HOMOGENEISATION ET CONTROLE OPTIMAL
POUR DES PROBLEMES DE STOKES
ET POUR UN PROBLEME DE TORSION ELASTIQUE

Cette thèse est consacrée à l'étude du contrôle optimal et de l'homogénéisation de quelques problèmes liés à l'équation de Stokes ainsi qu'au problème de torsion élastique.

L'homogénéisation est une méthode mathématique utilisée lorsque les problèmes que l'on traite sont posés dans un milieu hétérogène qui présente une structure périodique. Dans ce type de situation, les dimensions de la période sont petites par rapport aux dimensions globales du domaine. Ainsi, on définit ε un petit paramètre strictement positif qui représente le rapport de ces deux dimensions. Ce petit paramètre est destiné à tendre vers zéro, ce qui correspond d'un point de vue pratique au passage du problème non-homogène de départ au problème dit "homogénéisé" (c'est à dire un problème posé dans un milieu homogène).

Plusieurs méthodes connues comme, la méthode du developpement asymptotique, la méthode de convergence multi-échelle et la méthode de l'énergie nous permettent d'aboutir à ce problème.

Tout le long de ce travail, lorsqu'il sera question d'homogénéiser un problème, on sera amené à utiliser la méthode de l'énergie. Cette méthode consiste à construire des fonctions tests appropriées permettant le passage à la limite dans le système d'équations que l'on considère.

Nous allons à présent définir la notion de "contrôle optimal".

Pour chaque problème étudié, nous imposons un contrôle θ à l'équation d'état. Ce contrôle appartient à un ensemble appelé "ensemble de contrôles admissibles", que l'on note $\mathcal{U}_{ad}$ ou $\mathcal{U}_{ad}^{\varepsilon}$ suivant le domaine considéré : non-perforé ou perforé. Le contrôle peut être interprété comme étant des forces extérieures, forces volumiques,... agissant sur l'équation d'état.

On se donne une fonction coût qui dépend à la fois de l'état mais aussi du contrôle, définie par un premier terme qu'on qualifie d'énergie du système (la plupart du temps) et d'un deuxième terme qui correspond au coût du contrôle θ.

Le contrôle optimal noté $\theta_{\varepsilon}^{\star}$ est la fonction dans $\mathcal{U}_{ad}$ ou $\mathcal{U}_{ad}^{\varepsilon}$ qui minimise la fonction coût pour tout les contrôles dans $\mathcal{U}_{ad}$ ou $\mathcal{U}_{ad}^{\varepsilon}$. Dans tous les problèmes étudiés, on verra que le contrôle optimal est unique. On étudie alors le comportement limite de celui-ci lorsque $\varepsilon \to 0$. S'il admet une limite, on la caractérise si possible, comme étant le contrôle optimal associé au problème limite homogénéisé. Pour ce faire, la technique consiste à introduire l'état adjoint du système étudié pour chaque problème considéré et donc d'homogénéiser cette équation pour un contrôle fixe (en utilisant notamment une variante de la méthode de l'énergie). Une grande partie de la résolution de ce type de problème, réside dans la construction de fonctions tests bien appropriées qui vont permettre le passage à la limite en utilisant entre autres des résultats de compacité.

Dans ce travail, on étudie donc le contrôle optimal de problèmes dans les domaines non-perforés (Chapitres I & II) et dans les domaines perforés (Chapitres III & IV), pour des systèmes liés à l'équation de Stokes (Chapitres I-III) et pour le problème de la torsion élastique (Chapitre IV).
Ce travail est donc divisé en quatre parties organisées de la manière suivante.

Dans le **chapitre I**, intitulé "Contrôle optimal et homogénéisation dans un mélange de fluides", on se propose d'étudier un problème de contrôle optimal dans un mélange de deux fluides newtoniens, incompressibles de viscosité différente non nulle. Ces deux fluides sont répartis périodiquement l'un par rapport à l'autre (avec $\varepsilon \to 0$ comme période) dans un domaine bi ou tridimensionnel. Une modélisation mathématique d'un tel type de problème est proposée au paragraphe 1; l'écoulement des deux fluides obéit aux équations de Stokes ayant pour inconnues la vitesse et la pression de chaque fluide. Pour étudier ce problème, ce qui fait l'objet du deuxième paragraphe, on introduit le système d'équations que satisfait l'état adjoint (vitesse et pression adjointes) et on homogénéise ce nouveau problème. Vu la périodicité du domaine, on utilise une des méthodes classiques d'homogénéisation : la méthode de l'énergie qui réside entre autres sur la construction des fonctions tests bien choisies sur une cellule de référence. Par la suite (§3), on caractérise la limite du contrôle optimal comme étant le contrôle optimal du problème limite. Et pour finir (§4), on exhibe certaines propriétés (ellipticité, symétrie...) du tenseur d'ordre quatre $\mathcal{B}^\sharp$ apparaissant dans les équations limites.

Dans le **chapitre II**, intitulé " Contrôle optimal et homogénéisation dans un mélange de fluides avec interface oscillante", on s'intéresse encore à un mélange de deux fluides visqueux incompressibles mais cette fois-ci, contrairement au chapitre I, ils ne sont pas répartis périodiquement l'un par rapport à l'autre, mais ils sont séparés par une interface définie par une fonction qui oscille rapidement de période $\varepsilon > 0$ et d'amplitude constante et positive. Au §2, on définit la géométrie dans laquelle on se place ainsi que les équations mathématiques modélisant le problème qu'on désire résoudre. Celui-ci est régit par les équations de Stokes avec pour inconnues la vitesse et la pression de chaque fluide. Au §3, on introduit le problème homogénéisé, on démontre quelques propriétés des tenseurs apparaissant dans le problème limite et on énonce le résultat principal de convergence. Le §4 est consacré à la démonstration des résultats annoncés au § précédent. Cette démonstration comporte notamment des estimations a priori et nécessite, entre autres, la construction de différentes fonctions auxiliaires ou fonctions tests appropriées qui permet le passage à la limite moyennant certaines hypothèses de régularité. Tout le travail effectué auparavant sert à obtenir les résultats de convergence du contrôle optimal limite (§5). Finalement (§6), on étudie le cas bidimensionnel dans lequel on donne des résultats explicites dans le cas concret où les hypothèses introduites au § précédent sont satisfaites.

Le **chapitre III**, intitulé "Contrôle optimal et terme étrange d'un problème de Stokes", étudie le contrôle optimal pour les équations de Stokes dans les domaines perforés. On suppose que les perforations sont de taille a_ε plus petite qu'une période $\varepsilon > 0$ donnée. Différentes tailles de trous sont considérées par rapport à une taille critique : plus petit, plus grand ou du même ordre que la taille critique. Des hypothèses, notamment géométriques, liées à ces perforations sont faites (§2) juste après avoir présenté le problème étudié (§1). Par la suite (§3), après avoir introduit le problème adjoint, on l'homogénéise en utilisant la méthode de l'énergie et les hypothèses introduites auparavant. Ensuite (§4), on donne des résultats de convergence concernant le contrôle optimal limite, en remarquant qu'un terme "étrange" fait son apparition dans la fonction coût limite. Et pour finir (§5), on donne le problème qu'on obtient à la limite dans le cas des "petits trous".

Dans le **chapitre IV**, intitulé "Contrôle optimal et homogénéisation pour un problème de torsion élastique", on est amené à étudier le contrôle optimal d'un problème de torsion élastique. La modélisation mathématique de ce type de problème est faite au §1. Dans le §2, on introduit des lemmes de prolongements nous permettant de passer du domaine perforé au domaine tout entier afin de pouvoir effectuer des estimations a priori adéquates. Par la suite (§3), on homogénéise le problème adjoint (introduit auparavant) avec un contrôle fixe et donc on passe à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$. Au §4, on donne un résultat de convergence du contrôle optimal en utilisant les résultats obtenus au § précédent. Le §5, est consacré à l'étude de certaines propriétés liées au tenseur $\mathcal{B}^\sharp$ apparaissant dans ce problème limite. Finalement (§6), on s'intéresse au cas de la dimension 1 qui correspond à des conducteurs répartis dans une région donnée de$\mathbb{R}$.

CHAPITRE I

Contrôle optimal et homogénéisation dans un mélange de fluides

CHAPITRE I
CONTROLE OPTIMAL
ET HOMOGENEISATION
DANS UN MELANGE DE FLUIDES

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier un problème de contrôle optimal dans un mélange (d'un point de vue mathématique) de deux fluides newtoniens incompressibles. L'un des deux fluides est réparti de manière périodique dans l'autre, avec ε (un paramètre positif donné) comme période. Les fluides obéissent aux équations de Stokes.

On associe un problème de contrôle optimal (défini au § 1) aux équations qui modélisent ce problème. On verra par la suite que ce problème admet un unique contrôle optimal (voir Lions [4]). Notre but est d'étudier le comportement limite (lorsque $\varepsilon \to 0$) de ce contrôle optimal. Et bien sur, identifier cette limite comme étant le contrôle optimal associé au problème homogénéisé.

L'homogénéisation du problème de Stokes a été effectuée par Bensoussan,Lions & Papanicolaou [1] ou Sanchez-Palencia [10].

Concernant les mélanges de fluides, on peut citer plusieurs travaux. En effet, Lipton & Avellanéda [5] ont traité le cas où la courbure moyenne à l'interface des deux fluides intervient. Saint Jean Paulin & Taous [7], ont étudié ce type de problème mais avec une géométrie plus générale que [5] et une courbure différente.

On ne va pas se placer dans ce cadre ([5] ou [7]), en effet dans le cas que l'on va considérer dans la suite de ce travail, les effets de tension de surfaces à travers l'interface sont négligées.

Pour l'étude du contrôle optimal, plusieurs travaux existent à ce sujet. Kesavan & Vanninathan [3] ont traité un problème de contrôle optimal dont l'équation d'état est un problème elliptique du second ordre avec des coefficients périodiques. Dans un cadre plus général, Kesavan & Saint Jean Paulin [2] ont étudié le même problème

mais avec la topologie de la H-convergence. Dans ce chapitre, on adapte ces méthodes pour le problème de Stokes.
Ce chapitre est divisé en quatre paragraphes organisés de la manière suivante. Dans le premier paragraphe, on présente le problème que l'on va étudier. Dans le deuxième paragraphe, on homogénéise le problème adjoint pour $\theta \in \mathcal{U}_{ad}$ fixé. Dans le troisième paragraphe, on obtient le problème de contrôle optimal limite. Dans le quatrième paragraphe, on étudie les propriétés du tenseur $B^\sharp$ apparaissant dans le problème limite . Ce travail est l'objet de la publication [9].

Notation Dans tout ce qui suit, C désigne différentes constantes positives indépendante de ε. On note par $|\ .\ |$ la mesure de Lebesgue en dimension n.
Tout au long de ce chapitre, $\underline{v}$ désignera un vecteur de$\mathbb{R}^n$.

1. PRESENTATION DU PROBLEME

On considère donc $\Omega\ \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3). Chacun des deux fluides occupe des sous-domaines de Ω. On définit donc Ω_ε^i $(i = 1, 2)$ le domaine occupé par le fluide i. Dans chaque sous-domaine le fluide obéit aux équations de Stokes. A l'interface, les conditions de transmission sont données par la continuité de la vitesse et de la composante normale de tenseur des contraintes.
De manière classique en homogénéisation, on définit une cellule unitaire de référence (voir[1]).
Soit $Y =]0, 1\ [^n$ le cube ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit Y_1 un ouvert de Y, on définit Y_2 ouvert de $\mathbb{R}^n$, par $Y_2 = Y \setminus \bar{Y_1}$, où Y_1 représente la partie de Y occupée par l'un des deux fluides et Y_2 représente la partie de Y occupée par le second.
Les ensembles Ω_ε^i $(i = 1, 2)$ sont obtenus à partir de Y_i $(i = 1, 2)$ par translation et mise à l'échelle (en effectuant le changement de variable $x = \varepsilon y$).

Dans tout ce qui suit, on utilisera systématiquement la convention de sommation des indices répétés.
Soit $\alpha_M > \alpha_m > 0$ des constantes. On définit $\mathcal{M}(\alpha_m, \alpha_M)$, l'ensemble des matrices carrées $A = (a_{ij})$ d'ordre n tel que

$$(1.1) \qquad \forall \xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^n \quad \alpha_m \xi_i \xi_i \leq a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \alpha_M \xi_i \xi_i \quad pp \text{ et } a_{ij} \in L^\infty(\Omega).$$

Soit $A \in \mathcal{M}(\alpha_m, \alpha_M)$ et $B \in \mathcal{M}(\beta_m, \beta_M)$. On suppose de plus que B est symétrique. Soit $A_\varepsilon(x) = A(\frac{x}{\varepsilon})$ et $B_\varepsilon(x) = B(\frac{x}{\varepsilon})$ des matrices périodiques (on obtient A_ε et B_ε par extension périodique de A et B sur une cellule de taille ε).

On définit le contrôle optimal comme suit. Soit $\mathcal{U}_{ad} \subset L^2(\Omega)^n$ un convexe fermé non vide.
Soit $\underline{f} \in L^2(\Omega)^n$ une fonction et $N > 0$ une constante. Pour $\underline{\theta} \in \mathcal{U}_{ad}$ l'équation d'état est donnée par le problème de Stokes suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} -\text{ div } (A_\varepsilon \nabla \underline{u}_\varepsilon) = \underline{f} - \nabla p_\varepsilon + \underline{\theta} \quad \text{ dans } \Omega \\ \\ \text{div } \underline{u}_\varepsilon = 0 \quad \text{ dans } \Omega \\ \\ \underline{u}_\varepsilon = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1.2}$$

où A_ε est la viscosité du problème, $(\underline{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ sont respectivement la vitesse et la pression du fluide et $\underline{\theta}$ est le contrôle. L'équation d'état s'écrit à l'aide des composantes de la manière suivante: $-\dfrac{\partial}{\partial x_j}(a_{ik}\dfrac{\partial u_k}{\partial x_j}) = f_i - \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial x_i} + \theta_i$.
La fonction coût nous est donnée par

$$J_\varepsilon(\underline{\theta}) = \frac{1}{2}\int_\Omega B_\varepsilon \nabla \underline{u}_\varepsilon : \nabla \underline{u}_\varepsilon \; dx + \frac{N}{2}\int_\Omega |\underline{\theta}|^2 \; dx. \tag{1.3}$$

(où $B_\varepsilon \nabla \underline{u}_\varepsilon : \nabla \underline{u}_\varepsilon = b_{ik}\dfrac{\partial u_k}{\partial x_j}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$).
Le contrôle optimal $\underline{\theta}^\star_\varepsilon$ est la fonction dans $\mathcal{U}_{ad}$ qui minimise $J_\varepsilon(\underline{\theta})$ pour $\underline{\theta} \in \mathcal{U}_{ad}$, en d'autres termes

$$J_\varepsilon(\underline{\theta}^\star_\varepsilon) = \min_{\underline{\theta} \in \mathcal{U}_{ad}} J_\varepsilon(\underline{\theta}). \tag{1.4}$$

Ce type de problème s'inspire des problèmes de Lions [4], il admet donc une unique solution $\underline{\theta}^\star_\varepsilon \in \mathcal{U}_{ad}$ (voir Lions [4]). Notre but est d'étudier le comportement limite de $\underline{\theta}^\star_\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \to 0$. En particulier, nous verrons que (par extraction de sous-suites)

$$\underline{\theta}^\star_\varepsilon \rightharpoonup \underline{\theta}^\star_0 \;\text{ dans }\; L^2(\Omega)^n \;\text{ faible.} \tag{1.5}$$

Notre objectif est de caractériser $\underline{\theta}_0^\star$ comme étant le contrôle optimal d'un problème similaire avec des matrices limites A_0 et B_0 qui en fait seront des tenseurs d'ordre quatre et bien sûr les identifier.

2. HOMOGENEISATION

Définition 2.1 On définit $L_0^2(\Omega)$ par

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ g \in L^2(\Omega) \mid \quad \int_\Omega g(y)\ dy = 0 \right\}.$$

Le problème (1.2)-(1.4) peut être réduit en système d'équations en introduisant l'état adjoint $(\underline{v}_\varepsilon, p'_\varepsilon) \in H^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$. On obtient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} -\text{ div } (A_\varepsilon \nabla \underline{u}_\varepsilon) = \underline{f} - \nabla p_\varepsilon + \underline{\theta} \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \\ \text{div } ({}^t A_\varepsilon \nabla \underline{v}_\varepsilon - B_\varepsilon \nabla \underline{u}_\varepsilon) = -\nabla p'_\varepsilon \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \\ \text{div } \underline{u}_\varepsilon = \text{ div } \underline{v}_\varepsilon = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \\ \underline{u}_\varepsilon = \underline{v}_\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

où $(\underline{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ et $(\underline{v}_\varepsilon, p'_\varepsilon)$ sont dans $(H^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega))$.

Le contrôle optimal $\underline{\theta}_\varepsilon^\star$ est caractérisé par l'inégalité variationnelle

$$\underline{\theta}_\varepsilon^\star \in \mathcal{U}_{ad} \quad \text{et} \quad \int_\Omega (\underline{v}_\varepsilon + N\underline{\theta}_\varepsilon^\star)(\underline{\theta} - \underline{\theta}_\varepsilon^\star)\ dx \geq 0\ \forall \underline{\theta} \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{2.2}$$

Pour toute fonction h, $Y-$périodique , on dénote par

$$m(h) = \frac{1}{|Y|} \int_Y h(y)\ dy.$$

Rappelons ci-dessous un lemme classique :

Lemme 2.2 *Soit $h \in L^p(\Omega)$ une fonction $Y-$périodique et $1 \leq p \leq \infty$. Alors*

$$h(x/\varepsilon) \rightharpoonup m(h) \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ faible si } p < \infty \text{ et dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible} \star \text{ si } p = \infty.$$

Définition 2.3 Soit $M = (M_{ijk\ell})$ un tenseur d'ordre quatre, on définit ${}^tM$ par

$$^t(M)_{ijk\ell} = M_{k\ell ij}$$

et on dira que M est"symétrique" si ${}^tM = M$.

Théorème 2.4 *Soit* $(\underline{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ *et* $(\underline{v}_\varepsilon, p'_\varepsilon)$ *les solutions du problème* (2.1).
Alors (par extraction de sous-suites)

(2.3)
$$\begin{cases} \underline{u}_\varepsilon \rightharpoonup \underline{u}_0 \quad dans \quad H_0^1(\Omega)^n \quad faible \\ \underline{v}_\varepsilon \rightharpoonup \underline{v}_0 \quad dans \quad H_0^1(\Omega)^n \quad faible \\ p_\varepsilon \rightharpoonup p_0 \quad dans \quad L_0^2(\Omega) \quad faible \\ p'_\varepsilon \rightharpoonup p'_0 \quad dans \quad L_0^2(\Omega) \quad faible\ , \end{cases}$$

où $(\underline{u}_0, p_0)$ *et* $(\underline{v}_0, p'_0)$ *vérifient*

(2.4)
$$\begin{cases} -\ div\ (A_0 \nabla \underline{u}_0) = \underline{f} - \nabla p_0 + \underline{\theta} \quad dans \quad \Omega \\ div\ ({}^tA_0 \nabla \underline{v}_0 - B^\sharp \nabla \underline{u}_0) = -\nabla p'_0 \quad dans \quad \Omega \\ div\ \underline{u}_0 = \ div\ \underline{v}_0 = 0 \quad dans \quad \Omega \\ \underline{u}_0 = \underline{v}_0 = 0 \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Le tenseur A_0 est le tenseur homogénéisé, son expression sera donnée par (2.21) et le tenseur $B^\sharp$ dépend à la fois de A_ε et de B_ε , il sera donné par la relation (2.42) .
Démonstration

Première étape: *Estimations a priori*

On multiplie la première équation de (2.1) par $\underline{u}_\varepsilon$. En intégrant par parties et en utilisant l'inégalité de Poincaré, on montre que $\|\underline{u}_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)^n}$ est bornée et donc par extraction de sous-suite, on obtient

(2.5)
$$\underline{u}_\varepsilon \rightharpoonup \underline{u}_0 \ \text{ dans } H_0^1(\Omega)^n \text{ faible.}$$

De même en multipliant la deuxième équation de (2.1) par $\underline{v}_\varepsilon$, en intégrant par parties et en utilisant les estimations (2.5) sur $\underline{u}_\varepsilon$, on montre que $\|\underline{v}_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)^n}$ est bornée, d'où

$$\underline{v}_\varepsilon \rightharpoonup \underline{v}_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega)^n \text{ faible.} \tag{2.6}$$

En utilisant le fait que $\|\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla \underline{u}_\varepsilon)\|_{H^{-1}(\Omega)^n}$ est bornée, on a ∇p_ε est borné dans $H^{-1}(\Omega)$, d'où (voir Temam[11])

$$\|p_\varepsilon\|_{L_0^2(\Omega)} \leq C, \tag{2.7}$$

on a donc par extraction de sous-suite

$$p_\varepsilon \rightharpoonup p_0 \text{ dans } L_0^2(\Omega) \text{ faible.} \tag{2.8}$$

De même

$$p'_\varepsilon \rightharpoonup p'_0 \text{ dans } L_0^2(\Omega) \text{ faible.} \tag{2.9}$$

Pour effectuer le passage à la limite dans la deuxième équation de (2.1), nous allons construire des fonctions tests. Celles-ci vont nous permettre d'identifier le problème limite.

Deuxième étape: Construction des fonctions tests

Soit β et m tels que $1 \leq \beta \leq n$ and $1 \leq m \leq n$.
On pose $\underline{P}^{\beta m} = {}^t(0,..,0,y_\beta,0,.,0)$, y_β étant à la m ième place.
Soit $(\underline{\omega}^{\beta m}, r_1^{\beta m})$ solution du problème auxiliaire défini sur la période

$$\begin{cases} -div(A\nabla \underline{\omega}^{\beta m}) = -\nabla r_1^{\beta m} \text{ dans } Y \\ div(\underline{\omega}^{\beta m}) = div(\underline{P}^{\beta m}) \text{ dans } Y \\ \underline{\omega}^{\beta m} - \underline{P}^{\beta m} \text{ et } r_1^{\beta m} \ Y\text{−périodiques.} \end{cases} \tag{2.10}$$

Ce problème admet une unique solution $(\underline{\omega}^{\beta m}, r_1^{\beta m})$ dans $H^1_\sharp(Y) \times L^2_\sharp(Y)$ à une constante additive près (où $H^1_\sharp$ désigne l'ensemble des fonctions Y-périodiques de $H^1(Y)$

et $L^2_\sharp(Y)$ est défini de la même manière). Pour fixer les choses, on choisit $r_1^{\beta m}$ de moyenne nulle.
Soit $(\underline{\psi}^{\beta m}, r_2^{\beta m})$ solution de

$$(2.11) \qquad \begin{cases} div(\ {}^tA\nabla\underline{\psi}^{\beta m} +\ {}^tB\nabla\underline{\omega}^{\beta m}) = -\nabla r_2^{\beta m} \ \text{ dans } Y \\ div(\underline{\psi}^{\beta m}) = 0 \ \text{ dans } Y \\ \underline{\psi}^{\beta m} \text{ et } r_2^{\beta m} \ Y\text{−périodiques.} \end{cases}$$

Ce problème admet une unique solution $(\underline{\psi}^{\beta m}, r_2^{\beta m})$ dans $H^1_\sharp(Y) \times L^2_\sharp(Y)$ à une constante additive près. De même, on choisit $r_2^{\beta m}$ de moyenne nulle. On définit $\underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m}, r_1^{\varepsilon,\beta m}$ et $\underline{P}^{\varepsilon,\beta m}$ par mise à l'échelle de $\underline{\omega}^{\beta m}, r_1^{\beta m}$ et $\underline{P}^{\beta m}$ de la manière suivante

$$(2.12) \qquad \begin{cases} \underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m}(x) = \varepsilon\underline{\omega}^{\beta m}(x/\varepsilon) \\ r_1^{\varepsilon,\beta m}(x) = r_1^{\beta m}(x/\varepsilon), \\ \underline{P}^{\varepsilon,\beta m}(x) = \varepsilon\underline{P}^{\beta m}(x/\varepsilon), \end{cases}$$

et

$$(2.13) \qquad \begin{cases} \underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}(x) = \varepsilon\underline{\psi}^{\beta m}(x/\varepsilon) \\ r_2^{\varepsilon,\beta m}(x) = r_2^{\beta m}(x/\varepsilon). \end{cases}$$

D'après (2.10), il est facile de montrer que $(\underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m},\ r_1^{\varepsilon,\beta m})$ vérifie le problème suivant défini sur Ω tout entier :

$$(2.14) \qquad \begin{cases} -\ \text{div}\ (A_\varepsilon\nabla\underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m}) = -\nabla r_1^{\varepsilon,\beta m} \ \text{ dans } \Omega \\ \text{div}\ (\underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m}) = \ \text{div}\ (\underline{P}^{\varepsilon,\beta m}) \ \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

De même $(\underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m},\ r_2^{\varepsilon,\beta m})$ est solution de

$$(2.15) \qquad \begin{cases} \text{div}\ (\ {}^tA_\varepsilon\nabla\underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m} +\ {}^tB_\varepsilon\nabla\underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m}) = -\nabla r_2^{\varepsilon,\beta m} \ \text{ dans } \Omega \\ \text{div}\ (\underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}) = 0 \ \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Par les estimations a priori sur les solutions de (2.14) et en utilisant le Lemme 2.2, on obtient les résultats de convergence suivant (par extraction de sous-suites)

$$\underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m} \rightharpoonup \underline{P}^{\beta m} \quad \text{dans} \quad H^1(\Omega)^n \quad \text{faible,} \tag{2.16}$$

et

$$r_1^{\varepsilon,\beta m} \rightharpoonup 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible.} \tag{2.17}$$

et de manière similaire, on a

$$\underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m} \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega)^n \quad \text{fort,} \tag{2.18}$$

et

$$r_2^{\varepsilon,\beta m} \rightharpoonup 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible.} \tag{2.19}$$

Troisième étape:

L'homogénéisation du problème (1.2) est classique (voir [1]), on obtient que la limite $(\underline{u}_0, p_0)$ vérifie le problème de Stokes suivant défini sur Ω tout entier

$$\begin{cases} -\text{ div } (A_0 \nabla \underline{u}_0) = \underline{f} - \nabla p_0 + \underline{\theta} \quad \text{dans } \Omega \\ \text{div } \underline{u}_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \underline{u}_0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.20}$$

où A_0 est le tenseur des coefficients homogénéisés défini par

$$A_0 : \nabla \underline{P}^{\beta m} = \int_Y A(y) \nabla \underline{\omega}^{\beta m}(y) dy. \tag{2.21}$$

Quatrième étape:

Nous allons à présent homogénéiser le problème (2.1) en utilisant une variante de la méthode de l'énergie introduite par Kesavan & Saint jean Paulin [2].

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on multiplie la deuxième équation de (2.1) par $\phi\underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m}$ et on intègre par parties, on obtient

(2.22)
$$\left\{\begin{aligned} -\int_\Omega \nabla p'_\varepsilon.(\underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m}\phi)\ dx &= -\int_\Omega \big(({}^tA_\varepsilon\nabla\underline{v}_\varepsilon - B_\varepsilon\nabla\underline{u}_\varepsilon)\nabla\phi\big).\ \underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m}\ dx \\ &\quad -\int_\Omega ({}^tA_\varepsilon\nabla\underline{v}_\varepsilon) : \nabla\underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m}\phi\ dx + \int_\Omega (B_\varepsilon\nabla\underline{u}_\varepsilon) : \nabla\underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m}\phi\ dx \\ &= -\int_\Omega (z_\varepsilon\nabla\phi).\underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m}\ dx - \int_\Omega \nabla\underline{v}_\varepsilon : (A_\varepsilon\nabla\underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m})\phi\ dx \\ &\quad + \int_\Omega \nabla\underline{u}_\varepsilon :\ ({}^tB_\varepsilon\nabla\underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m})\phi\ dx \end{aligned}\right.$$

où

$$z_\varepsilon = {}^tA_\varepsilon\nabla\underline{v}_\varepsilon - B_\varepsilon\nabla\underline{u}_\varepsilon \tag{2.23}$$

De la même manière, on multiplie la première équation de (2.1) par $\phi\underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}$ et on intègre par parties, on obtient

(2.24)
$$\left\{\begin{aligned} \int_\Omega(\underline{f} + \underline{\theta} - \nabla p_\varepsilon).(\underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}\phi)\ dx &= \int_\Omega(A_\varepsilon\nabla\underline{u}_\varepsilon\nabla\phi).\underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}\ dx + \int_\Omega(A_\varepsilon\nabla\underline{u}_\varepsilon) : \nabla\underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}\phi\ dx \\ &= \int_\Omega(\xi_\varepsilon\nabla\phi).\underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}\ dx + \int_\Omega \nabla\underline{u}_\varepsilon :\ ({}^tA_\varepsilon\nabla\underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m})\phi\ dx \\ &= \int_\Omega(\xi_\varepsilon\nabla\phi).\underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}\ dx - \int_\Omega \operatorname{div}\ (\,{}^tA_\varepsilon\nabla\underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}).\ \underline{u}_\varepsilon\phi\ dx \\ &\quad - \int_\Omega \underline{u}_\varepsilon.\ ({}^tA_\varepsilon\nabla\underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}\nabla\phi)\ dx \end{aligned}\right.$$

où

$$\xi_\varepsilon = A_\varepsilon\nabla\underline{u}_\varepsilon. \tag{2.25}$$

Maintenant, en utilisant le problème (2.15), on a

(2.26)
$$\left\{\begin{aligned} \int_\Omega(\underline{f} + \underline{\theta} - \nabla p_\varepsilon).(\underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}\phi)\ dx &= \int_\Omega(\xi_\varepsilon\nabla\phi).\underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}\ dx + \int_\Omega \operatorname{div}\ ({}^tB_\varepsilon\nabla\underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m}).\ \underline{u}_\varepsilon\phi\ dx \\ &\quad + \int_\Omega \nabla r_2^{\varepsilon,\beta m}.(\underline{u}_\varepsilon\phi)\ dx - \int_\Omega \underline{u}_\varepsilon.(\,{}^tA_\varepsilon\nabla\underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}\nabla\phi)\ dx. \end{aligned}\right.$$

En intégrant par parties le membre de droite de (2.26), on obtient

(2.27)
$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (\underline{f} + \underline{\theta} - \nabla p_\varepsilon).(\underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}\phi)\ dx = \int_\Omega (\xi_\varepsilon \nabla\phi).\underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}\ dx - \int_\Omega \underline{u}_\varepsilon.\ ({}^t B_\varepsilon \nabla \underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m}\nabla\phi)\ dx \\ \qquad\qquad \displaystyle - \int_\Omega \nabla \underline{u}_\varepsilon :\ ({}^t B_\varepsilon \nabla \underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m})\phi\ dx + \int_\Omega \nabla r_2^{\varepsilon,\beta m}.(\underline{u}_\varepsilon \phi)\ dx \\ \qquad\qquad \displaystyle - \int_\Omega \underline{u}_\varepsilon.\ ({}^t A_\varepsilon \nabla \underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}\nabla\phi)\ dx. \end{cases}$$

En additionnant (2.22) et (2.27), on aboutit à

$$(2.28)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (\underline{f} + \underline{\theta} - \nabla p_\varepsilon).(\underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}\phi)\ dx - \int_\Omega \nabla p'_\varepsilon.(\underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m}\phi)\ dx \\ \qquad \displaystyle = - \int_\Omega (z_\varepsilon \nabla\phi).\ \underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m}\ dx - \int_\Omega \nabla \underline{v}_\varepsilon : (A_\varepsilon \nabla \underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m})\phi\ dx \\ \qquad \displaystyle + \int_\Omega (\xi_\varepsilon \nabla\phi).\ \underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}\ dx + \int_\Omega \nabla r_2^{\varepsilon,\beta m}.(\underline{u}_\varepsilon \phi)\ dx \\ \qquad \displaystyle - \int_\Omega \underline{u}_\varepsilon.\big(({}^t B_\varepsilon \nabla \underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m} + {}^t A_\varepsilon \nabla \underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m})\nabla\phi\big)\ dx. \end{cases}$$

On introduit

$$(2.29)\qquad b_\varepsilon^{\beta m} = {}^t B_\varepsilon \nabla \underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m} + {}^t A_\varepsilon \nabla \underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}.$$

En intégrant par parties le membre de droite de (2.28) et en utilisant(2.29), on obtient

$$(2.30)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (\underline{f} + \underline{\theta} - \nabla p_\varepsilon).(\underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}\phi)\ dx - \int_\Omega \nabla p'_\varepsilon.(\underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m}\phi)\ dx \\ \qquad \displaystyle = - \int_\Omega (z_\varepsilon \nabla\phi).\ \underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m}\ dx - \int_\Omega \nabla \underline{v}_\varepsilon : (A_\varepsilon \nabla \underline{\omega}^{\varepsilon,\beta m})\phi\ dx \\ \qquad \displaystyle + \int_\Omega (\xi_\varepsilon \nabla\phi).\ \underline{\psi}^{\varepsilon,\beta m}\ dx - \int_\Omega (\underline{u}_\varepsilon.\nabla\phi) r_2^{\varepsilon,\beta m}\ dx \\ \qquad \displaystyle - \int_\Omega \underline{u}_\varepsilon.(b_\varepsilon^{\beta m}\nabla\phi)\ dx. \end{cases}$$

(puisque div $\underline{u}_\varepsilon = 0$).

Cinquième étape: *Passage à la limite*

Nous allons effectuer le passage à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ dans l'expression (2.30). Pour cela, on a besoin de résultats préliminaires.

D'après (2.23) et les estimations a priori sur $\underline{u}_\varepsilon$ et $\underline{v}_\varepsilon$, l'expression $\|z_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^{n\times n}}$ est bornée, on peut donc extraire une sous-suite telle que

$$z_\varepsilon \rightharpoonup z_0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega)^{n\times n} \quad \text{faible.} \tag{2.31}$$

De même d'après (2.25) et les estimations a priori sur $\underline{u}_\varepsilon$, on a que $\|\xi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^{n\times n}}$ est bornée et donc, par extraction de sous-suites,

$$\xi_\varepsilon \rightharpoonup \xi_0 = A_0 \nabla \underline{u}_0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega)^{n\times n} \quad \text{faible.} \tag{2.32}$$

Finalement en utilisant (2.29) et les convergences (2.16) et (2.18), on a que $\|b_\varepsilon^{\beta m}\|_{L^2(\Omega)^{n\times n}}$ est bornée, donc

$$b_\varepsilon^{\beta m} \rightharpoonup b_0^{\beta m} = m(\,{}^t B \nabla \underline{\omega}^{\beta m} + {}^t A \nabla \underline{\psi}^{\beta m}). \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega)^{n\times n} \quad \text{faible.} \tag{2.33}$$

Le passage à la limite dans (2.30), en tenant compte de (2.31)-(2.33), nous donne

$$\left\{ \begin{aligned} -\int_\Omega \nabla p'_0.\ \underline{P}^{\beta m} \phi \; dx = & -\int_\Omega (z_0 \nabla \phi).\ \underline{P}^{\beta m} \; dx - \int_\Omega \nabla \underline{v}_0 : (A_0 \nabla \underline{P}^{\beta m}) \phi \; dx \\ & -\int_\Omega \underline{u}_0.\ (b_0^{\beta m} \nabla \phi) \; dx. \end{aligned} \right. \tag{2.34}$$

Puisque $\underline{u}_\varepsilon$ est à divergence nulle, on a

$$\text{div } \underline{u}_0 = 0. \tag{2.35}$$

De plus, en utilisant (2.23), le problème (2.1) et la convergence (2.31), on a facilement

$$\text{div } (z_0) = -\nabla p'_0. \tag{2.36}$$

D'après (2.33), comme $b_0^{\beta m}$ est une moyenne (donc constante), on a

$$\text{div } (b_0^{\beta m}) = 0. \tag{2.37}$$

En intégrant par parties le membre de droite de (2.34) et d'après (2.35) -(2.37), on obtient finalement

(2.38)
$$0 = \int_\Omega z_0 : \nabla \underline{P}^{\beta m} \phi \, dx - \int_\Omega ({}^t A_0 \nabla \underline{v}_0) : \nabla \underline{P}^{\beta m} \phi \, dx + \int_\Omega b_0^{\beta m} : \nabla \underline{u}_0 \, \phi \, dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ceci étant vrai quelque soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on obtient

$$z_0 : \nabla \underline{P}^{\beta m} = ({}^t A_0 \nabla \underline{v}_0) : \nabla \underline{P}^{\beta m} - b_0^{\beta m} : \nabla \underline{u}_0 \tag{2.39}$$

ou encore,

$$z_0 = {}^t A_0 \nabla \underline{v}_0 - B^\sharp \nabla \underline{u}_0, \tag{2.40}$$

avec le tenseur $B^\sharp$ défini par

$${}^t B^\sharp : \nabla \underline{P}^{\beta m} = b_0^{\beta m}. \tag{2.41}$$

Mais d'après (2.33), on aboutit finalement à

$${}^t B^\sharp : \nabla P^{\beta m} = m({}^t B \nabla \underline{\omega}^{\beta m} + {}^t A \nabla \underline{\psi}^{\beta m}). \tag{2.42}$$

A l'aide de (2.20), (2.31) et (2.40), on obtient (2.4) , ce qui achève la démonstration.

Remarque 2.4 La symétrie de la matrice B n'intervient pas pour l'homogénéisation du problème (2.1). Mais cette hypothèse sera nécessaire pour l'étude du contrôle optimal qui fait l'objet du paragraphe suivant.

3. CONTROLE OPTIMAL

Nous allons à présent donner un résultat de convergence du contrôle optimal. D'où le théorème suivant

Théorème 3.1 *Soient* $A_\varepsilon(x) = A(\frac{x}{\varepsilon}) \in \mathcal{M}(\alpha_m, \alpha_M)$ *et* $B_\varepsilon(x) = B(\frac{x}{\varepsilon}) \in \mathcal{M}(\beta_m, \beta_M)$, *avec* B *symétrique. Pour* $\underline{\theta}$ *fixé dans* $\mathcal{U}_{ad}$, *on considère* $(\underline{u}, p)$ *solution de*

$$
\left\{
\begin{array}{l}
- \ div\ (A_0 \nabla \underline{u}) = \underline{f} - \nabla p + \underline{\theta} \quad dans \quad \Omega \\
\\
div\ \underline{u} = 0 \quad dans\ \Omega \\
\\
\underline{u} = 0 \quad sur\ \partial\Omega,
\end{array}
\right.
\tag{3.1}
$$

la fonction coût étant définie par

$$
J_0(\underline{\theta}) = \frac{1}{2} \int_\Omega B^\sharp \nabla \underline{u} : \nabla \underline{u} dx + \frac{N}{2} \int_\Omega |\underline{\theta}|^2 dx.
\tag{3.2}
$$

Alors le contrôle optimal $\underline{\theta}_\varepsilon^\star$ *du problème (1.3)-(1.4) vérifie*

$$
\underline{\theta}_\varepsilon^\star \to \underline{\theta}_0^\star \quad dans \quad L^2(\Omega)^n \quad fort
$$

et $\underline{\theta}_0^\star$ *satisfait la condition d'optimalité*

$$
J_0(\underline{\theta}_0^\star) = \min_{\underline{\theta} \in \mathcal{U}_{ad}} \ J_0(\underline{\theta}),
\tag{3.3}
$$

De plus

$$
\lim_{\varepsilon \to 0} \ J_\varepsilon(\underline{\theta}_\varepsilon^\star) = J_0(\underline{\theta}_0^\star).
\tag{3.4}
$$

Démonstration

Première étape : *Estimations a priori*

D'après la définition du contrôle optimal, on a pour tout $\underline{\theta}$ dans $\mathcal{U}_{ad}$

$$
\frac{N}{2} ||\underline{\theta}_\varepsilon^\star||_{L^2(\Omega)} \leq J_\varepsilon(\underline{\theta}_\varepsilon^\star) \leq J_\varepsilon(\underline{\theta}) \leq C,
\tag{3.5}
$$

Donc $\|\underline{\theta}_\varepsilon^\star\|_{L^2(\Omega)^n}$ est borné et par extraction de sous-suite, on a

$$\underline{\theta}_\varepsilon^\star \rightharpoonup \underline{\theta}_0^\star \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega)^n \quad \text{faible,} \tag{3.6}$$

en fait la convergence est forte dans $L^2(\Omega)^n$, on le verra plus loin dans la démonstration (cf (3.23)).

