Table des matières

Introduction

L'objet d'étude de cette thèse est le groupe de Mumford-Tate des 1-motifs définis sur $\mathbb{C}$.
Un 1-motif défini sur un corps algébriquement clos, consiste en un $\mathbb{Z}$-module libre et de type fini X, en une extension G d'une variété abélienne A par un tore T, et en un homomorphisme $u : X \longrightarrow G$. Les 1-motifs ont été introduits par P. Deligne dans [D75] comme incarnation algébrique des structures de Hodge mixtes polarisables de niveau ≤ 1, et plus fondamentallement, comme exemple explicite de "motifs mixtes".
Les 1-motifs se sont avérés utiles dans l'étude de l'uniformisation et de la dégénérescence des variétés abéliennes. Par exemple, une construction bien connue de Raynaud permet d'associer à une variété abélienne B sur $\mathbb{C}_p$, un 1-motif $M = [X \stackrel{u}{\longrightarrow} G]$, G ayant bonne réduction, tel que dans la catégorie analytique rigide, B^{rig} s'identifie au quotient $G^{\mathrm{rig}}/u(X)$ (cf. [Ra71]). Dans la même direction, les 1-motifs permettent de donner une interprétation modulaire de certaines compactifications de variétés de modules de variétés abéliennes. Ils apparaissent donc dans l'étude des variétés de Shimura mixtes (cf. [B83] et [M90]).
Dans [D75], Deligne construit une équivalence entre la catégorie, $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$, des 1-motifs définis sur $\mathbb{C}$ et la catégorie des $\mathbb{Q}$-structures de Hodge mixtes de type $\{(-1,-1),(-1,0),(0,-1),(0,0)\}$ et avec le $\mathrm{Gr}^{\mathrm{W}}_{-1}$ polarisable. Cette équivalence est donnée par le foncteur "réalisation de Hodge"

$$T : \mathcal{M}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{SHM}_{\mathbb{Q}}$$

où $\mathcal{SHM}_{\mathbb{Q}}$ désigne la catégorie des $\mathbb{Q}$-structures de Hodge mixtes. On a donc à la fois une déscription algébrique et une déscription transcendante des 1-motifs sur $\mathbb{C}$. On peut alors se poser le problème de donner une déscription algébrique de la catégorie tensorielle $< T(\mathcal{M}_{\mathbb{C}}) >^{\otimes}$ engendré par $T(\mathcal{M}_{\mathbb{C}})$. Pour la sous-catégorie tensorielle des objects semi-simples de $< T(\mathcal{M}_{\mathbb{C}}) >^{\otimes}$, ce problème a été résolu dans [A96]. Dans cette thèse on s'interessera au problème restant qui est essentiellement lié à la mixité. Si M est un 1-motif défini sur $\mathbb{C}$, la sous-catégorie tensorielle engendré par M est équivalente à la catégorie des représentations du groupe de Mumford-Tate de M, qui est un sous-groupe de $\mathbf{GL}(T(M))$ muni d'une filtration $W_\bullet$ croissante, en trois crans et refletant la mixité. On est donc conduit à l'étude des dégénérescences possibles de cette filtration $W_\bullet$ de $MT(M)$.

Dans le passé, plusieurs personnes se sont interessées aux dégénérescences du groupe de Mumford-Tate des 1-motifs, i.e. aux phénomènes qui provoquent la chute de la dimension de ce groupe. En s'intéressant aux problèmes qui proviennent de la théorie de Kummer appliquée à des variétés semi-abéliennes, dans [JR87] K. Ribet et O. Jacquinot ont découvert des points spéciaux sur ces variétés, qui fournissent des 1-motifs dont le groupe de Mumford-Tate présente la dégénérescence appelée déficience. L. Breen et D. Bertrand se sont aussi interessés à ces 1-motifs déficients et ils ont fourni une interprétation géométrique de ceux-ci (voir [BR87] et [Be98]).
Enfin dans [A92], Y. André a trouvé une formule explicite pour le radical unipotent du groupe de Mumford-Tate des 1-motifs dont l'extension sous-jacente est triviale.
Dans cette thèse, après avoir recapitulé tous ces résultats, on complète cette étude du groupe de Mumford-Tate des 1-motifs. Mais voici plus précisément nos résultats:

Dans le premier chapitre, on rappelle rapidement les principales notions sur les 1-motifs utilisées dans cette thèse. En particulier on définit le groupe de Mumford-Tate d'un 1-motif M ainsi que sa filtration $W_\bullet$ à trois crans. Nous classifions les dégénérescences de ce groupe de la manière suivante:

- la déficience, mise en évidence par K. Ribet et O. Jacquinot, qui par définition se présente quand $W_{-2}(MT(M)) = 0$,

- la quasi-déficience, qui par définition se présente quand $W_{-1}(MT(M))$ est abélien,

- la dépression, qui par définition se présente quand $W_{-2}(MT(M))$ n'a pas dimension maximale.

A la fin de ce chapitre, on fournit de nombreux exemples de dégénérescences et on rappelle brièvement les résultats connus sur les variétés de Shimura mixtes définies à partir de groupes de Mumford-Tate dégéneres (cf. [M90] VI).

Dans le deuxième chapitre, on étudie la structure de $MT(M)$ (cf. théorème 2.3): on dévisse le radical unipotent de $MT(M)$ de façon à se réduire à deux termes: le cran $W_{-2}(MT(M))$ et le radical unipotent du groupe de Mumford-Tate d'un 1-motif sans partie torique. Puisque le deuxième terme est déjà entièrement étudié dans [A92], pour l'étude complète du radical unipotent il nous reste à comprendre le cran W_{-2}, qui est lié à la dépression. Comme corollaire de ce dévissage, on obtient la dimension de $MT(M)$. Dans le cas où le groupe des caractères du tore et le réseau, sous-jacents au 1-motif M, sont de rang 1, on prouve que le radical unipotent de $MT(M)$ s'injecte dans un groupe de Heisenberg.
A la fin de ce chapitre, on explique comment se réduire à l'étude du groupe de Mumford-Tate d'une somme directe de 1-motifs dont le groupe des caractères du tore et le réseau sous-jacents sont de rang 1.

Le troisième chapitre est celui qui fournit le plus de surprises. En effet, en utilisant des résultats de L. Breen et D. Bertrand, on fournit une interprétation géométrique de la déficience et de la quasi-déficience, qui nous permettra de démontrer que ces deux dégénérescences se ramènent à des dégénérescences "triviales".

Dans le quatrième chapitre, on formule de manière explicite les conjectures de transcendance qui découlent de la conjecture des périodes généralisée appliquée à certains 1-motifs. Plus précisément, dans [A97], Y. André propose une généralisation de la conjecture des périodes de Grothendieck, aux motifs mixtes définis sur un corps qui n'est pas nécessairement algébrique. De plus, en appliquant cette généralisation à certains 1-motifs, il retrouve des conjectures de transcendance classiques (par exemple "si $q \in \mathbb{C}^*$, tel que $|q| \neq 1$, alors $\mathrm{deg.transc}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(2i\pi, q, \log q) \geq 2$") et même un théorème de Nesterenko (voir [A97] 2.2 et 2.3).
Notre but est de trouver systématiquement toutes *les conjectures de transcendance qui sont équivalentes à la conjecture des périodes généralisée appliquée à un certain type de 1-motifs.* On se bornera à des 1-motifs dont l'extension sous-jacente est triviale et dont la partie abélienne est constituée d'un produit de courbes elliptiques.
Les conjectures de transcendance qu'on retrouve sont les suivantes:

- la conjecture de Schanuel;

- l'analogue elliptique de la conjecture de Schanuel;

- une conjecture modulaire de type CM, qui généralise un théorème de Nesterenko (voir [N96]);

- des conjectures elliptiques et elliptico-toriques, qui, à ma connaissance, ne se trouvent pas dans la littérature.

Toutes ces conjectures peuvent se déduire de la conjecture elliptico-torique (III.4?), et notre résultat principal est que *cette conjecture est équivalente à la conjecture des périodes généralisée appliquée aux 1-motifs de la forme* $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u} \prod_{j=1}^n \mathcal{E}_j \times \mathbb{G}_m^s]$*, où les* $\mathcal{E}_j$ *sont des courbes elliptiques deux à deux non isogènes* (théorème 4.4.1). Les autres résultats sont des corollaires de celui-ci.
Dans les quatre premières sections du chapitre quatre, on énonce la conjecture des périodes généralisée et les conjectures de transcendance qui lui sont équivalentes. Les sections 4.5 et 4.6 sont les plus techniques: elles contiennent le calcul de la matrice des périodes et du groupe de Mumford-Tate des 1-motifs dont l'extension sous-jacente est triviale. Dans la dernière section, on démontre le théorème 4.4.1.

Remerciements: Je tiens à remercier Yves André de m'avoir proposé ce travail qui correspond à ce que je voulais étudier. Je suis très reconnaissante envers Daniel Bertrand des diverses discussions que nous avons eues sur ce sujet. Je remercie Ben Moonen pour ses nombreux commentaires sur ce travail. Enfin je remercie très sincèrement Daniel Bertrand, Ben Moonen, Jörg Wildeshaus et Jean-Pierre Wintenberger d'avoir bien voulu faire partie de mon jury.

Chapitre 1

1-motifs et groupes de Mumford-Tate

1.1. *Un 1-motif M sur* $\mathbb{C}$ consiste en

(a) un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini X, une variété abélienne A, définie sur $\mathbb{C}$, et un tore T, défini sur $\mathbb{C}$,

(b) une extension G de A par T, définie sur $\mathbb{C}$,

(c) un homomorphisme $u : X \longrightarrow G(\mathbb{C})$.

On peut identifier le 1-motif $M = (X, A, T, G, u)$ à un complexe de schémas en groupes, concentré en degrés 0 et 1: $M = [X \xrightarrow{u} G]$.
Par conséquent *un morphisme de 1-motifs* $f : [X_1 \xrightarrow{u_1} G_1] \longrightarrow [X_2 \xrightarrow{u_2} G_2]$ est un morphisme de complexes de schémas en groupes commutatifs, i.e. f consiste en deux morphismes $f_X : X_1 \longrightarrow X_2$ et $f_G : G_1 \longrightarrow G_2$ qui rendent commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{u_1} & G_1 \\ f_X \downarrow & & \downarrow f_G \\ X_2 & \xrightarrow{u_2} & G_2 \end{array} .$$

On note $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ la catégorie des 1-motifs sur $\mathbb{C}$. On définit une filtration croissante $W_\bullet$ sur $M = [X \xrightarrow{u} G] \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ de la façon suivante:

$$\begin{aligned} W_i(M) &= M \qquad \forall \ i \geq 0, \\ W_{-1}(M) &= [0 \longrightarrow G], \\ W_{-2}(M) &= [0 \longrightarrow T], \\ W_i(M) &= 0 \qquad \forall\, i \leq -3. \end{aligned}$$

Si on pose $\mathrm{Gr}_n^W \overset{\text{déf}}{=} W_n/W_{n-1}$, on a $\mathrm{Gr}_0^W(M) = [X \longrightarrow 0], \mathrm{Gr}_{-1}^W(M) = [0 \longrightarrow A]$ et $\mathrm{Gr}_{-2}^W(M) = [0 \longrightarrow T]$.
A chaque $M = (X, A, T, G, u)$, on associe un 1-motif dual $M^\vee$, dit *le dual de Cartier* de M. La construction de ce 1-motif dual $M^\vee = (X^\vee, A^\vee, T^\vee, G^\vee, u^\vee)$ est purement algébrique:

(a) $X^\vee$ est le groupe des caractères de T, i.e. $X^\vee = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$;

(b) $A^\vee$ est la variété abélienne duale de A;

(c) $T^\vee$ est le tore de groupe de caractères X, i.e. $X = \mathrm{Hom}(T^\vee, \mathbb{G}_m)$;

(d) pour construire $G^\vee$ on se place dans la catégorie des complexes de faisceaux abéliens pour la topologie fppf. Puisque $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Ext}^2(X[1], \mathbb{G}_m) = 0, \mathrm{Ext}^1(X[1], \mathbb{G}_m) = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{G}_m)$ et $\mathrm{Ext}^1(A, \mathbb{G}_m) \cong A^\vee$, à partir de la suite exacte $0 \longrightarrow A \longrightarrow M/W_{-2}(M) \longrightarrow X[1] \longrightarrow 0$, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow T^\vee \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M/W_{-2}(M), \mathbb{G}_m) \longrightarrow A^\vee \longrightarrow 0.$$

On note $G^\vee$ la variété qui représente $\mathrm{Ext}^1(M/W_{-2}(M), \mathbb{G}_m)$;

(e) pour construire $u^\vee$ on se place encore dans la catégorie des complexes de faisceaux abeliens pour la topologie fppf. La suite exacte $0 \longrightarrow T \longrightarrow M \longrightarrow M/W_{-2}(M) \longrightarrow 0$ fournit la suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, \mathbb{G}_m) \longrightarrow X^\vee \xrightarrow{\delta} G^\vee \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \cdots$$

On pose $u^\vee = \delta : X^\vee \longrightarrow G^\vee$.

1.2. Soient P, Q, G trois schémas en groupes abéliens sur $\mathbb{C}$. On note P_Q le produit fibré de P et Q sur $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$, vu comme schéma sur Q. (idem pour $G_P, Q_P, \ldots$).
Une biextension de (P, Q) *par* G est un torseur E sous $G_{P\times Q}$, muni d'une structure d'extension de Q_P par G_P et d'une structure d'extension de P_Q par G_Q, ces deux structures étant compatibles.
D'après [G72I] (1.1.6), se donner sur E une structure d'extension de Q_P par G_P équivaut à se donner une famille d'isomorphismes de torseurs

$$\Big\{\phi_{p,p';q} : E_{p,q} \wedge E_{p',q} \longrightarrow E_{p+p',q}\Big\}_{\substack{p,p' \in P(S), q \in Q(S) \\ S \text{ schéma sur } \mathbb{C}}}$$

(où le symbole $\wedge$ indique le produit contracté de torseurs et pour chaque $(p, q) \in P(S) \times Q(S), E_{p,q}$ désigne le torseur sous G_S image inverse du torseur E par $(p, q) : S \longrightarrow P \times Q)$ telle que

(1) (fonctorialité en S) les $\phi_{p,p';q}$ soient compatibles aux images inverses par des $\mathbb{C}$-morphismes $S' \longrightarrow S$,

(2) (associativité) $\phi_{p+p',p'';q} \circ (\phi_{p,p';q} \wedge id) = \phi_{p,p'+p'';q} \circ (id \wedge \phi_{p',p'';q}) \quad \forall\, p, p'$, $p'' \in P(S)$ et $q \in Q(S)$,

(3) (commutativité) $id \circ \phi_{p,p';q} = \phi_{p',p;q} \circ sym \quad \forall\, p, p' \in P(S)$ et $q \in Q(S)$, où $sym : E_{p,q} \wedge E_{p',q} \longrightarrow E_{p',q} \wedge E_{p,q}$ est l'isomorphisme canonique de commutativité.
De même, se donner sur E une structure d'extension de P_Q par G_Q équivaut à se donner une famille d'isomorphismes de torseurs

$$\Big\{\psi_{p;q,q'} : E_{p,q} \wedge E_{p,q'} \longrightarrow E_{p,q+q'}\Big\}_{\substack{p \in P(S), q,q' \in Q(S) \\ S \text{ schéma sur } \mathbb{C}}}$$

ayant des propriétés analogues à celles des $\phi_{p,p';q}$.

Enfin dire que les deux structures d'extensions précédentes sont compatibles se traduit en imposant que

$$\phi_{p,p';q+q'} \circ (\psi_{p;q,q'} \wedge \psi_{p';q,q'}) = \psi_{p+p';q,q'} \circ (\phi_{p,p';q} \wedge \phi_{p,p';q'})$$

pour chaque $p, p' \in P(S)$ et $q, q' \in Q(S)$.
Comme exemple de biextension, on peut citer *la biextension de Poincaré* obtenue à partir du fibré de Poincaré: en effet si A est une variété abélienne sur $\mathbb{C}$, $A^\vee$ sa duale et $\mathcal{P}$ le fibré de Poincaré sur $A \times A^\vee$ privé de sa section nulle, alors $\mathcal{P}$ est une biextension de $(A, A^\vee)$ par $\mathbb{G}_m$.
Soient E une biextension de (P, Q) par G et E' une biextension de (P', Q') par G', où P, Q, G, P', Q', G' sont des schémas en groupes abéliens sur $\mathbb{C}$.
Un morphisme de biextensions $E \longrightarrow E'$ est un système (u, v, w, f) où

$$u : P \longrightarrow P', \qquad v : Q \longrightarrow Q', \qquad w : G \longrightarrow G'$$

sont des morphismes de schémas en groupes abéliens sur $\mathbb{C}$ et où

$$f : E \longrightarrow E'$$

est un morphisme des schémas en groupes sous-jacents à E et E' tel que f soit à la fois un morphisme d'extensions de schémas en groupes, associé aux morphismes $w \times u : G_P \longrightarrow G'_{P'}$ et $v \times u : Q_P \longrightarrow Q'_{P'}$, i.e.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & G_P & \longrightarrow & E & \longrightarrow & Q_P & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle w\times u}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle f} & & \downarrow {\scriptstyle v\times u} & & \\
0 & \longrightarrow & G'_{P'} & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & Q'_{P'} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

et un morphisme d'extensions de schémas en groupes, associé aux morphismes $w \times v : G_Q \longrightarrow G'_{Q'}$ et $u \times v : P_Q \longrightarrow P'_{Q'}$, i.e.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & G_Q & \longrightarrow & E & \longrightarrow & P_Q & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle w\times v}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle f} & & \downarrow {\scriptstyle u\times v} & & \\
0 & \longrightarrow & G'_{Q'} & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & P'_{Q'} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Il est assez facile de voir que u, v, w sont connus par la seule connaissance de f et donc on peut identifier le système (u, v, w, f) à f.
On note $\mathrm{Biext}^1(P, Q; G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de biextensions de (P, Q) par G. D'après [G72II] 2.5.2, $\mathrm{Biext}^1(P, Q; G)$ est un groupe commutatif.
Une trivialisation d'une biextension E de (P, Q) par G est une section biadditive du morphisme structural $E \longrightarrow P \times Q$.
Dans le contexte des variétés abéliennes, les classes d'isomorphismes de biextensions par $\mathbb{G}_m$ s'identifient à des homomorphismes de variétés abéliennes. En effet si A et B sont deux variétés abéliennes sur $\mathbb{C}$, alors d'après [G72II] 1.4, il existe des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Biext}^1(A, B; \mathbb{G}_m) \cong \mathrm{Hom}(A, B^\vee) \cong \mathrm{Hom}(B, A^\vee) \tag{1.2.1}$$

où $A^\vee$ et $B^\vee$ sont respectivement les variétés duales de A et B.
Le morphisme $\mathrm{Biext}^1(A,B;\mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,B^\vee)$ peut être construit explicitement: à $E \in \mathrm{Biext}^1(A,B;\mathbb{G}_m)$ on associe l'homomorphisme $f_E : A \longrightarrow B^\vee$ qui à chaque $x \in A$ fait correspondre le point y de $B^\vee$ qui paramétrise l'extension

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow E_{|\{x\}\times B} \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

L'élément de $\mathrm{Hom}(B,A^\vee)$ qui est associé à E n'est autre que l'homomorphisme transposé de f_E, i.e. $f_E^t : B \longrightarrow A^\vee$.
Les morphismes inverses $\mathrm{Hom}(B,A^\vee) \longrightarrow \mathrm{Biext}^1(A,B;\mathbb{G}_m)$ et $\mathrm{Hom}(A,B^\vee) \longrightarrow \mathrm{Biext}^1(A,B;\mathbb{G}_m)$ se décrivent aisément: si $\mathcal{P}_{(A,A^\vee)}$ désigne la biextension de Poincaré de $(A,A^\vee)$, à l'homomorphisme $f : B \longrightarrow A^\vee$ on associe l'image réciproque de $\mathcal{P}_{(A,A^\vee)}$ par $1 \times f : A \times B \longrightarrow A \times A^\vee$. De même, si $\mathcal{P}_{(B^\vee,B)}$ désigne la biextension de Poincaré de $(B^\vee,B)$, à l'homomorphisme $g : A \longrightarrow B^\vee$ on associe l'image réciproque de $\mathcal{P}_{(B^\vee,B)}$ par $g \times 1 : A \times B \longrightarrow B^\vee \times B$.
En particulier, via l'isomorphisme (1.2.1), la classe d'isomorphismes de la biextension de Poincaré de $(A,A^\vee)$ s'identifie à l'homomorphisme identité de $A^\vee$.

1.3. La notion de biextension permet de donner une description *plus symétrique* des 1-motifs.
Considérons le catégorie $\mathtt{M}_{\mathbb{C}}$ dont les objets consistent en

(a) deux $\mathbb{Z}$-modules libres de type fini X et $X^\vee$,

(b) deux variétés abéliennes en dualité A et $A^\vee$,

(c) deux homomorphismes $v : X \longrightarrow A$ et $v^\vee : X^\vee \longrightarrow A^\vee$,

(d) une trivialisation ψ de l'image réciproque par $(v, v^\vee)$ de la biextension de Poincaré $\mathcal{P}$ de $(A,A^\vee)$,

et dont les flèches sont définies par des homomorphismes $f_X : X_1 \longrightarrow X_2, f_A : A_1 \longrightarrow A_2, f_{X^\vee} : X_2^\vee \longrightarrow X_1^\vee, f_{A^\vee} : A_2^\vee \longrightarrow A_1^\vee$ tels que

(1) les diagrammes suivants soient commutatifs

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & A_1 \\ f_X \downarrow & & \downarrow f_A \\ X_2 & \longrightarrow & A_2 \end{array} , \qquad \begin{array}{ccc} X_1^\vee & \longrightarrow & A_1^\vee \\ f_{X^\vee} \uparrow & & \uparrow f_{A^\vee} \\ X_2^\vee & \longrightarrow & A_2^\vee \end{array} ,$$

(2) f_A et $f_{A^\vee}$ soient transposés,

(3) on ait $\psi_1(x_1, f_{X^\vee}(x_2^\vee)) = \psi_2(f_X(x_1), x_2^\vee)$ via l'isomorphisme $(1, f_{A^\vee})^*\mathcal{P}_1 \cong (f_A, 1)^*\mathcal{P}_2$.

Soit $(A, A^\vee, X, X^\vee, v, v^\vee, \psi)$ un objet de $\mathtt{M}_{\mathbb{C}}$. Grâce à ces données on peut construire un 1-motif $M = (X, A, T, G, u)$ et son dual de Cartier $M^\vee = (X^\vee, A^\vee, T^\vee, G^\vee, u^\vee)$. En effet:

- les tores T et $T^\vee$ sont décrits par leurs groupes de caractères qui sont respectivement $X^\vee$ et X;

- l'homomorphisme $v : X \longrightarrow A$ décrit l'extension $G^\vee$: en effet $G^\vee$ est la seule extension de $A^\vee$ par $T^\vee$ telle que pour chaque $x \in X$, le push-out $x_*G^\vee$ est l'extension de $A^\vee$ par $\mathbb{G}_m$ paramétrisée par $v(x)$. De même, $v^\vee$ décrit l'extension G de A par T;

- la trivialisation $\psi : X \times X^\vee \longrightarrow (v, v^\vee)^*\mathcal{P}$ de l'image réciproque par $(v, v^\vee)$ de la biextension de Poincaré $\mathcal{P}$ de $(A, A^\vee)$, et l'homomorphisme $v : X \longrightarrow A$ déterminent $u : X \longrightarrow G(\mathbb{C})$ de la façon suivante:
Pour chaque $x \in X$ on va construire un point $u(x) \in G(\mathbb{C})$ qui se projette via $\pi : G \longrightarrow A$ sur le point $v(x) \in A(\mathbb{C})$. Soit $x^\vee \in X^\vee$. Le push-out de G via $x^\vee$, qu'on notera $(x^\vee)_*G$, est l'extension de A par $\mathbb{G}_m$ paramétrisée par le point $v^\vee(x^\vee) \in A^\vee(\mathbb{C})$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & G & \stackrel{\pi}{\longrightarrow} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle x^\vee}\downarrow & & {\scriptstyle (x^\vee)_*}\downarrow & & = & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & (x^\vee)_*G & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

On remarque alors que $u(x)$ est déterminé dès que $(x^\vee)_*(u(x))$ est connu pour tout $x^\vee \in X^\vee$. Par définition de la biextension de Poincaré, $(x^\vee)_*G$ est l'image réciproque de $\mathcal{P}$ via l'inclusion $i_{v^\vee(x^\vee)} : A \times \{v^\vee(x^\vee)\} \longrightarrow A \times A^\vee$, i.e. $(x^\vee)_*G = (i_{v^\vee(x^\vee)})^*\mathcal{P}$. Puisqu'on veut que le point $u(x) \in G(\mathbb{C})$ se projette via $\pi : G \longrightarrow A$ sur le point $v(x) \in A(\mathbb{C})$, on a que $(x^\vee)_*(u(x))$ appartient à la fibre de $(i_{v^\vee(x^\vee)})^*\mathcal{P}$ au-dessus de $v(x)$, qui n'est autre que la fibre de $\mathcal{P}$ au-dessus de $(v(x), v^\vee(x^\vee)) \in A \times A^\vee(\mathbb{C})$, i.e. $(x^\vee)_*(u(x)) \in ((i_{v^\vee(x^\vee)})^*\mathcal{P})_{v(x)} = (\mathcal{P})_{v(x),v^\vee(x^\vee)}$. Si on note encore $(v \times v^\vee) : (v \times v^\vee)^*\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ l'application qui relève $v \times v^\vee : X \times X^\vee \longrightarrow A \times A^\vee$, on a que $(v \times v^\vee)$ induit une application entre les fibres $(v \times v^\vee)_{x,x^\vee} : \big((v \times v^\vee)^*\mathcal{P}\big)_{x,x^\vee} \longrightarrow (\mathcal{P})_{v(x),v^\vee(x^\vee)} = \big((i_{v^\vee(x^\vee)})^*\mathcal{P}\big)_{v(x)}$. Avec toutes ces notations, on pose

$$(x^\vee)_*(u(x)) = (v \times v^\vee)_{x,x^\vee}\big(\psi(x, x^\vee)\big).$$

La trivialisation ψ permet de reconstruire aussi $u^\vee : X^\vee \longrightarrow G^\vee(\mathbb{C})$. En effet soient $\mathcal{P}^\vee$ la biextension de Poincaré de $(A^\vee, A)$ et $sym : A \times A^\vee \longrightarrow A^\vee \times A$ l'isomorphisme "inversion des facteurs". Désignons par $\psi^\vee$ la trivialisation de l'image réciproque par $(v^\vee, v)$ de $\mathcal{P}^\vee$, obtenue en composant ψ avec l'unique isomorphisme de biextensions de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}^\vee$ relevant sym. A partir de $\psi^\vee$, on procède comme avec ψ pour retrouver $u^\vee$.
Plus précisement, d'après [D75] (10.2.14) les catégories $\mathcal{M}_\mathbb{C}$ et $\mathtt{M}_\mathbb{C}$ sont équivalentes.

1.4. *Une isogénie* entre deux 1-motifs $M_1 = [X_1 \stackrel{u_1}{\longrightarrow} G_1]$ et $M_2 = [X_2 \stackrel{u_2}{\longrightarrow} G_2]$ est un morphisme de 1-motifs tel que

(1) $f_X : X_1 \longrightarrow X_2$ soit injectif et de conoyau fini,

(2) $f_G : G_1 \longrightarrow G_2$ soit surjectif et de noyau fini.

Une polarisation de $M = (X, A, T, G, u)$ est une isogénie $\lambda : M \longrightarrow M^\vee$ telle que $\lambda_{|\mathrm{Gr}_{-1}^W(M)} : A \longrightarrow A^\vee$ soit une polarisation de la variété abélienne A. Un 1-motif muni d'une polarisation est dit *symétrique* ou *polarisé*.
Grâce à la description symétrique d'un 1-motif, faite en 1.3, la donnée d'un 1-motif symétrique équivaut aux données suivantes:

(a) un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini X,

(b) une variété abélienne A et une polarisation $\lambda : A \longrightarrow A^\vee$,

(c) un homomorphisme $v : X \longrightarrow A$,

(d) une trivialisation ψ de l'image réciproque par $(v, v^\vee = \lambda \circ v)$ de la biextension de Poincaré $\mathcal{P}$ de $(A, A^\vee)$, avec ψ invariante par la symétrie $sym : X \times X \longrightarrow X \times X$.

