KK-théorie équivariante et opérateur de Julg-Valette pour les groupes quantiques

Roland Vergnioux

UNIVERSITE PARIS 7 - DENIS DIDEROT

UFR de Mathématiques

Année : 2002 N°

Thèse de Doctorat
Spécialité : Mathématiques
présentée et soutenue publiquement par
Roland Vergnioux
le 19 décembre 2002

KK-théorie équivariante et opérateur de Julg-Valette pour les groupes quantiques

Directeur

M. Georges Skandalis

Rapporteurs

M. Pierre Julg
M. Marc A. Rieffel

Jury

M. Saad Baaj
M. Alain Connes
M. Pierre Julg
M. Georges Skandalis
M. Leonid Vainerman

UNIVERSITE PARIS 7 - DENIS DIDEROT

UFR de Mathématiques

Année : 2002 N° |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Thèse de Doctorat
Spécialité : Mathématiques
présentée et soutenue publiquement par
Roland Vergnioux
le 19 décembre 2002

KK-théorie équivariante et opérateur de Julg-Valette pour les groupes quantiques

Directeur

M. Georges Skandalis

Rapporteurs

M. Pierre Julg
M. Marc A. Rieffel

Jury

M. Saad Baaj
M. Alain Connes
M. Pierre Julg
M. Georges Skandalis
M. Leonid Vainerman

À la mémoire de Stéphane Hoguet

Remerciements

Le premier destinataire de ces remerciements est tout naturellement Georges Skandalis, dont les qualités de directeur et de conseiller ne sont plus à vanter. C'est lui qui a guidé mes premiers pas parmi les groupes quantiques au cours de mon année de DEA, puis a dirigé mon intérêt vers la K-théorie des groupes quantiques compacts libres : c'est à la profondeur de ses vues mathématiques que je dois la chance d'avoir travaillé sur un sujet de thèse aussi passionnant. Si la grande liberté dont il m'a fait bénéficier m'a permis de mener un véritable travail de recherche, j'ai pu apprécier également la disponibilité et la gentillesse constantes avec lesquelles il a répondu à mes questions. Enfin, il a affronté avec stoïcisme l'étape essentielle de la relecture de ce mémoire, au cours de laquelle j'ai appris énormément de choses.

Je veux remercier pareillement Pierre Julg et Marc Rieffel, qui ont accepté de lire cette thèse et d'en être les rapporteurs. Ma reconnaissance va également à Saad Baaj, Alain Connes et Leonid Vainerman qui me font l'honneur d'être membres de mon jury de thèse.

La source de ma curiosité pour les algèbres d'opérateurs et l'étude des actions de groupes remonte à mon stage de maîtrise, qui a porté sur les phénomènes de bosonisation en théorie quantique des champs : je suis reconnaissant à Bernard Julia de m'avoir proposé ce sujet exigeant. Mon apprentissage de la théorie des C^*-algèbres a ensuite débuté avec le cours de DEA de Michel Enock et Leonid Vainerman, dont j'ai apprécié la clarté et la rigueur. Plus tard, mes travaux de recherche ont été très fortement inspirés par ceux de Joachim Cuntz, Pierre Julg et Alain Valette sur la K-théorie des produits libres et des groupes agissant sur les arbres, ainsi que par la thèse de Teodor Banica sur les groupes quantiques compacts libres.

J'ai bénéficié pendant ces trois années de doctorat d'un cadre de travail exceptionnellement stimulant : celui de l'équipe « Algèbres d'opérateurs » de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, et plus généralement celui du GDR du même nom. J'ai ainsi pu assister à de nombreux séminaires et conférences qui ont entretenu ma curiosité pour des sujets de recherches proches du mien ou plus éloignés. Je tiens notamment à remercier Saad Baaj, Étienne Blanchard, Pierre Julg et Stefaan Vaes pour les discussions mathématiques que nous avons eues.

Nous étions plusieurs étudiants à nous familiariser, de manière souvent complémentaire, avec le vaste monde des C^*-algèbres, et les conversations que j'ai eues sur le sujet avec Frédéric Cadet, Benoît Collins, Rune Eliasen, Franck Lesieur et Stéphane Vassout m'ont été très profitables. Le séminaire des jeunes de l'équipe, dont je remercie tous les participants, a été le cadre idéal de cet apprentissage, et plus généralement d'échanges sur la dure condition de thésard, autour de tasses de thé et de petits gâteaux. J'inclus également dans ces remerciements les habitants des bureaux 7C10 et 7C14, parmi lesquels je ne citerai que Marie-Noëlle pour ne pas faire de jaloux, et des amis de plus longue date qui ont suivi la même voie que moi : Paul et Yves.

Le métier de chercheur est pour moi indissociable de celui d'enseignant, et j'ai eu la chance tout au long de cette thèse de donner des TD en DEUG de mathématiques. Je continue à apprécier la vivacité des échanges avec les étudiants, et nombre d'entre eux ont gagné mon admiration par leur travail et leur détermination. De mes collègues, je retiens l'enthousiasme de François Martin, ainsi que l'expérience et l'énergie de Dominique Martinais qui nous a formés tous les deux, et à laquelle je ne peux malheureusement pas exprimer ma reconnaissance.

Ce n'est pas le lieu ici de m'adresser à toutes les personnes qui m'ont accompagné durant ces trois années dans d'autres sphères que celle des mathématiques. Cependant je ne puis conclure sans dire que cette thèse n'aurait probablement pas vu le jour sans l'affection, la compréhension et le soutien constants de Delphine et de mes parents.

Table des matières

Introduction

Cette thèse s'inscrit dans l'étude de la KK-théorie équivariante par rapport à un groupe quantique [BS89]. On fait en particulier le lien avec la K-théorie des produits croisés par un groupe quantique et on généralise la notion de K-moyennabilité à ce cadre. On cherche ensuite à introduire des outils géométriques utiles dans ce contexte, et on associe notamment à un groupe quantique discret et à un produit libre amalgamé de groupes quantiques discrets des objets qui peuvent s'interpréter comme des graphes quantiques. On étudie en particulier les opérateurs de Julg-Valette associés aux arbres des groupes quantiques libres et on les utilise pour définir des éléments de KK-théorie. Le cas des groupes quantiques $A_o(Q)$, qui présente plusieurs caractéristiques nouvelles par rapport au cadre classique, fait l'objet de calculs détaillés.

KK-théorie équivariante

La KK-théorie équivariante par rapport à un groupe localement compact, introduite au début des années 1980 par Kasparov [Kas81, Kas88], constitue un outil très puissant pour l'étude de la K-théorie des C^*-algèbres de groupes, et plus généralement des produits croisés de C^*-algèbres par un groupe localement compact. Elle a notamment permis de nombreux progrès sur la conjecture de Baum-Connes, formulée également au début des années 1980 [BC82, BCH94] : cf par exemple [HK01, Laf98] pour des travaux récents sur le sujet.

Dans ce contexte, la méthode générale pour l'étude des C^*-algèbres d'un groupe G est la construction puis l'identification d'éléments de KK-théorie à l'aide d'objets géométriques munis d'actions de G, notamment pour obtenir des équivalences ou sous-équivalences de KK-théorie. Parmi ces objets figurent les actions de groupes sur les arbres, dont l'utilisation en KK-théorie remonte aux travaux de Julg et Valette [JV83]. Ces travaux étaient eux-mêmes motivés par des résultats de Pimsner, Voiculescu [PV82] et Cuntz [Cun83] sur la K-théorie des groupes libres.

Julg et Valette établissent la K-moyennabilité, et en particulier la bijectivité de l'application canonique $\lambda_* : K_*(C_p^*(G)) \to K_*(C_r^*(G))$, pour les groupes agissant sur un arbre avec des stabilisateurs moyennables. Pour cela, ils construisent de manière géométrique un élément $\gamma \in KK(C_r^*(G), \mathbb{C})$ et une homotopie entre $\lambda^*(\gamma)$ et 1. Il s'avère en fait que γ peut s'interpréter comme le produit de Kasparov d'éléments « Dirac » et « dual-Dirac » et intervient à ce titre dans la preuve de la conjecture de Baum-Connes pour certains groupes p-adiques [KS91].

Les actions de groupes sur des arbres ont par la suite été utilisées pour obtenir des suites exactes cycliques pour la K-théorie des produits croisés [Pim86], et pour des résultats d'extension pour la conjecture de Baum-Connes [Tu99, OO01]. Un des objets de cette thèse est la construction et l'utilisation en KK-théorie équivariante de certains analogues dans le cadre quantique des groupes libres et des groupes opérant sur les arbres.

Groupes Quantiques

La théorie des groupes quantiques a été initiée par Kac [Kac61] au début des années 1960, dans le cadre de travaux sur l'extension de la dualité de Pontrjagin aux groupes localement compacts non nécessairement abéliens. Cette théorie a été constamment enrichie et élargie depuis, dans l'esprit de la géométrie non commutative [ES73, KV73, Wor87a, BS93, VvD01, KV00] : cf les sections 2.1 à 2.4 pour plus de précisions et références.

Le cadre C^*-algébrique le plus général pour l'étude des groupes quantiques est celui des C^*-algèbres de Hopf, c'est-à-dire des C^*-algèbres S munies d'un coproduit δ qui est un homomorphisme de S dans une algèbre de multiplicateurs de $S \otimes S$, vérifiant la condition de co-associativité $(\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \delta = (\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \delta$. Dans le cas où la C^*-algèbre $S = C(X)$ est commutative, ce coproduit provient d'une loi associative continue $(X \times X \to X)$ sur l'espace localement compact X.

La KK-théorie équivariante a été étendue au cas des C^*-algèbres de Hopf par Baaj et Skandalis [BS89] : cette KK-théorie S-équivariante constitue le cadre naturel de notre étude. On considérera plus particulièrement les C^*-algèbres de Hopf qui sont associées à des unitaires multiplicatifs, avec des hypothèses naturelles sur ces derniers pour la construction des produits croisés : cf la section 2.2. Cela inclut toutes les C^*-algèbres de Hopf que l'on peut raisonnablement qualifier de « groupe quantique », et notamment les groupes quantiques localement compacts de Kustermans et Vaes [KV00].

Le développement de la théorie a été constamment entretenu par la découverte de nouveaux exemples de groupes quantiques. A la fin de cette thèse on s'intéresse en particulier aux groupes quantiques compacts libres $A_o(Q)$ et $A_u(Q)$ [vDW96]. Ces groupes sont en un certain sens universels parmi les groupes quantiques compacts et jouent de ce point de vue le rôle de $O(n)$ et $U(n)$. Mais d'autre part les groupes quantiques discrets duaux de $A_o(Q)$ et $A_u(Q)$ présentent de nombreuses similarités avec les groupes libres F_n et nous tenterons d'appliquer à l'étude de leur K-théorie des méthodes analogues à celles de Cuntz, Julg et Valette.

Contenu de la thèse

Dans un premier temps on étend au cas des groupes quantiques quelques outils classiques de la KK-théorie équivariante. Cela inclut le théorème de stabilisation de Kasparov pour les C^*-module hilbertiens équivariants [Kas80], la construction du morphisme de descente [Kas88] et les isomorphismes de Green-Julg [Jul81] qui relient la KK-théorie équivariante à la KK-théorie des produits croisés, et enfin les diverses caractérisation de la notion de K-moyennabilité [Cun83]. On étudie au passage quelques propriétés fonctorielles des produits croisés de C^*-algèbres par un groupe quantique.

On cherche ensuite à construire des exemples d'objets géométriques utilisables pour l'étude de la K-théorie des groupes quantiques. On s'attache plus précisément à généraliser les constructions de Julg et Valette au cas quantique, et on se place tout d'abord dans le cas simple d'un produit libre amalgamé $S = S_1 *_T S_2$ de groupes quantiques discrets. On est alors capable de construire un analogue de l'élément γ dans $KK(S_r, \mathbb{C})$ et d'établir l'égalité $\lambda^*(\gamma) = 1$, lorsque S_1 et S_2 sont moyennables. Cela implique la K-moyennabilité du groupe quantique discret associé à S.

Puis on introduit les graphes classique et quantique associés à un groupe quantique discret et, lorsque le graphe classique est un arbre, l'opérateur de Julg-Valette F associé au graphe quantique. On doit faire face à de nombreuses difficultés spécifiques au cas quantique, causées notamment par la non-involutivité de l'opérateur de retournement des arêtes. En particulier, F n'est pas un général un opérateur de Fredholm. On arrive cependant à définir un élément $\gamma \in KK(S_r, \mathbb{C})$ dans le cas des groupes quantiques libres $A_o(Q)$, au prix de l'introduction d'une représentation additionnelle $\pi_\infty : S_r \to L(H_\infty)$ et de calculs assez fins sur la structure des coreprésentations de $A_o(Q)$.

Donnons à présent un plan plus détaillé de cette thèse, ainsi que l'énoncé des principales définitions et théorèmes qui s'y trouvent.

I Rappels et notations

La première partie contient essentiellement des rappels sur les groupes quantiques et la KK-théorie équivariante par rapport à un groupe quantique. On introduit notamment en 2.2 le cadre suivant. On appelle système de Kac faible un triplet (H, V, U) où V et U sont des unitaires sur $H \otimes H$ et H respectivement et vérifient les propriétés suivantes :

1. V et $\hat{V}$ sont multiplicatifs,
2. $[S_r, US_rU] = [\hat{S}_r, U\hat{S}_rU] = 0$,
3. S_r et $\hat{S}_r$ sont des C^*-algèbres,
4. $X \in M(\hat{S}_X \otimes K(H))$ pour toutes les représentations de V et $\hat{V}$.

Notons tout de suite qu'il ne s'agit pas ici d'un travail sur l'axiomatique des groupes quantiques : on isole simplement les hypothèses dont on a besoin au chapitre 2, notamment pour les constructions de produit croisé. En particulier ces hypothèses sont vérifiées lorsque (H, V, U) est un système de Kac au sens de [BS93], et lorsque (H, V, U) est associé à un groupe quantique localement compact, au sens de Kustermans et Vaes [KV00].

On donne également dans la section 3.2 du premier chapitre la généralisation au cadre quantique du théorème de stabilisation équivariant de Kasparov, qui est souvent utile dans les calculs de KK-théorie équivariante. Il s'énonce de la manière suivante :

Théorème (cf page 33) *Soit (H, V, U) un système de Kac faible et S_r sa C^*-algèbre réduite. Soit B une C^*-algèbre S_r-équivariante et E un B-module hilbertien S_r-équivariant de type dénombrable. Si S_r est unifère, alors le B-module hilbertien équivariant $E \oplus (\mathcal{H}_B \otimes H)$ est isomorphe à $\mathcal{H}_B \otimes H$.*

II Produits croisés par un groupe quantique et KK-théorie

Soit S_r la C^*-algèbre réduite d'un système de Kac faible. On commence le deuxième chapitre par la construction des produits croisés pleins et réduits $B \rtimes_p \hat{S}$ et $B \rtimes_r \hat{S}$, lorsque B est une C^*-algèbre S_r-équivariante. Puis on définit à la section 4.2 les coactions duales de $\hat{S}_r$ et $\hat{S}_p$ sur ces produits croisés, et dans le cas réduit on rappelle le théorème de bidualité de [BS93]. On montre à la section 4.3 que ces constructions sont fonctorielles en B, et que le produit croisé plein est exact. En 4.4 on présente quelques propriétés supplémentaires du cas compact, liées à la co-unité $\hat{\varepsilon}$ de $\hat{S}$ et à la mesure de Haar h_r de S_r. On montre en particulier que dans ce cas le produit croisé réduit par $\hat{S}$ est exact **ssi** S_r est exacte.

Tout ceci se fait par des manipulations sur les représentations covariantes de B, suivant les idées indiquées dans [BS93, Baa92]. En particulier la coaction $\delta_B : B \to \tilde{M}(B \otimes S_r)$ induit une représentation de B sur $E = B \otimes H$. Notons B_1 la C^*-algèbre B munie de la coaction triviale, cette représentation est covariante lorsque le B_1-module hilbertien E est muni de la coaction $\delta_E : b \otimes \xi \mapsto V_{23}(b \otimes \xi \otimes 1)$. De plus $B \rtimes_r \hat{S}$ est la sous-C^*-algèbre de $L_B(E)$ associée à cette représentation covariante.

A la section 5.2 on introduit une autre coaction sur E, considéré cette fois comme B-module hilbertien : $\delta'_E(b \otimes \xi) = (W(\xi \otimes 1))_{23} \delta_B(b)_{13}$ avec $W = (U \otimes 1)V(U \otimes 1)$, et on montre que les éléments de $B \rtimes_r \hat{S}$ sont invariants relativement à δ'_E. En particulier lorsque V est de type compact, la représentation canonique de $B \rtimes_r \hat{S}$ sur (E, δ'_E) fournit un élément $\beta \in KK_{S_r}((B \rtimes_r \hat{S})_1, B)$. On montre de plus que dans le cas compact $B \rtimes_r \hat{S}$ est précisément le sous-espace des éléments de $K_B(E)$ qui sont invariants relativement à δ'_E : cela constitue la base de la démonstration du théorème de Green-Julg.

Ce théorème est énoncé et démontré en 5.3, on utilise pour cela la notion de produit croisé d'un C^*-module hilbertien par la coaction d'un groupe quantique et la construction des morphismes de descente plein et réduit, présentées dans la section 5.1. Dans le cas réduit par exemple, on obtient un morphisme $j_r : KK_{S_r}(A, B) \to KK(A \rtimes_r \hat{S}, B \rtimes_r \hat{S})$ lorsque A et B sont deux C^*-algèbres S_r-équivariantes, et on peut alors donner un énoncé précis du théorème de Green-Julg :

Théorème (cf page 59) *On suppose que V est de type compact. Soit B une S_r-algèbre et A une C^*-algèbre munie de la coaction triviale de S_r. Soit $p_0 \in \hat{S}$ le support central de $\hat{\varepsilon}$ et $\phi : A \to A \rtimes_r \hat{S} = A \otimes \hat{S}$ l'homomorphisme donné par $\phi(a) = a \otimes p_0$. Soit ψ le morphisme canonique de $KK(A, B \rtimes_r \hat{S})$ dans $KK_{S_r}(A_1, (B \rtimes_r \hat{S})_1)$. Alors on a des isomorphismes, inverses l'un de l'autre :*

$$KK_{S_r}(A, B) \xrightarrow{j_r} KK(A \rtimes_r \hat{S}, B \rtimes_r \hat{S}) \xrightarrow{\phi^*} KK(A, B \rtimes_r \hat{S}) \quad \textit{et}$$

$$KK(A, B \rtimes_r \hat{S}) \xrightarrow{\psi} KK_{S_r}(A_1, (B \rtimes_r \hat{S})_1) \xrightarrow{\cdot \otimes \beta} KK_{S_r}(A, B).$$

On a également un énoncé « dual », dont la démonstration est beaucoup plus rapide, et qui donne un isomorphisme entre $KK_{\hat{S}_r}(A, B)$ et $KK(A \rtimes_p S, B)$ lorsque V est de type compact et B est munie de la coaction triviale.

On termine le chapitre 2 en introduisant la notion de K-moyennabilité pour les groupes quantiques. Le théorème qui suit généralise les résultats de [Cun83, JV84], et on choisit dans le cas général la propriété *iv* comme définition de la K-moyennabilité de $\hat{V}$.

Théorème (cf page 63) *Considérons les assertions suivantes :*

i. Il existe un élément $\alpha \in KK(S_r, \mathbb{C})$ tel que $\lambda^*(\alpha) = [\varepsilon_p] \in KK(S_p, \mathbb{C})$.

ii. $[\lambda] \in KK(S_p, S_r)$ est inversible.

iii. Pour toute C^*-algèbre A σ-unifère et $\hat{S}_r$-équivariante, $[\lambda_A] \in KK(A \rtimes_p S, A \rtimes_r S)$ est inversible.

iv. L'élément $\mathbb{1} \in KK_{\hat{S}_r}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est représenté par un triplet $(E, 1, F)$ tel que la corepré-sentation de $\hat{S}_r$ sur E soit faiblement contenue dans la régulière.

On a iv $\Rightarrow$ iii $\Rightarrow$ ii $\Rightarrow$ i. Lorsque V est de type compact on a iv $\Leftrightarrow$ iii $\Leftrightarrow$ ii $\Leftrightarrow$ i.

III Exemples d'arbres quantiques et KK-théorie

Dans les deux premières sections du troisième chapitre on construit et on étudie l'opérateur de Julg-Valette associé à un produit libre amalgamé de groupes quantiques discrets. Pour cela on commence par démontrer quelques propriétés des produits amalgamés qui complètent les résultats de [Wan95]. On construit en particulier les espérances conditionnelles $P_1 : S_1 \to T$, $P_2 : S_2 \to T$ associées à des inclusions de C^*-algèbres de Hopf unifères et bisimplifiables $T \subset S_1$, $T \subset S_2$. Puis montre que la représentation régulière de $S = S_1 *_T S_2$ s'obtient comme produit libre des T-modules hilbertiens GNS associés à P_1 et P_2.

On définit ensuite les espaces de Hilbert H et K_+ des sommets et des arêtes montantes quantiques, qui sont munis de représentations de S et d'un opérateur de Julg-Valette $F : H \to K_+$. Dans le cas cocommutatif, on retrouve la construction de l'arbre associé à un amalgame de groupes discrets $G_1 *_H G_2$ [Ser77]. Lorsque S_1 et S_2 sont comoyennables, on peut montrer que F définit un élément de $KK(S_r, \mathbb{C})$ qui vérifie un des critères de K-moyennabilité. On obtient ainsi :

Théorème (cf page 73) *Soit S_1 et S_2 deux C^*-algèbres de Hopf unifères et bisimplifiables. Soit T une sous-C^*-algèbre de Hopf unifère et bisimplifiable commune à S_1 et S_2. Si les groupes quantiques discrets associés à S_1 et S_2 sont moyennables, alors le groupe quantique discret associé au produit libre amalgamé $S_1 *_T S_2$ est K-moyennable.*

Soit Γ un groupe discret et Δ une partie finie de Γ telle que $1 \notin \Delta$ et $\Delta^{-1} = \Delta$. Le graphe associé à (Γ, Δ) est défini par l'ensemble des sommets $\mathfrak{s}$, l'ensemble des arêtes $\mathfrak{a}$, l'application extrémités $\mathfrak{e} : \mathfrak{a} \to \mathfrak{s}^2$ et l'application de retournement $\theta : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ suivants :

$$\mathfrak{s} = \Gamma, \quad \mathfrak{a} = \Gamma \times \Delta, \quad \mathfrak{e}(g, s) = (g, gs) \quad \text{et} \quad \theta(g, s) = (gs, s^{-1}).$$

Ce même graphe $\mathfrak{g}$ est donné sous forme simpliciale par $\mathfrak{s} = \Gamma$ et l'ensemble des arêtes $\{(g, g') \mid \exists\ s \in \Delta \quad g' = gs\} \subset \mathfrak{s}^2$ — alors l'application de retournement et l'application extrémités coïncident respectivement avec la volte Σ et l'injection canonique de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{s}^2$.

Dans le cas quantique, les deux formes de $\mathfrak{g}$ se généralisent séparément. Rappelons qu'à chaque coreprésentation irréductible r d'un groupe quantique compact (S, δ) est associée une représentation de la C^*-algèbre duale $\hat{S}$, dont le support central est un élément $p_r \in \hat{S}$. Par ailleurs on dispose du système de Kac de type compact (H, V, U) associé à (S, δ), on note $S_r \subset L(H)$ sa C^*-algèbre réduite, et $\tilde{V} = \Sigma(1 \otimes U)V(1 \otimes U)\Sigma$. On donne dans la section 7.2 la définition suivante :

Définition (cf page 76) *Soit (H, V, U) un système de Kac de type compact et p_1 un projecteur central de $\hat{S}$ tel que $Up_1U = p_1$ et $p_0p_1 = 0$. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des représentations unitaires de dimension finie de V.*

1. *On appelle graphe classique associé au couple (V, p_1) le graphe $\mathfrak{g}$ donné sous forme simpliciale par $\mathfrak{s} = \mathrm{Irr}\ \mathcal{C}$ et $\mathfrak{a} = \{(r, r') \in \mathfrak{s}^2 \mid \hat{\delta}(p_{r'})(p_r \otimes p_1) \neq 0\}$.*
2. *On appelle graphe quantique associé au couple (V, p_1) la suite (H, K, E, Θ) où $K = H \otimes p_1 H$, $E = V_{|K} \in L(K, H \otimes H)$ et $\Theta = \tilde{V}(1 \otimes U)_{|K} \in L(K)$.*

Les espaces de Hilbert H et K sont les analogues quantiques des espaces ℓ_2 des sommets et des arêtes. Ils sont munis des représentations i_{can} et $(i_{\mathrm{can}}\otimes 1)$ de S_r. L'opérateur Θ est l'opérateur de retournement des arêtes du graphe quantique, il commute à S_r et le sous-espace stable $K_g = \mathrm{Ker}(\Theta - \mathrm{id})$ s'interprète comme l'espace quantique des arêtes géométriques. On dispose de plus d'opérateurs but et origine, $B, O : K \to H$, qui vérifient des propriétés très proches du cas classique.

A partir de la section 7.3, on suppose que le graphe classique associé à (V, p_1) est un arbre, que l'on munit de l'origine $1_{\mathcal{C}}$. On peut alors définir des projecteurs $p_{+\star}$ et $p_{\star+} \in L(H)$ qui généralisent la projection sur le sous-espace des arêtes montantes, ainsi que des projecteurs $p_k \in L(H)$ sur les sous-espaces des sommets « situés à la distance k de l'origine ». On démontre quelques propriétés élémentaires de ces opérateurs, en relation avec Θ, ce qui conduit à poser $p_{\star-} = \Theta p_{+\star}\Theta^*$ et $p_{-\star} = \Theta p_{\star+}\Theta^*$, puis $p_{++} = p_{+\star}p_{\star+}$, $p_{+-} = p_{+\star}p_{\star-}$, etc. Enfin on introduit l'opérateur de Julg-Valette $F_g : H \to K_g$ associé au graphe quantique.

Au début de la section 7.4 on donne une caractérisation géométrique simple des graphes quantiques qu'on peut considérer comme les arbres associés aux « groupes quantiques libres », et on étudie l'opérateur Bp_{++} dans ce cas : cela permet en particulier de ramener l'étude de Im F_g^* à celle de $p_{++}K_g$. Puis on établit à la section 7.5, dans le même cadre, un résultat d'involutivité affaiblie pour Θ, qui se révèle très utile pour l'étude de l'espace des arêtes géométriques K_g et de l'opérateur de Julg-Valette F_g. Contrairement à ce qui se passe pour un graphe classique, ou même pour le graphe quantique associé à un amalgame de groupes quantiques discrets, on n'a pas en général $\Theta^2 = 1$. On a cependant un résultat plus faible :

Théorème (cf page 84) *Soit V un unitaire multiplicatif de type compact et p_1 un projecteur central de $\hat{S}$ tel que $Up_1U = p_1$ et $p_0p_1 = 0$. On suppose que le graphe quantique associé à (V, p_1) est un arbre strict. Alors*

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad (p_{++} + p_{--})\Theta^n(p_{++} + p_{--}) = (p_{++} + p_{--})\Theta^{-n}(p_{++} + p_{--}).$$

Le candidat naturel pour une généralisation de l'élément de Julg-Valette $\gamma \in KK(S_r, \mathbb{C})$ est la classe du triplet $(H \oplus K_g, \pi_H \oplus \pi_K, F_g + F_g^*)$. Il est relativement simple de vérifier que F_g^* est injectif, en revanche la non-involutivité de Θ rend la détermination de son image délicate. A l'aide du théorème précédent, on peut donner une condition suffisante pour que cette image soit de codimension 1 : il s'agit de la convergence des séries $(\sum_l ||p_k\Theta^l p_{k+l}||)$ et $(\sum_l ||p_k\Theta^{-l}p_{k+l}||)$. Cette condition de « localité » pour Θ est triviale dans le cas co-commutatif, mais n'est pas vérifiée par $A_o(Q)$ et $A_u(Q)$.

Tous les graphes quantiques associés aux groupes quantiques libres sont construits à partir de ceux de $(A_o(Q), \{u\})$ et $(A_u(Q), \{u, \bar{u}\})$. On s'intéresse dans le dernier chapitre au cas de $(A_o(Q), \{u\})$. Le calcul de Im F_g^* dans ce cas fait l'objet de la section 8.1, où on étudie plus en détail le résultat général suivant :

Théorème (cf page 88) *Soit V un unitaire multiplicatif de type compact et p_1 un projecteur central de $\hat{S}$ tel que $Up_1U = p_1$ et $p_0p_1 = 0$. On suppose que le graphe quantique associé à (V, p_1) est un arbre strict. Alors l'image de K_g par la projection orthogonale sur $p_{++}K$ est donnée par*

$$p_{++}K_g = \{\zeta \in p_{++}K \mid \exists\ \eta \in p_{+-}K \quad (\mathrm{id} - p_{+-}\Theta)(\eta) = p_{+-}\Theta\zeta\}.$$

On interprète cette expression de la manière suivante, dans le cas de $A_o(Q)$. La partie polaire $T \in L(p_{+-}K)$ de $p_{+-}\Theta p_{+-}$ définit pour tout k une isométrie de $(p_k \otimes p_1)p_{+-}K$ dans $(p_{k+1}\otimes p_1)p_{+-}K$, on appelle H_∞ la limite inductive correspondante. Pour tout k on dispose d'une injection canonique $i_k : (p_k\otimes p_1)p_{+-}K \to H_\infty$, et on note $P : p_{+-}\mathcal{K} \to H_\infty$ l'opérateur non borné $\sum i_k(p_k\otimes p_1)$. Alors il existe un opérateur $S \in L(p_{++}K, p_{+-}K)$ tel que $PS : K_{++} \to H_\infty$ soit borné et Ker $PS = p_{++}K_g$. De plus on a une décomposition en sous-espaces fermés orthogonaux : $H = p_0 H \oplus \mathrm{Im}\ F_g^* \oplus B(PS)^*(H_\infty)$.

Soit S_r la C^*-algèbre réduite de $A_o(Q)$. On débute la section 8.2 en vérifiant que F_g commute aux actions de S_r modulo les opérateurs compacts. Par conséquent le projecteur sur Im F_g^* définit un élément de Ext $(S_r, \mathbb{C})$, qui est en fait scindé. Pour le voir, on définit une représentation de S_r sur H_∞ par un procédé asymptotique :

Théorème (cf page 95) *Soit (H, K, V, Θ) le graphe quantique ℓ_2 associé à $(A_o(Q), \{u\})$. Notons $\varphi_{+-}(a) = p_{+-}(a\otimes 1)p_{+-}$ pour tout élément a de $S_r \subset L(H)$.*

1. *Soit $\zeta \in (p_k\otimes p_1)p_{+-}K$ et $a \in \mathcal{S} \subset S_r$. Alors la suite $(P\varphi_{+-}(a)T^n\zeta)_n$ converge dans H_∞ vers un vecteur qui ne dépend que de $i_k\zeta$ et que l'on note $\pi_\infty(a)(i_k\zeta)$.*
2. *Cela définit un morphisme d'algèbres involutives $\pi_\infty : \mathcal{S} \to L(H_\infty)$ qui s'étend par continuité à S_r.*

Avec cette définition on peut alors vérifier que l'opérateur $(PS)p_{++}$ commute aux actions de S_r modulo les compacts. Ainsi l'opérateur $F_g + B(PS)^* : K_g \oplus H_\infty \to H$ définit un élément $\gamma \in KK(S_r, \mathbb{C})$ qui est l'analogue pour $A_o(Q)$ de l'élément de Julg-Valette associé à l'arbre du groupe libre. La question naturelle qui se pose alors, et qui fera l'objet d'un travail ultérieur, est de savoir si $\lambda^*(\gamma) = 1$.

Appendice

Au cours des sections 8.1 et 8.2 on doit procéder à des vérifications analytiques dans le graphe du groupe quantique $A_o(Q)$: caractère borné de certains opérateurs, commutations modulo les compacts, ... On ne dispose pas pour l'instant de méthode générale pour traiter ces questions, que l'on ramène à chaque fois à des calculs dans la catégorie des coreprésentations unitaires de dimension finie de $A_o(Q)$. On a regroupé ces calculs purement géométriques dans l'appendice — il s'agit en fait de déterminer des angles entre sous-espaces irréductibles dans certaines coreprésentations.

Première partie

Rappels et notations

1 Généralités

Soit E un espace de Banach, l'espace des formes linéaires (resp. linéaires continues) sur E est noté E^* (resp. E'), et l'algèbre de Banach des opérateurs bornés, $L(E)$. On dit que $X \subset E$ est un *sous-ensemble total* s'il engendre un sous-espace vectoriel dense de E, l'espace E est dit *séparable* s'il contient un sous-ensemble total dénombrable.

Soit A et B des C^*-algèbres [Dix64, Bou67]. Tous les idéaux $J \subset A$ que nous considérerons seront bilatères fermés, donc auto-adjoints. On appelle *projecteurs* les idempotents hermitiens de A. L'algèbre opposée de A sera notée A^{op}. On dit que A est *σ-unifère* si elle admet une unité approchée dénombrable. Un *homomorphisme* $\phi : A \to B$ est un morphisme d'algèbres involutives, il est automatiquement continu.

Sauf précision contraire, on utilisera le produit tensoriel « min » (ou spatial) de C^*-algèbres. On utilisera la notation des indices pour les produits tensoriels multiples : par exemple si $x \in A \otimes A$ et B est unifère, alors $x_{13} \in A \otimes B \otimes A$, et on notera Σ la volte de $A \otimes B$ dans $B \otimes A$. On notera par ailleurs $A[0,1] = A \otimes C([0,1]) = C([0,1], A)$.

Soit A une C^*-algèbre, on dit qu'un A-module de Banach E est de *type dénombrable* s'il contient un sous-ensemble dénombrable qui engendre un sous-A-module dense. On dit que E est *non dégénéré* si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

i. l'ensemble $\{ax \mid a \in A,\ x \in E\}$ est total dans E,

ii. il existe une unité approchée (u_i) de A telle que pour tout $x \in E$, $\lim u_i x = x$,

iii. pour toute unité approchée (u_i) de A et pour tout $x \in E$ on a $\lim u_i x = x$,

iv. l'ensemble $\{ax \mid a \in A,\ x \in E\}$ est égal à E.

Pour *iv*, cf le théorème de Cohen [HR70, th. 32.22].

1.1 Unitarisations et constructions reliées [WO93, Lan79]

Soit A une C^*-algèbre et J un idéal bilatère fermé de A. Si φ est une forme linéaire continue sur J, elle admet un prolongement unique en une forme linéaire continue sur A de même norme. L'idéal J est dit *essentiel* s'il n'existe pas d'idéal bilatère fermé non nul en somme directe avec J, c'est-à-dire si son annihilateur $J^\perp = \{a \mid aJ = 0\}$ est nul. Une *unitarisation* de A est une C^*-algèbre unifère B qui contient A comme idéal essentiel. Si A est unifère, sa seule unitarisation est A. Dans le cas commutatif, c'est-à-dire $A = C(X)$ avec X un espace topologique localement compact, les idéaux essentiels de A correspondent aux ouverts denses de X et les unitarisations de A correspondent aux compactifications de X.

Soit $\tilde{A} = A \times \mathbb{C}$ muni de la multiplication $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$ et de l'involution $(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda})$. L'algèbre involutive $\tilde{A}$ admet une unique norme de C^*-algèbre, on dit que $\tilde{A}$ est obtenue par *adjonction d'unité* à A. Si A est unifère, $\tilde{A} \simeq A \oplus \mathbb{C}$. Sinon, A est la plus petite unitarisation de A et correspond dans le cas commutatif au compactifié d'Alexandroff de X. Tout homomorphisme $\phi : A \to B$ se prolonge de manière unique en un homomorphisme unifère $\tilde{\phi} : \tilde{A} \to \tilde{B}$. L'application $\tilde{\phi}$ est respectivement injective et surjective si c'est le cas de ϕ.

Soit $M(A)$ la C^*-algèbre des *multiplicateurs* de A : $M(A)$ est la C^*-algèbre des doubles centralisateurs de A, c'est-à-dire des couples $(L, R) \in L(A)^2$ tels que $R(a)b = aL(b)$ pour tous a, $b \in A$. Parfois il sera plus utile de considérer $M(A)$ comme l'idéalisateur de A

dans une représentation fidèle non dégénérée : considérant A comme sous-C^*-algèbre non dégénérée de $L(H)$ pour un espace de Hilbert (voire un C^*-module hilbertien) H, on a $M(A) = \{x \in L_B(E) \mid xA + Ax \subset A\}$. Soit J un idéal bilatère fermé de la C^*-algèbre A, on pose $M(A, J) = \{x \in M(A) \mid xA + Ax \subset J\}$. C'est une sous-$C^*$-algèbre de $M(A)$ qui s'identifie par restriction à une sous-C^*-algèbre de $M(J)$ et que l'on utilisera en particulier en relation avec les produits tensoriels.

La topologie sur $M(A)$ engendrée par les semi-normes $x \mapsto ||ax||_A$ et $x \mapsto ||xa||_A$ pour $a \in A$ est appelée ***topologie stricte*** de $M(A)$. Les unités approchées de A sont exactement les familles (u_i) qui convergent strictement vers 1. La C^*-algèbre $M(A)$ est la plus grande unitarisation de A, elle correspond dans le cas commutatif au compactifié de Stone-Cech de X : $M(A) \simeq C_b(X)$, et la topologie stricte de $C_b(X)$ coïncide sur les parties bornés avec la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

Soit A et B deux C^*-algèbres, on dit qu'un homomorphisme ϕ de A dans $M(B)$ est ***non dégénéré*** si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

i. le A-module à gauche B est non dégénéré,
ii. le A-module à droite B est non dégénéré,
iii. il existe une unité approchée (u_i) de A telle que $\phi(u_i) \to 1_B$ strictement,
iv. pour toute unité approchée (u_i) de A, $\phi(u_i) \to 1_B$ strictement.

Ces conditions sont en particulier vérifiées lorsque ϕ est un homomorphisme surjectif de A sur B, et plus généralement lorsque $B \subset \phi(A)$. Un homomorphisme non dégénéré $\phi : A \to M(B)$ se prolonge de manière unique en un homomorphisme unifère et strictement continu encore noté $\phi : M(A) \to M(B)$ — et inversement un tel homomorphisme $\psi : M(A) \to M(B)$ se restreint en un homomorphisme non dégénéré de A dans $M(B)$.

Soit A et B deux C^*-algèbres, on note $\tilde{M}(A \otimes B) := M(\tilde{A} \otimes B, A \otimes B)$ et $\tilde{M}_s(A \otimes A) := M(\tilde{A} \otimes A + A \otimes \tilde{A}, A \otimes A)$, on a alors les injections canoniques

$$A \otimes B \subset A \otimes M(B) \subset \tilde{M}(A \otimes B) \subset M(A \otimes B),$$
$$A \otimes A \subset \tilde{M}_s(A \otimes A) \subset \tilde{M}(A \otimes A) \quad \text{et} \quad A \otimes B \subset M(A) \otimes M(B) \subset M(A \otimes B).$$

Si les homomorphismes $\phi : A \to M(B)$ et $\phi' : A' \to M(B')$ sont non dégénérés, alors $\phi \otimes \phi' : A \otimes B \to M(A') \otimes M(B') \subset M(A' \otimes B')$ est non dégénéré. Si φ est une forme linéaire positive sur A, $(\mathrm{id} \otimes \varphi)$ et $(\varphi \otimes \mathrm{id})$ se prolongent en des applications linéaires continues de $\tilde{M}(A \otimes A)$ dans A et $M(A)$ respectivement. Lorsque C n'est pas unifère, $(x \mapsto x_{13})$ définit un homomorphisme non dégénéré de $A \otimes B$ dans $A \otimes \tilde{C} \otimes B \subset M(A \otimes C \otimes B)$ qui se prolonge donc à $M(A \otimes B)$. De même Σ définit un isomorphisme de $M(A \otimes B)$ sur $M(B \otimes A)$.

Dans le cas commutatif $B = C(Y)$, $J \subset B$ correspond à un ouvert U de Y et les éléments de $M(B, J)$ sont les fonctions continues bornées sur Y et nulles hors de U, soit encore les fonctions f continues bornées sur U telles que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $y \in Y \setminus U$. D'autre part $\tilde{M}(A \otimes B)$ est dans ce cas isomorphe à $C_b(Y, A)$, et si de plus $A = C(X)$, à l'espace des fonctions $f \in C_b(X \times Y)$ telles que $f(x, y)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini, uniformément sur les parties compactes de Y.

1.2 C^*-modules hilbertiens [Pas73, Rie74, Kas80, Bla98, WO93, Lan95]

Soit B une C^*-algèbre. Un ***B-module hilbertien*** E est un B-module à droite muni d'une application $(\cdot|\cdot) : E \times E \to B$ sesquilinéaire définie-positive et pour laquelle E est complet. En d'autres termes on suppose qu'on a, pour tous ζ, ζ', ξ, $\xi' \in E$ et $b \in B$:

– $(\xi|\zeta+\zeta')=(\xi|\zeta)+(\xi|\zeta')$, $(\xi+\xi'|\zeta)=(\xi|\zeta)+(\xi'|\zeta)$,
– $(\xi|\zeta b)=(\xi|\zeta)b$, $(\xi b|\zeta)=b^*(\xi|\zeta)$, $(\xi|\zeta)^*=(\zeta|\xi)$,
– $(\xi|\xi)\in B_+$, $(\xi|\xi)=0\Rightarrow\xi=0$,

alors l'application $(\xi\mapsto||\xi||=\sqrt{||(\xi|\xi)||})$ définit une norme sur E,

– E est complet pour la norme $||\cdot||$.

Dans ce cas le B-module à droite E est automatiquement non dégénéré. Lorsque $B=\mathbb{C}$ on retrouve les espaces de Hilbert, et dans le cas commutatif $B=C(X)$, E est l'espace des sections continues et nulles à l'infini d'un champ continu d'espaces de Hilbert sur X. Un autre exemple fondamental est celui du B-module B (pour la multiplication à droite) muni de $(b|b')=b^*b'$. Plus généralement, si e et f sont des projecteurs de $M(B)$, alors eBf est un fBf-module hilbertien pour l'action évidente à droite et le produit scalaire $(ebf|eb'f)=(ebf)^*(eb'f)$.

Lorsque E et E' sont deux B-modules hilbertiens, leur *somme directe* $E\oplus E'$ est un B-module hilbertien défini de manière évidente. Dans le cas commutatif, cette opération correspond à la somme de Whitney. Cette construction se généralise aux sommes infinies, et on note $\mathcal{H}_B$ la somme directe sur $\mathbb{N}$ des B-modules hilbertiens B : ses éléments sont les suites (b_i) telles que $\sum b_i^*b_i$ converge en norme dans B. On considérera dans la suite que $\mathcal{H}_B$ est muni de la $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation donnée par la parité des indices. On pose $\mathcal{K}_B=K(\mathcal{H}_B)$ et on omet l'indice lorsque $B=\mathbb{C}$. Le théorème de stabilisation de Kasparov [Kas80, th. 2] affirme que si E est un B-module hilbertien de type dénombrable, alors $E\oplus\mathcal{H}_B$ est isomorphe à $\mathcal{H}_B$. Notons que B et $\mathcal{H}_B$ sont de type dénombrable **ssi** B est σ-unifère.

Soit E et F deux B-modules hilbertiens. Un *morphisme* $T\in L_B(E,F)$ est une application B-linéaire bornée $T:E\to F$ admettant un adjoint T^* — ce qui signifie que $(T\xi|\zeta)=(\zeta|T^*\xi)$ pour tous $\zeta\in E$, $\xi\in F$. On appelle *opérateurs de rang* 1 les morphismes $\theta_\zeta^\xi=\xi(\zeta|\cdot)\in L(E,F)$ avec $\zeta\in E$ et $\xi\in F$, et on note $K_B(E,F)$ le sous-espace fermé de $L_B(E,F)$ qu'ils engendrent. L'espace $L_B(E):=L_B(E,E)$ est une C^*-algèbre pour la norme d'opérateur et $K_B(E)$ en est un idéal bilatère fermé : on a en fait $M(K_B(E))=L_B(E)$ et la topologie stricte sur $L_B(E)$ coïncide sur les parties bornées avec la topologie $*$-forte.

Dans le cas d'un champ constant d'espaces de Hilbert, les morphismes correspondent aux champs $*$-fortement continus d'opérateurs bornés et $K_B(E)$ est l'espace des champs normiquement continus et nuls à l'infini d'opérateurs compacts. Dans le cas du fBf-module hilbertien $E=eBf$, où e et f sont deux projecteurs de $M(B)$ tels que $\mathrm{Vect}(BfB)$ contient un sous-espace dense dans eBe, la C^*-algèbre $K_{fBf}(eBf)$ s'identifie canoniquement à eBe agissant à gauche. En particulier $K_B(B)\simeq B$ et $L_B(B)\simeq M(B)$.

Une *représentation* d'une C^*-algèbre A dans le B-module hilbertien E est un homomorphisme $\pi:A\to L_B(E)$. Le A-module E associé à la représentation π est non dégénéré **ssi** l'homomorphisme $\pi:A\to M(K_B(E))$ est non dégénéré et on dit alors que la représentation π est *non dégénérée*. En particulier si A est une sous-C^*-algèbre de $L_B(E)$, on dira que A est non dégénérée lorsque la représentation canonique $\pi:A\to L_B(E)$ est non dégénérée.

Soit E un B-module hilbertien et E' un B'-module hilbertien, on peut former leur produit tensoriel *externe* $E\otimes E'$ qui est un $B\otimes B'$-module hilbertien, en complétant le produit tensoriel algébrique muni du produit scalaire et de l'action donnés par les formules suivantes, pour ζ, $\xi\in E$, ζ', $\xi'\in E'$ et $b\in B$, $b'\in B'$:

$$(\xi\otimes\xi'|\zeta\otimes\zeta')=(\xi|\zeta)\otimes(\xi'|\zeta'),\ \ (\xi\otimes\xi')(b\otimes b')=(\xi b\otimes\xi' b').$$

On peut effectuer cette construction avec la norme « min » ou « max » sur $B\otimes B'$: rappelons que selon nos conventions, $\otimes$ désigne le produit tensoriel minimal. Comme dans le cas des C^*-algèbres, on note Σ la volte de $E\otimes E'$ dans $E'\otimes E$. Soit maintenant E un A-module hilbertien et F un B-module hilbertien muni d'une représentation π de A. Alors le produit tensoriel *interne* de E et F, noté $E\otimes_A F$ ou $E\otimes_\pi F$, est le séparé-complété du produit tensoriel algébrique de E et F, muni des opérations données par les formules suivantes, pour ζ, $\zeta' \in E$, ξ, $\xi' \in F$ et $b \in B$:

$$(\zeta\otimes\xi)b = \zeta\otimes(\xi b), \ \ (\zeta\otimes\xi|\zeta'\otimes\xi') = (\xi|\pi((\zeta|\zeta'))\xi').$$

C'est un B-module hilbertien dans lequel on a notamment $(\zeta a)\otimes_A\xi = \zeta\otimes_A(\pi(a)\xi)$ pour tous $\zeta \in E$, $\xi \in F$ et $a \in A$.

Soit E un B-module hilbertien, on associe à $\xi \in E$ l'élément $(b \mapsto \xi b)$ de $L_B(B,E)$, et on notera parfois $\xi^* \in L_B(E,B)$ son adjoint. On obtient ainsi un isomorphisme entre E et $K_B(B,E)$, muni de l'action à droite de $B \simeq K_B(B)$ par composition et du produit scalaire $(k|k') = k^*k' \in K_B(B) \simeq B$. L'isomorphisme $M(B) \simeq L_B(B)$ suggère alors une généralisation de la notion de *multiplicateurs* au cas des C^*-modules hilbertiens : on pose $M(E) = L_B(B,E)$, c'est canoniquement un $M(B)$-module hilbertien qui contient $E \simeq K_B(B,E)$. On a également une construction analogue à celle de $\tilde{M}(A\otimes B)$ pour le produit tensoriel externe d'un B-module E et d'un B'-module E' :

$$\tilde{M}(E\otimes E') = \big\{T \in L_{B\otimes B'}(B\otimes B', E\otimes E') \ \big| \\ (\mathrm{id}_E\otimes K_{B'}(E'))T \text{ et } T(\mathrm{id}_B\otimes K_{B'}(B')) \subset K_{B\otimes B'}(B\otimes B', E\otimes E')\big\}.$$

$\tilde{M}(E\otimes E')$ est un sous-module de $M(E\otimes E')$ contenant $E\otimes M(E')$, et un $\tilde{M}(B\otimes B')$-module hilbertien. Dans le cas commutatif, $M(E)$ est l'espace des sections continues bornées du champ continu d'espaces de Hilbert associé à E. Lorsque B et B' sont toutes deux commutatives, $\tilde{M}(E\otimes E')$ est dans un certain sens l'espace des sections continues bornées sur $X \times X'$ qui tendent vers 0 en l'infini « dans une direction seulement ».

Soit A et B deux C^*-algèbres et ϕ une application complètement positive de A dans $M(B)$ telle que $\phi(A)B$ soit total dans B. On a dans ce cadre une généralisation de la construction GNS — qui est un cas particulier de [Kas80, th. 3] : il existe un B-module hilbertien E, une représentation π de A dans E et un élément $\zeta \in M(E)$ tels que $\phi(a) = (\zeta|\pi(a)\zeta)$ pour tout $a \in A$ et $\pi(A)\zeta B$ est dense dans E. De plus si (E',π',ζ') est un autre triplet vérifiant les mêmes propriétés, il existe un unitaire $u \in L_B(E,E')$ tel que $\pi'(a) = u\pi(a)u^*$ pour tout $a \in A$ et $\zeta' = u(\zeta)$.

1.3 Produits libres amalgamés [Ser77, Avi82, Voi85, VDN92]

Soit G_1 et G_2 deux groupes discrets, et H un sous-groupe commun à G_1 et à G_2 : on se donne deux morphismes injectifs $i_1 : H \to G_1$, $i_2 : H \to G_2$. Il existe alors un groupe $G_1 *_H G_2$ muni de deux morphismes injectifs $j_1 : G_1 \to G_1 *_H G_2$, $j_2 : G_2 \to G_1 *_H G_2$ tels que $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$. De plus $(G_1 *_H G_2, j_1, j_2)$ est l'unique groupe, à isomorphisme près, vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout groupe G munit de deux morphismes $\phi_1 : G_1 \to G$, $\phi_2 : G_2 \to G$ tels que $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$, il existe un unique morphisme $\phi_1 *_H \phi_2 : G_1 *_H G_2 \to G$ tel que $(\phi_1 *_H \phi_2) \circ i_1 = \phi_1$ et $(\phi_1 *_H \phi_2) \circ i_2 = \phi_2$ — cf le diagramme (1.1) qui traite le cas des C^*-algèbres. Le groupe $G_1 *_H G_2$ est appelé *produit libre* de G_1 et G_2 amalgamé suivant H. On identifie H, G_1 et G_2 à leurs images respectives dans $G_1 *_H G_2$. Soit S_1 (resp. S_2) un système de représentants, contenant 1, des classes à droite modulo H de G_1 (resp. G_2). Alors les éléments de $G_1 *_H G_2$ s'écrivent de manière unique sous forme de mots réduits $g_1 \cdots g_n h$ avec $h \in H$, $g_k \in S_{i_k} \setminus \{1\}$ pour tout k, et $(i_j) \in I_n$:

$$I_n = \{(i_1, \ldots, i_n) \in \{1,2\}^n \quad | \quad \forall\ k \quad i_k \neq i_{k+1}\}.$$

On note $G(r,1)$ (resp. $G(r,2)$) le sous-ensemble des éléments vérifiant $g_n \notin G_1$ (resp. G_2), en convenant d'inclure ainsi les éléments de H, c'est-à-dire le cas $n = 0$.

Soit A_1 et A_2 deux C^*-algèbres unifères, et B une sous-C^*-algèbre unifère commune à A_1 et A_2 : on se donne deux homomorphismes injectifs et unifères $i_1 : B \to A_1$, $i_2 : B \to A_2$. Il existe alors une C^*-algèbre unifère $A_1 *_B A_2$ munie de deux homomorphismes injectifs et unifères $j_1 : A_1 \to A_1 *_B A_2$, $j_2 : A_2 \to A_1 *_B A_2$ tels que $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$. De plus $(A_1 *_B A_2, j_1, j_2)$ est l'unique triplet vérifiant la propriété universelle suivante : pour toute C^*-algèbre A munit de deux homomorphismes $\phi_1 : A_1 \to A$, $\phi_2 : A_2 \to A$ tels que $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$, il existe un unique homomorphisme $\phi_1 *_B \phi_2 : A_1 *_B A_2 \to A$ tel que $(\phi_1 *_B \phi_2) \circ i_1 = \phi_1$ et $(\phi_1 *_B \phi_2) \circ i_2 = \phi_2$.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & A_1 \arrow[d, "j_1"] \arrow[ddr, bend left, "\phi_1"] & \\
A_2 \arrow[r, "j_2"] \arrow[drr, bend right, "\phi_2"'] & A_1 *_B A_2 \arrow[dr, dashed, "\phi_1 *_B \phi_2"] & \\
 & & A
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

La C^*-algèbre $A_1 *_B A_2$ est appelée *produit libre plein* de A_1 et A_2 amalgamé suivant B — ou produit libre tout court. On identifie B, A_1 et A_2 à des sous-C^*-algèbres de A, et alors la C^*-algèbre unifère A est engendrée par $A_1 \cup A_2$.

Supposons maintenant que A_1 et A_2 sont munies d'espérances conditionnelles $P_1 : A_1 \to B$, $P_2 : A_2 \to B$. On note (E_i, π_i, η_i) la construction GNS associée à P_i : E_i est le B-module hilbertien obtenu par séparation et complétion de A_i pour le produit scalaire $\langle a, b \rangle = P_i(a^* b)$, π_i est la représentation de A_i sur E_i induite par la multiplication à gauche et η_i est l'image de l'unité de A_i dans E_i. Notons E_i° l'orthogonal de $\eta_i B$ dans E_i, on a $E_i = \eta_i B \oplus E_i^\circ$ et l'action de A_i sur E_i induit une action de B sur E_i°. Le produit libre $E = E_1 *_B E_2$ des B-modules E_1, E_2 avec vecteurs distingués η_1, η_2 est défini par la formule suivante :

$$E = \eta B \oplus \textstyle\bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{(i_j) \in I_n} (E_{i_1}^\circ \otimes_B \cdots \otimes_B E_{i_n}^\circ).$$

Suivant les notations de [VDN92] on note $E(l,i)$ le sous-module de E obtenu en ne gardant que les suites (i_j) telles que $i_1 \neq i$, et on dispose alors d'isomorphismes $V_i : E \to E_i \otimes_B E(l,i)$ donnés par $V_i \eta = \eta_i \otimes \eta$ et, si $(i_1, \ldots, i_n) \in I_n$ et $\zeta_k \in E_{i_k}^\circ$ pour tout k :

$$V_i(\zeta_1 \otimes \cdots \otimes \zeta_n) = \begin{cases} \zeta_1 \otimes (\zeta_2 \otimes \cdots \otimes \zeta_n) & \text{si } i_1 = i \text{ et } n \geq 2, \\ \zeta_1 \otimes \eta & \text{si } i_1 = i \text{ et } n = 1, \\ \eta_i \otimes (\zeta_1 \otimes \cdots \otimes \zeta_n) & \text{si } i_1 \neq i. \end{cases}$$

En considérant les suites $(i_j) \in I_n$ telles que $i_n \neq i$, on obtient de même des sous-modules $E(r,i)$ de E et on dispose d'isomorphismes $W_i : E \to E(r,i) \otimes_B E_i$ analogues aux V_i. On note E°, $E(l,i)^\circ$ et $E(r,i)^\circ$ les orthogonaux respectifs de $B\eta$ dans E, $E(l,i)$ et $E(r,i)$.

On définit alors une représentation $\tilde{\pi}_i$ de A_i sur E en posant $\tilde{\pi}_i(a) = V_i^*(\pi_i(a)\otimes\mathrm{id})V_i$. Identifions E_i au sous-espace $\eta B \oplus E_i^\circ$ de E, alors $\tilde{\pi}_i$ stabilise E_i et sa restriction s'identifie à π_i. On omettra désormais de noter le tilde de $\tilde{\pi}_i$. Les morphismes π_1 et π_2 de A_1 et A_2 dans $L_B(E)$ vérifient l'égalité $\pi_1 \circ i_1 = \pi_2 \circ i_2$ et la propriété universelle fournit donc un homomorphisme $\pi : A_1 *_B A_2 \to L_B(E)$. Cet homomorphisme n'est pas nécessairement fidèle, même lorsque π_1 et π_2 le sont : on note $A_1 *_{B,r} A_2$ son image, *produit libre réduit* de (A_1, P_1) et (A_2, P_2) amalgamé suivant B. Lorsque π_1 et π_2 sont fidèles, A_1 et A_2 peuvent être considérées comme des sous-C^*-algèbres de $A_1 *_{B,r} A_2$.

La projection orthogonale de E sur ηB induit une espérance conditionnelle $P = P_1 *_B P_2 : A_1 *_B A_2 \to B$ qui prolonge P_1 et P_2 au produit libre, plein ou réduit. Les sous-C^*-algèbres A_1 et A_2 sont *libres* dans $(A_1 *_B A_2, P)$ au sens suivant : soit $(i_j) \in I_n$, et $a_k \in \mathrm{Ker}\ P_{i_k}$ pour tout k, on a alors $P(a_1 \cdots a_n) = 0$. De plus P est l'unique espérance conditionnelle de $A_1 *_B A_2$ dans B qui prolonge P_1 et P_2 et pour laquelle A_1 et A_2 sont libres. Le produit libre réduit est l'image du produit libre plein par la représentation GNS associée à P.

2 Groupes quantiques

2.1 C^*-algèbres de Hopf

La première motivation pour l'introduction des groupes quantiques localement compacts est l'extension de la dualité de Pontrjagyn des groupes localement compacts abéliens et remonte à [Tan38, Kre63] pour le cas compact, puis [Sti59] dans le cas unimodulaire, et enfin [Eym64, Tat65, Tat66]. Kac est le premier à proposer une catégorie contenant à la fois les groupes localement compacts unimodulaires et leurs duaux, et naturellement munie d'une dualité prolongeant celle de Pontrjagyn [Kac61, Kac63, Kac65]. Ces travaux ainsi que [Tak72] aboutissent à la théorie des algèbres de Kac développée indépendamment dans [ES73, ES75, ES92] et [KV73, KV74]. Enfin on trouve dans [Val85, EV93] une reformulation de cette théorie dans le cadre des C^*-algèbres de Hopf, cadre que nous présentons rapidement maintenant.

Une *C^*-algèbre de Hopf* est un couple (S, δ) où S est une C^*-algèbre et le *coproduit* $\delta : S \to \tilde{M}_s(S\otimes S) \subset M(S\otimes S)$ est un homomorphisme non dégénéré tel que le diagramme suivant commute — on notera que $\mathrm{id}\otimes\delta : S\otimes S \to S\otimes M(S\otimes S) \subset M(S\otimes S\otimes S)$ est non dégénéré donc se prolonge à $M(S\otimes S)$, ainsi que $\delta\otimes\mathrm{id}$:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"] & M(S\otimes S) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\delta"] \\ M(S\otimes S) \arrow[r, "\delta\otimes\mathrm{id}"] & M(S\otimes S\otimes S) \end{tikzcd}$$

On dit que S est *bisimplifiable* si $(S\otimes 1)\delta(S)$ et $(1\otimes S)\delta(S)$ sont totaux dans $S\otimes S$. Un *morphisme de C^*-algèbres de Hopf* $\phi : (S, \delta) \to (S', \delta')$ est un homomorphisme $\phi : S \to M(S')$ non dégénéré (alors $\phi\otimes\phi$ est non dégénéré) tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\phi"] & M(S\otimes S) \arrow[d, "\phi\otimes\phi"] \\ M(S') \arrow[r, "\delta'"] & M(S'\otimes S') \end{tikzcd}$$

Soit $x \in S$ et φ, $\psi \in S'$. Le coproduit δ de S étant à valeurs dans $\tilde{M}_s(S \otimes S)$, on peut définir les produits de *convolution* $x \star \psi = (\psi \otimes \mathrm{id}) \circ \delta(x)$ et $\varphi \star x = (\mathrm{id} \otimes \varphi) \circ \delta(x)$ qui sont dans S, ainsi que $\psi \star \varphi = (\psi \otimes \varphi) \circ \delta \in S'$, et on a $\psi \star \varphi(x) = \varphi(x \star \psi) = \psi(\varphi \star x)$. On notera $(\varphi \star)$ et $(\star \varphi)$ les applications linéaires bornées $(x \mapsto \varphi \star x)$ et $(x \mapsto x \star \varphi)$. Muni de $\star$, S' est une algèbre de Banach. On dit que S est *co-unifère* s'il existe un caractère involutif continu $\varepsilon \in S'$, appelé *co-unité*, tel que $\varepsilon \star s = s \star \varepsilon = s$ pour tout $s \in S$.

On dit que (S, δ) est de *type compact* si S est unifère. On dit que la C^*-algèbre de Hopf (S, δ) est *commutative* lorsque c'est le cas de la C^*-algèbre S. On dit que (S, δ) est *cocommutative* si $\Sigma \circ \delta = \delta$, ce qui équivaut aussi au fait que $(S', \star)$ est commutative. Les C^*-algèbres de Hopf commutatives sont exactement les C^*-algèbres $C(G)$ munies du coproduit $\delta_G(f)(s,t) = f(st)$, où G est un magma associatif localement compact tel que $G \cdot G$ est dense dans G et les actions régulières sont propres [Val85]. Le magma G est birégulier **ssi** $(C(G), \delta_G)$ est bisimplifiable, compact **ssi** $(C(G), \delta_G)$ est de type compact, et lorsque ces deux conditions sont réunies, G est automatiquement un groupe.

