



**HAL**  
open science

# La force de Casimir entre deux miroirs métalliques à température non nulle

Cyriaque Genet

► **To cite this version:**

Cyriaque Genet. La force de Casimir entre deux miroirs métalliques à température non nulle. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2002. Français. NNT : . tel-00001749

**HAL Id: tel-00001749**

**<https://theses.hal.science/tel-00001749>**

Submitted on 27 Sep 2002

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



LABORATOIRE KASTLER BROSSEL



**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI**

Spécialité : La physique de la particule au solide, modèles et expériences

présentée par

**Cyriaque GENET**

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris VI

Sujet de la thèse :

**LA FORCE DE CASIMIR ENTRE DEUX MIROIRS  
MÉTALLIQUES À TEMPÉRATURE NON NULLE**

Soutenue le 4 juillet 2002 devant le jury composé de :

M. Izo ABRAM	rapporteur
M. Daniel BLOCH	rapporteur
Mme Astrid LAMBRECHT	
Mme Claire LHUILLIER	
M. Serge REYNAUD	directeur de thèse
M. Han WOERDMAN	

*J'ai effectué ma thèse au laboratoire Kastler Brossel entre septembre 1999 et juillet 2002. Je remercie ses directeurs successifs, Michèle Leduc, Elisabeth Giacobino et Franck Laloë, de m'y avoir accueilli et de m'avoir permis de bénéficier de très bonnes conditions de travail.*

*Je remercie Claire Lhuillier, Han Woerdman, Daniel Bloch et Izo Abram d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Je remercie Claire Lhuillier d'avoir présidé ce jury et Izo Abram et Daniel Bloch d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail. Je leur sais gré de leurs remarques sur le manuscrit et leurs suggestions qui m'ont également été utiles pour préparer la soutenance.*

*Ma thèse a été encadrée par Astrid Lambrecht et Serge Reynaud et leur soutien est partie intégrante de ces trois années. Il y a au cours d'une thèse quelques moments arides, au cours desquels "l'évitement" du découragement devient difficile pour un thésard. Mais l'engagement scientifique, la confiance et la patience d'Astrid et Serge, notamment pendant la période de rédaction, ont constitué pour moi le soutien essentiel et si crucial dans ces moments-là. Je leur exprime ici toute ma reconnaissance. Par leur présence et leur disponibilité, j'ai pu profiter à leurs côtés d'un contexte intellectuel exceptionnel. J'ai ainsi eu la chance de trouver chez eux, ainsi que chez Marc-Thierry Jaekel et Jean-Michel Courty, une préoccupation constante des problèmes historiques, toujours activement discutés dans l'équipe de Serge. Je remercie en particulier Marc-Thierry Jaekel de m'avoir proposé de l'accompagner aux Journées 2000 de la fondation Louis de Broglie. Je remercie également Astrid et Serge pour les conférences que j'ai pu suivre et pour la découverte, spécialement à l'occasion de l'une d'entre-elles, du jeu délicat de la communication scientifique...*

*J'ai eu l'occasion pendant ma thèse de travailler avec Paulo A. Maïa Neto qui m'a beaucoup apporté tant par ses connaissances que par ses qualités pédagogiques. Cette collaboration a été l'occasion de deux séjours à l'Université Fédérale de Rio-de-Janeiro et je le remercie, avec Alexander Mazolli Lisboa et Carlos Farina, pour leur accueil à l'Université. Je remercie également Paulo, Ana, Julia et Clara ainsi que Julia et Antonio Z. Khoury pour leur amitié à Rio.*

*J'ai passé ces trois ans à Jussieu, dans l'atmosphère détendue et active de la tour 12 qui doit beaucoup à la gentillesse et l'efficacité des secrétaires, Monique Bonnamy, Laëticcia Morel, Karima Nouira, Christelle Sansa, de Francis Tréhin, des informaticiens, Corinne Poisson et Serge Bégon, et des techniciens (merci à Pascal Travers pour la session de mécanique).*

*Comme tous ceux avant moi à l'occasion de cette même page de remerciements, j'insiste sur les liens solides entre les thésards du laboratoire qui créent un environnement véritablement amical. Je voudrais remercier tout d'abord les membres de mon bureau, dont la bonne humeur a pourtant été mise à rude épreuve par les chuintements d'Abdallah : Sylvain Gigan, qui a pourtant tout essayé, Tristan Briant, Nicolas Treps, Brahim Lamine, Laurent Hilico, Amaury Mouchet, Kuanshou Zhang, et évidemment Pierre-François Cohadon (trois ans à côté de lui, je n'en sors pas indemne !). Ensuite, les autres stagiaires, thésards et post-docs, pour tous les moments agréables : Isabelle Maurin, Sara Ducci, Augustin Baas, Jean-Philippe Karr, Laurent Longchambon et Vincent Josse pour les "soirées de labo", Laurent Vernac, Rémi Battesti, Thibaut Jonkheere, Gaëtan Hagel, Bruno Manil, Olivier Sigwarth, Gaëtan Messin, Olivier Arcizet, Julien Laurat, Jean-Noël Fuchs, Sébastien Steiner, Tristan Meunier, Xavier Brokmann, Enrico Brambilla, Marcello Martinelli, Eric-Olivier LeBigot, Gustavo Rodrigues, Steven Moal, Pierre Cladé.*

*Je remercie également tous les membres permanents du laboratoire, toujours disponibles. Lu-*

cile Julien, Agnès Maître, Thomas Coudreau et Laurent Hilico pour les discussions “post-thèse”, Jean-Pierre Hermier, Alberto Bramati, Michel Pinard, Antoine Heidmann, Saïda Guelatti, Catherine Schwob, Benoît Grémaud, François Nez, Dominique Delande, Claude Fabre, François Biraben, Nicolas Billy, Paul Indelicato, Jean-Pierre Faroux, Bernard Cagnac.

Moniteur pendant ma thèse, j’adresse également mes remerciements aux enseignants de l’UFR de Physique de l’Université Paris-Sud avec lesquels j’ai été heureux d’enseigner : Béatrice Gauthier, Jérôme Leygnier, Alain Sarfati, Anne-Lise Roche et Daniel Schiff.

Hors du cadre du laboratoire, quelques remerciements plus personnels. Et d’abord à René Voltz, pour ses cours et toutes ces discussions qui, depuis le début de mes études, sont pour moi de vrais jalons. A mes parents bien sûr et ma famille, sans le soutien desquels ma thèse n’aurait pas été possible. Un peu en guise d’excuses, je les remercie pour leur compréhension quand la thèse devenait littéralement absorbante. C’est aussi à la fidélité continue de mes amis que je pense, et je les remercie.

Enfin, un immense merci à Bente, pour tous les instants, et qui au rythme du Thalys, m’a vu maigrir jusqu’en juillet !

# Table des matières

<b>Table des matières</b> . . . . .	1
<b>Introduction</b> . . . . .	5
<b>1. Diffusion par un miroir</b> . . . . .	15
A L'interface entre deux milieux . . . . .	17
A.1 Les deux polarisations . . . . .	17
A.2 Les amplitudes de diffusion . . . . .	19
A.3 La réciprocité . . . . .	20
A.4 Milieux absorbants . . . . .	22
A.5 Ondes évanescentes . . . . .	23
B Les miroirs traités comme des réseaux . . . . .	24
B.1 Matrice $S$ et réciprocité . . . . .	24
B.2 Matrice $T$ et lois de composition . . . . .	26
B.3 Réseaux électromagnétiques élémentaires . . . . .	28
B.4 Composition et réciprocité . . . . .	29
B.5 La lame diélectrique . . . . .	31
B.6 Le miroir massif comme cas limite . . . . .	33
B.7 Les miroirs multicouches . . . . .	35
C Unitarité de la diffusion . . . . .	38
C.1 Diffusion quantique . . . . .	38
C.2 La lame non absorbante . . . . .	39
C.3 La lame absorbante . . . . .	39
<b>2. Force de Casimir entre deux miroirs diélectriques</b> . . . . .	43
A Champs diffusés par la cavité . . . . .	44
A.1 Modes du champ libre . . . . .	44
A.2 Matrice $S$ de la cavité . . . . .	47

A.3	Matrice $R$ de la cavité . . . . .	49
A.4	Prise en compte des modes de bruit . . . . .	50
B	Pression de radiation du vide . . . . .	50
B.1	Tenseur de Maxwell pour des champs libres . . . . .	51
B.2	Diffusion sur un miroir . . . . .	52
B.3	Diffusion sur la cavité . . . . .	53
B.4	Effet des ondes évanescentes . . . . .	54
C	Expression de la force de Casimir . . . . .	57
C.1	Intégration sur les fréquences réelles . . . . .	57
C.2	Intégration sur les fréquences imaginaires . . . . .	59
C.3	Comparaison avec la formule de Lifshitz . . . . .	62
D	La formule des déphasages . . . . .	63
D.1	L'énergie de Casimir . . . . .	63
D.2	La formule des temps de Wigner . . . . .	64
<b>3.</b>	<b>Cas des miroirs métalliques . . . . .</b>	<b>65</b>
A	Réponse optique des métaux . . . . .	66
A.1	Le modèle plasma . . . . .	67
A.2	Le modèle de Drude . . . . .	68
A.3	Les transitions inter-bandes . . . . .	68
B	Discussion des modèles . . . . .	71
B.1	Modèle plasma et plasmons . . . . .	72
B.2	Plasmons et dispersion spatiale . . . . .	76
C	Corrections de conductivité . . . . .	78
C.1	Le modèle plasma . . . . .	79
C.2	Le modèle de Drude . . . . .	84
C.3	Les métaux réels . . . . .	85
<b>4.</b>	<b>Force de Casimir à température non nulle . . . . .</b>	<b>89</b>
A	L'effet de température . . . . .	90
A.1	Estimations et longueur d'onde thermique . . . . .	90
A.2	Pression de radiation à température non nulle . . . . .	91
A.3	Calcul de la force . . . . .	92
B	Corrections thermiques . . . . .	94
B.1	Formulation de la force et de l'énergie entre deux miroirs métalliques et à température non nulle . . . . .	95

B.2	Evaluations numériques des facteurs correctifs . . . . .	96
B.3	Facteur de corrélation . . . . .	97
B.4	Loi d'échelle . . . . .	102
C	Expressions analytiques . . . . .	103
C.1	Correction thermique pour des miroirs parfaits . . . . .	104
C.2	Correction supplémentaire . . . . .	104
C.3	Expression analytique des facteurs de corrélation . . . . .	106
C.4	Comportements asymptotiques . . . . .	106
<b>5.</b>	<b>La polémique sur les miroirs dissipatifs à température non nulle . .</b>	<b>111</b>
A	La formulation dite de Lifshitz . . . . .	112
A.1	Décomposition sur les pôles du coth . . . . .	112
A.2	Lien entre les deux formulations . . . . .	114
B	Limite haute température . . . . .	115
B.1	Cas des miroirs parfaits . . . . .	116
B.2	Le modèle plasma . . . . .	116
B.3	Le modèle de Drude . . . . .	117
C	La polémique récente . . . . .	118
C.1	Amplitudes de réflexion . . . . .	119
C.2	Comparaison des deux formulations . . . . .	120
C.3	Limite de dissipation nulle . . . . .	121
<b>6.</b>	<b>Description des expériences et effets de la géométrie . . . . .</b>	<b>123</b>
A	Les expériences . . . . .	123
A.1	Expériences avant 1997 . . . . .	124
A.2	Expériences après 1997 . . . . .	125
B	Géométrie plan-sphère . . . . .	127
B.1	L'approximation de Derjaguin . . . . .	128
B.2	Force de Casimir en configuration plan-sphère . . . . .	129
B.3	Validité de l'approximation . . . . .	130
C	Corrections de rugosité . . . . .	132
C.1	L'approximation de rugosité . . . . .	133
C.2	Fonctions de réponse de rugosité . . . . .	134
C.3	Cas des miroirs parfaits . . . . .	136
C.4	Régimes limites . . . . .	138
C.5	Discussion . . . . .	140

<b>Conclusion</b> . . . . .	143
<b>Annexe</b> . . . . .	147
A Corrections de conductivité: comportements asymptotiques pour le mode plasma . . . . .	147
A.1 Grandes distances . . . . .	149
A.2 Courtes distances . . . . .	150
B Corrections thermiques . . . . .	153
B.1 Limite basse température . . . . .	153
B.2 Limite haute température . . . . .	158
C Miroirs dissipatifs à température non nulle . . . . .	165
C.1 Limite haute température . . . . .	165
C.2 Continuité des amplitudes de réflexion . . . . .	167
C.3 Comparaison des deux formulations . . . . .	167
C.4 Limite de dissipation nulle . . . . .	170
<b>Bibliographie</b> . . . . .	173

## Introduction

L'avènement de la théorie quantique a changé en profondeur nos conceptions de l'espace vide en nous obligeant à concevoir le vide comme "rempli" de fluctuations quantiques du champ. L'électrodynamique classique, et en particulier les équations de Maxwell, ont défini l'espace comme le cadre dans lequel s'écrivent les lois de propagation du champ électromagnétique. Pour la physique classique, cet espace peut se concevoir dans la limite idéale d'un espace vide aussi bien de matière que de champ. Cette idéalisation est remise en cause par les travaux de Planck sur le rayonnement du corps noir. C'est pour expliquer les propriétés de ce rayonnement présent dans tout l'espace et exerçant une pression sur les bords de toute cavité que Planck introduit sa première loi quantique en 1900. En termes actuels, cette loi donne l'énergie moyenne par mode électromagnétique comme le produit  $\overline{E}$  de l'énergie d'un photon  $\hbar\omega$  par un nombre moyen de photons  $\overline{n}$  par mode du champ [1]

$$\overline{E} = \overline{n}\hbar\omega \quad , \quad \overline{n} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}.$$

Cette loi est valable à l'équilibre thermodynamique à une température  $T$ ,  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $\hbar$  la constante de Planck. Le nombre de photons par mode tend vers zéro à la limite de température nulle, quelle que soit la fréquence. Il est donc toujours possible en 1900 de considérer un espace vide, débarrassé par pompage de toute matière puis de tout rayonnement en abaissant la température jusqu'au zéro absolu.

Cependant, cette définition est remise en cause par les développements ultérieurs de la théorie quantique naissante. En 1911, Planck reprend son travail et obtient une expression différente avec un terme supplémentaire [2]

$$\overline{E} = \left( \frac{1}{2} + \overline{n} \right) \hbar\omega.$$

La différence entre ces deux lois de Planck est justement ce que nous appelons aujourd'hui les "fluctuations de point zéro", ou fluctuations du vide, qui subsistent à la

limite d'une température nulle. Cette deuxième loi dit en effet qu'à cette limite restent des fluctuations de champ qui correspondent à la moitié de l'énergie d'un photon par mode.

L'histoire des deux lois de Planck et les débats qu'elles ont engendrés sont discutés dans un certain nombre d'articles et d'ouvrages [3, 4, 5, 6]. Il est intéressant de rappeler que de nombreux physiciens prirent au sérieux les travaux de Planck dès 1912. Parmi eux, Einstein et Stern remarquent en 1913 que la deuxième loi de Planck, contrairement à la première, donne le comportement correct à la limite classique [7]

$$\left(\frac{1}{2} + \bar{n}\right) \hbar\omega = k_B T + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \quad T \rightarrow \infty.$$

Debye, dès 1914, affirme que les fluctuations de point zéro des oscillateurs matériels doivent avoir des effets observables. Il prévoit de tels effets sur les intensités de pics de diffraction [8]. Mulliken fournit en 1924 les premières preuves expérimentales de ces fluctuations en étudiant des spectres vibrationnels de molécules [9].

La plupart des physiciens préfèrent attribuer les fluctuations quantiques aux oscillateurs matériels plutôt qu'aux champs. Bien sûr, Einstein constitue une exception depuis son fameux papier de 1905 sur la nature du rayonnement [10] jusqu'à la découverte de la statistique de Bose-Einstein en 1924 [11, 12, 13] en passant par la description des statistiques de photons [14] ou celle des coefficients d'émission ou d'absorption [15] (voir [16] pour une discussion de ces contributions). Nernst tient également une place à part dans cette histoire en étant le premier en 1916 à affirmer clairement que les fluctuations de point zéro existent aussi pour les modes du champ électromagnétique [17]. Il discute cette conséquence que l'espace vide, tel que les conceptions classiques se le représentent, n'existe pas, même à température nulle. Il souligne dès 1916 que la présence de ces fluctuations crée un problème vis-à-vis de la théorie de la gravitation dans la mesure où l'on ne voit pas l'effet gravitationnel de l'énergie du vide.

On peut insister sur le fait que ces discussions ont commencé avant même que l'existence de ces fluctuations soit confirmée par des calculs quantiques complètement cohérents [18]. Mais ces calculs, effectués très rapidement après la naissance de la théorie quantique, démontrent l'existence des fluctuations du vide. Dirac [19] montre que chaque mode du champ peut être quantifié comme un oscillateur harmonique matériel [20] et que l'état fondamental a donc une énergie  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ . Cette énergie peut aussi se comprendre comme le résultat des relations de Heisenberg sur le champ.

Celui-ci se décompose dans n'importe quel mode comme une somme de deux composantes de quadrature, c'est-à-dire de composantes en cosinus et sinus de l'onde de

fréquence  $\omega$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cos \omega t + \mathcal{E}_2 \sin \omega t.$$

Les deux quadratures  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  obéissent à une inégalité de Heisenberg similaire à celle bien connue pour la position et l'impulsion d'un oscillateur matériel [21]. Si on définit la variance  $\Delta x$  d'une variable statistique  $x$  par la relation habituelle

$$\Delta x = \sqrt{x^2 - \bar{x}^2},$$

alors les variances  $\Delta \mathcal{E}_1$  et  $\Delta \mathcal{E}_2$  des deux quadratures ont un produit nécessairement supérieur à une certaine constante  $\mathcal{E}_0^2$

$$\Delta \mathcal{E}_1 \Delta \mathcal{E}_2 \geq \mathcal{E}_0^2.$$

Cette constante  $\mathcal{E}_0$  est calculable à partir des constantes fondamentales et de la fréquence  $\omega$  et elle caractérise le niveau des fluctuations quantiques. En fait, l'énergie  $\bar{E}$  dans le mode étant proportionnelle à  $\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2$ , l'inégalité de Heisenberg implique que cette énergie est supérieure à un minimum

$$\bar{E} \geq \frac{1}{2} \hbar \omega.$$

Le vide est alors défini comme l'état où l'énergie est minimale, ce qui suffit pour déterminer toutes les propriétés de cet état

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \hbar \omega \quad , \quad \bar{\mathcal{E}}_1 = \bar{\mathcal{E}}_2 = 0 \quad , \quad \Delta \mathcal{E}_1 = \Delta \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0.$$

Dans cet état, les valeurs moyennes de  $\mathcal{E}_1$  et de  $\mathcal{E}_2$  sont nulles et les variances sont égales entre elles tout en minimisant leur produit. Ce minimum correspond aux fluctuations du vide [22].

Dans ces mêmes années où la cohérence de la théorie quantique se construit, London [23] donne une interprétation quantique des forces d'interaction entre atomes ou molécules neutres, connues depuis les travaux de Van der Waals [24]. Ces forces expliquent un grand nombre de phénomènes. Elles jouent un rôle crucial en chimie des colloïdes, domaine étudié par Overbeek et Verwey et dans lequel l'attraction de type Van der Waals entre colloïdes détermine les propriétés de stabilité [25]. Overbeek, observant un désaccord entre la théorie de London et les mesures qu'il effectue, remarque que la théorie de London est fondée sur des interactions instantanées. C'est à Casimir qu'il demande d'étudier l'influence éventuelle de la vitesse finie de propagation du champ

électromagnétique sur la force de Van der Waals [26]. Avec Polder, Casimir parvient à donner une expression complète de la force de Van der Waals en tenant compte de cette vitesse finie [27]. C'est en fait un des premiers exemples d'utilisation des méthodes de l'électrodynamique quantique. Le papier de Casimir et Polder traite aussi le cas de l'interaction entre un atome et une paroi parfaitement réfléchissante.

Très vite, Casimir réalise que ses résultats peuvent s'interpréter et se redériver directement à partir de la notion d'énergie du vide [28]. Prolongeant son analyse, Casimir observe que les fluctuations du vide se manifestent par des effets physiques observables sur des miroirs macroscopiques. L'énergie du vide calculée en présence de deux miroirs dépend de leur distance. Il en résulte que les fluctuations du vide se manifestent par des forces exercées sur les parois de la cavité que forment ces deux miroirs. C'est la première prédiction d'un effet mécanique macroscopique des fluctuations du vide [29].

Casimir considère une cavité formée par deux miroirs parfaitement plans et parallèles entre eux (figure 0.1). La surface  $A$  des miroirs est supposée beaucoup plus grande que le carré de la distance  $L$  afin de pouvoir négliger tout effet de diffraction sur les bords des miroirs. En considérant le cas de miroirs parfaitement réfléchissants, Casimir calcule la force mécanique exercée par les fluctuations du vide sur ces miroirs. Il obtient les expressions suivantes pour la force et l'énergie, que nous notons respectivement  $F_{\text{Cas}}$  et  $E_{\text{Cas}}$

$$F_{\text{Cas}} = \frac{\hbar c \pi^2 A}{240 L^4} \quad , \quad E_{\text{Cas}} = \frac{\hbar c \pi^2 A}{720 L^3} \quad (A \gg L^2) . \quad (0-1)$$

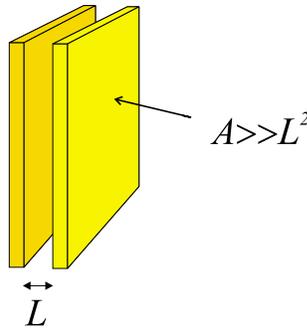


FIG. 0.1 – La configuration géométrique étudiée par Casimir.

Cette force est attractive et l'énergie est une énergie de liaison. On utilise des conventions de signes qui sont les plus courantes dans les travaux sur l'effet Casimir. Bien que ce ne soit pas la convention thermodynamique habituelle pour les énergies, nous la conservons dans toute la suite du travail.

Il est intéressant de noter que dans ce cas idéal des miroirs parfaitement réfléchis-

sants, les expressions de la force et de l'énergie ne dépendent que de paramètres géométriques et de deux constantes fondamentales : la vitesse de la lumière  $c$  et la constante de Planck  $\hbar$ , cette dernière mettant clairement en évidence le caractère essentiellement quantique de l'effet Casimir. Ces expressions ne font pas intervenir la charge de l'électron, comme c'est le cas pour les forces de Van der Waals. Cette propriété d'universalité de la force et de l'énergie de Casimir entre deux miroirs parfaitement réfléchissants correspond, comme l'a montré Lifshitz [30], à la saturation de la réponse des miroirs qui ne peuvent réfléchir plus de 100% de la lumière incidente.

La force de Casimir a une amplitude faible : pour des miroirs de surfaces  $A = 1\text{cm}^2$ , séparés d'une distance  $L = 1\mu\text{m}$ ,  $F_{\text{Cas}} \sim 0.1\mu\text{N}$ . Cependant, il est possible d'observer expérimentalement et de mesurer une telle force. Peu après la prédiction théorique de Casimir, un certain nombre d'expériences ont permis de mettre l'effet en évidence [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47]. Ces dernières années, des progrès considérables ont été réalisés sur la mesure de la force entre miroirs métalliques [48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55]. Ces expériences atteignent aujourd'hui une précision expérimentale qui permet de comparer directement et quantitativement les résultats de mesures aux prédictions théoriques. Nous développerons plus tard ces aspects expérimentaux pour donner les détails qui nous seront nécessaires.

Cette nouvelle génération d'expériences de haute précision est pour une très large part à l'origine d'un renouveau des études théoriques sur l'effet Casimir. Pour comparer sérieusement les résultats expérimentaux aux prédictions théoriques, il faut tenir compte des différences entre le cas idéal envisagé par Casimir et les situations réelles des expériences. Lifshitz a le premier développé une théorie de l'effet Casimir entre miroirs diélectriques pour commencer à rendre compte de ces différences [30]. Dans ce travail tout à fait essentiel, Lifshitz a introduit la prise en compte détaillée de la réponse optique des miroirs ainsi que celle des fluctuations.

Des erreurs mineures dans les calculs de Lifshitz ont déclenché une floraison de contributions théoriques contradictoires et cette floraison a continué jusqu'à nos jours. En particulier, Schwinger, de Raad, Milton ont repris les calculs de Lifshitz entre deux miroirs métalliques à température non nulle [56]. Leur méthode, appelée depuis la "prescription de Schwinger", est encore aujourd'hui l'objet de discussions polémiques dans la littérature [57] et nous y reviendrons dans ce manuscrit de manière détaillée.

Il faut également signaler le très grand nombre de papiers théoriques sur l'effet Casimir dans les configurations les plus variées. En ce qui concerne ces travaux, nous nous contentons ici de renvoyer aux articles de revues ou livres dans lesquels sont citées des centaines de références [58, 59, 60, 61] (voir également les contributions au Séminaire

Poincaré sur l'énergie du vide [62]).

Dans ce travail, nous nous concentrerons sur les sujets liés directement aux situations étudiées expérimentalement. Ceci nous restreint à l'effet des fluctuations du vide électromagnétique mais concerne encore plusieurs effets importants. Nous discuterons ces effets de manière détaillée en gardant à l'esprit notre objectif essentiel, celui d'une comparaison précise entre les résultats des expériences et les prédictions théoriques.

Pour illustrer cette idée, considérons la figure 0.2 où sont représentés les résultats expérimentaux de l'expérience menée à l'Université de Riverside en Californie ainsi que la courbe représentant les prédictions théoriques.

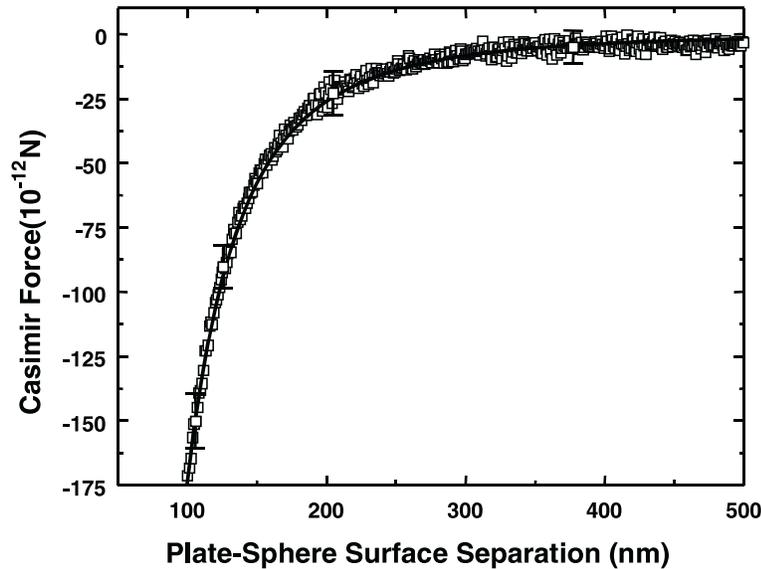


FIG. 0.2 – *Comparaison entre les données expérimentales et les prédictions théoriques pour la force de Casimir, reportée en [51]. Les carrés et barres représentent les points expérimentaux et les barres d'erreur pour quelques uns d'entre eux ; la ligne continue représente l'évaluation théorique. Avec l'aimable autorisation de U. Mohideen.*

L'accord théorie-expérience observé sur cette courbe n'a pu être obtenu qu'en tenant compte de quatre types de corrections entre la situation idéale de Casimir et celle des expériences :

- d'abord la correction importante liée à la géométrie des expériences, pour lesquelles la force est mesurée entre un miroir plan et un miroir sphérique, et non entre deux miroirs plans parallèles, comme dans la configuration initiale de Casimir,
- ensuite la réponse optique des miroirs métalliques utilisés qui, contrairement à celle de miroirs parfaits, dépend de la fréquence du champ incident,
- puis les effets thermiques, qu'il faut nécessairement évaluer sur ces expériences réalisées à température ambiante,

- et enfin les corrections de rugosité de surface des miroirs.

La force de Casimir est la conséquence expérimentale la plus accessible à l'échelle macroscopique des fluctuations du vide. C'est une prédiction fondamentale de la théorie quantique des champs qui est directement liée à une des principales difficultés de la physique fondamentale aujourd'hui, à savoir le problème de l'énergie du vide. Ce problème, repéré depuis longtemps, n'a toujours pas de solution satisfaisante et il est donc important de l'étudier de façon approfondie [63]. De plus, ce problème est directement lié à celui de la constante cosmologique [64, 65], en plein renouveau aujourd'hui après l'observation de l'accélération de l'expansion cosmologique (voir les contributions de N. Straumann et M. Turner dans [62]). Toute définition opérationnelle du vide nécessite la définition d'une enceinte délimitant un espace vide et la force de Casimir, de ce point de vue, est précisément la manifestation physique des fluctuations du vide lorsqu'on les enferme dans une enceinte.

Il faut également noter que l'analyse des caractéristiques de la force de Casimir est largement justifiée par les mesures très précises de force qui se développent à des distances entre le nanomètre et le micromètre. L'objectif de ces mesures est de tester la gravité newtonienne à courte distance [66], en particulier pour la recherche de nouvelles forces prévues par les modèles théoriques d'unification et ayant des portées comprises entre le nanomètre et le millimètre [67, 68, 69]. On peut également citer la recherche de dimensions supplémentaires compactes éventuelles qui se manifesteraient aussi par de nouvelles forces [70]. Tous ces tests consistent donc essentiellement à mettre des contraintes sur d'éventuelles déviations de la théorie standard actuelle, en comparant les résultats expérimentaux aux prédictions théoriques.

On suppose souvent qu'une éventuelle nouvelle force est décrite par un potentiel de Yukawa avec une portée  $\lambda$  et une amplitude  $\alpha$  mesurée relativement à la force de Newton

$$V(r_{12}) = \frac{Gm_1m_2}{r_{12}} \left( 1 + \alpha e^{-\frac{r_{12}}{\lambda}} \right),$$

où  $G$  est la constante newtonienne de gravitation et  $r_{12}$  la distance entre les deux objets macroscopiques considérés de masses  $m_1$  et  $m_2$ . Une mesure précise de la force à une distance  $L$  permet alors d'exclure les amplitudes supérieures à une certaine valeur  $\alpha$  pour une certaine portée  $\lambda$ . Cet argument est illustré sur la figure 0.3

Aux distances millimétriques, les mesures sont en fait des tests de la force de gravité newtonienne [71]. A des distances inférieures à la centaine de microns, la force de Casimir est la force dominante entre deux objets neutres non magnétiques et toute

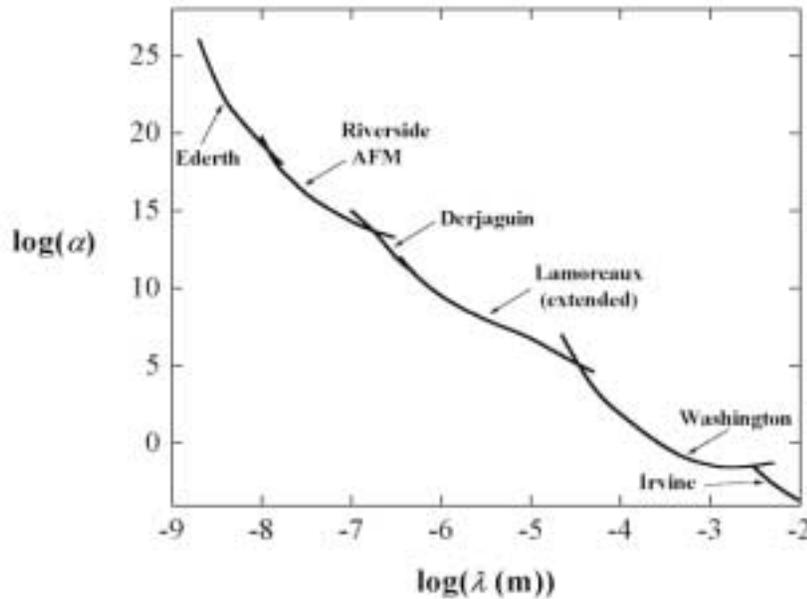


FIG. 0.3 – Espace des paramètres pour des forces de type Yukawa sur lequel l’amplitude  $\alpha$ , relative à la gravité newtonienne, est tracée en fonction de la portée  $\lambda$ . Les frontières (lignes continues), déduites des expériences, délimitent pour  $(\alpha, \lambda)$  les domaines exclus au-dessus des frontières. Avec l’aimable autorisation de J. Long.

mesure de nouvelles forces hypothétiques est en fait une comparaison de précision entre un résultat expérimental et une prédiction théorique de la force de Casimir [66, 69].

Ce travail de thèse s’inscrit dans ce contexte de comparaisons théorie-expérience pour lesquelles l’exactitude des calculs théoriques devient aussi cruciale que la précision des expériences. Son but est donc de développer des méthodes théoriques fiables pouvant caractériser les situations expérimentales réelles.

Contrairement aux méthodes utilisées habituellement en théorie des champs, nos méthodes sont basées fondamentalement sur le fait que les fluctuations du vide obéissent aux lois de l’optique et qu’ainsi les diffuseurs peuvent être simplement caractérisés par leurs amplitudes de diffusion, comme on en a l’habitude en optique [72, 73]. Le premier chapitre de ce mémoire consistera à mettre en place les outils nécessaires à la description de ces amplitudes de diffusion. Nous verrons comment construire cette description de manière systématique à partir de matrices de transfert  $T$  et de matrices de diffusion  $S$  de la théorie des réseaux [74, 75] en utilisant les symétries du diffuseur plan. Nous commencerons par les détailler dans le cas simple d’une interface entre deux milieux diélectriques. Nous verrons comment composer des réseaux élémentaires pour traiter des systèmes composés, la lame et le multi-couche diélectriques, puis comment décrire

la situation d'une lame diélectrique absorbante en utilisant les propriétés d'unitarité de la diffusion.

Une fois les propriétés de diffusion des miroirs ainsi détaillées, nous traiterons dans le deuxième chapitre la cavité formée par les deux miroirs comme une simple cavité Fabry-Perot. Nous définirons une matrice de résonance  $R$  reliant les champs à l'intérieur de la cavité aux champs incidents. Nous calculerons la force de Casimir comme la différence des pressions de radiation entre les côtés externe et interne des miroirs. Nous verrons que la force peut s'écrire comme une intégrale régulière sur les fréquences imaginaires grâce aux propriétés de causalité, de stabilité et de transparence à haute fréquence des amplitudes de diffusion [76]. Ces propriétés sont vérifiées pour tout miroir physique et l'expression obtenue est automatiquement finie, sans aucune nécessité de recourir aux procédures de régularisation-renormalisation généralement invoquées [77, 78, 79]. Nous retrouverons l'expression idéale de Casimir dans la limite des miroirs parfaits. Nous verrons également que ce calcul de pression de radiation donne un résultat interprétable comme une formule des déphasages, permettant de relier la force de Casimir à la matrice  $S$  globale de la cavité.

Le troisième chapitre étendra ces résultats au cas des miroirs métalliques qui sont utilisés dans les expériences récentes. Nous présenterons les différences essentielles entre un matériau diélectrique dans lequel les électrons sont liés et un métal dont les porteurs sont libres. Le premier modèle de métal que nous envisagerons est le modèle plasma qui décrit une dynamique sans friction des électrons de conduction. Ce modèle mettra clairement en évidence les caractéristiques essentielles de la force de Casimir entre miroirs métalliques, notamment la correction due précisément à une conductivité finie du métal. Une description plus fine du métal sera ensuite donnée par le modèle de Drude qui rend compte des processus de relaxation des électrons de conduction. Cet effet de la relaxation étant dominant dans un domaine de fréquences pour lequel la réponse optique du miroir est déjà presque saturée, cette relaxation jouera peu vis-à-vis de la force de Casimir. En revanche, les modifications de la réponse du métal dues aux transitions inter-bandes auront un effet significatif sur la force pour certaines distances. Nous en tiendrons compte en décrivant le métal à partir des données optiques réelles tabulées. Il apparaîtra alors clairement qu'une description fine des propriétés optiques du métal est nécessaire pour atteindre la précision du pourcent dans l'évaluation de la force de Casimir.

A partir de ces résultats donnés à température nulle, nous inclurons l'effet des fluctuations thermiques sur l'évaluation de la force de Casimir dans le quatrième chapitre. Nous définirons un facteur correctif incluant à la fois les corrections de conductivité

et les corrections thermiques. Il sera alors possible de dégager la notion essentielle de corrélation entre ces deux corrections. Nous expliciterons cette corrélation dans le cadre du modèle plasma et nous en dégagerons des caractéristiques intéressantes permettant d'atteindre une haute précision pour l'évaluation théorique de la force de Casimir.

Cette question se pose dans un contexte polémique au sein duquel l'inclusion de la température en même temps que celle de la dissipation dans les miroirs a engendré des résultats contradictoires. Nous discuterons l'origine de ces difficultés dans le chapitre 5. Nous montrerons comment notre formulation fournit des résultats dépourvus de toute ambiguïté et nous discuterons la relation entre ces résultats et ceux qui sont disponibles dans la littérature.

Dans le sixième et dernier chapitre, nous procéderons à une revue des expériences et nous aborderons les problèmes des effets géométriques sur la force de Casimir. Cette question de la géométrie recouvre en même temps le problème de la configuration plan-sphère utilisée dans la plupart des expériences et le problème de la rugosité de surface des miroirs. Ces effets sont évalués habituellement à partir d'une même approximation, dite approximation de proximité. Nous discuterons la validité de cette approximation et mettrons en évidence que cette question se présente de façon bien différente pour les problèmes de configuration plan-sphère et de rugosité.

Ceci nous permettra de conclure en discutant les différentes corrections qui interviennent dans les expériences et en proposant une évaluation de leur degré de précision. Ce tableau de la situation actuelle nous amènera finalement à indiquer les projets théoriques et expérimentaux qui nous paraissent importants.

## Chapitre 1

# Diffusion par un miroir

Les fluctuations du vide obéissent aux lois de l'optique et l'effet Casimir est dû à la diffusion de ces fluctuations sur les miroirs de la cavité. Ces miroirs sont eux-mêmes caractérisés par des amplitudes de diffusion, comme c'est l'usage en optique [72, 73]. Ce premier chapitre a pour but de présenter les méthodes générales pour décrire ces processus de diffusion en utilisant les symétries du problème.

Ici, nous étudions la diffusion par des miroirs parfaitement plans, parallèles et immobiles. La diffusion est stationnaire, ce qui se traduit par l'invariance du système par translation de temps. A cette symétrie correspond la conservation de la fréquence  $\omega$  du champ au cours de la diffusion. Les miroirs plans sont pris également infiniment étendus dans la dimension transverse ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ ). La géométrie est invariante par translation de l'espace dans la direction transverse, c'est-à-dire le long du plan des miroirs. Cette symétrie se traduit par la conservation, au cours du processus de diffusion, du vecteur d'onde transverse des champs incident, réfracté et réfléchi  $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y$ . Les polarisations TE et TM sont elles aussi conservées dans le processus de diffusion. Par symétrie cylindrique, on pourra supposer une incidence dans le plan ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z$ ). Dans un milieu caractérisé par son indice  $n = \sqrt{\varepsilon}$ , où l'on a noté  $\varepsilon$  la permittivité du milieu, la propagation oblique se décrit par les relations

$$k_x = \frac{\omega}{c} n \sin \theta \quad , \quad k_z = \frac{\omega}{c} n \cos \theta \quad (1-1)$$

entre la fréquence  $\omega$ , l'angle de réfraction  $\theta$  et le vecteur d'onde.

Cette analyse identifie les paramètres les mieux adaptés à la description de la diffusion du champ sur un miroir. Ces paramètres, la fréquence du champ  $\omega$ , les vecteurs d'onde transverses associés  $\mathbf{k}$  et la polarisation  $p$  sont les quantités conservées au cours du processus et sont utilisés comme les “bons nombres quantiques” dans la suite.

Ces symétries vont nous permettre d'introduire les matrices de diffusion  $S$  et de transfert  $T$  de la théorie des réseaux électromagnétiques [74, 75]. Ces matrices seront les éléments constitutifs de notre description théorique de la diffusion et elles seront utilisées dans toute la suite du travail. Nous commençons à expliciter ces outils dans le cas d'une interface entre deux milieux. En traduisant également dans ce point de vue la propagation du champ dans un milieu, nous décrivons ensuite une lame diélectrique et d'autres miroirs composés tels que les multicouches diélectriques. Nous insistons sur le caractère systématique de ces descriptions écrites sur des lois de composition construites sur les matrices  $T$ .

Ce travail nous permettra également de caractériser simplement la diffusion du champ sur une lame absorbante. En utilisant uniquement la propriété d'unitarité dans la diffusion des champs quantiques, nous montrons que le bruit ajouté dans une lame absorbante s'écrit en fonction des amplitudes de diffusion déjà calculées. Cette propriété jouera un rôle important pour le calcul de la force de Casimir dans le prochain chapitre.

## A L'interface entre deux milieux

Nous étudions pour commencer la situation d'une interface parfaitement plane séparant deux milieux diélectriques dispersifs d'indices respectifs  $n_1$  et  $n_2$ . Par conservation du vecteur transverse et de la fréquence, on déduit les lois de la réfraction

$$\frac{ck_x}{\omega} = n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.$$

Le vecteur longitudinal  $k_z$ , lui, n'est pas conservé et c'est précisément en son changement de signe que consiste la réflexion. La réfraction vers le second milieu modifie  $k_z$  de sorte que la relation constitutive (1-1) est vérifiée dans les deux milieux.

### A.1 Les deux polarisations

Les deux polarisations du champ correspondent aux géométries présentées sur la figure 1.1. Nous utilisons les conventions usuelles [80, 81] : la polarisation transverse électrique TE correspond à un vecteur champ électrique perpendiculaire au plan d'incidence et la polarisation transverse magnétique TM correspond à un vecteur champ électrique contenu dans ce plan. La symétrie des miroirs plans et parallèles permet de traiter séparément ces deux polarisations à travers tout le processus de diffusion par la cavité.

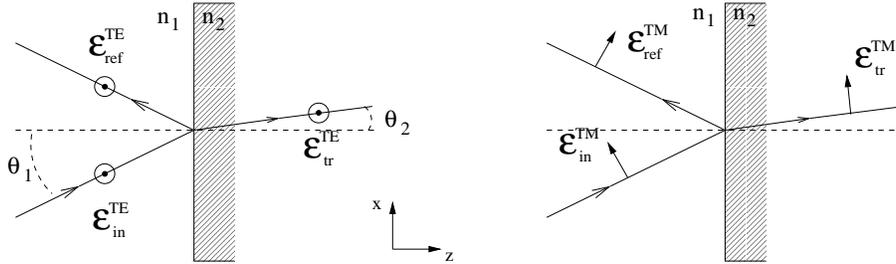


FIG. 1.1 – Géométrie des directions de propagation et des champs électriques pour les deux polarisations TM et TE.

On commence par considérer une onde incidente en polarisation TM. On a donc toujours

$$E_y^{\text{TM}} = H_x^{\text{TM}} = 0. \quad (1-2)$$

En notant les champs incident  $\mathcal{E}_{\text{in}}$ , transmis  $\mathcal{E}_{\text{tr}}$  et réfléchi  $\mathcal{E}_{\text{ref}}$ , on obtient

$$\begin{aligned} E_{x,1}^{\text{TM}} &= (\mathcal{E}_{\text{in}}^{\text{TM}} + \mathcal{E}_{\text{ref}}^{\text{TM}}) \cos \theta_1 \\ H_{y,1}^{\text{TM}} &= (\mathcal{E}_{\text{in}}^{\text{TM}} - \mathcal{E}_{\text{ref}}^{\text{TM}}) n_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{x,2}^{\text{TM}} &= \mathcal{E}_{\text{tr}}^{\text{TM}} \cos \theta_2 \\ H_{y,2}^{\text{TM}} &= \mathcal{E}_{\text{tr}}^{\text{TM}} n_2. \end{aligned} \quad (1-3)$$

Pour simplifier au maximum les expressions, nous écrivons les amplitudes des champs  $\mathcal{E}$  au voisinage immédiat de l'interface. Par ailleurs, l'onde incidente correspond au milieu 1. La situation réciproque sera traitée plus loin. Enfin, il est à signaler que nous avons défini les champs magnétiques  $H$  avec la même dimension que les champs électriques  $E$ . Dans chaque milieu, l'amplitude du champ  $H$  est celle du champ  $E$  multipliée par l'indice  $n$  correspondant. Les conditions générales de continuité des composantes tangentielles des champs à l'interface permettent d'écrire les équations de continuité suivantes

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_{\text{in}}^{\text{TM}} + \mathcal{E}_{\text{ref}}^{\text{TM}}) \cos \theta_1 &= \mathcal{E}_{\text{tr}}^{\text{TM}} \cos \theta_2 \\ (\mathcal{E}_{\text{in}}^{\text{TM}} - \mathcal{E}_{\text{ref}}^{\text{TM}}) n_1 &= \mathcal{E}_{\text{tr}}^{\text{TM}} n_2. \end{aligned} \quad (1-4)$$

Il est intéressant pour la suite de former le rapport entre ces deux équations

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{in}}^{\text{TM}} + \mathcal{E}_{\text{ref}}^{\text{TM}}}{\mathcal{E}_{\text{in}}^{\text{TM}} - \mathcal{E}_{\text{ref}}^{\text{TM}}} = \frac{n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1} \quad (1-5)$$

et de calculer leur produit

$$n_1 \cos \theta_1 \left( (\mathcal{E}_{\text{in}}^{\text{TM}})^2 - (\mathcal{E}_{\text{ref}}^{\text{TM}})^2 \right) = n_2 \cos \theta_2 (\mathcal{E}_{\text{tr}}^{\text{TM}})^2. \quad (1-6)$$

Pour une onde polarisée TE, la vibration du champ électrique s'effectue normalement au plan d'incidence

$$E_x^{\text{TE}} = H_y^{\text{TE}} = 0. \quad (1-7)$$

Comme précédemment, nous écrivons les champs dans chaque milieu

$$\begin{aligned} E_{y,1}^{\text{TE}} &= (\mathcal{E}_{\text{in}}^{\text{TE}} + \mathcal{E}_{\text{ref}}^{\text{TE}}) \\ H_{x,1}^{\text{TE}} &= -(\mathcal{E}_{\text{in}}^{\text{TE}} - \mathcal{E}_{\text{ref}}^{\text{TE}}) n_1 \cos \theta_1 \\ E_{y,2}^{\text{TE}} &= \mathcal{E}_{\text{tr}}^{\text{TE}} \\ H_{x,2}^{\text{TE}} &= -\mathcal{E}_{\text{tr}}^{\text{TE}} n_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (1-8)$$

et nous obtenons les relations de continuité

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{in}}^{\text{TE}} + \mathcal{E}_{\text{ref}}^{\text{TE}} &= \mathcal{E}_{\text{tr}}^{\text{TE}} \\ (\mathcal{E}_{\text{in}}^{\text{TE}} - \mathcal{E}_{\text{ref}}^{\text{TE}}) n_1 \cos \theta_1 &= \mathcal{E}_{\text{tr}}^{\text{TE}} n_2 \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (1-9)$$

Pour le rapport entre ces deux équations, on trouve une expression analogue à (1-5) avec les facteurs de projection  $\cos \theta_i$  interchangegés

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{in}}^{\text{TE}} + \mathcal{E}_{\text{ref}}^{\text{TE}}}{\mathcal{E}_{\text{in}}^{\text{TE}} - \mathcal{E}_{\text{ref}}^{\text{TE}}} = \frac{n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_2}. \quad (1-10)$$

Par contre, le produit des équations (1-9) a la même forme qu'en (1-6)

$$n_1 \cos \theta_1 \left( (\mathcal{E}_{\text{in}}^{\text{TE}})^2 - (\mathcal{E}_{\text{ref}}^{\text{TE}})^2 \right) = n_2 \cos \theta_2 (\mathcal{E}_{\text{tr}}^{\text{TE}})^2. \quad (1-11)$$

## A.2 Les amplitudes de diffusion

A ce stade, on définit l'amplitude de réflexion comme le rapport du champ réfléchi au champ incident, pour chaque polarisation,

$$r_{1|2} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ref}}}{\mathcal{E}_{\text{in}}}. \quad (1-12)$$

L'indice  $1 | 2$  désigne la diffusion d'un champ incident par l'interface, du milieu 1 vers le milieu 2. On déduit de (1-5) et (1-10) les expressions explicites de ces amplitudes de réflexion

$$\begin{aligned} r_{1|2}^{\text{TE}} &= \frac{k_{z,1} - k_{z,2}}{k_{z,1} + k_{z,2}} \\ r_{1|2}^{\text{TM}} &= \frac{\varepsilon_1 k_{z,2} - \varepsilon_2 k_{z,1}}{\varepsilon_1 k_{z,2} + \varepsilon_2 k_{z,1}}. \end{aligned} \quad (1-13)$$

On définira également et de la même façon les coefficients de transmission comme le rapport entre l'onde transmise et l'onde incidente

$$t_{1|2} = \frac{\mathcal{E}_{\text{tr}}}{\mathcal{E}_{\text{in}}}. \quad (1-14)$$

On établit à l'aide des équations (1-4) et (1-9) les relations entre ces amplitudes de transmission et les amplitudes de réflexion

$$\begin{aligned} t_{1|2}^{\text{TM}} &= \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} (1 + r_{1|2}^{\text{TM}}) \\ t_{1|2}^{\text{TE}} &= 1 + r_{1|2}^{\text{TE}}. \end{aligned} \quad (1-15)$$

On obtient ainsi les expressions explicites

$$\begin{aligned} t_{1|2}^{\text{TE}} &= \frac{2k_{z,1}}{k_{z,1} + k_{z,2}} \\ t_{1|2}^{\text{TM}} &= \frac{2\varepsilon_2 k_{z,1}}{\varepsilon_2 k_{z,1} + \varepsilon_1 k_{z,2}}. \end{aligned} \quad (1-16)$$

En utilisant (1-6) et (1-11), on obtient également des relations entre les carrés des amplitudes, avec la même forme pour les deux polarisations

$$k_{z,1} (1 - r_{1|2}^2) = k_{z,2} t_{1|2}^2. \quad (1-17)$$

Nous avons utilisé la relation (1-1) entre les vecteurs d'onde et les angles.

On peut réécrire les conditions de continuité en termes d'impédances. Celles-ci n'ont pas la même forme pour les deux polarisations parce que les facteurs de projection  $\cos \theta$  n'interviennent pas de la même façon

$$\begin{aligned} H_y^{\text{TM}} &= \frac{n}{\cos \theta} E_x^{\text{TM}} \\ H_x^{\text{TE}} &= -n \cos \theta E_y^{\text{TE}}. \end{aligned} \quad (1-18)$$

Ces relations s'écrivent dans chacun des deux milieux ( $m = 1, 2$ ) en fonction de facteurs d'impédances

$$\begin{aligned} z_m^{\text{TM}} &= \frac{n_m}{\cos \theta_m} \\ z_m^{\text{TE}} &= n_m \cos \theta_m. \end{aligned} \quad (1-19)$$

Nous avons omis le signe global qui ne se manifeste pas. En utilisant ces impédances, les amplitudes de réflexion s'écrivent de la même façon pour les deux polarisations

$$r_{1|2} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}. \quad (1-20)$$

Nous retrouvons avec ces notations les notions d'impédances de surface, avec toutefois des conventions différentes des conventions usuelles [82].

### A.3 La réciprocité

On peut décrire simplement la situation où la même interface est traversée avec le sens inverse de propagation. Ceci correspond à la situation réciproque de la précédente, et elle est obtenue par échange des deux directions de traversée de l'interface. La situation réciproque correspond aussi à une symétrie spatiale par rapport au plan de l'interface suivie de l'échange des indices des deux milieux (voir la figure 1.2).

Les miroirs étant immobiles, la fréquence est conservée dans cette symétrie. Le vecteur d'onde et le champ électrique se transforment comme des vecteurs<sup>1</sup>. On définira

---

1. Alors que le champ magnétique se transforme comme un 'pseudo-vecteur' spatial. On suppose bien sûr qu'il n'y a pas de champ magnétique extérieur appliqué.

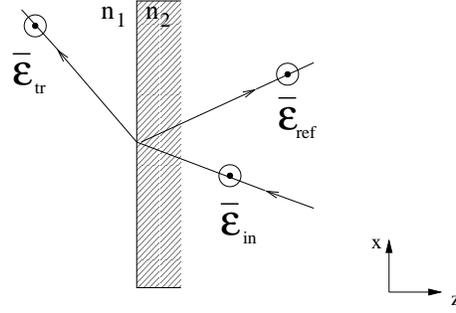


FIG. 1.2 – Réciprocité.

par les notations  $(\bar{\mathcal{E}}, \bar{r}, \bar{t})$  les champs et les amplitudes de diffusion de la situation réciproque

$$\bar{r}_{1|2} = \frac{\bar{\mathcal{E}}_{\text{ref}}}{\bar{\mathcal{E}}_{\text{in}}} \quad , \quad \bar{t}_{1|2} = \frac{\bar{\mathcal{E}}_{\text{tr}}}{\bar{\mathcal{E}}_{\text{in}}} \quad (1-21)$$

La transformation réciproque sur l'amplitude de réflexion est donc simplement donnée par échange des indices

$$\bar{r}_{1|2} = r_{2|1}, \quad (1-22)$$

c'est-à-dire comme on le voit directement sur les impédances (1-19)

$$\bar{r}_{1|2} = -r_{1|2}. \quad (1-23)$$

Cette propriété de réciprocity est vraie pour les deux polarisations.

Pour le coefficient de transmission, on doit traiter chaque polarisation séparément

$$\begin{aligned} \bar{t}_{1|2}^{\text{TM}} &= \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} (1 + \bar{r}_{1|2}^{\text{TM}}) = t_{2|1}^{\text{TM}} \\ \bar{t}_{1|2}^{\text{TE}} &= 1 + \bar{r}_{1|2}^{\text{TE}} = t_{2|1}^{\text{TE}}. \end{aligned} \quad (1-24)$$

Mais on constate ensuite, par inspection des formules précédentes, que la relation suivante entre les amplitudes de transmission directe et réciproque est la même pour les deux polarisations

$$\frac{\bar{t}_{1|2}^{\text{TM}}}{t_{1|2}^{\text{TM}}} = \frac{\bar{t}_{1|2}^{\text{TE}}}{t_{1|2}^{\text{TE}}} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} = \frac{k_{z,2}}{k_{z,1}}. \quad (1-25)$$

Il en est de même pour la relation entre les carrés des amplitudes

$$\begin{aligned} 1 - r_{1|2}^2 &= 1 - \bar{r}_{1|2}^2 \\ &= \frac{k_{z,2}}{k_{z,1}} t_{1|2}^2 = \frac{k_{z,1}}{k_{z,2}} \bar{t}_{1|2}^2 \\ &= t_{1|2} \bar{t}_{1|2}. \end{aligned} \quad (1-26)$$

Les raisonnements que nous venons de présenter sont possibles à condition de supposer que les équations microscopiques à la base de la diffusion sont invariantes par renversement du temps. C'est un théorème de microréversibilité sur lequel nous reviendrons plus loin.