1.5. *Une structure de Hodge réelle* est un espace vectoriel réel V de dimension finie muni d'une bigraduation $V^{p,q}$ de $V_\mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} V$ qui vérifie $\overline{V^{p,q}} = V^{q,p}$. *La graduation par le poids de* V est la graduation de $V_\mathbb{C}$ par les $V_\mathbb{C}^n = \sum_{p+q=n} V^{p,q}$. On dit que V est *de poids* n si $V^{p,q} = 0$ pour $p + q \neq n$. *La filtration de Hodge de* V est la filtration de $V_\mathbb{C}$ définie par $F^p(V_\mathbb{C}) = \sum_{p' \geq p} V^{p',q}$. C'est une filtration décroissante sur $V_\mathbb{C}$. *Le type de* V est l'ensemble des couples (p, q) tels que $V^{p,q} \neq 0$. Soit A un sous-anneau noethérien de $\mathbb{R}$ tel que $F := A \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ est un corps.
Une A-structure de Hodge (de poids n) consiste en un A-module de type fini H_A et en une structure de Hodge réelle (de poids n) sur $\mathrm{H}_\mathbb{R} = \mathrm{H}_A \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$, telle que la graduation par le poids soit définie sur F. On utilisera cette définition surtout pour $A = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$. Comme exemple de A-structure de Hodge, on peut citer *la structure de Hodge de Tate* , $A(1)$: c'est le A-module de type fini $2i\pi A$, muni de la structure de Hodge réelle de poids -2 et de type (-1, -1): $(\mathbb{C} \otimes A(1))^{-1,-1} = 2i\pi\mathbb{C}$. Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, on définit $A(n)$ comme étant la $n^{\text{ième}}$ puissance tensorielle de $A(1)$.
Un morphisme de A-structures de Hodge $f : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}'$ est un homomorphisme $f : \mathrm{H}_A \longrightarrow \mathrm{H}'_A$ tel que $f_\mathbb{C} : \mathrm{H}_\mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{H}'_\mathbb{C}$ soit compatible à la filtration $F^\bullet$.
Une polarisation d'une A-structure de Hodge H de poids n est un morphisme de structures de Hodge $\psi : \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{A}(-n)$ tel que la forme bilinéaire réelle $(2i\pi)^n \psi(., h(i).)$ sur $\mathrm{H}_\mathbb{R}$ soit symétrique et définie positive.
Une A-structure de Hodge mixte H consiste en

(a) un A-module de type fini H_A,

(b) une filtration finie croissante $W_\bullet$ de $\mathrm{H}_F = \mathrm{H}_A \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$, appelée la *filtration par le poids,*

(c) une filtration finie décroissante $F^\bullet$ de $\mathrm{H}_\mathbb{C} = \mathrm{H}_A \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}$, appelée la *filtration de Hodge* ,

ces données étant soumises à la condition suivante: si on désigne encore par $W_\bullet$ la filtration de H_A image réciproque de la filtration $W_\bullet$ de H_F, alors pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Gr}_n^W(\mathrm{H}_A) \overset{\text{déf}}{=} W_n(\mathrm{H}_A)/W_{n-1}(\mathrm{H}_A)$ se trouve muni d'une A-structure de Hodge de poids n, de filtration de Hodge induite par $F^\bullet$.
Un morphisme de structures de Hodge mixtes $f : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}'$ est un homomorphisme $f : \mathrm{H}_A \longrightarrow \mathrm{H}'_A$ compatible aux filtrations $W_\bullet$ et $F^\bullet$.
On note $\mathcal{SHM}_A$ la catégorie des A-structures de Hodge mixtes. On dit que $\mathrm{H} \in \mathcal{SHM}_\mathrm{A}$ est *sans torsion* si H_A est sans torsion. De plus on définit *le niveau de* H comme étant la longueur du plus petit intervalle $[a, b]$ tel que $F^p\mathrm{H}/F^{p+1}\mathrm{H} \neq 0$ pour $a \leq p \leq b$.
D'après [D71] (2.3.5), $\mathcal{SHM}_A$ est une catégorie abélienne. En particulier, $\mathcal{SHM}_\mathbb{Q}$ est une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{Q}$, i.e. une catégorie tensorielle sur $\mathbb{Q}$ munie d'un $\otimes$-foncteur exact et $\mathbb{Q}$-linéaire $\omega : (\mathrm{H}_\mathbb{Q}, \mathrm{W}_\bullet, \mathrm{F}^\bullet) \longmapsto \mathrm{H}_\mathbb{Q}$. Pour chaque

$\mathrm{H} \in \mathcal{SHM}_{\mathbb{Q}}$, on note $< \mathrm{H} >^{\otimes}$ la sous-catégorie tannakienne neutre de $\mathcal{SHM}_{\mathbb{Q}}$ engendrée par H, i.e. la sous-catégorie pleine de $\mathcal{SHM}_{\mathbb{Q}}$ d'objets les sous-quotients des sommes directes finies $\mathrm{H}^{\otimes n_i} \otimes \mathrm{H}^{\vee \otimes m_i}$, et de $\otimes$-foncteur ω_{H}, la restriction du $\otimes$-foncteur ω à $< \mathrm{H} >^{\otimes}$. D'après [DM82] 2.11, le foncteur $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{\mathrm{H}})$ est représentable par un $\mathbb{Q}$-sous-groupe algébrique fermé G de $\mathbf{GL}(\mathrm{H}_{\mathbb{Q}})$ et ω_{H} définit une équivalence de catégories tensorielles

$$< \mathrm{H} >^{\otimes} \longrightarrow (\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G), \otimes)$$

où $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G)$ est la catégorie des représentations de dimension finie de G sur $\mathbb{Q}$. On appelle *G le groupe de Mumford-Tate de* $\mathrm{H} \in \mathcal{SHM}_{\mathbb{Q}}$.
Soient H et H$'$ deux $\mathbb{Q}$-structures de Hodge mixtes de groupe de Mumford-Tate G et G' respectivement. Chaque homomorphisme de groupes algébriques $f : G' \longrightarrow G$ induit un $\otimes$-foncteur $F :< \mathrm{H} >^{\otimes} \longrightarrow < \mathrm{H}' >^{\otimes}$ tel que $\omega_{\mathrm{H}} = \omega_{\mathrm{H}'} \circ F$, et réciproquement un tel $\otimes$-foncteur F induit un homomorphisme f entre les respectifs groupes de Mumford-Tate. De plus d'aprés 2.21 [DM82], on sait que

- f est un monomorphisme si et seulement si chaque objet de $< \mathrm{H}' >^{\otimes}$ est sous-quotient de l'image par F d'un objet de $< \mathrm{H} >^{\otimes}$;

- f est un épimorphisme si et seulement si F est pleinement fidèle et pour chaque objet X de $< \mathrm{H} >^{\otimes}$, chaque sous-objet de $F(X)$ est l'image par F d'un sous-objet de X.

1.6. A chaque 1-motif $M = (X, A, T, G, u)$ défini sur $\mathbb{C}$, on peut associer une structure de Hodge mixte: l'application exponentielle $\exp : \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow G$ a pour noyau $\mathrm{H}_1(G, \mathbb{Z})$. Désignons par $T_{\mathbb{Z}}(M)$ le produit fibré de $\mathrm{Lie}(G)$ et X au dessus de G

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}_1(G,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Lie}(G) & \stackrel{\exp}{\longrightarrow} & G & \longrightarrow & 0 \\ & & = & & \alpha \uparrow & & \uparrow u & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}_1(G,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & T_{\mathbb{Z}}(M) & \stackrel{\beta}{\longrightarrow} & X & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

On a donc que $T_{\mathbb{Z}}(M) = \{(g, x) \in \mathrm{Lie}(G) \times X \mid \exp(g) = u(x) \}$.
On définit une filtration croissante $W_\bullet$ sur $T_{\mathbb{Z}}(M)$ de la façon suivante:

$$\begin{aligned} & W_i(T_{\mathbb{Z}}(M)) = T_{\mathbb{Z}}(M) \qquad \forall\, i \geq 0, \\ & W_{-1}(T_{\mathbb{Z}}(M)) = \mathrm{Ker}\beta = \mathrm{H}_1(G, \mathbb{Z}), \\ & W_{-2}(T_{\mathbb{Z}}(M)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{H}_1(G,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}_1(A,\mathbb{Z})) = \mathrm{H}_1(T,\mathbb{Z}), \\ & W_i(T_{\mathbb{Z}}(M)) = 0 \qquad \forall\, i \leq -3. \end{aligned}$$

On a évidemment $\mathrm{Gr}_0^W(T_{\mathbb{Z}}(M)) \cong X, \mathrm{Gr}_{-1}^W(T_{\mathbb{Z}}(M)) \cong \mathrm{H}_1(A, \mathbb{Z})$ et $\mathrm{Gr}_{-2}^W(T_{\mathbb{Z}}(M)) \cong \mathrm{H}_1(T, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)^{\vee}$.
Soit $T_{\mathbb{C}}(M) = T_{\mathbb{Z}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. Le morphisme $\alpha : T_{\mathbb{Z}}(M) \longrightarrow \mathrm{Lie}(G)$ se prolonge en $\alpha_{\mathbb{C}} : T_{\mathbb{C}}(M) \longrightarrow \mathrm{Lie}(G)$. Sur $T_{\mathbb{C}}(M)$ on peut définir une filtration décroissante $F^\bullet$ de la façon suivante:

$$\begin{aligned} & F^i(T_{\mathbb{C}}(M)) = 0 \qquad \forall\, i \geq 1, \\ & F^0(T_{\mathbb{C}}(M)) = \mathrm{Ker}\alpha_{\mathbb{C}}, \\ & F^i(T_{\mathbb{C}}(M)) = T_{\mathbb{C}}(M) \qquad \forall\, i \leq -1. \end{aligned}$$

D'après [D75] (10.1.3.2) le triplet $(T_{\mathbb{Z}}(M), W_\bullet, F^\bullet)$ est une $\mathbb{Z}$-structure de Hodge mixte sans torsion, de niveau ≤ 1, de type $\{(0,0),(0,-1),(-1,0),(-1,-1)\}$ telle que $\mathrm{Gr}^W_{-1}(T_{\mathbb{Z}}(M))$ soit polarisable.
La réalisation de Hodge du 1-motif M est le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie $T_{\mathrm{H}}(M) = T_{\mathbb{Q}}(M) = T_{\mathbb{Z}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Posons $T(M) = (T_{\mathbb{Q}}(M), W_\bullet, F^\bullet) \in \mathcal{SHM}_{\mathbb{Q}}$.

1.7. Remarques:

(1) Si M et M' sont deux 1-motifs sur $\mathbb{C}$ isogènes, alors $T(M)$ et $T(M')$ sont deux structures de Hodge mixtes isomorphes.

(2) La catégorie des 1-motifs sur $\mathbb{C}$ peut être vue comme sous-catégorie pleine de $\mathcal{SHM}_{\mathbb{Z}}$, mais ce n'est pas une sous-catégorie abélienne.
Par contre, la catégorie des 1-motifs définis sur $\mathbb{C}$ à isogénie près peut être vue comme sous-catégorie pleine de $\mathcal{SHM}_{\mathbb{Q}}$, et dans ce cas c'est une sous-catégorie abélienne.

1.8. *Le groupe de Mumford-Tate* d'un 1-motif M défini sur $\mathbb{C}$, $MT(M)$, est le groupe de Mumford-Tate de la structure de Hodge mixte $T(M) = (T_{\mathbb{Q}}(M), W_\bullet, F^\bullet)$. Par définition, la notion de groupe de Mumford-Tate est stable par dualité. De plus, puisque deux 1-motifs isogènes définissent la même structure de Hodge mixte, la notion de groupe de Mumford-Tate est stable aussi par isogènies. Pour simplifier les notations, posons $P = MT(M)$. D'après [S72] Chapitre 2 §2, P est muni d'une filtration croissante, $W_\bullet$, définie sur $\mathbb{Q}$:

$$W_i(P) = P \qquad \forall\, i \geq 0,$$

$$W_{-1}(P) = \{g \in P \mid (g - id)T_{\mathrm{H}}(M) \subseteq \mathrm{H}_1(\mathrm{G},\mathbb{Q}), (\mathrm{g}-\mathrm{id})\mathrm{H}_1(\mathrm{G},\mathbb{Q}) \subseteq \mathrm{H}_1(\mathrm{T},\mathbb{Q}), (g-id)\mathrm{H}_1(\mathrm{T},\mathbb{Q}) = 0\},$$

$$W_{-2}(P) = \{g \in P \mid (g - id)T_{\mathrm{H}}(M) \subseteq \mathrm{H}_1(\mathrm{T},\mathbb{Q}), (\mathrm{g}-\mathrm{id})\mathrm{H}_1(\mathrm{G},\mathbb{Q}) = 0\},$$

$$W_i(P) = 0 \qquad \forall\, i \leq -3.$$

Remarquons qu'on a l'inclusion

$$\begin{aligned} W_{-2}(P) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}\big(\mathrm{Gr}^W_0(T_{\mathrm{H}}(M)), \mathrm{H}_1(\mathrm{T},\mathbb{Q})\big) \\ g &\longmapsto (g - id) \end{aligned} \tag{1.8.1}$$

et donc $\dim_{\mathbb{Q}} W_{-2}(P) \leq \mathrm{rang} X \cdot \mathrm{rang} X^\vee$. De façon analogue, si $W_{-2}(M) = 0$ on a l'inclusion

$$\begin{aligned} W_{-1}(P) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}\big(\mathrm{Gr}^W_0(T_{\mathrm{H}}(M)), \mathrm{Gr}^W_{-1}(T_{\mathrm{H}}(M))\big) \\ g &\longmapsto (g - id). \end{aligned} \tag{1.8.2}$$

De plus, le cran $W_{-1}(P)$ est un groupe unipotent et donc, en particulier, le groupe dérivé de $W_{-1}(P)$ est contenu dans $W_{-2}(P)$. Posons $\mathrm{Gr}^W_0(P) \overset{\text{déf}}{=} P/W_{-1}(P)$. D'après [B83] §2.2, on sait que

- $\mathrm{Gr}_0^W(P)$ agit trivialement sur $\mathrm{Gr}_0^W(T_{\mathrm{H}}(M))$ et par homothéties sur $\mathrm{Gr}_{-2}^W(T_{\mathrm{H}}(M))$;

- l'image de $\mathrm{Gr}_0^W(P)$ dans $\mathbf{GL}(\mathrm{Gr}_{-1}^W(T_{\mathrm{H}}(M)))$ se revèle être le groupe de Mumford-Tate de A, noté $MT(A)$. En particulier, $\mathrm{Gr}_0^W(P)$ est réductif et $W_{-1}(P)$ est le radical unipotent de P.

Puisque $< T(W_0/W_{-2}M) >^{\otimes}, < T(\mathrm{Gr}_{-1}^W M) >^{\otimes}, < T(W_{-1}M) >^{\otimes}$ sont des sous-catégories de $< T(M) >^{\otimes}$, et $< T(\mathrm{Gr}_{-1}^W M) >^{\otimes}, < T(\mathrm{Gr}_0^W M) >^{\otimes}$ sont des sous-catégories de $< T(W_0/W_{-2}M) >^{\otimes}$ et enfin $< T(W_{-2}M) >^{\otimes}, < T(\mathrm{Gr}_{-1}^W M) >^{\otimes}$ sont des sous-catégories de $< T(W_{-1}M) >^{\otimes}$, on a le diagramme suivant
(1.8.3)

$$\begin{tikzcd}
 & & MT(\mathrm{Gr}_0^W T_{\mathrm{H}}(M)) = MT(X) \\
 & MT(W_0/W_{-2}T_{\mathrm{H}}(M)) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
P \arrow[ur, "\alpha_3"] \arrow[rr, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_4"'] & & MT(\mathrm{Gr}_{-1}^W T_{\mathrm{H}}(M)) = MT(A) \\
 & MT(W_{-1}T_{\mathrm{H}}(M)) \arrow[ur] \arrow[dr, "\beta"] & \\
 & & MT(W_{-2}T_{\mathrm{H}}(M)) = MT(T)
\end{tikzcd}$$

où les flèches sont toutes des surjections d'après 1.5. Considérons les sous-groupes suivants de P :

$$\begin{aligned}
U^{(1)}(P) &= \ker\left[P \xrightarrow{\alpha_1} MT(\mathrm{Gr}_{-1}^W T_{\mathrm{H}}(M))\right],\\
U^{(2)}(P) &= \ker\left[P \xrightarrow{\alpha_2} MT(\mathrm{Gr}_{-2}^W T_{\mathrm{H}}(M))\right],\\
U^{(3)}(P) &= \ker\left[P \xrightarrow{\alpha_3} MT(W_0/W_{-2}T_{\mathrm{H}}(M))\right],\\
U^{(4)}(P) &= \ker\left[P \xrightarrow{\alpha_4} MT(W_{-1}T_{\mathrm{H}}(M))\right],
\end{aligned}$$

où $\alpha_2 = \alpha_4 \circ \beta$ selon les notations de (1.8.3). Clairement $U^{(4)}(P) \subseteq U^{(1)}(P) \cap U^{(2)}(P)$ et $U^{(3)}(P) \subseteq U^{(1)}(P)$. De plus, remarquons que si $\mathrm{Gr}_{-1}^W(M) \neq 0$, alors $< T(W_{-2}M) >^{\otimes}$ est une sous-catégorie de $< T(\mathrm{Gr}_{-1}^W M) >^{\otimes}$ et donc l'homomorphisme naturel $P \longrightarrow MT(\mathrm{Gr}_{-2}^W T_{\mathrm{H}}(M))$ se factorise via $P \longrightarrow MT(\mathrm{Gr}_{-1}^W T_{\mathrm{H}}(M))$, ce qui implique que $U^{(1)}(P) \subseteq U^{(2)}(P)$ (voir 1.8.3). Enfin, on observe que si $P^{\vee} = MT(M^{\vee})$ alors $U^{(3)}(P) = U^{(4)}(P^{\vee})$ et $U^{(4)}(P) = U^{(3)}(P^{\vee})$.
Grâce à ces quatre sous-groupes, on peut dévisser P de la façon suivante:

1.9. **Lemme:**
$$W_{-1}(P)=U^{(1)}(P)\cap U^{(2)}(P),$$
$$W_{-2}(P)=U^{(3)}(P)\cap U^{(4)}(P).$$

PREUVE: D'après [A92] lemme 2 (c), P respecte la filtration $W_\bullet$ de $T_{\mathrm{H}}(M)$. En outre, chaque élément de P agit trivialement sur $\mathrm{Gr}_0^W(T_{\mathrm{H}}(M))$ et donc

$$g\in P\Longrightarrow (g-id)T_{\mathrm{H}}(M)\subseteq \mathrm{H}_1(\mathrm{G},\mathbb{Q})$$

De plus on a que

$$\begin{aligned}
g\in U^{(1)}(P) &\Longleftrightarrow g_{|\mathrm{Gr}_{-1}^W(T_{\mathrm{H}}(M))}=id\\
&\Longleftrightarrow (g-id)\mathrm{H}_1(\mathrm{G},\mathbb{Q})\subseteq \mathrm{H}_1(\mathrm{T},\mathbb{Q})\\
g\in U^{(2)}(P) &\Longleftrightarrow g_{|\mathrm{Gr}_{-2}^W(T_{\mathrm{H}}(M))}=id\\
&\Longleftrightarrow (g-id)\mathrm{H}_1(\mathrm{T},\mathbb{Q})=0\\
g\in U^{(3)}(P) &\Longleftrightarrow g_{|W_0/W_{-2}(T_{\mathrm{H}}(M))}=id\\
&\Longleftrightarrow (g-id)T_{\mathrm{H}}(M)\subseteq \mathrm{H}_1(\mathrm{T},\mathbb{Q})\\
g\in U^{(4)}(P) &\Longleftrightarrow g_{|W_{-1}(T_{\mathrm{H}}(M))}=id\\
&\Longleftrightarrow (g-id)\mathrm{H}_1(\mathrm{G},\mathbb{Q})=0.
\end{aligned}$$

En confrontant ces observations avec les définitions de $W_{-1}(P)$ et $W_{-2}(P)$, le lemme devient évidant. $\diamondsuit$

1.10. Remarques:
(1) Si $\mathrm{Gr}_{-1}^W(M)\neq 0$, on sait d'après 1.8 que $U^{(1)}(P)\subseteq U^{(2)}(P)$, et par conséquent grâce au lemme 1.9 les relations entre les groupes $U^{(\bullet)}(P)$ et $W_\bullet(P)$ peuvent se résumer de la façon suivante

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & U^{(3)}(P) \arrow[dr] & \\
W_{-2}(P)=U^{(3)}(P)\cap U^{(4)}(P) \arrow[ur] \arrow[dr] & & W_{-1}(P)=U^{(1)}(P)\subseteq U^{(2)}(P)\subseteq P \\
 & U^{(4)}(P) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(2) Si $\mathrm{Gr}_{-1}^W(M)=0$, on a clairement que $P=U^{(1)}(P)=U^{(3)}(P)$ et $U^{(2)}(P)=U^{(4)}(P)$ et donc d'après le lemme 1.9 on obtient que

$$W_{-2}(P)=W_{-1}(P)=U^{(2)}(P)=U^{(4)}(P)\subseteq P=U^{(1)}(P)=U^{(3)}(P).$$

1.11. Le groupe de Mumford-Tate d'un 1-motif M défini sur $\mathbb{C}$ peut présenter des dégénérescences, qui correspondent à des chutes de dimension par rapport au cas “générique”, les constituants X, A, T étant donnés. Voici une liste de ces dégénérescences:

• Le 1-motif M est dit *déficient* selon K. Ribet (ou *relativement scindé* selon D. Bertrand ou *de type Kuga* selon J. Milne) si

$$W_{-2}(P) = 0.$$

Parmi les 1-motifs déficients, il y a ceux qui le sont trivialement: le 1-motif M est dit *trivialement déficient*

$$\text{si } \; W_{-1}(P) = U^{(4)}(P) \; \text{ et } \; W_{-2}(P) = 0,$$
$$(\text{ou dualement si } \; W_{-1}(P) = U^{(3)}(P) \cap U^{(2)}(P) \; \text{ et } \; W_{-2}(P) = 0),$$
$$\text{ou si } \; W_{-1}(P) = 0.$$

• Le 1-motif M est dit *quasi-déficient* si

$$W_{-1}(P) \text{ est abélien.}$$

Puisque le groupe dérivé de $W_{-1}(P)$ est contenu dans $W_{-2}(P)$, il est clair que *la déficience implique la quasi-déficience.* Parmi les 1-motifs quasi-déficients, il y a ceux qui le sont trivialement: le 1-motif M est dit *trivialement quasi-déficient*

$$\text{si } \; W_{-1}(P) = U^{(4)}(P),$$
$$(\text{ou dualement si } \; W_{-1}(P) = U^{(3)}(P) \cap U^{(2)}(P)),$$
$$\text{ou si } \; W_{-1}(P) = W_{-2}(P).$$

• Le 1-motif M est dit *dépressif* si

$$0 < \dim_{\mathbb{Q}} W_{-2}(P) < \mathrm{rang} X \cdot \mathrm{rang} X^{\vee}.$$

1.12. Exemples:
(1) Comme exemples de 1-motifs trivialement quasi-déficients, on peut citer
- les 1-motifs trivialement déficients;
- les 1-motifs $M = (X, X^{\vee}, A, A^{\vee}, v, v^{\vee}, \psi)$ tels que l’image de v soit de torsion, ou dualement ceux tels que l’image de $v^{\vee}$ soit de torsion. En effet soit $M = (X, X^{\vee}, A, A^{\vee}, v, v^{\vee}, \psi)$ un 1-motif tel que l’image de $v^{\vee}$ soit de torsion. Modulo isogénies, l’extension sous-jacente à M est triviale, i.e. $G = A \times T$. Par conséquent, si $g \in MT(M)$ alors $g_{|\mathrm{Gr}^W_{-2}(T_{\mathrm{H}}(M))} = g_{|\mathrm{Gr}^W_{-1}(T_{\mathrm{H}}(M))} = id$ si et seulement si $g_{|W_{-1}(T_{\mathrm{H}}(M))} = id$. Grâce au lemme 1.9, on obtient alors que $W_{-1}(MT(M)) = U^{(4)}(MT(M))$, i.e. M est trivialement quasi-déficient.
(2) Comme exemples de 1-motifs trivialement déficients, on peut citer

- les 1-motifs $M = [X \xrightarrow{u} G]$ tels que l'image de u soit de torsion, ou dualement ceux tels que les images respectives de $v^\vee$ et de ψ soient de torsion. En effet soit $M = (X, X^\vee, A, A^\vee, v, v^\vee, \psi)$ un 1-motif tel que les images de $v^\vee$ et de ψ soient de torsion. Comme on l'a déjà vérifié dans l'exemple (1), si l'image de $v^\vee$ est de torsion alors $W_{-1}(MT(M)) = U^{(4)}(MT(M))$. Grâce à 3.3, on sait que l'image de ψ de torsion implique $W_{-2}(MT(M)) = 0$, et donc M est trivialement déficient.

- les 1-motifs sans partie torique, i.e. $M = [X \xrightarrow{v} A]$, ou dualement les 1-motifs M tels que $\mathrm{Gr}_0^W(M) = 0$, i.e. $M = [0 \xrightarrow{0} G]$. En effet si $M = [X \xrightarrow{v} A]$, $U^{(3)}(MT(M)) = 0$ et donc d'après 1.9, $W_{-2}(MT(M)) = 0$, i.e. M est déficient. En outre $U^{(2)}(MT(M)) = MT(M)$ et $U^{(1)}(MT(M)) = U^{(4)}(MT(M))$ et donc grâce au lemme 1.9 on a aussi que $W_{-1}(MT(M)) = U^{(4)}(MT(M))$, i.e. $M = [X \xrightarrow{v} A]$ est trivialement déficient.

(3) Dans [JR87], O. Jacquinot et K. Ribet construisent un 1-motif déficient à partir des données suivantes:

$$\begin{cases} - & \text{une variété abélienne } A \text{ de type CM, définie sur } \mathbb{C} \text{ et de duale } A^\vee; \\ - & \text{un point } P \text{ de } A^\vee(\mathbb{C}); \\ - & \text{un homomorphisme } f : A^\vee \longrightarrow A. \end{cases}$$

Voici leur construction: Soit G une extension de A par $\mathbb{G}_m$. Désignons par f^*G le pull-back de G par f :

$$(1.12.1) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\pi} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & id \uparrow & & \uparrow & & \uparrow f & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & f^*G & \longrightarrow & A^\vee & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

D'après [Mu70] page 80 remarque (2), si P est le point de $A^\vee(\mathbb{C})$ qui paramétrise G, alors f^*G correspond au point $f^t(P)$ de $A(\mathbb{C})$, où $f^t : A^\vee \longrightarrow A$ est la transposé de f (a priori f^t est un homomorphisme de $A^\vee$ vers $(A^\vee)^\vee$, mais on convient d'identifier A à sa biduale $(A^\vee)^\vee$). Notons F la flèche verticale au centre du diagramme (1.12.1). Choisissons "un" point R dans la fibre de $f^*G(\mathbb{C})$ au dessus de P (dans la remarque qui suit cet exemple, on vérifie que le 1-motif déficient que l'on construit, est indépendant du choix de ce relèvement). Alors $[\mathbb{Z} \xrightarrow{U} f^*G]$ avec $U(1) = R \in f^*G(\mathbb{C})$ est un 1-motif sur $\mathbb{C}$. Son dual de Cartier $[\mathbb{Z} \xrightarrow{U} f^*G]^\vee$ est composé d'une extension de A par $\mathbb{G}_m$ paramétrisée par P et d'un point $R^\vee$ sur cette extension tel que $\pi(R^\vee) = f^t(P)$. Par conséquent $[\mathbb{Z} \xrightarrow{U} f^*G]^\vee = [\mathbb{Z} \xrightarrow{U^\vee} G]$ avec $U^\vee(1) = R^\vee \in G(\mathbb{C})$. Posons $Q = F(R) - R^\vee \in G(\mathbb{C})$.
Puisque le diagramme (1.12.1) est commutatif, on a que

$$\pi(Q) = (f - f^t)(P).$$

Considérons le 1-motif $M_{A,f,P} = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} G]$ avec $u(1) = Q \in G(\mathbb{C})$.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathbb{Z} & & & & \\ & & & & u \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\pi} & A & \longrightarrow & 0 \quad \Rightarrow \quad P \\ & & & & Q & \longmapsto & (f - f^t)(P) & & \end{array}$$

D'après [JR87] théorème 4.3, le 1-motif $M_{A,f,P}$ est déficient. Remarquons que ce 1-motif est défini par les homomorphismes

$$\begin{aligned}
&v_{M_{A,f,P}} : \mathbb{Z} \longrightarrow A \qquad 1 \longmapsto (f - f^t)P \\
&v^{\vee}_{M_{A,f,P}} : \mathbb{Z} \longrightarrow A^{\vee} \qquad 1 \longmapsto P \\
&\psi_{M_{A,f,P}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{P}_{|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \qquad (1,1) \longmapsto (1,(1,1)) \in (\mathcal{P}_{|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}})_{(1,1)} \cong \mathbb{G}_m \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

où $\mathcal{P}$ désigne la biextension de Poincaré de $(A, A^{\vee})$ et $g := f - f^t : A^{\vee} \longrightarrow A$ est *un homomorphisme antisymétrique*, i.e. $g^t = -g$. La définition de $\psi_{M_{A,f,P}}$ et le lien entre les homomorphismes antisymétriques et les 1-motifs déficients sont expliquées en 3.1 et 3.3.
Enfin signalons que dans [Br87], L. Breen interprète cette construction de Jacquinot et Ribet en termes de biextensions alternées.
Remarque:

- Si on remplace R par $R+t$, avec $t \in \mathbb{C}^*$, on ne doit pas seulement remplacer $F(R)$ par $F(R)+t$ mais aussi $R^{\vee}$ par $R^{\vee}+t$ car $[\mathbb{Z} \xrightarrow{U^*} G]$ est le dual de Cartier de $[\mathbb{Z} \xrightarrow{U} f^*G]$ (en effet d'après (1.12.1) $F_{|\mathbb{G}_m} = id$ et avec les notations de 1.3 on a que $\psi_{[\mathbb{Z} \xrightarrow{U^{\vee}} G]} = (\psi_{[\mathbb{Z} \xrightarrow{U} f^*G]})^{\vee} = \psi_{[\mathbb{Z} \xrightarrow{U} f^*G]} \circ sym$). La définition de Q nous dit alors que *Q est indépendant du choix du relèvement R de P dans $f^*G(\mathbb{C})$*, i.e. Q ne dépend que de P. On a donc que le 1-motif déficient qu'on vient de construire, $M_{A,f,P} = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} G]$ avec $u(1) = Q$, ne dépend que de la variété abélienne A, du $\mathbb{C}$-homomorphisme $f : A^{\vee} \longrightarrow A$ et du point P qui paramétrise l'extension G.

