



HAL
open science

Effets de lentille gravitationnelle sur le rayonnement de fond cosmique

Karim Benabed

► **To cite this version:**

Karim Benabed. Effets de lentille gravitationnelle sur le rayonnement de fond cosmique. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2001. Français. NNT: . tel-00001288

HAL Id: tel-00001288

<https://theses.hal.science/tel-00001288>

Submitted on 28 Mar 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Orsay
N° d'ordre : 6672

Saclay
t01/124

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THESE

présentée
pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris XI ORSAY

par

KARIM BENABED

Sujet :

**Effets de lentille gravitationnelle
sur le rayonnement de fond cosmique**

Soutenue le 12 novembre 2001 devant la Commission d'examen :

Messieurs	Francis BERNARDEAU	Directeur
	François R. BOUCHET	Rapporteur
	Michael JOYCE	Examineur
	Jean-Loup PUGET	Président
	Richard SCHAEFFER	Examineur
	Joseph SILK	Rapporteur

Effets de lentille gravitationnelle sur le rayonnement de fond cosmique

Karim BENABED

Résumé

On s'intéressera, dans ce mémoire, à certains aspects phénoménologiques de l'évolution des grandes structures de l'univers, dans le cadre des modèles inflationnaires. La relativité générale prédit que le trajet des rayons lumineux est perturbé par les puits de potentiels gravitationnels ; on appelle ce phénomène, effet de lentille gravitationnelle. On donnera une description très précise de cet effet sur la lumière du rayonnement de fond micro-onde, les anisotropies de sa température et sa polarisation. Pour ce faire, après avoir exposé les grandes lignes du modèle, on rappellera comment se calculent les anisotropies de température et la polarisation ainsi que les propriétés de l'évolution des grandes structures. Le calcul de l'effet de lentille gravitationnelle sera aussi rappelé en détail. On sera ainsi en mesure d'étudier l'effet de lentille gravitationnelle sur le rayonnement de fond dans deux régimes : celui fort, dans le cas d'un effet induit par une corde cosmique, et celui faible où les sources sont les grandes structures de l'univers. On montrera, dans ce dernier cas, que température et polarisation du rayonnement de fond portent des informations sur l'histoire des grandes structures entre aujourd'hui et son époque d'émission. On exposera et l'on caractérisera une technique particulièrement prometteuse visant à extraire cette information, et qui consiste à comparer rayonnement de fond et relevés de forme des champs galactiques d'arrière plan. On étudiera aussi les enseignements que peuvent apporter ce genre d'observables sur le modèle cosmologique. Enfin, on s'attardera sur une classe de modèles exotiques dans laquelle la constante cosmique est remplacée par une composante nouvelle, la quintessence. On étudiera l'évolution des grandes structures dans ces modèles et on en tirera les conséquences phénoménologiques sur l'effet de lentille gravitationnelle.

Mots Clefs : Cosmologie, Grandes Structures, Effet de Lentille Gravitationnelle, Rayonnement de Fond, Micro-Onde, Polarisation, Paramètres Cosmologiques, Corde Cosmique, Quintessence

Gravitational Lensing Effects on the Cosmic Microwave Background Radiation

Karim BENABED

Abstract

This report will study some phenomenological aspects of the evolution of the large scale structures of the Universe, in the framework of Inflation. General Relativity predicts that the path of light beams is modified by the gravitational potential wells ; this phenomenon is called *gravitational lensing*. We will provide a very accurate description of this effect on the cosmic microwave background radiation, its temperature and its polarization. To do so, after a few reminders on the properties of the underlying cosmological model, we will expose the calculation needed to compute the cosmic microwave background anisotropies and polarization as well as the evolution of the large scale structures. We will also give in great details the general framework of the gravitational lensing effect. With this results, we will be able to study two regimes of the lensing effect on the background radiation : one strong, where we will use a cosmic string as a lens, and one weak, generated by the large scale structures of the Universe. In this last case, we will show how the cosmic microwave background carries information regarding the history of large scale structures up to its emission epoch. We will present and evaluate a promising technique allowing to extract this information and which consists in comparing the microwave background with background galaxies surveys. We will study what this kind of quantities can teach us regarding the properties of the Universe we are living in. Finally, we will spend some time on a class of exotic cosmological models called quintessence, where the cosmological constant has been replaced by a new fluid. We will focus on the large scale structures properties in these models and on the phenomenological consequences one can expect on the gravitational lensing effect.

Keywords : Cosmology, Large Scale Structures, Grvitational lensing effect, Cosmic Microwave Background, Polarization, Cosmological Parameters, Cosmic String, Quintessence

Remerciements

Je remercie Francis Bernardeau d'avoir accepté d'encadrer ma thèse. Diriger mes premiers pas de chercheur n'était pas une mince affaire. Il a su le faire sans jamais se départir de sa gentillesse et de son sens de l'humour. Travailler à son contact a été pour moi une expérience très enrichissante et très agréable.

Je remercie les directeurs successifs du S.Ph.T., messieurs Zinn–Justin et Blaizot de m'avoir accueilli dans leur laboratoire. Je garderai un excellent souvenir de ce laboratoire. L'efficacité et la gentillesse exceptionnelle du personnel administratif et informatique en font un lieu où il est très agréable de travailler. Le niveau et la diversité des thématiques développées au laboratoire contribuent aussi beaucoup à l'ambiance stimulante du laboratoire. Je remercie les chercheurs du S.Ph.T avec qui j'ai eu l'occasion de *parler physique* (et pas seulement !) et en particulier, pour ne citer que les chercheurs les plus proches de mon sujet, R. Shaeffer et P. Valageas. Merci enfin à tout ceux qui m'ont patiemment supporté chaque midi et ont subi ma conversation et ma mauvaise humeur proportionnelle à la qualité des cantines du C.E.A. !

J'ai eu la chance de travailler avec Ludovic Van Waerbeke. Je garde un excellent souvenir de ces collaborations. Merci mille fois pour les discussions stimulantes et les encouragements !

Enfin, je remercie les personnes que j'ai côtoyé durant ma thèse et qui tous ont su m'aider et m'encourager chacun à leur manière. Dans le désordre le plus complet, un grand merci à Yannick Mellier pour sa gentillesse et son hospitalité, à Jean Philippe Uzan pour avoir toujours mille idées à partager, à Alain Riazuelo, à Jérôme Martin, à Philippe Brax. Merci encore à Cedric Deffayet, Michael Joyce et Nabila Aghanim. Merci à tous ceux qui ont partagé un thé en me prodiguant leurs encouragements et leurs conseils. Merci aux thésards du S.Ph.T. qui ont partagé mon bureau ou mes angoisses ! Merci enfin aux membres de mon jury et particulièrement au président J.L. Puget et aux deux rapporteurs J. Silk et F.R. Bouchet qui ont validé la pertinence de mes travaux.

Si ce manuscrit est lisible ce n'est pas ma faute... Je loue l'abnégation de mes relecteurs et relectrices.

Table des matières

Introduction	1
1 Description de l'univers	5
1.1 Des hypothèses à la métrique de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker	5
1.2 Propriétés du modèle — Contenu matériel de l'univers	7
1.3 Histoire de l'univers	11
2 Les fluctuations primordiales	17
2.1 Genèse des fluctuations primordiales	17
2.2 L'inflation	18
2.3 Perturbation de la métrique	24
2.4 Conclusion	28
3 Le rayonnement de fond	29
3.1 Température	29
3.2 Polarisation	35
3.3 Le spectre de puissance	43
4 Les grandes structures	47
4.1 Dynamique gravitationnelle	47
4.2 Évolution de la matière durant l'ère du rayonnement	50
4.3 Évolution de la matière dans l'ère de la matière	51
5 L'effet de lentille gravitationnelle	59
5.1 Quelques éléments d'optique géométrique	59
5.2 Équation des mirages gravitationnels	62
5.3 Distorsions optiques induites par une corde cosmique	73
6 L'effet de lentille sur la température du rayonnement de fond cosmique	79
6.1 Effets de lentille gravitationnelle sur le rayonnement de fond cosmique	79
6.2 Signature de l'effet de lentille	81
6.3 Effets de lentille induite par une corde cosmique sur le rayonnement de fond.	89
7 L'effet de lentille sur la polarisation du rayonnement de fond cosmique	91
7.1 Effet de lentille faible sur la polarisation du rayonnement	91
7.2 Effet de lentille forte – Cas d'une corde cosmique	102
8 Corrélations d'effets de lentilles	111
8.1 Corrélations d'effets de lentille à différentes profondeurs.	112
8.2 Corrélations avec la température	120
8.3 Corrélations avec la polarisation	130

9	Simuler les corrélations d'effet de lentille	149
9.1	Simuler le rayonnement de fond primordial et sa polarisation	149
9.2	Simuler un effet de lentille par triangulation	150
9.3	Détermination de l'effet de lentille	152
9.4	Résultats	160
10	Grandes structures dans un scénario exotique	163
10.1	Quintessence	163
10.2	Phénoménologie de quelques modèles de quintessence	172

Bibliographie

Bibliographie générale	182
---	------------

Introduction

L'étude des grandes structures de l'univers est un thème central en cosmologie. Que le sujet occupant le devant de la scène soit de comprendre la répartition des galaxies et des amas, de connaître les premiers instants de l'univers ou d'investiguer les propriétés du rayonnement de fond, la problématique, au fond, est toujours la même. Il s'agit de comprendre, de décrire la chaîne d'événements physiques qui va d'un univers très dense et très homogène à cet univers que nous connaissons aujourd'hui, très vide et dont les inhomogénéités sont très marquées. Ainsi on pense savoir décrire correctement, pour une grande plage d'échelles, les mécanismes qui donnent naissance aux grandes répartitions de matière de l'univers. À partir d'hypothétiques fluctuations primordiales, des grumeaux dans la trame de l'univers, on sait prédire théoriquement les grandes lignes de l'évolution de la matière. Celle-ci doit s'agglomérer par attraction gravitationnelle autour de ces germes, faire grandir en contraste ces inhomogénéités et vider les régions alentours. Quant à l'origine des *grumeaux*, on dispose aussi de plusieurs théories prédisant leur apparition naturelle dans un univers pourtant homogène.

Les cosmologues disposent d'un faible nombre de fenêtres observationnelles pour tester leurs théories, au nombre desquelles figure en bonne place le rayonnement de fond micro-onde. Ce rayonnement est la plus vieille image électromagnétique que l'on puisse avoir de l'univers ; en quelque sorte, sa première photo. À ce titre, c'est aussi la mesure la plus reculée des inhomogénéités de l'univers à notre disposition. Celui-ci se présente en fait comme un rayonnement de corps noir très froid. L'expansion de l'univers a refroidi ses photons jusqu'à une température de l'ordre de 3K. De très faibles anisotropies perturbent légèrement ce rayonnement par ailleurs remarquablement homogène : c'est la signature des inhomogénéités telles qu'elles se présentaient à l'époque de l'émission du rayonnement. Depuis ses premières déterminations, on place en ce rayonnement de grands espoirs. Une mesure de grande précision de ses anisotropies devrait permettre d'éliminer certains des modèles expliquant l'apparition des fluctuations primordiales. Ces mesures sont à portée de la main. De nombreuses expériences embarquées à bord de ballons ont déjà cartographié avec une bonne résolution de petites portions du ciel micro-onde. Ces expériences ont déjà donné des indications fortes quant à la classe de modèle privilégié. De nouvelles missions de ces instruments sont d'ores et déjà prévues. D'autre part, deux expériences à bord de satellite, MAP, et surtout l'europpéen Planck, devraient fournir d'ici 2010 des cartes du ciel entier.

À l'autre bout de la chaîne, une autre fenêtre observationnelle est ouverte. On sait déterminer la masse et la répartition des structures dans notre voisinage. Jusqu'à présent, on se basait avant tout sur des comptages d'objets lumineux. Cette méthode est simple, mais peu fiable. En effet, en comptant les objets lumineux, on ne tient pas compte de la matière noire qui devrait être majoritaire pour rendre compte de la masse apparente totale de l'univers. On connaît encore mal comment les objets lumineux sont liés à la matière noire alentour. Les comptages ne donnent qu'une estimation de la répartition de masse. De nouvelles méthodes, dont il va beaucoup être question ici, proposent d'étudier les grandes structures en mesurant leur effet gravitationnel sur la lumière provenant d'objets d'arrière-plan. On parle d'*effet de lentille gravitationnelle*. Ce genre de mesure tiendrait alors compte de toute la masse et de

vrait permettre, à terme, des déterminations plus précises des grandes structures. On en n'est pas encore là. La méthode a bénéficié d'investigations théoriques approfondies. La physique de l'effet de lentille gravitationnelle des grandes structures est bien comprise. L'observation de ces effets, par contre, est assez ardue. Les premières mesures de cet effet ne sont apparues que dans le courant de l'année 2000. Néanmoins, il est raisonnable d'espérer que les études en cours sur cet effet tiendront leurs promesses. On aura donc sous peu à notre disposition des cartes des grandes structures de notre voisinage.

C'est entre ces deux extrêmes que se situe le travail présenté dans ce mémoire. Il s'agit de contribuer à l'ouverture d'une nouvelle fenêtre sur l'évolution des structures entre le rayonnement de fond et ce que l'on peut savoir des grandes structures aujourd'hui. Dans ce mémoire, on va encore recourir à l'étude des grandes structures à travers les distorsions gravitationnelles qu'elles font subir à la lumière. Cette fois, cependant, la lumière ne proviendra plus de galaxies d'arrière-plan, mais d'une source beaucoup plus lointaine, la plus lointaine qui soit, même, puisqu'on va étudier l'effet de lentille gravitationnelle sur le rayonnement de fond micro-onde.

Ce sujet n'est pas complètement nouveau! Il avait déjà été évoqué auparavant et particulièrement étudié par les travaux précurseurs de U. Seljak et F. Bernardeau. Les deux points principaux sur lesquels ce mémoire apporte des contributions originales sont, d'une part, l'effet de lentille sur la polarisation du rayonnement de fond, et d'autre part, la possibilité d'extraire des informations sur les lentilles en utilisant conjointement le rayonnement de fond et d'éventuelles mesures d'effet de lentille sur des galaxies d'arrière-plan dont j'ai parlé plus haut.

Le premier point de cette étude m'amènera à étudier finement l'effet de lentille sur la polarisation du rayonnement de fond. En particulier, je présenterai l'étude d'un cas de lentille forte, celui d'une corde cosmique. D'autre part, j'approfondirai la compréhension de l'effet de lentille dans le régime faible, celui des distorsions dues aux grandes structures.

Le deuxième point me permettra d'étudier la corrélation entre effet de lentille sur des sources situées à différentes profondeurs. Cette corrélation possède d'intéressantes propriétés et en particulier une certaine sensibilité aux paramètres cosmologiques du modèle; c'est-à-dire, au contenu de l'univers et à sa géométrie. Je montrerai comment on peut construire de telles corrélations à l'aide du rayonnement de fond et de mesures de l'effet de lentille sur des arrières-plans galactiques. Deux méthodes seront proposées ici, faisant appel, soit aux anisotropies de température, soit à la polarisation du rayonnement de fond. En particulier, on montrera comment de telles méthodes permettent d'espérer de très bonnes déterminations de l'effet de lentille sur le rayonnement de fond. Il est notable que ce sont, à ce jour, les observables de l'effet de lentille exhibant le meilleur signal sur bruit théorique.

Ce mémoire sera donc conçu afin de présenter progressivement les connaissances nécessaires pour arriver au calcul des corrélations du rayonnement de fond et de l'effet de lentille sur les galaxies. Tout d'abord, un premier chapitre présentera les grandes lignes du modèle standard de l'univers, sa description mathématique, ses paramètres. On trouvera aussi dans ce chapitre un résumé de l'évolution de l'univers, telle qu'on la comprend aujourd'hui.

Le second chapitre sera consacré à l'apparition des fluctuations primordiales. On présentera la théorie de l'*inflation* qui est actuellement la plus favorisée par les observations et en particulier celles du rayonnement de fond. On donnera aussi une rapide esquisse de la théorie des perturbations gravitationnelles, nécessaire pour décrire les petites fluctuations. Enfin, on avancera quelques arguments expliquant l'évolution ultérieure des fluctuations engendrées par l'inflation.

C'est dans le troisième chapitre que nous présenterons plus en détail le rayonnement de fond micro-onde. On tracera les grandes lignes du calcul de ses anisotropies. On s'arrêtera plus en détail sur sa polarisation, comment elle apparaît, et ses propriétés.

Enfin, dans un court quatrième chapitre, on s'occupera de la croissance des inhomogénéités

de matière. On étudiera un peu plus en détail la croissance des structures dans le cadre de la théorie des perturbations. On en donnera l'ordre linéaire ainsi que le premier ordre quasi-linéaire. Enfin, on donnera quelques idées sur le régime non-linéaire et l'*Ansatz des corrélations stables*.

Le décor étant planté, on s'intéressera alors à la physique des distorsions gravitationnelles de la lumière. C'est dans le chapitre cinq que l'on trouvera quelques rappels sur l'effet de lentille gravitationnelle. On mènera le calcul permettant de déterminer l'angle de déviation d'un rayon lumineux passant au voisinage d'un objet massif. On traitera aussi en détail le devenir de la polarisation de ce rayon lumineux. Les cas d'une lentille mince et de lentilles épaisses dans l'approximation de Born seront étudiés. On montrera comment déterminer les champs de convergence et d'astigmatisme dans cette approximation. On donnera aussi quelques idées sur les corrections au-delà de Born et en particulier sur le couplage à deux lentilles. Enfin, on s'arrêtera un moment sur l'effet de lentille d'une corde dans deux cas particuliers : la corde rectiligne et la corde circulaire.

Les chapitres six et sept donneront un aperçu des connaissances sur l'effet de lentille sur la température et la polarisation du rayonnement de fond. On présentera dans ces chapitres un panorama de la littérature existante, mais aussi quelques calculs originaux, en particulier dans le chapitre sept, aidant à une meilleure compréhension de cet effet et des difficultés liées à sa mesure. On s'intéressera non seulement à l'effet de lentille des grandes structures, mais aussi à l'effet de lentille forte dû aux cordes. Un travail original sera présenté sur l'effet de lentille d'une corde sur la polarisation du rayonnement de fond.

Enfin, le chapitre huit présentera l'étude des corrélations entre le rayonnement de fond et l'effet de lentille sur des arrières-plans galactiques. Après avoir étudié la corrélation d'effet de lentille à différentes profondeurs, on présentera deux méthodes produisant des observables corrélant l'effet de lentille sur le rayonnement de fond et celui sur des galaxies.

Le chapitre neuf est une extension numérique du chapitre huit. En effet, une de mes préoccupations durant ma thèse a été de pouvoir produire des simulations permettant de valider numériquement les approximations faites dans les calculs analytiques présentés dans les chapitres précédents, et d'étendre ces calculs dans des régions où les approximations ne sont plus valables ou encore dans des cas où les calculs deviennent très complexes. Ces simulations ne sont pas encore terminées ; l'analyse des résultats n'est encore qu'à ses premiers stades. Cependant, je présenterai ici les problèmes auxquels leur réalisation m'a confronté et les choix réalisés pour les contourner. Je reviendrai dans ce chapitre sur de nombreux points évoqués précédemment et en particulier sur les effets de couplages de lentilles.

Le dernier chapitre, enfin, s'éloigne un peu de la problématique générale du reste du mémoire. On aura montré, chapitre huit, combien l'effet de lentille, et en l'occurrence les corrélations d'effets de lentille à différentes profondeurs, pouvait être sensible aux paramètres cosmologiques. Un des éléments déterminants dans notre analyse est le taux de croissance des grandes structures ; l'effet de lentille pratiquant une projection de la masse rencontrée par les rayons lumineux le long de leur trajet, on comprend que cet effet soit sensible aux variations de la géométrie de l'univers, mais aussi à l'évolution des grandes structures le long du trajet. Partant de cette idée, j'ai étudié la phénoménologie des grandes structures dans le cadre de modèles cosmologiques un peu plus exotiques. En effet, un problème persistant est né de la rencontre entre la physique des hautes énergies et les observations de supernovæ. Tandis que les supernovæ semblent indiquer la présence d'une constante cosmologique dominant très nettement les densités d'énergies de l'univers actuel, la physique des particules est en violent désaccord avec un tel ordre de grandeur. Les modèles de *Quintessence* visent à réduire ce désaccord. Après avoir présenté certains des modèles les plus favorisés par la physique des hautes énergies, j'étudierai leurs conséquences phénoménologiques sur la croissance des structures. C'est un sujet qui n'avait jamais été abordé pour des modèles non-minimaux.

Je tirerai aussi les conséquences observationnelles de ces modèles pour l'effet de lentille. Il apparaît que les phénomènes de déviations gravitationnelles sont particulièrement sensibles, à petite échelle, aux modifications des propriétés du régime non-linéaire des grandes structures dans les modèles étudiés.

CHAPITRE 1

Description de l'univers

Sommaire

1.1 Des hypothèses à la métrique de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker	5
1.1.1 Un univers observable	5
1.1.2 Description mathématique	6
1.2 Propriétés du modèle — Contenu matériel de l'univers	7
1.2.1 Décalage vers le rouge — Relation de Hubble	7
1.2.2 Contenu de l'univers — Tenseur Énergie–Impulsion	8
1.2.3 Dynamique — Les équations de Friedmann	9
1.2.4 Les paramètres cosmologiques	10
1.3 Histoire de l'univers	11
1.3.1 Les premiers instants	12
1.3.2 De 10 MeV à la fin de l'ère de la radiation	12
1.3.3 Le rayonnement fossile	13
1.3.4 Les grandes structures	13
1.3.5 Devenir du rayonnement fossile	14

Je vais reconstruire sommairement la description mathématique classique de l'univers. Tout d'abord, je justifierai rapidement, à partir d'hypothèses très générales, le choix de la métrique utilisée pour décrire l'univers. Ensuite, je donnerai les propriétés générales de cette métrique, ainsi que les équations de base qui me serviront tout au long de ce rapport.

1.1 Des hypothèses à la métrique de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker

1.1.1 Un univers observable

L'univers nous a longtemps été accessible uniquement à travers la partie visible du spectre électromagnétique. Les étoiles puis, plus tard, les galaxies, ont permis, dans les premières années du vingtième siècle, de postuler les propriétés de l'univers et d'en donner la description que l'on connaît aujourd'hui. Aussi surprenant que cela puisse paraître au premier abord, l'univers se caractérise avant tout par une remarquable homogénéité. Évidemment, cela n'est pas vrai à notre échelle ; une planète, une étoile, ou une galaxie sont de flagrantes inhomogénéités. Néanmoins, les astronomes ont montré que de tels objets n'étaient que de minuscules accidents au regard des échelles cosmologiques. Qui plus est, quelle que soit la direction d'observation, la densité observée semble être la même. Les premières hypothèses que l'on est amené à faire pour décrire l'univers consistent donc à postuler qu'à grande échelle, l'univers est *homogène* et *isotrope*.

Cette première approche est uniquement empirique. Pour aller plus loin, on va devoir postuler un certain nombre de propriétés théoriques de l'univers. Il s'agit en fait d'une hypothèse sous-jacente à la plupart des systèmes physiques étudiés : on part du principe qu'il existe un cadre de description des lois physiques qui soit valable aussi bien à très petite échelle, qu'aux échelles cosmologiques. En particulier, il semble raisonnable que ce soit la même gravité que nous ressentons qui prenne en charge l'évolution à très grande échelle de l'univers. Ce cadre est la théorie de la Relativité Générale. Par conséquent, on cherchera à donner une description de l'univers dans le langage, très géométrique, de la Relativité.

Enfin, dernier ingrédient empirique de notre description, l'univers est en expansion. C'est Hubble qui dans les années 30, expliqua le décalage vers le rouge systématique des raies des galaxies découvert par Slipher [Slipher, 1915, Slipher, 1914], en montrant que ce décalage était proportionnel à la distance entre les galaxies [Hubble, 1929, Hubble & Humason, 1931]. L'explication la plus simple de ce phénomène est de supposer que l'univers est en expansion. En remontant le temps, il faut donc que l'univers ait été durant les époques précédentes plus chaud et plus dense qu'il ne l'est aujourd'hui ; jusqu'à un moment de très grande énergie et densité. C'est le modèle du *Big Bang chaud*.

Ce modèle a conduit Alpher et Gamov [Gamov, 1946, Alpher *et al.*, 1948] [Alpher & Herman, 1948] à faire, à la fin des années 40, deux très importantes prédictions.

- L'univers doit être baigné d'un rayonnement fossile micro-onde. Celui-ci doit avoir été émis chaud à l'époque où l'univers était assez froid pour permettre au plasma d'électrons et de protons (ou de noyaux simples) de se condenser. C'est l'expansion de l'univers qui a refroidi ce rayonnement jusqu'aux micro-ondes.
- D'autre part, en remontant plus encore dans le temps, Alpher Gamov et Herman ont su estimer l'abondance des éléments légers synthétisés pendant les premiers âges de l'univers.

Ces deux prédictions ont été par la suite validées par de nombreuses observations confortant du même coup la théorie du *Big Bang chaud*.

1.1.2 Description mathématique

La description mathématique conforme aux hypothèses évoquées plus haut est celle de la métrique de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker [Friedmann, 1922, Friedmann, 1924] [Lemaître, 1927] [Weinberg, 1972]. On suppose donc que l'univers aux grandes échelles est correctement représenté par un espace à quatre dimensions muni de la métrique $g_{\mu\nu}$ dont l'élément de distance s'écrit :

$$d^2s = c^2 dt^2 - a^2(t) \gamma_{ij} dx_i dx_j. \quad (1.1)$$

Le tenseur γ_{ij} est la métrique d'un espace à trois dimensions homogène isotrope ; la composante spatiale est donc un *espace à symétrie maximale*. La fonction $a(t)$ dans la métrique prend en charge l'expansion de l'univers, nous verrons plus loin comment. On écrira aussi cette métrique dans les coordonnées dites *conformes*

$$d^2s = a^2(\eta) (d^2\eta - \gamma_{ij} dx_i dx_j), \quad (1.2)$$

pour lesquelles on a pratiqué le changement de coordonnées $d\eta = c dt/a$. Dans toute la suite, on notera par un prime les dérivées du temps conforme et par un point les dérivées du temps.

Enfin, on décrira les processus physiques dans cet espace à l'aide de la Relativité Générale. On rappelle que l'équation d'Einstein s'écrit :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

Le tenseur de Ricci, $R_{\mu\nu}$, la courbure R et la métrique $g_{\mu\nu}$ sont des quantités purement géométriques. La physique est toute entière contenue dans le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. Enfin,

le terme $\Lambda g_{\mu\nu}$ donne la contribution de la *constante cosmologique*. Les équations d'Einstein étant une intégrale première admettent la présence de cette constante. On place communément ce terme avec les termes géométriques. J'ai choisi de le faire figurer à gauche de l'équation, avec les termes *physiques*. L'existence de cette constante et sa nature physique sont un problème très débattu actuellement [Perlmutter *et al.*, 1999, Perlmutter *et al.*, 1998, Perlmutter *et al.*, 1998, Perlmutter *et al.*, 1999b, Perlmutter *et al.*, 1999a, Bahcall *et al.*, 1999] [Garnavich *et al.*, 1998c, Garnavich *et al.*, 1998a, Riess *et al.*, 1998, Garnavich *et al.*, 1998b] [Sahni & Starobinsky, 2000] [Weinberg, 1989]. J'en reparlerai aux chapitres 8 et 10. L'équation d'Einstein relie l'évolution de l'expansion de l'univers à son contenu matériel à travers des interactions gravitationnelles. En donnant un contenu au tenseur $T_{\mu\nu}$ ¹ on pourra résoudre cette équation et donc fixer la fonction a que l'on appelle aussi facteur d'échelle. Cette description mathématique est bien conforme aux postulats énoncés plus haut.

1.2 Propriétés du modèle — Contenu matériel de l'univers

1.2.1 Décalage vers le rouge — Relation de Hubble

Avant de donner un contenu au tenseur énergie-impulsion, je vais regarder en détail une propriété mathématique de la métrique. On a dit plus haut que c'était la proportionnalité surprenante entre le décalage vers le rouge des galaxies lointaines et leurs distances qui avait permis à Hubble de postuler le mouvement d'éloignement de ces galaxies et l'expansion de l'univers. On va voir comment cet effet se manifeste dans notre modèle.

Deux observateurs au repos, à une distance initiale d l'un de l'autre, voient leur éloignement évoluer comme $d(t) = a(t) d$. Du coup, ces deux observateurs peuvent se croire en déplacement l'un par rapport à l'autre à la vitesse apparente $v(t) = \dot{a}(t) d$. Dans la grande tradition de la relativité générale, supposons que ces observateurs échangent des signaux électromagnétiques². Considérons donc un photon émis à une fréquence ν_e par l'un des observateurs. Ce photon est astreint à suivre une trajectoire extrémale dont l'équation s'écrit :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0. \quad (1.4)$$

C'est l'équation des géodésiques [Misner *et al.*, 1973]. Pour sa quadrivitesse p^μ , en choisissant comme paramètre d'intégration le temps conforme η , il vient

$$\frac{dp^\mu}{d\eta} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu p^\nu p^\rho = 0. \quad (1.5)$$

En ne regardant que les composantes temporelles, on tire l'équation différentielle

$$p^{0'} = -2 \frac{1}{a} \frac{da}{dt} p^0, \quad (1.6)$$

qui s'intègre en $p^0 = P/a^2$ pour P l'énergie initiale du photon. Dans ces conditions, l'observateur recevant l'onde verra une radiation d'énergie³ $E = P/a$. La fréquence mesurée par l'observateur est $\nu_o = \nu_e \times a$. Du fait de l'évolution du facteur d'échelle pendant le trajet du photon, l'observateur voit les photons émis par son comparse décalés vers le rouge d'un facteur a .

¹et donc à l'univers!

²La dure vie de l'observateur soit disant au repos de la relativité générale...

³en coordonnées comobiles, la quadrivitesse d'un observateur comobile au repos a comme coordonnée temporelle a .

Le même mécanisme est à l'œuvre dans les mesures de Hubble. Entraînées par l'expansion, les galaxies s'éloignent les unes des autres et sont vues décalées vers le rouge. On définira le paramètre de *décalage vers le rouge*, z , tel que

$$z + 1 \equiv \frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{1}{a}. \quad (1.7)$$

Pour conclure sur le sujet, on va écrire la relation qui relie la vitesse d'éloignement et la distance de nos deux observateurs à un instant t

$$v(t) = H d(t), \text{ avec } H(t) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}. \quad (1.8)$$

On appellera *paramètre de Hubble* la fonction $H(t)$. La métrique choisie reproduit bien l'hypothèse d'expansion postulée par Hubble.

1.2.2 Contenu de l'univers — Tenseur Énergie–Impulsion

Il faut maintenant donner un contenu physique à l'univers. Le tenseur énergie-impulsion va représenter les contributions des différentes espèces que l'on observe (photons, matière baryonique, neutrinos...) ou que l'on postule (matière noire, constante cosmologique, Quintessence...). À grande échelle, pour obéir aux hypothèses d'homogénéité et d'isotropie, ces différentes espèces doivent elles aussi présenter de telles propriétés. On va supposer que les propriétés physiques de ces différents composants sont bien décrites par celles d'un fluide; lorsque la densité est très faible les espèces physiques s'apparentent à des gaz très dilués et l'hypothèse fluide est tout à fait justifiée. Enfin, on va supposer que les seules interactions à grande échelle de ces composantes sont des interactions gravitationnelles, de sorte que les tenseurs énergie-impulsions soient découplés.⁴

On connaît la description adaptée pour des fluides homogènes et isotropes, c'est celle du fluide parfait. Pour chaque fluide, le tenseur énergie-impulsion est de la forme

$$T_0^0 = \rho, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = P \text{ et } T_\nu^\mu = 0 \text{ sinon.}$$

C'est d'ailleurs la seule forme que peut prendre le tenseur énergie-impulsion pour être compatible avec la métrique de FLRW.

Pour compléter la description, il faut donner une *équation d'état* pour chaque fluide, $P = f(\rho)$ qui relie sa pression et sa densité. Celle-ci est l'expression à grande échelle des interactions microscopiques de chaque espèce. Dans la plupart des cas, cette équation d'état pourra se mettre sous la forme simple $P = \omega \rho$.

Ces données seules permettent d'écrire simplement pour chaque espèce l'évolution de sa densité d'énergie. En effet, l'équation de conservation (fluides sans interactions) $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$ donne⁵,

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + P). \quad (1.9)$$

En imposant l'équation d'état $P = \omega \rho$, on obtient

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}. \quad (1.10)$$

Regardons les conséquences de cette équation pour les fluides contenus dans l'univers. Considérons tout d'abord de la matière non-relativiste, sans interaction. Pour des particules

⁴évidemment cette dernière propriété n'est valable qu'à grande échelle. On verra plus loin, en particulier lors du calcul du rayonnement de fond micro-onde, des exemples dans lesquels on ne peut négliger les interactions microscopiques.

⁵à partir de maintenant, et sauf indication contraire, $c = 1$.

non-relativistes, la densité d'énergie est dominée par l'énergie de masse. Elle doit donc changer comme a^{-3} . En effet, entre deux instants, le volume de l'univers change d'un facteur a^3 , ce qui fait que la matière non-relativiste est diluée de a^{-3} . L'équation (1.10) donne le paramètre de l'équation d'état de la matière non-relativiste $\omega = 0$. Un fluide non-relativiste sans interaction est décrit par un fluide parfait sans pression.

La densité d'énergie des fluides relativistes, par contre, doit évoluer en a^{-4} . En effet, l'argument de dilution évoqué plus haut est toujours valable. L'expansion fait décroître le volume en a^{-3} . On a vu-au dessus (section 1.2.1) que l'énergie des photons était aussi *ralentie* d'un facteur a^{-1} . La combinaison de ces deux facteurs donne l'évolution de la densité d'énergie en a^{-4} pour les espèces relativistes. D'après l'équation (1.10), les fluides relativistes doivent avoir une équation d'état $\omega = 1/3$.

Nous sommes aujourd'hui dans une période où la matière non relativiste domine l'univers. Cependant, la différence entre les pentes d'évolution de ces deux densités d'énergie permet de prédire que l'univers a nécessairement été dominé par l'énergie des fluides relativistes à une époque éloignée.

Enfin, on peut remarquer que l'équation d'état $\omega = -1$ conduit à une densité d'énergie constante et donne un tenseur énergie-impulsion semblable au terme de constante cosmologique des équations d'Einstein $T^{\mu\nu} = \Lambda g^{\mu\nu}$. Par la suite, on supprimera le terme de constante des équations et on l'inclura au tenseur énergie-impulsion comme la contribution éventuelle d'un fluide répulsif (de pression négative). Cette remarque justifie en partie le choix d'écrire le terme de constante avec les contributions physiques de l'équation d'Einstein.

1.2.3 Dynamique — Les équations de Friedmann

Reste maintenant à résoudre les équations d'Einstein⁶. On obtient les *équations de Friedmann*, pour la composante temporelle

$$H^2 + K a^{-2} = \frac{8\pi G}{3} \sum_X \rho_X \quad (1.11)$$

et pour les composantes spatiales

$$2\dot{H} + 3H^2 + K a^{-2} = -8\pi G \sum_X P_X. \quad (1.12)$$

Le paramètre K qui apparaît dans ces équations mesure la courbure des sections spatiales. Comme on l'a dit plus haut, on a inclus dans le tenseur énergie-impulsion la contribution d'une éventuelle constante cosmologique. On pourra même aller plus loin par la suite, puisque la forme des équations de Friedmann nous permettent de considérer le terme de courbure comme un fluide supplémentaire d'équation d'état $\omega = -1/3$. On donne aussi l'expression des équations de Friedmann dans les coordonnées conformes,

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\kappa}{3} a^2 \sum_X \rho_X, \quad 2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 = -\kappa a^2 \sum_X P_X, \quad (1.13)$$

le paramètre de Hubble étant alors $\mathcal{H} = a'/a$. On va finalement se ramener à un jeu simple d'équations pour le paramètre de Hubble et sa dérivée

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \sum_X \rho_X, \quad \dot{H} = -\frac{\kappa}{2} \sum_X (1 + \omega) \rho_X \quad (1.14)$$

⁶On donnera en annexe les tenseurs nécessaires pour calculer l'équation d'Einstein quand je l'aurai écrite!!!

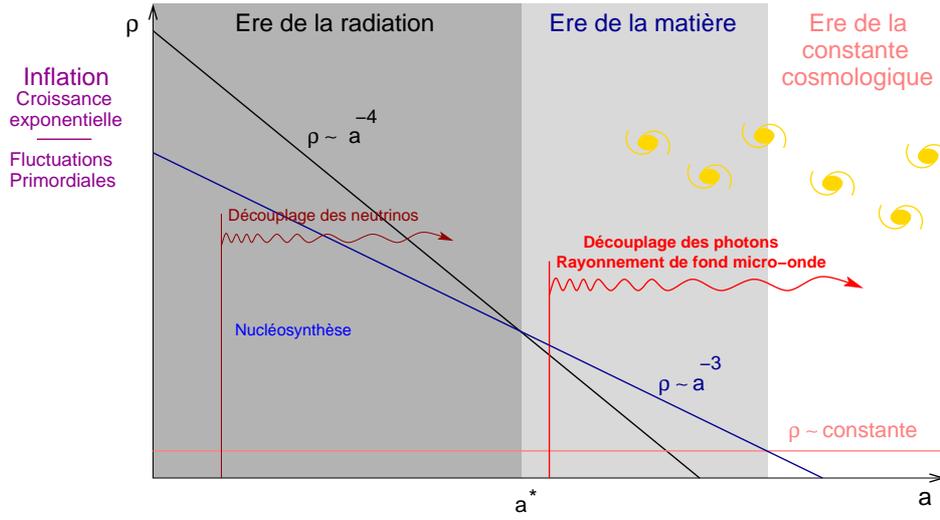


FIG. 1.1 – Évolution des espèces. Ères du rayonnement, de la matière, et peut être de la constante? En traits pleins la contribution du rayonnement, en tirets celle de la matière non-collisionnelle. La courbe pointillée horizontale est la contribution de la constante.

et en coordonnées conformes

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\kappa}{3} a^2 \sum_X \rho_X, \quad \mathcal{H}' = -\frac{\kappa}{2} a^2 \sum_X (1 + 3\omega) \rho_X. \quad (1.15)$$

En utilisant la première partie des deux précédentes équations, on obtient l'évolution du facteur d'échelle au cours du temps, en fonction du contenu de l'univers, pour une dynamique dominée par l'interaction gravitationnelle

$$a(t) = t^{\frac{2}{3(1+\omega_{\text{tot}})}}, \quad a(\eta) = \eta^{\frac{2}{1+3\omega_{\text{tot}}}}. \quad (1.16)$$

Le paramètre ω_{tot} introduit ici est l'équation d'état d'un fluide de pression $P_{\text{tot}} = \sum_X P_X$ et de densité d'énergie $\rho_{\text{tot}} = \sum_X \rho_X$. Il n'y a aucune raison que ce paramètre soit constant au cours du temps. Cependant, comme toutes les espèces ont des équations d'état très différentes, leurs densités d'énergie sont telles qu'elles vont dominer très nettement la densité d'énergie totale l'une après l'autre à des époques bien marquées, de telle sorte que le paramètre ω_{tot} sera constant la plupart du temps⁷. Ainsi, durant l'ère de domination du rayonnement, le facteur de croissance va connaître une évolution en \sqrt{t} , pendant l'ère de la matière $t^{2/3}$ et en $\exp(t)$ pour un univers dominé par la constante cosmologique.

1.2.4 Les paramètres cosmologiques

On va encore une fois ré-exprimer l'équation (1.11) pour faire apparaître sous une forme classique les paramètres qui la composent. Soit ρ_c , la densité que devrait avoir la matière en l'absence de toute autre composante pour que l'univers soit de section spatiale plate :

$$\rho_c = \frac{3H^2}{\kappa}. \quad (1.17)$$

On appelle ρ_c la *densité d'énergie critique*. La densité ρ_0 est la densité critique aujourd'hui. Pour chaque composante X , on définit un *paramètre cosmologique* Ω_X (en incluant bien

⁷Ce n'est plus vrai lorsque l'univers contient un fluide quintessenciel. On décrira mieux ce point au chapitre 10.

TAB. 1.1 – Contribution des différentes composantes à l'évolution de l'univers. On donne aussi le comportement du facteur d'échelle en temps cosmique et en temps conforme lorsqu'une seule composante domine.

	Paramètre d'état	Densité d'énergie	$a(t)$	$a(\eta)$
Cas général	ω	$a^{-3(1+\omega)}$	$t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}$	$\eta^{\frac{2}{1+3\omega}}$
Radiation	$\frac{1}{3}$	a^{-4}	$t^{\frac{1}{2}}$	η
Matière	0	a^{-3}	$t^{\frac{2}{3}}$	η^2
Constante cosmique	-1	a^0	e^{Ht}	$\frac{1}{\eta}$
Courbure	$-\frac{1}{3}$	a^{-2}	t	$e^{\mathcal{H}\eta}$
Champ scalaire en régime cinétique	1	a^{-6}	$t^{\frac{1}{3}}$	$\eta^{\frac{1}{2}}$

entendu la courbure et la constante cosmologique)

$$\Omega_X = \frac{\rho_x}{\rho_c}. \quad (1.18)$$

L'équation de Friedmann (1.11) se ré-écrit alors

$$\sum_X \Omega_X = 1. \quad (1.19)$$

Si on pose Ω_X^0 la valeur du paramètre aujourd'hui, on a alors

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_X \Omega_X^0 a^{-3(1+\omega_X)}. \quad (1.20)$$

La deuxième équation de Friedmann peut subir le même traitement pour se mettre sous la forme

$$\frac{\dot{H}}{H_0^2} = -\frac{3}{2} \sum_X (1 + \omega_X) \Omega_X^0 a^{-3(1+\omega_X)}.$$

Le modèle est donc entièrement décrit par la donnée des paramètres cosmologiques aujourd'hui, des équations d'état de chaque composante et de la valeur du paramètre de Hubble aujourd'hui⁸. On donne dans le tableau 1.1 les valeurs pour chacun de ces paramètres.

1.3 Histoire de l'univers

On a vu plus haut que la loi de Hubble conduisait à postuler un univers dont l'évolution irait d'une phase dense et chaude vers une phase froide et diluée. On a montré comment le modèle choisi obéissait à cette évolution. On va maintenant donner les principales étapes de l'histoire passée de l'univers telles que peut les prédire le modèle [Kolb & Turner, 1990] [Padmanabhan, 1993] [Peebles, 1993] [Peacock, 1998].

⁸Où de manière équivalente, la valeur de la densité critique aujourd'hui.

1.3.1 Les premiers instants

Il est difficile de prédire l'évolution exacte de l'univers lorsque sa densité d'énergie était très élevée. Pour de très hautes énergies, on ne peut qu'extrapoler notre compréhension actuelle de la physique. Il n'est pas du tout assuré que la physique microscopique, telle que nous la connaissons, soit toujours valable à de telles énergies⁹. On sait toutefois qu'un certain nombre d'événements importants ont dû se dérouler pendant ces premiers instants.

Peu de temps après sa création, alors que la densité d'énergie était comprise entre 10^{72} et 10^{40} GeV⁴, l'univers était très probablement sans une phase dite d'*inflation*. L'univers s'étendait alors exponentiellement. Il n'est ni obligatoire ni certain que cette phase se soit déroulée. Néanmoins, l'existence de cette période bien particulière résout certains problèmes liés au modèle. Qui plus est les prédictions liées à l'existence de ce phénomène sont en très bon accord avec les expériences récentes [Jaffe *et al.*, 2001]. On reviendra, au chapitre 2, sur les caractéristiques de cet épisode. Notons tout de suite que cette phase inflationnaire donne une explication simple à l'apparition d'inhomogénéités. Ces inhomogénéités seront très importantes par la suite car elles fournissent les germes autour desquels la matière a pu s'accréter pour former les objets observés aujourd'hui.

Après l'inflation, l'univers devait ressembler à une soupe de particules relativistes en interactions. En supposant que le mélange était en équilibre thermique, on peut définir une température en utilisant la relation

$$\rho_r = \frac{\pi^2}{30} N_h(T) (k_B T)^4. \quad (1.21)$$

Le facteur $N_h(T) = \sum_{\text{barion}} g_B + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermion}} g_F$ représente le nombre d'états d'hélicité des particules relativistes. Si le facteur $N(T)$ restait constant, la température diminuerait comme $1/a$. Comme, lorsque la densité baisse, l'énergie des particules devient comparable à leur énergie de masse, elles quittent le régime relativiste et le facteur $N(T)$ doit alors diminuer par sauts discrets.

À mesure que la température baisse, les interactions possibles entre particules diminuent. Lorsqu'un type de particule ne peut plus interagir avec les autres, il est totalement découplé du reste de l'univers et se comporte comme un corps noir, suivant uniquement l'évolution gravitationnelle de l'univers. C'est ce qui a dû arriver aux gravitons, qui pourraient constituer le premier rayonnement de fond fossile, sous la forme d'ondes gravitationnelles. On suppose que la matière noire s'est elle aussi découplée très tôt. Par ailleurs, les modèles de formation des grandes structures amènent aussi à postuler une matière noire froide (CDM) ; c'est-à-dire qui aurait quitté très tôt aussi le régime relativiste.

Finalement, c'est pendant les premiers temps que les brisures de symétries d'une éventuelle théorie unifiée de grande énergie ont dû avoir lieu. Entre autre, on pense que ces transitions de phases peuvent expliquer l'asymétrie matière/antimatière observée aujourd'hui [Sakharov, 1979]. La dernière de ces transitions de phases a certainement été la brisure électrofaible, aux alentours de 100 GeV.

1.3.2 De 10 MeV à la fin de l'ère de la radiation

À des énergies de l'ordre de la dizaine de MeV, le modèle standard se comporte très bien, et les prédictions que l'on peut faire sont beaucoup plus précises. Vers 10 MeV, il ne doit plus rester qu'un plasma (faible et électromagnétique) de photons, neutrinos, électrons-positrons et de protons et neutrons. Ces deux dernières particules ont dû se former quelque temps avant,

⁹Il n'est pas assuré que le modèle standard de la physique des hautes énergies puisse être extrapolé sans dommage à de très hautes énergies.

autour de 100 MeV, lorsque le plasma de quarks et de gluons s'est condensé. À cette énergie, protons et neutrons sont déjà des particules non-relativistes.

Lorsque la température tombe au-dessous du MeV, les neutrinos se découplent du plasma. L'expansion de l'univers a dilué suffisamment les neutrinos pour que leur probabilité d'interaction avec les autres particules soit très faible.

Lorsque la température atteint l'énergie de masse des électrons, c'est-à-dire 511 KeV, les électrons et les positrons s'annihilent et réchauffent le fluide de photons.

Les protons et neutrons commencent à former des noyaux simples au voisinage de 0.1 MeV. On appelle ce phénomène la *nucléosynthèse primordiale*. Les processus mis en jeu dans la genèse des noyaux légers (Deutérium, Tritium, Hélium et Lithium) sont particulièrement bien décrits par le modèle standard. On sait calculer très précisément les abondances primordiales de ces éléments. Les résultats théoriques sont très proches des observations. C'est une des principales réussites du modèle du big bang chaud. Il est à noter ici que l'énergie de 0.1 MeV est bien en deçà de l'énergie de couplage de l'hélium, par exemple, qui est de l'ordre de la trentaine de GeV. Cela est dû à la différence entre la densité des baryons et des photons.

Enfin, aux alentours de l'électron-volt, la densité de matière non relativiste, principalement composée de matière noire, devient comparable à la densité d'énergie de la radiation. Cette époque a pour nom l'*équivalence*. On a alors

$$\Omega_m^0 (1 + z_{\text{eq}})^3 = \Omega_r^0 (1 + z_{\text{eq}})^4. \quad (1.22)$$

Le décalage vers le rouge correspondant est de l'ordre de $\Omega_m^0/\Omega_r^0 \sim 10^4$. Les incertitudes sur la densité de matière noire rendent la datation de cette transition difficile.

1.3.3 Le rayonnement fossile

Nous reviendrons plus en détail sur les propriétés du rayonnement fossile au chapitre 3. Peu de temps après l'équivalence, la température du fluide de photons est suffisamment basse pour permettre l'apparition des premiers atomes. Les électrons s'apparient aux noyaux formés pendant la nucléosynthèse. On appelle cet événement la *recombinaison*.

Normalement, la recombinaison devrait se dérouler au moment où la température est de l'ordre de l'énergie d'ionisation de l'hydrogène, c'est-à-dire 13,6 KeV. Néanmoins, pour la même raison qui retarde la nucléosynthèse, le nombre de photons étant plus élevé que le nombre d'électrons et de noyaux disponibles, la température du fluide de photons doit être plus basse pour que la recombinaison commence. Ainsi, c'est pour une température de 3300K, soit un décalage vers le rouge de 1200 que les premiers atomes se forment.

À cette température relativement basse, le fluide de photons ne diffuse presque plus que sur les électrons libres du plasma. Or, comme le nombre d'électrons diminue au fur et à mesure de leur appariement avec les noyaux, les photons voient leur taux de diffusion diminuer fortement. A tel point que leur libre parcours moyen devient infini¹⁰. L'univers devient alors brutalement transparent ; le fluide de photons est découplé des autres fluides. La recombinaison prend fin lors du découplage. Le décalage vers le rouge de la surface sur laquelle, pour la dernière fois avant le découplage, les photons ont diffusé, est $z_{\text{CMB}} \sim 1100$. On appelle communément cette surface la *surface de dernière diffusion*, en anglais, *Last Scattering Surface*, souvent abrégée *LSS*.

1.3.4 Les grandes structures

L'univers est maintenant dominé par la matière. On a expliqué, au début de cette section que l'inflation fournissait une explication à d'éventuelles petites fluctuations primordiales de

¹⁰L'infini ici est très exagéré. Il suffit que le libre parcours moyen des photons devienne de l'ordre de la taille de l'univers pour que celui-ci soit transparent.

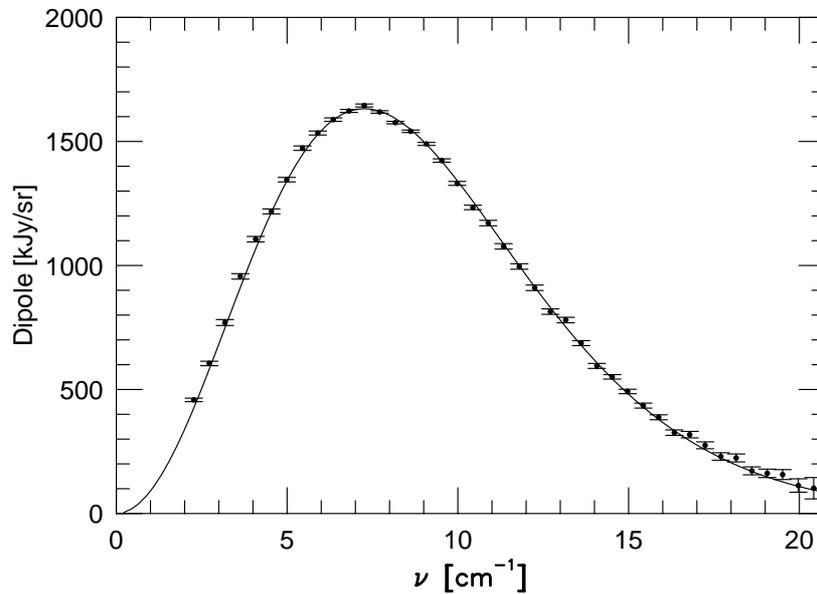


FIG. 1.2 – Le spectre du corps noir du CMB. La mesure présentée ici a été réalisée par l'expérience FIRAS du satellite COBE. Les barres d'erreur sont à 400σ . La figure est tirée de [Smoot, 1997].

la métrique. Ces inhomogénéités primordiales vont avoir maintenant une grande importance. En effet, c'est dans le puits de potentiel formé par ces fluctuations que la matière va commencer à s'accréter. Petit à petit, se forment par attraction gravitationnelle les premiers objets [Peebles, 1980].

Cette très lente formation des premiers objets est encore mal comprise. Elle aboutira à l'univers tel que nous l'observons, presque vide, avec des zones de très fortes densités : galaxies et amas. La répartition de ces zones de vide et l'agencement des galaxies sont entièrement expliqués par les fluctuations primordiales. Par contre, la dynamique des objets formés n'est plus entièrement décrite par la gravité.

On a vu qu'a priori, la matière n'était plus ionisée après la recombinaison. Pourtant, les mesures semblent indiquer qu'aujourd'hui la majeure partie de la matière baryonique est ionisée [Gunn & Peterson, 1965] [Songaila *et al.*, 1999]. On situe généralement l'époque de cette réionisation à celle de la formation des premiers objets [Madau, 2000].

1.3.5 Devenir du rayonnement fossile

Nous allons maintenant délaissier l'histoire du reste de l'univers pour suivre l'histoire du fluide de photons. Au découplage, la distribution du gaz de photons suivait la loi du corps noir. Par la suite, les photons n'interagissent que très peu avec la matière. Ils suivent donc l'évolution gravitationnelle de l'univers et sont refroidis par l'expansion. Le rayonnement, que l'on appelle souvent rayonnement fossile, ou *rayonnement de fond micro-onde* (CMB) peut être observé aujourd'hui à une température d'environ 3K. Il s'agit de la plus ancienne image électromagnétique, de la plus ancienne photographie si l'on veut, de l'univers. Il a été détecté pour la première fois par Penzias et Wilson en 1965 [Penzias & Wilson, 1965] [Dicke *et al.*, 1965]. Le satellite COBE [Mather *et al.*, 1990, Fixsen *et al.*, 1996] a mesuré sa température et son spectre avec

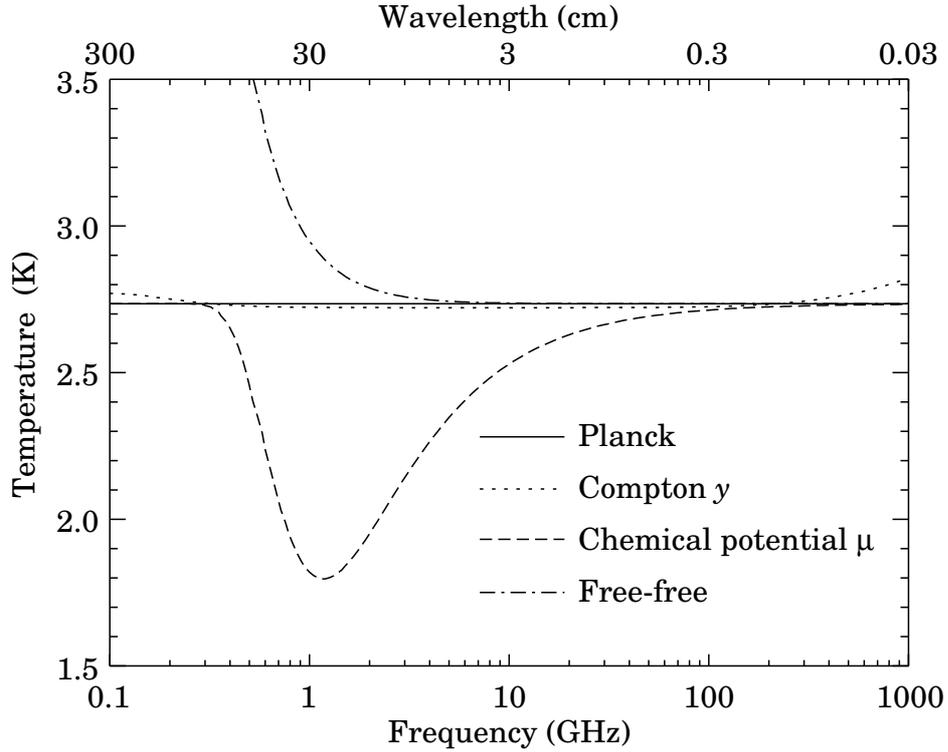


FIG. 1.3 – Écarts au corps noir. Ces écarts n'ont pas été observés jusqu'à présent. Cette figure provient aussi de [Smoot, 1997].

une très grande précision. La température du rayonnement est, à 2σ

$$T_{\text{CMB}} = 2.728 \pm 0.004 \text{ K.} \quad (1.23)$$

Son spectre, présenté figure 1.2, est compatible avec la distribution du corps noir

$$I(\nu) = \frac{\nu^3}{\exp(\frac{h\nu}{k_B T}) - 1}. \quad (1.24)$$

Des écarts à cette distribution sont possibles, sous la forme :

- d'une interaction tardive. La thermalisation du fluide de photons doit être terminée longtemps avant la surface de dernière diffusion. Il a été montré que les perturbations à la distribution du fluide de photons intervenant après $z \sim 10^6$ ne pouvaient se thermaliser et donnaient un potentiel chimique non-nul au gaz [Hu & Silk, 1993] [Stebbins, 1997].
- D'une diffusion sur un gaz d'électrons, après la surface de dernière diffusion. On a vu plus haut que l'univers a connu une époque de réionisation après la surface de dernière diffusion. D'autre part, les galaxies sont des points chauds qui peuvent aussi réioniser la matière. Les photons du rayonnement fossile diffusent sur ces zones réionisées. On parle alors d'effet *Sunyaev-Zel'dovich* (effet SZ) [Zel'dovich *et al.*, 1969, Zel'dovich & Sunyaev, 1969]. On sépare en général l'effet SZ thermique, pour lequel les photons sont réchauffés par un gaz d'électrons chaud, de l'effet SZ cinétique, où l'apport d'énergie provient de la vitesse relative importante du gaz d'électrons dans le référentiel des photons.
- Enfin, la diffusion, dite *free-free*. Les électrons libres peuvent diffuser sur les particules chargées du gaz chaud et ainsi émettre des photons.

Les mesures du spectre effectuées par COBE contraignent fortement ces distortions. Ces contraintes, tout comme les abondances primordiales des éléments légers, constituent une importante justification des hypothèses du modèle du Big Bang chaud.

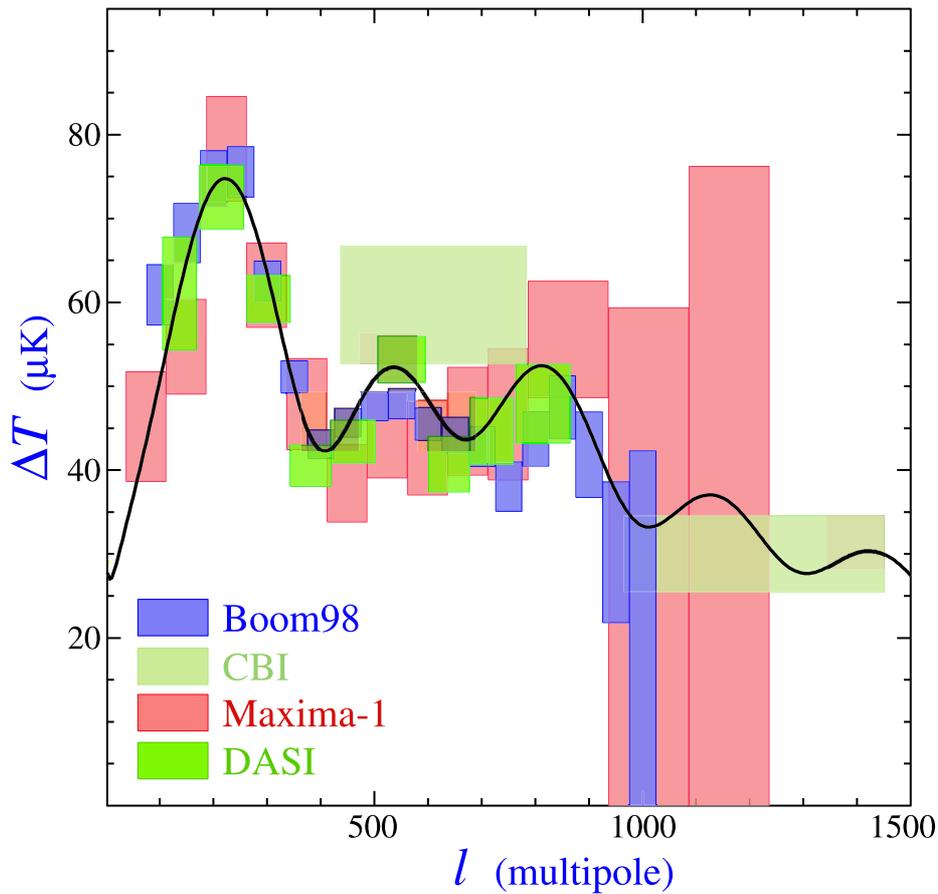


FIG. 1.4 – Spectre angulaire du rayonnement de fond avec les mesures les plus précises à ce jour. J’ai emprunté la figure à W. Huq [HuSite, [http](#)].

D’autre part, le rayonnement de fond observé doit présenter des anisotropies de température. En effet, les divers mouvements de la terre, du soleil et de notre galaxie par rapport au référentiel au repos des photons doivent induire, simple cinématique relativiste, un dipôle sur le spectre angulaire observé du rayonnement de fond. Le rayonnement est aussi perturbé localement par divers avant-plans (poussière, synchrotron, free-free...), se manifestant par des distortions du spectre angulaire. Enfin, on a dit plus haut que l’univers primordial devait posséder localement de petites inhomogénéités, germes des objets compacts observés aujourd’hui. Ces anisotropies, d’origine cosmologique, laissent aussi une signature sur le rayonnement de fond. Le spectre angulaire de ces anisotropies primordiales a été mesuré, d’abord par COBE [Mather *et al.*, 1990, Fixsen *et al.*, 1996], puis par de nombreuses missions terrestres. Plus récemment, les mesures de grande précision effectuées par les ballons BOOMRanG [BOOMERanG, [http](#)] et Maxima [MAXIMA, [http](#)] ont permis de dresser la carte d’une partie de ce spectre angulaire et ont donné de nombreuses informations sur l’origine des perturbations primordiales et la géométrie de l’univers. On peut trouver une liste des expériences passées et futures dédiées au rayonnement de fond sur la page de M. Tegmark [Tegmark, [http](#)]. Nous exposerons dans les chapitres suivants comment apparaissent ces fluctuations cosmologiques dans les modèles inflationnaires (chapitre 2), et comment elles influent sur le spectre du rayonnement de fond (chapitre 3).

CHAPITRE 2

Les fluctuations primordiales

Sommaire

2.1	Genèse des fluctuations primordiales	17
2.1.1	Les modèles de défauts topologiques	17
2.1.2	Les théories inflationnaires	18
2.2	L'inflation	18
2.2.1	Les problèmes du modèle cosmologique standard	19
2.2.2	Une solution : l'inflation	20
2.2.3	La dynamique de l'inflation dans l'approximation du <i>Roulement-Lent</i> (<i>Slow-Roll</i>)	21
2.2.4	Genèse des fluctuations primordiales du champ d'inflation	22
2.2.5	Devenir des fluctuations du champ d'inflation	24
2.3	Perturbation de la métrique	24
2.3.1	Équation de base des fluctuations au premier ordre	24
2.3.2	Problème de jauge	25
2.3.3	Perturbation du tenseur énergie-impulsion	26
2.3.4	Évolution des perturbations	26
2.4	Conclusion	28

J'ai présenté le canevas standard de l'évolution de l'univers. Je vais maintenant décrire avec plus de détails quelques points qui seront importants pour la suite de l'exposé. Puisque j'ai annoncé dans le chapitre précédent que les anisotropies primordiales du rayonnement de fond diffus, ainsi que les grandes structures, avaient pour origine les fluctuations primordiales de la métrique, il convient de décrire un peu plus le mécanisme de création de ces fluctuations primordiales et leurs propriétés.

2.1 Genèse des fluctuations primordiales

Il existe plusieurs mécanismes qui peuvent expliquer l'apparition de perturbations dans la métrique. Deux grandes théories ont été particulièrement développées pour expliquer ce phénomène : les défauts topologiques et l'inflation. Elles expliquent l'apparition des inhomogénéités de différentes façons, mais ne sont pas *a priori* exclusives.

2.1.1 Les modèles de défauts topologiques

Les modèles de défauts topologiques donnent pour origine aux fluctuations la présence de "lignes" de brisures de symétries [Kibble, 1980] [Vilenkin & Shellard, 1994] [Hindmarsh & Kibble, 1995].

Lors de l'évolution de l'univers, à mesure que la densité d'énergie diminuait, l'éventuelle force grande unifiée a dû se briser. On sait que lors de telles brisures de symétries, suivant le groupe de symétrie brisé¹, peuvent se former des défauts topologiques, hypersurfaces délimitant des régions de l'espace-temps où la symétrie a été brisée différemment. On décrira ce mécanisme de brisure plus précisément lorsque nous discuterons l'effet de lentille gravitationnelle induit par une corde au chapitre 5. Un réseau de défauts topologiques, couplés à la métrique, peut donner naissance à de petites inhomogénéités.

Cette théorie est assez élégante. Aucun élément extérieur au modèle n'est nécessaire pour expliquer les inhomogénéités. Cependant, elle n'est pas sans poser de nombreux problèmes. La dynamique du réseau de défauts est très difficile à prédire. Certains types de défauts (les monopoles magnétiques, par exemple) doivent être éliminés pour être en accord avec les observations. Enfin, à ce jour, il n'existe aucun modèle de défauts qui parvienne à reproduire seul les mesures du spectre de puissance angulaire du rayonnement de fond [Durrer *et al.*, 1996]. Ce dernier point a particulièrement réduit l'intérêt porté à ces théories. Je ne décrirai pas plus en détail les modèles de défauts.

2.1.2 Les théories inflationnaires

La théorie de l'inflation postule que dans ses premiers instants, l'univers était rempli par un champ initialement hors d'équilibre. Après le *Big-Bang*, le champ descend le long de son potentiel pour rejoindre sa position d'énergie minimale. Cette configuration de l'univers à deux conséquences très importantes. D'une part, l'évolution du champ force l'univers à enfler exponentiellement [Starobinsky, 1979] [Starobinsky, 1980]. D'autre part, en autorisant au champ un comportement quantique, celui-ci peut fluctuer légèrement autour de son potentiel. Ces fluctuations donnent une source aux inhomogénéités primordiales [Guth & Pi, 1982] de l'univers. Cette théorie a reçu très vite une très forte audience et a connu nombreux développements (pour les articles fondateurs voir aussi [Guth, 1981] [Linde, 1982, Linde, 1983] [Albrecht & Steinhardt, 1982] [Abbott & Wise, 1984a] [Starobinsky, 1982, Starobinsky, 1983] [Bardeen *et al.*, 1983]. Pour une revue des théories inflationnaires, on lira avec profit [Linde, 1990] [Liddle & Lyth, 1993, Liddle & Lyth, 2000]).

Contrairement aux théories de défauts topologiques, l'inflation requiert l'ajout d'un champ supplémentaire. Elle est en cela moins *naturelle* que les théories de défauts topologiques. Cependant, cette faiblesse est compensée par le fait que l'inflation résout plus que l'unique problème des fluctuations primordiales de la métrique. À vrai dire, cette théorie avait été avant tout imaginée comme une solution à d'autres problèmes du modèle que nous décrirons en détail plus loin. Cette aptitude à résoudre plusieurs problèmes et à expliquer simultanément la genèse des fluctuations primordiales, a fait de l'inflation une théorie particulièrement attractive et très étudiée. Qui plus est, les prédictions de l'inflation sont en très bon accord avec les mesures du rayonnement fossile [Jaffe *et al.*, 2001]. Dans la suite du chapitre, je vais m'attarder un peu plus sur les propriétés générales des théories d'inflation.

2.2 L'inflation

Comme je l'ai fait remarquer plus haut, l'inflation a été tout d'abord inventée pour résoudre un certain nombre de problèmes posés par le modèle cosmologique que nous avons décrit dans le premier chapitre. Cette solution suppose l'ajout d'un champ scalaire qui dominerait l'univers dans ses premiers instants. En donnant une dynamique quantique à ce champ, on obtient une source possible pour les fluctuations primordiales de la métrique. Dans la suite de mon exposé, je vais suivre ce cheminement. Tout d'abord, je vais présenter les problèmes

¹pour être précis, c'est le groupe de recouvrement de la symétrie qui détermine le type de défaut pouvant apparaître à la faveur d'une brisure de symétrie.

qui motivent l'ajout d'un champ au modèle. Ensuite, je montrerai comment les propriétés quantiques de ce champ peuvent expliquer les inhomogénéités de l'univers.

2.2.1 Les problèmes du modèle cosmologique standard

Lorsque j'ai présenté le modèle cosmologique standard, j'ai passé sous silence certains problèmes auxquels est confronté ce scénario.

La platitude

Les résultats des dernières mesures du rayonnement de fond tendent à confirmer ce dont les cosmologues se doutaient depuis un moment : l'univers est remarquablement proche d'un univers plat. Or, ce résultat est assez surprenant. En effet, considérons un univers rempli par un seul fluide, sans constante cosmologique. Ce modèle est une approximation raisonnable des premiers temps, puisque l'on sait que les composantes de l'univers dominant l'une après l'autre l'évolution et que la constante cosmologique ne peut avoir dominé les premiers âges. On va regarder l'évolution du paramètre cosmologique associé à ce fluide

$$\dot{\Omega} = \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho_c} \right) = \frac{\dot{\rho}}{\rho_c} - \Omega \frac{\dot{\rho}_c}{\rho_c}. \quad (2.1)$$

Cette dernière équation donne, en utilisant l'équation de continuité (1.9) et celle d'évolution du paramètre de Hubble (1.11,1.12)

$$(\dot{\Omega} - 1) = H(1 + 3\omega)\Omega(\Omega - 1). \quad (2.2)$$

Si l'univers primordial était plat, cette équation nous montre qu'il doit le rester. Si maintenant on admet un petit écart à la platitude aujourd'hui, la solution générale de l'équation

$$\Omega - 1 = \frac{a^{1+3\omega}}{\text{Const} - a^{1+3\omega}} \quad (2.3)$$

nous permet d'évaluer cet écart dans les temps anciens. Comme a diminue lorsqu'on remonte le temps, l'écart à la solution plate doit être 10^{60} fois plus petit au temps de Planck, pour le cas où le fluide considéré est la radiation². Un écart si faible est très suspect. Il est difficile d'imaginer un processus physique aboutissant à un tel ajustement. Il est donc préférable de supposer que l'univers est plat. Mais le scénario standard ne permet pas d'expliquer pourquoi l'univers devrait être plat. Remarquons avant de poursuivre que le problème ne se pose plus lorsque le fluide considéré est de pression négative. Lorsque $\omega < -1/3$, la solution plate est alors attractive, et l'on n'a plus de problèmes d'ajustement fin.

L'horizon causal

De la même manière, on a inclus dans le scénario l'homogénéité et l'isotropie à grande échelle de l'univers. Néanmoins, il serait beaucoup plus satisfaisant de donner une origine microscopique à cette homogénéité. Elle serait alors le résultat des interactions des particules entre elles.

Cependant, le rayon de Hubble (l'horizon causal) croît comme le temps, tandis que les longueurs physiques croissent comme une puissance inférieure à un du temps. Ainsi, à chaque instant entrent, dans l'univers visible des particules, des échelles toujours plus grandes. L'hypothèse d'homogénéité nous fait postuler que ces échelles, qui n'ont pu être en contact causal

²lorsque la radiation domine l'univers. Le temps de Planck correspond à un facteur d'échelle $a_{\text{Planck}} \sim (\rho_{\text{Planck}}/\rho_{\text{rad}}^0)^{-1/4} \sim 10^{-31}$.

avec le reste de l'univers puisqu'elles ont été jusqu'à leur entrée toujours plus grandes que l'horizon, sont toujours aussi homogènes et isotropes que le reste de l'univers. Les seules interactions microscopiques ne suffisent pas dans ces conditions à justifier l'homogénéité. Si l'on souhaite que le mécanisme expliquant l'homogénéité de l'univers soit médié par les interactions entre espèces, il faut que l'univers ait été à une certaine époque en contact causal...

Les défauts topologiques

Enfin, on a déjà évoqué brièvement le problème de la prolifération de certains types de défauts topologiques. En effet, on sait que des brisures de symétries primordiales peuvent créer des monopoles d'énergie assez élevée et dont les conséquences sur la cosmologie auraient dû permettre leur détection. À ce jour, personne n'a encore réussi à détecter le moindre défaut topologique, et donc aucun monopole. Il faut que la cosmologie explique soit pourquoi ils ne sont pas créés –ce qui est en contradiction avec les théories de physique des hautes énergies– soit pourquoi leur nombre est suffisamment faible pour ne pas remettre en question notre modèle. Pour éviter d'avoir à modifier les théories de physique des hautes énergies qui déterminent leur abondance, la solution la plus simple serait d'imaginer un mécanisme qui les dilue.

2.2.2 Une solution : l'inflation

La théorie de l'inflation donne une solution simple aux problèmes que l'on vient de citer. En effet, les deux derniers montrent qu'il nous faut un mécanisme permettant au facteur d'expansion de croître plus vite que le rayon de Hubble, de telle sorte que, dans le passé, toutes les échelles aient pu être plus petites que l'univers observable, et donc qu'elles aient pu être en contact causal. Un tel mécanisme *viderait* l'univers, en repoussant tout contenu physique hors du rayon de Hubble, faisant du coup disparaître les monopoles indésirables. Aujourd'hui, cependant, l'univers n'est pas vide, il faut donc que ce mécanisme se soit arrêté. On va donner ici succinctement l'exemple d'un mécanisme possédant ces propriétés.

Nous sommes donc à la recherche d'un processus qui donnerait une évolution au facteur de croissance plus rapide que celle du paramètre de Hubble. Notons tout de suite qu'un modèle connu possède naturellement cette propriété : le modèle Einstein-deSitter pour un univers rempli par la constante cosmologique. En effet, la première équation de Friedmann (1.11) se réduit à

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = Cste, \quad (2.4)$$

si bien que le facteur d'expansion est donné par

$$a \propto \exp(Ht). \quad (2.5)$$

Dans ce modèle, on a bien un facteur d'expansion qui croît plus vite, exponentiellement plus vite même, que le paramètre de Hubble qui est ici constant. Par ailleurs, ce modèle résout le problème de la platitude, puisque la solution plate, au lieu d'être répulsive devient attractive. On rappelle que l'équation d'état de la constante est

$$\omega_\Lambda = -1$$

qui est bien dans la zone attractive de l'équation (2.3). Il est donc simple, avec des valeurs initiales quelconques de s'approcher arbitrairement près de la solution plate.

Néanmoins, nous ne vivons évidemment pas dans un univers Einstein-deSitter composé uniquement de constante cosmologique ! Il faut donc imaginer un mécanisme tel que l'univers passe ses premiers instants dans un état proche du modèle décrit plus haut et le quitte par

la suite pour reprendre l'évolution standard. On va donc postuler que l'univers était dans ses premiers temps dominé par un fluide, *l'inflaton*, d'équation d'état négative et dont l'évolution le rendrait aujourd'hui négligeable face aux autres espèces.

On va remplir ce programme pour un cas simple, celui où le fluide est un champ scalaire ϕ . Pour donner à ce champ une dynamique, on va le laisser évoluer dans un potentiel $V(\phi)$. Le Lagrangien d'un champ scalaire est simple

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (2.6)$$

En variant le Lagrangien on en déduit l'équation d'évolution

$$\ddot{\phi} - \frac{1}{a^2} \partial_i \partial^i \phi + 3H\dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi} \quad (2.7)$$

qui n'est autre que l'équation de Klein-Gordon adaptée à un espace-temps courbe. La densité d'énergie associée à ce champ est

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \quad (2.8)$$

et sa pression

$$P_\phi = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2) - V(\phi). \quad (2.9)$$

Les équations de Friedmann (1.11,1.12) s'écrivent alors, en supposant que les autres fluides sont négligeables

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{\kappa}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \right) + H_0^2 \Omega_K^0 a^{-2} \\ \dot{H} &= -\frac{\kappa}{2} \left(\dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

On va voir dans la section suivante que ce modèle, sous certaines conditions, reproduit correctement l'univers Einstein–deSitter évoqué plus haut.

2.2.3 La dynamique de l'inflation dans l'approximation du *Roulement-Lent (Slow-Roll)*

On va maintenant résoudre les équations de Friedmann (2.10) et l'équation de la dynamique du champ (2.7) pour déterminer son évolution. Jusqu'ici, nous avons laissé libre les hypothèses d'isotropie et d'homogénéité. Le champ scalaire pouvait varier localement dans l'espace. Puisque l'univers est isotrope et homogène aux grandes échelles, nous allons supposer que les variations spatiales de notre inflaton sont très négligeables devant les variations temporelles

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \phi_0(t) + \delta\phi(t, \mathbf{x}) \quad \text{et } \phi_0 \gg \delta\phi. \quad (2.11)$$

La moyenne spatiale du champ domine la dynamique. En supposant que la densité d'énergie associée à la courbure soit négligeable, le système d'équations différentielles pour la partie non-fluctuante est

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{\kappa}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}_0^2 + V(\phi_0) \right) \\ \dot{H} &= -\frac{\kappa}{2} \dot{\phi}_0 \\ \ddot{\phi}_0 &= -3\frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi}_0 - \frac{dV}{d\phi}(\phi_0). \end{aligned} \quad (2.12)$$

On va maintenant se placer dans l'approximation dite du *roulement lent*. En fait, on veut retrouver l'évolution du facteur d'expansion associé à la constante cosmologique. Cela revient à dire que l'on souhaite que le paramètre de Hubble soit quasi-constant, ou en d'autres termes que

$$H^2 \gg \left| \dot{H} \right|. \quad (2.13)$$

Cette condition, sous les équations de Friedmann (2.10) est équivalente pour le champ à

$$V(\phi_0) \gg \dot{\phi}_0^2. \quad (2.14)$$

Cela revient à dire que l'équation d'état du champ est

$$\omega_\phi \sim -1. \quad (2.15)$$

Le nom *roulement lent*, rappelle que dans ce régime l'énergie cinétique du champ est très petite devant son énergie potentielle. Tout se passe comme si le champ descendait très lentement son potentiel.

La solution des équations d'évolution est très simple dans ce régime. On retrouve l'évolution exponentielle du paramètre d'expansion. L'évolution du champ, elle, dépend de la forme exacte de son potentiel. On notera juste ici que l'on peut formaliser un peu plus la condition (2.13) uniquement à l'aide de la forme du potentiel en étudiant les *paramètres de slow-roll* [Lyth, 1985]

$$\varepsilon \equiv \frac{\kappa}{2} \left[\frac{dV}{d\phi} \right]^2, \quad \eta \equiv \kappa \frac{d^2V}{d\phi^2}. \quad (2.16)$$

On peut alors montrer que pour qu'une inflation de roulement lent soit possible il faut que ces deux paramètres soient petits.

2.2.4 Genèse des fluctuations primordiales du champ d'inflation

Nous nous sommes intéressé à la partie homogène du champ d'inflation. Nous allons maintenant nous pencher sur le devenir d'une éventuelle composante non-homogène.

Il n'y a aucune raison, dans le cadre assez strict que nous nous sommes donné, que l'inflaton soit non-homogène. L'univers, tel que nous l'avons décrit, ne fournit aucun mécanisme pour expliquer une éventuelle non-homogénéité primordiale. C'est justement le problème que nous avons soulevé au début de ce chapitre.

Si l'on fait l'hypothèse que le champ d'inflaton obéit à une évolution quantique, des fluctuations locales peuvent apparaître dans le champ. En effet, en admettant que le couplage dans le potentiel $V(\phi)$ soit faible, on peut décomposer le terme de fluctuation spatiale du champ en fonction des opérateurs de création et d'annihilation a et a^\dagger ,

$$\delta\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[a_{\mathbf{k}} \varphi(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger \varphi^*(\mathbf{k}, t) \right] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (2.17)$$

On quantifie ce champ en spécifiant les relations de commutation des opérateurs

$$\left[a_{\mathbf{k}}, a_{-\mathbf{k}'}^\dagger \right] = \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \quad [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = 0. \quad (2.18)$$

On va caractériser les propriétés du champ ϕ en étudiant la moyenne dans le vide de ses différents moments. Pour ce faire, revenons sur l'équation de Klein-Gordon (2.7). Au premier ordre, cette équation devient

$$\delta\ddot{\phi} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \delta\phi + 3H\delta\dot{\phi} = -\frac{d^2V}{d\phi^2}(\phi_0) \delta\phi. \quad (2.19)$$

On a supprimé la contribution de la partie homogène du champ de cette dernière équation. Si l'on admet que la dérivée seconde du potentiel varie peu lors des variations de ϕ_0 , le terme de source $-\frac{d^2V}{d\phi^2}(\phi_0)\delta\phi$ s'identifie à un simple terme de masse. Il est petit dans l'approximation du *slow-roll*, puisque $H \sim V$ et $\eta \ll 1$. On le négligera dans la suite. Dans ce régime, la décomposition faite dans l'équation (2.17) est donc tout à fait justifiée, puisque l'on peut se ramener à une théorie libre pour la fluctuation spatiale de l'inflaton.

Sans terme de couplage, il est plus simple d'étudier les solutions de l'équation (2.19) dans l'espace de Fourier. Il n'y a alors pas de couplage de mode. Il suffit de résoudre indépendamment l'équation pour chaque k

$$\delta\ddot{\phi}_{\mathbf{k}} + 3H\delta\dot{\phi}_{\mathbf{k}} + \left(\frac{k}{a}\right)^2 \delta\phi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (2.20)$$

On a la même équation pour les $\varphi_{\mathbf{k}}$. On sait calculer ces derniers dans l'approximation du roulement lent (H varie peu). Au premier ordre, la solution est

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{H}{\sqrt{(2k^3)}} \left(i + \frac{k}{aH}\right) e^{i\frac{k}{aH}t}. \quad (2.21)$$

La normalisation de ces fonctions est fixée en étudiant la solution pour des modes beaucoup plus petits que l'horizon. À ces échelles, l'univers est un simple espace-temps de Minkowski plat. On est ramené à la théorie connue du champ scalaire libre. À la traversée de l'horizon, le mode ne croit plus. Comme le paramètre de Hubble varie très lentement, on va faire comme s'il était le même pour tous les modes³. Sous ces hypothèses, on peut déterminer l'amplitude des fluctuations pour tous les modes. On a

$$\delta\phi_{\mathbf{k}}(t) \approx \frac{H}{k^{\frac{3}{2}}}(a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger). \quad (2.22)$$

Remarquons tout de suite que le résultat de l'équation (2.22) prédit que le champ $\delta\phi$ commute avec lui-même. Dans ces conditions, il est particulièrement aisé de calculer les valeurs moyennes dans le vide de produits de l'opérateur ϕ . Comme le champ commute, son comportement est alors classique et il s'identifie avec un champ stochastique. Les valeurs dans le vide des produits de l'opérateur sont tout simplement les moments statistiques du champ

$$\langle\phi(\mathbf{k}, t)\rangle = 0 \quad (2.23)$$

$$\langle\phi(\mathbf{k}, t)\phi(\mathbf{k}', t)\rangle = \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \langle|\varphi(k, t)|^2\rangle \quad (2.24)$$

$$\left\langle\prod_{i=1}^{2r}\phi(\mathbf{k}_i, t)\right\rangle = \sum_{\text{paires } (i,j) \in \mathbb{N}_{2r}} \prod \langle\phi(\mathbf{k}_i, t)\phi(\mathbf{k}_j, t)\rangle \quad (2.25)$$

$$\left\langle\prod_{i=1}^{2r+1}\phi(\mathbf{k}_i, t)\right\rangle = 0 \quad (2.26)$$

On reconnaît dans ces moments les propriétés d'un champ stochastique gaussien de moyenne nulle et de spectre de puissance $P(k, t) = \langle|\varphi(k, t)|^2\rangle$.

Le spectre de puissance des fluctuations du potentiel est donc en H^2k^{-3} . C'est un spectre invariant d'échelle. On le qualifie en général de *spectre Harrison Zel'dovich* [Harrison, 1970] [Zel'dovich, 1972]. Lorsqu'on lève l'approximation faite plus haut d'un paramètre de Hubble constant, le spectre n'est plus tout à fait invariant d'échelle. Dans l'approximation du roulement lent, cet écart est comparable au paramètre ε [Liddle & Lyth, 2000].

³Cette approximation n'est pas absolument nécessaire dans le cadre du roulement lent.

2.2.5 Devenir des fluctuations du champ d'inflation

Les calculs de la section précédente nous montrent comment l'hypothèse de quantification de l'inflaton engendre inévitablement des fluctuations locales dans le champ d'inflaton. Comme ce champ est couplé gravitationnellement à la métrique, on va briser l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie. Cependant, les observations nous montrent que l'amplitude de cette fluctuation est très faible, et on la considérera donc comme une perturbation sur la métrique homogène isotrope.

Ces perturbations de l'inflation vont servir de source aux fluctuations primordiales de la métrique. Elles vont donc toutes être engendrées avec le même spectre invariant d'échelle. L'inflation ne prédit que la création de perturbations scalaires et tensorielles [Guth & Pi, 1982] [Starobinsky, 1982] [Hawking, 1982] [Abbott & Wise, 1984b]. Leur couplage à la matière et leur évolution sont cependant différentes selon leur nature. Ainsi, alors que les perturbations scalaires vont évoluer essentiellement comme la matière, les perturbations tensorielles, les ondes gravitationnelles, vont être supprimées à petite échelle. On verra comment dans la section suivante.

2.3 Perturbation de la métrique

Je vais, dans cette courte section présenter quelques résultats classiques sur les perturbations de la métrique [Lifchitz, 1946, Lifchitz & Khalatnikov, 1963].

2.3.1 Équation de base des fluctuations au premier ordre

On va écrire la perturbation au premier ordre la plus générale possible autour de la métrique de FLRW(1.2). En coordonnées conformes, l'élément de distance le plus général est

$$ds^2 = a^2(\eta) [(1 + 2A) d\eta^2 + 2B_i dx^i d\eta - (\gamma_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j]. \quad (2.27)$$

Les perturbations A , B_i et h_{ij} sont supposées petites. Elles sont fonction des coordonnées d'espace et de temps. Le vecteur B_i et le tenseur h_{ij} ont des coordonnées uniquement spatiales. En général, ces perturbations sont décomposées selon leurs composantes scalaires, vectorielles et tensorielles. Ainsi, B_i se décompose sous la forme d'une partie irrotationnelle⁴ et d'une composante rotationnelle⁵

$$B_i = \nabla_i B + \bar{B}_i. \quad (2.28)$$

On procède de même pour faire apparaître une décomposition du tenseur h_{ij} sous la forme de sa composante diagonale, d'une partie scalaire, vectorielle et tensorielle *pure*⁶

$$h_{ij} = 2C\gamma_{ij} + 2\nabla_{ij}E + \nabla_i \bar{E}_j + \nabla_j \bar{E}_i + 2\bar{\bar{E}}_{ij}. \quad (2.29)$$

La métrique non perturbée possède dix composantes libres⁷. Un calcul rapide permet de vérifier que nos champs de perturbation A , B , \bar{B}_i , C , E , \bar{E}_i et $\bar{\bar{E}}_{ij}$ correspondent bien à dix degrés de liberté eux aussi. Les quatre champs scalaires n'ont qu'une seule liberté. Les deux champs vectoriels spatiaux sont rotationnels et apportent donc seulement deux degrés de liberté chacun. Enfin, le tenseur spatial $\bar{\bar{E}}_{ij}$ est très contraint ; étant symétrique, de trace et de divergence nulle, il n'a en fait que deux degrés de liberté. Ces champs sont donc suffisants pour décrire toute perturbation de la métrique.

⁴dérivant d'un gradient.

⁵de divergence nulle.

⁶un tenseur symétrique, de trace nulle et de divergence nulle $\nabla_i \bar{\bar{E}}^{ij} = 0$.

⁷4 éléments diagonaux et la moitié des éléments non diagonaux, puisque la métrique est symétrique.

2.3.2 Problème de jauge

Il y a une ambiguïté dans la définition des perturbations. Nous décrivons une métrique perturbée par rapport à une métrique homogène isotrope⁸. En d'autres termes, nous souhaitons que localement, la métrique perturbée soit assez proche de la métrique *plate*⁹ de sorte à ce que nous puissions indexer notre perturbation sur les coordonnées de celle-ci.

Que se passe-t-il si nous changeons de coordonnées? De toute évidence la métrique non perturbée doit rester non perturbée! Appliquons le changement de coordonnées spatiales suivant

$$x^{i'} = x^i + \nu^i \eta, \quad (2.30)$$

avec ν^i un vecteur constant. La métrique, dans ces nouvelles coordonnées, acquiert un terme supplémentaire

$$\gamma_{ij} 2\nu^i dx^j d\eta. \quad (2.31)$$

Évidemment, la métrique n'est pas perturbée, on a juste pratiqué un changement de coordonnées. Pourtant, à la lumière de la section 2.3.1, on peut la considérer comme une métrique perturbée autour de la métrique de FLRW! La perturbation n'est pas physique, c'est juste un artefact mathématique.

On sent ici toute l'ambiguïté de notre définition de la métrique perturbée. Il faut savoir distinguer une *vraie* perturbation d'un simple changement de coordonnées. Pour tout changement de coordonnées, on peut, en pratiquant le changement inverse, retrouver la métrique de FLRW. Dans le cas d'un changement de repère, les termes de perturbation ne sont en fait que des artefacts mathématiques traduisant un système de coordonnées malheureux. Ce n'est pas le cas pour les perturbations physiques. Un jeu de perturbations physiques $\{A, B, C, E, \bar{B}_i, \bar{E}_i, \bar{E}_{ij}\}$, possédera donc la propriété de garder certains termes non-nuls quelque soit le changement de coordonnées¹⁰. Inversement, on peut, en changeant judicieusement les coordonnées s'arranger pour annuler certains champs. Cette liberté dans le choix des perturbations est très similaire au problème de jauge dans les interactions électromagnétiques. Par analogie, on dira, lorsqu'on pratique un changement de coordonnées de sorte à réduire le nombre des champs non-nuls, que l'on choisit une jauge particulière.

On peut même aller plus loin dans l'idée de cette liberté de jauge et construire, à partir des composantes des perturbations, des quantités conservées dans tous les choix de coordonnées. Il faut pour cela écrire l'action sur la perturbation d'une transformation de coordonnées quelconque. On peut alors construire exactement la symétrie en jeu. On ne le fera pas ici. On donne seulement certains résultats classiques. On peut ainsi construire les deux *potentiels de Bardeen* [Bardeen, 1980]

$$\Phi \equiv -C + \mathcal{H} (B + E') \quad (2.32)$$

et

$$\Psi \equiv A - \mathcal{H} (B + E') - (B + E')'. \quad (2.33)$$

De même, le vecteur

$$\bar{V}^i \equiv \bar{B}^i + \bar{E}^{i'} \quad (2.34)$$

est conservé lors des changements de coordonnées. Enfin, on peut montrer aussi que le tenseur \bar{E}_{ij} est naturellement invariant de jauge. Le changement de coordonnées utilisé plus haut peut se décomposer comme une perturbation telle que

$$\nabla^i B = \nu^i, \quad \nabla^i E = -\nu^i \eta, \quad (2.35)$$

⁸comprendre ici, non perturbée.

⁹comprendre ici, non perturbée.

¹⁰c'est à dire qu'au moins 1 des champs $\{A', B', C', E', \bar{B}'_i, \bar{E}'_i, \bar{E}'_{ij}\}$ ne sera pas nul.

toutes les autres composantes restant nulles. On constate que cette *perturbation* correspond à des invariants de jauge nuls... Elle ne représente donc pas une perturbation physique.

Dans la suite, on utilisera la jauge newtonienne, pour laquelle

$$B = 0, E = 0.$$

et dont la partie scalaire s'écrit simplement en fonction des potentiels de Bardeen [Bardeen, 1980].

$$ds^2 = a^2(\eta) [(1 + 2\Psi) d\eta^2 - (1 - 2\Phi) \gamma_{ij} dx^i dx^j]. \quad (2.36)$$

Cette jauge fixe aussi une composante des perturbations vectorielles

$$\bar{B}_i = 0.$$

2.3.3 Perturbation du tenseur énergie-impulsion

En tenant compte d'une éventuelle contribution de la pression anisotrope, le tenseur énergie impulsion s'écrit

$$T_{\mu\nu} = (P + \rho)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu}. \quad (2.37)$$

Dans le cas de fluides parfaits, le tenseur de pression anisotrope sera nul. Les fluctuations de la métrique peuvent cependant en faire apparaître un dans le tenseur. On pourra toujours se ramener à une pression anisotrope de trace nulle, quitte à redéfinir la perturbation de la pression. On sait écrire les composantes perturbées du tenseur énergie-impulsion

$$\delta T_{00} = a^2 \rho (\delta + 2A), \quad (2.38)$$

$$\delta T_{0i} = -a^2 \rho ((1 + \omega)\nu_i - B_i) \quad (2.39)$$

$$\delta T_{ij} = a^2 P \left(\pi_{ij} + h_{ij} + \frac{\delta P}{P} \gamma_{ij} \right). \quad (2.40)$$

Le tenseur π_{ij} est la perturbation du tenseur anisotrope

$$\pi_{ij} \equiv \frac{\delta \Pi_{ij}}{P}, \quad (2.41)$$

tandis que δ est le contraste de densité du fluide. Enfin, ν_i est la vitesse particulière perturbée du fluide

$$\delta u^i = \frac{\nu^i}{a}. \quad (2.42)$$

2.3.4 Évolution des perturbations

Je ne donnerai ici que des indications sur les calculs. Je chercherai surtout à donner des indications sur l'évolution des différents modes de perturbations. Il faut, pour ce faire, spécifier une jauge et résoudre les équations d'Einstein.