#### A.4 Milieux absorbants

La causalité de la réponse optique du milieu implique [83, 84] que la permittivité  $\varepsilon[\omega]$  est une fonction analytique de la fréquence  $\omega$  sur tout le demi-plan complexe supérieur  $\text{Im}(\omega) > 0$ . Cette propriété jouera un rôle important dans ce travail et nous nous en servirons pour transformer certaines intégrales sur l'axe des fréquences réelles en intégrales sur l'axe des fréquences imaginaires. Il sera alors commode d'utiliser la notation

$$\omega = i\xi. \quad (1-27)$$

Avec cette notation, la propriété de causalité correspondra à l'analyticité dans le demi-plan

$$\text{Re}(\xi) > 0. \quad (1-28)$$

La propagation du champ dans le milieu est décrite par une phase  $e^{ik_z z}$  déterminée par le vecteur d'onde longitudinal  $k_z$ . Nous savons qu'à partir du moment où l'indice du milieu possède une partie imaginaire non-nulle, le champ est atténué au cours de sa propagation dans le milieu. Autrement dit, le facteur  $e^{ik_z z}$  contient un facteur d'extinction lié à la partie imaginaire du vecteur  $k_z$ . Il est important de remarquer que ceci impose de choisir le bon signe quand on définit le vecteur  $k_z$  à partir des relations de dispersion

$$k_z^2 = \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2. \quad (1-29)$$

Ce choix est lié à la direction de propagation du champ dans le milieu. On pourra noter

$$k_z = i\kappa \quad \text{Re}(\kappa) > 0 \quad (1-30)$$

pour une propagation du champ vers la droite et

$$k_z = -i\kappa \quad \text{Re}(\kappa) > 0 \quad (1-31)$$

pour une propagation du champ vers la gauche.

En utilisant les notations  $\xi$  et  $\kappa$ , nous regroupons ces deux cas en une seule équation

$$\kappa = \sqrt{\varepsilon \frac{\xi^2}{c^2} + \mathbf{k}^2} \quad \text{Re}(\kappa) > 0 \quad (1-32)$$

## A.5 Ondes évanescentes

Toutes les relations ont été écrites jusqu'à présent pour les ondes ordinaires qui se propagent librement dans le vide. Cependant, un champ se propageant d'un milieu  $n_1 > 1$  vers le vide  $n_0 = 1$  devient évanescent quand son angle d'incidence est supérieur à l'angle limite de réflexion totale  $n_1 \sin \theta_1 > 1$ . L'onde évanescente dans le vide est alors caractérisée par les conditions

$$k_z \quad \text{imaginaire} \quad , \quad \frac{\omega^2}{c^2} \leq \mathbf{k}^2, \quad (1-33)$$

à comparer pour les ondes ordinaires à

$$k_z \quad \text{reel} \quad , \quad \frac{\omega^2}{c^2} \geq \mathbf{k}^2. \quad (1-34)$$

Les résultats obtenus précédemment pour les ondes ordinaires peuvent être étendus aux ondes évanescentes en utilisant la notion importante de prolongement analytique. La quantité  $k_z^2$  est négative pour les ondes évanescentes, ce qui pose un problème pour définir la variable complexe  $k_z$ .

La condition d'atténuation lors de la propagation dans le vide permet de choisir le branchement qui sélectionne la bonne détermination de  $k_z$  conformément aux équations écrites dans la section précédente. Les notations qu'on a introduites à cette occasion sont bien adaptées pour décrire le processus de prolongement aux ondes évanescentes et ceci est valable également si le milieu diélectrique est absorbant. Les amplitudes de réflexion et de transmission pour les ondes évanescentes sont alors simplement données comme prolongement analytique des expressions des amplitudes des ondes ordinaires (1-13,1-16) avec  $\kappa$  donné par l'équation (1-32) [85].

Ces modes évanescents peuvent se caractériser du point de vue de la réciprocité. Une onde évanescente correspond à une propagation d'un milieu réfringent vers le vide. En particulier, les amplitudes de réflexion correspondent à de simples phases, ce qui correspond au phénomène bien connu de réflexion totale. On obtient alors

$$|\bar{r}_{1|2}|^2 = 1.$$

Pour autant, les coefficients de transmission ne s'annulent pas puisqu'il existe une onde transmise. Ces résultats illustrent la propriété bien connue que la discussion des lois portant sur l'énergie soulève des questions délicates dans le secteur des ondes évanescentes [86].

On retiendra que les équations déterminant les amplitudes de réflexion se prolongent

au secteur évanescent, la forme de ces amplitudes restant la même que celle démontrée pour les ondes ordinaires. En moyenne, il n’y a pas de transfert d’énergie à travers l’interface pour les modes évanescents mais ces modes existent réellement et se propagent tout de même le long de l’interface. Nous verrons qu’ils interviennent dans le calcul de la force de Casimir.

Dans le prochain chapitre, nous aurons besoin d’évaluer les amplitudes de réflexion dans le secteur évanescent et également pour les fréquences imaginaires. Ces amplitudes seront obtenues par prolongement analytique de celles que nous aurons calculées pour les ondes ordinaires.

Dans le secteur évanescent, la valeur de  $\kappa_1$  est imaginaire comme pour les ondes ordinaires alors que la valeur de  $\kappa_0$  est réelle,  $\kappa_0$  étant alors exactement l’inverse de la longueur sur laquelle le champ subsiste au voisinage de la surface. Pour les fréquences imaginaires, les permittivités  $\varepsilon[i\xi]$  sont toujours réelles, et il en est de même pour  $\kappa_0$  et  $\kappa_1$ . Ces arguments détermineront les comportements des amplitudes sur ces deux secteurs.

## B Les miroirs traités comme des réseaux

Nous voulons maintenant mettre en place un point de vue très systématique des amplitudes de diffusion inspiré de la théorie des réseaux [74, 75]. Par exemple, l’interface étudiée dans la section précédente sera considérée comme un réseau électromagnétique avec deux ports à gauche et à droite. Nous pourrons alors écrire des relations de type entrée/sortie (in/out) en considérant la superposition linéaire des deux situations étudiées dans la section précédente. Nous pourrons aussi écrire des relations de type transfert gauche/droite.

Cette méthode conduira à une description systématique de la diffusion. Elle nous permettra de dégager très aisément les lois de composition qui seront à la base de la description de la diffusion par une lame ou un multicouche. Elle fournira les relations générales entre les amplitudes qui découlent de la propriété de réciprocité.

### B.1 Matrice $S$ et réciprocité

La matrice  $S$  est une matrice de type entrée-sortie reliant les champs diffusés aux champs incidents. Les amplitudes représentées sur la figure 1.3 sont rassemblées en vecteurs colonnes notés “in” et “out” qui correspondent respectivement aux amplitudes entrantes et sortantes.

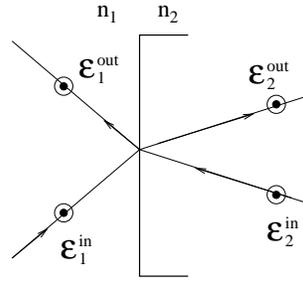


FIG. 1.3 – Diffusion sur une interface entre deux milieux.

Ces vecteurs sont reliés par une matrice de diffusion, ou matrice  $S$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_1^{\text{out}} \\ \mathcal{E}_2^{\text{out}} \end{pmatrix} = S_{1|2} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1^{\text{in}} \\ \mathcal{E}_2^{\text{in}} \end{pmatrix}. \quad (1-35)$$

Pour faire clairement le lien avec les notations des sections précédentes, nous détaillons ici les définitions exactes des champs dans le cas particulier d’une interface séparant deux milieux 1 et 2. Les champs incidents sur l’interface, se propageant dans le milieu 1 ou dans le milieu 2, s’identifient aux champs “in”

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1^{\text{in}} &\equiv \mathcal{E}_{\text{in}} \\ \mathcal{E}_2^{\text{in}} &\equiv \bar{\mathcal{E}}_{\text{in}}. \end{aligned} \quad (1-36)$$

Les champs sortants sont des superpositions linéaires des champs transmis et réfléchis calculés dans la section précédente

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1^{\text{out}} &\equiv \mathcal{E}_{\text{ref}} + \bar{\mathcal{E}}_{\text{tr}} \\ \mathcal{E}_2^{\text{out}} &\equiv \mathcal{E}_{\text{tr}} + \bar{\mathcal{E}}_{\text{ref}}. \end{aligned} \quad (1-37)$$

Il est évident que les éléments de la matrice  $S$  sont tout simplement les amplitudes de diffusion discutées dans la section précédente

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1^{\text{out}} &= r_{1|2} \mathcal{E}_1^{\text{in}} + \bar{t}_{1|2} \mathcal{E}_2^{\text{in}} \\ \mathcal{E}_2^{\text{out}} &= t_{1|2} \mathcal{E}_1^{\text{in}} + \bar{r}_{1|2} \mathcal{E}_2^{\text{in}}. \end{aligned} \quad (1-38)$$

Par identification avec l’équation (1-35), ceci définit la matrice  $S$

$$S_{1|2} = \begin{pmatrix} r_{1|2} & \bar{t}_{1|2} \\ t_{1|2} & \bar{r}_{1|2} \end{pmatrix}. \quad (1-39)$$

La réciprocité est une propriété de symétrie du réseau dès lors que les équations microscopiques sont invariantes par renversement du temps. C’est l’extension au cas des

champs, due à Casimir lui-même [87], des propriétés de micro-réversibilité découvertes par Onsager [88]. C'est une conséquence des équations de Maxwell que les processus électromagnétiques se déroulant dans les milieux diélectriques obéissent à cette propriété, si toutes les grandeurs à considérer dans la définition du système sont bien invariantes par renversement du temps, ce qui suppose en particulier qu'il n'y ait pas de champ magnétique extérieur appliqué. Nous allons démontrer dans la suite de cette section que, pour un réseau électromagnétique dont les deux ports L et R sont dans le vide, le principe de réciprocité se traduit par le caractère symétrique de la matrice  $S$ .

## B.2 Matrice $T$ et lois de composition

La matrice  $T$  correspond à une façon différente d'envisager le processus de diffusion sur le même réseau. Il ne s'agit plus de relier les champs diffusés aux champs incidents, comme le faisait la matrice  $S$ , mais de relier les deux ports du diffuseur du point de vue d'un "transfert" de champ du côté droit au côté gauche. Les champs sont identifiés par les relations suivantes conformément à la figure 1.4

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1^{\rightarrow} &\equiv \mathcal{E}_1^{\text{in}} & \mathcal{E}_1^{\leftarrow} &\equiv \mathcal{E}_1^{\text{out}} \\ \mathcal{E}_2^{\rightarrow} &\equiv \mathcal{E}_2^{\text{out}} & \mathcal{E}_2^{\leftarrow} &\equiv \mathcal{E}_2^{\text{in}}. \end{aligned} \quad (1-40)$$

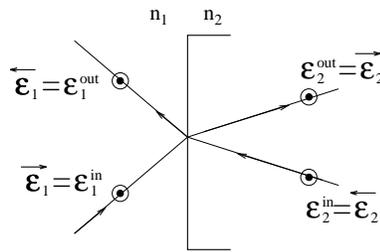


FIG. 1.4 – Description de l'interface entre deux milieux dans une approche de transfert.

Les colonnes regroupant les champs à gauche et à droite sont reliés par une matrice  $T$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_1^{\rightarrow} \\ \mathcal{E}_1^{\leftarrow} \end{pmatrix} = T_{1|2} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2^{\rightarrow} \\ \mathcal{E}_2^{\leftarrow} \end{pmatrix} \quad T_{1|2} = \begin{pmatrix} a_{1|2} & b_{1|2} \\ c_{1|2} & d_{1|2} \end{pmatrix}. \quad (1-41)$$

Ce point de vue se révèlera très utile pour formuler les lois de composition d'une manière très systématique. On peut noter que le calcul des multicouches diélectriques est depuis longtemps fondé sur de telles techniques [89, 90].

Nous pouvons relier les coefficients de cette matrice  $T$  à ceux de la matrice  $S$

$$a_{1|2} = \frac{1}{t_{1|2}} \quad b_{1|2} = -\frac{\bar{r}_{1|2}}{t_{1|2}}$$

$$c_{1|2} = \frac{r_{1|2}}{t_{1|2}} \quad d_{1|2} = \frac{t_{1|2}\bar{t}_{1|2} - r_{1|2}\bar{r}_{1|2}}{t_{1|2}}. \quad (1-42)$$

On note qu'il sera impossible de déduire la matrice  $T$  de la matrice  $S$  dans le cas d'une transmission nulle : les coefficients de la matrice  $T$  ne sont pas définis dans ce cas. Comme nous le verrons plus loin, c'est précisément la situation rencontrée dans la limite d'un milieu d'épaisseur infinie, limite souvent considérée dans l'interprétation des expériences.

Les amplitudes de diffusion peuvent également se déduire des amplitudes de transfert en inversant les relations précédentes

$$\begin{aligned} t_{1|2} &= \frac{1}{a_{1|2}} & \bar{r}_{1|2} &= -\frac{b_{1|2}}{a_{1|2}} \\ r_{1|2} &= \frac{c_{1|2}}{a_{1|2}} & \bar{t}_{1|2} &= \frac{a_{1|2}d_{1|2} - b_{1|2}c_{1|2}}{a_{1|2}}. \end{aligned} \quad (1-43)$$

On remarque la relation générale entre le déterminant de la matrice  $T$  et le rapport des coefficients non diagonaux de la matrice  $S$

$$\frac{\bar{t}_{1|2}}{t_{1|2}} = a_{1|2}d_{1|2} - b_{1|2}c_{1|2} = \det T_{1|2}. \quad (1-44)$$

L'intérêt principal des matrices de transfert est qu'elles sont bien adaptées à l'écriture des lois de composition d'éléments optiques. En effet, l'empilement d'éléments optiques se traduit simplement par le produit des matrices  $T$  correspondant à chaque élément. Pour deux réseaux connectés dont les ports sont donc respectivement les ports 1|2 et 2|3, nous obtenons pour le système équivalent 1|3 la matrice  $T$  définie par le produit des matrices  $T$  de chaque réseau

$$T_{1|3} = T_{1|2}T_{2|3}. \quad (1-45)$$

Chaque réseau pourra représenter un élément optique élémentaire tel que la traversée d'une interface ou la propagation dans un milieu (voir la section suivante). Mais il pourra tout aussi bien représenter un système composé tel qu'une lame ou un miroir multicouche.

Dans tous les cas, le produit des matrices  $T$  décrira l'empilement de deux éléments optiques A et B pour en fabriquer un troisième, noté AB

$$T_{AB} = T_A T_B \quad (1-46)$$

Il est clair que les déterminants sont simplement multipliés dans un empilement

$$\det T_{AB} = \det T_A \cdot \det T_B. \quad (1-47)$$

Les amplitudes de transfert sont obtenues en développant le produit des matrices

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{AB} & b_{AB} \\ c_{AB} & d_{AB} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_A & b_A \\ c_A & d_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_B & b_B \\ c_B & d_B \end{pmatrix} \\ a_{AB} &= a_A a_B + b_A c_B \\ b_{AB} &= a_A b_B + b_A d_B \\ c_{AB} &= c_A a_B + d_A c_B \\ d_{AB} &= c_A b_B + d_A d_B. \end{aligned} \quad (1-48)$$

### B.3 Réseaux électromagnétiques élémentaires

Dans cette section, nous considérons deux types de réseaux élémentaires, la traversée d'une interface et la propagation dans un milieu, qui permettent de construire par composition tous les miroirs plans qui nous intéressent dans la suite.

Pour l'interface, nous réécrivons les amplitudes de réflexion (1-20) en fonction des facteurs d'impédances

$$\begin{aligned} r_{1|2} &= \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \\ \bar{r}_{1|2} &= -r_{1|2} \end{aligned} \quad (1-49)$$

Nous rappelons également l'équation (1-17) pour les amplitudes de transmission

$$\begin{aligned} t_{1|2} &= \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \sqrt{1 - r_{1|2}^2} \\ \bar{t}_{1|2} &= \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} \sqrt{1 - r_{1|2}^2}. \end{aligned} \quad (1-50)$$

Nous déduisons de la section précédente les amplitudes de transfert

$$\begin{aligned} a_{1|2} = d_{1|2} &= \frac{1}{t_{1|2}} \\ b_{1|2} = c_{1|2} &= \frac{r_{1|2}}{t_{1|2}}. \end{aligned} \quad (1-51)$$

Nous introduisons ici une notation qui sera utilisée par la suite et qui consiste à écrire les amplitudes de réflexion de l'interface sous forme d'une exponentielle

$$r_{1|2} = -e^{-\beta} \quad , \quad \beta = \ln \left( \frac{z_2 + z_1}{z_2 - z_1} \right). \quad (1-52)$$

La propagation du champ sur une distance  $\ell$  à l'intérieur d'un milieu  $m$  est caractérisée par une phase accumulée par chaque champ se propageant dans les deux

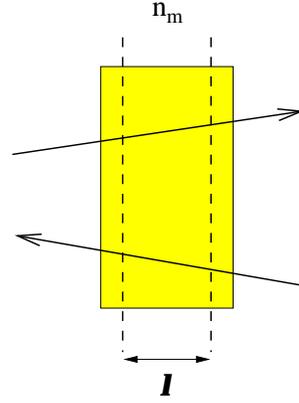


FIG. 1.5 – Propagation dans un milieu.

directions mais sans mélange entre ces deux champs (voir la figure 1.5).

Ceci correspond à une matrice  $T$  très simple

$$T_{\ell}^{\text{pr}} = \begin{pmatrix} e^{\alpha_m} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha_m} \end{pmatrix}. \quad (1-53)$$

$\alpha_m$  correspond au paramètre de phase sur l'épaisseur  $\ell$

$$\alpha_m = \ell \kappa_m = \ell \sqrt{\varepsilon \frac{\xi^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}. \quad (1-54)$$

Cette phase est la même pour les deux polarisations et pour les deux directions de propagation possibles.

## B.4 Composition et réciprocité

Nous avons vu en (1-44) que pour l'interface, le déterminant de la matrice  $T$  est simplement donné par

$$\det T_{1|2} = \frac{\bar{t}_{1|2}}{t_{1|2}} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}. \quad (1-55)$$

Dans le cas de la propagation dans un milieu  $m$ , on a

$$\det T_m^{\text{pr}} = 1 \quad (1-56)$$

ce qui correspond simplement, d'après (1-55), à la conservation au cours de la propagation du vecteur  $\kappa$ .

En utilisant le fait que le déterminant de la matrice  $T$  se multiplie dans la composition (1-47), on déduit que la relation (1-55) est en fait valable pour tout réseau à deux

ports construit avec la symétrie du miroir plan par composition d'un empilement quelconque de traversées d'interfaces et de propagations. En effet, cette loi est vraie pour ces réseaux élémentaires et elle a son expression préservée par la loi de composition. En particulier, pour tout réseau dont les deux ports correspondent au vide, on aura  $\kappa_1 = \kappa_2$ , ce qui conduira à la forme particulière de l'équation (1-55)

$$\det T = 1. \quad (1-57)$$

Par suite des relations déjà démontrées, on déduit que la matrice  $S$  sera symétrique

$$\bar{t} = t. \quad (1-58)$$

Ce résultat constitue la démonstration de la propriété de réciprocité avec l'hypothèse de la symétrie du miroir plan.

En explicitant la matrice  $S$  d'un tel réseau

$$S = \begin{pmatrix} r & t \\ t & \bar{r} \end{pmatrix}, \quad (1-59)$$

on utilise les relations (1-42) pour donner la matrice  $T$  associée

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -\frac{\bar{r}}{t} \\ \frac{r}{t} & \frac{t^2 - r\bar{r}}{t} \end{pmatrix}, \quad \det T = 1. \quad (1-60)$$

Inversement, partant de la matrice  $T$  d'un réseau réciproque

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det T = 1, \quad d = \frac{1 + bc}{a}, \quad (1-61)$$

on déduit la matrice  $S$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{c}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}. \quad (1-62)$$

Comme on l'a déjà dit, ces formes sont liées à la propriété générale de réciprocité. Dans le cas particulier où le réseau est de plus invariant par symétrie par rapport à son plan médian (ce sera le cas de la lame), les deux coefficients de réflexion sont alors égaux ( $r = \bar{r}$ ), ce qui implique pour les amplitudes de transfert l'égalité  $b = -c$ .

En utilisant la forme générale d'une matrice  $S$  réciproque, nous pouvons expliciter

les relations correspondant à l'empilement de deux éléments optiques. En effet, les relations (1-48) se réécrivent

$$\begin{aligned}
a_{AB} &= \frac{1}{t_{AB}} = \frac{1}{t_A} \frac{1}{t_B} - \frac{\bar{r}_A r_B}{t_A t_B} \\
b_{AB} &= -\frac{\bar{r}_{AB}}{t_{AB}} = -\frac{1}{t_A} \frac{\bar{r}_B}{t_B} - \frac{\bar{r}_A}{t_A} \frac{t_B^2 - r_B \bar{r}_B}{t_B} \\
c_{AB} &= \frac{r_{AB}}{t_{AB}} = \frac{r_A}{t_A} \frac{1}{t_B} + \frac{t_A^2 - r_A \bar{r}_A}{t_A} \frac{r_B}{t_B} \\
d_{AB} &= \frac{t_{AB}^2 - r_{AB} \bar{r}_{AB}}{t_{AB}} \\
&= \frac{-r_A \bar{r}_B + (t_A^2 - r_A \bar{r}_A)(t_B^2 - r_B \bar{r}_B)}{t_A t_B}.
\end{aligned} \tag{1-63}$$

On peut ensuite revenir aux coefficients de la matrice de diffusion composée  $S_{AB}$

$$\begin{aligned}
t_{AB} &= \frac{t_A t_B}{1 - \bar{r}_A r_B} \\
r_{AB} &= \frac{r_A + (t_A^2 - r_A \bar{r}_A) r_B}{1 - \bar{r}_A r_B} = r_A + \frac{t_A^2 r_B}{1 - \bar{r}_A r_B} \\
\bar{r}_{AB} &= \frac{\bar{r}_B + \bar{r}_A (t_B^2 - r_B \bar{r}_B)}{1 - \bar{r}_A r_B} = \bar{r}_B + \frac{\bar{r}_A t_B^2}{1 - \bar{r}_A r_B}.
\end{aligned} \tag{1-64}$$

Par récurrence, on pourra déduire les coefficients de diffusion pour tout miroir multicouche. Nous étudions ci-dessous la lame et le multicouche diélectrique.

## B.5 La lame diélectrique

Une lame diélectrique est construite par l'empilement d'une interface 0|1 où l'indice 0 correspond au vide et l'indice 1 au matériau d'indice  $n_1$ , d'une propagation sur l'épaisseur  $\ell$  de la lame avec une phase  $\alpha_1 = \ell \kappa_1$  et, finalement, d'une autre interface 1|0. La matrice  $T$  de la lame s'écrit donc simplement comme

$$T^{\text{lame}} = T_{0|1}^{\text{int}} T_1^{\text{pr}} T_{1|0}^{\text{int}}. \tag{1-65}$$

La lame est bien sûr un réseau réciproque, et elle est de plus, par construction, invariante dans la symétrie spatiale par rapport à son plan médian. Sa matrice  $S$  a donc la forme suivante

$$S^{\text{lame}} = \begin{pmatrix} r & t \\ t & r \end{pmatrix}. \tag{1-66}$$

Nous calculons ci-dessous les amplitudes  $r$  et  $t$ .

On utilisera les notations déjà introduites pour décrire l'effet de propagation du champ dans la lame

$$\alpha = \ell \kappa_1 \quad (1-67)$$

et les amplitudes de réflexion sur la lame

$$\begin{aligned} e^{-\beta^{\text{TE}}} &= -r_{0|1}^{\text{TE}} = \frac{z^{\text{TE}} - 1}{z^{\text{TE}} + 1} \\ z^{\text{TE}} &\equiv \frac{z_1^{\text{TE}}}{z_0^{\text{TE}}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_0} \\ e^{-\beta^{\text{TM}}} &= -r_{0|1}^{\text{TM}} = \frac{z^{\text{TM}} - 1}{z^{\text{TM}} + 1} \\ z^{\text{TM}} &\equiv \frac{z_1^{\text{TM}}}{z_0^{\text{TM}}} = \frac{\varepsilon_1 \kappa_0}{\kappa_1}, \end{aligned} \quad (1-68)$$

l'indice 0 désignant ici le vide pour lequel  $\varepsilon \equiv 1$ . On a noté conformément aux notations déjà introduites

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= \sqrt{\frac{\xi^2}{c^2} + \mathbf{k}^2} \\ \kappa_1 &= \sqrt{\varepsilon_1 \frac{\xi^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}. \end{aligned} \quad (1-69)$$

Les équations (1-51) pour les amplitudes de transfert pour les interfaces s'écrivent alors

$$\begin{aligned} T_{0|1}^{\text{int}} &= \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_0}} \frac{1}{\sqrt{2 \sinh \beta}} \begin{pmatrix} e^{\frac{\beta}{2}} & -e^{-\frac{\beta}{2}} \\ -e^{-\frac{\beta}{2}} & e^{\frac{\beta}{2}} \end{pmatrix} \\ T_{1|0}^{\text{int}} &= \sqrt{\frac{\kappa_0}{\kappa_1}} \frac{1}{\sqrt{2 \sinh \beta}} \begin{pmatrix} e^{\frac{\beta}{2}} & e^{-\frac{\beta}{2}} \\ e^{-\frac{\beta}{2}} & e^{\frac{\beta}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1-70)$$

On vérifie que le produit de ces deux matrices redonne bien la matrice identité, ce qui signifie que les effets des deux interfaces se compenseraient s'ils n'étaient pas séparés par l'effet de propagation dans le diélectrique.

On peut donc écrire, par composition, la matrice globale de la lame

$$\begin{aligned} T^{\text{lame}} &= \frac{1}{2 \sinh \beta} \begin{pmatrix} e^{\frac{\beta}{2}} & -e^{-\frac{\beta}{2}} \\ -e^{-\frac{\beta}{2}} & e^{\frac{\beta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{\beta}{2}} & e^{-\frac{\beta}{2}} \\ e^{-\frac{\beta}{2}} & e^{\frac{\beta}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{\text{lame}} & b^{\text{lame}} \\ c^{\text{lame}} & d^{\text{lame}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1-71)$$

avec

$$\begin{aligned}
 a^{\text{lame}} &= \frac{e^\beta e^\alpha - e^{-\beta} e^{-\alpha}}{e^\beta - e^{-\beta}} = \frac{\sinh(\beta + \alpha)}{\sinh \beta} \\
 d^{\text{lame}} &= \frac{e^\beta e^{-\alpha} - e^{-\beta} e^\alpha}{e^\beta - e^{-\beta}} = \frac{\sinh(\beta - \alpha)}{\sinh \beta} \\
 b^{\text{lame}} &= -c^{\text{lame}} = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\beta - e^{-\beta}} = \frac{\sinh \alpha}{\sinh \beta}.
 \end{aligned} \tag{1-72}$$

On déduit les amplitudes de diffusion, conformément aux relations (1-43)

$$\begin{aligned}
 t^{\text{lame}} &= \frac{\sinh \beta}{\sinh(\beta + \alpha)} \\
 r^{\text{lame}} &= -\frac{\sinh \alpha}{\sinh(\beta + \alpha)}.
 \end{aligned} \tag{1-73}$$

Il est intéressant de noter que ces résultats ont la même structure que ceux obtenus pour une cavité Fabry-Perot [91, 92]. Nous venons en fait de calculer le Fabry-Perot que constitue la lame en utilisant la méthode de multiplication des matrices  $T$ . Le grand avantage de cette méthode est sa généralité que nous allons utiliser pour calculer des miroirs multicouches.

## B.6 Le miroir massif comme cas limite

La plupart des calculs de la force de Casimir considèrent la configuration de deux miroirs massifs, semi-infinis, se faisant face. Il est clair physiquement que les miroirs réels ont une épaisseur finie. La lame est donc une description plus réaliste et c'est à partir de ce modèle de lame que le miroir massif peut être considéré comme le cas limite

$$e^{-\alpha} \rightarrow 0. \tag{1-74}$$

Nous avons supposé la présence d'une absorption, aussi petite soit elle, qui implique une extinction totale du coefficient de transmission sur une grande distance. Nous allons voir que cette limite présente plusieurs comportements pathologiques et qu'elle doit donc être traitée avec le plus grand soin.

Tout d'abord, il est important de noter que la matrice  $T$  n'est pas définie dans cette limite. La matrice  $S$  d'un milieu semi-infini s'écrit sous la forme suivante

$$S^{\text{massif}} = \begin{pmatrix} r^{\text{massif}} & 0 \\ 0 & r^{\text{massif}} \end{pmatrix}, \quad r^{\text{massif}} = r_{0|1}. \tag{1-75}$$

On voit bien sur les relations (1-42) que les coefficients de la matrice  $T$  ne sont alors pas définis puisque  $t^{\text{massif}} = 0$ . Les coefficients de réflexion s'identifient aux coefficients de réflexion de la première interface 0|1 puisque l'extinction totale de la transmission interdit toute interférence dans la lame.

On remarque que la matrice  $S$  du miroir massif n'est pas identique à celle de l'interface

$$\begin{aligned} S^{\text{massif}} &\neq S_{0|1}^{\text{int}} \\ S_{0|1}^{\text{int}} &= \begin{pmatrix} r_{0|1} & t_{0|1} \\ t_{0|1} & r_{0|1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1-76)$$

Nous avons déjà dit que la limite  $e^{-\alpha} \rightarrow 0$  correspond à une lame d'épaisseur  $\ell$  infinie en présence d'absorption. Même dans ce cas, il faut noter que la limite  $\ell \rightarrow \infty$  n'implique pas de façon uniforme  $e^{-\alpha} \rightarrow 0$ . En effet, si on a à la fois  $\varepsilon\xi^2 \rightarrow 0$  et  $\mathbf{k}^2 \rightarrow 0$ , alors  $\kappa$  tend vers 0 et  $\alpha$  n'est pas forcément grand, même quand  $\ell \gg 1$ . Dans ce cas où  $\alpha \rightarrow 0$ , on a des comportements très différents pour la lame et le miroir massif. Pour la lame, d'après (1-73), cette limite correspond à

$$t^{\text{lame}} \rightarrow 1 \quad , \quad r^{\text{lame}} \rightarrow 0, \quad (1-77)$$

alors que pour le miroir massif, on obtient les comportements suivants

$$t^{\text{massif}} \rightarrow 0 \quad , \quad r^{\text{massif}} \rightarrow r_{0|1}. \quad (1-78)$$

On a là une caractéristique importante de la lame par rapport au miroir massif : le champ est toujours transmis à travers la lame dans la limite des basses fréquences. A cette limite en effet, la longueur d'onde du champ est beaucoup plus grande que l'épaisseur de la lame, de sorte que celle-ci apparaît comme une petite modulation spatiale d'indice plutôt que comme une interface discontinue. Ce régime de faible profondeur optique de la lame correspond à une pathologie potentielle.

On a ici considéré implicitement un modèle de miroir diélectrique pour lequel  $\varepsilon$  tend vers une constante à la limite quasistatique  $\xi \rightarrow 0$  [93]. Pour les métaux en revanche, l'indice diverge à cette limite. A température non-nulle de plus, le nombre de photons par mode diverge aussi pour  $\omega \rightarrow 0$ . Toutes ces difficultés sont à la source des polémiques qui ont émaillé la discussion des forces de Casimir depuis des années. Nous les discuterons en détail dans le chapitre 5.

## B.7 Les miroirs multicouches

Il est intéressant d'étudier de la même façon le cas du miroir composé de deux ou plusieurs lames accolées l'une à l'autre. Par exemple, un modèle souvent utilisé pour les calculs de la force de Casimir est celui d'un miroir massif recouvert d'une couche mince [94].

Partant des réseaux élémentaires, la double lame, que nous notons ici "dlame", est construite par empilement de trois interfaces et de deux propagations dans des milieux différents. On distingue alors trois milieux de propagation pour le champ : le vide 0 des ports externes, le milieu 1 de la première lame et le milieu 2 de la deuxième. Du point de vue matriciel, on a donc

$$T_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} = T_{0|1}^{\text{int}} T_1^{\text{pr}} T_{1|2}^{\text{int}} T_2^{\text{pr}} T_{2|0}^{\text{int}}. \quad (1-79)$$

On rappelle la forme des matrices  $T$  pour les interfaces

$$T_{i|j}^{\text{int}} = \sqrt{\frac{\kappa_j}{\kappa_i}} \frac{1}{\sqrt{1-r_{i|j}^2}} \begin{pmatrix} 1 & r_{i|j} \\ r_{i|j} & 1 \end{pmatrix}. \quad (1-80)$$

Pour la propagation dans chaque milieu  $m$  on utilise des notations condensées

$$T_m^{\text{pr}} = \begin{pmatrix} E_m^+ & 0 \\ 0 & E_m^- \end{pmatrix}, \quad E_m^+ = e^{\alpha_m}, \quad E_m^- = e^{-\alpha_m}. \quad (1-81)$$

On écrit la matrice  $T$  de la double lame

$$T_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} = \frac{1}{\sqrt{1-r_{0|1}^2}} \frac{1}{\sqrt{1-r_{1|2}^2}} \frac{1}{\sqrt{1-r_{2|0}^2}} \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}_{0|1|2|0}^{\text{dlame}}, \quad (1-82)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{a}_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} &= E_1^+ E_2^+ + E_1^+ r_{1|2} E_2^- r_{2|0} + r_{0|1} E_1^- r_{1|2} E_2^+ + r_{0|1} E_1^- E_2^- r_{2|0} \\ \hat{b}_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} &= E_1^+ E_2^+ r_{2|0} + E_1^+ r_{1|2} E_2^- + r_{0|1} E_1^- r_{1|2} E_2^+ r_{2|0} + r_{0|1} E_1^- E_2^- \\ \hat{c}_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} &= r_{0|1} E_1^+ E_2^+ + r_{0|1} E_1^+ r_{1|2} E_2^- r_{2|0} + E_1^- r_{1|2} E_2^+ + E_1^- E_2^- r_{2|0} \\ \hat{d}_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} &= r_{0|1} E_1^+ E_2^+ r_{2|0} + r_{0|1} E_1^+ r_{1|2} E_2^- + E_1^- r_{1|2} E_2^+ r_{2|0} + E_1^- E_2^-. \end{aligned} \quad (1-83)$$

La relation de réciprocité pour le déterminant de cette matrice

$$\det T_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} = 1, \quad (1-84)$$

se traduit par la relation

$$\left| \widehat{a}_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} \widehat{d}_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} - \widehat{c}_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} \widehat{b}_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} \right| = (1 - r_{0|1}^2) (1 - r_{1|2}^2) (1 - r_{2|0}^2). \quad (1-85)$$

Pour la matrice  $S$ , on pourra écrire

$$S_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} = \begin{pmatrix} r & t \\ t & \bar{r} \end{pmatrix}_{0|1|2|0}^{\text{dlame}}. \quad (1-86)$$

Les relations (1-43), simplifiées pour le cas d'un réseau réciproque, définissent les éléments de cette matrice

$$\begin{aligned} t_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} &= \left( \frac{1}{a} \right)_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} = \left( \frac{\sqrt{1 - r_{0|1}^2} \sqrt{1 - r_{1|2}^2} \sqrt{1 - r_{2|0}^2}}{\widehat{a}} \right)_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} \\ r_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} &= \left( \frac{c}{a} \right)_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} = \left( \frac{\widehat{c}}{\widehat{a}} \right)_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} \\ \bar{r}_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} &= - \left( \frac{b}{a} \right)_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} = - \left( \frac{\widehat{b}}{\widehat{a}} \right)_{0|1|2|0}^{\text{dlame}}. \end{aligned} \quad (1-87)$$

En utilisant les notions d'impédances (1-18)

$$z_i^{\text{TE}} = \frac{\kappa_i}{\xi}, \quad z_j^{\text{TM}} = \frac{\varepsilon_i \xi}{\kappa_i}, \quad (1-88)$$

les amplitudes de réflexion aux interfaces prennent la forme générale

$$r_{i|j} = \frac{z_i - z_j}{z_i + z_j}. \quad (1-89)$$

En rassemblant tous ces résultats, on écrit les coefficients  $\widehat{a}$  et  $\widehat{c}$

$$\begin{aligned} \widehat{a} &= \frac{\widetilde{a}}{(z_0 + z_1)(z_1 + z_2)(z_2 + z_0)} \\ \widehat{c} &= \frac{\widetilde{c}}{(z_0 + z_1)(z_1 + z_2)(z_2 + z_0)}, \end{aligned} \quad (1-90)$$

avec les expressions suivantes pour  $\widetilde{a}$  et  $\widetilde{c}$

$$\begin{aligned} \widetilde{a} &= (z_0 + z_1)(z_1 + z_2)(z_2 + z_0) E_1^+ E_2^+ + (z_0 + z_1)(z_1 - z_2)(z_2 - z_0) E_1^+ E_2^- \\ &\quad + (z_0 - z_1)(z_1 - z_2)(z_2 + z_0) E_1^- E_2^+ + (z_0 - z_1)(z_1 + z_2)(z_2 - z_0) E_1^- E_2^- \\ \widetilde{c} &= (z_0 - z_1)(z_1 + z_2)(z_2 + z_0) E_1^+ E_2^+ + (z_0 - z_1)(z_1 - z_2)(z_2 - z_0) E_1^+ E_2^- \\ &\quad + (z_0 + z_1)(z_1 - z_2)(z_2 + z_0) E_1^- E_2^+ + (z_0 + z_1)(z_1 + z_2)(z_2 - z_0) E_1^- E_2^-. \end{aligned} \quad (1-91)$$

Le coefficient de réflexion du miroir “double-lame” est finalement donné par

$$r_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} = \frac{\widehat{c}}{\widehat{a}} = \frac{\widetilde{c}}{\widetilde{a}}. \quad (1-92)$$

Ces calculs montrent comment la méthode de multiplication des matrices  $T$  permet d’obtenir les amplitudes de réflexion de miroirs réalistes.

Dans le cas où les deux lames d’épaisseur respective  $\ell_1$  et  $\ell_2$  correspondent au même milieu, l’égalité  $z_1 = z_2$  suffit à montrer que le miroir ainsi formé est une seule lame d’épaisseur  $\ell = \ell_1 + \ell_2$ .

La double lame est souvent étudiée dans le cas limite où la deuxième lame a une épaisseur très grande. Physiquement, cette lame est considérée comme un substrat sur lequel est déposée une autre lame dont l’épaisseur est finie. Nous considérons que la couche mince correspond à la lame 1 et le miroir massif à la limite de grande épaisseur de la lame 2. Dans les résultats de la section précédente, nous prenons donc les termes au premier ordre en  $\frac{E_2^-}{E_2^+}$  et nous obtenons

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} r_{0|1|2|0}^{\text{dlame}} = \frac{(z_0 - z_1)(z_1 + z_2)E_1^+ + (z_0 + z_1)(z_1 - z_2)E_1^-}{(z_0 + z_1)(z_1 + z_2)E_1^+ + (z_0 - z_1)(z_1 - z_2)E_1^-}. \quad (1-93)$$

Du point de vue de la méthode du produit des matrices  $T$ , cette configuration d’une couche déposée sur un miroir massif est intéressante. Comme nous l’avons vu, la matrice  $T$  d’un miroir massif n’est pas définie et l’empilement de la lame sur le miroir massif ne peut être calculé que comme cas limite du produit de matrices  $T$  de deux lames d’épaisseurs finies.

En continuant dans la même voie, un miroir multicouches, noté ici “mc”, sera défini par l’empilement de  $n$  lames. La matrice  $T$  d’un tel multicouche peut donc s’écrire

$$T^{\text{mc}} = T_1^{\text{lame}} T_2^{\text{lame}} \dots T_n^{\text{lame}} \quad (1-94)$$

où  $T_i^{\text{lame}}$  correspond à la lame  $i$ . Pour des calculs explicites, il sera en fait beaucoup mieux adapté d’écrire la matrice  $T$  comme nous venons de le faire pour la double lame

$$T^{\text{mc}} = T_{0|1}^{\text{int}} T_1^{\text{pr}} T_{1|2}^{\text{int}} \dots T_n^{\text{pr}} T_{n|0}^{\text{int}}. \quad (1-95)$$

Les deux calculs sont équivalents mais le second conduit à des expressions plus simples à manipuler. En effet, en accolant une succession de lames, on introduit entre deux lames successives un milieu vide virtuel qui ajoute des termes intercalaires dans le produit des matrices  $T$ . Ces termes alourdissent les expressions et la réduction aux formules simplifiées devient difficile à effectuer, surtout quand  $n$  augmente.

## C Unitarité de la diffusion

### C.1 Diffusion quantique

Le cadre d'analyse de la diffusion du champ sur un miroir diélectrique que nous avons présenté est un cadre classique. Nous avons en effet défini les amplitudes de réflexion et de transmission en considérant des champs classiques  $\mathcal{E}$  incidents, réfléchis et transmis par les miroirs. Cette analyse n'est pas complètement satisfaisante quand il s'agit de décrire la diffusion de champs quantiques, qu'on notera de façon générique  $a$ , c'est-à-dire la diffusion des fluctuations du vide. En particulier, pour un miroir contenant un milieu absorbant, l'absorption sera traduite, dans l'esprit du théorème fluctuations-dissipation, par des fluctuations ajoutées correspondant à des modes de bruit  $b$  supplémentaires. Ces lignes de bruit sont diffusées par les miroirs comme le sont les champs dont il a été jusqu'à présent question.

Ces bruits représentent les fluctuations quantiques inévitablement associées aux pertes par dissipation. On peut préciser cette idée en considérant des miroirs diélectriques comme constitués d'atomes. Ces atomes sont responsables de l'absorption parce qu'ils diffusent par émission spontanée. Réciproquement, précisément au sens que nous avons donné à cette notion, ces modes de bruit diffusent aussi vers les modes de champs considérés [95, 96, 97, 98, 99]. C'est d'ailleurs dans ce cadre qu'on pourra interpréter les modes évanescents, alimentés par les fluctuations du champ entrant dans le système par le biais des lignes de bruit associées à la dissipation. Ces fluctuations peuvent se propager en effet dans le miroir avec des angles d'incidence supérieurs à l'angle limite défini pour ce milieu. À l'extérieur du miroir, elles vont correspondre à une propagation évanescente du champ, s'atténuant rapidement lorsqu'on s'éloigne de l'interface. Ces modes, confinés au voisinage de la surface des miroirs, sont donc des voies "fermées" mais ils contribuent néanmoins aux effets physiques tels que la pression de radiation et l'effet Casimir (voir le chapitre suivant).

Nous sommes donc en présence de deux situations différentes. Pour un miroir sans absorption, construit à partir de milieux d'indices réels, la matrice  $S$  calculée précédemment doit être unitaire. Ses coefficients obéissent alors à des relations particulières que nous discutons ci-dessous. Pour un miroir absorbant en revanche, la matrice  $S$  calculée précédemment ne peut pas être unitaire. Cette matrice doit être vue comme la restriction aux modes d'intérêt (les champs diffusés considérés) d'une matrice de diffusion plus grande qui prend en compte les lignes de bruit. Comme nous allons le voir, c'est la prise en compte de ces fluctuations supplémentaires qui permettra de garantir

l'unitarité de la diffusion globale. Cette unitarité est une condition de consistance pour la description du processus de diffusion [74, 75]. Avec cette condition de principe, on pourra caractériser les fluctuations ajoutées, sans se référer à un modèle microscopique particulier pour spécifier leurs propriétés.

## C.2 La lame non absorbante

La permittivité  $\varepsilon$  d'une lame sans absorption est réelle. Dans ce cas, les vecteurs  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  sont purement imaginaires pour les fréquences réelles, de sorte que les rapports d'impédance sont réels. Les amplitudes de diffusion à l'interface sont donc réelles et, d'après l'équation (1-52),  $\beta$  est réel. Pour la propagation, le paramètre de phase  $\alpha$ , proportionnel à  $\kappa$ , est imaginaire pur. On notera donc

$$\beta = \beta_r \quad , \quad \alpha = i\alpha_i. \quad (1-96)$$

On peut alors calculer explicitement les amplitudes de diffusion (1-73) de la lame

$$\begin{aligned} t^{\text{slab}} &= \frac{\sinh \beta_r}{\sinh(\beta_r + i\alpha_i)} = \frac{\sinh \beta_r}{\sinh \beta_r \cos \alpha_i + i \cosh \beta_r \sin \alpha_i} \\ r^{\text{slab}} &= -\frac{\sinh(i\alpha_i)}{\sinh(\beta_r + i\alpha_i)} = -\frac{i \sin \alpha_i}{\sinh \beta_r \cos \alpha_i + i \cosh \beta_r \sin \alpha_i}. \end{aligned} \quad (1-97)$$

On en déduit directement les relations suivantes

$$\begin{aligned} |t|^2 + |r|^2 &= \frac{\sinh^2 \beta_r + \sin^2 \alpha_i}{\sinh^2 \beta_r \cos^2 \alpha_i + \cosh^2 \beta_r \sin^2 \alpha_i} = 1 \\ tr^* + rt^* &= 0. \end{aligned} \quad (1-98)$$

Cette dernière relation montre que les amplitudes de réflexion et de transmission sont en quadrature entre-elles.

Ces relations sont en fait caractéristiques d'une matrice  $S$  unitaire, puisqu'on peut écrire

$$S^\dagger S = \begin{pmatrix} |t|^2 + |r|^2 & tr^* + rt^* \\ tr^* + rt^* & |t|^2 + |r|^2 \end{pmatrix} = I, \quad (1-99)$$

où  $I$  est la matrice unité.

## C.3 La lame absorbante

Dans le cas général d'une lame construite avec un milieu absorbant, on sépare les parties réelles et imaginaires

$$\beta = \beta_r + i\beta_i \quad , \quad \alpha = \alpha_r + i\alpha_i. \quad (1-100)$$

Les coefficients de la lame s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
t^{\text{slab}} &= \frac{\sinh \beta}{\sinh \gamma} = \frac{\sinh \beta_r \cos \beta_i + i \cosh \beta_r \sin \beta_i}{\sinh \gamma_r \cos \gamma_i + i \cosh \gamma_r \sin \gamma_i} \\
r^{\text{slab}} &= -\frac{\sinh \alpha}{\sinh \gamma} = -\frac{\sinh \alpha_r \cos \alpha_i + i \cosh \alpha_r \sin \alpha_i}{\sinh \gamma_r \cos \gamma_i + i \cosh \gamma_r \sin \gamma_i} \\
\gamma &= \alpha + \beta = \gamma_r + i\gamma_i.
\end{aligned} \tag{1-101}$$

Dans ce cas, la matrice  $S$  calculée seulement sur les modes principaux n'est plus unitaire. Cependant cette matrice doit être considérée comme la restriction d'une matrice plus grande qui est unitaire et qui décrit les lignes de bruit. La transformation des champs quantiques incidents en champs quantiques diffusés par la lame s'écrit donc sous la forme

$$\begin{pmatrix} a_1^{\text{out}} \\ a_2^{\text{out}} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a_1^{\text{in}} \\ a_2^{\text{in}} \end{pmatrix} + U \begin{pmatrix} b_1^{\text{in}} \\ b_2^{\text{in}} \end{pmatrix} \tag{1-102}$$

Les champs  $a_1$  et  $a_2$  sont les modes principaux couplés par la lame et les champs  $b_1$  et  $b_2$  sont les modes de bruit. La matrice  $U$  contient les amplitudes de diffusion de ces modes vers les modes principaux. La stationnarité de la diffusion implique que les modes de bruit sont des superpositions linéaires de modes de même fréquence et qu'ils sont ainsi donnés comme équivalents à tous les bruits entrants dans le système. Les champs  $b^{\text{in}}$  et  $b^{\text{out}}$  sont décorrélés entre eux et ils sont également décorrélés des modes  $a^{\text{in}}$  et  $a^{\text{out}}$ .

Il est important de noter que les commutateurs canoniques sont les mêmes pour les champs entrants et les champs sortants. En effet, les champs sortants sont, comme les champs entrants, des champs libres. On aura donc

$$\left[ a_m^{\text{in}}, a_{m'}^{\text{in} \dagger} \right] = \left[ a_m^{\text{out}}, a_{m'}^{\text{out} \dagger} \right]. \tag{1-103}$$

Les notations  $m, m'$  représentent les modes des champs tels qu'on va les préciser au chapitre suivant. Cette égalité est centrale : elle correspond à une condition d'unitarité globale de la diffusion [74, 75, 100]

$$S^\dagger S + U^\dagger U = 1. \tag{1-104}$$

Cette condition va permettre de décrire les fluctuations ajoutées par les lignes de bruits. Pour la matrice  $U$  correspondante, on peut en effet écrire

$$U = \begin{pmatrix} v & w \\ w & v \end{pmatrix} \tag{1-105}$$

et on déduit de (1-104)

$$\begin{aligned}
 U^\dagger U &= \begin{pmatrix} |w|^2 + |v|^2 & wv^* + vw^* \\ wv^* + vw^* & |w|^2 + |v|^2 \end{pmatrix} \\
 1 &= |w|^2 + |v|^2 + |t|^2 + |r|^2 \\
 0 &= wv^* + vw^* + tr^* + rt^*.
 \end{aligned} \tag{1-106}$$

Ces relations sont écrites pour des fréquences réelles et correspondent aux ondes ordinaires. Pour ces modes, la condition d'unitarité (1-106) implique que les amplitudes de diffusion ont un module plus petit que 1

$$\begin{aligned}
 |t|^2 &< 1 \\
 |r|^2 &< 1.
 \end{aligned} \tag{1-107}$$

Nous utiliserons au chapitre suivant ces propriétés importantes et nous préciserons comment on doit étendre la discussion aux modes évanescents. Remarquons également que ces propriétés peuvent être démontrées de manière plus générale pour des réseaux dissipatifs quelconques [101]. Ici, nous nous sommes contentés de la lame que nous utilisons à nouveau dans le prochain chapitre.



## Chapitre 2

# Force de Casimir entre deux miroirs diélectriques

Le calcul de la force de Casimir que nous présentons est issu du point de vue local [77] dans lequel la force s'écrit comme la différence des pressions de radiation calculées à l'extérieur et à l'intérieur de la cavité. Les pressions sont définies à partir des tenseurs de Maxwell évalués par les fonctions de corrélation des champs calculées dans trois régions : les deux régions externes des ports gauche (L) et droit (R) de la cavité et une région interne des champs intracavité (C). On utilise les outils présentés au chapitre précédent pour détailler le calcul de ces champs. On définit la matrice  $S$  de la cavité qui exprime les champs sortants du Fabry-Perot en fonction des champs incidents.

Pour calculer la pression de radiation sur les faces internes des miroirs, on introduit aussi une matrice de résonance  $R$  qui relie les champs intracavité aux champs incidents. Nous montrons que la pression interne est simplement déterminée par la fonction d'Airy de la cavité, c'est-à-dire aussi par les coefficients de réflexion des miroirs. Cette propriété se démontre dans le cas général des miroirs dissipatifs en utilisant l'unitarité des processus de diffusion [100, 101].

Les techniques de prolongement analytique des fonctions de réponse, ainsi que les propriétés physiques de causalité et de transparence à haute fréquence, nous permettent ensuite d'écrire la force à température nulle comme une intégrale définie sur l'axe des fréquences imaginaires. L'expression de la force obtenue est régulière, sans divergence associée aux infinis de l'énergie du vide [76]. Cette expression tout à fait générale permet de traiter n'importe quel type de miroir diélectrique. Elle redonne l'expression de Lifshitz dans le cas particulier des miroirs diélectriques massifs [30] et l'expression idéale de Casimir dans la limite des miroirs parfaits [29].

Enfin, nous définissons l'énergie de Casimir comme le potentiel dont dérive la force. Nous montrons que cette énergie peut aussi se calculer à partir des déphasages subis par les champs qui sont déterminés par les valeurs propres de la matrice  $S$  de la cavité. Nous discutons aussi l'interprétation de la force en termes de temps de Wigner.

## A Champs diffusés par la cavité

Dans le chapitre 1, nous avons décrit la diffusion du champ sur un miroir. Nous avons introduit les “bons nombres quantiques” qui sont bien adaptés au problème. Nous allons maintenant définir plus précisément les modes du champ quantique puis traiter leur diffusion par la cavité.

### A.1 Modes du champ libre

La géométrie étudiée est celle d'une cavité formée par deux miroirs parfaitement plans, parallèles entre eux et de surface infinie. Ceci correspond à une symétrie de translation dans le plan transverse, qu'on a noté plan  $xy$  le long de la surface des miroirs, et donc également à la conservation des vecteurs d'onde transverses  $k_x$  et  $k_y$  au cours du processus de diffusion. Ces vecteurs transverses seront considérés comme spectateurs pour le calcul de la force et rassemblés en un seul vecteur à deux dimensions  $\mathbf{k} \equiv (k_x, k_y)$ . On notera l'intégration sur ce vecteur

$$\int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{2\pi}.$$

La symétrie garantit la spécularité parfaite de la réflexion et permet donc de traiter séparément les deux polarisations TE et TM, puis de sommer sur ces deux polarisations

$$\sum_{p=\text{TE, TM}}.$$

Nous avons déjà insisté sur l'invariance par translation dans le temps du problème de diffusion, c'est-à-dire la stationnarité du processus pour des miroirs immobiles et donc la conservation de la fréquence  $\omega$ . Un mode se propageant dans le vide est défini par les trois composantes de son vecteur d'onde et sa polarisation. Nous introduisons un symbole  $m$  rassemblant ces nombres quantiques

$$m \equiv (k_z, \mathbf{k}, p) \tag{2-1}$$

ainsi qu'un symbole de sommation

$$\sum_m \equiv \sum_p \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi}. \quad (2-2)$$

Le champ libre est la superposition de deux modes pour  $\mathbf{k}$  et  $\omega$  fixés. Ces deux modes correspondent à deux directions de propagation, i.e. aux deux signes possibles pour  $k_z$

$$k_z = \phi \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2} \quad (2-3)$$

avec  $\phi = +1$  pour une propagation vers la droite et  $\phi = -1$  pour une propagation vers la gauche. Dans l'équation (2-2), chaque direction correspond à une intégration sur  $k_z$  limitée aux valeurs positives ou négatives selon le sens de propagation. Il est important de noter que ce sont justement les deux modes correspondant aux deux valeurs du signe  $\phi$  qui seront couplés par la diffusion sur un miroir ou sur la cavité.