Soit $(\underline{u}_\varepsilon^\star, p_\varepsilon^\star)$ et $(\underline{v}_\varepsilon^\star, {p'}_\varepsilon^\star)$ l'état optimal et l'état adjoint optimal (respectivement) associés à $\underline{\theta}_\varepsilon^\star$. On reprend les mêmes arguments utilisés dans la démonstration du Théorème 2.4 (le fait de remplacer $\underline{\theta}$ par $\underline{\theta}_\varepsilon^\star$ dans l'équation d'état ne pose aucun problème) et on obtient

$$\begin{cases} \underline{u}_\varepsilon^\star \rightharpoonup \underline{u}_0^\star \text{ dans } H^1(\Omega)^n \text{ faible} \\ p_\varepsilon^\star \rightharpoonup p_0^\star \text{ dans } L_0^2(\Omega) \text{ faible} \\ \underline{v}_\varepsilon^\star \rightharpoonup \underline{v}_0^\star \text{ dans } H^1(\Omega)^n \text{ faible} \\ {p'}_\varepsilon^\star \rightharpoonup {p'}_0^\star \text{ dans } L_0^2(\Omega) \text{ faible} \end{cases} \tag{3.7}$$

où $(\underline{u}_0^\star, p_0^\star)$ et $(\underline{v}_0^\star, {p'}_0^\star)$ sont solutions de

$$\begin{cases} -\text{ div } (A_0 \nabla \underline{u}_0^\star) = \underline{f} - \nabla p_0^\star + \underline{\theta}_0^\star \quad \text{dans } \Omega \\ \text{div } ({}^t A_0 \nabla \underline{v}_0^\star - B^\sharp \nabla \underline{u}_0^\star) = -\nabla {p'}_0^\star \quad \text{dans } \Omega \\ \text{div } \underline{u}_0^\star = \text{ div } \underline{v}_0^\star = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \underline{u}_0^\star = \underline{v}_0^\star = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

Deuxième étape : *Contrôle optimal limite*

Nous allons passer à la limite dans l'inégalité (2.2) qui caractérise le contrôle optimal. En utilisant les convergences (3.5) et (3.6), on a pour tout $\underline{\theta}$ dans $\mathcal{U}_{ad}$

$$\int_\Omega \underline{v}_\varepsilon^\star . (\underline{\theta} - \underline{\theta}_\varepsilon^\star)\ dx \to \int_\Omega \underline{v}_0^\star . (\underline{\theta} - \underline{\theta}_0^\star)\ dx. \tag{3.9}$$

D'après (3.5) et (3.6), on a

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega |\underline{\theta}^\star_\varepsilon|^2\ dx \geq \int_\Omega |\underline{\theta}^\star_0|^2\ dx. \tag{3.10}$$

Donc en utilisant (3.10), on obtient

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega N\underline{\theta}^\star_\varepsilon.(\underline{\theta}-\underline{\theta}^\star_\varepsilon)\ dx \leq \int_\Omega N\underline{\theta}^\star_0.(\underline{\theta}-\underline{\theta}^\star_0)\ dx. \tag{3.11}$$

Finalement on aboutit à

$$\int_\Omega (\underline{v}^\star_0 + N\underline{\theta}^\star_0).(\underline{\theta}-\underline{\theta}^\star_0)\ dx \geq 0 \quad \forall\underline{\theta}\in\mathcal{U}_{ad}, \tag{3.12}$$

ce qui prouve (3.3).
Nous allons à présent montrer que $J_\varepsilon(\underline{\theta}^\star_\varepsilon)$ converge vers $J_0(\underline{\theta}^\star_0)$, ce qui fait l'objet des deux étapes suivantes.

Troisième étape : *Convergence de l'énergie*

Soit $(\underline{u}^\star_\varepsilon, p^\star_\varepsilon)$ l'état optimal et $(\underline{v}^\star_\varepsilon, {p'}^\star_\varepsilon)$ son état adjoint. En intégrant par parties et en utilisant la première équation de (2.1), on aboutit à

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega B_\varepsilon\nabla\underline{u}^\star_\varepsilon : \nabla\underline{u}^\star_\varepsilon\ dx = -\int_\Omega \text{div }(B_\varepsilon\nabla\underline{u}^\star_\varepsilon).\ \underline{u}^\star_\varepsilon\ dx \\ \displaystyle\qquad = -\int_\Omega \text{div }({}^tA_\varepsilon\nabla\underline{v}^\star_\varepsilon).\ \underline{u}^\star_\varepsilon\ dx - \int_\Omega \nabla{p'}^\star_\varepsilon.\ \underline{u}^\star_\varepsilon\ dx. \end{cases} \tag{3.13}$$

En intégrant maintenant par parties le membre de droite de (3.13) et d'après la seconde équation de (2.1), on obtient

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega B_\varepsilon\nabla\underline{u}^\star_\varepsilon : \nabla\underline{u}^\star_\varepsilon\ dx = \int_\Omega ({}^tA_\varepsilon\nabla\underline{v}^\star_\varepsilon) : \nabla\underline{u}^\star_\varepsilon\ dx \\ \displaystyle\qquad = \int_\Omega \nabla\underline{v}^\star_\varepsilon : A_\varepsilon\nabla\underline{u}^\star_\varepsilon\ dx \\ \displaystyle\qquad = -\int_\Omega \underline{v}^\star_\varepsilon.\ \text{div }(A_\varepsilon\nabla\underline{u}^\star_\varepsilon)\ dx \\ \displaystyle\qquad = \int_\Omega \underline{v}^\star_\varepsilon.(\underline{f}-\nabla p^\star_\varepsilon+\underline{\theta}^\star_\varepsilon)\ dx. \end{cases} \tag{3.14}$$

En utilisant les convergences (3.6) et (3.7), on a

$$\int_\Omega B_\varepsilon\nabla\underline{u}^\star_\varepsilon : \nabla\underline{u}^\star_\varepsilon\ dx \to \int_\Omega \underline{v}^\star_0.(\underline{f}-\nabla p^\star_0+\underline{\theta}^\star_0)\ dx. \tag{3.15}$$

En utilisant la première équation de (3.8) et par intégration par parties dans le membre de droite de (3.15), on obtient

$$(3.16)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \underline{v}_0^\star.(\underline{f} - \nabla p_0^\star + \underline{\theta}_0^\star)\ dx = -\int_\Omega \underline{v}_0^\star.\ \mathrm{div}\ (A_0 \nabla \underline{u}_0^\star)\ dx \\ \displaystyle\qquad\qquad = \int_\Omega \nabla \underline{v}_0^\star : A_0 \nabla \underline{u}_0^\star\ dx \\ \displaystyle\qquad\qquad = \int_\Omega ({}^t A_0 \nabla \underline{v}_0^\star) : \nabla \underline{u}_0^\star\ dx \\ \displaystyle\qquad\qquad = -\int_\Omega \mathrm{div}\ ({}^t A_0 \nabla \underline{v}_0^\star).\ \underline{u}_0^\star\ dx. \end{cases}$$

Maintenant d'après la seconde équation de (3.8), la dernière intégrale de (3.16) s'exprime de la manière suivante

$$(3.17)\qquad \begin{cases} \displaystyle -\int_\Omega \mathrm{div}\ ({}^t A_0 \nabla \underline{v}_0^\star).\ \underline{u}_0^\star\ dx = -\int_\Omega \mathrm{div}\ (B^\sharp \nabla \underline{u}_0^\star).\ \underline{u}_0^\star\ dx + \int_\Omega \nabla {p'}_0^\star.\ \underline{u}_0^\star\ dx \\ \displaystyle\qquad\qquad = \int_\Omega B^\sharp \nabla \underline{u}_0^\star : \nabla \underline{u}_0^\star\ dx. \end{cases}$$

Finalement, d'après (3.15)-(3.17), on obtient la convergence de l'énergie suivante

$$(3.18)\qquad \int_\Omega B_\varepsilon \nabla \underline{u}_\varepsilon^\star : \nabla \underline{u}_\varepsilon^\star\ dx \to \int_\Omega B^\sharp \nabla \underline{u}_0^\star : \nabla \underline{u}_0^\star\ dx.$$

Quatrième étape

D'après la définition du contrôle optimal (cf (1.4)), on a pour tout $\underline{\theta} \in \mathcal{U}_{ad}$

$$(3.19)\qquad J_\varepsilon(\underline{\theta}) \geq J_\varepsilon(\underline{\theta}_\varepsilon^\star).$$

En passant à la limite dans l'inégalité (3.19) en utilisant (3.18), on obtient

$$(3.20)\qquad J_0(\underline{\theta}) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega B^\sharp \nabla \underline{u}_0^\star : \nabla \underline{u}_0^\star\ dx + \frac{N}{2} \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |\underline{\theta}_\varepsilon^\star|^2\ dx.$$

En particulier pour $\underline{\theta} = \underline{\theta}_0^\star$, on a

$$(3.21)\qquad \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |\underline{\theta}_\varepsilon^\star|^2\ dx \leq \int_\Omega |\underline{\theta}_0^\star|^2\ dx.$$

En utilisant (3.9) et (3.21), on a

$$\int_\Omega |\underline{\theta}_\varepsilon^\star|^2 \ dx \to \int_\Omega |\underline{\theta}_0^\star|^2 \ dx, \tag{3.22}$$

ce qui prouve (3.4). En utilisant (3.6) et (3.22), on obtient

$$\underline{\theta}_\varepsilon^\star \to \underline{\theta}_0^\star \ \text{ dans } \ L^2(\Omega)^n \ \text{ fort} \tag{3.23}$$

Ceci achève la démonstration.

4. PROPRIETES DE $B^\sharp$

Nous allons à présent donner un résultat concernant l'ellipticité et la "symétrie" du tenseur $B^\sharp$.

Théorème 4.1 *Soit $B^\sharp$ défini par* (2.42). *On suppose que B est symétrique. Alors $B^\sharp$ est elliptique et "symétrique".*

Démonstration

On introduit $\underline{\chi}^{\beta m}$ la fonction Y-périodique définie par

$$\underline{\chi}^{\beta m} = -\underline{\omega}^{\beta m} + \underline{P}^{\beta m}. \tag{4.1}$$

D'après (2.10), la fonction $\underline{\chi}^{\beta m}$ vérifie

$$\begin{cases} -\ \text{div}\ (A\nabla(-\underline{\chi}^{\beta m} + \underline{P}^{\beta m})) = -\nabla r_1^{\beta m} \ \text{ dans } Y \\ \text{div}\ \underline{\chi}^{\beta m} = 0 \ \text{ dans } Y \\ \underline{\chi}^{\beta m}, r_1^{\beta m} \ Y\text{−périodique et } \displaystyle\int_Y \underline{\chi}^{\beta m} dy = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Soit $\underline{Y}^{\beta m}$ définie par

$$\begin{cases} -\ \text{div}\ (B\nabla(-\underline{Y}^{\beta m} + \underline{P}^{\beta m})) = -\nabla r_3^{\beta m} \ \text{ dans } Y \\ \text{div}\ \underline{Y}^{\beta m} = 0 \ \text{ dans } Y \\ \underline{Y}^{\beta m}, r_3^{\beta m} \ Y\text{−périodique et } \displaystyle\int_Y \underline{Y}^{\beta m} dy = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Finalement en utilisant (4.1), le problème (2.11) s'écrit

$$
(4.4)\qquad \begin{cases} \text{div } (\,{}^tA\nabla\underline{\psi}^{\beta m} + \,{}^tB\nabla(-\underline{\chi}^{\beta m} + \underline{P}^{\beta m})) = -\nabla r_2^{\beta m} \quad \text{dans } Y \\[2mm] \text{div } (\underline{\psi}^{\beta m}) = 0 \quad \text{dans } Y \\[2mm] \underline{\psi}^{\beta m}, r_2^{\beta m} \quad Y\text{−périodique.} \end{cases}
$$

Maintenant en écrivant à l'aide des composantes l'expression de $B^\sharp$ obtenue dans (2.41), on obtient

$$
(4.5)\qquad {}^tb^\sharp_{ikj\ell}\,\frac{\partial P_j^{\beta m}}{\partial y_\ell} = \int_Y b_{ij}\,\frac{\partial(-\chi_j^{\beta m} + P_j^{\beta m})}{\partial y_k}\,dy + \int_Y a_{ji}\,\frac{\partial \psi_j^{\beta m}}{\partial y_k}\,dy.
$$

Puisque $\dfrac{\partial P_j^{\beta m}}{\partial y_\ell} = \delta_{\beta\ell}\delta_{mj}$, on obtient alors le résultat suivant

$$
(4.6)\qquad \begin{cases} {}^tb^\sharp_{ikm\beta} = \displaystyle\int_Y b_{ij}\,\frac{\partial(-Y_j^{\beta m} + P_j^{\beta m})}{\partial y_k}\,dy \\[2mm] \qquad\qquad + \displaystyle\int_Y [\,a_{ji}\,\frac{\partial \psi_j^{\beta m}}{\partial y_k} - b_{ij}\,\frac{\partial(\chi_j^{\beta m} - Y_j^{\beta m})}{\partial y_k}]\,dy. \end{cases}
$$

Le deuxième terme du membre de droite de (4.6) est évalué de la manière suivante

$$
\begin{aligned}
\int_Y a_{ji}\,\frac{\partial \psi_j^{\beta m}}{\partial y_k}\,dy &= \int_Y a_{j\ell}\,\frac{\partial \psi_j^{\beta m}}{\partial y_k}\,\delta_{i\ell}\,dy \\
&= \int_Y a_{j\ell}\,\frac{\partial \psi_j^{\beta m}}{\partial y_s}\,\delta_{ks}\,\delta_{i\ell} dy \\
&= \int_Y a_{j\ell}\,\frac{\partial \psi_j^{\beta m}}{\partial y_s}\,\frac{\partial P_\ell^{ki}}{\partial y_s}\,dy.
\end{aligned}
$$

En utilisant successivement (4.2), (4.4) et (4.3), on obtient

$$
\int_Y a_{j\ell}\,\frac{\partial \psi_j^{\beta m}}{\partial y_s}\,\frac{\partial P_\ell^{ki}}{\partial y_s}\,dy = \int_Y a_{j\ell}\,\frac{\partial \psi_j^{\beta m}}{\partial y_s}\,\frac{\partial \chi_\ell^{ki}}{\partial y_s}\,dy
$$

$$
= \int_Y b_{j\ell}\,\frac{\partial(\chi_j^{\beta m} - P_j^{\beta m})}{\partial y_s}\,\frac{\partial \chi_\ell^{ki}}{\partial y_s}\,dy = \int_Y b_{j\ell}\,\frac{\partial(\chi_j^{\beta m} - Y_j^{\beta m})}{\partial y_s}\,\frac{\partial \chi_\ell^{ki}}{\partial y_s}\,dy.
$$

De plus, d'après (4.3) la dernière intégrale s'écrit

$$\int_Y b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi_j^{\beta m} - Y_j^{\beta m})}{\partial y_s}\ \frac{\partial \chi_\ell^{ki}}{\partial y_s}\ dy =$$

$$= \int_Y b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi_j^{\beta m} - Y_j^{\beta m})}{\partial y_s}\ \frac{\partial(\chi_\ell^{ki} - Y_\ell^{ki})}{\partial y_s}\ dy + \int_Y b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi_j^{\beta m} - Y_j^{\beta m})}{\partial y_s}\ \frac{\partial Y_\ell^{ki}}{\partial y_s}\ dy$$

$$= \int_Y b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi_j^{\beta m} - Y_j^{\beta m})}{\partial y_s}\ \frac{\partial(\chi_\ell^{ki} - Y_\ell^{ki})}{\partial y_s}\ dy + \int_Y b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi_j^{\beta m} - Y_j^{\beta m})}{\partial y_s}\ \frac{\partial P_\ell^{ki}}{\partial y_s}\ dy$$

$$= \int_Y b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi_j^{\beta m} - Y_j^{\beta m})}{\partial y_s}\ \frac{\partial(\chi_\ell^{ki} - Y_\ell^{ki})}{\partial y_s}\ dy + \int_Y b_{ij}\ \frac{\partial(\chi_j^{\beta m} - Y_j^{\beta m})}{\partial y_k}\ dy.$$

Par conséquent la deuxième intégrale du membre de droite de (4.6) est de la forme

$$\int_Y [\ a_{ji}\ \frac{\partial \psi_j^{\beta m}}{\partial y_k} - b_{ij}\ \frac{\partial(\chi_j^{\beta m} - Y_j^{\beta m})}{\partial y_k}]\ dy = \int_Y b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi_j^{\beta m} - Y_j^{\beta m})}{\partial y_s}\ \frac{\partial(\chi_\ell^{ki} - Y_\ell^{ki})}{\partial y_s}\ dy.$$

Considérons maintenant la première intégrale dans (4.6). En multipliant la première équation de (4.3) par Y^{ki} et en intégrant par parties, on obtient

$$\int_Y b_{\ell j}\ \frac{\partial(-Y_j^{\beta m} + P_j^{\beta m})}{\partial y_s}\ \frac{\partial Y_\ell^{ki}}{\partial y_s}\ dy = 0.$$

par conséquent,

$$\int_Y b_{\ell j}\ \frac{\partial(-Y_j^{\beta m} + P_j^{\beta m})}{\partial y_s}\ \frac{\partial(-Y_\ell^{ki} + P_\ell^{ki})}{\partial y_s} dy = \int_Y b_{\ell j}\ \frac{\partial(-Y_j^{\beta m} + P_j^{\beta m})}{\partial y_s}\ \frac{\partial P_\ell^{ki}}{\partial y_s}\ dy.$$

Puisque $\dfrac{\partial P_\ell^{ki}}{\partial y_s} = \delta_{ks}\delta_{i\ell}$, il en découle

$$\int_Y b_{ij}\ \frac{\partial(-Y_j^{\beta m} + P_j^{\beta m})}{\partial y_k}\ dy = \int_Y b_{j\ell}\ \frac{\partial(-Y_j^{\beta m} + P_j^{\beta m})}{\partial y_s}\ \frac{\partial(-Y_\ell^{ki} + P_\ell^{ki})}{\partial y_s}\ dy.$$

En utilisant alors la définition (4.6), on obtient

$$\text{(4.7)} \qquad \begin{cases} b^{\sharp}_{m\beta ik} = \displaystyle\int_Y b_{j\ell}\ \frac{\partial(-Y_j^{\beta m} + P_j^{\beta m})}{\partial y_s}\ \frac{\partial(-Y_\ell^{ki} + P_\ell^{ki})}{\partial y_s}\ dy \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_Y b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi_j{}^{\beta m} - Y_j^{\beta m})}{\partial y_s}\ \frac{\partial(\chi_\ell^{ki} - Y_\ell^{ki})}{\partial y_s}\ dy. \end{cases}$$

Il est alors immédiat de par la forme de (4.7), que $B^{\sharp}$ est à la fois elliptique et “symétrique”.

REFERENCES

[1] Bensoussan A., Lions J.L. and Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures* , North Holland, Amsterdam, 1978.

[2] Kesavan S. and Saint Jean Paulin J., Homogenization of an optimal control problem, *SIAM J.Cont.Optim.*, **35**, 1557-1573, 1997.

[3] Kesavan S. and Vanninathan M., L'homogénéisation d'un problème de contrôle optimal,*C.R.A.S, Paris, Sér. A*, **285**, 441-444, 1977.

[4] Lions J.L., *Sur le contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.

[5] Lipton R and Avellaneda M., A Darcy's law for slow viscous flow past a stationary array of bubbles, *Proc. R. Soc. Edin., Sect. A*, **114**, No.1/2, 71-79, 1990.

[6] Rajesh M., Convergence of some Energies for the Dirichlet Problem in Perforated Domains (preprint).

[7] Saint Jean Paulin J. and Taous K., A generalized Darcy law, Homogenization of a diphasic flow problem in porous medium, *Ric. Mat.*, **40**, No 2, 223-241, 1991.

[8] Saint Jean Paulin J. and Zoubairi H., Optimal control and "strange term" for a Stokes problem in perforated domains, *Portugalie Matematica* (à paraitre).

[9] Saint Jean Paulin J. and Zoubairi H., Optimal control and homogenization in a mixture of fluids, *Ricerche di Matematica* (à paraitre).

[10] Sanchez Palencia E., *Non homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Physics, **127**, Springer Verlag, 1980.

[11] Temam R., *Navier Stokes equations*, North Holland, Amsterdam, 1977.

CHAPITRE II

Contrôle optimal et homogénéisation dans un mélange de fluides avec interface oscillante

CHAPITRE II
CONTROLE OPTIMAL
ET HOMOGENEISATION
DANS UN MELANGE DE FLUIDES
AVEC INTERFACE OSCILLANTE

1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier un problème de contrôle optimal dans un mélange de fluides. Plus précisement, on considère un mélange de deux fluides newtoniens, homogènes et incompressibles occupant des sous-domaines d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ($n = 1$ ou 2). Ces fluides sont séparés par une interface dont la forme est déterminée par une fonction rapidement oscillante de période $\varepsilon > 0$ et d'amplitude $h_1 > 0$.

On suppose que la vitesse et la pression des deux fluides obéissent aux équations de Stokes. A l'interface, les conditions de transmission sont données par la continuité de la vitesse et de la composante normale de tenseur des contraintes (les effets de tension de surface à travers l'interface sont négligés).

On associe à ces équations un problème de contrôle optimal. On va étudier le comportement limite des solutions lorsque la période d'oscillation ε tend vers 0. Pour ce faire, on utilise comme outils mathématiques : l'homogénéisation classique (voir Bensoussan-Lions-Papanicolaou [4] et Sanchez-Palencia [15]) et le résultat de compacité de Murat [11].

Ce travail est basé sur l'étude mathématique effectuée par Baffico & Conca [3] pour le problème de Stokes, par Brizzi [5] pour un problème de transmission et par Baffico & Conca [1], [2] pour un problème de transmission en élasticité.

Ce chapitre se déroule de la manière suivante. Dans le deuxième paragraphe, on présente le domaine d'étude avec son interface oscillante, le problème étudié défini dans ce domaine, ainsi que la définition du contrôle optimal associé à ce problème. Dans le troisième paragraphe, on introduit le problème adjoint et on présente le principal résultat de convergence concernant le problème adjoint. Dans le quatrième paragraphe, on démontre les résultats annoncés dans le paragraphe précédent. Dans le cinquième paragraphe, on démontre un résultat de convergence concernant le contrôle optimal. Dans le sixième et dernier paragraphe, on présente le cas $\Omega \subset \mathrm{I\!R}^2$.

2. PRESENTATION DU MODELE

2.1. Géométrie

Soit $n = 1$ ou 2. Soit $Y =]0, 1[^n$ et $\widetilde{\Omega} =]0, L_i[^n$ avec $L_i > 0,\ i = 1, .., n$.
Soit $h : \bar{Y} \to \mathbb{R}, h \geq 0$ une fonction régulière qui vérifie

i) $h|_{\partial Y} = h_1$ où $h_1 = max\{h(y) \mid y \in \bar{Y}\}$ et $h_1 > 0$.
ii) $\exists\ y_0 \in Y$ tel que $h(y_0) = 0$ et $\nabla_y h(y_0) = 0$.

Soit $z_o \in \mathrm{I\!R}^+$. On définit le domaine $\Omega \subset \mathrm{I\!R}^{n+1}$ par $\Omega = \widetilde{\Omega} \times] - z_0, z_0[$ et Γ le bord de Ω par $\Gamma = \widetilde{\Omega} \times \{-z_0\} \cup \partial\widetilde{\Omega} \times] - z_0, z_0[\cup\ \widetilde{\Omega} \times \{z_0\}$.

Définissons à présent la cellule de réference :
Pour cela on va au pralable introduire les sous-ensembles suivants :

$$\Omega_1^1 = \{(y, z) \in Y \times \mathrm{I\!R} \mid h(y) < z < z_0\}$$

$$\Omega_2^1 = \{(y, z) \in Y \times \mathrm{I\!R} \mid -z_0 < z < h(y)\},$$

qui sont séparés par l'interface définie par

$$\Gamma^1 = \{(y, z) \in Y \times \mathrm{I\!R} \mid h(y) = z\}.$$

Par conséquent, on a la décomposition suivante de la cellule de réference Λ (voir figure 1) :

$$\Lambda = \Omega_1^1 \cup \Gamma^1 \cup \Omega_2^1 = (Y \times] - z_0, z_0[)$$

L'intersection de Λ avec l'hyperplan $\{Z = z\}(0 < z < h_1)$ donne $Y \times \{z\}$ de la forme suivante (pour Y) comme dans la figure 2 :

$$Y = Y^\star(z) \cup \gamma(z) \cup O(z),$$

où

$$Y^\star(z) = \{y \in Y \mid h(y) > z\}$$

$$O(z) = \{y \in Y \mid h(y) < z\}$$

$$\gamma(z) = \{y \in Y \mid h(y) = z\}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On étend h par Y-périodicité à $\mathbb{R}$, on restreint cette fonction à $\widetilde{\Omega}$ (on notera encore cette fonction par h). On définit h^ε par :

$$h^\varepsilon(x) = h(\frac{x}{\varepsilon}) \quad x \in \widetilde{\Omega}.$$

On introduit maintenant les sous-ensembles de Ω suivants :

$$\Omega_1^\varepsilon = \{(x, z) \in \widetilde{\Omega} \times \mathbb{R} \mid h^\varepsilon(x) < z < z_0\}$$

$$\Omega_2^\varepsilon = \{(x, z) \in \widetilde{\Omega} \times \mathbb{R} \mid -z_0 < z < h^\varepsilon(x)\},$$

qui sont séparés par l'interface rapidement oscillante définie par

$$\Gamma^\varepsilon = \{(x, z) \in \widetilde{\Omega} \times \mathbb{R} \mid h^\varepsilon(x) = z\}.$$

On obtient donc la décomposition de Ω suivante (voir figure 3):

$$\Omega = \Omega_1^\varepsilon \cup \Gamma^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon.$$

Et pour finir, on définit l'ouvert limite comme suit :
$\Omega_1 = \widetilde{\Omega} \times]h_1, z_0[$, $\Omega_m = \widetilde{\Omega} \times]0, h_1[$, $\Omega_2 = \widetilde{\Omega} \times]-z_0, 0[$ (voir figure 3).
On peut remarquer que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_m \cup \Omega_2$.

2.2. Problème étudié

Soit μ^ε la viscosité du problème définie par

$$\mu^\varepsilon = \mu_1 \chi_{\Omega_1^\varepsilon} + \mu_2 \chi_{\Omega_2^\varepsilon},$$

où $\mu_1, \mu_2 > 0$, $\mu_1 \neq \mu_2$ et $\chi_{\Omega_i^\varepsilon}$ correspond à la fonction caractéristique de Ω_i^ε $(i = 1, 2)$.

Notation : On notera par $\vec{v} = (\underline{v}, v_{n+1})$, un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$.
Dans tout ce qui suit, C désigne différentes constantes positives indépendante de ε. On note par $|\ .\ |$ la mesure de Lebesgue en dimension n. On designe par $(\underline{e}_k)_{1\leq k\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et par y_k la $k-$ième composante de $y \in \mathbb{R}^n$ dans cette base.

On définit le contrôle optimal comme suit. Soit $\mathcal{U}_{ad} \subset L^2(\Omega)^{n+1}$ un convexe fermé non vide. Soit $N > 0$ une constante. Pour $\vec{\theta} \in \mathcal{U}_{ad}$ l'équation d'état est donnée par le problème de Stokes suivant

$$(2.2.1) \qquad \begin{cases} -\ \mathrm{div}\ (2\mu^\varepsilon e(\vec{u}^\varepsilon)) = \vec{f}^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon + \vec{\theta} \text{ dans } \Omega \\ \\ \mathrm{div}\ \vec{u}^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega \\ \\ \vec{u}^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

où $(\vec{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ sont respectivement la vitesse et la pression du fluide, $\vec{\theta}$ est le contrôle et $\vec{f}^\varepsilon$ la densité des forces extérieures définie par $\vec{f}^\varepsilon = \vec{f}^1 \chi_{\Omega_1^\varepsilon} + \vec{f}^2 \chi_{\Omega_2^\varepsilon}$ avec $\vec{f}^i \in L^2(\Omega)^{n+1}$ $(i = 1, 2)$. Le tenseur des déformations $e(\vec{u}^\varepsilon)$ est donné par

$$e(\vec{u}^\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\nabla \vec{u}^\varepsilon + {}^t\nabla \vec{u}^\varepsilon\right).$$

La fonction coût nous est donnée par

$$(2.2.2) \qquad J_\varepsilon(\vec{\theta}) = \frac{1}{2}\int_\Omega e(\vec{u}^\varepsilon) : e(\vec{u}^\varepsilon)\ dx + \frac{N}{2}\int_\Omega |\vec{\theta}|^2\ dx.$$

Le contrôle optimal $\vec{\theta}_\star^\varepsilon$ est la fonction dans $\mathcal{U}_{ad}$ qui minimise $J_\varepsilon(\vec{\theta})$ pour $\vec{\theta} \in \mathcal{U}_{ad}$, en d'autres termes

$$(2.2.3) \qquad J_\varepsilon(\vec{\theta}_\star^\varepsilon) = \min_{\vec{\theta}\in\mathcal{U}_{ad}} J_\varepsilon(\vec{\theta}).$$

Ce type de problème s'inspire des problèmes de Lions [10], il admet donc une unique solution $\vec{\theta}^{\varepsilon}_{\star} \in \mathcal{U}_{ad}$ (voir Lions [10]). Notre but est d'étudier le comportement limite de $\vec{\theta}^{\varepsilon}_{\star}$ lorsque $\varepsilon \to 0$. En particulier, nous verrons que (par extraction de sous-suites)

$$\vec{\theta}^{\varepsilon}_{\star} \rightharpoonup \vec{\theta}_{\star} \ \text{ dans } \ L^2(\Omega)^{n+1} \ \text{ faible.} \tag{2.2.4}$$

Notre objectif est de caractériser $\vec{\theta}_{\star}$ comme étant le contrôle optimal d'un problème limite et, bien entendu, identifier ce problème limite.
L'homogénéisation du problème stationnaire du type (2.2.1) a été effectuée par Baffico & Conca [3]. Concernant le contrôle optimal, l'étude a été faite par Saint Jean Paulin & Zoubairi [12] dans le cas d'un mélange de deux fluides dont l'un est réparti périodiquement dans l'autre. Kesavan & Vanninathan [9] se sont placés dans le cas périodique pour un problème dont l'équation d'état est un problème elliptique du second ordre avec des coefficients rapidement oscillants. Dans un cas plus général, Kesavan & Saint Jean Paulin [7] et [8] ont étudié le problème de contrôle optimal avec la topologie de la H-convergence dans le cas non-perforé et perforé.
Dans ce chapitre, on adapte ces méthodes pour le problème de Stokes dans les domaines non perforés en utilisant les techniques utilisées par Baffico & Conca [2] et [3], par Kesavan & Saint Jean Paulin [7] et [8], et par Saint Jean Paulin & Zoubairi [12].

Définition 2.2.1 On définit $L^2_0(\Omega)$ par

$$L^2_0(\Omega) = \left\{ g \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} g(y)\, dy = 0 \right\}.$$

Le problème (2.2.1)-(2.2.3) peut être réduit en système d'équations en introduisant l'état adjoint $(\vec{v}^{\varepsilon}, p'^{\varepsilon}) \in H^1(\Omega)^{n+1} \times L^2_0(\Omega)$. On obtient alors

$$\begin{cases} -\text{ div } (2\mu^{\varepsilon} e(\vec{u}^{\varepsilon})) = \vec{f}^{\varepsilon} - \nabla p^{\varepsilon} + \vec{\theta} \text{ dans } \Omega \\ \\ \text{div } (2\mu^{\varepsilon} e(\vec{v}^{\varepsilon}) - e(\vec{u}^{\varepsilon})) = -\nabla p'^{\varepsilon} \ \text{ dans } \ \Omega \\ \\ \text{div } \vec{u}^{\varepsilon} = \text{ div } \vec{v}^{\varepsilon} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \\ \vec{u}^{\varepsilon} = \vec{v}^{\varepsilon} = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2.5}$$

le contrôle optimal $\vec{\theta}^{\varepsilon}_{\star}$ est caractérisé par l'inégalité variationnelle

$$\vec{\theta}^{\varepsilon}_{\star} \in \mathcal{U}_{ad} \ \text{ et } \ \int_{\Omega} (\vec{v}^{\varepsilon} + N\vec{\theta}^{\varepsilon}_{\star}).(\vec{\theta} - \vec{\theta}^{\varepsilon}_{\star})\, dx \geq 0 \ \forall\, \vec{\theta} \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{2.2.6}$$

3. RESULTATS DE CONVERGENCE

3.1. Problème adjoint homogénéisé

Soit $\mu = \mu(y,z)$ (où $y \in Y$ et $z \in]0,h_1[$), la viscosité donné par :

$$\mu(y,z) = \mu_1 \chi_{O(z)}(y) + \mu_2 \chi_{Y^\star(z)}(y).$$

Nous allons introduire des fonctions tests solutions du problème de Stokes définies sur Y. Ces fonctions, introduites par Baffico & Conca [3], sont liées à l'équation d'état. Soit $1 \le k,l \le n$. Soit $(\underline{\chi}^{kl}, r_1^{kl})$ solution de

$$(3.1.1) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}_y(2\mu\ e_y(-\underline{\chi}^{kl} + \underline{P}^{kl})) = -\nabla_y\ r_1^{kl} \text{ dans } Y \\ \operatorname{div}_y\ \underline{\chi}^{kl} = 0 \text{ dans } Y \\ \underline{\chi}^{kl}, r_1^{kl} \quad Y\text{-périodiques,} \end{cases}$$

où $\underline{P}^{kl} = \dfrac{1}{2}\big(y_k \underline{e}_l + y_l \underline{e}_k\big)$. On définit M^{kl} la matrice $n \times n$ par $M^{kl} = e_y(\underline{P}^{kl})$.
On peut noter que $[M^{kl}]_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad \forall 1 \le i,j,k,l \le n$.
On définit E^{kl} la matrice carrée d'ordre $n+1$ par :

$$[E^{kl}]_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad \forall 1 \le i,j,k,l \le n+1.$$

Comme $\mu = \mu(y,z)$, le problème (3.1.1) est paramétrisé par $z \in]0,h_1[$.
Pour chaque $z \in]0,h_1[$ fixé, le problème (3.1.1) admet une unique solution dans $\big(H^1_\sharp(Y)^n/\mathbb{R}\big) \times L^2_0(Y)$ (voir Sanchez-Palencia [15] ou Baffico & Conca [6]).
A présent, on considère le problème périodique suivant

$$(3.1.2) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}_y(\mu\ \nabla_y(-\varphi^k + 2y_k)) = 0 \text{ dans } Y \\ \varphi^k \quad Y\text{-périodique.} \end{cases}$$

De même le problème (3.1.2) est paramétrisé par $z \in]0,h_1[$. Pour chaque z fixé, ce problème admet une unique solution dans $H^1(Y)$ à une constante additive près.

Soit $\mathcal{A}(z)$ le tenseur d'ordre quatre dont les coefficients sont donnés par

$$(3.1.3) \qquad a_{ijkl} = \begin{cases} 2\mu_1[E^{kl}]_{ij} & h_1 < z < z_0 \\ \widetilde{a_{ijkl}} & 0 < z < h_1 \qquad 1 \leq i,j,k,l \leq n+1 \\ 2\mu_2[E^{kl}]_{ij} & -z_0 < z < h_1 \end{cases}$$

avec

$$(3.1.4) \qquad \widetilde{a_{ijkl}} = \begin{cases} \displaystyle\int_Y 2\mu \, \left[e_y(-\underline{\chi}^{kl} + \underline{P}^{kl})\right]_{ij} \, dy & 1 \leq i,j,k,l \leq n \\ \displaystyle\frac{1}{2}\int_Y \mu \, \frac{\partial(-\varphi^k + 2y_k)}{\partial y_i} \, dy & 1 \leq i,k \leq n \quad j,l = n+1 \\ \displaystyle\frac{1}{2}\int_Y \mu \, \frac{\partial(-\varphi^l + 2y_l)}{\partial y_i} \, dy & 1 \leq i,l \leq n \quad j,k = n+1 \\ \displaystyle\frac{1}{2}\int_Y \mu \, \frac{\partial(-\varphi^k + 2y_k)}{\partial y_j} \, dy & 1 \leq j,k \leq n \quad i,l = n+1 \\ \displaystyle\frac{1}{2}\int_Y \mu \, \frac{\partial(-\varphi^l + 2y_l)}{\partial y_j} \, dy & 1 \leq j,l \leq n \quad i,k = n+1 \\ \displaystyle\frac{1}{2}\int_Y 2\mu \, dy & i,j,k,l = n+1 \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce tenseur (introduit par Baffico & Conca [3]) est le tenseur homogénéisé lié à l'équation d'état. De la même manière, nous allons introduire d'autres fonctions tests, liées cette fois-ci à l'état adjoint.

Soit $(\underline{\psi}^{kl}, r_2^{kl})$ solution de

$$(3.1.5) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}_y(2\mu \; e_y(\underline{\psi}^{kl}) + e_y(-\underline{\chi}^{kl} + \underline{P}^{kl})) = -\nabla_y \; r_2^{kl} \text{ dans } Y \\ \operatorname{div}_y \; \underline{\psi}^{kl} = 0 \text{ dans } Y \\ \underline{\psi}^{kl}, r_2^{kl} \quad Y\text{-périodiques,} \end{cases}$$

Pour chaque $z \in]0, h_1[$, le problème (3.1.5) admet une unique solution dans $\left(H^1_\sharp(Y)^n/\mathbb{R}\right) \times L^2_0(Y)$.
Comme pour le problème (3.1.2), on introduit le problème scalaire suivant

$$\text{(3.1.6)} \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}_y(2\mu\ \nabla_y \psi^k + \nabla_y(-\varphi^k + 2y_k)) = 0 \text{ dans } Y \\ \\ \psi^k \quad Y\text{-périodique.} \end{cases}$$

Pour $z \in]0, h_1[$ fixé, ce problème admet une unique solution dans $H^1(Y)$ à une constante additive près.

Soit $\mathcal{B}(z)$ le tenseur d'ordre quatre dont les coefficients sont donnés par

$$\text{(3.1.7)} \qquad b_{ijkl} = \begin{cases} [E^{kl}]_{ij} & h_1 < z < z_0 \\ \\ \widetilde{b_{ijkl}} & 0 < z < h_1 \qquad 1 \le i,j,k,l \le n+1 \\ \\ [E^{kl}]_{ij} & -z_0 < z < h_1 \end{cases}$$

avec

$$\text{(3.1.8)} \quad \widetilde{b_{ijkl}} = \begin{cases} \displaystyle\int_Y \left(2\mu\ \left[e_y(\underline{\psi}^{kl})\right]_{ij} + \left[e_y(-\underline{\chi}^{kl} + \underline{P}^{kl})\right]_{ij}\right) dy & 1 \le i,j,k,l \le n \\ \\ \displaystyle\frac{1}{4}\int_Y \left(2\mu\ \frac{\partial \psi^k}{\partial y_i} + \frac{\partial(-\varphi^k + 2y_k)}{\partial y_i}\right) dy & 1 \le i,k \le n \quad j,l = n+1 \\ \\ \displaystyle\frac{1}{4}\int_Y \left(2\mu\ \frac{\partial \psi^l}{\partial y_i} + \frac{\partial(-\varphi^l + 2y_l)}{\partial y_i}\right) dy & 1 \le i,l \le n \quad j,k = n+1 \\ \\ \displaystyle\frac{1}{4}\int_Y \left(2\mu\ \frac{\partial \psi^k}{\partial y_j} + \frac{\partial(-\varphi^k + 2y_k)}{\partial y_j}\right) dy & 1 \le j,k \le n \quad i,l = n+1 \\ \\ \displaystyle\frac{1}{4}\int_Y \left(2\mu\ \frac{\partial \psi^l}{\partial y_j} + \frac{\partial(-\varphi^l + 2y_l)}{\partial y_j}\right) dy & 1 \le j,l \le n \quad i,k = n+1 \\ \\ 1 & i,j,k,l = n+1 \\ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enonons un résultat concernant certaines propriétés du tenseur $\mathcal{A}$.

Proposition 3.1 (Baffico & Conca [3])
Les coefficients de $\mathcal{A}$ (voir (3.1.3)) vérifient :

a) $a_{ijkl}(z) = a_{klij}(z) = a_{ijlk}(z)\ \ \forall 1 \leq i,j,k,l \leq n+1, \quad \forall z \in]-z_0, z_0[$
b) il existe $\alpha > 0$ tel que pour toute matrice symétrique carrée ξ d'ordre $n+1$,

$$\mathcal{A}(z)\xi : \xi \geq \alpha \xi : \xi \quad \forall z \in]-z_0, z_0[.$$

A présent, on va exhiber certaines propriétés de symétrie et d'ellipticité concernant le tenseur $\mathcal{B}$.

Proposition 3.2 *Les coefficients de $\mathcal{B}$ (voir (3.1.7)) vérifient :*

a) $b_{ijkl}(z) = b_{klij}(z) = b_{ijlk}(z)\ \ \forall 1 \leq i,j,k,l \leq n+1, \quad \forall z \in]-z_0, z_0[$
b) il existe $\beta > 0$ tel que pour toute matrice symétrique carrée ξ d'ordre $n+1$,

$$\mathcal{B}(z)\xi : \xi \geq \beta \xi : \xi \quad \forall z \in]-z_0, z_0[.$$

Démonstration
On adoptera tout au long de cette démonstration la convention de sommation des indices répétées.
Pour démontrer le a) de la proposition, nous allons tout d'abord étudier les coefficients de $\mathcal{B}$ lorsque $1 \leq i,j,k,l \leq n$.
La symétrie de ces coefficients est évidente lorsque $z \in]h_1, z_0[$ et $z \in]-z_0, h_1[$.
Intéressons-nous au cas où $z \in]0, h_1[$. Dans ce cas (cf (3.1.8))

$$b_{ijkl} = \widetilde{b_{ijkl}} = \int_Y \left(2\mu\ \left[e_y(\underline{\psi}^{kl})\right]_{ij} + \left[e_y(-\underline{\chi}^{kl} + \underline{P}^{kl})\right]_{ij} \right) dy. \tag{3.1.9}$$

Nous allons transformer l'expression ci-dessus de manière à obtenir une écriture symétrique. Pour cela, nous allons nous inspirer de [9], [12] ou [14].

