



**HAL**  
open science

# Quelques résultats mathématiques et simulations numériques d'écoulements régis par des modèles bifluïdes.

David Ramos

► **To cite this version:**

David Ramos. Quelques résultats mathématiques et simulations numériques d'écoulements régis par des modèles bifluïdes.. Mathématiques [math]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2000. Français. NNT: . tel-00001347

**HAL Id: tel-00001347**

**<https://theses.hal.science/tel-00001347>**

Submitted on 17 May 2002

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Quelques résultats mathématiques et simulations  
numériques d'écoulements régis par des modèles  
bifluïdes

David RAMOS

15 décembre 2000



# Table des matières

Introduction	5
<b>I Quelques rappels</b>	<b>7</b>
<b>1 Linéarisation et problèmes bien posés</b>	<b>9</b>
1.1 Perturbation des données, stabilité . . . . .	9
1.2 Linéarisation . . . . .	10
1.3 Localisation . . . . .	11
1.4 Un exemple : l'équation de Burgers . . . . .	12
<b>2 Hyperbolicité</b>	<b>13</b>
2.1 Hyperbolicité des systèmes linéaires . . . . .	13
2.1.1 Analyse de stabilité . . . . .	14
2.1.2 Étude spectrale . . . . .	17
2.1.3 Plus que l'hyperbolicité... . . . .	18
2.2 Hyperbolicité des systèmes quasi-linéaires . . . . .	19
2.2.1 Définition . . . . .	19
2.2.2 Invariance par changement d'inconnues . . . . .	20
<b>3 Quelques résultats d'existence pour les problèmes paraboliques</b>	<b>23</b>
3.1 Définitions . . . . .	23
3.1.1 Équation parabolique . . . . .	23
3.1.2 Solutions faibles pour les problèmes paraboliques . . . . .	24
3.2 Solutions faibles . . . . .	25
3.2.1 Estimations a priori . . . . .	26
3.2.2 Un théorème d'existence et d'unicité . . . . .	28
3.3 Régularité des solutions . . . . .	30
3.4 Application : systèmes hyperboliques symétriques . . . . .	36
<b>II Étude d'un problème mixte</b>	<b>39</b>
<b>4 Cas monodimensionnel</b>	<b>41</b>
4.1 Introduction . . . . .	41

4.2	Nature du problème . . . . .	42
4.2.1	Un cas limite: le <i>système simplifié</i> . . . . .	42
4.2.2	Cas du système initial . . . . .	47
4.2.3	Conclusion . . . . .	53
4.3	Un cas plus général: deux phases compressibles . . . . .	53
4.3.1	Reformulation . . . . .	53
4.3.2	Étude spectrale . . . . .	55
4.3.3	Conclusion . . . . .	57
4.4	Solutions pour un système à quatre équations . . . . .	58
4.4.1	Cas du système <i>simplifié</i> . . . . .	59
4.4.2	Cas général . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Cas multidimensionnel</b>	<b>63</b>
5.1	Formulation . . . . .	63
5.2	Linéarisation . . . . .	67
5.2.1	Cas où $\varepsilon$ est le vecteur nul . . . . .	69
5.2.2	Cas où $\varepsilon$ est non nul . . . . .	69
<b>III</b>	<b>Un modèle à cinq équations</b>	<b>73</b>
<b>6</b>	<b>Le modèle</b>	<b>77</b>
6.1	Présentation du modèle . . . . .	77
6.1.1	Cas d'un fluide parfait . . . . .	77
6.1.2	Obtention du modèle . . . . .	78
6.2	Nature du problème . . . . .	79
6.2.1	Choix des équations . . . . .	79
6.2.2	Non-hyperbolicité du système . . . . .	81
<b>7</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>83</b>
7.1	Présentation du cas test du robinet de Ransom . . . . .	83
7.2	Étude du permanent . . . . .	83
7.3	Résultats numériques . . . . .	85
7.3.1	Présentation du schéma . . . . .	86
7.3.2	Traitement des conditions limites . . . . .	87
7.3.3	Quelques résultats . . . . .	91
<b>A</b>	<b>Complément sur la première partie</b>	<b>97</b>
A.1	Estimations d'énergie . . . . .	97
A.2	Espaces fonctionnels dépendant du temps . . . . .	98
	<b>Bibliographie</b>	<b>100</b>
	<b>Liste des figures</b>	<b>103</b>
	<b>Index</b>	<b>105</b>

# Introduction

La modélisation d'écoulement en mécanique des fluides génère un nombre important de problèmes portant sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Cependant, l'étude générale de ces systèmes demeure, à l'heure actuelle, un problème ouvert.

Il a alors semblé raisonnable de simplifier les équations rencontrées. La première et la plus simple de ces simplifications consiste en la linéarisation, l'étude de ces linéarisées semblant alors un préliminaire naturel à celle de modèles généralement non linéaires. Les résultats obtenus ont ensuite été étendus aux modèles initialement considérés avec plus ou moins de réussite.

Mais revenons à l'étude des problèmes linéarisés; celle-ci est mixte, elle porte à la fois sur un aspect technique : *le modèle considéré est-il correct?* et sur un aspect plus pratique : *la simulation*. Ces deux approches ont néanmoins fait apparaître une notion commune : *l'hyperbolicité* des systèmes d'équations aux dérivées partielles considérés.

Tout d'abord, il s'agit de savoir si les modèles que l'on considère sont *bien posés* ou plus exactement si les problèmes de Cauchy obtenus à partir de ces derniers sont bien posés. Mais que signifie *bien posé*? En fait, pour résoudre les équations aux dérivées partielles qui nous intéressent, il faut préciser l'espace dans lequel nous recherchons ces solutions, ce qui n'est pas toujours évident, notamment dans le cas de systèmes non-conservatifs. Il semble alors naturel de demander aux solutions de rester dans ces espaces et l'on obtient une définition des problèmes bien posés (c.f., par exemple, la définition de l'hyperbolicité donnée par D. Serre [Ser96]). Il peut aussi sembler naturel d'étendre cette notion de stabilité non plus seulement à l'espace auquel appartient la solution mais à cette solution elle-même. M. Arai ([Ara80]) va plus loin, puisqu'il demande à la solution d'être *attractive*, c'est-à-dire que toute perturbation autour de la donnée initiale, pourvu qu'elle ne soit pas trop importante, doit engendrer une solution qui tend vers la solution sans perturbation. Cette notion est très restrictive et écarte certains problèmes par ailleurs bien posés vis à vis de la stabilité de l'espace considéré.

D'autre part, du point de vue de la simulation, il est nécessaire d'avoir une certaine stabilité numérique intrinsèque au modèle. En effet, si les solutions font apparaître une grande instabilité, alors indépendamment de la méthode utilisée les solutions numériques obtenues ne pourront être exploitées ou pire les schémas seront incapables de produire un quelconque résultat. Là encore un critère possible de stabilité est l'hyperbolicité du système qui implique que les modes de Fourier de grands nombres d'ondes ne vont pas croître au cours du temps et assure donc que les éventuelles oscillations de la solution numérique seront atténuées.

Cependant toutes ces études sont effectuées sur des linéarisations et des résultats récents montrent que les effets dus à la non linéarité peuvent parfois compenser les instabilités

apparaissant sur le linéaire. B. L. Keyfitz ( [Key00] ) montre notamment, sur un modèle non-hyperbolique décrivant l'écoulement de deux fluides incompressibles, qu'il existe des transitions d'un état instable vers un état stable via des chocs stables.

La première partie de ce travail consiste en quelques rappels concernant les systèmes hyperboliques. Les notions de linéarisation et de localisation y sont introduites afin de situer leur rôle dans l'étude des modèles non linéaires. Nous en déduisons une définition de la nature bien posée d'un problème qui nous sera utile par la suite. De cette dernière, découle naturellement une caractérisation géométrique des problèmes bien posés qui n'est autre que la définition de l'hyperbolicité que nous choisirons. Enfin, il est rappelé quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions pour des problèmes paraboliques ou symétrisables ainsi que des propriétés de régularité éventuelle pour ces solutions.

Dans la seconde partie, nous abordons la relation entre la nature non hyperbolique d'un système d'équations aux dérivées partielles comportant des termes de diffusion et son caractère bien posé. Le critère de non hyperbolicité n'assure, en effet, en rien qu'un problème linéaire du second ordre est mal posé. Pour le système considéré, l'opérateur différentiel du premier ordre (opérateur d'advection) du linéarisé autour d'un état constant n'est pas hyperbolique, pourtant les problèmes de Cauchy issus de ce système linéaire sont, avec la notion introduite par D. Serre, bien posés. Cependant les solutions ne sont pas stables, au sens de M. Arai, c'est-à-dire attractives. En outre, nous montrons qu'un problème de Cauchy formé à partir du système non linéaire possèdera, du moins localement au voisinage de l'instant initial, une solution classique (i.e. suffisamment différentiable).

Enfin, dans la dernière partie, nous étudions un modèle diphasique à cinq équations obtenu par Leroux [Ler] à partir du modèle isentropique à quatre équations. Ce modèle a la particularité de ne pas nécessiter d'équation d'état ou de loi tabulée servant de fermeture algébrique. En outre, bien qu'il soit encore non hyperbolique comme le modèle d'origine à quatre équations, les valeurs propres de l'opérateur d'advection sont désormais réelles. De plus, alors que le modèle isentropique classique faisait apparaître, pour le cas test du robinet de Ransom, une instabilité (*undershoot*) en aval de l'onde de taux de vide, le nouveau modèle ne semble plus reproduire ce phénomène numérique. Ainsi, même si l'on s'attendait à un mauvais comportement du modèle étant entendu que le problème linéarisé demeure non hyperbolique et donc mal posé, ce modèle, dans le cas non linéaire, n'entraîne pas d'explosion ou autres instabilités numériques.

Première partie  
Quelques rappels





# Chapitre 1

## Linéarisation et problèmes bien posés

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats classiques concernant la résolution de problème de Cauchy pour des systèmes quasi-linéaires d'équations aux dérivées partielles de la forme :

$$(1.0.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = P \left( x, t, u, \frac{\partial}{\partial x} \right) u + F(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 \leq t < T,$$

avec la condition initiale :

$$(1.0.2) \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Précisons qu'ici la variable d'espace  $x$  est, a priori, multidimensionnelle ( $x \in \mathbb{R}^d$ ) et que  $u(x, t)$  désigne une fonction à valeur dans  $\mathbb{C}^m$ .

L'opérateur  $P$  est un opérateur différentiel quasi-linéaire d'ordre  $n$  de la forme :

$$(1.0.3) \quad P \left( x, t, u, \frac{\partial}{\partial x} \right) = \sum_{|\nu| \leq n} A_\nu(x, t, u) \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_d^{\nu_d}},$$

où  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$  est un multi-indice de taille  $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_d$  et les coefficients  $A_\nu = A_\nu(x, t, u)$  sont des fonctions régulières<sup>1</sup> en  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $0 \leq t < T$  et  $u \in \mathbb{C}^m$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ .

### 1.1 Perturbation des données, stabilité

La donnée initiale  $f$  ainsi que le terme de forçage  $F$  sont des données du problème. Nous ne nous intéressons pas ici à la question de l'existence et de l'unicité de solution pour le problème (1.0.1)-(1.0.2), mais, dans le cas où il y a une unique solution  $u$  pour une certaine donnée initiale  $f$  et un certain terme de forçage  $F$ , à l'influence sur  $u$  de petites perturbations

---

1. Une fonction sera dite *régulière* si elle possède suffisamment de dérivées continues.

appliquées à  $f$  et  $F$ . Plus précisément, si l'on remplace  $f$  par  $f + \delta f$  dans l'équation (1.0.2) et  $F$  par  $F + \delta F$  dans (1.0.1), qu'advient-il du problème *perturbé* suivant :

$$(1.1.4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = P \left( x, t, u, \frac{\partial}{\partial x} \right) u + F(x, t) + \delta F(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 \leq t < T,$$

$$(1.1.5) \quad u(x, 0) = f(x) + \delta f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Supposons que le problème initial (1.0.1)-(1.0.2) soit physiquement raisonnable, on peut espérer que, pour une perturbation suffisamment petite, le problème (1.1.4)-(1.1.5) admet encore une unique solution  $v$  et qu'en outre ces solutions vérifient, si  $v = u + \delta u$ ,

$$(1.1.6) \quad \|\delta u\|_1 \leq C (\|\delta f\|_2 + \|\delta F\|_3),$$

où  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_3$  sont des normes à préciser et  $C$  est une constante indépendante de  $\delta f$  et  $\delta F$ . Nous sommes ainsi amené à introduire une première définition :

**Définition 1.1.1** *Si le problème de Cauchy (1.0.1)-(1.0.2) admet une unique solution  $u$  pour certaines données  $f$  et  $F$ , nous dirons que le problème non linéaire (1.0.1)-(1.0.2) est bien posé en  $u$  si :*

- *il existe un réel  $\varepsilon$  strictement positif tel que pour toutes perturbations régulières  $\delta f$  et  $\delta F$  vérifiant*

$$(1.1.7) \quad \|\delta f\|_2 + \|\delta F\|_3 < \varepsilon,$$

*le problème perturbé (1.1.4)-(1.1.5) admet une unique solution  $v$ ,*

- *de plus, l'écart  $\delta u = v - u$  satisfait une estimation du type (1.1.6) avec  $C$  indépendante de  $\delta f$  et  $\delta F$ .*

## 1.2 Linéarisation

Pour montrer l'existence de solution, pour un problème de Cauchy non linéaire du type (1.0.1) avec une condition initiale de la forme (1.0.2), dans un intervalle de temps suffisamment petit  $[0, T]$ , on considère souvent une suite  $u^k = u^k(x, t)$  de fonctions définies par récurrence à partir des équations linéaires :

$$(1.2.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial u^{k+1}}{\partial t} = P \left( x, t, u^k(x, t), \frac{\partial}{\partial x} \right) u^{k+1} + F(x, t), \\ u^{k+1}(x, 0) = f(x), \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots$$

et initialisée par  $u^0(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$ .

Nous sommes donc amené à étudier dans un premier temps un problème de Cauchy pour des équations linéarisées de la forme :

$$(1.2.9) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = P \left( x, t, \frac{\partial}{\partial x} \right) u + F(x, t),$$

où

$$(1.2.10) \quad P \left( x, t, \frac{\partial}{\partial x} \right) = \sum_{|\nu| \leq n} A_\nu \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_d^{\nu_d}}$$

et les coefficients  $A_\nu = A_\nu(x, t)$  sont réguliers en  $(x, t)$ .

Savoir si le problème (1.0.1)-(1.0.2) est bien posé, du moins pour le premier point, est donc lié à la nature bien posé du problème linéarisé (1.2.9). Il est donc naturel d'énoncer le principe suivant : «Un problème non linéaire est bien posé en  $u$ , si son linéarisé, au voisinage de  $u$ , est bien posé.»

### 1.3 Localisation

Nous devons donc, dans un premier temps, étudier des problèmes linéaires non homogènes à coefficients, a priori, non constants. Nous nous restreignons tout d'abord au cas homogène,  $F \equiv 0$ , le cas non homogène étant traité par le principe de Duhamel. En outre, nous appliquons le principe de localisation : «Si tous les problèmes obtenus en gelant les coefficients sont bien posés, alors le problème à coefficients variables est lui-même bien posé.» Ce principe n'est, bien sur, *pas valable en général*. Considérons un problème de Cauchy à coefficients non constants :

$$(1.3.11) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = P \left( x, t, \frac{\partial}{\partial x} \right) u,$$

nous étudions alors, pour un point  $(x_0, t_0)$  quelconque, le caractère bien posé ou non de l'équation linéaire à coefficients constants :

$$(1.3.12) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = P \left( x_0, t_0, \frac{\partial}{\partial x} \right) u,$$

obtenue en *gelant* les coefficients :

$$(1.3.13) \quad A_\nu = A_\nu(x_0, t_0).$$

Nous verrons plus tard que l'étude de la nature bien posé de ces équations se ramène, grâce à la transformée de Fourier, à l'étude d'équations algébriques.

## 1.4 Un exemple : l'équation de Burgers

Nous considérons, pour  $\varepsilon$  réel strictement positif, l'équation de Burgers avec diffusion :

$$(1.4.14) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leq T,$$

$u$  étant à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $u_0$  une fonction régulière en  $(x, t)$ . On définit alors une nouvelle fonction  $u_1$  par :

$$(1.4.15) \quad u = u_0 + u_1, \quad u_1 = u_1(x, t).$$

L'équation (1.4.14) nous donne alors une équation vérifiée par  $u_1$  :

$$(1.4.16) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial x} u_1 + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + F(x, t),$$

avec le terme

$$F(x, t) = u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial u_0}{\partial t}.$$

L'objectif étant d'étudier des perturbations, nous allons considérer  $u_1$  comme petite devant  $u_0$ . Ceci nous amène à négliger le terme quadratique  $u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}$  de (1.4.16),  $u_1$  est alors solution d'une nouvelle équation :

$$(1.4.17) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial x} u_1 + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + F(x, t).$$

Ceci constitue donc l'équation linéarisée de (1.4.14) au voisinage de  $u_0$ . On remarque tout de suite que l'équation reste homogène,  $F \equiv 0$ , si, et seulement si,  $u_0$  est une solution de (1.4.14).

Cette équation régit le comportement de petites perturbations de  $u_0$ , ce qui justifie encore l'étude des linéarisés.

# Chapitre 2

## Hyperbolicité

Ce chapitre a pour but de situer la notion d'hyperbolicité. Nous avons vu dans le chapitre précédent en quoi l'étude du linéarisé d'un problème semblait être un préliminaire naturel à l'étude du problème non-linéaire original. Nous pourrions encore simplifier le problème, grâce au principe de localisation, en nous restreignant au cas des coefficients constants.

### 2.1 Hyperbolicité des systèmes linéaires

Nous considérons le cas d'un domaine,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , périodique<sup>1</sup> ce qui permet d'éviter les problèmes liés aux conditions limites.

Considérons le problème de Cauchy pour le système (2.1.2) muni de la condition initiale :

$$(2.1.1) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$(2.1.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{1 \leq i \leq d} A_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = F(u),$$

où  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  et  $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$  est un champ de vecteur régulier sur  $\mathcal{U}$ .

Reprenons l'étude du caractère *bien posé* de ce problème. Si la donnée initiale  $u_0$  est constante, le problème admet une solution évidente qui ne dépend que du temps et satisfait l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u).$$

Comme nous l'avons fait pour l'équation de Burgers (c.f. 1.4), perturbons maintenant cette condition initiale par  $u(x, 0) = u_0 + \varepsilon u_1(x)$  où  $\varepsilon$  est *petit*. Le problème devant être bien posé, une condition nécessaire est que, sur un intervalle de temps suffisamment petit  $[0, \delta t]$ , la solution  $u_\varepsilon$  du problème avec condition initiale perturbée admette un développement de la forme :

$$u_\varepsilon(x, t) = u(t) + \varepsilon v(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

---

1. On pourrait de même considérer l'espace tout entier.

La perturbation  $v$  est alors, comme vu précédemment, solution du problème linéarisé :

$$(2.1.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{1 \leq i \leq d} A_i(u(t)) \frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial u}(u(t)) \cdot v, & (x, t) \in \Omega \times [0, \delta t], \\ v(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Il faut donc que le système précédent soit lui même bien posé ! Nous allons donc nous restreindre au cas de coefficients ne dépendant que du temps.

**Remarque :** Nous allons supposer que le second membre est nul  $F \equiv 0$ . Cette hypothèse n'est pas contraignante car il ne joue pas un rôle prépondérant dans l'étude qui suit, en outre ce terme peut être rendu aussi petit que désiré en effectuant un changement d'échelle sur le temps.

### 2.1.1 Analyse de stabilité

Le système considéré est ici le suivant :

$$(2.1.4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{1 \leq i \leq d} A_i(t) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0,$$

et nous prenons la condition initiale

$$(2.1.5) \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Nous allons considérer le cas des solutions faibles de (2.1.4). Nous recherchons donc des solutions telles que :

$$\begin{aligned} u : [0, T] &\rightarrow L^2(\Omega), \\ t &\mapsto u(\cdot, t), \end{aligned}$$

soient continues et vérifient, pour tout  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times [0, T])$  :

$$(2.1.6) \quad \int_{\Omega \times [0, T]} \left[ u \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{1 \leq i \leq d} A_i^T u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right] dx dt + \int_{\Omega} u_0(x) \phi(x, 0) dx = 0.$$

Appliquons alors à l'équation (2.1.4) la transformée de Fourier par rapport à la variable d'espace  $x$ . Notons  $\widehat{u}(\cdot, t)$  l'image de  $u(\cdot, t)$  et  $\widehat{u}_0$  l'image de  $u_0$  par cette transformée. D'après les propriétés de différentiation de la transformée, il vient immédiatement :

$$(2.1.7) \quad \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -iA(\xi, t)\widehat{u},$$

$$(2.1.8) \quad \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{u}_0,$$

où la matrice  $A$  est définie par :

$$(2.1.9) \quad A(\xi, t) = \sum_{1 \leq i \leq d} \xi_i A_i(t), \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad t \in [0, T].$$

Considérant la résolvante  $\mathcal{R}$  de l'équation différentielle ordinaire (2.1.7), la solution est donnée par :

$$(2.1.10) \quad \widehat{u}(\xi, t) = \mathcal{R}(t, 0, \xi) \widehat{u}_0(\xi);$$

la résolvante étant solution du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t_0, t_0, \xi) &= Id_m, \\ \frac{d}{dt} \mathcal{R}(t, t_0, \xi) &= -iA(\xi, t) \mathcal{R}(t, t_0, \xi). \end{aligned}$$

La transformée de Fourier étant une isométrie de  $L^2(\Omega)$ , le problème (2.1.4)-(2.1.5) est *bien posé* dans  $L^2(\Omega)$  si, et seulement si, il existe une constante  $C_T$  ne dépendant que du temps  $T$  et pas de  $u_0$  (ou  $\widehat{u}_0$ ) telle que :

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\widehat{u}(\cdot, t)\|_{L^2} \leq C_T \|\widehat{u}_0\|_{L^2}.$$

Ceci est équivalent au fait que la résolvante soit bornée :

$$(2.1.11) \quad \sup_{t \in [0, T], \xi \in \mathbb{R}^d} \|\mathcal{R}(t, 0, \xi)\| \leq C_T,$$

où la norme  $\|\cdot\|$  est une norme matricielle donnée.

**Remarque :** La constante  $C_T$  de la condition (2.1.11) dépend du choix de la norme matricielle  $\|\cdot\|$  considérée, mais son existence, dans  $\mathbb{R}$ , non.

Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif, effectuons alors le changement de variable  $(\xi, t) \mapsto (\eta, \tau) = (\varepsilon\xi, \frac{t}{\varepsilon})$ , l'équation vérifiée par la résolvante devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{d\tau} \mathcal{R}(\varepsilon\tau, 0, \frac{\eta}{\varepsilon}) &= -iA(\frac{\eta}{\varepsilon}, \varepsilon\tau) \mathcal{R}(\varepsilon\tau, 0, \frac{\eta}{\varepsilon}), \\ &= -\frac{i}{\varepsilon} A(\eta, \varepsilon\tau) \mathcal{R}(\varepsilon\tau, 0, \frac{\eta}{\varepsilon}), \end{aligned}$$

d'après (2.1.9), soit donc

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{R} = -iA(\eta, \varepsilon\tau) \mathcal{R}.$$

Faisons maintenant tendre  $\varepsilon$  vers 0, il vient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{R}(\varepsilon\tau, 0, \frac{\eta}{\varepsilon}) = \exp(-i\tau A(\eta, 0)).$$



La condition (2.1.11) impose donc que :

$$(2.1.12) \quad \sup_{\tau \in \mathbb{R}_+, \eta \in \mathbb{R}^d} \|\exp(-i\tau A(\eta, 0))\| \leq C_T.$$

Nous déduisons alors le résultat suivant :

**Proposition 2.1.1** *Le problème de Cauchy pour un système linéaire du premier ordre à coefficients constants :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{1 \leq j \leq d} A_j(t) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0,$$

est bien posé dans  $L^2$  si, et seulement si, il existe un réel  $C$  strictement positif tel que, pour une certaine norme matricielle  $\|\cdot\|$ , on ait :

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \|\exp(-iA(\xi, 0))\| \leq C.$$

**Démonstration :** D'après le calcul précédent, la réciproque est évidente. En effet, prenons la constante  $C$ , nous avons alors, pour toute donnée  $u_0$  dans  $L^2$ , tout temps  $t$  et tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$  :

$$\|\mathcal{R}(t, 0, \xi)\| = \|\exp(-iA(t\xi, 0))\| \leq C,$$

et donc  $\|\widehat{u}(\cdot, t)\|_{L^2} \leq C\|\widehat{u}_0\|_{L^2}$ . La transformée de Fourier étant une isométrie de  $L^2$ , ceci équivaut à :

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq C\|u_0\|_{L^2}.$$

Le problème est donc *bien posé*.

Pour le sens direct, supposons le système bien posé sur  $L^2$  pour  $t \in [0, T]$ , alors d'après la définition 1.1.1 et grâce au caractère isométrique de la transformée de Fourier, il existe  $C > 0$  tel que nous obtenons l'inégalité, pour tout  $u_0 \in L^2$  et  $t \in [0, T]$  :

$$\|\widehat{u}(\cdot, t)\|_{L^2} \leq C\|\widehat{u}_0\|_{L^2}.$$

En outre  $\widehat{u}(\xi, t) = \exp(-itA(\xi, 0))\widehat{u}_0(\xi)$ , nous avons donc, pour tout  $\widehat{u}_0 \in L^2$  et  $t \in [0, T]$  :

$$\|\exp(-itA(\xi, 0))\widehat{u}_0(\xi)\|_{L^2} \leq C\|\widehat{u}_0\|_{L^2},$$

soit donc,

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \|\exp(-itA(\xi, 0))\| \leq C$$

ou encore, puisque  $-itA(\xi, 0) = -iA(t\xi, 0)$  :

$$\sup_{\xi' \in \mathbb{R}^d} \|\exp(-iA(\xi', 0))\| \leq C.$$

□

## 2.1.2 Étude spectrale

Comme nous l'avons vu précédemment, le caractère bien posé d'un problème linéaire (c.f. proposition 2.1.1) fait apparaître la majoration, pour une certaine norme, d'une famille d'exponentielles de matrices. Ces majorations entraînent, en particulier, que :

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \rho(\exp(-iA(\xi))) < \infty,$$

où  $\rho(M)$  désigne le rayon spectral de la matrice  $M$  et  $A(\xi) = A(\xi, 0) = \sum_{1 \leq j \leq d} \xi_j A_j(0)$ . Soit  $C$  cette borne supérieure.

Supposons qu'il existe un élément  $\xi \in \mathbb{R}^d$  tel que  $\rho(\exp(-iA(\xi))) > 1$ . Cependant, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , nous avons :

$$\exp(-iA(n\xi)) = \exp(-inA(\xi)) = (\exp(-iA(\xi)))^n,$$

et donc  $[\rho(\exp(-iA(\xi)))]^n < C$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par passage à la limite sur  $n$ , nous obtenons donc :

$$C > \lim_{n \rightarrow +\infty} [\rho(\exp(-iA(\xi)))]^n = +\infty,$$

qui contredit l'hypothèse  $C$  fini. Donc, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,  $\rho(\exp(-iA(\xi))) \leq 1$ .

De même, nous devons avoir  $\rho(\exp(-iA(\xi))) \geq 1$  (faire tendre  $n$  vers  $-\infty$ ). Et donc :

$$(2.1.13) \quad \rho(\exp(-iA(\xi))) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

En outre, puisque les valeurs propres de l'exponentielle  $\exp(M)$  d'une matrice  $M$  sont les exponentielles de celles de  $M$ , il s'en suit que le spectre des matrices  $A(\xi)$  est réel.