Les champs quantiques  $E$  et  $B$  s'écrivent en un point

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}, z, t) &= \sum_m \epsilon[m] (\mathcal{E}[m] + \mathcal{E}[m]^\dagger) \\ B(\mathbf{r}, z, t) &= \sum_m \beta[m] (\mathcal{E}[m] + \mathcal{E}[m]^\dagger). \end{aligned} \quad (2-4)$$

Les amplitudes des modes sont construites sur les opérateurs création et annihilation

$$\mathcal{E}[m] = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} a_m e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - k_z z)} \quad , \quad \mathbf{r} = (x, y). \quad (2-5)$$

Les vecteurs  $\epsilon$  et  $\beta$  décrivent la polarisation respectivement pour les champs  $E$  et  $B$ . On introduit d'abord les composantes du vecteur d'onde

$$k = \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2-6)$$

Les angles  $\theta$  et  $\varphi$  repèrent la direction d'incidence du champ. Sur la figure 1.1 du chapitre 1, on a pris le champ incident dans le plan  $xz$ , i.e. pour un angle azimutal  $\varphi = 0$ . Les vecteurs de polarisation sont donnés de façon générale pour une incidence quelconque par les expressions suivantes

$$\epsilon^{\text{TE}} = \beta^{\text{TM}} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon^{\text{TM}} = -\beta^{\text{TE}} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}. \quad (2-7)$$

Les opérateurs création et annihilation obéissent à des relations de commutations canoniques [102]

$$\begin{aligned} [a_m, a_{m'}] &= 0, \\ [a_m^\dagger, a_{m'}^\dagger] &= 0, \\ [a_m, a_{m'}^\dagger] &= \delta_{p,p'} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(k_z - k'_z) \\ &= \delta_{m,m'}. \end{aligned} \quad (2-8)$$

Dans la suite, nous utiliserons également les fonctions de corrélation de ces opérateurs pris dans un état d'équilibre thermodynamique. Ces fonctions ont une forme universelle

$$\begin{aligned} \langle a_m a_{m'}^\dagger \rangle &= (1 + \overline{n_m}) \delta_{m,m'} \\ \langle a_{m'}^\dagger a_m \rangle &= \overline{n_m} \delta_{m,m'} \\ \langle a_m a_{m'}^\dagger \rangle &= 0 \\ \langle a_{m'}^\dagger a_m \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2-9)$$

où  $\overline{n_m}$  est le nombre moyen de photons dans le mode  $m$

$$\overline{n_m} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}.$$

Ces relations expriment les propriétés de l'état d'équilibre thermodynamique en termes de champs quantiques [103, 104] (pour une discussion détaillée, voir par exemple [74]).

Alors que le commutateur des champs est indépendant de l'état du champ, les fonctions de corrélation dépendent de cet état. Ici, ils dépendent de la température. Autrement dit, c'est l'anticommutateur des champs qui caractérise les fluctuations du champ. On l'écrira ici

$$\begin{aligned} \langle a_m \cdot a_{m'}^\dagger \rangle &\equiv \frac{1}{2} \langle a_m a_{m'}^\dagger + a_{m'}^\dagger a_m \rangle \\ &= \left( \frac{1}{2} + \overline{n_m} \right) [a_m, a_{m'}^\dagger]. \end{aligned} \quad (2-10)$$

Dans un premier temps, nous allons analyser la situation à température nulle. On a alors  $\overline{n_m} = 0$  et on retrouve la définition de l'état vide avec une énergie équivalente à la moitié d'un photon par mode

$$\langle a_m \cdot a_{m'}^\dagger \rangle = \frac{1}{2} [a_m, a_{m'}^\dagger]. \quad (2-11)$$

L'analyse de la situation à température non nulle sera traitée dans le chapitre 4.

## A.2 Matrice $S$ de la cavité

On étudie à présent la diffusion du champ sur la cavité formée par deux lames planes se faisant face, séparées d'une distance  $L$ . On a représenté une telle cavité sur la figure 2.1. De manière plus précise, on suppose que les faces internes des deux miroirs sont placées en  $z = 0$  et  $z = L$ . La zone intracavité  $0 < z < L$  se distingue donc des deux zones externes à gauche et à droite de la cavité. Les flèches représentent les deux sens de propagation associés aux modes  $a$  diffusés.

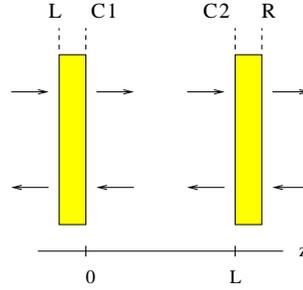


FIG. 2.1 – Deux miroirs formant la cavité.

Nous utilisons les outils mis en place au chapitre précédent pour décrire la diffusion du champ. Nous définissons donc des matrices  $S_1$  et  $S_2$  pour chacun des miroirs. On a au niveau du premier miroir

$$\begin{pmatrix} a_L^{\text{out}} \\ a_{C1}^{\leftarrow} \end{pmatrix} = S_1 \begin{pmatrix} a_L^{\text{in}} \\ a_{C1}^{\rightarrow} \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} r_1 & t_1 \\ t_1 & r_1 \end{pmatrix}. \quad (2-12)$$

La matrice  $S_1$  a été calculée au chapitre précédent pour une lame. Pour simplifier, nous supposons ici que le miroir est symétrique par réflexion par rapport à son plan médian. Tous les champs sont définis au voisinage immédiat de la face correspondante du miroir.

Nous procédons de la même façon pour le deuxième miroir

$$\begin{pmatrix} a_{C2}^{\leftarrow} \\ a_R^{\text{out}} \end{pmatrix} = S_2 \begin{pmatrix} a_{C2}^{\rightarrow} \\ a_R^{\text{in}} \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} r_2 & t_2 \\ t_2 & r_2 \end{pmatrix}. \quad (2-13)$$

Les champs intracavité  $a_{C1}$  et  $a_{C2}$  sont reliés l'un à l'autre par la propagation libre dans le vide sur une distance  $L$ , ce qui s'écrit

$$\begin{aligned} a_{C2}^{\leftarrow} &= a_{C1}^{\leftarrow} e^{-ik_z L} \\ a_{C2}^{\rightarrow} &= a_{C1}^{\rightarrow} e^{ik_z L}. \end{aligned} \quad (2-14)$$

En résolvant l'ensemble des équations linéaires (2-12,2-13,2-14), on obtient comme dans [76] la matrice  $S$  globale de la cavité

$$\begin{pmatrix} a_L^{\text{out}} \\ a_R^{\text{out}} \end{pmatrix} = S_{\text{cav}} \begin{pmatrix} a_L^{\text{in}} \\ a_R^{\text{in}} \end{pmatrix} \quad (2-15)$$

avec

$$S_{\text{cav}} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} r_1 + (t_1^2 - r_1^2) r_2 e^{2ik_z L} & t_1 t_2 e^{ik_z L} \\ t_1 t_2 e^{ik_z L} & r_2 + (t_2^2 - r_2^2) r_1 e^{2ik_z L} \end{pmatrix} \quad (2-16)$$

en ayant posé

$$d \equiv 1 - r_1 r_2 e^{2ik_z L}. \quad (2-17)$$

Les différences dans les expressions avec celles de [76] sont dues à des choix de convention différents, d'une part pour la valeur  $z$  de référence pour chaque champ, d'autre part pour l'ordre des composantes dans les vecteurs.

Le choix adopté ici correspond à la méthode systématique de traitement des réseaux présentée dans le chapitre 1. Il est à ce titre intéressant de noter que la cavité de Fabry-Perot peut aisément être analysée en terme de produit de matrices  $T$ . On peut en effet écrire la matrice  $T_{\text{cav}}$  de la cavité

$$T_{\text{cav}} = T_1 T^{\text{pr}} T_2 \quad (2-18)$$

où  $T_1$  et  $T_2$  représentent les miroirs 1 et 2

$$\begin{pmatrix} a_L^{\text{in}} \\ a_L^{\text{out}} \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} a_{C1}^{\rightarrow} \\ a_{C1}^{\leftarrow} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{C2}^{\rightarrow} \\ a_{C2}^{\leftarrow} \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} a_R^{\text{out}} \\ a_R^{\text{in}} \end{pmatrix}, \quad (2-19)$$

alors que  $T^{\text{pr}}$  représente la propagation intracavité sur une longueur  $L$  dans le vide

$$\begin{pmatrix} a_{C1}^{\rightarrow} \\ a_{C1}^{\leftarrow} \end{pmatrix} = T^{\text{pr}} \begin{pmatrix} a_{C2}^{\rightarrow} \\ a_{C2}^{\leftarrow} \end{pmatrix}. \quad (2-20)$$

On calcule alors comme dans le chapitre précédent

$$T_{\text{cav}} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-ik_z L} & 0 \\ 0 & e^{ik_z L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}. \quad (2-21)$$

avec pour  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{t_i} & , & & b_i &= -\frac{\bar{r}_i}{t_i} \\ c_i &= \frac{r_i}{t_i} & , & & d_i &= \frac{t_i^2 - r_i \bar{r}_i}{t_i}. \end{aligned} \quad (2-22)$$

Cette matrice de transfert relie les champs à gauche et à droite de la cavité et on sait à partir d'elle trouver la matrice  $S_{\text{cav}}$  correspondante. On déduit les coefficients qui apparaissent dans (2-16)

$$S_{\text{cav}} = \begin{pmatrix} r_{\text{cav}} & t_{\text{cav}} \\ t_{\text{cav}} & \bar{r}_{\text{cav}} \end{pmatrix}. \quad (2-23)$$

On obtient bien sûr une matrice symétrique comme une conséquence du théorème de réciprocité. Si de plus les miroirs 1 et 2 sont identiques, ce qui est souvent supposé dans les calculs de la force de Casimir, on voit que  $\bar{r}_{\text{cav}} = r_{\text{cav}}$ . Ceci correspond au fait que la cavité est alors invariante dans une symétrie spatiale par rapport à son plan médian.

### A.3 Matrice $R$ de la cavité

Afin de calculer la pression de radiation des champs sur les deux faces d'un miroir de la cavité, il est également nécessaire d'exprimer les champs intracavité. C'est ce que fait la matrice de résonance  $R_{\text{cav}}$  que nous étudions maintenant.

La matrice  $R_{\text{cav}}$  exprime les champs à l'intérieur de la cavité à partir des champs incidents sur cette cavité. A partir des relations issues des matrices  $S_1$  et  $S_2$

$$\begin{aligned} a_{\text{C}1}^{\rightarrow} &= t_1 a_{\text{L}}^{\text{in}} + r_1 a_{\text{C}1}^{\leftarrow} \\ a_{\text{C}2}^{\leftarrow} &= r_2 a_{\text{C}2}^{\rightarrow} + t_2 a_{\text{L}}^{\text{in}} \end{aligned} \quad (2-24)$$

et des propagations (2-14)

$$\begin{aligned} a_{\text{C}1}^{\rightarrow} &= t_1 a_{\text{L}}^{\text{in}} + r_1 e^{ik_z L} a_{\text{C}2}^{\leftarrow} \\ a_{\text{C}2}^{\leftarrow} &= r_2 e^{ik_z L} a_{\text{C}1}^{\rightarrow} + t_2 a_{\text{L}}^{\text{in}}, \end{aligned} \quad (2-25)$$

on déduit la forme de la matrice  $R_{\text{cav}}$

$$\begin{pmatrix} a_{\text{C}1}^{\rightarrow} \\ a_{\text{C}2}^{\leftarrow} \end{pmatrix} = R_{\text{cav}} \begin{pmatrix} a_{\text{L}}^{\text{in}} \\ a_{\text{R}}^{\text{in}} \end{pmatrix}, \quad R_{\text{cav}} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} t_1 & r_1 t_2 e^{ik_z L} \\ r_2 t_1 e^{ik_z L} & t_2 \end{pmatrix}. \quad (2-26)$$

## A.4 Prise en compte des modes de bruit

Jusqu'à présent dans ce chapitre, nous avons traité la diffusion par la cavité de champs classiques. Cette diffusion est décrite par les amplitudes de diffusion et de résonance contenues dans les matrices  $S$  et  $R$ . Dans le cas de miroirs non-absorbants, ces amplitudes suffisent pour évaluer la force de Casimir et obtenir la formule écrite dans [76]. Quand les miroirs sont absorbants, il faut tenir compte également des fluctuations entrant par les modes du bruit discutés dans le chapitre précédent.

En tenant compte des modes de bruit au niveau de chaque miroir, on peut montrer que les commutateurs canoniques des champs quantiques dans la cavité sont simplement donnés par les commutateurs des champs libres incidents multipliés par la fonction d'Airy de la cavité [100]

$$\begin{aligned} [a_{\vec{C} m}, a_{\vec{C} m'}^\dagger] &= [a_{\vec{C} m}^\leftarrow, a_{\vec{C} m'}^\leftarrow^\dagger] = g_m \delta_{m,m'} \\ g_m &= \left( \frac{1 - r_2 r_2^* r_1 r_1^*}{|d|^2} \right)_m. \end{aligned} \quad (2-27)$$

La fonction  $g_m$  est la fonction d'Airy de la cavité construite sur les amplitudes de réflexion des miroirs. Nous écrivons ici le cas de miroirs symétriques. Dans un cas plus général, il faudrait prendre les amplitudes de réflexion des miroirs vues de l'intérieur de la cavité [101].

Les commutateurs canoniques pour les champs intracavité correspondent à une densité spectrale différente de celle du vide puisqu'elle est multipliée par la fonction d'Airy. C'est la base des effets d'“Electrodynamique Quantique en Cavité” avec des modifications des propriétés de couplage radiatif entre atomes et photons [105] ou par exemple dans un autre domaine, de modification de la propagation en Théorie Quantique des Champs [106].

## B Pression de radiation du vide

Pour calculer les effets de pression de radiation, nous étudions maintenant le tenseur des contraintes de Maxwell (stress-tensor) d'abord pour des champs libres, puis en présence d'un miroir et enfin dans la configuration de la cavité.

## B.1 Tenseur de Maxwell pour des champs libres

La pression sur un miroir plan selon le plan  $xy$  est donnée par la composante  $T_{zz}$  du tenseur de Maxwell. On écrit pour les champs libres [102, 107]

$$T_{zz} = \frac{1}{2} (E_x^2 + E_y^2 - E_z^2 + B_x^2 + B_y^2 - B_z^2) = \frac{1}{2} (E^T \Pi E + B^T \Pi B). \quad (2-28)$$

Nous faisons des choix de normalisation qui fixent la dimension de  $E$  et  $B$  dans le vide;  $\Pi$  est la matrice décrivant une réflexion mathématique par rapport au plan  $xy$

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2-29)$$

En évaluant les champs en un point donné, on obtient ainsi

$$T_{zz}(\mathbf{r}, z, t) = \sum_m \sum_{m'} \pi[m, m'] (\mathcal{E}[m] + \mathcal{E}[m]^\dagger) (\mathcal{E}[m'] + \mathcal{E}[m']^\dagger). \quad (2-30)$$

Le produit  $(\mathcal{E}[m] + \mathcal{E}[m]^\dagger) (\mathcal{E}[m'] + \mathcal{E}[m']^\dagger)$  représente les formes quadratiques des amplitudes des modes. Les facteurs géométriques  $\pi$  rassemblent les éléments vectoriels

$$\pi[m, m'] = \frac{\epsilon^T[m] \Pi \epsilon[m'] + \beta^T[m] \Pi \beta[m']}{2}. \quad (2-31)$$

Dans la suite, nous nous contenterons d'étudier les effets statiques de la pression de radiation du vide (les effets dynamiques sont étudiés par exemple dans [108, 109, 110, 111, 112]). Nous étudierons donc seulement la valeur moyenne de la composante  $T_{zz}$ . Cette valeur moyenne est à la fois une valeur moyenne dans l'espace et le temps qui sélectionne la composante de Fourier de  $T_{zz}$  correspondant à une fréquence et un vecteur d'onde nuls. Elle est en même temps la valeur moyenne dans l'état quantique particulier qu'est le vide. Quelle que soit l'interprétation, cette valeur moyenne sélectionne les termes contenant un champ  $a_m$  et son conjugué  $a_m^\dagger$  et elle opère donc une contraction  $\delta_{m, m'}$ .

Le facteur géométrique se simplifie alors considérablement

$$\begin{aligned} \pi[m, m] &= \frac{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{2} \\ &= \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (2-32)$$

Ce terme correspond au facteur de projection bien connu depuis la théorie de Maxwell de la pression de radiation. On peut le décomposer en deux facteurs

- la composante longitudinale de l'impulsion du champ, sous incidence oblique, est proportionnelle à  $\cos \theta$  où  $\theta$  correspond à l'angle d'incidence,

- la force calculée par unité de surface du miroir doit tenir compte d'un deuxième facteur de projection  $\cos \theta$  représentant un rapport de surface sous incidence oblique.

Ce facteur  $\cos^2 \theta$  intervient dans le rapport entre la composante longitudinale  $T_{zz}$  du tenseur de Maxwell et la densité d'énergie

$$\langle T_{zz} \rangle = \sum_m \cos^2 \theta_m \frac{\hbar \omega_m}{2}. \quad (2-33)$$

Cette composante est bien sûr infinie dans le vide.

## B.2 Diffusion sur un miroir

Pour traiter le cas d'un miroir, on doit étudier l'effet de la diffusion. On doit aussi sommer la contribution des pressions de radiation de part et d'autre du miroir. On obtient ainsi une pression moyenne

$$\langle P \rangle = \langle T_{zz}^{\text{L} \rightarrow} + T_{zz}^{\text{L} \leftarrow} - (T_{zz}^{\text{R} \rightarrow} + T_{zz}^{\text{R} \leftarrow}) \rangle. \quad (2-34)$$

C'est simplement une loi de conservation de l'impulsion de part et d'autre du miroir [113].

Pour prendre en compte l'effet de la diffusion, nous notons d'abord que les vecteurs de polarisation sont transformés de la façon suivante par réflexion sur le miroir

$$\begin{aligned} k &\rightarrow \Pi k \\ \epsilon &\rightarrow \Pi \epsilon \\ \beta &\rightarrow -\Pi \beta. \end{aligned} \quad (2-35)$$

Ceci signifie que les vecteurs d'onde et le champ électrique se comportent comme des vecteurs sous la réflexion tandis que le champ magnétique se comporte comme un pseudo-vecteur. Notons également l'absence de termes croisés en polarisation dans (2-28). Cette séparation des polarisations reste valable après réflexion sur des miroirs plans. Plus généralement, les facteurs  $\pi$  donnés en (2-31) sont des invariants dans la diffusion du champ sur le miroir. On a en effet explicitement, avec  $\Pi^T = \Pi$

$$\begin{aligned} \epsilon^T [m] \Pi \epsilon [m'] &\rightarrow \epsilon^T [m] \Pi^T \Pi \Pi \epsilon [m'] = \epsilon^T [m] \Pi \epsilon [m'] \\ \beta^T [m] \Pi \beta [m'] &\rightarrow \beta^T [m] \Pi^T \Pi \Pi \beta [m'] = \beta^T [m] \Pi \beta [m']. \end{aligned}$$

Si on calcule le cas d'un miroir seul dans le vide, on trouve bien sûr une condition d'équilibrage des pressions de radiation de part et d'autre du miroir. Autrement dit, on a des pressions de radiation égales de part et d'autre du miroir. Ceci n'est plus vrai dans le calcul de la cavité puisque les deux côtés d'un miroir ne jouent plus des rôles équivalents.

### B.3 Diffusion sur la cavité

Dans le cas de la cavité, nous calculons la différence des pressions de radiation exercées sur les deux faces du miroir 1 et du miroir 2. Nous obtenons comme l'illustre la figure 2.2

$$\begin{aligned}\langle P_1 \rangle &= \langle T_{zz}^{L \rightarrow} + T_{zz}^{L \leftarrow} - (T_{zz}^C \rightarrow + T_{zz}^C \leftarrow) \rangle \\ \langle P_2 \rangle &= \langle T_{zz}^C \rightarrow + T_{zz}^C \leftarrow - (T_{zz}^R \leftarrow + T_{zz}^R \rightarrow) \rangle.\end{aligned}\quad (2-36)$$

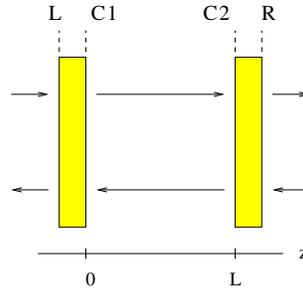


FIG. 2.2 – Pressions de radiation sur les miroirs de la cavité.

Pour évaluer ces quantités, nous utilisons les matrices  $S$  et  $R$  pour réexprimer tous les champs en fonction des champs entrants. On utilisera les équations (2-16,2-26). Nous calculons ensuite les valeurs moyennes des formes quadratiques de ces champs. Nous constatons alors qu'il n'est pas nécessaire de reprendre ce calcul qui a déjà été fait. En effet, tous les champs incidents sont supposés correspondre au vide de rayonnement. Le calcul des fonctions de corrélation se déduit donc immédiatement de celui des commutateurs. Or nous avons déjà rappelé que ces commutateurs prennent une forme simple. D'abord pour les champs externes  $a_L^{\text{out}}$  et  $a_R^{\text{out}}$ , ils sont identiques aux commutateurs canoniques par suite de l'unitarité des processus de diffusion. Ensuite, pour les champs intracavité, on a vu en (2-27) que leurs commutateurs sont les commutateurs canoniques simplement multipliés par la fonction d'Airy  $g_m$  de la cavité.

Nous déduisons donc

$$\langle P_1 \rangle = \sum_m \cos^2 \theta_m \hbar \omega_m (1 - g_m)$$

$$\begin{aligned}
\langle P_2 \rangle &= \sum_m \cos^2 \theta_m \hbar \omega_m (g_m - 1) \\
&= -\langle P_1 \rangle.
\end{aligned} \tag{2-37}$$

La sommation sur les deux directions étant déjà effectuée, l'intégration symbolisée par la notation  $\sum_m$  est restreinte aux valeurs positives de  $k_z$ .

Nous avons ainsi obtenu une formule dont l'interprétation est assez simple [76]. La force est la différence des pressions de radiation à l'extérieur et à l'intérieur de la cavité. A l'extérieur de la cavité, la pression correspond simplement à l'expression (2-33) de la pression de radiation du vide. A l'intérieur de la cavité par contre, cette pression est modulée par la fonction d'Airy, décrivant justement la densité spectrale de la cavité. Les fluctuations sont ainsi augmentées ou réduites selon que leur fréquence correspond ou pas à un mode de la cavité. C'est en fait le bilan de ces augmentations et réductions qui, lorsqu'il est sommé sur tous les modes  $m$ , donne la force de Casimir. Le point de vue local permet ainsi de calculer la force de Casimir à partir de conceptions issues de l'optique classique.

On a montré ici que  $\langle P_2 \rangle = -\langle P_1 \rangle$ , ce que l'on peut interpréter par le fait que la force globale sur la cavité est nulle par suite de l'invariance du vide par translation globale

$$\langle P_2 \rangle + \langle P_1 \rangle = 0. \tag{2-38}$$

La formule (2-37) n'est pas définitive puisqu'il nous faut encore tenir compte de l'effet des ondes évanescentes.

## B.4 Effet des ondes évanescentes

Nous venons de démontrer que la force de Casimir est déterminée par la fonction d'Airy de la cavité

$$g_{\mathbf{k}}^p[\omega] = \frac{1 - |r_{\mathbf{k}1}^p[\omega] r_{\mathbf{k}2}^p[\omega]|^2}{|1 - r_{\mathbf{k}1}^p[\omega] r_{\mathbf{k}2}^p[\omega] e^{2ik_z L}|^2}. \tag{2-39}$$

Cette fonction  $g_{\mathbf{k}}^p[\omega]$  se construit sur les fonctions de réponse  $r_{\mathbf{k}1}^p[\omega]$  et  $r_{\mathbf{k}2}^p[\omega]$  des miroirs. La forme explicite de ces coefficients est donnée dans le chapitre précédent, pour une lame par exemple. Il est à noter que cette formule s'applique également à des miroirs non symétriques. Il faut alors prendre l'amplitude de réflexion telle qu'elle est vue par les champs à l'intérieur de la cavité [101].

Cette fonction  $g_{\mathbf{k}}^p[\omega]$  est la fonction d'Airy d'une cavité telle qu'elle est décrite dans

la théorie usuelle du Fabry-Perot. Construite sur les coefficients de réflexion associés à chacun des deux miroirs, cette fonction fait aussi intervenir le facteur de propagation  $e^{2ik_z L}$  correspondant à la phase accumulée par le champ au cours de sa propagation dans la cavité sur une longueur aller-retour  $2L$ . Il est intéressant de relier cette fonction d'Airy à la fonction de réponse du Fabry-Perot qui a la forme d'une fonction de "boucle" et qui représente l'avantage d'être directement adaptée à l'utilisation des propriétés de causalité. Dans ce but, nous écrivons

$$g_{\mathbf{k}}^p[\omega] = 1 + f_{\mathbf{k}}^p[\omega] + f_{\mathbf{k}}^p[\omega]^* \quad (2-40)$$

où  $f_{\mathbf{k}}^p[\omega]$  est la fonction retardée caractérisant la réponse optique de la cavité

$$f_{\mathbf{k}}^p[\omega] = \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[\omega]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[\omega]} \quad , \quad \rho_{\mathbf{k}}^p[\omega] = r_{\mathbf{k}1}^p[\omega] r_{\mathbf{k}2}^p[\omega] e^{2ik_z L}. \quad (2-41)$$

Cette fonction est la réponse caractéristique d'une boucle de contre-réaction dans laquelle le gain en boucle ouverte est  $\rho_{\mathbf{k}}^p[\omega]$ . C'est aussi la fonction typique du phénomène d'interférences multiples

$$f_{\mathbf{k}}^p[\omega] = \rho_{\mathbf{k}}^p[\omega] + [\rho_{\mathbf{k}}^p[\omega]]^2 + [\rho_{\mathbf{k}}^p[\omega]]^3 + \dots \quad (2-42)$$

Pour les modes se propageant librement dans le vide,  $k_z$  est réel ce qui correspond au domaine

$$\frac{\omega}{c} \geq |\mathbf{k}|. \quad (2-43)$$

Nous considérons aussi le secteur des ondes évanescentes

$$\frac{\omega}{c} \leq |\mathbf{k}|. \quad (2-44)$$

Comme on l'a déjà discuté, ces modes évanescents sont alimentés par les fluctuations du champ entrant dans le système par les lignes de bruit associées à la dissipation dans le matériau. Ces modes sont confinés au voisinage de la surface des miroirs de la cavité mais ceci ne les empêche pas de contribuer à la pression de radiation sur les miroirs. Pour ces modes également, il y a une différence entre les deux côtés d'un miroir liée à la présence du deuxième miroir.

Nous avons vu au chapitre 1 comment les amplitudes de diffusion pour un miroir, données initialement pour les modes libres, pouvaient se définir sur le secteur évanescent par prolongement analytique. Le même raisonnement s'applique ici pour la fonction retardée  $f_{\mathbf{k}}^p[\omega]$  aussi bien que pour la fonction avancée  $f_{\mathbf{k}}^p[\omega]^*$  avec les modifications

nécessaires. Ce prolongement pose le problème de “branchement” au niveau des racines qui sera réglé suivant les procédures déjà discutées.

On revient tout d’abord aux notations définies dans le chapitre précédent

$$\begin{aligned}\omega &= i\xi \quad , \quad \text{Re}(\xi) > 0 \\ k_z &= i\phi\kappa \quad , \quad \text{Re}(\kappa) > 0\end{aligned}\tag{2-45}$$

avec  $\phi = \pm 1$  suivant le sens de propagation.

Les fonctions de réponse sont construites sur les amplitudes de réflexion de chaque miroir. On rappelle les propriétés essentielles vérifiées par les amplitudes d’un miroir diélectrique, pour  $\mathbf{k}$  et  $p$  fixés

– la diffusion est causale

$$r_{\mathbf{k}}^p [i\xi] \quad \text{analytique sur} \quad \text{Re}(\xi) > 0,\tag{2-46}$$

– le miroir diélectrique est transparent à haute fréquence

$$|r_{\mathbf{k}}^p [i\xi]| \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad |\xi| \rightarrow \infty,\tag{2-47}$$

– les conditions d’unitarité globale de la diffusion ont montré

$$|r_{\mathbf{k}}^p| < 1 \quad \text{pour les ondes ordinaires.}\tag{2-48}$$

Dans un premier temps, nous continuons ce raisonnement en faisant une hypothèse simple, raisonnable pour les miroirs diélectriques [30, 76]. Nous supposons ici que la condition (2-48) est également vérifiée sur le secteur évanescent et les fréquences imaginaires. Dans ce cas, on peut alors montrer [83] que les amplitudes de réflexion sont telles que  $|r_{\mathbf{k}}^p| < 1$  sur le demi-plan  $\text{Re}(\xi) > 0$ . On en déduit alors que la fonction de boucle  $f_{\mathbf{k}}^p [i\xi]$  est certainement analytique sur le demi-plan  $\text{Re}(\xi) > 0$ .

On voit alors par inspection directe que les formules écrites pour la pression de radiation des ondes ordinaires se prolongent naturellement sur le secteur évanescent. Ceci permettra d’écrire l’expression finale de la force de Casimir comme une intégrale sur toutes les fréquences réelles puis, en utilisant à nouveau les propriétés d’analyticité, comme une intégrale sur les fréquences imaginaires [30, 76] (voir section suivante C.2).

Il nous faut maintenant revenir sur les hypothèses que nous venons de faire pour les miroirs diélectriques. Ces hypothèses ont des statuts bien différents sur les deux secteurs concernés.

Pour les fréquences imaginaires, les modules des amplitudes de réflexion sont des réels compris entre 0 et 1 pour tous les modèles de miroirs étudiés dans ce travail. On le voit directement sur les expressions (1-73) de la lame

$$r^{\text{lame}} = -\frac{\sinh \alpha}{\sinh(\alpha + \beta)} \quad , \quad e^{-\beta} = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (2-49)$$

puisque  $\alpha$  et  $z$ , tels qu'ils sont définis par exemple en (1-67) et (1-68) au chapitre précédent, sont des réels positifs avec  $\alpha \geq 0$  et  $z \geq 1$ . Ceci est vrai pour tout modèle défini par une permittivité diélectrique  $\varepsilon$ , sachant que cette fonction est réelle et décroissante vers 1 sur l'axe imaginaire [81]. Comme  $\alpha, \beta$  est donc réel positif.

Dans le secteur évanescent par contre, les amplitudes de réflexion n'ont pas toujours un module inférieur à 1. On discutera ce problème de manière plus détaillée dans le prochain chapitre puisqu'il se pose de façon particulièrement aigüe pour les miroirs métalliques. Il nous faudra alors reprendre le raisonnement que nous sommes en train de faire. Toutefois, nous utiliserons encore la condition de "stabilité", à savoir le fait que  $f_{\mathbf{k}}^p[i\xi]$  est analytique dans le demi-plan  $\text{Re}(\xi) > 0$ .

On peut noter également que les ondes évanescentes n'existent pas quand on étudie le cas d'un modèle d'espace à une dimension. Le problème discuté ci-dessus ne se pose donc pas dans ce cas [91].

## C Expression de la force de Casimir

Nous rassemblons les résultats écrits jusqu'à présent pour donner l'expression finale de la force de Casimir entre deux miroirs diélectriques. En fait, nous allons écrire deux expressions équivalentes pour cette force, la première comme une intégrale sur les fréquences réelles, la seconde comme une intégrale sur les fréquences imaginaires. La première est plus proche de l'intuition développée depuis le début de ce mémoire alors que la seconde est mieux adaptée aux calculs explicites qui seront faits dans la suite.

### C.1 Intégration sur les fréquences réelles

Pour écrire la première expression, nous appelons  $F$  la force obtenue en multipliant la pression  $\langle P_1 \rangle$  sur le miroir 1 par la surface  $A$  du miroir et en ajoutant la contribution des ondes évanescentes à celles des ondes ordinaires. Pour ces dernières, nous partons des expressions (2-37) et nous explicitons la sommation sur les modes en procédant au

changement de variable

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 \quad \Rightarrow \quad k_z dk_z = \frac{\omega d\omega}{c^2}. \quad (2-50)$$

Nous obtenons ainsi la contribution  $F_{\text{ord}}$  des ondes ordinaires à la force de Casimir comme l'intégrale

$$F_{\text{ord}} = A \frac{\hbar}{2\pi} \sum_p \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \int_{c|\mathbf{k}|}^{\infty} d\omega k_z (-f_{\mathbf{k}}^p[\omega] - f_{\mathbf{k}}^p[\omega]^*). \quad (2-51)$$

Comme nous l'avons déjà discuté, les ondes évanescentes correspondent aux fréquences comprises dans le segment

$$0 \leq \omega \leq c|\mathbf{k}|. \quad (2-52)$$

De plus, la contribution  $F_{\text{eva}}$  des ondes évanescentes à la pression de radiation est l'expression obtenue par prolongement analytique à partir de celle des ondes ordinaires

$$F_{\text{eva}} = A \frac{\hbar}{2\pi} \sum_p \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \int_0^{c|\mathbf{k}|} d\omega k_z (-f_{\mathbf{k}}^p[\omega] - f_{\mathbf{k}}^p[\omega]^*). \quad (2-53)$$

En ajoutant ces deux résultats, on obtient donc l'expression finale de la force comme une intégrale sur toutes les fréquences réelles

$$F = \frac{\hbar A}{2\pi} \sum_p \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \int_0^{\infty} d\omega k_z (-f_{\mathbf{k}}^p[\omega] - f_{\mathbf{k}}^p[\omega]^*). \quad (2-54)$$

On rappelle que les expressions de  $f_{\mathbf{k}}^p$  pour les ondes évanescentes sont obtenues par prolongement analytique de celles valables pour les ondes ordinaires. On précise également que les mêmes raisonnements s'appliquent aux fonctions avancées  $f_{\mathbf{k}}^p[\omega]^*$  et aux fonctions retardées  $f_{\mathbf{k}}^p[\omega]$ . En utilisant la réalité de la réponse, le passage des unes aux autres est décrit par les conjugaisons

$$\xi \rightarrow \xi^* \quad , \quad \kappa \rightarrow \kappa^* \quad (2-55)$$

qui respectent les conditions

$$\text{Re}(\xi) > 0 \quad , \quad \text{Re}(\kappa) > 0. \quad (2-56)$$

L'équation (2-54) donne l'expression finale de la force de Casimir pour des miroirs diélectriques plans dans le vide du champ électromagnétique. Les miroirs sont décrits

par des amplitudes de réflexion qui obéissent aux propriétés physiques générales que nous avons discutées. L'expression s'applique aux miroirs absorbants, et nous devons utiliser l'unitarité du processus de diffusion pour le démontrer. Elle contient la contribution des ondes évanescentes qui a été obtenue par prolongement analytique de la contribution des ondes ordinaires. La prise en compte de cette contribution est absolument nécessaire pour obtenir l'expression correcte de la force [30, 76].

## C.2 Intégration sur les fréquences imaginaires

L'expression (2-54) de la force de Casimir est une intégrale sur l'axe des fréquences réelles. On peut la transformer en une intégrale sur l'axe des fréquences imaginaires. Cette deuxième expression sera beaucoup plus commode à utiliser dans les calculs explicites faits dans la suite de ce travail.

Ce passage de l'axe des fréquences réelles à l'axe des fréquences imaginaires est une opération bien connue en analyse complexe [114]. Considérons d'abord la fonction de réponse retardée  $f_{\mathbf{k}}^p[\omega]$  de la cavité. En invoquant les propriétés déjà discutées, on sait que  $f_{\mathbf{k}}^p[\omega]$  n'admet aucun pôle sur le demi-plan  $\text{Re}(\xi) > 0$  et est en fait une fonction analytique sur ce demi-plan. En considérant le contour  $C$  représenté sur la figure 2.3, on déduit alors du théorème de Cauchy

$$\int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \int_C dz f_{\mathbf{k}}^p[z] = 0. \quad (2-57)$$

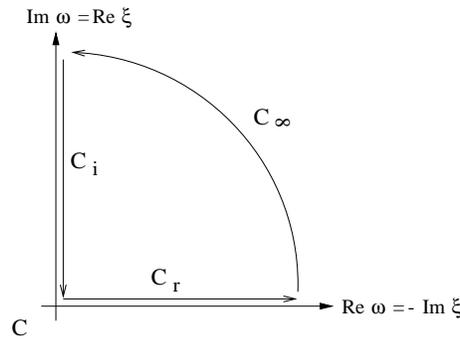


FIG. 2.3 – Contour d'intégration dans le plan complexe pour l'application du théorème de Cauchy à la fonction de réponse retardée  $f_{\mathbf{k}}^p[i\xi]$ .

On écrira ce contour (voir la figure 2.3)

$$C = C_r + C_\infty + C_i \quad (2-58)$$

où  $C_r$  correspond aux fréquences réelles,  $C_\infty$  au quart de cercle de rayon tendant vers l'infini et  $C_i$  à l'axe des fréquences imaginaires parcouru de  $\omega = +i\infty$  vers  $\omega = 0$ .

En faisant appel à la transparence à haute fréquence (2-47) de tout miroir physique, nous voyons que la contribution de l'arc de cercle  $C_\infty$  s'annule dans la limite d'un rayon infini. La propriété (2-57) se traduit donc comme une relation entre l'intégrale sur l'axe réel et l'intégrale sur l'axe imaginaire. En tenant compte des sens de parcours, nous démontrons donc

$$\int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \int_0^\infty d\omega k_z (-f_{\mathbf{k}}^p[\omega]) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \int_0^\infty d\xi \kappa (f_{\mathbf{k}}^p[i\xi]). \quad (2-59)$$

Pour la partie avancée, on utilise les mêmes arguments sur le contour  $C^*$  obtenu par conjugaison  $\xi \rightarrow \xi^*$  à partir du précédent (voir la figure 2.4). On obtient alors

$$\int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \int_0^\infty d\omega k_z (-f_{\mathbf{k}}^p[\omega]^*) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \int_0^\infty d\xi \kappa (f_{\mathbf{k}}^p[i\xi]^*). \quad (2-60)$$

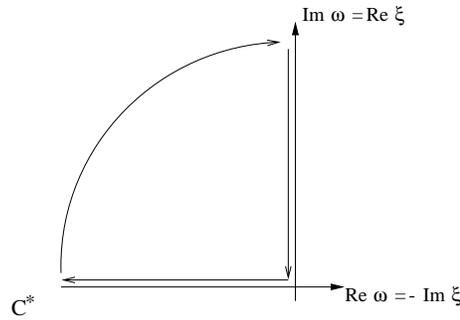


FIG. 2.4 – Contour d'intégration dans le plan complexe pour l'application du théorème de Cauchy à la fonction de réponse avancée  $f_{\mathbf{k}}^p[i\xi]^*$ .

En utilisant la réalité de la réponse [76], on voit que cette équation est en fait identique à la précédente (2-59). On obtient la même intégrale sur l'axe imaginaire pour la partie avancée de la fonction de réponse que pour la partie retardée. Le résultat final est alors donné comme la somme de ces deux termes qui sont en fait égaux

$$\begin{aligned} F(L) &= \frac{\hbar A}{2\pi} \sum_p \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \int_0^\infty d\xi 2 \kappa f_{\mathbf{k}}^p[i\xi], \\ f_{\mathbf{k}}^p[i\xi] &= \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]} \\ \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi] &= r_{\mathbf{k}1}^p[i\xi] r_{\mathbf{k}2}^p[i\xi] e^{-2\kappa L} \\ \kappa &\equiv \sqrt{\frac{\xi^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}. \end{aligned} \quad (2-61)$$

Cette expression est une intégrale convergente et régulière pour n'importe quel type de miroir décrit par des coefficients de réflexion caractérisés par les propriétés de causalité, de stabilité et de transparence à haute fréquence. La force ainsi calculée est libre de toute divergence habituellement associée au caractère infini de l'énergie du vide. De telles divergences apparaissent dans la plupart des calculs de l'effet Casimir. Elles sont liées à l'hypothèse habituelle de réflecteurs parfaits et obligent alors à utiliser des méthodes diverses de renormalisations-régularisations. Ici, ce sont les propriétés physiques des miroirs réels qui garantissent leur découplage vis-à-vis des fluctuations de haute fréquence et constituent ainsi une procédure de régularisation naturelle de la force [76].

On a utilisé ici la propriété importante que les amplitudes de réflexion sont plus petites que 1 pour les fréquences imaginaires

$$|r_{\mathbf{k}}^p[i\xi]| < 1 \quad \text{pour } \xi \text{ reel.} \quad (2-62)$$

On l'a déjà dit, cette propriété est toujours vérifiée (y compris pour les miroirs métalliques discutés dans le chapitre 3). Bien sûr, l'expression de la force entre miroirs parfaits s'obtient comme la limite sur (2-61) de la réflexion parfaite pour chacun des miroirs

$$r_{\mathbf{k}}^p[i\xi] \rightarrow -1. \quad (2-63)$$

Cette limite est prise sur tout le spectre de fréquence, et pour les deux polarisations. En effectuant le changement de variable

$$\int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \int_0^\infty d\xi \kappa \quad \equiv \quad \int_0^\infty \frac{d\kappa \kappa^2}{2\pi} \int_0^{\kappa c} d\xi, \quad (2-64)$$

on réécrit la force sous la forme suivante, sommée sur les deux polarisations,

$$\begin{aligned} F &= \frac{2\hbar A}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\kappa \kappa^2}{2\pi} \int_0^{\kappa c} d\xi \frac{2}{e^{2\kappa L} - 1} = \frac{\hbar A}{\pi^2} \int_0^\infty d\kappa \frac{\kappa^3 c}{e^{2\kappa L} - 1} \\ &= \frac{\hbar c A}{16\pi^2 L^4} \int_0^\infty du \frac{u^3}{e^u - 1} \\ &= \frac{\hbar c A \pi^2}{240 L^4}. \end{aligned} \quad (2-65)$$

On retrouve bien le résultat que Casimir a dérivé pour deux miroirs parfaits. L'effet de coupure de l'exponentielle  $e^{2\kappa L}$  fait jouer un rôle prépondérant aux valeurs de  $\xi$  telles

que

$$\frac{\xi L}{c} \lesssim 1. \quad (2-66)$$

On voit alors que la limite des miroirs parfaits doit se comprendre par rapport aux valeurs des amplitudes de réflexion dans ce domaine de fréquence. Cet argument jouera un rôle essentiel dans la discussion des miroirs métalliques.

### C.3 Comparaison avec la formule de Lifshitz

Comme nous l'avons déjà rappelé, Lifshitz a été le premier à aborder la question du calcul de la force de Casimir entre des miroirs réels [30]. Son approche était basée sur la résolution des conditions de bord et des équations de continuité pour le champ électromagnétique dans le vide enfermé entre deux diélectriques plans semi-infinis. Lifshitz avait introduit un champ fluctuant dont les propriétés spectrales étaient définies par la partie imaginaire de la permittivité du milieu.

Il avait ensuite calculé la force de Casimir en introduisant la plupart des techniques que nous avons utilisées dans notre dérivation. Il faut noter toutefois que son résultat ne s'appliquait qu'au cas du miroir diélectrique semi-infini. Lifshitz n'avait pas écrit son résultat en ces termes et, à notre connaissance, c'est Katz [115] qui a le premier exprimé la formule de Lifshitz en utilisant les coefficients de réflexion du miroir massif. Ce travail de Katz était une simple réécriture de la formule de Lifshitz, limitée au cas particulier étudié par celui-ci.

Le traitement par amplitudes de réflexion que nous avons présenté permet de calculer la force pour n'importe quel type de miroir. Notre formulation par matrice  $S$  a pour avantage d'avoir une signification physique claire tout en étant très générale. Elle s'applique à tous les miroirs décrits par des amplitudes physiques. Elle a d'abord été écrite pour des miroirs non absorbants [76] mais, comme nous l'avons indiqué ici, elle s'applique sans modification majeure au cas des miroirs absorbants [116, 117, 118]. A titre de parenthèse, elle est également parfaitement adaptée à l'étude des effets dynamiques de la pression de radiation du vide [108, 109, 110, 111].

## D La formule des déphasages

### D.1 L'énergie de Casimir

La force de Casimir, telle que nous l'avons donnée en (2-61) dérive d'un potentiel que nous pouvons définir comme l'énergie de Casimir entre deux miroirs plans réels à température nulle

$$F(L) = -\frac{dE(L)}{dL}. \quad (2-67)$$

L'énergie est simplement la primitive de la force en supposant par convention qu'elle s'annule à distance infinie

$$E(L) = \int_L^{\infty} dx F(x). \quad (2-68)$$

On a ici utilisé des conventions de signes pour lesquelles la force d'attraction et l'énergie de liaison entre les miroirs sont données comme des quantités positives. Ces conventions ne sont pas habituelles pour l'énergie et il faut faire attention à ce point dans toute discussion impliquant des considérations thermodynamiques.

L'énergie peut alors s'écrire soit comme une intégrale sur les fréquences réelles à partir de (2-54)

$$E(L) = -\frac{\hbar A}{2\pi} \sum_p \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \int_0^{\infty} d\omega \frac{1}{2i} \ln \left[ \frac{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[\omega]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[\omega]^*} \right], \quad (2-69)$$

soit comme une intégrale sur les fréquences imaginaires à partir de (2-61)

$$E(L) = -\frac{\hbar A}{2\pi} \sum_p \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \int_0^{\infty} d\xi \ln [1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]]. \quad (2-70)$$

Les conditions de causalité et de stabilité garantissent que l'intégrande

$$\ln [1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]] \quad (2-71)$$

est analytique dans le demi-plan complexe  $\text{Re}(\xi) > 0$ . Il est donc clair que ces deux expressions sont équivalentes au même titre que les deux expressions de la force à partir desquelles elles ont été obtenues.

Ces expressions peuvent s'interpréter comme l'énergie stockée par la cavité au cours

de la diffusion. Elle se calcule par exemple à partir des déphasages subis par les champs diffusés

$$\Delta_{\mathbf{k}}^p [i\xi] = \ln [1 - \rho_{\mathbf{k}}^p [i\xi]]. \quad (2-72)$$

Ces déphasages peuvent être déduits de la matrice  $S_{\text{cav}}$ . Cette propriété a été démontrée de manière détaillée pour les miroirs non absorbants [76]. Nous la rappelons ici pour mémoire mais ne la discutons pas plus puisque nous ne l'utilisons pas dans la suite.

## D.2 La formule des temps de Wigner

On peut donner encore une interprétation différente de cette formule. Pour cela, on commence par intégrer l'expression (2-70) par parties. Avec les conditions déjà utilisées pour en démontrer l'analyticité, on voit que le terme de bord correspondant s'annule

$$(\xi \ln [1 - \rho_{\mathbf{k}}^p [i\xi]])_0^\infty = 0. \quad (2-73)$$

On en déduit que l'énergie de Casimir peut s'écrire sous la forme

$$E(L) = -\frac{\hbar A}{2\pi} \sum_p \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \int_0^\infty d\xi \xi \partial_\xi (\Delta_{\mathbf{k}}^p [i\xi]). \quad (2-74)$$

En isolant dans l'intégrande la densité spectrale  $\hbar\xi$  des fluctuations du vide, il nous reste un temps de Wigner défini en dérivant le déphasage par rapport à la fréquence

$$\tau_{\mathbf{k}} [i\xi] = \partial_\xi (\Delta_{\mathbf{k}}^p [i\xi]). \quad (2-75)$$

Dans ce point de vue, l'énergie de Casimir est due au fait que les fluctuations qui arrivent en permanence sur la cavité sont stockées pendant un certain temps [76]. Dans cette interprétation dynamique [113], une énergie de liaison signifie que ce sont les temps de Wigner négatifs qui en déterminent le signe. Autrement dit, ce sont les modes hors résonance, ceux pour lesquels le temps de Wigner est négatif, qui définissent le caractère liant de l'énergie de Casimir. Cette interprétation est cohérente avec la discussion analogue de la force de Casimir [91].

En effet, les parties résonnantes du spectre correspondent à une énergie plus grande dans la cavité qu'à l'extérieur ( $g_m > 1$  dans l'équation (2-37)). Elles contribuent donc à une force répulsive pour les deux miroirs. Par contre, les parties anti-résonnantes du spectre correspondent à une énergie moins grande dans la cavité qu'à l'extérieur ( $g_m < 1$ ) et contribuent donc à une force attractive. Le fait que la force soit finalement attractive montre que ce sont les parties anti-résonnantes du spectre qui imposent leur signe [91].

## Chapitre 3

# Cas des miroirs métalliques

Comme nous l'avons brièvement présenté dans l'introduction, les expériences récentes de mesure de la force de Casimir s'effectuent entre des miroirs métalliques. Comme il sera clair à la fin de ce chapitre, ce choix est en grande partie justifié par les bonnes réflectivités qu'on peut atteindre avec les métaux. Dans le chapitre 2, nous avons montré comment calculer la force de Casimir à partir des amplitudes de réflexion pour des miroirs diélectriques. Ces amplitudes introduisent tout naturellement l'effet de la réponse optique dans l'évaluation de la force et cette formulation est donc particulièrement adaptée à l'étude des corrections liées à la conductivité des métaux [118].

Les miroirs métalliques, comme n'importe quel type de miroirs physiques, ne sont pas parfaitement réfléchissants à toutes les fréquences du champ incident. Nous explicitons en premier lieu différents modèles de réponse optique utiles pour discuter ce problème, le modèle plasma et le modèle de Drude. Enfin, nous traitons le cas des métaux réels à partir des données optiques tabulées [119].

Nous discuterons plusieurs problèmes liés à la description par un modèle plasma. Nous verrons comment retrouver, en les généralisant, des résultats antérieurs basés sur la prise en compte explicite des modes plasmons caractéristiques d'un métal. Nous ferons le lien entre notre formulation et ce point de vue. Nous devons présenter les difficultés analytiques que la réponse métallique peut induire, en particulier au niveau du prolongement aux ondes évanescentes. Nous discuterons enfin de l'approximation qui consiste à négliger les effets de la dispersion spatiale dans le calcul de la force de Casimir. Nous montrerons comment tous ces problèmes se résolvent en conduisant à une expression de la force formellement identique à celle obtenue dans le chapitre précédent pour les miroirs diélectriques.

Ceci nous permettra finalement de discuter de manière explicite les corrections in-

duites sur la force de Casimir par la conductivité finie des miroirs métalliques. Nous définirons des facteurs correctifs adaptés à l'analyse de ces effets et les calculerons pour les différents types de réponses considérés. La température sera prise nulle dans tout ce chapitre. Nous verrons au chapitre suivant comment prendre en compte la correction supplémentaire engendrée par la pression de radiation des fluctuations thermiques du champ.

## A Réponse optique des métaux

Par rapport aux diélectriques, les métaux sont caractérisés par la présence de charges libres, les électrons de conduction. Il y a donc au sein du métal une conductivité  $\sigma$  non nulle qui génère une réponse au champ incident délocalisée sur le métal. Il est pourtant possible de décrire la réponse optique d'un métal par une permittivité  $\varepsilon$  comme pour un diélectrique [120]. On a alors les mêmes formes pour les amplitudes de diffusion d'un miroir métallique que celles que nous avons présentées au chapitre 1 pour les diélectriques.

Il est important de noter une propriété générique des permittivités métalliques [123] directement liée à la présence d'électrons libres

$$\varepsilon[\omega] \sim \frac{\sigma_0}{-i\omega} \rightarrow \infty \quad \text{pour} \quad \omega \rightarrow 0. \quad (3-1)$$

Dans cette équation,  $\sigma_0$  représente la conductivité quasistatique, c'est-à-dire la limite de  $\sigma$  à fréquence nulle. A cette même limite quasistatique, la permittivité d'un diélectrique est finie. Nous verrons dans la suite les conséquences importantes de la présence d'un tel pôle à fréquence nulle pour les métaux.

A haute fréquence, les miroirs sont transparents et l'intensité de la force est réduite en conséquence. Nous analyserons en détail dans ce chapitre ces comportements. Il est important cependant de noter tout de suite que l'effet de filtrage de la cavité sélectionne les domaines de fréquence par la condition  $\frac{\omega L}{c} \lesssim 1$ . En d'autres termes, les grandes distances entre miroirs correspondent typiquement aux basses fréquences et les courtes distances aux hautes fréquences.

Dans le cas des métaux, les longueurs de cavité seront rapportées à une longueur caractéristique, la longueur plasma  $\lambda_P$ , qui dépend explicitement des propriétés des électrons de conduction. Cette longueur est équivalente à une fréquence plasma

$$\omega_P = \frac{2\pi c}{\lambda_P} \quad (3-2)$$

définie à partir des propriétés du milieu. On a ainsi

$$\begin{aligned}\omega_P^2 &= \frac{4\pi N e^2}{m^*} = \frac{N q^2}{\varepsilon_0 m^*} \\ N &= Z N_a,\end{aligned}\tag{3-3}$$

où  $N$  est le nombre d'électrons de conduction par unité de volume, c'est-à-dire également le produit du nombre  $Z$  d'électrons par atome et de la densité atomique  $N_a$ ;  $q$  représente la charge élémentaire et  $m^*$  est la masse effective d'un électron de conduction. Cette masse est différente de la masse d'un électron libre en raison des interactions avec les ions constituant le réseau métallique, les autres électrons...

Les longueurs de cavité très grandes devant la longueur plasma correspondront au régime de saturation de la réponse des miroirs pour lequel les miroirs tendent à se comporter comme des réflecteurs parfaits et la force de Casimir tend vers la formule idéale. En revanche, pour des fréquences plus élevées que  $\omega_P$ , les miroirs deviennent de mauvais réflecteurs. Cet argument est important puisqu'il conduit au fait que la force est une quantité naturellement convergente. Ceci implique aussi que la force est inférieure à la force idéale pour des distances entre miroirs inférieures à la longueur d'onde plasma ou du même ordre. Typiquement pour les métaux, la valeur de  $\lambda_P$  est de l'ordre du dixième de micromètre ( $\lambda_P \sim 0.1\mu\text{m}$ ). Nous reviendrons sur ce point plus en détail dans la suite de ce chapitre.

## A.1 Le modèle plasma

Nous considérons en premier lieu une réponse optique modélisée par un plasma d'électrons libres de conduction sans aucune dissipation. Avec ce modèle plasma, les permittivités sur les fréquences réelles et imaginaires sont données respectivement par

$$\begin{aligned}\varepsilon[\omega] &= 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \\ \varepsilon[i\xi] &= 1 + \frac{\omega_P^2}{\xi^2}.\end{aligned}\tag{3-4}$$

Ce modèle simple nous permettra d'effectuer la plupart des calculs à venir analytiquement. Ce modèle joue un rôle privilégié dans le cadre général de la théorie de l'optique des solides. Nous discuterons plus loin le lien explicite très bien connu en optique des solides entre le modèle plasma et les plasmons de surface des métaux [121]. Par ailleurs, ce modèle soulève des difficultés particulières vis-à-vis du calcul de la force de Casimir et nous allons montrer comment résoudre ces difficultés.

