Meilleures constantes dans les inégalités de Sobolev pour des fonctions invariantes par un groupe d'isométries

Zoé Faget
Equipe Géométrie et Dynamique
Institut Mathématiques, Paris

Table des matières

Introduction

0.1 Motivations

L'étude des inclusions de Sobolev sur une variété riemannienne recouvre des questions très diverses et a des applications fondamentales, particulièrement en analyse non linéaire. Les estimations des "meilleures constantes" intervenant dans les inégalités critiques de Sobolev ont une grande importance dans de nombreux problèmes de géométrie riemannienne, un des meilleurs exemples étant la résolution du problème de Yamabe.

Une question intéressante est aussi de comprendre en quoi ces estimations de meilleures constantes sont liées à la géométrie de la variété riemannienne. Lorsque l'on impose aux fonctions considérées d'être invariantes par un groupe d'isométries, on sait que l'on peut augmenter l'exposant critique des inégalités de Sobolev, et ainsi avoir de nouvelles applications en analyse non linéaire. Là encore, l'estimation des "meilleures constantes" revêt une grande importance et est liée cette fois ci aux symétries imposées.

0.2 Enoncé du problème

Soient (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, G un sous groupe compact du groupe des isométries $Is(M, g)$ de (M, g), et $p \geq 1$. Si $H_1^p(M)$ désigne l'espace de Sobolev standard constitué des fonctions de $L^p(M)$ dont le gradient est aussi dans $L^p(M)$, on note $H_{1,G}^p(M)$ le sous espace de $H_1^p(M)$ constitué des fonctions qui sont G-invariantes. Si k désigne la plus petite dimension des orbites de M sous G, on sait depuis les travaux de Hebey et Vaugon (voir [19, 20]) que pour $p \in [1, n-k[$, l'espace $H_{1,G}^p(M)$ se plonge de façon continue dans $L_G^q(M)$ pour $q \in [1, p^\star]$ où $p^\star = \frac{(n-k)p}{n-k-p}$. Lorsque $k > 0$, c'est à dire lorqu'il n'y a pas d'orbite finie, p^* est alors strictement plus grand que l'exposant critique classique $\frac{np}{n-p}$. On obtient ainsi, lorsque toutes les orbites sous G sont de cardinal infini des plongements continus dans des espaces L^q plus grands que ceux donnés classiquement par le théorème de Sobolev, et par continuité des plongements, on a l'existence de constantes $A, B > 0$ telles que quelle que soit $u \in H_{1,G}^p(M)$,

$$||u||^{\frac{p}{q}} \leq A||\nabla u||_p^p + B||u||_p^p. \tag{0}$$

Si G possède des orbites finies, une telle amélioration des inclusions de Sobolev est impossible. En revanche, on sait, voir là encore Hebey et Vaugon [20], que la meilleure constante multiplicative du terme en gradient est alors divisée par le cardinal de l'orbite minimale. Iliopoulos [22], puis Aubin et Cotsiolis [5], se sont également intéressés à la meilleure constante du terme en gradient dans le cas critique $q = p^*$ lorsque la variété est la sphère unité standard, et $G = O(r)\times O(s)$ avec $r+s = n+1$, et $r \geq s \geq 2$. Dans ce contexte, la plus petite dimension des G-orbites est $k = s-1$, et si $k > 2$, il suit des travaux juste cités que quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une constante $B_\varepsilon > 0$ telle que quelle que soit $u \in H^2_{1,G}(S^n)$

$$||u||^2_{\frac{2r}{r-2}} \leq \left(A(n,r)^2 + \varepsilon\right)||\nabla u||_2^2 \mathrm{dV} + B_\varepsilon ||u||_2^2,$$

où $A(n,r) = \frac{2}{[r(r-2)]^{1/2}[\omega_r\omega_{n-r}]^{1/r}}$ et ω_n désigne le volume de la sphère S_n, avec la propriété que $A(n,r)$ est la meilleure constante possible dans cette inégalité.

Lorsque $p = n$, on est dans le cas d'exception des inclusions de Sobolev, car $H^p_1(M) \not\subset L^\infty(M)$. En revanche, quelle que soit $u \in H^p_1(M)$, $\exp(u)$ est intégrable. On a donc un nouveau type d'inégalités, qui peuvent être considérées comme une extension des inégalités précédentes à ce cas, comme celles établies par Trudinger [28] dans le contexte euclidien, et par Aubin [3] et Cherrier [11] sur des variétés riemanniennes. Quelle que soit $u \in H^q_1(M)$, il existe des constantes C, μ, ν telles que

$$\int_M e^u \mathrm{dV} \leq C \exp\left[\mu ||\nabla u||^{n-k}_{n-k} + \nu ||u||^{n-k}_{n-k}\right].$$

Lorsque l'on se restreint à la classe des fonctions invariantes par un groupe d'isométries G, il est alors possible d'améliorer la constante multiplicative du terme en gradient. Aubin et Cotsiolis [6] se sont à nouveau intéressés à la sphère standard et au groupe $O(r)\times O(s)$ et ont déterminé la meilleure constante possible dans ce cas.

Meilleures constantes et inégalités de Sobolev jouent un rôle fondamental dans l'étude d'équations différentielles non linéaires sur les variétés. Lorsque l'on restreint les espaces de Sobolev à une classe de fonctions soumises à des contraintes, on modifie souvent la valeur de la meilleure constante. Pour les applications, il est important d'exprimer précisément cette valeur. On peut alors se poser différentes questions :

1) Que vaut la meilleure constante dans les inégalités classiques de Sobolev sur une variété riemannienne compacte quelconque, lorsque les fonctions sont invariantes par un groupe d'isométries ?

2) Que vaut la meilleure constante dans le cas d'exception des inégalités de Sobolev sur une variété riemannienne compacte quelconque, lorsque les fonctions sont invariantes par un groupe d'isométrie ?

Par ailleurs, on sait depuis Hebey et Vaugon [20] puis Druet [14], que l'inégalité de Sobolev classique peut être écrite "sans ε", autrement dit qu'il existe $C > 0$ une constante telle que quelle que soit $u \in H^p_1(M)$

$$||u||^p_{p^*} \leq K||\nabla u||^p_p + C||u||^p_p,$$

et K est la meilleure constante possible. On peut donc se poser une troisième question :

3) Est il possible d'écrire l'inégalité (0) sans ε, avec B fini ?

Dans cette thèse nous apportons une réponse, complète ou partielle, à ces trois questions.

0.3 Notations et résultats préliminaires

Par soucis de lisibilité, il est utile de définir dès à présent les termes et notations qui seront utilisés par la suite, ainsi que de présenter quelques résultats.

Soit (M, g) une variété riemannienne et $Is(M, g)$ son groupe d'isométries.

Lorsque G est un sous groupe de $Is(M, g)$, on note :

$$\mathcal{C}_G^\infty(M) = \{u \in \mathcal{C}^\infty(M) | \forall \sigma \in G, u \circ \sigma = u\},$$

$$\mathcal{C}_{0,G}^\infty(M) = \{u \in \mathcal{C}_0^\infty(M) | \forall \sigma \in G, u \circ \sigma = u\},$$

où $\mathcal{C}^\infty(M)$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de M, et $\mathcal{C}_0^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur M à support compact. De la même façon, quel que soit $p \geq 1$, on note :

$$L_G^p(M) = \{u \in L^p(M) | \forall \sigma \in G, u \circ \sigma = u\},$$

$$H_{1,G}^p(M) = \{u \in H_1^p(M) | \forall \sigma \in G, u \circ \sigma = u\},$$

et

$$\mathring{H}_{1,G}^p(M) = \{u \in \mathring{H}_1^p(M) | \forall \sigma \in G, u \circ \sigma = u\},$$

où l'espace de Sobolev $H_1^p(M)$ (resp $\mathring{H}_1^p(M)$) est le complété de $\mathcal{C}^\infty(M)$ (resp $\mathcal{C}_0^\infty(M)$) pour la norme

$$||u||_{H_1^p} = \left(\int_M |\nabla u|^p \mathrm{dV} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_M |u|^p \mathrm{dV} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note L_G^p, $\mathcal{C}_G^\infty$, $\mathcal{C}_{0,G}^\infty$, $H_{1,G}^p$, $\mathring{H}_{1,G}^p$ au lieu de $L_G^p(M)$, $\mathcal{C}_G^\infty(M)$, $\mathcal{C}_{0,G}^\infty(M)$, $H_{1,G}^p(M)$, $\mathring{H}_{1,G}^p(M)$. Rappelons à présent quelques résultats standards.

L'espace $\mathcal{C}_G^\infty(M)$ est dense dans $H_{1,G}^p(M)$, et de même $\mathcal{C}_{0,G}^\infty(M)$ est dense dans $\mathring{H}_{1,G}^p(M)$ (voir par exemple [20]).

Si M est compacte, $Is(M, g)$ est un groupe de Lie compact et si G est un sous groupe de $Is(M, g)$, sa fermeture $\overline{G}$ pour la topologie standard de $Is(M, g)$ est un sous groupe de Lie compact de $Is(M, g)$. Les fonctions invariantes par G étant invariantes par $\overline{G}$, on peut sans perdre la généralité considérer qu'on a toujours un groupe d'isométries compact, quitte à remplacer G par son adhérence dans $Is(M, g)$.

Quel que soit $x \in M$, $O_{x,G} = \{\sigma(x), \sigma \in G\}$ l'orbite de x sous G est une sous variété compacte de M. De plus, $S_{x,G} = \{\sigma \in G | \sigma(x) = x\}$ le groupe d'isotropie de x est un sous-groupe de Lie compact de G, et la variété quotient $G/S_{x,G}$ est naturellement difféomorphe à $O_{x,G}$.

Une orbite $O_{x,G}$ est dite principale si quel que soit $y \in M$, $S_{y,G}$ possède un sous-groupe conjugué à $S_{x,G}$. Les orbites principales sont de dimension maximale (mais les orbites de dimension maximale ne sont pas nécessairement principales).

La réunion Ω des orbites principales est un ouvert dense de M, et Ω/G est une variété quotient. Plus précisément, $(\Pi, \Omega, \Omega/G)$ est une fibration dont chaque fibre est une orbite (pour ces résultats on pourra se référer à [8]).

Par la suite, on notera $\mathrm{vol}\, O_{x,G}$ le volume de la sous variété $O_{x,G}$ pour la métrique riemannienne induite sur $O_{x,G}$. Dans le cas particulier où $O_{x,G}$ est de cardinal fini, $\mathrm{vol}\, O_{x,G} = \mathrm{Card}\, O_{x,G}$.

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on note O_x pour $O_{x,G}$ et S_x pour $S_{x,G}$.

On dit qu'on localise autour d'une orbite O_x (ou qu'on choisit un voisinage de O_x) lorsque l'on choisit $\delta > 0$ et qu'on considère

$$O_{x,\delta} = \{y \in M | \mathrm{d}(y, O_x) < \delta\}.$$

Terminons ces préliminaires en rappelant les résultats obtenus par Hebey et Vaugon [20]. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n et $p \geq 1$ un réel. Soit G un sous groupe compact du groupe des isométries de M et k la plus petite dimension des orbites sous G. Alors

(a) Si $n - k \leq p$, pour tout réel $q \geq 1$, $H^p_{1,G}(M) \subset L^q_G(M)$ et l'inclusion est continue et compacte.

(b) Si $n - k > p$, pour tout réel $1 \leq q \leq \frac{(n-k)p}{n-k-p}$, $H^p_{1,G}(M) \subset L^q_G(M)$ et l'inclusion est continue, elle est de plus compacte si $q < \frac{(n-k)p}{n-k-p}$.

0.4 Présentation des résultats

Chapitre 1 : Nous présentons ici l'étude des meilleures constantes dans les inégalités critiques de Sobolev sur les variétés riemanniennes compactes, lorsque la classe des fonctions considérées est invariante par un groupe d'isométries de la variété. On établit le théorème suivant :

Théorème 1. *Considérons (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, G un sous groupe compact du groupe des isométries de M. Soit k la plus petite dimension des orbites de M sous G, et A le volume minimum des orbites de dimension k (si G a des orbites finies, $k = 0$ et $A = \min_{x \in M} \operatorname{Card} O_x$). Soit p un réel tel que $1 \leq p < n - k$ et $p^* = \frac{(n-k)p}{n-k-p}$. Alors*

(a) Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe B_ε, tel que quelle que soit $u \in H^p_{1,G}(M)$ on ait :

$$||u||^p_{p^*} \leq \left(\frac{K(n-k,p)^p}{A^{\frac{p}{n-k}}} + \varepsilon \right) ||\nabla u||^p_p + B_\varepsilon ||u||^p_p,$$

où

$$K(m,p) = \frac{p-1}{m-p} \left[\frac{m-p}{m(p-1)} \right]^{1/p} \left[\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m/p)\Gamma(m+1-m/p) w_{m-1}} \right]^{1/m}$$

pour $1 < p < m$ et $K(m,1) = \frac{1}{m} \left[m/w_{m-1} \right]^{1/m}$, w_m désignant le volume de S_m standard.

(b) $K(n-k,p)^p / A^{\frac{p}{n-k}}$ est la plus petite constante possible telle que l'inégalité précédente reste vraie quelle que soit $u \in H^p_{1,G}(M)$.

La démonstration s'appuie sur un lemme très important qui sera réutilisé par la suite. L'approche que nous adoptons pour démontrer ce théorème est comparable à celle développée par Hebey et Vaugon [20]. Elle a pour base l'étude de la géométrie des orbites du groupe considéré. Elle diffère en revanche notablement de l'approche utilisée par Iliopoulos [22] et Aubin et Cotsiolis [5, 6], dont les techniques sont spécifiques au cas de la sphère.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, nous nous intéressons au cas d'exception des inégalités de Sobolev en présence de symétries. On établit le théorème suivant.

Théorème 2. *Considérons* (M,g) *une variété riemannienne compacte de dimension n, G un sous groupe compact du groupe des isométries de* M. *Soit k la plus petite dimension des orbites de M sous G, et A le volume minimum des orbites de dimension k. On suppose que* $n-k \geq 2$. *Alors*

(a) Quel que soit $\varepsilon > 0$, *il existe* C_ε, *tel que quelle que soit* $u \in H_{1,G}^{n-k}(M)$ *de moyenne nulle (i.e.* $\int_M u\mathrm{dV} = 0$*) on ait :*

$$\int_M e^u \mathrm{dV} \leq C_\varepsilon \exp\left(\left(\frac{\mu_{n-k}}{A} + \varepsilon\right) ||\nabla u||_{n-k}^{n-k}\right),$$

où $\mu_{n-k} = (n-k-1)^{n-k-1}(n-k)^{1-2(n-k)} w_{n-k-1}^{-1}$, w_n *désignant le volume de* S_n *standard. Autrement dit, quelle que soit* $u \in H_{1,G}^{n-k}(M)$ *(pas nécessairement de moyenne nulle), on a l'inégalité :*

$$\int_M e^u \mathrm{dV} \leq C_\varepsilon \exp\left(\left(\frac{\mu_{n-k}}{A} + \varepsilon\right) ||\nabla u||_{n-k}^{n-k} + \frac{1}{\mathrm{vol}\,(M)} \int_M u\mathrm{dV}\right).$$

(b) μ_{n-k}/A *est la plus petite constante telle que les inégalités précédentes restent vraies quelle que soit* $u \in H_{1,G}^{n-k}(M)$.

La démonstration de ce théorème s'appuie (en partie) sur le lemme déjà utilisé dans la démonstration du Théorème 1, mais les propriétés de l'exponentielle nous oblige à changer de méthode. De ce théorème découle un corollaire intéressant.

Corollaire 1. *Sous les mêmes hypothèses sur* (M,g), G, k, *et* A *que dans le Théorème 2, on obtient :*

quels que soient $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, *il existe* $C_{\varepsilon,\varepsilon'}$ *tel que quelle que soit* $u \in H_{1,G}^{n-k}(M)$ *on ait*

$$\int_M e^u \mathrm{dV} \leq C_\varepsilon \exp\left(\left(\frac{\mu_{n-k}}{A} + \varepsilon\right) ||\nabla u||_{n-k}^{n-k} + \varepsilon' ||u||_{n-k}^{n-k}\right),$$

avec la propriété que μ_{n-k}/A *est la meilleure constante possible dans cette inégalité.*

Cette démonstration s'inspire fortement d'une démonstration d'Aubin [3], mais, là aussi, les difficultés amenées par la condition de symétrie des fonctions entraînent des modifications dans la technique.

Chapitre 3 : Une des motivations de l'étude des inégalités de Sobolev dans le cas critique ou dans le cas d'exception est que la connaissance précise de la meilleure constante permet la résolution d'équations non linéaires. Nous présentons ici des applications des théorèmes établis dans les deux premiers chapitres à des problèmes d'analyse non linéaires. On obtient des conditions d'existence de solutions des équations

$$\Delta_p \Phi + h\Phi^{p-1} = f\Phi^{p^*-1}$$

et

$$\Delta_p \Phi + a = fe^\Phi.$$

Aubin et Cotsiolis [5, 6] ont déjà donné des exemples d'applications possibles aux EDP dans le cas $M = S_n$ et $G = O(r) \times O(s)$, nous présentons dans ce chapitre la généralisation de ces applications.

Chapitre 4 : Ce chapitre est un peu à part et regroupe des résultats concernant la géométrie des orbites qui ont été démontrés au cours de l'étude des inégalités de Sobolev en présence de symétries. Ces résultats peuvent recouper des résultats existants (en particulier présents dans Bredon [8]), mais nous nous concentrons sur le cas des variétés riemanniennes compactes, ce qui modifie les démonstrations et donne des résultats plus spécifiques.

Chapitre 5 : On donne ici une réponse partielle à la question 3. Certaines hypothèses, que l'on peut considérer comme géométriques, permettent de se débarasser du ε dans l'inégalité du Théorème 1, avec $B_\varepsilon = B$ fini. Sous certaines hypothèses, qui permettent en fait d'étudier tous les exemples que l'on sait construire, on généralise alors le théorème établit par Druet [14] dans le cas où G est réduit à l'identité.

Théorème 7. *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension n, G un sous groupe compact du groupe des isométries de M, k la dimension minimum des G-orbites, A le volume minimum des orbites de dimension k. Si l'une des deux hypothèses (H_1) ou (H_2) suivantes est vérifiée, alors il existe $B>0$ tel que quelle que soit $u \in H^p_{1,G}(M)$,*

$$||u||^\theta_{p^*} \leq \frac{K^\theta(n-k,p)}{A^{\theta/(n-k)}}||\nabla u||^\theta_p + B||u||^\theta_p$$

avec $p \in]1, n-k[$, $\theta = p$ si $p \leq 2$, $\theta = 2$ si $p \geq 2$, $p^* = \frac{p(n-k)}{n-k-p}$ et

$$K(m,p) = \frac{p-1}{m-p}\left[\frac{m-p}{m(p-1)}\right]^{1/p}\left[\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m/p)\Gamma(m+1-m/p)w_{m-1}}\right]^{1/m}$$

pour $1<p<m$, w_m désignant le volume de S_m standard.

(H_1) Quelle que soit O_{x_0} une orbite de dimension minimale k et de volume minimal A, il existe G' un sous groupe du groupe des isométries de M et $\delta>0$ tels que

1. *sur $O_{x_0,\delta} = \{x \in M | \mathrm{d}(x, O_{x_0}) < \delta\}$ les G'-orbites sont toutes principales,*
2. *quel que soit $x \in O_{x_0,\delta}$, $O_{x,G'}$ est inclus dans $O_{x,G}$ et $O_{x_0,G} = O_{x_0,G'}$,*
3. *quel que soit $x \in O_{x_0,\delta}$, $A = \mathrm{vol}\,(O_{x_0}) \leq \mathrm{vol}\,(O_{x,G'})$.*

(H_2) Quelle que soit O_{x_0} une orbite de dimension minimale k et de volume minimal A, il existe H un sous groupe normal de G et $\delta>0$ tels que

1. *sur $O_{x_0,\delta}$, les H-orbites sont toutes principales,*
2. *quel que soit $x \in O_{x_0,\delta}$, $O_{x,H}$ est inclus dans $O_{x,G}$ et $O_{x_0,H} = O_{x_0,G}$,*
3. *quel que soit $x \in O_{x_0,\delta}$, $x \notin O_{x_0}$, $\dim O_{x,G} > k = \dim O_{x_0,G}$,*
4. *quel que soit $x \in O_{x_0}$, x est un point critique de la fonction v définie par $v = \mathrm{vol}\,(O_{x,H})$.*

La démonstration de ce dernier théorème a pour point central l'étude d'un phénomène de concentration autour d'une orbite, étude qui fait apparaître des techniques et des outils nouveaux relativement au cas où l'orbite est réduite à un nombre fini de points.

Chapitre 1

Meilleure constante dans les inégalités classiques de Sobolev en présence de symétries

1.1 Introduction et énoncé du Théorème 1

On sait depuis Hebey et Vaugon [20] que si l'on se restreint à la classe des fonctions invariantes par un sous groupe G du groupe des isométries de M, il est possible d'obtenir un plongement continu de $H_{1,G}^p$ dans L_G^q, avec $q \geq \frac{np}{n-p}$ qui est l'exposant critique habituel, on obtient ainsi des inégalités avec des exposants "surcritiques". On cherche à établir dans ce chapitre la valeur précise de la meilleure constante devant le terme en gradient dans le cas "critique du surcritique". Hebey et Vaugon ont étudié le cas des groupes présentant des orbites finies ; Iliopoulos [22] , puis Aubin et Cotsiolis [6] se sont quant à eux intéressés au cas de la sphère standard et du groupe $G = O(r) \times O(s)$. Notre premier théorème étend les résultats établis par Hebey et Vaugon et par Aubin et Cotsiolis au cas d'une variété compacte quelconque et d'un groupe d'isométries quelconque.

Théorème 1. *Considérons (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, G un sous groupe compact du groupe des isométries de M. Soit k la plus petite dimension des orbites de M sous G, et A le volume minimum des orbites de dimension k (si G a des orbites finies, $k = 0$ et $A = \min_{x \in M} \mathrm{Card} O_x$). Soit p un réel tel que $1 \leq p < n - k$ et $p^* = \frac{(n-k)p}{n-k-p}$. Alors*

(a) Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe B_ε, tel que quelle que soit $u \in H_{1,G}^p(M)$ on ait :

$$||u||_{p^*}^p \leq \left(\frac{K(n-k,p)^p}{A^{\frac{p}{n-k}}} + \varepsilon \right) ||\nabla u||_p^p + B_\varepsilon ||u|_p|^p,$$

où

$$K(m,p) = \frac{p-1}{m-p} \left[\frac{m-p}{m(p-1)} \right]^{1/p} \left[\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m/)\Gamma(m+1-m/p) w_{m-1}} \right]^{1/m}$$

pour $1 < p < m$ *et* $K(m,1) = \frac{1}{m}\left[m/w_{m-1}\right]^{1/m}$, w_m *désignant le volume de* S_m *standard.*

(b) $K(n-k,p)^p/A^{\frac{p}{n-k}}$ *est la plus petite constante possible telle que l'inégalité précédente reste vraie quelle que soit* $u \in H^p_{1,G}(M)$.

1.2 Démonstration du Théorème 1

1.2.1 Principe de la démonstration

Dans le cas très particulier où toutes les orbites sont principales, une étude par passage au quotient M/G permettrait d'obtenir rapidement le Théorème 1. En revanche, dans le cas général que nous étudions ici, la démonstration est plus difficile et nécessite l'introduction de deux lemmes. Le premier lemme s'obtient facilement par des calculs standard utilisant une partition de l'unité. Le second lemme donne l'outil technique fondamental de la suite de la démonstration.

L'inégalité du Théorème 1 met en avant l'importance de l'orbite de volume minimal dans la classe des orbites de dimension minimale, il est donc naturel de s'intéresser pour commencer au voisinage d'une telle orbite. On remarque qu'alors, s'il était possible d'assimiler une fonction G-invariante (donc constante sur l'orbite) à une fonction ne dépendant que des variables "n'appartenant pas à l'orbite", on pourrait, en se servant des théorèmes existants pour les cas sans symétrie, obtenir le Théorème 1 pour des fonctions à support dans le voisinage de l'orbite. En réalité, cette "assimilation" d'une fonction G-invariante à une fonction plus simple ne sera possible dans le cas général que par un contrôle de la métrique dans ce voisinage, ce qui sera précisé dans le Lemme 2. Ensuite, on démontre le théorème pour des fonctions définies sur M tout entier en utilisant une partition de l'unité grâce au Lemme 1.

1.2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 1 (Localisation dans les inégalités de Sobolev). *Soit* (M,g) *une variété riemannienne compacte,* (U_i,η_i) *une partition de l'unité de* M. *Considérons* $X \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ *(par exemple l'ensemble des fonctions* $\mathcal{C}^\infty_G$, *où* G *est un sous groupe compact du groupe des isométries de* M*). Supposons que quelle que soit* $v \in X$, *les* $|\eta_i|^{\frac{1}{p}} v$ *appartiennent à* $\mathring{H}^p_1(U_i)$. *Supposons de plus qu'il existe* C, *tel que quel que soit* i *il existe* D_i *de sorte que l'on ait la propriété suivante : quelle que soit* $w \in X$ *nulle en dehors de* U_i,

$$\left[\int_M w^q \mathrm{dV}\right]^{\frac{p}{q}} \leq C\int_M |\nabla w|^p\,\mathrm{dV} + D_i\int_M w^p \mathrm{dV}, \tag{1.1}$$

où $q \geq p \geq 1$. *Alors, quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe* D_ε *tel que quelle que soit* $u \in X$,

$$\left[\int_M |u|^q\,\mathrm{dV}\right]^{\frac{p}{q}} \leq (C+\varepsilon)\int_M |\nabla u|^p\,\mathrm{dV} + D_\varepsilon\int_M |u|^p \mathrm{dV}.$$

Démonstration. Quelle que soit $u \in X$ on a :

$$||u||_q^p \quad = \quad \left[\int_M |u|^q \mathrm{dV}\right]^{\frac{p}{q}} = ||u^p||_{\frac{q}{p}} = ||\sum_i (\eta_i^{\frac{1}{p}} u)^p||_{\frac{q}{p}}$$

$$\leq \sum_i ||(\eta_i^{\frac{1}{p}} u)^p||_{\frac{q}{p}} \leq \sum_i \left[\int_M \eta_i^{\frac{q}{p}} u^q \mathrm{dV}\right]^{\frac{p}{q}}.$$

D'après l'hypothèse (1.1) du Lemme 1 on en déduit, en prenant $w = \eta_i^{\frac{1}{p}} u$,

$$||u||_q^p \leq \sum_i \left[C \int_M |\nabla(\eta_i^{\frac{1}{p}} u)|^p \mathrm{dV} + D_i \int_M \eta_i u^p \mathrm{dV}\right]. \tag{1.2}$$

De plus,

$$|\nabla(\eta_i^{\frac{1}{p}} u)|^p \leq (|u||\nabla \eta_i^{\frac{1}{p}}| + |\eta_i^{\frac{1}{p}}||\nabla u|)^p. \tag{1.3}$$

En utilisant le fait qu'il existe deux constantes α, β, dépendant uniquement de p, telles que quels que soient les deux réels positifs x et y, on ait la relation $(x+y)^p \leq x^p + \alpha x^{p-1} y + \beta y^p$, on déduit de (1.3) :

$$|\nabla(\eta_i^{\frac{1}{p}} u)|^p \leq |\eta_i||\nabla u|^p + \alpha|\eta_i^{\frac{p-1}{p}}||\nabla u|^{p-1}|u||\nabla \eta_i^{\frac{1}{p}}| + \beta|u|^p|\nabla \eta_i^{\frac{1}{p}}|^p. \tag{1.4}$$

D'autre part, quel que soit $\varepsilon_0 > 0$, il existe B, dépendant de ε_0 et p, tel que quels que soient les réels positifs x et y, $x^{p-1}y \leq \varepsilon_0 x^p + B y^p$. Il suit alors de (1.4)

$$|\nabla(\eta_i^{\frac{1}{p}} u)|^p \leq [\varepsilon_0 + |\eta_i|]|\nabla u|^p + \left[B\alpha^p |\eta_i|^{p-1}|\nabla \eta_i^{\frac{1}{p}}|^p + \beta|\nabla \eta_i^{\frac{1}{p}}|^p\right]|u|^p.$$

En reprenant l'inégalité (1.2) on obtient :

$$\left[\int_M |u|^q \mathrm{dV}\right]^{\frac{p}{q}} \leq C \int_M |\nabla u|^p \mathrm{dV} + C\varepsilon_0 \int_M |\nabla u|^p \mathrm{dV} + C \int_M |u|^p \mathrm{dV}.$$

On conclut la démonstration en choisissant $\varepsilon_0 \leq \varepsilon / C$. □

Lemme 2. *Considérons (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension n, G un sous groupe compact du groupe des isométries de M, x un élément de M dont l'orbite a pour dimension k, $0 \leq k < n$. Il existe alors une carte (Ω, Ψ) en x vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$\Psi(\Omega) = U_1 \times U_2$ avec $U_1 \in \mathbb{R}^k$ et $U_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$,*
2. *$\Psi = \Psi_1 \times \Psi_2$ et Ψ_1, Ψ_2 se décomposent de la manière suivante :*
   $\Psi_1 = \Phi_1 \circ \gamma \circ \Gamma_1$, γ étant définie d'un voisinage de l'identité de G dans O_x, et $\gamma \circ \Gamma_1(\Omega) = \mathcal{V}_x$, où $\mathcal{V}_x$ est un voisinage ouvert de x dans O_x,
   $\Psi_2 = \Phi_2 \circ \Gamma_2$ avec $\Gamma_2(\Omega) = \mathcal{W}_x$, où $\mathcal{W}_x$ est une sous variété de dimension $n-k$ orthogonale en x à O_x,
3. *(Ω, Ψ) est une carte en x telle que $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$, $(\mathcal{V}_x, \Phi_1)$ est une carte normale en x de la sous variété O_x, $(\mathcal{W}_x, \Phi_2)$ est une carte géodésique normale en x de la sous variété $\mathcal{W}_x$. En particulier, quel que soit $\varepsilon > 0$, (Ω, Ψ) peut être choisie de sorte que*
   $1 - \varepsilon \leq \sqrt{\det g_{ij}} \leq 1 + \varepsilon$ sur Ω, pour $1 \leq i,j \leq n$, et
   $1 - \varepsilon \leq \sqrt{\det \tilde{g_{ij}}} \leq 1 + \varepsilon$ sur $\mathcal{V}_x$, pour $1 \leq i,j \leq k$,
   où $\tilde{g}$ désigne la métrique induite par g sur O_x.
   De plus, $(1-\varepsilon)\delta_{ij} \leq g_{ij} \leq (1+\varepsilon)\delta_{ij}$ en tant que forme bilinéaire.

4. quelle que soit $u \in \mathcal{C}_G^\infty$, $u \circ \Psi^{-1}$ ne dépend que des variables de U_2.