- Dans cet exemple on suppose que la variété abélienne A est de type CM car on veut construire un 1-motif déficient qui n'est pas trivialement déficient. En effet, si A n'est pas de type CM, alors f n'est autre que la multiplication par un entier. Donc, modulo isogénies, on obtient que $v_{M_{A,f,P}}(1) = 0$ et par conséquent $M_{A,f,P}$ est trivialement déficient (cf. premier exemple de (2)).

(4) En modifiant le 1-motif déficient construit dans l'exemple **(3)**, on va construire un 1-motif quasi-déficient $M_{A,f,P,\alpha}$ à partir des données suivantes

$$\begin{cases}
- & \text{une variété abélienne } A \text{, de type CM, définie sur } \mathbb{C} \text{ et de duale } A^{\vee}; \\
- & \text{un point } P \text{ de } A^{\vee}(\mathbb{C}); \\
- & \text{un homomorphisme } f : A^{\vee} \longrightarrow A; \\
- & \text{un point } \alpha \text{ de } \mathbb{G}_m(\mathbb{C}) - \mu_{\infty};
\end{cases}$$

où μ_{∞} est l'ensemble des racines de l'unité. Pour construire notre 1-motif quasi-déficient $M_{A,f,P,\alpha}$ à partir de $M_{A,f,P}$, il suffit de "perturber" la trivialisation $\psi_{M_{A,f,P}}$ de $\mathcal{P}_{|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ par un élément de $\mathbb{G}_m(\mathbb{C}) - \mu_{\infty}$:
En effet, d'après 3.3, le 1-motif $M_{A,f,P,\alpha}$ défini par les homomorphismes

$$\begin{aligned}
&v_{M_{A,f,P,\alpha}} : \mathbb{Z} \longrightarrow A \qquad 1 \longmapsto (f - f^t)P \\
&v^{\vee}_{M_{A,f,P,\alpha}} : \mathbb{Z} \longrightarrow A^{\vee} \qquad 1 \longmapsto P \\
&\psi_{M_{A,f,P,\alpha}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{P}_{|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \quad (1,1) \longmapsto (\alpha,(1,1)) \in (\mathcal{P}_{|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}})_{(1,1)} \cong \mathbb{G}_m \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

est quasi-déficient.
(5) Comme exemple de 1-motifs quasi-déficients dépressifs on peut citer le 1-motif défini sur $\mathbb{C}$, $M = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m^2]$ avec $u(1) = (q, q^2)$ et q un élément de $\mathbb{C}^*$ qui n'est pas une racine de l'unité. En effet, d'aprés 1.10 (2) $W_{-2}(MT(M)) = W_{-1}(MT(M)) = U^{(4)}(MT(M))$ et donc M est trivialement quasi-déficient. De plus, si on applique 2.2 à M, on obtient que $\dim_{\mathbb{Q}} W_{-2}(MT(M)) = 1$ et donc M est dépressif. La condition que $q \in \mathbb{C}^*$ n'est pas une racine de l'unité, est nécessaire pour assurer que $W_{-2}(MT(M)) \neq 0$ (en effet dans la définition de dépression, $W_{-2}(MT(M)) = 0$ n'est pas autorisé).
(6) Pour trouver un exemple de 1-motif dépressif mais pas quasi-déficient, il suffit de considérer le 1-motif $M \oplus M$, avec $M = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, A, A^\vee, v, v^\vee, \psi)$ un quelconque 1-motif non quasi-déficient. Mais il y a un exemple de 1-motif dépressif mais pas quasi-déficient beaucoup plus intéressant:
Soient $\mathcal{E}$ une courbe elliptique de type CM définie sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{E}^\vee$ sa duale, qu'on identifiera souvent à $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}$ la biextension de Poincaré de $(\mathcal{E}, \mathcal{E}^\vee)$, et pour $i = 1, 2$, $M_i = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathcal{E}, \mathcal{E}^\vee, v_i, v_i^\vee, \psi_i) = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u_i} G_i]$ un 1-motif défini sur $\mathbb{C}$. Pour simplifier les notations posons $P_i = v_i(1)$ et $Q_i = v_i^\vee(1)$. De plus soient $\lambda \in \mathrm{End}(\mathcal{E}) \otimes \mathbb{Q}$, $\lambda \notin \mathbb{Q}$ et λ^t sa transposée. Maintenant considérons les conditions suivantes sur les données qui définissent les 1-motifs M_i pour $i = 1, 2$:

$$\begin{cases} (1) \quad P_1 = \lambda\, Q_2 \text{ et } P_2 = \lambda^t\, Q_1 \ ; \\ (2) \quad \psi_2 \text{ (ou } \psi_1) \text{ est invariante par la symétrie } sym : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ ; \\ (3) \quad \psi_1(1,1) = \psi_2(1,1) \ . \end{cases}$$

Les conditions (1) et (2) sont nécessaires pour pouvoir écrire la condition (3) qui est la plus importante. En effet c'est grâce à cette dernière condition que le 1-motif $M = M_1 \oplus M_2$ est dépressif.
Expliquons d'abords les conditions (1) et (2). Grâce aux isomorphismes canoniques suivants (cf. 1.2.1)

$$\mathrm{Biext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}^\vee; \mathbb{G}_m) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{E}^\vee, \mathcal{E}^\vee)$$

les biextensions $(id \times \lambda^t)^*\mathcal{P}$ et $(\lambda \times id)^*\mathcal{P}$ sont canoniquement isomorphes. Via cet isomorphisme, on peut imposer que $\psi_1(\lambda Q_2, Q_1) = \psi_2(Q_2, \lambda^t Q_1)$. En utilisant (1) et (2), cette dernière égalité fournit la condition (3), i.e.

$$\psi_1(P_1, Q_1) = \psi_2(P_2, Q_2).$$

Vérifions maintenant que M est dépressif: Normalement $\dim_{\mathbb{Q}} W_{-2}(MT(M)) \leq 4$, mais puisque M est la somme directe des deux 1-motifs M_1 et M_2 on a que $\dim_{\mathbb{Q}} W_{-2}(MT(M))$ est au plus 2. Soit $M_2^\vee = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u_2^\vee} G_2^\vee]$ le dual de Cartier de M_2. Puisque $P_2 = \lambda^t\, Q_1$, l'extension $G_2^\vee$ est le pull-back de G_1 par $\lambda : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, i.e. $G_2^\vee = \lambda^* G_1$ De plus, puisque $P_1 = \lambda\, Q_2$ et $\psi_1(1,1) = \psi_2(1,1) \in \big((id \times$

$\lambda^t)^*\mathcal{P})_{Q_2,Q_1} = \big((\lambda \times id)^*\mathcal{P}\big)_{Q_2,Q_1}$, on a que $M_2^\vee = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u_2^\vee} G_2^\vee]$ est le pull-back de M_1 par λ, $M_2^\vee = \lambda^* M_1$, i.e. le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & G_1 & \xrightarrow{\pi} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & id \uparrow & & \Lambda \uparrow & & \uparrow \lambda & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & \lambda^* G_1 & \longrightarrow & A^\vee & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

avec $\Lambda u_2^\vee(1) = u_1(1)$ En d'autres termes, l'homomorphisme $\lambda : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ se relève en un morphisme de 1-motifs $\Lambda : M_2^\vee \longrightarrow M_1$ et ceci explique la chute de la dimension de $W_{-2}(MT(M))$ de 2 à 1.
On peut expliquer cette chute de $\dim_{\mathbb{Q}} W_{-2}(MT(M))$ d'une autre façon: en 2.7 on prouvera que

$$MT(M) = MT(M_{11} \oplus M_{12} \oplus M_{21} \oplus M_{22})$$

où $M_{11} = M_1, M_{22} = M_2, M_{12} = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathcal{E}, \mathcal{E}^\vee, v_1(1) = P_1, v_2^\vee(1) = Q_2)$ et $M_{21} = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathcal{E}, \mathcal{E}^\vee, v_2(1) = P_2, v_1^\vee(1) = Q_1)$. Clairement les 1-motifs M_{21} et M_{12} sont déficients et ceci explique la chute de $\dim_{\mathbb{Q}} W_{-2}(MT(M))$ de 4 à 2 (M_{21} et M_{12} sont déficients car M est la somme directe de M_{11} et M_{22}). Le lien qu'on a trouvé entre $M_{22}^\vee$ et M_{11}, i.e. $M_{22}^\vee = \lambda^* M_{11}$, explique la chute successive de 2 à 1.

1.13 Terminons ce chapitre en rappelant brièvement les résultats connus sur les variétés de Shimura mixtes définies à partir de groupes de Mumford-Tate dégénérés. Les variétés de Shimura mixtes ont étés introduites pour étudier le bord des variétés de Shimura et les 1-motifs sont liés aux variétés de Shimura mixtes comme les variétés abéliennes sont liées aux variétés de Shimura.
Soit $M = (X, X^\vee, A, A^\vee, v, v^\vee, \psi)$ un 1-motif défini sur $\mathbb{C}$. A partir du groupe de Mumford-Tate de M, $MT(M)$, on peut construire la variété de Shimura mixte $\mathbf{ShM}(MT(M))$, qui par définition est la limite projective de variétés $\mathbf{ShM}_K(MT(M))$ indexées par des sous-groupes ouverts compactes de $MT(M)(\mathbb{A}^f)$, où $\mathbb{A}^f$ est l'anneau des adèles finis de $\mathbb{Q}$. Sous des hypothèses adequates, $\mathbf{ShM}(MT(M))$ est une variété de modules pour une famille de 1-motifs avec cycles de Hodge et structure de niveau. D'après [B83] 2.3.2.5, $\mathbf{ShM}(MT(M))$ admet une unique structure algébrique telle que, entre autre, l'application naturelle de $\mathbf{ShM}(MT(M))$ vers la variété de Shimura construite à partir de $MT(A)$, $\mathbf{Sh}(MT(A))$, admette une section algébrique $s : \mathbf{Sh}(MT(A)) \longrightarrow \mathbf{ShM}(MT(M))$. La famille de 1-motifs $\mathcal{M}$ au dessus de $\mathbf{ShM}_K(MT(M))$ a une unique structure algébrique, pour laquelle sur l'image de s les 1-motifs sont rationnellement décomposés, i.e. leurs réalisations de Hodge sont des somme directes de structures de Hodge pures.
En général, $\mathbf{ShM}_K(MT(M))$, est un fibré en tores sur un schéma abélien polarisable sur $\mathbf{Sh}_K(MT(A))$. Mais d'après [M90] VI 1.8, 1.9 et 1.10 on a les résultats suivants

- si $W_{-1}(MT(M)) = 0$, alors $\mathbf{ShM}(MT(M)) = \mathbf{Sh}(MT(A))$;
- si $\mathrm{Gr}_{-1}^W(MT(M)) = 0$, alors la fibre de $\mathbf{ShM}_K(MT(M))$ sur un point de

$\mathbf{Sh}_K(MT(A))$ est isomorphe a un produit de copies de $\mathbb{C}^*$;

- si M est déficient, i.e. $W_{-2}(MT(M)) = 0$, alors la fibre de $\mathbf{ShM}_K(MT(M))$ sur un point de $\mathbf{Sh}_K(MT(A))$ est une variété abélienne, i.e. $\mathbf{ShM}_K(MT(M))$ est un schéma abélien sur $\mathbf{Sh}_K(MT(A))$.

Ce serait intéressant de savoir ce que devient $\mathbf{ShM}_K(MT(M))$ quand M est dépressif ou quasi-déficient.

Chapitre 2

Structure du groupe de Mumford-Tate

2.1. Avant d'énoncer le théorème structural du groupe de Mumford-Tate, rappelons la définition du groupe de Heisenberg et une proposition de Y. André, qui nous sera trés utile dans la suite:
Soit H un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie et de dual $H^\vee$. Notons $<,>$: $H \times H^\vee \longrightarrow \mathbb{Q}(1)$ l'accouplement qui définit la dualité entre H et $H^\vee$.
Posons $\mathcal{H} = \mathbb{Q}(1) \times H \times H^\vee$ et munissons $\mathcal{H}$ de la loi de groupe suivante:

$$(s, x, x^\vee) * (t, y, y^\vee) = (s + t - < x, y^\vee >, x + y, x^\vee + y^\vee)$$

pour chaque $x, y \in H,\ x^\vee, y^\vee, \in H^\vee$ et $t, s \in \mathbb{Q}(1)$. Muni de cette loi de groupe, $\mathcal{H}$ est un groupe algébrique unipotent sur $\mathbb{Q}$ qui est extension centrale de groupes de $H \times H^\vee$ par $\mathbb{Q}(1)$:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}(1) \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow H \times H^\vee \longrightarrow 0.$$

On appelle $\mathcal{H}$ *le groupe de Heisenberg relatif à* H.
Enoncons maintenant la proposition suivante de Y. André (cf. [A92] prop. 1) qui fournit une formule explicite pour le radical unipotent du groupe de Mumford-Tate des 1-motifs dont l'extension sous-jacente est triviale.

2.2. **Proposition**
Soit $M = [X \xrightarrow{u} G]$ *avec* $G = A \times T$, *un 1-motif définit sur* $\mathbb{C}$.
De plus soient G' *la composante neutre de la clôture de Zariski de* $u(X)$ *dans* G *et* F *le* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel obtenu en tensorisant par* $\mathbb{Q}$ *l'anneau des endomorphismes de* G', *i.e.* $F = \mathrm{End}\, G' \otimes \mathbb{Q}$.
On a l'isomorphisme canonique suivant

$$U^{(4)}(MT(M)) \cong \mathrm{Hom}_F(F \cdot u(X); \mathrm{H}_1(\mathrm{G}', \mathbb{Q})).$$

2.3. **Théorème structural**

Soit $M=(X,X^\vee,A,A^\vee,v,v^\vee,\psi)$ un 1-motif défini sur $\mathbb{C}$. Posons $P=MT(M)$, $M^{sc}=M\oplus M^\vee/W_{-2}(M\oplus M^\vee)$ et $P^{sc}=MT(M^{sc})$.

[1] Le groupe de Mumford-Tate de M se dévisse de la façon suivante:

$$0\longrightarrow W_{-2}(P)\longrightarrow P\longrightarrow P^{sc}\longrightarrow 0.$$

En particulier, $W_{-1}(P)$ s'inscrit dans la suite exacte:

$$0\longrightarrow W_{-2}(P)\longrightarrow W_{-1}(P)\longrightarrow W_{-1}(P^{sc})\longrightarrow 0.$$

On suppose ensuite que $X=X^\vee=\mathbb{Z}$.

[2] Il existe une sous-variété abélienne B de $A\times A^\vee$ qui contient un multiple convenable de $v\times v^\vee(1)$ et telle que $W_{-1}(P^{sc})$ s'injecte dans $\mathrm{H}_1(B,\mathbb{Q})$

$$\begin{aligned}\iota: W_{-1}(P^{sc})&\longrightarrow \mathrm{H}_1(B,\mathbb{Q})\\ \sigma&\longmapsto(\sigma-id)\,v\times v^\vee(1).\end{aligned}$$

En composant cette inclusion avec l'inclusion naturelle $\mathrm{H}_1(B,\mathbb{Q})\longrightarrow\mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q})\times\mathrm{H}_1(A^\vee,\mathbb{Q})$, on obtient l'inclusion $i:W_{-1}(P^{sc})\longrightarrow\mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q})\times\mathrm{H}_1(A^\vee,\mathbb{Q})$.

[3] Si $W_{-2}(P)\neq 0$, $W_{-1}(P)$ est le pull-back par $i:W_{-1}(P^{sc})\longrightarrow\mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q})\times\mathrm{H}_1(A^\vee,\mathbb{Q})$ du groupe de Heisenberg $\mathcal{H}$ relatif à $\mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q})$, i.e. on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W_{-2}(P) \arrow[r] \arrow[d, "iso.can."'] & W_{-1}(P) \arrow[r] \arrow[d, "I"] & W_{-1}(P^{sc}) \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"] & 0\\
0 \arrow[r] & \mathbb{Q}(1) \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[r] & \mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q})\times\mathrm{H}_1(A^\vee,\mathbb{Q}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

De plus $i^*\mathcal{H}=W_{-1}(P)$ s'injecte dans $\mathcal{H}$.

PREUVE:

[1] Puisque $(M\oplus M^\vee)/W_{-2}(M\oplus M^\vee)=M^{sc}$, la sous-catégorie tannakienne neutre de $\mathcal{SHM}_\mathbb{Q}$ engendrée par M contient celle engendrée par M^{sc} et donc grâce à 1.5 on a l'homomorphisme surjectif

$$\begin{aligned}\lambda: P&\longrightarrow P^{sc}\\ g&\longmapsto\lambda(g)=g_{|T_{\mathrm{H}}(M^{sc})}.\end{aligned}$$

De plus puisque $M^{sc}=W_0/W_{-2}(M)\oplus(W_{-1}(M))^\vee$, $g\in\mathrm{Ker}(\lambda)$ si et seulement si $g\in U^{(3)}(P)\cap U^{(4)}(P)$ et donc d'après 1.9

$$W_{-2}(P)\cong\mathrm{Ker}(\lambda).\tag{2.3.1}$$

On obtient alors que la suite $0\longrightarrow W_{-2}(P)\longrightarrow P\longrightarrow P^{sc}\longrightarrow 0$ est exacte. Cette dernière suite exacte implique la suite exacte $0\longrightarrow W_{-2}(P)\longrightarrow W_{-1}(P)\longrightarrow$

$W_{-1}(P^{sc}) \longrightarrow 0$, car la filtration par le poids est stricte sur le groupe de Mumford-tate. Mais on préfère ici retrouver ce résultat de manière plus concrète:
Puisque $M^{sc}/[X \times X^\vee \longrightarrow 0] = [0 \longrightarrow A \times A^\vee]$, la sous-catégorie tannakienne neutre de $\mathcal{SHM}_{\mathbb{Q}}$ engendrée par M^{sc} contient celle engendrée par $[0 \longrightarrow A \times A^\vee]$, et donc d'après 1.5 on a l'homomorphisme surjectif

$$\begin{aligned} \Lambda : P^{sc} &\longrightarrow MT([0 \longrightarrow A \times A^\vee]) \\ g &\longmapsto \Lambda(g) = g_{|T_{\mathrm{H}}([0 \longrightarrow A \times A^\vee])}. \end{aligned}$$

En outre $T_{\mathrm{H}}([0 \longrightarrow A \times A^\vee]) = \mathrm{Gr}_{-1}^W\big(T_{\mathrm{H}}(M^{sc})\big)$ et donc $\mathrm{Ker}(\Lambda) = U^{(1)}(P^{sc})$. Mais alors grâce à 1.9 on peut conclure que

$$W_{-1}(P^{sc}) \cong \mathrm{Ker}(\Lambda). \tag{2.3.2}$$

Soit $\phi : P \longrightarrow MT([0 \longrightarrow A \times A^\vee])$ l'homomorphisme obtenu en composant λ avec Λ.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\lambda} & P^{sc} \\ & \phi \searrow & \downarrow \Lambda \\ & & MT([0 \longrightarrow A \times A^\vee]) \end{array}$$

Vérifions que

$$W_{-1}(P) \cong \mathrm{Ker}(\phi). \tag{2.3.3}$$

D'après 1.9 il suffit de vérifier que $U^{(1)}(P) = \mathrm{Ker}(\phi)$:
Si $g \in \mathrm{Ker}(\phi)$, alors $g_{|T_{\mathrm{H}}([0 \longrightarrow A \times A^\vee])} = \phi(g) = id$. Mais $T_{\mathrm{H}}([0 \longrightarrow A \times A^\vee]) = W_{-1}(T_{\mathrm{H}}(M^{sc})) = \mathrm{Gr}_{-1}^W(T_{\mathrm{H}}(M)) \times \mathrm{Gr}_{-1}^W(T_{\mathrm{H}}(M^\vee))$ et donc $g \in U^{(1)}(P)$.
Si $g \in W_{-1}(P)$, on sait que $g_{|\mathrm{Gr}_{-1}^W(T_{\mathrm{H}}(M))} = id$. Mais puisque $T_{\mathrm{H}}([0 \longrightarrow A \times A^\vee]) = \mathrm{Gr}_{-1}^W(T_{\mathrm{H}}(M)) \times \mathrm{Gr}_{-1}^W(T_{\mathrm{H}}(M^\vee))$, on obtient que $\phi(g) = id$.
Puisque $\mathrm{Ker}(\phi) = \lambda^{-1}\mathrm{Ker}(\Lambda)$, il est clair que la suite

$$\begin{array}{c} 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\lambda) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\phi) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Ker}(\Lambda) \longrightarrow 0 \\ \qquad\qquad\qquad g \longmapsto g_{|T_{\mathrm{H}}(M^{sc})} \end{array}$$

est exacte, et donc, d'après (2.3.1), (2.3.2) et (2.3.3), on obtient que la suite $0 \longrightarrow W_{-2}(P) \longrightarrow W_{-1}(P) \longrightarrow W_{-1}\big(P^{sc}\big) \longrightarrow 0$ est exacte.
[2] On va démontrer plus généralement, que si $[\mathbb{Z} \xrightarrow{\mathcal{V}} \mathcal{A}]$ est un 1-motif défini sur $\mathbb{C}$ sans partie torique, il existe une sous-variété abélienne $\mathcal{B}$ de $A \times A^\vee$ qui contient un multiple convenable de $\mathcal{V}(1)$ et telle que l'on ait l'injection

$$\begin{aligned} \iota : W_{-1}\big(MT([\mathbb{Z} \xrightarrow{\mathcal{V}} \mathcal{A}])\big) &\longrightarrow \mathrm{H}_1(\mathcal{B}, \mathbb{Q}) \\ \sigma &\longmapsto (\sigma - id)\, \mathcal{V}(1). \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

(l'écriture $(\sigma - id)\mathcal{V}(1)$ est abusive. On expliquera dans la suite ce qu'elle signifie).

Notons $\mathcal{P}$ le groupe de Mumford-Tate de $[\mathbb{Z}\xrightarrow{\mathcal{V}}\mathcal{A}]$. D'après 2.2, on a l'isomorphisme canonique suivant

$$
\begin{aligned}
W_{-1}(\mathcal{P}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_F\big(F\,\mathcal{V}(\mathbb{Z}); \mathrm{H}_1(\mathcal{B},\mathbb{Q})\big) \\
\sigma &\longmapsto (\sigma - id)
\end{aligned}
\tag{2.3.5}
$$

où $\mathcal{B}$ est la plus petite sous-variété abélienne de $\mathcal{A}$ qui contient un multiple convenable de $\mathcal{V}(1)$ et $F = \mathrm{End}\mathcal{B} \otimes \mathbb{Q}$. Remarquons que normalement $\sigma - id$ agit sur
$T_{\mathrm{H}}([\mathbb{Z}\xrightarrow{\mathcal{V}}\mathcal{A}]) = \{(a,z) \in \mathrm{Lie}(\mathcal{A}) \times \mathbb{Z} \mid \exp a = \mathcal{V}(z)\} \otimes \mathbb{Q}$, où $\exp : \mathrm{Lie}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$. Mais si $m = (a,z) \in T_{\mathbb{Z}}([\mathbb{Z}\xrightarrow{\mathcal{V}}\mathcal{A}])$ on observe que $(\sigma - id)m$ ne dépend que de $\mathcal{V}(z)$: ceci explique l'abus de notation quand on écrit que $\sigma - id$ agit sur $F\,\mathcal{V}(\mathbb{Z})$. De plus, remarquons que puisque le groupe de Mumford-Tate ne dépend que de la classe d'isogénie du 1-motif, on peut supposer que $\mathcal{V}(1)$ appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{C})$.
Considérons l'homomorphisme F-équivariant

$$
\begin{aligned}
F &\longrightarrow F\,\mathcal{V}(\mathbb{Z}) \\
id &\longmapsto \mathcal{V}(1),
\end{aligned}
$$

qui est clairement surjectif. Puisque le foncteur $\mathrm{Hom}_F\big(\_\,; \mathrm{H}_1(\mathcal{B},\mathbb{Q})\big)$ est contravariant, on obtient un homomorphisme

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_F\big(F\,\mathcal{V}(\mathbb{Z}); \mathrm{H}_1(\mathcal{B},\mathbb{Q})\big) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_F\big(F; \mathrm{H}_1(\mathcal{B},\mathbb{Q})\big) \\
f &\longmapsto [id \longmapsto f(\mathcal{V}(1))]
\end{aligned}
\tag{2.3.6}
$$

qui est injectif à cause de la surjectivité de $F \longrightarrow F\,\mathcal{V}(\mathbb{Z})$. En composant l'isomorphisme canonique (2.3.5), avec l'inclusion (2.3.6) et avec l'isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}_F\big(F; \mathrm{H}_1(\mathcal{B},\mathbb{Q})\big) \cong \mathrm{H}_1(\mathcal{B},\mathbb{Q})$ on obtient (2.3.4).
La démonstration de [**2**] est une simple application de notre résultat général: en effet posons $\tilde{M} = [\mathbb{Z} \overset{v \times v^{\vee}}{\longrightarrow} A \times A^{\vee}]$. Si on désigne par $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'homomorphisme diagonal de $\mathbb{Z}$, on remarque que

$$
M^{sc}/[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \longrightarrow 0] = [\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \longrightarrow A \times A^{\vee}] \cong \tilde{M}
$$

$$
\tilde{M}/[0 \longrightarrow A^{\vee}] \oplus \tilde{M}/[0 \longrightarrow A] = M^{sc}.
$$

On a donc que M^{sc} et $\tilde{M}$ engendrent la même sous-catégorie tannakienne de $\mathcal{SHM}_{\mathbb{Q}}$, et par conséquent ils ont le même groupe de Mumford-Tate: $P^{sc} = MT(\tilde{M})$. Mais alors, si on applique (2.3.4) à $\tilde{M}$, on obtient l'inclusion recherchée.
[**3**] D'après (1.8.1), $W_{-2}(P)$ est contenu dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Gr}_0^W(T_{\mathrm{H}}(M)), \mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m,\mathbb{Q}))$, qui est canoniquement isomorphe à $\mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}(1)$, et donc par hypothèse $W_{-2}(P)$ est aussi canoniquement isomorphe à $\mathbb{Q}(1)$:

$$
iso.can. : W_{-2}(P) \longrightarrow \mathbb{Q}(1).
$$

Notons $\iota_1 : W_{-2}(P) \longrightarrow W_{-1}(P)$ (resp. $\iota_2 : \mathbb{Q}(1) \longrightarrow \mathcal{H}$) l'inclusion naturelle de $W_{-2}(P)$ dans $W_{-1}(P)$ (resp. de $\mathbb{Q}(1)$ dans $\mathcal{H}$) et $\pi_1 : W_{-1}(P) \longrightarrow W_{-1}(P^{sc})$ (resp. $\pi_2 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q}) \times \mathrm{H}_1(A^\vee,\mathbb{Q})$) la projection naturelle de $W_{-1}(P)$ sur $W_{-1}(P^{sc})$ (resp. de $\mathcal{H}$ sur $\mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q}) \times \mathrm{H}_1(A^\vee,\mathbb{Q})$). Avec ces notations et grâce à [**1**] et [**2**], on a le diagramme suivant
(2.3.7)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W_{-2}(P) \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "iso.can."'] & W_{-1}(P) \arrow[r, "\pi_1"] & W_{-1}(P^{sc}) \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Q}(1) \arrow[r, "\iota_2"] & \mathcal{H} \arrow[r, "\pi_2"] & \mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q}) \times \mathrm{H}_1(A^\vee,\mathbb{Q}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Nous allons relever l'inclusion $i : W_{-1}(P^{sc}) \longrightarrow \mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q}) \times \mathrm{H}_1(A^\vee,\mathbb{Q})$ en un homomorphisme de groupes de $W_{-1}(P)$ dans $\mathcal{H}$, qui fasse commuter le diagramme (2.3.7). Après avoir choisi une section $\mathbb{Q}$-linéaire de π_1, considérons l'application $\mathbb{Q}$-linéaire

$$\begin{aligned} I : W_{-1}(P) &\longrightarrow \mathcal{H} \\ (s,\mathcal{X}) &\longmapsto (iso.can.(s), i(\mathcal{X})) \end{aligned}$$

où $s \in W_{-2}(P)$ et $\mathcal{X} \in W_{-1}(P^{sc})$, et vérifions que c'est un homomorphisme de groupes injectif. Dorénavant, pour chaque $s \in W_{-2}(P)$ et $\mathcal{X} \in W_{-1}(P^{sc})$, on va identifier s à $iso.can.(s) \in \mathbb{Q}(1)$ et $\mathcal{X}$ à $i(\mathcal{X}) = (x, x^\vee) \in \mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q}) \times \mathrm{H}_1(A^\vee,\mathbb{Q})$.
Etudions la loi de groupe de $W_{-1}(P)$: Notons "$\circ$" l'opération de $W_{-1}(P)$. Il est clair que $\circ$ restreinte à $W_{-2}(P)$ doit coïncider avec la loi de groupe de $W_{-2}(P)$. Donc

$$(s,0) \circ (t,0) = (s+t,0)$$

pour chaque $s,t \in W_{-2}(P) \cong \mathbb{Q}(1)$. De façon analogue, l'operation $\circ$ doit induire sur $W_{-1}(P^{sc})$ la loi de groupe de $W_{-1}(P^{sc})$. Donc si $\mathcal{X} = (x,x^\vee), \mathcal{Y} = (y,y^\vee) \in W_{-1}(P^{sc})$, on doit avoir

$$(0,\mathcal{X}) \circ (0,\mathcal{Y}) = (0,\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = (0, x+y, x^\vee + y^\vee).$$