## A.2 Le modèle de Drude

Le modèle plasma ne peut pas correspondre à une description réaliste de la réponse optique du métal puisque, par construction, ce modèle ignore les processus de relaxation des électrons responsables de cette réponse. La permittivité définie pour un modèle plasma est en effet réelle pour toute fréquence réelle. Notons que ce modèle n'obéit évidemment pas aux relations de Kramers-Kronig, qui seront discutées plus loin, puisqu'il est à la fois dispersif et non dissipatif!

Une meilleure représentation des propriétés optiques des électrons de conduction est donnée par le modèle de Drude [122] qui définit une permittivité complexe

$$\begin{aligned}\varepsilon[\omega] &= 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega(\omega + i\Gamma)} \\ \varepsilon[i\xi] &= 1 + \frac{\omega_P^2}{\xi(\xi + \Gamma)}.\end{aligned}\tag{3-5}$$

Ce modèle simple permet de prédire, qualitativement au moins, le comportement des électrons d'un métal [123]. Dans ce modèle, la relaxation est créée par les processus de diffusion des électrons sur les ions du métal, les impuretés ou les défauts du cristal. Elle est décrite de manière effective par un paramètre de relaxation  $\Gamma$  défini comme l'inverse du temps moyen de relaxation. Le paramètre de relaxation est beaucoup plus petit que la fréquence plasma, et ce pour la grande majorité des métaux. Pour Al, Au et Cu en particulier, nous avons comme valeurs typiques

$$\frac{\Gamma}{\omega_P} \sim 4 \times 10^{-3}.\tag{3-6}$$

Puisque ce rapport est bien plus petit que l'unité, le paramètre de relaxation n'induit sur  $\varepsilon[i\xi]$  un effet significatif qu'aux fréquences pour lesquelles cette permittivité est très supérieure à l'unité, c'est-à-dire lorsque les miroirs métalliques se comportent quasiment comme des réflecteurs parfaits. L'influence de la relaxation sera donc faible sur la valeur de la force de Casimir, comme on le verra par la suite.

## A.3 Les transitions inter-bandes

Le modèle de Drude ne permet pas d'expliquer le comportement optique d'un métal réel sur tout le spectre de fréquence. Pour les fréquences optiques, typiquement avec une énergie de l'ordre de quelques eV, la lumière excite des transitions inter-bandes et la seule contribution des électrons de conduction n'est plus suffisante pour décrire les propriétés optiques du milieu [123]. Il existe bien sûr des approches théoriques qui

permettent de définir des permittivités métalliques plus réalistes [124]. Nous ne nous engagerons pas dans la discussion de ces méthodes et nous contentons de décrire la réponse optique des métaux directement à partir des données optiques tabulées [125, 126]. Ces données permettent de “reconstruire” une permittivité réaliste décrivant la réponse optique des métaux de manière réaliste.

La fonction de réponse  $\varepsilon[\omega]$  donnée sur l’axe des fréquences réelles peut se décomposer en une partie réelle  $\varepsilon'$  et une partie imaginaire  $\varepsilon''$ . Ces deux parties sont directement connectées par des relations de Kramers-Kronig [93]

$$\begin{aligned}\varepsilon[\omega] &= \varepsilon'[\omega] + i\varepsilon''[\omega] \\ \varepsilon'[\omega] - 1 &= \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} dx \frac{x\varepsilon''[x]}{x^2 - \omega^2},\end{aligned}\quad (3-7)$$

$\mathcal{P}$  désignant la valeur principale au sens de Cauchy. Ces relations expriment la causalité de la réponse, autrement dit le fait déjà discuté que la fonction  $\varepsilon[\omega]$  est analytique dans le demi-plan  $\text{Im}(\omega) > 0$ .

Il est important de remarquer que ces relations ne sont pas absolument générales. Par exemple, le modèle plasma ne vérifie certainement pas cette relation puisque la partie dissipative de  $\varepsilon$  est nulle alors que la partie dispersive ne se réduit pas à 1. Dans ce cas, il faut écrire des relations de dispersion avec “soustractions” qui, elles, sont tout à fait générales [83, 127]. Pour les métaux réels toutefois, les relations de Kramers-Kronig sont effectivement vérifiées, pourvu que la dissipation soit traitée de manière correcte. Ceci signifie en particulier que la fréquence plasma est alors liée à la partie dissipative de la permittivité par des règles de somme [123, 124].

On déduit alors une expression de la permittivité  $\varepsilon[i\xi]$  pour les fréquences imaginaires en fonction de la partie dissipative de la permittivité  $\varepsilon''[\omega]$  pour les fréquences réelles

$$\varepsilon[i\xi] - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{x\varepsilon''[x]}{x^2 + \xi^2}.\quad (3-8)$$

Comme on l’a déjà dit,  $\varepsilon[i\xi]$  est alors réel et positif pour tout  $\xi$  réel, c’est aussi une fonction qui décroît de la valeur  $\infty$  pour  $\xi = 0$  jusqu’à la valeur 1 pour  $\xi = \infty$  (voir [93]).

Comme toujours quand il s’agit de discuter des propriétés optiques, les fréquences seront mesurées comme des pulsations, en  $\text{rad.s}^{-1}$ , mais les discussions seront exprimées en eV, avec la relation de conversion

$$1\text{eV} \equiv 1.537 \times 10^{15} \text{rad.s}^{-1}.$$

Dans la pratique, on commence par évaluer la fonction  $\varepsilon''[\omega]$  pour les fréquences réelles à partir des données tabulées [118]. Ce travail doit être mené de façon très soignée, faute de quoi des résultats peu fiables peuvent être obtenus [50, 128, 129].

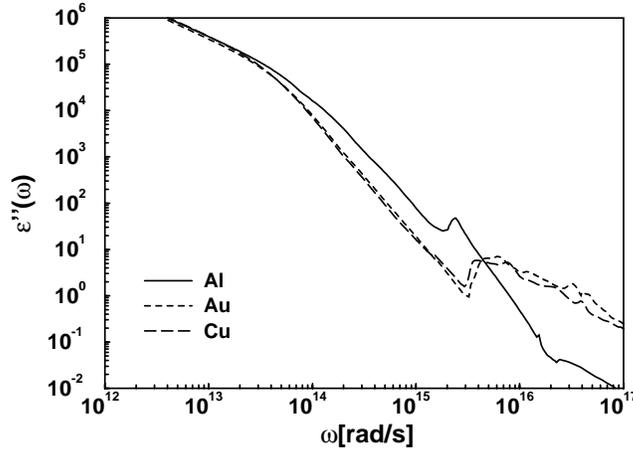


FIG. 3.1 – *Partie imaginaire  $\varepsilon''[\omega]$  de la permittivité en fonction de la fréquence réelle pour les trois métaux Al, Cu et Au.*

On remonte ensuite à  $\varepsilon[i\xi]$  à l'aide de (3-8). Là encore, ce travail demande du soin, à la fois pour extrapoler les données optiques au domaine des basses fréquences, d'autre part pour maîtriser les problèmes de précision numérique. Ici, nous suivons exactement la procédure proposée en [118], procédure qui fonde d'ailleurs le traitement actuel et systématique des corrections de conductivité sur la force de Casimir [52, 53, 54, 55].

Pour la figure 3.1, les données sont issues de [119] sur une largeur de spectre de 0.04 - 1000 eV pour Al et de 0.1 - 1000 eV pour Au et Cu. Si l'interpolation ne pose aucun problème, la densité des points de données étant suffisante, il faut en revanche extrapoler ces données à basse fréquence pour augmenter le domaine sur lequel les intégrations seront effectuées. Cette extrapolation est faite par ajustement avec un modèle de Drude. Les paramètres ajustables du modèle, i.e. la fréquence plasma et le paramètre de relaxation, se déduisent des données dans le cas de l'aluminium directement depuis les points de données. On trouve ainsi pour Al  $\omega_P = 11.5$  eV et  $\Gamma = 50 \times 10^{-3}$  eV. Pour Au et Cu en revanche, ces paramètres ne peuvent être déterminés séparément à partir des données optiques, en trop petit nombre. On utilise alors les connaissances de la physique du solide [123] pour déterminer la fréquence plasma.

On a vu, dans l'introduction de ce chapitre, que cette quantité se calcule en fonction de la masse effective  $m^*$  des électrons de conduction. Nous choisissons pour la masse effective des électrons de conduction les valeurs  $\frac{m^*}{m} \simeq 1$  pour Au et  $\frac{m^*}{m} \simeq 1.45$  pour Cu [125, 126]. On obtient alors quasiment la même fréquence plasma pour Au et Cu,

$\omega_P = 0.9 \text{ eV}$ , ce qui correspond à une longueur plasma  $\lambda_P = 136 \text{ nm}$ . Cette similitude des longueurs plasma pour Au et Cu expliquent une identité des valeurs pour la force et l'énergie de Casimir entre miroirs d'or et de cuivre initialement non comprise [50, 118]. Les données optiques nous permettent alors de déduire le paramètre  $\Gamma$  du modèle de Drude à choisir pour l'extrapolation. Nous obtenons ainsi  $\Gamma = 35 \text{ meV}$  pour Au et  $\Gamma = 30 \text{ meV}$  pour Cu. Ces valeurs correspondent respectivement aux rapports  $\frac{\Gamma}{\omega_P} = 3.8 \times 10^{-3}$  et  $\frac{\Gamma}{\omega_P} = 3.3 \times 10^{-3}$ . Ils sont du même ordre de grandeur que celui pour Al:  $\frac{\Gamma}{\omega_P} = 4.4 \times 10^{-3}$ . La permittivité évaluée sur l'axe imaginaire  $\varepsilon[i\xi]$  est ensuite obtenue par l'intégration (3-8) et le résultat est présenté sur la figure 3.2.

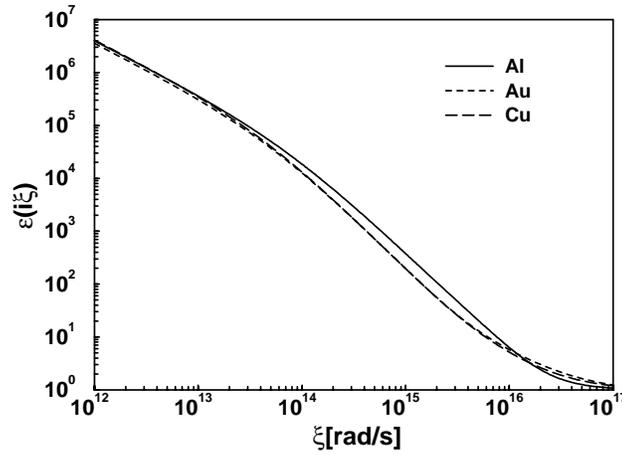


FIG. 3.2 – Permittivité complète  $\varepsilon[i\xi]$  évaluée sur les fréquences imaginaires pour les trois métaux Al, Cu et Au.

Notons que les longueurs de cavité typiquement étudiées dans les expériences sont comprises entre  $0.1$  et  $10 \mu\text{m}$ , et correspondent donc essentiellement à des fréquences dans un domaine spectral s'étendant de  $0.1$  à  $10 \text{ eV}$ . Pour obtenir des valeurs fiables de la force, il faut disposer des valeurs de  $\varepsilon[i\xi]$  sur un intervalle largement supérieur, typiquement de  $10^{-4}$  à  $10^3 \text{ eV}$ . Ceci nécessite de partir de valeurs de  $\varepsilon''[\omega]$  sur un intervalle encore plus grand, de l'ordre de  $10^{-5}$  à  $10^4 \text{ eV}$ . Il est clair que ces contraintes peuvent entraîner des imprécisions dans le calcul de la force, d'autant plus qu'une grande exactitude sera visée. Nous y reviendrons.

## B Discussion des modèles

Comme nous l'avons déjà dit, le modèle plasma soulève des difficultés spécifiques que nous discutons maintenant. Nous montrons que ces difficultés se résolvent et que la

force de Casimir garde en fait une expression formellement identique à celle démontrée dans le chapitre 2 dans le cadre des hypothèses pour les miroirs diélectriques.

## B.1 Modèle plasma et plasmons

Un premier problème est associé au lien étroit qui existe entre le modèle plasma et les plasmons de surface. Ceux-ci sont des excitations qui se propagent librement en l'absence de relaxation, à l'interface vide|métal. Dans notre point de vue, on les obtient immédiatement en étudiant l'amplitude de réflexion sur une interface vide|métal en polarisation TM

$$r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}} [i\xi] = \frac{1 - z^{\text{TM}}}{1 + z^{\text{TM}}} \quad , \quad z^{\text{TM}} = \frac{\varepsilon [i\xi] \sqrt{\frac{\xi^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}}{\sqrt{\varepsilon [i\xi] \frac{\xi^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}}. \quad (3-9)$$

On voit immédiatement que cette amplitude diverge quand  $z^{\text{TM}} = -1$ , ce qui correspond à la définition des plasmons de surface. On note également qu'elle s'annule pour  $z^{\text{TM}} = +1$ , ce qui correspond à l'angle de Brewster. Les deux situations sont rassemblées dans l'équation

$$(z^{\text{TM}})^2 = 1. \quad (3-10)$$

Pour le modèle plasma, c'est une équation du second degré pour  $\omega^2$

$$\omega^4 - \omega^2 (\omega_{\text{P}}^2 + 2c^2 \mathbf{k}^2) + \omega_{\text{P}}^2 c^2 \mathbf{k}^2 = 0. \quad (3-11)$$

On obtient aisément la racine correspondant à  $z^{\text{TM}} = -1$

$$\omega^2 = \frac{\omega_{\text{P}}^2 + 2c^2 \mathbf{k}^2 - \sqrt{\omega_{\text{P}}^4 + 4c^4 \mathbf{k}^4}}{2} \quad (3-12)$$

et celle correspondant à l'angle de Brewster

$$\omega^2 = \frac{\omega_{\text{P}}^2 + 2c^2 \mathbf{k}^2 + \sqrt{\omega_{\text{P}}^4 + 4c^4 \mathbf{k}^4}}{2}. \quad (3-13)$$

La condition (3-12) est la relation de dispersion bien connue pour les plasmons de surface (voir équation (2.46) dans [121]). Cette relation est souvent écrite dans la limite des incidences rasantes

$$\mathbf{k}^2 \gg \omega_{\text{P}}^2. \quad (3-14)$$

Elle prend alors une forme plus simple

$$\omega_s^2 = \frac{\omega_P^2}{2}. \quad (3-15)$$

Par suite des deux relations précédentes, cette solution tombe évidemment dans le secteur évanescents, ce qui correspond à une propriété bien connue des plasmons de surface. Ces résultats signifient que des excitations collectives existent pour des fréquences réelles. Comme c'est toujours le cas dans la théorie de la diffusion, ces excitations correspondent à des divergences des amplitudes de diffusion quand on ne prend pas en compte les phénomènes de relaxation, ce qui est le cas pour le modèle plasma. Si on inclut l'effet de la relaxation, le pôle de  $r_{\mathbf{k}}^p$  est déplacé de l'axe réel dans le demi-plan  $\text{Im}(\omega) < 0$  et la divergence devient une résonance.

Cette discussion montre de façon évidente que le module de  $r_{\mathbf{k}}^p$  ne peut certainement pas rester plus petit que 1 pour les miroirs métalliques. En fait, il diverge pour le modèle plasma et cette divergence est régularisée par la prise en compte de la relaxation. Comme ce paramètre obéit à la relation (3-6), cette résonance va toujours dépasser la valeur 1 pour le module de  $r_{\mathbf{k}}^p$ . C'est donc une difficulté vis-à-vis de l'hypothèse qu'on a faite au chapitre précédent sur le module de  $r_{\mathbf{k}}^p$ . Il est intéressant de remarquer que pour tout type de miroir, la structure des amplitudes de réflexion aux interfaces (voir (1-68) au chapitre 1), garantit que la condition (2-48) du chapitre 2 est toujours vraie en polarisation TE quelque soit le modèle de  $\varepsilon$  considéré. C'est uniquement en polarisation TM que se posent les problèmes. Ceci correspond au fait bien connu que les plasmons n'existent que polarisés TM.

Malgré cette difficulté, on pourra encore obtenir l'expression de la force de Casimir et celle-ci sera en fait formellement identique à celle que nous avons écrite dans le cadre de notre hypothèse. Pour le voir, reprenons la démonstration faite en section C.2 au chapitre 2, en nous interdisant de supposer que le module de  $r_{\mathbf{k}}^p$  soit plus petit que 1.

Nous rappelons la forme de la fonction de réponse à partir de laquelle nous avons pu calculer la force de Casimir

$$f_{\mathbf{k}}[\omega] = \sum_{p=\text{TE, TM}} \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[\omega]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[\omega]} \quad \text{avec} \quad \rho_{\mathbf{k}}^p[\omega] \equiv r_{\mathbf{k}1}^p[\omega] r_{\mathbf{k}2}^p[\omega] e^{2ik_z L}. \quad (3-16)$$

C'est exactement la fonction de réponse d'une boucle de contre-réaction construite avec un gain en boucle ouverte mesuré par l'amplitude  $\rho_{\mathbf{k}}^p[\omega]$ . La condition  $|\rho_{\mathbf{k}}^p[\omega]| < 1$  implique certainement que la boucle de contre-réaction ne peut jamais se mettre à osciller ; autrement dit, il n'y a pas de pôle de  $f_{\mathbf{k}}[\omega]$  dans le demi-plan  $\text{Im}(\omega) > 0$ . Mais on sait aussi que cette condition  $|\rho_{\mathbf{k}}^p[\omega]| < 1$ , si elle est suffisante, n'est pas

nécessaire : on peut dépasser  $|\rho_{\mathbf{k}}^p[\omega]| = 1$  sans atteindre le seuil d'oscillation pourvu que ce soit avec une phase non adaptée à l'oscillation.

La condition qui est indispensable dans notre raisonnement est la "stabilité" du système formé par la cavité et le champ. Elle s'exprime par le fait que  $f_{\mathbf{k}}[\omega]$  n'a pas de pôle dans le demi-plan  $\text{Im}(\omega) > 0$  et est en fait une fonction analytique dans ce domaine. Sous cette seule condition, on démontre que la contribution des ondes évanescentes est donnée par le prolongement analytique de la fonction  $f_{\mathbf{k}}[\omega]$  sur le secteur évanescent.

Pour préciser ces idées, considérons le modèle plasma dans le régime particulier où les fréquences  $\omega$  sont inférieures ou de l'ordre de la fréquence plasma  $\omega \sim \omega_P$ , alors que le vecteur d'onde transverse est supposé beaucoup plus grand. Dans ce régime, les équations générales pour les amplitudes de réflexion sur l'interface se simplifient beaucoup

$$\begin{aligned} r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}[\omega] &= 0 \\ r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[\omega] &= \frac{1 - \varepsilon[\omega]}{1 + \varepsilon[\omega]} = \frac{\omega_P^2}{2\omega^2 - \omega_P^2}. \end{aligned} \quad (3-17)$$

Non seulement  $r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}$  a alors un module plus grand que 1 pour  $0 \leq \omega \leq \omega_P$  mais, de plus, il diverge pour  $\omega^2 = \omega_s^2 = \frac{\omega_P^2}{2}$ . Ceci correspond effectivement à la fréquence  $\omega_s$  des plasmons de surface, dans la limite des incidences rasantes (3-14,3-15).

Dans ce cas particulier, il est aisé d'écrire que la fonction de boucle  $f_{\mathbf{k}}[\omega]$  a des pôles correspondant à l'équation

$$\rho_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[\omega] = 1. \quad (3-18)$$

Pour des fréquences réelles dans le secteur évanescent, deux pôles sont identifiés

$$\omega_{\pm}^2 = \omega_s^2 (1 \pm e^{-\kappa L}) \quad , \quad \kappa = |\mathbf{k}|. \quad (3-19)$$

Cette équation a une interprétation physique simple. Elle signifie que les plasmons de surface correspondant aux deux miroirs sont couplés par les ondes évanescentes se trouvant dans la cavité ; le facteur  $e^{-\kappa L}$  représente l'amplitude relative de ce couplage et l'équation (3-19) décrit le déplacement des fréquences plasmon dû à ce couplage.

Le raisonnement a été fait pour le moment avec le modèle plasma, c'est-à-dire en négligeant toute dissipation. Si on tient compte de la dissipation, les deux pôles  $\omega_{\pm}$  vont être déplacés de l'axe réel vers le demi-plan  $\text{Im}(\omega) < 0$ . Les pôles qui se trouvaient sur la frontière du domaine d'analyticité  $\text{Im}(\omega) > 0$  vont donc être repoussés au-delà de

cette frontière, ce qui garantit la stabilité de la cavité. Par exemple, pour le modèle de Drude, le même calcul montre que les pôles sont déplacés en

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\omega_s^2 (1 \pm e^{-\kappa L}) - \frac{\Gamma^2}{4}} - i \frac{\Gamma}{2}. \quad (3-20)$$

*A contrario*, l'instabilité, c'est-à-dire le déclenchement d'une oscillation spontanée du système, correspondrait au déplacement d'un pôle de l'axe réel  $\text{Im}(\omega) = 0$  vers le domaine  $\text{Im}(\omega) > 0$ . Ceci est bien sûr impossible physiquement en l'absence de tout mécanisme susceptible de fournir l'énergie nécessaire à cette oscillation.

Dans ces conditions, les raisonnements faits dans le chapitre précédent pour les miroirs diélectriques peuvent maintenant être étendus au cas des miroirs métalliques, la fonction  $f_{\mathbf{k}}[\omega]$  étant analytique dans le demi-plan  $\text{Im}(\omega) > 0$ . On trouve alors le même résultat que dans le chapitre 2

$$F(L) = \frac{\hbar A}{4\pi^3} \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_0^{\infty} d\xi \kappa \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]} \\ \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi] = r_{\mathbf{k}1}^p[i\xi] r_{\mathbf{k}2}^p[i\xi] e^{-2\kappa L}. \quad (3-21)$$

Comme on l'a déjà vu, les amplitudes de réflexion évaluées sur l'axe imaginaire sont toujours plus petites que l'unité

$$\xi \text{ reel} \rightarrow |r_{\mathbf{k}}^p[i\xi]| < 1. \quad (3-22)$$

Ceci assure que la force est une expression régulière pour tous les miroirs vérifiant les propriétés physiques que nous avons utilisées : causalité, stabilité, transparence à haute fréquence.

Remarquons que, dans le cas particulier du modèle plasma, les pôles de  $f_{\mathbf{k}}[\omega]$  se trouvent sur la frontière du domaine  $\text{Im}(\omega) > 0$ . Pour valider notre raisonnement, il faudra donc contourner ces pôles pour rester dans le domaine d'analyticité de  $f_{\mathbf{k}}[\omega]$ . C'est ce que représente le contour dessiné sur la figure 3.3.

Cette subtilité n'est pas nécessaire dès que la dissipation est prise en compte.

Nous allons voir plus loin que la force de Casimir peut également se comprendre comme une interaction de Van der Waals entre les excitations élémentaires dans les miroirs. Ceci est tout à fait analogue à l'interaction de Van der Waals entre deux atomes [27] qui peut se comprendre en étudiant les amplitudes des diffusions sur le système à deux atomes [130, 131] ou, alternativement, l'interaction entre les fluctuations élémentaires dans les deux atomes [132, 133]. Nous ferons ce calcul dans le cas du

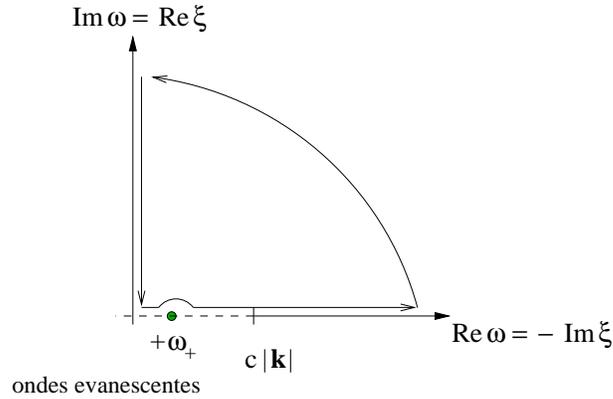


FIG. 3.3 – *Prolongement analytique pour la fonction de réponse retardée en tenant compte des singularités dans le secteur évanescent, pour le cas particulier du modèle plasma.*

modèle plasma à la limite d'une distance courte pour laquelle on peut se contenter de l'interaction instantanée de Coulomb. Nous verrons alors que le calcul de type Van der Waals donne le même résultat que la formule écrite ci-dessus [134].

## B.2 Plasmons et dispersion spatiale

Les résultats que nous venons de présenter sont en fait des cas limites d'une théorie plus générale [121, 135] qui permet d'analyser l'interaction des modes plasmons au-delà du régime de Coulomb. Une telle théorie permet également de discuter l'hypothèse, sous-jacente dans le raisonnement fait jusqu'ici, d'absence de dispersion spatiale au niveau de la réponse du métal au champ.

La description de la réponse optique d'un métal distingue typiquement deux régimes, définis par le rapport entre la longueur d'onde  $\lambda$  du champ électromagnétique et le libre parcours moyen  $\ell$  des porteurs électroniques. Ce libre parcours moyen est donné par la dynamique de ces porteurs,  $\ell = v_F \tau$ , où la vitesse de Fermi  $v_F$  mesure la vitesse typique des électrons dans le métal alors que  $\tau$  est le temps caractéristique du processus considéré.

Pour des longueurs d'onde  $\lambda \gg \ell$ , la réponse optique du métal pourra être considérée comme locale : les grandeurs de courant et de densité mesurées en un point seront liées au champ électromagnétique évalué en ce même point et la description du métal sera donnée par une fonction diélectrique  $\varepsilon[\omega]$  ne dépendant que de la fréquence du champ. Dans le cas général en revanche, les effets de non-localité spatiale pourront devenir importants et il faudra alors décrire la réponse optique par un  $\varepsilon[\omega, \mathbf{k}]$  dépendant non seulement de la fréquence mais aussi du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ .

Les métaux sont également caractérisés par l'existence d'excitations collectives de

surface se propageant le long de l'interface métal|vide. On a parlé dans la section précédente des plasmons de surface. En tenant compte plus précisément des relations de dispersions de ces modes plasmons, Heinrichs [135] (voir aussi [121]) a mis en évidence de manière claire le changement de comportement correspondant à la longueur caractéristique

$$\ell_P = 2\pi \frac{v_F}{\sqrt{3}\omega_P}. \quad (3-23)$$

Cette longueur peut s'interpréter comme la longueur sur laquelle les charges s'éloignent de l'interface. Elle correspond à la discussion du début de cette section avec  $\tau$  de l'ordre de la période plasma  $\frac{2\pi}{\omega_P}$ . Heinrichs a montré qu'il est possible de définir trois régimes de distances  $L$  différents entre les miroirs formant la cavité

- **i)**  $L \ll \ell_P$  correspond à l'effondrement de l'hypothèse locale. Pour des miroirs séparés d'une distance plus petite que la longueur typique  $\ell_P$ , on ne peut plus décrire la réponse des métaux par une permittivité simple et il faut redéfinir une réponse optique réaliste dans ce régime ;
- **ii)**  $\ell_P \ll L \ll \lambda_P$  correspond à une interaction instantanée traitée en bonne approximation dans le cadre de l'électrostatique avec, de plus, la réponse optique des miroirs décrite par une permittivité  $\varepsilon[\omega]$  sans dispersion spatiale ;
- **iii)**  $\lambda_P \ll L$  correspond au régime retardé, où les effets de retard doivent être pris en compte tout en négligeant tout effet de la dispersion spatiale.

Dans la suite de ce travail, on considère que le régime **i)** est exclu. A nouveau, ceci peut être discuté par analogie avec la discussion des forces de Van der Waals entre atomes. Le régime **i)** que nous excluons correspond au cas où la force de Van der Waals devient une force moléculaire. Les régimes **ii)** et **iii)** correspondent à une force à longue portée qui peut être calculée à partir des amplitudes de diffusion évaluées séparément pour les deux diffuseurs [27, 130, 131].

On peut donner un ordre de grandeur pour  $\ell_P$ . On trouve conventionnellement [123]  $v_F \sim 10^6$  m/s pour un métal, de sorte que  $\ell_P \sim 2 \times 10^{-3} \lambda_P$  est de l'ordre de quelques angströms. Pour les trois métaux que nous considérons, on a : Al  $v_F = 2.03 \times 10^6$  m/s, Au  $v_F = 1.40 \times 10^6$  m/s, Cu  $v_F = 1.57 \times 10^6$  m/s.

Ceci implique que toutes les expériences récentes sur la force de Casimir sont dans les régimes **ii)** ou **iii)** mais n'approchent jamais le régime **i)**. Il est donc inutile de prendre en compte les corrections à la force de Casimir calculées par Heinrichs [135] par une étude détaillée des contributions d'échanges entre les modes plasmons.

## C Corrections de conductivité

Les effets induits par la conductivité finie des miroirs seront évalués relativement à la prédiction de Casimir, établie entre deux miroirs parfaitement réfléchissants. L'outil essentiel des discussions à venir sera donc défini par le facteur correctif, c'est-à-dire le rapport de la force de Casimir entre miroirs réels et la force de Casimir calculée dans la situation "idéale" des miroirs parfaits

$$\eta_F = \frac{F}{F_{\text{Cas}}}.$$

On procédera de la même façon pour l'énergie

$$\eta_E = \frac{E}{E_{\text{Cas}}}.$$

Les grandeurs  $F$  et  $E$  correspondent respectivement à la force et l'énergie de Casimir, telle qu'elles sont données en (2-61) et (2-70) au chapitre précédent. On rappelle les expressions de la force et de l'énergie dans la situation idéale

$$F_{\text{Cas}} = \frac{\hbar c A \pi^2}{240 L^4} \quad , \quad E_{\text{Cas}} = \frac{\hbar c A \pi^2}{720 L^3}.$$

Pour le moment, ces facteurs correctifs rendront compte des corrections de conductivité. Dans le prochain chapitre, nous étendrons leur définition au cas des corrections de température.

Notre formulation de la force ou de l'énergie ne repose sur aucun modèle microscopique particulier de réponse optique. Elle suppose seulement que cette réponse engendre des amplitudes de diffusion satisfaisant des propriétés de causalité, de stabilité et de transparence à haute fréquence. Toutefois, elle repose de façon essentielle sur le caractère spéculaire de la réflexion du champ à la surface des miroirs et ne peut donc rendre compte des effets de rugosité de surface des miroirs en l'état actuel. Nous aborderons cette question de la rugosité de surface dans le dernier chapitre de ce travail.

On peut donner la forme générale de ces facteurs correctifs en partant des résultats du chapitre précédent

$$\begin{aligned} \eta_F &= \frac{60 L^4}{c \pi^5} \sum_p \int d^2 \mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \kappa \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p [i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p [i\xi]} \\ \eta_E &= -\frac{90 L^3}{c \pi^5} \sum_p \int d^2 \mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \ln [1 - \rho_{\mathbf{k}}^p [i\xi]]. \\ \rho_{\mathbf{k}}^p [i\xi] &= r_{\mathbf{k} \ 1}^p [i\xi] r_{\mathbf{k} \ 2}^p [i\xi] e^{-2\kappa L} \end{aligned} \quad (3-24)$$

A la limite des miroirs parfaits  $r_{\mathbf{k}}^p [i\xi] \equiv 1$ , on retrouve les résultats idéaux, c'est-à-dire ici  $\eta_F = 1$  et  $\eta_E = 1$ . Comme  $|r_{\mathbf{k}}^p|$  est plus petit que 1 pour les fréquences imaginaires, on voit que l'effet de la conductivité est toujours un effet de réduction de la force

$$F = \eta_F^P F_{\text{Cas}}, \quad \eta_F^P < 1. \quad (3-25)$$

Nous avons également vu que la force tend vers l'expression idéale pour des miroirs métalliques lorsque la distance est beaucoup plus grande que la longueur plasma

$$\eta_F^P \rightarrow 1 \quad \text{pour} \quad \frac{L}{\lambda_P} \gg 1. \quad (3-26)$$

Il nous reste maintenant à analyser quantitativement le cas d'une distance quelconque.

## C.1 Le modèle plasma

C'est ce que nous faisons d'abord avec le modèle plasma. Dans ce cas, on peut dériver analytiquement les expressions pour les facteurs correctifs  $\eta_F$  et  $\eta_E$ . Nous rappelons d'abord les résultats obtenus dans le chapitre 1 pour l'amplitude de réflexion sur une lame

$$r^{\text{lame}} = -\frac{\sinh \alpha}{\sinh(\beta + \alpha)} = -\frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^{\beta} e^\alpha - e^{-\beta} e^{-\alpha}}. \quad (3-27)$$

Les notations sont les mêmes que dans le chapitre 1 :  $e^{-\beta}$  représente l'amplitude de réflexion sur la première interface alors que

$$\alpha = \kappa \ell = \ell \sqrt{\varepsilon_1 \frac{\xi^2}{c^2} + \mathbf{k}^2} \quad (3-28)$$

représente la propagation sur l'épaisseur physique  $\ell$  de la lame. A la différence du chapitre 1 cependant, ces quantités sont maintenant évaluées pour des fréquences imaginaires et on voit que  $\beta$  et  $\alpha$  sont des réels positifs. Pour un métal,  $\alpha$  est toujours minoré par une borne qui ne dépend que de l'épaisseur  $\ell$  et de la longueur plasma

$$\alpha > \frac{\omega_P \ell}{c} = 2\pi \frac{\ell}{\lambda_P}. \quad (3-29)$$

Si on suppose que l'épaisseur de la lame est plus grande que la longueur plasma, ce qui est le cas dans les expériences, le facteur  $e^{-\alpha}$  pourra toujours être considéré comme très petit devant 1. L'amplitude de réflexion sera donc la même que pour le miroir d'épaisseur infinie

$$r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}} [i\xi] = \frac{1 - z^{\text{TE}}}{1 + z^{\text{TE}}}, \quad r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}} [i\xi] = \frac{1 - z^{\text{TM}}}{1 + z^{\text{TM}}}, \quad (3-30)$$

avec

$$z^{\text{TE}} = \frac{\sqrt{\varepsilon [i\xi] \frac{\xi^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}}{\sqrt{\frac{\xi^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}}, \quad z^{\text{TM}} = \frac{\varepsilon [i\xi] \sqrt{\frac{\xi^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}}{\sqrt{\varepsilon [i\xi] \frac{\xi^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}}. \quad (3-31)$$

On remarque que cette simplification est vraie même pour les milieux non absorbants, tels ceux décrits par le modèle plasma, alors que  $e^{-\alpha}$  serait resté un nombre de module 1 sur les fréquences réelles, et ceci quelque soit l'épaisseur de la lame.

Le calcul technique de la force de Casimir pour le modèle plasma [118, 136] est repoussé dans l'appendice A. Ici, nous donnons le résultat de ce calcul et nous discutons les deux cas limites.

Le facteur sans dimension  $\eta_{\text{F}}^{\text{P}}$  défini par (3-25) ne dépend que du rapport de distance  $\frac{L}{\lambda_{\text{P}}}$  dans le cas du modèle plasma. C'est donc une fonction universelle, dans le cadre de ce modèle, qui est représentée sur la figure 3.4.

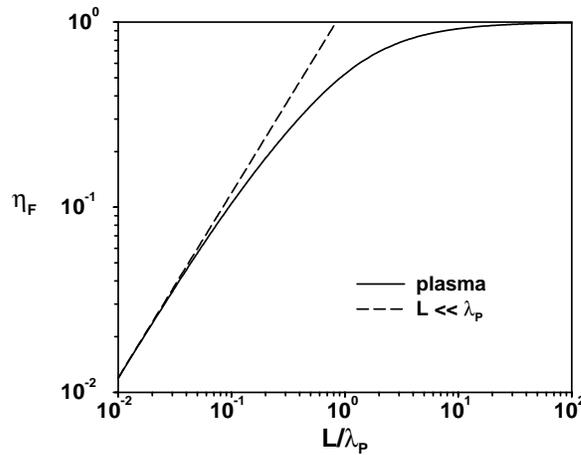


FIG. 3.4 – *Facteur correctif de la force en fonction de la longueur de la cavité, normalisée sur la longueur plasma. La droite en tirets correspond au comportement asymptotique des courtes distances.*

A la limite des grandes distances, on retrouve le comportement qualitatif déjà discuté : la force de Casimir tend vers la formule idéale pour des distances grandes devant la longueur plasma

$$L \gg \lambda_{\text{P}} \quad \Rightarrow \quad \eta_{\text{F}}^{\text{P}} \sim 1. \quad (3-32)$$

Les calculs de l'appendice conduisent à la loi asymptotique suivante, discutée dans de nombreux articles [56, 137, 138]

$$L \gg \lambda_{\text{P}} \quad \Rightarrow \quad \eta_{\text{F}}^{\text{P}} = 1 - \frac{8}{3\pi} \frac{\lambda_{\text{P}}}{L} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_{\text{P}}}{L}\right)^2\right). \quad (3-33)$$

Nous reviendrons de manière plus détaillée dans le chapitre 5 sur ce lien direct entre les grandes distances et la limite des réflecteurs parfaits : il soulève en effet des questions délicates à température non nulle.

La limite des courtes distances est particulièrement intéressante à étudier dans le cadre du modèle plasma. Pour des longueurs de cavité  $L \ll \lambda_P$ , la réduction est significative par rapport à la force idéale. Nous voyons en effet sur la figure 3.4 que  $\eta_F^P$  est proportionnel à la longueur  $L$  pour les courtes distances

$$L \ll \lambda_P \quad \Rightarrow \quad \eta_F^P \simeq \alpha \frac{L}{\lambda_P}. \quad (3-34)$$

Le coefficient  $\alpha$  est calculé par la méthode analytique décrite dans l'appendice A (voir aussi [118, 136]) et nous allons en donner ci-dessous une expression mathématique et une interprétation physique.

Nous pouvons remarquer ici que le régime de courte distance correspond à un changement d'exposant dans la loi de puissance à laquelle obéit la force. A grandes distances  $L \gg \lambda_P$ , la force dépend comme  $L^{-4}$  de la distance entre les miroirs. A courtes distances  $L \ll \lambda_P$ , la dépendance est en  $L^{-3}$ . On observe donc un changement d'exposant quand la longueur de la cavité croise la longueur plasma des miroirs, comme on le voit clairement sur la figure 3.4. Cette variation de loi de puissance est analogue au changement de régime découvert par Casimir et Polder [27] pour la variation de la force de Van der Waals entre deux atomes en fonction de la distance interatomique.

Pour interpréter le résultat (3-34) et écrire une expression pour  $\alpha$ , nous écrivons les amplitudes de réflexion sur un miroir décrit par un modèle plasma avec une épaisseur grande devant la longueur plasma. Nous obtenons donc les formes (3-31). Le facteur exponentiel dans l'intégrale donnant la force de Casimir détermine les valeurs de  $\kappa$  prédominantes

$$\kappa L \lesssim 1. \quad (3-35)$$

Par ailleurs, la nécessité d'une bonne réflectivité conduit à une condition sur la fréquence

$$\xi \lesssim \omega_P. \quad (3-36)$$

Comme  $L \ll \lambda_P$ , ces deux conditions impliquent que la fréquence est petite en comparaison avec le vecteur d'onde transverse

$$\xi \ll c |\mathbf{k}|. \quad (3-37)$$

Autrement dit, ces conditions sélectionnent le régime d'incidence "rasante" où le vecteur d'onde transverse est grand en comparaison aux autres quantités

$$\begin{aligned} c|\mathbf{k}| &\gg \xi, \omega_P \\ \kappa_1 &\simeq \kappa_0 \simeq |\mathbf{k}|. \end{aligned} \quad (3-38)$$

On peut alors donner une expression simple pour les amplitudes de réflexion, déjà discutée au niveau de l'équation (3-17). Nous trouvons ainsi un point important : à courtes distances, seule la polarisation TM contribue à la force de Casimir.

Il est alors possible d'explicitier le comportement du facteur correctif pour la force. On a en effet partant de (3-21)

$$L \ll \lambda_P \quad \eta_F = \frac{60L^4}{c\pi^5} \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi |\mathbf{k}| \frac{\rho_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[i\xi]} \quad (3-39)$$

avec

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[i\xi] &= \left( \frac{1 - \varepsilon[i\xi]}{1 + \varepsilon[i\xi]} \right)^2 e^{-2|\mathbf{k}|L} \\ &= \left( \frac{\omega_s^2}{\omega_s^2 + \xi^2} \right)^2 e^{-2|\mathbf{k}|L}. \end{aligned} \quad (3-40)$$

On peut alors développer la fraction comme une série géométrique

$$\eta_F = \frac{60L^4}{c\pi^5} \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi |\mathbf{k}| \sum_{n=1}^\infty (\rho_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[i\xi])^n \quad (3-41)$$

c'est-à-dire

$$\eta_F = \frac{15L}{c\pi^4} \int_0^\infty du u^2 \int_0^\infty d\xi \sum_{n=1}^\infty \left( \frac{\omega_s^2}{\omega_s^2 + \xi^2} \right)^{2n} e^{-nu} \quad \text{avec } u = 2|\mathbf{k}|L. \quad (3-42)$$

La forme lorentzienne des amplitudes de réflexion permet d'exprimer analytiquement l'intégrale sur  $\xi$  [139]

$$\int_0^\infty d\xi \left( \frac{\omega_s^2}{\omega_s^2 + \xi^2} \right)^{2n} = \frac{\pi}{2} \omega_s \frac{(4n-3)!!}{(4n-2)!!} \quad (3-43)$$

avec

$$\begin{aligned} (2n+1)!! &= 1.3.5 \dots (2n+1) \\ (2n)!! &= 2.4.6 \dots (2n). \end{aligned} \quad (3-44)$$

On trouve alors (3-34) avec

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{\sqrt{2}\pi^2} \frac{1}{n^3} \frac{(4n-3)!!}{(4n-2)!!}. \quad (3-45)$$

On peut écrire explicitement les premiers termes de cette série

$$\alpha = \frac{15}{\sqrt{2}\pi^2} \left( 1 + \frac{5}{64} + \frac{7}{384} + \dots \right) \quad (3-46)$$

ainsi qu'une expression numérique approchée du résultat

$$\alpha \simeq 1.1933. \quad (3-47)$$

Cette formule contient un certain nombre de résultats existants. Le premier terme de ce développement correspond à l'approximation qu'on trouve dans Lifshitz (équation (3.1) dans [30]). Lifshitz avait donc déjà le bon comportement pour la loi de puissance et sa bonne interprétation de l'exposant. Le coefficient qu'il donnait était cependant faux et Heinrichs a corrigé l'expression en introduisant le second terme (équation (75) dans [135] avec  $1 + \frac{5}{64} = \frac{69}{64}$ ). Le résultat exact est celui que nous venons de donner en (3-45).

On peut également interpréter ce résultat comme l'interaction instantanée entre les modes plasmons de surface [134, 135]. Nous avons en effet donné en (3-19) les fréquences  $\omega_+$  et  $\omega_-$  des plasmons de surface déplacées par leur couplage par interaction de Coulomb. Il est alors tout à fait naturel de décrire l'interaction de Van der Waals entre ces plasmons comme le déplacement de l'énergie de l'état fondamental de ce système

$$E = -A \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \left[ \frac{\hbar\omega_+}{2} + \frac{\hbar\omega_-}{2} - 2\frac{\hbar\omega_s}{2} \right]. \quad (3-48)$$

Dans cette formule,  $A \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2}$  est un simple comptage des modes et le terme entre crochet décrit le déplacement de l'énergie de l'état fondamental du au couplage. On peut noter que le signe global correspond à la convention sur le signe de l'énergie que nous avons adoptée et qui est l'opposée de la convention habituelle. En utilisant (3-19), on obtient aussi

$$E = A \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \hbar\omega_s \left[ 1 - \frac{\sqrt{1 + e^{-|\mathbf{k}|L}} + \sqrt{1 - e^{-|\mathbf{k}|L}}}{2} \right]. \quad (3-49)$$

En développant alors en séries entières les racines et en dérivant par rapport à  $L$ , on vérifie que l'expression obtenue pour  $F$  est identique à celle que nous avons déjà écrite

en (3-39).

On a ainsi démontré l'identité entre le résultat donné par notre formulation de la force donnée sur l'axe imaginaire (3-21) et le calcul directement basé sur les interactions entre plasmons [121]. Il faut noter que cette analyse se généralise dans le cas retardé, c'est-à-dire pour une longueur de cavité quelconque vis-à-vis de  $\lambda_p$  [140, 141].

## C.2 Le modèle de Drude

Nous discutons rapidement le modèle de Drude en notant simplement que la prise en compte de la relaxation n'a qu'une influence marginale sur la force de Casimir. Cette propriété se voit clairement sur la figure 3.5 qui montre les corrections induites par un modèle de Drude par comparaison avec un modèle plasma sans dissipation.

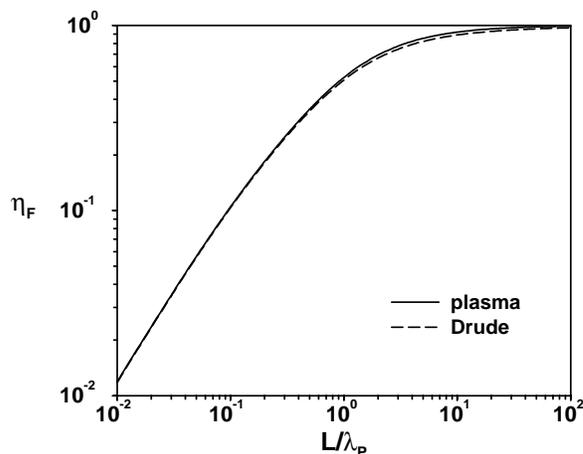


FIG. 3.5 – *Facteur de réduction de la force de Casimir quand la réponse optique des miroirs est modélisée par un modèle plasma (ligne pleine) ou par un modèle de Drude (ligne pointillée). Nous avons pris un rapport  $\frac{\Gamma}{\omega_p}$  égal à  $4 \times 10^{-3}$  qui correspond à la valeur typique pour les trois métaux considérés Al, Cu et Au.*

L'interprétation de cette propriété a déjà été donnée : comme  $\Gamma \ll \omega_p$ , le modèle de Drude ne modifie la permittivité que dans un domaine de fréquence où la réflexion est presque parfaite. Ce modèle ne change donc pratiquement pas la valeur de la force de Casimir. Toutefois, pour une estimation de haute précision, il est bien sûr préférable de prendre en compte la permittivité réelle [118].

### C.3 Les métaux réels

Nous en venons finalement au cas des métaux réels pour lesquels les données optiques de la littérature permettent de reconstruire la réponse optique et donc de calculer les facteurs correctifs pour la force et l'énergie. C'est ce que nous présentons sur la figure 3.6 où est représenté le facteur correctif pour la force  $\eta_F$ , pour des miroirs massifs en aluminium (Al), en cuivre (Cu) et en or (Au).

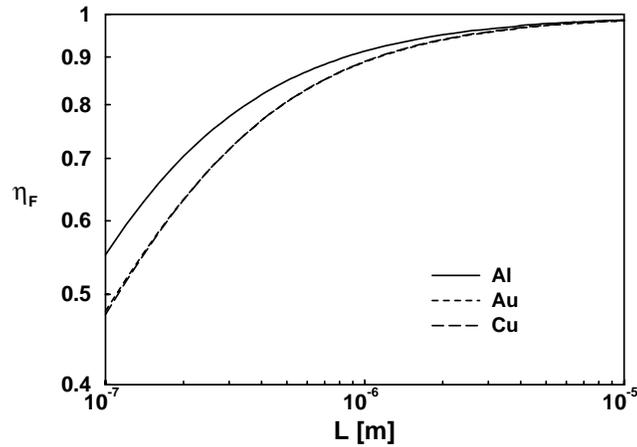


FIG. 3.6 – *Facteur de réduction pour la force de Casimir entre miroirs réels en fonction de la distance  $L$  entre les miroirs. Les trois courbes correspondent au cas de miroirs en aluminium (Al, courbe pleine), en or (Au, courbe pointillée) et en cuivre (Cu, courbe en tirets).*

On remarque tout de suite les comportements typiques qu'on vient de décrire de part et d'autre de la longueur plasma correspondante. On remarque également que les courbes de réduction pour Au et Cu sont quasiment confondues, ce qui reflète bien au niveau du facteur correctif la propriété observée pour  $\varepsilon[i\xi]$  (voir la figure 3.2).

La figure 3.7 représente le facteur correctif  $\eta_E$  en énergie pour les mêmes miroirs, avec les mêmes comportements typiques observés pour  $\eta_F$  dans les régimes de grande et courte distances.

On peut noter que le facteur de réduction sur l'énergie est plus grand que celui pour la force. Autrement dit, l'effet de réduction lié à la conductivité finie des miroirs est moindre sur l'énergie que sur la force. De plus, les valeurs de la force et l'énergie sont réduites quand on passe, à longueur de cavité fixée, de l'aluminium à l'or ou au cuivre. Ceci est cohérent avec le fait que les longueurs plasma de l'or et du cuivre sont supérieures à celle de l'aluminium et que par conséquent l'aluminium est un meilleur

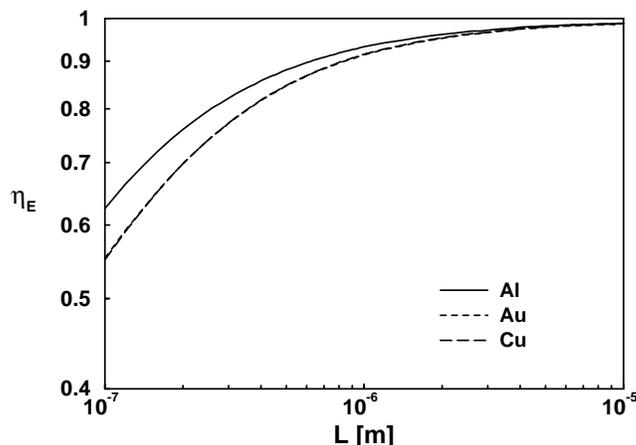


FIG. 3.7 – *Facteur de réduction pour l'énergie de Casimir entre miroirs réels en fonction de la distance  $L$  entre les miroirs. Les trois courbes correspondent au cas de miroirs en aluminium (Al, courbe pleine), en or (Au, courbe pointillée) et en cuivre (Cu, courbe en tirets).*

réflecteur que les autres métaux. On notera finalement qu'on observe un changement de la loi de puissance pour la force et l'énergie à courtes distances, c'est-à-dire pour des distances inférieures à la longueur plasma correspondant aux miroirs utilisés.

On donne ici quelques valeurs numériques pour ces facteurs de réduction  $\eta_F$  et  $\eta_E$  pour les trois métaux et pour des distances typiques

	Al	Au	Cu	
$\eta_F$ [0.1 $\mu\text{m}$ ]	0.55	0.48	0.48	
$\eta_E$ [0.1 $\mu\text{m}$ ]	0.63	0.55	0.55	
$\eta_F$ [0.5 $\mu\text{m}$ ]	0.85	0.81	0.81	(3-50)
$\eta_E$ [0.5 $\mu\text{m}$ ]	0.88	0.85	0.85	
$\eta_F$ [3.0 $\mu\text{m}$ ]	0.96	0.96	0.96	
$\eta_E$ [3.0 $\mu\text{m}$ ]	0.97	0.97	0.97	

On voit clairement sur ces chiffres que l'effet de la conductivité finie des miroirs métalliques est très important quantitativement sur la force de Casimir, puisqu'il peut atteindre une réduction de 50% de la force pour une distance d'environ 0.1  $\mu\text{m}$ .

Remarquons que, de par sa simplicité, le modèle plasma est abondamment utilisé pour les évaluations des facteurs correctifs. Il est donc particulièrement intéressant d'étudier les écarts entre les facteurs correctifs calculés avec ce modèle et ceux obtenus en utilisant les données optiques tabulées. La figure 3.8 montre ces différences.

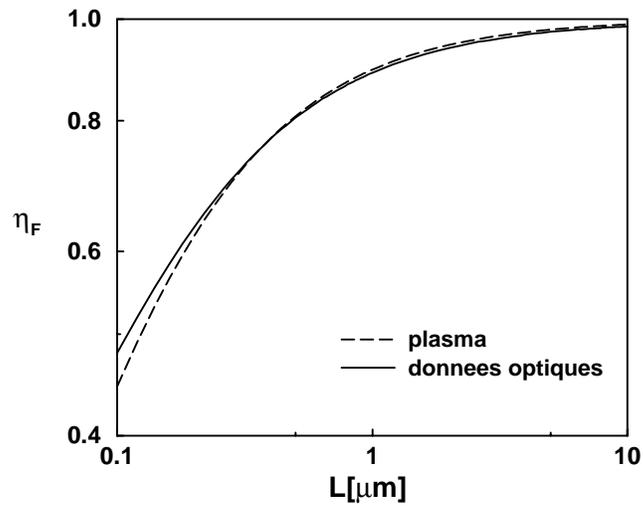


FIG. 3.8 – Comparaison des facteurs de réduction pour la force  $\eta_F$  entre deux miroirs d'or ( $Au$ ,  $\lambda_P = 136\text{nm}$ ) en fonction de la distance intracavité  $L$ , quand la réponse optique de ces miroirs est modélisée par un modèle plasma (ligne en tirets) ou définie par les données optiques tabulées (ligne pleine).

Cette figure met clairement en évidence qu'une description détaillée des propriétés optiques des métaux est absolument nécessaire pour obtenir une estimation précise de la force. En particulier, les transitions inter-bandes à haute fréquence doivent être prises en compte. Cette figure montre que le modèle plasma reste un bon modèle typiquement pour les longueurs de cavité supérieures à  $0.5\mu\text{m}$ . Cette remarque jouera un rôle important dans le prochain chapitre.



## Chapitre 4

# Force de Casimir à température non nulle

Dans le chapitre 2, nous avons présenté le calcul de la force de Casimir à température nulle et dans le chapitre 3, nous avons étendu ce calcul au cas des miroirs métalliques. Nous avons défini des facteurs correctifs adaptés pour l'analyse de résultats expérimentaux que nous présenterons plus loin. Comme toutes les expériences sont effectuées à température ambiante, nous devons maintenant évaluer l'effet de température sur la force de Casimir.

Ce chapitre a pour but de donner une évaluation théorique précise des contributions thermiques à l'effet Casimir, en calculant la pression de radiation du rayonnement du corps noir comme nous avons calculé celle des fluctuations du vide dans le chapitre 2. Ce calcul nous fournira simultanément les termes de correction liés à la réponse optique des miroirs, en particulier des miroirs métalliques, et les termes de correction thermique. Nous insisterons sur un point essentiel pour atteindre une haute précision dans l'évaluation théorique de la force : les corrections de conductivité finie des miroirs et les corrections thermiques ne peuvent se définir indépendamment les unes des autres, elles sont en fait corrélées l'une à l'autre. Nous caractériserons cette corrélation pour des miroirs décrits par un modèle plasma.