Supposons que, pour un certain  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , la matrice  $A(\xi)$  n'est pas diagonalisable. Il existe donc une valeur propre  $\lambda$  dont la multiplicité algébrique est strictement supérieure à sa multiplicité géométrique. Il existe donc deux vecteurs,  $u$  et  $v$ , non nuls, tels que :

$$\begin{aligned} A(\xi)u &= \lambda u, \\ A(\xi)v &= \lambda v + u. \end{aligned}$$

Montrons que, pour tout temps  $t$ ,  $\exp(-itA(\xi))v = e^{-it\lambda}(v - itu)$ , ce qui contredit l'existence d'une borne supérieure finie de la norme des opérateurs  $\exp(-itA(\xi))$  (c.f. (2.1.12)).

On vérifie aisément par récurrence que, pour tout entier naturel  $k$ ,  $A(\xi)v = \lambda^k v + k\lambda^{k-1}u$ , d'où :

$$\begin{aligned} \exp(-itA(\xi))v &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-it)^k}{k!} [\lambda^k v + k\lambda^{k-1}u], \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-it\lambda)^k}{k!} v + \sum_{k \geq 1} -it \frac{(-it\lambda)^{k-1}}{(k-1)!} u, \\ &= e^{-it\lambda} v - ite^{-it\lambda} u. \end{aligned}$$

Nous introduisons donc la définition suivante :

**Définition 2.1.1** *Le système (2.1.4) est dit hyperbolique, si, pour tout  $\xi$  dans  $\mathbb{R}^d$ , la matrice  $A(\xi)$  définie par (2.1.9) est diagonalisable à valeurs propres réelles.*

Nous avons donc démontré :

**Théorème 2.1.2** *Si le système linéaire à coefficients constants (2.1.4) est bien posé, alors il est hyperbolique.*

**Remarque :** En fait, la réciproque n'est vraie qu'en dimension un ( $d = 1$ ). En effet, si  $d = 1$  alors  $A(\xi) = \xi A_1$  et si le système est hyperbolique, alors, en particulier,  $A_1$  est diagonalisable à valeurs propres réelles. Soit  $A_1 = P.D.P^{-1}$ , nous avons alors :

$$\exp(-iA(\xi)) = P \exp(-i\xi D) P^{-1},$$

où  $\exp(-i\xi D)$  est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les  $e^{-i\xi\lambda}$ ,  $\lambda$  décrivant le spectre de  $A_1$ , inclus dans  $\mathbb{R}$ . Cette matrice diagonale a donc un spectre formé de nombres complexes de module 1, elle est donc de norme 1. Ainsi,  $\|\exp(-iA(\xi))\| \leq \|P\|\|P^{-1}\|$  et grâce à la proposition 2.1.1, le problème est *bien posé*.

En dimension supérieure, la réciproque n'est plus vraie. Considérons le cas  $d = 2$ . Dans ce cas, les matrices de diagonalisation dépendent, a priori, de  $\xi$  et  $\exp(-iA(\xi)) = P(\xi) \exp(-iD(\xi)) P(\xi)^{-1}$ . Il est clair que la matrice  $D$  est homogène de degré un en  $\xi$  et nous pouvons choisir  $P$  homogène de degré zéro, soit alors  $cond(\xi)$  le conditionnement de  $P(\xi)$ ,  $cond(\xi) = \|P(\xi)\|\|P(\xi)^{-1}\|$ , il vient :

$$\|\exp(-iA(\xi))\| \leq cond(\xi) \|\exp(-iD(\xi))\|.$$

Dans le cas d'un système hyperbolique, nous avons encore  $\|\exp(-iD(\xi))\| = 1$  et donc :

$$(2.1.14) \quad \|\exp(-iA(\xi))\| \leq cond(\xi).$$

Ainsi rien n'assure que le système soit bien posé.

### 2.1.3 Plus que l'hyperbolicité...

Des résultats précédents, nous déduisons des conditions suffisantes pour que les systèmes hyperboliques soient bien posés.

**Proposition 2.1.3** *Si un système hyperbolique est tel que les matrices  $A(\xi)$  sont uniformément diagonalisables par rapport à  $\xi$ , i.e  $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} cond(\xi)$  est fini, alors il est bien posé.*

Un autre cas intéressant est celui des systèmes symétrisables. En effet, nous avons le résultat suivant :

**Définition 2.1.2** *Un système (2.1.4) est hyperbolique symétrisable, s'il existe une matrice symétrique définie positive  $S$  telle que, pour tout  $1 \leq j \leq d$ ,  $SA_j$  soit symétrique.*

**Théorème 2.1.4** *Si un système est hyperbolique symétrisable, alors il est bien posé.*

**Démonstration :** Posons  $S(\xi) = S.A(\xi)$ , alors  $S$  étant définie, Nous avons  $A(\xi) = S^{-1}.S(\xi)$ . De plus, il existe une racine carrée symétrique définie positive  $H$  de  $S^{-1}$ . La matrice  $HS(\xi)H$  étant symétrique, elle est donc diagonalisable en base orthonormée, soit  $O(\xi)$  la matrice de passage ( $O(\xi) \in O_m(\mathbb{R})$ ). Posons  $P(\xi) = HO(\xi)$ , alors :

$$\begin{aligned} HS(\xi)H &= O(\xi)D(\xi)O(\xi)^{-1}, \\ &\Updownarrow \\ S(\xi) &= H^{-1}O(\xi)D(\xi)O(\xi)^{-1}H^{-1}, \\ &\Updownarrow \\ A(\xi) &= S^{-1}H^{-1}O(\xi)D(\xi)O(\xi)^{-1}H^{-1}, \quad \text{Or } H^2 = S^{-1}, \\ &= HO(\xi)D(\xi)O(\xi)^{-1}H^{-1}, \\ &= P(\xi)D(\xi)P(\xi)^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\|P(\xi)\| \leq \|H\|$  et  $\|P(\xi)^{-1}\| \leq \|H^{-1}\|$  et donc  $\text{cond}(\xi) \leq \|H\| \cdot \|H^{-1}\|$ .

Le système est donc hyperbolique et les matrices  $A(\xi)$  sont uniformément diagonalisables, donc, d'après 2.1.3, il est bien posé.  $\square$

## 2.2 Hyperbolicité des systèmes quasi-linéaires

### 2.2.1 Définition

Par analogie avec le linéaire, nous introduisons la notion d'hyperbolicité :

**Définition 2.2.1** *Le système différentiel du premier ordre*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{1 \leq j \leq d} A_j(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = F(u, x, t),$$

*est dit hyperbolique, si les matrices*

$$A(\tilde{u}, \xi) = \sum_{1 \leq j \leq d} \xi_j A_j(\tilde{u}),$$

*sont diagonalisables dans  $\mathbb{R}$ , pour tout  $\tilde{u} \in \mathcal{U}$  et tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$ .*

Cependant, comme nous l'avons déjà remarqué, nous ne disposons pas d'un critère pour vérifier le caractère bien posé des systèmes non-linéaires quand bien même ils seraient hyperboliques.

## 2.2.2 Invariance par changement d'inconnues

L'un des intérêts de la notion d'hyperbolicité pour les systèmes quasi-linéaires vient du fait que cette propriété est invariante pour les changements d'inconnues *classiques*.

Soit  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  un difféomorphisme. Le système quasi-linéaire :

$$u \mapsto v$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{1 \leq j \leq d} A_j(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0,$$

est transformé, par  $\phi$ , en un autre système quasi-linéaire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \phi(u), \\ &= d\phi(u) \frac{\partial u}{\partial t}, \\ &= d\phi(u) \left( - \sum_{1 \leq j \leq d} A_j(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \\ &= - \sum_{1 \leq j \leq d} d\phi(u) A_j(u) (d\phi(u))^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \phi(u). \end{aligned}$$

Posons  $B_j(v) = d\phi^{-1}(v) \cdot A_j(\phi^{-1}(v)) (d\phi^{-1}(v))^{-1}$ , il vient alors :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{1 \leq j \leq d} B_j(v) \frac{\partial v}{\partial x_j} = 0.$$

De plus, si le premier système était hyperbolique, le second l'est encore. En effet, si  $A(\tilde{u}, \xi) = P(\tilde{u}, \xi) D(\tilde{u}, \xi) P(\tilde{u}, \xi)^{-1}$ , alors  $B(\tilde{v}, \xi) = (d\phi^{-1}(\tilde{v}) P(\tilde{u}, \xi)) \cdot D(\tilde{v}, \xi) \cdot (d\phi^{-1}(\tilde{v}) P(\tilde{u}, \xi))^{-1}$ .

Néanmoins, tous les changements d'inconnues ne sont pas permis.

**Exemple :** Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Il s'agit d'un système quasi-linéaire du premier ordre dont la matrice est diagonale à valeurs propres réelles.

Effectuons alors le changement d'inconnues  $v = \phi(u) = \left( u_1, \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)$  où  $u = (u_1, u_2)$ .

Dérivant la seconde équation par rapport à  $x$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Soit donc un nouveau système quasi-linéaire dont la matrice  $B(v)$  n'est plus, en général, diagonalisable :

$$B(v) = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix}.$$



# Chapitre 3

## Quelques résultats d'existence pour les problèmes paraboliques

L'objet de ce chapitre est de rappeler quelques résultats sur les problèmes strictement paraboliques dont nous aurons besoin par la suite.

Les résultats sont démontrés dans le cas d'équations linéaires à coefficients variables mais, pour certains, s'étendent très bien aux cas non-linéaires.

### 3.1 Définitions

Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et  $T > 0$  un temps donné. Nous considérons donc le problème de Cauchy et aux limites suivant :

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + P \left( x, t, \frac{\partial}{\partial x} \right) u = f(x, t) & (x, t) \in \mathcal{U} \times (0, T], \\ u(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\mathcal{U} \times [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathcal{U}, \end{cases}$$

où  $f : \mathcal{U} \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $u_0 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une condition initiale donnée vérifiant  $u_0(x) = 0$  pour  $x \in \partial\mathcal{U}$  et  $P$  désigne un opérateur différentiel du second ordre en  $x$  de la forme :

$$(3.1.2) \quad P \left( x, t, \frac{\partial}{\partial x} \right) = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{i,j}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^d b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)u.$$

#### 3.1.1 Équation parabolique

Nous avons alors la définition suivante :

**Définition 3.1.1** *Le système (3.1.1) est dit (strictement) parabolique si, et seulement si, il existe une constante  $\delta \geq 0$  ( $\delta > 0$ ) telle que, pour tout  $(x, t) \in \mathcal{U} \times [0, T]$  et tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , on ait :*

$$\sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \delta \|\xi\|^2.$$



Un exemple classique étant celui des systèmes où  $P = -\Delta$  c'est-à-dire

$$a_{i,j} = \delta_{i=j}, \quad b_i \equiv 0, \quad c \equiv 0, \quad \text{et } f \equiv 0.$$

### 3.1.2 Solutions faibles pour les problèmes paraboliques

Considérons un système de la forme (3.1.1) avec :

- i. Les coefficients  $a_{i,j}$ ,  $b_i$  et  $c$  sont dans  $L^\infty(\mathcal{U} \times (0, T))$  pour  $i, j = 1 \dots d$ ,
- ii. Le terme source  $f$  est dans  $L^2(\mathcal{U} \times (0, T))$ ,
- iii. La condition initiale,  $u_0$ , est également dans  $L^2(\mathcal{U})$ ,
- iv. Enfin la partie du second ordre de l'opérateur  $P$  est symétrique:  $a_{i,j} = a_{j,i}$  pour tout  $i, j = 1 \dots d$ .

Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le crochet de dualité entre  $H^{-1}(\mathcal{U})$  et  $H_0^1(\mathcal{U})$ .

Nous introduisons alors la définition suivante des solutions faibles :

**Définition 3.1.2** Soit  $u$  élément de  $L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{U}))$ , telle que  $u' = \frac{du}{dt}$  est un élément de  $L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{U}))$ . Nous dirons que  $u$  est une solution faible du problème de Cauchy avec conditions limites (3.1.1) sur  $[0, T]$  si :

- i. pour tout  $v$  élément de  $H_0^1(\mathcal{U})$  et pour presque tout  $t$  de  $[0, T]$  :

$$\langle u', v \rangle + \int_{\mathcal{U}} \left[ \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + c(x, t) uv \right] dx = \int_{\mathcal{U}} f v dx,$$

- ii. et  $u(\cdot, 0) = u_0$ .

**Remarque :** Le second point a bien un sens puisqu'en fait  $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\mathcal{U}))$ , c.f. A.2.1

Il est donc clair que toute solution *classique* de (3.1.1) en est aussi une solution faible. En effet, pour les termes autres que ceux provenant du second ordre, il suffit de multiplier par  $v$  et d'intégrer, en outre pour le second ordre, avec les mêmes notations, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{U}} - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{i,j}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v dx &= \int_{\partial \mathcal{U}} - \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\sigma + \int_{\mathcal{U}} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx, \\ &= \int_{\mathcal{U}} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx, \end{aligned}$$

la fonction  $v$  étant nulle sur le bord du domaine  $\mathcal{U}$ .

## 3.2 Solutions faibles

Le but de cet paragraphe est de démontrer le résultat d'existence et d'unicité énoncé en 3.2.2, la démarche employée étant la méthode de *Galerkin*.

Soit  $(w_k)_{k \in \mathbb{N}_*}$  une base orthonormale de  $L^2(\mathcal{U})$  qui soit une base orthogonale de  $H_0^1(\mathcal{U})$ . De telles suites existent ; nous pouvons prendre, par exemple, une suite adaptée d'éléments propres de  $-\Delta$  dans  $H_0^1(\mathcal{U})$ .

Fixons  $n \in \mathbb{N}_*$ , nous allons chercher une *solution* du problème (3.1.1) projeté sur le sous-espace engendré par les  $(w_k)_{k=1, \dots, n}$ . Soit  $u_n : [0, T] \rightarrow H_0^1(\mathcal{U})$  cette *solution*, alors elle est de la forme :

$$(3.2.3) \quad u_n(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_n^k(t) w_k,$$

avec des coefficients qui doivent vérifier :

i. pour  $k = 1, \dots, n$ ,

$$(3.2.4) \quad \lambda_n^k(0) = \int_{\mathcal{U}} u_0(x) \cdot w_k(x) dx$$

ii. et pour  $t \in [0, T]$  et  $k = 1, \dots, n$

$$(3.2.5) \quad \int_{\mathcal{U}} \left[ u_n' w_k + \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x,t) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial w_k}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x,t) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} w_k + c(x,t) u_n w_k \right] dx = \int_{\mathcal{U}} f w_k dx.$$

Une telle solution existe, en effet nous avons le résultat suivant :

**Théorème 3.2.1** *Pour tout entier  $n$  non nul, il existe une unique solution  $u_n$  de la forme (3.2.3) et vérifiant (3.2.4)-(3.2.5).*

**Démonstration :** Supposons que  $u_n$  est une telle solution, alors, d'après les hypothèses :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{U}} u_n'(t) w_k dx &= \int_{\mathcal{U}} \sum_{j=1}^n \frac{d\lambda_n^j}{dt}(t) w_j w_k dx, \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{d\lambda_n^j}{dt}(t) \int_{\mathcal{U}} w_j w_k dx, \\ &= \frac{d\lambda_n^k}{dt}(t), \end{aligned}$$

puisque  $(w_k)_k$  est une base orthonormale de  $L^2(\mathcal{U})$ . Posons maintenant, pour  $k, l = 1, \dots, n$ ,

$$\mu_{k,l} = \int_{\mathcal{U}} \left[ \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x,t) \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \frac{\partial w_l}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x,t) \frac{\partial w_k}{\partial x_i} w_l + c(x,t) w_k w_l \right] dx,$$

et  $f_k(t) = \int_{\mathcal{U}} f(x, t) w_k(x) dx$ . L'équation (3.2.5) devient donc :

$$(3.2.6) \quad f_k(t) = \frac{d\lambda_n^k}{dt}(t) + \sum_{l=1}^n \mu_{k,l}(t) \lambda_n^l(t), \quad , \text{ pour tout } k = 1, \dots, n.$$

Nous obtenons donc un système linéaire d'équations différentielles ordinaires portant sur les coefficients  $(\lambda_n^k)_{k=1, \dots, n}$  muni de la condition initiale (3.2.4).

Cette équation différentielle admettant une unique solution,  $(\lambda_n^k)_{k=1, \dots, n}$  nous obtenons l'existence et l'unicité de la solution (3.2.4)-(3.2.5) de la forme (3.2.3).  $\square$

### 3.2.1 Estimations a priori

Prenons l'unique solution, pour  $n$  donné, de (3.2.4)-(3.2.5). Nous allons maintenant faire tendre  $n$  vers l'infini et montrer qu'il existe une sous-suite convergente vers une solution faible. Pour cela, nous disposons du théorème suivant :

**Théorème 3.2.2 (Estimation d'énergie)** *Il existe une constante  $C$ , ne dépendant que du temps  $T$  et du domaine  $\mathcal{U}$ , telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}_*$  :*

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_n(t)\|_{L^2(\mathcal{U})} &\leq C (\|f\|_{L^2(0, T; L^2(\mathcal{U}))} + \|u_0\|_{L^2(\mathcal{U})}), \\ \|u_n\|_{L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{U}))} &\leq C (\|f\|_{L^2(0, T; L^2(\mathcal{U}))} + \|u_0\|_{L^2(\mathcal{U})}), \\ \|u_n'\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{U}))} &\leq C (\|f\|_{L^2(0, T; L^2(\mathcal{U}))} + \|u_0\|_{L^2(\mathcal{U})}). \end{aligned}$$

**Démonstration :** Multipliant l'équation (3.2.5) par  $\lambda_n^k(t)$  et sommant sur  $k = 1, \dots, n$ , nous obtenons, en simplifiant grâce à la relation (3.2.3), que  $u_n$  vérifie, pour presque tout  $t \in [0, T]$  :

$$(3.2.7) \quad \int_{\mathcal{U}} \left[ u_n' u_n + \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x, t) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x, t) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} u_n + c(x, t) u_n u_n \right] dx = \int_{\mathcal{U}} f u_n dx.$$

D'après le lemme A.1.1 (c.f. annexes), il existe donc des constantes  $c_1$  et  $c_2$  telles que, pour presque tout  $t \in [0, T]$  et tout  $n \in \mathbb{N}_*$  :

$$c_1 \|u_n\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 \leq \int_{\mathcal{U}} \left[ \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x, t) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x, t) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} u_n + c(x, t) u_n u_n \right] dx + c_2 \|u_n\|_{L^2(\mathcal{U})}^2.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{U}} f u_n dx \right| &\leq \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 + \frac{1}{2} \|u_n\|_{L^2(\mathcal{U})}^2, \text{ et} \\ \int_{\mathcal{U}} u_n' u_n dx &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \|u_n\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 \right). \end{aligned}$$

La relation (3.2.7) devient donc, pour presque tout  $t \in [0, T]$  :

$$(3.2.8) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \|u_n(t)\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 \right) + 2c_1 \|u_n(t)\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 &\leq 2 \int_{\mathcal{U}} f(t)u_n(t)dx + 2c_2 \|u_n(t)\|_{L^2(\mathcal{U})}^2, \\ &\leq C_1 \|u_n(t)\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 + C_2 \|f(t)\|_{L^2(\mathcal{U})}^2, \end{aligned}$$

où  $C_1 = 1 + 2c_2$  et  $C_2 = 2c_2$ .

D'après le lemme de Gromwall, il vient donc :

$$\|u_n(t)\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 \leq e^{C_1 t} \left( \|u_n(0)\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 + C_2 \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 ds \right), \quad \forall t \in [0, T].$$

Or  $\|u_n(0)\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\mathcal{U})}^2$  d'après la projection (3.2.4) et nous obtenons donc la première de nos estimées :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_n(t)\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq C \left( \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{U}))} + \|u_0\|_{L^2(\mathcal{U})} \right),$$

où  $C$  majore  $e^{C_1 T} \max(1, C_2)$ .

D'après (3.2.8) et la relation précédente, il vient immédiatement :

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\mathcal{U}))} &= \int_0^T \|u_n\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 dt, \\ &\leq \int_0^T \left[ \frac{CC_1}{2c_1} (\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{U}))} + \|u_0\|_{L^2(\mathcal{U})}) + \frac{C_2}{2c_1} \|f(t)\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 \right] dt, \\ &\leq C' (\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{U}))} + \|u_0\|_{L^2(\mathcal{U})}), \end{aligned}$$

avec une nouvelle constante  $C'$ .

Enfin, soit  $v \in H_0^1(\mathcal{U})$  de norme inférieure à 1. Projetons orthogonalement  $v$  sur l'espace engendré par les  $(w_k)_{k=1,\dots,n}$  dans  $L^2(\mathcal{U})$  :  $v = v_1 + v_2$ ,  $v_1 \in \text{vect}((w_k)_{k=1,\dots,n})$  et  $v_2 \in \text{vect}((w_k)_{k=1,\dots,n})^\perp$ . Puisque les  $(w_k)_{k=1,\dots,\infty}$  sont orthogonales dans  $H_0^1(\mathcal{U})$ , nous avons  $\|v_1\|_{H_0^1(\mathcal{U})} \leq \|v\|_{H_0^1(\mathcal{U})} \leq 1$  et d'après (3.2.5) nous avons :

$$\int_{\mathcal{U}} \left[ u'_n v_1 + \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x,t) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x,t) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_1 + c(x,t) u_n v_1 \right] dx = \int_{\mathcal{U}} f v_1 dx.$$

En outre, si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le crochet de dualité  $(H^{-1}(\mathcal{U}), H_0^1(\mathcal{U}))$ , alors  $\langle u'_n, v_2 \rangle = 0$  et

$$\begin{aligned} \langle u'_n, v \rangle &= \int_{\mathcal{U}} u'_n v dx, \\ &= \int_{\mathcal{U}} u'_n v_1 dx, \\ &= \int_{\mathcal{U}} f v_1 dx - \int_{\mathcal{U}} \left[ \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x,t) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x,t) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_1 + c(x,t) u_n v_1 \right] dx. \end{aligned}$$

Nous avons donc, puisque  $\|v_1\|_{H_0^1(\mathcal{U})} \leq 1$ ,

$$|\langle u'_n, v \rangle| \leq C \left( \|f\|_{L^2(\mathcal{U})} + \|u_n\|_{H_0^1(\mathcal{U})} \right),$$

d'où nous tirons que  $\|u'_n\|_{H^{-1}(\mathcal{U})} \leq C \left( \|f\|_{L^2(\mathcal{U})} + \|u_n\|_{H_0^1(\mathcal{U})} \right)$  et

$$\begin{aligned} \|u'_n\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathcal{U}))} &= \int_0^T \|u'_n(t)\|_{H^{-1}(\mathcal{U})} dt, \\ &\leq \int_0^T C \left( \|f(t)\|_{L^2(\mathcal{U})} + \|u_n(t)\|_{H_0^1(\mathcal{U})} \right) dt, \\ &\leq C \left( \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{U}))} + \|u_0\|_{L^2(\mathcal{U})} \right). \end{aligned}$$

□

### 3.2.2 Un théorème d'existence et d'unicité

Nous allons donc construire une solution faible du problème avec condition initiale et condition au bord (3.1.1) par passage à la limite sur  $n$ .

D'après le théorème précédent 3.2.2, nous savons que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$  est bornée dans  $L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{U}))$  et que  $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$  est bornée dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{U}))$ . Il existe donc une sous-suite,  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}_*}$ , et une fonction  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{U}))$ , telles que :

i.  $u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{U}))$ ,

ii.

$$\begin{aligned} u_{n_k} &\rightharpoonup u, \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{U})), \\ u'_{n_k} &\rightharpoonup u', \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{U})). \end{aligned}$$

Soit  $N \in \mathbb{N}_*$  et soit  $v \in \mathcal{C}^1([0, T], H_0^1(\mathcal{U}))$  de la forme :

$$(3.2.9) \quad v(t) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) w_i,$$

avec des fonctions  $\lambda_i \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R})$ . Soit, enfin,  $n > N$ .

Multiplions l'équation (3.2.5) par  $\lambda_k$ , sommions pour  $k = 1, \dots, N$  et, enfin, intégrons sur  $[0, T]$  :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[ \langle u'_n, v \rangle + \int_{\mathcal{U}} \left( \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x,t) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x,t) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} v + c(x,t) u_n v \right) dx \right] dt \\ = \int_0^T \int_{\mathcal{U}} f v dx dt. \end{aligned}$$

Prenons alors,  $n = n_k$  et passons à la limite sur  $k$ ,

$$(3.2.10) \quad \int_0^T \left[ \langle u', v \rangle + \int_{\mathcal{U}} \left( \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + c(x,t) uv \right) dx \right] dt = \int_0^T \int_{\mathcal{U}} f v dx dt.$$

En outre, les fonctions de la forme (3.2.9) étant denses dans  $L^2([0, T], H_0^1(\mathcal{U}))$ , cette égalité est encore vraie pour  $v$  quelconque dans  $L^2([0, T], H_0^1(\mathcal{U}))$ . Il s'en suit donc que  $u$  vérifie le premier point de la définition 3.1.2.

Par intégration par partie, nous obtenons, grâce à (3.2.10) et à la continuité de  $u$  (voir la remarque relative à la définition 3.1.2 page 24), que pour tout  $v$  élément de  $\mathcal{C}^1([0, T], H_0^1(\mathcal{U}))$  tel que  $v(T) = 0$ , nous avons :

$$\int_0^T \left[ - \langle v', u \rangle + \int_{\mathcal{U}} \left( \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + c(x,t) uv \right) dx \right] dt = \int_0^T \int_{\mathcal{U}} f v dx dt + \int_{\mathcal{U}} u(0)v(0) dx.$$

De même, nous avons :

$$\int_0^T \left[ - \langle v', u_n \rangle + \int_{\mathcal{U}} \left( \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x,t) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x,t) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} v + c(x,t) u_n v \right) dx \right] dt = \int_0^T \int_{\mathcal{U}} f v dx dt + \int_{\mathcal{U}} u_n(0)v(0) dx,$$

en particulier si  $n = n_k$ . Par passage à la limite quand  $k \rightarrow \infty$ , il vient donc, puisque  $u_n(0) \rightarrow u_0$  dans  $L^2(\mathcal{U})$  :

$$\int_0^T \left[ - \langle v', u \rangle + \int_{\mathcal{U}} \left( \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + c(x,t) uv \right) dx \right] dt = \int_0^T \int_{\mathcal{U}} f v dx dt + \int_{\mathcal{U}} u_0 v(0) dx.$$

Soit encore,  $\int_{\mathcal{U}} (u_0 - u(0))v(0) dx$  pour tout  $v(0) \in L^2(\mathcal{U})$  et donc :

$$u(0) = u_0.$$

Nous venons donc de démontrer le résultat suivant :

**Théorème 3.2.3 (Existence)** *Il existe une solution faible de (3.1.1).*

Il reste donc à démontrer l'unicité d'une telle solution :

**Théorème 3.2.4 (Unicité)** *Une solution de (3.1.1) est unique.*

**Démonstration :** En fait le problème se ramène au cas où  $f \equiv 0$  et  $u_0 \equiv 0$ , et dans ce cas à ce que l'unique solution soit  $u \equiv 0$ .