Une nouvelle motivation pour la construction de groupes quantiques localement compacts est apparue dans les années 80 avec la découverte de déformations des algèbres enveloppantes des groupes de Lie classiques [Jim85, Dri85, Dri86]. Ces idées ont conduit à la construction de déformations de groupes de Lie compacts [Wor88, VS88, Ros90], ce qui n'était pas possible dans le cadre des groupes compacts. Cependant ces nouveaux exemples, où l'antipode n'est pas involutive, ne rentrent pas dans le cadre des algèbres de Kac : une nouvelle théorie des groupes quantiques compacts, très satisfaisante, est alors mise au point par Woronowicz [Wor87a, Wor95].

Deux voies sont ensuite explorées pour l'extension de la théorie au cas localement compact. D'une part, les unitaires multiplicatifs étudiés dans [BS93, Baa95, Wor96] fournissent une théorie très générale qui contient tous les exemples connus et est auto-duale. Par ailleurs le travail dans le cadre des C^*- ou W^*- algèbres de Hopf est poursuivi [vD94, vD96, VvD01, MN94] pour aboutir à la théorie des groupes quantiques localement compacts [KV99, KV00]. Ces développements sont présentés dans les deux sections suivantes.

2.2 Unitaires multiplicatifs

Nous décrivons ici le cadre général dans lequel se situe notre étude. Ce cadre contient à la fois ceux de [BS93], [Baa95] et [Wor96], ainsi que celui des groupes quantiques localement compacts de [KV00] que nous présentons rapidement à la section suivante. Le cas compact sera décrit plus en détail à la section 2.4. On notera que l'ordre d'exposition choisi ici, du cadre le plus général au cadre le plus particulier, ne correspond nullement au développement historique de la théorie dont nous avons dit quelques mots au paragraphe précédent.

Soit H un espace de Hilbert et V un unitaire de $L(H \otimes H)$, on dit que V est un *unitaire multiplicatif* s'il vérifie la *relation pentagonale* : $V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}$. Soit B une C^*-algèbre, E un B-module hilbertien et X un unitaire de $L_B(E \otimes H)$. On dit que X est une représentation de V s'il vérifie la relation $X_{12}X_{13}V_{23} = V_{23}X_{12}$. On note alors $\rho_X(\omega) = (\mathrm{id} \otimes \omega)(X)$ pour $\omega \in L(H)_*$, et $\hat{S}_X$ la fermeture de $\rho_X(L(H)_*)$ dans $L_B(E)$. En particulier on pose $\hat{S}_r = \hat{S}_V$, et on note également S_r la fermeture de $(L(H)_* \otimes \mathrm{id})(V)$ dans $L(H)$.

Soit U un unitaire involutif de $L(H)$, on pose $\tilde{V} = \Sigma(\mathrm{id} \otimes U)V(\mathrm{id} \otimes U)\Sigma$ et $\hat{V} = \Sigma(U \otimes \mathrm{id})V(U \otimes \mathrm{id})\Sigma$. Les hypothèses dont nous aurons besoin pour la construction des produits croisés sont les suivantes :

1. V et $\hat{V}$ sont multiplicatifs,
2. $[S_r, US_rU] = [\hat{S}_r, U\hat{S}_rU] = 0$,
3. S_r et $\hat{S}_r$ sont des C^*-algèbres,
4. $X \in M(\hat{S}_X \otimes K(H))$ pour toutes les représentations de V et $\hat{V}$.

Remarquons que lorsque 3 est vérifiée, $\hat{S}_X$ est une C^*-algèbre : d'après [BS93, prop. A.3a] c'est une sous-algèbre de $L_B(E)$, par ailleurs l'identité $X_{12}X_{13}V_{23} = V_{23}X_{12}$ montre que $\hat{S}_X$ est la fermeture de $(\mathrm{id}\otimes L(H)_*)(X^*(1\otimes\hat{S}_r)X)$, donc c'est une C^*-algèbre. Lorsque 1–4 sont vérifiées, on dira que (H, V, U) est un *système de Kac faible*. On dit de plus que (H, V, U) est *irréductible* si $(\Sigma(1\otimes U)V)^3$ est un scalaire, cela a lieu en particulier lorsque $(\hat{S}_r \cup S_r)'' = (U\hat{S}_rU \cup S_r)'' = L(H)$ [BS93, prop. 6.9b]. Notons que si U et V sont deux unitaires tels que $U^2 = 1$ et $(\Sigma(1\otimes U)V)^3$ est scalaire, on a $1 \Rightarrow 2$ [BS93, prop. 6.5].

Faisons rapidement le lien avec d'autres notions concernant les unitaires multiplicatifs. Nous n'utiliserons pas explicitement ces notions et nous abstenons donc d'en donner les définitions. Lorsque (H, V, U) est associé à un unitaire multiplicatif *maniable* au sens de [Wor96], c'est un système de Kac faible. Cela est en particulier le cas lorsque (H, V, U) est associé à un groupe quantique localement compact au sens de [KV00], et l'irréductibilité est alors automatique : cf le paragraphe 2.3. Par ailleurs les hypothèses 3 et 4 sont vérifiées lorsque V est *régulier* [BS93] ou *semi-régulier* [Baa95]. On reviendra plus en détail sur ces notions dans la section 4.2, pour l'énoncé du théorème de bidualité des produits croisés. Un *système de Kac* au sens de [BS93] est un système de Kac faible irréductible tel que V et $\hat{V}$ sont réguliers. Dans [Baa95], un couple (V, U) vérifiant la condition 1 est dit *équilibré*.

Soit (H, V, U) un système de Kac faible. La condition 4 montre que $V(K(H)\otimes S) = (K(H)\otimes S)V = K(H)\otimes S$. On peut alors reproduire la démonstration de [Baa95, cor. 3.11] et munir S_r et $\hat{S}_r$ de structures de C^*-algèbres de Hopf, les coproduits étant donnés par diverses formules [BS93, prop. 6.8c] :

$$\begin{aligned} \delta_r(s) &= V(s\otimes 1)V^* = \hat{V}^*(1\otimes s)\hat{V} = (\omega\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(V_{12}V_{13}) \quad \text{si} \quad s = (\omega\otimes\mathrm{id})(V) \\ \hat{\delta}_r(\hat{s}) &= V^*(1\otimes\hat{s})V = \tilde{V}(\hat{s}\otimes 1)\tilde{V}^* = (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\omega)(V_{13}V_{23}) \quad \text{si} \quad \hat{s} = (\mathrm{id}\otimes\omega)(V). \end{aligned}$$

On dit que S_r (resp. $\hat{S}_r$) est la C^*-algèbre de Hopf *réduite* (resp. *C^*-algèbre duale* réduite) de V. Lorsque (H, V, U) est un système de Kac faible, $(H, \Sigma V^*\Sigma, U)$ et $(H, \hat{V}, U)$ sont également des systèmes de Kac faibles. On notera que la C^*-algèbre réduite (resp. duale) de $\hat{V}$ est $U\hat{S}_rU$ (resp. S).

D'autre part on note $\hat{S}_p$ la C^*-algèbre $\hat{S}_X$ obtenue lorsque $X = X_p$ est la somme des représentations de V sur un espace de Hilbert suffisamment grand fixé — aussi appelée représentation *universelle* de V. C'est une C^*-algèbre de Hopf bisimplifiable pour le coproduit $\hat{\delta}_p : (\mathrm{id}\otimes\omega)(X_p) \mapsto (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\omega)(X_{p\,13}X_{p\,23})$ [BS93, cor. A.6e]. Par définition, si X est une représentation quelconque de V, ρ_X induit un homomorphisme surjectif $\bar{\rho}_X : \hat{S}_p \to \hat{S}_X$ tel que $(\bar{\rho}_X\otimes\mathrm{id})(X_p) = X$. On obtient ainsi une correspondance bijective entre représentations de V et représentations non dégénérées de $\hat{S}_p$. En particulier lorsque $X = 1 \in M(\mathbb{C}\otimes S)$ est la représentation *triviale* de V, on a $\hat{S}_1 = \mathbb{C}$ et $\bar{\rho}_X$ est la co-unité de $\hat{S}_p$, notée $\hat{\varepsilon}_p$.

Enfin, on appelle *coreprésentation* de V un unitaire $Y \in L_B(H\otimes E)$ tel que $V_{12}Y_{13}Y_{23} = Y_{23}V_{12}$, ce qui équivaut au fait que $\Sigma(U\otimes 1)Y(U\otimes 1)\Sigma$ est une représentation de $\hat{V}$. On note $L_Y(\omega) = (\omega\otimes\mathrm{id})(Y)$ pour $\omega \in L(H)_*$, et $S_Y = L_Y(L(H)_*)$: c'est une C^*-algèbre et $Y \in M(\hat{S}_r\otimes S_Y)$. Lorsque $Y = V$ on retrouve ainsi $S_r = S_V$, et lorsque $Y = Y_p$ est la coreprésentation *universelle* de V, la C^*-algèbre associée S_p est munie d'une structure de C^*-

algèbre de Hopf bisimplifiable par le coproduit $\delta_p : (\omega \otimes \mathrm{id})(Y_p) \mapsto (\omega \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(Y_{p\,12} Y_{p\,13})$. On dit que S_p est la C^*-algèbre de Hopf *pleine* associée à V.

On dit que V est *commutatif* si V_{13} et V_{23} commutent, ce qui équivaut au fait que S_r est commutative. Alors les conditions 3 et 4 sont automatiquement vérifiées — V est même régulier. On obtient ainsi exactement les C^*-algèbres de Hopf (S_r, δ_r) du type $(C(G), \delta_G)$ où G est un groupe localement compact. Inversement, soit G un groupe localement compact et $\mathrm{d}s$ une mesure de Haar à droite sur G, on associe canoniquement à G le système de Kac donné par $H = L^2(G, \mathrm{d}s)$ et

$$(V\xi)(s,t) = \xi(st,t) \quad \text{et} \quad (U\xi)(s) = \Delta(s)^{1/2} \xi(s^{-1}). \tag{2.1}$$

D'autre part la C^*-algèbre $\hat{S}_r$ est commutative **ssi** S_r est cocommutative. Cela équivaut également au fait que V_{12} et V_{13} commutent, on dit alors que V est *cocommutatif*. On obtient ainsi les C^*-algèbres de Hopf $(C^*(G), \hat{\delta}_G)$ où G est un groupe localement compact — cf [Val85, BS93] pour plus de précisions.

2.3 Groupes quantiques localement compacts [KV00]

La théorie des groupes quantiques localement compacts admet une formulation équivalente, et peut-être plus simple, en termes d'algèbres de von Neumann, cependant nous préférons rester dans le cadre des C^*-algèbres de Hopf que nous utiliserons tout au long de cette thèse. On appelle *groupe quantique localement compact* (réduit) une C^*-algèbre de Hopf bisimplifiable (S, δ) admettant deux poids KMS fidèles φ et ψ *invariants* à gauche et à droite respectivement :

$$\forall\ s \in M_\varphi^+(S)\ (\mathrm{id} \otimes \varphi)\delta(s) = \varphi(s)1 \quad \text{et} \quad \forall\ s \in M_\psi^+(S)\ (\psi \otimes \mathrm{id})\delta(s) = \psi(s)1.$$

Avec cette définition très simple on peut développer une théorie très riche qui contient celle des algèbres de Kac et est auto-duale [KV00]. Notons en particulier qu'on a unicité à un scalaire près pour φ et ψ, qui sont appelés *poids de Haar* du groupe quantique (S, δ). On peut affaiblir les axiomes choisis ici — bisimplifiabilité, condition KMS, invariance — sans faire apparaître de nouveaux objets. Une constante d'échelle $\nu \in \mathbb{R}_+^*$ est attachée à chaque groupe quantique localement compact, elle décrit l'invariance relative de ψ par rapport au groupe modulaire de φ. Dans le cas commutatif les groupes quantiques localement compacts correspondent bien sûr aux groupes localement compacts G, les poids φ et ψ proviennent alors des mesures de Haar sur G et $\nu = 1$.

Dans cette thèse nous aurons besoin uniquement de quelques propriétés du système de Kac faible (H, V, U) associé à un groupe quantique localement compact (S, δ), que nous introduisons maintenant. On choisit un poids de Haar à droite ψ sur (S, δ). Soit $\Gamma : S \to H$ une construction GNS pour ψ et $\hat{\Gamma} : \hat{S} \to H$ la construction GNS canonique pour le poids dual $\hat{\psi}$ — Γ et $\hat{\Gamma}$ sont densément définis. Soit J et $\hat{J}$ les conjugaisons modulaires sur H associées. On peut montrer que la formule $V(\Gamma \otimes \Gamma)(x \otimes y) = (\Gamma \otimes \Gamma)(\delta(x)(1 \otimes y))$ définit un unitaire multiplicatif $V \in L(H \otimes H)$. On pose de plus $U = \nu^{\mathrm{i}/8} J \hat{J}$, alors $\hat{V}$ est l'unitaire multiplicatif W utilisé dans [KV00] et (H, V, U) est un système de Kac faible, maniable et irréductible. On a $(\Sigma(1 \otimes U)V)^3 = \nu^{-\mathrm{i}/8} 1$ [Vae] et $(S, \delta) \simeq (S_r, \delta_r)$, $(\hat{S}, \hat{\delta}) \simeq (\hat{S}_r, \hat{\delta}_r)$.

Les premiers exemples de groupes quantiques localement compacts non commutatifs et non cocommutatifs ont été introduits dans [KP64, KP66]. De nombreux exemples ont ensuite été étudiés dans le cadre des algèbres de Kac [vD91, Rie92, EV96], ils rentrent dans le cadre de la construction du biproduit croisé développée depuis le début de la théorie [Kac68, Maj91, BS93, VV02]. Apparurent ensuite de nouveaux exemples obtenus comme déformations de groupes classiques [Jim85, Wor87b, PW90, Rie93], ainsi que les groupes quantiques compacts libres que nous présenterons plus loin. Enfin [Wor91, Baa92] et [Wor01] donnent des exemples de groupes quantiques localement compacts respectivement non régulier et avec $\nu \neq 1$.

2.4 ***Le cas compact ou discret*** [Wor87a, Wor95]

Soit S une C^*-algèbre de Hopf bisimplifiable et unifère. Alors S admet un ***état de Haar***, c'est-à-dire un état $h \in S'$ tel que $(h \otimes \mathrm{id}) \circ \delta(s) = (\mathrm{id} \otimes h) \circ \delta(s) = h(s)1$. On peut de plus montrer que h est un état KMS (formule (2.11) ci-dessous), et on dit que (S, δ) est un groupe quantique compact (non réduit). Dans ce cas on a automatiquement $\nu = 1$. Le groupe quantique compact réduit correspondant est l'image (S_r, δ_r) de (S, δ) dans la représentation GNS de h, qui n'est pas nécessairement fidèle.

À l'aide de h on sait décrire la théorie des coreprésentations de S, qui est analogue à celle de Peter-Weyl : en particulier les coreprésentations irréductibles sont de dimension finie et toutes les coreprésentations sont complètement réductibles. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des coreprésentations de dimension finie de S. La somme directe et le produit tensoriel des coreprésentations induisent des opérations $\oplus$ et $\otimes$ sur $\mathcal{C}$, tandis que le passage à la coreprésentation contragrédiente induit une involution $(r \mapsto \bar{r})$. On note $1_{\mathcal{C}}$ l'objet associé à la coreprésentation triviale de S.

Soit $r \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, on note $v_r \in L(H_r) \otimes S$ la coreprésentation associée de S et on choisit une base orthonormale (e_r^i) de H_r. L'objet ***conjugué*** de r est caractérisé, à isomorphisme près, par l'existence d'un anti-isomorphisme $(\zeta \mapsto \bar{\zeta} = j_r(\zeta))$ de H_r dans $H_{\bar{r}}$ tel que $\bar{\zeta} \otimes \xi \mapsto (\zeta|\xi)$ et $t_r : 1 \mapsto \sum e_r^i \otimes \bar{e}_r^i$ définissent respectivement des éléments de Mor $(\bar{r}r, 1)$ et Mor $(1, r\bar{r})$. On pose $F_r = j_r^* j_r \in L(H_r)_+$ et on peut supposer que $\mathrm{Tr}\, F_r = \mathrm{Tr}\, F_r^{-1}$: ce réel positif sera noté M_r. Alors j_r est unique à une phase près, lorsque r est irréductible. Les objets conjugués de $\bar{r}$, $r \oplus r'$ et $r \otimes r'$ sont isomorphes à r, $\bar{r} \oplus \bar{r}'$ et $\bar{r}' \otimes \bar{r}$ respectivement, et on peut choisir ces isomorphismes de manière à ce que les anti-isomorphismes de conjugaison correspondants soient j_r^{-1}, $j_r \oplus j_{r'}$ et $\Sigma \circ (j_r \otimes j_{r'})$. Enfin, notons ${}^t(m \otimes a) = ({}^t m) \otimes a$ et $\overline{m \otimes a} = m \otimes (a^*)$ pour $m \otimes a \in L(H_r) \otimes S$, la coreprésentation $\bar{v}_r$ est équivalente à $v_{\bar{r}}$ mais n'est pas unitaire en général :

$$ {}^t v_r (F_r \otimes 1) \bar{v}_r (F_r^{-1} \otimes 1) = (F_r \otimes 1) \bar{v}_r (F_r^{-1} \otimes 1) {}^t v_r = 1. $$

On peut exprimer la structure de (S, δ) en fonction de celle de $\mathcal{C}$ de la manière suivante. Lorsque ζ et ξ sont deux vecteurs d'un espace de Hilbert H, on note $\omega_\zeta^\xi = (\zeta | \cdot \, \xi) \in L(H)'$ et on pose, pour s, $s' \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$:

$$ \Omega(\xi \otimes \bar{\zeta}) = L_{v_s}(\omega_\zeta^\xi) \quad \text{et} \quad \Omega(\xi \otimes \xi' \otimes \bar{\zeta}' \otimes \bar{\zeta}) = \Omega(\xi \otimes \bar{\zeta}) \otimes \Omega(\xi' \otimes \bar{\zeta}') = L_{v_s}(\omega_\zeta^\xi) \otimes L_{v_{s'}}(\omega_{\zeta'}^{\xi'}). $$

Soit $\mathcal{S}^s = (L(H_s)_* \otimes \mathrm{id})(v_s)$ et $\mathcal{S} = \bigoplus \mathcal{S}^s$, c'est une sous-algèbre involutive dense de S et on a $v_s = \sum \theta_k^l \otimes \Omega(k \otimes \bar{l}) \in L(H_s) \otimes \mathcal{S}^s$, où k et l parcourent une base orthonormale de H_s. Soit $\phi_i \in$ Mor $(t_i, s \otimes s')$ les morphismes donnant la décomposition de $s \otimes s'$ en objets irréductibles — ie $\phi_i^* \phi_i = \mathrm{id}$ et $\sum \phi_i \phi_i^* = \mathrm{id}$ —, la structure de groupe quantique compact de S est alors donnée par le formulaire suivant :

$$\Omega(\xi\otimes\bar\zeta)\cdot\Omega(\xi'\otimes\bar\zeta') = \sum \Omega(\phi_i^*(\xi\otimes\xi')\otimes\phi_i^{*j}(\bar\zeta'\otimes\bar\zeta)), \quad \Omega(\xi\otimes\bar\zeta)^* = \Omega(\bar\xi\otimes F_s^{-1}\zeta), \tag{2.2}$$
$$h(\Omega(\xi\otimes\bar\zeta)) = 0 \quad \text{si } s\neq 1, \quad h(\Omega(\mu\otimes\bar\lambda)) = \bar\lambda\mu \quad \text{sinon}, \tag{2.3}$$
$$h(\Omega(\xi\otimes\bar\zeta)^*\Omega(\xi'\otimes\bar\zeta')) = \frac{1}{M_s}(\xi|\xi')(F_s^{-1/2}\zeta'|F_s^{-1/2}\zeta), \tag{2.4}$$
$$\delta(\Omega(\xi\otimes\bar\zeta)) = \sum \Omega(k\otimes\bar\zeta)\otimes\Omega(\xi\otimes\bar k). \tag{2.5}$$

Pour (2.2) on a choisi $j : \zeta\otimes\zeta' \mapsto \bar\zeta'\otimes\bar\zeta$ comme conjugaison pour $r\otimes r'$, on a posé $\phi_i^{*j} = j_{t_i}\circ\phi^*\circ j^{-1}$, et on a identifié $\bar{\bar s}$ à s de manière à avoir $j_{\bar s}j_s = \mathrm{id}_s$.

De plus on dispose d'une *co-unité* $\varepsilon : \mathcal{S}\to\mathbb{C}$ qui est un caractère involutif défini sur $\mathcal{S}$ seulement en général, d'une *antipode* $\kappa : \mathcal{S}\to\mathcal{S}$ qui est linéaire et anti-multiplicative, et de formes linéaires multiplicatives $f_z : \mathcal{S}\to\mathbb{C}$ qui expriment les propriétés modulaires de h. Elles vérifient les identités suivantes, où m désigne la multiplication de $\mathcal{S}$:

$$\kappa(\Omega(\xi\otimes\bar\zeta)) = (\Omega(\zeta\otimes\bar\xi))^*, \quad \kappa^2(\Omega(\xi\otimes\bar\zeta)) = \Omega(F_s^{-1}\xi\otimes F_{\bar s}^{-1}\bar\zeta), \tag{2.6}$$
$$\varepsilon(\Omega(\xi\otimes\bar\zeta)) = (\zeta|\xi), \quad f_z(\Omega(\xi\otimes\bar\zeta)) = (\zeta\,|F_s^z(\xi)), \tag{2.7}$$
$$f_z\star\Omega(\xi\otimes\bar\zeta) = \Omega(F_s^z\xi\otimes\bar\zeta), \quad \Omega(\xi\otimes\bar\zeta)\star f_z = \Omega(\xi\otimes F_{\bar s}^{-z}\bar\zeta), \tag{2.8}$$
$$(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\circ\delta = (\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\circ\delta = \mathrm{id}_{\mathcal{S}}, \quad \delta\circ\kappa = (\kappa\otimes\kappa)\circ\Sigma\circ\delta \tag{2.9}$$
$$m\circ(\kappa\otimes\mathrm{id})\circ\delta = m\circ(\mathrm{id}\otimes\kappa)\circ\delta = 1_{\mathcal{S}}\otimes\varepsilon, \quad \varepsilon\circ\kappa = \varepsilon, \tag{2.10}$$
$$h(xy) = h(y\ (f_1\star x\star f_1)), \quad f_z\star f_{z'} = f_{z+z'}, \quad f_z^* = f_{-\bar z}, \quad f_0 = \varepsilon. \tag{2.11}$$

Soit enfin $\Lambda_h : S\to H$ la construction GNS relative à h, et soit U la partie polaire de l'opérateur fermable induit par κ sur H. Alors le système de Kac associé à (S,δ) est (H,V,U) et on a les expressions suivantes :

$$V : \Lambda_h\otimes\Lambda_h(x\otimes y)\mapsto(\Lambda_h\otimes\Lambda_h)(\delta(x)1\otimes y), \qquad U\circ\Lambda_h(x) = \Lambda_h(f_1\star\kappa(x)). \tag{2.12}$$

Les systèmes de Kac (H,V,U) ainsi obtenus sont caractérisés par l'existence d'un *vecteur fixe* non nul pour V, c'est-à-dire d'un vecteur non nul $e\in H$ tel que $V(e\otimes\xi) = e\otimes\xi$ pour tout $\xi\in H$. Un unitaire multiplicatif V admettant un vecteur fixe non nul est dit de *type compact*.

Intéressons-nous maintenant au groupe quantique dual de (S,δ). Les coreprésentations de S_r étant toutes contenues dans la régulière, on a dans ce cas $\hat S_r = \hat S_p$. On note $(\hat S,\hat\delta)$ cette C^*-algèbre de Hopf, elle est isomorphe à la somme directe des C^*-algèbres $L(H_s)$, où s décrit un système de représentants des coreprésentations irréductibles de S_r. On notera $\hat\Omega(\xi\otimes\bar\zeta)$ l'image dans $\hat S$ de $\theta_\zeta^\xi\in L(H_s)$. Les poids de Haar et le coproduit sont donnés par les formules

$$\hat h_L(\hat\Omega(\xi\otimes\bar\zeta)) = M_s(\zeta|F_s^{-1}\xi), \quad \hat h_R(\hat\Omega(\xi\otimes\bar\zeta)) = M_s(\zeta|F_s\xi), \tag{2.13}$$
$$\hat\delta(\hat\Omega(\xi\otimes\bar\zeta)) = \sum_{s,t,i}\hat\Omega(\phi_i(\xi)\otimes\phi_i^j(\bar\zeta)), \tag{2.14}$$

où pour chaque t, $t'\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ on a choisi des $\phi_i\in\mathrm{Mor}(s,t\otimes t')$ tels que $\phi_i^*\phi_i = \mathrm{id}$ et $\sum\phi_i\phi_i^*$ soit la projection de $H_t\otimes H_{t'}$ sur son sous-espace maximal équivalent à des copies de H_s. Pour finir, identifions $L(H_r)$ à $L(H_r)_*$ au moyen de l'application

$$\theta_\zeta^\xi\mapsto M_r\omega_\zeta^\xi \quad \text{pour } \zeta,\,\xi\in H_r,$$

cela induit une bijection entre les espaces vectoriels $\hat{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{S}$ puis une identification des espaces GNS associés respectivement à $\hat h_L$ et h. La représentation GNS envoie alors $\hat S$

dans $K(H)$. Soit p_r l'image de id $\in L(H_r)$ dans $\hat{\mathcal{S}}$, son image dans $K(H)$ correspond à la projection orthogonale sur $\Lambda_h(\mathcal{S}^r)$. Lorsque $r = 1_{\mathcal{C}}$, p_r coïncide avec le projecteur $(\mathrm{id}\otimes h_r)(V)$ sur le sous-espace des vecteurs fixes de H. On le note p_0.

2.5 Produits libres et groupes quantiques compacts libres [Wan95, vDW96, Ban97, Ban96]

Soit (S_1, δ_1) et (S_2, δ_2) deux C^*-algèbres de Hopf unifères et bisimplifiables, h_1 et h_2 leurs états de Haar respectifs. Soit T une sous-C^*-algèbre de Hopf unifère commune à S_1 et S_2 et bisimplifiable : on se donne deux morphismes de C^*-algèbres de Hopf unifères et injectifs $i_1 : T \to S_1$, $i_2 : T \to S_2$. Alors le produit libre plein $S_1 *_T S_2$ admet un unique coproduit δ pour lequel les injections canoniques $i_1 : S_1 \to S_1 *_T S_2$ et $i_2 : S_2 \to S_1 *_T S_2$ sont des morphismes de C^*-algèbres de Hopf. De plus, si ϕ_1 et ϕ_2 sont des morphismes de C^*-algèbres de Hopf dans le diagramme (1.1), alors c'est également le cas de $\phi_1 *_T \phi_2$. On montre alors que $(S_1 *_T S_2, \delta)$ est une C^*-algèbre de Hopf unifère et bisimplifiable [Wan95]. De plus, lorsque $T = \mathbb{C}$ son état de Haar n'est autre que $h = h_1 * h_2$. Dans le cas cocommutatif ces résultats se traduisent par des isomorphismes $C^*_p(G_1) * C^*_p(G_2) \simeq C^*_p(G_1 * G_2)$ et $C^*_r(G_1) *_r C^*_r(G_2) \simeq C^*_r(G_1 * G_2)$, où G_1 et G_2 sont des groupes discrets.

Soit Q une matrice de $GL_n(\mathbb{C})$, avec $n \geq 2$. Soit $A_u(Q)$ la C^*-algèbre unifère maximale engendrée par n^2 générateurs $(u_{ij}) = U$ et les relations qui rendent U et $Q\bar{U}Q^{-1}$ unitaires. On montre que la formule $\delta(u_{ij}) = \sum u_{ik} \otimes u_{kj}$ définit une structure de C^*-algèbre de Hopf bisimplifiable sur $A_u(Q)$. Le groupe quantique compact correspondant, introduit par Wang et van Daele [Wan95, vDW96], est appelé *groupe quantique libre unitaire*. Il peut être considéré comme une généralisation du groupe libre F_n : la C^*-algèbre $C^*_p(F_n)$ est le quotient de $A_u(Q)$ par les relations $u_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. D'un autre côté, le groupe quantique libre unitaire peut être considéré comme une généralisation du groupe compact $U(n)$: en effet toute C^*-algèbre de Hopf bisimplifiable et unifère est un quotient d'un certain $A_u(Q)$. La C^*-algèbre de Hopf duale de $A_u(Q)$ est notée $F_u(Q)$. Le groupe quantique discret $F_u(Q)$ n'est pas moyennable, ie la représentation régulière de $A_u(Q)$ n'est pas fidèle.

La C^*-algèbre de Hopf $A_u(Q)$ n'est pas modifiée si Q est multipliée par un scalaire, on supposera dorénavant que Tr $Q^*Q =$ Tr $(Q^*Q)^{-1}$. La structure de la C^*-algèbre de Hopf $A_u(Q)$ a été étudiée par Banica dans [Ban97] : on peut notamment décrire la catégorie $\mathcal{C}$ des coreprésentations de $A_u(Q)$ comme suit. L'ensemble Irr $\mathcal{C}$ est le monoïde libre à deux générateurs, notés u et $\bar{u}$, et on peut choisir U et $\bar{U}$ comme représentants de ces objets. Les règles de fusion sont données par les relations de récurrence

$$ru\otimes\bar{u}r' = ru\bar{u}r' + r\otimes r', \quad r\bar{u}\otimes ur' = r\bar{u}ur' + r\otimes r',$$
$$ru\otimes ur' = ruur', \quad r\bar{u}\otimes\bar{u}r' = r\bar{u}\bar{u}r',$$

et l'involution, par $\bar{1} = 1$, $\overline{ru} = \bar{u}\bar{r}$, $\overline{r\bar{u}} = u\bar{r}$. Les morphismes de conjugaison sont déterminés, à isomorphisme près, par l'égalité $F_u = Q^*Q$. Inversement tout groupe quantique compact qui a une catégorie des représentations de cette forme est isomorphe à un des groupes quantiques compacts libres $A_u(Q)$.

Soit $A_o(Q)$ le quotient de $A_u(Q)$ par les relations $U = Q\bar{U}Q^{-1}$. Le coproduit passe au quotient et on obtient une structure de C^*-algèbre de Hopf bisimplifiable sur $A_o(Q)$. Le groupe quantique compact correspondant est appelé *groupe quantique libre orthogonal*. Sa C^*-algèbre de Hopf duale est notée $F_o(Q)$, le groupe quantique discret correspondant n'est moyennable que lorsque $n = 2$. On supposera toujours que la représentation fondamentale

U est irréductible — cela équivaut au fait que $Q\bar{Q}$ est multiple de l'identité. Les classes de coreprésentations irréductibles de $A_o(Q)$ sont alors indexées par $\mathbb{N}$, et un système de représentants est donné par $r_0 = 1$, $r_1 = U$ et la relation

$$r_k \otimes r_l = r_{|k-l|} + r_{|k-l|+2} + \cdots + r_{k+l-2} + r_{k+l}.$$

On a $\overline{r_k} = r_k$. Ainsi la catégorie $\mathcal{C}$, munie du produit tensoriel et de la conjugaison, est isomorphe à celle de $SU(2)$. En fait tout groupe quantique compact qui a une catégorie des représentations de cette forme est isomorphe à un des groupes quantiques compacts libres $A_o(Q)$. En particulier lorsque $Q \in GL_2(\mathbb{C})$, on obtient les groupes quantiques compacts $SU_q(2)$ [Wor87b], le cas $q = 1$ correspondant par exemple à $Q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

3 KK-théorie S-équivariante

3.1 Coactions de C^*-algèbres de Hopf [BS89]

Soit (S, δ) une C^*-algèbre de Hopf. Une *coaction* de (S, δ) sur une C^*-algèbre A est un homomorphisme non dégénéré $\delta_A : A \to \tilde{M}(A \otimes S) \subset M(A \otimes S)$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta_A"] \arrow[d, "\delta_A"] & M(A\otimes S) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\delta"] \\ M(A\otimes S) \arrow[r, "\delta_A\otimes\mathrm{id}"] & M(A\otimes S\otimes S) \end{tikzcd}$$

On notera δ_A^2 le morphisme de A dans $M(A \otimes S \otimes S)$ représenté ci-dessus et on dira que A est une C^*-algèbre *S-équivariante*. On dit que A est une *S-algèbre* si δ_A est injective et $\delta_A(A)(1 \otimes S)$ est total dans $A \otimes S$. Soit A une C^*-algèbre S-équivariante, un élément $a \in A$ est dit *invariant* si on a $\delta_A(a) = a \otimes 1$, la sous-$C^*$-algèbre des tels éléments est notée A^S. Si B est une autre C^*-algèbre S-équivariante, un homomorphisme non dégénéré $\phi : A \to M(B)$ est dit *équivariant* si on a $\delta_B \circ \phi = (\phi \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_A$. Enfin, toute C^*-algèbre A est munie de la coaction *triviale* $\delta_1 : a \mapsto a \otimes 1$ — en particulier c'est la seule coaction de S sur $\mathbb{C}$.

Par ailleurs la coaction δ_A s'étend en un homomorphisme de $M(A)$ dans $M(A \otimes S)$, mais en général on a $\tilde{M}(M(A) \otimes S) = M(M(A) \otimes S) \subsetneq M(A \otimes S)$ donc l'extension de δ_A n'est pas une coaction de S sur $M(A)$. Dans le cas où S est la C^*-algèbre de Hopf associée à un groupe localement compact G, les structures de S-algèbre sur A correspondent aux actions continues de G sur A par automorphismes : ces actions s'étendent à $M(A)$ mais ne sont alors pas nécessairement continues pour la norme de $M(A)$.

Soit maintenant B une C^*-algèbre S-équivariante et E un B-module hilbertien. Une *coaction* de S sur E est une application linéaire $\delta_E : E \to \tilde{M}(E \otimes S)$ telle que
- $\delta_E(\xi)\delta_B(b) = \delta_E(\xi b)$ et $\delta_B((\zeta|\xi)) = (\delta_E(\zeta)|\delta_E(\xi))$,
- $\delta_E(E)(B \otimes S)$ est total dans $E \otimes S$,
- $(\delta_E \otimes \mathrm{id}_S) \circ \delta_E = (\mathrm{id}_E \otimes \delta) \circ \delta_E$.

On peut montrer que les prolongements de $(\delta_E \otimes \mathrm{id}_S)$ et $(\mathrm{id}_E \otimes \delta)$ qui interviennent dans la dernière condition existent lorsque les deux premières sont vérifiées. Dans la première, on utilise le fait que $\tilde{M}(E \otimes S)$ est un $\tilde{M}(B \otimes S)$-module hilbertien. Lorsque E est muni d'une telle coaction, on dit qu'il est *S-équivariant*. Par exemple, la coaction de S sur la C^*-algèbre B peut également être considérée comme une coaction sur le B-module hilbertien

B. De manière analogue, le B-module hilbertien $\mathcal{H}_B$ est muni d'une coaction canonique $\delta_{\mathcal{H}_B} : \zeta\otimes b \mapsto \zeta\otimes\delta_B(b)$.

On dispose comme dans le cas des C^*-algèbres du sous-espace des éléments invariants, noté E^S. Si π est une représentation d'une C^*-algèbre S-équivariante A sur E telle que $\delta_E(\pi(a)\xi) = (\pi\otimes\mathrm{id})\delta_A(a) \cdot \delta_E(\xi)$ pour tous $a \in A$ et $\xi \in E$, on dit que π est une ***représentation covariante*** de A sur (E, δ_E). On a d'autre part une coaction induite sur la C^*-algèbre $K_B(E)$: considérons $\delta_E(\zeta)$ comme un élément de $L_{B\otimes S}(B\otimes S, E\otimes S)$, on pose

$$\delta_{K(E)}(\theta_\zeta^\xi) = \delta_E(\xi)\delta_E(\zeta)^* \in \tilde{M}(K_B(E)\otimes S) \subset L_{B\otimes S}(E\otimes S).$$

On notera encore $\delta_{K(E)}$ l'extension de cet homomorphisme de $L_B(E)$ dans $L_{B\otimes S}(E\otimes S)$, ce n'est pas une coaction en général. Notons que si $\delta_B(B)(1\otimes S)$ est total dans $B\otimes S$, alors $\delta_E(E)(1\otimes S)$ est automatiquement total dans $E\otimes S$, ainsi que $\delta_{K(E)}(K_B(E))(1\otimes S)$ dans $K_B(E)\otimes S$.

De manière équivalente, la coaction δ_E est donnée par un unitaire V_E de $E\otimes_{\delta_B}(B\otimes S)$ dans $E\otimes S$ tel que pour tout $\xi \in E$, $(x \mapsto V_E(\xi\otimes_{\delta_B} x))$ définisse un élément de $M(E\otimes S)$ — qui correspond alors à $\delta_E(\xi)$ —, et le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(E\otimes_{\delta_B}(B\otimes S))\otimes_{\delta_B\otimes\mathrm{id}}(B\otimes S\otimes S) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "V_E\otimes\mathrm{id}"] & (E\otimes_{\delta_B}(B\otimes S))\otimes_{\mathrm{id}\otimes\delta}(B\otimes S\otimes S) \arrow[d, "V_E\otimes\mathrm{id}"] \\
\begin{array}{c}(E\otimes S)\otimes_{\delta_B\otimes\mathrm{id}}(B\otimes S\otimes S)\\ \simeq (E\otimes_{\delta_B}(B\otimes S))\otimes S\end{array} \arrow[d, "V_E\otimes\mathrm{id}"] & \begin{array}{c}(E\otimes S)\otimes_{\mathrm{id}\otimes\delta}(B\otimes S\otimes S)\\ \simeq E\otimes(S\otimes_\delta(S\otimes S))\end{array} \arrow[d, "\simeq"] \\
E\otimes S\otimes S \arrow[r, "="] & E\otimes S\otimes S
\end{tikzcd}$$

On a dans ce cadre $\delta_{K(E)}(k) = V_E(k\otimes_{\delta_B}1)V_E^*$. On dit qu'un morphisme de B-modules hilbertiens $l : E \to F$ est ***équivariant*** si $V_F(l\otimes_{\delta_B}1)V_E^* = l\otimes 1$, et on note $L_B(E)^S$ l'ensemble des endomorphismes équivariants.

Considérons maintenant le cas où B est muni de la coaction triviale de la C^*-algèbre de Hopf S. Soit E un B-module hilbertien, les unitaires V_E de $E\otimes_{\delta_B}(B\otimes S)$ dans $E\otimes S$ s'identifient alors aux unitaires de $M(K_B(E)\otimes S)$, et un tel unitaire V_E est associé à une coaction de S sur E **ssi** $(\mathrm{id}\otimes\delta)(V_E) = V_{E,12}V_{E,13}$. On dit alors que $X = V_E$ est une ***coreprésentation*** de S. Supposons de plus que $S = S_r$ est la C^*-algèbre de Hopf réduite d'un système de Kac faible (H, V, U), alors l'équation $(\mathrm{id}\otimes\delta)(X) = X_{12}X_{13}$ qui caractérise les coreprésentations de S équivaut à $X_{12}X_{13}V_{23} = V_{23}X_{12}$ et on retrouve la notion de représentation de V. Soit A une C^*-algèbre S_r-équivariante, une représentation π de A sur (E, X) est alors covariante **ssi** on a l'égalité suivante dans $L_{B\otimes S_r}(E\otimes S_r)$: $(\pi\otimes\mathrm{id}) \circ \delta_A(a) = X(\pi(a)\otimes 1)X^*$.

3.2 Le théorème de stabilisation

On a dans notre cadre une généralisation du théorème de stabilisation de Kasparov équivariant [Kas80, MP84], que nous démontrons grâce au lemme suivant :

Lemme 3.1 *Soit (H, V, U) un système de Kac faible et S_r sa C^*-algèbre réduite. Soit B une C^*-algèbre S_r-équivariante, E et F deux B-modules hilbertiens S_r-équivariants.*

1. *L'expression $\delta_{E\otimes H}(\zeta\otimes\xi) = \delta_H(\xi)_{23}\delta_E(\zeta)_{13}$ définit une coaction de S_r sur $E\otimes H$.*

Soit π la représentation canonique de $B\otimes S_r$ sur $B\otimes H$. Soit $V_E\otimes_\pi \mathrm{id}_{B\otimes H}$ l'unitaire de $E\otimes_{\delta_B}(B\otimes H)$ vers $E\otimes H$ induit par V_E. On note $V'_E = (\mathrm{id}\otimes U)(V_E\otimes_\pi \mathrm{id}_{B\otimes H})$. On définit $\delta_{F\otimes H}$ et V'_F comme pour E.

2. *Soit $\phi : E \to F$ un morphisme de B-modules hilbertiens, alors $\psi = V'_E(\phi\otimes_{\delta_B}\mathrm{id})V'^*_F$: $E\otimes H \to F\otimes H$ est équivariant.*

Démonstration.

1. Le coproduit δ_r est simplifiable à droite et S_r est non dégénérée dans $L(H)$ donc $\delta_H(H)(1\otimes S_r)$ est dense dans $H\otimes S_r$. D'autre part $\delta_E(E)(B\otimes S_r)$ est dense dans $E\otimes S_r$ par définition. Ainsi $\delta_{E\otimes H}(E\otimes H)(B\otimes S_r) = \delta_H(H)_{23}(\delta_E(E)(B\otimes S_r))_{13}$ est dense dans $\delta_H(H)_{23}(E\otimes S_r)_{13}$ donc dans $E\otimes H\otimes S_r$. Vérifions que $\delta_{E\otimes H}$ est bien une coaction :

$$\begin{aligned}
&\delta_{E\otimes H}((\zeta\otimes\xi)\cdot b) = \delta_H(\xi)_{23}\delta_E(\zeta b)_{13} = \delta_{E\otimes H}(\zeta\otimes\xi)\cdot\delta_B(b),\\
&(\delta_{E\otimes H}\otimes\mathrm{id})\delta_{E\otimes H}(\zeta\otimes\xi) = ((\delta_H\otimes\mathrm{id})\delta_H(\xi))_{234}((\delta_E\otimes\mathrm{id})\delta_E(\zeta))_{134}\\
&\qquad\qquad = (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\delta)(\delta_H(\xi)_{23}\delta_E(\zeta)_{13}) = (\mathrm{id}\otimes\delta)\delta_{E\otimes H}(\zeta\otimes\xi),\\
&(\delta_{E\otimes H}(\zeta\otimes\xi)|\delta_{E\otimes H}(\zeta'\otimes\xi')) = \delta_E(\zeta)^*_{13}\delta_H(\xi)^*_{23}\delta_H(\xi')_{23}\delta_E(\zeta)_{13}\\
&\qquad\qquad = (\xi|\xi')(\delta_E(\zeta)|\delta_E(\zeta')) = \delta_B((\zeta\otimes\xi|\zeta'\otimes\xi'))
\end{aligned}$$

(en effet $\delta_H(\xi)^*\delta_H(\xi') = (\xi^*\otimes 1)V^*V(\xi'\otimes 1) = (\xi|\xi')\otimes 1$). Soit $V_{E\,13} : (E\otimes H)\otimes_B(B\otimes S_r) \to E\otimes H\otimes S_r$ l'unitaire qui envoie $(\zeta\otimes\xi)\otimes(b\otimes s)$ sur $V_E(\zeta\otimes(b\otimes s))_{13}\,\xi_2$, il est immédiat de vérifier que $V_{E\otimes H}$ est égal à $V_{23}V_{E\,13}$.

2. Plaçons-nous dans le cas $E = F$. On a alors $\psi = (1\otimes U)\delta_{K(E)}(\phi)(1\otimes U)$ et $\delta_{K(E\otimes H)}(\psi) = V_{23}\Sigma_{23}(\delta_{K(E)}\otimes\mathrm{id})(\psi)\Sigma_{23}V^*_{23}$ dans $L_B(E\otimes H\otimes H)$. Combinons ces deux expressions et utilisons le fait que $\hat V\delta_r(s)\hat V^* = 1\otimes s$, pour $s\in S_r$:

$$\begin{aligned}
\delta_{K(E\otimes H)}(\psi) &= V_{23}U_2\Sigma_{23}\delta^2_{K(E)}(\phi)\Sigma_{23}U_2V^*_{23}\\
&= U_2\Sigma_{23}\hat V_{23}\ (\mathrm{id}\otimes\delta_r)(\delta_{K(E)}(\phi))\ \hat V^*_{23}\Sigma_{23}U_2\\
&= U_2\Sigma_{23}\delta_{K(E)}(\phi)_{13}\Sigma_{23}U_2 = \psi\otimes 1.
\end{aligned}$$

Ainsi ψ est bien équivariant. Pour le cas général $E\neq F$ on considère $E' = E\oplus F$ muni de la coaction somme et $\phi' : (\zeta,\xi)\mapsto(0,\phi(\zeta))$. Il est clair que le morphisme ψ' est alors donné par $\psi'(x,y) = (0,\psi(x))$, donc l'équivariance de ψ' entraîne celle de ψ. ∎

Remarques.

1. La coaction de S_r sur $E\otimes H \simeq H\otimes_{\mathbb{C}}E$ introduite au point 1 est un cas particulier de coaction sur un produit tensoriel interne équivariant, cf [BS89, prop. 2.10]. En particulier cette construction est valable plus généralement pour n'importe quel espace de Hilbert H muni d'une coaction de S_r.
2. Munissons le B-module hilbertien $E\otimes H$ de la coaction δ'_E donnée par $\delta'_{E\otimes H}(\zeta\otimes\xi) = (W(\xi\otimes 1))_{23}\delta_E(\zeta)_{13}$, avec $W = (U\otimes 1)V(U\otimes 1)$, et $F\otimes H$ de la coaction analogue : alors on a un résultat analogue à 2 en prenant $\psi' = V_E(\phi\otimes_{\delta_B}\mathrm{id})V^*_F$. En particulier quand $E = F$ on a $\psi' = \delta_{K(E)}(\phi)$. □

Théorème 3.2 *Soit (H,V,U) un système de Kac faible et S_r sa C^*-algèbre réduite. Soit B une C^*-algèbre S_r-équivariante. Si E est un B-module hilbertien équivariant, le B-module hilbertien $E\otimes H$ est muni d'une structure équivariante si on pose $\delta_{E\otimes H}(\zeta\otimes\xi) = (V(\xi\otimes 1))_{23}\delta_E(\zeta)_{13}$.*

1. *Soit E, F deux B-modules hilbertiens équivariants isomorphes en tant que B-modules hilbertiens, alors $E \otimes H$ et $F \otimes H$ sont isomorphes en tant que B-modules hilbertiens équivariants.*
2. *Soit E un B-module hilbertien équivariant de type dénombrable. Alors le B-module hilbertien équivariant $(E \oplus \mathcal{H}_B) \otimes H$ est isomorphe à $\mathcal{H}_B \otimes H$.*
3. *Si de plus S_r est unifère, alors le B-module hilbertien équivariant $E \oplus (\mathcal{H}_B \otimes H)$ est isomorphe à $\mathcal{H}_B \otimes H$.*

Démonstration. Le point 1 résulte immédiatement du lemme. Comme dans le cas classique [MP84, th. 2.5], les points 2 et 3 s'en déduisent à l'aide du théorème de stabilisation non équivariant. On a en effet un isomorphisme de B-modules hilbertiens $E \oplus \mathcal{H}_B \simeq \mathcal{H}_B$ d'où la suite d'isomorphismes équivariants

$$E \otimes H \oplus \mathcal{H}_B \otimes H \simeq (E \oplus \mathcal{H}_B) \otimes H \simeq \mathcal{H}_B \otimes H. \tag{3.1}$$

Par ailleurs, dans le cas compact, H contient un vecteur fixe de norme 1. Par conséquent E est un facteur direct invariant de $E \otimes H$, donc de $F := \mathcal{H}_B \otimes H$ d'après (3.1). Écrivons $F = E \oplus E'$: on voit alors, en décalant les copies de E, que $E \oplus F \otimes \mathcal{H} \simeq F \otimes \mathcal{H}$. Comme ici $F \otimes \mathcal{H} \simeq F$, on obtient $E \oplus F \simeq F$ qui est le résultat recherché. ■

3.3 KK-théorie [Kas88, BS89]

Soit S une C^*-algèbre de Hopf. Soit A et B deux C^*-algèbres S-équivariantes. On note $\mathbb{E}_S(A,B)$ l'ensemble des triplets (E,π,F) où E est un B-module hilbertien de type dénombrable, S-équivariant et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué, π est une représentation covariante de degré 0 de A sur E, et F est un élément de $L_B(E)$ de degré 1 tels que

$$\begin{aligned} &[\pi(A),F], \quad \pi(A)(F^2-1) \quad \text{et} \quad \pi(A)(F-F^*) \;\subset\; K_B(E), \\ &\pi(A)\otimes S\ (F \otimes_{\mathbb{C}} 1_S - V_E(F \otimes_{\delta_B} 1)V_E^*) \subset K_{B \otimes S}(E \otimes S). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Alors $(F \otimes_{\mathbb{C}} 1_S - V_E(F \otimes_{\delta_B} 1)V_E^*)\ (\pi(A) \otimes S)$ est également inclus dans $K_{B \otimes S}(E \otimes S)$. On note $\mathbb{D}_S(A,B)$ le sous-ensemble des triplets qui vérifient les mêmes propriétés en remplaçant $K(E)$ et $K(E \otimes S)$ par $\{0\}$.

Soit $\phi : A_1 \to A_2$ un homomorphisme équivariant entre deux C^*-algèbres munies de coactions de S. Alors $(E,\pi,F) \mapsto (E, \pi \circ \phi, F)$ induit une application $\phi^* : \mathbb{E}_S(A_2,B) \to \mathbb{E}_S(A_1,B)$. De même si $\phi : B_1 \to B_2$ est un homomorphisme équivariant, alors $(E,\pi,F) \mapsto (E \otimes_\phi B_2, \pi \otimes_\phi 1, F \otimes_\phi 1)$ induit une application $\phi_* : \mathbb{E}_S(A,B_1) \to \mathbb{E}_S(A,B_2)$. En particulier, soit ε_0 et $\varepsilon_1 : B[0,1] \to B$ les morphismes d'évaluation en 0 et en 1, on dit que deux éléments x et y de $\mathbb{E}_S(A,B)$ sont *homotopes* s'il existe une *homotopie* $z \in \mathbb{E}_S(A,B[0,1])$ tel que $\varepsilon_{0*}(z) = x$ et $\varepsilon_{1*}(z) = y$. On note $KK_S(A,B)$ le quotient de $\mathbb{E}_S(A,B)$ par la relation d'équivalence ainsi définie.

La somme directe des modules, représentations et opérateurs induit une loi de groupe abélien sur $KK_S(A,B)$. L'élément $0 \in KK_S(A,B)$ est en particulier représenté par n'importe quel triplet de $\mathbb{D}_S(A,B)$. De plus les applications ϕ^*, ϕ_* introduites ci-dessus induisent des morphismes de groupes en KK-théorie que l'on note toujours ϕ^* et ϕ_*, et le bifoncteur $KK_S(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ ainsi construit est additif et invariant par homotopie équivariante. Soit de plus $\phi : S \mapsto M(S')$ un morphisme de C^*-algèbres de Hopf, si A et B sont munies de coactions de S elles sont munies, en composant par $(\mathrm{id} \otimes \phi)$, de coactions de S', et tout

C^*-module hilbertien S-équivariant est de même un module S'-équivariant. On obtient ainsi un morphisme de groupes $\phi_* : KK_S(A,B) \to KK_{S'}(A,B)$.

Par ailleurs il est facile de voir comment un homomorphisme équivariant $\phi : A \to B$ définit, lorsque B est σ-unifère, un élément de KK-théorie, à savoir la classe du triplet $(B, \phi, 0)$, que nous noterons $[\phi] \in KK_S(A,B)$. On a $\phi^*([\psi]) = [\psi \circ \phi] = \psi_*([\phi])$ lorsque cela a un sens. Lorsque $A = B$, on note $\mathbb{1}_A$ l'élément de $KK_S(A,A)$ associé à l'homomorphisme id_A, et on a alors $[\phi] = \phi_*(\mathbb{1}_A)$ (resp. $[\phi] = \phi^*(\mathbb{1}_A)$) pour tout homomorphisme équivariant ϕ de A dans B (resp. de B dans A).

D'autres définitions de $\mathbb{E}_S(A,B)$ conduisent au même objet $KK_S(A,B)$. On peut ainsi se limiter aux morphismes F tels que $F^2 = 1$ et $F = F^*$. D'après le théorème de stabilisation de Kasparov, on peut de plus, lorsque S est associée à un unitaire multiplicatif de type compact, se limiter au B-module hilbertien S-équivariant $E = \mathcal{H}_B \otimes H$ et supposer que F est dans $L_B(E)^S$. On peut également, mais pas simultanément, se limiter aux représentations π non dégénérées, en particulier si on fait cette hypothèse dans le cas où $A = \mathbb{C}$, la représentation π est nécessairement triviale et on peut l'oublier dans la définition.

On peut construire des homotopies de $KK_S(A,B)$ de la manière suivante : soit une famille de morphismes $F_t \in L_B(E)$ telle que $(t \mapsto F_t)$ est continue en norme et chaque F_t vérifie (3.2), alors le triplet $(E \otimes C([0,1]), \pi \otimes 1, (F_t))$ définit une homotopie, dite ***opératorielle***, entre (E, π, F_0) et (E, π, F_1). On peut en particulier construire une telle famille lorsque F_1 est une ***perturbation compacte*** de F_0, ie $\pi(A)(F_1 - F_0) \subset K_B(E)$. On peut en fait montrer, quand A est séparable, que $KK_S(A,B)$ est le quotient de $\mathbb{E}_S(A,B)$ par $\mathbb{D}_S(A,B)$ et la relation d'homotopie opératorielle [BS89, rque 5.11].

Soit A, B, D des C^*-algèbres S-équivariantes, lorsque A est séparable et S est σ-unifère, on sait définir une loi associative et bidistributive $\otimes : KK_S(A,D) \times KK_S(D,B) \to KK_S(A,B)$. On a en particulier $[\phi] \otimes y = \phi^*(y)$ et $x \otimes [\phi] = \phi_*(x)$. L'élément $\mathbb{1}_A \in KK_S(A,A)$ est élément neutre à gauche pour cette loi lorsque $D = A$, et de même à droite. On dit que A et B sont ***K-équivalent***es s'il existe $\alpha \in KK_S(A,B)$ et $\beta \in KK_S(B,A)$ tels que $\alpha \otimes \beta = \mathbb{1}_A$ et $\beta \otimes \alpha = \mathbb{1}_B$.

Si A et B sont des C^*-algèbres S-équivariantes, le produit tensoriel externe $A \otimes B$ n'a pas en général de structure S-équivariante naturelle, lorsque S n'est pas commutative. Plaçons-nous dans le cas commutatif pour rappeler quelques constructions liées au produit tensoriel externe en KK-théorie. Lorsque D est une C^*-algèbre S-équivariante et σ-unifère, le produit tensoriel externe à gauche $(E, \pi, F) \mapsto (D \otimes E, \mathrm{id}_D \otimes \pi, \mathrm{id}_D \otimes F)$ induit un morphisme de groupes $\tau_D : KK_S(A,B) \to KK(D \otimes A, D \otimes B)$. On note τ'_D le morphisme analogue induit par le produit tensoriel à droite. On a $\tau_D([\phi]) = [\mathrm{id} \otimes \phi]$ et $\tau'_D(x) = [\Sigma] \otimes \tau_D(x) \otimes [\Sigma]$.

On peut construire à l'aide de τ et τ' un ***produit de Kasparov*** plus général, lorsque A_1 et A_2 sont séparables, et toujours dans le cas où S est commutative :

$$\otimes_D : KK(A_1, B_1 \otimes D) \times KK(D \otimes A_2, B_2) \to KK(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2). \tag{3.3}$$

On pose pour cela $x \otimes_D y = \tau'_{A_2}(x) \otimes \tau_{B_1}(y)$. Lorsque A et B sont K-équivalentes, ce produit de Kasparov permet de construire des isomorphismes $KK_S(C, C' \otimes A) \simeq KK_S(C, C' \otimes B)$ et $KK_S(C \otimes A, C') \simeq KK_S(C \otimes B, C')$ pour toutes C^*-algèbres séparables C et C'. Le cas $S = D = \mathbb{C}$ est particulièrement intéressant : le produit de Kasparov ***externe*** $\otimes_{\mathbb{C}}$ est « commutatif » ie $x \otimes_{\mathbb{C}} y = [\Sigma] \otimes (y \otimes_{\mathbb{C}} x) \otimes [\Sigma]$ — cela généralise l'identité $(\phi \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \psi) = (\mathrm{id} \otimes \psi)(\phi \otimes \mathrm{id})$. Pour finir, rappelons que le bifoncteur KK est stable : $\tau_{\mathcal{K}}$ est un isomorphisme et on a $KK(A,B) \simeq KK(A \otimes \mathcal{K}, B) \simeq KK(A, B \otimes \mathcal{K})$.

3.4 Graphes [Bou73, Ser77]

Un *graphe* (combinatoire) $\mathfrak{g}$ est la donnée d'un ensemble de *sommets* $\mathfrak{s}$, d'un ensemble d'*arêtes* $\mathfrak{a}$, d'une application *extrémités* $\mathfrak{e} : \mathfrak{a} \to \mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$ injective, et d'une application de *retournement* $\theta : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ qui soit une involution sans point fixe telle que $\mathfrak{e} \circ \theta = \Sigma \circ \mathfrak{e}$. On notera parfois $\mathfrak{e} = (\mathfrak{o}, \mathfrak{b})$ avec $\mathfrak{o}, \mathfrak{b} : \mathfrak{a} \to \mathfrak{s}$: *origine* et *but*. En particulier $\mathfrak{e}(\mathfrak{a})$ est une partie de $\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$ et $(\mathfrak{s}, \mathfrak{e}(\mathfrak{a}), i_{\text{can}}, \Sigma)$ définit un graphe isomorphe à $\mathfrak{g}$ que nous appellerons *réalisation simpliciale* de $\mathfrak{g}$. L'ensemble des *arêtes géométriques* $\mathfrak{a}_g$ est le quotient de $\mathfrak{a}$ par la relation $a \sim \theta(a)$. On a une notion évidente de morphisme de graphe et d'action d'un groupe sur un graphe. On dit que le groupe Γ agit sans inversion sur $\mathfrak{g}$ si on a $g \cdot a \neq \theta(a)$, pour tous $g \in \Gamma$ et $a \in \mathfrak{a}$.

Soit Γ un groupe discret et Δ une partie finie de Γ ne contenant pas l'unité et telle que $\Delta = \Delta^{-1}$. Le graphe associé à (Γ, Δ) est défini par les données suivantes :

$$\mathfrak{s} = \Gamma, \quad \mathfrak{a} = \Gamma \times \Delta, \quad \mathfrak{e}(g, s) = (g, gs) \quad \text{et} \quad \theta(g, s) = (gs, s^{-1}).$$

Soit $n \geq 3$, on note cir_n le graphe associé à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \{-1, 1\})$ et ch_{n-1} son sous-graphe obtenu en retirant les arêtes $(n-1, 1)$ et $(0, -1) \in \mathfrak{a}$. Soit $\mathfrak{g}$ un graphe quelconque, un *chemin* (resp. un *circuit*) de longueur n dans $\mathfrak{g}$ est un morphisme de ch_n (resp. cir_n) dans $\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{g}$ est *connexe* si toute paire de sommets de $\mathfrak{g}$ est contenue dans l'image d'un même chemin. On dit que $\mathfrak{g}$ est un *arbre* si de plus il ne contient aucun circuit injectif. Le graphe associé à (Γ, Δ) est un arbre **ssi** Γ est le groupe libre engendré par Δ, dans ce cas on prendra comme origine du graphe l'unité de Γ.

Une *orientation* d'un graphe $\mathfrak{g} = (\mathfrak{s}, \mathfrak{a}, \mathfrak{e}, \theta)$ est la donnée d'un sous-ensemble $\mathfrak{a}_+ \subset \mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a}$ soit la réunion disjointe de $\mathfrak{a}_+$ et $\theta(\mathfrak{a}_+)$. L'ensemble $\mathfrak{a}_g$ est alors canoniquement en bijection avec $\mathfrak{a}_+$. Supposons que $\mathfrak{g}$ est un arbre et fixons une origine $x_0 \in \mathfrak{s}$. On note $x > y$ si y appartient à un chemin injectif reliant x à x_0, cela définit une relation d'ordre partielle sur $\mathfrak{s}$. Soit $\mathfrak{a}_+ = \{a \in \mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}(a) > \mathfrak{o}(a)\}$ l'ensemble des arêtes montantes du graphe, l'orientation de $\mathfrak{g}$ ainsi construite est dite associée au choix de x_0. Étant donné un sommet $x \in \mathfrak{s}$ distinct de l'origine, il existe alors une unique arête $a \in \mathfrak{a}_+$ tel que $\mathfrak{b}(a) = x$, on pose $F_g(\chi_x) = \chi_{\bar{a}}$ et $F_g(\chi_{x_0}) = 0$, où χ_x (resp. $\chi_{\bar{a}}$) désigne la fonction caractéristique de $x \in \mathfrak{s}$ (resp. $\bar{a} \in \mathfrak{a}_g$). On obtient ainsi un opérateur $F_g : \ell_2(\mathfrak{s}) \to \ell_2(\mathfrak{a}_g)$ appelé *opérateur de Julg-Valette* associé à $(\mathfrak{g}, x_0)$. Si un groupe Γ agit sans inversion sur $\mathfrak{g}$, l'opérateur F_g définit un élément $\gamma \in KK_\Gamma(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ [JV84].