Soit $(\underline{Y}^{kl}, r_3^{kl})$ solution de

$$
(3.1.10) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}_y(2\mu\ e_y(-\underline{Y}^{kl}+\underline{P}^{kl})) = -\nabla_y\ r_3^{kl} \text{ dans } Y \\ \operatorname{div}_y \underline{Y}^{kl} = 0 \text{ dans } Y \\ \underline{Y}^{kl}, r_1^{kl} \quad Y\text{-périodiques,} \end{cases}
$$

En introduisant $\underline{Y}^{kl}$, solution du problème local précédent, les coefficients (3.1.9) se réecrivent de manière suivante :

$$
(3.1.11) \qquad \begin{cases} \widetilde{b_{ijkl}} = \displaystyle\int_Y \left[e_y(-\underline{Y}^{kl}+\underline{P}^{kl})\right]_{ij}\ dy \\ \qquad\quad + \displaystyle\int_Y \left(2\mu\ \left[e_y(\underline{\psi}^{kl})\right]_{ij} - \left[e_y(\underline{\chi}^{kl}-\underline{Y}^{kl})\right]_{ij}\right)\ dy. \end{cases}
$$

Dans le membre de droite de l'expression précédente, la première partie de l'intégrale est évaluée de la manière suivante (en utilisant notamment le fait que $\left[e_y(\underline{\psi}^{kl})\right]_{ij} = \left[e_y(\underline{\psi}^{kl})\right]_{ji}$) :

$$
\begin{aligned}
\int_Y 2\mu\ \left[e_y(\underline{\psi}^{kl})\right]_{ij}\ dy &= \int_Y 2\mu\ \left[e_y(\underline{\psi}^{kl})\right]_{\beta m}\delta_{\beta i}\delta_{mj}\ dy \\
&= \int_Y \mu\ \left[e_y(\underline{\psi}^{kl})\right]_{\beta m}\ (\delta_{\beta i}\delta_{mj}+\delta_{\beta j}\delta_{mi})\ dy \\
&= \int_Y 2\mu\ \left[e_y(\underline{\psi}^{kl})\right]_{\beta m}\left[e_y(\underline{P}^{ij})\right]_{\beta m}\ dy.
\end{aligned}
$$

En utilisant successivement (3.1.1),(3.1.5) et (3.1.10), on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_Y 2\mu\ \left[e_y(\underline{\psi}^{kl})\right]_{\beta m}\left[e_y(\underline{P}^{ij})\right]_{\beta m}\ dy &= \int_Y 2\mu\ \left[e_y(\underline{\psi}^{kl})\right]_{\beta m}\left[e_y(\underline{\chi}^{ij})\right]_{\beta m}\ dy. \\
&= \int_Y \left[e_y(\underline{\chi}^{kl}-\underline{P}^{kl})\right]_{\beta m}\left[e_y(\underline{\chi}^{ij})\right]_{\beta m}\ dy. \\
&= \int_Y \left[e_y(\underline{\chi}^{kl}-\underline{Y}^{kl})\right]_{\beta m}\left[e_y(\underline{\chi}^{ij})\right]_{\beta m}\ dy.
\end{aligned}
$$

De plus, d'après (3.1.10), la dernière intégrale s'exprime comme suit

$$\int_Y \left[e_y(\underline{\chi}^{kl} - \underline{Y}^{kl})\right]_{\beta m} \left[e_y(\underline{\chi}^{ij})\right]_{\beta m} \, dy =$$

$$= \int_Y \left[e_y(\underline{\chi}^{kl} - \underline{Y}^{kl})\right]_{\beta m} \left[e_y(\underline{\chi}^{ij} - \underline{Y}^{ij})\right]_{\beta m} \, dy + \int_Y \left[e_y(\underline{\chi}^{kl} - \underline{Y}^{kl})\right]_{\beta m} \left[e_y(\underline{Y}^{ij})\right]_{\beta m} \, dy$$

$$= \int_Y \left[e_y(\underline{\chi}^{kl} - \underline{Y}^{kl})\right]_{\beta m} \left[e_y(\underline{\chi}^{ij} - \underline{Y}^{ij})\right]_{\beta m} \, dy + \int_Y \left[e_y(\underline{\chi}^{kl} - \underline{Y}^{kl})\right]_{\beta m} \left[e_y(\underline{P}^{ij})\right]_{\beta m} \, dy$$

$$= \int_Y \left[e_y(\underline{\chi}^{kl} - \underline{Y}^{kl})\right]_{\beta m} \left[e_y(\underline{\chi}^{ij} - \underline{Y}^{ij})\right]_{\beta m} \, dy + \int_Y \left[e_y(\underline{\chi}^{kl} - \underline{Y}^{kl})\right]_{ij} \, dy$$

Par conséquent la deuxième intégrale du membre de droite de (3.1.11) est de la forme

$$\int_Y \left(2\mu \left[e_y(\underline{\psi}^{kl})\right]_{ij} - \left[e_y(\underline{\chi}^{kl} - \underline{Y}^{kl})\right]_{ij}\right) dy\Big] = \int_Y \left[e_y(\underline{\chi}^{kl} - \underline{Y}^{kl})\right]_{\beta m} \left[e_y(\underline{\chi}^{ij} - \underline{Y}^{ij})\right]_{\beta m} dy.$$

Considérons à présent la première intégrale de (3.1.11).
En multipliant la première équation de (3.1.10) par Y^{ij} et en intégrant par parties, on obtient

$$\int_Y \left[e_y(-\underline{Y}^{kl} + \underline{P}^{kl})\right]_{\beta m} \left[e_y(\underline{Y}^{ij})\right]_{\beta m} \, dy = 0.$$

En utilisant le fait que $\left[e_y(\underline{P}^{ij})\right]_{\beta m} = \dfrac{1}{2}\left(\delta_{\beta i}\delta_{mj} + \delta_{\beta j}\delta_{mi}\right)$, on obtient

$$\int_Y \left[e_y(-\underline{Y}^{kl} + \underline{P}^{kl})\right]_{\beta m} \left[e_y(-\underline{Y}^{ij} + \underline{P}^{ij})\right]_{\beta m} \, dy = \int_Y \left[e_y(-\underline{Y}^{kl} + \underline{P}^{kl})\right]_{\beta m} \left[e_y(\underline{P}^{ij})\right]_{\beta m} \, dy$$

$$= \int_Y \left[e_y(-\underline{Y}^{kl} + \underline{P}^{kl})\right]_{ij} \, dy.$$

En utilisant alors la définition (3.1.11), on aboutit à

$$\text{(3.1.12)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \widetilde{b_{ijkl}} = & \int_Y e_y(-\underline{Y}^{kl} + \underline{P}^{kl}) : e_y(-\underline{Y}^{ij} + \underline{P}^{ij}) \, dy \\ & + \int_Y e_y(\underline{\chi}^{kl} - \underline{Y}^{kl}) : e_y(\underline{\chi}^{ij} - \underline{Y}^{ij}) \, dy. \end{aligned} \right.$$

Il est alors immédiat de par la forme de (3.1.12), que les coefficients de $\mathcal{B}$ vérifient $\widetilde{b_{ijkl}} = \widetilde{b_{klij}}$.

D'autre part, comme $e_y(\underline{P}^{kl}) = e_y(\underline{P}^{lk})$, alors par unicité du problème (3.1.1), on a $\chi^{kl} = \chi^{lk}$ (à une constante additive près), par conséquent $b_{ijkl} = b_{ijlk}$.

Nous allons à présent étudier les coefficients b_{ijkl} lorsque $i = k = n+1$ et $1 \leq j, l \leq n$. D'après la définition de $\mathcal{B}$ (cf (3.1.7)), ces coefficients sont symétriques lorsque $z \in \,]h_1, z_0[$ et $z \in]-z_0, h_1[$. Pour démontrer la symétrie des $b_{\widetilde{n+1jn+1l}}$ lorsque $z \in]0, h_1[$, nous allons procéder comme précédemment :
ces coefficients sont de la forme

$$b_{\widetilde{n+1jn+1l}} = \frac{1}{4}\int_Y \left(\frac{\partial(-\varphi^l + 2y_l)}{\partial y_j} + 2\mu \frac{\partial \psi^l}{\partial y_j} \right) dy. \tag{3.1.13}$$

On introduit τ^k solution de

$$\begin{cases} -\Delta_y(-\tau^k + 2y_k) = 0 \text{ dans } Y \\ \\ \tau^k \quad Y\text{-périodique.} \end{cases} \tag{3.1.14}$$

L'expression (3.1.13) se réécrit de la manière suivante (en utilisant τ^l) :

$$\begin{cases} b_{\widetilde{n+1jn+1l}} = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_Y \frac{\partial(-\tau^l + 2y_l)}{\partial y_j}\, dy \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_Y \left(2\mu \frac{\partial \psi^l}{\partial y_j} - \frac{\partial(\varphi^l - \tau^l)}{\partial y_j} \right) dy. \end{cases} \tag{3.1.15}$$

En utilisant exactement la même technique que précedemment, on obtient (en utilisant (3.1.2), (3.1.6) et (3.1.14))

$$\int_Y 2\mu \frac{\partial \psi^l}{\partial y_j} = \frac{1}{2}\int_Y \frac{\partial(\varphi^l - \tau^l)}{\partial y_k}\frac{\partial(\varphi^j - \tau^j)}{\partial y_k}\, dy + \int_Y \frac{\partial(\varphi^l - \tau^l)}{\partial y_j}\, dy.$$

Par conséquent,

$$\int_Y \left(2\mu \frac{\partial \psi^l}{\partial y_j} - \frac{\partial(\varphi^l - \tau^l)}{\partial y_j} \right) dy = \frac{1}{2}\int_Y \frac{\partial(\varphi^l - \tau^l)}{\partial y_k}\frac{\partial(\varphi^j - \tau^j)}{\partial y_k}\, dy.$$

En ce qui concerne la première intégrale de (3.1.15), on considère τ^l solution de (3.1.14) : on multiplie la première équation par τ^j et on intègre, on obtient

$$\int_Y \frac{\partial(-\tau^l + 2y_l)}{\partial y_k}\frac{\partial \tau^j}{\partial y_k}\, dy = 0,$$

il en découle

$$\int_Y \frac{\partial(-\tau^l + 2y_l)}{\partial y_k} \frac{\partial(-\tau^j + 2y_j)}{\partial y_k} \, dy = 2 \int_Y \frac{\partial(-\tau^l + 2y_l)}{\partial y_j} \, dy.$$

On aboutit finalement à l'expression suivante

$$(3.1.16) \qquad \begin{cases} \widetilde{b_{n+1jn+1l}} = \dfrac{1}{8} \displaystyle\int_Y \nabla(-\tau^l + 2y_l).\nabla(-\tau^j + 2y_j) \, dy \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{8} \displaystyle\int_Y \nabla(\varphi^l - \tau^l).\nabla(\varphi^j - \tau^j) \, dy. \end{cases}$$

De part la forme de (3.1.16), on a clairement $\widetilde{b_{n+1jn+1l}} = \widetilde{b_{n+1ln+1j}}$. De plus par construction de $\mathcal{B}$, on a $\widetilde{b_{n+1ln+1j}} = \widetilde{b_{n+1ljn+1}}$. De même, pour les autres termes non nuls de $\mathcal{B}$, on obtient (en utilisant la même méthode) :

$$\widetilde{b_{i\ n+1\ k\ n+1}} = \widetilde{b_{k\ n+1\ i\ n+1}} = \widetilde{b_{i\ n+1\ n+1\ k}}$$

$$\widetilde{b_{i\ n+1\ n+1\ l}} = \widetilde{b_{i\ n+1\ l\ n+1}} = \widetilde{b_{n+1\ l\ i\ n+1}}$$

$$\widetilde{b_{n+1\ j\ k\ n+1}} = \widetilde{b_{n+1\ j\ n+1\ k}} = \widetilde{b_{k\ n+1\ n+1\ j}}.$$

Ceci démontre le premier point de la proposition.

Pour le deuxième point, tout d'abord l'ellipticité de $\mathcal{B}$ est évidente lorsque $z \in]h_1, z_0[$ et $z \in] - z_0, h_1[$.

Lorsque $z \in]0, h_1[$, d'après la forme des $\widetilde{b_{ijkl}}$ $1 \leq i, j, k, l \leq n$ (voir (3.1.12)) et la forme des $\widetilde{b_{n+1jn+1l}}$ $1 \leq j, l \leq n$ (voir (3.1.16), le tenseur $\mathcal{B}$ est elliptique et donc vérifie le point b) de la proposition. Ceci achève la démonstration.

Nous allons introduire le problème homogénéisé :
Soit $(\vec{u}, p)$ et $(\vec{v}, p') \in \left(H^1(\Omega)^{n+1} \times\ L_0^2(\Omega)\right)^2$ solution de

$$(3.1.17) \qquad \begin{cases} -\ \mathrm{div}\ \left(\mathcal{A}\ e(\vec{u})\right) = \vec{f} - \nabla p + \vec{\theta} \text{ dans } \Omega \\ \\ \mathrm{div}\ \left(\mathcal{A}\ e(\vec{v}) - \mathcal{B}\ e(\vec{u})\right) = -\nabla p' \ \text{ dans } \ \Omega \\ \\ \mathrm{div}\ \vec{u} = \ \mathrm{div}\ \vec{v} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \\ \vec{u} = \vec{v} = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\vec{f}$ est la limite faible de $\vec{f^\varepsilon}$ dans $L^2(\Omega)^{n+1}$ qu'on précisera ultérieurement (cf (4.1.17)).

Remarque 3.3 D'après les propositions 3.1 et 3.2, le problème (3.1.17) admet une unique solution.

3.2. Résultat principal

Théorème 3.4 *Sous certaines hypothèses de régularités concernant les solutions de (3.1.1),* (3.1.2), (3.1.5) *et* (3.1.6) *(détaillées au paragraphe* 4*) les solutions* $(\vec{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ *et* $(\vec{v}^\varepsilon, p'^\varepsilon)$ *de* (2.2.5) *vérifient* $\vec{u}^\varepsilon \rightharpoonup \vec{u}$ *dans* $H^1(\Omega)^{n+1}$ *faible,* $\vec{v}^\varepsilon \rightharpoonup \vec{v}$ *dans* $H^1(\Omega)^{n+1}$ *faible,* $p^\varepsilon \rightharpoonup p$ *dans* $L_0^2(\Omega)$ *faible,* $p'^\varepsilon \rightharpoonup p'$ *dans* $L_0^2(\Omega)$ *faible où* $(\vec{u}, p)$ *et* $(\vec{v}, p')$ *sont solutions unique de (3.1.17).*

4. DEMONSTRATION DU RESULTAT DE CONVERGENCE

Le but de cette partie est de démontrer le théorème 3.4.

4.1. Estimations a priori

On pose

$$(4.1.1) \qquad \xi^\varepsilon = 2\mu^\varepsilon e(\vec{u}^\varepsilon),$$

et

$$(4.1.2) \qquad q^\varepsilon = 2\mu^\varepsilon e(\vec{v}^\varepsilon) - e(\vec{u}^\varepsilon).$$

Proposition 4.1 *les suites $(\vec{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$,$(\vec{v}^\varepsilon, p'^\varepsilon)$, ξ^ε et q^ε satisfont les convergences suivantes*

$$(4.1.3) \qquad \begin{cases} \vec{u}^\varepsilon \rightharpoonup \vec{u} \ \textit{dans}\ H^1(\Omega)^{n+1}\ \textit{faible} \\ \vec{v}^\varepsilon \rightharpoonup \vec{v} \ \textit{dans}\ H^1(\Omega)^{n+1}\ \textit{faible} \\ p^\varepsilon \rightharpoonup p \ \textit{dans}\ L^2_0(\Omega)\ \textit{faible} \\ p'^\varepsilon \rightharpoonup p' \ \textit{dans}\ L^2_0(\Omega)\ \textit{faible} \\ \xi^\varepsilon \rightharpoonup \xi \ \textit{dans}\ L^2(\Omega)^{n+1\times n+1}\ \textit{faible} \\ q^\varepsilon \rightharpoonup q \ \textit{dans}\ L^2(\Omega)^{n+1\times n+1}\ \textit{faible.} \end{cases}$$

Démonstration

Si on utilise $\vec{u}^\varepsilon$ comme fonction test dans la première équation de (2.2.5), on peut facilement voir qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε tel que

$$(4.1.4) \qquad \|\vec{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)^{n+1}} \leq C,$$

et donc, par extraction de sous-suites (encore notée ε), on a

$$(4.1.5) \qquad \vec{u}^\varepsilon \rightharpoonup \vec{u} \text{ dans } H^1(\Omega)^{n+1} \text{ faible.}$$

De même, en multipliant la deuxième équation de (2.2.5) par $\vec{v}^\varepsilon$, en intégrant par parties et en utilisant (4.1.4), on obtient

$$(4.1.6) \qquad \|\vec{v}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)^{n+1}} \leq C,$$

par conséquent, on peut extraire une sous-suite telle que

$$(4.1.7) \qquad \vec{v}^\varepsilon \rightharpoonup \vec{v} \text{ dans } H^1(\Omega)^{n+1} \text{ faible.}$$

Maintenant, comme $\|\text{div }(2\mu^\varepsilon e(\vec{u}^\varepsilon))\|_{H^{-1}(\Omega)^{n+1}}$ est bornée , on a

$$(4.1.8) \qquad \|\nabla p^\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)^{n+1}} \leq C,$$

or d'après Temam [16], ceci implique que

$$|p^\varepsilon|_{L^2_0(\Omega)} \leq C, \tag{4.1.9}$$

il en découle,

$$p^\varepsilon \rightharpoonup p \text{ dans } L^2_0(\Omega) \text{ faible.} \tag{4.1.10}$$

Le même raisonnement nous donne

$$p'^\varepsilon \rightharpoonup p' \text{ dans } L^2_0(\Omega) \text{ faible.} \tag{4.1.11}$$

La bornitude de $\|\xi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^{(n+1)^2}}$ provient de (4.1.4) et par conséquent (extraction de sous-suites)

$$\xi^\varepsilon \rightharpoonup \xi \text{ dans } L^2(\Omega)^{(n+1)^2} \text{ faible} \tag{4.1.12}$$

De même la bornitude de $\|q^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^{(n+1)^2}}$ provient à la fois de (4.1.4) et de (4.1.6), on en déduit à une sous-suite près

$$q^\varepsilon \rightharpoonup q \text{ dans } L^2(\Omega)^{(n+1)^2} \text{ faible.} \tag{4.1.13}$$

Comme $(\vec{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ et $(\vec{v}^\varepsilon, p'^\varepsilon)$ sont solutions de (2.2.5) et comme la proposition 4.1 est satisfaite alors on obtient au sens des distributions que $(\vec{u}, p), (\vec{v}, p'), \xi$ et q vérifient

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\big(\xi\big) = \vec{f} - \nabla p + \vec{\theta} \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div}\big(q\big) = -\nabla p' \ \text{ dans } \ \Omega \\ \operatorname{div}\vec{u} = \operatorname{div}\vec{v} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \vec{u} = \vec{v} = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1.14}$$

où $\vec{f}$ est la limite faible de $\vec{f^\varepsilon}$ dans $L^2(\Omega)^{n+1}$. On peut identifier cette limite (cf [3] ou [5]). En effet les fonctions caractéristiques $\chi_{\Omega_1^\varepsilon}$ $(i = 1, 2)$ vérifient

$$\chi_{\Omega_i^\varepsilon} \rightharpoonup \rho \ \text{ et } \ \chi_{\Omega_2^\varepsilon} \rightharpoonup (1-\rho) \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } \star, \tag{4.1.15}$$

où

$$\rho(x,z) = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega_1 \\ \dfrac{|O(z)|}{|Y|} & \text{dans } \Omega_m \\ 0 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases} \tag{4.1.16}$$

On a alors,

$$\vec{f^\varepsilon} \rightharpoonup \vec{f} = \vec{f^1}\rho + \vec{f^2}(1-\rho) \text{ dans } L^2(\Omega)^{n+1} \text{ faible.} \tag{4.1.17}$$

Proposition 4.2 (Baffico & Conca [3])
Sous les hypothèses (4.2.1), (4.2.4) *et* (4.3.1) *(introduites ultérieurement), on a*

$$\xi = \mathcal{A}e(\vec{u}),$$

où $\mathcal{A}$ *est défini par* (3.1.4).

Pour démontrer le théorème 3.4, il nous reste donc à montrer que $q, \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés par la relation

$$q = \mathcal{A}e(\vec{v}) - \mathcal{B}e(\vec{u}). \tag{4.1.18}$$

Dans ce qui suit, on va identifier la matrice q, cela permettra d'identifier le tenseur $\mathcal{B}$. Pour cela on va utiliser la méthode de Baffico & Conca[3]. Cette identification s'effectue différemment suivant la région géométrique où l'on se situe (Ω_1, Ω_m ou Ω_2).

On sera amené à voir par la suite que dans Ω_1 et Ω_2, cette identification ne pose aucun problème particulier. Par contre dans Ω_m, il y aura trois étapes : dans un premier lieu on identifie les composantes $[q]_{ij}$ de q pour $1 \le i,j \le n$, par la suite on identifie $[q]_{n+1\ j}$ pour $1 \le j \le n$ et pour finir on identifie la dernière composante de q à savoir $[q]_{n+1\ n+1}$. Pour ce faire, nous allons utiliser les fonctions tests introduites dans le paragraphe 3, pour construire d'autres fonctions. Celles-ci vont nous permettre notamment d'user de la méthode de l'énergie (cf Bensoussan,Lions & Papanicolaou [4] ou Sanchez-Palencia [15]).

4.2. Identification de $[q]_{ij}$ $1 \leq i,j \leq n$ dans Ω_m

Dans ce qui suit, nous allons d'une part, construire les fonctions tests qui vont nous permettre donc l'identification de $[q]_{ij}$ $1 \leq i,j \leq n$ et d'autre part, introduire des conditions de régularité à satisfaire concernant ces dites-fonctions et finalement établir l'identification.

Soit $\underline{w}^{kl} = -\underline{\chi}^{kl} + \underline{P}^{kl}$ et $\sigma^{kl} = 2\mu e_y(\underline{w}^{kl})$ où $(\underline{\chi}^{kl}, r_1^{kl})$ est solution de (3.1.1).

On suppose que $(\underline{\chi}^{kl}, r_1^{kl})$, comme fonction des variables $(y,z) \in Y \times]0,h_1[$, vérifie l'hypothèse suivante de régularité

$$(4.2.1) \qquad \begin{cases} a)\underline{\chi}^{kl} \in L^2_{\text{loc}}(0,h_1,H^1_\sharp(Y)^n) \cap (L^2_{\text{loc}}(]0,h_1[\times \mathrm{I\!R}^n))^n \\ b)\dfrac{\partial}{\partial z}\big((\underline{\chi}^{kl})_i\big) \in L^2_{\text{loc}}(0,h_1,L^2_\sharp(Y)^n) \cap L^2_{\text{loc}}(]0,h_1[\times \mathrm{I\!R}) \end{cases} \qquad 1 \leq i,j \leq n$$

On définit les fonctions suivantes (extensions par Y-périodicité à $\mathrm{I\!R}^{n+1}$ et restrictions à Ω_m) :

$$(4.2.2) \qquad \begin{cases} \underline{w}^{\varepsilon,kl}(x,z) = \varepsilon\ \underline{w}^{kl}(\dfrac{x}{\varepsilon}, z) \\ r_1^{\varepsilon,kl}(x,z) = r_1^{kl}(\frac{x}{\varepsilon}, z) \\ \sigma^{\varepsilon,kl}(x,z) = \underline{\sigma}^{kl}(\frac{x}{\varepsilon}, z) \end{cases}$$

Il est facile de voir que

$$(4.2.3) \qquad \begin{cases} \operatorname{div}_x(\sigma^{\varepsilon,kl}) = -\nabla_x r_1^{\varepsilon,kl} \quad \text{dans } \Omega_m \\ \operatorname{div}_x(\underline{w}^{\varepsilon,kl}) = \operatorname{div}_x(\underline{P}^{kl}) = \delta_{kl} \quad \text{dans } \Omega_m. \end{cases}$$

Nous avons besoin du résultat suivant de compacité de Murat[11] :

Lemme 4.3 *S' il existe $p > 2$ tel que $(g_n)_n$ soit une suite bornée de $W^{-1,p}(\Omega)$ et tel que $(g_n)_n \geq 0$ au sens des distributions ie :*

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ telle que } \phi \geq 0 \text{ alors } \forall n > 0 < g_n, \phi > \geq 0.$$

Alors $(g_n)_n$ appartient à un compact de $H^{-1}(\Omega)$.

Si on suppose que $r_1^{\varepsilon,kl}$ vérifie

$$(4.2.4)\qquad \begin{cases} a) \text{ il existe } p > 2 \text{ tel que } r_1^{\varepsilon,kl} \in L^p_{\text{loc}}(\Omega_m), \text{ localement borné} \\ b) \dfrac{\partial}{\partial z}\big(r_1^{\varepsilon,kl}\big) \geq 0 \text{ au sens des distributions,} \end{cases}$$

Alors en utilisant, le lemme 4.3 et l'hypothèse (4.2.1), on a le résultat suivant

Proposition 4.4 (Baffico & Conca [3])
Supposons (4.2.1) *et* (4.2.4). *Alors* $\forall\ \Omega' \subset\subset \Omega_m$, *on a les convergences suivantes*

$$(4.2.5)\qquad \begin{aligned} &a)\ \underline{w}^{\varepsilon,kl} \rightharpoonup \underline{P}^{kl} \text{ dans } H^1(\Omega')^n \text{ faible} \\ &b)\ \frac{\partial}{\partial z}\big((\underline{w}^{\varepsilon,kl})_i\big) \to 0 \text{ dans } L^2(\Omega')^n \text{ fort } \ 1 \leq i \leq n \\ &c)\ r_1^{\varepsilon,kl} \rightharpoonup 0 \text{ dans } L^2(\Omega')^n \text{ faible} \\ &d)\ \frac{\partial}{\partial z}\big(r_1^{\varepsilon,kl}\big) \to 0 \text{ dans } \ H^{-1}(\Omega')^n \text{ fort } \ 1 \leq i \leq n \\ &e)\ \sigma^{\varepsilon,kl} \rightharpoonup \sigma^{kl} = m_Y(2\mu e_y(\underline{w}^{kl}) \text{ dans } L^2(\Omega')^{n\times n} \text{ faible.} \end{aligned}$$

De la même manière, on suppose que la solution $(\underline{\psi}^{kl}, r_2^{kl})$ de (3.1.5), comme fonction de $(y,z) \in Y\times]0,h_1[$, satisfait l'hypothèse de régularité suivante

$$(4.2.6)\qquad \begin{cases} a)\underline{\psi}^{kl} \in L^2_{\text{loc}}(0,h_1,H^1_\sharp(Y)^n) \cap (L^2_{\text{loc}}(]0,h_1[\times \mathbb{R}^n))^n \\ b)\dfrac{\partial}{\partial z}\big((\underline{\psi}^{kl})_i\big) \in L^2_{\text{loc}}(0,h_1,L^2_\sharp(Y)^n) \cap L^2_{\text{loc}}(]0,h_1[\times \mathbb{R}) \end{cases} \qquad 1 \leq i,j \leq n$$

On définit $(\underline{\psi}^{\varepsilon,kl}, r_2^{\varepsilon,kl})$ par

$$(4.2.7)\qquad \begin{cases} \underline{\psi}^{\varepsilon,kl}(x,z) = \varepsilon\ \underline{\psi}^{kl}(\dfrac{x}{\varepsilon}, z) \\ r_2^{\varepsilon,kl}(x,z) = r_2^{kl}(\frac{x}{\varepsilon}, z) \end{cases}$$

avec cette définition on obtient aisément

$$(4.2.8)\qquad \begin{cases} -\operatorname{div}_x\big(2\mu^\varepsilon\ e_x(\underline{\psi}^{\varepsilon,kl}) + e_x(\underline{w}^{\varepsilon,kl})\big) = -\nabla_x\ r_2^{\varepsilon,kl} \text{ dans } \Omega_m \\ \operatorname{div}_x\ \underline{\psi}^{\varepsilon,kl} = 0 \text{ dans } \Omega_m \end{cases}$$

Si on suppose de plus que $r_2^{\varepsilon,kl}$ vérifie

$$(4.2.9) \qquad \begin{cases} a) \text{ il existe } p>2 \text{ tel que } r_2^{\varepsilon,kl} \in L^p_{\text{loc}}(\Omega_m), \text{ localement borné} \\ b) \dfrac{\partial}{\partial z}\big(r_2^{\varepsilon,kl}\big) \geq 0 \text{ au sens des distributions,} \end{cases}$$

Alors en utilisant, le lemme 4.3 de compacité de Murat, on a le résultat suivant

$$(4.2.10) \qquad \frac{\partial}{\partial z}\big(r_2^{\varepsilon,kl}\big) \to 0 \text{ dans } \; H^{-1}(\Omega')^n \text{ fort } \; 1 \leq i \leq n$$

Enonons le résultat de convergence concernant ces fonctions,

Proposition 4.5 *Supposons* (4.2.1) *et* (4.2.4). *Alors* $\forall\ \Omega' \subset\subset \Omega_m$, *on a les convergences suivantes*

$$(4.2.11) \qquad \begin{array}{l} a)\ \underline{\psi}^{\varepsilon,kl} \rightharpoonup 0 \ \textit{dans}\ H^1(\Omega')^n \ \textit{faible} \\ b)\ \dfrac{\partial}{\partial z}\big((\underline{\psi}^{\varepsilon,kl})_i\big) \to 0 \ \textit{dans}\ L^2(\Omega')^n \ \textit{fort}\ \ 1 \leq i \leq n \\ c)\ r_2^{\varepsilon,kl} \rightharpoonup 0 \ \textit{dans}\ L^2(\Omega')^n \ \textit{faible.} \end{array}$$

Démonstration On utilise les résultats concernant la convergence de fonctions périodiques.

Nous allons à présent montrer le résultat principal de ce paragraphe

Proposition 4.6 *Si* (4.2.1), (4.2.4),(4.2.6) *et* (4.2.9) *sont satisfaites,*
alors $[q^\varepsilon]_{kl} \rightharpoonup [q]_{kl}$ *dans* $L^2(\Omega_m)$ *faible (à une sous-suite près)* $\forall 1 \leq k,l \leq n$ *où*

$$(4.2.12) \qquad \begin{cases} [q]_{kl} = \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\int_Y 2\mu\ [e_y(-\underline{\chi}^{ij}+\underline{P}^{ij})]_{kl}\ dy\right\}\big[e(\vec{q}^0)\big]_{ij} \\ -\dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\int_Y \Big(2\mu\ [e_y(-\underline{\psi}^{ij})]_{kl} + [e_y(-\underline{\chi}^{ij}+\underline{P}^{ij})]_{kl}\Big)\ dy\right\}\big[e(\vec{u}^0)\big]_{ij} \end{cases}$$

Démonstration

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_m)$. Soit $\vec{w}^{\varepsilon,kl} = (\underline{w}^{\varepsilon,kl}, 0)$. On multiplie la deuxième équation de (2.2.5) par $\phi\vec{w}^{\varepsilon,kl}$, on intègre par parties et on utilise (4.1.2), on obtient

(4.2.13)
$$\begin{cases} -\displaystyle\int_{\Omega_m} \nabla p'^{\varepsilon}.(\phi\vec{w}^{\varepsilon,kl})\ dxdz = -\int_{\Omega_m} (q^{\varepsilon}\nabla\phi).\vec{w}^{\varepsilon,kl}\ dxdz + \int_{\Omega_m} e(\vec{u}^{\varepsilon}) : \nabla\vec{w}^{\varepsilon,kl}\phi\ dxdz \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_{\Omega_m} 2\mu^{\varepsilon} e(\vec{v}^{\varepsilon}) : \nabla\vec{w}^{\varepsilon,kl}\phi\ dxdz. \end{cases}$$

Après quelques calculs élémentaires sur la deuxième et la troisième intégrale du membre de droite, il en découle

$$\text{(4.2.14)}\quad \begin{cases} -\displaystyle\int_{\Omega_m} \nabla p'^{\varepsilon}.\phi\vec{w}^{\varepsilon,kl} dxdz = -\int_{\Omega_m} (q^{\varepsilon}\nabla\phi).\vec{w}^{\varepsilon,kl} dxdz + \int_{\Omega_m} e_x(\underline{u}^{\varepsilon}) : e_x(\underline{w}^{\varepsilon,kl})\phi\ dxdz \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_{\Omega_m} 2\mu^{\varepsilon} e_x(\underline{v}^{\varepsilon}) : e_x(\underline{w}^{\varepsilon,kl})\phi\ dxdz \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_{\Omega_m} \sum_{j=1}^{n} [q^{\varepsilon}]_{n+1j} \frac{\partial}{\partial z}\big((\underline{w}^{\varepsilon,kl})_j\big)\phi\ dxdz. \end{cases}$$

Soit $\vec{\psi}^{\varepsilon,kl} = (\underline{\psi}^{\varepsilon,kl}, 0)$. On multiplie la première équation de (2.2.5) par $\phi\vec{\psi}^{\varepsilon,kl}$, on intègre par parties et on utilise la définition (4.1.1), on aboutit à (après quelques calculs)

(4.2.15)
$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_m} (\vec{f}^{\varepsilon} - \nabla p^{\varepsilon} + \vec{\theta}).\phi\vec{\psi}^{\varepsilon,kl} dxdz = \int_{\Omega_m} (\xi^{\varepsilon}\nabla\phi).\vec{\psi}^{\varepsilon,kl} + \int_{\Omega_m} 2\mu^{\varepsilon} e_x(\underline{u}^{\varepsilon}) : e_x(\underline{\psi}^{\varepsilon,kl})\phi\ dxdz \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{\Omega_m} \sum_{j=1}^{n} [\xi^{\varepsilon}]_{n+1j} \frac{\partial}{\partial z}\big((\underline{\psi}^{\varepsilon,kl})_j\big)\phi\ dxdz. \end{cases}$$

On intègre par parties la deuxième intégrale du membre de droite, il en résulte

(4.2.16)
$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_m} (\vec{f}^{\varepsilon} - \nabla p^{\varepsilon} + \vec{\theta}).\phi\vec{\psi}^{\varepsilon,kl} dxdz = \int_{\Omega_m} (\xi^{\varepsilon}\nabla\phi).\vec{\psi}^{\varepsilon,kl} - \int_{\Omega_m} \mathrm{div}_x\big(2\mu^{\varepsilon} e_x(\underline{\psi}^{\varepsilon,kl})\big).\ (\underline{u}^{\varepsilon}\phi)\ dxdz \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_{\Omega_m} (2\mu^{\varepsilon} e_x(\underline{\psi}^{\varepsilon,kl})\nabla_x\phi).\ \underline{u}^{\varepsilon}\ dxdz \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{\Omega_m} \sum_{j=1}^{n} [\xi^{\varepsilon}]_{n+1j} \frac{\partial}{\partial z}\big((\underline{\psi}^{\varepsilon,kl})_j\big)\phi\ dxdz. \end{cases}$$

En utilisant l'équation vérifiée par $\underline{\psi}^{\varepsilon,kl}$ (voir (4.2.8)), on obtient

(4.2.17)

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{\Omega_m}(\vec{f}^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon + \vec{\theta}).\phi\vec{\psi}^{\varepsilon,kl}dxdz = \int_{\Omega_m}(\xi^\varepsilon\nabla\phi).\vec{\psi}^{\varepsilon,kl} - \int_{\Omega_m}\underline{u}^\varepsilon \operatorname{div}_x\big(e_x(\underline{w}^{\varepsilon,kl})\big)\phi\ dxdz \\ \displaystyle\qquad + \int_{\Omega_m}\nabla_x r_2^{\varepsilon,kl}.(\phi\underline{u}^\varepsilon)\ dxdz - \int_{\Omega_m}\big(2\mu^\varepsilon e_x(\underline{\psi}^{\varepsilon,kl})\nabla_x\phi\big).\underline{u}^\varepsilon\ dxdz \\ \displaystyle\qquad + \int_{\Omega_m}\sum_{j=1}^n[\xi^\varepsilon]_{n+1j}\frac{\partial}{\partial z}\big((\underline{\psi}^{\varepsilon,kl})_j\big)\phi\ dxdz.\end{cases}$$

En intégrant à nouveau par parties la deuxième intégrale, on a

(4.2.18)

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{\Omega_m}(\vec{f}^\varepsilon + \vec{\theta}).\phi\vec{\psi}^{\varepsilon,kl}dxdz - \int_{\Omega_m}\nabla p^\varepsilon.\phi\vec{\psi}^{\varepsilon,kl}dxdz = \int_{\Omega_m}(\xi^\varepsilon\nabla\phi).\vec{\psi}^{\varepsilon,kl} - \int_{\Omega_m}e_x(\underline{u}^\varepsilon) : e_x(\underline{w}^{\varepsilon,kl})\phi\ dxdz \\ \displaystyle\qquad + \int_{\Omega_m}\nabla_x r_2^{\varepsilon,kl}.(\phi\underline{u}^\varepsilon)\ dxdz - \int_{\Omega_m}\big(2\mu^\varepsilon e_x(\underline{\psi}^{\varepsilon,kl})\nabla_x\phi\big).\underline{u}^\varepsilon\ dxdz \\ \displaystyle\qquad - \int_{\Omega_m}\big(e_x(\underline{w}^{\varepsilon,kl})\nabla_x\phi\big).\underline{u}^\varepsilon\ dxdz \\ \displaystyle\qquad + \int_{\Omega_m}\sum_{j=1}^n[\xi^\varepsilon]_{n+1j}\frac{\partial}{\partial z}\big((\underline{\psi}^{\varepsilon,kl})_j\big)\phi\ dxdz.\end{cases}$$

En additionnant (4.2.14) et (4.2.18), on aboutit à

$$\text{(4.2.19)}\qquad\begin{cases}\displaystyle\int_{\Omega_m}(\vec{f}^\varepsilon + \vec{\theta}).\phi\vec{\psi}^{\varepsilon,kl}dxdz - \int_{\Omega_m}\nabla p^\varepsilon.\phi\vec{\psi}^{\varepsilon,kl}dxdz - \int_{\Omega_m}\nabla p'^\varepsilon.\phi\vec{w}^{\varepsilon,kl}dxdz \\ \displaystyle = -\int_{\Omega_m}(q^\varepsilon\nabla\phi).\vec{w}^{\varepsilon,kl}dxdz - \int_{\Omega_m}2\mu^\varepsilon e_x(\underline{v}^\varepsilon) : e_x(\underline{w}^{\varepsilon,kl})\phi\ dxdz \\ \displaystyle - \int_{\Omega_m}\sum_{j=1}^n[q^\varepsilon]_{n+1j}\frac{\partial}{\partial z}\big((\underline{w}^{\varepsilon,kl})_j\big)\phi\ dxdz + \int_{\Omega_m}(\xi^\varepsilon\nabla\phi).\vec{\psi}^{\varepsilon,kl} \\ \displaystyle + \int_{\Omega_m}\nabla_x r_2^{\varepsilon,kl}.(\phi\underline{u}^\varepsilon)\ dxdz - \int_{\Omega_m}(b^{\varepsilon,kl}\nabla_x\phi).\ \underline{u}^\varepsilon\ dxdz \\ \displaystyle + \int_{\Omega_m}\sum_{j=1}^n[\xi^\varepsilon]_{n+1j}\frac{\partial}{\partial z}\big((\underline{\psi}^{\varepsilon,kl})_j\big)\phi\ dxdz.\end{cases}$$

où

$$\text{(4.2.20)}\qquad b^{\varepsilon,kl} = 2\mu^\varepsilon e_x(\underline{\psi}^{\varepsilon,kl}) + e_x(\underline{w}^{\varepsilon,kl}).$$

On obtient facilement que (en utilisant notamment le problème (3.1.5))

$$\operatorname{div}_x(b^{\varepsilon,kl}) = -\nabla_x r_2^{\varepsilon,kl} \text{ dans } \Omega_m.$$

Nous allons à présent passer à la limite dans (4.2.19). Pour ce faire, nous avons besoin d'établir quelques résultats préliminaires.