Si  $u$  est une solution faible, alors, d'après le premier point de la définition 3.1.2, avec  $v = u$ , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 \right) &+ \int_{\mathcal{U}} \left[ \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} u + c(x,t) uv \right] dx, \\ &= \langle u', u \rangle + \int_{\mathcal{U}} \left[ \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} u + c(x,t) uv \right] dx, \\ &= 0. \end{aligned}$$

or, d'après le lemme A.1.1, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{U}} \left[ \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} u + c(x,t) uv \right] dx &\geq c_1 \|u\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 - c_2 \|u\|_{L^2(\mathcal{U})}^2, \\ &\geq -c_2 \|u\|_{L^2(\mathcal{U})}^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 \right) \leq c_2 \|u\|_{L^2(\mathcal{U})}^2,$$

et nous concluons, d'après le lemme de Gromwall, que  $\|u(t)\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 = 0$ , soit  $u \equiv 0$ .  $\square$

### 3.3 Régularité des solutions

Nous reprenons ici la construction précédente basée sur une méthode de *Galerkin* où  $(w_k)_{k \in \mathbb{N}_*}$  est une famille d'éléments propres de l'opérateur  $-\Delta$  sur  $H_0^1(\mathcal{U})$ ,  $\mathcal{U}$  étant un ouvert borné et régulier de  $\mathbb{R}^d$ . Nous supposons, en outre, que les coefficients  $a_{i,j}$ ,  $b_i$  et  $c$  sont réguliers sur  $\overline{\mathcal{U}}$  et indépendants de  $t$ , alors nous avons le résultat suivant :

**Théorème 3.3.1 (Régularité)** *Avec les notations précédentes.*

*i. Soit  $u_0 \in H_0^1(\mathcal{U})$  et  $f \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{U}))$ , si  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{U}))$ , telle que  $u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{U}))$ , est une solution faible de (3.1.1), alors*

$$\begin{aligned} u &\in L^2(0, T; H^2(\mathcal{U})) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\mathcal{U})), \\ u' &\in L^2(0, T; L^2(\mathcal{U})), \end{aligned}$$

et il existe, de plus, une constante  $C$  ne dépendant que du temps  $T$ , du domaine  $\mathcal{U}$  et des coefficients de  $P$  telle que :

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 &\leq C \left( \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{U}))}^2 + \|u_0\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 \right), \\ \|u\|_{L^2(0,T;H^2(\mathcal{U}))}^2 &\leq C \left( \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{U}))}^2 + \|u_0\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 \right), \\ \|u'\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{U}))}^2 &\leq C \left( \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{U}))}^2 + \|u_0\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 \right). \end{aligned}$$

ii. Si, de plus,  $u_0 \in H^2(\mathcal{U})$  et  $f' \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{U}))$ , alors

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0, T; H^2(\mathcal{U})), \\ u' &\in L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{U})) \cap L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{U})), \\ u'' &\in L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{U})), \end{aligned}$$

et nous avons de nouvelles estimations :

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} [\|u(t)\|_{H^2(\mathcal{U})} + \|u'(t)\|_{L^2(\mathcal{U})}] + \|u'\|_{L^2(0,T;H_0^1(\mathcal{U}))} + \|u''\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathcal{U}))} \\ \leq C \left( \|f\|_{H^1(0,T;L^2(\mathcal{U}))} + \|u_0\|_{H_2(\mathcal{U})} \right). \end{aligned}$$

**Démonstration :**

**1<sup>re</sup> étape** Soit  $n \in \mathbb{N}_*$ , multipliant alors l'équation (3.2.5) par  $\frac{d\lambda_n^k}{dt}(t)$  et sommant pour  $k = 1, \dots, n$ , nous obtenons, pour presque tout  $t \in (0, T)$  :

$$\int_{\mathcal{U}} \left[ u_n' u_n' + \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n'}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} u_n' + c(x) u_n u_n' \right] dx = \int_{\mathcal{U}} f u_n' dx.$$

En outre,  $a_{i,j} = a_{j,i}$  et donc, si nous notons  $P_2$  la forme bilinéaire symétrique sur  $H_0^1(\mathcal{U})$  :

$$P_2(u, v) = \int_{\mathcal{U}} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx,$$

nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{\mathcal{U}} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n'}{\partial x_j} dx, \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} P_2(u_n, u_n) \right). \end{aligned}$$



De plus,

$$\begin{aligned} \text{si nous notons } \mathcal{B} &= \int_{\mathcal{U}} \left[ \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} u'_n + c(x) u_n u'_n \right] dx, \\ \text{alors, } |\mathcal{B}| &\leq \sum_{i=1}^d \|b_i\|_{L^\infty(\bar{\mathcal{U}})} \int_{\mathcal{U}} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right| |u'_n| dx + \|c\|_{L^\infty(\bar{\mathcal{U}})} \int_{\mathcal{U}} |u_n| |u'_n| dx, \\ &\leq \frac{C}{2\sigma^2} \|u_n\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 + \frac{C\sigma^2}{2} \|u'_n\|_{L^2(\mathcal{U})}^2, \end{aligned}$$

et ce pour tout  $\sigma > 0$ . En outre, si nous notons

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \int_{\mathcal{U}} f u'_n dx, \\ \text{alors } |\mathcal{C}| &\leq \frac{C}{2\sigma^2} \|f\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 + \frac{C\sigma^2}{2} \|u'_n\|_{L^2(\mathcal{U})}^2. \end{aligned}$$

Il s'en suit donc que :

$$\|u'_n\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} P_2(u_n, u_n) \right) \leq \frac{C}{2\sigma^2} \left[ \|u_n\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 + \|f\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 \right] + C\sigma^2 \|u'_n\|_{L^2(\mathcal{U})}^2.$$

Soit pour  $\sigma^2 = \frac{1}{2C}$ ,

$$\|u'_n\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 + \frac{d}{dt} (P_2(u_n, u_n)) \leq 2C^2 \left[ \|u_n\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 + \|f\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 \right].$$

Intégrant l'inégalité précédente sur  $t \in [0, T]$ , il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u'_n\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 dt + P_2(u_n(T), u_n(T)) &\leq P_2(u_n(0), u_n(0)) \\ &\quad + 2C^2 \int_0^T \left[ \|u_n(t)\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 + \|f(t)\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 \right] dt, \\ (3.3.11) \qquad \qquad \qquad &\leq C' \left[ \|u_0\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{U}))}^2 \right], \end{aligned}$$

grâce au théorème 3.2.2, avec  $C'$  qui ne dépend que des données du problème et de la géométrie et  $\|u_n(0)\|_{H_0^1(\mathcal{U})} \leq \|u_0\|_{H_0^1(\mathcal{U})}$ .

**2<sup>e</sup> étape** L'opérateur  $P$  étant strictement parabolique, il vient :

$$\|u_n(t)\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 \leq \frac{1}{\delta} P_2(u_n(t), u_n(t))$$

et donc :

$$\|u_n(t)\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 \leq C'' \left[ \|u_0\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{U}))}^2 \right],$$

soit, en prenant la borne supérieure sur  $t \in [0, T]$  :

$$(3.3.12) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_n(t)\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 \leq C'' \left[ \|u_0\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{U}))}^2 \right].$$

Passant à la limite pour la sous-suite vue précédemment, nous obtenons que  $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\mathcal{U}))$  et en reprenant l'inégalité (3.3.11),  $u' \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{U}))$  et les estimations correspondantes pour  $u'$  sont valides.

**3<sup>e</sup> étape** Posons  $g = f - u'$ , alors pour presque tout  $t$  et tout  $v \in H_0^1(\mathcal{U})$ , nous avons,

$$\int_{\mathcal{U}} \left[ \sum_{i,j=1}^d a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + cuv \right] dx = \int_{\mathcal{U}} g v dx$$

et  $g(t) \in L^2(\mathcal{U})$ . Les théorèmes sur la régularité des solutions des problèmes elliptiques impliquent alors que  $u \in H^2(\mathcal{U})$  pour presque tout  $t \in [0, T]$  et, de plus :

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(\mathcal{U})}^2 &\leq C \left( \|g\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 + \|u\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 \right), \\ &\leq C \left( \|f\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 + \|u\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 + \|u'\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 \right). \end{aligned}$$

Intégrant suivant  $t$  sur  $[0, T]$  et utilisant la seconde étape, il vient que

$$u \in L^2(0, T; H^2(\mathcal{U}))$$

et l'inégalité pour  $\|u\|_{L^2(0,T;H^2(\mathcal{U}))}$  est vérifiée.

**4<sup>e</sup> étape** Nous supposons donc maintenant que :

$$\begin{aligned} u_0 &\in H_0^1(\mathcal{U}) \cap H^2(\mathcal{U}), \\ \text{et } f &\in H^1(0, T; L^2(\mathcal{U})). \end{aligned}$$

Pour  $n \in \mathbb{N}_*$  donné, posons  $\widehat{u}_n = u'_n$  et dérivons l'équation (3.2.5) par rapport au temps, sachant que les coefficients de  $P$  ne dépendent plus du temps :

$$\int_{\mathcal{U}} \left[ \widehat{u}_n' w_k + \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x) \frac{\partial \widehat{u}_n}{\partial x_i} \frac{\partial w_k}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x, t) \frac{\partial \widehat{u}_n}{\partial x_i} w_k + c(x, t) \widehat{u}_n w_k \right] dx = \int_{\mathcal{U}} f' w_k dx.$$

Nous multiplions alors par  $\frac{d\lambda_n^k}{dt}(t)$  et sommons pour  $k = 1, \dots, n$ , il vient donc :

$$\int_{\mathcal{U}} \left[ \widehat{u}_n' \widehat{u}_n + \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x) \frac{\partial \widehat{u}_n}{\partial x_i} \frac{\partial \widehat{u}_n}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x, t) \frac{\partial \widehat{u}_n}{\partial x_i} \widehat{u}_n + c(x, t) \widehat{u}_n \widehat{u}_n \right] dx = \int_{\mathcal{U}} f' \widehat{u}_n dx.$$

Et grâce au lemme de Gromwall, nous obtenons :

$$(3.3.13) \quad \begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u'_n(t)\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 + \int_0^T \|u'_n(t)\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 dt &\leq C \left[ \|u'_n(0)\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 + \|f'\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{U}))}^2 \right], \\ &\leq C \left[ \|u_n(0)\|_{H^2(\mathcal{U})}^2 + \|f\|_{H^1(0,T;L^2(\mathcal{U}))}^2 \right]. \end{aligned}$$

Cependant, pour  $k \in \mathbb{N}_*$ ,  $w_k$  est un élément propre de  $-\Delta$  sur  $H_0^1(\mathcal{U})$  et régulière, donc  $\Delta u_n = 0$  sur  $\partial\mathcal{U}$  et

$$\begin{aligned} \|u_n(0)\|_{H^2(\mathcal{U})}^2 &\leq C \|\Delta u_n(0)\|_{L^2(\mathcal{U})}^2, \\ &\leq C \int_{\mathcal{U}} u_n(0) \Delta^2 u_n(0) dx. \end{aligned}$$

En outre,  $\text{vect}((w_k)_{k=1,\dots,n})$  est stable pour l'opérateur  $\Delta$  et  $\int_{\mathcal{U}} u_n(0) w_k dx = \int_{\mathcal{U}} u_0 w_k dx$  pour  $k = 1, \dots, n$  donc :

$$\begin{aligned} \|u_n(0)\|_{H^2(\mathcal{U})}^2 &\leq C \int_{\mathcal{U}} u_0 \Delta^2 u_n(0) dx, \\ &\leq C \int_{\mathcal{U}} \Delta u_0 \Delta u_n(0) dx, \\ &\leq \frac{C\sigma^2}{2} \|u_n(0)\|_{H^2(\mathcal{U})}^2 + \frac{C}{2\sigma^2} \|u_0\|_{H^2(\mathcal{U})}^2, \quad \forall \sigma > 0, \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_n(0)\|_{H^2(\mathcal{U})}^2 + C' \|u_0\|_{H^2(\mathcal{U})}^2, \end{aligned}$$

en ayant choisi  $\sigma^2 = C$ . Soit  $\|u_n(0)\|_{H^2(\mathcal{U})} \leq C \|u_0\|_{H^2(\mathcal{U})}$  et donc l'inégalité (3.3.13) devient :

$$(3.3.14) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \|u'_n(t)\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 + \int_0^T \|u'_n(t)\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 dt \leq C \left( \|u_0\|_{H^2(\mathcal{U})}^2 + \|f\|_{H^1(0,T;L^2(\mathcal{U}))}^2 \right).$$

**6<sup>e</sup> étape** Soit  $\mu_k$  la  $k$ -ième valeur propre de  $-\Delta$  sur  $H_0^1(\mathcal{U})$ , alors, multipliant (3.2.5) par  $\mu_k \lambda_n^k(t)$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{U}} \left[ \sum_{i,j=1}^d a_{i,j} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \lambda_n^k(t) \frac{\partial \Delta w_k}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \lambda_n^k(t) \Delta w_k + c(x) u_n \lambda_n^k(t) \Delta w_k \right] dx \\ = \int_{\mathcal{U}} (f - u'_n) \lambda_n^k(t) \Delta w_k dx, \end{aligned}$$

soit

$$(3.3.15) \quad \int_{\mathcal{U}} \left[ \sum_{i,j=1}^d a_{i,j} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_n}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \Delta u_n + c(x) u_n \Delta u_n \right] dx = \int_{\mathcal{U}} (f - u'_n) \Delta u_n dx.$$

Alors, par analogie avec le lemme A.1.1, il existe des constantes  $c_1 > 0$  et  $c_2 \geq 0$  telles que :

$$c_1 \|u_n\|_{H^2(\mathcal{U})} \leq (f - u'_n, -\Delta u_n) + c_2 \|u_n\|_{L^2(\mathcal{U})}^2$$

et donc

$$\|u_n\|_{H^2(\mathcal{U})} \leq C \left[ \|u'_n\|_{L^2(\mathcal{U})} + \|u_n\|_{L^2(\mathcal{U})} + \|f\|_{L^2(\mathcal{U})} \right].$$

D'après le théorème A.2.1, il vient donc :

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \left[ \|u'_n(t)\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 + \|u_n(t)\|_{H^2(\mathcal{U})}^2 \right] + \int_0^T \|u'_n(t)\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 dt \\ \leq C \left( \|f\|_{H^1(0,T;L^2(\mathcal{U}))}^2 + \|u_0\|_{H^2(\mathcal{U})}^2 \right). \end{aligned}$$

Nous passons alors à la limite quand  $n_l \rightarrow \infty$  pour conclure.

**7<sup>e</sup> étape** Finalement, nous prenons, comme dans le théorème 3.2.2, un élément  $v$  de  $H_0^1(\mathcal{U})$  de norme inférieure à un que nous projetons sur l'espace engendré par les  $n$  premiers vecteurs de  $(w_k)_{k \in \mathbb{N}_*}$ . Alors, pour presque tout  $0 \leq t \leq T$ , il vient :

$$\begin{aligned} \langle u''_n, v \rangle &= (u''_n, v), \\ &= (u''_n, v_1), \\ &= (f', v_1) - \int_{\mathcal{U}} \left[ \sum_{i,j=1}^d a_{i,j} \frac{\partial u'_n}{\partial x_i} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial u'_n}{\partial x_i} v_1 + c u'_n v_1 \right] dx, \end{aligned}$$

et donc  $|\langle u''_n, v \rangle| \leq C \left( \|f'\|_{L^2(\mathcal{U})} + \|u'_n\|_{H_0^1(\mathcal{U})} \right)$ , avec  $\|v_1\|_{H_0^1(\mathcal{U})} \leq 1$  et donc

$$\|u''_n\|_{H^{-1}(\mathcal{U})} \leq C \left( \|f'\|_{L^2(\mathcal{U})} + \|u'_n\|_{H_0^1(\mathcal{U})} \right),$$

et  $u''_n$  est bornée dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{U}))$  et par passage à la limite,

$$u'' \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{U})).$$

□

Nous pouvons étendre le résultat du théorème précédent, dans le cas où les données sont plus régulières, pour obtenir une plus grande régularité des solutions avec le théorème suivant :

**Théorème 3.3.2** *Si  $u_0 \in H^{2m+1}(\mathcal{U})$  et  $\frac{d^k f}{dt^k} \in L^2(0, T; H^{2m-2k}(\mathcal{U}))$  pour  $k = 0$  à  $m$  et si, en outre, les conditions suivantes de compatibilité à l'ordre  $m$  sont valides :*

$$\begin{aligned} g_0 &\equiv u_0 \in H_0^1(\mathcal{U}), \\ g_1 &\equiv f(0) - P g_0 \in H_0^1(\mathcal{U}), \\ &\vdots \\ g_m &\equiv \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}}(0) - P g_{m-1} \in H_0^1(\mathcal{U}), \end{aligned}$$

alors

$$\frac{d^k u}{dt^k} \in L^2(0, T; H^{2m+2-2k}(\mathcal{U})), \quad k = 0, \dots, m.$$

et

$$\sum_{k=0}^{m+1} \left\| \frac{d^k u}{dt^k} \right\|_{L^2(0, T; H^{2m+2-2k}(\mathcal{U}))} \leq C \left[ \sum_{k=0}^m \left\| \frac{d^k f}{dt^k} \right\|_{L^2(0, T; H^{2m-2k}(\mathcal{U}))} + \|u_0\|_{H^{2m+1}(\mathcal{U})} \right].$$

### 3.4 Application : systèmes hyperboliques symétriques

Plaçons nous dans le cas d'un domaine  $\mathcal{U}$  périodique,  $\mathcal{U} = [0, 1]$  pour simplifier, et considérons le cas d'un système hyperbolique linéaire à coefficients variables symétrique :

$$(3.4.16) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, t)u + F(x, t), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

où les coefficients  $A$ ,  $B$ , le terme de force extérieure  $F$  ainsi que la donnée initiale  $u_0$  sont  $\mathcal{C}^\infty$  et périodiques en  $x$ . Nous supposons en outre que la matrice  $A$  est symétrique.

Soit alors  $\varepsilon$  un réel strictement positif, considérons le système :

$$(3.4.17) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A \frac{\partial v}{\partial x} + Bv + F, \\ v(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Ce système étant strictement parabolique, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une unique solution, notée  $v_\varepsilon$ . De plus  $v_\varepsilon$  est  $\mathcal{C}^\infty$ , périodique en  $x$  et vérifie le résultat suivant :

**Proposition 3.4.1** *Soit  $T > 0$  fini, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $C_n$  ne dépendant que de  $T$ ,  $n$  et des coefficients  $A$  et  $B$  telle que :*

$$\|v_\varepsilon(\cdot, t)\|_{H^n(\mathcal{U})}^2 \leq C_n \left[ \|u_0\|_{H^n}^2 + \int_0^T \|F(\cdot, s)\|_{H^n}^2 ds \right].$$

**Démonstration** : Considérons, pour  $\varepsilon > 0$ , la solution  $v_\varepsilon$  de (3.4.17), alors en multipliant par  $v_\varepsilon$  puis en intégrant sur  $\mathcal{U}$ , il vient

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} dx &= \int_0^1 \left[ v_\varepsilon \varepsilon \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2} + v_\varepsilon A \cdot \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} + v_\varepsilon B v_\varepsilon + v_\varepsilon F \right] dx \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_0^1 v_\varepsilon^2(x, t) dx \right) &= -\varepsilon \int_0^1 \left( \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left( v_\varepsilon A \cdot \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} + A \cdot \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} v_\varepsilon \right) dx \\ &\quad + \int_0^1 B v_\varepsilon^2 + F v_\varepsilon dx, \\ \frac{d}{dt} \|v_\varepsilon\|_{L^2}^2 &\leq -2\varepsilon \left\| \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 + \int_0^1 v_\varepsilon A \cdot \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} dx + \int_0^1 A \cdot \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} v_\varepsilon dx + 2|B|_\infty \|v_\varepsilon\|_{L^2}^2 \\ &\quad + 2\|F\|_{L^2} \|v_\varepsilon\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_\varepsilon A \cdot \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} dx &= \int_0^1 A \cdot v_\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} dx, \\ &= - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} (A \cdot v_\varepsilon) v_\varepsilon dx, \\ &= - \int_0^1 A \cdot \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} v_\varepsilon dx - \int_0^1 \frac{\partial A}{\partial x} \cdot v_\varepsilon v_\varepsilon dx. \end{aligned}$$

Et donc

$$\frac{d}{dt} \|v_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \left[ 2|B|_\infty + \left| \frac{\partial A}{\partial x} \right|_\infty \right] \|v_\varepsilon\|_{L^2}^2 + 2\|v_\varepsilon\|_{L^2} \|F\|_{L^2},$$

qui, grâce au lemme de Gromwall, nous donne l'estimation pour  $\|v_\varepsilon\|_{L^2}^2$ .

Posons alors  $w_\varepsilon = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}$ , nous avons donc une équation analogue à (3.4.17) vérifiée par  $w_\varepsilon$  :

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial x^2} + A \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} + \left( \frac{\partial A}{\partial x} + B \right) w_\varepsilon + \left( \frac{\partial B}{\partial x} v_\varepsilon + \frac{\partial F}{\partial x} \right).$$

Comme nous disposons déjà d'une borne sur  $\|v_\varepsilon\|_{L^2}$ , nous pouvons faire un calcul analogue au précédent avec le nouveau terme de forçage  $\frac{\partial B}{\partial x} v_\varepsilon + \frac{\partial F}{\partial x}$ , nous obtenons alors l'estimée pour  $\|v_\varepsilon\|_{H^1}^2$  et ainsi de suite par récurrence.  $\square$

Disposant des bornes pour  $\|v_\varepsilon\|_{H^n}$ , quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ , nous pouvons obtenir, en utilisant l'équation (3.4.17) des bornes sur les dérivées en temps et les dérivées mixtes de  $v_\varepsilon$  nécessaires à la démonstration du théorème suivant :

**Théorème 3.4.2** *Le système hyperbolique symétrique (3.4.16) possède une unique solution  $u(x, t)$  qui est  $C^\infty$  et satisfait les estimations de la proposition 3.4.1.*

**Démonstration :**

- i. Considérons deux solutions  $u$  et  $v$  de (3.4.16) alors leur différence  $w = u - v$  satisfait au problème homogène (3.4.16) où  $F \equiv 0$  avec la condition initiale  $w(x, 0) = 0$ . Les estimations de la proposition 3.4.1 sont encore valides pour  $\varepsilon = 0$  et  $w$ , nous avons donc :

$$\frac{d}{dt} \|w\|_{L^2}^2 \leq C \|w\|_{L^2}^2,$$

et  $\|w(\cdot, 0)\|_{L^2} = 0$  soit donc, par le lemme de Gromwall,  $w \equiv 0$ .

Nous avons donc l'unicité d'une telle solution.

- ii. Grâce aux estimations de la proposition 3.4.1, et quitte à extraire une sous-suite, il existe une suite  $(v_\varepsilon)$ , qui converge, pour  $\varepsilon$  tendant vers 0, vers  $v$  et telle que toutes les dérivées de  $v_\varepsilon$  tendent vers les dérivées de  $v$ . La limite  $v$  vérifie donc l'équation (3.4.17) pour  $\varepsilon = 0$  c'est-à-dire (3.4.16) ainsi que les estimations précédentes.

□

**Remarque :** Le résultat précédent se généralise immédiatement au cas de systèmes hyperboliques symétrisables i.e. tels qu'il existe une matrice symétrique définie positive  $H$  telle que  $HA = A^T H$ .

## Deuxième partie

### Étude d'un problème mixte





# Chapitre 4

## Cas monodimensionnel

### 4.1 Introduction

Dans cette partie, nous considérons un système à quatre équations décrivant un écoulement diphasique qui fait intervenir une seule pression  $p$ . Pour chaque phase (air et eau), nous écrivons une équation de conservation de la masse et une équation portant sur la quantité de mouvement faisant apparaître un terme de diffusion du second ordre. L'eau sera indexée par un  $l$  et l'air par un  $v$ . Nous notons  $\alpha$  le taux de présence de l'air (taux de vide), qui représente le rapport du volume occupé par l'air sur le volume total, le taux de présence de l'eau sera quant à lui noté  $\bar{\alpha}$ . La densité volumique du liquide (resp. de l'air) sera notée  $\rho_l$  (resp.  $\rho_v$ ) et sa vitesse  $u_l$  (resp.  $u_v$ ).

$$(4.1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \rho_v u_v}{\partial x} = 0, \quad (4.1.1.i) \\ \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l u_l}{\partial x} = 0, \quad (4.1.1.ii) \\ \frac{\partial \alpha \rho_v u_v}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \rho_v u_v^2}{\partial x} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} = \alpha \mu_v \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2}, \quad (4.1.1.iii) \\ \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l u_l}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l u_l^2}{\partial x} + \bar{\alpha} \frac{\partial p}{\partial x} = \bar{\alpha} \mu_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}, \quad (4.1.1.iv) \end{array} \right.$$

avec  $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$ . L'équation d'état reliant la pression à la densité est donnée par :

$$(4.1.2) \quad p = K \rho_v^\gamma,$$

où  $K$  et  $\gamma$  sont des constantes. De plus, les quantités  $\mu_l$  et  $\mu_v$  sont strictement positives et  $\rho_l$  est une constante. Nous avons donc une phase, le liquide, qui est incompressible alors que l'autre, le gaz, ne l'est pas.

En outre, comme on le verra à la section 4.4, les variables considérées sont 1-périodiques par rapport à  $x$ , ceci afin d'éviter les délicats problèmes liés aux conditions limites.

## 4.2 Nature du problème

Bien que possédant des termes de diffusion du second ordre, le système obtenu n'est pas strictement parabolique. Comme nous allons le voir, les problèmes de Cauchy pour le linéarisé issu de ce système sont néanmoins *bien posés*.

### 4.2.1 Un cas limite: le *système simplifié*

Pour étudier la nature *bien posé* des problèmes issus du système (4.1.1), nous allons, dans un premier temps, étudier un système simplifié dans lequel l'action du gradient de pression sur la quantité de mouvement de la phase incompressible est négligée par rapport aux autres termes (accélération, inertie).

#### 4.2.1.1 Nouvelle formulation

Dans cette partie, nous considérons un système simplifié obtenu en faisant l'hypothèse que les variations de pression restent faibles ( c'est-à-dire  $\frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial x} \ll \frac{\partial(\bar{\alpha}u_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\alpha}u_l^2)}{\partial x} - \bar{\alpha}\nu_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}$ ). L'équation (4.1.1.iv) devient alors, compte tenu du fait que  $\rho_l$  est constante :

$$\frac{\partial \bar{\alpha}u_l}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\alpha}u_l^2}{\partial x} = \bar{\alpha}\nu_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2},$$

où  $\nu_l = \frac{\mu_l}{\rho_l}$ . Nous obtenons alors le système appelé *système simplifié* :

$$(4.2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \rho_v u_v}{\partial x} = 0, \quad (4.2.3.i) \\ \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l u_l}{\partial x} = 0, \quad (4.2.3.ii) \\ \frac{\partial \alpha \rho_v u_v}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \rho_v u_v^2}{\partial x} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} = \alpha \mu_v \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2}, \quad (4.2.3.iii) \\ \frac{\partial \bar{\alpha} u_l}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\alpha} u_l^2}{\partial x} = \bar{\alpha} \nu_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}. \quad (4.2.3.iv) \end{array} \right.$$

D'autre part, la masse volumique  $\rho_l$  étant constante, l'équation (4.2.3.ii) devient :

$$(4.2.4) \quad \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\alpha}u_l)}{\partial x} = 0.$$

Or  $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$  et donc :

$$(4.2.5) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((\alpha - 1)u_l) = 0.$$

Développons alors l'équation (4.2.3.iv) :

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \frac{\partial u_l}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t} u_l + \bar{\alpha} u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\alpha} u_l)}{\partial x} &= \bar{\alpha} \nu_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}, \\ \Leftrightarrow \bar{\alpha} \left( \frac{\partial u_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} \right) + u_l \left( \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\alpha} u_l)}{\partial x} \right) &= \bar{\alpha} \nu_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

utilisant ensuite l'équation (4.2.4) et faisant l'hypothèse que  $\bar{\alpha}$  est non nul, nous obtenons après simplification par  $\bar{\alpha}$  :

$$(4.2.6) \quad \frac{\partial u_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_l^2}{2} \right) = \nu_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}.$$

De plus, l'équation (4.2.3.iii) nous donne :

$$\begin{aligned} \alpha \rho_v \frac{\partial u_v}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha \rho_v)}{\partial t} u_v + \alpha \rho_v u_v \frac{\partial u_v}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha \rho_v u_v)}{\partial x} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} &= \alpha \mu_v \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2}, \\ \Leftrightarrow \alpha \rho_v \left[ \frac{\partial u_v}{\partial t} + u_v \frac{\partial u_v}{\partial x} \right] + u_v \left[ \frac{\partial(\alpha \rho_v)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha \rho_v u_v)}{\partial x} \right] + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} &= \alpha \mu_v \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Grâce à l'équation (4.2.3.i), l'équation d'état (4.1.2) et en supposant  $\alpha \rho_v$  non nul, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_v}{\partial t} + u_v \frac{\partial u_v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_v} \gamma K \rho_v^{\gamma-1} \frac{\partial \rho_v}{\partial x} &= \frac{\mu_v}{\rho_v} \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2}, \\ \Leftrightarrow \frac{\partial u_v}{\partial t} + u_v \frac{\partial u_v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\gamma K}{\gamma-1} \rho_v^{\gamma-1} \right) &= \frac{\mu_v}{\rho_v} \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Nous posons alors  $\nu_v = \frac{\mu_v}{\rho_v}$ , d'où :

$$(4.2.7) \quad \frac{\partial u_v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_v^2}{2} + \frac{\gamma K}{\gamma-1} \rho_v^{\gamma-1} \right) = \nu_v \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2}.$$

**Proposition 4.2.1** *Les équations (4.2.5), (4.2.6) et (4.2.7) ainsi que l'équation (4.2.3.i) forment alors un système (4.2.8) équivalent au système (4.2.3) pour les solutions*

$$\mathcal{C}^2 \left( [0, 1] \times [0, +\infty), [0, 1[ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2 \right).$$

$$(4.2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((\alpha - 1)u_l) = 0, \\ \frac{\partial \alpha \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \rho_v u_v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_l^2}{2} \right) = \nu_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u_v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_v^2}{2} + \frac{\gamma K}{\gamma - 1} \rho_v^{\gamma-1} \right) = \nu_v \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2}. \end{array} \right.$$

**Remarque :** Il faut bien noter que le taux de vide  $\alpha$  est à valeur dans  $[0, 1[$ , c'est-à-dire que  $\bar{\alpha}$  ne s'annule pas.