Perturbations tensorielles

Pour les perturbations tensorielles le résultat est assez simple. Les équations d'Einstein fournissent une équation d'évolution pour les perturbations tensorielles¹¹

$$\ddot{\bar{E}}_{ij} + 2H\dot{\bar{E}}_{ij} + (2K - \Delta)E_{ij} = 3H^2 \sum_X \Omega_X \omega_X \bar{\pi}_{ij}; \quad (2.43)$$

¹¹Cette équation ne dépend plus que du champ de perturbation purement tensoriel \bar{E} . Dans cette équation on le notera simplement E

le Δ est ici le laplacien. Par analogie au développement fait pour les perturbations de la métrique, on a noté $\bar{\pi}_{ij}$ la composante *purement* tensorielle de la pression anisotrope de chaque fluide. On n'a pas traité ici la courbure de la métrique comme un fluide, mais on l'a laissé explicitement dans les équations. On aurait pu l'inclure dans le terme de source en notant que la pression anisotrope du terme de courbure est simplement la perturbation tensorielle de la métrique. Si l'on se place dans l'ère de la matière, cette pression anisotrope est négligeable, et l'on se retrouve avec l'équation d'un oscillateur amorti par l'expansion. Ainsi, les modes plus petits que l'horizon vont être amortis. Les perturbations tensorielles vont donc peu contribuer à petite échelle, durant l'ère de la matière.

Perturbations vectorielles

Les équations pour les perturbations vectorielles et scalaires sont plus compliquées. Je ne ferai pas le calcul ici. Retenons cependant que les équations prédisent que les fluctuations vectorielles vont avoir une évolution décroissante. Même si l'inflation créait des perturbations vectorielles, elles seraient fortement supprimées par leur évolution.

Perturbations scalaires

Enfin, les perturbations scalaires vont connaître un mode croissant. Dans la jauge newtonienne, les équations de conservation nous assurent, pour le contraste de densité et la vitesse particulière d'un fluide

$$\delta' = -(1 + \omega) (\Delta\nu + 3\Phi') + 3\mathcal{H}\omega \left(\delta - \frac{\delta P}{P} \right) \quad (2.44)$$

$$\nu' = -\Psi - \mathcal{H} \left(1 - 3\frac{P'}{\rho'} \right) \nu - \frac{\omega}{1 + \omega} \left[\frac{2}{3} (\Delta + 3K) \pi + \frac{\delta P}{P} \right]. \quad (2.45)$$

La notation (malheureuse, mais cela ne dure pas!) π représente la partie scalaire du tenseur de pression anisotropie. On ne considère ici bien sûr que la partie potentielle du champ de vitesse particulière. Notons que lorsque le fluide est parfait, le rapport $\delta P/P$ est simple

$$\frac{\delta P}{P} = \delta. \quad (2.46)$$

On peut l'exprimer sinon en fonction de la vitesse du son dans le fluide

$$c_s^2 = \frac{P'}{\rho'} \quad (2.47)$$

et la perturbation d'entropie Γ , de sorte que

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{c_s^2}{\omega} \delta + \Gamma. \quad (2.48)$$

D'autre part, les équations d'Einstein nous donnent deux équations pour fermer le système. La première fournit une contrainte sur les potentiels de Bardeen

$$\Psi - \Phi = -3\mathcal{H}^2 \sum_X \Omega_X \omega_X \pi. \quad (2.49)$$

Lorsque la pression anisotrope est négligeable, par exemple durant l'ère de la matière, les deux potentiels de Bardeen sont égaux. La deuxième équation donne l'évolution des potentiels

$$(\Delta + 3K) \Phi = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \sum_X \Omega_X (\delta_X - 3\mathcal{H}(1 + \omega_X) \nu_X). \quad (2.50)$$

Encore une fois, on pouvait inclure la courbure dans le terme de source ; le *contraste de densité* de courbure s'identifiant au potentiel de Bardeen Φ . Notons que cette équation est très proche de l'équation de Poisson en mécanique Newtonienne. En fait, le terme de source dépendant de la vitesse particulière est un *artefact de jauge*. Si l'on se place dans la jauge dite *comobile*, qui suit les particules des fluides, ce dernier terme disparaît et l'on retrouve l'équation de Poisson habituelle. Notons enfin que les équations d'Einstein donnent aussi¹²

$$3\mathcal{H}^2\Psi - 3\mathcal{H}\Phi' + \Delta\Phi = -\frac{3}{2}\mathcal{H}^2 \sum_X \Omega_X \delta_X. \quad (2.51)$$

2.4 Conclusion

J'ai présenté succinctement deux modèles de genèse des fluctuations primordiales. J'ai plus particulièrement développé le modèle d'inflation qui est particulièrement favorisé par les résultats récents des anisotropies du CMB. Cette théorie ne résout pas seulement le problème des fluctuations primordiales, mais aussi d'autres problèmes liés à la métrique de FLRW.

En résumé, il s'agit avant tout d'expliquer pourquoi l'univers est homogène sur des distances plus grandes que le rayon de Hubble. La solution que propose l'inflation est de laisser un champ scalaire dominer les premiers temps de l'univers. Sous certaines conditions¹³, l'évolution naturelle de ce champ scalaire conduit l'univers dans un régime proche d'un EdS dominé par une constante cosmologique. Dans ce cas, le paramètre d'expansion peut croître beaucoup plus vite que la taille de la zone causalement connectée. Ainsi, on s'assure que tout l'univers aujourd'hui observable a bien été, à un moment de son histoire, dans une région causale.

En autorisant le champ d'inflation à avoir un comportement quantique, celui-ci peut nécessairement fluctuer localement. Ce champ fluctuant fait un très bon candidat pour les fluctuations primordiales de la métrique. Dans le cadre de notre approximation de Slow-Roll, on a esquissé le calcul de l'amplitude et de la forme du spectre de puissance. La mécanique quantique prédit que la statistique de ce champ est gaussienne. et que son spectre est invariant d'échelle.

Dans une deuxième partie, j'ai donné brièvement quelques résultats classiques sur les propriétés des fluctuations de la métrique. Ces résultats seront particulièrement utiles dans les chapitres 3 et 5.

¹²on peut montrer en jouant sur les identités de Bianchi que ces deux équations sont équivalentes aux deux premières.

¹³celles que nous avons étudiées ne sont que des conditions suffisantes.

CHAPITRE 3

Le rayonnement de fond

Sommaire

3.1	Température	29
3.1.1	Équation de Boltzmann homogène	30
3.1.2	Perturbation de l'équation de Boltzmann	30
3.1.3	Décomposition en série d'harmoniques sphériques.	32
3.1.4	Effet Sachs-Wolfe	33
3.2	Polarisation	35
3.2.1	Diffusion Thomson	35
3.2.2	Polarisation et diffusion Thomson	36
3.2.3	Les variables de Stokes	37
3.2.4	Hierarchie de Boltzmann pour la polarisation	38
3.2.5	Le terme de collision	41
3.2.6	Discussion	42
3.3	Le spectre de puissance	43
3.3.1	Température	43
3.3.2	Polarisation	45

On a déjà un peu parlé du rayonnement de fond dans le premier chapitre. Lorsque l'univers est assez froid, aux alentours de l'électron-Volt, les photons découplent, pendant qu'électrons et noyaux se recombinent pour former les premiers atomes. Le fond de photon est un corps noir presque parfait. La figure 1.2 donne le résultat des mesures réalisées jusqu'à ce jour.

Cependant, on a fait remarquer que ce rayonnement n'était pas tout à fait isotrope. Puisque l'univers n'est pas tout à fait isotrope et homogène, il est raisonnable de penser que le rayonnement de fond de photon présente aussi une faible anisotropie [Sachs & Wolfe, 1967]. C'est ce que nous allons étudier ici. Dans la suite, nous suivrons les résultats et les calculs de [Hu *et al.*, 1998]. Cette description utilisant l'équation de Boltzmann est apparue dans les années 70 [Peebles & Yu, 1970]. Elle a été grandement étendue par la suite [Bond & Efstathiou, 1984, Bond & Efstathiou, 1986][Abbott & Schaefer, 1986][Ma & Bertschinger, 1995]... Le traitement complet de la polarisation est plus récent [Seljak & Zaldarriaga, 1997][Zaldarriaga & Seljak, 1997] et [Kamionkowski *et al.*, 1997a][Kamionkowski

3.1 Température

On va étudier l'évolution du gaz de photons. On sait écrire la fonction de distribution pour un corps noir à température T ,

$$f(\mathbf{p})d^3p = \frac{d^3p}{e^{\frac{p-\mu}{T}} - 1}. \quad (3.1)$$

Pour un gaz de photons, le potentiel chimique μ est nul. On va évaluer les écarts à cette distribution induits par les petites fluctuations de la métrique.

3.1.1 Équation de Boltzmann homogène

Soit $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, la fonction de distribution des photons. Comme les photons suivent les géodésiques, étudier les variations de la fonction de distribution est équivalent à étudier son évolution le long des géodésiques. Si λ est l'abscisse curviligne le long de la trajectoire des photons, l'équation des géodésiques peut s'écrire

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} = \Gamma_{\nu\gamma}^\mu p^\nu p^\gamma.$$

On va, pour commencer, supposer que le nombre de photons est conservé. L'équation de Liouville pour les photons s'écrit alors

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu f + \frac{dp^\mu}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial p^\mu} = 0. \quad (3.2)$$

On choisira une paramétrisation telle que $p^0 d\eta = d\lambda$. L'équation des géodésiques devient

$$\frac{dp^\mu}{d\eta} = -\Gamma_{\nu\gamma}^\mu \frac{p^\nu p^\gamma}{p^0}. \quad (3.3)$$

Par ailleurs, nous allons séparer l'énergie des photons et la direction de propagation dans nos équations

$$\gamma^i = \frac{p^i}{p^0}, \quad (3.4)$$

$$p^0 = p. \quad (3.5)$$

L'équation de Liouville est alors

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} + \gamma^i \partial_i f - \mathcal{H} p \frac{\partial f}{\partial p} - \Gamma_{jk}^i \gamma^j \gamma^k \frac{\partial f}{\partial \gamma^i} = 0. \quad (3.6)$$

Pour un univers homogène isotrope, la fonction de distribution ne dépend, ni de la position, ni de la direction de propagation. L'équation (3.6) se réduit à

$$f' = \mathcal{H} p \frac{\partial f}{\partial p}. \quad (3.7)$$

On a dit plus haut que la distribution homogène f était la distribution de Bose-Einstein. En écrivant (3.7) pour la distribution (3.1) on retrouve l'évolution temporelle de la température du fluide de photons

$$T \propto a^{-1}. \quad (3.8)$$

3.1.2 Perturbation de l'équation de Boltzmann

On va maintenant s'attacher à l'étude de la partie non-homogène et isotrope de l'équation. La distribution f est solution de l'équation (3.7), la partie anisotrope sera notée δf . Celle-ci dépend *a priori* de la position et de la direction de propagation. Dans la jauge newtonienne, au premier ordre dans les perturbations, l'équation de Boltzmann pour la partie perturbée s'écrit alors

$$\frac{\partial \delta f}{\partial \eta} + \gamma^i \partial_i \delta f - \mathcal{H} p \frac{\partial \delta f}{\partial p} - \Gamma_{jk}^i \gamma^j \gamma^k \frac{\partial \delta f}{\partial \gamma^i} = \left(\gamma^i \partial_i \Psi + \frac{1}{2} \gamma^i \gamma^j h'_{ij} \right) p \frac{\partial f}{\partial p}. \quad (3.9)$$

C'est la même équation que pour f (3.7), mais il y a cette fois ci un terme de source. Ce terme montre bien comment la distribution va acquérir une anisotropie. Celle-ci est clairement liée aux fluctuations de la métrique. Le tenseur de perturbation, dans la jauge de Newton, et en négligeant les perturbations vectorielles¹ s'écrit

$$\frac{1}{2}h'_{ij} = -\Phi' \gamma_{ij} + E'_{ij}. \quad (3.10)$$

On a supprimé les deux barres qui notaient le fait que le tenseur E_{ij} était un *pur tenseur* (au sens défini dans le chapitre 2). Dans la jauge newtonienne et puisque nous ne tenons pas compte des perturbations vectorielles, il n'y a aucune ambiguïté.

Rappelons nous aussi que le terme dépendant des symboles de Christoffel pour la métrique spatiale

$$\Gamma_{jk}^i \gamma^j \gamma^k \frac{\partial \delta f}{\partial \gamma^i}$$

mesure en fait, via l'équation des géodésiques, la variation temporelle de la direction de propagation. Si l'on se restreint à un espace plat, ces variations sont du premier ordre, si bien que le terme en question est du second ordre. On le négligera dans la suite. Pour un espace non-plat, il faudrait garder ce terme. On peut montrer, qu'il peut se grouper avec le terme en $\gamma^i \partial_i \delta f$, pour donner une dérivée covariante de δf . On se restreindra, dans la suite du calcul à un univers à sections spatiales plates².

On va intégrer l'équation (3.9) pour obtenir une équation pour la *brillance* du fluide de photons. Il s'agit de la densité d'énergie radiée en chaque point et pour chaque direction de propagation.

$$I(\eta, x^i, \gamma^i) = \int dp p^3 f. \quad (3.11)$$

La densité d'énergie ρ du fluide est alors simplement l'intégrale sur toutes les directions de propagation de la brillance. On va encore séparer la composante homogène isotrope de la brillance I et la composante anisotrope δI . L'intégrale de l'équation (3.7) nous donne immédiatement l'évolution de la brillance pour la partie homogène

$$I' = -4H I. \quad (3.12)$$

On retrouve, après intégration (triviale!) sur les angles solides la décroissance en a^{-4} de la densité d'énergie des espèces relativistes. L'équation de Boltzmann pour la partie anisotrope de la brillance est

$$\frac{\partial \delta I}{\partial \eta} + \gamma^i \partial_i \delta I + 4H \delta I = -4I \left(\gamma^i \partial_i \Psi + \frac{1}{2} \gamma^i \gamma^j h'_{ij} \right). \quad (3.13)$$

Enfin, comme on s'intéresse aux écarts à la température du corps noir, on va chercher à mesurer le contraste de température

$$\Theta(x^\mu, \gamma^i) = \frac{\delta T}{T}. \quad (3.14)$$

Puisque, pour une espèce relativiste, la densité d'énergie va comme la température à la puissance 4, on définit Θ en fonction de la brillance comme

$$\Theta(x^\mu, \gamma^i) = \frac{1}{4} \frac{\delta I}{I}. \quad (3.15)$$

Reste à écrire l'équation (3.9) pour le contraste de température

$$\Theta' + \gamma^i \partial_i (\Theta + \Psi) + 4H \Theta = -\gamma^i \gamma^j (E'_{ij} - \Phi' \gamma_{ij}). \quad (3.16)$$

¹ce que l'on peut faire dans le contexte de perturbations engendrées par l'inflation, voir chapitre 2.

²de toute façon, aux alentours de $z = 1000$, la courbure est négligeable.

3.1.3 Décomposition en série d'harmoniques sphériques.

Pour faciliter la résolution de l'équation de Boltzmann, on va décomposer le contraste de température en séries d'harmoniques sphériques pour la direction de propagation. On peut voir cette décomposition comme la décomposition en série de Fourier adaptée à une géométrie sphérique. D'ailleurs, à petite échelle angulaire, les multipôles de la décomposition en harmoniques sphériques s'identifieront aux termes de la série de Fourier. On décomposera aussi la température en série de Fourier pour la position.

La décomposition se fera sur la base des fonctions $G_\ell^m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}; \mathbf{k})$

$$G_\ell^m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}; \mathbf{k}) = (-i)^\ell \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m(\boldsymbol{\gamma}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (3.17)$$

On peut montrer que ces fonctions forment une base orthogonale sur laquelle on peut décrire toute fonction définie au point \mathbf{x} et décrivant une propagation dans la direction $\boldsymbol{\gamma}$. Comme on l'a dit plus haut, elles fournissent pour la position spatiale une base de Fourier. La fonction Y_ℓ^m est l'harmonique sphérique. On rappelle que pour chaque multipôle ℓ seules existent les composantes de spin $m \leq \ell$. Le contraste de températures s'écrit alors

$$\Theta(\eta, \mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\ell m} (2\ell+1) \tilde{\Theta}_\ell^{(m)}(\eta, \mathbf{k}) G_\ell^m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}; \mathbf{k}). \quad (3.18)$$

On peut faire le lien avec la décomposition en scalaires, vecteurs et tenseurs faite pour les perturbations de la métrique chapitre 2. Les composantes $m = 0$ s'identifient aux composantes scalaires, celle en $m = 1$ aux vectorielles et celles en $m = 2$ aux tensorielles. Les multipôles supérieurs à 2 peuvent avoir des composantes tenseurs à $m > 2$ indices. On procédera de même pour les composantes de la perturbation Φ , Ψ et E_{ij} .

Enfin, l'équation (3.9) devient

$$\tilde{\Theta}_\ell^{(m)'} = -i \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma} \tilde{\Theta}_\ell^{(m)} + S_\ell^{(m)}. \quad (3.19)$$

Le terme de source S contient la contribution des perturbations. Comme on l'a fait remarquer plus haut, il est non nul uniquement pour $m = 0$, c'est-à-dire pour les termes de perturbation scalaire et pour $m = 2$, pour les ondes gravitationnelles. Pour être précis, on a

$$S_0^{(0)} = -\tilde{\Phi}' \quad (3.20)$$

$$S_1^{(0)} = +k \tilde{\Psi} \quad (3.21)$$

$$S_2^{(\pm 2)} = -\tilde{E}'_{ij}. \quad (3.22)$$

Le terme en $\gamma_i \partial_i \Psi$ donne un $i \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma} \tilde{\Psi}$. On utilise le fait que $k \cos(\alpha) = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}$ soit le premier polynôme de Legendre qui n'est autre que l'harmonique sphérique Y_1^0 pour obtenir le terme de source engendré par Ψ . Enfin, on va utiliser la même astuce pour supprimer la dépendance en γ dans l'équation (3.19). Il faut alors connaître un résultat sur les produits d'harmoniques sphériques pour écrire que

$$\begin{aligned} i \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma} (-i)^\ell \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_1^0 \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m \\ &= -k \frac{\sqrt{m^2 - \ell^2}}{2\ell+1} (-i)^{\ell-1} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell-1}} Y_{\ell-1}^m + k \frac{\sqrt{m^2 - (\ell+1)^2}}{2\ell+1} (-i)^{\ell+1} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+3}} Y_{\ell+1}^m. \end{aligned} \quad (3.23)$$

On obtient alors la forme finale de l'équation de Boltzmann

$$\tilde{\Theta}_\ell^{(m)'} = \frac{k}{2\ell+1} \left(\sqrt{\ell^2 - m^2} \tilde{\Theta}_{\ell-1}^{(m)} - \sqrt{(\ell+1)^2 - m^2} \tilde{\Theta}_{\ell+1}^{(m)} \right) + S_\ell^{(m)}. \quad (3.24)$$

On construit en exprimant les termes de cette équation la *hiérarchie de Boltzmann*

$$\tilde{\Theta}'_0 = -k\tilde{\Theta}_1^{(0)} - \tilde{\Phi}' \quad (3.25)$$

$$\tilde{\Theta}_1^{(0)'} = \frac{k}{3} \left(\tilde{\Theta}_0 - 2\tilde{\Theta}_2^{(0)} + \tilde{\Psi} \right) \quad (3.26)$$

$$\tilde{\Theta}_2^{(\pm 2)'} = -\frac{k}{\sqrt{5}}\Theta_3^{(\pm 2)} - \tilde{E}'_{ij} \quad (3.27)$$

...

Comme nous avons négligé les termes de perturbation vectorielle, les composantes $m = \pm 1$ du contraste de température n'ont pas de source. Dans la suite, pour alléger les notations, nous oublierons les tildes.

Remarquons avant de clore la section que les premiers termes de la décomposition s'identifient facilement au contraste de densité et à la vitesse particulière du fluide. Ainsi

$$\delta_\gamma = 4\Theta_0 \quad (3.28)$$

$$\Delta\nu_\gamma = 3k\Theta_1^{(0)}. \quad (3.29)$$

Les termes $\Theta_2^{(m)}$ eux sont liés à la pression anisotrope du fluide de photon

$$\nabla_i \nabla_j \pi^{ij} \propto \Theta_2^{(0)}. \quad (3.30)$$

3.1.4 Effet Sachs-Wolfe

À l'aide des équations de la hiérarchie, on va pouvoir calculer le premier ordre de la fluctuation. Tout d'abord, si l'on néglige les ondes gravitationnelles, l'équation (3.16) peut se ré-écrire sous la forme

$$\frac{d}{d\eta}(\Theta + \Psi) = \frac{\partial}{\partial\eta}(\Psi - \Phi). \quad (3.31)$$

Durant l'ère de la matière, la pression anisotrope est négligeable, si bien que l'on a, d'après l'équation (2.49), $\Psi = \Phi$. Le deuxième membre de l'équation est nul. Dans un univers plat, les photons se propagent en ligne droite, si bien qu'intégrer le long de la trajectoire équivaut à intégrer sur le temps. Pour un contraste de densité émergeant de la position $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{\gamma}$ sur la surface de dernière diffusion, l'équation (3.31) s'intègre en

$$\Theta(\eta_0, -\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = \Theta(\eta_*, -\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) + \Psi(\eta_*, -\boldsymbol{\gamma}) - \Psi(\eta_0, -\boldsymbol{\gamma}). \quad (3.32)$$

Considérons les fluctuations isotropes de la température. L'équation du dessus se ré-écrit pour la composante isotrope Θ_0 . Dans ce cas, seule la composante isotrope du champ de fluctuation Ψ compte. Le dernier terme, $\Psi(\eta_0)$, n'est qu'une simple constante. Elle n'est donc pas mesurable. Si bien que lorsque l'on mesure les fluctuations de température, ce que l'on mesure, en fait, c'est la combinaison de la fluctuation de température plus la fluctuation de métrique sur la surface de dernière diffusion.

Il nous reste à évaluer la fluctuation de métrique sur la surface de dernière diffusion. Regardons la croissance de ces fluctuations lorsqu'elles étaient encore dans l'ère du rayonnement. On va le faire pour des échelles grandes devant l'horizon à l'époque de la recombinaison

$$k\eta_* \ll 1$$

Ces échelles sont aussi plus grandes que l'horizon dans l'ère du rayonnement ! On va supposer que la pression anisotrope est nulle. L'équation de la dérivée temporelle de $\Theta_1^{(0)}$ (3.26) se réduit à

$$\Theta_1^{(0)'} = \frac{k}{3} \left(\Theta_0 + \tilde{\Psi} \right), \quad (3.33)$$

si bien qu'en première approximation, $\Theta_1^{(0)}$ se comporte comme $k\eta(\Theta_0 + \tilde{\Psi})$. Le terme en $\Theta_1^{(0)}$ dans l'équation (3.25) est donc de deuxième ordre en $k\eta$, on le négligera. En première approximation, on a donc

$$\Theta'_0 \sim \Psi', \quad (3.34)$$

Θ_0 et Ψ ont le même ordre de grandeur. Si l'on revient à l'équation de Poisson (2.50), pour un univers plat, dominé par le rayonnement, il vient

$$k^2 \Psi = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega_\gamma \left(4\Theta_0 + 12\mathcal{H} \frac{\Theta_1^{(0)}}{k} \right). \quad (3.35)$$

Le paramètre de Hubble va comme η , si bien que cette dernière équation nous prédit que Ψ est d'ordre $(k\eta)^2 \Theta_0$. Or, on vient de montrer que ces deux champs étaient du même ordre. Donc, à l'ordre dominant en $k\eta$, le terme de source de l'équation de Poisson est nul. Cette dernière remarque nous permet de calculer $\Theta_1^{(0)}$

$$\Theta_0 = -3 \frac{\mathcal{H}}{k} \Theta_1^{(0)}. \quad (3.36)$$

Finalement, à l'aide de l'équation (2.51), on peut calculer l'ordre dominant en $k\eta$ de l'évolution du champ de fluctuations

$$2\mathcal{H} \Theta_0 + \mathcal{H} \Psi + \Psi' = 0. \quad (3.37)$$

En se souvenant que $\Theta'_0 = \Psi'$ à l'ordre de notre calcul et en changeant la variable de l'équation différentielle, on obtient finalement

$$a \frac{d^2 \Psi}{da^2} + 4 \frac{d\Psi}{da} = 0, \quad (3.38)$$

dont les deux solutions sont $\Psi \propto a^{-3}$ et $\Psi = \text{Constante}$. Ce dernier mode est le seul croissant. L'équation (3.37) nous permet aussi de calculer $\bar{\Theta}_0 = \Theta_0 - \Psi$. Il vient

$$2\mathcal{H} \bar{\Theta}_0 = -3\mathcal{H} \Psi - \Psi'. \quad (3.39)$$

On a montré au dessus que le mode croissant était constant. Donc, on a

$$\Theta_0 = \Psi - \frac{3}{2} \Psi_0. \quad (3.40)$$

Il nous reste à calculer l'évolution du champ de fluctuation dans l'ère de la matière, pour arriver jusqu'à la recombinaison. Pour de la matière noire froide, $\omega_m = 0$ et les équations de conservation, (2.44) et (2.45), se réduisent à

$$\delta'_m = -\Delta\nu_m - 3\Psi' \quad (3.41)$$

$$\nu'_m = -\Psi - \mathcal{H}\nu_m. \quad (3.42)$$

La dernière équation est identique à ce qu'on pourrait écrire pour les photons. En effet, en utilisant (3.36) et (3.26) et en se souvenant que $\Delta\nu_\gamma = 3k\Theta_1^{(0)}$, il vient

$$\nu'_\gamma = -\Psi - \mathcal{H}\nu_\gamma. \quad (3.43)$$

Cette dernière équation est identique à (3.42) de sorte que l'on peut écrire

$$(\nu_m - \nu_\gamma)' = -\mathcal{H}(\nu_m - \nu_\gamma). \quad (3.44)$$

Cette équation n'admet que des solutions décroissantes, de sorte que, pour les échelles plus grandes que l'horizon, le fluide de photons et le fluide de matière noire vont avoir la même vitesse particulière. L'équation (3.41) se transforme alors en

$$\delta'_m = -3k\Theta_1^{(0)} - 3\Phi', \quad (3.45)$$

de sorte que l'on ait

$$(\delta_m - 3\Theta_0)' = \left(\delta_m - \frac{3}{4}\delta_\gamma \right)' = 0. \quad (3.46)$$

Le rapport des contrastes de densité est constant. Lorsque la somme $\delta_m - \frac{3}{4}\delta_\gamma$ est nulle, on dit qu'on a des perturbations adiabatiques. C'est le cas que nous allons étudier.

Reste alors à évaluer les fluctuations à la recombinaison, c'est-à-dire peu de temps après l'entrée dans l'ère de la matière. Comme on a montré que la vitesse particulière et le contraste de densité de nos deux fluides étaient du même ordre de grandeur, l'équation de Poisson pour le mélange matière-rayonnement est toujours nulle à l'ordre dominant en $k\eta$. L'équation (3.37) est toujours valable, à la différence près que le terme en $2\Theta_0$ est en fait un terme sur le contraste de densité total $\delta_T/2$. Comme les densités moyennes du fluide de photons et de la matière sont telles que

$$\Omega_\gamma^0 a_{\text{eq}}^{-4} = \Omega_m^0 a_{\text{eq}}^{-3}, \quad (3.47)$$

le contraste de densité totale à une époque quelconque s'écrit

$$\delta_T = \frac{\delta_\gamma + \delta_m a/a_{\text{eq}}}{1 + a/a_{\text{eq}}} = \Theta_0 \frac{4 + 3a/a_{\text{eq}}}{1 + a/a_{\text{eq}}}. \quad (3.48)$$

La solution de l'équation (3.37) est un peu plus compliquée. Je donne juste ici les limites pour $a \ll a_{\text{eq}}$

$$\Psi = \Psi_0 = \text{Constante}, \quad (3.49)$$

et pour $a \gg a_{\text{eq}}$

$$\Psi = \frac{9}{10}\Psi_0. \quad (3.50)$$

En reprenant maintenant l'équation (3.40), on obtient la forme classique de l'effet Sachs-Wolfe [Sachs & Wolfe, 1967]

$$\Theta_0(\eta_0) = \Theta_0(\eta_*) + \Psi(\eta_*) = \frac{1}{3}\Psi(\eta_*). \quad (3.51)$$

3.2 Polarisation

Nous allons voir que le rayonnement de fond est aussi polarisé et nous allons calculer les équivalents à l'équation (3.24).

3.2.1 Diffusion Thomson

Jusqu'à présent, nous avons écrit l'équation de Liouville avec conservation du nombre de photons. Nous avons dit plus haut que le rayonnement de fond se découplait au moment de la recombinaison des noyaux et des photons. On a pas tenu compte de la diffusion des photons sur les ions et les électrons du plasma. Il n'y a pas conservation du nombre de photons pour une direction donnée si on tient compte de la diffusion. On va calculer un terme de collision qui donnera un second membre pour notre équation.

Aux énergies auxquelles se déroulent la recombinaison, autour de l'électron-Volt, les électrons vont être non-relativistes. La diffusion est donc une simple diffusion Thomson. La section

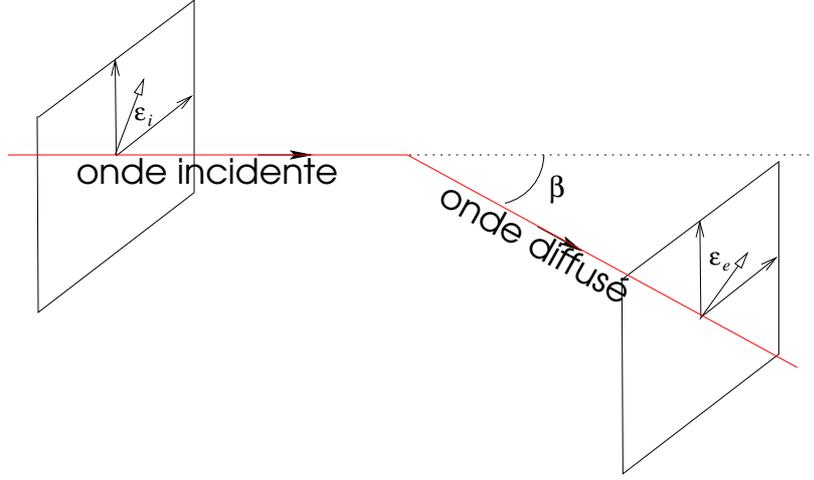


FIG. 3.1 – Le plan de diffusion et ses angles

efficace de la diffusion est bien connue [Itzykson & Zuber, 1980]. Une onde électromagnétique incidente de polarisation linéaire ϵ_i va être diffusée par un électron au repos en une onde de polarisation ϵ_e dans un angle solide $d\Omega$ avec la probabilité

$$d\sigma = \frac{3\sigma_T}{8\pi} |\epsilon_i \cdot \epsilon_e|^2 d\Omega. \quad (3.52)$$

Le paramètre σ_T est la section efficace Thomson

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \alpha^2,$$

α étant la constante de structure fine. On va se placer tout d'abord dans le plan orthogonal à la diffusion. La polarisation, dans ce plan, ne varie pas. Dans le plan de la diffusion, par contre, les polarisations émises et incidentes forment un angle β (voir figure 3.1). On va mesurer maintenant la quantité d'énergie transmise dans le plan orthogonal, I_\perp , et dans le plan de la diffusion I_\parallel . D'après (3.52), il vient

$$I_\perp^e = \frac{3\sigma_T}{8\pi} I_\perp^i \quad (3.53)$$

$$I_\parallel^e = \frac{3\sigma_T}{8\pi} \cos^2(\beta) I_\parallel^i. \quad (3.54)$$

Pour une radiation non polarisée, les deux composantes sont égales, si bien que $I_\perp^i = I_\parallel^i = I^i/2$ et la puissance émise s'écrit

$$I^e = \frac{3\sigma_T}{16\pi} (1 + \cos^2(\beta)) I^i. \quad (3.55)$$

3.2.2 Polarisation et diffusion Thomson

On a déjà noté que la diffusion Thomson était sensible à la polarisation. On va voir que celle-ci peut, sous certaines conditions, polariser un rayonnement qui ne l'était pas.

Imaginons que nous sommes dans une situation où un rayonnement provenant de deux directions orthogonales va diffuser un électron (voir figure 3.2). La polarisation du rayonnement incident va provenir pour la polarisation sur l'axe x du rayon incident aligné le long de y et pour celle en y du rayon x . Les composantes le long de z ne sont pas transmises d'après l'équation (3.52). Si le rayonnement incident est isotrope et non polarisé, les polarisations

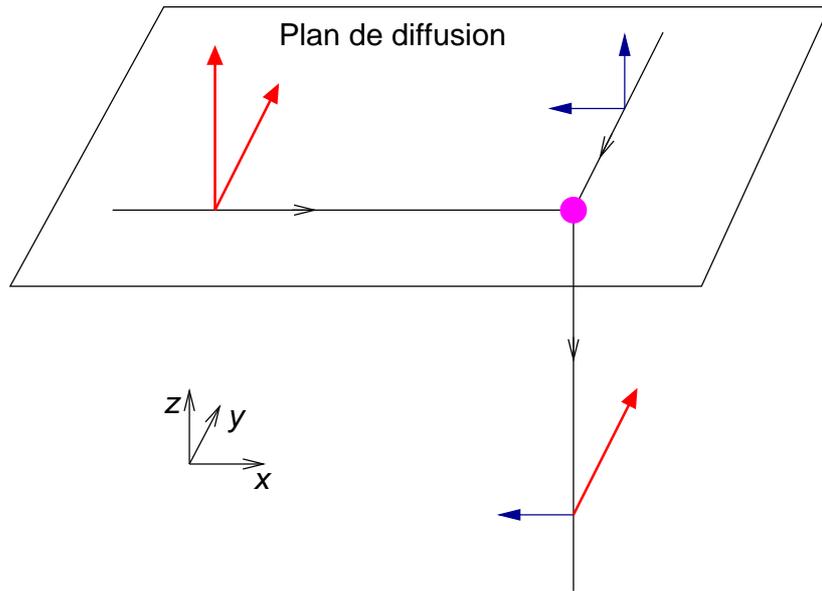


FIG. 3.2 – On présente ici le cas d’une anisotropie quadrupolaire autour du centre de diffusion. Les rayonnements incidents ne sont pas polarisés. Le rayonnement provenant se propageant le long de l’axe x est plus intense que celui le long de l’axe des y . Il en résulte, dans le cas particulier d’une diffusion dans la direction z un excès d’intensité dans la direction y pour le rayonnement diffusé.

suivant les deux axes vont être identiques. Supposons maintenant que le rayonnement, autour de l’électron, ne soit pas isotrope. Si l’anisotropie est dipolaire, il ne va rien se passer de particulier. Les deux rayons incidents vont toujours être de même énergie et toujours contribuer autant à la polarisation finale sur chaque axe. Par contre, si l’anisotropie est quadrupolaire, disons orientée selon l’axe des x , le rayon sur cet axe va transporter plus d’énergie que celui sur l’axe des y . De sorte que le rayonnement incident acquiert un excès de d’énergie sur l’axe des y et donc une polarisation.

Avec ces simples arguments, on montre que la diffusion Thomson, à condition que le rayonnement incident ait une géométrie au moins quadrupolaire, peut induire une polarisation. Qui plus est cette polarisation ne peut être que linéaire. On montrera par la suite que seules les anisotropies quadrupolaires peuvent induire une polarisation. Ainsi, même si le fluide de photon n’avait aucune polarisation avant le découplage, il peut en acquérir une sur la surface de dernière diffusion, en diffusant à travers des anisotropies quadrupolaires. Il faut reprendre les calculs du dessus en incluant la polarisation.

3.2.3 Les variables de Stokes

Une méthode classique pour décrire un rayonnement polarisé est de raisonner en terme des variables de Stokes [Chandrasekhar, 1960]. Pour un rayonnement de la forme

$$E_x = A_x \cos(\omega t + \delta_x) \quad (3.56)$$

$$E_y = A_y \cos(\omega t + \delta_y), \quad (3.57)$$

on définit les variables I , Q , U et V de sorte que

$$I \equiv A_x^2 + A_y^2 \quad (3.58)$$

$$Q \equiv A_x^2 - A_y^2 \quad (3.59)$$

$$U \equiv 2A_x A_y \cos(\delta_x - \delta_y) \quad (3.60)$$

$$V \equiv 2A_x A_y \sin(\delta_x - \delta_y). \quad (3.61)$$

On reconnaît en I la quantité d'énergie dont nous avons calculé la transmission dans la diffusion Thomson. La variable V mesure la polarisation circulaire du rayonnement. Lorsque celle-ci est nulle, $\delta_x = \delta_y + k\pi$ et la polarisation est astreinte à varier le long d'un segment. Pour finir, les variables Q et U décrivent la polarisation linéaire du rayonnement. Comme la diffusion Thomson ne peut créer qu'une polarisation linéaire [Chandrasekhar, 1960], nous ne tiendrons pas compte de la variable V qui sera toujours nulle dans la suite. Enfin, il est immédiat de voir que, lors d'une rotation d'angle ϕ dans le plan de la polarisation, la variable I restera invariante, tandis que les variables Q et U se mélangeront avec un angle 2ϕ . Ce résultat est très naturel, puisque la polarisation n'a qu'une orientation mais pas de sens. Ces variables se comportent comme des spineurs-2.

3.2.4 Hiérarchie de Boltzmann pour la polarisation

Il faut maintenant ré-écrire la hiérarchie pour les variables Q et U . En fait, on ne va pas étudier les variables de Stokes, telles qu'on les a définies au dessus, mais celle définies comme Θ , par rapport à l'intensité totale du rayonnement.

$$\underline{Q} = \frac{Q}{4I}, \quad \underline{U} = \frac{U}{4I}. \quad (3.62)$$

Par la suite, on abandonnera le souligné.

D'autre part, les variables Q et U sont malcommodes ; elles se mélangent lors des rotations. Par contre les variables

$$P_{\pm} \equiv Q \pm iU, \quad (3.63)$$

sont aussi des spineurs-2 et se transforment, lors d'une rotation d'angle ϕ comme

$$P_{\pm} \rightarrow P_{\pm} e^{\pm i\phi}. \quad (3.64)$$

On va décomposer ces variables sur la base des harmoniques sphériques spinorielles ${}_{\pm 2}Y_{\ell}^m$. Ces fonctions possèdent la même propriété de spineur-2 que P_{\pm} . On va donc définir, par analogie avec (3.17) la base des ${}_{\pm 2}G_{\ell}^m(k)$

$${}_{\pm 2}G_{\ell}^m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}; \mathbf{k}) = (-i)^{\ell} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} {}_{\pm 2}Y_{\ell}^m(\boldsymbol{\gamma}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.65)$$

La décomposition s'écrit alors

$$(Q \pm iU)(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\ell m} (2\ell+1) \left(\tilde{E}_{\ell}^{(m)} \mp i\tilde{B}_{\ell}^{(m)} \right) (\boldsymbol{\eta}, \mathbf{k}) {}_{\pm 2}G_{\ell}^m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}; \mathbf{k}). \quad (3.66)$$

On a choisi de séparer le multipôle en deux champs E et B . Cette séparation sera assez importante dans la suite. Elle mérite qu'on s'y attarde quelques paragraphes.

Tout d'abord, en reprenant la définition des variables de Stokes, on note que sous les transformations de parité, Q est conservé tandis que U se transforme en $-U$. Il est immédiat de montrer alors que les \tilde{E}_{ℓ} se transforment comme $(-1)^{\ell}$ alors que les \tilde{B}_{ℓ} se transforment comme $(-1)^{\ell+1}$.

Aux petites échelles, on peut remplacer les harmoniques sphériques spinorielles par de simples facteurs $e^{\pm 2i\phi}$, où ϕ est l'angle du vecteur $\boldsymbol{\ell}$. Dans ce contexte plus simple, il est évident de montrer alors que

$$Q = \int \frac{d^3\ell}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\cos(2\phi)\tilde{E} - i \sin(2\phi)\tilde{B} \right) e^{i\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{x}} \quad (3.67)$$

$$U = \int \frac{d^3\ell}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\sin(2\phi)\tilde{E} + i \cos(2\phi)\tilde{B} \right) e^{i\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{x}}. \quad (3.68)$$

On a alors la relation

$$\Delta E = (\partial_x^2 - \partial_y^2)Q + 2\partial_x\partial_y U \quad (3.69)$$

$$\Delta B = (\partial_x^2 - \partial_y^2)U - 2\partial_x\partial_y Q. \quad (3.70)$$

On montre aussi que le champ E est un scalaire, c'est-à-dire que sous les transformations de parité, il se transforme comme

$$E(\boldsymbol{x}) \xrightarrow{\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{x}} E'(\boldsymbol{x}') = E(\boldsymbol{x}'), \quad (3.71)$$

et que le champ B est un pseudo-scalaire, de sorte que, sous les mêmes transformations, il se transforme comme

$$B(\boldsymbol{x}) \xrightarrow{\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{x}} B'(\boldsymbol{x}') = -B(\boldsymbol{x}'). \quad (3.72)$$

On parle de propriété de polarisation *électrique* pour E et *magnétique* pour B . Toutes ces relations sont vraies aussi aux grandes échelles. La démonstration avec les harmoniques sphériques spinorielles est plus pénible.

Les variables E et B possèdent des propriétés beaucoup plus agréables que les variables de Stokes. On utilisera celles-ci plus volontiers afin de calculer le rayonnement de fond. Cependant, il faut garder à l'esprit que ce sont des variables non-locales. Cette propriété aura des conséquences importantes dans les chapitres suivants. En fait, on peut montrer que cette décomposition est la très classique décomposition d'un champ vectoriel en sa partie scalaire et sa partie rotationnelle. La figure 3.3 donne une idée intuitive de la forme du champ vectoriel de polarisation pour un champ *pur* E Dirac et pour un champ *pur* B Dirac.

Pour écrire l'équivalent de (3.24) il nous manque encore une équation. Il nous faut le calcul du produit de l'harmonique sphérique spinorielle avec le dipôle

$$\begin{aligned} i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\gamma} (-i)^\ell \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \pm_2 Y_l^m &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_1^0 \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \pm_2 Y_l^m \\ &= -k \frac{\sqrt{(m^2 - \ell^2)(\ell^2 - 4)}}{\ell(2\ell+1)} (-i)^{\ell-1} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell-1}} \pm_2 Y_{\ell-1}^m + \\ &\quad k \frac{\sqrt{(m^2 - (\ell+1)^2)(\ell^2 - 4)}}{\ell(2\ell+1)} (-i)^{\ell+1} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+3}} \pm_2 Y_{\ell+1}^m \\ &\quad - \frac{\pm 2m}{\ell(\ell+1)} (-i)^\ell \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \pm_2 Y_l^m. \end{aligned} \quad (3.73)$$

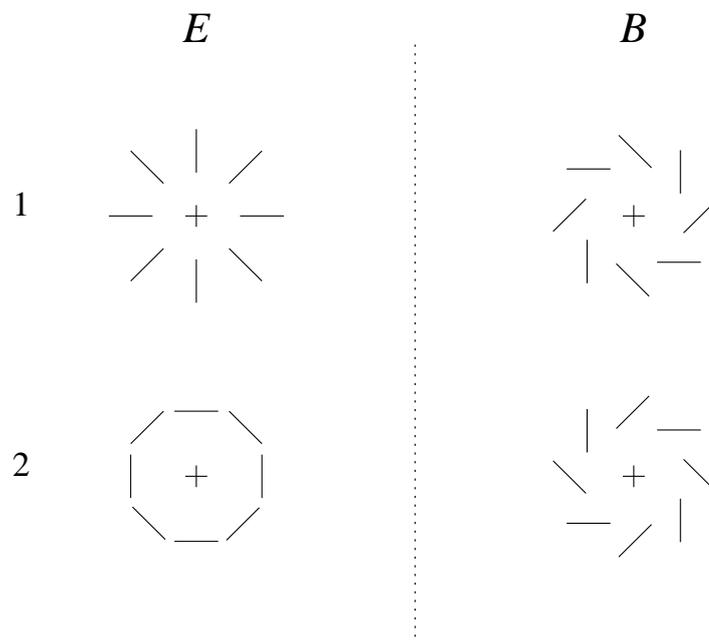


FIG. 3.3 – Voici quatre configurations autour d’un point donné engendrant en ce point des composantes E ou B pures. Les barres donnent l’orientation de la polarisation en leur centre. Elles donnent une représentation graphique simple des variables de Stokes. On rappelle que les composantes électriques et magnétiques de la polarisation sont non-locales, ce qui explique pourquoi il faut regarder le comportement du champ *autour* d’un point pour calculer les champs E et B . On retrouve dans ce schéma les propriétés de parités des deux composantes. Les configurations $E-1$ et $E-2$ sont invariantes sous les réflexions, tandis que $B-1$ et $B-2$ sont échangées.

On obtient alors les équations de Boltzmann pour les champs E et B

$$\tilde{E}_\ell^{(m)'} = \frac{k}{\ell(2\ell+1)} \times \left(\sqrt{(\ell^2 - m^2)(\ell^2 - 4)} \tilde{E}_{\ell-1}^{(m)} - \frac{2m(2\ell+1)}{(\ell+1)} \tilde{B}_\ell^{(m)} - \sqrt{((\ell+1)^2 - m^2)(\ell^2 - 4)} \tilde{E}_{\ell+1}^{(m)} \right) \quad (3.74)$$

$$\tilde{B}_\ell^{(m)'} = \frac{k}{\ell(2\ell+1)} \times \left(\sqrt{(\ell^2 - m^2)(\ell^2 - 4)} \tilde{B}_{\ell-1}^{(m)} + \frac{2m(2\ell+1)}{(\ell+1)} \tilde{E}_\ell^{(m)} - \sqrt{((\ell+1)^2 - m^2)(\ell^2 - 4)} \tilde{B}_{\ell+1}^{(m)} \right). \quad (3.75)$$

Il n'y a pas de terme de source issu des fluctuations primordiales dans ces équations. Seule la diffusion induit une polarisation, et on en a pas encore tenu compte dans nos équations.

3.2.5 Le terme de collision

Reprenons le calcul du terme de collision que nous avons commencé à la section 3.2.1. Après un calcul sans malice, on montre que dans le référentiel des électrons, l'onde émergent de la diffusion s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &\equiv \begin{pmatrix} I_e \\ Q_e + iU_e \\ Q_e - iU_e \end{pmatrix} \\ &= \frac{3\sigma_T}{44\pi} \begin{pmatrix} 1 + \cos^2 \beta & -\frac{1}{2} \sin^2 \beta & -\frac{1}{2} \sin^2 \beta \\ -\frac{1}{2} \sin^2 \beta & \frac{1}{2} (\cos \beta + 1)^2 & \frac{1}{2} (\cos \beta - 1)^2 \\ -\frac{1}{2} \sin^2 \beta & \frac{1}{2} (\cos \beta - 1)^2 & \frac{1}{2} (\cos \beta + 1)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_i \\ Q_i + iU_i \\ Q_i - iU_i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Il nous reste enfin à exprimer ce résultat dans la base des ${}_{0,\pm 2}G_l^m$. Le calcul est technique et un peu pénible, il est particulièrement bien décrit dans [Hu & White, 1997] et [Zaldarriaga *et al.*, 1998]. En termes d'harmoniques spinorielles, la matrice devient

$$\mathcal{S}_T^{(m)} = \frac{\sigma_T}{4\pi} \begin{pmatrix} \bar{Y}_2^m Y_2^m & -\sqrt{\frac{3}{2}} {}_{+2}\bar{Y}_2^m Y_2^m & -\sqrt{\frac{3}{2}} {}_{-2}\bar{Y}_2^m Y_2^m \\ -\sqrt{6} \bar{Y}_2^m {}_{+2}Y_2^m & 3 {}_{+2}\bar{Y}_2^m {}_{+2}Y_2^m & 3 {}_{-2}\bar{Y}_2^m {}_{+2}Y_2^m \\ -\sqrt{6} \bar{Y}_2^m {}_{-2}Y_2^m & 3 {}_{+2}\bar{Y}_2^m {}_{-2}Y_2^m & 3 {}_{-2}\bar{Y}_2^m {}_{-2}Y_2^m \end{pmatrix}. \quad (3.77)$$

Dans cette dernière équation, la barre représente la conjugaison. On a omis les dépendances sur les rayons incidents et émis. En fait, toutes les quantités conjuguées sont relatives aux rayons incidents. Remarquons sur cette dernière équation que seules apparaissent des harmoniques tensorielles. On retrouve la propriété que seules les anisotropies quadrupolaires du champ peuvent engendrer une polarisation via la diffusion Thomson.

On peut maintenant calculer le *terme de collision* pour l'équation de Boltzmann, $C[f]$. Ce terme est assez simple. Pour un temps η il est la différence entre la densité de particules quittant la position $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma})$ de l'espace des phases et celle y arrivant. C'est-à-dire, la différence entre l'énergie diffusée vers d'autres directions par les électrons et celle provenant d'autres directions après diffusion.

$$C[\mathbf{T}] = -\tau' \mathbf{T}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) - \tau' \int \frac{d^3\gamma_i}{4\pi} \sum_m \mathcal{S}_T^{(m)}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}_i) \mathbf{T}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}_i). \quad (3.78)$$

Le terme τ' donne le taux de collision

$$\tau' = n_e \sigma_T a, \quad (3.79)$$

où n_e est le nombre d'électrons ; le facteur d'expansion a apparaît dans ce taux parce que l'on est en temps conforme. Il reste deux étapes pour finir ce calcul. Tout d'abord, intégrer le terme angulaire de l'équation (3.78), le terme de collision est alors, dans la décomposition sur la base des ${}_{0,\pm 2}G_l^m$

$$\tilde{C}[\Theta]_0 = 0 \quad (3.80)$$

$$\tilde{C}[\Theta]_1^{(m)} = -\tau' \tilde{\Theta}_1^{(m)} \quad (3.81)$$

$$\tilde{C}[\Theta]_2^{(m)} = -\tau' \tilde{\Theta}_2^{(m)} + \frac{\tau'}{10} \left(\tilde{\Theta}_2^{(m)} - \sqrt{6} \tilde{E}_2^{(m)} \right) \quad (3.82)$$

$$\tilde{C}[\Theta]_\ell^{(m)} = -\tau' \tilde{\Theta}_\ell^{(m)} \quad (3.83)$$

$$\tilde{C}[E]_2^{(m)} = -\tau' \tilde{E}_2^{(m)} - \frac{\sqrt{6}}{10} \tau' \left(\tilde{\Theta}_2^{(m)} - \sqrt{6} \tilde{E}_2^{(m)} \right) \quad (3.84)$$

$$\tilde{C}[B]_2^{(m)} = -\tau' \tilde{B}_2^{(m)}. \quad (3.85)$$

Tous les termes qui n'ont pas été écrits ici sont nuls. En particulier, on retrouve la propriété que seules les anisotropies quadrupolaires engendrent une polarisation. Le seul terme de source pour E et B arrive pour $\ell = 2$. Dernier point, ces équations ne sont valables que dans le référentiel où les électrons sont au repos. Pour un autre référentiel, il faut donc retirer la vitesse particulière des électrons. En supposant que l'on a pratiqué la même décomposition sur les G_l^m pour la vitesse du fluide de baryons ν_b , l'équation (3.81) devient

$$\tilde{C}[\Theta]_1^{(m)} = -\tau' \left(\tilde{\Theta}_1^{(m)} - \tilde{\nu}_b^{(m)} \right). \quad (3.86)$$

Il faut évidemment exprimer le couplage dans les équations de conservation du fluide de baryons, en ajoutant un terme

$$+ \frac{4}{3} \frac{\rho_\gamma}{\rho_b} \left(\tilde{\Theta}_1^{(m)} - \tilde{\nu}_b^{(m)} \right) \quad (3.87)$$

dans l'équation (2.45).

3.2.6 Discussion

Avant de clore ce chapitre, on va discuter un peu les conséquences du terme de collision. Tout d'abord, ce terme ne couple mode à mode que la température et le champ E . D'un point de vue mathématique cela n'est pas surprenant. Le contraste de températures, comme le champ E sont des scalaires. Le champ B , par contre est pseudo-scalaire. Un couplage mode à mode de ces deux champs aurait été mathématiquement surprenant, puisque les équations pour Θ n'auraient plus été invariantes sous les réflexions. Par contre, on aurait pu avoir³ des couplages entre des modes pairs et impairs de Θ et B qui eux vont avoir les mêmes propriétés de transformation par parité.

Cette remarque est assez importante puisqu'alors la seule source pour la polarisation B est le terme en E dans l'équation (3.75). Or, ce terme est nul pour les modes scalaires ($m = 0$). Comme il n'y a pas de mélange entre les modes scalaires et tensoriels⁴, il en découle que la polarisation de type B ne peut apparaître que si le champ E contient une partie tensorielle. Supposons un instant que les ondes gravitationnelles soient négligeables. La température, seule à avoir des termes de sources provenant des fluctuations de la métrique, ne va acquérir que des modes de perturbations scalaires. La température est source, par les équations de collision, de la polarisation de type E , qui va à son tour voir croître ses modes scalaires. Par

³c'est d'ailleurs le cas entre E et B dans les équations (3.74) et (3.75).

⁴encore une fois, je néglige l'influence des modes vectoriels puisqu'on a montré qu'ils étaient fortement supprimés dans les modèles inflationnaires.

contre, la composante de polarisation magnétique va rester nulle. Les fluctuations scalaires de la métrique n'induisent que des modes de perturbations E .

On peut essayer de comprendre ce résultat d'une autre manière. Supposons pour simplifier que la recombinaison soit instantanée. La polarisation est donc acquise en une seule diffusion, comme sur la figure 3.2. Supposons, encore une fois que les anisotropies de températures aient une origine purement scalaire. Le champ de polarisation du rayonnement de fond va alors être une carte des fluctuations quadrupolaires sur la surface de dernière diffusion. Si cette carte a une origine scalaire, c'est-à-dire, qu'elle peut être dérivée d'un champ potentiel, le champ vectoriel va lui posséder cette propriété.

Une dernière remarque sur la polarisation E et B . Le champ B est d'origine purement tensorielle, alors que E est engendré à la fois par les fluctuations tensorielles et scalaires de la métrique. On a dit au chapitre précédent que les ondes gravitationnelles étaient fortement supprimées à petites échelles. Il est donc raisonnable de s'attendre à ce que le champ B soit lui aussi faible à petite échelle. En anticipant sur la section suivante, la figure 3.5 du spectre de puissance des champs B et E montre que c'est en effet le cas. Dans le modèle inflationnaire, tel qu'on l'a décrit, la composante magnétique de la polarisation est quasi nulle à petite échelle. On utilisera cette propriété dans les chapitres suivants.

3.3 Le spectre de puissance

À partir des équations de la hiérarchie, on peut calculer le spectre de puissance des anisotropies. Je ne vais pas le faire ici, je vais seulement en donner les principales caractéristiques, telles qu'elles sont décrites dans [Hu, 1995].

3.3.1 Température

Sous l'horizon, le fluide de photons, va osciller dans les puits de potentiel de la métrique. La température va donc varier autour de son point zéro, Ψ , avec une amplitude que l'on a calculée plus haut, $\Psi/3$. Ces oscillations vont créer des régions sur-denses et sous-denses dans le fluide. Cet effet va se concrétiser, dans le spectre de puissance, par une série de pics aux échelles caractéristiques des régions chaudes et froides.

Ces pics vont subir plusieurs effets. Tout d'abord, comme les baryons vont aussi tomber dans les puits de potentiel, il vont augmenter la profondeur de ceux-ci. Du coup, les photons ne vont plus osciller autour de leur point zéro (c'est à dire autour de Ψ , voir plus haut le calcul de l'effet Sachs-Wolf) mais autour d'un point légèrement déplacé. Si l'on regarde l'effet sur la variance, cela va amplifier un pic sur deux. On s'attend donc à ce que la série des pics du spectre de puissance soit "alternée" ; les pics impairs étant "plus hauts" que les pics pairs. L'amplitude de cet effet dépend bien entendu de la quantité de baryons dans l'univers.

Il faut ensuite tenir compte du mouvement du fluide. La vitesse particulière des photons va induire un effet Doppler sur la température. La vitesse du fluide est en opposition de phase avec sa densité, si bien que le terme Doppler va combler les écarts entre les pics d'oscillation. Comme le fluide de photons est freiné par l'interaction avec les baryons (voir équation (3.86)), cet effet Doppler est d'amplitude plus faible que l'effet d'oscillation. Sans l'interaction avec les baryons, cet effet Doppler serait du même ordre de grandeur que les oscillations du fluide et comme il est en opposition de phase avec celui-ci, il gommerait les oscillations du spectre.

Dernier point dont nous n'avons pas tenu compte, la variation temporelle des potentiels de Bardeen va légèrement modifier le spectre. Cet effet modifie principalement le spectre aux grandes échelles et autour du premier pic. Comme l'influence des variations temporelles des potentiels de perturbations apparaît comme des termes *corrigeant* l'effet Sachs-Wolfe sur le trajet des photons, on parle d'*effet Sachs-Wolfe intégré*.

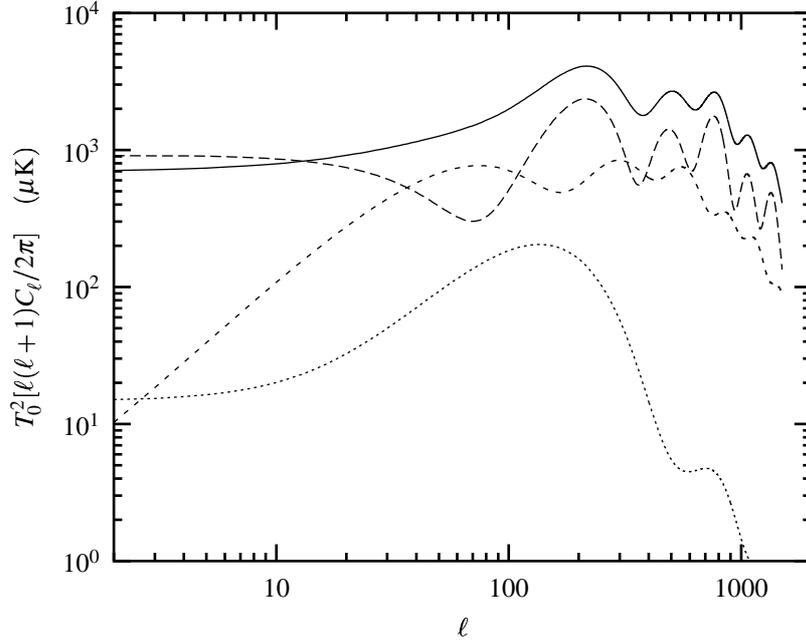


FIG. 3.4 – les différentes composantes du spectre de puissance de la température. On ne présente ici que celles engendrées par les perturbations scalaires. Les perturbations tensorielles sont négligeables aux petites échelles. On présente aussi les différentes composantes des anisotropies. En tirets longs, la contribution de l'effet Sachs-Wolfe. En tirets courts, celle de l'effet Doppler. En pointillés, la contribution dite *Sachs-Wolfe intégrée*.

Le modèle utilisé pour calculer ce spectre est une cosmologie de courbure nulle, avec une constante cosmologique $\Lambda = 0.7$ et un paramètre de Hubble $h = 0.5$. Les spectres initiaux de perturbation sont invariant d'échelle. La figure est tirée de [Riazuelo, 2000].

Enfin, le spectre de puissance va être coupé au delà d'une certaine échelle. La diffusion des photons va avoir tendance à mélanger les photons provenant de régions chaudes et ceux provenant de régions froides. Deux régions suffisamment lointaines ne vont pas subir cet effet. Deux régions proches, par contre, vont se mélanger. Les mots *proche* et *lointain* doivent être compris en terme de libre parcours moyen des photons. Ainsi, les structures d'échelles plus petites que le libre parcours moyen des photons vont être supprimées.

Lorsque l'on parle de surface de dernière diffusion, on parle de la région où les photons ont diffusés pour la dernière fois. Il ne s'agit pas à proprement parler d'une surface, puisqu'elle va avoir une épaisseur, qui est justement comparable au libre parcours moyen des photons avant le découplage. Ainsi, les structures qui subsisteront au moment du découplage seront celles dont l'échelle est supérieure à l'épaisseur de la surface de dernière diffusion. Cet effet se traduit par une coupure exponentielle dans le spectre de puissance. On appelle cet effet l'amortissement de Silk [Silk, 1968].

Le spectre de puissance est donc formé d'une série de pics décroissants. On parle de *pics Doppler*, bien que l'on a vu que cet effet n'en soit pas à l'origine, ou de *pics acoustiques*. Les pics impairs sont plus hauts que les pics pairs, à cause de l'effet gravitationnel des baryons. Enfin, la décroissance est exponentielle, à cause de l'amortissement de Silk. On donne, figure 3.4, un spectre de température ainsi que la contribution des différents effets discutés dans cette section.

3.3.2 Polarisation

Le même genre de propriété se retrouve dans le spectre de puissance de la polarisation E . Toutefois, alors que la température possède une puissance non nulle aux bas multipôles (due à l'effet Sachs-Wolf), la puissance à grande échelle de E est très faible. On va d'abord raisonner en supposant que les seules perturbations primordiales sont scalaires. Pour que le champ soit polarisé, il faut qu'une anisotropie quadrupolaire diffuse sur un électron. Dans le cas des perturbations scalaires, la source de ces quadrupôles provient uniquement de la diffusion des photons ; pour que le champ soit polarisé, il faut alors que les photons aient diffusé au moins deux fois. Les seuls quadrupôles qui vont diffuser sont donc ceux plus petits que l'horizon à l'époque de la recombinaison. En d'autres termes, le champ de polarisation doit être fortement supprimé pour les échelles plus grandes que l'horizon à la recombinaison ; c'est-à-dire sous l'échelle du premier pic de températures. Les ondes gravitationnelles, par contre, fournissent des anisotropies quadrupolaires intrinsèques qui peuvent être plus grandes que l'horizon. La puissance à ces échelles est néanmoins assez faible.

Le champ de polarisation E va par ailleurs exhiber les mêmes oscillations et la même coupure exponentielle à petite échelle que le spectre de températures. Par contre, à cause de l'origine quadrupolaire de E , ses oscillations vont être déphasées par rapport à celle de la température.

Pour finir sur le sujet, on va décrire les propriétés de la polarisation B . En fait, elle est uniquement engendrée par les ondes gravitationnelles. Comme celles-ci sont très amorties à petite échelle, le spectre de B va vite être coupé. Comme pour le champ E des oscillations apparaissent sur le spectre pour des échelles plus petites que l'horizon au découplage. Elles ont la même origine que celles du champ E et sont donc en phase avec celui-ci.

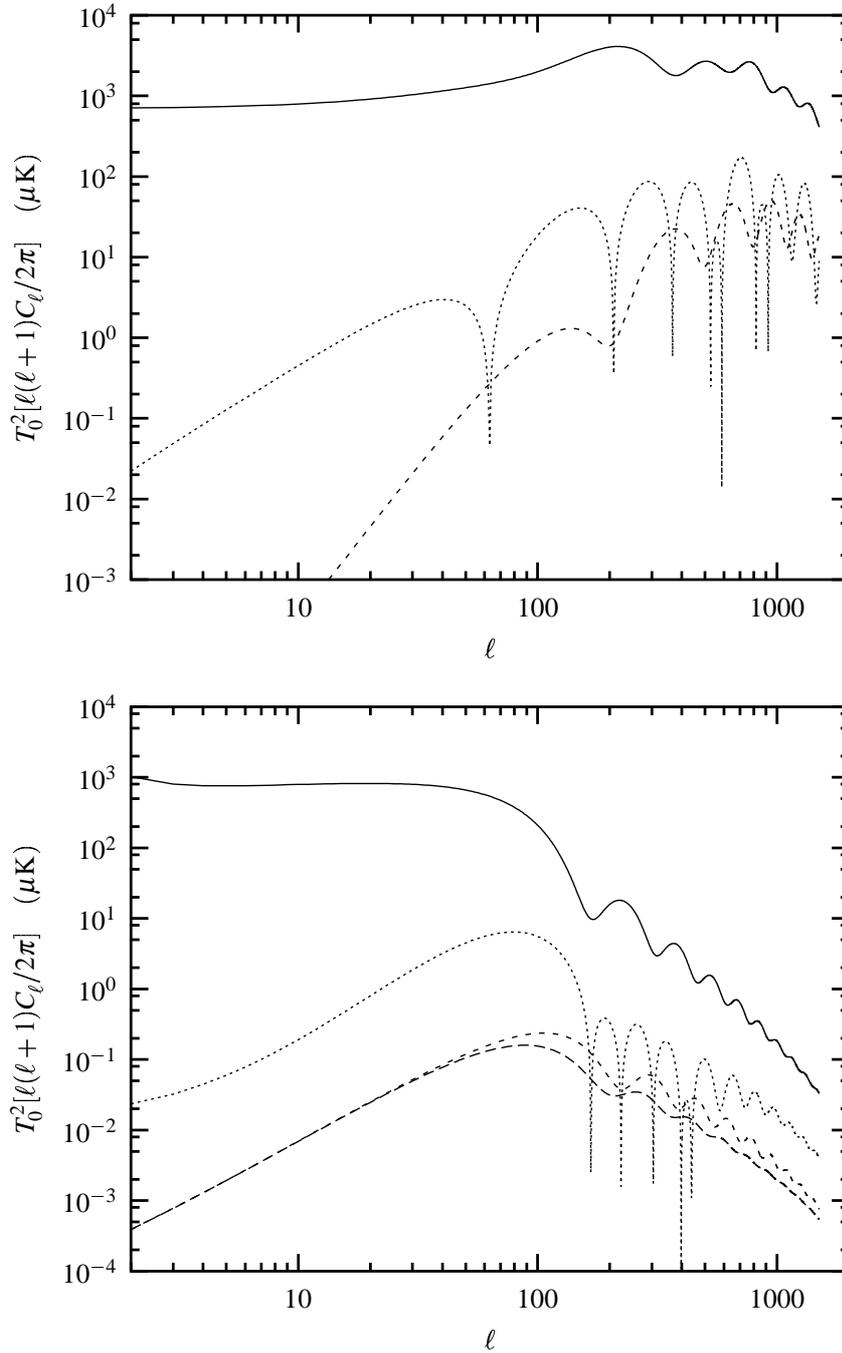


FIG. 3.5 – La contribution des modes scalaires et tensoriels des perturbations aux spectres de température et polarisation du rayonnement de fond. Les courbes du haut donnent la contribution des modes scalaires seuls. La température est en traits pleins. La polarisation électrique est en tirets. Il n’y a pas de polarisation magnétique issue des modes scalaires des perturbations. La courbe en pointillés est la corrélation croisée de la température avec la polarisation électrique. La figure du bas présente les mêmes courbes pour la contribution des modes tensoriels. Il y a maintenant une polarisation magnétique, représentée par la courbe en tirets longs. La légère différence entre les deux composantes de la polarisation peut s’expliquer par des phénomènes de projections. Comme la figure 3.4, les deux courbes proviennent de [Riazuelo, 2000].

CHAPITRE 4

Les grandes structures

Sommaire

4.1 Dynamique gravitationnelle	47
4.1.1 Équations d'évolution	47
4.1.2 Lien avec la théorie des perturbations cosmologiques	49
4.1.3 Influence de la pression – Longueur de Jeans	49
4.2 Évolution de la matière durant l'ère du rayonnement	50
4.2.1 Modes plus grands que l'horizon	50
4.2.2 Modes plus petits que l'horizon	51
4.2.3 Fonction de transfert	51
4.3 Évolution de la matière dans l'ère de la matière	51
4.3.1 Croissance linéaire	51
4.3.2 Premier ordre non-linéaire – effondrement sphérique et gauchissement	52
4.3.3 Évolution profondément non-linéaire.	56

On va s'intéresser maintenant au devenir des fluctuations de la matière. On trouvera une discussion très complète du problème dans [Peebles, 1980]. Je ne me focaliserai que sur quelques points importants pour la suite de l'exposé.

4.1 Dynamique gravitationnelle

On va de nouveau suivre le formalisme de l'équation de Boltzmann.

4.1.1 Équations d'évolution

On s'intéresse à l'évolution de la matière noire. Dans toute la suite, nous allons nous placer sous l'horizon. À ces échelles, la matière noire est supposée avoir quitté le régime relativiste depuis longtemps. On va donc écrire nos équations comme si la gravitation newtonienne était suffisante. On a alors, pour un fluide de vitesse \mathbf{v} et de densité ρ

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = G \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}. \quad (4.1)$$

Si la dynamique du fluide de matière noire peut être simplement newtonienne, l'univers n'en reste pas moins en expansion. On va plutôt utiliser les variables comobiles

$$\mathbf{x} \equiv a\mathbf{r} \quad (4.2)$$

et on va introduire la vitesse particulière

$$\mathbf{v} \equiv a\boldsymbol{\nu}. \quad (4.3)$$

Dans les chapitres précédents, on s'était surtout intéressé à la composante scalaire de cette vitesse. On avait la relation

$$\boldsymbol{\nu} \equiv \nabla\nu. \quad (4.4)$$

L'équation de la dynamique (4.1) se transforme, dans ces variables, en

$$\dot{\nu} + H\nu + \frac{\ddot{a}}{a}\mathbf{x} = Ga \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}. \quad (4.5)$$

Enfin, comme plus haut, on va exprimer la densité en fonction de sa composante homogène et d'une perturbation

$$\rho = (1 + \delta)\bar{\rho}. \quad (4.6)$$

Il est aisé de montrer que, d'après l'équation de Friedmann (1.12), la composante homogène de l'intégrale s'identifie au terme en $\ddot{a}/a\mathbf{x}$.

Alors, l'équation de Boltzmann s'écrit

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p^i}{ma^2} \partial_i f - m \partial^i \Phi \frac{\partial f}{\partial p^i} = 0 \quad (4.7)$$

$$\Delta \Phi = \frac{4\pi G}{a} \int d^3p (f - \bar{f}). \quad (4.8)$$

On a noté ici \bar{f} la densité moyenne. La quantité de mouvement est $\mathbf{p} = am\boldsymbol{\nu}$. La masse des particules apparaît maintenant puisque la fonction f est la densité d'état et pas celle de masse. On retrouve la densité ρ en intégrant la densité d'état sur les impulsions

$$\rho = \frac{m}{a^3} \int d^3p f. \quad (4.9)$$

De même, la vitesse particulière se retrouve en intégrant l'impulsion sur la distribution f

$$\nu^i = \frac{\int d^3p p^i f}{m a \int d^3p f}. \quad (4.10)$$

Enfin, on va retrouver les termes de pressions anisotropes en intégrant $p^i p^j$. On a alors

$$\frac{\int d^3p p^i p^j f}{m^2 a^2 \int d^3p f} = \nu^i \nu^j + \frac{\Pi^{ij}}{\rho} + \frac{P}{\rho} \delta^{ij}. \quad (4.11)$$

Encore une fois, on va supposer que la pression anisotrope est nulle. Avec ces trois équations en main, on retrouve les équations de conservations. En intégrant l'équation de Liouville (4.7) sur l'impulsion, il vient

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a} \nabla \cdot ((1 + \delta)\boldsymbol{\nu}) = 0 \quad (4.12)$$

$$\dot{\nu}^i + H\nu^i + \frac{1}{a} (\nu^i \nabla_j) \nu^j = -\frac{1}{a} \nabla^i \Phi - \frac{\nabla^i P}{a\rho}. \quad (4.13)$$

Par ailleurs, le lagrangien de la source de l'équation (4.13) s'écrit alors

$$\Delta \Phi = \frac{\kappa}{2} \bar{\rho} a^2 \delta. \quad (4.14)$$

4.1.2 Lien avec la théorie des perturbations cosmologiques

Avant d'aller plus loin, on peut tout de suite remarquer que les équations (4.12) et (4.13) linéarisées sont équivalentes aux équations (2.44) et (2.45). La linéarisation des équations donne (sans pression)

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a} \nabla \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \quad \dot{\nu}^i + H \nu^i = -\frac{1}{a} \nabla^i \Phi \quad (4.15)$$

Le plus simple est ensuite de se placer en jauge comobile. Cela revient à se placer dans les coordonnées telles que la vitesse dans ce référentiel absorbe le terme en $3\Phi'$ dans l'équation (2.44). En utilisant l'équation (2.51), on peut montrer que cela revient à faire

$$\delta^{\natural} = \delta^{\#} + \frac{\rho'}{\rho} \nu^{\#}. \quad (4.16)$$

On a utilisé ici les notations proposées par J.P. Uzan [Uzan, 1998] pour noter les jauges newtonienne $\#$ et comobile \natural . Dans cette jauge, l'équation de Poisson est beaucoup plus simple¹

$$\Delta \Phi = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \sum_X \Omega_X \delta_X^{\natural}. \quad (4.17)$$

Le potentiel de Bardeen s'identifie alors avec le terme de gravitation que nous avons écrit plus haut. On a alors, pour de la matière sans pression

$$\delta' = \Delta \nu, \quad \nabla_i \nu' + \mathcal{H} \nabla_i \nu = -\nabla_i \Phi. \quad (4.18)$$

On reconnaît la version en temps conforme des équations (4.12) et (4.13) linéarisées, ou de façon équivalente comme on l'a vu plus haut, (2.44) et (2.45). Notre approche avec la gravité newtonienne nous redonne donc bien les équations des perturbations linéaires au premier ordre.

4.1.3 Influence de la pression – Longueur de Jeans

On a décidé plus haut que la pression du fluide était nulle. Avec cette hypothèse, il est simple de donner une forme analytique à la fonction de distribution

$$f = \frac{a^3 \rho}{m} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - m a \boldsymbol{\nu}). \quad (4.19)$$

Cette expression correspond bien à la distribution d'un fluide sans pression puisqu'elle vérifie

$$\frac{\int d^3 p p^i p^j f}{m^2 a^2 \int d^3 p f} = \nu^i \nu^j. \quad (4.20)$$

Cette distribution correspond à une évolution pour laquelle en chaque point le fluide a une vitesse déterminée et une seule. On parle d'évolution à un seul flot. Il ne peut y avoir à un moment donné deux particules du fluide à une même position et avec deux vitesses différentes. Cette propriété est certainement vraie au début de l'évolution du fluide². Elle est aussi certainement violée au cours de l'évolution. Au cours d'un effondrement gravitationnel, par exemple, il arrive un point, pour de la matière non-collisionnelle, où plusieurs flots (dans des directions opposées, dans le cas d'un effondrement) se croisent. Nos calculs, qui ne sont valables que dans l'approximation à un flot cessent d'être valables. Il est très difficile de mener les calculs au-delà de l'approximation à un flot.

¹on s'est placé dans un espace plat.

²pour de la matière noire froide.

En fait, lors des croisements de flots, la pression commence à jouer un rôle et va freiner l'effondrement du gaz. On va voir apparaître des objets. On va calculer la taille caractéristique des objets qui peuvent ainsi se former. Reprenons les équations (4.12) et (4.13) linéarisées. On ne va plus cette fois-ci supposer que la pression est nulle. L'équation (2.48) pour un fluide parfait (c'est à dire d'entropie constante) nous permet d'écrire

$$\nabla_i P = \nabla_i(\bar{P} + \delta P) = c_s^2 \bar{\rho} \nabla_i \delta \quad (4.21)$$

On peut alors écrire une équation différentielle pour δ seul

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = \frac{c_s^2}{a^2} \Delta \delta + 4\pi G \bar{\rho} \delta. \quad (4.22)$$

On va passer en espace de Fourier pour discuter les solutions de cette équation. Les modes de part et d'autre d'une longueur caractéristique λ_J vont avoir une évolution totalement différente

$$\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}}. \quad (4.23)$$

On appelle cette longueur caractéristique la *longueur de Jeans*. Les longueurs d'ondes grandes, $k^{-1} > \lambda_J$, le terme de gravité est plus fort que le terme de pression. Le fluide s'effondre librement. Dans le cas inverse, c'est maintenant le terme de pression qui domine; le second membre de l'équation devient négatif. Le fluide oscille alors et ne s'effondre plus.

Pour de la matière baryonique, cette longueur de Jeans est petite. Elle correspond à des échelles de masses de l'ordre de $10^5 M_\odot$. On est très loin des échelles de masses typiques en cosmologie; un amas est de l'ordre de $10^{15} M_\odot$ et une galaxie $10^{12} M_\odot$. On pourra donc négliger l'influence de la pression des baryons lorsque l'on calculera la croissance de la matière aux échelles cosmologiques; la longueur de Jeans est beaucoup trop petite.

Par contre cette longueur va être très grande durant l'ère de la radiation. En effet, la vitesse du son dans le fluide de photons est de même ordre de grandeur que la vitesse de la lumière $c_s^2 = c^2/3$. Dans ces conditions, la longueur de Jeans est de l'ordre de grandeur du paramètre de Hubble. Si l'on revient à la discussion de tout à l'heure, le contraste de densité du fluide de photons ne peut plus croître sous l'horizon.

4.2 Évolution de la matière durant l'ère du rayonnement

Dans un premier temps, on va essayer de caractériser la forme du spectre de fluctuations. On va rester dans le cadre de la théorie linéaire. Dans ces conditions, on peut raisonner en terme de *fonction de transfert*. On va construire la fonction qui permet de faire passer du spectre primordial invariant d'échelle de l'inflation au spectre de puissance du contraste de densité de la matière à la fin de l'ère du rayonnement

$$P(k) = T(k)^2 P_{\text{prim}}(k). \quad (4.24)$$

4.2.1 Modes plus grands que l'horizon

On a déjà effectué le calcul de la croissance des fluctuations aux échelles plus grandes que l'horizon section 3.1.4. À ces échelles, l'équation (3.46) montre que la matière est astreinte à suivre l'évolution du fluide de photons. Par ailleurs, on a montré qu'au-delà de l'horizon, les fluctuations de la métrique sont gelées (équation (3.38)). Dans ces conditions, l'équation de Poisson nous assure que la source de l'équation (4.17)

$$\Delta = \delta_\gamma - 3\mathcal{H}(1 + \omega_\gamma)\nu_\gamma \quad (4.25)$$

croisse en a^2 . En effet, on connaît l'évolution de $\mathcal{H}^2\Omega_\gamma \sim a^{-2}$, qui impose à Δ son évolution pour conserver un champ Φ constant au cours du temps. Les fluctuations de densité de matière doivent donc, elles aussi croître comme a^2 .

4.2.2 Modes plus petits que l'horizon

Dans l'ère du rayonnement, c'est le fluide de photons qui domine l'équation de Poisson. On a vu cependant que pour les modes plus petits que l'horizon, la pression des photons stoppait l'effondrement. Dans ce cas, l'équation de Poisson s'annule, si bien que l'évolution de la matière est alors donnée par

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 0, \quad (4.26)$$

dont la seule solution croissante est $\log a$.

4.2.3 Fonction de transfert

On peut maintenant donner une forme qualitative à la fonction de transfert. En fait les modes plus petits que l'horizon croissent comme un logarithme, pendant que ceux plus grands que l'horizon croissent comme a^2 . L'évolution des modes plus grands et plus petits que $k_{\text{eq}} \equiv \eta_{\text{eq}}^{-1}$ va être différente. Un mode $k > k_{\text{eq}}$ croît comme a^2 tant qu'il est tel que $k\eta < 1$. Par rapport à un mode $k' < k_{\text{eq}}$ qui lui reste tout le temps super horizon, il aura donc accumulé un déficit de croissance de $(k/k_{\text{eq}})^{-2}$, à un facteur logarithmique près que nous négligerons. Il est donc simple de donner l'expression de la fonction de transfert

$$T(k) \propto 1 \text{ pour } k < k_{\text{eq}} \quad (4.27)$$

$$T(k) \propto k^{-2} \text{ pour } k > k_{\text{eq}}. \quad (4.28)$$

Pour calculer la fonction de transfert dans la zone de transition, il faut tenir compte du facteur logarithmique négligé plus haut si bien que les modes plus grands que k_{eq} croissent en fait comme $k^{-2} \ln k$. Le calcul complet de la fonction de transfert demande l'intégration des équations complètes qui ne peut être réalisé que numériquement dans le cas général. Il existe plusieurs versions approchées du résultat. La plus utilisée est la formule *BBKS* [Bardeen *et al.*, 1986].

On peut maintenant calculer les spectres de puissance. Pour un spectre initial invariant d'échelle Harrison- Zel'dovich, on a

$$P(k) \propto k \text{ pour } k < k_{\text{eq}} \quad (4.29)$$

$$P(k) \propto k^{-3} \text{ pour } k > k_{\text{eq}}. \quad (4.30)$$

4.3 Évolution de la matière dans l'ère de la matière

On va maintenant calculer la croissance des fluctuations de la matière.

4.3.1 Croissance linéaire

On a déjà tout en main pour déterminer l'équation du mode croissant linéaire. À l'aide de (4.43) et (4.13) on tire l'équation

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = \frac{3}{2}H^2\Omega\delta. \quad (4.31)$$

À l'ordre linéaire, lorsque l'on ne considère que le mode croissant, les fluctuations spatiales et temporelles sont séparées. La solution générale de cette équation s'écrit donc sous la forme

$$\delta(\mathbf{x}, t) = D_+(t)\delta(\mathbf{x}). \quad (4.32)$$

Encore une fois, on ne retient que la solution croissante de (4.31). Dans un espace EdS, cette solution est simple

$$D_+ = a. \quad (4.33)$$

Dans le cas général, la solution est beaucoup plus difficile à calculer [Carroll *et al.*, 1992][Hamilton, 2001]. On peut cependant en donner ses caractéristiques générales. Par exemple, dans un univers plat avec constante cosmologique, la fonction D_+ va rester très proche de sa solution EdS tant que la constante est sous dominante. L'univers est alors très proche du modèle EdS. À mesure que la constante gagne en importance, on s'écarte du facteur d'expansion. En fait, plus la constante, ou toute autre fluide à vrai dire, gagne de l'importance, plus le paramètre Ω va diminuer. Le terme de source de l'équation (4.31) va donc diminuer et ne plus forcer la solution vers a . Une discussion plus complète du facteur de croissance dans des univers avec plusieurs composantes sera donnée au chapitre 10 pour le cas d'univers exotiques avec une composante d'*énergie sombre*.

4.3.2 Premier ordre non-linéaire – effondrement sphérique et gauchissement

Jusqu'à présent nous n'avons fait que des calculs linéaires. Ces calculs nous donnent une très bonne estimation de l'évolution du contraste de densité des structures. Néanmoins, ils supposent qu'il n'y a pas de couplage de mode; aucune évolution de la distribution initiale des fluctuations du fluide de matière. Les fluctuations primordiales sont engendrées par l'inflation avec une statistique gaussienne. On a vu que cette statistique était *a priori* conservée durant l'ère du rayonnement où le fluide de matière noire est astreint à suivre l'évolution du fluide de photons. Celui-ci tombe dans les puits de potentiels, mais on a vu que sa pression était telle qu'il ne les modifiait pas.

On est maintenant dans l'ère du rayonnement. La matière s'effondre dans les puits dont la profondeur augmente à mesure qu'ils acréètent plus de matière. En d'autres termes, on s'attend à ce que les zones sur-denses deviennent de plus en plus petites et de plus en plus denses, tandis que les zones sous-denses doivent s'agrandir et se vider de plus en plus. Sans autre argument, on voit bien ici que la distribution du contraste de densité, si elle était gaussienne au départ, ne peut plus le rester au cours de l'évolution. Alors que l'on commence avec équipartition des zones vides et pleines à toutes les échelles, l'évolution nous prédit un excès de zones très vides et très grandes d'une part et de zones très denses et très petites d'autre part.

Équation générale

On va évaluer cet effet en considérant le deuxième ordre des équations (4.12) et (4.13). On va donc chercher à obtenir un contraste de densité sous la forme

$$\delta(\mathbf{x}, t) = D_1(t)\delta(\mathbf{x}) + D_2\delta(\mathbf{x})^2 + \dots \quad (4.34)$$

Le développement sera beaucoup plus compliqué que cette simple équation. En fait, on peut s'attendre à des couplages de modes beaucoup plus compliqués que le simple produit δ^2 .

On va effectuer ces calculs dans le cas d'un modèle Einstein-deSitter. Comme pour la croissance linéaire, on obtient dans ce modèle des résultats analytiques simples. Il a été montré que les résultats auxquels nous allons aboutir ici restent valables avec un erreur de l'ordre du pour-cent dans d'autres modèles (en particulier en tenant compte de la constante cosmologique) [Bouchet *et al.*, 1992]. D'autre part, on montrera au chapitre 10 où l'on présentera des résultats numériques, que ces conclusions restent valables dans certains modèles exotiques.

Au deuxième ordre, il vient

$$\frac{\dot{\delta}}{H} + (1 + \delta)\theta + \frac{1}{aH}\nabla \cdot (\delta \boldsymbol{\nu}) = 0 \quad (4.35)$$

$$\left(2 + \frac{\dot{H}}{H}\right)\theta + \frac{\dot{\theta}}{H} + \frac{3}{2}\Omega\delta + \frac{1}{aH}\nabla_i(\nu^j \nabla_j)\nu^i = 0. \quad (4.36)$$

On a utilisé ici le fait que pour un univers EdS, l'équation de Poisson $4\pi G\bar{\rho}\delta$ se ramenait simplement à $3/2H^2\Omega\delta$. On a noté θ la divergence de la vitesse

$$\theta \equiv \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{\nu}}{aH}. \quad (4.37)$$

Il est équivalent d'étudier θ et la vitesse particulière puisque l'on a supposé que la vitesse était potentielle. on pourrait montrer, en fait, qu'au même titre que les fluctuations vectorielles, une éventuelle composante rotationnelle de la vitesse particulière est gommée par l'expansion. Remarquons tout de suite qu'à l'ordre linéaire on connaît la relation entre θ et le contraste de densité, puisque

$$\dot{\delta}^{(1)} = H\theta^{(1)}. \quad (4.38)$$

On va étudier nos équations différentielles dans l'espace de Fourier. Elles se transforment en

$$\frac{\dot{\delta}}{H} + \tilde{\theta} + \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} \mathcal{P}(\mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}') \tilde{\delta}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tilde{\theta}(\mathbf{k}') = 0 \quad (4.39)$$

$$\left(2 + \frac{\dot{H}}{H}\right)\tilde{\theta} + \frac{\dot{\tilde{\theta}}}{H} + \frac{3}{2}\Omega\tilde{\delta} = \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} (\mathcal{P}(\mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}') + \mathcal{P}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \mathbf{k}') - 2\mathcal{Q}(\mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}')) \tilde{\theta}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tilde{\theta}(\mathbf{k}'). \quad (4.40)$$

On a utilisé les fonctions \mathcal{P} et \mathcal{Q} définies par

$$\mathcal{P}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 1 + \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1^2} \quad (4.41)$$

$$\mathcal{Q}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 1 - \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2}. \quad (4.42)$$

Il nous reste à résoudre ce système dans l'espace de Fourier.

Effondrement sphérique

On va tout d'abord s'intéresser à un problème plus simple dont les solutions vont nous aider à calculer les solutions du système. Considérons donc l'effondrement d'une sphère matérielle. L'équation d'évolution en est très simple

$$\ddot{R} = -\frac{GM^*}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}R. \quad (4.43)$$

On a ici tenu compte d'une éventuelle constante cosmique. Le paramètre R est le rayon comobile de la sphère. M^* est à tout instant la masse sous le rayon R . On peut définir un contraste de densité pour notre problème en faisant

$$\delta = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3} - 1, \quad (4.44)$$

où R_0 est le rayon comobile initial de la sur-densité. L'équation (4.43) se ré-écrit en fonction du contraste de densité

$$-\frac{H^2}{2}\Omega\frac{1}{\delta+1} - \frac{1}{3}(2H\dot{\delta} + \ddot{\delta}) \times \left(\frac{1}{\delta+1}\right)^2 + \frac{4}{9}\dot{\delta}^2 \left(\frac{1}{\delta+1}\right)^3 = -\frac{1}{2}H^2\Omega. \quad (4.45)$$

Il faut bien sûr tenir compte dans cette équation de la présence d'une éventuelle constante cosmologique ou d'un autre fluide. Cependant, comme précédemment, on ne donnera des résultats que pour le cas particulier du modèle EdS.

Cette équation donne des solutions séparables en temps et espace à tous les ordres. Ce n'est pas particulièrement surprenant ; on voit mal comment une sphère pourrait s'effondrer gravitationnellement autrement que sous une forme sphérique. Ce n'est évidemment pas le cas lorsque les sur-densités initiales ont des formes plus complexes. C'est d'ailleurs pour cela que l'on s'attend à ce que la solution générale du deuxième ordre fasse apparaître des couplages de modes complexes. Dans notre modèle simplifié, en tout cas, l'équation (4.34) est parfaitement justifiée.

On va tout d'abord écrire l'équation pour l'ordre linéaire. On retrouve sans surprise l'équation (4.31)

$$\ddot{D}_1 + 2H\dot{D}_1 - \frac{3}{2}H^2\Omega D_1 = 0. \quad (4.46)$$

À cet ordre on peut bien découpler temps et espace et les composantes spatiales n'ont pas de couplages de modes.

Tournons nous maintenant vers le deuxième ordre. L'équation (4.45) devient, après élimination du premier ordre

$$\ddot{D}_2 + 2H\dot{D}_2 - \frac{3}{2}H^2\Omega D_2 = 3H^2\Omega D_1^2 - \frac{8}{3}\dot{D}_1^2. \quad (4.47)$$

C'est la même équation que pour le terme linéaire, mais avec source. On peut chercher des solutions sous la forme

$$D_2 \propto D_1^2. \quad (4.48)$$

Dans le cas d'un univers EdS, la solution pour D_2 est

$$D_2 = \frac{34}{21}D_1^2. \quad (4.49)$$

Le coefficient $34/21$ est a priori modifié pour un modèle différent. Cette modification est très faible [Bouchet *et al.*, 1992], si bien que l'on pourra utiliser cette solution pour tous les modèles. Comme on l'a déjà annoncé plus haut, on discutera, chapitre 10, des modifications subies par ce coefficient dans des modèles d'univers avec quintessence. Elles se révèlent être, elles aussi, négligeable (de l'ordre du pour-cent).

Contraste de densité au second ordre

Revenons maintenant au système (4.39-4.40). On vient d'en exhiber une solution pour une géométrie particulière, celle de l'effondrement sphérique. On s'attend à ce que les solutions du système au deuxième ordre puissent s'écrire en fonction de la solution particulière D_2 . En effet, on peut montrer [Bouchet *et al.*, 1992] que la solution pour le contraste de densité s'écrit finalement

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}^{(2)}(\mathbf{k}, t) = & \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{\delta}(\mathbf{k}') \tilde{\delta}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ & \times \left[D_1^2 \left(\mathcal{P}(\mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}') - \frac{3}{2}\mathcal{Q}(\mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}') \right) + \frac{3}{2}D_2\mathcal{Q}(\mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}') \right]. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Finalement, on peut écrire le contraste de densité sous la forme

$$\delta(\mathbf{x}, t) = D_+ \delta(\mathbf{x}) + D_+^2 \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^3} \tilde{\delta}(\mathbf{k}_1) \tilde{\delta}(\mathbf{k}_2) \mathcal{F}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}}. \quad (4.51)$$

Dans un modèle EdS, le noyau de couplage de mode \mathcal{F} se ramène à

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &= \left(\mathcal{P}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) - \frac{3}{2} \mathcal{Q}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \right) + \frac{3}{2} \frac{D_2}{D_+^2} \mathcal{Q}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \\ &= \frac{5}{7} + \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1^2} + \frac{2}{7} \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Notons immédiatement que la contribution du second ordre du contraste de densité au spectre de puissance n'est pas observable. En effet, l'équation (4.51), dans le spectre de puissance, s'identifie à une simple moyenne sur le noyau \mathcal{F} . Cette contribution s'absorbe dans la normalisation du spectre.

Le gauchissement

Nous avons commencé cette discussion en se proposant d'évaluer l'évolution de la distribution du contraste de densité au cours de l'effondrement gravitationnel. En particulier on se proposait de regarder comment la distribution du contraste s'écartait de la gaussienne. On va calculer les moments d'ordres supérieurs à deux. Dans le cas gaussien, ceux-ci se déduisent tous du moment d'ordre deux. Il va donc s'agir de comparer les moments d'ordres supérieurs à deux à ceux prédits par le théorème de Wick.

Considérons le moment à trois points. Dans le cas gaussien, il est nul. Si ce moment acquiert une valeur non-nulle lorsque l'on prend en compte l'évolution quasi-linéaire, on aura une preuve indubitable d'écart à la distribution gaussienne de matière. Ici, cependant cela ne va plus être le cas. En effet, à l'ordre dominant, on a

$$\begin{aligned} \langle \delta^3 \rangle &= \left\langle \left(\delta^{(1)} + \delta^{(2)} \right)^3 \right\rangle = 3 \langle \delta^{(1)2} \delta^2 \rangle \\ &= 3 D_+^4 \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3 d^3 k_4}{(2\pi)^6} \langle \delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \rangle \mathcal{F}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \cdot \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

On utilise le théorème de Wick pour calculer le corrélateur à quatre points des contrastes de densité initiaux (qui sont eux bien gaussiens)

$$\langle \delta^3 \rangle = 6 D_+^4 \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_3}{(2\pi)^6} P(k_1) P(k_3) \mathcal{F}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3). \quad (4.54)$$

Les dépendances angulaires dans la fonction \mathcal{F} s'intègrent facilement et l'on obtient [Peebles, 1980]

$$\langle \delta^3 \rangle = 3 \frac{D_2}{D_+^2} \langle \delta^2 \rangle^2 = \frac{37}{21} \langle \delta^2 \rangle^2. \quad (4.55)$$

On définira le *gauchissement*, en anglais *skewness* du contraste de densité par

$$S_3 \equiv \frac{\langle \delta^3 \rangle}{\langle \delta^2 \rangle^2}. \quad (4.56)$$

Enfin, ces observables n'ont de sens que filtré à une échelle donnée. Le calcul du gauchissement, en tenant compte du filtrage, pose de nombreuses complications techniques. En effet, le deuxième ordre du contraste de densité filtré s'écrit

$$\delta^{(2)}(\theta_0) = D_+^2 \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{\delta}(\mathbf{k}_1) \tilde{\delta}(\mathbf{k}_2) \mathcal{F}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) W(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| \theta_0). \quad (4.57)$$

L'intégration des dépendances angulaires de la fonction \mathcal{F} et de la fenêtre W peut se révéler très complexe. Il a été montré [Bernardeau, 1994] que ces difficultés s'aplanissent lorsque la fenêtre était en *haut-de-forme* (*top hat*) et que l'on connaît bien les propriétés des fonctions de Bessel³! On peut alors montrer que

$$S_3 = 3 \frac{D_2}{D_+^2} + \frac{d \ln \sigma^2(\theta_0)}{d \ln \theta_0}. \quad (4.58)$$

On a noté $\sigma^2(\theta_0)$ la variance du contraste de densité à l'échelle θ_0 , toujours pour la fenêtre *top-hat*. Lorsque l'on fait l'approximation que le spectre de puissance est une simple fonction de puissance⁴ $P(k) \sim k^n$, la correction due au filtrage se calcule exactement. On a alors

$$S_3 = 3 \frac{D_2}{D_+^2} - (n + 3). \quad (4.59)$$

On verra chapitre 5 la version projetée par l'effet de lentille du gauchissement. Chapitre 10, on verra que, comme annoncé plus haut, ce résultat est très peu modifié dans certains scénarios exotiques.

