (resp. de l'action de $\mathbb{T}$ par $u.(z,z',t) = (z, uz', t)$). Les algèbres déformées $\mathrm{C}^*(G_\hbar) = \mathrm{C}(\mathbb{S}^4_\hbar)$ ne sont autres que les sphères non commutatives définies dans [CL01]. Le résultat de déformation stricte au sens de Rieffel n'est donc rien d'autre que celui de Várilly [Var01].

On reconnaît en particulier que, pour tout $\hbar$, $F = \left\{ \left(\frac{e^{\imath\theta}}{2}, 0\right) \,\middle|\, e^{\imath\theta} \in \mathbb{T} \right\}$ est un fermé invariant de $G^{(0)}_\hbar$ et, d'après la proposition 1.4.7 on a la suite exacte :

$$0 \hookrightarrow \mathrm{C}^*\left(G_\hbar|_{\overset{\circ}{\mathbb{D}^3}}\right) \hookrightarrow \mathrm{C}(\mathbb{S}^4_\hbar) \twoheadrightarrow \mathrm{C}^*\left(G_\hbar|_F\right) = \mathrm{C}^*(\mathbb{T} \rtimes \mathbb{Z}) = \mathrm{C}(\mathbb{T}^2_\hbar) \twoheadrightarrow 0.$$

En particulier, on retrouve l'existence d'un morphisme surjectif

$$\mathrm{C}(\mathbb{S}^4_\hbar) \twoheadrightarrow \mathrm{C}(\mathbb{T}^2_\hbar).$$

Quantification de Bellissard et Vittot de $\mathbb{C}^n$

Sur la variété $M = \mathbb{C}^n$, on considère l'action usuelle de $\mathbb{T}^n$, coordonnée par coordonnée, qui est effective ; elle est libre sur l'ouvert $M_e = (\mathbb{C} - \{0\})^n$.

1. La variété $N = \mathbb{R}^n$ est munie de l'action de $\mathbb{R}^n$, par translations.
2. L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\quad J \quad} & \mathbb{R}^n \\ (z_1, \dots, z_n) & \longmapsto & (|z_1|^2, \dots, |z_n|^2) \end{array}$$

   est de classe C^∞, invariante par $\mathbb{T}^n$; son image est $\Delta = (\mathbb{R}_+)^n$, et l'image de M_e est $J(M_e) = \Delta_e = (\mathbb{R}_+^*)^n$ qui est ouvert dans N.
3. Il existe une section continue σ de J définie par :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+)^n & \xrightarrow{\quad \sigma \quad} & \mathbb{C}^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n}), \end{array}$$

   qui est de classe C^∞ sur M_e, et dont l'image est transverse aux orbites de $\mathbb{T}^n$.
4. Pour tout $\chi \in \widehat{\mathbb{T}^n}$, on a $\chi(s_1, \dots, s_n) = s_1^{k_1} \cdots s_1^{k_n}$, où les k_i sont des entiers, coordonnées de $k = \frac{1}{\imath} d\chi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors χ_M est définie sur l'ouvert $\{(z_1, \dots, z_n) \mid \forall i,\ k_i \neq 0 \Rightarrow z_i \neq 0\}$ de $\mathbb{C}^n$ et est de classe C^∞ d'après l'expression :

$$\chi_M(z_1, \dots, z_n) = \prod_{1 \le i \le n, k_i \neq 0} \left(\frac{z_i}{|z_i|}\right)^{k_i}.$$

5. Les ensembles

$$\{(\hbar, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid k_i \neq 0 \Rightarrow (x_i \neq 0 \text{ et } x_i + \hbar k_i \neq 0)\}$$

   sont ouverts dans $G^{(0)} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+)^n$ d'après le lemme 3.3.4.

Soit alors, le sous-groupoïde :

$$G = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^n} \{ (\hbar, x) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+)^n \mid k_i \neq 0 \Rightarrow (x_i \neq 0 \text{ et } x_i + \hbar k_i \neq 0) \} ,$$

de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \rtimes \mathbb{Z}^n$, pour l'action $k.(\hbar, x) = (\hbar, x + k\hbar)$. D'après le théorème 2.5.4, $(G, \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(G))$ est un groupoïde de déformation de $\mathbb{C}^n$, muni du bivecteur Poisson valant, sur M_e :

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial r_i} \wedge \left(\frac{1}{r_i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \right) ,$$

où (r_i, θ_i) sont les coordonnées polaires sur $\mathbb{C}^n$. En fait, comme $r_i dr_i \wedge d\theta_i = dx_i \wedge dy_i$, où (x_i, y_i) sont les coordonnées cartésiennes sur $\mathbb{C}^n$, on voit que (M, Ω) est une variété symplectique de forme symplectique, sur tout M :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

Cet exemple est essentiellement le même que celui de Bellissard et Vittot [BV90], qui considèrent eux le groupoïde G'' tel que :

$$G''_\hbar = \begin{cases} \left\{ (y, x) \in ((\mathbb{R}_+)^n)^2 \;\middle|\; y \in \hbar\mathbb{Z}^n,\ x \in \hbar\mathbb{Z}^n \text{ et } x_i = 0 \Leftrightarrow y_i = 0 \right\} & \text{si } \hbar \neq 0 \\ \{ (x, k) \in (\mathbb{R}_+)^n \times \mathbb{Z}^n \mid k_i = 0 \Rightarrow x_i = 0 \} & \text{si } \hbar = 0 \end{cases} .$$

En fait G'' est un sous-groupoïde fermé de G, avec même fibre en zéro. De manière analogue à la démonstration proposée ici, on peut montrer que G'' est un groupoïde de déformation *en zéro* de $\mathbb{C}^n$, muni de sa structure symplectique canonique.

3 Exemple des variétés toriques

Les variétés toriques sont un exemple non trivial de variétés symplectiques qui admettent un groupoïde de déformation étale qui n'est pas nécessairement un groupoïde de Lie étale. Ce groupoïde est construit à partir de l'image de l'application moment de la variété torique.

3.1 Rappels sur le moment

Sur une variété de Poisson (resp. symplectique) — cf. définition 2.1.1 — on distingue certains champs de vecteurs particuliers :

Définition 3.1.1 —

1. On appelle *gradient de Poisson* (resp. *gradient symplectique*) d'une fonction $\mathtt{f} \in \mathrm{C}^\infty(M)$ le champ de vecteurs $\nabla_{\mathtt{f}}$ défini par la dernière (resp. l'une) des conditions (resp. équivalentes) suivantes :

$$\begin{gathered} \nabla_{\mathtt{f}} = (i\omega)^{-1}(d\mathtt{f}) \\ i_{\nabla_{\mathtt{f}}}\omega = d\mathtt{f} \\ \forall \mathcal{X} \in TM,\ \omega(\nabla_{\mathtt{f}}, \mathcal{X}) = d\mathtt{f}(\mathcal{X}) \\ \forall \mathtt{f}' \in \mathrm{C}^\infty(M),\ d\mathtt{f}'(\nabla_{\mathtt{f}}) = \{\mathtt{f}', \mathtt{f}\} \end{gathered}$$

2. On dit qu'un champ de vecteurs $\mathcal{X} \in \mathrm{C}^\infty(M, TM)$ est un *champ de vecteurs hamiltonien* si

$$\exists \mathtt{f} \in \mathrm{C}^\infty(M),\ \nabla_{\mathtt{f}} = \mathcal{X}.$$

Lorsque l'égalité précédente a lieu, on dit aussi que $\mathtt{f}$ est le *hamiltonien du champ de vecteurs* $\mathcal{X}$.

Notations : Soit $\mathtt{G}$, un groupe de Lie qui agit sur une variété de Poisson, M, par morphismes de Poisson. Je note toujours $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, et ξ_X l'action infinitésimale associée à $X \in \mathfrak{g}$. Par ailleurs si $X \in \mathfrak{g}$ on note $\widetilde{X}$ la fonction, définie sur le dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$, par $\widetilde{X}(\xi) = \langle \xi | X \rangle$. On notera que cette correspondance est une injection de $\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$.

Définition 3.1.2 —

1. Le groupe $\mathtt{G}$ a une *action hamiltonienne* sur M si, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, le champ de vecteurs $x \mapsto \xi_X(x)$ est hamiltonien *i.e.* :

$$\forall X \in \mathfrak{g},\ \exists f \in \mathrm{C}^\infty(M),\ df = i_{\xi_X}\omega.$$

2. On appelle *moment* de l'action de $\mathtt{G}$ sur M une application $M \xrightarrow{J} \mathfrak{g}^*$ telle que
(i) $\forall X \in \mathfrak{g},\ \langle J | X \rangle \in \mathrm{C}^\infty(M)$,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, dashed, "J"] \arrow[dr, "\langle J|X\rangle"'] & & \mathfrak{g}^* \arrow[dl, "\widetilde{X}"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

(ii) $\forall X \in \mathfrak{g},\ \nabla_{\langle J|X\rangle} = \xi_X$.

Rappelons le résultat standard suivant [CdS-W, 7.1 p.39] [Mar99] :

Proposition 3.1.3 — Si le groupe $\mathtt{G}$ a une action hamiltonienne sur M, alors il existe une application moment, unique à une application localement constante près (resp. à une constante près si M est connexe).

Exemples.

1. Action canonique de $\mathbb{T}^n$ sur $(\mathbb{R}^{2n}, \omega) \simeq (\mathbb{C}^n, \omega)$, avec :
$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i \text{ avec } z_i = x_i + \imath y_i$$
$$(s_1, \ldots, s_n).(z_1, \ldots, z_n) = (s_1 z_1, \ldots, s_n z_n).$$
Elle est hamiltonienne, et le moment vaut
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{\quad J \quad} & \mathfrak{t}_n^* = \mathbb{R}^n \\ (z_1, \ldots, z_n) & \longmapsto & \left(\frac{|z_1|^2}{2}, \ldots, \frac{|z_n|^2}{2} \right) \end{array}$$
2. Action à gauche ($g.x = gx$) d'un sous-groupe $\mathtt{G}$ de $\mathbb{T}^{2n}$, sur $(\mathbb{T}^{2n}, \omega)$, avec :
$$\omega = \sum_{i=1}^{n} d\theta_i \wedge d\theta_{n+i}.$$
L'action n'est pas hamiltonienne — sauf si $\mathtt{G} = \{1\}$.
3. *Action coadjointe d'un groupe de Lie* $\mathtt{G}$: Le théorème de Kirillov-Kostant-Souriau [AM, (v) p. 302] dit que :
   - il existe une unique structure de Poisson sur $\mathfrak{g}^*$ telle que
   $$\left\{ \widetilde{X}, \widetilde{X'} \right\} = \widetilde{[X, X']}$$
   - $\mathtt{G}$ agit sur $\mathfrak{g}^*$ par morphismes de Poisson
   $$g.\xi = Ad^*_{g^{-1}}(\xi)$$
   (action coadjointe, où $Ad_g(X) = gXg^{-1}$)
   - les orbites sont symplectiques
   - $J = Id_{\mathfrak{g}^*}$
4. Toute action par symplectomorphismes est hamiltonienne si :
   - M simplement connexe.
   - ou $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Je rappelle aussi le théorème suivant (cf. C. M. Marle [Mar99, chap. V §5 th. 5.2] [LM87]) :

Théorème 3.1.4 — *Soit $\mathtt{G}$ un groupe de Lie qui a une action hamiltonienne sur une variété symplectique M. Il existe une unique action affine de $\mathtt{G}$ sur $\mathfrak{g}^*$ ayant pour partie linéaire l'action coadjointe, c'est à dire de la forme*

$$g.\xi = Ad^*_{g^{-1}}(\xi) + \theta(g),$$

qui rend le moment J équivariant, c'est à dire vérifiant, pour tous $g \in \mathtt{G}$, $x \in M$:

$$J(g.x) = g.J(x) = Ad^*_{g^{-1}}(J(x)) + \theta(g).$$

En particulier, si $\mathtt{G}$ est commutatif, l'action coadjointe est triviale (*i.e.* $Ad^*_{g^{-1}}(\xi) = \xi$) ; donc le moment est invariant par $\mathtt{G}$, à $\theta \in Hom(\mathtt{G}, \mathbb{R})$ près.