#### 4.2.1.2 Étude spectrale

Les coefficients  $\nu_l$  et  $\nu_v$  sont désormais supposés constants. Le système d'équations aux dérivées partielles (4.2.8) est donc de la forme :

$$(4.2.9) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial (f(V))}{\partial x} = D(V) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

ou encore sous la forme d'un système quasi-linéaire :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + A(V) \frac{\partial V}{\partial x} = D(V) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

où  $A(V)$  est la matrice jacobienne de  $f(V)$  :

$$A(V) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial V}$$

et  $D(V)$  est la matrice des termes de diffusion (constante dans le cas qui nous intéresse). Posons alors  $V = \underline{V} + W$  (ou  $V = \underline{V} + \varepsilon W$ ) avec  $W$  de moyenne nulle ( $\underline{V}$  est donc constante et égale à la valeur moyenne de  $V$ ). Le vecteur  $W$  est donc solution, au premier ordre, du système linéaire à coefficients constants :

$$(4.2.10) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + A(\underline{V}) \frac{\partial W}{\partial x} = D(\underline{V}) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}.$$

Appliquons la transformée de Fourier (sur la variable d'espace) à l'équation linéarisée (4.2.10). Notons  $\widehat{W}(\xi, t)$  l'image de  $W(x, t)$ , elle vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{W}(\xi, t) = -i\xi A(\underline{V}) \widehat{W}(\xi, t) - \xi^2 D(\underline{V}) \widehat{W}(\xi, t).$$

Soit, pour  $\xi \in \mathbb{R}$  fixé, l'équation différentielle :

$$(4.2.11) \quad \frac{\partial}{\partial t} \widehat{W}(\xi, t) = -M(\underline{V}, \xi) \widehat{W}(\xi, t),$$

avec

$$(4.2.12) \quad M(\underline{V}, \xi) = \xi^2 D(\underline{V}) + i\xi A(\underline{V}).$$

Pour étudier le caractère bien posé de (4.2.10), il nous faut donc étudier le spectre de  $M$ .

### 4.2.1.3 Calcul des valeurs propres

D'après le système (4.2.8), le flux  $f(V)$  a la définition suivante, avec  $V = (\alpha, \alpha\rho_v, u_l, u_v)^T$ ,

$$(4.2.13) \quad f(V) = \begin{pmatrix} (\alpha - 1)u_l \\ \alpha\rho_v u_v \\ \frac{u_l^2}{2} \\ \frac{u_v^2}{2} + \frac{\gamma K}{\gamma - 1} \rho_v^{\gamma-1} \end{pmatrix},$$

soit encore  $f(V) = \left( (V_1 - 1)V_3, V_2V_4, \frac{V_3^2}{2}, \frac{V_4^2}{2} + \frac{\gamma K}{\gamma - 1} \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} \right)^T$ . Nous en déduisons donc sa jacobienne :

$$A(V) = \frac{\partial f}{\partial V} = \begin{pmatrix} V_3 & 0 & V_1 - 1 & 0 \\ 0 & V_4 & 0 & V_2 \\ 0 & 0 & V_3 & 0 \\ -\gamma K \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-2} \frac{V_2}{V_1^2} & \gamma K \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-2} \frac{1}{V_1} & 0 & V_4 \end{pmatrix}.$$

Soit  $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho_v}} = \sqrt{\gamma K \rho_v^{\gamma-1}}$  une vitesse caractéristique, alors

$$(4.2.14) \quad A(V) = \begin{pmatrix} u_l & 0 & \alpha - 1 & 0 \\ 0 & u_v & 0 & \alpha\rho_v \\ 0 & 0 & u_l & 0 \\ -\frac{c^2}{\alpha} & \frac{c^2}{\alpha\rho_v} & 0 & u_v \end{pmatrix}.$$

**Remarque :** Le polynôme caractéristique  $P_A$  de  $A(V)$  est donc :

$$P_A(X) = (u_l - X)^2 (u_v - c - X)(u_v + c - X).$$

Les valeurs propres de la jacobienne du flux  $f(V)$  sont donc réelles mais  $u_l$  est de multiplicité algébrique deux alors que le sous-espace propre qui lui est associé n'est que de dimension un (il y a présence d'un bloc de Jordan). Le système  $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(V)) = 0$  n'est donc pas hyperbolique<sup>1</sup>.

$$(4.2.15) \quad \text{En outre, } D(V) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \nu_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} \\ \nu_v \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2} \end{pmatrix}, \text{ nous posons donc :}$$

$$D(V) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_v \end{pmatrix}.$$

Dorénavant,  $\underline{V}$  étant un état initial constant donné, nous omettrons le trait sous le nom des variables: le taux de vide,  $\underline{\alpha}$ , correspondant à l'état  $\underline{V}$  sera donc représenté par  $\alpha$ . De plus,  $\widehat{W}(0, t)$  est nul à l'instant initial et, par (4.2.11),  $\widehat{W}(0, t)$  reste donc nul pour tout temps.

Pour  $\xi$  réel donné, le polynôme caractéristique  $P_M$  de  $M(V, \xi)$  est donné par :

$$\begin{aligned} P_M(X) &= (\xi^2 \nu_l + i\xi u_l - X)(i\xi u_l - X) \\ &\quad \times [(\xi^2 \nu_v + i\xi u_v - X)(i\xi u_v - X) + \xi^2 c^2], \\ &= (\xi^2 \nu_l + i\xi u_l - X)(i\xi u_l - X) \\ &\quad \times [X^2 - X(\xi^2 \nu_v + 2i\xi u_v) + \xi^2(c^2 - u_v^2) + i\xi^3 \nu_v u_v]. \end{aligned}$$

Il y a deux valeurs propres,  $\lambda_1 = \xi^2 \nu_l + i\xi u_l$  et  $\lambda_2 = i\xi u_l$  dont les parties réelles sont évidemment positives ou nulles.

Le discriminant de la partie restante de  $P_M(X)$  est :

$$\begin{aligned} \Delta &= (\xi^2 \nu_v + 2i\xi u_v)^2 - 4\xi^2 c^2 + 4\xi^2 u_v^2 - 4i\xi^3 \nu_v u_v \\ &= \xi^2 (\xi^2 \nu_v^2 - 4c^2). \end{aligned}$$

Il y a donc deux cas suivant le signe de  $\Delta$  :

- i. Si  $\Delta \leq 0$ , alors les deux valeurs propres restantes  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$  ont pour partie réelle commune  $\xi^2 \nu_v$  qui est une quantité positive ou nulle.
- ii. Sinon,  $\Delta > 0$ , les valeurs propres restantes sont  $\lambda_3 = \xi^2 \nu_v + 2i\xi u_v - \sqrt{\Delta}$  et  $\lambda_4 = \xi^2 \nu_v + 2i\xi u_v + \sqrt{\Delta}$ , or  $\Delta \leq (\xi^2 \nu_v)^2$  donc  $\mathcal{R}e(\lambda_3) \geq 0$  et  $\mathcal{R}e(\lambda_4) \geq 0$ .

**Conclusion :** Pour tout état initial  $\underline{V}$  et tout  $\xi$  dans  $\mathbb{R}$ , le spectre de  $M(\underline{V}, \xi)$  est à partie réelle positive ou nulle.

---

1. Il n'est donc pas *bien posé* c.f. la définition 2.1.1.

#### 4.2.1.4 Résultat

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

**Proposition 4.2.2** *Le système simplifié linéarisé autour d'un état initial constant  $\underline{V}$  est bien posé.*

**Démonstration :** Soit un état constant donné  $\underline{V}$  et soit  $V(x) = \underline{V} + W_0(x)$  un état initial proche de  $\underline{V}$  ( $W_0 \ll \underline{V}$ ) et régulier,  $\mathcal{C}^k$  avec  $k \geq 2$  par exemple<sup>2</sup>. Nous avons vu que, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , la matrice  $M(\underline{V}, \xi)$  avait son spectre dans le demi-plan des nombres complexes à partie réelle positive ou nulle. Donc, il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , la norme de l'opérateur  $e^{-tM(\underline{V}, \xi)}$  soit majorée par  $C$  ; la norme considérée étant celle associée à la norme  $\mathcal{L}^2$  notée  $\|\cdot\|$ .

De plus, d'après (4.2.11), nous avons :

$$\widehat{W}(\xi, t) = e^{-tM(\underline{V}, \xi)} \widehat{W}_0(\xi).$$

Soit

$$(4.2.16) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|\widehat{W}(\xi, t)\| \leq C \|\widehat{W}_0(\xi)\|.$$

La transformée de Fourier étant une isométrie de  $\mathcal{L}^2$ ,  $W$  est donc bien définie pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}_+$  et possède la même régularité que la perturbation initiale  $W_0$ .  $\square$

## 4.2.2 Cas du système initial

Dans cette partie, nous revenons au système (4.1.1) dont nous faisons une étude comparable à celle vue à la partie 4.2.1. Nous faisons en outre l'hypothèse que les quantités  $\nu_v$  et  $\nu_l$  sont des constantes strictement positives.

### 4.2.2.1 Formulation

Comme pour le système simplifié (4.2.8), le système (4.1.1) peut se mettre sous la forme (4.2.9) avec un nouveau flux  $f$  et la même matrice de diffusion :

$$D(V) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_v \end{pmatrix}.$$

Le flux est ici donné par :

$$f(V) = \left( (V_1 - 1)V_3, V_2V_4, \frac{V_3^2}{2} + \frac{K}{\rho_l} \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma, \frac{V_4^2}{2} + \frac{\gamma K}{\gamma - 1} \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} \right)^T,$$

---

2. La continuité suffit en fait ici.



avec  $V = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ . Dans ce cas, la jacobienne est, par contre, modifiée. Nous obtenons, avec les mêmes notations que précédemment, la matrice :

$$(4.2.17) \quad A(V) = \begin{pmatrix} u_l & 0 & \alpha - 1 & 0 \\ 0 & u_v & 0 & \alpha \rho_v \\ -\frac{c^2 \rho_v}{\alpha \rho_l} & \frac{c^2}{\alpha \rho_l} & u_l & 0 \\ -\frac{c^2}{\alpha} & \frac{c^2}{\alpha \rho_v} & 0 & u_v \end{pmatrix}.$$

Posons, pour  $\varepsilon$  réel,  $N(\underline{V}, \varepsilon) = D(\underline{V}) + i\varepsilon A(\underline{V})$ . L'équation (4.2.11) devient alors :

$$(4.2.18) \quad \frac{\partial}{\partial t} \widehat{W}(\xi, t) = -\xi^2 N\left(\underline{V}, \frac{1}{\xi}\right) \widehat{W}(\xi, t), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^*$$

**Remarque :** Pour  $\xi = 0$ , la matrice  $N\left(\underline{V}, \frac{1}{\xi}\right)$  n'est pas définie et il n'est pas possible, a priori, d'écrire l'équation (4.2.18). Cependant, si nous posons  $N(\underline{V}, \infty) \stackrel{\text{def}}{=} 0$ , alors cette équation a bien un sens et, qui plus est, ceci est cohérent avec

$$\xi^2 N\left(\underline{V}, \frac{1}{\xi}\right) = M(\underline{V}, \xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

puisque  $M(\underline{V}, 0) = 0$  et  $\widehat{W}(0, t) = \widehat{W}(0, 0)$ .

Pour  $\xi$  réel donné non nul, le polynôme caractéristique  $P_N$  de la matrice  $N$  est alors défini par :

$$P_N(X) = f(X, \varepsilon)$$

avec  $\varepsilon = \frac{1}{\xi}$  et

$$(4.2.19) \quad f(X, \varepsilon) = (\varepsilon i u_l - X)(\nu_l + \varepsilon i u_l - X) [(\varepsilon i u_v - X)(\nu_v + \varepsilon i u_v - X) + \varepsilon^2 c^2] + \varepsilon^2 c^2 \frac{(1 - \alpha) \rho_v}{\alpha \rho_l} (\varepsilon i u_v - X)(\nu_v + \varepsilon i u_v - X).$$

Nous allons maintenant nous intéresser aux valeurs propres de  $N$  en fonction de  $\varepsilon$ .

#### 4.2.2.2 Cas où $\varepsilon$ est nul

Ceci correspond au cas  $\xi$  tendant vers l'infini.

Si  $\varepsilon = 0$ , alors  $f(X, \varepsilon) = X^2(X - \nu_l)(X - \nu_v)$ . Nous définissons donc :

$$(4.2.20) \quad \lambda_1(0) = \nu_v,$$

$$(4.2.21) \quad \lambda_2(0) = \nu_l,$$

$$(4.2.22) \quad \lambda_3(0) = 0,$$

$$(4.2.23) \quad \lambda_4(0) = 0.$$

Nous retrouvons donc bien qu'aux grandes fréquences le rôle d'*amortisseur* de la diffusion est prépondérant. En effet, les valeurs propres ne font plus, alors, apparaître que les termes  $\nu_v$  et  $\nu_l$  qui proviennent de la seule matrice de diffusion.

### 4.2.2.3 Cas où $\varepsilon$ est non nul

Nous appelons  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  et  $\lambda_4$  les racines (fonctions de  $\varepsilon$ ) de la fonction  $f(X, \varepsilon)$  considérée comme polynôme en  $X$ . Nous allons chercher ces racines sous la forme de développement asymptotique en  $\varepsilon$  au voisinage de 0.

Calculons les dérivées partielles d'ordre un de  $f$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial X}(X, 0) &= (2X - \nu_l)(X^2 - X\nu_v) + (X^2 - X\nu_l)(2X - \nu_v), \\ &= X [4X^2 - 3(\nu_v + \nu_l)X + 2\nu_v\nu_l]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(X, 0) &= (-2iu_lX + iu_l\nu_l)(X^2 - X\nu_v) + (X^2 - X\nu_l)(-2iu_vX + iu_v\nu_v), \\ &= iX [-2(u_v + u_l)X^2 + (u_l(\nu_l + 2\nu_v) + u_v(\nu_v + 2\nu_l))X - \nu_l\nu_v(u_l + u_v)]. \end{aligned}$$

i. Pour la première valeur propre  $\lambda_1$ , nous avons  $\lambda_1(0) = \nu_v \neq 0$ ; soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial X}(\nu_v, 0) &= \nu_v [\nu_v^2 - \nu_v\nu_l], \\ &= \nu_v^2(\nu_v - \nu_l), \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

(Nous supposons ici que les coefficients de diffusion  $\nu_v$  et  $\nu_l$  sont distincts.)

Il est donc possible d'appliquer le théorème des fonctions implicites à  $f(\lambda_1(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ ,  $\lambda_1(\varepsilon)$  admet donc bien un développement limité au voisinage de 0. De plus :

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{d\varepsilon}(0) &= -\frac{1}{\nu_v^2(\nu_v - \nu_l)} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\nu_v, 0), \\ &= iu_v. \end{aligned}$$

Soit

$$(4.2.24) \quad \lambda_1(\varepsilon) = \nu_v + \varepsilon iu_v + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

De même, la seconde valeur propre admet, elle aussi, un développement limité au voisinage de 0 :

$$(4.2.25) \quad \lambda_2(\varepsilon) = \nu_l + \varepsilon i u_l + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

- ii. Pour les deux dernières valeurs propres, nous avons  $\lambda_3(0) = \lambda_4(0) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial X}(0, 0) = 0$ , cependant  $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0, 0)$  est aussi nulle.

Écrivons la formule de Taylor en 0 pour la fonction  $\varepsilon \mapsto f(\lambda(\varepsilon), \varepsilon)$  :

$$\begin{aligned} f(\lambda(\varepsilon), \varepsilon) &= f(\lambda(0), 0) + \varepsilon \left[ \frac{\partial f}{\partial X} \frac{d\lambda}{d\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right] \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \left( \frac{d\lambda}{d\varepsilon} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial \varepsilon} \frac{d\lambda}{d\varepsilon} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial f}{\partial X} \left( \frac{d^2 \lambda}{d\varepsilon^2} \right) \right] + \dots \end{aligned}$$

En fait, pour  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$ , nous avons vu que  $\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = 0$ . Il n'y a donc pas de terme en  $\varepsilon$  et le coefficient du terme en  $\varepsilon^2$  ne fait apparaître que la seule dérivée première de  $\lambda$ , qui est notre inconnue. Il nous faut donc résoudre l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \left( \frac{d\lambda}{d\varepsilon} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial \varepsilon} \frac{d\lambda}{d\varepsilon} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2} = 0.$$

Cette équation nous donne, a priori, deux valeurs possibles pour  $\frac{d\lambda}{d\varepsilon}$ , ce qui est cohérent avec le fait que 0 est racine double de  $f(X, 0)$ .

Ainsi, tous calculs faits, nous avons la condition :

$$2\nu_l \nu_v \left( \frac{d\lambda}{d\varepsilon} \right)^2 - 2i\nu_l \nu_v (u_l + u_v) \left( \frac{d\lambda}{d\varepsilon} \right) - 2\nu_l \nu_v u_l u_v = 0,$$

or  $\nu_l \nu_v \neq 0$  et donc  $\left( \frac{d\lambda}{d\varepsilon} \right)$  est racine de

$$a^2 - i(u_v + u_l)a - u_v u_l = 0.$$

Le discriminant de cette équation est alors  $\Delta = -(u_v + u_l)^2 + 4u_l u_v = -(u_v - u_l)^2$ , d'où

$$a_1 = \frac{i(u_v + u_l) + i(u_v - u_l)}{2} = i u_v$$

et

$$a_2 = \frac{i(u_v + u_l) - i(u_v - u_l)}{2} = i u_l.$$

Nous obtenons donc :

$$(4.2.26) \quad \begin{aligned} \lambda_3(\varepsilon) &= \varepsilon i u_v + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \lambda_4(\varepsilon) &= \varepsilon i u_l + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Comme c'est à la partie réelle de ces racines, plus exactement à son signe, que nous nous intéressons, il va falloir aller plus loin dans le calcul des développements limités (4.2.26). La méthode précédente, qui consiste à annuler les coefficients successifs du développement de  $f(\lambda(\varepsilon), \varepsilon)$ , étant assez contraignante, nous allons *injecter* un développement, par exemple  $\lambda_3(\varepsilon) = \varepsilon i u_v + d\varepsilon^2 + \varepsilon^3 g(\varepsilon)$ , avec  $g(\varepsilon)$  bornée au voisinage de 0, dans cette fonction  $f(\lambda(\varepsilon), \varepsilon)$ , qui est un polynôme en ses deux variables, et annuler les coefficients de  $\varepsilon$  ainsi obtenus.

Pour  $\lambda_3(\varepsilon)$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(\lambda_3(\varepsilon), \varepsilon) &= f(\varepsilon i u_v + d\varepsilon^2 + \varepsilon^3 g(\varepsilon), \varepsilon), \\ &= \varepsilon^3 [i(u_l - u_v)\nu_l(c^2 - d\nu_v)] + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Si  $u_v \neq u_l$ , il s'en suit donc que  $d = \frac{c^2}{\nu_v}$  et

$$(4.2.27) \quad \lambda_3(\varepsilon) = \varepsilon i u_v + \varepsilon^2 \frac{c^2}{\nu_v} + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

De même,

$$(4.2.28) \quad \lambda_4(\varepsilon) = \varepsilon i u_l + \varepsilon^2 \frac{(1 - \alpha)\rho_v c^2}{\alpha\rho_l \nu_l} + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

- iii. Dans le cas particulier où les vitesses des deux fluides sont égales,  $u_v = u_l = u$ , le polynôme caractéristique  $f$  se simplifie en :

$$f(X, \varepsilon) = (\varepsilon i u - X)\mathbf{g}(X, \varepsilon),$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(X, \varepsilon) &= (\varepsilon i u - X)(\nu_l + \varepsilon i u - X)(\nu_v + \varepsilon i u - X) + \varepsilon^2 c^2 (\nu_l + \varepsilon i u - X) \\ &\quad + \varepsilon^2 c^2 \frac{(1 - \alpha)\rho_v}{\alpha\rho_l}. \end{aligned}$$

Nous voyons alors que  $\lambda_3(\varepsilon) = \varepsilon i u$  est une racine de  $f$ . Pour  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , rien ne change :

$$\begin{aligned} \lambda_1(\varepsilon) &= \nu_v + \varepsilon i u + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \lambda_2(\varepsilon) &= \nu_l + \varepsilon i u + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Enfin, pour le développement de  $\lambda_4(\varepsilon)$ , nous savons que les premiers termes sont ceux de  $\lambda_3(\varepsilon)$  mais pour le calcul des termes suivants, nous utilisons la même technique que précédemment sur  $\mathfrak{g}(X, \varepsilon)$ . Nous écrivons donc que :

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(\lambda_4(\varepsilon), \varepsilon) &= \mathfrak{g}(\varepsilon i u + a\varepsilon^2 + \varepsilon^3 h(\varepsilon), \varepsilon), \\ &= \varepsilon^2 \left[ -\nu_l \nu_v a + c^2 \left( \nu_l + \nu_v \frac{(1-\alpha)\rho_v}{\alpha\rho_l} \right) \right] + \dots\end{aligned}$$

et donc  $a = \frac{c^2}{\nu_v \nu_l} \left( \nu_l + \nu_v \frac{(1-\alpha)\rho_v}{\alpha\rho_l} \right)$ . Soit

$$(4.2.29) \quad \lambda_4(\varepsilon) = \varepsilon i u + \varepsilon^2 \frac{c^2}{\nu_v \nu_l} \left( \nu_l + \nu_v \frac{(1-\alpha)\rho_v}{\alpha\rho_l} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Dans tous les cas, nous voyons que, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, les parties réelles des valeurs propres  $\lambda_i(\varepsilon)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , sont strictement positives.

#### 4.2.2.4 Stabilité du linéarisé

Nous avons vu que, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit et non nul, soit  $0 < |\varepsilon| < \eta$ , le spectre de  $N(\underline{V}, \varepsilon)$  est à partie réelle strictement positive. Ainsi, pour  $|\xi| > \frac{1}{\eta}$ , les valeurs propres de  $\xi^2 N(\underline{V}, \frac{1}{\xi})$  sont à parties réelles strictement positives.

En outre, les coefficients de  $M(\underline{V}, \xi)$  sont des polynômes en  $\xi$ , ses valeurs propres sont donc des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\xi$ . Sur l'ensemble  $\left\{ \xi \in \mathbb{R} \text{ tels que } |\xi| \leq \frac{1}{\eta} \right\}$ , le spectre de  $M$  est donc borné : soit  $m$  un minorant des parties réelles des valeurs propres de  $M(\underline{V}, \xi)$  pour  $|\xi| \leq \frac{1}{\eta}$ . Nous avons alors (c.f. (4.2.11))

$$\widehat{W}(\xi, t) = e^{-tM(\underline{V}, \xi)} \widehat{W}(\xi, 0).$$

Pour tout  $\Lambda$  réel,  $\Lambda > 1$ , il existe  $T > 0$  tel que  $e^{-Tm} \leq \Lambda$ .

Pour tout  $t \in [0, T]$  et tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , il y a donc deux cas :

i. Si  $|\xi| \leq \frac{1}{\eta}$ , il existe  $C > 1$  tel que, pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\|e^{-tM(\underline{V}, \xi)}\| \leq e^{-tm}$  et donc :

$$\begin{aligned}\|\widehat{W}(\xi, t)\| &\leq C e^{-tm} \|\widehat{W}(\xi, 0)\|, \\ &\leq C \Lambda \|\widehat{W}_0(\xi)\|.\end{aligned}$$

ii. Sinon,  $|\xi| > \frac{1}{\eta}$ ,  $-t\xi^2 N \left( \underline{V}, \frac{1}{\xi} \right)$  a ses valeurs propres à partie réelle négative d'où

$$\begin{aligned} \|\widehat{W}(\xi, t)\| &\leq C e^0 \|\widehat{W}(\xi, 0)\|, \\ &\leq C \Lambda \|\widehat{W}_0(\xi)\|. \end{aligned}$$

**Conclusion :**

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \|\widehat{W}(\xi, t)\| \leq C \Lambda \|\widehat{W}(\xi, 0)\|,$$

soit, grâce aux propriétés de la transformée de Fourier,

$$(4.2.30) \quad \forall t \in [0, T], \quad \|W(., t)\| \leq C \Lambda \|W(., 0)\|,$$

et  $W(., t)$  possède la même régularité que  $W(., 0)$ .

### 4.2.3 Conclusion

Nous avons donc montré les résultats suivants :

**Théorème 4.2.3 (Stabilité du linéarisé)** *Soit le système initial (4.1.1) mis sous la forme (4.2.9), alors :*

*i. Si la perturbation initiale  $V(., 0) = V_0$  est régulière, alors, pour tout temps  $t$  suffisamment petit,  $V(., t)$  possède la même régularité.*

*ii. De plus, pour toute constante  $\Lambda > 1$ , il existe un temps  $T_\Lambda > 0$  tel que, pour tout  $t < T_\Lambda$  :*

$$\|V(., t)\|_{\mathcal{L}^2} \leq \Lambda \|V_0\|_{\mathcal{L}^2}.$$

## 4.3 Un cas plus général : deux phases compressibles

Considérons, dans cette partie, le cas de deux fluides compressibles. Nous supposons toujours qu'il n'y a qu'une seule pression mais cette fois nous disposons de deux équations d'état :

$$(4.3.31) \quad p = p(\rho_v) = p(\rho_l),$$

avec  $\rho_l$  et  $\rho_v$  non constantes.

### 4.3.1 Reformulation

Avant d'entreprendre une étude analogue à celle de la partie précédente, nous allons écrire sous une forme plus adaptée à la linéarisation le système (4.1.1) muni des nouvelles équations d'état (4.3.31).