4.3.3 Évolution profondément non-linéaire.

On va maintenant quitter le développement perturbatif que nous avons suivi plus haut. Nous allons chercher à décrire ce qui se passe à très petite échelle. On va encore une fois raisonner d'abord dans le cas de perturbation de densité sphérique. Au fur et à mesure de l'effondrement de la sur-densité, les particules dont elle est formée voient leur vitesse augmenter. Comme la matière noire est non-collisionnelle, il n'y a pas de raison que les particules s'arrêtent. En fait, elles vont se mettre à osciller dans leur puits de potentiel. Cela arrive lorsque leur énergie cinétique égale l'énergie potentielle de gravité. On parle de *virialisation*. On a alors formé un objet compact. Les amas, les galaxies sont des exemples caractéristiques de ce genre d'objets. Évidemment, dans ces derniers, les baryons que nous avons négligés jusqu'à présent jouent un rôle. C'est néanmoins la matière noire qui représente le gros de la masse de ces objets et explique entre autre les courbes de rotation des galaxies.

Lorsque l'objet est formé, son évolution ultérieure change radicalement. Les observations et les simulations réalisées jusqu'à aujourd'hui semblent indiquer qu'après la virialisation les objets compacts ne changent plus de taille. Plus précisément, le nombre de voisins de chaque particule sur la sphère de rayon comobile R , $\xi(R)$, doit rester stable. Cette hypothèse s'appelle l'Ansatz de *Stable-Clustering* [Peebles, 1974, Davis & Peebles, 1977]. Elle n'est pas nécessairement remplie. Elle a été remise en question par des travaux récents sur des simulations [Ma & Fry, 2000]. Nous admettrons dans la suite qu'elle est vraie. Cette hypothèse amène donc à supposer qu'après la virialisation, le contraste de densité ne doit plus croître en D_+ , mais en $a^{3/2}$, pour que le nombre de voisins⁵ reste constant, c'est-à-dire qu'il croît comme a^3 pour contrer l'expansion. Ce changement d'évolution induit un excès de puissance aux petites échelles (une bosse dans le spectre), puisque celles-ci croissent plus vite que le reste du spectre. La bosse est assez raide, traduisant le fait que la transition entre les régimes est assez rapide. La transition est située aux alentours de 10 Mpc. C'est l'échelle à laquelle on commence à observer des objets.

³peut-on vraiment dire que les difficultés s'aplanissent s'il faut en passer par des propriétés obscures des fonctions de Bessel...

⁴On a vu plus haut que ce n'était pas le cas. Néanmoins, cette approximation peut être rendue moins forte en disant que l'on remplace le spectre, à l'échelle du filtrage, par une loi de puissance. C'est en fait le plus souvent le cas, sauf bien sûr pour une fenêtre pathologique de l'échelle de k_{eq} ! Le résultat sur S_3 reste alors le même.

⁵qui est proche du spectre de puissance

La physique des objets virialisés est mal connue. La théorie de perturbation, dont j'ai esquissé les prémisses plus haut, n'arrive pas encore à reproduire l'évolution du contraste de densité aux échelles où la matière est virialisée. Hamilton *et al.* [Hamilton *et al.*, 1991] ont proposé une description de la transition linéaire/non-linéaire. Leur travail consiste à supposer qu'il existe une fonction f qui assure la transition entre ces régimes

$$\xi_{\text{nl}}(R) = f(\xi(R)). \quad (4.60)$$

L'hypothèse de *stable-clustering* donne l'asymptote à petit R de la fonction

$$f(\xi(R)) \rightarrow \xi(R)^{3/2}. \quad (4.61)$$

À l'inverse, lorsque le rayon est grand, la matière n'est pas encore virialisée et la fonction se comporte comme $f(x) = x$. La proposition de Hamilton *et al.* était avant tout motivée par le fait que les simulations qu'ils avaient à leur disposition, pour différents spectres initiaux en loi de puissance, mais dans le même modèle EdS, donnait le même rapport $\xi/(a^2\xi_0)$. Les auteurs proposèrent aussi une fonction f approchée, calibrée sur leurs simulations.

Peacock et Dodds ont par la suite étendu et affiné cette description [Peacock & Dodds, 1994, Peacock & Dodds, 1996]. Tout d'abord, ils ont montré que la fonction de Hamilton *et al.* pouvait être remplacée par une fonctionnelle sur le spectre de puissance du contraste de densité. Ainsi, ils ont montré qu'il était possible de relier la version linéaire et non-linéaire du spectre de densité sans unité $\Delta^2(k) \equiv k^3 P(k)/(2\pi^2)$ par

$$\Delta_{\text{nl}}^2(k_{\text{nl}}) = f_{\text{nl}}[\Delta^2(k)] \quad (4.62)$$

$$k = (1 + \Delta_{\text{nl}}^2(k_{\text{nl}}))^{-1/3} k_{\text{nl}}. \quad (4.63)$$

On compare donc le spectre non-linéaire à une échelle k_{nl} avec le spectre initial, évolué avec la loi linéaire, à une échelle k . En fait, le mode k est le mode dont est issu la perturbation non linéaire de mode k_{nl} .

D'autre part, Peacock et Dodds ont étendu la méthode à des modèles quelconques. L'asymptote de la fonction à grand k_{nl} doit donc changer pour prendre en compte la croissance en $D_+ \neq a$

$$f_{\text{nl}}[\Delta^2(k)] \rightarrow (\Delta^2(k))^{-3/2} g^{-3}; \quad (4.64)$$

on a noté g le rapport des croissances dans le modèle étudié et dans un modèle EdS

$$g = \frac{D_+}{a}. \quad (4.65)$$

Enfin, les auteurs ont vérifié que la méthode restait valable pour des spectres initiaux différents d'une loi de puissance comme l'est par exemple le spectre CDM dont nous avons donné un aperçu au début de ce chapitre. Il a été montré que le meilleur ajustement était atteint pour une fonctionnelle paramétrée par l'indice spectral "local" (c'est-à-dire pour le mode considéré) du spectre de puissance.

Nous utiliserons la description de Hamilton *et al.*, telle qu'elle a été étendue par Peacock et Dodds dans la suite de ce mémoire. En particulier, nous l'utiliserons dans le chapitre 10, pour évaluer le régime non-linéaire dans des scénarios avec quintessence. Il nous faudra aussi utiliser des spectres non-linéaires produits par cette méthode lorsque nous considérerons les effets de lentilles.

L'effet de lentille gravitationnelle

Sommaire

5.1	Quelques éléments d'optique géométrique	59
5.1.1	Approximation des petites longueurs d'ondes — Équations de Maxwell	60
5.1.2	Rayons lumineux	60
5.1.3	Propagation de l'amplitude et de la polarisation	61
5.2	Équation des mirages gravitationnels	62
5.2.1	Description d'un faisceau lumineux.	62
5.2.2	Équation des lentilles	64
5.2.3	Matrice d'amplification – Convergence et champ de distorsion	68
5.2.4	Spectre de puissance de la convergence	72
5.2.5	Gauchissement projeté – Calcul du troisième moment de la skewness	72
5.3	Distorsions optiques induites par une corde cosmique	73
5.3.1	Une corde cosmique ?	74
5.3.2	Métrique autour d'une corde rectiligne	74
5.3.3	Effet de lentille gravitationnelle d'une corde rectiligne	76
5.3.4	Effet de lentille gravitationnelle d'une corde	78

On appelle effet de lentille gravitationnelle la déviation des rayons lumineux au voisinage d'une masse. Cet effet bien connu est à l'origine d'un des premiers tests de la relativité générale (voir [Misner *et al.*, 1973], boîte 40.1 et [Fomalont & Sramek, 1975]). Dans ce chapitre, j'établis une description de cet effet pour les cas d'intérêt cosmologique. En particulier, je ne traiterai que la limite des petites longueurs d'onde. De plus, je décrirai surtout l'effet dit de *lentilles faibles*. Dans une deuxième partie, je présenterai aussi sommairement l'effet de lentille due à une corde cosmique. Il s'agit alors d'un effet fort. Après avoir présenté la limite des petites longueurs d'onde et les équations de lentilles, je montrerai comment la polarisation de la lumière est affectée par les déviations gravitationnelles.

5.1 Quelques éléments d'optique géométrique

Nous allons revoir quelques résultats d'optique géométrique dans un espace temps courbe. Cette section est fortement inspirée des calculs de [Misner *et al.*, 1973] et [Schneider *et al.*, 1992].

5.1.1 Approximation des petites longueurs d'ondes — Équations de Maxwell

Lorsque l'on étudie les mirages gravitationnels, on s'intéresse avant tout à des ondes planes et raisonnablement monochromatiques. En d'autres termes, on se place dans le cadre classique de l'optique géométrique. Cependant, il faut adapter ce cadre pour qu'il soit valable en relativité générale. En effet, l'onde plane monochromatique n'est pas solution des équations de Maxwell en espace courbe. On va donc devoir travailler avec une solution approchée possédant les propriétés de l'onde plane. Pour ce faire, on va étudier des ondes qui sont le moins possible affectées par les propriétés de courbure de l'espace. On se restreint donc à des solutions dont la longueur d'onde est très petite devant la courbure de la métrique. Qui plus est, pour se rapprocher le plus possible de l'onde monochromatique, on va supposer que l'amplitude et la phase de la solution varie peu par rapport à la fréquence de l'onde. Il s'agit ici de l'approximation *WKB*, classique en optique quantique.

Sous ces hypothèses, la solution approchée des équations de Maxwell s'écrit comme un développement de solutions monochromatiques

$$F_{\alpha\beta} = \Re \left[e^{\frac{i}{\varepsilon} S} \left(A_{\alpha\beta} + \frac{\varepsilon}{i} B_{\alpha\beta} \right) + O(\varepsilon^2) \right]. \quad (5.1)$$

Le premier terme $A_{\alpha\beta}$ est la limite de l'optique géométrique, suffisant en espace plat. Les termes suivants expriment l'écart à la solution classique. Ils sont tous de l'ordre λ^n , où λ est la fréquence caractéristique de l'onde; le paramètre ε n'a pas de dimension. La fréquence S est une fonction réelle de l'espace-temps d'ordre λ^{-1} . Le vecteur d'onde k_α est alors donné par

$$k_\alpha = -S_{,\alpha}. \quad (5.2)$$

Il reste à vérifier que notre solution (5.1) est compatible avec les équations de Maxwell

$$D_\gamma F_{\alpha\beta} + D_\beta F_{\gamma\alpha} + D_\alpha F_{\beta\gamma} = 0 \quad D_\beta F^{\alpha\beta} = 0. \quad (5.3)$$

Ce qui se traduit pour l'ordre en ε^{-1} par,

$$A_{\alpha\beta} k_\gamma + A_{\beta\gamma} k_\alpha + A_{\gamma\alpha} k_\beta = 0 \quad A^{\alpha\beta} k_\beta = 0 \quad (5.4)$$

et pour l'ordre en ε^0

$$B_{\alpha\beta} k_\gamma + B_{\beta\gamma} k_\alpha + B_{\gamma\alpha} k_\beta = D_\gamma A_{\alpha\beta} + D_\beta A_{\gamma\alpha} + D_\alpha A_{\beta\gamma} \quad B^{\alpha\beta} k_\beta = D_\beta A^{\alpha\beta}. \quad (5.5)$$

5.1.2 Rayons lumineux

On retrouve à partir des équations (5.4) et (5.5) les équations des rayons lumineux en espace-temps courbe. Tout d'abord, on montre à l'aide de (5.4) que le vecteur k_α est bien de type lumière $k_\alpha k^\alpha = 0$. Cette remarque nous permet de montrer que la phase S vérifie la version relativiste de l'équation eikonale de l'optique classique

$$\partial_\alpha S \partial^\alpha S = 0. \quad (5.6)$$

Les rayons lumineux sont, par définition les normales aux surfaces de phase constante. D'après l'équation eikonale, on peut alors écrire l'équation des rayons

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = k^\alpha = -\partial^\alpha S. \quad (5.7)$$

Par ailleurs, en se souvenant que le vecteur k_α est un gradient,

$$\frac{\partial k^\beta}{\partial \lambda} \equiv \dot{k}^\beta = k^\alpha D_\alpha k^\beta = k^\alpha D^\beta k_\alpha = \frac{1}{2} D^\beta (k_\alpha k^\alpha) = 0. \quad (5.8)$$

On retrouve le fait que les rayons lumineux sont des géodésiques nulles.

5.1.3 Propagation de l'amplitude et de la polarisation

Je vais maintenant établir les équations décrivant la propagation de l'amplitude du champ et, point sur lequel nous reviendrons souvent, de sa polarisation. Tout d'abord, je vais chercher à exhiber le vecteur polarisation de l'onde. Je cherche une décomposition du tenseur $A_{\alpha\beta}$ en fonction du vecteur d'onde k_α et d'un vecteur complexe orthogonal A_α et qui vérifie les équations de Maxwell (5.4). La décomposition $A_{\alpha\beta} = k_\alpha A_\beta - k_\beta A_\alpha$ convient à notre but. Comme k_α est auto-orthogonal, le vecteur A_α est défini à un multiple du vecteur k_α près. À l'ordre suivant, en suivant (5.5), on obtient

$$[B_{\alpha\beta} - (D_\alpha A_\beta - D_\beta A_\alpha)] k_\gamma + \text{permutations} = 0. \quad (5.9)$$

On peut alors décomposer $B_{\alpha\beta}$ en fonction de A_α , k_α et d'un nouveau vecteur B_α (pas nécessairement orthogonal à k_α) et on tire

$$B_{\alpha\beta} = (k_\alpha B_\beta + D_\alpha A_\beta) - \text{permutation}. \quad (5.10)$$

L'autre partie de (5.5), avec un peu plus de travail, et en se rappelant que $A_\alpha k^\alpha = 0$, donne

$$2(D_\beta A_\alpha) k^\beta + A_\alpha (D_\beta k^\beta) = k_\alpha (B_\beta k^\beta - D_\beta A^\beta). \quad (5.11)$$

On a dit plus haut que le vecteur A_α était défini à un multiple de k_α près. Plus généralement, tout vecteur $\dot{A}_\alpha = A_\alpha + f k_\alpha$, avec f un scalaire quelconque convient. Je vais ici admettre que l'on peut trouver une fonction f telle que le terme de droite de (5.11) s'annule. Il est aisé de montrer que cette fonction est définie à une constante près. On fait donc le choix d'une fonction telle que A_α n'ait que des composantes spatiales. Le vecteur A_α , étant complexe, orthogonal à k_α et spatial s'identifie au vecteur amplitude-polarisation de l'onde et l'on connaît maintenant son équation de propagation le long d'un rayon lumineux

$$\dot{A}_\alpha = -\frac{1}{2} A_\alpha (D_\beta k^\beta). \quad (5.12)$$

Il reste maintenant à étudier la propagation de l'amplitude et de la polarisation. On pose $a \equiv \sqrt{-A_\alpha^* A^\alpha}$ l'amplitude de l'onde, $P_\alpha \equiv A_\alpha/a$ la polarisation. Alors

$$2a\dot{a} = -k^\beta D_\beta (A_\alpha^* A^\alpha) = \frac{1}{2} (D_\beta k^\beta) (A_\alpha^* A^\alpha + A^{\alpha*} A_\alpha) = -a^2 (D_\beta k^\beta), \quad (5.13)$$

d'où l'on tire l'équation d'évolution de l'amplitude de l'onde

$$\dot{a} = -\frac{a}{2} (D_\beta k^\beta). \quad (5.14)$$

Et pour la polarisation, il vient

$$\dot{a}P_\alpha + a\dot{P}_\alpha = -\frac{a}{2} (D_\beta k^\beta) P_\alpha \quad \text{d'où } \dot{P}_\alpha = 0. \quad (5.15)$$

Ce qui montre que le vecteur polarisation de l'onde est transporté parallèlement (est bien toujours orthogonal à k_α lui aussi transporté parallèlement).

On peut tirer de ces deux derniers résultats deux propriétés qui seront très importantes par la suite. Tout d'abord, l'équation (5.14) montre que si jamais l'amplitude s'annule en un point du rayon lumineux, elle s'annule alors pour tout le reste du trajet. Ce résultat nous permettra par la suite de parler de faisceaux lumineux. En effet, si l'on considère les géodésiques au bord d'un faisceau lumineux comme des rayons lumineux d'amplitude nulle, on voit bien qu'en

l'absence d'autres effets physiques, celles-ci resteront des rayons lumineux d'amplitude nulle ; la gravité ne disperse pas le faisceau [Sachs, 1961].

Deuxième propriété importante, la polarisation est transportée parallèlement. En d'autres termes, quelles que soient ses conditions de mesure, en tout point du rayon lumineux, le vecteur polarisation sera identique ; en particulier, une polarisation rectiligne reste rectiligne. Nous verrons plus loin que cette propriété nous permettra de calculer l'effet de lentille gravitationnelle sur la polarisation.

5.2 Équation des mirages gravitationnels

Nous allons maintenant établir l'équation des déviations gravitationnelles dans un univers en expansion. On ne considérera que de petites déviations. Nous suivrons ici la discussion de [Seitz *et al.*, 1994].

5.2.1 Description d'un faisceau lumineux.

Étudier les effets de mirages gravitationnels, c'est étudier la déviation des rayons lumineux les uns par rapport aux autres. En effet, si tous les rayons lumineux subissent la même distorsion, il est impossible de parler de déviation ! Il faut donc pouvoir décrire correctement l'évolution d'un faisceau de géodésiques pour comparer leurs trajets respectifs. On va donc se donner une description de l'ensemble des rayons arrivant en un point de l'espace, que l'on appellera le faisceau lumineux incident. Dans toute la suite, il est nécessaire de se donner un observateur qui mesure les grandeurs associées au faisceau lumineux. On choisira ici, pour simplifier le raisonnement, un observateur au repos à l'origine.

Donnons-nous donc un jeu de géodésiques $x^\alpha(\lambda, \boldsymbol{\theta})$ paramétrées par le vecteur à deux dimensions $\boldsymbol{\theta}$ donnant leur angle d'incidence pour l'observateur au repos à l'origine, et toutes incidentes à l'origine. On a implicitement défini ici un rayon de référence γ_0 pour lequel $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$. On choisit de plus le paramètre d'évolution λ de telle sorte que $\lambda = 0$ corresponde à l'origine — d'où $x^\alpha(0, \boldsymbol{\theta}) = 0$, pour tout α et $\boldsymbol{\theta}$ — et que λ augmente lorsque l'on remonte vers le point d'émission du faisceau lumineux, si bien que le vecteur d'onde k^α est dirigé vers les temps négatifs.

Considérons maintenant deux rayons proches $x^\alpha(\lambda, \boldsymbol{\theta})$ et $x^\alpha(\lambda, \boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta})$. On sait écrire leur séparation

$$\delta x^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta^i} \delta \theta^i \equiv Y^\alpha \delta \theta \quad (5.16)$$

et j'oublierai dans la suite que $\boldsymbol{\theta}$ était un vecteur. Je vais, dans la suite étudier l'évolution du champ de vecteurs-séparation Y^α le long du rayon lumineux de référence. On montre que

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (k_\alpha Y^\alpha) = k_\alpha \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \lambda \partial \theta} + Y^\alpha \frac{dk_\alpha}{d\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (k_\alpha k^\alpha) = 0, \quad (5.17)$$

ce qui implique que le produit $k_\alpha Y^\alpha$ est conservé dans le déplacement. Comme j'ai imposé que tous mes rayons lumineux aboutissent à l'origine en $\lambda = 0$, j'ai $Y^\alpha(\lambda = 0) = 0$, donc $k_\alpha Y^\alpha = 0$ sur tout le trajet. Le vecteur déplacement est donc perpendiculaire au vecteur d'onde tout le faisceau lumineux. De plus, on voit ici que l'on peut définir notre champ de vecteurs déviation à un multiple quelconque de k^α près. On peut donc se placer dans le cas où Y^α est spatial. Dans ces conditions, on voit que le vecteur Y^α est en fait inclus, en chaque point du paramètre λ , dans un plan spatial perpendiculaire à k^α . On se donne donc, le long du rayon lumineux de référence, une base orthonormée, transportée parallèlement, qui décrit le plan du vecteur Y^α , (E_i^α) , pour $i = 1, 2$. On notera maintenant les vecteurs bidimensionnels de ce repère par des caractères gras. Alors, il vient $Y^\alpha = \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{E}^\alpha$. Le vecteur $\boldsymbol{\zeta}$ est donc la distance angulaire entre les deux rayons, dans le plan orthogonal à la propagation.

Je peux maintenant évaluer les variations au cours du temps du champ de vecteurs déviation dans ce repère spatial orthogonal : on peut écrire

$$\frac{\partial Y^\alpha}{\partial \lambda} = \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} \cdot \mathbf{E}^\alpha \quad (5.18)$$

puisque l'on a choisi la base \mathbf{E}^α transportée parallèlement. D'autre part, comme l'on a

$$\frac{\partial Y^\alpha}{\partial \lambda} = D_\beta Y^\alpha k^\beta = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \lambda \partial \theta} = \frac{\partial k^\alpha}{\partial \theta} = D_\beta k^\alpha Y^\beta, \quad (5.19)$$

l'évolution de ζ est donnée par

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} \cdot \mathbf{E}^\alpha = \zeta \cdot D_\beta k^\alpha \mathbf{E}^\beta, \quad (5.20)$$

en vertu de quoi, l'on sait calculer l'équation d'évolution des positions des rayons du faisceau dans le plan spatial perpendiculaire à la propagation

$$\dot{\zeta} = S \zeta, \quad \text{où } S \text{ est la matrice de terme général } S_{ij} = E_i^\alpha D_\alpha k^\beta E_j^\beta. \quad (5.21)$$

On peut relier les termes de S aux scalaires optiques définis par Sachs [Sachs, 1961]. On va sauter cette étape et directement écrire une équation du mouvement pour ζ . En effet, la dérivée seconde du vecteur séparation s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y^\alpha}{\partial \lambda^2} &= (D_\gamma D_\beta k^\alpha) Y^\beta k^\gamma + \underbrace{D_\beta k^\alpha D_\gamma Y^\beta k^\gamma}_{D_\beta k^\alpha D_\gamma k^\beta Y^\gamma} = (D_\gamma D_\beta k^\alpha) Y^\beta k^\gamma + (D_\gamma D_\beta k^\alpha) Y^\gamma k^\beta \\ &= ((D_\gamma D_\beta - D_\beta D_\gamma) k^\alpha) Y^\beta k^\gamma = R_{\nu\gamma\beta}^\alpha k^\nu Y^\beta k^\gamma, \end{aligned} \quad (5.22)$$

où l'on a fait apparaître le *tenseur de Riemann*, $R_{\nu\gamma\beta}^\alpha$, résultat de la commutation des dérivées covariantes. On ré-écrit cette dernière équation pour le vecteur ζ

$$\ddot{\zeta} = \mathcal{T} \zeta \quad \text{où } \mathcal{T} \text{ est la matrice de terme général } \mathcal{T}_{ij} = E_i^\alpha R_{\alpha\nu\gamma\beta} k^\nu k^\gamma E_j^\beta. \quad (5.23)$$

Pour finir, on va profiter des propriétés du tenseur de Riemann et l'exprimer en terme du *Tenseur de Weyl* et du tenseur de Ricci. On a

$$R_{\sigma\rho}^{\mu\nu} = C_{\sigma\rho}^{\mu\nu} - 2g_{[\sigma}^{\mu} R_{\rho]}^{\nu]} - \frac{1}{3} R g_{[\sigma}^{\mu} g_{\rho]}^{\nu]}, \quad (5.24)$$

avec $C_{\sigma\rho}^{\mu\nu}$ le tenseur de Weyl, R_{σ}^{μ} , le tenseur de Ricci et R , la courbure scalaire. On montre que la matrice \mathcal{T} se décompose en une matrice proportionnelle à l'identité et en une matrice de trace nulle, symétrique

$$\mathcal{T} = -\frac{1}{2} R_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta \text{Id} + C_{\gamma\beta}^{\alpha\nu} k_\nu k^\gamma \begin{bmatrix} E_{1\alpha} E_1^\beta & E_{1\alpha} E_2^\beta \\ E_{2\alpha} E_1^\beta & E_{2\alpha} E_2^\beta \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

La première partie de l'équation (5.25), la partie proportionnelle à l'identité, montre comment le tenseur de Ricci dirige la focalisation du faisceau lumineux. La deuxième partie de l'équation est un peu plus complexe. En effet, j'ai annoncé plus haut qu'elle était symétrique de trace nulle, ce qui n'est pas évident *a priori*. Tout d'abord, il faut utiliser la symétrie $C_{\gamma\beta}^{\alpha\nu} = C_{\nu\alpha}^{\beta\gamma}$, pour montrer que les deux termes hors de la diagonale sont égaux. Ensuite, on montre que la trace de la matrice est nulle en remarquant que le terme $E_{1\alpha} E_1^\beta + E_{2\alpha} E_2^\beta$ est un projecteur sur le plan (E_1^α, E_2^α) et que la trace de la matrice se ramène à une contraction du tenseur de

Weyl sur ce plan. Ce deuxième terme donne donc la déformation de la section du faisceau. On écrira, pour mettre en évidence cette propriété, la matrice \mathcal{T} sous la forme classique

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \mathcal{R} - \Re(\mathcal{F}) & \Im(\mathcal{F}) \\ \Im(\mathcal{F}) & \mathcal{R} + \Re(\mathcal{F}) \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

et l'on a introduit les fonctions classiques

$$\mathcal{R} \equiv -\frac{1}{2}R_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta \quad (5.27)$$

$$\mathcal{F} \equiv -\frac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{*\alpha}k^\beta k^\delta \epsilon^{*\gamma}, \quad \epsilon^\alpha \equiv E_1^\alpha + iE_2^\alpha. \quad (5.28)$$

Il reste, pour clore la discussion, à remarquer que l'on peut choisir notre base de vecteurs E^α de telle sorte que les coordonnées du vecteur bidimensionnel ζ coïncide, à l'origine, avec notre paramètre de description du faisceau lumineux, θ , $\dot{\zeta}(\lambda = 0) = \theta$. Enfin, le fait que l'équation différentielle (5.23) soit linéaire, et puisque à l'origine, $\zeta = \mathbf{0}$ nous permet de dire qu'elle accepte une solution de la forme $\zeta = a\mathcal{D}(\lambda)\theta$. Ainsi, on obtient l'équation d'évolution de la matrice des correspondances \mathcal{D}

$$\frac{d^2(a\mathcal{D})}{d\lambda^2} = a\mathcal{T}\mathcal{D}, \quad \dot{\mathcal{D}}(\lambda = 0) = \text{Id} \quad \mathcal{D}(\lambda = 0) = 0 \quad \text{et en tout } \lambda \quad \zeta = a\mathcal{D}\theta. \quad (5.29)$$

Il est notable, ici, que si la matrice \mathcal{T} était symétrique, ce n'est pas nécessairement le cas pour la matrice des correspondances. Nous verrons cependant dans la suite qu'elle pourra être approchée dans la plupart des cas par une matrice symétrique.

Remarquons enfin que les équations que l'on a écrites sont valables en fait quelque soit la direction de propagation. On choisira donc λ tel que $\lambda = 0$ soit la position de l'observateur, $z = 0$. Tout se passe comme si l'on propageait le photon en direction de sa source! Le vecteur $\zeta(\lambda = \lambda_S)$ est alors la position de la source du photon dans le plan d'émission.

5.2.2 Équation des lentilles

On va maintenant résoudre l'équation (5.29). On va de nouveau se placer dans le cadre de petites perturbations autour du modèle homogène isotrope. On ne considérera que les perturbations scalaires. En effet, on cherche ici des effets de petite échelle. Les perturbations tensorielles ne sont significatives qu'à grande échelle.

La métrique peut alors s'écrire sous la forme

$$ds^2 = -(1 + 2\Psi) dt^2 + a^2 (1 - 2\Phi) \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (5.30)$$

Et l'on rappelle que l'on a, sous l'horizon,

$$\Delta\Phi = \frac{3}{2}H^2\Omega\delta, \quad \Phi = \Psi. \quad (5.31)$$

En écrivant les tenseurs de Ricci et de Weyl, on obtient les expressions pour les fonctions \mathcal{R} et \mathcal{F}

$$\mathcal{R} = -4\pi G a^{-2} \bar{\rho} - a^{-2} \Delta_{2D} \Phi \quad (5.32)$$

$$\mathcal{F} = -a^{-2} (\partial_{11} \Phi - \partial_{22} \Phi + 2i\partial_{12} \Phi). \quad (5.33)$$

La matrice \mathcal{T} est alors

$$\mathcal{T} = -4\pi G \bar{\rho} a^{-2} \text{Id} - 2a^{-2} \begin{pmatrix} \partial_{11} & \partial_{12} \\ \partial_{21} & \partial_{22} \end{pmatrix} \Phi. \quad (5.34)$$

Solution homogène

La solution sans perturbation est alors

$$\mathcal{T}^{(0)} = -\frac{3}{2}\Omega_0 a^{-5} \text{Id}. \quad (5.35)$$

On a utilisé dans cette équation l'égalité

$$4\pi G\bar{\rho} = 3/2 \Omega_0 a^{-3}, \quad (5.36)$$

Ω_0 étant le paramètre cosmologique de la matière aujourd'hui. On a vu au chapitre 1 que la densité de matière variait comme a^{-3} . L'équation (5.29) se réduit à

$$\frac{d^2(aD)}{d\lambda^2} = -\frac{3}{2}\Omega_0 a^{-4} D, \quad (5.37)$$

en laquelle on reconnaît l'équation différentielle de la distance angulaire [Weinberg, 1972]. Cette équation est communément appelée *l'équation de Dyer-Roeder* [Dyer & Roeder, 1973]. La solution en est bien connue

$$D = D_0 \text{Id}, \quad (5.38)$$

avec

$$D_0(z) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sinh \left(\sqrt{K} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right). \quad (5.39)$$

On retrouve l'équation liant le diamètre angulaire et la direction sur le ciel

$$\zeta(z) = aD_0(z)\theta. \quad (5.40)$$

Univers inhomogène – Calcul au premier ordre

Nous allons résoudre maintenant l'équation pour un univers inhomogène. Résoudre l'équation dans toute sa généralité est difficile. On va donc profiter du fait que l'on a supposé les perturbations petites pour se livrer à une décomposition perturbative. Au premier ordre, on a

$$\frac{d^2(aD^{(1)})}{d\lambda^2} = a\mathcal{T}^{(0)}D^{(1)} + a\mathcal{T}^{(1)}D^{(0)}. \quad (5.41)$$

L'ordre 1 de la solution doit aussi vérifier

$$D^{(1)}(z=0) = 0 \quad \left. \frac{dD^{(1)}}{d\lambda} \right|_{z=0} = 0. \quad (5.42)$$

L'ordre 0 du développement s'identifie à la solution homogène. La matrice \mathcal{T} au premier ordre est

$$\mathcal{T}^{(1)} = -\frac{3}{2}\Omega_0 a^{-5} \begin{pmatrix} \partial_{11} & \partial_{12} \\ \partial_{21} & \partial_{22} \end{pmatrix} \varphi^{(1)}. \quad (5.43)$$

On a défini le champ φ par

$$\Delta\varphi \equiv 2\frac{\Delta\Phi}{4\pi G\bar{\rho}} = 2\delta. \quad (5.44)$$

Le premier ordre de φ correspond alors à l'ordre linéaire de δ que l'on a calculé au chapitre 4. Le potentiel effectif que subissent les photons est le double de celui prédit par la gravitation newtonienne. On retrouve dans cette équation un résultat classique de relativité générale : les

particules relativistes dans un champ gravitationnel subissent une déviation double de celle subie par des particules non relativistes [Misner *et al.*, 1973].

Enfin, les dérivées ∂_{ij} sont définies dans le plan perpendiculaire à la propagation. On va admettre dans la suite, que l'on peut travailler dans l'approximation des petites déviations. C'est-à-dire que seuls les puits de potentiels dans le plan perpendiculaire à la propagation contribuent à l'effet de lentille, de sorte que l'on peut écrire

$$\Delta_{2D}\varphi = (\partial_{11} + \partial_{22})\varphi \sim \Delta\varphi. \quad (5.45)$$

Notons enfin qu'au premier ordre, on doit calculer ce laplacien le long de la ligne de visée homogène. Ce développement perturbatif correspond en fait à l'approximation de *Born*.

Finalement, l'équation s'écrit

$$\frac{d^2(aD^{(1)})}{d\lambda^2} + \frac{3}{2}\Omega_0 a^{-4} D^{(1)} = -\frac{3}{2}\Omega_0 a^{-4} D_0 \begin{pmatrix} \partial_{11} & \partial_{12} \\ \partial_{21} & \partial_{22} \end{pmatrix} \varphi^{(1)}. \quad (5.46)$$

On connaît la solution homogène de l'équation (5.46). On peut obtenir la solution générale par une méthode de variation de la constante [Van Waerbeke, 1997]

$$D^{(1)}(z) = -\frac{3}{2}\Omega_0 \int \frac{dz'}{H(z')} \frac{\mathcal{D}_0(z')\mathcal{D}_0(z, z')}{a} \begin{pmatrix} \partial_{11} & \partial_{12} \\ \partial_{21} & \partial_{22} \end{pmatrix} \varphi^{(1)}. \quad (5.47)$$

La fonction $\mathcal{D}_0(z, z')$ s'identifie à la distance angulaire entre deux décalages vers le rouge

$$\mathcal{D}_0(z, z') = \frac{1}{\sqrt{K}} \sinh \left(\sqrt{K} \int_z^{z'} \frac{dz''}{H(z'')} \right). \quad (5.48)$$

Cas d'une masse ponctuelle

On va voir quelle est maintenant l'équation des lentilles pour une masse ponctuelle $z = z_{\text{lentille}}$. Dans ce cas, le potentiel est à symétrie sphérique

$$\partial_{11}\varphi = \partial_{22}\varphi = \frac{1}{2}\Delta\varphi \quad (5.49)$$

$$\partial_{21}\varphi = \partial_{12}\varphi = 0. \quad (5.50)$$

Par ailleurs, d'après (5.44), le terme $3/2 \Omega_0 \partial_{ij}\varphi$ s'identifie au double du potentiel newtonien $\partial_{ij}\Phi_{\text{newt}}$. Enfin, on va se placer dans l'approximation des lentilles minces. Les distances cosmologiques sont grandes devant la taille du puits de potentiel, si bien que l'on peut faire comme si celui-ci était confiné dans un plan en $z = z_{\text{lentille}}$. Finalement, on peut écrire l'équation de la position angulaire observée θ_{I} en fonction de la position angulaire initiale θ_{S}

$$\theta_{\text{I}} = \frac{\zeta(z_{\text{S}}, \theta_{\text{I}})}{a\mathcal{D}_0(z_{\text{S}})} = \theta_{\text{S}} - \frac{2}{c^2} \frac{\mathcal{D}_0(z_{\text{lentille}})\mathcal{D}_0(z_{\text{lentille}}, z_{\text{S}})}{\mathcal{D}_0(z_{\text{S}})} \nabla_{2D}\Phi_{\text{newt}}(\theta_{\text{I}}). \quad (5.51)$$

On a fait réapparaître, dans cette dernière équation la vitesse de la lumière. C'est l'équation classique de l'effet d'une masse agissant comme lentille gravitationnelle. On montre figure 5.1 l'effet d'une lentille gravitationnelle ponctuelle.

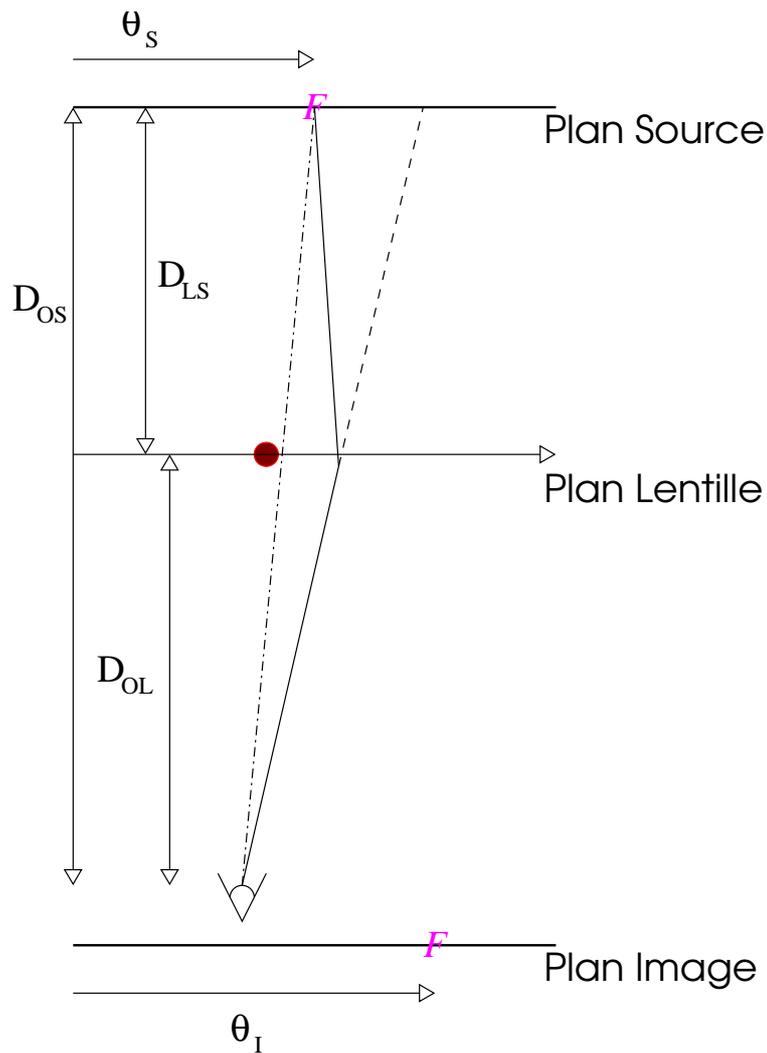


FIG. 5.1 – Effet d’une lentille ponctuelle. L’observateur voit un objet F au point θ_I dans son plan image. En fait, les photons émis par l’objets proviennent de la position θ_S du plan source. Leur trajectoire est déviée sur le plan lentille qui agit dans ce cas là comme une lentille mince.

Fonction d'efficacité

Finalement, l'effet de lentille, à cet ordre, se comprend comme la projection du gradient des potentiels gravitationnels le long de la ligne de visée. La projection n'est pas une simple somme des potentiels. La ligne de visée est pondérée par la fonction d'efficacité

$$w(z', z) = -\frac{3}{2}\Omega_0 \frac{\mathcal{D}_0(z')\mathcal{D}_0(z, z')}{\mathcal{D}_0(z)}. \quad (5.52)$$

Dans un espace plat, les distances angulaires s'identifient à la distance comobile, si bien que

$$\mathcal{D}_0(z, z') = \mathcal{D}_0(z') - \mathcal{D}_0(z). \quad (5.53)$$

Cette fonction, en terme des distances angulaires est donc une parabole concave. À distance du plan source fixée, le sommet de la parabole est atteint pour $\mathcal{D}_0(z_L) = \mathcal{D}_0(z_S)/2$. Les lentilles situées au milieu entre la source et l'observateur sont celles qui contribuent le plus.

5.2.3 Matrice d'amplification – Convergence et champ de distorsion

En général, on décrit l'effet de lentille en terme de la matrice d'amplification. Celle-ci est définie par

$$\mathcal{A}^{ij}(\theta_S) \equiv \frac{\partial \theta_I}{\partial \theta_S}. \quad (5.54)$$

En fait, cette matrice n'est pas facile à écrire et à étudier. On utilisera plus facilement son inverse

$$\mathcal{A}^{-1} \equiv \left\{ \frac{\partial \theta_S}{\partial \theta_I} \right\} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}. \quad (5.55)$$

Convergence et Distorsion

On a donné dans cette dernière équation la paramétrisation de la matrice d'amplification en terme du champ de convergence κ et du champ de *déchirement* ou *distorsion* (*shear*) γ . La convergence correspond à l'amplification isotrope subit par l'image. Lorsque γ est nul, l'image est amplifiée d'un facteur $1 + \kappa$. Le champ de déchirement correspond à une amplification anisotrope. La matrice formée uniquement des composantes γ_i forme une matrice de rotation. Cette composante de rotation donne une orientation privilégiée à la matrice \mathcal{A}^{-1} .

Notre paramétrisation de la matrice d'amplification suppose qu'il ne peut y avoir que deux types de déformations. Mathématiquement, il existe des déformations continues du plan beaucoup plus complexes. On les autoriserait dans la matrice en relaxant l'hypothèse $\mathcal{A}_{12}^{-1} = \mathcal{A}_{21}^{-1}$. On montrera, qu'au moins au premier ordre, et plus généralement dans l'approximation de Born, que l'effet de lentille n'engendre pas de déformations plus complexes. En fait, la matrice d'amplification est une reformulation de la matrice de déformation \mathcal{D} qui n'est valable que lorsque cette dernière est effectivement symétrique.

Notons que lors d'une rotation du repère, seules vont être modifiées les composantes γ_i . Le champ κ étant l'amplification isotrope, il va se transformer comme un simple scalaire. Par contre, les γ_i vont se mélanger. Il est facile de voir que le vecteur γ est un spineur-2. En fait pour une amplification anisotrope, une élongation, l'orientation est définie à π près. Le calcul du changement de repère par rotation s'écrit

$$\tilde{\mathcal{A}}^{-1} = R^{-1} \tilde{\mathcal{A}}^{-1} R, \quad (5.56)$$

où l'on note R la matrice de rotation du nouveau repère vers l'ancien. Le calcul donne

$$\tilde{\mathcal{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - (\cos 2\beta \gamma_1 - \sin 2\beta \gamma_2) & -(\cos 2\beta \gamma_2 + \sin 2\beta \gamma_1) \\ -(\cos 2\beta \gamma_2 + \sin 2\beta \gamma_1) & 1 - \kappa + (\cos 2\beta \gamma_1 - \sin 2\beta \gamma_2) \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

qui est bien le résultat annoncé. La situation est mathématiquement identique à celle de la polarisation, chapitre 3.

Expression en fonction du déplacement

Dans la suite, on écrira l'équation des lentilles sous la forme

$$\boldsymbol{\theta}_I = \boldsymbol{\theta}_S + \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\theta}_I). \quad (5.58)$$

Le vecteur $\boldsymbol{\xi}$ est le déplacement induit par les lentilles. La convergence et le déchirement de l'effet de lentille s'écrivent simplement en fonction de $\boldsymbol{\xi}$

$$\kappa = -\frac{1}{2}(\xi_{1,1} + \xi_{2,2}) \quad (5.59)$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2}(\xi_{1,1} - \xi_{2,2}) \quad (5.60)$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{2}(\xi_{1,2} + \xi_{2,1}) = \xi_{1,2} \quad (5.61)$$

On utilisera abondamment ces relations dans les chapitres suivants.

Effet de lentille faible

Dans le cas du point massif étudié plus haut, la matrice d'amplification est une matrice diagonale. En effet, la géométrie sphérique du potentiel ne donne pas de direction privilégiée à l'effet de lentille. Pour une lentille épaisse, on revient à l'équation (5.47). On peut calculer, comme dans le cas de la masse ponctuelle, la relation entre plan source et plan image

$$\boldsymbol{\theta}_I = \boldsymbol{\theta}_S - \frac{3}{2}\Omega_0 \int \frac{dz'}{H(z')} \frac{1}{a} \frac{\mathcal{D}_0(z')\mathcal{D}_0(z, z')}{\mathcal{D}_0(z)} \begin{pmatrix} \partial_{11} & \partial_{12} \\ \partial_{21} & \partial_{22} \end{pmatrix} \varphi^{(1)} \boldsymbol{\theta}_I. \quad (5.62)$$

En fait, il s'agit de l'effet de lentille induit par les grandes structures. Cet effet a été particulièrement étudié comme une modification de l'orientation observée des galaxies [Gunn, 1967] [Blandford *et al.*, 1991] [Miralda-Escude, 1991] [Kaiser, 1992]. Il a été pour la première fois détecté dans ce cadre en 2000 par trois équipes indépendantes [van Waerbeke *et al.*, 2000b] [Bacon *et al.*, 2000] [Wittman *et al.*, 2000]. On reparlera plus loin (chapitre 8) des méthodes utilisées pour la détection de ce phénomène.

On peut calculer la convergence et le déchirement pour cet effet de lentille

$$\kappa = -\frac{3}{2}\Omega_0 \int \frac{dz'}{H(z')} \frac{1}{a} \frac{\mathcal{D}_0(z')\mathcal{D}_0(z, z')}{\mathcal{D}_0(z)} \delta^{(1)}(\boldsymbol{\theta}, z) \quad (5.63)$$

$$\gamma_1 = -\frac{3}{2}\Omega_0 \int \frac{dz'}{H(z')} \frac{1}{a} \frac{\mathcal{D}_0(z')\mathcal{D}_0(z, z')}{\mathcal{D}_0(z)} \frac{(\partial_{11} - \partial_{22})}{2} \varphi^{(1)}(\boldsymbol{\theta}, z) \quad (5.64)$$

$$\gamma_2 = -\frac{3}{2}\Omega_0 \int \frac{dz'}{H(z')} \frac{1}{a} \frac{\mathcal{D}_0(z')\mathcal{D}_0(z, z')}{\mathcal{D}_0(z)} \frac{(\partial_{21} + \partial_{12})}{2} \varphi^{(1)}(\boldsymbol{\theta}, z). \quad (5.65)$$

On a utilisé l'équation (5.44) pour exprimer κ en fonction du contraste de densité. On exprimera ces champs dans l'espace de Fourier

$$\kappa = \frac{3}{2}\Omega_0 \int \frac{dz'}{H(z')} \frac{1}{a} \frac{\mathcal{D}_0(z')\mathcal{D}_0(z, z')}{\mathcal{D}_0(z)} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \delta^{(1)}(\mathbf{k}, z) e^{i(k_r \chi(z) + \mathcal{D}_0(z)\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\theta})} \quad (5.66)$$

$$\gamma_1 = \frac{3}{2}\Omega_0 \int \frac{dz'}{H(z')} \frac{1}{a} \frac{\mathcal{D}_0(z')\mathcal{D}_0(z, z')}{\mathcal{D}_0(z)} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\cos^2 \hat{\mathbf{k}}_\perp}{2} \delta^{(1)}(\mathbf{k}, z) e^{i(k_r \chi(z) + \mathcal{D}_0(z)\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\theta})} \quad (5.67)$$

$$\gamma_2 = \frac{3}{2}\Omega_0 \int \frac{dz'}{H(z')} \frac{1}{a} \frac{\mathcal{D}_0(z')\mathcal{D}_0(z, z')}{\mathcal{D}_0(z)} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sin^2 \hat{\mathbf{k}}_\perp}{2} \delta^{(1)}(\mathbf{k}, z) e^{i(k_r \chi(z) + \mathcal{D}_0(z)\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\theta})} \quad (5.68)$$

On a utilisé dans ces dernières équations les notations : $\hat{\mathbf{k}}_{\perp}$, l'angle du vecteur-d'onde dans le plan orthogonal à la propagation \mathbf{k}_{\perp} , ainsi que χ , la distance comobile

$$\chi(z) \equiv \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (5.69)$$

Symétrie de la matrice d'amplification

Encore une fois, ces expressions nous rappellent des équations déjà vues pour la polarisation. En fait, on peut comme pour les variables de Stokes Q et U calculer la composante *électrique* \mathcal{E} et la composante *magnétique* \mathcal{B} du champ de distorsion. On obtient

$$\Delta\mathcal{E} \equiv (\partial_{11} - \partial_{22})\gamma_1 + 2\partial_{12}\gamma_2 = \Delta\kappa \quad (5.70)$$

$$\Delta\mathcal{B} \equiv (\partial_{11} - \partial_{22})\gamma_2 - 2\partial_{12}\gamma_1 = 0. \quad (5.71)$$

Comme φ est un champ scalaire, le champ de distorsion n'a pas de partie magnétique. Sa partie électrique s'identifie à la convergence. En fait, l'absence de partie magnétique nous montre que le champ vectoriel de distorsion est un champ potentiel. Donc que le champ vectoriel de déplacement $\boldsymbol{\xi}$ est lui aussi potentiel. On justifie *a posteriori* notre description de la matrice d'amplification. Au premier ordre, pour un effet de lentille faible, la matrice d'amplification est symétrique. En fait, cette propriété tient surtout à l'approximation de Born. À tous les ordres, le champ φ conserve sa propriété scalaire. C'est aussi vrai dans le cas d'une lentille engendrée par une répartition de masse quelconque (dans l'approximation des lentilles minces). Dans tous les cas, le potentiel résultant est scalaire, si bien que la matrice d'amplification reste symétrique. Si par contre l'on s'écarte de l'approximation de Born et que l'on calcule, pour une lentille épaisse, l'effet de lentille sur la vraie ligne de visée, la propriété de symétrie sur la matrice \mathcal{A}^{-1} n'est plus assurée. Le premier ordre où cette modification peut apparaître est le deuxième ordre. Un système simple présentant cette particularité serait le cas où les rayons lumineux subissent l'effet consécutif de deux lentilles minces (voir figure 5.2). Au deuxième ordre, on doit calculer l'effet de la deuxième lentille, non sur la ligne de visée homogène, mais sur le chemin perturbé par la première lentille. Avec les notations de la figure, il vient

$$\boldsymbol{\theta}_I = \boldsymbol{\theta}_S + \boldsymbol{\xi}_a(\boldsymbol{\theta}_I) + \boldsymbol{\xi}_b(\boldsymbol{\theta}_L). \quad (5.72)$$

Il est immédiat de voir que la matrice d'amplification s'écrit alors

$$\begin{aligned} \{\mathcal{A}^{-1}\}_j^i &= \left\{ \frac{\partial\boldsymbol{\theta}_S}{\partial\boldsymbol{\theta}_I} \right\}_j^i \\ &= \text{Id}_j^i - \left\{ \frac{\partial\boldsymbol{\xi}_a}{\partial\boldsymbol{\theta}_I} \right\}_j^i - \left\{ \frac{\partial\boldsymbol{\xi}_b}{\partial\boldsymbol{\theta}_L} \right\}_j^i + \frac{\mathcal{D}_0(L_a, L_b)\mathcal{D}_0(0, S)}{\mathcal{D}_0(0, L_b)\mathcal{D}_0(L_b, S)} \left\{ \sum_k \frac{\partial\xi_a^i}{\partial\theta_I^k} \frac{\partial\xi_b^k}{\partial\theta_L^j} \right\}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Dans ce cas, la matrice n'a en effet plus de raison d'être symétrique. En effet, on a alors

$$\mathcal{A}_{12}^{-1} - \mathcal{A}_{21}^{-1} = 2\gamma_1^a\gamma_2^b - \gamma_1^b\gamma_2^a, \quad (5.74)$$

qui n'est pas nul dans le cas général. Dans le cas de lentilles faibles induites par les grandes structures, le calcul numérique donne néanmoins $\mathcal{A}_{12}^{-1} - \mathcal{A}_{21}^{-1} \sim 0$. On pourra toujours supposer que la matrice d'amplification est symétrique. On aura besoin de ces propriétés au chapitre 9.

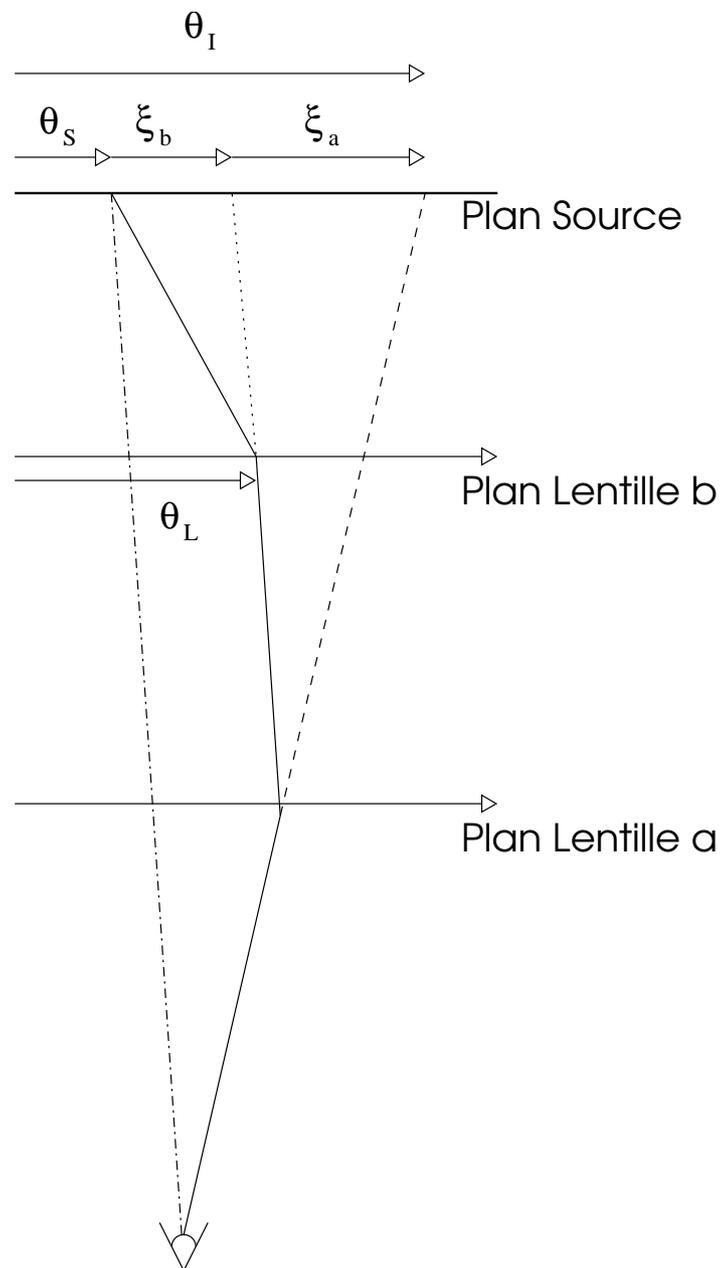


FIG. 5.2 – Couplage de deux plans lentilles. Les photons sont déviés par les plans lentilles a et b .

5.2.4 Spectre de puissance de la convergence

On va maintenant calculer le spectre de puissance de la convergence pour les lentilles induites par les grandes structures. C'est un effet de lentille faible. On peut effectuer le calcul à l'ordre dominant, c'est-à-dire dans l'approximation présentée plus haut. A cet ordre, d'ailleurs, la convergence est simplement la projection du contraste de densité avec la pondération de la fonction d'efficacité, si bien que la convergence conserve les propriétés statistiques du contraste de densité. On s'attend donc à ce que la convergence soit gaussienne et que son spectre la décrive complètement.

Si W est la fenêtre choisie, la variance de κ à l'échelle θ_0 s'écrit

$$\begin{aligned} \langle \kappa \rangle_{\theta_0} &= \int \frac{dz_1}{H(z_1)} \frac{dz_2}{H(z_2)} w(z_1) w(z_2) \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^{3/2}} \\ &\quad \times \frac{1}{a^2} \left\langle \delta^{(1)}(\mathbf{k}_1, z_1) \delta^{(1)}(\mathbf{k}_2, z_2) \right\rangle W(\mathcal{D}_0(z_1) k_{1\perp} \theta_0) W(\mathcal{D}_0(z_2) k_{2\perp} \theta_0) e^{i(k_{1r} \chi_1 + k_{2r} \chi_2)}. \end{aligned} \quad (5.75)$$

On va encore une fois invoquer l'approximation des petits angles pour dire qu'en fait seul contribue le potentiel dans le plan orthogonal à la propagation. On connaît le corrélateur

$$\left\langle \delta^{(1)}(\mathbf{k}_1, z) \delta^{(1)}(\mathbf{k}_2, z) \right\rangle = P(k_1, z) \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2). \quad (5.76)$$

Avec l'approximation des petits angles, on va dire qu'en fait

$$P(k, z) \sim P(k_\perp, z). \quad (5.77)$$

En intégrant sur les deltas de Dirac, on obtient l'expression finale de la variance

$$\langle \kappa \rangle_{\theta_0} = \int \frac{dz}{H(z)} w(z)^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{P(k, z)}{a^2} W(\mathcal{D}_0(z) k \theta_0)^2. \quad (5.78)$$

On rappelle enfin qu'au premier ordre, $P(k, z) = a^2 g(z)^2 P(k)$, si bien que

$$\langle \kappa \rangle_{\theta_0} = \int \frac{dz}{H(z)} w(z)^2 g(z)^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} P(k) W(\mathcal{D}_0(z) k \theta_0)^2. \quad (5.79)$$

Pour une discussion très complète de cette variance voir [Bernardeau *et al.*, 1997] ainsi que [Jain & Seljak, 1997] qui prend aussi en compte l'évolution non-linéaire du spectre.

5.2.5 Gauchissement projeté – Calcul du troisième moment de la skewness

Comme pour le contraste de densité, on peut aller regarder les ordres suivants de la convergence. En fait, comme celle-ci, au moins au premier ordre, est une projection du contraste de densité, on s'attend à ce que l'apparition des non-gaussianités, liée à l'évolution gravitationnelle, induise des moments d'ordres supérieurs non-nuls dans la convergence.

Deuxième ordre de \mathcal{D}

Pour effectuer ce calcul, il faut tout d'abord calculer la solution au deuxième ordre de l'équation (5.29). Il vient

$$\frac{d^2(aD^{(2)})}{d\lambda^2} + \frac{3}{2}\Omega_0 a^{-4} D^{(2)} = -\frac{3}{2}\Omega_0 a^{-4} D_0 \begin{pmatrix} \partial_{11} & \partial_{12} \\ \partial_{21} & \partial_{22} \end{pmatrix} \varphi^{(2)} + a\mathcal{T}^{(1)}\mathcal{D}^{(1)}. \quad (5.80)$$

Il y a maintenant deux termes de source pour l'équation. Le premier est similaire à celui de l'équation différentielle de $\mathcal{D}^{(1)}$ (5.46). Il va donc nous donner exactement la même expression

que pour $\mathcal{D}^{(1)}$, mais avec cette fois-ci le deuxième ordre du développement perturbatif en δ . Le deuxième terme de source s'identifie alors avec l'écart à l'approximation de Born. C'est le terme de couplage à deux plans lentilles. Comme pour $\mathcal{D}^{(1)}$, on peut calculer la solution générale de l'équation différentielle (avec les mêmes conditions initiales) en utilisant une méthode de variation de la constante autour de la solution $\mathcal{D}^{(1)}$

$$D_{ij}^{(2)}(z) = -\frac{3}{2}\Omega_0 \int \frac{dz'}{H(z')} \frac{\mathcal{D}_0(z')\mathcal{D}_0(z, z')}{a} \left(\varphi_{,ij}^{(2)} + \frac{\varphi_{,ik}^{(1)}\mathcal{D}_{kj}^{(1)}(z')}{\mathcal{D}_0(z')} \right). \quad (5.81)$$

Le deuxième terme dans l'équation (5.81) correspond bien au couplage de lentille. C'est le pendant du terme de couplage de l'équation (5.73). Dans la suite, on oubliera ce terme pour rester dans l'approximation de Born. On peut montrer (CITE) que pour un plan source aux alentours de $z = 1$, l'écart à l'approximation de Born n'est qu'une petite correction au gauchissement. On verra au chapitre 9, où nous reviendrons sur ces calculs, que cela n'est plus vrai lorsque l'on considère des effets de lentille sur le rayonnement de fond.

Gauchissement

Dans l'approximation de Born, en utilisant (4.51) le deuxième ordre de la convergence va donc être donné par

$$\begin{aligned} \kappa^{(2)} = & \frac{3}{2}\Omega_0 \int \frac{dz'}{H(z')} \frac{1}{a} \frac{\mathcal{D}_0(z')\mathcal{D}_0(z, z')}{\mathcal{D}_0(z)} \\ & \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} \mathcal{F}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \delta^{(1)}(k, z) \delta^{(1)}(k', z) e^{i((k_r+k'_r)\chi(z)+\mathcal{D}_0(z)(\mathbf{k}_\perp+\mathbf{k}'_\perp)\cdot\boldsymbol{\theta})}. \end{aligned} \quad (5.82)$$

La fonction de couplage \mathcal{F} est donnée par l'équation (4.52). Comme pour le contraste de densité, on va calculer le troisième moment de la convergence pour en déduire le gauchissement projeté du champ

$$s_3 = \frac{\langle \kappa^3 \rangle}{\langle \kappa^2 \rangle^2}. \quad (5.83)$$

Je ne détaillerai pas ici les calculs. En tenant compte du filtrage, pour un filtre *top-hat*, on peut montrer que dans un espace EdS, comme dans le cas du gauchissement tri-dimensionnel, on obtient une expression fonction de l'indice spectral à l'échelle de filtrage et du décalage vers le rouge du plan source. Le calcul est plus pénible que dans le cas tridimensionnel ; les identités que l'on doit invoquer sur les fonctions de Bessel sont beaucoup moins simples. L'expression finale est donnée dans [Bernardeau *et al.*, 1997]. Retenons seulement que la skewness significative à $z = 1$, $s_3 \sim 42$, mais beaucoup plus faible lorsque l'on considère des effets de lentilles sur le rayonnement de fond, $s_3 \sim 4$. On discutera plus ce point et l'effet de la correction du couplage à deux plans lentilles chapitre 9.

5.3 Distorsions optiques induites par une corde cosmique

Je n'ai pas, dans la discussion précédente traité le cas des lentilles fortes. Je ne discuterai pas, dans ce mémoire des lentilles fortes engendrées par des masses. Je parlerai plutôt de l'effet de lentille gravitationnelle induite par une corde cosmique. Seuls les cas simples de la corde cosmique droite et circulaire dans le plan perpendiculaire à la ligne de visée seront abordés. Le cas d'une corde cosmique quelconque est traité dans [Uzan & Bernardeau, 2001].

5.3.1 Une corde cosmique ?

Les défauts topologiques peuvent être créés lors de la brisure spontanée d'une symétrie de la théorie. Nous en donnerons ici un exemple simple. Supposons, par exemple, qu'un champ scalaire ϕ de la théorie soit invariant sous les transformations de phases infinitésimales. Le lagrangien le plus général pour ce champ est

$$L = \frac{1}{2} (D_\mu \phi) (D^\mu \phi)^* - V(\phi) + L_{U(1)} \quad (5.84)$$

où l'on a posé

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + i g A_\mu \quad \text{et} \quad L_{U(1)} = (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) \quad (5.85)$$

et A_μ le champ de jauge associé à l'invariance de phase. Pour garder une théorie renormalisable, le potentiel $V(\phi)$ doit être de la forme

$$V(\phi) = \frac{\mu^2}{2} |\phi^2| + \frac{\lambda}{4} |\phi^4|. \quad (5.86)$$

Tant que le couplage μ^2 reste positif, le champ est confiné en zéro et la symétrie est conservée ; le champ ϕ a une masse μ et le boson de jauge reste de masse nulle. Si maintenant μ^2 devient négatif, la forme du potentiel change. Le minimum est sur le cercle de rayon $\frac{|\mu^2|}{\lambda}$. Le champ acquiert une valeur moyenne non nulle, il doit donc choisir une phase et briser la symétrie de jauge. Cet effet confère une masse $2g^2 |\mu^2| / \lambda$ au boson. On reconnaît ici le mécanisme de Higgs.

Considérons maintenant une boucle dans l'espace. Le long de ce chemin, ϕ a choisi une phase. Cette phase peut varier continûment, si bien qu'après un tour complet de la boucle, elle ne peut avoir changé que d'un multiple de 2π . Si ce nombre d'enroulement de la phase est nul, on peut contracter continûment la boucle. Si cependant ce nombre est non nul, la boucle ne peut être contractée. Il y a un point, à l'intérieur de la boucle où la définition de la phase n'a plus de sens ; c'est ce que l'on appelle défaut topologique (voir fig. 5.3). En cet endroit, ϕ doit être nul et acquiert une énergie. Ce mécanisme a été proposé par Kibble [Kibble, 1976].

Le lieu de ces points peut avoir différentes structures qui dépendent évidemment des propriétés du groupe de symétrie brisée. Nous ne nous intéresserons ici qu'au cas des cordes cosmiques. Le lieu des points où la symétrie est restaurée est alors une courbe. Ce type de défaut est le plus intéressant d'un point de vue cosmologique. Il est important de noter ici que cet objet qui possède une densité linéique d'énergie possède des propriétés très différentes de celles d'une densité linéique de masse. Pour une discussion plus complète sur les propriétés des défauts topologiques et des cordes cosmiques, le lecteur est invité à consulter les revues de Hindmarsh et Kibble [Hindmarsh & Kibble, 1995] ou le livre de Vilenkin et Shellard [Vilenkin & Shellard, 1994].

5.3.2 Métrique autour d'une corde rectiligne

Je donne ici quelques indications sur le calcul classique de la forme de la métrique autour d'une corde rectiligne. Ce résultat nous permettra de calculer l'effet de lentille induit par de telles cordes et nous donnera des indications sur cet effet pour d'autres cordes.

Soit donc une corde cosmique rectiligne alignée sur l'axe des z . Pour une corde dont la dynamique obéit à la simple équation d'état de Goto-Nambu, la tension le long de la corde est égale à la densité linéique d'énergie. Pour ce cas simple, le tenseur énergie impulsion s'écrit

$$T_\nu^\mu = \mu \delta_{\text{dirac}}(x) \delta_{\text{dirac}}(y) \text{diag}(1, 0, 0, 1). \quad (5.87)$$

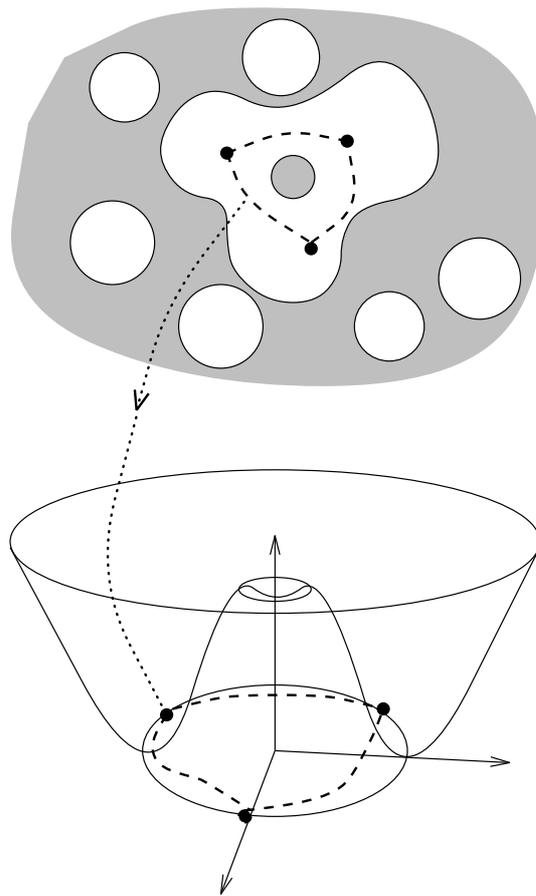


FIG. 5.3 – Un défaut topologique dans le plan. Autour du défaut, le champ peut prendre n'importe quelle phase; il reste dans son état d'énergie minimale. Si comme présenté sur la figure, la phase du champ réalise un tour complet autour d'un point, celui-ci ne peut plus être au minimum de son potentiel. La figure est tirée de [Hindmarsh & Kibble, 1995].

Ce tenseur est très différent de celui d'une densité linéique de matière non relativiste pour lequel la pression est très négligeable devant la densité. Ainsi, à la limite newtonienne, une distribution linéique de matière crée un potentiel gravitationnel $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$, alors que notre corde rectiligne donne $\Delta\Phi = 0$. La corde n'attire pas gravitationnellement la matière autour d'elle.

On va supposer que la métrique, en absence de corde, est Minkovskienne et qu'elle est faiblement perturbée par la présence de notre corde

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (5.88)$$

On se place dans la jauge harmonique pour laquelle $h_{\mu\nu}$ doit satisfaire

$$\partial_\nu \left(h_\mu^\nu - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu h_\sigma^\sigma \right) = 0. \quad (5.89)$$

Dans ce contexte, l'équation d'Einstein prend une forme particulièrement simple

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T_\sigma^\sigma \right). \quad (5.90)$$

L'intégration de cette équation est directe. Elle donne la métrique

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - \left(1 - 8G\mu \log \left(\frac{r}{r_0} \right) \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2), \quad (5.91)$$

avec r_0 la constante d'intégration. Sous l'hypothèse $G\mu \ll 1$, et en faisant le changement de coordonnées

$$\begin{cases} \left(1 - 8G\mu \log \left(\frac{r}{r_0} \right) \right) r^2 = (1 - 8G\mu) r'^2 \\ (1 - 4\pi G)\theta = \theta' \end{cases}, \quad (5.92)$$

on retrouve, à l'ordre linéaire, la métrique de Minkowski

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - dr'^2 - r'^2 d\theta'^2. \quad (5.93)$$

Si la forme est la même, la métrique est néanmoins différente en ce sens que notre nouvelle variable θ' ne varie plus maintenant qu'entre 0 et $(1 - 4\pi G\mu) 2\pi$. Ainsi, tout se passe comme si la métrique autour du défaut était plate. Cependant, un observateur qui ferait le tour de la corde n'aurait besoin que de faire $(1 - 4\pi G\mu) 2\pi$ pour retrouver sa position initiale. C'est la solution bien connue d'une métrique sur un cône, tout est *normal*, sauf pour un déficit angulaire proportionnel à la densité d'énergie de la corde. La figure 5.4 montre la métrique autour de la corde et l'angle manquant.

5.3.3 Effet de lentille gravitationnelle d'une corde rectiligne

Maintenant que nous connaissons la métrique autour de la corde, il est simple de déduire l'effet de lentille de la corde rectiligne. La projection de la corde sur le plan perpendiculaire à la trajectoire des photons est alignée selon l'axe des y . Si l'on observe un objet dans la direction de la corde, celle-ci étant dans le plan perpendiculaire à la trajectoire, les photons peuvent passer soit à droite, soit à gauche de la corde, de sorte que l'on verra deux copies de l'objet (voir figure 5.5). L'écart angulaire entre les deux images se déduit facilement de la configuration géométrique du problème,

$$\Delta\Theta = 8\pi G\mu \frac{\mathcal{D}_{\text{source,corde}}}{\mathcal{D}_{\text{source}}}. \quad (5.94)$$

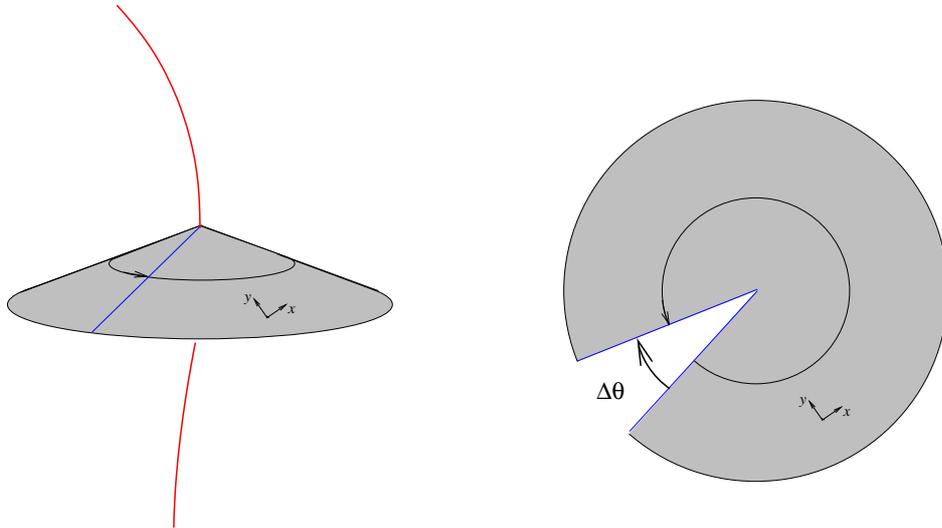


FIG. 5.4 – La métrique autour d’une corde cosmique. La métrique adopte la forme d’un cône. Tout se passe comme si la métrique était plate. Cependant, si un observateur fait le tour du défaut, il n’a besoin que de faire un angle $2\pi - \Delta\theta$.

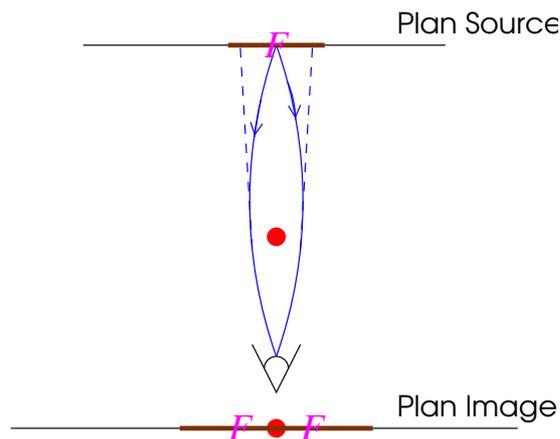


FIG. 5.5 – Effet de lentille d’une corde rectiligne. La corde, matérialisée par le point (rouge) est dans le plan orthogonal à la feuille. L’objet F est observé derrière la corde. Les photons provenant de F peuvent suivre deux chemins pour parvenir à l’observateur, si bien que celui-ci observe une image double de l’objet. En fait, c’est toute la partie du plan source en traits gras qui est observée en double dans le plan image.

La généralisation de l'équation (5.94) au cas où la corde fait un angle Φ avec la direction de propagation est immédiate

$$\Delta\Theta = 8\pi G\mu \frac{\mathcal{D}_{\text{source,corde}}}{\mathcal{D}_{\text{source}}} \sin(\Phi). \quad (5.95)$$

On peut alors écrire le déplacement induit par l'effet de lentille de la corde sous la forme

$$\xi_x = 4\pi G\mu \frac{\mathcal{D}_{\text{source,corde}}}{\mathcal{D}_{\text{source}}} [-\theta(x) + \theta(-x)] \sin(\Phi), \quad (5.96)$$

pour une corde en $x = 0$.

Nous avons vu précédemment que la polarisation de la lumière était transportée parallèlement, et que donc une lentille gravitationnelle *classique* ne pouvait faire tourner cette polarisation. Qu'en est-il dans le cas des cordes cosmiques ? Dans le cas de la corde rectiligne, la réponse est immédiate. Puisque la métrique reste plate, la polarisation ne varie pas.

5.3.4 Effet de lentille gravitationnelle d'une corde

Le cas de cordes de géométrie plus complexe et en mouvement est beaucoup plus compliqué. Pour une étude complète du problème, le lecteur est invité à consulter [Uzan & Bernardeau, 2001]. Nous donnerons simplement ici quelques éléments qualitatifs pour comprendre l'effet de lentille d'une boucle dans le plan perpendiculaire à la trajectoire des photons.

Considérons donc une corde circulaire orthogonale à la direction de propagation. Une telle corde doit osciller avec une fréquence comparable à sa tension [Vilenkin & Shellard, 1994]. On peut montrer qu'en fait, pour une corde circulaire dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation, les équations pour l'effet de lentille vont être les mêmes que celles d'une densité linéique de matière immobile [Uzan & Bernardeau, 2001] [de Laix & Vachaspati, 1996]. Un photon passant à l'intérieur de la boucle, d'après le théorème de Gauss ne va sentir aucune déviation. Un photon passant à l'extérieur sera dévié en $1/r$. Il peut encore y avoir deux photons provenant de la même source, un passant à travers la boucle (donc non déplacé) et l'autre pas (donc légèrement déplacé), produisant une copie avec déformation de l'objet. On peut écrire cet effet sous la forme

$$\xi(\alpha) = -2\xi_0 \frac{\alpha_l}{\alpha^2} \alpha \quad \text{for } \alpha > \alpha_l. \quad (5.97)$$

On utilisera ces résultats dans les chapitres 6 et 7, où l'on étudiera l'effet de lentille gravitationnelle d'une corde sur le rayonnement de fond.

L'effet de lentille sur la température du rayonnement de fond cosmique

Sommaire

6.1 Effets de lentille gravitationnelle sur le rayonnement de fond cosmique	79
6.1.1 Déformations du champ de température	80
6.1.2 Effets de lentille faible	80
6.2 Signature de l'effet de lentille	81
6.2.1 Effets de lentille sur le spectre de puissance du rayonnement de fond	82
6.2.2 Signatures non gaussiennes de l'effet de lentille	84
6.2.3 Effets morphologiques	85
6.3 Effets de lentille induite par une corde cosmique sur le rayonnement de fond.	89
6.3.1 Effet <i>Kaiser-Stebbins</i> sur la température.	89

Dans ce chapitre, je vais présenter l'effet de lentille gravitationnelle sur les anisotropies de température du rayonnement de fond micro-onde. Le chapitre suivant traitera de l'effet sur la polarisation. Je présenterai tout d'abord le mécanisme physique en jeu. Par la suite, je donnerai un aperçu des travaux publiés sur le sujet. Mes propres travaux seront présentés dans les chapitres suivants.

6.1 Effets de lentille gravitationnelle sur le rayonnement de fond cosmique

La question de l'effet d'une lentille gravitationnelle sur les anisotropies de température du rayonnement de fond est étudié depuis longtemps. Les premières contributions sur le sujet s'attachèrent à étudier d'éventuels effets de lentille forte ou de lentille en mouvement [Dyer, 1976] [Tomita & Watanabe, 1989] [Gurvits & Mitrofanov, 1986] [Nottale, 1984] [Blanchard & Schneider, 1987] [Kashlinsky, 1988]. Ces dernières sont, d'un point de vue observationnel, les plus simples à mettre en évidence puisqu'elles changent la température du rayonnement, ce que ne peut pas faire une lentille statique. L'effet de lentille faible des grandes structures a été étudié plus tard et dans les premiers temps pour des modèles particuliers de grandes structures [Linder, 1990] [Cole & Efstathiou, 1989] [Cayon *et al.*, 1993b, Cayon *et al.*, 1993a]. C'est U. Seljak qui le premier a donné une description complète de l'effet sur le spectre de puissance des anisotropies [Seljak, 1996].

On a vu chapitre 5 les mécanismes physiques décrivant l'effet de lentille gravitationnelle. On va donc simplement appliquer ces résultats au rayonnement fossile. En deux lignes, disons simplement que l'effet de lentille déforme le champ d'anisotropie de température du rayonnement de fond, tout comme n'importe quelle image du ciel. Cette déformation va altérer de

manière très particulière les propriétés géométriques et statistiques du champ. Néanmoins, certaines propriétés vont rester inchangées. En amplifiant ou en diminuant des portions d'images, il est impossible, par exemple, de créer de nouveaux pics ou de nouvelles vallées dans la température. L'étude de l'effet de lentille sur le rayonnement de fond va donc consister à prédire les signatures de cet effet à travers les propriétés du champ de température.

6.1.1 Déformations du champ de température

Étudions tout d'abord le mécanisme de déformation. Après la surface de dernière diffusion, les photons du rayonnement sont complètement découplés de la matière. Ils se propagent le long des géodésiques. Ces géodésiques, on l'a montré chapitre 5 se trouvent déformées au voisinage des puits de potentiel. On va décrire l'image observée des anisotropies de température sur la surface de dernière diffusion par la fonction $\hat{T}(\boldsymbol{\theta})$. Le vecteur à deux dimensions $\boldsymbol{\theta}$ pointe dans la direction d'observation. Cette image est issue de la propagation de la valeur primordiale¹ de la température $T(\boldsymbol{\theta})$. Dans la suite, on notera toujours les quantités observées² par un chapeau, et celles primordiales sans rien. Le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ est toujours une direction d'observation, mais maintenant pour un univers parfaitement homogène et isotrope. Il faut voir $T(\boldsymbol{\theta})$ comme la valeur de l'anisotropie de température dans la direction $\boldsymbol{\theta}$ si l'univers était parfaitement homogène et isotrope. On utilisera aussi beaucoup dans la suite ce genre de notation.

On a vu, dans le chapitre précédent, que l'on savait donner la relation entre la direction d'observation d'un événement et la direction dans laquelle on observerait ce même événement dans un univers répondant parfaitement au principe cosmologique.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\theta}) \quad (6.1)$$

Le champ vectoriel $\boldsymbol{\xi}$ est la déformation induite par les lentilles ; il dépend évidemment de la direction. Il est alors simple de calculer la relation entre la température observée et le champ primordial

$$\hat{T}(\boldsymbol{\theta}) = T(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\theta})). \quad (6.2)$$

6.1.2 Effets de lentille faible

Dans la première partie de ce chapitre, je vais considérer les effets de lentille gravitationnelle faible. Dans ce régime, on sait calculer dans l'approximation de Born, le déplacement induit par les lentilles. On rappelle que

$$\xi_i(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{3}{2}\Omega_0 \int \frac{dz'}{H(z')} \frac{1}{a} \frac{\mathcal{D}_0(z')\mathcal{D}_0(z, z')}{\mathcal{D}_0(z)} \varphi_{,i}^{(1)}, \quad (6.3)$$

$\varphi_{,i}(\boldsymbol{\theta}, z)$ étant le gradient de la densité de matière le long de la ligne de visée de direction $\boldsymbol{\theta}$. Le déplacement étant de faible amplitude, on va souvent, dans la suite, faire une décomposition perturbative de l'effet de lentille. Il vient alors simplement, au deuxième ordre

$$\hat{T}(\boldsymbol{\theta}) \sim T(\boldsymbol{\theta}) + \xi^i(\boldsymbol{\theta}) \cdot T_{,i} + \frac{1}{2}\xi^i(\boldsymbol{\theta})\xi^j(\boldsymbol{\theta}) \cdot T_{,ij}. \quad (6.4)$$

Au premier ordre, l'effet caractéristique de déformation sur la température est comparable à la variance du champ de déplacement. On sait qu'aux échelles caractéristiques des structures des lentilles, cette variance est de l'ordre de la dizaine de pour-cent.

¹c'est-à-dire sur la surface de dernière diffusion.

²noter ici que par *observé* on entend uniquement *ayant subi l'effet de lentille*. Il arrive bien d'autres choses aux photons en chemin, mais nous n'en tiendrons pas compte ici.

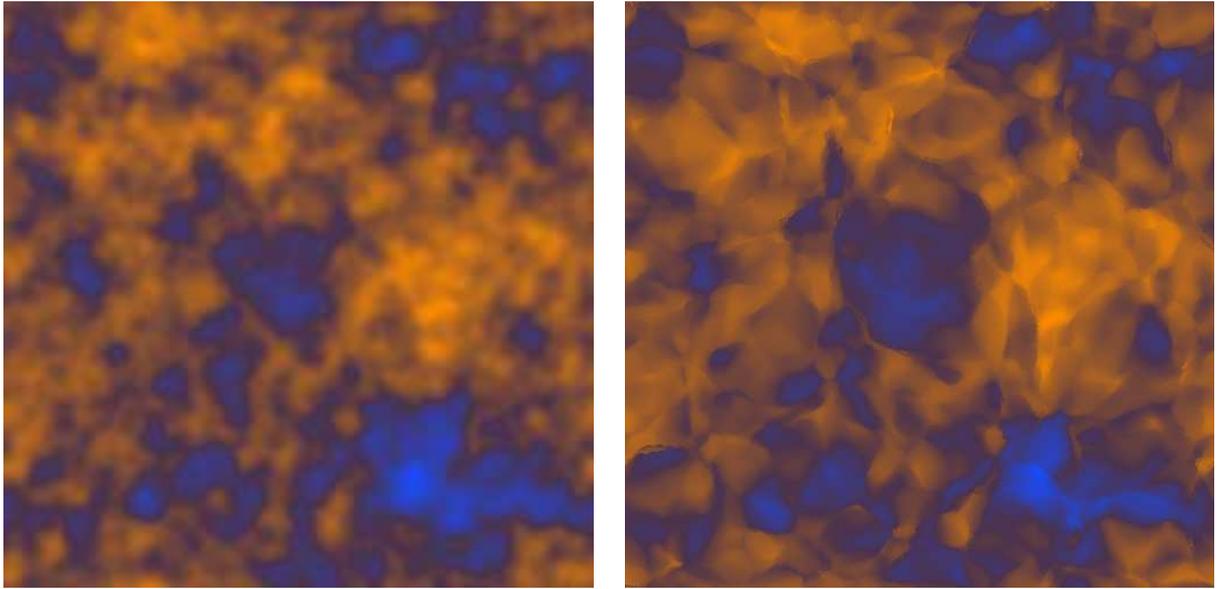


FIG. 6.1 – Effet de lentille sur la température. La figure de gauche est une réalisation d'un champ de température pour une cosmologie EdS de 5 degrés de côté. La figure de gauche montre l'effet de lentille gravitationnelle sur ce champ de température. L'effet a été magnifié six fois pour faire ressortir ses caractéristiques.

6.2 Signature de l'effet de lentille

Avant d'étudier des signatures particulières de l'effet de lentille, il est bon de considérer la figure 6.1. Elle présente une simulation d'une petite région du ciel tel qu'il serait vu dans un univers sans effet de lentille gravitationnelle (c'est-à-dire, l'observable $T(\boldsymbol{\theta})$ que nous avons définie plus haut), et dans un univers où l'amplitude de cet effet serait multipliée par 5. On expliquera en détail dans le chapitre 9 comment obtenir de telles cartes. Il est à noter qu'aucun filtrage n'a été appliqué à cette image qui est donc précise jusqu'à l'échelle du pixel, ceci afin de ne pas masquer des effets de petite échelle éventuellement induits par le couplage aux lentilles. L'effet de lentille a été magnifié car il serait autrement difficile à voir à l'oeil nu. Dans le cas d'une distorsion réaliste on ne verrait rien. Comme on l'a dit plus haut, la déformation est trop faible aux échelles des structures du rayonnement de fond pour que l'oeil fasse la différence.

Sur la figure, on peut remarquer un certain nombre de caractéristiques frappantes. Tout d'abord, les formes des pics et des vallées du champ de température sont altérées. Cela n'est pas franchement surprenant. Néanmoins, cela nous incite à attendre une signature propre de l'effet de lentille sur d'éventuelles observables sensibles à la forme du champ de température. Nous verrons plus loin un exemple avec l'étude de l'ellipticité du champ. Dans le même registre, puisque la position des pics et leur hauteur ont changé (et *a priori* pas leur nombre, quoique cela ne soit plus tout à fait vrai sur une région de ciel finie) on peut s'attendre à ce que des observables sensibles à la distance entre les pics, ou à la fonction de corrélation à deux pics reflètent ce changement. Nous reviendrons sur ces deux points plus loin, lorsque nous étudierons les signatures *géométriques* de l'effet de lentille.

Par ailleurs, on ne reconnaît plus vraiment dans cette figure, la forme classique d'une réalisation d'un champ gaussien³. Il est naturel de s'attendre à ce que la statistique de la carte

³ce n'est pas si évident, évidemment... Disons que l'oeil habitué à voir défiler des réalisations de champ gaussien me croira!

ayant subi l'effet de lentille soit significativement différente de celle de la carte primordiale. L'effet le plus simple auquel on peut penser, et qui a été particulièrement étudié, est une modification du spectre de puissance angulaire des anisotropies de température. Par la suite, on peut chercher des écarts à la gaussianité du champ de température couplé aux lentilles.

On va maintenant donner un catalogue des différentes signatures de l'effet de lentille qui ont été étudiées jusqu'à aujourd'hui. J'ai découpé cette liste en trois parties qui concernent respectivement

- les effets sur le spectre de puissance angulaire des fluctuations de température,
- les écarts à la gaussianité,
- les effets morphologiques.

Il ne faut pas donner à cette liste une signification trop forte. Il s'agit d'une classification parlante, mais qui ne correspond pas à une réalité mathématique ou physique particulière. En effet, la plupart des effets que je qualifie de *morphologiques* sont en fait une expression de la non-gaussianité du champ ayant subi l'effet de lentille.

6.2.1 Effets de lentille sur le spectre de puissance du rayonnement de fond

Cet effet a été un des premiers étudié [Seljak, 1996]. Le spectre de puissance du rayonnement de fond dont nous avons décrit les propriétés chapitre 3 est une quantité très étudiée. Il était assez normal de commencer par elle pour rechercher une signature de l'effet de lentille dans le rayonnement de fond. À vrai dire, pour les C_ℓ , l'effet de lentille est d'ailleurs plus un bruit qu'autre chose. En effet, on espère utiliser le spectre de puissance pour reconstruire la cosmologie sous-jacente, le spectre des fluctuations primordiales et les paramètres cosmologiques. Dans cette optique, l'effet de lentille gravitationnelle est un bruit à inclure dans les barres d'erreur de la mesure !

L'évaluation de l'impact sur les C_ℓ est assez simple. On en donnera le calcul uniquement dans l'approximation des petits angles, où la décomposition en multipôles s'identifie à la transformation de Fourier. Hu [Hu, 2000] a récemment donné une version complète de ce calcul valable pour tout le ciel. Seules les grandes échelles sont perturbées par l'approximation faite. On n'attend pas un signal important à ces échelles pour lesquelles l'effet de lentille des grandes structures est très faible.

On va donc pratiquer une transformation de Fourier sur la température

$$T(\boldsymbol{\theta}) = \int \frac{d^2l}{2\pi} \tilde{T}_l e^{i\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\theta}}.$$

Le spectre de puissance est simplement

$$\begin{aligned} \langle T(\mathbf{0})T(\boldsymbol{\theta}) \rangle &= \int \frac{d^2l}{2\pi} \frac{d^2l'}{2\pi} \langle \tilde{T}_l \tilde{T}_{l'} \rangle e^{i\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\theta}} \\ &= \int \frac{d^2l}{(2\pi)^2} C_l e^{i\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

On a utilisé le fait que le champ primordial de température est gaussien, et que par conséquent

$$\langle \tilde{T}_l \tilde{T}_{l'} \rangle = C_l \delta^2(\mathbf{l} + \mathbf{l}'). \quad (6.6)$$

On va faire le même calcul pour le champ de température *observé*. En utilisant la formule perturbative (6.4) on a

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}(\mathbf{0})\hat{T}(\boldsymbol{\theta}) \rangle &= \langle \hat{T}(\mathbf{0} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{0}))\hat{T}(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\theta})) \rangle \\ &= \langle T(\mathbf{0})T(\boldsymbol{\theta}) \rangle + \langle \xi^i(\mathbf{0})\xi^j(\boldsymbol{\theta}) \rangle \langle T(\mathbf{0})_{,i}T_{,j}(\boldsymbol{\theta}) \rangle + \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \xi^i(\mathbf{0})\xi^j(\mathbf{0}) \rangle \langle T(\mathbf{0})_{,ij}T(\boldsymbol{\theta}) \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi^i(\boldsymbol{\theta})\xi^j(\boldsymbol{\theta}) \rangle \langle T(\mathbf{0})T_{,ij}(\boldsymbol{\theta}) \rangle. \end{aligned} \quad (6.7)$$

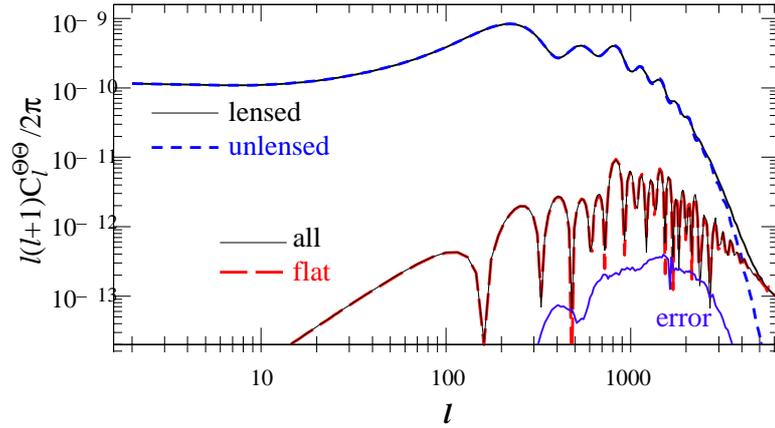


FIG. 6.2 – Le spectre de puissance de la température avec et sans effets de lentille. La courbe du dessous est la différence entre les deux spectres. Cette différence est donnée dans le cas de l’approximation des petits angles (noté “flat” sur la figure) et dans le cas du traitement complet de l’effet de lentille avec les harmoniques sphériques. L’erreur faite par l’approximation des petits angles est très faible. La figure est tirée de [Hu, 2000].