Soit G_1 et G_2 deux groupes discrets, et H un sous-groupe commun à G_1 et à G_2 — on note i_1 et i_2 les injections canoniques de H dans G_1 et à G_2. On note G le produit libre de G_1 et G_2 amalgamé suivant H. Posons $\mathfrak{s} = G/G_1 \sqcup G/G_2$, $\mathfrak{a}_0 = G/H$ et $\mathfrak{e}_0 : \mathfrak{a}_0 \to \mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$, $gH \mapsto (gG_1, gG_2)$. Il est facile de voir qu'il existe un unique graphe dont l'ensemble des sommets est $\mathfrak{s}$, une orientation est donnée par $\mathfrak{a}_0$, et l'application extrémités prolonge $\mathfrak{e}_0$. On dit que c'est le graphe associé à l'*amalgame* (G_1, G_2, H). On peut montrer que ce graphe est un arbre. On notera que l'ensemble $\mathfrak{a}_0$ utilisé dans la construction n'est pas l'ensemble des arêtes montantes relativement au choix d'une origine dans $\mathfrak{s}$. Choisissons G_1 comme origine dans $\mathfrak{s}$, alors l'arête $H \in \mathfrak{a}_0$ est montante. De plus, soit $g \in G \backslash H$, l'arête $gH \in \mathfrak{a}_0$ est montante **ssi** g est dans $G(r, 2)$. Ainsi on peut donner l'orientation associée au choix de l'origine G_1 sous la forme

$$\mathfrak{a}_+ = G/H \quad \text{et} \quad \mathfrak{e}_+(gH) = \begin{cases} (gG_1, gG_2) & \text{si } g \in G(r, 2), \\ (gG_2, gG_1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La distance à l'origine G_1 est donnée par la longueur de l'écriture réduite de g pour $gG_1 \in \mathfrak{s}$, et par cette longueur plus 1 pour $gG_2 \in \mathfrak{s}$.

Deuxième partie

Produits croisés par un groupe quantique et KK-théorie

Cadre de l'étude

Dans toute cette partie on fixe un système de Kac faible (H, V, U). Rappelons la définition, donnée dans la section 2.2 des rappels. V est un unitaire de $L(H \otimes H)$, U est un unitaire involutif de $L(H)$, et on suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

1. V et $\hat{V}$ sont multiplicatifs,
2. $[S_r, US_rU] = [\hat{S}_r, U\hat{S}_rU] = 0$,
3. S_r et $\hat{S}_r$ sont des C^*-algèbres,
4. $X \in M(\hat{S}_X \otimes K(H))$ pour toutes les représentations de V et $\hat{V}$.

Comme mentionné dans les rappels, les conditions 1–4 sont par exemple vérifiées lorsque (H, V, U) est associé à un groupe quantique localement compact, ou lorsque V et $\hat{V}$ sont maniables, réguliers ou semi-réguliers.

On utilise la condition 3 dès la définition des produits croisés (définition 4.2). Les conditions 1, 2 et 4 sont entre autres nécessaires pour la construction des coactions duales sur les produits croisés réduits (définition 4.5). On doit de plus supposer que H est séparable pour la construction et l'utilisation du morphisme de descente (définition 5.3, théorème 5.10, lemme 5.13 et théorème 5.14).

4 Produits croisés, dualité et fonctorialité

4.1 Définitions et exemples

Nous commençons par définir le produit croisé d'une C^*-algèbre par un groupe quantique, et en étudions quelques propriétés fonctorielles, en ayant en vue les applications à la KK-théorie équivariante : théorèmes 5.10 et 5.14. Ces produits croisés sont construits à partir de représentations covariantes. Les deux cas nous intéressant plus particulièrement sont celui de la représentation covariante « universelle » et celui de la représentation covariante « régulière ». Dans ce dernier cas on retrouve le produit croisé réduit présenté dans [BS93, section 7].

Soit A une C^*-algèbre S_r-équivariante, B une C^*-algèbre munie de la coaction triviale de S_r et E un B-module hilbertien. Rappelons qu'une représentation covariante de A sur E est un couple (π, X) où π et X sont des représentations respectives de A et V sur E, reliées par la condition $X(\pi(a) \otimes 1)X^* = (\pi \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_A(a)$ pour tout $a \in A$. On dit que la représentation covariante est non dégénérée lorsque π est non dégénérée.

Lemme 4.1 *Soit A une C^*-algèbre S_r-équivariante et B une C^*-algèbre munie de la coaction triviale de S_r. Soit E un B-module hilbertien. Si (π, X) est une représentation covariante non dégénérée de A sur E, posons*

$$A \rtimes_\pi \hat{S} = \overline{\mathrm{Vect}}\ \{\pi(a)s \mid a \in A,\, s \in \hat{S}_X\}.$$

1. *L'espace $A \rtimes_\pi \hat{S}$ est une sous-C^*-algèbre de $L_B(E)$.*
2. *Les C^*-algèbres $\pi(A)$ et $\hat{S}_X$ sont des sous-C^*-algèbres non dégénérées de $M(A \rtimes_\pi \hat{S})$, et X est un élément de $M((A \rtimes_\pi \hat{S}) \otimes S_r)$.*
3. *Si $a \in A^{S_r}$ alors $\pi(a)$ commute à $\hat{S}_X$, et la réciproque est vraie lorsque π est fidèle.*

Démonstration. Montrons que les produits $\rho_X(\omega)\pi(a)$ sont dans $A \rtimes_\pi \hat{S}$. Par définition de ρ_X on a

$$\begin{aligned}\rho_X(\omega)\pi(a) &= (\mathrm{id}\otimes\omega)(X(\pi(a)\otimes 1)) \\ &= (\mathrm{id}\otimes\omega)(X(\pi(a)\otimes 1)X^*X) \\ &= (\mathrm{id}\otimes\omega)((\pi\otimes\mathrm{id})(\delta_A(a))\,X),\end{aligned} \tag{4.1}$$

car π est une représentation covariante. La C^*-algèbre S_r étant non dégénérée dans $L(H)$, on peut supposer que $\omega = \omega'(s\,\cdot)$ avec $s \in S_r$, et on a alors

$$\rho_X(\omega)\pi(a) = (\mathrm{id}\otimes\omega')((\pi\otimes\mathrm{id})((1_A\otimes s)\delta_A(a))\,X).$$

La coaction δ_A étant à valeurs dans $M(\tilde{A}\otimes S_r, A\otimes S_r)$, $(1_A\otimes s)\delta_A(a)$ est limite de sommes finies $\sum a_i\otimes s_i$ avec $a_i \in A$, $s_i \in S_r$. Cela permet de conclure car

$$(\mathrm{id}\otimes\omega')((\pi\otimes\mathrm{id})(a_i\otimes s_i)\,X) = \pi(a_i)\rho_X(\omega_i),$$

avec $\omega_i = \omega'(s_i\,\cdot\,)$.

Il est maintenant clair que $A \rtimes_\pi \hat{S} \cdot A \rtimes_\pi \hat{S} \subset A \rtimes_\pi \hat{S}$ et, comme $\hat{S}_X$ est une C^*-algèbre, $(A \rtimes_\pi \hat{S})^* \subset A \rtimes_\pi \hat{S}$: cela établit le point 1. De même $(A \rtimes_\pi \hat{S})\pi(a)$ et $s(A \rtimes_\pi \hat{S})$ sont dans $A \rtimes_\pi \hat{S}$, donc $\pi(a)$ et s sont dans $M(A \rtimes_\pi \hat{S})$, et de plus $\pi(A)(A \rtimes_\pi \hat{S})$ et $(A \rtimes_\pi \hat{S})\hat{S}_X$ contiennent respectivement $\pi(A)\pi(A)\hat{S}_X$ et $\pi(A)\hat{S}_X\hat{S}_X$ qui sont totaux dans $A \rtimes_\pi \hat{S}$ car A et $\hat{S}_X$ sont des C^*-algèbres. Ainsi $\pi(A)$ et $\hat{S}_X$ sont non dégénérées dans $M(A \rtimes \pi\hat{S})$ (point 2). De plus, comme $X \in M(\hat{S}_X\otimes S_r)$, on a $X((\hat{S}_X\pi(A))\otimes S_r) \subset (\hat{S}_X\otimes S_r)(\pi(A)\otimes 1) \subset (A \rtimes_\pi \hat{S})\otimes S_r$. On procède de même à gauche, et X est donc un multiplicateur de $(A \rtimes_\pi \hat{S})\otimes S_r$.

Enfin, d'après (4.1), $\pi(a)$ commute à $\hat{S}_X$ **ssi** on a

$$(\mathrm{id}\otimes\omega)((\pi\otimes\mathrm{id})(\delta_A(a))\,X) = (\mathrm{id}\otimes\omega)((\pi(a)\otimes\mathrm{id})X)$$

pour tout $\omega \in L(H)_*$. Cela équivaut à $(\pi\otimes\mathrm{id})(\delta_A(a))\,X = (\pi(a)\otimes\mathrm{id})X$ donc, X étant unitaire, à $(\pi\otimes\mathrm{id})(\delta_A(a)) = (\pi(a)\otimes\mathrm{id})$: on obtient bien le point 3. ■

Définition 4.2 — *cf [BS93, rque A.13c]. Soit A une C^*-algèbre S_r-équivariante. On note A_1 la C^*-algèbre A munie de la coaction triviale de S_r.*

1. *La somme (π_p^A, X_p^A) des représentations covariantes non dégénérées de A sur un espace de Hilbert suffisamment grand fixé est appelée représentation covariante universelle de A. On note $A \rtimes_p \hat{S}$ la C^*-algèbre associée introduite au lemme 4.1 et on l'appelle produit croisé plein de A par S_r.*
2. *Soit E le A_1-module hilbertien $A\otimes H$. L'homomorphisme δ_A, composé avec l'action à gauche de $M(A\otimes S_r)$ sur E, définit une représentation π_r^A de A sur E. Soit $X_r^A = 1_A\otimes V$, le couple (π_r^A, X_r^A) est appelé représentation covariante régulière de A sur E. On note $A \rtimes_r \hat{S}$ la C^*-algèbre associée introduite au lemme 4.1 et on l'appelle produit croisé réduit de A par S_r.*

Exemples.

1. Lorsque V est l'unitaire multiplicatif associé à un groupe localement compact G, la coaction de S_r sur A provient d'une action continue de G sur A par automorphismes et $A \rtimes_r \hat{S}$, $A \rtimes_p \hat{S}$ sont les produits croisés classiques $A \rtimes_r G$, $A \rtimes_p G$.

2. Lorsque la coaction de S_r sur A est triviale, le fait que (π, X) soit covariante signifie que $\pi(A)$ et $\hat{S}_X$ commutent dans $L_B(E)$. En particulier on a $A \rtimes_p \hat{S} \simeq A \otimes_{\max} \hat{S}_p$, et on voit également sur la définition que $A \rtimes_r \hat{S} \simeq A \otimes_{\min} \hat{S}_r$. Lorsque $A = \mathbb{C}$, $A \rtimes_\pi \hat{S}$ n'est autre que la C^*-algèbre $\hat{S}_X$.
3. La C^*-algèbre S_r munie de son coproduit est un exemple de S_r-algèbre et on peut donc construire des produits croisés $S_r \rtimes_r \hat{S}$ et $S_r \rtimes_p \hat{S}$. Cf l'exemple 4 de la section 4.2 pour des variations sur ce thème. □

Remarques.

1. Soit S une C^*-algèbre de Hopf, non nécessairement réduite, associée à (H, V, U), et A une C^*-algèbre S-équivariante. On peut définir des produits croisés $A \rtimes_\pi \hat{S}$ à l'aide de la coaction de S_r sur A induite par l'application $S \twoheadrightarrow S_r$.
2. Si A une C^*-algèbre $\hat{S}_r$-équivariante, on la considère comme une C^*-algèbre $U\hat{S}_rU$-équivariante pour appliquer le lemme 4.1 à l'unitaire multiplicatif $\hat{V}$. On obtient des produits croisés, notés $A \rtimes_\pi S$, à partir des représentations covariantes $(\pi, \hat{X})$ de A. L'unitaire $\hat{X}$ est ici une représentation de $\hat{V}$, cela équivaut au fait que $X := \Sigma(1 \otimes U)\hat{X}(1 \otimes U)\Sigma$ est une coreprésentation de V [BS93, lemme A.7b].
3. On notera que la C^*-algèbre $\hat{S}_p$ n'est pas nécessairement représentée de manière fidèle dans $M(A \rtimes_p \hat{S})$: en général X_p^A est seulement faiblement contenue dans X_p. On a par exemple $C(G) \rtimes_p G \simeq C(G) \rtimes_r G \simeq K(H)$ pour un groupe localement compact G. Cf l'exemple 4 de la section 4.2 pour d'autres phénomènes analogues. □

4.2 Coactions duales

On montre maintenant comment les produits croisés $A \rtimes_p \hat{S}$, $A \rtimes_r \hat{S}$ peuvent être munis de coactions de $\hat{S}_p$ et $\hat{S}_r$. La construction de ces coactions repose essentiellement sur les inclusions faibles de représentations covariantes introduites au lemme 4.4.

Définition 4.3 *Soit A une C^*-algèbre S_r-équivariante. Soit (π, X) et (π', X') des représentations covariantes non dégénérées de A sur des C^*-modules hilbertiens E, E' — les C^*-algèbres des scalaires B et B' étant toujours munies de la coaction triviale de S_r. Soit ϕ_π l'homomorphisme de $A \rtimes_p \hat{S}$ dans $L_B(E)$ défini par*

$$\phi_\pi(\pi_p^A(a)\rho_{X_p^A}(\omega)) = \pi(a)\rho_X(\omega).$$

1. *On dit que (π', X') est* faiblement contenue *dans (π, X) si le noyau de $\phi_{\pi'}$ contient celui de ϕ_π. On dit que (π', X') et (π, X) sont* faiblement équivalentes *si les noyaux sont égaux.*
2. *En particulier (π_r, X_r^A) est faiblement contenue dans (π_p, X_p^A), on note $\lambda_A : A \rtimes_p \hat{S} \to A \rtimes_r \hat{S}$ l'homomorphisme surjectif associé :*

$$\lambda_A(\pi_p^A(a)\rho_{X_p^A}(\omega)) = \pi_r(a)\rho_{X_r^A}(\omega).$$

Lemme 4.4 *Soit A une C^*-algèbre S_r-équivariante. On a les équivalences faibles suivantes entre représentations covariantes de A :*

$$(\pi_p^A \otimes \mathrm{id}, X_{p,13}^A X_{p,23}) \approx (\pi_p^A, X_p^A) \qquad (\pi_p^A \otimes \mathrm{id}, X_{p,13}^A V_{23}) \approx (\pi_r^A, X_r^A)$$
$$(\pi_r^A \otimes \mathrm{id}, X_{r,13}^A X_{p,23}) \approx (\pi_r^A, X_r^A) \qquad (\pi_r^A \otimes \mathrm{id}, X_{r,13}^A V_{23}) \approx (\pi_r^A, X_r^A).$$

Démonstration. Commençons par noter que lorsque (π, X) est une représentation covariante de A et Z, une représentation de V, $(\pi', X') = (\pi\otimes 1, X_{13}Z_{23})$ est encore une représentation covariante de A. Considérons en effet X' comme un élément de $M(K(E\otimes E')\otimes S_r)$, c'est une représentation car c'est le cas de X et Z :

$$\begin{aligned} X'_{12}X'_{13}V_{23} &= X_{13}Z_{23}X_{14}Z_{24}V_{34} = X_{13}X_{14}Z_{23}Z_{24}V_{34} \\ &= X_{13}X_{14}V_{34}Z_{23} = V_{34}X_{13}Z_{23} = V_{23}X'_{12}. \end{aligned}$$

L'application $\pi\otimes 1$ est clairement une représentation de A, elle est covariante car c'est le cas de π et Z est unitaire :

$$\begin{aligned} X'(\pi'(a)\otimes 1_{S_r})X'^* &= X_{13}Z_{23}(\pi(a)\otimes \mathrm{id}_{E'}\otimes \mathrm{id}_H)Z_{23}^*X_{13}^* = X_{13}(\pi(a)\otimes \mathrm{id}_{E'}\otimes \mathrm{id}_H)X_{13}^* \\ &= ((\pi\otimes \mathrm{id})(\delta_A(a)))_{13} = ((\pi\otimes 1)\otimes \mathrm{id})(\delta_A(a)) = (\pi'\otimes \mathrm{id})(\delta_A(a)). \end{aligned}$$

Pour la première équivalence faible de la première ligne, remarquons que l'inclusion faible $(\pi_p^A\otimes \mathrm{id}, X_{p,13}^A X_{p,23}) \subset (\pi_p^A, X_p^A)$ résulte de la définition de la représentation covariante universelle de A. Mais par ailleurs, notons X_0 est la représentation triviale de V sur $\mathbb{C}$, alors $(\pi_p^A\otimes \mathrm{id}, X_{p,13}^A X_{p,23})$ contient faiblement $(\pi_p^A\otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}}, X_{p,13}^A X_{0,23})$, qui est équivalente à (π_p^A, X_p^A).

Pour montrer que $\pi = (\pi_r^A\otimes \mathrm{id}, X_{r,13}^A X_{p,23})$ et $\pi_r = (\pi_r^A, X_{r,13}^A)$ sont faiblement équivalentes, il suffit de construire un homomorphisme injectif $\lambda : A \rtimes_r \hat{S} \to A \rtimes_\pi \hat{S}$ tel que $\lambda \circ \phi_r = \phi_\pi$. Posons pour cela $\tilde{X}_p = \Sigma(1\otimes U)X_p(1\otimes U)\Sigma \in L_B(H\otimes E)$ et $\lambda(x) = \tilde{X}_{p,23}(x\otimes \mathrm{id}_E)\tilde{X}_{p,23}^*$, pour $x \in A \rtimes_r \hat{S} \subset L_A(A\otimes H)$. D'après [BS93, lemme A.12], $\tilde{X}_p$ commute à $S_r\otimes \mathrm{id}$, on a donc

$$\lambda(\pi_r^A(a)) = \lambda \circ \delta_A(a) = \tilde{X}_{p,23}(\delta_A(a)\otimes 1)\tilde{X}_{p,23}^* = \delta_A(a)\otimes 1 = \pi_r^A(a)\otimes 1.$$

D'autre part on a, toujours d'après les calculs algébriques effectués dans l'appendice de [BS93], $\tilde{X}_{p,12}V_{13} = V_{13}X_{p,23}\tilde{X}_{p,12}$, et donc

$$(\lambda\otimes \mathrm{id})(X_r^A) = \tilde{X}_{p,23}V_{24}\tilde{X}_{p,23}^* = V_{24}X_{p,34} = X_{r,13}^A X_{p,23}.$$

Cela montre que λ, qui est clairement injectif, vérifie l'égalité $\lambda \circ \phi_r = \phi_\pi$. On vérifie de même que la représentation covariante $(\pi_r^A\otimes \mathrm{id}, X_{r,13}^A V_{23})$ est faiblement équivalente à (π_r^A, X_r^A), avec $\lambda : (x \mapsto \tilde{V}_{23}(x\otimes 1)\tilde{V}_{23}^*)$: on a ainsi établi les équivalences de la deuxième ligne.

Il reste à établir l'équivalence faible de $(\pi_p^A\otimes \mathrm{id}, X_{p,13}^A V_{23})$ et (π_r^A, X_r^A). On procède de la même manière, avec $\pi = (\pi_p^A\otimes \mathrm{id}, X_{p,13}^A V_{23})$: on pose cette fois $\lambda(x) = X_p^{A\,*}(\pi_p^A\otimes \mathrm{id})(x)X_p^A$ pour $x \in A \rtimes_r \hat{S} \subset M(A\otimes K(H))$. Comme (π_p, X_p^A) est une représentation covariante on a

$$\lambda(\pi_r^A(a)) = X_p^{A\,*}(\pi_p^A\otimes \mathrm{id})(\delta_A(a))X_p^A = \pi_p(a)\otimes 1$$

et, X_p^A étant une représentation de V :

$$(\lambda\otimes \mathrm{id})(V_{23}) = X_{p,12}^{A\,*}V_{23}X_{p,12}^A = X_{p,13}^A V_{23}.$$

Ainsi l'homomorphisme λ, qui est injectif, vérifie l'égalité $\lambda \circ \phi_r = \phi_\pi$. ■

Proposition 4.5 *Soit A une C^*-algèbre S_r-équivariante. On peut définir des coactions*

$$\hat\delta^A_{p,p} : A \rtimes_p \hat S \to \tilde M((A \rtimes_p \hat S)\otimes \hat S_p), \quad \hat\delta^A_{p,r} : A \rtimes_p \hat S \to \tilde M((A \rtimes_p \hat S)\otimes \hat S_r),$$
$$\hat\delta^A_{r,p} : A \rtimes_r \hat S \to \tilde M((A \rtimes_r \hat S)\otimes \hat S_p) \quad \textit{et} \quad \hat\delta^A_{r,r} : A \rtimes_r \hat S \to \tilde M((A \rtimes_r \hat S)\otimes \hat S_r),$$

$$\textit{telles que} \quad \begin{cases} \hat\delta^A_{p,p}(\pi^A_p(a)\rho_{X^A_p}(\omega)) = (\pi^A_p(a)\otimes 1)\ \rho_{X^A_{p,13}X_{p,23}}(\omega), \\ \hat\delta^A_{r,p} \circ \lambda_A = (\lambda_A \otimes \mathrm{id}) \circ \hat\delta^A_{p,p}, \quad \hat\delta^A_{p,r} \circ \lambda_A = (\mathrm{id}\otimes\lambda) \circ \hat\delta^A_{p,p} \quad \textit{et} \\ \hat\delta^A_{r,r} = (\lambda_A\otimes\mathrm{id}) \circ \hat\delta^A_{p,r} = (\mathrm{id}\otimes\lambda)\circ\hat\delta^A_{r,p}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Pour toutes ces coactions, $\hat\delta^A(A \rtimes \hat S)(1\otimes\hat S)$ est total dans $(A \rtimes \hat S)\otimes\hat S$, et elles font de plus de $A \rtimes_r \hat S$ une $\hat S_r$- et $\hat S_p$-algèbre.

Démonstration. Commençons par établir l'existence d'homomorphismes satisfaisant les propriétés (4.2). A chaque fois qu'on a une inclusion faible $(\pi\otimes 1, X_{13}Z_{23}) \subset (\pi', X')$, on a un homomorphisme $\hat\delta^A : A \rtimes_{\pi'} \hat S \to L(E\otimes F)$ caractérisé par la formule

$$\hat\delta^A : \pi'(a)\rho_{X'}(\omega) \mapsto (\pi(a)\otimes\mathrm{id})\rho_{X_{13}Z_{23}}(\omega).$$

On définit ainsi $\hat\delta^A_{p,p}$, $\hat\delta^A_{p,r}$, $\hat\delta^A_{r,p}$ et $\hat\delta^A_{r,r}$ grâce aux inclusions faibles données par le lemme 4.4 : on déduit notamment de l'équivalence faible $(\pi^A_p\otimes\mathrm{id}, X^A_{p,13}V_{23}) \approx (\pi^A_r, X^A_r)$ une inclusion faible $(\pi^A_p\otimes\mathrm{id}, X^A_{p,13}V_{23}) \subset (\pi^A_p, X^A_p)$ qui fournit l'homomorphisme $\hat\delta^A_{p,r}$. On vérifie ensuite que ces homomorphismes sont reliés par les homomorphismes de réduction λ et λ_A en calculant sur les éléments du type $\pi(a)\rho_X(\omega)$ et en utilisant le fait que λ_A réalise l'inclusion faible de $A \rtimes_r \hat S$ dans $A \rtimes_p \hat S$. On a ainsi par exemple

$$\begin{aligned} \hat\delta^A_{r,p} \circ \lambda_A(\pi^A_p(a)\rho_{X^A_p}(\omega)) &= \hat\delta^A_{r,p}(\pi^A_r(a)\rho_{X^A_r}(\omega)) = (\pi^A_r(a)\otimes 1)(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\omega)(X^A_{r,13}X_{p,23}) \\ &= (\lambda_A\otimes\mathrm{id})((\pi^A_p(a)\otimes 1)(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\omega)(X^A_{p,13}X_{p,23})) \\ &= (\lambda_A\otimes\mathrm{id})\hat\delta^A_{p,p}(\pi^A_p(a)\rho_{X^A_p}(\omega)). \end{aligned}$$

Notons en outre que $\hat\delta^A_{r,p}$ et $\hat\delta^A_{r,r}$ sont injectifs car ils réalisent une équivalence faible. Il reste à établir les faits suivants, pour chaque morphisme $\hat\delta^A$:

1. l'espace $\hat\delta^A(A \rtimes \hat S)(1\otimes\hat S)$ est un sous-espace total de $(A \rtimes \hat S)\otimes\hat S$,
2. on a $(\hat\delta^A\otimes\mathrm{id})\circ\hat\delta^A = (\mathrm{id}\otimes\hat\delta)\circ\hat\delta^A$.

Commençons par $\hat\delta^A_{p,p}$. Soit $a \in A$, $s \in \hat S_p$, $\omega \in L(H)_*$ et $k \in K(H)$. Notons $k\omega = \omega(\,\cdot\,k)$, on a alors

$$\begin{aligned} \hat\delta^A_{p,p}(\pi_p(a)\rho_{X^A_p}(k\omega))(1\otimes s) &= (\pi_p(a)\otimes 1)\rho_{X^A_{p,13}X_{p,23}}(k\omega)(1\otimes s) \\ &= (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\omega)((\pi_p(a)\otimes 1\otimes 1)X^A_{p,13}X_{p,23}(1\otimes s\otimes k)). \end{aligned}$$

On utilise alors le fait que $X_p(\hat S_p\otimes S_r) = (\hat S_p\otimes S_r)$: comme $S_r K(H)$ est total dans $K(H)$, on en déduit que $X_p(\hat S_p\otimes K(H)) = (\hat S_p\otimes K(H))$, et on a donc

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Vect}}\ \hat\delta^A_{p,p}(A \rtimes_p \hat S)(1\otimes\hat S_p) &= \overline{\mathrm{Vect}}\ (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes L(H)_*)(\pi_p(A)\otimes 1\otimes 1)X^A_{p,13}(1\otimes\hat S_p\otimes K(H)) \\ &= \overline{\mathrm{Vect}}\ (\pi_p(A)\hat S_{X^A_p})\otimes\hat S_p = (A \rtimes_p \hat S)\otimes\hat S_p. \end{aligned}$$

Cela établit le point 1. Pour le point 2, on écrit la définition de la coaction duale sous la forme $(\hat\delta^A_{p,p}\otimes\mathrm{id})((\pi_p(a)\otimes 1)X^A_p) = (\pi_p(a)\otimes 1\otimes 1)X^A_{p,13}X_{p,23}$, et on utilise l'identité $\hat\delta_p(X_p) = X_{p,13}X_{p,23}$:

$$\begin{aligned}(\hat\delta^A_{p,p}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\hat\delta^A_{p,p}\otimes\mathrm{id})((\pi_p(a)\otimes 1)X^A_p) &= (\pi_p(a)\otimes 1\otimes 1\otimes 1)X^A_{p,14}X_{p,24}X_{p,34}\\ &= (\mathrm{id}\otimes\hat\delta_p\otimes\mathrm{id})((\pi_p(a)\otimes 1\otimes 1)X^A_{p,13}X_{p,23})\\ &= (\mathrm{id}\otimes\hat\delta_p\otimes\mathrm{id})(\hat\delta^A_p\otimes\mathrm{id})((\pi_p(a)\otimes 1)X^A_p).\end{aligned}$$

En appliquant $(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes L(H)_*)$ à cette égalité on obtient l'identité du point 2 sur un sous-espace total de $A \rtimes_p \hat S$, ce qui est suffisant.

On passe alors aux autres coproduits à l'aide des homomorphismes de réduction et des relations (4.2). Par exemple, l'homomorphisme λ_A étant surjectif on a

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Vect}}\ \hat\delta^A_{r,p}(A\rtimes_r\hat S)(1\otimes\hat S_p) &= \overline{\mathrm{Vect}}\ (\lambda_A\otimes\mathrm{id})(\hat\delta^A_{p,p}(A\rtimes_p\hat S)(1\otimes\hat S_p))\\ &= (\lambda_A\otimes\mathrm{id})((A\rtimes_p\hat S)\otimes\hat S_p) = (A\rtimes_r\hat S)\otimes\hat S_p, \quad \text{et d'autre part}\\ (\hat\delta^A_{r,p}\otimes\mathrm{id})\circ\hat\delta^A_{r,p}\circ\lambda_A &= (\lambda_A\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\hat\delta^A_{p,p}\otimes\mathrm{id})\circ\hat\delta^A_{p,p}\\ &= (\lambda_A\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\hat\delta_p)\circ\hat\delta^A_{p,p} = (\mathrm{id}\otimes\hat\delta_p)\circ\hat\delta^A_{r,p}\circ\lambda_A,\end{aligned}$$

ce qui entraîne le point 2 pour $\hat\delta^A_{r,p}$ grâce à la surjectivité de λ_A. ■

Remarque. En utilisant la dernière équivalence faible du lemme 4.4 on obtient de même un homomorphisme injectif $\hat\delta'_A : A\rtimes_r\hat S \to \tilde M((A\rtimes_p\hat S)\otimes\hat S_r)$, qui n'est pas à proprement parler une coaction mais est néanmoins relié aux coactions duales. On a plus précisément le lemme suivant, qui nous servira aux sections 4.4 et 5.4 et qui se démontre exactement comme la proposition 4.5 : □

Lemme 4.6 *Soit A une C^*-algèbre S_r-équivariante. On dispose d'un homomorphisme non dégénéré $\hat\delta'_A : A\rtimes_r\hat S \to \tilde M((A\rtimes_p\hat S)\otimes\hat S_r)$ qui vérifie $\hat\delta^A_{p,r} = \hat\delta'_A\circ\lambda_A$ et $(\lambda_A\otimes\mathrm{id})\circ\hat\delta'_A = \hat\delta^A_{r,r}$. Il est injectif et $\hat\delta'_A(A\rtimes_r\hat S)(1\otimes\hat S_r)$ est total dans $(A\rtimes_p\hat S)\otimes\hat S_r$.*

Exemple 4 (Bidualité). La C^*-algèbre $A\rtimes_p\hat S$ est ainsi une $\hat S_r$-algèbre et on peut former son produit croisé avec $\hat V$, en la considérant comme une $U\hat S_rU$-algèbre : posons

$$\delta_{A\rtimes_p\hat S}(x) = (1\otimes U)\hat\delta^A_{p,r}(x)(1\otimes U).$$

Soit (σ, Y) une représentation covariante non dégénérée de $A\rtimes_p\hat S$. L'unitaire Y est une représentation de $\hat V$, et σ est induite par une représentation covariante non dégénérée (π, X) de A — en particulier $X' := \Sigma X\Sigma$ est une coreprésentation de $\hat V$ [BS93, lemme A.7b] sur le même espace que Y. La covariance de (σ, Y) s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned}(\sigma\otimes\mathrm{id})\circ\delta_{A\rtimes_p\hat S}(\pi^A_p(a)\rho_{X^A_p}(\omega)) &= Y\,(\sigma(\pi^A_p(a)\rho_{X^A_p}(\omega))\otimes\mathrm{id})\,Y^*, \quad \text{avec}\\ (\sigma\otimes\mathrm{id})\circ\delta_{A\rtimes_p\hat S}(\pi^A_p(a)\rho_{X^A_p}(\omega)) &= (\sigma\otimes\mathrm{id}\otimes\omega)(U_2(\pi^A_p(a)\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})X^A_{p13}V_{23}U_2)\\ &= (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\omega)((\pi(a)\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})X_{13}U_2V_{23}U_2) \quad \text{et} \qquad (4.3)\\ Y\,(\sigma(\pi^A_p(a)\rho_{X^A_p}(\omega))\otimes\mathrm{id})\,Y^* &= Y\,(\pi(a)\rho_X(\omega)\otimes\mathrm{id})\,Y^*\\ &= (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\omega)(Y_{12}(\pi(a)\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})X_{13}Y^*_{12}). \qquad (4.4)\end{aligned}$$

La représentation π étant non dégénérée on en déduit l'identité $X_{13}U_2V_{23}U_2 = Y_{12}X_{13}Y^*_{12}$ qui s'écrit aussi $Y_{23}X'_{12} = X'_{12}\hat V_{13}Y_{23}$: on dit que (Y, X') est une *représentation covariante* de l'unitaire multiplicatif $\hat{V}$. De plus, l'égalité entre (4.3) et (4.4) montre, lorsqu'on y réinjecte l'identité $X_{13}U_2V_{23}U_2 = Y_{12}X_{13}Y_{12}^*$, que $\pi(a)\otimes 1$ commute à Y pour tout a.

Ainsi les représentations covariantes de $A \rtimes_p \hat{S}$ sont données par des représentations π, X et Y de A, V et $\hat{V}$ telles que (π, X) et (Y, X') sont covariantes, et $\pi(A)\otimes 1$ commute à Y. En particulier les représentations covariantes de $\hat{V}$ correspondent aux représentations non dégénérées de $\hat{S}_p \rtimes_p S$ — et en fait également aux représentations non dégénérées de $\hat{S}_r \rtimes_p S$, comme on va le voir maintenant.

Reprenons l'identité $X_{13}U_2V_{23}U_2 = Y_{12}X_{13}Y_{12}^*$: en utilisant le fait que X est une représentation de V on obtient $X_{13} = Z_{12}^*V_{23}Z_{12}$ où $Z = X(1\otimes U)Y$. En particulier X est faiblement équivalente à V. On peut alors mener le calcul suivant, en utilisant l'équivalence faible de X et V et la commutation entre $\pi(a)\otimes 1$ et Y :

$$\begin{aligned} Z(\sigma(\pi_p^A(a)\rho_{X_p^A}(\omega))\otimes \mathrm{id})Z^* &= Z(\pi(a)\otimes\mathrm{id})Z^*(\mathrm{id}\otimes\rho_V(\omega)) \\ &= X(\pi(a)\otimes\mathrm{id})X^*(\mathrm{id}\otimes\rho_V(\omega)) \\ &= (\pi\otimes\mathrm{id})(\delta_A(a)(1\otimes\rho_V(\omega))). \end{aligned}$$

Ainsi σ se factorise à travers l'application quotient $\lambda : A \rtimes_p \hat{S} \to A \rtimes_r \hat{S}$ et on a $(A \rtimes_p \hat{S}) \rtimes_p S \simeq (A \rtimes_r \hat{S}) \rtimes_p S$. Le même raisonnement s'applique dans le cas où (σ, Y) est la représentation covariante régulière et on obtient $(A \rtimes_p \hat{S}) \rtimes_r S \simeq (A \rtimes_r \hat{S}) \rtimes_r S$. Par contre on n'a pas en général $(A \rtimes_r \hat{S}) \rtimes_p S \simeq (A \rtimes_r \hat{S}) \rtimes_r S$, même quand $A = \mathbb{C}$ [BSV02].

Dans le cas $A = \mathbb{C}$ on a $\hat{S}_r \rtimes_r S \simeq \overline{\mathrm{Vect}}\ (U\hat{S}_rU)S_r$: en effet $(1\otimes U)\hat{\delta}_r(\hat{s})(1\otimes U)(1\otimes s) = W^*(1\otimes U\hat{s}Us)W$, où $W = (1\otimes U)V(1\otimes U)$. D'après [BS93, prop. 6.3 et 6.9], lorsque cette C^*-algèbre est égale à $K(H)$, la C^*-algèbre $\mathcal{C}(\hat{V}) := \overline{\mathrm{Vect}}\ (\mathrm{id}\otimes L(H)_*)(\Sigma\hat{V})$ est elle aussi égale à $K(H)$ — et la réciproque est vraie dans le cas irréductible. On dit que $\hat{V}$ est ***régulier*** lorsque $\mathcal{C}(\hat{V}) = K(H)$, ***semi-régulier*** lorsque $\mathcal{C}(\hat{V}) \supset K(H)$.

Supposons que $\hat{V}$ soit régulier et irréductible : alors le théorème de bidualité [BS93, th. 7.5] affirme que pour toute S_r-algèbre A, la S_r-algèbre $A \rtimes_r \hat{S} \rtimes_r S$ est isomorphe à $A\otimes K(H)$ munie de la coaction $\delta_{A\otimes K(H)} : a\otimes k \mapsto V_{23}\delta_A(a)_{13}(1\otimes k\otimes 1)V_{23}^*$. L'isomorphisme de $A\otimes K(H)$ dans $A \rtimes_r \hat{S} \rtimes_r S$ est donné par

$$(1\otimes U)\delta_A(a)(1\otimes\hat{s})(1\otimes U)(1\otimes s) \mapsto U_3(\delta_A(a)\otimes 1)(1\otimes\hat{\delta}(\hat{s}))U_3(1\otimes 1\otimes s).$$

Rappelons que lorsque V est associé à un groupe quantique compact ou à une algèbre de Kac, V et $\hat{V}$ sont automatiquement réguliers et irréductibles [BS93, exples 3.4], donc le théorème de bidualité s'applique. □

4.3 Fonctorialité

Dans ce paragraphe on montre que la construction du produit croisé réduit ou plein est fonctorielle, et que le foncteur associé est exact dans le cas plein. On donnera à la section 4.4 une caractérisation de l'exactitude du produit croisé réduit par un groupe quantique discret.

Rappelons qu'un homomorphisme non dégénéré $\phi : A \to M(B)$ entre deux C^*-algèbres S_r-équivariantes est équivariant **ssi** on a $(\phi\otimes\mathrm{id}) \circ \delta_A = \delta_B \circ \phi$. Dans le cas général, on dit que ϕ est équivariant si on a $(\phi\otimes\mathrm{id})(\delta_A(a)(1\otimes s)) = \delta_B(\phi(a))(1\otimes s)$ pour tous $a \in A$, $s \in S_r$ — dans le cas non dégénéré on retrouve la notion précédemment introduite. De même, soit

$\pi : A \to L_B(E)$ une représentation éventuellement dégénérée et X une représentation de V dans E, on dit que (π, X) est covariante si on a $X(\pi(a)\otimes 1)X^*(1\otimes s) = (\pi\otimes\mathrm{id})(\delta_A(a)(1\otimes s))$ pour tous $a \in A$, $s \in S_r$.

Proposition 4.7 *(Fonctorialité)*

Soit A et B deux C^*-algèbres S_r-équivariantes. Un homomorphisme équivariant ϕ de A dans $M(B)$ induit des homomorphismes uniques

$$\phi \rtimes_r \mathrm{id} : A \rtimes_r \hat{S} \to M(B \rtimes_r \hat{S}), \qquad \phi \rtimes_p \mathrm{id} : A \rtimes_p \hat{S} \to M(B \rtimes_p \hat{S}) \quad \textit{tels que}$$

$$(\phi \rtimes_r \mathrm{id})(\pi_r^A(a)\rho_{X_r^A}(\omega)) = \pi_r^B(\phi(a))\rho_{X_r^B}(\omega), \tag{4.5}$$

$$(\phi \rtimes_p \mathrm{id})(\pi_p^A(a)\rho_{X_p^A}(\omega)) = \pi_p^B(\phi(a))\rho_{X_p^B}(\omega). \tag{4.6}$$

On a alors $\lambda_B \circ (\phi \rtimes_p \mathrm{id}) = (\phi \rtimes_r \mathrm{id}) \circ \lambda_A$. Si ϕ est à valeurs dans B (resp. est non dégénéré), ces homomorphismes prennent leurs valeurs dans $B \rtimes_r \hat{S}$ et $B \rtimes_p \hat{S}$ (resp. sont non dégénérés). Si ϕ est injectif, $\phi \rtimes_r \mathrm{id}$ l'est également.

Le passage de ϕ à $\phi \rtimes_r \mathrm{id}$ (resp. $\phi \rtimes_p \mathrm{id}$) est fonctoriel, au sens suivant. Soit $\phi : A \to M(B)$, $\psi : B \to M(C)$ et $\chi : A \to M(C)$ des homomorphismes tels que $\chi(a)\psi(b) = \psi(\phi(a)b)$ pour tous $a \in A$, $b \in B$: on dit que χ est une composée de ϕ et ψ. Alors $\chi \rtimes_r \mathrm{id}$ (resp. $\chi \rtimes_p \mathrm{id}$) est une composée de $\phi \rtimes_r \mathrm{id}$ et $\psi \rtimes_r \mathrm{id}$ (resp. $\phi \rtimes_p \mathrm{id}$ et $\psi \rtimes_p \mathrm{id}$).

Démonstration. Soit (π, X) une représentation covariante de A sur un C^*-module hilbertien E, éventuellement dégénérée, et soit $A \rtimes_\pi \hat{S}$ le sous-espace fermé de $L(E)$ engendré par les produits $\pi(a)\rho_X(\omega)$, comme au lemme 4.1. Alors ce sous-espace est une C^*-algèbre, et on dispose d'un homomorphisme surjectif $\psi : A \rtimes_p \hat{S} \to A \rtimes_\pi \hat{S}$ tel que

$$\psi(\pi_p^A(a)\rho_{X_p^A}(\omega)) = \pi(a)\rho_X(\omega) \quad \text{et} \quad \psi(\rho_{X_p^A}(\omega)\pi_p^A(a)) = \rho_X(\omega)\pi(a). \tag{4.7}$$

En effet, quitte à tensoriser à droite par une représentation hilbertienne fidèle et non dégénérée de la C^*-algèbre des scalaires de E, on peut supposer que E est un espace de Hilbert. Décomposons E en une somme directe orthogonale $E' \oplus E''$, où E' est le sous-espace fermé engendré par $\pi(A)E$. Alors $E'\otimes H$ est stable par X : pour $\zeta \in E$, $\xi \in H$, $a \in A$ et $s \in S_r$ on a

$$X((\pi(a)\zeta)\otimes(s\xi)) = (\pi\otimes\mathrm{id})(\delta_A(a)(1\otimes s))X(\zeta\otimes\xi) \in E'\otimes H.$$

On peut donc écrire $\pi = \mathrm{diag}\ (\pi', 0)$ et $X = \mathrm{diag}\ (X', X'')$: alors (π', X') est une représentation covariante non dégénérée de A, on dispose donc d'un homomorphisme non dégénéré $\psi_0 : A \rtimes_p \hat{S} \to L(E')$ tel que $(\psi_0\otimes\mathrm{id})(X_p^A) = X'$ et $\psi_0 \circ \pi_p^A = \pi'$. En particulier ψ_0 vérifie les propriétés analogues à (4.7) pour π' et son image est $A \rtimes_{\pi'} \hat{S}$. L'homomorphisme recherché est $\psi_0 \oplus 0 : A \rtimes_p \hat{S} \to A \rtimes_\pi \hat{S} = \mathrm{diag}\,(A \rtimes_{\pi'} \hat{S}, 0)$, ses propriétés résultent immédiatement de celles de ψ_0.

Considérons X_p^B comme un élément de $M((B \rtimes_p \hat{S})\otimes S_r)$ et π_p^B comme un homomorphisme non dégénéré de B dans $M(B \rtimes_p \hat{S})$. Comme (π_p^B, X_p^B) est une représentation covariante non dégénérée et ϕ, un homomorphisme équivariant, il est facile de voir que $(\pi, X) = (\pi_p^B \circ \phi, X_p^B)$ est une représentation covariante de A dans $B \rtimes_p \hat{S}$, éventuellement dégénérée :

$$X_p^B(\pi_p^B(\phi(a))\otimes 1)X_p^{B*}(1\otimes s) = (\pi_p^B\otimes\mathrm{id})(\delta_B(\phi(a))(1\otimes s)) = (\pi_p^B\phi \otimes \mathrm{id})(\delta_A(a)(1\otimes s)).$$

Le paragraphe précédent donne alors un homomorphisme $\phi \rtimes_p \mathrm{id} : A \rtimes_p \hat{S} \to A \rtimes_\pi \hat{S} \subset L(B \rtimes_p \hat{S}) = M(B \rtimes_p \hat{S})$ qui vérifie (4.7), donc en particulier (4.6). Dans le cas réduit on obtient de même un homomorphisme $\psi : A \rtimes_p \hat{S} \to M(A \rtimes_r \hat{S})$ tel que

$$\begin{aligned}
&\psi(\rho_{X_p^A}(\omega)\pi_p^A(a)) = \rho_{X_r^A}(\omega)\pi_r^A(a) = (1\otimes\rho_V(\omega))\delta_B(\phi(a)), \quad \text{d'où} \\
&\forall\ s \in S_r \quad \psi(\rho_{X_p^A}(\omega)\pi_p^A(a))(1\otimes s) = (\phi\otimes\mathrm{id})((1\otimes\rho_V(\omega))\delta_A(a)(1\otimes s)) \quad \text{et} \\
&\forall\ x \in A \rtimes_p \hat{S},\ s \in S_r \quad \psi(x)(1\otimes s) = (\phi\otimes\mathrm{id})(\lambda_A(x)(1\otimes s)).
\end{aligned}$$

Comme S_r est une sous-C^*-algèbre non dégénérée de $L(H)$, on en déduit

$$||\psi(x)|| = \mathrm{Sup}_{||s||\leq 1}\ ||\psi(x)(1\otimes s)|| \leq \mathrm{Sup}_{||s||\leq 1}\ ||\lambda_A(x)(1\otimes s)|| = ||\lambda_A(x)||.$$

Ainsi ψ se factorise à travers λ_A et on obtient $(\phi \rtimes_r \mathrm{id}) : A \rtimes_r \hat{S} \to M(A \rtimes_r \hat{S})$. De plus, lorsque ϕ est injectif, l'inégalité ci-dessus est une égalité, ce qui montre que $(\phi \rtimes_r \mathrm{id})$ est injectif.

L'unicité des homomorphismes $\phi \rtimes_r \mathrm{id}$ et $\phi \rtimes_p \mathrm{id}$ est évidente. La relation avec les morphismes de réduction λ_A et λ_B résultent des relations (4.5) et (4.6). Si ϕ est à valeurs dans B, les mêmes équations montrent que $\phi \rtimes_r \mathrm{id}$ et $\phi \rtimes_p \mathrm{id}$ sont à valeurs dans $B \rtimes_r \mathrm{id}$ et $B \rtimes_p \mathrm{id}$ respectivement. Supposons que ϕ est non dégénéré et montrons que $\phi \rtimes_p \mathrm{id}$ est non dégénérée — le cas réduit s'en déduit facilement. On utilise le fait que $\hat{S}_{X_p^B}$ et $\pi_p^B(B)$ sont non dégénérées dans $B \rtimes_p \hat{S}$ pour écrire

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Vect}}\ (\phi \rtimes_p \mathrm{id})(A \rtimes_p \hat{S})\ (B \rtimes_p \hat{S}) &= \overline{\mathrm{Vect}}\ \pi_p^B(\phi(A))\hat{S}_{X_p^B}(B \rtimes_p \hat{S}) \\
&= \overline{\mathrm{Vect}}\ \pi_p^B(\phi(A))(B \rtimes_p \hat{S}) \\
&= \overline{\mathrm{Vect}}\ \pi_p^B(\phi(A)B)(B \rtimes_p \hat{S}) \\
&= \overline{\mathrm{Vect}}\ \pi_p^B(B)(B \rtimes_p \hat{S}) = (B \rtimes_p \hat{S}).
\end{aligned}$$

Finissons par la fonctorialité, que nous démontrons dans le cas plein — à nouveau, le cas réduit s'en déduit. Soit $x \in A \rtimes_p \hat{S}$ et $y \in B \rtimes_p \hat{S}$. D'après la démonstration du lemme 4.1 on peut supposer que

$$x = \rho_{X_p^A}(\omega)\pi_p^A(a) \quad \text{et} \quad y = \pi_p^B(bb')\rho_{X_p^B}(\omega').$$

On a alors, en appliquant (4.7) à $\phi \rtimes_p \mathrm{id}$:

$$\begin{aligned}
(\psi \rtimes_p \mathrm{id})((\phi \rtimes_p \mathrm{id})(x)\ y) &= (\psi \rtimes_p \mathrm{id})(\rho_{X_p^B}(\omega)\pi_p^B(\phi(a))\pi_p^B(bb')\rho_p^B(\omega')) \\
&= (\psi \rtimes_p \mathrm{id})(\rho_{X_p^B}(\omega)\pi_p^B(\phi(a)b)\ \pi_p^B(b')\rho_{X_p^B}(\omega')).
\end{aligned}$$

Comme $\phi(a)b$ est un élément de B, $\rho_{X_r^B}(\omega)\pi_r^B(\phi(a)b)$ est dans $B \rtimes_p \hat{S}$ et on peut appliquer la multiplicativité de l'homomorphisme $(\psi \rtimes_p \mathrm{id})$, puis les propriétés (4.7) :

$$\begin{aligned}
(\psi \rtimes_p \mathrm{id})((\phi \rtimes_p \mathrm{id})(x)\ y) &= (\psi \rtimes_p \mathrm{id})(\rho_{X_p^B}(\omega)\pi_{X_p^B}(\phi(a)b))\ (\psi \rtimes_p \mathrm{id})(\pi_p^B(b')\rho_{X_p^B}(\omega')) \\
&= \rho_{X_p^C}(\omega)\pi_p^C(\psi(\phi(a)b))\ \pi_p^C(\psi(b'))\rho_{X_p^C}(\omega').
\end{aligned}$$

On utilise alors l'hypothèse, puis on regroupe en utilisant les propriétés (4.7) pour $(\chi \rtimes_p \mathrm{id})$ et $(\psi \rtimes_p \mathrm{id})$:

$$\begin{aligned}
(\psi \rtimes_p \mathrm{id})((\phi \rtimes_p \mathrm{id})(x)\ y) &= \rho_{X_p^B}(\omega)\pi_p^C(\chi(a)\psi(b))\pi_p^C(\psi(b'))\rho_{X_p^B}(\omega') \\
&= \rho_{X_p^C}(\omega)\pi_p^C(\chi(a))\ \pi_p^C(\psi(bb'))\rho_{X_p^C}(\omega') \\
&= (\chi \rtimes_p \mathrm{id})(x)\ (\psi \rtimes_p \mathrm{id})(y).
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.8 *Considérons une suite exacte de C^*-algèbres S_r-équivariantes, où les flèches sont des morphismes équivariants :*

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0.$$

Alors les produits croisés pleins forment une suite exacte :

$$0 \longrightarrow J \rtimes_p \hat{S} \xrightarrow{i \rtimes_p \mathrm{id}} A \rtimes_p \hat{S} \xrightarrow{p \rtimes_p \mathrm{id}} B \rtimes_p \hat{S} \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Par définition, l'image de $p \rtimes_p \mathrm{id}$ contient les produits $\pi_p^B(b)\hat{s} \in B \rtimes_p \hat{S}$ donc est dense. Par conséquent $p \rtimes_p \mathrm{id}$ est surjectif. Soit π une représentation covariante non dégénérée de J sur un C^*-module hilbertien E muni d'une coreprésentation X de S_r. Soit $\bar{\pi}$ l'unique prolongement de π à A, il est également covariant : en effet, soit (u_α) une unité approchée de J, les homomorphismes π et $(\pi \otimes \mathrm{id})\delta_J$ sont non dégénérés donc

$$\begin{aligned} X(\bar{\pi}(a)\otimes 1)X^* &= \lim X(\pi(u_\alpha)\bar{\pi}(a)\otimes 1)X^* = \lim X(\pi(u_\alpha a)\otimes 1)X^* \\ &= \lim\, (\pi\otimes\mathrm{id})\delta_A(u_\alpha a) = \lim\, (\pi\otimes\mathrm{id})\delta_J(u_\alpha)\ (\bar{\pi}\otimes\mathrm{id})\delta_A(a) = (\bar{\pi}\otimes\mathrm{id})\delta_A(a), \end{aligned}$$

où les limites sont à comprendre au sens de la topologie stricte sur $M(K(E)\otimes S_r)$. Soit alors $\bar{\Pi}$ la représentation de $A \rtimes_p \hat{S}$ induite par $\bar{\pi}$, on vérifie facilement à l'aide de (4.7) que $\bar{\Pi} \circ (i \rtimes_p \mathrm{id})$ est la représentation Π de $J \rtimes_p \hat{S}$ induite par π. Lorsque Π est fidèle, on obtient en particulier l'injectivité de $i \rtimes_p \mathrm{id}$.

Examinons maintenant l'exactitude en $A \rtimes_p \hat{S}$. L'homomorphisme canonique $A \to M(J)$ induit un homomorphisme de $A \rtimes_p \hat{S}$ dans $M(J \rtimes_p \hat{S})$ qui s'identifie à l'action par multiplication à gauche sur $J \rtimes_p \hat{S}$. Ainsi lorsqu'on identifie $J \rtimes_p \hat{S}$ à une sous-C^*-algèbre de $A \rtimes_p \hat{S}$, c'est un idéal bilatère fermé. Cet idéal est inclus dans le noyau de $p \rtimes_p \mathrm{id}$ par fonctorialité du produit croisé plein et grâce à l'hypothèse $p \circ i = 0$. Il reste à voir que le morphisme induit $q : (A \rtimes_p \hat{S})/(J \rtimes_p \hat{S}) \to B \rtimes_p \hat{S}$ est injectif, et pour cela, comme plus haut, que toute représentation non dégénérée Π de $(A \rtimes_p \hat{S})/(J \rtimes_p \hat{S})$ s'écrit $\bar{\Pi} \circ q$ pour une certaine représentation $\bar{\Pi}$ de $B \rtimes_p \hat{S}$.

Considérons Π comme une représentation non dégénérée de $A \rtimes_p \hat{S}$, nulle sur $J \rtimes_p \hat{S}$. La représentation covariante de A associée, π, est alors nulle sur $J \subset M(J \rtimes_p \hat{S})$. Elle se factorise donc en une représentation $\bar{\pi}$ de B : $\pi = \bar{\pi} \circ p$. La covariance de π et l'équivariance de p entraînent immédiatement la covariance de $\bar{\pi}$: soit en effet $b = p(a) \in B$, on a

$$\begin{aligned} X(\bar{\pi}(b)\otimes 1)X^* &= X(\pi(a)\otimes 1)X^* = (\pi\otimes\mathrm{id})\delta_A(a) \\ &= (\bar{\pi}\otimes\mathrm{id})(p\otimes\mathrm{id})\delta_A(a) = (\bar{\pi}\otimes\mathrm{id})\delta_B(p(a)) = (\bar{\pi}\otimes\mathrm{id})\delta_B(b). \end{aligned}$$

Soit $\bar{\Pi}$ la représentation de $B \rtimes_p \hat{S}$ associée. Soit x un élément de $A \rtimes_p \hat{S}$ et $\bar{x}$ sa classe dans $(A \rtimes_p \hat{S})/(J \rtimes_p \hat{S})$, par définition on a $q(\bar{x}) = (p \rtimes_p \mathrm{id})(x)$ et $\Pi(\bar{x})$ est l'image de x par la représentation de $A \rtimes_p \hat{S}$ associée à (π, X). Montrons que $\bar{\Pi} \circ q = \Pi$, ce qui achèvera la preuve :

$$\begin{aligned} \text{pour } x = \pi_p^A(a)\rho_{X_p^A}(\omega), \quad \bar{\Pi} \circ q\,(\bar{x}) &= \bar{\Pi}\big(\pi_p^B(p(a))\rho_{X_p^B}(\omega)\big) \\ &= \bar{\pi}(p(a))\rho_X(\omega) = \pi(a)\rho_X(\omega) = \Pi(\bar{x}). \end{aligned}$$ ■

Remarque. Dans le cas réduit, la surjectivité de $p \rtimes_r \mathrm{id}$ est tout aussi évidente que dans le cas plein et l'injectivité de $i \rtimes_r \mathrm{id}$ résulte du lemme 4.7. Lorsque le produit croisé réduit par un groupe quantique localement compact est exact, on dit que ce groupe quantique est *exact* : cette notion a été introduite et étudiée par Kirchberg et Wasserman dans le cas des groupes localement compacts [KW99a, KW99b]. Dans le cas discret, cette notion est équivalente à l'exactitude de la C^*-algèbre réduite du groupe : ce résultat est encore valable dans le cas quantique, cf la section suivante. En particulier l'exactitude en $A \rtimes_r \hat{S}$ n'a pas lieu en général, comme le montrent des exemples récents dans le cadre des groupes discrets [Gro00]. Notons enfin que la notion d'exactitude est reliée à celle de moyennabilité des actions [ADR00, AD00]. □

4.4 Cas compact

Lorsque le groupe quantique en considération est compact, les C^*-algèbres de Hopf associées sont pourvues d'une structure plus riche dont héritent les produits croisés. On dispose notamment du projecteur p_0 sur le sous-espace des vecteurs fixes de V, qui est donné par la formule $p_0 = (\mathrm{id}\otimes h)(V)$ et appartient à la C^*-algèbre duale $\hat{S}_r$.

Lemme 4.9 *On suppose que V est de type compact, soit $e \in H$ un vecteur unitaire et p_0 le projecteur sur le sous-espace des vecteurs fixes de H.*

1. *L'état ω_e^e induit une co-unité $\hat{\varepsilon}_r$ sur $\hat{S}_r$.*
2. *On a $sp_0 = p_0 s = \hat{\varepsilon}_r(s)p_0$ pour tout $s \in \hat{S}_r$.*

Démonstration. Le fait que e soit fixe signifie que pour tout $\xi \in H$ on a $V(e\otimes\xi) = e\otimes\xi$. En conséquence, pour tous ζ, ζ', ξ dans H on a $(\zeta'\otimes\zeta|V(e\otimes\xi)) = (\zeta'\otimes\zeta|e\otimes\xi))$. Les ω_ζ^ξ formant un sous-ensemble total de $L(H)_*$, on en déduit que $\rho_V(\omega)e = \omega(\mathrm{id})e$ pour tout $\omega \in L(H)_*$. Cela montre que $\mathbb{C}e$ est invariante par $\hat{S}_r$, pour tout e dans Im p_0 : ainsi il existe un caractère involutif $\hat{\varepsilon}_r$ de $\hat{S}_r$ tel que $sp_0 = p_0 s = \hat{\varepsilon}_r(s)p_0$ pour tout $s \in \hat{S}_r$, et ce caractère est égal à ω_e^e si on choisit e de norme 1. Il reste à montrer que $\hat{\varepsilon}_r$ est une co-unité à droite et à gauche :

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}_r(\rho_V(\omega))(e\otimes\xi) &= ((\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\omega)(V_{13}V_{23}))\,(e\otimes\xi) \\
&= ((\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\omega)(V_{23}))\,(e\otimes\xi) \\
&= e\otimes\rho_V(\omega)(\xi), \quad \text{et d'autre part} \\
\hat{\delta}_r(\rho_V(\omega))(e\otimes\xi) &= e\otimes((\hat{\varepsilon}_r\otimes\mathrm{id})\circ\hat{\delta}_r\circ\rho_V(\omega))\xi,
\end{aligned}$$

donc $(\hat{\varepsilon}_r\otimes\mathrm{id})\circ\hat{\delta}_r = \mathrm{id}$. De même $(\mathrm{id}\otimes\hat{\varepsilon}_r)\circ\hat{\delta}_r = \mathrm{id}$. ■

Lemme 4.10 *Soit $\hat{S}$ une C^*-algèbre de Hopf co-unifère, $\hat{\varepsilon}$ sa co-unité et A une C^*-algèbre $\hat{S}$-équivariante. Si $\delta_A(A)(1\otimes\hat{S})$ est total dans $A\otimes\hat{S}$, alors*

$$(\mathrm{id}_A\otimes\hat{\varepsilon})\circ\delta_A = \mathrm{id}_A.$$

Démonstration. Soit $a \in A$ et $s \in \hat{S}$, on a d'une part

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}_A\otimes\hat{\varepsilon}\otimes\mathrm{id}_{\hat{S}})\circ(\delta_A\otimes\mathrm{id})((1_A\otimes s)\delta_A(a)) &= (1_A\otimes s)\times(\mathrm{id}_A\otimes\hat{\varepsilon}\otimes\mathrm{id}_{\hat{S}})\circ(\mathrm{id}_A\otimes\delta_{\hat{S}})\circ\delta_A(a) \\
&= (1_A\otimes s)\delta_A(a)
\end{aligned}$$

car $\hat{\varepsilon}$ est la co-unité de $\hat{S}$, et d'autre part par une simple réécriture :

$$(\mathrm{id}_A\otimes\hat{\varepsilon}\otimes\mathrm{id}_{\hat{S}})\circ(\delta_A\otimes\mathrm{id})((1_A\otimes s)\delta_A(a)) = ((\mathrm{id}\otimes\hat{\varepsilon})\circ\delta_A)\otimes\mathrm{id}\;((1_A\otimes s)\delta_A(a)),$$

donc $(\mathrm{id}\otimes\hat{\varepsilon})\circ\delta_A = \mathrm{id}$ par densité de Vect $(1\otimes\hat{S})\delta_A(A)$ dans $A\otimes\hat{S}$. ■

Lemme 4.11 *On suppose que V est de type compact, soit $e \in H$ un vecteur fixe de norme 1. La lettre π désigne la représentation covariante régulière ou pleine de A*

1. *La restriction de ω_e^e à S_r coïncide avec la mesure de Haar h_r de S_r.*
2. *La formule suivante définit une espérance conditionnelle complètement positive h_π^A sur $A \rtimes_\pi S$, à valeurs dans A :*

$$h_\pi^A(\pi(a)s) = h_r(\lambda(s))a = h_\pi^A(s\pi(a)).$$

3. *On a $h_r^A \circ \lambda_A = h_p^A$ et la propriété d'invariance suivante :*

$$(\mathrm{id}\otimes h_r) \circ \delta_{\pi,r}^A = \pi \circ h_\pi^A. \tag{4.8}$$

Démonstration.