Démonstration. L'application γ de G dans O_x qui à σ associe $\sigma(x)$ est de rang k, car $\dim O_x = k$. Par conséquent, il existe H une sous variété de G de dimension k contenant l'identité (notée Id) telle que γ restreinte à H soit un difféomorphisme de H dans son image notée $\mathcal{V}_x$. D'autre part, en utilisant l'application exponentielle en x, on construit une sous variété de $\mathcal{W}_x$ de dimension $n-k$ orthogonale en x à O_x, et telle que quel que soit $y \in \mathcal{W}_x$, les géodésiques minimisantes de (M,g) joignant x et y sont contenues dans $\mathcal{W}_x$.

On considère alors l'application Γ définie de $H \times \mathcal{W}_x$ dans M par $\Gamma(\sigma,y) = \sigma(y)$. Le théorème d'inversion locale nous donne l'existence d'un voisinage $\mathcal{V}_{\mathrm{Id},x}$ de (Id,x) dans $H \times \mathcal{W}_x$ et d'un voisinage $\tilde{\mathcal{V}}_x$ de x dans M telle que l'application $\Gamma^{-1} = (\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ de $\tilde{\mathcal{V}}_x$ dans $\mathcal{V}_{\mathrm{Id},x}$ soit un difféomorphisme.

Quitte à restreindre $\mathcal{V}_x$, on choisit en x une carte normale $(\mathcal{V}_x, \Phi_1)$ pour la métrique $\tilde{g}$ induite sur O_x, avec $\Phi_1(\mathcal{V}_x) = U_1 \subset \mathbb{R}^k$. On choisit de même une carte géodésique normale $(\mathcal{W}_x, \Phi_2)$ en x pour la métrique $\tilde{\tilde{g}}$ induite sur $\mathcal{W}_x$ avec $\Phi_2(\mathcal{W}_x) = U_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$. Posons $\Psi_1 = \Phi_1 \circ \gamma \circ \Gamma_1$ et $\Psi_2 = \Phi_2 \circ \Gamma_2$. L'application $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$ vérifie alors les propriétés 1. et 2. du Lemme 2, où $\Omega = \tilde{\mathcal{V}}_x$ (quitte à restreindre $\tilde{\mathcal{V}}_x$).

On montre à présent que dans la carte (Ω, Ψ), $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$. D'après les définitions données de Ψ et Φ_1, on vérifie que les k premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ transportés par Φ_1 sur $\mathrm{T}_x(O_x)$ sont identiques à ceux transportés par Ψ sur $\mathrm{T}_x(M)$. De même, d'après la définition de Φ_2, les $n-k$ derniers vecteurs de la base canoniques de $\mathbb{R}^n$ transportés par Φ_2 sur $\mathrm{T}_x(\mathcal{W}_x)$ sont identiques à ceux transportés par Ψ sur $\mathrm{T}_x(M)$. De plus, le choix de l'orthogonalité en x de $\mathcal{W}_x$ et O_x assure le fait que $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ pour $1 \le i,j \le n$ dans la carte (Ω, Ψ). Un argument standard de continuité termine la démonstration du point 3.

Pour finir, montrons que, quelle que soit $u \in \mathcal{C}_G^\infty$, $u \circ \Psi^{-1}$ ne dépend que des variables de U_2. Considérons $u \in \mathcal{C}_G^\infty$, $x', x'' \in U_1, y \in U_2$. Notons
$\sigma' = \gamma^{-1} \circ \Phi_1^{-1}(x')$ et $\sigma'' = \gamma^{-1} \circ \Phi_1^{-1}(x'')$. Nous avons alors :

$$u \circ \Psi^{-1}(x', y) = u \circ \Gamma(\sigma', \Phi_2^{-1}(y)) = u(\sigma'(\Phi_2^{-1}(y)) = u(\sigma''(\Phi_2^{-1}(y)),$$

car $u \in \mathcal{C}_G^\infty$. D'où $u \circ \Psi^{-1}(x', y) = u \circ \Psi^{-1}(x'', y)$, quels que soient $x', x'' \in U_1, y \in U_2$.

Le Lemme 2 est ainsi démontré. □

On est à présent en mesure de démontrer le Théorème 1.

Démonstration. Puisque $\mathcal{C}_G^\infty(M)$ est dense dans $H_{1,G}^p(M)$, il suffit de montrer l'inégalité du Théorème 1 pour les fonctions $u \in \mathcal{C}_G^\infty(M)$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Le but de cette démonstration est de trouver $B_\varepsilon > 0$ tel que quelle que soit $u \in \mathcal{C}_G^\infty$, u vérifie l'inégalité du théorème. Considérons un point $x \in M$, O_x son orbite sous G, et une carte (Ω, Ψ) en x vérifiant les propriétés du Lemme 2 (notamment le point 3. pour le ε qu'on s'est fixé). Pour chaque $y \in O_x$, on choisit une carte en y "isométrique" à (Ω, Ψ) de la forme $(\sigma(\Omega), \Psi \circ \sigma^{-1})$, où $\sigma \in G$ est tel que $y = \sigma(x)$. On note $(\Omega_m)_{m=1,\dots,M}$ un recouvrement fini extrait du recouvrement de O_x ainsi construit, $(\Omega_m, \Psi_m)_{m=1,\dots,m}$ les cartes associées.

Ce recouvrement permet de choisir $\delta > 0$ suffisamment petit, dépendant de x et de ε, de sorte que $O_{x,\delta} = \{y \in M | \mathrm{d}(y, O_x) < \delta\}$ ait les propriétés suivantes :

$\overline{O_{x,\delta}}$ est une sous variété à bord de M, $\mathrm{d}^2(\cdot, O_x)$ (où $\mathrm{d}(\cdot, O_x)$ désigne la distance à l'orbite) est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $O_{x,\delta}$, et $O_{x,\delta}$ est recouverte par les Ω_m.

En répétant la construction de $O_{x,\delta}$ quel que soit $x \in M$, on recouvre M par les $O_{x,\delta}$. On extrait du recouvrement ainsi construit un recouvrement fini noté $(O_{i,\delta})_{i=1,\dots,N}$ (eux mêmes recouverts par des $(\Omega_{im})_{m=1,\dots,M_i}$). En considérant sur chaque $(O_{i,\delta})$ des fonctions dépendant uniquement de la distance à O_x (et donc G-invariantes), on construit une partition de l'unité (η_i) subordonnée aux $O_{i,\delta}$. Quel que soit i, $\eta_i \in \mathcal{C}_G^\infty$, et donc quel que soit $u \in \mathcal{C}_G^\infty$, $\eta_i u \in \mathcal{C}_G^\infty$ et est à support compact dans $O_{i,\delta}$.

Sur chaque $O_{i,\delta}$ on construit une partition de l'unité subordonnée au recouvrement des $O_{i,\delta}$ par les Ω_m de la manière suivante : pour chaque m on considère $\beta_m \in \mathcal{C}_0^\infty(U_{1m})$, $\beta_m \geq 0$. Alors β_m peut être considéré comme une fonction réelle définie sur $U_{1m} \times U_{2m}$ et ne dépendant pas des variables de U_{2m}. Posons $\alpha_m = \frac{\beta_m \circ \Psi_m}{\sum_{m=1}^M (\beta_m \circ \Psi_m)}$, les α_m constituent alors une nouvelle partition de l'unité subordonnée aux Ω_m et les $\alpha_m \circ \Psi_m^{-1}$ sont indépendantes des variables de U_{2m}.

Considérons maintenant $v \in \mathcal{C}_{0,G}^\infty(O_{i,\delta})$, $v \geq 0$. On peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_M v\mathrm{dV} &= \int_M \left(\sum_m \alpha_m\right) v\mathrm{dV} = \sum_m \int_M \alpha_m v\mathrm{dV} = \sum_m \int_{\Omega_m} \alpha_m v\mathrm{dV} \\ &= \sum_m \int_{U_{1m}\times U_{2m}} \sqrt{\det g_{ij}^m}\, \alpha_m v \circ \Psi_m^{-1} \mathrm{dxdy}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Et, compte-tenu du point 3. du Lemme 2, on en déduit

$$\int_M v\mathrm{dV} \leq (1+\varepsilon) \sum_m \int_{U_{1m}\times U_{2m}} \alpha_m v \circ \Psi_m^{-1} \mathrm{dxdy}. \tag{1.6}$$

Comme pour chaque m la fonction $\alpha_m \circ \Psi_m^{-1}$ est indépendante des variables de U_{2m}, on note α_{1m} la fonction $\alpha_m \circ \Psi_m^{-1}$ considérée définie sur U_{1m}. De même, comme d'après le point 4. du Lemme 2, $v \circ \Psi_m^{-1}$ ne dépend que des variables de U_{2m}, on note v_{2m} la fonction $v \circ \Psi_m^{-1}$ considérée définie sur U_{2m}.

On peut alors écrire en séparant les variables :

$$\int_M v\mathrm{dV} \leq (1+\varepsilon) \sum_m \int_{U_{1m}} \alpha_{1m} \mathrm{dx} \int_{U_{2m}} v_{2m} \mathrm{dy}. \tag{1.7}$$

Comme les cartes (Ω_m, Ψ_m) ont été construites isométriques entre elles et que v est une fonction G-invariante, $\int_{U_{2m}} v_{2m}\mathrm{dy}$ ne dépend pas de m. Alors (1.7) s'écrit

$$\int_M v\mathrm{dV} \leq (1+\varepsilon) \int_{U_2} v_2 \mathrm{dy} \sum_m \int_{U_{1m}} \alpha_{1m} \mathrm{dx}. \tag{1.8}$$

De plus, d'après le point 3. du Lemme 2,

$$\int_{\mathcal{V}_x} \alpha_m \circ \Phi_{1m} \mathrm{d\tilde{v}} = \int_{U_{1m}} \sqrt{\det \tilde{g_{ij}}}\, \alpha_m \circ \Phi_{1m}^{-1} \mathrm{dx} \geq (1-\varepsilon) \int_{U_{1m}} \alpha_{1m} \mathrm{dx}, \tag{1.9}$$

où $\mathrm{d}\tilde{v}$ est lélément de volume pour $\tilde{g}$. D'où, en reprenant (1.8) et (1.9)

$$\int_M v\mathrm{dV} \quad \leq \quad \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \int_{U_2} v_2 \mathrm{dy} \sum_m \int_{\mathcal{V}_x} \alpha_m \mathrm{d\tilde{v}}$$

$$= \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\int_{U_2} v_2 \mathrm{dy}\int_{O_x}\sum_m \alpha_m \mathrm{d}\tilde{\mathrm{v}}.$$

Finalement, en se rappelant que le volume de O_x est le volume pour la métrique induite par g sur O_x,

$$\int_M v \mathrm{dV} \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \mathrm{vol}\ O_x \int_{U_2} v_2 \mathrm{dy}. \tag{1.10}$$

On distingue alors deux cas.

1. Cas où O_x est une orbite de dimension minimum k.

Soit $u \in \mathcal{C}_G^\infty$, reprenons (1.10) avec $v = |u|^{p^*}$. Alors,

$$\left[\int_M |u|^{p^*} \mathrm{dV}\right]^{\frac{n-k-p}{n-k}} \leq \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\mathrm{vol}\ O_x\right)^{1-\frac{p}{n-k}} \left[\int_{U_2} |u_2|^{p^*} \mathrm{dy}\right]^{\frac{n-k-p}{n-k}}. \tag{1.11}$$

On sait (voir par exemple [4] ou [17]) que quelle que soit $w \in \overset{\circ}{H}{}_1^p(U_2)$,

$$\left(\int_{U_2} |w|^{p^*} \mathrm{dy}\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq K(n-k,p)\left(\int_{U_2} |\nabla_e w|^p \mathrm{dy}\right)^{\frac{1}{p}},$$

où $|\nabla_e|$ désigne le module euclidien du gradient euclidien. On en déduit :

$$\left[\int_M |u|^{p^*} \mathrm{dV}\right]^{\frac{n-k-p}{n-k}} \leq \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\mathrm{vol}\ O_x\right)^{1-\frac{p}{n-k}} K(n-k,p)^p \int_{U_2} |\nabla_e u_2|^p \mathrm{dy}. \tag{1.12}$$

D'autre part, en reprenant (1.5) avec $v = |\nabla u|^p$ qui est à support compact dans $O_{i,\delta}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla u|^p \mathrm{dV} &= \sum_m \int_{U_{1m}\times U_{2m}} \sqrt{\det g_{ij}^m}\,\alpha_m |\nabla u|^p \circ \Psi_m^{-1} \mathrm{dxdy} \\ &= \sum_m \int_{U_{1m}\times U_{2m}} \sqrt{\det g_{ij}^m}\,\alpha_m |g_m^{ij}\partial_i u \partial_j u|^p \circ \Psi_m^{-1} \mathrm{dxdy}.\end{aligned}$$

Et d'après le point 3. du Lemme 2,

$$\int_M |\nabla u|^p \mathrm{dV} \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\sum_m \int_{U_{1m}\times U_{2m}} (\alpha_m \circ \Psi_m^{-1})|\nabla_e(u\circ\Psi_m^{-1})|^p \mathrm{dxdy}.$$

Comme $u\circ\Psi_m^{-1}$ ne dépend que des variables de U_{2m}, $|\nabla_e(u\circ\Psi_m^{-1})|^p$ définie sur U_{2m} n'est autre que $|\nabla_e u_{2m}|^p$, où l'on rappelle que u_{2m} est l'application $u\circ\Psi_m^{-1}$ considérée définie sur U_{2m}. Il s'ensuit :

$$\int_M |\nabla u|^p \mathrm{dV} \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\sum_m \left(\int_{U_{1m}} \alpha_{1m} \mathrm{dx}\right)\left(\int_{U_{2m}} |\nabla_e u_{2m}|^p \mathrm{dy}\right).$$

Et, puisque $\int_{U_{1m}} \alpha_{1m}\mathrm{dx} \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\int_{\mathcal{V}_x} \alpha_{1m}\circ\Phi_1^{-1}\mathrm{d}\tilde{\mathrm{v}}$,

$$\int_M |\nabla u|^p \mathrm{dV} \geq \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\mathrm{vol}\, O_x \int_{U_2} |\nabla_e u_2|^p \mathrm{dy}. \tag{1.13}$$

Des relations (1.12) et (1.13) on peut déduire, lorsque $u \in \mathcal{C}^\infty_{0,G}(O_{i,\delta})$,

$$\begin{aligned}\left(\int_M |u|^{p^*}\mathrm{dV}\right)^{\frac{n-k-p}{n-k}} &\leq (1+c\varepsilon)(\mathrm{vol}\, O_x)^{\frac{-p}{n-k}} K(n-k,p)^p \int_M |\nabla u|^p \mathrm{dV} \\ &\leq (1+c\varepsilon) A^{\frac{-p}{n-k}} K(n-k,p)^p \int_M |\nabla u|^p \mathrm{dV}, \qquad (1.14)\end{aligned}$$

où c ne dépend que de n, k et p, et A est le plus petit volume des orbites de dimension minimum k.

2. Cas où O_x est de dimension $k_0 > k$.

Dans ce cas $U_2 \subset \mathbb{R}^{n-k_0}$. L'inclusion $\overset{\circ}{H}{}^p_1(U_2) \subset L^{p^*}(U_2)$ est compacte, puisque dans ce cas $p^* = \frac{(n-k)p}{n-k-p} < \frac{(n-k_0)p}{n-k_0-p}$. Alors, quel que soit $\varepsilon_0 > 0$, il existe C tel que

$$\left(\int_{U_2} |u_2|^{p^*}\mathrm{dy}\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \varepsilon_0 \int_{U_2} |\nabla_e u_2|^p \mathrm{dy} + C\int_{U_2} |u_2|^p \mathrm{dy}.$$

D'où, d'après la relation (1.11),

$$\left(\int_M |u|^{p^*}\mathrm{dV}\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq C\left(\varepsilon_0 \int_{U_2} |\nabla_e u_2|^p \mathrm{dy} + C\int_{U_2} |u_2|^p \mathrm{dy}\right).$$

D'autre part, en utilisant, comme pour obtenir la relation (1.13), les majorations de la métrique données dans le point 3. du Lemme 2, on trouve :

$$\int_M |u|^p \mathrm{dV} \geq C\int_{U_2} |u_2|^p \mathrm{dy}.$$

On obtient, en utilisant (1.13) :

$$\left(\int_M |u|^{p^*}\mathrm{dV}\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \varepsilon_0\, C\int_M |\nabla u|^p \mathrm{dV} + C\int_M |u|^p \mathrm{dV}.$$

On peut choisir ε_0 suffisamment petit de sorte que

$$\left(\int_M |u|^{p^*}\mathrm{dV}\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A^{\frac{-p}{n-p}} K(n-k,p)^p \int_M |\nabla u|^p \mathrm{dV} + C\int_M |u|^p \mathrm{dV}. \qquad (1.15)$$

On est sous les hypothèses du Lemme 1, où $C = A^{\frac{-p}{n-p}} K(n-k,p)^p$. En se rappelant que $\mathcal{C}^\infty_G$ est dense dans $H^p_{1,G}$ et en appliquant le Lemme 1, on peut déduire des relations (1.14) et (1.15) que, quelle que soit $u \in H^p_{1,G}$,

$$\left[\int_M |u|^{p^*}\mathrm{dv}\right]^{\frac{p}{p^*}} \leq \left(\frac{K(n-k,p)^p}{A^{\frac{p}{n-k}}} + \varepsilon\right)\int_M |\nabla u|^p \mathrm{dV} + B_\varepsilon \int_M |u|^p \mathrm{dV}, \quad (1.16)$$

ce qui termine la démonstration de la partie (a) du Théorème 1.

On s'attache à présent à montrer que la constante $K(n-k,p)^p A^{\frac{-p}{n-k}}$ de l'inégalité (1.16) est la meilleure possible. Pour cela, quel que soit $\varepsilon > 0$ il suffit d'exhiber une famille $(u_\alpha)_{\alpha>0}$ de fonctions de $H^p_1(M)$ telles que, quel que soit le réel C,

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\int_M |\nabla u_\alpha|^p \mathrm{dV} + C\int_M |u_\alpha|^p \mathrm{dV}}{\left(\int_M |u_\alpha|^{p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}}} \leq A^{\frac{p}{n-k}} K(n-k,p)^{-p} + \varepsilon. \qquad (1.17)$$

Rappelons d'abord un résultat classique qui caractérise $K(n,p)$ (voir par exemple [4] ou [17]).

Lemme 3. *Soit B une boule de $\mathbb{R}^n$ centrée en 0 et de rayon δ. Les fonctions $v_\alpha \in \overset{\circ}{H}{}_1^p(B)$ définies par $v_\alpha(y) = (\alpha + ||y||^2)^{1-\frac{n}{p}} - (\alpha + \delta^2)^{1-\frac{n}{p}}$ vérifient :*

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\int_B |\nabla_e v_\alpha|^p \,\mathrm{dx} + C \int_B v_\alpha^p \mathrm{dx}}{\left(\int_B v_\alpha^{\frac{pn}{n-p}} \mathrm{dV}\right)^{\frac{n-p}{n}}} = K^{-p}(n,p).$$

Considérons O_x une orbite de dimension minimale k et de volume minimal A. Pour $\varepsilon > 0$, considérons un voisinage O_{x,δ_ε} de O_x, où δ_ε est tel que sur O_{x,δ_ε} on puisse appliquer le Lemme 2 (notamment le point (3) pour le ε qu'on s'est choisit) comme dans la démonstration de la partie (a). On définit pour $\alpha > 0$ la fonction $u_\alpha \in \overset{\circ}{H}{}_1^p(O_{x,\delta_\varepsilon})$ de la manière suivante :

$$u_\alpha(y) = \begin{cases} (\alpha + \mathrm{d}^2(y, O_x))^{1-\frac{n-k}{p}} - (\alpha + \delta_\varepsilon^2)^{1-\frac{n-k}{p}} & \text{pour } y \in O_{x,\delta_\varepsilon} \\ 0 & \text{pour } y \in M \setminus O_{x,\delta_\varepsilon} \end{cases}$$

où $\mathrm{d}(y, O_x)$ désigne la distance de y à l'orbite O_x pour la métrique g.

Comme $u_\alpha(y)$ ne dépend que de la distance à O_x, $u_\alpha \in H_{1,G}^p(M)$. En utilisant, comme pour la démonstration de la partie (a), les majorations et minorations de la métrique g données dans le point 3. du Lemme 2, on obtient, quel que soit le réel C,

$$\frac{\int_M |\nabla u_\alpha|^p \,\mathrm{dV} + C \int_M u_\alpha^p \mathrm{dV}}{\left(\int_M u_\alpha^{\frac{p(n-k)}{n-k-p}}\right)^{\frac{n-k-p}{n-k}}} \le (1 + c\varepsilon) A^{\frac{p}{n-k}} \frac{\int_{U_2} |\nabla_e u_{2,\alpha}|^p \mathrm{dy} + C \int_{U_2} u_{2,\alpha}^p \mathrm{dy}}{\left(\int_{U_2} u_{2,\alpha}^{\frac{p(n-k)}{n-k-p}} \mathrm{dy}\right)^{\frac{n-k-p}{n-k}}},$$

où l'on rappelle que $u_{2,\alpha} = u_\alpha \circ \Psi^{-1}$ est considérée comme définie sur U_2, puisque $u_\alpha \circ \Psi^{-1}$ ne dépend pas des variables de U_1. D'autre part, comme la carte $(\mathcal{W}_x, \Phi_2)$ est une carte géodésique normale en x pour $\mathcal{W}_x$ et que, quel que soit $y \in \mathcal{W}_x$, $\mathrm{d}_{\mathcal{W}_x}(y, x) = \mathrm{d}(y, O_x)$ d'après la construction de $\mathcal{W}_x$, on peut déduire, quel que soit $y \in U_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$,

$$u_{2,\alpha}(y) = (\alpha + ||y||^2)^{1-\frac{n-k}{p}} - (\alpha + \delta_\varepsilon^2)^{1-\frac{n-k}{p}}.$$

Il s'ensuit d'après le Lemme 3 que :

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\int_M |\nabla u_\alpha|^p \,\mathrm{dV} + B_\alpha \int_M u_\alpha^p \mathrm{dV}}{\left(\int_M u_\alpha^{\frac{p(n-k)}{n-k-p}}\right)^{\frac{n-k-p}{n-k}}} \le (1 + c\varepsilon) A^{\frac{p}{n-k}} \frac{1}{K^p(n-k,p)}.$$

L'inégalité (1.17) est montrée, ce qui termine la démonstration de la partie (b) du Théorème 1. □

1.3 Exemples

Le Théorème 1 permet de retrouver les résultats obtenus par Aubin et Cotsiolis sur la sphère S_n pour le groupe d'isométries $O(r) \times O(s)$, où $r + s = n + 1$

et $r \geq s \geq 2$. On peut en fait étendre ce résultat à n'importe quel groupe d'isométries G du type $O(r_1) \times O(r_2) \times \ldots \times O(r_m)$, où $r_1 + r_2 + \ldots r_m = n+1$, et en choisissant (sans nuire à la généralité) $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_m \geq 2$. Dans ce cas, la dimension minimum des G-orbites est $k = r_m - 1$, et le volume minimum des orbites de dimension k est $A = w_{r_m}$. La valeur explicite de la meilleure constante dans l'inégalité est donc

$$\frac{K(n-k,p)}{A^{1/(n-k)}} = \frac{K(n+1-r_m,p)}{w_{r_m}}.$$

On peut également considérer à titre d'exemple le produit de la sphère S_2 par le tore T_2 défini par

$$\mathrm{T}_2(a,b) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x^2+y^2+z^2+b^2)^2 - 4a^2(x^2+y^2) = 0\},$$

où $0 < b < a$, et le groupe d'isométries $G = R_z \times R_z$, où R_z est le groupe des rotations autour de l'axe z. La meilleure constante de l'inégalité dans ce cas est alors

$$\frac{K^p(3,p)}{(2\pi(a - \sqrt{a^2-b^2}))^{p/3}}.$$

Une étude détaillée de ces exemples est proposée au chapitre "Des conditions suffisantes pour une inégalité sans ε", Propositions 3 et 4.

Chapitre 2

Meilleure constante dans le cas d'exception des inégalités de Sobolev en présence de symétries

2.1 Introduction et énoncé du Théorème 2

Lorque $p = n - k$, le Théorème 1 ne s'applique plus, mais le théorème qui suit peut être considéré comme une extension à ce cas. On obtient alors des inégalités de Sobolev du type de celles établies par Trudinger [28] dans le contexte euclidien et par Aubin [3] et Cherrier [11] sur les variétés riemanniennes en l'absence d'invariance par symétrie. Dans ces inégalités, il nous est de nouveau possible de déterminer la meilleure constante. Ce théorème étend à une variété riemannienne compacte quelconque et à un groupe d'isométrie quelconque les résultats obtenus par Aubin et Cotsiolis [6] dans le cas de la sphère standard et du groupe $O(r) \times O(s)$.

Théorème 2. *Considérons (M, g) une variété riemannienne compact de dimension n, G un sous groupe compacte du groupe des isométries de M. Soit k la plus petite dimension des orbites de M sous G, et A le volume minimum des orbites de dimension k. On suppose que $n - k \geq 2$. Alors*

(a) Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe C_ε tel que quelle que soit $u \in H_{1,G}^{n-k}(M)$ de moyenne nulle (i.e. $\int_M u\mathrm{dV} = 0$) on ait :

$$\int_M e^u \mathrm{dV} \leq C_\varepsilon \exp\left(\left(\frac{\mu_{n-k}}{A} + \varepsilon\right)) ||\nabla u||_{n-k}^{n-k}\right),$$

où $\mu_{n-k} = (n-k-1)^{n-k-1}(n-k)^{1-2(n-k)} w_{n-k-1}^{-1}$, w_n désignant le volume de S_n standard. Autrement dit, quelle que soit $u \in H_{1,G}^{n-k}(M)$ (pas nécessairement de moyenne nulle), on a l'inégalité :

$$\int_M e^u \mathrm{dV} \leq C_\varepsilon \exp\left(\left(\frac{\mu_{n-k}}{A} + \varepsilon\right) ||\nabla u||_{n-k}^{n-k} + \frac{1}{\mathrm{vol}\,(M)} \int_M u\mathrm{dV}\right).$$

(b) μ_{n-k}/A est la plus petite constante telle que les inégalités précédentes restent vraies quel que soit $u \in H_{1,G}^{n-k}(M)$.

2.2 Démonstration du Théorème 2

Pour prouver le Théorème 2, on a besoin de la Proposition 1 qui suit. Par la suite, on déduira du Théorème 2 un corollaire, qui sera en fait une amélioration de cette proposition.

Proposition 1. *Considérons (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, G un sous groupe compact du groupe des isométries de M. Soit k la plus petite dimension des orbites de M sous G, et A le volume minimum des orbites de dimension k. On suppose que $n - k \geq 2$. Alors*

(a) Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe des constantes B_ε et A_ε telles que, quelle que soit $u \in H_{1,G}^{n-k}(M)$ on ait :

$$\int_M e^u \mathrm{dV} \leq B_\varepsilon \exp\left(\left(\frac{\mu_{n-k}}{A} + \varepsilon\right) ||\nabla u||_{n-k}^{n-k} + A_\varepsilon ||u||_{n-k}^{n-k}\right),$$

où $\mu_{n-k} = (n-k-1)^{n-k-1}(n-k)^{1-2(n-k)} w_{n-k-1}^{-1}$, w_n désignant le volume de S_n standard.

(b) μ_{n-k}/A est la plus petite constante telle que l'inégalité précédente reste vraie quelle que soit $u \in H_{1,G}^{n-k}(M)$.

Remarque. *Le schéma de la démonstration de la Proposition 1 est proche de celui du Théorème 1, et utilise entre autres le Lemme 2. Mais les propriétés de l'exponentielle obligent à modifier certaines étapes. On ne pourra en particulier pas utiliser une partition de l'unité comme dans la démonstration du Lemme 1.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{C}_G^\infty(M)$ est dense dans $H_{1,G}^{n-k}(M)$, il suffit de montrer l'inégalité de la proposition pour les fonctions $u \in \mathcal{C}_G^\infty(M)$. Fixons $\varepsilon > 0$. Reprenons le recouvrement de M par les N ouverts $(O_{i,\delta_\varepsilon})$ construits comme dans la démonstration du Théorème 1, c'est à dire tels qu'on puisse utiliser les minorations et majorations du point 3. du Lemme 2 pour le $\varepsilon > 0$ que l'on s'est fixé (chaque O_{i,δ_ε} étant recouvert par un nombre fini de cartes Ω_m du type de celles construites dans le Lemme 2). On montre le lemme suivant :

Lemme 4. *Pour $\varepsilon > 0$, considérons un des O_{i,δ_ε} du recouvrement de M, de sorte que O_i soit de dimension k. Il existe alors $C > 0$ tel que quelle que soit $\Phi \in H_1^{n-k}(O_{i,\delta_\varepsilon})$ on ait*

$$\int_{O_{i,\delta_\varepsilon}} e^\Phi \mathrm{dV} \leq C \exp\left((1 + c\varepsilon)\frac{\mu_{n-k}}{\operatorname{vol} O_i} ||\nabla \Phi||_{n-k}^{n-k}\right),$$

avec

$$\mu_{n-k} = (n-k-1)^{n-k-1}(n-k)^{1-2(n-k)} w_{n-k-1}^{-1}.$$

Démonstration. Lorsque Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, on sait, (voir par exemple [10]) qu'il existe une constante $\tilde{C}$ telle que quelle que soit $\Phi \in \mathring{H}_1^n(\Omega)$, on ait

$$\int_\Omega e^\Phi \mathrm{dv} \leq \tilde{C} \exp\left(\mu_n ||\nabla_e \Phi||_n^n\right), \tag{2.1}$$

avec

$$\mu_n = (n-1)^{n-1} n^{1-2n} w_{n-1}^{-1}.$$

Si maintenant $\Phi \in \mathcal{C}^\infty_{0,G}(O_{i,\delta_\varepsilon})$, O_i étant de dimension k, les techniques utilisées dans la démonstration du Théorème 1, en considérant la partition de l'unité (Ω_m, α_m), permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_{O_{i,\delta_\varepsilon}} e^\Phi \mathrm{dV} &\leq (1+\varepsilon)\sum_m \int_{U_{1m}\times U_{2m}} \alpha_m \circ \Psi_m^{-1} e^{\Phi\circ\Psi_m^{-1}} \mathrm{dxdy} \\
&\leq (1+\varepsilon)\sum_m \left(\int_{U_{1m}} \alpha_m \circ \Psi_{1m}^{-1}\mathrm{dx}\right)\left(\int_{U_{2m}} e^{\Phi_2}\mathrm{dy}\right), \\
&\leq (1+\varepsilon)(\mathrm{vol}\, O_i)\int_{U_{2m}} e^{\Phi_2}\mathrm{dy},
\end{aligned}$$

où l'on rappelle que Φ_2 est l'application $\Phi \circ \Psi_m^{-1}$ considérée définie sur U_{2m}. En utilisant (2.1), on trouve, puisque U_{2m} est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n-k}$

$$\int_{O_{i,\delta_\varepsilon}} e^\Phi \mathrm{dV} \leq (1+\varepsilon)(\mathrm{vol}\, O_i) C \exp\left(\mu_{n-k}\int_{U_{2m}} |\nabla_e \Phi_2|^{n-k}\mathrm{dy}\right). \tag{2.2}$$

Or, d'après les inégalités du point 3. du Lemme 2,

$$\int_M |\nabla\Phi|^{n-k}\mathrm{dV} \geq (1+c\varepsilon)(\mathrm{vol}\, O_i)\int_{U_{2m}} |\nabla_e\Phi_2|^{n-k}\mathrm{dy}. \tag{2.3}$$

En réinjectant (2.3) dans (2.2), on termine la démonstration du Lemme 4. □

Choisissons alors $\delta > 0$ de sorte que la variété M soit recouverte par N ouverts $O_{i,\delta/2} = \{y \in M | \mathrm{d}(y, O_i) < \delta/2\}$ où O_i est une G-orbite de dimension $k_i \geq k$.