Il faut nécessairement aller jusqu’au deuxième ordre de la décomposition perturbative pour calculer la contribution dominante sur les C_l ; la moyenne du déplacement ξ étant nulle, c’est au deuxième ordre qu’apparaissent les contributions du couplage aux lentilles dans la corrélation à deux points. Les termes $\langle T(\mathbf{0})_{,ij}T(\boldsymbol{\theta}) \rangle$ n’étant *a priori* pas nuls, on doit tenir compte du deuxième ordre de l’effet de lentille. Il ne reste plus qu’à pratiquer une transformée de Fourier sur chacun de ces termes. Avec l’hypothèse des petits angles pour l’effet de lentille, il vient

$$\langle \hat{T}(\mathbf{0})\hat{T}(\boldsymbol{\theta}) \rangle = \int \frac{d^2l}{(2\pi)^2} C_l e^{i\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\theta}} \left[1 + 4 \int d\chi \left(\frac{w(\chi)}{D(\chi)} \right)^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(\mathbf{l}\cdot\mathbf{k})^2}{k^4} P\left(\frac{k}{D(\chi)}\right) \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\theta}} - 1 \right) \right]. \quad (6.8)$$

On en tire l’expression du spectre de puissance couplé aux lentilles en fonction du spectre de puissance primordial

$$\hat{C}_l = C_l \left[1 - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(\mathbf{l}\cdot\mathbf{k})^2}{k^4} \bar{P}(k) \right] + \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(\mathbf{l}\cdot\mathbf{k})^2 - k^4}{k^4} \bar{P}(k) C_{|\mathbf{l}-\mathbf{k}|}. \quad (6.9)$$

On a noté \bar{P} le spectre de puissance projeté des lentilles afin de se débarrasser des intégrales sur χ . Le spectre des anisotropies de température issu de ce calcul est présenté figure 6.2. L’effet de lentille est très faible. En fait, l’équation (6.9) nous apprend que cet effet se décompose :

- en une renormalisation qui provient en fait du deuxième ordre de la formule perturbative (6.4). C’est un effet qui affecte tout le spectre, et n’est en fait pas détectable directement. On ne connaît la normalisation du spectre que par le spectre lui même.
- en un couplage de mode. Le deuxième terme de l’équation (6.9) montre comment le couplage aux lentilles n’affecte pas un seul mode, ou une seule bande de mode. La convolution entre le spectre primordial et le spectre des lentilles lisse le spectre du rayonnement de fond. Il n’y a pas d’échelle privilégiée; il ne peut apparaître dans le spectre aucun élément nouveau. Qui plus est, l’amplitude de l’effet est trop faible pour faire disparaître les premiers pics du rayonnement de fond. Il va surtout être important dans la queue du spectre, où il peut modifier la courbe prédite par l’amortissement de Silk [Metcalf & Silk, 1997].

La signature de l'effet de lentille gravitationnelle sur le spectre de puissance du CMB est donc assez réduite. Elle ne permet pas, en tout état de cause, de mesurer cet effet. Il n'est pas difficile de construire, en jouant sur les paramètres cosmologiques, un spectre indiscernable (à la précision des barres d'erreurs) de celui que nous venons de produire. On ne peut donc pas, avec le seul spectre du rayonnement de fond, tirer une quelconque information sur les lentilles. Par contre on ne peut négliger l'effet de lentille lors de la reconstruction du modèle cosmologique à partir des C_ℓ observés.

6.2.2 Signatures non gaussiennes de l'effet de lentille

On a vu plus haut que la modification de la statistique du champ d'anisotropie de température induite par l'effet de lentille gravitationnelle avait un impact faible sur le second moment. La question est maintenant de savoir si les lentilles modifient suffisamment la distribution du champ pour l'écarter significativement de la gaussienne.

Moment à quatre points

L'idée la plus simple est de tester des moments d'ordres supérieurs. Elle a été étudiée par quelques auteurs [Zaldarriaga, 2000, Bernardeau, 1997, Hu, 2000]. Si on relaxe l'hypothèse de gaussianité du champ de température, le corrélateur à trois points peut être non-nul. Néanmoins, dans le cas général, le premier ordre non-gaussien sera donné par le quatrième moment. Il est assez simple de calculer le premier ordre

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{T}(\boldsymbol{\theta}_1)\hat{T}(\boldsymbol{\theta}_2)\hat{T}(\boldsymbol{\theta}_3)\hat{T}(\boldsymbol{\theta}_4) \right\rangle_c &= \langle T(\boldsymbol{\theta}_1)T(\boldsymbol{\theta}_2)T(\boldsymbol{\theta}_3)T(\boldsymbol{\theta}_4) \rangle + \\
&+ \langle \xi^i(\boldsymbol{\theta}_1)\xi^j(\boldsymbol{\theta}_3) \rangle \langle \nabla_i T(\boldsymbol{\theta}_1)T(\boldsymbol{\theta}_2)\nabla_j T(\boldsymbol{\theta}_3)T(\boldsymbol{\theta}_4) \rangle \\
&\quad + \text{permutations} \\
&+ \langle \xi^i(\boldsymbol{\theta}_1)\xi^j(\boldsymbol{\theta}_3) \rangle \langle \nabla_i \nabla_j T(\boldsymbol{\theta}_1)T(\boldsymbol{\theta}_2)T(\boldsymbol{\theta}_3)T(\boldsymbol{\theta}_4) \rangle \\
&\quad + \text{permutations} \\
&- \left\langle \hat{T}(\boldsymbol{\theta}_1)\hat{T}(\boldsymbol{\theta}_2) \right\rangle \left\langle \hat{T}(\boldsymbol{\theta}_3)\hat{T}(\boldsymbol{\theta}_4) \right\rangle \\
&\quad + \text{permutations.} \tag{6.10}
\end{aligned}$$

Le premier ordre non-nul est alors simplement

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{T}(\boldsymbol{\theta}_1)\hat{T}(\boldsymbol{\theta}_2)\hat{T}(\boldsymbol{\theta}_3)\hat{T}(\boldsymbol{\theta}_4) \right\rangle_c &= \langle \xi^i(\boldsymbol{\theta}_1)\xi^j(\boldsymbol{\theta}_3) \rangle \langle \nabla_i T(\boldsymbol{\theta}_1)T(\boldsymbol{\theta}_2) \rangle \langle \nabla_j T(\boldsymbol{\theta}_3)T(\boldsymbol{\theta}_4) \rangle \\
&\quad + \text{permutations.} \tag{6.11}
\end{aligned}$$

Ce genre de quantité a été particulièrement étudié par F. Bernardeau [Bernardeau, 1997] et M. Zaldarriaga [Zaldarriaga, 2000]. Ce dernier montre comment combiner efficacement de telles observables pour des configurations de points $(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\theta}_3, \boldsymbol{\theta}_4)$ bien choisies afin de maximiser le signal sur bruit. Si la détection de tels effets sur un ciel micro-onde entier semble réaliste, il est moins assuré que le signal sur bruit de ces observables permettra de faire des mesures très précises de l'effet de lentille.

Reconstruction du spectre de puissance des lentilles

En exploitant le fait que le champ primordial est gaussien, on peut tenter une reconstruction du spectre de puissance des lentilles. Je décrirai succinctement les travaux de Seljak et Zaldarriaga [Seljak & Zaldarriaga, 1999b, Seljak & Zaldarriaga, 1999a, Seljak & Zaldarriaga, 2000, Zaldarriaga & Seljak, 1999]. Ces travaux ont été par la suite étendus à l'effet de lentille sur la polarisation. Je décrirai avec plus de détail leurs résultats dans le prochain chapitre.

Pour résumer, leurs travaux utilisent le fait que le terme dominant du corrélateur à trois points est proportionnel à $\langle \xi(\boldsymbol{\theta})\xi(\boldsymbol{\theta}') \rangle$. Pour la même raison, un corrélateur à quatre points de dérivées de la température va être proportionnel au corrélateur à deux points de dérivées du champ de déplacement. On sait relier les dérivées de ce champ à la convergence de l'effet de lentille. Ainsi, en combinant intelligemment des dérivées premières du champ de température, on peut effectivement reconstruire le spectre. Néanmoins, cette reconstruction n'est formellement vraie que si l'on peut marginaliser l'observable sur toutes les réalisations possibles du rayonnement de fond ; ce qui est évidemment impossible ! Les auteurs traitent donc les termes qui se moyennent à zéro sur les réalisations du rayonnement de fond comme des termes de bruit. Ces termes ne sont autres que des auto-corrélations du champ d'anisotropie de température. Il est possible de majorer ces auto-corrélations et de caractériser ainsi la précision de la reconstruction. Malheureusement, ces corrélations sont assez fortes. Á grande échelle, l'effet de lentille est trop faible. Á petite échelle, l'*amortissement de Silk* limite l'amplitude des structures et le bruit d'auto-corrélation domine.

Au moment où je rédige ce manuscrit, W. Hu [Hu, 2001] prétend qu'une autre méthode inspirée de ces résultats aurait un meilleur rapport signal sur bruit. La méthode repose sur l'utilisation de corrélateurs à quatre points pondérés par un estimateur du spectre de puissance primordial du rayonnement de fond. Encore une fois, la reconstruction est exacte si l'on peut marginaliser sur les réalisations de rayonnement de fond. L'analyse du *bruit* (qui encore une fois, est le propre signal d'anisotropie de température) semble plus prometteuse qu'avec les méthodes de U. Seljak et M. Zaldarriaga. Néanmoins, la nécessité de recourir au spectre de puissance primordial pour la réalisation du filtre peut se révéler problématique, puisque celui-ci ne pourra être connu qu'à travers sa reconstruction à partir de la mesure d'un rayonnement de fond couplé aux lentilles et bruité par d'autres sources. Il manque dans le travail de W. Hu une étude de la sensibilité de la méthode à l'imprécision du filtre pour conclure à une réelle avancée dans le sujet.

6.2.3 Effets morphologiques

Les signatures de l'effet de lentille que je vais décrire ici auraient autant eu leur place dans la section précédente. Nous verrons qu'elles ont particulièrement à voir avec la modification de la distribution du champ d'anisotropies. Cependant, on peut aussi les voir intuitivement comme une modification des caractéristiques morphologiques du rayonnement de fond. Je présenterai ici sommairement deux observables qui permettent d'analyser l'effet de lentille sur la température du rayonnement de fond à travers ses propriétés *morphologiques*.

Ellipticité des points chauds

On a vu plus haut, en étudiant une réalisation d'une carte de rayonnement de fond que la forme des points chauds et froids du champ de température était altérée. En fait, on s'attend intuitivement à ce que ces pics et vallées, au départ à peu près ronds, soient allongés par les déformations induites par les lentilles. F. Bernardeau caractérise cette élongation des structures des anisotropies de température [Bernardeau, 1998]. J'utiliserai aussi cette propriété dans un travail en collaboration avec L. Van Waerbeke et F. Bernardeau que je décrirai dans le chapitre 8.

Pour tout champ scalaire, on peut décrire la forme locale de ses structures en considérant son ellipticité locale. Ce vecteur est calculé à l'aide des dérivées secondes du champ ; dans notre cas il s'agit de

$$\mathbf{e} = \left(\frac{(\partial_x^2 - \partial_y^2)T}{2\partial_x\partial_y T} \frac{\Delta T}{\Delta T} \right). \quad (6.12)$$

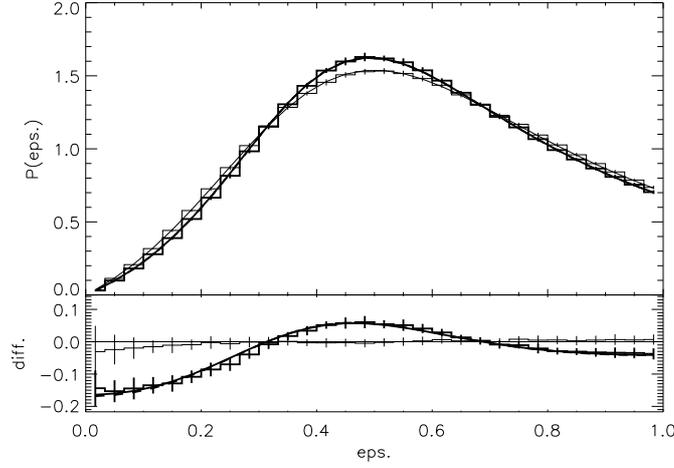


FIG. 6.3 – Une comparaison de l'ellipticité des champs de température avec et sans effets de lentille. La figure est tirée de [Bernardeau, 1998]. La courbe épaisse donne la distribution de l'ellipticité théorique pour une échelle de filtrage de $5'$ d'un champ de température ayant subi l'effet de lentille des grandes structures. La courbe en trait fin, celle d'un champ de température sans lentilles. Les courbes du dessous présentent la différence entre la distribution avec et sans lentille. Les barres d'erreurs ont été mesurées sur une vingtaine de réalisations.

La norme de ce vecteur donne la forme locale (plus grande que 1 pour une forme hyperbolique, plus petite pour une ellipse), la direction du vecteur fournit les axes. Il est notable que ce vecteur est un spineur-2. En effet, une rotation d'un angle θ des coordonnées utilisées pour décrire T se traduira par une rotation d'angle 2θ du vecteur \mathbf{e} . En fait, comme pour la polarisation ou le champ de déchirement des lentilles, seule l'orientation de ce vecteur est physique, le sens est arbitraire. R. Bond et G. Efstathiou ont montré [Bond & Efstathiou, 1987] que l'on savait décrire la forme des vallées et des pics du CMB à l'aide de cette ellipticité. Sous l'hypothèse de gaussianité du champ primordial, la distribution d'ellipticité du champ de température est donnée par

$$P(\mathbf{e})d\mathbf{e} = \frac{8e}{(1+8e^2)^{\frac{3}{2}}} d\mathbf{e}. \quad (6.13)$$

Comment est modifiée cette distribution lorsque les anisotropies de température ont subi un effet de lentille. Partant de l'équation (6.4), il est simple de calculer l'effet de lentille sur les dérivées secondes du champ de température

$$\hat{T}_{,ij} = T_{,kl} \left(\delta_i^k + \xi_{,i}^k \right) \left(\delta_j^l + \xi_{,j}^l \right) + T_{,k} \xi_{,ij}^k. \quad (6.14)$$

En injectant cette relation dans l'équation (6.13), et en moyennant sur l'effet de lentille, on calcule la distribution des ellipticités après effet de lentille

$$\hat{P}(\hat{e})d\hat{e} = P(\hat{e}) \left[1 - 18\sigma_\kappa^2 \frac{1 - 20\hat{e}^2 + 16\hat{e}^4}{(1+8\hat{e}^2)^2} \right] d\hat{e}. \quad (6.15)$$

Le paramètre σ_κ^2 dans l'équation n'est autre que la variance du champ de convergence des lentilles qui apparaît naturellement dans la moyenne sur les termes en $\xi_{,j}^i$. Les termes dépendant de dérivées d'ordre supérieur du champ de déplacement se compensent et n'apparaissent pas dans la distribution observée.

F. Bernardeau considère aussi le cas où seule l'ellipticité au voisinage des points chauds est considérée. L'effet se trouve amplifié en ces points. En effet, on s'attend à ce que l'effet de lentille déforme les structures du rayonnement de fond en des structures elliptiques. Cet effet va être particulièrement sensible sur des structures rondes. Les points-selles vont être peu modifiés. Qui plus est, l'effet de lentille ne peut transformer un point-selle en un extremum local. On avait déjà fait remarquer plus haut que le nombre d'extréma locaux ne pouvait être modifié. En ne considérant que les extréma, on se restreint donc dans la région où l'effet doit être maximal. Néanmoins la mesure de cet effet est difficile. L'écart au cas gaussien, filtré et bruité, est susceptible d'être confondu avec l'écart statistique normal. Le signal sur bruit attendu est donc assez modeste.

Corrélation des points chauds

M. Takada, *et al.* [Takada *et al.*, 2000] ont étudié une autre signature de l'effet de lentille sur la forme du champ de température. On l'a fait remarquer plus haut, les distorsions des lentilles gravitationnelles, si elles ne peuvent créer ou supprimer des extréma locaux dans le champ de température, peuvent par contre les rapprocher ou les éloigner. On s'attend donc à ce que la fonction de corrélation de la densité d'extremum soit notablement déformée par l'effet de lentille. Le calcul de cette fonction de corrélation est assez long et pénible. Si l'on peut écrire une (très longue) expression, sous forme d'intégrales du spectre de puissance du rayonnement de fond, sous l'hypothèse de gaussianité du champ primordial, on ne peut en donner une expression analytique. Les auteurs ont donc calculé numériquement et en donnent la courbe pour quelques modèles. On présente leurs résultats figure 6.4

L'effet de lentille sur la fonction de corrélation est lui, par contre, assez simple. En fait, le résultat est très proche, dans sa forme, de l'effet de lentille sur le spectre de puissance du rayonnement de fond présenté par l'équation (6.9). Il se résume donc à un faible changement de norme dont l'amplitude est comparable à la variance de la convergence, et à une convolution de la fonction de corrélation avec la convergence, qui adoucit donc les structures de la fonction de corrélation à deux pics. Le raisonnement intuitif qui consiste à supposer qu'en rapprochant et éloignant, sans direction privilégiée, les pics on adoucit la distribution de la distance entre pics, semble valable. Cependant, du fait de la forme très particulière de la fonction de corrélation de densité de pics, l'effet se trouve être notable à l'échelle du degré. En effet, la fonction de corrélation de la densité de pic est fortement supprimée aux alentours du degré. L'effet de lentille, en adoucissant cette suppression, tout comme il adoucit la coupure de Silk dans le spectre de puissance, devient donc assez important, à une échelle facilement testable avec les prochaines mesures du rayonnement de fond. L'étude numérique laisse espérer un rapport signal-sur-bruit intéressant, à condition de disposer d'une couverture du ciel importante. Malheureusement, ce que ce fort signal-sur-bruit trahit avant tout est le fait que l'on compare la fonction de corrélation de densité de pics perturbée par les lentilles avec celle, théorique, du rayonnement de fond primordial. Or, cette dernière n'est pas accessible autrement que par le biais du spectre de puissance primordial du rayonnement de fond dont on ne dispose évidemment pas. La solution proposée par les auteurs pour estimer le spectre de puissance primordial est d'utiliser directement le spectre mesuré. C'est une attitude raisonnable puisqu'on sait que celui-ci est peu modifié. Néanmoins, les résultats obtenus numériquement avec cette simplification se révèlent peu optimistes.

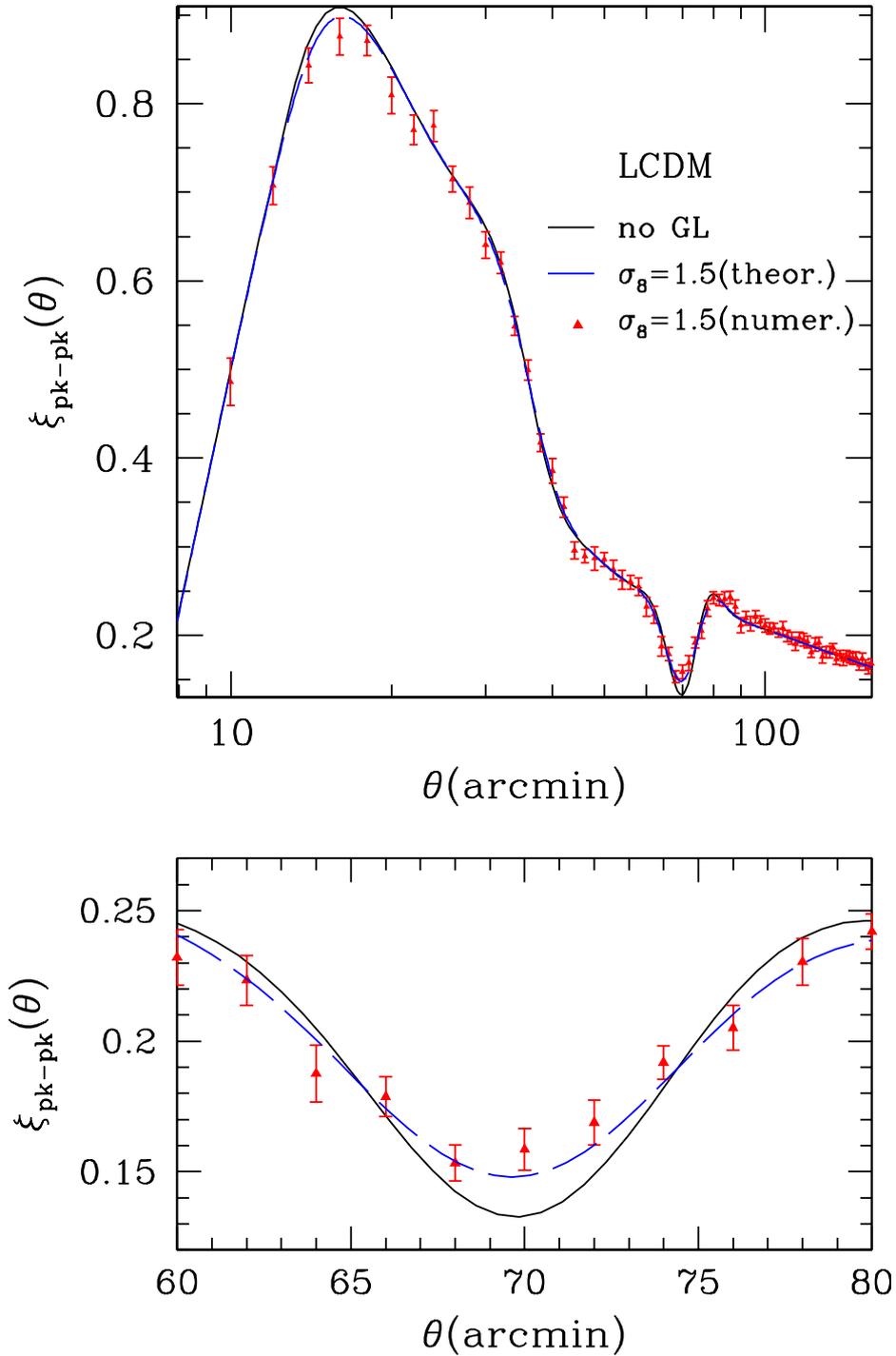


FIG. 6.4 – Corrélations de points chauds lentillés extraits de [Takada *et al.*, 2000]. La figure du haut donne la fonction angulaire de corrélation des points chauds. Celle du bas est un agrandissement de la région des 70' où l'effet est maximal. La courbe pleine représente la fonction de corrélation théorique en l'absence d'effet de lentille. Celle en pointillés est la courbe théorique avec effet de lentille. Les points ont été mesurés sur une vingtaine de réalisations, tandis que les barres d'erreurs donnent la variance cosmique mesurée sur une centaine de cartes. L'effet de lentille gravitationnel est assez fort puisque les auteurs ont choisi de normaliser la distribution de matière à $\sigma_8 = 1.5$.

Déformation sur les isothermes

M. Takada [Takada, 2001] a étudié récemment la distribution des valeurs propres de la matrice des dérivées secondes du champ de température⁴ le long d'isothermes. Il montre que la distorsion due aux lentilles est maximale pour une certaine bande de températures et étudie la détectabilité de cette distorsion. Encore une fois, les résultats montrent que l'effet de lentille peut être marginalement détectable, à condition de disposer de très grands champs d'observation de très bonne précision. On donnera, chapitre 8, quelques idées sur des extensions possibles de ces propriétés.

6.3 Effets de lentille induite par une corde cosmique sur le rayonnement de fond.

Je vais laisser de côté l'effet de lentille faible pour me consacrer à un exemple d'effet de lentille forte, celui créé par une corde cosmique. Je vais présenter ici l'effet de lentille d'une corde en mouvement sur le champ de température du rayonnement de fond, aussi appelé effet *Kaiser-Stebbins* [Kaiser & Stebbins, 1984]. Dans le chapitre suivant, on donnera le pendant de cet effet sur la polarisation.

6.3.1 Effet *Kaiser-Stebbins* sur la température.

Nous avons vu chapitre 5 que la métrique autour d'une corde rectiligne étant plate (sauf pour un angle manquant), l'effet de lentille se réduisait à une simple recopie, créant des images doubles. La zone d'image double est une bande centrée sur la corde d'une taille comparable à $G\mu$. Ce paramètre doit être petit ; s'il était grand, nous aurions certainement déjà observé des régions du ciel optique ou micro-onde recopié. Par ailleurs, les modèles de création des grandes structures par les cordes donnent une borne supérieure à $G\mu$ aux alentours de 10^{-6} [Vilenkin & Shellard, 1994]. Étant donné la précision de nos instruments et la taille caractéristique des structures des anisotropies du rayonnement de fond, on ne peut donc pas s'attendre à observer ce genre d'effet dans une expérience de mesure de la température.

Cependant, nous avons, dans notre discussion, négligé les mouvements des cordes. C'est cet effet qu'ont étudié Kaiser et Stebbins [Kaiser & Stebbins, 1984]. Les cordes sont supposées avoir des mouvements à des vitesses relativistes. Dans ces conditions, un objet passant à proximité d'une corde va sentir une métrique plate en accélération. Il va donc recevoir un *boost* qui l'accélèrera, s'il est derrière la corde, et le ralentira, s'il est devant. Comme la corde recopie une bande d'image, cet effet se fait sentir par une discontinuité de la température le long de la corde. On donne un schéma de ce phénomène figure 6.5. Contrairement à l'effet de lentille statique, cette accélération est indépendante de la position de la corde. On peut l'évaluer simplement

$$\frac{\Delta T}{T} \sim 8\pi G\mu \beta \quad (6.16)$$

où $\beta \sim 1$ est la vitesse transversale de la corde.

Cet effet n'a jamais été observé dans les expériences de détection des anisotropies du rayonnement de fond. Cette non-observation renforce la borne supérieure placée sur la valeur de $G\mu < 10^{-6}$.

⁴souvent désignée sous le nom de *matrice de forme*, par analogie avec la matrice de forme des galaxies.

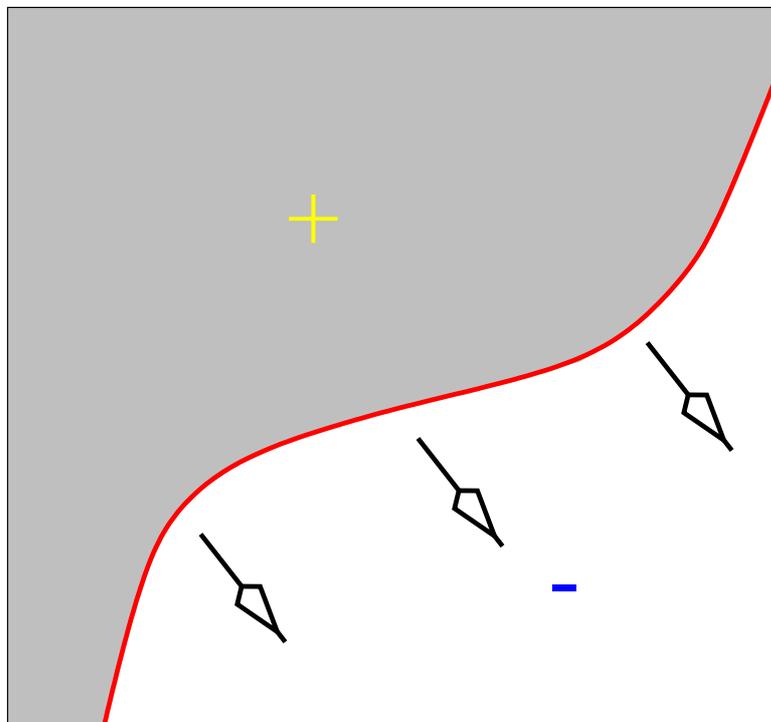


FIG. 6.5 – Effet Kaiser-Stebbins. La zone au dessus de la corde est accélérée par le passage de la corde.

CHAPITRE 7

L'effet de lentille sur la polarisation du rayonnement de fond cosmique

Sommaire

7.1 Effet de lentille faible sur la polarisation du rayonnement	91
7.1.1 Effet de lentille sur la polarisation.	91
7.1.2 Effet de lentille sur les composantes E et B	92
7.1.3 Spectre de puissance et composante pseudo-scalaire	95
7.1.4 Reconstruction de l'effet de lentille	99
7.2 Effet de lentille forte – Cas d'une corde cosmique	102
7.2.1 Présentation de l'article	103
7.2.2 Article	106

Je vais me livrer au même exercice, pour la polarisation, que dans le chapitre 6. La littérature sur le sujet est cependant beaucoup moins riche. La polarisation du rayonnement de fond n'a pour l'instant jamais été mesurée. On connaît assez mal les sources d'erreurs liées à sa mesure, et l'on ne sait donc pas encore aujourd'hui s'il est réaliste de parler de détection de la composante magnétique, dont il va être beaucoup question dans ce chapitre. L'étude des effets de lentille gravitationnelle sur la polarisation a, de ce fait, été beaucoup moins développée. Dans un premier temps, je décrirai l'effet de lentille faible. Par la suite, comme dans le chapitre précédent, je présenterai un résultat obtenu sur l'effet de lentille fort dans le cas des cordes cosmologiques.

7.1 Effet de lentille faible sur la polarisation du rayonnement

Comme dans le chapitre sur la température du rayonnement, je vais tout d'abord donner l'expression de l'effet de lentille gravitationnelle faible sur la polarisation. Ensuite, je décrirai deux travaux réalisés par U. Seljak, M. Zaldarriaga et J. Guzik [Zaldarriaga & Seljak, 1998, Guzik *et al.*, 2000] qui furent les premiers à explorer cet effet.

7.1.1 Effet de lentille sur la polarisation.

On a montré, dans le chapitre 5, comment le vecteur polarisation d'un rayonnement électromagnétique était propagé dans un espace courbe¹. Le vecteur se transporte parallèlement à sa géodésique. Il n'y a pas de rotation de la polarisation, on l'a vu section 5.1.3. On peut

¹à l'approximation de l'optique géométrique.

aussi trouver une autre démonstration de cette propriété dans [Faraoni, 1993]. C'est uniquement le point d'arrivée du rayon polarisé qui change par rapport à la propagation dans un univers vide. Le calcul de l'effet de lentille sur le champ vectoriel polarisation est donc très simple. Il est analogue à celui pour la température. Si l'on note $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})$ le vecteur polarisation dont les composantes sont les variables de Stokes

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} Q(\boldsymbol{\theta}) \\ U(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

la polarisation observée après effet de lentille, sera

$$\hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\xi}). \quad (7.2)$$

Comme on l'a dit plus haut, il n'y a pas de rotation du vecteur polarisation, il s'agit juste d'une translation. Pour le champ vectoriel de polarisation, cela se traduit par une déformation. L'action des lentilles gravitationnelles ne peut créer de polarisation sur un champ au départ non polarisé. Les variables de Stokes ont été présentées chapitre 3. On rappelle que lors d'un changement de repère par rotation d'angle β , ces variables se mélangent avec un angle 2β . Le vecteur \mathbf{P} est un spineur-2.

Développement perturbatif pour les variables de Stokes

On utilise le fait que le champ de déformation $\boldsymbol{\xi}$ est faible pour écrire le développement perturbatif de l'effet de lentille

$$\hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta}) \sim \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) + \xi^i(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{P}_{,i} + \frac{1}{2} \xi^i(\boldsymbol{\theta}) \xi^j(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{P}_{,ij}. \quad (7.3)$$

Ce développement est identique à celui obtenu pour la température, équation (6.4). Il n'y a aucune surprise dans ce développement. La propriété de l'effet de lentille de ne créer aucune polarisation, déjà énoncée plus haut, se retrouve facilement dans cette équation. De même, il n'y a pas de rotation ; on ne trouve aucun terme mélangeant les variables de Stokes dans l'équation (7.3).

7.1.2 Effet de lentille sur les composantes E et B

On travaille volontiers avec la polarisation du rayonnement de fond en utilisant des variables invariantes sous les rotations. On a présenté chapitre 3 la décomposition en une partie *électrique*, E , et une partie *magnétique*, B de la polarisation

$$\Delta E = (\partial_x^2 - \partial_y^2)Q + 2\partial_x\partial_y U, \quad (7.4)$$

$$\Delta B = (\partial_x^2 - \partial_y^2)U - 2\partial_x\partial_y Q. \quad (7.5)$$

Cette décomposition non-locale se ramène à l'étude du champ vectoriel polarisation en fonction de sa partie scalaire² et sa partie pseudo-scalaire³. Les propriétés géométriques de ces champs sont bien connues. Alors que le champ scalaire est invariant sous les réflexions, le champ pseudo-scalaire change de signe. La figure 3.3 montre des exemples de champs vectoriels pur E et pur B . La définition des composantes E et B est non-locale. Elle nécessite l'inversion de l'opérateur Δ . Cette inversion possède un noyau non trivial. On peut lever en partie cette ambiguïté en définissant cette inversion comme l'inversion au sens de Fourier⁴, pour une

²En d'autres termes, qui dérive d'un potentiel.

³Qui peut s'identifier à la partie rotationnelle du champ vectoriel.

⁴ou d'une autre décomposition en série.

fonction de fenêtre déterminée. Malgré tout, on préférera, dans la suite, travailler avec les laplaciens de ces composantes qui eux sont bien définis et n'ont pas de problème de non-localité.

L'action des lentilles gravitationnelles sur E et B va être assez différente de celle sur les variables de Stockes. Avant de calculer le développement perturbatif pour ces deux composantes, on va essayer de se donner une idée de ce qui arrive à notre champ de polarisation. Plus particulièrement, on va étudier les propriétés géométriques du champ de polarisation perturbé.

Action d'une déformation sur un champ vectoriel

Avant de calculer l'effet de lentille sur les composantes magnétique et électrique de la polarisation, nous allons nous poser la question plus générale de la déformation quelconque d'un champ vectoriel. Le problème qui va nous occuper ici est de savoir si la déformation du champ de polarisation \mathbf{P} est une simple déformation sans mélange des champs E et B . Par exemple, dans le cas d'une polarisation purement scalaire, la déformation préservera-t-elle cette propriété ?

On va établir sous quelles conditions un champ vectoriel dérivant d'un potentiel conserve cette propriété après déformation. Soit \mathbf{X} un champ vectoriel dérivant d'un potentiel F et donc de rotationnel nul

$$\mathbf{X} = \nabla F, \quad \nabla \cdot \mathbf{X} = 0. \quad (7.6)$$

Tout d'abord, remarquons qu'après une déformation du potentiel

$$F(\mathbf{x}) \rightarrow G(F(\mathbf{x})) = F(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}), \quad (7.7)$$

le nouveau champ vectoriel n'est pas *a priori* le champ vectoriel initial auquel on aurait appliqué la transformation. En effet, si la transformation n'est pas triviale⁵

$$\nabla G(F) = \nabla F(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) + \partial \delta x^i \partial_i F, \quad (7.8)$$

$$\hat{\mathbf{X}} \neq \mathbf{X}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}). \quad (7.9)$$

Si on renverse l'argument, l'effet d'une déformation du champ vectoriel ne se traduit pas par une simple déformation du potentiel. En fait, le champ vectoriel est toujours purement scalaire si et seulement si la propriété

$$\partial_i X^j = \partial_j X^i \quad (7.10)$$

est vérifiée. Il suffit pour cela qu'en tout point on ait

$$\partial_i \delta x^l X^j + \partial^j \delta x^l \partial_i X^l + \partial_i \partial^j \delta x^l X_l = \partial_j \delta x^l X^i + \partial^i \delta x^l \partial_j X^l + \partial_j \partial^i \delta x^l X_l. \quad (7.11)$$

Si l'on rajoute la condition que la déformation soit elle aussi irrotationnelle, la condition devient

$$\partial_i \delta x^l X^j + \partial^j \delta x^l \partial_i X^l = \partial_j \delta x^l X^i + \partial^i \delta x^l \partial_j X^l. \quad (7.12)$$

La construction d'une déformation brisant cette propriété pour un champ vectoriel donné est assez simple. Il suffit, par exemple, si l'on connaît le potentiel F par une série entière, de construire à l'aide de (7.12) un potentiel D tel que

$$\delta \mathbf{x} = \nabla D. \quad (7.13)$$

En résumé, dans le cas général, il n'y a aucune raison pour qu'un champ vectoriel purement scalaire conserve cette propriété après déformation. Pour la polarisation, il est donc raisonnable de penser que les effets de lentille vont mélanger les composantes E et B . Ainsi, on peut s'attendre à ce qu'une polarisation d'origine scalaire acquiert une composante vectorielle par le truchement de l'effet de lentille.

⁵c'est à dire telle que $\partial \delta x^i \neq 0$.

Effet de lentille sur les composantes électrique et magnétique de la polarisation

Comme pour la température, nous allons établir une formule perturbative dans l'espace réel de l'effet de lentille. Nous nous restreindrons au premier ordre du développement. Le deuxième ordre est nécessaire pour calculer l'impact des lentilles sur le spectre de puissance. La raison est identique à celle invoquée pour la température. On verra plus loin que comme pour le spectre de température, il est alors beaucoup plus simple de le calculer dans l'espace de Fourier uniquement.

Le calcul présenté ici est apparu pour la première fois dans [Benabed *et al.*, 2001]. L'article contient d'autres résultats qui seront repris dans ce chapitre et au chapitre 8.

On rappelle que la dérivée seconde d'un champ déformé Y s'écrit,

$$\partial_i \partial_j Y(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\xi}) = \partial_i \partial_j Y(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\xi}) + \xi_{,i}^l \partial_l \partial_j Y(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\xi}) + \xi_{,j}^l \partial_l \partial_i Y(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\xi}) + \xi_{,i}^l \xi_{,j}^k \partial_l \partial_k Y(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\xi}). \quad (7.14)$$

En développant au premier ordre, on obtient

$$\partial_i \partial_j Y(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\xi}) = \partial_i \partial_j Y(\boldsymbol{\theta}) + \xi^l \partial_l \partial_i \partial_j Y(\boldsymbol{\theta}) + \xi_{,i}^l \partial_l \partial_j Y(\boldsymbol{\theta}) + \xi_{,j}^l \partial_l \partial_i Y(\boldsymbol{\theta}). \quad (7.15)$$

On a vu au chapitre 5 comment on peut écrire les dérivées du champ de déplacement en fonction de la convergence et du déchirement de l'effet de lentille

$$\xi_{,x}^x = -\kappa - \gamma_1, \quad (7.16)$$

$$\xi_{,y}^y = -\kappa + \gamma_1, \quad (7.17)$$

$$\xi_{,y}^x = -\gamma_2. \quad (7.18)$$

En utilisant ces dernières équations, on obtient l'expression

$$\Delta \hat{E} = (1 - 2\kappa) \Delta E + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla (\Delta E) - 2\delta^{ij} (\gamma_i \Delta P_j + \nabla \gamma_i \cdot \nabla P_j) \quad (7.19)$$

$$\Delta \hat{B} = (1 - 2\kappa) \Delta B + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla (\Delta B) - 2\varepsilon^{ij} (\gamma_i \Delta P_j + \nabla \gamma_i \cdot \nabla P_j). \quad (7.20)$$

Cette équation nous donne une idée assez précise de l'effet de lentille gravitationnelle sur la polarisation, décrite en terme des composantes E et B . En effet, le couplage aux lentilles se décompose, en :

- un déplacement. On le retrouve dans le terme $(1 + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \Delta E$ qui n'est autre que le développement perturbatif du laplacien de E pris au point $\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\xi}$. C'est exactement le même effet que celui sur la température, par exemple.
- une amplification. Assez logiquement, on voit apparaître une amplification de chaque composante du champ de polarisation. Cette amplification est contrôlée par le terme en -2κ et évolue donc comme la convergence de l'effet de lentille, ce qui n'est pas inattendu.
- un terme de mélange. C'est ce dernier terme qui est le plus riche. En effet, c'est ici que l'on trouve le comportement que nous avait suggéré notre intuition sur les champs vectoriels déformés. Ce terme prend en charge l'échange entre la composante scalaire et la composante pseudo-scalaire. La structure du couplage est assez simple. Finalement c'est juste la contraction du cisaillement $\boldsymbol{\gamma}$ sur le vecteur \boldsymbol{P} . Cette contraction doit respecter la structure géométrique de chaque composante. C'est pour cela qu'elle s'écrit comme une simple somme, avec un symbole de Kronecker δ^{ij} , pour la composante scalaire, et à l'aide du tenseur complètement antisymétrique ε^{ij} , pour la composante pseudo-scalaire. On peut séparer les deux termes du couplage. Le premier couple le cisaillement au laplacien du vecteur \boldsymbol{P} . Le second couple leurs dérivées. Ces deux termes, très similaires, vont cependant contribuer à des échelles différentes. On peut s'attendre par exemple à ce que le terme dépendant des gradients du cisaillement contribue à plus petite échelle que l'autre. On reviendra sur ce problème plus loin.

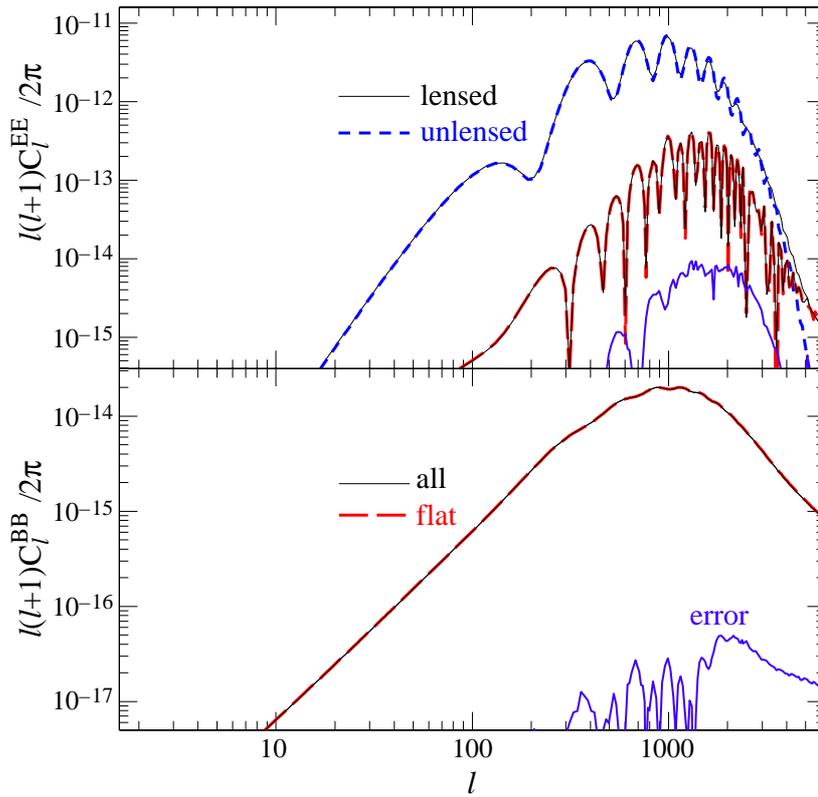


FIG. 7.1 – Le spectre de puissance de la polarisation avec et sans lentille. Comme pour la figure 6.2, ces courbes sont tirées de [Hu, 2000]. Elles donnent les spectres de puissance avec et sans effet de lentille. La courbe du bas est la polarisation B . Elle est calculée uniquement dans le cas où les perturbations tensorielles sont négligées, si bien qu'elle est non nulle seulement lorsque l'effet de lentille est pris en compte. Comme dans la figure 6.2, les courbes sont calculées avec et sans l'approximation des petits angles. L'erreur faite dans le cadre de cette approximation est très faible.

7.1.3 Spectre de puissance et composante pseudo-scalaire

U. Seljak et M. Zaldarriaga ont étudié l'effet de lentille gravitationnelle sur la polarisation du rayonnement de fond [Zaldarriaga & Seljak, 1997, Zaldarriaga & Seljak, 1998, Guzik *et al.*, 2000] et particulièrement sur le spectre de puissance des composantes de la polarisation et de la corrélation croisée température/polarisation. Leurs résultats ont été par la suite étendu par W. Hu [Hu, 2000] qui a repris le calcul au-delà de l'approximation des petits angles. Un des principaux résultats est la prédiction, valable pour les modèles inflationnaires, que l'effet de lentille gravitationnelle est la contribution dominante du spectre de puissance à petite échelle de la composante B .

Les équations (7.19-7.20) peuvent nous aider à comprendre cette prédiction. Dans le chapitre 3, nous avons montré que, du fait de la forme de la diffusion Thompson, seuls les termes de source des perturbations tensorielles interviennent dans la genèse de la composante B primordiale. Ces perturbations tensorielles sont fortement supprimées à petite échelle (voir chapitre 2). Il en découle que la composante magnétique de la polarisation doit être très faible à petite échelle (voir figure 7.1).

On vient de montrer que l'effet de lentille gravitationnelle mélangeait les composantes scalaire et pseudo-scalaire de la polarisation. On peut donc s'attendre à ce qu'une partie de la puissance contenue dans la partie scalaire se reporte sur la partie non-scalaire.

Partons d'un exemple simple dans lequel on négligera la contribution des perturbations tensorielles au spectre primordial. On a donc une polarisation purement scalaire. Typiquement, le spectre de puissance primordial de la polarisation va piquer aux alentours de $\ell = 1000$. Revenons maintenant à l'équation (7.20). Pour B , puisqu'il n'y a pas de composante pseudo-scalaire primordiale, il nous reste juste le terme de mélange

$$\Delta B = -2\varepsilon^{ij} (\gamma_i \Delta P_j + \nabla \gamma_i \cdot \nabla P_j). \quad (7.21)$$

La polarisation engendrée par le couplage aux lentilles se ramène à la polarisation primordiale, filtrée, dans l'espace de Fourier, par une fenêtre contenant l'information sur les lentilles.

Si on en reste à cette description très sommaire, on s'attend donc à ce que les lentilles engendrent une composante pseudo-scalaire de l'ordre de $\sigma_\kappa \sigma_P$, où σ_κ est la variance du champ de convergence, qui donne une idée de l'intensité de l'effet de lentille, et σ_P la variance de la polarisation, qui est simplement ici la variance de la composante E . Qui plus est, toujours avec cette description allégée, on peut s'attendre à ce que le spectre de puissance de la composante B pique lui aussi dans la région des $\ell = 1000$, bien loin de la région dominée par les perturbations tensorielles.

Calcul du spectre de puissance

Pour valider notre intuition, il faut calculer le spectre de puissance des deux composantes de la polarisation avec effet de lentille, en considérant cette fois-ci les fluctuations primordiales dues aux modes tensoriels. Comme dans le calcul du spectre avec lentille pour la température, il faut impérativement inclure le deuxième ordre perturbatif de l'effet de lentille dans notre calcul.

On pourrait pousser le développement commencé avec l'équation (7.19) un ordre plus loin. Cela revient principalement à rajouter des termes de déplacement d'ordre supérieur – c'est-à-dire des termes en $\xi \cdot \nabla$. Les seuls nouveaux termes sont ceux issus de produits de $\xi_{,i}^k \xi_{,j}^l$ dans l'équation (7.14). Ces derniers peuvent se ré-exprimer en termes de produits des champs de convergence et des composantes du champ de cisaillement. Contrairement à l'équation (7.19), cependant, ces termes de second ordre ne se regroupent pas de façon simple. L'équation au second ordre est donc de peu d'intérêt pour se forger une idée intuitive sur l'effet de lentille sur la polarisation. Qui plus est sa complexité rend son utilisation assez malaisée pour calculer le spectre de puissance de la polarisation avec effet de lentille.

Une autre voie, s'offre à nous. L'équation permettant de calculer les composantes E et B a une forme particulièrement simple dans l'espace de Fourier. En effet, les équations (7.4-7.5) deviennent

$$\tilde{E}(\ell, \phi) = \cos(2\phi) \tilde{Q}(\ell, \phi) + \sin(2\phi) \tilde{U}(\ell, \phi), \quad (7.22)$$

$$\tilde{B}(\ell, \phi) = \cos(2\phi) \tilde{U}(\ell, \phi) - \sin(2\phi) \tilde{Q}(\ell, \phi); \quad (7.23)$$

on a écrit le vecteur \mathbf{l} en coordonnées polaires. Ainsi, la connaissance du spectre de puissance avec effet de lentille des variables de Stokes permet de calculer directement celui des composantes E et B

$$C_\ell^E = \cos^2(2\phi) C_\ell^Q + \sin^2(2\phi) C_\ell^U + 2 \sin(2\phi) \cos(2\phi) C_\ell^{QU}, \quad (7.24)$$

$$C_\ell^B = \cos^2(2\phi) C_\ell^Q + \sin^2(2\phi) C_\ell^U - 2 \sin(2\phi) \cos(2\phi) C_\ell^{QU}. \quad (7.25)$$

Reste à calculer l'effet de lentille sur le spectre de Q et U et sur leur corrélation croisée. On procède comme dans le calcul pour la température. Il vient immédiatement

$$\hat{C}_\ell^X = C_\ell^X \left[1 - \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{(\mathbf{l} \cdot \mathbf{k})^2}{k^4} \bar{P}(k) \right] + \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{(\mathbf{l} \cdot \mathbf{k})^2 - k^4}{k^4} \bar{P}(k) C_{|\ell-\mathbf{k}|}^X, \quad (7.26)$$

par analogie avec la température, le X désignant Q , U ou QU . Je ne détaillerai pas la suite du calcul qui est un peu pénible. Il faut réinjecter l'équation (7.26) dans les équations (7.25) et faire apparaître explicitement les dépendances angulaires sur la variable d'intégration. Le résultat final est

$$\hat{C}_l^E = C_l^E [1 - l^2 \sigma] + \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{(\mathbf{l} \cdot \mathbf{k})^2 - k^4}{2k^4} \bar{P}(k) \quad (7.27)$$

$$\times \left[\left(C_{|l-\mathbf{k}|}^E + C_{|l-\mathbf{k}|}^B \right) + \cos(4\phi_{l-\mathbf{k}}) \left(C_{|l-\mathbf{k}|}^E - C_{|l-\mathbf{k}|}^B \right) \right], \quad (7.28)$$

$$\hat{C}_l^B = C_l^B [1 - l^2 \sigma] + \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{(\mathbf{l} \cdot \mathbf{k})^2 - k^4}{2k^4} \bar{P}(k)$$

$$\times \left[\left(C_{|l-\mathbf{k}|}^E + C_{|l-\mathbf{k}|}^B \right) - \cos(4\phi_{l-\mathbf{k}}) \left(C_{|l-\mathbf{k}|}^E - C_{|l-\mathbf{k}|}^B \right) \right]. \quad (7.29)$$

On a noté $l^2 \sigma$ le résultat de l'intégration $\int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{(\mathbf{l} \cdot \mathbf{k})^2}{k^4} \bar{P}(k)$. La figure 7.1 donne le résultat de l'intégration numérique de ces spectres.

Les équations des spectres (7.28-7.29) sont un peu plus difficiles à analyser que les équations (7.19-7.20). Comme pour la température, les termes de deuxième ordre se retrouvent tous dans le changement de normalisation du spectre, ce que la forme compliquée du deuxième ordre, dans l'espace réel, ne laissait pas deviner. Le terme de convolution de l'équation qui contient le mélange des composantes, ici explicite dans les variables E et B , correspond donc au premier ordre de l'effet de lentille. Les propriétés géométriques des champs E et B transparaissent dans le signe devant le cosinus; c'est le pendant du terme géométrique δ^{ij} ou ε^{ij} dans les équations (7.19-7.20). On retrouve le fait que, même si le champ B primordial est nul, le couplage aux lentilles peut engendrer une composante pseudo-scalaire.

Un raisonnement analogue à celui mené plus haut incite à penser que cette composante sera piquée dans la même région que le champ E primordial. De plus, le spectre de puissance de la composante B primordiale étant toujours beaucoup plus petit que celui de E , on pourra le négliger dans le terme de mélange⁶.

Contribution du terme de mélange

Retrouver, dans les équations (7.28-7.29), les différents termes du couplage aux lentilles tels qu'ils ont été discutés à l'aide des équations (7.19-7.20) est ardu. On a perdu dans le calcul les contributions séparées de la convergence et du cisaillement de l'effet de lentille. En négligeant, comme on a vu que cela était possible à petite échelle, le mode B primordial, on peut reconstruire la contribution du cisaillement, pour la composante B à l'aide de l'équation au premier ordre. Dans la suite, nous allons, en suivant [Benabed *et al.*, 2001], séparer dans le terme de mélange de (7.20) les contributions en $\varepsilon^{ij} \gamma_i \Delta P_j$ que l'on notera par un Δb_Δ et celles en $\varepsilon^{ij} \partial_k \gamma_i \partial^k P_j$ que l'on notera par un Δb_∇ .

Dans l'espace de Fourier, on a

$$\Delta b_\Delta(\boldsymbol{\theta}) = \int \frac{d^2 k d^2 l}{(2\pi)^2} \tilde{E}(l) \bar{\delta}(k) \mathcal{G}_\Delta^{\text{Ker}}(\mathbf{l}, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{l}) \cdot \boldsymbol{\theta}}. \quad (7.30)$$

⁶Cela n'est pas toujours vrai. En fait, à grande échelle, les deux spectres deviennent comparables et la composante B peut dominer la polarisation. La plage de modes où cette propriété est vérifiée est très réduite et une fois filtrée par le spectre des lentilles $\bar{P}(k)$, elle n'aura qu'une influence très réduite sur les modes de petite échelle qui nous intéressent particulièrement.

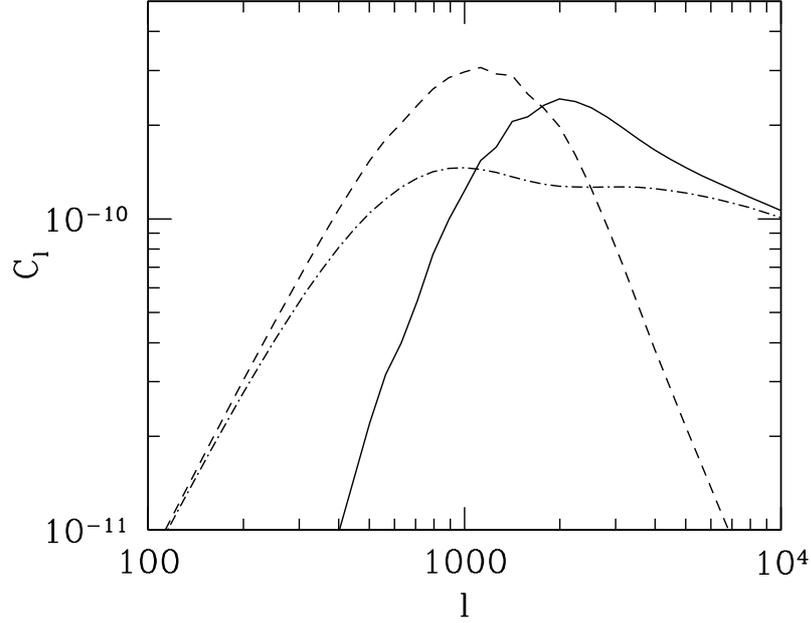


FIG. 7.2 – Contributions au spectre de B des deux composantes du terme de mélange de l'effet de lentille. La courbe en traits pleins donne le spectre total; celle en tirets la contribution des termes Δ seuls; celle en traits mixtes la contribution des termes ∇ .

Le \natural dans l'équation étant soit Δ , soit ∇ . Toute l'information sur la nature géométrique du couplage est contenue dans les termes $\mathcal{G}_{\natural}^{\text{Ker}}$ définis par

$$\mathcal{G}_{\Delta}^{\text{Ker}}(\mathbf{l}, \mathbf{k}) \equiv l^2 \sin 2(\phi_k - \phi_l), \quad (7.31)$$

$$\mathcal{G}_{\nabla}^{\text{Ker}}(\mathbf{l}, \mathbf{k}) \equiv lk \cos(\phi_k - \phi_l) \sin 2(\phi_k - \phi_l). \quad (7.32)$$

Dans le cas où l'on a négligé la polarisation B primordiale, le spectre de puissance avec lentilles se réduit, d'après (7.20) à

$$C_l^B = (C_l^{\Delta\Delta} + C_l^{\nabla\nabla} + 2C_l^{\Delta\nabla}) l^{-4}. \quad (7.33)$$

Le dernier spectre de cette équation $C_l^{\Delta\nabla}$ n'est pas nul, mais son intégrale doit s'annuler de sorte que la propriété

$$\langle b_{\Delta} b_{\nabla} \rangle = 0 \quad (7.34)$$

soit respectée. Cette propriété est requise par l'hypothèse de gaussianité du rayonnement de fond primordial.

Le calcul des spectres des trois corrélateurs est assez direct dans ces notations

$$C_l^{\natural\natural} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} C_{|l-k|}^E \bar{P}(k) \mathcal{G}_{\natural}^{\text{Ker}}(\mathbf{l} - \mathbf{k}, \mathbf{k}) \mathcal{G}_{\natural}^{\text{Ker}}(\mathbf{l} - \mathbf{k}, \mathbf{k}). \quad (7.35)$$

On peut décomposer ainsi dans le spectre de la composante B les contributions respectives des deux parties du terme de mélange. Les spectres de la contribution des termes Δ et ∇ , ainsi que $l^4 C_l^B$ sont présentés figure 7.2. Les deux contributions dominent à des échelles assez différentes. Le terme Δ contribue particulièrement aux échelles moyennes, tandis que le terme ∇ est responsable des petites échelles et en particulier de la chute amortie par rapport à celle de la composante E du spectre aux petites échelles. On vérifie ici notre intuition qui nous avait laissé supposer que dans ce dernier terme, les gradients du champ de cisaillement allaient se traduire par une forte contribution aux petites échelles.

7.1.4 Reconstruction de l'effet de lentille

On vient de montrer comment l'effet de lentille gravitationnelle mélangeait les composantes géométriques de la polarisation du rayonnement de fond. On a déjà dit que dans les modèles inflationnaires, la composante pseudo-scalaire primordiale était faible et contribuait principalement aux grandes échelles. Le calcul du spectre de puissance de la polarisation B nous a appris que l'effet de lentille contribuait principalement aux échelles moyennes et petites. On connaît même les détails de ce couplage.

Puisque la polarisation aux petites échelles est essentiellement une mesure de l'effet de lentille gravitationnelle faible que l'on sait si bien décrire, peut-on aller plus loin et essayer de reconstruire, à petite échelle, l'effet de lentille gravitationnelle à partir de la polarisation du rayonnement de fond? On va présenter deux approches visant cette reconstruction. Toutes deux échouent, plus ou moins gravement, pour des raisons similaires qui sont en fait contenues dans l'équation (7.12). S'il n'y a aucune raison qu'un champ vectoriel d'origine scalaire déformé conserve cette propriété, il n'y a aussi aucune raison qu'elle soit nécessairement brisée. Il existe des effets de lentilles qui ne créent pas de polarisation B . Il y a donc nécessairement une ambiguïté dans une reconstruction de l'effet de lentille à partir de la polarisation.

Reconstruction directe

L'approche la plus directe est d'essayer d'inverser la formule au premier ordre de l'effet de lentille. Supposons que la polarisation primordiale ait seulement une origine scalaire

$$\mathbf{P} = \nabla\varphi. \quad (7.36)$$

La composante E s'identifie directement au laplacien du potentiel du champ vectoriel

$$E \equiv \Delta\varphi, \quad (7.37)$$

tandis que les variables de Stockes s'écrivent

$$\begin{aligned} Q &= (\partial_x^2 - \partial_y^2) \varphi, \\ U &= 2 \partial_x \partial_y \varphi. \end{aligned} \quad (7.38)$$

On rappelle que d'après la formule (7.20) la composante B avec effet de lentille est alors seulement donnée par

$$\Delta\hat{B} = -2\varepsilon^{ij} \left(\gamma_i \Delta P_j + \gamma_{i,k} P_j^k \right). \quad (7.39)$$

On peut aussi⁷ écrire les composantes de la matrice d'amplification comme des dérivées d'un champ scalaire. Les formules sont identiques à celles de la polarisation. La convergence et le cisaillement s'écrivent en fonction d'un unique champ scalaire ψ

$$\kappa \equiv \frac{\Delta\psi}{2}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2} (\partial_x^2 - \partial_y^2) \psi, \quad \gamma_2 = \partial_x \partial_y \psi. \quad (7.40)$$

Le problème se reformule en fonction de nos *potentiels* φ et ψ . Donc, étant donnée une observation d'un polarisation B et donc en première approximation, un champ φ , peut on reconstruire le champ scalaire ψ ? Il est équivalent, en fait, de répondre plutôt à la question suivante : Quel est l'espace des solutions ψ vérifiant

$$-2\varepsilon^{ij} \left(\gamma_i \Delta P_j + \gamma_{i,k} P_j^k \right) = 0 ? \quad (7.41)$$

⁷en négligeant la contribution des couplages entre lentilles qui sont d'ordres supérieurs

En effet, si cet espace est trivial, se résumant par exemple à quelques transformations bien connues (translations, homothéties...), on pourra alors reconstruire à un groupe de transformations connues près, l'effet de lentille. Je vais montrer que malheureusement, le noyau de notre problème n'est pas trivial.

Pour ce faire, supposons qu'il soit possible de pratiquer une décomposition polynomiale des champs φ et ψ

$$\varphi(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{n,l} \varphi_{nl} \theta_x^n \theta_y^l, \quad (7.42)$$

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{m,k} \psi_{mk} \theta_x^m \theta_y^k. \quad (7.43)$$

Cette hypothèse est toujours trivialement vérifiée sur une carte expérimentale; le degré du polynôme correspondant au nombre de points de la carte. Les φ_{nl} sont connus. On peut les calculer en première approximation à partir des variables de Stockes observées. L'erreur faite en utilisant les composantes observées n'apparaîtra qu'au deuxième ordre dans l'équation (7.41). La résolution de cette équation nécessite juste de déterminer une famille de ψ_{mk} vérifiant

$$\gamma_2 \Delta Q - \gamma_1 \Delta U + \partial_i \gamma_2 \partial^i Q - \partial_i \gamma_1 \partial^i U = 0, \quad (7.44)$$

ou encore

$$\begin{aligned} & -(m+3)(m+2)(m+1) \psi_{m+3,k} \partial_x U \\ & + (k+3)(k+2)(k+1) \psi_{m,k+3} \partial_y U \\ & + (m+2)(m+1)(k+1) \psi_{m+2,k+1} (\partial_x Q - \partial_y U) \\ & + (k+2)(k+1)(m+1) \psi_{m+1,k+2} (\partial_y Q + \partial_x U) \\ & - [(m+2)(m+1) \psi_{m+2,k} - (k+2)(k+1) \psi_{m,k+2}] \Delta U \\ & + (k+1)(m+1) \psi_{m+1,k+1} \Delta Q = 0. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Avant même d'aller plus loin, remarquons que les familles de paramètres $\{\psi_{0,0} \neq 0, \psi_{m,k} = 0\}$, $\{\psi_{1,0} \neq 0, \psi_{m,k} = 0\}$ et $\{\psi_{0,0} \neq 0, \psi_{m,k} = 0\}$ sont des solutions triviales de l'équation du noyau. Le plan masse⁸, ainsi que les translations font parties du noyau. Ce n'est pas un résultat surprenant ! Les déformations induites par ces familles de solution n'obéissent évidemment pas à la contrainte (7.12) ! En fait, on est en train de résoudre le problème inverse à celui que l'on avait présenté section 7.1.2. On cherche toutes les déformations du plan, dérivant d'un potentiel, qui laissent irrotationnel un champ vectoriel donné.

L'ensemble des solutions de (7.45) est beaucoup plus grand. Il ne se restreint pas aux seules solutions triviales des translations. On va construire les solutions non triviales de l'équation par récurrence. Pour amorcer le processus il faut spécifier au moins six $\psi_{m,k}$. Ces six paramètres sont libres et correspondent à des transformations compliquées du plan. Qui plus est, à chaque rang de la récurrence, il va falloir fixer encore de nouveaux termes. Le noyau explose. Les éléments du noyau sont non-triviaux et déterminés par la valeur de la polarisation et de ses dérivées. En d'autres termes, pour tout champ vectoriel de polarisation d'origine scalaire, il existe des effets de lentilles non-triviaux, dépendant de la polarisation choisie, et possédant la propriété de laisser la composante B invariante; c'est-à-dire, de laisser le champ vectoriel de polarisation irrotationnel. Bien que la composante pseudo-scalaire n'existe que grâce au couplage aux lentilles, elle ne suffit pas pour reconstruire l'effet de lentille qui lui a donné naissance. Il faut une information complémentaire pour réduire la dimension du noyau.

⁸on retrouve ici un résultat classique du problème de reconstruction de l'effet de lentille. Un plan masse n'est jamais détectable.

Une reconstruction possible du spectre de puissance

Une deuxième approche a été proposée par J. Guzik, U. Seljak et M. Zaldarriaga [Guzik *et al.*, 2000]. Elle est très fortement inspirée de la méthode de reconstruction du spectre à partir de la température du rayonnement de fond que nous avons déjà esquissée dans le chapitre précédent, qui avait été d'ailleurs proposée par les mêmes auteurs [Seljak & Zaldarriaga, 1999b, Zaldarriaga & Seljak, 1999]. Elle va se heurter aux mêmes difficultés, qui sont fortement liées à la remarque faite plus haut de l'impossibilité d'une reconstruction exacte.

L'idée, développée par ces auteurs, est de s'intéresser à des observables composées de dérivées premières de la polarisation. Dériver un champ déformé est une manière simple de faire apparaître explicitement des dérivées de la déformation qui, on le sait, s'expriment en fonction de la convergence et du cisaillement du champ de lentille. Les auteurs proposent de s'intéresser aux observables suivantes

$$\mathcal{S} \equiv (Q_{,x}^2 + Q_{,y}^2 + U_{,x}^2 + U_{,y}^2), \quad (7.46)$$

$$\mathcal{Q} \equiv (Q_{,x}^2 - Q_{,y}^2 + U_{,x}^2 - U_{,y}^2), \quad (7.47)$$

$$\mathcal{U} \equiv 2(Q_{,x}Q_{,y} + U_{,x}U_{,y}). \quad (7.48)$$

Ces observables ont un certain nombre de propriétés intéressantes. Tout d'abord, la variable \mathcal{S} se transforme comme un scalaire. Par ailleurs, les variables \mathcal{Q} et \mathcal{U} , tout comme leurs pendants Q et U sont des spineurs-2. On pourra, par la suite, définir une composante scalaire \mathcal{E} et une composante pseudo-scalaire \mathcal{B} pour le champ pseudo-vectoriel

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q} \\ \mathcal{U} \end{pmatrix}. \quad (7.49)$$

La moyenne sur toutes les réalisations du rayonnement de fond de ces variables se calcule sans peine

$$\langle \mathcal{S} \rangle_{\text{CMB}} = \sigma_P, \quad (7.50)$$

$$\langle \mathcal{Q} \rangle_{\text{CMB}} = 0, \quad (7.51)$$

$$\langle \mathcal{U} \rangle_{\text{CMB}} = 0. \quad (7.52)$$

On a introduit ici la notation σ_P qui se ramène simplement à la variance de la dérivée du champ de polarisation. Dans le cas où la polarisation est purement scalaire, par exemple,

$$\sigma_P = \int \frac{d^2l}{(2\pi)^2} l^2 C_l^E. \quad (7.53)$$

Le premier ordre de l'effet de lentille sur ces observables est particulièrement simple. Le calcul est très proche de celui menant aux équations (7.19-7.20)

$$\hat{\mathcal{S}} = (1 - 2\kappa)\mathcal{S} - 2\gamma_1\mathcal{Q} - 2\gamma_2\mathcal{U}, \quad (7.54)$$

$$\hat{\mathcal{Q}} = (1 - 2\kappa)\mathcal{Q} - 2\gamma_1\mathcal{S}, \quad (7.55)$$

$$\hat{\mathcal{U}} = (1 - 2\kappa)\mathcal{U} - 2\gamma_2\mathcal{S}. \quad (7.56)$$

D'après cette équation, il est évident que la moyenne sur le rayonnement de fond des observables \mathcal{S} , \mathcal{Q} et \mathcal{U} est directement proportionnelle à l'effet de lentille

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{S}} \rangle_{\text{CMB}} &= (1 - 2\kappa)\sigma_P \\ \langle \hat{\mathcal{Q}} \rangle_{\text{CMB}} &= -2\gamma_1\sigma_P \\ \langle \hat{\mathcal{U}} \rangle_{\text{CMB}} &= -2\gamma_2\sigma_P. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Malheureusement, on ne peut évidemment pas pratiquer de moyenne sur les réalisations du rayonnement de fond. L'information sur les lentilles reste donc inaccessible directement. Notons en passant que si nous avions pu, durant notre discussion sur la reconstruction directe, disposer de plusieurs réalisations du rayonnement de fond affectées par les mêmes lentilles nous aurions aussi réduit notre noyau. On a montré comment le noyau dépendait de la réalisation choisie. On est confronté une fois encore au même problème que dans le cas de l'inversion directe de l'équation (7.20).

Il est possible, si l'on ne cherche que des estimateurs statistiques de l'effet de lentille d'aller un peu plus loin. Les auteurs par analogie avec leurs travaux sur la température [Seljak & Zaldarriaga, 1999b, Zaldarriaga & Seljak, 1999], ont cherché à mimer ergodiquement la moyenne sur les réalisations du rayonnement de fond. Si on ne peut moyenniser sur toutes les réalisations du rayonnement de fond, on peut le faire sur une seule réalisation. Ainsi, en moyennant sur des cellules de taille donnée on construit un estimateur du champ de convergence filtré à l'échelle de la cellule. Cette démarche est celle que suivent les observateurs qui tentent de reconstruire l'effet de lentille sur des galaxies d'arrière-plan. Cet estimateur est bruité par les auto-corrélations des champs de polarisation à cette échelle. Il s'agit ni plus ni moins ici d'un effet *de variance cosmique*. Remplacer une moyenne d'ensemble par une moyenne statistique engendre une erreur qu'il est possible d'évaluer. On reviendra plus en détail sur ce genre de calcul, chapitre 8.

Malheureusement, la taille des structures du rayonnement de fond est trop grande pour obtenir des informations sur l'effet de lentille à des échelles raisonnables sans un bruit trop important. Contrairement au cas des galaxies où le nombre de structures de petite échelle est suffisant pour reconstruire un estimateur raisonnable de la convergence, les gradients du rayonnement de fond sont trop doux pour fournir une statistique suffisante. Pour que le nombre de structures soit suffisant, il faudrait aller à beaucoup plus grande échelle, dans une région où l'effet de lentille n'est plus dominant. La solution adoptée par les auteurs, consiste plutôt à reconstruire un estimateur du spectre de puissance de la convergence. Les corrélateurs des observables \mathcal{S} , \mathcal{Q} et \mathcal{U} sont directement proportionnels au spectre de puissance de l'effet de lentille. Le bruit résiduel, dû toujours à l'impossibilité de moyenniser sur les réalisations, ou encore à l'impossibilité de distinguer les solutions du noyau, va apparaître comme des corrélations de ces mêmes observables sans effet de lentille. L'évaluation de ce bruit n'est pas très difficile. Celui-ci, sans surprise, est relativement faible à grande échelle et explose à petite échelle, à cause du manque de structures dans le rayonnement de fond. La méthode permet donc une reconstruction partielle, à grande échelle, d'un estimateur du spectre de puissance. Le signal sur bruit attendu est cependant modeste.

Pour revenir une dernière fois aux considérations de la première partie de cette section, les auteurs, avec leurs observables, ont mesuré la *taille* du noyau ; l'erreur faite en considérant un estimateur de l'effet de lentille construit par inversion, comme étant le vrai effet de lentille. Leurs résultats montrent que cette erreur est très importante à petite échelle.

7.2 Effet de lentille forte – Cas d'une corde cosmique

On va maintenant quitter le régime faible pour se pencher sur l'effet d'une lentille forte induite par une corde cosmique. Les résultats que je vais résumer ici ne sont donc pas tout à fait équivalents à ceux de l'effet *Kaiser-Stebbins* [Kaiser & Stebbins, 1984] décrits chapitre 6. Ici, les lentilles seront statiques. L'effet n'est pas dépendant du mouvement des cordes. Je vais reprendre les principaux résultats de l'article [Benabed & Bernardeau, 2000]. Le détail des calculs est contenu dans l'article inclus en annexe.

7.2.1 Présentation de l'article

On rappelle, encore une fois que l'on s'attend à n'avoir, dans le cas de fluctuations primordiales inflationnaires, qu'une faible polarisation de type magnétique et uniquement pour d'assez grandes échelles. On a vu aussi qu'il a été prédit que le couplage aux effets de lentilles gravitationnelles devait induire une composante magnétique importante aux petites échelles. Je vais voir dans quelle mesure ces résultats demeurent valables lorsque la lentille est forte. On étudiera le cas particulier de l'effet de lentille d'une corde cosmique. La couverture globale du ciel qu'offrent les expériences satellites de détection du rayonnement de fond est particulièrement adaptée à la détection de cordes par cette méthode... Si l'effet de lentille d'une corde est suffisamment important, ce que nous allons vérifier ici.

On peut écrire simplement l'effet dans le cas d'une corde rectiligne. Il a été montré au chapitre 5 que la métrique au voisinage d'une telle corde restait plate, mais que du fait de l'angle manquant, l'effet se réduisait à la recopie d'une bande d'image. L'équation de base (7.2) reste donc valable. Seule change l'expression de l'effet de lentille (5.96). Pour la variable Q , ces deux équations donnent

$$\hat{Q}(\boldsymbol{\theta}) = Q(\theta_x - \xi_0, \theta_y) \Theta(\theta_x) + Q(\theta_x + \xi_0, \theta_y) \Theta(-\theta_x). \quad (7.58)$$

La corde est en $\theta_x = 0$. On retrouve ici l'effet d'image double sur une bande de taille

$$2\xi_0 = \frac{8\pi G\mu \mathcal{D}_{\text{source,corde}}}{\mathcal{D}_{\text{source}}}. \quad (7.59)$$

On a vu précédemment que les variables de Stokes Q et U ne donnaient pas une description géométrique simple des propriétés du champ de polarisation et que l'on préférait utiliser la décomposition scalaire/pseudo-scalaire E/B . L'effet de lentille des cordes se traduit par une recopie d'une bande d'image, et donc par une discontinuité le long de la corde. Cette discontinuité étant infiniment fine, il n'est pas question de la voir dans les variables de Stokes. De même la recopie agissant sur des échelles de l'ordre de l'arc seconde (pour $G\mu \sim 10^{-6}$), on ne peut espérer détecter des structures en double dans la polarisation du rayonnement de fond. Cependant, les composantes E et B étant non locales, on peut espérer y voir le couplage aux lentilles.

On s'intéressera par la suite à la composante B . Celle-ci étant presque nulle aux petites échelles, elle sera certainement le meilleur traceur pour l'effet faible que l'on cherche. On exprime donc le déplacement induit par les lentilles dans la composante B

$$\Delta \hat{B}(\boldsymbol{\theta}) = \delta(\theta_x) (|U_{,x}|_{\pm}^{\pm} - 2|Q_{,y}|_{\pm}^{\pm}) + \delta'(\theta_x) |U|_{\pm}^{\pm}, \quad (7.60)$$

où $| \cdot |_{\pm}^{\pm}$ est la formule des sauts

$$|X|_{\pm}^{\pm} \equiv \hat{X}(0^+) - \hat{X}(0^-) = X(-\xi_0) - X(\xi_0). \quad (7.61)$$

La non-localité des composantes E et B fait que l'effet de discontinuité est sensible à une distance arbitrairement grande de la corde. On a vu plus haut que ce genre de problème était dû au fait que la définition des variables E et B recourait à l'inversion d'un Laplacien. Encore une fois, on répète que cette inversion est ambiguë. Elle n'a de sens que lorsqu'une fenêtre de filtrage est spécifiée. On s'attend alors à voir un signal dans la polarisation de type B jusqu'à une distance comparable à la taille caractéristique de la fenêtre de filtrage.

Ce qui est en jeu ici est encore une fois l'effet de déformation présenté section 7.1.2 ; à ceci près que l'on est dans le cas général d'une déformation ne dérivant pas nécessairement d'un potentiel. L'effet de lentille change la *forme* du champ polarisé, mais pas la direction de polarisation. Une tache circulaire uniformément polarisée sera vue, après avoir subi l'effet

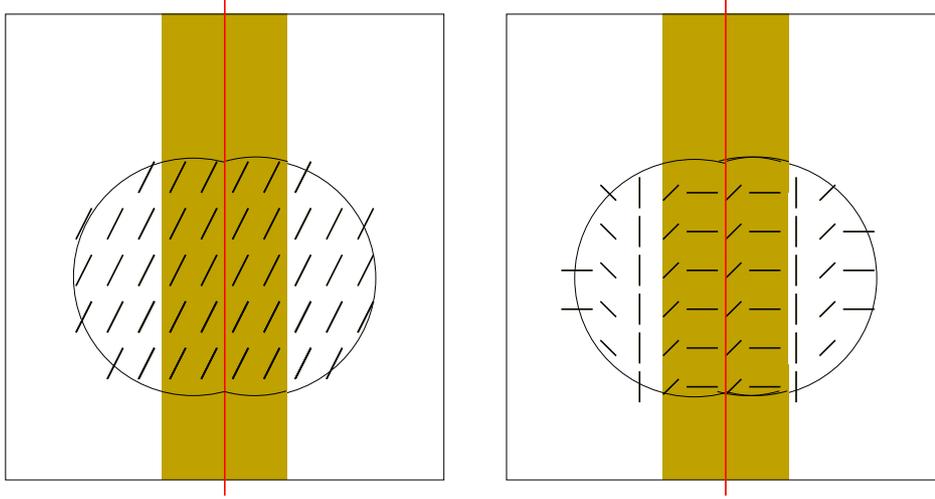


FIG. 7.3 – Effet de lentille d'une corde sur une tache circulaire uniformément polarisée (gauche) - non-uniformément polarisée (droite). La zone de recopie de la corde est matérialisée par la zone grisée. La corde est au centre de la figure. Sur la figure de gauche, rien de particulier ne se passe le long de la corde. À droite, le long de la corde, la direction de la polarisation n'est plus définie et il y a apparition d'une discontinuité que peuvent sentir les composantes E et B du champ.

de lentille d'une corde comme une sorte d'ellipse toujours polarisée uniformément (voir figure 7.3). Si la tache n'a pas une polarisation uniforme, la distribution de cette polarisation, ses propriétés géométriques, vont être changées par cette altération de la forme de la tache. C'est ce que nous testons en étudiant la décomposition scalaire/pseudo-scalaire du champ vectoriel de polarisation. Par ailleurs, nous retrouvons que l'effet de lentille ne crée pas de polarisation. Dans (7.58) on voit qu'une polarisation primordiale nulle le reste après effet de lentille. Cependant, comme pour le cas d'une petite déformation, si le champ B primordial était nul, il n'y a pas de raison, d'après l'équation (7.60) qu'il le reste. À part la distance d'action infinie de l'effet, rien ne distingue l'effet de lentille gravitationnelle d'une corde rectiligne de celui induit des grandes structures. L'échelle caractéristique de cet effet, parce qu'il se ramène à l'intégrale de distributions, est *arbitraire* – comprendre : dépend de la fonction test choisie. Toutes les échelles de B sont touchées. On a ici un couplage de mode encore plus important que pour l'effet de lentille faible.

Il reste maintenant à évaluer l'amplitude de l'effet sur la polarisation du rayonnement de fond. Dans l'espace de Fourier, le champ B s'écrit

$$\Delta \hat{B}(\boldsymbol{\theta}) = 2 \int \frac{d^2 l}{\pi} \tilde{E}(l) e^{i\boldsymbol{\theta} \cdot l} \left(e^{i\xi_0 l_x} - e^{-i\xi_0 l_x} \right) \left[\frac{l_x l_y}{l^2} \delta'(\theta_x) + i \frac{l_y^3}{l^2} \delta(\theta_x) \right], \quad (7.62)$$

avec \tilde{E} la transformée de Fourier de la composante E primordiale⁹. Il ne reste plus qu'à contracter ΔB sur une fonction test, que nous choisissons ici gaussienne de variance α_w , et à estimer la variance de ce champ

$$\left\langle \left(\Delta \hat{B} \right)^2 \right\rangle_{\text{gauss}} = 2 e^{-\frac{\theta^2}{\alpha_w^2}} \int \frac{d^2 l}{\pi^3} C_E(l) \sin^2(\xi_0 l_x) \times e^{-l_y^2 \alpha_w^2} \left[\frac{l_x^2 l_y^2 \theta_x^2}{l^4 \alpha_w^6} + \frac{l_y^6}{l^4 \alpha_w^2} \right]. \quad (7.63)$$

⁹Une fois encore, on rappelle que les variables Q et U primordiales s'écrivent simplement en fonction de la composante électrique de la polarisation lorsque la partie magnétique est nulle.

Le spectre de puissance de la polarisation primordiale de type E , $C_E(l)$, qui apparaît dans l’équation, est fortement supprimé par l’amortissement de Silk à une échelle caractéristique beaucoup plus grande que celle du déplacement (voir chapitre 3). Cette coupure permet d’approcher le $\sin^2 \xi_0 l_x$ par $(\xi_0 l_x)^2$. Si par ailleurs on approche le spectre de puissance par une fonction de Dirac centrée sur le pic, à une échelle $\alpha_{\text{pic}} \sim 10^{-3}$ et $\alpha_w \ll \alpha_{\text{peaks}}$, l’équation (7.63) se réduit à une intégrale sur les dépendances angulaires qui donne finalement l’équation

$$\frac{\langle (\Delta \hat{B}_w(\theta_x = \pm \alpha_w, \theta_y))^2 \rangle^{1/2}}{\langle (\Delta E)^2 \rangle^{1/2}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi e}} \frac{\xi_0}{\alpha_w} \sqrt{5 + 8 \frac{\alpha_{\text{pic}}^2}{\alpha_w^2}}. \quad (7.64)$$

On retrouve ici le résultat prévu plus haut. L’effet de lentille se fait sentir jusqu’à des distances de l’ordre de la taille de la fenêtre. On a choisit d’évaluer l’amplitude à une distance $\theta_x = \pm \alpha_w$ qui est proche du maximum de l’effet. Pour une échelle de filtrage autour de l’arc-minute, l’effet de lentille induit une composante magnétique de l’ordre de 10% de l’amplitude de la composante magnétique, pour un déplacement $G\mu \sim 5''$. L’effet tombe au pour-cent pour un filtrage de 5 arc-minutes. Il y a donc peu de chance de détecter directement une corde cosmique dans la polarisation du rayonnement de fond ; la précision des instruments de mesure n’atteint pas encore les échelles nécessaires. Qui plus est, l’effet de lentille faible, ainsi que les autres effets secondaires produiront sans aucun doute un signal beaucoup plus fort qui peut cacher l’effet de lentille d’une corde. Cependant, des techniques comme la transformation de Radon, sensibles aux structures alignées pourraient être capables de sentir les structures particulières induites par les cordes, même pour des amplitudes si faibles. Cette étude nous a cependant enseigné beaucoup de choses sur l’effet de lentille dans la polarisation du rayonnement de fond ; la simplicité des effets en cause permettant un traitement entièrement analytique du problème. On trouvera, dans l’article inclut en annexe, une description plus complète des calculs, une simulation de cet effet pour des cordes circulaires ainsi qu’une discussion plus complète sur les détails des différents termes entrant dans le calcul de l’effet de lentille.

7.2.2 Article

PHYSICAL REVIEW D, VOLUME 61, 123510

Cosmic string lens effects on CMB polarization patterns

K. Benabed and F. Bernardeau

Service de Physique Théorique, C.E. de Saclay, 91191 Gif-Sur-Yvette, France

(Received 10 June 1999; published 23 May 2000)

Extending the Kaiser-Stebbins mechanism we propose here a method for detecting relics of topological defects such as cosmic strings based on lens-induced small-scale B -type polarization in the cosmic microwave background. Models of inflation, in which large-scale structures of the Universe emerge from the inflaton fluctuations, do not exclude the formation of topological defects at the end of the inflationary phase. In such a case, we show that the lens effect of a string on the small-scale E -type polarization of the cosmic microwave background induces a significant amount of B -type polarization along the line of sight. The amplitude of the effect is estimated for different resolutions of cosmic microwave background experiments.

PACS number(s): 98.70.Vc, 98.62.Sb, 98.80.Cq

I. INTRODUCTION

The temperature anisotropies of the cosmic microwave background (CMB) offer a unique window towards the physics of the early Universe and for an understanding of the large-scale structures. Current observations of the temperature anisotropies power spectrum C_l point toward the existence of a well-localized first acoustic peak [1]. If this result is confirmed by the next generation of CMB experiments, it supports models of large-scale structure formation from adiabatic scalar fluctuations at the expense of models of topological defects and more particularly of cosmic strings [2,3]. Furthermore, the shape and normalization of the local matter density power spectrum $P(k)$ is also in poor agreement with the CMB data for such models [4]. This suggests that *only* a small fraction of the large-scale inhomogeneities might be due to topological defects. However, recent studies have shown that in realistic models of inflation cosmic string formation seems quite natural at the end of the inflationary period: it is a natural outcome in the super symmetry-inspired scenario [5]; it can also be obtained during a pre- or reheating process [6].

The effects of cosmic strings on the last scattering surface temperature map have been described by Kaiser and Stebbins [7]. If a cosmic string is moving against an homogeneous surface of uniform temperature, the energy of the deflected photon [8] is enhanced or reduced (the photons are then blueshifted or redshifted) depending on whether the photon is passing behind or ahead the moving string, a mechanism through which temperature anisotropies are generated. The aim of this paper is to explore the possibilities of having similar effects for the polarization properties. Obviously, if the background surface is unpolarized, the deflected photons remain unpolarized and no effects can be observed. However, if the background sky is polarized, then the polarization pattern is affected through lens effects and, in particular, a geometrical deformation can naturally induce B -type polarization out of the E component. This mechanism has been described for the large-scale structures [9] and recognized as a major source of B -type small-scale CMB polarization. We are interested here in the case of cosmic strings for which this effect can be easily investigated and visualized. Note that, by doing so, we neglect a possible coupling

with an axionic field associated with the string that could induce significant photon-string nongravitational couplings to a finite distance [10]. The background model of large-scale structure formation of this paper is therefore inflation-driven adiabatic fluctuations with a few cosmic strings that may have survived from a late-time phase transition although with a significant linear energy density. Note that what we are describing here is a secondary effect from a perturbation theory point of view in the sense that it is quadratic in the metric perturbation: it is a coupling between the local gravitational potential and the potential on the last-scattering surface (the Kaiser-Stebbins effect is also a secondary effect). We do not attempt to describe the primary anisotropies induced at the recombination time that have been examined in other studies [11].

In Sec. II we examine in detail the effects induced by straight strings and by circular loops. Section III contains the result of simulations of the effect. Then, in Sec. IV, we estimate the detectable amplitude of the B component in the case of a straight-string-driven deformation.

II. COSMIC STRING LENS EFFECT

In the inflationary scenario, at any given scale, scalar perturbations give birth to a scalar polarization pattern—that is to say, to E -type polarization—whereas tensor modes, which can induce both E - and B -type polarizations, contribute only at a very large scale [12]. This result accounts for the symmetry of the fluctuations. It implies that at small scales the pseudoscalar B field

$$B \equiv \Delta^{-1}[(\partial_x^2 - \partial_y^2)U - 2\partial_x\partial_y Q], \quad (1)$$

defined¹ from the Stokes parameters Q and U , is zero. The polarization field is then entirely defined by the scalar E field

$$E \equiv \Delta^{-1}[(\partial_x^2 - \partial_y^2)Q + 2\partial_x\partial_y U]. \quad (2)$$

Since the polarization vector is transported parallel along the geodesics, a gravitational lens affects the polarization

¹Throughout the paper we work in the small-angular-scale limit. See [13] for a general discussion of these properties.

K. BENABED AND F. BERNARDEAU

PHYSICAL REVIEW D **61** 123510

simply by displacing the apparent position of the polarized light source [14]. In other words, the observed Stokes parameters \hat{Q} and \hat{U} are given in terms of the primary (i.e., unlensed) ones by

$$\hat{Q}(\vec{\alpha}) = Q(\vec{\alpha} + \vec{\xi}), \quad \hat{U}(\vec{\alpha}) = U(\vec{\alpha} + \vec{\xi}), \quad (3)$$

where $\vec{\xi}$ is the displacement field at angular position $\vec{\alpha}$ ($\vec{\alpha}$ is a 2D vector that gives the sky coordinates in the small-angle limit). The displacement $\vec{\xi}$ is given by the integration of the gravitational potential along the line of sights. We will assume in this paper that the only potential acting as a lens is the cosmic string potential. It obviously depends on the shape, equation of state, and dynamics of the string.

Putting Eq. (3) into Eq. (1), we can write a general expression of $\Delta\hat{B}$ in presence of lenses:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{B}(\vec{\alpha}) = & -2Q_{,ij}(\vec{\alpha} + \vec{\xi})(\delta_x^i + \xi_{,x}^i)(\delta_y^j + \xi_{,y}^j) - 2Q_{,i}(\vec{\alpha} + \vec{\xi}) \\ & \times \xi_{,xy}^i + U_{,ij}(\vec{\alpha} + \vec{\xi})[(\delta_x^i + \xi_{,x}^i)(\delta_y^j + \xi_{,y}^j) \\ & - (\delta_y^i + \xi_{,y}^i)(\delta_x^j + \xi_{,x}^j)] + U_{,i}(\vec{\alpha} + \vec{\xi})(\xi_{,xx}^i - \xi_{,yy}^i). \end{aligned} \quad (4)$$

There are no reasons for the displacement field to preserve a nonzero B -type cosmic microwave background polarization simply because the two scalar field compositions (one being the primary scalar perturbation, the other the line-of-sight gravitational potential) break the parity invariance.

For illustration we examine here explicitly the two special cases of a straight cosmic string and of a circular cosmic string, both of them in a plane orthogonal to the line of sight.

A. Case of a straight string

Let us assume that a straight string is aligned along the y axis. Then the displacement is uniform at each side of the string. The deflection angle $\alpha = 4\pi G\mu$ [8] (where G is the Newton constant and μ the string linear energy density) induces a displacement given by

$$\xi_x = \pm \xi_0, \quad \xi_0 = 4\pi G\mu \frac{D_{\text{CMB,string}}}{D_{\text{string}}}, \quad (5)$$

the sign depending on which side of the string one observes; the displacement along y is obviously 0. $D_{\text{CMB,string}}$ and D_{string} are the cosmological angular distances between, respectively, the last scattering surface and the string, and the string and the observer. In the following, we will assume that we are in the most favorable case for detection, when the ratio of the distance is about unity, hence removing any geometrical dependence on the cosmological parameters. Then, the string lays at equal distance between the last scattering surface and the observer.² For a $G\mu$ around 10^{-6} [8], the typical expected displacement is about less than 10 arc sec.

We can write the expression of the Stokes parameters,

$$\begin{aligned} \hat{Q}(x,y) = & Q(x - \xi_0, y)\theta(x - x_0) + Q(x + \xi_0, y) \\ & \times [1 - \theta(x - x_0)], \end{aligned} \quad (6)$$

where θ is the step function and x_0 is the position of the string. The same expression holds for \hat{U} . Since the primary polarization map is B free, the Laplacian of the observable B field is finally given by

$$\Delta\hat{B}(\vec{\alpha}) = \delta(x - x_0)(|U_{,x}|_+^+ - 2|Q_{,y}|_+^+ + \delta'(x - x_0)|U|_+^+), \quad (7)$$

where we define

$$|X|_+^+ \equiv \hat{X}(x_0^+) - \hat{X}(x_0^-) = X(x_0 - \xi_0) - X(x_0 + \xi_0). \quad (8)$$

One can note in Eq. (7) that the effect is entirely due to the discontinuity induced by the string on the polarization map. Furthermore, the B component of the polarization will only be nonzero on the string itself. Obviously, the efficiency with which such an effect will be observed depends on the angular precision of the detectors as we discuss later.

B. Case of a circular string

The case of a collapsing circular string loop allows us to complement our analysis with the effect of the string curvature. As shown in [15] the lens effect of such a string, when facing the observer, is equivalent to the one of a static linear mass distribution. The structure of the displacement field is then simple. Let us consider a loop centered at the origin of our coordinate and of radius α_l . If one observes towards a direction through the loop, the displacement is nil. Outside the loop, the displacement decreases as α_l/α . We have

$$\vec{\xi}(\vec{\alpha}) = -2\xi_0 \frac{\alpha_l}{\alpha^2} \vec{\alpha} \quad \text{for } \alpha > \alpha_l. \quad (9)$$

Note that, in ξ_0 , μ is an effective quantity that contains the effects of dynamics as well. Then, \hat{Q} is

$$\begin{aligned} \hat{Q}(\vec{\alpha}) = & Q\left[\vec{\alpha}\left(1 - 2\xi_0 \frac{\alpha_l}{\alpha^2}\right)\right]\theta(\alpha - \alpha_l) + Q(\vec{\alpha}) \\ & \times [1 - \theta(\alpha - \alpha_l)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Two effects are induced in this case. The first one, also present in the straight string case, comes from the discontinuity of the polarization field; this is the *strong lensing* effect. It is due to the existence of a critical region in the source plane where objects can have multiple images (two in this case, but it can be more in general [15]). The second one is a *weak lensing* effect simply due the deformation of the source plane; it will be small compared to the other. This latter effect is investigated in more detail in [16]. We expect these two effects to be present for any string model.

III. SIMULATED MAPS

We present in Figs. 1–4 the simulation results of circular cosmic string (30 arc min radius, $\xi_0 = 5''$). The cosmic mi-

²This means a redshift of 3 for an Einstein–de Sitter universe.