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, le traitement simultané de la température et de la dissipation dans les miroirs métalliques a engendré un débat très polémique. Nous discutons les difficultés à l'origine de ce débat dans le chapitre 5. Pour le moment, dans ce chapitre 4, nous oublions ce contexte et présentons l'effet de la température en suivant la méthode développée dans les chapitres précédents.

## A L'effet de température

Il est en principe simple de prendre en compte l'effet des fluctuations thermiques du champ. A température non nulle, celles-ci sont superposées aux fluctuations du vide. Il nous faut donc maintenant ajouter la pression de radiation des fluctuations thermiques à celle que nous avons déjà calculée pour les fluctuations du vide.

### A.1 Estimations et longueur d'onde thermique

A température nulle, l'énergie du champ se réduisait simplement à la contribution du vide  $\frac{1}{2}\hbar\omega$  par mode de fréquence  $\omega$ . A température non nulle, l'énergie du champ est la somme de cette contribution du vide et de l'énergie du nombre moyen  $\bar{n}_\omega$  de photons par mode donné par la loi de Planck

$$\frac{1}{2}\hbar\omega \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{1}{2} + \bar{n}_\omega\right)\hbar\omega \quad \text{avec} \quad \bar{n}_\omega = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}. \quad (4-1)$$

La contribution d'un mode de fréquence  $\omega$  à la force de Casimir telle qu'elle est dérivée à température nulle dans le chapitre 2 (voir (2-54)) doit donc être multipliée par le facteur

$$1 + 2\bar{n}_\omega = \coth \left[ \frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right]. \quad (4-2)$$

Malgré son apparente simplicité, la prise en compte de ce facteur (4-2) va introduire des points délicats qui doivent être analysés très rigoureusement. En particulier, quand nous allons exprimer la force comme une intégrale sur l'axe des fréquences imaginaires, il s'agira de traiter avec le plus grand soin le facteur  $(1 + 2\bar{n}_{i\xi})$  présent dans l'intégrande à température non nulle. Ce facteur présente en effet sur l'axe des fréquences imaginaires, c'est-à-dire pour  $\xi$  réel, des pôles régulièrement espacés aux fréquences dites de Matsubara [57]

$$\xi_n = n \frac{2\pi k_B T}{\hbar} \quad \text{pour } n \text{ entier.} \quad (4-3)$$

Cette répartition discrète des modes d'excitation thermique sur l'axe imaginaire est typique de la théorie des champs en température non nulle. La limite de température nulle doit en fait être comprise comme [30, 56, 77, 142]

$$\omega_T = \frac{2\pi k_B T}{\hbar} \rightarrow 0. \quad (4-4)$$

La fréquence  $\omega_T$  est donc l'échelle naturelle des effets thermiques.

Qualitativement, il est clair que les corrections thermiques doivent commencer à être importantes pour un mode de fréquence  $\omega$  quand  $k_B T$  devient de l'ordre de  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ . En d'autres termes, la correction thermique à la force de Casimir devient sensible, relativement à la force calculée à température nulle, pour des longueurs grandes. Ce point sera traité de façon quantitative dans la suite mais nous pouvons déjà caractériser ce régime en introduisant une distance typique, la longueur d'onde thermique, au-delà de laquelle les corrections thermiques seront dominantes

$$\lambda_T = \frac{2\pi c}{\omega_T} = \frac{\hbar c}{k_B T}. \quad (4-5)$$

La longueur  $\lambda_T$  est directement liée au paramètre  $\beta$  utilisé habituellement en physique statistique

$$\lambda_T = \hbar c \beta \quad , \quad \beta = \frac{1}{k_B T}. \quad (4-6)$$

A température ambiante  $T = 300\text{K}$ , cette longueur est de l'ordre de  $\sim 7\mu\text{m}$ . Ceci implique que la correction thermique et la correction métallique sont *a priori* importantes dans des domaines distincts.

## A.2 Pression de radiation à température non nulle

A température nulle, on a vu comment le calcul des fonctions de corrélation des champs pouvait se ramener au calcul des commutateurs de ces champs. Ces commutateurs étaient canoniques pour les champs à l'extérieur de la cavité et modulés par la fonction d'Airy pour les champs intracavité.

A température non nulle, cette propriété est encore vraie. Les anti-commutateurs des champs sont déterminés par les commutateurs et par le nombre moyen de photons par mode  $m$

$$\langle a_m \cdot a_{m'}^\dagger \rangle = \left( \frac{1}{2} + \bar{n}_m \right) [a_m, a_{m'}^\dagger]. \quad (4-7)$$

Ceci est une conséquence de l'hypothèse d'équilibre thermodynamique que nous faisons ici, y compris en présence d'absorption dans les miroirs. Nous considérons donc que les fluctuations entrant dans tous les modes, y compris les modes de bruit, obéissent à la relation (4-7). Nous en déduisons que c'est encore vrai pour les champs sortants et les champs intracavité étudiés au chapitre 2. Si nous ne faisons pas cette hypothèse d'équilibre thermodynamique, nous ne pourrions pas obtenir la force simplement à partir de la fonction d'Airy.

### A.3 Calcul de la force

Grâce à cette condition d'équilibre thermodynamique, les résultats du chapitre 2 sur les pressions de radiation du vide sont généralisés en incluant simplement le facteur (4-2)

$$F(L) = \frac{\hbar A}{2\pi} \sum_p \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \int_0^\infty d\omega k_z \coth \left[ \frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right] (-f_{\mathbf{k}}^p[\omega] - f_{\mathbf{k}}^p[\omega]^*), \quad (4-8)$$

où  $f_{\mathbf{k}}^p[\omega]$  est la fonction “boucle” décrivant la réponse optique de la cavité.

Sur l'axe des fréquences réelles, nous pouvons développer la fonction  $\coth$  en série d'exponentielles. Nous écrivons

$$1 + 2\bar{n}_\omega = \coth \frac{\pi\omega}{\omega_T} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2n\pi(\omega+\eta)}{\omega_T}}. \quad (4-9)$$

Nous avons introduit un facteur de convergence  $\eta$  qui est un nombre réel positif tendant vers 0. Ce facteur permet d'assurer la convergence de cette série sur tout le demi-axe positif, la borne  $\omega = 0$  faisant encore partie du domaine de convergence puisque  $\eta > 0$  strictement. Ce facteur de convergence permet également de rendre le développement (4-9) uniformément convergent sur tout le quart de plan complexe qui joue un rôle dans les arguments d'analyticité discutés ci-après. Sans ce facteur de convergence, on aurait un problème de définition de la série (4-9) en  $\omega = 0$ , mais également pour toutes les fréquences de Matsubara (4-3). La limite  $\eta \rightarrow 0$  devra être prise seulement à la fin du calcul.

Conformément à l'usage établi depuis Lifshitz [30], nous introduisons la notation suivante pour le type de somme apparaissant dans (4-9)

$$\begin{aligned} \sum'_n \varphi(n) &= \frac{1}{2}\varphi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(|n|). \end{aligned} \quad (4-10)$$

En utilisant cette notation, on obtient l'expression suivante de la force

$$F(L) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\hbar A}{\pi} \sum'_n \sum_p \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \int_0^\infty d\omega e^{-\frac{2n\pi(\omega+\eta)}{\omega_T}} k_z (-f_{\mathbf{k}}^p[\omega] - f_{\mathbf{k}}^p[\omega]^*). \quad (4-11)$$

Insistons sur le fait que le facteur de convergence permet de justifier sur (4-11) l'inversion formelle du signe somme  $\sum'_n$  et des intégrales  $\int d\omega$  et  $\int d^2\mathbf{k}$ .

Nous utilisons maintenant les mêmes conditions de causalité, de stabilité et de transparence à haute fréquence que dans le chapitre 2 avec les précisions apportées pour le cas métallique dans le chapitre 3. Ceci nous permet de prolonger  $f_{\mathbf{k}}^p [i\xi]$  sur le domaine complexe correspondant aux conditions d'analyticité

$$\begin{aligned} \text{Im}(\omega) &= \text{Re}(\xi) > 0 \\ \text{Re}(\omega) &= -\text{Im}(\xi) > 0. \end{aligned} \quad (4-12)$$

Comme dans le chapitre 2, nous utilisons le théorème de Cauchy pour obtenir une identité entre l'intégrale sur les fréquences réelles et une intégrale sur les fréquences imaginaires. Plus précisément, la présence du facteur de convergence  $\eta$  fait que la partie  $C_i$  du contour correspond maintenant à l'axe  $z = i\xi + \eta$  dans le plan complexe avec  $\xi$  réel positif et  $\eta$  réel positif proche de 0 (voir la figure 4.1). Ceci montre l'importance de ce facteur  $\eta$  alors que la fonction  $\coth \frac{\pi z}{\omega_T}$  présente des pôles sur l'axe imaginaire aux fréquences Matsubara  $z_n = in\omega_T$ .

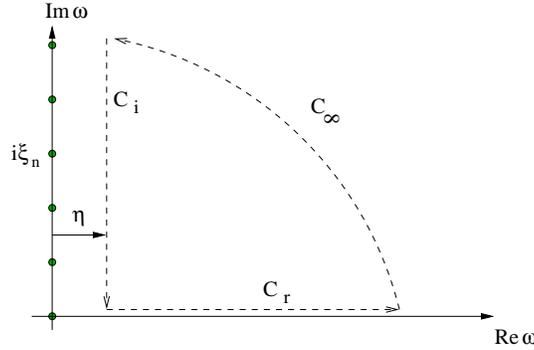


FIG. 4.1 – Le contour dans le plan complexe pour l'application du théorème de Cauchy à température non nulle.

Nous procédons de manière analogue pour la fonction de réponse avancée  $f_{\mathbf{k}}^p [i\xi]^*$  avec un contour qui se trouve dans le quart de plan  $\text{Im}(\omega) > 0, \text{Re}(\omega) < 0$  (voir la figure 2.4 dans le chapitre 2). Nous obtenons finalement l'expression suivante de l'intégrale

$$\begin{aligned} F(L) &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\hbar A}{\pi} \sum_n \sum_p \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{4\pi^2} \int_0^\infty d\xi e^{-2n\pi \frac{\eta}{\omega_T} \kappa} \\ &\quad \left( e^{-2in\pi \frac{\omega}{\omega_T}} f_{\mathbf{k}}^p [i\xi + \eta] + e^{2in\pi \frac{\omega}{\omega_T}} f_{\mathbf{k}}^p [i\xi - \eta] \right). \end{aligned} \quad (4-13)$$

Quand  $f_{\mathbf{k}}^p [i\xi]$  ne présente pas de singularité sur l'axe des fréquences imaginaires, on peut immédiatement oublier les  $\eta$  dans  $f_{\mathbf{k}}^p [i\xi + \eta]$  et  $f_{\mathbf{k}}^p [i\xi - \eta]$ . Dans le cas des

métaux, les fonctions de réponse peuvent présenter des pathologies au voisinage de  $\omega = 0$ . Les problèmes associés et les nombreuses discussions polémiques qu'ils ont suscité sont discutés de manière plus détaillée dans le chapitre 5. Ici, nous discutons une méthode de calcul qui n'est pas affectée par ces problèmes.

Nous écrivons la force en séparant les contributions correspondant à des  $n$  différents

$$F(L) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\hbar A}{2\pi^3} \sum_n e^{-2\pi n \frac{\eta}{\omega_T}} \tilde{F}(n), \quad (4-14)$$

avec

$$\tilde{F}(n) = \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \cos\left[\frac{2\pi n\xi}{\omega_T}\right] \kappa \frac{r_{\mathbf{k}}^p[i\xi] e^{-2\kappa L}}{1 - r_{\mathbf{k}}^p[i\xi] e^{-2\kappa L}}. \quad (4-15)$$

Nous avons omis la référence à  $\eta$  dans les facteurs  $r_{\mathbf{k}}^p[i\xi + \eta]$  mais il est sous-entendu que l'expression doit être réécrite comme dans (4-13) en cas de problème.

Il est important de noter que cette formulation permet de séparer les différentes contributions des fluctuations du vide et des fluctuations thermiques. En effet, le terme  $n = 0$  donné dans (4-14)

$$\frac{\hbar A}{2\pi^3} \frac{1}{2} \tilde{F}(0) = \frac{\hbar A}{2\pi^3} \frac{1}{2} \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \kappa \frac{r_{\mathbf{k}}^p[i\xi] e^{-2\kappa L}}{1 - r_{\mathbf{k}}^p[i\xi] e^{-2\kappa L}}, \quad (4-16)$$

correspond exactement à l'expression (2-61) de la force de Casimir donnée à température nulle. Les termes suivants  $n \geq 1$  rassemblent donc les effets thermiques. On reviendra plus loin sur cette façon efficace de séparer les différents termes correctifs.

La définition de l'énergie correspond à une intégration sur la distance relative entre les miroirs

$$E(L) = \int_L^\infty dx F(x) \quad (4-17)$$

et cette procédure est effectuée à température constante. En termes de potentiels thermodynamiques, l'énergie ainsi calculée correspond en fait à l'énergie libre du système. Conformément à l'usage, on abrègera par "énergie de Casimir".

## B Corrections thermiques

Au début de ce chapitre, nous avons introduit une distance typique  $\lambda_T$  à partir de laquelle les effets thermiques sont sensibles. A température ambiante ( $T = 300\text{K}$ ),

nous avons vu que cette longueur était de l'ordre de  $\sim 7\mu\text{m}$ . Par contraste, nous avons vu dans le chapitre 3 que les corrections de conductivité étaient caractérisées par la longueur d'onde plasma  $\lambda_P$  dont la valeur typique est de  $0.1\mu\text{m}$ . Les deux types de corrections, thermique et de conductivité, correspondent donc à des domaines de longueur de cavité bien séparés.

Le but de cette section est de donner une évaluation précise de la force de Casimir quand sont prises en compte simultanément les corrections optiques et thermiques. A cette fin, nous caractériserons l'effet combiné de ces deux corrections par le facteur correctif suivant

$$\eta_F = \frac{F}{F_{\text{Cas}}}. \quad (4-18)$$

Comme précédemment,  $F$  est la force calculée en incluant les deux corrections et  $F_{\text{Cas}}$  représente la situation idéale. Nous pouvons introduire également des facteurs correctifs associés séparément à chaque type de correction de conductivité et thermique

$$\eta_F^P = \frac{F^P}{F_{\text{Cas}}}, \quad , \quad \eta_F^T = \frac{F^T}{F_{\text{Cas}}}. \quad (4-19)$$

$F^P$  est la force calculée en ne tenant compte que des corrections de conductivité finie des miroirs et  $F^T$  en incluant uniquement les corrections thermiques. Dans le cas du modèle du plasma,  $\eta_F^P$  est exactement le facteur correctif qui a été discuté dans la section C du chapitre précédent. Ce facteur ne dépend que du rapport  $\frac{L}{\lambda_P}$  et, comme on l'a vu, il ne diffère de 1 que pour  $\frac{L}{\lambda_P}$  plus petit que ou du même ordre que 1. Par contre,  $\eta_F^T$  ne dépendra que du rapport  $\frac{L}{\lambda_T}$  et il ne différera de 1 que pour  $\frac{L}{\lambda_T}$  plus grand que ou du même ordre de 1. On discutera les conséquences de cette situation dans cette section et dans la suivante.

## B.1 Formulation de la force et de l'énergie entre deux miroirs métalliques et à température non nulle

Nous avons vu que pour des miroirs réels caractérisés par des coefficients de diffusion dépendant de la fréquence, la force de Casimir est définie comme une intégrale sur les fréquences et les vecteurs d'onde transverses associés au vide et aux fluctuations thermiques. On rappelle ici l'expression obtenue pour la force

$$\begin{aligned} F(L) &= \frac{\hbar A}{2\pi^3} \sum_n \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \cos\left[\frac{2\pi n\xi}{\omega_T}\right] \kappa \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]} \\ \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi] &= r_{\mathbf{k}1}^p[i\xi] r_{\mathbf{k}2}^p[i\xi] e^{-2\kappa L}. \end{aligned} \quad (4-20)$$

Le facteur correctif pour la force entre deux miroirs identiques s'écrit donc

$$\begin{aligned}\eta_F &= \frac{120L^4}{c\pi^5} \sum_n' \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \cos\left[\frac{2\pi n\xi}{\omega_T}\right] \kappa \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]} \\ \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi] &= (r_{\mathbf{k}}^p[i\xi])^2 e^{-2\kappa L}.\end{aligned}\tag{4-21}$$

Cette formule inclut les effets simultanés de température et de conductivité que nous cherchons à caractériser. Les amplitudes de réflexion décrivent en effet la dépendance en fréquence de la réponse optique des miroirs, comme nous l'avons déjà analysé. La présence du facteur  $\cos\left[\frac{2\pi n\xi}{\omega_T}\right]$  correspond à la prise en compte des fluctuations thermiques. L'évaluation numérique de cette expression fournira bien le facteur correctif global. Nous la présentons maintenant en utilisant le modèle plasma pour caractériser la réponse optique des miroirs. En principe cependant, on peut utiliser les données optiques pour définir cette réponse, comme on l'a fait au chapitre précédent, et donner ainsi un résultat plus général.

## B.2 Evaluations numériques des facteurs correctifs

Nous présentons ici l'évaluation du facteur correctif pour la force obtenue par l'intégration numérique de l'expression (4-21) en utilisant un modèle plasma et en choisissant une température de 300K, ce qui est typiquement le cas pour les expériences récentes. Comme auparavant, les facteurs correctifs sont calculés pour les longueurs de cavité intéressantes expérimentalement, c'est-à-dire sur le domaine 0.1-10 $\mu\text{m}$ . La présence du facteur  $\cos$ , fortement oscillant à haute fréquence, demande une grande attention dans le calcul numérique.

Les résultats pour  $\eta_F$  sont présentés sur la figure 4.2 en trait continu [136]. Ils sont comparés directement avec le facteur de réduction de la force lié aux corrections de conductivité et avec le facteur d'augmentation de la force lié à la température. Ces deux corrections sont calculées comme le  $\eta_F$  mais en faisant une hypothèse simplificatrice : pour le premier, le calcul est fait à température nulle alors que, pour le second, le calcul est fait pour des miroirs parfaits.

La figure 4.3 montre les résultats similaires obtenus sur l'énergie cette fois. Par rapport à celles obtenues pour la force, il y a un effet "d'échange" intéressant : si les corrections de conductivité étaient plus importantes pour la force, en revanche les corrections thermiques sont plus marquées pour l'énergie.

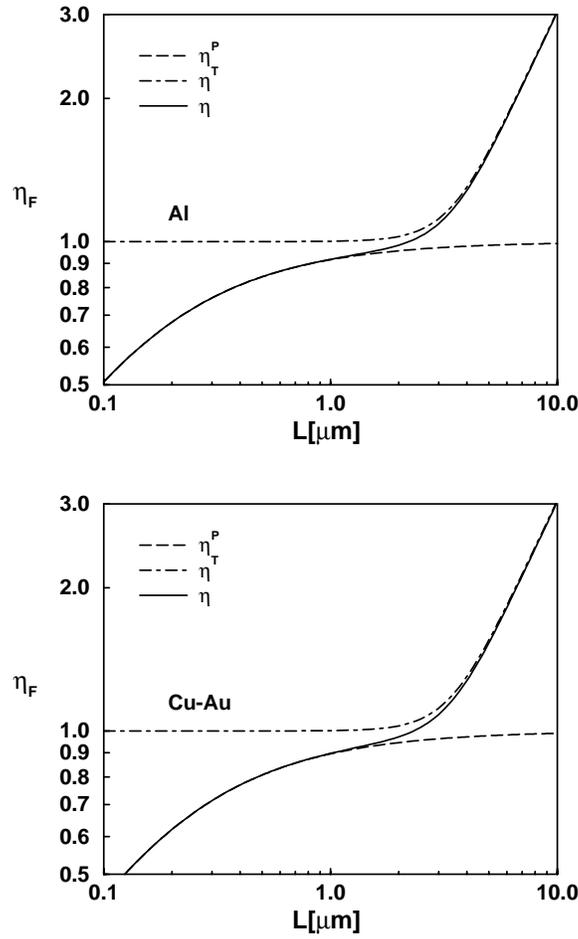


FIG. 4.2 – Facteurs correctifs pour la force calculés pour des miroirs d'aluminium (Al, figure du haut), d'or et de cuivre (Cu-Au, figure du bas) en fonction de la longueur de la cavité  $L$  : en traits pleins, facteur correctif global; en tirets, facteur correctif de conductivité; en traits tiretés, facteur correctif thermique.

### B.3 Facteur de corrélation

La lecture des figures 4.2 et 4.3 montre clairement que les corrections thermiques sont importantes dans la limite des grandes distances alors que c'est à courtes distances que les corrections de conductivité finie dominant. On a donc les deux régimes déjà discutés qualitativement

$$\begin{aligned}
 L \ll \lambda_T &\Rightarrow \eta_F^T \sim 1 \\
 L \gg \lambda_P &\Rightarrow \eta_F^P \sim 1.
 \end{aligned}
 \tag{4-22}$$

Nous menons ici les discussions pour le calcul de la force mais ces discussions s'appliquent aussi bien aux facteurs  $\eta_E$ ,  $\eta_E^T$  et  $\eta_E^P$  corrigeant l'expression de l'énergie.

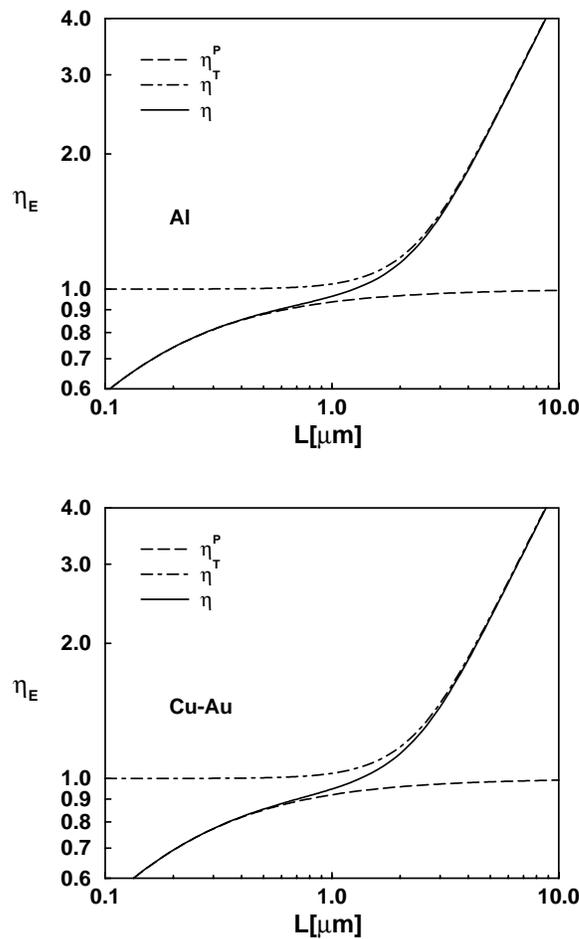


FIG. 4.3 – Facteurs correctifs pour l'énergie pour des miroirs d'aluminium (Al, figure du haut), d'or et de cuivre (Cu-Au, figure du bas) en fonction de la longueur de la cavité  $L$  : en traits pleins, facteur correctif global; en tirets, facteur correctif de conductivité; en traits tiretés, facteur correctif thermique.

Puisque les valeurs typiques de  $\lambda_P \sim 100\text{nm}$  et  $\lambda_T \sim 7\mu\text{m}$  sont bien distinctes, le facteur correctif global  $\eta_F$  se comporte approximativement comme le simple produit des facteurs correctifs de conductivité et thermique, évalués séparément

$$\eta_F \sim \eta_F^P \times \eta_F^T. \quad (4-23)$$

C'est avec cette approximation que sont évaluées usuellement les corrections de conductivité et de température dans les expériences.

Dans une analyse plus fine des figures 4.2 et 4.3, on voit que les deux facteurs correctifs  $\eta_F^P$  et  $\eta_F^T$  sont appréciables dans le domaine de distance entre 1 et  $4\mu\text{m}$ , c'est-à-dire entre les deux cas limites (4-22). Dans ce domaine, l'approximation peut être discu-

table. Ce point est d'autant plus important que ce domaine de distances intermédiaires est expérimentalement exploré. Du point de vue de la comparaison théorie-expérience, il est donc essentiel de préciser les calculs sur ce domaine, afin d'atteindre une précision élevée et de pouvoir discuter de façon très précise la validité de l'approximation habituelle de décorrélation.

Pour répondre à cette question, nous définissons la quantité  $\delta_F$  qui va mesurer le degré de validité de l'approximation en tant que facteur de corrélation

$$\eta_F = \eta_F^P \eta_F^T (1 + \delta_F). \quad (4-24)$$

Par définition même de  $\delta_F$ , l'égalité (4-24) est ici exacte. Sur la figure 4.4 sont tracés le facteur  $\delta_F$  et le facteur  $\delta_E$ , introduit de la même façon pour l'énergie, en fonction de la distance entre les miroirs. On a calculé ces facteurs pour les longueurs plasmas correspondant à Al d'une part, Au-Cu d'autre part, ainsi que pour deux autres longueurs plasma. Ceci va nous permettre de dégager les comportements remarquables de ces facteurs.

Par rapport à l'approximation (4-23), une valeur non nulle de  $\delta_F$  constitue une signature de la corrélation existante entre les corrections de conductivité et de température. On voit sur la figure 4.4 que ces facteurs sont de l'ordre de 1% pour Al et Au-Cu à température ambiante. A un niveau de précision moins bon, le calcul séparé de  $\eta_F^P$  et de  $\eta_F^T$  et l'évaluation du facteur global  $\eta_F$  à partir du simple produit des corrections séparées est donc une méthode utilisable. En revanche, si une précision de 1% ou mieux est visée, l'approximation (4-23) est insuffisante et on doit utiliser le facteur correctif global.

Il faut noter que ces facteurs de corrélation augmentent avec la température ou la longueur plasma. Le signe obtenu sur  $\delta_F$  signifie que l'approximation de décorrélation donne des valeurs sous-estimées pour la force.

Afin de rendre la discussion plus précise, nous donnons des valeurs numériques des facteurs correctifs pour deux distances expérimentalement significatives :  $0.5\mu\text{m}$  et  $3\mu\text{m}$ . La première correspond à la distance minimale pour laquelle le modèle plasma peut être utilisé pour une comparaison précise avec l'expérience (voir section C du chapitre

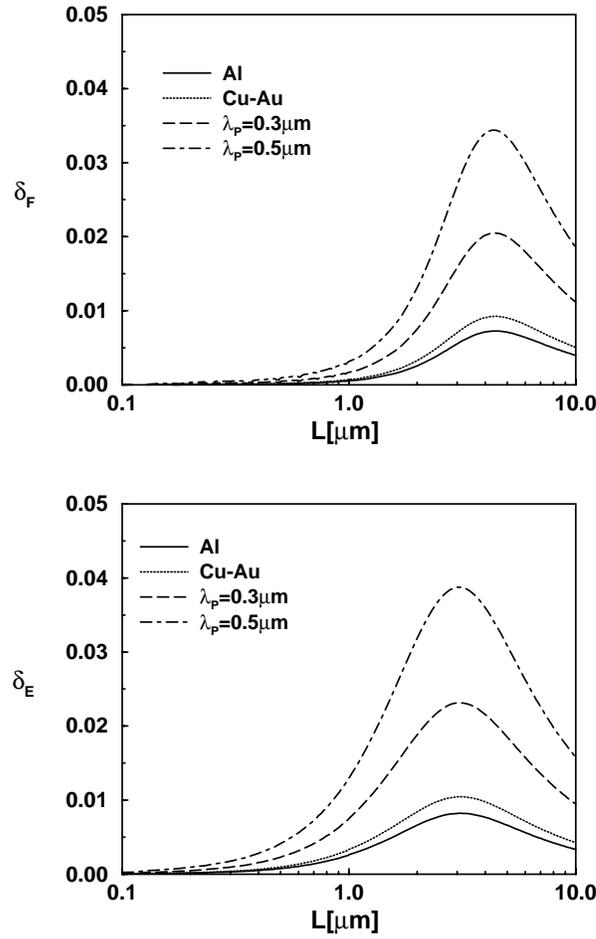


FIG. 4.4 – Corrélations  $\delta_F$  (courbe du haut) et  $\delta_E$  (courbe du bas) en fonction de la longueur de cavité pour les trois métaux Al, Au et Cu et pour deux longueurs plasma ( $\lambda_P = 0.3 - 0.5 \mu\text{m}$ ) supplémentaires.

3).

$$L = 0.5 \mu\text{m}$$

	Al	Cu – Au
$\eta_F^P$	0.843	0.808
$\eta_F$	0.843	0.808
$\eta_E^P$	0.879	0.851
$\eta_E$	0.883	0.855

A cette distance  $L = 0.5 \mu\text{m}$ , la contribution thermique contribue pour moins que un pour mille à la force et à quelques pour mille seulement à l'énergie de Casimir

$$L = 0.5 \mu\text{m} \quad \Rightarrow \quad \eta_F^T = 1.000$$

$$\eta_E^T = 1.004.$$

Au niveau du pourcent, il n'est donc pas nécessaire de tenir compte de la correction thermique.

A des distances encore plus courtes, nous savons qu'il faut tenir compte précisément de la réponse optique du miroir en utilisant les données optiques, comme nous l'avons détaillé au chapitre 3. A ces courtes distances, nous pourrions ignorer la correction thermique complètement. On sera alors simplement ramené pour les corrections de conductivité à la section C du chapitre précédent.

Pour des distances plus grandes, telles que  $L = 3\mu\text{m}$ , la situation est inversée puisque les corrections thermiques deviennent dominantes. La correction de conductivité joue certes un rôle mais le recours au modèle plasma ne pose aucun problème en terme de précision. Nous reportons ci-dessous les corrections thermiques

$$L = 3\mu\text{m} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \eta_F^T &= 1.117 \\ \eta_E^T &= 1.470, \end{aligned}$$

et les autres facteurs

$L = 3\mu\text{m}$	Al	Cu – Au
$\eta_F^P$	0.971	0.963
$\eta_F^P \eta_F^T$	1.084	1.076
$\eta_F$	1.090	1.083
$\eta_E^P$	0.978	0.972
$\eta_E^P \eta_E^T$	1.437	1.429
$\eta_E$	1.449	1.444

Ici, toutes les corrections doivent être prises en compte : les corrections thermiques sont importantes, les miroirs ne peuvent pas être considérés comme parfaits et c'est là que le facteur de corrélation est le plus important.

On remarque que l'effet de corrélation des corrections peut toujours être analysé en utilisant le modèle plasma. Les distances  $L$  pour lesquelles les facteurs de corrélation sont non nuls correspondent en effet au régime  $L \gg \lambda_P$  où le modèle plasma est suffisant pour décrire la réponse optique des métaux.

Nous retiendrons que les facteurs de corrélation entre les deux corrections doivent être pris en compte s'il s'agit d'atteindre une haute précision dans la comparaison théorie-expérience.

## B.4 Loi d'échelle

On remarque sur les courbes de la figure 4.4 que les facteurs de corrélation correspondant à différentes longueurs plasma présentent tous une même dépendance fonctionnelle vis-à-vis de la distance. Leurs maximums respectifs sont atteints pour la même distance typique entre les miroirs et les amplitudes de ces maximums varient linéairement avec la longueur plasma. Ces caractéristiques semblent indiquer l'existence d'une loi d'échelle pour les corrélations

$$\delta_F = \frac{\lambda_P}{\lambda_T} \Delta_F. \quad (4-25)$$

Ceci signifie que le terme de corrélation est alors proportionnel, d'une part, au rapport  $\frac{\lambda_P}{\lambda_T}$  des longueurs d'onde qui caractérisent respectivement les effets plasma et thermique et, d'autre part, à la fonction  $\Delta_F$  qui ne dépend plus que de  $\frac{L}{\lambda_T}$ . Cette loi d'échelle est confirmée sur la figure 4.5 où nous avons tracé

$$\Delta_F = \frac{\lambda_T}{\lambda_P} \delta_F. \quad (4-26)$$

La superposition quasiment parfaite des différentes courbes démontre l'existence d'une telle loi d'échelle. Nous interpréterons l'existence de cette loi dans la prochaine section et nous montrerons que les facteurs  $\Delta_F$  et  $\Delta_E$  peuvent être obtenus analytiquement.

Avant même cette interprétation analytique, nous pouvons remarquer que nous disposons désormais d'une méthode simple pour atteindre une très haute précision dans l'évaluation théorique de la force et de l'énergie de Casimir en présence de corrections de conductivité et de température. Le facteur correctif global est simplement donné par l'expression

$$\begin{aligned} \eta_F &= \eta_F^P \eta_F^T \left( 1 + \frac{\lambda_P}{\lambda_T} \Delta_F \right) \\ \eta_E &= \eta_E^P \eta_E^T \left( 1 + \frac{\lambda_P}{\lambda_T} \Delta_E \right). \end{aligned} \quad (4-27)$$

Cette méthode est moins directe que le recours aux intégrations numériques complètes. Mais elle requiert des calculs plus simples sans pour autant sacrifier la précision à cette simplicité. En effet, les facteurs  $\eta^P$  et  $\eta^T$  sont calculés par un calcul beaucoup plus simple dans lequel soit l'effet de la température, soit l'effet de réflexion imparfaite est ignoré. Ensuite, l'effet de corrélation entre ces deux corrections est estimé par le terme  $\frac{\lambda_P}{\lambda_T} \Delta$  où  $\Delta$  est déduit de la figure 4.5 utilisée comme une abaque. Typiquement, un facteur de corrélation  $\delta$  de l'ordre du pourcent pourra ainsi être estimé avec une

précision bien meilleure. Une alternative à cette méthode graphique est d'utiliser les expressions analytiques que nous allons présenter dans la prochaine section.

## C Expressions analytiques

Dans cette section, nous donnons des résultats analytiques qui peuvent être utiles en complément des résultats numériques déjà présentés. L'idée générale consistera à utiliser la décomposition des effets du vide et des effets thermiques que nous avons démontrés précédemment.

En effet, dans l'équation (4-21), la contribution  $m = 0$  correspond à l'effet du vide et s'identifie donc à la correction de conductivité seule

$$\eta_F^P = \frac{60L^4}{c\pi^5} \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \kappa \left[ \frac{\rho_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[i\xi]} + \frac{\rho_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}[i\xi]} \right]. \quad (4-28)$$

Les autres contributions  $m \geq 1$  s'identifient donc aux effets thermiques et nous les décomposerons ici en deux parties correspondant, d'une part, aux effets thermiques pour des miroirs parfaits

$$(\eta_F^T - 1) = \frac{240L^4}{c\pi^5} \sum_{m=1}^\infty \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \cos \left[ \frac{2\pi m\xi}{\omega_T} \right] \kappa \frac{2e^{-2\kappa L}}{1 - e^{-2\kappa L}} \quad (4-29)$$

et, d'autre part, à un résidu  $\Delta\eta_F$  qui est une manière alternative de représenter le mélange des corrections de conductivité et de température

$$\begin{aligned} \Delta\eta_F &= \frac{240L^4}{c\pi^5} \sum_{m=1}^\infty \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \cos \left[ \frac{2\pi m\xi}{\omega_T} \right] \kappa \Delta f \\ \Delta f &= \frac{\rho_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[i\xi]} + \frac{\rho_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}[i\xi]} - \frac{2e^{-2\kappa L}}{1 - e^{-2\kappa L}}. \end{aligned} \quad (4-30)$$

Ces trois termes composent ensemble le facteur correctif

$$\eta_F = \eta_F^P + (\eta_F^T - 1) + \Delta\eta_F. \quad (4-31)$$

La correction de conductivité seule,  $\eta_F^P$ , a déjà été discutée longuement dans la partie C du chapitre 3. Nous voulons ici discuter également la correction thermique  $\eta_F^T$  évaluée pour des miroirs parfaits ainsi que la correction supplémentaire  $\Delta\eta_F$ . Ceci nous permettra de dériver analytiquement les expressions obtenues dans la section

précédente pour le facteur de corrélation. Nous utiliserons alors la condition  $\lambda_P \ll \lambda_T$  dont nous avons vu qu'elle est valable dans toutes les expériences faites avec des métaux usuels ( $\lambda_P \sim 0.1\mu\text{m}$ ) à température ordinaire ( $\lambda_T \sim 7\mu\text{m}$ ).

Nous donnerons ici aussi les facteurs calculés pour l'énergie

$$\eta_E = \eta_E^P + (\eta_E^T - 1) + \Delta\eta_E. \quad (4-32)$$

mais repoussons en appendice les détails des calculs.

### C.1 Correction thermique pour des miroirs parfaits

Nous détaillons ici le terme  $(\eta_F^T - 1)$ . En intégrant sur les fréquences  $\xi$ , on montre dans l'appendice B que (4-29) se réécrit sous forme d'une série

$$(\eta_F^T - 1) = 30 \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(\alpha m)^4} - \frac{\cosh[\alpha m]}{\alpha m \sinh^3[\alpha m]} \right). \quad (4-33)$$

Ce résultat est identique à celui donné par des calculs antérieurs [56, 77, 142]. Le paramètre  $\alpha = \frac{\pi\lambda_T}{2L}$  est encore une autre manière de représenter une échelle naturelle de température

$$T_{\text{eff}} = \frac{\hbar c}{2k_B L}, \quad \alpha = \frac{\pi T_{\text{eff}}}{T} = \frac{\pi\lambda_T}{2L}. \quad (4-34)$$

La température effective  $T_{\text{eff}}$  dépend de la distance entre les miroirs.

Pour le terme correspondant en énergie, à partir de l'intégration

$$E(L) - E_{\text{Cas}} = \int_L^{\infty} dx (\eta_F^T - 1) F_{\text{Cas}}, \quad (4-35)$$

on obtient après normalisation par l'énergie idéale de Casimir

$$(\eta_E^T - 1) = 45 \sum_{m=1}^{\infty} \left( -\frac{2}{(\alpha m)^4} + \frac{1}{(\alpha m)^3 \tanh[\alpha m]} + \frac{1}{(\alpha m)^2 \sinh^2[\alpha m]} \right). \quad (4-36)$$

### C.2 Correction supplémentaire

Les discussions menées plus haut suggèrent que le terme  $\Delta\eta_F$  doit correspondre à un domaine de longueur de cavité dans lequel existent à la fois les corrections de conductivité et les corrections thermiques. Typiquement comme on l'a vu, avec  $\lambda_P \sim$

$0.1\mu\text{m}$  et  $\lambda_T \sim 7\mu\text{m}$ , ces distances sont centrées autour de  $1\mu\text{m}$ . On est donc dans un régime

$$\lambda_P \ll L \ll \lambda_T \quad (4-37)$$

dans lequel un développement perturbatif en puissances de  $\lambda_P$  est possible. Au premier ordre, d'après l'appendice B, nous trouvons

$$\begin{aligned} \Delta f &\sim -\frac{e^{2\kappa L}}{(e^{2\kappa L} - 1)^2} \left(1 - (r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}})^2 + 1 - (r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}})^2\right) \\ &\sim -\frac{e^{2\kappa L}}{(e^{2\kappa L} - 1)^2} \frac{2\kappa\lambda_P}{\pi} \left(1 + \frac{\xi^2}{\kappa^2}\right). \end{aligned} \quad (4-38)$$

Reporté dans (4-30), ce développement permet de définir une fonction  $\phi_F$  qui apparaît multipliée par le facteur a-dimensionné  $\frac{\lambda_P}{L}$  dans l'expression de  $\Delta\eta_F$

$$\Delta\eta_F \simeq \frac{\lambda_P}{L} \phi_F. \quad (4-39)$$

Cette fonction est indépendante de  $\lambda_P$ , i.e. des caractéristiques optiques des miroirs et elle sera dite universelle. Des calculs assez directs conduisent à son expression

$$\begin{aligned} \phi_F &= \frac{15}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(\alpha m)^3 \tanh[\alpha m]} + \frac{1}{(\alpha m)^2 \sinh^2[\alpha m]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4 \cosh[\alpha m]}{\alpha m \sinh^3[\alpha m]} - \frac{2 + 4 \cosh^2[\alpha m]}{\sinh^4[\alpha m]} \right). \end{aligned} \quad (4-40)$$

On procède de même pour l'énergie

$$\Delta\eta_E E_{C_{\text{as}}} = \int_L^{\infty} dx \Delta\eta_F F_{C_{\text{as}}}. \quad (4-41)$$

Le résultat sur ce facteur correctif prend alors la forme

$$\begin{aligned} \Delta\eta_E &= \frac{\lambda_P}{L} \phi_E \\ \phi_E &= -45 \sum_{m=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{(\alpha m)^3 \tanh[\alpha m]} - \frac{1}{(\alpha m)^2 \sinh^2[\alpha m]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 \cosh[\alpha m]}{\alpha m \sinh^3[\alpha m]} + \frac{4}{(\alpha m)^4} \right). \end{aligned} \quad (4-42)$$

### C.3 Expression analytique des facteurs de corrélation

Nous pouvons maintenant donner une dérivation analytique de la loi d'échelle que nous avons présentée dans la section précédente. Cette loi sera valable dans le régime de grande distance  $L \gg \lambda_P$ . On rappelle d'abord les développements obtenus pour les corrections de conductivité  $\eta_F^P$  et  $\eta_E^P$  dans ce régime

$$\begin{aligned}\eta_F^P &= 1 - \frac{8}{3\pi} \frac{\lambda_P}{L} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_P}{L}\right)^2\right) \\ \eta_E^P &= 1 - \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_P}{L} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_P}{L}\right)^2\right).\end{aligned}\quad (4-43)$$

En partant des expressions (4-31,4-32) des facteurs correctifs, on peut regrouper les résultats obtenus pour les différents facteurs et obtenir ainsi respectivement pour la force et l'énergie,

$$\begin{aligned}\eta_F &= \eta_F^P \eta_F^T + (1 - \eta_F^P) (\eta_F^T - 1) + \Delta\eta_F \\ &\simeq \eta_F^P \eta_F^T + \frac{8}{3\pi} \frac{\lambda_P}{L} (\eta_F^T - 1) + \frac{\lambda_P}{L} \phi_F \\ \eta_E &= \eta_E^P \eta_E^T + (1 - \eta_E^P) (\eta_E^T - 1) + \Delta\eta_E \\ &\simeq \eta_E^P \eta_E^T + \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_P}{L} (\eta_E^T - 1) + \frac{\lambda_P}{L} \phi_E.\end{aligned}\quad (4-44)$$

Nous avons développé les termes correctifs  $\eta^P$  et  $\Delta^P$  au premier ordre en  $\frac{\lambda_P}{L}$ . Nous en déduisons finalement la loi d'échelle (4-27) avec

$$\begin{aligned}\Delta_F &= \frac{8}{3\pi} \frac{\lambda_T}{L} \frac{(\eta_F^T - 1)}{\eta_F^T} + \frac{\lambda_T}{L} \frac{\phi_F}{\eta_F^T} \\ \Delta_E &= \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_T}{L} \frac{(\eta_E^T - 1)}{\eta_E^T} + \frac{\lambda_T}{L} \frac{\phi_E}{\eta_E^T}.\end{aligned}\quad (4-45)$$

Ces fonctions ne dépendent plus de  $\lambda_P$  : on a déjà insisté sur leur caractère universel. Elles sont tracées sur la figure 4.5 où l'on voit qu'elles coïncident à mieux que 1% avec les résultats des calculs numériques de la section précédente.

### C.4 Comportements asymptotiques

Ces résultats analytiques montrent que l'influence des contributions thermiques se définit à l'aide du paramètre  $\alpha$ , c'est-à-dire en termes de température effective, que ce soient pour des miroirs parfaits ou des miroirs plasma. Nous donnons à présent les

comportements asymptotiques basse et haute températures quand ces limites correspondent respectivement aux régimes

$$\begin{aligned}\alpha \gg 1 & \quad \leftrightarrow \quad T \ll T_{\text{eff}} \\ \alpha \ll 1 & \quad \leftrightarrow \quad T \gg T_{\text{eff}}.\end{aligned}\tag{4-46}$$

Nous commencerons par détailler la limite  $\alpha \gg 1$ . Cette limite implique en termes de longueur de cavité  $L \ll \lambda_T$ . Nous supposons par ailleurs que le traitement perturbatif en  $\frac{\lambda_P}{L}$  est toujours possible, i.e. que

$$\lambda_P \ll L \ll \lambda_T.\tag{4-47}$$

Dans ce secteur (4-47), les formules que nous venons de dériver se traitent naturellement en séries de perturbation en  $\frac{1}{\alpha}$ . Nous retiendrons uniquement les termes de contribution dominante sur les expressions de chaque facteur correctif. Ainsi on obtient pour  $(\eta_F^T - 1)$  donné en (4-33)

$$\begin{aligned}\alpha \gg 1 \quad \Rightarrow \quad (\eta_F^T - 1) &= 30 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha m)^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha} e^{-2\alpha}\right) \\ &= \frac{30}{\alpha^4} \zeta(4) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha} e^{-2\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{T}{T_{\text{eff}}}\right)^4 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha} e^{-2\alpha}\right).\end{aligned}\tag{4-48}$$

En utilisant le même argument pour  $\Delta\eta_F$ , on obtient

$$\begin{aligned}\phi_F &= \frac{15}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha m)^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha} e^{-2\alpha}\right) \\ &= \frac{15}{\pi} \frac{1}{\alpha^3} \zeta(3) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha} e^{-2\alpha}\right) \\ &= \frac{15}{\pi^4} \left(\frac{T}{T_{\text{eff}}}\right)^3 \zeta(3) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha} e^{-2\alpha}\right).\end{aligned}\tag{4-49}$$

En rappelant (4-43), on peut donner le comportement du facteur correctif global quand (4-47) est vérifiée

$$\eta_F = 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{T}{T_{\text{eff}}}\right)^4 - \frac{8}{3\pi} \frac{\lambda_P}{L} \left[ 1 - \frac{45}{8\pi^3} \zeta(3) \left(\frac{T}{T_{\text{eff}}}\right)^3 \right] + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_P}{L}\right)^2, \frac{1}{\alpha} e^{-2\alpha}\right).\tag{4-50}$$

Ce résultat est retrouvé chez [56, 143].

On fait les mêmes comparaisons au niveau des facteurs correctifs en énergie, en ne

conservant que les termes prédominants dans la limite  $\alpha \gg 1$ . On peut ainsi approximer

$$\begin{aligned} (\eta_E^T - 1) &= 45 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha m)^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha^2} e^{-2\alpha}\right) \\ &= \frac{45}{\pi^3} \left(\frac{T}{T_{\text{eff}}}\right)^3 \zeta(3) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha^2} e^{-2\alpha}\right). \end{aligned} \quad (4-51)$$

De la même façon pour le terme  $\Delta\eta_E$ , la contribution dominante est identifiée

$$\begin{aligned} \phi_E &= \frac{45}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha m)^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha^2} e^{-2\alpha}\right) \\ &= \frac{45}{\pi^4} \left(\frac{T}{T_{\text{eff}}}\right)^3 \zeta(3) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha^2} e^{-2\alpha}\right). \end{aligned} \quad (4-52)$$

En utilisant (4-43), on obtient le comportement à  $\alpha \gg 1$  du facteur correctif en énergie

$$\begin{aligned} \eta_E &= \frac{45}{\pi^3} \left(\frac{T}{T_{\text{eff}}}\right)^3 \zeta(3) - \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_P}{L} \left[ 1 - \frac{45}{2\pi^3} \left(\frac{T}{T_{\text{eff}}}\right)^3 \zeta(3) \right] \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_P}{L}\right)^2, \frac{1}{\alpha^2} e^{-2\alpha}\right). \end{aligned} \quad (4-53)$$

Dans la limite du miroir parfait  $\lambda_P \rightarrow 0$ , on retrouve le résultat connu pour les corrections thermiques [77].

Le régime opposé  $\alpha \ll 1$  défini en (4-46) correspond à la limite des hautes températures  $T \gg T_{\text{eff}}$ . En termes de longueur de cavité, il conduit nécessairement aux inégalités

$$\lambda_P \ll \lambda_T \ll L. \quad (4-54)$$

Dans cette limite, les expressions (4-29), (4-30) que nous venons de dériver ne sont pas adaptées : il n'est pas possible de développer perturbativement en  $\alpha \ll 1$ . Ce problème rappelle celui rencontré pour les corrections de conductivité où les deux régimes  $\frac{\lambda_P}{L} \ll 1$  et  $\frac{\lambda_P}{L} \gg 1$  ne sont pas uniformément connectés. Pour effectuer ces développements dans la limite  $\alpha \ll 1$ , il est indispensable de recourir à la propriété remarquable de symétrie d'inversion en température des contributions thermiques pour la force et l'énergie de Casimir. Cette symétrie a été remarquée initialement par Brown et Maclay [77] et est souvent utilisée dans un contexte plus large de théorie des champs [144]. Elle s'exprime symboliquement par des relations du type

$$f\left(\frac{T}{T_{\text{eff}}}\right) + f\left(\frac{T_{\text{eff}}}{T}\right) \equiv 0 \quad f(\alpha) + f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \equiv 0, \quad (4-55)$$

qui permettent de passer d'une forme en température à sa forme duale. Ainsi s'établit la connexion entre  $f(\alpha)$  développable pour  $\alpha \gg 1$  et  $f(\frac{1}{\alpha})$  développable pour  $\alpha \ll 1$ .

Nous détaillons les calculs correspondants dans l'appendice B. Ici, nous nous contentons de donner les résultats obtenus à la fin de ce calcul pour  $\eta_F$

$$\eta_F = \frac{15}{\pi^2 \alpha} \zeta(3) \left( 2 - \frac{3 \lambda_P}{\pi L} \right) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{\lambda_P}{L} \right)^2, \frac{1}{\alpha^2} e^{-2 \frac{\pi^2}{\alpha}} \right) \quad (4-56)$$

et pour  $\eta_E$

$$\eta_E = \frac{45}{\pi^2 \alpha} \zeta(3) \left( 1 - \frac{1 \lambda_P}{\pi L} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\alpha^2} e^{-2 \frac{\pi^2}{\alpha}} \right), \quad (4-57)$$

en accord avec [143]. Ces facteurs vont donc définir respectivement une force et une énergie de Casimir indépendantes de  $\hbar$  : on parle à ce titre de limite classique.

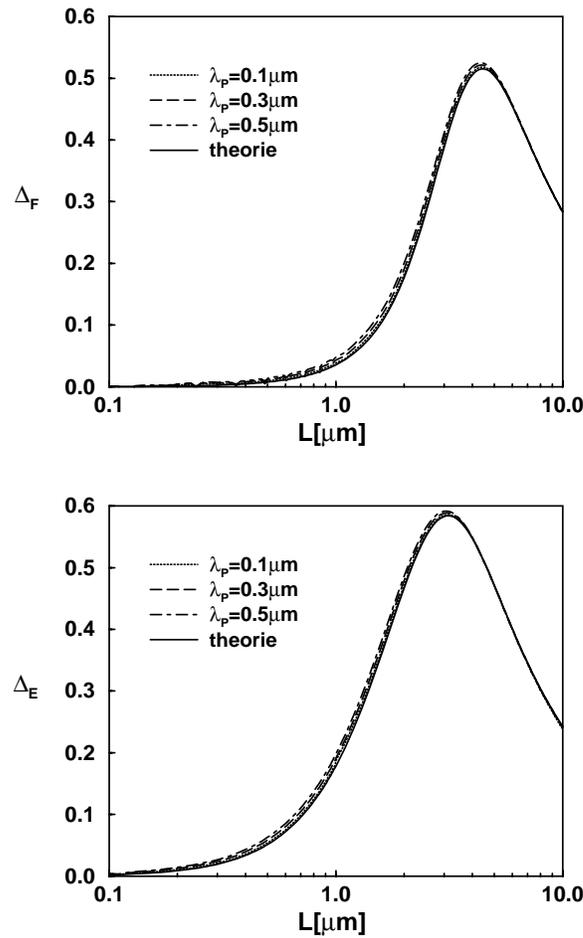


FIG. 4.5 – Les facteurs de corrélation représentés pour la force (courbes du haut) et pour l'énergie (courbes du bas) après le rééchelonnement décrit par l'équation (4-26). Différentes longueurs plasma correspondent à des courbes quasiment identiques, représentées en traits plein, tiret et pointillés. Ces courbes coïncident presque parfaitement avec les expressions analytiques dérivées en (4-45) et représentées ici par les courbes en trait gras.

## Chapitre 5

# La polémique sur les miroirs dissipatifs à température non nulle

Nous avons présenté au chapitre précédent la façon dont nous dérivons l'expression de la force à température non nulle. Comme nous l'avons expliqué, cette expression est valable pour tous les miroirs, qu'ils soient diélectriques ou métalliques, dissipatifs ou non dissipatifs. Cette formulation est basée sur la décomposition en série d'exponentielles de la fonction  $\coth$  qui représente les fluctuations thermiques.

Il existe une formulation alternative, qui a été dérivée par Lifshitz [30] et qui est très largement utilisée dans la littérature. Cette formulation est donnée, comme nous allons le voir dans ce chapitre, à partir d'une décomposition du  $\coth$  sur ses pôles. Cette formulation alternative est équivalente à celle que nous avons utilisée quand les amplitudes de réflexion obéissent à des conditions de régularité que nous spécifierons plus loin. Malheureusement, ce n'est pas le cas pour les modèles de miroirs métalliques prenant en compte la dissipation alors que ce sont justement ces modèles qui décrivent les expériences récentes. A partir de cette difficulté purement mathématique s'est développée une discussion polémique qui a pris des proportions considérables récemment [145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152].

Dans le présent chapitre, nous décrivons la formulation dite de Lifshitz, nous discutons les difficultés de cette formulation et nous montrons comment les résoudre. Les résultats de cette analyse ne modifient en rien les conclusions du chapitre précédent. Les détails les plus techniques sont renvoyés dans l'appendice C.

## A La formulation dite de Lifshitz

### A.1 Décomposition sur les pôles du coth

Nous partons de l'expression initiale de la force écrite sur l'axe réel, à température non nulle

$$F(L) = \frac{\hbar A}{2\pi} \sum_p \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \int_0^\infty d\omega k_z \coth \left[ \frac{\pi}{\omega_T} \omega \right] (-f_{\mathbf{k}}[\omega] - f_{\mathbf{k}}[\omega]^*), \quad (5-1)$$

où  $f_{\mathbf{k}}^p[\omega]$  est toujours ici la fonction “boucle” décrivant la réponse optique de la cavité.