L'égalité des pressions impose, via les équations d'état de chaque phase, une relation liant les masses volumiques. En effet différenciant l'équation d'égalité des pressions dans chaque phase, nous obtenons d'une part  $dp = c_v^2 d\rho_v$  et d'autre part  $dp = c_l^2 d\rho_l$ , d'où la relation :

$$(4.3.32) \quad c_v^2 d\rho_v = c_l^2 d\rho_l.$$

Exprimons, en outre, les différentielles des masses volumiques dans les variables  $\alpha\rho_v$  et  $\bar{\alpha}\rho_l$ . Nous remarquons, tout d'abord :

$$(4.3.33) \quad \begin{aligned} d\rho_v &= \frac{1}{\alpha} (d(\alpha\rho_v) - \rho_v d(\alpha)), \text{ et} \\ d\rho_l &= \frac{1}{\bar{\alpha}} (d(\bar{\alpha}\rho_l) + \rho_l d(\alpha)) \text{ car } \bar{\alpha} = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

En utilisant les relations (4.3.33) dans la relation (4.3.32), nous obtenons une expression de la différentielle du taux de vide :

$$(4.3.33) \text{ et } (4.3.32) \Rightarrow \begin{aligned} \frac{c_v^2}{\alpha} [d(\alpha\rho_v) - \rho_v d\alpha] &= \frac{c_l^2}{\bar{\alpha}} [d(\bar{\alpha}\rho_l) + \rho_l d\alpha], \\ \Rightarrow \frac{c_v^2}{\alpha} d(\alpha\rho_v) - \frac{c_l^2}{\bar{\alpha}} d(\bar{\alpha}\rho_l) &= \left( \frac{\rho_l c_l^2}{\bar{\alpha}} + \frac{\rho_v c_v^2}{\alpha} \right) d\alpha, \\ \Rightarrow d\alpha &= \frac{\bar{\alpha} c_v^2}{\bar{\alpha}\rho_v c_v^2 + \alpha\rho_l c_l^2} d(\alpha\rho_v) - \frac{\alpha c_l^2}{\bar{\alpha}\rho_v c_v^2 + \alpha\rho_l c_l^2} d(\bar{\alpha}\rho_l). \end{aligned}$$

Nous déduisons donc une expression de  $d\rho_v$  en fonction de  $(\alpha\rho_v, \bar{\alpha}\rho_l)$  :

$$\begin{aligned} d\rho_v &= \frac{1}{\alpha} [d(\alpha\rho_v) - \rho_v d\alpha], \\ &= \frac{1}{\alpha} \left[ 1 - \frac{\bar{\alpha}\rho_v c_v^2}{\bar{\alpha}\rho_v c_v^2 + \alpha\rho_l c_l^2} \right] d(\alpha\rho_v) + \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha\rho_v c_l^2}{\bar{\alpha}\rho_v c_v^2 + \alpha\rho_l c_l^2} d(\bar{\alpha}\rho_l), \\ &= \frac{c_l^2}{\bar{\alpha}\rho_v c_v^2 + \alpha\rho_l c_l^2} [\rho_l d(\alpha\rho_v) + \rho_v d(\bar{\alpha}\rho_l)]. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc une expression de la différentielle de la pression fonction uniquement des variables  $\alpha\rho_v$  et  $\bar{\alpha}\rho_l$  :

$$(4.3.34) \quad dp = \frac{c_v^2 c_l^2}{\bar{\alpha}\rho_v c_v^2 + \alpha\rho_l c_l^2} [\rho_l d(\alpha\rho_v) + \rho_v d(\bar{\alpha}\rho_l)].$$

Enfin, développons l'équation (4.1.1.iii) et simplifions en utilisant l'équation (4.1.1.i) :

$$(4.1.1.iii) \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial \alpha\rho_v}{\partial t} u_v + \alpha\rho_v \frac{\partial u_v}{\partial t} + \frac{\partial \alpha\rho_v u_v}{\partial x} u_v + \alpha\rho_v u_v \frac{\partial u_v}{\partial x} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} &= \alpha\mu_v \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2}, \\ \Rightarrow u_v \left[ \frac{\partial \alpha\rho_v}{\partial t} + \frac{\partial \alpha\rho_v u_v}{\partial x} \right] + \alpha\rho_v \left[ \frac{\partial u_v}{\partial t} + u_v \frac{\partial u_v}{\partial x} \right] + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} &= \alpha\mu_v \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Posons toujours  $\nu_v = \frac{\mu_v}{\rho_v}$ , nous obtenons alors, si  $\alpha\rho_v$  est non nul :

$$\frac{\partial u_v}{\partial t} + u_v \frac{\partial u_v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu_v \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2}.$$

Nous obtenons une équation analogue pour l'autre phase. Soit donc la nouvelle formulation du système (4.1.1) :

$$(4.3.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \rho_v u_v}{\partial x} = 0, \quad (4.3.35.i) \\ \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l u_l}{\partial x} = 0, \quad (4.3.35.ii) \\ \frac{\partial u_v}{\partial t} + u_v \frac{\partial u_v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu_v \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2}, \quad (4.3.35.iii) \\ \frac{\partial u_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}. \quad (4.3.35.iv) \end{array} \right.$$

### 4.3.2 Étude spectrale

Nous écrivons le système précédent (4.3.35) sous une forme quasi-linéaire en utilisant l'expression (4.3.34) :

$$(4.3.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha \rho_v}{\partial t} + u_v \frac{\partial \alpha \rho_v}{\partial x} + \alpha \rho_v \frac{\partial u_v}{\partial x} = 0, \quad (4.3.36.i) \\ \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l}{\partial x} + \bar{\alpha} \rho_l \frac{\partial u_l}{\partial x} = 0, \quad (4.3.36.ii) \\ \frac{\partial u_v}{\partial t} + u_v \frac{\partial u_v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_v \bar{\alpha} \rho_v c_v^2 + \alpha \rho_l c_l^2} \left[ \rho_l \frac{\partial \alpha \rho_v}{\partial x} + \rho_v \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l}{\partial x} \right] = \nu_v \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2}, \quad (4.3.36.iii) \\ \frac{\partial u_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{1}{\rho_l \bar{\alpha} \rho_v c_v^2 + \alpha \rho_l c_l^2} \left[ \rho_l \frac{\partial \alpha \rho_v}{\partial x} + \rho_v \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l}{\partial x} \right] = \nu_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}. \quad (4.3.36.iv) \end{array} \right.$$

Soit  $C^2 = \frac{c_v^2 c_l^2}{\bar{\alpha} \rho_v c_v^2 + \alpha \rho_l c_l^2}$ , nous pouvons alors, comme dans la partie 4.2.2.1 linéariser autour d'un état constant  $\underline{V}$  puis appliquer une transformée de Fourier. Nous obtenons alors



une équation analogue de (4.2.18) avec la nouvelle matrice  $N(\underline{V}, \varepsilon)$  :

$$(4.3.37) \quad N(\underline{V}, \varepsilon) = \begin{pmatrix} i\varepsilon u_v & 0 & i\varepsilon \alpha \rho_v & 0 \\ 0 & i\varepsilon u_l & 0 & i\varepsilon \bar{\alpha} \rho_l \\ i\varepsilon C^2 \frac{\rho_l}{\rho_v} & i\varepsilon C^2 & \nu_v + i\varepsilon u_v & 0 \\ i\varepsilon C^2 & i\varepsilon C^2 \frac{\rho_v}{\rho_l} & 0 & \nu_l + i\varepsilon u_l \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $N(\underline{V}, \varepsilon)$  est alors :

$$(4.3.38) \quad \begin{aligned} P_N^c(X, \varepsilon) &= (\nu_l + i\varepsilon u_l - X)(i\varepsilon u_l - X) [(\nu_v + i\varepsilon u_v - X)(i\varepsilon u_v - X) + \varepsilon^2 C^2 \alpha \rho_l] \\ &+ \varepsilon^2 C^2 \bar{\alpha} \rho_v (\nu_v + i\varepsilon u_v - X)(i\varepsilon u_v - X). \end{aligned}$$

#### 4.3.2.1 Cas où $\varepsilon$ est nul

Dans ce cas le polynôme  $P_N^c$  se simplifie :

$$P_N^c(X, 0) = X^2(\nu_l - X)(\nu_v - X).$$

Il y a donc quatre valeurs propres réelles qui sont :

$$(4.3.39) \quad \lambda_1(0) = \nu_v,$$

$$(4.3.40) \quad \lambda_2(0) = \nu_l,$$

$$(4.3.41) \quad \lambda_3(0) = 0,$$

$$(4.3.42) \quad \lambda_4(0) = 0.$$

#### 4.3.2.2 Cas où $\varepsilon$ est non nul

Nous menons une étude analogue à celle de la partie précédente. Pour  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , il n'y a pas de problème, quant aux deux dernières valeurs propres, nous injectons donc un développement limité de  $\lambda_3(\varepsilon)$  dans  $P_N^c(X, \varepsilon)$ .

Soit  $\lambda(\varepsilon) = a\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ , alors

$$P_N^c(\lambda(\varepsilon), \varepsilon) = \nu_l \nu_v (i u_l - a)(i u_v - a) \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Nous trouvons donc encore que les valeurs propres ont pour développements limités :

$$\lambda_3(\varepsilon) = i u_v \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

$$\lambda_4(\varepsilon) = i u_l \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Pour obtenir une information sur la partie réelle, il faut alors poursuivre le développement. Soit  $\lambda_3(\varepsilon) = i u_v \varepsilon + a \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$ , alors :

$$P_N^c(\lambda(\varepsilon), \varepsilon) = \nu_l i (u_l - u_v) (\alpha \rho_l C^2 - \nu_v a) \varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Nous voyons donc apparaître deux cas suivant que  $u_v = u_l$  ou  $u_v \neq u_l$ .

i. Cas où la vitesse relative est non nulle :  $u_v \neq u_l$ .

Dans ce cas, nous trouvons que  $\alpha\rho_l C^2 - \nu_v a = 0$  et donc  $a = \alpha\rho_l \frac{C^2}{\nu_v}$ .

$$\lambda_3(\varepsilon) = iu_v \varepsilon + \alpha\rho_l \frac{C^2}{\nu_v} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

De même,

$$\lambda_4(\varepsilon) = iu_l \varepsilon + \bar{\alpha}\rho_v \frac{C^2}{\nu_l} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

ii. Cas où la vitesse relative est nulle :  $u_v = u_l$ .

Dans ce cas le polynôme  $P_N^c$  se simplifie. Soit  $u_v = u_l = u$ , alors :

$$\begin{aligned} P_N^c(X, \varepsilon) = & (i\varepsilon u - X) [(\nu_l + i\varepsilon u - X)((\nu_v + i\varepsilon u - X)(i\varepsilon u - X) + \varepsilon^2 C^2 \alpha\rho_l) \\ & + \varepsilon^2 C^2 \bar{\alpha}\rho_v (\nu_v + i\varepsilon u - X)]. \end{aligned}$$

Il y a donc une racine évidente :

$$\lambda_3(\varepsilon) = iu\varepsilon.$$

On ne s'intéresse alors qu'à la seconde partie du polynôme. Injectons un développement limité de la forme  $\lambda_4(\varepsilon) = iu\varepsilon + a\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$  :

$$P_N^c(\lambda_4(\varepsilon), \varepsilon) = (i\varepsilon u - \lambda_4) [\varepsilon^2 (C^2(\bar{\alpha}\rho_v \nu_v + \alpha\rho_l \nu_l) - \nu_v \nu_l a) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)].$$

Soit la condition  $a = \frac{\bar{\alpha}\rho_v \nu_v + \alpha\rho_l \nu_l}{\nu_v \nu_l} C^2$  et donc :

$$\lambda_4(\varepsilon) = iu\varepsilon + \frac{\bar{\alpha}\rho_v \nu_v + \alpha\rho_l \nu_l}{\nu_v \nu_l} C^2 \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

### 4.3.3 Conclusion

Les parties réelles des valeurs propres sont donc toutes, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, positives ou nulles.

Il s'en suit que l'on peut appliquer le même raisonnement que dans le cas où l'un des fluides était incompressible. Ainsi le problème linéarisé autour d'un état constant est bien posé.

## 4.4 Solutions pour un système à quatre équations

Dans cette partie, nous allons considérer le système (4.1.1) mis sous forme *conservative* comme vu à la partie 4.2.2.1.

Afin de montrer que, pour des intervalles de temps suffisamment petits et des conditions initiales suffisamment régulières, il y a existence et unicité des solutions *classiques* (ou fortes, c'est-à-dire au moins  $\mathcal{C}^2([0, 1] \times [0, T], \mathbb{R}^4)$  avec  $T$  à préciser) nous allons utiliser le théorème suivant tiré de [KL89] (théorème 5.2.3 p.166) :

**Théorème 4.4.1** *On considère un problème de Cauchy 1-périodique pour un système parabolique (4.4.43), un système hyperbolique (4.4.44) ou un système mixte hyperbolique - parabolique (4.4.45). Il existe une unique solution dans un intervalle de temps suffisamment petit :  $0 \leq t \leq T$ . Le temps  $T$  dépend de la condition initiale.*

*i.*

$$(4.4.43) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = A_2(u, x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_1(u, x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + C(u, x, t),$$

avec, dans un voisinage de la condition initiale,  $A_2(u, x, t) + A_2^*(u, x, t) \geq 2\delta I$ , où  $\delta > 0$ .

*ii.*

$$(4.4.44) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = A(v, x, t) \frac{\partial v}{\partial x} + C(v, x, t),$$

où il existe  $H$  matrice symétrique définie positive telle que :

$$H(v, x, t)A(v, x, t) = A^*(v, x, t)H(v, x, t).$$

*iii.*

$$(4.4.45) \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + C,$$

où  $A_2$ ,  $B_{ij}$  et  $C$  sont des fonctions régulières de  $u, v, x, t$ ,  $A_2 + A_2^* \geq 2\delta I$ ,  $\delta > 0$  et  $B_{22}$  est telle qu'il existe une matrice  $H$  définie positive telle que  $HB_{22} = B_{22}^*H$ .

#### 4.4.1 Cas du système *simplifié*

Pour une solution régulière, nous avons vu (cf proposition 4.2.1, page 43) que le système *simplifié* (4.2.3) était équivalent au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((\alpha - 1)u_l) = 0, \\ \frac{\partial(\alpha\rho_v)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha\rho_v u_v)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u_l}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_l^2}{\partial x} = \nu_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u_v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} u_v^2 + \frac{\gamma K}{\gamma - 1} \rho_v^{\gamma-1} \right) = \nu_v \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2}, \end{array} \right.$$

avec  $\nu_l = \frac{\mu_l}{\rho_l}$  et  $\nu_v = \frac{\mu_v}{\rho_v}$ .

##### 4.4.1.1 Reformulation

Le système précédent peut donc s'écrire :

$$(4.4.46) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_l}{\partial t} = \nu_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} - u_l \frac{\partial u_l}{\partial x}, \quad (4.4.46.i) \\ \frac{\partial u_v}{\partial t} = \nu_v \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2} - u_v \frac{\partial u_v}{\partial x} + \frac{\gamma K}{\alpha} \rho_v^{\gamma-1} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\gamma K}{\alpha} \rho_v^{\gamma-2} \frac{\partial(\alpha\rho_v)}{\partial x}, \quad (4.4.46.ii) \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} = (1 - \alpha) \frac{\partial u_l}{\partial x} - u_l \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad (4.4.46.iii) \\ \frac{\partial(\alpha\rho_v)}{\partial t} = -\alpha\rho_v \frac{\partial u_v}{\partial x} - u_v \frac{\partial(\alpha\rho_v)}{\partial x}. \quad (4.4.46.iv) \end{array} \right.$$

Posons  $\mathfrak{U} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} u_l \\ u_v \end{pmatrix}$  et  $\mathfrak{V} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha\rho_v \end{pmatrix}$ , nous avons alors :

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{U} \\ \mathfrak{V} \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{U} \\ \mathfrak{V} \end{pmatrix}_{xx} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{U} \\ \mathfrak{V} \end{pmatrix}_x,$$

avec  $A_2 = \begin{pmatrix} \nu_l & 0 \\ 0 & \nu_v \end{pmatrix}$ ,  $B_{11} = B_{22} = \begin{pmatrix} -u_l & 0 \\ 0 & -u_v \end{pmatrix}$ ,

$B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma K}{\alpha} \rho_v^{\gamma-1} & -\frac{\gamma K}{\alpha} \rho_v^{\gamma-2} \end{pmatrix}$  et  $B_{21} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha\rho_v \end{pmatrix}$ .

Soit donc un système de la forme :

$$(4.4.47) \quad \frac{\partial V}{\partial t} = A(V) \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + B(V) \cdot \frac{\partial V}{\partial x},$$

avec  $V = \begin{pmatrix} \mathfrak{U} \\ \mathfrak{V} \end{pmatrix}$ .

#### 4.4.1.2 Régularisation

Définissons l'ensemble  $\mathcal{P}$  des vecteurs d'état *admissibles* par :

$$(4.4.48) \quad \mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{(u_l, u_v, \alpha, \alpha \rho_v) \in \mathbb{R}^4 \mid 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \rho_v\}.$$

Cet ensemble correspond aux états physiquement admissibles, c'est-à-dire tels que chaque phase est présente et que la masse volumique de la phase gazeuse est strictement positive.

Sur  $\mathcal{P}$ , les coefficients  $A_2$  et  $B_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , sont réguliers en  $\mathfrak{U}$  et  $\mathfrak{V}$ .

Soit  $V_0(x)$  une fonction 1-périodique à valeurs dans  $\mathcal{P}$ . Pour  $\eta > 0$ , nous définissons une partie  $\Omega_\eta$  de  $\mathbb{R}^4$  par :

$$(4.4.49) \quad \Omega_\eta \stackrel{\text{def}}{=} \{V \in \mathbb{R}^4 \mid \exists x \in [0, 1], \quad \|V - V_0(x)\| < \eta\}.$$

Fixons alors  $\eta > 0$  tel que  $\Omega_\eta \subset \mathcal{P}$ . Soit  $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$  telle que :

$$\Phi(V) = \begin{cases} 1 & \text{si } V \in \Omega_{\frac{\eta}{4}}, \\ y \in [0, 1] & \text{si } V \in \Omega_{\frac{\eta}{2}} / \Omega_{\frac{\eta}{4}}, \\ 0 & \text{si } V \notin \Omega_{\frac{\eta}{2}}. \end{cases}$$

Nous posons alors,  $\tilde{B}(V) = \Phi(V)B(V)$ .

Considérons le système :

$$(4.4.50) \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = A(\tilde{V}) \cdot \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} + \tilde{B}(\tilde{V}) \cdot \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x}.$$

Nous pouvons appliquer à ce système (4.4.50), le théorème 4.4.1. En effet, les matrices  $A$  et  $\tilde{B}$  sont alors *régulières*<sup>3</sup> sur  $\mathbb{R}^4$  et

$$A_2 = \begin{pmatrix} \nu_l & 0 \\ 0 & \nu_v \end{pmatrix}$$

donc  $A_2$  est symétrique, définie, positive et  $A_2 + A_2^* \geq 2\delta$  avec  $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \text{Min}(\nu_l, \nu_v)$ ,  $\delta > 0$ , de plus

$$B_{22} = B_{22}^* = \begin{pmatrix} -u_l & 0 \\ 0 & -u_v \end{pmatrix}$$

donc nous prendrons  $H = Id$  dans le théorème.

Ainsi le problème de Cauchy (4.4.50) avec la condition initiale  $\tilde{V}_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(V_0(x))V_0(x)$  admet, pour  $T_1$  suffisamment petit, une unique solution  $\tilde{V}(x, t)$  sur  $t \in [0, T_1]$ . ( $T_1$  dépend de  $V_0$ .)

---

3. En fait  $\mathcal{C}^\infty$ .

#### 4.4.1.3 Existence et unicité

Nous allons déduire de l'existence et de l'unicité de  $\tilde{V}$  solution de (4.4.50) vue précédemment, l'existence et l'unicité de la solution de (4.4.47).

Il nous faut, tout d'abord, remarquer que, pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $V_0(x)$  appartient à  $\Omega_{\frac{2}{4}}$ . Il s'en suit donc que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \tilde{V}_0(x) = V_0(x),$$

soit  $\tilde{V}_0 = V_0$ .

Par continuité de  $\tilde{V}$ ,  $\Omega_{\frac{2}{4}}$  étant d'intérieur non vide, il existe  $T$ ,  $0 < T \leq T_1$ , tel que :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], \quad \forall t \in [0, T], \quad \tilde{V}(x, t) \in \Omega_{\frac{2}{4}} \\ \text{c'est-à-dire} \quad \Phi(\tilde{V}(x, t)) = 1. \end{aligned}$$

Sur  $[0, T]$ ,  $\tilde{V}$  est donc solution de (4.4.47). En outre, pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $\tilde{V}(x, 0) = \tilde{V}_0(x) = V_0(x)$ ,  $\tilde{V}$  est donc solution du problème de Cauchy initial ((4.4.47) avec la condition initiale  $V_0$ ) sur  $[0, T]$ .

De même, si  $W$  est une solution du problème de Cauchy initial, alors par continuité de  $W$ , il existe  $T^* > 0$  tel que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \forall t \in [0, T^*], \quad W(x, t) \in \Omega_{\frac{2}{4}}.$$

Et donc  $W$  est solution de (4.4.50) sur  $[0, T^*]$ . En outre  $W(x, 0) = V_0(x) = \tilde{V}_0(x)$ ,  $W$  est donc solution, sur  $[0, T^*]$ , du problème de Cauchy ((4.4.50),  $\tilde{V}_0$ ) dont  $\tilde{V}$  est l'unique solution. On a donc  $W = \tilde{V}$  sur  $[0, T^*]$  et donc il y a bien unicité de la solution au problème de Cauchy initial pour des temps suffisamment petits.

#### 4.4.1.4 Conclusion

Nous venons de montrer le résultat suivant :

**Théorème 4.4.2** *Pour des temps suffisamment petits, les problèmes de Cauchy issus du système simplifié (4.2.3) admettent des solutions régulières<sup>4</sup> uniques pour des données initiales dans  $\mathcal{P}$ .*

---

4. C'est à dire  $\mathcal{C}^\infty$ .

## 4.4.2 Cas général

Considérons maintenant le système *original*. De même que pour le système *simplifié*, nous avons vu que, pour une solution régulière, ce système (4.1.1) est équivalent au système :

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((\alpha - 1)u_l) & = 0, \\ \frac{\partial(\alpha\rho_v)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha\rho_v u_v)}{\partial x} & = 0, \\ \frac{\partial u_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2}u_l^2 + \frac{K}{\rho_l}\rho_v^\gamma \right) & = \nu_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial u_v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2}u_v^2 + \frac{\gamma K}{\gamma - 1}\rho_v^{\gamma-1} \right) & = \nu_v \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2}, \end{cases}$$

toujours avec  $\nu_l = \frac{\mu_l}{\rho_l}$  et  $\nu_v = \frac{\mu_v}{\rho_v}$ . Nous le réécrivons donc sous la forme :

$$(4.4.51) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_l}{\partial t} = \nu_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} - u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{\gamma K}{\alpha \rho_l} \rho_v^\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\gamma K}{\alpha \rho_l} \rho_v^{\gamma-1} \frac{\partial(\alpha\rho_v)}{\partial x}, \quad (4.4.51.i) \\ \frac{\partial u_v}{\partial t} = \nu_v \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2} - u_v \frac{\partial u_v}{\partial x} + \frac{\gamma K}{\alpha} \rho_v^{\gamma-1} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\gamma K}{\alpha} \rho_v^{\gamma-2} \frac{\partial(\alpha\rho_v)}{\partial x}, \quad (4.4.51.ii) \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} = (1 - \alpha) \frac{\partial u_l}{\partial x} - u_l \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad (4.4.51.iii) \\ \frac{\partial(\alpha\rho_v)}{\partial t} = -\alpha\rho_v \frac{\partial u_v}{\partial x} - u_v \frac{\partial(\alpha\rho_v)}{\partial x}. \quad (4.4.51.iv) \end{array} \right.$$

Appliquons alors la même méthode que pour le système *simplifié*. Il n'y a que la matrice  $B_{12}$  qui change en :

$$B_{12} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma K}{\alpha \rho_l} \rho_v^\gamma & -\frac{\gamma K}{\alpha \rho_l} \rho_v^{\gamma-1} \\ \frac{\gamma K}{\alpha} \rho_v^{\gamma-1} & -\frac{\gamma K}{\alpha} \rho_v^{\gamma-2} \end{pmatrix}.$$

Toutefois cette matrice reste régulière sur  $\mathcal{P}$ . Soit donc le résultat :

**Théorème 4.4.3** *Pour des temps suffisamment petits, il existe une unique solution, régulière, pour un problème de Cauchy issu du système (4.1.1) avec une condition initiale dans  $\mathcal{P}$ .*

# Chapitre 5

## Cas multidimensionnel

Dans cette partie, nous considérons le même modèle que celui vu précédemment (c.f. système (4.1.1) page 41) étendu au cas multidimensionnel. Le système considéré est donc le suivant :

$$(5.0.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\alpha} \rho_l u_l) & = 0, \quad (5.0.1.i) \\ \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l u_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\alpha} \rho_l u_l \otimes u_l) + \bar{\alpha} \nabla p & = \bar{\alpha} \mu_l \Delta u_l, \quad (5.0.1.ii) \\ \frac{\partial \alpha \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \rho_v u_v) & = 0, \quad (5.0.1.iii) \\ \frac{\partial \alpha \rho_v u_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \rho_v u_v \otimes u_v) + \alpha \nabla p & = \alpha \mu_v \Delta u_v. \quad (5.0.1.iv) \end{array} \right.$$

Le produit scalaire de  $\mathbb{R}^3$  est noté par  $\cdot$  et la norme usuelle  $\|\cdot\|$ , ainsi pour  $u$  vecteur de  $\mathbb{R}^3$ ,  $u \cdot u = \|u\|^2$ .