1. Soit $h_r = \omega_e^e$, il suffit de vérifier que cela définit bien l'état de Haar, unique, de S_r :

$$\begin{aligned}(h_r\otimes\mathrm{id})\delta_r(L_V(\omega)) &= (\omega\otimes h_r\otimes\mathrm{id})(V_{12}V_{13}) = (\omega\otimes\mathrm{id})((p_0\otimes 1)V)\\ &= (\omega\otimes\mathrm{id})(p_0\otimes 1) = (\omega\otimes h_r)(V)1 = h_r(L_V(\omega))1 \quad \text{et}\\ (\mathrm{id}\otimes h_r)\delta_r(L_V(\omega)) &= (\omega\otimes\mathrm{id}\otimes h_r)(V_{12}V_{13}) = (\omega\otimes\mathrm{id})(V(p_0\otimes 1))\\ &= (\omega\otimes\mathrm{id})(p_0\otimes 1) = (\omega\otimes h_r)(V)1 = h_r(L_V(\omega))1.\end{aligned}$$

2. Soit T_e le morphisme de A-modules hilbertiens de A dans $A\otimes H$ donné par $T_e(a) = a\otimes e$. Posons, pour $x \in A \rtimes_r \hat{S} \subset L_A(A\otimes H)$: $h_r^A(x) = T_e^* x T_e$, c'est a priori un élément de $L_A(A) = M(A)$. C'est clairement une application complètement positive, de plus elle vérifie (4.8) d'après le lemme 4.9 :

$$\begin{aligned}h_r^A(\pi_r^A(a)s) &= ((1\otimes e)|\delta_A(a)(1\otimes s)\ (1\otimes e))_{M(A\otimes H)}\\ &= (\delta_A(a^*)(1\otimes e)|(1\otimes se))_{M(A\otimes H)}\\ &= ((\mathrm{id}\otimes\hat{\varepsilon}_r)(\delta_A(a^*))\ (1\otimes e)|(1\otimes se))_{M(A\otimes H)}\\ &= a(e|se) = a\ h_r(s),\end{aligned}$$

et de même avec $s\pi_r^A(a)$. Il est clair sur ces formules que h_r^A est une espérance conditionnelle à valeurs dans A. On pose alors $h_p^A = h_r^A \circ \lambda_A$, les propriétés de h_p^A se déduisent immédiatement de celles de h_r^A et du fait que $\lambda_A(\pi_p^A(a)s) = \pi_r^A(a)\lambda(s)$.

3. Pour la propriété d'invariance, le cas réduit se déduit du cas plein, que nous étudions maintenant. On a successivement

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}\otimes h_r) \circ \delta_{p,r}^A(\pi_p^A(a)\rho_{\hat{X}_p^A}(\omega)) &= (\mathrm{id}\otimes h_r\otimes\omega)((\pi_p^A(a)\otimes 1\otimes 1)\hat{X}_{p,13}^A\hat{V}_{23})\\ &= (\mathrm{id}\otimes h_r\otimes\omega)((\pi_p^A(a)\otimes 1\otimes 1)\hat{X}_{p,12}^{A\,*}\hat{V}_{23}\hat{X}_{p,12}^A)\\ &= (\mathrm{id}\otimes\omega_e^e)((\pi_p^A(a)\otimes 1)\hat{X}_p^{A\,*}(1\otimes\rho_{\hat{V}}(\omega))\hat{X}_p^A).\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que comme e est invariant par $\hat{S}_r$, pour tout $\hat{X} \in M(K(E)\otimes\hat{S}_r)$ et tout $s \in L(H)$, on a $\mathrm{id}\otimes\omega_e^e(X^*(1\otimes s)X) = \mathrm{id}\otimes\omega_e^e(X^*(1\otimes\omega_e^e(s)1)X) = \omega_e^e(s)\mathrm{id}_E$. On obtient donc

$$(\mathrm{id}\otimes h_r) \circ \delta_{p,r}^A(\pi_p^A(a)\rho_{\hat{X}_p^A}(\omega)) = \pi_p^A(a)h_r(\rho_{\hat{V}}(\omega)) = \pi_p^A \circ h_p^A(\pi_p^A(a)\rho_{\hat{X}_p^A}(\omega)). \qquad \blacksquare$$

Remarque.

1. On peut retrouver à partir de ce lemme l'existence de l'homomorphisme δ'_A introduit au lemme 4.6. Il s'agit en effet de vérifier que $\delta^A_{p,r}$ se factorise à travers λ_A. Pour cela on observe que la propriété d'invariance du lemme 4.11 montre que $(\mathrm{id}\otimes h_r)\circ\delta^A_{p,r}(x^*x)$ est nul si $h_A(x^*x)$ est nul, ce qui a bien lieu lorsque $\lambda_A(x^*x)=0$. De l'égalité $(\lambda_A\otimes\mathrm{id})\circ\delta^A_{p,r}=\delta^A_{r,r}\circ\lambda_A$ on déduit que $(\lambda_A\otimes\mathrm{id})\circ\delta'_A=\delta^A_{r,r}$, et en particulier l'injectivité de $\delta^A_{r,r}$ entraîne celle de δ'_A.
2. Dans le cas compact S_r est unifère, en particulier A s'envoie dans $A\rtimes_r S$ et $\delta^A_{p,r}$, δ'_A et $\delta^A_{r,r}$ sont à valeurs dans $(A\rtimes_p S)\otimes S_r$. On va maintenant en déduire une caractérisation de l'exactitude du produit croisé réduit. Notons que lorsque le produit croisé réduit est exact, S_r est nécessairement exacte : si on munit une suite exacte quelconque des coactions triviales de $\hat{S}_r$, la suite des produits croisés coïncide avec celle des produits tensoriels par S_r. Dans le cas compact, la réciproque est vraie : □

Proposition 4.12 *On suppose que V est de type compact. Considérons une suite exacte de C^*-algèbres $\hat{S}_r$-équivariantes, où les flèches sont des morphismes équivariants :*

$$0\longrightarrow J\xrightarrow{i}A\xrightarrow{p}B\longrightarrow 0.$$

Si la C^*-algèbre S_r est exacte, les produits croisés réduits forment une suite exacte :

$$0\longrightarrow J\rtimes_r S\xrightarrow{i\rtimes_r\mathrm{id}}A\rtimes_r S\xrightarrow{p\rtimes_r\mathrm{id}}B\rtimes_r S\longrightarrow 0.$$

Démonstration. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & J\rtimes_r S \arrow[r, "i\rtimes_r\mathrm{id}"] \arrow[d, "\delta'_J"] \arrow[dr, phantom, "(4.9a)"] & A\rtimes_r S \arrow[r, "p\rtimes_r\mathrm{id}"] \arrow[d, "\delta'_A"] \arrow[dr, phantom, "(4.9b)"] & B\rtimes_r S \arrow[r] \arrow[d, "\delta'_B"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (J\rtimes_p S)\otimes S_r \arrow[r, "I"] & (A\rtimes_p S)\otimes S_r \arrow[r, "P"] & (B\rtimes_p S)\otimes S_r \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{4.9}$$

L'homomorphisme I qui fait commuter le carré (4.9a) est $(i\rtimes_p\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}$. En effet on a, d'après (4.7), son analogue dans le cas réduit, et les définitions de δ'_A et δ'_J :

$$\begin{aligned}\delta'_A\circ(i\rtimes_r\mathrm{id})\,(\pi^J_r(x)\rho_{\hat{V}}(\omega)) &= \delta'_A(\pi^A_r(i(x))\rho_{\hat{V}}(\omega))=(\pi^A_p(i(x))\otimes 1)\rho_{\hat{X}^A_{p,13}\hat{V}_{23}}(\omega)\\ &=((i\rtimes_p\mathrm{id})\otimes\mathrm{id})((\pi^J_p(x)\otimes 1)\rho_{\hat{X}^J_{p,13}\hat{V}_{23}}(\omega))\\ &=((i\rtimes_p\mathrm{id})\otimes\mathrm{id})\circ\delta'_J\,(\pi^J_r(x)\rho_{\hat{V}}(\omega)).\end{aligned}$$

De même, le carré (4.9b) est commutatif si on prend $P=(p\rtimes_p\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}$. Ainsi la deuxième ligne de (4.9) est exacte, grâce à la proposition 4.8 et à l'exactitude de S_r. Soit alors $x\in\operatorname{Ker}\,(p\rtimes_r\mathrm{id})\subset A\rtimes_r S$, par commutativité de (4.9b) on a $P\circ\delta'_A(x)=0$, donc $\delta'_A(x)\in(J\rtimes_p S)\otimes S_r$. Soit (u_α) une unité approchée de $J\rtimes_r S$, comme δ'_J est non dégénéré $\delta'_A(u_\alpha x)$ converge vers $\delta'_A(x)$ en norme. L'homomorphisme δ'_A étant injectif, cela implique que $u_\alpha x$ converge vers x en norme, et comme les u_α sont dans l'idéal $J\rtimes_r S$, c'est également le cas de x. Finalement on a $\operatorname{Ker}\,(p\rtimes_r\mathrm{id})\subset J\rtimes_r\mathrm{id}$, et l'inclusion réciproque résulte, comme dans le cas plein, de la fonctorialité du produit croisé. ■

5 Produits croisés et KK-théorie

5.1 Morphismes de descente

Pour expliciter l'isomorphisme du théorème 5.10 « de Green-Julg » nous aurons besoin du morphisme de descente, cf [Kas88, th. 3.11] dans le cas classique et [BS89, th. 6.19] dans le cas dual. Ce morphisme de descente est également relié, dans le cas discret, à l'isomorphisme de Green-Julg « dual » de la proposition 5.11 : cf le lemme 5.13. On présente dans cette section la construction du morphisme de descente dans le cadre quantique, qui repose en premier lieu sur une construction de produit croisé pour les modules hilbertiens, puis sur l'utilisation des constructions fonctorielles de la section 4.3. Les constructions et démonstrations s'appliquent aussi bien au cas « plein » qu'au cas « réduit ».

Définition 5.1 *Soit B une C^*-algèbre S_r-équivariante et E un B-module hilbertien S_r-équivariant. Soit $E \rtimes_r \hat{S}$ le produit tensoriel interne $E \otimes_B (B \rtimes_r \hat{S})$, c'est un $B \rtimes_r \hat{S}$-module hilbertien appelé* produit croisé réduit *de E par S_r. Soit $E \rtimes_p \hat{S}$ le produit tensoriel interne $E \otimes_B (B \rtimes_p \hat{S})$, c'est un $B \rtimes_p \hat{S}$-module hilbertien appelé produit croisé* plein *de E par S_r.*

Lemme 5.2 *Soit B une C^*-algèbre S_r-équivariante et E un B-module hilbertien S_r- équivariant. On prendra dans ce qui suit $\pi = p$ ou r. Les plongements de $E \simeq K_B(B, E)$ et $B \simeq K_B(B)$ dans $K_B(B \oplus E)$ induisent un plongement de $E \rtimes_\pi \hat{S}$ dans $K_B(B \oplus E) \rtimes_\pi \hat{S}$. La sous-$C^*$-algèbre $K_B(E) \rtimes_\pi \hat{S}$ agissant à gauche s'identifie alors à $K_{B \rtimes_\pi \hat{S}}(E \rtimes_\pi \hat{S})$.*

Démonstration. On considérera dans cette démonstration les éléments de B et E comme des éléments de $K_B(B)$ et $K_B(B, E) \subset K_B(B \oplus E)$ respectivement — on a alors $\zeta^*\zeta' = (\zeta|\zeta')_E$ pour ζ, $\zeta' \in E$. Soit $C = K_B(B \oplus E) \rtimes_\pi \hat{S}$, i l'inclusion de $L_B(B \oplus E)$ dans $M(C)$ et j l'inclusion de $M(B \rtimes_\pi \hat{S})$ dans $M(C)$. On plonge canoniquement B et $\hat{S}_X$ dans $B \rtimes_\pi \hat{S}$, alors $i(b) = j(b)$ et l'espace de Banach C est engendré par les produits $i(k)j(\hat{s})$.

Soit e et $f \in L_B(B \oplus E)$ les projections respectives sur E et B. Elles sont S_r-invariantes donc $i(e)$ et $i(f)$ commutent à $j(\hat{S}_r)$ d'après le lemme 4.1. On a donc $i(f)Ci(f) \simeq K_B(B) \rtimes_\pi \hat{S} \simeq B \rtimes_\pi \hat{S}$ et $i(e)Ci(e) \simeq K_B(E) \rtimes_\pi \hat{S}$. De plus, par définition de $K(B \oplus E)$ on a $\overline{\mathrm{Vect}}\ K_B(B \oplus E) f K_B(B \oplus E) = K_B(B \oplus E)$, donc

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Vect}}\ Ci(f)C &= \overline{\mathrm{Vect}}\ j(\hat{S}_X)\ i(K_B(B \oplus E) f K_B(B \oplus E))\ j(\hat{S}_X) \\ &= \overline{\mathrm{Vect}}\ j(\hat{S}_X)\ i(K_B(B \oplus E))\ j(\hat{S}_X) = C. \end{aligned}$$

Comme on l'a vu dans les rappels, on peut donc considérer $E' = i(e)Ci(f)$ comme un $B \rtimes_\pi \hat{S}$-module hilbertien et on a $K_{B \rtimes_\pi \hat{S}}(E') \simeq K_B(E) \rtimes_\pi \hat{S}$.

Grâce à l'identité $i(b) = j(b)$, on définit un morphisme $W : E \rtimes_\pi \hat{S} \to C$ en posant pour $\zeta \in E$, $x = b\hat{s} \in B \rtimes_\pi \hat{S}$: $W(\zeta \otimes_\pi x) = i(\zeta)j(x) = i(\zeta b)j(\hat{s})$. L'image de W est

$$i(eK_B(B \oplus E)f) \cdot j(\hat{S}_X) = i(e) \cdot i(K_B(B \oplus E)) \cdot i(f) \cdot j(\hat{S}_X) = E'$$

car $i(f)$ commute à $j(\hat{S}_X)$. De plus W est isométrique :

$$\begin{aligned} \big(W(\zeta \otimes_\pi x) \big| W(\zeta' \otimes_\pi x')\big)_{E'} &= j(x)^* i(\zeta)^* i(\zeta') j(x') = j(x)^* i((\zeta|\zeta')_E) j(x') \\ &= j\left(x^*(\zeta|\zeta')_E x'\right) = j\big((\zeta \otimes_\pi x | \zeta' \otimes_\pi x')_{E \rtimes_\pi \hat{S}}\big). \end{aligned}$$

On a donc bien $K_{B \rtimes_\pi \hat{S}}(E \rtimes_\pi \hat{S}) \simeq K_{B \rtimes_\pi \hat{S}}(E') \simeq K_B(E) \rtimes_\pi \hat{S}$. ∎

Proposition 5.3 — *cf [BS93, rque 7.7b]. Soit A et B deux C^*-algèbres S_r-équivariantes. Soit $(E,\pi,F) \in \mathbb{E}_{S_r}(A,B)$, modulo l'identification $M(K_B(E) \rtimes_r \hat{S}) \simeq L_{B\rtimes_r\hat{S}}(E \rtimes_r \hat{S})$ le triplet*

$$(E \rtimes_r \hat{S}, \pi \rtimes_r \mathrm{id}, F\otimes\mathrm{id})$$

définit un élément de $\mathbb{E}(A \rtimes_r \hat{S}, B \rtimes_r \hat{S})$, et l'application ainsi définie induit par passage au quotient un morphisme $j_r : KK_{S_r}(A,B) \to KK(A \rtimes_r \hat{S}, B \rtimes_r \hat{S})$. De même on obtient en considérant le triplet $(E \rtimes_p \hat{S}, \pi \rtimes_p \mathrm{id}, F\otimes\mathrm{id})$ un morphisme $j_p : KK_{S_r}(A,B) \to KK(A \rtimes_p \hat{S}, B \rtimes_p \hat{S})$. Ces morphismes sont appelés **morphismes de descente***.*

Démonstration. Donnons la démonstration du cas « plein », dont la traduction au cas « réduit » est immédiate. On note i (resp. j) l'inclusion de $L_B(E)$ (resp. $\hat{S}_p$) dans $M(K_B(E) \rtimes_p \hat{S})$ — ce ne sont pas tout-à-fait les homomorphismes utilisés dans la démonstration précédente. Alors $(\pi \rtimes_p \mathrm{id})(A \rtimes_p \hat{S})$ est engendrée par les produits $j(\hat{s})i(\pi(a))$ et $F\otimes\mathrm{id}$ s'identifie à $i(F)$ dans l'isomorphisme du lemme 5.2. On a

$$\begin{aligned} j(\hat{s})i(\pi(a))(i(F) - i(F)^*) &= j(\hat{s})\ i(\pi(a)(F - F^*)) \\ &\subset j(\hat{s})\ i(K_B(E)) \subset K_B(E) \rtimes_p \hat{S}, \end{aligned}$$

et de même $(\pi \rtimes_p \mathrm{id})(A \rtimes_p \hat{S})((F\otimes_{\delta_B}\mathrm{id})^2 - 1) \subset K_{B\rtimes_p\hat{S}}(E \rtimes_p \hat{S})$. D'autre part

$$[i(F), i(\pi(a))j(\hat{s})] = i([F,\pi(a)])j(\hat{s}) + i(\pi(a))[i(F), j(\hat{s})].$$

Le premier terme est dans $i(K_B(E))j(\hat{S}_p)$ et le deuxième est nul si F est invariant, car $i(F)$ commute alors à $j(\hat{S}_p)$ d'après le lemme 4.1. On peut en particulier supposer que c'est le cas si V est de type compact, et alors on a bien défini un élément de $\mathbb{E}(A \rtimes_p \hat{S}, B \rtimes_p \hat{S})$ — notons que le $B \rtimes_p \hat{S}$-module hilbertien $E \rtimes_p \hat{S}$ est de type dénombrable grâce à l'hypothèse de séparabilité de H. L'application ainsi définie au niveau des triplets (E,π,F) est compatible avec les applications de restriction ε_{t*} lorsque $B = B_0[0,1]$, et on obtient donc une application en KK-théorie.

Dans le cas général, posons $(E_0,\pi_0,F_0) = (E\otimes H, \pi\otimes\mathrm{id}, \delta_{K(E)}(F)) \in \mathbb{E}_{S_p}(A\otimes K(H), B)$, où $E\otimes H$ est muni de la coaction $\zeta\otimes\xi \mapsto (W(\xi\otimes 1))_{23}\delta_E(\zeta)_{13}$ avec $W = (U\otimes 1)V(U\otimes 1)$. A la différence de F, le morphisme F_0 est alors invariant d'après le lemme 3.1. Ainsi $i(F_0)$ commute à l'image de $\pi_0 \rtimes_p \mathrm{id}$ mod $K(E_0) \rtimes_p \hat{S}$, et nous allons en déduire le fait que $i(F)$ commute à l'image de $\pi \rtimes_p \mathrm{id}$ mod $K(E) \rtimes_p \hat{S}$, comme dans [BS89, 6.13 – 6.16], grâce à l'isomorphisme $E \simeq (\tilde{A}\otimes\bar{H})\otimes_{\tilde{A}\otimes K(H)} E_0$.

Notons i l'application canonique de $L_B(E)$ dans $M(K_B(E) \rtimes_p \hat{S})$, et i_0 (resp. i^0, i_0^0) l'application analogue pour $L_B(E_0,E)$ (resp. $L_B(E,E_0)$, $L_B(E_0,E_0)$) — on pourra penser à ces applications comme à diverses restrictions de l'homomorphisme canonique de $L_B(E \oplus E_0)$ dans $M(K_B(E \oplus E_0) \rtimes_p \hat{S})$. Notons $T_\zeta : E_0 \to E$ le produit tensoriel relatif à gauche par $\zeta \in \tilde{A}\otimes\bar{H}$. Comme les éléments de la forme $T_\zeta\pi_0(a)T_\xi^*$ engendrent un sous-espace dense de $\pi(A)$, l'image de $(\pi \rtimes_p \mathrm{id})$ est elle-même engendrée par les éléments de la forme

$$i_0(T_\zeta)(\pi_0 \rtimes_p \mathrm{id})(bxc)i^0(T_\xi^*)$$

avec ζ, $\xi \in A\otimes\bar{H}$, b, $c \in A\otimes K(H)$ et $x \in (A\otimes K(H)) \rtimes_p \hat{S}$. Montrons que ces éléments commutent à $i(F)$ modulo $K_B(E) \rtimes_p \hat{S}$.

On mène le calcul modulo $K_B(E) \rtimes_p \hat{S}$ en utilisant le fait que $i_0^0(K_B(E_0))(\pi_0 \rtimes_p \mathrm{id})(x) \in K_B(E_0) \rtimes_p \hat{S}$: en effet on peut supposer que $x = \hat{s}x'$ et on a alors $i_0^0(k)(\pi_0 \rtimes_p \mathrm{id})(x) =$

$i_0^0(k)j(\hat{s})(\pi_0 \rtimes_p \mathrm{id})(x')$, or $(\pi_0 \rtimes_p \mathrm{id})(x') \in M(K_B(E_0) \rtimes_p \hat{S})$ et $i_0^0(k)j(\hat{s}) \in K_B(E_0) \rtimes_p \hat{S}$. On a pour commencer :

$$i(F)\ i_0(T_\zeta)\ \ (\pi_0 \rtimes_p \mathrm{id})(bxc)\ i^0(T_\xi^*) \equiv i_0(FT_\zeta)\ (\pi_0 \rtimes_p \mathrm{id})(bxc)\ i^0(T_\xi^*).$$

Supposons que $\zeta = a \otimes \zeta'^* \in A \otimes \bar{H}$ et soit $\eta \otimes \eta' \in E_0 = E \otimes H$. Alors $T_\zeta(\eta\otimes\eta')$ s'identifie à $(\zeta'|\eta')\pi(a)\eta$ dans E et $FT_\zeta(\eta\otimes\eta') = (\zeta'|\eta')F\pi(a)\eta$. D'autre part $T_\zeta(F\otimes 1)(\eta\otimes\eta')$ s'identifie à $(\zeta'|\eta')\pi(a)F\eta$ dans E. On utilise alors le fait que $[F, \pi(A)] \equiv 0 \bmod K_B(E)$:

$$\begin{aligned}
&\equiv i_0(T_\zeta(F\otimes 1))\ (\pi_0 \rtimes_p \mathrm{id})(bxc)\ i^0(T_\xi^*)\\
&\equiv i_0(T_\zeta)\ i_0^0((F\otimes 1)\pi_0(b))\ (\pi_0 \rtimes_p \mathrm{id})(xc)\ i^0(T_\xi^*).
\end{aligned}$$

On remarque que $(F\otimes 1 - \delta_{K(E)}(F))(\pi(A)\otimes K(H)) \subset K_B(E)\otimes K(H)$: par hypothèse cela est vrai si on remplace $K(H)$ par S_r, mais on a $K(H)S_r = K(H)$.

$$\begin{aligned}
&\equiv i_0(T_\zeta)\ i_0^0(\delta_{K(E)}(F)\pi_0(b))\ (\pi_0 \rtimes_p \mathrm{id})(xc)\ i^0(T_\xi^*)\\
&\equiv i_0(T_\zeta)\ i_0^0(\delta_{K(E)}(F))\ (\pi_0 \rtimes_p \mathrm{id})(bxc)\ i^0(T_\xi^*).
\end{aligned}$$

On applique alors le cas « F invariant », comme expliqué plus haut :

$$\equiv i_0(T_\zeta)\ (\pi_0 \rtimes_p \mathrm{id})(bxc)\ i_0^0(\delta_{K(E)}(F))\ i^0(T_\xi^*).$$

Puis on applique à nouveau les arguments utilisés au début du calcul :

$$\begin{aligned}
&\equiv i_0(T_\zeta)\ (\pi_0 \rtimes_p \mathrm{id})(bxc)\ i^0((F\otimes 1)\ T_\xi^*)\\
&\equiv i_0(T_\zeta)\ (\pi_0 \rtimes_p \mathrm{id})(bxc)\ i^0(T_\xi^*)\ i(F).
\end{aligned}$$

Cela conclut la preuve dans le cas général. ■

EXEMPLES.

1. Dans le cas où S_r est commutative ou cocommutative, on retrouve les constructions de [Kas88] et [BS89]. Lorsque A, B et E sont munis des coactions triviales, l'action de j_r sur la classe d'un triplet $(E, \pi, F) \in \mathbb{E}_{S_r}(A, B)$ coïncide avec celle du produit tensoriel à droite $\tau'_{\hat{S}_r}$, composée par le foncteur d'oubli des structures S_r-équivariantes.
2. Lorsque $E = B$, il est clair que le $B \rtimes_\pi \hat{S}$-module hilbertien $E \rtimes_\pi \hat{S}$ n'est autre que $B \rtimes_\pi \hat{S}$. Dans ce cas l'identification $K_{B\rtimes_\pi \hat{S}}(E \rtimes_\pi \hat{S}) \simeq K_B(E) \rtimes_\pi \hat{S}$ est donc triviale, et on voit ainsi que $j_r([\phi]) = [\phi \rtimes_r \mathrm{id}]$ et $j_p([\phi]) = [\phi \rtimes_p \mathrm{id}]$ pour $\phi : A \to B$. En particulier on a $j_r(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_{A\rtimes_r \hat{S}}$ et $j_p(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_{A\rtimes_p \hat{S}}$. □

Lemme 5.4 *Soit A, B et D des C^*-algèbres S_r-équivariantes. On prendra dans ce qui suit $q = p$ ou r. Soit $x_1 \in KK_{S_r}(A, D)$ et $x_2 \in KK_{S_r}(D, B)$, on a $j_q(x_1 \otimes x_2) = j_q(x_1)\otimes j_q(x_2)$ dans $KK(A \rtimes_q \hat{S}, B \rtimes_q \hat{S})$.*

DÉMONSTRATION. Soit (E_1, π_1, F_1) et (E_2, π_2, F_2) des représentants respectifs de x_1 et x_2. Soit $E = E_1 \hat{\otimes}_D E_2$ et $\pi = \pi_1 \hat{\otimes}_D 1 : A \to L_B(E)$. Soit $y = x_1 \otimes x_2$: par définition du produit de Kasparov, il existe un morphisme $F \in L_B(E)$ tel que

- $(E, \pi, F) \in \mathbb{E}_{S_r}(A, B)$,
- F est une F_2-connection [CS84, BS89],
- Pour tout $a \in A$, l'image de $\pi(a)[F_1 \hat{\otimes} 1, F]\pi(a^*)$ dans $L_B(E)/K_B(E)$ est positive.

La notation $\hat{\otimes}$ désigne le produit tensoriel gradué relatif, au-dessus de D ou $D \rtimes_q \hat{S}$. Soit (E'_i, π'_i, F'_i) (resp. (E', π', F')) le représentant de $j_r(x_i)$ (resp. $j_r(y)$) obtenu par produit croisé comme à la proposition 5.3. Grâce aux propriétés du produit tensoriel relatif, il est facile de voir qu'on a un isomorphisme naturel

$$E' = (E_1 \hat{\otimes}_D E_2) \rtimes_q \hat{S} \simeq (E_1 \rtimes_q \hat{S}) \hat{\otimes}_{D \rtimes_q \hat{S}} (E_2 \rtimes_q \hat{S}) = E'_1 \hat{\otimes}_{D \rtimes_q \hat{S}} E'_2. \tag{5.1}$$

Pour conclure il suffit de montrer que F' vérifie les trois conditions ci-dessus, relativement à F'_1 et F'_2.

D'après la proposition 5.3, (E', π', F') est bien un élément de $\mathbb{E}(A \rtimes_q \hat{S}, B \rtimes_q \hat{S})$. Soit i et j les homomorphismes canoniques de $K_B(E)$ et $\hat{S}_p$ dans $M(K_B(E) \rtimes_q \hat{S}) \simeq L(E')$: on a alors $F' = i(F)$ et, modulo l'isomorphisme (5.1), $F'_1 \hat{\otimes} 1 = i(F_1 \hat{\otimes} 1)$. L'image de $\pi' : A \rtimes_q \hat{S} \to M(K(E'))$ est engendrée par les produits $j(\hat{s}) i(\pi(a))$ pour $a \in A$, $\hat{s} \in \hat{S}_p$. Par hypothèse il existe un élément positif $G \in L(E)_+$ tel que $\pi(a)[F_1 \hat{\otimes} 1, F]\pi(a^*) \in G + K_B(E)$, on a alors

$$\begin{aligned} j(\hat{s}) i(\pi(a)) \; [F'_1 \hat{\otimes} 1, F'] \; i(\pi(a^*)) j(\hat{s}^*) &= j(\hat{s}) \; i(\pi(a)[F_1 \hat{\otimes} 1, F]\pi(a^*)) \; j(\hat{s}^*) \\ &\in j(\hat{s}) G j(\hat{s}^*) + j(\hat{s}) i(K_B(E)) j(\hat{s}^*) \\ &\in j(\hat{s}) G j(\hat{s}^*) + K_{B \rtimes_q \hat{S}}(E'). \end{aligned}$$

Comme $j(\hat{s}) G j(\hat{s}^*)$ est dans $L(E')_+$, le morphisme F' vérifie bien la condition de positivité. D'autre part, soit $\xi = \zeta \otimes_D v \in E'_1 = E_1 \otimes_D (D \rtimes_q \hat{S})$ et $T_\xi : E'_2 \to E'$, $\eta \mapsto \xi \hat{\otimes} \eta$. Alors T_ξ s'identifie à $i(T_\zeta)\pi'_1(v)$ dans $L(E' \oplus E'_2) \simeq M(K_B(E \oplus E_2) \rtimes_q \hat{S})$. Supposons par exemple que ζ, donc également ξ, est homogène de degré pair. On a

$$F' T_\xi = i(F T_\zeta) \pi'_1(v) = i(T_\zeta) \pi'_1(v) i(F_2) + i(F T_\zeta - T_\zeta F_2) \pi'_1(v) + i(T_\zeta)[i(F_2), \pi'_1(v)].$$

Or $k = F T_\zeta - T_\zeta F_2 \in K_B(E_2, E)$ car F est une F_2-connection, et cela implique, comme à la démonstration précédente, que le produit $i(F T_\zeta - T_\zeta F_2)\pi'_1(v) = i(k)(\pi_1 \rtimes_q \mathrm{id})(v)$ est dans $K(E'_2, E')$. D'autre part on a $[i(F_2), \pi'_1(v)] \in K(E'_2)$ d'après la proposition 5.3. Ainsi $F' T_\xi = T_\xi F'_2 \bmod K(E'_2, E')$, et on vérifie de même que $T^*_\xi F' = F'_2 T^*_\xi \bmod K(E', E'_2)$. Ainsi F' est une F'_2-connection. ■

Remarque — cf [BS93, rque 7.7b]. On peut aussi montrer que $E \rtimes_r \hat{S}$ est, comme $B \rtimes_r \hat{S}$, naturellement muni d'une coaction de $\hat{S}_r$. Le passage du triplet (E, π, F) au triplet $(E \rtimes_r \hat{S}, \pi \rtimes_r \mathrm{id}, F \otimes \mathrm{id})$ définit en fait un morphisme

$$J_r : KK_{S_r}(A, B) \to KK_{\hat{S}_r}(A \rtimes_r \hat{S}, B \rtimes_r \hat{S}),$$

et j_r est la composée de J_r par le foncteur d'oubli. On peut alors voir, si (H, V, U) est birégulier et irréductible, et si A et B sont des S_r-algèbres, que les morphismes J_r et $\hat{J}_r : KK_{\hat{S}_r}(A \rtimes_r \hat{S}, B \rtimes_r \hat{S}) \to KK_{S_r}(A \rtimes_r \hat{S} \rtimes_r S, B \rtimes_r \hat{S} \rtimes_r S)$ sont inverses l'un de l'autre modulo les équivalences de Morita équivariantes données par le théorème de bidualité pour les produits croisés. □

5.2 Produits croisés et points fixes

Soit B une C^*-algèbre S_r-équivariante et $E = B \otimes H$. Le B_1-module hilbertien E est muni de la coaction $\delta_E : b \otimes \xi \mapsto b \otimes \delta_H(\xi)$ associée à la coreprésentation $X_r = 1_B \otimes V$, qu'on a déjà utilisée pour définir le produit croisé réduit : rappelons que $B \rtimes_r \hat{S}$ est le sous-espace fermé de $L_B(B \otimes H)$ engendré par les produits $\delta_B(b)(1 \otimes s)$ avec $b \in B$ et $s \in \hat{S}_r$. Mais d'autre part, le B-module hilbertien E est muni d'une coaction $\delta'_E : b \otimes \xi \mapsto \delta'_H(\xi)_{23} \delta_B(b)_{13}$ où δ'_H est la coaction de S sur H associée à l'unitaire $W = (U \otimes 1)V(U \otimes 1)$. On montre au lemme 5.5 que ces deux coactions commutent : c'est une reformulation du lemme 3.1.

Lemme 5.5 *Soit B une C^*-algèbre S_r-équivariante. On pose $W = (U\otimes 1)V(U\otimes 1)$, $E = B\otimes H$. La formule $\delta'_E(b\otimes\xi) = (W(\xi\otimes 1))_{23}\delta_B(b)_{13}$ définit une coaction de S_r sur le B-module hilbertien E, et on a*

$$B \rtimes_r \hat{S} \subset L_B(E)^{S_r}.$$

Démonstration. W définit une coreprésentation de S sur H car U est involutif et V, multiplicatif :

$$W_{12}W_{13}V_{23} = U_1V_{12}V_{13}U_1V_{23} = U_1V_{23}V_{12}U_1 = V_{23}W_{12}.$$

Par conséquent δ'_E est bien une coaction car c'est le « produit tensoriel » de deux coactions au sens du lemme 3.1. Identifions $E\otimes_{\delta_B}(B\otimes S)$ à $B\otimes H\otimes S$ au moyen de $(b\otimes\zeta)\otimes_{\delta_B}(c\otimes s) \mapsto \delta_B(b)_{13}(c\otimes\zeta\otimes s)$, l'unitaire V'_E associé à cette coaction s'identifie alors à l'unitaire W_{23} de $L_B(B\otimes H\otimes S)$.

Soit $\hat{s} \in \hat{S}_r$ et $l = \mathrm{id}_B\otimes\hat{s} \in L_B(E)$, alors $(l\otimes_{\delta_B}\mathrm{id}_{B\otimes S})$ s'identifie dans $L_B(B\otimes H\otimes S)$ à $(\mathrm{id}_B\otimes\hat{s}\otimes\mathrm{id}_S)$. Or $W \in M(U\hat{S}U\otimes S)$ et $\hat{s}$ commute à $U\hat{S}U$, donc

$$W_{23}(\mathrm{id}_B\otimes\hat{s}\otimes\mathrm{id}_S)W_{23}^* = \mathrm{id}_B\otimes\hat{s}\otimes\mathrm{id}_S = l\otimes 1.$$

Soit maintenant $b \in B$ et $l : (c\otimes\xi \mapsto \delta_B(b)(c\otimes\xi)) \in L_B(E)$. Soit ϕ l'élément de $L_B(B)$ donné par la multiplication à gauche par b, alors on a $l = \delta_{K(B)}(\phi)$ via l'action à gauche de $M(B\otimes S_r)$ sur $E = B\otimes H$. Ainsi on a $l = \psi'$ avec les notations de la remarque suivant le lemme 3.1. D'après ce même lemme, l est donc équivariant. Cela signifie que $V'_E(l\otimes 1)V'^*_E = l\otimes 1$ et on a bien $B \rtimes_r \hat{S} \subset L_B(E)^{S_r}$. ∎

Dans le cas où V est de type compact, l'inclusion du lemme 5.5 devient $B \rtimes_r \hat{S} \subset K_B(E)^{S_r}$ car $\hat{S}_r \subset K(H)$. On montre au lemme 5.7 que cette inclusion est en fait une égalité — ce qui constitue essentiellement la base du théorème de Green-Julg « quantique » démontré au paragraphe suivant. La démonstration du lemme 5.7 repose sur l'application du théorème de bidualité au résultat du lemme 5.6 qui caractérise, par un procédé de « moyenne », l'espace des points fixes d'un produit croisé.

Lemme 5.6 *On suppose que V est de type compact. Soit C une C^*-algèbre $\hat{S}_r$-équivariante et $B = C \rtimes_r S$ le produit croisé correspondant, muni de la coaction de S_r introduite à la définition 4.5. On a alors l'égalité entre sous-C^*-algèbres de $L_C(C\otimes H)$:*

$$B^{S_r} = \hat{\pi}_r^C(C).$$

Démonstration. On notera $S = S_r$ pour cette démonstration. La C^*-algèbre S est unifère donc $\hat{\pi}_r^C(C)$ est une sous-C^*-algèbre de B, et il est clair sur la définition de la coaction duale δ_B qu'elle est invariante. Pour l'inclusion opposée on considère l'application complètement positive $\phi = (\mathrm{id}\otimes h)\circ\delta_B$ définie sur B. Cette application vaut clairement l'identité sur B^S, or elle est à valeurs dans $\hat{\pi}_r^C(C)$. En effet Im ϕ est le sous-espace engendré par les éléments suivants :

$$(\mathrm{id}\otimes h)\circ\delta_B(\hat{\pi}_r^C(c)s) = (\mathrm{id}\otimes h)((\hat{\pi}_r^C(c)\otimes 1)(\delta(s))) = \hat{\pi}_r^C(c)h(s).$$ ∎

Lemme 5.7 *On suppose que V est de type compact. Soit B une S_r-algèbre et $E = B\otimes H$ l'espace de la représentation covariante régulière de B. On considère E comme un B-module hilbertien S_r-équivariant relativement à la coaction δ'_E. On a alors l'égalité entre sous-C^*-algèbres de $L_B(E)$:*

$$B \rtimes_r \hat{S} = K_B(E)^{S_r}. \tag{5.2}$$

Soit $\mathcal{E} = E \otimes \mathcal{H}$ muni de la coaction produit de S_r, (5.2) induit un isomorphisme canonique qui fait se correspondre les idéaux des opérateurs compacts :

$$\Phi : L_B(\mathcal{E})^{S_r} \to L_{B \rtimes_r \hat{S}}(\mathcal{H}_{B \rtimes_r \hat{S}}). \tag{5.3}$$

Démonstration. On note toujours $S = S_r$. La première assertion se déduit du lemme 5.6 grâce au théorème de bidualité : on a un isomorphisme de S-algèbres entre $B \otimes K(H)$ et $B \rtimes_r \hat{S} \rtimes_r S$ donné par

$$\textstyle\sum_i (1 \otimes U)\delta_B(b_i)(1 \otimes \hat{s}_i)(1 \otimes U)(1 \otimes s_i) \mapsto \sum_i (\delta_B(b_i) \otimes 1) U_3 (1 \otimes \hat{\delta}(\hat{s}_i)) U_3 (1 \otimes 1 \otimes s_i),$$

où on considère $B \rtimes_r \hat{S} \rtimes_r S$ comme une sous-algèbre de $L(B \otimes H \otimes H)$. Les sous-algèbres stables s'identifient donc aussi. Il s'agit au membre de droite des termes tels que $\forall i \ s_i = 1$, d'après le lemme 5.6. On en déduit au membre de gauche que la sous-algèbre de $B \otimes K(H)$ stable sous la coaction $(b \otimes k) \mapsto V_{23} \delta_B(b)_{13} (1 \otimes k \otimes 1) V_{23}^*$ est $(1 \otimes U)(B \rtimes_r \hat{S})(1 \otimes U)$. La coaction induite par δ'_E sur $K_B(E) = B \otimes K(H)$ s'obtient en conjuguant par $(1 \otimes U)$ et la sous-algèbre stable correspondante est donc $B \rtimes_r \hat{S}$.

En tensorisant ce premier résultat par $K(\mathcal{H})$, on voit que la sous-C^*-algèbre non dégénérée $\mathcal{K} \otimes (B \rtimes_r \hat{S})$ de $K_B(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{K} \otimes K_B(B \otimes H)$ est égale à $K_B(\mathcal{E})^S$. En passant aux multiplicateurs on obtient un isomorphisme entre $L_{B \rtimes_r \hat{S}}(\mathcal{H}_{B \rtimes_r \hat{S}})$ et $M(K_B(\mathcal{E})^S)$. Il est clair que $L_B(\mathcal{E})^S$ est inclus dans $M(K_B(\mathcal{E})^S)$. Inversement, soit l un élément de $L_B(\mathcal{E})$ vérifiant $l \cdot K_B(\mathcal{E})^S \subset K_B(\mathcal{E})^S$. Pour tout $k \in K_B(\mathcal{E})^S$ on a $V_{\mathcal{E}}(lk \otimes 1)V_{\mathcal{E}}^* = (lk \otimes 1)$, et comme $K_B(\mathcal{E})^S$ est non dégénérée on obtient $V_{\mathcal{E}}(l \otimes 1)V_{\mathcal{E}}^* = l \otimes 1$ en faisant tendre k vers id strictement. Ainsi $l \in L_B(\mathcal{E})$, ce qui achève la démonstration. ■

5.3 Théorème de Green-Julg

On démontre maintenant les versions « quantiques » du théorème de Green-Julg et du théorème de Green-Julg « dual ». L'isomorphisme de Green-Julg correspond essentiellement à la bijection (5.3) du lemme 5.7. On peut cependant en donner une expression plus fonctorielle grâce au morphisme de descente réduit, on utilise pour cela le calcul d'un sous-module hilbertien au lemme 5.9.

Dans le cas compact, le résultat du lemme 5.5, où $E = B \otimes H$ est muni de la coaction δ'_E, s'écrit $B \rtimes_r \hat{S} \subset K_B(E)^{S_r}$. Remarquons que cette inclusion peut s'interpréter comme une représentation covariante de $B \rtimes_r \hat{S}$, munie de la coaction triviale, sur le B-module équivariant (E, δ'_E). On obtient ainsi un élément de KK-théorie équivariante (définition 5.8) qui permet de donner une expression de l'inverse de l'isomorphisme de Green-Julg.

Définition 5.8 *On suppose que V est de type compact. Soit B une S_r-algèbre et A une C^*-algèbre munie de la coaction triviale de S_r.*

1. *On appelle β l'élément de $KK_{S_r}((B \rtimes_r \hat{S})_1, B)$ défini par le triplet $(E, \pi_r, 0)$ où $E = B \otimes H$ est muni de la coaction δ'_E de S_r et où π_r est la représentation canonique de $B \rtimes_r \hat{S}$ dans E.*
2. *On note p_0 le support central de $\hat{\varepsilon}_r$ (lemme 4.9), c'est un élément de $\hat{S}_r$. Soit ϕ l'homomorphisme de A dans $A \rtimes_r \hat{S} = A \otimes \hat{S}_r$ donné par $\phi(a) = a \otimes p_0$.*
3. *Si C et D sont des C^*-algèbres et (E, π, F) est un élément de $\mathbb{E}(C, D)$, en munissant E de la coaction triviale de S_r on peut considérer ce triplet comme un élément de $\mathbb{E}_{S_r}(C_1, D_1)$. On note ψ le morphisme de $KK(C, D)$ dans $KK_{S_r}(C_1, D_1)$ ainsi obtenu.*

Lemme 5.9 *On suppose que V est de type compact. Soit B une C^*-algèbre S_r-équivariante et E un B-module hilbertien S_r-équivariant. On munit $E\otimes H$ de la coaction*

$$\delta'_{E\otimes H} : \zeta\otimes\xi \mapsto (W(\xi\otimes 1))_{23}\delta_E(\zeta)_{13}.$$

Soit P le projecteur de $L((E\otimes H) \rtimes_r \hat{S})$ associé à $p_0 \in \hat{S}_r$. On identifie $(E\otimes H) \rtimes_r \hat{S}$ à $(E \rtimes_r \hat{S})\otimes H$ et on considère V comme un élément de $M(K(E \rtimes_r \hat{S})\otimes S_r)$. Alors on a

$$P((E \rtimes_r \hat{S})\otimes H) = V((E \rtimes_r \hat{S})\otimes p_0 H).$$

Démonstration. Pour tout C-module S_r-équivariant F, on note j_F l'homomorphisme canonique de $\hat{S}_r$ dans $L(F \rtimes_r \hat{S})$ — en particulier lorsque $F = C$, l'homomorphisme j_C est à valeurs dans $M(C \rtimes_r \hat{S})$. Rappelons que $p_0 = (\mathrm{id}\otimes h)(V)$, on a donc $P = (j_{E\otimes H}\otimes h)(V) \in L((E\otimes H) \rtimes_r \hat{S})$. Le point principal de la démonstration est de donner une expression de $(j_{E\otimes H}\otimes\mathrm{id})(V)$ dans l'isomorphisme $((E\otimes H) \rtimes_r \hat{S})\otimes S_r \simeq (E \rtimes_r \hat{S})\otimes H\otimes S_r$.

Soit F un B-module hilbertien S_r-équivariant et $K = K_B(B\oplus F)$. On considère $F \rtimes_r \hat{S}$ comme le sous-espace de $K \rtimes_r \hat{S}$ engendré par les éléments $i(Tx)j_K(\hat{s})$ avec $x \in F$ et $\hat{s} \in \hat{S}_r$ — i est ici l'homomorphisme canonique de K dans $M(K \rtimes_r \hat{S})$ et Tx est le morphisme compact $(b \mapsto xb)$. Quand on plonge $K \rtimes_r \hat{S}$ dans $L_K(K\otimes H)$, les homomorphismes i et j_K s'identifient respectivement à δ_K et $(\hat{s} \mapsto 1\otimes\hat{s})$, donc

$$\begin{aligned}(j\otimes\mathrm{id})(V)\ (i(Tx)j_K(\hat{s})\otimes 1) &= (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes h)\left((\mathrm{id}\otimes V)(\delta_K(Tx)\otimes 1)(1\otimes\hat{s}\otimes 1)\right)\\ &= (\mathrm{id}\otimes\delta_r)\delta_K(Tx)(1\otimes V)(1\otimes\hat{s}\otimes 1)\\ &= (\delta_K\otimes\mathrm{id})\delta_K(Tx)(1\otimes V)(1\otimes\hat{s}\otimes 1)\\ &= (i\otimes\mathrm{id})(\delta_K(Tx))\ (j_K\otimes\mathrm{id})(V(\hat{s}\otimes 1)).\end{aligned}$$

On a $\delta_K(Tx) = (T\otimes\mathrm{id})\delta_F(x)$, en revenant à la définition $F \rtimes_r \hat{S} = F\otimes_{\delta_B}(B \rtimes_r \hat{S})$ on obtient donc l'expression suivante :

$$(j_F\otimes\mathrm{id})(V)\ ((x\otimes_{\delta_B} y)\otimes 1_S) = (\delta_F(x) \otimes_{\delta_B\otimes\mathrm{id}} (j_B\otimes\mathrm{id})(V)(y\otimes 1)).$$

On applique maintenant cette expression de $(j_F\otimes\mathrm{id})(V)$ à $F = E\otimes H$, puis $F = E$, pour obtenir une expression de $(j_{E\otimes F}\otimes\mathrm{id})(V))$ en fonction de W et $(j_E \otimes \mathrm{id})(V)$. Soit $x \in E$, $\zeta \in H$ et $y \in B \rtimes_r \hat{S}$, on a tout d'abord

$$(j_{E\otimes H}\otimes\mathrm{id})(V)\ (((x\otimes\zeta)\otimes_{\delta_B} y)\otimes 1_S) = ((W(\zeta\otimes 1))_{23}\delta_E(x)_{13}) \otimes_{\delta_B\otimes\mathrm{id}} ((j_B\otimes\mathrm{id})(V)(y\otimes 1)),$$

ce qui donne dans l'identification $(E\otimes H) \rtimes_r \hat{S} \simeq (E \rtimes_r \hat{S})\otimes H$:

$$\begin{aligned}(j_{E\otimes H}\otimes\mathrm{id})(V)\ ((x\otimes_{\delta_B} y)\otimes\zeta\otimes 1_S) &= (W(\zeta\otimes 1))_{23}\ (\delta_E(x)\otimes_{\delta_B\otimes\mathrm{id}}(j_B\otimes\mathrm{id})(V)(y\otimes 1))_{13}\\ &= (W(\zeta\otimes 1))_{23}\ ((j_E\otimes\mathrm{id})(V)((x\otimes_{\delta_B} y)\otimes 1_S))_{13}\\ &= (j_E\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(W_{23}V_{13})\ ((x\otimes_{\delta_B} y)\otimes\zeta\otimes 1_S).\end{aligned}$$

On a donc $P = (j_E\otimes\mathrm{id}\otimes h)(W_{23}V_{13}) \in L_B((E \rtimes_r \hat{S})\otimes H)$. Considérons $(j_E\otimes\mathrm{id})(V)$ comme un automorphisme de $(E \rtimes_r \hat{S})\otimes H$. La relation $V_{12}^* W_{23} V_{13} = W_{23} V_{12}^*$ et le fait que $(\mathrm{id}\otimes h)(W) = (\mathrm{id}\otimes h)(V) = p_0$ montrent que

$$(j_E\otimes\mathrm{id})(V)^* \circ P = (j_E\otimes\mathrm{id}\otimes h)(W_{23}V_{12}^*) = (\mathrm{id}\otimes p_0) \circ (j_E\otimes\mathrm{id})(V)^*.$$

Ainsi $P((E \rtimes_r \hat{S})\otimes H) = (j_E\otimes\mathrm{id})(V)\ ((E \rtimes_r \hat{S})\otimes p_0 H)$. ∎

Théorème 5.10 *On suppose que V est de type compact. Soit B une S_r-algèbre et A une C^*-algèbre munie de la coaction triviale de S_r. Alors le morphisme*

$$\Phi_1 : \ KK_{S_r}(A,B) \xrightarrow{j_r} KK(A \rtimes_r \hat{S}, B \rtimes_r \hat{S}) \xrightarrow{\phi^*} KK(A, B \rtimes_r \hat{S}) \tag{5.4}$$

est un isomorphisme, et son inverse est donné par

$$\Phi_2 : \ KK(A, B \rtimes_r \hat{S}) \xrightarrow{\psi} KK_{S_r}(A_1, (B \rtimes_r \hat{S})_1) \xrightarrow{\cdot \otimes \beta} KK_{S_r}(A,B).$$

Démonstration. Soit x un élément de $KK_{S_r}(A,B)$ et $(\mathcal{E},\pi,F)$ un triplet représentant x. Grâce au théorème de stabilisation 3.2, on peut supposer que $\mathcal{E}$ est le B-module hilbertien $B \otimes H \otimes \mathcal{H}$, muni de la même coaction $\delta'_{\mathcal{E}}$ qu'au lemme 5.7. Comme A est munie de la coaction triviale, π est un homomorphisme de degré 0 de A dans $L_B(\mathcal{E})^{S_r}$. Enfin, comme S_r est unifère on peut également supposer, quitte à moyenner, que F est dans $L_B(\mathcal{E})^{S_r}$.

L'élément $y = \phi^* \circ j_r(x)$ de $KK(A, B \rtimes_r \hat{S})$ est représenté par le triplet $(P(\mathcal{E} \rtimes_r \hat{S}),$ $P(\pi \rtimes_r \mathrm{id})P$, $P(F \otimes_{\delta_B} \mathrm{id})P)$, où P est l'élément de $L(\mathcal{E} \rtimes_r \hat{S}) \simeq M(K_B(\mathcal{E}) \rtimes_r \hat{S})$ associé à $p_0 \in \hat{S}_r$. On va maintenant donner un représentant plus simple de y. D'après le lemme 5.9, $\mathcal{H}_{B \rtimes_r \hat{S}} \simeq (B \rtimes_r \hat{S}) \otimes p_0 H \otimes \mathcal{H}$ est isomorphe à $P(\mathcal{E} \rtimes_r \hat{S}) \subset (B \rtimes_r \hat{S}) \otimes H \otimes \mathcal{H}$ via

$$\left\{ \begin{array}{l} (B \rtimes_r \hat{S}) \otimes p_0 H \otimes \mathcal{H} \to P\ ((B \rtimes_r \hat{S}) \otimes H \otimes \mathcal{H}) \\ (\delta_B(b)(1 \otimes \hat{s})) \otimes e \otimes \zeta \mapsto V_{23}((\delta_B(b)(1 \otimes \hat{s})) \otimes e \otimes \zeta). \end{array} \right. \tag{5.5}$$

Soit F_0 un élément de $K_B(\mathcal{E})^{S_r}$: d'après le lemme 5.7, on peut supposer que $F_0 = (\delta_B(b)(1 \otimes \hat{s})) \otimes k$ agissant à gauche sur $B \otimes H \otimes \mathcal{H}$. Par conséquent, dans l'identification $(B \otimes H \otimes \mathcal{H}) \otimes_{\delta_B} (B \rtimes_r \hat{S}) \simeq (B \rtimes_r \hat{S}) \otimes H \otimes \mathcal{H}$, l'action de $F_0 \otimes_{\delta_B} \mathrm{id}$ sur le membre de gauche correspond à celle de $(\delta_B^2(b) \otimes \mathrm{id})\ (1 \otimes 1 \otimes \hat{s} \otimes k)$ sur le membre de droite. Maintenant, on peut lire $P(F_0 \otimes_{\delta_B} \mathrm{id})P$ comme un endomorphisme de $(B \rtimes_r \hat{S}) \otimes p_0 H \otimes \mathcal{H}$, grâce à (5.5) :

$$\begin{aligned} V_{23}^* P(F_0 \otimes_{\delta_B} \mathrm{id}) P V_{23} &= V_{23}^* (\delta_B^2(b) \otimes \mathrm{id})(1 \otimes 1 \otimes \hat{s} \otimes k) V_{23} (1 \otimes 1 \otimes p_0 \otimes \mathrm{id}) \\ &= (\delta_B(b) \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(1 \otimes \hat{\delta}(\hat{s}) \otimes \mathrm{id})(1 \otimes 1 \otimes p_0 \otimes k) \\ &= (\delta_B(b) \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(1 \otimes \hat{s} \otimes p_0 \otimes k). \end{aligned}$$

Ainsi $P(F_0 \otimes_{\delta_B} \mathrm{id})P$ s'identifie à l'endomorphisme $(\delta_B(b)(1 \otimes \hat{s})) \otimes k$ de $\mathcal{H}_{B \rtimes_r \hat{S}}$, c'est-à-dire à $\Phi(F_0)$ avec les notations du lemme 5.7.

On a finalement la situation suivante :

- $\mathbb{E}_{S_r}(A,B)$ peut être considéré comme l'ensemble des triplets $(\mathcal{E},\pi,F)$ où π est un homomorphisme de degré 0 de A dans $L_B(\mathcal{E})^{S_r}$, et F est un élément de $L_B(\mathcal{E})^{S_r}$ de degré 1 tel que $F^2 = 1$, $F = F^*$ et $[\pi(A), F] \subset K_B(\mathcal{E})$.
- $\mathbb{E}(A, B \rtimes_r \hat{S})$ peut être considéré comme l'ensemble des triplets $(\mathcal{H}_{B \rtimes_r \hat{S}}, \pi, F)$ où π est un homomorphisme de degré 0 de A dans $L_{B \rtimes_r \hat{S}}(\mathcal{H}_{B \rtimes_r \hat{S}})$ et F est un élément de $L_{B \rtimes_r \hat{S}}(\mathcal{H}_{B \rtimes_r \hat{S}})$ tel que $F^2 = 1$, $F = F^*$ et $[\pi(A), F] \subset K_{B \rtimes_r \hat{S}}(\mathcal{H}_{B \rtimes_r \hat{S}})$.
- le morphisme $\phi^* \circ j_r$ est induit par $(\mathcal{E},\pi,F) \mapsto (\mathcal{H}_{B \rtimes_r \hat{S}}, \Phi \circ \pi, \Phi(F))$ de $\mathbb{E}_{S_r}(A,B)$ vers $\mathbb{E}(A, B \rtimes_r \hat{S})$, qui est une bijection d'après le lemme 5.7.

De même en appliquant (5.3) à $B[0,1]$ on obtient une bijection entre $\mathbb{E}_{S_r}(A, B[0,1])$ et $\mathbb{E}(A, B \rtimes_r \hat{S}[0,1])$. Ces bijections sont clairement compatibles avec les applications de restriction ε_{0*} et ε_{1*} et envoient les triplets dégénérés sur des triplets dégénérés. L'application induite en K-théorie, $\phi^* \circ j_r$, est donc une bijection.

Pour vérifier que la bijection réciproque de $\phi^* \circ j_r$ est donnée par l'expression de l'énoncé, considérons à nouveau un triplet $(\mathcal{H}_{B\rtimes_r \hat{S}}, \pi, F)$ de $\mathbb{E}(A, B \rtimes_r \hat{S})$. Son image par ψ est représentée par le même triplet muni de la structure S_r-équivariante triviale. Soit π_r la représentation de $B \rtimes_r \hat{S}$ par action à gauche sur $B \otimes H$, le produit de Kasparov de notre triplet par β est donc représenté par $(\mathcal{H}_{B\rtimes_r \hat{S}} \otimes_{\pi_r} (B \otimes H), \pi \otimes_{\pi_r} 1, F \otimes_{\pi_r} \mathrm{id})$. On dispose d'un isomorphisme évident entre $\mathcal{H}_{B\rtimes_r \hat{S}} \otimes_{\pi_r} (B \otimes H)$ et $B \otimes H \otimes \mathcal{H}$, et dans cet isomorphisme un élément $F_0 \otimes_{\pi_r} \mathrm{id}$ avec $F_0 \in K_{B\rtimes_r \hat{S}}(\mathcal{H}_{B\rtimes_r \hat{S}}) \simeq (B \rtimes_r \hat{S}) \otimes K(\mathcal{H})$ agit sur $B \otimes H \otimes \mathcal{H}$ via la représentation $\pi_r \otimes \mathrm{id}$. Ainsi le triplet considéré est isomorphe à $(\mathcal{E}, \Phi^{-1} \circ \pi, \Phi^{-1}(F))$. De plus la structure équivariante sur $\mathcal{E}$ provient de celle de $B \otimes H = E$. Par définition de β il s'agit donc bien de $\delta'_{\mathcal{E}}$. ■

Remarque. L'essentiel de la démonstration a consisté à vérifier que Φ_1 et Φ_2 coïncident effectivement avec l'isomorphisme de KK-théorie induit par la bijection Φ du lemme 5.7, et avec son inverse. De plus, la vérification est beaucoup plus facile pour Φ_2. Donnons maintenant une méthode directe pour montrer que Φ_1 est l'inverse de Φ_2. Soit $y = \Phi_1 \Phi_2(x)$, d'après le lemme 5.4 on a

$$y = \phi^* j_r(\psi(x) \otimes \beta) = \phi^*(j_r \psi(x) \otimes j_r(\beta)) = (\phi^* j_r \psi(x)) \otimes j_r(\beta).$$

Or l'étude de l'exemple 1, page 54, montre qu'on a $j_r \psi = {\tau'}_{\hat{S}_r}$, et il est facile également de voir, grâce à la forme très particulière de l'homomorphisme ϕ, que $\phi^* \circ {\tau'}_{\hat{S}_r} = \phi_*$. Finalement on a donc $y = \phi_*(x) \otimes j_r(\beta) = x \otimes \phi^* j_r(\beta)$. Il suffit ainsi de vérifier que $\phi^* j_r(\beta) = \mathbb{1}$ pour obtenir l'égalité $\Phi_1 \circ \Phi_2 = \mathrm{id}$. Cela se fait par les mêmes calculs que pour l'étude de Φ_1, avec maintenant $A = (B \rtimes_r \hat{S})_1$, cependant β est représenté par le triplet $(B \otimes H, (B \rtimes_r \hat{S})_1, 0)$, plus simple qu'un triplet « générique » $(\mathcal{H}_B \otimes H, \pi, F)$ — en particulier on n'a besoin que du cas $E = B$ du lemme 5.9. □

Proposition 5.11 *Soit A une C^*-algèbre $\hat{S}_r$-équivariante et B une C^*-algèbre munie de la coaction triviale de $\hat{S}_r$. On a alors un morphisme canonique*

$$\Psi : KK_{\hat{S}_r}(A, B) \to KK(A \rtimes_p S, B)$$

qui est un isomorphisme lorsque V est de type compact.

Démonstration. Soit (E, π, F) un élément de $\mathbb{E}_{\hat{S}_r}(A, B)$, la représentation covariante π induit une représentation Π de $A \rtimes_p S$ sur E et il est tout-à-fait immédiat de vérifier que $(E, \Pi, F) \in \mathbb{E}(A \rtimes_p S, B)$. L'application ϕ ainsi définie est compatible avec la somme directe et, lorsque $B = B'[0,1]$, avec les applications de restriction ε_{0*} et ε_{1*}. On obtient donc un morphisme en KK-théorie.