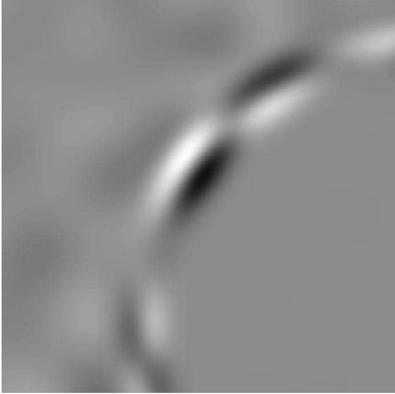


FIG. 1. B field for a circular loop crossing a $50' \times 50'$ window. The filter resolution is 5 arc min. At this scale, the B field is less than 1% of the E one. The very faint patches that can be noticed above the string are the *weak lensing* effect signature (a few percent of the strong lensing effect coming from the critical region).

crowave background polarization realization uses C_l calculated with a standard cold dark matter model with a cosmological constant (Λ CDM). Only scalar primary perturbations are used here since we do not expect any significant tensor mode at such a small scale; without the string, there is no signal in the B component.

The hot and cold (black and white) patches run along the string path. They come from the δ' term in the Eq. (7). Its amplitude is the result of a finite difference in the U field at distance $2\xi_0$. We will see in last section that, at small filtering resolution, this term dominates the amplitude of B polarization.

It is interesting to note here that the *weak lensing* effect is negligible at these scales. Besides, even the discontinuity effect is really small at a 5 arc min angular scale. A 4 times better resolution enhances significantly the signal (about 10 times). Note also that the hot and cold spots along the strings have the same linear sizes as the typical peaks of the polar-

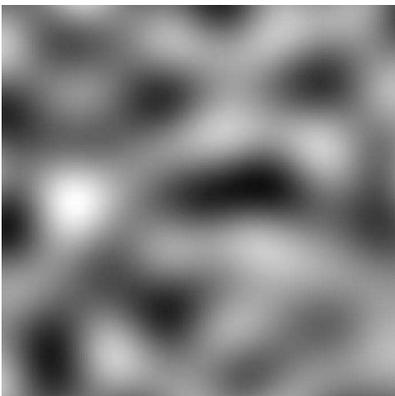


FIG. 2. Same as Fig. 1 for the E field. At this scale the string remains completely “diluted” in the E field and cannot be seen (the effect is smaller than 1% of the mean primary E signal).



FIG. 3. Same as Fig. 1 with a better resolution ($1.2'$). The discontinuity effect is less diluted. The B field is now in amplitude about 10% of the typical E fluctuations.

ization field. We expect that this feature and the very peculiar shape of the effect on the cosmic microwave background polarization maps could help discriminate between this effect and other secondary polarization sources or foregrounds (lensing from large-scale structures, dust polarization, etc). The extraction of a clean cosmic microwave background polarization out of a signal with foregrounds has been studied [19] at a larger scale. Very little is known about the contamination of the B signal at the scale we are looking at here.

IV. AMPLITUDE OF A STRAIGHT STRING EFFECT

We come back to the case of a straight cosmic string. It is easy to estimate the amplitude of the effect which only consists of a discontinuity. At small angles we can decompose the E field in plane-wave Fourier modes:

$$E(\vec{\alpha}) = \int \frac{d^2l}{2\pi} \vec{E}(\vec{l}) e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{l}}. \quad (11)$$

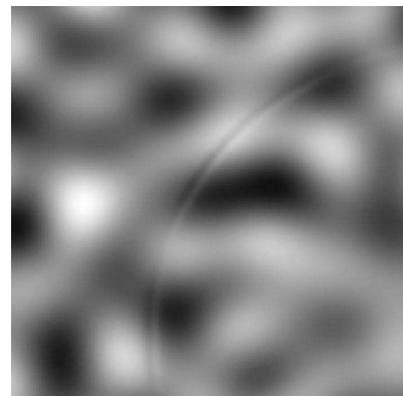


FIG. 4. Same as Fig. 2 for a $1.2'$ resolution. The discontinuity effect is now visible in E . Lens effects induce mode couplings that create structures at very small scales dominating over primary structures.

K. BENABED AND F. BERNARDEAU

PHYSICAL REVIEW D **61** 123510

It is straightforward to write for B , in Fourier space,

$$\Delta\hat{B}(x,y) = 2 \int \frac{d^2l}{2\pi} \tilde{E}(\vec{l}) e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{l}} (e^{i\xi_0 l_x} - e^{-i\xi_0 l_x}) \times \left[\frac{l_x l_y}{l^2} \delta'(x-x_0) + i \frac{l_y^3}{l^2} \delta(x-x_0) \right]. \quad (12)$$

This expression makes sense only if convolved with a test function—that is to say, convolved with a suitable window function. For simplicity, we assume that our observational device window is described by a Gaussian window function W of width α_w :

$$W(\vec{\alpha}) = \frac{1}{2\pi\alpha_w} e^{-\alpha^2/2\alpha_w^2}, \quad \tilde{W}(k_x, k_y) = e^{-\alpha_w^2(k_x^2 + k_y^2)/2}. \quad (13)$$

Then we have

$$\Delta\hat{B}_W(x,y) = 2 \int \frac{d^2l}{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \tilde{E}(\vec{l}) e^{i[x_0(l_x - k) + xk + y l_y]} \times \tilde{W}(k, l_y) (e^{i\delta_0 x} - e^{-i\delta_0 x}) \left[i \frac{l_x l_y k}{l^2} + i \frac{l_y^3}{l^2} \right]. \quad (14)$$

The rms of $\Delta\hat{B}_W$ can then be expressed as a function of the E power spectrum $C_E(l)$:

$$\langle (\Delta\hat{B}_W)^2 \rangle = 2e^{-(x-x_0)^2/\alpha_w^2} \int \frac{d^2l}{\pi^3} C_E(l) \sin^2(\xi_0 l_x) \times e^{-l_y^2 \alpha_w^2} \left[\frac{l_x^2 l_y^2 (x-x_0)^2}{l^4 \alpha_w^6} + \frac{l_y^6}{l^4 \alpha_w^2} \right]. \quad (15)$$

$C_E(l)$ has a natural cutoff due to the Silk damping scale $l_{\text{damp}}(1/l_{\text{damp}} \sim 10')$, a scale much bigger than the induced displacement. Therefore, we can replace $\sin^2(\xi_0 l_x)$ by its expansion $\xi_0^2 l_x^2$. Then the amplitude of the effect grows like ξ_0 . Besides, if the size of the window is smaller than the typical scale of ΔE structures, $\alpha_w \ll \alpha_{\text{peaks}}$ with $\alpha_{\text{peaks}} \sim 10^{-3}$, we have $\exp(-l_y^2 \alpha_w^2) \sim 1$. And from Eq. (15) we can then calculate

$$\frac{\langle (\Delta\hat{B}_W(x=x_0 \pm \alpha_w, y))^2 \rangle^{1/2}}{\langle (\Delta E)^2 \rangle^{1/2}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}e} \frac{\xi_0}{\alpha_w} \sqrt{5 + 8 \frac{\alpha_{\text{peaks}}^2}{\alpha_w^2}}. \quad (16)$$

The distance to the string, $x = x_0 \pm \alpha_w$, has been chosen to give a realistic account of the effect (in the simulation this corresponds almost to the peak of the hot and cold patches). Figure 5 shows these results for a Λ CDM model—the only dependence on the cosmological parameters appears in the position of the polarization peaks which depends essentially on the global curvature of the Universe. Our approximation

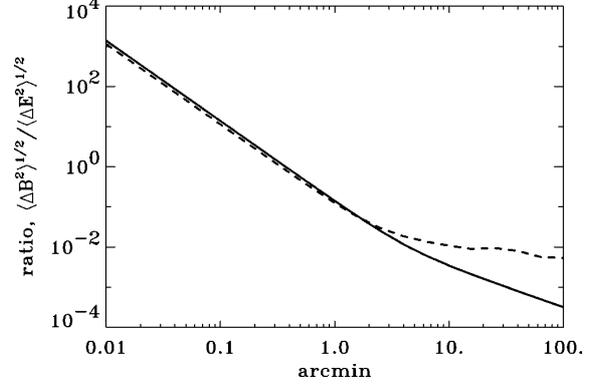


FIG. 5. A comparison of the exact computation of $\sqrt{\langle \Delta B^2 \rangle} / \sqrt{\langle \Delta E^2 \rangle}$ (dashed line) at $x = x_0 \pm \alpha_w$ and $\xi_0 = 10''$ and its approximation [see Eq. (16)]. The amplitude of the effect is about 10% at $1'$ scale, about 1.5% at $5'$. The agreement between the exact amplitude and Eq. (16) weakens for scales above $2' - 3'$.

is not exact at $5'$, but is fairly accurate at $1'$. Numerically, we found that, at $5'$ resolution, the amplitude of the effect evolves like $\sim 325\xi_0$ at the position $x = x_0 \pm \alpha_w$; it is $\sim 1.5 \times 10^{-2}$ when $\xi_0 = 10''$. The slope at small α_w is due to the $\alpha_{\text{peaks}}^2 / \alpha_w^2$ in Eq. (16)—that is to say, to the δ' in Eq. (7). This is in good agreement with the simulations that suggested an effect of this order of magnitude dominated, at small α_w , by the finite difference in U field at $2\xi_0$ scale.

V. CONCLUSIONS

The so-far planned cosmic microwave background experiments will have, at their very best, a $5'$ resolution [17]. We showed that at this angular scale and assuming that a string with $\xi_0 = 10''$ exists (which is perhaps somewhat optimistic), we can expect a signal in B -type polarization with an amplitude of about 1% the signal in E -type polarization. This signal is too weak to be actually detected. Besides, the weak lensing is expected to induce B -type polarization at the same scale and is likely to hide any string effect. Improving the resolution of the detector, however, will dramatically enhance the detectability of a string effect; at $1'$ scale, we expect indeed to gain a factor of 10 in the amplitude of the effect that should make the detection possible. The detection of cosmic strings through this effect (or through the Kaiser-Stebbins effect which also requires a good angular resolution) will probably be possible only with the post-Planck generation of instruments [18].

ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to thank P. Peter, L. Kofman, and especially J.P. Uzan for encouraging discussions and comments on the manuscript. We also thank A. Riazuelo for the use of his Boltzmann CMB code.

COSMIC STRING LENS EFFECTS ON CMB . . .

PHYSICAL REVIEW D **61** 123510

- [1] C.B. Netterfield, M.J. Devlin, N. Jarosik, L. Page, and E.J. Wollack, *Astrophys. J.* **474**, 47 (1997); A. de Oliveira-Costa *et al.*, *Astrophys. J. Lett.* **509**, L77 (1998); K. Coble *et al.*, *Astrophys. J. Lett.* **519**, L5 (1999).
- [2] T.W. Kibble, *J. Phys. A* **9**, 1387 (1976).
- [3] A. Albrecht, R.A. Battye, and J. Robinson, *Phys. Rev. D* **59**, 023508 (1999); R. Durrer, M. Kunz, and A. Melchiorri, *ibid.* **59**, 123005 (1999).
- [4] A. Albrecht, R.A. Battye, and J. Robinson, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4736 (1997).
- [5] P. Binetruy, C. Deffayet, E. Dudas, and P. Ramond, *Phys. Lett. B* **441**, 163 (1998); P. Binetruy, C. Deffayet, and P. Peter, *ibid.* **441**, 52 (1998); R. Jeannerot, *Phys. Rev. D* **56**, 6205 (1997).
- [6] I. Tkachev, S. Khlebnikov, L. Kofman, and A. Linde, *Phys. Lett. B* **440**, 262 (1998).
- [7] N. Kaiser and A. Stebbins, *Nature (London)* **310**, 391 (1984).
- [8] A. Vilenkin and P. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge Monograph on Mathematical Physics (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1994).
- [9] M. Zaldarriaga and U. Seljak, *Phys. Rev. D* **58**, 023003 (1998).
- [10] J.A. Harvey and S.G. Naculich, *Phys. Lett. B* **217**, 231 (1989).
- [11] U. Seljak, U. Pen, and N. Turok, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1615 (1997).
- [12] U. Seljak, *Astrophys. J.* **482**, 6 (1997); W. Hu and M. White, *New Astron.* **2**, 323 (1997); J. Lesgourgues, D. Polarski, S. Prunet, and A.A. Starobinsky, gr-qc/9906098.
- [13] M. Zaldarriaga and U. Seljak, *Phys. Rev. D* **55**, 1830 (1997); M. Kamionkowski, A. Kosowsky, and A. Stebbins, *ibid.* **55**, 7368 (1997).
- [14] P. Schneider, J. Ehlers, and E. E. Falco, *Gravitational Lenses* (Springer-Verlag, Berlin, 1992); V. Faraoni, *Astron. Astrophys.* **272**, 385 (1993).
- [15] A.A. de Laix and T. Vachaspati, *Phys. Rev. D* **54**, 4780 (1996).
- [16] K. Benabed and F. Bernardeau, astro-ph/0003038.
- [17] Phase A report study for the Planck mission, [urlhttp://astro.estec.esa.nl/SA-general/Projects/Planck/report/report.html](http://astro.estec.esa.nl/SA-general/Projects/Planck/report/report.html)
- [18] J.B. Peterson *et al.*, astro-ph/9907276.
- [19] F.R. Bouchet, S. Prunet, and S.K. Sethi, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **302**, 663 (1999); S. Prunet, S.K. Sethi, and F.R. Bouchet, astro-ph/9911243.

CHAPITRE 8

Corrélations d'effets de lentilles

Sommaire

8.1	Corrélations d'effets de lentille à différentes profondeurs.	112
8.1.1	Effets géométriques	112
8.1.2	Spectre de puissance et effets de filtrage	114
8.1.3	Effets des non-linéarités.	116
8.1.4	Effets de dispersion des galaxies	117
8.1.5	Sensibilité aux variations des paramètres cosmologiques	117
8.2	Corrélations avec la température	120
8.2.1	Quelques mots sur les relevés d'effets de lentille	120
8.2.2	Ellipticité et effets de lentille (article)	121
8.2.3	Une extension possible : longueur des isothermes	129
8.3	Corrélations avec la polarisation	130
8.3.1	Corrélation de B et de l'effet de lentille à $z = 1$.	130

On a vu au chapitre précédent qu'il était très dur de reconstruire une information sur l'effet de lentille gravitationnelle et donc sur les grandes structures à partir du rayonnement de fond seul. On a montré principalement que, du fait de l'absence de petites structures dans le rayonnement de fond, les différentes observables sensibles spécifiquement à l'effet de lentille auxquelles on peut penser ont toutes un signal sur bruit assez faible. Même avec la polarisation, pour laquelle, dans les modèles inflationnaires, la situation est très avantageuse, la reconstruction n'est pas possible.

Une solution, que j'ai particulièrement étudiée durant ma thèse, consiste à ajouter une information supplémentaire pour permettre la reconstruction. Dans les cas que j'ai étudiés, cette information supplémentaire est une mesure de l'effet de lentille gravitationnelle sur des champs galactiques d'arrière-plan. Ce type de mesure permettra, dans un avenir proche, de reconstruire des cartes de l'effet de lentille faible sur des plans images à des décalages vers le rouge proche de 1. La reconstruction que je vais présenter ici consiste à comparer l'effet de lentille sur le rayonnement de fond (à $z \sim 1000$) et l'effet de lentille à $z = 1$.

Cette idée de corrélérer le rayonnement de fond avec des observables à faible décalage vers le rouge pour mesurer l'effet de lentille avait été évoquée précédemment dans les travaux [Zaldarriaga & Seljak, 1999, Zaldarriaga, 2000]. Il était proposé de comparer le rayonnement de fond avec des catalogues de galaxies ou de quasars. Cette proposition a d'ailleurs été développée par la suite dans [Suginohara *et al.*, 1998] [Peiris & Spergel, 2000]. Cependant, comparer le rayonnement de fond avec les relevés d'effets de lentille faible est une idée nouvelle et qui possède de nombreux avantages sur les méthodes proposées dans [Suginohara *et al.*, 1998] [Peiris & Spergel, 2000]. Notamment, les corrélations que je vais construire dans la suite ne font pas appel à une

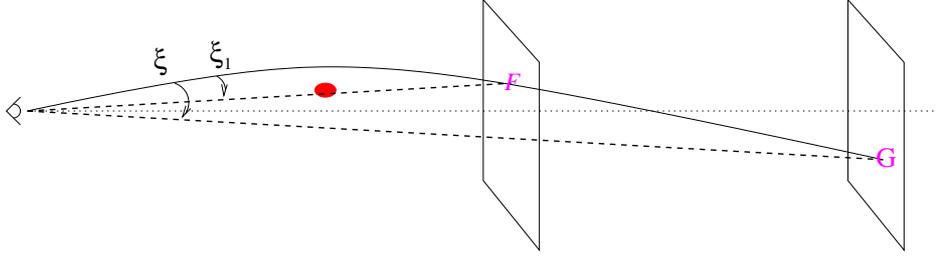


FIG. 8.1 – Deux photons sur la même géodésique, un seul puits de potentiel. Les photons partent de G , sur la surface de dernière diffusion et de F sur un plan intermédiaire à $z = 1$. Ils sont déviés par un seul puits de potentiel. Cependant, l'effet de déplacement est différent sur les deux plans à cause de la projection. Les angles ξ et ξ_1 dépendent de la position des plans sources.

reconstruction préalable de l'effet de lentille gravitationnelle sur le rayonnement de fond qui est, on l'a vu, assez problématique.

8.1 Corrélations d'effets de lentille à différentes profondeurs.

La première chose à étudier, avant de tenter d'utiliser une information sur les lentilles à $z = 1$ pour extraire du rayonnement de fond celle à $z = 1000$, est le recouvrement de ces deux effets. Tout d'abord, il faut noter que $z = 1$ représente, pour un univers EdS, à peu près un tiers de la distance jusqu'à la surface de dernière diffusion. En effet, on rappelle que dans un modèle EdS, la distance angulaire s'exprime en fonction du décalage vers le rouge par la formule s

$$\mathcal{D}(z) = 2 - 2/\sqrt{1+z}; \quad (8.1)$$

on a alors $\mathcal{D}(1)/\mathcal{D}(1000) \sim 0,3$. Des photons émis à la fin de la recombinaison auront subi sur les deux tiers de leur trajet des déflexions que n'auront pas subies ceux émis par des galaxies d'arrière-plan. La question est de savoir si ce tiers de trajet en commun suffit à induire une corrélation significative entre les effets de lentille sur nos deux plans sources différents.

8.1.1 Effets géométriques

Concentrons nous sur la région commune du trajets des photons. Remarquons tout d'abord que quelsoit son point d'origine, un photon passant à proximité d'un puits de potentiel va toujours connaître la même déflexion. En d'autres termes, l'effet de lentille se soucie peu du point de la géodésique à partir duquel le photon a été émis. Supposons maintenant que je m'intéresse à une géodésique qui, entre la surface de dernière diffusion et l'observateur, ne connaisse qu'une seule déviation, à une distance inférieure à $z = 1$ (voir figure 8.1). Le photon du rayonnement de fond qui suit cette géodésique, ainsi que celui émis par une source brillante à $z = 1$ sur cette même géodésique vont subir exactement la même déflexion α . Cependant, l'effet de lentille ramené sur le plan source ne va pas du tout être le même! En effet, la déviation sur le plan source est fonction de la déflexion α et de la position de la lentille par

$$\xi = \alpha \frac{\mathcal{D}_{LS}}{\mathcal{D}_{OS}}, \quad (8.2)$$

les distances angulaires \mathcal{D}_{LS} et \mathcal{D}_{OS} étant respectivement celles entre la lentille et la source et l'observateur et la source. L'effet de cette lentille est beaucoup plus fort pour le rayonnement de fond. En effet, si l'on note $\mathcal{D}_1 \equiv \mathcal{D}(z = 1)$, on a $\mathcal{D}(z = 1000) \sim 3\mathcal{D}_1$. Posons alors \mathcal{D}_L la

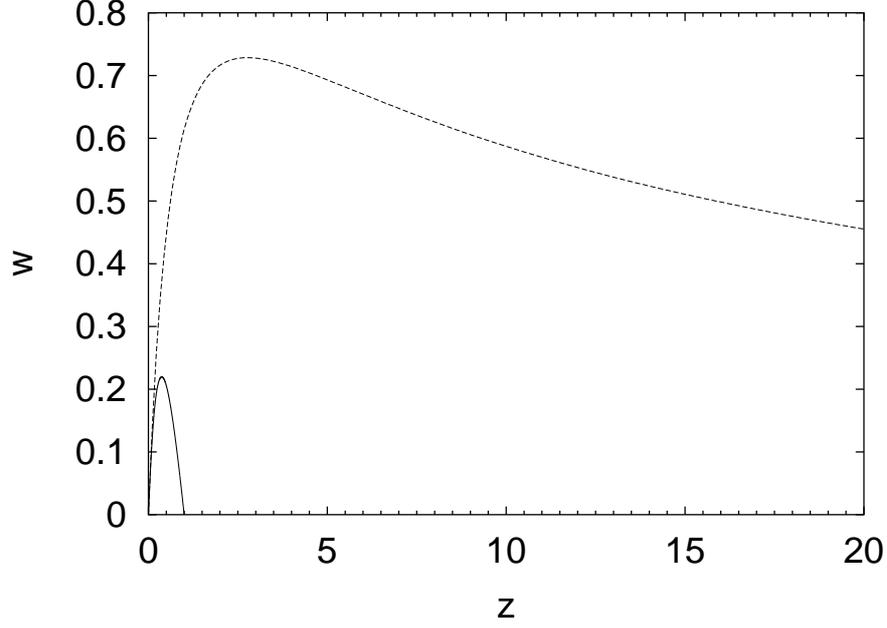


FIG. 8.2 – Les fonctions de fenêtres pour $z = 1100$ (trait pointillés) et $z = 1$ (trait pleins).

distance entre la lentille et le plan source à $z = 1$ et ξ_1 l'effet de lentille sur ce plan. Il vient alors, pour l'effet de lentille sur le rayonnement de fond,

$$\xi_{\text{CMB}} = \alpha \frac{\mathcal{D}_L + 2}{3\mathcal{D}_1} = \xi_1 + \alpha \frac{2}{3\mathcal{D}_1}. \quad (8.3)$$

On s'attend donc à ce que l'effet de lentille induit par les structures avant le plan galactique soit amplifié pour le rayonnement de fond du fait des facteurs géométriques.

On va revoir cela plus en détail, en s'intéressant maintenant à la convergence de l'effet de lentille. On a vu, chapitre 5, qu'on la calculait à l'aide de la formule

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{3}{2}\Omega_0 \int d\chi \frac{\mathcal{D}_{\text{OL}}\mathcal{D}_{\text{LS}}}{\mathcal{D}_{\text{OS}}} \frac{\delta(\boldsymbol{\theta}, \chi)}{a}. \quad (8.4)$$

On va supposer que la distribution du contraste de densité croisse comme le facteur d'expansion le long de la ligne de visée. Ce n'est pas tout à fait vrai. Nous y reviendrons plus loin. La convergence sur le plan galactique et sur le rayonnement de fond diffère alors uniquement par un terme de sélection,

$$w(\chi) a = \frac{3}{2}\Omega_0 \frac{\mathcal{D}_{\text{OL}}\mathcal{D}_{\text{LS}}}{\mathcal{D}_{\text{OS}}}. \quad (8.5)$$

On va comparer ces fonctions pour les deux plans sources. La figure 8.2 montre la partie géométrique des fonctions de fenêtre pour nos deux plans. On retrouve le fait que l'effet de lentille induit par des structures avant le plan galactique est plus fort sur le rayonnement de fond que sur ce dernier. Ce que la figure révèle aussi, c'est que les structures à grand décalage vers le rouge vont être assez importantes. En fait, la fenêtre pour le rayonnement de fond pique aux alentours de $z = 3$. Néanmoins, le recouvrement ne doit pas être complètement négligeable. Pour le quantifier, on va définir un taux de corrélation des deux effets de lentille

$$r \equiv \frac{\langle \kappa_g \kappa_{\text{CMB}} \rangle}{\sqrt{\langle \kappa_{\text{CMB}}^2 \rangle \langle \kappa_g^2 \rangle}}. \quad (8.6)$$

On note par un indice g les quantités se rapportant à l'effet sur le plan galactique. En maintenant notre hypothèse sur l'évolution de la distribution des structures, le calcul se réduit à

$$r = \frac{\int d\chi w_g(\chi) w_{\text{CMB}}(\chi) a^2}{\sqrt{\int d\chi w_{\text{CMB}}^2(\chi) a^2 \int d\chi w_g^2(\chi) a^2}}. \quad (8.7)$$

Dans un univers EdS, les intégrales donnent $r \sim 34\%$. À titre de comparaison, si l'on place maintenant le plan galactique à $z = 2$, le taux de corrélation devient $r = 53\%$. Comme nous l'avons dit plus haut, la corrélation est importante, mais le maximum de la fonction de fenêtre pour le rayonnement fossile est situé plus près de la région de $z = 3$.

Dans le paragraphe précédent, nous avons fait l'hypothèse que les structures croissaient comme le facteur de croissance, afin de pouvoir étudier uniquement la contribution du facteur géométrique au recouvrement de l'effet de lentille. Cette hypothèse est tout à fait vérifiée dans un univers EdS. On a vu chapitre 4 que dans ce cas, la croissance des structures à l'ordre linéaire égalait le facteur de croissance. Cependant, cela n'est plus tout à fait vrai pour un univers au contenu différent. Par exemple, un univers plat avec $\Omega_0 < 1$ verra ses structures croître moins vite que le facteur d'expansion aux temps proches, lorsque la constante cosmologique commence à contribuer notablement. On s'attend donc à une légère diminution de l'effet de recouvrement, puisqu'alors, les régions de l'espace à grand décalage vers le rouge vont être amplifiées par le facteur $\delta(\chi)/a$. Par exemple, pour une cosmologie de paramètres $\Omega_0 = 0.3$, $\Lambda = 0.7$, le taux de corrélation calculé uniquement avec les termes géométriques (c'est-à-dire en supposant une croissance proportionnelle au facteur d'expansion) est de l'ordre de $r = 26\%$, tandis qu'en tenant compte du ralentissement de la croissance à faible décalage vers le rouge, $r = 24\%$. Le recouvrement des effets de lentille sur le rayonnement de fond et sur le fond galactique est donc dominé par les effets géométriques.

8.1.2 Spectre de puissance et effets de filtrage

On a pu se donner une idée, grâce aux calculs de la section précédente de l'intensité de la corrélation de l'effet de lentille sur deux plans différents. On a vu que le calcul se ramenait simplement à l'évaluation des contributions géométriques. En effet, la croissance des structures, à l'ordre linéaire, est en grande partie absorbée dans le terme en $1/a$ de l'effet de lentille. Quand aux termes dépendant de la distribution du contraste de densité, ou plutôt en l'occurrence de son spectre de puissance, ils se compensent exactement.

Cependant, nous avons négligé une donnée importante dans notre premier calcul. En effet, lorsqu'on s'intéresse à un effet de lentille, on s'intéresse avant tout à la déformation d'objets. Dans notre cas, il s'agira soit de galaxies, soit des structures du rayonnement de fond. Ces objets ont une taille finie ; ils ne sont pas ponctuels. Nous avons mené le calcul comme si nous travaillions sur des objets ponctuels. Il faudrait reprendre le calcul en spécifiant que nous nous intéressons à des objets d'une certaine échelle.

Plus prosaïquement, si nous voulons utiliser nos résultats sur la corrélation des effets de lentille sur deux plans distincts pour les confronter à d'éventuels résultats expérimentaux, il faut prendre en compte le fait qu'une expérience possède une résolution angulaire finie. Cela réintroduit aussi la notion d'échelle. Les expériences de détection de lentilles faibles sur les fonds galactiques donnent une information sur l'effet de lentille gravitationnelle à une échelle donnée. De la même manière, les mesures du rayonnement de fond donnent une cartographie de ses anisotropies jusqu'à une échelle déterminée par la résolution des instruments.

On va donc calculer notre taux de recouvrement en tenant compte de ce filtrage. Si $W(k)$ est la fonction de fenêtre, dans l'espace de Fourier, qui filtre la convergence à l'échelle voulue,

on a simplement

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{3}{2}\Omega_0 \int d\chi \frac{\mathcal{D}_{\text{OL}}\mathcal{D}_{\text{LS}}}{\mathcal{D}_{\text{OS}}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\delta(k, \chi)}{a} W(k_{\perp}\mathcal{D}) e^{k\chi + \vec{k}_{\perp}\vec{\mathcal{D}}\cdot\boldsymbol{\theta}}. \quad (8.8)$$

Encore une fois, on va se restreindre à l'ordre linéaire de la croissance des structures, ce qui permet de séparer les fluctuations spatiales et temporelles du contraste de densité

$$\delta(k, \chi) = D_+(\chi)\delta(k). \quad (8.9)$$

Aux petits angles, $P(k) = P(k_{\perp})$ et la corrélation entre deux effets de lentille sur des plans X et Y est

$$\begin{aligned} \langle \kappa_X \kappa_Y \rangle &= \int d\chi w_X w_Y D_+^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} P(k) W^2(k\mathcal{D}) \\ &= \int d\chi w_X w_Y D_+^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{P(k/\mathcal{D})}{\mathcal{D}^2} W^2(k). \end{aligned} \quad (8.10)$$

L'introduction d'une échelle de filtrage ne permet plus de factoriser l'intégrale le long de la ligne de visée et sur l'espace de Fourier. On a maintenant une dépendance explicite du taux de recouvrement r sur la forme du spectre de puissance.

Pour pouvoir évaluer le taux de recouvrement sans recourir à l'intégration numérique, nous allons faire une hypothèse simplificatrice sur le spectre. Nous nous intéressons à des effets de lentille aux échelles variant de quelques arc-secondes, jusqu'à quelques degrés. Cette plage couvre correctement le cas des galaxies et celui du rayonnement de fond. On va supposer que pour ces échelles, le spectre de puissance du contraste de densité est correctement décrit par une loi de puissance,

$$P(k) \sim k^n. \quad (8.11)$$

Typiquement un indice spectral de l'ordre de $n = -3/2$ donne une approximation raisonnable dans le régime linéaire. On peut alors de nouveau factoriser les intégrales sur k et le taux de corrélation filtré devient

$$r = \frac{\int d\chi w_g(\chi) w_{\text{CMB}}(\chi) D_+^2 \mathcal{D}^{-2-n}}{\sqrt{\int d\chi w_{\text{CMB}}^2(\chi) D_+^2 \mathcal{D}^{-2-n} \int d\chi w_g^2(\chi) D_+^2 \mathcal{D}^{-2-n}}}. \quad (8.12)$$

Notons, avant de continuer, que ce taux de recouvrement filtré ne dépend plus de l'échelle de filtrage, grâce à l'approximation faite sur le spectre de puissance. Cette propriété n'est pas du tout générique. En anticipant un peu sur la suite, on se doute que cette propriété ne sera plus du tout vraie si l'on prend en compte l'évolution non-linéaire du contraste de densité; on s'attend alors à une différence notable entre les échelles dans le régime non-linéaire et celle hors de celui-ci.

Le filtrage de l'effet de lentille fait apparaître un facteur \mathcal{D}^{-2-n} aux termes géométriques qui contribuent au taux de corrélation. La puissance de ce facteur est typiquement négative; pour le cas $n = -3/2$, on a $\mathcal{D}^{-1/2}$. Ce facteur va amplifier la contribution des structures à petite distance. Le taux de corrélation filtré doit donc être plus important que le taux calculé avant. Pour un univers EdS, on obtient $r = 42\%$, pour le modèle plat avec constante cosmologique considéré plus haut, $r = 33\%$. À titre de comparaison, je donne aussi, table 8.1 les résultats de l'intégration numérique pour un spectre de puissance CDM et différentes échelles de filtrage. Les résultats sont assez proches du calcul pour un spectre en loi de puissance. Évidemment, le taux r dépend maintenant de l'échelle de filtrage. On peut comprendre cette dépendance comme un changement de l'indice spectral. À 2 arc-minutes, l'indice spectral effectif va se rapprocher de $n = -2$, tandis qu'avec des fenêtres de filtrage plus grandes, on

TAB. 8.1 – Le taux de corrélation pour différents modèles.

r	2'	5'	10'
EdS, loi de puissance	0.42	0.42	0.42
EdS, CDM	0.39	0.42	0.46
EdS, CDM + non-linéaire	0.50	0.49	0.49
$\Omega_0 = 0.3, \Lambda = 0.7$, loi de puissance	0.33	0.33	0.33
$\Omega_0 = 0.3, \Lambda = 0.7$, CDM	0.32	0.37	0.43
$\Omega_0 = 0.3, \Lambda = 0.7$, CDM + non-linéaire	0.4	0.4	0.43

coupe à plus grande échelle l'asymptote du spectre de puissance et on augmente l'indice spectral vers $n = -1$. Comme l'effet de filtrage amplifie l'influence des structures proches comme D^{-2-n} , on comprend pourquoi augmenter l'indice spectral augmente le taux de corrélation.

On a supposé ici que l'échelle de filtrage des deux effets de lentille était la même. Ce n'est pas nécessairement le cas. Les expériences d'effet de lentille sur le fond galactique auront accès à des échelles beaucoup plus petites que celles des mesures sur le rayonnement de fond. On peut refaire le calcul avec deux échelles de filtrage différentes. Cependant, dans ce cas, même avec un spectre en loi de puissance, on ne peut plus factoriser simplement l'expression du taux de corrélation. Il aurait été de toute façon assez surprenant que pour deux échelles de filtrage différentes, le taux de corrélation puisse rester inchangé... La figure 8.3 montre l'effet d'une différence d'échelle pour les deux effets. On peut être rassuré de constater que le taux de recouvrement est maximal lorsque les deux échelles correspondent.

8.1.3 Effets des non-linéarités.

On a vu qu'à petite échelle, l'évolution du contraste de densité changeait (voir chapitre 4). Lorsque la densité est suffisante, des objets virialisés se forment et, si l'on suit les prescriptions de l'Ansatz de *stable clustering*, ne suivent plus l'évolution comme le reste de l'univers. Ils gardent une taille constante, alors que le reste de l'univers est dilué par l'expansion en $a^{-3/2}$. Il faut donc que ces objets s'effondrent en $a^{3/2}$, alors que le contraste de densité du reste du fluide de matière noire croît comme a (pour un modèle EdS).

Au cours de l'effondrement gravitationnel, il arrive un moment où dans une région donnée, la pression, définie comme la dispersion des vitesses des éléments du fluide, équilibre la gravité. Le fluide est dit virialisé. Un objet peut alors se former. Le fluide dans cette région change alors complètement de régime ; on parle d'évolution non-linéaire. On sait assez bien la décrire dans le contexte de l'Ansatz des corrélations stables (*stable clustering*). Cet Ansatz fait l'hypothèse que lorsque le fluide se virialise et forme des objets compacts, son évolution se découple de l'évolution du reste du fluide. La taille de l'objet compact ne change plus. Ainsi, alors que le reste du fluide continue de s'effondrer, faisant croître le contraste de densité comme le facteur d'expansion, les zones virialisées doivent être caractérisées par un facteur de croissance allant comme $a^{3/2}$; on rappelle que le fluide est dilué par l'expansion en $a^{-3/2}$.

Cette évolution non-linéaire se caractérise, dans le spectre de puissance, par une amplification du spectre à petite échelle. Cette amplification n'apparaît que pour les modes dans le régime non-linéaire. Hors, comme l'entrée dans ce régime est déclenchée par la virialisation du fluide à certaines échelles, en d'autres termes par la croissance du contraste de densité, cette amplification des petites échelles du spectre va dépendre du facteur de croissance linéaire.

Considérons un mode d'échelle k . À l'époque du rayonnement de fond, il n'est pas encore entré dans le régime non-linéaire. Il va croître avec $D_+ \sim a$ jusqu'au moment où il va rentrer dans le régime non-linéaire. Par la suite, il va croître beaucoup plus vite, et donc se trouver amplifié par rapport aux modes encore dans le régime linéaire. Comme on filtre à des échelles

supérieures à l'arc-seconde, on supprime les modes de très petites échelles, qui vont entrer très tôt dans le régime non-linéaire. On sélectionne donc des modes qui sont non-linéaires très tardivement. La plupart des modes non-linéaires qui vont contribuer à l'effet de lentille vont devenir non-linéaires à bas décalage vers le rouge et donc pouvoir contribuer à l'effet de lentille sur le rayonnement galactique ainsi que sur les arrière-plans galactiques. En filtrant les échelles très petites, on est donc en train de sélectionner des modes dont la contribution est amplifiée par le régime non-linéaire et qui vont avoir un effet de lentille sur les plans à $z = 1$ et $z = 1000$. Ce phénomène devrait augmenter le taux de recouvrement des effets de lentilles. On donne table 8.1 les résultats du calcul numérique prenant en compte les non-linéarités. L'effet est assez important, de l'ordre de 10 à 20%.

8.1.4 Effets de dispersion des galaxies

Pour finir sur l'évaluation du taux de corrélation, je vais encore affiner la description pour la rapprocher des conditions expérimentales. Dans la suite, on voudra comparer le rayonnement de fond et la reconstruction de l'effet de lentille sur des plans galactiques. Dans les paragraphes précédents, nous avons toujours considéré que le "plan galactique" était réellement un plan situé à une distance déterminée. C'est une approximation qui semble assez raisonnable, mais qui n'est pas justifiée dans les faits. En effet, les galaxies observées pour reconstruire l'effet de lentille sont situées autour du plan $z = 1$, mais leur dispersion peut être importante et on doit en tenir compte.

Je ne rentrerai pas dans les détails de la forme de la dispersion spatiale des galaxies. Elle dépend à la fois de leur dispersion naturelle et de paramètres expérimentaux relatifs à la sélection des sources. Le problème a été traité dans divers articles présentant l'effet de lentille sur les fonds galactiques (voir particulièrement [Kaiser, 1992]). On va juste retenir ici que l'on doit donner une épaisseur au plan source galactique. On a utilisé une dispersion du plan source assez large en

$$n(z) \sim \left(\frac{z}{z_g}\right)^2 e^{-\left(\frac{z}{z_g}\right)^{1.5}}. \quad (8.13)$$

Cette dispersion est particulièrement adaptée aux expériences sans sélection en distance des sources, telles qu'elles ont été réalisées jusqu'à aujourd'hui. Comme la dispersion est assez large, surtout pour $z > z_g$, elle va avoir tendance à augmenter le taux de corrélation. On présente en figure 8.3 le résultat de l'intégration numérique pour cette dispersion, en tenant compte des effets non-linéaires, et en laissant l'échelle de filtrage pour l'effet de lentille sur le rayonnement de fond varier.

8.1.5 Sensibilité aux variations des paramètres cosmologiques

Les paragraphes précédent nous ont permis d'évaluer le taux de corrélation de l'effet de lentille sur deux plans différents. En tenant en compte les effets de filtrage et l'évolution non-linéaire du contraste de densité, ce taux, suivant les paramètres cosmologiques, vaut de 40% à 50%. On a vu aussi qu'en donnant une épaisseur au plan galactique, ce taux peut encore augmenter, puisqu'on prend alors en compte des effets de lentille à des décalages vers le rouge plus élevés. La question que l'on peut se poser est comment varie ce taux lorsqu'on change les paramètres de la métrique ?

Nous avons vu dans la section 8.1.1 qu'une importante contribution au taux de corrélation provenait d'effets géométriques ; r est avant tout une mesure du recouvrement des fonctions de fenêtre. On sait que la relation distance-décalage vers le rouge est modifiée par des variations des paramètres cosmologiques. D'autre part, on a vu que le changement des paramètres cosmologiques avait aussi un impact sur la croissance linéaire des structures et modifiait légèrement le taux de corrélation. La figure 8.4 présente une exploration des variations des

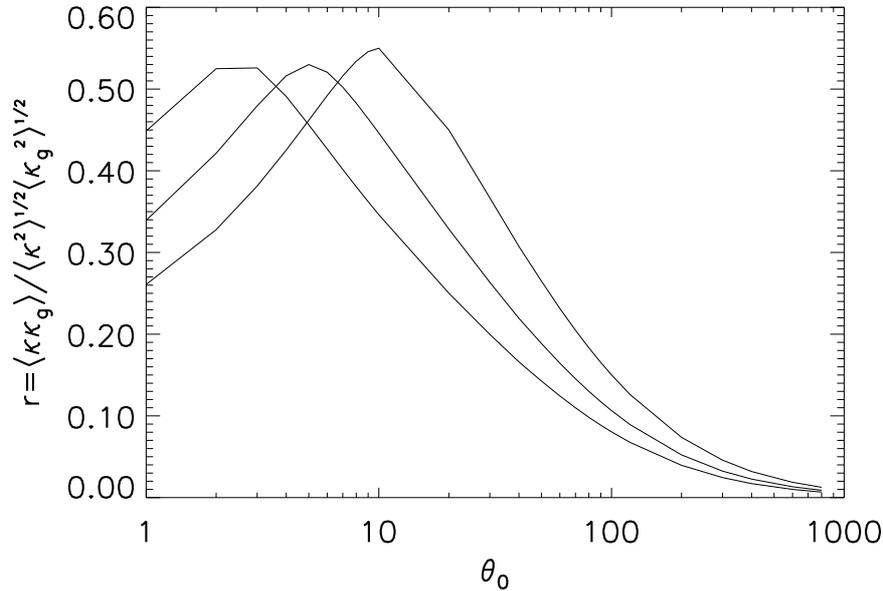


FIG. 8.3 – Le coefficient de corrélation pour différents choix de filtrage. L'abscisse est la taille de la fenêtre pour l'effet de lentille à $z = 1$. Les trois courbes correspondent respectivement à des fenêtres de $2.5'$, $5'$ et $10'$. On a pris en compte pour ces courbes l'évolution non-linéaire du spectre de puissance, ainsi que de la dispersion du plan $z = 1$.

paramètres cosmologiques dans le plan $\Omega_0 - \Lambda$. Pour se donner une idée de l'influence relative des variations de la relation distance-décalage vers le rouge et de celles de la croissance linéaire des structures, on a remplacé dans la figure de gauche la croissance du contraste de densité par le facteur d'expansion. Les résultats sur les deux figures sont assez différents. Si l'on ignore les variations de D_+ , le r formé uniquement par la contribution des effets géométriques semble assez sensible aux variations de la constante cosmologique. La modification de D_+ gomme cette dépendance; r est essentiellement sensible aux variations de Ω_0 .

Ce résultat est assez déconcertant. En effet, le terme géométrique semblait être la contribution dominante du taux de recouvrement; l'écart de la croissance au facteur d'expansion avait l'air moins déterminant. On voit ici qu'il n'en est rien. Expliquer ce comportement est assez compliqué. Il faudrait, pour ce faire, rentrer dans le détail des dépendances de D_+ et $\mathcal{D}(z)$, puis comprendre comment l'intégrale les lie dans κ ... Pour finir de se convaincre qu'il est difficile de se faire une idée autre que numérique de la dépendance du taux de corrélation dans les paramètres cosmologiques, on va changer la définition de ce taux. Appelons χ notre nouveau taux de corrélation

$$\chi \equiv \frac{\langle \kappa_g \kappa_{\text{CMB}} \rangle}{\langle \kappa_g^2 \rangle}. \quad (8.14)$$

Ce taux est toujours bien normalisé. Si maintenant, on se livre au même jeu de l'exploration du plan $\Omega_0 - \Lambda$, les résultats sont complètement différents. Les facteurs géométriques sont maintenant beaucoup plus importants; la différence entre les deux figures est minime. D'autre part, alors que r était principalement sensible aux variations de Ω_0 , χ est maintenant plus sensible à Λ ! Ce nouveau taux est beaucoup moins sensible aux variations de la croissance du contraste de densité. Dans la suite de ce chapitre, on montrera comment une telle quantité peut être construite à l'aide du rayonnement de fond et de mesures de lentilles à $z = 1$.

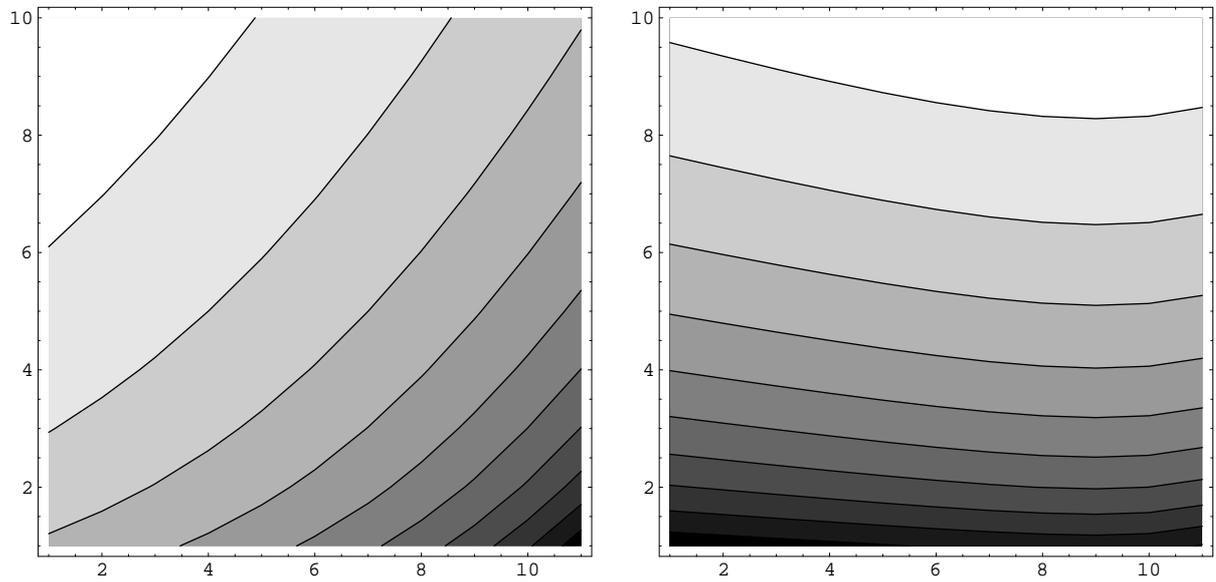


FIG. 8.4 – Effet des paramètres cosmologiques sur le coefficient de corrélation r . Les deux figures ont été calculées avec un spectre de puissance en loi de puissance et un indice spectral $n = -1.5$. En abscisse on fait varier Λ . La figure de gauche impose $D_+ = a$.

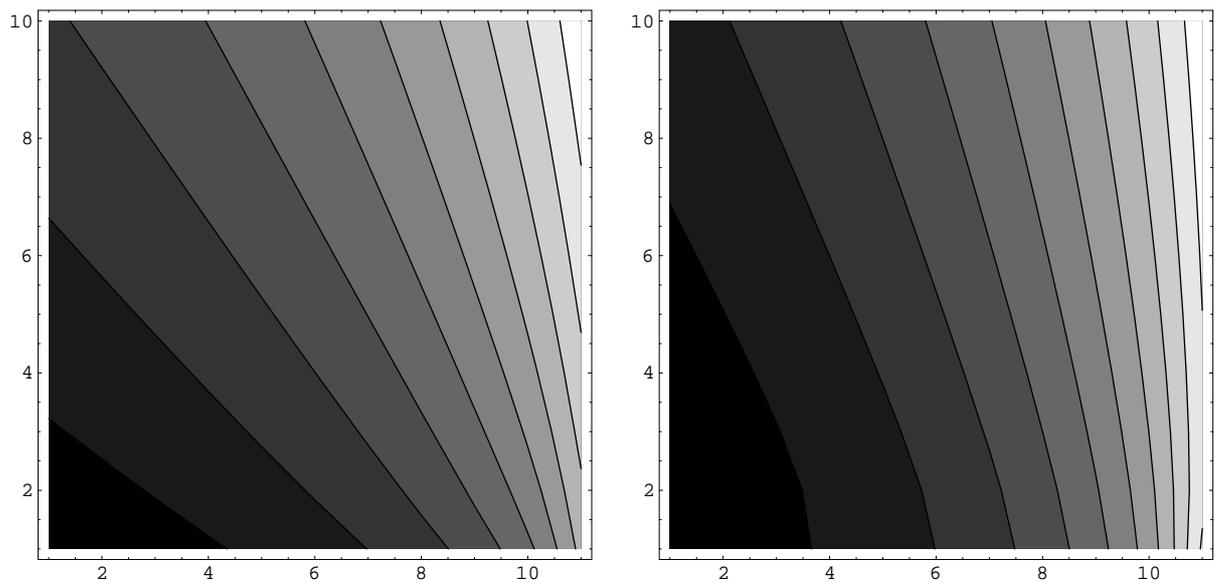


FIG. 8.5 – Effet des paramètres cosmologiques sur le coefficient de corrélation χ . Mêmes remarques que pour la figure 8.4

8.2 Corrélations avec la température

Nous avons montré dans la section précédente que la corrélation entre l'effet de lentille sur des galaxies autour de $z = 1$ et sur le rayonnement de fond devait être significative. On va maintenant s'intéresser à divers schémas permettant la construction d'observables corrélant température du rayonnement de fond et effet de lentille sur les galaxies.

8.2.1 Quelques mots sur les relevés d'effets de lentille

J'ai parlé tout au long de ce chapitre de la possibilité d'utiliser des mesures d'effets de lentille faible sur des galaxies. Avant de montrer comment on peut comparer ces mesures avec le rayonnement de fond, je vais décrire succinctement comment elles sont réalisées.

Ces détections reposent sur la propriété de l'effet de lentille gravitationnelle à nous rendre localement astigmatique! Les proportions des objets vus dans une direction donnée nous apparaissent déformées par l'effet de lentille. On a fait remarquer plus haut qu'un objet circulaire est vu comme une ellipse dont les axes s'alignent sur les directions du champ de distortion γ . De même, l'ellipticité des galaxies que nous observons est perturbée par l'effet de lentille. Ainsi, si dans une petite région du ciel, l'effet de lentille est assez homogène, les galaxies observées dans cette zone doivent être préférentiellement alignées dans la direction privilégiée par le champ de déformation des lentilles. Ce phénomène est le ressort de la méthode de détection de l'effet de lentille faible sur les galaxies d'arrière plan telle qu'elle a été proposée par Kaiser [Kaiser, 1992, Kaiser *et al.*, 1995, Squires & Kaiser, 1996, Kaiser, 2000]. Cette idée a permis à plusieurs équipes de réaliser les premières mesures de cet effet au début de l'an 2000. [Waerbeke, 2000, van Waerbeke *et al.*, 2001, Erben *et al.*, 2001]. Plus récemment, de nouvelles mesures ont confirmé et étendu ces premiers résultats [van Waerbeke *et al.*, 2000b, Maoli *et al.*, 2000, van Waerbeke *et al.*, 2001] [Rhodes *et al.*, 2001, Bacon *et al.*, 2000] [Wittman *et al.*, 2000]. Ces papiers donnent des informations statistiques sur l'effet de lentille et s'attachent à reconstruire son spectre de puissance. Il a toutefois été montré que la reconstruction du champ de convergence et du champ de distorsion était possible [van Waerbeke *et al.*, 1999a]. C'est vers ce but que tendent les expériences à venir. Outre la corrélation avec le rayonnement de fond, une telle reconstruction autorise la mesure d'observables plus complexes et plus riches comme le gauchissement (*skewness*).

Cette détection permet donc de reconstruire l'effet de lentille sur des cellules de l'ordre de l'arc-minute carré. Elle repose sur la supposition que seules les déformations optiques de l'effet de lentille peuvent donner une orientation privilégiée à la forme des galaxies sur l'échelle de la cellule. Il faut donc que chaque cellule soit suffisamment grande pour contenir assez de galaxies pour mesurer cette orientation privilégiée, mais pas trop afin que la moyenne du champ de déformation sur la cellule ne soit pas trop faible. D'autre part, afin que cette étude statistique soit valide, il faut que l'orientation primordiale des galaxies soit décorrélée.

Ce dernier point n'est pas évident. Il a été beaucoup discuté dans une série d'études récentes tant numériques (voir [Croft & Metzler, 2000, Heavens *et al.*, 2000]) que théoriques (voir pour les plus récentes et les plus complètes [Crittenden *et al.*, 2000b, Crittenden *et al.*, 2000a, Mackey *et al.*, 2001]). En effet, on peut supposer que les galaxies proches étant apparues dans le même environnement gravitationnel, elles pourraient avoir des moments angulaires similaires. Une telle propriété donnerait alors une autre source d'alignement des ellipticités des galaxies observées. Les études les plus récentes semblent indiquer que c'est en effet le cas, et que cet alignement intrinsèque est d'un ordre de grandeur comparable à celui engendré par les phénomènes optiques d'origine gravitationnelle. Cependant, alors que les modes rotationnels du champ de déformation de l'effet de lentille sont faibles (voir chapitre 5), les modes rotationnels du champ vectoriel d'alignement intrinsèque sont comparables aux modes scalaires. Cette propriété peut avoir une grande importance puisqu'alors les mesures d'effets de lentille qui sont

corrigées pour ces modes¹ pourraient être *nettoyées* des effets intrinsèques.

8.2.2 Ellipticité et effets de lentille (article)

J'ai montré, chapitre 6, que les déformations de la distribution d'ellipticité des structures du rayonnement de fond avaient été étudiées. La déflexion des rayons lumineux déforme les structures des anisotropies. Elles vont donc avoir tendance à s'aligner sur les directions propres du champ de déformation local. C'est cet excès d'alignement que nous allons essayer de mesurer. F. Bernardeau [Bernardeau, 1998] avait proposé d'étudier la déviation à la distribution primordiale de l'ellipticité. Nous allons plutôt comparer l'ellipticité à l'effet de lentille sur les galaxies. Un travail sur le sujet a été réalisé en collaboration avec Ludovic van Waerbeke, à l'époque au C.I.T.A., Toronto et mon directeur de thèse, Francis Bernardeau. L'article [van Waerbeke *et al.*, 2000a] que je vais décrire ici a fait l'objet d'une publication dans la revue *Astrophysical Journal*. Avant d'inclure le texte de l'article, je vais faire quelques remarques sur ses résultats.

En absence d'alignement dû à l'effet de lentille, l'angle entre l'ellipticité et le champ de distortion γ_g de l'effet de lentille sur les galaxies devrait suivre une distribution plate. Si toutefois il y a un effet de lentille corrélé à celui à $z = 1$, cet angle devrait exhiber un excès d'alignement entre \mathbf{e} et γ_g d'amplitude comparable à r . Dans l'article inclus ici, on montre que cet excès d'alignement est calculable. On peut prédire la distribution de l'angle entre \mathbf{e} et γ_g et sa dépendance en r . Pour être précis, le principal résultat du papier est que l'angle θ_g , défini par

$$\cos(\theta_g) \equiv \frac{\mathbf{e}\gamma_g}{e\gamma_g}, \quad (8.15)$$

suit la distribution

$$P(\theta_g) = \frac{1}{2\pi} \left(1 + 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\langle \kappa\kappa_g \rangle}{\sqrt{\langle \kappa_g^2 \rangle}} \cos(\theta_g) \right). \quad (8.16)$$

Ce résultat permet de calculer la valeur moyenne du cosinus de cet angle qui se trouve être

$$\langle \cos(\theta_g) \rangle = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\langle \kappa\kappa_g \rangle}{\sqrt{\langle \kappa_g^2 \rangle}}. \quad (8.17)$$

Une évaluation du rapport signal-sur-bruit que cette observable pourrait atteindre, dans le cas d'une mesure réaliste est proposée. Cette évaluation est assez ardue. En effet, il est, dans le contexte actuel, assez difficile de prédire le niveau de bruit et les erreurs systématiques qui pourront entacher les deux mesures nécessaires à la construction de l'observable. À vrai dire, une motivation supplémentaire pour mener de telles corrélations est l'espoir que les systématiques des deux mesures ne soient pas corrélées. C'est d'ailleurs beaucoup plus qu'un simple espoir ; on comprendrait mal en effet comment deux mesures extrêmement différentes comme la mesure de la température du rayonnement de fond et la reconstruction de l'effet de lentille à partir d'image de galaxies d'arrière-plan, pourraient voir leurs bruits de mesure corrélés... C'est moins vrai cependant pour les avant-plans. En effet, il semble tout à fait raisonnable de supposer que l'effet Sunyaev-Zel'dovich et l'effet de lentille faible soient

¹ cette correction fait partie de toute une série de tests et de traitements nécessaires à l'extraction de l'effet de lentille gravitationnelle. En effet, si l'on cherche à mesurer un effet optique d'astigmatisme, il faut être certain de l'isotropie de la mesure. Une imperfection des instruments, ou une variation des conditions atmosphériques durant l'observation peut nuire à la précision des résultats. La correction des modes rotationnels vise à l'élimination des erreurs systématiques liées aux conditions de mesures. Les techniques utilisées pour réduire les systématiques de la mesure pourraient aussi amoindrir les problèmes de bruit des alignements intrinsèques.

corrélés ; les amas émetteurs SZ auront évidemment aussi un effet de lentille. Dans le cas qui nous préoccupe, cependant, on peut supposer que cette corrélation sera de faible importance. L'effet Sunyaev-Zel'dovich est de très faible échelle, et l'on peut choisir de regarder des effets de lentilles gravitationnelles à des échelles plus grandes. Je ne discuterai pas plus avant de la corrélation de l'effet SZ et des lentilles. Le sujet mérite une thèse à lui seul ! Ayant tous ces problèmes en tête, l'évaluation du rapport signal-sur-bruit que nous présenterons ici sera le calcul du rapport entre l'effet et un hasard statistique faisant que la région particulière étudiée reproduise l'effet. Le bruit instrumental sera pris en compte par l'utilisation de filtres compensés.

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, 540:14–19, 2000 September 1
 © 2000. The American Astronomical Society. All rights reserved. Printed in U.S.A.

LENSING EFFECT ON THE RELATIVE ORIENTATION BETWEEN THE COSMIC MICROWAVE BACKGROUND ELLIPTICITIES AND THE DISTANT GALAXIES

L. VAN WAERBEKE,¹ F. BERNARDEAU,² AND K. BENABED²

Received 1999 October 19; accepted 2000 April 4

ABSTRACT

The low-redshift structures of the universe act as lenses in a similar way on the cosmic microwave background (CMB) light and on the distant galaxies (say at redshift about unity). As a consequence, the CMB temperature distortions are expected to be statistically correlated with the galaxy shear, exhibiting a nonuniform distribution of the relative angle between the CMB and the galactic ellipticities. Investigating this effect, we find that its amplitude is as high as a 10% excess of alignment between CMB and the galactic ellipticities relative to the uniform distribution. The relatively high signal-to-noise ratio we found should make possible a detection with the planned CMB data sets, provided that a galaxy survey follow-up can be done on a sufficiently large area. It would provide a complementary bias-independent constraint on the cosmological parameters.

Subject headings: cosmic microwave background — gravitational lensing — large-scale structure of universe

1. INTRODUCTION

The analysis of gravitational lensing of the primordial fluctuations in the cosmic microwave background (CMB) is of growing interest, since it gives a direct probe of the mass distribution up to very high redshift. The detection of the lens effects on the CMB would be very precious for constraining the cosmological parameters, with no ambiguities about the distance of the source plane. Although the effect on the CMB power spectrum is rather weak and affects only small scales ($l > 1000$), it is now recognized that gravitational lensing can produce some specific features worth investigating. In this paper we focus our investigations on the temperature maps only, although it has been noticed recently that lenses can also affect significantly the polarization properties of the CMB maps (Zaldarriaga & Seljak 1998; Benabed & Bernardeau 1999).

So far there are two distinct effects that invite attention: the small-scale (subarcminute) strong deformation of the temperature fluctuations that can be used to probe galaxy cluster gravitational potential (Zaldarriaga & Seljak 1999; Metcalf & Silk 1998) and an intermediate- and large-scale statistical effect (Bernardeau 1997; Bernardeau 1998; Seljak & Zaldarriaga 1999), which is a way to determine the cosmological parameters and provides a consistency test against other CMB analyses. The detection of the small-scale lens effects remains to be proved feasible. In particular, the accumulation of secondary anisotropies (such as the Sunyaev-Zeldovich and Ostriker-Vishniac effects and the nonlinear Sachs-Wolfe effect) will mask the primordial lens effects and make the interpretation of lensed secondary anisotropies dependent on the *unknown* redshift where the secondary anisotropies were generated. At scales above $1'$ or $2'$, the interpretation of the lens effects should be more straightforward, but the number density of fluctuations is not large enough to allow an accurate mass reconstruction of the lens (in particular, in the case of clusters of galaxies). Therefore, at scales larger than a few arcminutes, only a statistical detection of the lens effect seems possible. More specifically, Bernardeau (1998) investigated the effect of

lensing by the large-scale structures on the distribution of the CMB ellipticities. The consequences are the same as for the lensed distant galaxies: the gravitational distortion induces an excess of elongated structures of CMB ellipticities. The intrinsic CMB ellipticity distribution being known for a Gaussian field (e.g., Bond & Efstathiou 1987), it is then possible to compute the lensed distribution. The lensed distribution is, unfortunately, rather close to the unlensed one, in particular because the smoothing caused by the CMB beam tends to circularize the local structures. The orientation of the local ellipticity is expected to be much more robust against the smoothing effects and therefore more efficient in tracing the lens effects. As a result of the low number density of structures on CMB maps, such effects can hardly be detected in CMB maps alone, so in this paper we investigate instead the possible cross-correlation of CMB ellipticities with the distant galaxy ellipticities.

It has been recognized before that a fair fraction of the lenses that act on CMB temperature maps are at low redshift (Suginohara, Suginohara, & Spergel 1998). There are different consequences. Temperature maps and a galactic density survey should exhibit some correlations (Suginohara et al. 1998), and lensing induces a nonzero three-point function (or equivalently a bispectrum) in the CMB maps (Goldberg & Spergel 1998; Spergel & Goldberg 1998). This is due to the coupling between lens effects and low-redshift primary or secondary anisotropies such as the integrated Sachs-Wolfe effect or the Sunyaev-Zeldovich effect.

In this paper we focus our analysis in the expected correlation between the CMB ellipticities and those of distant galaxies. We indeed expect their relative angle to be nonuniformly distributed, unlike what would happen if there were no lensing effects. We examine here the amplitude and the observability of this effect. It is worth stressing that, unlike in the analysis performed by Suginohara et al. (1998), the correlation signal we are aiming at is independent of any possible galaxy bias. It would then provide a complementary constraint on the fundamental cosmological parameters a priori independent of those provided by the observations of the primary anisotropies.

We discuss the physical mechanism and introduce the

¹ CITA, 60 St. George Street, Toronto, M5S 3H8, Canada.

² SPHT, C. E. de Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France.

LENSING EFFECT

15

relevant quantities in § 2. In § 3 we investigate the amplitude of the effect for different cosmologies, and we calculate the signal-to-noise ratio in § 4. Section 5 is a discussion on the contribution of the different possible foreground contaminations, before we conclude in § 6.

2. LENSING OF CMB ELLIPTICITIES

A bundle of light rays coming from a high-redshift source from the direction $\theta = (\theta_x, \theta_y)$ is deflected by a quantity $\xi(\theta)$, whose derivatives $\kappa = \mathbf{V} \cdot \xi$ and $\gamma = (\partial_x \xi_x - \partial_y \xi_y, 2\partial_x \xi_y)$ describe the isotropic and anisotropic deformation of the light bundle. The convergence κ and the shear γ depend on the integrated gravitational potential along the line-of-sight θ and distort the image of distant galaxies as well as the CMB fluctuations.

At any position on the CMB temperature map, we can define an ellipticity e from the curvature of the temperature field δ_T :

$$e = \left(\frac{\partial_x^2 \delta_T - \partial_y^2 \delta_T}{\partial_x^2 \delta_T + \partial_y^2 \delta_T}, \frac{2\partial_{xy} \delta_T}{\partial_x^2 \delta_T + \partial_y^2 \delta_T} \right). \quad (1)$$

This relation is similar to the ellipticity of a galaxy defined from its second-order moments. A peak of temperature with the same curvature on both axes has a zero ellipticity, but in contrast to the ellipticity of the galaxies, the CMB ellipticity can take any value between zero (circular peaks) and infinity (symmetric saddle points). However, it is always meaningful to define the orientation of the CMB ellipticity $\theta_e = \arctan(e_2/e_1)$, which runs from 0 to 2π . The gravitational lensing effect tends to stretch the structures and therefore to produce an excess of elongated structures relative to the number of rather round objects (Bernardeau 1998). The lenses tend also to align the CMB ellipticity with the shear $\gamma(\theta)$ acting on the CMB at the angular position θ . This is similar to the effect that occurs on the ellipticity of distant galaxies, although the corresponding shear $\gamma_g(\theta)$ cannot be identified with $\gamma(\theta)$, since the galaxies are at much lower redshift. The variables $\gamma(\theta)$ and $\gamma_g(\theta)$ are, however, correlated because the light coming from either the CMB or the distant galaxies is passing through the same portion of low-redshift universe, and, consequently, for a given line of sight θ , the CMB ellipticities are preferentially aligned with the distant galaxies.

In the paradigm of inflation, the CMB fluctuations are Gaussian. Therefore, the unlensed CMB ellipticity distribution is very specific and furthermore independent of the shape of the temperature power spectrum (Bond & Efstathiou 1987). The effect of gravitational lensing on the statistic of a Gaussian random field can be calculated analytically, at least using perturbative methods. According to equation (1), the fields of interest are the second derivatives of the temperature field, which defines the CMB ellipticity. It is useful to introduce the matrix of the second-order derivatives \mathcal{C} :

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \partial_x^2 \delta_T & \partial_{xy} \delta_T \\ \partial_{xy} \delta_T & \partial_y^2 \delta_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau + g_1 & g_2 \\ g_2 & \tau - g_1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

where the CMB ellipticity (eq. [1]) is defined, as in Bond & Efstathiou (1987), as

$$e = \frac{\mathbf{g}}{2\tau}. \quad (3)$$

We want to calculate the effect of lensing on e and write the

lensed ellipticity \hat{e} as a function of e , the shear γ , and the convergence κ . For this we need to calculate the lensed quantities $\hat{\mathbf{g}}$ and $\hat{\tau}$ and expand the expressions using the weak lensing approximation ($\gamma, \kappa \ll 1$).

The effect of weak lensing is only a remapping of the temperature fluctuations through the displacement field $\xi(\theta)$, with no modification of the temperature amplitude,

$$\delta_T^{\text{obs}}(\theta) = \delta_T^{\text{prim}}(\theta + \xi(\theta)). \quad (4)$$

The magnification matrix is the Jacobian of the transformation between the source and the image plane. It is given by the first derivatives of the displacement field:

$$\mathcal{A}_{ij} = \delta_{ij}^K + \xi_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

where K is the convergence and γ the shear. The lensed curvature matrix calculated from equations (2) and (4) is (Bernardeau 1998)

$$\mathcal{C}_{ij}^{\text{obs}} = \mathcal{A}_{ik} \mathcal{C}_{kl}^{\text{prim}} \mathcal{A}_{lj} + (\partial_k \delta_T)(\partial_j \xi_{k,i}). \quad (6)$$

The first term is identical to the lensing term for galaxies, and the second term makes the spatial derivatives of κ and γ intervene. This second term accounts for the variation of the amplification matrix across the CMB patterns. It cannot be a priori neglected because the scale at which the shear is estimated corresponds roughly to the filtering scale, a scale over which the shear might significantly change. Note that for the galaxy field, the shear is measured at a much smaller scale (the galaxy size), and the shear gradient term is always neglected. However, we will assume later that the shear field is Gaussian (which is a reasonable approximation for scales larger than a few arcminutes), for which the shear gradient is uncorrelated to the shear itself. Therefore, we expect the shear gradients to play no role in the cross-correlation pattern. As a result, in the following the second term of equation (6) will be ignored for the lensed CMB ellipticities as well.

It is then easy to obtain the transformation equations for τ and \mathbf{g} :

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &\simeq \tau(1 - 2\kappa) + 2\gamma \cdot \mathbf{g}, \\ \hat{\mathbf{g}} &\simeq \mathbf{g}(1 - 2\kappa) + 2\tau\gamma. \end{aligned} \quad (7)$$

The lensed ellipticity \hat{e} is obtained from equations (3) and (7):

$$\hat{e} \simeq e + 4(\gamma \cdot e)e - \gamma. \quad (8)$$

Note that this is very similar to the galaxy ellipticity transformation relations (Schneider & Seitz 1995), for which we have $\hat{\epsilon} \simeq \epsilon - (\gamma \cdot \epsilon)\epsilon + \gamma$ if ϵ is the intrinsic galaxy ellipticity. It is remarkable that the lensed ellipticity does not depend on the convergence κ .

3. GALAXY-CMB ELLIPTICITIES ORIENTATION

Let θ be the angle between \hat{e} and the shear $\gamma(\theta)$ at the redshift of the CMB and θ_g the angle between \hat{e} and the shear of the distant galaxies $\gamma_g(\theta)$:

$$\cos \theta = \frac{\hat{e} \cdot \gamma}{\hat{e} \gamma}, \quad \cos \theta_g = \frac{\hat{e} \cdot \gamma_g}{\hat{e} \gamma_g}. \quad (9)$$

We should emphasize that the angles θ and θ_g are twice the physical angles measured from the temperature map and

the distant galaxies (e.g., $\theta_g = \pi$ means that a lensed temperature fluctuation is perpendicular to a sheared distant galaxy, if they were both intrinsically circular).

We want to calculate the probability distribution function $\mathcal{P}(\theta_g)$ of the relative orientation between the lensed CMB ellipticity and the sheared distant galaxies. This can be done by marginalizing the joint probability $\mathcal{P}(\hat{e}, \gamma, \gamma_g, \theta, \theta_g)$ over $(\hat{e}, \gamma, \gamma_g, \theta)$. We adopt the point of view of conditional probability and write $\mathcal{P}(\hat{e}, \gamma, \gamma_g, \theta, \theta_g)$ as

$$\mathcal{P}(\hat{e}, \gamma, \gamma_g, \theta, \theta_g) = \mathcal{P}(\hat{e} | \gamma) \mathcal{P}_{\text{lens}}(\gamma, \gamma_g, \theta, \theta_g), \quad (10)$$

where $\mathcal{P}_{\text{lens}}(\gamma, \gamma_g, \theta, \theta_g)$ (which is a pure lensing contribution) is the joint probability that the shear is γ at the last-scattering surface and γ_g for the distant galaxies. $\mathcal{P}(\hat{e} | \gamma)$ is the probability of observing a lensed CMB ellipticity \hat{e} when the shear is γ at the last-scattering surface. This conditional probability depends on the ellipticity distribution function in the field of the unlensed CMB $p(e)$, which can be derived by integrating equation (A.1.6) of Bond & Efstathiou (1987) (see also Bernardeau 1998):

$$p(e)de = p(e_1, e_2)e de = \frac{8e}{(1 + 8e^2)^{3/2}} de. \quad (11)$$

From equation (8) and the weak lensing approximation ($\gamma \ll 1$) we get

$$\begin{aligned} P(\hat{e} | \gamma) &= P(\hat{e}_1, \hat{e}_2 | \gamma)\hat{e} = p(e_1, e_2) \left| \frac{\partial e_i}{\partial \hat{e}_j} \right| \hat{e} \\ &\simeq \frac{8\hat{e}}{(1 + 8\hat{e}^2)^{3/2}} \left(1 - 36 \frac{\hat{e} \cdot \gamma}{1 + 8\hat{e}^2} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

The integration over \hat{e} gives the desired probability (eq. [10]) as a function of $\mathcal{P}_{\text{lens}}$ only,

$$\mathcal{P}(\gamma, \gamma_g, \theta, \theta_g) = [1 - 3\sqrt{2}\gamma \cos \theta] \mathcal{P}_{\text{lens}}(\gamma, \gamma_g, \theta, \theta_g). \quad (13)$$

At this stage we need a model for $\mathcal{P}_{\text{lens}}(\gamma, \gamma_g, \theta, \theta_g)$. The observables \hat{e} and γ_g will respectively be measured on the temperature fluctuation map and a galaxy survey. As a result of the limited beam size of the bolometers, we cannot hope to measure \hat{e} with a resolution better than a few arcminutes. Let θ_0^{CMB} be this beam size and θ_0 be the smoothing length used to measure γ_g . These two smoothing scales can be totally different, and we will find later that the better signal-to-noise ratio is obtained when they are equal. This discussion is left aside for now, and we assume in the following that θ_0^{CMB} and θ_0 are both larger than a few arcminutes. It is therefore reasonable to assume a Gaussian distribution for the variable $V = [\gamma, \gamma_g]$ and to write $\mathcal{P}_{\text{lens}}(\gamma, \gamma_g, \theta, \theta_g)$ as a multivariate Gaussian distribution,

$$\mathcal{P}_{\text{lens}}(\gamma, \gamma_g, \theta - \theta_g) = \frac{1}{2\pi(\det M)^{1/2}} \exp(-VM^{-1}V), \quad (14)$$

whose correlation matrix M is given by

$$M = \begin{pmatrix} \langle \gamma^2 \rangle & \langle \gamma \gamma_g \rangle \\ \langle \gamma \gamma_g \rangle & \langle \gamma_g^2 \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^2 & r\sigma\sigma_g \\ r\sigma\sigma_g & \sigma_g^2 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

We used the property $\langle \gamma_i \gamma_j \rangle = \delta_{ij}^k \langle \kappa^2 \rangle / 2$ (valid for the weak lensing limit), where $\sigma^2 = \langle \kappa^2 \rangle$, $\sigma_g^2 = \langle \kappa_g^2 \rangle$, and $r = \langle \kappa \kappa_g \rangle / (\sigma \sigma_g)$ is the correlation coefficient of the shear amplitude between the CMB and the distant galaxies. Note that the probability (eq. [14]) depends only on the relative orientation between γ and γ_g , since we can choose any origin for the orientations. Figure 1 shows (for Λ cold dark matter)

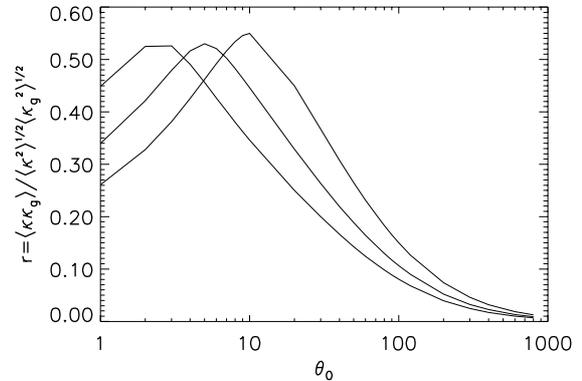


FIG. 1.—Correlation coefficient $r = \langle \kappa \kappa_g \rangle / (\sigma \sigma_g)$ as defined in eq. (15) for an LCDM model for a galaxy source plane at $z = 1$; r is given as a function of the smoothing angle θ_0 for κ_g . The three curves from left to right correspond to a fixed beam size θ_0^{CMB} of 2.5, 5, and 10'. The stronger correlation is obtained when θ_0 is comparable to the CMB beam size.

the correlation function r for a fixed θ_0^{CMB} as a function of θ_0 . The moments of the convergence are calculated using the perturbation theory and the nonlinear evolution of the power spectrum given by Peacock & Dodds (1996). It is interesting to note in this figure that the maximum correlation is reached when θ_0 and θ_0^{CMB} are nearly equal.

With a formal calculator, equation (13) can be integrated without difficulty over γ, γ_g , and θ in order to get the final result:

$$\mathcal{P}(\theta_g)d\theta_g = \frac{d\theta_g}{2\pi} \left(1 + 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\langle \kappa \kappa_g \rangle}{\langle \kappa_g^2 \rangle^{1/2}} \cos \theta_g \right). \quad (16)$$

This equation constitutes the main result of this paper. It shows how much the relative orientation of the CMB ellipticity with the distant galaxies deviates from a random distribution because of the gravitational lensing effect.

Figure 2 shows the amplitude of this effect for different cosmological models and different smoothing scales. We assumed a CDM power spectrum, taking into account its nonlinear evolution as described by Peacock & Dodds (1996). The deviation from a uniform distribution can be as large as 10%, and the effect seems mostly sensitive to the curvature of the universe rather than Ω_M or Λ . A possible observable is the average of $\cos \theta_g$ over the total survey area:

$$\langle \cos \theta_g \rangle = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\langle \kappa \kappa_g \rangle}{\langle \kappa_g^2 \rangle^{1/2}}. \quad (17)$$

If the CMB ellipticities are significantly aligned with the distant galaxies, then $\langle \cos \theta_g \rangle$ should be significantly larger than zero. Some values of $\langle \cos \theta_g \rangle$ are given in Table 1 for various cosmological models and smoothing schemes.

4. SIGNAL-TO-NOISE ANALYSIS

4.1. Description

In order to compute the signal-to-noise ratio of the quantity given by equation (17), let us assume that we have at our disposal a CMB temperature map and a shear map of distant galaxies of angular area \mathcal{S} . An estimator E of $\langle \cos \theta_g \rangle$ for a finite number N of measurements at locations

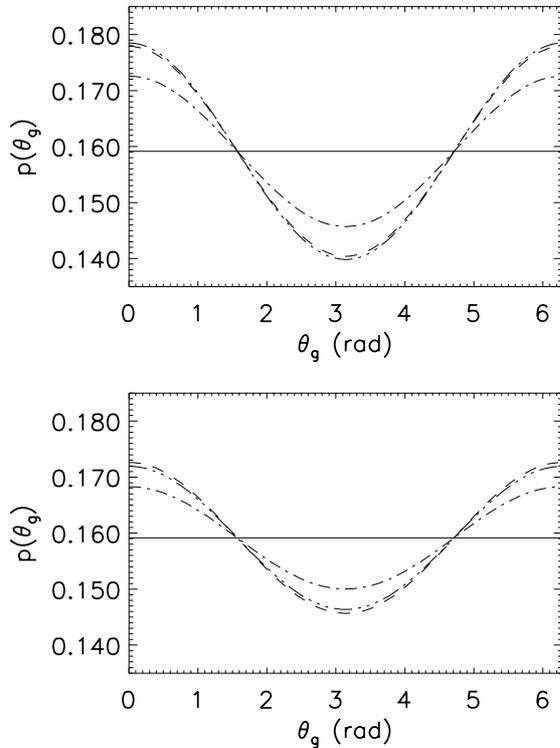


FIG. 2.—Probability distribution function of the relative orientation θ_g between the CMB ellipticity and the sheared distant galaxies (eq. [16]). The beam size is $\theta_0^{\text{CMB}} = 2.5'$ for the upper plot and $\theta_0^{\text{CMB}} = 10'$ for the lower plot, and the smoothing lengths of the convergence κ_g are respectively $\theta_0 = 2'$ and $\theta_0 = 10'$. The horizontal solid line represents the uniform distribution of θ_g in the unlensed case. The dot-dashed line is for $\Omega_M = 0.3$, $\Lambda = 0$, $\sigma_8 = 1$; the triple dot-dashed line for $\Omega_M = 0.3$, $\Lambda = 0.7$, $\sigma_8 = 1$; and the dashed line for $\Omega_M = 1$, $\Lambda = 0$, $\sigma_8 = 0.6$.

θ_i is

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos [\theta_g(\theta_i)]. \quad (18)$$

The ensemble average of the variance of this estimator is

$$\langle E^2 \rangle = \frac{\langle \cos^2 \theta_g \rangle}{N} + \frac{N-1}{N} \int \frac{d^2 \theta_1}{\mathcal{S}} \int \frac{d^2 \theta_2}{\mathcal{S}} \times \langle \cos [\theta_g(\theta_1)] \cos [\theta_g(\theta_2)] \rangle. \quad (19)$$

The first term accounts for the variance resulting from the random intrinsic orientation of the ellipticities. The second term is the contribution of the cosmic variance. N can be either the number of individual galaxies or the number of cells in which the galaxy ellipticities are averaged. In any

case, for \mathcal{S} large enough, it is reasonable to take $N \rightarrow \infty$,³ for which only the cosmic variance term matters. Therefore, the variance of $\langle \cos \theta_g \rangle$ is approximated by

$$\sigma_{\langle \cos \theta_g \rangle}^2 \simeq \int \frac{d^2 \theta_1}{\mathcal{S}} \frac{d^2 \theta_2}{\mathcal{S}} \langle \cos [\theta_g(\theta_1)] \cos [\theta_g(\theta_2)] \rangle. \quad (20)$$

The correlator $C = \langle \cos [\theta_g(\theta_1)] \cos [\theta_g(\theta_2)] \rangle$ depends on the temperature correlation function and on the convergence correlation function, and it has to be calculated from the joint probability $\mathcal{P}(\gamma_g(\theta_1), \gamma_g(\theta_2), \hat{e}(\theta_1), \hat{e}(\theta_2))$.

4.2. Calculations

The calculations are simplified if we assume that the temperature fluctuations are unlensed and uncorrelated with the orientation of the galaxies. This will give, by construction, the signal-to-noise ratio of the CMB-lens positive detection against the hypothesis of no lensing on CMB. In that case, the lensing and the CMB distribution functions are separable and can be written

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\gamma_g(\theta_1), \gamma_g(\theta_2), e(\theta_1), e(\theta_2)) \\ = \mathcal{P}_{\text{lens}}(\gamma_g(\theta_1), \gamma_g(\theta_2)) \mathcal{P}_{\text{CMB}}(e(\theta_1), e(\theta_2)). \end{aligned} \quad (21)$$

Using equation (3), it is then possible to reexpress the latter distribution in terms of the variables $\mathbf{g}(\theta_1)$, $\mathbf{g}(\theta_2)$, τ_1 , and τ_2 , taking advantage of the fact that $\mathcal{P}_{\text{CMB}}(\mathbf{g}(\theta_1), \mathbf{g}(\theta_2))$ follows a Gaussian distribution. Therefore $\mathcal{P}_{\text{CMB}}(\mathbf{g}(\theta_1), \mathbf{g}(\theta_2))$ has the same form as in equation (14) with

$$\begin{aligned} V &= [\mathbf{g}(\theta_1), \mathbf{g}(\theta_2)], \\ M &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \langle \tau^2 \rangle & \langle \tau(\theta_1) \tau(\theta_2) \rangle \\ \langle \tau(\theta_1) \tau(\theta_2) \rangle & \langle \tau^2 \rangle \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (22)$$

here the correlation coefficient is defined as the temperature fluctuations taken at two different locations θ_1 and θ_2 . Similarly, $\mathcal{P}_{\text{lens}}(\gamma_g(\theta_1), \gamma_g(\theta_2))$ is given by equation (14) with

$$\begin{aligned} V &= [\gamma_g(\theta_1), \gamma_g(\theta_2)] \\ M &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \langle \kappa_g^2 \rangle & \langle \kappa_g(\theta_1) \kappa_g(\theta_2) \rangle \\ \langle \kappa_g(\theta_1) \kappa_g(\theta_2) \rangle & \langle \kappa_g^2 \rangle \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

We are now in position to calculate C in which we rewrite $\cos [\theta_g(\theta_1)]$ (resp. $\cos [\theta_g(\theta_2)]$) as $\cos [\theta_e(\theta_1) - \theta_{\text{gal}}(\theta_1)]$ (resp. $\cos [\theta_e(\theta_2) - \theta_{\text{gal}}(\theta_2)]$), where $\theta_e(\theta_1)$ is the orientation of the CMB ellipticity at location θ_1 , and $\theta_{\text{gal}}(\theta_1)$ the orientation of a galaxy at location θ_1 . It is useful to define $\phi_e = \theta_e(\theta_1) - \theta_e(\theta_2)$ and $\phi_{\text{gal}} = \theta_{\text{gal}}(\theta_1) - \theta_{\text{gal}}(\theta_2)$, and to express $\mathcal{P}_{\text{lens}}(\gamma_g(\theta_1), \gamma_g(\theta_2))$ and $\mathcal{P}_{\text{CMB}}(\mathbf{g}(\theta_1), \mathbf{g}(\theta_2))$ as a function of $\cos \phi_{\text{gal}}$ and $\cos \phi_e$, respectively. Then the only non-

³ For example, for a 900 deg² survey there are $N \simeq 9 \times 10^7$ objects with $I < 24$ mag.

TABLE 1
VALUES OF $\langle \cos \theta_g \rangle$ AND ITS SIGNAL-TO-NOISE RATIO

MODEL	$\langle \cos \theta_g \rangle (\theta = 5')$	S/N		
		$\theta = 2.5'$	$\theta = 5'$	$\theta = 10'$
Standard CDM (900 deg ²).....	0.057	8.3	5.4	3.3
Λ CDM (900 deg ²).....	0.054	10.7	6.7	3.9
Open CDM (900 deg ²).....	0.040	7.5	4.4	2.3

vanishing term in the correlator C is

$$C = \frac{1}{2} \langle \cos \phi_e \cos \phi_{\text{gal}} \rangle. \quad (24)$$

The calculation of C makes intervene the normalized correlation functions $c_\kappa = \langle \kappa(\theta_1)\kappa(\theta_2) \rangle / \langle \kappa^2 \rangle$ and $c_\tau = \langle \tau(\theta_1)\tau(\theta_2) \rangle / \langle \tau^2 \rangle$. It turns out that the calculation of equation (24) is tractable analytically if we assume that c_κ and c_τ are small compared to unity (then we can expand the distribution function with respect to c_κ and c_τ). This is always a well-justified approximation for large surveys such as those discussed here (for which the c coefficients are at percent level). After a straightforward manipulation (that can easily be done with a formal calculator), we find

$$\langle \cos [\theta_g(\theta_1)] \cos [\theta_g(\theta_2)] \rangle \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{c_\tau^2}{2} + \frac{7c_\tau^4}{48} + \dots \right) \frac{\pi}{32} (8c_\kappa + c_\kappa^3 + \dots). \quad (25)$$

The leading order in the correlation coefficient c_τ and c_κ is thus

$$\langle \cos [\theta_g(\theta_1)] \cos [\theta_g(\theta_2)] \rangle = \frac{\pi}{16} \left[\frac{\langle \tau(\theta_1)\tau(\theta_2) \rangle}{\langle \tau^2 \rangle} \right]^2 \frac{\langle \kappa(\theta_1)\kappa(\theta_2) \rangle}{\langle \kappa^2 \rangle}, \quad (26)$$

which has to be integrated over the survey size in order to give the desired result (eq. [20]).

4.3. Temperature and Convergence Correlation Functions

In order to estimate expression (2), one needs the temperature and the convergence correlation functions.

The temperature correlation function can be evaluated from the angular CMB power spectrum C_l given by the CMBFAST code (Seljak & Zaldarriaga 1996). However, we have to include the beam-size effect (which tends to enlarge the temperature correlation function and therefore to increase the noise) and to correct for the instrumental noise. This can be achieved by a suitable Wiener filtering of the power spectrum. The filtered $\tilde{\mathcal{C}}_l$ are given by

$$\tilde{\mathcal{C}}_l = \frac{\mathcal{C}_l e^{-l^2 \sigma_b^2}}{\mathcal{C}_l e^{-l^2 \sigma_b^2} + \mathcal{C}_{\text{noise}}} \mathcal{C}_l e^{-l^2 \sigma_b^2}, \quad (27)$$

where $\sigma_b = \theta_0^{\text{CMB}} / (8 \log 2)^{1/2}$ gives the beam size and $\mathcal{C}_{\text{noise}} = \sigma_{\text{pix}}^2 \Omega_{\text{pix}} \simeq 2 \times 10^{-17}$ is the typical level of noise for experiments like *MAP* and *Planck* (σ_{pix}^2 is the noise variance per pixel, and Ω_{pix} the pixel solid angle). Here $\mathcal{C}_{\text{noise}}$ is expressed in terms of $(\Delta_T/T)^2$ sr. The correlation function is then given by the standard Legendre polynomial expansion:

$$\langle \tau(\theta_1)\tau(\theta_2) \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_l \tilde{\mathcal{C}}_l \left(l + \frac{1}{2} \right) P_l[\cos \alpha], \quad (28)$$

where α is the angle between θ_1 and θ_2 .

The convergence correlation function is calculated as in § 3, using the perturbation theory with the nonlinear power spectrum evolution (Peacock & Dodds 1996).

4.4. Results

We then performed a numerical integration of equation (26) for standard CDM, open CDM, and Λ CDM cosmological models. The signal-to-noise ratio is given in Table 1 for different cosmologies and smoothing lengths. The survey size is assumed to be 900 deg^2 . The signal-to-noise ratio scales roughly as the square root of the area for larger

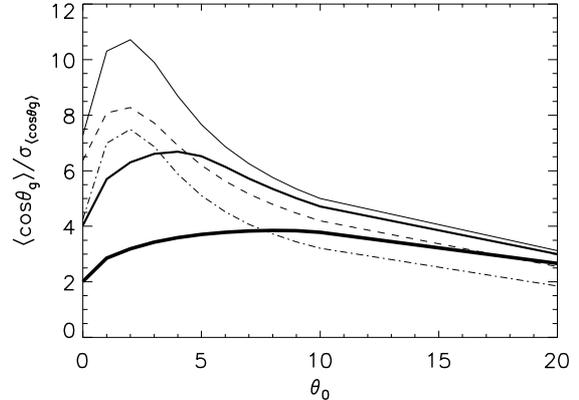


FIG. 3.—Signal-to-noise ratio of $\langle \cos \theta_g \rangle$ as a function of the convergence smoothing scale θ_0 . The CMB and the galaxy surveys both have a size of 900 deg^2 . The cosmological models are standard CDM (dashed line), open CDM (dotted line) and Λ CDM (solid lines). The beam size is always 2.5 except for the thick line (Λ CDM, beam = 5') and the very thick line (Λ CDM, beam = 10').

surveys. A very good signal-to-noise ratio (~ 9) can be obtained at small smoothing scale; however, even in the large smoothing scale case a significant detection can be obtained. This result contrasts with previous analysis of lensing on the CMB where these typical signal-to-noise ratios were obtained with a whole sky survey.

Figure 3 shows how the signal-to-noise evolves with θ_0 for different values of the beam size θ_0^{CMB} . The maximum signal-to-noise is obtained for θ_0 comparable to θ_0^{CMB} , which is a consequence that at small scales the sheared galaxies behave essentially like a noise for the lensed temperature fluctuations, and at large scale the signal is smoothed away.

5. EFFECTS OF SECONDARY ANISOTROPIES

Undoubtedly, secondary anisotropies and foregrounds can affect our conclusions and should be examined in detail. They may affect our calculations in three different ways: first, some CMB fluctuations might be generated at low redshift and the assumption that the source plane is located at $z_{\text{source}} \simeq 1000$ breaks down; secondary anisotropies are correlated with low-redshift mass concentrations that might introduce spurious correlations between CMB ellipticities and galaxy shear; galactic foregrounds can change our estimation of the cosmic variance. We compare in the next paragraphs the importance of various secondary effects.

5.1. The Thermal Sunyaev-Zeldovich (TSZ) Effect

The TSZ effect is the most important source of secondary anisotropies. It corresponds to the scattering of CMB photons on electrons of the hot cluster gas. During the scattering, the photon energy is redistributed from the low-frequency to the high-frequency part of the blackbody energy distribution. The net effect is a deficit of photons at low frequency (resp. an excess at high frequency), which creates a negative (resp. positive) fluctuation in the CMB map. Such fluctuations, essentially centered on clusters of galaxies (where the gas is hot enough), creates a specific ellipticity pattern, correlated with the gravitational shear generated by those clusters. Therefore the ensemble average $\langle \cos \theta_g \rangle$ (eq. [17]) is not expected to vanish, even in the absence of gravitational lensing. The importance of this

contribution depends on the amplitude and the extension of TSZ, and it is beyond the scope of this paper to perform an exact calculation. However, we know that the amplitude of TSZ is proportional to the gas temperature, which is important in the inner part of galaxy clusters only, at scales $1' - 2'$ (see Perci et al. 1995, where the TSZ is calculated). TSZ coming from larger scales (filaments, for instance) do not have a significant contribution (Tegmark et al. 1999). Therefore, if the CMB is observed at a resolution of $5'$ or larger, TSZ should not be a problem. For smaller scales it can become difficult to disentangle between the lensing effect and the ellipticity-shear correlation generated by TSZ. However, we should emphasize that it is always possible to suppress this effect by either observing at 217 GHz (for which TSZ vanishes) or by cleaning TSZ taking advantage of its specific spectral signature.

5.2. Kinetic Sunyaev-Zeldovich (KSZ) and Ostriker & Vishniac (OV) Effects

Although these effects are sometime discussed separately in the literature, they have the same physical origin: this is a Doppler effect caused by the electron bulk motion. OV is a perturbative effect, while KSZ is a nonlinear effect which can be important in the inner part of the clusters. OV is negligible at scales larger than $3'$, but its contribution increases quickly with decreasing scale, and equals the primary spectrum at $2'$ (Hu & White 1996). The KSZ effect provides a significant increase of the OV only for scales smaller than $2'$ (Hu 1999). Therefore, as long as we work at scales larger than $2' - 3'$, KSZ and OV are not important for our purpose. At smaller scales it becomes essential to estimate their contribution to $\langle \cos \theta_g \rangle$.

5.3. Integrated Sachs-Wolfe (ISW) and Rees-Sciama (RS) Effects

ISW and RS effects describe the frequency shift of a CMB photon when it crosses a time-evolving gravitational potential well. The induced fluctuations are pure gravitational effects. The first-order ISW occurs only for universes different from ($\Omega = 1, \Lambda = 0$) because for the flat $\Omega = 1$ universe the growth rate of structures is compensated by the universe expansion. However, there is always a nonlinear ISW due to the time-evolving potential of nonlinear collapsing structures, which occurs in all cosmologies (the RS effect). The amplitude of RS was computed by Seljak (1996), who found a very small contribution for $l < 4000$. It is therefore irrelevant for our purpose.

5.4. Galactic Foregrounds and Point Sources

Bouchet & Gispert (1999) (see also Tegmark et al. 1999) calculated the power spectrum contribution of Galactic

foreground and extragalactic point sources. The Galactic foreground contamination is dominant only at very large scales ($l < 10$), but the point source spectra might become important for $l > 1000$. Fortunately the clustering properties of the point sources do not play a significant role (Toffolatti et al. 1998), therefore their contribution is essentially white noise, which makes their removal possible, as long as we have a good model for them (Guiderdoni 1999).