En 1981, Guillemin et Sternberg ([GS82]) d'une part, et Atiyah ([Ati]) d'autre part, ont montré simultanément le résultat suivant :

Théorème 3.1.5 — *Si un tore $\mathbb{T}^n$ a une action hamiltonienne sur une variété symplectique compacte connexe (M, ω) alors l'image $J(M)$ de l'application moment est un polytope convexe de $\mathfrak{t}_n^* = \mathbb{R}^n$. En fait $J(M)$ est l'enveloppe convexe de l'image, finie, par J des points fixes de M pour l'action de $\mathbb{T}^n$.*

Je reproduis ici la démonstration d'Atiyah ; j'en profite pour introduire quelques lemmes utiles pour la suite.

Lemme 3.1.6 — si $\mathtt{G}$ a une action hamiltonienne sur (M, ω) et $\mathtt{G}' \xrightarrow{\pi} \mathtt{G}$ morphisme de groupes alors l'action de $\mathtt{G}'$ sur (M, ω) (par $h.x = \pi(h)x$) est hamiltonienne et le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "J"'] \arrow[dr, "J'"] & \\ \mathfrak{g}^* \arrow[rr, "d\pi^*"] & & \mathfrak{g}'^* \end{tikzcd}$$

Lemme 3.1.7 — (Morse-Bott) Si $\varphi : M \to \mathbb{R}$ est non dégénérée d'indice pair, au sens de Bott *i.e.* :

- les points critiques forment une sous variété N de M
- la Hessienne $d^2\varphi$ restreinte à l'espace normal ${}^{TM|_N}/_{TN}$ est non dégénérée
- $d^2\varphi$ a un nombre pair de valeurs propres négatives

alors les $\varphi^{-1}\{\xi\}$, $\xi \in \mathbb{R}$ sont connexes (ou vides).

Lemme 3.1.8 — Soient :

- (M_1, ω_1) et (M_2, ω_2) variétés symplectiques compacte connexes munies d'une action hamiltonienne de $\mathbb{T}^n$
- $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2$, un symplectomorphisme équivariant par $\mathbb{T}^n$: $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$ et $\varphi(g.x) = g.\varphi(x)$.

alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "J_1"'] & & M_2 \arrow[dl, "J_2"] \\ & \mathfrak{t}_n^* & \end{tikzcd}$$

en particulier $J_1(M_1) = J_2(\varphi(M_1))$.

On peut maintenant démontrer le théorème.

Démonstration.

– $\forall \xi \in \mathfrak{t}_n^*,\ J^{-1}\{\xi\}$ ***est connexe, ou vide :***
On le démontre par récurrence sur n. D'après le lemme 3.1.6, avec le morphisme

$$(t_1, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{T}^{n-1} \overset{i}{\hookrightarrow} (t_1, \ldots, t_{n-1}, 1) \in \mathbb{T}^n$$

on a :

$$J_{n-1} = di^* \circ J_n = \sum_{k=1}^{n-1} \langle J_n | E_k \rangle E_k^*$$

où (E_k) base de $\mathfrak{t}_n$, de base duale E_k^*, telle que $di^*(E_n^*) = 0$. Ensuite, d'après le lemme de Morse-Bott 3.1.7.
• $n = 1$: $J = J_1 : M \to \mathbb{R}$ est non dégénérée d'indice pair (cf. Atiyah [Ati]).
• $n - 1 \Rightarrow n$: si ξ valeur régulière, $\varphi : M' \to \mathbb{R}$ est non dégénérée d'indice pair (cf. Atiyah [Ati])

$$\begin{aligned} \varphi &= \langle J_n | E_n \rangle_{|M'} \\ M' &= (J_{n-1})^{-1} \{ di^*(\xi) \} \end{aligned}$$

d'où le résultat puisque :

$$J_n^{-1}\{\xi\} = M' \cap \langle J_n | E_n \rangle^{-1} \{ \langle \xi | E_n \rangle \} = \varphi^{-1} \{ \langle \xi | E_n \rangle \}$$

– $J(M)$ ***est convexe :***
Montrons que l'intersection de $J(M)$ avec toute droite affine est connexe. Cela résulte de

$$J(M) \cap \underbrace{di^{*-1}\{\xi\}}_{\text{droite de } \mathfrak{t}_n^*} = J(\underbrace{(J_{n-1})^{-1}\{\xi\}}_{\text{connexe}}).$$

– ***L'image par J des points fixes de l'action est finie :***
En effet, x est fixe par $\mathbb{T}^n$ si et seulement si $d_x J = 0$ car :

$$\xi_X(x) = 0 \Leftrightarrow (i_{\xi_X}\omega)_x = 0 \Leftrightarrow d_x \langle J | X \rangle = 0.$$

La sous-variété $\{x \mid d_x J = 0\}$ a un nombre fini de composantes connexes $Z_1, \ldots, Z_m$, car M compacte ; et J est constante sur chaque Z_i ; notons $J(Z_i) = \{\xi_i\}$.

– $J(M) = \operatorname{conv}\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ ***:***
En effet, par l'absurde, supposons que $J(x) \notin \operatorname{conv}\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$. Alors, d'après le théorème de Hahn-Banach (ou Helly, en dimension finie) de séparation forte des convexes compacts on a :

$$\exists X\ \forall i\ \langle J(x) | X \rangle > \langle \xi_i | X \rangle .$$

Or, si $\{\exp tX \mid t \in \mathbb{R}\}$ dense dans $\mathbb{T}^n$:

$$d_x \langle J|X \rangle = 0 \Leftrightarrow d_x J = 0$$

Et donc, comme M est compacte, $\langle J|X \rangle$ atteint son maximum en un point $x_i \in Z_i$ *i.e.* :

$$\forall X \ \exists i, \ \langle J(x)|X \rangle \leq \ \langle J(x_i)|X \rangle = \langle \xi_i|X \rangle$$

CQFD

Enfin je rappelle sans démonstration le procédé de réduction symplectique introduit par Marsden et Weinstein [MW74] [AM, p. 298-299] [Mar99, th. 7.3 p. 26 et th. p.91] :

PROPOSITION 3.1.9 — Soit S une sous-variété d'une variété symplectique (M_0, ω_0) ; on note j l'inclusion. Alors il existe un feuilletage $\mathcal{F}$ sur S tel que $T_x\mathcal{F} \ker \omega_{0x}$. Si de plus

- $M = {}^{S}\!/_{\mathcal{F}}$ est une variété,
- La projection canonique $S \overset{pr}{\twoheadrightarrow} M$ est une submersion,

alors la 2-forme «quotient» ω de M est symplectique et vérifie :

$$pr^*\omega = j^*\omega_0 = \omega_0|_S .$$

Démonstration.

Vérifions que $x \in S \longmapsto \ker \omega_{0x}$ est une distribution intégrable. Pour tous champs de vecteurs $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$, on a :

$$i_{[\mathcal{X},\mathcal{X}']} = (i_\mathcal{X} d + d i_\mathcal{X}) i_{\mathcal{X}'} - i_{\mathcal{X}'}(i_\mathcal{X} d + d i_\mathcal{X}),$$

donc $i_\mathcal{X}\omega = 0$ et $i_{\mathcal{X}'}\omega = 0$ entraînent $i_{[\mathcal{X},\mathcal{X}']}\omega = 0$, puisque $d\omega = 0$. CQFD

THÉORÈME 3.1.10 — *Soient (M_0, ω_0) une variété symplectique et $\mathtt{G}$ un groupe de Lie. On suppose que :*

- *$\mathtt{G}$ a une action hamiltonienne sur M_0. Le moment est noté J, et on note $(g, \xi) \longmapsto g.\xi$ l'action de $\mathtt{G}$ sur $\mathfrak{g}^*$ qui rend J équivariante (cf. théorème 3.1.4) ;*
- *$\xi \in \mathfrak{g}^*$ est une valeur faiblement régulière de J, i.e. $S = J^{-1}\{\xi\}$ est une variété et $T_xS = \ker d_xJ$ pour tout $x \in S$; c'est en particulier le cas si ξ est une valeur régulière ;*
- *l'action de $\mathtt{G}_\xi = \{g \in \mathtt{G} \mid g.\xi = \xi\}$ sur $S = J^{-1}\{\xi\}$ est libre et propre. On notera que $\mathtt{G}_\xi$ agit sur $J^{-1}\{\xi\}$, car si $x \in J^{-1}\{\xi\}$ et $g \in \mathtt{G}_\xi$ on a : $J(g.x) = g.J(x) = g.\xi = \xi$.*

Alors d'après la proposition précédente on a un feuilletage $\mathcal{F}$ sur S tel que

- *les feuilles sont les orbites du groupe $\mathtt{G}_\xi$, car $T_x\mathcal{F} \equiv \ker \omega_0|_S(x) = T_x(\mathtt{G}_\xi.x)$.*
- *$M = {}^{S}\!/_{\mathcal{F}} = {}^{J^{-1}\{\xi\}}\!/_{\mathtt{G}_\xi}$ est une variété symplectique ; la forme symplectique est encore notée ω.*
- *on a : $pr^*\omega = j^*\omega_0 = \omega_0|_S$.*

On remarquera que dans le cas d'un groupe commutatif l'action coadjointe est triviale donc $\mathtt{G}_\xi = \mathtt{G}$, si le cocycle $\theta \in Hom(\mathtt{G}, \mathbb{R})$ est nul ; on verra plus loin que c'est toujours le cas pour une variété torique.

3.2 Rappels sur les variétés toriques

Les deux exemples qui suivent montrent que des actions différentes peuvent avoir mêmes polytopes images de l'application moment.

Exemples.

1. Pour une variété symplectique M munie de l'action triviale $g.x = x$, on a $J(M) = \{\text{un point}\}$.
2. Soit M une variété symplectique munie de l'action hamiltonienne d'un tore $\mathbb{T}^n$, de moment J. Alors, pour toute variété symplectique P, l'action de $\mathbb{T}^n$ sur $(M \times P)$ définie par $g.(x,y) = (g.x, y)$, est hamiltonienne. Si on note J' son moment, on a $J'(M \times P) = J(M)$.

Cependant en imposant certaines restrictions inspirées par ces deux cas on caractérise entièrement l'action :

Définition 3.2.1 — Une variété symplectique compacte et connexe M munie d'un action de $\mathbb{T}^n$ hamiltonienne est appelée une *variété torique* lorsque :
- l'action est effective *i.e.*

$$\forall g \in \mathbb{T}^n - \{1\}, \ \exists x \in M, \ g.x \neq x;$$

- M est de dimension $2n$ (en fait on avait nécessairement $\dim M \geq 2n$ pour une action effective).

Cette définition coincide en fait la théorie développée, entre autres, par Demazure [Tei, Aud]. On a alors un résultat, dû à T. Delzant ([Del88]) :

Théorème 3.2.2 — *Si (M_1, ω_1) et (M_2, ω_2) sont des variétés toriques pour l'action d'un même tore $\mathbb{T}^n$ et si $J_1(M_1) = J_2(M_2)$, alors il existe φ tel que :*
- *φ difféomorphisme symplectique ;*
- *φ est $\mathbb{T}^n-$équivariant ;*
- *φ fait commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[d, "J_1"'] & & M_2 \arrow[d, "J_2"] \\ J_1(M_1) & = & J_2(M_2). \end{tikzcd}$$

Exemple. — On montrera plus loin (cf. paragraphe 3.4) que la sphère $\mathbb{S}^2$, munie de l'action longitudinale de $\mathbb{T}$, est une variété torique ; cette action a deux point fixes, à savoir les pôles nord et sud. Donc, d'après le théorème d'Atiyah 3.1.5, le polytope obtenu est un segment dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs l'action de $\mathbb{T}^2$ sur $\mathbb{S}^4 = \left\{ (z, z', t) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R} \;\middle|\; |z^2| + |z'|^2 + t^2 = 1 \right\}$ par

$$(u, u').(z, z', t) = (uz, u'z', t)$$

admet elle aussi deux point fixes. Comme $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{S}^4$ ne sont pas symplectomorphes, ni même difféomorphes, il résulte d'après le théorème précédent qu'il n'est pas possible que $\mathbb{S}^4$ soit une variété torique, puisque son polytope serait alors un segment aussi.