Il est alors clair que si $g_1 = (s,\mathcal{X}) = (s,x,x^\vee)$ et $g_2 = (t,\mathcal{Y}) = (t,y,y^\vee) \in W_{-1}(P)$,

$$g_1 \circ g_2 = (s + t + \Upsilon(x,x^\vee,y,y^\vee), x+y, x^\vee + y^\vee) \tag{2.3.8}$$

où $\Upsilon : \mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q}) \times \mathrm{H}_1(A^\vee,\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}(1)$ est une application telle que $\Upsilon(0,0,0,0) = 0$. Pour expliciter $\Upsilon(x,x^\vee,y,y^\vee)$ il va falloir comprendre comment agit $g_1 \circ g_2$ sur la réalisation de Hodge de M, $T_{\mathrm{H}}(M)$. Remarquons d'abord que les 1-motifs $M_1 = M/W_{-2}M$ et $M_2 = M^\vee/W_{-2}M^\vee$ sont contenus dans la catégorie tannakienne engendré par M^{sc} et donc, si on pose $P_i = MT(M_i)$ pour $i = 1,2$, on a les surjections $P^{sc} \longrightarrow P_1$ et $P^{sc} \longrightarrow P_2$. Puisque ces deux surjections respectent la filtration $W_\bullet$, on obtient les surjections

$$\begin{tikzcd}
& W_{-1}(P^{sc}) \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
W_{-1}(P_1) & & W_{-1}(P_2).
\end{tikzcd}$$

Si on applique **[2]** aux 1-motifs M_1 et M_2, on obtient que $W_{-1}(P_1)$ et $W_{-1}(P_2)$ s'injectent respectivement dans $\mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q})$ et $\mathrm{H}_1(A^\vee,\mathbb{Q})$ via les inclusions

$$\begin{aligned}
i_1 : W_{-1}(P_1) &\longrightarrow \mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q}) \\
\sigma &\longmapsto (\sigma - id)\, v(1), \\
i_2 : W_{-1}(P_2) &\longrightarrow \mathrm{H}_1(A^\vee,\mathbb{Q}) \\
\sigma &\longmapsto (\sigma - id)\, v^\vee(1).
\end{aligned}$$

On peut résumer la situation dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & W_{-1}(P^{sc}) \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dd, hook, "i"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
W_{-1}(P_1) \arrow[dd, hook, "i_1"'] & & W_{-1}(P_2) \arrow[dd, hook, "i_2"] \\
 & \mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q}) \times \mathrm{H}_1(A^\vee,\mathbb{Q}) \arrow[dl, "Pr_1"] \arrow[dr, "Pr_2"'] & \\
\mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q}) & & \mathrm{H}_1(A^\vee,\mathbb{Q}).
\end{tikzcd}$$

où Pr_1 et Pr_2 désignent les projections de $\mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q}) \times \mathrm{H}_1(A^\vee,\mathbb{Q})$ sur $\mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q})$ et $\mathrm{H}_1(A^\vee,\mathbb{Q})$ respectivement. Remarquons alors que

$$\text{(2.3.9)} \qquad \begin{aligned}
x &= Pr_1(i\,\mathcal{X}) = Pr_1\, i(\pi_1\, g_1) = i_1\, pr_1(\pi_1\, g_1) = \big(pr_1(\pi_1\, g_1) - id\big)\, v(1) \\
y^\vee &= Pr_2(i\,\mathcal{Y}) = Pr_2\, i(\pi_1\, g_2) = i_2\, pr_2(\pi_1\, g_2) = \big(pr_2(\pi_1\, g_2) - id\big)\, v^\vee(1)
\end{aligned}$$

Puisque $pr_1(\pi_1\, g_1) \in W_{-1}(P_1)$, par définition on a que

$$\begin{aligned}
&\big(pr_1(\pi_1\, g_1) - id\big)\, W_0/W_{-2}(T_{\mathrm{H}}(M)) \subseteq \mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q}) \\
&\big(pr_1(\pi_1\, g_1) - id\big)\, \mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q}) = 0,
\end{aligned}$$

et donc

$$\text{(2.3.10)} \qquad \big(pr_1(\pi_1\, g_1) - id\big) : \mathrm{Gr}_0^W(T_{\mathrm{H}}(M)) \longrightarrow \mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q}).$$

Mais alors $\big(pr_1(\pi_1\, g_1) - id\big) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Gr}_0^W(T_{\mathrm{H}}(M)), \mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q}))$ qui est canoniquement isomorphe à $\mathrm{H}_1(A,\mathbb{Q})$ et donc d'après (2.3.9) il est clair que

$$\text{(2.3.11)} \qquad \big(pr_1(\pi_1\, g_1) - id\big)(1) = x.$$

De même, puisque $pr_2(\pi_1\, g_2) \in W_{-1}(P_2)$, par définition on a que

$$\begin{aligned}
&\big(pr_2(\pi_1\, g_2) - id\big)\, T_{\mathrm{H}}(M_2) \subseteq \mathrm{H}_1(A^\vee,\mathbb{Q}) \\
&\big(pr_2(\pi_1\, g_2) - id\big)\, \mathrm{H}_1(A^\vee,\mathbb{Q}) = 0.
\end{aligned}$$

i.e. $\big(pr_2(\pi_1\, g_2) - id\big) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Gr}_0^W(T_{\mathrm{H}}(M)), \mathrm{H}_1(A^{\vee}, \mathbb{Q}))$ qui est canoniquement isomorphe à $\mathrm{H}_1(A^{\vee}, \mathbb{Q})$, et donc d'après (2.3.9) il est clair que

$$\big(pr_2(\pi_1\, g_2) - id\big)(1) = y^{\vee}.$$

Puisque $pr_2(\pi_1\, g_2) \in P_2$ et $M_2^{\vee} = W_{-1}(M)$, on a que $pr_2(\pi_1\, g_2)$ agit de façon contravariante sur $W_{-1}T_{\mathrm{H}}(M)$. Désignons par le symbole "$\vee$" cette action. On observe alors que

$$-y^{\vee} = (pr_2(\pi_1\, g_2)^{\vee} - id)(1) \in W_{-1}\big(MT(W_{-1}M)\big). \tag{2.3.12}$$

Par définition on a que

$$\begin{aligned} &\big(pr_2(\pi_1\, g_2)^{\vee} - id\big)\, \mathrm{H}_1(G, \mathbb{Q}) \subseteq \mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m, \mathbb{Q}) \\ &\big(pr_2(\pi_1\, g_2)^{\vee} - id\big)\, \mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m, \mathbb{Q}) = 0, \end{aligned}$$

et donc

$$\big(pr_2(\pi_1\, g_2)^{\vee} - id\big) : \mathrm{H}_1(A, \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m, \mathbb{Q}). \tag{2.3.13}$$

Grâce à (2.3.10), (2.3.11),(2.3.12) et (2.3.13) on obtient que

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Gr}_0^W(T_{\mathrm{H}}(M)) & \xrightarrow{x} & \mathrm{H}_1(A, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{-y^{\vee}} & \mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m, \mathbb{Q}) \\ 1 & \longmapsto & x & \longmapsto & -y^{\vee}(x) = -< x, y^{\vee} > . \end{array}$$

Par conséquent,

$$\big(pr_1(\pi_1\, g_1) \circ (pr_2(\pi_1\, g_2))^{\vee} - id\big) : \mathrm{Gr}_0^W(T_{\mathrm{H}}(M)) \longrightarrow \mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m, \mathbb{Q}),$$

et donc $\big(pr_1(\pi_1\, g_1) \circ (pr_2(\pi_1\, g_2))^{\vee} - id\big)(1) = -< x, y^{\vee} >$ est un élément de $W_{-2}(P) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Gr}_0^W(T_{\mathrm{H}}(M)), \mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m, \mathbb{Q}))$. On vérifie aisément qu'aucune autre combinaison de composantes de g_1 et g_2, ne peut fournir un élément de $W_{-2}(P)$. On a alors que $\Upsilon(x, x^{\vee}, y, y^{\vee}) = -< x, y^{\vee} >$ et grâce à (2.3.8) on obtient enfin que

$$g_1 \circ g_2 = (s + t - < x, y^{\vee} >, x + y, x^{\vee} + y^{\vee}).$$

Maintenant, vue la définition de I et des lois de groupe de $\mathcal{H}$ et $W_{-1}(P)$, il est clair que I est un homomorphisme de groupes.
Pour conclure il nous reste à vérifier que I est injectif: Soit $g \in W_{-1}(P)$ tel que $I(g) = 0$. Alors $i(\pi_1(g)) = \pi_2(I(g)) = 0$, et donc puisque i est injectif, $\pi_1(g) = 0$, i.e. $g \in W_{-2}(P)$. Mais $I_{|W_{-2}(P)} = iso.can.$, et donc $g = 0.\Diamond$

2.4. **Corollaire**
Soient $M = (X, X^{\vee}, A, A^{\vee}, v, v^{\vee}, \psi)$ un 1-motif défini sur $\mathbb{C}$ et $P = MT(M)$.

(1) Si $A \neq 0$, notons $\mathcal{A}$ la composante neutre de la clôture de Zariski de $v \times v^{\vee}(X \times X^{\vee})$ dans $A \times A^{\vee}$ et F le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel obtenu en tensorisant par $\mathbb{Q}$ l'anneau des endomorphismes de $\mathcal{A}$, i.e. $F = \mathrm{End}\,\mathcal{A} \otimes \mathbb{Q}$. Alors

$$\dim_{\mathbb{Q}} P =$$

$$= \dim_{\mathbb{Q}} W_{-2}\big(P\big) + \dim_{\mathbb{Q}} MT(A) + \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hom}_F\big(F \cdot v \times v^{\vee}(X \times X^{\vee}); \mathrm{H}_1(\mathcal{A}, \mathbb{Q})\big).$$

(2) Si $A = 0$ et $X^{\vee} \neq 0$, notons T le tore de groupe des caractères $X^{\vee}$, $\mathcal{T}$ la composante neutre de la clôture de Zariski de $u(X)$ dans T et F' le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel obtenu en tensorisant par $\mathbb{Q}$ l'anneau des endomorphismes de $\mathcal{T}$, i.e. $F' = \mathrm{End}\,\mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$. Alors

$$\dim_{\mathbb{Q}} P = 1 + \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hom}_{F'}\big(F' \cdot u(X); \mathrm{H}_1(\mathcal{T}, \mathbb{Q})\big).$$

PREUVE:
(1) Soient $M^{sc} = M \oplus M^{\vee}/W_{-2}(M \oplus M^{\vee})$ et $P^{sc} = MT(M^{sc})$. Grâce à **[1]** de 2.3, on a les suites exactes

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
 & W_{-2}(P) \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & W_{-1}(P) \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] & \mathrm{Gr}_0^W(P) \arrow[r] & 0 \\
 & W_{-1}(P^{sc}) \arrow[d] & & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Par conséquent,

$$\dim_{\mathbb{Q}} P = \tag{2.4.1}$$

$$= \dim_{\mathbb{Q}} W_{-2}(P) + \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Gr}_0^W(P) + \dim_{\mathbb{Q}} W_{-1}(P^{sc}),$$

où $\mathrm{Gr}_0^W(P)$ est $MT(A)$ si $A \neq 0$, ou $MT(T)$ si $A = 0$. On est donc réduit à calculer la dimension de $W_{-1}(P^{sc})$. Puisque $M^{sc} = [X \times X^{\vee} \stackrel{v \times v^{\vee}}{\longrightarrow} A \times A^{\vee}]$, on a que $W_{-1}(T_{\mathrm{H}}(M^{sc})) = \mathrm{Gr}_{-1}^W(T_{\mathrm{H}}(M^{sc}))$, ce qui implique que $U^{(1)}(P^{sc}) = U^{(4)}(P^{sc})$ et donc d'après 1.9 $W_{-1}(P^{sc}) = U^{(4)}(P^{sc})$. Mais alors, en appliquant 2.2 au 1-motif M^{sc}, on trouve que

$$\dim_{\mathbb{Q}} W_{-1}(P^{sc}) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hom}_F\big(F \cdot v \times v^{\vee}(X \times X^{\vee}); \mathrm{H}_1(\mathcal{A}, \mathbb{Q})\big).$$

En mettant ensemble ce dernier résultat avec (2.4.1), on obtient finalement l'égalité recherchée.
(2) Si $A = 0$, on a que $M = [X \stackrel{u}{\longrightarrow} T]$, où T est le tore de groupe des caractères $X^\vee$. Puisque $\mathrm{Gr}_0^W\big(P\big) = MT(T) = \mathbb{G}_m$, à partir de la suite exacte

$$0 \longrightarrow W_{-1}\big(P\big) \longrightarrow P \longrightarrow \mathrm{Gr}_0^W\big(P\big) \longrightarrow 0$$

on obtient que

$$\dim_{\mathbb{Q}} P = 1 + \dim_{\mathbb{Q}} W_{-1}\big(P\big). \tag{2.4.2}$$

On s'est donc reduit à calculer la dimension de $W_{-1}\big(P\big)$. Puisque $M = [X \stackrel{u}{\longrightarrow} T]$, on a que $W_{-1}\big(T_{\mathrm{H}}(M)\big) = W_{-2}\big(T_{\mathrm{H}}(M)\big)$, ce qui implique que $U^{(2)}\big(P\big) = U^{(4)}\big(P\big)$, et donc d'après 1.9 $W_{-1}\big(P\big) = U^{(4)}\big(P\big)$. Mais alors, en appliquant 2.2 au 1-motif M, on trouve que

$$\dim_{\mathbb{Q}} W_{-1}\big(P\big) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hom}_F\big(F \cdot u(X); \mathrm{H}_1(\mathcal{T}, \mathbb{Q})\big).$$

En mettant ensemble ce dernier résultat avec (2.4.2), on peut conclure. $\diamondsuit$

2.5. Exemples:
(1) Soit $M = [X \stackrel{u}{\longrightarrow} A \times T]$ un 1-motif défini sur $\mathbb{C}$, où A est un produit de courbes elliptiques. Dans le corollaire 4.6.5, on calcule de façon tout à fait explicite la dimension du groupe de Mumford-Tate de M.
(2) Soit $M = [X \stackrel{u}{\longrightarrow} G]$ un 1-motif défini sur $\mathbb{C}$, où G est une extension d'une courbe elliptique $\mathcal{E}$ par $\mathbb{G}_m$.
Par définition, $W_{-2}(MT(M))$ est contenu dans $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m, \mathbb{Q})) \cong \mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m, \mathbb{Q})$ et donc la dimension de $W_{-2}(MT(M))$ est soit 0, soit 1.
En appliquant 4.6.4 au 1-motif $M \oplus M^\vee / W_{-2}(M \oplus M^\vee)$, on obtient que la dimension de $W_{-1}\big(MT(M \oplus M^\vee / W_{-2}(M \oplus M^\vee))\big)$ est inférieure ou égale à 4.
Par conséquent, grâce à (1) de 2.4, on peut conclure que si le 1-motif M ne présente aucunne dégénérescence, alors

$$\dim_{\mathbb{Q}} MT(M) = \begin{cases} 9 & \text{si } \mathcal{E} \text{ n'est pas de type CM,} \\ 7 & \text{si } \mathcal{E} \text{ de type CM,} \end{cases}$$

tandit que si M présente des dégénérescences, alors

$$\dim_{\mathbb{Q}} MT(M) < \begin{cases} 9 & \text{si } \mathcal{E} \text{ n'est pas de type CM,} \\ 7 & \text{si } \mathcal{E} \text{ de type CM.} \end{cases}$$

2.6. Terminons cette section en montrant comment on peut se réduire à l'étude du groupe de Mumford-Tate d'une somme directe de 1-motifs $M = (X, X^\vee, A, A^\vee, v,$

$v^\vee, \psi)$ tels que rang X = rang $X^\vee = 1$, ou de 1-motifs M autoduaux. Pour cela, introduisons quelques notations préliminaires.
Soit $M = (X, X^\vee, A, A^\vee, v, v^\vee, \psi)$ un 1-motif défini sur $\mathbb{C}$. Posons $r = \mathrm{rang}\, X$ et $s = \mathrm{rang}\, X^\vee$. De plus soit $\{x_i\}$ (resp. $\{x_j^\vee\}$) une base de X (resp. de $X^\vee$). Le 1-motif M est défini par les homomorphismes

$$u : X \longrightarrow G, \qquad v : X \longrightarrow A, \qquad v^\vee : X^\vee \longrightarrow A^\vee.$$

Considérons les réstrictions suivantes de ces homomorphismes

$$\begin{aligned} u_i &: x_i\mathbb{Z} \longrightarrow G \\ v_i &: x_i\mathbb{Z} \longrightarrow A \\ v_j^\vee &: x_j^\vee\mathbb{Z} \longrightarrow A^\vee. \end{aligned}$$

où $i = 1, \ldots, r$ et $j = 1, \ldots, s$. On a que $u = \Pi_{i=1}^r u_i, v = \Pi_{i=1}^r v_i$ et $v^\vee = \Pi_{j=1}^s v_j^\vee$. Via l'isomorphisme $\mathrm{Ext}^1(A, \mathbb{G}_m^s) \cong \Pi_{j=1}^s \mathrm{Ext}^1(A, \mathbb{G}_m)$, l'extension G correspond au produit d'extensions $G_1 \times \ldots \times G_s$, où G_j est l'extension de A par $\mathbb{G}_m$ parametrisée par le point $v_j^\vee(x_j)$ de $A^\vee$. Les homomorphismes $u_i : x_i\mathbb{Z} \longrightarrow G$ et $v_i : x_i\mathbb{Z} \longrightarrow A$ se décomposent ultérieurement de la façon suivante

$$\begin{aligned} u_{ij} &: x_i\mathbb{Z} \longrightarrow G_j \\ v_{ij} &: x_i\mathbb{Z} \longrightarrow A \end{aligned}$$

où $v_{ij}(x_i) = \pi_j(u_{ij}(x_i))$ si π_j désigne la projection de G_j sur A. Clairement $u_i = \Pi_{j=1}^s u_{ij}, v_i = \Pi_{j=1}^s v_{ij}$. Posons

$$M_{ij} = [x_i\mathbb{Z} \stackrel{u_{ij}}{\longrightarrow} G_j].$$

2.7. **Lemme**
Les 1-motifs M et $\oplus_{i=1}^r \oplus_{j=1}^s M_{ij}$ engendrent la même sous-catégorie tannakienne neutre de $\mathcal{SHM}_{\mathbb{Q}}$.
Par conséquent, $MT(M) = MT(\oplus_{i=1}^r \oplus_{j=1}^s M_{ij})$.

PREUVE:
(A) La catégorie tannakienne engendrée par $\oplus_{i=1}^r \oplus_{j=1}^s M_{ij}$ est contenue dans celle engendrée par M:
Puisque $M = [\Pi_{i=1}^r x_i\mathbb{Z} \stackrel{\Pi_{i,j}u_{ij}}{\longrightarrow} \Pi_{j=1}^s G_j]$, on a que

$$M_{ij} = M/[\Pi_{\substack{1 \leq k \leq r \\ k \neq i}} x_k\mathbb{Z} \longrightarrow \Pi_{\substack{1 \leq l \leq s \\ l \neq j}} G_l],$$

et par conséquent

$$\oplus_{i=1}^r \oplus_{j=1}^s \Big(M/[\Pi_{\substack{1 \leq k \leq r \\ k \neq i}} x_k\mathbb{Z} \longrightarrow \Pi_{\substack{1 \leq l \leq s \\ l \neq j}} G_l]\Big) = \oplus_{i=1}^r \oplus_{j=1}^s M_{ij}.$$

(B) La catégorie tannakienne engendrée par M est contenue dans celle engendrée par $\oplus_{i=1}^r \oplus_{j=1}^s M_{ij}$:
Pour simplifier les calculs, on va identifier X à $\mathbb{Z}^r$ et $X^\vee$ à $\mathbb{Z}^s$. Remarquons que si $\mathrm{d}_\mathbb{Z} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^s$ désigne l'homomorphisme diagonal, alors pour chaque $i = 1, \ldots, r$

$$\begin{aligned}\big(\oplus_{j=1}^s M_{ij}\big)/[\mathbb{Z}^s/\mathrm{d}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}) \longrightarrow 0] &= [\mathbb{Z}^s \stackrel{\Pi_j u_{ij}}{\longrightarrow} \Pi_{j=1}^s G_j]/[\mathbb{Z}^s/\mathrm{d}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}) \longrightarrow 0] \\ &= [\mathrm{d}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}) \stackrel{\Pi_j u_{ij}}{\longrightarrow} \Pi_{j=1}^s G_j] \\ &\cong [\mathbb{Z} \stackrel{u_i}{\longrightarrow} \Pi_{j=1}^s G_j].\end{aligned}$$

Donc

$$\oplus_{i=1}^r \Big(\big(\oplus_{j=1}^s M_{ij}\big)/[\mathbb{Z}^s/\mathrm{d}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}) \longrightarrow 0]\Big) = [\mathbb{Z}^r \stackrel{\Pi_i u_i}{\longrightarrow} (\Pi_{j=1}^s G_j)^r], \tag{2.7.1}$$

où $[\mathbb{Z}^r \stackrel{\Pi_i u_i}{\longrightarrow} (\Pi_{j=1}^s G_j)^r]$ est le 1-motif

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{Z}^r \arrow[d, "\Pi_i u_i"'] \arrow[dr, "\Pi_{i,j} v_{ij}"] & & \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m^{rs} \arrow[r] & (\Pi_{j=1}^s G_j)^r \arrow[r] & A^{sr} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dont l'extension $(\Pi_{j=1}^s G_j)^r$ est définie par l'homomorphisme $(\Pi_j v_j^\vee)^r : (\mathbb{Z}^s)^r \longrightarrow (A^{\vee s})^r$. Si on pose $v_{ij}^\vee = v_j^\vee$ pour $i = 1, \ldots, r$, on a clairement que $(\Pi_j v_j^\vee)^r = \Pi_{i,j} v_{ij}^\vee$. Avec ces notations, le dual de $[\mathbb{Z}^r \stackrel{\Pi_i u_i}{\longrightarrow} (\Pi_{j=1}^s G_j)^r]$ peut s'expliciter ainsi

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{Z}^{rs} \arrow[d, "\Pi_i u_i^\vee"'] \arrow[dr, "\Pi_{i,j} v_{ij}^\vee"] & & \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m^{r} \arrow[r] & ((\Pi_{j=1}^s G_j)^r)^\vee \arrow[r] & (A^\vee)^{sr} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Mais alors, si $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}^s} : \mathbb{Z}^s \longrightarrow (\mathbb{Z}^s)^r \quad \vec{X} \longmapsto (\vec{X}, \vec{X}, \ldots \vec{X})$, désigne l'homomorphisme diagonale de $\mathbb{Z}^s$ dans $(\mathbb{Z}^s)^r$, on obtient que

$$\begin{aligned}\Big([\mathbb{Z}^r \stackrel{\Pi_i u_i}{\longrightarrow} (\Pi_{j=1}^s G_j)^r]^\vee/[\mathbb{Z}^{rs}/\mathrm{d}_{\mathbb{Z}^s}(\mathbb{Z}^s) \longrightarrow 0]\Big)^\vee &\cong [\mathbb{Z}^s \stackrel{\Pi_i u_i}{\longrightarrow} \big((\Pi_{j=1}^s G_j)^r\big)^\vee]^\vee \\ &= [\mathbb{Z}^r \stackrel{\Pi_i u_i}{\longrightarrow} (\widetilde{\Pi_{j=1}^s G_j})^r],\end{aligned} \tag{2.7.2}$$

où $[\mathbb{Z}^r \stackrel{\Pi_i u_i}{\longrightarrow} (\widetilde{\Pi_{j=1}^s G_j})^r]$ est le 1-motif

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{Z}^r \arrow[d, "\Pi_i u_i"'] \arrow[dr, "\Pi_{i,j} v_{ij}"] & & \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m^{s} \arrow[r] & (\widetilde{\Pi_{j=1}^s G_j})^r \arrow[r] & A^{sr} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dont l'extension $(\widetilde{\Pi_{j=1}^{s} G_j})^r$ est définie par l'homomorphisme $(\Pi_j v_j^{\vee})^r \, : \, \mathbb{Z}^s \longrightarrow (A^{\vee s})^r \quad (1, \ldots, 1) \longmapsto (\Pi_j v_j^{\vee}(1), \ldots, \Pi_j v_j^{\vee}(1))$. Maintenant l'homomorphisme $+$: $(A^s)^r \longrightarrow A^s \quad (\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_r) \longmapsto \vec{X}_1 + \ldots + \vec{X}_r$ défini un morphisme surjectif entre les 1-motifs $[\mathbb{Z}^r \overset{\Pi_{ij} v_{ij}}{\longrightarrow} (A^s)^r]$ et $[\mathbb{Z}^r \overset{\Pi_i v_i}{\longrightarrow} A^s]$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^r & \overset{id}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}^r \\ \Pi_{ij} v_{ij} \downarrow & & \downarrow v \\ (A^s)^r & \overset{+}{\longrightarrow} & A^s. \end{array}$$

Ce morphisme surjectif induit, à son tour, un morphimse surjectif entre les 1-motifs $[\mathbb{Z}^r \overset{\Pi_i u_i}{\longrightarrow} (\widetilde{\Pi_{j=1}^{s} G_j})^r]$ et $M = [\mathbb{Z}^r \overset{u}{\longrightarrow} \Pi_{j=1}^{s} G_j]$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddr] & \mathbb{Z}^r \arrow[r] \arrow[d, "\Pi_i u_i"] \arrow[ddr, "id"] & \mathbb{Z}^r \arrow[r] \arrow[d, "\Pi_{ij} v_{ij}"] \arrow[ddr, "id"] & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m^s \arrow[r] \arrow[ddr, "id"] & (\widetilde{\Pi_{j=1}^{s} G_j})^r \arrow[r] \arrow[ddr] & A^{rs} \arrow[r] \arrow[ddr, "+"] & 0 & \\
& 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}^r \arrow[r] \arrow[d, "u"] & \mathbb{Z}^r \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m^s \arrow[r] & \Pi_{j=1}^{s} G_j \arrow[r] & A^s \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Donc M est un quotient de $[\mathbb{Z}^r \overset{\Pi_i u_i}{\longrightarrow} (\widetilde{\Pi_{j=1}^{s} G_j})^r]$, et par conséquent, d'après (2.7.1) et (2.7.2), M peut s'écrire comme un quotient de

$$\left\{ \left(\oplus_{i=1}^{r} \left(\left(\oplus_{j=1}^{s} M_{ij} \right) / [\mathbb{Z}^s / \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \longrightarrow 0] \right) \right)^{\vee} \Big/ [\mathbb{Z}^{rs} / \mathrm{d}_{\mathbb{Z}^s}(\mathbb{Z}^s) \longrightarrow 0] \right\}^{\vee} . \diamondsuit$$

2.8. **Lemme**

Soit $M = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, A, A^{\vee}, v, v^{\vee}, \psi)$ un 1-motif défini sur $\mathbb{C}$.
À M on peut associer un 1-motif $\mathbf{M}$ tel que $\mathrm{Gr}_0^W \mathbf{M} = \mathrm{Gr}_0^W \mathbf{M}^{\vee} = \mathbb{Z}$, et qui a les propriétés suivantes:

(i) $\mathbf{M}$ est autodual.

(ii) La sous-catégorie tannakienne neutre de $\mathcal{SHM}_{\mathbb{Q}}$ engendrée par $\mathbf{M}$ est la même que celle engendrée par M.