6. CONCLUSION

We have computed the amplitude of the correlation between the lensed CMB ellipticities and the lensed galaxy ellipticities to the leading order of perturbation theory. We found that the modulation of the relative angle distribution can be as high as 10% for a smoothing scale of 2.5 and 5% for $10'$. This lensing effect extends to scales well beyond the anisotropies generated by the foreground contamination, and therefore it should be easily detectable with a low-resolution experiment provided that the survey is large enough. In particular, future wide galaxy surveys (SLOAN) used jointly with all sky CMB experiments (*MAP*, *Planck*) are very promising for the measurement of such a lens effect. A sky coverage of only 30% will improve the signal-to-noise ratio by a factor of 4 over those given in Table 1. At scales larger than a few arcminutes, any detected correlation between the CMB ellipticities and the shear of the distant galaxies can only be produced by lensing (since the foreground contribution is too weak); this does not depend on whether the CMB is intrinsically Gaussian or not (although we used the Gaussian approximation for the calculations).

At the arcminute scale and below, the secondary fluctuation become important, and the contribution of each foreground should be carefully estimated. Moreover, at such small scales, the CMB and shear fields cannot be approximated by a Gaussian field, and one might go beyond by considering a weakly non-Gaussian distribution like the Edgeworth expansion.

The computation of the signal-to-noise ratio were made in a simplified way. In particular, we assumed that the smoothing θ_0^{CMB} for κ takes most of the effects associated with the beam smoothing, which we believe should be a good approximation as long as the ellipticity orientations only are concerned. We plan to check this aspect in numerical simulations.

We thank Simon Prunet and Dmitry Pogosyan for useful discussions on this subject and for a careful reading of the manuscript. We all thank IAP for hospitality and the Terapix data center (<http://terapix.iap.fr/>) for computing facilities. F. B. and K. B. thank CITA for hospitality.

REFERENCES

- Benabed, K., & Bernardeau, F. 1999 (astro-ph/9906161)
 Bernardeau, F. 1997, A&A, 324, 15
 ———, 1998, A&A, 338, 767
 Bond, J. R., & Efstathiou, G. 1987, MNRAS, 226, 655
 Bouchet, F. B., & Gispert, R. 1999, NewA, 4, 443
 Goldberg, D., & Spergel, D. 1998 (astro-ph/9811251)
 Guiderdoni, B. 1999 (astro-ph/9903112)
 Hu, W. 1999 (astro-ph/9907103)
 Hu, W., & White, M. 1996, A&A, 315, 33
 Metcalf, R. B., & Silk, J. 1998, ApJ, 492, L1
 Peacock, J. A., & Dodds, S. J. 1996, MNRAS, 280, L19
 Perci, F. M., Spergel, D., Cen, R., & Ostriker, J. 1995, ApJ, 442, 1
 Schneider, P., & Seitz, C. 1995, A&A, 294, 411
 Seljak, U. 1996, ApJ, 460, 549
 Seljak, U., & Zaldarriaga, M. 1996, ApJ, 469, 437
 ———, 1999 (astro-ph/9907254)
 Spergel, D., & Goldberg, D. 1998 (astro-ph/9811252)
 Sugihara, M., Sugihara, T., & Spergel, D. N. 1998, ApJ, 495, 511
 Tegmark, M., et al. 1999 (astro-ph/9905257)
 Toffolatti, M., et al. 1998, MNRAS, 297, 117
 Zaldarriaga, M., & Seljak, U. 1998, Phys. Rev. D, 58, 023003
 ———, 1999, Phys. Rev. D, 59, 123507

8.2.3 Une extension possible : longueur des isothermes

Je vais présenter ici une autre corrélation possible entre la température du rayonnement de fond et l'effet de lentille sur les galaxies. L'idée est d'étudier les fonctionnelles de Minkowski pour caractériser les modifications morphologiques du champ d'anisotropie de température. Je vais brièvement décrire l'effet de lentille pour une seule fonctionnelle, la longueur des courbes isothermes.

Il est assez simple de calculer l'effet de lentille gravitationnelle sur la longueur des isothermes. En effet, on a vu chapitre 6 que l'effet de lentille gravitationnelle ne faisait que déformer le champ de température. Ainsi, les points appartenant à une isotherme du champ primordial appartiennent à la même isotherme dans le rayonnement de fond observé. Seule la longueur et la forme de la courbe peuvent être modifiées.

Soit dl , l'élément de longueur le long d'une isotherme

$$dl^2 \equiv (d\theta^1)^2 + (d\theta^2)^2. \quad (8.18)$$

On rappelle qu'une observable X mesurée dans la direction θ est liée à sa valeur primordiale par

$$\hat{X}(\theta) = X(\theta + \xi). \quad (8.19)$$

On rappelle que la position sur le plan source θ_S est donnée en fonction de la position observée²

$$\theta_S = \theta + \xi. \quad (8.20)$$

Pour les éléments de longueur, on a

$$d\theta_S^i = (\delta_j^i + \partial_j \xi^i) d\theta^j. \quad (8.21)$$

Donc, la longueur s'exprime par

$$\begin{aligned} dl_S^2 &= (d\theta_S^1)^2 + (d\theta_S^2)^2 \\ &= (d\theta^1)^2 \left[(1 + \partial_1 \xi^1)^2 + (\partial_2 \xi^1)^2 \right] + (d\theta^2)^2 \left[(1 + \partial_2 \xi^2)^2 + (\partial_1 \xi^2)^2 \right] \\ &\quad + 2 d\theta^1 d\theta^2 \left[(1 + \partial_1 \xi^1) \partial_2 \xi^1 + (1 + \partial_2 \xi^2) \partial_1 \xi^2 \right]. \end{aligned} \quad (8.22)$$

En se souvenant des équations (5.59,5.60,5.61) on ré-exprime les dérivées du champ de déplacement en fonction de γ et κ

$$dl_S^2 = dl^2 \left((1 - \kappa)^2 + \gamma^2 \right) + 2(1 - \kappa) \left[-\gamma_1 \left((d\theta^1)^2 - (d\theta^2)^2 \right) - \gamma_2 (2d\theta^1 d\theta^2) \right]. \quad (8.23)$$

Si bien qu'au premier ordre

$$dl_S^2 = dl^2 (1 - 2\kappa - 2\tilde{\gamma}), \quad (8.24)$$

et $\tilde{\gamma}$ est défini comme la projection le long de l'isotherme du pseudo-vecteur γ

$$\tilde{\gamma} dl^2 = -\gamma_1 \left((d\theta^1)^2 - (d\theta^2)^2 \right) - \gamma_2 (2d\theta^1 d\theta^2). \quad (8.25)$$

On sait maintenant comment s'exprime, au premier ordre, la longueur des isothermes observées en fonction des isothermes primordiales

$$dl = (1 + \kappa + \tilde{\gamma}) dl_S. \quad (8.26)$$

²On retrouve bien alors que pour une observable X , la valeur observée dans la direction θ est liée à sa valeur primordiale par

$$\hat{X}(\theta) = X(\theta_S) = X(\theta + \xi).$$

Comme annoncé plus haut, on va utiliser ce résultat pour calculer une corrélation entre le rayonnement de fond et l'effet de lentille sur les galaxies d'arrière-plan. Par exemple, l'intégrale de la convergence à $z = 1$ le long des isothermes corrèle *in fine* l'effet de lentille sur le rayonnement de fond et sur le plan source à $z = 1$. Sans rentrer dans le détail des calculs, on va estimer la quantité \mathcal{X}_ν définie par

$$\mathcal{X}_\nu \equiv \frac{\langle \oint_\nu dl \kappa_g \rangle_{\text{isothermes } \nu}}{\langle \oint_\nu dl \kappa_g^2 \rangle_{\text{isothermes } \nu}}. \quad (8.27)$$

Et l'on va admettre que l'intégrale sur toutes les isothermes ν d'une observable X se comporte bien comme $\langle X \rangle L^\nu$, où L^ν est la longueur totale de toutes les isothermes. On va commencer par le numérateur de \mathcal{R}_ν . En remarquant que pour tout i , $\langle \kappa \gamma_i \rangle = 0$, il est évident que les composantes en $\langle \kappa \tilde{\gamma} \rangle$ vont s'annuler dans le numérateur. On a donc, en utilisant le fait que $\langle \kappa \rangle = 0$,

$$\begin{aligned} \left\langle \oint_\nu dl \kappa_g \right\rangle_{\text{isothermes } \nu} &= \left\langle \oint_\nu dl_S \kappa_g + \kappa \kappa_g \right\rangle_{\text{isothermes } \nu} \\ &= \langle \kappa \kappa_g \rangle L_S^\nu. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Le calcul du dénominateur est simple

$$\left\langle \oint_\nu dl \kappa_g^2 \right\rangle_{\text{isothermes } \nu} = \langle \kappa_g^2 \rangle L_S^\nu. \quad (8.29)$$

Finalement, on est ramené à

$$\mathcal{X}_\nu \propto \chi. \quad (8.30)$$

Un étude plus complète de cette observable ainsi que des autres fonctionnelles de Minkowski est en cours de réalisation, à l'aide des simulations que je présenterai au chapitre suivant.

8.3 Corrélations avec la polarisation

Ce qui est possible avec la température est aussi possible avec la polarisation. La situation va même être plus avantageuse, du fait des propriétés de la polarisation du rayonnement de fond dans les modèles inflationnaires. En effet, on a vu, chapitre 3, que les modes B de la polarisation étaient très faibles à petite échelle. D'autre part, lorsque nous avons étudié l'effet de lentille gravitationnelle sur le rayonnement de fond, chapitre 7, nous avons montré qu'à ces échelles, c'est l'effet de lentille gravitationnelle qui allait dominer très largement B . Je vais présenter un travail réalisé en collaboration avec F. Bernardeau et L. van Waerbeke qui utilise cette propriété [Benabed *et al.*, 2001].

8.3.1 Corrélation de B et de l'effet de lentille à $z = 1$.

L'idée développée dans cet article est d'utiliser au maximum les propriétés de la composante magnétique de la polarisation du rayonnement de fond. On a vu, chapitre 7, équation (7.20), que la composante B pouvait s'écrire à petite échelle, dans les théories inflationnaires, comme

$$\Delta \hat{B} \simeq -2\varepsilon^{ij} (\gamma_i \Delta P_j + \nabla \gamma_i \cdot \nabla P_j). \quad (8.31)$$

Pour l'évaluation du spectre de puissance de B au chapitre précédent, on avait séparé cette dernière équation en deux termes, de sorte que

$$\hat{B} = b_\Delta + b_\nabla. \quad (8.32)$$

Dans l'esprit des calculs de la section précédente, il est alors extrêmement tentant de créer deux nouvelles observables mélangeant effet de lentille à $z = 1$ et polarisation. On peut définir

$$b_{\Delta}^g = \varepsilon^{ij} \gamma_i^g \Delta \hat{P}_j \quad (8.33)$$

et l'équivalent pour le terme b_{∇}^g . Ces deux observables se comportent alors, pour l'effet de lentille, comme le ferait le rayonnement de fond si l'on pouvait le déplacer à $z = 1$. Il devient alors très intéressant d'étudier la corrélation croisée entre ce "rayonnement de fond à $z = 1$ " et le rayonnement de fond mesuré.

Dans l'article qui va suivre, après avoir établi l'équation (8.31), on étudie les propriétés des $C_l^{\dagger\#}$ et la possibilité de reconstruction directe. Cette discussion a été reproduite et augmentée chapitre 7. Ensuite, on étudie les propriétés des corrélations $\langle \Delta \hat{B} b_{\dagger}^g \rangle$. Parmi les résultats de l'article, il convient de souligner que l'on a montré que l'on savait construire deux observables χ_{Δ} et χ_{∇} , avec

$$\chi_{\Delta} = \frac{\langle \Delta \hat{B} b_{\Delta}^g \rangle}{\langle \Delta \hat{E}^2 \rangle \langle \kappa_g^2 \rangle}, \quad \chi_{\nabla} = \frac{\langle \Delta \hat{B} b_{\nabla}^g \rangle}{\langle (\nabla \hat{E})^2 \rangle \langle (\nabla \kappa_g)^2 \rangle}. \quad (8.34)$$

En prenant en compte les effets de filtrage, ces deux observables sont comparables au taux de corrélation χ défini plus haut³. Enfin, la variance cosmique de ces observables est évaluée.

Je voudrais ici décrire un peu plus en détail le calcul de la variance cosmique. Tout d'abord, sur les raisons qui ont fait choisir de calculer la variance cosmique comme estimation du rapport signal sur bruit pour les observables χ_{\dagger} . En fait, il est très difficile de prédire le bruit de mesure de la polarisation et en particulier celui de sa composante B . La plupart des études réalisées jusqu'à présent s'attachent surtout à déterminer la forme du bruit sur la composante E , dominante dans les modèles inflationnaires [Prunet *et al.*, 1998, Prunet *et al.*, 2000]. Cette inconnue de l'amplitude, des propriétés du bruit de mesure et des avants plans spécifiques de la polarisation est une motivation supplémentaire pour l'étude de corrélations croisées. Encore une fois, il serait étonnant que les erreurs sur la mesure de la polarisation soient en quelque manière corrélées au bruit de mesure de l'effet de lentille sur les galaxies.

Si l'on ne peut pas, dans l'état actuel, calculer un rapport signal-sur-bruit réaliste, on peut cependant calculer la variance cosmique des observables. En effet, alors qu'on a fait tous nos calculs statistiques comme si l'on avait à disposition un nombre arbitraire de réalisations du rayonnement de fond cosmique et d'effets de lentille, la mesure des observables, si elle est réalisée un jour, se fera sur l'unique réalisation à notre disposition, et même certainement sur une petite partie de cette réalisation. Ce qu'on se propose de calculer est donc la variance statistique d'une telle mesure réalisée sur un échantillon fini. Cette variance donne un minimum au rapport signal sur bruit. Dans la pratique, elle est très souvent dominée par les erreurs de mesure et les avants-plans. Dans notre cas, cependant, si la corrélation croisée joue à plein pour éliminer les bruits non corrélés, cette variance pourrait être une bonne estimation du rapport signal-sur-bruit.

Je vais développer un peu les calculs de cette variance cosmique. Soit une observable X , mesurée sur une région Σ . La moyenne mesurée de X est

$$\bar{X} = \frac{\int_{\Sigma} d^2\theta X(\theta)}{\int_{\Sigma} d^2\theta}. \quad (8.35)$$

³pour être précis, χ_{Δ} est identique à χ , tandis que χ_{∇} serait un taux de corrélation des gradients de κ . On montre, néanmoins, que ces deux observables possèdent le même comportement vis à vis des variations des paramètres cosmologiques Ω_0 et Λ .

L'hypothèse que l'on fait généralement est que cette moyenne est suffisamment proche de la moyenne statistique, de telle sorte que l'on puisse écrire

$$\bar{X} \equiv \langle X \rangle. \quad (8.36)$$

C'est une approximation raisonnable lorsque Σ est assez grand. Par assez grand, il faut entendre que la taille caractéristique des variations est très petite devant la surface Σ . Dans le cas qui nous intéresse, ce n'est pas nécessairement vrai. Avec un fenêtrage de filtrage de l'ordre de $5'$ pour une surface de l'ordre de 100 degrés carrés⁴, on ne peut pas dire que la moyenne spatiale est équivalente à la moyenne statistique. L'erreur sur notre observable X est

$$\bar{X} - \langle \bar{X} \rangle, \quad (8.37)$$

elle est évidemment statistiquement nulle, mais sa variance ne l'est pas

$$C_\Sigma = \sqrt{\langle \bar{X}^2 \rangle - \langle \bar{X} \rangle^2}. \quad (8.38)$$

Pour les observables $\chi_{\mathfrak{h}}$, ce schéma se complique un peu. En effet, les $\chi_{\mathfrak{h}}$ sont des observables composites. Tout d'abord, on peut simplifier le problème en remarquant qu'il est fort probable que la source principale de variance dans $\chi_{\mathfrak{h}}$ soit la corrélation $\langle \Delta B b_{\mathfrak{h}}^g \rangle$. En effet, les autres quantités entrant dans le calcul des observables $\chi_{\mathfrak{h}}$ peuvent être mesurées sur de plus grands échantillons. Leur variance cosmique sera donc plus faible que celle de $\langle \Delta B b_{\mathfrak{h}}^g \rangle$. On va se restreindre au calcul pour cette corrélation.

Dans notre schéma, on cherche donc à remplacer la moyenne statistique $\langle \Delta B b_{\mathfrak{h}}^g \rangle$, par la moyenne sur l'échantillon $\overline{\Delta B b_{\mathfrak{h}}^g}$. Pour être tout à fait rigoureux, il faut retirer à cette dernière expression la moyenne géométrique des champs ΔB et $b_{\mathfrak{h}}^g$. En effet, celle-ci est nulle si la moyenne est statistique, mais cela n'est plus garanti lorsque l'échantillon Σ est petit. Ce qui tient lieu de \bar{X} pour notre premier calcul est donc $\overline{\Delta B b_{\mathfrak{h}}^g} - \overline{\Delta B} \overline{b_{\mathfrak{h}}^g}$. L'erreur qu'il nous faut évaluer est alors

$$C_\Sigma = \sqrt{\langle (\overline{\Delta B b_{\mathfrak{h}}^g} - \overline{\Delta B} \overline{b_{\mathfrak{h}}^g})^2 \rangle - \langle \overline{\Delta B b_{\mathfrak{h}}^g} - \overline{\Delta B} \overline{b_{\mathfrak{h}}^g} \rangle^2}, \quad (8.39)$$

que l'on peut développer en une somme de corrélateurs connexes à deux, trois et quatre points

$$C_\Sigma = \sqrt{\langle \overline{\Delta B b_{\mathfrak{h}}^g}^2 \rangle_c - 2 \langle \overline{\Delta B} \overline{b_{\mathfrak{h}}^g} \overline{\Delta B b_{\mathfrak{h}}^g} \rangle_c + \langle \overline{\Delta B}^2 \overline{b_{\mathfrak{h}}^g}^2 \rangle_c}. \quad (8.40)$$

Ce que l'on a appelé *point*, ici, doit s'entendre au sens de la moyenne géométrique : dans $\overline{\Delta B b_{\mathfrak{h}}^g}$, ΔB et $b_{\mathfrak{h}}^g$ sont évalués au même point puis moyennés géométriquement sur tous les points de l'échantillon Σ , tandis que dans $\overline{\Delta B} \overline{b_{\mathfrak{h}}^g}$, les deux composantes sont évaluées à des points différents.

La notion d'opérateur connexe, par contre, doit s'entendre pour les moyennes statistiques. Je vais décrire cette notion plus en détail. Chaque ΔB et $b_{\mathfrak{h}}^g$ est composé de deux composantes statistiquement séparées, une portant une information sur l'effet de lentille, l'autre sur la polarisation primordiale du rayonnement de fond ; on rappelle que pour les termes Δ , où la corrélation est la plus facile à écrire, $\langle \Delta B b_{\Delta}^g \rangle \propto \langle \kappa \kappa_g \rangle \langle \Delta E^2 \rangle$. Les corrélateurs à 4 champs qui forment l'expression de C_Σ , vont donc pouvoir s'écrire comme des corrélateurs de produits⁵ de

⁴c'est la taille de la région visée par l'expérience MEGACAM/Terapix, par exemple.

⁵avec des dépendances géométriques compliquées que je vais oublier pour l'instant.

4 champs ΔE , 2 κ et 2 κ_g . Sous l'hypothèse de gaussianité des champs primordiaux κ et E , on peut utiliser le théorème de Wick et se ramener à une somme de produits $\langle \Delta E^2 \rangle$, $\langle \kappa^2 \rangle$, $\langle \kappa_g^2 \rangle$ et $\langle \kappa \kappa_g \rangle$ pris en 2, 3 ou 4 points différents⁶. Les corrélateurs connexes sont alors ceux tels que tous leurs points sont reliés entre eux par des $\langle \Delta E^2 \rangle$, $\langle \kappa^2 \rangle$, $\langle \kappa_g^2 \rangle$ et $\langle \kappa \kappa_g \rangle$. Cette notion est beaucoup plus simple une fois représentée graphiquement, comme on l'a fait dans l'article à suivre. Cette représentation graphique ne peut être faite qu'une fois que l'on a établi que sous l'hypothèse de gaussianité de certains champs composant nos observables, on pouvait décomposer les corrélateurs à l'aide du théorème de Wick.

La suite du calcul est donnée dans l'article. Elle est assez complexe et seuls seront évalués les termes dominants du développement. Pour les termes dépendants de l'effet de lentille gravitationnelle, d'ailleurs, on utilisera des résultats de simulations numériques plutôt que des résultats d'intégrations numériques sur des modèles de spectre de puissance des lentilles. Le résultat principal du calcul est que la variance cosmique des observables χ_{Δ} se comporte comme

$$C_{\Sigma}(\chi_{\Delta})^2 = C_{\Sigma} (\langle \Delta E^2 \rangle)^2 + \left(\frac{1+r^2}{2r^2} \right) C_{\Sigma} (\langle \kappa^2 \rangle)^2. \quad (8.41)$$

L'équation pour χ_{∇} est très similaire et est donnée dans l'article. Cette variance a été estimée aux alentours de 8%, pour des conditions expérimentales "réalistes"⁷.

L'article qui va suivre a fait l'objet d'une publication dans la revue *Physical Review D*.

⁶encore une fois au sens de la moyenne géométrique.

⁷une fenêtre de filtrage de 5' pour la polarisation et une couverture de 100 degrés-carrés du ciel.

PHYSICAL REVIEW D, VOLUME 63, 043501

CMB B polarization to map the large-scale structures of the universe

K. Benabed and F. Bernardeau

Service de Physique Théorique, Centre d'Etudes de Saclay, 91191 Gif-Sur-Yvette, France

L. van Waerbeke

Canadian Institut for Theoretical Astrophysics, 60 St. Georges Street, Toronto, Ontario, Canada M5S 3H8

(Received 30 March 2000; published 18 January 2001)

We explore the possibility of using B -type polarization of the cosmic microwave background to map the large-scale structures of the Universe taking advantage of the lens effects on the CMB polarization. The functional relation between the B component with the primordial CMB polarization and the line-of-sight mass distribution is explicated. Noting that a sizable fraction (at least 40%) of the dark halo population which is responsible for this effect can also be detected in a galaxy weak lensing survey, we present statistical quantities that should exhibit a strong sensitivity to this overlapping. We stress that it would be a sound test of the gravitational instability picture, independent of many systematic effects that may hamper lensing detection in CMB or a galaxy survey alone. Moreover, we estimate the intrinsic cosmic variance of the amplitude of this effect to be less than 8% for a 100 deg² survey with a 10' CMB beam. Its measurement would then provide us with an original means for constraining the cosmological parameters, more particularly, as it turns out, the cosmological constant Λ .

DOI: 10.1103/PhysRevD.63.043501

PACS number(s): 98.80.Es, 98.35.Ce, 98.62.Sb, 98.70.Vc

I. INTRODUCTION

In the new era of precision cosmology we are entering, forthcoming experiments will provide us with accurate data on cosmic microwave background (CMB) anisotropies [1]. This should lead to accurate determinations of the cosmological parameters, provided the large-scale structures of the Universe indeed formed from gravitational instabilities of initial adiabatic scalar perturbations. It was quickly realized, however, that even with the most precise experiments, the cosmological parameter space is degenerate when the primary CMB anisotropies alone are considered [2]. Complementary data that may be subject to more uncontrollable systematics are thus required, such as supernova surveys [3] (but see [4]) or constraints derived from the large-scale structure properties. Among the latter, weak lensing surveys are probably the safer [5], but still have not yet proved to be accurate enough with present day observations.

Secondary CMB anisotropies (i.e., induced by a subsequent interaction of the photons with the mass or matter fluctuations) offer opportunities for raising this degeneracy. Lens effects [6] are particularly attractive since they are expected to be one of the most important. They also are entirely driven by the properties of dark matter fluctuations, the physics of which involves only gravitational dynamics, and are therefore totally controlled by the cosmological parameters and not by details of galaxy or star formation rates. More importantly an unambiguous detection of lens effects on CMB maps would be a precious confirmation of the gravitational instability picture. Methods to detect lens effects on CMB maps have been proposed recently. High-order correlation functions [7], peak ellipticities [8], or large-scale lens-induced correlators [9,10] have been proposed for detecting such effects. All of them are, however, very sensitive to cosmic variance since lens effects are only a subdominant

alteration of the CMB temperature patterns. The situation is different when one considers polarization properties. The reason is that in standard cosmological models temperature fluctuations at a small scale are dominated by scalar perturbations. Therefore the pseudoscalar part, the so-called B component, of the polarization is negligible compared to its scalar part (the E component) and can only be significant when CMB lens couplings are present. This mechanism was recognized in earlier papers [11,12,10]. The aim of this paper is to study systematically the properties of the lens-induced B field and uncover its properties.

In Sec. II, we perturbatively compute the lens effect on the CMB polarization E and B fields. This first order equation is illustrated by numerical experiments. The possibility of direct reconstruction of the projected mass distribution is also examined. As has already been noted a significant fraction of the potential wells that deflect the CMB photons can actually be mapped in local weak lensing surveys [13,14]. This feature has been considered so far in relation to the CMB temperature fluctuations. We extend in Sec. III these studies to the CMB polarization, exploiting the specificities of the field found in the previous section. In particular we propose two quantities that can be built from weak lensing and cosmic microwave background polarization surveys, the average value of which does not vanish in presence of CMB lens effects. Compared to a direct analysis of the CMB polarization, such tools have the joint advantage of being less sensitive to systematics—systematic errors coming from CMB mapping on the one hand and weak lensing measurement on the other have no reason to correlate—and so emerge even in presence of noisy data and of being an efficient probe of the cosmological constant. Indeed the expected amplitude of correlation is directly sensitive to the relative length of the optical bench, from the galaxy source plane to the CMB plane, which is mainly sensitive to the

K. BENABED, F. BERNARDEAU, AND L. van WAERBEKE

PHYSICAL REVIEW D **63** 043501

cosmological constant. Filtering effects and cosmic variance estimation of such quantities are considered in this section as well.

II. LENS EFFECTS ON CMB POLARIZATION

A. First order effect

Photons emerging from the last scattering surface are deflected by the large-scale structures of the Universe that are present on the lines of sight. Therefore photons observed from the apparent direction $\vec{\alpha}$ must have left the last scattering surface from a slightly different direction, $\vec{\alpha} + \vec{\xi}(\vec{\alpha})$, where $\vec{\xi}$ is the lens-induced apparent displacement at that distance. The displacement field is related to the angular gradient of the projected gravitational potential:

$$\xi_i(\vec{\alpha}) = -\frac{2}{c^2} \int_{z_s}^{z_s} dz \frac{D_{z \rightarrow z_s}}{D_z D_{z_s}} \Phi_{,i}(\vec{\alpha}, z), \quad (1)$$

where $\Phi_{,i}$ is the angular gradient of the gravitational potential in the direction orthogonal to the line of sight, D is the angular distance, and z_s is the source plane. In the following, the lens effect will be described by the deformation effects it induces, encoded in the amplification matrix

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} = \delta_i^j + \xi_i^j, \quad (2)$$

so that

$$\begin{aligned} \kappa &= -\frac{1}{2} (\xi_{,x}^x + \xi_{,y}^y), \\ \gamma_1 &= -\frac{1}{2} (\xi_{,x}^x - \xi_{,y}^y), \\ \gamma_2 &= -\xi_{,x}^y = -\xi_{,y}^x. \end{aligned} \quad (3)$$

All these fields can be written in terms of the second order derivatives of the projected potential. The lens effect affects the local polarization just by moving the apparent direction of the line of sight [16]. Thus, if we use the Stokes parameters Q and U to describe the local polarization vector

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix},$$

we can relate the observed polarization \hat{P} to the primordial one by the relation

$$\hat{Q}(\vec{\alpha}) = Q(\vec{\alpha} + \vec{\xi}), \quad \hat{U}(\vec{\alpha}) = U(\vec{\alpha} + \vec{\xi}). \quad (4)$$

From now on we will denote \hat{x} an observed quantity and x the primordial one. Since $\vec{\alpha}' = \vec{\alpha} + \vec{\xi}$ is the sky coordinate system for the observer, the amplification matrix \mathcal{A} is also the Jacobian of the transformation between the source plane and the image plane. We will restrain here our computation

to the weak lensing effect, so the observed quantity will not take into account any other secondary effect. It is very important at this point to note that the lensing effect does not produce any polarization or rotate the Stokes parameters. In this regime its effect reduces to a simple deformation of the polarization patterns, similar to the temperature maps. This is the mechanism by which the geometrical properties of the polarization field are changed.

To see that we have to consider the *electric* (E) and *magnetic* (B) components instead of the Stokes parameters. At small angular scales (we assume that a small fraction of the sky can be described by a plane), these two quantities are defined as

$$\begin{aligned} E &\equiv \Delta^{-1} [(\partial_x^2 - \partial_y^2)Q + 2\partial_x \partial_y U], \\ B &\equiv \Delta^{-1} [(\partial_x^2 - \partial_y^2)U - 2\partial_x \partial_y Q], \end{aligned} \quad (5)$$

where Δ^{-1} refers here to the inverse of the Laplacian operator. These fields reflect the nonlocal geometrical properties of the polarization field. The electric component accounts for the scalar part of the polarization, and the magnetic one, the pseudoscalar part: by parity change E is conserved, whereas the B sign is changed. As has been pointed out in previous papers [11,12,15], lens effects partly redistribute the polarization power in these two fields.

We explicate this latter effect in the weak lensing regime where the distortion, κ and γ_i components are small. This is indeed expected to be the case when lens effects by the large-scale structures are considered, for which the typical value of the convergence field κ is expected to be $\sim 2\%$ at the $10'$ scale. The leading order effect is obtained by simply plugging Eq. (4) into Eq. (5) and by expanding the result at leading order in ξ , κ , and γ . Noting that, for any field X that is affected by the lensing effect (these calculations are very similar to those done in [14]),

$$\begin{aligned} \partial_i \hat{X} &= \widehat{\partial_k X} \cdot (\delta_i^k + \xi_i^k), \\ \partial_i \partial_j \hat{X} &= \widehat{\partial_k \partial_l X} \cdot (\delta_i^k + \xi_i^k)(\delta_j^l + \xi_j^l) \\ &\quad + \widehat{\partial_k X} \cdot \xi_{,ij}^k, \end{aligned} \quad (6)$$

we can write a perturbation description of the lensing effect on electric and magnetic components of the polarization. At leading order one obtains

$$\begin{aligned} \Delta \hat{E} &= \Delta E + \xi^i \partial_i \Delta E - 2\kappa \Delta E - 2\delta_{ij} (\gamma^i \Delta P^j + \gamma_{,k}^j P^{j,k}) \\ &\quad + O(\gamma^2), \\ \Delta \hat{B} &= \Delta B + \xi^i \partial_i \Delta B - 2\kappa \Delta B - 2\epsilon_{ij} (\gamma^i \Delta P^j + \gamma_{,k}^j P^{j,k}) \\ &\quad + O(\gamma^2), \end{aligned} \quad (7)$$

where we used the fact that $\widehat{\Delta X} = \Delta X + \xi^i \partial_i \Delta X$ at the leading order. The formulas for E and B are alike. The only difference is in the δ_{ij} and ϵ_{ij} (the latter is the totally antisymmetric tensor, $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$, $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$), which reflect the geometrical properties of the two fields. The first three terms

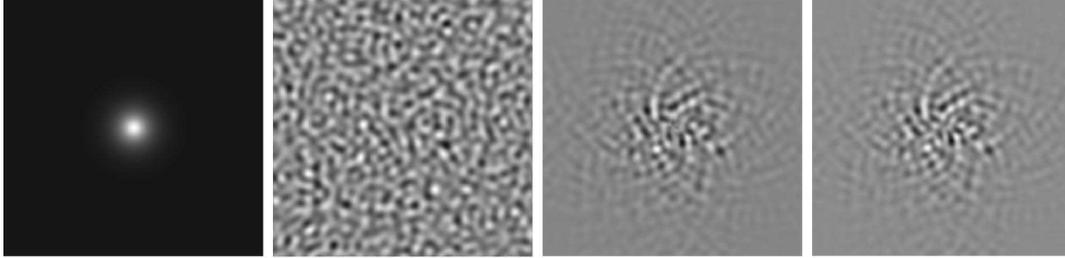


FIG. 1. Lens effect induced by a large isothermal sphere with finite core radius. The κ map of the lens is shown on left panel. The primordial E sky is presented in the middle left panel. It has been generated for a $\Omega_0=0.3$, $\Lambda=0.7$ model, without tensor modes. The middle right panel displays the true reconstructed $\Delta\hat{B}$ field in a 4.5×4.5 deg map and the right panel shows the first order approximation. Note that the rosettelike shape the eye seems to catch in B fields is a numerical coincidence and has no special significance.

of each of these equations represent the naive effect: the lens-induced deformation of the E or B field. This effect is complemented by an enhancement effect (respectively, $\kappa\Delta E$ and $\kappa\Delta B$) and by shear-polarization mixing terms. The latter effects consist of two parts: one, which we will call the Δ term, that couples the shear with the second derivative of the polarization field and the other one, hereafter the ∇ term, that mixes the gradient of the shear and polarization. In our previous work [14], terms similar to ∇ (i.e., in the gradient of the lens effect) had been neglected since they had a null contribution to the correlation coefficient we computed. This is no longer true here; we will indeed show later that Δ and ∇ terms have similar amplitudes.

One consequence of standard inflationary models on CMB anisotropies is the unbalanced distribution of power between the electric (E) and magnetic (B) components of its polarization. Adiabatic scalar fluctuations do not induce B -type polarization and they dominate at small scales over tensor perturbations (namely, the gravity waves). So even though gravity waves induce E - and B -type polarizations in a similar amount, the *primary* CMB sky is expected to be completely dominated by E -type polarization at small scales. Then for this class of models the actual magnetic component of the polarization field is generated by the corrective part of Eq. (7):

$$\Delta\hat{B} = -2\epsilon_{ij}(\gamma^j\Delta\hat{P}^j + \gamma_{,k}^j\hat{P}^{j,k}). \quad (8)$$

This result extends the direct lens effects described in Benabed and Bernardeau [12] who focused their analysis on the lens effect due to the discontinuity of the polarization field in case of cosmic strings. Previous studies of the weak lensing effect on the CMB showed that with lensing, the B component becomes important at small scales [17]. We obtain here the same result but with a different method. Equation (8) means that the polarization signal P is redistributed by the lensing effect in a way that breaks the geometrical properties of the primordial field. Note here that it is mathematically possible to build a shear field that preserves these geometrical properties and that does not create any B signal at small scales. We will discuss this problem in Sec. II C. It also means that B directly reflects the properties of the shear map.

We will take advantage of this feature to probe the correlation properties of B with the projected mass distribution in the next sections.

B. Lens-induced B maps

We show examples of lens-induced B maps. These maps have been calculated using ‘‘CMBSLOW’’ code developed by Riazuelo (see [18]) to compute primordial polarization maps [we use realizations of standard cold dark matter (CDM) model to illustrate lens effects]. Then various shear maps are applied. We present both true distortions (obtained by Delaunay triangulation¹ used to shear the Q and U fields) and the first order calculations given by Eq. (8).

Figure 1 presents the shear effect induced by an isothermal sphere with finite core radius (and the lens edges have been suppressed by an exponential cutoff to minimize numerical noise). The agreement between true distortion (central panel) and the first order formula (right panel) is good. However, a close examination of the maps reveals that some structures in the true map are slightly wider than their counterparts in the first order map. This error is more severe in the center, where the distortion is bigger, which is to be expected since the limits of the validity region of first order calculations are reached.

For illustration sake, Fig. 2 shows the B field induced by a *realistic* distortion. We use second order Lagrangian dynamics [19] to create a 2.5×2.5 deg map that mimics a realistic projected mass density up to $z=1000$ and used its gravitational distortion to compute a typical weak lensing-induced B map. Again we compare the *exact* effect (i.e., the left panel where Delaunay triangulation is used) and the first order formula (middle panel). The right panel shows the dif-

¹To perform the exact lensing effect on a CMB map, we compute the displacement field and the polarization fields on regular grids. Then the CMB grid is deformed according to Eq. (4) to shear the grid containing the CMB data. The resulting polarization fields are remapped onto a regular grid using Delaunay triangulation, which provides us with an efficient algorithm to interpolate irregularly sampled data on a discrete grid. The result is accurate down to the grid size.

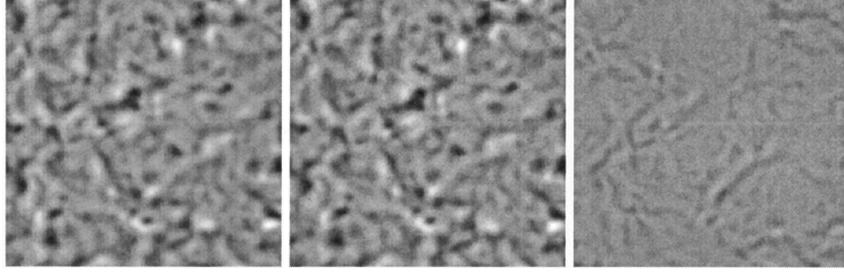


FIG. 2. The effect of a *realistic* weak lensing field on B . 2.2×2.2 deg survey with $1.8'$ resolution. The left panel shows exact distortion obtained by Delaunay triangulation, the middle one, the first order formula result, and the right gives the difference between the two. The three panels share the same color table. The mean amplitude in the difference map is about 3 times smaller.

ference between the two maps. It reveals the locations where the two significantly disagree. In fact most disagreements are due to a slight mismatch of the B patch positions, which lead to dipolelike effects in this map.

We also show here a comparison of the two parts of the first order formula, Eq. (8), in order to see which of the Δ or ∇ terms dominates. It would be more comfortable if one of the two terms were dominant; however, Fig. 3 shows that it is not the case. Even if the Δ term dominates at low (< 1000) l , it is only twice bigger than the ∇ one at this scale. The inverse is true for higher (3000–5000) l 's. This can be seen by looking at Fig. 4 where we show the relative amplitudes of the Δ and ∇ contributions. The Δ part gives birth to large patches (around $10'$) while the ∇ panel shows a lot more small features. Details of this calculations are given in the Appendix.

C. Direct reconstruction: The Kernel problem

The fact that the observable B is at leading order proportional to the weak lensing signal invites us to try a direct reconstruction, similar to the lensing mass reconstruction. In fact, we can write

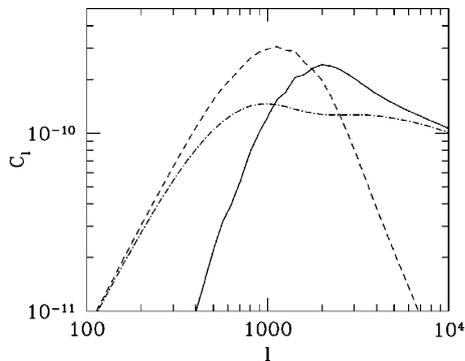


FIG. 3. The C_l of ΔB (solid line), the Δ term (dashed line), and the ∇ term (dot-dashed line). The Δ part is dominant at small l 's, around $l=1000$, that is to say, for structures around $10'$. The ∇ contribution gives birth to smaller structures in the 1–2 arc min range. The C_l curve is in good agreement with results presented previously in the literature [11,15].

$$\Delta \hat{B} = -2 \epsilon_{ij} (\gamma^i \Delta \hat{P}^j + \gamma^j \hat{P}^{i,k}) \equiv F[\gamma] \quad (9)$$

and our reconstruction problem becomes an inversion problem for the operator F . Unfortunately, one can prove that this problem has no unique solution. It is due to the fact that F admits a huge kernel, in the sense that, given a polarization map, there is a wide class of shear fields that will conserve a null B polarization. The demonstration of this property is sketched in the following.

Since the unlensed polarization is only electric in our approximation, we can describe it by the Laplacian of a scalar field:

$$E \equiv \Delta \varphi \quad \text{so} \quad \begin{cases} Q = (\partial_x^2 - \partial_y^2) \varphi, \\ U = 2 \partial_x \partial_y \varphi. \end{cases} \quad (10)$$

The same holds for the shear and convergence fields

$$\kappa \equiv \frac{\Delta \psi}{2}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2} (\partial_x^2 - \partial_y^2) \psi, \quad \gamma_2 = \partial_x \partial_y \psi. \quad (11)$$

Thus we need to know, for a given φ field, whether there is any ψ that satisfies the equation

$$\gamma_2 \Delta Q - \gamma_1 \Delta U + \partial_i \gamma_2 \partial^i Q - \partial_i \gamma_1 \partial^i U = 0. \quad (12)$$

φ and ψ can be written as polynomial decompositions:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \sum_{n,l} a_{nl} x^n y^l, \\ \psi(x, y) &= \sum_{m,k} b_{mk} x^m y^k. \end{aligned} \quad (13)$$

Using Eqs. (13) in Eq. (12) we are left with a new polynomial whose coefficients c_{ij} are sums of $a_{nl} \times b_{mk}$ and have to be all put to zero. With the coefficient equations in hand, it is easy to prove that assuming all the b_{mk} coefficients up to $m+k=N$ are known and writing the equations $\forall i+j=(N+1)-3$, $c_{ij}=0$, we can compute out of all the a_{nl} all but three b_{mk} with $m+k=N+1$. This is somewhat similar to mass reconstruction problems from galaxy surveys where one cannot avoid the mass sheet degeneracy. The situation is, however, worse in our case since not only constant conver-

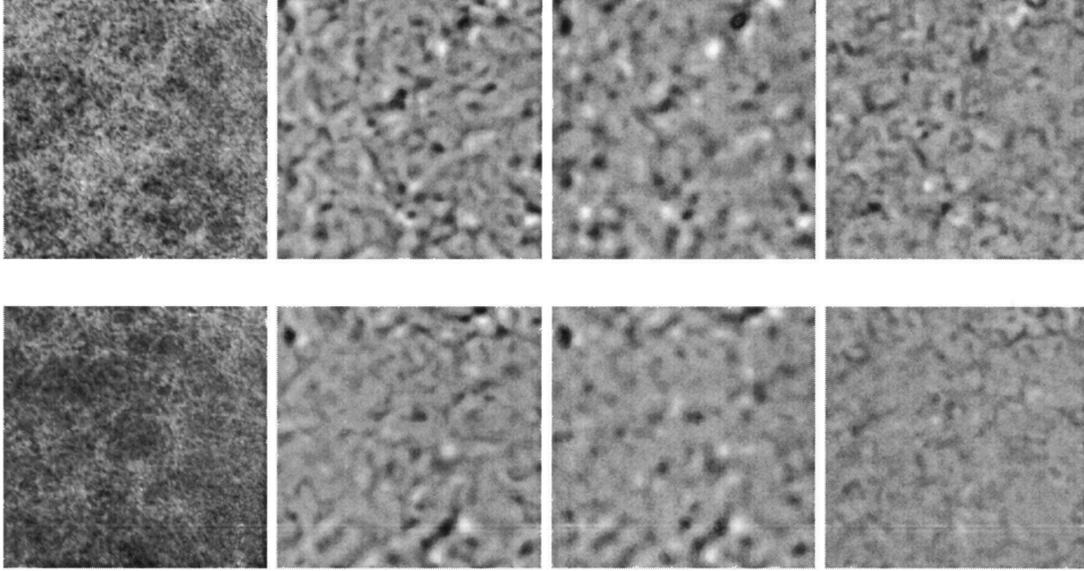


FIG. 4. The effect of the two terms of the perturbation formula. Top row, the lens effect is the sum of the lenses up to recombination. Bottom row, we use the same line-of-sight mass fluctuations but only up to redshift unity; it represents our “local” lensing survey. The convergence fields (left panels) have been computed by slicing the z axis and summing up the lensing effect in each slice. Lens-lens coupling (including departure from the Born approximation) terms have been neglected, which is consistent with our first order approximation. The convergence in each slice has been created by using second order Lagrangian dynamics. The middle-left panels show the leading order contribution, the middle right the Δ contribution, and the right the ∇ one. In this example, the correlation coefficient between the two convergence maps, r , is equal to 0.48 at $1.8'$. The cross-correlation coefficient between the guess map (f) and the real one (b) is 0.47. It is 0.37 between the real (b) and Δ (g) maps and goes down to 0.16 for the real (b) and ∇ (h).

gence but also translations and a whole class of a_{nk} realization-dependent complex deformations are indiscernible. Thus, with only knowledge of the B component of the polarization, one cannot, with the first order equation (8), recover the projected mass distribution.

It is worth noting here that this calculation is not in contradiction with the Guzik-Seljak-Zaldarriaga results [10]. In their paper they show that using different statistics, based on polarization measurements, they are able to reconstruct the lens power spectrum of the large-scale structure. Moreover, this reconstruction is hampered by *noise* induced by the autocorrelation of the cosmic microwave background structures. This noise is strongly related to the kernel problem addressed here. They can choose their statistic to reduce this noise to an acceptable level in the power spectrum, yet they cannot reconstruct a shear map.

III. CROSS-CORRELATING CMB MAPS AND WEAK LENSING SURVEYS

A. Motivation

Even with the most precise experiments it is clear that clean detection of B components will be difficult to obtain. The magnetic polarization amplitude induced with such a mechanism is expected to be one order of magnitude below the electric one [17]. Besides, even if we know that there is a window on an angular scale where other secondary effects

will not interfere too much with the detection of the lens-induced B [20], little is known about removing the foregrounds [21] to obtain clean maps reconstruction algorithms would require.

These considerations lead us to look for complementary data sets to compare B with. Although the source plane for weak lensing surveys [5] is much closer than for the lensed CMB fluctuations, we expect to have a significant overlapping region in the two redshift lens distributions, so that weak lensing surveys can map a fair fraction of the line-of-sight CMB lenses. Consequently, weak lensing surveys can potentially provide us with shear maps correlated with B , but which have different geometrical degeneracy, noise sources, and systematics than the polarization field.

The correlation strength between the lensing effects at two different redshifts can be evaluated. We define r as the cross-correlation coefficient between two lens planes:

$$r(z_{\text{gal}}) = \frac{\langle \kappa \kappa_{\text{gal}} \rangle}{\sqrt{\langle \kappa^2 \rangle \langle \kappa_{\text{gal}}^2 \rangle}}. \quad (14)$$

In a broad range of realistic cases (see Table I), $r \sim 40\%$. To take advantage of this large overlapping we will consider the quantity that cross-correlates the CMB B field and galaxy surveys. Moreover, cross-correlation observations are expected to be insensitive to noises in weak lensing surveys and in CMB polarization maps. This idea has already been

K. BENABED, F. BERNARDEAU, AND L. van WAERBEKE

PHYSICAL REVIEW D **63** 043501

TABLE I. Values of r , the cross-correlation between two source planes (z_{gal} and $z_{\text{cmb}}=1100$), for different models. The adopted filter scale (see Sec. III C for details) is 2 arc min for both the weak lensing survey and cosmic microwave background observations. Non-linear evolution of $P(k)$ has been computed using the Peacock-Dodds method [22].

r coefficient	$z_{\text{gal}}=1$	$z_{\text{gal}}=2$
EdS, linear	0.42	0.60
$\Omega=0.3$, $\Lambda=0.7$, linear	0.31	0.50
$\Omega=0.3$, $\Lambda=0.7$, nonlinear	0.40	0.59

explored for temperature maps [14]. We extend this study here taking advantage of the specific geometrical dependences uncovered in the previous section.

B. Definition of b_Δ and b_∇

The magnetic component of the polarization in Eq. (8) appears to be built from a pure CMB part, which comes from the primordial polarization, and a gravitational lensing part. It is natural to define b in such a way that mimics the $\Delta\hat{B}$ function dependence by replacing the CMB shear field by the galaxy one:

$$b = \epsilon_{ij}(\gamma_{\text{gal}}^i \Delta \hat{P}^j + \gamma_{\text{gal},k}^i \hat{P}^{j,k}) = \epsilon_{ij}(\gamma_{\text{gal}}^i \Delta P^j + \gamma_{\text{gal},k}^i P^{j,k}) + O(\kappa^2). \quad (15)$$

In the following, we will label local lensing quantities, such as what one can obtain from lensing reconstruction on galaxy surveys, with a ‘‘gal’’ index. This new quantity can be viewed as a guess for the CMB polarization B component if lensing was turned on only in a redshift range matching the depth of galaxy surveys. The correlation coefficient of this guess with the true ΔB field, that is, $\langle \Delta \hat{B} b \rangle$, is expected to be quadratic both in P and in γ and to be proportional to the cross-coefficient r .

For convenience, and in order to keep the objects we manipulate as simple as possible, we will not exactly implement this scheme, as it will lead to uneven angular derivative degrees in the two terms of resulting equations. We can, instead, decompose the effect in the Δ and ∇ parts. These two are not correlated, since their components do not share the same degrees of angular derivation.² Hence, we can play the proposed game, considering the two terms of Eq. (8) as if they were two different fields, creating two guess quantities that should correlate independently with the observed B field. Following this idea we build b_Δ as

$$b_\Delta \equiv \epsilon_{ij} \gamma_{\text{gal}}^i \Delta \hat{P}^j = \epsilon_{ij} \gamma_{\text{gal}}^i \Delta P^j + O(\kappa^2) \quad (16)$$

²Generically, a random field and its derivative at the same point are not correlated.

which corresponds to the Δ term in Eq. (8). The amplitude of the cross-correlation between ΔB and b_Δ can easily be estimated. At leading order, we have

$$\langle \Delta \hat{B} b_\Delta \rangle = -2 \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \langle \gamma^k \gamma_{\text{gal}}^l \rangle \langle \Delta P^i \Delta P^j \rangle. \quad (17)$$

The corresponding ∇ correlation is

$$\langle \Delta \hat{B} b_\nabla \rangle = -2 \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \langle \partial_m \gamma^k \partial_n \gamma_{\text{gal}}^l \rangle \langle \partial_m P^i \partial_n P^j \rangle, \quad (18)$$

where we have defined

$$b_\nabla \equiv \epsilon_{ij} \partial_k \gamma_{\text{gal}}^i \partial_k \hat{P}^j. \quad (19)$$

Figure 4 shows numerical simulations presenting maps of first order $\Delta \hat{B}$, its Δ and ∇ contributions, and the corresponding guess maps one can build with a low- z shear map. The similarities between the top maps and the bottom maps are not striking. Yet under close examination one can recognize individual patterns shared between the maps. This is confirmed by the computation of the correlation coefficient between the maps, which shows significant overlapping, between 50% and 15%, depending the correlation and filtering strategy. The calculations hereafter will evaluate the theoretical correlation structure between maps given in Figs. 4b and 4g, 4h.

For galaxy surveys, the amplification matrix is [23]

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{gal}}^{-1}(\vec{\alpha}) - \text{Id} &= - \int_0^{z_{\text{gal}}} d\chi w_{\text{gal}}(\chi) \\ &\times \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \delta(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \chi + \vec{k}_\perp \cdot D(\chi) \vec{\alpha}} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 + \cos(2\phi_{k_\perp}) & \sin(2\phi_{k_\perp}) \\ \sin(2\phi_{k_\perp}) & 1 - \cos(2\phi_{k_\perp}) \end{pmatrix}, \quad (20) \end{aligned}$$

where $\delta(k)$ is the Fourier transform of the density contrast at redshift $z(\chi)$, w is the lens efficiency function, and ϕ_{k_\perp} is the position angle of the transverse wave vector k_\perp in the $k_\perp = (k_x, k_y)$ plane. Assuming a Dirac source distribution, the efficiency function is given by

$$w_{\text{gal}}(z) = \frac{3}{2} \Omega_0 \frac{D_z D_{z \rightarrow z_{\text{gal}}}}{a D_{z_{\text{gal}}}}. \quad (21)$$

Note that the Fourier components $\delta(k)$ include the density time evolution. They are thus proportional to the growth factor in the linear theory. The time evolution of these components is much more complicated in the nonlinear regime (see [22]).

Then, b_∇ is

$$b_\nabla(\vec{\alpha}) = \int^{\chi_{\text{gal}}} \mathcal{D}(\chi, \vec{l}, \vec{k}) \vec{E}(\vec{l}) \delta(k) \mathcal{G}_\nabla^{\text{ker}}(\vec{l}, \vec{k}_\perp), \quad (22)$$

with the integration element defined as

$$\mathcal{D}(\chi, \vec{l}, \vec{k}) = d\chi w_{\text{gal}}(\chi) \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^2l}{2\pi} e^{i[l\chi + (\vec{k}_\perp \cdot \vec{D}(\chi) + \vec{l}) \cdot \vec{\alpha}]}$$

[it actually depends on the position of the source plane through the efficiency function $w(z)$] and where \mathfrak{h} stands for either Δ or ∇ . The geometrical kernel \mathcal{G}^{Ker} is given by [using Eq. (10)]

$$\mathcal{G}_\Delta^{\text{Ker}}(\vec{l}, \vec{k}) \equiv l^2 \sin 2(\phi_k - \phi_l), \quad (23)$$

$$\mathcal{G}_\nabla^{\text{Ker}}(\vec{l}, \vec{k}) \equiv lk \cos(\phi_k - \phi_l) \sin 2(\phi_k - \phi_l). \quad (24)$$

This function contains all the geometrical structures of the Δ and ∇ terms. We can write the same kind of equation for $\Delta \hat{B}$. Then, the cross-correlation is

$$\begin{aligned} \langle \Delta \hat{B} b_{\mathfrak{h}}(\vec{\alpha}) \rangle &= -2 \int^{\chi_{\text{gal}}} \mathcal{D}(\chi_{\text{gal}}, \vec{l}_{\text{gal}}, \vec{k}_{\text{gal}}) \\ &\times \int^{\chi_{\text{cmb}}} \mathcal{D}(\chi_{\text{cmb}}, \vec{l}_{\text{cmb}}, \vec{k}_{\text{cmb}}) \mathcal{G}_{\mathfrak{h}}^{\text{Ker}}(\vec{l}_{\text{gal}}, \vec{k}_{\text{gal}}) \\ &\times \mathcal{G}_{\mathfrak{h}}^{\text{Ker}}(\vec{l}_{\text{cmb}}, \vec{k}_{\text{cmb}}) \langle \delta(\vec{k}_{\text{gal}}) \delta(\vec{k}_{\text{cmb}}) \rangle \\ &\times \langle \vec{E}(\vec{l}_{\text{gal}}) \vec{E}(\vec{l}_{\text{cmb}}) \rangle. \end{aligned} \quad (25)$$

The completion of this calculation requires the use of the small-angle approximation:

$$k \sim k_\perp. \quad (26)$$

Then,

$$\langle \delta(\vec{k}_{\text{gal}}) \delta(\vec{k}_{\text{cmb}}) \rangle = P(k) \delta_{\text{Dirac}}(\vec{k}_{\text{gal}} + \vec{k}_{\text{cmb}}) \quad (27)$$

implies that, and after the radial components have been integrated out,

$$\chi_{\text{gal}} = \chi_{\text{cmb}} = \chi. \quad (28)$$

We also define the $C_E(l)$ as the angular power spectrum of the E field:

$$\langle \vec{E}(\vec{l}_{\text{gal}}) \vec{E}(\vec{l}_{\text{cmb}}) \rangle = C_E(l) \delta_{\text{Dirac}}(\vec{l}_{\text{gal}} - \vec{l}_{\text{cmb}}). \quad (29)$$

Eventually one gets

$$\begin{aligned} \langle \Delta \hat{B} b_{\mathfrak{h}}(\vec{\alpha}) \rangle &= -2 \int^{\chi_{\text{gal}}} d\chi w_{\text{gal}} w_{\text{cmb}} \\ &\times \int \frac{d^2k d^2l}{(2\pi)^4} C_E(l) P(k) \mathcal{G}_{\mathfrak{h}}^{\text{Ker}}(\vec{l}, \vec{k})^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Then, integrating on the geometrical dependences in $\mathcal{G}_{\mathfrak{h}}^{\text{Ker}}$, we have

$$\begin{aligned} \langle \Delta \hat{B} b_\Delta(\vec{\alpha}) \rangle &= -2 \int^{\chi_{\text{gal}}} d\chi w_{\text{gal}} w_{\text{cmb}} \int \frac{dk dl}{2(2\pi)^2} k l^5 C_E(l) P(k) \\ &= -\langle \Delta E^2 \rangle \langle \kappa \kappa_{\text{gal}} \rangle \end{aligned} \quad (31)$$

and

$$\begin{aligned} \langle \Delta \hat{B} b_\nabla(\vec{\alpha}) \rangle &= - \int^{\chi_{\text{gal}}} d\chi w_{\text{gal}} w_{\text{cmb}} \int \frac{dk dl}{2(2\pi)^2} k^3 l^3 C_E(l) P(k) \\ &= -\frac{1}{2} \langle (\vec{\nabla} E)^2 \rangle \langle \vec{\nabla} \kappa \cdot \vec{\nabla} \kappa_{\text{gal}} \rangle, \end{aligned} \quad (32)$$

implying that, ignoring filtering effects, we are able to measure directly the correlation between lensing effect at z_{cmb} and any z_{gal} a weak lensing survey can access. Since $\Delta \hat{E} = \Delta E [1 + O(\kappa)]$, we get, for the Δ type quantity,

$$\langle \Delta \hat{E}^2 \rangle = \langle \Delta E^2 [1 + O(\kappa)]^2 \rangle = \langle \Delta E^2 \rangle [1 + O(\langle \kappa^2 \rangle)]. \quad (33)$$

The same holds for ∇ . We are then able to construct two quantities insensitive to the normalization of CMB and σ_8 :

$$\mathcal{X}_\Delta \equiv \frac{\langle \Delta \hat{B} b_\Delta(\vec{\alpha}) \rangle}{\langle \Delta \hat{E}^2 \rangle \langle \kappa_{\text{gal}}^2 \rangle} = -\frac{\langle \kappa \kappa_{\text{gal}} \rangle}{\langle \kappa_{\text{gal}}^2 \rangle} \sim -r \sqrt{\frac{\langle \kappa^2 \rangle}{\langle \kappa_{\text{gal}}^2 \rangle}} \quad (34)$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_\nabla &= \frac{\langle \Delta \hat{B} b_\nabla(\vec{\alpha}) \rangle}{\langle (\vec{\nabla} \hat{E})^2 \rangle \langle (\vec{\nabla} \kappa_{\text{gal}})^2 \rangle} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\langle \vec{\nabla} \kappa \cdot \vec{\nabla} \kappa_{\text{gal}} \rangle}{\langle \vec{\nabla} \kappa_{\text{gal}}^2 \rangle} \sim -\frac{1}{2} r_\nabla \sqrt{\frac{\langle \nabla \kappa^2 \rangle}{\langle \nabla \kappa_{\text{gal}}^2 \rangle}}. \end{aligned} \quad (35)$$

We implicitly defined r_∇ like r but with $\nabla \kappa$ instead of κ :

$$r_\nabla(z_{\text{gal}}) = \frac{\langle \vec{\nabla} \kappa \cdot \vec{\nabla} \kappa_{\text{gal}} \rangle}{\sqrt{\langle (\nabla \kappa)^2 \rangle \langle (\nabla \kappa_{\text{gal}})^2 \rangle}}. \quad (36)$$

We will see in Sec. III D that they behave very much alike. This result is to be compared with the formula for $\langle \cos(\theta_g) \rangle$ established in [14] where the obtained quantity was going like $r \sqrt{\langle \kappa^2 \rangle}$. These calculations, however, have neglected the filtering effects that may significantly affect our conclusions. These effects are investigated in next section.

C. Filtering effects

In above section we conduct our calculations assuming no filtering. Obviously we have to take it into account. We will show here that the results obtained in Sec. III B hold, in certain limits, when filtering effects are included.

In the following, we consider, for simplicity, top-hat filters only. It is expected that other window functions will show very similar behaviors so that this assumption does not limit the scope of our results. Let us call $W(k)$ the top-hat filter function in Fourier space:

$$W(k) \equiv 2 \frac{J_1(k)}{k}. \quad (37)$$

K. BENABED, F. BERNARDEAU, AND L. van WAERBEKE

PHYSICAL REVIEW D **63** 043501

J_1 is the first J Bessel function. We will also define $W_i(k)$ as a general function:

$$W_i(k) \equiv 2 \frac{J_i(k)}{k}, \quad (38)$$

where J_i is the i th J Bessel function, so that $W = W_1$. Then, if $X(\vec{\alpha})$ is the value of any quantity X at position $\vec{\alpha}$ on the sky, its top-hat-filtered value can be computed as

$$X_{(\theta)}(\vec{\alpha}) = \int \frac{d^2k}{2\pi} \tilde{X}_k W(k\theta) e^{i\vec{k} \cdot \vec{\alpha}}, \quad (39)$$

where \tilde{X} is the X Fourier transform. In the following we will denote $X_{(\theta)}$ the filtered quantity at scale θ .

The tricky thing for $\langle \Delta \hat{B} b_{\text{q}} \rangle$ is that the CMB part and the low-redshift weak lensing part are *a priori* filtered at different scale. For $\Delta \hat{B}$, which is a measured value, its pure CMB part and its weak lensing part are filtered at the same scale θ . Hence, \hat{B} reads

$$\begin{aligned} \Delta \hat{B}(\vec{\alpha})_{(\theta)} = & -2 \int^{\chi_{\text{cmb}}} \mathcal{D}(\chi, \vec{l}, \vec{k}) \tilde{E}(l) \delta(k) [\mathcal{G}_{\Delta}^{\text{Ker}}(\vec{l}, \vec{k}_{\perp}) \\ & + \mathcal{G}_{\Delta}^{\text{Ker}}(\vec{l}, \vec{k}_{\perp})] W(|\vec{k}_{\perp} D + \vec{l}| \theta). \end{aligned} \quad (40)$$

A contrario b_{q} is a composite value. The CMB part is still filtered at θ whereas the weak lensing part (which comes from a weak lensing survey of galaxies) is filtered independently at another scale which we denote θ_{gal} . It implies that

$$\begin{aligned} b_{\text{q}}(\vec{\alpha})_{(\theta)} = & -2 \int^{\chi_{\text{gal}}} \mathcal{D}(\chi, \vec{l}, \vec{k}) \tilde{E}(l) \delta(k) \mathcal{G}_{\text{q}}^{\text{Ker}}(\vec{l}, \vec{k}_{\perp}) \\ & \times W(kD\theta_{\text{gal}}) W(l\theta). \end{aligned} \quad (41)$$

Taking filtering into account, the cross-correlation coefficient becomes

$$\begin{aligned} \langle \Delta \hat{B}_{(\theta)} b_{\text{q}(\theta, \theta_{\text{gal}})} \rangle = & -2 \int^{\chi_{\text{gal}}} d\chi w_{\text{gal}} w_{\text{cmb}} \int \frac{d^2k d^2l}{(2\pi)^4} \\ & \times C_E(l) P(k) \mathcal{G}_{\text{q}}^{\text{Ker}}(\vec{l}, \vec{k}) W(kD\theta_{\text{gal}}) \\ & \times W(l\theta) W(|\vec{k}D + \vec{l}| \theta). \end{aligned} \quad (42)$$

It can be shown (from the summation theorems of the Bessel functions) that

$$\begin{aligned} W_1(|\vec{k}D + \vec{l}| \theta) = & - \sum_{i=1}^{\infty} i W_i(kD\theta) W_i(l\theta) \\ & \times (-1)^i \frac{\sin i(\phi_k - \phi_l)}{\sin(\phi_k - \phi_l)}. \end{aligned} \quad (43)$$

It is then possible to break the $W(|\vec{k}D + \vec{l}| \theta)$ into a sum of $W_i(kD\theta) W_i(l\theta)$ with coefficients that depend on the geo-

metrical properties of our problem. Integrating over the geometrical dependences of $\mathcal{G}_{\text{q}}^{\text{Ker}}$ leaves us with only a few non-vanishing terms in our sum,

$$\int d\phi \sin^2(2\phi) \frac{\sin(i\phi)}{\sin\phi} = \begin{cases} \pi & i=1 \text{ or } i=3, \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases} \quad (44)$$

for the Δ term, and

$$\int d\phi \cos\phi \sin^2(2\phi) \sin(i\phi) \sin\phi = \begin{cases} \pi/2 & i=1, \\ 3\pi/4 & i=3, \\ \pi/4 & i=5, \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases} \quad (45)$$

for the ∇ term. Each term can be computed exactly, and it turns out that the terms built from W_i , $i > 1$, are always negligible compared to the ones coming from W_1 . It implies that we can safely ignore the W_3 and W_5 in both Δ and ∇ expressions; therefore it is reasonable to assume that $W(|\vec{k}D + \vec{l}| \theta) = W(kD\theta) W(l\theta)$. It is expected that other windows, in particular the Gaussian window function, share similar properties. Then, taking into accounts the filtering effects, the equations for the cross-correlations reduce to

$$\langle \Delta \hat{B}_{(\theta)} b_{\Delta(\theta, \theta_{\text{gal}})} \rangle = - \langle \Delta E_{(\theta)}^2 \rangle \langle \kappa_{(\theta)} \kappa_{\text{gal}(\theta_{\text{gal}})} \rangle \quad (46)$$

and

$$\langle \Delta \hat{B}_{(\theta)} b_{\nabla(\theta, \theta_{\text{gal}})} \rangle = - \frac{1}{2} \langle \nabla E_{(\theta)}^2 \rangle \langle \nabla \kappa_{(\theta)} \nabla \kappa_{\text{gal}(\theta_{\text{gal}})} \rangle, \quad (47)$$

so that our correlation coefficients can be written,

$$\mathcal{X}_{\Delta(\theta, \theta_{\text{gal}})} = - r_{(\theta, \theta_{\text{gal}})} \sqrt{\frac{\langle \kappa_{(\theta)}^2 \rangle}{\langle \kappa_{\text{gal}(\theta_{\text{gal}})}^2 \rangle}} \quad (48)$$

and

$$\mathcal{X}_{\nabla(\theta, \theta_{\text{gal}})} = - \frac{1}{2} r_{\nabla(\theta, \theta_{\text{gal}})} \sqrt{\frac{\langle \nabla \kappa_{(\theta)}^2 \rangle}{\langle \nabla \kappa_{\text{gal}(\theta_{\text{gal}})}^2 \rangle}}. \quad (49)$$

The results obtained in Eqs. (34),(35) are thus still formally valid. Actually, Eqs. (48),(49) simply tell us that filtering effects can simply be assumed to act independently on the lensing effects and on the primary cosmic microwave background maps. We are left with two quantities that only reflect the line-of-sight overlapping effects of lensing distortions.

D. Sensitivity to the cosmic parameters

We quickly explore here the behavior of \mathcal{X}_{q} in different sets of cosmological parameters. These quantities only depend on weak lensing quantities. Ignoring the Ω_0 dependence in the angular distances and growing factor, one would expect $\langle \kappa^2 \rangle$ to scale like Ω_0^2 . Yet because of the growth factor, the convergence field exhibits a weaker sensitivity to

CMB B POLARIZATION TO MAP THE LARGE-SCALE . . .

PHYSICAL REVIEW D 63 043501

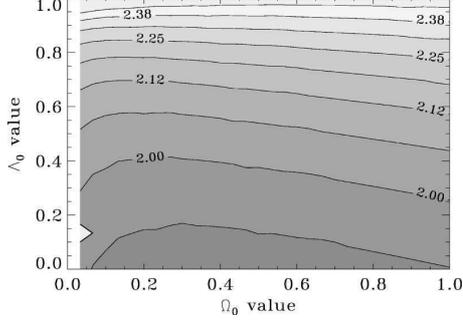


FIG. 5. $\langle \kappa_{(\theta)} \kappa_{\text{gal}(\theta_{\text{gal}})} \rangle / \langle \kappa_{\text{gal}(\theta_{\text{gal}})}^2 \rangle$ for a CDM model consistent with the values of (Ω_0, Λ) . $\theta = \theta_{\text{gal}} = 2'$.

Ω_0 . Assuming $\Lambda = 0$ and a power law spectrum, we know from [23] that $\langle \kappa_{\text{gal}}^2 \rangle \propto \Omega_0^{1.66}$ for $z_{\text{gal}} = 1$. The same calculation leads to $\langle \kappa_{\text{cmb}} \kappa_{\text{gal}} \rangle \propto \Omega_0^{1.68}$, $\langle (\nabla \kappa_{\text{gal}})^2 \rangle \propto \Omega_0^{1.91}$, and $\langle \vec{\nabla} \kappa_{\text{cmb}} \cdot \vec{\nabla} \kappa_{\text{gal}} \rangle \propto \Omega_0^{1.915}$. Then, in this limit, the quantities \mathcal{X}_i have a very low dependence on Ω_0 :

$$\mathcal{X}_\Delta \propto \Omega_0^{0.02} \quad \text{and} \quad \mathcal{X}_\nabla \propto \Omega_0^{0.005}.$$

Eventually, the \mathcal{X}_i quantities should exhibit a sizable sensitivity to Λ ; changing Λ increases or reduces the size of the optic bench and accordingly the overlapping between κ_{cmb} and κ_{gal} .

Figures 5 and 6 present contour plots of the amplitude of \mathcal{X}_Δ and \mathcal{X}_∇ in the (Ω_0, Λ) plane for CDM models. They show the predicted low Ω_0 sensitivity and the expected Λ dependence. Both figures are very alike. This is due to the fact that the dominant features are contained in the efficiency function dependences on the angular distances.

E. Cosmic variance

In previous sections we looked at the sensitivity of observable quantities which mixed galaxy weak lensing surveys and CMB polarization detection. It is very unlikely that both surveys will be able to cover, with good resolution and low foreground contamination, a large fraction of the sky. It seems, however, reasonable to expect to have at our disposal patches of at least a few hundred square degrees. The issue

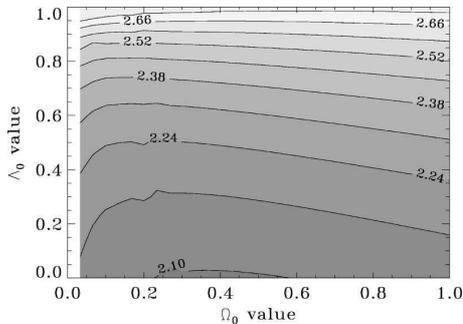


FIG. 6. $\langle \vec{\nabla} \kappa_{(\theta)} \cdot \vec{\nabla} \kappa_{\text{gal}(\theta_{\text{gal}})} \rangle / \langle (\vec{\nabla} \kappa_{\text{gal}(\theta_{\text{gal}})})^2 \rangle$ for a CDM model. $\theta = \theta_{\text{gal}} = 2'$.

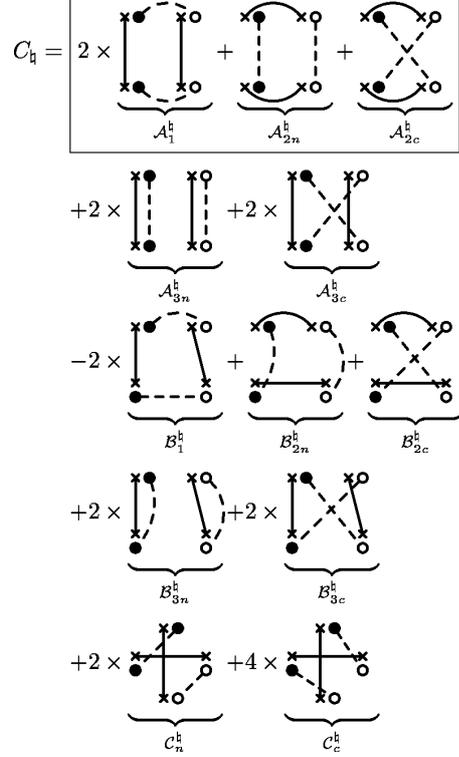


FIG. 7. Diagrammatic representation of the terms contributing to the cosmic variance of the correlation coefficients. In this representation the vertex $x \bullet$ represents $\Delta \hat{B}$; the crosses stand for the ΔP part, the circles for γ_{cmb} . The other vertex $x \circ$ represents any b_i ; the open circles stand for γ_{gal} . The solid lines connect ΔP terms and the dashed ones the γ 's.

we address in this section is to estimate the cosmic variance of such a detection in joint surveys in about 100 square degrees.

The computation of cosmic variance is a classical problem in cosmological observation [24]. A natural estimate for an ensemble average $\langle X \rangle$ is its geometrical average. If the survey has size Σ , then

$$\bar{X} = \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} d^2 \alpha X(\vec{\alpha}). \quad (50)$$

For a compact survey with circular shape of radius Ξ we formally have

$$\bar{X} = \int \frac{d^2 k}{2\pi} \bar{X}(\vec{k}) W(k\Xi). \quad (51)$$

For the sake of simplicity this is what we use in the following but we will see that the shape of the survey has no significant consequences.

Taking \bar{X} as an estimate of $\langle X \rangle$ (the ensemble average of X) leads to an error of the order of $\sqrt{\langle \bar{X}^2 \rangle - \langle \bar{X} \rangle^2}$ which usually scales like $1/\sqrt{\Sigma}$ if the survey is large enough.

K. BENABED, F. BERNARDEAU, AND L. van WAERBEKE

PHYSICAL REVIEW D 63 043501

When we are measuring \mathcal{X}_\ddagger on a small patch of sky, we are apart from the statistical value by the same kind of error. We can neglect the errors on $\langle \Delta \hat{E}^2 \rangle$, $\langle (\nabla \hat{E})^2 \rangle$, $\langle (\nabla \kappa_{\text{gal}})^2 \rangle$ and $\langle \kappa_{\text{gal}}^2 \rangle$; those may not be the dominant source of the discrepancy and can even be measured on wider and independent samples. The biggest source of error is the measure of $\langle \Delta \hat{B} b_\ddagger \rangle$. It is given by

$$C_\ddagger = \sqrt{\langle (\Delta \hat{B} b_\ddagger - \Delta \hat{B} \bar{b}_\ddagger)^2 \rangle - \langle \Delta \hat{B} b_\ddagger - \Delta \hat{B} \bar{b}_\ddagger \rangle^2}. \quad (52)$$

Computation of Eq. (52) is made easier if we write explicitly the geometrical average as a summation over N measurement points (N can be as large as we want),

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X(\theta_i); \quad (53)$$

we then developed Eq. (52), and replaced the ensemble average of the summation sign by the geometrical average over the survey size. We are left with a sum of correlators containing eight fields taken at two, three, and four different points. The calculations can be carried out analytically if we assume that all our fields follow Gaussian statistics, which is reasonable at the scale we are working on. In that case, indeed, we can take advantage of the Wick theorem to contract each of the eight field correlators in products of two-point correlation functions. By definition, Eq. (52) contains only connected correlators; moreover, the ensemble averages $\langle \Delta \hat{B} \rangle$ and $\langle b_\ddagger \rangle$ vanish, and therefore only a small fraction of correlators among all the possible combination of the eight

fields survive. We can use a simple diagrammatic representation to describe their geometrical shape. All the nonvanishing terms in C_\ddagger are given in Fig. 7. Each line between two vertex represents a two-point correlation function such as $\langle X(\vec{\alpha}_1) X(\vec{\alpha}_2) \rangle$, and the different symbols at the vertex correspond to different X fields (the crosses stand for ΔP , the solid circles for γ_{cmb} , and the open circles for γ_{gal}). The \mathcal{A} terms represent terms where the two top (and the two bottom) ΔB and b_\ddagger are taken at the same point, but top and bottom fields are not at the same place. The \mathcal{B} terms are three-point diagrams: the top ΔB and b_\ddagger are at the same point whereas the right and left bottom vertexes are at two different locations. The \mathcal{C} terms are four-point diagrams, where each vertex is at a different point. To illustrate our notation, let us write $\mathcal{B}_{2c}^\ddagger$ as an example:

$$\mathcal{B}_{2c}^\ddagger = \langle \gamma_{\text{cmb}}(\vec{\alpha}_1) \gamma_{\text{gal}}(\vec{\alpha}_2) \rangle \langle \gamma_{\text{gal}}(\vec{\alpha}_3) \gamma_{\text{cmb}}(\vec{\alpha}_1) \rangle \times \langle \Delta P(\vec{\alpha}_1) \Delta P(\vec{\alpha}_1) \rangle \langle \Delta P(\vec{\alpha}_2) \Delta P(\vec{\alpha}_3) \rangle. \quad (54)$$

We only focus on the calculation of the \mathcal{A} terms because we can use the approximation that

$$\mathcal{A} \gg \mathcal{B} \gg \mathcal{C}. \quad (55)$$

Indeed, in perturbative theory, if the survey is large enough, the n -point correlation function naturally dominates over the $(n+1)$ point correlation function. This is true as long as the local variance is much bigger than the autocorrelation at survey scale and we assume the surveys are still large enough to be in this case.

The general expression for any \mathcal{A} diagram is

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i^\ddagger = & 4 \int^{\text{cmb}} \mathcal{D}(\chi_{\text{cmb}1}, \vec{l}_{\text{cmb}1}, \vec{k}_{\text{cmb}1}) \mathcal{D}(\chi_{\text{cmb}2}, \vec{l}_{\text{cmb}2}, \vec{k}_{\text{cmb}2}) \\ & \times \int^{\text{gal}} \mathcal{D}(\chi_{\text{gal}1}, \vec{l}_{\text{gal}1}, \vec{k}_{\text{gal}1}) \mathcal{D}(\chi_{\text{gal}2}, \vec{l}_{\text{gal}2}, \vec{k}_{\text{gal}2}) \mathcal{G}_\ddagger^{\text{Ker}}(\vec{l}_{\text{cmb}1}, \vec{k}_{\text{cmb}1}) \mathcal{G}_\ddagger^{\text{Ker}}(\vec{l}_{\text{cmb}2}, \vec{k}_{\text{cmb}2}) \mathcal{G}_\ddagger^{\text{Ker}}(\vec{l}_{\text{gal}1}, \vec{k}_{\text{gal}1}) \\ & \times \mathcal{G}_\ddagger^{\text{Ker}}(\vec{l}_{\text{gal}2}, \vec{k}_{\text{gal}2}) \mathcal{M}_i(\vec{k}_i | \vec{l}_j) W(|\vec{k}_{\text{cmb}1} D + \vec{l}_{\text{cmb}1} | \theta) W(|\vec{k}_{\text{cmb}2} D + \vec{l}_{\text{cmb}2} | \theta) W(k_{\text{gal}1} D_1 \theta_{\text{gal}}) W(l_{\text{gal}1} \theta) \\ & \times W(k_{\text{gal}2} D_2 \theta_{\text{gal}}) W(l_{\text{gal}2} \theta) W(|\vec{k}_{\text{gal}1} D_1 + \vec{l}_{\text{gal}1} + \vec{k}_{\text{cmb}1} D_1 + \vec{l}_{\text{cmb}1} | \Xi) W(|\vec{k}_{\text{gal}2} D_2 + \vec{l}_{\text{gal}2} + \vec{k}_{\text{cmb}2} D_2 + \vec{l}_{\text{cmb}2} | \Xi), \end{aligned} \quad (56)$$

where \mathcal{M}_i gives the two-point correlations associated with the lines of the diagram. For example,

$$\mathcal{M}_1 = \langle \delta(\vec{k}_{\text{gal}1}) \delta(\vec{k}_{\text{cmb}1}) \rangle \langle \delta(\vec{k}_{\text{gal}2}) \delta(\vec{k}_{\text{cmb}2}) \rangle \langle \tilde{E}(l_{\text{gal}1}) \tilde{E}(l_{\text{gal}2}) \rangle \langle \tilde{E}(l_{\text{cmb}1}) \tilde{E}(l_{\text{cmb}2}) \rangle. \quad (57)$$

We explicate in the following the computation of \mathcal{A}_1^\ddagger . The other terms follow the same treatment or can be neglected. The lines in the \mathcal{A}_1^\ddagger diagram give us the relations

$$\vec{k}_{\text{cmb}1} = -\vec{k}_{\text{gal}1} = \vec{k}_1, \quad \vec{k}_{\text{cmb}2} = -\vec{k}_{\text{gal}2} = \vec{k}_2, \quad \vec{l}_{\text{cmb}1} = -\vec{l}_{\text{cmb}2} = \vec{l}_{\text{cmb}}, \quad \vec{l}_{\text{gal}1} = -\vec{l}_{\text{gal}2} = \vec{l}_{\text{gal}}. \quad (58)$$

Then, using these relations and the small angular approximation, we have

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1^{\natural} = & 4 \int^{\text{gal}} d\chi_1 d\chi_2 w_{\text{cmb}1} w_{\text{gal}1} w_{\text{cmb}2} w_{\text{gal}2} \int \frac{d^2 k_1 d^2 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^2 l_{\text{gal}} d^2 l_{\text{cmb}}}{(2\pi)^4} C_E(l_{\text{gal}}) C_E(l_{\text{cmb}}) P(k_1) P(k_2) \mathcal{G}_{\natural}^{\text{Ker}}(\vec{l}_{\text{cmb}}, \vec{k}_1) \\
& \times \mathcal{G}_{\natural}^{\text{Ker}}(-\vec{l}_{\text{cmb}}, \vec{k}_2) \mathcal{G}_{\natural}^{\text{Ker}}(\vec{l}_{\text{gal}}, -\vec{k}_1) \mathcal{G}_{\natural}^{\text{Ker}}(-\vec{l}_{\text{gal}}, -\vec{k}_2) W(|\vec{k}_1 D + \vec{l}_{\text{cmb}}| \theta) W(|\vec{k}_2 D + \vec{l}_{\text{cmb}}| \theta) \\
& \times W(k_1 D \theta_{\text{gal}}) W(k_2 D \theta_{\text{gal}}) W^2(l_{\text{gal}} \theta) W^2(|\vec{l}_{\text{gal}} + \vec{l}_{\text{cmb}}| \Xi). \quad (59)
\end{aligned}$$

We apply the decomposition of $W_1(|\vec{k}D(\chi) + \vec{l}|\theta)$ we used in Eq. (43). The geometry of our problem is the same and the result (44) still holds for the terms in $W_1(|\vec{k}_1 D(\chi_1) + \vec{l}_{\text{cmb}}| \theta)$ and $W_1(|\vec{k}_2 D(\chi_2) + \vec{l}_{\text{cmb}}| \theta)$. This, however, is not true for $W_1^2(|\vec{l}_{\text{gal}} + \vec{l}_{\text{cmb}}| \Xi)$ for which the application of the resummation theorem does not bring any simplification. Then, neglecting all W_3 parts and after integration on ϕ_{k_i} , for the Δ term, we have

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1^{\Delta} = & \int^{\text{gal}} d\chi_1 d\chi_2 w_{\text{cmb}1} w_{\text{gal}1} w_{\text{cmb}2} w_{\text{gal}2} \int \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^2} \frac{d^2 l_{\text{gal}} d^2 l_{\text{cmb}}}{(2\pi)^4} l_{\text{gal}}^4 l_{\text{cmb}}^4 k_1 k_2 C_E(l_{\text{gal}}) C_E(l_{\text{cmb}}) P(k_1) P(k_2) \\
& \times W^2(|\vec{l}_{\text{gal}} + \vec{l}_{\text{cmb}}| \Xi) \cos^2 2(\phi_{l_{\text{cmb}}} - \phi_{l_{\text{gal}}}) W(k_1 D \theta_{\text{gal}}) W(k_2 D \theta_{\text{gal}}) W^2(l_{\text{gal}} \theta) W(k_1 D \theta) W(k_2 D \theta) W^2(l_{\text{cmb}} \theta). \quad (60)
\end{aligned}$$

Note that for the evaluation of the ∇ part, using the same kind of method, we obtain the same equation as Eq. (60) where $l_{\text{gal}}^4 l_{\text{cmb}}^4$ is replaced by $l_{\text{gal}}^2 l_{\text{cmb}}^2 k_1^2 k_2^2 / 2$.

We can get rid of the remaining $W^2(|\vec{l}_{\text{gal}} + \vec{l}_{\text{cmb}}| \Xi)$ with another approximation. The power spectrum $C_E(l)$ favors large values of l whereas $W^2(|\vec{l}_{\text{gal}} + \vec{l}_{\text{cmb}}| \Xi)$ will be nonzero for $|\vec{l}_{\text{gal}} + \vec{l}_{\text{cmb}}| \sim 1/\Xi$. Then for a typical survey size of about 100 square degrees, $|\vec{l}_{\text{gal}} + \vec{l}_{\text{cmb}}| \ll l_i$ and we can assume $\vec{l}_{\text{gal}} \sim -\vec{l}_{\text{cmb}}$ and $|\vec{l}_{\text{gal}} + \vec{l}_{\text{cmb}}| = \vec{\epsilon}$. In this limit, $\cos^2 2(\phi_{l_{\text{cmb}}} - \phi_{l_{\text{gal}}}) = 1$ and \mathcal{A}_1^{\natural} can be written

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1^{\Delta} = & \int \frac{l dl}{(2\pi)^2} l^8 C_E^2(l) W^4(l\theta) \int \frac{d^2 \epsilon}{2\pi} l^8 W_1^2(\epsilon \Xi) \\
& \times \left[\int^{\text{gal}} d\chi w_{\text{cmb}} w_{\text{gal}} \int \frac{k dk}{2\pi} P(k) W(kD\theta) W(kD\theta_{\text{gal}}) \right]^2, \quad (61)
\end{aligned}$$

which is essentially the cosmic variance of $\langle \Delta E^2 \rangle$ for the Δ part and of $\langle (\nabla E)^2 \rangle$ for the ∇ one [where l^8 in Eq. (61) is replaced by $l^4 k_1^2 k_2^2 / 2$]. Finally we have

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{A}_1^{\Delta}}{\langle B_{(\theta)} b_{\natural(\theta, \theta_{\text{gal}})} \rangle^2} = & \frac{2\pi}{\Sigma} \frac{\int dl l^9 C_E^2(l) W_1^4(l\theta)}{\left[\int dl l^5 C_E(l) W_1^2(l\theta) \right]^2} \\
& \propto \text{cosmic variance of } \Delta E^2, \quad (62)
\end{aligned}$$

where $\Sigma = \pi \Xi^2$ in case of a disk-shaped survey. We show in Fig. 8 numerical results for a 100 deg² survey although the numerical calculations were done with a Gaussian window function instead of a top hat.

Numerically, for $\theta = 10'$, we get

$$\frac{\mathcal{A}_1^{\natural}}{\langle B_{(\theta)} b_{\natural(\theta, \theta_{\text{gal}})} \rangle^2} \sim \frac{(3.7\%)^2}{\Sigma / 100 \text{ deg}^2}. \quad (63)$$

We expect that for the same reasons the \mathcal{A}_2^{\natural} terms will be dominated by the weak lensing variance. Yet a correct evaluation here is harder to reach. We have made this estimation within the framework of a power law $P(k)$. With this simplification in hand, we can write, for $\mathcal{A}_{2n}^{\natural}$ (we focus only the Δ part, but the same discussion holds for the ∇ observable),

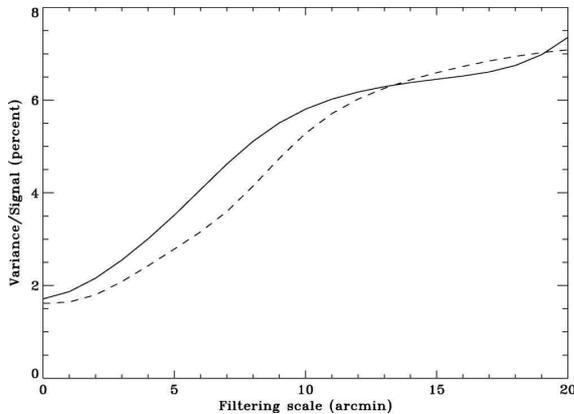


FIG. 8. Comparison between $\sqrt{2\mathcal{A}_1^{\Delta}/\text{signal}_{\Delta}}$ (solid line) and $\sqrt{2\mathcal{A}_1^{\nabla}/\text{signal}_{\nabla}}$ (dashed line). The C_l are from a $\Omega = 0.3$, $\Lambda = 0.7$ model. The survey size is 100 deg², and Gaussian filters were used.

K. BENABED, F. BERNARDEAU, AND L. van WAERBEKE

PHYSICAL REVIEW D 63 043501

TABLE II. Values of the cosmic variance of $\langle \kappa^2 \rangle$ and $\langle (\vec{\nabla} \kappa)^2 \rangle$ for different models and different filtering radius. The size of the survey is 100 deg^2 . For the $\Omega_0=0.3$ ($\Omega_0=1$) model, we use five (seven) independent ray-tracing realizations (see [25]) to estimate the cosmic variance in a 9 deg^2 survey, which is then rescaled to the cosmic variance we should obtain for a 100 deg^2 survey. Given the low number of realizations, the values here can only be used as a good estimation of the order of magnitude of $\text{CosVar}(\langle \kappa^2 \rangle)$ and $\text{CosVar}(\langle (\vec{\nabla} \kappa)^2 \rangle)$. It also seems, from these figures, that the cosmic variance of $\langle (\vec{\nabla} \kappa)^2 \rangle$ is more degraded by the difference in filtering beams than the other.

	$\text{CosVar}(\langle \kappa^2 \rangle)$		$\text{CosVar}(\langle (\vec{\nabla} \kappa)^2 \rangle)$	
	$\Omega_0=0.3$	$\Omega_0=1$	$\Omega_0=0.3$	$\Omega_0=1$
$\theta=5', \theta_{\text{gal}}=2.5'$	2.94%	1.86%	2.88%	2.07%
$\theta=5', \theta_{\text{gal}}=5'$	3.02%	1.87%	2.23%	1.75%
$\theta=10', \theta_{\text{gal}}=5'$	3.54%	2.03%	4.25%	3.02%

$$\frac{\mathcal{A}_{2n}^\Delta}{\langle B_{(\theta)} b_{\Delta(\theta, \theta_{\text{gal}})} \rangle^2} = \frac{1}{r^2} \int d^2 k_1 d^2 k_2 P(k_1) P(k_2) \cos^2(\phi_{k_1} - \phi_{k_2}) \times \frac{W_1^2(k_1 \theta) W_1^2(k_2 \theta_{\text{gal}}) W_1^2(|\vec{k}_1 + \vec{k}_2| \Xi)}{\left[\int d^2 k P(k) W_1(k \theta) W_1(k \theta_{\text{gal}}) \right]^2}. \quad (64)$$

The last integral behaves essentially like the cosmic variance of $\langle \kappa^2 \rangle$. More exactly, it goes like $1/\sqrt{2}$ of this variance. It should even be smaller, because of the extra \cos^2 factor. We evaluated this cosmic variance using the ray-tracing simulations described in [25]. These simulations provide us with realistic convergence maps (for the cosmological models we are interested in) with a resolution of $0.1'$, and a survey size of 9 deg^2 . The sources have been put at a redshift unity, and the ray lights are propagated through a simulated Universe whose density field has been evolved from an initial CDM power spectrum. The measured cosmic variance of $\langle \kappa_{(\theta)} \kappa_{(\theta_{\text{gal}})} \rangle$ is about 3% (see Table II) when filtered at scales $\theta_{\text{gal}}=5'$ and $\theta=10'$ for a $\Omega_0=0.3$ cosmology.

An estimation of \mathcal{A}_{2n}^Δ is then given by

$$\frac{\mathcal{A}_{2n}^\Delta}{\langle B_{(\theta)} b_{\Delta(\theta, \theta_{\text{gal}})} \rangle^2} \sim \left(\frac{2.12\%}{r} \right)^2 \frac{1}{\Sigma/100 \text{ deg}^2}. \quad (65)$$

Since r_∇ is very comparable to r , we very roughly estimate \mathcal{A}_{2n}^∇ :

$$\frac{\mathcal{A}_{2n}^\nabla}{\langle B_{(\theta)} b_{\nabla(\theta, \theta_{\text{gal}})} \rangle^2} \sim \left(\frac{2.12\%}{r} \right)^2 \frac{1}{\Sigma/100 \text{ deg}^2}. \quad (66)$$

The same considerations give

TABLE III. Values of the cosmic variance of \mathcal{X}_Δ . The survey size is 100 deg^2 . We used the results presented in Table II and Fig. 8. The r_∇ parameters are assumed to be equal and set to 0.4. We did not take into account the filtering effects in the definition of r . The difference due to the filtering correction is small, though. From this estimation, we can expect a cosmic variance for \mathcal{X}_Δ of less than 10% for realistic scenarios.

	$\text{CosVar}(\mathcal{X}_\Delta)$		$\text{CosVar}(\mathcal{X}_\nabla)$	
	$\Omega_0=0.3$	$\Omega_0=1$	$\Omega_0=0.3$	$\Omega_0=1$
$\theta=5', \theta_{\text{gal}}=2.5'$	6.44%	4.77%	6.06%	4.72%
$\theta=5', \theta_{\text{gal}}=5'$	6.58%	4.79%	4.99%	4.23%
$\theta=10', \theta_{\text{gal}}=5'$	8.71%	6.73%	9.49%	7.62%

$$\frac{\mathcal{A}_{2n}^\Delta}{\langle B_{(\theta)} b_{\nabla(\theta, \theta_{\text{gal}})} \rangle^2} = \frac{(2.12\%)^2}{\Sigma/100 \text{ deg}^2}. \quad (67)$$

There is no r dependence here; the diagram cross-correlates κ_{cmb} and κ_{gal} .