Le problème se pose alors de savoir si un polytope donné est l'image du moment d'une certaine variété torique, et laquelle *i.e.* comment reconstruire la variété torique à partir du polytope.

Je reprends les notations et conventions énoncés au début du paragraphe 2.5, page 55.

Définition 3.2.3 — Un polytope $\Delta \subset \mathbb{R}^n = \mathfrak{t}_n^*$ est un *polytope de Delzant* ([Gui94], [Del88]) lorsque :

- en chaque sommet ξ_i, exactement n arêtes se rencontrent ;
- les arêtes issues de ξ_i ont des directions rationnelles, *i.e.* $\Xi_l \in \mathbb{Z}^n$ pour des arêtes de la forme $\{\xi_i + t\Xi_l \mid 0 \leq t \leq t_0\}$;
- en chaque sommet ces directions (Ξ_l) peuvent être choisies de manière à former une $\mathbb{Z}-$base de $\mathbb{Z}^n$.

Proposition 3.2.4 — Si M est une variété torique $J(M)$ est un polytope de Delzant.

On a alors une réponse au problème posé, donnée par Delzant ([Del88]).

Théorème 3.2.5 — *Si Δ est un polytope de Delzant dans $\mathbb{R}^n$, alors il existe une variété torique (M, ω) telle que $J(M) = \Delta$.*

De plus, la démonstration de ce théorème est constructive, et cette construction est du plus haut intérêt pour la suite. Avant de donner cette démonstration, je rappelle une lemme dû à Delzant [Del88, lemme 2.2 p. 321] :

Lemme 3.2.6 — Soit M une variété torique de dimension n, et J, l'application moment. Alors :

- J est une application quotient de l'action du tore.
- Pour tout $\xi \in \Delta = J(M)$, la variété $J^{-1}\{\xi\}$ est un tore de dimension égale à celle de la face de Δ contenant ξ.
- Le groupe d'isotropie d'un point x de M est le groupe connexe dont l'algèbre de Lie est l'annulateur dans $\mathfrak{t}_n$ de la face de Δ contenant $J(x)$, *i.e.*

$$Lie(\mathbb{T}_x^n) = \bigoplus_{j \mid \langle J(x) \mid X_j \rangle = 0} \mathbb{R}X_j.$$

Voici la démonstration du théorème 3.2.5 :

Démonstration.

- *Définition équivalente des polytopes de Delzant :*
  Un polytope Δ, *i.e.* un polyèdre *compact*, à $n+d$ faces, avec nécessairement $d \geq 1$, est de Delzant si et seulement s'il existe un morphisme de groupes surjectif :

$$\mathbb{T}^{n+d} \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^n,$$

dont le noyau $\ker\pi$ est connexe — donc c'est un tore de dimension d — tel que :

$$\Delta = \{\,\xi \in \mathfrak{t}_n^* \mid \forall j \in \{1,\ldots,n+d\}\ \langle\xi|X_j\rangle \geq \lambda_j\,\},$$

avec $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+d} \in \mathbb{R}$, et $X_j = d\pi(E_j) \in \mathfrak{t}_n$, où (E_j) est une base de $\mathfrak{t}_{n+d}$ telle que :

$$\mathbb{Z}^{n+d} = \bigoplus_{j=1}^{n+1} \mathbb{Z}E_j^*.$$

– *Expression alternative de Δ :*
Avec le paramétrage précédent de Δ on a :

$$\begin{aligned}\Delta &= \{\,\xi \in \mathfrak{t}_n^* \mid \langle\xi|X_j\rangle \geq \lambda_j\,\}\\ &= \{\,\xi \in \mathfrak{t}_n^* \mid \langle d\pi^*(\xi)|E_j\rangle \geq \lambda_j\,\}\\ &= (d\pi^*)^{-1}\left\{\eta \in \mathfrak{t}_{n+d}^* \mid \langle\eta|E_j\rangle \geq \lambda_j\right\}\\ &= (d\pi^*)^{-1}\left(\lambda + (\mathfrak{t}_{n+d}^*)_+\right),\end{aligned}$$

où $\lambda = \sum_j \lambda_j E_j^*$ est une constante et $(\mathfrak{t}_{n+d}^*)_+ = \left\{\eta \in \mathfrak{t}_{n+d}^* \mid \langle\eta|E_j\rangle \geq 0\right\}$ est le premier quadrant de $\mathfrak{t}_{n+d}^*$ relativement à la base (E_j).

– *Construction de M :*
L'action de $\mathbb{T}^{n+d}$ sur $\mathbb{C}^{n+d}$ a pour moment :

$$J_0(z_1,\ldots,z_{n+d}) = \lambda + \sum_{j=1}^{n+d} \frac{|z_j|^2}{2} E_j^*.$$

En particulier $J_0(\mathbb{C}^{n+d}) = \lambda + (\mathfrak{t}_{n+d}^*)_+$.
Par ailleurs, si on note i l'injection $\mathbb{T}^d \equiv \ker\pi \xhookrightarrow{i} \mathbb{T}^{n+d}$, d'après le lemme 3.1.6, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}^{n+d} \arrow[dl, "J_0"'] \arrow[dr, "J_d"] & \\ \mathfrak{t}_{n+d}^* \arrow[rr, two heads, "di^*"] & & \mathfrak{t}_d^*. \end{tikzcd}$$

Comme J_d est invariant par l'action de $\mathbb{T}^d$ — d'après le lemme 3.2.6, on a une action $\mathbb{T}^d$ sur $J_d^{-1}\{0\}$. On pose :

$$M = {}^{J_d^{-1}\{0\}}\big/_{\mathbb{T}^d}.$$

– *Structure symplectique sur M :*
On utilise le procédé de réduction symplectique de Marsden-Weinstein avec $X = \mathbb{C}^{n+d}$ muni de la forme symplectique canonique ω_0, $\xi = 0$, $\mathbb{T}^n = \mathbb{T}^{n+d}$.

– *Action de $\mathbb{T}^n$ sur M :*
L'action de $\mathbb{T}^{n+d}$ sur $J_d^{-1}\{0\}$ passe au quotient par $\mathbb{T}^d$, d'où une action de $\mathbb{T}^{n+d}/\mathbb{T}^d \simeq \mathbb{T}^n$ sur M :

$$[\mathbb{T}^d.(t_1,\ldots,t_{n+d})][\mathbb{T}^d.(z_1,\ldots,z_{n+d})] = [\mathbb{T}^d.(t_1z_1,\ldots,t_{n+d}z_{n+d})].$$

Le moment de cette action est donné par :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, "J"'] & & J_d^{-1}\{0\} \arrow[ll, two heads, "pr"'] \arrow[dl, "J_n"] \\ & \mathfrak{t}_n^*. & \end{tikzcd}$$

– *Polytope de l'action de $\mathbb{T}^n$ sur M :*
En résumé, on a :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "J"'] & & J_d^{-1}\{0\} \arrow[ll, two heads, "pr"'] \arrow[rr, hook, "j"] \arrow[dl, "J_n"'] \arrow[dr, "J_0 \circ j"] & & \mathbb{C}^{n+d} \arrow[dl, "J_0"] \arrow[dr, "J_d"] & \\
& \mathfrak{t}_n^* \arrow[rr, hook, "d\pi^*"'] & & \mathfrak{t}_{n+d}^* \arrow[rr, two heads, "di^*"'] & & \mathfrak{t}_d^*.
\end{tikzcd}$$

D'après les lemmes 3.1.6 et 3.1.8, le diagramme commute ; on calcule :

$$\begin{array}{rcl}
J(M) & = & J\left(pr(J_d^{-1}\{0\})\right) \\
& = & J_n(J_d^{-1}\{0\}) \\
& = & (d\pi^*)^{-1}((J_0 \circ j)(J_d^{-1}\{0\})) \quad \text{car } d\pi^* \text{ injective} \\
(J_0 \circ j)(J_d^{-1}\{0\}) & = & J_0(J_d^{-1}\{0\}) \\
& = & J_0(\mathbb{C}^{n+d}) \cap di^{*-1}\{0\} \\
& = & \left(\lambda + (\mathfrak{t}_{n+d}^*)_+\right) \cap \ \mathrm{Im}(d\pi^*) \quad \text{car } \pi \circ i = 1.
\end{array}$$

Donc

$$J(M) = (d\pi^*)^{-1}\left(\lambda + (\mathfrak{t}_{n+d}^*)_+\right) = \Delta.$$

CQFD

3.3 Déformation d'une variété torique

Toute variété torique M est munie de l'action effective α d'un tore $\mathbb{T}^n$. Dans ce paragraphe je montre que l'on peut appliquer le théorème 2.5.4, avec $N = \mathbb{R}^n = \mathfrak{t}_n^*$ muni de l'action β de $\mathbb{R}^n$, par translation, et J l'application moment. De plus la structure de Poisson sur M obtenue par ce théorème est en fait la structure symplectique de départ de M.
Notations : Je désigne toujours par M une variété torique de dimension $2n$, et $\Delta = J(M) \subset \mathfrak{t}_n^*$ le polytope image de l'application moment, paramétré par :

$$\Delta = \{\xi \in \mathfrak{t}_n^* \mid \ \forall j \in \{1, \ldots, n+d\} \ \langle \xi | X_j \rangle \geq \lambda_j \},$$

avec $X_1, \ldots, X_{n+d} \in \mathfrak{t}_n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+d} \in \mathbb{R}$, choisis de sorte qu'il existe un morphisme de groupes de Lie $\mathbb{T}^{n+d} \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^n$ vérifiant $d\pi(E_j) = X_j$, où (E_j) est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}^{n+d}$, et tels que le sous-groupe $\ker \pi$ de $\mathbb{T}^{n+d}$ soit connexe — je noterai donc $\mathbb{T}^d \equiv \ker \pi$. Je note toujours ω (resp. ω_0) la forme symplectique de M (resp. la forme symplectique canonique de $\mathbb{C}^{n+d}$). Si $g \in \mathbb{T}^n$, la translation par g est notée :

$$x \in M \xrightarrow{L_g} g.x \in M.$$

On conserve les notations de la construction de Delzant précédente :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "J"'] & & J_d^{-1}\{0\} \arrow[ll, two heads, "pr"'] \arrow[rr, hook, "j"] \arrow[dl, "J_n"'] \arrow[dr, "J_0 \circ j"] & & \mathbb{C}^{n+d} \arrow[dl, "J_0"] \arrow[dr, "J_d"] & \\
& \Delta \arrow[rr, hook, "d\pi^*|_\Delta"'] & & \lambda + (\mathfrak{t}_{n+d}^*)_+ \arrow[rr, "di^*"'] & & \mathfrak{t}_d^*,
\end{tikzcd}$$

avec

$$(\mathfrak{t}^*_{n+d})_+ = \left\{ \eta \in \mathfrak{t}^*_{n+d} \mid \langle \eta | E_j \rangle \geq 0 \right\},$$
$$\overset{\circ}{(\mathfrak{t}^*_{n+d})_+} = \left\{ \eta \in \mathfrak{t}^*_{n+d} \mid \langle \eta | E_j \rangle > 0 \right\},$$
$$\lambda = \sum_{j=1}^{n+d} \lambda_j E_j^*,$$

où (E_j^*) est la base de $\mathfrak{t}^*_{n+d}$ duale de (E_j).

Proposition 3.3.1 — Si σ_0 est une section (resp. continue, resp. de classe C^∞ sur $\lambda + \overset{\circ}{(\mathfrak{t}^*_{n+d})_+}$) de $\mathbb{C}^{n+d} \overset{J_0}{\twoheadrightarrow} \lambda + (\mathfrak{t}^*_{n+d})_+$, alors :

$$\sigma = pr \circ \sigma_0 \circ d\pi^*|_\Delta$$

est une section (resp.continue, resp. de classe C^∞ sur $\overset{\circ}{\Delta}$) de $M \overset{J}{\twoheadrightarrow} \Delta$.