### 5.1 Formulation

Ce système est non conservatif et son opérateur de convection est non hyperbolique. Écrivons le système (5.0.1) en utilisant des variables scalaires ; nous obtenons alors le système suivant, à huit équations scalaires, où  $u_{l,x}$  représente la composante du vecteur vitesse  $u_l$  sur



l'axe des  $x$ ,  $u_{l,y}$  celle sur l'axe  $y$  et  $u_{l,z}$  celle sur l'axe  $z$  (de même pour le vecteur  $u_v$ ):

(5.1.2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\alpha} \rho_l u_{l,x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\alpha} \rho_l u_{l,y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\alpha} \rho_l u_{l,z}) = 0, \quad (5.1.2.i) \\ \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l u_{l,x}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\alpha} \rho_l u_{l,x}^2) + \bar{\alpha} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\alpha} \rho_l u_{l,x} u_{l,y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\alpha} \rho_l u_{l,x} u_{l,z}) = \bar{\alpha} \mu_l \Delta u_{l,x}, \quad (5.1.2.ii) \\ \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l u_{l,y}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\alpha} \rho_l u_{l,y} u_{l,x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\alpha} \rho_l u_{l,y}^2) + \bar{\alpha} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\alpha} \rho_l u_{l,y} u_{l,z}) = \bar{\alpha} \mu_l \Delta u_{l,y}, \quad (5.1.2.iii) \\ \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l u_{l,z}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\alpha} \rho_l u_{l,z} u_{l,x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\alpha} \rho_l u_{l,z} u_{l,y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\alpha} \rho_l u_{l,z}^2) + \bar{\alpha} \frac{\partial p}{\partial z} = \bar{\alpha} \mu_l \Delta u_{l,z}, \quad (5.1.2.iv) \\ \frac{\partial \alpha \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha \rho_v u_{v,x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha \rho_v u_{v,y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha \rho_v u_{v,z}) = 0, \quad (5.1.2.v) \\ \frac{\partial \alpha \rho_v u_{v,x}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha \rho_v u_{v,x}^2) + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha \rho_v u_{v,x} u_{v,y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha \rho_v u_{v,x} u_{v,z}) = \alpha \mu_v \Delta u_{v,x}, \quad (5.1.2.vi) \\ \frac{\partial \alpha \rho_v u_{v,y}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha \rho_v u_{v,y} u_{v,x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha \rho_v u_{v,y}^2) + \alpha \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha \rho_v u_{v,y} u_{v,z}) = \alpha \mu_v \Delta u_{v,y}, \quad (5.1.2.vii) \\ \frac{\partial \alpha \rho_v u_{v,z}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha \rho_v u_{v,z} u_{v,x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha \rho_v u_{v,z} u_{v,y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha \rho_v u_{v,z}^2) + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} = \alpha \mu_v \Delta u_{v,z}. \quad (5.1.2.viii) \end{array} \right.$$

La masse volumique du liquide étant supposée constante, le système précédent peut s'écrire sous une forme simplifiée. L'équation (5.1.2.i) devient :

$$\begin{aligned} (5.1.2.i) &\Rightarrow \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\alpha} u_{l,x}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\alpha} u_{l,y}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\alpha} u_{l,z}}{\partial z} = 0, \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t} + u_{l,x} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} + u_{l,y} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} + u_{l,z} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} + \bar{\alpha} \left[ \frac{\partial u_{l,x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{l,y}}{\partial y} + \frac{\partial u_{l,z}}{\partial z} \right] = 0, \\ (5.1.3) &\Leftrightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u_{l,x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + u_{l,y} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + u_{l,z} \frac{\partial \alpha}{\partial z} + (\alpha - 1) \left[ \frac{\partial u_{l,x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{l,y}}{\partial y} + \frac{\partial u_{l,z}}{\partial z} \right] = 0, \end{aligned}$$

car  $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$ . En outre, en développant l'équation (5.1.2.ii) et en simplifiant grâce à l'équation (5.1.2.i), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(5.1.2.ii) &\Rightarrow \bar{\alpha}\rho_l \frac{\partial u_{l,x}}{\partial t} + \bar{\alpha}\rho_l u_{l,x} \frac{\partial u_{l,x}}{\partial x} + \bar{\alpha} \frac{\partial p}{\partial x} + \bar{\alpha}\rho_l u_{l,y} \frac{\partial u_{l,x}}{\partial y} + \bar{\alpha}\rho_l u_{l,z} \frac{\partial u_{l,x}}{\partial z} \\
&\quad + u_{l,x} \left[ \frac{\partial \bar{\alpha}\rho_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\alpha}\rho_l u_{l,x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\alpha}\rho_l u_{l,y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\alpha}\rho_l u_{l,z}) \right] = \bar{\alpha}\mu_l \Delta u_{l,x}, \\
&\Leftrightarrow \frac{\partial u_{l,x}}{\partial t} + \bar{\alpha} u_{l,x} \frac{\partial u_{l,x}}{\partial x} + \frac{\bar{\alpha}}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial x} + \bar{\alpha} u_{l,y} \frac{\partial u_{l,x}}{\partial y} + \bar{\alpha} u_{l,z} \frac{\partial u_{l,x}}{\partial z} = \frac{\bar{\alpha}\mu_l}{\rho_l} \Delta u_{l,x}, \\
(5.1.4) &\Leftrightarrow \frac{\partial u_{l,x}}{\partial t} + (u_l \cdot \nabla) u_{l,x} + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu_l \Delta u_{l,x},
\end{aligned}$$

avec  $\nu_l = \frac{\mu_l}{\rho_l}$  et après avoir divisé par  $\bar{\alpha}$ . Nous avons de même :

$$(5.1.5) \quad (5.1.2.iii) \Rightarrow \frac{\partial u_{l,y}}{\partial t} + (u_l \cdot \nabla) u_{l,y} + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial y} = \nu_l \Delta u_{l,y},$$

$$(5.1.6) \quad (5.1.2.iv) \Rightarrow \frac{\partial u_{l,z}}{\partial t} + (u_l \cdot \nabla) u_{l,z} + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial z} = \nu_l \Delta u_{l,z}.$$

Par ailleurs, développant l'équation (5.1.2.vi) et simplifiant grâce à l'équation (5.1.2.v) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(5.1.2.vi) &\Rightarrow \alpha\rho_v \frac{\partial u_{v,x}}{\partial t} + \alpha\rho_v u_{v,x} \frac{\partial u_{v,x}}{\partial x} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha\rho_v u_{v,y} \frac{\partial u_{v,x}}{\partial y} + \alpha\rho_v u_{v,z} \frac{\partial u_{v,x}}{\partial z} \\
&\quad + u_{v,x} \left[ \frac{\partial \alpha\rho_v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha\rho_v u_{v,x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha\rho_v u_{v,y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha\rho_v u_{v,z}) \right] = \alpha\mu_v \Delta u_{v,x} \\
&\Leftrightarrow \alpha\rho_v \frac{\partial u_{v,x}}{\partial t} + \alpha\rho_v u_{v,x} \frac{\partial u_{v,x}}{\partial x} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha\rho_v u_{v,y} \frac{\partial u_{v,x}}{\partial y} + \alpha\rho_v u_{v,z} \frac{\partial u_{v,x}}{\partial z} = \alpha\mu_v \Delta u_{v,x} \\
&\Leftrightarrow \frac{\partial u_{v,x}}{\partial t} + u_{v,x} \frac{\partial u_{v,x}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial p}{\partial x} + u_{v,y} \frac{\partial u_{v,x}}{\partial y} + u_{v,z} \frac{\partial u_{v,x}}{\partial z} = \nu_v \Delta u_{v,x}, \\
(5.1.7) &\Leftrightarrow \frac{\partial u_{v,x}}{\partial t} + (u_v \cdot \nabla) u_{v,x} + \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu_v \Delta u_{v,x},
\end{aligned}$$

avec  $\nu_v = \frac{\mu_v}{\rho_v}$  et après avoir divisé par  $\alpha\rho_v$ . De même :

$$(5.1.8) \quad (5.1.2.vii) \Rightarrow \frac{\partial u_{v,y}}{\partial t} + (u_v \cdot \nabla) u_{v,y} + \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial p}{\partial y} = \nu_v \Delta u_{v,y},$$

$$(5.1.9) \quad (5.1.2.viii) \Rightarrow \frac{\partial u_{v,z}}{\partial t} + (u_v \cdot \nabla) u_{v,z} + \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial p}{\partial z} = \nu_v \Delta u_{v,z}.$$

Cependant, dans notre modèle, la pression est une fonction de la masse volumique de la vapeur seulement :  $p = p(\rho_v)$ . Nous pouvons donc exprimer simplement la différentielle de  $p$

en fonction de celles de  $\alpha$  et de  $\alpha\rho_v$  :

$$\begin{aligned} d\rho_v &= d\left(\frac{\alpha\rho_v}{\alpha}\right), \\ &= -\frac{\rho_v}{\alpha}d\alpha + \frac{1}{\alpha}d(\alpha\rho_v), \end{aligned}$$

et donc

$$(5.1.10) \quad dp = \frac{\partial p}{\partial \rho_v} \left[ -\frac{\rho_v}{\alpha}d\alpha + \frac{1}{\alpha}d(\alpha\rho_v) \right].$$

Nous introduisons la nouvelle vitesse caractéristique  $c$  :

$$(5.1.11) \quad c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho_v}},$$

le système (5.1.2) peut alors se mettre sous la forme :

$$(5.1.12) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + A_x(V)\frac{\partial V}{\partial x} + A_y(V)\frac{\partial V}{\partial y} + A_z(V)\frac{\partial V}{\partial z} = S(V),$$

avec un vecteur d'état  $V$ , un terme de diffusion  $S(V)$  et des matrices  $A_x$ ,  $A_y$  et  $A_z$  définis par :

$$V = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha\rho_v \\ u_{l,x} \\ u_{l,y} \\ u_{l,z} \\ u_{v,x} \\ u_{v,y} \\ u_{v,z} \end{pmatrix}, \quad S(V) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \nu_l \Delta u_{l,x} \\ \nu_l \Delta u_{l,y} \\ \nu_l \Delta u_{l,z} \\ \nu_v \Delta u_{v,x} \\ \nu_v \Delta u_{v,y} \\ \nu_v \Delta u_{v,z} \end{pmatrix},$$

$$A_x(V) = \begin{pmatrix} u_{l,x} & 0 & \alpha - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{v,x} & 0 & 0 & 0 & \alpha\rho_v & 0 & 0 \\ -\frac{c^2\rho_v}{\alpha\rho_l} & \frac{c^2}{\alpha\rho_l} & u_{l,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{l,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{l,x} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c^2}{\alpha} & \frac{c^2\rho_v}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & u_{v,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{v,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{v,x} \end{pmatrix},$$

$$A_y(V) = \begin{pmatrix} u_{l,y} & 0 & 0 & \alpha - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{v,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\rho_v & 0 \\ 0 & 0 & u_{l,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c^2\rho_v}{\alpha\rho_l} & \frac{c^2}{\alpha\rho_l} & 0 & u_{l,y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{l,y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{v,y} & 0 & 0 \\ -\frac{c^2}{\alpha} & \frac{c^2\rho_v}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{v,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{v,y} \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$A_z(V) = \begin{pmatrix} u_{l,z} & 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{v,z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\rho_v \\ 0 & 0 & u_{l,z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{l,z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c^2\rho_v}{\alpha\rho_l} & \frac{c^2}{\alpha\rho_l} & 0 & 0 & u_{l,z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{v,z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{v,z} & 0 \\ -\frac{c^2}{\alpha} & \frac{c^2\rho_v}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{v,z} \end{pmatrix}.$$

## 5.2 Linéarisation

Considérons un état constant  $V$  au voisinage duquel nous linéarisons le système (5.1.12). Nous obtenons donc un système linéaire de la forme suivante :

$$(5.2.13) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + A_x(V) \frac{\partial W}{\partial x} + A_y(V) \frac{\partial W}{\partial y} + A_z(V) \frac{\partial W}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \nu_l \Delta W_3 \\ \nu_l \Delta W_4 \\ \nu_l \Delta W_5 \\ \nu_v \Delta W_6 \\ \nu_v \Delta W_7 \\ \nu_v \Delta W_8 \end{pmatrix}.$$

À ce système, nous appliquons une transformée de Fourier pour les variables d'espace. Nous obtenons donc l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$(5.2.14) \quad \frac{\partial \widehat{W}}{\partial t} = -M(\xi, V) \widehat{W}(\xi, t),$$

où la matrice  $M$  est définie par  $M(\xi, V) = \|\xi\|^2 D(V) + i\xi_x A_x(V) + i\xi_y A_y(V) + i\xi_z A_z(V)$  avec  $D(V)$  matrice diagonale de diagonale  $[0, 0, \nu_l, \nu_l, \nu_l, \nu_v, \nu_v, \nu_v]$ . Nous pouvons donc écrire

la matrice  $M$  sous une forme condensée :

$$(5.2.15) \quad M(V, \xi) = \begin{pmatrix} i\xi.u_l & 0 & i(\alpha - 1)\xi^T & 0 \\ 0 & i\xi.u_v & 0 & i\alpha\rho_v\xi^T \\ -i\frac{c^2\rho_v}{\alpha\rho_l}\xi & i\frac{c^2}{\alpha\rho_l}\xi & (\nu_l\|\xi\|^2 + i\xi.u_l)I & 0 \\ -i\frac{c^2}{\alpha}\xi & i\frac{c^2\rho_v}{\alpha}\xi & 0 & (\nu_l\|\xi\|^2 + i\xi.u_l)I \end{pmatrix}.$$

Il s'agit ici d'une matrice  $8 \times 8$  écrite par bloc où  $\xi$ ,  $u_l$  et  $u_v$  sont des vecteurs colonnes alors que  $I$  est la matrice identité de  $\mathbb{R}^3$ . Toutefois ainsi écrite, nous pouvons voir que cette matrice est l'analogue de celle obtenue en dimension un (c.f. la matrice  $M$  obtenue à partir de la matrice  $A$  (4.2.17) page 48).

Pour  $\xi$  non nul, nous définissons, comme dans le cas monodimensionnel, une nouvelle matrice  $N(V, \varepsilon)$  telle que  $M(V, \xi) = \|\xi\|^2 N\left(V, \frac{1}{\|\xi\|^2}\xi\right)$ . En fait, l'écriture par bloc de  $N$  est la suivante :

$$(5.2.16) \quad N(V, \varepsilon) = \begin{pmatrix} i\varepsilon.u_l & 0 & i(\alpha - 1)\varepsilon^T & 0 \\ 0 & i\varepsilon.u_v & 0 & i\alpha\rho_v\varepsilon^T \\ -i\frac{c^2\rho_v}{\alpha\rho_l}\varepsilon & i\frac{c^2}{\alpha\rho_l}\varepsilon & (\nu_l + i\varepsilon.u_l)I & 0 \\ -i\frac{c^2}{\alpha}\varepsilon & i\frac{c^2\rho_v}{\alpha}\varepsilon & 0 & (\nu_l + i\varepsilon.u_l)I \end{pmatrix}$$

où  $\varepsilon$  est un vecteur colonne de  $\mathbb{R}^3$ .

Le polynôme caractéristique  $P_N(X, \varepsilon)$  de  $N(V, \varepsilon)$  est donné par :

$$(5.2.17) \quad P_N(X, \varepsilon) = (\nu_v + i\varepsilon.u_v - X)^2 (\nu_l + i\varepsilon.u_l - X)^2 P_N^{1d}(X, \varepsilon)$$

où  $P_N^{1d}(X, \varepsilon)$  est l'analogue du polynôme du cas monodimensionnel ((4.2.19) page 48) :

$$\begin{aligned} P_N^{1d}(X, \varepsilon) &= (\nu_l + i\varepsilon.u_l - X)(i\varepsilon.u_l - X) [(\nu_v + i\varepsilon.u_v - X)(i\varepsilon.u_v - X) + c^2\varepsilon.\varepsilon] \\ &+ c^2\frac{\bar{\alpha}\rho_v}{\alpha\rho_l}\varepsilon.\varepsilon(\nu_v + i\varepsilon.u_v - X)(i\varepsilon.u_v - X). \end{aligned}$$

Nous allons, comme dans le cas monodimensionnel (c.f. section 4.2.2), effectuer, pour un état donné  $V$ , un développement limité des valeurs propres de  $N(V, \varepsilon)$  au voisinage de  $\varepsilon = 0$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Remarque :** Il faut tout d'abord remarquer qu'en dimension trois, il y a quatre valeurs propres évidentes qui sont  $\nu_l + i\varepsilon.u_l$  et  $\nu_v + i\varepsilon.u_v$  comptées chacune deux fois. De plus, ces

valeurs propres ont une partie réelle strictement positive. Nous n'avons donc besoin d'étudier que les quatre valeurs propres restantes.

### 5.2.1 Cas où $\varepsilon$ est le vecteur nul

Ce cas correspond à la limite quand  $\|\xi\|$  tend vers l'infini, cas où la diffusion devient prépondérante. Si  $\varepsilon = 0$ , le polynôme  $P_N^{1d}(X, 0)$  devient très simple :

$$P_N^{1d}(X, 0) = X^2(\nu_l - X)(\nu_v - X),$$

et les quatres valeurs propres restantes sont donc :

$$(5.2.18) \quad \lambda_1(0) = \nu_v,$$

$$(5.2.19) \quad \lambda_2(0) = \nu_l,$$

$$(5.2.20) \quad \lambda_3(0) = 0,$$

$$(5.2.21) \quad \lambda_4(0) = 0.$$

**Remarque :** En fait,  $\nu_l$  et  $\nu_v$  sont chacune de multiplicité trois et la valeur propre nulle est de multiplicité deux pour le polynôme caractéristique  $P_N(X, 0)$ .

### 5.2.2 Cas où $\varepsilon$ est non nul

Comme dans le cas monodimensionnel, les développements limités de  $\lambda_1(\varepsilon)$  et  $\lambda_2(\varepsilon)$  ne posent pas de réel problème. Il suffit de justifier que  $\lambda_1(\varepsilon) = \nu_v + \mathcal{O}(\varepsilon)$  pour conclure que  $\lambda_1(\varepsilon)$  possède une partie réelle strictement positive dès que  $\varepsilon$  est suffisamment petit, i.e.  $\|\xi\|$  suffisamment grande. Or il est clair<sup>1</sup> que ce développement existe (de même pour  $\lambda_2(\varepsilon)$ ).

Nous allons donc rechercher le développement limité des valeurs propres restantes  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$ . Posons  $X = X(\varepsilon) = a.\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2)$  où  $a$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ , il vient alors :

$$\begin{aligned} P_N^{1d}(X(\varepsilon), \varepsilon) &= [(iu_l - a).\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2)] [\nu_l + (iu_l - a).\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2)] \\ &\quad \times [\nu_v(iu_v - a).\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2)] + c^2 \frac{\bar{\alpha}\rho_v}{\alpha\rho_l} \varepsilon.\varepsilon [\nu_v(iu_v - a).\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2)], \\ &= \nu_v \nu_l [(iu_v - a).\varepsilon] [(iu_l - a).\varepsilon] + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^3). \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc le même résultat que dans le cas 1D : à savoir un dédoublement de la valeur propre nulle en deux valeurs propres distinctes  $\lambda_3(\varepsilon)$  et  $\lambda_4(\varepsilon)$ . Soit, en gardant le même ordre que dans le cas monodimensionnel :

$$(5.2.22) \quad \lambda_3(\varepsilon) = iu_v.\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2)$$

$$(5.2.23) \quad \lambda_4(\varepsilon) = iu_l.\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^2).$$

---

1. On peut reprendre l'étude de la section 4.2.2 ou remarquer, comme dans ce qui suit, que les valeurs propres de  $N(V, \varepsilon)$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  en  $\varepsilon$ , puisqu'ici, il s'agit de racines simples du polynôme  $P_N^{1d}(X, \varepsilon)$ .

Comme en dimension 1, ces développements ne suffisent pas pour déterminer le signe de la partie réelle des valeurs propres. Il faut donc, là encore, rechercher des termes d'ordre plus élevé. Prenons maintenant  $X = X(\varepsilon) = iu_v.\varepsilon - \varepsilon^T.B.\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^3)$  avec  $B$  matrice symétrique  $3 \times 3$  *a priori* quelconque.

i. Si  $u_v$  et  $u_l$  sont différentes,

$$\begin{aligned} P_N^{1d}(X(\varepsilon), \varepsilon) &= [i(u_l - u_v).\varepsilon + \varepsilon^T.B.\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^3)] \\ &\quad \times [\nu_l + i(u_l - u_v).\varepsilon + \varepsilon^T.B.\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^3)] \\ &\quad \times [c^2\varepsilon.\varepsilon + (\varepsilon^T.B.\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^3)) (\nu_v + \varepsilon^T.B.\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^3))], \\ &\quad + c^2 \frac{\bar{\alpha}\rho_v}{\alpha\rho_l} \|\varepsilon\|^2 [\varepsilon^T.B.\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^3)] [\nu_v + \varepsilon^T.B.\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^3)] \\ &= i\nu_l [(u_l - u_v)\varepsilon] [\varepsilon^T.(c^2I + \nu_v B).\varepsilon] + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^4). \end{aligned}$$

Puisque  $u_v$  et  $u_l$  sont des vitesses différentes, nous trouvons donc que, pour tout  $\varepsilon$  de  $\mathbb{R}_*^3$ , le terme  $\varepsilon^T.(c^2I + \nu_v B).\varepsilon$  doit être nul. Nous en déduisons donc que  $-B = \frac{c^2}{\nu_v} I$  et le développement limité de  $\lambda_3(\varepsilon)$  est alors :

$$(5.2.24) \quad \lambda_3(\varepsilon) = iu_v.\varepsilon + \frac{c^2}{\nu_v} \|\varepsilon\|^2 + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^3).$$

De même

$$(5.2.25) \quad \lambda_4(\varepsilon) = iu_l.\varepsilon + \frac{c^2 \bar{\alpha}\rho_v}{\nu_l \alpha\rho_l} \|\varepsilon\|^2 + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^3).$$

ii. Si les deux phases sont à la même vitesse,  $u_l = u_v = u$ , alors  $iu.\varepsilon$  devient une racine évidente de  $P_N^{1d}$ . Regardons alors ce qu'il en est pour la dernière racine,

$$\begin{aligned} P_N^{1d}(X(\varepsilon), \varepsilon) &= [\varepsilon^T.B.\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^3)] [\nu_l + \varepsilon^T.B.\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^3)] \\ &\quad \times [c^2\|\varepsilon\|^2 + (\varepsilon^T.B.\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^3)) (\nu_v \varepsilon^T.B.\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^3))] \\ &\quad + c^2 \frac{\bar{\alpha}\rho_v}{\alpha\rho_l} \|\varepsilon\|^2 [\varepsilon^T.B.\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^3)] [\nu_v + \varepsilon^T.B.\varepsilon + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^3)], \\ &= \varepsilon^T.B.\varepsilon \left[ \varepsilon^T. \left( \nu_v \nu_l B + \nu_l c^2 + \nu_v c^2 \frac{\bar{\alpha}\rho_v}{\alpha\rho_l} \right) .\varepsilon \right] + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^5). \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc deux solutions suivant que la matrice  $B$  est nulle ou non :

(a) Si  $B$  est nulle, ceci correspondant à la racine évidente  $iu.\varepsilon$ , le premier coefficient du produit précédent est nul et

$$(5.2.26) \quad \lambda_3(\varepsilon) = iu.\varepsilon.$$

iii. Sinon, le second coefficient doit être nul, c'est-à-dire  $-\nu_v \nu_l B = \left( \nu_l c^2 + \nu_v c^2 \frac{\bar{\alpha} \rho_v}{\alpha \rho_l} \right) I$  et

$$(5.2.27) \quad \lambda_4(\varepsilon) = iu.\varepsilon + \frac{c^2}{\nu_v \nu_l} \left( \nu_l + \nu_v \frac{\bar{\alpha} \rho_v}{\alpha \rho_l} \right) \|\varepsilon\|^2 + \mathcal{O}(\|\varepsilon\|^3).$$

**Conclusion :** Les valeurs propres de  $N$ , sont donc, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, dans le demi-plan complexe à partie réelle strictement positive.

Il s'en suit donc (c.f. partie 4.2.2.4 page 52 et suivantes) que, comme dans le cas mono-dimensionnel, le problème linéarisé autour d'un état constant est bien posé.





## Troisième partie

### Un modèle à cinq équations



# Introduction

Dans cette partie, nous considérons un écoulement bifluide à une pression où nous avons remplacé l'équation d'état servant de fermeture algébrique par une nouvelle équation aux dérivées partielles portant sur cette pression. Après avoir présenté ce modèle introduit par Leroux, nous allons l'appliquer au cas test du robinet de Ransom.



# Chapitre 6

## Le modèle

### 6.1 Présentation du modèle

Pour obtenir le modèle considéré à cinq équations, nous allons partir du cas d'un écoulement monofluide régi par le système d'Euler gaz parfait à trois équations. Nous étendrons ensuite les équations obtenues aux cas d'un écoulement biffuide.

#### 6.1.1 Cas d'un fluide parfait

Considérons le cas du système d'Euler à trois équations :

$$(6.1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} & = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} & = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u H)}{\partial x} & = 0, \end{cases}$$

avec la loi de fermeture algébrique usuelle :

$$(6.1.2) \quad p = (\gamma - 1)\rho e,$$

une énergie définie par  $E = e + \frac{u^2}{2}$  et une enthalpie  $H = E + \frac{p}{\rho}$ .

La dernière équation du système s'écrit donc, en prenant comme variables, les quantités physiques  $(\rho, u, p)$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{u^2}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho \frac{u^3}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p u \right] = 0,$$

soit :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\gamma - 1) \frac{u^2}{2} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right] + (\gamma - 1) u \left[ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \gamma \frac{\partial(pu)}{\partial x} = 0,$$

or

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

grâce aux première et deuxième équations du système (6.1.1), soit alors :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(pu)}{\partial x} + (\gamma - 1) \left[ -u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial(pu)}{\partial x} \right] = 0.$$

Nous obtenons donc une nouvelle équation portant sur la pression :

$$(6.1.3) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(pu)}{\partial x} + (\gamma - 1) p \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

## 6.1.2 Obtention du modèle

Nous considérons donc un système à quatre équations auquel nous *ajoutons* l'équation (6.1.3). Dans ce système,  $\alpha$  désigne le taux de présence de la phase gazeuse, indexée par  $v$ . La densité volumique de la phase liquide, indexée par  $l$ , est une constante  $\rho_l$ . La phase liquide étant incompressible, c'est la phase gazeuse qui joue le rôle du fluide du système (6.1.1-6.1.2). Nous obtenons donc, pour le cas test qui nous intéresse, le système suivant :

$$(6.1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l u_l}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \alpha \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \rho_v u_v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \bar{\alpha} \rho_l u_l}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\alpha} (\rho_l u_l^2 + p)}{\partial x} - p \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} = \bar{\alpha} \rho_l g, \\ \frac{\partial \alpha \rho_v u_v}{\partial t} + \frac{\partial \alpha (\rho_v u_v^2 + p)}{\partial x} - p \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \alpha \rho_v g, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(pu_v)}{\partial x} + (\gamma - 1) p \frac{\partial u_v}{\partial x} = 0, \end{array} \right.$$

qu'il n'est plus nécessaire de *compléter* par une équation de fermeture ( $g$  désigne ici l'accélération de la pesanteur). Ce système, comportant cinq équations, ne fait, en effet, intervenir que cinq variables.

## 6.2 Nature du problème

### 6.2.1 Choix des équations

Le système précédent (6.1.4) n'étant pas conservatif, il n'y a pas un choix d'équations plus pertinent que les autres. Pour éviter de trop nombreuses notations nous allons désormais retenir une écriture qui se prête à l'emploi du schéma numérique utilisé ultérieurement.

Nous conservons les mêmes variables, soit le vecteur d'état

$$V = (\bar{\alpha}\rho_l, \alpha\rho_v, \bar{\alpha}\rho_l u_l, \alpha\rho_v u_v, p)^T.$$

Nous définissons alors une fonction  $f$  de  $V$ , dite de *flux*, par :

$$(6.2.5) \quad f(V) = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}\rho_l u_l \\ \alpha\rho_v u_v \\ \bar{\alpha}\rho_l u_l^2 + \bar{\alpha}p \\ \alpha\rho_v u_v^2 + \alpha p \\ p u_v \end{pmatrix}.$$

Nous avons, en outre, les relations réciproques reliant les variables physiques aux variables d'état :

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \frac{V_1}{\rho_l} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\rho_l - V_1}{\rho_l}, \\ p &= V_5, \quad \rho_v = \frac{\rho_l V_2}{\rho_l - V_1}, \\ u_l &= \frac{V_3}{V_1} \quad \text{et} \quad u_v = \frac{V_4}{V_2}. \end{aligned}$$

Le système (6.1.4) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(V) + C(V) \frac{\partial G(V)}{\partial x} = S(V),$$

avec  $S(V) = g(0, 0, V_1, V_2, 0)^T$  et

$$C(V) \frac{\partial G(V)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} \\ -p \frac{\partial \alpha}{\partial x} \\ (\gamma - 1)p \frac{\partial u_v}{\partial x} \end{pmatrix}.$$



D'où nous déduisons une formulation possible de la matrice des termes non-conservatifs  $C(V)$  et du *flux non-conservatif*  $G(V)$ , en ayant noté que  $-p \frac{\partial \alpha}{\partial x} = p \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x}$ :

$$(6.2.6) \quad C(V) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\gamma - 1)p & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$(6.2.7) \quad G(V) = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ u_v \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, exprimé dans les variables composant le vecteur d'état  $V$ , le flux est :

$$f(V) = \left( V_3, V_4, \frac{V_3^2}{V_1} + \frac{V_1}{\rho_l}, \frac{V_4^2}{V_2} + \left(1 - \frac{V_1}{\rho_l}\right) V_5, \frac{V_4 V_5}{V_2} \right)^T$$

et sa jacobienne est alors :

$$(6.2.8) \quad J(V) = \frac{\partial f}{\partial V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{V_3^2}{V_1^2} + \frac{V_5}{\rho_l} & 0 & 2\frac{V_3}{V_1} & 0 & \frac{V_1}{\rho_l} \\ -\frac{V_5}{\rho_l} & -\frac{V_4^2}{V_2^2} & 0 & 2\frac{V_4}{V_2} & 1 - \frac{V_1}{\rho_l} \\ 0 & -\frac{V_4 V_5}{V_2^2} & 0 & \frac{V_5}{V_2} & \frac{V_4}{V_2} \end{bmatrix}$$

ou encore, dans les variables physiques :

$$J(V) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{p}{\rho_l} - u_l^2 & 0 & 2u_l & 0 & \bar{\alpha} \\ -\frac{p}{\rho_l} & -u_v^2 & 0 & 2u_v & \alpha \\ 0 & -\frac{u_v p}{\alpha \rho_v} & 0 & \frac{p}{\alpha \rho_v} & u_v \end{bmatrix}.$$

## 6.2.2 Non-hyperbolicité du système

Nous allons vérifier, ici, que le système précédent (6.1.4) n'est pas hyperbolique, c'est-à-dire qu'il semble *mal posé*.