Avec les conditions détaillées au chapitre 2, nous utilisons à nouveau le théorème de Cauchy pour écrire l'expression de la force sur l'axe imaginaire. Nous définissons le contour d'intégration de telle sorte que les pôles du coth restent exclus de l'intérieur de ce contour. Autrement dit, la partie  $C_i$  du contour utilisé pour la partie retardée est décalée à l'aide d'un régulateur  $\eta$  par rapport à l'axe  $z = i\xi$  (voir le chapitre 2 et en particulier la figure 2.3). On procède de même pour la partie avancée de la fonction de réponse (voir la figure 2.4 du chapitre 2). On obtient ainsi l'expression de la force sur l'axe imaginaire

$$F(L) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\hbar A}{2\pi} \sum_p \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \int_0^\infty d\xi \kappa \left( \coth \left[ \frac{\pi}{\omega_T} (i\xi + \eta) \right] f_{\mathbf{k}}^p[i\xi + \eta] + \coth \left[ -\frac{\pi}{\omega_T} (i\xi - \eta) \right] f_{\mathbf{k}}^p[i\xi - \eta] \right). \quad (5-2)$$

On peut alors décomposer le coth sur ses pôles

$$\coth \left[ \frac{\pi}{\omega_T} (i\xi + \eta) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_T}{\pi} \frac{1}{\eta + i\xi - in\omega_T} \quad (5-3)$$

puis introduire les relations habituelles dans l'espace des distributions

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{ix \pm \eta} = \mathcal{P} \frac{1}{ix} \pm \pi \delta(x). \quad (5-4)$$

$\mathcal{P}$  désigne la valeur principale au sens de Cauchy.

Si nous supposons que la fonction  $f_{\mathbf{k}}^p[i\xi]$  est suffisamment régulière (nous allons préciser la signification de cette hypothèse plus loin), alors nous déduisons que la force est déterminée par l'expression

$$F(L) = 2k_B T A \sum_p \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} d\xi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \kappa f_{\mathbf{k}}^p[i\xi] \delta(\xi - n\omega_T). \quad (5-5)$$

On obtient alors l'expression donnée par Lifshitz [30] que nous présentons sous la forme

$$F(L) = \frac{k_B T A}{2\pi^2} \sum'_n \sum_p \int d^2\mathbf{k} \kappa_n f_{\mathbf{k}}^p [i\xi_n]. \quad (5-6)$$

La notation  $\sum'_n$  a été introduite au chapitre précédent (voir l'équation 4-10 de ce chapitre). Les fréquences et vecteurs d'onde ont leurs expressions usuelles, prises sur les pôles du coth

$$\begin{aligned} \xi_n &= n\omega_T = \frac{2n\pi k_B T}{\hbar} \\ \kappa_n &= \sqrt{\frac{\xi_n^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}. \end{aligned} \quad (5-7)$$

Nous avons maintenant deux formulations alternatives pour la force de Casimir. Celle que nous venons de dériver sera appelée “formulation de Lifshitz”

$$\begin{aligned} F(L) &= \frac{k_B T A}{2\pi^2} \sum'_n F(n) \\ F(n) &= \sum_p \int d^2\mathbf{k} \kappa_n \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p [i\xi_n]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p [i\xi_n]} \\ \rho_{\mathbf{k}}^p [i\xi] &= r_{\mathbf{k}}^p [i\xi] e^{-2\kappa L}. \end{aligned} \quad (5-8)$$

C'est une somme sur les pôles du coth, c'est-à-dire aussi sur les fréquences de Matsubara. Par contre, la formulation que nous avons présentée au chapitre précédent consiste en une décomposition de Fourier du coth

$$\begin{aligned} F(L) &= \frac{\hbar A}{2\pi^3} \sum'_n \tilde{F}(n) \\ \tilde{F}(n) &= \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \cos \left[ \frac{2\pi n \xi}{\omega_T} \right] \kappa \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p [i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p [i\xi]}. \end{aligned} \quad (5-9)$$

Dans la dérivation que nous avons présentée de la formule de Lifshitz, nous avons supposé au niveau de (5-2) que  $f_{\mathbf{k}}^p [i\xi]$  ne présente pas de singularité sur l'axe des fréquences imaginaires et qu'on pouvait immédiatement omettre les  $\eta$  dans  $f_{\mathbf{k}}^p [i\xi \pm \eta]$  et factoriser l'expression par  $f_{\mathbf{k}}^p [i\xi]$ . Quand ce n'est pas le cas, cette dérivation n'est plus valable. Autrement dit, la décomposition du coth sur ses pôles introduit des distributions  $\delta(\xi - n\omega_T)$  qui génèrent la somme apparaissant en (5-8). Du point de vue de la théorie des distributions,  $\kappa f_{\mathbf{k}}^p [i\xi]$  joue alors le rôle d'une fonction test [153]. On sait

bien que la théorie des distributions a besoin d'hypothèses fortes sur la régularité des fonctions tests. En particulier, ces hypothèses requièrent nécessairement la continuité de  $\kappa f_{\mathbf{k}}^p [i\xi]$  en  $\xi = 0$ .

C'est ce point qui va se révéler critique dans les discussions qui suivent. La fonction de réponse  $f_{\mathbf{k}}^p [i\xi]$  étant construite à partir des amplitudes de réflexion, les conditions de validité de la formule (5-8) dépendront crucialement du comportement de ces amplitudes autour de  $\xi = 0$ .

## A.2 Lien entre les deux formulations

Dans notre formulation en revanche, une non analyticité ou une discontinuité ponctuelle est sans effet sur le calcul de la force ou de l'énergie. L'expression intégrée

$$\int_0^{\infty} d\xi \cos \left[ \frac{2\pi n \xi}{\omega_T} \right] \kappa f_{\mathbf{k}}^p [i\xi] \quad (5-10)$$

est en effet définie à partir du moment où  $f_{\mathbf{k}}^p [i\xi]$  est réglée, c'est-à-dire discontinue au plus sur un ensemble dénombrable de points du domaine d'intégration avec des limites finies à gauche et à droite des points de discontinuité. La structure de la fonction de réponse  $f_{\mathbf{k}}^p [i\xi]$  comme fonction "boucle" garantit son caractère réglé. En effet, il est clair qu'une singularité sur l'amplitude de réflexion  $r_{\mathbf{k}}^p [i\xi]$  n'induera pas de divergence pour  $f_{\mathbf{k}}^p [i\xi]$ . Autrement dit, la fonction de transfert peut être discontinue si les amplitudes de réflexion le sont, mais elle sera toujours bornée. La contribution des discontinuités sur un ensemble dénombrable de points sera de mesure nulle et donc sans conséquence sur la valeur de l'intégrale. Cet argument permet de comprendre qu'une discontinuité de  $f_{\mathbf{k}}^p [i\xi]$  n'a pas d'influence sur la formule (5-10), alors qu'elle s'avère critique dans la formulation de Lifshitz.

Ces deux formulations sont souvent présentées comme équivalentes par application de la formule sommatoire de Poisson. Bien sûr, une analyse précise, du même type que celle que nous venons de faire, va montrer que cette formule de Poisson est valable seulement sous certaines conditions de régularité.

La formule sommatoire de Poisson [153] est une égalité établie entre des sommes définies sur une fonction et sa transformée de Fourier. Pour la présenter, récrivons la fonction  $F$  définie en (5-8)

$$F(x) = \sum_p \int d^2\mathbf{k} \kappa(x) f_{\mathbf{k}}^p [i\xi(x)], \quad (5-11)$$

ainsi que sa transformée de Fourier

$$\tilde{F}(t) = \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \cos\left[\frac{\pi t\xi}{\omega_T}\right] \kappa f_{\mathbf{k}}^p[i\xi] \quad (5-12)$$

qui n'est autre que la fonction apparaissant en (5-9).

La formule sommatoire de Poisson consiste en l'égalité

$$\sum'_n F(x+n) = \frac{2}{\omega_T} \sum'_m \tilde{F}(m) e^{2i\pi mx}. \quad (5-13)$$

Cette égalité est vraie "presque partout" étant donné le caractère réglé de  $F(x)$ . Quand  $f_{\mathbf{k}}^p[i\xi]$  est continue en  $\xi = 0$ , elle est vraie également au point  $\xi = 0$

$$\sum'_n F(n) = \frac{2}{\omega_T} \sum'_m \tilde{F}(m). \quad (5-14)$$

Quand ce prolongement est possible, il établit l'équivalence entre notre formulation et celle de Lifshitz. Mais le point essentiel est que l'égalité (5-14) n'est pas vérifiée quand  $f_{\mathbf{k}}^p[i\xi]$  n'est pas continue en  $\xi = 0$ . Les deux formules ne sont plus équivalentes : la formule dite de Lifshitz donne alors un résultat incorrect alors que la formule présentée au chapitre 4 donne encore le bon résultat.

Nous allons maintenant présenter quelques prédictions engendrées par la formule de Lifshitz dans la littérature.

## B Limite haute température

Le régime de haute température apparaît comme un régime critique pour la formulation de Lifshitz. En présentant les prédictions que cette formulation implique, nous retrouverons les principaux éléments de la polémique qui s'est développée à ce sujet dans la littérature. En utilisant la notion de température effective, définie en 4 C, ce régime se caractérise par la condition

$$T \gg T_{\text{eff}} = \frac{\hbar c}{2k_B L}. \quad (5-15)$$

A cette limite, le terme quasistatique  $n = 0$  est prédominant dans (5-8). Les exponentielles  $e^{-2\kappa_n L}$  jouent en effet le rôle de facteurs de coupures pour les termes  $n \geq 1$  puisque

$$2\kappa_n L \sim 2\pi n \frac{T}{T_{\text{eff}}} \gg 1, \quad n \geq 1. \quad (5-16)$$

On pourra alors écrire à cette limite

$$T \gg T_{\text{eff}} \quad \rightarrow \quad F_{\text{Lifshitz}} \simeq \frac{k_B T A}{4\pi^2} \mathbf{F}(n=0). \quad (5-17)$$

Ce sont donc les amplitudes de réflexion calculée à la limite quasistatique, en  $n=0$ , qui détermineront le comportement haute température de la force. Des expressions différentes pour celles-ci engendreront des comportements différents. C'est ce point que nous abordons à présent, en le détaillant pour les miroirs parfaits ou décrits par un modèle plasma ou un modèle de Drude.

## B.1 Cas des miroirs parfaits

Pour des miroirs parfaitement réfléchissants, on a pour les amplitudes de réflexion

$$r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}[i\xi_n] = -1 \quad \text{et} \quad r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[i\xi_n] = -1, \quad (5-18)$$

uniformément pour tout  $n$ . On peut alors directement évaluer la contribution quasistatique et donner le comportement haute température de la force par l'expression suivante

$$T \gg T_{\text{eff}} \quad \rightarrow \quad F_{\text{parfait}} \simeq \frac{k_B T A}{4\pi L^3} \zeta(3). \quad (5-19)$$

On parle pour cette limite haute température de la limite "classique" de la force de Casimir, l'expression étant indépendante de  $\hbar$ .

## B.2 Le modèle plasma

Dans le cadre du modèle plasma, les amplitudes de réflexion en polarisation TM et TE sont, à la limite quasistatique,

$$r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}[0] = \frac{|\mathbf{k}| - \sqrt{\frac{\omega_p^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}}{|\mathbf{k}| + \sqrt{\frac{\omega_p^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}} \quad \text{et} \quad r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[0] = -1. \quad (5-20)$$

A partir de ces expressions, nous donnons en appendice l'expression du terme  $n=0$ . Pour le comportement à grandes distances, on pourra considérer la limite  $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$  de la formule précédente pour lequel

$$r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}[0] = -1 \quad \text{et} \quad r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[0] = -1. \quad (5-21)$$

Nous déduisons alors que la limite haute température coïncide avec le résultat (5-19) obtenu dans la limite du miroir parfait.

### B.3 Le modèle de Drude

Le modèle de Drude, en revanche, ne permet pas de retrouver cette limite du miroir parfait à partir de la limite haute température. A la limite quasistatique  $n = 0$ , les amplitudes de réflexion sont en effet données par

$$r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}} [0] = 0 \quad \text{et} \quad r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}} [0] = -1. \quad (5-22)$$

Ceci est discuté en détail dans l'appendice C.

Cette perte de la contribution des modes TE a pour conséquence immédiate de réduire d'un facteur 2 l'expression du terme quasistatique. On obtient alors à haute température

$$T \gg T_{\text{eff}} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{Drude}} \simeq \frac{k_B T A}{8\pi L^3} \zeta(3), \quad (5-23)$$

Cette limite ne coïncide pas avec celle définie pour les miroirs parfaits ou les miroirs de type plasma. De plus, on ne retrouve pas le résultat correspondant au modèle plasma, dans la limite de dissipation nulle  $\Gamma \rightarrow 0$ . A cette limite pourtant, la permittivité du modèle de Drude tend bien vers celle du modèle plasma. Pour ces raisons, le modèle de Drude a souvent été considéré comme problématique [151]. Il est pourtant clair que ce modèle, qui prend en compte la relaxation des électrons de conduction, est une description de la réponse métallique plus réaliste que le modèle plasma (voir la section C.1).

Autrement dit, avec le modèle de Drude, les limites haute température et miroirs parfaits ne commutent pas alors qu'elle commutent si l'on utilise un modèle plasma. Schwinger [56] est le premier à avoir remarqué cette non-commutativité. Pour récupérer le comportement (5-19), Schwinger a imposé la prescription consistant à prendre la limite des miroirs parfaits *avant* de considérer la limite haute température. Cette prescription permet évidemment de retrouver (5-19) pour tous modèles de métaux. Mais n'expliquant rien, elle ne dit pas pourquoi un certain ordre est imposé pour prendre les limites. Enfin, en prenant d'abord la limite du miroir parfait, la prescription de Schwinger renonce au problème le plus important. Il est clair en effet que si la limite du miroir parfait est prise en premier lieu, il n'est plus question de discuter de l'effet sur la force de la prise en compte des propriétés réelles des miroirs utilisés dans les expériences !

## C La polémique récente

Les discussions que nous venons de présenter ont été développées récemment [145, 146]. Elles insistent toutes sur la différence de traitement entre le modèle plasma et le modèle de Drude. Elles se heurtent à des résultats contradictoires (5-19,5-23) qui auraient des implications physiques considérables s'ils étaient vrais.

Ainsi, Boström conclut à la disparition dans la limite quasistatique de la contribution des modes polarisés TE pour la force et l'énergie de Casimir calculées par un modèle de Drude [145]. Une manifestation spectaculaire de cette perte de contribution est le comportement (5-23) de la force et de l'énergie, réduites d'un facteur 2 par rapport aux force et énergie calculées entre des miroirs décrits par un modèle plasma. Ce résultat engendre dans le même temps des prédictions thermodynamiques suspectes, comme par exemple l'existence d'une gamme de longueur de cavité sur laquelle l'entropie du système est négative [151].

Alors que le calcul de Boström est celui auquel on aboutit si l'on suit fidèlement, comme en B.3, les étapes du calcul depuis la formule initiale de Lifshitz, un autre point de vue a été parallèlement développé [146]. Mathématiquement, cette "version" est encore plus problématique : elle engendre en effet une contribution linéaire en température à courte distance, alors que nous avons démontré que les corrections thermiques à courtes distances sont échelonnées en  $\mathcal{O}\left(\left(\frac{T}{T_{\text{eff}}}\right)^3\right)$ . En fait, ces résultats reposent sur des erreurs de calculs identifiables.

Analysant ces résultats problématiques, Klimchitskaya *et al.* ont introduit une prescription de type Schwinger "généralisée" au sens où elle sélectionne les termes du calcul de Lifshitz à conserver pour retrouver dans le cadre du modèle de Drude des résultats de même forme que ceux donnés par le modèle plasma [151, 152]. Là encore, cette prescription n'explique rien vis-à-vis des problèmes prescrits. Elle joue le rôle d'un argument *ad hoc* dans le contexte polémique qui ne conduit à aucune conclusion précise hors de ce contexte. Par ailleurs, le modèle plasma prend un statut privilégié dans cette prescription puisqu'il ne pose pas de problème. Les auteurs déduisent de leur analyse que la description de l'effet Casimir à température non nulle est mal définie pour les systèmes dissipatifs. Cette conclusion, déjà formulée par Boström, est basée sur le fait qu'il n'est pas possible de retrouver la situation du modèle plasma à partir de la formule de Lifshitz donnée pour un modèle de Drude dans la limite de dissipation nulle. Cette conclusion est poussée encore plus loin en [151, 152] et devient une critique du point de vue de la théorie de la diffusion en présence de dissipation [57].

Dans la suite de cette section, nous montrons que ces affirmations sont tout à fait exagérées. Le point de vue développé dans le présent mémoire permet de résoudre toutes ces difficultés sans nécessiter la moindre hypothèse *ad hoc*.

Nous remarquons que le modèle de Drude a pour conséquence de définir un coefficient de réflexion TE discontinu. Cette discontinuité a des conséquences importantes sur la possibilité même d'utiliser la formulation de Lifshitz. Les conséquences aberrantes de la formule de Lifshitz sont ainsi directement liées à des défauts d'analyticité des amplitudes de réflexion TE dans le secteur quasistatique  $\xi \rightarrow 0$ .

Nous montrons enfin que notre formulation résiste au problème posé par ces discontinuités. Nous explicitons le résultat prévu par notre méthode pour le modèle de Drude et montrons qu'il est similaire à celui obtenu pour un modèle plasma. La dissipation n'induit aucune "catastrophe" et la limite de faible dissipation est tout à fait régulière quand on la discute sur l'expression finale de la force.

## C.1 Amplitudes de réflexion

Nous commençons par discuter les amplitudes de réflexion calculées à partir d'un modèle plasma ou d'un modèle de Drude. Par rapport à [145] dont les prédictions sont déterminées ponctuellement en  $\xi = 0$ , nous analysons ici les comportements des amplitudes de réflexion dans tout le voisinage de ce point. Seule une telle analyse permet de bien comprendre les différences mathématiques entre les deux modèles.

On garde les mêmes notations que dans le chapitre 1. On calcule les amplitudes  $r_{\mathbf{k}}^p [i\xi]$  pour une polarisation  $p$  dans le cas particulier du miroir massif. Nous donnons les comportements respectifs dans les deux cas limites suivants :

- cas a) : le champ est pris sous incidence normale, i.e.  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$  fixé. On étudie alors la limite quasistatique  $\omega \rightarrow 0$  pour les deux polarisations. Sous incidence normale, les amplitudes sont dégénérées. Les enchaînements sont détaillés dans l'appendice C. Pour le modèle plasma on a donc

$$r_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\text{TE}} [0] = r_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\text{TM}} [0] = -1. \quad (5-24)$$

Pour le modèle de Drude, on trouve le même résultat

$$r_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\text{TE}} [0] = r_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\text{TM}} [0] = -1. \quad (5-25)$$

- cas b) : cette fois-ci on se place à la limite quasistatique  $\xi = 0$  et l'on s'approche de l'incidence normale  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}$ . Pour le modèle plasma, on trouve

$$r_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\text{TE}} [0] = r_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\text{TM}} [0] = -1. \quad (5-26)$$

Pour le modèle de Drude, on trouve maintenant un résultat différent

$$r_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\text{TE}} [0] = 0, \quad r_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\text{TM}} [0] = -1. \quad (5-27)$$

Pour un miroir massif dont les propriétés optiques sont décrites par un modèle de Drude, les deux limites  $\xi \rightarrow 0$  (quasistatique) et  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}$  (incidence normale) ne commutent pas pour la polarisation TE. Mathématiquement, l'approche du point  $\xi = 0$  ne se fait pas de façon uniforme dans le plan  $(\xi, \mathbf{k})$ , ce qui révèle la présence d'une discontinuité pour ce coefficient de réflexion  $r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}} [\xi]$ . Cette discontinuité n'est pas observée pour la polarisation TM.

D'une façon générale, c'est la structure de la réponse optique  $\varepsilon [i\xi]$  qui conditionne les propriétés de continuité des amplitudes de réflexion définis pour un miroir massif. Le coefficient de réflexion des modes polarisés TE sera discontinu dès que la réponse optique est telle que

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^2 \varepsilon [i\xi] = 0. \quad (5-28)$$

C'est le cas du modèle de Drude. Le modèle plasma est un cas particulier pour lequel

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^2 \varepsilon_{\text{plasma}} [i\xi] = \omega_p^2, \quad (5-29)$$

ce qui induit des amplitudes de réflexion continues. Insistons encore une fois sur le fait que le modèle de Drude, bien qu'il conduise à un problème mathématique en raison de la discontinuité de l'amplitude TE, est une description physique plus réaliste de la réponse optique des métaux.

## C.2 Comparaison des deux formulations

En partant de notre formulation, nous montrons maintenant comment la formulation de Lifshitz peut aboutir aux comportements erronés précédents. On commence par séparer sur notre formulation la contribution du vide des contributions thermiques

$$F(L) = \frac{\hbar A}{2\pi^3} \sum_n' \tilde{F}(n) = \frac{\hbar A}{4\pi^3} \tilde{F}(0) + \frac{\hbar A}{2\pi^3} \sum_{n \geq 1} \tilde{F}(n). \quad (5-30)$$

On analyse ensuite la validité des enchaînements nécessaires pour retrouver la formule de Lifshitz. Nous renvoyons à l'appendice C pour une écriture explicite de ces

dérivations. Nous ne donnons ici que le résultat, qui consiste à pouvoir se ramener à l'expression suivante

$$F = -\frac{k_B T A}{4\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \partial_\xi (\kappa f_{\mathbf{k}}[i\xi]) + \frac{k_B T A}{2\pi^2} \sum_{n \geq 1} \int d^2\mathbf{k} \kappa_n f_{\mathbf{k}}[i\xi_n]. \quad (5-31)$$

On rappelle que la somme sur les polarisations est toujours incluse

$$f_{\mathbf{k}}[i\xi] = \sum_p f_{\mathbf{k}}^p[i\xi]. \quad (5-32)$$

C'est sur le terme  $\partial_\xi (\kappa f_{\mathbf{k}}[i\xi])$  que va porter la discussion. Dans le cas d'une fonction  $f_{\mathbf{k}}[i\xi]$  continue, on peut intégrer ce terme. On est alors exactement ramené à la formule de Lifshitz. Autrement dit, les deux formules sont équivalentes, comme le démontrait la formule sommatoire de Poisson, applicable pour ces fonctions  $f_{\mathbf{k}}[i\xi]$  continues.

Dans le cas du modèle de Drude,  $f_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}[i\xi]$  est discontinue en  $\xi = 0$ . On devra donc conserver tous les termes dans l'expression suivante

$$\begin{aligned} F &= \frac{\hbar A}{4\pi^3} \tilde{\mathbf{F}}[0] + \frac{\hbar A}{2\pi^3} \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathbf{F}}[n] \\ &= \frac{k_B T A}{4\pi^2} \int d^2\mathbf{k} |\mathbf{k}| f_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[0] - \frac{k_B T A}{4\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \partial_\xi (\kappa f_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}[i\xi]) \\ &\quad + \frac{k_B T A}{2\pi^2} \sum_{n \geq 1} \int d^2\mathbf{k} \kappa_n f_{\mathbf{k}}[i\xi_n]. \end{aligned} \quad (5-33)$$

Le deuxième terme contient en fait le terme de différence qui explique les écarts des prédictions obtenues en utilisant chaque formulation. C'est sur ce terme que porte explicitement la prescription de Klimchitskaya *et al.* [151] qui consiste à le choisir tel que les prédictions ne soient pas contradictoires.

### C.3 Limite de dissipation nulle

Le modèle de Drude consiste en une permittivité

$$\varepsilon_{\text{Drude}}[i\xi] = 1 + \frac{\omega_p}{\xi(\xi + \Gamma)} \quad (5-34)$$

et il tend pour  $\Gamma \rightarrow 0$  vers le modèle plasma.

Exactement comme pour le modèle plasma, la limite de grande distance se définit

sans ambiguïté comme correspondant au régime de distances  $L \gg \lambda_P$ . Quand on calcule le facteur correctif  $\eta_F$  dans ce régime, on montre que (voir l'appendice C)

$$\eta_F^{\text{Drude}} \rightarrow \eta_F^{\text{plasma}} \quad \text{pour} \quad \Gamma \rightarrow 0. \quad (5-35)$$

Ceci résoud les questions qui avaient été posées dans la section B.3. L'expression finale de la force est bien définie pour le modèle de Drude et elle tend vers le résultat du modèle plasma lorsque  $\Gamma \rightarrow 0$ . Ce n'était pas le cas pour les résultats déduits sans précaution de la formule de Lifshitz, dans des conditions où celle-ci n'est pas valable.

## Chapitre 6

# Description des expériences et effets de la géométrie

Nous avons décrit dans les chapitres précédents comment évaluer la force de Casimir en tenant compte des effets de conductivité des miroirs métalliques et des effets des fluctuations thermiques. Nous avons considéré la configuration géométrique de Casimir avec deux miroirs plans et parallèles entre-eux. En fait, la plus grande partie des expériences de mesure de la force de Casimir est effectuée avec une géométrie plan-sphère et il faudra bien entendu en tenir compte. Par ailleurs, les miroirs ne sont pas parfaitement plans car tout miroir réel présente une rugosité de surface.

Nous allons discuter ces effets dans ce chapitre, continuant ainsi de nous rapprocher de notre objectif, à savoir une description théorique précise de la réalité expérimentale des mesures.

## A Les expériences

Nous commençons par décrire le contexte expérimental des mesures de la force de Casimir. Nous ne serons pas exhaustifs et renvoyons à d'autres articles pour une introduction historique [26, 59, 154] ou technique [57] de ce contexte. Notre but est de bien montrer comment les prédictions théoriques se situent par rapport aux expériences. Nous distinguerons deux générations d'expériences séparées à la fois par la chronologie et par leur degré de précision.

## A.1 Expériences avant 1997

Les premières expériences qui mettent en évidence une force d'attraction entre deux miroirs sont réalisées assez rapidement après la prédiction de Casimir.

Overbeek et Spaarnay [31] commencent à mesurer une telle force entre miroirs diélectriques en considérant deux miroirs plans parallèles en verre. Pour la mesure, ils utilisent une balance électro-mécanique à ressort. La valeur de l'élongation du ressort sous la contrainte de l'attraction entre les plaques est donnée par variation de capacité. Elle permet, après étalonnage, la mesure de l'intensité de la force. L'expérience n'est pas quantitativement concluante, mais elle est déjà un modèle pour les expériences futures.

Derjaguin et Abrikosova [33] observent en 1957 une attraction entre deux miroirs diélectriques, tous deux en silice, une plaque faisant face à une lentille sphérique montée à l'extrémité d'une balance à couteau. La force est mesurée grâce à un circuit électrique contre-agissant sur le déséquilibre de la balance dû à l'attraction. Le recours à une lentille sphérique à la place d'une deuxième plaque simplifie le contrôle de la géométrie en éliminant le problème du parallélisme rencontré chez Overbeek et Sparnaay. C'est à cette occasion qu'est introduite une approximation développée par Derjaguin [155] pour évaluer la force de Casimir entre une lentille sphérique et une plaque. Nous allons discuter plus loin en détail cette approximation qui joue un rôle central dans l'analyse des expériences plan-sphère.

En 1957, Sparnaay [34] raffine son premier système de mesure pour déterminer la force pour la première fois, entre deux miroirs métalliques neutres. Il utilise tour à tour des miroirs en aluminium (Al-Al), chrome (Cr-Cr) ou acier (Cr-acier) et considère des distances de séparation entre les miroirs allant de 0.5 à  $2\mu\text{m}$ . Sparnaay discute en détail les difficultés expérimentales principales, en particulier le contrôle délicat du parallélisme entre les plaques, la détermination précise de la distance et le contrôle de neutralité, point délicat étant donné que la force de Casimir peut facilement être masquée par des forces électrostatiques. Avec une barre d'erreur qu'on peut *a posteriori* estimer aujourd'hui de 100%, Sparnaay conclut prudemment que "les attractions observées ne contredisent pas la prédiction théorique de Casimir".

Une meilleure mesure de la force de Casimir entre des surfaces métalliques est réalisée par Blokland et Overbeek en 1978 [44]. La force est mesurée à l'aide d'une balance à ressort entre une lentille sphérique et une plaque, toutes deux recouvertes de couches minces d'épaisseur 50 – 100nm de chrome, pour des séparations allant de 132 à 670nm. La mesure est réalisée, comme chez Overbeek et Spaarnay, en déterminant la capacité

du système. La même géométrie permet d'utiliser l'approximation de Derjaguin pour évaluer la force. Il faut noter que les auteurs comparent pour la première fois leurs résultats aux évaluations théoriques utilisant la théorie de Lifshitz pour le chrome. Ils peuvent ainsi conclure à un accord de l'ordre de 25% entre leurs mesures et les valeurs calculées pour la force. On peut ainsi considérer qu'ils inaugurent le programme de comparaison théorie-expérience qui se poursuit encore aujourd'hui.

La force de Casimir a pu être mise en évidence et mesurée dans un certain nombre d'autres expériences, en particulier [37, 38, 42]. Nous renvoyons pour plus de détails aux revues citées plus haut.

## A.2 Expériences après 1997

Récemment, de nouvelles techniques de mesures ont permis d'atteindre une bien meilleure précision. Nous décrivons ici celles d'entre-elles qui semblent être les plus intéressantes vis-à-vis de nos objectifs.

En 1997, Steve Lamoreaux mesure la force de Casimir à l'aide d'un pendule de torsion à l'université de Washington [48]. La force est mesurée entre une sphère métallisée et une plaque métallique, portées à des potentiels électrostatiques différents mais contrôlés. Étant donné que les forces électrostatiques et de Casimir agissent simultanément, il est nécessaire de soustraire l'effet de la force électrostatique afin de déduire la valeur de la force de Casimir. Cette mesure est faite pour des distances entre les miroirs comprises entre 0.6 et  $6\mu\text{m}$ . La comparaison de ces résultats de mesure à la théorie est rapportée par Lamoreaux comme confirmant un accord au niveau de 5%. Il est à souligner toutefois que cette expérience n'a pas vu la correction thermique qui doit pourtant être importante aux plus longues distances étudiées.

Peu après, les résultats d'une deuxième expérience sont publiés par Umar Mohideen, de l'université de Californie, à Riverside [49]. Alors que l'expérience de Lamoreaux a été arrêtée assez vite, celle de Mohideen a fait l'objet de nombreuses publications correspondant à des progrès sensibles dans la précision et le contrôle (voir par exemple [51, 52]). Cette expérience est basée sur l'utilisation d'un microscope à force atomique (AFM). Une sphère métallisée est fixée à l'extrémité du levier du microscope et placée près d'une plaque métallique plane, à des distances de 0.1 à  $0.9\mu\text{m}$ . Les deux surfaces sont au même potentiel électrostatique. La force de Casimir est mesurée par lecture optique en analysant la déviation d'un faisceau laser réfléchi à l'extrémité du levier courbé sous l'effet de la contrainte mécanique induite par la force d'attraction entre les deux miroirs. La comparaison entre les résultats expérimentaux obtenus et les prédictions

théoriques a été effectuée pour des miroirs recouverts de couches d'aluminium (Al-Al [49, 51]) et d'or (Au-Au [52]). Une précision expérimentale de l'ordre du pourcent est typiquement obtenue, et l'accord avec la théorie est également annoncé au niveau de 1%. Le même groupe étudie également à l'heure actuelle les effets de surfaces modulées sinusoidalement sur les propriétés de la force de Casimir [156].

Une expérience indépendante utilisant également un microscope à force atomique a été publiée en 2000 par Thomas Ederth de l'Institut de Chimie des Surfaces de Stockholm [53]. Le principe est le même que celui des expériences de Mohideen mais la force est mesurée entre deux cylindres métalliques neutres, de courbure 10mm, placés avec leurs axes à angle droit. Le domaine de distances explorées entre ces miroirs s'étend de 20 à 100nm. Ederth utilise des surfaces dont la rugosité est beaucoup mieux contrôlée que dans les autres expériences. Après une analyse soignée des sources d'erreurs, Ederth conclut à une précision de l'ordre de quelques pourcents.

Il faut aussi mentionner les expériences spectaculaires du groupe de Federico Capasso à Lucent Technology, qui observent l'effet Casimir au niveau de systèmes micro-électromécaniques (MEMS) [54]. Ces systèmes sont des structures mobiles usinées sur une tranche de semiconducteur par techniques de type circuits intégrés. Ils sont aujourd'hui utilisés comme nouvelle génération de détecteurs et d'actionneurs travaillant dans le domaine de dimensions micro ou submicrométriques [157]. La force de Casimir est mesurée entre une sphère en polystyrène et une plaque microconductrice de polysilicium, toutes deux recouvertes de couches métalliques. La plaque tourne autour d'un axe de torsion. La variation de l'angle de rotation, quand la sphère est approchée vers la plaque pour des distances comprises entre 100nm et  $1\mu\text{m}$ , met en évidence la force de Casimir. L'accord avec la prédiction théorique est au niveau du pourcent.

Ces systèmes ont permis également d'étudier des comportements dynamiques. En appliquant un courant d'excitation sur des électrodes situées sous la plaque métallique, on peut imposer à celle-ci un mouvement oscillatoire. L'expérience met alors en évidence d'intéressants effets dynamiques typiques des systèmes mécaniques non linéaires, tels des décalages des fréquences de résonance de l'oscillateur en fonction de la distance d'approche de la sphère vers la plaque, des comportements hystérétiques et bistables [158]. A nouveau, toutes ces observations sont en accord avec la force de Casimir prédite par la théorie. L'intérêt principal de ces expériences est de montrer que la force de Casimir joue un rôle central dans des systèmes d'intérêt technologique comme les MEMS. Ce qui ne doit pas surprendre étant donné que la force de Casimir est la force dominante dans le domaine micrométrique. Ces expériences montrent que les effets mécaniques des fluctuations du vide doivent être considérés pour les micro- ou

nano-technologies, ce qui, bien avant l'avènement de ce domaine technologique, était déjà discuté par Casimir lui-même [26].

Les expériences décrites jusqu'à présent sont menées en géométrie plan-sphère ou dans la géométrie équivalente définie par deux cylindres croisés. Elles ont toutes recours à l'approximation de Derjaguin pour analyser leurs résultats. Par conséquent, la question du degré de précision de l'approximation de Derjaguin est un enjeu crucial. Nous allons dans ce chapitre discuter ce point en détail.

Une expérience récente a été effectuée dans la configuration initiale de la prédiction de Casimir en mesurant la force entre deux miroirs plans parallèles. Cette expérience a été réalisée à Padoue, dans un laboratoire de l'INFN, par Bressi, Carugno, Onofrio et Ruoso [55]. La force est mesurée entre deux plaques planes parallèles recouvertes d'une couche de chromium. L'une de ces plaques est fixée sur un levier alors que celle lui faisant face est tenue par une cale piézoélectrique rigide. Cette plaque est mise en mouvement oscillatoire via la cale piézoélectrique. Une force de Casimir variable est alors induite sur la plaque montée sur le levier. Le mouvement de cette première plaque est analysé à l'aide d'un transducteur électromécanique à effet tunnel. Les mesures ont été réalisées pour des distances de 0.5 à  $3\mu\text{m}$ . Les résultats sont en accord avec la théorie avec une précision de l'ordre de 15%. Cette précision médiocre par rapport aux autres expériences récentes est due aux difficultés expérimentales particulières de la géométrie à deux plans.

## B Géométrie plan-sphère

Nous avons présenté les évaluations théoriques liées aux corrections de conductivité et aux corrections thermiques dans une géométrie de miroirs plans et parallèles entre eux. Après le descriptif des expériences, il est clair que l'influence de la géométrie doit être analysée du point de vue théorique pour arriver à une description précise de la réalité expérimentale.

Le premier effet géométrique est évidemment induit par le choix de la majorité des expériences de mesurer la force de Casimir entre un miroir sphérique et un miroir plan. Ce recours à une géométrie plan-sphère est motivé par la simplicité du contrôle d'une telle configuration, reposant seulement sur deux paramètres : le rayon de courbure  $R$  de la sphère et la distance  $L$  de plus courte approche. Il est beaucoup plus délicat de maintenir constant un strict parallélisme entre deux miroirs plans tout en les approchant l'un de l'autre. Ce point a été étudié historiquement par Sparnaay [34] et il explique

également que la seule expérience réalisée récemment dans la géométrie des deux plans [55] ait une précision moins bonne que celles réalisées en géométrie plan-sphère.

Il faut bien voir cependant que la géométrie plan-sphère, plus commode du point de vue expérimental, conduit à un problème théorique sérieux : avec cette géométrie, on perd les symétries de la configuration initiale de Casimir, avec une densité de mode du champ à l'intérieur de la cavité correspondant à des modes propres parfaitement connus. Pour un résonateur plan-sphère, la perte de ces symétries ne permet pas une détermination simple des modes propres du résonateur. Ceci rend plus difficile le calcul de la force à partir des premiers principes. Ceci oblige à développer des méthodes d'approximation. Nous nous intéressons en particulier dans ce chapitre à l'approximation de Derjaguin, la seule utilisée à ce jour pour l'analyse des expériences.

Parmi ces méthodes d'approximation, citons les travaux basés sur la notion diffusion multiple du champ [159, 160, 161, 162] ou les approches semi-classiques [163, 164]. Ces travaux ont pu réanalyser ce problème de la géométrie. En particulier, ces efforts se révèlent adaptés pour résoudre le problème de la propagation du champ dans des configurations où les variables ne peuvent être séparées. Cette dernière voie est en fait invoquée pour vérifier les prédictions des résultats déterminés dans la veine de l'approximation de Derjaguin.

## B.1 L'approximation de Derjaguin

Les approximations usuelles pour décrire la situation en configuration plan-sphère sont issues d'une méthode initialement développée par Derjaguin [155], dans le cadre explicite de mesure concernant des suspensions colloïdales, et reprise dans un contexte de physique nucléaire par Blocki [165]. Plus tardivement, une analyse basée sur l'additivité de forces terme à terme, assortie d'une procédure de renormalisation [166, 167, 168] a été introduite. Ces deux voies d'approximation se basent fondamentalement sur les mêmes hypothèses que nous discuterons donc seulement du point de vue de l'approximation de Derjaguin.

L'approximation de Derjaguin, reformulée par Blocki, est une approximation sur le calcul de la force  $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$  d'interaction entre deux corps solides, de formes quelconques, dont la séparation peut être mesurée par  $\mathcal{L}$  "lentement" variable, dans un sens que nous allons préciser. Dans cette situation, on peut décomposer la force  $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$  sous la forme suivante

$$\mathcal{F}_{\mathcal{D}} = \int \frac{d^2\mathbf{r}}{A} F_{\text{p-p}}(\mathcal{L}(\mathbf{r})) + \dots \quad (6-1)$$

$\frac{F_{p-p}}{A}$  est la force d'interaction par unité de surface entre deux plans parallèles définis localement le long de la surface des corps et donc séparés par la distance correspondante  $\mathcal{L}$ . On parle alors d'approximation de proximité.

Dans notre cas, cette force s'identifie à la force connue de Casimir entre deux miroirs plans parallèles séparés par  $\mathcal{L}$ . L'intégration surfacique est définie sur un plan de référence médian et elle peut se restreindre à l'une des deux surfaces des corps délimitant la séparation. Les points résiduels sur cette expression symbolisent les termes d'ordres supérieurs, i.e. les corrections induites par les effets du non-parallélisme. L'approximation consiste à négliger ces termes résiduels sur (6-1). Elle ne peut être raisonnable que dans le cas où la géométrie des corps s'éloigne relativement peu d'une géométrie plan-plan (c'est le " $\mathcal{L}$  lentement variable") c'est-à-dire quand les contributions dominantes sont limitées au strict voisinage de la zone de plus courtes distances.

Dans le cas de la géométrie plan-sphère, l'approximation devient valable dans la limite où le rayon de courbure  $R$  devient très grand devant la distance de plus courte approche  $L$ . Nous discutons le résultat de cette approximation dans la prochaine section avant d'ajouter des commentaires supplémentaires sur les conditions de validité.

## B.2 Force de Casimir en configuration plan-sphère

Considérons la configuration typique d'une sphère de rayon  $R$  et d'un plan, séparés d'une distance minimale  $L$  (voir la figure 6.1).

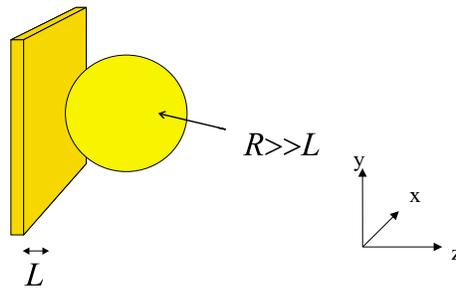


FIG. 6.1 – Configuration plan-sphère.

La distance  $\mathcal{L}$  entre les deux surfaces est alors donnée par l'approximation suivante

$$\mathcal{L} = L + \frac{\mathbf{r}^2}{2R} \quad , \quad \mathbf{r}^2 = x^2 + y^2 \quad (6-2)$$

définie quand  $L \ll R$ . Cette approximation est valable dans le voisinage immédiat de l'axe de symétrie

$$x, y \ll R. \quad (6-3)$$

On peut alors transformer l'intégrale sur la surface en une intégrale sur la distance  $\mathcal{L}$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2\mathbf{r}}{A} F_{\text{p-p}}(\mathcal{L}(\mathbf{r})) &= \int \frac{2\pi |\mathbf{r}| d|\mathbf{r}|}{A} F_{\text{p-p}}(\mathcal{L}(\mathbf{r})) \\ &= \frac{2\pi R}{A} \int_L^\infty d\mathcal{L} F_{\text{p-p}}(\mathcal{L}) \\ &= \frac{2\pi R}{A} E_{\text{p-p}}. \end{aligned} \quad (6-4)$$

L'intégration a été ici étendue à l'infini, ce qui est possible si l'on suppose que  $F_{\text{p-p}}$  tende vers 0 suffisamment vite avec  $\mathcal{L}$ .

On peut dès lors calculer la force entre le plan et la sphère, exprimée dans le cadre de cette approximation. On aura l'expression

$$F_{\text{p-s}}(L) = \frac{2\pi R}{A} E_{\text{p-p}}(L). \quad (6-5)$$

Cette expression est de première importance dans le contexte de la comparaison actuelle entre théorie et expérience. Jusqu'à présent, nous avons pu définir les facteurs correctifs tenant compte simultanément des corrections de conductivité et des corrections thermiques pour la force  $\eta_F$  et pour l'énergie  $\eta_E$  dans la configuration de deux miroirs plans. Les expériences étant effectuées en géométrie plan-sphère, l'approximation de Derjaguin nous permet de prendre en compte cette nouvelle géométrie. A partir du facteur correctif  $\eta_E$  que nous avons déjà détaillé, la force entre un miroir plan et un miroir sphérique s'écrit donc sous la forme

$$\begin{aligned} F_{\text{p-s}}(L) &= 2\pi R \frac{\hbar c \pi^2}{720 L^3} \eta_E(L) \\ &= \frac{\hbar c \pi^3 R}{360 L^3} \eta_E(L). \end{aligned} \quad (6-6)$$

Cette expression inclut donc les effets de géométrie dans le cadre de l'approximation de Derjaguin, de conductivité finie et de température, tels qu'on les a explicités. C'est elle qui est utilisée pour comparer les prédictions théoriques avec les résultats expérimentaux récents. Comme nous l'avons déjà dit, cette comparaison conduit à un très bon accord, au niveau du pourcent.

### B.3 Validité de l'approximation

La différence entre la configuration à deux plans et la configuration plan-sphère est très importante du point de vue de la géométrie. Cette différence se reflète dans l'équation (6-5) qui ne peut manifestement pas être considérée comme une petite correction

de la formule idéale de Casimir. A ce titre, l'analyse des conditions de validité de cette approximation est importante.

Nous pouvons formuler cette question de deux façons différentes. Dans un premier temps, nous pouvons considérer que l'approximation est correcte si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{AF_{p-s}(L)}{2\pi RE_{p-p}(L)} = 1 \quad \text{avec} \quad t = \frac{L}{R}. \quad (6-7)$$

Comme nous allons le voir dans la suite de cette section, la propriété (6-7) est vraie et l'approximation de proximité a donc une certaine validité. C'est en ce sens qu'elle est souvent appelée "théorème de proximité".

Dans une seconde analyse, nous pouvons nous demander quelle est la précision avec laquelle cette limite est réalisée pour une valeur réelle, évidemment finie, du paramètre  $t$ . Sur cette question, nous verrons que les informations disponibles sont beaucoup plus fragmentaires.

C'est dans le cadre des miroirs parfaits que les effets de géométrie sont généralement traités. On peut citer les travaux de Balian et Duplantier [161, 162] basés sur le développement des fonctions de Green en diffusion multiple. Les méthodes semi-classiques développées par Schaden et Spruch permettent de calculer la force entre une sphère et un plan, non seulement dans le régime  $\frac{L}{R} \ll 1$  [163] mais plus généralement pour toute valeur du rapport  $\frac{L}{R}$ , en tenant compte des effets de la diffraction [164]. Cette approche est construite sur la notion de propagation de photons virtuels le long d'orbites périodiques établies entre les corps se faisant face. La densité spectrale à l'intérieur de la cavité est alors définie en sommant sur ces orbites périodiques et permet de calculer la force de Casimir correspondante. Dans le cas de deux sphères proches dans le même régime  $\frac{L}{R} \ll 1$ , ces calculs permettent de confirmer le résultat (6-5) fourni par l'approximation de Derjaguin [163].

Pour des miroirs réels, il est important de savoir si l'approximation de Derjaguin continue à être valable. Barton [134] a étudié cette question dans le cadre de l'interaction de Van der Waals entre modes plasmons (voir la section C du chapitre 3). Dans le régime des courtes distances  $L \ll \lambda_p$ , les modes plasmons de surface déterminent l'interaction entre les miroirs [121]. L'hamiltonien construit sur les plasmons en interaction se propageant respectivement le long d'une surface sphérique et d'une surface plane permet de rendre compte des interactions. En développant la théorie des perturbations, Barton est parvenu à vérifier que la propriété (6-7) restait valable jusqu'au quatrième ordre, au moins.

Langbein [159, 160] a étudié ce même régime non-retardé. Il a considéré un ensemble

de molécules, caractérisées par leurs polarisabilités respectives. En sommant sur tous les diagrammes fermés d'interaction, c'est-à-dire sur les interactions mutuelles entre les dipôles formant l'ensemble, il a pu montrer que la force de Casimir  $F_{p-s}$  entre une sphère de rayon  $R$  et un plan était donnée par l'équation (6-7), à tous les ordres dans l'interaction, dans la limite  $\frac{L}{R} \rightarrow 0$ .

Seul un calcul exact permet cependant de contrôler quantitativement le degré de précision de l'approximation de Derjaguin. Un tel calcul est en principe faisable en utilisant les méthodes exactes de diffusion [161] ou les méthodes semi-classiques [164]. Malheureusement, peu de résultats explicites sont disponibles. Une exception est fournie par le calcul récemment développé par Johansson *et al.* [169] pour étudier la force entre une sphère et un plan métalliques. En utilisant un modèle plasma et dans le régime non retardé  $L \ll \lambda_P$ , ces auteurs ont donné une expression de la force de Casimir utilisant les coordonnées bi-sphériques adaptées à la géométrie en question. La force alors calculée numériquement peut être comparée à l'approximation de Derjaguin en précisant (6-7). Pour les dimensions typiques des expériences du groupe de Mohideen (sphère de rayon  $\sim 100\mu\text{m}$  et distances explorées  $0.1 - 0.9\mu\text{m}$ ) qui définissent un rapport  $\frac{L}{R} \leq 10^{-2}$ , l'écart entre l'approximation de Derjaguin et le calcul effectué dans ce travail reste inférieur au pourcent.

## C Corrections de rugosité

Nous discutons maintenant la prise en compte de l'effet de rugosité des miroirs. Dans l'analyse des expériences, cet effet est pris en compte en utilisant l'approximation de Derjaguin, comme nous allons le décrire ci-dessous. Typiquement, l'effet trouvé est une fraction du pourcent et il est intégré dans la comparaison théorie-expérience [52]. Nous verrons ci-dessous qu'une telle analyse peut être insuffisante parce qu'elle ne tient pas compte des propriétés spectrales de la rugosité. Nous discuterons les premiers résultats obtenus avec une telle analyse spectrale dans le cas particulier des miroirs parfaits.

Pour illustrer cette discussion, nous reproduisons ci-dessous l'image de la surface d'un miroir utilisé dans les expériences de Mohideen.

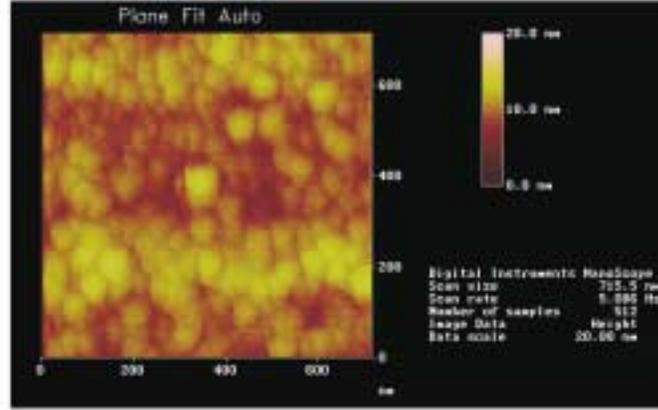


FIG. 6.2 – Image AFM de la surface d’un miroir utilisé dans les expériences de Mohideen. Avec l’aimable autorisation de U. Mohideen.

### C.1 L’approximation de rugosité

Habituellement, l’effet de la rugosité est pris en compte par l’approximation de Derjaguin, aussi appelée approximation de proximité. L’énergie  $y$  est alors obtenue en additionnant les contributions des diverses distances effectives

$$\mathcal{E}_{\mathcal{D}}(L) = \int \frac{d^2\mathbf{r}}{A} E(\mathcal{L}(\mathbf{r})). \quad (6-8)$$

Nous considérons à nouveau la géométrie plane et notons  $\mathcal{L}(\mathbf{r})$  la distance effective entre les deux points correspondant à une position transverse  $\mathbf{r} = (x, y)$

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}) = L + h_1(\mathbf{r}) + h_2(\mathbf{r}). \quad (6-9)$$

$\mathcal{L}(\mathbf{r})$  est la distance entre deux points se faisant face, c’est aussi la somme de la longueur moyenne  $L$  de la cavité et des profils  $h_{i=1,2}$  décrivant la rugosité des surfaces sur les deux miroirs  $i = 1, 2$ . Les déplacements respectifs moyens  $\overline{h}_i$  sont nuls de sorte que  $\overline{\mathcal{L}} = L$ . Par ailleurs, les profils sont supposés statiques.

Dans la limite de faibles amplitudes de rugosité, on peut développer l’expression (6-8) au deuxième ordre dans le paramètre petit  $\frac{h}{L}$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{D}}(L) &= E(L) + \delta E(L) \\ \delta E(L) &= \frac{E''(L)}{2} (\overline{h_1^2} + \overline{h_2^2}) + \dots \end{aligned} \quad (6-10)$$

L’énergie  $\mathcal{E}$  est alors simplement la somme de l’énergie  $E$  entre deux miroirs parfaitement plans et séparés de la distance  $L$  et d’une correction  $\delta E$  de rugosité proportionnelle

à la variance des déplacements  $h_i$

$$\overline{h_i^2} = \int \frac{d^2\mathbf{r}}{A} h_i(\mathbf{r})^2. \quad (6-11)$$

Le coefficient apparaissant dans  $\delta E$  est bien sûr la dérivée seconde de  $E$  par rapport à  $L$

$$E''(L) = \frac{d^2}{dL^2} E(L). \quad (6-12)$$

Nous supposons que les déformations sur chaque miroir ne sont pas corrélées entre-elles

$$\overline{h_1 h_2} = 0, \quad (6-13)$$

ce qui explique l'absence de terme croisé. Par ailleurs, étant donné que  $\overline{h_i} = 0$ , les termes de premier ordre n'interviennent pas.

Les évaluations théoriques de la rugosité de surface [166, 167, 168, 170, 171] partent toutes habituellement de ce type de développement, en tenant compte éventuellement de corrélations [156] ou en poussant le développement aux ordres supérieurs [166].

Évaluée de cette manière, la correction  $\delta E$  ne dépend que de l'amplitude de la rugosité et pas des caractéristiques spectrales de la rugosité. Or tout traitement réaliste de la rugosité doit pouvoir rendre compte de ces caractéristiques : l'effet d'une déformation doit en principe dépendre de la longueur d'onde de cette déformation.

Le but de cette section est de mettre en évidence l'importance de ce dernier point et de discuter les conditions de validité de (6-10). Anticipant sur ce qui suit, cette dépendance vis-à-vis du spectre sera représentée par une fonction  $\rho$  dépendant du vecteur d'onde de déformation de la surface du miroir. Ce facteur permettra de caractériser une éventuelle déviation par rapport à l'approximation de Derjaguin. Nous retrouverons cette approximation dans la limite où la longueur d'onde  $\lambda$  associée à la déformation sera plus grande que la distance moyenne  $L$  entre les miroirs. Par contre, pour les longueurs d'onde  $\lambda \leq L$ , il faudra en principe évaluer la fonction  $\rho$ . Des résultats récents [172] permettront de calculer cette fonction pour les miroirs parfaits.

## C.2 Fonctions de réponse de rugosité

Pour expliciter ce que nous venons de présenter, nous commençons par décomposer les variances  $\overline{h_i^2}$  comme des intégrales sur les vecteurs d'onde transverses  $\mathbf{k}$  d'un spectre de rugosité  $\sigma_i[\mathbf{k}]$

$$\overline{h_i^2} = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \sigma_i[\mathbf{k}]. \quad (6-14)$$

Un tel spectre de rugosité est défini comme la transformée de Fourier de la fonction de corrélation du profil de surface

$$\begin{aligned}\sigma[\mathbf{k}] &= \int \frac{d^2\mathbf{r}}{4\pi^2} \sigma(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \sigma(\mathbf{r}-\mathbf{r}') &= \overline{h(\mathbf{r})h(\mathbf{r}')}. \end{aligned} \quad (6-15)$$

Pour tenir compte du spectre de rugosité dans l'expression de l'énergie de Casimir, nous remplaçons ensuite dans l'équation (6-10) les variances  $\overline{h_i^2}$  par leur décomposition spectrale en introduisant un facteur de sensibilité  $\rho_i[\mathbf{k}]$

$$\delta\mathcal{E}(L) = \frac{E''(L)}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} (\rho_1[\mathbf{k}]\sigma_1[\mathbf{k}] + \rho_2[\mathbf{k}]\sigma_2[\mathbf{k}]) + \dots \quad (6-16)$$

Les points de suspension rappellent que ce développement est une évaluation à l'ordre le plus bas seulement de l'effet de rugosité. L'énergie de Casimir est ainsi donnée à partir d'une intégrale sur les vecteurs d'onde  $\mathbf{k}$  dans le spectre ou de façon équivalente, par la longueur d'onde  $\lambda$  caractéristique de la déformation de surface

$$|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (6-17)$$

L'isotropie de la configuration non perturbée de deux miroirs plans entraîne que la fonction  $\rho_i[\mathbf{k}]$  dépend simplement du module de  $\mathbf{k}$ . Dans le cas de deux miroirs identiques, cette fonction est la même pour les deux miroirs et on obtient l'expression

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{E}(L) &= \frac{E''(L)}{2} (\overline{h_1^2} + \overline{h_2^2}) \overline{\rho} + \dots \\ \overline{\rho} &= \frac{\int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \rho[\mathbf{k}]\sigma[\mathbf{k}]}{\int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \sigma[\mathbf{k}]} \end{aligned} \quad (6-18)$$

Cette écriture permet une analyse directe de la situation que nous avons décrite. A la limite  $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$ , on se trouve dans une situation quasistatique et on s'attend à ce que  $\rho$  soit égal à 1. On retrouve en fait l'approximation de Derjaguin (6-10) quand tous les  $\mathbf{k}$  contribuant de manière dominante au spectre  $\sigma_i$  se trouvent dans le secteur pour lequel  $\rho[\mathbf{k}] \simeq 1$ .