En utilisant la définition (4.2.20) et les arguments classiques à propos de la convergence des fonctions périodiques, on conclut que pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega_m$,

$$\begin{aligned} & b^{\varepsilon,kl} \rightharpoonup b^{kl} = \mathrm{m}_Y(2\mu e_y(\underline{\psi}^{kl}) + e_y(\underline{w}^{kl})) \text{ dans } L^2(\Omega')^{n\times n} \text{ faible} \\ & \text{et } \operatorname{div}_x(b^{kl}) = 0 \text{ dans } \Omega_m. \end{aligned} \tag{4.2.21}$$

D'après la convergence (4.2.5) a), on a

$$\vec{w}^{\varepsilon,kl} \to \vec{P}^{kl} = (\underline{P}^{kl}, 0) \text{ dans } L^2(\Omega')^n \text{ fort} \tag{4.2.22}$$

De même, d'après (4.2.11) a), on a

$$\vec{\psi}^{\varepsilon,kl} \to 0 \text{ dans } L^2(\Omega')^n \text{ fort} \tag{4.2.23}$$

A présent, intéressons-nous au membre de gauche de (4.2.19)

Concernant la première intégrale, d'après les convergences (4.1.17) et (4.2.23), on a

$$\int_{\Omega_m} (\vec{f}^\varepsilon + \vec{\theta}).\phi\vec{\psi}^{\varepsilon,kl} dxdz \to 0 \tag{4.2.24}$$

On intégre par parties la deuxième intégrale, en utilisant le fait que $\operatorname{div}(\vec{\psi}^{\varepsilon,kl}) = \operatorname{div}_x(\underline{\psi}^{kl}) = 0$ (cf (4.2.8)), on obtient

$$-\int_{\Omega_m} \nabla p^\varepsilon.\phi\vec{\psi}^{\varepsilon,kl} dxdz = \int_{\Omega_m} p^\varepsilon.\vec{\psi}^{\varepsilon,kl}\nabla\phi dxdz, \tag{4.2.25}$$

mais d'après les convergences (4.1.10) et (4.2.23), il en découle

$$-\int_{\Omega_m} \nabla p^\varepsilon.\phi\vec{\psi}^{\varepsilon,kl} dxdz \to 0. \tag{4.2.26}$$

De même en intégrant par parties la troisième intégrale et en utilisant le fait que $\operatorname{div}(\vec{w}^{\varepsilon,kl}) = \operatorname{div}_x(\underline{P}^{kl}) = \delta_{kl}$ (cf (4.2.3)), on aboutit à

$$(4.2.27)\quad -\int_{\Omega_m} \nabla p'^{\varepsilon}.\phi \vec{w}^{\varepsilon,kl} dxdz = \int_{\Omega_m} p'^{\varepsilon} \operatorname{div}_x(\underline{P}^{kl})\phi \, dxdz + \int_{\Omega_m} p'^{\varepsilon} \vec{w}^{\varepsilon,kl} \nabla\phi \, dxdz,$$

en utilisant les convergences (4.1.11) et (4.2.22) dans le membre de droite ci-dessus et en intégrant par la suite, on obtient

$$(4.2.28)\qquad -\int_{\Omega_m} \nabla p'^{\varepsilon}.\phi \vec{w}^{\varepsilon,kl} dxdz \to -\int_{\Omega_m} \nabla p'.\phi \vec{P}^{kl} dxdz.$$

Regardons à présent le membre de droite de (4.2.19) :

D'après (4.1.13) et (4.2.22), on a facilement

$$(4.2.29)\qquad -\int_{\Omega_m} (q^{\varepsilon}\nabla\phi).\vec{w}^{\varepsilon,kl} dxdz \to -\int_{\Omega_m} (q\nabla\phi).\vec{P}^{kl} dxdz.$$

Concernant la deuxième intégrale, on intègre par parties et on utilise le problème que vérifie les fonctions $\sigma^{\varepsilon,kl}$ (cf (4.2.3)), cela nous donne

$$(4.2.30)\qquad \begin{cases} -\displaystyle\int_{\Omega_m} 2\mu^{\varepsilon} e_x(\underline{v}^{\varepsilon}) : e_x(\underline{w}^{\varepsilon,kl})\phi \, dxdz = \\ = \displaystyle\int_{\Omega_m} \underline{v}^{\varepsilon}. \operatorname{div}_x(\sigma^{\varepsilon,kl})\phi \, dxdz + \int_{\Omega_m} (\sigma^{\varepsilon,kl}\nabla_x\phi).\underline{v}^{\varepsilon} \, dxdz \\ = \displaystyle\int_{\Omega_m} \underline{v}^{\varepsilon}.\nabla_x r_1^{\varepsilon,kl}\phi \, dxdz + \int_{\Omega_m} (\sigma^{\varepsilon,kl}\nabla_x\phi).\underline{v}^{\varepsilon} \, dxdz. \end{cases}$$

On intégre par parties la première intégrale du membre de droite de la dernière égalité de (4.2.30), en utilisant le fait que $\operatorname{div}_x(\underline{v}^{\varepsilon}) = -\dfrac{\partial v_{n+1}^{\varepsilon}}{\partial z}$, il en résulte

$$(4.2.31)\quad \begin{cases} -\displaystyle\int_{\Omega_m} 2\mu^{\varepsilon} e_x(\underline{v}^{\varepsilon}) : e_x(\underline{w}^{\varepsilon,kl})\phi \, dxdz = -\int_{\Omega_m} r_1^{\varepsilon,kl}\underline{v}^{\varepsilon}.\nabla_x\phi \, dxdz + \int_{\Omega_m} \frac{\partial v_{n+1}^{\varepsilon}}{\partial z} r_1^{\varepsilon,kl}\phi \, dxdz \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{\Omega_m} (\sigma^{\varepsilon,kl}\nabla_x\phi).\underline{v}^{\varepsilon} \, dxdz. \end{cases}$$

On passe à la limite dans le membre de droite de l'égalité précédente, en utilisant (4.1.7), (4.2.5) *c*) pour la première intégrale. Pour la deuxième intégrale, on intègre par parties et on utilise (4.2.5) d), (4.1.7) et (4.2.5) c). Pour la dernière intégrale, on utilise (4.1.7) et (4.2.5) e). On aboutit à

$$-\int_{\Omega_m} 2\mu^\varepsilon e_x(\underline{v}^\varepsilon) : e_x(\underline{w}^{\varepsilon,kl})\phi \; dxdz \to \int_{\Omega_m} (\sigma^{kl}\nabla_x\phi).\underline{v} \; dxdz, \tag{4.2.32}$$

ce qui donne après intégration par parties,

$$-\int_{\Omega_m} 2\mu^\varepsilon e_x(\underline{v}^\varepsilon) : e_x(\underline{w}^{\varepsilon,kl})\phi \; dxdz \to \int_{\Omega_m} \sigma^{kl} : e_x(\underline{v})\phi \; dxdz, \tag{4.2.33}$$

Maintenant en utilisant les convergences (4.2.5) b) et (4.1.13), on obtient pour la troisième intégrale

$$-\int_{\Omega_m} \sum_{j=1}^{n} [q^\varepsilon]_{n+1j} \frac{\partial}{\partial z}\big((\underline{w}^{\varepsilon,kl})_j\big)\phi \; dxdz \to 0. \tag{4.2.34}$$

Comme les convergences (4.1.12) et (4.2.11) a) ont lieu, on a

$$\int_{\Omega_m} (\xi^\varepsilon\nabla\phi).\vec{\psi}^{\varepsilon,kl} \; dxdz \to 0. \tag{4.2.35}$$

De même en utilisant (4.1.5) et (4.2.21), on obtient

$$-\int_{\Omega_m} (b^{\varepsilon,kl}\nabla_x\phi).\; \underline{u}^\varepsilon \; dxdz \to -\int_{\Omega_m} (b^{kl}\nabla_x\phi).\; \underline{u} \; dxdz. \tag{4.2.36}$$

D'après (4.1.5) et (4.2.8) (en intégrant par parties), on a

$$\int_{\Omega_m} \nabla_x r_2^{\varepsilon,kl}.(\phi\underline{u}^\varepsilon) \; dxdz \to 0. \tag{4.2.37}$$

Finalement, pour la dernière intégrale, d'après (4.1.12) et (4.2.11) c), on a

$$\int_{\Omega_m} \sum_{j=1}^{n} [\xi^\varepsilon]_{n+1j} \frac{\partial}{\partial z}\big((\underline{\psi}^{\varepsilon,kl})_j\big)\phi \; dxdz \to 0. \tag{4.2.38}$$

En utilisant (4.2.24)-(4.2.26), (4.2.28), (4.2.29) et (4.2.33)-(4.2.38), l'expression (4.2.19) devient à la limite

$$\left\{ \begin{aligned} -\int_{\Omega_m}\nabla p'.\phi\vec{P}^{kl}dxdz = -\int_{\Omega_m} (q\nabla\phi).\vec{P}^{kl}dxdz - \int_{\Omega_m} \sigma^{kl} : e_x(\underline{v})\phi \; dxdz \\ -\int_{\Omega_m} (b^{kl}\nabla_x\phi).\; \underline{u} \; dxdz \end{aligned} \right. \tag{4.2.39}$$

En intégrant par parties le membre de droite de l'égalité ci-dessus et en utilisant la deuxième équation du problème (4.1.14) et l'expression (4.2.21), on obtient

$$(4.2.40) \qquad \begin{cases} 0 = \displaystyle\int_{\Omega_m} q : e(\vec{P}^{kl})\phi \; dxdz - \int_{\Omega_m} \sigma^{kl} : e_x(\underline{v}) \; \phi \; dxdz \\ \quad + \displaystyle\int_{\Omega_m} e_x(\underline{u}) : b^{kl} \; \phi \; dxdz. \end{cases}$$

Or comme $\left[e(\vec{P}^{kl})\right]_{ij} = \left[M^{kl}\right]_{ij}$, on obtient donc au sens des distributions

$$(4.2.41) \qquad [q]_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} \left[\sigma^{kl}\right]_{ij} \left[e_x(\underline{v})\right]_{ij} - \sum_{i,j=1}^{n} \left[b^{kl}\right]_{ij} \left[e_x(\underline{u})\right]_{ij}.$$

D'après (4.2.5) e), (4.2.21) et le fait que $\left[e_x(\underline{v})\right]_{ij} = \left[e(\vec{v})\right]_{ij}$
et $\left[e_x(\underline{u})\right]_{ij} = \left[e(\vec{u})\right]_{ij} \quad \forall 1 \leq i,j \leq n$, on obtient

$$(4.2.42) \qquad \begin{cases} [q]_{kl} = \dfrac{1}{|Y|} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \int_Y 2\mu \; [e_y(-\underline{\chi}^{kl} + \underline{P}^{kl})]_{ij} \; dy \right\} \left[e(\vec{v})\right]_{ij} \\ -\dfrac{1}{|Y|} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \int_Y \left(2\mu \; [e_y(-\underline{\psi}^{kl})]_{ij} + [e_y(-\underline{\chi}^{kl} + \underline{P}^{kl})]_{ij} \right) \; dy \right\} \left[e(\vec{u})\right]_{ij}. \end{cases}$$

Or d'après la proposition 3.1, on a

$$(4.2.43) \qquad \int_Y 2\mu \; [e_y(-\underline{\chi}^{kl} + \underline{P}^{kl})]_{ij} \; dy = \int_Y 2\mu \; [e_y(-\underline{\chi}^{ij} + \underline{P}^{ij})]_{kl} \; dy,$$

et d'après la proposition 3.2, on a

(4.2.44)

$$\int_Y \left(2\mu \, [e_y(-\underline{\psi}^{kl})]_{ij} + [e_y(-\underline{\chi}^{kl} + \underline{P}^{kl})]_{ij} \right) dy = \int_Y \left(2\mu \, [e_y(-\underline{\psi}^{ij})]_{kl} + [e_y(-\underline{\chi}^{ij} + \underline{P}^{ij})]_{kl} \right) dy.$$

Par conséquent, en utilisant (4.2.43) et (4.2.44) dans (4.2.42) on obtient le résultat annoncé, à savoir

$$(4.2.45) \qquad \begin{cases} [q]_{kl} = \dfrac{1}{|Y|} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \int_Y 2\mu \; [e_y(-\underline{\chi}^{ij} + \underline{P}^{ij})]_{kl} \; dy \right\} \left[e(\vec{v})\right]_{ij} \\ -\dfrac{1}{|Y|} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \int_Y \left(2\mu \; [e_y(-\underline{\psi}^{ij})]_{kl} + [e_y(-\underline{\chi}^{ij} + \underline{P}^{ij})]_{kl} \right) \; dy \right\} \left[e(\vec{u})\right]_{ij} \end{cases}$$

Ceci achève la démonstration.

4.3. Identification de $[q]_{n+1j}$ $1 \leq j \leq n$ dans Ω_m

Soit φ^k solution du problème local (3.1.2). On suppose que $\varphi^k = \varphi^k(y,z)$ vérifie l'hypothèse de régularité suivante

$$\text{(4.3.1)} \qquad \begin{cases} a)\varphi^k \in L^2_{\text{loc}}(0,h_1,H^1_\sharp(Y)) \cap L^2_{\text{loc}}(]0,h_1[\times \mathbb{R}^n) \\ b)\dfrac{\partial \varphi^k}{\partial z} \in L^2_{\text{loc}}(0,h_1,L^2_\sharp(Y)) \cap L^2_{\text{loc}}(]0,h_1[\times \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

On définit alors $\zeta^k = -\varphi^k + 2y_k$ et $\underline{\eta}^k = \mu \nabla_y \zeta^k$. De même on définit les fonctions suivantes par Y-périodicité :

$$\text{(4.3.2)} \qquad \begin{cases} \zeta^{\varepsilon,k}(x,z) = \varepsilon \zeta^k(\dfrac{x}{\varepsilon}, z) \\ \underline{\eta}^{\varepsilon,k}(x,z) = \underline{\eta}^k(\dfrac{x}{\varepsilon}, z) \end{cases}$$

Il est facile de voir que

$$\text{(4.3.3)} \qquad -\operatorname{div}_x \underline{\eta}^{\varepsilon,k} = 0 \text{ dans } \Omega_m.$$

On introduit cette hypothèse supplémentaire concernant $\underline{\eta}^{\varepsilon,k}$:

$$\text{(4.3.4)} \qquad \begin{cases} a)\ \exists\, p > 2 \text{ tel que } \{\big(\underline{\eta}^{\varepsilon,k}\big)_j\}_{\varepsilon>0} \subset L^p_{\text{loc}}(\Omega_m), \text{ localement borné} \\ b)\ \dfrac{\partial}{\partial z}\big(\underline{\eta}^{\varepsilon,k}\big)_j \geq 0 \text{ au sens des distributions.} \end{cases}$$

On a le résultat suivant :

Proposition 4.7 (Baffico & Conca [3])
Supposons que les hypothèses (4.3.1) *et* (4.3.4) *sont satisfaites. Alors* $\forall\ \Omega' \subset\subset \Omega_m$, *on a les convergences suivantes*

$$\text{(4.3.5)} \qquad \begin{aligned} &a)\ \zeta^{\varepsilon,k} \rightharpoonup 2y_k \ \textit{dans } H^1(\Omega') \textit{ faible} \\ &b)\ \frac{\partial}{\partial z}\big(\zeta^{\varepsilon,k}\big) \to 0 \ \textit{dans } L^2(\Omega') \textit{ fort} \\ &c)\ \underline{\eta}^{\varepsilon,k} \rightharpoonup \underline{\eta}^k = m_Y(\underline{\eta}^k) \ \textit{dans } L^2(\Omega')^n \textit{ faible} \\ &d)\ \frac{\partial}{\partial z}\big(\underline{\eta}^{\varepsilon,k}\big)_j \to \frac{\partial}{\partial z}\big(\underline{\eta}^k\big)_j \ \textit{dans } \ H^{-1}(\Omega') \textit{ fort } \ 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

D'après (4.3.5) c) et (4.3.3), on a

$$(4.3.6) \qquad -\operatorname{div}_x \underline{\eta}^k = 0 \text{ dans } \Omega_m.$$

De la même manière, on suppose que $\psi^k = \psi^k(y,z)$ solution de (3.1.6) vérifie

$$(4.3.7) \qquad \begin{cases} a) \ \psi^k \in L^2_{\text{loc}}(0,h_1,H^1_\sharp(Y)) \cap L^2_{\text{loc}}(]0,h_1[\times \mathbb{R}^n) \\ b) \ \dfrac{\partial \psi^k}{\partial z} \in L^2_{\text{loc}}(0,h_1,L^2_\sharp(Y)) \cap L^2_{\text{loc}}(]0,h_1[\times \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

On définit $\psi^{\varepsilon,k}$ par

$$(4.3.8) \qquad \psi^{\varepsilon,k}(x,z) = \psi^k(\frac{x}{\varepsilon}, z)$$

On introduit

$$(4.3.9) \qquad \underline{d}^{\varepsilon,k} = 2\mu^\varepsilon \ \nabla_x \psi^{\varepsilon,k} + \nabla_x \zeta^{\varepsilon,k},$$

on a alors en utilisant (3.1.6), (4.3.2) et (4.3.9),

$$(4.3.10) \qquad -\operatorname{div}_x \underline{d}^{\varepsilon,k} = 0 \text{ dans } \Omega_m.$$

On suppose que $\underline{d}^{\varepsilon,k}$ satisfait la régularité

$$(4.3.11) \qquad \begin{cases} a) \ \exists\, p > 2 \text{ tel que } \left\{ \left(\underline{d}^{\varepsilon,k}\right)_j \right\}_{\varepsilon>0} \subset L^p_{\text{loc}}(\Omega_m), \ \text{localement borné} \\ b) \ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\underline{d}^{\varepsilon,k}\right)_j \geq 0 \text{ au sens des distributions.} \end{cases}$$

On a le résultat suivant :

Proposition 4.8 *Supposons que les hypothèses* (4.3.7) *et* (4.3.11) *sont satisfaites. Alors* $\forall\ \Omega' \subset\subset \Omega_m$, *on a les convergences suivantes*

$$(4.3.12) \qquad \begin{aligned} &a) \ \psi^{\varepsilon,k} \rightharpoonup 0 \ \textit{dans } H^1(\Omega') \textit{ faible} \\ &b) \ \frac{\partial}{\partial z}\left(\psi^{\varepsilon,k}\right) \to 0 \ \textit{dans } L^2(\Omega') \textit{ fort} \\ &c) \ \underline{d}^{\varepsilon,k} \rightharpoonup \underline{d}^k = m_Y(2\mu \ \nabla_y \psi^k + \nabla_y \zeta^k) \ \textit{dans } L^2(\Omega')^n \textit{ faible} \\ &d) \ \frac{\partial}{\partial z}\left(\underline{d}^{\varepsilon,k}\right)_j \to \frac{\partial}{\partial z}\left(\underline{d}^k\right)_j \ \textit{dans } \ H^{-1}(\Omega') \textit{ fort } \ 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

D'après (4.3.10) et (4.3.12) c), on a

$$- \operatorname{div}_x \underline{d}^k = 0 \text{ dans } \Omega_m. \tag{4.3.13}$$

Démonstration de la proposition 4.8

On utilise les résultats classiques concernant la convergence des fonctions périodiques pour les trois premières assertions. Pour la dernière, on utilise le lemme 4.3 de compacité (les hypothèses du lemme étant vérifiées car on a supposé (4.3.11)).

Nous allons à présent montrer que

Proposition 4.9 *Si* (4.3.1), (4.3.4), (4.3.7) *et* (4.3.11) *sont satisfaites, alors à une sous-suite près, on a* $[q^\varepsilon]_{n+1k} \rightharpoonup [q]_{n+1k}$ *dans* $L^2(\Omega_m)$ *faible* $\forall 1 \leq j \leq n$ *où*

$$\left\{ \begin{array}{l} [q]_{n+1k} = \dfrac{1}{|Y|} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_Y \mu \ \frac{\partial(-\varphi^i + 2y_i)}{\partial y_k} \ dy \right\} \big[e(\vec{v})\big]_{n+1i} \\ -\dfrac{1}{2|Y|} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_Y \left(2\mu \ \frac{\partial \psi^i}{\partial y_k} + \frac{\partial(-\varphi^i + 2y_i)}{\partial y_k} \ dy \right\} \big[e(\vec{u})\big]_{n+1i}. \right. \end{array} \right. \tag{4.3.14}$$

Démonstration

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_m)$. Soit $\vec{\zeta}^{\varepsilon,k} = (\underline{0}, \zeta^{\varepsilon,k})$. On multiplie la deuxième équation de (2.2.5) par $\phi\vec{\zeta}^{\varepsilon,k}$ et on intègre par parties. En utilisant (4.1.2), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} - \displaystyle\int_{\Omega_m} \nabla p'^{\varepsilon}.\vec{\zeta}^{\varepsilon,k} \phi \ dxdz = -\int_{\Omega_m} (q^\varepsilon \nabla \phi).\vec{\zeta}^{\varepsilon,k} \ dxdz + \int_{\Omega_m} e(\vec{u}^\varepsilon) : \nabla \vec{\zeta}^{\varepsilon,k} \phi \ dxdz \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \displaystyle\int_{\Omega_m} 2\mu^\varepsilon e(\vec{v}^\varepsilon) : \nabla \vec{\zeta}^{\varepsilon,k} \phi \ dxdz. \end{array} \right. \tag{4.3.15}$$

Après quelques calculs élémentaires effectués sur la deuxième et la troisième intégrale du membre de droite, on aboutit à

(4.3.16)

$$\left\{\begin{array}{l} -\displaystyle\int_{\Omega_m}\nabla p'^{\varepsilon}.\vec{\zeta}^{\varepsilon,k}\phi\ dxdz = -\int_{\Omega_m}(q^{\varepsilon}\nabla\phi).\vec{\zeta}^{\varepsilon,k}dxdz - \int_{\Omega_m}\mu^{\varepsilon}\nabla_x v_{n+1}^{\varepsilon}.\nabla_x\zeta^{\varepsilon,k}\phi\ dxdz \\ \qquad\qquad -\displaystyle\int_{\Omega_m}\sum_{i=1}^{n}\ \mu^{\varepsilon}\frac{\partial v_i^{\varepsilon}}{\partial z}\frac{\partial\zeta^{\varepsilon,k}}{\partial x_i}\phi\ dxdz + \frac{1}{2}\int_{\Omega_m}\nabla_x u_{n+1}^{\varepsilon}.\nabla_x\zeta^{\varepsilon,k}\phi\ dxdz \\ \qquad\qquad -\displaystyle\int_{\Omega_m}\sum_{j=1}^{n}\ [q^{\varepsilon}]_{n+1n+1}\frac{\partial\zeta^{\varepsilon,k}}{\partial z}\phi\ dxdz + \frac{1}{2}\int_{\Omega_m}\sum_{i=1}^{n}\ \mu^{\varepsilon}\frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial z}\frac{\partial\zeta^{\varepsilon,k}}{\partial x_i}\phi\ dxdz. \end{array}\right.$$

Soit $\vec{\psi}^{\varepsilon,k} = (\underline{0},\psi^{\varepsilon,k})$. On multiplie la première équation de (2.2.5) par $\phi\vec{\psi}^{\varepsilon,k}$, on intègre par parties et on utilise la définition (4.1.1), on aboutit à

$$\int_{\Omega_m}(\vec{f}^{\varepsilon} - \nabla p^{\varepsilon} + \vec{\theta}).\vec{\psi}^{\varepsilon,k}\phi dxdz = \int_{\Omega_m}(\xi^{\varepsilon}\nabla\phi).\vec{\psi}^{\varepsilon,k} + \int_{\Omega_m}2\mu^{\varepsilon}e(\vec{u}^{\varepsilon}) : \nabla\vec{\psi}^{\varepsilon,k}\phi\ dxdz \tag{4.3.17}$$

En exprimant la deuxième intégrale du membre de droite differemment, l'expression ci-dessus devient

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\Omega_m}(\vec{f}^{\varepsilon} - \nabla p^{\varepsilon} + \vec{\theta}).\vec{\psi}^{\varepsilon,k}\phi dxdz = \int_{\Omega_m}(\xi^{\varepsilon}\nabla\phi).\vec{\psi}^{\varepsilon,k} + \int_{\Omega_m}\mu^{\varepsilon}\nabla_x u_{n+1}^{\varepsilon}.\nabla_x\psi^{\varepsilon,k}\phi\ dxdz \\ +\displaystyle\int_{\Omega_m}\sum_{i=1}^{n}\ (\mu^{\varepsilon}\frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial z})\frac{\partial\psi^{\varepsilon,k}}{\partial x_i}\phi\ dxdz + \int_{\Omega_m}\sum_{i=1}^{n}\ [\xi^{\varepsilon}]_{n+1n+1}\frac{\partial\psi^{\varepsilon,k}}{\partial z}\phi\ dxdz. \end{array}\right. \tag{4.3.18}$$

Nous allons exprimer la deuxième intégrale du membre de droite de (4.3.18). En intégrant par parties et en utilisant (4.3.9) et(4.3.10), on a

$$\left\{\begin{array}{rl} \displaystyle\int_{\Omega_m}\mu^{\varepsilon}\nabla_x u_{n+1}^{\varepsilon}.\nabla_x\psi^{\varepsilon,k}\phi\ dxdz = & -\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\Omega_m}\ u_{n+1}^{\varepsilon}\ \mathrm{div}_x(2\mu^{\varepsilon}\nabla_x\psi^{\varepsilon,k})\phi\ dxdz \\ & -\displaystyle\int_{\Omega_m}\mu^{\varepsilon}u_{n+1}^{\varepsilon}\nabla_x\phi.\nabla_x\psi^{\varepsilon,k}\ dxdz \\ & = \displaystyle\frac{1}{2}\int_{\Omega_m}\ u_{n+1}^{\varepsilon}\ \mathrm{div}_x(\nabla_x\zeta^{\varepsilon,k})\phi\ dxdz \\ & -\displaystyle\int_{\Omega_m}\mu^{\varepsilon}u_{n+1}^{\varepsilon}\nabla_x\phi.\nabla_x\psi^{\varepsilon,k}\ dxdz \end{array}\right. \tag{4.3.19}$$

En intégrant de nouveau par parties (la première intégrale du membre de droite de (4.3.19)) et en utilisant (4.3.9), on aboutit à

$$(4.3.20)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_m} \mu^\varepsilon \nabla_x u^\varepsilon_{n+1}.\nabla_x \psi^{\varepsilon,k}\phi \; dxdz = -\frac{1}{2}\int_{\Omega_m} \nabla_x u^\varepsilon_{n+1}.\nabla_x \zeta^{\varepsilon,k}\phi \; dxdz \\ \displaystyle\qquad\qquad -\frac{1}{2}\int_{\Omega_m} u^\varepsilon_{n+1}\; (\underline{d}^{\varepsilon,k}.\nabla_x\phi)\; dxdz \end{cases}$$

Par conséquent l'expression (4.3.18) devient

(4.3.21)

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_m} (\vec{f}^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon + \vec{\theta}).\vec{\psi}^{\varepsilon,k}\phi dxdz = \int_{\Omega_m} (\xi^\varepsilon \nabla\phi).\vec{\psi}^{\varepsilon,k} - \frac{1}{2}\int_{\Omega_m} \nabla_x u^\varepsilon_{n+1}.\nabla_x \zeta^{\varepsilon,k}\phi \; dxdz \\ \displaystyle\qquad -\frac{1}{2}\int_{\Omega_m} u^\varepsilon_{n+1}\; (\underline{d}^{\varepsilon,k}.\nabla_x\phi)\; dxdz \\ \displaystyle\qquad +\int_{\Omega_m} \sum_{i=1}^{n} (\mu^\varepsilon \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial z})\frac{\partial \psi^{\varepsilon,k}}{\partial x_i}\phi \; dxdz \\ \displaystyle\qquad +\int_{\Omega_m} \sum_{i=1}^{n} [\xi^\varepsilon]_{n+1 n+1}\frac{\partial \psi^{\varepsilon,k}}{\partial z}\phi \; dxdz. \end{cases}$$

En additionnant (4.3.16) et (4.3.21), on a (en utilisant la définition (4.3.9))

(4.3.22)

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_m} (\vec{f}^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon + \vec{\theta}).\vec{\psi}^{\varepsilon,k}\phi dxdz - \int_{\Omega_m} \nabla p'^\varepsilon.\vec{\zeta}^{\varepsilon,k}\phi dxdz \\ \displaystyle = -\int_{\Omega_m} (q^\varepsilon\nabla\phi).\vec{\zeta}^{\varepsilon,k} dxdz - \int_{\Omega_m} \underline{\eta}^{\varepsilon,k}.\nabla_x v^\varepsilon_{n+1}\phi \; dxdz - \int_{\Omega_m} \sum_{i=1}^{n} \mu^\varepsilon \frac{\partial q_i^\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial \zeta^{\varepsilon,k}}{\partial x_i}\phi \; dxdz \\ \displaystyle -\int_{\Omega_m} \sum_{j=1}^{n} [q^\varepsilon]_{n+1 n+1}\frac{\partial \zeta^{\varepsilon,k}}{\partial z}\phi \; dxdz + \frac{1}{2}\int_{\Omega_m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial z}(\underline{d}^{\varepsilon,k})_i \; \phi \; dxdz \\ \displaystyle + \int_{\Omega_m} (\xi^\varepsilon\nabla\phi).\vec{\psi}^{\varepsilon,k} - \frac{1}{2}\int_{\Omega_m} u^\varepsilon_{n+1}\; (\underline{d}^{\varepsilon,k}.\nabla_x\phi)\; dxdz \\ \displaystyle + \int_{\Omega_m} \sum_{i=1}^{n} [\xi^\varepsilon]_{n+1 n+1}\frac{\partial \psi^{\varepsilon,k}}{\partial z}\phi \; dxdz. \end{cases}$$

Maintenant nous allons passer à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ dans l'expression précédente. Pour cela, nous avons besoin de quelques résultats préliminaires.

D'après la convergence (4.3.5) a), on a

$$(4.3.23)\qquad \vec{\zeta}^{\varepsilon,k} \to \vec{\zeta}^k = (\underline{0}, 2y_k) \text{ dans } L^2(\Omega_m) \text{ faible.}$$

De même d'après (4.3.12) a), on a

$$\vec{\psi}^{\varepsilon,k} \to 0 \text{ dans } L^2(\Omega_m) \text{ faible.} \tag{4.3.24}$$

Regardons ce qui se passe pour le membre de gauche de (4.3.22).

En intégrant par parties et en utilisant (4.1.10), (4.1.17) et (4.3.24), on obtient

$$\int_{\Omega_m} (\vec{f^\varepsilon} - \nabla p^\varepsilon + \vec{\theta}).\vec{\psi}^{\varepsilon,k} \phi dxdz \to 0. \tag{4.3.25}$$

De même après intégration par parties et d'après les convergences (4.1.11) et (4.3.23), on a

$$\int_{\Omega_m} \nabla p'^{\varepsilon}.\vec{\zeta}^{\varepsilon,k} \phi dxdz \to \int_{\Omega_m} \nabla p'.\vec{\zeta}^k \phi dxdz. \tag{4.3.26}$$

Intéressons-nous, à présent, au membre de droite.

D'après (4.1.13) et (4.3.23), on a facilement

$$-\int_{\Omega_m} (q^\varepsilon \nabla\phi).\vec{\zeta}^{\varepsilon,k} dxdz \to -\int_{\Omega_m} (q\nabla\phi).\vec{\zeta}^k dxdz. \tag{4.3.27}$$

En intégrant par parties la deuxième intégrale et en usant des convergences (4.1.7) et (4.3.5) c), on a (de nouveau après intégration par parties) :

$$-\int_{\Omega_m} \underline{\eta}^{\varepsilon,k}.\nabla_x v^\varepsilon_{n+1}\phi \ dxdz \to -\int_{\Omega_m} \underline{\eta}^k.\nabla_x v_{n+1}\phi \ dxdz. \tag{4.3.28}$$

En intégrant par parties la troisième intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega_m} \sum_{i=1}^n \mu^\varepsilon \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial \zeta^{\varepsilon,k}}{\partial x_i}\phi \ dxdz = \sum_{i=1}^n {}_{H^{-1}(\Omega')} < \frac{\partial}{\partial z}(\underline{\eta}^{\varepsilon,k})_i, \phi v_i^\varepsilon >_{H_0^1(\Omega')} \\ + \int_{\Omega_m} \sum_{i=1}^n (\underline{\eta}^{\varepsilon,k})_i \ v_i^\varepsilon \frac{\partial\phi}{\partial z} \ dxdz, \end{aligned} \tag{4.3.29}$$

où Ω' est tel que $\Omega' \subset\subset \Omega_m$ et supp $\phi \subset \Omega'$.

Or d'après les convergences (4.3.5) d), (4.1.7) et (4.3.5) c), on peut passer à la limite à droite dans l'expression ci-dessus. On obtient donc en intégrant par parties

$$-\int_{\Omega_m}\sum_{i=1}^{n}\mu^{\varepsilon}\frac{\partial v_i^{\varepsilon}}{\partial z}\frac{\partial \zeta^{\varepsilon,k}}{\partial x_i}\phi\ dxdz \to -\int_{\Omega_m}\sum_{i=1}^{n}(\underline{\eta}^k)_i\ \frac{\partial v_i}{\partial z}\phi\ dxdz. \tag{4.3.30}$$

D'une part d'après (4.1.13) et(4.3.5) b) pour la quatrième intégrale, et d'autre part d'après (4.1.12) et (4.3.12) b) pour la dernière intégrale, on voit aisément que ces intégrales ont pour limite 0.
De même, pour la sixième intégrale, en effet d'après (4.1.12) et (4.3.12) a), on a

$$-\int_{\Omega_m}(\xi^{\varepsilon}\nabla\phi).\vec{\psi}^{\varepsilon,k}\ dxdz \rightharpoonup 0. \tag{4.3.31}$$

Pour la septième intégrale,

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_m}u_{n+1}^{\varepsilon}\ (\underline{d}^{\varepsilon,k}.\nabla_x\phi)\ dxdz \to -\frac{1}{2}\int_{\Omega_m}u_{n+1}^{0}\ (\underline{d}^{k}.\nabla_x\phi)\ dxdz. \tag{4.3.32}$$

En intégrant par parties la cinquième intégrale, on aboutit à

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\Omega_m}\sum_{i=1}^{n}(\underline{d}^{\varepsilon,k})_i\ \frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial z}\ \phi\ dxdz = &-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ {}_{H^{-1}(\Omega')}< \frac{\partial}{\partial z}(\underline{d}^{\varepsilon,k})_i, \phi u_i^{\varepsilon} >_{H_0^1(\Omega')}\\ &-\frac{1}{2}\int_{\Omega_m}\sum_{i=1}^{n}(\underline{d}^{\varepsilon,k})_i\ u_i^{\varepsilon}\frac{\partial \phi}{\partial z}\ dxdz,\end{aligned} \tag{4.3.33}$$

où Ω' est tel que $\Omega' \subset\subset \Omega_m$ et supp $\phi \subset \Omega'$.
Or d'après les convergences (4.3.12) d), (4.1.5) et (4.3.12) c), on peut à présent passer à la limite dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus. On obtient donc en intégrant à nouveau par parties la convergence suivante

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_m}\sum_{i=1}^{n}(\underline{d}^{\varepsilon,k})_i\ \frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial z}\ \phi\ dxdz \to \frac{1}{2}\int_{\Omega_m}\sum_{i=1}^{n}(\underline{d}^{k})_i\ \frac{\partial u_i}{\partial z}\ \phi\ dxdz \tag{4.3.34}$$

Finalement en utilisant (4.3.25)-(4.3.28), (4.3.30)-(4.3.32) et (4.3.34), l'expression (4.3.22) devient à la limite

(4.3.35)
$$\left\{\begin{aligned} \int_{\Omega_m} \nabla p'.\vec{\zeta}^k \phi dxdz = &-\int_{\Omega_m} (q\nabla\phi).\vec{\zeta}^k dxdz - \int_{\Omega_m} \underline{\eta}^k.\nabla_x v_{n+1}\phi\ dxdz \\ &- \int_{\Omega_m} \sum_{i=1}^{n} (\underline{\eta}^k)_i \frac{\partial v_i}{\partial z}\phi\ dxdz - \frac{1}{2}\int_{\Omega_m} u_{n+1}\ (\underline{d}^k.\nabla_x\phi)\ dxdz \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\Omega_m} \sum_{i=1}^{n} (\underline{d}^k)_i\ \frac{\partial u_i}{\partial z}\ \phi\ dxdz. \end{aligned}\right.$$

En intégrant par parties cette dernière expression, en tenant compte de la deuxième équation du problème (4.1.14) et de (4.3.13), et en regroupant judicieusement certaines intégrales, on aboutit à

$$(4.3.36)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 = &\int_{\Omega_m} q : e(\vec{\zeta}^k)\ \phi\ dxdz - \int_{\Omega_m} \sum_{i=1}^{n} 2(\underline{\eta}^k)_i\ \left[e(\vec{v})\right]_{n+1i}\ \phi\ dxdz \\ &+ \int_{\Omega_m} \sum_{i=1}^{n} (\underline{d}^k)_i\ \left[e(\vec{u})\right]_{n+1i}\ \phi\ dxdz. \end{aligned}\right.$$

On a donc au sens des distributions, en utilisant le fait que $q : e(\vec{\zeta}^k) = 2[q]_{n+1k}$,

$$(4.3.37)\qquad [q]_{n+1k} = \sum_{i=1}^{n} (\underline{\eta}^k)_i\ \left[e(\vec{v})\right]_{n+1i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (\underline{d}^k)_i\ \left[e(\vec{u})\right]_{n+1i}.$$

En utilisant les définitions (4.3.5) c) et (4.3.12) c) de $\underline{\eta}^k$ et de $\underline{d}^k$, on a

$$(4.3.38)\qquad \left\{\begin{aligned} [q]_{n+1k} = &\frac{1}{|Y|}\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_Y \mu\ \frac{\partial(-\varphi^k + 2y_k)}{\partial y_i}\ dy\right\}\left[e(\vec{v})\right]_{n+1i} \\ &-\frac{1}{2|Y|}\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_Y \left(2\mu\ \frac{\partial\psi^k}{\partial y_i} + \frac{\partial(-\varphi^k + 2y_k)}{\partial y_i}\right)\ dy\right\}\left[e(\vec{u})\right]_{n+1i}. \end{aligned}\right.$$

Or d'après la proposition 3.1, on a

$$(4.3.39)\qquad \int_Y \mu\ \frac{\partial(-\varphi^k + 2y_k)}{\partial y_i}\ dy = \int_Y \mu\ \frac{\partial(-\varphi^i + 2y_i)}{\partial y_k}\ dy,$$

et d'après la proposition 3.2, on a

$$\int_Y \left(2\mu\ \frac{\partial \psi^k}{\partial y_i} + \frac{\partial(-\varphi^k + 2y_k)}{\partial y_i}\right)\ dy = \int_Y \left(2\mu\ \frac{\partial \psi^i}{\partial y_k} + \frac{\partial(-\varphi^i + 2y_i)}{\partial y_k}\right)\ dy. \tag{4.3.40}$$

Par conséquent, en utilisant (4.3.39) et (4.3.40) dans (4.3.38) on obtient le résultat annoncé, à savoir

$$\left\{\begin{array}{l} [q]_{n+1k} = \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_Y \mu\ \frac{\partial(-\varphi^i + 2y_i)}{\partial y_k}\ dy\right\}\big[e(\vec{v})\big]_{n+1i} \\ -\dfrac{1}{2|Y|}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_Y \left(2\mu\ \frac{\partial \psi^i}{\partial y_k} + \frac{\partial(-\varphi^i + 2y_i)}{\partial y_k}\ dy\right\}\big[e(\vec{u})\big]_{n+1i}. \end{array}\right. \tag{4.3.41}$$

La matrice q^ε étant symétrique, cela implique que q est symétrique et par conséquent $[q]_{n+1k} = [q]_{kn+1}$. Ceci achève la démonstration.

4.4. Identification de $[q]_{n+1n+1}$ dans Ω_m

On énonce et on démontre le résultat suivant qui permet l'identification de la dernière composante de q :

Proposition 4.10 $[q^\varepsilon]_{n+1n+1} \to [q]_{n+1n+1}$ *dans* $L^2(\Omega_m)$ *faible (à une sous-suite près) où*

$$[q]_{n+1n+1} = \left\{\frac{1}{|Y|}\int_Y 2\mu\ dy\right\}\big[e(\vec{v})\big]_{n+1n+1} - \big[e(\vec{u})\big]_{n+1n+1}. \tag{4.4.1}$$

Démonstration

Pour démontrer ce résultat, nous allons procéder comme dans [1] ou [2]: on va utiliser la méthode de Brizzi [5].

On sait d'après (4.1.2) que $[q^\varepsilon]_{n+1n+1} = 2\mu^\varepsilon \dfrac{\partial v^\varepsilon_{n+1}}{\partial z} - \dfrac{\partial u^\varepsilon_{n+1}}{\partial z}$ et de plus $\mu^\varepsilon = \mu_1 \chi_{\Omega_1^\varepsilon \cap \Omega_m} + \mu_2 \chi_{\Omega_2^\varepsilon \cap \Omega_m}$, par conséquent

$$\left\{\begin{array}{l} [q^\varepsilon]_{n+1n+1} = 2\mu_1\ P_1\left(\dfrac{\partial (v^\varepsilon_{n+1})_1}{\partial z}\right) + 2\mu_2\ P_2\left(\dfrac{\partial (v^\varepsilon_{n+1})_2}{\partial z}\right) \\ \qquad -P_1\left(\dfrac{\partial (u^\varepsilon_{n+1})_1}{\partial z}\right) - P_2\left(\dfrac{\partial (u^\varepsilon_{n+1})_2}{\partial z}\right), \end{array}\right. \tag{4.4.2}$$

où $(u^\varepsilon_{n+1})_i = u^\varepsilon_{n+1}|_{\Omega^\varepsilon_i}$, $(v^\varepsilon_{n+1})_i = v^\varepsilon_{n+1}|_{\Omega^\varepsilon_i}$ $(i = 1, 2)$ et l'opérateur P_i représente le prolongement par 0 dans $\Omega \setminus \Omega^\varepsilon_i$ $(i = 1, 2)$.
On arrive facilement à montrer que $P_i\left(\frac{\partial (u^\varepsilon_{n+1})_i}{\partial z}\right)$ et $P_i\left(\frac{\partial (v^\varepsilon_{n+1})_i}{\partial z}\right)$ sont bornés dans $L^2(\Omega_m)$, par conséquent par extraction de sous-suites, il existe ν_i et $\gamma_i \in L^2(\Omega_m)$ tels que

(4.4.3) $$P_i\left(\frac{\partial (u^\varepsilon_{n+1})_i}{\partial z}\right) \rightharpoonup \nu_i \text{ dans } L^2(\Omega_m) \text{ faible}$$

et

(4.4.4) $$P_i\left(\frac{\partial (v^\varepsilon_{n+1})_i}{\partial z}\right) \rightharpoonup \gamma_i \text{ dans } L^2(\Omega_m) \text{ faible.}$$

Nous allons à présent identifier ces deux limites.

Concernant ν_i, on a

(4.4.5) $$\begin{cases} \nu_1 = \rho(x,z)\dfrac{\partial u_{n+1}}{\partial z} \\ \nu_2 = (1-\rho(x,z))\dfrac{\partial u_{n+1}}{\partial z} \end{cases}$$

où ρ est défini par (4.1.16). (voir Baffico & Conca [3]).