Soit $\Psi(r)$ une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^\infty$, $0 \leq \Psi \leq 1$, égale à 1 pour $0 \leq r \leq \delta/2$, nulle pour $r \geq \delta$. Notons $\Psi_i(x) = \Psi(\mathrm{d}(O_i, x))$. Les fonctions Ψ_i définies sur $O_{i,\delta}$ sont alors invariantes par G (mais ne constituent pas une partition de l'unité), et pour tout i, si $u \in \mathcal{C}^\infty_G$, $u\Psi_i \in \mathcal{C}^\infty_G(O_{i,\delta})$.

Soit $u \in \mathcal{C}^\infty_G(M)$, d'après le Lemme 4,

$$\int_M e^{u\Psi_i}\mathrm{dV} \leq C\exp\left((1+c\varepsilon)\frac{\mu_{n-k_i}}{\mathrm{vol}\, O_i}||\nabla u\Psi_i||_{n-k_i}^{n-k_i}\right).$$

Utilisant le fait qu'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ dépendant uniquement de $n-k$ telles que, quels que soient les réels positifs x et y on ait $(x+y)^{n-k} \leq x^{n-k} + \alpha x^{n-k-1}y + \beta y^{n-k}$, on majore $||\nabla(u\Psi_i)||_{n-k_i}^{n-k_i}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&||\nabla(u\Psi_i)||_{n-k_i}^{n-k_i} \\
&\quad\leq (||\Psi_i\nabla u||_{n-k_i} + ||u\nabla\Psi_i||_{n-k_i})^{n-k_i} \\
&\quad\leq ||\Psi_i\nabla u||_{n-k_i}^{n-k_i} + \alpha||\Psi_i\nabla u||_{n-k_i}^{n-k_i-1}||u\nabla\Psi_i||_{n-k_i} + \beta||u\nabla\Psi_i||_{n-k_i}^{n-k_i}.
\end{aligned}$$

D'autre part, quel que soit $\varepsilon_0 > 0$, il existe un réel B dépendant de ε_0, n, k tel que pour tous réels positifs x et y, $x^{n-k-1}y \leq \varepsilon_0 x^{n-k} + By^{n-k}$. Il s'ensuit :

$$||\nabla(u\Psi_i)||_{n-k_i}^{n-k_i}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1+\alpha\varepsilon_0)||\Psi_i\nabla u||_{n-k_i}^{n-k_i} + (\alpha^{n-k_i}B+\beta)||u\nabla\Psi_i||_{n-k_i}^{n-k_i}\\
&\leq (1+\alpha\varepsilon_0)||\nabla u||_{n-k_i}^{n-k_i} + (\alpha^{n-k_i}B+\beta)(\sup_M|\nabla\Psi_i|^{n-k_i})||u||_{n-k_i}^{n-k_i}\\
&\leq (1+\alpha\varepsilon_0)||\nabla u||_{n-k_i}^{n-k_i} + C||u||_{n-k_i}^{n-k_i}. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Si la dimension de O_i est telle que $\dim O_i = k_i = k$ (rappelons que k est la dimension minimale des orbites), le Lemme 4 et l'inégalité (2.4) permettent d'écrire :

$$\int_{O_{i,\delta}} e^{u\Psi_i}\mathrm{dV} \leq C\exp\left((1+\varepsilon)\frac{\mu_{n-k}}{A}(1+\alpha\varepsilon_0)||\nabla u||_{n-k}^{n-k} + C||u||_{n-k}^{n-k}\right). \qquad (2.5)$$

Dans le cas où $k_i > k$, on procède différemment et on utilise le fait que quels que soient $\varepsilon_0 > 0$ et le réel positif x, on a $x^{n-k_i} \leq \varepsilon_o x^{n-k} + \varepsilon_0^{(n-k_i)(k-k_i)}$. On peut alors écrire, en utilisant l'inégalité de Hölder, qu'il existe C tel que quel que soit $\varepsilon_0 > 0$,

$$||\nabla u||_{n-k_i}^{n-k_i} \leq \varepsilon_o||\nabla u||_{n-k_i}^{n-k} + \varepsilon_0^{(n-k_i)(k-k_i)} \leq C\varepsilon_0||\nabla u||_{n-k}^{n-k} + \varepsilon_0^{(n-k_i)(k-k_i)}.$$

De même,

$$||u||_{n-k_i}^{n-k_i} \leq \varepsilon_o||u||_{n-k_i}^{n-k} + \varepsilon_0^{(n-k_i)(k-k_i)} \leq C\varepsilon_0||u||_{n-k}^{n-k} + \varepsilon_0^{(n-k_i)(k-k_i)}.$$

De (2.4) on déduit alors, lorsque $k_i > k$, que, quel que soit $\varepsilon_0 > 0$, il existe C tel que

$$||\nabla u\Psi_i||_{n-k_i}^{n-k_i} \leq \varepsilon_o||\nabla u||_{n-k}^{n-k} + C||u||_{n-k}^{n-k} + C.$$

On en déduit en utilisant le Lemme 4, que

$$\int_{O_{i,\delta}} e^{u\Psi_i}\mathrm{dV} \leq C\exp\left((1+\varepsilon)\frac{\mu_{n-k_i}}{\mathrm{vol}\, O_i}\varepsilon_0||\nabla u||_{n-k}^{n-k} + C||u||_{n-k}^{n-k}\right). \qquad (2.6)$$

On peut donc, pour chaque i tel que $k_i > k$, choisir ε_0 de sorte que $\varepsilon_0(\mu_{n-k_i}/\mathrm{vol}O_i) < (\mu_{n-k}/A)$. Il s'ensuit d'après (2.5) et (2.6) que, quel que soit i,

$$\int_{O_{i,\delta}} e^{u\Psi_i}\mathrm{dV} \leq C\exp\left((1+\varepsilon)\frac{\mu_{n-k}}{A}||\nabla u||_{n-k}^{n-k} + C||u||_{n-k}^{n-k}\right).$$

Finalement, quelle que soit $u \in H_{1,G}^{n-k}$,

$$\begin{aligned}
\int_M e^u\mathrm{dV} \;&\leq\; \sum_i\int_{O_{i,\delta/2}} e^u\mathrm{dV} \leq \sum_i\int_{O_{i,\delta}} e^{u\Psi_i}\mathrm{dV}\\
&\leq\; C_\varepsilon\exp\left((1+c\varepsilon)\frac{\mu_{n-k}}{A}||\nabla u||_{n-k}^{n-k} + C||u||_{n-k}^{n-k}\right).
\end{aligned}$$

La partie (a) de la Proposition 1 est démontrée.

On s'attache à présent à montrer que la constante (μ_{n-k}/A) de la Proposition 1 est bien la plus petite constante μ telle que l'inégalité

$$\int_M e^u\mathrm{dV} \leq C_\varepsilon\exp\left((\mu+\varepsilon)||\nabla u||_{n-k}^{n-k} + A_\varepsilon||u||_{n-k}^{n-k}\right)$$

soit vérifiée quelle que soit $u \in H_1^{n-k}(M)$. Pour cela il suffit, quel que soit $\varepsilon > 0$, d'exhiber une suite (v_α) de fonctions dans $H_{1,G}^{n-k}(M)$ telle que, quels que soient les réels D et E,

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{||\nabla v_\alpha||_{n-k}^{n-k} + D||v_\alpha||_{n-k}^{n-k} + E}{\log \int_M e^{v_\alpha}\mathrm{dV}} \leq \frac{A}{\mu_{n-k}} + \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Considérons O_x une orbite de dimension minimum k et de volume minimum A. Pour $\varepsilon > 0$, soit $O_{x,\delta_\varepsilon} = \{y \in M | \mathrm{d}(y, O_x) < \delta_\varepsilon\}$ tel que, sur O_{x,δ_ε}, le point 3. du Lemme 2 soit vérifié pour le ε que l'on s'est fixé. En reprenant les fonctions introduites par Cherrier [11] on définit les fonctions $v_\alpha \in H_{1,G}^{n-k}(M)$ de la manière suivante :

$$v_\alpha(y) = \begin{cases} -(n-k)\log(\alpha + \mathrm{d}(y,O_x)^{\frac{n-k}{n-k-1}}) + (n-k)\log(\alpha + \delta_\varepsilon^{\frac{n-k}{n-k-1}}) & \text{si } y \in O_{x,\delta_\varepsilon} \\ 0 & \text{si } y \in M \setminus O_{x,\delta_\varepsilon} \end{cases}$$

où $\mathrm{d}(y, O_x)$ désigne la distance à O_x pour la métrique g. En procédant comme dans la démonstration du Théorème 1, on écrit :

$$\begin{aligned} \int_M e^{v_\alpha}\mathrm{dV} &\leq (1+\varepsilon)\sum_m \int_{U_{1m}\times U_{2m}} \alpha_m \circ \Psi_m^{-1} e^{v_\alpha \circ \Psi_m^{-1}}\mathrm{dxdy} \\ &\leq (1+\varepsilon)A\int_{U_2} e^{v_{2,\alpha}}\mathrm{dy}, \end{aligned}$$

où l'on rappelle que $v_{2,\alpha} = v_\alpha \circ \Psi^{-1}$ est considérée définie sur U_2, $v_\alpha \circ \Psi^{-1}$ ne dépendant pas des variables de U_1. D'autre part, comme $(\mathcal{W}_x, \Phi_2)$ est une carte géodésique normale en x pour $\mathcal{W}_x$ et comme, quel que soit $y \in \mathcal{W}_x$, $\mathrm{d}_{\mathcal{W}_x}(y,x) = \mathrm{d}(y, O_x)$ d'après la construction de $\mathcal{W}_x$, on en déduit, quel que soit $y \in U_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$,

$$v_{2,\alpha}(y) = -(n-k)\log(\alpha + ||y||^{\frac{n-k}{n-k-1}}) + (n-k)\log(\alpha + \delta^{\frac{n-k}{n-k-1}}). \tag{2.7}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_M e^{v_\alpha}\mathrm{dV} &\leq C\int_{U_2} e^{v_{2,\alpha}}\mathrm{dy} \\ &\leq C\int_{U_2} \left[\alpha + ||y||^{\frac{n-k}{n-k-1}}\right]^{-(n-k)} \times \left[\alpha + \delta_\varepsilon^{\frac{n-k}{n-k-1}}\right]^{-(n-k)}\mathrm{dy}, \end{aligned}$$

où $C > 0$, et par un changement de variable :

$$\int_M e^{v_\alpha} \geq C\left(\frac{n-k-1}{n-k} w_{n-k-1}\delta_\varepsilon^{\frac{(n-k)^2}{n-k-1}} \int_0^{+\infty} (1+t)^{-(n-k)} t^{n-k-2}\mathrm{dt}\right)\frac{1}{\alpha},$$

On remarque que l'intégrale $\int_0^\infty (1+t)^{-(n-k)} t^{n-k-2}\mathrm{dt}$ est finie puisque $n-k \geq 2$. Il s'ensuit

$$\int_M e^{v_\alpha}\mathrm{dV} \geq C_\varepsilon \frac{1}{\alpha}.$$

D'autre part, en utilisant à nouveau le point 3. du Lemme 2 :

$$||\nabla v_\alpha||_{n-k}^{n-k} \leq (1+\varepsilon)A\int_{U_2} |\nabla_e v_{2,\alpha}|^{n-k}\mathrm{dy},$$

où l'on rappelle que $v_{2,\alpha}$ est l'application $v_\alpha \circ \Psi_{2m}^{-1}$ considérée définie sur U_{2m}.

En utilisant l'expression (2.7) et d'après [11], on trouve :

$$||\nabla v_\alpha||_{n-k}^{n-k} \leq \frac{(1+\varepsilon)A}{\mu_{n-k}} \log \frac{1}{\alpha} + C.$$

On majore maintenant $||v_\alpha||_{n-k}^{n-k}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} ||v_\alpha||_{n-k}^{n-k} &\leq C \int_{U_2} v_\alpha^{n-k} \mathrm{dy} \\ &\leq C \int_0^{\delta_\varepsilon} \left(\log(\alpha + r^{\frac{n-k}{n-k-1}}) + \log(\alpha + \delta_\varepsilon^{\frac{n-k}{n-k-1}}) \right)^{n-k} r^{n-k-1} \mathrm{dr}. \end{aligned}$$

Puisque, quels que soient les réels $x, y > 0$, il existe deux réels γ et β strictement positifs tels que $(x+y)^{n-k} \leq x^{n-k} + \gamma x^{n-k-1} y + \beta y^{n-k}$, il s'ensuit :

$$\begin{aligned} &||v_\alpha||_{n-k}^{n-k} \\ &\quad = \int_0^{\delta_\varepsilon} \Bigg[\left|\log(\alpha + r^{\frac{n-k}{n-k-1}})\right|^{n-k} + \gamma \left|\log(\alpha + r^{\frac{n-k}{n-k-1}})\right|^{n-k-1} \left|\log(\alpha + \delta^{\frac{n-k}{n-k-1}})\right| \\ &\quad + \beta \left|\log(\alpha + \delta^{\frac{n-k}{n-k-1}})\right|^{n-k} \Bigg] r^{n-k-1} \mathrm{dr}. \end{aligned}$$

De plus, pour α et δ_ε suffisamment petits, r étant inférieur à δ_ε,

$$\left|\log(\alpha + r^{\frac{n-k}{n-k-1}})\right|^{n-k} \leq \left|\log(r^{\frac{n-k}{n-k-1}})\right|^{n-k} \leq \left|\frac{n-k}{n-k-1} \log r\right|^{n-k} \leq \frac{C}{r^a},$$

où a est choisi de sorte que $0 < a - n + k + 1 < 1$. On en déduit facilement que $||v_\alpha||_{n-k}^{n-k} \leq C$.

Finalement, quels que soient les réels D et E

$$\frac{||\nabla v_\alpha||_{n-k}^{n-k} + D||v_\alpha||_{n-k}^{n-k} + E}{\log \int_M e^{v_\alpha} \mathrm{dV}} \leq \frac{(1+\varepsilon)A/\mu_{n-k} \log \frac{1}{\alpha} + C}{\log \frac{1}{\alpha} + \log C_\varepsilon}.$$

D'où

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{||\nabla v_\alpha||_{n-k}^{n-k} + D||v_\alpha||_{n-k}^{n-k} + E}{\log \int_M e^{v_\alpha} \mathrm{dV}} \leq \frac{(1+\varepsilon)A}{\mu_{n-k}}.$$

Ce qui termine la démonstration de la partie (b) de la Proposition 1. □

On est à présent en mesure de prouver le Théorème 2.

Démonstration. On reprend ici le principe de la démonstration proposée par Aubin [3]. On apportera cependant certaines modifications, liées au fait que dans notre cas les fonctions sont invariantes par G. En particulier nous n'utiliserons pas la densité des fonctions $\mathcal{C}^\infty(M)$ n'ayant qu'un nombre fini de points critiques non dégénérés dans $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Lorsque $u \in \mathcal{C}_G^\infty(M)$ (u de moyenne nulle, i.e. $\int_M u\mathrm{dV} = 0$) on note $\breve{u} = \sup(u, 0)$. Il est alors clair que $\breve{u} \in H_{1,G}^{n-k}(M)$ et $||\nabla \breve{u}||_{n-k} \leq ||\nabla u||_{n-k}$. Pour $a \in \mathbb{R}$ on note $\Omega_a(u) = \{x \in M | u(x) \geq a\}$ et $\eta_a(u)$ la mesure de $\Omega_a(u)$. Pour

$u \in \mathcal{C}_G^\infty(M)$ fixée, $\eta_a(u)$ est évidemment une fonction décroissante en a, mais pas nécessairement continue.

Soit $\varepsilon > 0$. Il s'agit de déterminer un C_ε tel que, quelle que soit $u \in H_{1,G}^{n-k}(M)$ de moyenne nulle,

$$\int_M e^u \mathrm{dV} \leq C_\varepsilon \exp\left((\frac{\mu_{n-k}}{A} + \varepsilon)||\nabla u||_{n-k}^{n-k} \right).$$

Fixons un réel $\eta > 0$, dont le choix en fonction de ε sera précisé par la suite. Soit $u \in \mathcal{C}_G^\infty(M)$ de moyenne nulle. Deux cas peuvent se produire suivant qu'il existe $b \geq 0$ tel que $\eta_b(u) \geq \eta$ ou non.

1. Supposons qu'il existe $b \geq 0$ tel que $\eta_b(u) \geq \eta$.

On pose $a = \sup\{b \in \mathbb{R} | \eta_b(u) \geq \eta\}$. Alors $a \geq 0$, $\eta_{a+1}(u) < \eta$ et $\eta_{a/2}(u) \geq \eta$. On déduit de la Proposition 1 :

$$\begin{aligned} \int_M e^u \mathrm{dV} &\leq e^{a+1} \int_M e^{\widehat{u-(a+1)}^{\smile}} \mathrm{dV} \\ &\leq e^{a+1} B_{\varepsilon/2} \exp\left((\frac{\mu_{n-k}}{A} + \frac{\varepsilon}{2})||\nabla u||_{n-k}^{n-k} + A_{\varepsilon/2}||\widehat{u-(a+1)}^{\smile}||_{n-k}^{n-k} \right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Comme u est de moyenne nulle, il existe une constante C_1 telle que

$$||\check{u}||_1 = \frac{1}{2}||u||_1 \leq C_1||\nabla u||_{n-k}. \tag{2.9}$$

D'autre part, $||\check{u}||_1 \geq \frac{a}{2}\eta_{a/2}(u)$ et $||\check{u}||_1 \leq C_1||\nabla u||_{n-k}$, on en déduit, puisque $\eta_{a/2}(u) \geq \eta$:

$$a \leq 2\left(\eta_{a/2}(u)\right)^{-1} ||\check{u}||_1 \leq 2\frac{C_1}{\eta}||\nabla u||_{n-k}.$$

Utilisant le fait que pour tout $\alpha > 0$,

$$||\nabla u||_{n-k} < \alpha||\nabla u||_{n-k}^{n-k} + \alpha^{\frac{-1}{n-k-1}}$$

et en choisissant $\alpha = \frac{\eta^2}{2C_1}$, on obtient

$$a \leq \eta||\nabla u||_{n-k} + C_2\eta^{-\frac{n-k+1}{n-k-1}} + 1, \tag{2.10}$$

où C_2 ne dépend ni de u ni de η.

Par ailleurs, comme $a+1 > 0$, on a toujours d'apès (2.9), $||\widehat{u-(a+1)}^{\smile}||_1 \leq ||\check{u}||_1 \leq C_1||\nabla u||_{n-k}$. D'après l'inégalité de Hölder et les inclusions de Sobolev continues et compactes de $H_{1,G}^{n-k}(M)$ dans $L_G^p(M)$ quel que soit $p \geq 1$, on obtient :

$$||\widehat{u-(a+1)}^{\smile}||_{n-k}^{n-k} \leq \eta_{a+1}^{1/2}(u)||\widehat{u-(a+1)}^{\smile}||_{2(n-k)}^{n-k} < \eta^{1/2}||\widehat{u-(a+1)}^{\smile}||_{2(n-k)}^{n-k}.$$

Finalement,

$$||\widehat{u-(a+1)}^{\smile}||_{n-k}^{n-k} \leq D\eta^{1/2}||\nabla u||_{n-k}^{n-k} \tag{2.11}$$

, où D est une constante ne dépendant ni de u, ni de η.

En réinjectant (2.11) et (2.10) dans (2.8), on peut écrire

$$\int_M e^u \mathrm{dV} \leq$$
$$B_{\varepsilon/2} \exp\left(C_2 \eta^{-\frac{n-k+1}{n-k-1}} + 1\right) \exp\left(\left(\frac{\mu_{n-k}}{A} + \frac{\varepsilon}{2} + A_{\varepsilon/2} D \eta^{1/2} + \eta\right) ||\nabla u||_{n-k}^{n-k}\right).$$

2. Supposons que quel que soit $b \geq 0$, $\eta_b(u) < \eta$.

On a

$$\int_M e^u \mathrm{dV} \leq \int_M e^{\check{u}} \mathrm{dV}$$

et d'après la Proposition 1,

$$\int_M e^u \mathrm{dV} \leq B_{\varepsilon/2} \exp\left(\left(\frac{\mu_{n-k}}{A} + \frac{\varepsilon}{2}\right) ||\nabla u||_{n-k}^{n-k} + A_{\varepsilon/2} ||u||_{n-k}^{n-k}\right). \tag{2.12}$$

Mais dans ce cas $\eta_0(u) \leq \eta$, alors, par les mêmes calculs que ceux utilisés dans le premier cas, on obtient :

$$||\check{u}||_{n-k}^{n-k} \leq ||\check{u}||_{2(n-k)}^{n-k} \left(\eta_0(u)\right)^{1/2} \leq D\eta^{1/2} ||\nabla u||_{n-k}^{n-k}. \tag{2.13}$$

D'où, d'après (2.12) et (2.13)

$$\int_M e^u \mathrm{dV} \leq B_{\varepsilon/2} \exp\left(\left(\frac{\mu_{n-k}}{A} + A_{\varepsilon/2} D \eta^1/2 + \frac{\varepsilon}{2}\right) ||\nabla u||_{n-k}^{n-k}\right).$$

Dans les deux cas il suffit donc de choisir $\eta > 0$ tel que

$$A_{\varepsilon/2} D \eta^{1/2} + \eta < \frac{\varepsilon}{2},$$

puis

$$C_\varepsilon = B_{\varepsilon/2} \exp\left(C_2 \eta^{-\frac{n-k+1}{n-k-1}} + 1\right)$$

pour que la première inégalité du Théorème 2 soit vérifiée quel que soit $u \in H_{1,G}^{n-k}(M)$ de moyenne nulle.

La deuxième inégalité du Théorème 2 s'obtient alors facilement en écrivant la première inégalité pour les fonctions

$$\tilde{u} = u - \frac{1}{\mathrm{vol}\,(M)} \int_M u \mathrm{dV}$$

lorsque u n'est pas de moyenne nulle.

La partie (b) du Théorème 2 se montre de la même manière que la partie (b) de la Proposition 1, en utilisant la suite de fonctions (v_α) définie alors. □

2.3 Un corollaire

Du Théorème 2 découle le corollaire suivant.

Corollaire 1. *Sous les mêmes hypothèses sur (M, g), G, k, et A que dans le Théorème 2, quels que soient $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, il existe $C_{\varepsilon,\varepsilon'}$ tel que, quelle que soit $u \in H_{1,G}^{n-k}(M)$, on ait*

$$\int_M e^u \mathrm{dV} \leq C_\varepsilon \exp\left(\left(\frac{\mu_{n-k}}{A} + \varepsilon\right) ||\nabla u||_{n-k}^{n-k} + \varepsilon' ||u||_{n-k}^{n-k}\right),$$

et μ_{n-k}/A *est la meilleure constante possible telle que l'inégalité précédente reste vraie quelle que soit* $u \in H_{1,G}^{n-k}(M)$.

Remarque. *La constante devant le terme* $||u||_{n-k}^{n-k}$ *peut être choisie aussi petite que l'on souhaite, ce qui est une amélioration de la Proposition 1.*

Démonstration. Quelle que soit $u \in H_{1,G}^{n-k}(M)$, $\int_M u\mathrm{dV} \leq C||u||_{n-k}$, où C ne dépend que de M. D'autre part, quel que soit $\varepsilon' > 0$, il existe une constante $C_{\varepsilon'}$ telle que $C||u||_{n-k} \leq \varepsilon'||u||_{n-k}^{n-k} + C_{\varepsilon'}$. En utilisant le Théorème 2 on en déduit : quels que soient $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, il existe $C_{\varepsilon,\varepsilon'}$ tel que quelle que soit $u \in H_{1,G}^{n-k}(M)$

$$\int_M e^u \mathrm{dV} \leq C_{\varepsilon,\varepsilon'} \exp\left((\frac{\mu_{n-k}}{A} + \varepsilon)||\nabla u||_{n-k}^{n-k} + \varepsilon'||u||_{n-k}^{n-k} \right).$$

Pour prouver que μ_{n-k}/A est la meilleure constante possible, on utilise à nouveau les fonctions v_α définies pour démontrer la partie (b) de la Proposition 1. $\square$

2.4 Exemples

Ce théorème permet de retrouver le résultat établi par Aubin et Cotsiolis sur la sphère S_n avec le groupe d'isométries $G = O(r) \times O(s)$, $r + s = n + 1$, $r \geq s \geq 2$. Dans ce cas, la dimension minimum des G-orbites est $k = s-1 = n-r$ et le volume minimum des orbites de dimension k est $A = w_{s-1} = w_{n-r}$. On a alors $\frac{\mu_{n-k}}{A} = \frac{\mu_r}{w_{n-r}}$, et on retrouve la constante établie par Aubin et Cotsiolis. On peut également étendre ce résultat au cas d'un groupe d'isométries G du type $O(r_1) \times O(r_2) \times \ldots \times O_{r_m}$, $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n + 1$ et $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_m$. Dans ce cas, $k = r_m - 1$ et $A = w_{r_m - 1}$.

Chapitre 3

Quelques applications à des problèmes d'analyse non linéaire

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n. On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$\Delta_p \Phi + h\Phi^{p-1} = f\Phi^{q-1} \tag{3.1}$$

et

$$\Delta_p \Phi + a = fe^{\Phi} \tag{3.2}$$

où $p > 1$, $q > 2$ sont deux réels donnés et Δ_p désigne le p-laplacien $\Delta_p \Phi = -\nabla(|\nabla\Phi|^{p-1}\nabla\Phi)$. On suppose que h et f sont deux fonctions continues sur M et a un réel.

Dans l'équation (3.1), l'exposant critique pour lequel l'existence de solutions non nulles pose problème est $q = \frac{np}{n-p}$ (quand $n > p$). Pour $p = 2$ et $h = \frac{n-2}{4(n-1)} scal(M)$, on retrouve l'équation bien connue de courbure scalaire prescrite. Quand h et f sont G-invariantes, G étant un sous groupe du groupe des isométries de M, l'exposant critique de l'équation (3.1) devient $q = \frac{(n-k)p}{n-k-p}$ (quand $n-k > p$), où k est la plus petite dimension des G-orbites. Quand $k > 0$, l'exposant critique est alors "sur-critique", car $\frac{(n-k)p}{n-k-p} > \frac{np}{n-p}$. L'équation (3.1) lorsque $p \neq 2$ en l'absence de symétries a été étudiée par Druet [15]. Dans le cas particulier de la sphère S_n pour les fonctions $O(r) \times O(s)$-invariantes, les équations (3.1) et (3.2) ont été étudiées par Aubin et Cotsiolis [6]. Les théorèmes de ce chapitre étendent ces résultats a une variété compacte quelconque. Les démonstrations font intervenir les meilleures constantes déterminées dans les Théorèmes 1 et 2.

3.1 Enoncé des théorèmes

Théorème 3. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, G un sous groupe du groupe des isométries de M tel que la plus petite dimension des orbites soit k et le volume minimum des orbites de dimension k soit A, h et f*

deux fonctions continues invariantes par G. Soit p un réel tel que $n > k + p$. On suppose que f est positive quelquepart et que $L_p(\Phi) = \Delta_p\Phi + a(x)\Phi^{p-1}$ est un opérateur coercif.

a) Si

$$\mu < \frac{A^{\frac{p}{n-k}}}{K(n-k,p)^p (\sup_M f)^{\frac{n-k-p}{n-k}}},$$

où

$$\mu = \inf_{\mathcal{A}} \left(\int_M |\nabla\Phi|^p \mathrm{dV} + \int_M h|\Phi|^p \mathrm{dV} \right) \qquad (\star)$$

avec $\mathcal{A} = \{\Phi \in H^p_{1,G} | \int_M f|\Phi|^{\frac{(n-k)p}{n-k-p}} \mathrm{dV} = 1\}$, alors l'équation (3.1) avec $q = \frac{(n-k)p}{n-k-p}$ admet une solution strictement positive appartenant à $C^{1,\alpha}$ ($\alpha \in]0,1[$), où $K(n-k,p)$ est la meilleure constante établie dans le Théorème 1. Cette solution est dans $\mathcal{C}^2_G$ si $p = 2$.

b) L'inégalité ($\star$) est en particulier vérifiée si

$$\int_M h\mathrm{dV} < \frac{A^{\frac{p}{n-k}}}{K(n-k,p)^p} \left(\frac{\int_M f\mathrm{dV}}{\sup_M f} \right)^{\frac{n-k-p}{n-k}}.$$

Théorème 4. *soit M, G, k et A comme dans le théorème précédent, (3.2) admet une solution appartenant à $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ pour un certain $\alpha \in]0,1]$ (cette solution appartient à $\mathcal{C}^2_G$ si $p = 2$) si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :*

1. *$a < 0$ et f est partout négative*
2. *$a = 0$, $\int_M f\mathrm{dV} < 0$ et $\sup_M f > 0$*
3. *$0 < a < A/(n-k)V\mu_{n-k}$ et $\sup_M f > 0$*

avec $\mu_{n-k} = (n-k-1)^{n-k-1}(n-k)^{1-2(n-k)}w^{-1}_{n-k-1}$ et $V = \mathrm{vol}\, M$.

3.2 Demonstration des théorèmes

3.2.1 Démonstration du Théorème 3

Démonstration. La preuve du théorème se fait en plusieurs étapes. On commence par établir un résultat d'existence dans le cas où l'exposant q est sous-critique, c'est à dire lorsque $p < q < p^*$, avec $p^* = \frac{(n-k)p}{n-k-p}$. On note $\mathcal{A}_q = \{\Phi \in H^p_{1,G} | \int_M |\Phi|^q \mathrm{dV} = 1\}$ pour $p < q \le p^*$ et on considère la fonctionnelle

$$I(\Phi) = \int_M |\nabla\Phi|^p \mathrm{dV} + \int_M h|\Phi|^p \mathrm{dV}.$$

On pose $\mu_q = \inf \Phi$ pour $\Phi \in \dashv_q$ et on note $\mu = \mu_{p^*}$.

Lemme 5. *Sous les mêmes hypothèses sur M, G, h et f que dans le Théorème 3, si $p < q < p^*$, l'équation*

$$\Delta_p\Phi + h\Phi^{p-1} = \mu_q f\Psi\Phi^{q-1} \qquad (3.3)$$

admet une solution faible positive $\Phi_q \in \mathcal{A}_q$, telle que $I(\Phi_q) = \mu_q$.