PREUVE: (La construction qui suit est due à D. Bertrand). Soit $M = [\mathbb{Z} \overset{u}{\longrightarrow} G]$ un 1-motif défini sur $\mathbb{C}$, où G est une extension de A par $\mathbb{G}_m$ parametrisée par le point $v^{\vee}(1) = Q$ de $A^{\vee}(\mathbb{C})$ et $u(1) = S$ est le point de $G(\mathbb{C})$ qui relève le point $v(1) = P$ de $A(\mathbb{C})$. Notons π la projection de G sur A.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & \mathbb{Z} & & & & & & \\ & & & & u\downarrow & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & G & \stackrel{\pi}{\longrightarrow} & A & \longrightarrow & 0 & \Rightarrow & Q \\ & & & & S & \longmapsto & P & & & & \end{array}$$

Le dual de Cartier de M est le 1-motif $M^{\vee} = [\mathbb{Z}\stackrel{u^{\vee}}{\longrightarrow}G^{\vee}]$, où $G^{\vee}$ est l'extension de $A^{\vee}$ par $\mathbb{G}_m$ parametrisée par le point P de $A(\mathbb{C})$ et $u^{\vee}(1) = S^{\vee}$ est le point de $G^{\vee}(\mathbb{C})$ qui relève le point Q de $A^{\vee}(\mathbb{C})$. Notons $\pi^{\vee}$ la projection de $G^{\vee}$ sur $A^{\vee}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & \mathbb{Z} & & & & & & \\ & & & & u^{\vee}\downarrow & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & G^{\vee} & \stackrel{\pi^{\vee}}{\longrightarrow} & A^{\vee} & \longrightarrow & 0 & \Rightarrow & P \\ & & & & S^{\vee} & \longmapsto & Q & & & & \end{array}$$

A partir de M et de $M^{\vee}$, on peut construire les 1-motifs

$$M_1 = W_0/W_{-2}(M) = [\mathbb{Z}\stackrel{v}{\longrightarrow}A] \qquad \text{avec } v(1) = P,$$
$$M_2 = W_0/W_{-2}(M^{\vee}) = [\mathbb{Z}\stackrel{v^{\vee}}{\longrightarrow}A^{\vee}] \qquad \text{avec } v^{\vee}(1) = Q.$$

Remarquons que $M_1^{\vee} = [0 \longrightarrow G^{\vee}]$ et $M_2^{\vee} = [0 \longrightarrow G]$.
Notons $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'homomorphisme diagonal de $\mathbb{Z}$ et $\mu : \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m$ la loi de multiplication de $\mathbb{G}_m$. Ces deux homomorphismes induisent respectivement les morphismes de 1-motifs $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}} : [\mathbb{Z} \longrightarrow 0] \longrightarrow [\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow 0]$ et $\mu : [0 \longrightarrow \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m] \longrightarrow [0 \longrightarrow \mathbb{G}_m]$ qui s'explicitent ainsi:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \stackrel{\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \\ 0\downarrow & & \downarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & \stackrel{0}{\longrightarrow} & 0 \\ 0\downarrow & & \downarrow 0 \\ \mathbb{G}_m\times\mathbb{G}_m & \stackrel{\mu}{\longrightarrow} & \mathbb{G}_m . \end{array}$$

Puisque le 1-motif $M \oplus M^{\vee}$ s'inscrit dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow M_2^{\vee} \oplus M_1^{\vee} \longrightarrow M \oplus M^{\vee} \longrightarrow \mathrm{Gr}_0^W(M) \oplus \mathrm{Gr}_0^W(M^{\vee}) \longrightarrow 0,$$

on peut considérer son pull-back par le morphisme $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}} : [\mathbb{Z} \longrightarrow 0] \longrightarrow [\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow 0]$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_2^{\vee} \oplus M_1^{\vee} & \longrightarrow & M \oplus M^{\vee} & \longrightarrow & [\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow 0] & \longrightarrow & 0 \\ & & id\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \mathrm{d}_{\mathbb{Z}} & & \\ 0 & \longrightarrow & M_2^{\vee} \oplus M_1^{\vee} & \longrightarrow & \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}^*(M \oplus M^{\vee}) & \longrightarrow & [\mathbb{Z} \longrightarrow 0] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \arrow[rr] \arrow[d, "u\times u^{\vee}"'] & & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \arrow[rr] \arrow[d, "0"] & & 0 & \\
0 \arrow[r] & G\times G^{\vee} \arrow[rr] & & G\times G^{\vee} \arrow[rr] & & 0 \arrow[rr] & & 0 & \\
& & 0 \arrow[rr] \arrow[uul] & & 0 \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[uul] & & \mathbb{Z} \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[uul, "\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}"'] & & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "0"] \arrow[uul, "\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}"'] & 0 \\
& & 0 \arrow[rr] & & G\times G^{\vee} \arrow[rr] \arrow[uul, "id"] & & G\times G^{\vee} \arrow[rr] \arrow[uul, "id"] & & 0 \arrow[r] \arrow[uul] & 0
\end{tikzcd}
$$

L'extension $\mathrm{d}^*_{\mathbb{Z}}(M\oplus M^{\vee})$ est le 1-motif $[\mathbb{Z} \overset{(u\times u^{\vee})}{\longrightarrow} G\times G^{\vee}]$, où $G\times G^{\vee}$ est l'extension de $A\times A^{\vee}$ par $\mathbb{G}_m\times\mathbb{G}_m$ parametrisée par le point (Q,P) de $(A^{\vee}\times A)(\mathbb{C})$, et $(u\times u^{\vee})(1)$ est le point $(u(1),u^{\vee}(1))=(S,S^{\vee})$ de $(G\times G^{\vee})(\mathbb{C})$ qui relève le point (P,Q) de $(A\times A^{\vee})(\mathbb{C})$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z} & & & & & & \\
 & & & & (u\times u^{\vee})\downarrow & & & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m\times\mathbb{G}_m & \longrightarrow & G\times G^{\vee} & \overset{\pi\times\pi^{\vee}}{\longrightarrow} & A\times A^{\vee} & \longrightarrow & 0 & \Rightarrow & (Q,P) \\
 & & & & (S,S^{\vee}) & \longmapsto & (P,Q) & & & &
\end{array}
$$

De façon analogue, $\mathrm{d}^*_{\mathbb{Z}}(M_1\oplus M_2)$ est le 1-motif $[\mathbb{Z} \overset{(v\times v^{\vee})}{\longrightarrow} A\times A^{\vee}]$, où $(v\times v^{\vee})(1)$ est le point (P,Q) de $(A\times A^{\vee})(\mathbb{C})$. On remarque donc que $\mathrm{d}^*_{\mathbb{Z}}(M\oplus M^{\vee})$ s'inscrit dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow W_{-2}(M)\oplus W_{-2}(M^{\vee}) \longrightarrow \mathrm{d}^*_{\mathbb{Z}}(M\oplus M^{\vee}) \longrightarrow \mathrm{d}^*_{\mathbb{Z}}(M_1\oplus M_2) \longrightarrow 0.$$

On peut alors faire le push-out du 1-motif $\mathrm{d}^*_{\mathbb{Z}}(M\oplus M^{\vee})$ par le morphisme μ : $[0\longrightarrow \mathbb{G}_m\times\mathbb{G}_m]\longrightarrow[0\longrightarrow\mathbb{G}_m]$:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & W_{-2}(M)\oplus W_{-2}(M) & \longrightarrow & \mathrm{d}^*_{\mathbb{Z}}(M\oplus M^{\vee}) & \longrightarrow & \mathrm{d}^*_{\mathbb{Z}}(M_1\oplus M_2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \mu\downarrow & & \downarrow & & \downarrow id & & \\
0 & \longrightarrow & W_{-2}(M) & \longrightarrow & \mu_*\mathrm{d}^*_{\mathbb{Z}}(M\oplus M^{\vee}) & \longrightarrow & \mathrm{d}^*_{\mathbb{Z}}(M_1\oplus M_2) & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[ddr, dash] & & \mathbb{Z} \arrow[rr, "id"] \arrow[d, "(u\times u^{\vee})"'] \arrow[ddr, "id"] & & \mathbb{Z} \arrow[rr] \arrow[d, "(v\times v^{\vee})"'] \arrow[ddr, "id"] & & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m\times\mathbb{G}_m \arrow[rr] \arrow[ddr, "\mu"] & & G\times G^{\vee} \arrow[rr] \arrow[ddr] & & A\times A^{\vee} \arrow[rr] \arrow[ddr, "id"] & & 0 & \\
& & 0 \arrow[rr] & & 0 \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathbb{Z} \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "(v\times v^{\vee})"] & 0 \\
& & 0 \arrow[rr] & & \mathbb{G}_m \arrow[rr] & & \mu_*(G\times G^{\vee}) \arrow[rr] & & A\times A^{\vee} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Si on note $\mathbb{A}$ la variété abélienne $A \times A^{\vee}$ et $\mathbf{G}$ l'extension $\mu_*(G \times G^{\vee})$ de $\mathbb{A}$ par $\mathbb{G}_m$, on a alors que l'extension $\mu_* \mathrm{d}^*_{\mathbb{Z}}(M \oplus M^{\vee})$ est le 1-motif $[\mathbb{Z} \stackrel{\mathbf{U}}{\longrightarrow} \mathbf{G}]$, où $\mathbf{G}$ est l'extension de $\mathbb{A}$ par $\mathbb{G}_m$ parametrisée par le point (Q,P) de $\mathbb{A}^{\vee}(\mathbb{C}) = (A^{\vee} \times A)(\mathbb{C})$, et $\mathbf{U}(1) = \mathbf{S}$ est un point de $\mathbf{G}(\mathbb{C})$ qui relève le point (P,Q) de $\mathbb{A}(\mathbb{C})$. Notons I l'inclusion de $\mathbb{G}_m$ dans $\mu_*(G \times G^{\vee})$ et Π la projection de $\mathbf{G}$ sur $\mathbb{A}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & \mathbb{Z} & & & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \stackrel{I}{\longrightarrow} & \mathbf{G} & \stackrel{\Pi}{\longrightarrow} & \mathbb{A} & \longrightarrow & 0 & \Rightarrow & (Q,P) \\ & & & & \mathbf{S} & \longmapsto & (P,Q) & & & & \end{array} \tag{2.8.1}$$

Si on pose $K = \mathrm{Ker}\big(\mu \circ (\mu \times id) : \mathbb{G}_m^2 \times \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m\big)$, ensemblistement on a que

$$\begin{array}{ll} \mathbf{G} = \big\{(g,m,\xi) \in G \times G^{\vee} \times \mathbb{G}_m\big\} \ / \ K, & \\ I : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbf{G} & \xi \longmapsto (0,0,\xi) \bmod K, \\ \Pi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbb{A} & (g,m,\xi) \bmod K \longmapsto (\pi(g), \pi^{\vee}(m), 0) \end{array}$$

et le point $\mathbf{S}$ s'identifie au point $(S, S^{\vee}, 1) \bmod K$.
Posons

$$\begin{array}{ll} \mathbf{M} := [\mathbb{Z} \stackrel{\mathbf{U}}{\longrightarrow} \mathbf{G}] & 1 \longmapsto (S, S^{\vee}, 1) \bmod K \\ \mathbf{V} := (v \times v^{\vee}) : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{A} & 1 \longmapsto (P,Q) \\ \mathbf{V}^{\vee} := (v^{\vee} \times v) : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{A}^{\vee} & 1 \longmapsto (Q,P) \end{array} \tag{2.8.2}$$

Vérifions maintenant que $\mathbf{M}$ a toutes les bonnes propriétés explicitées dans l'énoncé de ce lemme:
(i) Notons $sym : A \times A^{\vee} \longrightarrow A^{\vee} \times A$ et $Sym : \mathbb{A} \times \mathbb{A}^{\vee} \longrightarrow \mathbb{A}^{\vee} \times \mathbb{A}$ les isomorphismes "inversion des facteurs". D'après 1.3 on sait que

$$\psi_{\mathbf{M}^{\vee}} = \psi_{\mathbf{M}} \circ Sym.$$

De plus grâce à (2.8.2) on a aussi que

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^{\vee} \circ sym \quad \text{et} \quad \mathbf{V}^{\vee} = \mathbf{V} \circ sym.$$

Par conséquent, si on identifie $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}^{\vee}$ via l'isomorphisme sym, on obtient que les 1-motifs $\mathbf{M} = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{A}, \mathbb{A}^{\vee}, \mathbf{V}, \mathbf{V}^{\vee}, \psi_{\mathbf{M}})$ et $\mathbf{M}^{\vee} = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{A}^{\vee}, \mathbb{A}, \mathbf{V}^{\vee}, \mathbf{V}, \psi_{\mathbf{M}^{\vee}})$ sont isomorphes.
(ii)On doit vérifier que $MT(M) = MT(\mathbf{M})$. Pour simplifier les notations posons $P = MT(M), \mathbf{P} = MT(\mathbf{M}), M^{sc} = [\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \stackrel{v \times v^{\vee}}{\longrightarrow} A \times A^{\vee}]$ et $\mathbf{M}^{sc} = [\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \stackrel{\mathbf{V} \times \mathbf{V}^{\vee}}{\longrightarrow} \mathbb{A} \times \mathbb{A}^{\vee}]$. D'apres 2.3 [1], on sait que $P/W_{-2}(P) = MT(M^{sc})$ et
$\mathbf{P}/W_{-2}(\mathbf{P}) = MT(\mathbf{M}^{sc})$.
Remarquons que $\mathbf{M}^{sc}/[0 \longrightarrow \mathbb{A}^{\vee}] = M^{sc}$ et donc la sous-categorie tannakienne neutre de $\mathcal{SHM}_{\mathbb{Q}}$ engendrée par M^{sc} est contenue dans celle engendrée par $\mathbf{M}^{sc}$.

Notons $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est l'homomorphisme diagonal de $\mathbb{Z}$, $M_1 = [\mathbb{Z} \xrightarrow{v} A]$ et $M_2 = [\mathbb{Z} \xrightarrow{v^\vee} A^\vee]$. Alors le 1-motif

$$M_1 \oplus M_2 \oplus M_2 \oplus M_1 / [\mathbb{Z}^4 / \mathrm{d}_{\mathbb{Z}} \times \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \longrightarrow 0]$$

est isomorphe au 1-motif

$$[\mathbb{Z}^2 \overset{(v,v^\vee)\times(v^\vee,v)}{\longrightarrow} A \times A^\vee \times A^\vee \times A] = \mathbf{M}^{sc}.$$

Donc $\mathbf{M}^{sc}$ est contenu dans la sous-catégorie tannakienne neutre de $\mathcal{SHM}_{\mathbb{Q}}$ engendrée par M^{sc}. On peut donc conclure que $MT(M^{sc}) = MT(\mathbf{M}^{sc})$ et donc $P/W_{-2}(P) = \mathbf{P}/W_{-2}(\mathbf{P})$. Il nous reste á vérifier que $W_{-2}(P) = W_{-2}(\mathbf{P})$. Notons $P^\vee = MT(M^\vee)$. Puisque rang $\mathrm{Gr}_0^W(M) =$ rang $\mathrm{Gr}_0^W(M^\vee) =$ rang $\mathrm{Gr}_0^W(\mathbf{M}) =$ rang $\mathrm{Gr}_0^W(\mathbf{M}^\vee) = 1$, la dimension sur $\mathbb{Q}$ de $W_{-2}(P)$ et de $W_{-2}(\mathbf{P})$ est au plus 1. En paticulier, on a les injections suivantes

$$\begin{aligned}
\lambda : W_{-2}(P) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}, \mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m, \mathbb{Q})) \cong \mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m, \mathbb{Q}) \\
\lambda^\vee : W_{-2}(P^\vee) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}, \mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m, \mathbb{Q})) \cong \mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m, \mathbb{Q}) \\
\Lambda : W_{-2}(\mathbf{P}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}, \mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m, \mathbb{Q})) \cong \mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m, \mathbb{Q})
\end{aligned}$$

qui sont des isomorphismes si les 1-motifs M et $\mathbf{M}$ ne sont pas déficients. Remarquons que puisque la notions de groupe de MT est stable par dualité, on a $\lambda = \lambda^\vee$. Par construction, $\mathbf{M}$ est le push-out du 1-motif $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}^*(M \oplus M^\vee)$ par la loi de multiplication de $\mathbb{G}_m$, $\mu : \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m$, et donc

$$\Lambda = \lambda + \lambda^\vee = 2\lambda.$$

On a alors clairement que

$$W_{-2}(P) = 0 \iff \lambda = 0 \iff \Lambda = 0 \iff W_{-2}(\mathbf{P}) = 0$$

$$\dim_{\mathbb{Q}} W_{-2}(P) = 1 \iff \lambda \text{ iso} \iff \Lambda \text{ iso} \iff \dim_{\mathbb{Q}} W_{-2}(\mathbf{P}) = 1,$$

et donc on peut finalement conclure que $W_{-2}(P) = W_{-2}(\mathbf{P})$. $\diamondsuit$

Chapitre 3

Dégénérescences triviales

3.1. Grâce à l'interprétation géométrique de la déficience trouvée par D. Bertrand à la suite des travaux de L. Breen (voir [Br87]), on va démontrer que si $M = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, A, A^\vee, v, v^\vee, \psi)$ est un 1-motif déficient (resp. quasi-déficient) sur $\mathbb{C}$, alors il est trivialement déficient (resp. trivialement quasi-déficient) (cf. 1.11). Introduisons quelques notions préliminaires dues en grande partie à D. Bertrand (cf. [Be94], [Be98]):
Soient $M = (X, X^\vee, A, A^\vee, v, v^\vee, \psi)$ un 1-motif défini sur $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$ la biextension de Poincaré de $(A, A^\vee)$. Pour chaque couple $(x, x^\vee) \in X \times X^\vee$ considérons les conditions suivantes:

(i) la restriction de $\mathcal{P}$ à la composante connexe du groupe algébrique engendré par $(v(x), v^\vee(x^\vee))$ dans $A \times A^\vee$, est trivial ou d'ordre 2, i.e. son carré admet un scindage canonique qu'on notera ξ.

(ii) si β désigne la restriction de $(v, v^\vee)$ au groupe Z engendré par un multiple assez grand de $(x, x^\vee)$ dans $X \times X^\vee$, les trivialisations $\psi_{|Z}$ et $\beta^*\xi$ de $\beta^*\mathcal{P}$ coïncident.

On dit que M est *quasi-isotrope* si la condition (i) est vérifiée pour chaque couple $(x, x^\vee) \in X \times X^\vee$.
On dit que M est *isotrope* si les conditions (i) et (ii) sont vérifiées pour chaque couple $(x, x^\vee) \in X \times X^\vee$.
On peut simplifier la condition (i) en introduisant la notion d'isotropie pour les variétés abéliennes: Une sous-variété abélienne B de $A \times A^\vee$ est dite *isotrope* si la restriction de la biextension de Poincaré de $(A, A^\vee)$ à B est triviale ou d'ordre 2. Grâce à cette définition on peut reformuler la condition (i) de la façon suivante

(i') il existe une sous-variété abélienne isotrope de $A \times A^\vee$, qu'on notera $B_{(x,x^\vee)}$, qui contient un multiple assez grand de $(v(x), v^\vee(x^\vee))$.

Mais d'après [Be94] proposition 1, cette dernière condition peut se réécrire ainsi

(i") il existe un homomorphisme antisymétrique $f_{(x,x^\vee)} : A \times A^\vee \longrightarrow A^\vee \times A$ (i.e. $f^t_{(x,x^\vee)} = -f_{(x,x^\vee)}$ où $f^t_{(x,x^\vee)}$ est la transposée de $f_{(x,x^\vee)}$) et un entier non nul

$N_{(x,x^\vee)}$ *tels que* $f_{(x,x^\vee)}(P,Q) = N_{(x,x^\vee)}(Q,P)$ *pour chaque* $(P,Q) \in B_{(x,x^\vee)}$.

Dans le cas particulier où $B_{(x,x^\vee)}$ s'envoie surjectivement sur A, toujours d'après [Be94] proposition 1, la condition (i') est équivalente à

(i"') il existe un homomorphisme antisymétrique $g_{(x,x^\vee)} : A \longrightarrow A^\vee$ *et un entier non nul* $N_{(x,x^\vee)}$ *tels que* $g_{(x,x^\vee)}(P) = N_{(x,x^\vee)}Q$ *pour chaque* $(P,Q) \in B_{(x,x^\vee)}$.

Explicitons ce que les notions de quasi-isotropie et d'isotrope veulent dire pour un 1-motif $M = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathcal{E}, \mathcal{E}^\vee, v, v^\vee, \psi)$ sur $\mathbb{C}$, où $\mathcal{E}$ est une courbe elliptique de type CM, $v(1) = P \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ et $v^\vee(1) = Q \in \mathcal{E}^\vee(\mathbb{C})$.
Soit $B_{(P,Q)}$ la composante connexe du groupe algébrique engendré par (P,Q) dans $\mathcal{E} \times \mathcal{E}^\vee$. La condition (i) nous dit que la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathcal{P}_{|B_{(P,Q)}} \longrightarrow B_{(P,Q)} \longrightarrow 0$$

est canoniquement scindée, i.e. $\mathcal{P}_{|B_{(P,Q)}} = \mathbb{G}_m \times B_{(P,Q)}$. Si on note $\xi : B_{(P,Q)} \longrightarrow \mathcal{P}_{|B_{(P,Q)}}$ ce scindage canonique, la condition (ii) se traduit ainsi:

$$\psi(1,1) = (v \times v^\vee)^* \xi(1,1) = (1,(1,1)) \in (\mathcal{P}_{|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}})_{(1,1)}.$$

Pour mieux visualiser ces deux conditions, considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}_{|B_{(P,Q)}} & \longrightarrow & \mathcal{P} & \longleftarrow & \mathcal{P}_{|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \\ {\scriptstyle \xi}\uparrow\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\uparrow {\scriptstyle \psi=(v\times v^\vee)^*\xi} \\ B_{(P,Q)} & \hookrightarrow & \mathcal{E}\times\mathcal{E}^\vee & \xleftarrow{v\times v^\vee} & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}. \end{array}$$

On peut donc conclure que le 1-motif $M = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} G]$ est isotrope si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées

(1) $(P,Q) \in (\cup_n \mathcal{E}_n) \times \mathcal{E}^\vee \ \bigcup \ \mathcal{E} \times (\cup_n \mathcal{E}^\vee_n) \ \bigcup \ \big\{(R,S) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}^\vee/(\cup_n \mathcal{E}_n) \times (\cup_n \mathcal{E}^\vee_n) \ \mid \ (R,S) \text{ vérifie la condition } (i')\big\}$,
où $\mathcal{E}_n$ (resp. $\mathcal{E}^\vee_n$) est le groupe des points de n-torsion de $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}^\vee$).

(2) $u(1)$ correspond à un des points de l'ensemble suivant

$$\big\{(\alpha,(P,Q)) \in (\mathcal{P})_{(P,Q)} \ \mid \ \alpha \in \mathbb{G}_m \text{ est une racine de l'unité}\big\}.$$

Pour l'interpretation géometrique de la déficience et de la quasi-déficience on aura besoin du lemme suivant de D. Bertrand (cf. [Be94] lemme 1).

3.2. **Lemme**
Soit B *une sous-variété abélienne isotrope de* $A \times A^\vee$. *Il existe une sous-variété abélienne isotrope* B', *une isogénie* v *de* $B^\vee$ *vers* B' *et un entier* N' *tels que, si* j, j' *désignent les injections canoniques de* B, B' *dans* $A \times A^\vee$, m *la loi de groupe de* $A \times A^\vee$, $\mathcal{P}$ *le fibré de Poincaré sur* $A \times A^\vee$ *et* $\mathcal{Q}$ *le fibré de Poincaré sur* $B \times B^\vee$, *l'homomorphisme*

$$S = m \circ (j \times j') \circ (id \times v) : B \times B^\vee \longrightarrow A \times A^\vee$$

ait un noyau fini et vérifie: $S^*\mathcal{P} = N'\mathcal{Q}$. Si de plus B est isotrope maximale, B' l'est aussi, S est une isogénie et B est isogène à A.

3.3. **Proposition**

Soit $M = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, A, A^\vee, v, v^\vee, \psi)$ un 1-motif défini sur $\mathbb{C}$. Alors,

(1) M est quasi-déficient si et seulement si il est quasi-isotrope.

(2) M est déficient si et seulement si il est isotrope.

PREUVE: (Dans [JR87], on trouve la preuve de (2) en termes de réalisation ℓ-adique). Comme d'habitude notons P le groupe de Mumford-Tate de M.

(1) Commençons avec quelques rappels sur la biextension de Poincaré. Puisque A est définie sur $\mathbb{C}$, on peut l'écrire sous la forme V/Λ, où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension g et Λ est un réseau de V. Par définition $A^\vee = V^\vee/\Lambda^\vee$, où $V^\vee = \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(V, \mathbb{C})$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes $\mathbb{C}$-antilinéaires $l : V \longrightarrow \mathbb{C}$, et $\Lambda^\vee = \{l \in V^\vee \mid \mathrm{Im}\, l(\Lambda) \subseteq \mathbb{Z}\}$ est un réseau de $V^\vee$. On identifie le $\mathbb{R}$-espace vectoriel sous-jacent à $V^\vee$ avec $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ via l'isomorphisme canonique $l \longmapsto \mathrm{Im}\, l$. On sait que la biextension de Poincaré $\mathcal{P}$ est définie par la forme hermitienne

$$\begin{aligned} H : \big(V \times V^\vee\big) \times (V \times V^\vee) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (v_1, l_1), (v_2, l_2) &\longmapsto l_1(v_2) + \overline{l_2(v_1)}, \end{aligned}$$

et par le semi-caractère

$$\begin{aligned} \chi : \Lambda \times \Lambda^\vee &\longrightarrow \mathbb{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \\ (\lambda, l) &\longmapsto \mathrm{e}^{2i\pi \mathrm{Im}\, l(\lambda)}. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

La dualité entre A et $A^\vee$ décrite par la biextension $\mathcal{P}$, équivaut à la donnée d'une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire suivante

$$\begin{aligned} <\,,\,>: V \times V^\vee &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, l) &\longmapsto < v, l >= \mathrm{Im}\, l(v), \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

qui est non dégénérée et que l'on appellera accouplement de Weil.

La première classe de Chern de $\mathcal{P}$, $c_1(\mathcal{P})$, s'identifie avec la forme hermitienne H ou avec la forme alternée à valeurs réelles $E = \mathrm{Im} H$, qui grâce à (3.3.2) peut s'expliciter ainsi

$$\begin{aligned} E : (V \times V^\vee) \times (V \times V^\vee) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, l_1), (v_2, l_2) &\longmapsto < v_2, l_1 > - < v_1, l_2 > . \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

D'après [D75] (10.2.3), $\mathcal{P}$ définit en réalisation de Hodge un accouplement

$$<\,,\,>_{\mathbb{Z}}: \mathrm{H}_1(A, \mathbb{Z}) \times \mathrm{H}_1(A^\vee, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}(1)$$

que l'on appelle toujours accouplement de Weil, car si on étend les scalaires à $\mathbb{R}$ et on identifie $\mathbb{Z}(1)$ à $\mathbb{Z}$ en envoyant $2i\pi$ sur 1, l'accouplement $<,>_{\mathbb{Z}}$: $\mathrm{H}_1(A,\mathbb{Z}) \times \mathrm{H}_1(A^\vee,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}(1)$ coïncide avec l'accouplement $<,>$: $V \times V^\vee \longrightarrow \mathbb{R}$, i.e.

$$<,>_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} = <,> . \tag{3.3.4}$$

Si $B = V_B/\Lambda_B$ désigne une sous-variété abélienne de $A \times A^\vee$ qui contient un multiple assez grand de $v \times v^\vee(1)$, d'après 2.3 on sait que en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $W_{-1}(P) \subseteq W_{-2}(P) \times \mathrm{H}_1(B,\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}(1) \times \mathrm{H}_1(A,\mathbb{Z}) \times \mathrm{H}_1(A^\vee,\mathbb{Z})$ et que le commutateur de deux éléments $g_1 = (s,x,x^\vee)$ et $g_2 = (t,y,y^\vee)$ de $W_{-1}(P)$ s'explicite ainsi:

$$\begin{aligned} &[g_1,g_2] = \\ &= (s,x,x^\vee)\cdot(t,y,y^\vee) - (t,y,y^\vee)\cdot(s,x,x^\vee) \\ &= (s+t- <x,y^\vee>_{\mathbb{Q}}, x+y, x^\vee+y^\vee) - (t+s- <y,x^\vee>_{\mathbb{Q}}, y+x, y^\vee+x^\vee) \\ &= (- <x,y^\vee>_{\mathbb{Q}} + <y,x^\vee>_{\mathbb{Q}}, 0, 0), \end{aligned}$$

où $<,>_{\mathbb{Q}}$ désigne l'accouplement obtenu à partir de $<,>_{\mathbb{Z}}$ par extension des scalaires à $\mathbb{Q}$. Mais alors on a que

$$\begin{gathered} W_{-1}(P) \ \text{ abélien} \\ \Longleftrightarrow \\ <x,y^\vee>_{\mathbb{Q}} - <y,x^\vee>_{\mathbb{Q}} = 0 \qquad \forall\ (x,x^\vee),(y,y^\vee) \in \mathrm{H}_1(B,\mathbb{Q}). \end{gathered} \tag{3.3.5}$$

(A) Supposons que $W_{-1}(P)$ est abélien: D'après (3.3.5), (3.3.4) et (3.3.3), on obtient que

$$H_{|V_B \times V_B} = c_1(\mathcal{P}_{|B}) = E_{|V_B \times V_B} = 0.$$

De plus si on considère un cas particulier de (3.3.5) (il suffit de prendre les couples $(x,0)$ et $(0,x^\vee)$ de $\mathrm{H}_1(B,\mathbb{Q})$), on trouve que

$$<x,x^\vee>_{\mathbb{Q}} = 0 \qquad \forall\ (x,x^\vee) \in \mathrm{H}_1(B,\mathbb{Q}),$$

et donc d'après (3.3.4), (3.3.2) et (3.3.1) on obtient que

$$\chi_{|\Lambda_B} = 1.$$

Puisque $H_{|V_B \times V_B} = 0$ et $\chi_{|\Lambda_B} = 1$, on peut conclure que la restriction de la biextension de Poincaré à B est triviale.

(B) Supposons que M est quasi-isotrope: Par définition, la sous-variété abélienne B de $A \times A^\vee$ est isotrope et donc $E_{|V_B \times V_B} = c_1(\mathcal{P}_{|B}) = 0$, i.e. d'après (3.3.3)

$$<v_2,l_1> - <v_1,l_2> = 0 \qquad \forall\ (v_1,l_1),(v_2,l_2) \in V_B,$$

Mais alors grâce à (3.3.4) et (3.3.5), on obtient que $W_{-1}(P)$ est abélien.