On peut également donner ces équations en termes de force et non plus simplement d'énergie de Casimir. Nous aurons

$$\mathcal{F}(L) = F(L) + \frac{F''(L)}{2} (\overline{h_1^2} + \overline{h_2^2}) \overline{\rho}_F + \dots \quad (6-19)$$

$$\begin{aligned}\overline{\rho}_F &= \overline{\rho} + \frac{E''(L)}{F''(L)} \partial_L \overline{\rho} \\ &= \overline{\rho} + \frac{E''(L)}{LF''(L)} |\mathbf{k}| \partial_{|\mathbf{k}|} \overline{\rho}. \end{aligned} \quad (6-20)$$

### C.3 Cas des miroirs parfaits

En réanalysant des travaux récents [172] qui évaluent l'énergie de Casimir entre un miroir corrugué et un miroir plan, nous allons pouvoir étudier ces effets de rugosité. Cette étude est en fait limitée aux miroirs parfaits. Toutefois, elle nous permettra de décrire la situation d'une cavité de longueur  $L$  entre deux miroirs métalliques correspondant à une longueur plasma  $\lambda_P$  pourvu que  $L \gg \lambda_P$ . Les résultats de [172] ont été obtenus pour des surfaces corruguées mais nous pourrons extraire l'expression de la fonction  $\rho[\mathbf{k}]$  décrivant la sensibilité au spectre.

La corrugation est une déformation d'un des miroirs, caractérisée par un profil périodique de longueur d'onde  $\lambda$

$$h(\mathbf{r}) = a \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right). \quad (6-21)$$

Ce profil correspond à une variance

$$\overline{h^2} = \int \frac{d^2\mathbf{r}}{A} a^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = \frac{a^2}{2}.$$

La variance s'écrit également comme une intégrale sur le spectre

$$\overline{h^2} = \overline{h(\mathbf{r})h(\mathbf{r})} = \sigma(\mathbf{0}) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \sigma[\mathbf{k}]. \quad (6-22)$$

En rappelant les relations générales suivantes

$$\begin{aligned} \overline{h[k_1]h^*[k_1]} &= \int d^2\mathbf{r}_1 \int d^2\mathbf{r}_2 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} \overline{h(\mathbf{r}_1)h(\mathbf{r}_2)} \\ &= \int d^2\mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \int d^2\mathbf{r}_2 e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}_2} \\ &= 4\pi^2 \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \sigma[\mathbf{k}_1] \end{aligned} \quad (6-23)$$

et en explicitant la transformée de Fourier du profil de corrugation

$$\begin{aligned} h[\mathbf{k}] &= \int d^2\mathbf{r} a \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}x\right] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= \frac{a}{2} \int dx e^{ik_x x} \left( e^{i\frac{2\pi}{\lambda}x} + e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}x} \right) \int dy e^{ik_y y} \\ &= 2\pi^2 a \delta\left(|k_x| - \frac{2\pi}{\lambda}\right) \delta(k_y), \end{aligned} \quad (6-24)$$

nous obtenons le spectre de rugosité correspondant

$$\sigma[\mathbf{k}] = \overline{h^2} 2\pi^2 \delta\left(|k_x| - \frac{2\pi}{\lambda}\right) \delta(k_y). \quad (6-25)$$

La correction à l'énergie de Casimir est alors donnée par la valeur de  $\rho[\mathbf{k}]$  commune aux deux vecteurs d'onde ( $k_x = \pm \frac{2\pi}{\lambda}, k_y = 0$ )

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{E}(L) &= \frac{E''(L)}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \rho[\mathbf{k}] \sigma[\mathbf{k}] \\ &= \frac{E''(L)}{2} \overline{h^2} \rho[\mathbf{k}].\end{aligned}\quad (6-26)$$

Pour des miroirs parfaits, nous savons que

$$\begin{aligned}E(L) &= \frac{\hbar c \pi^2 A}{720 L^3} \\ E''(L) &= \frac{12E(L)}{L^2}.\end{aligned}\quad (6-27)$$

Nous réécrivons l'équation (7) de [172]

$$\delta\mathcal{E}(L) = \frac{\hbar c A}{L^5} a^2 G[s], \quad \text{avec} \quad s = \frac{L}{\lambda} = \frac{|\mathbf{k}| L}{2\pi}.\quad (6-28)$$

En identifiant sur (6-26), nous obtenons la forme de la fonction  $\rho[\mathbf{k}]$

$$\rho[\mathbf{k}] = \frac{240}{\pi^2} G[s].\quad (6-29)$$

Comme nous pouvions le supposer *a priori*, cette fonction ne dépend que du paramètre sans dimension  $|\mathbf{k}| L$ .

La fonction  $G[s]$ , correspond à la somme des contributions des modes TE et TM, telles que détaillées dans l'équation (8) de [172]. Nous la réécrivons ici en adaptant les notations. En particulier, nous introduisons des fonctions  $\Phi_n(u)$ , directement reliées aux fonctions  $\Phi(u, v, n)$  de [173]. Ces fonctions sont directement construites sur les déphasages accumulés par le champ dans la cavité et prennent la forme suivante

$$\Phi_n(u) \equiv \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u^\nu}{\nu^n},\quad (6-30)$$

$$\varphi_n(z) = \Phi_n(e^{-z}) \equiv \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-z\nu}}{\nu^n}.\quad (6-31)$$

En utilisant les relations suivantes

$$\begin{aligned}\varphi'_n(z) &= \frac{d\varphi_n}{dz}(z) = -\varphi_{n-1}(z) \quad n \geq 2, \\ \varphi_n(0) &= \Phi_n(1) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^n} = \zeta(n) \quad n \geq 2\end{aligned}\quad (6-32)$$

et les valeurs particulières de la fonction Zeta de Riemann  $\zeta(n)$  [174]

$$\begin{aligned}\zeta(2) &= \frac{\pi^2}{6} & \zeta(4) &= \frac{\pi^4}{90} & \zeta(6) &= \frac{\pi^6}{945} \\ \frac{\pi^6}{135} &= \pi^2 \zeta(4) - \frac{7}{2} \zeta(6),\end{aligned}\tag{6-33}$$

nous réécrivons les résultats de [172] sous la forme condensée

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{\pi}{960s} \Phi_2(1 - e^{-4\pi s}) + \frac{\pi^3 s}{360} + \frac{\pi^2 s^4}{15} \varphi_1(4\pi s) - \frac{\pi s}{48} \varphi_2(4\pi s) + \frac{s^2}{16} \varphi_3(4\pi s) \\ &+ \frac{7s}{64\pi} \varphi_4(4\pi s) - \frac{1}{256\pi s} (\varphi_4(4\pi s) - \varphi_4(0) - 4\pi s \varphi_4'(4\pi s)) \\ &+ \frac{9}{512\pi^3 s} (\varphi_6(4\pi s) - \varphi_6(0) - 4\pi s \varphi_6'(4\pi s)).\end{aligned}\tag{6-34}$$

Nous la traduisons ensuite comme une fonction de sensibilité à la rugosité sous la forme

$$\begin{aligned}\rho[K] &= \frac{1}{2K} \Phi_2(1 - e^{-2K}) + \frac{K}{3} + \frac{K^4}{\pi^4} \varphi_1(2K) - \frac{5K}{2\pi^2} \varphi_2(2K) + \frac{15K^2}{4\pi^4} \varphi_3(2K) \\ &+ \frac{105K}{8\pi^4} \varphi_4(2K) - \frac{15}{4\pi^2} \frac{\varphi_4(2K) - \varphi_4(0) - 2K \varphi_4'(2K)}{2K} \\ &+ \frac{135}{8\pi^4} \frac{\varphi_6(2K) - \varphi_6(0) - 2K \varphi_6'(2K)}{2K},\end{aligned}\tag{6-35}$$

avec la notation

$$K = 2\pi s = |\mathbf{k}| L.\tag{6-36}$$

C'est le résultat central que nous pouvons déduire de [172] et qui est représenté sur la figure 6.3.

A partir de là, nous étudions le comportement de  $\rho[K]$  dans les limites de grande et petite longueur d'onde.

## C.4 Régimes limites

Pour les grandes longueurs d'onde, nous effectuons les développements de Taylor au deuxième ordre en  $K = |\mathbf{k}| L$ . En particulier, nous utilisons

$$\begin{aligned}\Phi_2(1 - e^{-2K}) &= (1 - e^{-2K}) + \frac{(1 - e^{-2K})^2}{4} + \frac{(1 - e^{-2K})^3}{9} + \mathcal{O}(K^4) \\ \frac{\Phi_2(1 - e^{-2K})}{2K} &= 1 - \frac{K}{2} + \frac{K^2}{9} + \mathcal{O}(K^3),\end{aligned}\tag{6-37}$$

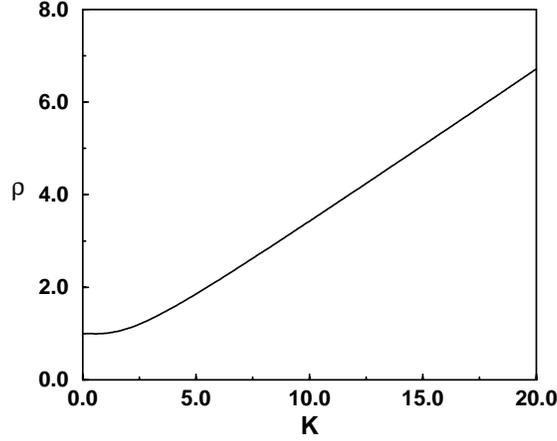


FIG. 6.3 – Fonction  $\rho[K]$  en fonction de  $K = |\mathbf{k}|L$ , caractérisant la sensibilité de l'énergie de Casimir vis-à-vis de la longueur d'onde du spectre de rugosité de surface. On distingue clairement deux régimes de comportement à petit et grand  $K$ .

ainsi que les développements suivant sur  $\varphi_n(z)$

$$\begin{aligned}
 \varphi_2(z) &= \zeta(2) - z(1 - \ln z) + \mathcal{O}(z^3) \\
 \varphi_3(z) &= \zeta(3) - z\zeta(2) + \frac{z^2}{2}(\psi(3) - \psi(1) - \ln z) + \mathcal{O}(z^3) \\
 \varphi_4(z) &= \zeta(4) - z\zeta(3) + \zeta(2)\frac{z^2}{2} \\
 &\quad - \frac{z^3}{6}(\psi(4) - \psi(1) - \ln z) + \mathcal{O}(z^4)
 \end{aligned} \tag{6-38}$$

et enfin les relations

$$\begin{aligned}
 \frac{\varphi_4(z) - \varphi_4(0) - z\varphi_4'(z)}{z} &= -\frac{z}{2}\zeta(2) - \frac{z^2}{6}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ln z\right) \\
 &\quad + \frac{z^2}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \ln z\right) + \mathcal{O}(z^3)
 \end{aligned} \tag{6-39}$$

$$\frac{\varphi_6(z) - \varphi_6(0) - z\varphi_6'(z)}{z} = -\frac{z}{2}\zeta(4) + \frac{z^2}{3}\zeta(3) + \mathcal{O}(z^3). \tag{6-40}$$

En rassemblant ces résultats, nous obtenons l'expression suivante de la fonction  $\rho[K]$

$$\begin{aligned}
 \rho[K] &= 1 - \frac{K}{2} + \frac{K^2}{9} + \frac{K}{3} - \frac{5K}{2\pi^2}(\zeta(2) - 2K(1 - \ln(2K))) \\
 &\quad + \frac{15K^2}{4\pi^4}\zeta(3) + \frac{105K}{8\pi^4}(\zeta(4) - 2K\zeta(3)) - \frac{15}{4\pi^2}\left(-\frac{(2K)}{2}\zeta(2) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(2K)^2}{6}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ln(2K)\right) + \frac{(2K)^2}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \ln(2K)\right)\right)
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{135}{8\pi^4} \left( -\frac{(2K)}{2} \zeta(4) + \frac{(2K)^2}{3} \zeta(3) \right) + \mathcal{O}(K^3), \quad (6-41)$$

soit, après simplification

$$\rho[K] = 1 + \frac{K^2}{9} - \frac{5K^2}{3\pi^2} + \mathcal{O}(K^3). \quad (6-42)$$

Nous obtenons en particulier un résultat important :  $\rho[K] \simeq 1$  pour  $K \ll 1$ . C'est dans ce domaine que l'approximation de Derjaguin est vérifiée.

Pour la limite opposée  $K \gg 1$ , les développements sont obtenus de façon plus directe. On peut écrire

$$\begin{aligned} \Phi_2(1 - e^{-2K}) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-2K})^\nu}{\nu^n} \simeq \zeta(2) \\ \varphi_n(2K) &\simeq \ln(1 - e^{-2K}) \simeq e^{-2K}. \end{aligned} \quad (6-43)$$

En négligeant les termes exponentiellement petits de type  $K^n e^{-2K} \ll 1$ , dont le plus grand est donné par  $n = 4$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \rho[K] &= \frac{\zeta(2)}{2K} + \frac{K}{3} - \frac{15}{4\pi^2} \frac{-\zeta(4)}{2K} + \frac{135}{8\pi^4} \frac{-\zeta(6)}{2K} + \mathcal{O}(K^4 e^{-2K}) \\ &= \frac{K}{3} + \frac{2\pi^2}{21K} + \mathcal{O}(K^4 e^{-2K}). \end{aligned} \quad (6-44)$$

Dans ce régime de rugosité, le facteur de sensibilité  $\rho$  varie linéairement avec  $K$ , avec une pente de  $\frac{1}{3}$ . Pour des déformations de courte longueur d'onde, on met en évidence que l'approximation de Derjaguin perd toute validité.

## C.5 Discussion

Les calculs que nous venons de présenter supposent de pouvoir traiter en perturbation l'amplitude  $h$  de la rugosité. Par contre, ils sont valables pour toutes les longueurs d'onde entre les régimes  $K \ll 1$  et  $K \gg 1$ . Dans le régime  $K \ll 1$ , nous avons retrouvé l'approximation de Derjaguin. Autrement dit, c'est dans ce régime seulement que cette approximation est valable. L'énergie est alors la valeur moyenne de l'énergie calculée dans la configuration plan-plan non déformée, moyenne portant sur les différentes distances réalisées dans la cavité. Le calcul plus général incluant le facteur de sensibilité  $\rho[K]$  permet de caractériser la sortie de ce régime.

Pour la discussion de la géométrie plan-sphère, il est moins facile de séparer l'amplitude de la déformation et son vecteur d'onde. En effet, ces deux caractéristiques,

clairement distinctes pour le problème de la rugosité, sont maintenant déterminées par un seul paramètre, le rayon  $R$  de la sphère. Toutefois, à la limite où  $R$  devient très grand devant  $L$ , on voit que l'amplitude relative de la déformation  $\frac{h}{L}$  et son vecteur d'onde relatif deviennent tous les deux petits devant 1. On se retrouve alors dans les conditions de validité de l'approximation de Derjaguin, dite aussi de proximité. C'est ce qui explique que celle-ci permet de donner des résultats corrects pour la géométrie plan-sphère à la limite  $R \gg L$ .



## Conclusion

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, il y a plusieurs bonnes raisons de tester l'accord entre les mesures de la force de Casimir et les prédictions théoriques.

Etant donné la bonne précision atteinte par les expériences, au niveau du pourcent, ce test suppose également de disposer de prédictions théoriques fiables ayant au moins le même niveau de précision. Et, dans ce but, il est indispensable de prendre en compte les importantes différences qui existent entre la situation idéale calculée par Casimir et la situation des expériences réelles.

Nous reprenons ici l'essentiel de ce qui a été fait dans ce travail. Tout d'abord, les expériences sont réalisées dans une configuration plan-sphère plutôt qu'en géométrie plan-plan. L'approximation de Derjaguin est utilisée pour exprimer la force de Casimir dans cette configuration plan-sphère en fonction de l'énergie de Casimir dans la configuration à deux plans parallèles. Cette énergie de Casimir entre deux plans est alors calculée de la manière la plus exacte possible. Au terme de ces calculs, la force entre un plan et une sphère est donnée par l'équation

$$F_{p-s}(L) = \frac{\hbar c \pi^3 R}{360 L^3} \eta_E(L), \quad (6-45)$$

où  $\eta_E$  est le facteur correctif calculé pour l'énergie dans la configuration à deux plans. Il reste ensuite à prendre en compte également la correction due à la rugosité des surfaces. Nous donnons ci-dessous des estimations de la précision et de la fiabilité des méthodes utilisées.

Pour ce qui concerne le problème de la géométrie plan-sphère, nous avons vu que les expériences sont faites dans la limite  $R \gg L$  où  $R$  est le rayon de la sphère et  $L$  la distance de plus courte approche. Dans cette limite, l'approximation de proximité est certainement valable. Toutefois, il serait souhaitable de disposer d'évaluations fiables des termes suivants dans le développement. Ceci permettrait d'affirmer que cette approximation ne limite pas la précision.

Il existe bien sûr une alternative expérimentale, consistant à se placer dans la configuration à deux plans. Dans ce cas, on est complètement débarrassé du problème de

géométrie plan-sphère. Malheureusement, l'expérience est beaucoup plus difficile dans cette configuration et la précision de la seule expérience récente de ce type [55] atteint seulement 15%.

La correction liée à la réflexion imparfaite des miroirs devient très importante à courte distance. Pour rappeler un chiffre, elle est de l'ordre de 50% aux distances les plus courtes. Elle est observée de façon non ambiguë dans les expériences et peut être évaluée de façon très fiable, pourvu que l'on utilise les méthodes présentées dans les chapitre 2 et 3 de ce mémoire. Enfin, l'excellent accord théorie-expérience, obtenu seulement en prenant en compte cette correction, est un indice d'une bonne compréhension de ce problème.

Les expériences se déroulent à température ambiante et il est alors nécessaire d'évaluer théoriquement les corrections liées aux fluctuations thermiques. Cet effet thermique est significatif à grande distance. Pour la plupart des expériences, les distances explorées sont inférieures à  $1\mu\text{m}$  et la contribution thermique compte pour moins d'un pourcent au niveau de la force. Elles sont prises en compte dans la formule théorique utilisée par exemple par Mohideen [156]. Toutefois, étant donné leur relativement faible contribution, on ne peut pas dire qu'elles aient été observées sans ambiguïté. Par contre, l'expérience de Lamoreaux [48] aurait dû voir cette correction thermique. En effet, pour une longueur de cavité de  $6\mu\text{m}$  et à température ambiante, on trouve une augmentation de la force de 76% par rapport à la force évaluée à température nulle. Lamoreaux n'a pas vu cette correction, ce qui signifie très probablement que les barres d'erreur sur la mesure étaient plus grandes que celles présentées, au moins pour les distances explorées au-delà du micromètre. L'effet des fluctuations thermiques reste donc un effet intéressant à observer.

Par ailleurs, ainsi que nous l'avons montré, les mesures faites avec une précision au niveau du pourcent dans la zone de distances intermédiaires, typiquement  $\sim 3\mu\text{m}$ , devraient être sensibles à l'effet de corrélation entre corrections de température et de conductivité. Nous avons donné dans le chapitre 4 des moyens simples de calculer cet effet quand ce sera nécessaire.

Enfin, la rugosité de surface des miroirs peut avoir une influence dans les mesures effectuées aux plus courtes distances. Mohideen [52] a effectué des analyses expérimentales de rugosité des surfaces qu'il a utilisées. Avec l'approximation de proximité, il a estimé un effet inférieur au pourcent.

Là encore, cet effet a été pris en compte dans la formule théorique mais on ne peut pas considérer qu'il ait réellement été testé, vu sa faible contribution au résultat final. Par ailleurs, comme nous l'avons montré dans le chapitre 6, l'utilisation du théorème

de proximité peut sous-estimer la correction de rugosité pour des longueurs d'onde de rugosité importantes. Il est donc nécessaire de mesurer de façon systématique les spectres de rugosité et, en même temps, de calculer la fonction décrivant la sensibilité à la rugosité en fonction de la longueur d'onde. Ceci n'a été fait pour le moment que dans le cas particulier des miroirs parfaits. Une alternative expérimentale serait bien sûr d'utiliser des miroirs ayant des états de surface bien meilleurs que ceux utilisés dans les expériences actuelles.

La précision des mesures récentes les plus soignées et le progrès simultané des calculs théoriques permettent un accord entre théorie et expérience qui peut être estimé aujourd'hui au niveau de quelques pourcents. A ce titre, on peut effectivement affirmer que la force de Casimir est un effet mécanique des fluctuations du vide mis en évidence de manière indiscutable.



## Annexe

### A Corrections de conductivité : comportements asymptotiques pour le modèle plasma

Nous détaillons dans cet appendice le point de vue analytique qui permet de déduire les comportements à grande ( $L \gg \lambda_p$ ) et courte ( $L \ll \lambda_p$ ) distances pour le facteur correctif lié aux corrections de conductivité des miroirs modélisées par un modèle plasma. Ces comportements sont repris dans la section C du chapitre 3. Afin de mener le plus simplement possible les dérivations analytiques, nous effectuons le changement de variable

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \frac{\xi^2}{c^2} + \mathbf{k}^2 \\ \int \frac{d^2\mathbf{k}}{4\pi^2} \int_0^\infty d\xi &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\kappa \kappa \int_0^{c\kappa} d\xi. \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

Ce changement réexprime le jeu de variables naturelles, au sens des bons nombres quantiques  $(\xi, \mathbf{k})$ , en les variables  $(\xi, \kappa)$ , où  $\kappa$  est le vecteur d'onde longitudinal. On peut alors introduire des variables sans dimension, normalisées par la longueur de la cavité

$$K \equiv \kappa L \quad , \quad \Omega \equiv \xi \frac{L}{c}. \quad (\text{A-2})$$

On a donc pour le facteur correctif

$$\begin{aligned} \eta_F &= \frac{120}{\pi^4} \sum_p \int_0^\infty dK K^3 \mathcal{G}^p [iK] \\ \mathcal{G}^p [iK] &= \int_0^K \frac{d\Omega}{K} \frac{\rho^p [i\Omega, iK]}{1 - \rho^p [i\Omega, iK]} \\ \rho^p [i\Omega, iK] &= (r^p [i\Omega, iK])^2 e^{-2K} \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

en ayant pris deux miroirs identiques, dont les amplitudes de réflexion sont donnés par les formes

$$r^{\text{TE}} [i\Omega, iK] = \frac{1 - z^{\text{TE}}}{1 + z^{\text{TE}}} \quad , \quad r^{\text{TM}} [i\Omega, iK] = \frac{1 - z^{\text{TM}}}{1 + z^{\text{TM}}} \quad (\text{A-4})$$

$$z^{\text{TE}} = \frac{\sqrt{K^2 + \Omega^2 (\varepsilon [i\Omega] - 1)}}{K} \quad , \quad z^{\text{TM}} = \frac{K \varepsilon [i\Omega]}{\sqrt{K^2 + \Omega^2 (\varepsilon [i\Omega] - 1)}}. \quad (\text{A-5})$$

Dans le cas particulier du modèle plasma on peut écrire

$$(\varepsilon [i\Omega] - 1) \Omega^2 = \Omega_{\text{P}}^2,$$

avec la fréquence plasma normalisée

$$\Omega_{\text{P}} = \omega_{\text{P}} \frac{L}{c} = 2\pi \frac{L}{\lambda_{\text{P}}}.$$

Il est alors possible d'effectuer l'intégration sur  $\Omega$  analytiquement. On posera pour cela

$$\zeta = \frac{\sqrt{K^2 + \Omega_{\text{P}}^2}}{K} \quad \rho = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \quad y = \frac{\Omega}{K}. \quad (\text{A-6})$$

Il s'agira également de définir

$$E = e^K \rho^{-1}. \quad (\text{A-7})$$

Avec ces notations, on aura simplement pour chaque polarisation

$$\begin{aligned} r^{\text{TE}} [i\Omega, iK] &= -\rho \\ r^{\text{TM}} [i\Omega, iK] &= \rho \frac{y^2 - (\zeta + 1)}{y^2 + (\zeta - 1)}, \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

de sorte que pour l'intégration elle-même, on aura

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{\text{TE}} [iK] &= \int_0^K \frac{d\Omega}{K} \frac{\rho^{\text{TE}} [i\Omega, iK]}{1 - \rho^{\text{TE}} [i\Omega, iK]} \\ &= \frac{1}{E^2 - 1} \\ \mathcal{G}^{\text{TM}} [iK] &= \int_0^K \frac{d\Omega}{K} \frac{\rho^{\text{TM}} [i\Omega, iK]}{1 - \rho^{\text{TM}} [i\Omega, iK]} \\ &= \int_0^1 dy \frac{(y^2 - \zeta - 1)^2}{E^2 (y^2 + \zeta + 1)^2 - (y^2 - \zeta - 1)^2}. \end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

Ces expressions permettent aisément de dégager les différents comportements asymptotiques à grandes et courtes distances.

## A.1 Grandes distances

Dans le régime de grandes distances  $L \gg \lambda_P$ , les miroirs sont presque parfaitement réfléchissants  $r^p [i\Omega, iK] \sim 1$  et on peut développer sur les amplitudes de réflexion perturbativement en cette limite

$$\begin{aligned} \sum_p \frac{\rho^p}{1 - \rho^p} &\sim \sum_p \left( \frac{\rho^p}{1 - \rho^p} \right)_{(r^p)^2=1} + \sum_p ((r^p)^2 - 1) \partial_{(r^p)^2} \left( \frac{\rho^p}{1 - \rho^p} \right)_{(r^p)^2=1} \\ &\sim 2 \frac{1}{e^{2K} - 1} \\ &\quad + \left( (r^{\text{TE}} [i\Omega, iK])^2 + (r^{\text{TM}} [i\Omega, iK])^2 - 2 \right) \frac{e^{2K}}{(e^{2K} - 1)^2}. \end{aligned} \quad (\text{A-10})$$

En utilisant les décompositions (A-8), on développe les amplitudes de réflexion au premier ordre en  $\Omega_P^{-1} = \frac{\lambda_P}{2\pi L}$  sachant que le facteur exponentiel  $\frac{e^{2K}}{(e^{2K} - 1)^2}$  sélectionne les valeurs de  $K \sim 1$

$$\begin{aligned} (r^{\text{TE}} [i\Omega, iK])^2 - 1 &= -\frac{4\zeta}{(\zeta + 1)^2} \\ &= -\frac{4}{\zeta} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Omega_P}\right) \\ (r^{\text{TM}} [i\Omega, iK])^2 - 1 &= \frac{(y^2 (\zeta - 1) - (\zeta^2 - 1))^2}{(y^2 (\zeta + 1) + (\zeta^2 - 1))^2} = -\frac{4y^2 (\zeta - 1) (\zeta^2 - 1)}{(y^2 (\zeta + 1) + (\zeta^2 - 1))^2} \\ &= -\frac{4y^2}{\zeta} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Omega_P}\right). \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

On obtient alors pour la fonction  $\mathcal{G}$  sommée sur les deux polarisations

$$\begin{aligned} \mathcal{G} [iK] &= \sum_p \mathcal{G}^p [iK] \\ &= 2 \frac{1}{e^{2K} - 1} - \frac{4}{\zeta} \frac{e^{2K}}{(e^{2K} - 1)^2} \int_0^1 dy (1 + y^2), \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

et pour le facteur correctif<sup>1</sup>

$$\eta_F^P = \frac{120}{\pi^4} \int_0^\infty dK \left( \frac{2K^3}{e^{2K} - 1} - \frac{16}{3\Omega_P} \frac{K^4 e^{2K}}{(e^{2K} - 1)^2} \right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_P}{L}\right)^2\right)$$

---

1. en utilisant les valeurs données dans [175]

$$\int_0^\infty dK \frac{K^3}{e^{2K} - 1} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dK \frac{K^4 e^{2K}}{(e^{2K} - 1)^2} = \frac{\pi^4}{240} \quad (\text{A-13})$$

$$= 1 - \frac{8}{3\pi} \frac{\lambda_P}{L} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_P}{L}\right)^2\right). \quad (\text{A-14})$$

## A.2 Courtes distances

Pour la limite opposée des courtes distances, on décompose la fraction donnée en (A-9) en éléments simples

$$\begin{aligned} & \frac{(y^2 - \zeta - 1)^2}{E^2 (y^2 + \zeta + 1)^2 - (y^2 - \zeta - 1)^2} = \\ & \frac{1}{E^2 - 1} \left( 1 + \frac{E\zeta}{\zeta + \mathcal{H}_+ (y^2 - 1)} - \frac{E\zeta}{\zeta + \mathcal{H}_- (y^2 - 1)} \right), \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

en ayant posé

$$\mathcal{H}_\pm = \frac{E \pm 1}{E \mp 1}. \quad (\text{A-16})$$

On obtient alors pour l'intégration (A-9)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{\text{TM}}[iK] &= \frac{1}{E^2 - 1} \left( 1 + E\zeta\mathcal{H}_- \int_0^1 dy \frac{1}{y^2 + A_-^2} - E\zeta\mathcal{H}_+ \int_0^1 dy \frac{1}{y^2 + A_+^2} \right) \\ A_-^2 &= \mathcal{H}_-\zeta - 1 \\ A_+^2 &= \mathcal{H}_+\zeta - 1. \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

Etant donné que

$$\int_0^1 dy \frac{1}{y^2 + A_\pm^2} = \frac{1}{A_\pm} \arctan \frac{1}{A_\pm}, \quad (\text{A-18})$$

on arrive alors à l'expression du facteur correctif intégrée en  $\Omega$

$$\begin{aligned} \eta_{\text{F}}^{\text{P}} &= \frac{120}{\pi^4} \int_0^\infty dK K^3 \mathcal{G}[iK] \\ \mathcal{G}[iK] &= \sum_p \mathcal{G}^p[iK] = \\ &= \frac{1}{E^2 - 1} \left( 2 + E\zeta\mathcal{H}_- \frac{1}{A_-} \arctan \frac{1}{A_-} - E\zeta\mathcal{H}_+ \frac{1}{A_+} \arctan \frac{1}{A_+} \right). \end{aligned} \quad (\text{A-19})$$

Le facteur 2 résulte du terme de polarisation TE et du premier membre du terme de polarisation TM. Pour obtenir la limite courte distance  $\Omega_P \ll 1$ , on développe (A-19)

au premier ordre en  $\Omega_P$ . Pour alléger les notations, on note  $x = \left(\frac{\Omega_P}{K}\right)^2$ , où encore une fois les facteurs exponentiels sélectionnent  $K \sim 1$ . On pourra alors développer au premier ordre en  $x$

$$\begin{aligned}
\zeta &= 1 + \frac{1}{2}x + \mathcal{O}(x^2) \\
\rho^{-1} &= \frac{4}{x} + 2 - \frac{x}{4} + \mathcal{O}(x^2) \\
\mathcal{H}_{\pm} &= 1 \pm \frac{1}{2}e^{-K}x + \mathcal{O}(x^2) \\
E &= \frac{4e^K}{x} + 2e^K - \frac{e^K}{4}x + \mathcal{O}(x^2) \\
\frac{1}{E^2 - 1} &= \frac{1}{16}e^{-2K}x^2 + \mathcal{O}(x^3). \tag{A-20}
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
E\zeta\mathcal{H}_{\pm} &= \frac{4e^K}{x} + \mathcal{O}(x^0) \\
\frac{1}{E^2 - 1}E\zeta\mathcal{H}_{\pm} &= \frac{e^{-K}}{4}x + \mathcal{O}(x^2) \\
A_-^2 &= \frac{1}{2}(1 - e^{-K})x + \mathcal{O}(x^2) \\
&= e^{-\frac{K}{2}}x \sinh \frac{K}{2} + \mathcal{O}(x^2) \ll 1 \\
A_+^2 &= \frac{1}{2}(1 + e^{-K})x + \mathcal{O}(x^2) \\
&= e^{-\frac{K}{2}}x \cosh \frac{K}{2} + \mathcal{O}(x^2) \ll 1. \tag{A-21}
\end{aligned}$$

En utilisant le développement suivant pour  $u \gg 1$

$$\arctan[u] = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{u} + \frac{1}{3u^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{u^4}\right), \tag{A-22}$$

on peut donner l'approximation suivante pour la fonction  $\mathcal{G}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}[iK] &= \frac{\pi}{8}e^{-K}x \left( \frac{1}{A_-} - \frac{1}{A_+} \right) + \mathcal{O}\left(x^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{\pi}{8}e^{-\frac{3K}{4}} \left( \frac{\Omega_P}{K} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{\sinh \frac{K}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\cosh \frac{K}{2}}} \right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\Omega_P}{K}\right)^3\right). \tag{A-23}
\end{aligned}$$

On peut alors numériquement effectuer l'intégration et obtenir le coefficient linéaire du changement de régime de la force à courtes distances

$$\eta_F^P = \alpha \frac{L}{\lambda_P} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{L}{\lambda_P}\right)^3\right)$$

$$\alpha = \frac{30}{\pi^2} \int_0^\infty dK e^{-\frac{3K}{4}} \left( \frac{K^2}{\sqrt{\sinh \frac{K}{2}}} - \frac{K^2}{\sqrt{\cosh \frac{K}{2}}} \right)$$
$$\simeq 1.193. \tag{A-24}$$

C'est exactement le même résultat que nous avons déduit par les développements présentés dans le chapitre 3 dans la section C.1.

## B Corrections thermiques

Les expressions analytiques des corrections thermiques et les comportements asymptotiques présentés dans la section C du chapitre 4 sont ici explicités dans les deux régimes caractéristiques des hautes et basses températures. On redonne les définitions des fréquence et longueur d'onde thermiques

$$\omega_T = \frac{2\pi k_B T}{\hbar} = \frac{2\pi c}{\lambda_T}. \quad (\text{B-1})$$

### B.1 Limite basse température

A titre de formulaire, nous rappelons tout d'abord ici un ensemble de relations sur les fonctions "usuelles" des calculs effectués. Les fonctions hyperboliques impliquées peuvent se décomposer sur leurs pôles

$$\frac{1}{\tanh[x]} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{x}{\pi} + ik} \quad (\text{B-2})$$

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\tanh[x]} \right) &= -\frac{d}{dx} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{x}{\pi} + ik} \right) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{\pi} + ik\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sinh^2[x]} \end{aligned} \quad (\text{B-3})$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sinh^2[x]} \right) &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{\pi} + ik\right)^2} \right) = \frac{1}{\pi^3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{\pi} + ik\right)^3} \\ &= \frac{\cosh[x]}{\sinh^3[x]} \end{aligned} \quad (\text{B-4})$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} \frac{d}{dx} \left( \frac{\cosh[x]}{\sinh^3[x]} \right) &= -\frac{1}{3} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\pi^3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{\pi} + ik\right)^3} \right) = \frac{1}{\pi^4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{\pi} + ik\right)^4} \\ &= \frac{1}{3} \frac{(1 + 2\cosh^2[x])}{\sinh^4[x]}. \end{aligned} \quad (\text{B-5})$$

Les intégrations rencontrées pourront se déduire pour la plupart du noyau [176]

$$\int_0^{\infty} du \frac{1}{e^u - 1} \sin[xu] = \frac{\pi}{2} \coth[\pi x] - \frac{1}{2x}, \quad (\text{B-6})$$

On obtient en effet par dérivation partielle par rapport à  $x$  du membre de droite et/ou par intégrations par parties les formules suivantes

$$\int_0^{\infty} du \frac{u}{e^u - 1} \cos[xu] = \partial_x \int_0^{\infty} du \frac{1}{e^u - 1} \sin[xu] \quad (\text{B-7})$$

$$\int_0^{\infty} du \frac{u^2}{e^u - 1} \sin[xu] = -\partial_x^2 \int_0^{\infty} du \frac{1}{e^u - 1} \sin[xu] \quad (\text{B-8})$$

$$\int_0^{\infty} du \frac{ue^u}{(e^u - 1)^2} \sin[xu] = \partial_x \int_0^{\infty} du \frac{1}{e^u - 1} \sin[xu] \quad (\text{B-9})$$

$$\int_0^{\infty} du \frac{u^2 e^u}{(e^u - 1)^2} \cos[xu] = -\partial_x \int_0^{\infty} du \frac{1}{e^u - 1} \sin[xu] \quad (\text{B-10})$$

$$\int_0^{\infty} du \frac{u^3 e^u}{(e^u - 1)^2} \sin[xu] = \partial_x^2 \int_0^{\infty} du \frac{1}{e^u - 1} \sin[xu]. \quad (\text{B-11})$$

Pour faciliter les développements analytiques, nous exprimerons ici les intégrations

$$\int d^2\mathbf{k} \int_0^{\infty} d\xi$$

sur les vecteurs longitudinaux

$$\kappa^2 = \frac{\xi^2}{c^2} + \mathbf{k}^2.$$

Ce changement de variables régulier nous donne la formule équivalente pour les facteurs correctifs en force et en énergie libre, en supposant les miroirs identiques

$$\eta_F = \frac{240L^4}{c\pi^4} \sum_n' \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^2 \int_0^{c\kappa} d\xi \cos\left[\frac{\lambda_T n \xi}{c}\right] \frac{\rho^p[i\xi, i\kappa]}{1 - \rho^p[i\xi, i\kappa]}$$

$$\rho^p[i\xi, i\kappa] = (r^p[i\xi, i\kappa])^2 e^{-2\kappa L}. \quad (\text{B-12})$$

Par ce changement de variables, les coefficients de réflexion sont déterminés par les expressions (3-31) de la section C du chapitre 3.

### B.1.1 Correction thermique pour des miroirs parfaits

En utilisant (B-4,B-6,B-8) nous obtenons l'expression du terme correctif défini en (4-29) dans le texte

$$\begin{aligned}
(\eta_F^T - 1) &= \frac{480L^4}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\kappa \frac{\kappa^2}{e^{2\kappa L} - 1} \frac{\sin [n\lambda_T \kappa]}{n\lambda_T} \\
&= 30 \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(\alpha m)^4} - \frac{\cosh [\alpha m]}{\alpha m \sinh^3 [\alpha m]} \right) \\
\alpha &= \frac{\pi \lambda_T}{2L}.
\end{aligned} \tag{B-13}$$

Pour les termes en énergie correspondants, on a par intégration directe

$$\begin{aligned}
E(L) - E_{\text{Cas}} &= \int_L^{\infty} dx (\eta_F^T - 1) F_{\text{Cas}} \\
&= \frac{2\hbar c A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_L^{\infty} dx \int_0^{\infty} d\kappa \frac{\kappa^2}{e^{2\kappa x} - 1} \frac{\sin [n\lambda_T \kappa]}{n\lambda_T} \\
&= \frac{2\hbar c A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_T} \int_0^{\infty} dK \frac{K^2}{e^{2K} - 1} \left( \int_L^{\infty} dx \frac{\sin \left[ \frac{n\lambda_T K}{x} \right]}{x^3} \right) \\
&= \frac{2\hbar c A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_T} \int_0^{\infty} dK \frac{K^2}{e^{2K} - 1} \left( \frac{\sin \left[ \frac{n\lambda_T K}{L} \right]}{(n\lambda_T K)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{L} \frac{\cos \left[ \frac{n\lambda_T K}{L} \right]}{n\lambda_T K} \right),
\end{aligned} \tag{B-14}$$

avec  $K = \kappa L$ . En utilisant (B-6,B-7) on déduit l'expression

$$\begin{aligned}
E(L) - E_{\text{Cas}} &= \frac{2\hbar c A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_T} \left[ + \frac{1}{(n\lambda_T)^2} \left( \frac{\pi}{4} \frac{1}{\tanh \left[ \frac{\pi \lambda_T n}{2L} \right]} - \frac{1}{4} \frac{1}{n\lambda_T} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{L} \frac{1}{n\lambda_T} \left( - \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{\sinh^2 \left[ \frac{\pi \lambda_T n}{2L} \right]} + \frac{1}{8} \frac{1}{\left( \frac{\lambda_T n}{2L} \right)^2} \right) \right] \\
&= \frac{\hbar c A \pi^2}{16L^3} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ - \frac{2}{(\alpha m)^4} + \frac{1}{(\alpha m)^2 \sinh^2 [\alpha m]} + \frac{1}{(\alpha m)^3 \tanh [\alpha m]} \right].
\end{aligned}$$

On normalisera par l'énergie de Casimir idéale pour obtenir l'équation (4-36) du chapitre 4.

### B.1.2 Correction supplémentaire

Pour calculer cette correction définie dans la section C du chapitre 4, on commence par rappeler le développement à grande distance effectué sur les amplitudes de réflexion tel qu'il est développé en (A-10). On a alors au premier ordre en  $\frac{\lambda_P}{L}$

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\rho_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[i\xi]} + \frac{\rho_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}[i\xi]} - 2 \frac{e^{-2\kappa L}}{1 - e^{-2\kappa L}} \\ &\simeq -\frac{e^{2\kappa L}}{(e^{2\kappa L} - 1)^2} \left(1 - (r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}})^2 + 1 - (r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}})^2\right) \\ &\simeq -\frac{e^{2\kappa L}}{(e^{2\kappa L} - 1)^2} \frac{2\kappa \lambda_P}{\pi} \left(1 - \frac{\xi^2}{\kappa^2}\right).\end{aligned}\quad (\text{B-15})$$

A partir de ce développement, on a donc

$$\begin{aligned}\Delta\eta_{\text{F}} &= -\frac{240L^4}{c\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^2 \int_0^{c\kappa} d\xi \cos\left[\frac{\lambda_{\text{T}} n \xi}{c}\right] \frac{e^{2\kappa L}}{(e^{2\kappa L} - 1)^2} \frac{2\kappa \lambda_P}{\pi} \left(1 + \left(\frac{\xi}{c\kappa}\right)^2\right) \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_P}{L}\right)^2\right).\end{aligned}\quad (\text{B-16})$$

On effectue alors l'intégrale sur  $\xi$  pour obtenir

$$\int_0^{c\kappa} d\xi \cos\left[\frac{\lambda_{\text{T}} n \xi}{c}\right] \left(1 + \left(\frac{\xi}{c\kappa}\right)^2\right) = \kappa \left(\frac{\sin[\lambda_{\text{T}} n \kappa]}{n \lambda_{\text{T}} \kappa} + \frac{\cos[\lambda_{\text{T}} n \kappa]}{(n \lambda_{\text{T}} \kappa)^2} - \frac{\sin[\lambda_{\text{T}} n \kappa]}{(n \lambda_{\text{T}} \kappa)^3}\right) \quad (\text{B-17})$$

Les relations (B-9,B-10,B-11) permettent d'obtenir exactement la forme (4-40)

$$\begin{aligned}\phi_{\text{F}} &= \frac{15}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(\alpha m)^3 \tanh[\alpha m]} + \frac{1}{(\alpha m)^2 \sinh^2[\alpha m]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4 \cosh[\alpha m]}{\alpha m \sinh^3[\alpha m]} - \frac{2 + 4 \cosh^2[\alpha m]}{\sinh^4[\alpha m]}\right).\end{aligned}\quad (\text{B-18})$$

De la même façon, pour l'énergie

$$\begin{aligned}\Delta\eta_{\text{E}} E_{\text{Cas}} &= \int_L^{\infty} dx \Delta\eta_{\text{F}} F_{\text{Cas}} \\ &= -\frac{4\hbar c A \lambda_P}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dK K^4 \frac{e^{2K}}{(e^{2K} - 1)^2} \left(\frac{1}{K \lambda_{\text{T}} n} \int_L^{\infty} dx \frac{1}{x^4} \sin\left[\frac{K \lambda_{\text{T}} n}{x}\right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(K \lambda_{\text{T}} n)^2} \int_L^{\infty} dx \frac{1}{x^3} \cos\left[\frac{K \lambda_{\text{T}} n}{x}\right] - \frac{1}{(K \lambda_{\text{T}} n)^3} \int_L^{\infty} dx \frac{1}{x^2} \sin\left[\frac{K \lambda_{\text{T}} n}{x}\right]\right).\end{aligned}$$

On posera  $\ell \equiv K\lambda_{\text{T}}n$  pour écrire ce terme sous la forme d'une somme de trois éléments

$$\Delta\eta_{\text{E}}E_{\text{Cas}} = -\frac{4\hbar c A\lambda_{\text{P}}}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dK K^4 \frac{e^{2K}}{(e^{2K}-1)^2} (\mathcal{I}(\ell) + \mathcal{J}(\ell) + \mathcal{K}(\ell)), \quad (\text{B-19})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\ell) &= \frac{1}{\ell^4} - \frac{1}{\ell^4} \cos\left[\frac{\ell}{L}\right] \\ \mathcal{J}(\ell) &= \partial_{\ell}\mathcal{K}(\ell) \\ \mathcal{I}(\ell) &= -\partial_{\ell}\mathcal{J}(\ell). \end{aligned} \quad (\text{B-20})$$

On peut déduire le facteur correctif qui s'écrit en fonction de trois intégrations

$$\begin{aligned} \Delta\eta_{\text{E}}E_{\text{Cas}} &= -\frac{4\hbar c A\lambda_{\text{P}}}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (I_1 + I_2 + I_3) \\ I_1 &= \int_0^{\infty} dK K^4 \frac{e^{2K}}{(e^{2K}-1)^2} \frac{4}{\ell^4} \left( \cos\left[\frac{\ell}{L}\right] - 1 \right) \\ I_2 &= \int_0^{\infty} dK K^4 \frac{e^{2K}}{(e^{2K}-1)^2} \frac{3}{\ell^3 L} \sin\left[\frac{\ell}{L}\right] \\ I_3 &= \int_0^{\infty} dK K^4 \frac{e^{2K}}{(e^{2K}-1)^2} \frac{1}{\ell^2 L^2} \cos\left[\frac{\ell}{L}\right]. \end{aligned} \quad (\text{B-21})$$

Les deux dernières intégrations ont déjà été abordées en (B-17). On aura donc pour elles deux

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{3}{(n\lambda_{\text{T}})^3} \frac{1}{L} \int_0^{\infty} dK K \frac{e^{2K}}{(e^{2K}-1)^2} \sin\left[\frac{Kn\lambda_{\text{T}}}{L}\right] \\ &= \frac{3}{(n\lambda_{\text{T}})^3} \frac{1}{L} \left( \frac{\pi}{8} \frac{1}{\tanh\left[\frac{\pi n\lambda_{\text{T}}}{2L}\right]} - \frac{\pi}{8} \frac{\pi n\lambda_{\text{T}}}{2L} \frac{1}{\sinh^2\left[\frac{\pi n\lambda_{\text{T}}}{2L}\right]} \right) \\ I_3 &= \frac{1}{(n\lambda_{\text{T}})^2} \frac{1}{L^2} \int_0^{\infty} dK K^2 \frac{e^{2K}}{(e^{2K}-1)^2} \cos\left[\frac{Kn\lambda_{\text{T}}}{L}\right] \\ &= \frac{1}{(n\lambda_{\text{T}})^2} \frac{1}{L^2} \left( \frac{\pi^2}{8} \frac{\pi n\lambda_{\text{T}}}{2L} \frac{\cosh\left[\frac{\pi n\lambda_{\text{T}}}{2L}\right]}{\sinh^3\left[\frac{\pi n\lambda_{\text{T}}}{2L}\right]} - \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{\sinh^2\left[\frac{\pi n\lambda_{\text{T}}}{2L}\right]} \right). \end{aligned} \quad (\text{B-22})$$

Pour la première intégration, notre formulaire n'est d'aucun recours, étant donné que  $I_1$  ne converge pas pour la borne inférieure d'intégration 0. La technique d'intégration

est différente et consiste en la décomposition en série entière du cos. On a donc

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{4}{(n\lambda_T)^4} \int_0^\infty dK \frac{e^{2K}}{(e^{2K} - 1)^2} \left( \cos \left[ \frac{\ell}{L} \right] - 1 \right) \\
&= \frac{4}{(n\lambda_T)^4} \sum_{m=1}^\infty \frac{(-1)^m (n\lambda_T)^{2m}}{2m! L^{2m}} \int_0^\infty dK K^{2m} \frac{e^{2K}}{(e^{2K} - 1)^2} \\
&= \frac{4}{(n\lambda_T)^4} \sum_{m=1}^\infty \frac{(-1)^m (n\lambda_T)^{2m}}{2m! L^{2m}} \frac{1}{2^{2m+1}} \Gamma(2m+1) \zeta(2m) \\
&= \frac{4}{(n\lambda_T)^4} \sum_{m=1}^\infty \frac{(-1)^m}{2^{2m+1}} \zeta(2m) \frac{(n\lambda_T)^{2m}}{L^{2m}}, \tag{B-23}
\end{aligned}$$

l'intégration sur  $K$  étant standard pour  $m > 0$  [175]. En utilisant la définition des nombres  $\mathbf{B}_{2m}$  de Bernoulli en termes de fonction Zeta, on peut écrire [174]

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^\infty \frac{(-1)^m}{2^{2m+1}} \zeta(2m) \frac{(n\lambda_T)^{2m}}{L^{2m}} &= -\frac{1}{4} \frac{\pi n \lambda_T}{2L} \sum_{m=1}^\infty \frac{2^{2m} \mathbf{B}_{2m}}{2m!} \left( \frac{\pi n \lambda_T}{2L} \right)^{2m-1} \\
&= -\frac{1}{4} \frac{\pi n \lambda_T}{2L} \left( \frac{1}{\tanh \left[ \frac{\pi n \lambda_T}{2L} \right]} - \frac{1}{\frac{\pi n \lambda_T}{2L}} \right). \tag{B-24}
\end{aligned}$$

On peut donc finalement rassembler ces trois intégrales. En utilisant la relation entre  $\alpha$  et  $\lambda_T$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta\eta_E E_{\text{Cas}} &= -\frac{4\hbar c A \lambda_P}{\pi^2 L^4} \sum_{n=1}^\infty \left[ -\frac{\pi^4}{64} \frac{1}{(\alpha n)^3 \tanh[\alpha n]} - \frac{\pi^4}{64} \frac{1}{(\alpha n)^2 \sinh^2[\alpha n]} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\pi^4}{32} \frac{\cosh[\alpha n]}{(\alpha n) \sinh^3[\alpha n]} + \frac{\pi^4}{16} \frac{1}{(\alpha n)^4} \right]. \tag{B-25}
\end{aligned}$$

En normalisant par l'énergie idéale de Casimir  $E_{\text{Cas}} = \frac{\hbar c A \pi^2}{720 L^3}$ , le facteur correctif de mélange  $\Delta\eta_E$  prend alors la forme (4-42) donnée dans le texte.

## B.2 Limite haute température

Comme nous l'avons vu, la limite haute température se dérive à partir des formes duales des fonctions définies dans un cadre adapté au développement basse température. La transformation de dualité, telle que symbolisée en (4-55) dans le texte, pourra être effectuée avec simplicité depuis les décompositions sur les pôles des fonctions hyperboliques. Nous commençons donc ici par donner les formules à cette fin utile.

On explicite tout d'abord les relations duales en  $a$  et  $b$  suivantes

$$\frac{1}{a(a-b)^3} = \frac{1}{b} \frac{1}{(a-b)^3} - \frac{1}{b^2} \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{b^3} \frac{1}{a-b} - \frac{1}{b^3 a} \quad (\text{B-26})$$

$$\frac{1}{a^2(a-b)^2} = \frac{1}{b^2} \frac{1}{(a-b)^2} - 2 \frac{1}{b^3} \frac{1}{a-b} + 2 \frac{1}{b^3 a} + \frac{1}{b^2 a^2} \quad (\text{B-27})$$

$$\frac{1}{a^3(a-b)} = \frac{1}{b^3} \frac{1}{a-b} - \frac{1}{b^3 a} - \frac{1}{b^2 a^2} - \frac{1}{b a^3}. \quad (\text{B-28})$$

A l'aide de ces relations, on donne immédiatement les transformations sur les décompositions sur les pôles

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha m (\alpha m - ik\pi)^3} &= \frac{1}{ik\pi} \frac{1}{(\alpha m - ik\pi)^3} - \frac{1}{(ik\pi)^2} \frac{1}{(\alpha m - ik\pi)^2} \\ &+ \frac{1}{(ik\pi)^3} \frac{1}{\alpha m - ik\pi} - \frac{1}{(ik\pi)^3} \frac{1}{\alpha m} \\ &= -\frac{1}{k\pi \alpha^3 \left(\frac{k\pi}{\alpha} + im\right)^3} - \frac{1}{(k\pi)^2 \alpha^2 \left(\frac{k\pi}{\alpha} + im\right)^2} \\ &- \frac{1}{(k\pi)^3 \alpha \left(\frac{k\pi}{\alpha} + im\right)} - \frac{1}{(ik\pi)^3} \frac{1}{\alpha m} \end{aligned} \quad (\text{B-29})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\alpha m)^3 (\alpha m - ik\pi)} &+ \frac{1}{(\alpha m)^2 (\alpha m - ik\pi)^2} = \\ &\frac{1}{(ik\pi)^2 (\alpha m - ik\pi)^2} - \frac{1}{(ik\pi)^3 (\alpha m - ik\pi)} \\ &+ \frac{1}{(ik\pi)^3} \frac{1}{\alpha m} - \frac{1}{ik\pi} \frac{1}{(\alpha m)^3} \\ &= \frac{1}{(k\pi \alpha)^2 \left(\frac{k\pi}{\alpha} + im\right)^2} + \frac{1}{(k\pi)^3 \alpha \frac{k\pi}{\alpha} + im} \\ &+ \frac{1}{(ik\pi)^3} \frac{1}{\alpha m} - \frac{1}{ik\pi} \frac{1}{(\alpha m)^3} \end{aligned} \quad (\text{B-30})$$

$$\frac{1}{(\alpha m - ik\pi)^4} = \frac{1}{\alpha^4 \left(\frac{k\pi}{\alpha} + im\right)^4}. \quad (\text{B-31})$$

On peut alors donner à l'aide de ces formules les transformées duales des facteurs correctifs.