Démonstration. On utilise la méthode variationnelle standard. Sous la condition nécessaire que f soit positive quelquepart, on montre que $\mathcal{A}_q$ n'est pas vide. En effet, dans le cas particulier où G est un groupe fini, si $\Phi \in \mathcal{D}(M)$ est une fonction positive telle que $\int_M f\Phi^q \mathrm{dV} > 0$, alors on peut vérifier que $\Phi_G = (\Sigma_{\sigma\in G}\Phi^q \circ \sigma)^{\frac{1}{q}}$ est G-invariante, appartient à H_1^p, et vérifie

$$\int_M f\Phi_G^q \mathrm{dV} = (\mathrm{Card}\, G)\int_M f\Phi^q > 0.$$

Dans le cas général, si l'on note $\mathrm{d}\mu$ la mesure de Haar sur G, on prend $\Phi_G = \left(\int_G \Phi^q \circ \sigma \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}$ qui est G-invariante, appartient à H_1^q et vérifie

$$\int_M f\Phi_G^q = \mathrm{Vol}_{\mathrm{d}\mu} G \int_M f\Phi^q > 0.$$

Soit (Φ_i) une suite minimisante de fonctions positives, c'est à dire une suite vérifiant $\lim I(\Phi_i) = \mu_q$. La coercivité de l'opérateur L_p permet alors de montrer que la suite (Φ_i) est bornée dans H_1^p. On peut donc extraire de (Φ_i) une sous suite, toujours notée (Φ_i), qui converge faiblement dans H_1^p, fortement dans L^p et presque partout vers une fonction Φ_q. Il s'ensuit que Φ_q appartient à $\mathcal{A}_q$ et $\Phi_q \geq 0$, puisque les fonctions Φ_i sont positives. Alors $I(\Phi_q) = \mu_q$ et, quelle que soit $\Psi \in H_{1,G}^p$,

$$\int_M |\nabla\Phi_q|^{p-2}\nabla\Phi_q\nabla\Psi \mathrm{dV} + \int_M h|\Phi_q|^{p-1}\Psi \mathrm{dV} = \mu_q \int_M f|\Phi_q|^{q-1}\Psi \mathrm{dV}. \qquad (3.4)$$

En fait, (3.4) reste vraie quelle que soit $\Psi \in H_1^p$, pas nécessairement invariante par G. En effet, à $\Phi \in H_1^p$ on associe Φ_G la fonction définie par $\Phi_G = \int_G \Phi\circ\sigma \mathrm{d}\mu$, où $\mathrm{d}\mu$ désigne la mesure de Haar sur G. Alors (3.4) est vraie pour $\Psi = \Phi_G$ et on en déduit, puisque h, f et Φ_q sont invariantes par G que (3.4) est vraie quelle que soit $\Phi \in H_1^p$. D'autre part, comme $\Phi_q \in \mathcal{A}_{\mathrm{II}}$, Φ_q n'est pas identiquement nulle, et en particulier $\mu_q = I(\Phi_q) > 0$. La fonction Φ_q est alors solution faible, lorsque $1 < p < q$, de

$$\Delta_p\Phi + h\Phi^{p-1} = \mu_q f\Phi^{q-1}.$$

Le Lemme 5 est ainsi démontré. □

La suite de la démonstration du Théorème 3 va consister à construire Φ une solution de (3.1) non identiquement nulle comme limite de la suite Φ_q lorque q tend vers p^*. Pour cela, on commence par montrer le résultat suivant.

Proposition 2. *L'ensemble des μ_q (où $1 < q < p^*$) est borné.*

Démonstration. Notons $\Omega = \{x \in M | f(x) > 0\}$. Comme f est invariante par G, Ω est stable sous l'action de G. Soit $1 < q_0 < p^*$, il existe alors $\Psi \in \mathcal{C}_{0,G}^\infty(\Omega)$, Ψ positive telle que $\int_M f\Psi^{q_0}\mathrm{dV} = 1$. Posons $\phi_q = \left(\int_M f\Psi^q \mathrm{dV}\right)^{-\frac{1}{q}}\Psi$, alors $\int_M f\phi_q^q \mathrm{dV} = 1$ et $\phi_q \in \mathcal{A}_q$. D'autre part, d'après l'inégalité de Holder,

$$\int_\Omega f\Psi^{q_0}\mathrm{dV} \leq \left(\int_\Omega f\mathrm{dV}\right)^{\frac{q-q_0}{q}} \left(\int_\Omega f\Psi^q \mathrm{dV}\right)^{\frac{q_0}{q}}$$

et comme, sans nuire à la généralité, on peut supposer que $\int_\Omega f\mathrm{dV} = 1$, on en déduit $\int_\Omega f\Psi^q\mathrm{dV} \geq 1$. Finalement $\mu_q \leq I(\Phi_q) \leq I(\Psi)$. □

Comme $\mu_q = I(\Phi_q)$ et puisque la fonctionnelle I est coercive, on en déduit que la famille (Φ_q) est bornée dans H_1^p. Il existe alors une sous suite (Φ_{q_i}), avec $\lim_{i\to+\infty} q_i = p^*$, qui converge faiblement dans H_1^p, fortement dans L^p et presque partout vers une fonction positive $\Phi^* \in H_{1,G}^p$. De plus comme la famille (Φ_q^{q-1}) est bornée dans $L^{\frac{p}{p^*-1}}$, la suite $(\Phi_{q_i}^{q_i-1})$ peut être choisie de sorte qu'elle converge faiblement vers $(\Phi^*)^{p^*-1}$, et d'après le Lemme 5 la suite (μ_{q_i}) peut être choisie convergente vers $\bar{\mu}$, voir [6]. D'autre part, en reprenant la démonstration proposée par Demengel et Hebey dans [12], on montre que $|\nabla\Phi_{q_i}|^{p-2}\nabla\Phi_{q_i}$ converge faiblement dans $H_1^{\tilde{p}}$ vers $|\nabla\Phi^*|^{p-2}\nabla\Phi^*$, où $\tilde{p}$ est le conjugué de p. Finalement, en faisant tendre q vers p^*, on en déduit que Φ^* vérifie faiblement dans H_1^p l'équation

$$\Delta_p\Phi^* + h{\Phi^*}^{p-1} = f{\Phi^*}^{p^*-1}.$$

L'étape suivante consiste à montrer que Φ^* n'est pas la solution nulle. C'est à ce point de la démonstration qu'intervient la meilleure constante de l'inégalité de Sobolev du Théorème 1. Pour cela, on écrit :

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\int_M f\Phi_q^q \mathrm{dV}\right)^{\frac{p}{q}} \leq (\sup f)^{\frac{p}{q}} \left(\int_M \Phi_q^q \mathrm{dV}\right)^{\frac{p}{q}} \\ &\leq (\sup_M f)^{\frac{p}{q}} \left(\int_M \Phi_q^{p^*} \mathrm{dV}\right)^{\frac{p}{p^*}}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Holder, en posant $V = \mathrm{vol}\, M$,

$$1 \leq (\sup_M f)^{\frac{p}{q}} V^{\frac{p(p^*-q)}{qp^*}} \left(\int_M \Phi_q^{p^*} \mathrm{dV}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Alors, en utilisant le Théorème 1, on en déduit que : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe D_ε tel que

$$\begin{aligned} 1 &\leq (\sup_M f)^{\frac{p}{q}} V^{\frac{p(p^*-q)}{qp^*}} \left[\left(\frac{K(n-k,p)^p}{A^{\frac{p}{n-k}}} + \varepsilon\right) ||\nabla\Phi_q||_p^p + D_\varepsilon ||\Phi_q||_p^p\right] \\ &\leq (\sup_M f)^{\frac{p}{q}} V^{\frac{p(p^*-q)}{qp^*}} \left[\left(\frac{K(n-k,p)^p}{A^{\frac{p}{n-k}}} + \varepsilon\right) \left(\mu_q - \int_M h\Phi_q^p \mathrm{dV}\right) + D_\varepsilon ||\Phi_q||_p^p\right]. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, sous l'hypothèse

$$\mu < \frac{A^{\frac{p}{n-k}}}{K(n-k,p)^p (\sup_M f)^{\frac{p}{p^*}}},$$

et puisque $\lim_{q\to p^*}\mu_q = \mu$ et $\lim_{q\to p^*} V^{\frac{p(p^*-q)}{qp^*}} = 1$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ de sorte que $||\Phi^*||_p \geq C > 0$. Comme la suite (Φ_{q_i}) converge fortement dans L^p vers Φ^*, on en déduit que Φ^* n'est pas la solution nulle. Les travaux de Tolksdorf [27] et Vazquez [30] montrent que Φ est de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ pour un certain $\alpha \in]0,1[$ et strictement positive. Si $p = 2$, les théorèmes classiques de régularités montrent que Φ est de classe $\mathcal{C}^2$.

La partie b) du théorème s'obtient immédiatement en remarquant que si $\int_M f\mathrm{dV} > 0$, la fonction constante $\Phi_0 = \left(\int_M f\mathrm{dV}\right)^{-\frac{1}{q}} \in \mathcal{A}_q$ et que

$$\mu \leq I(\Phi_0) = \left(\int_M f\mathrm{dV}\right)^{\frac{-p}{q}} \int_M h\mathrm{dV}.$$

□

3.3 Equations non linéaires et exponentielle

L'équation (3.2) a été étudiée sur une variété compacte en l'absence de symétries ainsi que sur la sphère S_n pour des fonctions invariantes par le groupe $O(r)\times O(s)$ [6]. La transposition de cette étude au cas d'un groupe d'isométries quelconque ne pose pas de réels problèmes dans les cas $a<0$ et $a=0$. On se reportera à [6] pour l'étude développée. En revanche, le cas $a>0$ fait intervenir la meilleure constante déterminée dans le Théorème 2. On se bornera donc à présenter la démonstration du Théorème 4 dans ce cas.

Démonstration. On utilise la méthode variationnelle standard. Considérons sur H_1^{n-k} la fonctionnelle

$$I(\Phi) = ||\nabla\Phi||_{n-k}^{n-k} + (n-k)a\int_M \Phi \mathrm{dV},$$

et on définit $\mathcal{A} = \{\Phi \in H_{1,G}^{n-k} | \int_M fe^{\Phi}\mathrm{dV} = aV\}$, où V désigne le volume de M. Comme $a>0$, $\mathcal{A}$ n'est pas vide si et seulement si f est positive quelque part. On commence par montrer que $I(\Phi)$ est minorée lorsque $\Phi \in \mathcal{A}$. Pour cela, en utilisant le Théorème 2, on écrit : quel que soit $\varepsilon>0$, il existe C_ε tel que

$$aV = \int_M fe^{\Phi}\mathrm{dV} \leq C_\varepsilon(\sup_M f)\exp\left(\left(\frac{\mu_{n-k}}{A}+\varepsilon\right)||\nabla\Phi||_{n-k}^{n-k} + \frac{1}{V}\int_M \Phi\mathrm{dV}\right).$$

Il s'ensuit

$$\left[\log\left(\frac{aV}{C_\varepsilon \sup f}\right) - \left(\frac{\mu_{n-k}}{A}+\varepsilon\right)||\nabla\Phi||_{n-k}^{n-k}\right] V \leq \int_M \Phi\mathrm{dV}.$$

Alors

$$I(\Phi) \geq ||\nabla\Phi||_{n-k}^{n-k}\left[1-(n-k)a\frac{\mu_{n-k}+\varepsilon}{A}V\right] + C$$

avec

$$C = (n-k)aV\log\left(\frac{aV}{C_\varepsilon \sup f}\right).$$

Comme, par hypothèse, $a < \frac{A}{(n-k)V\mu_{n-k}}$ on peut choisir $\varepsilon>0$ tel que $(n-k)a < \frac{A}{V(\mu_{n-k}+\varepsilon)}$. On en déduit l'existence de $\eta>0$ tel que $I(\Phi)\geq \eta||\nabla\Phi||_{n-k}^{n-k} + C$ et finalement $I(\Phi)\geq C$.

On note $\lambda = \inf_{\Phi\in\mathcal{A}} I(\Phi)$. On choisit une suite (Φ_i) telle que $\Phi_i \in \mathcal{A}$ et $\lim_{i\to+\infty} I(\Phi_i) = \lambda$. Des calculs identiques aux précédents montrent qu'il existe $\eta>0$ tel que, quel que soit i, $I(\Phi_i) \geq ||\nabla\Phi_i||_{n-k}^{n-k}\eta + C$. On en déduit que la suite (Φ_i) est bornée dans H_1^{n-k}. On extrait une sous suite (Φ_j) qui converge faiblement dans H_1^{n-k}, fortement dans L^1 et presque partout vers $\Phi \in H_{1,G}^{n-k}$. Comme de plus l'application qui à Φ associe e^Φ est compacte de H_1^{n-k} dans L^1, on peut choisir (Φ_j) de sorte que $\int_M fe^{\Phi_j}\mathrm{dV}$ converge vers $\int_M fe^{\Phi}\mathrm{dV}$. Il s'ensuit que $\Phi\in\mathcal{A}$ et $I(\Phi)=\lambda$. La fonction Φ vérifie faiblement l'équation

$$(n-k)\Delta_p\Phi + (n-k)a = fe^{\Phi}.$$

Finalement, $\Phi' = \Phi - \log(n-k)$ est solution de l'équation 3.2. □

Chapitre 4

Etude de la géométrie des orbites

Les démonstrations des résultats du chapitre 5 qui suit vont utiliser certaines propriétés de la géométrie des orbites d'une variété riemannienne sous l'action d'un groupe d'isométries compact. Nous présentons dans ce chapitre plusieurs résultats qui, en plus d'avoir un intérêt propre, seront fondamentaux par la suite.

4.1 Localisation d'une orbite et dimension

On commence par rappeler, sous forme de lemme, un résultat classique sur l'existence de voisinages tubulaires. Ce résultat sera fréquemment utilisé dans ce chapitre.

Lemme 6 (Voisinage tubulaire). *Soit N une sous variété compacte d'une variété riemannienne (M, g). Il existe $\delta > 0$ tel que, quel que soit $x \in N_\delta = \{y \in M | \mathrm{d}(y, N) < \delta\}$ il existe un unique $x' \in N$ vérifiant $\mathrm{d}(x, x') = \mathrm{d}(x, N)$. L'application Π définie de N_δ dans N par $\Pi(x) = x'$ est alors une $\mathcal{C}^\infty$ submersion surjective.*

Pour la démonstration, voir par exemple [25].

Le résultat qui suit a été démontré dans le contexte plus général d'un groupe de Lie opérant sur une variété différentiable [8]. Mais dans le cas qui nous intéresse ici d'un groupe d'isométries opérant sur une variété riemannienne, la démonstration se trouve grandement simplifiée.

Lemme 7. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, G un sous groupe compact du groupe des isométries de M. Quel que soit $x \in M$, il existe un voisinage $O_{x,\delta}$ de O_x, tel que quel que soit $y \in O_{x,\delta}$, $\dim O_y \geq \dim O_x$. On rappelle que $O_{x,\delta} = \{y \in M | \mathrm{d}(y, O_x) < \delta\}$.*

Démonstration. Soit $O_{x,\delta}$ un voisinage tubulaire de O_x. Pour $y \in O_{x,\delta}$, considérons l'unique point $\Pi(y) \in O_x$ tel que $\mathrm{d}(y, \Pi(y)) = \mathrm{d}(y, O_x)$. Notons S_y le sous groupe de G fixateur du point y. Alors, quel que soit $\sigma \in S_y$,

$$\mathrm{d}(y, \sigma(\Pi(y))) = \mathrm{d}(\sigma(y), \sigma(\Pi(y))) = \mathrm{d}(y, \Pi(y)) = \mathrm{d}(y, O_x).$$

On en déduit, comme $O_{x,\delta}$ est un voisinage tubulaire de O_x, que $\sigma(\Pi(y)) = \Pi(y)$. Le fixateur S_y est donc inclus dans le fixateur $S_{\Pi(y)}$. Comme O_y est difféomorphe à G/S_y et O_x est difféomorphe à $G/S_{\Pi(y)}$, on a alors $\dim O_y \geq \dim O_x$. □

4.2 Localisation d'une orbite et volume

Le résultat qui suit est plus difficile à démontrer que le précédent, et n'a de sens que dans le cas d'une variété riemannienne. On rappelle que le volume d'une orbite O de (M, g) sous l'action d'un groupe compact d'isométries est le volume relatif à la métrique induite par g sur O. Lorsque O est une orbite finie, $\mathrm{vol}\, O = \mathrm{Card}\, O$.

Théorème 5. *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n, G un sous groupe compact du groupe des isométries de M. Soit O une G-orbite de dimension $k < n$, et (O_i) une suite de G-orbites de dimension k qui converge vers O, c'est à dire telle que* $\lim_{i\to+\infty} \mathrm{d}(O_i, O) = 0$. *Alors*

$$\liminf \mathrm{vol}\, O_{x_i} \geq \mathrm{vol}\, O.$$

Démonstration. **Première étape** Soit O_δ un voisinage tubulaire de O, et Π la submersion riemannienne associée. On montre que pour toute G-orbite $O_i \subset O_\delta$, $(\Pi_{/O_i}, O_i, O)$ est un revêtement à k_i feuillets. Pour cela on remarque que $\Pi_{/O_i}$ notée Π_i est surjective et que, d'après le Théorème de Sard, il existe une valeur régulière $x \in O$ pour l'application Π_i. Par invariance par isométries, tous les points de O sont des valeurs régulières et, comme O_i et O sont compacts, (Π_i, O_i, O) est un revêtement à k_i feuillets.

Cas où $k = 0$. Lorsque $k = 0$, l'orbite O est finie, dans ce cas le résultat précédent montre que $\mathrm{vol}\, O_i = \mathrm{Card}\, O_i = k_i \mathrm{Card}\, O = k_i \mathrm{vol}\, O$, et le Théorème 5 est démontré, puisque $k_i \geq 1$.

Cas où $k \geq 1$. Sur chaque orbite $O_i \subset O_\delta$, on considère les deux métriques $g_i = g_{/O_i}$ et $g'_i = \Pi_i^*(g_{/O})$. Il est clair, puisque (Π_i, O_i, O) est un revêtement à k_i feuillets, que

$$\int_O \mathrm{dv}_{g/O} = \frac{1}{k_i} \int_{O_i} \mathrm{dv}_{g'_i} \tag{4.1}$$

Le Théorème 5 sera alors démontré si l'on vérifie que

$$\int_{O_i} \mathrm{dv}_{g_i} = a_i \int_{O_i} \mathrm{dv}_{g'_i}$$

avec $\lim_{i\to+\infty} a_i = 1$. C'est l'objet de l'étape suivante.

Deuxième étape Soit $x \in O$, on peut choisir une suite (x_i) telle que, quel que soit i, $x_i \in O_i$, $\Pi(x_i) = x$, et $\lim_{i\to+\infty} \mathrm{d}(x_i, x) = 0$. En effet, considérons une suite (y_i) telle que quel que soit i, $y_i \in O_i$ et $\lim_{i\to+\infty} \mathrm{d}(y_i, O) = 0$. Pour chaque i, il existe σ_i tel que $\sigma_i(\Pi_i(y_i)) = x$. Prenons $x_i = \sigma_i(y_i)$, on a alors

$$\mathrm{d}(y_i, \Pi_i(y_i)) = \mathrm{d}(\sigma_i(y_i), x) = \mathrm{d}(x_i, x)$$

et

$$\Pi_i(x_i) = \Pi_i(\sigma_i(y_i)) = \sigma_i(\Pi_i(y_i)) = x.$$

Soit $X_1, \ldots, X_k$ une base orthonormée de $\mathrm{T}_x(O), g_x)$ et, pour j de 1 à k, un chemin σ_t^j dans G tel que $\sigma_0^j = \mathrm{Id}$ et tel que le vecteur tangent en $x \in O$ au chemin $\sigma_t^j(x)$ (noté $(\widehat{\dot{\sigma_t^j(x)}})_0$) soit égal à X_j. Pour tout $y \in O_\delta$, on note $Y_{y,1}, \ldots, Y_{y,k}$ les vecteurs tangents en y à O_y définis par $Y_{y,j} = (\widehat{\dot{\sigma_t^j(y)}})_0$. Pour chaque x_i, $\mathrm{d}\Pi(Y_{x_i,j}) = X_j$ car

$$\mathrm{d}\Pi(Y_{x_i,j}) = \mathrm{d}\Pi(\widehat{\dot{\sigma_t^j(x_i)}})_0 = (\widehat{\dot{\Pi \circ \sigma_t^j(x_i)}})_0 = (\widehat{\dot{\sigma_t^j \circ \Pi(x_i)}})_0 = (\widehat{\dot{\sigma_t^j(x)}})_0.$$

On en déduit que les vecteurs tangents $Y_{x_i,j}$ forment une base orthonormée de $(\mathrm{T}_{x_i}(O_i), g_i')$ (mais pas nécessairement de $(\mathrm{T}_{x_i}(O_i), g_i)$). Notons ρ, ρ_i, ρ_i' les k-formes de volume (définies au signe près suivant l'orientation) sur O (resp. O_i) associées à $g_{/O}$ (resp. g_i, resp. g_i'). Il suit des remarques précédentes que, pour tout i,

$$|\rho_i'(Y_{x_i,1}, \ldots, Y_{x_i,k})| = |\rho(X_1, \ldots, X_k)| = 1.$$

D'autre part,

$$|\rho_i(x_i)| = a_i |\rho_i'(x_i)| \tag{4.2}$$

avec $a_i = |\rho_i(Y_{x_i,1}, \ldots, Y_{x_i,k})|$. Mais l'application définie sur O_δ par $|v_{g_y}(Y_{y,1}, \ldots, Y_{y,k})|$ (le volume déterminé par les k-vecteurs $Y_{y,1}, \ldots, Y_{y,k}$ relatif au produit scalaire g_y) est continue en y et comme, pour tout i,

$$|\rho_i(Y_{x_i,1}, \ldots, Y_{x_i,k})| = |v_{g_{x_i}}(Y_{x_i,1}, \ldots, Y_{x_i,k})| = a_i$$

on en déduit que

$$\lim_{i \to +\infty} a_i = |v_{g_x}(X_1, \ldots, X_k)| = 1.$$

Par invariance par isométries on déduit de (4.2) que, sur O_i, $|\rho_i| = a_i |\rho_i'|$. Alors

$$\int_{O_i} \mathrm{dv}_{g_i} = a_i \int_{O_i} \mathrm{dv}_{g_i'}$$

et finalement, en utilisant (4.1),

$$\int_{O_i} \mathrm{dv}_{g_i} = a_i k_i \int_{O_i} \mathrm{dv}_{g_{/O}}.$$

Comme $\lim_{i \to +\infty} a_i = 1$ et $k_i \geq 1$, le Théorème 5 est démontré. $\square$

Le corrolaire suivant se déudit immédiatement du Théorème 5.

Corollaire 2. *Soit (M, g), G, O et k comme dans le Théorème 5. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que quel que soit $y \in O_\delta$ avec $\dim O_y = k$ alors*

$$\mathrm{vol}\, O_y \geq \mathrm{vol}\, O - \varepsilon.$$

Corollaire 3. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, G un sous groupe compact du groupe des isométries de M. Il existe toujours une orbite de dimension minimum k et de volume minimum dans l'ensemble des orbites de dimension k.*

Démonstration. Soit O_k l'ensemble des orbites de dimension minimum k. Notons $A = \inf_{O \in O_k} \operatorname{vol} O$, et soit (x_i) une suite d'éléments de M telle que, quel que soit i, $O_{x_i} \in O_k$ et $\lim_{i \to +\infty} \operatorname{vol} O_{x_i} = A$. Comme M est compacte en peut extraire une sous suite (x_j) qui converge vers $x \in M$. Alors, d'après le Lemme 7, $\dim O_x = k$, et d'après le Théorème 5, $\operatorname{vol} O_x \leq \lim_{i \to +\infty} \operatorname{vol} O_{x_i} = A$. Finalement $\operatorname{vol} O_x = A$. $\square$

Théorème 6. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, G un sous groupe compact du groupe des isométries de M. Soit O une G-orbite de dimension maximale. Si il existe (O_i) une suite d'orbites principales qui converge vers O, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $\lim \operatorname{vol} O_i = \operatorname{vol} O$.
2. *O est une G-orbite principale.*

Démonstration. Si O est principale, on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que dans le voisinage O_δ de O toutes les orbites sont principales, et que $(\Pi, O_\delta, O_\delta/G)$ est une fibration. La fonction $\operatorname{vol} O_x$ est alors $\mathcal{C}^\infty$ en x sur O_δ et il s'ensuit évidemment que $\lim_{i \to +\infty} \operatorname{vol} O_i = \operatorname{vol} O$.

On suppose maintenant que $\lim_{i \to +\infty} \operatorname{vol} O_i = \operatorname{vol} O$. Si l'on reprend la démonstration du Théorème 5, on sait que dans un voisinage tubulaire O_δ de O, les orbites O_i sont des revêtements à k_i feuillets de O, et que $\operatorname{vol} O_i = a_i k_i \operatorname{vol} O$, $\lim_{i \to +\infty} a_i = 1$. On en déduit que pour i assez grand, $k_i = 1$. Les orbites O_i sont alors difféomorphes à O. Soit S_x le fixateur d'un point x d'une orbite O_i difféomorphes à O et $S_{\Pi(x)}$ le fixateur du point $\Pi(x) \in O$. On sait que $S_x \subset S_{\Pi(x)}$, et que ces deux groupes sont compacts et de mêmes dimension, comme $O_i \sim G/S_x$ est difféomorphe à $O \sim G/S_{\Pi(x)}$, on en déduit que $S_x = S_{\Pi(x)}$. L'orbite O_i étant principale, O est principale. $\square$

4.3 Exemple

Considérons la sphère S_2 et G le groupe engendré par les rotations autour d'un axe et la symétrie par rapport au plan orthogonal à cet axe. Les orbites sont alors les doubles cercles, à l'exception de "l'équateur" (cercle simple) noté O et des deux pôles. Les doubles cercles ainsi que l'équateur sont de dimension maximale, mais seuls les doubles cercles sont des orbites principales. On remarque que lorsque une suite d'orbites principales (O_i) converge vers l'équateur O, $\lim \operatorname{vol} O_i = 2 \operatorname{vol} O$, et, d'après le Théorème 6, O n'est pas une orbite principale.

Chapitre 5

Des conditions suffisantes pour une inégalité sans ε

Il a été établi dans le Théorème 1 que quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe B_ε tel que quelle que soit $u \in H^p_{1,G}(M)$,

$$||u||^p_{p^*} \leq \left(\frac{K(n-k,p)^p}{A^{\frac{p}{n-k}}} + \varepsilon \right) ||\nabla u||^p_p + B_\varepsilon ||u||^p_p.$$

La constante B_ε construite dans la démonstration de ce théorème tend vers $+\infty$ lorsque ε tend vers 0. Il est donc légitime de se poser la question de savoir dans quels cas on a l'existence d'une constante B telle que quelle que soit $u \in H^p_{1,G}$,

$$||u||^\theta_{p^*} \leq \frac{K^\theta(n-k,p)}{A^{\theta/(n-k)}} ||\nabla u||^\theta_p + B||u||^\theta_p.$$

On sait depuis les travaux de Hebey et Vaugon [20], Druet [14], Aubin [] que ce dernier résultat est toujours vrai avec $\theta = p$ si $p \leq 2$ et $\theta = 2$ si $p \geq 2$ lorsque l'on ne considère pas de symétries, autrement dit lorsque le groupe G est réduit à l'identité (il a de plus été établi par Druet [16] que dans le cas $p > 2$, une telle inégalité est impossible dès que $\theta > 2$). En revanche, lorsque le groupe G n'est pas trivial, et en particulier lorsque toutes les G-orbites sont de dimension plus grande ou égale à 1, la réponse à cette question s'avère plus délicate. La difficulté est essentiellement due au fait que le contrôle du phénomène de concentration d'une suite de fonctions au voisinage d'une orbite de dimension plus grande ou égale à 1 demande bien plus de travail et engendre des phénomènes nouveaux relativement au cas où l'orbite est réduite à un nombre fini de points.

Le résultat obtenu est énoncé dans le théorème qui suit. La réponse à la question sera positive sous certaines conditions (l'hypothèse (H_1) ou l'hypothèse (H_2)), mais il est à noter que jusqu'à présent le théorème s'applique à tous les exemples que nous construisons. Une question ouverte est donc : a-t-on dans tous les cas l'une ou l'autre des deux hypothèses ? Cette question est d'ordre "géométrique", les hypothèses portant principalement sur la géométrie des orbites de dimension minimale et de volume minimal. Une autre question serait, existe-t-il un exemple tel qu'il soit impossible de se débarasser du ε ? Dans ce cas, on pourrait dire qu'il existe des groupes d'isométries qui ne vérifient aucune des deux hypothèses. Enfin, on peut aussi se poser la question : peut on systématiquement obtenir l'inégalité sans ε, même lorsqu'aucune des deux hypothèses n'est vérifiée ?

5.1 Enoncé du théorème et exemples

5.1.1 Enoncé du théorème

Théorème 7. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, G un sous groupe compact du groupe des isométries de M, k la dimension minimum des G-orbites, A le volume minimum des orbites de dimension k. Si l'une des deux hypothèses (H_1) ou (H_2) suivantes est vérifiée, alors il existe $B > 0$ tel que quelle que soit $u \in H^p_{1,G}(M)$,*

$$||u||^\theta_{p^*} \leq \frac{K^\theta(n-k,p)}{A^{\theta/(n-k)}}||\nabla u||^\theta_p + B||u||^\theta_p \tag{5.1}$$

avec $p \in]1, n-k[$, $\theta = p$ si $p \leq 2$, $\theta = 2$ si $p \geq 2$, $p^* = \frac{p(n-k)}{n-k-p}$ et

$$K(m,p) = \frac{p-1}{m-p}\left[\frac{m-p}{m(p-1)}\right]^{1/p}\left[\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m/p)\Gamma(m+1-m/p)w_{m-1}}\right]^{1/m}$$

pour $1 < p < m$, w_m désignant le volume de S_m standard.
(H_1) Quelle que soit O_{x_0} une orbite de dimension minimale k et de volume minimal A, il existe G' un sous groupe du groupe des isométries de M et $\delta > 0$ tels que

1. *sur $O_{x_0,\delta} = \{x \in M | \mathrm{d}(x, O_{x_0}) < \delta\}$ les G'-orbites sont toutes principales,*
2. *quel que soit $x \in O_{x_0,\delta}$, $O_{x,G'}$ est inclus dans $O_{x,G}$ et $O_{x_0,G} = O_{x_0,G'}$,*
3. *quel que soit $x \in O_{x_0,\delta}$, $A = \mathrm{vol}\, O_{x_0} \leq \mathrm{vol}\, O_{x,G'}$.*

(H_2) Quelle que soit O_{x_0} une orbite de dimension minimale k et de volume minimal A, il existe H un sous groupe normal de G et $\delta > 0$ tels que

1. *sur $O_{x_0,\delta}$, les H-orbites sont toutes principales,*
2. *$O_{x_0,H} = O_{x_0,G}$,*
3. *quel que soit $x \in O_{x_0,\delta}$, $x \notin O_{x_0}$, $\dim O_{x,G} > k = \dim O_{x_0,G}$,*
4. *quel que soit $x \in O_{x_0}$, x est un point critique de la fonction v définie par $v = \mathrm{vol}\, O_{x,H}$.*

Remarques. *1. Comme les orbites sous G' (resp. H) sont principales dans $O_{x_0,\delta}$, on sait que la fonction définie par $v(x) = \mathrm{vol}\, O_{x,G'}$ (resp. $\mathrm{vol}\, O_{x,H}$) est C^∞ sur $O_{x_0,\delta}$.*

2. *La condition 3. de l'hypothèse (H_1) dit que tout x de O_{x_0} est un point minimum de la fonction $v(x) = \mathrm{vol}\, O_{x,G'}$, alors que la condition 4. de l'hypothèse (H_2) impose seulement que tout x de O_{x_0} soit un point critique de v, mais on demande alors d'autres conditions plus restrictives dans l'hypothèse (H_2) : la condition 3. et le fait que H est un sous groupe normal de G.*
3. *Les conditions (H_1) et (H_2) peuvent éventuellement être vérifiées simultanément.*

4. *Sous l'hypothèse* (H_1) *(resp.* (H_2)*), il peut exister dans* M *des orbites sous* G' *(resp. sous* H*) qui sont de dimension strictement plus petite que* k.
5. *Si* G *est tel que toutes les* G*-orbites sont principales sur* M *(en particulier si* G *est réduit à l'identité), alors l'hypothèse* (H_1) *est vérifiée (mais pas l'hypothèse* (H_2)*).*

5.1.2 Exemples

Les deux exemples qui suivent ont pour but de clarifier les hypothèses du théorème. Le premier exemple est un cas non trivial d'utilisation de l'hypothèse (H_1). Le deuxième exemple est une généralisation du cas étudié par Aubin et Cotsiolis [5] et utilise l'hypothèse (H_2).