(2) Dans [Be98] théorème 1, D. Bertrand a démontré que si M est défini sur $\mathbb{C}$, l'isotropie implique la déficience. Mais pour vérifier que la déficience implique l'isotropie, il se restreint à un corps de nombres car il utilise la ℓ-divisibilité des points $u(X)$ de $G(\mathbb{C})$. On va donner une preuve pour les 1-motifs définis sur $\mathbb{C}$. En fait, on va démontrer que si M n'est pas isotrope, alors il n'est pas déficient.
Si M n'est pas quasi-isotrope, alors d'après **(1)** il n'est pas quasi-déficient et donc en particulier il n'est pas déficient.
Si M est quasi-isotrope, il existe une sous-variété abélienne isotrope maximale de $A \times A^\vee$, qu'on notera B, qui contient un multiple assez grand b de $(v(1), v^\vee(1))$. Si on pose $\mathbb{B} = B \times B^\vee$, d'après 3.2, on a une isogénie $S : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$, qui induit l'inclusion naturelle de B dans $\mathbb{A}$ et telle que $S^*\mathcal{P}$ est un multiple de la biextension de Poincaré de $(B, B^\vee)$. D'après 2.8, on peut associer à M un 1-motif $\mathbf{M} = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{A}, \mathbb{A}^\vee, \mathbf{V}, \mathbf{V}^\vee, \psi_{\mathbf{M}})$ autodual et lui aussi quasi-déficient:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & \mathbb{Z} & & & & & & \\ & & & & \mathbf{U}\downarrow & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & \mathbf{G} & \longrightarrow & \mathbb{A} & \longrightarrow & 0 & \Rightarrow & (v^\vee(1), v(1)) \in \mathbb{A}^\vee \\ & & & & \mathbf{S} & \longmapsto & (v(1), v^\vee(1)). & & & & \end{array}$$

Grâce à l'isogénie $S : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$, on a que $\mathbf{M}$ est isogène au 1-motif $\overline{\mathbf{M}}$ suivant

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & \mathbb{Z} & & & & & & \\ & & & & \overline{\mathbf{U}}\downarrow & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & B \times G_b & \longrightarrow & \mathbb{B} & \longrightarrow & 0 & \Rightarrow & (0, b) \in \mathbb{B}^\vee \\ & & & & \overline{\mathbf{U}}(1) & \longmapsto & (b, 0), & & & & \end{array}$$

où G_b est l'extension de $B^\vee$ par $\mathbb{G}_m$ parametrisée par le point b de B.
Puisqu'on travaille modulo isogènies et que B est isotrope, on peut supposer que $\mathcal{P}_{|B}$ admet un scindage canonique qu'on notera ξ. Puisque M n'est pas isotrope, on a que $(v \times v^\vee)^*\xi \neq \psi_M$, et donc $\psi_M(1,1) = (\alpha, (1,1)) \in (\mathcal{P}_{|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}})_{(1,1)}$ avec $\alpha \in \mathbb{G}_m - \mu_\infty$, où μ_∞ est l'ensemble des racines de l'unité. Mais alors, puisque $S^*\mathcal{P}$ est un multiple de la biextension de Poincaré de $(B, B^\vee)$, on obtient que $\overline{\mathbf{U}}(1) = (b, \overline{\alpha})$ avec $\overline{\alpha} \in \mathbb{G}_m - \mu_\infty$.
Considérons maintenant les deux 1-motifs suivants

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{M}}_1 &:= \overline{\mathbf{M}}/[0 \longrightarrow B] = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u_1} G_b] \qquad \text{avec} \quad u_1(1) = \overline{\alpha} \\ \overline{\mathbf{M}}_2 &:= \overline{\mathbf{M}}/[0 \longrightarrow G_b] = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u_2} B] \qquad \text{avec} \quad u_2(1) = b. \end{aligned}$$

Si $\mathrm{d}_\mathbb{Z} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ indique l'homomorphisme diagonal de $\mathbb{Z}$, on a que

$$\big(\overline{\mathbf{M}}_1 \oplus \overline{\mathbf{M}}_2\big)/[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mathrm{d}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}) \longrightarrow 0] = [\mathrm{d}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}) \stackrel{u_1 \times u_2}{\longrightarrow} B \times G_b] \cong \overline{\mathbf{M}}.$$

Par conséquent les 1-motifs $\overline{\mathbf{M}}_1 \oplus \overline{\mathbf{M}}_2$ et $\overline{\mathbf{M}}$ engendrent la même sous-catégorie tannakienne neutre de $\mathcal{SHM}_\mathbb{Q}$, et donc ils ont le même groupe de Mumford-Tate. Mais alors, puisque $\mathbf{M}$ est isogène à $\overline{\mathbf{M}}$, on peut conclure que

$$MT(\overline{\mathbf{M}}_1 \oplus \overline{\mathbf{M}}_2) = MT(\mathbf{M}).$$

Remarquons que $\overline{\mathbf{M}}_1^{\vee} = [\mathbb{Z} \stackrel{(u_1)^{\vee}}{\longrightarrow} \mathbb{G}_m \times B]$ avec $(u_1)^{\vee}(1) = (\overline{\alpha}, b)$. Donc clairement $MT(\overline{\mathbf{M}}_1 \oplus \overline{\mathbf{M}}_2) = MT(\overline{\mathbf{M}}_1^{\vee})$, ce qui implique

$$MT(\mathbf{M}) = MT(\overline{\mathbf{M}}_1^{\vee}). \tag{3.3.6}$$

Maintenant puisque $\overline{\alpha}$ n'est pas une racine de l'unité, grâce à 2.2, on trouve que

$$W_{-2}\big(MT(\overline{\mathbf{M}}_1^{\vee})\big) \cong \mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m, \mathbb{Q}) \neq 0,$$

et donc d'après (3.3.6) $W_{-2}\big(MT(\mathbf{M})\big) \neq 0$, i.e. $\mathbf{M}$ n'est pas déficient. Mais alors grâce à 2.8 on peut conclure que M n'est pas déficient. $\diamondsuit$

3.4. **Théorème**
Soit $M = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, A, A^{\vee}, v, v^{\vee}, \psi)$ un 1-motif défini sur $\mathbb{C}$. Alors,
(1) M est quasi-déficient si et seulement si il est trivialement quasi-déficient.
(2) M est déficient si et seulement si il est trivialement déficient.

PREUVE: Soit $M = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, A, A^{\vee}, v, v^{\vee}, \psi)$ un 1-motif quasi-déficient. D'après 3.3, il existe alors une sous-variété abélienne isotrope maximale de $A \times A^{\vee}$, qu'on notera B, qui contient un multiple assez grand b de $(v(1), v^{\vee}(1))$. Si on pose $\mathbb{B} = B \times B^{\vee}$, grâce à 3.2, on a une isogénie $S : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$, qui induit l'inclusion naturelle de B dans $\mathbb{A}$ et telle que $S^*\mathcal{P}$ est un multiple de la biextension de Poincaré de $(B, B^{\vee})$. D'après 2.8, on peut associer à M un 1-motif $\mathbf{M} = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{A}, \mathbb{A}^{\vee}, \mathbf{V}, \mathbf{V}^{\vee}, \psi_{\mathbf{M}})$ autodual et lui aussi quasi-déficient:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & \mathbb{Z} & & & & & & \\ & & & & \mathbf{U}\downarrow & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & \mathbf{G} & \longrightarrow & \mathbb{A} & \longrightarrow & 0 & \Rightarrow & (v^{\vee}(1), v(1)) \in \mathbb{A}^{\vee} \\ & & & & \mathbf{S} & \longmapsto & (v(1), v^{\vee}(1)). & & & & \end{array}$$

Grâce à l'isogénie $S : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$, on a que $\mathbf{M}$ est isogène au 1-motif $\overline{\mathbf{M}}$ suivant

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & \mathbb{Z} & & & & & & \\ & & & & \overline{\mathbf{U}}\downarrow & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & B \times G_b & \longrightarrow & \mathbb{B} & \longrightarrow & 0 & \Rightarrow & (0, b) \in \mathbb{B}^{\vee} \\ & & & & \overline{\mathbf{U}}(1) & \longmapsto & (b, 0). & & & & \end{array}$$

où G_b est l'extension de $B^{\vee}$ par $\mathbb{G}_m$ parametrisée par le point b de B.
Puisqu'on travaille modulo isogènies et que B est isotrope, on peut supposer que $\mathcal{P}_{|B}$ admet un scindage canonique qu'on notera ξ.
(1) Supposons M quasi-déficient mais pas déficient. On a alors que $(v \times v^{\vee})^*\xi \neq \psi_M$, et donc $\psi_M(1,1) = (\alpha, (1,1)) \in (\mathcal{P}_{|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}})_{(1,1)}$ avec $\alpha \in \mathbb{G}_m - \mu_\infty$, où μ_∞ est l'ensemble des racines de l'unité. Mais alors, puisque $S^*\mathcal{P}$ est un multiple de la biextension de Poincaré de $(B, B^{\vee})$, on obtient que $\overline{\mathbf{U}}(1) = (b, \overline{\alpha})$ avec $\overline{\alpha} \in \mathbb{G}_m - \mu_\infty$.

Considérons maintenant les deux 1-motifs suivants

$$\overline{\mathbf{M}}_1 := \overline{\mathbf{M}}/[0 \longrightarrow B] = [\mathbb{Z} \stackrel{u_1}{\longrightarrow} G_b] \qquad \text{avec} \quad u_1(1) = \overline{\alpha}$$
$$\overline{\mathbf{M}}_2 := \overline{\mathbf{M}}/[0 \longrightarrow G_b] = [\mathbb{Z} \stackrel{u_2}{\longrightarrow} B] \qquad \text{avec} \quad u_2(1) = b.$$

Si $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ indique l'homomorphisme diagonal de $\mathbb{Z}$, on a que

$$\big(\overline{\mathbf{M}}_1 \oplus \overline{\mathbf{M}}_2\big)/[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \longrightarrow 0] = [\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \stackrel{u_1 \times u_2}{\longrightarrow} B \times G_b] \cong \overline{\mathbf{M}}.$$

Par conséquent les 1-motifs $\overline{\mathbf{M}}_1 \oplus \overline{\mathbf{M}}_2$ et $\overline{\mathbf{M}}$ engendrent la même sous-catégorie tannakienne neutre de $\mathcal{SHM}_{\mathbb{Q}}$, et donc ils ont le même groupe de Mumford-Tate. Mais alors, puisque $\mathbf{M}$ est isogène à $\overline{\mathbf{M}}$, on peut conclure que

$$MT(\overline{\mathbf{M}}_1 \oplus \overline{\mathbf{M}}_2) = MT(\mathbf{M}).$$

Remarquons que $\overline{\mathbf{M}}_1^{\vee} = [\mathbb{Z} \stackrel{(u_1)^{\vee}}{\longrightarrow} \mathbb{G}_m \times B]$ avec $(u_1)^{\vee}(1) = (\overline{\alpha}, b)$. Donc clairement $MT(\overline{\mathbf{M}}_1 \oplus \overline{\mathbf{M}}_2) = MT(\overline{\mathbf{M}}_1^{\vee})$, ce qui implique $MT(\mathbf{M}) = MT(\overline{\mathbf{M}}_1^{\vee})$. Mais alors grâce à 2.8 on a que

$$MT(M) = MT(\overline{\mathbf{M}}_1^{\vee}).$$

Or $W_{-1}\big(MT(\overline{\mathbf{M}}_1^{\vee})\big) = U^{(4)}\big(MT(\overline{\mathbf{M}}_1^{\vee})\big)$ et donc on peut conclure que M est tri;-vialement quasi-déficient.

(2) Supposons M déficient. On a alors que $(v \times v^{\vee})^* \xi = \psi_M$, et donc $\psi_M(1,1) = (\alpha, (1,1)) \in (\mathcal{P}_{|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}})_{(1,1)}$ avec $\alpha \in \mu_\infty$, où μ_∞ est l'ensemble des racines de l'unité. Mais alors, puisque $S^*\mathcal{P}$ est un multiple de la biextension de Poincaré de $(B, B^{\vee})$, on obtient que $\overline{\mathbf{U}}(1) = (b, \overline{\alpha})$ avec $\overline{\alpha} \in \mu_\infty$. Puisqu'on travaille modulo isogènies on peut supposer que $\overline{\mathbf{U}}(1) = (b, 0)$, et donc

$$\overline{\mathbf{M}} = [\mathbb{Z} \stackrel{u'}{\longrightarrow} B] \oplus [0 \stackrel{0}{\longrightarrow} G_b]$$

où $u'(1) = b$. Mais alors, puisque $[0 \stackrel{0}{\longrightarrow} G_b]^{\vee} = [\mathbb{Z} \stackrel{u'}{\longrightarrow} B]$ et $\overline{\mathbf{M}}$ est isogène à $\mathbf{M}$, d'après 2.8 on a que

$$MT(M) = MT([\mathbb{Z} \stackrel{u'}{\longrightarrow} B]).$$

Or $W_{-1}\big(MT([\mathbb{Z} \stackrel{u'}{\longrightarrow} B])\big) = U^{(4)}\big(MT([\mathbb{Z} \stackrel{u'}{\longrightarrow} B])\big)$ et $W_{-2}\big(MT([\mathbb{Z} \stackrel{u'}{\longrightarrow} B])\big) = 0$, et donc on peut conclure que M est trivialement déficient. $\diamondsuit$

3.5. Remarque:
On ne peut pas utiliser 2.7 pour généraliser 3.3 et 3.4 aux 1-motifs $M = (X, X^{\vee}, A, A^{\vee}, v, v^{\vee}, \psi)$ tels que $\operatorname{rang} X$ et $\operatorname{rang} X^{\vee}$ soient supérieurs à 1. En effet, avec les notations de 2.6, le lemme 2.7 nous dit que $MT(M) = MT(\oplus_{i=1}^{\mathrm{rang} X} \oplus_{j=1}^{\mathrm{rang} X^{\vee}} M_{ij})$. Il est clair que pour chaque i et j, $< T(M_{ij}) >^{\otimes}$ est une sous-catégorie tannakienne neutre de $< T(M) >^{\otimes}$ et donc d'après 1.5 on a des surjections

$$MT(M) = MT(\oplus_{i=1}^{\mathrm{rang} X} \oplus_{j=1}^{\mathrm{rang} X^{\vee}} M_{ij}) \stackrel{p_{ij}}{\longrightarrow} MT(M_{ij})$$

qui fournissent la surjection suivante

$$MT(M) \stackrel{\oplus p_{ij}}{\longrightarrow} \oplus_{i=1}^{\mathrm{rang} X} \oplus_{j=1}^{\mathrm{rang} X^{\vee}} MT(M_{ij}).$$

Malheureusement cet homomorphisme n'est pas injectif et donc on peut conclure seulement que

$$\begin{aligned} M \text{ déficient } &\Longrightarrow M_{ij} \text{ déficient } \ \forall\, i,j \\ &\stackrel{3.3}{\Longleftrightarrow} M_{ij} \text{ isotrope } \ \forall\, i,j \\ &\Longleftrightarrow M \text{ isotrope}, \end{aligned}$$

i.e. M déficient implique M isotrope mais pas le viceversa. Pour des raison analogues, 3.3 (2) et 3.4 ne peuvent pas se généraliser en utilisant 2.7 et pour le moment l'auteur ne connait aucunne méthode pour généraliser ces théoremes.

Chapitre 4

Périodes et transcendance

4.1. La conjecture des périodes généralisée.

4.1.1. Soient $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$, et K un sous-corps algébriquement fermé de $\mathbb{C}$ non nécessairement algébrique sur $\mathbb{Q}$.
Si X est une variété algébrique projective lisse définie sur K, on peut lui associer

- sa cohomologie de de Rham algébrique $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(X)$, qui est une K-algèbre graduée anticommutative;

- sa cohomologie singulière rationnelle $\mathrm{H}^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$, à partir de laquelle on obtient la K-algèbre graduée anticommutative $\mathrm{H}^*(X(\mathbb{C}), K) = \mathrm{H}^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} K$.

D'après [G66], l'intégration des formes différentielles fournit un isomorphisme canonique de $\mathbb{C}$-algèbres graduées $\mathfrak{P} : \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(X) \otimes_K \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{H}^*(X(\mathbb{C}), K) \otimes_K \mathbb{C}$.
On appelle *matrice des périodes de* X la matrice de cet isomorphisme relative à des K-bases de $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(X)$ et $\mathrm{H}^*(X(\mathbb{C}), K)$ quelconques fixées. Le corps $K(\text{périodes}(X))$ engendré sur K par les coefficients d'une telle matrice, est indépendant du choix des K-bases.
A X on peut associer aussi son groupe de Galois motivique $G_{\mathrm{mot}}(X)$, i.e. le sous-groupe de $\left(\prod_i \mathbf{GL}(\mathrm{H}^i(X_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}))\right) \times \mathbf{GL}(\mathbb{Q}(1))$ qui fixe les classes fondamentales des cycles algébriques sur les puissances de X (via la formule de Künneth).
Dans [G66] note 10, Grothendieck fait allusion à une conjecture générale de transcendance des périodes de X, mais c'est seulement dans [L66], note historique p. 43, que cette conjecture apparaît de manière explicite pour la première fois. Cette conjecture peut aussi se formuler sous la forme plus explicite suivante (cf. [A97]):

Conjecture des périodes
Si X est une variété algébrique projective lisse définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, alors

(CP?) $$\deg.\mathrm{transc}_{\overline{\mathbb{Q}}}\overline{\mathbb{Q}}(\text{périodes}(X)) = \dim_{\mathbb{Q}} G_{\mathrm{mot}}(X).$$

4.1.2. Dans [A97], André propose la généralisation suivante de cette conjecture aux variétés algébriques projectives lisses définies sur un sous-corps K algébriquement fermé de $\mathbb{C}$ non nécessairement algébrique sur $\mathbb{Q}$:

Conjecture des périodes généralisée
Si X est une variété algébrique projective lisse définie sur K, alors

$$(?) \qquad \text{deg.transc}_{\overline{\mathbb{Q}}} K(\text{périodes}(X)) \geq \dim_{\mathbb{Q}} G_{\text{mot}}(X).$$

4.1.3. Les conjectures précédentes devraient s'étendre aux motifs mixtes. Toutefois il y a un problème de définition du groupe de Galois motivique. Nous allons nous limiter aux 1-motifs, et remplacer, faute de mieux, le groupe de Galois motivique par le groupe de Mumford-Tate, suivant [A97]. Ceci est justifié en partie par le travail de J.-L. Brylinski [B83], qui démontre dans ce cadre que les cycles de Hodge ont des composantes De Rham définies sur K (ce qui entraîne l'inegalité $\text{deg.transc}_K K(\text{périodes}(M)) \leq \dim_{\mathbb{Q}} MT(M)$).
Un 1-motif M sur K consiste en

(a) un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini X, une variété abélienne A, définie sur K, et un tore T, défini sur K,

(b) une extension G de A par T, définie sur K,

(c) un homomorphisme $u : X \longrightarrow G(K)$.

On peut identifier le 1-motif $M = (X, A, T, G, u)$ à un complexe de schémas en groupes abéliens, concentré en degrés 0 et 1: $M = [X \xrightarrow{u} G]$.
On désigne par $M_{\mathbb{C}}$ le 1-motif sur $\mathbb{C}$ $(X, A_{\mathbb{C}}, T_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{C}}, u)$. D'après [D75] (10.1.3), (10.1.7) et (10.1.8), on peut associer à M

- sa réalisation de de Rham $T_{\text{dR}}(M)$, qui est un K-espace vectoriel de dimension finie,

- sa réalisation de Hodge $T_{\text{H}}(M_{\mathbb{C}})$, qui est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie,

et ces réalisations sont liées entre elles par un isomorphisme canonique de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$\mathfrak{P} : \text{H}_{\text{dR}}(M) \otimes_K \mathbb{C} \longrightarrow \text{H}_{\text{H}}(M_{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

où $\text{H}_{\text{dR}}(M) = \text{Hom}(T_{\text{dR}}(M), K)$ et $\text{H}_{\text{H}}(M_{\mathbb{C}}) = \text{Hom}(T_{\text{H}}(M_{\mathbb{C}}), \mathbb{Q})$.
On appelle *matrice des périodes de M* la matrice de l'isomorphisme $\mathfrak{P}$ relative à des K-bases de $\text{H}_{\text{dR}}(M)$ et $\text{H}_{\text{H}}(M_{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathbb{Q}} K$ quelconques fixées. Le corps $K(\text{périodes}(M))$ engendré sur K par les coefficients d'une telle matrice, est indépendant du choix des K-bases.
Avec ces définitions, la conjecture des périodes pour les 1-motifs s'énonce ainsi (cf. [A97] 1.8) :

Conjecture des périodes (pour les 1-motifs)
Si M est un 1-motif défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, alors

$$(\text{CPm?}) \qquad \text{deg.transc}_{\overline{\mathbb{Q}}} \overline{\mathbb{Q}}(\text{périodes}(M)) = \dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}}).$$

Dans [A97] 2, André généralise (CPm?) aux 1-motifs définis sur un sous-corps de $\mathbb{C}$ qui n'est pas nécessairement algébrique, de la façon suivante:

Conjecture des périodes généralisée (pour les 1-motifs)
Si M est un 1-motif défini sur K (sous-corps de $\mathbb{C}$ non nécessairement algébrique), alors

$$\text{(CPG?)} \qquad \text{deg.transc}_{\mathbb{Q}} K(\text{périodes}(M)) \geq \dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}}).$$

4.1.4. Remarques:
(1) D'après [A97] 2.1, on a toujours l'inégalité

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}} K(\text{périodes}(M)) \leq \dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}}) + \text{deg.transc}_{\mathbb{Q}} K$$

et donc si K est algébrique, (CPG?) se réduit à (CPm?).
(2) Puisque deux 1-motifs isogènes ont les mêmes périodes et le même groupe de Mumford-Tate, comme auparavant on va se placer dans la sous-catégorie tannakienne neutre de $\mathcal{SHM}_{\mathbb{Q}}$ engendrée par les 1-motifs à isogénie près.

4.2. Conjectures exponentielles

Conjecture de Schanuel (cf [L66] note historique p. 30)
Si $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors

$$\text{(I?)} \qquad \text{deg.transc}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n, e^{x_1}, \ldots e^{x_n}) \geq n.$$

4.2.1. **Théorème**
Pour les 1-motifs sans partie abélienne, (CPG?) est équivalente à la conjecture de Schanuel.

4.2.2. Remarque:
J. Ax a conjecturé *une version formelle de la conjecture de Schanuel*:
Si $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{C}[[t_1, \ldots, t_m]]$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors

$$\text{(?)} \qquad \text{deg.transc}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(y_1, \ldots, y_n, e^{y_1}, \ldots e^{y_n}) \geq n + \text{rang} \left(\frac{\partial y_i}{\partial t_j} \right)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}.$$

Il est clair que cette version formelle implique la conjecture de Schanuel: il suffit de prendre $y_i \in \mathbb{C}$ pour $i = 1, \ldots, n$. Mais dans [Ax 71], Ax démontre qu'en réalité cette version formelle de la conjecture de Schanuel est équivalente à la conjecture de Schanuel et il vérifie un cas particulier de cette version formelle.

Signalons aussi que R. Coleman a prouvé, en s'inspirant de [Ax71], une version formelle de la conjecture de Schanuel dans le cas spécial des séries formelles à coefficients algébriques. Plus précisément, dans [C80] Coleman démontre le théorème suivant:
Soient $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de $\overline{\mathbb{Q}}$ et E le corps des fractions de $\mathcal{O}[[t_1, \ldots, t_m]]$. Si $y_1, \ldots, y_n \in \overline{\mathbb{Q}}[[t_1, \ldots, t_m]]$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors

$$\text{deg.transc}_E \, E(y_1, \ldots, y_n, e^{y_1}, \ldots e^{y_n}) \geq n.$$

4.2.3. Exemple:
Soit $q \in \mathbb{C}^*$ et posons $K = \overline{\mathbb{Q}(q)}$. Considérons le 1-motif $M = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m]$ défini sur K, avec $u(1) = q \in \mathbb{G}_m(K)$. La matrice des périodes dans les bases naturelles de $T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ et de $T_{\mathrm{dR}}(\mathrm{M}) \otimes_{\mathrm{K}} \mathbb{C}$, est $\begin{pmatrix} 1 & \log q \\ 0 & 2i\pi \end{pmatrix}$. De plus on sait que $MT(M_{\mathbb{C}})$ est un groupe de matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix}$, de dimension 1 ou 2 selon que q est une racine de l'unité ou non. Donc, d'après (CPG?)

$$\text{(4.2.3.1?)} \qquad \text{deg.transc}_{\mathbb{Q}} \, \mathrm{K}(\log q, 2i\pi) \geq \begin{cases} 2 & \text{si } q \notin \mu_\infty \; ; \\ 1 & \text{si } q \in \mu_\infty. \end{cases}$$

D'autre part, posons $x_1 = \log q$ et $x_2 = 2i\pi$. La conjecture de Schanuel, appliquée à x_1 et x_2, nous dit que si $\log q$ et $2i\pi$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants (i.e. si q n'est pas une racine de l'unité), alors

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}} \, \mathbb{Q}(\log q, 2i\pi, q, 1) \geq 2.$$

Par conséquent, dans le cas où q n'est pas une racine de l'unité, on retrouve (4.2.3.1?).

4.3. Conjectures elliptiques

4.3.1. Pour énoncer les conjectures elliptiques, on a besoin de quelques notations. Rappelons que K un sous-corps algébriquement fermé du corps $\mathbb{C}$. Si $\mathcal{E}$ est une courbe elliptique, définie sur K, on notera

- $\{\omega, \eta\}$ une K-base de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E})$, où $\omega = \omega(\mathcal{E})$ est une forme différentielle de première espèce et $\eta = \eta(\mathcal{E})$ une de deuxième espèce (si $\mathcal{E}$ est de type CM, on impose à η d'être propre pour l'action de la multiplication complexe);
- $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ une base de $\mathrm{H}_1(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$;
- $\omega_1 = \omega_1(\mathcal{E}) := \int_{\gamma_1} \omega$, $\omega_2 = \omega_2(\mathcal{E}) := \int_{\gamma_2} \omega$ (resp. $\eta_1 = \eta_1(\mathcal{E}) := \int_{\gamma_1} \eta$, $\eta_2 = \eta_2(\mathcal{E}) := \int_{\gamma_2} \eta$) ses périodes (resp. ses quasi-périodes);
- $\mathrm{Lie}(\mathcal{E})$ la K-algèbre de Lie de $\mathcal{E}$;
- $exp_{\mathcal{E}} : \mathrm{Lie}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}) \cong \mathrm{Lie}(\mathcal{E}) \otimes_K \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{C})$ son revêtement universel;
- $p = p(\mathcal{E}, P) := \int_0^P \omega$ (resp. $d = d(\mathcal{E}, P) := \int_0^P \eta$) une intégrale elliptique de première (resp. de deuxième) espèce associée à un point P de $\mathcal{E}(\mathbb{C})$;

- $j(\mathcal{E})$ son invariant modulaire;
- $k = \mathrm{End}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

De plus, désignons par μ_∞ l'ensemble des racines de l'unité, et si L est un sous-corps de $\mathbb{C}$, notons $\overline{L}$ sa clôture algébrique dans $\mathbb{C}$.
Remarquons que $\mathrm{Lie}(\mathcal{E})$ est un K-espace vectoriel de dimension 1; on prend comme générateur $\omega^\vee$ (base dual de ω). Cela indentifie $\mathrm{Lie}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}})$ à $\mathbb{C}$ et, via $exp_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E}(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}/\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. De plus, $exp_{\mathcal{E}}$ admet des inverses multiformes, dont les valeurs sont bien déterminées modulo l'addition d'un élément de $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$.

Analogue elliptique de la conjecture de Schanuel
Soient $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ des courbes elliptiques, définies sur K et deux à deux non isogènes. Supposons que $\mathcal{E}_j$ ne soit pas de type CM pour $j = 1, \ldots, n_1$ et soit de type CM pour $j = n_1 + 1, \ldots, n$. Si $x_{1j}, \ldots, x_{r_j j}$ sont des points de $\mathrm{Lie}((\mathcal{E}_j)_{\mathbb{C}})$, alors

$$\text{(II.1?)} \qquad \mathrm{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(j(\mathcal{E}_j), x_{ij}, exp_{\mathcal{E}_j}(x_{ij}))_{\substack{j=1,\ldots,n \\ i=1,\ldots,r_j+2}} \geq \sum_{j=1}^{n_1} \dim_{\mathbb{Q}} I_1(\mathcal{E}_j) + \sum_{j=n_1+1}^{n} \dim_{k_j} I_1(\mathcal{E}_j) + 2n_1 + n_2,$$

où pour chaque j, $x_{r_j+1,j} = \omega_{1j}$, $x_{r_j+2,j} = \omega_{2j}$, pour $j = 1, \ldots, n_1$, $I_1(\mathcal{E}_j)$ est le sous $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}/\mathbb{Q}\{\omega_{1j}, \omega_{2j}\}$ engendré par les $\{x_{ij}\}_{i=1,\ldots,r_j}$, et enfin pour $j = n_1 + 1, \ldots, n$, $I_1(\mathcal{E}_j)$ est le sous k_j-espace vectoriel de $\mathbb{C}/k_j\{\omega_{1j}, \omega_{2j}\}$ engendré par les $\{x_{ij}\}_{i=1,\ldots,r_j}$.

Conjecture elliptique simple
Soient $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ des courbes elliptiques, définies sur K et deux à deux non isogènes. Alors

$$\text{(II.2?)} \qquad \mathrm{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(j(\mathcal{E}_j), \omega_{1j}, \omega_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j})_{j=1,\ldots,n} \geq 3n_1 + n_2 + 1,$$

où n_1 est le nombre de courbes elliptiques pas de type CM et $n_2 = n - n_1$.

Conjecture elliptique pas de type CM
Soient $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ des courbes elliptiques, définies sur K, deux à deux non isogènes et pas de type CM. Si $P_{1j}, \ldots, P_{r_j j}$ sont des points de $\mathcal{E}_j(\mathbb{C})$, alors

$$\text{(II.3?)} \qquad \mathrm{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(j(\mathcal{E}_j), \omega_{1j}, \omega_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j}, P_{ij}, p_{ij}, d_{ij})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ i=1,\ldots,r_j}} \geq \sum_{j=1}^{n} \dim_{\mathbb{Q}} I(\mathcal{E}_j) + 3n + 1,$$

où $I(\mathcal{E}_j)$ est le sous $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}^2/\mathbb{Q}\binom{\omega_{1j}}{\eta_{1j}} + \mathbb{Q}\binom{\omega_{2j}}{\eta_{2j}}$ engendré par les $\{\binom{p_{ij}}{d_{ij}}\}_{i=1,\ldots,r_j}$.