We can approximate the remaining \mathcal{A} terms. They should be smaller than the former. We have

$$\mathcal{A}_{3n}^\Delta \sim \frac{1}{r_\nabla^2} \frac{(2.12\% \times 3.7\%)^2}{\Sigma/100 \text{ deg}^2} \langle B_{(\theta)} b_{\nabla(\theta, \theta_{\text{gal}})} \rangle^2 \ll \mathcal{A}_{2n}^\Delta$$

and

$$\mathcal{A}_{3c}^\Delta \sim \frac{(2.12\% \times 3.7\%)^2}{\Sigma/100 \text{ deg}^2} \langle B_{(\theta)} b_{\nabla(\theta, \theta_{\text{gal}})} \rangle^2 \ll \mathcal{A}_{2c}^\Delta.$$

Then, only the \mathcal{A}_1^Δ and \mathcal{A}_2^Δ terms (boxed in Fig. 7) contribute substantially to the cosmic variance of \mathcal{X}_Δ . Since \mathcal{A}_1^Δ and \mathcal{A}_2^Δ are, respectively, the cosmic variance of $\langle \Delta E^2 \rangle$ (respectively, $\langle (\vec{\nabla} E)^2 \rangle$) and of $\langle \kappa^2 \rangle$ (respectively, $\langle (\vec{\nabla} \kappa)^2 \rangle$), we can write the variance of \mathcal{X}_Δ as

$$\text{CosVar}(\mathcal{X}_\Delta) = \text{CosVar}(\langle \Delta E^2 \rangle) + \left(\frac{1+r^2}{2r^2} \right) \text{CosVar}(\langle \kappa^2 \rangle). \quad (68)$$

and

$$\text{CosVar}(\mathcal{X}_\nabla) = \text{CosVar}(\langle (\vec{\nabla} E)^2 \rangle) + \left(\frac{1+r_\nabla^2}{2r_\nabla^2} \right) \text{CosVar}(\langle (\vec{\nabla} \kappa)^2 \rangle). \quad (69)$$

Table III presents numerical results for various filtering scenarios and models.

The two quantities b_Δ and b_∇ lead to similar cosmic variances that are rather small. Obviously it would be even better to use $b = b_\Delta + b_\nabla$. For such a quantity the resulting cosmic variance for the cross-correlation coefficient should even be smaller, by a factor of $\sqrt{2}$, although a detailed analysis is made complicated because of the complex correlation patterns it contains.

IV. CONCLUSION

We have computed a first order mapping that describes, in real space, the weak lensing effects on the CMB polarization. In particular we derived the explicit mathematical relation between the primary CMB polarization and the shear field at leading order in the lens effect. It demonstrates that a B component of the polarization field can be induced by lens couplings. We have shown, however, that the B map alone cannot lead to a nonambiguous reconstruction of the projected mass map.

Nonetheless, the B component can potentially exhibit a significant correlation signal with local weak lensing surveys. This opens a new window for detecting lens effects on CMB maps. In particular, and contrary to previous studies involving the temperature maps alone, we found that such a correlation can be measured with a rather high signal-to-noise ratio even in surveys of rather modest size and resolution. Anticipating data sets that should be available in the near future (100 deg² survey, with 5' resolution for galaxy survey and 10' Gaussian beam size for CMB polarization detection), we have obtained a cosmic variance around 8%. Needless to say, this estimation does not take into account systematics and possible foreground contaminations. It shows anyway that cosmic microwave background polarization contains a precious window for studying the large-scale mass distribution and consequently putting new constraints on the cosmological parameters.

In this paper we have investigated specific quantities that would be accessible to observations. They both would permit one to put a constraint on the cosmological constant. The simulated maps we presented here are only of illustrative interest. We plan to complement this study with extensive numerical experiments to validate our results (in particular on the cosmic variance) and explore the effect of realistic ingredients we did not include in our simple analytical framework: shear non-Gaussianity, lens-lens coupling, and so forth.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank B. Jain, U. Seljak, and S. White for the use of their ray-tracing simulations. K.B. and F.B. thank CITA for hospitality and L.v.W. is thankful to SPHT Saclay for hospitality. We are all grateful to the TERAPIX data center located at IAP for providing us computing facilities.

APPENDIX: POWER SPECTRUM OF ΔB AND THE Δ AND ∇ TERMS

The aim of this appendix is to succinctly present the computation of the power spectrum of ΔB and the different terms that contribute to it as shown in Fig. 3. Unlike previous literature on the subject [9,15] we do not need to compute the second order development of the lens effect if we restrict our computations to the power spectrum of the B field. The reason why is that assuming that the primordial B polarization is null, the second order of the lens effect will have a null contribution to the B power spectrum at leading order. Using Eq. (8), we have

$$\begin{aligned} \langle \Delta \hat{B}(\vec{\alpha}_1) \Delta \hat{B}(\vec{\alpha}_2) \rangle &= \langle \mathcal{B}_\Delta(\vec{\alpha}_1) \mathcal{B}_\Delta(\vec{\alpha}_2) \rangle + \langle \mathcal{B}_\nabla(\vec{\alpha}_1) \mathcal{B}_\nabla(\vec{\alpha}_2) \rangle \\ &\quad + \langle \mathcal{B}_\Delta(\vec{\alpha}_1) \mathcal{B}_\nabla(\vec{\alpha}_2) \rangle \\ &\quad + \langle \mathcal{B}_\nabla(\vec{\alpha}_1) \mathcal{B}_\Delta(\vec{\alpha}_2) \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

where the \mathcal{B}_i are the Δ and ∇ parts of ΔB . Then, one can calculate $C_l^{\Delta B}$, the power spectrum of ΔB ,

$$C_l^{\Delta B} = C_l^{\Delta\Delta} + C_l^{\nabla\nabla} + 2C_l^{\Delta\nabla}, \quad (\text{A2})$$

where $C_l^{\Delta\Delta}$ (respectively, $C_l^{\nabla\nabla}$) is the power spectrum of the Δ term (∇ term) and $C_l^{\Delta\nabla}$ is the cross-correlation at scale l of the Δ and ∇ terms. The latter must sum up to zero, so that $\langle \mathcal{B}_\nabla \mathcal{B}_\Delta \rangle = 0$. Using the notations of Sec. III, we have

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}_\#(\vec{\alpha}_1) \mathcal{B}_\#(\vec{\alpha}_2) \rangle &= \int \frac{d^2 l}{(2\pi)^2} C_l^{\#\#} e^{i\vec{l} \cdot (\vec{\alpha}_2 - \vec{\alpha}_1)} \\ &= \int \frac{d^2 k d^2 h}{(2\pi)^4} C_E(h) \bar{P}(k) e^{i(\vec{k} + \vec{h}) \cdot (\vec{\alpha}_2 - \vec{\alpha}_1)} \\ &\quad \times \mathcal{G}_\#^{\text{Ker}}(\vec{h}, \vec{k}) \mathcal{G}_\#^{\text{Ker}}(\vec{h}, \vec{k}), \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

where we have assumed that $\bar{P}(k)$ take into account the line-of-sight integration. We are left with the simple equation

$$C_l^{\#\#} = \int \frac{d^2 h}{(2\pi)^2} C_E(h) \bar{P}(|\vec{l} - \vec{h}|) \mathcal{G}_\#^{\text{Ker}}(\vec{h}, \vec{l} - \vec{h}) \mathcal{G}_\#^{\text{Ker}}(\vec{h}, \vec{l} - \vec{h}).$$

Figure 3 presents $C_l^{\Delta\Delta}$, $C_l^{\nabla\nabla}$, and $C_l^{\Delta B}$ obtained with these equations.

- [1] Among the current and future high-precision observations, the most promising are probably the BOOMERanG balloon experiment [P. de Bernardis *et al.*, *New Astron. Rev.* **43**, 281 (1999)]; the MAP satellite mission [C.L. Bennett *et al.*, *Am. Astron. Soc. Meeting* **187**, 7109 (1995)]; and Planck Surveyor satellite mission [M. Bersanelli *et al.*, Report No. COBRAS/SAMBA on the phase A study, ESA Report No. D/SCI(96)3].
- [2] M. Zaldarriaga, D. Spergel, and U. Seljak, *Astrophys. J.* **488**, 1 (1997); G. Efstathiou and J. R. Bond, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **304**, 75 (1999).

- [3] S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999); A. G. Riess *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [4] A. Aguirre, *Astrophys. J.* **525**, 583 (1999); T. Totani and C. Kobayashi, *Astrophys. J. Lett.* **526**, 65 (1999); M. Livio, astro-ph/9903264; K. Nomoto, astro-ph/9907386; P. Valageas, *Astron. Astrophys.* **354**, 767 (2000).
- [5] Y. Mellier, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **37**, 127 (1999).
- [6] A. Blanchard and J. Schneider, *Astron. Astrophys.* **184**, 1 (1987); U. Seljak, *Astrophys. J.* **463**, 1 (1996).
- [7] F. Bernardeau, *Astron. Astrophys.* **324**, 15 (1997); M. Zaldar-

K. BENABED, F. BERNARDEAU, AND L. van WAERBEKE

PHYSICAL REVIEW D **63** 043501

- riaga, Phys. Rev. D **62**, 063510 (2000).
- [8] F. Bernardeau, Astron. Astrophys. **338**, 767 (1998).
- [9] U. Seljak and M. Zaldarriaga, Phys. Rev. Lett. **82**, 2636 (1999); M. Zaldarriaga and U. Seljak, Phys. Rev. D **58**, 023003 (1998).
- [10] J. Guzik, U. Seljak, and M. Zaldarriaga, Phys. Rev. D **62**, 043517 (2000).
- [11] M. Zaldarriaga and U. Seljak, Phys. Rev. D **58**, 023003 (1998).
- [12] K. Benabed and F. Bernardeau, Phys. Rev. D **61**, 123510 (2000).
- [13] M. Sugimotohara, T. Sugimotohara, and D. N. Spergel, Astrophys. J. **495**, 511 (1998); H. V. Peiris and D. N. Spergel, *ibid.* **540**, 605 (2000).
- [14] L. van Waerbeke, F. Bernardeau, and K. Benabed, Astrophys. J. **540**, 14 (2000).
- [15] W. Hu, Phys. Rev. D **62**, 043007 (2000).
- [16] V. Faraoni, Astron. Astrophys. **272**, 385 (1993).
- [17] U. Seljak, Astrophys. J. **482**, 6 (1997); W. Hu and M. White, New Astron. **2**, 323 (1997); J. Lesgourgues, D. Polarski, S. Prunet, and A. A. Starobinsky, Astron. Astrophys. **359**, 414 (2000).
- [18] A. Riazuelo, Ph.D. thesis, University of Paris 11, 2000.
- [19] L. van Waerbeke, F. Bernardeau, and Y. Mellier, astro-ph/9807007.
- [20] W. Hu, Astrophys. J. **529**, 12 (2000).
- [21] F. R. Bouchet, S. Prunet, and S. K. Sethi, Mon. Not. R. Astron. Soc. **302**, 663 (1999); S. Prunet, S. K. Sethi, and F. R. Bouchet, Mon. Not. R. Astron. Soc. **314**, 348 (2000).
- [22] J. A. Peacock and S. J. Dodds, Mon. Not. R. Astron. Soc. **280**, L19 (1996).
- [23] F. Bernardeau, L. van Waerbeke, and Y. Mellier, Astron. Astrophys. **322**, 1 (1997).
- [24] M. Srednicki, Astrophys. J. Lett. **416**, 1 (1993).
- [25] B. Jain, U. Seljak, and S. White, Astrophys. J. **530**, 547 (2000).

Simuler les corrélations d'effet de lentille

Sommaire

9.1	Simuler le rayonnement de fond primordial et sa polarisation	149
9.2	Simuler un effet de lentille par triangulation	150
9.2.1	Interpolation et triangulation	150
9.2.2	Problème des limites	151
9.2.3	Effet de lentille sur le rayonnement de fond.	152
9.3	Détermination de l'effet de lentille	152
9.3.1	Un unique plan lentille	152
9.3.2	Simulation multi-plans	152
9.3.3	Simulation du régime quasi-linéaire	155
9.3.4	Couplage à deux plans lentilles	157
9.3.5	Dernier raffinement : des simulations N-corps pour l'effet de lentille à petit décalage vers le rouge.	160
9.4	Résultats	160
9.4.1	Choix	160
9.4.2	Résultats et perspectives	161

Dans ce cours chapitre, je vais décrire une “expérience numérique” en cours dont le but est d'évaluer numériquement l'effet de lentille gravitationnelle sur le rayonnement de fond cosmique ainsi que les corrélations croisées avec cet effet sur un arrière plan à $z = 1$. Le plus gros du travail consiste en fait à être capable de simuler correctement des effets de lentilles corrélés.

9.1 Simuler le rayonnement de fond primordial et sa polarisation

Les spectres de puissance primordiaux des anisotropies, de la polarisation ainsi que le spectre croisé température/polarisation, sont faciles à obtenir. Plusieurs codes [CMBFAST, [http](#)] [Riazuelo, 2000] permettent de les déterminer rapidement pour de grands nombres de modèles cosmologiques. Avec ces spectres à disposition, la simulation d'une carte primordiale de rayonnement de fond se résume à un problème de génération de nombres aléatoires. En effet, à petite échelle, on peut travailler dans l'espace de Fourier, et créer une carte gaussienne de spectre donné se réduit à remplir une grille de valeurs complexes gaussiennes dont la variance est déterminée par le spectre. La seule petite difficulté est de prendre en compte le spectre de puissance croisé. Pour chaque mode, on engendre plus alors E et T , mais deux vecteurs fonctions de E et T , valeurs propres de la matrice des corrélations. Dans toute la suite, on a

supposé que la composante B de la polarisation était nulle. Enfin, les variables de Stockes Q et U se déduisent simplement de la composante E

$$Q = \Delta^{-1} (\partial_x^2 - \partial_y^2) E \quad (9.1)$$

$$U = 2\Delta^{-1} \partial_x \partial_y E. \quad (9.2)$$

L'inverse du Laplacien étant ici défini au sens de la transformée de Fourier.

Il est à noter que dans toute la suite, nous utiliserons les dérivées et les intégrales définies au sens de la transformée de Fourier. Cela ne pose en fait pas de problème tant que les cartes sont périodiques. Les cartes primordiales le sont, puisque engendrées dans l'espace de Fourier. Par contre, les cartes ayant subi un effet de lentille, même engendré par une carte de déformations périodique, n'ont aucune raison de conserver cette propriété. On verra dans la suite comment on traite ce problème.

9.2 Simuler un effet de lentille par triangulation

Avant de rentrer dans le problème de la source de cet effet de lentille, je voudrais décrire succinctement comment l'on simule efficacement un effet de lentille sur une image quelconque. Je rappelle que l'effet de lentille déforme l'image de telle sorte que, si $X(\boldsymbol{\theta})$ est l'image bidimensionnelle source, l'image ayant subi l'effet de lentille sera

$$\hat{X}(\boldsymbol{\theta}) = X(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\theta})). \quad (9.3)$$

9.2.1 Interpolation et triangulation

Supposons donc que nous ayons à disposition le champ vectoriel de déplacement $\boldsymbol{\xi}$ ainsi que le champ primordial X , pour un jeu de positions tabulées $\{\boldsymbol{\Theta}\}$, typiquement une grille orthonormée. Tout le problème est maintenant de pouvoir évaluer X pour les positions $\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\Theta})$. En effet, Il est assez peu probable que cette position corresponde, pour toutes les valeurs possibles de $\boldsymbol{\Theta}$, à l'une des positions tabulées. La solution est donc de recourir à l'interpolation du champ X .

Il existe plusieurs stratégies pour réaliser cette interpolation. Plusieurs techniques sont envisageables. La plus classique est la méthode dite *cloud-in-cell*. Sur la grille, chaque point $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\Theta})$, va contribuer aux points alentours par sa valeur pondérée par l'intersection d'une surface centrée en $\boldsymbol{\alpha}$ et de la même surface centrée sur la grille.

La méthode que j'ai choisie est beaucoup plus précise, mais aussi beaucoup plus gourmande en temps. C'est une méthode par triangulation qui réalise une véritable interpolation linéaire sur les points de la grille. Étant donnée une triangulation, tracée sur notre nuage de points $\{\boldsymbol{\alpha}\}$, il est simple d'interpoler linéairement pour tout point en dehors du jeu des $\{\boldsymbol{\alpha}\}$; par trois points, il passe un plan et un seul! Tout le problème est de déterminer la triangulation.

Le "bon" pavage par des triangles, dans notre cas, va être celui fourni par la triangulation de Delaunay. Cette triangulation possède la propriété que le disque circonscrit à chaque triangle ne contient d'autres points que les sommets du triangle. C'est en quelque sorte une triangulation "minimale". De la même manière, tout point $\boldsymbol{\zeta}$ est assuré que ses trois plus proches voisins dans le nuage $\{\boldsymbol{\alpha}\}$ sont les sommets du triangle qui le contient dans la triangulation de Delaunay. C'est cette dernière propriété qui nous intéresse particulièrement. Ainsi, pour tout point de la grille on sait déterminer le plan passant par ses trois plus proches voisins.

Il existe de nombreux codes calculant de façon très efficace la triangulation de Delaunay; c'est un problème d'algorithmique classique. Il suffit ensuite de retrouver pour chaque point de la grille le triangle qui le contient. Cette dernière opération est grandement accélérée si les points de la grille sont des entiers; on peut alors déterminer rapidement, pour chaque triangle,

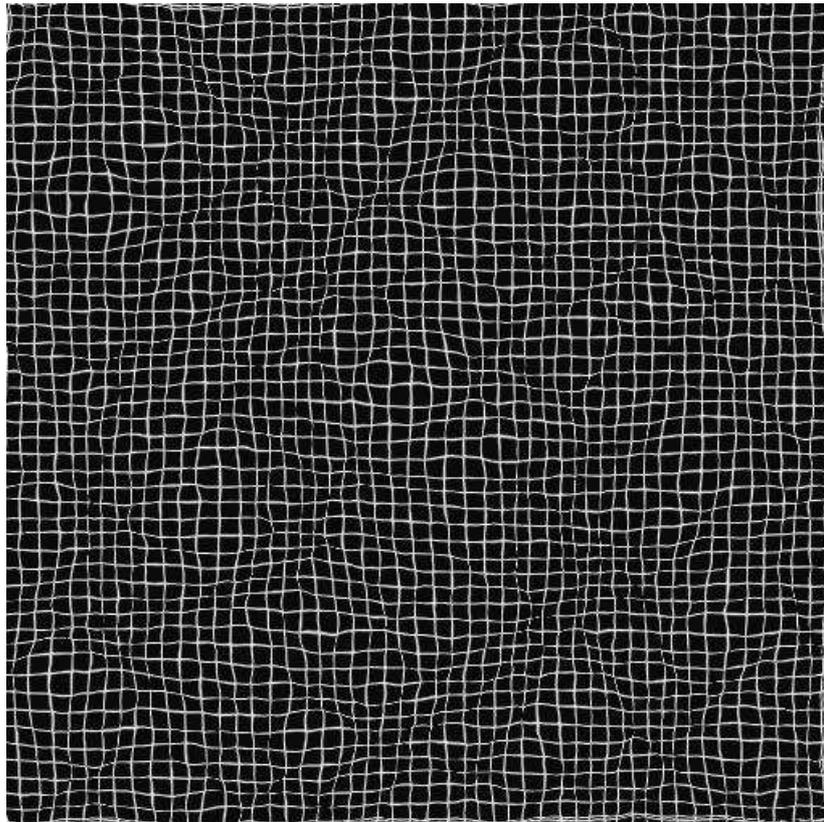


FIG. 9.1 – Effet de lentille sur une grille test. On a utilisé le champ de convergence présenté figure 9.3 amplifié d'un facteur deux. La maille de la grille est d'environ $6'$.

une liste des points de la grille qu'il pourrait contenir et tester ensuite chacun de ces points, s'il n'a pas déjà été utilisé dans une étape précédente.

9.2.2 Problème des limites

Au bord de l'image, cependant, notre technique trouve ses limites. En effet, si des points du bord de la grille sont déplacés vers l'intérieur de celle-ci, il est possible que certains points de la grille rigide, aux bords, n'appartiennent à aucun des triangles de la triangulation. Une solution simple, et qui permet de conserver en partie la propriété de condition aux bords périodiques de nos cartes simulées, est de forcer le champ à être défini sur un tore, de même que le déplacement. De ce fait, la triangulation devient un pavage du tore et il ne peut plus y avoir de points "perdus". De même, les conditions au bord continuent d'être périodiques.

Ce système, s'il apporte une solution simple et pragmatique au problème, n'est néanmoins pas sans danger. En effet, si l'on ne perd plus de points, les bords de notre carte n'en sont pas moins problématiques. Par exemple, imaginons l'effet d'une lentille qui se résume à une simple homothétie du champ X . Si le rapport d'homothétie est supérieur à 1, il n'y aura pas de problème au bord. Le nuage de points $\{\alpha\}$ sera plus étendu que la grille. Cependant, en forçant X à vivre sur un tore, on va introduire une erreur aux bords pour cette lentille. En effet, les points de $\{\alpha\}$ dépassant du bord droit de la grille, par exemple, vont être réintroduits par le bord gauche et donc contribuer au calcul des valeurs des points de la grille sur ce bord.

Au final, nous utiliserons le système du tore afin d'éviter la perte de points et pour garder aux images des propriétés périodiques. Cependant, nous n'utiliserons pas dans l'analyse des données les valeurs situées dans une bande autour des bords.

9.2.3 Effet de lentille sur le rayonnement de fond.

Maintenant que l'on sait calculer l'effet de lentille sur un champ quelconque, il est assez simple de simuler celui sur le rayonnement de fond. Il suffit d'appliquer notre déformation au champ T ainsi qu'aux champs Q et U . On rappelle encore que l'effet de lentille gravitationnelle transporte parallèlement le vecteur polarisation et que c'est pour cela qu'il s'applique aux variables de Stokes Q et U . Les champs E et B après effet de lentille se déduisent simplement des variables de Stokes. Encore une fois, on utilise les dérivations et intégrations de la transformation de Fourier qui sont très précises puisque notre effet de lentille simulé conserve artificiellement la périodicité des cartes.

9.3 Détermination de l'effet de lentille

Le plus gros problème de notre simulation va être le calcul de l'effet de lentille engendré par une distribution de matière réaliste le long de la ligne de visée.

9.3.1 Un unique plan lentille

La première chose qui vient à l'esprit est de reproduire ce que l'on a fait avec le rayonnement de fond. Si l'on connaît le spectre de puissance de l'effet de lentille sur le rayonnement de fond, on peut engendrer une carte aléatoire pour ce spectre. Cela n'est pas trop dur à réaliser ; on sait calculer $P_\kappa(k)$

$$P_\kappa(k) = \int d\chi w^2(\chi) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} P(k\mathcal{D}(\chi), \chi). \quad (9.4)$$

Il suffit donc de se donner une expression pour le spectre de puissance du contraste de densité $P(k, \chi)$. Un spectre de puissance CDM, par exemple, avec l'évolution simple donnée par l'ordre linéaire de la croissance des structures D_+ fait parfaitement l'affaire, dans un premier temps.

On a donc facilement à disposition une réalisation du champ de convergence κ . Le champ vectoriel de déformation se déduit par intégration de κ . Encore une fois, la transformée de Fourier nous est d'un grand secours. Le problème de cette méthode simple est qu'il n'est pas possible, maintenant, de faire des corrélations croisées avec l'effet de lentille pour un autre plan source. Ici, en fait, tout se passe comme si l'on avait remplacé notre distribution de matière le long de la ligne de visée par un unique plan contenant une répartition de matière projetée équivalente. Cela nous donne une idée pour pouvoir réaliser des corrélations croisées, au lieu de projeter la matière sur un seul plan, on va découper en tranches la ligne de visée et créer autant de plans que de tranches.

9.3.2 Simulation multi-plans

On ne veut plus maintenant travailler avec un seul plan lentille, mais avec au moins deux plans. Ainsi, si l'on souhaite pratiquer des corrélations avec l'effet de lentille à $z = 1$, il nous suffit d'avoir une connaissance de la distribution de masse jusqu'à $z = 1$ et entre $z = 1$ et $z \sim 1000$. On va utiliser deux plans contenant la masse projetée, engendrés avec les deux spectres de puissance

$$P_\kappa^1(k) = \int_0^{z=1} d\chi w^2(\chi) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} P(k\mathcal{D}(\chi), \chi) \quad (9.5)$$

$$P_\kappa^{1000}(k) = \int_{z=1}^{z=1000} d\chi w^2(\chi) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} P(k\mathcal{D}(\chi), \chi). \quad (9.6)$$

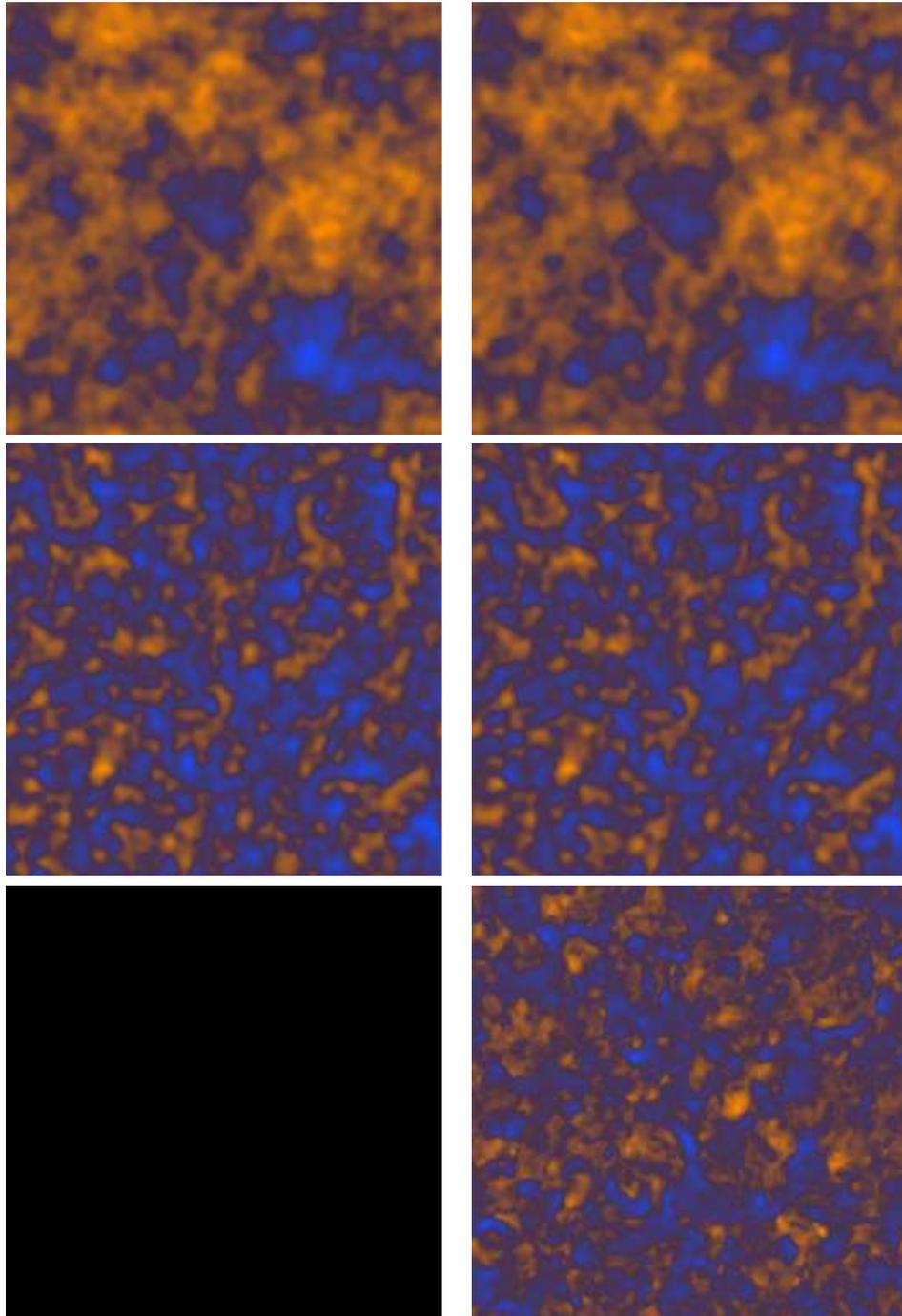


FIG. 9.2 – Exemple d'un effet de lentille sur le rayonnement de fond. De haut en bas, les champs de température, polarisation E et polarisation B . Les cartes de gauche sont les cartes primordiales. On n'a pas tenu compte des perturbations tensorielles de la métrique, si bien que la polarisation est purement électrique. À droite, les cartes après effet de lentille. Pour cette figure et dans toute la suite, les champs ont 5° de côté. Le modèle est $\Omega_0 = 1$, CDM, $h = 0.6$. L'effet de lentille est calculé en utilisant des champs de convergence calculées avec des simulations N-Corps et complétées avec des simulations à dynamique simplifiée décrites plus bas. Sauf indication contraire, aucun filtrage n'a été appliqué et les cartes sont à l'échelle de la simulation, $35''$.

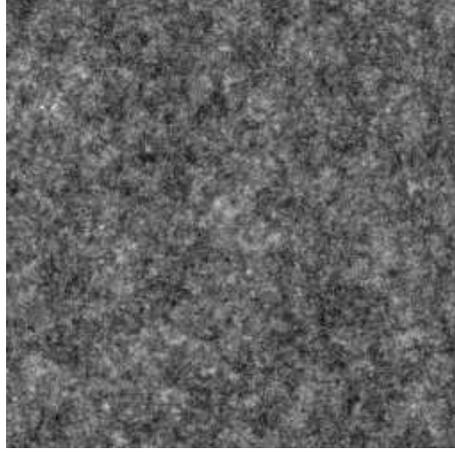


FIG. 9.3 – Un exemple de champ κ pour le rayonnement de fond

Il y a cependant un problème ici. La projection utilisée est la projection de l'effet de lentille. En d'autres termes, il s'agit d'une projection dépendant de la position du plan source... On s'est bien gardé de spécifier quel plan source et donc quelle fonction d'efficacité w nous utilisons. Ce n'est évidemment pas la même pour l'effet de lentille sur le rayonnement de fond et sur $z = 1$. On va, pour résoudre cette ambiguïté, recourir à une approximation. Nous allons décider que \tilde{P}^{xx} défini ainsi

$$\tilde{P}^{xx}(k) = \frac{P_{\kappa}^{xx}(k)}{\int^{xx} d\chi w^2(\chi)}, \quad (9.7)$$

où la fonction de fenêtre est celle de l'effet de lentille sur le plan source le plus éloigné, est une bonne approximation du spectre de distribution de matière et que $P_{\kappa_g}^1$, le spectre de puissance de l'effet de lentille à $z = 1$ peut s'écrire, à une très bonne approximation

$$P_{\kappa_g}(k) = \tilde{P}_{\kappa}^1(k) \int d\chi w_g^2(\chi). \quad (9.8)$$

La fonction de fenêtre w_g est celle de l'effet de lentille à $z = 1$. Dans la suite, on notera ${}_{z_1}^{z_2} \bar{w}^2$ l'intégrale

$${}_{z_1}^{z_2} \bar{w}^2 = \int_{z_1}^{z_2} d\chi w^2(\chi). \quad (9.9)$$

On peut donc engendrer deux plans δ^1 et δ^{1000} . La convergence de l'effet de lentille pour $z = 1$ et le rayonnement de fond est alors

$$\begin{aligned} \kappa_g &= w_g(z_{1/2}) \times \delta^1 \\ \kappa &= w(z_{1/2}) \times \delta^1 + w(z_{500}) \times \delta^{1000}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Les décalages vers le rouge $z_{1/2}$ et z_{500} correspondent aux distances médianes entre respectivement $z = 0$ et $z = 1$ et $z = 1$ et $z = 1000$. Les deux cartes κ_g et κ possèdent les caractéristiques attendues. Elles représentent chacune l'effet de lentille sur le plan $z = 1$ et $z = 1000$. Elles sont corrélées comme attendu ; on peut recalculer le taux de corrélation r qui est alors très proche du taux théorique, suivant le modèle.

Plusieurs effets, cependant, ont été négligés dans ce genre de simulation. Tout d'abord, le spectre que nous avons utilisé ne prend pas en compte l'évolution non-linéaire. On sait que ce régime est important. Il a un impact non négligeable sur le taux de corrélation. La solution ici est assez simple. Il suffit d'inclure, par exemple, à l'aide de l'Ansatz de Hamilton, l'effet

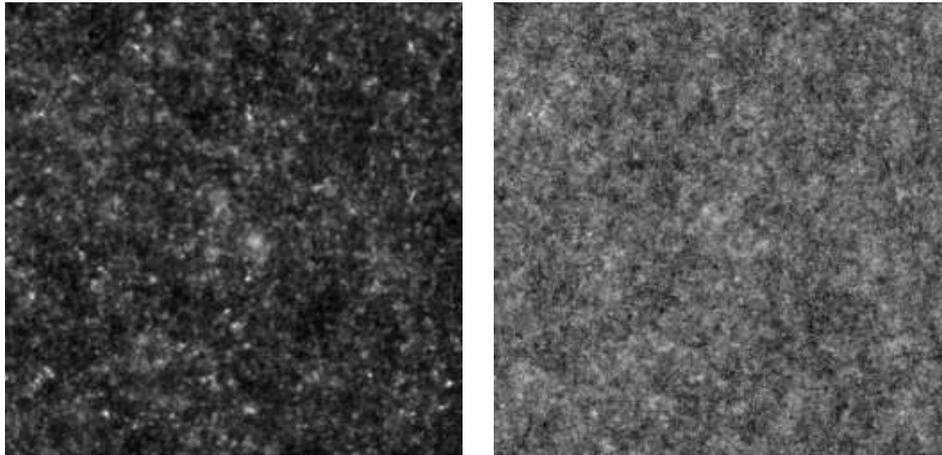


FIG. 9.4 – Deux plans sources corrélés. La carte de gauche donne l'effet de lentille sur un plan situé à $z = 1$, celle de droite sur celui à $z = 1100$. Cette réalisation surévalue légèrement le taux de corrélation. On mesure ici $r = 0.6$.

du régime non linéaire à notre spectre de puissance. J'ai réalisé un programme permettant d'appliquer l'approximation de Peacock et Dodds de cet Ansatz au spectre de puissance linéaire étudié, pour des paramètres Ω_0 et Λ arbitraires.

D'autre part, nous avons aussi négligé l'ordre quasi-linéaire de l'évolution des grandes structures. Celle-ci est importante si l'on souhaite, par exemple, étudier l'impact de l'écart à la gaussianité de l'effet de lentille à grand décalage vers le rouge. On pourrait vouloir étudier numériquement les propriétés d'observables telles $\langle \Delta B b_{\frac{1}{2}}^g \kappa_g \rangle$ qui sont difficiles à calculer analytiquement et qui à l'ordre dominant sont sensibles au deuxième ordre de l'évolution du contraste de densité. On va voir, dans la suite comment inclure ces effets d'ordre supérieur.

9.3.3 Simulation du régime quasi-linéaire

On a vu au chapitre 4 que l'on savait calculer, dans le cadre du développement perturbatif, les ordres au delà de l'ordre linéaire de la croissance des grandes structures. En particulier, on a vu que le premier ordre non-linéaire permettait de calculer la contribution dominante au gauchissement de la distribution du contraste de densité et donc à l'effet de lentille. Le problème est de reproduire ces non-linéarités.

Une solution proposée par Zel'dovich [Zel'Dovich, 1970] et par la suite améliorée [Moutarde *et al.*, 1991] [Bouchet *et al.*, 1992, Bouchet *et al.*, 1995] est d'utiliser une approximation de la dynamique dans le formalisme lagrangien. On va suivre l'évolution des particules identifiées par leurs positions initiales \mathbf{q} . À un temps t donné, les particules sont alors aux positions

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \Psi(t, \mathbf{q}). \quad (9.11)$$

Tous les processus physiques sont contenus dans le champ de déplacement Ψ . On calcule l'expression du contraste de densité en notant alors que

$$\rho(\mathbf{x}) J d^3q = \rho(\mathbf{q}) d^3q, \quad (9.12)$$

où J est le jacobien de la matrice de passage des coordonnées comobiles aux coordonnées lagrangiennes

$$J = \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \right) = 1 + \det \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}} \right). \quad (9.13)$$

Le contraste de densité est alors donné par

$$\delta = \frac{1}{J} - 1, \quad (9.14)$$

tandis que la vitesse particulière est

$$\mathbf{u} = a\Psi'. \quad (9.15)$$

On sait ré-écrire les équation d'évolution pour cette description. Il vient alors

$$J \nabla_x \cdot \Psi'' + 2HJ \nabla_x \cdot \Psi' = \frac{3}{2} \Omega H^2 (J - 1) \quad (9.16)$$

L'approximation proposée par Zel'dovitch consiste à remplacer dans l'équation d'évolution le champ Ψ par sa valeur initiale

$$\Psi^{(1)}(\mathbf{q}, t) = D^{(1)}(t) \Psi(\mathbf{q}, 0). \quad (9.17)$$

On peut alors remplacer les gradients sur x par des gradients sur q . On retrouve l'équation d'évolution pour $D^{(1)}(t)$ qui n'est autre que l'équation de la croissance linéaire des structures que nous avons déjà calculée

$$D^{(1)''} + 2HD^{(1)'} = \frac{3}{2} \Omega H^2 D^{(1)}. \quad (9.18)$$

Cette approximation revient, en gros, à lancer les particules à l'instant initial sur les trajectoires déterminées par l'attraction gravitationnelle, puis de couper l'interaction et de laisser le système évoluer inertiuellement. Cette approximation donne (étonnamment) des résultats assez raisonnables. On en connaît les limites. En particulier le système suit assez mal l'évolution à petite échelle. Lorsque les particules sont très proches, l'interaction devient très importante et on doit assister à la formation d'objets compacts. Au lieu de cela, l'approximation faite ici, laisse les particules libres. Elles ne s'effondrent plus alors les unes sur les autres... Au contraire, elles forment en excès des objets allongés dans les directions propres du jacobien.

On peut améliorer la situation en continuant le développement perturbatif autour de la solution à $t = 0$ un ordre plus loin. On va donc écrire

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \epsilon \Psi^{(1)}(t, \mathbf{q}) + \epsilon^2 \Psi^{(2)}(t, \mathbf{q}) + O(\epsilon^3). \quad (9.19)$$

La variable ϵ est ici un petit paramètre sans dimension que nous fixerons à 1. De nouveau, on va chercher une solution pour laquelle les évolutions temporelles et spatiales se découplent. Les calculs pour le premier terme ont été faits au-dessus. Au deuxième ordre, le jacobien donne le terme

$$J^{(2)} = \nabla_q \cdot \Psi^{(2)} + \frac{1}{2} \left[\left(\nabla \cdot \Psi^{(1)} \right)^2 - \Psi_{i,j}^{(1)} \Psi_{j,i}^{(1)} \right]. \quad (9.20)$$

En réinjectant ce nouveau terme dans (9.16) et en se restreignant aux termes de second ordre, on obtient la solution [van Waerbeke *et al.*, 1999b]

$$\nabla_q \cdot \Psi^{(2)}(t=0) = -\frac{1}{2} \left[\left(\nabla \cdot \Psi^{(1)} \right)^2 - \Psi_{i,j}^{(1)} \Psi_{j,i}^{(1)} \right] \quad (9.21)$$

$$D^{(2)} = \frac{3}{7} D^{(1)2}. \quad (9.22)$$

Cette solution n'est valable que pour un univers EdS. Néanmoins, les corrections à apporter à ces résultats pour des paramètres cosmologiques différents sont très petites [Bouchet *et al.*, 1992] [Bernardeau, 1994]. On appliquera cette formule telle quelle pour tous les jeux de paramètres.

Il a été montré que l'extension au deuxième ordre de l'approximation de Zel'dovich donnait d'assez bons résultats aux échelles moyennes. À petite échelle, l'approximation devient assez mauvaise et elle ne peut évidemment pas suivre l'évolution après croisement de coquilles.

L'intérêt de cette approximation (au moins au deuxième ordre), est qu'elle est toujours valable à deux dimensions. Ainsi, l'on peut utiliser les calculs du dessus pour simuler l'effet de l'évolution quasi-linéaire directement sur nos cartes de densité projetée [Munshi *et al.*, 1999]. Ainsi, δ^{xx} le contraste de densité projeté pour le plan xx obtenu plus haut est maintenant le premier ordre de l'approximation. On construit le deuxième ordre avec l'équation (9.21) pour le cas à deux dimensions; c'est à dire

$$\Psi_{i,i}^{(2)}(\mathbf{q}, t) = \frac{3}{7} \left[\Psi_{1,1}^{(1)} \Psi_{2,2}^{(1)} - \Psi_{1,2}^{(1)2} \right]. \quad (9.23)$$

Encore une fois, on peut utiliser les dérivées dans l'espace de Fourier sans soucis, puisque les cartes sont toujours périodiques. La dernière difficulté est de calculer le contraste de densité final. En effet, la grille sur laquelle sont connus nos champs vectoriel $\Psi^{(1)}$ et $\Psi^{(2)}$ est maintenant la grille pour \mathbf{q} . Or, on veut disposer du contraste de densité eulérien, aux points $\mathbf{x} = \mathbf{q} + \Psi(t, \mathbf{q})$. Il faut donc interpoler les valeurs de $J^{-1} - 1$ connues en ces points \mathbf{x} sur une grille rectangulaire. On va encore une fois utiliser la triangulation de Delaunay. Il a été montré que cette technique donnait d'assez bons résultats pour la simulation du gauchissement du spectre de puissance [Munshi *et al.*, 1999].

9.3.4 Couplage à deux plans lentilles

Nous disposons maintenant d'une simulation qui prend en compte des effets de deuxième ordre dans l'évolution du contraste de densité et qui permet de faire des corrélations entre deux effets de lentilles pour des plans sources différents. Cependant, il y a, dans l'effet de lentille gravitationnelle un effet de deuxième ordre que nous avons négligé et qui pourrait devenir important.

En effet, lors du calcul de l'effet de lentille, nous nous sommes restreint à l'approximation de Born. Nous avons calculé les déflexions au voisinage des puits de potentiels le long de la trajectoire non perturbée. C'est une approximation raisonnable, puisque les corrections sont d'ordres supérieurs. Par exemple, considérons un système où les effets de lentilles s'apparentent à des lentilles minces. Supposons que l'on ait deux lentilles sur la ligne de visée (figure 9.5). Dans l'approximation de Born, l'effet de lentille total est simplement la somme des deux effets de lentilles sur la géodésique non perturbée

$$\xi_{\text{tot}}(\boldsymbol{\theta}) = \xi_1(\boldsymbol{\theta}) + \xi_2(\boldsymbol{\theta}), \quad (9.24)$$

et l'on rappelle que

$$\xi = \frac{\mathcal{D}_L}{\mathcal{D}_S} \nabla_{\theta} \phi, \quad (9.25)$$

pour ϕ le potentiel gravitationnel sur le plan lentille. Si l'on prend maintenant en compte le fait que la première lentille a déjà dévié le rayon lumineux, la déflexion totale s'écrit maintenant

$$\xi_{\text{tot}}(\boldsymbol{\theta}) = \xi_1(\boldsymbol{\theta}) + \frac{\mathcal{D}_{L_1}}{\mathcal{D}_{L_2}} \nabla_{\theta} \phi_2(\boldsymbol{\theta} + \xi_1(\boldsymbol{\theta})). \quad (9.26)$$

On a donc à faire à une correction du deuxième ordre. Dans le cas à trois plans lentilles, la correction d'ordre maximale va être du troisième ordre et ainsi de suite.

On va se restreindre à la correction due au couplage à deux plans lentilles, puisque l'on sait qu'elle va être dominante sur les couplages plus complexes, et qu'elle va apparaître au

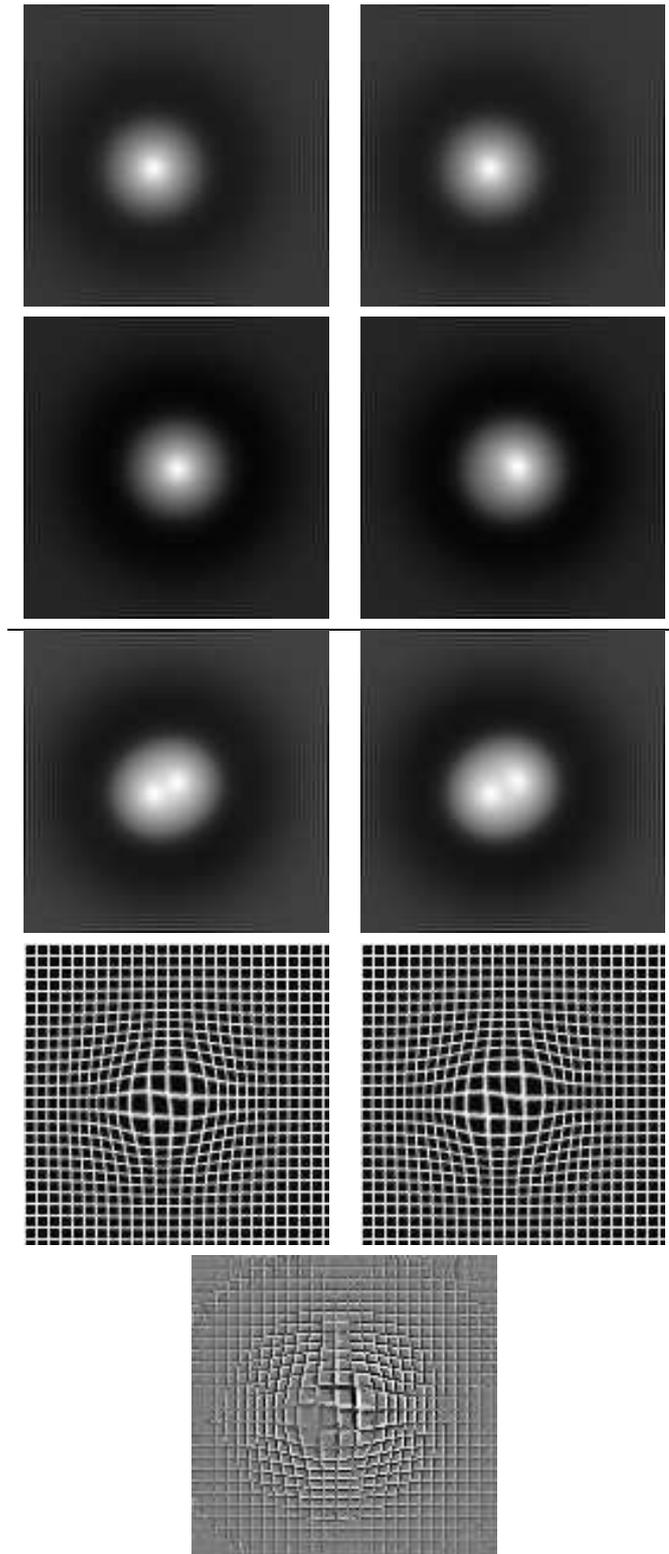


FIG. 9.5 – Un exemple de couplage de lentille. La ligne de visée est perturbée par deux puits de potentiels (des sphères isothermes à rayon de cœur, coupées par des exponentielles). De haut en bas, le champ de convergence des premier et deuxième plans lentille, la projection de l'effet total et enfin l'effet total sur une grille test. La dernière figure en bas donne la différence entre les grilles test (les couleurs ont été modifiée pour amplifier visuellement l'effet). Colonne de gauche, l'effet de lentille sur une grille test en négligeant l'effet du couplage de lentille. Colonne de droite, on tient compte de l'effet de couplage. La première lentille (en haut à droite) agit sur le second plan lentille (deuxième en partant du haut, à droite). Le deuxième plan lentille est présenté tel qu'il est *vu par les photons*.

même ordre que le gauchissement. Si l'on calcule l'effet sur la convergence, à l'ordre en κ^2 ,

$$\kappa_{\text{tot}} = \kappa_{1 \rightarrow s} + \kappa_{2 \rightarrow s} - \underbrace{(\kappa_{2 \rightarrow s} \kappa_{1 \rightarrow 2} + \gamma_{2 \rightarrow s} \cdot \gamma_{1 \rightarrow 2})}_{\text{Correction due au couplage a deux lentilles}} + \xi_{1 \rightarrow 2}^\mu \partial_\mu \kappa_{2 \rightarrow s}. \quad (9.27)$$

$$A_{L_1 \rightarrow z_s}^{-1} \times A_{L_0 \rightarrow L_1}^{-1}$$

On peut alors calculer le terme correctif au gauchissement. On a, avec l'effet de filtrage,

$$\begin{aligned} s_3^{\text{coupl}} \times \langle \kappa^2 \rangle^2 = & -2 \times 6 \times \int_{z_s}^{z_1} \frac{dz_1}{E(z_2)} w_{z_s}(z_1)^2 \int \frac{dz_2}{E(z_2)} w_{z_s}(z_2) w_{z_1}(z_2) \\ & \times \int d^2 k_1 d^2 k_2 P(k_1) P(k_2) W(k_1 \mathcal{D}(z_1) \Theta) W(k_2 \mathcal{D}(z_2) \Theta) \\ & \times \left[\left(1 + \underbrace{\frac{k_1 \mathcal{D}(z_1)}{k_2 \mathcal{D}(z_2)} \cos(\phi_{k_1} - \phi_{k_2})}_{\text{terme en } \xi_\mu \partial_\mu \kappa} \right) - \left(1 - \underbrace{\cos^2(\phi_{k_1} - \phi_{k_2})}_{\text{terme en } A^{-1} \times A^{-1}} \right) \right] \\ & \times W(|\mathbf{k}_1 \mathcal{D}(z_1) + \mathbf{k}_2 \mathcal{D}(z_2)| \Theta). \end{aligned} \quad (9.28)$$

En utilisant les formules connues sur les fonctions de Bessel, on peut intégrer les dépendances angulaires. Le terme correctif se réduit alors à

$$\begin{aligned} s_3^{\text{coupl}} \times \langle \kappa^2 \rangle^2 = & -12 \times \int_{z_s}^{z_1} \frac{dz_1}{E(z_2)} w_{z_s}(z_1)^2 \int \frac{dz_2}{E(z_2)} w_{z_s}(z_2) w_{z_1}(z_2) \\ & \times \int d^2 k_1 d^2 k_2 P(k_1) P(k_2) W(k_2 \mathcal{D}(z_2) \Theta)^2 \\ & \times \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) W(k_1 \mathcal{D}(z_1) \Theta)^2 + \frac{1}{2} k_1 \mathcal{D}(z_1) \Theta W(k_1 \mathcal{D}(z_1) \Theta) W'(k_1 \mathcal{D}(z_1) \Theta) \right] \end{aligned} \quad (9.29)$$

Cette dernière équation s'intègre alors facilement lorsque l'on remplace le spectre de puissance par une loi de puissance d'index n . On trouve alors

$$s_3^{\text{coupl}} = \frac{3n(n-3)(7n-13)}{8(2n-5)(2n-3)}. \quad (9.30)$$

Il est assez surprenant de remarquer que cette dernière équation ne dépend plus de z_s . Pour $n = -3/2$, la correction est petite. On trouve

$$s_3^{\text{coupl}} = -1.24. \quad (9.31)$$

Un calcul plus réaliste est donné dans [Van Waerbeke *et al.*, 2001] et le résultat est évalué pour un spectre CDM en tenant compte des effets non-linéaires. Les résultats sont très similaires; la correction attendue est de l'ordre de 1. Ce résultat est négligeable comparé au s_3 pour l'effet de lentille sur le plan $z = 1$

$$s_3 = 42.3 \quad (9.32)$$

mais ce n'est plus le cas pour l'effet de lentille sur le rayonnement de fond

$$s_3 = 1.87. \quad (9.33)$$

Le couplage à deux plans lentilles est du même ordre de grandeur que le gauchissement induit par le régime quasi-linéaire. On ne peut donc pas le négliger dans notre simulation.

Le fait que l'on travaille déjà avec plusieurs plans lentille nous met dans une situation favorable pour simuler le couplage entre lentilles. L'équation (9.26) nous donne une méthode simple pour simuler un lancer de rayon et inclure les effets des couplages entre plans lentilles. Il suffit, pour ce faire, d'appliquer l'effet de lentille du premier plan sur le deuxième à l'aide de la technique présentée dans la première section. Ensuite, on calcule l'effet de lentille sur le plan source du plan lentille ainsi perturbé. L'effet total est alors la somme de l'effet du premier plan et du second plan perturbé par le premier. Il n'y a pas de difficulté technique majeure. La figure 9.5 donne un exemple d'une telle simulation. Dans le cas étudié sur la figure les deux lentilles (deux sphères isothermes à rayon de cœur) sont équidistantes sur la ligne de visée. L'image utilisée est une simple grille test.

Un dernier point reste à considérer. Nous n'avons pour l'instant utilisé que deux plans lentilles. Si nous voulons maintenant prendre en considération le couplage entre lentilles, il semble insuffisant de n'utiliser que ces deux plans. Qui plus est, nos deux plans ne sont pas également répartis en distance angulaire. Un plan peut donc être artificiellement amplifié par ce biais. On va donc plutôt découper le trajet jusqu'à la surface de dernière diffusion en intervalles égaux, afin de pouvoir simuler correctement l'effet du couplage entre lentilles.

9.3.5 Dernier raffinement : des simulations N-corps pour l'effet de lentille à petit décalage vers le rouge.

On l'a dit plus haut, la technique du lagrangien 2D possède une assez mauvaise précision pour les petites échelles. Le choix de découper en de nombreux intervalles le volume jusqu'à la surface de dernière diffusion va encore aggraver ce problème. En effet, à faible décalage vers le rouge, de nombreux objets, petits et compacts, vont être formés. La dynamique simplifiée que nous utilisons est particulièrement mal adaptée à ce régime.

On va avoir à faire à des zones où le jacobien peut s'annuler ; cela va créer de nombreuses divergences. À bas décalage vers le rouge et pour des tranches petites, ces divergences peuvent dominer l'effet de lentille. Ce problème se fait sentir jusqu'à des décalages vers le rouge de l'ordre de $z = 1.5$. Cela dépend de la vitesse de croissance des structures et donc du modèle.

Si seuls quelques points divergent, on peut envisager un schéma de coupure. Lorsque ces zones s'étendent, c'est tout simplement que l'approximation n'est plus valable, et c'est alors le schéma de coupure choisi qui va dominer la physique... Ce n'est certainement pas ce que l'on veut pour une simulation ! La solution que nous avons retenue a été de profiter de la disponibilité de simulations N-corps. En particulier, nous utilisons les simulations de Hamana et Colombi [Hamana *et al.*, 2001] qui nous fournissent nos premiers plans lentilles.

On profite par ce biais du meilleur des deux mondes. La très grande précision à petite échelle des simulations à N-corps, et la possibilité de simuler précisément des effets de lentille sur le rayonnement de fond, de manière cohérente avec l'effet de lentille à n'importe quel autre décalage vers le rouge. Qui plus est, on a pas besoin de disposer de simulation gourmande jusqu'à de très hauts décalages vers le rouge puisqu'on peut "remplir" la ligne de visée avec des cartes utilisant notre dynamique simplifiée. Évidemment, si l'on n'est pas intéressé par le couplage à plusieurs plans lentilles, un tel raffinement n'est pas nécessaire ; on peut utiliser des tranches plus grosses qui ne connaissent pas ces problèmes de divergence.

9.4 Résultats

9.4.1 Choix

Il a été choisi, en fonction des simulations de Colombi et Hamana, d'utiliser 34 plans de lentilles. Les simulations N-corps fournissent les 15 premiers plans. Chacun de ces plans

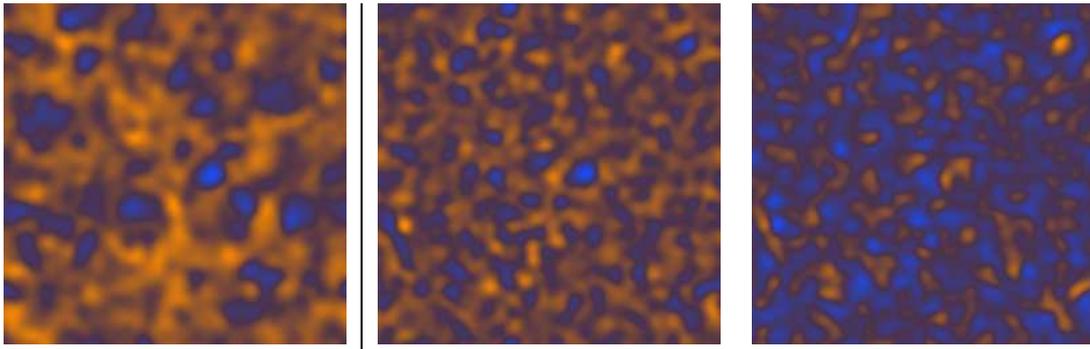


FIG. 9.6 – Des exemples de résultats. À gauche un champ de polarisation magnétique. À droite, les champs b_{Δ} et b_{∇} définis au chapitre 8. Les figures sont filtrées à $5'$. On retrouve des éléments caractéristiques entre les champs B et b_{Δ} . Le champ b_{∇} semble présenter moins de structures communes. Ce comportement est tout à fait attendu à cette échelle de filtrage (voir figure 7.2)

représente un carré de 5° de coté. Pour chacun des modèles traités par la simulation N-corps, on a créé 40 réalisations. Les simulation N-corps disposent de peu de réalisations. Néanmoins, en mélangeant ces réalisations et en translatant les cartes, on peut disposer de pseudo-réalisations permettant d'augmenter la variance. Ce jeu d'échange a cependant des limites. On n'est évidemment pas limité par contre par les simulations issues du Lagrangien 2D.

Pour chaque réalisation on a calculé l'effet de lentille avec couplage pour les plans à $z = 1$ et $z = 1000$. Il n'y a pas cependant de limitations particulières. On pourrait sans peine calculer l'effet de lentille pour un plan source à une position arbitraire, ou même pour un plan source épais.

Enfin, on a aussi synthétisé autant de cartes du rayonnement de fond et de sa polarisation avec les spectres adaptés aux modèles.

9.4.2 Résultats et perspectives

Les résultats de ces simulations sont actuellement en cours d'analyse. Je vais donc simplement donner ici quelques pistes que nous allons suivre.

Tout d'abord, le but principal de ces simulations sera de valider les résultats présentés dans les deux articles [van Waerbeke *et al.*, 2000a, Benabed *et al.*, 2001]. En particulier, un point important sera la détermination du signal sur bruit des observables étudiées. On montre figure 9.6 quelques cartes simulant nos mesures. On a dit chapitre 8 que ces rapports signal-sur-bruit n'avaient été qu'estimés. On a confiance dans ces estimations, mais une confirmation numérique serait la bienvenue. La prise en compte des non-linéarités ainsi que des corrections du deuxième ordre est importante pour cette détermination. Tout d'abord, on a vu que le régime non-linéaire avait tendance à augmenter le taux de corrélation r . On a montré plus haut que la variance cosmique de χ_{\parallel}^2 , par exemple était sensible à r et était d'autant plus petite que le taux s'approchait de 1. D'autre part, dans nos calculs de variance cosmique, nous avons négligé les termes de second ordre dans l'effet de lentille, dont nous pourrions avoir une idée par le biais de ces simulations. Les résultats préliminaires, au moins pour les observables sur la polarisation, laissent à penser que nos estimations analytiques étaient assez précises. Dans un second temps, on pourra rajouter une composante de bruit réaliste (reconstruction de l'effet de lentille, bruits spécifiques du rayonnement de fond et de sa polarisation) qui permettrons de valider nos propositions dans un contexte de mesure réaliste. Ces résultats seront

particulièrement intéressants dans l'optique de futures mesures avec l'instrument *Planck*.

Le deuxième but de ces simulations est l'étude de nouvelles observables sensibles aux corrélations croisées. On en a montré un exemple, chapitre 6, avec l'étude de la longueur des isothermes. Ce point précis est en cours d'étude sur les simulations. Les autres fonctionnelles de Minkowski seront aussi mesurées.

Enfin, on peut imaginer d'essayer de déterminer le gauchissement de l'effet de lentille sur le rayonnement de fond. Un terme comme $\langle \Delta B b_{\Delta}^g \kappa_g \rangle$, par exemple devrait fournir des informations sur le gauchissement de l'effet de lentille sur le rayonnement de fond. Un calcul naïf (très naïf) permet d'évaluer ce terme comme

$$\langle \Delta B b_{\Delta}^g \kappa_g \rangle \sim \langle \Delta E^2 \rangle \langle \kappa_g^2 \kappa \rangle + \text{termes de deuxième ordre de } \Delta B. \quad (9.34)$$

Le résultat sera un mélange d'effets de deuxième ordre du couplage des lentilles à la polarisation du rayonnement de fond, de termes perturbatifs du deuxième ordre du gauchissement de la distribution de κ et d'effets de couplage à plusieurs plans lentilles. Le calcul analytique est assez compliqué, et est vite limité par les approximations nécessaires à son déroulement (typiquement, on est amené à utiliser un spectre du contraste de densité en loi de puissance et à négliger l'effet des non-linéarités.) Les cartes synthétiques que notre simulation fournit permettent de tenir compte de tous ces effets et d'étudier précisément ce genre d'observables.

CHAPITRE 10

Grandes structures dans un scénario exotique

Sommaire

10.1 Quintessence	163
10.1.1 La constante cosmologique	163
10.1.2 Les problèmes de la constante	164
10.1.3 Cosmologie et exotisme	165
10.1.4 Un champ scalaire dans un potentiel	166
10.1.5 Cosmologie avec une quintessence	167
10.1.6 Potentiel Suiveur <i>tracking potential</i>	168
10.2 Phénoménologie de quelques modèles de quintessence	172

Je vais m'éloigner un peu de l'effet de lentille gravitationnelle sur le rayonnement de fond cosmique pour présenter une étude de quelques aspects de l'évolution des grandes structures dans le cadre d'un scénario exotique, la quintessence.

10.1 Quintessence

La quintessence est une théorie relativement récente dont le but est de donner une origine dynamique à la constante cosmique. Nous allons voir dans cette section pourquoi il peut être nécessaire de faire une telle modification au modèle. Par la suite, nous décrirons le cadre d'un modèle de quintessence minimal et nous présenterons une classe de modèles dits *suiveurs* qui remplissent les conditions du modèle minimal et qui a soulevé un intérêt grandissant ces dernières années.

10.1.1 La constante cosmologique

On a vu au premier chapitre que les équations d'Einstein pouvaient contenir un terme constant, que l'on nomme couramment constante cosmologique. Cette constante correspond à une densité d'énergie que l'on peut modéliser par un fluide parfait répulsif. Lorsque cette constante domine les équations d'Einstein, l'univers est alors dans une phase d'expansion accélérée. C'est ce qui se passe, par exemple, durant la période inflationnaire (voir un exemple chapitre 2).

Les cosmologues ont beaucoup débattu de la présence et de la valeur de cette constante. Suivant les "modes," elle est apparue ou a disparu des modèles¹. Récemment, les mesures de

¹J. Silk montre quelquefois, à l'occasion de séminaires sur le sujet, une courbe des valeurs de la constante cosmologique au cours du temps. La courbe est assez chaotique!

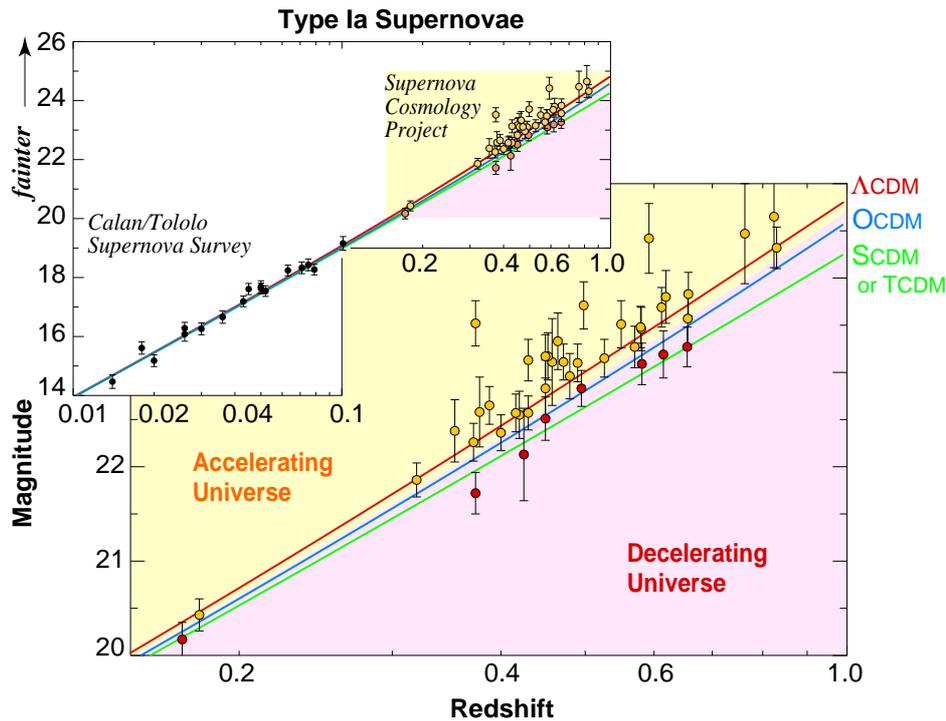


FIG. 10.1 – Les résultats des études de la relation luminosité/décalage vers le rouge avec les SNIa. La figure est tirée de [Bahcall *et al.*, 1999].

1998 et d'autres résultats apparus par la suite, sur les supernovæ de type Ia [Perlmutter *et al.*, 1998] [Bahcall *et al.*, 1999] [Perlmutter *et al.*, 1999] [Perlmutter *et al.*, 1999a] [Riess *et al.*, 1998] [Garnavich *et al.*, 1998b] [Garnavich *et al.*, 1998c], en conjonction avec les mesures du rayonnement de fond, ont donné des arguments forts en faveur de la présence d'une constante cosmologique.

Les expériences sur les supernovæ permettent de mesurer la fonction distance/décalage vers le rouge. Pour résumer très sommairement, les astronomes mesurent les courbes de luminosité et le décalage vers le rouge des supernovæ. En faisant l'hypothèse, qui n'est peut être pas totalement justifiée, que toutes les supernovæ de type Ia ont le même comportement, quelque soit leur environnement, on peut alors reconstruire la distance luminosité de ces étoiles. En pratiquant cet exercice pour des étoiles très proches et d'autres plus lointaines, on peut reconstruire la fonction distance/décalage vers le rouge, et donc l'accélération de l'univers.

Les résultats de ces expériences ont montré que, si l'on voulait un univers plat, comme le privilégie les mesures du rayonnement de fond, et sans faire d'hypothèses supplémentaires, la constante cosmologique devait contribuer pour les deux tiers de la densité d'énergie totale.

10.1.2 Les problèmes de la constante

Si l'on ajoute un terme de constante dans les équations d'Einstein, on doit résoudre un certain nombre de problèmes. Ainsi, il serait assez agréable d'expliquer la constante comme une manifestation de l'énergie du vide d'une théorie grande-unifiée ou d'une éventuelle théorie de gravité quantique. Cette énergie du vide apparaît dans les équations d'Einstein comme un terme de constante. Regardons par exemple la contribution de cette énergie du vide si l'unification a lieu aux alentours de la masse de Planck. On aboutit à une densité de l'ordre de

$$\rho_{\text{vide}} \sim 10^{74} \text{ GeV}^4.$$

Par ailleurs, si la constante cosmologique ne représente que les deux tiers de la densité d'énergie aujourd'hui, elle doit être de l'ordre de la densité critique, c'est-à-dire :

$$\rho_\Lambda \sim 10^{-47} \text{ GeV}^4.$$

Comment expliquer un pareil désaccord ? Une solution simple est de dire qu'en fait, il existe déjà un mécanisme, constante cosmologique nue, ou peut être un mécanisme spécial de cette gravité quantique que nous ne connaissons pas mais que nous sommes pourtant en train d'évoquer ici, qui permet de supprimer fortement l'énergie du vide gravitationnel.

Une fois encore, cette explication n'est pas complètement satisfaisante. Pourquoi un tel mécanisme n'annulerait l'énergie du vide qu'à 10^{120} près ! Si l'on peut imaginer qu'un effet physique puisse nous cacher la densité du vide gravitationnel, comment expliquer qu'il laisse néanmoins une composante de l'ordre de 10^{-47} GeV^4 ? On doit donc renoncer à expliquer l'origine de la constante cosmologique par l'énergie du vide, éventuellement écrantée.

Non seulement notre problème reste entier, mais il est même aggravé... En effet, après s'être livré à ces comparaisons de densité d'énergie, il est de plus en plus difficile de comprendre pourquoi la constante cosmologique peut bien avoir une valeur si peu comparable aux densités d'énergies "naturelles" de la physique des particules.

10.1.3 Cosmologie et exotisme

La physique des hautes énergies n'aime donc pas la constante cosmologique, et encore moins sa valeur [Weinberg, 1989]. En fait, on a véritablement un problème si l'on espère pouvoir décrire la cosmologie dans un contexte compatible avec une éventuelle théorie grand unifiée. Dans les hypothèses faites au premier chapitre, on a implicitement admis que cela était possible.

Pour résoudre ce problème, on va être amené à rajouter un ingrédient supplémentaire au modèle. Il faut garder à l'esprit que cette solution n'est peut être que la traduction d'un problème plus profond... On est peut être en train de rajouter des épicycles à notre description pour sauvegarder un modèle faux. Même si c'est le cas, il n'est pas moins intéressant d'étudier les conséquences de cet ajout. Qu'il se trouve en contradiction avec les observations, ou qu'il oblige à des modifications trop peu *naturelles* du modèle et il sera peut être le germe de nouvelles idées²... Si, ce serait encore mieux, il est en bon accord avec les expériences, la cosmologie apprendra à vivre avec !

On a vu, chapitre 2, comment un champ scalaire pouvait mimer l'action d'une constante cosmique pour accélérer l'expansion. On va reprendre cette idée pour la quintessence... Pour expliquer la valeur de la constante cosmologique, nous allons postuler que celle-ci est le résultat de l'évolution d'un fluide. On a donc plus de constante à proprement parler, mais un nouveau composant de l'univers dont la dynamique l'amènerait dans un état proche d'une constante. On nomme³ ce fluide quintessence (la cinquième densité d'énergie du modèle), ou encore énergie sombre (par analogie à la matière noire). Cette idée a été plusieurs fois proposée par le passé (voir [Sahni & Starobinsky, 2000] pour une revue sur le sujet). Il a véritablement pris son essor ces dernières années avec les papiers de Steinhardt [Caldwell *et al.*, 1998] [Steinhardt *et al.*, 1999].

Dans l'hypothèse minimale on va prendre un fluide parfait d'équation d'état ω_Q . Ce modèle minimal a aussi été étudié par les chercheurs à la lumière des supernovæ ! Une telle hypothèse est compatible avec leur résultats. On montre, figure 10.2, la zone dans laquelle le paramètre ω_Q peut se trouver.

²et pas nécessairement seulement en cosmologie, le problème vient de la physique des hautes énergies après tout !

³principalement pour des raisons... *publicitaires*. Une *constante dynamique* ne sonne pas bien...

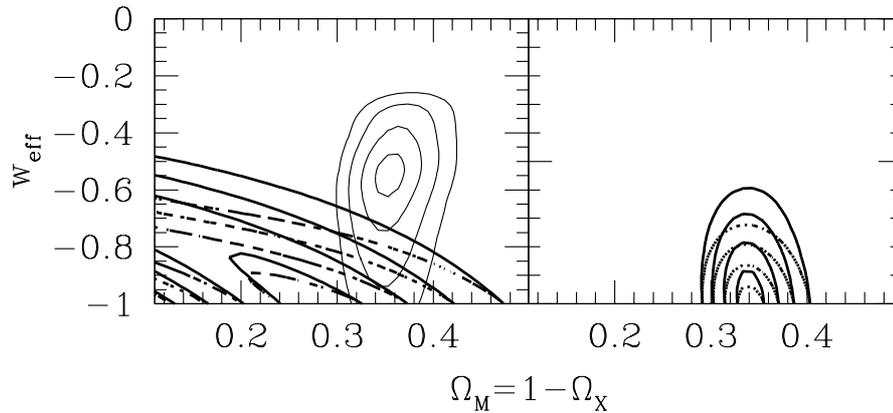


FIG. 10.2 – Contraintes dans le plan (Ω_0, ω_Q) du scénario ω_Q constant. . La figure de gauche donne en traits forts les contraintes des supernovæ, en trait fin, les contraintes tirées du rayonnement de fond. À gauche, est présentée la somme de ces deux contraintes. La figure est tirée de [Perlmutter *et al.*, 1999]. Ce genre de graphe est cependant à considérer d'un esprit très critique. En effet, pour les contraintes tirées du rayonnement de fond, les auteurs n'ont autorisé que des variations des paramètres Ω_0 et ω_Q . Du fait des dégénéscences dans le spectre du rayonnement de fond, la contrainte présentée est beaucoup moins forte si l'on autorise maintenant les variations de tous les autres paramètres.

Néanmoins, si cette hypothèse minimale explique la valeur actuelle de la constante cosmologique, elle ne donne aucune explication sur la valeur dans le passé du fluide! Pour expliquer les mesures et donc l'ajustement fin de la valeur de la constante on a renvoyé dans le passé le problème... Avec l'évolution minimale que l'on s'est donné, il faut maintenant expliquer un ajustement fin, pas beaucoup plus justifié, à une époque lointaine. Qui plus est, il faut aussi maintenant expliquer la valeur du paramètre d'équation d'état ω_Q ... On peut difficilement considérer cette hypothèse minimale comme une brillante solution à notre problème!

10.1.4 Un champ scalaire dans un potentiel

Allons au-delà de cette hypothèse minimale. La quintessence est maintenant un fluide quelconque. Pour simplifier, on va décider que ce fluide se comporte comme un champ scalaire dont l'évolution est donnée par un potentiel. Cette démarche ressemble beaucoup à celle suivie pour la théorie de l'inflation, chapitre 2. De fait, l'accélération actuelle de l'univers, la quasi-dominance de l'évolution par une pseudo-constante cosmique ressemble énormément à la phase inflationnaire. À la différence de celle-ci toutefois, la quintessence ne domine pas encore l'évolution de l'univers, et surtout, la majeure partie de son évolution s'est faite alors que cette composante était dominée.

Le problème est de construire un potentiel qui satisfasse de nombreuses contraintes :

- Être en accord avec les données! C'est le moins que l'on puisse demander à notre modèle. Il faut que la densité d'énergie de notre fluide aujourd'hui corresponde à $\Omega_Q = 0.7$ et que son équation d'état soit compatible avec la région non exclue par les mesures sur les SNIa. Cette dernière contrainte est tout de même assez souple. Les résultats des SNIa ont été étudiés dans le contexte du modèle minimal. La vraie contrainte en fait, est que l'évolution de l'univers, avec ce nouvel ingrédient, conduise à la relation distance/décalage vers le rouge mesurée.
- Expliquer pourquoi la quintessence ne domine qu'aujourd'hui. En fait, le problème n'est

pas tant que la constante, ou la quintessence, ne domine qu'aujourd'hui ; il faut surtout qu'elle n'ait pas dominé avant. En effet, il a été montré [Bean *et al.*, 2001] que la nucléosynthèse était très sensible à une modification du contenu de l'univers. Pour ne pas remettre en question ce que l'on sait sur l'univers, il faut donc, non seulement que la quintessence mime une constante cosmologique aujourd'hui, mais aussi qu'elle n'ait jamais été dominante avant. Il existe des modèles qui ne respectent pas cette dernière condition mais qui arrivent à jongler avec les contraintes de la nucléosynthèse pour ne pas trop modifier ses prédictions [Dodelson *et al.*, 2000].

- Résoudre les problèmes d'ajustement fin. Si l'on a abandonné le modèle minimal, c'est avant tout parce qu'il ne résolvait pas notre problème d'ajustement fin du début. Il faut donc que notre potentiel donne une évolution telle que les conditions initiales ne soient pas trop déterminantes. En particulier, on souhaiterait qu'avec des conditions initiales "raisonnables" l'évolution de la quintessence amène le fluide à satisfaire notre première contrainte. Le terme de "raisonnable" au dessus est pour le moins flou ! Il doit s'entendre comme "compatible avec les densités d'énergies typiques de la physique des particules." Cela ne clarifie pas vraiment la situation, malheureusement ! La contrainte que nous imposerons sera donc que des énergies initiales entre le TeV et le GeV soient possibles.
- Être implémentable dans un contexte de physique des hautes énergies. Les problèmes de la constante cosmologique sont avant tout des interrogations issues de la physique des hautes énergies. Si l'on souhaite résoudre complètement ces problèmes, il faut pouvoir le faire dans le contexte de la physique des hautes énergies.

Je ne discuterai pas plus avant cette dernière contrainte. Des modèles de quintessence ont été proposés dans de nombreux contextes *réalistes* du point de vue de la physique des particules. Les lagrangiens de super-symétrie ou de théories effectives de cordes fourmillent de directions plates, de condensats exotiques, de champs et de potentiels... On laissera aux physiciens des hautes énergies le soin de décider du *naturel* de ces modèles. Ce qui m'intéressera beaucoup plus dans la suite, c'est de voir à quel point les prédictions de ces modèles sont compatibles avec ce que l'on sait de l'univers.

10.1.5 Cosmologie avec une quintessence

Supposons donc que l'on a un potentiel V qui satisfasse notre dernière contrainte. On va calculer les équations de Friedmann (1.11-1.12) pour un univers avec quintessence. Comme pour l'inflation, la quintessence obéit à l'équation de Klein-Gordon (2.7)

$$\ddot{Q} - \frac{1}{a^2} \partial_i \partial^i Q + 3H\dot{Q} = -\frac{dV}{dQ}. \quad (10.1)$$

On négligera dans la suite les variations spatiales du champ de quintessence. Celles-ci peuvent *a priori* jouer un rôle et induire, par leur couplage gravitationnel des fluctuations dans la métrique. Cependant, les fluctuations d'échelles plus petites que l'horizon décroissent. La quintessence ne peut donc avoir d'effet que pour les modes super-horizon [Ferreira & Joyce, 1997, Ferreira & Joyce, 1998]. On ne les prendra pas en compte dans la suite de l'exposé. On rappelle que la pression et la densité du champ sont donnés par

$$\rho_Q = \frac{1}{2} \dot{Q}^2 + V(Q) \text{ et } P_Q = \frac{1}{2} \dot{Q}^2 - V(Q). \quad (10.2)$$

Le paramètre d'équation d'état ω_Q est donné par

$$\omega_Q \equiv \frac{P_Q}{\rho_Q}. \quad (10.3)$$

Il n'a pas de raison d'être constant. Suivant la dynamique de la quintessence, il peut varier de -1 à 1 . Lorsque le champ est dans un état similaire au *slow-roll* de l'inflation (voir section 2.2.3), ou plus simplement lorsque le champ est arrêté dans un minimum local de son potentiel, la quintessence se comporte comme une constante cosmologique. L'équation d'état est fixe et $\omega_Q \sim -1$. Si, par contre, l'énergie cinétique domine, par exemple, si les conditions initiales imposent une vitesse initiale grande, le champ varie vite et son équation d'état est $\omega_Q = 1$. On peut aussi définir un paramètre cosmologique pour Q ,

$$\Omega_Q \equiv \kappa \frac{\frac{1}{2}\dot{Q}^2 + V(Q)}{3H^2}. \quad (10.4)$$

On souhaite que la dynamique du champ soit telle que $\Omega_Q^0 = 0.7$.

Avec la quintessence les équations de Friedmann s'écrivent

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{Q}^2 + V(\phi) \right) + H_0^2 \Omega_K^0 a^{-2} + H_0^2 \sum_0 \Omega_X^0 a^{-3(1+\omega_X)} \quad (10.5)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa}{2} \left(\dot{Q}^2 \right) - \frac{3}{2} H_0^2 \sum_X (1 + \omega_X) \Omega_X^0 a^{-3(1+\omega_X)}. \quad (10.6)$$

Dans ces équations, X parcourt les différentes espèces : photons, neutrinos, matière noire et baryons. On n'utilise pas le paramètre cosmologique dans ces dernières équations ; l'équation d'état n'étant pas constante, il serait assez artificiel d'écrire la contribution de la densité de quintessence aux équations de Friedmann sous la forme

$$\Omega_Q^0 a^{-3(1+\omega_Q)}. \quad (10.7)$$

10.1.6 Potentiel Suiveur *tracking potential*

Il faut maintenant spécifier le potentiel. La recherche de potentiels dans le cadre des théories de physique des hautes énergies, est une industrie florissante ! Plutôt que d'étudier un modèle particulier, je vais présenter une classe de modèles avec *Potentiel suiveur (tracking potential)*.

Dans cette classe de modèles, le potentiel est tel que lorsque la quintessence est dominée, il existe une trajectoire attractrice sur laquelle l'équation d'état est constante. Ces modèles et leur propriétés génériques ont été particulièrement décrits par P. Steinhardt, L.Wang et I. Zlatev [Steinhardt *et al.*, 1999]. On va présenter les propriétés des modèles suiveurs en prenant l'exemple d'un des plus simples qui a été proposé pour la première fois par B. Ratra et P. Peebles [Ratra & Peebles, 1988], le potentiel en loi de puissance inverse

$$V(Q) = \frac{\Lambda^{4+\alpha}}{Q^\alpha}. \quad (10.8)$$

On va tout d'abord rechercher la trajectoire du champ Q lorsque celui-ci ne domine pas l'évolution. Supposons donc que l'espèce dominante ait pour équation d'état ω_B . Le paramètre de Hubble suit alors la loi

$$H \propto a^{-\frac{3}{2}(1+\omega_B)}. \quad (10.9)$$

On va maintenant chercher une solution pour Q telle que $\rho_Q \propto a^{-3(1+\omega_Q)}$, avec ω_Q constant. Rappelons que la densité est donnée par l'équation 10.2. En dérivant cette équation par rapport au temps, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_Q &= \dot{Q} \left(\ddot{Q} + \frac{dV}{dQ} \right) = -3H\dot{Q}^2 \\ &= H \rho. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Donc, on connaît le comportement en a de Q , \dot{Q} et \ddot{Q}

$$\ddot{Q} \propto a^{-\frac{3}{2}(2+\omega_Q+\omega_B)} \quad (10.11)$$

$$\dot{Q} \propto a^{-\frac{3}{2}(1+\omega_Q)} \quad (10.12)$$

$$Q \propto a^{-\frac{3}{2}(\omega_Q-\omega_B)}. \quad (10.13)$$

Il suffit maintenant d'écrire l'équation (10.1) pour déterminer ω_Q en imposant que toutes les puissances de a soient les mêmes

$$-\frac{3}{2}(2+\omega_Q+\omega_B) = \frac{3}{2}(\alpha+1)(\omega_Q-\omega_B). \quad (10.14)$$

Le paramètre d'équation d'état de la quintessence est donc complètement déterminé par la puissance du potentiel et l'évolution imposée par le fluide dominant

$$\omega_Q = \frac{\alpha\omega_B - 2}{2 + \alpha}. \quad (10.15)$$

On va admettre pour l'instant que cette solution est bien attractrice. On le démontrera rigoureusement un peu plus loin. Le champ, une fois sur sa solution attractrice, est sur des rails. Tant qu'il ne domine pas la densité d'énergie, il ne peut dévier de sa trajectoire. Lorsque la quintessence commence à être de l'ordre de la densité critique, on est assuré, si son potentiel est *suiveur* et qu'elle a rejoint sa solution, d'avoir toujours les mêmes paramètres d'approche de l'ère de domination de la constante. On a complètement gommé les "vraies" conditions initiales. La valeur finale du champ est donc donnée par la normalisation de la solution attractrice. Elle se calcule simplement

$$\alpha \frac{\Lambda^{4+\alpha}}{Q_0^{\alpha+2}} \frac{1}{H_0^2} = \frac{9}{2} \frac{1 - \omega_B^2}{\alpha + 2}. \quad (10.16)$$

Au final, le seul ajustement de Λ , la normalisation du potentiel suffit à déterminer la valeur de Ω_Q aujourd'hui. On peut montrer cependant que cet ajustement est assez difficile [Brax & Martin, 2000]. En suivant simplement l'attracteur, on peut montrer que

$$\frac{\delta\Lambda}{\Lambda} = \frac{1}{\alpha + 4} \frac{\delta\Omega_Q}{\Omega_Q}. \quad (10.17)$$

Lorsque α est grand, de très faibles variations de Λ suffisent à balayer de larges régions de Ω_Q . En cela, on ne résout pas complètement le problème d'ajustement fin. On le déplace de la normalisation du champ, vers la normalisation du potentiel. Il faut alors faire le *voeu pieux* que la physique des hautes énergies réussisse à expliquer de manière satisfaisante la normalisation du potentiel...

La valeur du paramètre d'équation d'état aussi est importante. On a dit plus haut que les mesures de SNIa favorisaient une équation d'état $\omega_Q < -0.7$. Cette contrainte n'est valable que pour les modèles minimaux pour lesquels l'équation d'état est constante, au moins jusqu'aux supernovæ observées. Dans le cas d'un potentiel réaliste, cette contrainte est assez mal définie. On pourrait la traduire par une moyenne du paramètre ω_Q sur la région sondée. Cependant, lorsque le potentiel quitte l'attracteur, l'équation d'état peut subir des variations assez fortes (voir figure 10.1). Rien ne permet d'affirmer que la relation distance/décalage vers le rouge pour une cosmologie avec une quintessence réaliste et un paramètre d'état variant fortement est identique à celle d'une cosmologie avec quintessence minimale ayant pour équation d'état la moyenne de l'évolution réaliste. La contrainte doit donc être prise comme assez permissive, du moins tant que les mesures de supernovæ n'auront pas été étudiées dans le cadre d'un

modèle non minimal⁴. Le modèle de Ratra-Peebles donne des résultats peu satisfaisants. Le paramètre d'équation d'état est entre $\omega_Q = -0.63$ et $\omega_Q = -0.29$ lorsque la puissance α varie entre 2 et 11 [Brax & Martin, 2000].

Étudions maintenant la stabilité de la solution que nous avons supposée attractrice. On perturbe Q autour de sa solution Q_{att}

$$Q = Q_{\text{att}} + \delta Q. \quad (10.18)$$

Après avoir supprimé la solution attractrice, l'équation (10.1) devient pour la perturbation

$$\delta\ddot{Q} + 3H\delta\dot{Q} + \frac{d^2V}{dQ^2}(Q_{\text{att}})\delta Q = 0. \quad (10.19)$$

On change de coordonnée, pour se ramener à une équation différentielle en a

$$\delta Q'' + \frac{5 - 3\omega_B}{2} \frac{1}{a} \delta Q' + \frac{\Lambda^{4+\alpha}}{Q_0^{\alpha+2}} \frac{\alpha(\alpha+1)}{H_0^2} \frac{1}{a^2} \delta Q = 0. \quad (10.20)$$

En utilisant la normalisation (10.16) dans l'équation différentielle (10.20), on obtient une solution en $\delta Q \propto a^p$ ou p est solution du trinôme

$$p^2 + \frac{3}{2}(1 - \omega_B)p + \frac{9}{2} \frac{\alpha+1}{\alpha+2} (1 - \omega_B^2) = 0. \quad (10.21)$$

Il est simple de vérifier alors que lorsque ω_B est compris entre 0 et 1 et que α est positif, le déterminant du trinôme est négatif. La partie entière des solutions est donnée par $3(\omega_B - 1)/2$ qui est toujours négatif. La perturbation subit donc des oscillations amorties avant de tendre vers 0. La solution Q_{att} est donc bien une solution attractrice.

On sait maintenant prédire l'évolution d'un champ Q lâché avec des conditions initiales quelconques. Si il est sur la solution, pas de problème! Si les conditions initiales sont telles que l'énergie cinétique domine l'énergie potentielle, le champ se comporte comme un fluide d'équation d'état $\omega_Q = 1$. Sa densité d'énergie va baisser très vite. En fait, si on néglige le terme potentiel dans l'équation (10.1), on aboutit à une décroissance exponentielle de l'énergie cinétique. Cette chute se poursuit jusqu'à l'attracteur. À ce moment là, le terme potentiel n'est plus négligeable. L'énergie cinétique continue encore à décroître exponentiellement. Le paramètre d'équation d'état va donc sauter vers celui d'une constante cosmologique $\omega_Q = -1$. Le terme potentiel va maintenant réinjecter de la puissance dans le terme cinétique, via l'équation d'évolution (10.1) et le champ scalaire va s'approcher doucement de la solution attractrice. En fait, on a simplement décrit ici les oscillations de la perturbation δQ calculés plus haut!

Si maintenant les conditions initiales sont telles que l'énergie potentielle domine sur l'énergie cinétique, seule la dernière partie de l'évolution décrite au-dessus va se dérouler. La figure 10.3 donne ces deux exemples d'évolutions.

On comprend pourquoi le modèle suiveur va pouvoir admettre une très grande plage de conditions initiales différentes, à condition toutefois que le temps d'oscillation, pour rejoindre la solution attractrice soit suffisamment court. Plus α va être petit, plus le déterminant du trinôme va être petit et plus les temps d'oscillation vont être longs.

On a vérifié sur un modèle particulier l'existence d'une solution attractrice. Dans l'étude citée plus haut [Steinhardt *et al.*, 1999], les auteurs ont défini dans quelles conditions un potentiel

⁴notons que le modèle minimal peut être obtenu à partir d'un champ scalaire en choisissant bien le potentiel! Cela a été fait par V. Sahni et A. Starobinsky [Sahni & Starobinsky, 2000]. Le potentiel est assez compliqué et uniquement motivé par la volonté d'obtenir un fluide d'équation d'état constante.

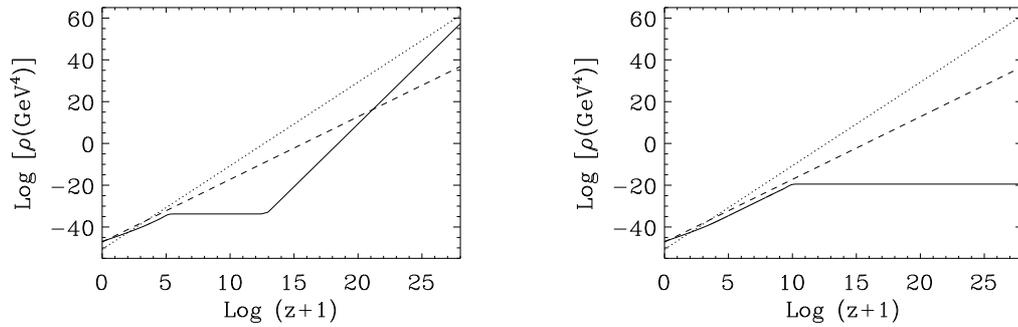


FIG. 10.3 – Évolutions des densités d'énergie de la matière (tirets), du rayonnement (pointillés) et de la quintessence pour deux conditions initiales différentes. La figure de gauche correspond à des conditions initiales au dessus de l'attracteur, celle de droite au-dessous. Les figures sont tirées de [Brax & Martin, 2000]

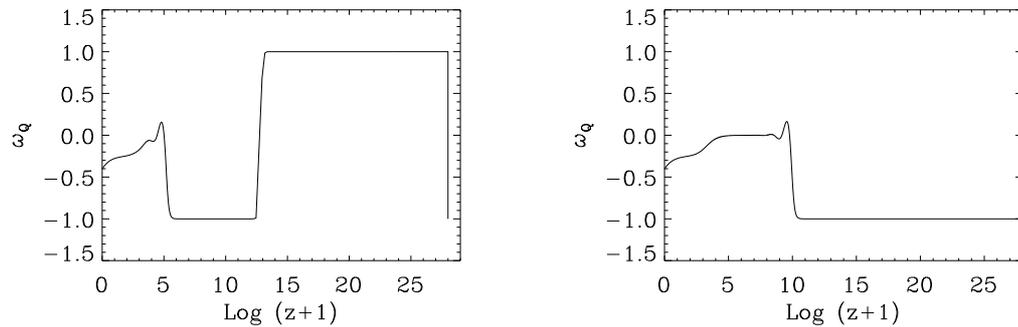


FIG. 10.4 – Évolution de l'équation d'état de la quintessence pour deux conditions initiales différentes. Mêmes remarques que pour la figure 10.3.

quelconque présentait ce genre de solution. En gros, un potentiel suiveur doit avoir la particularité de ressembler fortement dans une région suffisamment grande, à la loi de puissance inverse que nous avons étudiée. On peut formaliser cette condition en imposant au potentiel de vérifier

$$\Gamma \equiv \frac{\frac{d^2V}{dQ^2}V}{\left(\frac{dV}{dQ}\right)^2} > 1 \quad (10.22)$$

$$\left| \frac{1}{H}\Gamma \dot{} - 1 \right| \ll |\Gamma - 1|. \quad (10.23)$$

Le paramètre Γ s'identifie facilement à la puissance du potentiel de Ratra-Peebles

$$\Gamma - 1 = \frac{1}{\alpha}, \quad (10.24)$$

et l'on sait évaluer le paramètre d'équation d'état du champ dans son régime suiveur

$$\omega_Q \sim \frac{\omega_B - 2(\Gamma - 1)}{1 + 2(\Gamma - 1)}. \quad (10.25)$$

10.2 Phénoménologie de quelques modèles de quintessence

Dans l'article [Benabed & Bernardeau, 2001] qui va suivre, on s'est intéressé aux conséquences phénoménologiques de quelques modèles de quintessence avec potentiel suiveur. On regardera principalement l'effet de l'ajout d'une composante quintessentielle à la croissance des grandes structures. On donnera ici les modifications attendues sur la croissance linéaire, le premier ordre non-linéaire et le régime profondément non-linéaire dans le cadre de l'Ansatz de Hamilton *et al.*. On tirera aussi quelques conclusions sur les fenêtres observationnelles ouvertes par l'effet de lentille gravitationnelle sur ces phénomènes. Cet article a fait l'objet d'une publication dans la revue *Physical Review D*.

PHYSICAL REVIEW D, VOLUME 64, 083501

Testing quintessence models with large-scale structure growth

K. Benabed and F. Bernardeau

Service de Physique Théorique, CE de Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

(Received 23 April 2001; published 18 September 2001)

We explore the possibility of putting constraints on quintessence models with large-scale structure observations. In particular, we compute the linear and second order growth rate of the fluctuations in different flavors of quintessence scenarios. We show that effective models of quintessence (e.g., with a constant equation of state) do not account for the results found in more realistic scenarios. The impact of these results on observational quantities such as the shape of the nonlinear power spectrum in weak lensing surveys or the skewness of the convergence field is investigated. It appears that the observational signature of quintessence models is specific and rather large. The effects clearly cannot be mistaken for a change of Ω_0 .