Un exemple d'application sous l'hypothèse (H_1)

On considère $\mathrm{T}_2(a, b)$ le tore défini par

$$\mathrm{T}_2(a, b) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x^2 + y^2 + z^2 + b^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0\},$$

où $0 < b < a$, muni de la métrique induite par celle de $\mathbb{R}^3$. On note R_z le groupe des rotations d'axe z. Les R_z-orbites de $\mathrm{T}_2(a, b)$ sont des cercles, on note $C(x, y, z)$ l'orbite du point de $\mathrm{T}_2(a, b)$ de coordonnées (x, y, z). Toutes les R_z-orbites sont alors de dimension 1, et l'orbite de volume minimal est le cercle C de rayon $a - \sqrt{a^2 - b^2}$, son volume est $2\pi(a - \sqrt{a^2 - b})$. On considère ensuite la sphère standard S_2 de rayon 1 définie par

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Soit $M = S_2 \times \mathrm{T}_2$ muni de la métrique produit, et $G = R_z \times R_z$. On a la proposition suivante.

Proposition 3. *On considère la variété* M *et le groupe* G *définis précédemment. Alors, il existe* $B > 0$ *tel que quelle que soit* $u \in H^p_{1,G}$,

$$||u||^\theta_{p^*} \leq \frac{K^\theta(3, p)}{(2\pi(a - \sqrt{a^2 - b^2}))^{\theta/3}} ||\nabla u||^\theta_p + B||u||^\theta_p,$$

avec $p \in]1, 3[$, $\theta = p$ *si* $p \leq 2$, $\theta = 2$ *si* $p \in]2, 3[$. *De plus* $\frac{K^\theta(3,p)}{(2\pi(a-\sqrt{a^2-b^2}))^{\theta/3}}$ *est la meilleure constante possible dans cette inégalité.*

Démonstration. On note $N = (0, 0, 1)$ et $S = (0, 0, -1)$ les deux points de la sphère S_2 invariants par R_z. Les orbites de M de dimension minimale sont alors $\{N\} \times C(x, y, z)$ et $\{S\} \times C(x, y, z)$ de dimension 1, et les deux orbites de volume minimal dans la classe des orbites de dimension minimale sont $O_{X_N,G} = \{N\} \times C$ et $O_{X_S,G} = \{S\} \times C$ (où $X_N = N \times X_C$, $X_S = S \times X_C$, X_C étant un point quelconque de C) de volume $2\pi(a - \sqrt{a^2 - b^2})$. Remarquons que pour $X = (X_1, X_2) \in M$ où $X_1 \neq \{N\}$ et $X_1 \neq \{S\}$, $O_{X,G}$ est le produit de deux cercles et est alors de dimension 2. Ces orbites sont de dimension maximales, elles sont de plus principales (une démonstration simple peut être obtenue en utilisant le Théorème 6).

On considère alors $G' = I \times R_z$ le sous groupe de G où I est le sous groupe de R_z réduit à l'identité. Quel que soit $\{P, (x, y, z)\}$ un point quelconque de M,

$\{P\} \in S_2$, $(x,y,z) \in \mathrm{T}_2$, alors sa G'-orbite est de la forme $\{P\} \times C(x,y,z)$. Sa dimension est 1 et elle est principale, son volume est $2\pi \mathrm{vol}\, C(x,y,z)$. D'autre part, comme G' est un sous groupe de G, $O_{X,G'} \subset O_{X,G}$, de plus $O_{X_N,G} = O_{X_N,G'}$ et $O_{X_S,G} = O_{X_S,G'}$. Comme C est de volume minimal dans l'ensemble des $C(x,y,z)$, on en déduit que quel que soit $X \in M$, $\mathrm{vol}\, O_{X_N} \leq \mathrm{vol}\, O_{X,G'}$ et $\mathrm{vol}\, O_{X_S} \leq \mathrm{vol}\, O_{X,G'}$. Les conditions 1. à 3. de l'hypothèse (H_1) sont vérifiées, et on peut appliquer le Théorème 7. □

Un exemple d'application sous l'hypothèse (H_2)

On considère la sphère unité standard S_n dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et le groupe d'isométries $G = O(s_1) \times \ldots \times O(s_m)$, avec $s_i \geq 2$ quel que soit i, et $\Sigma_{i=1}^m s_i = n+1$. Précisons la manière dont G opère sur S_n. On décompose $\mathbb{R}^{n+1}$ en somme directe

$$\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{s_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}^{s_m}.$$

Soit $X \in S_n$, $X = (X_1, \ldots, X_m)$, avec $X_i \in \mathbb{R}^{s_i}$ quel que soit i, et $\Sigma_{i=1}^m ||X_i||^2 = 1$. Soit $\sigma \in G$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$, avec $\sigma_i \in O(s_i)$ quel que soit i. On pose alors

$$\sigma(X) = (\sigma_1(X_1), \ldots, \sigma_m(X_m)).$$

On a la proposition suivante.

Proposition 4. *On considère la sphère unité standard S_n et le groupe G défini précédemment. Alors, il existe $B > 0$ tel que quelle que soit $u \in H_{1,G}^p$,*

$$||u||_{p^*}^\theta \leq \frac{K^\theta(n-k,p)}{w_k^{\theta/p}} ||\nabla u||_p^\theta + B||u||_p^\theta,$$

avec $k = \min_i(s_i - 1)$, $p \in]1, n-k[$, $\theta = p$ si $p \leq 2$, $\theta = 2$ si $p \in]2, n-k[$, w_k étant le volume de la sphère unité standard de dimension k. De plus $\frac{K^\theta(n-k,p)}{w_k^{\theta/p}}$ est la meilleure constante possible dans cette inégalité.

Démonstration. Soit $X = (X_1, \ldots, X_m)$ un point de S_n, sa G-orbite $O_{X,G}$ est le produit de sphères $S_{s_1}(r_1) \times \ldots \times S_{s_m}(r_m)$, où le rayon r_i vaut $r_i = ||X_i||$ (si $||X_i|| = 0$, alors $S_{s_i}(r_i)$ est réduite à un point). Si quel que soit i, $||X_i|| \neq 0$, la dimension de $O_{X,G}$ est maximale dans l'ensemble des G-orbites et égale à $\Sigma_{i=1}^m (s_i - 1) = n - m + 1$. Le volume de $O_{X,G}$ est égal au produit des volumes des sphères, autrement dit

$$\mathrm{vol}\, O_{X,G} = \Pi_{i=1}^m \mathrm{vol}\, S_{s_i}(r_i) = \Pi_{i=1}^m ||X_i||^{s_i - 1} w_{s_i - 1},$$

où w_p désigne le volume de la sphère S_p de rayon 1. Soit Ω l'ouvert de S_n formé des X tels que quel que soit i, $||X_i|| \neq 0$, on pourra remarquer que comme $\mathrm{vol}\, O_{X,G}$ est une fonction continue en X sur Ω et d'après le Théorème 6, toutes ces orbites sont principales pour G (cette remarque n'étant pas utile à la preuve de la proposition).

Si p composantes $X_{i_1}, \ldots, X_{i_p}$ sont telles que $||X_{i_1}|| = \ldots = ||X_{i_p}|| = 0$, alors $O_{X,G}$ est de dimension strictement inférieure à $n + m - 1$ et n'est pas principale.

Posons $k = \min_i(s_i - 1)$ et soit j, $1 \leq j \leq m$ tel que $s_j - 1 = k$. Soit $X = (X_1, \ldots, X_m)$ tel que $||X_i|| = 0$ si $i \neq j$ et $||X_j|| = 1$, alors $\dim O_{X,G} = k$

est minimale dans l'ensemble des G-orbites, et de plus $\mathrm{vol}\, O_{X,G} = w_k$. Toutes les orbites de dimension minimale sont de ce type, elles sont toutes de même volume.

Soit $O_{Y,G}$ une orbite de dimension minimale k et de volume minimal w_k, Y est donc de la forme $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$ et il existe j tel que $||Y_i|| = 0$ si $i \neq j$ et $||Y_j|| = 1$.

Considérons le sous groupe H de G, $H = I \times \ldots \times O(s_j) \times \ldots \times I$, où I désigne le sous groupe de $O(s_i)$ réduit à l'identité, H est alors un sous groupe normal de G. On remarque pour commencer que $O_{Y,G} = O_{Y,H}$, le point 2. de l'hypothèse (H_2) est vérifié.

Considérons le voisinage ω de $O_{Y,G}$ dans S_n formé des $X = (X_1, \ldots, X_m)$ tels que $||X_j|| \neq 0$. Pour $X \in \omega$, $O_{X,H}$ est de la forme

$$O_{X,H} = \{X_1\} \times \ldots \times S_{s_j - 1}(||X_j||) \times \ldots \times \{X_m\}.$$

Alors $\dim O_{X,H} = s_j - 1 = k$, et $\mathrm{vol}\, O_{X,H} = ||X_j||^k w_k$. D'après la continuité du volume des orbites quand $O_{X,H}$ tend vers $O_{Y,H}$, les H-orbites sont alors toutes principales dans ω, et le point 1. de (H_2) est vérifié. (On peut remarquer que si X n'appartient pas à ω, alors $O_{X,H}$ est réduite à un point.)

De plus, quel que soit $X \in \omega$,

$$\mathrm{vol}\, O_{Y,H} = w_k \geq ||X_j||^k w_k = \mathrm{vol}\, O_{X,H}.$$

La fonction v définie sur Ω est donc maximum sur $O_{Y,H}$. Les conditions 1. à 4. de l'hypothèse (H_2) sont toutes vérifiées. $\square$

Remarque. *On montrera à la fin de ce chapitre que dans le cas particulier où S_n est de dimension impaire, il existe une démonstration plus simple de la Proposition 4 utilisant cette fois ci l'hypothèse (H_1).*

5.1.3 Principe de la démonstration du Théorème 7

La démonstration du Théorème 7 se fait par l'absurde. Supposer que l'inégalité (5.1) est fausse permet de construire quel que soit $\alpha > 0$ une solution faible positive u_α de l'équation

$$||\nabla u_\alpha||_p^{\theta - p} \Delta_p u_\alpha + \alpha ||u_\alpha||_p^{\theta - p} u_\alpha^{p-1} = \lambda_\alpha u_\alpha^{p^* - 1}.$$

Lorsque α tend vers $+\infty$, on montrera en particulier que les fonctions u_α se concentrent nécessairement sur une orbite de volume minimal dans l'ensemble des orbites de dimension minimale. L'étude de ce phénomène de concentration sera le point central de la démonstration du théorème, et au delà de son caractère de preuve, elle présente un intérêt en tant que tel. Cette étude reste inchangée quelle que soit l'hypothèse de départ. En revanche, l'argument final de la démonstration permettant d'aboutir à une contradiction fait appel, suivant que l'on se place sous l'hypothèse (H_1) ou (H_2), à des travaux préliminaires très différents.

5.2 Etude du phénomène de concentration

On rappelle que cette étude est commune aux démonstrations, quelle que soit l'hypothèse de départ. Les résultats qui sont démontrés dans cette partie seront utilisés aussi bien pour la démonstration sous l'hypothèse (H_1) que sous l'hypothèse (H_2).

Dans toute la suite, $\theta = p$ si $p \leq 2$ et $\theta = 2$ si $p \geq 2$. On suppose l'inégalité (5.1) fausse. Quel que soit $\alpha > 0$, il existe donc $u \in H^p_{1,G}$ tel que

$$||u||^\theta_{p^*} > \frac{K^\theta(n-k,p)}{A^{\theta/(n-k)}}||\nabla u||^\theta_p + \alpha\frac{K^\theta(n-k,p)}{A^{\theta/(n-k)}}||u||^\theta_p.$$

Alors

$$\inf_{u \in H^p_{1,G}, u \neq 0} \frac{||\nabla u||^\theta_p + \alpha||u||^\theta_p}{||u||^\theta_{p^*}} = \lambda_\alpha < \frac{A^{\theta/(n-k)}}{K^\theta(n-k,p)} \qquad (*).$$

Cette inégalité stricte permet par les méthodes variationnelles standard (voir les démonstrations du Chapitre "Quelques applications à des problèmes d'analyse non linéaire"), de montrer que pour chaque $\alpha > 0$,

$$\inf_{u \in H^p_{1,G}, u \not\equiv 0} \frac{||\nabla u||^\theta_p + \alpha||u||^\theta_p}{||u||^\theta_{p^*}}$$

est atteint par $u_\alpha \geq 0$, que l'on peut choisir (par homogénéité de la fonctionnelle) tel que

$$\int_M u_\alpha^{p^*} \mathrm{dV} = 1. \tag{5.2}$$

Comme

$$\frac{||\nabla u_\alpha||^\theta_p + \alpha||u_\alpha||^\theta_p}{||u_\alpha||^\theta_{p^*}} = \lambda_\alpha$$

est majoré lorsque α tend vers $+\infty$, à partir d'un certain rang u_α ne peut être une fonction constante (sinon $\alpha\frac{||u_\alpha||^\theta_p}{||u_\alpha||^\theta_{p^*}}$ tend vers $+\infty$). En particulier, pour α assez grand, $||\nabla u_\alpha||_p \neq 0$. L'équation d'Euler associée à la fonctionnelle nous dit alors que u_α vérifie faiblement l'équation

$$||\nabla u_\alpha||^{\theta-p}_p \Delta_p u_\alpha + \alpha||u_\alpha||^{\theta-p}_p u_\alpha^{p-1} = \lambda_\alpha u_\alpha^{p^*-1},$$

(où $\Delta_p u_\alpha$ est le p-laplacien de u_α, et on rappelle que $\theta = p$ si $p \leq 2$ et $\theta = 2$ si $p \geq 2$), ce qui précisément signifie, quelle que soit $\Phi \in \mathcal{C}^\infty_0$,

$$||\nabla u_\alpha||^{\theta-p}_p \int_M |\nabla u_\alpha|^{p-2}\nabla u_\alpha \nabla\Phi \mathrm{dV} + \alpha||u_\alpha||^{\theta-p}_p \int_M u_\alpha^{p-1}\Phi \mathrm{dV} = \lambda_\alpha \int_M u_\alpha^{p^*-1}\Phi \mathrm{dV} \qquad (E_\alpha).$$

Dans le cas où $p = 2$, (E_α) est une équation elliptique. Les résultats standards de régularité disent que $u_\alpha \in \mathcal{C}^\infty_G$, et le principe du maximum assure que $u_\alpha > 0$. Si $p \neq 2$, $p \in]1, n-k[$, u_α ne peut être considérée que dans $\mathcal{C}^{1,\beta}_G$ $(0 < \beta < 1)$ et reste donc une solution faible de (E_α), mais là encore $u_\alpha > 0$. Pour ces derniers résultats, on pourra se référer à [27] et [30].

Remarquons que d'après les constructions précédentes et $(\star)$, pour α assez grand

$$0 < ||\nabla u_\alpha||^\theta_p < \lambda_\alpha < \frac{A^{\theta/(n-k)}}{K^\theta(n-k,p)}. \tag{5.3}$$

On suppose désormais que l'on a extrait une sous suite de la famille (u_α), notée encore (u_α), de sorte que les suites (λ_α), $(||u_\alpha||_{p^*})$, $(||\nabla u_\alpha||_p)$, qui sont bornées, soient convergentes lorsque α tend vers $+\infty$. On commence par établir une série de résultats (numérotés de (5.4) à (5.8)) sur la limite de ces suites lorsque α tend vers $+\infty$. Tout d'abord,

$$\lim_{\alpha\to+\infty} ||u_\alpha||_p = 0,$$
$$\lim_{\alpha\to+\infty} ||\nabla u_\alpha||_p \neq 0. \tag{5.4}$$

La première inégalité vient du fait que $\alpha||u_\alpha||_p^\theta$ est bornée et que α tend vers $+\infty$. Pour la deuxième inégalité, on utilise l'inégalité de Sobolev pour les fonctions G-invariantes établie dans le Théorème 1 : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe B_ε tel que

$$1 = ||u_\alpha||_{p^*}^\theta \leq \left(\frac{K^\theta(n-k,p)}{A^{\theta/(n-k)}} + \varepsilon\right) ||\nabla u_\alpha||_p^\theta + B_\varepsilon ||u_\alpha||_p^\theta. \tag{$**$}$$

Si l'on suppose que $||\nabla u_\alpha||_p$ tend vers 0, comme $||u_\alpha||_p$ tend vers 0 quand α tend vers $+\infty$, on a $||u_\alpha||_{p^*}^\theta$ qui tend vers 0, ce qui est absurde car $||u_\alpha||_{p^*} = 1$. On montre également :

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \lambda_\alpha = \frac{A^{\theta/(n-k)}}{K^\theta(n-k,p)}. \tag{5.5}$$

En effet, on sait d'après (E_α) en prenant $\Phi = u_\alpha$ et d'après $(\star\star)$, que quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe un $B_\varepsilon > 0$, tel que quelle que soit $u \in \mathcal{C}_G^\infty$,

$$||\nabla u_\alpha||_p^\theta + \alpha||u_\alpha||_p^\theta \leq \lambda_\alpha \left(\frac{K^\theta(n-k,p)}{A^{\theta/(n-k)}} + \varepsilon\right) ||\nabla u_\alpha||_p^\theta + \lambda_\alpha B_\varepsilon ||u_\alpha||_p^\theta. \tag{$***$}$$

Si

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \lambda_\alpha = \lambda < \frac{A^{\theta/(n-k)}}{K^\theta(n-k,p)},$$

il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda\left(\frac{K^\theta(n-k,p)}{A^{\theta/(n-k)}} + \varepsilon\right) < 1$. Il existe alors $c > 0$ tel que $c||\nabla u_\alpha||_p^\theta \leq \lambda_\alpha B_\varepsilon ||u_\alpha||_p^\theta$, ce qui est absurde d'après (5.4).

On a de plus

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \alpha||u_\alpha||_p^\theta = 0. \tag{5.6}$$

Pour cela on utilise $(\star\star\star)$ en remarquant que $\lambda_\alpha < \frac{A^{\theta/(n-k)}}{K^\theta(n-k,p)}$. On en déduit que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe B_ε tel que

$$\alpha||u_\alpha||_p^\theta \leq \lambda_\alpha \varepsilon ||\nabla u_\alpha||_p^\theta + \lambda_\alpha B_\varepsilon ||u_\alpha||_p^\theta$$

d'où, d'après (5.3) et (5.4)

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \alpha||u_\alpha||_p^\theta \leq \varepsilon \left(\frac{A^{\theta/(n-k)}}{K^\theta(n-k,p)}\right)^2.$$

Ce résultat est vrai quel que soit ε, ce qui prouve (5.6). On déduit alors de $(\star)$, (5.5) et (5.6)

$$\lim_{\alpha\to+\infty} ||\nabla u_\alpha||_p^\theta = \frac{A^{\theta/(n-k)}}{K^\theta(n-k,p)}. \tag{5.7}$$

On prouve ensuite, quel que soit $1 \leq q < p^*$,

$$\lim_{\alpha \to +\infty} ||u_\alpha||_q = 0. \tag{5.8}$$

Lorsque $1 \leq q < p^*$, q n'est pas l'exposant critique de l'inégalité de Sobolev, et l'inclusion $H^q_{1,G} \subset L^p_G$ est compacte. On peut donc écrire : quel que soit ε, il existe C_ε tel que

$$||u_\alpha||^p_q \leq \varepsilon ||\nabla u_\alpha||^p_p + C_\varepsilon ||u_\alpha||^p_p$$

d'où, puisque $||u_\alpha||_p$ tend vers 0 quand α tend vers $+\infty$,

$$\lim_{\alpha \to +\infty} ||u_\alpha||^p_q < \varepsilon \frac{A^{p/(n-k)}}{K^p(n-k,p)}.$$

Ce résultat est vrai quel que soit ε, ce qui prouve (5.8).

On précise maintenant le comportement de la suite (u_α) lorsque α tend vers l'infini. Comme cette suite tend vers 0 presque partout sur M, que $||u_\alpha||_{p^*} = 1$ et que les fonctions u_α sont invariantes par G, il est naturel de définir ce qu'est une orbite de concentration pour la suite (u_α) de la manière suivante.

Définition (Orbite de concentration). *Soit O_x une G-orbite de M, O_x est une orbite de concentration pour la suite (u_α) si quel que soit $\delta > 0$,*

$$\limsup_{\alpha \to +\infty} \int_{O_{x,\delta}} u_\alpha^{p^*} \mathrm{dV} > 0$$

où l'on rappelle que $O_{x,\delta} = \{y \in M | \mathrm{d}(y, O_x) < \delta\}$.

La suite de l'étude du phénomène de concentration de (u_α) va consister à démontrer la proposition suivante, démonstration qui nécessite l'utilisation des résultats du Chapitre "Etude de la géométrie des orbites".

Proposition 5. *Il existe une sous suite de la suite (u_α), toujours notée (u_α) qui admet une et une seule orbite de concentration, et celle ci est nécessairement de dimension minimale k et de volume minimal A.*

Démonstration. Nous commençons par prouver qu'il existe au moins une orbite de concentration pour (u_α). Nier cette affirmation revient à dire que quel que soit $O_x \in M$, il existe $\delta_x > 0$ tel que

$$\limsup_{\alpha \to +\infty} \int_{O_{x,\delta_x}} u_\alpha^{p^*} \mathrm{dV} = 0.$$

Les (O_{x,δ_x}) forment alors un recouvrement de M. On considère $(O_{x_i,\delta_{x_i}})_{i=1,\dots,N}$ un recouvrement fini de M. On a alors

$$1 = \int_M u_\alpha^{p^*} \mathrm{dV} \leq \sum_{i=1}^N \int_{O_{x_i,\delta_{x_i}}} u_\alpha^{p^*} \mathrm{dV}$$

ce qui est absurde.

Ensuite, nous prouvons, quitte à extraire une sous suite de (u_α), l'unicité de l'orbite de concentration. Supposons que O_{x_0} et O_{x_1} soient deux orbites de concentrations disjointes et soit $\delta > 0$ tel que $O_{x_0,\delta} \cap O_{x_1,\delta} = \emptyset$. On considère une sous suite de u_α toujours notée u_α telle que les suites $\int_{O_{x_0,\delta}} u_\alpha^{p^*}\mathrm{dV}$ et $\int_{O_{x_1,\delta}} u_\alpha^{p^*}\mathrm{dV}$ soient convergentes, et on suppose par exemple que

$$\int_{O_{x_0,\delta}} u_\alpha^{p^*}\mathrm{dV} \leq \frac{1}{2}. \tag{5.9}$$

Soit η une fonction positive de $\mathcal{C}_G^\infty$ égale à 1 sur $O_{x_0,\delta/2}$ et nulle en dehors de $O_{x_0,\delta}$. En reprenant (E_α) avec $\Phi = \eta^p u_\alpha$, on trouve :

$$\begin{aligned} &||\nabla u_\alpha||_p^{\theta-p}\int_M |\nabla u_\alpha|^{p-2}\nabla u_\alpha \nabla(\eta^p u_\alpha)\mathrm{dV} \\ &\quad +\alpha||u_\alpha||_p^{\theta-p}\int_M \eta^p u_\alpha^p \mathrm{dV} = \lambda_\alpha \int_M \eta^p u_\alpha^{p^*}\mathrm{dV}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

En développant $\nabla(\eta^p u_\alpha)$, on obtient

$$\int_M |\nabla u_\alpha|^{p-2}\nabla u_\alpha \nabla(\eta^p u_\alpha)\mathrm{dV} \geq \int_M \eta^p|\nabla u_\alpha|^p\mathrm{dV} - \int_M u_\alpha|\nabla u_\alpha|^{p-1}|\nabla(\eta^p)|\mathrm{dV}.$$

D'autre part, il existe $C>0$ tel que

$$\begin{aligned} &\int_M |\nabla(\eta u_\alpha)|^p\mathrm{dV} \leq \\ &\quad \int_M \eta^p|\nabla u_\alpha|^p\mathrm{dV} + C\int_M |\nabla u_\alpha|^{p-1}|\nabla(\eta^p)|u_\alpha\mathrm{dV} + C\int_M u_\alpha^p|\nabla\eta|^p\mathrm{dV}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\int_M \eta^p|\nabla u_\alpha|^p\mathrm{dV} - \int_M u_\alpha|\nabla u_\alpha|^{p-1}|\nabla(\eta^p)|\mathrm{dV} \geq \\ &\int_M |\nabla(\eta u_\alpha)|^p\mathrm{dV} - C\int_M u_\alpha^p|\nabla\eta|^p\mathrm{dV} - C\int_M |\nabla u_\alpha|^{p-1}u_\alpha|\nabla(\eta^p)|\mathrm{dV}. \end{aligned}$$

On réinjecte ce dernier résultat dans (5.10) et on trouve :

$$\begin{aligned} &||\nabla u_\alpha||_p^{\theta-p}\left[\int_M |\nabla(\eta u_\alpha)|^p\mathrm{dV} - C\int_M u_\alpha^p|\nabla\eta|^p\mathrm{dV} - C\int_M |\nabla u_\alpha|^{p-1}u_\alpha|\nabla(\eta^p)|\mathrm{dV}\right] \\ + \quad &\alpha||u_\alpha||_p^{\theta-p}\int_M \eta^p u_\alpha^p\mathrm{dV} \leq \lambda_\alpha\int_M \eta^p u_\alpha^{p^*}\mathrm{dV}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Or d'après $(*)$,

$$||\nabla u_\alpha||_p^\theta \leq \lambda_\alpha,$$

d'où

$$||\nabla u_\alpha||_p^{\theta-p} \geq \lambda_\alpha^{(\theta-p)/\theta}.$$

En reprenant (5.11), puis d'après Hölder,

$$\begin{aligned} &\left[\int_M |\nabla(\eta u_\alpha)|^p\mathrm{dV} - C\int_M u_\alpha^p|\nabla\eta|^p\mathrm{dV} - C\int_M |\nabla u_\alpha|^{p-1}u_\alpha|\nabla(\eta^p)|\mathrm{dV}\right] \\ &\quad +\lambda_\alpha^{\frac{p-\theta}{\theta}}\alpha||u_\alpha||_p^{\theta-p}\int_M \eta^p u_\alpha^p\mathrm{dV} \\ &\quad \leq \lambda_\alpha^{\frac{p}{\theta}}\int_M \eta^p u_\alpha^{p^*}\mathrm{dV} \\ &\quad \leq \lambda_\alpha^{\frac{p}{\theta}}\left[\int_M (\eta u_\alpha)^{p^*}\mathrm{dV}\right]^{\frac{p}{p^*}}\left[\int_{O_{x_0,\delta}} u_\alpha^{p^*}\mathrm{dV}\right]^{\frac{p}{n-k}}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

D'après (5.3), (5.9), et grâce au Théorème 1, il s'ensuit : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe B_ε tel que

$$\left[\int_M |\nabla(\eta u_\alpha)|^p \mathrm{dV} - C\int_M u_\alpha^p |\nabla\eta|^p \mathrm{dV} - C\int_M |\nabla u_\alpha|^{p-1} u_\alpha |\nabla(\eta^p)|\mathrm{dV}\right]$$
$$+\lambda_\alpha^{\frac{p-\theta}{\theta}}\alpha ||u_\alpha||_p^{\theta-p}\int_M \eta^p u_\alpha^p \mathrm{dV}$$
$$< \frac{A^{p/(n-k)}}{K^p(n-k,p)}\frac{1}{2^{\frac{p}{n-k}}}\left[\int_M (\eta u_\alpha)^{p^*}\mathrm{dV}\right]^{p/p^*}$$
$$< \frac{A^{p/(n-k)}}{K^p(n-k,p)}\frac{1}{2^{p/(n-k)}}\left[\left(\frac{K^p(n-k,p)}{A^{p/(n-k)}}+\varepsilon\right)||\nabla(\eta u_\alpha)||_p^p + B_\varepsilon ||(\eta u_\alpha)||_p^p\right].$$

D'où, en choisissant le ε qui convient, il existe $c < 1$ tel que

$$\left[\int_M |\nabla(\eta u_\alpha)|^p \mathrm{dV}\right] - C\int_M u_\alpha^p |\nabla\eta|^p \mathrm{dV} - C\int_M |\nabla u_\alpha|^{p-1} u_\alpha |\nabla(\eta^p)|\mathrm{dV}$$
$$+\lambda_\alpha^{\frac{p-\theta}{\theta}}\alpha ||u_\alpha||_p^{\theta-p}\int_M \eta^p u_\alpha^p \mathrm{dV}$$
$$\leq c||\nabla(\eta u_\alpha)||_p^p + C_\varepsilon ||\eta u_\alpha||_p^p. \tag{5.13}$$

Or

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_M u_\alpha^p |\nabla\eta|^p \mathrm{dV} = 0$$

et

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_M |\nabla u_\alpha|^{p-1} u_\alpha |\nabla(\eta^p)|\mathrm{dV} = 0.$$

Pour cette dernière affirmation, on remarque que quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe A_ε tel que

$$\int_M |\nabla u_\alpha|^{p-1} u_\alpha |\nabla(\eta^p)|\mathrm{dV} \leq \varepsilon\int_M |\nabla u_\alpha|^p \mathrm{dV} + A_\varepsilon\int_M u_\alpha^p |\nabla(\eta^p)|^p \mathrm{dV}. \tag{5.14}$$

Or $\int_M u_\alpha^p |\nabla(\eta^p)|^p \mathrm{dV}$ tend vers 0 quand α tend vers $+\infty$, et (5.14) étant vrai quel que soit $\varepsilon >$, on a

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_M |\nabla u_\alpha|^{p-1} u_\alpha |\nabla(\eta^p)|\mathrm{dV} = 0.$$

D'où en reprenant (**??**), pour $c < 1$ on obtient

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\left[\int_M |\nabla(\eta u_\alpha)|^p \mathrm{dV}\right] - c||\nabla(\eta u_\alpha)||_p^p = 0, \tag{5.15}$$

car $||\eta u_\alpha||_p^p$ a pour limite 0 quand α tend vers l'infini. Finalement

$$\lim_{\alpha\to+\infty}||\nabla(\eta u_\alpha)||_p^p = 0 \tag{5.16}$$

et on aboutit à une contradiction. En effet, d'après l'inégalité du Théorème 1, on a :

$$\left[\int_M (\eta u_\alpha)^{p^*}\mathrm{dV}\right]^{p/p^*} \leq \left(\frac{K^p(n-k,p)}{A^{p/(n-k)}}+\varepsilon\right)\int_M |\nabla(\eta u_\alpha)|^p \mathrm{dV} + B_\varepsilon\int_M (\eta u_\alpha)^p \mathrm{dV}$$

et (5.16) entraine alors

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\left[\int_M (\eta u_\alpha)^{p^*}\mathrm{dV}\right]^{p/p^*} = 0.$$

Or

$$\left[\int_{O_{x_0,\delta/2}} u_\alpha^{p^*}\mathrm{dV}\right]^{p/p^*} < \left[\int_M (\eta u_\alpha)^{p^*}\mathrm{dV}\right]^{p/p^*}$$

et O_{x_0} n'est pas une orbite de concentration, ce qui est absurde.