### B.2.1 Correction thermique pour des miroirs parfaits

Nous pouvons écrire les contributions thermiques à la force de la façon suivante, en utilisant la parité sur  $m$  et les relations (B-4,B-13)

$$\begin{aligned}
(\eta_F^T - 1) &= 30 \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(\alpha m)^4} - \frac{\cosh[\alpha m]}{\alpha m \sinh^3[\alpha m]} \right) \\
&= 15 \sum_{m=-\infty}^{\infty} * \left( \frac{1}{(\alpha m)^4} - \frac{\cosh[\alpha m]}{\alpha m \sinh^3[\alpha m]} \right) \\
&= 15 \sum_{m=-\infty}^{\infty} * \left( \frac{1}{(\alpha m)^4} - \frac{1}{\pi^3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha m (\frac{\alpha m}{\pi} - ik)^3} \right) \\
&= -15 \sum_{m=-\infty}^{\infty} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} * \frac{1}{\alpha m (\alpha m - ik\pi)^3}, \tag{B-32}
\end{aligned}$$

où on a introduit la notation

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} * = \sum_{m=-\infty}^{\infty} - [m = 0]. \tag{B-33}$$

En utilisant les relations duales (B-26,B-29), on obtient pour  $\eta_F^T$

$$\begin{aligned}
(\eta_F^T - 1) &= 15 \sum_{k=-\infty}^{\infty} * \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} * \frac{1}{k\pi\alpha^3 (\frac{k\pi}{\alpha} + im)^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(k\pi)^2 \alpha^2 (\frac{k\pi}{\alpha} + im)^2} + \frac{1}{(k\pi)^3 \alpha (\frac{k\pi}{\alpha} + im)} \right). \tag{B-34}
\end{aligned}$$

Le dernier terme de (B-29) ne contribue pas par imparité sur  $m$ . Le terme 1 de  $(\eta_F^T - 1)$  peut être inclu dans les sommes comme terme  $m = 0$  correspondant à la force de Casimir idéale  $F_{\text{Cas}}$ . La correction thermique s'écrit finalement à l'aide des relations (B-2,B-3,B-4)

$$\begin{aligned}
\eta_F^T &= 15 \sum_{k=-\infty}^{\infty} * \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k\pi\alpha^3 (\frac{k\pi}{\alpha} + im)^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(k\pi)^2 \alpha^2 (\frac{k\pi}{\alpha} + im)^2} + \frac{1}{(k\pi)^3 \alpha (\frac{k\pi}{\alpha} + im)} \right) \\
&= 30 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k\pi\alpha^3} \frac{\pi^3 \cosh \left[ \frac{k\pi^2}{\alpha} \right]}{\sinh^3 \left[ \frac{k\pi^2}{\alpha} \right]} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(k\pi)^2 \alpha^2 \sinh^2 \left[ \frac{k\pi^2}{\alpha} \right]} + \frac{1}{(k\pi)^3 \alpha \tanh \left[ \frac{k\pi^2}{\alpha} \right]} \right). \tag{B-35}
\end{aligned}$$

Pour la correction thermique en énergie, on décompose selon (B-2, B-3)

$$\begin{aligned}
(\eta_E^T - 1) &= 45 \sum_{m=1}^{\infty} \left( -\frac{2}{(\alpha m)^4} + \frac{1}{(\alpha m)^3 \tanh[\alpha m]} + \frac{1}{(\alpha m)^2 \sinh^2[\alpha m]} \right) \\
&= \frac{45}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} * \left( -\frac{2}{(\alpha m)^4} + \frac{1}{(\alpha m)^3 \tanh[\alpha m]} + \frac{1}{(\alpha m)^2 \sinh^2[\alpha m]} \right) \\
&= \frac{45}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} * \left( -\frac{2}{(\alpha m)^4} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha m)^3 \left(\frac{\alpha m}{\pi} - ik\right)} \right) \\
&= \frac{45}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} * \left( \frac{1}{(\alpha m)^3 (\alpha m - ik\pi)} + \frac{1}{(\alpha m)^2 (\alpha m - ik\pi)^2} \right).
\end{aligned}$$

En utilisant la relation (B-30) et en suivant les mêmes étapes qu'auparavant

$$\eta_E^T = \frac{45}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} * \left( \frac{1}{(k\pi)^2 \alpha^2 \left(\frac{k\pi}{\alpha} + im\right)^2} + \frac{1}{(k\pi)^3 \alpha \frac{k\pi}{\alpha} + im} \right). \quad (\text{B-36})$$

A l'aide de (B-29,B-30) on trouve finalement l'expression

$$\eta_E^T = 45 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(k\pi)^2 \alpha^2 \sinh^2\left[\frac{k\pi}{\alpha}\right]} + \frac{1}{(k\pi)^3 \alpha \tanh\left[\frac{k\pi}{\alpha}\right]} \right). \quad (\text{B-37})$$

### B.2.2 Correction supplémentaire

Pour le terme  $\phi_F$  nous commençons, partant de (B-18), à écrire par parité sur  $m$

$$\begin{aligned}
\phi_F &= \frac{15}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} * \left( \frac{1}{(\alpha m)^3 \tanh[\alpha m]} + \frac{1}{(\alpha m)^2 \sinh^2[\alpha m]} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4 \cosh[\alpha m]}{\alpha m \sinh^3[\alpha m]} - \frac{2 + 4 \cosh^2[\alpha m]}{\sinh^4[\alpha m]} \right). \quad (\text{B-38})
\end{aligned}$$

Avec les relations (B-2,B-3,B-4,B-5) nous pouvons transformer cette expression pour obtenir

$$\begin{aligned}
\phi_F &= \frac{15}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} * \left( \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha m)^3 \left(\frac{\alpha m}{\pi} - ik\right)} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha m)^2 \left(\frac{\alpha m}{\pi} - ik\right)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{\pi^3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha m \left(\frac{\alpha m}{\pi} - ik\right)^3} - \frac{6}{\pi^4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{\alpha m}{\pi} - ik\right)^4} \right) \\
&= \frac{15}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} * \left( \frac{1}{(\alpha m)^3 (\alpha m - ik\pi)} + \frac{1}{(\alpha m)^2 (\alpha m - ik\pi)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{\alpha m (\alpha m - ik\pi)^3} - \frac{6}{(\alpha m - ik\pi)^4} \right). \quad (\text{B-39})
\end{aligned}$$

Les termes  $\frac{1}{\alpha m}$  correspondant à  $k = 0$  se compensent. Les relations (B-29,B-30,B-31) donnent alors l'expression suivante sur laquelle le terme  $m = 0$  est isolé

$$\phi_F = \frac{15}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} * \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} * \left( -\frac{3}{(k\pi\alpha)^2} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{\alpha} + im\right)^2} - \frac{3}{(k\pi)^3} \frac{1}{\alpha \frac{k\pi}{\alpha} + im} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4}{k\pi\alpha^3} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{\alpha} + im\right)^3} - \frac{6}{\alpha^4 \left(\frac{k\pi}{\alpha} + im\right)^4} \right) \right). \quad (\text{B-40})$$

Puisque nous pouvons calculer la somme complète sur  $m$  explicitement, nous séparons le terme  $m = 0$  qui se calcule de la façon suivante

$$-\frac{15}{2\pi} \frac{16}{\pi^4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} * \frac{1}{k^4} = -\frac{240}{\pi^5} \zeta(4) = -\frac{8}{3\pi}. \quad (\text{B-41})$$

En réinvokant les relations (B-2,B-3,B-4,B-5) on obtient

$$\phi_F = \frac{15}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{4}{k\pi\alpha^3} \frac{\pi^3 \cosh \left[ \frac{k\pi^2}{\alpha} \right]}{\sinh^3 \left[ \frac{k\pi^2}{\alpha} \right]} - \frac{3}{(k\pi)^2} \frac{\pi^2}{\alpha^2 \sinh^2 \left[ \frac{k\pi^2}{\alpha} \right]} + \right. \\ \left. - \frac{3}{(k\pi)^3} \frac{\pi}{\alpha \tanh \left[ \frac{k\pi^2}{\alpha} \right]} - \frac{1}{\alpha^4} \frac{\pi^4 \left( 2 + 4 \cosh \left[ \frac{k\pi^2}{\alpha} \right] \right)}{\sinh^4 \left[ \frac{k\pi^2}{\alpha} \right]} \right) + \frac{8}{3\pi}. \quad (\text{B-42})$$

La correction thermique définie par  $\phi_E$  peut s'écrire suivant les mêmes relations de départ et les mêmes enchaînements que ceux impliqués pour  $\eta_E$ , c'est-à-dire

$$\phi_E = 45 \sum_{m=1}^{\infty} \left( -\frac{4}{(\alpha m)^4} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{(\alpha m)^3} \frac{1}{\alpha m - ik\pi} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{(\alpha m)^2} \frac{1}{(\alpha m - ik\pi)^2} + \frac{2}{\alpha m} \frac{1}{(\alpha m - ik\pi)^3} \right) \right) \\ = \frac{45}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} * \left( -\frac{4}{(\alpha m)^4} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{(\alpha m)^3} \frac{1}{\alpha m - ik\pi} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{(\alpha m)^2} \frac{1}{(\alpha m - ik\pi)^2} + \frac{2}{\alpha m} \frac{1}{(\alpha m - ik\pi)^3} \right) \right) \\ = \frac{45}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} * \left( \frac{1}{(\alpha m)^3} \frac{1}{\alpha m - ik\pi} + \frac{1}{(\alpha m)^2} \frac{1}{(\alpha m - ik\pi)^2} \right. \\ \left. + \frac{2}{\alpha m} \frac{1}{(\alpha m - ik\pi)^3} \right). \quad (\text{B-43})$$

Par transformations duales (B-29,B-30)

$$\phi_E = \frac{45}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} * \left( -\frac{1}{(k\pi\alpha)^2} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{\alpha} + im\right)^2} - \frac{1}{(k\pi)^3} \frac{1}{\alpha \frac{k\pi}{\alpha} + im} - \frac{2}{k\pi\alpha^3} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{\alpha} + im\right)^3} \right). \quad (\text{B-44})$$

Encore une fois, nous isolons le terme  $m = 0$  que nous calculons à part

$$-\frac{45}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} * \frac{4}{\pi^4 k^4} = -\frac{2}{\pi}. \quad (\text{B-45})$$

L'expression pour  $\phi_E$  est donc finalement donnée par la forme

$$\phi_E = \frac{45}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{(k\pi)^2} \frac{\pi^2}{\alpha^2 \sinh^2 \left[ \frac{k\pi^2}{\alpha} \right]} - \frac{1}{(k\pi)^3} \frac{\pi}{\alpha \tanh \left[ \frac{k\pi^2}{\alpha} \right]} - \frac{2}{k\pi\alpha^3} \frac{\pi^3 \cosh \left[ \frac{k\pi^2}{\alpha} \right]}{\sinh^3 \left[ \frac{k\pi^2}{\alpha} \right]} \right) + \frac{2}{\pi}. \quad (\text{B-46})$$

### B.2.3 Comportements asymptotiques

On peut donner les comportements caractéristiques pour  $\eta_F$  et  $\eta_E$  à la limite de haute température. Par croissances comparées sur les formes que nous venons d'obtenir, comme dans la section C du chapitre 4 mais pour le régime  $\alpha \ll 1$ , nous avons

$$\begin{aligned} \eta_F^T &= 30 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{(k\pi)^3 \alpha} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\alpha^2} e^{-2\frac{\pi^2}{\alpha}} \right) \\ &= \frac{30}{\pi^2 \alpha} \zeta(3) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\alpha^2} e^{-2\frac{\pi^2}{\alpha}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B-47})$$

et

$$\begin{aligned} \phi_F &= -\frac{15}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\pi}{(k\pi)^3 \alpha} + \frac{8}{3\pi} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\alpha^2} e^{-2\frac{\pi^2}{\alpha}} \right) \\ &= -\frac{45}{\pi^2 \alpha} \zeta(3) + \frac{8}{3\pi} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\alpha^2} e^{-2\frac{\pi^2}{\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (\text{B-48})$$

En rassemblant les termes, nous trouvons

$$\eta_F = \eta_F^P + (\eta_F^T - 1) + \Delta\eta_F$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{8}{3\pi} \frac{\lambda_P}{L} + \left( \frac{30}{\pi^2 \alpha} \zeta(3) - 1 \right) + \frac{\lambda_P}{L} \left( -\frac{45}{\pi^3 \alpha} \zeta(3) + \frac{8}{3\pi} \right) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{\lambda_P}{L} \right)^2, \frac{1}{\alpha^2} e^{-2\frac{\pi^2}{\alpha}} \right) \\
&= \frac{15}{\pi^2 \alpha} \zeta(3) \left( 2 - \frac{3}{\pi} \frac{\lambda_P}{L} \right) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{\lambda_P}{L} \right)^2, \frac{1}{\alpha^2} e^{-2\frac{\pi^2}{\alpha}} \right). \tag{B-49}
\end{aligned}$$

De même pour l'énergie, on obtient

$$\begin{aligned}
\eta_E^T &= 45 \frac{1}{\pi^2 \alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \\
&= \frac{45}{\pi^2 \alpha} \zeta(3) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\alpha^2} e^{-2\frac{\pi^2}{\alpha}} \right) \\
\phi_E &= \frac{45}{\pi} \frac{1}{\pi^2 \alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} + \frac{2}{\pi} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\alpha^2} e^{-2\frac{\pi^2}{\alpha}} \right) \\
&= \frac{45}{\pi^3 \alpha} \zeta(3) + \frac{2}{\pi} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\alpha^2} e^{-2\frac{\pi^2}{\alpha}} \right) \tag{B-50}
\end{aligned}$$

et donc pour le facteur correctif

$$\begin{aligned}
\eta_E &= \eta_E^P + (\eta_E^T - 1) + \Delta \eta_E \\
&= \frac{45}{\pi^2 \alpha} \zeta(3) \left( 1 - \frac{1}{\pi} \frac{\lambda_P}{L} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\alpha^2} e^{-2\frac{\pi^2}{\alpha}} \right). \tag{B-51}
\end{aligned}$$

## C Miroirs dissipatifs à température non nulle

Dans cet appendice, nous détaillons les discussions du chapitre 5. Nous rappelons tout d'abord la structure des amplitudes de réflexion, pour les deux polarisations

$$r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}} [i\xi] = \frac{1 - z^{\text{TE}}}{1 + z^{\text{TE}}} \quad , \quad r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}} [i\xi] = \frac{1 - z^{\text{TM}}}{1 + z^{\text{TM}}},$$

avec les impédances

$$z^{\text{TE}} = \frac{\sqrt{\frac{\xi^2}{c^2} \varepsilon [i\xi] + \mathbf{k}^2}}{\sqrt{\frac{\xi^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}} \quad , \quad z^{\text{TM}} = \frac{\varepsilon [i\xi] \sqrt{\frac{\xi^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}}{\sqrt{\frac{\xi^2}{c^2} \varepsilon [i\xi] + \mathbf{k}^2}}. \quad (\text{C-1})$$

### C.1 Limite haute température

Nous précisons ici le calcul du terme quasistatique de la formulation de Lifshitz, donné en (5-17) dans le corps du texte

$$\begin{aligned} \frac{k_B T A}{4\pi^2} \text{F}(n=0) &= \frac{k_B T A}{4\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \, |\mathbf{k}| \left[ (r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}} [0]^{-2} e^{2|\mathbf{k}|L} - 1)^{-1} \right. \\ &\quad \left. + (r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}} [0]^{-2} e^{2|\mathbf{k}|L} - 1)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C-2})$$

#### C.1.1 Cas des miroirs parfaits

Pour des miroirs parfaitement réfléchissants, la permittivité  $\varepsilon [i\xi]$  est infinie  $\varepsilon = +\infty$  sur tout le spectre de fréquence. En termes de coefficients de réflexion, on a donc  $r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}} [0] = -1$  et  $r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}} [0] = -1$ . Par conséquent

$$\frac{k_B T A}{4\pi^2} \text{F}(n=0) = \frac{k_B T A}{4\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \, |\mathbf{k}| \left[ (1 \cdot e^{2|\mathbf{k}|L} - 1)^{-1} + (1 \cdot e^{2|\mathbf{k}|L} - 1)^{-1} \right], \quad (\text{C-3})$$

qui se calcule explicitement puisque

$$\int d^2\mathbf{k} \, |\mathbf{k}| \frac{1}{e^{2|\mathbf{k}|L} - 1} = \frac{\pi}{2L^3} \zeta(3). \quad (\text{C-4})$$

La limite haute température (C-2) pour des miroirs parfaits est donc donnée par l'expression suivante

$$F_{\text{parfait}}(T \gg T_{\text{eff}}) \simeq \frac{k_B T A}{4\pi L^3} \zeta(3). \quad (\text{C-5})$$

### C.1.2 Le modèle plasma

Dans le cadre du modèle plasma avec

$$\varepsilon [i\xi] = 1 + \frac{\omega_P^2}{\xi^2}, \quad (\text{C-6})$$

nous avons des amplitudes de réflexion

$$r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}} [0] = \frac{|\mathbf{k}| - \sqrt{\frac{\omega_P^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}}{|\mathbf{k}| + \sqrt{\frac{\omega_P^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}}, \quad r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}} [0] = -1. \quad (\text{C-7})$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{k_B T A}{4\pi^2} F(n=0) &= \frac{k_B T A}{4\pi^2} \int d^2\mathbf{k} |\mathbf{k}| \left[ \left( \left( \frac{|\mathbf{k}| - \sqrt{\frac{\omega_P^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}}{|\mathbf{k}| + \sqrt{\frac{\omega_P^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}} \right)^{-2} e^{2|\mathbf{k}|L} - 1 \right)^{-1} \right. \\ &\quad \left. + (1 \cdot e^{2|\mathbf{k}|L} - 1)^{-1} \right] \\ &= \frac{k_B T A}{32\pi^2 L^3} \int d^2\mathbf{k} |\mathbf{k}| \left[ \left( \left( \frac{|\mathbf{k}| - \sqrt{\Omega_P + \mathbf{k}^2}}{|\mathbf{k}| + \sqrt{\Omega_P + \mathbf{k}^2}} \right)^{-2} e^{|\mathbf{k}|} - 1 \right)^{-1} \right. \\ &\quad \left. + (1 \cdot e^{|\mathbf{k}|} - 1)^{-1} \right], \quad (\text{C-8}) \\ \Omega_P &= \frac{2L}{c} \omega_P. \end{aligned}$$

Dans la limite des grandes distances  $L \gg \lambda_P$ , ou bien  $\Omega_P \rightarrow \infty$ , on a alors  $r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}} [0] = r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}} [0] = -1$ . La force de Casimir correspond alors à la force idéale entre deux miroirs parfaitement réfléchissants

$$F_{\text{plasma}}(L \gg \lambda_P) \simeq \frac{k_B T A}{4\pi L^3} \zeta(3). \quad (\text{C-9})$$

### C.1.3 Le modèle de Drude

Pour le modèle de Drude, avec

$$\varepsilon [i\xi] = 1 + \frac{\omega_P}{\xi(\xi + \Gamma)} \quad (\text{C-10})$$

on a des amplitudes de réflexion telles que

$$r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}} [0] = 0, \quad r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}} [0] = -1. \quad (\text{C-11})$$

Cette perte de la contribution des modes polarisés TE induit directement sur (C-9) un facteur  $\frac{1}{2}$ , c'est-à-dire le comportement (5-23) dans le corps du texte.

## C.2 Continuité des amplitudes de réflexion

On détaille ici l'étude du comportement des amplitudes de réflexion dans le voisinage de la limite quasistatique  $\xi = 0$ , pour un miroir métallique massif, c'est-à-dire dont les amplitudes sont données par les expressions (C-1). Comme précisé dans le texte, on étudie, pour un modèle plasma et pour un modèle de Drude, les deux cas limites suivants :

- cas a) : le champ est pris sous incidence normale, i.e.  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$  fixé. On étudie alors la limite quasi-statique  $\omega \rightarrow 0$  pour les deux polarisations. Pour le modèle plasma, on a donc les enchaînements suivants

$$r_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\text{TE}} [i\xi] = r_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\text{TM}} [i\xi] = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_{\text{plasma}} [i\xi]}}{1 + \sqrt{\varepsilon_{\text{plasma}} [i\xi]}} \quad \longrightarrow \quad r_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\text{TE}} [0] = r_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\text{TM}} [0] = -1.$$

Pour le modèle de Drude maintenant, la même situation implique

$$r_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\text{TE}} [i\xi] = r_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\text{TM}} [i\xi] = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_{\text{Drude}} [i\xi]}}{1 + \sqrt{\varepsilon_{\text{Drude}} [i\xi]}} \quad \longrightarrow \quad r_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\text{TE}} [0] = r_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\text{TM}} [0] = -1.$$

- cas b) : cette fois-ci on se place à la limite quasi-statique  $\xi = 0$  et l'on s'approche de l'incidence normale  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}$ . Pour le modèle plasma, on a donc l'enchaînement

$$r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}} [0] = \frac{|\mathbf{k}| - \sqrt{\frac{\omega_p^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}}{|\mathbf{k}| + \sqrt{\frac{\omega_p^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}}, \quad r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}} [0] = -1 \quad \longrightarrow \quad r_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\text{TE}} [0] = r_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\text{TM}} [0] = -1,$$

et pour le modèle de Drude

$$r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}} [0] = 0, \quad r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}} [0] = -1 \quad \longrightarrow \quad r_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\text{TE}} [0] = 0, \quad r_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\text{TM}} [0] = -1.$$

Ce sont dans les deux cas a) et b) les comportements décrits en section C.1 dans le corps du texte du chapitre 5.

## C.3 Comparaison des deux formulations

On donne ici la différence entre notre formule, qui est toujours vraie, et la formule de Lifshitz dont les conditions de validité sont plus restreintes. Avec les notations du texte, on calcule ici explicitement

$$\Delta F = \frac{\hbar A}{2\pi^3} \sum_n' \tilde{F}(n) - \frac{k_B T A}{2\pi^2} \sum_n' F(n), \quad (\text{C-12})$$

en rappelant

$$\begin{aligned}\tilde{F}(n) &= \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \cos\left[\frac{2\pi n\xi}{\omega_T}\right] \kappa \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]} \quad \text{avec } \omega_T = \frac{2\pi k_B T}{\hbar} \\ F(n) &= \sum_p \int d^2\mathbf{k} \kappa_n \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi_n]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi_n]}.\end{aligned}\quad (\text{C-13})$$

On commence par intégrer par parties

$$\frac{\hbar A}{2\pi^3} \sum_{n \geq 1} \tilde{F}(n) = -\frac{\hbar A}{2\pi^3} \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \sum_{n \geq 1} \frac{\sin\left[\frac{2\pi n\xi}{\omega_T}\right]}{\frac{2\pi n}{\omega_T}} \partial_\xi \left( \kappa \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]} \right), \quad (\text{C-14})$$

le terme de bord étant nul. On utilise la décomposition [177]

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin[lx]}{l} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{pour } 0 < x < 2\pi, \quad (\text{C-15})$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}\frac{\hbar A}{2\pi^3} \sum_{n \geq 1} \tilde{F}(n) &= -\frac{\hbar A}{2\pi^3} \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \frac{\omega_T}{2\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\xi}{\omega_T} \right) \partial_\xi \left( \kappa \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]} \right) \\ &\quad - \frac{\hbar A}{2\pi^3} \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \frac{\omega_T}{2} E\left(\frac{\xi}{\omega_T}\right) \partial_\xi \left( \kappa \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]} \right),\end{aligned}\quad (\text{C-16})$$

en notant  $E(\dots)$  la fonction partie-entière. Réécrivant

$$\int_0^\infty d\xi E\left(\frac{\xi}{\omega_T}\right) g(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\omega_T}^\infty d\xi g(\xi), \quad (\text{C-17})$$

on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\hbar A}{2\pi^3} \sum_{n \geq 1} \tilde{F}(n) &= -\frac{\hbar A}{2\pi^3} \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \frac{\omega_T}{2\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\xi}{\omega_T} \right) \partial_\xi \left( \kappa \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]} \right) \\ &\quad - \frac{\hbar \omega_T A}{4\pi^3} \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_{n\omega_T}^\infty d\xi \partial_\xi \left( \kappa \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]} \right).\end{aligned}\quad (\text{C-18})$$

Pour  $n \geq 1$ , les bornes d'intégrations sont toujours parfaitement définies vis-à-vis de  $\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]$ , auquel cas on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{\hbar A}{2\pi^3} \sum_{n \geq 1} \tilde{F}(n) &= -\frac{\hbar A}{2\pi^3} \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \frac{\omega_T}{2\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\xi}{\omega_T} \right) \partial_\xi \left( \kappa \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]} \right) \\ &\quad + \frac{k_B T A}{2\pi^2} \sum_{n \geq 1} \sum_p \int d^2\mathbf{k} \kappa_n \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi_n]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi_n]}. \end{aligned} \quad (\text{C-19})$$

Sur le dernier terme du membre de droite de cette équation, on reconnaît exactement les contribution  $n \geq 1$  de la formule de Lifshitz. Par ailleurs

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar A}{2\pi^3} \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \frac{\omega_T}{2\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\xi}{\omega_T} \right) \partial_\xi \left( \kappa \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]} \right) = \\ &-\frac{\hbar\omega_T A}{8\pi^3} \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \partial_\xi \left( \kappa \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]} \right) \\ &+ \frac{\hbar A}{4\pi^3} \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \xi \partial_\xi \left( \kappa \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]} \right). \end{aligned} \quad (\text{C-20})$$

Le dernier terme est intégré par parties, le terme de bord étant nul. On a donc

$$\frac{\hbar A}{4\pi^3} \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \xi \partial_\xi \left( \kappa \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]} \right) = -\frac{\hbar A}{4\pi^3} \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \kappa \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]}. \quad (\text{C-21})$$

On reconnaît le terme  $\frac{\hbar A}{4\pi^3} \tilde{F}(0)$  de notre formulation. On a donc pour la différence entre notre formulation et celle de Lifshitz

$$\Delta F = -\frac{\hbar\omega_T A}{8\pi^3} \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \partial_\xi \left( \kappa \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]} \right) - \frac{k_B T A}{4\pi^2} F(0). \quad (\text{C-22})$$

Si une intégration directe du premier terme de cette différence est possible, alors on a simplement

$$\Delta F = 0. \quad (\text{C-23})$$

Si en revanche  $\frac{\rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p[i\xi]}$  n'est pas déterminé à la limite quasistatique, alors l'intégration n'est pas autorisée et on reste avec un terme de différence non nul.

C'est typiquement le cas pour le modèle de Drude où l'on a

$$F(0) = \sum_p \int d^2\mathbf{k} |\mathbf{k}| \frac{\rho_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[0]}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[0]}. \quad (\text{C-24})$$

$\frac{\rho_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[i\xi]}{1-\rho_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[i\xi]}$  est partout continu mais  $\frac{\rho_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}[i\xi]}{1-\rho_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}[i\xi]}$  est discontinu au point quasistatique  $\xi = 0$ . On a donc

$$\Delta F = -\frac{\hbar\omega_{\text{T}}A}{8\pi^3} \sum_p \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \partial_\xi \left( \kappa \frac{\rho_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}[i\xi]}{1-\rho_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}[i\xi]} \right). \quad (\text{C-25})$$

C'est ce terme qui est à l'origine des prédictions divergentes que nous discutons dans le corps du chapitre 5.

## C.4 Limite de dissipation nulle

Nous rappelons, sous une forme adaptée pour cette discussion, la structure des amplitudes de réflexion quand on utilise (C-10). On peut écrire

$$r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}[i\xi] = \frac{1 - z^{\text{TE}}}{1 + z^{\text{TE}}} \quad r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[i\xi] = \frac{1 - z^{\text{TM}}}{1 + z^{\text{TM}}}$$

avec les impédances données sous la forme

$$z^{\text{TE}} = \frac{\sqrt{\frac{\xi^2}{c^2} + \mathbf{k}^2 + \frac{\omega_{\text{p}}^2}{c^2} (1 - \Pi)}}{\sqrt{\frac{\xi^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}} \quad z^{\text{TM}} = \frac{\left(1 + \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\xi^2} (1 - \Pi)\right) \sqrt{\frac{\xi^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}}{\sqrt{\frac{\xi^2}{c^2} + \mathbf{k}^2 + \frac{\omega_{\text{p}}^2}{c^2} (1 - \Pi)}}. \quad (\text{C-26})$$

On a noté et isolé le terme

$$\Pi = \frac{\Gamma}{\xi + \Gamma}, \quad (\text{C-27})$$

tel que  $\Pi \rightarrow 0$  pour  $\Gamma \rightarrow 0$ . On a donc bien sûr pour les amplitudes de réflexion, à la limite  $\Gamma \rightarrow 0$

$$\left( r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}[i\xi]^{\text{Drude}}, r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[i\xi]^{\text{Drude}} \right) \rightarrow \left( r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}[i\xi]^{\text{plasma}}, r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}[i\xi]^{\text{plasma}} \right). \quad (\text{C-28})$$

Notre formulation sépare naturellement les facteurs correspondant aux différentes corrections

$$\eta_{\text{F}} = \eta_{\text{F}}^{\text{Drude}} + (\eta_{\text{F}}^{\text{T}} - 1) + \Delta\eta_{\text{F}}^{\text{Drude}}. \quad (\text{C-29})$$

Les termes  $\eta_{\text{F}}^{\text{Drude}}$  et  $\eta_{\text{F}}^{\text{T}}$  ont déjà été explicités,  $\eta_{\text{F,E}}^{\text{Drude}}$  numériquement au chapitre 3. Le terme  $\eta_{\text{F}}^{\text{T}}$ , explicité au chapitre 4, est un terme de correction thermique, indépendant de la réponse optique du miroir. Pour le terme de mélange des corrections  $\Delta\eta_{\text{F}}^{\text{Drude}}$ , d'après la section C du chapitre 4

$$\Delta\eta_{\text{F}}^{\text{Drude}} = \frac{240L^4}{c\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \int d^2\mathbf{k} \int_0^\infty d\xi \cos\left[\frac{2\pi m\xi}{\omega_{\text{T}}}\right] \kappa \Delta f^{\text{Drude}}, \quad (\text{C-30})$$

où l'on a noté

$$\Delta f^{\text{Drude}} = \sum_p \frac{\rho_{\mathbf{k}}^p [i\xi]^{\text{Drude}}}{1 - \rho_{\mathbf{k}}^p [i\xi]^{\text{Drude}}} - \frac{2e^{-2\kappa L}}{1 - e^{-2\kappa L}}. \quad (\text{C-31})$$

Etant donné la structure (C-26) des amplitudes de réflexion pour le modèle de Drude, on peut évaluer le terme  $\Delta f^{\text{Drude}}$  au premier ordre en  $\frac{\lambda_P}{L}$ , comme nous l'avons déjà présenté en (A-10), et obtenir

$$\begin{aligned} \Delta f^{\text{Drude}} &\sim -\frac{e^{2\kappa L}}{(e^{2\kappa L} - 1)^2} \left( 1 - \left( r_{\mathbf{k}}^{\text{TE}} [i\xi]^{\text{Drude}} \right)^2 + 1 - \left( r_{\mathbf{k}}^{\text{TM}} [i\xi]^{\text{Drude}} \right)^2 \right) \\ &\sim -\frac{e^{2\kappa L}}{(e^{2\kappa L} - 1)^2} \frac{2\kappa \lambda_P}{\pi} \left( 1 + \frac{\xi^2}{c^2 \kappa^2} \right) \Lambda \\ &\sim \Delta f^{\text{plasma}} \Lambda \quad \text{avec} \quad \Lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \Pi}}. \end{aligned} \quad (\text{C-32})$$

Ce facteur  $\Lambda = \sqrt{1 + \frac{\Gamma}{\xi}}$  est un facteur multiplicatif contenant à lui seul l'effet de la dissipation non nulle sur le calcul du terme correctif de mélange. On a immédiatement

$$\Lambda \rightarrow 1 \quad \text{pour} \quad \Gamma \rightarrow 0. \quad (\text{C-33})$$

La décomposition (C-29) démontre alors l'identité des comportements pour le modèle plasma et pour le modèle de Drude dans la limite  $\Gamma \rightarrow 0$ .



## Bibliographie

- [1] M. Planck, *Verh. Deutsch. Phys. Ges.* **2** 237 (1900)
- [2] M. Planck, *Verh. Deutsch. Phys. Ges.* **13** 138 (1911)
- [3] P.W. Milonni and M.-L. Shih, *Am. J. Phys.* **59** 684 (1991)
- [4] D.W. Sciama, *The Philosophy of Vacuum* (S. Saunders and H. R. Brown Eds., Clarendon, 1991, p. 137)
- [5] E. Gunzig and S. Diner Eds., *Le vide : univers du tout ou du rien* (Editions Complexe, 1998)
- [6] O. Darrigol, *Ann. Physik* **9** 951 (2000)
- [7] A. Einstein and O. Stern, *Ann. Physik* **40** 551 (1913)
- [8] P.J.W. Debye, *Ann. Physik* **43** 49 (1914)
- [9] R.S. Mulliken, *Nature* **114** 349 (1924)
- [10] A. Einstein, *Ann. Physik* **17** 132 (1905) (traduction anglaise A.B. Arons and M.B. Peppard, *Am. J. Phys.* **33** 367 (1965))
- [11] S.N. Bose, *Z.Phys.* **26** 178 (1924)
- [12] A. Einstein, *Preuss. Akad. d. Wissenschaften, Berlin, Phys. Math. Kl., Sitzungsber.* 261 (1924)
- [13] A. Einstein, *Preuss. Akad. d. Wissenschaften, Berlin, Phys. Math. Kl., Sitzungsber.* 3 (1925)
- [14] A. Einstein, *Phys. Z.* **10** 185 (1909)
- [15] A. Einstein, *Phys. Z.* **18** 121 (1917) (traduction anglaise par D. ter Haar, *The Old Quantum Theory* (Pergamon, 1967))

- 
- [16] E. Wolf, *Opt. News* Winter issue 24 (1979)
- [17] W. Nernst, *Verh. Deutsch. Phys. Ges.* **18** 83 (1916)
- [18] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford University Press, 1958)
- [19] P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **114** 243 (1927)
- [20] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **43** 172 (1927)
- [21] W. Heisenberg, *The Physical Principles of the Quantum Theory* (Dover, 1930)
- [22] S. Reynaud, *Annales de Physique* **15** 63 (1990)
- [23] F. London, *Z. phys. Chemie B* **11** 222 (1930), *Z. Physik* **63** 245 (1930)
- [24] J.D. van der Waals, *Academisch Proefschrift* Leiden (1873)
- [25] E.J.W. Verweey and J.Th.G. Overbeek, *Theory of the Stability of Lyophobic Colloids* (Elsevier Science Publishers, 1948)
- [26] H.B.G. Casimir, *Proceedings of the Fourth Workshop on Quantum Fields Theory under the influence of External Conditions* (World Scientific, 1999);  
M.J. Sparnaay, *Physics in the Making* (A. Sarlemijn and M.J. Sparnaay Eds., Elsevier Science Publishers, 1989)
- [27] H.B.G. Casimir and D. Polder, *Phys. Rev.* **73** 360 (1946), *Nature* **158** 787 (1946)
- [28] H.B.G. Casimir, *J. Chimie Phys.* **46** 407 (1949)
- [29] H.B.G. Casimir, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap* **51** 793 (1948)
- [30] E.M. Lifshitz, *Sov. Phys. JETP* **2** 73 (1956);  
E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevskii, *Landau and Lifshitz Course of Theoretical Physics: Statistical Physics Part 2* ch VIII (Butterworth-Heinemann, 1980)

- [31] J.Th.G. Overbeek and M.J. Sparnaay, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap* **54** 387 (1951), *J. Colloid Sci.* **7** 343 (1952), *Disc. Faraday Soc.* **18** 19 (1954);  
M.J. Sparnaay, *Thèse de l'Université Utrecht* (1952)
- [32] B.V. Derjaguin, I.I. Abrikosova and E.M. Lifshitz, *Quart. Revs.* **10** 33 (1956)
- [33] B.V. Derjaguin and I.I. Abrikosova, *Sov. Phys. JETP* **3** 819 (1957)
- [34] M.J. Sparnaay, *Nature* **180** 334 (1957), *Physica* **XXIV** 751 (1957)
- [35] B.V. Derjaguin and I.I. Abrikosova, *J. Phys. Chem. Solid* **5** 1 (1958)
- [36] B.V. Derjaguin and I.I. Abrikosova, *Sci. Am.* **203** 47 (1960)
- [37] W. Black, J.G.V. De Jongh, J.Th.G.Overbeek and M.J. Sparnaay, *Trans. Faraday Soc.* **56** 1597 (1960)
- [38] D. Tabor and R.H.S. Winterton, *Nature* **219** 1120 (1968)
- [39] G.C.J. Rouweler and J.Th.G. Overbeek, *J. Chem. Soc. Faraday Transactions I* **67** 2117 (1971)
- [40] J.N. Israelachvili and D. Tabor, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A331** 19 (1972)
- [41] S. Hunklinger, H. Geisselmann and W. Arnold, *Rev. Sci. Instr.* **43** 584 (1972)
- [42] E.S. Sabisky and C.H. Anderson, *Phys. Rev. A* **7** 790 (1973)
- [43] L.R. White, J.N. Israelachvili and B.W. Ninham, *J. Chem. Soc. Faraday Transactions I* **72** 2526 (1976)
- [44] P.H.G.M. van Blokland and J.Th.G. Overbeek, *J. Chem. Soc. Faraday Transactions I* **74** 2637 (1978)
- [45] B.V. Derjaguin, Y.I. Rabinovich and N.V. Churaev, *Nature* **272** 313 (1978)

- [46] W. Arnold, S. Hunklinger and K. Dransfeld, *Phys. Rev. B* **19** 6049 (1979)
- [47] B.V. Derjaguin, N.V. Churaev and V.M. Muller, *Surface Forces* (Plenum 1987)
- [48] S.K. Lamoreaux, *Phys. Rev. Lett.* **78** 5 (1997), erratum **81** 5473
- [49] U. Mohideen and A. Roy, *Phys. Rev. Lett.* **81** 4549 (1998)
- [50] S.K. Lamoreaux, *Phys. Rev. A* **59** R3149 (1999)
- [51] A. Roy, C. Lin and U. Mohideen, *Phys. Rev. D* **60** 111101 (1999)
- [52] B.W. Harris, F. Chen and U. Mohideen, *Phys. Rev. A* **62** 052109 (2000)
- [53] T. Ederth, *Phys. Rev. A* **62** 062104 (2000)
- [54] H.B. Chan, V.A. Aksyuk, R.N. Kleiman, D.J. Bishop and F. Capasso, *Science* **291** 1941 (2001)
- [55] G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio and G. Ruoso, *Phys. Rev. Lett.* **88** 041804 (2002)
- [56] J. Schwinger, L.L.Jr. de Raad and K.A. Milton, *Ann. Phys. N.Y.* **115** 1 (1978)
- [57] M. Bordag, U. Mohideen and V.M. Mostepanenko, *Phys. Rept.* **353** 1 (2001)
- [58] G. Plunien, B. Müller and W. Greiner, *Phys. Rep.* **134** 87 (1986)
- [59] V.M. Mostepanenko and N.N. Trunov, *The Casimir effect and its application* (Clarendon, 1997)
- [60] E. Elizalde and A. Romeo, *Am. J. Phys.* **59** 711 (1991)
- [61] S.K. Lamoreaux, *Am. J. Phys.* **67** 850 (1999)
- [62] B. Duplantier and V. Rivasseau, *Séminaire Poincaré du 9 mars 2002* (à paraître, 2002)

- [63] S. Reynaud, A. Lambrecht, C. Genet and M.T. Jaekel, *C. R. Acad. Sci. Paris* **IV-2** 1287 (2001)
- [64] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61** 1 (1989)
- [65] R.J. Adler, B. Casey et O.C. Jacob, *Am. J. Phys.* **63** 620 (1995)
- [66] E. Fischbach and C. Talmadge, *The Search for Non Newtonian Gravity* (AIP Press/Springer Verlag, 1998)
- [67] G. Carugno, Z. Fontana, R. Onofrio and C. Rizzo, *Phys. Rev. D* **55** 6591 (1997)
- [68] J.C. Long, H.W. Chan and J.C. Price, *Nucl. Phys. B* **539** 23 (1999)
- [69] M. Bordag, B. Geyer, G.L. Klimchitskaya and V.M. Mostepanenko, *Phys. Rev. D* **60** 055004 (1999)
- [70] E. Fischbach and D.E. Krause, *Phys. Rev. Lett.* **82** 4753 (1999)
- [71] J.K. Hoskins, R.D. Newman, R. Spero and J. Schultz, *Phys. Rev. D* **32** 3084 (1985)
- [72] M. Born and E. Wolf, *Principles of optics* (Cambridge University Press, 7<sup>th</sup> edition, 1999)
- [73] L. Landau, E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevskii, *Landau and Lifshitz Course of Theoretical Physics: Electrodynamics in Continuous Media* (Butterworth-Heinemann, 1980)
- [74] F. Grassia, *Fluctuations quantiques et thermiques dans les transducteurs électromécaniques* Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie (1998)
- [75] J.M. Courty, F.Grassia and Serge Reynaud, in *Noise, Oscillators and Algebraic Randomness* (Lectures notes in Physics, M. Planat Eds., Springer 2000)
- [76] M.T. Jaekel and S. Reynaud, *J. Physique* **I-1** 1395 (1991)
- [77] L.S. Brown and G.J. Maclay, *Phys. Rev.* **184** 1272 (1969)

- [78] M. Reuter and W. Dittrich, *Eur. J. Phys.* **6** 33 (1985)
- [79] N.F. Svaiter and B.F. Svaiter, *J. Phys. Math A* **25** 979 (1992)
- [80] M. Born and E. Wolf, Chapitre 1, section 1.5.1 in [72]
- [81] L. Landau, E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevskii, Section 86 in [73]
- [82] L. Landau, E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevskii, Section 59 in [73]
- [83] H.M. Nussenzveig, *Causality and Dispersion Relations* (Academic Press, 1972)
- [84] L. Landau, E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevskii, Section 79 et 82 in [73]
- [85] M. Born and E. Wolf, Chapitre 1, section 1.5.4 in [72]
- [86] E. Hecht, *Optics* (Addison-Wesley Publishing Co., 2<sup>nd</sup> edition, 1989), Chapitre 4, section 4.3.4
- [87] H.B.G. Casimir, *Rev. of Mod. Phys.* **17** 343 (1945)
- [88] L. Onsager, *Phys. Rev.* **37** 405 (1931), **38** 2265 (1931)
- [89] F. Abelès, *Ann. d. Physique* **5** 611 (1955)
- [90] M. Born and E. Wolf, Chapitre 1 section 1.6.2 in [72]
- [91] A. Lambrecht, M.T. Jaekel, and S. Reynaud, *Phys. Lett. A* **225** 188 (1997)
- [92] A.E. Siegman, *Lasers* (University Science Books, 1986)
- [93] L. Landau, E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevskii, Section 82 in [73]
- [94] G.L. Klimchitskaya and V.M. Mostepanenko, *Phys. Rev. A* **63** 062108 (2001)
- [95] J.M.C. Courty, P. Grangier, L. Hilico and S. Reynaud, *Opt Commun.* **83** 251 (1991)
- [96] J.M.C. Courty and S. Reynaud, *Phys. Rev. A* **46** 2766 (1992)

- [97] L. Hilico, C. Fabre, S. Reynaud and E. Giacobino, *Phys. Rev. A* **46** 4397 (1992)
- [98] L. Hilico, *Réduction du bruit quantique de la lumière par une cavité bistable* Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie (1992)
- [99] A. Lambrecht, *Atomes froids et fluctuations quantiques* Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie (1995)
- [100] S.M. Barnett, J. Jeffers, A. Gatti and R. Loudon, *Phys. Rev. A* **57** 2134 (1998)
- [101] S. Reynaud, *Cours de l'école doctorale de la région parisienne* (2002)
- [102] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Grynberg, *Introduction à l'électrodynamique quantique* (InterEditions CNRS, 1987) et *Processus d'interaction entre photons et atomes* (InterEditions CNRS, 1988)
- [103] H.B Callen and T.A. Welton, *Phys. Rev.* **83** 34 (1951)
- [104] R. Kubo, *Rep. Progr. Phys.* **29** 255 (1966)
- [105] S. Haroche, in *New Trends in Atomic Physics* 193 (G. Grynberg and R. Stora Eds., North Holland, 1984)
- [106] G. Barton and K. Scharnhorst, *J. Phys. A* **26** 2037 (1993)
- [107] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw Hill, 1985)
- [108] M.T. Jaekel and S. Reynaud, *Quantum Optics* **4** 39 (1992)
- [109] M.T. Jaekel et S. Reynaud, *J. Physique* **I-1** 149 (1992)
- [110] A. Lambrecht, M.T. Jaekel and S. Reynaud, *Phys. Rev. Lett.* **77** 615 (1996)
- [111] M.T. Jaekel et S. Reynaud, *Rep. Prog. Phys.* **60** 863 (1997)
- [112] A. Lambrecht, M.T. Jaekel and S. Reynaud, *Euro. Phys. J. D* **3** 95 (1998)

- 
- [113] M.T. Jaekel and S. Reynaud, *Quantum Fluctuations and Inertia in Quantum Fluctuations - Proceedings of Les Houches Summer School LXIII*, S. Reynaud, E. Giacobino and J. Zinn-Justin Eds. (Elsevier, 1997)
- [114] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge University Press, 1927)
- [115] E.J. Katz, *Sov. Phys. JETP* **46** 109 (1977)
- [116] D. Kupiszewska, *Phys. Rev. A* **46** 2286 (1992)
- [117] S.M. Barnett, C.R. Gilson, B. Huttner and N. Imoto, *Phys. Rev. Lett.* **77** 1739 (1996)
- [118] A. Lambrecht and S. Reynaud, *Euro. Phys. J. D* **8** 309 (2000)
- [119] E.D. Palik, *Handbook of Optical Constants of Solids* (Academic Press, 1998)
- [120] M. Born and E. Wolf, Chapitre 14 in [72]
- [121] G. Barton, *Rep. Prog. Phys.* **42** 65 (1979)
- [122] P. Drude, *Ann. der Physik* **1** 566 et **3** 369 (1900)
- [123] N.W. Ashcroft and N.D. Mermin, *Solid State Physics* (HRW International, 1976)
- [124] D. Pines, *Elementary Excitations in Solids* (Benjamin Inc., 1964)
- [125] L.G. Schulz, *Phil. Mag. Suppl.* **6** 102 (1957)
- [126] H. Ehrenreich and H.R. Philipp, *Phys. Rev.* **128** 1622 (1962)
- [127] M.T. Jaekel and S. Reynaud, *Phys. Lett. A* **167** 227 (1992)
- [128] A. Lambrecht and S. Reynaud, comment on [48], *Phys. Rev. Lett.* **84** 5672 (2000)
- [129] S. Lamoreaux, reply to [128], *Phys. Rev. Lett.* **84** 5673 (2000)
- [130] G. Feinberg and J. Sucher, *Phys. Rev.* **139** B1619 (1965)

- [131] G. Feinberg and J. Sucher, *Phys. Rev. A* **2** 2395 (1970)
- [132] E. Power and T. Thirunamachandran, *Phys. Rev. A* **48** 4761 (1993)
- [133] E. Power and T. Thirunamachandran, *Phys. Rev. A* **50** 3929 (1994)
- [134] G. Barton, *Communication privée* (2001)
- [135] J. Heinrichs, *Phys. Rev. B* **11** 3625 (1975), erratum **12** 6006 (1975)
- [136] C. Genet, A. Lambrecht and S. Reynaud, *Phys. Rev. A* **62** 012110 (2000)
- [137] G.L. Klimchitskaya, A. Roy, U. Mohideen and V.M. Mostepanenko, *Phys. Rev. A* **60** 3487 (1999)
- [138] V.B. Bezerra, G.L. Klimchitskaya and V.M. Mostepanenko, *Phys. Rev. A* **62** 014102 (2000)
- [139] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Allan Jeffrey Ed., Academic Press, 5<sup>th</sup> edition, 1994), entrée **3.249.1**
- [140] N.G. Van Kampen, B.R.A. Nijboer and K. Schram, *Phys. Lett.* **26A** 307 (1968)
- [141] K. Schram, *Phys. Lett.* **43A** 282 (1973)
- [142] J. Mehra, *Physica (Amsterdam)* **57** 147 (1967)
- [143] M. Bordag, B. Geyer, G.L. Klimchitskaya and V.M. Mostepanenko, *Phys. Rev. Lett.* **85** 503 (2000)
- [144] F. Ravndal and D. Tollefsen, *Phys. Rev. D* **40** 4191 (1989)
- [145] M. Boström and Bo E. Sernelius, *Phys. Rev. Lett.* **84** 4757 (2000)
- [146] V.B. Svetovoy and M.V. Lokhanin, *Mod. Phys. Lett. A* **15** 1013 (2000); *Phys. Lett. A* **280** 177 (2001)
- [147] S.K. Lamoreaux, comment on [145], *Phys. Rev. Lett.* **87** 139102 (2001)

- [148] Bo E. Sernelius, reply to [147], *Phys. Rev. Lett.* **87** 139101 (2001)
- [149] M. Boström and Bo E. Sernelius, comment on [143], *Phys. Rev. Lett.* **87** 259101 (2001)
- [150] M. Bordag, B. Geyer, G.L. Klimchitskaya and V.M. Mostepanenko, reply to [149], *Phys. Rev. Lett.* **87** 259102 (2001)
- [151] G.L. Klimchitskaya and V.M. Mostepanenko, *Phys. Rev. A* **63** 062108 (2001)
- [152] G.L. Klimchitskaya, *Int. J. Mod. Phys. A* **17** 751 (2002)
- [153] L. Schwartz, *Cours d'Analyse* (Hermann, 1978)
- [154] P.W. Milonni, *The Quantum Vacuum: an Introduction to Quantum Electrodynamics* (Academic Press, 1993)
- [155] B.V. Derjaguin, *Colloid J. USSR* **69** 155 (1934)
- [156] F. Chen, U. Mohideen, G.L. Klimchitskaya and V.M. Mostepanenko, *Phys. Rev. Lett.* **88** 101801 (2002)
- [157] D. Bishop, P. Gammel and C. Randy Giles, *Phys. Today* October issue 38 (2001)
- [158] H.B. Chan, V.A. Aksyuk, R.N. Kleiman, D.J. Bishop and F. Caspasso, *Phys. Rev. Lett.* **87** 211801 (2001)
- [159] D. Langbein, *Phys. Rev. B* **2** 3371 (1970)
- [160] D. Langbein, *J. Phys. Chem. Solids* **32** 133 (1971), **32** 1657 (1971)
- [161] R. Balian and B. Duplantier, *Ann. Physics* **104** 300 (1977); *Ann. Physics* **112** 165 (1978)
- [162] R. Balian in [62]
- [163] M. Schaden and L. Spruch, *Phys. Rev. A* **58** 935 (1998)
- [164] M. Schaden and L. Spruch, *Phys. Rev. Lett.* **84** 459 (2000)
- [165] J. Blocki, J. Randrup, W.J. Swiatecki and C.F. Tsang, *Ann. Physics* **105**, 427 (1977)

- [166] M. Bordag, G.L. Klimchitskaya and V.M. Mostepanenko, *Int. J. Mod. Phys. A* **10** 2661 (1995)
- [167] M. Bordag, G.L. Klimchitskaya and V.M. Mostepanenko, *Phys. Lett. A* **200** 95 (1995)
- [168] V.B. Bezerra, G.L. Klimchitskaya and C. Romero, *Mod. Phys. Lett. A* **12** 2613 (1997)
- [169] P. Johansson and P. Apell, *Phys. Rev. B* **56** 4159 (1997)
- [170] J.L.M. van Bree, J.A. Poulis, B.J. Verhaar and K. Schram, *Physica (Utrecht)* **78** 187 (1974)
- [171] Ya. I. Rabinovich and N.V. Churaev, *Colloid. J. USSR* **51** 65 (1989)
- [172] T. Emig, A. Hanke, R. Golestanian and M. Kardar, *Phys. Rev. Lett.* **87** 260402 (2001)
- [173] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, entrée **9.550** in [139]
- [174] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, entrée **9.542** in [139]
- [175] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, entrée **3.423** in [139]
- [176] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, entrée **3.951** in [139]
- [177] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, entrée **1.441** in [139]

## Résumé

Nous étudions la force de Casimir entre deux miroirs métalliques à température non nulle. Nous développons les outils théoriques nécessaires à une évaluation précise de cette force et qui permettent une comparaison de haute précision avec les mesures expérimentales récentes.

A partir de la notion de réseau optique, nous caractérisons la diffusion des fluctuations du vide électromagnétique sur une cavité Fabry-Perot et calculons la force de Casimir comme la différence des pressions de radiation exercées par ces fluctuations à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité.

L'effet de réflexion imparfaite des miroirs est pris en compte en étudiant leur réponse optique, d'abord pour des miroirs diélectriques puis pour des miroirs métalliques. Nous détaillons le rôle des propriétés de causalité, de stabilité et de transparence à haute fréquence des amplitudes de diffusion.

Nous calculons également la force de Casimir à température ambiante en évaluant l'effet induit par les fluctuations thermiques du champ. En tenant compte simultanément de cet effet et de l'effet de réflexion imparfaite des miroirs, nous montrons que ces deux effets sont corrélés et que cette corrélation doit être considérée pour une évaluation de haute précision. Dans le cadre de notre formulation, nous résolvons la polémique liée au calcul de la force entre miroirs dissipatifs à température non nulle.

Finalement, nous analysons les problèmes de géométrie et de rugosité liés aux expériences. En particulier pour la question de la rugosité de surface des miroirs, nous montrons pour des miroirs parfaits que l'approximation de proximité n'est pas toujours valable. Nous insistons sur les effets de sensibilité liés à la dépendance spectrale de la rugosité.

**Mots-clés** : force de Casimir, fluctuations du vide et thermiques, réseaux optiques, amplitudes de diffusion, pression de radiation, miroirs dissipatifs, plasmons de surface, théorème de proximité, spectre de rugosité.

## Abstract

We study the Casimir force between two metallic mirrors at non zero temperature. We develop theoretical methods for a high precision evaluation of the force in order to compare with recent measurements.

From the theory of optical networks, we characterise the scattering of the electromagnetic vacuum fluctuations on a Fabry-Perot cavity and we calculate the Casimir force as the difference of radiation pressures exerted by these fluctuations inside and outside the cavity.

The effect of imperfect reflection of the mirrors is considered by studying the optical response of dielectric mirrors and metallic mirrors. We detail the role of causality, stability and high frequency transparency properties of scattering amplitudes.

We calculate also the Casimir force at room temperature evaluating the effect induced by the thermal fluctuations of the field. A simultaneous calculation of thermal corrections and the effect of imperfect reflection shows that both effects are correlated. This correlation has to be considered in a high precision evaluation. In the framework of our formulation, we explain the problem of the evaluation of the force between dissipative mirrors at non zero temperature, subject of a polemical debate.

Finally, we analyse problems of geometry and mirrors surface roughness connected to the experiments. In particular for the problem of surface roughness, we show for perfect mirrors that the proximity force approximation is not always valid. We show the importance of sensibility effects related to the roughness spectrum.

**Keywords** : Casimir force, vacuum and thermal fluctuations, optical networks, scattering amplitudes, radiation pressure, dissipative mirrors, surface plasmons, Proximity Force Theorem, roughness spectrum.