De la même manière, nous allons expliciter γ_i.
Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors

(4.4.6) $$\begin{aligned} {}_{H^{-1}(\Omega')}< \frac{\partial}{\partial z}(\chi_{\Omega^\varepsilon_1\cap\Omega_m}), \phi\, v^\varepsilon_{n+1} >_{H^1_0(\Omega')} = &-\int_{\Omega_m} \chi_{\Omega^\varepsilon_1\cap\Omega_m}\, v^\varepsilon_{n+1}\frac{\partial \phi}{\partial z}\, dxdz \\ &-\int_{\Omega_m} P_i\left(\frac{\partial (v^\varepsilon_{n+1})_i}{\partial z}\right)\phi\, dxdz. \end{aligned}$$

On passe à la limite dans le membre de gauche, en appliquant le lemme de compacité de Murat (lemme 4.3) à la suite $\{\frac{\partial}{\partial z}(\chi_{\Omega^\varepsilon_1\cap\Omega_m})\}_{\varepsilon>0}$ (cette suite vérifie les hypothèses du lemme voir [1] ou [5]) et en utilisant (4.1.7). Pour le membre de droite, on utilise (4.1.5), (4.1.15) et (4.4.4). Il en résulte

(4.4.7) $$\begin{aligned} {}_{H^{-1}(\Omega')}< \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{|O(z)|}{|Y|}\right), \phi\, v_{n+1} >_{H^1_0(\Omega')} = &-\int_{\Omega_m}\left(\frac{|O(z)|}{|Y|}\right) v^0_{n+1}\frac{\partial \phi}{\partial z}\, dxdz \\ &-\int_{\Omega_m} \gamma_1\, \phi\, dxdz. \end{aligned}$$

On développe le produit de dualité dans l'expression précédente, on obtient donc au sens des distributions l'égalité suivante

$$\gamma_1 = \rho(x,z)\frac{\partial v_{n+1}}{\partial z} \tag{4.4.8}$$

De même, en passant à la limite dans $< \dfrac{\partial}{\partial z}(\chi_{\Omega_2^\varepsilon \cap \Omega_m}), \phi \ v_{n+1}^\varepsilon >$ et en utilisant à nouveau le lemme de compacité, on obtient

$$\gamma_2 = (1-\rho(x,z))\frac{\partial v_{n+1}}{\partial z}. \tag{4.4.9}$$

D'après (4.4.3), (4.4.4), on a $[q]_{n+1n+1} = 2\mu_1\gamma_1 + 2\mu_2\gamma_2 - \nu_1 - \nu_2$. Par conséquent, à l'aide de (4.4.5), (4.4.8) et (4.4.9), on aboutit à

$$[q]_{n+1n+1} = 2\Big(\mu_1\rho(x,z) + \mu_2\big(1-\rho(x,z)\big)\Big)\frac{\partial v_{n+1}}{\partial z} - \frac{\partial u_{n+1}}{\partial z}, \tag{4.4.10}$$

ce qui donne le résultat annoncé, à savoir

$$[q]_{n+1n+1} = \left\{\frac{1}{|Y|}\int_Y 2\mu \ dy\right\}\big[e(\vec{v})\big]_{n+1n+1} - \big[e(\vec{u})\big]_{n+1n+1}. \tag{4.4.11}$$

Ceci termine la démonstration.

4.5. Identification de q dans Ω_1 et Ω_2

Proposition 4.11 *Pour $i = 1,2$ $\quad q^\varepsilon|_{\Omega_i} \rightharpoonup q|_{\Omega_i}$ dans $L^2(\Omega_m)^{n+1^2}$ faible (à une sous suite près)*
où

$$q|_{\Omega_i} = 2\mu_i e(\vec{v}|_{\Omega_i}) - e(\vec{u}|_{\Omega_i}). \tag{4.5.1}$$

Démonstration

D'après (4.1.2), on a

$$q^\varepsilon|_{\Omega_i} = 2\mu_i e(\vec{v}^\varepsilon|_{\Omega_i}) - e(\vec{u}^\varepsilon|_{\Omega_i}). \tag{4.5.2}$$

Le résultat est immédiat, on utilise pour ce faire les convergences (4.1.5), (4.1.7) et (4.1.13).

4.6. Conclusion

D'après les propositions 4.6, 4.9, 4.10 et 4.11, la définition (3.1.3) du tenseur $\mathcal{A}$ et la définition (3.1.7) du tenseur $\mathcal{B}$, on conclut que $q, \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés par la relation (4.1.18). Par conséquent, comme q vérifie le problème (4.1.14) et d'après la proposition 4.2, on a bien que $(\vec{u}, p)$ et $(\vec{v}, p)$ sont solutions de (3.1.16).
D'après les propriétés des tenseurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, le problème (3.1.16) admet une unique solution, par conséquent les suites toutes entières $\vec{u}^{\varepsilon}$ et $\vec{v}^{\varepsilon}$ convergent vers $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement .
Ceci achève la démonstration du théorème 3.4.

5. CONTROLE OPTIMAL

Nous allons appliquer les résultats obtenus précédemment pour l'étude du contrôle optimal que l'on a introduit au paragraphe 2.1.

Soit le résultat de convergence suivant

Théorème 5.1 *Pour θ fixé dans $\mathcal{U}_{ad}$, on considère $(\vec{u}, p)$ solution de*

$$\begin{cases} -\ div\ (\mathcal{A}\ e(\vec{u})) = \vec{f} - \nabla p + \vec{\theta} \quad dans \quad \Omega \\ div\ \vec{u} = 0 \quad dans\ \Omega \\ \vec{u} = 0 \quad sur\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

la fonction coût étant définie par

$$J_0(\vec{\theta}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \mathcal{B}\ e(\vec{u}) : e(\vec{u})\ dxdz + \frac{N}{2}\int_\Omega |\vec{\theta}|^2 dxdz. \tag{5.2}$$

Alors le contrôle optimal $\vec{\theta}^{\varepsilon}_{\star}$ du problème (2.2.1)-(2.2.3) vérifie

$$\vec{\theta}^{\varepsilon}_{\star} \to \vec{\theta}_{\star} \quad dans \quad L^2(\Omega)^{n+1} \quad fort$$

et $\vec{\theta}_\star$ *satisfait la condition d'optimalité*

$$J_0(\vec{\theta}_\star) = \min_{\vec{\theta}\in\mathcal{U}_{ad}} J_0(\vec{\theta}), \tag{5.3}$$

De plus

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(\vec{\theta}^\varepsilon_\star) = J_0(\vec{\theta}_\star). \tag{5.4}$$

Démonstration

Première étape : *Estimations a priori*

D'après la définition du contrôle optimal, on a pour tout $\vec{\theta}$ dans $\mathcal{U}_{ad}$

$$\frac{N}{2}\|\vec{\theta}^\varepsilon_\star\|_{L^2(\Omega)^{n+1}} \leq J_\varepsilon(\vec{\theta}^\varepsilon_\star) \leq J_\varepsilon(\vec{\theta}) \leq C, \tag{5.5}$$

Donc $\|\vec{\theta}^\varepsilon_\star\|_{L^2(\Omega)^{n+1}}$ est borné et par extraction de sous-suite, on a

$$\vec{\theta}^\varepsilon_\star \rightharpoonup \vec{\theta}_\star \ \text{ dans } \ L^2(\Omega)^{n+1} \ \text{ faible}, \tag{5.6}$$

en fait la convergence est forte dans $L^2(\Omega)^{n+1}$, on le verra plus loin dans la démonstration (cf 5.19). Soit $(\vec{u}^\varepsilon_\star, p^\varepsilon_\star)$ et $(\vec{v}^\varepsilon_\star, p'^\varepsilon_\star)$ l'état optimal et l'état adjoint optimal (respectivement) associés à $\vec{\theta}^\varepsilon_\star$. On reprend les mêmes arguments utilisés dans la démonstration du Théorème 3.4 (le fait de remplacer $\vec{\theta}$ par $\vec{\theta}^\varepsilon_\star$ dans l'équation d'état ne pose aucun problème) et on obtient

$$\begin{cases} \vec{u}^\varepsilon_\star \rightharpoonup \vec{u}_\star \text{ dans } H^1(\Omega)^{n+1} \text{ faible} \\ p^\varepsilon_\star \rightharpoonup p_\star \text{ dans } L^2_0(\Omega) \text{ faible} \\ \vec{v}^\varepsilon_\star \rightharpoonup \vec{v}_\star \text{ dans } H^1(\Omega)^{n+1} \text{ faible} \\ p'^\varepsilon_\star \rightharpoonup p'_\star \text{ dans } L^2_0(\Omega) \text{ faible} \end{cases} \tag{5.7}$$

où $(\vec{u}_\star, p_\star)$ et $(\vec{v}_\star, p'_\star)$ sont solutions de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\big(\mathcal{A}\, e(\vec{u}_\star)\big) = \vec{f} - \nabla p_\star + \vec{\theta}_\star \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div}\big(\mathcal{A}\, e(\vec{v}_\star) - \mathcal{B}\, e(\vec{u}_\star)\big) = -\nabla p'_\star \ \text{ dans } \ \Omega \\ \operatorname{div} \vec{u}_\star = \operatorname{div} \vec{v}_\star = 0 \text{ dans } \Omega \\ \vec{u}_\star = \vec{v}_\star = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.8}$$

le contrôle optimal $\vec{\theta}_\star$ est caractérisé par l'inégalité variationnelle

$$\vec{\theta}_\star \in \mathcal{U}_{ad} \text{ et } \int_\Omega (\vec{v}_\star + N\vec{\theta}_\star).(\vec{\theta} - \vec{\theta}_\star) \geq 0 \forall \vec{\theta} \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Deuxième étape : *Convergence de l'énergie*

En intégrant par parties et en utilisant la seconde équation de (2.2.5), on aboutit à

$$\text{(5.9)} \quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega e(\vec{u}^\varepsilon_\star) : e(\vec{u}^\varepsilon_\star)\ dxdz = -\int_\Omega \text{div}\ (e(\vec{u}^\varepsilon_\star)).\vec{u}^\varepsilon_\star\ dxdz \\ \displaystyle\qquad = -\int_\Omega \text{div}\ (2\mu^\varepsilon e(\vec{v}^\varepsilon_\star)).\ \vec{u}^\varepsilon_\star\ dxdz - \int_\Omega \nabla p'^\varepsilon_\star.\vec{u}^\varepsilon_\star\ dxdz. \end{cases}$$

En intégrant maintenant par parties le membre de droite de (5.9) et d'après la première équation de (2.2.5), on obtient

$$\text{(5.10)} \quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega e(\vec{u}^\varepsilon_\star) : e(\vec{u}^\varepsilon_\star)\ dxdz = \int_\Omega 2\mu^\varepsilon e(\vec{v}^\varepsilon_\star) :\ e(\vec{u}^\varepsilon_\star)\ dxdz \\ \displaystyle\qquad = \int_\Omega 2\mu^\varepsilon e(\vec{u}^\varepsilon_\star) :\ e(\vec{v}^\varepsilon_\star)\ dxdz \\ \displaystyle\qquad = -\int_\Omega \text{div}\ (2\mu^\varepsilon e(\vec{u}^\varepsilon_\star)).\ \vec{v}^\varepsilon_\star\ dxdz \\ \displaystyle\qquad = \int_\Omega (\vec{f}^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon_\star + \vec{\theta}^\varepsilon_\star).\ \vec{v}^\varepsilon_\star\ dxdz. \end{cases}$$

En utilisant les convergences (4.1.17),(5.7) et (5.8), on a

$$\text{(5.11)} \qquad \int_\Omega e(\vec{u}^\varepsilon_\star) : e(\vec{u}^\varepsilon_\star)\ dxdz \to \int_\Omega (\vec{f} - \nabla p_\star + \vec{\theta}_\star).\vec{v}_\star\ dxdz.$$

En utilisant la première équation de (5.8) et par intégration par parties dans le membre de droite de (5.11), on obtient (en utilisant les propriétés de symétrie de $\mathcal{A}$)

$$\text{(5.12)} \quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (\vec{f} - \nabla p_\star + \vec{\theta}_\star).\vec{v}_\star\ dxdz = -\int_\Omega \text{div}\ (\mathcal{A}\ e(\vec{u}_\star)).\ \vec{v}_\star\ dxdz \\ \displaystyle\qquad = -\int_\Omega \mathcal{A}\ e(\vec{u}_\star)\ : e(\vec{v}_\star)\ dxdz \\ \displaystyle\qquad = -\int_\Omega e(\vec{u}_\star)\ : \mathcal{A}\ e(\vec{v}_\star)\ dxdz \\ \displaystyle\qquad = -\int_\Omega \text{div}\ (\mathcal{A}\ e(\vec{v}_\star)).\ \vec{u}_\star\ dxdz. \end{cases}$$

Maintenant d'après la seconde équation de (5.9) et en intégrant par parties dans la dernière intégrale de (5.12), on aboutit à

(5.13)
$$\left\{\begin{aligned} -\int_\Omega \text{div }(\mathcal{A}\ e(\vec{v}_\star)).\ \vec{u}_\star\ dxdz &= -\int_\Omega \text{div }(\mathcal{B}\ e(\vec{u}_\star)).\ \vec{u}_\star\ dxdz + \int_\Omega \nabla p'_\star.\vec{u}_\star\ dxdz \\ &= -\int_\Omega \text{div }(\mathcal{B}\ e(\vec{u}_\star)).\ \vec{u}_\star\ dxdz \\ &= \int_\Omega \mathcal{B}\ e(\vec{u}_\star)\ : e(\vec{u}_\star)\ dxdz. \end{aligned}\right.$$

Finalement, d'après (5.10)-(5.14), on obtient la convergence de l'énergie suivante

(5.14)
$$\int_\Omega e(\vec{u}^\varepsilon_\star) : e(\vec{u}^\varepsilon_\star)\ dxdz \to \int_\Omega \mathcal{B}\ e(\vec{u}_\star)\ : e(\vec{u}_\star)\ dxdz.$$

Troisième étape

D'après la définition du contrôle optimal (cf (1.3)), on a

(5.15)
$$\forall\ \vec{\theta} \in \mathcal{U}_{ad} \quad J_\varepsilon(\vec{\theta}) \geq J_\varepsilon(\vec{\theta}^\varepsilon_\star).$$

En passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

(5.16)
$$J_0(\vec{\theta}) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega \mathcal{B}\ e(\vec{u}_\star)\ : e(\vec{u}_\star)\ dxdz + \frac{N}{2}\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega |\vec{\theta}^\varepsilon_\star|^2\ dxdz.$$

En particulier pour $\vec{\theta} = \vec{\theta}_\star$, on a

(5.17)
$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega |\vec{\theta}^\varepsilon_\star|^2\ dxdz \leq \int_\Omega |\vec{\theta}_\star|^2\ dxdz.$$

En utilisant (5.6) et (5.17), on a

(5.18)
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega |\vec{\theta}^\varepsilon_\star|^2\ dxdz = \int_\Omega |\vec{\theta}_\star|^2\ dxdz.$$

Avec (5.16) et (5.18), on obtient (5.3). Avec (5.14) et (5.18), on a (5.4).
De plus d'après (5.6) et (5.18), on a

(5.19)
$$\vec{\theta}^\varepsilon_\star \to \vec{\theta}_\star \text{ dans } L^2(\Omega)^{n+1} \text{ fort.}$$

Ceci achève la démonstration.

6. LE CAS $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, il est possible de trouver explicitement les solutions des problèmes (3.1.1), (3.1.2), (3.1.5) et (3.1.6) et donc valider les hypothèses (4.2.1), (4.2.4), (4.2.6), (4.2.9), (4.3.1), (4.3.4), (4.3.7) et (4.3.11) introduites tout au long de ce chapitre. Pour la décomposition de Y, il faut se référer à la figure 2 (à gauche).

Dans ce cas, ces problèmes deviennent des équations différentielles ordinaires dans $Y =]0,1[$ avec des conditions de périodicité aux bords.

Les problèmes (3.1.1) et (3.1.2) deviennent

$$(6.1) \qquad \begin{cases} -\dfrac{d}{dy}\left(2\mu \, \dfrac{d}{dy}(-\chi + y)\right) = -\dfrac{dr_1}{dy} & \text{dans } \;]0,\, 1[\\ \dfrac{d\chi}{dy} = 0 & \text{dans } \;]0,\, 1[\\ \chi(0) = \chi(1), r_1(0) = r_1(1) & \end{cases}$$

et

$$(6.2) \qquad \begin{cases} -\dfrac{d}{dy}\left(\mu \, \dfrac{d}{dy}(-\varphi + 2y)\right) = 0 & \text{dans } \;]0,\, 1[\\ \varphi(0) = \varphi(1). & \end{cases}$$

On a le résultat suivant (du à Baffico & Conca [3]) :

Proposition 6.1 *$\forall z \in [0, h_1[$ fixé. Soit χ, r_1 et φ définis par*

$$\begin{cases} \chi = 0 \\ r_1 = 2\mu \end{cases}$$

et

$$\varphi(y) = \begin{cases} (2 - \dfrac{C}{\mu_2})y & si \ y \in]0, a(z)[\\ (2 - \dfrac{C}{\mu_1})y + a(\dfrac{C}{\mu_1} - \dfrac{C}{\mu_2}) & si \ y \in]a(z), b(z)[\\ (2 - \dfrac{C}{\mu_2})y + (a-b)(\dfrac{C}{\mu_1} - \dfrac{C}{\mu_2}) & si \ y \in]b(z), 1[\end{cases}$$

avec $a = a(z)$ *et* $b = b(z)$ *et*

$$C = C(z) = 2\left(\frac{1}{|Y|}\int_Y \frac{1}{\mu}\, dy\right)^{-1}$$

Alors (χ, r_1) *et* φ *sont les uniques solutions (à une constante additive près) des problèmes* (6.1) *et* (6.2).

Remarque 6.2 On peut calculer ce que vaut $C(z)$, on obtient

$$C(z) = \frac{2\mu_1\mu_2}{(\mu_2 - \mu_1)(b(z) - a(z)) + \mu_1}.$$

En étudiant la régularité des solutions des problèmes (6.1) et (6.2) et en supposant que $\mu_2 < \mu_1$, les hypothèses (4.2.1), (4.2.4), (4.3.1) et (4.3.4) sont satisfaites (cf [3]).

Etudions à présent les problèmes (3.1.5) et (3.1.6), ils deviennent respectivement

$$(6.3) \qquad \begin{cases} -\dfrac{d}{dy}\left(2\mu\, \dfrac{d\lambda}{dy} + \dfrac{d}{dy}(-\chi + y)\right) = -\dfrac{dr_2}{dy} & \text{dans }]0,\, 1[\\ \dfrac{d\lambda}{dy} = 0 & \text{dans }]0,\, 1[\\ \lambda(0) = \lambda(1),\ r_2(0) = r_2(1) & \end{cases}$$

et

$$(6.4) \qquad \begin{cases} -\dfrac{d}{dy}\left(\mu\, \dfrac{d\psi}{dy} + \dfrac{d}{dy}(-\varphi + 2y)\right) = 0 & \text{dans }]0,\, 1[\\ \psi(0) = \psi(1). & \end{cases}$$

Proposition 6.3 $\forall z \in [0, h_1[$ *fixé. Soit* λ, r_2 *et* ψ *définis par*

$$\begin{cases} \lambda = c_1 \\ r_2 = c_2 \end{cases}$$

où c_1 *et* c_2 *sont des constantes et*

$$\psi(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\mu_2}(K - \dfrac{C}{\mu_2})y & \textit{si } y \in]0, a(z)[\\ \dfrac{1}{2\mu_1}(K - \dfrac{C}{\mu_1})y + a\left((\dfrac{K}{2\mu_2} - \dfrac{K}{2\mu_1}) - (\dfrac{C}{2\mu_2^2} - \dfrac{C}{2\mu_1^2})\right) & \textit{si } y \in]a(z), b(z)[\\ \dfrac{1}{2\mu_2}(K - \dfrac{C}{\mu_1})y + (a - b)\left((\dfrac{K}{2\mu_2} - \dfrac{K}{2\mu_1}) - (\dfrac{C}{2\mu_2^2} - \dfrac{C}{2\mu_1^2})\right) & \textit{si } y \in]b(z), 1[\end{cases}$$

avec

$$K = K(z) = \frac{C}{2\mu_1\mu_2}\big(2(\mu_1+\mu_2) - C\big)$$

(C étant défini dans la proposition 6.1*). Alors* (λ, r_2) *et* ψ *sont les uniques solutions (à une constante additive près) des problèmes* (6.3) *et* (6.4).

Il nous reste donc à vérifier que les hypothèses (4.2.6), (4.2.9),(4.3.7) et (4.3.11) sont satisfaites. D'où la remarque suivante

Remarque 6.4

D'après la proposition 6.3, il est facile de voir que $\lambda = c_1$ vérifie l'hypothèse (4.2.6).

De plus l'hypothèse (4.2.9), n'est plus nécessaire car car on peut directement passer à la limite dans $< \frac{\partial}{\partial z} r_2^\varepsilon, u_{n+1}^\varepsilon >$ en utilisant la forme explicite de r_2 et de r_2^ε.

Ensuite, d'après l'expression de ψ (voir proposition 6.3), et comme la fonction h satisfait i) et ii) (voir paragraphe 2), on montre que $\psi \in H^1_{\text{loc}}(Y \times [0, h_1[)$ (vue comme fonction des variables y et z). Par conséquent l'hypothèse (4.3.7) est satisfaite. Nous allons montrer ce résultat.

En effet, cela provient du fait que ψ est une fonction de $a(z)$ et de $b(z)$ et que ces fonctions sont définies implicitement par la fonction h ($h(a(z)) = z$ et $h(b(z)) = z$). Par conséquent par le théorème des fonctions implicites, la régularité de $a(z)$ et de $b(z)$ dépend de celle de la fonction h et des hypothèses i) et ii) sur h (cf paragraphe 2). Or par hypothèse, on choisit h de manière qu'elle soit assez régulière.

En conclusion, si $h \in \mathcal{C}^1(\bar{Y})$ alors $\psi = \psi(y,z) \in H^1_{\text{loc}}(Y \times [0, h_1[)$. Et donc ψ vérifie (4.3.7).

Concernant l'hypothèse (4.3.11), comme on peut explicitement calculer $\dfrac{\partial \psi}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$, l'expression (4.3.9) devient $d^\varepsilon = K(z)$ où K est défini dans la proposition 6.3.
Le point a) de l'hypothèse (4.3.11), provient de la régularité de $K(z)$ qui provient elle-même de celle de $C(z)$.
Pour le point b), on doit vérifier que $\dfrac{\partial d^\varepsilon}{\partial z} \geq 0$ au sens des distributions, c'est à dire

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \phi \geq 0 \qquad < \frac{\partial d^{\varepsilon}}{\partial z}, \phi > \geq 0.$$

D'après l'expression de K et après calculs, on obtient

$$< \frac{\partial d^{\varepsilon}}{\partial z}, \phi >= - < C(z)\big(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\big) - \frac{C(z)^2}{2\mu_1\mu_2}, \frac{\partial \phi}{\partial z} >,$$

or d'après [3], si $\mu_2 < \mu_1$, on a $- < C(z), \dfrac{\partial \phi}{\partial z} > \geq 0$, et comme $\mu_1, \mu_2 > 0$, par conséquent

$$- < C(z)\big(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\big), \frac{\partial \phi}{\partial z} > \geq 0.$$

De même $< \dfrac{C(z)^2}{2\mu_1\mu_2}, \dfrac{\partial \phi}{\partial z} > \geq 0$, par conséquent on obtient bien que $\dfrac{\partial d^{\varepsilon}}{\partial z} \geq 0$ au sens des distributions.

Le point b) de (4.3.11) est donc démontré.

Remarque 6.5

Les propositions 6.1 et 6.3 nous permettent de calculer explicitement les coefficients des tenseurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Pour le tenseur $\mathcal{A}$ (cf [3]),

$$a_{1111} = a_{2222} = \begin{cases} 2\mu_1 & h_1 < z < z_0 \\ 2\mu^{\star} & 0 < z < h_1 \\ 2\mu_2 & -z_0 < z < 0 \end{cases}$$

$$a_{1212} = a_{1221} = a_{2112} = a_{2121} \begin{cases} \mu_1 & h_1 < z < z_0 \\ \mu^{+} & 0 < z < h_1 \\ \mu_2 & -z_0 < z < 0 \end{cases}$$

où $\mu^{\star} = \dfrac{1}{|Y|} \displaystyle\int_Y \mu \, dy$ et $\mu^{+} = \left(\dfrac{1}{|Y|} \displaystyle\int_Y \frac{1}{\mu} \, dy \right)^{-1} = \dfrac{C(z)}{2}$, les autres coefficients de $\mathcal{A}$ étant nuls.

Pour le tenseur $\mathcal{B}$,

$$b_{1111} = b_{2222} = 1 \quad \forall z \in]-z_0, z_0[$$

$$b_{1212} = b_{1221} = b_{2112} = b_{2121} \begin{cases} 1 & h_1 < z < z_0 \\ \dfrac{K(z)}{4} & 0 < z < h_1 \\ 1 & -z_0 < z < 0 \end{cases}$$

les autres coefficients de $\mathcal{B}$ étant nuls.

REFERENCES

[1] Baffico L. and Conca C., Homogenization of a transmission problem in 2D elasticity. in 5 *" Computational sciences for the 21st century "* (M.-O. Bristeau et al., Eds.), 539-548, Wiley, New-York, 1997.

[2] Baffico L. and Conca C., Homogenization of a transmission problem in solid mechanics. *J. Math. Anal. and Appl.* **233**, 659-680, 1999.

[3] Baffico L. and Conca C., A mixing procedure of two viscous fluids using some homogenization tools, preprint.

[4] Bensoussan A., Lions J.L. and Papanicolaou G., *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, Amsterdam, 1978.

[5] Brizzi R., Transmission problem and boundary homogenization, *Rev. Mat. Apl.*, **15**, 1-16, 1994.

[6] Conca C., On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics, *J. Math. Pures Appl.*, **64**, 31-75, 1985.

[7] Kesavan S. and Saint Jean Paulin J., Homogenization of an optimal control problem, *SIAM J.Cont.Optim.*, **35**, 1557-1573, 1997.

[8] Kesavan S. and Saint Jean Paulin J., Optimal Control on Perforated Domains, *J. Math. Anal. Appl.*, **229**, No.2, 563-586, 1999.

[9] Kesavan S. and Vanninathan M., L'homogénéisation d'un problème de contrôle optimal, *C.R.A.S, Paris, Sér. A*, **285**, 441-444, 1977.

[10] Lions J.L., *Sur le contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.

[11] Murat F., L'injection du cône positif de H^{-1} dans $W^{-1,q}$, est compacte pour tout $q < 2$, *J. Math. Pures Appl.*, **60**, 309-322, 1981.

[12] Saint Jean Paulin J. and Zoubairi H., Optimal control and homogenization in a mixture of fluids,*Ricerche di Matematica* (à paraitre).

[13] Saint Jean Paulin J. and Zoubairi H., Optimal control and "strange term" for a

Stokes problem in perforated domains, *Portugaliae Matematica* (à paraitre).

[14] Saint Jean Paulin J. and Zoubairi H., Contrôle optimal et homogénéisation dans des ouverts à cavités pour le problème de la torsion (en préparation).

[15] Sánchez-Palencia E., *Nonhomogeneous media and vibrating theory*, Lecture Notes in Physics, Vol **127**, Springer Verlag, Berlin, 1980.

[16] Temam R., *Navier Stokes equations* , North Holland, Amsterdam, 1977.

CHAPITRE III

Contrôle optimal et terme étrange d'un problème de Stokes dans les domaines perforés

CHAPITRE III
CONTROLE OPTIMAL ET TERME ETRANGE D'UN PROBLEME DE STOKES DANS LES DOMAINES PERFORES.

INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est d'étudier le problème de contrôle optimal pour le problème de Stokes dans les domaines perforés avec des conditions de Dirichlet sur le bord des trous.

Considérons Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ $(n2)$ de bord $\partial\Omega$ Lipschitz et creusons dedans des trous. On obtient un ouvert Ω_ε (ε un paramètre strictement positif). Plusieurs situations peuvent se présenter selon le comportement des trous.

On va se placer dans le cas où quand $\varepsilon \to 0$, on creuse dans Ω de plus en plus de trous, répartis régulièrement mais de plus en plus petits.

Trois cas peuvent alors se présenter: ou bien les trous malgré leur nombre, sont de taille beaucoup trop petite, ou bien les trous sont trop gros. Entre ces deux situations, se situe le troisième cas où les trous ont une taille critique, adaptée à leur nombre et à leur répartition.

Beaucoup d'études ont été faites dans les domaines possédant ce type de perforation : le problème de Dirichlet dans un ouvert avec des petits trous a été étudié par Sanchez-Palencia [15] et Cioranescu [4], [5] et bien d'autres...

Certains écoulements sont gouvernés par les équations de Stokes ou Navier-Stokes avec des conditions de Dirichlet sur les bords où se trouvent les obstacles, et le domaine du fluide est d'un point de vue mathématique représenté par un ouvert perforé par des trous (les obstacles). Lorsque le nombre de trous augmente, l'écoulement tend vers la solution du problème homogénéisé donné dans un domaine sans obstacle.

Concernant l'écoulement dans un milieu poreux, il a été prouvé que l'homogénéisation des équations de Stokes aboutit à la loi de Darcy si le domaine est représenté par la répétition périodique d'une cellule élémentaire de taille ε, dans laquelle l'obstacle est lui-même de taille ε (voir par exemple Lions [10], Sanchez-Palencia [14] avec la méthode double-échelle et Allaire [2] pour des obstacles solides connexes...). D'autres équations décrivent les écoulements d'un fluide dans les milieux poreux : par exemple, la loi de Brinkman qui est l'intermédiaire entre la loi de Darcy et les équations de Stokes.

Lorsque le milieux poreux est modélisé par une répétition périodique d'une cellule élémentaire de taille ε dans laquelle l'obstacle (solide) est de taille ε^3 (cas tridimensionnel), Allaire [1] a prouvé la convergence des solutions du problème de Stokes vers la solution du problème de Brinkman. Le problème de Brinkman est en quelque sorte un problème de Stokes dans lequel intervient un terme supplèmentaire qui exprime, en fait, la présence des trous qui disparaissent après passage à la limite. Pour le problème du Laplacien, le même genre de phénomène se passe (voir Cioranescu & Murat [3] qui ont appelé ce nouveau terme "terme étrange").

Plus généralement, lorsque la taille des trous est plus large qu'une certaine taille critique (définie par la suite §1), Allaire [1] a établi que le problème homogénéisé suit une loi de Darcy. Par contre si la taille est plus petite, alors il [1] obtient les équations de Stokes comme problème limite.

Dans notre étude, nous allons nous placer dans le cadre décrit auparavant, c'est à dire que l'on va considérer les équations de Stokes dans un milieux perforés périodiquement avec donc, des perforations plus petites que la période.

Comme pour les chapitres précédents, on associe à ces équations un problème de contrôle optimal (défini au §1). On verra que ce problème admet un unique contrôle optimal (voir Lions [9]) : notre objectif étant l'étude du comportement limite (lorsque $\varepsilon \to 0$) du contrôle optimal et la caractérisation de cette limite comme étant le contrôle optimal associé au problème homogénéisé .

Le type de problème de contrôle optimal que l'on considère, a été étudié par Kesavan et Vanninathan [8], Kesavan et Saint Jean Paulin [6] dans les domaines non-perforés et par Kesavan et Saint Jean Paulin [7] dans les domaines perforés. Ils ont étudié [7] un problème de contrôle optimal dont l'équation d'état est un problème elliptique du second ordre avec des coefficients périodiques et des conditions de Neumann sur le bord des trous. Saint Jean Paulin & Zoubairi [12] se sont intéressées au problème de Stokes dans un domaine non-perforé. Rajesh [11] a considéré le problème de contrôle optimal pour le problème de Dirichlet dans les domaines perforés (ie dans le même cadre que [3]) et il a obtenu un "terme étrange " à la limite dans la fonction coût.

Dans ce travail, on va se placer dans le même cadre (géométrie et équations) que Allaire [1] pour l'étude du contrôle optimal.

Ce chapitre est composé de cinq parties organisées de la manière suivante. Dans la première partie, on présente le problème et le cadre géométrique dans lequel on va travailler. Dans la deuxième partie, on rappelle d'une part, quelques hypothèses (H1)-(H6) dans le domaine perforé concernant les trous (voir Allaire [1]) et d'autre part, les résultats principaux de l'homogénéisation des équations de Stokes . Dans la troisième partie, on se place dans le cas critique, on homogénise le problème adjoint et on établit les résultats de convergence concernant l'énergie qui apparait dans la fonction coût. Dans la quatrième partie, on identifie le problème vérifié par la limite du contrôle optimal. Dans la cinquième partie, on étudie le cas où les trous sont de petites tailles, c'est à dire lorsque $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sigma_\varepsilon = +\infty$.
Cette étude est l'objet de la publication [13].

1. PRESENTATION DU PROBLEME

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ $(n2)$ de bord $\partial\Omega$ Lipschitz. Soit ε une suite de réels positifs qui tend vers zéro. On recouvre Ω par un maillage régulier de pavés $P_i^\varepsilon, i = 1...N(\varepsilon)$, tous identiques, à une translation près, au pavé $]-\varepsilon, \varepsilon[^n$. Chaque pavé P_i^ε entièrement contenu dans Ω, est percé en son interieur d'un trou T_i^ε identique, à une translation près, au fermé $a_\varepsilon T$ où T est un fermé indépendant de ε et a_ε est la taille des trous ($0 < a_\varepsilon < \varepsilon$). Alors le domaine perforé Ω_ε est défini par $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \cup T_i^\varepsilon$. On peut considérer différentes tailles de trous possibles, trous de taille "critique", plus petite ou plus grande que la taille critique. On définit donc σ_ε par

(1.1) $$\sigma_\varepsilon = (\varepsilon^n / a_\varepsilon^{n-2})^{1/2} \text{ pour } n \geq 3, \quad \sigma_\varepsilon = \varepsilon \, (\log \, (a_\varepsilon/\varepsilon))^{1/2} \text{ pour } n = 2.$$

Si la limite de σ_ε lorsque ε tend vers zéro, est positive et finie alors on dit que la taille des trous est critique. Si $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sigma_\varepsilon = +\infty$, les trous sont de taille plus petite et si $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sigma_\varepsilon = 0$, ils sont plus larges (cf. Cioranescu et Murat [2] et Allaire [1]).

Notation Dans tout ce qui suit, C désigne différentes constantes réelles positives qui ne dépendent pas de ε. Les produits de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$, et entre $(H_0^1(\Omega))^n$ et $(H^{-1}(\Omega))^n$, seront chacun définis par $< \, , \, >$.
On désignera par $\underline{v}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et par $(\underline{e}_k)_{1 \leq k \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Dans tout ce chapitre, on utilisera systématiquement la convention de sommation des indices répétés.
On définit par $\tilde{}$ le prolongement par zéro dans les trous.

Soit $B = (b_{ij})$ une matrice symétrique vérifiant

(1.2) $$\alpha_m \xi_i \xi_i \leq b_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \alpha_M \xi_i \xi_i \quad \text{pp dans } \Omega \quad \text{et} \quad b_{ij} \in L^\infty(\Omega),$$

où α_m et α_M sont des constantes telles que $\alpha_M > \alpha_m > 0$.
Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on définit le problème de contrôle optimal comme suit.
Soit $\mathcal{U}_{ad}^\varepsilon \subset L^2(\Omega_\varepsilon)^n$ un convexe fermé non vide. Soit $\underline{f} \in L^2(\Omega)^n$ une fonction et $N > 0$ une constante. Pour $\underline{\theta}_\varepsilon \in \mathcal{U}_{ad}^\varepsilon$, l'équation d'état du problème de Stokes est donnée par

(1.3) $$\begin{cases} \nabla p_\varepsilon - \Delta \underline{u}_\varepsilon & = & \underline{f} + \underline{\theta}_\varepsilon & \text{in } \Omega_\varepsilon \\ \text{div } \underline{u}_\varepsilon & = & 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon \\ \underline{u}_\varepsilon & = & 0 & \text{on } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

où $\underline{u}_\varepsilon$, p_ε sont respectivement la vitesse et la pression du fluide et $\underline{\theta}_\varepsilon$ est le contrôle.
La fonction coût est donnée par

(1.4) $$J_\varepsilon(\underline{\theta}_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} B \nabla \underline{u}_\varepsilon : \nabla \underline{u}_\varepsilon \, dx + \frac{N}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\underline{\theta}_\varepsilon|^2 \, dx.$$

La seconde intégrale correspond au coût du contrôle alors que la première correspond à l'énergie du fluide. La matrice B est utilisée dans le but de généraliser l'énergie usuelle (on obtient cette énergie losque la matrice B est égale à l'identité).
Le contrôle optimal $\underline{\theta}_\varepsilon^\star$ est la function dans $\mathcal{U}_{ad}^\varepsilon$ qui minimise $J_\varepsilon(\underline{\theta}_\varepsilon)$ pour $\underline{\theta}_\varepsilon \in \mathcal{U}_{ad}^\varepsilon$, i.e.

$$\underline{\theta}_\varepsilon^\star \in \mathcal{U}_{ad}^\varepsilon \quad \text{et} \quad J_\varepsilon(\underline{\theta}_\varepsilon^\star) = \min_{\underline{\theta}_\varepsilon \in \mathcal{U}_{ad}^\varepsilon} J_\varepsilon(\underline{\theta}_\varepsilon). \tag{1.5}$$

Ce problème admet un unique contrôle optimal $\underline{\theta}_\varepsilon^\star$ (voir Lions [9]). Notre but est d'étudier le comportement limite de ce contrôle optimal $\underline{\theta}_\varepsilon^\star$ lorsque $\varepsilon \to 0$.
En fait, on va montrer que (par extraction de sous-suites)
$\widetilde{\underline{\theta}_\varepsilon^\star} \rightharpoonup \underline{\theta}_0^\star$ dans $L^2(\Omega)^n$ faible . L'objectif de ce chapitre est de caractériser $\underline{\theta}_0^*$ comme étant un contrôle optimal d'un problème similaire, donné dans le domaine non-perforé Ω.

Définition 1.1 *On définit l'ensemble $L_0^2(\Omega)$ par*

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ h \in L^2(\Omega) \mid \int_\Omega h(x)\ dx = 0 \right\}. \tag{1.6}$$

2. HYPOTHESES SUR LES TROUS ET RESULTATS PRELIMINAIRES

On va émettre les mêmes hypothèses que Allaire [1] concernant les trous, par conséquent il existe des fonctions $(\underline{\omega}_k^\varepsilon,\ r_k^\varepsilon,\ \underline{\mu}_k)$ et une application linéaire R_ε telle que

(H1) $\underline{\omega}_k^\varepsilon \in H^1(\Omega)^n,\ r_k^\varepsilon \in L^2(\Omega)$
(H2) div $\underline{\omega}_k^\varepsilon = 0$ dans Ω et $\underline{\omega}_k^\varepsilon = 0$ dans T_i^ε
(H3) $\underline{\omega}_k^\varepsilon \rightharpoonup \underline{e}_k$ faiblement dans $H^1(\Omega)^n$ et $r_k^\varepsilon \rightharpoonup 0$ faiblement dans $L_0^2(\Omega)$
(H4) $\underline{\mu}_k \in W^{-1,\infty}(\Omega)^n$
(H5) $\forall\ \underline{v}_\varepsilon$ et $\forall\ \underline{v}$ tels que $\underline{v}_\varepsilon \rightharpoonup \underline{v}$ faiblement dans $H^1(\Omega)^n$, $\underline{v}_\varepsilon = 0$ dans T_i^ε et $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$< \nabla r_k^\varepsilon - \Delta \underline{\omega}_k^\varepsilon\ ,\ \phi \underline{v}_\varepsilon > \to < \underline{\mu}_k\ , \phi \underline{v} >$$

$$(H6)\qquad \begin{cases} R_\varepsilon \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^n, H_0^1(\Omega_\varepsilon)^n) \\ \text{Si } \underline{u} \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)^n \quad \text{alors} \quad R_\varepsilon \widetilde{\underline{u}} = \underline{u} \text{ dans } \Omega_\varepsilon \\ \text{Si div } \underline{u} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ alors div } (R_\varepsilon \underline{u}) = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon \\ \|R_\varepsilon \underline{u}\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)^n} c \|\underline{u}\|_{H_0^1(\Omega)^n}. \end{cases}$$

Exemple 2.1 Les hypothèses (H1)-(H6) sont satisfaites dans le cas particulier où chaque trou T_i^ε est une boule de rayon a_ε où $a_\varepsilon = C_0\varepsilon^{n/n-2}$ pour $n \geq 3$ et $a_\varepsilon = e^{-C_0/\varepsilon^2}$ pour $n = 2$ avec $C_0 > 0$ et dans une telle géométrie on peut calculer explicitement les fonctions $\underline{\omega}_k^\varepsilon$, r_k^ε et $\underline{\mu}_k$ qui vérifient (H1)-(H6) (voir [1]). Dans ce cas, le diamètre des trous est tel que $a_\varepsilon << \varepsilon$.
Notez aussi que , le cas où le diamètre des trous a_ε est du même ordre que ε correspond à l'homogénéisation classique.

Dans tout ce qui suit, on se place dans le cadre des hypothèses (H1)-(H6).
On définit la matrice $M \in (W^{-1,\infty}(\Omega))^{n\times n}$ par (voir [1])

$$Me_k = \mu_k. \tag{2.1}$$

Cette matrice est symétrique (voir Allaire[1]).

Soit$\tilde{}$ le prolongement par zéro dans les trous. Rappelons un résultat concernant le prolongement de la pression :
Proposition 2.2 (Allaire [1]) *S'il existe un opérateur linéaire R_ε vérifiant (H6) alors l'opérateur P_ε défini par*

$$< \nabla(P_\varepsilon q_\varepsilon), \underline{u} >=< \nabla q_\varepsilon, R_\varepsilon u > \ \ \forall \underline{u} \in H_0^1(\Omega)^n,$$

est un opérateur de prolongement linéaire et continue de $L_0^2(\Omega_\varepsilon)$ dans $L_0^2(\Omega)$ tel que les conditions suivantes sont satisfaites $\forall q_\varepsilon \in L_0^2(\Omega_\varepsilon)$:

i) $P_\varepsilon q_\varepsilon = q_\varepsilon$ *dans* $L_0^2(\Omega_\varepsilon)$
ii) $\|P_\varepsilon q_\varepsilon\|_{L_0^2(\Omega)} \leq C\|q_\varepsilon\|_{L_0^2(\Omega_\varepsilon)}$
iii) $\|\nabla(P_\varepsilon q_\varepsilon)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C\|\nabla q_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)}$

Sous les hypothèses ci-dessus, on a alors le résultat suivant, du à Allaire [1].