A présent, nous montrons que l'unique orbite de concentration est nécessairement de dimension minimale k. Pour cela, supposons que O_{x_0} soit de dimension $k' > k$. D'après le Lemme 7 démontré dans le Chapitre 4, on peut localiser autour de O_{x_0} de sorte que toutes les orbites dans ce voisinage soient de dimension supérieures ou égales à k'. Autrement dit, il existe un $\delta > 0$ de sorte que quel que soit $x \in O_{x_0,\delta}$, O_x est de dimension supérieure ou égale à $\dim O_{x_0} = k'$. L'exposant critique p_{crit} de l'inégalité du Théorème 1 sur $O_{x_0,\delta}$ devient alors

$$p_{crit} = \frac{(n-k')p}{n-k'-p} > \frac{(n-k)p}{n-k-p} = p^*,$$

et l'inclusion $H_1^q \subset L_{p^*}$ est compacte. On considère une fonction $0 \le \eta \le 1$ à support compact dans $O_{x_0,\delta}$. Les inclusions compactes de Sobolev nous donnent : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe B_ε de sorte que :

$$||\eta u_\alpha||_{p^*}^p \le \varepsilon||\nabla(\eta u_\alpha)||_p^p + B_\varepsilon||\eta u_\alpha||_p^p.$$

Cette inégalité étant établie quel que soit $\varepsilon > 0$ et comme $||u_\alpha||_p^p$ tend vers 0, il est facile de voir que dans ce cas, O_{x_0} n'est pas une orbite de concentration, ce qui est absurde.

Nous montrons ensuite que l'unique orbite de concentration est de volume minimal A. Pour cela, supposons que O_{x_0} soit de volume strictement supérieur à A, autrement dit, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{vol}\, O_{x_0} - \varepsilon > A$. Soit alors $\delta > 0$ tel que sur $O_{x_0,\delta}$ on puisse appliquer le Corrolaire 2 du Théorème 5, en prenant $B = \mathrm{vol}\, O_{x_0} - \varepsilon > A$. On considère ensuite η une fonction positive de $\mathcal{C}_G^\infty$ valant 1 sur $O_{x_0,\delta/2}$ et 0 en dehors de $O_{x_0,\delta}$. On reprend le raisonnement et les calculs faits lors de l'étude de l'unicité de l'orbite de concentration et on trouve, de la même manière qu'on a établi (5.12) :

$$\begin{aligned}
&\left[\int_M |\nabla(\eta u_\alpha)|^p\mathrm{dV} - C\int_M u_\alpha^p|\nabla\eta|^p\mathrm{dV} - C\int_M |\nabla u_\alpha|^{p-1}u_\alpha|\nabla(\eta^p)|\mathrm{dV}\right]\\
&\quad+\lambda_\alpha^{\frac{p-\theta}{\theta}}\alpha||u_\alpha||_p^{\theta-p}\int_M \eta^p u_\alpha^p\mathrm{dV}\\
&\quad< \frac{A^{p/(n-k)}}{K^p(n-k,p)}\left[\int_{O_{x_0,\delta}} u_\alpha^{p^*}\mathrm{dV}\right]^{\frac{p}{n-k}}\left[\int_M(\eta u_\alpha)^{p^*}\mathrm{dV}\right]^{\frac{p}{p^*}}\\
&\quad< \frac{A^{p/(n-k)}}{K^p(n-k,p)}\left[\left(\frac{K^p(n-k,p)}{B^{p/(n-k)}}+\varepsilon\right)||\nabla(\eta u_\alpha)||_p^p + B_\varepsilon||\eta u_\alpha||_p^p\right].
\end{aligned}$$

Or $B > A$ entraîne qu'on peut choisir un $\varepsilon > 0$ de sorte qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\frac{A^{p/(n-k)}}{K^p(n-k,p)}\left(\frac{K^p(n-k,p)}{B^{p/(n-k)}}+\varepsilon\right) = c < 1.$$

On obtient la même contradiction que lors de l'étude de l'unicité de l'orbite de concentration. Finalement, O_{x_0} est de volume minimal A. □

On montre à présent le dernier point de l'étude du phénomène de concentration : quel que soit K un compact de $M \setminus O_{x_0}$,

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \sup_K u_\alpha = 0. \tag{5.17}$$

On prend O_x une orbite qui n'est pas une orbite de concentration, c'est à dire telle qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\limsup_{\alpha \to +\infty} \int_{O_{x,\delta}} u_\alpha^{p^*} \mathrm{dV} = 0.$$

Soit alors η une fonction positive de $\mathcal{C}_G^\infty$ valant 1 sur $O_{x,\delta/2}$ et nulle en dehors de $O_{x,\delta}$. Dans (E_α), on prend $\Phi = \eta^p u_\alpha^l$, avec $l > 1$. On obtient

$$\begin{aligned} &||\nabla u_\alpha||_p^{\theta-p} \int_M |\nabla u_\alpha|^{p-2} \nabla u_\alpha \nabla(\eta^p u_\alpha^l) \mathrm{dV} \\ &\quad + \alpha ||u_\alpha||_p^{\theta-p} \int_M \eta^p u_\alpha^{l+p-1} \mathrm{dV} = \lambda_\alpha \int_M \eta^p u_\alpha^{p^*+l-1} \mathrm{dV} \end{aligned} \tag{5.18}$$

En développant $\nabla(\eta^p u_\alpha^l)$ on trouve :

$$\int_M |\nabla u_\alpha|^{p-2} \nabla u_\alpha \nabla(\eta^p u_\alpha^l) \mathrm{dV} \geq \int_M l u_\alpha^{l-1} \eta^p |\nabla u_\alpha|^p \mathrm{dV} - \int_M u_\alpha^l |\nabla(\eta^p)| |\nabla u_\alpha|^{p-1} \mathrm{dV}.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_M \left| \nabla \left(\eta u_\alpha^{(l+p-1)/p} \right) \right|^p \mathrm{dV} &\leq \left(\frac{l+p-1}{p} \right)^p \int_M \eta^p u_\alpha^{l-1} |\nabla u_\alpha|^p \mathrm{dV} \\ &+ C_l \int_M u_\alpha^{l+p-1} |\nabla \eta|^p \mathrm{dV} + C_l \int_M u_\alpha^l |\nabla u_\alpha|^{p-1} |\nabla(\eta^p)| \mathrm{dV}. \end{aligned}$$

D'où, en réinjectant dans (5.18), et d'après Hölder,

$$\begin{aligned} C||\nabla u_\alpha||_p^{\theta-p} &\left[\int_M |\nabla(\eta u_\alpha^{(l+p-1)/p})|^p \mathrm{dV} - C_l \int_M u_\alpha^{l+p-1} |\nabla \eta|^p \mathrm{dV} - \right. \\ &\left. \tilde{C}_l \int_M u_\alpha^l |\nabla u_\alpha|^{p-1} |\nabla(\eta^p)| \mathrm{dV} \right] + \alpha ||u_\alpha||_p^{\theta-p} \int_M \eta^p u_\alpha^{l+p-1} \mathrm{dV} \\ &= \lambda_\alpha \int_M \eta^p u_\alpha^{p^*+l-1} \mathrm{dV} \\ &\leq \lambda_\alpha \left[\int_M (\eta u_\alpha^{(l+p-1)/p})^{p^*} \mathrm{dV} \right]^{\frac{p}{p^*}} \left[\int_{O_{x,\delta}} u_\alpha^{p^*} \mathrm{dV} \right]^{\frac{p}{(n-k)}}. \end{aligned}$$

Or $\int_{O_{x,\delta}} u_\alpha^{p^*} \mathrm{dV}$ a pour limite 0 quand α tend vers $+\infty$, car O_x n'est pas une orbite de concentration. De plus

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_M u_\alpha^{l+p-1} \mathrm{dV} = 0$$

car $||u_\alpha||_q$ a pour limite 0 quand $q < p^*$ d'après (5.8). Selon le même argument,

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_M u_\alpha^{(l+p-1)/p}\mathrm{dV} = 0.$$

Et

$$\int_M u_\alpha^l |\nabla u_\alpha|^{p-1}|\nabla(\eta)^p|\mathrm{dV} \le \left[\int_M |\nabla(\eta^p)|^{p/(p-1)}|\nabla u_\alpha|^p\mathrm{dV}\right]^{p/(p-1)}\left[\int_M u_\alpha^{pl}\mathrm{dV}\right]^{1/p}.$$

Or d'après (5.8), $\left[\int_M u_\alpha^{pl}\mathrm{dV}\right]^{1/p}$ tend vers 0. D'où

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_M |\nabla(\eta u_\alpha^{\frac{l+p-1}{p}})|^p\mathrm{dV} = 0$$

et

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\alpha\int_M \left(\eta u_\alpha^{\frac{l+p-1}{p}}\right)^p \mathrm{dV} = 0.$$

En reprenant l'inégalité du Théorème 1, on a

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_M \left(\eta u_\alpha^{\frac{l+p-1}{p}}\right)^{p^*} \mathrm{dV} = 0,$$

ce qui entraine

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{O_{x,\delta/2}} u_\alpha^{p^*\frac{l+p-1}{p}}\mathrm{dV} = 0.$$

Par récurrence sur l, on obtient que pour tout N,

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{O_{x,\delta/2}} u_\alpha^N\mathrm{dV} = 0.$$

En revenant à l'équation (E_α), on en déduit que quel que soit N,

$$\lim_{\alpha\to+\infty}||u_\alpha||_{H_1^N(O_{x,\delta/2})} = 0.$$

Or, pour N assez grand, H_1^N est inclus dans $\mathcal{C}_0$, l'inclusion étant continue. Ce qui nous donne,

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\sup_{O_{x,\delta/2}} u_\alpha = 0.$$

Par recouvrement fini de tout compact $K \subset M/O_{x_0}$ par des $O_{x,\delta/2}$, on obtient finalement que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} u_\alpha = 0$$

dans $\mathcal{C}^0_{\mathrm{loc}}(M/O_{x_0})$.

5.3 Démonstration du Théorème 7 sous l'hypothèse (H_1)

5.3.1 Rappels et notations

Soit G un sous groupe du groupe des isométries de M tel que sur $O_{x_0,\delta}$ toutes les G-orbites soient principales. On peut considérer (voir par exemple

[20]) la variété quotient $O_{x_0,\delta}/G$ sur laquelle g induit une métrique "quotient" $\tilde{g}$, de sorte qu'alors Π la submersion de $O_{x_0,\delta}$ dans $O_{x_0,\delta}/G$ est une submersion riemannienne. On note $\tilde{v}$ la fonction définie sur $O_{x_0,\delta}/G$ par $\tilde{v}(y) = \mathrm{vol}(\Pi^{-1}(y))$ et on note v la fontion définie sur $O_{x_0,\delta}$ par $v(x) = \mathrm{vol}(O_x)$. Si $\tilde{u} \in \mathcal{C}^0(O_{x_0,\delta}/G)$ et a support compact, on sait, toujours d'après [20],

$$\int_{O_{x_0,\delta}} \tilde{u} \circ \Pi \mathrm{dV} = \int_{O_{x_0,\delta}/G} \tilde{u}\tilde{v} \mathrm{dv}_{\tilde{g}}. \tag{5.19}$$

D'autre part, toute fonction u définie sur $O_{x_0,\delta}$ et G-invariante "passe au quotient" et s'écrit sous la forme $u = \tilde{u} \circ \Pi$, où $\tilde{u}$ est définie sur $O_{x_0,\delta}/G$. Remarquons aussi que si l'on désigne par $\tilde{\nabla}$ le gradient pour la métrique $\tilde{g}$ sur $O_{x_0,\delta}/G$, quelles que soient $\tilde{u}, \tilde{w}$ définies sur $O_{x_0,\delta}/G$ on a

$$\left(\tilde{\nabla}\tilde{u}\tilde{\nabla}\tilde{w}\right) \circ \Pi = \nabla(\tilde{u} \circ \Pi)\nabla(\tilde{w} \circ \Pi) \tag{5.20}$$

On démontre ce dernier résultat dans un cadre général.

Lemme 8. *Soient (M, g) et $(\tilde{M}, \tilde{g})$ deux variétés riemanniennes de dimension respective n et m, $m < n$, et soit Π la surjection de M dans $\tilde{M}$ telle que Π soit une submersion riemannienne. Soit u, v des fonctions de M dans $\mathbb{R}$, $\tilde{u}, \tilde{v}$ des fonctions de $\tilde{M}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $u = \tilde{u} \circ \Pi$, $v = \tilde{v} \circ \Pi$. On a alors*

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}\tilde{u}, \tilde{\nabla}\tilde{v}) \circ \Pi = g(\nabla u, \nabla v),$$

autrement dit quel que soit $x \in M$

$$\tilde{g}_{\Pi(x)}((\tilde{\nabla}\tilde{u})_{\Pi(x)}, (\tilde{\nabla}\tilde{v})_{\Pi(x)}) = g_x((\nabla u)_x, (\nabla v)_x).$$

Démonstration. Rappelons que quel que soit $X \in \mathrm{T}_x(M)$

$$(X(u))_x = (\mathrm{d}u)_x X = g_x((\nabla u)_x, X)$$

1. Montrons tout d'abord que

$$\mathrm{d}\Pi_x(\nabla u)_x = (\tilde{\nabla}\tilde{u})_{\Pi(x)}.$$

Soit H_x tel que $\mathrm{T}_x(\Pi^{-1}(\Pi(x))) \oplus \mathrm{H}_x = \mathrm{T}_x(M)$. Soit $\tilde{X} \in \mathrm{T}_{\Pi(x)}(\tilde{M})$, et soit X le relèvement horizontal de $\tilde{X}$. On a $\mathrm{d}\Pi_x(X) = \tilde{X}$. Si $(\nabla u)_x$ appartient à H_x, alors d'après la définition d'une submersion riemannienne,

$$\tilde{g}_{\Pi(x)}(\mathrm{d}\Pi_x(\nabla u)_x, \tilde{X}) = g_x((\nabla u)_x, X) = (X(u))_x.$$

Or

$$(\tilde{X}(\tilde{u}))_{\Pi(x)} = (\mathrm{d}\Pi_x(X)(\tilde{u}))_{\Pi(x)},$$

et d'après la définition de la différentielle $\mathrm{d}\Pi_x$

$$(\mathrm{d}\Pi_x(X)(\tilde{u}))_{\Pi(x)} = (X(\tilde{u} \circ \Pi))_x = (X(u))_x.$$

D'où

$$\tilde{g}_{\Pi(x)}(\mathrm{d}\Pi_x(\nabla u)_x, \tilde{X}) = \tilde{X}(\tilde{u})_{\Pi(x)}.$$

Comme
$$\tilde{g}_{\Pi(x)}((\tilde{\nabla}\tilde{u})_{\Pi(x)}, \tilde{X}) = \tilde{X}(\tilde{u})$$
on a bien
$$\mathrm{d}\Pi_x(\nabla u)_x = (\tilde{\nabla}\tilde{u})_{\Pi(x)}.$$

2. A présent on prouve que $(\nabla u)_x$ appartient à H_x.
Quel que soit $X \in \mathrm{T}_x(\Pi^{-1}(\Pi(x)))$
$$g_x((\nabla u)_x, X) = X(u).$$
Or X est un vecteur tangent en x à un chemin γ sur $\Pi^{-1}(\Pi(x))$ pour $t = 0$, donc $X(u) = \gamma_0(u) = (u \circ \gamma)'(0) = 0$, car $u \circ \gamma = C$, où C est une constante. Alors $(\nabla u)_x$ est bien orthogonal à tout vecteur de $\mathrm{T}_x(\Pi^{-1}(\Pi(x)))$.

3. Finalement on montre qu'on a bien
$$\tilde{g}_{\Pi(x)}((\tilde{\nabla}\tilde{u})_{\Pi(x)}, (\tilde{\nabla}\tilde{v})_{\Pi(x)}) = g_x((\nabla u)_x, (\nabla v)_x).$$
D'après 1. et 2., et comme Π est une submersion riemannienne
$$\tilde{g}_{\Pi(x)}((\tilde{\nabla}\tilde{u})_{\Pi(x)}, (\tilde{\nabla}\tilde{v})_{\Pi(x)}) = \tilde{g}_{\Pi(x)}(\mathrm{d}\Pi_x(\nabla u)_x, \mathrm{d}\Pi_x(\nabla v)_x) = g_x((\nabla u)_x, (\nabla v)_x).$$
□

5.3.2 Résultat préliminaire

Lemme 9. *Soit (N, g) une variété riemannienne compacte à bord de dimension n, G un sous groupe compact du groupe des isométries de N, k la dimension minimum des G-orbites, A le volume minimum des orbites de dimension k. Soit O_{x_0} une orbite de dimension k et de volume A. Si il existe G' un sous groupe du groupe des isométries de N tel que*

1. *les G'-orbites sont toutes principales,*
2. *quel que soit $x \in N$, $O_{x,G'}$ est inclus dans $O_{x,G}$ et $O_{x_0,G'} = O_{x_0,G}$,*
3. *quel que soit $x \in N$, $A = \mathrm{vol}\, O_{x_0,G'} \leq \mathrm{vol}\, O_{x,G'}$,*

alors il existe $B > 0$ tel que, quelle que soit $u \in \mathcal{C}^\infty_G$ à support compact dans N,
$$||u||^\theta_{p^*} \leq \frac{K^\theta(n-k,p)}{A^{\theta/(n-k)}}||\nabla u||^\theta_p + B||u||^\theta_p \tag{5.21}$$
avec $p \in]1, n-k[$, $\theta = p$ pour $p \leq 2$, $\theta = 2$ pour $p \geq 2$, et $p^* = \frac{p(n-k)}{n-k-p}$.

Démonstration. D'après l'hypothèse 1 du lemme et ce qui a été dit en rappel, si l'on note toujours Π la surjection canonique de N dans la variété quotient N/G' de dimension $n-k$, alors, quelle que soit $\Phi \in \mathcal{C}^0(N/G')$ à support compact,
$$\int_N (\Phi \circ \Pi)\, \mathrm{dv}_g = \int_{N/G'} (\Phi\tilde{v})\, \mathrm{dv}_{\tilde{g}},$$
où $\tilde{v}(y) = \mathrm{vol}\,(\Pi^{-1}(y))$.

Considérons sur N/G' le changement de métrique conforme $\tilde{g}' = \tilde{v}^{2/(n-k)}\tilde{g}$ de sorte que $\mathrm{dv}_{\tilde{g}'} = \tilde{v}\mathrm{dv}_{\tilde{g}}$. Alors, quelle que soit une fonction positive $\tilde{u} \in \mathcal{C}^\infty(N/G')$,
$$\int_{N/G'} \tilde{u}^{p^*}\mathrm{dv}_{\tilde{g}'} = \int_{N/G'} \tilde{v}\tilde{u}^{p^*}\mathrm{dv}_{\tilde{g}} \tag{5.22}$$

et

$$|\nabla_{\tilde g'}\tilde u|^p = \frac{1}{\tilde v^{p/(n-k)}}|\nabla_{\tilde g}\tilde u|^p.$$

En effet

$$|\nabla_{\tilde g'}\tilde u|^p = \left(|\nabla_{\tilde g'}\tilde u|^2\right)^{p/2} = \left(\tilde v^{-2/(n-k)}|\nabla_{\tilde g}\tilde u|^2\right)^{p/2}.$$

D'où

$$\int_{N/G'}|\nabla_{\tilde g'}\tilde u|^p \mathrm{dv}_{\tilde g'} = \int_{N/G'}\frac{\tilde v}{\tilde v^{p/(n-k)}}|\nabla_{\tilde g}\tilde u|^p \mathrm{dv}_{\tilde g}. \tag{5.23}$$

On utilise alors l'inégalité de Sobolev établie par Druet [14] dans le cas où le groupe G est réduit à l'identité, il existe $B > 0$ tel que quelle que soit $\tilde u \in \overset{\circ}{H}{}_1^p(N/G')$,

$$\left[\int_{N/G'}\tilde u^{p^*}\mathrm{dv}_{\tilde g'}\right]^{\frac{\theta}{p^*}} \le K^\theta(n-k,p)\left[\int_{N/G'}|\nabla_{\tilde g'}\tilde u|^p\mathrm{dv}_{\tilde g'}\right]^{\frac{\theta}{p}} + B\left[\int_{N/G'}\tilde v\tilde u^p \mathrm{dv}_{\tilde g}\right]^{\frac{\theta}{p}} \tag{5.24}$$

D'après (5.19), (5.22), (5.23) et (5.24), on déduit (en notant $u = \tilde u\circ\Pi$)

$$\left[\int_N u^{p^*}\mathrm{dv}_g\right]^{\frac{\theta}{p}} \le K^\theta(n-k,p)\left[\int_N \frac{1}{\tilde v^{p(n-k)}\circ\Pi}|\nabla_g u|^p\mathrm{dv}_g\right]^{\frac{\theta}{p}} + B\left[\int_N u^p\mathrm{dv}_g\right]^{\frac{\theta}{p}}.$$

Comme, d'après l'hypothèse 3 du Lemme 9, $\tilde v\circ\Pi(y) \ge A$ quel que soit $y \in N$, on obtient finalement : quelle que soit $u \in \mathcal{C}^\infty_{G'}(N)$,

$$\left[\int_N u^{p^*}\mathrm{dv}_g\right]^{\frac{\theta}{p}} \le \frac{K^\theta(n-k,p)}{A^{\theta/(n-k)}}\left[\int_N |\nabla_g u|^p\mathrm{dv}_g\right]^{\frac{\theta}{p}} + B\left[\int_N u^p\mathrm{dv}_g\right]^{\frac{\theta}{p}}.$$

Cette inégalité est en fait vraie quelle que soit $u \in \mathcal{C}^\infty_G(N)$, car l'hypothèse 2 du lemme montre que $\mathcal{C}^\infty_G(N) \subset \mathcal{C}^\infty_{G'}(N)$, ce qui termine la démonstration du lemme. □

5.3.3 Argument final

On donne à présent l'argument final de la démonstration du théorème sous l'hypothèse (H_1). Dans cette partie, on se sert de certains résultats établis dans l'étude du phénomène de concentration.

Soit $\delta > 0$ tel que sur $O_{x_0,2\delta}$ on puisse écrire le Lemme 9 en prenant $N = O_{x_0,2\delta}$. Soit η une fonction positive de $\mathcal{C}^\infty_G$, $0 \le \eta \le 1$, valant 1 sur $O_{x_0,\delta}$ et nulle en dehors de $O_{x_0,2\delta}$. Alors d'après (5.21) il existe $B > 0$ tel que,

$$\begin{aligned}\left[\int_{O_{x_0,\delta}} u_\alpha^{p^*}\mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p^*}} &\le \left[\int_{O_{x_0,2\delta}} (\eta u_\alpha)^{p^*}\mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p^*}}\\ &\le \frac{K^\theta(n-k,p)}{A^{\theta/(n-k)}}\left[\int_{O_{x_0,2\delta}}|\nabla(\eta u_\alpha)|^p\mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}} + B\left[\int_{O_{x_0,2\delta}}(\eta u_\alpha)^p\mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}}\end{aligned} \tag{5.25}$$

D'autre part, il existe $C > 0$ tel que,

$$|\nabla(\eta u_\alpha)|^p \le \eta^p|\nabla u_\alpha|^p + C\eta^{p-1}u_\alpha|\nabla u_\alpha|^{p-1}|\nabla\eta| + C|\nabla\eta|^p u_\alpha^p,$$

d'où, puisque $|\nabla\eta| = 0$ sur $O_{x_0,\delta}$,

$$\int_{O_{x_0,2\delta}} |\nabla(\eta u_\alpha)|^p \mathrm{dV} \leq$$
$$\int_M |\nabla u_\alpha|^p \mathrm{dV} + C\int_{M\setminus O_{x_0,\delta}} u_\alpha |\nabla u_\alpha|^{p-1}\mathrm{dV} + C\int_{M\setminus O_{x_0,\delta}} u_\alpha^p \mathrm{dV}.$$

Alors, puisque $\theta/p \leq 1$,

$$\left[\int_{O_{x_0,2\delta}} |\nabla(\eta u_\alpha)|^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}} \leq$$
$$\left[\int_M |\nabla u_\alpha|^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}} + C\left[\int_{M\setminus O_{x_0,\delta}} u_\alpha |\nabla u_\alpha|^{p-1}\mathrm{dV} + \int_{M\setminus O_{x_0,\delta}} u_\alpha^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}}.$$

Dans l'équation (E_α) on prend $\Phi = u_\alpha$. On trouve :

$$\left[\int_M |\nabla u_\alpha|^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}} = \lambda_\alpha - \alpha\left[\int_M u_\alpha^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}}.$$

D'où

$$\left[\int_{O_{x_0,2\delta}} |\nabla(\eta u_\alpha)|^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}} \leq \lambda_\alpha - \alpha\left[\int_M u_\alpha^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}}$$
$$+C\left[\int_{M\setminus O_{x_0,\delta}} u_\alpha |\nabla u_\alpha|^{p-1}\mathrm{dV} + \int_{M\setminus O_{x_0,\delta}} u_\alpha^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}}. \tag{5.26}$$

Finalement, d'après (5.25) et (5.26),

$$\left[\int_{O_{x_0,\delta}} u_\alpha^{p^*} \mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p^*}} \leq \frac{K^\theta(n-k,p)}{A^{\theta/(n-k)}}\left(\lambda_\alpha - \alpha\left[\int_M u_\alpha^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}} + \right.$$
$$\left. C\left[\int_{M\setminus O_{x_0,\delta}} u_\alpha |\nabla u_\alpha|^{p-1}\mathrm{dV} + \int_{M\setminus O_{x_0,\delta}} u_\alpha^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}}\right) + B\left[\int_{O_{x_0,2\delta}} (\eta u_\alpha)^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}}.$$

En se rappelant que λ_α tend vers $A^{\theta/(n-k)}/K^\theta$ par valeur inférieure, on trouve :

$$\begin{aligned}\alpha \quad &\leq \quad \frac{A^{\frac{\theta}{n-k}}}{K^\theta}\left[\frac{1-\left[\int_{O_{x_0,\delta}} u_\alpha^{p^*}\mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p^*}}}{||u_\alpha||_p^\theta}\right] \\ &\qquad +\frac{C\left[\int_{M\setminus O_{x_0,\delta}} u_\alpha|\nabla u_\alpha|^{p-1}\mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}} + \left[\int_{M\setminus O_{x_0,\delta}} u_\alpha^p\mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}}}{||u_\alpha||_p^\theta} \\ &\qquad +C\frac{\left[\int_{O_{x_0,2\delta}} u_\alpha^p\mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}}}{||u_\alpha||_p^\theta}.\end{aligned} \tag{5.27}$$

Remarquons tout d'abord que

$$\frac{\left[\int_{O_{x_0,2\delta}} u_\alpha^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}}}{||u_\alpha||_p^\theta} \le 1,$$

et

$$\frac{\left[\int_{M\setminus O_{x_0,\delta}} u_\alpha^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}}}{||u_\alpha||_p^\theta} \le 1.$$

On cherche à prouver que

$$\frac{\int_{M\setminus O_{x_0,\delta}} u_\alpha |\nabla u_\alpha|^{p-1} \mathrm{dV}}{\int_M u_\alpha^p \mathrm{dV}} \le C. \tag{5.28}$$

Soit ζ une fonction $\mathcal{C}_G^\infty$, $0 \le \zeta \le 1$ telle que ζ soit nulle sur $O_{x_0,\delta/2}$ et vale 1 sur $M \setminus O_{x_0,\delta}$. Dans (E_α) on prend $\Phi = \zeta^p u_\alpha$. On trouve

$$||\nabla u_\alpha||_p^{\theta-p} \int_M |\nabla u_\alpha|^{p-2} \nabla u_\alpha \nabla \left(\zeta^p u_\alpha\right) \mathrm{dV} + \alpha ||u_\alpha||_p^{\theta-p} \int_M \zeta^p u_\alpha^p \mathrm{dV} = \lambda_\alpha \int_M \zeta^p u_\alpha^{p^*} \mathrm{dV}.$$

On a déjà vu qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\int_M |\nabla u_\alpha|^{p-2} \nabla u_\alpha \nabla \left(\zeta^p u_\alpha\right) \mathrm{dV} \ge \int_M \zeta^p |\nabla u_\alpha|^p \mathrm{dV} - C \int_M u_\alpha |\nabla u_\alpha|^{p-1} |\nabla(\zeta^p)| \mathrm{dV}.$$

D'où

$$\begin{aligned} &||\nabla u_\alpha||_p^{\theta-p} \int_M \zeta^p |\nabla u_\alpha|^p \mathrm{dV} \\ &\quad \le \lambda_\alpha \int_M \zeta^p u_\alpha^{p^*} \mathrm{dV} + ||\nabla u_\alpha||_p^{\theta-p} C \int_M u_\alpha |\nabla u_\alpha|^{p-1} |\nabla(\zeta^p)| \mathrm{dV} \\ &\quad \le \frac{A^{\frac{\theta}{n-k}}}{K^\theta} \int_M \zeta^p u_\alpha^{p^*} \mathrm{dV} + C \int_M u_\alpha \zeta^{p-1} |\nabla u_\alpha|^{p-1} \mathrm{dV} \\ &\quad \le C \int_M \zeta^p u_\alpha^{p^*} \mathrm{dV} + C \left[\int_M \zeta^p |\nabla u_\alpha|^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_M u_\alpha^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Young, et comme d'après (5.7), $||\nabla u_\alpha||_p$ tend vers une constante $C > 0$,

$$\int_M \zeta^p |\nabla u_\alpha|^p \mathrm{dV} \le C \int_M \zeta^p u_\alpha^p \mathrm{dV} + C \int_M u_\alpha^{p^*} \mathrm{dV}.$$

Comme d'après (5.17) u_α a pour limite 0 dans $\mathcal{C}^0_{loc}(M \setminus O_{x_0,\delta/2})$,

$$\begin{aligned} \int_{M\setminus O_{x_0,\delta}} |\nabla u_\alpha|^p \mathrm{dV} &\le C \left(1 + \sup_{M\setminus O_{x_0,\delta/2}} u_\alpha^{p^*-p}\right) \int_M u_\alpha^p \mathrm{dV} \\ &\le C \int_M u_\alpha^p \mathrm{dV}. \end{aligned} \tag{5.29}$$

En remarquant qu'on obtient, d'après Hölder,

$$\int_{M\backslash O_{x_0,\delta}} u_\alpha|\nabla u_\alpha|^{p-1}\mathrm{dV} \leq \left[\int_{M\backslash O_{x_0,\delta}} u_\alpha^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{M\backslash O_{x_0,\delta}} |\nabla u_\alpha|^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{p-1}{p}},$$

on a, d'après (5.29)

$$\int_{M\backslash O_{x_0,\delta}} u_\alpha|\nabla u_\alpha|^{p-1}\mathrm{dV} \leq C\left[\int_{M\backslash O_{x_0,\delta}} u_\alpha^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_M u_\alpha^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

D'où finalement

$$\frac{\int_{M\backslash O_{x_0,\delta}} u_\alpha|\nabla u_\alpha|^{p-1}\mathrm{dV}}{\int_M u_\alpha^p \mathrm{dV}} \leq C$$

et on a (5.28).