Supposons maintenant que $\hat{S}_r$ est de type discret et construisons l'application réciproque de ϕ. Soit $(E, \Pi, F) \in \mathbb{E}(A \rtimes_p S, B)$, la représentation Π est induite par une représentation covariante $(\pi, \hat{X})$ de A sur E. Ici $S_{\hat{X}}$ est unifère, ainsi $\pi(A) \subset \Pi(A \rtimes_p \hat{S})$ et $(E, \pi, F) \in \mathbb{E}(A, B)$. D'autre part $\hat{X}$ munit E d'un structure de B-module hilbertien $\hat{S}_r$-équivariant, montrons que F est alors quasi-équivariant. On a par hypothèse

$$\pi(a)\left(\rho_{\hat{X}}(\omega) F - F \rho_{\hat{X}}(\omega)\right) \equiv \pi(a) \rho_{\hat{X}}(\omega) F - F \pi(a) \rho_{\hat{X}}(\omega) \in K_B(E) \equiv 0 \mod K_B(E),$$

$$\text{d'où} \quad \forall\, \omega \in K(H)^* \quad \mathrm{id} \otimes \omega \Big((\pi(A) \otimes \hat{S}_r)(\hat{X}(F \otimes 1) - (F \otimes 1)\hat{X}) \Big) \subset K_B(E). \tag{5.6}$$

D'autre part, $S_{\hat{X}}$ étant unifère, $\hat{X}$ est un élément de $\tilde{M}(S_{\hat{X}} \otimes \hat{S}_r) = M(S_{\hat{X}} \otimes \hat{S}_r)$, donc $(1 \otimes \hat{S}_r)\hat{X} \subset L_B(E) \otimes \hat{S}_r$ et ainsi

$$(\pi(A) \otimes \hat{S}_r)(\hat{X}(F \otimes 1) - (F \otimes 1)\hat{X}) \subset L_B(E) \otimes \hat{S}_r. \tag{5.7}$$

La C^*-algèbre $\hat{S}_r$ est incluse dans $K(H)$ — donc en particulier exacte —, ainsi on peut combiner (5.6) et (5.7) pour obtenir

$$(\pi(A)\otimes\hat{S}_r)(\hat{X}(F\otimes 1) - (F\otimes 1)\hat{X}) \subset K_B(E)\otimes\hat{S}_r, \quad \text{d'où}$$
$$(\pi(A)\otimes\hat{S}_r)(\hat{X}(F\otimes 1)\hat{X}^* - (F\otimes 1)) \subset K_B(E)\otimes\hat{S}_r.$$

On a donc bien $(E,\pi,F) \in \mathbb{E}_{\hat{S}_r}(A,B)$, et il est clair que $(E,\Pi,F) \mapsto (E,\pi,F)$ est la réciproque de ϕ. ■

5.4 K-moyennabilité

Rappelons quelques propriétés équivalentes caractérisant la moyennabilité d'un groupe localement compact [Gre69, Eym75] :

i. il existe une moyenne invariante sur $L^\infty(G)$,
ii. la représentation régulière de G admet presque des vecteurs invariants,
iii. la représentation triviale de G est faiblement contenue dans la régulière,
iv. $C_r^*(G)$ est co-unifère,
v. λ est un isomorphisme de $C_p^*(G)$ vers $C_r^*(G)$,
vi. pour toute C^*-algèbre G-équivariante A, $A \rtimes_p G \simeq A \rtimes_r G$,

De plus ces propriétés impliquent la nucléarité de $C_r^*(G)$, mais la réciproque n'est vraie que dans le cas discret. Dans le cadre quantique, on pose la définition suivante [Voi77, ES86, BS93, Bla96] :

Définition 5.12 *On dit que $\hat{V}$ ou $\hat{S}_r$ est* moyennable *si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

iii_q. *la représentation triviale de S_p est faiblement contenue dans la régulière,*
iv_q. *S_r est co-unifère,*
v_q. *λ est un isomorphisme de S_p vers S_r,*
vi_q. *pour toute C^*-algèbre $\hat{S}_r$-équivariante A, $A \rtimes_p S \simeq A \rtimes_r S$.*

Citons également la propriété équivalente suivante, qui peut être rapprochée de *ii* : il existe une famille filtrante de vecteurs unitaires $\xi_\alpha \in H$ telle que $||V(\xi_\alpha\otimes\eta) - \xi_\alpha\otimes\eta|| \to 0$ pour tout $\eta \in H$. On peut par ailleurs montrer que $iii_q - vi_q$ impliquent une propriété analogue à *i* : l'existence d'un poids non normal invariant sur S_r'' [DQV01]. La réciproque n'est connue que dans le cas discret et unimodulaire, et dans ce cas on a aussi l'équivalence avec la nucléarité de $\hat{S}_r$ [Rua96].

La C^*-algèbre de Hopf $C(G)$ est toujours co-unifère, ainsi les duaux des groupes localement compacts sont moyennables : cela généralise la moyennabilité des groupes abéliens. Le dual du groupe quantique $SU_q(n)$ de Woronowicz est également moyennable, cf [Nag93, BMT01], et plus généralement c'est le cas des duaux des déformations des groupes $Sp(2n)$, $Spin(n)$ [Ban99]. D'autre part les groupes quantiques compacts sont moyennables d'après le lemme 4.9, comme dans le cas non quantique.

Dans [Cun83], Cuntz a introduit une notion de K-moyennabilité pour les groupes discrets qui est caractérisée par des assertions analogues à $iii - vi$ en K-théorie :

iii_K. l'élément $\mathbb{1}$ de $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ est représenté par un triplet $(E,1,F)$ tel que la représentation de G sur E soit faiblement contenue dans la régulière,
iv_K. il existe un élément $\alpha \in KK(C_r^*(G),\mathbb{C})$ tel que $\lambda^*(\alpha) = [\hat{\varepsilon}_p]$,

v_K. $[\lambda] \in KK(C_p^*(G), C_r^*(G))$ est inversible,

vi_K. pour toute C^*-algèbre G-équivariante A, $[\lambda_A] \in KK(A \rtimes_p G, A \rtimes_r G)$ est inversible.

Le cas localement compact a ensuite été étudié par Julg et Valette [JV84], dans ce cas on a $iii_K \Rightarrow vi_K \Rightarrow v_K \Rightarrow iv_K$. Les relations entre des assertions analogues pour les groupes quantiques sont étudiées au théorème 5.14.

Notons que dans le cas de la moyennabilité, la démonstration de $iii \Rightarrow vi$ est basée sur le fait que le produit tensoriel d'une représentation covariante par la représentation régulière est faiblement contenu dans la représentation covariante régulière. Cela équivaut en fait à l'existence de l'homomorphisme δ'_A introduit au lemme 4.6. La preuve de l'assertion analogue à $iii \Rightarrow vi$ en K-théorie et pour les groupes quantiques repose également sur l'existence de cet homomorphisme.

Lemme 5.13 *Soit $(E, 1, F)$ un représentant d'un élément $\beta \in KK_{\hat{S}_r}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, et π la représentation de S_p associée à la coaction de $\hat{S}_r$ sur E. Alors on a les représentants explicites de classes de KK-théorie :*

$$\hat{\jmath}_p \circ \tau_A(\beta) \ni ((A \rtimes_p S) \otimes E,\ (\mathrm{id} \otimes \pi) \circ \delta^A_{pp},\ \mathrm{id} \otimes F) \quad et$$
$$\hat{\jmath}_r \circ \tau_A(\beta) \ni ((A \rtimes_r S) \otimes E,\ (\mathrm{id} \otimes \pi) \circ \delta^A_{rp},\ \mathrm{id} \otimes F).$$

Démonstration. Par définition, l'élément $\hat{\jmath}_p \circ \tau_A(\beta)$ de $KK(A \rtimes_p S, A \rtimes_p S)$ est représenté par le triplet $((A \otimes E) \rtimes_p S, (\mathrm{id} \otimes 1) \rtimes_p \mathrm{id}, (\mathrm{id} \otimes F) \otimes 1)$, où $(\mathrm{id} \otimes 1)$ est l'action par multiplication de A sur le premier facteur de $A \otimes E$. Mais $(A \otimes E) \rtimes_p S = (A \otimes E) \otimes_A (A \rtimes_p S)$ s'identifie canoniquement à $(A \rtimes_p S) \otimes E$. Examinons comment se lit l'action de $A \rtimes_p S \hookrightarrow K_A(A \otimes E) \rtimes_p S$ dans cette identification.

Soit $E' = A \otimes E$, on reprend les notations de la démonstration du lemme 5.2 : i et j sont les morphismes naturels de $L_A(A \oplus E')$ et $M(A \rtimes_p S)$ dans $K_A(A \oplus E') \rtimes_p S$ respectivement, et f et e sont les projections respectives sur le premier et le second facteur de $A \oplus E'$. Soit $\xi \in E'$, $T\xi$ l'élément correspondant de $K_A(A, E') \subset L_A(A \oplus E')$, et $x \in A \rtimes_p S$. Par définition, l'action d'un élément $\pi_p(k)\rho_{\hat{X}_p}(\omega) \in K_A(E') \rtimes_p S$ sur un vecteur $i(T\xi)j(x)$ de $i(e)Ci(f)$ s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\pi_p(k)\rho_{\hat{X}_p}(\omega) \cdot i(T\xi)j(x) &= (\mathrm{id} \otimes \omega)\Big((i(k) \otimes 1)\ (j \otimes \mathrm{id})(\hat{X}_p)\ (i(T\xi) \otimes 1)\ (j(x) \otimes 1)\Big) \\ &= (\mathrm{id} \otimes \omega)\Big((iTk \otimes \mathrm{id})\delta_{E'}(\xi)\ (j \otimes \mathrm{id})(\hat{X}_p(x \otimes 1))\Big),\end{aligned}$$

car le morphisme i est covariant et $\delta_{K(A \oplus E')}(T\xi) = (T \otimes \mathrm{id})\delta_{E'}(\xi)$. L'identification entre $i(e)Ci(f)$ et $E' \rtimes_p S = E' \otimes_A (A \rtimes_p S)$ est donnée par $i(T\xi)j(x) \mapsto \xi \otimes_A x$, on peut donc exprimer l'action de $\pi_p(k)\rho_{\hat{X}_p}(\omega) \in K_A(E') \rtimes_p S$ sur $E' \rtimes_p S$ comme suit :

$$\pi_p(k)\rho_{\hat{X}_p}(\omega) \cdot (\xi \otimes_A x) = (\mathrm{id} \otimes \omega)\Big((k \otimes 1 \otimes 1)\ \delta_{E'}(\xi)_{13}\ (\hat{X}^A_p(x \otimes 1))_{23}\Big).$$

Maintenant on prend $\xi = 1 \otimes \zeta$ dans $E' = A \otimes E$ et $k = a \in A \subset K_A(A \otimes E)$. On obtient l'action de $A \rtimes_p S$ sur $(A \otimes E) \rtimes_p S$:

$$\pi^A_p(a)\rho_{\hat{X}^A_p}(\omega) \cdot ((1 \otimes \zeta) \otimes_A x) = (\mathrm{id} \otimes \omega)\Big((a \otimes \delta_E(\zeta))_{124}\ (\hat{X}^A_p(x \otimes 1))_{34}\Big).$$

On identifie enfin $(A \otimes E) \rtimes_p S$ à $(A \rtimes_p S) \otimes E$ au moyen de $(b \otimes \eta) \otimes_A y \mapsto \pi^A_p(b) y \otimes \eta$:

$$\begin{aligned}\pi^A_p(a)\rho_{\hat{X}^A_p}(\omega) \cdot (x \otimes \zeta) &= (\mathrm{id} \otimes \omega)\Big((\pi^A_p(a) \otimes 1 \otimes 1) X_{E\,23} \hat{X}^A_{p\,13}\Big)(x \otimes \zeta) \\ &= (\mathrm{id} \otimes \pi) \circ \delta^A_{pp}(\pi^A_p(a)\rho_{\hat{X}^A_p}(\omega))\ (x \otimes \zeta),\end{aligned}$$

où π est la représentation de S_p sur E induite par X_E. Ainsi l'action de $A \rtimes_p S$ sur $(A \rtimes_p S) \otimes E$ qui provient de l'identification $(A \otimes E) \rtimes_p S \simeq (A \rtimes_p S) \otimes E$ est $(\mathrm{id} \otimes \pi) \circ \delta_{pp}^A$. De même on peut lire l'action de F dans cette identification :

$$((\mathrm{id} \otimes F) \otimes_A \mathrm{id}) \cdot (\xi \otimes_A x) = ((\mathrm{id} \otimes F)\xi) \otimes_A x \quad \text{d'où} \quad ((\mathrm{id} \otimes F) \otimes_A \mathrm{id}) \cdot (x \otimes \zeta) = (x \otimes F\zeta),$$

et finalement $\hat{\jmath}_p \circ \tau_A(\beta)$ est représenté par le triplet $((A \rtimes_p S) \otimes E, (\mathrm{id} \otimes \pi) \circ \delta_{pp}^A, \mathrm{id} \otimes F)$. Le cas réduit se traite de manière analogue. ■

Théorème 5.14 *Considérons les assertions suivantes :*

i. *Il existe un élément $\alpha \in KK(S_r, \mathbb{C})$ tel que $\lambda^*(\alpha) = [\varepsilon_p] \in KK(S_p, \mathbb{C})$.*

ii. *$[\lambda] \in KK(S_p, S_r)$ est inversible.*

iii. *Pour toute C^*-algèbre A σ-unifère et $\hat{S}_r$-équivariante, $[\lambda_A] \in KK(A \rtimes_p S, A \rtimes_r S)$ est inversible.*

iv. *L'élément $\mathbb{1} \in KK_{\hat{S}_r}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est représenté par un triplet $(E, 1, F)$ tel que la corepré-sentation de $\hat{S}_r$ sur E soit faiblement contenue dans la régulière.*

On a iv $\Rightarrow$ iii $\Rightarrow$ ii $\Rightarrow$ i. Lorsque V est de type compact on a iv $\Leftrightarrow$ iii $\Leftrightarrow$ ii $\Leftrightarrow$ i.

Démonstration. Les implications *iii* $\Rightarrow$ *ii* $\Rightarrow$ *i* sont évidentes. Démontrons *iv* $\Rightarrow$ *iii*. Avec les notations du lemme 5.13, $\hat{\jmath}_p \circ \tau_A(\mathbb{1})$ est représenté par le triplet $((A \rtimes_p S) \otimes E$, $(\mathrm{id} \otimes \pi) \circ \delta_{p,p}^A$, $\mathrm{id} \otimes F)$. Or, par hypothèse, $\pi : S_p \to L(E)$ se factorise à travers S_r : on peut écrire $\pi = \pi' \circ \lambda$, et alors

$$(\mathrm{id} \otimes \pi) \circ \delta_{p,p}^A = (\mathrm{id} \otimes \pi') \circ \delta_{p,r}^A = (\mathrm{id} \otimes \pi') \circ \delta'_A \circ \lambda_A$$

d'après la proposition 4.5 et le lemme 4.6. Soit μ la classe de $((A \rtimes_p S) \otimes E$, $(\mathrm{id} \otimes \pi') \circ \delta'_A$, $\mathrm{id} \otimes F)$ dans $KK(A \rtimes_r S, A \rtimes_p S)$, on a donc $[\lambda_A] \otimes \mu = \hat{\jmath}_p \circ \tau_A(\mathbb{1}) = \mathbb{1}_{A \rtimes_p S}$. De l'autre côté, $\mu \otimes [\lambda_A]$ est représenté par le triplet $((A \rtimes_r S) \otimes E, (\mathrm{id} \otimes \pi) \circ \delta_{r,p}^A, \mathrm{id} \otimes F)$ car

$$(\lambda_A \otimes \pi') \circ \delta'_A = (\mathrm{id} \otimes \pi') \circ \delta_{r,r}^A = (\mathrm{id} \otimes \pi) \circ \delta_{r,p}^A.$$

Ainsi, d'après le lemme 5.13, $\mu \otimes [\lambda_A] = \hat{\jmath}_r \circ \tau_A(\mathbb{1}) = \mathbb{1}_{A \rtimes_r S}$ donc μ est un inverse de $[\lambda_A]$ et la propriété *iii* est vérifiée.

Démontrons enfin *i* $\Rightarrow$ *iv* dans le cas compact. On a $\Psi(\mathbb{1}_{\mathbb{C}}) = [\varepsilon_p]$ où Ψ est le morphisme de la proposition 5.11 : en effet la représentation triviale de $\hat{V}$ sur $\mathbb{C}$ correspond à l'homomorphisme $\varepsilon_p : S_p \to \mathbb{C}$. Par ailleurs, si (E, π, F) est un représentant d'un élément $\alpha \in KK(S_r, \mathbb{C})$, notons β l'élément de $KK_{\hat{S}_r}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ représenté par $(E, 1, F)$, où E est muni de la représentation $(\pi \otimes \mathrm{id})(\hat{V})$. Cette représentation est faiblement contenue dans la régulière et correspond à l'homomorphisme $\pi \circ \lambda : S_p \to L_B(E)$, ainsi on a $\Psi(\beta) = \lambda^*(\alpha)$. Par conséquent, si α est l'élément de l'assertion *i*, on a $\Psi(\beta) = \Psi(\mathbb{1}_{\mathbb{C}})$. Or dans le cas compact Ψ est un isomorphisme, donc $\beta = \mathbb{1}_{\mathbb{C}}$, ce qui achève la démonstration. ■

Remarque. Donnons une démonstration directe de *i* $\Rightarrow$ *iii* dans le cas compact, comme dans [Cun83]. Dans le cas discret, le lemme 5.13 peut s'écrire ainsi :

$$\hat{\jmath}_p \circ \tau_A \;=\; \delta_{pp}^{A\,*} \circ \tau_{A \rtimes_p S} \circ \Psi \quad : \quad KK_{\hat{S}_r}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \to KK(A \rtimes_p S, A \rtimes_p S).$$

D'autre part on a vu dans la démonstration de *i* $\Rightarrow$ *iv* qu'on a $\Psi(1) = \lambda^*(\alpha)$, d'où

$$\hat{\jmath}_p \circ \tau_A(\mathbb{1}) = \delta_{pp}^{A\,*} \circ \tau_{A \rtimes_p S} \circ \lambda^*(\alpha) = \delta_{pr}^{A\,*} \circ \tau_{A \rtimes_p S}(\alpha) = \lambda_A^* \circ \delta_A'^* \circ \tau_{A \rtimes_p S}(\alpha).$$

Posons alors $\mu = \delta_A'^* \circ \tau_{A\rtimes_p S}(\alpha) = [\delta_A']\otimes_{S_r}\alpha \in KK(A \rtimes_r S, A \rtimes_p S)$ et montrons que c'est l'inverse de $[\lambda_A]$, en travaillant uniquement au niveau des éléments de KK-théorie. On a

$$\begin{aligned}
\mu\otimes[\lambda_A] &= [\delta_A']\otimes\tau_{A\rtimes_p S}(\alpha)\otimes[\lambda_A] \\
&= [\delta_A']\otimes[\Sigma]\otimes(\alpha\otimes_{\mathbb{C}}[\lambda_A]) = [\delta_A']\otimes([\lambda_A]\otimes_{\mathbb{C}}\alpha) \\
&= [\delta_A']\otimes\tau'_{S_r}([\lambda_A])\otimes\tau_{A\rtimes_r S}(\alpha),
\end{aligned}$$

par commutativité du produit de Kasparov au-dessus de $\mathbb{C}$. Or $\tau'_{S_r}([\lambda_A])$ est l'élément de $KK((A \rtimes_p S)\otimes S_r, (A \rtimes_r S)\otimes S_r)$ qui correspond à $\lambda_A\otimes\mathrm{id} : (A \rtimes_p S)\otimes S_r \to (A \rtimes_r S)\otimes S_r$. Comme $(\lambda_A\otimes\mathrm{id}) \circ \delta_A' = \delta_{r,r}^A = (\mathrm{id}\otimes\lambda) \circ \delta_{r,p}^A$, on a donc

$$\begin{aligned}
&\mu\otimes[\lambda_A] = [\delta_{r,p}^A]\otimes\tau_{A\rtimes_r S}([\lambda])\otimes\tau_{A\rtimes_r S}(\alpha), \quad \text{donc par hypothèse :} \\
&\mu\otimes[\lambda_A] = [\delta_{r,p}^A]\otimes\tau_{A\rtimes_r S}([\varepsilon_p]).
\end{aligned}$$

Tous les éléments du membre de droite proviennent maintenant d'homomorphismes, $\delta_{r,p}^A$ et $\mathrm{id}\otimes\varepsilon_p$ respectivement. Or d'après le lemme 4.9 $(\mathrm{id}\otimes\varepsilon_p) \circ \delta_{r,p}^A = \mathrm{id}$, donc $\mu\otimes[\lambda_A]$ vaut $\mathbb{1}$ dans $KK(A \rtimes_r S, A \rtimes_r S)$. On procède de même pour montrer que μ est inverse à gauche de $[\lambda_A]$, sans avoir besoin cette fois de la commutativité de $\otimes_{\mathbb{C}}$. D'après les lemmes 4.3 et 4.6, $\delta_A' \circ \lambda_A = \delta_{p,r}^A = (\mathrm{id}\otimes\lambda) \circ \delta_{p,p}^A$ donc

$$\begin{aligned}
[\lambda_A]\otimes\mu &= [\lambda_A]\otimes[\delta_A']\otimes\tau_{A\rtimes_p S}(\alpha) \\
&= [\delta_{p,p}^A]\otimes\tau_{A\rtimes_p S}([\lambda])\otimes\tau_{A\rtimes_p S}(\alpha), \quad \text{donc par hypothèse} \\
[\lambda_A]\otimes\mu &= [\delta_{p,p}^A]\otimes\tau_{A\rtimes_p S}([\varepsilon_p]).
\end{aligned}$$

On conclut comme plus haut en remarquant que $(\mathrm{id}\otimes\varepsilon_p) \circ \delta_{p,p}^A = \mathrm{id}$, toujours d'après le lemme 4.9. □

Définition 5.15 *Soit $\hat{S}_r$ la C^*-algèbre de Hopf réduite duale d'un unitaire multiplicatif régulier et irréductible. On dit que $\hat{V}$ ou $\hat{S}_r$ est K-moyennable lorsque l'assertion iv du théorème 5.14 est vérifiée.*

Remarques.

1. L'élément $\alpha \in KK(S_r, \mathbb{C})$ est une généralisation de l'homomorphisme $\varepsilon_r : S_r \to \mathbb{C}$ lorsque S_r n'est pas co-unifère.
2. Lorsque $\hat{S}_r$ est moyennable, elle est bien sûr K-moyennable. Le groupe libre à 2 générateurs fournit un exemple de C^*-algèbre de Hopf (commutative) non moyennable mais K-moyennable [Cun83, JV83]. □

Troisième partie

Exemples d'arbres quantiques et KK-théorie

Présentation

Dans cette partie on cherche à généraliser la construction de l'opérateur de Julg-Valette pour les groupes agissant sur un arbre [JV83, JV84, JV85]. On s'intéresse en particulier au cas des groupes quantiques compacts libres $A_u(Q)$ et $A_o(Q)$: en effet ils peuvent être considérés à certains égards comme des analogues quantiques des groupes libres F_n, et la construction de Julg et Valette fournit entre autres une preuve conceptuelle de la K-moyennabilité des F_n. Ce résultat est d'ailleurs à l'origine de la notion de K-moyennabilité [Cun83] et permet de ramener le calcul de la K-théorie de $C_r^*(F_n)$, effectué initialement dans [PV82], à celui de la K-théorie de $C_p^*(F_n)$, effectué de manière beaucoup plus élémentaire dans [Cun82].

On commence par étudier l'exemple simple de l'opérateur de Julg-Valette associé à un produit libre amalgamé de groupes quantiques discrets, et on en déduit qu'un produit amalgamé de groupes quantiques discrets et moyennables est K-moyennable. Puis on une donne une définition des graphes classique et quantique associés à un groupe quantique discret, et on introduit l'opérateur de Julg-Valette correspondant lorsque le graphe classique est un arbre. Son étude s'avère plus complexe que dans le cas commutatif à cause de la non-involutivité de l'opérateur de retournement : on mène en particulier les calculs jusqu'au bout dans le cas de $A_o(Q)$.

6 Amalgames de groupes quantiques discrets moyennables

6.1 Compléments sur les produits libres amalgamés

On commence par quelques compléments sur les sous-groupes de groupes quantiques discrets et les produits libres amalgamés de groupes quantiques discrets, cf [Wan95] et la section 2.5. En particulier le lemme 6.4 généralise au cas amalgamé l'égalité $h = h_1 * h_2$ pour l'état de Haar d'un produit libre de groupes quantiques discrets. Le lemme 6.4 et la proposition 6.2 montrent notamment que la C^*-algèbre de Hopf réduite d'un produit amalgamé $S_1 *_T S_2$ s'identifie à un produit amalgamé réduit.

Proposition 6.1 *Soit (S, δ) une C^*-algèbre de Hopf bisimplifiable unifère, $\mathcal{C}$ la catégorie de ses coreprésentations de dimension finie et $(\hat{S}, \hat{\delta})$ la C^*-algèbre de Hopf duale. On a alors une bijection entre :*

i. les sous-C^*-algèbres de Hopf bisimplifiables $T \subset S$ contenant 1_S,

ii. les sous-catégories pleines $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ telles que $1_{\mathcal{C}} \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ et $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$,

Étant donnée une sous-catégorie $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$, la C^*-algèbre T correspondante est le sous-espace fermé de S engendré par les coefficients des coreprésentations $r \in \mathcal{D}$.

Démonstration. Soit T une sous-C^*-algèbre de Hopf bisimplifiable de S contenant 1_S et $\mathcal{D}$ la catégorie de ses coreprésentations de dimension finie. Par unicité, sa mesure de Haar h_T est la restriction de h_S. Soit $v \in L(H) \otimes T$, $v' \in L(H') \otimes T$ deux coreprésentations de dimension finie de T et χ, $\chi' \in T$ leurs caractères : modulo l'inclusion canonique de T dans S, v et v' sont aussi des coreprésentations de S de caractères χ et χ'. Si v et v' sont irréductibles et non équivalentes pour T, on a $h_S(\chi^* \chi) = h_T(\chi^* \chi) = 1$ et $h_S(\chi^* \chi') = h_T(\chi^* \chi') = 0$, donc v et v' sont irréductibles et non équivalentes pour S [Wor87a, th 5.8]. On en déduit un foncteur injectif et additif de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{C}$ qui induit l'identité, modulo l'inclusion $T \subset S$, au niveau des coreprésentations et morphismes d'entrelacement. Il est clair que le produit tensoriel (resp. la conjugaison, l'unité) de $\mathcal{D}$ coïncide avec celui de $\mathcal{C}$ — en effet ces notions sont définies au niveau des coreprésentations. Ainsi $\mathcal{D}$ vérifie *ii* car T est une sous-C^*-algèbre de S contenant 1_S. Remarquons que la condition $1_\mathcal{C} \in \mathcal{D}$ résulte des deux autres.

Inversement, soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ vérifiant *ii* et T le sous-espace fermé de S engendré par les coefficients des coreprésentations qui sont dans $\mathcal{D}$. D'après les expressions (2.2) du produit et de l'involution de S en fonction du produit tensoriel et de la conjugaison de $\mathcal{C}$, les conditions $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$ et $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ assurent que T est une sous-C^*-algèbre de S. Elle contient 1_S car $1_\mathcal{C} \in \mathcal{D}$. Le coproduit δ envoie T dans $T \otimes T$ d'après son expression (2.5). Enfin, T est bisimplifiable car elle est engendrée par les coefficients de représentations unitaires : cf [Wor87a, th. 4.9]. ■

Proposition 6.2 *Soit (S, δ) une C^*-algèbre de Hopf bisimplifiable unifère. On suppose que S est réduite, c'est-à-dire que sa représentation régulière est fidèle. Soit $T \subset S$ vérifiant la condition i de la proposition 6.1, alors T est également réduite et il existe une unique espérance conditionnelle $P : S \twoheadrightarrow T$ telle que $(\mathrm{id} \otimes P) \circ \delta = (P \otimes \mathrm{id}) \circ \delta = \delta \circ P$. L'état de Haar h_T est la restriction de h_S et on a $h_S = h_T \circ P$.*

Démonstration. Soit $s \notin \mathcal{D}$, $t \in \mathcal{D}$ et r un sous-objet irréductible de $s \otimes t$: on a alors $s \subset r \otimes \bar{t}$ donc r ne peut pas être dans $\mathcal{D}$. De même si r est un sous-objet irréductible de $t \otimes s$ on a $\bar{r} \subset \bar{s} \otimes \bar{t}$, donc $\bar{s} \subset \bar{r} \otimes t$ et par conséquent $(s \notin \mathcal{D}$ et $t \in \mathcal{D}) \Rightarrow \bar{r} \notin \mathcal{D}$, ce qui équivaut à $r \notin \mathcal{D}$. Enfin il est clair que $s \notin \mathcal{D} \Rightarrow \bar{s} \notin \mathcal{D}$. Soit $\mathcal{S}^\circ$ (resp. $\mathcal{T}$) le sous-espace de S engendré par les coefficients des coreprésentations $r \notin \mathcal{D}$ (resp. $r \in \mathcal{D}$), et S° sa fermeture. La somme $\mathcal{T} + \mathcal{S}^\circ$ est directe et dense dans S. Les remarques précédentes sur les coreprésentations de S se traduisent par les inclusions $S^\circ T \subset S^\circ$, $TS^\circ \subset S^\circ$ et $S^{\circ *} \subset S^\circ$. On en déduit en particulier que $\Lambda_h(\mathcal{T})$ et $\Lambda_h(\mathcal{S}^\circ)$ sont orthogonaux dans la construction GNS de (S, h_S) : en effet pour $x \in \mathcal{S}^\circ$ et $y \in \mathcal{T}$ on a $x^* y \in \mathcal{S}^\circ$ donc $h_S(x^* y) = 0$.

Comme on l'a déjà remarqué dans la démonstration précédente, l'unicité de h_T montre que la restriction de h_S à T est h_T. Soit $y \in T$ un élément du noyau de la représentation régulière de T. Soit $x \in S$ que l'on écrit comme limite de sommes $y_n + z_n$ avec $y_n \in \mathcal{T}$ et $z_n \in \mathcal{S}^\circ$, pour tout n on a $h_S(y y_n) = h_T(y y_n) = 0$ par hypothèse sur y et $h(y z_n) = 0$ car $y z_n \in S^\circ$, donc $h(yx) = 0$. Par conséquent, pour tous x, $x' \in \mathcal{S}$ on a $h_S(x^* y x') = h_S(y\, x'(f_1 \star x^* \star f_1)) = 0$, donc $y = 0$ par hypothèse sur S. Ainsi T est réduite.

Identifions S et T à leur image par la représentation régulière de S dans $L(H)$. Soit p la projection orthogonale sur l'adhérence de $\Lambda_h(\mathcal{T})$: d'après le début de la démonstration c'est donc la projection de H sur l'adhérence de $\Lambda_h(\mathcal{T})$ parallèlement à l'adhérence de $\Lambda_h(\mathcal{S}^\circ)$, par conséquent on a $pSp = pTp$. De plus $(y \mapsto pyp)$ est un homomorphisme bijectif de T sur pTp car T est réduite, c'est donc un isomorphisme. L'application $(P : s \mapsto psp)$ est l'espérance conditionnelle recherchée.

Soit q la projection orthogonale sur $\mathbb{C}\Lambda_h(1)$, on a $qp = pq = q$ donc $h_S(s)\Lambda_h(1) = qsq = qpspq = h_T(psp)\Lambda_h(1)$, ainsi on a bien $h_S = h_T \circ P$. D'autre part il est immédiat de vérifier l'identité $(P \otimes \mathrm{id}) \circ \delta = (\mathrm{id} \otimes P) \circ \delta = \delta \circ P$ sur chacun des sous-espaces $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}^\circ$. Pour finir, montrons en vue du lemme 6.3 que $\mathrm{Ker}\ P = S^\circ$. Il est clair que $\mathcal{S}^\circ$ est contenu dans $\mathrm{Ker}\ P$, inversement écrivons un élément $x \in \mathrm{Ker}\ P$ comme limite de sommes $y_n + z_n$ avec $y_n \in \mathcal{T}$ et $z_n \in \mathcal{S}^\circ$, on a $P(y_n + z_n) = y_n \to 0$, donc x est dans S°.

On va maintenant montrer un résultat légèrement plus fort que l'unicité de P. On ne suppose plus que S est réduite. Soit $\lambda : S \to S_r$ sa représentation régulière gauche, δ_r le coproduit de S_r, qui se restreint à $T_r = \lambda(T)$, et $P : S_r \to T_r$ l'espérance conditionnelle introduite plus haut. Soit P' une application linéaire continue de S dans T_r telle que $P'_{|T} = \lambda$ et $(P'\otimes\lambda) \circ \delta = (\lambda\otimes P') \circ \delta = \delta_r \circ P'$. Alors $P' = P \circ \lambda$. En effet, sur T cette égalité résulte immédiatement des égalités $P'_{|T} = \lambda$ et $P_{|T_r} = \mathrm{id}$. Il reste alors à montrer que $P'x = 0$ pour $x \in \mathcal{S}^\circ$. Comme $P'x$ est dans T_r et $\delta_r(T_r) \subset T_r\otimes T_r$, on a $(\mathrm{id}\otimes P)\delta_r(P'x) = \delta_r(P'x)$. Mais d'autre part $(\mathrm{id}\otimes P)\delta_r(P'x) = (P'\otimes P\lambda)\delta(x) = 0$ car $\delta(x)$ est dans $\mathcal{S}^\circ\otimes\mathcal{S}^\circ$ et P est nul sur $\mathcal{S}_r^\circ$. Ainsi $\delta_r(P'x) = 0$, donc $P'x = 0$. ■

Lemme 6.3 *On reprend les hypothèses et notations de la proposition 6.2 et on note E le T-module hilbertien de la représentation GNS de S associée à P.*

1. *La relation sur* Irr $\mathcal{C}$ *définie par* $r \sim r' \Leftrightarrow (\exists\ t \in \mathcal{D}\quad t \subset \bar{r}\otimes r')$ *est une relation d'équivalence, on note* $(\mathrm{Irr}\ \mathcal{C})/\mathcal{D}$ *le quotient correspondant.*
2. *Soit $\mathcal{S}^r$ le sous-espace de $\mathcal{S}$ engendré par les coefficients d'une coreprésentation $r \in \mathcal{C}$. Pour $\alpha \in (\mathrm{Irr}\ \mathcal{C})/\mathcal{D}$ on note $\mathcal{S}^\alpha = \sum_{r\in\alpha} \mathcal{S}^r$, soit S° la fermeture de $\sum_{\alpha\neq 1} \mathcal{S}^\alpha$. Alors on a* Ker $P = S^\circ$.
3. *Notons E^α et E^r les fermetures respectives de $\Lambda_P(\mathcal{S}^\alpha)$ et $\Lambda_P(\mathcal{S}^r)$ dans E. Soit $r \in \alpha$, alors le sous-T-module hilbertien fermé de E engendré par E^r est E^α. De plus E est la somme directe orthogonale des E^α.*

Démonstration.

1. Le premier point repose essentiellement sur les équivalences $t \subset \bar{r}\otimes r' \Leftrightarrow \bar{r} \subset t\otimes\bar{r}' \Leftrightarrow r \subset r'\otimes\bar{t}$, déjà utilisées dans la démonstration précédente. Comme $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$ on a donc en particulier $r \sim r' \Leftrightarrow r \subset r'\otimes\mathcal{D}$. Avec cette expression il est clair que les hypothèses $1_\mathcal{C} \in \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}\otimes\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ entraînent la réflexivité et la transitivité de $\sim$, tandis que la condition $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$ et la définition de la relation $\sim$ montrent qu'elle est symétrique.

2. Il est clair sur la définition que la classe de $1_\mathcal{C}$ dans $(\mathrm{Irr}\ \mathcal{C})/\mathcal{D}$ est Irr $\mathcal{D}$. Ainsi l'espace $\mathcal{S}^\circ$ défini ici coïncide avec celui qu'on a utilisé dans la démonstration de la proposition 6.2, et on a déjà vu que sa fermeture est le noyau de P.

3. Soit r et r' deux éléments de $\alpha \in (\mathrm{Irr}\ \mathcal{C})/\mathcal{D}$: il existe $t \in \mathcal{D}$ tel que $r' \subset r\otimes t$. Soit alors $y \in \mathcal{S}^{r'}$, c'est un coefficient de la coreprésentation $r\otimes t$, donc un élément de Vect $\mathcal{S}^r\mathcal{T}$. En sommant sur r' on obtient l'inclusion $\mathcal{S}^\alpha \subset$ Vect $\mathcal{S}^r\mathcal{T}$. Inversement, un produit d'un élément de $\mathcal{S}^r$ et d'un élément de $\mathcal{S}^t \subset \mathcal{T}$ est combinaison linéaire de coefficients de sous-coreprésentations de $r\otimes t$. Par définition, ces sous-coreprésentations sont dans α, donc $\mathcal{S}^r\mathcal{T} \subset \mathcal{S}^\alpha$. Ainsi E^α est bien le sous-T-module fermé engendré par E^r.

De même, soit α et β deux éléments distincts de $(\mathrm{Irr}\ \mathcal{C})/\mathcal{D}$ et $x \in \mathcal{S}^\alpha$, $y \in \mathcal{S}^\beta$ des coefficients respectifs de représentations $r \in \alpha$, $s \in \beta$. On a par définition $\langle\Lambda_P(x), \Lambda_P(y)\rangle = P(x^*y)$. Comme α et β sont distincts, les sous-objets de $\bar{r}\otimes s$ ne sont pas dans $\mathcal{D}$, donc x^*y est un élément de $\mathcal{S}^\circ$ et son image par P est nulle. Ainsi E^α et E^β, qui sont respectivement engendrés par les vecteurs $\Lambda_P(x)$ et $\Lambda_P(y)$ de la forme considérée, sont orthogonaux. Il est clair par ailleurs que la somme des E^α est dense dans le T-module hilbertien E. ■

Soit $S = S_1 *_T S_2$ un produit libre amalgamé de C^*-algèbres de Hopf bisimplifiables et unifères. Soit $\lambda : S \to S_r \subset L(H)$ la représentation régulière de S. D'après la proposition 6.2, appliquée à l'inclusion $S_1 \subset S$, la restriction de λ à S_1 coïncide avec la représentation régulière de S_1. En particulier λ se factorise à travers le produit libre amalgamé S' des C^*-algèbres réduites $S_{1,r}$ et $S_{2,r}$ relativement à T_r, et $S'_r = S_r$. La proposition 6.2 et le lemme suivant montrent que la mesure de Haar de S' est $h_T \circ (P_1 *_{T_r} P_2)$. Par conséquent $S_r = S'_r$ s'identifie au produit libre amalgamé réduit de $(S_{1,r}, P_1)$ et $(S_{2,r}, P_2)$.

Lemme 6.4 *Soit S_1, S_2 deux C^*-algèbres de Hopf bisimplifiables, unifères et réduites. Soit T une sous-C^*-algèbre de Hopf unifère commune à S_1 et S_2 et bisimplifiable. On note $S = S_1 *_T S_2$, et $\lambda : S \to S_r$ la représentation régulière gauche de S. Soit $P_1 : S_1 \twoheadrightarrow T$, $P_2 : S_2 \twoheadrightarrow T$ et $P : S_r \twoheadrightarrow T$ les espérances conditionnelles canoniques. Alors on a $P_1 *_T P_2 = P \circ \lambda$.*

Démonstration. Notons $P' = P_1 *_T P_2$. Par hypothèse on a $T = T_r$, donc la restriction de $\lambda : S \to S_r$ à T s'identifie à id_T. Par définition, P' coïncide avec P_1 sur $S_1 \subset S$, et P_1 coïncide sur $T \subset S_1$ avec id_T. Donc P' coïncide avec λ sur T. D'après la démonstration de la proposition 6.2, il suffit maintenant d'établir les égalités d'invariance $(P' \otimes \lambda) \circ \delta = (\lambda \otimes P') \circ \delta = \delta_r \circ P'$.

La C^*-algèbre S est un quotient du produit libre $S_1 *_{\mathbb{C}} S_2$, donc les éléments de la forme $s_1 \cdots s_n$ avec $s_k \in \mathcal{S}_{i_k}$ et $(i_j) \in I_n$ engendrent l'espace vectoriel normé S. On en déduit, en utilisant les décompositions $\mathcal{S}_i = \mathcal{T} \oplus \mathcal{S}_i^\circ$ et une récurrence immédiate, que S est également engendré par les éléments de $\mathcal{T}$ et les éléments de la forme $s_1 \cdots s_n$ avec $s_k \in \mathcal{S}_{i_k}^\circ$. Sur les éléments de $\mathcal{T}$, les égalités d'invariance à démontrer résultent immédiatement de l'identité $P'_{|T} = \lambda$.

Il reste donc à considérer les éléments $s = s_1 \cdots s_n$ avec $s_k \in \mathcal{S}_{i_k}^\circ$ et $(i_j) \in I_n$. Pour un tel élément on a $P'(s) = 0$, car S_1 et S_2 sont libres dans (S, P') et $S_i^\circ = \mathrm{Ker}\ P_i$. Mais d'autre part $\delta_{i_k}(s_k)$ s'écrit comme une somme $\sum_l s_{k,l} \otimes s'_{k,l}$ avec $s_{k,l}$, $s'_{k,l} \in \mathcal{S}_{i_k}^\circ$, car $\delta_i(\mathcal{S}_i^\circ) \subset \mathcal{S}_i^\circ \otimes \mathcal{S}_i^\circ$. Ainsi $\delta(s) = \delta_{i_1}(s_1) \cdots \delta_{i_n}(s_n)$ s'écrit comme une somme $\sum_l s_l \otimes s'_l$ où les s_l et les s'_l sont tous dans $\mathrm{Ker}\ P'$, toujours par liberté de S_1 et S_2. On a donc également $(P' \otimes \lambda) \circ \delta(s) = (\lambda \otimes P') \circ \delta(s) = 0$. ■

6.2 K-moyennabilité

Soit G_1 et G_2 deux groupes discrets, H un sous-groupe commun à G_1 et G_2, et $G = G_1 *_H G_2$. Alors $T = C_r^*(H)$ s'identifie à une sous-C^*-algèbre de Hopf commune à $C_r^*(G_1)$, $C_r^*(G_2)$ et $C_r^*(G)$. On dispose d'espérances conditionnelles canoniques $P_1 : C_r^*(G_1) \twoheadrightarrow T$, $P_2 : C_r^*(G_2) \twoheadrightarrow T$, $P : C_r^*(G) \twoheadrightarrow T$. Soit E_1, E_2 et E les T-modules hilbertien associés munis de leurs vecteurs distingués η_1, η_2 et η, d'après le lemme 6.4 on a $E = E_1 *_T E_2$.

Rappelons que l'espace des arêtes montantes du graphe associé à l'amalgame (G_1, G_2, H) peut être identifié à l'ensemble $\mathfrak{a}_+ = G/H$ si on choisit une application extrémités appropriée, l'espace ℓ_2 correspondant est alors $E \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$, où ε est la co-unité de T. D'autre part l'espace des sommets $\mathfrak{s} = G/G_1 \sqcup G/G_2$ est canoniquement en bijection avec $G(r,1)/H \sqcup G(r,2)/H$, donc l'espace ℓ_2 correspondant s'identifie à $E(r,1) \otimes_\varepsilon \mathbb{C} \oplus E(r,2) \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$. On note $(\eta_2 \otimes 1)$ la copie de $(\eta \otimes 1)$ dans le premier sous-espace, et $(\eta_1 \otimes 1)$ celle du second.

L'action à gauche de G sur $\mathfrak{a}_+$ se traduit au niveau des espaces ℓ_2 par la représentation naturelle de $C_p^*(G)$ sur $E \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$. Décrivons maintenant la représentation de $C_p^*(G)$ sur $E(r,1) \otimes_\varepsilon \mathbb{C} \oplus E(r,2) \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$ induite par l'action à gauche de G sur $G/G_1 \sqcup G/G_2$. D'une part l'action de G_2 sur G/G_1 induit une action de $C_p^*(G_2)$ sur le premier facteur $E(r,1) \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$ qui est la restriction de l'action naturelle de $C_p^*(G_2)$ sur $E \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$. D'autre part l'action de G_1 sur G/G_1 induit la représentation triviale de $C_p^*(G_1)$ sur $\mathbb{C}(\eta_2 \otimes 1)$, et la restriction de l'action naturelle de $C_p^*(G_1)$ sur $E(r,1)^\circ \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$.

On a déjà précisé dans les rappels ce qu'on entend par « application extrémités appropriée » de $\mathfrak{a}_+$ dans $\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$, lorsque G_1 est choisi comme origine dans $\mathfrak{s}$. On peut vérifier que l'opérateur but induit au niveau des espaces ℓ_2, de $E \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$ dans $E(r,1) \otimes_\varepsilon \mathbb{C} \oplus E(r,2) \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$, envoie $(\eta \otimes 1)$ sur $(\eta_2 \otimes 1)$, et les sous-espaces de $E(r,1)^\circ \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$ et $E(r,2)^\circ \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$ de l'espace de départ sur les mêmes sous-espaces de l'espace d'arrivée. L'opérateur de Julg-Valette est alors l'adjoint de cet opérateur but.

Définition 6.5 *Soit $S = S_1 *_T S_2$ un produit libre amalgamé de C^*-algèbres de Hopf bisimplifiables et unifères. On suppose S_1 et S_2 moyennables, alors T l'est aussi et on note ε sa co-unité. Soit (E_1, η_1) et (E_2, η_2) les T-modules hilbertiens avec vecteur distingué associés aux espérances conditionnelles canoniques de S_1 et S_2 sur T.*

1. *Soit (E, η) le produit libre de (E_1, η_1) et (E_2, η_2) amalgamé suivant T. Lorsque η est considéré comme un vecteur de $E(r,1)$ (resp. $E(r,2)$), on le note η_2 (resp. η_1).*
2. *Soit $K_{T,+} = E$ et $H_T = E(r,1) \oplus E(r,2)$. Les espaces de Hilbert $K_+ = K_{T,+} \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$ et $H = H_T \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$ sont respectivement appelés espaces ℓ_2 des arêtes montantes et des sommets du graphe quantique associé à l'amalgame (S_1, S_2, T).*
3. *L'espace de Hilbert K_+ est muni de la représentation naturelle de S. En particulier $S_1 \subset S$ stabilise $E(r,2) \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$ et $E(r,1)^\circ \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$. En faisant agir S_1 trivialement sur $(\eta_2 \otimes 1)$, on obtient une représentation de S_1 sur H. On obtient de même une représentation de S_2, et finalement de S, sur H.*
4. *L'opérateur de Julg-Valette associé au triplet (S_1, S_2, T) est $F = F_T \otimes_\varepsilon \mathrm{id}$, où $F_T \in L_T(H_T, K_{T,+})$ est défini par les formules*

$$F_T : \begin{cases} E(r,1) \oplus E(r,2) \to E, \\ \eta_2 \mapsto \eta, \quad \eta_1 \mapsto 0, \\ E(r,i)^\circ \xrightarrow{\mathrm{id}} E(r,i)^\circ \subset E. \end{cases}$$

Proposition 6.6 *On reprend les hypothèses et notations de la définition 6.5. Alors les représentations de S sur H et K_+ sont faiblement contenues dans sa représentation régulière.*

Démonstration. Comme T est moyennable, ε est faiblement contenue dans la représentation GNS de h_T, donc la représentation naturelle de S sur $K_+ = E \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$ est faiblement contenue dans sa représentation naturelle sur $E \otimes_{h_T} \mathbb{C}$, c'est-à-dire dans la régulière. On va montrer de même que la représentation de S sur $H = E(r,1) \otimes_\varepsilon \mathbb{C} \oplus E(r,2) \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$ est faiblement contenue dans $E \otimes_{h_T} \mathbb{C}$: traitons par exemple le cas de $E(r,1) \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$.

Il est clair que $(\eta_2 \otimes 1)$ est un vecteur cyclique pour cette représentation, calculons la forme positive sur S associée. On rappelle que l'espace vectoriel normé S est engendré par les éléments de T et les éléments de la forme $s_1 \cdots s_n$ — on sous-entend dans cette écriture que chaque s_k est dans $S^\circ_{i_k}$ pour un certain n-uplet $(i_j) \in I_n$. Si $s = s_1 \cdots s_n$ avec l'un au moins des s_k dans S°_2, alors $s(\eta_2 \otimes 1)$ est dans $E(r,1)^\circ \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$. D'autre part si $s \in S_1$, par définition on a $s(\eta_2 \otimes 1) = \varepsilon_1(s)(\eta_2 \otimes 1)$ où ε_1 est la co-unité de S_1. Ainsi

$$(\eta_2 \otimes 1 | s(\eta_2 \otimes 1)) = \begin{cases} 0 & \text{si } s = s_1 \cdots s_n \text{ avec } i_n \text{ ou } i_{n-1} = 2, \\ \varepsilon_1(s) & \text{si } s \in S_1. \end{cases} \tag{6.1}$$

D'autre part, soit $t \in S_1$ et $\zeta = \Lambda_{P_1}(t) \in E_1$ le vecteur correspondant dans la construction GNS associée à l'espérance conditionnelle P_1. On note h (resp. h_1, h_T) l'état de Haar de S (resp. S_1, S_T) et P l'espérance conditionnelle canonique de $S_r = \lambda(S)$ sur T. Calculons l'état vectoriel sur S associé au vecteur $\zeta\otimes 1 \in E\otimes_{h_T}\mathbb{C}$. De la même façon que plus haut on trouve, en utilisant le fait que h_1 est la restriction de $h = h_T \circ P \circ \lambda$:

$$(\zeta\otimes 1|s(\zeta\otimes 1)) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } s = s_1 \cdots s_n \text{ avec } i_n \text{ ou } i_{n-1} = 2, \\ h_1(t^*st) & \text{si } s \in S_1. \end{array} \right. \tag{6.2}$$

Maintenant, on peut exprimer l'hypothèse de moyennabilité de S_1 par le fait que l'état ε_1 est limite faible de combinaisons linéaires d'états associés à la représentation régulière de S_1, c'est-à-dire d'états de la forme $h_1(t^* \cdot t)$ avec $t \in S_1$. On en déduit immédiatement que l'état (6.1) est limite faible de combinaisons linéaires d'états de la forme (6.2) : ainsi, la représentation de S sur $E(r,1)\otimes_\varepsilon\mathbb{C}$ est faiblement contenue dans la représentation sur $E\otimes_{h_T}\mathbb{C}$. Finalement cette dernière est équivalente à la représentation régulière de S d'après le lemme 6.4. ■

Proposition 6.7 *On reprend les hypothèses et notations de la définition 6.5. Alors l'opérateur de Julg-Valette $F : H \to K_+$ est un opérateur de Fredholm qui commute modulo les opérateurs compacts aux représentations de S. En particulier il définit un élément de $KK(S,\mathbb{C})$ et $KK(S_r,\mathbb{C})$.*

Démonstration. Il est évident sur la définition que F est surjectif et que son noyau est de dimension 1, c'est donc un opérateur de Fredholm. La C^*-algèbre S étant engendrée par S_1 et S_2, il suffit de vérifier que F commute à l'action des éléments de $S_1 \cup S_2$ modulo les opérateurs compacts. Soit $x \in S_1$, on peut supposer que x est un coefficient d'une coreprésentation r de S_1. Soit α la classe de $\bar{r}$ dans $(\mathrm{Irr}\ \mathcal{C}_1)/\mathcal{D}$.

Soit y un élément de S_1^β avec $\beta \neq \alpha$: supposons par exemple que y est un coefficient d'une coreprésentation $s \in \beta$. Alors xy est combinaison linéaire de coefficients de sous-coreprésentations de $r\otimes s$, qui ne sont pas dans $\mathcal{D}$ car $\beta \neq \alpha$. Au niveau des T-modules hilbertiens, cela signifie que $xE_1^\beta \subset E_1^\circ$. On en déduit que l'action naturelle de x sur E envoie $(E_1^\alpha)^\perp \cap E(r,2)^\circ$ dans $E(r,2)^\circ$. Or l'action de x sur $E(r,2)^\circ$, considéré comme sous-espace de l'espace de départ ou de l'espace d'arrivée de F_T, provient de cette action naturelle. Comme de plus F_T coïncide avec l'identité sur ces sous-espaces, il s'ensuit que $[x, F_T]$ est nul sur $(E_1^\alpha)^\perp \cap E(r,2)^\circ$. Par ailleurs x stabilise $E(r,1)^\circ$, pour les mêmes raisons $[x, F_T]$ est donc nul sur ce sous-espace.

D'après le lemme 6.3, $E_1^\alpha\otimes_\varepsilon\mathbb{C}$ est de dimension finie — inférieure à celles des $\mathcal{S}^r$ pour tout $r \in \alpha$. On a montré que $[x, F_T]$ est nul sur l'orthogonal de $\mathbb{C}(\eta_2\otimes 1)\oplus\mathbb{C}(\eta_1\otimes 1)\oplus E_1^\alpha\otimes_\varepsilon\mathbb{C}$, il est donc de rang fini et en particulier compact. On procède de même pour un élément x de S_2. ■

Proposition 6.8 *On reprend les hypothèses et notations de la définition 6.5. Alors l'élément $\alpha \in KK(S,\mathbb{C})$ associé à l'opérateur de Julg-Valette $F : H \to K_+$ est égal à l'élément $[\varepsilon_S] \in KK(S,\mathbb{C})$ associé à la co-unité de S.*

Démonstration. Soit $\tilde{F}_T$ l'opérateur de H_T dans $K_{T,+} \oplus T$ qui se restreint à l'identité sur les sous-espaces $E(r,1)^\circ$ et $E(r,2)^\circ$ de H_T et $K_{T,+}$, et qui envoie η_1 (resp. η_2) sur 1_T (resp. η). Soit π la représentation de S sur $K_+ \oplus \mathbb{C}$ donnée par la définition 6.5 et la représentation triviale ε_S sur $\mathbb{C}$, et ρ la représentation de la définition 6.5 sur H. Soit $x \in \mathbb{E}(S,\mathbb{C})$ le triplet associé à $\tilde{F} = \tilde{F}_T\otimes_\varepsilon\mathrm{id}$, π et ρ. Il est clair que $\tilde{F}$ est une perturbation compacte de $F + 0 : H \to K_+ \oplus \mathbb{C}$, donc la classe de x dans $KK(S,\mathbb{C})$ est égale à $\alpha - 1$. Nous allons montrer par ailleurs que x est homotope à un triplet dégénéré.

Il est clair sur la définition que $\tilde{F}$ est unitaire, de plus on vérifie facilement qu'il commute aux actions de $S_2 \subset S$. En revanche il ne commute pas aux actions de S_1. Plus précisément, pour $s \in S_1$ on a comme dans la démonstration précédente $\tilde{F}\rho(s)(\zeta) = \pi(s)\tilde{F}(\zeta)$ pour $\zeta \in (E(r,1)^\circ + E_1^\perp \cap E(r,2)^\circ)\otimes_\varepsilon \mathbb{C} \subset H$, mais

$$\begin{aligned}
&(\tilde{F}\rho(s))\,(\eta_1\otimes 1) = \tilde{F}(\Lambda_P(s)\otimes 1) = (\Lambda_P(s)\otimes 1) \quad \text{et}\\
&(\pi(s)\tilde{F})\,(\eta_1\otimes 1) = \pi(s)1_{\mathbb{C}} = \varepsilon(s)1_{\mathbb{C}},\\
&(\tilde{F}\rho(s))\,(\eta_2\otimes 1) = \varepsilon(s)\tilde{F}(\eta_2\otimes 1) = \varepsilon(s)(\eta\otimes 1) \quad \text{et}\\
&(\pi(s)\tilde{F})\,(\eta_2\otimes 1) = \pi(s)(\eta\otimes 1) = (\Lambda_P(s)\otimes 1).
\end{aligned}$$

De même, si ζ_1 est dans $E_1^\circ \subset E(r,2) \subset H_T$ on peut écrire $s\zeta_1 = t\eta_1 + \zeta_1'$ avec $t \in T$ et $\zeta_1' \in E_1^\circ$, et on a alors

$$(\tilde{F}\rho(s))(\zeta_1\otimes 1) = \varepsilon(t)1_{\mathbb{C}} + (\zeta_1'\otimes 1) \quad \text{et} \quad (\pi(s)\tilde{F})(\zeta_1\otimes 1) = \varepsilon(t)(\eta\otimes 1) + (\zeta_1'\otimes 1).$$

Cela s'exprime encore sous la forme suivante : $\tilde{F}^*\pi(s)\tilde{F} = u^*\rho(s)u$, où $u \in L(H)$ se restreint à l'identité sur $E(r,1)^\circ\otimes_T\mathbb{C}$ et $E(r,2)^\circ\otimes_T\mathbb{C}$ et échange $(\eta_1\otimes_T 1)$ et $(\eta_2\otimes_T 1)$.

Il est facile de vérifier que u est unitaire, auto-adjoint et commute à $\rho(T)$, par conséquent la formule $u_t = \cos t + \mathrm{i}u\sin t$ définit une famille d'unitaires (u_t) qui commutent à $\rho(T)$. On pose $\rho_t(s) = u_t^*\rho(s)u_t$ pour $s \in S_1$ et $\rho_t(s) = \rho(s)$ pour $s \in S_2$, comme u_t commute à $\rho(T)$ pour tout t on obtient ainsi une famille de représentations (ρ_t) de $S = S_1 *_T S_2$ sur H. On pose de plus $\pi_t = \pi$ et $\tilde{F}_t = \tilde{F}$, cela définit une famille d'éléments (x_t) de $\mathbb{E}(S,\mathbb{C})$ qui établit une homotopie entre $x_0 = x$ et x_1, qui est dégénéré. ■

Les propositions 6.6, 6.7 et 6.8 permettent alors d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 6.9 *Soit S_1 et S_2 deux C^*-algèbres de Hopf unifères et bisimplifiables. Soit T une sous-C^*-algèbre de Hopf unifère et bisimplifiable commune à S_1 et S_2. Si les groupes quantiques discrets associés à S_1 et S_2 sont moyennables, alors le groupe quantique discret associé au produit libre amalgamé $S_1 *_T S_2$ est K-moyennable.* ■

Remarque 1. Ce théorème étend au cas quantique le résultat obtenu par Julg et Valette [JV84, cor. 4.1] comme corollaire du résultat plus général sur les groupes localement compacts agissant sur un arbre. Cependant la construction de l'homotopie de la proposition 6.8 est plus proche de celle utilisée par Cuntz dans [Cun83] pour l'étude d'un produit libre $G * \mathbb{Z}$. En effet la construction de la fonction de type négatif sur l'arbre associé à un amalgame (G_1, G_2, H), utilisée dans [JV84] pour obtenir l'homotopie entre α et 1, semble plus compliquée dans le cas quantique.

Le résultat de [Cun83], dans le cas non amalgamé, est en fait plus fort : on obtient la K-moyennabilité pour un produit libre de groupes discrets K-moyennables — cf aussi [Ger96], qui étudie la K-théorie des produits libres réduits et pleins de C^*-algèbres munies d'un état. Ce résultat est généralisé au cas d'un produit libre amalgamé de groupes discrets dans [Pim86]. □

Remarque 2. La structure d'« arbre quantique », suggérée par le vocabulaire de la définition 6.5, n'est pas utilisée explicitement dans les démonstrations qui suivent cette définition. Nous donnons maintenant un aperçu plus complet de cette structure, qui est l'analogue au niveau des espaces ℓ_2 des objets $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}$, θ, $\mathfrak{o}$ et $\mathfrak{b}$ intervenant dans la définition d'un graphe classique. Cette description et le résultat du théorème 6.9 seront une motivation pour la construction des graphes associés à un groupe quantique discret, à la section suivante.

On peut définir un espace total des arêtes K, « contenant » les arêtes montantes et descendantes, en partant de l'espace des sommets : on a $H_T = E(r,1) \oplus E(r,2)$, on pose $K_T = E(r,1)\otimes_T E_1 \oplus E(r,2)\otimes_T E_2$ et $K = K_T \otimes_\varepsilon \mathbb{C}$. L'espace K est muni d'un opérateur de retournement des arêtes $\Theta = \Theta_T \otimes \mathrm{id}$ donné par

$$\Theta_T : \begin{cases} \zeta\otimes\zeta_1 \in E(r,1)\otimes_T E_1^\circ \mapsto W_1^*(\zeta\otimes\zeta_1)\otimes\eta_2 \in E(r,2)^\circ\otimes_T\eta_2, \\ \zeta\otimes\eta_1 \in E(r,1)^\circ\otimes_T\eta_1 \mapsto W_2\zeta \in E(r,2)\otimes_T E_2^\circ, \quad \eta_2\otimes\eta_1 \mapsto \eta_1\otimes\eta_2 \end{cases}$$

et les formules analogues sur $E(r,2)\otimes_T E_2$. Il est clair que Θ_T est un isomorphisme involutif, et on a $K_T = \tilde K_{T,+} \oplus \Theta(\tilde K_{T,+})$ si $\tilde K_{T,+}$ est le sous-espace $E(r,1)\otimes E_1^\circ \oplus E(r,2)\otimes E_2^\circ \oplus \eta_1\otimes\eta_2$ de K_T. Notons que $\tilde K_{T,+}$ s'identifie à l'espace $K_{T,+}$ de la définition 6.5 au moyen de l'isomorphisme

$$\Phi_T : E(r,1)\otimes_T E_1^\circ \xrightarrow{W_1^*} E(r,2)^\circ, \quad E(r,2)\otimes_T E_2^\circ \xrightarrow{W_2^*} E(r,1)^\circ, \quad \eta_1\otimes\eta_2 \to \eta.$$

On peut munir K_T d'une représentation de S de la manière suivante. La C^*-algèbre S_2 agit sur $E(r,1)\otimes_T E_1$ par $\pi_2\otimes 1$. De même, S_1 agit sur $E(r,1)^\circ\otimes_T E_1$ par $\pi_1\otimes 1$, et sur $\eta_2\otimes E_1$ par $1\otimes\pi_1$. Les représentations de S_1 et S_2 sur $E(r,1)\otimes_T E_1$ ainsi définies sont compatibles avec les inclusions de T et on obtient donc une représentation de S. On fait agir S de manière analogue sur le deuxième sous-espace $E(r,2)\otimes_T E_2 \subset K_T$. On peut vérifier que Θ_T commute alors à l'action de S, en revanche ce n'est pas le cas de l'isomorphisme entre $\tilde K_{T,+}$ et $K_{T,+}$ lorsque ce dernier espace est muni de la représentation introduite à la définition 6.5 — le sous-espace $\tilde K_{T,+}$ n'est d'ailleurs pas stable sous l'action de S.