Théorème 2.3 (Allaire [1]) *Suivant la taille des trous, le problème* (1.3) *admet trois problèmes limites différents :*
(i) Si $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon = +\infty$ *alors* $(\widetilde{\underline{u}_\varepsilon}, P^\varepsilon p_\varepsilon)$ *converge vers* $(\underline{u}, p)$ *dans* $H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ *fort, où* $(\underline{u}, p)$ *est l'unique solution du problème de Stokes*

$$(2.2) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} \nabla p - \Delta \underline{u} & = & \underline{f} + \underline{\theta} & \textit{dans } \Omega \\ \textit{div } \underline{u} & = & 0 & \textit{dans } \Omega \\ \underline{u} & = & 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

(ii) Si $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon = \sigma > 0$ *alors il existe une mesure* $\underline{\mu}^k$ *et une matrice* M *telles que* $Me_k = \underline{\mu}^k$ *et telles que* $(\widetilde{\underline{u}_\varepsilon}, P^\varepsilon p_\varepsilon)$ *converge vers* $(\underline{u}, p)$ *dans* $H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ *faible, où* $(\underline{u}, p)$ *est l'unique solution de l'équation de Brinkman :*

$$(2.3) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} \nabla p - \Delta \underline{u} + M\underline{u} & = & \underline{f} + \underline{\theta} & \textit{dans } \Omega \\ \textit{div } \underline{u} & = & 0 & \textit{dans } \Omega \\ \underline{u} & = & 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Remarque 2.3 Sous des hypothèses similaires à (H1)-(H6) (avec une mise à l'echelle dépendant de σ_ε), si $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon = 0$ alors il existe une matrice M_0 telle que $(\widetilde{\underline{u}_\varepsilon}/\sigma_\varepsilon^2, P^\varepsilon p_\varepsilon)$ converge fortement vers $(\underline{u}, p)$ dans $L^2(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$, où $(\underline{u}, p)$ est l'unique solution du problème de Darcy

$$(2.4) \qquad \left\{ \begin{array}{cl} \underline{u} = M_0^{-1}(\underline{f} - \nabla p + \underline{\theta}) & \text{in } \Omega \\ \text{div } \underline{u} = 0 & \text{in } \Omega \\ \underline{u}.\underline{n} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

avec $\underline{n}$ le vecteur unitaire normale dirigé vers l'exterieur de Ω (voir Allaire [1] pour plus de détails concernant ces hypothèses et la matrice M_0).

3. HOMOGENEISATION ET CONVERGENCE D'ENERGIE

Dans cette partie et dans la suivante, on supposera que

$$(3.1) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon = \sigma > 0$$

En s'inspirant des méthodes utilisées par Kesavan et Saint Jean Paulin [7], on introduit le problème adjoint dans le but d'obtenir les équations limites.
Sous l'hypothèse (3.1), il existe une suite $(\underline{\omega}_k^\varepsilon, r_k^\varepsilon)$ qui satisfait (H1)-(H6). On va montrer qu'il existe n distributions $\underline{\mu}_B^k$ $(k = 1, ..., n)$ et une matrice M_B définie par la suite par (3.8) telles que, étant donné $\underline{f} \in L^2(\Omega)^n$, si $(\underline{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ est solution du problème de Stokes (1.3), alors (par extraction de sous-suites), on a la convergence des énergies suivante

$$\int_{\Omega_\varepsilon} B\nabla \underline{u}_\varepsilon : \nabla \underline{u}_\varepsilon dx \to \int_\Omega B\nabla \underline{u} : \nabla \underline{u}\ dx + < M_B\underline{u},\ \underline{u} > \tag{3.2}$$

$$B\nabla \underline{u}_\varepsilon : \nabla \underline{u}_\varepsilon\ dx \to B\nabla \underline{u} : \nabla \underline{u} + \ {}^t(M_B\underline{u}).\underline{u} \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \tag{3.3}$$

où $(\underline{u}, p)$ est solution du problème (2.3).
Ce type de résultat a été trouvé par Rajesh [11] pour le problème de Dirichlet avec l'opérateur de Laplace.

On introduit des fonctions tests qui vont nous permettre d'homogéniser le problème adjoint.
Lemme 3.1 *Supposons que* (3.1) *est vérifiée. Soit* $(\underline{\psi}_k^\varepsilon, s_k^\varepsilon) \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)^n \times L_0^2(\Omega_\varepsilon)$ *solution du problème auxiliaire*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \nabla s_k^\varepsilon + \Delta \underline{\psi}_k^\varepsilon & = & -\ div\ ({}^tB\nabla \underline{\omega}_k^\varepsilon) & dans\ \Omega_\varepsilon \\ div\ \underline{\psi}_k^\varepsilon & = & 0 & dans\ \Omega_\varepsilon \\ \underline{\psi}_k^\varepsilon & = & 0 & sur\ \partial\Omega_\varepsilon. \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Alors il existe $\underline{\psi}_k$ *et* s_k *tels que (par extraction de sous-suites)*

$$\widetilde{\underline{\psi}_k^\varepsilon} \rightharpoonup \underline{\psi}_k \ \ dans\ H_0^1(\Omega)^n\ faible \tag{3.5}$$

$$P_\varepsilon(s_k^\varepsilon) \rightharpoonup s_k \ \ dans\ L_0^2(\Omega)\ faible\ . \tag{3.6}$$

où P_ε *est l'opérateur de prolongement pour la pression (voir Proposition 2.2).*
Démonstration
En multipliant la première équation de (3.4) par $\underline{\psi}_k^\varepsilon$, en intégrant par parties et en tenant compte de la bornitude de $\underline{\omega}_k^\varepsilon$ dans $H^1(\Omega)^n$, on obtient le résultat annoncé.

Définition 3.2 *Soit* $\underline{\mu}_B^k \in \mathcal{D}'(\Omega)^n,\ k = 1, ..., n$ *des distributions définies par*

$$\underline{\mu}_B^k = -M\underline{\psi}_k + (\nabla s_k + \Delta\underline{\psi}_k), \tag{3.7}$$

et $M_B \in (W^{-1,\infty})^{n\times n}$ *la matrice définie par*

$$M_B e_k = \underline{\mu}_B^k. \tag{3.8}$$

Proposition 3.3 *Soit* $\underline{f} \in L^2(\Omega)^n$. *Soit* M *donnée par* (2.1) *et* M_B *par* (3.8). *On suppose que* (3.1) *est vérifiée et que de plus* $\underline{\theta}_\varepsilon$ *est telle que* $\widetilde{\underline{\theta}_\varepsilon}$ *est bornée* $L^2(\Omega)^n$. *Soit* $(\underline{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ *et* $(\underline{v}_\varepsilon, p'_\varepsilon)$ *dans* $H_0^1(\Omega_\varepsilon)^n \times L_0^2(\Omega_\varepsilon)$ *solution du système*

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \nabla p_\varepsilon - \Delta\underline{u}_\varepsilon & = & \underline{f} + \underline{\theta}_\varepsilon & \textit{dans } \Omega_\varepsilon \\ \nabla p'_\varepsilon + \Delta\underline{v}_\varepsilon & = & div\,(B\nabla\underline{u}_\varepsilon) & \textit{dans } \Omega_\varepsilon \\ div\ \underline{u}\varepsilon = \ div\ \underline{v}_\varepsilon & = & 0 & \textit{dans } \Omega_\varepsilon \\ \underline{u}_\varepsilon = \underline{v}_\varepsilon & = & 0 & \textit{sur } \partial\Omega_\varepsilon. \end{array}\right. \tag{3.9}$$

Alors, par extraction de sous-suites

$$\left\{\begin{array}{lllll} \widetilde{\underline{\theta}_\varepsilon} & \rightharpoonup & \underline{\theta} & \textit{dans} & L^2(\Omega)^n \textit{ faible} \\ \widetilde{\underline{u}_\varepsilon} & \rightharpoonup & \underline{u} & \textit{dans} & H_0^1(\Omega)^n \textit{ faible} \\ \widetilde{\underline{v}_\varepsilon} & \rightharpoonup & \underline{v} & \textit{dans} & H_0^1(\Omega)^n \textit{ faible} \end{array}\right. \tag{3.10}$$

et

$$\left\{\begin{array}{lllll} P^\varepsilon p_\varepsilon & \rightharpoonup & p & \textit{dans} & L_0^2(\Omega) \textit{ faible} \\ P^\varepsilon p'_\varepsilon & \rightharpoonup & p' & \textit{dans} & L_0^2(\Omega) \textit{ faible} \end{array}\right. \tag{3.11}$$

où la limite $(\underline{u}, p)$ *et* $(\underline{v}, p')$ *sont solution du système de Brinkman*

$$\left\{\begin{array}{cccc} \nabla p - \Delta\underline{u} + M\underline{u} & = & \underline{f} + \underline{\theta} & \textit{dans } \Omega \\ \nabla p' + \Delta\underline{v} - M\underline{v} & = & div\,(B\overline{\nabla}\underline{u}) - {}^tM_B\underline{u} & \textit{dans } \Omega \\ div\ \underline{u} = \ div\ \underline{v} & = & 0 & \textit{dans } \Omega \\ \underline{u} = \underline{v} & = & 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{3.12}$$

Démonstration

Etape 1 *Estimations a priori*

Puisque $\underline{\widetilde{\theta}_\varepsilon}$ est borné dans $L^2(\Omega)$, on a clairement que $\underline{\widetilde{u_\varepsilon}}$ et $\underline{\widetilde{v}_\varepsilon}$ sont uniformément bornés dans $H_0^1(\Omega)^n$, de même $\{P^\varepsilon p_\varepsilon\}$ et $\{P^\varepsilon p'_\varepsilon\}$ sont uniformément bornés dans $L_0^2(\Omega)$.
Par conséquent on peut extraire des sous-suites (indexée encore par ε) qui vérifient (3.10) et (3.11).

L'homogénéisation de l'équation d'état du problème (1.3) est connu (voir Théorème 2.3 (ii)).

Etape 2 *Méthode de l'énergie*

Dans le but de passer à la limite dans la seconde équation de (3.9), on utilise les fonctions tests $(\underline{\omega}_k^\varepsilon, r_k^\varepsilon)$ définies dans (H1)-(H6) et les fonctions auxiliaires $(\underline{\psi}_k^\varepsilon, s_k^\varepsilon)$ définies par (3.4).
Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En multipliant la seconde équation de (3.9) par $\phi\underline{\omega}_k^\varepsilon$, en intégrant par parties et en utilisant l'hypothèse (H2), on obtient

(3.14)
$$\int_{\Omega_\varepsilon} p'_\varepsilon \nabla\phi .\ \underline{\omega}_k^\varepsilon \ dx = -\int_{\Omega_\varepsilon} (z_\varepsilon \nabla\phi).\ \underline{\omega}_k^\varepsilon \ dx - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \underline{v}_\varepsilon : \nabla \underline{\omega}_k^\varepsilon \ \phi \ dx + \int_{\Omega_\varepsilon} B\nabla \underline{u}_\varepsilon : \nabla \underline{\omega}_k^\varepsilon \ \phi \ dx,$$
où

$$z_\varepsilon = \nabla \underline{v}_\varepsilon - B\nabla \underline{u}_\varepsilon. \tag{3.15}$$

De même, en multipliant la première équation de (3.9) par $\phi\underline{\psi}_k^\varepsilon$, et en intégrant par parties en tenant compte de la définition de $\underline{\psi}_k^\varepsilon$, (voir l'équation (3.4)), on aboutit à

(3.16)
$$\left\{\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} (\underline{f} + \underline{\theta}_\varepsilon).\underline{\psi}_k^\varepsilon \phi \ dx + \int_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon \nabla\phi.\underline{\psi}_k^\varepsilon \ dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla \underline{u}_\varepsilon \nabla\phi).\underline{\psi}_k^\varepsilon \ dx - \int_{\Omega_\varepsilon} \underline{u}_\varepsilon.\nabla\phi \ s_k^\varepsilon \ dx \\ &\quad - \int_{\Omega_\varepsilon} \underline{u}_\varepsilon.(\nabla \underline{\psi}_k^\varepsilon \nabla\phi) \ dx - \int_{\Omega_\varepsilon} ({}^t B\nabla \underline{\omega}_k^\varepsilon) : \nabla \underline{u}_\varepsilon \ \phi \ dx \\ &\quad - \int_{\Omega_\varepsilon} ({}^t B\nabla \underline{\omega}_k^\varepsilon)\nabla\phi.\underline{u}_\varepsilon \ dx. \end{aligned}\right.$$

On additionne (3.14) et (3.16) et on transforme par prolongement toutes les intégrales sur Ω_ε en intégrales sur Ω, il en découle

$$(3.17)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (\underline{f}+\widetilde{\underline{\theta}_\varepsilon}).\widetilde{\underline{\psi}_k^\varepsilon}\phi\ dx + \int_\Omega P^\varepsilon p_\varepsilon \nabla\phi.\widetilde{\underline{\psi}_k^\varepsilon}\ dx + \int_\Omega P^\varepsilon p'_\varepsilon \nabla\phi.\underline{\omega}_k^\varepsilon\ dx \\ \displaystyle = -\int_\Omega (\widetilde{z_\varepsilon}\nabla\phi).\underline{\omega}_k^\varepsilon\ dx - \int_\Omega \nabla\widetilde{\underline{v}_\varepsilon} : \nabla\underline{\omega}_k^\varepsilon\ \phi\ dx + \int_\Omega (\nabla\widetilde{\underline{u}_\varepsilon}\nabla\phi).\widetilde{\underline{\psi}_k^\varepsilon}\ dx \\ \displaystyle -\int_\Omega b_k^\varepsilon \nabla\phi.\widetilde{\underline{u}_\varepsilon}\ dx - \int_\Omega \widetilde{\underline{u}_\varepsilon}.\nabla\phi\ P^\varepsilon s_k^\varepsilon\ dx, \end{cases}$$

où

$$(3.18)\qquad b_k^\varepsilon = {}^tB\nabla\underline{\omega}_k^\varepsilon + \nabla\widetilde{\underline{\psi}_k^\varepsilon}.$$

Comme div $\underline{v}_\varepsilon = 0$ dans Ω_ε, on a

$$(3.19)\qquad \int_\Omega r_k^\varepsilon \text{ div } \widetilde{\underline{v}_\varepsilon}\phi\ dx = 0.$$

On additionne maintenant (3.17) et (3.19) et on intégre par parties, on obtient

$$(3.20)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (\underline{f}+\widetilde{\underline{\theta}_\varepsilon}).\widetilde{\underline{\psi}_k^\varepsilon}\phi\ dx + \int_\Omega P^\varepsilon p_\varepsilon \nabla\phi.\widetilde{\underline{\psi}_k^\varepsilon}\ dx + \int_\Omega P^\varepsilon p'_\varepsilon \nabla\phi.\underline{\omega}_k^\varepsilon\ dx \\ \displaystyle = -\int_\Omega (\widetilde{z_\varepsilon}\nabla\phi).\underline{\omega}_k^\varepsilon\ dx + < \Delta\underline{\omega}_k^\varepsilon - \nabla r_k^\varepsilon, \phi\widetilde{\underline{v}_\varepsilon} > + \int_\Omega \widetilde{\underline{v}_\varepsilon}.(\nabla\underline{\omega}_k^\varepsilon\nabla\phi)\ dx \\ \displaystyle \quad -\int_\Omega (r_k^\varepsilon\nabla\phi).\widetilde{\underline{v}_\varepsilon}\ dx + \int_\Omega (\nabla\widetilde{\underline{u}_\varepsilon}\nabla\phi).\widetilde{\underline{\psi}_k^\varepsilon}\ dx \\ \displaystyle \quad -\int_\Omega b_k^\varepsilon \nabla\phi.\widetilde{\underline{u}_\varepsilon}\ dx - \int_\Omega \widetilde{\underline{u}_\varepsilon}.\nabla\phi\ P^\varepsilon s_k^\varepsilon\ dx. \end{cases}$$

Etape 3 : *Passage à la limite*

Nous allons à présent passer à la limite dans (3.20) lorsque ε tend vers 0. Pour ce faire, nous avons besoin de quelques résultats préliminaires.
D'après l'hypothèse (H3), on a

$$(3.21)\qquad \nabla\underline{\omega}_k^\varepsilon \rightharpoonup 0 \ \text{ dans } \ L^2(\Omega)^{n\times n} \ \text{ faible .}$$

En utilisant la définition (3.18) et les convergences (3.5) et (3.21), on peut extraire une sous-suite telle que

$$b_k^\varepsilon \rightharpoonup \nabla \underline{\psi}_k \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega)^{n\times n} \quad \text{faible.} \tag{3.22}$$

De même par la définition (3.15) et la convergence (3.10), on a (par extraction de sous-suites)

$$\widetilde{z_\varepsilon} \rightharpoonup z = \nabla \underline{v} - B\nabla \underline{u} \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega)^{n\times n} \quad \text{faible.} \tag{3.23}$$

A présent, passons à la limite dans (3.20), en tenant compte des convergences (H3), (H5), (3.5), (3.6), (3.10), (3.11) et (3.21)-(3.23), on obtient (par extraction de sous-suites)

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (\underline{f}+\underline{\theta}).\ \underline{\psi}_k \phi\ dx + \int_\Omega p\nabla\phi.\underline{\psi_k}\ dx + \int_\Omega p'\nabla\phi.\ \underline{e}_k\ dx \\ \displaystyle = -\int_\Omega (z\nabla\phi).\ \underline{e}_k\ dx - < \underline{\mu}_k, \phi\underline{v} > + \int_\Omega (\nabla\underline{u}\nabla\phi).\ \underline{\psi}_k\ dx \\ \displaystyle\quad - \int_\Omega (\nabla\underline{\psi}_k\nabla\phi).\ \underline{u}\ dx - \int_\Omega \underline{u}.\nabla\phi\ s_k\ dx. \end{cases} \tag{3.24}$$

Par conséquent, en intégrant par parties le membre de droite de (3.24) et en utilisant le Théorème 2.3 (ii), on aboutit à

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega M\underline{u}.\underline{\psi}_k\phi\ dx - \int_\Omega \nabla p'.\ \underline{e}_k\phi\ dx = \int_\Omega \text{div}\ z.\underline{e}_k\phi\ dx - < \underline{\mu}_k, \phi\underline{v} > \\ \displaystyle\qquad\qquad\qquad + \int_\Omega \Delta\underline{\psi}_k.\ \underline{u}\ \phi\ dx + \int_\Omega \nabla s_k.\ \underline{u}\ \phi\ dx. \end{cases} \tag{3.25}$$

Puisque la relation ci-dessus est vraie pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et comme M est symétrique, on a

$$\nabla p' + \text{ div } z - M\underline{v} = -\ {}^tM_B\underline{u} \tag{3.26}$$

c'est à dire $(\underline{u}, p)$ et $(\underline{v}, p')$ vérifient (3.12).
Comme M est une matrice symétrique définie positive, les solutions $(\underline{u}, p)$ et $(\underline{v}, p')$ de (3.12) sont uniques, par conséquent, la suite toute entière

$(\widetilde{\underline{u}_\varepsilon}, P^\varepsilon p_\varepsilon)$ et la suite $(\widetilde{\underline{v}_\varepsilon}, P^\varepsilon p'_\varepsilon)$ convergent. Ceci termine la démonstration de la proposition.

Nous allons à présent étudier la convergence de l'énergie donnée par $\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} B\nabla \underline{u}_\varepsilon : \nabla \underline{u}_\varepsilon dx$. Ce type de convergence fut l'objet de l'étude de Rajesh [11] pour le problème de Dirichlet. Il a montré dans [11] qu'un "terme étrange" apparaissait à la limite dans le terme de l'énergie, suivant les idées de Cioranescu et Murat [3]. De la même manière, on montre le même type de résultat, à savoir un "terme étrange" dans l'énergie limite apparait, mais pour le problème de Stokes suivant les idées de Allaire[1] et de Rajesh [11].

Théorème 3.4 *Soit* $\underline{f} \in L^2(\Omega)^n$ *et* $(\underline{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ *solution du problème de Stokes* (1.3). *Soit* M_B *donnée par* (3.8). *Alors on a la convergence suivante*

$$\int_{\Omega_\varepsilon} B\nabla \underline{u}_\varepsilon : \nabla \underline{u}_\varepsilon \; dx \to \int_\Omega B\nabla \underline{u} : \nabla \underline{u} \; dx + < M_B\underline{u}, \; \underline{u} > \tag{3.27}$$

et de plus, on obtient au sens des distributions

$$B\nabla\widetilde{\underline{u}_\varepsilon} : \nabla\widetilde{\underline{u}_\varepsilon} \to B\nabla\underline{u} : \nabla\underline{u} + \;{}^t(M_B\underline{u}).\; \underline{u} \quad dans \quad \mathcal{D}'(\Omega). \tag{3.28}$$

Démonstration

Du fait que $(\underline{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ et $(\underline{v}_\varepsilon, p'_\varepsilon)$ sont solution de (3.9), on a

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} B\nabla \underline{u}_\varepsilon : \nabla \underline{u}_\varepsilon \; dx &= -\int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla \underline{v}_\varepsilon - B\nabla \underline{u}_\varepsilon) : \nabla \underline{u}_\varepsilon \; dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \underline{v}_\varepsilon : \nabla \underline{u}_\varepsilon \; dx \\ &= -\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla p'_\varepsilon.\; \underline{u}_\varepsilon dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \underline{v}_\varepsilon : \nabla \underline{u}_\varepsilon \; dx \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \underline{v}_\varepsilon : \nabla \underline{u}_\varepsilon \; dx \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \underline{v}_\varepsilon.(\underline{f} + \underline{\theta}_\varepsilon) dx = \int_\Omega \widetilde{\underline{v}_\varepsilon}.(\underline{f} + \widetilde{\underline{\theta}_\varepsilon}) \; dx \end{aligned} \right. \tag{3.29}$$

Par conséquent, en intégrant par parties, en utilisant les résultats d'homogénéisation de la Proposition 3.3 et le fait que M est symétrique, on obtient

$$
(3.30) \quad \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} B \nabla \underline{u}_\varepsilon : \nabla \underline{u}_\varepsilon \ dx = \int_\Omega \underline{v}.(\underline{f} + \underline{\theta}) \ dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \underline{v}.(\nabla p - \Delta \underline{u} + M \underline{u}) \\ \qquad = - \displaystyle\int_\Omega \Delta \underline{v}. \ \underline{u} \ dx + \int_\Omega M \underline{v}. \ \underline{u} \ dx \\ \qquad =< -\Delta \underline{v} + M \underline{v}, \ \underline{u} > \\ \qquad =< \nabla p' - \ \mathrm{div} \ (B \nabla \underline{u}) +^t M_B \underline{u}, \ \underline{u} > \\ \qquad = \displaystyle\int_\Omega B \nabla \underline{u} : \ \nabla \underline{u} \ dx + < M_B \underline{u}, \ \underline{u} >, \end{cases}
$$

ce qui démontre (3.27).
Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Soit z_ε donné par (3.15), en intégrant par parties et en utilisant le problème (3.9), on aboutit à

$$
(3.31) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} B \nabla \underline{u}_\varepsilon : \nabla \underline{u}_\varepsilon \ \phi \ dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \underline{v}_\varepsilon : \nabla \underline{u}_\varepsilon \ \phi \ dx - \int_{\Omega_\varepsilon} z_\varepsilon : \nabla \underline{u}_\varepsilon \ \phi \ dx \\ \qquad = \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \underline{v}_\varepsilon.(\underline{f} + \underline{\theta} - \nabla p_\varepsilon) \phi \ dx - \int_{\Omega_\varepsilon} \underline{v}_\varepsilon.(\nabla \underline{u}_\varepsilon \nabla \phi) \ dx \\ \qquad - \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla p'_\varepsilon. \ (\underline{u}_\varepsilon \phi) \ dx + \int_{\Omega_\varepsilon} (z_\varepsilon \nabla \phi). \underline{u}_\varepsilon \ dx. \end{cases}
$$

En utilisant les mêmes arguments que dans la Proposition 3.4 et d'après le système (3.12), il en découle

$$
(3.32) \quad \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} B \nabla \underline{u}_\varepsilon : \nabla \underline{u}_\varepsilon \ \phi \ dx = \int_\Omega \underline{v}.(\underline{f} + \underline{\theta} - \nabla p) \phi \ dx - \int_\Omega \underline{v}.(\nabla u \nabla \phi) \ dx \\ \qquad - \displaystyle\int_\Omega \nabla p'. \ (\underline{u} \phi) \ dx + \int_\Omega (z \nabla \phi). \underline{u} \ dx \\ \qquad =< M \underline{u}, \ \underline{v} \phi > + \displaystyle\int_\Omega \nabla \underline{u} : \nabla \underline{v} \ \phi \ dx \\ \qquad - \displaystyle\int_\Omega z : \nabla \underline{u} \ \phi \ dx + < \ {}^t M_B \underline{u} - M \underline{v}, \ \underline{u} \phi > . \end{cases}
$$

Par conséquent, du fait que M est symétrique, on a

$$
(3.33) \quad \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} B \nabla \underline{u}_\varepsilon : \nabla \underline{u}_\varepsilon \ \phi \ dx = \int_\Omega (\nabla \underline{v} - z) : \nabla u \ \phi \ dx + < \ {}^t M_B \underline{u}, \ \underline{u} \phi > \\ \qquad = \displaystyle\int_\Omega B \nabla \underline{u} : \nabla \underline{u} \ \phi \ dx + < \ {}^t (M_B \underline{u}) \underline{u}, \ \phi > . \end{cases}
$$

Ceci étant vrai pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on obtient l'expression (3.28), ce qui complète la démonstration.

Maintenant, nous allons exhiber quelques propriétés concernant les fonctions $(\underline{\mu}_B^k)_{1\leq k\leq n}$.

Théorème 3.5 *Soit* $\underline{\mu}_B^k$ *défini par* (3.7). *Alors*

$$\underline{\mu}_B^k.\ \underline{e}i = \lim_{\varepsilon\to 0}\ B\nabla\underline{\omega}_i^\varepsilon :\ \nabla\underline{\omega}_k^\varepsilon \quad dans\ \mathcal{D}'(\Omega). \tag{3.34}$$

Démonstration

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En tenant compte du problème (3.4), de l'expression (3.19) et en intégrant par parties, on a

(3.35)

$$\left\{\begin{aligned}\int_{\Omega_\varepsilon} B\nabla\underline{\omega}_i^\varepsilon :\ \nabla\underline{\omega}_k^\varepsilon\ \phi\ dx &= \int_{\Omega_\varepsilon}(\nabla\underline{\psi}_k^\varepsilon +^t B\nabla\underline{\omega}_k^\varepsilon) : \nabla\underline{\omega}_i^\varepsilon\ \phi\ dx - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla\underline{\psi}_k^\varepsilon : \nabla\underline{\omega}_i^\varepsilon\ \phi\ dx\\ &= -\int_{\Omega_\varepsilon} s_\varepsilon^k(\underline{\omega}_i^\varepsilon.\nabla\phi)\ dx - \int_{\Omega_\varepsilon}(\nabla\underline{\psi}_k^\varepsilon +^t B\nabla\underline{\omega}_k^\varepsilon)\nabla\phi.\ \underline{\omega}_i^\varepsilon\ dx\\ &\quad+\int_{\Omega_\varepsilon}\underline{\psi}_k^\varepsilon.\ \Delta\underline{\omega}_i^\varepsilon\ \phi\ dx + \int_{\Omega_\varepsilon}\underline{\psi}_k^\varepsilon.(\nabla\underline{\omega}_i^\varepsilon\nabla\phi)\ dx\\ &= -\int_{\Omega_\varepsilon} s_k^\varepsilon(\underline{\omega}_i^\varepsilon.\nabla\phi)\ dx - \int_{\Omega_\varepsilon}(\nabla\underline{\psi}_k^\varepsilon +^t B\nabla\underline{\omega}_k^\varepsilon)\ \nabla\phi.\ \underline{\omega}_i^\varepsilon\ dx\\ &\quad- <\nabla r_i^\varepsilon - \Delta\underline{\omega}_i^\varepsilon,\ \widetilde{\underline{\psi}_k^\varepsilon}\phi> - \int_{\Omega_\varepsilon} r_i^\varepsilon\underline{\psi}_k^\varepsilon.\nabla\phi\ dx.\end{aligned}\right.$$

Par les convergences (H3), (H5), (3.5) et (3.6)), on passe à la limite dans (3.35) et on obtient

(3.36)

$$\left\{\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} B\nabla\underline{\omega}_i^\varepsilon :\ \nabla\underline{\omega}_k^\varepsilon\ \phi\ dx &= -\int_\Omega s_k(\underline{e}_i.\nabla\phi)\ dx - \int_\Omega(\nabla\underline{\psi}_k\ \nabla\phi).\ \underline{e}_i\ dx - <\underline{\mu}_i,\ \underline{\psi}_k\phi>\\ &= \int_\Omega \nabla s_k.\ (\underline{e}_i\phi)\ dx + \int_\Omega \Delta\underline{\psi}_k.\ (\underline{e}_i\phi)\ dx - <\underline{\mu}_i,\ \psi_k\phi>\\ &= <\nabla s_k + \Delta\underline{\psi}_k - M\underline{\psi}_k,\ \phi\underline{e}_i>\\ &= <\underline{\mu}_B^k,\ \phi\underline{e}_i> = <\underline{\mu}_B^k.\ \underline{e}_i,\ \phi>.\end{aligned}\right.$$

D'où le résultat annoncé.

Corollaire 3.6 *Si B est symétrique définie positive, alors $\underline{\mu}_B^k$ est une mesure positive et M_B est symétrique.*

Démonstration

Ce résultat est une conséquence du Théorème 3.5.

Dans la partie suivante, on étudie le problème de contrôle optimal que l'on a introduit au début du chapitre.

4. CONTROLE OPTIMAL

On définit χ_ε la fonction caractéristique de Ω_ε.
On considère le problème de contrôle optimal (1.3)-(1.5) où l'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}_{ad}^\varepsilon \subset L^2(\Omega_\varepsilon)^n$ est défini par l'un des convexes fermés suivant (voir [6] et [7]) :

$$\begin{array}{ll} (4.1) & \mathcal{U}_{ad}^\varepsilon = L^2(\Omega_\varepsilon)^n \\ (4.2) & \mathcal{U}_{ad}^\varepsilon = \{\underline{\theta} \in L^2(\Omega_\varepsilon)^n \mid \quad \widetilde{\underline{\theta}} \geq \chi_\varepsilon \underline{\psi} \text{ pp dans } \Omega\} \\ (4.3) & \mathcal{U}_{ad}^\varepsilon = \{\underline{\theta} \in L^2(\Omega_\varepsilon)^n \mid \quad \chi_\varepsilon \underline{\psi}_1 \leq \widetilde{\underline{\theta}} \leq \chi_\varepsilon \underline{\psi}_2 \text{ pp dans } \Omega\} \end{array}$$

où $\underline{\psi}, \underline{\psi}_1$ et $\underline{\psi}_2$ sont des fonctions de $L^2(\Omega)^n$.
Par définition du contrôle optimal $\underline{\theta}_\varepsilon^\star$, on a

$$(4.4) \qquad \frac{N}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} (\underline{\theta}_\varepsilon^\star)^2 \, dx \leq J_\varepsilon(\underline{\theta}_\varepsilon^\star) \leq J_\varepsilon(\underline{\Theta}_\varepsilon) \quad \forall \underline{\Theta}_\varepsilon \in \mathcal{U}_{ad}^\varepsilon.$$

Cette relation reste vraie en particulier pour les différents choix de $\underline{\Theta}_\varepsilon$ qui suivent

$$(4.5) \qquad \underline{\Theta}_\varepsilon = \begin{cases} X_\varepsilon & \text{dans le cas (4.1)} \\ \chi_\varepsilon \underline{\psi} & \text{dans le cas (4.2)} \\ \chi_\varepsilon \underline{\psi}_2 & \text{dans le cas (4.3).} \end{cases}$$

où $X_\varepsilon =^t (\chi_\varepsilon, \chi_\varepsilon, ..., \chi_\varepsilon)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Dans chacun de ces trois cas, on a

Lemme 4.1 *Le contrôle optimal* $\underline{\theta}_\varepsilon^\star$ *vérifie (par extraction de sous-suites)*

$$\widetilde{\underline{\theta}_\varepsilon^\star} \rightharpoonup \underline{\theta}_0^\star \quad \textit{dans} \quad L^2(\Omega)^n \quad \textit{faible.} \tag{4.6}$$

Démonstration

En utilisant (4.5), on montre facilement que $J_\varepsilon(\underline{\Theta}_\varepsilon)$ est borné dans $L^2(\Omega_\varepsilon)^n$ et donc, d'après (4.4) on obtient le résultat annoncé.

Lemme 4.2 *La fonction caractéristique* χ_ε *de* Ω_ε *satisfait*

$$\chi_\varepsilon \rightharpoonup 1 \ \textit{dans} \ L^\infty(\Omega) \quad \textit{faible} \ \star\,. \tag{4.7}$$

Démonstration

On a classiquement, par extraction de sous-suite

$$\chi_\varepsilon \rightharpoonup \chi_0 \text{ dans } L^\infty(\Omega) \quad \text{faible} \ \star\,.$$

D'autre part, comme $\chi_\varepsilon \underline{\omega}_k^\varepsilon = \underline{\omega}_k^\varepsilon$, alors par passage à la limite et par unicité, on obtient $\chi_0 = 1$.

Nous allons à présent caractériser le problème verifié par la limite $\theta_0^\star$ du contrôle optimal et montrer qu'en fait cette limite est aussi un contrôle optimal associé un problème et une fonction coût que l'on explicitera par la suite.
Pour cela, on définit les ensembles $\mathcal{U}_{ad} \subset L^2(\Omega)^n$ par

$$\mathcal{U}_{ad} = L^2(\Omega)^n \tag{4.8}$$

$$\mathcal{U}_{ad} = \{\underline{\theta} \in L^2(\Omega)^n \mid \ \underline{\theta} \geq \underline{\psi} \text{ pp dans } \Omega\} \tag{4.9}$$

$$\mathcal{U}_{ad} = \{\underline{\theta} \in L^2(\Omega)^n \mid \ \underline{\psi}_1 \leq \underline{\theta} \leq \underline{\psi}_2 \text{ pp dans } \Omega\} \tag{4.10}$$

correspondant respectivement aux cas (4.1), (4.2) et (4.3).

Le théorème suivant nous donne un résultat de convergence du contrôle optimal

Théorème 4.3 *Soit M_B définie par (3.8). Pour $\underline{\theta} \in \mathcal{U}_{ad}$, on considère $(\underline{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ solution de (2.3). Soit J_0 la fonction coût définie par*

$$J_0(\underline{\theta}) = \frac{1}{2}\int_\Omega B\nabla\underline{u} : \nabla\underline{u}\, dx + \frac{1}{2} < M_B\underline{u}, \underline{u} > + \frac{N}{2}\int_\Omega |\underline{\theta}|^2\, dx. \tag{4.11}$$

Alors $\underline{\theta}_0^\star$ satisfait la condition d'optimalité

$$\underline{\theta}_0^\star \in \mathcal{U}_{ad} \quad et \quad J_0(\underline{\theta}_0^\star) = \min_{\underline{\theta} \in \mathcal{U}_{ad}} J_0(\underline{\theta}). \tag{4.12}$$

De plus, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(\underline{\theta}_\varepsilon^\star) = J_0(\underline{\theta}_0^\star). \tag{4.13}$$

Démonstration

Première étape

D'après la définition de $\mathcal{U}_{ad}$, il est clair que si $\underline{\theta} \in \mathcal{U}_{ad}$ alors $\chi_\varepsilon\underline{\theta} \in \mathcal{U}_{ad}^\varepsilon$. De plus puisque $\widetilde{\underline{\theta}_\varepsilon^\star} \rightharpoonup \underline{\theta}_0^\star$ dans $L^2(\Omega)^n$ faible , on a $\underline{\theta}_0^\star \in \mathcal{U}_{ad}$.

Deuxième étape

Soit $(\underline{u}_\varepsilon^\star, p_\varepsilon^\star)$ l'état optimal associé au contrôle optimal (solution du problème (1.3) avec $\underline{\theta}_\varepsilon = \underline{\theta}_\varepsilon^\star$ dans le membre de droite de l'équation d'état). En utilisant le fait que $\underline{\theta}_\varepsilon$ est borné dans $L^2(\Omega_\varepsilon)$, on obtient les estimations de $\underline{u}_\varepsilon^\star$ dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$ et de $p_\varepsilon^\star$ dans $L_0^2(\Omega_\varepsilon)$ uniformément par rapport à ε et donc par prolongement et par extraction de sous-suites, il en résulte

$$\begin{cases} \widetilde{\underline{u}_\varepsilon^\star} \rightharpoonup \underline{u}^\star \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega)^n \quad \text{faible} \\[2ex] P^\varepsilon p_\varepsilon^\star \rightharpoonup p^\star \quad \text{dans} \quad L_0^2(\Omega) \quad \text{faible,} \end{cases} \tag{4.14}$$

où $(\underline{u}^\star, p^\star)$ est solution de (2.2) avec $\underline{\theta} = \underline{\theta}_0^\star$ dans le membre de droite de l'équation d'état.

Troisième étape

Soit $(\underline{w}_\varepsilon, q_\varepsilon) \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)^n \times L_0^2(\Omega_\varepsilon)$ solution du problème (1.3) avec $\chi_\varepsilon \underline{\theta}$ comme contrôle, $\underline{\theta} \in \mathcal{U}_{ad}$, à savoir

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \nabla q_\varepsilon - \Delta \underline{w}_\varepsilon & = & \underline{f} + \chi_\varepsilon \underline{\theta} & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \text{div } \underline{w}_\varepsilon & = & 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \underline{w}_\varepsilon & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon. \end{array} \right. \tag{4.15}$$

Comme $\chi_\varepsilon \underline{\theta} \rightharpoonup \underline{\theta}$ faiblement dans $L^2(\Omega)^n$, il s'en suit que

$$\widetilde{\underline{w}_\varepsilon} \rightharpoonup \underline{w} \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega)^n \text{ et } P^\varepsilon(q_\varepsilon) \rightharpoonup q \text{ faiblement dans } L_0^2(\Omega)$$

où $(\underline{w}, q)$ vérifie le problème de Brinkman suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \nabla q - \Delta \underline{w} + M \underline{w} & = & \underline{f} + \underline{\theta} & \text{dans } \Omega \\ \text{div } \underline{w} & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ \underline{w} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{4.16}$$

(voir Proposition 3.3). Par conséquent, d'après le Théorème 3.4 pour $\underline{\theta}$ fixé, on obtient

$$\int_{\Omega_\varepsilon} B \nabla \underline{w}_\varepsilon : \nabla \underline{w}_\varepsilon \, dx \to \int_\Omega B \nabla \underline{w} : \nabla \underline{w} \, dx + < M_B \underline{w}, \underline{w} > . \tag{4.17}$$

Et donc,

$$J_\varepsilon(\chi_\varepsilon \underline{\theta}) \to J_0(\underline{\theta}). \tag{4.18}$$

En utilisant encore le Théorème 3.4 mais cette fois pour $\underline{\theta}_\varepsilon = \underline{\theta}_\varepsilon^\star$, on aboutit à

$$\int_{\Omega_\varepsilon} B \nabla \underline{u}_\varepsilon^\star : \nabla \underline{u}_\varepsilon^\star \, dx \to \int_\Omega B \nabla \underline{u}^\star : \nabla \underline{u}^\star \, dx + < M_B \underline{u}^\star, \underline{u}^\star > . \tag{4.19}$$

Quatrième étape

En passant à la limite dans l'inégalité

$$J_\varepsilon(\chi_\varepsilon \underline{\theta}) \geq J_\varepsilon(\underline{\theta}_\varepsilon^\star). \tag{4.20}$$

et en utilisant le Lemme 4.2, on obtient

$$(4.21) \quad J_0(\underline{\theta}) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega B\nabla\underline{u}^\star : \nabla\underline{u}^\star dx + \limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N}{2}\int_{\Omega_\varepsilon}|\underline{\theta}_\varepsilon^\star|^2 dx + \frac{1}{2} < M_B\underline{u}^\star, \underline{u}^\star > .$$

En prenant en particulier $\underline{\theta} = \underline{\theta}_0^\star$ dans l'inégalité ci-dessus, on a

$$(4.22) \qquad \limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon}|\underline{\theta}_\varepsilon^\star|^2 dx \leq \int_\Omega |\underline{\theta}_0^\star|^2 dx.$$

D'autre part comme $\widetilde{\underline{\theta}_\varepsilon^\star} \rightharpoonup \underline{\theta}_0^\star$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, il en résulte

$$(4.23) \qquad \liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon}|\underline{\theta}_\varepsilon^\star|^2 dx \geq \int_\Omega |\underline{\theta}_0^\star|^2 dx.$$

Par conséquent les inégalités (4.22) et (4.23), nous donne

$$(4.23) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon}|\underline{\theta}_\varepsilon^\star|^2 dx = \int_\Omega |\underline{\theta}_0^\star|^2 dx.$$

On en déduit donc (4.13). Maintenant le résultat (4.12) provient de (4.21) et (4.24).

5. CAS DES PETITS TROUS

Dans ce paragraphe, on suppose que la taille des trous est plus petite que la taille critique, i.e :

$$(5.1) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\ \sigma_\varepsilon = +\infty,$$

ou encore,

$$(5.2) \quad a_\varepsilon << \varepsilon^{n/n-2} \ \text{ pour } \ n \geq 3, \quad a_\varepsilon = \exp^{-1/C_\varepsilon} \ \text{ et } \ C_\varepsilon << \varepsilon^2 \ \text{ pour } \ n = 2.$$

Puisque la taille des trous vérifie (5.1), l'hypothèse (H3) est remplacée par (voir [1])

$$(5.3) \quad \underline{\omega}_k^\varepsilon \to \underline{e}_k \ \text{ fortement dans } \ H^1(\Omega)^n \ \text{ et } \ r_k^\varepsilon \to 0 \ \text{ fortement dans } \ L_0^2(\Omega).$$

Remarque 5.1 L'hypothèse (5.3) est plus forte que l'hypothèse (H3).