Démonstration.

La composée est bien définie, car si $\xi \in \Delta$ on sait que $d\pi^*(\xi) \in \lambda + (\mathfrak{t}^*_{n+d})_+$ (d'après le calcul $\Delta = (d\pi^*)^{-1}\left(\lambda + (\mathfrak{t}^*_{n+d})_+\right)$). Alors on a bien $\sigma_0(d\pi^*(\xi)) \in J_d^{-1}\{0\}$ puisque :

$$\begin{array}{rcll} J_d(\sigma_0(d\pi^*(\xi))) & = & di^* \circ J_0 \circ \sigma_0 \circ d\pi^*(\xi) & \text{car } J_d = di^* \circ J_0 \\ & = & di^* \circ d\pi^*(\xi) & \text{car } J_0 \circ \sigma_0 = Id_{|\lambda + (\mathfrak{t}^*_{n+d})_+} \\ & = & 0 & \text{car } \pi \circ i = 1. \end{array}$$

Alors σ est bien une section de J, car, d'après le diagramme commutatifs précédent, on a :

$$J_0 = d\pi^* \circ J \circ pr \text{ sur } J_d^{-1}\{0\},$$

donc

$$d\pi^*(\xi) = J_0(\sigma_0(d\pi^*(\xi))) = (d\pi^* \circ J \circ pr)(\sigma_0(d\pi^*(\xi))) = (d\pi^* \circ J \circ \sigma)(\xi).$$

Comme $d\pi^*$ est injective, on déduit que $(J \circ \sigma)(\xi) = \xi$. CQFD

Proposition 3.3.2 — Soit M une variété torique de dimension $2n$. Alors l'application moment J est invariante par $\mathbb{T}^n$. En outre, pour toute section σ de J, en notant toujours $M \overset{p_{\mathbb{T}^n}}{\twoheadrightarrow} M/\mathbb{T}^n$, la composée $p_{\mathbb{T}^n} \circ \sigma$ est bijective. En particulier, d'après la proposition 2.5.2, Δ et M/G sont homéomorphes, par $p_{\mathbb{T}^n} \circ \sigma$.

Démonstration.

L'application J est invariante par $\mathbb{T}^n$ d'après le lemme 3.2.6, dû à Delzant ; notons $M/\mathbb{T}^n \xrightarrow{\bar{J}} \Delta$ l'application quotient. Ce même lemme indique de plus que, pour tout point $\xi \in \Delta$, tous les points de $J^{-1}\{\xi\}$ sont dans la même orbite. Donc, pour tout $x \in M$, comme x et $\sigma(J(x))$ sont dans la même orbite, on a $p_{\mathbb{T}^n}(\sigma \circ J(x)) = p_{\mathbb{T}^n}(x)$; comme $p_{\mathbb{T}^n}$ est surjective, il vient que $p_{\mathbb{T}^n} \circ \sigma$ aussi. Par ailleurs l'injectivité résulte de ce que $\bar{J} \circ (p_{\mathbb{T}^n} \circ \sigma) = Id_\Delta$ est injective. CQFD

Notations : Pour $\xi \in \Delta$, on notera $\mathbb{T}^n_\xi$ la valeur commune des groupes d'isotropie $\mathbb{T}^n_x$, pour $x \in J^{-1}\{\xi\}$. Pour tout caractère $\chi \in \widehat{\mathbb{T}^n}$, on note alors, comme dans les notations qui précèdent la proposition 2.4.6 :

$$\Delta(\chi) = \left\{ \xi \in \Delta \mid \mathbb{T}^n_\xi \subset \ker \chi \right\}.$$

Si $k = \frac{1}{\imath} d\chi$ on conserve la notation $\Delta(\chi) = \Delta(k)$.

Dans la suite je choisis la section σ_0 suivante :

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}^{n+d} & \begin{array}{c}\twoheadrightarrow \\ \dashleftarrow\end{array} & \lambda + (\mathfrak{t}^*_{n+d})_+ \\
(z_1, \ldots, z_{n+d}) & \xmapsto{J_0} & \lambda + \sum_{j=1}^{n+d} \frac{|z_j|^2}{2} E_j^* \\
(\mathbb{R}_+)^{n+d} \ni (\sqrt{2(\eta_1 - \lambda_1)}, \ldots, \sqrt{2(\eta_{n+d} - \lambda_n)}) & \xleftarrow{\sigma_0} & \sum_j \eta_j E_j^*,
\end{array}
$$

qui vérifie trivialement les conditions de régularité de la proposition 3.3.1.

Proposition 3.3.3 — Soit M une variété torique de dimension $2n$. On a :

- pour tout $\chi \in \widehat{\mathbb{T}^n}$, notant $k = \frac{1}{\imath} d\chi$:

$$\Delta(\chi) = \{ \xi \in \Delta \mid \langle \xi | X_j \rangle = \lambda_j \Rightarrow \langle k | X_j \rangle = 0 \} .$$

- pour tout $x \in M$: $\mathbb{T}^n_x = \{1\} \Leftrightarrow J(x) \in \overset{\circ}{\Delta}$;

En particulier, l'action de $\mathbb{T}^n$ sur M est libre sur l'ouvert $M_e \equiv J^{-1}(\overset{\circ}{\Delta})$. Donc $\Delta_e = J(M_e)$ est l'ouvert $\overset{\circ}{\Delta}$ de $\mathfrak{t}^*_n$.

Démonstration.

- *Calcul des $\Delta(\chi)$:*
  On sait, d'après le lemme de Delzant 3.2.6, que :

$$Lie(\mathbb{T}^n_x) = \bigoplus_{j \ \mid \ \langle J(x) | X_j \rangle = 0} \mathbb{R} X_j$$

  Par ailleurs on a :

$$\Delta(\chi) = \left\{ \xi \in \Delta \;\middle|\; \mathbb{T}^n_{\sigma(\xi)} \subset \ker \chi \right\} .$$

  Enfin, d'après le lemme de Delzant, $\mathbb{T}^n_{\sigma(\xi)}$ est connexe, donc :

$$\mathbb{T}^n_{\sigma(\xi)} \subset \ker \chi \Leftrightarrow Lie(\mathbb{T}^n_{\sigma(\xi)}) = \bigoplus_{j \ \mid \ \langle \xi | X_j \rangle = 0} \mathbb{R} X_j \subset \ker d\chi .$$

  Donc finalement :

$$\Delta(\chi) = \{ \xi \in \Delta \mid \langle \xi | X_j \rangle = \lambda_j \Rightarrow \langle k | X_j \rangle = 0 \} .$$

- *Calcul de M_e :*
  On a $\mathbb{T}^n_x = \{1\}$, si et seulement si :

$$\widehat{\mathbb{T}^n} = \widehat{\mathbb{T}^n / \mathbb{T}^n_x} = \widehat{\mathbb{T}^n / \mathbb{T}^n_{\sigma(J(x))}} = \left\{ \chi \in \widehat{\mathbb{T}^n} \;\middle|\; J(x) \in \Delta(\chi) \right\} ,$$

  soit, d'après le calcul des $\Delta(\chi)$:

$$\mathbb{T}^n_x = \{1\} \Leftrightarrow (\forall j, \ \langle J(x) | X_j \rangle > \lambda_j) \Leftrightarrow J(x) \in \overset{\circ}{\Delta} .$$

CQFD

COROLLAIRE. — Soient M une variété torique de dimension $2n$, et Δ le polytope image de l'application moment de M. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$, l'ensemble :

$$\{ (\hbar, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid \xi, \xi + \hbar k \in \Delta(k) \}$$

est ouvert dans $\mathbb{R} \times \Delta$.

Cela résulte du lemme plus général suivant :

LEMME 3.3.4 — Pour tout polyèdre, non nécessairement de Delzant, ni même compact :

$$\Delta = \{ \xi \in \mathfrak{t}_n^* \mid \ \forall j \in \{1, \dots, n+d\} \ \langle \xi | X_j \rangle \geq \lambda_j \},$$

si, pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$, on définit :

$$\Delta(k) = \{ \xi \in \Delta \mid \langle \xi | X_j \rangle = \lambda_j \Rightarrow \langle k | X_j \rangle = 0 \},$$

alors l'ensemble

$$E_k = \{ (\hbar, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid \xi, \xi + \hbar k \in \Delta(k) \}$$

ouvert dans $\mathbb{R} \times \Delta$.

Démonstration.

En effet on a :

$$\xi, \xi + \hbar k \in \Delta(k) \Leftrightarrow \begin{cases} \langle k | X_j \rangle \neq 0 \Rightarrow \langle \xi | X_j \rangle > \lambda_j \\ \langle k | X_j \rangle \neq 0 \Rightarrow \langle \xi + \hbar k | X_j \rangle > \lambda_j \\ \langle k | X_j \rangle = 0 \Rightarrow \langle \xi | X_j \rangle \geq \lambda_j \\ \langle k | X_j \rangle = 0 \Rightarrow \langle \xi + \hbar k | X_j \rangle \geq \lambda_j . \end{cases}$$

Comme $\langle \xi + \hbar k | X_j \rangle = \langle \xi | X_j \rangle + \hbar \langle k | X_j \rangle$, on voit que :

$$\begin{aligned} \xi, \xi + \hbar k \in \Delta(k) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \langle k | X_j \rangle \neq 0 \Rightarrow \langle \xi | X_j \rangle > \lambda_j \\ \langle k | X_j \rangle \neq 0 \Rightarrow \langle \xi + \hbar k | X_j \rangle > \lambda_j \\ \langle k | X_j \rangle = 0 \Rightarrow \langle \xi | X_j \rangle \geq \lambda_j \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \xi \in \Delta(k) \text{ et } \xi + \hbar k \in U, \end{aligned}$$

où U est l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ suivant :

$$U = \{ \eta \in \mathbb{R}^n \mid \langle k | X_j \rangle \neq 0 \Rightarrow \langle \eta | X_j \rangle > \lambda_j \}.$$

Ainsi E_k apparaît sous la forme :

$$E_k = (\mathbb{R} \times \Delta(k)) \cap \{ (\hbar, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid \xi + \hbar k \in U \}.$$

Comme $\Delta(k)$ est ouvert dans Δ, il s'ensuit que E_k est ouvert dans $\Delta \times \mathbb{R}^n$. CQFD

PROPOSITION 3.3.5 — Pour tout $\chi \in \widehat{\mathbb{T}^n}$, l'application χ_M, définie moyennant σ sur un ouvert de M et à valeurs dans $\mathbb{T}$, définie au théorème 2.5.3, est de classe C^∞.

Démonstration.