Soit Ψ_T la projection orthogonale de K_T sur $K_{T,g} = \mathrm{Ker}(\Theta_T - \mathrm{id})$ — on peut également considérer Ψ_T comme l'application quotient de K_T dans $K_T/\mathrm{Im}(\Theta_T - \mathrm{id})$. La restriction de Ψ_T à $\tilde K_{T,+}$ est un (multiple d'un) isomorphisme. Comme Θ_T commute à l'action de S sur K_T, le sous-module $K_{T,g}$ est stable sous cette action et on peut vérifier que $\Psi_T \circ \Phi_T : K_{T,+} \to K_{T,g}$ commute aux actions de S. Ainsi l'action de S sur $K_+ \simeq K_g$ provient plutôt de l'espace des arêtes géométriques K_g, tandis que l'opérateur but $B = F^* : K_+ \simeq K_g \to H$ provient plutôt de l'espace des arêtes montantes K_+.

Pour finir, soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des mots de la forme $m = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ avec $\alpha_k \in (\mathrm{Irr}\ \mathcal{C}_{i_k})/\mathcal{D}$ et $(i_j) \in I_n$ — on inclut le mot vide $\emptyset$ dans $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{E}(r,i)$ le sous-ensemble des mots tels que $i_n \neq i$, y compris $\emptyset$. Soit $\mathfrak{s} = \mathcal{E}(r,1) \sqcup \mathcal{E}(r,2)$, l'arbre classique $\mathfrak{g}$ associé à l'amalgame (S_1, S_2, T) est le graphe dont $\mathfrak{s}$ est l'ensemble des sommets et dans lequel
- $\emptyset_1$ est relié à $\emptyset_2$,
- m est relié à $m\alpha$ pour tout mot m et toute lettre α.

Soit $m = \alpha_1 \cdots \alpha_n \in \mathfrak{s}$, posons $E^m = E_{i_1}^{\alpha_1}\otimes_T \cdots \otimes_T E_{i_n}^{\alpha_n}$, $D^m = E_1$ si $m \in \mathcal{E}_1$ et $D^m = E_2$ si $m \in \mathcal{E}_2$. On dit que E^m est l'espace au-dessus du sommet classique m, et D^m, l'espace des directions en m, on a en effet

$$H_T = \oplus_{m\in\mathfrak{s}} E^m \quad \text{et} \quad K_T = \oplus_{m\in\mathfrak{s}} E^m \otimes_T D^m.$$

Le sous-espace $\eta_i T \subset D^m$ correspond aux arêtes descendantes, tandis que $E_i^\circ \subset D^m$ correspond aux arêtes montantes : par exemple Θ envoie une arête descendante partant de m sur une arête montante partant du prédécesseur de m dans $\mathfrak{g}$.

Dans la section suivante on s'intéresse à la notion de graphe quantique associé à un groupe quantique discret : on rencontrera des objets analogues à H, K, Θ, F, K_g, K_+, et une description « géométrique » au-dessus d'un graphe classique. Cependant l'opérateur de retournement Θ ne sera plus involutif, ce qui sera à l'origine de sérieuses difficultés pour l'utilisation de l'opérateur de Julg-Valette F en K-théorie. $\square$

7 Arbres associés aux groupes quantiques libres

7.1 Motivations

Soit Γ un groupe discret et Δ une partie finie de Γ ne contenant pas l'unité et telle que $\Delta = \Delta^{-1}$. Soit $\mathfrak{g} = (\mathfrak{s}, \mathfrak{a}, \mathfrak{e}, \theta)$ le graphe associé à (Γ, Δ), cf la section 3.4 des rappels. Suivant la démarche générale de la géométrie non commutative, on va exprimer la structure de graphe de $\mathfrak{g}$ au niveau des espaces de fonctions $H = \ell_2(\mathfrak{s})$, $K = \ell_2(\mathfrak{a})$ pour généraliser ensuite sa construction au cas quantique.

Soit V l'unitaire multiplicatif cocommutatif associé à Γ : les C^*-algèbres réduites associées sont $\hat{S} = C(\Gamma)$ et $S_r = C^*_r(\Gamma)$. Soit (Ω_g) la base canonique de S_r, alors $\Lambda_h(\Omega_g) \in H = \ell_2(\Gamma)$ correspond à la fonction caractéristique χ_g de $\{g\}$, et V est donc donné par

$$V\left(\chi_{(g,s)}\right) = V\left(\chi_g \otimes \chi_s\right) = \chi_g \otimes \chi_{gs} = \chi_{\mathfrak{e}(g,s)} = E\left(\chi_{(g,s)}\right).$$

On a $\mathfrak{a} = \Gamma \times \Delta \subset \Gamma \times \Gamma$, on peut donc considérer K comme un sous-espace de $H \otimes H$, et le calcul ci-dessus montre que l'isométrie $E : K \to H \otimes H$ induite par l'application extrémités $\mathfrak{e}$ n'est autre que la restriction de V à K. On dit que E est l'*opérateur extrémités* du graphe associé à (Γ, Δ).

De même, l'application θ induit un *opérateur de retournement* $\Theta \in L(K)$ unitaire, qui vérifie la relation $\Theta = E^* \Sigma E$. On en déduit l'expression suivante, grâce au lemme 7.1 ci-dessous :

$$\Theta = V^* \Sigma V = \Sigma V^{\mathrm{op}} V = \Sigma \hat{V} V.$$

L'identité $\hat{V} V \tilde{V} = (U \otimes 1)\Sigma$ donne alors $\Theta = (1 \otimes U)\tilde{V}^*$. Par ailleurs il est clair que $\Theta^2 = \mathrm{id}$, on a donc aussi $\Theta = \Theta^* = \tilde{V}(1 \otimes U)$. Enfin l'espace des arêtes géométriques $\ell_2(\mathfrak{a}_g) = K/\mathrm{Im}(\Theta - \mathrm{id})$ est isomorphe au sous-espace $\mathrm{Ker}(\Theta - \mathrm{id})$ de K.

Lemme 7.1 *Soit (H, V, U) un système de Kac faible et $V^{\mathrm{op}} = \Sigma V^* \Sigma$. Si $\tilde{V} = V^{\mathrm{op}}$ (resp. $\hat{V} = V^{\mathrm{op}}$), alors V est commutatif (resp. cocommutatif). Inversement, si (H, V, U) est le système de Kac commutatif (resp. cocommutatif) associé à un groupe localement compact, on a $\tilde{V} = V^{\mathrm{op}}$ (resp. $\hat{V} = V^{\mathrm{op}}$).*

Démonstration. On a $\tilde{V} = V^{\mathrm{op}} \Leftrightarrow V = (1 \otimes U)V^*(1 \otimes U)$. Supposons que ces égalités sont vérifiées et soit $x = L_V(\omega)$ un élément de S_r. On a alors $x = U L_{V^*}(\omega) U$, donc $x \in U S_r U$. En particulier, x commute à S_r, donc S_r est commutative. Inversement, si V est commutatif on obtient l'égalité recherchée par un calcul dans $L^2(G)$ où G est le groupe localement compact sous-jacent :

$$\begin{aligned}
((1 \otimes U)V(1 \otimes U)f)(r,s) &= \Delta(s)^{1/2}(V(1 \otimes U)f)(r, s^{-1}) \\
&= \Delta(s)^{1/2}((1 \otimes U)f)(rs^{-1}, s^{-1}) \\
&= \Delta(s)^{1/2}\Delta(s^{-1})^{1/2} f(rs^{-1}, s) = (V^*f)(r,s).
\end{aligned}$$

Les assertions concernant le cas cocommutatif s'en déduisent en remplaçant V par $\hat{V}$. ■

Dans la section suivante on définit le graphe quantique associé à un groupe quantique discret en prenant $\Theta = \tilde{V}(1\otimes U)$ comme opérateur de retournement des arêtes, sur un certain sous-espace stable $K = H\otimes p_{\mathcal{D}}H$ qui jouera le rôle de $\ell_2(\Gamma\times\Delta)$. En particulier $\tilde{V}(1\otimes U)$ commute à la représentation naturelle $\mathrm{id}_{S_r}\otimes 1$ de S_r sur K. On pourrait s'attendre à avoir également une version simpliciale de (K,Θ), c'est-à-dire un opérateur extrémités E de K dans un sous-espace de $H\otimes H$, isométrique, et tel que $E\Theta E^* = \Sigma$. Cela n'a pas lieu dans le cas quantique : alors Σ ne commute pas à la représentation naturelle δ_r de S_r sur $H\otimes H$. De plus $\tilde{V}(1\otimes U)$ n'est plus involutif, comme on le voit à la proposition 7.2 ci-dessous. En fait dans le cas quantique la construction simpliciale du graphe associé à (Γ,Δ) se généralise séparément de la construction non simpliciale et donne un graphe classique, qui n'est pas muni de représentations de S_r mais sera néanmoins utile pour comprendre la structure du graphe quantique.

Proposition 7.2 *Reprenons les notations de la définition 7.3 et supposons que $\mathcal{D}$ engendre $\mathcal{C}$. L'opérateur de retournement Θ est involutif* **ssi** *V est cocommutatif.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que Θ est involutif dans le cas cocommutatif. Inversement si Θ est involutif, $(1\otimes U)\tilde{V}(1\otimes U)$ et $\tilde{V}^*$ coïncident sur K. Par conséquent pour tout $\omega\in L(H)_*$ les opérateurs $x = L_{\tilde{V}^*}(\omega)$ et $y = UL_{\tilde{V}}(\omega)U$ coïncident sur $\oplus_{s\in\mathcal{D}}H^s$. En particulier lorsque x est dans une sous-algèbre $\hat{\mathcal{S}}^t \simeq L(H_t)$ avec $t\in\mathcal{D}$, les supports de x et y sont des sous-espaces de $\oplus_{s\in\mathcal{D}}H^s$ donc $x=y$. On a donc $x\in U\hat{\mathcal{S}}U$, donc x commute à $\hat{S}$. Cela implique que t est de dimension 1, et comme $\mathcal{D}$ engendre $\mathcal{C}$ on en déduit que toutes les représentations de V sont de dimension 1, donc $\hat{S}$ est commutative. ■

7.2 Graphes associés à un groupe quantique discret

Rappelons que si V est un unitaire multiplicatif de type compact, on note $\mathcal{C}$ la catégorie de ses représentations de dimension finie, et $\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ un système de représentants des classes de représentations irréductibles. Pour $r\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$, on note $\bar{r}$ l'élément de $\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ équivalent à la contragrédiente de r. On a donc $\bar{\bar{r}} = r$ et on peut supposer que $j_{\bar{r}}j_r = \pm 1$. Pour $s\in\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ on note p_s le support central de la représentation de $\hat{S}$ associée à s, c'est un élément de $\hat{S}$ et tous les projecteurs centraux de $\hat{S}$ sont de la forme $\sum\{p_d \mid d\in\mathcal{D}\}$ pour une certaine partie finie $\mathcal{D}\subset\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$.

Définition 7.3 *Soit V un unitaire multiplicatif de type compact et $p_{\mathcal{D}}$ un projecteur central de $\hat{S}$ tel que $Up_{\mathcal{D}}U = p_{\mathcal{D}}$ et $p_0p_{\mathcal{D}} = 0$. On note $\mathcal{C}$ la catégorie des représentations de dimension finie de V et* Irr $\mathcal{C}$ *un système de représentants des classes de représentations irréductibles.*

1. *On appelle graphe classique associé au couple $(V,p_{\mathcal{D}})$ le graphe $\mathfrak{g}$ donné sous forme simpliciale par $\mathfrak{s} = \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ et $\mathfrak{a} = \{(r,r')\in\mathfrak{s}^2 \mid \hat{\delta}(p_{r'})(p_r\otimes p_{\mathcal{D}}) \neq 0\}$.*
2. *On appelle graphe quantique associé au couple $(V,p_{\mathcal{D}})$ la suite (H,K,E,Θ) où H est l'espace de Hilbert de V, $K = H\otimes p_{\mathcal{D}}H$, $E = V_{|K}\in L(K,H\otimes H)$ et $\Theta = \tilde{V}(1\otimes U)_{|K}\in L(K)$. On pose $K_g = \mathrm{Ker}\,(\Theta-\mathrm{id})$.*
3. *Soit ϵ la forme linéaire définie sur $p_{\mathcal{D}}H$ par $\Lambda_h(x)\mapsto\varepsilon(x)$. Soit $O = (\mathrm{id}\otimes\epsilon)$ et $B = O\circ\Theta$, ces applications de K dans H sont respectivement appelées* opérateur origine *et* opérateur but *du graphe quantique associé à $(V,p_{\mathcal{D}})$.*

REMARQUES.

1. Les projecteurs centraux $p_\mathcal{D}$ vérifiant les conditions de la définition sont associés aux parties finies $\mathcal{D}$ de Irr $\mathcal{C}$ telles que $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$ et $1_\mathcal{C} \notin \mathcal{D}$. Les éléments de $\mathfrak{a}$ sont alors les couples (r, r') pour lesquels il existe $s \in \mathcal{D}$ tel que $r' \subset r \otimes s$. Notons que $\mathfrak{a}$ est symétrique, grâce à l'équivalence $r' \subset r \otimes s \Leftrightarrow r \subset r' \otimes \bar{s}$. Le graphe $(\mathfrak{s}, \mathfrak{a})$ n'est pas combinatoire en général : on peut avoir $(r, r) \in \mathfrak{a}$ pour un certain sommet r — cependant cela n'aura pas lieu dans les exemples qui nous intéresseront. En particulier lorsqu'on demande que $(\mathfrak{s}, \mathfrak{a})$ soit un arbre on exclut cette possibilité.
2. Dans le cas cocommutatif Irr $\mathcal{C} = \Gamma$ est un groupe discret, $\Delta = \mathcal{D}$ vérifie les conditions $\Delta^{-1} = \Delta$ et $1 \notin \Delta$. Alors $(\mathfrak{s}, \mathfrak{a})$ et (H, K, E, Θ) correspondent respectivement aux versions simpliciale et non simpliciale du graphe associé à (Γ, Δ).
3. Le graphe quantique associé à $(V, p_\mathcal{D})$ nous sera plus utile que le graphe classique, car il est muni d'une coreprésentation naturelle du groupe quantique discret $(\hat{S}, \hat{\delta})$: en effet la C^*-algèbre S_r agit sur K par $\mathrm{id}_{S_r} \otimes 1$, et $\Theta \in M(US_rU \otimes \hat{S}_r)(1 \otimes U)$ commute à cette représentation. En particulier $\mathrm{id}_{S_r} \otimes 1$ induit une représentation de S_r sur K_g.
4. L'identité $\hat{V} V \tilde{V} = (U \otimes 1)\Sigma$ donne une autre expression dont nous nous servirons aussi : $\Theta = (\Sigma \hat{V} V)^*$. Par ailleurs l'identité $\tilde{V}^* = (\hat{J} \otimes J)\tilde{V}(\hat{J} \otimes J)$, où $\hat{J}$ est la conjugaison modulaire de $\hat{S}$, montre que $(\hat{J} \otimes \hat{J})\Theta(\hat{J} \otimes \hat{J}) = \Theta^* = \Theta^{-1}$. □

Lemme 7.4 *Soit x, $y \in \mathcal{S}_r$, on a* $\Theta \circ (\Lambda_h \otimes \Lambda_h)(x \otimes y) = (\Lambda_h \otimes \Lambda_h) \circ (\mathrm{id} \otimes \kappa)((x \otimes 1)\delta(y))$.

DÉMONSTRATION. On a $\Theta \circ (\Lambda_h \otimes \Lambda_h)(x \otimes y) = (x \otimes \mathrm{id}) \circ \Theta \circ (\Lambda_h \otimes \Lambda_h)(1 \otimes y)$, il suffit donc de considérer le cas $x = 1$. On utilise les expressions (2.12) de U et V :

$$\begin{aligned}\Theta \circ (\Lambda_h \otimes \Lambda_h)(1 \otimes y) &= \Sigma(1 \otimes U)V(1 \otimes U) \circ (\Lambda_h \otimes \Lambda_h)(f_1 \star \kappa(y) \otimes 1) \\ &= \Sigma(1 \otimes U) \circ (\Lambda_h \otimes \Lambda_h) \circ \delta(f_1 \star \kappa(y)).\end{aligned}$$

On vérifie facilement que $\delta(f_z \star a) = (\mathrm{id} \otimes (f_z \star))(\delta(a))$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\Theta \circ (\Lambda_h \otimes \Lambda_h)(1 \otimes y) &= \Sigma(1 \otimes U) \circ (\Lambda_h \otimes \Lambda_h)(\mathrm{id} \otimes (f_1 \star))(\delta(\kappa(y)) \\ &= \Sigma(1 \otimes U) \circ (\Lambda_h \otimes \Lambda_h)(\kappa \otimes (f_1 \star)\kappa)\Sigma\delta(y).\end{aligned}$$

On reconnaît alors $(1 \otimes U)^2$ qui se simplifie :

$$\begin{aligned}\Theta \circ (\Lambda_h \otimes \Lambda_h)(x \otimes y) &= \Sigma \circ (\Lambda_h \otimes \Lambda_h) \circ (\kappa \otimes \mathrm{id})\Sigma\delta(y) \\ &= (\Lambda_h \otimes \Lambda_h) \circ (\mathrm{id} \otimes \kappa)\delta(y).\end{aligned}$$

■

Proposition 7.5 *Soit ϵ la forme linéaire sur $\Lambda_h(\mathcal{S})$ définie par $\Lambda_h(x) \mapsto \varepsilon(x)$. On a les identités suivantes :*

1. $O = (\mathrm{id} \otimes \epsilon) \circ V$ *et* $B = (\epsilon \otimes \mathrm{id}) \circ V$ *sur* $K \cap (\Lambda_h \otimes \Lambda_h)(\mathcal{S} \otimes \mathcal{S})$,
2. $B \circ (\Lambda_h \otimes \Lambda_h)(x \otimes y) = \Lambda_h(xy)$ *pour* $x \otimes y \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{S}$, *et* $B \circ \Theta = O$.

DÉMONSTRATION. On raisonne dans $\mathcal{S}$: ε étant multiplicative, on a pour x et y dans $\mathcal{S}$

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\delta(x)(1 \otimes y)) = \varepsilon(y)(\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \delta(x) = \varepsilon(y)x = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(x \otimes y),$$

d'où $O = (\mathrm{id} \otimes \epsilon) \circ V$. De même on a $\varepsilon \circ \kappa = \varepsilon$, d'où

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\mathrm{id} \otimes \kappa)((x \otimes 1)\delta(y)) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)((x \otimes 1)\delta(y)) = xy = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\delta(x)(1 \otimes y)).$$

Ainsi on obtient les identités $B \circ \Lambda_h(x \otimes y) = \Lambda_h(xy)$ et $B = (\epsilon \otimes \mathrm{id}) \circ V$, grâce à la définition de B et à l'expression de Θ donnée au lemme 7.4. On en déduit, en notant $m : \mathcal{S} \otimes \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ la multiplication de $\mathcal{S}$, et d'après (2.10) :

$$\begin{aligned} B \circ \Theta \circ (\Lambda_h \otimes \Lambda_h)(x \otimes y) &= \Lambda_h(x\ (m(\mathrm{id} \otimes \kappa)\delta(y))) \\ &= \varepsilon(y)\ \Lambda_h(x) = O \circ (\Lambda_h \otimes \Lambda_h)(x \otimes y). \end{aligned}$$ ■

Proposition 7.6 *On note $\tilde{\pi}_4$ l'homomorphisme de $\hat{S}^{\otimes 4}$ dans $L(K)$ défini par la formule $\tilde{\pi}_4(x \otimes y \otimes y' \otimes x') = (x \otimes y)(Ux'U \otimes Uy'U)$, et $\hat{\delta}' = \tilde{\pi}_4 \circ (1 \otimes 1 \otimes \hat{\delta})$. On a les relations de commutation suivantes, pour $\hat{s} \in \hat{S}$:*

1. $\Theta \circ (\hat{s} \otimes 1) = \hat{\delta}(\hat{s}) \circ \Theta$,
2. $\Theta \circ (1 \otimes \hat{s}) = (1 \otimes U\hat{s}U) \circ \Theta$,
3. $\Theta \circ \hat{\delta}'(\hat{s}) = (U\hat{s}U \otimes 1) \circ \Theta$.
4. $B \circ \hat{\delta}(\hat{s}) = \hat{s} \circ B$,

Ainsi Θ entrelace les représentations $\tilde{\pi}_4 \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \hat{\delta})$ et $\tilde{\pi}_4 \circ (\hat{\delta} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$ de $\hat{S} \otimes \hat{S} \otimes \hat{S}$ sur K. En particulier Θ commute à $\tilde{\pi}_4 \circ \hat{\delta}^3$.

Démonstration. La première formule résulte de l'identité $\hat{\delta}(\hat{s}) = \tilde{V}(\hat{s} \otimes 1)\tilde{V}^*$. En écrivant $B = O \circ \Theta^{-1}$ avec $O = (\mathrm{id} \otimes \epsilon)$ on en déduit la dernière. On peut également en déduire la troisième, en remarquant que lorsqu'on remplace le coproduit de S_r par le coproduit opposé, $\hat{S}$ est changée en $U\hat{S}U$ et $\hat{\delta}$, en $\hat{\delta}' \circ \mathrm{Ad}(U)$. Ou bien on procède directement, en utilisant la formule $\Theta = (\Sigma \hat{V} V)^*$ et le fait que V commute à $U\hat{S}U \otimes 1$:

$$\begin{aligned} (U\hat{s}U \otimes 1)\Theta &= (U\hat{s}U \otimes 1)V^*\hat{V}^*\Sigma = V^*(U\hat{s}U \otimes 1)\hat{V}^*\Sigma \\ &= V^*\hat{V}^*(U \otimes U)\tilde{V}(\hat{s} \otimes 1)\tilde{V}^*(U \otimes U)\Sigma \\ &= V^*\hat{V}^*(U \otimes U)\hat{\delta}(\hat{s})(U \otimes U)\Sigma = V^*\hat{V}^*\Sigma\hat{\delta}'(\hat{s}) = \Theta\hat{\delta}'(\hat{s}). \end{aligned}$$

Enfin la deuxième relation de l'énoncé s'obtient en remarquant que $\tilde{V}$ est dans $M(USU \otimes \hat{S})$, donc commute $1 \otimes U\hat{S}U$. En particulier on a $\Theta \circ \tilde{\pi}_4 \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \hat{\delta}) = \tilde{\pi}_4 \circ (\hat{\delta} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$. En composant à droite par $\hat{\delta}^2 : \hat{S} \to \hat{S} \otimes \hat{S} \otimes \hat{S}$, on obtient bien le fait que Θ commute à $\tilde{\pi}_4 \circ \hat{\delta}^3$. ■

7.3 Orientation et opérateur de Julg-Valette

Dans le cas d'un arbre classique, l'orientation $\mathfrak{a}_+ \subset \mathfrak{a}$ associée au choix d'une origine définit un sous-espace K_+ de K. On donne ci-dessous une généralisation de ce sous-espace dans le cas quantique, sous la forme d'un sous-espace $K_{++} \subset K$. On suppose pour ce faire que le graphe classique $(\mathfrak{s}, \mathfrak{a})$ est un arbre et on choisit comme origine la représentation triviale $1_{\mathcal{C}}$. On définit ensuite l'opérateur de Julg-Valette à partir de l'adjoint de l'opérateur but restreint et de la projection de K_{++} sur K_g — cette dernière est un multiple d'un isomorphisme dans le cas cocommutatif. L'opérateur de Julg-Valette est noté F_g, on espère que cela ne provoquera pas de confusion avec les applications linéaires $F_r = j_r^* j_r \in L(H_r)$: ces dernières ne sont utilisées que dans l'appendice, où F_g n'intervient pas.

Définition 7.7 *Soit V un unitaire multiplicatif de type compact et $p_{\mathcal{D}}$ un projecteur central de $\hat{S}$ tel que $Up_{\mathcal{D}}U = p_{\mathcal{D}}$ et $p_0 p_{\mathcal{D}} = 0$. On suppose que le graphe classique associé à $(V, p_{\mathcal{D}})$ est un arbre, on note d la distance sur cet arbre.*

1. *Soit N l'opérateur distance à l'origine $\sum \mathrm{d}(1_{\mathcal{C}}, r)\, p_r$, densément définit sur H. On note $p_n \in Z(\hat{S}_r)$ son projecteur spectral associé à la valeur propre n et $q_n = \tilde{\pi}_4 \circ \delta^3(p_{2n})$.*

2. *On pose* $p_{\star+} = \sum (p_n \otimes p_1)\, \hat\delta(p_{n+1})$, $p_{+\star} = \sum (p_n \otimes p_1)\ \hat\delta'(p_{n+1})$. *On pose* $p_{++} = p_{\star+} p_{+\star}$ *et* $K_{++} = p_{++}(H \otimes H)$.
3. *On appelle* **opérateur de Julg-Valette** *la composée* $F_g \in L(H, K_g)$ *de* $p_{++}B^* : H \to K_{++}$ *avec la projection orthogonale de* K_{++} *sur* K_g.

Remarques.

1. On a $\mathrm{d}(r, 1_{\mathcal{C}}) = 1 \Leftrightarrow (1_{\mathcal{C}}, r) \in \mathfrak{a} \Leftrightarrow \exists\ s \in \mathcal{D}\ r \subset 1 \otimes s$, et donc $p_1 = p_{\mathcal{D}}$. En particulier Im $p_{\star+}$, Im $p_{+\star}$ et K_{++} sont bien des sous-espaces de K. Le sous-espace K_{++} est intéressant car il est fortement relié au graphe classique associé à $(V, p_{\mathcal{D}})$, cf les points suivants. En particulier il s'exprime dans la décomposition $K = \sum (p_n \otimes p_1) K$.
2. Soit $r \in \mathrm{Irr}\ \mathcal{C}$ tel que $\mathrm{d}(r, 1_{\mathcal{C}}) = n+1$. On a $\hat\delta(p_r) = \sum \hat\delta(p_r)(p_t \otimes p'_t)$ où on somme sur les couples (t, t') tels que $r \subset t \otimes t'$, donc $\hat\delta(p_r)(p_n \otimes p_1) = \hat\delta(p_r)(p_{r'} \otimes p_1)$ où r' est le sommet précédant r dans $\mathfrak{g}$. Par conséquent on a l'expression suivante de $p_{\star+}$, en fonction de l'orientation $\mathfrak{a}_+$ de $\mathfrak{g}$:
$$p_{\star+} = \sum_{(r', r) \in \mathfrak{a}_+} V^*(p_{r'} \otimes p_r) V(\mathrm{id} \otimes p_1).$$
En particulier, dans le cas cocommutatif, le projecteur $p_{\star+}$ correspond à l'inclusion $\mathfrak{a}_+ \subset \mathfrak{a}$, modulo l'équivalence entre les visions simpliciale et non simpliciale du graphe qui est donnée par $E = V_{|K}$.
3. Soit J (resp. $\hat J$) la conjugaison modulaire sur H associée à l'involution de S_r (resp. $\hat S$). On a $U = \hat J J$, $[J, p_k] = 0$ et $(J \otimes J)\hat\delta(p_n)(J \otimes J) = \Sigma \hat\delta(p_n) \Sigma$. On en déduit la relation suivante entre $p_{+\star}$ et $p_{\star+}$:
$$p_{+\star} = (\hat J \otimes \hat J) p_{\star+} (\hat J \otimes \hat J).$$
Ainsi $p_{+\star}$ et $p_{\star+}$ proviennent d'un même projecteur de $M(\hat S \otimes \hat S)$ que l'on fait agir à gauche ou à droite sur K. Cela revient également à dire que lorsqu'on remplace le coproduit de S_r par le coproduit opposé, $p_{\star+}$ est transformé en $p_{+\star}$. □

Proposition 7.8 *On reprend les hypothèses et notations de la définition 7.7. Soit* $p_{\star-} = 1 - p_{\star+}$ *et* $p_{-\star} = 1 - p_{+\star}$. *On a alors* $p_{\star-} = \Theta p_{+\star} \Theta^*$ *et* $p_{-\star} = \Theta^* p_{\star+} \Theta$. *Plus précisément,*
$$\Theta p_{+\star}(p_n \otimes p_1) = (p_{n+1} \otimes p_1) p_{\star-} \Theta \quad et \quad \Theta p_{-\star}(p_n \otimes p_1) = (p_{n-1} \otimes p_1) p_{\star+} \Theta.$$

Démonstration. On note $\sigma = \mathrm{Ad}(\Sigma)$ et $u = \mathrm{Ad}(U)$. On a vu dans les rappels que $\tilde V(p_r \otimes 1)\tilde V^* = \hat\delta(p_r)$. Par ailleurs la formule $V^*(1 \otimes p_r)V = \hat\delta(p_r)$ et le fait que p_r commute à U entraîne
$$\begin{aligned}\tilde V^*(p_r \otimes 1)\tilde V &= (U \otimes 1)\Sigma V^* \Sigma (U p_r U \otimes 1) \Sigma V \Sigma (U \otimes 1) \\ &= (u \otimes 1)\sigma(V^*(1 \otimes p_r)V) = (u \otimes 1)\sigma\hat\delta(p_r).\end{aligned}$$
On en déduit l'identité suivante — $(1 \otimes p_1)$ commute à tous les autres termes :
$$\begin{aligned}\Theta p_{+\star}(p_n \otimes p_1)\Theta^* &= \tilde V(p_n \otimes p_1)(u \otimes 1)\sigma\hat\delta(p_{n+1})\tilde V^* \\ &= (1 \otimes p_1)\hat\delta(p_n)\tilde V(u \otimes 1)\sigma\hat\delta(p_{n+1})\tilde V^* = \hat\delta(p_n)(p_{n+1} \otimes p_1).\end{aligned}$$
Pour montrer que le membre de droite vaut $p_{\star-}(p_{n+1} \otimes p_1)$, il reste à vérifier qu'on obtient $p_{\star-}$ en sommant sur n. Or $(p_n \otimes p_1)\hat\delta(p_{n'})$ est nul dès que $n' \neq n \pm 1$, on a donc
$$\begin{aligned}\sum (p_{n+1} \otimes p_1)\hat\delta(p_n) + p_{\star+} &= \sum \big((p_{n+1} \otimes p_1)\hat\delta(p_n) + (p_n \otimes p_1)\hat\delta(p_{n+1})\big) \\ &= \big(\sum (p_n \otimes p_1)\big)\big(\sum \hat\delta(p_{n'})\big) = (1 \otimes p_1) = p_{\star-} + p_{\star+}.\end{aligned}$$ ■

Proposition 7.9 *On reprend les hypothèses et notations de la définition 7.7.*

1. *On a* $Bp_{+-} = Bp_{-+} = 0$.
2. *On a* $p_n B = B(p_{n-1} \otimes p_1)p_{++} + B(p_{n+1} \otimes p_1)p_{--}$.
3. *On a* $F^* = Bp_{++} = \lim_{t\to\infty} e^{t(N-1)} B(e^{-tN} \otimes \mathrm{id})$.

Démonstration. D'après le dernier point de la proposition 7.5, on a $p_k B(p_l \otimes p_1) = B\hat{\delta}(p_k)(p_l \otimes p_1)$. En particulier $B(p_n \otimes p_1)p_{\star +} = p_{n+1} Bp_{\star +}$, et de même $B(p_n \otimes p_1)p_{\star -} = p_{n-1} Bp_{\star -}$. D'autre part on a d'après les propositions 7.5 et 7.8

$$\begin{aligned} B(p_n \otimes p_1)p_{-\star} &= O\Theta(p_n \otimes p_1)p_{-\star} = O(p_{n-1} \otimes p_1)p_{\star +}\Theta \\ &= p_{n-1} O p_{\star +}\Theta = p_{n-1} Bp_{-\star}, \quad \text{et de même} \\ B(p_n \otimes p_1)p_{+\star} &= p_{n+1} Bp_{+\star}. \end{aligned}$$

Finalement $B(p_n \otimes p_1)p_{-+} = p_{n+1} Bp_{-+} = p_{n-1} Bp_{-+}$, donc $B(p_n \otimes p_1)p_{-+}$ est nul, et de même $B(p_n \otimes p_1)p_{+-} = 0$. Par conséquent on a $p_n B = p_n B(p_{++} + p_{--})$, le deuxième point de l'énoncé résulte alors des identités $B(p_{n+1} \otimes p_1)p_{\star +} = p_n Bp_{\star +}$ et $B(p_{n-1} \otimes p_1)p_{\star -} = p_n Bp_{\star +}$.

Par ailleurs on obtient, en appliquant à nouveau l'égalité $p_k B(p_l \otimes p_1) = B\hat{\delta}(p_k)(p_l \otimes p_1)$:

$$p_k e^{t(N-1)} B e^{-tN}(p_l \otimes p_1) = e^{t(k-l-1)} B\hat{\delta}(p_k)(p_l \otimes p_1). \tag{7.1}$$

Or $\hat{\delta}(p_k)(p_l \otimes p_1)$ est nul dès que k est différent de $l+1$ et $l-1$, et lorsque $k = l-1$ la quantité (7.1) tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. En sommant sur $k = l+1$ on reconnaît bien l'opérateur $Bp_{\star +}$, qui est égal à Bp_{++} d'après le premier point. ∎

Donnons maintenant une description de $p_{\star +}$ et $p_{+\star}$ comme opérateurs d'entrelacement entre certaines représentations de $\hat{S} \otimes \hat{S} \otimes \hat{S}$. Il est évident sur la définition que $p_{\star +}$ et $p_{\star -}$ (resp. $p_{+\star}$ et $p_{-\star}$) commutent à $\hat{\pi}_4 \circ (\hat{\delta} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$ (resp. $\hat{\pi}_4 \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \hat{\delta})$). En particulier ils commutent à $\hat{\pi}_4 \circ \hat{\delta}^3$, comme Θ. Notons que les sous-espaces $p_r H$ sont irréductibles pour la représentation $\hat{\pi}_2 : \hat{S} \otimes \hat{S} \to L(H)$, $x \otimes x' \mapsto x(Ux'U)$, et respectivement isomorphes à $H_r \otimes H_{\bar{r}}$ muni de la représentation naturelle de $\hat{S} \otimes \hat{S}$. De même les sous-espaces irréductibles de $\hat{\pi}_4$ sont les $(p_r \otimes p_s)(K) \simeq H_r \otimes H_s \otimes H_{\bar{s}} \otimes H_r$, avec $r \in \mathrm{Irr}\, \mathcal{C}$ et $s \in \mathcal{D}$. Dans ces isomorphismes, le fait que $p_{\star +}$ commute avec l'image de $(\hat{\delta} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$ signifie que c'est un endomorphisme d'entrelacement pour la représentation de $\hat{S} \otimes \hat{S} \otimes \hat{S}$ associée aux trois co-représentations $r \otimes s$, $\bar{s}$ et $\bar{r}$. Par conséquent c'est un projecteur sur $H_t \otimes H_{\bar{s}} \otimes H_{\bar{r}}$, où H_t est un certain sous-espace stable de $H_r \otimes H_s$.

Lemme 7.10 *Soit $r \in \mathrm{Irr}\, \mathcal{C}$ et $s \in \mathcal{D}$. Soit p_+ (resp. p_-) la projection de $H_r \otimes H_s$ sur la somme des sous-objets de $r \otimes s$ supérieurs (resp. inférieurs) à r. Alors, dans un isomorphisme d'entrelacement $X_{r,s} : H_r \otimes H_s \otimes H_{\bar{s}} \otimes H_{\bar{r}} \to (p_r \otimes p_s)K$, les projecteurs $p_{\star +}$, $p_{\star -}$, $p_{+\star}$ et $p_{-\star}$ correspondent respectivement à $(p_+ \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$, $(p_- \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$, $(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes p_+^j)$ et $(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes p_-^j)$, où on note $p^j = jpj^{-1}$ et $j = \Sigma(j_r \otimes j_s)$.*

Démonstration. Le projecteur $p_{\star +}$ est un élément de $M(\hat{S} \otimes \hat{S})$, on le fait agir sur les espaces des représentations de dimension finie comme $H_r \otimes H_s$. Par définition de $X_{r,s}$ on a $p_{\star +} \circ X_{r,s} = X_{r,s} \circ (p_{\star +} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$. Or $p_{\star +}(p_r \otimes p_s) = \hat{\delta}(p_t) \sum (p_r \otimes p_s)$, où on somme sur les sous-objets $t \subset r \otimes s$ supérieurs à r. Enfin, d'après l'expression (2.13) de $\hat{\delta}$ donnée dans les rappels, $\hat{\delta}(p_t)(p_r \otimes p_s)$ est l'élément de $(p_r \otimes p_s)(\hat{S} \otimes \hat{S}) \simeq L(H_r \otimes H_s)$ qui s'identifie à la projection de $r \otimes s$ sur la somme de ses sous-objets isomorphes à t.

D'autre part on a $p_{+\star} = \hat\pi_4(1\otimes 1\otimes p)$, avec $p = \sum (p_1\otimes p_n)\hat\delta(p_{n+1}) \in M(\hat S\otimes\hat S)$. En particulier on a $p_{+\star}\circ X_{r,s} = X_{r,s}\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes p)$. Par définition on a $p(p_{\bar s}\otimes p_{\bar r}) = \sum (p_{\bar s}\otimes p_{\bar r})\hat\delta(\bar t)$ où on somme sur les sous-objets $t\subset r\otimes s$ tels que $\mathrm{d}(\bar t, 1_{\mathcal C}) = \mathrm{d}(\bar r, 1_{\mathcal C}) + 1$. D'après le lemme 7.11 ci-dessous, il s'agit également des sous-objets $t\subset r\otimes s$ tels que $t > r$. Comme précédemment, $p(p_{\bar s}\otimes p_{\bar r})$ est donc la projection de $\bar s\otimes\bar r$ sur ses sous-objets $\bar t$ tels que $t > r$, c'est-à-dire p_+^j. ■

Lemme 7.11 *Soit $\mathfrak g = (\mathfrak s, \mathfrak a)$ le graphe classique associé à une paire $(V, p_{\mathcal D})$, comme à la définition 7.3. Alors pour tout $r\in \mathrm{Irr}\,\mathcal C = \mathfrak s$, on a $\mathrm{d}(r, 1_{\mathcal C}) = \mathrm{d}(\bar r, 1_{\mathcal C})$.*

Démonstration. Comme $\bar{\mathcal D} = \mathcal D$, il suffit d'établir la propriété suivante : on a $\mathrm{d}(r, 1_{\mathcal C}) \le n$ **ssi** il existe des éléments $s_1, \dots, s_n \in \mathcal D$ tels que $r\subset s_1\otimes\cdots\otimes s_n$. On procède par récurrence : pour $n = 0$ la propriété est vérifiée car $r\subset 1_{\mathcal C} \Leftrightarrow r = 1_{\mathcal C}$. Si la propriété est vérifiée au rang n et $\mathrm{d}(r, 1_{\mathcal C}) = n+1$, par définition de $\mathfrak g$ il existe $r'\in\mathfrak s$ et $s\in\mathcal D$ tels que $\mathrm{d}(r', 1_{\mathcal C}) = n$ et $r\subset r\otimes s$. L'hypothèse de récurrence donne alors une inclusion $r\subset s_1\otimes\cdots\otimes s_n\otimes s$ de la forme voulue. Inversement si on a $r\subset s_1\otimes\cdots\otimes s_{n+1}$, soit (t_k) une famille orthogonale maximale de sous-objets irréductibles de $s_1\otimes\cdots\otimes s_n$. On a $r\subset \oplus(t_k\otimes s_{n+1})$, et r est irréductible il existe k tel que $r\subset t_k\otimes s_{n+1}$. Par hypothèse de récurrence on a $\mathrm{d}(t_k, 1_{\mathcal C}) \le n$ pour tout k, donc $\mathrm{d}(r, 1_{\mathcal C}) \le n+1$ par définition de $\mathfrak g$. ■

7.4 Arbres associés aux groupes quantiques libres

On aimerait maintenant montrer que l'opérateur de Julg-Valette quantique est un opérateur de Fredholm et qu'il commute aux actions de S_r modulo les opérateurs compacts, comme dans le cas classique. Cette étude se décompose en deux étapes, matérialisées dès la définition de F_g :

$$F_g : H \xrightarrow{p_{++}B^*} K_{++} \xrightarrow{\substack{\text{projection}\\ \text{orthogonale}}} K_g .$$

1. L'adjoint de l'opérateur but $p_{++}B^* : H\to K_{++}$. Dans le cas classique, il est évident que c'est un opérateur de Fredholm : il est surjectif et son noyau correspond à l'origine du graphe. Nous étendons cette propriété au cas quantique à la proposition 7.14. Par ailleurs, dans le cas classique, $p_{++}B^*$ commute à l'action des éléments du groupe, à des opérateurs de rang fini près. On montrera à la section 8.2 que cela est encore le cas pour le graphe associé à $A_o(Q)$.
2. La projection de K_{++} sur K_g. Dans le cas classique il s'agit d'un multiple d'un isomorphisme : seule la première partie de l'étude est intéressante. Dans le cas quantique, il est toujours évident que cette projection commute à l'action de S_r, car c'est un projecteur spectral de Θ. En revanche ce n'est plus un isomorphisme : l'espace $K_g = \mathrm{Ker}\,(\Theta - \mathrm{id})$ est « trop petit ». A la section 7.6 on donne un premier aperçu du problème, que l'on étudie en détail dans le cas de $A_o(Q)$ à la section 8.

Nous introduisons maintenant le cadre précis dans lequel se fait cette étude : il s'agit de l'analogue quantique des groupes libres et des arbres associés. On suppose toujours que le graphe classique associé à $(V, p_{\mathcal D})$ est un arbre et on note alors $(r\otimes s)_+$ (resp. $(r\otimes s)_-$) la somme des sous-objets de $(r\otimes s)$ supérieurs (resp. inférieurs) à r, pour tous $r\in\mathrm{Irr}\,\mathcal C$, $s\in\mathcal D$. On impose alors les conditions de non-multiplicité indiquées dans la définition suivante.

Définition 7.12 *Soit V un unitaire multiplicatif de type compact et $p_{\mathcal{D}}$ un projecteur central de $\hat{S}$ tel que $Up_{\mathcal{D}}U = p_{\mathcal{D}}$ et $p_0 p_{\mathcal{D}} = 0$. On dit que le graphe classique associé à $(V, p_{\mathcal{D}})$ est un arbre strict si les conditions suivantes sont vérifiées :*
- *Le graphe classique associé à $(V, p_{\mathcal{D}})$ est un arbre,*
- *pour tous $r \in \mathrm{Irr}\ \mathrm{C}$ et $s \in \mathcal{D}$, $(r \otimes s)_+$ est irréductible ou nul,*
- *pour tous $r \in \mathrm{Irr}\ \mathrm{C}$ et $s \neq s' \in \mathcal{D}$, $(r \otimes s)_+$ et $(r \otimes s')_+$ sont non équivalents ou nuls.*

Remarques.

1. On peut donner une interprétation plus géométrique de la définition 7.12, en munissant le graphe classique associé à $(V, p_{\mathcal{D}})$ d'une structure plus riche. Soit $\mathfrak{g}'$ le graphe, non combinatoire et coloré par $\mathcal{D}$, défini de la manière suivante : l'ensemble des sommets de $\mathfrak{g}'$ est égal à $\mathrm{Irr}\ \mathcal{C}$, et étant donnée une inclusion $r' \subset r \otimes s$ de multiplicité k, avec $s \in \mathcal{D}$, les sommets r et r' sont reliés par k arêtes (r, r', i) de couleur s. Alors les hypothèses introduites plus haut sur la catégorie $\mathcal{C}$ signifient que $\mathfrak{g}'$ est un arbre et que la coloration des arêtes montantes issues d'un sommet donné est injective.
2. Notons que si t est un sous-objet irréductible de $r \otimes s$, alors r est un sous-objet de $t \otimes \bar{s}$, avec la même multiplicité. On en déduit que si le graphe classique associé à $(V, p_{\mathcal{D}})$ est un arbre strict, alors $(r \otimes s)_-$ est irréductible ou nul pour tout $r \in \mathrm{Irr}\ \mathcal{C}$ et tout $s \in \mathcal{D}$. De même, $(r \otimes s)_-$ est non nul pour exactement une direction $s \in \mathcal{D}$, lorsque r est fixé et différent de $1_{\mathcal{C}}$. Plus précisément, écrivons $r = (r' \otimes s')_+$, alors le sommet précédant r est r', par conséquent si $(r \otimes s)_-$ est non nul on a $r' \subset r \otimes s$ donc $r \subset r' \otimes \bar{s}$ et $s = \bar{s}'$.
3. Soit u la coreprésentation fondamentale de $A_o(Q)$ (resp. $A_u(Q)$), avec $Q\bar{Q} \in \mathbb{C}\mathrm{id}$ (resp. Q inversible). Il est facile de voir que les graphes classiques associé à $(A_o(Q), \{u\})$ et $(A_u(Q), \{u, \bar{u}\})$ sont des arbres stricts. Plus généralement le graphe quantique associé à $(S, \mathcal{D})$ est un arbre lorsque S est un produit libre de groupes quantiques des deux types précédents, et $\mathcal{D}$ est la réunion des coreprésentations fondamentales de ces groupes quantiques et de leurs conjuguées, considérées comme coreprésentations de S. La proposition suivante montre que ce sont les seuls exemples, et les objets que nous allons étudier à partir de maintenant sont donc les analogues quantiques des arbres associés aux groupes libres. $\square$

Proposition 7.13 *Soit V un unitaire multiplicatif de type compact et $p_{\mathcal{D}}$ un projecteur central de $\hat{S}$ tel que $Up_{\mathcal{D}}U = p_{\mathcal{D}}$ et $p_0 p_{\mathcal{D}} = 0$. On suppose que le graphe classique associé à $(V, p_{\mathcal{D}})$ est un arbre strict. Alors V est l'unitaire multiplicatif d'un produit libre fini de groupes quantiques $A_o(Q_i)$ et $A_u(Q'_j)$ avec $Q_i\bar{Q}_i \in \mathbb{C}\mathrm{id}$, et $\mathcal{D}$ est un ensemble fondamental de représentations de V.*

Démonstration. On a besoin du résultat préliminaire suivant, que l'on démontre par récurrence sur la distance à l'origine : si r est un successeur de t dans le graphe classique, alors $\dim r \geq \dim t$. En effet, supposons cette inégalité vérifiée, et soit $r \in \mathrm{Irr}\ \mathcal{C}$, $s \in \mathcal{D}$ tels que $(r \otimes s)_+ \neq 0$. On a $r \otimes s = t + (r \otimes s)_+$ ou $r \otimes s = (r \otimes s)_+$. Dans le premier cas on a nécessairement $\dim s > 1$: sinon l'inclusion $r \subset t \otimes \bar{s}$ montre que $\dim r = \dim t$, donc $(r \otimes s)_+ = 0$. On a donc $\dim\,(r \otimes s)_+ \geq 2 \dim r - \dim t \geq \dim r$. Dans le deuxième cas on a $\dim\,(r \otimes s)_+ = \dim r \otimes s \geq \dim r$. Cela montre en particulier que le sous-objet $(r \otimes s)_+$ ne peut pas être nul lorsque $\dim s > 1$.

Comme le graphe classique $\mathfrak{g}$ est un arbre, l'ensemble $\mathrm{Irr}\ \mathcal{C}$ de ses sommets est en bijection avec l'ensemble des chemins sans aller-retour partant de l'origine $1_{\mathcal{C}}$. Grâce aux hypothèses additionnelles de la définition 7.12, un chemin est caractérisé par la suite finie

(s_i) des directions empruntées. D'après la remarque 2 qui suit la définition 7.12 et le résultat préliminaire établi au début de la démonstration, les suites finies d'éléments de $\mathcal{D}$ qui sont ainsi associées à un chemin sans aller-retour sont exactement celles qui vérifient $s_{i+1} \neq \bar{s}_i$ ou dim $s_{i+1} > 1$ pour tout i.

Pour chaque paire $\{s, \bar{s}\} \subset \mathcal{D}$ avec $s = \bar{s}$ (resp. $s \neq \bar{s}$), la propriété universelle de $A_o(Q)$ (reps. $A_u(Q)$) donne un homomorphisme surjectif de C^*-algèbres de Hopf de $A_o(Q)$ (reps. $A_u(Q)$) dans S. On obtient ainsi un homomorphisme de C^*-algèbres de Hopf surjectif $\varphi : F \to S$, où F est un certain produit libre réduit de groupes quantiques $A_o(Q)$ et $A_u(Q)$. Les remarques effectuées plus haut sur la structure de $\mathfrak{g}$ montrent que Irr $\mathcal{C}$ est le monoïde libre engendré par $\mathcal{D}$ et quotienté par les relations $s\bar{s} = \bar{s}s = 1$ lorsque dim $s = 1$. Il est donc en bijection avec un système de représentants Irr $\mathcal{F}$ des coreprésentations irréductibles de F : cf [Wan95, Ban96, Ban97] pour la description de Irr $\mathcal{F}$ — lorsque dim $Q = 1$, $A_o(Q)$ et $A_u(Q)$ sont respectivement isomorphes à $C^*(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $C^*(\mathbb{Z})$.

De plus, pour chaque facteur $A_o(Q)$, $A_u(Q)$ de F, $\mathrm{id}\otimes\varphi$ envoie la coreprésentation fondamentale et sa conjuguée sur une paire $\{s, \bar{s}\}$ de $\mathcal{D}$, par définition de φ. Cela montre que $\mathrm{id}\otimes\varphi$ réalise, à équivalence près, la bijection entre Irr $\mathcal{F}$ et Irr $\mathcal{C}$. En particulier $\mathrm{id}\otimes\varphi$ envoie deux coreprésentations irréductibles et non équivalentes de F sur deux coreprésentations irréductibles et non équivalentes de S. Cela prouve que φ est injectif, grâce à [Wor88]. ∎

Démontrons tout de suite que dans ce cadre l'opérateur but se comporte comme dans le cas classique. Il restera alors à étudier le noyau et l'image de la projection de K_{++} sur K_g pour déterminer si l'opérateur de Julg-Valette est un opérateur de Fredholm.

Proposition 7.14 *Soit V un unitaire multiplicatif de type compact et $p_{\mathcal{D}}$ un projecteur central de $\hat{S}$ tel que $Up_{\mathcal{D}}U = p_{\mathcal{D}}$ et $p_0 p_{\mathcal{D}} = 0$. On suppose que le graphe classique associé à $(V, p_{\mathcal{D}})$ est un arbre strict. Alors la restriction de B à K_{++} est injective et son image est $(1 - p_0)H$.*

Démonstration. D'après la proposition 7.5, B entrelace les représentations id et $\hat{\delta}$ de $\hat{S}$ sur H et K respectivement. Quand on remplace la coaction de S_r par la coaction opposée, B n'est pas modifié car il dépend uniquement de la multiplication de S_r (proposition 7.5). Par conséquent B entrelace également les représentations $\mathrm{Ad}(U)$ et $\hat{\delta}'$ de $\hat{S}$. Finalement B entrelace $\hat{\pi}_2$ et $\hat{\pi}_4 \circ (\hat{\delta}\otimes\hat{\delta})$.

Soit $r \in$ Irr $\mathcal{C}$ et $s \in \mathcal{D}$ tels que $p_{++}(p_r\otimes p_s)$ soit non nul. D'après le lemme 7.10, $p_{++}(p_r\otimes p_s)K$ est isomorphe, en tant que représentation de $\hat{S}\otimes\hat{S}$, à l'espace de la représentation associée à $(r\otimes s)_+ \otimes \overline{(r\otimes s)}_+$, qui est irréductible par hypothèse. Ainsi $Bp_{++}(p_r\otimes p_s)$ est multiple d'une isométrie. De plus, soit χ_r (resp. χ_s) le caractère de r (resp. s), on a $B(\Lambda_h(\chi_r)\otimes\Lambda_h(\chi_s)) = \Lambda_h(\chi_r\chi_s) = \Lambda_h(\chi_{(r\otimes s)_-}) + \Lambda_h(\chi_{(r\otimes s)_+})$. Par conséquent

$$\begin{aligned} Bp_{++}(\Lambda_h\otimes\Lambda_h)(\chi_r\otimes\chi_s) &= B\ \hat{\delta}(p_{(r\otimes s)_+})(\Lambda_h\otimes\Lambda_h)(\chi_r\otimes\chi_s) \\ &= p_{(r\otimes s)_+} B(\Lambda_h\otimes\Lambda_h)(\chi_r\otimes\chi_s) = \Lambda_h(\chi_{(r\otimes s)_+}). \end{aligned}$$

Comme la norme dans H d'un caractère d'une représentation irréductible vaut 1 [Wor87a, th. 5.8] on peut donc minorer la norme de $Bp_{++}(p_r\otimes p_s)$:

$$\begin{aligned} ||Bp_{++}(p_r\otimes p_s)|| &= \frac{||\Lambda_h(\chi_{(r\otimes s)_+})||}{||p_{++}(\Lambda_h\otimes\Lambda_h)(\chi_r\otimes\chi_s)||} \\ &\geq \frac{||\Lambda_h(\chi_{(r\otimes s)_+})||}{||(\Lambda_h\otimes\Lambda_h)(\chi_r\otimes\chi_s)||} = 1. \end{aligned} \tag{7.2}$$

On conclut en remarquant que Bp_{++} envoie les sous-espaces orthogonaux $p_{++}(p_r \otimes p_s)$ sur les sous-espaces $p_{(r\otimes s)_+}H$, qui sont différents deux-à-deux par hypothèse, donc orthogonaux, et dont la somme vaut bien $(1-p_0)H$. L'opérateur B est donc injectif et d'image dense dans $(1-p_0)H$, or cette image est fermée d'après (7.2). ■

7.5 Involutivité affaiblie

On a déjà remarqué que Θ n'est pas involutif dans le cas quantique, et que l'égalité $\Theta^{-1} = \Theta$ est remplacée en général par la relation $\Theta^{-1} = (\hat{J}\otimes\hat{J})\Theta(\hat{J}\otimes\hat{J})$. Nous allons maintenant démontrer au théorème 7.15 une propriété d'« involutivité affaiblie » plus utile que la relation $\Theta^{-1} = (\hat{J}\otimes\hat{J})\Theta(\hat{J}\otimes\hat{J})$. En particulier, elle est reliée au graphe classique associé à $(V, p_{\mathcal{D}})$, via les projecteurs p_{++} et p_{--}. Nous l'utiliserons à de nombreuses reprises par la suite, et notamment pour la démonstration de la proposition 7.18 et du théorème 7.19.

Théorème 7.15 *Soit V un unitaire multiplicatif de type compact et $p_{\mathcal{D}}$ un projecteur central de $\hat{S}$ tel que $Up_{\mathcal{D}}U = p_{\mathcal{D}}$ et $p_0 p_{\mathcal{D}} = 0$. On suppose que le graphe classique associé à $(V, p_{\mathcal{D}})$ est un arbre strict. Alors*

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad (p_{++} + p_{--})\Theta^n(p_{++} + p_{--}) = (p_{++} + p_{--})\Theta^{-n}(p_{++} + p_{--}). \tag{7.3}$$

Démonstration. On démontre un résultat plus fort au lemme 7.16 ci-dessous. En effet, en intercalant $\mathrm{id} = p_{++} + p_{+-} + p_{-+} + p_{--}$ entre les occurrences de $\Theta^{\pm 1}$ dans $\Theta^{\pm n}$ et en développant, (7.3) devient une égalité entre sommes de termes du type

$$p_{\epsilon,\epsilon}\Theta^{\pm 1} p_{\epsilon_1,\epsilon'_1}\Theta^{\pm 1}\cdots\Theta^{\pm 1} p_{\epsilon_k,\epsilon'_k}\Theta^{\pm 1} p_{\epsilon',\epsilon'}.$$

Ces termes sont en fait deux-à-deux égaux d'après le lemme 7.16. ■

Lemme 7.16 *On reprend les hypothèses du théorème 7.15. Soit ϵ, ϵ', ϵ_i, $\epsilon'_i \in \{+,-\}$, avec $i \in [\![1,n]\!]$. Alors on a*

$$p_{\epsilon,\epsilon}\Theta p_{\epsilon_1,\epsilon'_1}\Theta\cdots\Theta p_{\epsilon_n,\epsilon'_n}\Theta p_{\epsilon',\epsilon'} = p_{\epsilon,\epsilon}\Theta^{-1} p_{\epsilon'_1,\epsilon_1}\Theta^{-1}\cdots\Theta^{-1} p_{\epsilon'_n,\epsilon_n}\Theta^{-1} p_{\epsilon',\epsilon'}. \tag{7.4}$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \geq -1$, en convenant d'appeler « rang -1 » l'égalité triviale $p_{\epsilon,\epsilon}p_{\epsilon',\epsilon'} = p_{\epsilon,\epsilon}p_{\epsilon',\epsilon'}$. Le rang 0 s'écrit alors $p_{\epsilon,\epsilon}\Theta p_{\epsilon',\epsilon'} = p_{\epsilon,\epsilon}\Theta^{-1} p_{\epsilon',\epsilon'}$. Soit $n \geq 0$. S'il existe $l \in [\![1,n]\!]$ tel que $\epsilon_l = \epsilon'_l$, on peut conclure en utilisant deux fois l'hypothèse de récurrence : on applique

- le rang $l-1$ avec $\underline{\epsilon} = \epsilon$, $\underline{\epsilon}' = \epsilon_l$, $\underline{\epsilon}_i = \epsilon_i$ et $\underline{\epsilon}'_i = \epsilon'_i$, pour $i \in [\![1, l-1]\!]$,
- le rang $n-l$ avec $\underline{\epsilon} = \epsilon_l$, $\underline{\epsilon}' = \epsilon'$, $\underline{\epsilon}_i = \epsilon_i$ et $\underline{\epsilon}'_i = \epsilon'_i$, pour $i \in [\![l+1, n]\!]$.

On suppose maintenant que $\epsilon_i \neq \epsilon'_i$ pour tout i, alors les deux membres de (7.4) sont non nuls **ssi** $\epsilon' = -\epsilon$ et $(\epsilon_i, \epsilon'_i) = (-\epsilon, -\epsilon')$ pour tout i : en effet d'après la proposition 7.8 on doit avoir $\epsilon_1 = -\epsilon$, $\epsilon_{i+1} = -\epsilon'_i$ et $\epsilon' = -\epsilon'_n$. De plus le cas $\epsilon = -1$ se déduit du cas $\epsilon = 1$ par passage à l'adjoint. Ainsi il reste à prouver l'égalité

$$p_{++}\Theta p_{-+}\Theta\cdots\Theta p_{-+}\Theta p_{--} = p_{++}\Theta^{-1} p_{+-}\Theta^{-1}\cdots\Theta^{-1} p_{+-}\Theta^{-1} p_{--},$$

qui s'écrit plus simplement $p_{++}\Theta^{n+1}p_{--} = p_{++}\Theta^{-(n+1)}p_{--}$ d'après la proposition 7.8. Il est équivalent de démontrer les égalités suivantes, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(p_k \otimes p_1)p_{++}\Theta^{n+1}p_{--}(p_{k+n+1}\otimes p_1) = (p_k\otimes p_1)p_{++}\Theta^{-(n+1)}p_{--}(p_{k+n+1}\otimes p_1). \tag{7.5}$$

Pour cela on applique l'opérateur but, qui est injectif sur K_{++}, aux deux membres. D'après la proposition 7.9, on a

$$\begin{aligned}B(p_k\otimes p_1)p_{++}\Theta^{n+1}p_{--}(p_{k+n+1}\otimes p_1) &= p_{k+1}B(\mathrm{id}-p_{--})\Theta^{n+1}p_{--}(p_{k+n+1}\otimes p_1)\\ &= p_{k+1}B\Theta^{n+1}p_{--}(p_{k+n+1}\otimes p_1)\\ &\quad - B(p_{k+2}\otimes p_1)p_{--}\Theta^{n+1}p_{--}(p_{k+n+1}\otimes p_1),\end{aligned}\tag{7.6}$$

et une expression analogue en remplaçant Θ par Θ^{-1}. Il suffit donc de montrer que (7.6) est inchangé lorsqu'on remplace Θ par Θ^{-1}. Pour le premier terme, cela résulte clairement de la proposition 7.5. On a d'autre part, grâce à la proposition 7.8 :

$$\begin{aligned}(p_{k+2}\otimes p_1)p_{--}\Theta^{n+1}p_{--}(p_{k+n+1}\otimes p_1) &= (p_{k+2}\otimes p_1)p_{--}\Theta p_{+\star}(p_{k+1}\otimes p_1)\Theta^n p_{--}(p_{k+n+1}\otimes p_1)\\ &= (p_{k+2}\otimes p_1)p_{--}\Theta p_{++}(p_{k+1}\otimes p_1)\Theta^n p_{--}(p_{k+n+1}\otimes p_1),\end{aligned}$$

et une expression analogue en remplaçant Θ par Θ^{-1}. On applique alors l'hypothèse de récurrence, sous la forme de l'équation (7.5), aux rangs 0 et $n-1$: cela montre que le deuxième terme de (7.6) est inchangé lorsqu'on remplace Θ par Θ^{-1}. Finalement les deux membres de (7.5) sont bien égaux. ■

Corollaire 7.17 *Lorsque les hypothèses du théorème 7.15 sont vérifiées, il existe un unique unitaire $W : K_{+-} \to K_{-+}$ tel que*

$$\forall\ k\in\mathbb{N}\quad W(p_{+-}\Theta)^k p_{++} = (p_{-+}\Theta^{-1})^k p_{++}.$$

De plus on a $Wp_{+-}\Theta = p_{-+}\Theta^{-1}W$ et $p_{--}\Theta = p_{--}\Theta^{-1}W$ sur K_{+-}.