On a le résultat suivant

Proposition 5.2 *On suppose que la taille des trous vérifie (5.1). On suppose de plus que* $(H1), (H2), (H4)$-$(H6)$ *et* (5.3) *sont satisfaites. Soit* $(\underline{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ *et* $(\underline{v}_\varepsilon, p'_\varepsilon)$ *les solutions de* (3.9). *Alors par extraction de sous-suites, on a*

$$(5.4) \qquad \begin{cases} \underline{\widetilde{\theta}_\varepsilon} & \rightharpoonup & \underline{\theta} & \textit{dans } L^2(\Omega)^n \textit{ faible} \\ \underline{\widetilde{u}_\varepsilon} & \to & \underline{u} & \textit{dans } H_0^1(\Omega)^n \textit{ fort} \\ \underline{\widetilde{v}_\varepsilon} & \to & \underline{v} & \textit{dans } H_0^1(\Omega)^n \textit{ fort} \end{cases}$$

et

$$(5.5) \qquad \begin{cases} P^\varepsilon(p_\varepsilon) & \to & p & \textit{dans } L_0^2(\Omega) \textit{ fort} \\ P^\varepsilon(p'_\varepsilon) & \to & p' & \textit{dans } L_0^2(\Omega) \textit{ fort} \end{cases}$$

où $(\underline{u}, p)$ *et* $(\underline{v}, p')$ *sont solution du problème de Stokes suivant*

$$(5.6) \qquad \begin{cases} \nabla p - \Delta \underline{u} & = & \underline{f} + \underline{\theta} & \textit{dans } \Omega \\ \nabla p' + \Delta \underline{v} & = & \textit{div}\,(B \nabla \underline{u}) & \textit{dans } \Omega \\ \textit{div}\,\underline{u} = \textit{div}\,\underline{v} & = & 0 & \textit{dans } \Omega \\ \underline{u} = \underline{v} & = & 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Démonstration

Pour démontrer ce résultat, on utilise les mêmes arguments que l'on a utilisés lors de la démonstration de la Proposition 3.3.

Etape 1.

Le fait que la matrice M est nulle, fut établi par Allaire [1], ainsi que les convergences suivantes

$$(5.7) \qquad \begin{cases} \underline{\widetilde{u}_\varepsilon} & \to & \underline{u} & \text{dans } H_0^1(\Omega)^n \text{ fort} \\ P^\varepsilon(p_\varepsilon) & \to & p & \text{dans } L_0^2(\Omega) \text{ fort.} \end{cases}$$

Suivant les idées de Allaire [1], on va montrer que $\underline{\mu}_B^k$, définie par (3.7), vaut zéro. En effet, puisque les hypothèses (H1), (H2), (H4)-(H6) et (5.3) sont satisfaites, tous les résultats de la Proposition 3.3 restent valables. Mais d'après (5.3) et le Théorème 3.5, on en déduit que $\underline{\mu}_B^k = 0$ et par conséquent $M_B = 0$. Ceci démontre bien que $(\underline{u}, p)$ et $(\underline{v}, p')$ vérifient le problème de Stokes (5.6).

On complète la démonstration, en montrant les convergences fortes de $\widetilde{\underline{v}_\varepsilon}$ dans $H_0^1(\Omega)^n$ et de $P^\varepsilon(p'_\varepsilon)$ dans $L_0^2(\Omega)$.

Etape 2.

En tenant compte des convergences (3.10) et (3.11) de $\widetilde{\underline{v}_\varepsilon}$ et de $P^\varepsilon(p'_\varepsilon)$ respectivement, on obtient, en utilisant des arguments classiques, les convergences suivantes où $\underline{v}$ est solution de (5.6)

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \widetilde{\underline{u}_\varepsilon} & \to & \underline{u} & \text{dans} & H_0^1(\Omega)^n \text{ fort} \\ P^\varepsilon(p'_\varepsilon) & \to & p' & \text{dans} & L_0^2(\Omega) \text{ fort.} \end{array}\right. \tag{5.8}$$

D'où le résultat annoncé.

Nous allons à présent donner un résultat de convergence du contrôle optimal. Soit $\mathcal{U}_{ad}^\varepsilon \subset L^2(\Omega_\varepsilon)^n$ donné par (4.1)-(4.3) et $\mathcal{U}_{ad} \subset L^2(\Omega)^n$ par (4.8)-(4.10). On a le résultat suivant

Théorème 5.4 *Soit $\underline{\theta}_\varepsilon^\star$ le contrôle optimal du problème de Stokes* (1.3) *et on considère la fonction coût (1.4). Alors*

$$\widetilde{\underline{\theta}_\varepsilon^\star} \rightharpoonup \underline{\theta}_0^\star \quad \textit{dans } L^2(\Omega)^n \textit{ faible} \tag{5.9}$$

et $\underline{\theta}_0^\star$ est le contrôle optimal associé au problème

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \nabla p - \Delta \underline{u} & = & \underline{f} + \underline{\theta} & & \textit{dans } \Omega \\ \textit{div } \underline{u} & = & 0 & & \textit{dans } \Omega \\ \underline{u} & = & 0 & & \textit{sur } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{5.10}$$

avec comme fonction coût

$$J_0(\underline{\theta}) = \frac{1}{2}\int_\Omega B\nabla \underline{u} : \nabla \underline{u}\, dx + \frac{N}{2}\int_\Omega |\underline{\theta}|^2\, dx. \tag{5.11}$$

Démonstration

Par le Lemme 4.1, on a (5.9). D'autre part, en utilisant le Théorème 4.3 avec $M = 0$ et $M_B = 0$, on obtient directement le résultat annoncé. Ceci achève la démonstration.

Remarque 5.5 Dans le cas où $\sigma_\varepsilon \to 0$ (ie : quand les trous sont larges), on a $\widetilde{\underline{u}_\varepsilon} \to 0$ dans $H^1(\Omega)^n$ fort, par conséquent $\nabla\widetilde{\underline{u}_\varepsilon} \to 0$ dans $L^2(\Omega)^{n\times n}$ fort. on en déduit facilement la convergence d'énergie suivante

$$\int_{\Omega_\varepsilon} B\nabla\underline{u}_\varepsilon : \nabla\underline{u}_\varepsilon \, dx = \int_\Omega B\nabla\widetilde{\underline{u}_\varepsilon} : \nabla\widetilde{\underline{u}_\varepsilon} \, dx \to 0.$$

REFERENCES :

[1] Allaire G., Homogenization of the Navier-Stokes equations in open sets perforated with tiny holes, *Arch. Ration. Mech. Anal*, **113**, No 3, 209-259, 1991.

[2] Allaire G., Homogenization of the Stokes flow in a connected porous medium, *Asymptotic Anal.*, **2**, No.3, 203-222, 1989.

[3] Cioranescu D., Murat F., Un terme étrange venu d'ailleurs, *Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications*, Collège de France Seminar,Vols 2 & 3, H. Brezis & J.-L. Lions ed., Research Notes in Mathematics 60 & 70, Pitman, London, 1982.

[4] Cioranescu D., Calcul des variations sur des sous-espaces variables, *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A*, **291**, 19-22, 1980.

[5] Cioranescu D., Calcul des variations sur des sous-espaces variables. Applications, *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A*, **291**, 87-90, 1980.

[6] Kesavan S. and Saint Jean Paulin J., Homogenization of an optimal control problem, *SIAM J. Contr. Optim.*, **35**, 1557-1573, 1997.

[7] Kesavan S. and Saint Jean Paulin J., Optimal control on perforated domains, *J. Math. Anal. Appl.*, **229**, No.2, 563-586, 1999.

[8] Kesavan S. and Vanninathan M., L'homogénéisation d'un problème de contrôle optimal, *C.R.A.S, Paris, Sér. A* , **285**, 441-444, 1977.

[9] Lions J.L., *Sur le contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.

[10] Lions J.L., *Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and their Control*, Beijing, China: Science Press; New York: Gordon and Breach, Science Publishers, Inc. XXIII, 1981.

[11] Rajesh M., Convergence of some Energies for the Dirichlet Problem in Perforated Domains (preprint).

[12] Saint Jean Paulin J. and Zoubairi H., Optimal control and homogenization in a mixture of fluids, *Ricerche di Matematica* (à paraitre).

[13] Saint Jean Paulin J. and Zoubairi H., Optimal control and "strange term" for a Stokes problem in perforated domains, *Portugalie Matematica* (à paraitre).

[14] Sanchez-Palencia E., *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics, **127**, Springer-Verlag, 1980.

[15] Sanchez-Palencia E., Problèmes aux limites dans des domaines contenant des parois perforées, Collège de France, Pitman London, 1980-81.

CHAPITRE IV

Contrôle optimal et homogénéisation pour un problème de torsion élastique

CHAPITRE IV
CONTROLE OPTIMAL
ET HOMOGENEISATION
POUR LE PROBLEME DE LA TORSION.

INTRODUCTION

On considère un arbre cylindrique Q^r de section droite Ω avec r cavités cylindriques de même direction de génératrices que celles de Q^r.
On désigne par $\Omega^\star$: la section droite occupé par le materiau et par Ω^i les sections droites des cavités $\overline{\Omega}^i \subset \Omega$, $\overline{\Omega}^i \cap \overline{\Omega}^k \neq 0 \quad \forall i \neq k$.
L'étude du contrôle optimal de la torsion élastique de cet arbre conduit à la résolution du problème suivant :

$$(0.1) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccc} \Delta f_r + 2\mu\alpha & = & \theta_\varepsilon & & \text{dans } \Omega^\star \\ f_r & = & 0 & & \text{sur } \partial\Omega \\ f_r & = & \text{constante} & & \text{sur } \partial\Omega^i \ i = 1, ..., r \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega^i} \frac{\partial f_r}{\partial x} & = & 2\mu\alpha|\Omega^i| & & i = 1, ..., r \end{array} \right.$$

où μ est le coefficient de Lamé du materiau, α l'angle de torsion, θ le contrôle et f_r est la fonction "contraintes".
On considère le problème (0.1) avec un nombre croissant de cavités, en supposant qu'elles sont réparties de faon périodique.
On étudie le problème de contrôle optimal associé à ce problème où le contrôle agit sur l'équation d'état et la fonction coût est donnée.
On va se placer dans un cadre plus général (voir Cioranescu & Saint Jean Paulin [2]).

Ce chapitre est divisé en six paragraphes organisés de la manière suivante. Dans le premier paragraphe, on présente le problème que l'on va traiter et on définit la notion de contrôle optimal. Dans le deuxième paragraphe, on rappelle des lemmes de prolongements dûs à Cioranescu & Saint Jean Paulin [2]. Dans le troisième paragraphe, on homogénéise le problème adjoint et on obtient le problème de contrôle optimal limite. Dans le quatrième paragraphe, on étudie les propriétés du tenseur $B^\sharp$ apparaissant dans le problème limite. Dans le cinquième paragraphe, on étudie le problème de contrôle optimal que l'on a introduit au §1. Dans le sixième et dernier paragraphe, on étudie le cas unidimensionnel.

1. PRESENTATION DU PROBLEME

Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^n$ $(n1)$. Soit $Y =]0,1[^n$ une cellule de base de $I\!R^n$ et $T \subset Y$ un connexe fermé de $I\!R^n$. On définit $Y^\star$ par: $Y^\star = Y \backslash T$

Soit $\varepsilon > 0$ une suite de réels qui tend vers 0. Pour ε fixé, on considère un domaine Ω_ε perforé periodiquement obtenu comme suit.

On recouvre $\mathrm{I\!R}^n$ de faon périodique avec des pavés homothétiques de rapport ε du pavé de base Y. On note par T^i_ε des ensembles de taille ε strictement inclus dans chaque pavé (chaque trou T^i_ε étant égal à un translaté de εT). On définit alors Ω_ε par $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash T_\varepsilon$ où $T_\varepsilon = \cup T^i_\varepsilon$ (on ne considère que les trous qui ne coupent pas le bord de Ω). Dans tout ce qui suit, on utilisera systématiquement la convention de sommation sur les indices répétés.

Soit $\alpha_M > \alpha_m > 0$ des constantes données. On définit $\mathcal{M}(\alpha_m, \alpha_M)$, l'ensemble des matrices $A = (a_{ij})$ $n \times n$ tel que :

$$(1.1) \qquad \forall \xi = (\xi_i) \in \mathrm{I\!R}^n \quad \alpha_m \xi_i \xi_i \leq a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \alpha_M \xi_i \xi_i \quad p.p. \text{ et } a_{ij} \in L^\infty(\Omega).$$

Soit $A \in \mathcal{M}(\alpha_m, \alpha_M)$ et $B \in \mathcal{M}(\beta_m, \beta_M)$ une matrice symétrique.

Soit $A_\varepsilon(x) = A(\frac{x}{\varepsilon})$ et $B_\varepsilon(x) = B(\frac{x}{\varepsilon})$ des matrices périodiques obtenues à partir de A et B par Y-periodicité.

Nous allons définir le contrôle optimal comme suit. Soit $\mathcal{U}_{ad}^{\varepsilon}$ un convexe fermé non vide de $L^2(\Omega)$ (l'ensemble des contrôles admissibles).
Soit $f \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ et $N > 0$ une constante strictement positive. Pour $\theta_\varepsilon \in \mathcal{U}_{ad}^{\varepsilon}$ on définit u_ε l'unique solution de :

$$
(1.2) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}\,(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f + \theta_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_\varepsilon = \text{ constante} & \text{sur } \partial T_\varepsilon \\ \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon . n_\varepsilon = \int_{T_\varepsilon} f dx. \end{cases}
$$

où n_ε est la normale unitaire dirigée vers l'exterieur de ∂T_ε . La fonction coût est donnée par

$$
(1.3) \qquad J_\varepsilon(\theta_\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} B_\varepsilon \nabla u_\varepsilon . \nabla u_\varepsilon \; dx + \frac{N}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} \theta_\varepsilon^2 \; dx.
$$

Le contrôle optimal $\theta_\varepsilon^\star$ est la fonction dans $\mathcal{U}_{ad}$ qui minimise $J_\varepsilon(\theta_\varepsilon)$ pour $\theta_\varepsilon \in \mathcal{U}_{ad}^{\varepsilon}$, en d'autres termes

$$
(1.4) \qquad J_\varepsilon(\theta_\varepsilon^\star) = \min_{\theta_\varepsilon \in \mathcal{U}_{ad}^{\varepsilon}} J_\varepsilon(\theta_\varepsilon).
$$

Ce type de problème s'inspire des problèmes de Lions [6], il [6] a prouvé l'existence et l'unicité du contrôle optimal $\theta_\varepsilon^\star$.
Notre but est d'étudier le comportement limite de $\theta_\varepsilon^\star$ lorsque $\varepsilon \to 0$ et de caractériser $\theta_0^\star$ comme étant le contrôle optimal d'un problème similaire avec des matrices limites A_0 and B_0 et bien sûr les identifier.
Ce type de problème a été étudié par Kesavan & Vanninathan [5] dans le cas périodique pour un problème elliptique de second ordre avec des conditions de Dirichlet sur le bord, par Kesavan & Saint Jean Paulin [3] pour le même opérateur et les mêmes conditions sur le bord mais avec la topologie de la H-convergence. Kesavan & Saint Jean Paulin [4] se sont interessés au contrôle optimal d'un problème elliptique de

second ordre dans les domaines perforés avec des conditions de Neumann sur le bord des trous et des conditions de Dirichlet sur le bord du domaine avec la H_0-convergence. L'étude du contrôle optimal a été effectué avec d'autres types d'équations entre autres les équations de Stokes. En effet Saint Jean Paulin & Zoubairi [9] et [8] ont étudiées respectivement le problème de Stokes dans les domaines non perforés et dans les domaines perforés de petits trous. Dans ce chapitre, on va se placer dans le cas périodique et considérer l'opérateur de Laplace mais avec des conditions sur le bords des trous définies par une intégrale. On va adapter les méthodes utilisées dans [3], [4], [8] ou [9] pour le problème de torsion élastique.

Notation Dans tout ce qui suit, C désigne différentes constantes positives indépendante de ε. on note par $|\ .\ |$ la mesure de Lebesgue en dimension n.

2. LEMMES DE PROLONGEMENTS

On introduit l'espace

$$V_\varepsilon = \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon) |\ v = \text{ constante } \ \text{ sur } \ \partial T_\varepsilon,\ v = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega\}$$

On prolonge $v \in V_\varepsilon$ dans les trous par sa valeur sur le bord des trous. Soit P_ε ce prolongement, on a alors que $P_\varepsilon \in \mathcal{L}(V_\varepsilon, H_0^1(\Omega))$ satisfait

$$|\nabla P_\varepsilon v|_{L^2(\Omega)^n} = |\nabla v|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^n} \quad \forall v \in V_\varepsilon. \tag{2.1}$$

Enonons le résultat suivant dû à Cioranescu et Saint Jean Paulin [2]

Lemme 2.1 *Soit $F \in L^2(Y)$ et $\Phi \in L^2(Y^\star)^n$ $Y-$périodique solution de*

$$\begin{cases} -\ div\ \Phi = F \ \ dans\ Y^\star \\ \displaystyle\int_{\partial T} \Phi.n\ ds = \int_T F\ dx, \end{cases} \tag{2.2}$$

Alors il existe $\widetilde{\Phi} \in L^2(T)$ telle que

$$\begin{cases} -\ div\ \widetilde{\Phi} = F \ \ dans\ T \\ \widetilde{\Phi}.n|_{\partial T} = \Phi.n|_{\partial T} \end{cases} \tag{2.3}$$

De plus,

$$|\widetilde{\Phi}|_{L^2(T)} \leq C\ (|F|_{L^2(Y)} + |\Phi|_{L^2(Y^\star)}). \tag{2.4}$$

Définition 2.2 On désigne par Q le prolongement donné par le lemme 2.1, c'est à dire $Q \in \mathcal{L}(Y^\star, Y)$ tel que

$$Q\Phi = \begin{cases} \Phi & \text{dans } Y^\star \\ \widetilde{\Phi} & \text{dans } T. \end{cases} \tag{2.5}$$

3. HOMOGENEISATION

Le problème (1.2)-(1.4) peut se réecrire à l'aide de systèmes d'équations en introduisant l'état adjoint $p_\varepsilon \in V_\varepsilon$. On obtient, $(u_\varepsilon, p_\varepsilon) \in V_\varepsilon^2$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{cccl} -\text{ div } (A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) & = & f + \theta_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \text{div } ({}^t A_\varepsilon \nabla p_\varepsilon - B_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) & = & 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = p_\varepsilon & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_\varepsilon & = & \text{constante} & \text{sur } \partial T_\varepsilon \\ p_\varepsilon & = & \text{constante} & \text{sur } \partial T_\varepsilon \\ \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon . n_\varepsilon \ ds & = & \displaystyle\int_{T_\varepsilon} f dx & \\ \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} ({}^t A_\varepsilon \nabla p_\varepsilon - B_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) . n_\varepsilon \ ds & = & 0. & \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Le contrôle optimal $\theta_\varepsilon^\star$ est caractérisé par l'inégalité variationnelle

$$\theta_\varepsilon^\star \in \mathcal{U}_{ad}^\varepsilon \text{ et } \int_\Omega (p_\varepsilon + N\theta_\varepsilon^\star)(\theta_\varepsilon - \theta_\varepsilon^\star) \geq 0 \quad \forall \theta_\varepsilon \in \mathcal{U}_{ad}^\varepsilon. \tag{3.2}$$

Pour toute fonction h $Y-$périodique, on définit

$$m_Y(h) = \int_Y h(y)\ dy. \tag{3.3}$$

On rappelle le résultat classique suivant

Lemme 3.1 *Soit $h \in L^p(\Omega)$ une fonction $Y-$périodique et $1 \leq p < \infty$. Alors*

$$h(x/\varepsilon) \rightharpoonup m_Y(h) \textit{ dans } L^p(\Omega) \textit{ faible et dans } L^\infty(\Omega) \textit{ faible } \star. \tag{3.4}$$

On va établir le résultat suivant :

Théorème 3.2 *Soit* $f \in L^2(\Omega)$ *et* $\theta_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ *tel que* $\widetilde{\theta_\varepsilon}$ *est bornée dans* $L^2(\Omega)$. *Soit* u_ε *et* p_ε *solutions du problème* (3.1) *avec* B *matrice non nécessairement symétrique Alors il existe des matrices* A_0 *et* $B^\sharp$ *et des fonctions* $\theta \in L^2(\Omega), u,\ p \in H_0^1(\Omega)$ *telles que (par extraction de sous-suites)*

$$\left\{ \begin{array}{lll} \widetilde{\theta_\varepsilon} & \rightharpoonup & \theta \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ P_\varepsilon u_\varepsilon & \rightharpoonup & u \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible} \\ P_\varepsilon p_\varepsilon & \rightharpoonup & p \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible,} \end{array} \right. \tag{3.5}$$

où (u,p) *est solution de*

$$\left\{ \begin{array}{c} -\ div\ (A_0 \nabla u) = f + \theta \quad dans \quad \Omega \\ div\ ({}^t A_0 \nabla p - B^\sharp \nabla u) = 0 \quad dans \quad \Omega \\ u = p = 0 \quad sur \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.6}$$

où A_0 *est la matrice des coefficients homogénéisés donnée par* (3.22) *et* $B^\sharp$ *est une matrice dépendant à la fois de* A *et de* B, *dont l'expression est donnée par* (3.52).

Démonstration

Première étape : Estimations a priori

Du fait que $||\widetilde{\theta_\varepsilon}||_{L^2(\Omega)}$ est bornée, on a clairement (après extraction de sous-suites)

$$\widetilde{\theta_\varepsilon} \rightharpoonup \theta \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible.} \tag{3.7}$$

On multiplie la première équation de (3.1) par u_ε et on intègre à l'aide de la formule de Green, on obtient l'estimation suivante en utilisant l'égalité (2.1)

$$||P_\varepsilon u_\varepsilon||_{H_0^1(\Omega)} \leq C, \tag{3.8}$$

ce qui conduit (par extraction de sous-suite) à :

$$P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible.} \tag{3.9}$$

De même en multipliant la deuxième équation de (3.1) par p_ε et en intégrant par parties, on obtient

$$\int_{\Omega_\varepsilon} {}^tA_\varepsilon \nabla p_\varepsilon . \nabla p_\varepsilon \, dx - \int_{\Omega_\varepsilon} B_\varepsilon \nabla u_\varepsilon . \nabla p_\varepsilon \, dx = 0. \tag{3.10}$$

En utilisant les estimations (3.8) sur u_ε et le fait que $A_\varepsilon \in \mathcal{M}(\alpha_m, \alpha_M)$ et $B_\varepsilon \in \mathcal{M}(\beta_m, \beta_M)$, on aboutit à

$$|\nabla P_\varepsilon p_\varepsilon|_{L^2(\Omega)^n} \leq C, \tag{3.11}$$

ce qui donne en utilisant l'inégalité de Poincaré :

$$||P_\varepsilon p_\varepsilon||_{H_0^1(\Omega)} \leq C, \tag{3.12}$$

et donc par extraction de sous-suite,on a :

$$P_\varepsilon p_\varepsilon \rightharpoonup p \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible.} \tag{3.13}$$

Nous allons à présent passer à la limite dans la deuxième équation de (3.1) lorsque $\varepsilon \to 0$. Pour cela nous avons besoin de fonctions tests que nous allons construire.

Deuxième étape : Construction des fonctions tests

Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$ et y_k la k-ième composante de $y \in I\!R^n$.
Soit ω^k solution unique du problème auxiliaire (associé à l'équation d'état) :

$$\begin{cases} - \text{ div } (A\nabla\omega^k) = 0 \text{ dans } Y^\star \\ \displaystyle\int_{\partial T} A\nabla\omega^k . n = 0 \\ \omega^k = \text{ constante sur } \partial T \\ \omega^k - y_k \ Y\text{– périodique et } m_Y(\omega^k - y_k) = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Soit ψ^k solution unique du problème associé à l'équation adjointe

$$(3.15)\qquad \begin{cases} \text{div } ({}^tA\nabla\psi^k + {}^tB\nabla\omega^k) = 0 \text{ dans } Y^\star \\ \displaystyle\int_{\partial T} ({}^tA\nabla\psi^k + {}^tB\nabla\omega^k).n = 0 \\ \psi^k = \text{ constante sur } \partial T \\ \psi^k \ Y\text{– périodique et } m_Y(\psi^k) = 0. \end{cases}$$

On prolonge ω^k à l'intérieur des trous par sa valeur au bord de T, soit $\widetilde{P}\omega^k$ ce prolongement.
On définit ω_ε^k et ψ_ε^k par

$$(3.16)\qquad \begin{cases} \omega_\varepsilon^k(x) = \varepsilon\widetilde{P}\omega^k(x/\varepsilon) \\ \psi_\varepsilon^k(x) = \varepsilon\psi^k(x/\varepsilon), \end{cases}$$

On a le résultat de convergence suivant

$$(3.17)\qquad \omega_\varepsilon^k \rightharpoonup x_k \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible,}$$

De même

$$(3.18)\qquad P_\varepsilon(\psi_\varepsilon^k) \rightharpoonup 0 \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible.}$$

Avec les définitions (3.16), les problèmes (3.14) et (3.15) donnent respectivement

$$(3.19)\qquad \begin{cases} -\text{ div } (A_\varepsilon\nabla\omega_\varepsilon^k) = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon \\ \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} A_\varepsilon\nabla\omega_\varepsilon^k.n_\varepsilon = 0 \\ \omega_\varepsilon^k = \text{ constante sur } \partial T_\varepsilon \end{cases}$$

et

$$(3.20)\qquad \begin{cases} \text{div } ({}^tA_\varepsilon\nabla\psi_\varepsilon^k + {}^tB_\varepsilon\nabla\omega_\varepsilon^k) = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon \\ \displaystyle\int_{\partial T} ({}^tA_\varepsilon\nabla\psi_\varepsilon^k + {}^tB_\varepsilon\nabla\omega_\varepsilon^k).n_\varepsilon = 0 \\ \psi_\varepsilon^k = \text{ constante sur } \partial T_\varepsilon. \end{cases}$$

Troisième étape : Homogénéisation

L'homogénéisation du problème (1.2) est classique (voir [2]), Cioranescu & Saint Jean Paulin [2] ont obtenu que u est solution de

$$\begin{cases} -\text{ div } (A_0 \nabla u) = f + \theta & \text{dans } \Omega \\ \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.21}$$

où A_0 est la matrice des coefficients homogénéisées définie par

$$A_0 e_k = m_Y \Big(Q(A\nabla\omega^k) \Big), \tag{3.22}$$

avec Q l'opérateur de prolongement défini par (2.5).

Quatrième étape : Méthode de l'énergie

Nous allons maintenant homogénéiser le problème (3.1) en utilisant une variante de la méthode de l'énergie. Pour pouvoir passer à la limite lorsque ε tend vers 0, il est nécessaire d'obtenir des équations et des estimations dans Ω tout entier. Pour cela, on va utiliser l'opérateur de prolongement Q_ε (voir [2]) défini comme suit. On pose

$$\xi_\varepsilon = A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \tag{3.23}$$

D'après (1.2), ξ_ε vérifie

$$\begin{cases} -\text{ div } \xi_\varepsilon = f + \theta_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} \xi_\varepsilon . n_\varepsilon = \int_{T_\varepsilon} f dx. \end{cases} \tag{3.24}$$

On pose $\Phi(y) = \xi_\varepsilon(\varepsilon y)$ avec $y = x/\varepsilon$. En utilisant le lemme 2.2 et l'opérateur de prolongement (2.5), on définit

$$(Q_\varepsilon \xi_\varepsilon)(\varepsilon y) = (Q\Phi)(y). \tag{3.25}$$

Par conséquent,

$$-\text{ div } Q_\varepsilon \xi_\varepsilon = f + \widetilde{\theta_\varepsilon} \;\text{ dans } \Omega \tag{3.26}$$

avec

$$Q_\varepsilon \xi_\varepsilon \rightharpoonup \xi = A_0 \nabla u \text{ dans } L^2(\Omega)^n \text{ faible.} \tag{3.27}$$

De la même manière, on va prolonger l'équation adjointe dans Ω. Pour cela on pose,

$$z_\varepsilon = {}^t A_\varepsilon \nabla p_\varepsilon - B_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \tag{3.28}$$

D'après (3.1), z_ε vérifie

$$\begin{cases} -\operatorname{div} z_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} z_\varepsilon . n_\varepsilon = 0. \end{cases} \tag{3.29}$$

On va prolonger de manière similaire à la méthode précédente vu que le lemme 2.2 peut être appliqué, on obtient

$$-\operatorname{div} Q_\varepsilon z_\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{3.30}$$

D'après les estimations (3.7), (3.12) et les hypothèses sur A_ε et B_ε, on obtient

$$|Q_\varepsilon z_\varepsilon|_{L^2(\Omega)^n} \leq |z_\varepsilon|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^n} \leq C. \tag{3.31}$$

On obtient donc par extraction de sous-suites

$$Q_\varepsilon z_\varepsilon \rightharpoonup z \text{ dans } L^2(\Omega)^n \text{ faible.} \tag{3.32}$$

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
On multiplie l'équation (3.26) par $\varphi P_\varepsilon(\psi_\varepsilon^k)$, on intègre par parties (on utilise le fait que $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$), on obtient

$$\int_\Omega (f + \widetilde{\theta_\varepsilon}) \varphi P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k \, dx = \int_\Omega Q_\varepsilon \xi_\varepsilon . \nabla \varphi (P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k) \, dx + \int_\Omega Q_\varepsilon \xi_\varepsilon . \nabla (P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k) \varphi \, dx. \tag{3.33}$$

De la même manière, on multiplie l'équation (3.30) par $\varphi \omega_\varepsilon^k$ et on intègre par parties, on aboutit à

$$0 = -\int_\Omega Q_\varepsilon z_\varepsilon . (\nabla \varphi) \omega_\varepsilon^k \, dx - \int_\Omega Q_\varepsilon z_\varepsilon . (\nabla \omega_\varepsilon^k) \varphi \, dx. \tag{3.34}$$

On additionne (3.33) et (3.34) :

$$
(3.35) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (f+\widetilde{\theta}_\varepsilon) P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k \varphi \; dx = -\int_\Omega Q_\varepsilon z_\varepsilon.(\nabla\varphi)\omega_\varepsilon^k \; dx - \int_\Omega Q_\varepsilon z_\varepsilon.\nabla\omega_\varepsilon^k \varphi \; dx \\ \qquad\qquad \displaystyle + \int_\Omega Q_\varepsilon \xi_\varepsilon.\nabla\varphi P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k \; dx + \int_\Omega Q_\varepsilon \xi_\varepsilon.\nabla(P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k)\varphi \; dx. \end{cases}
$$

En utilisant les définitions des opérateurs de prolongement, on va expliciter l'expression suivante intervenant dans (3.35)

$$
(3.36) \qquad \begin{cases} \displaystyle -\int_\Omega Q_\varepsilon z_\varepsilon.\nabla\omega_\varepsilon^k \varphi \; dx + \int_\Omega Q_\varepsilon \xi_\varepsilon.\nabla(P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k)\varphi \; dx = \\ \displaystyle \int_{\Omega_\varepsilon} (-z_\varepsilon.\nabla\omega_\varepsilon^k + \xi_\varepsilon.\nabla\psi_\varepsilon^k)\varphi \; dx + \int_{T_\varepsilon} (-Q_\varepsilon z_\varepsilon.\nabla\omega_\varepsilon^k + Q_\varepsilon \xi_\varepsilon.\nabla(P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k))\varphi \; dx. \end{cases}
$$

Or comme $P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k =$ constante sur T_ε et $\omega_\varepsilon^k =$ constante sur T_ε, on en déduit que l'intégrale sur T_ε est nulle. En utilisant à présent les définitions (3.23) de ξ_ε et (3.28) de z_ε, l'expression (3.36) devient

$$
(3.37) \qquad \begin{cases} \displaystyle -\int_\Omega Q_\varepsilon z_\varepsilon.\nabla\omega_\varepsilon^k \varphi \; dx + \int_\Omega Q_\varepsilon \xi_\varepsilon.\nabla(P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k)\varphi \; dx = \\ \displaystyle -\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla p_\varepsilon.(A_\varepsilon \nabla\omega_\varepsilon^k)\varphi \; dx + \int_{\Omega_\varepsilon} b_\varepsilon^k.\; \nabla u_\varepsilon \varphi \; dx, \end{cases}
$$

où b_ε^k est donné par

$$
(3.38) \qquad b_\varepsilon^k = {}^t A_\varepsilon \nabla\psi_\varepsilon^k + {}^t B_\varepsilon \nabla\omega_\varepsilon^k.
$$

En effectuant les prolongements adéquats sur le membre de droite de (3.37), il en résulte

$$
(3.39) \qquad \begin{cases} \displaystyle -\int_\Omega Q_\varepsilon z_\varepsilon.\nabla\omega_\varepsilon^k \varphi \; dx + \int_\Omega Q_\varepsilon \xi_\varepsilon.\nabla(P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k)\varphi \; dx = \\ \displaystyle -\int_\Omega \nabla(P_\varepsilon p_\varepsilon).Q_\varepsilon(A_\varepsilon \nabla\omega_\varepsilon^k)\varphi \; dx + \int_\Omega Q_\varepsilon b_\varepsilon^k.\; \nabla(P_\varepsilon u_\varepsilon)\varphi \; dx, \end{cases}
$$

on a utilisé le fait que les intégrales sur T_ε dans le membre de droite de (3.39) sont nulles. En effet, comme $P_\varepsilon u_\varepsilon =$ constante sur T_ε et $P_\varepsilon p_\varepsilon =$ constante sur T_ε, leur gradiant (intervenant dans ces integrales sur T_ε) est nul.

Comme $\operatorname{div}\,(A_\varepsilon \nabla \omega_\varepsilon^k) = 0$ dans Ω_ε (d'après (3.19), on a

$$\operatorname{div}\,(Q_\varepsilon(A_\varepsilon \nabla \omega_\varepsilon^k)) = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{3.40}$$

De même vu que $\operatorname{div}\,(b_\varepsilon^k) = 0$ dans Ω_ε (d'après (3.20) et (3.38)), on a

$$\operatorname{div}\,(Q_\varepsilon b_\varepsilon^k) = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{3.41}$$

De l'expression (3.35), en tenant compte de (3.39), on obtient

$$\left\{\begin{aligned} \int_\Omega (f+\widetilde{\theta}_\varepsilon) P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k \varphi \; dx = &- \int_\Omega Q_\varepsilon z_\varepsilon . \nabla\varphi \omega_\varepsilon^k \; dx + \int_\Omega Q_\varepsilon \xi_\varepsilon . \nabla\varphi P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k \; dx \\ &- \int_\Omega \nabla(P_\varepsilon p_\varepsilon) . Q_\varepsilon(A_\varepsilon \nabla\omega_\varepsilon^k)\varphi \; dx + \int_\Omega Q_\varepsilon b_\varepsilon^k . \; \nabla(P_\varepsilon u_\varepsilon)\varphi \; dx. \end{aligned}\right. \tag{3.42}$$

En intégrant par parties les deux dernières intégrale du membre de droite, on obtient

$$\left\{\begin{aligned} \int_\Omega (f+\widetilde{\theta}_\varepsilon) P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k \varphi \; dx = &- \int_\Omega Q_\varepsilon z_\varepsilon . \nabla\varphi \omega_\varepsilon^k \; dx + \int_\Omega Q_\varepsilon \xi_\varepsilon . \nabla\varphi P_\varepsilon \psi_\varepsilon^k \; dx \\ &+ \int_\Omega (P_\varepsilon p_\varepsilon) Q_\varepsilon(A_\varepsilon \nabla\omega_\varepsilon^k) . \nabla\varphi \; dx - \int_\Omega Q_\varepsilon b_\varepsilon^k . \; \nabla\varphi P_\varepsilon u_\varepsilon \; dx. \end{aligned}\right. \tag{3.43}$$

Maintenant, nous pouvons passer à la limite dans l'expression (3.43) lorsque ε tend vers 0

Cinquième étape : Passage à la limite

En utilisant la définition (3.38) et le lemme 3.1, on montre facilement que b_ε^k (étant périodique), converge dans $L^2(\Omega_\varepsilon)$ vers sa moyenne et donc après prolongement et extraction de sous-suite, il en résulte

$$Q_\varepsilon b_\varepsilon^k \rightharpoonup b_0^k = m(Q(\,{}^t A \nabla \psi^k + \,{}^t B \nabla \omega^k)) \text{ dans } L^2(\Omega)^n \text{ faible.} \tag{3.44}$$

De même par périodicité, on a la convergence

$$Q_\varepsilon(A_\varepsilon \nabla \omega_\varepsilon^k) \rightharpoonup A_0 e_k \text{ dans } L^2(\Omega)^n \text{ faible.} \tag{3.45}$$

Maintenant du fait que z_ε vérifie (3.30) et (3.32), que $Q_\varepsilon b_\varepsilon^k$ vérifie (3.43) et (3.44) et que $Q_\varepsilon(A_\varepsilon \nabla \omega_\varepsilon^k)$ vérifie (3.40) et (3.45), on a au sens des distributions

$$\text{div } z = 0, \ \text{div } b_0^k = 0 \text{ et } \ \text{div } A_0 e_k = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{3.46}$$

En utilisant d'une part les convergences (3.8) et (3.18) pour le membre de gauche de (3.43) et d'autre part les convergences (3.32) et (3.17) pour la première intégrale du membre de droite de (3.43), les convergences (3.27) et (3.18) pour la deuxième intégrale, les convergences (3.13) et (3.45) pour la troisième intégrale et pour finir les convergences(3.9) et (3.44) pour la dernière intégrale, l'expression (3.43) devient à la limite

$$0 = -\int_\Omega z \nabla . \varphi \ x_k \ dx + \int_\Omega p(A_0 e_k) . \nabla \varphi \ dx - \int_\Omega u \ b_0^k . \nabla \varphi \ dx. \tag{3.47}$$

On intégre par parties (3.47) et on utilise (3.46), on obtient

$$0 = \int_\Omega z \ \varphi \ e_k \ dx - \int_\Omega {}^t A_0 \nabla p \ e_k \ \varphi \ dx + \int_\Omega \nabla u \ b_0^k \ \varphi \ dx. \tag{3.48}$$

Ceci est vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Par conséquent

$$z \ .e_k = {}^t A_0 \nabla p . \ e_k - b_0^k . \ \nabla u. \tag{3.49}$$

Finalement,

$$z = {}^t A_0 \nabla p - B^\sharp \nabla u, \tag{3.50}$$

où la matrice $B^\sharp$ est définie par

$${}^t B^\sharp e_k = b_0^k. \tag{3.51}$$

En utilisant (3.44) , on obtient

$${}^t B^\sharp e_k = m(Q(\ {}^t A \nabla \psi^k + \ {}^t B \nabla \omega^k)). \tag{3.52}$$

Ceci achève la démonstration.

Remarque 3.4 *La symétrie de la matrice B n'intervient pas pour l'homogénéisation du problème adjoint. Mais cette hypothèse sera nécessaire pour l'étude du contrôle optimal qui fera l'objet du paragraphe suivant.*

4. PROPRIETES DE $B^\sharp$

Nous allons à présent donner un résultat concernant l'ellipticité et la symétrie du tenseur $B^\sharp$.

Théorème 4.1 *Soit $B^\sharp$ défini par* (3.49). *On suppose que B est symétrique. Alors $B^\sharp$ est elliptique et symétrique.*

Démonstration

Pour démontrer ce théorème, on va s'inspirer des méthodes utilisées dans [3] et dans [9] en les adaptant à notre problème. On introduit la fonction Y-périodique χ^k définie par

$$\chi^k = -\omega^k + y_k. \tag{4.1}$$

D'après (3.14), la fonction χ^k vérifie

$$\begin{cases} -\text{ div } (A\nabla(-\chi^k + y_k)) = 0 & \text{dans } Y^\star \\ \displaystyle\int_{\partial T} A\nabla(-\chi^k + y_k).n \; d\sigma = 0 & \\ -\chi^k + y_k = \text{ constante} & \text{sur } \partial T \\ \chi^k \;\; Y\text{– périodique.} & \end{cases} \tag{4.2}$$

Soit Y^k définie par

$$\begin{cases} -\text{ div } (B\nabla(-Y^k + y_k)) = 0 & \text{dans } Y^\star \\ \displaystyle\int_{\partial T} B\nabla(-Y^k + y_k).n \; d\sigma = 0 & \\ -Y^k + y_k = \text{ constante} & \text{sur } \partial T \\ Y^k \;\; Y\text{– périodique.} & \end{cases} \tag{4.3}$$

De même en utilisant (4.1), le problème (3.15) s'écrit

$$(4.4) \qquad \begin{cases} \operatorname{div}\left({}^tA\nabla\psi^k + {}^tB\nabla(-\chi^k + y_k)\right) = 0 \quad \text{dans } Y^\star \\ \displaystyle\int_{\partial T} \left({}^tA\nabla\psi^k + {}^tB\nabla(-\chi^k + y_k)\right).n \, d\sigma = 0 \\ \psi^k = \text{ constante sur } \partial T \\ \psi^k \ Y\text{– périodique.} \end{cases}$$

En écrivant à l'aide des composantes l'expression de $B^\sharp$ obtenue en (3.49), on a

$$(4.5) \qquad b^\sharp_{ki} = \int_Y Q\left(a_{ji}\,\frac{\partial\psi^k}{\partial y_j} + b_{ji}\frac{\partial(-\chi^k + y_k)}{\partial y_j}\right) dy.$$

On va montrer qu'en fait, ces coefficients ne dépendent pas de l'opérateur de prolongement Q. Par définition de Q, on a

$$(4.6) \qquad b^\sharp_{ki} = \int_{Y^\star} \left(a_{ji}\,\frac{\partial\psi^k}{\partial y_j} + b_{ji}\frac{\partial(-\chi^k + y_k)}{\partial y_j}\right) dy + \int_T (Qb_k)_i \, dy,$$

où

$$(4.7) \qquad b_k = {}^tA\nabla\psi^k + {}^tB\nabla(-\chi^k + y_k).$$

Exprimons d'une autre manière la deuxième intégrale de (4.6) en usant d'une intégrations par parties.

$$\begin{aligned} \int_T (Qb_k)_i \, dy &= \int_T (Qb_k)_\ell \frac{\partial y_i}{\partial y_\ell} \, dy \\ &= -\int_T \operatorname{div}\,(Qb_k)\ y_i \, dy + \int_{\partial T} (Qb_k).n_1 \ y_i \, dy, \end{aligned}$$

où n_1 est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de T.
Comme $-\operatorname{div}\,(Qb_k) = 0$ dans Y et $(Qb_k).n_1 = -b_k.n$ par définition de Q (avec n la normale unitaire dirigée vers l'exterieur de $Y^\star$), alors

$$(4.8) \qquad \int_T (Qb_k)_i \, dy = -\int_{\partial T} b_k.n \ y_i \, dy.$$

Par conséquent, (4.5) s'écrit

$$(4.9) \qquad b^\sharp_{ki} = \int_{Y^\star} \left(a_{ji}\,\frac{\partial\psi^k}{\partial y_j} + b_{ji}\frac{\partial(-\chi^k + y_k)}{\partial y_j}\right) dy - \int_{\partial T} b_k.n \ y_i \, d\sigma$$

D'après l'expression ci-dessus, les coefficients $b^\sharp_{ki}$ sont indépendants de l'opérateur de prolongement choisi.