Soit la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^{n+d} \times \Delta & \xrightarrow{\quad v \quad} & \mathbb{C}^{n+d} \\ (g, \xi) & \longmapsto & g.\sigma_0\left(d\pi^*(\xi)\right). \end{array}$$

Si $\chi \in \widehat{\mathbb{T}^n}$, on a $\chi \circ \pi \in \widehat{\mathbb{T}^{n+d}}$. En outre $\mathbb{T}^{n+d}$ agit sur $\mathbb{C}^{n+d}$; d'après le théorème 2.5.3, on définit une fonction $(\chi \circ \pi)_{\mathbb{C}^{n+d}}$ telle que :

$$\begin{tikzcd} J_0(\mathrm{dom}\,(\chi \circ \pi)_{\mathbb{C}^{n+d}}) \times \mathbb{T}^{n+d} \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, "pr_2"'] & \mathrm{dom}\,(\chi \circ \pi)_{\mathbb{C}^{n+d}} \arrow[d, "(\chi \circ \pi)_{\mathbb{C}^{n+d}}"] \\ \mathbb{T}^{n+d} \arrow[r, "\chi \circ \pi"] & \mathbb{T}, \end{tikzcd} \qquad \varphi_0(\eta, g) = g.\sigma_0(\eta)$$

où

$$\mathrm{dom}\,(\chi \circ \pi)_{\mathbb{C}^{n+d}} = \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+d} \;\middle|\; \mathbb{T}^n_z \subset \ker \chi \circ \pi \right\},$$

$$J_0(\mathrm{dom}\,(\chi \circ \pi)_{\mathbb{C}^{n+d}}) = \left\{ \eta \in \lambda + (\mathfrak{t}^*_{n+d})_+ \;\middle|\; \mathbb{T}^n_{\sigma_0(\eta)} \subset \ker \chi \circ \pi \right\}.$$

– *v envoie surjectivement $\mathbb{T}^{n+d} \times \Delta(\chi)$ sur $pr^{-1}(M_\chi)$ et $pr^{-1}(M_\chi) \subset \mathrm{dom}\,(\chi \circ \pi)_{\mathbb{C}^{n+d}}$:*
Pour la deuxième partie de cette assertion, si $z \in pr^{-1}(M_\chi) \subset J_d^{-1}\{0\}$, on a, par définition du $\mathbb{T}^n$-espace M, par réduction symplectique :

$$pr(g.z) = \pi(g).pr(z)$$

Donc :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{T}^n_z & = & \left\{ g \in \mathbb{T}^{n+d} \;\middle|\; g.z = z \right\} \\ & \subset & \left\{ g \in \mathbb{T}^{n+d} \;\middle|\; \pi(g).pr(z) = pr(z) \right\} \\ & = & \pi^{-1}(\mathbb{T}^n_{pr(z)}). \end{array}$$

Donc :

$$\begin{array}{rcl} pr^{-1}(M_\chi) & = & \left\{ z \in J_d^{-1}\{0\} \;\middle|\; \mathbb{T}^n_{pr(z)} \subset \ker \chi \right\} \\ & \subset & \left\{ z \in J_d^{-1}\{0\} \;\middle|\; \mathbb{T}^n_z \subset \pi^{-1}(\mathbb{T}^n_{pr(z)}) \subset \pi^{-1}(\ker \chi) = \ker \chi \circ \pi \right\} \\ & \subset & \mathrm{dom}\,(\chi \circ \pi)_{\mathbb{C}^{n+d}}. \end{array}$$

Alors, si $(g, \xi) \in \mathbb{T}^{n+d} \times \Delta(\chi)$, on a :

$$pr(v(g, \xi)) = pr\left(g.\sigma_0\left(d\pi^*(\xi)\right)\right) = \pi(g)\sigma(\xi),$$

Donc :

$$pr(v(\mathbb{T}^{n+d} \times \Delta(\chi))) = \mathbb{T}^n.\sigma(\Delta(\chi)) = J^{-1}(\Delta(\chi)) = M_\chi,$$

soit :

$$v(\mathbb{T}^{n+d} \times \Delta(\chi)) = pr^{-1}(M_\chi).$$

– χ_M *est de classe* C^∞ *:*
En effet, sur $\mathbb{T}^{n+d} \times \Delta(\chi)$, on a :

$$\begin{aligned}(\chi_M \circ pr)(v(g,\xi)) &= \chi_M(\pi(g).\sigma(\xi)) \\ &= \langle \chi | \pi(g) \rangle \\ &= \langle \chi \circ \pi | g \rangle \\ &= (\chi \circ \pi)_{\mathbb{C}^{n+d}}(g.\sigma_0(d\pi^*(\xi))) \\ &= (\chi \circ \pi)_{\mathbb{C}^{n+d}}(v(g,\xi)).\end{aligned}$$

Donc, comme v est surjective, on a $\chi_M \circ pr = (\chi \circ \pi)_{\mathbb{C}^{n+d}}$ sur $pr^{-1}(M_\chi)$. Montrons que $(\chi \circ \pi)_{\mathbb{C}^{n+d}}$ est de classe C^∞ sur $(\mathbb{C}^{n+d})_{\chi\circ\pi}$; il en résultera, comme pr est une submersion, que χ_M est de classe C^∞. En fait, plus généralement, pour tout caractère χ_0 sur $\mathbb{T}^{n+d}$, en particulier pour $\chi_0 = \chi \circ \pi$, la fonction $(\chi_0)_{\mathbb{C}^{n+d}}$ est C^∞ sur $\mathrm{dom}\,(\chi_0)_{\mathbb{C}^{n+d}}$. En effet si $z = (z_1, \ldots, z_{n+d}) \in \mathbb{C}^{n+d}$, on a :

$$\mathbb{T}^n_z = \left\{ (g_1, \ldots, g_{n+d}) \in \mathbb{T}^{n+d} \;\middle|\; z_j \neq 0 \Rightarrow g_j = 1 \right\}.$$

Et tout caractère χ_0 sur $\mathbb{T}^{n+d}$ est de la forme :

$$\chi_0(g_1, \ldots, g_{n+d}) = \prod_{j=1}^{n+d} (g_j)^{l_j},$$

où $(l_1, \ldots, l_{n+d}) = l = \frac{1}{\imath} d\chi_0 \in \mathbb{Z}^{n+d}$, *i.e.* $l_j = \left\langle \frac{1}{\imath} d\chi_0 \middle| E_j \right\rangle$. Ainsi, compte-tenu du choix particulier de la section σ_0, on trouve que :

$$\mathrm{dom}\,(\chi_0)_{\mathbb{C}^{n+d}} = \left\{ (z_1, \ldots, z_{n+d}) \in \mathbb{C}^{n+d} \;\middle|\; l_j \neq 0 \Rightarrow z_j \neq 0 \right\},$$

$$(\chi_0)_{\mathbb{C}^{n+d}}(z_1, \ldots, z_{n+d}) = \prod_{\{ j \,\mid\, l_j \neq 0 \}} \left(\frac{z_j}{|z_j|} \right)^{l_j},$$

donc $(\chi_0)_{\mathbb{C}^{n+d}}$ est clairement de classe C^∞. CQFD

PROPOSITION 3.3.6 — L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathring{\Delta} \times \mathbb{T}^n & \xrightarrow{\varphi} & M_e \\ (\xi, g) & \longmapsto & L_g \circ \sigma(\xi) = g.\sigma(\xi) \end{array}$$

est un difféomorphisme. En outre *via* la trivialisation (canonique) :

$$T(\mathring{\Delta} \times \mathbb{T}^n) \simeq T\mathring{\Delta} \times T\mathbb{T}^n \simeq (\mathring{\Delta} \times \mathfrak{t}_n^*) \times (\mathbb{T}^n \times \mathfrak{t}_n) = (\mathring{\Delta} \times \mathbb{T}^n) \times \mathfrak{t}_n^* \times \mathfrak{t}_n,$$

on a (sur M_e) :

$$\varphi^*\omega((\Xi, X), (\Xi', X')) = \left\langle \Xi' \middle| X \right\rangle - \left\langle \Xi \middle| X' \right\rangle.$$

Démonstration.

L'action de $\mathbb{T}^n$ sur M_e est libre et propre, et σ est une section de classe C^∞ et transverse sur $\overset{\circ}{\Delta}$, donc d'après la proposition 2.5.2, φ est un difféomorphisme.

Si $(\xi, g, \Xi, X) \in \overset{\circ}{\Delta} \times \mathbb{T}^n \times \mathfrak{t}_n^* \times \mathfrak{t}_n$ on a, *via* la trivialisation :

$$d_{\xi,g}\varphi(\Xi, X) = \xi_X(\varphi(\xi, g)) + d_{\varphi(\xi,g)}L_g \circ d_\xi\sigma(\Xi).$$

On déduit ainsi :

$$\begin{array}{rcl}\varphi^*\omega(\Xi, X, \Xi', X') & = & \omega\left(\xi_X, dL_g \circ d\sigma(\Xi')\right) - \omega\left(\xi_{X'}, dL_g \circ d\sigma(\Xi)\right) \\ & + & \omega\left(dL_g \circ d\sigma(\Xi), dL_g \circ d\sigma(\Xi')\right) + \omega(\xi_X, \xi_{X'})\end{array}$$

Par ailleurs rappelons que :
- $\omega(\xi_X, .) = d\left\langle J|X\right\rangle(.)$ par définition du moment.
- J est invariante par l'action de $\mathbb{T}^n$ *i.e.* $L_g^*J = J$ et $dJ(\xi_X) = 0$.
- $\sigma = pr \circ \sigma_0 \circ d\pi^*$.
- La réduction de Marsden-Weinstein fait que $pr^*\omega = \omega_0$.
- $\sigma_0^*\omega_0 = 0$, par un calcul immédiat, d'après le choix de σ_0 fait précédemment.
- $J \circ \sigma = Id_\Delta$.

On a donc :

$$\begin{array}{rcl}\omega(\xi_X, \xi_{X'}) & = & d\left\langle J|X\right\rangle(\xi_{X'}) \\ & = & 0 \\ \omega\left(dL_g \circ d\sigma(\Xi), dL_g \circ d\sigma(\Xi')\right) & = & L_g^*\omega\left(d\sigma(\Xi), d\sigma(\Xi')\right) \\ & = & \sigma^*\omega(\Xi, \Xi') \\ & = & (\sigma_0 \circ d\pi^*)^*(pr^*\omega)(\Xi, \Xi') \\ & = & (\sigma_0 \circ d\pi^*)^*\omega_0(\Xi, \Xi') \\ & = & \sigma_0^*\omega_0(d(d\pi^*)(\Xi), d(d\pi^*)(\Xi')) \\ & = & 0 \\ \omega\left(\xi_X, dL_g \circ d\sigma(\Xi)\right) & = & d\left\langle J|X\right\rangle(dL_g \circ d\sigma(\Xi)) \\ & = & \sigma^*d\left\langle J|X\right\rangle(\Xi) \\ & = & \left\langle \Xi|X\right\rangle.\end{array}$$

CQFD

Corollaire. — Soient (M, ω) une variété torique de dimension $2n$, et Ω le bivecteur de Poisson associé. Soient (θ_i) les coordonnées canoniques sur $\mathbb{T}^n$, et (ξ_i) les coordonnées sur $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à la base $\frac{\partial}{\partial\theta_i}^*$. Si $\overset{\circ}{\Delta} \times \mathbb{T}^n \xrightarrow[\sim]{\varphi} M_e$ est le difféomorphisme précédent, alors, sur M_e, on a :

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial\xi_i}\right) \wedge \xi^{\mathbb{T}^n}_{\frac{\partial}{\partial\theta_i}}.$$

Démonstration.

On remarque juste que :

$$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right) = \xi^{\mathbb{T}^n}_{\frac{\partial}{\partial\theta_i}}.$$

Alors le résultat provient directement de la proposition 3.3.6 et de la relation entre ω et Ω donnée par :

$$\langle \Omega | d\mathtt{f} \otimes d\mathtt{f}' \rangle = \omega(\nabla_{\mathtt{f}}, \nabla_{\mathtt{f}'}).$$

CQFD

On peut maintenant énoncer le résultat principal de cette thèse :

Théorème 3.3.7 — *Soit (M, ω) une variété torique de dimension $2n$. Soit*

$$\Delta = \{ \xi \in \mathfrak{t}_n^* \mid \forall j \in \{1, \ldots, n+d\} \ \langle \xi | X_j \rangle \geq \lambda_j \},$$

le polytope image de l'application moment de M. Soit

$$G = \left\{ (\hbar, \xi, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n \ \middle| \ \begin{array}{c} \xi, \xi + \hbar k \in \Delta \\ \langle \xi | X_j \rangle = \lambda_j \Rightarrow \langle k | X_j \rangle = 0 \\ \langle \xi + \hbar k | X_j \rangle = \lambda_j \Rightarrow \langle k | X_j \rangle = 0 \end{array} \right\}.$$

Alors G est un sous-groupoïde de $\widetilde{G} = (\mathbb{R} \times \mathfrak{t}_n^*) \rtimes \mathbb{Z}^n$ – pour l'action $k.(\hbar, \xi) = (\hbar, \xi + \hbar k)$; et $(G, \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(G))$ est un groupoïde de déformation de (M, ω).

Démonstration.