Démonstration. Soit X (resp. X') l'opérateur de $K_{++}\otimes\ell_2(\mathbb{N})$ dans K_{+-} (resp. K_{-+}) définit par $X(\xi\otimes e_k) = 2^{-k}(p_{+-}\Theta)^k\xi$ (resp. $X'(\xi\otimes e_k) = 2^{-k}(p_{-+}\Theta^{-1})^k\xi$). Grâce aux coefficients 2^{-k}, les opérateurs X et X' sont bornés, et il est facile de voir que leurs adjoints sont donnés par

$$X^* = \sum 2^{-k}T_k p_{++}(\Theta^{-1}p_{+-})^k \quad\text{et}\quad X'^* = \sum 2^{-k}T_k p_{++}(\Theta p_{-+})^k,$$

où on pose $T_k(\xi) = \xi\otimes e_k$, pour $\xi\in K_{++}$. Soit ζ un élément de Ker X^*, pour tout k et tout n on a $p_{++}(\Theta^{-1}p_{+-})^k(p_n\otimes p_1)\zeta = 0$. En particulier $(\Theta^{-1}p_{+-})^n(p_n\otimes p_1)\zeta$ est nul, car c'est un élément de $(p_0\otimes p_1)K$, qui est inclus dans K_{++}. On a alors, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$:

$$(\Theta^{-1}p_{+-})^k(p_n\otimes p_1)\zeta = p_{++}(\Theta^{-1}p_{+-})^k(p_n\otimes p_1)\zeta + \Theta(\Theta^{-1}p_{+-})^{k+1}(p_n\otimes p_1)\zeta = 0,$$

par récurrence descendante finie sur k. En particulier, pour $k=0$, on obtient $(p_n\otimes p_1)\zeta = 0$. Ainsi X^* est injectif, donc X est d'image dense. De même, X' est d'image dense. Pour obtenir l'existence et l'unicité de W, qui est caractérisé par l'identité $WX = X'$, il reste à montrer que $||X\eta|| = ||X'\eta||$ pour tout $\eta\in K_{++}\otimes\ell_2(\mathbb{N})$, c'est-à-dire que $X^*X = X'^*X'$. Il suffit d'établir cette identité sur chaque sous-espace $K_{++}\otimes e_k$, et on est donc amené à démontrer pour tous k, l l'égalité

$$p_{++}(\Theta^{-1}p_{+-})^l(p_{+-}\Theta)^k p_{++} = p_{++}(\Theta p_{-+})^l(p_{-+}\Theta^{-1})^k p_{++},\tag{7.7}$$

qui s'écrit aussi

$$\begin{aligned}&p_{++}\Theta^{-1}p_{+-}\cdots p_{+-}\Theta^{-1}(1-p_{--})\Theta p_{+-}\cdots p_{+-}\Theta p_{++} =\\ &\qquad = p_{++}\Theta p_{-+}\cdots p_{-+}\Theta(1-p_{--})\Theta^{-1}p_{-+}\cdots p_{-+}\Theta^{-1}p_{++}.\end{aligned}$$

Pour cela on procède par récurrence sur $k+l$: quand on distribue $(1-p_{--})$ à droite et à gauche, les termes provenant de 1 sont égaux par hypothèse de récurrence, et les termes provenant de p_{--} sont égaux grâce au lemme 7.16. L'initialisation de la récurrence se fait lorsque k ou l est nul : alors les deux membres de (7.7) sont nuls, lorsque $k \neq l$, ou trivialement égaux, lorsque $k=l=0$.

Comme X est d'image dense, il suffit de vérifier les égalités $Wp_{+-}\Theta = p_{-+}\Theta^{-1}W$ et $p_{--}\Theta = p_{--}\Theta^{-1}W$ sur l'image de $(p_{+-}\Theta)^k p_{++}$, pour tout k. Pour la première, cela résulte directement de la définition de W : on a

$$(Wp_{+-}\Theta)\ (p_{+-}\Theta)^k p_{++} = W(p_{+-}\Theta)^{k+1}p_{++} = (p_{-+}\Theta^{-1})^{k+1}p_{++} \quad \text{et}$$
$$(p_{-+}\Theta^{-1}W)\ (p_{+-}\Theta)^k p_{++} = p_{-+}\Theta^{-1}(p_{-+}\Theta^{-1})^k p_{++} = (p_{-+}\Theta^{-1})^{k+1}p_{++}.$$

Pour la seconde, on utilise de plus le lemme 7.16 :

$$(p_{--}\Theta^{-1}W)\ (p_{+-}\Theta)^k p_{++} = p_{--}\Theta^{-1}(p_{-+}\Theta^{-1})^k p_{++} = (p_{--}\Theta)\ (p_{+-}\Theta)^k p_{++}. \qquad \blacksquare$$

7.6 Image et noyau de l'opérateur de Julg-Valette

On donne maintenant un premier aperçu sur les problèmes qui se posent pour l'étude de l'image et du noyau de la projection de K_{++} sur K_g — qui sont essentiellement ceux de l'opérateur de Julg-Valette d'après la proposition 7.14. L'opérateur Θ étant unitaire, on a $\mathrm{Im}\ (\Theta - \mathrm{id}) = \mathrm{Im}\ (\Theta^* - \mathrm{id})$, ainsi $K_g^\perp = \overline{\mathrm{Im}}\ (\Theta - \mathrm{id})$. En particulier pour étendre le résultat du cas cocommutatif, c'est-à-dire pour montrer que la projection orthogonale de K_{++} sur K_g est inversible, il faut montrer que $K_{++} \oplus \overline{\mathrm{Im}}\ (\Theta - \mathrm{id}) = K$. Notons que dans le cas classique on a $\Theta^2 = \mathrm{id}$, donc $\mathrm{Im}\ (\Theta - \mathrm{id})$ est égal à $\mathrm{Ker}\ (\Theta + \mathrm{id})$, et en particulier c'est un sous-espace fermé.

Proposition 7.18 *Soit V un unitaire multiplicatif de type compact et $p_{\mathcal{D}}$ un projecteur central de $\hat{S}$ tel que $Up_{\mathcal{D}}U = p_{\mathcal{D}}$ et $p_0 p_{\mathcal{D}} = 0$. On suppose que le graphe classique associé à $(V, p_{\mathcal{D}})$ est un arbre strict. Alors K_{++} et $\mathrm{Im}(\Theta - \mathrm{id})$ sont en somme directe et engendrent un sous-espace dense de K.*

Démonstration. Soit $p_{\leq n} = \sum_{k \leq n} (p_k \otimes p_1)$. Nous allons montrer par récurrence sur n que $p_{\leq n}(K) \subset K_{++} + \mathrm{Im}(\Theta - \mathrm{id})$. Il est clair sur la définition que $p_{\leq 0}(K) \subset K_{++}$: en effet pour tout $y \in \mathfrak{s}$ tel que $(1_{\mathcal{C}}, y) \in \mathfrak{a}$ on a $(1_{\mathcal{C}}, y) \in \mathfrak{a}_+$, donc $p_{\leq 0} = p_{++}p_{\leq 0}$. Soit $n \geq 1$ et $\zeta \in (p_n \otimes p_1)(K)$. Si $\zeta \in p_{++}(K)$, il n'y a rien à montrer. Si maintenant $\zeta \in p_{-\star}(K)$, d'après la proposition 7.8 on a $\Theta\zeta \in (p_{n-1} \otimes p_1)(K)$, donc

$$\zeta = (\mathrm{id} - \Theta)(\zeta) + \Theta(\zeta) \in \mathrm{Im}(\Theta - \mathrm{id}) + K_{\leq (n-1)}.$$

Enfin, si ζ est un élément de $p_{\star -}K$, on procède de même avec Θ^{-1} pour utiliser le fait que $\Theta^{-1}p_{\star -}(p_n \otimes p_1) = (p_{n-1} \otimes p_1)p_{+\star}\Theta$, et en remarquant que $\mathrm{Im}(\Theta^{-1} - \mathrm{id}) = \mathrm{Im}(\Theta - \mathrm{id})$:

$$\zeta = (\mathrm{id} - \Theta^{-1})(\zeta) + \Theta^{-1}(\zeta) \in \mathrm{Im}(\Theta - \mathrm{id}) + K_{\leq (n-1)}.$$

Par linéarité, on a ainsi prouvé que $K_{\leq n} \subset K_{\leq (n-1)} + K_{++} + \mathrm{Im}(\Theta - \mathrm{id})$, et par récurrence il s'ensuit que $K_{++} + \mathrm{Im}(\Theta - \mathrm{id})$ est dense dans K.

Il reste à montrer que la somme est directe. Pour cette démonstration, on notera $p_k^{\epsilon,\epsilon'}$ le projecteur $(p_k \otimes p_1)p_{\epsilon,\epsilon'}$, pour tous ϵ, $\epsilon' \in \{+,-,\star\}$. Soit $\zeta \in K$ et $\xi \in K_{++}$ tels que

$\Theta(\zeta) - \zeta = \xi$. On a $\Theta p_k^{-\star} = p_{k-1}^{\star+}\Theta$ et $\Theta^{-1}p_k^{\star-} = p_{k-1}^{+\star}\Theta^{-1}$, donc cette relation se traduit « en coordonnées » par

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad p_k\xi = p_k^{++}\Theta p_{k+1}^{-\star}\zeta - p_k^{++}\zeta, \tag{7.8}$$

$$0 = p_k^{-+}\Theta p_{k+1}^{-\star}\zeta - p_k^{-+}\zeta, \tag{7.9}$$

$$0 = \Theta p_{k-1}^{+\star}\zeta - p_k^{\star-}\zeta. \tag{7.10}$$

On a alors, d'après (7.10) au rang $k+1$: $p_k^{++}\zeta = p_k^{++}\Theta^{-1}p_{k+1}^{\star-}\zeta$, donc en reportant dans (7.8) puis en utilisant le résultat du théorème 7.15 au rang 1 :

$$p_k\xi = p_k^{++}(\Theta p_{k+1}^{-\star}\zeta - \Theta^{-1}p_{k+1}^{\star-}\zeta) = p_k^{++}\Theta p_{k+1}^{-+}\zeta - p_k^{++}\Theta^{-1}p_{k+1}^{+-}\zeta.$$

Montrons par récurrence sur n qu'on a en fait

$$p_k\xi = p_k^{++}\Theta^n p_{k+n}^{-+}\zeta - p_k^{++}\Theta^{-n}p_{k+n}^{+-}\zeta. \tag{7.11}$$

On a d'après (7.9) au rang $k+n$: $p_{k+n}^{-+}\zeta = p_{k+n}^{-+}\Theta p_{k+n+1}^{-\star}\zeta$, et d'après (7.10) au rang $k+n+1$, comme précédemment : $p_{k+n}^{+-}\zeta = p_{k+n}^{+-}\Theta^{-1}p_{k+n+1}^{\star-}\zeta$. On reporte ces égalités dans (7.11) :

$$\begin{aligned} p_k\xi &= p_k^{++}\Theta^n p_{k+n}^{-+}\Theta p_{k+n+1}^{-\star}\zeta - p_k^{++}\Theta^{-n}p_{k+n}^{+-}\Theta^{-1}p_{k+n+1}^{\star-}\zeta \\ &= p_k^{++}\Theta^{n+1}p_{k+n+1}^{-\star}\zeta - p_k^{++}\Theta^{-(n+1)}p_{k+n+1}^{\star-}\zeta, \end{aligned} \tag{7.12}$$

car $p_k\Theta^n p_{k+n}^{-+}\Theta p_{k+n+1} = p_k\Theta^{n+1}p_{k+n+1}$ d'après la proposition 7.8 — et de même avec Θ^{-1}. On obtient bien (7.11) au rang $(n+1)$ en appliquant le résultat du théorème 7.15 dans (7.12). En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (7.11) on obtient $p_k\xi = 0$. Ainsi K_{++} et $\mathrm{Im}(\Theta - \mathrm{id})$ sont en somme directe. ■

Ce résultat montre que la projection de K_{++} sur K_g est d'image dense, mais ne donne pas de renseignement sur son noyau lorsque $\mathrm{Im}\,(\Theta - \mathrm{id})$ n'est pas fermée. On peut chercher à étendre la preuve à $\overline{\mathrm{Im}}\,(\Theta - \mathrm{id})$ en considérant une suite de vecteurs $\zeta_\alpha \in K$ telle que $\xi_\alpha = \Theta(\zeta_\alpha) - \zeta_\alpha$ converge vers $\xi_\infty \in K_{++}$. En reproduisant les calculs de la démonstration, on obtient par récurrence

$$\begin{aligned} p_k^{++}\xi_\alpha = p_k^{++}\Theta^n p_{k+n}^{-+}\zeta_\alpha - p_k^{++}\Theta^{-n}p_{k+n}^{+-}\zeta_\alpha \\ - \sum_{l=1}^{n+1} p_k^{++}\Theta^{-l}p_{k+l}^{\star-}\xi_\alpha - \sum_{l=1}^{n} p_k^{++}\Theta^{l}p_{k+l}^{-+}\xi_\alpha. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Si on suppose que pour tout k les séries $(\sum_l ||p_k\Theta^l p_{k+l}||)$ et $(\sum_l ||p_k\Theta^{-l}p_{k+l}||)$ convergent, l'équation (7.13) permet de voir que ξ_∞ est nul : choisir α de manière à ce que $p_m^{-+}\xi_\alpha$ et $p_m^{\star-}\xi_\alpha$ soient suffisamment petits pour tout m, puis faire tendre n vers $+\infty$. On obtient alors l'égalité $K_{++} \cap \overline{\mathrm{Im}}\,(\Theta - \mathrm{id}) = \{0\}$, et donc le fait que le noyau de F_g est égal à p_0H.

Cette hypothèse est triviale dans le cas classique, mais n'est pas vérifiée dans le cas de $A_u(F)$ et $A_o(F)$ (proposition 8.3) : on verra à la section 8.1 qu'alors $K_{++} \cap \overline{\mathrm{Im}}\,(\Theta - \mathrm{id})$, et donc le noyau de F_g, sont de dimension infinie. De plus il se pourrait que l'image de F_g ne soit pas fermée. On verra à la section 8.1 que ce n'est pas le cas, et on expliquera ensuite comment remédier à la non-injectivité de F_g pour construire des éléments de KK-théorie. Démontrons maintenant un résultat qui permettra de déterminer le conoyau de F_g : d'après la proposition 7.14, c'est l'image par B du conoyau de la projection orthogonale de K_{++} sur K_g, qui est lui-même égal à la fermeture de $p_{++}K_g$.

Théorème 7.19 *Soit V un unitaire multiplicatif de type compact et $p_{\mathcal{D}}$ un projecteur central de $\hat{S}$ tel que $Up_{\mathcal{D}}U = p_{\mathcal{D}}$ et $p_0 p_{\mathcal{D}} = 0$. On suppose que le graphe classique associé à $(V, p_{\mathcal{D}})$ est un arbre strict. Alors l'image de K_g par la projection orthogonale sur K_{++} peut s'exprimer sous la forme suivante :*

$$p_{++}K_g = \{\zeta \in K_{++} \mid \exists\ \eta \in K_{+-} \quad (\mathrm{id} - p_{+-}\Theta)(\eta) = p_{+-}\Theta\zeta\}.$$

Démonstration. Si ξ est dans K_g, on a $\Theta\xi = \xi$ et en particulier $p_{+-}\xi = p_{+-}\Theta\xi = p_{+-}\Theta p_{+-}\xi + p_{+-}\Theta p_{++}\xi$. Si on pose $\zeta = p_{++}\xi$ et $\eta = p_{+-}\xi$, cela s'écrit aussi $(\mathrm{id} - p_{+-}\Theta)\eta = p_{+-}\Theta\zeta$. Ainsi on a l'inclusion $p_{++}K_g \subset \{\zeta \in K_{++} \mid \exists\ \eta \in K_{+-} \quad (\mathrm{id} - p_{+-}\Theta)(\eta) = p_{+-}\Theta\zeta\}$. Inversement, soit $\zeta \in K_{++}$ et $\eta \in K_{+-}$ tels que $(\mathrm{id} - p_{+-}\Theta)(\eta) = p_{+-}\Theta\zeta$. On pose $\xi = \zeta + \eta + W\eta + p_{--}\Theta(\zeta + \eta)$, et on va montrer que $\Theta\xi = \xi$, ce qui prouvera que $\zeta = p_{++}\xi$ est dans $p_{++}K_g$. L'égalité $\Theta(\xi) = \xi$ équivaut à $p_{\star-}\xi = \Theta p_{+\star}\xi$ et $p_{-\star}\xi = \Theta^{-1}p_{\star+}\xi$, donc également au système suivant :

$$p_{+-}\xi = p_{+-}\Theta p_{++}\xi + p_{+-}\Theta p_{+-}\xi \tag{7.14}$$
$$p_{--}\xi = p_{--}\Theta p_{++}\xi + p_{--}\Theta p_{+-}\xi \tag{7.15}$$
$$p_{--}\xi = p_{--}\Theta^{-1} p_{++}\xi + p_{--}\Theta^{-1} p_{-+}\xi \tag{7.16}$$
$$p_{-+}\xi = p_{-+}\Theta^{-1} p_{++}\xi + p_{-+}\Theta^{-1} p_{-+}\xi. \tag{7.17}$$

Récrivons ce système en tenant compte de la définition de ξ :

$$\eta = p_{+-}\Theta\zeta + p_{+-}\Theta\eta \tag{7.14'}$$
$$p_{--}\Theta(\zeta + \eta) = p_{--}\Theta\zeta + p_{--}\Theta\eta \tag{7.15'}$$
$$p_{--}\Theta(\zeta + \eta) = p_{--}\Theta^{-1}\zeta + p_{--}\Theta^{-1}W\eta \tag{7.16'}$$
$$W\eta = p_{-+}\Theta^{-1}\zeta + p_{-+}\Theta^{-1}W\eta. \tag{7.17'}$$

On remarque alors que (7.14') est équivalente à l'hypothèse faite sur ζ et η, tandis que (7.15') est triviale. Le théorème 7.15 et le corollaire 7.17 montrent que (7.16') est toujours vérifiée. Enfin pour (7.17') on applique l'hypothèse sur ζ et η pour écrire $W\eta = Wp_{+-}\Theta\zeta + Wp_{+-}\Theta\eta$, et on conclut grâce au corollaire 7.17. ■

8 Opérateur de Julg-Valette pour $A_o(Q)$

Soit $n \geq 2$ et $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $Q\bar{Q} \in \mathbb{C}I_n$ et $\mathrm{Tr}\ Q^*Q = \mathrm{Tr}\ (Q^*Q)^{-1}$. Dans cette section on étudie l'arbre quantique associé au groupe quantique compact libre $A_o(Q)$, muni de sa coreprésentation r_1 — c'est-à-dire qu'on se place dans le cas où $\mathcal{D}$ a un seul élément. Rappelons [Ban96] que les classes de coreprésentations irréductibles de $A_o(Q)$ sont indexées par $\mathbb{N}$ et qu'on note (r_k) un système de représentants, en particulier r_1 est la coreprésentation fondamentale de $A_o(Q)$. On a $\bar{r}_k = r_k$ et $r_k \otimes r_1 \simeq r_{k-1} \oplus r_{k+1}$, ainsi le graphe classique associé à $(A_o(Q), r_1)$ est donné par $\mathfrak{s} = \mathbb{N}$, $\mathfrak{a} = \{(k, k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$, et on a $(r_k \otimes r_1)_- = r_{k-1}$ et $(r_k \otimes r_1)_+ = r_{k+1}$.

On utilisera pour l'étude détaillée de l'opérateur de Julg-Valette de $(A_o(Q), r_1)$ des calculs explicites dans la catégorie $\mathcal{C}$ des coreprésentations de dimension finie de $A_o(Q)$: ces calculs sont regroupés en appendice, page 99 et suivantes. On notera en particulier H_k l'espace de la coreprésentation r_k. Les résultats de l'appendice sont exprimés en fonction des réels $m_k = \mathrm{Tr}\ F_k$, qui sont solutions de la récurrence linéaire $m_{k+1} - m_1 m_k + m_{k-1} = 0$, avec $m_0 = 1$ et $m_1 = \mathrm{Tr}\ Q^*Q$. On notera en particulier $0 < b \leq 1 \leq a$ les racines de l'équation $x^2 - m_1 x + 1 = 0$, et $s = b^2 = a^{-2}$. On convient de poser $m_{-1} = 0$.

8.1 Conoyau de l'opérateur de Julg-Valette

Dans cette section on considère en fait l'adjoint de l'opérateur de Julg-Valette, dont on cherche à déterminer l'image. Par définition, F_g^* est la composée de la projection de K_g sur K_{++}, et de la restriction de l'opérateur but B à K_{++}. La proposition 7.18 montre que F_g^* est injectif, de plus on a vu à la proposition 7.14 que B induit une bijection entre K_{++} et $(1-p_0)H$. Nous allons donc porter notre attention sur la projection $p_{++} : K_g \to K_{++}$, et en particulier sur son image, dont une première expression a été donnée au théorème 7.19.

$$F_g^* : K_g \xhookrightarrow{p_{++}} K_{++} \xrightarrow[\sim]{B} (1-p_0)H \,.$$

Pour cela on a besoin de renseignements quantitatifs sur les opérateurs du type $p_{+-}\Theta p_{+-}$, déjà rencontrés à la fin de la section précédente. Ces renseignements sont donnés par le lemme 8.2, qui repose sur les calculs de l'appendice. On voit en particulier que $p_{+-}\Theta p_{+-}$ agit comme un opérateur de translation à droite sur $K_{+-} = \oplus(p_k \otimes p_1)K_{+-}$, modulo les compacts. On introduit alors la limite inductive associée, H_∞, et on montre à la proposition 8.6 que $p_{++}K_g$ est le noyau d'un opérateur naturel $R : K_{++} \to H_\infty$. Autrement dit, le conoyau de F_g coïncide avec $\overline{\mathrm{Im}}\ BR^*$.

Lemme 8.1 *Soit $L = H_k \otimes H_1 \otimes H_{k+1}$ et $l \le k$. On note*
- *G_1 le sous-espace de $H_{k-1} \otimes H_{k+1} \subset L$ isomorphe à r_{2l},*
- *G_2 le sous-espace de $H_k \otimes H_{k+2} \subset L$ isomorphe à r_{2l}.*

Alors le carré de la norme de la projection de G_1 sur G_2 vaut $1 - \frac{m_l m_{l-1}}{m_k m_{k+1}}$.

Démonstration. Cf le lemme A.7, page 105. ∎

Lemme 8.2 *Soit Θ l'opérateur de retournement du graphe quantique associé au couple $(A_o(Q), \{r_1\})$. On pose, pour $k \ge 1$ et $0 \le l \le k$:*

$$s_{k,l} := \sqrt{\frac{m_l m_{l-1}}{m_k m_{k-1}}} \quad et \quad c_{k,l} := \sqrt{1 - s_{k,l}^2}.$$

Sur chacun des sous-espaces $q_l(p_k \otimes p_1)p_{+-}K$, l'opérateur $p_{+-}\Theta p_{+-}$ est un multiple d'une isométrie et sa norme vaut $c_{k+1,l}$. Plus généralement, soit ϵ_1, ϵ_1', ϵ_2, $\epsilon_2' \in \{\pm 1\}$, on a les résultats analogues suivants pour $p_{\epsilon_2,\epsilon_2'}\Theta p_{\epsilon_1,\epsilon_1'}$. Soit $k \ge \max(0, \epsilon_1, \epsilon_1')$ et $l \le k$. On a, en posant $k' = \max(k, k+\epsilon_1)$:

$$||p_{\epsilon_2,\epsilon_2'}\Theta p_{\epsilon_1,\epsilon_1'}(p_k \otimes p_1)q_l|| = \begin{cases} 0 & si\ \epsilon_2' = \epsilon_1, \\ s_{k',l} & si\ \epsilon_2' \ne \epsilon_1\ et\ \epsilon_1\epsilon_1' \ne \epsilon_2\epsilon_2', \\ c_{k',l} & si\ \epsilon_2' \ne \epsilon_1\ et\ \epsilon_1\epsilon_1' = \epsilon_2\epsilon_2'. \end{cases}$$

Démonstration. On a $||p_{+-}\Theta p_{+-}(p_k \otimes p_1)q_l|| = ||(\Theta^* p_{+\star}\Theta)\ p_{\star -}\ (q_l p_{+\star}(p_k \otimes p_1))||$. Or le sous-espace $p_{+\star}(p_k \otimes p_1)K$ est irréductible pour la représentation $\hat\pi_4 \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \hat\delta)$ de $\hat S \otimes \hat S \otimes \hat S$ et s'identifie à $H_k \otimes H_1 \otimes H_{k+1}$, d'après le lemme 7.10. Examinons comment $p_{\star -}$, $\Theta^* p_{+\star}\Theta$ et q_l agissent dans cette identification.
- D'après le lemme 7.10, $p_{\star -}$ agit dans cet isomorphisme comme $p_- \otimes \mathrm{id}$, si p_- est la projection de $H_k \otimes H_1$ sur son sous-espace isomorphe à r_{k-1}.
- On a $p_{+\star} = \hat\pi_4 \circ (\hat\delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(1 \otimes p)$, avec $p = \sum \hat\delta(p_{n+1})(p_1 \otimes p_n)$. D'après le lemme 7.6 on a donc $\Theta^* p_{+\star}(p_{k+1} \otimes p_1)\Theta = \hat\pi_4 \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \hat\delta)(1 \otimes p)$, qui agit sur le sous-espace irréductible $H_k \otimes H_1 \otimes H_{k+1}$ comme la projection $\mathrm{id} \otimes p_+$ sur $H_k \otimes H_{k+2}$.
- Enfin $q_l = \hat\pi_4 \circ \hat\delta^3(p_{2l})$ correspond à la projection de $H_k \otimes H_1 \otimes H_{k+1}$ sur la somme de ses sous-espaces isomorphes à r_{2l}, dans la représentation $\hat\delta^3$ de $\hat S$.

Ainsi la norme recherchée est le cosinus de l'angle entre les sous-espaces irréductibles de $p_-(H_k \otimes H_1) \otimes H_{k+1}$ et $H_k \otimes p_+(H_1 \otimes H_{k+1})$ isomorphes à r_{2l}. Le lemme 8.1 donne alors le résultat de l'énoncé pour $||p_{+-}\Theta p_{+-}(p_k \otimes p_1)q_l||$. On en déduit la norme de $p_{+-}\Theta p_{++}(p_k \otimes p_1)q_l$ en remarquant que la somme des carrés des deux normes vaut 1, et on obtient de même les autres cas. ∎

On déduit de ce lemme deux résultats qui éclairent les constructions de la section 7. La proposition 8.3 montre que la proposition 7.18 ne permet pas d'obtenir de renseignement sur l'image de F_g^* dans le cas de $A_o(Q)$. D'autre part, la proposition 8.4 montre que l'opérateur W du corollaire 7.17 est déterminé dans le cas de $A_o(Q)$ par la seule relation $Wp_{+-}\Theta p_{++} = p_{-+}\Theta^{-1}p_{++}$. En outre, on voit comme au corollaire 7.17 qu'on peut étendre W à K_{-+} grâce à la relation $Wp_{-+}\Theta p_{--} = p_{+-}\Theta^{-1}p_{--}$. Si on pose de plus $Wp_{++} = p_{++}$ et $Wp_{--} = p_{--}$, on peut alors montrer que la propriété d'involutivité affaiblie du théorème 7.15 s'exprime de manière plus générale sous la forme $W\Theta W^* = \Theta^{-1}$.

Proposition 8.3 *La suite $(||(p_k \otimes p_1)\Theta^l(p_{k+l} \otimes p_1)||)_l$ est minorée par un réel strictement positif, pour tout k.*

Démonstration. Rappelons le fait suivant de la théorie générale : $(p_k \otimes p_1)\Theta^l(p_{k+l} \otimes p_1) = (p_k \otimes p_1)\Theta(p_{-+}\Theta p_{-+})^{l-2}\Theta(p_{k+l} \otimes p_1)$. Ainsi la norme de $(p_k \otimes p_1)\Theta^l(p_{k+l} \otimes p_1)$ est minorée par celle de $(p_{-+}\Theta p_{-+})^{l-2}(p_{k+l-1} \otimes p_1)$, qui d'après le lemme précédent est elle-même minorée par

$$||(p_{-+}\Theta p_{-+})^{l-2}(p_{k+l-1} \otimes p_1)q_1|| = \prod_{i=k+2}^{k+l-1} c_{i,1}. \tag{8.1}$$

Or il est facile de vérifier que la série des $s_{i,1}$ est convergente, donc le produit infini des $c_{i,1}$, pour $i \geq 1$, est strictement positif. Comme il minore (8.1), on obtient bien le résultat annoncé. ∎

Proposition 8.4 *Les images des opérateurs $p_{+-}\Theta p_{++}$ et $p_{-+}\Theta p_{--}$ sont denses dans K_{+-} et K_{-+} respectivement.*

Démonstration. D'après le lemme 8.2 l'opérateur $p_{+-}\Theta p_{++}(p_k \otimes p_1)q_l$ est un multiple d'une isométrie et a pour norme $s_{k+1,l}$. Ce coefficient n'est nul que si $l = 0$, cas qui n'intervient pas ici car $p_{+-}q_0$ est nul : en effet dans l'isomorphisme $p_{+-}(p_k \otimes p_1)K \simeq H_{k+1} \otimes H_{k-1}$, le projecteur q_l correspond à la projection sur le sous-espace de $H_{k+1} \otimes H_{k-1}$ isomorphe à r_{2l}. Ainsi l'image de $p_{+-}\Theta p_{++}(p_k \otimes p_1)q_l$ est $p_{+-}(p_{k+1} \otimes p_1)q_l K$, ce qui montre que l'image de $p_{+-}\Theta p_{++}$ est dense dans K_{+-}. De même, $p_{-+}\Theta p_{--}(p_k \otimes p_1)q_l$ a pour norme $s_{k,l}$, qui est non nul lorsque $l \neq 0$, donc son image est $p_{-+}(p_{k-1} \otimes p_1)q_l$ en entier. ∎

On part maintenant de l'expression de $p_{++}K_g$ donnée au théorème 7.19, et qui fait intervenir $p_{+-}\Theta p_{+-}$ et $p_{+-}\Theta p_{++}$. D'après le lemme 8.2, la norme de $p_{+-}\Theta p_{+-}(p_k \otimes p_1)q_l$ est $c_{k+1,l}$, qui tend vers 1 lorsque k tend vers $+\infty$. Ainsi, sur chaque sous-espace $q_l K_{+-}$, l'opérateur $p_{+-}\Theta p_{+-}$ est égal à sa partie polaire modulo un opérateur compact. De plus cette partie polaire envoie $(p_k \otimes p_1)K_{+-}$ dans $(p_{k+1} \otimes p_1)K_{+-}$ et on la considère comme un opérateur de translation à droite sur K_{+-}. On est donc amené à poser la définition suivante.

Définition 8.5 *On se place dans le graphe quantique associé à $(A_o(Q), \{r_1\})$. On note $\mathcal{K}_{+-}$ la somme directe algébrique des $(p_k \otimes p_1)K_{+-}$.*

1. *Soit T la partie polaire de $p_{+-}\Theta p_{+-}$. On appelle H_∞ la limite inductive du système $((p_k \otimes p_1)K_{+-}, T)$. On note i_k l'isométrie canonique de $(p_k \otimes p_1)K_{+-}$ dans H_∞, et $P = \sum i_k(p_k \otimes p_1) : \mathcal{K}_{+-} \to H_\infty$.*
2. *Soit $u_{k,l} := \prod_{i=k+1}^{\infty} c_{i,l}$ pour $0 \le l \le k$. On pose $G = \sum u_{k,l}(p_k \otimes p_1)q_l \in L(K_{+-})$ et $S = G \circ (p_{+-}\Theta p_{++}) \in L(K_{++}, K_{+-})$.*

Remarques.

1. La représentation $\hat\pi_4 \circ \hat\delta^3$ de $\hat S$ sur K_{+-} commute à $(p_k \otimes p_1)$ et Θ, il existe donc une unique représentation $\hat\pi_1$ de $\hat S$ sur H_∞ telle que i_k soit pour tout k un opérateur d'entrelacement. On note en particulier $\tilde q_l = \hat\pi_1(p_{2l})$: on a donc $i_k q_l = \tilde q_l i_k$ pour tous k, l. Remarquons que $q_l(p_k \otimes p_1)K_{+-}$ correspond au sous-espace irréductible de $(p_k \otimes p_1)K_{+-} \simeq H_{k-1} \otimes H_{k+1}$ isomorphe à H_{2l}. Comme $(p_{k+1} \otimes p_1)K_{+-}$ est la somme directe orthogonale de $T(p_k \otimes p_1)K_{+-}$ et $q_{k+1}(p_{k+1} \otimes p_1)K_{+-}$, l'espace de Hilbert H_∞ est la somme directe orthogonale des sous-espaces irréductibles $\tilde q_l H_\infty \simeq i_l q_l (p_l \otimes p_1)K_{+-} \simeq H_{2l}$. Notons que $i_0 = 0$ et $\tilde q_0 H_\infty = \{0\}$.
2. On peut transporter la définition de H_∞ dans H au moyen d'une isométrie C de K_{+-} dans H commutant aux représentations $\hat\pi_4 \circ (\hat\delta \otimes \hat\delta)$ et $\hat\pi_2$ de $\hat S \otimes U \hat S U$ — une telle isométrie est unique à des choix de phases près. L'image de cette isométrie est $(1 - q_0)H$, si on note q_0 l'image de p_0 par la représentation $\hat\pi_2 \circ \hat\delta$ de $\hat S$. L'opérateur CTC^* envoie chaque sous-espace $(1 - q_0)p_k H$ dans $(1 - q_0)p_{k+1}H$, on l'étend à H entier en envoyant la droite $q_0 p_k H$ sur $q_0 p_{k+1} H$, de manière isométrique. On peut alors former la limite inductive H'_∞ des sous-espaces $p_k H$, et H_∞ s'identifie de manière naturelle au sous-espace $(1 - \tilde q_0)H'_\infty$.
3. On suppose que $\mathrm{Tr}\ Q^*Q > 2$: alors on a $m_k = (a^{k+1} - b^{k+1})/(a - b)$, où $a \ge b$ sont les solutions de l'équation $x^2 - m_1 x + 1 = 0$. Rappelons qu'on pose également $s = b^2 = a^{-2}$. On a alors les encadrements suivants, lorsque $1 \le l \le k$:

$$s_{k,l} = \frac{m_l m_{l-1}}{m_k m_{k-1}} = s^{k-l}\,\frac{(1 - s^{l+1})(1 - s^l)}{(1 - s^{k+1})(1 - s^k)} \quad \text{donc}$$
$$0 < (1 - s)^2\, s^{k-l} \le s_{k,l} \le s^{k-l} \quad \text{et} \quad 1 - s^{2(k-l)} \le c_{k,l}^2 \le 1. \tag{8.2}$$

   Ainsi pour tous k, l tel que $0 \le l \le k$ on a $0 < \prod_{p=1}^{\infty}(1 - s^{2p}) \le u_{k,l} \le 1$. En particulier G est inversible. D'après le lemme 8.2 on a $||p_{+-}\Theta p_{+-}(p_k \otimes p_1)q_l|| = c_{k+1,l} = ||G^{-1}TG(p_k \otimes p_1)q_l||$, donc $p_{+-}\Theta p_{+-} = G^{-1}TG$. Ainsi le théorème 7.19 s'énonce également de la manière suivante :

$$p_{++}K_g = \{\xi \in K_{++} \mid \exists\, \zeta \in K_{+-}\ (1 - T)\zeta = S\xi\}. \qquad \square$$

Proposition 8.6 *On suppose que* $\mathrm{Tr}\ Q^*Q > 2$. *Alors l'opérateur $R = PS : K_{++} \to H_\infty$ est borné, son adjoint R^* est injectif et a une image fermée. De plus on a*

$$\mathrm{Ker}\ R = \{\xi \in K_{++} \mid \exists\, \zeta \in K_{+-}\ (1 - T)\zeta = S\xi\}.$$

Démonstration. La définition $S = G(p_{+-}\Theta p_{++})$ peut aussi s'écrire $S = (p_{+-}\Theta p_{++})G'$, où G' est un certain opérateur inversible de $L(K_{++})$ analogue à G. On a en particulier $\mathrm{Ker}\ R = G'^{-1}(\mathrm{Ker}\ P\,p_{+-}\Theta p_{+-})$, et on voit ainsi qu'on peut supposer pour cette démonstration que $G' = \mathrm{id}$, c'est-à-dire $S = p_{+-}\Theta p_{+-}$.

Soit $\zeta \in K_{++}$, on pose $\xi_{k,l} = i_k(p_k \otimes p_1)q_l S\zeta$. D'après le lemme 8.2 on a $\xi_{k,l} = s_{k,l}\, i_k(p_k \otimes p_1)q_l\zeta$. On en déduit que la famille $(\xi_{k,l})$ est sommable dans H_∞, en utilisant les encadrements (8.2) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\sum_{k=l}^{\infty} ||\xi_{k,l}|| = \sum_{k=l}^{\infty} s_{k,l}||q_l(p_k \otimes p_1)\zeta|| \leq \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\ ||q_l\zeta||, \quad \text{donc}$$
$$||\sum_{k,l} \xi_{k,l}||^2 = \sum_l ||\sum_{k=l}^{\infty} \xi_{k,l}||^2 \leq \frac{1}{1-s^2}\ ||\zeta||^2 < \infty.$$

Notons $R\zeta = \sum \xi_{k,l}$, les calculs précédents montrent que cela définit un opérateur borné de K_{++} dans H_∞, et il est clair qu'il coïncide avec la composée $P \circ S$ sur le domaine de cette dernière.

Soit $l \geq 1$ et $\zeta \in q_l(p_l \otimes p_1)K_{+-}$, on pose $R^*(i_l\zeta) = \sum_{p\geq 0} S^*T^p\zeta$. L'application R^* : $H_\infty \to K_{++}$ ainsi définie envoie les sous-espaces orthogonaux $\tilde{q}_l H_\infty$ sur des sous-espaces orthogonaux de K_{++}. De plus on a $||S^*T^p\zeta|| = s_{p+l,l}$ d'après le lemme 8.2, donc

$$||R^*(i_l\zeta)||^2 = \sum s_{p+l,l}^2\ ||\zeta||^2 = ||i_l\zeta||^2\big(\sum s_{p+l,l}^2\big).$$

On en déduit, grâce à l'encadrement (8.2), que la norme de $R^*\,\tilde{q}_l$ est comprise entre $(1-s)^2/\sqrt{1-s^2}$ et $1/\sqrt{1-s^2}$, et en particulier l'image de R^* est fermée. Vérifions que R^* est l'adjoint de R :

$$(R^*(i_l\zeta)|\eta) = \textstyle\sum_{k\geq l}(S^*T^{k-l}\zeta|\eta) = \sum(T^{k-l}\zeta|(p_k \otimes p_1)q_l S\eta)$$
$$= \textstyle\sum(i_l\zeta|i_k(p_k \otimes p_1)q_l S\eta) = (i_l\zeta|R\eta).$$

D'après le théorème 7.19, le projeté de K_g sur K_{++} est égal à l'ensemble des vecteurs $\xi \in K_{++}$ pour lesquels il existe $\zeta \in K_{+-}$ tel que $S\xi = (1-T)\zeta$. En particulier on a $(p_0 \otimes p_1)\zeta = 0$, $(p_1 \otimes p_1)\zeta = (p_1 \otimes p_1)S\xi$ et, par une récurrence immédiate, $(p_k \otimes p_1)\zeta = \sum_{j=1}^k T^{k-j}(p_j \otimes p_1)S\xi$. Ainsi $i_k(p_k \otimes p_1)\zeta = \sum_{j=1}^k i_j(p_j \otimes p_1)S\xi$, donc $i_k(p_k \otimes p_1)\zeta$ tend vers $R\xi$ dans H_∞. Mais par ailleurs $||i_k(p_k \otimes p_1)\zeta|| = ||(p_k \otimes p_1)\zeta||$ tend vers 0. Donc $\xi \in \mathrm{Ker}\ R$.

Inversement, supposons que $R\xi = 0$: pour tous $0 \leq l \leq k$ on peut alors poser $i_k\zeta_{k,l} = -\sum_{j=k+1}^{\infty} i_j(p_j \otimes p_1)q_l S\xi$. Montrons que la famille orthogonale $(\zeta_{k,l})$ est sommable dans K_{+-}, comme plus haut :

$$||\zeta_{k,l}|| = ||\textstyle\sum_{j>k} i_l s_{j,l}(p_j \otimes p_1)q_l\xi|| \leq \dfrac{s^{k+1-l}}{\sqrt{1-s^2}}\ ||q_l\xi||, \quad \text{donc}$$
$$||\sum_{k,l} \zeta_{k,l}||^2 = \sum_l \sum_{k\geq l} ||\zeta_{k,l}||^2 \leq \sum_{p\geq 0} \tfrac{s^{2(p+1)}}{1-s^2}\ \sum_l ||q_l\xi||^2 \leq \tfrac{s^2}{(1-s^2)^2}\ ||\xi||^2.$$

On peut donc bien poser $\zeta = \sum \zeta_{k,l}$, et par définition on a alors $i_{k+1}(p_{k+1} \otimes p_1)q_l(T\zeta - \zeta) = i_{k+1}(T\zeta_{k,l} - \zeta_{k+1,l}) = -i_{k+1}(p_{k+1} \otimes p_1)q_l S\xi$, donc $(1-T)\zeta = S\xi$, ce qui assure que ξ est dans le projeté de K_g sur K_{++}. ■

Remarques.

1. Lorsque Tr $Q^*Q = 2$ le groupe quantique $A_o(Q)$ est isomorphe à $SU(2)$ ou $SU_{-1}(2)$. Dans ce cas on a $s_{k,l} = l(l+1)/k(k+1)$, pour tout l la série $(\sum_{k\geq l} s_{k,l})$ est convergente et sa somme vaut $S_l = l+1$. Contrairement à ce qui se passe dans le cas Tr $Q^*Q > 2$, cette suite n'est pas bornée. Cela implique notamment que l'opérateur R de la proposition 8.6 n'est pas borné.

2. L'opérateur R peut également être introduit de la manière suivante. On considère le système inductif $((p_k \otimes p_1)K, (p_{k+1} \otimes p_1)\Theta(p_k \otimes p_1))$, on note H''_∞ sa limite et i''_k l'application canonique de $(p_k \otimes p_1)K$ dans H''_∞. On a alors $i''_k p_{-\star} = 0$ et $i''_k p_{++} = i''_{k+1} p_{+-}\Theta p_{++}$. Ainsi il suffit de considérer $i''_k p_{+-}$, dont la restriction à chaque sous-espace $q_l p_{+-}(p_k \otimes p_1)K$ est un multiple d'une isométrie, de norme $u_{k,l}$. On en déduit qu'il existe un isomorphisme entre H_∞ et H''_∞ dans lequel on a $i''_k p_{+-} = i_k G p_{+-}$. Alors R s'identifie à la restriction à K_{++} de l'application canonique $P'' = \sum i''_k(p_k \otimes p_1)$ de $\mathcal{K}$ dans H_∞.
3. Les résultats du théorème 7.19 et de la proposition 8.6 se résument de la manière suivante : les images de F_g^* et BR^* sont fermées, orthogonales, et leur somme est $(1 - p_0)H$. □

8.2 Extension associée à l'opérateur de Julg-Valette et élément γ

On indique maintenant comment construire des éléments de KK-théorie à l'aide de l'opérateur de Julg-Valette pour $A_o(Q)$ et de l'opérateur R, qu'on a étudiés en détail dans les sections précédentes. On note S_r la C^*-algèbre réduite de $A_o(Q)$, représentée dans $L(H)$.

Lemme 8.7 *Soit* $L = H_1 \otimes H_k \otimes H_1$. *On note*

- G_1 *le sous-espace de* $H_{k-1} \otimes H_1 \subset L$ *isomorphe à* r_k,
- G_2 *le sous-espace de* $H_1 \otimes H_{k+1} \subset L$ *isomorphe à* r_k.

Alors l'angle entre G_1 *et* G_2 *tend vers* 0 *quand* k *tend vers* $+\infty$. *Plus précisément, soit* p_1 *et* p_2 *les projections respectives de* L *sur* G_1 *et* G_2. *Il existe alors un réel* $C > 0$, *ne dépendant que de* m_1, *tel que* $||p_1 - p_2||$ *soit majoré pour tout* k *par* $Cs^{k/4}$ *lorsque* $m_1 > 2$, *ou par* $C/\sqrt{k+1}$ *lorsque* $m_1 = 2$.

Démonstration. Cf le lemme A.8, page 105. ■

Lemme 8.8 *Soit* T *et* G *les opérateurs introduits à la définition 8.5, on les considérera comme des éléments de* $L(K)$ *en composant au départ et à l'arrivée par* p_{+-}. *Soit* $a \in \mathcal{S} \subset S_r$. *On suppose que* $\mathrm{Tr}\ Q^*Q > 2$. *Alors il existe un réel* $C > 0$ *ne dépendant que de* Q *et* a, *tel qu'on ait pour tout* k *les majorations*

- $||[a \otimes 1, p_{\star+}](p_k \otimes p_1)|| \le Cs^{k/4}$,
- $||[a \otimes 1, p_{+-}\Theta p_{+-}](p_k \otimes p_1)|| \le Cs^{k/4}$,
- $||[a \otimes 1, T](p_k \otimes p_1)|| \le Cs^{k/4}$,
- $||[a \otimes 1, G](p_k \otimes p_1)|| \le Cs^{k/4}$,

Démonstration. Par hypothèse on a $a \in \oplus_{i \le p} \mathcal{S}^i$ pour un certain entier p. On considère alors l'application linéaire bornée $B' = (\epsilon \otimes \mathrm{id}) \circ V : (\oplus_{i \le p} p_i H) \otimes H \to H$. On a les propriétés suivantes, analogues à celles de B et tout aussi immédiates :

- $B'(\Lambda_h(x) \otimes \Lambda_h(y)) = \Lambda_h(xy)$ pour $x, y \in \mathcal{S}$,
- $\hat{s}B' = B'\hat{\delta}(\hat{s})$ pour $\hat{s} \in \hat{S}$.

En particulier, soit $T_a : K \to p_1 H \otimes K$, $\zeta \mapsto \Lambda_h(a) \otimes \zeta$, on a

$$\begin{aligned}
[a \otimes 1, p_{\star+}] &= (B' \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes p_{\star+})T_a - p_{\star+}(B' \otimes \mathrm{id})T_a \\
&= (B' \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes p_{\star+} - (\hat{\delta} \otimes \mathrm{id})(p_{\star+}))T_a \quad \text{donc}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
||[a \otimes 1, p_{\star+}](p_k \otimes p_1)|| \le \sqrt{h(a^*a)}\ ||B'|| \times \\
\times\ ||((\hat{\delta} \otimes \mathrm{id})(p_{\star+}) - \mathrm{id} \otimes p_{\star+})(p_1 \otimes p_k \otimes p_1)||.
\end{aligned}$$

On doit donc majorer la norme de $((\hat\delta\otimes\mathrm{id})(p_{\star+})-\mathrm{id}\otimes p_{\star+})$ dans la représentation naturelle de $\hat S\otimes\hat S\otimes\hat S$ sur $L=H_1\otimes H_k\otimes H_1$. Dans cette représentation, $(\hat\delta\otimes\mathrm{id})(p_{\star+})$ s'identifie à la projection sur la somme des sous-espaces $H_k\subset H_{k-1}\otimes H_1\subset L$ et $H_{k+2}\subset H_{k+1}\otimes H_1\subset L$, tandis que $\mathrm{id}\otimes p_{\star+}$ correspond à la projection sur le sous-espace $H_1\otimes H_{k+1}\subset L$.

En particulier, l'unique copie de H_{k+2} dans L est contenue dans l'image de chacun de ces projecteurs : leurs restrictions à H_{k+2} sont donc toutes deux égales à l'identité. D'autre part, sur le sous-espace $H_{k+2}^\perp\subset L$, l'application $(\hat\delta\otimes\mathrm{id})(p_{\star+})$ coïncide avec la projection sur le sous-espace $H_k\subset H_{k-1}\otimes H_1\subset L$, tandis que $(\mathrm{id}\otimes p_{\star+})$ coïncide avec la projection sur le sous-espace $H_k\subset H_1\otimes H_{k+1}\subset L$. Le résultat annoncé découle donc du lemme 8.7. De ce premier résultat on déduit une majoration du même type pour $p_{\star-}$, puis en conjuguant par Θ, pour $p_{+\star}$. Par ailleurs $a\otimes 1$ commute à Θ : on peut donc finalement majorer la norme de $[a\otimes 1,|p_{+-}\Theta p_{+-}|^2](p_k\otimes p_1)$ par $Cs^{k/4}$, quitte à modifier C.

On utilise alors le développement en série entière de $f(x)=1/\sqrt{1+x}$. Posons $A=|p_{+-}\Theta p_{+-}|^2-\mathrm{id}$, d'après le lemme 8.2 et les encadrements (8.2) on a Sp $|p_{+-}\Theta p_{+-}|^2\subset[1-s^2,1]$, donc $||A||\le s^2<1$. Pour tout n on applique n fois la majoration en norme de $[a\otimes 1,|p_{+-}\Theta p_{+-}|^2](p_k\otimes p_1)$ et on obtient

$$||[p_{+-}(a\otimes 1)p_{+-},A^n](p_k\otimes p_1)||<Cs^{k/4}\ n||A||^{n-1}.$$

Comme les coefficients du développement de $(x\mapsto -f'(-x))$ sont tous positifs, on obtient en sommant sur n la majoration $||[p_{+-}(a\otimes 1)p_{+-},f(A)](p_k\otimes p_1)||<-Cs^{k/4}\ f'(-||A||)$, soit encore

$$||p_{+-}[a\otimes 1,|p_{+-}\Theta p_{+-}|^{-1}]p_{+-}(p_k\otimes p_1)||<\frac{Cs^{k/4}}{2(1-s^2)^{3/2}}. \tag{8.3}$$

L'égalité $T=(p_{+-}\Theta p_{+-})|p_{+-}\Theta p_{+-}|^{-1}$ donne alors une majoration convenable pour la norme de $[a\otimes 1,T](p_k\otimes p_1)$.

Enfin pour tout $\zeta\in(p_k\otimes p_1)K_{+-}$ on a $G\zeta=\lim T^{*n}(p_{+-}\Theta p_{+-})^n$ d'après le lemme 8.2. Or les résultats précédents donnent la majoration suivante :

$$||[a\otimes 1,(p_{+-}\Theta p_{+-})^n](p_k\otimes p_1)||\le C\sum_{p=1}^n s^{(k+p)/4}\le\frac{Cs^{k/4}}{1-s^{1/4}}.$$

De même on majore $||[a\otimes 1,T^{*n}](p_{k+n}\otimes p_1)||=||(p_{k+n}\otimes p_1)[a^*\otimes 1,T^n](p_{k-1}\otimes p_1+p_{k+1}\otimes p_1)||$ par $Cs^{k/4}/(1-s^{1/4})$. En additionnant puis en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient bien $||[a\otimes 1,G](p_k\otimes p_1)||\le Cs^{k/4}$ pour tout k, quitte à modifier une dernière fois la constante C, de manière indépendante de k. ∎

Proposition 8.9 *L'opérateur de Julg-Valette F_g associé à $(A_o(Q),\{r_1\})$ commute aux actions de S_r modulo les opérateurs compacts. En particulier, le projecteur sur* Im $F_g^*\subset H$ *définit un élément de* $\mathrm{Ext}(S_r,\mathbb{C})$.

Démonstration. L'opérateur de Julg-Valette est la composée de B^*, p_{++}, et la projection orthogonale sur K_g. L'opérateur $B^*:H\to K$ commute aux actions de S_r d'après l'expression $B\circ(\Lambda_h\otimes\Lambda_h)(x\otimes y)=\Lambda_h(xy)$. Le lemme 8.8 montre que $a\otimes 1$ commute à p_{++} modulo les compacts, pour $a\in\mathcal{S}^1$: en effet les images de $(p_k\otimes p_1)K$ et $(p_l\otimes p_1)K$ par $[a\otimes 1,p_{++}]$ sont orthogonales dès que $|k-l|>2$. Enfin, la projection orthogonale sur K_g est un projecteur spectral de Θ donc commute à $S_r\otimes 1$. ∎

On veut maintenant montrer que l'extension de S_r définie par le projecteur sur Im F_g^* est scindée. Pour cela, on va définir une représentation de S_r sur H_∞ : rappelons que BR^* envoie H_∞ sur le supplémentaire orthogonal de Im F_g^* dans $(1-p_0)H$. Donnons une idée de la construction dans le cas de H'_∞, vu comme limite inductive des sous-espaces p_kH. Soit $a \in S_r$, pour tout $k \geq 0$, la restriction de a donne une application linéaire de p_kH dans $\mathcal{H}$, puis dans H'_∞ par composition avec $P' : \mathcal{H} \to H'_\infty$. Si la famille d'applications obtenue en faisant varier k commutait avec les isométries $T' : p_kH \to p_{k+1}H$, on obtiendrait ainsi une application $\pi_\infty(a) \in L(H'_\infty)$ et une représentation π_∞ de S_r dans H'_∞. Malheureusement, ces commutations n'ont pas lieu :

$$\begin{tikzcd}
\zeta \in p_lH \arrow[r, "T"] \arrow[d, "a"] & \cdots \arrow[r, "T"] & p_kH \arrow[r, "T"] \arrow[d, "a"] & p_{k+1}H \arrow[r, "T"] \arrow[d, "a"] & \cdots \arrow[r, "T"] & H'_\infty \arrow[dd, dashed, "\pi_\infty(a)"] \\
\mathcal{H} \arrow[d, "P"] & & \mathcal{H} \arrow[d, "P"] \arrow[r, phantom, "\not\circlearrowleft"] & \mathcal{H} \arrow[d, "P"] & & \\
\xi \in H'_\infty \arrow[r, "="] & \cdots \arrow[r, "="] & H'_\infty \arrow[r, "="] & H'_\infty \arrow[r, "="] & \cdots \arrow[r, "="] & ?
\end{tikzcd}$$

Ainsi en partant d'un élément $\zeta \in p_lH$ et en lui appliquant les applications $P \circ a \circ T^{k-l}$ pour $k \geq l$, on obtient une suite dans H'_∞ (ligne du bas du diagramme) qui n'est pas constante. On va voir cependant que cette suite converge dans H'_∞ et qu'on obtient de cette manière une représentation de S_r dans H'_∞. Dans le cas de H_∞, obtenu comme limite inductive des $(p_k \otimes p_1)K_{+-}$, on doit considérer à la place de a l'opérateur $\varphi_{+-}(a) = p_{+-}(a \otimes 1)p_{+-}$. On a $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$, et $\varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a)$ mod $K(K_{+-})$ d'après le lemme 8.8.

Théorème 8.10 *Soit (H, K, V, Θ) le graphe quantique ℓ_2 associé à $(A_o(Q), \{r_1\})$. On reprend les notations de la définition 8.5. Notons de plus $\varphi_{+-}(a) = p_{+-}(a \otimes 1)p_{+-}$ pour tout élément a de $S_r \subset L(H)$.*

1. *Soit $\zeta \in (p_k \otimes p_1)K_{+-}$ et $a \in \mathcal{S} \subset S_r$. Alors la suite $(P\varphi_{+-}(a)T^n\zeta)_n$ converge dans H_∞ vers un vecteur qui ne dépend que de $i_k\zeta$ et que l'on note $\pi_\infty(a)(i_k\zeta)$.*
2. *Cela définit un morphisme d'algèbres involutives $\pi_\infty : \mathcal{S} \to L(H_\infty)$ qui s'étend par continuité à S_r.*

Démonstration. Soit $a \in \mathcal{S}$: on a $a \in \oplus_{i \leq p} \mathcal{S}^i$ pour un certain entier p. Pour montrer que la suite $(P\varphi_{+-}(a)T^n\zeta)_n$ converge dans H_∞, il suffit d'étudier la série de terme général

$$P\varphi_{+-}(a)T^n\zeta - P\varphi_{+-}(a)T^{n-1}\zeta = P[\varphi_{+-}(a), T]T^{n-1}\zeta.$$

Or le vecteur $[\varphi_{+-}(a), T]T^{n-1}\zeta$ est dans $\oplus_{i=n+k-p}^{n+k+p}(p_i \otimes p_1)K_{+-}$, donc on a

$$||P[\varphi_{+-}(a), T]T^{n-1}\zeta|| \leq (2p+1)||[\varphi_{+-}(a), T]T^{n-1}\zeta||.$$

Comme $T^{n-1}\zeta$ est dans $(p_{k+n-1} \otimes p_1)K_{+-}$, le lemme 8.8 montre donc que la série étudiée converge. Si $i_k\zeta = i_{k'}\zeta'$, les suites $(P\varphi_{+-}(a)T^n\zeta)$ et $(P\varphi_{+-}(a)T^n\zeta')$ sont égales modulo un décalage des indices, donc leurs limites dans H_∞ sont égales.

Remarquons que le lemme 8.8 permet de donner la majoration suivante de la vitesse de convergence de $P\varphi_{+-}(a)T^n\zeta$ vers $\pi_\infty(a)$: il existe un réel C ne dépendant que de Q et a tel que

$$||\pi_\infty(a)(i_k\zeta) - P\varphi_{+-}(a)T^n\zeta|| \leq (2p+1)Cs^{(k+n)/4}||\zeta||, \quad \text{d'où} \tag{8.4}$$

$$||\pi_\infty(a)(i_k\zeta)|| \leq (2p+1)(||a|| + Cs^{(k+n)/4})||\zeta||. \tag{8.5}$$

Cela montre en particulier que $\pi_\infty(a)$ est borné. En prenant $n = 0$ dans (8.4), et en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (8.5), on obtient de plus les estimations suivantes, pour une nouvelle constante C ne dépendant que de Q et de a :

$$||(\pi_\infty(a) \circ P - P \circ \varphi_{+-}(a))(p_k \otimes p_1)|| \leq Cs^{k/4} \quad \text{et} \tag{8.6}$$
$$||\pi_\infty(a)|| \leq (2p+1)||a||. \tag{8.7}$$

Grâce à (8.6) et au fait que $(\varphi_{+-}(a'a) - \varphi_{+-}(a')\varphi_{+-}(a))$ est compact, il est facile de voir que $(\pi_\infty(a'a) - \pi_\infty(a')\pi_\infty(a))P(p_k \otimes p_1)$ tend vers 0 en norme, lorsque k tend vers $+\infty$. Cela montre que π_∞ est un morphisme d'algèbres, car les sous-espaces $P(p_k \otimes p_1)K_{+-}$ avec $k \geq k_0$ engendrent un sous-espace dense de H_∞, pour tout $k_0 \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, il suffit d'établir l'égalité $\pi_\infty(a^*) = \pi_\infty(a)^*$ pour $a \in \mathcal{S}^1$. Soit ζ, $\xi \in H_\infty$, on peut supposer que $\zeta = i_k\zeta'$, $\xi = i_k\xi'$ avec ζ', $\xi' \in p_kH$ pour un certain entier k. On utilise alors la définition de π_∞ :

$$\begin{aligned}
(\pi_\infty(a^*)\zeta|\xi) &= \lim\ (P\varphi_{+-}(a^*)T^n\zeta'|\xi) \\
&= \lim\ (\varphi_{+-}(a^*)T^n\zeta'|T^{n+1}\xi') + \lim\ (\varphi_{+-}(a^*)T^n\zeta'|T^{n-1}\xi') \\
&= \lim\ (T^n\zeta'|\varphi_{+-}(a)T^{n+1}\xi') + \lim\ (T^n\zeta'|\varphi_{+-}(a)T^{n-1}\xi') \\
&= \lim\ (T^{n-1}\zeta'|\varphi_{+-}(a)T^n\xi') + \lim\ (T^{n+1}\zeta'|\varphi_{+-}(a)T^n\xi') \\
&= \lim\ (\zeta|P\varphi_{+-}(a)T^n\xi') = (\zeta|\pi_\infty(a)\xi).
\end{aligned}$$

Appliquons maintenant (8.7) à a^n, qui est dans $\oplus_{i \leq np}\mathcal{S}^i$: comme π_∞ est un morphisme d'algèbres, on obtient $||\pi_\infty(a)^n|| \leq (2np+1)||a||^n$. Cela montre que si la norme de a dans S_r est strictement inférieure à 1, la série $(\sum ||\pi_\infty(a)^n||)$ converge, et donc le rayon spectral de $\pi_\infty(a)$ est inférieur ou égal à 1. Si de plus a est hermitien, $\pi_\infty(a)$ l'est aussi car π_∞ est un morphisme d'algèbres involutives, et on a donc $||\pi_\infty(a)|| \leq 1$. Ainsi $\pi_\infty : \mathcal{S} \to L(H_\infty)$ est continue lorsque $\mathcal{S}$ est munie de la norme de S_r. ■

Proposition 8.11 *Soit R l'opérateur de K_{++} dans H_∞ introduit à la proposition 8.6. Alors Rp_{++} commute aux actions de S_r modulo les opérateurs compacts. En particulier le projecteur sur* Im $BR^* \subset H$ *définit un élément de* $\mathrm{Ext}(S_r, \mathbb{C})$. *Comme* $H =$ Im $BR^* +$ Im $F_g^* + p_0H$, *cette extension ainsi que celle du corollaire 8.9 sont scindées.*

Démonstration. Soit $a \in \mathcal{S}$. D'après le lemme 8.8, il existe une constante $C > 0$ telle que $||(Sp_{++}(a \otimes 1) - \varphi_{+-}(a)Sp_{++})(p_k \otimes p_1)|| < Cs^{k/4}$ pour tout k. D'après l'équation (8.6) de la démonstration du théorème 8.10, on a de plus $||(\pi_\infty(a)P - P\varphi_{+-}(a))(p_k \otimes p_1)|| \leq Cs^{k/4}$, quitte à changer de constante C. On a donc $||(\pi_\infty(a)Rp_{++} - Rp_{++}(a \otimes 1))(p_k \otimes p_1)|| \leq 2Cs^{k/4}$ pour tout k. Soit alors $\zeta \in K$ tel que $p_l\zeta = 0$ pour $l \leq k$, on a

$$\begin{aligned}
&||(\pi_\infty(a)Rp_{++} - Rp_{++}(a \otimes 1))\zeta|| \leq \\
&\qquad \leq \sum_{l \geq k} ||(\pi_\infty(a)Rp_{++} - Rp_{++}(a \otimes 1))(p_l \otimes p_1)||\ ||\zeta|| \leq \frac{2Cs^{k/4}}{1 - s^{1/4}}||\zeta||.
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité montre que $(\pi_\infty(a)Rp_{++} - Rp_{++}(a \otimes 1))$ est compact. ■

Définition 8.12 *L'opérateur $F_g^* + BR^* : K_g \oplus H_\infty \to H$ commute aux actions de S_r modulo les compacts, il est injectif et son image est de codimension* 1. *On appelle γ l'élément de $KK(S_r, \mathbb{C})$ associé.*

PROBLÈME. A-t-on $\lambda^*(\gamma) = \mathbb{1}$ dans $KK(A_o(Q), \mathbb{C})$? □

REMARQUE. Dans le cadre général de la section 7.4, les mêmes méthodes devraient s'appliquer pour l'étude de l'opérateur de Julg-Valette et la construction de l'élément γ : en effet on a dans le cas de $A_u(Q)$ des résultats analogues à ceux de l'appendice et des lemmes 8.2 et 8.8. Plus précisément, rappelons que les coreprésentations irréductibles de $A_u(Q)$ sont indexées par les mots en u et $\bar{u}$. Soit r une coreprésentation irréductible et $s = u$ ou $\bar{u}$ sa « dernière lettre », on peut alors vérifier que la suite de coreprésentations irréductibles (r_k) donnée par

$$r_0 = r, \quad r_1 = rs, \quad r_2 = rs\bar{s}, \quad \ldots , \quad r_{2k} = rs\bar{s}\cdots\bar{s}, \quad r_{2k+1} = rs\bar{s}\cdots s, \quad \ldots ,$$

présente une géométrie comparable à celle de la suite des coreprésentations irréductibles (r_k) de $A_o(Q)$. Il reste néanmoins possible que les cas où $\mathrm{Tr}\, Q^*Q = 2$ posent problème — dans le cas des groupes $A_o(Q)$ il s'agit de $SU(2)$ et $SU_{-1}(2)$, qui sont moyennables, mais pour lesquels on a vu que la construction de l'opérateur R ne s'applique pas. □

Appendice A

Compléments sur le groupe quantique $A_o(Q)$

Cet appendice contient les résultats quantitatifs sur la catégorie des coreprésentations de $A_o(Q)$ qu'on a utilisés dans la section 8 pour l'étude du graphe quantique associé à $(A_o(Q), \{r_1\})$. Il s'agit plus précisément de calculs d'angles entre sous-espaces irréductibles dans certaines coreprésentations de $A_o(Q)$: on énonce à nouveau et on démontre les lemmes 8.1 et 8.7, cf les lemmes A.7 et A.8. Au passage, on donnera la construction précise d'un système (r_k) de représentants des coreprésentations irréductibles de $A_o(Q)$, et on étudiera un morphisme de $r_{p-1}\otimes r_{p'-1}$ dans $r_p \otimes r_{p'}$ qui permet de décrire explicitement l'isomorphisme qui intervient dans les règles de fusion $r_p \otimes r_{p'} \simeq r_{|p-p'|} \oplus r_{|p-p'|+2} \oplus \cdots \oplus r_{p+p'}$.