Conjecture elliptique de type CM
Soient $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ des courbes elliptiques, définies sur K, deux à deux non isogènes et de type CM. Si $P_{1j}, \ldots, P_{r_j j}$ sont des points de $\mathcal{E}_j(\mathbb{C})$, alors

(II.4?)

$$\operatorname{deg.transc}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\omega_{1j}, \omega_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j}, P_{ij}, p_{ij}, d_{ij})_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,r_j}} \geq \sum_{j=1}^{n} \dim_{k_j} I(\mathcal{E}_j) + n + 1,$$

où $I(\mathcal{E}_j)$ est le sous k_j-espace vectoriel de $\mathbb{C}^2/k_j\binom{\omega_{1j}}{\eta_{1j}} + k_j\binom{\omega_{2j}}{\eta_{2j}}$ engendré par les $\{\binom{p_{ij}}{d_{ij}}\}_{i=1,\dots,r_j}$.

Conjecture elliptique générale
Soient $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ des courbes elliptiques, définies sur K et deux à deux non isogènes. Supposons que $\mathcal{E}_j$ ne soit pas de type CM pour $j = 1, \dots, n_1$ et soit de type CM pour $j = n_1 + 1, \dots, n$. Si $P_{1j}, \dots, P_{r_j j}$ sont des points de $\mathcal{E}_j(\mathbb{C})$, alors

(II.5?) $\operatorname{deg.transc}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(j(\mathcal{E}_j), \omega_{1j}, \omega_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j}, P_{ij}, p_{ij}, d_{ij})_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,r_j}} \geq$

$$\sum_{j=1}^{n_1} \dim_{\mathbb{Q}} I(\mathcal{E}_j) + \sum_{j=n_1+1}^{n} \dim_{k_j} I(\mathcal{E}_j) + 3n_1 + n_2 + 1,$$

où $n_2 = n - n_1$ et $I(\mathcal{E}_j)$ est le même que dans (II.3?) (resp. (II.4?)) pour $j = 1, \dots, n_1$ (resp. $j = n_1 + 1, \dots, n$) .

4.3.2. **Théorème**
(i) Pour les 1-motifs de la forme $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u} \prod_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j]$, où l'image de u est de torsion et les $\mathcal{E}_j$ sont des courbes elliptiques deux à deux non isogènes, (CPG?) équivaut à (II.2?).
(ii) Pour les 1-motifs de la forme $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u} \prod_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j]$, où les $\mathcal{E}_j$ sont des courbes elliptiques pas de type CM et deux à deux non isogènes, (CPG?) est équivalente à (II.3?).
(iii) Pour les 1-motifs de la forme $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u} \prod_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j]$, où les $\mathcal{E}_j$ sont des courbes elliptiques de type CM et deux à deux non isogènes, (CPG?) équivaut à (II.4?).
(iv) Pour les 1-motifs de la forme $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u} \prod_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j]$, où les $\mathcal{E}_j$ sont des courbes elliptiques deux à deux non isogènes, (CPG?) est équivalente à (II.5?).

4.3.3. Dans le cas de courbes elliptiques définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$, (II.2?) se réduit à (CP?) appliquée à un produit de courbes elliptiques:

4.3.4. **Corollaire**
Pour les variétés abéliennes, définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$, de la forme $A = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j$, où les $\mathcal{E}_j$ sont des courbes elliptiques deux à deux non isogènes, (CP?) est équivalente à (II.2?).

4.3.5. Remarques:
(1) Dans le cas d'un produit de courbes elliptiques définies sur un sous-corps algébriquement fermé de $\mathbb{C}$, la conjecture de Hodge est vraie (cf. 2.26 [Mo99]) et donc le groupe de Galois motivique coïncide avec le groupe de Mumford-Tate.

(2) La conjecture (II.5?) implique les conjectures (II.i?) pour $i = 1, \ldots, 4$.
(3) La conjecture (II.5?) implique aussi la conjecture suivante qui est l'analogue de (II.1?) pour les intégrales elliptiques de deuxième espèce:
Soient $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ des courbes elliptiques, définies sur K et deux à deux non isogènes. Supposons que $\mathcal{E}_j$ ne soit pas de type CM pour $j = 1, \ldots, n_1$ et soit de type CM pour $j = n_1 + 1, \ldots, n$. Si $P_{1j}, \ldots, P_{r_j j}$ sont des points de $\mathcal{E}_j(\mathbb{C})$, alors

$$(?) \qquad \begin{aligned} &\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(j(\mathcal{E}_j), \eta_{1j}, \eta_{2j}, P_{ij}, d_{ij})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ i=1,\ldots,r_j}} \geq \\ &\textstyle\sum_{j=1}^{n_1} \dim_{\mathbb{Q}} I_2(\mathcal{E}_j) + \sum_{j=n_1+1}^{n} \dim_{k_j} I_2(\mathcal{E}_j) + 2n_1 + n_2, \end{aligned}$$

où pour $j = 1, \ldots, n_1$, $I_2(\mathcal{E}_j)$ est le sous $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}/\mathbb{Q}\{\eta_{1j}, \eta_{2j}\}$ engendré par les $\{d_{ij}\}_{i=1,\ldots,r_j}$, et enfin pour $j = n_1 + 1, \ldots, n$, $I_2(\mathcal{E}_j)$ est le sous k_j-espace vectoriel de $\mathbb{C}/k_j\{\eta_{1j}, \eta_{2j}\}$ engendré par les $\{d_{ij}\}_{i=1,\ldots,r_j}$.

4.3.6. Exemples:
(1) Soit $\mathcal{E}$ une courbe elliptique pas de type CM et définie sur $K = \overline{\mathbb{Q}(j(\mathcal{E}))}$, où $j(\mathcal{E})$ est son invariant modulaire. Considérons le 1-motif $M = [0 \xrightarrow{0} \mathcal{E}]$, défini sur K. Notons ω_1, ω_2 (resp. η_1, η_2) les périodes (resp. les quasi-périodes) de $\mathcal{E}$.
Grâce à (CPG?) appliquée à M, ou (II.2?) appliquée à $\mathcal{E}$, on obtient la conjecture suivante

$$(?) \qquad \text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(j(\mathcal{E}), \omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2) \geq 4,$$

i.e. quatre au moins des cinq nombres $j(\mathcal{E}), \omega_1, \omega_2, \eta_1$ et η_2 sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.
En particulier, si la courbe elliptique est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, on retrouve (CP?)

$$(?) \qquad \text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2) = 4,$$

i.e. les quatre nombres $\omega_1, \omega_2, \eta_1$ et η_2 sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.
(2) Soient $\mathcal{E}$ une courbe elliptique, pas de type CM et définie sur $\overline{\mathbb{Q}(j(\mathcal{E}))}$, où $j(\mathcal{E})$ est son invariant modulaire, et P un point de $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ d'ordre infini. Posons $K = \overline{\mathbb{Q}(j(\mathcal{E}), P)}$ et considérons le 1-motif, défini sur K, $M = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathcal{E}]$ avec $u(1) = P$. Notons ω_1, ω_2 les périodes de $\mathcal{E}$ et p un logarithme elliptique de P.
Grâce à (CPG?) appliquée à M, ou (II.1?) appliquée à $\mathcal{E}$ et p, on obtient la conjecture suivante

$$(?) \qquad \text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(j(\mathcal{E}), \omega_1, \omega_2, P, p) \geq 3,$$

i.e. trois au moins des cinq nombres $j(\mathcal{E}), \omega_1, \omega_2, P$ et p sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.
(3) Soit $M = [0 \xrightarrow{0} \mathcal{E}]$ avec $\mathcal{E}$ une courbe elliptique, de type CM et définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Notons ω_1, ω_2 (resp. η_1, η_2) les périodes (resp. les quasi-périodes) de $\mathcal{E}$.
Grâce à (CPG?) appliquée à M, ou (II.2?) appliquée à $\mathcal{E}$, et grâce à [D82] 1.6, on retrouve le théorème de Chudnovsky

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2) = 2$$

i.e. deux des quatre nombres $\omega_1, \omega_2, \eta_1$ et η_2 sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.
(4) Soient $\mathcal{E}$ une courbe elliptique, de type CM et définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, et P un point de $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ d'ordre infini. Posons $K = \overline{\mathbb{Q}(P)}$ et considérons le 1-motif $M = [\mathbb{Z} \stackrel{u}{\longrightarrow} \mathcal{E}]$ défini sur K avec $u(1) = P$. Notons ω_1, ω_2 les périodes de $\mathcal{E}$ et p un logarithme elliptique de P.
Grâce à (CPG?) appliquée à M, ou (II.1?) appliquée à $\mathcal{E}$ et p, on obtient la conjecture suivante

$$(?) \qquad \text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(\omega_1, \omega_2, P, p) \geq 2,$$

i.e. deux au moins des trois nombres ω_1, P et p sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

4.4. Conjectures modulaires

Conjecture modulaire pas de type CM
Soient $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{C}^* - \mu_\infty$. Pour $j = 1, \dots, n$, notons $J(q_j) = \frac{1}{q_j} + 744 + \dots$ l'invariant modulaire de la courbe elliptique $\mathbb{C}^*/q_j^{\mathbb{Z}}$, et $\mathcal{E}_j$ un modèle sur $\overline{\mathbb{Q}(J(q_j))}$ d'une courbe elliptique pas de type CM et d'invariant $J(q_j)$. Supposons que les courbes elliptiques $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ soient deux à deux non isogènes. Alors

(III.1?)
$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(2i\pi, q_j, J(q_j), \omega_{1j}, \omega_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j})_{j=1,\dots,n} \geq \text{rang} < q_j >_j +3n + 1,$$

où $< q_j >_j$ désigne le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*/\mu_\infty$ engendré par les $\{q_j\}_{j=1,\dots,n}$.

Conjecture modulaire de type CM
Soient $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{C}^* - \mu_\infty$. Pour $j = 1, \dots, n$, notons $J(q_j) = \frac{1}{q_j} + 744 + \dots$ l'invariant modulaire de la courbe elliptique $\mathbb{C}^*/q_j^{\mathbb{Z}}$, et $\mathcal{E}_j$ un modèle sur $\overline{\mathbb{Q}}$ d'une courbe elliptique de type CM et d'invariant $J(q_j)$. Supposons que les courbes elliptiques $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ soient deux à deux non isogènes. Alors

$$(\text{III.2?}) \quad \text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(2i\pi, q_j, \omega_{1j}, \omega_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j})_{j=1,\dots,n} \geq \text{rang} < q_j >_j +n + 1,$$

où $< q_j >_j$ désigne le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*/\mu_\infty$ engendré par les $\{q_j\}_{j=1,\dots,n}$.

Conjecture modulaire
Soient $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{C}^* - \mu_\infty$. Pour $j = 1, \dots, n$, notons $J(q_j) = \frac{1}{q_j} + 744 + \dots$ l'invariant modulaire de la courbe elliptique $\mathbb{C}^*/q_j^{\mathbb{Z}}$. De plus, pour $j = 1, \dots, n_1$ soit $\mathcal{E}_j$ un modèle sur $\overline{\mathbb{Q}(J(q_j))}$ d'une courbe elliptique pas de type CM et d'invariant

$J(q_j)$, et pour $j = n_1+1,\dots,n$, soit $\mathcal{E}_j$ un modèle sur $\overline{\mathbb{Q}}$ d'une courbe elliptique de type CM et d'invariant $J(q_j)$. Supposons que les courbes elliptiques $\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_n$ soient deux à deux non isogènes. Alors

$$\text{(III.3?)} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(2i\pi, q_j, J(q_j), \omega_{1j}, \omega_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j})_{j=1,\dots,n} \geq \\ &\qquad \mathrm{rang} < q_j >_j + 3n_1 + n_2 + 1, \end{aligned}$$

où $n_2 = n - n_1$ et $< q_j >_j$ désigne le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*/\mu_\infty$ engendré par les $\{q_j\}_{j=1,\dots,n}$.

Conjecture elliptico-torique
Soient $\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_n$ des courbes elliptiques, définies sur K et deux à deux non isogènes. Supposons que $\mathcal{E}_j$ ne soit pas de type CM pour $j = 1,\dots,n_1$ et soit de type CM pour $j = n_1+1,\dots,n$. Si $q_1,\dots,q_s$ sont des points de $\mathbb{C}^*$ et $P_{1j},\dots,P_{1r_j}$ des points de $(\mathcal{E}_j)_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$, alors

$$\begin{aligned} &\mathrm{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(2i\pi, q_l, \log q_l, j(\mathcal{E}_j), \omega_{1j}, \omega_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j}, P_{ij}, p_{ij}, d_{ij})_{\substack{j=1,\dots,n \;\; i=1,\dots,r_j \\ l=1,\dots,s}} \geq \\ \text{(III.4?)} \qquad &\mathrm{rang} < q_l >_l + \textstyle\sum_{j=1}^{n_1} \dim_{\mathbb{Q}} I(\mathcal{E}_j) + \sum_{j=n_1+1}^{n} \dim_{k_j} I(\mathcal{E}_j) + 3n_1 + n_2 + 1, \end{aligned}$$

où $n_2 = n - n_1$, $< q_l >_l$ est le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*/\mu_\infty$ engendré par les $\{q_l\}_{l=1,\dots,s}$, et $I(\mathcal{E}_j)$ est le même que dans (II.3?) (resp. (II.4?)) pour $j = 1,\dots,n_1$ (resp. $j = n_1+1,\dots,n$).

4.4.1. **Théorème**
Pour les 1-motifs de la forme $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u} \prod_{j=1}^n \mathcal{E}_j \times \mathbb{G}_m^s]$, (CPG?) est équivalente à (III.4?).

4.4.2. Remarques:
(1) Le théorème 4.4.1 implique les théorèmes 4.2.1 et 4.3.2.
(2) La conjecture (III.4?) implique les conjectures (I?), (II.i?) pour $i = 1,\dots,5$, et (III.i?) pour $i = 1,\dots,3$.
(3) Pour les 1-motifs définis sur un corps de nombres, dans [B88] §4 conjecture 2, D. Bertrand énonce des conjectures du même type que les nôtres, qu'il relie à l'étude des réalisations ℓ-adique des 1-motifs.

4.4.3. Exemple:
Soient $q \in \mathbb{C}^*$ tel que $|q| < 1$, et $J(q) = \frac{1}{q} + 744 + \dots$ l'invariant modulaire de la courbe elliptique $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$. Notons $\mathcal{E}$ un modèle sur $\overline{\mathbb{Q}(J(q))}$ d'une courbe elliptique d'invariant $J(q)$ et ω_1, ω_2 (resp. η_1, η_2) les périodes (resp. les quasi-périodes) de $\mathcal{E}$. Posons $K = \overline{\mathbb{Q}(q, J(q))}$ et considérons le 1-motif défini sur K, $M = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathcal{E} \times \mathbb{G}_m]$ avec $u(1) = (0, q)$. Les périodes de M sont les $\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2, 2i\pi, \log q$ et si on suppose $\mathcal{E}$ de type CM, la dimension du groupe de Mumford-Tate de M est 3. Donc d'après (CPG?) appliquée à M, ou (III.2?) appliquée à $\mathcal{E}, \mathbb{G}_m$ et q, on obtient

$$\mathrm{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \overline{\mathbb{Q}}(q, \omega_1, 2i\pi) = 3,$$

ce qui est un théorème de Y. Nesterenko (voir [N96]).

4.5. Compléments sur les réalisations et les périodes

4.5.1. Pour expliciter la matrice des périodes de M, on doit trouver des bases pour les réalisations de Hodge et de de Rham de M. Faisons quelques rappels sur la réalisation de de Rham:
Plaçons-nous dans la catégorie des complexes de faisceaux abéliens pour la topologie fppf et considérons M comme un complexe concentré en degrés -1 et 0. Puisque $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_a) = \mathrm{Ext}^2(X[1], \mathbb{G}_a) = 0$ et $\mathrm{Ext}^1(X[1], \mathbb{G}_a) = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{G}_a)$, à partir de la suite exacte $0 \longrightarrow G \longrightarrow M \longrightarrow X[1] \longrightarrow 0$, on obtient la suite exacte

$$(4.5.1.1) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, \mathbb{G}_a) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M, \mathbb{G}_a) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_a) \longrightarrow 0.$$

De plus, puisque $\mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_a) = \mathrm{Ext}^1(T, \mathbb{G}_a) = 0$, grâce à la suite exacte $0 \longrightarrow T \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 0$ on trouve

$$(4.5.1.2) \qquad \mathrm{Ext}^1(A, \mathbb{G}_a) \cong \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_a)$$

et donc $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_a)$ est un espace vectoriel de dimension finie. Mais alors d'après (4.5.1.1) $\mathrm{Ext}^1(M, \mathbb{G}_a)$ est lui aussi un espace vectoriel de dimension finie.
D'autre part puisque $\mathrm{Hom}(X[1], \mathbb{G}_a) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_a) = 0$, toujours grâce à la suite exacte $0 \longrightarrow G \longrightarrow M \longrightarrow X[1] \longrightarrow 0$, on a que $\mathrm{Hom}(M, \mathbb{G}_a) = 0$.
D'après [MM74] chap.1 (1.7) (éténdu aux complexes de faisceaux abéliens), on peut alors conclure qu'il existe une extension universelle vectorielle de M par le groupe vectoriel $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^1(M, \mathbb{G}_a), \mathbb{G}_a)$. On note cette extension $M^\natural = [X \longrightarrow G^\natural]$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & \longrightarrow & X & = & X & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^1(M, \mathbb{G}_a), \mathbb{G}_a) & \longrightarrow & G^\natural & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Le k-espace vectoriel $T_{dR}(M) = \mathrm{Lie}(G^\natural)$ est *la réalisation de De Rham* du 1-motif M. Comme pour la réalisation de Hodge, on définit une filtration croissante $W_\bullet$ sur $T_{dR}(M)$:

$$\begin{aligned} &W_i(T_{dR}(M)) = T_{dR}(M) && \forall\, i \geq 0, \\ &W_{-1}(T_{dR}(M)) = T_{dR}(G), && \\ &W_{-2}(T_{dR}(M)) = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)^\vee \otimes k, && \\ &W_i(T_{dR}(M)) = 0 && \forall\, i \leq -3, \end{aligned}$$

où $T_{dR}(G)$ est l'algèbre de Lie de l'extension universelle vectorielle de G par le groupe vectoriel $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_a), \mathbb{G}_a)$.

Une fois choisie une base de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(M) = \mathrm{Hom}(T_{\mathrm{dR}}(M), K)$, constituée de "formes différentielles", et une base de $T_K(M_\mathbb{C}) = T_\mathrm{H}(M_\mathbb{C}) \otimes_\mathbb{Q} K$, constituée de "chemins", l'intégration de ces formes différentielles le long des ces chemins, nous fournira la matrice des périodes de M. Calculons maintenant cette matrice.

4.5.2. Considérons un 1-motif défini sur K de la forme $M = [X \xrightarrow{u} G]$, où $G = A \times T$, avec T un tore et $A = \Pi_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j$ un produit de courbes elliptiques deux à deux non isogènes, et $u = u_A \times u_T$, avec $u_A : X \longrightarrow A$ et $u_T : X \longrightarrow T$. Remarquons que l'on peut supposer $X = \mathbb{Z}^r$, pour un certain entier $r \geq 0$. De plus, puisque K est algébriquement clos, on a que $T \cong \mathbb{G}_m^s$ pour un certain entier $s \geq 0$.
Notons $\{z_i\}$ une base de $\mathbb{Z}^r$ et $\{x_l\}$ une base du groupe de caractères du tore $\mathbb{G}_m^s$, $X^*(\mathbb{G}_m^s)$. Si $\Psi : \mathbb{Z}^r \times X^*(\mathbb{G}_m^s) \to \mathbb{G}_m(K)$ est la forme bilinéaire induite par u_T, on pose $q_{il} = \Psi(z_i, x_l)$, de sorte que pour $i = 1, \ldots, r$

$$u_T(z_i) = (q_{i1}, \ldots, q_{is}) = \vec{q_i} \in \mathbb{G}_m^s(K).$$

De plus, toujours pour $i = \ldots, r$, posons

$$u_A(z_i) = (P_{i1}, \ldots, P_{in}) = \vec{P_i} \in A(K) = \Pi_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j(K)$$

avec $P_{ij} \in \mathcal{E}_j(K)$ pour $j = 1, \ldots, n$. On a donc que $u(z_i) = (u_A(z_i), u_T(z_i)) = (\vec{P_i}, \vec{q_i}) \in A(K) \times \mathbb{G}_m^s(K)$.
Pour $j = 1, \ldots, n$, désignons par $\{\omega_j, \eta_j\}$ une K-base de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}_\mathrm{j})$, où ω_j est une forme différentielle de première espèce et η_j une de deuxième espèce, et par $\{\gamma_{1j}, \gamma_{2j}\}$ une base de $\mathrm{H}_1((\mathcal{E}_\mathrm{j})_\mathbb{C}, \mathbb{Z})$. Enfin notons $\omega_{1j} = \int_{\gamma_{1j}} \omega_j$ et $\omega_{2j} = \int_{\gamma_{2j}} \omega_j$ (resp. $\eta_{1j} = \int_{\gamma_{1j}} \eta_j$ et $\eta_{2j} = \int_{\gamma_{2j}} \eta_j$) les périodes (resp. les quasi-périodes) de $\mathcal{E}_j$ pour $j = 1, \ldots, n$.

4.5.3. **Proposition**
Avec les notations de 4.5.2, une matrice des périodes du 1-motif $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u} G]$ avec $G = \Pi_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j \times \mathbb{G}_m^s$, a la forme suivante:

$$\begin{pmatrix}
 & p_{11} & d_{11} & & & p_{1n} & d_{1n} & \log q_{11} & \cdots & \log q_{1s} \\
\mathrm{Id}_{r\times r} & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & p_{r1} & d_{r1} & & & p_{rn} & d_{rn} & \log q_{r1} & \cdots & \log q_{rs} \\
 & \omega_{11} & \eta_{11} & & & & & & & \\
 & \omega_{21} & \eta_{21} & & & & & & & \\
 & & & \ddots & & & & O & & \\
 & & & & \ddots & & & & & \\
 & O & & & & \omega_{1n} & \eta_{1n} & & & \\
 & & & & & \omega_{2n} & \eta_{2n} & & & \\
 & & & & & & & & 2i\pi\mathrm{Id}_{s\times s} &
\end{pmatrix}$$

où $p_{ij} = \int_0^{P_{ij}} \omega_j \mod \mathbb{Q}\omega_{1j} + \mathbb{Q}\omega_{2j}$ et $d_{ij} = \int_0^{P_{ij}} \eta_j \mod \mathbb{Q}\eta_{1j} + \mathbb{Q}\eta_{2j}$ pour $i = 1, \ldots, r$ et $j = 1, \ldots, n$.

PREUVE: D'après 4.5.1 [2], la réalisation de de Rham de M s'inscrit dans le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & & & \\
& T_{\mathrm{dR}}(T) \arrow[d] \arrow[dr, "i_T"] & & & \\
0 \arrow[r] & T_{\mathrm{dR}}(G) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & T_{\mathrm{dR}}(M) \arrow[r] & \mathbb{Z}^r \otimes K \arrow[r] & 0 \\
& T_{\mathrm{dR}}(A) \arrow[d] \arrow[ur, "i_A"'] & & & \\
& 0 & & &
\end{tikzcd} \tag{4.5.3.1}$$

où la suite exacte verticale est canoniquement scindée car $G = A \times T$. On obtient alors la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^{\mathrm{r}} \otimes \mathrm{K}, \mathrm{K}) \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{M}) \xrightarrow{\phi} \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{G}) \longrightarrow 0, \tag{4.5.3.2}$$

où ϕ est la transposée de i. Vérifions que cette suite exacte est canoniquement scindée: Posons

$$M_T = M/[0 \longrightarrow A] = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u_T} \mathbb{G}^s_m],$$

$$M_A = M/[0 \longrightarrow T] = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u_A} A].$$

Les réalisations de de Rham de M_T et M_A s'inscrivent dans les suites exactes suivantes

$$0 \longrightarrow T_{\mathrm{dR}}(T) \xrightarrow{\iota_T} T_{\mathrm{dR}}(M_T) \longrightarrow \mathbb{Z}^r \otimes K \longrightarrow 0 \tag{4.5.3.3}$$

$$0 \longrightarrow T_{\mathrm{dR}}(A) \xrightarrow{\iota_A} T_{\mathrm{dR}}(M_A) \longrightarrow \mathbb{Z}^r \otimes K \longrightarrow 0 \tag{4.5.3.4}$$

Montrons que ces deux suites exactes sont canoniquement scindées:
(1) Puisque M_T n'a pas de partie abélienne, on observe d'après (4.5.1.2) et (4.5.1.1) que $\mathrm{Ext}^1(M_T, \mathbb{G}_a) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{G}_a)$. De plus puisque $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_a) = 0$, l'extension universelle vectorielle de M_T est canoniquement scindée, i.e. $(\mathbb{G}^s_m)^\natural = \mathbb{G}^s_m \times (\mathrm{Ext}^1(M_T, \mathbb{G}_a))^\vee$. Par conséquent on a que la suite exacte (4.5.3.3) admet une section canonique τ_T, i.e. $\tau_T \circ \iota_T = id$.
(2) Soient $M^\natural_A = [X \longrightarrow G^\natural_A]$ l'extension universelle vectorielle de M_A par le groupe vectoriel $(\mathrm{Ext}^1(M_A, \mathbb{G}_a))^\vee$ et $A^\natural$ l'extension universelle vectorielle de A par

le groupe vectoriel $(\mathrm{Ext}^1(A,\mathbb{G}_a))^{\vee}$. Plaçons-nous dans la catégorie des complexes de faisceaux abéliens pour la topologie fppf et considérons M_A comme un complexe concentré en degrés -1 et 0. Puisque $\mathrm{Hom}(X[1],\mathbb{G}_a)=0$, à partir de la suite exacte $0\longrightarrow X[1]\longrightarrow M_A\longrightarrow A\longrightarrow 0$, on obtient la suite exacte

$$0\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A,\mathbb{G}_a)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M_A,\mathbb{G}_a)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(X[1],\mathbb{G}_a)\longrightarrow ...$$

qui nous fournit la flèche α du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & (\mathrm{Ext}^1(M_A,\mathbb{G}_a))^{\vee} & \longrightarrow & G_A^{\natural} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0\\
 & & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\downarrow & & = & & \\
0 & \longrightarrow & (\mathrm{Ext}^1(A,\mathbb{G}_a))^{\vee} & \longrightarrow & A^{\natural} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

où α et β sont surjectifs. La surjection β nous fournit une section canonique τ_A de (4.5.3.4), i.e. $\tau_A\circ\iota_A=id$ (cette dernière égalité provient du fait que le diagramme est commutatif et que la dernière flèche verticale est l'identité).
Considérons maintenant les homomorphismes de restriction

$$r_A : T_{\mathrm{dR}}(M)\longrightarrow T_{\mathrm{dR}}(M_A) \quad \text{et} \quad r_T : T_{\mathrm{dR}}(M)\longrightarrow T_{\mathrm{dR}}(M_T),$$

qui ont les propriétés suivantes

$$r_{A\,|\mathrm{Gr}^W_{-1}(T_{\mathrm{dR}}(M))}=id \quad \text{et} \quad r_{T\,|\mathrm{Gr}^W_{-2}(T_{\mathrm{dR}}(M))}=id.$$

On a donc que $\iota_T=r_T\circ i_T$ et $\iota_A=r_A\circ i_A$. Maintenant, si on note $p_T=\tau_T\circ r_T$ et $p_A=\tau_A\circ r_A$, on observe que

$$p_T\circ i_T=\tau_T\circ r_T\circ i_T=\tau_T\circ\iota_T=id,$$

$$p_A\circ i_A=\tau_A\circ r_A\circ i_A=\tau_A\circ\iota_A=id.$$

Mais alors, puisque $i=(i_A,i_T)$, si on pose $p=(p_A,p_T)$ on obtient que $p\circ i=id$. Par conséquent, il suffit de prendre la transposée de p pour obtenir une section canonique de (4.5.3.2).
Pour ce qui concerne la réalisation de Hodge, d'après 1.6, elle s'inscrit dans le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
 & \mathrm{H}_1(\mathbb{G}^s_{m\,\mathbb{C}},\mathbb{Q}) \arrow[d] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}_1(G_{\mathbb{C}},\mathbb{Q}) \arrow[r, hook] \arrow[d] & T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}}) \arrow[r] & \mathbb{Z}^r\otimes\mathbb{Q} \arrow[r] & 0\\
 & \mathrm{H}_1(A_{\mathbb{C}},\mathbb{Q}) \arrow[d] \arrow[ur] & & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

où la suite exacte verticale est canoniquement scindée car $G = A \times T$.
Choisissons maintenant les bases:
Notons $\tilde{\gamma}_i$ "un" relèvement de z_i dans $T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}})$ pour $i = 1, \ldots, r$ et $\{dz_i\}$ l'image dans $\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(M)$ de la base de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^r \otimes K, K)$ qui est duale à $\{z_i\}$.
D'après la formule de Künneth, on a $\mathrm{H}_1(A_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}_1((\mathcal{E}_1)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) \oplus \ldots \oplus \mathrm{H}_1((\mathcal{E}_n)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$ et donc l'ensemble $\{\gamma_{11}, \gamma_{21}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1n}, \gamma_{2n}\}$ forme une base de $\mathrm{H}_1(A_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$.
Soit $\{\gamma_l\}$ la base de $\mathrm{H}_1(\mathbb{G}_m^s, \mathbb{Q})$, telle que $\{\frac{\gamma_l}{2i\pi}\}$ soit la base duale de $\{x_l\}$.
Puisque $\mathrm{H}_1(G_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) = \mathrm{H}_1(A_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) \oplus \mathrm{H}_1(T_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})$, on obtient que l'ensemble $\{\gamma_{11}, \gamma_{21}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1n}, \gamma_{2n}, \gamma_i\}$ forme une base de $\mathrm{H}_1(G_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$.
Toujours d'après la formule de Künneth, on a $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A) \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}_n)$ et donc l'ensemble $\{\omega_1, \eta_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \eta_n\}$ forme une K-base de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A)$.
Puisque $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{G}) = \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{A}) \oplus \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{T})$, on obtient que l'ensemble $\{\omega_1, \eta_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \eta_n, \frac{dx_l}{x_l}\}$ forme une base de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{G})$.
Enfin on notera encore ω_j (resp. η_j, resp. $\frac{dx_l}{x_l}$) l'image de ω_j (resp. η_j, resp. $\frac{dx_l}{x_l}$) dans $\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(M)$ pour $j = 1, \ldots, n$ et $l = 1, \ldots, s$.
Avec toutes ces notations on peut conclure que dans les bases $\{dz_i, \omega_1, \eta_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \eta_n, \frac{dx_l}{x_l}\}$ de $\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(M)$ et $\{\tilde{\gamma}_i, \gamma_{11}, \gamma_{21}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1n}, \gamma_{2n}, \gamma_l\}$ de $T_K(M_{\mathbb{C}})$ la matrice des périodes a la forme désirée. $\diamondsuit$

4.5.4. Remarque:
Les déterminations des logarithmes complexes, des logarithmes elliptiques et des intégrales elliptiques de deuxième espèce, qui apparaissent dans la matrice des périodes, ne sont pas bien définis. En effet, elles dépendent du relèvement dans $T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}})$ de la base de $\mathbb{Z}^r$.
Toutefois, le corps étudié dans la conjecture des périodes généralisée, $K(\text{périodes}(M))$, se revèle être indépendant du choix de ce relèvement car il contient forcément $2i\pi$, les périodes et les quasi-périodes de toutes les courbes elliptiques qui définissent A. Ceci reste vrai pour le corps considéré dans les conjectures (II.i?) pour $i = 1, \ldots, 5$ et (III.i?) pour $i = 1, \ldots, 4$, mais pas pour le corps qui apparaît dans la conjecture de Schanuel. Par conséquent, il vaut mieux bien expliciter quelle détermination du logarithme complexe on choisit: on fixe une détermination (quelconque) du logarithme dans un ouvert simplement connexe du plan $\mathbb{C}$, ne contenant pas 0, mais contenant tous les q_{ij}.