Les hypothèses du théorème 2.5.4 sont satisfaites, en prenant pour M la variété torique, munie de l'action l'action effective α du tore $\mathbb{T}^n$; en effet :

1. est vérifiée en prenant l'action β par translations de $\mathbb{R}^n$ sur $N = \mathbb{R}^n$;
2. est satisfaite en prenant J l'application moment de (M, ω), d'après la proposition 3.3.2 ;
3. découle de la proposition 3.3.1 ;
4. est démontrée à la proposition 3.3.3 ;
5. est montré au corollaire de la proposition 3.3.3, qui résulte lui-même du lemme 3.3.4.

Par ailleurs, le calcul des $\Delta(\chi)$ effectué à la proposition 3.3.3 indique que le groupoïde G ci-dessus est égal à celui donné au théorème 2.5.4. Enfin, d'après le corollaire de la proposition 3.3.6 le bivecteur de Poisson Ω du théorème 2.5.4 est celui de la structure symplectique initiale de (M, ω).

CQFD

On a de plus le résultat complémentaire suivant :

Proposition 3.3.8 — Si G est le groupoïde du théorème précédent, pour tout $\hbar \in \mathbb{R}$, toute représentation irréductible de $\mathrm{C}^*(G_\hbar)$ est de dimension finie. En particulier $\mathrm{C}^*(G_\hbar)$ est de type I [Dix, déf. 5.4.2 p. 121, th. 9.1 p. 190].

Démonstration.

Pour $\hbar = 0$, $\mathrm{C}^*(G_\hbar)$ est commutative, donc toute représentation irréductible est de dimension 1. Pour $\hbar \neq 0$, la description de $G_\hbar$ montre que l'action de $G_\hbar$ sur $G_\hbar^{(0)}$ est sans isotropie – on dit alors que G est *principal* . De plus, pour tout $(\hbar, \xi, k) \in G_\hbar$, on a :

$$G_\hbar . \{ (\hbar, \xi, k) \} \subset \{ (\hbar, \xi, k') \mid \xi + \hbar k' \in \Delta \}.$$

En particulier, comme Δ est borné, toute orbite de l'action de $G_\hbar$ sur $G_\hbar^{(0)}$ est finie, et donc fermée aussi. Or toute représentation irréductible de la C^*-algèbre d'un groupoïde principal (moyennable) dont les orbites sont fermées est nécessairement supportée par une telle orbite, d'où le résultat.

CQFD

3.4 Calculs explicites sur un exemple

Je donne ici des calculs explicites de cette quantification, pour les variétés toriques les plus simples, *i.e.* de dimension 2.

On applique la construction de Delzant (démonstration du théorème 3.2.5) aux polytopes de $\mathfrak{t}_1^*$. Dans la droite $\mathfrak{t}_1^*$, les polytopes sont tous de la forme :

$$\Delta = [a,b]\, F_1^* = \{\, \xi \in \mathfrak{t}_1^* \mid \langle \xi | F_1 \rangle \geq a \text{ et } \langle \xi | -F_1 \rangle \geq -b \,\},$$

où F_1 est un vecteur de base de $\mathfrak{t}_1$, tel que ${}^t\exp(\widehat{\mathbb{T}}) = \mathbb{Z}F_1^*$, si F_1^* est la base duale de F_1.

Par rapport aux notations générales, on a :

$$n = 1, d = 1, X_1 = F_1, X_2 = -F_1, \lambda_1 = a, \lambda_2 = -b.$$

Détermination de la variété M obtenue par la construction de Delzant

Calculons d'abord le morphisme de groupes $\mathbb{T} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{T}$. On veut que $d\pi(E_1) = X_1$, $d\pi(E_2) = X_2$, où E_1, E_2 est la base de $\mathfrak{t}_2$ telle que $\exp(E_1) = (1,0)$ et $\exp(E_2) = (0,1)$. Donc nécessairement :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{t}_2 & \xrightarrow{d\pi} & \mathfrak{t}_1 \\ \alpha E_1 + \beta E_2 & \longmapsto & (\alpha - \beta) F_1, \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{T} \\ (s,t) & \longmapsto & st^{-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{t}_1^* & \xrightarrow{d\pi^*} & \mathfrak{t}_2^* \\ \mu F_1^* & \longmapsto & \mu(E_1^* - E_2^*). \end{array}$$

Alors $\ker \pi = \{\, (s,s) \mid s \in \mathbb{T} \,\} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2$ est un tore connexe de dimension 1 ; on identifie donc le dual de son algèbre de Lie à $\mathbb{R}$; via cette identification, on a :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{t}_2^* & \xrightarrow{di^*} & \mathbb{R} \\ \mu E_1^* + \nu E_2^* & \longmapsto & \mu + \nu. \end{array}$$

Le moment de l'action diagonale de $\mathbb{T}^2$ sur $(\mathbb{C}^2, \omega_0)$, où $\omega_0 = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$ est la forme symplectique canonique, est donné par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{J_0} & \mathfrak{t}_2^* \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & \left(\frac{1}{2}|z_1|^2 + a\right) E_1^* + \left(\frac{1}{2}|z_2|^2 - b\right) E_2^* \end{array}$$

D'après le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}^{n+d} \arrow[dl, "J_0"'] \arrow[dr, "J_d"] & \\ \lambda + (\mathfrak{t}_2^*)_+ \arrow[rr, "di^*"'] & & \mathbb{R}, \end{tikzcd}$$

on trouve :

$$J_d(z_1, z_2) = \frac{1}{2}|z_1|^2 + \frac{1}{2}|z_2|^2 + a - b.$$

Donc $J_d^{-1}\{0\}$ est la sphère de rayon $\sqrt{2(b-a)}$:

$$S^3 = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; |z_1|^2 + |z_2|^2 = 2(b-a) \right\}.$$

munie de l'action $\mathbb{T}^2$ induite par celle sur $\mathbb{C}^2$.

On sait que le feuilletage de S^3 par l'action du sous-tore diagonal $\ker\pi \subset \mathbb{T}^2$ correspond à une fibration de Hopf [CLN, chap. II, (2) p. 43] *i.e.* :

$$\begin{tikzcd} M = {S^3}/{\ker\pi} \arrow[rr, "\sim"'] & & \mathbb{S}^2 = \left\{ (t,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C} \;\middle|\; \left(t + \frac{b-a}{2}\right)^2 + |z|^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \right\} \\ & S^3 \arrow[ul] \arrow[ur, "pr"'] & \end{tikzcd}$$

$$pr(z_1, z_2) = \left(\tfrac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{4} - \tfrac{b-a}{2}, \tfrac{z_1\overline{z_2}}{2} \right).$$

Ayant identifié $M = {S^3}/{\mathbb{T}}$ à $\mathbb{S}^2$, l'action de ${\mathbb{T}^2}/{\ker\pi}$ est donnée par une section du quotient $\mathbb{T}^2 \twoheadrightarrow {\mathbb{T}^2}/{\ker\pi} \simeq \mathbb{T}$, par exemple :

$$\{ (s,1) \mid s \in \mathbb{T} \} \subset \mathbb{T}^2,$$

et, *via* cette identification, on obtient l'action de $s \in \mathbb{T}$ sur $(t,z) = pr(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^2$ par :

$$\begin{aligned} s.(t,z) &= \pi(s,1).pr(z_1,z_2) \\ &= pr(sz_1, z_2) \\ &= \left(\frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_2|^2) - \frac{b-a}{2}, sz_1\overline{z_2} \right) \\ &= (t, s.z). \end{aligned}$$

Calculons maintenant le moment J et sa section σ, *via* ces identifications. Le choix de section de J_0 du paragraphe précédent est :

$$\begin{array}{ccc} [a, +\infty[\, E_1^* + [-b, +\infty[\, E_2^* & \xrightarrow{\sigma_0} & \mathbb{C}^2 \\ xE_1^* + yE_2^* & \longmapsto & \left(\sqrt{2(x-a)}, \sqrt{2\,(y+b)} \right). \end{array}$$

D'après la proposition 3.3.1 en déduit une section $[a,b] \xrightarrow{\sigma} \mathbb{S}^2$ de J, donnée par :

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= pr \circ \sigma_0 \circ d\pi^*(t) \\ &= pr(\sigma_0(tE_1^* - tE_2^*)) \\ &= pr\left(\sqrt{2(t+a)}, \sqrt{2\,(-t+b)}\right) \\ &= \left(t, \sqrt{(t+a)(b-t)}\right).\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement :

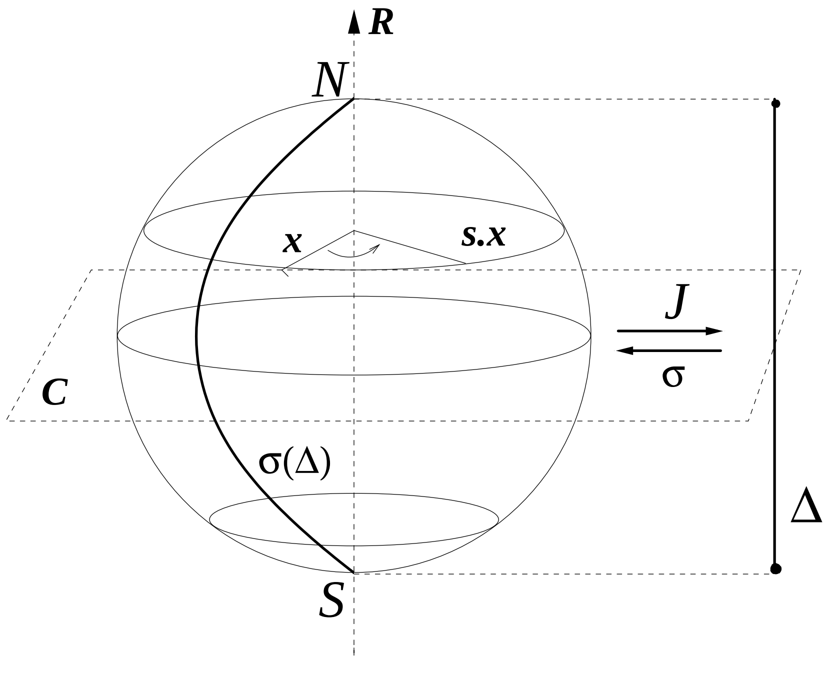
$$J(t,z) = J\,(t,|z|) = J(\sigma(t)) = t.$$

En excluant les pôles $N=(b,0)$ et $S=(a,0)$, on a un donc un difféomorphisme

$$\begin{array}{ccc}[a,b]\times\mathbb{T} & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & \mathbb{S}^2 - \{N,S\} \\ (t,s) & \longmapsto & s.\sigma(t) = (t, s\sqrt{(t+a)(b-t)}),\end{array}$$

et on déduit que la forme symplectique sur $\mathbb{S}^2$ est ω telle que

$$\varphi^*\omega = dt\wedge d\theta.$$



En résumé, on voit que la construction de Delzant pour $\Delta=[a,b]$ donne une sphère symplectique $(\mathbb{S}^2, dt\wedge d\theta)$ de diamètre $b-a$ plongée dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$, munie de l'action du tore $\mathbb{T}$ par rotation autour de l'axe des pôles ($N=(b,0)$, $S=(a,0)$). L'application moment s'identifie alors à la projection sur l'axe $\mathbb{R}$.

Groupoïde G_0 et transformée de Fourier

On a immédiatement :

$$\begin{aligned} G_0 &= \{\,(t,k)\in[a,b]\times\mathbb{Z} \mid (t=a\Rightarrow k=0) \text{ et } (t=b\Rightarrow k=0)\,\} \\ &= (]a,b[\times\mathbb{Z})\cup\{\,(a,0),(b,0)\,\}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Les fonctions χ_M définies au théorème 2.5.3, pour tout caractère $\chi\in\widehat{\mathbb{T}}$, valent alors :
- $\chi_M(t,z)=1$ sur $\mathbb{S}^2$, si $\chi=1$;
- $\chi_M(t,z)=\chi\left(\frac{z}{|z|}\right)$ sur $\mathbb{S}^2-\{N,S\}$, si $\chi\neq 1$.