Si  $A$  est définie par  $A(V) = J(V) + C(V) \frac{\partial G}{\partial V}(V)$ , nous pouvons alors écrire notre système sous la forme quasi-linéaire suivante :

$$(6.2.9) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + A(V) \frac{\partial V}{\partial x} = S(V).$$

Il nous faut maintenant trouver le spectre de  $A$ , or, d'après les relations (6.2.6), (6.2.7) et (6.2.8), la matrice de l'opérateur de convection est donnée par :

$$(6.2.10) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -u_l^2 & 0 & 2u_l & 0 & \bar{\alpha} \\ 0 & -u_v^2 & 0 & 2u_v & \alpha \\ 0 & -\gamma \frac{pu_v}{\alpha\rho_v} & 0 & \frac{\gamma P}{\alpha\rho_v} & u_v \end{bmatrix}.$$

Nous définissons une vitesse caractéristique  $c$  par :

$$(6.2.11) \quad c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_v}},$$

les valeurs propres de  $A$  sont alors :

$$\begin{aligned} &u_v - c, \quad u_v + c \\ &u_v, \quad u_l, u_l. \end{aligned}$$

Cependant  $u_l$  est de multiplicité algébrique double sans être une valeur propre double ; il y a donc un bloc de Jordan de taille 2.

**Conclusion :** Le système (6.1.4), même s'il ne possède que des valeurs propres réelles, n'est pas hyperbolique. Le problème linéarisé autour d'un état constant n'est donc pas *bien posé*, la présence du bloc de Jordan entraînant une croissance linéaire des perturbations au cours du temps.



# Chapitre 7

## Résultats numériques

### 7.1 Présentation du cas test du robinet de Ransom

Il s'agit, ici, d'une adaptation du cas test proposé par V.H. Ransom comme benchmark numérique pour des écoulements diphasiques 1D (c.f. [Ran92]).

Nous considérons un écoulement d'eau incompressible ( $\rho_l$  constante) dans une colonne débouchant sur de l'air. L'eau est injectée à une vitesse constante de  $10m.s^{-1}$  dans de l'air avec un taux de vide fixe en entrée de 0.2. De plus, le haut de la colonne est imperméable à l'air. Tout le long de la colonne verticale de  $12m$  de longueur, le mélange est soumis à l'action de la pesanteur et débouche dans de l'air à pression atmosphérique ( $10^5 Pa$ ). La condition initiale correspond à l'écoulement que l'on obtiendrait si la gravité était nulle ( $g = 0m.s^{-2}$ ). À l'instant initial, l'air est au repos et l'eau a une vitesse uniforme de  $10m.s^{-1}$ ; le taux de vide, uniforme, est de 0.2, on «branche» alors la gravité ( $g = 10m.s^{-2}$ ).

### 7.2 Étude du permanent

Lorsque l'écoulement a atteint un régime permanent, le système (6.1.4) devient :

$$(7.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\bar{\alpha}\rho_l u_l)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha\rho_v u_v)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} [\bar{\alpha}(\rho_l u_l^2 + p)] - p \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} = \bar{\alpha}\rho_l g, \\ \frac{\partial}{\partial x} [\alpha(\rho_v u_v^2 + p)] - p \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \alpha\rho_v g, \\ \frac{\partial(pu_v)}{\partial x} + (\gamma - 1)p \frac{\partial u_v}{\partial x} = 0. \end{array} \right.$$

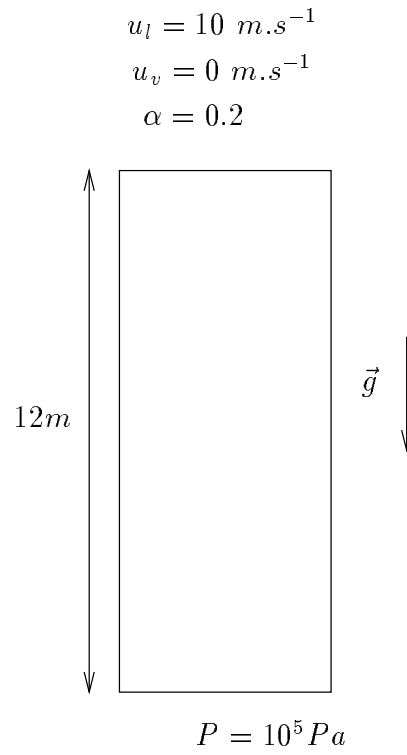


FIG. 7.1: Cas test du robinet de Ransom

La première équation du système précédent assure que le débit de la phase gazeuse est, au permanent, constant le long du tube. Cependant, en entrée la vitesse de cette phase est nulle, nous en déduisons donc que la quantité  $\alpha \rho_v u_v$  est nulle en tout point.

Il est donc évident que, tant que la phase gazeuse est présente en un point du tube<sup>1</sup>, sa vitesse y est nulle.

**Remarque :** Nous pouvons déjà remarquer que le fait d'annuler la vitesse  $u_v$  sur tout le tube annule simultanément la deuxième et la dernière équation du système (7.2.1). Il ne reste donc plus que trois équations pour quatre variables ( $\alpha$ ,  $\rho_v$ ,  $p$  et  $u_l$ ). Le système, au régime permanent, semble donc sous-déterminé.

La densité volumique du liquide étant constante, la conservation du débit de la phase liquide le long du tube s'écrit :

$$\bar{\alpha} u_l = \overline{\alpha^{\text{entrée}} u_l^{\text{entrée}}},$$

soit

$$(7.2.2) \quad \alpha = 1 - \frac{\overline{\alpha^{\text{entrée}} u_l^{\text{entrée}}}}{u_l}.$$

---

1. C'est-à-dire tant que  $\alpha > 0$  et  $\rho_v > 0$ .

En outre, comme  $\alpha\rho_v u_v = 0$ , la quatrième équation de (7.2.1) devient :

$$(7.2.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \alpha p}{\partial x} - p \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \alpha \rho_v g &\Leftrightarrow \alpha \frac{\partial p}{\partial x} = \alpha \rho_v g, \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \rho_v g. \end{aligned}$$

Enfin, la quantité de mouvement du liquide  $\bar{\alpha}\rho_l u_l$  étant constante, la troisième équation du système (7.2.1) devient, grâce à la relation (7.2.3) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\bar{\alpha}\rho_l u_l^2] + \bar{\alpha} \frac{\partial p}{\partial x} = \bar{\alpha}\rho_l g &\Leftrightarrow \bar{\alpha}\rho_l u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + \bar{\alpha}\rho_v g = \bar{\alpha}\rho_l g, \\ &\Leftrightarrow u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} = \frac{\rho_l - \rho_v}{\rho_l} g. \end{aligned}$$

Or, dans le cas d'un mélange gaz-liquide, les écarts de densités volumiques sont importants ( $\rho_v \ll \rho_l$ ), nous pouvons donc simplifier<sup>2</sup> l'équation précédente :

$$u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} \approx g,$$

soit donc une expression de la vitesse de la phase liquide donnée par :

$$(7.2.4) \quad u_l(x) = \sqrt{(u_l^{\text{entrée}})^2 + 2gx}.$$

**Conclusion :** Nous avons donc une expression analytique de certaines composantes de la solution, au régime permanent :

$$(7.2.5) \quad u_v(x) = 0,$$

$$(7.2.6) \quad u_l(x) = \sqrt{(u_l^{\text{entrée}})^2 + 2gx},$$

$$(7.2.7) \quad \alpha(x) = 1 - \frac{\bar{\alpha}^{\text{entrée}} u_l^{\text{entrée}}}{\sqrt{(u_l^{\text{entrée}})^2 + 2gx}}$$

en outre  $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_v g$ .

Il manque donc une relation de fermeture liant la densité volumique  $\rho_v$  à la pression  $p$  afin de résoudre l'équation différentielle ordinaire (7.2.3). En effet, nous ne disposons plus, dans le modèle que nous étudions, d'une loi de fermeture algébrique.

## 7.3 Résultats numériques

Nous avons implémenté ce cas test avec un schéma de type VFFC(c.f [GKL96]). Il a fallu pour cela utiliser un schéma non-conservatif et non-hyperbolique que nous présentons dans un premier temps. Dans un second temps, nous allons voir comment nous avons adapté les conditions limites initiales du cas test à notre modèle puis nous donnerons quelques résultats numériques.

---

2. Cela revient, en fait, à dire que l'action de la pression sur la phase liquide est négligeable.

### 7.3.1 Présentation du schéma

Le programme employé est celui développé par F. ALOUGES sous MATLAB. Il permet la discrétisation des équations aux dérivées partielles comportant des termes non conservatifs ainsi que des termes sources. L'équation considérée est de la forme générale :

$$(7.3.8) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + C(U) \frac{\partial G(U)}{\partial x} = So(U).$$

La méthode employé est proche de VFFC. Nous introduisons une matrice *signe* ou matrice de décentrement à l'interface  $k + \frac{1}{2}$  entre deux cellules  $k$  et  $k + 1$  qui est notée  $S_{k+\frac{1}{2}}$ . Cette matrice est calculée à partir de la fonction signe  $sg : \mathbb{R} \mapsto \{-1, 0, 1\}$  par une extension matricielle explicitée dans [GV96](p558 et suivantes). Fixons quelques notations utilisée par la suite :

- Pour une cellule donnée, indexée par la lettre  $k$ , nous noterons,  $vol(k)$  son volume et  $\mathcal{V}_k$  l'ensemble des indices de ses cellules voisines.
- Soit  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'ensemble des temps de discrétisation, alors  $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$  et  $V_k^n$  désigne l'approximation du vecteur d'état  $U$  à l'instant  $t_n$  dans la cellule  $k$ . En outre  $F_k = F(V_k^n)$ .
- Si  $j \in \mathcal{V}_k$ , nous noterons  $\nu_{k,j}$  la normale unitaire sortante de l'élément  $k$  à l'interface avec l'élément  $j$  et  $l_{k,j}$  la longueur de cette interface. De plus,  $\tilde{V}_{k,j}$  désigne un état moyen calculé à l'interface (à partir de  $V_k^n$  et  $V_j^n$ ) et  $S_{k,j}$  est le signe de la matrice  $A$  précédente (6.2.10) évaluée en  $\tilde{V}_{k,j}$ .

Le schéma est alors obtenu de la manière suivante :

i. Cas Conservatif :

Dans le cas conservatif,  $\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0$ , écrivons le schéma VFFC :

$$V_k^{n+1} = V_k^n - \frac{\Delta t_{n+1}}{|vol(k)|} \sum_{j \in \mathcal{V}_k} l_{k,j} \left( \frac{F_j + F_k}{2} - S_{k,j} \frac{F_j - F_k}{2} \right) \cdot \nu_{k,j}.$$

Or  $\sum_{j \in \mathcal{V}_k} l_{k,j} \nu_{k,j} = 0$ , donc :

$$\begin{aligned} V_k^{n+1} &= V_k^n - \frac{\Delta t_{n+1}}{|vol(k)|} \sum_{j \in \mathcal{V}_k} l_{k,j} \left( \frac{F_j + F_k}{2} - S_{k,j} \frac{F_j - F_k}{2} - F_k \right) \cdot \nu_{k,j}, \\ &= V_k^n - \frac{\Delta t_{n+1}}{|vol(k)|} \sum_{j \in \mathcal{V}_k} l_{k,j} \left( \frac{F_j - F_k}{2} - S_{k,j} \frac{F_j - F_k}{2} \right) \cdot \nu_{k,j}, \\ &= V_k^n - \frac{\Delta t_{n+1}}{|vol(k)|} \sum_{j \in \mathcal{V}_k} l_{k,j} \frac{I - S_{k,j}}{2} (F_j - F_k) \cdot \nu_{k,j}. \end{aligned}$$

ii. Cas non-conservatif :

Dans le cas plus général qui nous intéresse, nous étendons la formule précédente en remplaçant le flux conservatif par le terme d'advection complet :

$$V_k^{n+1} = V_k^n - \frac{\Delta t_{n+1}}{|vol(k)|} \sum_{j \in \mathcal{V}_k} l_{k,j} \frac{I - S_{k,j}}{2} \left[ F_j - F_k + C(\tilde{V}_{k,j}) (G(V_j) - G(V_k)) \right] \cdot \nu_{k,j}.$$

Soit donc, en dimension un, avec un terme source discrétisé de manière centrée :

$$(7.3.9) \quad \begin{aligned} V_k^{n+1} = & V_k^n - \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta x_k} \left[ \frac{I - S_{k+\frac{1}{2}}}{2} \left( F(V_{k+1}^n) - F(V_k^n) + C(V_{k+\frac{1}{2}}^n) \cdot (G(V_{k+1}^n) - G(V_k^n)) \right) \right. \\ & \left. + \frac{I + S_{k-\frac{1}{2}}}{2} \left( F(V_k^n) - F(V_{k-1}^n) + C(V_{k-\frac{1}{2}}^n) \cdot (G(V_k^n) - G(V_{k-1}^n)) \right) \right] \\ & + \Delta t_{n+1} \cdot So(V_k^n). \end{aligned}$$

Une maquette partiellement implicite a également été utilisée. Le schéma est alors le suivant :

$$(7.3.10) \quad \begin{aligned} V_k^{n+1} = & V_k^n - \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta x_k} \Theta_{k+\frac{1}{2}} \left[ \frac{I - S_{k+\frac{1}{2}}}{2} \left( F(V_{k+1}^{n+1}) - F(V_k^{n+1}) + C(V_{k+\frac{1}{2}}^n) \cdot (G(V_{k+1}^{n+1}) - G(V_k^{n+1})) \right) \right. \\ & \left. + \frac{I + S_{k-\frac{1}{2}}}{2} \left( F(V_k^{n+1}) - F(V_{k-1}^{n+1}) + C(V_{k-\frac{1}{2}}^n) \cdot (G(V_k^{n+1}) - G(V_{k-1}^{n+1})) \right) \right] \\ & - \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta x_k} \left( I - \Theta_{k+\frac{1}{2}} \right) \left[ \frac{I - S_{k+\frac{1}{2}}}{2} \left( F(V_{k+1}^n) - F(V_k^n) + C(V_{k+\frac{1}{2}}^n) \cdot (G(V_{k+1}^n) - G(V_k^n)) \right) \right. \\ & \left. + \frac{I + S_{k-\frac{1}{2}}}{2} \left( F(V_k^n) - F(V_{k-1}^n) + C(V_{k-\frac{1}{2}}^n) \cdot (G(V_k^n) - G(V_{k-1}^n)) \right) \right] \\ & + \Delta t_{n+1} \cdot So(V_k^{n+1}), \end{aligned}$$

où les matrices  $\Theta_{k+\frac{1}{2}}$  sont définies, comme les matrices signes, aux interfaces  $k/k+1$  à partir de la matrice  $A$  évaluée en  $\tilde{V}_{k+\frac{1}{2}}$  par l'extension, aux matrices, de la fonction à variables réelles  $\theta$  définie par :

$$(7.3.11) \quad \begin{aligned} \theta : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ \lambda &\rightarrow \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda = 0, \\ \max \left( 0, 1 - \frac{\Delta x}{2|\lambda|\Delta t} \right), & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

### 7.3.2 Traitement des conditions limites

Les conditions limites sont traitées par une méthode de décentrement suivant les caractéristiques comme présentée par J-M Ghidaglia (c.f. [GKL00]). L'idée est ici de dire que nous avons un certain nombre de conditions dites *imposées* et de conditions *libres*.



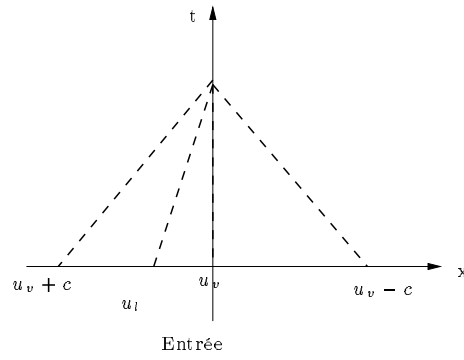


FIG. 7.2: Caractéristiques à l'interface d'entrée

### 7.3.2.1 Conditions d'entrée

Les conditions limites sont inspirées de celles données par V. H. Ransom dans la présentation du cas test (c.f. [Ran92]), c'est-à-dire un débit entrant nul pour le gaz, un taux de vide fixé et une vitesse du liquide fixée. Pour le système considéré, nous avons vu (c.f. 6.2.2) que les valeurs propres étaient :  $u_v - c$ ,  $u_v$ ,  $u_v + c$  et  $u_l$  deux fois. Nous pouvons donc, dans le cas d'un écoulement *subsonique* (i.e.  $|u_v| < c$ ), connaître le nombre de caractéristiques entrant dans le domaine et celui des caractéristiques sortantes.

A l'entrée, la vitesse du liquide est de  $u_l = 10\text{m s}^{-1}$ . Nous en déduisons donc que la valeur propre de multiplicité deux  $u_l$  est associée à des caractéristiques qui entrent dans le domaine. De même pour  $u_v + c$  qui est aussi positive. Au contraire,  $u_v - c$  est négative et est donc associée à une caractéristique qui sort du domaine. Enfin, il reste une dernière caractéristique associée à la valeur propre nulle  $u_v$ .

Les conditions imposées en entrée sont au nombre de trois et nous ne disposons que d'une caractéristique qui sorte du domaine (c.f. figure 7.2). Il semble donc nécessaire d'ajouter une condition supplémentaire pour traiter la condition limite d'entrée. Nous prendrons donc une équation d'état du type de celle avec laquelle nous avons construit le modèle, soit donc l'équation d'état d'un gaz parfait :

$$(7.3.12) \quad p = P(\rho_v) = K\rho_v^\gamma.$$

Nous écrivons alors que les projetées du vecteur d'état de la première maille  $U_1$  et du vecteur d'état d'entrée  $U_e$  sur la caractéristique qui sort du domaine (portée par  $l_1$ ) sont égales et que, de plus, ce vecteur correspond à un état où la vitesse du gaz est nulle, la vitesse du liquide est de  $10\text{m s}^{-1}$ , le taux de vide vaut  $\alpha = 0.2$  et qui vérifie (7.3.12). Soit donc :

$$U_e = \begin{pmatrix} (1 - \alpha_e)\rho_l \\ \alpha_e\rho_{v,e} \\ (1 - \alpha_e)\rho_l u_{l,e} \\ 0 \\ P(\rho_{v,e}) \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} l_1.U_e = l_1.U_1 &\Leftrightarrow \alpha_\epsilon \rho_{v,\epsilon}.l_{1,2} + P(\rho_{v,\epsilon}).l_{1,5} + ((1 - \alpha_\epsilon)\rho_l.l_{1,1} + (1 - \alpha_\epsilon)\rho_l u_{l,\epsilon}.l_{1,3}) - l_1.U_1 = 0, \\ &\Leftrightarrow f(\rho_{v,\epsilon}, U_1) = 0. \end{aligned}$$

Il reste donc à déterminer la densité  $\rho_{v,\epsilon}$  de l'état  $U_e$  solution de  $f(\rho_{v,\epsilon}, U_1) = 0$  et à l'utiliser pour construire l'état  $U_e$  grâce à l'équation d'état (7.3.12).

### 7.3.2.2 Condition de sortie

Comme nous l'avons fait en entrée, nous pouvons déterminer, en sortie, la nature entrante ou sortante d'un certain nombre de caractéristiques. Par ailleurs, la seule condition de sortie présente dans le cas test original (c.f. [Ran92]) est  $p = p_s$ .

Dans le régime d'écoulement qui nous intéresse, le liquide étant accéléré, la vitesse en sortie de ce dernier est positive. Nous supposons, en outre, que l'écoulement reste subsonique (au sens précédent i.e.  $|u_v| < c$ ). Les deux caractéristiques associées à  $u_l$  ainsi que celle associée à  $u_v + c$  sortent donc du domaine alors que celle associée à  $u_v - c$  est entrante. Cependant la dernière valeur propre ( $u_v$ ) change de signe au cours du temps ; il en résulte donc deux cas suivant son signe.

- i. Cas du gaz sortant : La caractéristique associée à  $u_v$  est donc dans le domaine ; nous retrouvons donc un cas semblable à celui de l'entrée (c.f. figure 7.3). Nous écrivons alors que les vecteurs d'état de la dernière maille et de sortie ne diffèrent que suivant la direction de l'unique caractéristique extérieure (portée par  $r_1$ ), soit :

$$U_s = U_N + \lambda r_1.$$

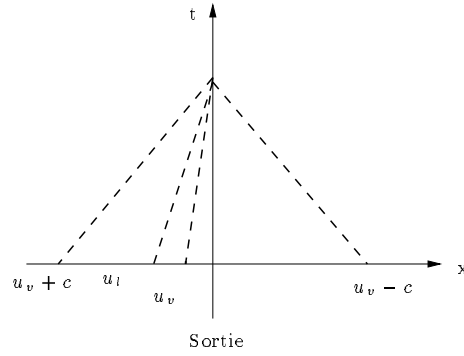


FIG. 7.3: Caractéristiques à l'interface de sortie

En particulier, la dernière composante du vecteur étant la pression qui est connue, nous obtenons la relation :

$$\lambda = \frac{p_s - U_{N,5}}{r_{1,5}},$$

où  $U_{N,5}$  (resp.  $r_{1,5}$ ) est la cinquième composante du vecteur  $U_N$  (resp.  $r_1$ ) et donc

$$U_s = U_N + \frac{p_s - U_{N,5}}{r_{1,5}} r_1.$$

- ii. Cas du gaz entrant : Dans ce cas, une seconde caractéristique sort du domaine (c.f. figure 7.4), nous disposons donc d'une variable imposée et de trois caractéristiques intérieures au domaine. Nous allons donc, comme en entrée, considérer une équation de fermeture supplémentaire : l'équation d'état (7.3.12).

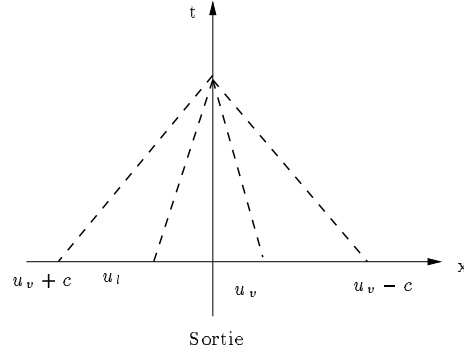


FIG. 7.4: Caractéristiques à l'interface de sortie

Nous avons donc, ici, deux caractéristiques qui sortent du domaine. Soient donc  $r_1$  et  $r_2$  les vecteurs propres associés, nous obtenons la condition :

$$U_s = U_N + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2.$$

Écrivons alors que la pression  $p_s$  est imposée et que (7.3.12) est vérifiée c'est-à-dire  $\rho_{v,s} = p^{-1}(p_s)$  :

$$\begin{aligned} p_s &= p_N + \lambda_1 r_{1,5} + \lambda_2 r_{2,5}, \\ \rho_{v,s} &= \frac{U_{s,2}}{1 - \frac{U_{s,1}}{\rho_l}}, \\ &= \frac{U_{N,2} + \lambda_1 r_{1,2} + \lambda_2 r_{2,2}}{1 - \frac{U_{N,1} + \lambda_1 r_{1,1} + \lambda_2 r_{2,1}}{\rho_l}}. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 r_{1,5} + \lambda_2 r_{2,5} & = p_s - U_{N,5}, \\ \lambda_1 \left( r_{1,2} + \frac{\rho_{v,s}}{\rho_l} r_{1,1} \right) + \lambda_2 \left( r_{2,2} + \frac{\rho_{v,s}}{\rho_l} r_{2,1} \right) & = \rho_{v,s} - \frac{\rho_{v,s}}{\rho_l} U_{N,1} - U_{N,2}. \end{cases}$$

Nous reconstruisons alors le vecteur d'état de sortie par :

$$U_s = U_N + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2.$$

### 7.3.3 Quelques résultats

#### 7.3.3.1 Validité du modèle

Dans un premier temps, il convient de vérifier que notre nouveau modèle donne des résultats équivalents à ceux du modèle classique à quatre équations. Voici donc quelques résultats obtenus grâce au schéma présenté précédemment à l'instant  $T = 0.5s$  pour 100 mailles. Nous comparons ces résultats à la solution analytique du modèle à quatre équations obtenue par K. Halaoua dans sa thèse ([Hal98]) et aux valeurs du permanent analytique.

Les figures 7.5 et 7.6 représentent les variables significatives : taux de vide et vitesse de la phase liquide.

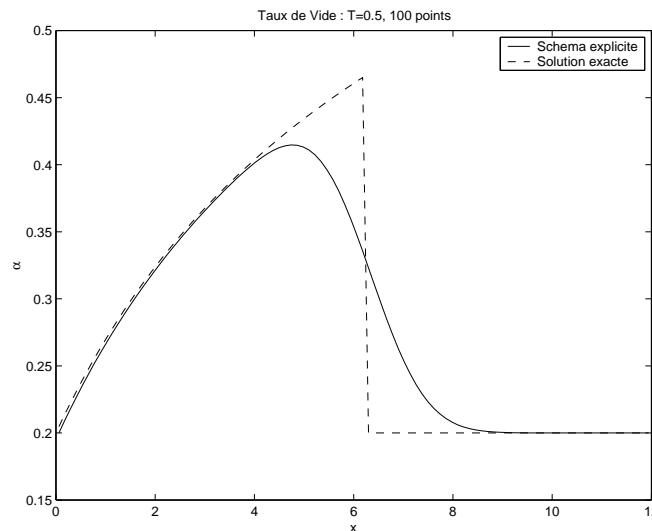


FIG. 7.5: Taux de Vide à l'instant  $T = 0.5s$  pour le schéma explicite avec 100 mailles

Nous présentons aussi et pour information les résultats concernant les autres variables physiques que sont la pression, la masse volumique du gaz et sa vitesse (figure 7.7) :

#### 7.3.3.2 Stabilité numérique

Nous avons pu vérifier une plus grande stabilité des résultats numériques lorsque, à C.F.L.<sup>3</sup> constant, le pas d'espace  $\Delta x$  devient petit. Les courbes de la figure 7.8 montrent les résultats obtenus sur la vitesse du liquide et le taux de vide à l'instant  $T = 0.495s$  pour différents nombres de mailles.

Nous rappelons que seules ces deux quantités possèdent un permanent analytique de référence comme vu à la section 7.2.

---

3. Le C.F.L. est défini, ici, comme étant, à un instant donné, le maximum, pour tous les états moyens  $\tilde{V}$  calculés aux interfaces, du produit  $\max_{\lambda} |\lambda| \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta x_k}$  où  $\lambda$  décrit l'ensemble des valeurs propres de la matrice  $A(\tilde{V})$ .

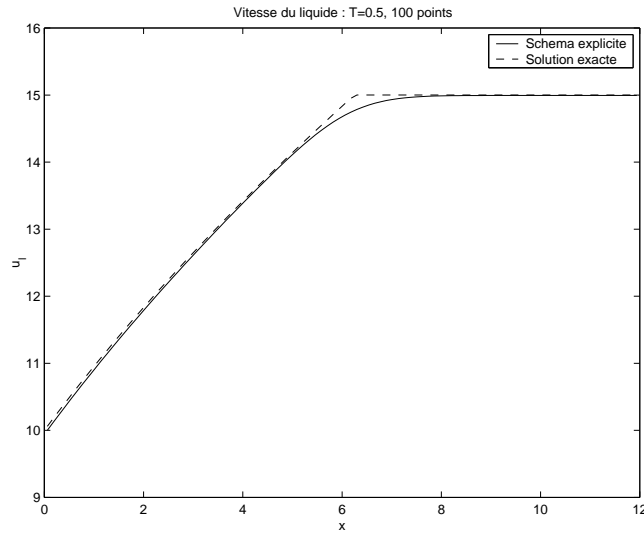


FIG. 7.6: Vitesse du liquide à l'instant  $T = 0.5s$  pour le schéma explicite avec 100 mailles

### 7.3.3.3 Permanent numérique

Afin de pouvoir comparer nos résultats à ceux obtenus avec le modèle classique à quatre équations, nous sommes amenés à nous intéresser aux variables physiques autres que la vitesse du liquide et le taux de vide. Il peut notamment être utile de regarder l'évolution de la pression compte tenu du fait que cette quantité a été modifiée dans notre modèle.