Il reste à prouver que

$$\frac{1-\left[\int_{O_{x_0,\delta}} u_\alpha^{p^*}\mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p^*}}}{\left[\int_M u_\alpha^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}}} \leq C. \tag{5.30}$$

Comme $\int_{O_{x_0,\delta}} u_\alpha^{p^*}\mathrm{dV} < 1$ et $\theta/p^* \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} 1-\left[\int_{O_{x_0,\delta}} u_\alpha^{p^*}\mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p^*}} &\leq \int_{M\backslash O_{x_0,\delta}} u_\alpha^{p^*}\mathrm{dV} \\ &\leq \left(\sup_{M\backslash O_{x_0,\delta}} u_\alpha\right)^{p^*-p} \int_M u_\alpha^p \mathrm{dV} \\ &\leq C\int_M u_\alpha^p \mathrm{dV}, \end{aligned}$$

puisque d'après (5.17)

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \sup_{M\backslash O_{x_0}} u_\alpha = 0.$$

D'où

$$\frac{1-\left[\int_{O_{x_0,\delta}} u_\alpha^{p^*}\mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p^*}}}{\left[\int_M u_\alpha^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}}} \leq C\frac{\int_M u_\alpha^p \mathrm{dV}}{\left[\int_M u_\alpha^p \mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}}} \leq C$$

car $\theta/p \leq 1$ et $||u_\alpha||_p^p$ tend vers 0.

En réinjectant (5.28) et (5.30) dans (5.27), on trouve $\alpha \leq C$. Cette contradiction termine la démonstration du théorème sous l'hypothèse (H_1).

5.4 Démonstration du théorème sous l'hypothèse (H_2)

5.4.1 Résultats préliminaires

D'après l'hypothèse 1. de (H_2), il existe un voisinage $O_{x_0,2\delta}$ de O_{x_0} tel que dans $O_{x_0,2\delta}$ toutes les H-orbites sont principales. On sait qu'alors $O_{x_0,2\delta}/H$

est une variété quotient et vérifie les propriétés décrites dans la partie 5.3.1 de ce chapitre. On note toujours Π la submersion riemannienne de $O_{x_0,2\delta}$ dans la variété quotient $O_{x_0,2\delta}/H$. On note $\bar{x} = \Pi(O_x)$. D'après l'hypothèse 4. de (H_2), $\bar{x}_0$ est un point critique de la fonction $\tilde{v}$, on en déduit : il existe $C > 0$ tel que quel que soit $\bar{x} \in O_{x_0,2\delta}/H$,

$$A - C\mathrm{d}_{\tilde{g}}^2(\bar{x}, \bar{x}_0) \leq \tilde{v}(\bar{x}) \leq A + C\mathrm{d}_{\tilde{g}}^2(\bar{x}, \bar{x}_0) \tag{5.31}$$

car $\tilde{v}(\bar{x}_0) = A$.

On écrit sur $O_{x_0,2\delta}/H$ l'inégalité de Sobolev dans le cas sans symétrie telle qu'elle a été établie par Druet [14]. Il existe $B > 0$ tel que quelle que soit $\tilde{u} \in \mathring{H}_1^q(O_{x_0,2\delta}/H)$,

$$\left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \tilde{u}^{p^*} \mathrm{dv}_{\tilde{g}}\right]^{\frac{\theta}{p^*}} \leq K(n-k,p)^\theta \left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} |\tilde{\nabla}\tilde{u}|^p \mathrm{dv}_{\tilde{g}}\right]^{\frac{\theta}{p}} + B\left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \tilde{u}^p \mathrm{dv}_{\tilde{g}}\right]^{\frac{\theta}{p}}.$$

D'après (5.31), on peut écrire, étant donné que $\frac{\theta}{p^*} < 1$ et $\frac{\theta}{p} \leq 1$: quelle que soit $\tilde{u} \in \mathring{H}_1^q(O_{x_0,2\delta}/H)$

$$\begin{aligned}&\left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \tilde{u}^{p^*} \mathrm{dv}_{\tilde{g}}\right]^{\frac{\theta}{p^*}} \\ &\qquad \geq A^{\frac{-\theta}{p^*}} \left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \tilde{v}\tilde{u}^{p^*} \mathrm{dv}_{\tilde{g}}\right]^{\frac{\theta}{p^*}} - C\left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \mathrm{d}_{\tilde{g}}^2(\bar{x},\bar{x}_0)\tilde{u}^{p^*} \mathrm{dv}_{\tilde{g}}\right]^{\frac{\theta}{p^*}},\end{aligned}$$

car $(1+a)^q \leq 1 + qa$ pour $a > 0$ et $q \leq 1$, et $\int_{O_{x_0,,2\delta}/H} \tilde{u}_\alpha^{p^*} \mathrm{dv}_{\tilde{g}}$ est borné. De même

$$\begin{aligned}&\left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} |\tilde{\nabla}\tilde{u}|^p \mathrm{dv}_{\tilde{g}}\right]^{\frac{\theta}{p}} \\ &\qquad \leq A^{\frac{-\theta}{p}} \left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \tilde{v}|\tilde{\nabla}\tilde{u}|^p \mathrm{dv}_{\tilde{g}}\right]^{\frac{\theta}{p}} + C\left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \mathrm{d}_{\tilde{g}}^2(\bar{x},\bar{x}_0)|\tilde{\nabla}\tilde{u}|^p \mathrm{dv}_{\tilde{g}}\right]^{\frac{\theta}{p}},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \tilde{u}^p \mathrm{dv}_{\tilde{g}}\right]^{\frac{\theta}{p}} \\ &\qquad \leq A^{\frac{-\theta}{p}} \left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \tilde{v}\tilde{u}^p \mathrm{dv}_{\tilde{g}}\right]^{\frac{\theta}{p}} + C\left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \mathrm{d}_{\tilde{g}}^2(\bar{x},\bar{x}_0)\tilde{u}^p \mathrm{dv}_{\tilde{g}}\right]^{\frac{\theta}{p}}.\end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\begin{aligned}&\left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \tilde{v}\tilde{u}^{p^*} \mathrm{dv}_{\tilde{g}}\right]^{\frac{\theta}{p^*}} \\ &\qquad \leq \frac{K^\theta(n-k,p)}{A^{\theta/(n-k)}} \left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \tilde{v}|\tilde{\nabla}\tilde{u}|^p \mathrm{dv}_{\tilde{g}}\right]^{\frac{\theta}{p}} + C\left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \tilde{v}\tilde{u}^p \mathrm{dv}_{\tilde{g}}\right]^{\frac{\theta}{p}}\end{aligned}$$

$$+C\left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_0)\tilde u^{p^*}\mathrm{dv}_{\tilde g}\right]^{\frac{\theta}{p^*}} + C\left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_0)|\tilde\nabla \tilde u|^p\mathrm{dv}_{\tilde g}\right]^{\frac{\theta}{p}}$$
$$+C\left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_0)\tilde u^{p}\mathrm{dv}_{\tilde g}\right]^{\frac{\theta}{p}}. \tag{5.32}$$

Soit O_{x_α} une orbite sur laquelle u_α atteint son maximum, on a alors $\tilde u(\bar x_\alpha) = ||\tilde u||_\infty$. Soit η une fonction $\mathcal{C}^\infty_G$, $\eta = 1$ sur $O_{x_0,\delta}$, nulle en dehors de $O_{x_0,2\delta}$, $0 \le \eta \le 1$. Soit $\tilde\eta$ la fonction $\mathcal{C}^\infty(O_{x_0,2\delta}/H)$ telle que $\eta = \tilde\eta \circ \Pi$. Alors $\tilde\eta = 1$ sur $(O_{x_0,\delta}/H)$ et $\tilde\eta\tilde u_\alpha \in \mathring{H}^q_1(O_{x_0,2\delta}/H)$. Dans (5.32), on prend $\tilde u = \tilde\eta\tilde u_\alpha$. D'après l'inégalité triangulaire, $\mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_0) \le 2\left(\mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x_\alpha,\bar x_0) + \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)\right)$. De plus, d'après (5.19), on peut "remonter" une partie de (5.32) sur $O_{x_0,2\delta}$. De la même manière qu'on a démontré (5.27), on obtient alors :

$$\alpha \le$$
$$\left(\frac{A^{\frac{\theta}{n-k}}}{K^\theta}\frac{\left[1-\left[\int_{O_{x_0,\delta}} u_\alpha^{p^*}\mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p^*}}\right]}{||u_\alpha||_p^\theta} + C\frac{\left[\int_{M\setminus O_{x_0,\delta}} u_\alpha|\nabla u_\alpha|^{p-1}\mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}}}{||u_\alpha||_p^\theta}\right.$$
$$\left. + C\frac{\left[\int_{M\setminus O_{x_0,\delta}} u_\alpha^p\mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}}}{||u_\alpha||_p^\theta} + C\frac{\left[\int_{O_{x_0,\delta}} (\eta u_\alpha)^p\mathrm{dV}\right]^{\frac{\theta}{p}}}{||u_\alpha||_p^\theta}\right) \tag{5.33}$$
$$+C\left(\frac{\left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)(\tilde\eta\tilde u_\alpha)^{p^*}\mathrm{dv}_{\tilde g}\right]^{\frac{\theta}{p^*}} + \left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)|\tilde\nabla(\tilde\eta\tilde u_\alpha)|^p\mathrm{dv}_{\tilde g}\right]^{\frac{\theta}{p}}}{||u_\alpha||_p^\theta}\right.$$
$$\left. + \frac{\left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)(\tilde\eta\tilde u_\alpha)^{p}\mathrm{dv}_{\tilde g}\right]^{\frac{\theta}{p}}}{||u_\alpha||_p^\theta}\right) \tag{5.34}$$
$$+C\left(\frac{\left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x_0,\bar x_\alpha)(\tilde\eta\tilde u_\alpha)^{p^*}\mathrm{dv}_{\tilde g}\right]^{\frac{\theta}{p^*}} + \left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x_0,\bar x_\alpha)|\tilde\nabla(\tilde\eta\tilde u_\alpha)|^p\mathrm{dv}_{\tilde g}\right]^{\frac{\theta}{p}}}{||u_\alpha||_p^\theta}\right.$$
$$\left. + \frac{\left[\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x_0,\bar x_\alpha)(\tilde\eta\tilde u_\alpha)^{p}\mathrm{dv}_{\tilde g}\right]^{\frac{\theta}{p}}}{||u_\alpha||_p^\theta}\right) \tag{5.35}$$

Comme sous l'hypothèse (H_1), la contradiction finale de ce raisonnement par l'absurde sera obtenue en montrant que le second terme de cette inégalité est majoré quel que soit α. On a déjà prouvé que (5.33) $\le C$ (il s'agit en réalité de l'inégalité (5.27)). Pour majorer la deuxième partie (5.34), on a besoin d'une **première inégalité fondamentale** : il existe $C > 0$, tel que quel que soit α

$$\mathrm{d}_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)^{\frac{n-k}{p}-1}\tilde u_\alpha(\bar x) \le C.$$

Cette inégalité a été initialement démontrée dans Druet [14] lorsque le groupe G est réduit à l'identité, et la démonstration dans notre cas s'y raporte par de nombreux aspects. Pour majorer la troisième partie (5.35), on a besoin d'une **deuxième inégalité fondamentale** : il existe $C > 0$, tel que quel que soit α

$$\mathrm{d}_{\tilde{g}}(\bar{x}_\alpha, \bar{x}_0)(\sup \tilde{u}_\alpha)^{\frac{p}{n-k-p}} \leq C.$$

La condition 3. de l'hypothèse (H_2) est fondamentale pour la démonstration de cette inégalité, elle n'a donc pas d'équivalent lorsque le groupe G est réduit à l'identité. La démonstration nécessitera l'introduction d'outils nouveaux.

5.4.2 Démonstration des inégalités fondamentales

Rappelons que u_α est solution faible sur M de

$$||\nabla u_\alpha||_p^{\theta-p}\Delta_p u_\alpha + \alpha||u_\alpha||_p^{\theta-p}u_\alpha^{p-1} = \lambda_\alpha u_\alpha^{p^*-1},$$

ce qui signifie précisément : quelle que soit $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty$

$$||\nabla u_\alpha||_p^{\theta-p}\int_M |\nabla u_\alpha|^{p-2}\nabla u_\alpha \nabla\Phi \mathrm{dV} + \alpha||u_\alpha||_p^{\theta-p}\int_M u_\alpha^{p-1}\Phi\mathrm{dV} = \lambda_\alpha \int_M u_\alpha^{p^*-1}\Phi\mathrm{dV} \qquad (E_\alpha).$$

On considère la submersion riemannienne Π définie de $(O_{x_0,2\delta}, g)$ dans $(O_{x_0,2\delta}/H, \tilde{g})$. On note toujours $\tilde{u}_\alpha$ et $\tilde{v}$ les fonctions définies sur $O_{x_0,2\delta}/H$ qui vérifient $u_\alpha = \tilde{u}_\alpha \circ \Pi$ et $\tilde{v}(\bar{x}) = \mathrm{vol}_{\tilde{g}}\left(\Pi^{-1}(\bar{x})\right)$. On cherche alors à établir l'équation vérifiée par $\tilde{u}_\alpha$ sur $(O_{x_0,2\delta}/H, \tilde{g})$. En utilisant (5.19) et (5.20) on écrit : quelle que soit $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty(O_{x_0,2\delta}/H)$,

$$\begin{aligned}||\nabla u_\alpha||_p^{\theta-p}\int_{O_{x_0,2\delta}/H} \tilde{v}|\tilde{\nabla}\tilde{u}_\alpha|^{p-2}\tilde{\nabla}\tilde{u}_\alpha\tilde{\nabla}\Phi\mathrm{dv}_{\tilde{g}} + \alpha||u_\alpha||_p^{\theta-p}\int_{O_{x_0,2\delta}/H}\tilde{v}\tilde{u}_\alpha^{p-1}\Phi\mathrm{dv}_{\tilde{g}} \\ = \lambda_\alpha\int_{O_{x_0,2\delta}/H}\tilde{v}\tilde{u}_\alpha^{p^*-1}\Phi\mathrm{dv}_{\tilde{g}}.\end{aligned}$$

Ce qui signifie que $\tilde{u}_\alpha$ vérifie faiblement sur $(O_{x_0,2\delta}/H, \tilde{g})$ l'équation

$$-||\nabla u_\alpha||_p^{\theta-p}\tilde{\nabla}(\tilde{v}|\tilde{\nabla}\tilde{u}_\alpha|^{p-2}\tilde{\nabla}\tilde{u}_\alpha) + \alpha||u_\alpha||_p^{\theta-p}\tilde{v}\tilde{u}_\alpha^{p-1} = \lambda_\alpha\tilde{v}\tilde{u}_\alpha^{p^*-1} \qquad (E'_\alpha).$$

On remarque que cette équation ne diffère de l'équation vérifiée par u_α que par l'introduction de la fonction $\tilde{v}$ qui, on le rappelle, est $\mathcal{C}^\infty$ et positive sur $O_{x_0,2\delta}/H$. L'équation (E'_α) vérifée par $\tilde{u}_\alpha$ est fondamentale pour les démonstrations qui suivent.

Première inégalité fondamentale

On s'inspire de la démonstration proposée par Druet dans [14], articulée principalement autour de la technique du "blow up". La différence entre le problème qui se pose ici et celui traîté par Druet étant très minime (due à l'introduction de $\tilde{v}$ dans l'équation (E'_α)), on ne présentera qu'un schéma de la démonstration.

La démonstration se fait par l'absurde. Soit $\bar{x}_\alpha$ une suite de points tels que $\tilde{u}_\alpha(\bar{x}_\alpha) = \sup\tilde{u}_\alpha = ||\tilde{u}_\alpha||_\infty$. D'après (5.17), $\bar{x}_\alpha$ converge vers $\bar{x}_0$. On définit sur $O_{x_0,2\delta}/H$ les fonctions z_α par

$$z_\alpha(\bar{x}) = \mathrm{d}_{\tilde{g}}(\bar{x}, \bar{x}_\alpha)^{\frac{n-k}{p}-1}\tilde{u}_\alpha(\bar{x}).$$

Nier la première inégalité fondamentale revient à supposer qu'il existe une sous suite (notée encore (z_α)) telle que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} ||z_\alpha||_\infty = +\infty.$$

Soit $\bar{y}_\alpha$ tel que $z_\alpha(\bar{y}_\alpha) = ||z_\alpha||_\infty$. On fait un "blow up" en $\bar{y}_\alpha$ de coefficient de dilatation $k_\alpha = \tilde{u}_\alpha(\bar{y}_\alpha)^{\frac{p}{p-(n-k)}}$ sur les fonctions $\tilde{u}_\alpha$. Plus précisément, on considère la carte exponentielle

$$(B_{\bar{y}_\alpha}, \exp_{\bar{y}_\alpha}^{-1}),$$

où $B_{\bar{y}_\alpha}$ est une boule de $O_{x_0,2\delta}/H$ de centre $\bar{y}_\alpha$ et de rayon ρ suffisamment petit, et où

$$\exp_{\bar{y}_\alpha}^{-1} B_{\bar{y}_\alpha} = B_0(\rho) \subset \mathbb{R}^{n-k}.$$

On définit sur $B_0(\rho)$ la métrique

$$g_\alpha = \exp_{\bar{y}_\alpha}^* \tilde{g}$$

et la fonction

$$v_\alpha = \tilde{u}_\alpha \circ \exp_{\bar{y}_\alpha}.$$

On considère l'application Ψ_{k_α}, définie de $B_0(\rho)$ dans $B_\alpha = B_0(k_\alpha\rho) \subset \mathbb{R}^{n-k}$ par $\Psi_{k_\alpha}(x) = k_\alpha x$ avec $k_\alpha = \tilde{u}_\alpha(\bar{y}_\alpha)^{\frac{p}{p-(n-k)}}$. Sur B_α on considère la métrique

$$g'_\alpha = \tilde{u}_\alpha(\bar{y}_\alpha)^{\frac{2p}{p-(n-k)}} (\Psi_{k_\alpha}^{-1})^* g_\alpha = k_\alpha^2 (\Psi_{k_\alpha}^{-1})^* g_\alpha,$$

et la fonction

$$w_\alpha = \frac{1}{\tilde{u}_\alpha(\bar{y}_\alpha)} v_\alpha \circ \Psi_{k_\alpha}^{-1}.$$

De l'équation (E'_α) vérifiée par $\tilde{u}_\alpha$ sur $O_{x_0,2\delta}/H$ on déduit l'équation vérifiée par w_α sur (B_α, g'_α). On note $\hat{v}$ la fonction définie sur B_α par $\hat{v} = \tilde{v} \circ \Psi_{k_\alpha}^{-1} \circ \exp_{\bar{y}_\alpha}$. Alors w_α vérifie faiblement

$$-||\nabla u_\alpha||_p^{\theta-p} \nabla_{g'_\alpha}(\hat{v}|\nabla_{g'_\alpha} w_\alpha|^{p-2}\nabla_{g'_\alpha} w_\alpha) + \alpha k_\alpha^{-p} ||u_\alpha||_p^{\theta-p} \hat{v} w_\alpha^{p-1} = \lambda_\alpha \hat{v} w_\alpha^{p^*-1} \quad (5.36)$$

Notons de plus que

$$w_\alpha(0) = 1, \quad (5.37)$$

et

$$\int_{B_\alpha} w_\alpha^{p^*} \mathrm{dv}_{g'_\alpha} = \int_{B_{\bar{y}_\alpha}} \tilde{u}_\alpha^{p^*} \mathrm{dv}_{\tilde{g}}.$$

Rappelons d'autre part que d'après (5.7)

$$\lim_{\alpha\to+\infty} ||\nabla u_\alpha||_p^{\theta-p} = \frac{A^{\frac{\theta-p}{n-k}}}{K^{\theta-p}(n-k,p)}.$$

La suite de la démonstration consiste à montrer que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_{B_0(1)} w_\alpha^{p^*} \mathrm{dv}_{g'_\alpha} = 0. \quad (5.38)$$

La démonstration de ce dernier point est longue et technique, mais identique à celle proposée dans Druet [14], à laquelle on pourra se réferrer (la différence entre l'équation (5.36) vérifiée par w_α et celle vérifiée dans Druet [14] n'apporte aucune modification à la démonstration).

La méthode d'itération de Moser (voir par exemple Serrin [24], Trüdinger [29] ou Véron [31]) appliquée à l'équation (5.36) sur la boule $B_0(1)$ permet ensuite, grâce à (5.38), de montrer que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} ||w_\alpha||_{H_1^l(B_0(\frac{1}{2}))} = 0,$$

où l peut être choisi aussi grand que l'on veut. Comme $H_1^l(B_0(\frac{1}{2})) \subset \mathcal{C}^{0,\beta}(B_0(\frac{1}{2}))$ pour l suffisamment grand, on en déduit que w_α converge uniformément vers la fonction nulle dans $B_0(\frac{1}{2})$, ce qui contredit (5.37), et termine ainsi la démonstration de la première inégalité fondamentale.

Deuxième inégalité fondamentale

Le groupe G induit sur $O_{x_0,2\delta}/H$ un groupe d'isométries (noté S), isomorphe à G/H, construit de la manière suivante. Quel que soit $\bar{x} \in O_{x_0,2\delta}/H$, on pose $\bar{\sigma}(\bar{x}) = \Pi \circ \sigma(x)$, où $\sigma \in G$ et x est tel que $\Pi(x) = \bar{x}$. Comme H est un sous groupe normal de G, on vérifie aisément que $\Pi \circ \sigma(x)$ ne dépend pas du représentant x de $\bar{x}$. Par construction, $\bar{\sigma} \circ \Pi = \Pi \circ \sigma$. D'après la définition de Π et comme σ est une isométrie, on déduit que quels que soient X et Y dans $\mathrm{T}_{\bar{x}}(O_{x_0,2\delta}/H)$, $\tilde{g}_{\bar{\sigma}(\bar{x})}(\mathrm{d}\bar{\sigma}_{\bar{x}}X, \mathrm{d}\bar{\sigma}_{\bar{x}}Y) = \tilde{g}_{\bar{x}}(X, Y)$. Alors $\bar{\sigma}$ est une isométrie de $(O_{x_0,2\delta}/H, \tilde{g})$.

Dans la suite, on note (sans confusion possible) $O_{\bar{x}}$ l'orbite de $\bar{x}$ pour le groupe S. Le lemme suivant se démontre sans difficultés.

Lemme 10. *Sous l'action de S, $O_{x_0,2\delta}/H$ admet pour seul point fixe $\bar{x}_0$, et quel que soit $\bar{x} \neq \bar{x}_0$, $\dim O_{\bar{x}} \geq 1$.*

Démonstration. Quelle que soit $\bar{\sigma} \in S$, $\bar{\sigma}(\bar{x}_0) = \bar{\sigma} \circ \Pi(x_0) = \Pi \circ \sigma(x_0)$. On sait par hypothèse que $O_{x_0,G} = O_{x_0,H}$, d'où $\sigma(x_0)$ appartient à $O_{x_0,H}$, et $\bar{\sigma}(\bar{x}_0) = \Pi \circ \sigma(x_0) = \bar{x}_0$.

Soit à présent $\bar{x} \neq \bar{x}_0$. Supposons que $\dim O_{\bar{x}} = 0$, cela signifie que $O_{\bar{x}}$ est une orbite finie $\{\bar{x}, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m\}$. D'après la construction de S, cela implique que $O_{x,G}$ est de la forme $\bigcup_{i=1,\ldots,m} O_{x_i,H}$, et on a donc $\dim O_{x,G} = \dim O_{x_i,H}$. Or les H-orbites sont toutes de même dimension, car elles sont toutes principales par hypothèse. On a alors $\dim O_{x,G} = \dim O_{x_0,H} = \dim O_{x_0,G}$, d'après la condition 2. de l'hypothèse (H_2), ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\dim O_{x,G} > \dim O_{x_0,G}$. Le lemme est ainsi démontré. $\square$

Comme $\bar{x}_0$ est un point fixe pour S, on peut considérer sur l'espace tangent $\mathrm{T}_{\bar{x}_0}(O_{x_0,2\delta}/H)$ muni du produit scalaire $\tilde{g}_{\bar{x}_0}$, le groupe d'isométries "dérivé" du groupe S défini par $S' = \{\mathrm{d}\bar{\sigma}_{\bar{x}_0} | \bar{\sigma} \in S\}$. Soit $\rho > 0$ suffisamment petit pour que l'application $\exp_{\bar{x}_0}$ soit un difféomorphisme de $B_0(\rho)$ dans $B_{\bar{x}_0}(\rho)$, où $B_0(\rho)$ (resp. $B_{\bar{x}_0}(\rho)$) est la boule de rayon ρ de $(\mathrm{T}_{\bar{x}_0}(O_{x_0,2\delta}/H), \tilde{g}_{\bar{x}_0})$ (resp. $(O_{x_0,2\delta}/H, \tilde{g})$) centrée en 0 (resp. $\bar{x}_0$). On vérifie aisément, compte tenu des propriétés de l'application exponentielle $\exp_{\bar{x}_0}$, que sur $\mathrm{T}_{\bar{x}_0}(O_{x_0,2\delta}/H)$, $\mathrm{d}\bar{\sigma}_{\bar{x}_0} = \exp_{\bar{x}_0}^{-1} \circ \bar{\sigma} \circ \exp_{\bar{x}_0}$ et que, quel que soit $\bar{x} \in B_{\bar{x}_0}(\rho)$, $\exp_{\bar{x}_0}^{-1} O_{\bar{x}} = O_{\exp_{\bar{x}_0}^{-1} \bar{x}, S'}$. D'autre part, puisque $\overline{B_0(\rho)}$ et $\overline{B_{\bar{x}_0}(\rho)}$ sont compacts, la distance sur $B_0(\rho)$

associée au produit scalaire $\exp_{\bar{x}_0}^* \tilde{g}$ est équivalente à la distance sur $B_{\bar{x}_0}(\rho)$ associée au tenseur métrique $\tilde{g}$. De ces dernières remarques on déduit que montrer la deuxième inégalité fondamentale $\mathrm{d}_{\tilde{g}}(\bar{x}_\alpha, \bar{x}_0)(\sup \tilde{u}_\alpha)^{\frac{p}{n-k-p}} < C$, est équivalent à montrer sur $\mathrm{T}_{\bar{x}_0}(O_{x_0,2\delta}/H)$:

$$\mathrm{d}_{\tilde{g}_{\bar{x}_0}}(\exp^{-1}(\bar{x}_\alpha), 0)(\sup(\tilde{u}_\alpha \circ \exp^{-1}))^{\frac{p}{n-k-p}} \leq C.$$

On rappelle que, comme $\bar{x}_\alpha$ converge vers $\bar{x}_0$, pour α suffisamment grand les orbites de $O_{\bar{x}_\alpha}$ (resp. $O_{\exp^{-1}_{\bar{x}_\alpha}, S'}$) sont dans $B_{\bar{x}_0}(\rho)$ (resp. dans $B_0(\rho)$). Dans la suite, à isométrie I près, on identifie $(\mathrm{T}_{\bar{x}_0}(O_{x_0,2\delta}/H), \tilde{g}_{\bar{x}_0})$ à $(\mathbb{R}^{n-k}, \xi)$ (où ξ est le produit scalaire euclidien), et pour ne pas alourdir l'écriture, on conserve sur $\mathbb{R}^{n-k}$ les mêmes notations que sur $O_{x_0,2\delta}/H$ (on note toujours $\bar{x}$, $\tilde{u}_\alpha$, $O_{\bar{x}_\alpha} = O_{\bar{x}_\alpha, S'}$...). Il s'agit de démontrer que sur $(\mathbb{R}^{n-k}, \xi)$, il existe $C > 0$ tel que, quel que soit α

$$\mathrm{d}_\xi(\bar{x}_\alpha, 0)(\sup \tilde{u}_\alpha)^{\frac{p}{n-k-p}} \leq C \tag{5.39}$$

Cette inégalité est équivalente à la deuxième inégalité fondamentale. L'intérêt des constructions précédentes est de pouvoir dans la suite de la démonstration utiliser la notion de barycentre, notion classique sur $\mathbb{R}^n$, mais bien plus délicate sur une variété quelconque.

Soit S'_I la composante connexe de l'identité du groupe S', $O_{\bar{x}_\alpha, S'_I}$ l'orbite de $\bar{x}_\alpha$ sous S'_I ($O_{\bar{x}_\alpha, S'_I}$ est connexe, de plus si S' est connexe $O_{\bar{x}_\alpha, S'_I} = O_{\bar{x}_\alpha}$). On note $DO_{\bar{x}_\alpha, S'_I}$ le diamètre de l'orbite $O_{\bar{x}_\alpha, S'_I}$, ie la plus grande distance entre deux points. On démontre le lemme suivant.