Dans le paramétrage φ sur $\mathbb{S}^2-\{N,S\}$, notant $k=\frac{1}{\imath}d\chi\in\mathbb{Z}$ *i.e.* $\chi(s)=s^k$, on a $\frac{z}{|z|}=e^{\imath\theta}$, donc :

$$\frac{\partial\chi_M}{\partial\theta}(t,z)=(\imath k)\chi_M(t,z).$$

Et, pour $f\in\mathrm{C_c}(G_0)$, $\mathfrak{I}$ étant l'isomorphisme $\mathrm{C}(\mathbb{S}^2)\xrightarrow[\sim]{\mathfrak{I}}\mathrm{C}^*(G_0)$ associé au choix de σ du théorème 2.5.3, on a :

$$(\mathfrak{I}^{-1}f)(t,z)=\begin{cases} f(t,0)+\sum\limits_{k\neq 0} f(t,k)\left(\dfrac{z}{|z|}\right)^k & \text{si } t\neq a,b \\ f(t,0) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Donc, comme $\omega=dt\wedge d\theta$, on a, si $t\neq a,b$:

$$\begin{aligned} &\{\,\mathfrak{I}^{-1}f,\mathfrak{I}^{-1}f'\,\}_{\mathbb{S}^2}(t,z) \\ &= \left(\frac{\partial\mathfrak{I}^{-1}f}{\partial t}\frac{\partial\mathfrak{I}^{-1}f'}{\partial\theta}-\frac{\partial\mathfrak{I}^{-1}f'}{\partial t}\frac{\partial\mathfrak{I}^{-1}f}{\partial\theta}\right)(t,z) \\ &= \sum_{k,k'\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\partial\mathfrak{I}^{-1}f}{\partial t}(t,k)\chi_M(t,z)\right)\left(f'(t,k')(\imath k')[k'](t,z)\right) \\ &\quad -\sum_{k,k'\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\partial\mathfrak{I}^{-1}f'}{\partial t}(t,k)\chi_M(t,z)\right)\left(f(t,k')(\imath k')[k'](t,z)\right) \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}}[l](t,z)\left(\sum_{k+k'=l}\frac{\partial\mathfrak{I}^{-1}f}{\partial t}(t,k)f'(t,k')\imath k'-\frac{\partial\mathfrak{I}^{-1}f'}{\partial t}(t,k)f(t,k')\imath k'\right) \\ &= \mathfrak{I}^{-1}\left(\frac{\partial\mathfrak{I}^{-1}f}{\partial t}*(\imath lf')-\frac{\partial\mathfrak{I}^{-1}f'}{\partial t}*(\imath lf)\right)(t,z), \end{aligned}$$

avec $(lf)(t,k)=kf(t,k)$. Cela se prolonge, par continuité, en $t=a$ et $t=b$. On retrouve ainsi directement le résultat de la proposition 3.3.6.

Groupoïde de déformation de $\mathbb{S}^2$

La définition du paragraphe précédent, dans le cas présent, donne :

$$G=\left\{\,(\hbar,t,k)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{Z}\;\middle|\;t,t-\hbar k\in\Delta(k)\,\right\},$$

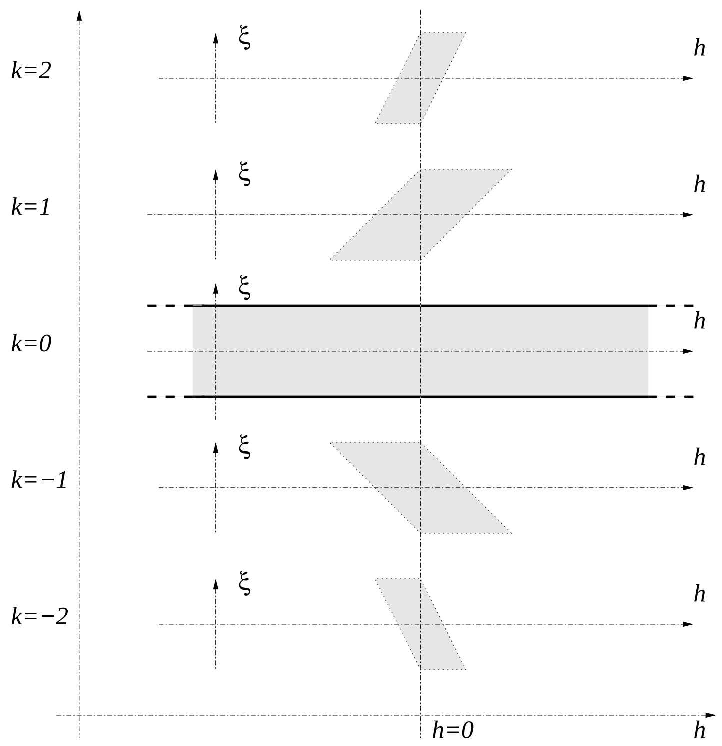
– ou choix de $t+\hbar k$; compatibilité des formules à voir avec

$$\Delta(k) = \begin{cases} [a,b] & \text{si } k = 0 \\ ]a,b[& \text{si } k \neq 0. \end{cases},$$

Soit $G = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} S_k$ avec :

$$S_k = \begin{cases} \mathbb{R} \times [a,b] \times \{0\} & \text{si } k = 0 \\ \{ (\hbar, t, k) \in \mathbb{R}^2 \times \{k\} \mid t, t + k\hbar \in]a,b[\} & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

L'allure de ce groupoïde, pour $a = -1$ et $b = 1$ par exemple, ressemble donc à :



Calcul direct de la limite du commutateur

De plus, comme les bissections $S_k = G \cap \mathbb{R}^2 \times \{k\}$ sont disjointes on a :

$$\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(G) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(S_k).$$

En particulier, pour $k \neq 0$, les S_k sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$, donc l'espace $\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(S_k)$ est formé de fonctions de classe C^∞ au sens usuel. En outre $\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(S_0)$ est l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R} \times [a,b]$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\times]a,b[$ et dont toutes les dérivées, a tout ordre, ont un prolongement continu sur $\mathbb{R} \times [a,b]$.

Pour $f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(S_k)$ et $f' \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(S_{k'})$ la convolution est donnée par

$$f * f'(\hbar, t, l) = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq k + k' \\ f(\hbar, t, k) f'(\hbar, t - k\hbar, k') & \text{si } l = k + k' \end{cases}.$$

D'où

$$(f * f' - f' * f)(\hbar, t, l) = \delta_{l,k+k'} \left(f(\hbar, t, k) f'(\hbar, t - k\hbar, k') - f'(\hbar, t, k') f(\hbar, t - k'\hbar, k) \right).$$

Et donc, comme $(f * f' - f' * f)(0, t, l) = 0$, on a, pour $t \neq a, b$:

$$\begin{aligned}
&\left\{ f, f' \right\}_{G_0} (0, t, l) \\
&= \lim_{\hbar \to 0} \frac{1}{\imath \hbar} (f * f' - f' * f)(\hbar, t, l) \\
&= \frac{1}{\imath} \frac{\partial}{\partial \hbar} (f * f' - f' * f)(0, t, l) \\
&= \delta_{l,k+k'} \frac{1}{\imath} \left(\frac{\partial f}{\partial \hbar}(0, t, k) f'(0, t, k') + f(0, t, k) \left(\frac{\partial f'}{\partial \hbar}(0, t, k') - k \frac{\partial f'}{\partial t}(0, t, k') \right) \right) \\
&\quad - \delta_{l,k+k'} \frac{1}{\imath} \left(\frac{\partial f'}{\partial \hbar}(0, t, k') f(0, t, k) - f'(0, t, k') \left(\frac{\partial f}{\partial \hbar}(0, t, k) - k' \frac{\partial f}{\partial t}(\hbar, t, k) \right) \right) \\
&= \delta_{l,k+k'} \frac{1}{\imath} \left(f(0, t, k).(-k) \frac{\partial f'}{\partial t}(0, t, k') - f'(0, t, k').(-k') \frac{\partial f}{\partial t}(0, t, k') \right) \\
&= \frac{1}{\imath} \left((fl) * \frac{\partial f'}{\partial t} - (f'l) * \frac{\partial f}{\partial t} \right) (0, t, l) \\
&= \Im \left\{ \Im^{-1} f, \Im^{-1} f' \right\}_{\mathbb{S}^2} (0, t, l).
\end{aligned}$$

Par continuité, cela reste vrai en $t = a$ et $t = b$. On prouve ainsi, directement, que G est un groupoïde de déformation de $\mathbb{S}^2$.

Références

[AM] R. Abraham et J.D. Marsden. *Foundations of Mechanics*. Benjamin-Cummings, 1978.

[AR] C. Anantharaman-Delaroche et J. Renault. Amenable groupoids. Preprint, 2000.

[Ati] M. F. Atiyah. Convexity and commuting Hamiltonians. *Bull. London Math. Soc.*, 14 :1–15, 1982.

[Aud] M. Audin *The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds.* Birkhäuser, 1991.

[Ber73] F. A. Berezin. Quantization in complex bounded domains. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 211 :1263–1266, 1973.

[Ber74] F. A. Berezin. Quantization. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 38 :1116–1175, 1974.

[Ber75a] F. A. Berezin. General concept of quantization. *Comm. Math. Phys.*, 40 :153–174, 1975.

[Ber75b] F. A. Berezin. Quantization in complex symmetric spaces. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 39(2) :363–402, 472, 1975.

[BFFLS] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, et D. Sternheimer. Deformation theory and quantization i, ii. *Ann. Physics*, 110 :61–110, 111–151, 1978.

[Bla96] E. Blanchard. Déformation de C^*-algèbres de Hopf. *Bull. Soc. math. France*, 124 :141–215, 1996.

[BouTS] N. Bourbaki. *Théories Spectrales*, volume chap. 1-2. Hermann, 1967.

[BouVAR] N. Bourbaki. *Variétés Différentielles et Analytiques. Fascicule de Résultats.* Hermann, 1967.

[BouTG] N. Bourbaki. *Topologie Générale*, volume chap. 1-10. Hermann, 1971.

[BV90] J. Bellissard et M. Vittot. Heisenberg picture and non-commutative geometry of the semi-classical limit in quantum mechanics. *Ann. I.H.P., Physique théorique*, 52(3) :175–235, 1990.

[CCFGRV] J. Cariñena, J. Clemente-Gallardo, E. Follana, J. Gracia-Bondia, A. Rivero, et J. Varilly. Connes' tangent groupoid and strict quantization. *J. Geom. Phys.*, 32 : 79–96, 1999.

[CdS-W] A. Cannas da Silva et A. Weinstein. *Geometric models for noncommutative algebras.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[CDW87] A. Coste, P. Dazord, et A. Weinstein. Groupoïdes symplectiques. In *Publications du Département de Mathématiques. Nouvelle Série. A, Vol. 2*, pages i–ii, 1–62. Univ. Claude-Bernard, Lyon, 1987.

[CLN] C. Camacho et A. Lins Neto. *Geometric theory of foliations.* Birkhäuser, 1985.

[CL01] A. Connes et G. Landi. Noncommutative manifolds, the instanton algebra and isospectral deformations. *Commun. Math. Phys.*, 221 : 141–159, 2001.

[Co79] A. Connes. Sur la théorie non commutative de l'intégration. In *Algèbres d'opérateurs (Sém., Les Plans-sur-Bex, 1978)*, pages 19–143. Springer, Berlin, 1979.

[Co94] A. Connes. *Noncommutative geometry.* Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994.

[DEL88] T. DELZANT. Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment. *Bull. Soc. math. France*, 116 :315–339, 1988.

[DIX] J. DIXMIER. *C^*-algebras.* North-Holland, 1982.

[DF] R.S. DORAN ET J.M.G. FELL. *Representations of *-Algebras, Locally Compact Groups, and Banach *-Algebraic Bundles*, volume 1 (Basic Representation Theory of Groups and Algebras. Academic Press, 1988.

[DS] G. DITO ET D. STERNHEIMER. La quantification par déformations, sa génèse et ses avatars. Á paraître.

[DS88] P. DAZORD ET D. SONDAZ. Algébroïdes de Lie et variétés de Poisson. Publication du Département de Mathématiques de l'Université de Lyon-I, 1988. nouvelle série, vol. 1/B.