Pour ce faire, nous avons légèrement modifié le modèle à cinq équations en lui adjoignant un terme de diffusion qui devrait atténuer les oscillations de la pression et de la vitesse du gaz en sortie, oscillations qui pourraient être dues au traitement des conditions limites.

Nous remplaçons donc la quatrième équation du système (6.1.4) portant sur la quantité de mouvement de la phase gazeuse par l'équation suivante :

$$(7.3.13) \quad \frac{\partial \alpha \rho_v u_v}{\partial t} + \frac{\partial \alpha (\rho_v u_v^2 + p)}{\partial x} - p \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \alpha \rho_v g - \kappa(t) \alpha \rho_v u_v,$$

où le coefficient  $\kappa$  est défini par :

$$(7.3.14) \quad \kappa : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$$

$$(7.3.15) \quad t \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } t < 1, \\ t - 1, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Cette modification n'est donc pas *active* avant  $t > 1$ , c'est-à-dire avant que le front de taux de vide ne soit sorti de la colonne, moment où le permanent devrait être atteint. Effectivement comme on peut le voir sur les figures 7.9 et 7.10, les courbes du taux de vide et de la vitesse du liquide ne sont pas modifiées. Par contre, on constate bien une atténuation des oscillations des autres courbes (figures 7.11, 7.12 et 7.13), au cours du temps, à partir du moment où la modification est active.

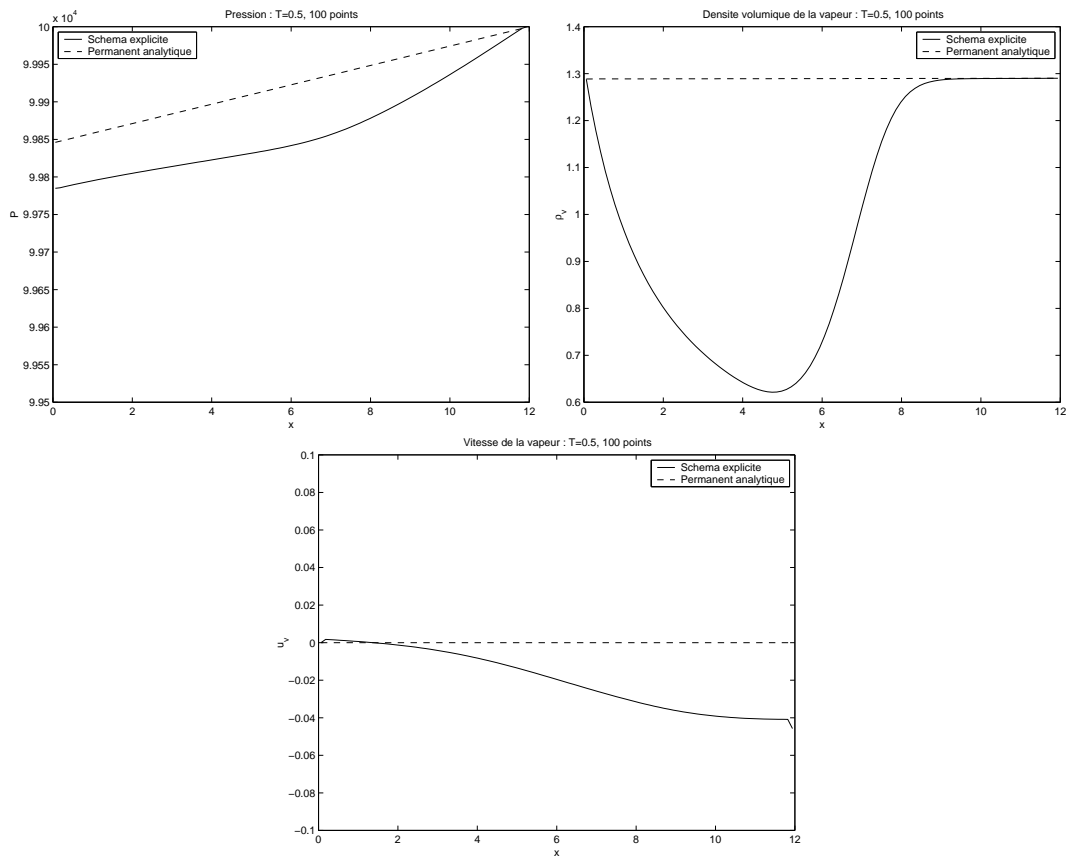


FIG. 7.7: Résultats à l'instant  $T = 0.5s$  pour le schéma explicite avec 100 mailles

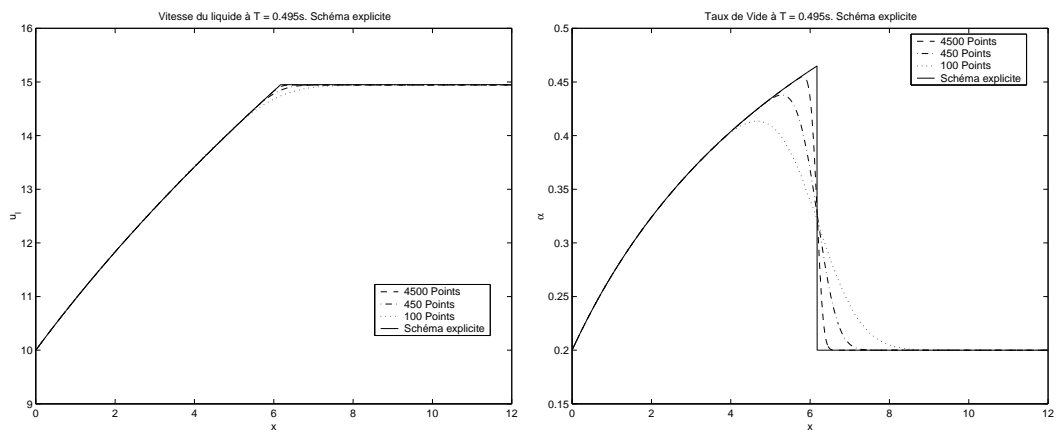


FIG. 7.8: Résultats pour 100, 450 et 4500 mailles

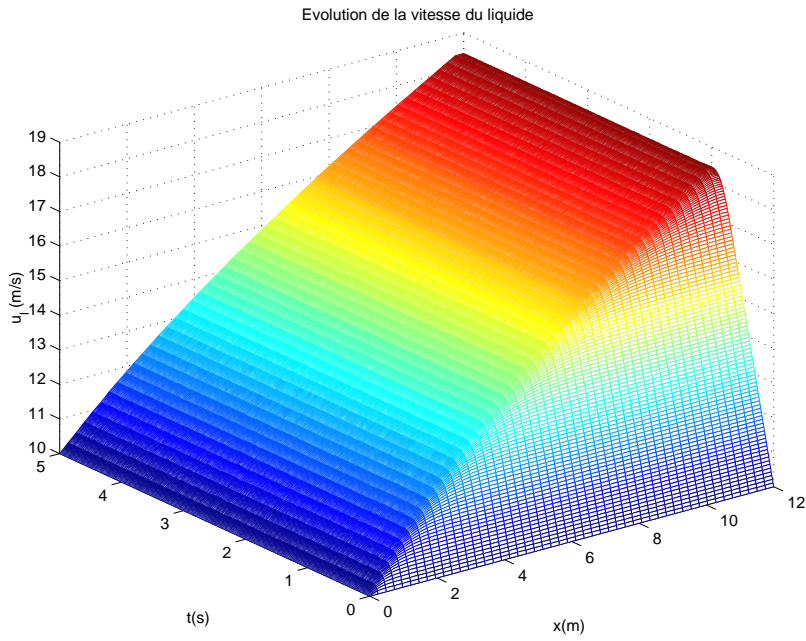


FIG. 7.9: *Évolution de la vitesse du liquide au cours du temps, avec un terme de diffusion*

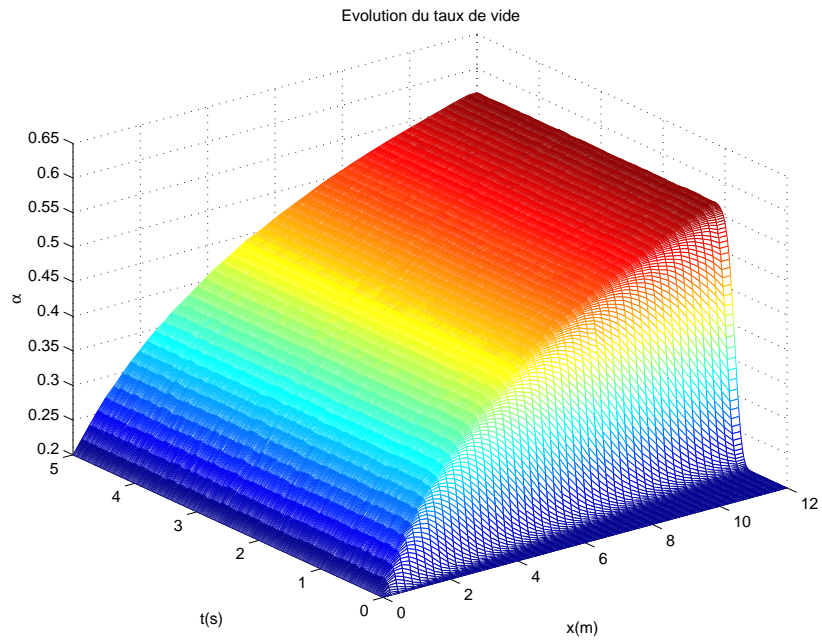


FIG. 7.10: *Évolution du taux de vide au cours du temps, avec un terme de diffusion*

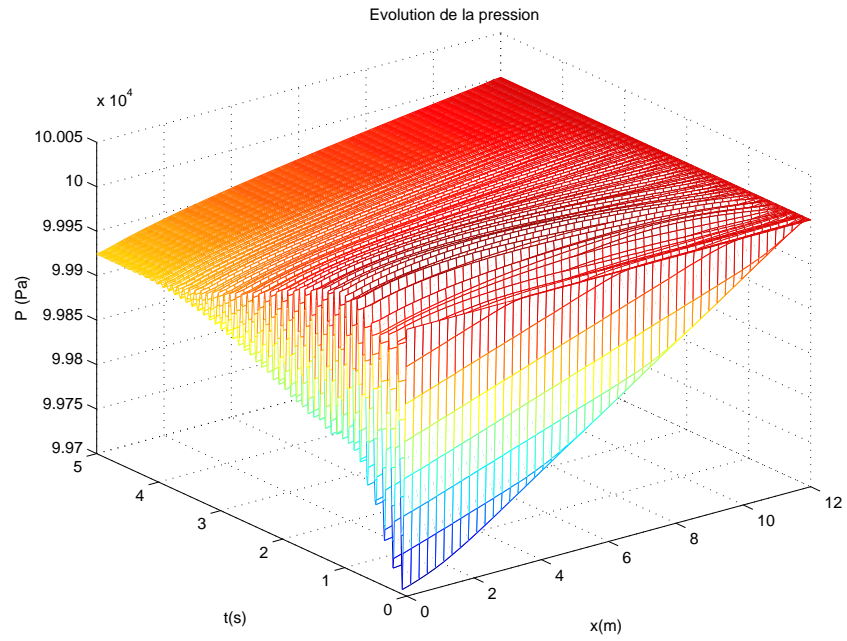


FIG. 7.11: *Évolution de la vitesse du liquide au cours du temps, avec un terme de diffusion*

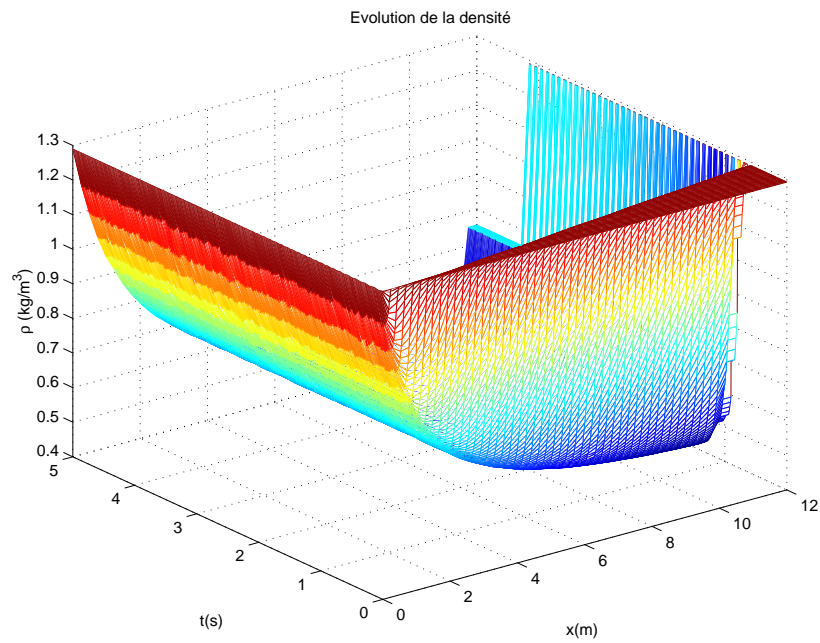


FIG. 7.12: *Évolution de la vitesse du liquide au cours du temps, avec un terme de diffusion*



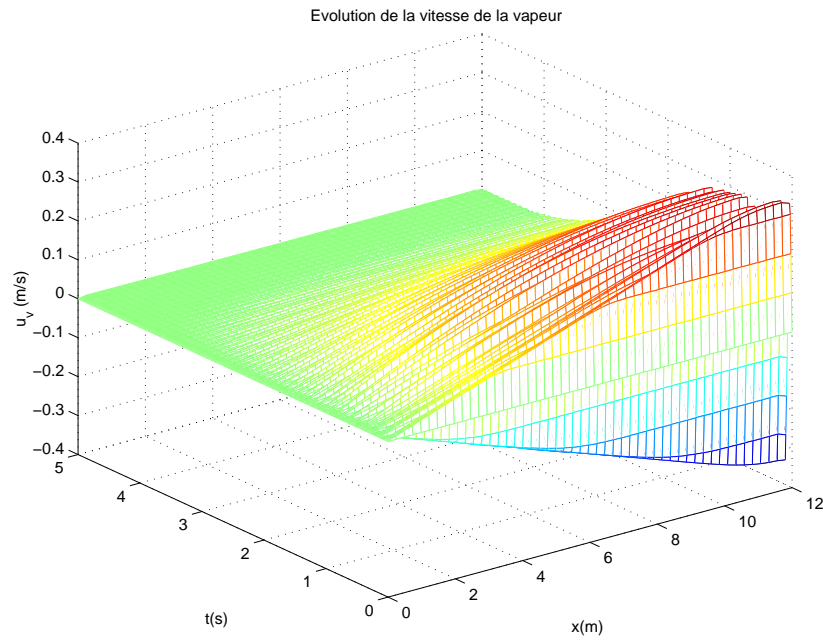


FIG. 7.13: *Évolution de la vitesse du liquide au cours du temps, avec un terme de diffusion*

# Annexe A

## Complément sur la première partie

### A.1 Estimations d'énergie

Considérons une forme bilinéaire  $B[.,.]$  de  $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , où  $\Omega$  est un ouvert donné de  $\mathbb{R}^n$ , de la forme :

$$B[u, v] = \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + cuv \right] dx,$$

pour  $u$  et  $v$  éléments de  $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$  avec  $a_{i,j}$ ,  $b_i$  et  $c$  dans  $L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  pour  $i$  et  $j$  allant de 1 à  $n$ .

De plus, nous supposons qu'il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^m$  :

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \xi_i \xi_j \geq \delta \|\xi\|^2$$

Nous avons alors le résultat suivant :

**Lemme A.1.1** *Il existe des constantes  $c_1$  et  $c_2$ , strictement positives, telles que, pour tout  $(u, v) \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^m)^2$ , on ait :*

$$|B[u, v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

et

$$c_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq B[u, u] + c_2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

**Démonstration** : Il est clair que :

$$\begin{aligned} |B[u, v]| &\leq \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|_\infty \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right| dx + \sum_{i=1}^n |b_i|_\infty \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| |v| dx + |c|_\infty \int_{\Omega} |u| |v| dx, \\ &\leq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

pour un certain  $\alpha > 0$  qui ne dépend que des  $|a_{i,j}|_\infty$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , des  $|b_i|_\infty$ ,  $i = 1, \dots, n$  et de  $|c|_\infty$ .

De plus,

$$\begin{aligned} \delta \int_{\Omega} |Du|^2 dx &\leq \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx, \\ &\leq B[u, u] - \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u + cu^2 \right] dx, \\ &\leq B[u, u] + \sum_{i=1}^n |b_i|_\infty \int_{\Omega} |Du||u| dx + |c|_\infty \int_{\Omega} u^2 dx. \end{aligned}$$

En outre, quelque soit  $\sigma > 0$ , nous avons :

$$\int_{\Omega} |Du||u| dx \leq \frac{\sigma^2}{2} \int_{\Omega} |Du|^2 dx + \frac{1}{2\sigma^2} \int_{\Omega} u^2 dx.$$

Prenant  $\sigma$  tel que  $\frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^n |b_i|_\infty \leq \frac{\delta}{2}$ , il vient donc :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} |Du|^2 dx &\leq B[u, u] + \left( \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n |b_i|_\infty + |c|_\infty \right) \int_{\Omega} u^2 dx, \\ &\leq B[u, u] + C \|u\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante  $C'$  telle que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C' \|Du\|_{L^2(\Omega)},$$

et donc, avec  $c_1 = \frac{\delta}{2}$  et  $c_2 = C'C$ , nous avons :

$$c_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq B[u, u] + c_2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

□

## A.2 Espaces fonctionnels dépendant du temps

**Théorème A.2.1** Soit  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  telle que  $u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  alors

i.  $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$ ,

ii. la fonction  $t \mapsto \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$  est absolument continue et  $\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2 \langle u'(t), u(t) \rangle$  pour presque tout  $t \in (0, T)$ ,

iii. Enfin, il existe une constante  $C$ , ne dépendant que du temps  $T$  telle que

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left( \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \right).$$

**Démonstration** : Pour la démonstration de ce résultat, on pourra par exemple consulter le livre de L. C. Evans ([Eva98]) page 287 et suivantes.  $\square$



# Bibliographie

- [AGT98] Alouges (François), Ghidaglia (Jean-Michel) et Tajchman (Marc). – *On the interaction of upwindng and forcing for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws*. – Rapport technique, CNRS URA-1611, 1998.
- [Ara80] Arai (Masahiko). – Characteristics and stability analyses for two-phase flow equation systems with viscous terms. *Nuclear Science and Engineering*, vol. 74, 1980, pp. 77–83.
- [Bou98] Boucker (Marc). – *Modélisation numérique multidimensionnelle d'écoulements diphasiques liquide-gaz en régimes transitoire et permanent: méthodes et applications*. – Thèse de PhD, ENS-Cachan, France, 1998.
- [Bre92] Brezis (Haïm). – *Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications*. – Masson, 1992.
- [Eva98] Evans (Lawrence C.). – *Partial Differential Equations*. – American Mathematical Society, 1998, *Graduate Studies in Mathematics*, volume 19.
- [GKL96] Ghidaglia (Jean-Michel), Kumbaro (Anela) et Le Coq (Gérard). – Une méthode "volumes finis" à flux caractéristiques pour la résolution numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation. *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. Série. I 322, n 10, 1996, pp. 981–988.
- [GKL00] Ghidaglia (Jean-Michel), Kumbaro (Anela) et Le Coq (Gérard). – On the numerical solution to two fluid models *via* a cell centered finite volume method. – january 2000. <http://www.cmla.ens-cachan.fr/Utilisateurs/perfortmans/index.html>.
- [GR96] Godlewski (Edwige) et Raviart (Pierre-Arnaud). – *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. – Springer, 1996, *Applied Mathematical Sciences*, volume 118.
- [GV96] Golub (Genne H.) et Van Loan (Charles F.). – *Matrix Computations*. – The Johns Hopkins University Press, 1996, third édition.
- [Hal98] Halaoua (Khaled). – *Quelques solveurs pour les opérateurs de convection et leur application à la mécanique des fluides diphasiques*. – Thèse de PhD, ENS-Cachan, France, 1998.

- 102 BIBLIOGRAPHIE
- [Hir90] Hirsch (C.). – *Numerical Computation of Internal and External Flows: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*. – Wiley Series in Numerical Methods in Engineering. Chichester etc. John Wiley and Sons, 1990 volume 2.
- [Key00] Keyfitz (Barbara Lee). – Mathematical properties of nonhyperbolic models for incompressible two-phase flow. In: *Cargèse 2000: <http://www.cmla.ens-cachan.fr/Utilisateurs/perfortmans>*.
- [KL89] Kreiss (Heinz-Otto) et Lorenz (Jens). – *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations*. – Academic Press, 1989.
- [KS77] Kazikhov (A. V.) et Shelukin (V. V.). – Unique global solution with respect to time of initial-boundary value problems for one-dimensional equations of a viscous gas. *Prikl. Mat. Mekh.*, vol. 41, n2, 1977, pp. 282–291.
- [Lax72] Lax (Peter D.). – *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*. – 1972 volume 11.
- [Ler] Leroux. – Private communication.
- [LeV92] LeVeque (Randall J.). – *Numerical Methods for Conservation Laws*. – Lectures in Mathematics ETH Zürich, 1992.
- [Lio96] Lions (Pierre-Louis). – *Mathematical Topics in Fluid Mechanics: Incompressible Models*. – Oxford Science Publications, 1996, *Oxford lectures series in mathematics and its applications*, volume 1.
- [Lio98] Lions (Pierre-Louis). – *Mathematical Topics in Fluid Mechanics: Compressible Models*. – Oxford Science Publications, 1998, *Oxford lectures series in mathematics and its applications*, volume 2.
- [Ran92] Ransom (V. H.). – Numerical benchmark test no. 2.1. In: *Multiphase Science and Technology, Volume 6*. – Hemisphere Publishing Corporation, 1992.
- [RG91] Raviart (Pierre-Arnaud) et Godlewski (Edwige). – *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. – Ellipse, 1991.
- [Ser86] Serre (Denis). – Sur l'équation monodimensionnelle d'un fluide visqueux, compressible et conducteur de chaleur. *Compte rendu de l'Académie des Sciences*, vol. 14, n1, 1986, pp. 703–706.
- [Ser96] Serre (Denis). – *Système de lois de conservation*. – Diderot éditeur, Arts et Sciences, 1996, *Fondations*, volume I et II.
- [Smo83] Smoller (Joel). – *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. – Springer-Verlag, 1983.
- [Whi74] Whitham (G.B.). – *Linear and Nonlinear Waves*. – John Wiley & Sons, 1974.

# Table des figures

7.1	Cas test du robinet de Ransom . . . . .	84
7.2	Caractéristiques à l'interface d'entrée . . . . .	88
7.3	Caractéristiques à l'interface de sortie . . . . .	89
7.4	Caractéristiques à l'interface de sortie . . . . .	90
7.5	Taux de Vide à l'instant $T = 0.5s$ pour le schéma explicite avec 100 mailles .	91
7.6	Vitesse du liquide à l'instant $T = 0.5s$ pour le schéma explicite avec 100 mailles	92
7.7	Résultats à l'instant $T = 0.5s$ pour le schéma explicite avec 100 mailles . . .	93
7.8	Résultats pour 100, 450 et 4500 mailles . . . . .	93
7.9	Évolution de la vitesse du liquide au cours du temps, avec un terme de diffusion	94
7.10	Évolution du taux de vide au cours du temps, avec un terme de diffusion . .	94
7.11	Évolution de la vitesse du liquide au cours du temps, avec un terme de diffusion	95
7.12	Évolution de la vitesse du liquide au cours du temps, avec un terme de diffusion	95
7.13	Évolution de la vitesse du liquide au cours du temps, avec un terme de diffusion	96





# Index

- **B** –
  - Burgers
    - équation ..... 12
  - **G** –
  - Galerkin
    - méthode de ..... 25, 30
  - **H** –
  - hyperbolicité
    - définition ..... 18, 19
    - système linéaire ..... 13
    - système quasi-linéaire ..... 19
  - hyperbolique
    - symétrisable ..... 18
  - **L** –
  - linéarisé
    - stabilité du ..... 52
  - linéarisation ..... 10
  - **P** –
  - parabolique
    - définition ..... 23
  - principe
    - de Duhamel ..... 11
    - de localisation ..... 11
  - problème
    - bien posé ..... 10
    - hyperbolique ..... 46
    - mixte ..... 58
  - **R** –
  - Ransom
    - robinet de ..... 83
  - **S** –
  - solution faible
    - définition (parabolique) ..... 24
    - existence (parabolique) ..... 29
    - unicité (parabolique) ..... 30
  - système simplifié
    - définition ..... 42
    - existence ..... 61
    - forme conservative ..... 43

## Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude de quelques aspects de la notion d'hyperbolicité, plus particulièrement de la relation qui existe entre celle-ci et la nature *bien posée* d'un problème de Cauchy obtenu à partir d'un système d'équations aux dérivées partielles issu de la mécanique des fluides ou la réalisation de la simulation numérique d'un tel problème.

Dans un premier temps, nous rappelons en quoi la notion de linéarisation d'un système d'équations aux dérivées partielles semble naturelle à l'étude de ce système et comment, de l'étude de ces problèmes linéarisés, plus précisément de leur nature *bien posée* c'est-à-dire de leur stabilité, découle la notion d'hyperbolicité.

Nous étudions ensuite le cas particulier d'un modèle à quatre équations pour un écoulement bifluide comportant des termes de diffusion pour les équations de quantité de mouvement. Nous montrons alors que, bien que, pour ce système, l'ajout des termes de diffusion n'entraîne pas l'hyperbolicité du modèle obtenu, les problèmes de Cauchy construits à partir de la linéarisation de ce système, autour d'un état constant, sont désormais *bien posés*.

Enfin, nous considérons le cas d'un modèle à cinq équations pour un écoulement bifluide. Ce modèle ne nécessite pas de loi de fermeture algébrique (équations d'état ou lois tabulées) mais comporte une équation aux dérivées partielles portant sur la pression. Le système ainsi obtenu n'est pas hyperbolique mais les valeurs propres de l'opérateur d'advection sont toutes réelles. La simulation numérique d'un écoulement régi par ce modèle, pour le cas test du robinet de Ransom, ne fait néanmoins pas apparaître les instabilités numériques que la nature mal posée du linéarisé nous faisait craindre et qui sont présentes dans les simulations réalisées à partir du modèle isentropique classique à quatre équations.

**Mots-clé :** Condition limite, écoulement bifluide, problème *bien posé*, problème de Cauchy, simulation numérique, linéarisation, non-hyperbolicité, méthode numérique, volume fini.

## Abstract

We study here some aspects of the hyperbolicity, in particular the relationship between hyperbolicity and well-posedness for Cauchy problem obtained from system of partial differential equations from the fluid dynamics or the numerical simulation of such a problem.

We first recall how linearization appears in the study of a system of partial differential equations and how, the study of this linearized equations, particularly its well-posedness, leads to the introduction of hyperbolicity.

We then are interested in particular by the case of a four equations model describing a two fluid flow with viscous terms. We prove that the Cauchy problems obtained with the linearized equations are well-posed even if they are non-hyperbolic.

Finally, we consider a two fluid flow model with five equations. This model comprises instead of algebraic closure equation (e.g. perfect gaz law). The advection operator is still non hyperbolic but all eigenvalues are real. The numerical simulation of Ransom faucet flow with this model does not show instability considering that the linearized system is non hyperbolic and as the isentropic four equations model does.

**Keywords:** Boundary condition, Cauchy problem, finite volume, linearization, non hyperbolicity, numerical method, numerical simulation, two fluid flow, *well-posedness*.