DOI: 10.1103/PhysRevD.64.083501

PACS number(s): 98.80.Cq, 98.62.Sb, 98.65.Dx

I. INTRODUCTION

The recent evidence in favor of a nonzero cosmological constant [1–9] has led to the development of alternative scenarios to explain such a nonzero vacuum energy density [10]. In particular, models involving the so-called quintessence have attracted attention from the high-energy physics community [11–17]. Indeed, in such models the vacuum energy density is due to the potential and kinetic energy of a scalar field rolling down its potential. Various models have been proposed. The simplest implementation of such models, widely used in the literature, is to introduce an *effective* quintessence with a constant equation of state [11]. More elaborate theories provide potentials that exhibit a tracking solution regime as long as the energy density of the quintessence field is subdominant [13]. This behavior is generically encountered in the Ratra-Peebles [17] model in which the quintessence potential is a simple inverse power of the field. Other models inspired by high-energy physics have also been shown to exhibit this remarkable property [14–16].

The presence of a quintessence field changes the energy content of the universe and therefore alters its global expansion rate. It is then natural to try to detect the signature of a nonstandard vacuum equation of state through its impact upon the distance-luminosity function, which can be revealed by supernova type Ia (SNIa) observations [18–20]. It has been found, however, that the precision with which the vacuum equation of state can be measured depends crucially on whether priors are assumed on the other cosmological parameters, in particular on the matter content of the Universe. This calls for a reexamination of the theoretical foundations upon which precision methods for determination of the cosmic density are based.

The cosmic microwave background (CMB) anisotropy power spectrum has been recognized as a gold mine for the determination of cosmological parameters. It is actually a very valuable method for measuring the global curvature of the Universe [1] (through the value of the angular distance of the last scattering surface) but it suffers from an unavoidable parameter degeneracy [21,22] so that Ω_0 cannot be determined alone.

The impact of quintessence models on the properties of the CMB as well as on the primordial density contrast power

spectrum has nonetheless been studied in different models: the *effective* quintessence (with the extra shortcoming that the possible fluctuations of the quintessence field were neglected) as well as some high-energy physics tracking *potentials* [14,23]. It has been found that at the redshift of recombination the dark energy fluid is subdominant and has only significant superhorizon fluctuations. Quintessence effects appear, therefore, only as a modest change of the Sachs-Wolfe plateau, an effect difficult to detect unambiguously because of the size of the cosmic variance.

It has been shown, however, that although the intrinsic properties of CMB anisotropies fail to provide an unambiguous test of quintessence, its existence can be shown by the amplitude of the density fluctuations on the last scattering surface compared to those at low redshift. This can be done, for instance, with the help of galaxy cluster counts [24,25] or with weak lensing measurements [26,27].

In all cases, however, direct constraints on Ω_0 that would help to disentangle models rely on analysis of the local universe properties. The matter content of galaxy clusters or their number density evolution [24,28] can provide useful constraints. Unfortunately these methods depend on non-trivial modeling of cluster properties such as x-ray luminosity or temperature-mass relations. It is therefore unlikely that they can provide accurate constraints on Ω_0 with a well controlled level of systematics.

New methods, based on weak lensing observations, are now emerging that are in principle free of elaborate physical modeling. The proposed means for constraining Ω_0 are based on the rate at which nonlinear effects start to play a role in the cosmic density field. Fundamentally, two ideas have been followed. One is based on the nonlinear evolution of the shape of the power spectrum [29] and preliminary results have already been reported in this case [27]. It relies on some specific class of models, namely, some flavor of cold dark matter (CDM) model (the shape of the nonlinear power spectrum obviously depends on what is assumed for the linear one). The other method, proposed in [30], is more demanding on the observation side but is based on the sole assumption that the initial conditions were Gaussian. It relies on the direct detection of non-Gaussian properties of the density field. In particular, it has been shown that the large-scale convergence skewness can be used to measure Ω_0 . Exact

K. BENABED AND F. BERNARDEAU

PHYSICAL REVIEW D **64** 083501

results obtained via second order perturbation theory have been obtained for models with or without a cosmological constant. It is then crucial to know whether these results would be affected in the case of quintessential dark energy.

The aim of this paper is therefore to examine the growth of structure in both the linear and the nonlinear regimes. To illustrate our results and their robustness we consider various realistic models of quintessence. So far the evolution of large-scale structure has been studied only with effective quintessence [11,31,32] and we will see that it does not provide a realistic account of what is happening in explicit models of quintessence.

This paper is divided as follows. In Sec. II we describe the models we use and in particular the evolution of the vacuum equation of state they imply. In Sec. III the results for the linear and second order growth rates are presented. Implications of these results are discussed in Sec. IV for the nonlinear power spectrum.

II. THE QUINTESSENCE MODELS

We postulate that the content of the universe includes a scalar field Q of potential V . This scalar field is responsible for the dark energy we observe today and is usually described as a cosmological constant. Its motion equation is given by the Klein-Gordon equation

$$\ddot{Q} + 3H\dot{Q} = -\frac{\partial V}{\partial Q} \quad (1)$$

and it contributes to the energy and pressure terms with

$$\begin{aligned} \rho_Q &= V(Q) + \frac{1}{2}\dot{Q}^2, \\ p_Q &= -V(Q) + \frac{1}{2}\dot{Q}^2. \end{aligned} \quad (2)$$

The equation of state of the dark energy

$$p_Q = \omega_Q \rho_Q \quad (3)$$

is *a priori* no longer characterized by a constant $\omega_Q = -1$ parameter. It can vary from $\omega_Q = -1$ when the dynamics of the field is dominated by its potential, to $\omega_Q = 1$, when the kinetic energy dominates. In all the models we will consider, the parameters will be chosen so that $\Omega_0 = 0.3$ and $\Omega_Q = 0.7$ today, unless otherwise mentioned.

In the following we focus our analysis on two models with tracking solutions that provide explicit time dependency of the equation of state, the Ratra-Peebles model [17] and the model developed by Brax and Martin in which the potential shape incorporates generic supergravity factors [15,16]. In this section we succinctly review the properties of the effective, Ratra-Peebles, and supergravity (SUGRA) quintessence models and compute the resulting equation of state of the Universe in these models.

A. Effective quintessence

Models of effective quintessence are the simplest implementations of a nontrivial vacuum equation of state. It is simply assumed that the equation of state parameter is fixed and represents an average value of a cosmic component following a complex evolution (whether or not it is a quintessence field). Considered as a simplified version of a quintessence model, this is a valid approach if, for some reason, the kinetic energy and the potential are almost constant and of the same order. This condition (which is *not* the slow-roll condition where the kinetic energy is much smaller than the potential) seems unlikely to be satisfied in a realistic framework. We will nonetheless compare realistic models with this approximation to show its impact on observed quantities.

B. Tracking quintessence

In a very wide class of quintessence models the field dynamics exhibits a tracking solution. It is such that the evolution of the dark energy, during radiation and matter domination, is completely determined by the potential shape regardless of the initial conditions.¹ In other words, the only tuning required to reproduce today's observations is the energy scale of the potential. Eventually, this scale will have to be explained by high-energy physics computations. While this task seems insuperable in the case of a pure cosmological constant, it might be within theoretical grasp for tracking quintessence [13,33].

The phenomenological properties of this class of models can be summarized through the time evolution of the cosmic equation of state. The detailed behavior of the field in the first stages of its evolution depends on the initial conditions. If initially ρ_Q represents a fair fraction of the cosmic energy density, the field Q rolls quickly down its potential so that the quintessence energy density is purely kinetic. It is slowed by the expansion until it freezes at a value larger than the one corresponding to the tracking solution. The value of the field then remains constant—the quintessence energy density is purely potential—until it coincides with the attractor solution. Once on the attractor solution, the equation of state parameter of the quintessence field takes a value that depends only on the shape of the potential and on the equation of state of the dominant species of the universe (it therefore changes at equivalence). When the energy density of the field starts to dominate, the field follows an inflationary type slow-roll solution whose equation of state is approaching $\omega_Q = -1$. These behaviors are displayed on Fig. 1 for the potentials we adopted. The time at which the tracking solution is reached is completely arbitrary and has no effect on the quantities we consider in the following.

Our analysis will be done for two tracking models.

First is the Ratra-Peebles model [17] whose potential is

$$V_{\text{RP}}(Q) = \frac{M^{4+\alpha}}{Q^\alpha} \quad (4)$$

¹Over hundred orders of magnitude.

TESTING QUINTESSENCE MODELS WITH LARGE-...

PHYSICAL REVIEW D 64 083501

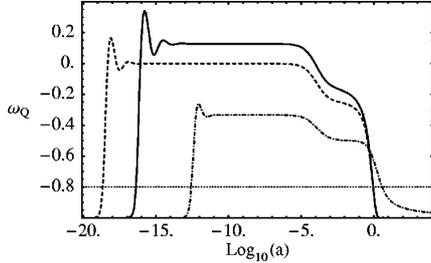


FIG. 1. The evolution of the vacuum equation of state as a function of the expansion parameter a for different cosmological models. The dotted line corresponds to a vacuum equation of state, $p = -0.8\rho$; the dot-dashed line to a Ratra-Peebles solution with $\alpha = 2$; the dashed line to a SUGRA behavior with $\alpha = 6$; and the solid line to a SUGRA model with $\alpha = 11$. The amplitude of the quintessence potentials is such that $\Omega_{\text{matter}} = 0.3$ at $z = 0$ in all cases.

and which is the simplest model exhibiting a tracking solution. In particular, it is very hard, with this potential, to get an equation of state $\omega_Q < -0.7$ while keeping a reasonable energy normalization for M (from the high-energy physics point of view) if $\Omega_\Lambda = 0.7$ today. Note that for such a potential the vacuum equation of state of the attractor solution is given by

$$\omega_Q = \frac{-2 + \alpha \omega_B}{\alpha + 2} \quad (5)$$

where ω_B is the equation of state parameter of the background fluid ($1/3$ for a radiation dominated universe, 0 for a matter dominated universe). In the following we will consider the case $\alpha = 2$, which gives $\omega_Q \sim -0.6$ today, marginally consistent with the supernovae observations although it leads to an unrealistic low-energy scale for M .

Second, we consider the SUGRA model, proposed by Brax and Martin [16,15], whose potential is

$$V_{\text{Sugra}}(Q) = \frac{M^{4+\alpha}}{Q^\alpha} \exp\left[4\pi \frac{Q^2}{M_{\text{Planck}}^2}\right]. \quad (6)$$

The corrective factor is motivated by the fact that, in the Ratra-Peebles scenario, the field naturally reaches the Planck scale at low redshift. If the quintessence potential is to be derived from models beyond the standard model of particle physics that are expected to include supergravity properties, it is natural to expect supergravity corrections in the shape of the potential. The potential Brax and Martin proposed is actually an extension of the Ratra-Peebles potential, with a generic supergravity correction (the exponential term). This last model is of particular interest since its predictions are in good agreement, for a wide range of parameters, with the SNIa measurements. We studied here two examples of this potential, $\alpha = 6$ and $\alpha = 11$, which both lead to the equation of state $\omega_Q \sim -0.8$ at zero redshift. These choices of parameter lead to an energy scale M from 10^6 to 10^{11} GeV, which does not contradict our knowledge of high-energy physics.

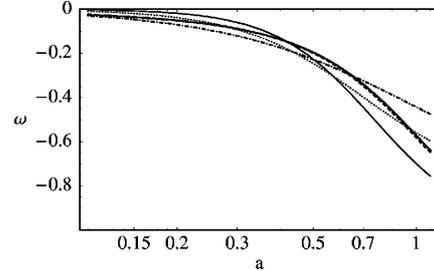


FIG. 2. The evolution of the global cosmic equation of state as a function of the expansion parameter a for different cosmological models for a redshift range $z = 0$ to 10 . Same convention as Fig. 1 with thin solid line corresponding to a pure cosmological constant such that $\Omega_\Lambda = 0.7$ at $z = 0$.

The two models have the same tracking solution and the equation of state parameter on it is thus the same, given by Eq. (5). Differences between the two models arise when the field leaves the tracking solution. At this time, the field value is of the order of the Planck mass, and the SUGRA correction of the latter models starts to dominate. This SUGRA correction cures the problems encountered by the Ratra-Peebles potential by quickly slowing the field as it rolls down, thus providing a smaller equation of state parameter [16,15].

C. Solution of the equations with quintessence

The quintessence field contributes to the Friedman equations, and therefore to the evolution of the expansion rate of the universe,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3M_{\text{Planck}}^2} \rho_{\text{tot}} \quad (7)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3M_{\text{Planck}}^2} (\rho_{\text{tot}} + 3p_{\text{tot}}) \quad (8)$$

where ρ_{tot} is the total energy density of the Universe and p_{tot} its pressure, assuming we live in a zero curvature universe. It is convenient to define the parameter ω as the effective equation of state parameter of the ensemble of cosmic fluids,

$$p_{\text{tot}} = \omega \rho_{\text{tot}}. \quad (9)$$

This parameter is expected to vary from $1/3$ in the radiation dominated era, $\omega = 0$ in the matter dominated era, to $\omega \rightarrow -1$ when the vacuum energy dominates. The shape of this transition and its implication for the growth of structure are precisely what we investigate in this paper.

The evolutions of the equation of state of the universe are shown on Figs. 1 and 2. They show that the transition from a matter dominated universe $\omega = 0$ to a vacuum dominated universe is much smoother in the case of quintessence models. In fact, the universe leaves the $\omega = 0$ line much sooner in the tracking quintessence models than in the effective quintessence or the Λ models. It is then natural to expect significant effects on the angular distances or on the growth of

K. BENABED AND F. BERNARDEAU

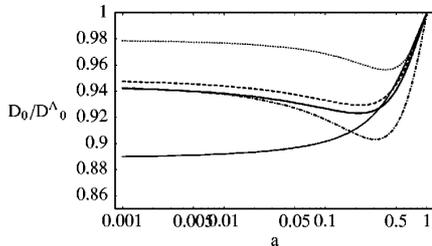
PHYSICAL REVIEW D **64** 083501

FIG. 3. Evolution of the comoving angular distance in the different scenarios compared to a pure cosmological constant from $z = 1000$ to the local universe. Same conventions as in Figs. 1 and 2 are used for the line styles. The lower solid line corresponds to a pure cosmological constant model with $\Omega_0 = 0.4$.

fluctuations. Moreover, the low-redshift behavior of the global cosmic equation of state is very different in the three quintessence models. This also should induce significant phenomenological differences between the Λ models and the quintessence models.

The implication of these behaviors for the angular distances is shown on Fig. 3. The differences seem not very noticeable at small redshift. However, they build up to be significant when the effect is integrated to the last scattering surface. The end values of the angular distances for the different tracking quintessence scenarios are very close to each other, although they correspond to different values of the equation of state today (see Fig. 2). Not surprisingly, quantities sensitive to the angular distance at high z , such as the position of the first acoustic peak, have been found to depend upon the vacuum equation of state [23]. One should also expect significant differences in the amplitude of the lens effect on the CMB anisotropies (as its depends on the angular distances between the observed objects and the lenses). We note however that a Λ model with a lower value of Ω_0 can reproduce fairly well the low-redshift behavior of the angular distances in our quintessence models.

III. THE GROWTH OF STRUCTURE

A. The linear growth rate

In the previous section we observed that, since the evolution of the universe with a quintessence component is smoother than with a pure cosmological constant, the departure from an Einstein–de Sitter (EdS) universe occurs later in the former case. This effect has been described before [32,11,12], although only in the context of effective quintessence, but it is clearly amplified here because the energy fraction of the quintessence field can be much larger at high redshift in cases of realistic quintessence models.

In this section we investigate the impact of these effects upon the evolution of large-scale structure. We consider the large-scale structure history only after recombination, a time at which the dark matter fluctuations dominate. After recombination and at subhorizon scales the quintessence field perturbations correspond to decaying modes and can therefore be ignored. Within these assumptions the growth rate of the density contrast at linear order is driven by the equation [34]

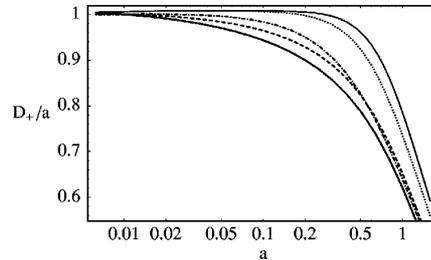


FIG. 4. The ratio D_+ / a (normalized to unity at $z > 100$) for the different scenarios. Today's growth rate is smaller by about 20% in tracking quintessence scenarios.

$$\ddot{D}_1(t) + 2H\dot{D}_1(t) - \frac{3}{2}H^2\Omega(t)D_1(t) = 0, \quad (10)$$

where $\Omega(t)$ corresponds to the fraction of energy in the matter component. The growth rate is independent of the wavelength of the fluctuations as long as we consider fluctuation at subhorizon scale and if we neglect the pressure effects. The time evolution of D_1 provides the amplitude of the density fluctuations. Figure 4 gives the growth rate, for different models, as a function of redshift compared to the growth rate in the EdS case.² In models with a pure cosmological constant, the growth factor remains very close to the EdS solution for a long period, and then changes abruptly between redshift 2 and 3. In quintessence models the solutions follow the same scheme, yet with a smoother slope change. However, for the same normalization at $z > 100$, when the universe is very close to an Einstein–de Sitter model, today's growth rates are quite different. The quintessence scenarios with a tracking field exhibit a smaller growth today (of order 20–30% percent less). To say it in other words, for the same σ_8 , the quintessence models demand larger density fluctuations at early times. This effect should lead to a difference between CMB normalizations and low-redshift normalizations.

The origin of this difference is clear. It is due to the fact that the energy fraction in the quintessence field remains significant for a much longer time. In this respect the effective quintessence solution is very similar to the Λ scenario, whereas realistic models of quintessence lead to linear growth rates that depart from the EdS case at redshift as large as 30. Clearly, models of effective quintessence that can match the SNIa observations do not provide a good account of the linear growth rates found in realistic models of quintessence.

B. Second order growth rate

As mentioned in the Introduction, for Gaussian initial conditions the second order growth rate determines the rate

²Whose solution is well known, $D_1(t) = a(t)$.

TESTING QUINTESSENCE MODELS WITH LARGE- . . .

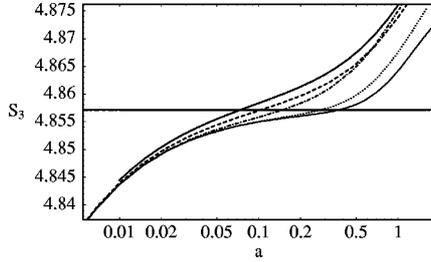
 PHYSICAL REVIEW D **64** 083501


FIG. 5. The skewness for the different scenarios. The horizontal straight line gives the skewness in EdS models. The variations in the quintessence models are very small.

at which non-Gaussian properties emerge in the matter density field. In a perturbation theory approach it is indeed this quantity that determines the value of the large-scale skewness. Furthermore, it turns out that weak lensing surveys can be used as a test ground for this effect and provide a robust constraint on Ω_0 through the value of convergence skewness [35,30]. We examine here to what extent this approach remains valid in a quintessence cosmology.

Such perturbation theory calculations are based on the computation of higher order terms in a perturbative approach. More precisely the reduced skewness defined as

$$S_3 = \frac{\langle \delta^3 \rangle}{\langle \delta^2 \rangle^2} \quad (11)$$

can be related to the second order growth rate [36] and more specifically to the second order growth rate in spherical collapse dynamics [37,38]. In this case it is simple to expand the local density contrast to second order with respect to the initial density fluctuations,

$$\delta_{sc}(t) = D_1(t) \delta_i + \frac{D_2(t)}{2} \delta_i^2 + \dots, \quad (12)$$

with a time dependent coefficient that can be explicitly calculated for any cosmological model. The function $D_2(t)$ is the growing mode of the equation

$$\begin{aligned} \ddot{D}_2(t) + 2H\dot{D}_2(t) - \frac{3}{2}H^2\Omega(t)D_2(t) &= 3H^2\Omega(t)D_1^2(t) \\ &+ \frac{8}{3}\dot{D}_1^2(t). \end{aligned} \quad (13)$$

The 3D density skewness at large scale (and when smoothing effects are neglected) is then directly proportional to $D_2(t)$, and is given by

$$S_3 = 3 \frac{D_2(t)}{D_1^2(t)}. \quad (14)$$

From Fig. 5 it is clear that the variations of skewness with the cosmological models are very small (below the percent level) and are likely to remain undetectable. This means that the second order growth rate does not introduce further de-

TABLE I. Value of the skewness, Eq. (15), of the local convergence in weak lensing surveys for sources at redshifts 1 or 2 and for a power law index $n = -1.5$.

Skewness	$z_s = 1$	$z_s = 2$
Λ model ($\Omega_0 = 0.3$)	76	26
Λ model ($\Omega_0 = 0.25$)	85	28
$w_Q = -0.8$	83	28
Ratra-Peebles, $\alpha = 2$	91	32
SUGRA, $\alpha = 6$	85	30
SUGRA, $\alpha = 11$	86	30

pendence on the vacuum equation of state. This result actually extends a property already known for the dependence of S_3 on Ω_0 for open universes [36], flat universes with a cosmological constant [38], or in some flavors of nonstandard vacuum equation of state [39].

The skewness of the convergence is thus expected to be left unchanged, except through the dependence of the angular distances and the linear growth rate of the fluctuations. We recall here the formal expression for the convergence skewness in perturbation theory for a power law spectrum (of index n) [30]. For a flat universe, it is given by

$$s_3 = \frac{\int_0^{D_s} dD w^3(D) D_1^4(D) D^{-2(n+2)} \left[S_3^{2D} - \frac{3}{2}(n+2) \right]}{\left[\int_0^{D_s} dD w^2(D) D_1^2(D) D^{-(n+2)} \right]^2} \quad (15)$$

with an efficiency function $w(D)$ given by

$$w(D) = \frac{3}{2} \Omega_0 \frac{D(D_s - D)}{D_s a} \quad (16)$$

where D_s is the comoving distance to the sources and s_3 is the skewness parameter for the 2D dynamics. The latter can be related to the 3D one, since it implies only a different combination of the terms appearing for the 3D case [38,30]. This finally gives

$$s_3 = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} \frac{D_2}{D_1^2}, \quad (17)$$

which amounts to 36/7 for an Einstein–de Sitter case.

In Table I we present the expected skewness for the different models we have considered for sources at redshifts 1 or 2. The results show that the projection effects on the value of the skewness can be quite large. They increase the value of the skewness so that quintessence models with $\Omega_0 = 0.3$ mimic what one expects for a $\Omega_0 = 0.25$ model with a pure cosmological constant.

It is to be noted that angular diameter distances, in a quintessence scenario, rather resemble a Λ model with a *larger* value of Ω_0 (see Fig. 3). From those two joint observations it should then be possible to test the quintessence model hypothesis. However, results should be extended to the inter-

K. BENABED AND F. BERNARDEAU

PHYSICAL REVIEW D **64** 083501

mediate and nonlinear regime where most of the data are going to be, although we expect the qualitative results found here to remain valid.

IV. NONLINEAR MATTER POWER SPECTRUM IN QUINTESSENCE MODELS

A. The shape of the nonlinear power spectrum

We complete these investigations with the nonlinear evolution of the matter density contrast power spectrum. Assuming a stable clustering ansatz and the Hamilton *et al.* mapping [40], we compare the power spectrum in quintessence and cosmological constant models in the deeply nonlinear regime.

The linear matter power spectrum in quintessence scenarios has been studied before [41,14,42,23]. For modes inside the horizons, models with a pure cosmological constant or with a quintessence field show very little difference in the shape of the linear transfer function. Limiting our study to those modes, we can reliably approximate the linear quintessence power spectrum by a standard cold dark matter model with a cosmological constant (Λ CDM) one.

However, there is no reason for the nonlinear evolution of these models to lead to the same power spectrum. Indeed, we showed in Sec. III A that generically the large-scale structure grows more slowly in quintessence scenarios. Hence, for the same amount of structure today, the density contrast had to be bigger in the quintessence scenario at early time. This implies that modes that are in the nonlinear regime now have reached this regime sooner in quintessence scenarios.

Following the idea of Hamilton *et al.* [40], later extended by Peacock and Dodds [43,44], we postulate that one can describe the effects of nonlinear evolution through a universal function f_{nl} that maps the linear power spectrum onto the nonlinear one:

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{nl}}^2(k_{\text{nl}}) &= f_{\text{nl}}(\Delta^2(k)), \\ k &= [1 + \Delta_{\text{nl}}^2(k_{\text{nl}})]^{-1/3} k_{\text{nl}}, \\ \Delta^2(k) &= 4\pi k^3 P(k).\end{aligned}\quad (18)$$

Enforcing stable clustering, Peacock and Dodds showed that this function must follow an asymptotic behavior at large x such that $f_{\text{nl}}(x) \propto g(\Omega)^{-3} x^{3/2}$ —where $g(\Omega) = D_1(a)/a$ is the ratio of the linear growth factor to the EdS growth factor described in Sec. III A—and proposed analytical forms for f_{nl} that depend on the cosmological parameters through $g(a)$ only and that are calibrated on various N -body simulations. We assume that their results hold for quintessence scenarios. In particular, we assume that the nonlinear regime always reaches a stable clustering regime. Moreover, and in the absence of quintessence N -body simulation for our particular scenarios, we also assume that the normalization factor in the asymptotic branch is independent of the cosmological scenario. These assumptions are not trivial and can probably be challenged (see, for instance, [32], where the behavior of the nonlinear power spectrum is investigated for effective quintessence models with a different perspective).

From the Hamilton *et al.* ansatz we expect very different behaviors for the small-scale nonlinear power spectrum when quintessence and nonquintessence models are compared. We previously obtained the result that about 20% to 30% discrepancy is expected, depending on the quintessence potential, between g^Q and D^Λ . The consequences of this *a priori* modest discrepancy are dramatic for the nonlinear power spectrum. For a mode that entered the non-linear region long before redshift z , we have

$$\frac{P_{\text{nl}}^Q(k_{\text{nl}}, z)}{P_{\text{nl}}^\Lambda(k_{\text{nl}}, z)} = \frac{\Delta_{\text{nl}}^Q(k_{\text{nl}}, z)^2}{\Delta_{\text{nl}}^\Lambda(k_{\text{nl}}, z)^2} \sim \frac{g^Q(z)^{-3} \Delta^Q(k_Q, z)^3}{g^\Lambda(z)^{-3} \Delta^\Lambda(k_\Lambda, z)^3} \quad (19)$$

where k_Q (k_Λ) is the linear mode in the quintessence (Λ) linear power spectrum giving rise to the k_{nl} mode in the nonlinear spectrum. Assuming, as stated before, that at the subhorizon scales we are interested in the linear power spectra of the models are identical, up to a normalization factor P_0 , we write $P(k, z) = g^2(z) a^2 P_0 k^n$ with $n > -3$. For a mode in the nonlinear region we have

$$k \sim \left(\frac{k_{\text{nl}}^2}{a^2 P_0} \right)^{1/(5+n)} \quad (20)$$

and Eq. (19) reduces to

$$\begin{aligned}\frac{P_{\text{nl}}^Q(k_{\text{nl}}, z)}{P_{\text{nl}}^\Lambda(k_{\text{nl}}, z)} &\sim \frac{g^Q(z)^{-3} \left(g^Q(z)^2 a^2 P_0^Q k_Q^{n+3} \right)^{3/2}}{g^\Lambda(z)^{-3} \left(g^\Lambda(z)^2 a^2 P_0^\Lambda k_\Lambda^{n+3} \right)} \\ &\sim \left(\frac{P_0^Q}{P_0^\Lambda} \right)^{(3/2)[1-(n+3)/(n+5)]}.\end{aligned}\quad (21)$$

We suppose here that the spectral index n is identical for both $P^Q(k_Q)$ and $P^\Lambda(k_\Lambda)$, which is a reasonable approximation. Finally, if we set both the spectra to fit the cluster normalization, the ratio P_0^Q/P_0^Λ is simply the ratio of the growing modes at $z=0$ and we get

$$\frac{P_{\text{nl}}^Q(k_{\text{nl}}, z)}{P_{\text{nl}}^\Lambda(k_{\text{nl}}, z)} = \left(\frac{g^Q(z=0)}{g^\Lambda(z=0)} \right)^{-3 [1-(n+3)/(n+5)]} \quad (22)$$

Note that the exponent gets close to -3 when the spectral index goes to -3 . Given the variation of g^Q the ratio given in Eq. (22) can be as large as 2.

The same ratio is easier to compute for modes in the linear regime,

$$\frac{P^Q(k, z)}{P^\Lambda(k, z)} = \left(\frac{g^Q(z) g^\Lambda(0)}{g^Q(0) g^\Lambda(z)} \right)^2 \quad (23)$$

These simple investigations show unambiguously and with a limited number of assumptions that the shape of the nonlinear power spectrum is very sensitive to the presence of a quintessence field. In order to have a full description of the power spectrum behavior, including the intermediate regime, we use the Peacock and Dodds prescription. This formula has been shown to be reasonably accurate for effective quin-

TESTING QUINTESSENCE MODELS WITH LARGE- . . .

PHYSICAL REVIEW D 64 083501

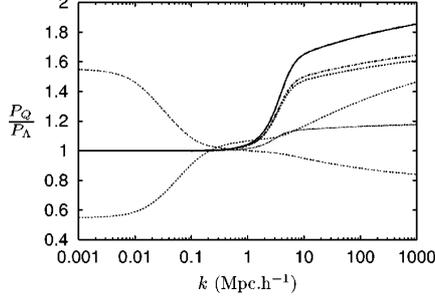


FIG. 6. The ratio P_{3D}^Q/P_{3D}^Λ at $z=0$. The solid and dashed lines are the SUGRA quintessence models for $\alpha=11$ and $\alpha=6$, the dot-dashed line is the Ratra-Peebles model, and the thin dotted line is the effective quintessence model for an $\omega_Q=-0.8$. We also show here the results for a $\Omega_0=0.4$ flat Λ CDM model (thin dashed line) and an $\Omega_0=0.25$ flat Λ CDM model (thin double dashed line), which were discussed in previous sections.

tessence models in N -body simulation, at least at low redshift [32]. Anyway, we are more interested, in this paper, in the general trend rather than a completely accurate description of the transition between linear and nonlinear evolution. Figure 6 shows a comparison between quintessence models and a standard Λ CDM. The curves represent the ratios between a quintessence nonlinear P_{3D} at $z=0$ and the Λ CDM one assuming that the linear power spectra have the same normalization. As expected, the small-scale ratio tends toward the $(g_+^Q/g_+^\Lambda)^{-3}$ asymptote. The shape of the curve in this region is described by the $3[1-(n+3)/(n+5)]$ power calculated above. Since the effect is proportional to the growth ratio to the power $1/3$, it is much smaller for effective quintessence where the discrepancy between its growth and the Λ model growth is smaller. We stress again therefore that the use of a constant equation of state cannot account for the amplitude of this effect as it is expected in realistic models.

Note that the transition between the linear and nonlinear regimes depends on the ansatz used for f_{nl} . However, a very sharp transition, as encountered here, is not unnatural. It accounts for the different times a given mode enters the nonlinear regime in different models. If one follows a given mode throughout its evolution, it will first obey the linear growth and evolve as $a^2 g^2(a)$. Then it enters the nonlinear regime and grows as a^3 . The transition between these two regimes is very sharp. When models with a different growth factor are compared, this rapid transition translates into a sharp increase of the power spectrum ratio between the linear and nonlinear regimes.

Moreover, we note that this effect cannot be mistaken for a variation of Ω_0 . The latter has a much more dramatic effect on the shape of the linear power spectrum through a change of the shape of the transfer function. In this case, not only is the linear growth rate changed but the position of the maximum of the linear power spectrum is also shifted.

In principle, large-scale galaxy surveys such as the 2dF or the SDSS should be able to put constraints on the amplitude and shape of the power spectrum. However, the possible effects of biasing mechanisms, which are extremely poorly un-

derstood in the transition regime between the linear and nonlinear regimes, prevent a robust and reliable test of these scenarios. In the next section we rather try to validate these properties in the context of a better defined observational procedure: the projected power spectrum in weak lensing surveys.

B. Projected power spectrum in weak lensing surveys

Weak lensing surveys can potentially provide us with precision maps of the projected density up to redshifts around 1 [45–48,26,49,27,50]. These measurements are expected to be free of observation biases once the redshift distribution of the sources is known.

Weak lensing surveys, through observation of the deformation of background galaxies, can give access to the convergence field. The latter can be written as the projection of the matter density along the line of sight [30],

$$\kappa(\vec{\alpha}) = \int_0^{\mathcal{D}_s} d\mathcal{D} w(\mathcal{D}) \delta(\vec{\alpha}, z(\mathcal{D})), \quad (24)$$

where the \mathcal{D} stands for the angular distance (and this formula is valid for a flat spatial curvature only). The geometrical kernel $w(\mathcal{D})$, defined in Eq. (16), accounts for the projection effects.

We expect that the ratio of the power spectra of the convergence field for models with a cosmological constant and models with a quintessence field will exhibit roughly the same properties as the ratio of the three-dimensional power spectra. However, the value of this ratio is expected to be affected by a corrective factor induced by the geometrical kernel which itself depends on the details of the cosmological model. In the following we present an evaluation of this rescaling factor along the line of reasoning of the previous subsection.

In the small-angle limit, we have

$$P_\kappa(\vec{\alpha}) = \int_0^{\mathcal{D}_s} d\mathcal{D} w(\mathcal{D})^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} P_{3D}(k, z(\mathcal{D})) e^{i\vec{k}\mathcal{D}\cdot\vec{\alpha}} \quad (25)$$

so that the convergence power spectrum is simply

$$P_\kappa(l) = \int_0^{\mathcal{D}_s} \frac{d\mathcal{D}}{\mathcal{D}^2} w(\mathcal{D})^2 P_{3D}(l/\mathcal{D}, z(\mathcal{D})), \quad (26)$$

where a possible redshift evolution of the shape of the power spectrum is included. The kernel w is a bell shaped window that reaches its maximum at $z_{\text{eff}}=z(\mathcal{D}_s/2)$. To evaluate roughly the rescaling factor we will approximate w^2 by a simple Dirac function $w^2(\mathcal{D}) \sim w_{\text{eff}}^2 \delta(\mathcal{D}-\mathcal{D}_s/2)$ with $w_{\text{eff}} = \int_0^{\mathcal{D}_s} d\mathcal{D} w(\mathcal{D})$ and $z_{\text{eff}} \sim 0.4$ (it depends on the cosmology we are considering) for sources at redshift z_s . Now, the ratio of the convergence power spectrum is simply

$$\frac{P_\kappa^Q(l)}{P_\kappa^\Lambda(l)} \sim \left(\frac{w_{\text{eff}}^Q/\mathcal{D}_s^Q}{w_{\text{eff}}^\Lambda/\mathcal{D}_s^\Lambda} \right)^2 \frac{P_{3D}^Q(2l/\mathcal{D}_s^Q, z_{\text{eff}}^Q)}{P_{3D}^\Lambda(2l/\mathcal{D}_s^\Lambda, z_{\text{eff}}^\Lambda)}. \quad (27)$$

K. BENABED AND F. BERNARDEAU

PHYSICAL REVIEW D **64** 083501TABLE II. Evaluation of the ratio $P_{\kappa}^Q/P_{\kappa}^{\Lambda}$ in the linear domain, from Eq. (29).

	$z=1$	$z=2$	$z=1000$
$\omega_Q = -0.8$	0.94	0.95	1.06
Ratra-Peebles $\alpha=2$	0.86	0.88	1.20
SUGRA $\alpha=6$	0.92	0.92	1.16
SUGRA $\alpha=11$	0.91	0.91	1.18

For a mode in the nonlinear region, a few percent error in the position of the mode is not significant, so that we can ignore the difference between D_Q and D_{Λ} in the last term of the equation. As a result,

$$\frac{P_{\kappa}^Q(l_{nl})}{P_{\kappa}^{\Lambda}(l_{nl})} \sim \left(\frac{w_{\text{eff}}^Q/D_s^Q}{w_{\text{eff}}^{\Lambda}/D_s^{\Lambda}} \right)^2 \left(\frac{a_{\text{eff}}^Q}{a_{\text{eff}}^{\Lambda}} \right)^3 \times \left(\frac{g^Q(z=0)}{g^{\Lambda}(z=0)} \right)^{-3 [1 - (n+3)/(n+5)]}, \quad (28)$$

which, compared to Eq. (22), contains an extra geometrical factor due to the projection effects. It evaluates to 0.8 to 0.9 depending on the model and position of the source plane. We expect therefore the conclusions reached in the previous section to survive in weak lensing observations.

Similarly, for a mode in the linear region, we have

$$\frac{P_{\kappa}^Q(l)}{P_{\kappa}^{\Lambda}(l)} \sim \left(\frac{w_{\text{eff}}^Q/D_s^Q}{w_{\text{eff}}^{\Lambda}/D_s^{\Lambda}} \right)^2 \left(\frac{a_{\text{eff}}^Q}{a_{\text{eff}}^{\Lambda}} \right)^2 \left(\frac{g^Q(z_{\text{eff}})}{g^{\Lambda}(z_{\text{eff}})} \frac{g^{\Lambda}(0)}{g^Q(0)} \right)^2. \quad (29)$$

Table II gives the value of the expected ratio in the linear region. It is about 0.9. This indicates that the normalization ratio for the linear 3D power spectrum and that for the projected weak lensing spectrum will differ by this amount.

These semianalytical results give a good account of the ratio $P_{\kappa}^Q/P_{\kappa}^{\Lambda}$ for all angular scales. At large scale, it is roughly flat; its value is given in Table II. Then, as we get closer to the transition between the linear and nonlinear regimes, the ratio exhibits a slight drop. Indeed, from Eq. (27) the Λ CDM model enters the nonlinear regime earlier, because of the difference between the z_{eff} . Hence, one expects to have, for a few modes, a P_{κ}^{Λ} that rises more quickly than its quintessence counterpart. Then, when the quintessence power spectrum also hits the nonlinear regime, the ratio will exhibit a shape very similar to that of the three-dimensional power spectrum ratio, with the rescaling factor computed above.

In Fig. 7 we present the explicit computation of the nonlinear power spectra of the convergence field using the prescription of Peacock and Dodds to compute the redshift evolution of the 3D power spectrum. Unlike in Fig. 6, here the power spectra are not cluster normalized. In this case the power spectra are normalized so that the weak lensing amplitudes match at $10'$ scale when computed with the linear power spectrum and match the amplitude of the recent detections of weak lensing effects (e.g., $\sigma_8 \approx 1$ for a Λ CDM

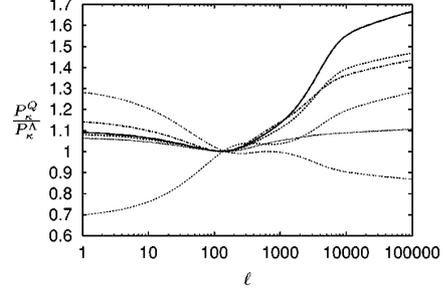


FIG. 7. Ratios $P_{\kappa}^Q(l)/P_{\kappa}^{\Lambda}(l)$ for a source plane at $z=1$. All models are normalized so that σ_{κ} are the same at $10'$ scale and correspond to an $\Omega_0=0.3$ flat Λ CDM model with $\sigma_8=1$. The observational window, in which measurements with an accuracy better than 10% are foreseeable, corresponds to l of 200 to 10 000 (minute to degree scale) where the most dramatic changes take place.

model with $\Lambda=0.7$). Because of the projection effects given in Table II, this is not equivalent to the normalized linear 3D power spectrum. Projection effects also slightly change the shape of the projected linear power spectrum. The redshift of the sources is simply assumed to be unity here. The differences in the shape of the power spectra are clearly visible and should be already within observational constraints.

We also give the effects of a change of Ω_0 , following the same prescription for the normalization. In this case, because we normalized to the *convergence* linear power spectrum, the change of Ω_0 also directly affects the normalization. Compared to 3D power spectra, it actually worsens the situation and make the distinction between quintessence models and such models striking.

The result of Fig. 7 gives us hope to strongly constrain the quintessence scenario using weak lensing surveys. The next generation weak lensing surveys will made available wide surveys where a precise determination of the lensing effect will be possible for a range of scales large enough to map the sharp rise predicted here. For example, measurements of the weak lensing effect amplitude at the 1° scale and the $1'$ scale with only a 10% precision appear sufficient to test the SUGRA quintessence hypothesis. It seems that the observational requirements are much more modest than for direct measurements of the angular distances through SNIa observations.

C. Weak lensing on cosmic microwave background

In passing we note that weak lensing effects on CMB maps could also be used to test the quintessence hypothesis. The amplitude of the effect is mainly given by the amplitude of the fluctuations of κ , σ_{κ}^2 , along the line of sight [51,52]. In Table III we show the amplitude of the lens effect on the last scattering surface at two different angular resolutions. The amplitude is mainly sensitive to the linear change of the growth rate integrated over the line of sight. It would probably not be a crucial test for the nature of the vacuum energy but it is potentially an important test to pass once the general cosmological parameters are determined. If the coming generation of observations requires quintessence, observation of

TESTING QUINTESSENCE MODELS WITH LARGE- . . .

PHYSICAL REVIEW D **64** 083501TABLE III. Ratios between the amplitudes of the lens effects on the last scattering surface for different models and the standard Λ CDM model ($\Lambda=0.7$) at two different angular resolutions.

σ_{κ}^2 at $z=1000$	5'	10'
$\Omega=0.25, \Lambda=0.75$ model	1.23	1.29
$\Omega=0.4, \Lambda=0.6$ model	0.68	0.73
$\omega_{\phi} = -0.8$	1.20	1.21
Ratra-Peebles $\alpha=2$	1.49	1.54
SUGRA $\alpha=6$	1.29	1.32
SUGRA $\alpha=11$	1.33	1.36

an excess of power in the lens effect as suggested by these calculations will be an important consistency test.

V. CONCLUSION

In this paper we have examined the growth of structure in quintessence models in both the linear and the second order regimes and present their more striking implications for the statistical properties of the low-redshift large-scale structure of the universe. We paid particular attention to cases of realistic implementations of the quintessence field since they lead to scenarios where the energy fraction in the quintessence component can represent a significant fraction of the total energy density over a long period. We found that this effect is responsible for important differences in the behavior of the linear growth rate of the fluctuations: For the same values of Ω_0 , realistic quintessence models lead to a linear growth rate that can be 20% or 30% lower than in models with a pure cosmological constant or with an effective quintessence component (where the vacuum has a constant equation of state which matches the angular distance constraints).

The consequences of this discrepancy have been explored at the level of the nonlinear power spectrum for which such differences are amplified. For power spectra with identical linear normalization (at $z=0$), the variation of the amplitude of the nonlinear power spectrum can be as large as 2.

We have also computed the second order growth rate of

the fluctuation. We found that, when expressed in terms of the square of the linear rate, it is not sensitive to the nature of the dark energy. This ratio is actually not significantly sensitive to any of the cosmological parameters. In this respect our result extends previously known properties.

Weak lensing surveys appear to be the natural playground for such effects. They combine effects on the angular distances and on the growth rate of the fluctuations. We show that the skewness of the convergence field, at large angular scale, is notably sensitive to the projection effects. It is to be noted, however, that a universe with a quintessence field does not resemble a universe with a cosmological constant and larger matter density (as is the case for the behavior of the angular distances) but rather one with a lower density parameter.

Moreover, the shape of the power spectrum of the convergence field, which can be identified with a projected 3D matter power spectrum, retains the properties found for the 3D nonlinear spectrum. It appears clear that CDM family models for a flat universe can be distinguished from one another: a variation of Ω_0 changes the shape of the linear power spectrum, whereas the introduction of a quintessence field changes the time at which modes become nonlinear.

The precision level of the current semianalytical predictions for the shape of the nonlinear spectrum does not permit us so far to make precise predictions from which the quintessence potential could be reconstructed. Moreover, the use of the prescription of Peacock and Dodds for models of quintessence with a tracking solution should probably be validated with specific numerical simulations.

The calculations have been done in two specific models of quintessence, the Ratra-Peebles model and the SUGRA model developed in [16]. We think, however, that our conclusions would survive for any model where the energy density in the quintessence component can be a significant fraction of the total energy up to recombination.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are very thankful to J. Martin, A. Riazuelo, Ph. Brax, and L. van Waerbeke for fruitful discussions.

- [1] P. de Bernardis *et al.*, Nature (London) **404**, 955 (2000).
- [2] A. E. Lange *et al.*, Phys. Rev. D **63**, 042001 (2001).
- [3] P. M. Garnavich *et al.*, Astrophys. J. Lett. **493**, L53 (1998).
- [4] S. Hanany *et al.*, Astrophys. J. Lett. **545**, L5 (2000).
- [5] A. Balbi *et al.*, Astrophys. J. Lett. **545**, L1 (2000).
- [6] S. Perlmutter *et al.*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999).
- [7] S. Perlmutter *et al.*, Nature (London) **391**, 51 (1998).
- [8] A. G. Riess *et al.*, Astron. J. **116**, 1009 (1998).
- [9] I. Waga and J. A. Frieman, Phys. Rev. D **62**, 043521 (2000).
- [10] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).
- [11] I. Zlatev, L. Wang, and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **82**, 896 (1999).
- [12] M. Tegmark, astro-ph/0101354.
- [13] P. J. Steinhardt, L. Wang, and I. Zlatev, Phys. Rev. D **59**, 123504 (1999).
- [14] P. G. Ferreira and M. Joyce, Phys. Rev. D **58**, 023503 (1998).
- [15] Ph. Brax and J. Martin, Phys. Rev. D **61**, 103502 (2000).
- [16] Ph. Brax and J. Martin, Phys. Lett. B **468**, 40 (1999).
- [17] B. Ratra and P. J. E. Peebles, Phys. Rev. D **37**, 3406 (1988).
- [18] T. D. Saini, S. Raychaudhury, V. Sahni, and A. A. Starobinsky, Phys. Rev. Lett. **85**, 1162 (2000).
- [19] P. Astier, astro-ph/0008306.
- [20] D. Huterer and M. S. Turner, astro-ph/0012510.
- [21] M. Zaldarriaga, D. N. Spergel, and U. Seljak, Astrophys. J. **488**, 1 (1997).
- [22] G. Efstathiou and J. R. Bond, Mon. Not. R. Astron. Soc. **304**, 75 (1999).
- [23] Ph. Brax, J. Martin, and A. Riazuelo, Phys. Rev. D **62**, 103505 (2000).
- [24] V. R. Eke, S. Cole, and C. S. Frenk, Mon. Not. R. Astron. Soc. **282**, 263 (1996).

K. BENABED AND F. BERNARDEAU

PHYSICAL REVIEW D **64** 083501

- [25] J. R. Bond *et al.*, astro-ph/0011379.
- [26] R. Maoli *et al.*, astro-ph/0011251.
- [27] L. van Waerbeke *et al.*, astro-ph/0101511.
- [28] J. Oukbir and A. Blanchard, *Astron. Astrophys.* **317**, 1 (1997).
- [29] B. Jain and U. Seljak, *Astrophys. J.* **484**, 560 (1997).
- [30] F. Bernardeau, L. van Waerbeke, and Y. Mellier, *Astron. Astrophys.* **322**, 1 (1997).
- [31] L. Hui, *Astrophys. J. Lett.* **519**, L9 (1999).
- [32] C. Ma, R. R. Caldwell, P. Bode, and L. Wang, *Astrophys. J. Lett.* **521**, L1 (1999).
- [33] P. Binetruy, *Phys. Rev. D* **60**, 063502 (1999).
- [34] P. J. E. Peebles, *The Large-Scale Structure of the Universe* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1980).
- [35] L. van Waerbeke, F. Bernardeau, and Y. Mellier, *Astron. Astrophys.* **342**, 15 (1999).
- [36] F. R. Bouchet, R. Juszkiewicz, S. Colombi, and R. Pellat, *Astrophys. J. Lett.* **394**, L5 (1992).
- [37] F. Bernardeau, *Astrophys. J.* **392**, 1 (1992).
- [38] F. Bernardeau, *Astrophys. J.* **433**, 1 (1994).
- [39] E. Gaztañaga, and J. A. Lobo, *Astrophys. J.* **548**, 47 (2001).
- [40] A. J. S. Hamilton, A. Matthews, P. Kumar, and E. Lu, *Astrophys. J. Lett.* **374**, L1 (1991).
- [41] J. C. Fabris and J. Martin, *Phys. Rev. D* **55**, 5205 (1997).
- [42] R. R. Caldwell, R. Dave, and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1582 (1998).
- [43] J. A. Peacock and S. J. Dodds, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **280**, L19 (1996).
- [44] J. A. Peacock and S. J. Dodds, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **267**, 1020 (1994).
- [45] L. van Waerbeke *et al.*, *Astron. Astrophys.* **358**, 30 (2000).
- [46] D. J. Bacon, A. R. Refregier, and R. S. Ellis, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **318**, 625 (2000).
- [47] D. M. Wittman *et al.*, *Nature (London)* **405**, 143 (2000).
- [48] N. Kaiser, G. Wilson, and G. Luppino, astro-ph/0003338.
- [49] G. Wilson, N. Kaiser, and G. Luppino, astro-ph/0102396.
- [50] J. Rhodes, A. Refregier, and E. J. Groth, astro-ph/101213.
- [51] F. Bernardeau, *Astron. Astrophys.* **324**, 15 (1997).
- [52] U. Seljak and M. Zaldarriaga, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2636 (1999).

Bibliographie générale

- [Abbott & Schaefer, 1986] L. F. ABBOTT & R. K. SCHAEFER, “A general, gauge-invariant analysis of the cosmic microwave background anisotropies”. *Astrophysical Journal* **308** (1986) 546–562.
- [Abbott & Wise, 1984a] L. F. ABBOTT & M. W. WISE, “Large-scale anisotropy of the microwave background and the amplitude of energy density fluctuations in the early Universe”. *Astrophysical Journal Letters* **282** (1984) L47–L50.
- [Abbott & Wise, 1984b] L. F. ABBOTT & M. W. WISE, “Constraints on generalized inflationary cosmologies”. *Nuclear Physics* **B224** (1984) 541–548.
- [Albrecht & Steinhardt, 1982] A. J. ALBRECHT & P. J. STEINHARDT, “Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking”. *Physical Review Letters* **48** (1982) 1220–1223.
- [Alpher *et al.*, 1948] R. A. ALPHER, H. A. BETHE, & G. GAMOV, “The origin of chemical elements”. *Physical Review* **73** (1948) 803–804.
- [Alpher & Herman, 1948] R. A. ALPHER & R. C. HERMAN, “Evolution of the Universe”. *Nature* **162** (1948) 774.
- [Bacon *et al.*, 2000] D. J. BACON, A. R. REFREGIER, & R. S. ELLIS, “Detection of weak gravitational lensing by large-scale structure”. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **318** (2000) 625–640.
- [Bahcall *et al.*, 1999] N. BAHCALL, J. P. OSTRICKER, S. PERLMUTTER, & P. J. STEINHARDT, “The cosmic triangle : assessing the state of the Universe”. *Science* **284** (1999) 1481–1488, astro-ph/9906463.
- [Bahcall *et al.*, 1999] N. A. BAHCALL, J. P. OSTRICKER, S. PERLMUTTER, & P. J. STEINHARDT, “The Cosmic Triangle : Revealing the State of the Universe”. *Science* **284** (1999) 1481+.
- [Bardeen, 1980] J. M. BARDEEN, “Gauge invariant cosmological perturbations”. *Physical Review* **D22** (1980) 1882–1905.
- [Bardeen *et al.*, 1986] J. M. BARDEEN, J. R. BOND, N. KAISER, & A. S. SZALAY, “The statistics of peaks of Gaussian random fields”. *Astrophysical Journal* **304** (1986) 15–61.
- [Bardeen *et al.*, 1983] J. M. BARDEEN, P. J. STEINHARDT, & M. S. TURNER, “Spontaneous creation of almost scale-free density perturbations in an inflationary Universe”. *Physical Review* **D28** (1983) 679–693.
- [Bean *et al.*, 2001] R. BEAN, S. H. HANSEN, & A. MELCHIORRI, “Early-universe constraints on a primordial scaling field”. (2001) 4162+, astro-ph/0104162.
- [Benabed & Bernardeau, 2000] K. BENABED & F. BERNARDEAU, “Cosmic string lens effects on cmb polarization patterns”. *Phys. Rev.* **D61** (2000) 123510.
- [Benabed & Bernardeau, 2001] K. BENABED & F. BERNARDEAU, “Testing quintessence models with large-scale structure growth” *Physical Review D* **64n8** (2001) 083501, astro-ph/0104371.

- [Benabed *et al.*, 2001] K. BENABED, F. BERNARDEAU, & L. VAN WAERBEKE, “Cmb b polarization to map the large scale structures of the universe”. *Phys. Rev.* **D63** (2001) 043501.
- [Bernardeau, 1994] F. BERNARDEAU, “Skewness and kurtosis in large-scale cosmic fields”. *Astrophys. J.* **433** (1994) 1–18.
- [Bernardeau, 1997] F. BERNARDEAU, “Weak lensing detection in cmb maps”. *Astron. & Astrophys.* **324** (1997) 15–26.
- [Bernardeau, 1998] F. BERNARDEAU, “Lens distortion effects on cmb maps”. *Astronomy and Astrophysics* **338** (1998) 767–776.
- [Bernardeau *et al.*, 1997] F. BERNARDEAU, L. VAN WAERBEKE, & Y. MELLIER, “Weak lensing statistics as a probe of $\{\Omega\}$ and power spectrum”. *Astronomy and Astrophysics* **322** (1997) 1–18.
- [Blanchard & Schneider, 1987] A. BLANCHARD & J. SCHNEIDER, “Gravitational lensing effect on the fluctuations of the cosmic background radiation”. *Astronomy and Astrophysics* **184** (1987) 1–2.
- [Blandford *et al.*, 1991] R. D. BLANDFORD, A. B. SAUST, T. G. BRAINERD, & J. V. VIL-LUMSEN, “The distortion of distant galaxy images by large-scale structure”. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **251** (1991) 600–627.
- [Bond & Efstathiou, 1987] J. R. BOND & G. EFSTATHIOU, “The statistics of cosmic background radiation fluctuations”. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **226** (1987) 655–687.
- [Bond & Efstathiou, 1984] J. R. BOND & G. P. EFSTATHIOU, “Cosmic background radiation anisotropies in Universes dominated by nonbaryonic dark matter”. *Astrophysical Journal Letters* **285** (1984) L45–L48.
- [Bond & Efstathiou, 1986] J. R. BOND & G. P. EFSTATHIOU, “Isocurvature cold dark matter fluctuations”. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **218** (1986) 103–121.
- [BOOMERanG, http] “BOOMERanG”. <http://oberon.roma1.infn.it/boomerang/>.
- [Bouchet *et al.*, 1995] F. R. BOUCHET, S. COLOMBI, E. HIVON, & R. JUSZKIEWICZ, “Perturbative lagrangian approach to gravitational instability”. *Astronomy and Astrophysics* **296** (1995) 575+.
- [Bouchet *et al.*, 1992] F. R. BOUCHET, R. JUSZKIEWICZ, S. COLOMBI, & R. PELLAT, “Weakly nonlinear gravitational instability for arbitrary omega”. *Astrophys. J. Lett.* **394** (1992) L5–L8.
- [Brax & Martin, 2000] P. BRAX & J. MARTIN, “The robustness of quintessence”. *Physical Review* **D61** (2000) 103502, [astro-ph/9912046](http://arxiv.org/abs/astro-ph/9912046).
- [Caldwell *et al.*, 1998] R. R. CALDWELL, R. DAVE, & P. J. STEINHARDT, “Cosmological imprint of an energy component with general equation-of-state”. *Physical Review Letters* **80** (1998) 1582–1585, [astro-ph/9708069](http://arxiv.org/abs/astro-ph/9708069).
- [Carroll *et al.*, 1992] S. M. CARROLL, W. H. PRESS, & E. L. TURNER, “The cosmological constant”. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **30** (1992) 499–542.
- [Cayon *et al.*, 1993a] L. CAYON, E. MARTINEZ-GONZALEZ, & J. L. SANZ, “Does a cosmological constant increase the effect of gravitational lensing on the cosmic microwave background?”. *Astrophysical Journal* **413** (1993) 10–13.
- [Cayon *et al.*, 1993b] L. CAYON, E. MARTINEZ-GONZALEZ, & J. L. SANZ, “Gravitational lensing and the cosmic microwave background”. *Astrophysical Journal* **403** (1993) 471–475.
- [Chandrasekhar, 1960] S. CHANDRASEKHAR, *Radiative transfert*. Dover Publications, New York (1960), 393 pages, ISBN 0-486-60590-6.

- [CMBFAST, [http](http://www.sns.ias.edu/matiasz/CMBFAST/cmbfast.html)] “CMBFAST”. <http://www.sns.ias.edu/matiasz/CMBFAST/cmbfast.html>.
- [Cole & Efstathiou, 1989] S. COLE & G. EFSTATHIOU, “Gravitational lensing of fluctuations in the microwave background radiation”. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **239** (1989) 195–200.
- [Crittenden *et al.*, 2000a] R. CRITTENDEN, P. NATARAJAN, U.-L. PEN, & T. THEUNS, “Discriminating weak lensing from intrinsic spin correlations using the curl-gradient decomposition”. (2000), [astro-ph/0012336](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0012336).
- [Crittenden *et al.*, 2000b] R. G. CRITTENDEN, P. NATARAJAN, U.-L. PEN, & T. THEUNS, “Spin induced galaxy alignments and their implications for weak lensing measurements”. (2000), [astro-ph/0009052](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0009052).
- [Croft & Metzler, 2000] R. A. C. CROFT & C. A. METZLER, “Weak-Lensing Surveys and the Intrinsic Correlation of Galaxy Ellipticities”. *apj* **545** (2000) 561–571, [astro-ph/0005384](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0005384).
- [Davis & Peebles, 1977] M. DAVIS & P. J. E. PEEBLES, “On the integration of the bbgky equations for the development of strongly nonlinear clustering in an expanding universe”. *Astrophysical Journal Supplement Series* **34** (1977) 425–450.
- [de Laix & Vachaspati, 1996] A. A. DE LAIX & T. VACHASPATI, “Gravitational lensing by cosmic string loops”. *Phys. Rev.* **D54** (1996) 4780–4791, [astro-ph/9605171](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9605171).
- [Dicke *et al.*, 1965] R. H. DICKE, P. J. E. PEEBLES, P. G. ROLL, & D. T. WILKINSON, “Cosmic black-body radiation”. *Astrophysical Journal* **142** (1965) 414–419.
- [Dodelson *et al.*, 2000] S. DODELSON, M. KAPLINGHAT, & E. D. STEWART, “Tracking oscillating energy”. [astro-ph/0002360](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0002360).
- [Durrer *et al.*, 1996] R. DURRER, A. GANGUI, & M. SAKELLARIADOU, “Doppler peaks : a fingerprint of topological defects”. *Physical Review Letters* **76** (1996) 579–582, [astro-ph/9507035](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9507035).
- [Dyer, 1976] C. C. DYER, “The gravitational perturbation of the cosmic background radiation by density concentrations”. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **175** (1976) 429–447.
- [Dyer & Roeder, 1973] C. C. DYER & R. C. ROEDER, “Distance-redshift relations for universes with some intergalactic medium”. *Astrophysical Journal Letters* **180** (1973) L31–+.
- [Erben *et al.*, 2001] T. ERBEN, L. VAN WAERBEKE, E. BERTIN, Y. MELLIER, & P. SCHNEIDER, “How accurately can we measure weak gravitational shear?”. *Astronomy and Astrophysics* **366** (2001) 717–735.
- [Faraoni, 1993] V. FARAONI, “On the rotation of polarization by a gravitational lens”. *Astron. Astrophys.* **272** (1993) 385, [astro-ph/9211012](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9211012).
- [Ferreira & Joyce, 1997] P. G. FERREIRA & M. G. F. JOYCE, “Structure formation with a self-tuning scalar field”. *Physical Review Letters* **79** (1997) 4740–4743, [astro-ph/9707286](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9707286).
- [Ferreira & Joyce, 1998] P. G. FERREIRA & M. G. F. JOYCE, “Cosmology with a primordial scaling field”. *Physical Review* **D58** (1998) 023503, [astro-ph/9711102](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9711102).
- [Fixsen *et al.*, 1996] D. J. FIXSEN, E. S. CHENG, J. M. GALES, J. C. MATHER, R. A. SHAFER, & E. L. WRIGHT, “The cosmic microwave background spectrum from the full COBE/FIRAS data set”. *Astrophysical Journal* **473** (1996) 576–587, [astro-ph/9605054](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9605054).
- [Fomalont & Sramek, 1975] E. . B. FOMALONT & R. A. SRAMEK, “A confirmation of einstein’s general theory of relativity by measuring the bending of microwave radiation in the gravitational field of the sun”. *Astrophysical Journal* **199** (1975) 749–755.
- [Friedmann, 1922] A. FRIEDMANN, “Über die Krümmung des Raumes”. *Zeitschrift für Physik* **10** (1922) 377–386.
- [Friedmann, 1924] A. FRIEDMANN, “Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes”. *Zeitschrift für Physik* **21** (1924) 326–332.

- [Gamov, 1946] G. GAMOV, “Expanding Universe and the origin of elements”. *Physical Review* **70** (1946) 572–573.
- [Garnavich *et al.*, 1998a] P. M. GARNAVICH *et al.*, “Constraints on cosmological models from hubble space telescope observations of high- z supernovae”. *Astrophys. J.* **493** (1998) L53–57, astro-ph/9710123.
- [Garnavich *et al.*, 1998b] P. M. GARNAVICH, S. JHA, P. CHALLIS, A. CLOCCHIATTI, A. DIERCKS, A. V. FILIPPENKO, R. L. GILLILAND, C. J. HOGAN, R. P. KIRSHNER, B. LEIBUNDGUT, M. M. PHILLIPS, D. REISS, A. G. RIESS, B. P. SCHMIDT, R. A. SCHOMMER, R. C. SMITH, J. SPYROMILIO, C. STUBBS, N. B. SUNTZEFF, J. TONRY, & S. M. CARROLL, “Supernova limits on the cosmic equation of state”. *Astrophysical Journal* **509** (1998) 74–79, astro-ph/9806396.
- [Garnavich *et al.*, 1998c] P. M. GARNAVICH, R. P. KIRSHNER, P. CHALLIS, J. TONRY, R. L. GILLILAND, R. C. SMITH, A. CLOCCHIATTI, A. DIERCKS, A. V. FILIPPENKO, M. HAMUY, C. J. HOGAN, B. LEIBUNDGUT, M. M. PHILLIPS, D. REISS, A. G. RIESS, B. P. SCHMIDT, R. A. SCHOMMER, J. SPYROMILIO, C. STUBBS, N. B. SUNTZEFF, & L. WELLS, “Constraints on cosmological models from hubble space telescope observations of high- z supernovae”. *Astrophysical Journal Letters* **493** (1998) L53–L57, astro-ph/9710123.
- [Gunn, 1967] J. E. GUNN, “A fundamental limitation on the accuracy of angular measurements in observational cosmology”. *Astrophysical Journal* **147** (1967) 61+.
- [Gunn & Peterson, 1965] J. E. GUNN & B. A. PETERSON, “On the density of neutral hydrogen in intergalactic space”. *Astrophysical Journal* **142** (1965) 1633–1636.
- [Gurvits & Mitrofanov, 1986] L. I. GURVITS & I. G. MITROFANOV, “Perturbation of the background radiation by a moving gravitational lens”. *Nature* **324** (1986) 349+.
- [Guth, 1981] A. H. GUTH, “The inflationary Universe : a possible solution to the horizon and flatness problems”. *Physical Review* **D23** (1981) 347–356.
- [Guth & Pi, 1982] A. H. GUTH & S.-Y. PI, “Fluctuations in the new inflationary Universe”. *Physical Review Letters* **49** (1982) 1110–1113.
- [Guzik *et al.*, 2000] J. GUZIK, U. SELJAK, & M. ZALDARRIAGA, “Lensing effect on polarization in the microwave background : Extracting the convergence power spectrum”. *Phys. Rev.* **D62** (2000) 043517.
- [Hamana *et al.*, 2001] T. HAMANA, S. COLOMBI, & Y. SUTO, “Two-point correlation functions on the light cone : Testing theoretical predictions against n-body simulations”. *Astronomy and Astrophysics* **367** (2001) 18–26.
- [Hamilton, 2001] A. J. S. HAMILTON, “Formulae for growth factors in expanding universes containing matter and a cosmological constant”. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **322** (2001) 419–425.
- [Hamilton *et al.*, 1991] A. J. S. HAMILTON, A. MATTHEWS, P. KUMAR, & E. LU, “Reconstructing the primordial spectrum of fluctuations of the universe from the observed nonlinear clustering of galaxies”. *Astrophys. J. Lett.* **374** (1991) L1–L4.
- [Harrison, 1970] E. R. HARRISON, “Fluctuations at the threshold of classical cosmology”. *Physical Review* **D1** (1970) 2726–2730.
- [Hawking, 1982] S. W. HAWKING, “The development of irregularities in a single bubble inflationary Universe”. *Physics Letters* **115B** (1982) 295–297.
- [Heavens *et al.*, 2000] A. HEAVENS, A. REFREGIER, & C. HEYMANS, “Intrinsic correlation of galaxy shapes : implications for weak lensing measurements”. *mnras* **319** (2000) 649–656, astro-ph/astro-ph/0005269.

- [Hindmarsh & Kibble, 1995] M. B. HINDMARSH & T. W. B. KIBBLE, “Cosmic strings”. *Reports on Progress in Physics* **58** (1995) 477–562, hep-ph/9411342.
- [Hu, 2000] W. HU, “Weak lensing of the cmb : A harmonic approach”. *Phys. Rev.* **D62** (2000) 043007.
- [Hu, 2001] W. HU, “Mapping the dark matter through the cmb damping tail”. (2001) 5424+, astro-ph/0105424.
- [Hu, 1995] W. T. HU, *Wandering in the background : a cosmic microwave background explorer* (1995). PhD Thesis, University of California at Berkeley, astro-ph/9508126.
- [Hu et al., 1998] W. T. HU, U. SELJAK, M. S. WHITE, & M. ZALDARRIAGA, “A complete treatment of CMB anisotropies in a FRW Universe”. *Physical Review* **D57** (1998) 3290–3301, astro-ph/9709066.
- [Hu & Silk, 1993] W. T. HU & J. D. SILK, “Thermalization and spectral distortions of the cosmic background radiation”. *Physical Review* **D48** (1993) 485–502.
- [Hu & White, 1997] W. T. HU & M. S. WHITE, “CMB anisotropies : total angular momentum method”. *Physical Review* **D56** (1997) 596–615, astro-ph/9702170.
- [Hubble, 1929] E. HUBBLE, “A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae”. *Proceedings of the National Academy of Science (U.S.A.)* **15** (1929) 168–173.
- [Hubble & Humason, 1931] E. HUBBLE & M. L. HUMASON, “The velocity-distance relation among extragalactic nebulae”. *Astrophysical Journal* **74** (1931) 43–80.
- [HuSite, http] “The home page of Wayne Hu”. [http://http://background.uchicago.edu/whu](http://background.uchicago.edu/whu).
- [Itzykson & Zuber, 1980] C. ITZYKSON & J.-B. ZUBER, *Quantum field theory*. Mac Graw-Hill, New York (1980), xxii+705 pages, ISBN 0-07-032071-3.
- [Jaffe et al., 2001] A. H. JAFFE, P. A. R. ADE, A. BALBI, J. J. BOCK, J. R. BOND, J. BORRILL, A. BOSCALERI, K. A. COBLE, B. P. CRILL, P. DE BERNARDIS, P. FARESE, P. G. FERREIRA, K. GANGA, M. GIACOMETTI, S. HANANY, E. HIVON, V. V. HRISTOV, A. IACOANGELI, A. E. LANGE, A. T. LEE, L. MARTINIS, S. MASI, P. D. MAUSKOPF, A. MELCHIORRI, T. MONTROY, C. B. NETTERFIELD, S. OH, E. PASCALE, F. PIACENTINI, D. Y. POGOSIAN, S. PRUNET, B. RABII, S. RAO, P. L. RICHARDS, G. ROMEO, J. E. RUHL, F. SCARAMUZZI, D. SFORNA, G. F. SMOOT, R. STOMPOR, C. L. WINANT, & J.-H. P. WU, “Cosmology from MAXIMA-1, BOOMERanG and COBE/DMR CMB observations”. *Physical Review Letters* **86** (2001) 3475–3479, astro-ph/0007333.
- [Jain & Seljak, 1997] B. JAIN & U. SELJAK, “Cosmological model predictions for weak lensing : Linear and nonlinear regimes”. *Astrophys. J.* **484** (1997) 560.
- [Kaiser, 1992] N. KAISER, “Weak gravitational lensing of distant galaxies”. *Astrophysical Journal* **388** (1992) 272–286.
- [Kaiser, 2000] N. KAISER, “A new shear estimator for weak-lensing observations”. *Astrophysical Journal* **537** (2000) 555–577.
- [Kaiser et al., 1995] N. KAISER, G. SQUIRES, & T. BROADHURST, “A method for weak lensing observations”. *Astrophysical Journal* **449** (1995) 460+.
- [Kaiser & Stebbins, 1984] N. KAISER & A. J. STEBBINS, “Microwave anisotropy due to cosmic strings”. *Nature* **310** (1984) 391–393.
- [Kamionkowski et al., 1997a] M. KAMIONKOWSKI, A. KOSOWSKY, & A. J. STEBBINS, “A probe of primordial gravity waves and vorticity”. *Physical Review Letters* **78** (1997) 2058–2061, astro-ph/9609132.
- [Kamionkowski et al., 1997b] M. KAMIONKOWSKI, A. KOSOWSKY, & A. J. STEBBINS, “Statistics of cosmic microwave background polarization”. *Physical Review* **D55** (1997) 7368–7388, astro-ph/9611125.

- [Kashlinsky, 1988] A. KASHLINSKY, “Small-scale fluctuations in the microwave background radiation and multiple gravitational lensing”. *Astrophysical Journal Letters* **331** (1988) L1–L4.
- [Kibble, 1976] T. W. B. KIBBLE, “Topology of cosmic domains and strings”. *Journal of Physics* **A9** (1976) 1387–1398.
- [Kibble, 1980] T. W. B. KIBBLE, “Some implications of a cosmological phase transition”. *Physics Report* **67** (1980) 183–199.
- [Kolb & Turner, 1990] E. W. KOLB & M. S. TURNER, *The early Universe*. Addison-Wesley, Reading (1990), xxii+547 pages, ISBN 0-201-11603-0.
- [Lemaître, 1927] G. LEMAÎTRE, “Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques”. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* **A47** (1927) 49–59. Translated in english in [Lemaître, 1931].
- [Lemaître, 1931] G. LEMAÎTRE, “A homogeneous Universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extragalactic nebulae”. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **91** (1931) 483–490. Traduction anglaise de [Lemaître, 1927].
- [Liddle & Lyth, 1993] A. R. LIDDLE & D. H. LYTH, “The cold dark matter density perturbation”. *Physics Report* **231** (1993) 1–105, astro-ph/9303019.
- [Liddle & Lyth, 2000] A. R. LIDDLE & D. H. LYTH, *Cosmological inflation and large-scale structure*. Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [Lifchitz, 1946] E. M. LIFCHITZ, “On the gravitational instability of the expanding Universe”. *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **16** (1946) 576.
- [Lifchitz & Khalatnikov, 1963] E. M. LIFCHITZ & I. M. KHALATNIKOV, “Investigations in relativistic cosmology”. *Advances in Physics* **12** (1963) 185–249.
- [Linde, 1982] A. D. LINDE, “A new inflationary Universe scenario : a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems”. *Physics Letters* **108B** (1982) 389–393.
- [Linde, 1983] A. D. LINDE, “Chaotic inflation”. *Physics Letters* **129B** (1983) 177–181.
- [Linde, 1990] A. D. LINDE, *Particle physics and inflationary cosmology*. Harwood, New York (1990), xvii+362 pages, ISBN 3-7186-0490-6.
- [Linder, 1990] E. V. LINDER, “Analysis of gravitationally lensed microwave background anisotropies”. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **243** (1990) 353–361.
- [Lineweaver et al., 1997] *The cosmic microwave background*, édité par C. H. Lineweaver, J. G. Bartlett, A. Blanchard, M. Signore, & J. D. Silk. *NATO ASI Series* **502**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1997), xiv+449 pages. Proceedings of a NATO Advanced Study Institute conference held at Strasbourg, France, May 27–June 7, 1996.
- [Lyth, 1985] D. H. LYTH, “Large-scale energy-density perturbations and inflation”. *Physical Review* **D31** (1985) 1792–1798.
- [Ma & Fry, 2000] C. MA & J. N. FRY, “What does it take to stabilize gravitational clustering?”. *Astrophysical Journal Letters* **538** (2000) L107–L111.
- [Ma & Bertschinger, 1995] C.-P. MA & E. BERTSCHINGER, “Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal newtonian gauges”. *Astrophysical Journal* **455** (1995) 7–25, astro-ph/9506072.
- [Mackey et al., 2001] J. MACKKEY, M. WHITE, & M. KAMIONKOWSKI, “Theoretical Estimates of Intrinsic Galaxy Alignment”. (2001) 6364+, astro-ph/0106364.
- [Madau, 2000] P. MADAU, “Cosmological reionization”. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **A358** (2000) 2021–2034, astro-ph/0003096.

- [Maoli *et al.*, 2000] R. MAOLI, L. VAN WAERBEKE, Y. MELLIER, P. SCHNEIDER, B. JAIN, F. BERNARDEAU, T. ERBEN, & B. FORT, “Cosmic shear analysis in 50 uncorrelated vlt fields. implications for ω_0 , σ_8 ”. *astro-ph/0011251* (2000).
- [Mather *et al.*, 1990] J. C. MATHER, E. S. CHENG, R. E. EPLEE, R. B. ISAACMAN, S. S. MEYER, R. A. SHAFER, R. WEISS, E. L. WRIGHT, C. H. BENNETT, N. W. BOGGESS, E. DWEK, S. GULKIS, M. G. HAUSER, M. A. JANSSEN, T. J. KELSALL, P. M. LUBIN, S. H. MOSELEY, T. L. MURDOCK, R. F. SILVERBERG, G. F. SMOOT, & D. T. WILKINSON, “A preliminary measurement of the cosmic microwave background spectrum by the cosmic background explorer (COBE) satellite”. *Astrophysical Journal Letters* **354** (1990) L37–L40.
- [MAXIMA, [http](http://cfpa.berkeley.edu/group/cmb/index.html)] “MAXIMA Home Page”. <http://cfpa.berkeley.edu/group/cmb/index.html>.
- [Metcalf & Silk, 1997] R. B. METCALF & J. SILK, “Gravitational magnification of the cosmic microwave background”. *Astrophysical Journal* **489** (1997) 1+.
- [Miralda-Escude, 1991] J. MIRALDA-ESCUDE, “The correlation function of galaxy ellipticities produced by gravitational lensing”. *Astrophysical Journal* **380** (1991) 1–8.
- [Misner *et al.*, 1973] C. W. MISNER, K. S. THORNE, & J. A. WHEELER, *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco (1973), xxvi+1279 pages, ISBN 0-7167-0334-3.
- [Moutarde *et al.*, 1991] F. MOUTARDE, J. . ALIMI, F. R. BOUCHET, R. PELLAT, & A. RAMANI, “Precollapse scale invariance in gravitational instability”. *Astrophysical Journal* **382** (1991) 377–381.
- [Munshi *et al.*, 1999] D. MUNSHI, F. BERNARDEAU, A. L. MELOTT, & R. SCHAEFFER, “Scaling in gravitational clustering, two- and three-dimensional dynamics”. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **303** (1999) 433–445.
- [Nottale, 1984] L. NOTTALE, “Gravitational temperature decrease of the microwave background radiation towards rich clusters of galaxies”. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **206** (1984) 713–727.
- [Padmanabhan, 1993] T. PADMANABHAN, *Structure formation in the Universe*. Cambridge University Press, Cambridge (1993), xvi+483 pages, ISBN 0-521-41448-2.
- [Peacock, 1998] J. A. PEACOCK, *Cosmological physics*. Cambridge University Press, Cambridge (1998), xi+682 pages.
- [Peacock & Dodds, 1994] J. A. PEACOCK & S. J. DODDS, “Reconstructing the linear power spectrum of cosmological mass fluctuations”. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **267** (1994) 1020.
- [Peacock & Dodds, 1996] J. A. PEACOCK & S. J. DODDS, “Non-linear evolution of cosmological power spectra”. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **280** (1996) L19–L26.
- [Peebles, 1974] P. J. E. PEEBLES, “The nature of the distribution of galaxies”. *Astronomy and Astrophysics* **32** (1974) 197+.
- [Peebles, 1980] P. J. E. PEEBLES, *The large-scale structure of the Universe*. Princeton University Press, Princeton (1980), xiii+422 pages, ISBN 0-691-08240-5.
- [Peebles, 1993] P. J. E. PEEBLES, *Principles of physical cosmology*. Princeton University Press, Princeton (1993), xviii+718 pages, ISBN 0-691-07428-3.
- [Peebles & Yu, 1970] P. J. E. PEEBLES & J. T. YU, “Primeval adiabatic perturbation in an expanding Universe”. *Astrophysical Journal* **162** (1970) 815–836.
- [Peiris & Spergel, 2000] H. V. PEIRIS & D. N. SPERGEL, “Cross-correlating the sloan digital sky survey with the microwave sky”. *Astrophysical Journal* **540** (2000) 605–613.
- [Penzias & Wilson, 1965] A. A. PENZIAS & R. W. WILSON, “A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s”. *Astrophysical Journal* **142** (1965) 419–421.

- [Perlmutter *et al.*, 1998] S. PERLMUTTER, G. ALDERING, M. DELLA VALLE, S. DEUSTUA, R. S. ELLIS, S. FABBRO, A. FRUCHTER, G. GOLDBABER, D. E. GROOM, I. M. HOOK, A. G. KIM, M. Y. KIM, R. A. KNOP, C. LIDMAN, R. G. MCMAHON, P. NUGENT, R. PAIN, N. PANAGIA, C. R. PENNYPACKER, P. RUIZ-LAPUENTE, B. SCHAEFER, & N. WALTON, “Discovery of a supernova explosion at half the age of the universe”. *Nature* **391** (1998) 51.
- [Perlmutter *et al.*, 1998] S. PERLMUTTER, G. ALDERING, M. DELLA VALLE, S. DEUSTUA, R. S. ELLIS, S. FABBRO, A. S. FRUCHTER, G. GOLDBABER, A. GOOBAR, D. E. GROOM, I. M. HOOK, A. G. KIM, M. Y. KIM, R. A. KNOP, C. LIDMAN, R. G. MAC MAHON, P. E. NUGENT, R. PAIN, N. PANAGIA, C. R. PENNYPACKER, P. RUIZ LAPUENTE, B. SCHAEFER, & N. WALTON, “Discovery of a supernova explosion at half the age of the Universe and its cosmological implications”. *Nature* **391** (1998) 51–54, astro-ph/9712212.
- [Perlmutter *et al.*, 1999a] S. PERLMUTTER, G. ALDERING, G. GOLDBABER, R. A. KNOP, P. E. NUGENT, P. G. CASTRO, S. DEUSTUA, S. FABBRO, A. GOOBAR, D. E. GROOM, I. M. HOOK, A. G. KIM, M. Y. KIM, J. C. LEE, N. J. NUÑES, R. PAIN, C. R. PENNYPACKER, R. QUIMBY, C. LIDMAN, R. S. ELLIS, M. IRWIN, R. G. MAC MAHON, P. RUIZ LAPUENTE, N. WALTON, B. SCHAEFER, B. J. BOYLE, A. V. FILIPPENKO, T. MATHESON, A. S. FRUCHTER, N. PANAGIA, H. J. M. NEWBERG, & W. J. COUCH, “Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae”. *Astrophysical Journal* **517** (1999) 565–586, astro-ph/9812133.
- [Perlmutter *et al.*, 1999b] S. PERLMUTTER *et al.*, “Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae”. *Astrophys. J.* **517** (1999) 565–586, astro-ph/9812133.
- [Perlmutter *et al.*, 1999] S. PERLMUTTER, M. S. TURNER, & M. WHITE, “Constraining dark energy with SN-Ia and large-scale structure”. *Physical Review Letters* **83** (1999) 670+.
- [Perlmutter *et al.*, 1999] S. PERLMUTTER, M. S. TURNER, & M. S. WHITE, “Constraining dark energy with SNe Ia and large-scale structure”. *Physical Review Letters* **83** (1999) 670–673, astro-ph/9901052.
- [Prunet *et al.*, 2000] S. PRUNET, S. K. SETHI, & F. R. BOUCHET, “Cosmic microwave background polarization data and galactic foregrounds : estimation of cosmological parameters”. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **314** (2000) 348–353.
- [Prunet *et al.*, 1998] S. PRUNET, S. K. SETHI, F. R. BOUCHET, & M. . MIVILLE-DESCHENES, “Galactic dust polarized emission at high latitudes and cmb polarization”. *Astronomy and Astrophysics* **339** (1998) 187–193.
- [Ratra & Peebles, 1988] B. V. RATRA & P. J. E. PEEBLES, “Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field”. *Physical Review* **D37** (1988) 3406–3427.
- [Rhodes *et al.*, 2001] J. RHODES, A. REFREGIER, & E. J. GROTH, “Detection of cosmic shear with the hst survey strip”. astro-ph/101213 (2001), astro-ph/101213.
- [Riazuelo, 2000] A. RIAZUELO, *Signature de divers modèles d’Univers primordial dans les anisotropies du rayonnement fossile* (2000). Thèse de doctorat, Spécialité : Astrophysique, Université Paris XI-Orsay, F-91405 Orsay Cedex.
- [Riess *et al.*, 1998] A. G. RIESS, A. V. FILIPPENKO, P. CHALLIS, A. CLOCCHIATTI, A. DIERCKS, P. M. GARNAVICH, R. L. GILLILAND, C. J. HOGAN, S. JHA, R. P. KIRSHNER, B. LEIBUNDGUT, M. M. PHILLIPS, D. REISS, B. P. SCHMIDT, R. A. SCHOMMER, R. C. SMITH, J. SPYROMILIO, C. STUBBS, N. B. SUNTZEFF, & J. TONRY, “Observational evidence from supernovae for an accelerating Universe and a cosmological constant”. *Astronomical Journal* **116** (1998) 1009–1038, astro-ph/9805201.
- [Sachs, 1961] R. K. SACHS, “Gravitational waves in general relativity, vi : The outgoing radiation conditions”. *Proceedings of the Royal Society of London* **A264** (1961) 309.

- [Sachs & Wolfe, 1967] R. K. SACHS & A. M. WOLFE, “Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background”. *Astrophysical Journal* **147** (1967) 73–90.
- [Sahni & Starobinsky, 2000] V. SAHNI & A. STAROBINSKY, “The case for a positive cosmological lambda-term”. *Int. J. Mod. Phys. D9* (2000) 373–444, astro-ph/9904398.
- [Sakharov, 1979] A. D. SAKHAROV, “Baryonic asymmetry of the universe”. *Sov. Phys. JETP* **49** (1979) 594–599.
- [Schneider *et al.*, 1992] P. SCHNEIDER, J. EHLERS, & E. FALCO, *Gravitational Lenses*. Gravitational Lenses, XIV, 560 pp. 112 figs.. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. Also Astronomy and Astrophysics Library (1992).
- [Seitz *et al.*, 1994] S. SEITZ, P. SCHNEIDER, & J. EHLERS, “Light propagation on arbitrary space-times and the gravitational lens approximation”. *Class. Quant. Grav.* **11** (1994) 2345–2374, astro-ph/9403056.
- [Seljak, 1996] U. SELJAK, “Gravitational lensing effect on cosmic microwave background anisotropies : A power spectrum approach”. *Astrophysical Journal* **463** (1996) 1+.
- [Seljak & Zaldarriaga, 2000] U. . SELJAK & M. ZALDARRIAGA, “Lensing-induced cluster signatures in the cosmic microwave background”. *Astrophysical Journal* **538** (2000) 57–64.
- [Seljak & Zaldarriaga, 1997] U. SELJAK & M. ZALDARRIAGA, “An all-sky analysis of polarization in the microwave background”. *Physical Review D55* (1997) 1830–1840, astro-ph/9609170.
- [Seljak & Zaldarriaga, 1999a] U. SELJAK & M. ZALDARRIAGA, “Direct signature of evolving gravitational potential from cosmic microwave background”. *Physical Review D60* (1999) 043504, astro-ph/9811123.
- [Seljak & Zaldarriaga, 1999b] U. SELJAK & M. ZALDARRIAGA, “Measuring dark matter power spectrum from cosmic microwave background”. *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 2636–2639, astro-ph/9810092.
- [Silk, 1968] J. D. SILK, “Cosmic black-body radiation and galaxy formation”. *Astrophysical Journal* **151** (1968) 459–472.
- [Slipher, 1914] V. M. SLIPHER (1914). “Spectrographic observations of nebulea”. Paper presented at the 17th meeting of the American Astronomical Society, August, 1914.
- [Slipher, 1915] V. M. SLIPHER, “Spectrographic observations of nebulea”. *Popular Astronomy* **23** (1915) 21–24.
- [Smoot, 1997] G. F. SMOOT, “The CMB anisotropy experiments”. In [Lineweaver *et al.*, 1997], pp 185–240, astro-ph/9705135.
- [Songaila *et al.*, 1999] A. SONGAILA, E. M. HU, L. L. COWIE, & R. G. MAC MAHON, “Limits on the Gunn-Peterson effect at $z = 5$ ”. *Astrophysical Journal Letters* **525** (1999) L5–L8, astro-ph/9908321.
- [Squires & Kaiser, 1996] G. SQUIRES & N. KAISER, “Unbiased cluster lens reconstruction”. *Astrophysical Journal* **473** (1996) 65+.
- [Starobinsky, 1979] A. A. STAROBINSKY, “Spectrum of relict gravitation radiation and early state of the Universe”. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* **30** (1979) 682–685.
- [Starobinsky, 1980] A. A. STAROBINSKY, “A new type of isotropic cosmological models without singularity”. *Physics Letters* **91B** (1980) 99–102.
- [Starobinsky, 1982] A. A. STAROBINSKY, “Dynamics of phase transition in the new inflationary Universe scenario and generation of perturbations”. *Physics Letters* **117B** (1982) 175–178.

- [Starobinsky, 1983] A. A. STAROBINSKY, “The perturbation spectrum evolving from a nonsingular, initially de Sitter cosmology, and the microwave background anisotropy”. *Soviet Astronomy Letters* **9** (1983) 302–304.
- [Stebbins, 1997] A. J. STEBBINS, “The Cosmic Microwave Background spectrum”. In [Lineweaver *et al.*, 1997], pp 241–270, astro-ph/9705178.
- [Steinhardt *et al.*, 1999] P. J. STEINHARDT, L.-M. WANG, & I. ZLATEV, “Cosmological tracking solutions”. *Physical Review* **D59** (1999) 123504, astro-ph/9812313.
- [Suginozawa *et al.*, 1998] M. SUGINOHARA, T. SUGINOHARA, & D. N. SPERGEL, “Cross-correlating cosmic microwave background radiation fluctuations with redshift surveys : Detecting the signature of gravitational lensing”. *Astrophysical Journal* **495** (1998) 511+.
- [Takada, 2001] M. TAKADA, “Lensing-induced non-gaussian signatures in the cosmic microwave background”. (2001) 1449+, astro-ph/0101449.
- [Takada *et al.*, 2000] M. TAKADA, E. KOMATSU, & T. FUTAMASE, “Gravitational lensing effect on the two-point correlation of hot spots in the cosmic microwave background”. *Astrophysical Journal Letters* **533** (2000) L83–L87.
- [Tegmark, http] “The home page of Max Tegmark”. <http://www.hep.upenn.edu/max/index.html>.
- [Tomita & Watanabe, 1989] K. TOMITA & K. WATANABE, “Gravitational lens effect on the cosmic background radiation due to nonlinear inhomogeneities”. *Prog. Theor. Phys.* **82** (1989) 563.
- [Uzan, 1998] J.-P. UZAN, *Défauts topologiques et conditions aux limites en cosmologie primordiale* (1998). Thèse de doctorat, Spécialité : Physique Théorique, Université Paris XI-Orsay, F-91405 Orsay Cedex.
- [Uzan & Bernardeau, 2001] J.-P. UZAN & F. BERNARDEAU, “Cosmic strings lens phenomenology : General properties of distortion fields”. *Phys. Rev.* **D63** (2001) 023004, astro-ph/0004105.
- [Van Waerbeke, 1997] L. VAN WAERBEKE, *Analyse de la distribution de matière à grande échelle par les effets de lentille gravitationnelle et les quasars*. (1997). Thèse de doctorat, Spécialité : Physique Théorique, Université Paris XI-Orsay, F-91405 Orsay Cedex.
- [van Waerbeke *et al.*, 2000a] L. VAN WAERBEKE, F. BERNARDEAU, & K. BENABED, “Lensing effect on the relative orientation between the cosmic microwave background ellipticities and the distant galaxies”. *Astrophys. J.* **540** (2000) 14–19.
- [van Waerbeke *et al.*, 1999a] L. VAN WAERBEKE, F. BERNARDEAU, & Y. MELLIER, “Efficiency of weak lensing surveys to probe cosmological models”. *Astron. & Astrophys.* **342** (1999) 15–33.
- [van Waerbeke *et al.*, 1999b] L. VAN WAERBEKE, F. BERNARDEAU, & Y. MELLIER, “Efficiency of weak lensing surveys to probe cosmological models”. *Astronomy and Astrophysics* **342** (1999) 15–33.
- [Van Waerbeke *et al.*, 2001] L. VAN WAERBEKE, T. HAMANA, R. . SCOCCIMARRO, S. COLOMBI, & F. BERNARDEAU, “Weak lensing predictions at intermediate scales”. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **322** (2001) 918–926.
- [van Waerbeke *et al.*, 2000b] L. VAN WAERBEKE, Y. MELLIER, T. ERBEN, J. CUILANDRE, F. BERNARDEAU, R. MAOLI, E. BERTIN, H. MC CRACKEN, O. LE FÈVRE, B. FORT, M. DANTEL-FORT, B. JAIN, & P. SCHNEIDER, “Detection of correlated galaxy ellipticities from cfht data : first evidence for gravitational lensing by large-scale structures”. *Astron. & Astrophys.* **358** (2000) 30–44.
- [van Waerbeke *et al.*, 2001] L. VAN WAERBEKE, Y. MELLIER, M. RADOVICH, E. BERTIN, M. DANTEL-FORT, H. MCCRACKEN, O. LE FEVRE, S. FOUCAUD, J. CUILANDRE, T. ERBEN, B. JAIN, P. SCHNEIDER, F. BERNARDEAU, & B. FORT, “Cosmic shear statistics and cosmology”. astro-ph/0101354 (2001), astro-ph/0101354.

- [Vilenkin & Shellard, 1994] A. V. VILENKIN & E. P. S. SHELLARD, *Cosmic strings and other topological defects*. Cambridge University Press, Cambridge (1994), xix+517 pages, ISBN 0-521-39153-9.
- [Waerbeke, 2000] L. V. WAERBEKE, “Noise properties of gravitational lens mass reconstruction.”. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **313** (2000) 524–532.
- [Weinberg, 1972] S. WEINBERG, *Gravitation and cosmology*. Addison Wiley and sons, New York (1972), xxviii+657 pages, ISBN 0-471-92567-5.
- [Weinberg, 1989] S. WEINBERG, “The cosmological constant problem”. *Review of Modern Physics* **61** (1989) 1–23.
- [Wittman *et al.*, 2000] D. M. WITTMAN, J. A. TYSON, D. KIRKMAN, I. DELL’ANTONIO, & G. BERNSTEIN, “Detection of weak gravitational lensing distortions of distant galaxies by cosmic dark matter at large scales”. *Nature* **405** (2000) 143–148.
- [Zaldarriaga, 2000] M. ZALDARRIAGA, “Lensing of the cmb : Non-gaussian aspects”. *Phys. Rev.* **D62** (2000) 063510.
- [Zaldarriaga & Seljak, 1997] M. ZALDARRIAGA & U. SELJAK, “Signature of gravity waves in polarization of the microwave background”. *Physical Review Letters* **78** (1997) 2054–2057, astro-ph/9609169.
- [Zaldarriaga & Seljak, 1998] M. ZALDARRIAGA & U. SELJAK, “Gravitational lensing effect on cosmic microwave background polarization”. *Physical Review* **D58** (1998) 023003, astro-ph/9803150.
- [Zaldarriaga & Seljak, 1999] M. ZALDARRIAGA & U. SELJAK, “Reconstructing projected matter density from cosmic microwave background”. *Physical Review* **D59** (1999) 123507.
- [Zaldarriaga *et al.*, 1998] M. ZALDARRIAGA, U. SELJAK, & E. BERTSCHINGER, “Integral solution for the microwave background anisotropies in nonflat Universes”. *Astrophysical Journal* **494** (1998) 491–502, astro-ph/9704265.
- [Zel’Dovich, 1970] Y. B. ZEL’DOVICH, “Gravitational instability : an approximate theory for large density perturbations.”. *Astronomy and Astrophysics* **5** (1970) 84–89.
- [Zel’dovich, 1972] Y. B. ZEL’DOVICH, “A hypothesis, unifying the structure and entropy of the Universe”. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **160** (1972) 1P–3P.
- [Zel’dovich *et al.*, 1969] Y. B. ZEL’DOVICH, V. G. KURT, & R. A. SUNYAEV, “The recombination of hydrogen in the hot model of the Universe”. *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **28** (1969) 146–150.
- [Zel’dovich & Sunyaev, 1969] Y. B. ZEL’DOVICH & R. A. SUNYAEV, “The interaction of matter and radiation in a hot-model Universe”. *Astrophysics and Space Science* **4** (1969) 301–316.