[DW91] P. DAZORD ET A. WEINSTEIN, EDITORS. *Symplectic geometry, groupoids, and integrable systems.* Springer-Verlag, New York, 1991. Papers from the Sixth South-Rhône Geometry Seminar held in Berkeley, California, May 22–June 2, 1989.

[GUI94] V. GUILLEMIN. *Moment Maps and Combinatorials Invariants of Hamiltonian $\mathbb{T}^n$-Spaces.* Birkhäuser, 1994.

[GS82] V. GUILLEMIN ET S. STERNBERG. Convexity properties of the moment mapping. *Invent. Math.*, 67 :491–513, 1982.

[EMS2] V.P. GURARII. *Commutative Harmonic Analysis*, volume II of *Encyclopædia of Mathematical Sciences.* Springer, 1998.

[KEH84] E. T. KEHLET. Cross-sections for quotient maps of locally compact groups. *Math. Scand.*, 55 :152–160, 1984.

[KON97A] M. KONTSEVICH. Formality conjecture. In *Deformation theory and symplectic geometry (Ascona, 1996)*, pages 139–156. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.

[KON97B] M. KONTSEVICH. Deformation quantization of Poisson manifolds I, IHES, q-alg/9709040

[KON99A] M. KONTSEVICH. Operads and Motives in Deformation Quantization. q-alg/9904055, *L.M.P.*, 1999.

[KON99B] M. KONTSEVICH. math.QA/0001151, *actes de la 1ère Conférence Moshé Flato*

[KON01] M. KONTSEVICH. Deformation quantization of algebraic varieties. math.AG/0106006, *Lett. Math. Phys.*, 2001.

[LAN93] N.P. LANDSMAN. Strict deformation quantization of a particle in external gravitational and Yang-Mills fields. *J. Geom. Phys.*, 12(2) :93–132, 1993.

[LAN98] N.P. LANDSMAN. *Mathematical topics between classical and quantum mechanics.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[LM87] P. LIBERMANN ET C.-M. MARLE. *Symplectic geometry and analytical mechanics.* D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. Translated from the French by Bertram Eugene Schwarzbach.

[LR99] N.P. LANDSMAN ET B. RAMAZAN. *Quantization of Poisson algebras associated to Lie algebroids*, volume Proceedings of the Conference on Groupoids in Physics, Analysis and Geometry (Boulder 20-24 Juin 1999). A.M.S., 1999. prépublication éléctronique math-ph/0001005.

[MAR99] C.-M. MARLE. Géométrie symplectique. Cours de DEA Université Paris 6, 1998-1999.

[MOW94] Y. MAEDA, H. OMORI, ET A. WEINSTEIN, EDITORS. *Symplectic geometry and quantization.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. Papers from the Thirty-first Taniguchi International Symposium held in Sanda, July 12–17, and a satellite symposium held at Keio University, Yokohama, July 21–24, 1993.

[MW74] J. MARSDEN ET A. WEINSTEIN. Reduction of symplectic manifolds with symmetry. *Rep. Mathematical Phys.*, 5(1) :121–130, 1974.

[MZ] D. MONTGOMERY ET L. ZIPPIN *Topological Transformation groups.* Wiley, New-York, 1955.

[NWX99] V. NISTOR, A. WEINSTEIN, ET P. XU. Pseudodifferential operators on differential groupoids. *Pacific J. Math.*, 189(1) :117–152, 1999.

[OES98] J. OESTERLÉ. Quantification formelle des variétés de Poisson (d'après Maxim Kontsevich). *Astérisque*, (252) :Exp. n°843, 4, 211–229, 1998. Séminaire Bourbaki. Vol. 1997/98.

[RAM98] B. RAMAZAN. *Quantification par Déformation des Variétés de Lie-Poisson.* thèse de doctorat, Université d'Orléans, 1998.

[REN] J. RENAULT. *A Goupoid Approach to C^*-algebras*, volume 793 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1980.

[REN82] J. RENAULT. C^*-algebras of groupoids and foliations. *Proc. Sympos. Pure Math.*, 38 :pages 339–350, 1982.

[REN87] J. RENAULT. Représentation des produits croisés d'algèbres de groupoïdes. *J. Operator Theory*, 18 :67–97, 1987.

[REN91] J. RENAULT. The ideal structure of groupoid crossed-product C^*-algebras. *J. Operator Theory*, 25 :3–36, 1991.

[RIE89A] M. A. RIEFFEL. Continuous fields of C^*-algebras coming from group cocycles and actions. *Math. Ann.*, 283 :631–643, 1989.

[RIE89B] M. A. RIEFFEL. Déformation quantization of Heisenberg manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 122 :531–562, 1989.

[RIE93] M. A. RIEFFEL. *Déformation Quantization for Actions of $\mathbb{R}^d$*, volume 106. monography of the A.M.S., 1993.

[RIE98] M. A. RIEFFEL. Questions on quantization. In *Operator algebras and operator theory (Shanghai, 1997)*, pages 315–326. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[SHE91] A. J.-L. SHEU. Quantization of the Poisson $SU(2)$ and its Poisson homogeneous space — the 2-sphere. *Comm. Math. Phys.*, 135(2) :217–232, 1991. Appendice de Jiang-Hua Lu et Alan Weinstein.

[SHE97A] A. J.-L. SHEU. Compact quantum groups and groupoid C^*-algebras. *J. Funct. Anal.*, 144(2) :371–393, 1997.

[SHE97B] A. J.-L. SHEU. Groupoids and compact quantum groups. In *Quantum groups and quantum spaces (Warsaw, 1995)*, pages 41–50. Polish Acad. Sci., Warsaw, 1997.

[SHE97C] A. J.-L. SHEU. Quantum spheres as groupoid C^*-algebras. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 48(192) :503–510, 1997.

[SHE98A] A. J.-L. SHEU. Groupoid approach to quantum projective spaces. In *Operator algebras and operator theory (Shanghai, 1997)*, pages 341–350. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[SHE98B] A. J.-L. SHEU. Groupoids and quantization. In *Perspectives on quantization (South Hadley, MA, 1996)*, pages 157–167. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[STE] D. STERNHEIMER. Deformation Quantization : Twenty Years After math.QA/9809056, proc. A.I.P., 1998.

[ŚW83] J. ŚNIATYCKI ET A. WEINSTEIN. Reduction and quantization for singular momentum mappings. *Lett. Math. Phys.*, 7(2) :155–161, 1983.

[TEI] B. TEISSIER. Variétés toriques et polytopes. Séminaire Bourbaki, exposé n°565, 1980-81.

[VAR01] J. C. VÁRILLY. Quantum symmetry groups of noncommutative spheres. *Comm. Math. Phys.*, 221 : 511–523, 2001.

[WAR] F. W. WARNER. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, volume 94 of *Graduate Texts in Math.* Springer-Verlag, 1983.

[WEI71] A. WEINSTEIN. Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds. *Advances in Math.*, 6 :329–346 (1971), 1971.

[WEI73] A. WEINSTEIN. Lagrangian submanifolds and Hamiltonian systems. *Ann. of Math. (2)*, 98 :377–410, 1973.

[WEI83] A. WEINSTEIN. The local structure of Poisson manifolds. *J. Differential Geom.*, 18(3) :523–557, 1983.

[WEI87] A. WEINSTEIN. Symplectic groupoids and Poisson manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 16(1) :101–104, 1987.

[WEI91A] A. WEINSTEIN. Noncommutative geometry and geometric quantization. In *Symplectic geometry and mathematical physics (Aix-en-Provence, 1990)*, pages 446–461. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991.

[WEI91B] A. WEINSTEIN. Symplectic groupoids, geometric quantization, and irrational rotation algebras. In *Symplectic geometry, groupoids, and integrable systems (Berkeley, CA, 1989)*, pages 281–290. Springer, New York, 1991.

[WEI95] A. WEINSTEIN. Deformation quantization. *Astérisque*, (227) :Exp. No. 789, 5, 389–409, 1995. Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94.

[WEI96A] A. WEINSTEIN. Groupoids : unifying internal and external symmetry. A tour through some examples. *Notices Amer. Math. Soc.*, 43(7) :744–752, 1996.

[WEI96B] A. WEINSTEIN. Lagrangian mechanics and groupoids. In *Mechanics day (Waterloo, ON, 1992)*, pages 207–231. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[WEI97] A. WEINSTEIN. Tangential deformation quantization and polarized symplectic groupoids. In *Deformation theory and symplectic geometry (Ascona, 1996)*, pages 301–314. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.

[WOO] N. M. J. WOODHOUSE. *Geometric quantization.* The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1992. Oxford Science Publications.

[WX91] A. WEINSTEIN ET P. XU. Extensions of symplectic groupoids and quantization. *J. Reine Angew. Math.*, 417 :159–189, 1991.

[XU94] P. XU. Non-commutative Poisson algebras. *Amer. J. Math.*, 116 :101–125, 1994.

Index

Résumé en français : Cette thèse propose une notion de quantification par déformation des variétés de Poisson au sens des C*-algèbres, en lien notamment avec l'emploi de groupoïdes. Cette théorie s'appuie sur des exemples, notamment celui des variétés toriques. La première partie est un rappel de connaissances développées depuis quelques dizaines d'années sur les groupoïdes et leurs C*-algèbres. La deuxième partie présente les définitions de déformation et de quantification utilisées ensuite, et leur traduction, pour les groupoïdes, dans la notion importante de groupoïde de déformation. Une large classe de sous-groupoïdes des groupoïdes de Lie est de ce type. Enfin le résultat principal de cette thèse est une condition suffisante sur les variétés M munies de l'action d'un tore $\mathbb{T}^n$ pour construire un groupoïde de déformation associé, au moyen du choix d'une action de $\mathbb{R}^n$ sur une variété contenant le quotient $M/\mathbb{T}^n$; ce groupoïde se présente comme un sous-groupoïde du groupoïde de l'action d'un groupe discret. On retrouve alors des résultats de quantification connus pour $\mathbb{C}^n$, les tores et les sphères de dimension 4 non commutatifs. La troisième partie applique ce résultat à l'exemple des variétés toriques, dont la géométrie étonnante, en terme de moment notamment, fut découverte dans les années 80. Cette construction fournit le premier exemple de quantification des variétés toriques dans un cadre C*-algébrique, même dans les cas les plus simples (sphère de dimension 2, espaces projectifs complexes).

Abstract (Résumé en anglais) :

Deformation and Quantization of toric manifolds using groupoids

This thesis provides a notion of deformation quantization of Poisson manifolds, in a C*-algebraic framework, in relation with the use of groupoids. This theory is illustrated by examples, in particular the one of toric manifolds. The first part recalls some known facts on groupoids and their C*-algebras discovered in the past decades. The second part exposes the definitions of deformation and quantization used in the thesis, and their translation in terms of groupoids with the important notion of a deformation groupoid. A large class of subgroupoids of Lie groupoids is of this type. The main result of the thesis gives a condition on a manifold M endowed with an action of a torus Tn such that there is a deformation groupoid associated to it. It requires an action of Rn on a manifold containing the orbit space $M/\mathbb{T}^n$; the groupoid obtained is a subgroupoid of a groupoid of an action of a discrete group. We recover by this method known results for the quantization of Cn and the noncommutative torus and 4-spheres. The third part is an application of this result to the more complicated case of toric manifolds, using the unexpected discoveries of the 80's on the geometry of their moment map. This construction is the first exemple of quantization of toric manifolds, in a C*-algebraic framwork, even is the simplest cases (2-sphere and complex projective spaces). This provides in particular a C*-algebraic quantization of the 2-sphere and of complex projective spaces and answers the problem of the existence of such a quantization.

Mots-clefs : quantification par déformation, groupoïdes, variétés toriques, géométrie symplectique, géométrie non-commutative, C*-algèbres de groupoïdes, champs continus de C*-algèbres

Laboratoire de rattachement : Mathématiques et Applications, Physique Mathématique d'Orléans (MAPMO) UMR 6628 – B.P. 6759 45067 ORLEANS CEDEX 2 – FRANCE