Nous allons à présent exprimer ces coefficients sous une autre forme pour établir les propriétés de symétrie et d'ellipticité. Pour ce faire, introduisons Y^k solution de (4.3) dans (4.9), on obtient

$$
(4.10) \qquad \begin{cases} b^\sharp_{ki} = \displaystyle\int_{Y^\star} b_{ji}\ \frac{\partial(-Y^k + y_k)}{\partial y_j}\ dy - \int_{\partial T} b_k.n\ y_i\ d\sigma \\ \qquad + \displaystyle\int_{Y^\star} \Big(\ a_{ji}\ \frac{\partial \psi^k}{\partial y_j} - b_{ji}\ \frac{\partial(\chi^k - Y^k)}{\partial y_j}\Big)\ dy. \end{cases}
$$

Dans l'expression ci-dessus, on évalue la première partie de la deuxième intégrale du membre de droite de (4.10) de la manière suivante

$$
\begin{aligned}
\int_{Y^\star} a_{ji}\ \frac{\partial \psi^k}{\partial y_j}\ dy &= \int_{Y^\star} a_{j\ell}\ \frac{\partial \psi^k}{\partial y_j}\ \delta_{i\ell}\ dy \\
&= \int_{Y^\star} a_{j\ell}\ \frac{\partial \psi^k}{\partial y_j}\ \frac{\partial y^i}{\partial y_\ell}\ dy.
\end{aligned}
$$

Nous allons à présent effectuer plusieurs intégrations par parties. Il apparaitera donc des intégrales sur $\partial Y^\star = \partial Y \cup \partial T$. Concernant les intégrales sur ∂Y, elles seront toutes nulles car on intégre des fonctions Y-périodiques. Il nous restera donc que des intégrales sur $Y^\star$ et sur ∂T qu'on évaluera.

En utilisant successivement (4.2), (4.4) et (4.3) dans l'expression ci-dessus, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\int_{Y^\star} a_{j\ell}\ \frac{\partial \psi^k}{\partial y_j}\ \frac{\partial y^i}{\partial y_\ell}\ dy = \int_{Y^\star} a_{j\ell}\ \frac{\partial \psi^k}{\partial y_j}\ \frac{\partial \chi^i}{\partial y_\ell}\ dy + \int_{\partial T} a_{j\ell}\frac{\partial(-\chi^i + y_i)}{\partial y_\ell} n_j\ \psi^k\ d\sigma \\
&= \int_{Y^\star} b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi^k - y_k)}{\partial y_j}\ \frac{\partial \chi^i}{\partial y_\ell}\ dy\ + \int_{\partial T} b_k.n\ \chi^i d\sigma\ + \int_{\partial T} a_{j\ell}\frac{\partial(-\chi^i + y_i)}{\partial y_\ell} n_j\ \psi^k\ d\sigma \\
&= \int_{Y^\star} b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi^k - Y^k)}{\partial y_j}\ \frac{\partial \chi^i}{\partial y_\ell}\ dy\ - \int_{\partial T} b_{j\ell}\ \frac{\partial(-Y^k + y_k)}{\partial y_j} n_\ell\ \chi^i d\sigma \\
&\quad + \int_{\partial T} b_k.n\ \chi^i d\sigma + \int_{\partial T} a_{j\ell}\frac{\partial(-\chi^i + y_i)}{\partial y_\ell} n_j\ \psi^k\ d\sigma.
\end{aligned}
$$

La première intégrale de la dernière égalité ci-dessus s'évalue comme suit ,

$$\int_{Y^\star} b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi^k - Y^k)}{\partial y_j}\ \frac{\partial \chi^i}{\partial y_\ell}\ dy$$

$$= \int_{Y^\star} b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi^k - Y^k)}{\partial y_j}\ \frac{\partial(\chi^i - Y^i)}{\partial y_\ell}\ dy\ + \int_{Y^\star} b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi^k - Y^k)}{\partial y_j}\ \frac{\partial Y^i}{\partial y_\ell}\ dy$$

$$= \int_{Y^\star} b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi^k - Y^k)}{\partial y_j}\ \frac{\partial(\chi^i - Y^i)}{\partial y_\ell}\ dy\ + \int_{Y^\star} b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi^k - Y^k)}{\partial y_j}\ \frac{\partial y_i}{\partial y_\ell}\ dy$$

$$- \int_{\partial T} b_{j\ell}\ \frac{\partial(-Y^i + y_i)}{\partial y_\ell} n_j\ (\chi^k - Y^k)\ d\sigma \text{ (en utilisant (4.3)).}$$

Puisque $\dfrac{\partial y_i}{\partial y_\ell} = \delta_{ij}$, il en découle

$$\int_{Y^\star} b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi^k - Y^k)}{\partial y_j}\ \frac{\partial \chi^i}{\partial y_\ell}\ dy$$

$$= \int_{Y^\star} b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi^k - Y^k)}{\partial y_j}\ \frac{\partial(\chi^i - Y^i)}{\partial y_\ell}\ dy\ + \int_{Y^\star} b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi^k - Y^k)}{\partial y_j}\ \frac{\partial Y^i}{\partial y_\ell}\ dy$$

$$= \int_{Y^\star} b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi^k - Y^k)}{\partial y_j}\ \frac{\partial(\chi^i - Y^i)}{\partial y_\ell}\ dy\ + \int_{Y^\star} b_{ji}\ \frac{\partial(\chi^k - Y^k)}{\partial y_j}\ dy$$

$$- \int_{\partial T} b_{j\ell}\ \frac{\partial(-Y^i + y_i)}{\partial y_\ell} n_j\ (\chi^k - Y^k)\ d\sigma.$$

Par conséquent, la troisième intégrale du membre de droite de (4.10) est de la forme

$$\begin{aligned}\int_{Y^\star} \Big(a_{ji}\ \frac{\partial \psi^k}{\partial y_j} - b_{ji}\ \frac{\partial(\chi^k - Y^k)}{\partial y_j}\Big)\ dy = & \int_{Y^\star} b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi^k - Y^k)}{\partial y_j}\ \frac{\partial(\chi^i - Y^i)}{\partial y_\ell}\ dy \\ & - \int_{\partial T} b_{j\ell}\ \frac{\partial(-Y^i + y_i)}{\partial y_\ell} n_j\ (\chi^k - Y^k)\ d\sigma \\ & - \int_{\partial T} b_{j\ell}\ \frac{\partial(-Y^k + y_k)}{\partial y_j} n_\ell\ \chi^i d\sigma \\ & + \int_{\partial T} b_k.n\ \chi^i d\sigma + \int_{\partial T} a_{j\ell} \frac{\partial(-\chi^i + y_i)}{\partial y_\ell} n_j\ \psi^k\ d\sigma.\end{aligned}$$

Regardons à présent la première intégrale de (4.10). En multipliant la première équation de (4.3) par Y^i, on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{Y^\star} b_{ji} \, \frac{\partial(-Y^k + y_k)}{\partial y_j} \, dy \; &= \int_{Y^\star} b_{j\ell} \, \frac{\partial(Y^k - y_k)}{\partial y_j} \, \frac{\partial(Y^i - y_i)}{\partial y_\ell} \, dy \\ &+ \int_{\partial T} b_{j\ell} \, \frac{\partial(-Y^k + y_k)}{\partial y_j} n_\ell \; Y^i \; d\sigma. \end{aligned} \right.$$

On a utilisé le fait que les Y^i sont périodiques dans $Y^\star$ (ie : ils prennent la même valeur sur les côtés opposés de Y, par conséquent les intégrales sur le bord de Y sont nulles.

En additionnant les deux expressions obtenues ci-dessus et en utilisant la définition (4.10), on aboutit à

$$\left\{ \begin{aligned} b^\sharp_{ki} = \int_{Y^\star} b_{j\ell} \, \frac{\partial(\chi^k - Y^k)}{\partial y_j} \, \frac{\partial(\chi^i - Y^i)}{\partial y_\ell} \, dy \; &+ \int_{Y^\star} b_{j\ell} \, \frac{\partial(Y^k - y_k)}{\partial y_j} \, \frac{\partial(Y^i - y_i)}{\partial y_\ell} \, dy \\ - \int_{\partial T} b_{j\ell} \, \frac{\partial(-Y^i + y_i)}{\partial y_\ell} n_j \; (\chi^k - Y^k) \; d\sigma &+ \int_{\partial T} a_{j\ell} \frac{\partial(-\chi^i + y_i)}{\partial y_\ell} n_j \; \psi^k \; d\sigma \\ - \int_{\partial T} b_{j\ell} \, \frac{\partial(-Y^k + y_k)}{\partial y_j} n_\ell \; (\chi^i - Y^i) \; d\sigma &- \int_{\partial T} b_k.n \; (-\chi^i + y_i) \; d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Maintenant nous allons montrer qu'en fait, les intégrales sur le bord de T sont nulles. En effet, d'après (4.2), on a d'une part $-\chi^i + y_i = \text{ constante }$ sur ∂T, d'autre part en utilisant (4.3), on a $-Y^i + y_i = \text{ constante }$ sur ∂T (les constantes ne sont pas forcément les mêmes). Par conséquent, $\chi^i - Y^i = (-Y^i + y_i) - (-\chi^i + y_i)$ est aussi constante sur le bord de T. De même par (4.4), ψ^k est constante sur ∂T.

Les coefficients $b^\sharp_{ki}$ s'écrivent donc comme suit

$$\left\{ \begin{aligned} b^\sharp_{ki} = \int_{Y^\star} b_{j\ell} \, \frac{\partial(\chi^k - Y^k)}{\partial y_j} \, \frac{\partial(\chi^i - Y^i)}{\partial y_\ell} \, dy \; &+ \int_{Y^\star} b_{j\ell} \, \frac{\partial(Y^k - y_k)}{\partial y_j} \, \frac{\partial(Y^i - y_i)}{\partial y_\ell} \, dy \\ -(\chi^k - Y^k)|_{\partial T} \int_{\partial T} b_{j\ell} \, \frac{\partial(-Y^i + y_i)}{\partial y_\ell} n_j \; d\sigma &+ \psi^k|_{\partial T} \int_{\partial T} a_{j\ell} \frac{\partial(-\chi^i + y_i)}{\partial y_\ell} n_j \; d\sigma \\ -(\chi^i - Y^i)|_{\partial T} \int_{\partial T} b_{j\ell} \, \frac{\partial(-Y^k + y_k)}{\partial y_j} n_l \; d\sigma &- (-\chi^i + y_i)|_{\partial T} \int_{\partial T} b_k.n \; d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Or d'après (4.2), on a $\displaystyle\int_{\partial T} A\nabla(-\chi^k + y_k).nd\sigma = 0$, donc la quatrième intégrale de l'égalité ci-dessus est nulle.
D'autre part d'après (4.3), on a $\displaystyle\int_{\partial T} B\nabla(-Y^k + y_k).nd\sigma = 0 \quad \forall\ k = 1,..,n.$
Ceci entraine que la troisième et la cinquième intégrale sont nulles. De même, en utilisant (4.4) et (4.7), on a $\displaystyle\int_{\partial T} (\ b_k).nd\sigma = 0.$
Finalement les coefficients de la matrice $B^\sharp$ sont donnés par
(4.11)

$$\left\{ b^\sharp_{ki} = \int_{Y^\star} b_{j\ell}\ \frac{\partial(\chi^k - Y^k)}{\partial y_j}\ \frac{\partial(\chi^i - Y^i)}{\partial y_\ell}\ dy\ + \int_{Y^\star} b_{j\ell}\ \frac{\partial(Y^k - y_k)}{\partial y_j}\ \frac{\partial(Y^i - y_i)}{\partial y_\ell}\ dy. \right.$$

De part la forme de ces coefficients, la matrice $B^\sharp$ est à la fois elliptique et symétrique.

5. CONTROLE OPTIMAL

On définit χ_ε la fonction caractéristique de Ω_ε par

$$\chi_\varepsilon = \chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \Omega_\varepsilon \\ \\ 0 \text{ si } x \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

On a $\chi_\varepsilon \rightharpoonup \chi_0$ dans $L^\infty(\Omega)$ faible $\star$ où $\chi_0 = \frac{|Y^\star|}{|Y|}$.
On considère le problème de contrôle optimal (1.2)-(1.4) où l'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}^\varepsilon_{ad} \subset L^2(\Omega_\varepsilon)$ est défini par l'un des convexes fermés suivant (voir [4] et [7]) :

(5.1) $\qquad \mathcal{U}^\varepsilon_{ad} = L^2(\Omega_\varepsilon)$

(5.2) $\qquad \mathcal{U}^\varepsilon_{ad} = \{\theta \in L^2(\Omega_\varepsilon) \mid \quad \widetilde{\theta} \geq \chi_\varepsilon\psi \text{ pp dans } \Omega\}$

(5.3) $\qquad \mathcal{U}^\varepsilon_{ad} = \{\theta \in L^2(\Omega_\varepsilon) \mid \quad \chi_\varepsilon\psi_1 \leq \widetilde{\theta} \leq \chi_\varepsilon\psi_2 \text{ pp dans } \Omega\}$

où ψ, ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions de $L^2(\Omega)$.
Par définition du contrôle optimal $\theta^\star_\varepsilon$, on a

(5.4)
$$\frac{N}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} (\theta^\star_\varepsilon)^2\ dx \leq J_\varepsilon(\theta^\star_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(\Theta_\varepsilon) \leq C,$$

pour les différents choix de $\Theta_\varepsilon \in \mathcal{U}_{ad}^\varepsilon \subset L^2(\Omega_\varepsilon)$ qui suivent

$$\Theta_\varepsilon = \begin{cases} \chi_\varepsilon \quad \text{dans le cas (5.1)} \\ \\ \chi_\varepsilon \psi \quad \text{dans le cas (5.2)} \\ \\ \chi_\varepsilon \psi_2 \quad \text{dans le cas (5.3).} \end{cases} \tag{5.5}$$

Nous allons à présent caractériser le problème vérifié par la limite $\theta_0^\star$ du contrôle optimal et montrer qu'en fait cette limite est aussi un contrôle optimal associé à un problème et à une fonction coût que l'on explicitera par la suite.
Pour cela on suit la démarche de [4] ou [8], on définit les ensembles $\mathcal{U}_{ad} \subset L^2(\Omega)$ par

$$\mathcal{U}_{ad} = L^2(\Omega) \tag{5.6}$$
$$\mathcal{U}_{ad} = \{\theta \in L^2(\Omega) \mid \quad \theta \geq \chi_0 \psi \text{ pp dans } \Omega\} \tag{5.7}$$
$$\mathcal{U}_{ad} = \{\theta \in L^2(\Omega) \mid \quad \chi_0 \psi_1 \leq \theta \leq \chi_0 \psi_2 \text{ pp dans } \Omega\} \tag{5.8}$$

correspondant respectivement aux cas (5.1), (5.2) et (5.3).

Lemme 5.1 *Dans chacun des trois cas (5.1)-(5.3), on a que le contrôle optimal $\theta_\varepsilon^\star$ vérifie (par extraction de sous-suites): il existe $\theta_0^\star \in \mathcal{U}_{ad}$ (défini par* (4.6)-(4.8)*) tel que*

$$\widetilde{\theta_\varepsilon^\star} \rightharpoonup \theta_0^\star \quad \textit{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \textit{faible.} \tag{5.9}$$

Démonstration

Dans chacun des trois cas numérés dans (5.5), la norme $||u_\varepsilon||_{V_\varepsilon}$ de la solution $u_\varepsilon \in V_\varepsilon$ de l'équation d'état (3.1) où l'on a remplacé θ_ε par Θ_ε, est borné indépendamment de ε et comme $B_\varepsilon \in \mathcal{M}(\beta_m, \beta_M)$, il en découle que $J_\varepsilon(\Theta_\varepsilon)$ est uniformément bornée Par conséquent en utilisant l'inégalité (5.4), on a $\widetilde{\theta_\varepsilon^\star}$ est une suite bornée dans $L^2(\Omega)$ et donc il existe une sous-suite qui converge faiblement vers $\theta_0^\star$ dans $L^2(\Omega)$ faible.
D'après la définition de $\mathcal{U}_{ad}$, il est clair que si $\theta \in \mathcal{U}_{ad}$ alors $\frac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}\theta \in \mathcal{U}_{ad}^\varepsilon$. Comme $\widetilde{\theta_\varepsilon^\star} \rightharpoonup \theta_0^\star$ dans $L^2(\Omega)$ faible, on a $\theta_0^\star \in \mathcal{U}_{ad}$.

Enonons le théorème suivant qui nous donne un résultat de convergence du contrôle optimal

Théorème 5.2 *Pour $\theta \in \mathcal{U}_{ad}$ fixé, on considère $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de* (3.21). *Soit J_0 la fonction coût définie par*

$$J_0(\theta) = \frac{1}{2}\int_\Omega B^\sharp \nabla u.\nabla u \, dx + \frac{N}{2}\int_\Omega \frac{\theta^2}{\chi_0}\, dx. \tag{5.10}$$

Alors $\theta_0^\star$ satisfait la condition d'optimalité

$$\theta_0^\star \in \mathcal{U}_{ad} \quad et \quad J_0(\theta_0^\star) = \min_{\theta \in \mathcal{U}_{ad}} J_0(\theta). \tag{5.11}$$

De plus, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(\theta_\varepsilon^\star) = J_0(\theta_0^\star). \tag{5.12}$$

Démonstration

Première étape

D'après le Lemme 5.1, on a $\theta_0^\star \in \mathcal{U}_{ad}$. Soit $u_\varepsilon^\star$ l'état optimal associé au contrôle optimal (solution du problème (1.2) avec $\theta_\varepsilon = \theta_\varepsilon^\star$ dans le membre de droite de l'équation d'état). En utilisant le fait que $||\widetilde{\theta_\varepsilon^\star}||_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ est bornée, on a $||\nabla P_\varepsilon u_\varepsilon^\star||_{L^2(\Omega)}$ est bornée et donc par l'inégalité de Poincaré $||P_\varepsilon u_\varepsilon^\star||_{L^2(\Omega)}$ est bornée. Par conséquent $||P_\varepsilon u_\varepsilon^\star||_{H^1(\Omega)}$ est bornée , il en résulte (par extraction de sous-suites)

$$P_\varepsilon u_\varepsilon^\star \rightharpoonup u^\star \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible,} \tag{5.13}$$

où $u^\star$ est solution de (3.21) avec $\theta = \theta_0^\star$ dans le membre de droite de l'équation d'état.

Deuxième étape

Soit $w_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ solution du problème (1.2) avec $\dfrac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}\theta$ comme contrôle ($\theta \in \mathcal{U}_{ad}$), c'est à dire :

$$(5.14)\qquad \begin{cases} -\text{ div } (A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon) = f + \dfrac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}\theta & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ w_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ w_\varepsilon = \text{ constante} & \text{sur } \partial T_\varepsilon \\ \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon . n_\varepsilon = \int_{T_\varepsilon} f dx. & \end{cases}$$

Comme $\dfrac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}\theta \rightharpoonup \theta$ dans $L^2(\Omega)$ faible, on a

$$(5.15)\qquad P_\varepsilon w_\varepsilon \rightharpoonup w \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega) \text{ faible.}$$

où w est solution de

$$(5.16)\qquad \begin{cases} -\text{ div } (A_0 \nabla w) = f + \theta & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

(voir Théorème 3.2).

Troisième étape

Donnons à présent un résultat de convergence de l'énergie.
Soit $q_\varepsilon \in V_\varepsilon$ solution du problème

$$(5.17)\qquad \begin{cases} \text{div } ({}^t A_\varepsilon \nabla q_\varepsilon - B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon) & = & 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ q_\varepsilon & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ q_\varepsilon & = & \text{constante} & \text{sur } \partial T_\varepsilon \\ \displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} ({}^t A_\varepsilon \nabla q_\varepsilon - B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon).n_\varepsilon \, ds & = & 0. & \end{cases}$$

Alors (d'après le Théorème 3.2)

$$(5.18)\qquad (P_\varepsilon w_\varepsilon, P_\varepsilon q_\varepsilon) \rightharpoonup (w, q) \quad \text{dans} \quad (H_0^1(\Omega))^2 \text{ faible,}$$

où (w, q) est solution de

$$(5.19)\qquad \begin{cases} -\text{ div } ({}^t A_0 \nabla q - B^\sharp \nabla w) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q = 0 \text{ sur } \partial\Omega & \end{cases}$$

Comme,

(5.20)
$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon.\ \nabla w_\varepsilon\ dx = \int_{\Omega_\varepsilon} {}^t A_\varepsilon \nabla q_\varepsilon . \nabla w_\varepsilon\ dx - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} ({}^t A_\varepsilon \nabla q_\varepsilon - B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon).n_\varepsilon w_\varepsilon\ dx \\ \displaystyle\qquad = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla q_\varepsilon . (A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon)\ dx - \int_{\partial\Omega} ({}^t A_\varepsilon \nabla q_\varepsilon - B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon).n_\varepsilon w_\varepsilon\ ds \\ \displaystyle\qquad + w_\varepsilon|_{\partial T_\varepsilon} \int_{\partial T_\varepsilon} ({}^t A_\varepsilon \nabla q_\varepsilon - B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon).n_\varepsilon\ ds, \end{cases}$$

et $w_\varepsilon = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} ({}^t A_\varepsilon \nabla q_\varepsilon - B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon).n_\varepsilon\ ds = 0$. Par conséquent en intégrant par parties, on obtient

$$(5.21)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon.\ \nabla w_\varepsilon\ dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla q_\varepsilon . (A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon)\ dx \\ \displaystyle\qquad = -\int_{\Omega_\varepsilon} \mathrm{div}\ (A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon) q_\varepsilon\ dx + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon).n_\varepsilon q_\varepsilon\ ds \\ \displaystyle\qquad = \int_{\Omega_\varepsilon} (f + \frac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}\theta) q_\varepsilon\ dx + \int_{\partial\Omega} (A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon).n_\varepsilon q_\varepsilon\ ds \\ \displaystyle\qquad + q_\varepsilon|_{\partial T_\varepsilon} \int_{\partial T_\varepsilon} A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon . n_\varepsilon\ ds. \end{cases}$$

Comme $q_\varepsilon = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\displaystyle\int_{\partial T_\varepsilon} A_\varepsilon \nabla w_\varepsilon . n_\varepsilon\ ds = \int_{T_\varepsilon} f\ dx$, on a

$$(5.22)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon . \nabla w_\varepsilon\ dx = \int_{\Omega_\varepsilon} (f + \frac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}\theta)\ q_\varepsilon\ dx + q_\varepsilon|_{\partial T_\varepsilon} \int_{T_\varepsilon} f dx \\ \displaystyle\qquad = \int_{\Omega} (f + \frac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}\theta)\ P_\varepsilon q_\varepsilon\ dx. \end{cases}$$

Le membre de droite de l'égalité ci-dessus passe à la limite, par conséquent le membre de gauche admet la même limite. Il en résulte,

$$(5.23)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon.\ \nabla w_\varepsilon\ dx = \int_{\Omega} (f + \theta) q\ dx.$$

Or par les résultats d'homogénéisation établis en (5.16) et les conditions nulles sur le bord de Ω de q et de w, on a

$$(5.24) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int_\Omega (f+\theta) q \; dx &= -\int_\Omega \text{ div } (A_0 \nabla w) \; q \; dx \\ &= -\int_\Omega w \text{ div } (\, {}^t A_0 \nabla q) \; dx \\ &= -\int_\Omega w \text{ div } (B^\sharp \nabla w) \; dx \\ &= \int_\Omega B^\sharp \nabla w . \nabla w \; dx. \end{aligned} \right.$$

Finalement en comparant (5.23) et (5.24), on a

$$(5.25) \qquad \int_{\Omega_\varepsilon} B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon . \; \nabla w_\varepsilon \; dx \to \int_\Omega B^\sharp \nabla w . \nabla w \; dx.$$

Et comme $\dfrac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}\theta \rightharpoonup \theta$ dans $L^2(\Omega)$ faible, et $\chi_\varepsilon^2 = \chi_\varepsilon$ dans Ω, on a

$$(5.26) \qquad \int_{\Omega_\varepsilon} (\frac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}\theta)^2 \; dx \to \int_\Omega \chi_0 \theta^2 \; dx.$$

Par conséquent, en utilisant (5.25) et (5.27), on obtient

$$(5.27) \qquad J_\varepsilon(\frac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}\theta) \to J_0(\theta).$$

De la même manière, en prenant $\theta_\varepsilon = \theta_\varepsilon^\star$ dans (3.1), on a

$$(5.28) \qquad \int_{\Omega_\varepsilon} B_\varepsilon \nabla u_\varepsilon^\star . \; \nabla u_\varepsilon^\star \; dx \to \int_\Omega B^\sharp \nabla u^\star . \; \nabla u^\star \; dx \; .$$

Quatrième étape

En passant à la limite dans l'inégalité

$$(5.29) \qquad \forall \theta \in \mathcal{U}_{ad} \quad J_\varepsilon(\frac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}\theta) \geq J_\varepsilon(\theta_\varepsilon^\star),$$

et en utilisant le Lemme 4.1, on obtient

$$(5.30) \qquad J_0(\theta) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega B^\sharp \nabla u^\star . \; \nabla u^\star dx + \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{N}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} (\theta_\varepsilon^\star)^2 dx.$$

En prenant en particulier $\theta = \theta_0^\star$ dans l'inégalité ci-dessus, on a

$$(5.31) \qquad \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} (\theta_\varepsilon^\star)^2 dx \leq \int_\Omega \frac{(\theta_0^\star)^2}{\chi_0} dx.$$

Enonons le résultat suivant démontré dans [4] :

Proposition 5.3 (Kesavan et Saint Jean Paulin) Soit $1 \leq p \leq \infty$. Soit $\widetilde{\theta_\varepsilon} \rightharpoonup \theta_0$ dans $L^p(\Omega)$ faible. Alors

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} (\theta_\varepsilon)^p dx \geq \int_\Omega \frac{(\theta_0)^p}{{\chi_0}^{p-1}} dx. \tag{5.32}$$

On déduit de la proposition 5.3 et du lemme 5.1 que

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} (\theta_\varepsilon^\star)^2 dx \geq \int_\Omega \frac{(\theta_0^\star)^2}{\chi_0} dx. \tag{5.33}$$

Par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} (\theta_\varepsilon^\star)^2 dx = \int_\Omega \frac{(\theta_0^\star)^2}{\chi_0} dx. \tag{5.34}$$

On en déduit (5.12). De (5.30) et (5.34), on obtient (5.11). Ceci achève la démonstration.

6. CAS UNIDIMENSIONNEL

Nous allons à présent étudier le cas $n = 1$. Dans ce cas, il n'est plus question de torsion élastique vu que cela n'a plus de sens. En fait, on va se placer dans le cadre mathématique de la torsion (mêmes équations) pour appliquer les résultats obtenus. On va donc utiliser les équations données par (1.2). Dans $\mathbb{R}$, ces équations modélisent un problème en électrostatique :
On considère un certain nombre de conducteurs répartis dans une région donnée de $\mathbb{R}$. On s'intéresse au contrôle optimal d'un problème où la solution correspond au potentiel électrostatique à l'extérieur des conducteurs induit par une densité de charge volumique donnée.
Soit $\Omega =]a, b[$ un ouvert borné de $\mathbb{R}$ $(n1)$. On suppose que les conducteurs sont répartis périodiquement (de période εY) où $Y =]0, 1[$ est la cellule de base.
Soit $T = [c, d]$ (avec $0 \leq c \leq d \leq 1$) , la partie de la cellule de base Y correspondant aux conducteurs et on définit $Y^\star$ par $Y^\star = Y \backslash T$ la partie de Y non conductrice.

Soit $c_\varepsilon^i, d_\varepsilon^i$ définit par $c_\varepsilon^i = \varepsilon(c+i)$ et $d_\varepsilon^i = \varepsilon(d+i)$ avec $i \in \mathbb{Z}$. On définit T_ε l'ensemble des conducteurs par $T_\varepsilon = \left\{ \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} [c_\varepsilon^i, d_\varepsilon^i] \right\} \bigcap \,]a,b[$ et on pose $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash T_\varepsilon$.
Le bord de T_ε est donné par $\partial T_\varepsilon = \left\{ \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \{c_\varepsilon^i, d_\varepsilon^i\} \right\} \bigcap \,]a,b[$
On se donne une distribution de charge de densité volumique $\frac{1}{4\pi}(\hat{f} + \hat{\theta}_\varepsilon)$.
Alors le potentiel éléctrostatique u_ε, induit par cette distribution de charge est solution de

$$(6.1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{d}{dx}(a_\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx}) = f + \theta_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon(c_\varepsilon^i) = u_\varepsilon(d_\varepsilon^i) & \forall i \in \mathbb{Z} \\ u_\varepsilon(a) = u_\varepsilon(b) = 0 & \\ \left(a_\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx}\right)(c_\varepsilon^i) = \left(a_\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx}\right)(d_\varepsilon^i) & \forall i \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

où $a_\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$.

Enonons un résultat de convergence :

Théorème 6.1 *Soit* $f \in L^2(\Omega)$ *et* $\theta_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ *tel que* $\widetilde{\theta_\varepsilon}$ *est bornée dans* $L^2(\Omega)$. *Soit* $a_\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$ *et* $b_\varepsilon(x) = b(x/\varepsilon)$ *tels que* $0 \le \alpha_m \le a_\varepsilon \le \alpha_M$ *et* $0 \le \beta_m \le b_\varepsilon \le \beta_M$. *Soit* u_ε *et* p_ε, *solutions du problème*

$$(6.2) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{d}{dx}(a_\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx}) = f + \theta_\varepsilon & \textit{dans } \Omega_\varepsilon \\ \frac{d}{dx}(a_\varepsilon \frac{dp_\varepsilon}{dx} - b_\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx}) = 0 & \textit{dans } \Omega_\varepsilon \\ \left(a_\varepsilon \frac{d}{dx}p_\varepsilon - b_\varepsilon \frac{d}{dx}u_\varepsilon\right)(c_\varepsilon^i) = \left(a_\varepsilon \frac{d}{dx}p_\varepsilon - b_\varepsilon \frac{d}{dx}u_\varepsilon\right)(d_\varepsilon^i) & \forall i \in \mathbb{Z} \\ \left(a_\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx}\right)(c_\varepsilon^i) = \left(a_\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx}\right)(d_\varepsilon^i) & \forall i \in \mathbb{Z} \\ u_\varepsilon(c_\varepsilon^i) = u_\varepsilon(d_\varepsilon^i), \quad p_\varepsilon(c_\varepsilon^i) = p_\varepsilon(d_\varepsilon^i) & \forall i \in \mathbb{Z} \\ u_\varepsilon(a) = u_\varepsilon(b) = p_\varepsilon(a) = p_\varepsilon(b) = 0 & \end{array} \right.$$

.

Alors il existe a_0 *et* $b^\sharp$ *et des fonctions* $\theta \in L^2(\Omega), u,\ p \in H_0^1(\Omega)$ *tels que (par extraction de sous-suites)*

$$\left\{\begin{array}{lllr} \widetilde{\theta}_\varepsilon & \rightharpoonup & \theta & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ P_\varepsilon u_\varepsilon & \rightharpoonup & u & \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible} \\ P_\varepsilon p_\varepsilon & \rightharpoonup & v & \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible,} \end{array}\right. \tag{6.3}$$

où P_ε *est l'opérateur de prolongement défini au lemme* 2.1.

Le couple (u,p) *est solution de*

$$\left\{\begin{array}{lll} -\dfrac{d}{dx}(a_0\dfrac{du}{dx}) & = f+\theta & \text{dans } (a,b) \\ \dfrac{d}{dx}(a_0\dfrac{dp}{dx} - b^\sharp\dfrac{du}{dx}) & = 0 & \text{dans } (a,b) \\ u(a)=u(b)=p(a)=p(b) & = 0. & \end{array}\right. \tag{6.4}$$

où a_0 *est le coefficient homogénéisé donnée par* (6.16) *et* $b^\sharp$ *est un scalaire dont l'expression est donnée par* (6.26).

Démonstration

Ce théorème est un cas particulier du Théorème 3.2. Il n'y a donc rien à montrer. Mais nous allons par contre donner les expressions de a_0 et de $b^\sharp$ de manière explicite.

i) Expression de a_0

D'après (3.20), le coefficient a_0 est donné par

$$a_0 = \frac{1}{|Y|}\int_Y Q\big(a(y)\frac{d\omega}{dy}(y)\big)\ dy. \tag{6.5}$$

Les coefficients ne dépendent pas de l'opérateur de prolongement Q. En effet d'après la théorie classique de l'homogénéisation, cette opérateur disparait lorsque que l'on passe à l'écriture sous forme symétrique des coefficients homogénéisés (voir Cioranescu & Saint Jean Paulin [2]), l'expression (6.5) devient

$$a_0 = \frac{1}{|Y|}\int_{Y^\star} a(y)\frac{d\omega}{dy}(y)\frac{d\omega}{dy}(y)\ dy. \tag{6.6}$$

où la fonction ω vérifie

$$(6.7) \qquad \begin{cases} -\dfrac{d}{dy}(a(y)\dfrac{d\omega}{dy}) = 0 \text{ dans } Y^\star \\ (a\dfrac{d\omega}{dy})(c) = (a\dfrac{d\omega}{dy})(d) \\ \omega(c) = \omega(d) \\ (\omega - y)\ Y\text{– périodique.} \end{cases}$$

Intégrons le problème ci-dessus, la première équation de (6.7) nous donne

$$(6.8) \qquad (a\frac{d\omega}{dy})(y) = \begin{cases} k^+ \text{ sur } (0,c) \\ k^- \text{ sur } (d,1), \end{cases}$$

avec k^+ et k^- des constantes. Or $(a\dfrac{d\omega}{dy})(c) = (a\dfrac{d\omega}{dy})(d)$ donc $k^+ = k^- = k$.
On obtient par intégration

$$(6.9) \qquad \omega(y) = kF(y) + \begin{cases} K^+ \text{ sur } (0,c) \\ K^- \text{ sur } (d,1), \end{cases}$$

où F est une primitive de $\dfrac{1}{a(y)}$, i.e. :

$$(6.10) \qquad \frac{dF}{dy}(y) = \frac{1}{a(y)}.$$

Maintenant, comme $(\omega - y)$ est Y-périodique, on a

$$(6.11) \qquad \omega(0) = \omega(1) - 1.$$

En utilisant (6.11) dans (6.9), on obtient d'une part la relation

$$(6.12) \qquad K^+ - K^- = k\ (F(1) - F(0)) - 1 = k\ .m_Y(\frac{1}{a}) - 1,$$

où $m_Y(h) = \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_0^1 h(y)dy = \int_0^1 h(y)dy.$
D'autre part, puisque $\omega(c) = \omega(d)$, on aboutit à

$$K^+ - K^- = k\ (F(d) - F(c)) = k\ .|T|m_T(\frac{1}{a}), \tag{6.13}$$

où $m_T(h) = \dfrac{1}{|T|}\displaystyle\int_c^d h(y)dy.$

Par conséquent, en utilisant (6.12) et (6.13), on obtient

$$k = \frac{1}{m_Y(\frac{1}{a}) - |T|.m_T(\frac{1}{a})}, \tag{6.14}$$

or après un calcul élémentaire, on a

$$k = \frac{1}{|Y^\star|.m_Y^\star(\frac{1}{a})}, \tag{6.15}$$

où $m_Y^\star(h) = \dfrac{1}{|Y^\star|}\Big(\displaystyle\int_0^c h(y)dy + \int_d^1 h(y)dy\Big).$
En exprimant (6.6) à l'aide de k, on obtient

$$a_0 = \frac{k^2}{|Y|}\int_{Y^\star}\frac{1}{a(y)}\ dy. \tag{6.16}$$

Finalement, en utilisant (6.15) dans l'expression précédente, on aboutit à

$$a_0 = \frac{1}{|Y^\star|.m_{Y^\star}(\frac{1}{a})}\ . \tag{6.17}$$

ii) Expression de $b^\sharp$

On a d'après (3.49)

$$b^\sharp = \frac{1}{|Y|}\int_Y Q\big(a(y)\frac{d\psi}{dy} - b(y)\frac{d\omega}{dy}\big)\ dy, \tag{6.18}$$

En utilisant la forme symétrique de $b^\sharp$ donnée par (5.11), on a

$$(6.19)\quad b^\sharp = \frac{1}{|Y|}\left[\int_{Y^\star} b(y)\frac{d(-Y+y)}{dy}\frac{d(-Y+y)}{dy}\,dy + \int_{Y^\star} b(y)\frac{d(\chi-Y)}{dy}\frac{d(\chi-Y)}{dy}\,dy\right],$$

où $\alpha = -Y + y$ satisfait

$$(6.20)\qquad \begin{cases} -\dfrac{d}{dy}(b(y)\dfrac{d\alpha}{dy}) = 0 \ \text{ dans } Y^\star \\ (b\dfrac{d\alpha}{dy})(c) = (b\dfrac{d\alpha}{dy})(d) \\ \alpha(c) = \alpha(d) \\ (\alpha - y)\ Y\text{– périodique.} \end{cases}$$

Le problème (6.20) est du même type que (6.7). Par conséquent les mêmes calculs d'intégration vont être mens pour déterminer α. On va donc obtenir pour la première intégrale du membre de droite de (6.19)

$$(6.21)\quad \int_{Y^\star} b(y)\frac{d(-Y+y)}{dy}\frac{d(-Y+y)}{dy}\,dy = \frac{|Y^\star|\ m_{Y^\star}(\frac{1}{b})}{\left(m_Y(\frac{1}{b}) - |T|\ m_T(\frac{1}{b})\right)^2} = \frac{1}{|Y^\star|\ m_Y^\star(\frac{1}{b})}.$$

Concernant la deuxième intégrale du membre de droite de (6.19), comme $\omega = -\chi + y$ et $\alpha = -Y + y$, alors $\chi - Y = \alpha - \omega$ où ω est solution de (6.7) et α est solution de (6.20). Ceci implique que

$$(6.22)\qquad \begin{cases} \dfrac{d(\chi - Y)}{dy} = \dfrac{d\alpha}{dy} - \dfrac{d\omega}{dy} \\ \qquad\qquad = \dfrac{k'}{b(y)} - \dfrac{k}{a(y)}, \end{cases}$$

où k est donné par (6.14) et k' par

$$(6.23)\qquad k' = \frac{1}{|Y^\star|.m_Y^\star(\frac{1}{b})},$$

On obtient donc pour la deuxième intégrale,

$$(6.24)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{Y^\star} b(y)\frac{d(\chi-Y)}{dy}\frac{d(\chi-Y)}{dy}\,dy = \int_{Y^\star} b(y)\left(\frac{k'}{b(y)} - \frac{k}{a(y)}\right)^2 dy \\ \qquad = |Y^\star|\big(k'^2 m_{Y^\star}(1/b) + k^2 m_{Y^\star}(b/a^2) - 2kk' m_{Y^\star}(1/a)\big). \end{cases}$$

En utilisant les définitions (6.14) et (6.23) de k et de k', l'expression précédente devient

$$\int_{Y^\star} b(y)\frac{d(\chi - Y)}{dy}\frac{d(\chi - Y)}{dy}\ dy = \frac{|Y^\star|.m_{Y^\star}(b/a^2)}{\left(|Y^\star|.m^\star_Y(\frac{1}{a})\right)^2} - \frac{1}{|Y^\star|.m^\star_Y(\frac{1}{b})}. \tag{6.25}$$

Finalement, en combinant (6.21) et (6.25), on aboutit à

$$b^\sharp = \frac{1}{|Y^\star|}\ \frac{m_{Y^\star}(b/a^2)}{m^\star_Y(\frac{1}{a})^2}. \tag{6.26}$$

Remarque 6.2 Kesavan et Saint Jean Paulin ont trouvé un résultat analogue à (6.26) dans les domaines non-perforés (voir [3]).

REFERENCES

[1] Bensoussan A., Lions J.L. and Papanicolaou G., *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, Amsterdam, 1978.

[2] Cioranescu D. and Saint Jean Paulin J., Homogenization in open sets with holes, *J. Math. Anal. Appl.*, **71**, 590-607, 1979.

[3] Kesavan S. and Saint Jean Paulin J., Homogenization of an optimal control problem, *SIAM J.Cont.Optim.*, **35**, 1557-1573, 1997.

[4] Kesavan S. and Saint Jean Paulin J., Optimal Control on Perforated Domains, *J. Math. Anal. Appl.*, **229**, No.2, 563-586, 1999.

[5] Kesavan S. and Vanninathan M., L'homogénéisation d'un problème de contrôle optimal,*C.R.A.S, Paris, Sér. A*, **285**, 441-444, 1977.

[6] Lions J.L., *Sur le contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.

[7] Murat F., Compacité par compensation, *Annali Scuola Norm.Sup. di Pisa*, **5**, 489-507, 1978.

[8] Saint Jean Paulin J. and Zoubairi H., Optimal control and "strange term" for a Stokes problem in perforated domains, *Portugaliae Matematica* (à paraitre).

[9] Saint Jean Paulin J. and Zoubairi H., Optimal control and homogenization in a mixture of fluids, *Ricerche di Matematica* (à paraitre).