A.1 Préliminaires

Soit $n \geq 2$ et $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $Q\bar{Q} \in \mathbb{C}I_n$ et $\mathrm{Tr}\ Q^*Q = \mathrm{Tr}\ (Q^*Q)^{-1}$ — ce qui implique $Q\bar{Q} = \pm I_n$. On rappelle que les classes de coreprésentations irréductibles de $A_o(Q)$ sont indexées par $\mathbb{N}$. On construit des coreprésentations explicites $r_k = (H_k, v_k, j_k)$ de la manière suivante. On pose $H_0 = \mathbb{C}$, $v_0 = 1_{\mathbb{C}} \otimes 1_S$ et $H_1 = \mathbb{C}^n$, $v_1 = \sum e_{ji} \otimes u_{ij}$, où u_{ij} est le système de générateurs de $A_o(Q)$. On prend pour j_0 la conjugaison de $\mathbb{C}$. On fixe l'anti-isomorphisme j_1 par $j_1(e_i) = \sum Q_{ij} e_j$ — on peut alors vérifier, grâce aux relations qui définissent $A_o(Q)$, que l'application linéaire t_1 associée est bien dans $\mathrm{Mor}(1, r_1 \otimes \bar{r}_1)$. On notera τ le vecteur unitaire de H_1 qui est un multiple positif de $t_1(1)$. On notera par ailleurs ± 1 le signe qui apparaît dans l'égalité $Q\bar{Q} = \pm I_n$, et $\mp 1 = -(\pm 1)$.

On définit par récurrence la conjugaison de $r_1^{\otimes k}$ en posant $j_{r\otimes r'} = \Sigma \circ (j_r \otimes j'_r)$. Il existe une unique sous-coreprésentation de $r_1^{\otimes k}$ qui est équivalente à r_k, on l'appelle v_k et on note H_k le sous-espace correspondant. Ce dernier est caractérisé par le lemme A.1 ci-dessous, que nous utiliserons sans cesse dans les calculs sans y faire nécessairement référence. En particulier H_k est stable par la conjugaison de $r_1^{\otimes k}$ car $\Sigma(j_1 \otimes j_1)(\tau) = \pm\tau$, on appelle j_k la restriction correspondante. On pose $F_k = j_k^* j_k$ et $m_k = \mathrm{Tr}\ F_k$ — en particulier $F_1 = Q^*Q$. Par la suite on désignera toutes les applications de conjugaison par la même lettre j pour alléger les notations. Notons que lorsque $n = 2$, la famille des $A_o(Q)$ coïncide avec celle des $SU_q(2)$ pour $q \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, et on a alors $m_1 = |q| + |q|^{-1}$ [Ban97].

Il reste à décrire les règles de fusion $r_p \otimes r_{p'} \simeq r_{|p-p'|} \oplus r_{|p-p'|+2} \oplus \cdots \oplus r_{p+p'}$, c'est-à-dire à donner pour tout q un morphisme isométrique de $H_{p+p'-2q}$ dans $H_p \otimes H_{p'}$. Lorsque $q = 0$, l'inclusion canonique $H_{p+p'} \subset H_p \otimes H_{p'}$ des sous-espaces de $H_1^{\otimes p+p'}$ convient. Le passage du cas q au cas $q+1$ fait l'objet de la section A.2 : on y définit un morphisme « naturel » de $H_p \otimes H_{p'}$ dans $H_{p+1} \otimes H_{p'+1}$ et on calcule sa partie polaire.

Lemme A.1 *Le sous-espace H_k de $H_1^{\otimes k}$ est égal à l'intersection des noyaux des $(k-1)$ applications*

$$\mathrm{id} \otimes \tau^* \otimes \mathrm{id} : H_1^{\otimes k} \to H_1^{\otimes k-2}.$$

En particulier pour tout $z \in H_k$ et tous $x \in H_1^{\otimes l}$, $y \in H_1^{\otimes k-l-2}$ on a $(z|x \otimes \tau \otimes y) = 0$.

Démonstration. On a $H_1 \otimes H_1 = H_2 \oplus \mathbb{C}\tau$, donc $H_2 = \tau^\perp$. Pour $k > 2$, on a $r_{k-1} \otimes r_1 \simeq r_k \oplus r_{k-2} \simeq r_1 \otimes r_{k-1}$, et comme $H_{k-1} \otimes H_1$ et $H_1 \otimes H_{k-1}$ sont deux sous-espaces distincts de $H_1^{\otimes k}$ on en déduit que $H_k = H_{k-1} \otimes H_1 \cap H_1 \otimes H_{k-1}$. Le lemme suit par une récurrence immédiate. ■

Lemme A.2 *Soit a et b les racines de $x^2 - m_1 x + 1 = 0$, avec $0 < b \leq 1 \leq a < m_1$. On notera $s = b^2 = a^{-2}$.*

1. *On a $m_k \geq \dim r_k$, avec égalité* **ssi** *F_k est semblable à id_k.*
2. *On a $m_0 = 1$ et $m_{k+1} - m_1 m_k + m_{k-1} = 0$. Lorsque $m_1 = 2$ on a $m_k = k+1$, et lorsque $m_1 > 2$, $m_k = (a^{k+1} - b^{k+1})/(a-b)$.*
3. *On a $||t_1|| = \sqrt{m_1}$ et $(\tau \otimes x|y \otimes \tau) = (x \otimes \tau|\tau \otimes y) = \pm(x|y)/m_1$, pour x, $y \in H_1$.*

Démonstration. Soit $d_k = \dim r_k$. La minoration de m_k résulte facilement de l'inégalité des moyennes : soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_{d_k}$ les valeurs propres de F_k, A leur moyenne arithmétique et H leur moyenne harmonique, on a $\mathrm{Tr}\ F_k = \mathrm{Tr}\ F_k^{-1} \Leftrightarrow A = H^{-1}$ d'où $m_k = \sum \lambda_i = d_k A = d_k \sqrt{A/H} \geq d_k$, avec égalité **ssi** les λ_i sont toutes égales, et elles doivent alors être égales à 1. L'équation de récurrence pour (m_k) résulte clairement de la décomposition $r_1 \otimes r_k = r_{k+1} \oplus r_{k-1}$. Les expressions explicites de m_k s'obtiennent alors par les techniques classiques d'étude des récurrences linéaires.

Calculons maintenant la norme de $t_1(1) = \sum e_i \otimes j_1(e_i)$, où (e_i) est une BON de H_1 :

$$||t_1(1)||^2 = \sum ||j_1(e_i)||^2 = \sum (j_1^* j_1 e_i|e_i) = m_1, \quad \text{donc}$$

$$(\tau \otimes x|y \otimes \tau) = \frac{1}{m_1} \sum (e_k|y)(j_1 e_k|e_l)(x|j_1 e_l) = \frac{1}{m_1} \sum (e_k|y)(j_1^* e_l|e_k)(e_l|j_1^* x)$$
$$= \frac{1}{m_1} \sum (e_k|y)(j_1^* j_1^* x|e_k) = \frac{\pm 1}{m_1} \sum (e_k|y)(x|e_k) = \frac{\pm(x|y)}{m_1}. \qquad ■$$

A.2 L'inclusion $r_p \otimes r_{p'} \subset r_{p+1} \otimes r_{p'+1}$

Soit $M_{p,p'} = \mathbb{C}^{p+p'+1} \oplus (\mathbb{C}^p \otimes \mathbb{C}^{p'})$, muni de la coreprésentation triviale de $A_o(Q)$. On notera e_k et $e_l \otimes e_{l'}$ les vecteurs de la base canonique de $M_{p,p'}$, avec $k \in [\![0, p+p']\!]$, $l \in [\![0, p-1]\!]$ et $l' \in [\![p+1, p+p']\!]$. On définit un morphisme d'entrelacement $\Phi_{p,p'} : (H_p \otimes H_{p'}) \otimes M_{p,p'} \to H_1^{\otimes p+p'+2}$ de la manière suivante. Pour $z = z_1 \otimes z_2 \otimes \cdots \otimes z_{p+p'} \in H_p \otimes H_p'$, on note $z_{i \cdots j} = z_i \otimes z_{i+1} \otimes \cdots \otimes z_j$, et on pose

$$\Phi_{p,p'}(z \otimes e_k) = z_{1 \cdots k} \otimes \tau \otimes z_{k+1 \cdots p+p'},$$
$$\Phi_{p,p'}(z \otimes (e_l \otimes e_{l'})) = (\tau|z_p \otimes z_{p+1})\ z_{1 \cdots l} \otimes \tau \otimes z_{l+1 \cdots p-1} \otimes z_{p+2 \cdots l'} \otimes \tau \otimes z_{l'+1 \cdots p+p'}.$$

Le dernier point du lemme A.2 permet en particulier d'obtenir le résultat suivant, en remarquant que le vecteur τ est en position $(k+1, k+2)$ dans $\Phi(z\otimes e_k)$:

$$\tau^*_{i+1,i+2}(\Phi(z\otimes e_k)) = \begin{cases} \Phi(\tau^*_{i+1,i+2}(z)\otimes e_{k-2}) & \text{si } k \geq i+2 \\ \Phi(\tau^*_{i-1,i}(z)\otimes e_k) & \text{si } k \leq i-2 \\ \pm z/m_1 & \text{si } k = i-1 \text{ ou } i+1 \\ z & \text{si } k = i. \end{cases} \tag{A.1}$$

En particulier lorsque z est dans $H_{p+p'}$ on a $\tau^*_{i+1,i+2}(\Phi(z\otimes e_k)) = 0$ si $k \leq i-2$ ou $k \geq i+2$. Notons également qu'on a $j \circ \Phi_{p,p'} = \pm\Phi_{p',p} \circ (j\otimes J_M)$, si J_M est l'application antilinéaire de $M_{p,p'}$ dans $M_{p',p}$ définie par $J_M(e_k) = e_{p+p'-k}$ et $J_M(e_{l,l'}) = e_{p+p'-l,p+p'-l}$.

À l'aide de l'application $\Phi_{p,p'}$ on peut donner une expression du plongement de $r_{p+p'}$, et plus généralement de $r_p\otimes r_{p'}$, dans $r_{p+1}\otimes r_{p'+1}$: c'est l'objet des trois lemmes qui suivent. Au lemme A.3 on définit un morphisme $\Psi_{p,p'}$ de $H_p\otimes H_{p'}$ dans $H_{p+1}\otimes H_{p'+1}$, et on en donne quelques propriétés élémentaires au lemme A.4. Puis on calcule sa décomposition polaire au lemme A.5.

Lemme A.3 *Soit p, $p' \geq 1$. On pose $\alpha_k = (\mp 1)^k m_k$. On note $A = \sum A_k e_k + \sum A_{l,l'}(e_l\otimes e_{l'})$ l'expression d'un vecteur A dans la base canonique de $M_{p,p'}$. A une constante près, il existe un unique vecteur $A \in M_{p,p'}$ tel que $\Phi_{p,p'}((H_p\otimes H_{p'})\otimes A) \subset H_{p+1}\otimes H_{p'+1}$. Il est donné par*

$$(A_0, \ldots, A_{p+p'}) = (\tfrac{\alpha_0}{\alpha_p}, \ldots, \tfrac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p}, 1, \tfrac{\alpha_{p'-1}}{\alpha_{p'}}, \ldots, \tfrac{\alpha_0}{\alpha_{p'}}) \quad \textit{et} \quad A_{l,l'} = \pm m_1 \frac{\alpha_l \alpha_{p+p'-l'}}{\alpha_p \alpha_{p'}}.$$

Démonstration. On cherche un vecteur $A \in M_{p,p'}$ tel que $\tau^*_{i+1,i+2}(\Phi_{p,p'}(z\otimes A)) = 0$ pour tout $z \in H_p\otimes H_{p'}$ et tout $i \in [\![0, p-1]\!] \cup [\![p+1, p+p']\!]$. On note $\Phi = \Phi_{p,p'}$. Supposons dans un premier temps que $z \in H_{p+p'}$, on a alors $\tau^*_{j+1,j+2}(z) = 0$ pour tout j. On a d'après (A.1)

$$\tau^*_{i+1,i+2}(\Phi(z\otimes e_k)) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \geq i+2 \text{ ou } k \leq i-2 \\ \pm z/m_1 & \text{si } k = i-1 \text{ ou } i+1 \\ z & \text{si } k = i, \end{cases} \tag{A.2}$$

tandis que les vecteurs $\Phi(z\otimes(e_l\otimes e_{l'}))$ sont nuls. On a donc $\Phi(z\otimes A) \in H_{p+1}\otimes H_{p'+1}$ pour tout z **ssi** $(A_k)_k$ vérifie la relation $A_i + (A_{i+1} + A_{i-1})/m_1 = 0$ pour tout $i \leq p-1$ et tout $i \geq p+1$, en posant $A_{-1} = A_{p+p'+1} = 0$. La suite (A_i) de l'énoncé vérifie bien ces relations, grâce à la relation de récurrence pour (m_i) établie au lemme A.2, et c'est la seule à une constante près.

Considérons maintenant le cas général $z \in H_p\otimes H_{p'}$. On cherche A sous la forme $A^0 + A^1$, où A^0 est le vecteur obtenu précédemment et $A^1_k = 0$ pour tout k. On s'intéresse à la condition $\Phi(z\otimes A) \in H_{p+1}\otimes H^{\otimes p'+1}$, c'est-à-dire $\tau^*_{i+1,i+2}(\Phi_{p,p'}(z\otimes A)) = 0$ pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$: on va voir que cela détermine A^1 entièrement, et on obtient le même résultat en considérant la condition $\Phi(z\otimes A) \in H^{\otimes p+1}\otimes H_{p'+1}$, d'après l'identité $j \circ \Phi_{p,p'} = \pm\Phi_{p',p} \circ (j\otimes J_M)$ et les propriétés de symétrie de A.

Dans le cas général, on n'a plus nécessairement $\tau^*_{p,p+1}(z) = 0$ et des termes correctifs apparaissent dans la première ligne de (A.2), lorsque $i = p-1$ et $k \geq p+1$. On a ainsi $\tau^*_{i+1,i+2}(\Phi(z\otimes A^0)) = 0$ pour $i \leq p-2$, mais pour $i = p-1$ on a d'après (A.1) :

$$\tau^*_{p,p+1}(\Phi(z\otimes A^0)) = \sum_{k \geq p+1} A^0_k \Phi(\tau^*_{p,p+1}(z)\otimes e_k). \tag{A.3}$$

Soit $i \leq p-1$. Par définition de Φ, on a dans $\Phi(z \otimes (e_k \otimes e_{l'}))$ deux vecteurs τ en positions $(l+1, l+2)$ et $(l'+1, l'+2)$. On a donc, de la même manière que pour (A.2) et grâce au lemme A.2 :

$$\tau^*_{i+1,i+2}(\Phi(z \otimes (e_l \otimes e_{l'})) = \begin{cases} 0 & \text{si } l \leq i-2 \text{ ou } l \geq i+2 \\ \pm\Phi(\tau^*_{p,p+1}(z) \otimes e_{l'})/m_1 & \text{si } l = i-1 \text{ ou } i+1 \\ \Phi(\tau^*_{p,p+1}(z) \otimes e_{l'}) & \text{si } l = i. \end{cases} \tag{A.4}$$

D'après ce qui précède, on recherche un vecteur A^1 tel que $\tau^*_{i+1,i+2}(\Phi(z \otimes A^1)) = 0$ pour $i \leq p-2$ et $\tau^*_{p,p+1}(\Phi(z \otimes A^1)) + \tau^*_{p,p+1}(\Phi(z \otimes A^0)) = 0$, pour tout $z \in H_p \otimes H_{p'}$. Les expressions (A.3) et (A.4) donnent la décomposition des termes $\tau^*_{i+1,i+2}(\Phi(z \otimes A^1))$ et $\tau^*_{p,p+1}(\Phi(z \otimes A^0))$ suivant les applications linéaires $(z \mapsto \Phi(\tau^*_{p,p+1}(z) \otimes e_{l'}))$, qui forment une famille libre lorsque l' varie. Ainsi les conditions sur A^1 s'écrivent, en posant $A^1_{-1,l'} = 0$:

$$\forall\, i \leq p-2, \forall\, l' \quad A^1_{i,l'} + (A^1_{i-1,l'} \pm A^1_{i+1,l'})/m_1 = 0, \tag{A.5}$$

$$\forall\, l' \quad \pm A^1_{p-2,l'}/m_1 + A^1_{p-1,l'} + A^0_{l'} = 0. \tag{A.6}$$

Ces équations se résolvent en procédant comme pour A^0 :

$$(A^1_{0,l}, \ldots, A^1_{p-1,l'}) = (\tfrac{\alpha_0}{\alpha_{p-1}}, \tfrac{\alpha_1}{\alpha_{p-1}}, \ldots, 1) A^1_{p-1,l'} \quad \text{d'après (A.5)} \tag{A.7}$$

$$\Rightarrow \quad \pm\frac{A^1_{p-2,l'}}{m_1} + A^1_{p-1,l'} = (1 \pm \tfrac{\alpha_{p-2}}{m_1 \alpha_{p-1}}) A^1_{p-1,l'} = \mp \tfrac{\alpha_p}{m_1 \alpha_{p-1}} A^1_{p-1,l'}$$

$$\Rightarrow \quad \mp \tfrac{\alpha_p}{m_1 \alpha_{p-1}} A^1_{p-1,l'} = -A^0_{l'} \quad \text{d'après (A.6)}$$

$$\Rightarrow \quad A^1_{p-1,l'} = \pm m_1 \frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p} \frac{\alpha_{p+p'-l'}}{\alpha_{p'}}. \tag{A.8}$$

Le vecteur A^1 recherché est caractérisé par (A.7) et (A.8), ainsi $A^0 + A^1$ correspond bien au vecteur A de l'énoncé. ■

Lemme A.4 *Soit $A \in M_{p,p'}$ le vecteur introduit au lemme précédent, on note $\Psi_{p,p'} = \Phi_{p,p'}(\,\cdot \otimes A) : H_p \otimes H_{p'} \to H_{p+1} \otimes H_{p'+1}$.*

1. *Pour tout $z \in H_p \otimes H_{p'}$ on a $||\Psi_{p,p'}(z)||^2 = (\Psi_{p,p'}(z) | \Phi_{p,p'}(z \otimes e_p))$.*
2. *On a $\Phi^j_{p,p'} = \pm\Phi_{p',p}$.*
3. *Soit $\phi \in \mathrm{Mor}(r_{p+1}, r_p \otimes r_1)$ et $\phi' \in \mathrm{Mor}(r_{p'+1}, r_{p'} \otimes r_1)$ les inclusions canoniques, alors $\psi = (\phi^* \otimes \phi'^{j*}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \in \mathrm{Mor}(r_p \otimes r_{p'}, r_{p+1} \otimes r_{p'+1})$ est égal à $\Psi_{p,p'}$.*
4. *Soit $z \in H_p \otimes H_{p'}$, $z' \in H_{p-1} \otimes H_{p'-1}$ deux vecteurs unitaires tels que $\Psi_{p-1,p'-1}(z')$ et z soient colinéaires. Alors*

$$||\tau^*_{p,p+1}(z)|| = ||\Psi_{p-1,p'-1}(z')||.$$

Démonstration. Par définition de A, on a $\Phi_{p,p'}(z' \otimes A) \in H_{p+1} \otimes H_{p'+1}$ donc le produit scalaire $(\Phi_{p,p'}(z' \otimes A) | \Phi_{p,p'}(z' \otimes f))$ est nul pour $f = e_k$ avec $k \neq p$ ou $f = e_{l,l'}$ avec l, l' quelconques. Cela démontre le premier point de l'énoncé. Le deuxième résulte de la formule $j \circ \Phi_{p,p'} = \pm\Phi_{p',p} \circ (j \otimes J_M)$ et des propriétés de symétrie du vecteur A. Soit G un sous-espace irréductible fixé de $H_p \otimes H_{p'}$, alors les restrictions de ψ et $\Psi_{p,p'}$ à G sont proportionnelles : il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\psi(z) = \lambda\, \Psi_{p,p'}(z)$ pour tout $z \in G$. On a alors

$$\lambda = \frac{(\Psi_{p,p'}(z) | \psi(z))}{||\Psi_{p,p'}(z)||^2} = \frac{(\Psi_{p,p'}(z) | (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(z))}{||\Psi_{p,p'}(z)||^2} = \frac{(\Phi_{p,p'}(z \otimes A) | \Phi_{p,p'}(z \otimes e_p))}{||\Phi_{p,p'}(z \otimes A)||^2} = 1.$$

Or $H_p \otimes H_{p'}$ s'écrit comme somme directe orthogonale de sous-espaces irréductibles qui sont deux-à-deux non équivalents : en particulier leurs images par ψ et $\Psi_{p,p'}$ sont également orthogonales, donc l'égalité $\psi = \Psi_{p,p'}$ qui a lieu sur chaque sous-espace est également vraie sur $H_p \otimes H_{p'}$ en entier. Cela établit le troisième point de l'énoncé, dont le quatrième est une conséquence immédiate. ■

Lemme A.5 *Soit z un élément d'un sous-espace $H_{p+p'-2q} \subset H_p \otimes H_{p'}$ — on a donc $0 \leq q \leq \min(p,p')$. Si $q < p$ on a*

$$||\Psi_{p,p'}(z)||^2 = \frac{m_p m_{p'+1} - m_{p-q-1} m_{p'-q}}{m_1 m_p m_{p'}} \; ||z||^2. \tag{A.9}$$

Le résultat reste valable pour $q = p$ si on pose $m_{-1} = 0$.

Démonstration. Notons $\Phi = \Phi_{p,p'}$. On part de l'expression du lemme A.4 : $||\Psi_{p,p'}(z)||^2 = (\Phi(z \otimes A) | \Phi(z \otimes e_p))$. Supposons tout d'abord que p et p' ne sont pas nuls. On observe que les composantes de $\Phi(z \otimes A)$ qui ne sont pas orthogonales à $\Phi(z \otimes e_p)$ correspondent aux coordonnées A_{p-1}, A_p, A_{p+1} et $A_{p-1,p+1}$ de A : en effet $\Phi(z \otimes e_p)$ est dans $H_p \otimes H_1 \otimes H_1 \otimes H_{p'}$. On a donc plus précisément :

$$\begin{aligned} ||\Psi_{p,p'}(z)||^2 &= \left(\begin{array}{c} A_{p-1}\Phi(z\otimes e_{p-1}) + A_p \Phi(z \otimes e_p) + \\ A_{p+1}\Phi(z\otimes e_{p+1}) + A_{p-1,p+1}\Phi(z\otimes(e_{p-1}\otimes e_{p+1})) \end{array} \middle| \; \Phi(z\otimes e_p) \right) \\ &= (\pm \tfrac{\alpha_{p-1}}{m_1 \alpha_p} + 1 \pm \tfrac{\alpha_{p'-1}}{m_1 \alpha_{p'}}) ||z||^2 \pm m_1 \tfrac{\alpha_{p-1}\alpha_{p'-1}}{\alpha_p \alpha_{p'}} (\Phi(z\otimes(e_{p-1}\otimes e_{p+1})) | \Phi(z \otimes e_p)). \end{aligned} \tag{A.10}$$

On a utilisé le lemme A.2 pour calculer les produits scalaires $(\Phi(z \otimes e_{p-1}) | \Phi(z \otimes e_p))$ et $(\Phi(z \otimes e_{p+1}) | \Phi(z \otimes e_p))$. On procède de même pour $\lambda = (\Phi(z \otimes (e_{p-1} \otimes e_{p+1})) | \Phi(z \otimes e_p))$:

$$\begin{aligned} \lambda &= (z_p \otimes z_{p+1} | \tau) \; (z_{1\cdots p-1} \otimes \tau \otimes \tau \otimes z_{p+2\cdots p+p'} | z_{1 \cdots p} \otimes \tau \otimes z_{p+1 \cdots p+p'}) \\ &= \pm (z_p \otimes z_{p+1} | \tau) \; (z_{1\cdots p-1} \otimes \tau \otimes z_{p+2 \cdots p+p'} | z)/m_1 = \pm ||\tau^*_{p,p+1}(z)||^2/m_1, \quad \text{donc} \\ ||\Psi_{p,p'}(z)||^2 &= (\pm \tfrac{\alpha_{p-1}}{m_1\alpha_p} + 1 \pm \tfrac{\alpha_{p'-1}}{m_1\alpha_{p'}}) ||z||^2 + \tfrac{\alpha_{p-1}\alpha_{p'-1}}{\alpha_p\alpha_{p'}} ||\tau^*_{p,p+1}(z)||^2. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Lorsque $q = 0$, ie $z \in H_{p+p'}$, le dernier terme de (A.11) est nul et on peut vérifier qu'on obtient bien la norme annoncée dans l'énoncé : en effet

$$(\pm \tfrac{\alpha_{p-1}}{m_1\alpha_p} + 1 \pm \tfrac{\alpha_{p'-1}}{m_1\alpha_{p'}}) = (-\tfrac{m_{p-1}}{m_1 m_p} + \tfrac{m_{p'+1}}{m_1 m_{p'}}). \tag{A.12}$$

Si $p = 0$ ou $p' = 0$, et toujours $q = 0$, les termes de (A.10) faisant intervenir $(p-1)$ ou $(p+1)$ respectivement n'apparaissent pas : cela revient à poser $\alpha_{-1} = 0$ dans (A.12). On pose donc $m_{-1} = 0$, l'équation de récurrence $m_1 m_i = m_{i-1} + m_{i+1}$ est alors valable dès le rang 0.

Supposons maintenant que $q > 0$ et $||z|| = 1$. Alors z est dans l'image de $\Psi_{p-1,p'-1}$, soit z' un vecteur unitaire de $H_{p-1} \otimes H_{p'-1}$ tel que $\Psi_{p-1,p'-1}$ est colinéaire à z. En remplaçant α_i par $(\mp 1)^i m_i$ dans (A.11) et en utilisant le lemme A.4 on obtient

$$||\Psi_{p,p'}(z)||^2 = (\tfrac{m_{p'+1}}{m_1 m_{p'}} - \tfrac{m_{p-1}}{m_1 m_p}) + \tfrac{m_{p-1}m_{p'-1}}{m_p m_{p'}} ||\Psi_{p-1,p'-1}(z')||^2. \tag{A.13}$$

Posons $R(p,p',q) = ||\Psi_{p,p'}(z)||^2 \frac{m_1 m_{p'}}{m_{p'+1}}$: en particulier le cas $q = 0$ traité plus haut donne $R(p,p',0) = 1 - (m_{p-1}m_{p'})/(m_p m_{p'+1})$. Comme z' est dans le sous-espace $H_{p+p'-2q} =$

$H_{(p-1)+(p'-1)-2(q-1)}$ de $H_{p-1}\otimes H_{p'-1}$, (A.13) donne l'équation de récurrence suivante :

$$\frac{m_{p'+1}}{m_1 m_{p'}}\ R(p,p',q) = \left(\frac{m_{p'+1}}{m_1 m_{p'}} - \frac{m_{p-1}}{m_1 m_p}\right) + \frac{m_{p-1}}{m_1 m_p}\ R(p-1,p'-1,q-1) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad m_p m_{p'+1}(R(p,p',q)-1) = m_{p-1}m_{p'}(R(p-1,p'-1,q-1)-1).$$

Avec cette dernière expression, la résolution de la récurrence est immédiate : on obtient $m_p m_{p'+1}(R(p,p',q)-1) = m_{p-q}m_{p'-q+1}(R(p-q,p'-q,0)-1) = -m_{p-q-1}m_{p'-q}$, avec toujours la convention $m_{-1}=0$. Cela donne bien le résultat annoncé dans l'énoncé :

$$||\Psi_{p,p'}(z)||^2 = \frac{m_{p'+1}}{m_1 m_{p'}}\ R(p,p',q) = \frac{m_{p'+1}}{m_1 m_{p'}}\ \left(1 - \frac{m_{p-q-1}m_{p'-q}}{m_p m_{p'+1}}\right). \qquad \blacksquare$$

Remarque. A première vue, la quantité $(m_p m_{p'+1} - m_{p-q-1}m_{p'-q})/(m_1 m_p m_{p'})$ qui intervient dans (A.9) n'est pas symétrique en (p,p'). C'est cependant le cas, grâce à la relation de récurrence vérifiée par (m_k). On peut le voir plus simplement en notant que la formule est symétrique dans le cas $q=0$ (A.12), et que la relation de récurrence (A.13) qui permet de passer au cas général est elle aussi symétrique. Ainsi on a également, pour $z \in H_{p+p'-2q} \subset H_p\otimes H_{p'}$:

$$||\Psi_{p,p'}(z)||^2 = \frac{m_{p+1}m_{p'} - m_{p-q}m_{p'-q-1}}{m_1 m_p m_{p'}}\ ||z||^2. \tag{A.14}$$

$\square$

Lemme A.6 *Il existe deux constantes strictement positives C et C', ne dépendant que de m_1, telles que*

$$\forall\ z \in H_p\otimes H_{p'} \quad C||z|| \le ||\Psi_{p,p'}(z)|| \le C'||z||.$$

Lorsque $m_1 = 2$ la meilleure constante C possible est 0.

Démonstration. Ce lemme résulte du précédent par des calculs élémentaires d'encadrements. On écrit $m_k = c(a^{k+1} - b^{k+1})$ avec $0 < b < 1 < a$ et $ab = 1$, ce qui donne en particulier l'encadrement $c(a-b)a^k \le m_k \le ca^{k+1}$. On en déduit dans un premier temps l'encadrement suivant :

$$\frac{a-b}{m_1} \le \frac{m_{p'+1}}{m_1 m_{p'}} \le \frac{a^2}{m_1(a-b)}. \tag{A.15}$$

Par ailleurs on a, en utilisant la relation $ab=1$ et l'inégalité $0<b<1$:

$$\begin{aligned} 1 \ge 1 - \frac{m_{p-q-1}m_{p'-q}}{m_p m_{p'+1}} &= 1 - b^{2q+2}\frac{(1-b^{2(p-q)})(1-b^{2(p'-q+1)})}{(1-b^{2(p+1)})(1-b^{2(p'+2)})} \\ &\ge 1 - b^2\frac{(1-b^{2p})(1-b^{2(p'+1)})}{(1-b^{2(p+1)})(1-b^{2(p'+2)})} \ge 1-b^2. \end{aligned} \tag{A.16}$$

En multipliant (A.15) et (A.16), on obtient un encadrement de $||\Psi_{p,p'}(z)||/||z||$, pour $z \in H_{p+p'-2q} \subset H_p\otimes H_{p'}$, qui est de la forme voulue avec $C = b(a-b)^2/m_1$ et $C' = a^2/m_1(a-b)$. Comme ces constantes ne dépendent pas de q et que le morphisme d'entrelacement $\Psi_{p,p'}$ envoie les sous-espaces orthogonaux $H_{2q} \subset H_p\otimes H_{p'}$ sur des sous-espaces orthogonaux, car irréductibles et non équivalents, de $H_{p+1}\otimes H_{p'+1}$, l'encadrement obtenu s'applique à n'importe quel vecteur $z \in H_p\otimes H_{p'}$. Pour obtenir l'assertion du cas $m_1 = 2$, prendre $q=0$ et $p = p'$: alors

$$||\Psi_{p,p'}(z)||^2/||z||^2 = \frac{(p+1)(p+2) - p(p+1)}{2(p+1)(p+1)} = \frac{1}{p+1} \to 0. \qquad \blacksquare$$

A.3 Quelques angles entre sous-espaces irréductibles

On considère maintenant des angles entre sous-espaces irréductibles dans certaines coreprésentations de $A_o(Q)$: les résultats obtenus permettent notamment de démontrer la commutativité « à l'infini » de certains diagrammes de morphismes d'entrelacements, qui apparaissent naturellement lors de l'étude de la représentation régulière et de la représentation π_∞ de $A_o(Q)$ menée à la section 8.2. On utilise les morphismes $\Psi_{p,p'} : H_p \otimes H_{p'} \to H_{p+1} \otimes H_{p'+1}$ construits à la section précédente.

Lemme A.7 *Soit $L = H_k \otimes H_1 \otimes H_{k+1}$ et $l \leq k$. On note*

- *G_1 le sous-espace de $H_{k-1} \otimes H_{k+1} \subset L$ isomorphe à r_{2l},*
- *G_2 le sous-espace de $H_k \otimes H_{k+2} \subset L$ isomorphe à r_{2l}.*

Alors le carré de la norme de la projection de G_1 sur G_2 vaut $1 - \frac{m_l m_{l-1}}{m_k m_{k+1}}$.

Démonstration. Soit x un vecteur du sous-espace de $H_{k-1} \otimes H_{k+1}$ isomorphe à r_{2l}. Alors on a $\Psi_{k-1,0}(x) \in G_1$ et $\Psi_{k-1,k+1}(x) \in G_2$. Par conséquent la norme de la projection de G_1 sur G_2 vaut

$$\frac{|(\Psi_{k-1,0}(x)|\Psi_{k-1,k+1}(x))|}{||\Psi_{k-1,0}(x)||\,||\Psi_{k-1,k+1}(x)||} = \frac{||\Psi_{k-1,k+1}(x)||}{||\Psi_{k-1,0}(x)||},$$

d'après le premier point du lemme A.4. On obtient la valeur de ce rapport grâce au lemme A.5 : on applique (A.14) avec $(p,p',q) = (k-1,k+1,k-l)$ et $(p,p',q) = (k-1,0,0)$. Cela donne bien le résultat annoncé :

$$\frac{||\Psi_{k-1,k+1}(x)||^2}{||\Psi_{k-1,0}(x)||^2} = \frac{m_k m_{k+1} - m_{l-1} m_l}{m_1 m_{k-1} m_{k+1}} \; \frac{m_1 m_{k-1}}{m_k} = 1 - \frac{m_l m_{l-1}}{m_k m_{k+1}}. \qquad \blacksquare$$

Lemme A.8 *Soit $L = H_1 \otimes H_k \otimes H_1$. On note*

- *G_1 le sous-espace de $H_{k-1} \otimes H_1 \subset L$ isomorphe à r_k,*
- *G_2 le sous-espace de $H_1 \otimes H_{k+1} \subset L$ isomorphe à r_k.*

Alors l'angle entre G_1 et G_2 tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Plus précisément, soit p_1 et p_2 les projections respectives de L sur G_1 et G_2. Il existe alors un réel $C > 0$, ne dépendant que de m_1, tel que $||p_1 - p_2||$ soit majoré pour tout k par $Cs^{k/4}$ lorsque $m_1 > 2$, ou par $C/\sqrt{k+1}$ lorsque $m_1 = 2$.

Démonstration. On utilise les morphismes $\Psi_{0,k}$ et $(\Psi_{0,k-1} \otimes \mathrm{id})$ de H_k dans G_1 et G_2 respectivement. Comme $\Psi_{0,k}$ est à valeurs dans $H_1 \otimes H_{k+1}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{(\Psi_{0,k}(x)|(\Psi_{0,k-1} \otimes \mathrm{id})(x))}{||\Psi_{0,k}(x)||\,||\Psi_{0,k-1} \otimes \mathrm{id}(x)||} &= \frac{(\Psi_{0,k}(x)|\tau \otimes x)}{||\Psi_{0,k}(x)||\,||\Psi_{0,k-1} \otimes \mathrm{id}(x)||} \\
&= \frac{||\Psi_{0,k}(x)||^2}{||\Psi_{0,k}(x)||\,||\Psi_{0,k-1} \otimes \mathrm{id}(x)||} \\
&= \frac{||\Psi_{0,k}(x)||}{||\Psi_{0,k-1} \otimes \mathrm{id}(x)||} = \sqrt{\frac{m_{k-1} m_{k+1}}{m_k^2}}\; ||x||.
\end{aligned}$$

Ainsi on a $||p_1 p_2||^2 = \frac{m_{k-1} m_{k+1}}{m_k^2}$, d'où $||(1-p_1)p_2||^2 = ||(1-p_2)p_1||^2 = 1 - \frac{m_{k-1} m_{k+1}}{m_k^2}$ et

$$||p_2 - p_1||^2 = ||(p_2 - p_1)^2|| = ||(1-p_1)p_2 + (1-p_2)p_1|| \leq 2\,\sqrt{1 - \frac{m_{k-1} m_{k+1}}{m_k^2}}.$$

En reportant les valeurs explicites de m_{k-1}, m_k et m_{k+1} on obtient facilement les majorations annoncées :

$$\begin{aligned}
\text{si } m_1 > 2 \quad 1 - \frac{m_{k-1}m_{k+1}}{m_k^2} &= 1 - \frac{(1-s^k)(1-s^{k+2})}{(1-s^{k+1})^2} \\
&= \frac{s^k + s^{k+2}}{(1-s^{k+1})^2} \leq s^k \ \frac{1+s^2}{(1-s)^2}, \\
\text{si } m_1 = 2 \quad 1 - \frac{m_{k-1}m_{k+1}}{m_k^2} &= 1 - \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \frac{1}{(k+1)^2}.
\end{aligned}$$

■

Index

Bibliographie

[AD00] C. Anantharaman-Delaroche. – Amenability and exactness for dynamical systems and their C^*-algebras. – Preprint, 2000. [Cité p. 49.]

[ADR00] C. Anantharaman-Delaroche et J. Renault. – *Amenable Groupoids.* – Genève, L'Enseignement mathématique, 2000. [Cité p. 49.]

[Avi82] D. Avitzour. – Free products of C^*-algebras. *Trans. AMS*, vol. 271, 1982, pp. 423–465. [Cité p. 22.]

[Baa92] S. Baaj. – Représentation régulière du groupe quantique $E_\mu(2)$ de Woronowicz. *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 314, 1992, pp. 1021–1026. [Cité pp. 12, 28.]

[Baa95] S. Baaj. – Représentation régulière du groupe quantique des déplacements de Woronowicz. *Astérisque*, vol. 232, 1995, pp. 11–48. [Cité pp. 25, 26.]

[Ban96] T. Banica. – Théorie des représentations du groupe quantique compact libre $O(n)$. *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 322, 1996, pp. 241–244. [Cité pp. 30, 83, 88.]

[Ban97] T. Banica. – Le groupe quantique compact libre $U(n)$. *Comm. Math. Phys.*, vol. 190, n° 1, 1997, pp. 143–172. [Cité pp. 30, 83, 99.]

[Ban99] T. Banica. – Representations of compact quantum groups and subfactors. *J. Reine Angew. Math.*, vol. 509, 1999, pp. 167–198. [Cité p. 61.]

[BC82] P. Baum et A. Connes. – Geometric K-theory for Lie groups and foliations. – 1982. Preprint IHES / Brown University. [Cité p. 9.]

[BCH94] P. Baum, A. Connes et N. Higson. – Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras. *Contemp. Math.*, vol. 167, 1994, pp. 241–290. [Cité p. 9.]

[Bla96] E. Blanchard. – Déformations de C^*-algèbres de Hopf. *Bull. SMF*, vol. 124, 1996, pp. 141–215. [Cité p. 61.]

[Bla98] B. E. Blackadar. – *K-Theory for Operator Algebras.* – Springer, 1998. [Cité p. 20.]

[BMT01] E. Bedos, G. Murphy et L. Tuset. – Co-amenability of compact quantum groups. *J. Geom. Phys.*, vol. 40, 2001, pp. 130–153. [Cité p. 61.]

[Bou67] N. Bourbaki. – *Éléments de Mathématiques*, chap. Théories Spectrales, I (Algèbres normées). – Hermann, 1967. [Cité p. 19.]

[Bou73] N. Bourbaki. – *Éléments de Mathématiques*, chap. Groupes et Algèbres de Lie, IV (Groupes de Coxeter et systèmes de Tits). – Hermann, 1973. [Cité p. 36.]

[BS89] S. Baaj et G. Skandalis. – C^*-algèbres de Hopf et théorie de Kasparov équivariante. *K-Theory*, vol. 2, 1989, pp. 683–721. [Cité pp. 9, 10, 31, 33–35, 52–54.]

[BS93] S. Baaj et G. Skandalis. – Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C^*-algèbres. *Ann. Sci. ENS*, vol. 26, 1993, pp. 425–488. [Cité pp. 10–12, 25–28, 39–42, 44, 45, 53, 55, 61.]

[BSV02] S. Baaj, G. Skandalis et S. Vaes. – Non-semi-regular quantum groups coming from number theory. – 2002. Preprint. [Cité p. 45.]

[CS84] A. Connes et G. Skandalis. – The longitudinal index for foliations. *Publ. RIMS*, vol. 20, 1984, pp. 1139–1183. – Appendix A : Connections and implicit characterizations of Kasparov products. [Cité p. 54.]

[Cun82] J. Cuntz. – The K-groups for free products of C^*-algebras. *Proc. Symposia Pure Math.*, vol. 38, nº 1, 1982, pp. 81–84. [Cité p. 67.]

[Cun83] J. Cuntz. – K-theoretic amenability for discrete groups. *J. Reine Angew. Math.*, vol. 344, 1983, pp. 180–195. [Cité pp. 9, 10, 12, 61, 63, 64, 67, 73.]

[Dix64] J. Dixmier. – *Les C^*-algèbres et leurs représentations.* – Gauthier-Villars, 1964. [Cité p. 19.]

[DQV01] P. Desmedt, J. Quaegebeur et S. Vaes. – Amenability and the bicrossed product construction. – Octobre 2001. Preprint. [Cité p. 61.]

[Dri85] V. G. Drinfel'd. – Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation. *Soviet Math. Dokl*, vol. 32, 1985, pp. 256–258. [Cité p. 25.]

[Dri86] V. G. Drinfel'd. – Quantum groups. *In : Proceedings of the International Congress of Mathematicians.* AMS, pp. 798–820. [Cité p. 25.]

[ES73] M. Enock et J.-M. Schwartz. – Une dualité dans les algèbres de von Neumann. *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 277, 1973, pp. 683–685. [Cité pp. 10, 24.]

[ES75] M. Enock et J.-M. Schwartz. – Une dualité dans les algèbres de von Neumann. *Mémoire SMF*, vol. 44, 1975, pp. 1–144. [Cité p. 24.]

[ES86] M. Enock et J.-M. Schwartz. – Algèbres de Kac moyennables. *Pacific J. Math.*, vol. 125, 1986, pp. 363–379. [Cité p. 61.]

[ES92] M. Enock et J.-M. Schwartz. – *Kac algebras and duality of locally compact groups.* – Springer, 1992. [Cité p. 24.]

[EV93] M. Enock et J.-M. Vallin. – C^*-algèbres de Kac et algèbres de Kac. *Proc. London Math. Soc.*, vol. 66, 1993, pp. 619–650. [Cité p. 24.]

[EV96] M. Enock et L. I. Vainerman. – Deformation of a Kac algebra by an abelian subgroup. *Comm. Math. Phys.*, vol. 178, 1996, pp. 619–650. [Cité p. 27.]

[Eym64] P. Eymard. – L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact. *Bull. SMF*, vol. 92, 1964, pp. 181–236. [Cité p. 24.]

[Eym75] P. Eymard. – Introduction à la théorie des groupes moyennables. *Lect. Notes in Mathematics*, vol. 497, 1975, pp. 89–107. [Cité p. 61.]

[Ger96] E. Germain. – KK-theory of reduced free-product C^*-algebras. *Duke Math. Jour.*, vol. 82, 1996, pp. 707–723. [Cité p. 73.]

[Gre69] F. P. Greenleaf. – *Invariant Means on Topological Groups.* – New York, Van Nostrand, 1969. [Cité p. 61.]

[Gro00] M. Gromov. – Spaces and questions. *Geom. and Funct. Anal.*, vol. spécial, nº 1, 2000, pp. 118–161. [Cité p. 49.]

[HK01] N. Higson et G. G. Kasparov. – E-theory and KK-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space. *Invent. Math.*, vol. 144, 2001, pp. 23–74. [Cité p. 9.]

[HR70] A. Hewitt et K. A. Ross. – *Abstract Harmonic Analysis.* – Springer, 1970. [Cité p. 19.]

[Jim85] M. Jimbo. – A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, vol. 10, 1985, pp. 63–69. [Cité pp. 25, 28.]

[Jul81] P. Julg. – K-théorie équivariante et produits croisés. *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 292, 1981, pp. 629–632. [Cité p. 10.]

[JV83] P. Julg et A. Valette. – K-moyennabilité pour les groupes opérant sur les arbres. *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 296, 1983, pp. 977–980. [Cité pp. 9, 64, 67.]

[JV84] P. Julg et A. Valette. – K-theoretic amenability for $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ and the action on the associated tree. *J. Funct. Anal.*, vol. 58, 1984, pp. 194–215. [Cité pp. 12, 36, 62, 67, 73.]

[JV85] P. Julg et A. Valette. – Group actions on trees and K-amenability. *Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1132, 1985, pp. 289–296. [Cité p. 67.]

[Kac61] G. I. Kac. – Generalization of the group principle of duality. *Soviet Math. Dokl.*, vol. 2, 1961, pp. 581–584. [Cité pp. 10, 24.]

[Kac63] G. I. Kac. – Ring groups and the principle of duality, I. *Trans. Moskow Math. Soc.*, 1963, pp. 291–339. [Cité p. 24.]

[Kac65] G. I. Kac. – Ring groups and the principle of duality, II. *Trans. Moskow Math. Soc.*, 1965, pp. 94–126. [Cité p. 24.]

[Kac68] G. I. Kac. – Extensions of groups to ring groups. *Math. USSR Sbornik*, vol. 5, 1968, pp. 451–474. [Cité p. 28.]

[Kas80] G. G. Kasparov. – Hilbert C^*-modules : theorems of Stinespring and Voiculescu. *J. Oper. Theory*, vol. 4, 1980, pp. 133–150. [Cité pp. 10, 20–22, 32.]

[Kas81] G. G. Kasparov. – K-theory, group C^*-algebras, and higher signatures (conspectus). *In : Novikov conjectures, index theorems and rigidity (Oberwolfach, 1993)*, pp. 101–146. [Cité p. 9.]

[Kas88] G. G. Kasparov. – Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture. *Invent. Math.*, vol. 91, 1988, pp. 147–201. [Cité pp. 9, 10, 34, 52, 54.]

[KP64] G. I. Kac et V. G. Paljutkin. – Example of a ring group generated by Lie groups. *Ukr. Math. J.*, vol. 16, 1964, pp. 99–105. [Cité p. 27.]

[KP66] G. I. Kac et V. G. Paljutkin. – Finite ring groups. *Trans. Moskow Math. Soc.*, vol. 5, 1966, pp. 251–294. [Cité p. 27.]

[Kre63] M. G. Krein. – Hermitian-positive kernels on homogeneous spaces. *AMS Transl.*, vol. 34, 1963, pp. 69–164. – Translated from *Ukr. Mat. Z.* 1949–1950. [Cité p. 24.]

[KS91] G. G. Kasparov et G. Skandalis. – Groups acting on buildings, operator K-theory, and Novikov's conjecture. *K-Theory*, vol. 4, 1991, pp. 303–337. [Cité p. 9.]

[KV73] G. I. Kac et L. I. Vainerman. – Nonunimodular ring-groups and Hopf-von Neumann algebras. *Soviet Math. Dokl.*, vol. 14, 1973, pp. 1144–1448. [Cité pp. 10, 24.]

[KV74] G. I. Kac et L. I. Vainerman. – Nonunimodular ring-groups and Hopf-von Neumann algebras. *Math. USSR Sbornik*, vol. 23, 1974, pp. 185–214. [Cité p. 24.]

[KV99] J. Kustermans et S. Vaes. – A simple definition for locally compact quantum groups. *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 328, 1999, pp. 871–876. – série I. [Cité p. 25.]

[KV00] J. Kustermans et S. Vaes. – Locally compact quantum groups. *Ann. Sci. ENS*, vol. 33, 2000, pp. 837–934. [Cité pp. 10, 11, 25–27.]

[KW99a] E. Kirchberg et S. Wassermann. – Exact groups and continuous bundles of C^*-algebras. *Math. Ann.*, vol. 315, 1999, pp. 169–203. [Cité p. 49.]

[KW99b] E. Kirchberg et S. Wassermann. – Permanence properties of C^*-exact groups. *Doc. Math.*, vol. 4, 1999, pp. 513–558. [Cité p. 49.]

[Laf98] V. Lafforgue. – Une démonstration de la conjecture de Baum-Connes pour les groupes réductifs sur un corps p-adique et pour certains groupes discrets possédant la propriété (T). *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 327, 1998, pp. 439–444. [Cité p. 9.]

[Lan79] M. B. Landstadt. – Duality theory for covariant systems. *Trans. AMS*, vol. 248, 1979, pp. 223–267. [Cité p. 19.]

[Lan95] E. C. Lance. – *Hilbert C^*-modules.* – Cambridge UP, 1995. [Cité p. 20.]

[Maj91] S. Majid. – Hopf-von Neumann algebra bicrossproducts, Kac algebra bicrossproducts, and the classical Yang-Baxter equations. *J. Funct. Anal.*, vol. 95, 1991, pp. 291–319. [Cité p. 28.]

[MN94] T. Masuda et Y. Nakagami. – A von Neumann algebra framework for the duality of the quantum groups. *Publ. RIMS*, vol. 30, 1994, pp. 79–850. [Cité p. 25.]

[MP84] J. A. Mingo et W. J. Phillips. – Equivariant triviality theorems for Hilbert C^*-modules. *Proc. AMS*, vol. 91, 1984, pp. 225–230. [Cité pp. 32, 34.]

[Nag93] G. Nagy. – On the Haar measure of the quantum $SU(N)$ group. *Comm. Math. Phys.*, vol. 153, 1993, pp. 217–228. [Cité p. 61.]

[OO01] H. Oyono-Oyono. – Baum-Connes conjecture and group actions on trees. *K-Theory*, vol. 24, 2001, pp. 115–134. [Cité p. 9.]

[Pas73] W. L. Paschke. – Inner product modules over B^*-algebras. *Trans. AMS*, vol. 182, 1973, pp. 443–468. [Cité p. 20.]

[Pim86] M. Pimsner. – KK-groups of crossed products by groups acting on trees. *Invent. Math.*, vol. 86, 1986, pp. 603–634. [Cité pp. 9, 73.]

[PV82] M. Pimsner et D. Voiculescu. – K-groups of reduced crossed products by free groups. *J. Oper. Theory*, vol. 8, 1982, pp. 131–156. [Cité pp. 9, 67.]

[PW90] P. Podleś et S. L. Woronowicz. – Quantum deformation of Lorentz group. *Comm. Math. Phys.*, vol. 130, 1990, pp. 381–431. [Cité p. 28.]

[Rie74] M. A. Rieffel. – Induced representations of C^*-algebras. *Adv. Math.*, vol. 13, 1974, pp. 176–257. [Cité p. 20.]

[Rie92] M. A. Rieffel. – Some solvable quantum groups. *In : Operator Algebras and Topology*, éd. par W. Arveson et al. pp. 146–159. – Bucarest, 1992. [Cité p. 27.]

[Rie93] M. A. Rieffel. – Compact quantum groups associated with toral subgroups. *Contemp. Math.*, vol. 145, 1993, pp. 465–491. [Cité p. 28.]

[Ros90] M. Rosso. – Algèbres enveloppantes quantifiées, groupes quantiques compacts de matrices et calcul différentiel non commutatif. *Duke Math. Jour.*, 1990. [Cité p. 25.]

[Rua96] Z.-J. Ruan. – Amenability of Hopf von Neumann algebras and Kac algebras. *J. Funct. Anal.*, vol. 139, 1996, pp. 466–499. [Cité p. 61.]

[Ser77] J.-P. Serre. – Arbres, amalgames, SL_2. *Astérisque*, vol. 46, 1977. [Cité pp. 13, 22, 36.]

[Sti59] W. F. Stinespring. – Integration theorems for gauges and duality for unimodular locally compact groups. *Trans. AMS*, vol. 90, 1959, pp. 15–56. [Cité p. 24.]

[Tak72] M. Takesaki. – Duality and von Neumann algebras. *Lect. Notes in Mathematics*, vol. 247, 1972, pp. 665–785. [Cité p. 24.]

[Tan38] T. Tannaka. – Über den Dualitätssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen. *Tôhoku Math. J.*, vol. 45, 1938, pp. 1–12. [Cité p. 24.]

[Tat65] N. Tatsuuma. – A duality theorem for locally compact groups, I. *Proc. Japan Acad.*, vol. 41, 1965, pp. 878–882. [Cité p. 24.]

[Tat66] N. Tatsuuma. – A duality theorem for locally compact groups, II. *Proc. Japan Acad.*, vol. 42, 1966, pp. 46–47. [Cité p. 24.]

[Tu99] J.-L. Tu. – The Baum-Connes conjecture and discrete group actions on trees. *K-Theory*, vol. 17, 1999, pp. 303–318. [Cité p. 9.]

[Vae] S. Vaes. – Irréductibilité des groupes quantiques localement compacts. – Communication personnelle. [Cité p. 27.]

[Val85] J.-M. Vallin. – C^*-algèbres de Hopf et C^*-algèbres de Kac. *Proc. London Math. Soc.*, vol. 50, 1985, pp. 131–174. [Cité pp. 24, 25, 27.]

[vD91] A. van Daele. – Quantum deformation of the Heisenberg group. *In : Current Topics in Operator Algebras.* pp. 314–325. – Nara, 1991. [Cité p. 27.]

[vD94] A. van Daele. – Multiplier Hopf algebras. *Trans. AMS*, vol. 342, n° 2, 1994, pp. 917–932. [Cité p. 25.]

[vD96] A. van Daele. – Discrete quantum groups. *Journal of Algebra*, vol. 180, 1996, pp. 431–444. [Cité p. 25.]

[VDN92] D. Voiculescu, K. Dykema et A. Nica. – *Free Random Variables.* – AMS, 1992, CRM Montréal édition. [Cité pp. 22, 23.]

[vDW96] A. van Daele et S. Wang. – Universal quantum groups. *Int. Jour. Math.*, vol. 7, 1996, pp. 255–263. [Cité pp. 10, 30.]

[Voi77] D. Voiculescu. – Amenability and Katz algebras. *In : Algèbres d'opérateurs et leurs applications en physique mathématique.* CNRS, pp. 451–457. [Cité p. 61.]

[Voi85] D. Voiculescu. – Symmetries of some reduced free product C^*-algebras. *Lect. Notes in Mathematics*, vol. 1132, 1985. [Cité p. 22.]

[VS88] L. L. Vaksman et Y. S. Soibel'man. – Algebra of functions on the quantum group $SU(2)$. *Funct. Anal. Appl.*, vol. 22, 1988, pp. 170–180. [Cité p. 25.]

[VV02] S. Vaes et L. I. Vainerman. – Extensions of locally compact quantum groups and the bicrossed product construction. – 2002. Adv. Math. [Cité p. 28.]

[VvD01] S. Vaes et A. van Daele. – Hopf C^*-algebras. *Proc. London Math. Soc.*, vol. 82, 2001, pp. 337–384. [Cité pp. 10, 25.]

[Wan95] S. Wang. – Free products of compact quantum groups. *Comm. Math. Phys.*, vol. 167, 1995, pp. 671–692. [Cité pp. 13, 30, 67, 83.]

[WO93] N. E. Wegge-Olsen. – *K-Theory and C^*-algebras : a friendly approach.* – Oxford UP, 1993. [Cité pp. 19, 20.]

[Wor87a] S. L. Woronowicz. – Compact matrix pseudogroups. *Comm. Math. Phys.*, vol. 111, 1987, pp. 613–665. [Cité pp. 10, 25, 28, 67, 68, 83.]

[Wor87b] S. L. Woronowicz. – Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus. *Publ. RIMS*, vol. 23, 1987, pp. 117–181. [Cité pp. 28, 31.]

[Wor88] S. L. Woronowicz. – Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(n)$ groups. *Invent. Math.*, vol. 93, 1988, pp. 35–76. [Cité pp. 25, 83.]

[Wor91] S. L. Woronowicz. – Quantum $E(2)$ group and its Pontryagin dual. *Lett. Math. Phys.*, vol. 23, 1991, pp. 252–263. [Cité p. 28.]

[Wor95] S. L. Woronowicz. – Compact quantum groups. *In : Symétries Quantiques*, éd. par A. Connes, K. Gawedzki et J. Zinn-Justin. pp. 845–884. – Les Houches, 1995. [Cité pp. 25, 28.]

[Wor96] S. L. Woronowicz. – From multiplicative unitaries to quantum groups. *Int. Jour. Math.*, vol. 7, 1996, pp. 127–149. [Cité pp. 25, 26.]

[Wor01] S. L. Woronowicz. – Quantum "$az + b$" group on complex plane. *Int. Jour. Math.*, vol. 12, 2001, pp. 461–503. [Cité p. 28.]

KK-théorie équivariante et opérateur de Julg-Valette pour les groupes quantiques

Roland Vergnioux

Résumé : Cette thèse s'inscrit dans l'étude de la KK-théorie équivariante par rapport à un groupe quantique localement compact. On généralise notamment certaines notions et certains résultats connus dans le cas des groupes : théorème de stabilisation, morphisme de descente, théorème de Green-Julg, K-moyennabilité. On cherche ensuite à introduire des outils géométriques utiles dans ce contexte, et on associe notamment à un groupe quantique discret et à un produit libre amalgamé de groupes quantiques discrets des objets qui peuvent s'interpréter comme des arbres quantiques. On étudie en particulier les opérateurs de Julg-Valette associés aux groupes quantiques libres de Wang-Banica : ce cas présente de nombreuses nouveautés par rapport au cadre classique, la principale étant la non-involutivité de l'opérateur de retournement des arêtes qui rend nécessaire la construction d'une représentation additionnelle du groupe quantique discret pour obtenir un élément de KK-théorie.

Abstract: This thesis deals with the study of the equivariant KK-theory with respect to locally compact quantum groups. We generalize well-known notions and results of the classical case: stabilisation theorem, descent morphisms, Green-Julg theorem, K-amenability. Then, we try to introduce useful geometric tools in this setting. In particular, we associate to any discrete quantum group, and to any amalgamated free product of discrete quantum groups, objects that can be interpreted as quantum trees. We study in detail the Julg-Valette operators that are associated to the Wang-Banica free quantum groups: they present many new features characteristic of the quantum frame, the most important one being the non-involutivity of the direction reversing operator on the space of oriented edges. It makes necessary the introduction of a new representation of the discrete quantum group in order to obtain a KK-theory element.

Discipline : Mathématiques

Mots-clés : KK-théorie équivariante, groupes quantiques, produit croisé, théorème de Green-Julg, K-moyennabilité, produit libre amalgamé, arbre quantique, groupe quantique libre, opérateur de Julg-Valette

---

Adresse du laboratoire : Institut de Mathématiques de Jussieu
Équipe « Algèbres d'opérateurs »
175, rue du Chevaleret
75013 Paris, France
Adresse électronique : `vergniou@math.jussieu.fr`