Lemme 11. *Sur $(\mathbb{R}^{n-k}, \xi)$ muni du groupe d'isométries S', on considère $\tilde{u}_\alpha$ une suite de fonctions S'-invariantes et $(\bar{x}_\alpha)$ une suite convergeant vers 0, telle que $\tilde{u}_\alpha(\bar{x}_\alpha) = \sup \tilde{u}_\alpha$. Alors il existe $C > 0$ tel que quel que soit α*

$$DO_{\bar{x}_\alpha, S'_I}(\sup \tilde{u}_\alpha)^{\frac{p}{n-k-p}} \leq C.$$

Démonstration. La démonstration se fait par l'absurde. Supposons que $DO_{\bar{x}_\alpha, S'_I}(\sup \tilde{u}_\alpha)^{\frac{p}{n-k-p}}$ admette une sous suite ayant pour limite $+\infty$. Remarquons qu'alors il existe N_α une suite d'entiers telle que $\lim_{\alpha \to +\infty} N_\alpha = +\infty$ et, quel que soit α,

$$DO_{\bar{x}_\alpha, S'_I}(\sup \tilde{u}_\alpha)^{\frac{p}{n-k-p}} \geq N_\alpha^2. \tag{5.40}$$

Première étape On montre que pour chaque α on peut choisir N_α boules disjointes, isométriques entre elles, centrées en des points de $O_{\bar{x}_\alpha, S'_I}$, et de rayon r_α tel que

$$\frac{N_\alpha r_\alpha}{DO_{\bar{x}_\alpha, S'_I}} > \frac{1}{2}. \tag{5.41}$$

Pour cela, on considère deux points A et B réalisant le diamètre $O_{\bar{x}_\alpha, S'_I}$. Comme cette orbite est connexe, il existe un chemin γ sur $O_{\bar{x}_\alpha, S'_I}$ tel que $\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = B$. On considère f la fonction définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(t) = \mathrm{d}(\gamma(t), A)$. Alors f est continue, $f(0) = 0$, $f(1) = DO_{\bar{x}_\alpha, S'_I}$. Pour i de 1 à N_α, on considère les points $\bar{x}_{i\alpha} = \gamma(t_i)$ tels que

$$f(t_i) = \frac{iDO_{\bar{x}_\alpha, G_I}}{N_\alpha}.$$

Alors pour $i > j$,

$$\begin{aligned} d(\bar{x}_{i\alpha}, \bar{x}_{j\alpha}) &\geq d(\bar{x}_{i\alpha}, A) - d(\bar{x}_{j\alpha}, A) = f(t_i) - f(t_j) \\ &= \frac{(i-j)}{N_\alpha} DO_{\bar{x}_\alpha, S'_I} \geq \frac{DO_{\bar{x}_\alpha, S'_I}}{N_\alpha} \end{aligned}$$

Prenons $r_\alpha = \frac{DO_{\bar{x}_\alpha, S'_I}}{2N_\alpha}$, les boules $B_{\bar{x}_{i\alpha}}(r_\alpha)$ sont alors disjointes et isométriques entre elles, et on a (5.41).

Remarquons alors que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_{B_{\bar{x}_\alpha}(r_\alpha)} \tilde{u}_\alpha^{p^*} dv_{\tilde{g}} = 0 \tag{5.42}$$

et

$$\lim_{\alpha \to +\infty} r_\alpha (\sup \tilde{u}_\alpha)^{\frac{p}{n-k-p}} = +\infty. \tag{5.43}$$

En effet, comme $\int_{O_{\bar{x}_\alpha}} \tilde{u}_\alpha^{p^*} dv_{\tilde{g}} \leq C$ et que, pour α fixé, les boules $B_{\bar{x}_{i\alpha}}(r_\alpha)$ sont disjointes et isométriques entre elles,

$$\int_{B_{\bar{x}_\alpha}(r_\alpha)} \tilde{u}_\alpha^{p^*} dv_{\tilde{g}} \leq \frac{1}{N_\alpha},$$

ce qui prouve (5.42). On trouve (5.43) en réinjectant (5.41) dans (5.40).

Deuxième étape La contradiction cherchée sera obtenue en faisant un "blow up" en $\bar{x}_\alpha$ de coefficient de dilatation $k_\alpha = (\sup \tilde{u}_\alpha)^{\frac{p}{n-k-p}}$ sur les fonctions $\tilde{u}_\alpha$. Pour cela on considère les boules $B_{\bar{x}_\alpha}(r_\alpha)$ où les $\bar{x}_\alpha$ convergent vers $\bar{x}_0$ et vérifient $\tilde{u}_\alpha(\bar{x}_\alpha) = ||\tilde{u}_\alpha||_\infty$, les rayons r_α vérifiant (5.41). Soit la carte exponentielle $(B_{\bar{x}_\alpha}(r_\alpha), \exp_{\bar{x}_\alpha}^{-1})$, où $\exp_{\bar{x}_\alpha}^{-1} B_{\bar{x}_\alpha}(r_\alpha) \subset \mathbb{R}^{n-k}$. On définit sur $B_0(r_\alpha)$ la métrique $g_\alpha = \exp_{\bar{x}_\alpha}^* \tilde{g}$ et la fonction $v_\alpha = \tilde{u}_\alpha \circ \exp_{\bar{x}_\alpha}$. On considère l'application Ψ_{k_α} définie de $B_0(r_\alpha)$ dans la boule $B_\alpha = B_0(k_\alpha r_\alpha) \subset \mathbb{R}^{n-k}$ par $\Psi_{k_\alpha(x)} = k_\alpha x$, où $k_\alpha = (\sup \tilde{u}_\alpha)^{\frac{p}{n-k-p}} = ||\tilde{u}_\alpha||_\infty^{\frac{p}{p-(n-k)}}$. Sur B_α on considère la métrique

$$g'_\alpha = k_\alpha^2 (\Psi_{k_\alpha}^{-1})^* g_\alpha$$

et la fonction

$$w_\alpha = \frac{1}{||u_\alpha||_\infty} (v_\alpha \circ \Psi_{k_\alpha}^{-1}).$$

D'après (5.43) le rayon $k_\alpha r_\alpha = (\sup \tilde{u}_\alpha)^{\frac{p}{p-(n-k)}} r_\alpha$ tend vers $+\infty$ avec α (et c'est là un point essentiel de la démonstration).

De l'équation (E'_α) vérifiée par $\tilde{u}_\alpha$ sur $(O_{x_0,2\delta}/H, \tilde{g})$, on déduit l'équation vérifiée par w_α sur (B_α, g'_α). Il suffit pour cela de remarquer que $\Psi_{k_\alpha} \circ \exp^{-1}$ est une isométrie de $(B_{\bar{x}_\alpha}(\rho), g)$ dans (B_α, g''_α) pour la métrique $g''_\alpha = (\Psi_{k_\alpha}^{-1})^* g_\alpha$. L'équation vérifiée par w_α sur $(B_{k_\alpha}, g''_\alpha)$ s'obtient immédiatement, et comme $g'_\alpha = k_\alpha^2 g''_\alpha$, on en déduit que w_α est solution faible dans (B_α, g'_α) de

$$-||\nabla u_\alpha||_p^{\theta-p} \nabla_{g'_\alpha} (\hat{v} |\nabla_{g'_\alpha} w_\alpha|^{p-2} \nabla_{g'_\alpha} w_\alpha) + \alpha k_\alpha^{-p} ||u_\alpha||_p^{\theta-p} \hat{v} w_\alpha^{p-1} = \lambda_\alpha \hat{v} w_\alpha^{p^*-1} \tag{E''_α}$$

où $\hat{v}$ est la fonction définie sur B_α par $\hat{v} = \tilde{v} \circ \Psi_{k_\alpha}^{-1} \circ \exp_{\bar{x}_\alpha}$. Notons de plus que

$$w_\alpha(0) = 1 \tag{5.44}$$

et

$$\int_{B_\alpha} w_\alpha^{p^*} \mathrm{dv}_{g'_\alpha} = \int_{B_{\bar{x}_\alpha}(r_\alpha)} \tilde{u}_\alpha^{p^*} \mathrm{dv}_{\tilde{g}}.$$

Rappelons d'autre part que d'après (5.7)

$$\lim_{\alpha\to+\infty} ||\nabla u_\alpha||_p^{\theta-p} = \frac{A^{\frac{\theta-p}{n-k}}}{K^{\theta-p}(n-k,p)}.$$

Comme le rayon de B_α tend vers l'infini, pour α assez grand $B_0(1) \subset B_\alpha$. La méthode d'itération de Moser appliquée à l'équation (E''_α) sur la boule $B_0(1)$ (voir par exemple Serrin [24], Trudinger [29] ou Veron [31]) permet alors grâce à (5.42) de montrer que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} ||w_\alpha||_{H_1^l(B_0(\frac{1}{2}))} = 0,$$

où l peut être choisi aussi grand que l'on veut. Comme $H_1^l(B_0(\frac{1}{2})) \subset \mathcal{C}^{0,\beta}(B_0(\frac{1}{2}))$ pour l suffisamment grand, on en déduit que w_α converge uniformément vers une fonction nulle dans $B_0(\frac{1}{2})$, ce qui contredit (5.44) et termine ainsi la démonstration du Lemme 11. □

La suite de la démonstration de la deuxième inégalité fondamentale va utiliser la notion de barycentre d'une orbite de $(\mathbb{R}^{n-k}, \xi)$ sous l'action du groupe d'isométries S'.

Définition (Barycentre). *On appelle I le barycentre d'une orbite l'unique point tel que $\int_{x\in O_{\bar{x}}} \overrightarrow{Ix} = 0$. Si $O_{\bar{x}}$ est une orbite finie $\{A_1, \ldots, A_n\}$, alors I est l'unique point tel que $\Sigma\, \overrightarrow{IA_i} = 0$.*

L'existence et l'unicité du barycentre se démontrent sans difficulté :

$$\int_{x\in O_{\bar{x}}} (\overrightarrow{I0} + \overrightarrow{0x})\mathrm{d}\xi = \mathrm{vol}\,(O_{\bar{x}})\ \overrightarrow{I0} + \int_{x\in O_{\bar{x}}} \overrightarrow{0x}\ \mathrm{d}\xi = 0.$$

$$\overrightarrow{I0} = \frac{\int_{x\in O_{\bar{x}}} \overrightarrow{0x}\ \mathrm{d}\xi}{\mathrm{vol}\, O_{\bar{x}}}.$$

Ce point est connu et unique car on connait 0.

La notion de barycentre est utilisée dans la démonstration du Lemme qui suit.

Lemme 12. *Sous les mêmes hypothèses que pour le Lemme 11*

$$\mathrm{d}_\xi(\bar{x}_\alpha, 0) \le DO_{\bar{x}_\alpha, S'_I}.$$

Démonstration. On commence par prouver que quelle que soit $O_{\bar{x}}$ une S'-orbite, toutes ses composantes connexes et en particulier $O_{\bar{x}_\alpha, S'_I}$ ont pour barycentre 0. Les composantes connexes O_{C_i} de $O_{\bar{x}_\alpha}$ sont en nombre fini. Soit I_i le barycentre de O_{C_i}, pour tout $\sigma \in S'$, $\bar{\sigma}(I_i)$ est alors le barycentre de $\bar{\sigma}(O_{C_i}) = O_{C_j}$, et l'orbite de I_i est finie sous S'. D'après le Lemme 10, quel que soit i, $I_i = 0$. On peut alors écrire

$$\overrightarrow{\bar{x}_\alpha 0} = \frac{1}{\mathrm{vol}\, O_{\bar{x}_\alpha, S'_I}} \int_{O_{\bar{x}_\alpha, S'_I}} \overrightarrow{\bar{x}_\alpha x}$$

d'où

$$\mathrm{d}_\xi(\bar{x}_\alpha, 0) \le \frac{1}{\mathrm{vol}\, O_{\bar{x}_\alpha, S'_I}} \int_{O_{\bar{x}_\alpha, S'_I}} \mathrm{d}(\bar{x}_\alpha, x) \le \frac{1}{\mathrm{vol}\, O_{\bar{x}_\alpha, S'_I}} D O_{\bar{x}_\alpha, S'_I} \int_{O_{\bar{x}_\alpha, S'_I}} 1 = D O_{\bar{x}_\alpha, S'_I}$$

et on a démontré le Lemme 12. L'inégalité (5.39) est une conséquence immédiate des Lemmes 11 et 12, et la deuxième inégalité fondamentale est démontrée. □

5.4.3 Argument final

Une fois prouvées les deux inégalités fondamentales, on est en mesure de trouver une absurdité dans l'inégalité $\alpha \le (5.33) + (5.34) + (5.35)$ et de conclure. On commence par prouver $(5.34) \le C$ à l'aide de la première inégalité fondamentale. On reprend là aussi les méthodes utilisées par Druet dans [14].

On démontre tout d'abord

$$\frac{[\int_{O_{x_0, 2\delta/H}} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar{x}, \bar{x}_\alpha)(\tilde\eta \tilde u_\alpha)^p \mathrm{dv}_{\tilde g}]^{\frac{\theta}{p}}}{||u_\alpha||_p^\theta} \le C. \tag{5.45}$$

On a

$$\left[\int_{O_{x_0, 2\delta/H}} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar{x}, \bar{x}_\alpha)(\tilde\eta \tilde u_\alpha)^p \mathrm{dv}_{\tilde g}\right]^{\frac{\theta}{p}} \le C \left[\int_{O_{x_0, 2\delta/H}} \tilde u_\alpha^p \mathrm{dv}_{\tilde g}\right]^{\frac{\theta}{p}}.$$

Or, d'après (5.19)

$$\int_{O_{x_0, 2\delta/H}} \tilde u_\alpha^p \mathrm{dv}_{\tilde g} \le C \int_{O_{x_0, 2\delta/H}} \tilde u_\alpha^p \tilde v \mathrm{dv}_{\tilde g} = C \int_{O_{x_0, 2\delta}} u_\alpha^p \mathrm{dV}$$

et (5.45) est prouvé. On montre ensuite que

$$\frac{\int_{O_{x_0, 2\delta/H}} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar{x}, \bar{x}_\alpha)(\tilde\eta \tilde u_\alpha)^{p^*} \mathrm{dv}_{\tilde g}}{||u_\alpha||_p^\theta} \le C. \tag{5.46}$$

Pour cela on distingue deux cas.

Cas $p \le 2$. En utilisant la première inégalité fondamentale, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{O_{x_0, 2\delta/H}} (\tilde\eta \tilde u_\alpha)^{p^*} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar{x}_\alpha, \bar{x}) \mathrm{dv}_{\tilde g} &= \int_{O_{x_0, 2\delta/H}} \tilde\eta^{p^*} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar{x}_\alpha, \bar{x}) \tilde u_\alpha^{p^* - p} \tilde u_\alpha^p \mathrm{dv}_{\tilde g} \\ &\le C \int_{O_{x_0, 2\delta/H}} \mathrm{d}^{2-p}_{\tilde g}(\bar{x}_\alpha, \bar{x}) \tilde u_\alpha^p \mathrm{dv}_{\tilde g} \le C \int_{O_{x_0, 2\delta/H}} \tilde u_\alpha^p \mathrm{dv}_{\tilde g}.\end{aligned}$$

L'inégalité (5.46) lorsque $p \le 2$ s'en déduit immédiatement d'après ce que l'on a vu précédemment.

Cas $p > 2$, $\theta = 2$. Remarquons que

$$\mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar{x}, \bar{x}_\alpha)(\tilde\eta \tilde u_\alpha)^{p^*} = \tilde\eta^{p^*} \tilde u_\alpha (\mathrm{d}_{\tilde g}(\bar{x}, \bar{x}_\alpha) \tilde u_\alpha^{\frac{p^*}{2}})(\mathrm{d}_{\tilde g}(\bar{x}, \bar{x}_\alpha) \tilde u_\alpha^{\frac{p}{n-k-p}}) \tilde u_\alpha^{p^* \frac{p-2}{2p}}.$$

D'après Hölder et en utilisant la première inégalité fondamentale :

$$\int_{O_{x_0, 2\delta/H}} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar{x}, \bar{x}_\alpha)(\tilde\eta \tilde u_\alpha)^{p^*} \mathrm{dv}_{\tilde g} \le$$

$$C \left(\int_{O_{x_0, 2\delta/H}} \tilde u_\alpha^p \mathrm{dv}_{\tilde g}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{O_{x_0, 2\delta/H}} \tilde u_\alpha^{p^*} \mathrm{dv}_{\tilde g}\right)^{\frac{p-2}{2p}} \left(\int_{O_{x_0, 2\delta/H}} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar{x}, \bar{x}_\alpha)(\tilde\eta \tilde u_\alpha)^{p^*} \mathrm{dv}_{\tilde g}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où
$$\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)(\tilde\eta\tilde u_\alpha)^{p^*}\mathrm{dv}_{\tilde g} \le C\left(\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde u_\alpha^p \mathrm{dv}_{\tilde g}\right)^{\frac{2}{p}}.$$
On a démontré (5.46) lorsque $p>2$. Ensuite on montre que
$$\frac{\left[\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)|\tilde\nabla(\tilde\eta\tilde u_\alpha)|^p\mathrm{dv}_{\tilde g}\right]^{\frac{\theta}{p}}}{||u_\alpha||_p^\theta} \le C. \tag{5.47}$$

Remarquons que
$$\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)|\tilde\nabla(\tilde\eta\tilde u_\alpha)|^p\mathrm{dv}_{\tilde g}$$
$$\le C\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)\tilde\eta^p|\tilde\nabla\tilde u_\alpha|^p\mathrm{dv}_{\tilde g} + C\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \mathrm{d}_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)\tilde u_\alpha^p\mathrm{dv}_{\tilde g}.$$
On a déjà montré
$$\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \mathrm{d}_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)\tilde u_\alpha^p\mathrm{dv}_{\tilde g} \le C,$$
il reste à majorer $\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)\tilde\eta^p|\tilde\nabla\tilde u_\alpha|^p\mathrm{dv}_{\tilde g}$. On distingue deux cas.

Cas $p\le 2$. En reprenant l'expression (E'_α) avec $\Phi=\tilde\eta\tilde u_\alpha\mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)$ on trouve
$$\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde\eta^p|\tilde\nabla\tilde u_\alpha|^p\mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)\mathrm{dv}_{\tilde g}$$
$$\le C\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde\eta^p\tilde u_\alpha^{p^*}\mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)\mathrm{dv}_{\tilde g} + C\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde\eta^p\tilde u_\alpha|\tilde\nabla\tilde u_\alpha|^{p-1}\mathrm{d}_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)\mathrm{dv}_{\tilde g}$$
$$+C\int_{O_{x_0,2\delta/H}\setminus O_{x_0,\delta/H}} \tilde u_\alpha|\tilde\nabla\tilde u_\alpha|^{p-1}\mathrm{dv}_{\tilde g}$$

et d'après Hölder
$$\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde\eta^p|\tilde\nabla\tilde u_\alpha|^p\mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)\mathrm{dv}_{\tilde g}$$
$$\le C\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde\eta^{p^*}\tilde u_\alpha^{p^*}\mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)\mathrm{dv}_{\tilde g} + C\int_{O_{x_0,2\delta/H}\setminus O_{x_0,\delta/H}} |\tilde\nabla\tilde u_\alpha|^{p-1}\tilde u_\alpha\mathrm{dv}_{\tilde g}$$
$$+C\left[\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde u_\alpha^p\mathrm{dv}_{\tilde g}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{O_{x_0,2\delta/H}} |\tilde\nabla\tilde u_\alpha|^p\mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)\mathrm{dv}_{\tilde g}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$
car $\frac{p}{p-1}\ge 2$ quand $p\le 2$. D'après l'inégalité de Young
$$\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde\eta^p|\tilde\nabla\tilde u_\alpha|^p\mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)\mathrm{dv}_{\tilde g}$$
$$\le C\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde\eta^p\tilde u_\alpha^{p^*}\mathrm{d}^2_{\tilde g}(\bar x,\bar x_\alpha)\mathrm{dv}_{\tilde g} + C\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde u_\alpha^p\mathrm{dv}_{\tilde g}$$
$$+C\int_{O_{x_0,2\delta/H}\setminus O_{x_0,\delta/H}} |\tilde\nabla\tilde u_\alpha|^{p-1}\tilde u_\alpha\mathrm{dv}_{\tilde g}.$$

Or
$$\int_{O_{x_0,2\delta/H}\setminus O_{x_0,\delta/H}} |\tilde{\nabla}\tilde{u}_\alpha|^{p-1}\tilde{u}_\alpha \mathrm{dv}_{\tilde{g}} \le C\int_{M\setminus O_{x_0,\delta}} |\nabla u_\alpha|^{p-1}u_\alpha \mathrm{dV}.$$
En reprenant ce qui a été dit précédemment, on a bien (5.47) lorsque $p\le 2$.

Cas $p>2$. Toujours en reprenant (E'_α) avec $\Phi=\tilde{\eta}\tilde{u}_\alpha \mathrm{d}^2_{\tilde{g}}(\bar{x},\bar{x}_\alpha)$ on trouve

$$\begin{aligned}&\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde{\eta}^p|\tilde{\nabla}\tilde{u}_\alpha|^p \mathrm{d}^2_{\tilde{g}}(\bar{x},\bar{x}_\alpha)\mathrm{dv}_{\tilde{g}}\\ &\quad\le C\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde{\eta}^p\tilde{u}_\alpha^{p^*}\mathrm{d}^2_{\tilde{g}}(\bar{x},\bar{x}_\alpha)\mathrm{dv}_{\tilde{g}} + C\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde{\eta}^p\tilde{u}_\alpha|\tilde{\nabla}\tilde{u}_\alpha|^{p-1}\mathrm{d}_{\tilde{g}}(\bar{x},\bar{x}_\alpha)\mathrm{dv}_{\tilde{g}}\\ &\quad+C\int_{O_{x_0,2\delta/H}\setminus O_{x_0,\delta}} \tilde{u}_\alpha|\tilde{\nabla}\tilde{u}_\alpha|^{p-1}\mathrm{dv}_{\tilde{g}}\end{aligned}$$

et d'après Hölder

$$\begin{aligned}&\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde{\eta}^p|\tilde{\nabla}\tilde{u}_\alpha|^p \mathrm{d}^2_{\tilde{g}}(\bar{x},\bar{x}_\alpha)\mathrm{dv}_{\tilde{g}} \le C\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde{\eta}^p\tilde{u}_\alpha^{p^*}\mathrm{d}^2_{\tilde{g}}(\bar{x},\bar{x}_\alpha)\mathrm{dv}_{\tilde{g}}\\ &\quad+C\left[\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde{\eta}^p|\tilde{\nabla}\tilde{u}_\alpha|^p \mathrm{d}^2_{\tilde{g}}(\bar{x},\bar{x}_\alpha)\mathrm{dv}_{\tilde{g}}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde{\eta}^p\tilde{u}_\alpha^p\mathrm{dv}_{\tilde{g}}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde{\eta}^p|\tilde{\nabla}\tilde{u}_\alpha|^p\mathrm{dv}_{\tilde{g}}\right]^{\frac{p-2}{2p}}\\ &\quad+C\int_{O_{x_0,2\delta/H}\setminus O_{x_0,\delta/H}} \tilde{\eta}^p\mathrm{d}_{\tilde{g}}(\bar{x},\bar{x}_\alpha)\tilde{u}_\alpha|\tilde{\nabla}\tilde{u}_\alpha|^{p-1}\mathrm{dv}_{\tilde{g}}.\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Young, et comme

$$\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde{\eta}^p|\tilde{\nabla}\tilde{u}_\alpha|^p\mathrm{dv}_{\tilde{g}} \le C$$

on trouve

$$\begin{aligned}&\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde{\eta}^p|\tilde{\nabla}\tilde{u}_\alpha|^p \mathrm{d}^2_{\tilde{g}}(\bar{x},\bar{x}_\alpha)\mathrm{dv}_{\tilde{g}}\\ &\quad\le C\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde{\eta}^p\tilde{u}_\alpha^{p^*}\mathrm{d}^2_{\tilde{g}}(\bar{x},\bar{x}_\alpha)\mathrm{dv}_{\tilde{g}} + C\left[\int_{O_{x_0,2\delta/H}} \tilde{\eta}^p\tilde{u}_\alpha^p\mathrm{dv}_{\tilde{g}}\right]^{\frac{2}{p}}\\ &\quad+C\int_{O_{x_0,2\delta/H}\setminus O_{x_0,\delta/H}} |\tilde{\nabla}\tilde{u}_\alpha|^{p-1}\tilde{u}_\alpha\mathrm{dv}_{\tilde{g}}.\end{aligned}$$

D'après ce qui a été dit précédemment, on a bien (5.47) lorsque $p>2$. L'inégalité (5.34) est démontrée.

Pour démontrer (5.35), il suffit de remarquer la symétrie des expressions (5.34) et (5.35) et celle des inégalités fondamentales correspondantes. On peut ainsi reprendre tout le procédé précédent. Certaines étapes peuvent toute fois être simplifiées compte tenu du fait que pour α fixé, $\mathrm{d}_{\tilde{g}}(\bar{x}_0,\bar{x}_\alpha))$ est une constante.

On trouve finalement, comme dans le cas de l'hypothèse (H_1), $\alpha\le C$. Cette contradiction termine la démonstration du Théorème sous l'hypothèse (H_2).

5.5 Remarque

Dans cette partie, nous revenons au deuxième exemple de la partie 5.1.2 utilisant l'hypothèse (H_2), dans le cas particulier où S_n est de dimension impaire, et où $G = O(s_1) \times \ldots \times O(s_m)$ vérifie quel que soit i, s_i pair et $s_i \geq 2$. Dans ce cas, c'est l'hypothèse (H_1) qui sera utilisée.

Comme chaque s_i est pair et plus grand que 2, $K = SO_2 \times \ldots \times SO_2$ est un sous groupe de G, le nombre de facteurs de ce produit étant égal à $(n+1)/2$. On considère le sous groupe $G' = \{(\sigma, \ldots, \sigma) \in K | \sigma \in SO_2\}$. On montre alors le lemme suivant :

Lemme 13. *Quel que soit $X \in S_n$, $O_{X,G'}$ est un cercle de rayon* 1 *sur S_n.*

Démonstration. Soit $X = (X_1, \ldots, X_{(n+1)/2})$, où les $X_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, avec $\Sigma_1^{(n+1)/2}(x_i^2 + y_i^2) = 1$. On commence par montrer que $O_{X,G'} \subset P$, où P est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit $\theta \in G'$, $\theta = (\sigma, \ldots, \sigma)$, la matrice de $\sigma \in SO_2$ s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Alors $\theta(X) = (\sigma(X), \ldots, \sigma(X)) = \cos\alpha(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{(l+1)/2}, y_{(l+1)/2}) + \sin\alpha(y_1, -x_1, y_2, -x_2, \ldots, y_{(l+1)/2}, -x_{(l+1)/2}) = \cos\alpha X + \sin\alpha Y$. Comme $\Sigma_1^{(l+1)/2} x_i^2 + y_i^2 = 1$, X et Y sont indépendants dans $\mathbb{R}^{n+1}$, et $O_{X,G'}$ est donc inclu dans le plan engendré par X et Y. Comme $O_{X,G'} \subset S_n$, $O_{X,G'} \subset C$, où C est un cercle de rayon 1 de S_n. Comme $X \neq 0$, le sous groupe $S_{X,G'}$ de G' (fixateur de X) est réduit à l'identité. On en déduit donc que $O_{X,G'}$, équivalent à $SO_2/S_{X,G'}$, est de dimension 1. De plus, $O_{X,G'}$ est une sous variété compacte et connexe de C. Il suit que $O_{X,G'} = C$. $\square$

D'après le Lemme 13, toutes les G'-orbites sont de même dimension et de même volume 2π, elles sont toutes principales. Les conditions de l'hypothèse (H_1) du théorème sont donc vérifiées. On pourra remarquer que dans ce cas la démonstration du théorème sous l'hypothèse (H_1) est grandement simplifiée car la variété quotient S_n/G' existe globalement.

Bibliographie

[1] Aubin, Th. : "Espaces de Sobolev sur les variétés Riemanniennes", *Bulletin des Sciences Mathématiques, 100*, 1976, 149-173.

[2] Aubin, Th. : "Equations différentielles non linéaires et problèmes de Yamabe concernant la courbure scalaire", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 55*, 1976, 269-296.

[3] Aubin, Th. : "Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire", *Journal of Functional Analysis, 32*, 1979, 148-174.

[4] Aubin, Th. : *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*, Springer Monographs in Mathematics.

[5] Aubin, Th. and Cotsiolis, A. : "Equations elliptiques non linéaires sur S_n dans le cas supercritique", *Bulletin des Sciences Mathématiques, 123*, 1999, 33-45.

[6] Aubin, Th. and Cotsiolis, A. : "Equations non linéaires avec le p-Laplacien et la fonction exponentielle sur les variétés Riemanniennes compactes", *Bulletin des Sciences Mathématiques, 124*, 2000, 1-13.

[7] Berger, M. Gauduchon, P. et Mazet, E. : *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics, 194, 1971.

[8] Bredon, G.E. : *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, New York-London, 1972.

[9] Carlen, E.A. and Loss, M. : "Sharp constant in Nash's inequality", *International Mathematics Notices, 7*, 1993, 213-215.

[10] Cherrier, P. : "Meilleures constantes dans les inégalités relatives aux espaces de Sobolev", *Bulletin des Sciences Mathématiques, 108*, 1984, 225-262.

[11] Cherrier, P. : "Une inegalité de Sobolev sur les variétés Riemanniennes", *Bulletin des Sciences Mathematiques, 103*, 1979, 356-374.

[12] Demengel, F. and Hebey, E. : "On some non linear equations involving the p-Laplacian with critical Sobolev growth", *Prépublication de l'Université de Cergy-Pontoise*, 1997.

[13] Ding, W. :"On a conformally invariant elliptic equation on $\mathbb{R}^n$", *Communications in Mathematical Physics, 107*, 1986, 331-335.

[14] Druet, O. : "Best constants in Sobolev inequalities", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 326*, 1998, 965-969.

[15] Druet, O. : "Generalized scalar curvature type equations on compact Riemannian manifolds", *Compte Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 327*, 1998, 377.

[16] Druet, O. : "Optimal Sobolev inequalities of arbitrary order on compact riemannian manifolds" *Journal of Functional Analysis*

[17] Druet, O. Hebey, E. and Vaugon, M. : "Optimal Nash's inequalities on Riemannian manifolds : the influence of geometry", *International Mathematical Research Notices, 14*, 1999, 735-779.

[18] Guedda, M. et Veron, L. : "Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents", *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 13*, 1989, 879-902.

[19] Hebey, E. *Nonlinear analysis on manifolds : Sobolev spaces and inequalities*, Courant Institute of Mathematical Sciences, Lecture Notes in Mathematics, 5, 1999.

[20] Hebey, E. and Vaugon, M. : "Sobolev spaces in the presence of symmetries", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 76*, 1997, 859-881.

[21] Humbert, E. : "Best constants in the L^2 Nash inequality", *Prépublication de l'Université de Cergy-Pontoise*, 1999.

[22] Iliopoulos, D. : "Best constants for supercritical Sobolev inequalities and application to some quasilinear elliptic equations of scalar curvature type", *Bulletin des Sciences Mathématiques*, to appear.

[23] Schoen, R. : "Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature", *Journal of Differential Geometry, 20*, 1984, 479-495.

[24] Serrin, J. : "Local behavior of solutions of quasilinear equations", *Acta Mathematica, 111*, 1964, 247-302.

[25] Spivack

[26] Talenti, G. : "Best constants in Sobolev inequality", *Annali di Matematica Pura ed Applicata, 110*, 1976, 353-372.

[27] Tolksdorf, P. : "Regularity resultsfor a more general class of quasilinear elliptic equations", *Journal of differential Equations, 51*, 1984, 126-150.

[28] Trudinger, N. : "On embeddings into Orliz spaces and some applications", *Journal of Mathematics and Mechanics, 17*, 1967, 473-483.

[29] Trudinger, N. : "On Harnack type inequalities and their applications to quasilinear elliptic equations", *Communications on Pure and Applied Mathematics, 20*, 1967, 721-747.

[30] Vazquez, J.L. : "A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations", *Applied Mathematics and Optimizations, 12*, 1984, 191-202.

[31] Véron, L. : *Singularities of solutions of second order quasilinear equations*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 353, Longman, 1996.

Zoé Faget, 8, rue François Mouthon, 75015 Paris
zoef@noos.fr