4.6. Calculs de groupes de Mumford-Tate

4.6.1. Commençons par faire quelques rappels sur le groupe de Mumford-Tate: Posons

$$U(MT(M_{\mathbb{C}})) = U^{(4)}(MT(M_{\mathbb{C}})) = \ker\left[MT(M_{\mathbb{C}}) \longrightarrow MT(W_{-1}(T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}})))\right].$$

Puisque $M = [X \longrightarrow G]$ avec $G = A \times T$, la suite exacte $0 \longrightarrow W_{-2}(T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}})) \longrightarrow W_{-1}(T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}})) \longrightarrow \mathrm{Gr}^W_{-1}(T_{\mathrm{H}}(M_{\mathbb{C}})) \longrightarrow 0$ est canoniquement scindée, ce qui implique que

$$W_{-1}(MT(M_{\mathbb{C}})) = U(MT(M_{\mathbb{C}})).$$

Mais alors, à partir de la suite exacte

$$0 \longrightarrow W_{-1}(MT(M_{\mathbb{C}})) \longrightarrow MT(M_{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathrm{Gr}_0^W(MT(M_{\mathbb{C}})) \longrightarrow 0,$$

on peut conclure que
(4.6.1.1)
$$\dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}}) = \begin{cases} \dim_{\mathbb{Q}} MT(A_{\mathbb{C}}) + \dim_{\mathbb{Q}} U(MT(M_{\mathbb{C}})) & \text{si } A_{\mathbb{C}} \neq 0, \\ 1 + \dim_{\mathbb{Q}} U(MT(M_{\mathbb{C}})) & \text{si } A_{\mathbb{C}} = 0 \text{ et } T_{\mathbb{C}} \neq 0. \end{cases}$$

Par conséquent pour obtenir la dimension du groupe de Mumford-Tate de M, il faut calculer les dimensions de $MT(A_{\mathbb{C}})$ et $U(MT(M_{\mathbb{C}}))$. Pour ce qui concerne la dimension de $U(MT(M_{\mathbb{C}}))$, on va s'aider de 2.2.

4.6.2. **Lemme**
Soient $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ des courbes elliptiques définies sur $\mathbb{C}$ et deux à deux non isogènes. Notons $\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_j)$ *(resp.* $\mathrm{Hod}(\Pi_{j=1}^n \mathcal{E}_j)$*) le groupe de Hodge de $\mathcal{E}_j$ (resp. $\Pi_{j=1}^n \mathcal{E}_j$) pour $j = 1, \ldots, n$. Alors*

(4.6.2.1) $$\mathrm{Hod}(\Pi_{j=1}^n \mathcal{E}_j) \cong \mathrm{Hod}(\mathcal{E}_1) \times \ldots \times \mathrm{Hod}(\mathcal{E}_n).$$

PREUVE: On a l'injection suivante

(4.6.2.2) $$\mathrm{Hod}(\Pi_{i=1}^n \mathcal{E}_j) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Hod}(\mathcal{E}_1) \times \ldots \times \mathrm{Hod}(\mathcal{E}_n),$$

et par définition, pour $i = 1, \ldots, n$, l'application évidente

(4.6.2.3) $$\mathrm{Hod}(\Pi_{j=1}^n \mathcal{E}_j) \xrightarrow{\psi_i} \mathrm{Hod}(\mathcal{E}_i)$$

est une surjection. Distinguons maintenant trois cas:
(1) Supposons d'abord qu'aucune des courbes elliptiques ne soit de type CM:
Pour $n = 2$, l'isomorphisme (4.6.2.1) est une conséquence directe du lemme de Goursat ([R76] §5), qui affirme que si $\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$ n'est pas le produit $\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_1) \times \mathrm{Hod}(\mathcal{E}_2)$, alors il doit être le graphe d'un isomorphisme entre $\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_1)$ et $\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_2)$. Mais alors cet isomorphisme peut être utilisé pour créer une isogénie entre $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, ce qui contredit nos hypothèses.
Pour $n \geq 3$, on utilise une généralisation du lemme de Goursat, qui affirme le fait suivant: si on a une algèbre de Lie, qui est une sous-algèbre d'un produit fini d'algèbres simples et non abéliennes, et qui a la propriété de se surjecter sur chaque facteur et sur chaque paire de facteurs, alors elle doit être égale à tout le produit.
(2) Supposons maintenant que toutes les courbes elliptiques soient de type CM:
(Cette démonstration est une correction de celle fournie par V. Kumar Murty dans [KM90] §2, qui considère implicitement que les corps $\mathrm{End}(\mathcal{E}_{\mathrm{j}}) \otimes \mathbb{Q}$ sont linéairement disjoints.)

Soient $k_i = \mathrm{End}(\mathcal{E}_i) \otimes \mathbb{Q}$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $k = \mathrm{End}(\Pi_{j=1}^n \mathcal{E}_j) \otimes \mathbb{Q}$. Dans le cas CM on sait que

$$(4.6.2.4) \qquad \begin{aligned} \mathrm{Hod}(\mathcal{E}_i) &= \ker(T_{k_i} \overset{N_{k_i/\mathbb{Q}}}{\longrightarrow} \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}) \qquad 1 \leq i \leq n \\ \mathrm{Hod}(\Pi_{j=1}^n \mathcal{E}_j) &= \ker(T_k \overset{N_{k/\mathbb{Q}}}{\longrightarrow} \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}) \end{aligned}$$

où $T_{k_i} = \mathrm{Res}_{k_i/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_{m,k_i})$ (resp. $T_k = \mathrm{Res}_{k/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_{m,k})$) est le tore obtenu à partir de $\mathbb{G}_m$ par restriction des scalaires de k_i (resp. k) à $\mathbb{Q}$. Notons $X(\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_i))$ (resp. $X(\mathrm{Hod}(\Pi_{j=1}^n \mathcal{E}_j))$) le groupe de caractères du tore $\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_i)$ (resp. $\mathrm{Hod}(\Pi_{j=1}^n \mathcal{E}_j)$). D'après [Se68] ch.II §1, on peut identifier le groupe de caractères du tore T_{k_i} à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ et donc on obtient que $X(\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_i)) \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/d(\mathbb{Z})$ où $d : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ est la diagonale. A cause de l'anti-équivalence de catégories entre les schémas en groupes de type multiplicatif et les groupes abéliens munis d'une action continue du groupe de Galois, $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, (4.6.2.2) et (4.6.2.3) nous fournissent le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} X(\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_i)) \otimes \mathbb{Q} \arrow[d, hook, "\iota_i"'] \arrow[dr, "\psi_i^\vee"] & \\ \oplus_{j=1}^n X(\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_j)) \otimes \mathbb{Q} \arrow[r, two heads, "\phi^\vee"] & X(\mathrm{Hod}(\Pi_{j=1}^n \mathcal{E}_j)) \otimes \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

où $\phi^\vee$ (resp. $\psi_i^\vee$) est la transposé de ϕ (resp. ψ_j) et ι_i est l'inclusion canonique de $X(\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_i)) \otimes \mathbb{Q}$ dans $\oplus_{j=1}^n X(\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_j)) \otimes \mathbb{Q}$.
Remarquons que pour $i = 1, \ldots, n$,

- $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ agit sur $X(\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_i))$ par $\overline{id}$, la réduction modulo $d(\mathbb{Z})$ de l'identité $id : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ et par $\overline{sym}$, la réduction modulo $d(\mathbb{Z})$ de l'homomorphisme inversion des facteurs $sym : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (cf. [Se68] ch.II §1);
- les homomorphismes $\phi^\vee, \psi_i^\vee$ et ι_i sont $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-équivariants.

Maintenant vérifions que $\phi^\vee$ est injective et donc bijective:
soit $m = (m_1, \ldots, m_n)$ un élément de $\oplus_{j=1}^n X(\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_j)) \otimes \mathbb{Q}$ tel que $\phi^\vee(m) = 0$. Notons $j_{(m)} \in \{1, \ldots, n\}$ le plus petit entier tel que $m_{j_{(m)}} \neq 0$ et construisons un élément $g_{(j_{(m)}+1)}$ de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ tel que

$$(4.6.2.5) \qquad m + g_{(j_{(m)}+1)} m = (0, 0, \ldots, 0, 2m_{j_{(m)}}, 0, *, *, \ldots, *).$$

Pour faire cela distinguons deux cas:

(A) $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sont linéairement disjoints, i.e. aucun d'eux n'est contenu dans le composé des autres.
Choisissons un élément $g_{(j_{(m)}+1)}$ de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ qui agit comme suit

$$g_{(j_{(m)}+1)|X(\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_h))} = \begin{cases} \overline{sym} & \text{si } h = j_{(m)} + 1, \\ \overline{id} & \text{autrement.} \end{cases}$$

(B) $k_1, k_2, \dots, k_n$ ne sont pas linéairement disjoints. Dans ce cas il existe un $a-$uplet $(p_1, \dots, p_a) \in \{1, \dots, n\}^a$ et un $b-$uplet $(q_1, \dots, q_b) \in \{1, \dots, n\}^b$ tels que

$$k_{j_{(m)}} \subseteq k_{p_1} k_{p_2} \cdots k_{p_a} \qquad 1 \leq a < n$$

$$k_{j_{(m)}+1} \subseteq k_{q_1} k_{q_2} \cdots k_{q_b} \qquad 1 \leq b < n$$

avec $k_{p_1}, k_{p_2}, \dots, k_{p_a}$ linéairement disjoints et $k_{q_1}, k_{q_2}, \dots, k_{q_b}$ linéairement disjoints. Distinguons plusieurs sous-cas:

B.1. $a = 1$ et $j_{(m)} \in \{q_1, q_2, \dots, q_b\}$.
Dans ce cas $b > 1$ et modulo une permutation des indices on peut supposer que $j_{(m)} = q_1$. Définissons

$$g_{(j_{(m)}+1)}{}_{|X(\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_h))} = \begin{cases} \overline{id} & \text{si } h = j_{(m)}, \\ \overline{sym} & \text{si } h = q_2, \\ \overline{id} & \text{si } h = q_3, q_4, \dots, q_b, \\ \overline{id} \text{ ou } \overline{sym} & \text{autrement.} \end{cases}$$

B.2. $a = 1$ et $j_{(m)} \notin \{q_1, q_2, \dots, q_b\}$.
On pose

$$g_{(j_{(m)}+1)}{}_{|X(\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_h))} = \begin{cases} \overline{id} & \text{si } h = j_{(m)}, \\ \overline{sym} & \text{si } h = q_1, \\ \overline{id} & \text{si } h = q_2, q_4, \dots, q_b, \\ \overline{id} \text{ ou } \overline{sym} & \text{autrement.} \end{cases}$$

B.3. $b = 1$ et $j_{(m)} + 1 \in \{p_1, p_2, \dots, p_a\}$.
Dans ce cas $a > 1$ et modulo une permutation des indices on peut supposer que $j_{(m)} + 1 = p_1$. Choisissons $g_{(j_{(m)}+1)}$ de la façon suivante

$$g_{(j_{(m)}+1)}{}_{|X(\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_h))} = \begin{cases} \overline{sym} & \text{si } h = p_1, \\ \overline{sym} & \text{si } h = p_2, \\ \overline{id} & \text{si } h = p_3, p_4, \dots, p_a, \\ \overline{id} \text{ ou } \overline{sym} & \text{autrement.} \end{cases}$$

B.4. $b = 1$ et $j_{(m)} + 1 \notin \{p_1, p_2, \dots, p_a\}$.
Définissons

$$g_{(j_{(m)}+1)}{}_{|X(\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_h))} = \begin{cases} \overline{sym} & \text{si } h = j_{(m)} + 1, \\ \overline{id} & \text{si } h = p_1, p_2, \dots, p_a, \\ \overline{id} \text{ ou } \overline{sym} & \text{autrement.} \end{cases}$$

B.5. $b > 1$ et $a > 1$.

Puisque les corps $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sont deux à deux distincts, il existe $\alpha \in \{1, \ldots, b\}$ tel que $q_\alpha \notin \{p_1, p_2, \ldots, p_a\}$. On pose

$$g_{(j_{(m)}+1)_{|X(\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_h))}} = \begin{cases} \overline{id} & \text{si } h = p_1, p_2, \ldots, p_a, \\ \overline{sym} & \text{si } h = q_\alpha, \\ \overline{id} & \text{si } h = q_\beta \ \ \forall \beta \in \{1, \ldots, b\} - \{\alpha\}, \\ \overline{id} \text{ ou } \overline{sym} & \text{autrement.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que l'élément $g_{(j_{(m)}+1)}$ de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ qu'on vient de construire vérifie bien (4.6.2.5). Posons

$$m^{(j_{(m)}+1)} = m + g_{(j_{(m)}+1)}m.$$

Maintenant de façon analogue construisons un élément $g_{(j_{(m)}+2)}$ de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ tel que

$$m^{(j_{(m)}+1)} + g_{(j_{(m)}+2)}m^{(j_{(m)}+1)} = (0, 0, \ldots, 0, 4m_{j_{(m)}}, 0, 0, *, *, \ldots, *)$$

et posons $m^{(j_{(m)}+2)} = m^{(j_{(m)}+1)} + g_{(j_{(m)}+2)}m^{(j_{(m)}+1)}$. Après avoir itéré $n - j_{(m)}$ fois ce procédé, on obtient un élément de $\oplus_{j=1}^{n} X(\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_j)) \otimes \mathbb{Q}$ qui a la forme suivante

$$\begin{aligned} m^{(n)} &= (0, 0, \ldots, 0, 2(n - j_{(m)})m_{j_{(m)}}, 0, 0, \ldots, 0) \\ &= m + \sum_{l=1}^{n-j_{(m)}} g_{(j_{(m)}+l)}\ m + \sum_{\substack{l_1, l_2 = 1 \\ l_1 \neq l_2}}^{n-j_{(m)}} g_{(j_{(m)}+l_1)}\ g_{(j_{(m)}+l_2)}\ m + \ldots \\ &\quad \ldots + g_{(j_{(m)}+1)}\ g_{(j_{(m)}+2)}\ \cdots\ g_{(n)}\ m. \end{aligned}$$

Puisque $\phi^\vee$ est $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-équivariant, $\phi^\vee(m) = 0$ implique $\phi^\vee(m^{(n)}) = 0$. Mais

$$\phi^\vee(m^{(n)}) = 2(n - j_{(m)})\phi^\vee(\iota_{j_{(m)}}(m_{j_{(m)}})) = 2(n - j_{(m)})\psi^\vee_{j_{(m)}}(m_{j_{(m)}})$$

et donc, puisque $\psi^\vee_{j_{(m)}}$ est injective, on obtient que $m_{j_{(m)}} = 0$, ce qui est absurde. Par conséquent $m = 0$. On a donc vérifié que $\phi^\vee$ est bijective, ce qui implique l'isomorphisme (4.6.2.1).

(3) Supposons enfin qu'on ait n_1 courbes elliptiques pas de type CM et n_2 courbes elliptiques de type CM:

Grâce au lemme de Goursat, on sait que si $A = \Pi_{j=1}^{n_1}\mathcal{E}_j \times \Pi_{j=1}^{n_2}\mathcal{E}_j$, avec $\mathrm{Hod}(\Pi_{j=1}^{n_1}\mathcal{E}_j)$ une algèbre de Lie semisimple et $\mathrm{Hod}(\Pi_{j=1}^{n_2}\mathcal{E}_j)$ un tore, alors $\mathrm{Hod}(A) = \mathrm{Hod}(\Pi_{j=1}^{n_1}\mathcal{E}_j) \times \mathrm{Hod}(\Pi_{j=1}^{n_2}\mathcal{E}_j)$. Par conséquent, puisque d'après (1) et (2), l'isomorphisme (4.6.2.1) est vrai pour $\Pi_{j=1}^{n_1}\mathcal{E}_j$ et $\Pi_{j=1}^{n_2}\mathcal{E}_j$, on obtient qu'il est vrai aussi pour A. $\diamondsuit$

4.6.3. **Corollaire**
Soient $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ *des courbes elliptiques définies sur* $\mathbb{C}$ *et deux à deux non isogènes. Supposons que* $\mathcal{E}_j$ *ne soit pas de type CM pour* $j = 1, \ldots, n_1$ *et soit de type CM pour* $j = n_1 + 1, \ldots, n$. *Posons* $n_2 = n - n_1$. *Alors*

$$\dim_{\mathbb{Q}} MT\big(\Pi_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j\big) = 3n_1 + n_2 + 1.$$

PREUVE: On sait que $\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_j) = \mathbf{SL}(\mathrm{H}_1(\mathcal{E}_j, \mathbb{Q}))$ pour $j = 1, \ldots, n_1$ et $\mathrm{Hod}(\mathcal{E}_j) = \ker(T_{k_j} \stackrel{N_{k_j/\mathbb{Q}}}{\longrightarrow} \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}})$ pour $j = n_1 + 1, \ldots, n$. Par conséquent grâce à 4.6.2 on peut conclure que

$$MT\big(\Pi_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j\big) = \mathbb{G}_m \times \Pi_{j=1}^{n_1} \mathbf{SL}(\mathrm{H}_1(\mathcal{E}_j, \mathbb{Q})) \times \Pi_{j=n_1+1}^{n} \ker(T_{k_j} \stackrel{N_{k_j/\mathbb{Q}}}{\longrightarrow} \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}),$$

et donc $\dim_{\mathbb{Q}} MT\big(\Pi_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j\big) = 3n_1 + n_2 + 1.$ $\diamondsuit$

4.6.4. **Proposition**
Soient $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ *des courbes elliptiques définies sur* K *et deux à deux non isogènes, et supposons que* $\mathcal{E}_j$ *n'est pas de type CM pour* $j = 1, \ldots, n_1$ *et de type CM pour* $j = n_1 + 1, \ldots, n$. *De plus soit* $M = [\mathbb{Z}^r \stackrel{u}{\longrightarrow} G]$ *un 1-motif défini sur* K, *avec* $G = A \times \mathbb{G}_m^s = \Pi_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j \times \mathbb{G}_m^s$ *et pour* $i = 1, \ldots, r$, $u(z_i) = (u_A(z_i), u_T(z_i)) = (\vec{P}_i, \vec{q}_i) \in G(K)$, *où* $\{z_i\}$ *est une base de* $\mathbb{Z}^r$. *Notons* $L(T)$ *le sous* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel de* $\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Q}$ *engendré par les* $\{\log q_{il}\}_{\substack{i=1,\ldots,r \\ l=1,\ldots,s}}$, *et pour* $j = 1, \ldots, n$

- $k_j = \mathrm{End}(\mathcal{E}_j) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$;
- $P(\mathcal{E}_j)$ *le sous* k_j*-espace vectoriel de* $\mathbb{C}^2$ *engendré par* $\binom{\omega_{1j}}{\eta_{1j}}$ *et* $\binom{\omega_{2j}}{\eta_{2j}}$;
- $I(\mathcal{E}_j)$ *le sous* k_j*-espace vectoriel de* $\mathbb{C}^2/P(\mathcal{E}_j)$ *engendré par* $\{\binom{p_{ij}}{\mathrm{d}_{ij}}\}_{i=1,\ldots,r}$.

Alors

$$\dim_{\mathbb{Q}} U(MT(M_{\mathbb{C}})) = \dim_{\mathbb{Q}} L(T) + \sum_{j=1}^{n} \dim_{k_j} I(\mathcal{E}_j)$$

PREUVE: Soient $\overline{u(\mathbb{Z}^r)}$ la clôture de Zariski de l'image de u dans G, G' la composante neutre de $\overline{u(\mathbb{Z}^r)}$, et N l'indice de G' dans $\overline{u(\mathbb{Z}^r)}$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^r & \stackrel{id}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}^r \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Nu} \\ G & \stackrel{N}{\longrightarrow} & G \end{array}$$

fournit une isogénie entre M et le 1-motif $[Nu : \mathbb{Z}^r \longrightarrow G]$. De plus, grâce au lemme de réductibilité complète de Poincaré appliqué aux produits de courbes elliptiques par des tores, on a que $[Nu : \mathbb{Z}^r \longrightarrow G]$ est isogène à $\overline{M} = [Nu : \mathbb{Z}^r \longrightarrow G'] \oplus [0 : 0 \longrightarrow G/G']$. D'après 4.1.4 (2), on peut travailler avec le 1-motif $\overline{M}$ au lieu du 1-motif de départ M.

Si on pose $M' = [u' : \mathbb{Z}^r \longrightarrow G']$, avec $u' = Nu : \mathbb{Z}^r \longrightarrow G'$, on a que $U(MT(\overline{M}_{\mathbb{C}})) = U(MT(M'_{\mathbb{C}}))$. De plus, puisque u' est dominant, grâce à 2.2 appliqué à M', on trouve que $U(MT(M'_{\mathbb{C}})) \cong \mathrm{Hom}_F(F \cdot u'(\mathbb{Z}^r); \mathrm{H}_1(G'_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}))$ où $F = \mathrm{End}(G') \otimes \mathbb{Q}$. Par conséquent

$$\text{(4.6.4.1)} \qquad \dim_{\mathbb{Q}} U(MT(\overline{M}_{\mathbb{C}})) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hom}_F(F \cdot u'(\mathbb{Z}^r); \mathrm{H}_1(G'_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})).$$

Puisque les courbes elliptiques sont deux à deux non isogènes, d'après le lemme de Goursat on a que

$$G' = \mathbb{G}_m^{\overline{s}} \times \mathcal{E}_{l_1} \times \ldots \times \mathcal{E}_{l_{\overline{n}}}$$

où $\overline{s} \leq s$ et $l_j \in \{1, \ldots, n\}$ pour $j = 1, \ldots, \overline{n}$. Modulo une permutation des indices des courbes elliptiques, on peut supposer que $l_j = j$ pour $j = 1, \ldots, \overline{n}$. Posons $T' = \mathbb{G}_m^{\overline{s}}$ et $A' = \Pi_{j=1}^{\overline{n}} \mathcal{E}_j$. Avec ces notations, on a que pour $i = 1, \ldots, r$

$$u'(z_i) = (u'_{A'}(z_i), u'_{T'}(z_i)) = (\vec{P'}_i, \vec{q'}_i)$$

avec $\vec{P'}_i = (P'_{i1}, \ldots, P'_{i\overline{n}}) \in A'(K)$ et $\vec{q'}_i = (q'_{i1}, \ldots, q'_{i\overline{s}}) \in (K^*)^{\overline{s}}$.
Si on note $u'_j : \mathbb{Z}^r \longrightarrow \mathcal{E}_j$ la restriction de u' à $\mathcal{E}_j$, on obtient que $u' = u'_{T'} \times u'_1 \times \ldots \times u'_{\overline{n}}$.
Posons $F_{T'} = \mathrm{End}(T') \otimes \mathbb{Q} \cong M_{\overline{s} \times \overline{s}}(\mathbb{Q})$. Toujours d'après le lemme de réducibilité complète de Poincaré, on a que

$$\text{(4.6.4.2)} \qquad F = \mathrm{End}(G') \otimes \mathbb{Q} \cong F_{T'} \times k_1 \times \ldots \times k_{\overline{n}}.$$

Pour que le calcul de $\dim_{\mathbb{Q}} U(MT(\overline{M}_{\mathbb{C}}))$ soit indépendant du choix des logarithmes et des relèvement choisis dans 4.5.3, on va travailler modulo $2i\pi\mathbb{Q}$ et modulo les périodes et les quasi-périodes de A'.
A partir de $u'_{T'} : \mathbb{Z}^r \longrightarrow \mathbb{G}_m^{\overline{s}}$, construisons un homomorphisme $U'_{T'} : \mathbb{Q}^r \longrightarrow (\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Q})^{\overline{s}}$ de la façon suivante

$$\begin{array}{rcccccl} U'_{T'}: & \mathbb{Q}^r & \longrightarrow & \mathrm{Lie}(\mathbb{G}_m^{\overline{s}}) & \longrightarrow & \mathrm{Lie}(\mathbb{G}_m^{\overline{s}})/(2i\pi\mathbb{Q})^{\overline{s}} & \cong (\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Q})^{\overline{s}} \\ & ne_i & \longmapsto & n \log \vec{q'}_i & \longmapsto & n\overline{\log}\vec{q'}_i & \end{array}$$

où $\{e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)\}_{i=1,\ldots,r}$ est la base canonique de $\mathbb{Q}^r$, $\log \vec{q'}_i = (\log q'_{i1}, \ldots, \log q'_{i\overline{s}}) \in \mathbb{C}^{\overline{s}}$, et $\overline{\log}\vec{q'}_i$ est l'image de $\log \vec{q'}_i$ dans $(\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Q})^{\overline{s}}$.
Désignons par $L(\overline{T})$ le $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Q}$ engendré par les $\{\overline{\log}q'_{ij}\}_{\substack{i=1,\ldots,r \\ j=1,\ldots,\overline{s}}}$ et soit $\{\overline{\log}q'_{i_l,j_l}\}_{l=1,\ldots,\dim_{\mathbb{Q}} L(\overline{T})}$ une base de $L(\overline{T})$. Comme l'action de $F_{T'}$ sur $U'_{T'}(\mathbb{Q}^r)$ est donnée par

$$F_{T'} \cdot U'_{T'}(\mathbb{Q}^r) \longrightarrow U'(\mathbb{Q}^r)$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\overline{s}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\overline{s}1} & \ldots & a_{\overline{s}\overline{s}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{\log}q'_{i1} \\ \vdots \\ \overline{\log}q'_{i\overline{s}} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11}\overline{\log}q'_{i1} + \ldots + a_{1\overline{s}}\overline{\log}q'_{i\overline{s}} \\ \vdots \\ a_{\overline{s}1}\overline{\log}q'_{i1} + \ldots + a_{\overline{s}\overline{s}}\overline{\log}q'_{i\overline{s}} \end{pmatrix},$$

on a que

$$F_{T'} \cdot U'_{T'}(\mathbb{Q}^r) =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\overline{s}} a_{1j}^{(i)} \overline{\log} q'_{ij} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\overline{s}} a_{\overline{s}j}^{(i)} \overline{\log} q'_{ij} \end{pmatrix} ; \quad a_{kj}^{(i)} \in \mathbb{Q} \quad \forall\, i, j \text{ et } k \right\}$$

$$(4.6.4.3) \qquad = \left\{ \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{\dim_{\mathbb{Q}} L(\overline{T})} a_{1,j_l}^{(i_l)} \overline{\log} q'_{i_l,j_l} \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{\dim_{\mathbb{Q}} L(\overline{T})} a_{\overline{s},j_l}^{(i_l)} \overline{\log} q'_{i_l,j_l} \end{pmatrix} ; \quad a_{k,j_l}^{(i_l)} \in \mathbb{Q} \quad \forall\, l \text{ et } k \right\}$$

$$= \sum_{l=1}^{\dim_{\mathbb{Q}} L(\overline{T})} F_{T'} \cdot (\overline{\log} q'_{i_l,j_l}\, e_1)$$

où $\{e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^t\}_{i=1,\ldots,\overline{s}}$ est la base canonique de $\mathbb{Q}^{\overline{s}}$. Par conséquent $\{F_{T'} \cdot (\overline{\log} q'_{i_l,j_l}\, e_1)\}_{l=1,\ldots,\dim_{\mathbb{Q}} L(\overline{T})}$ sont les composantes irréductibles du $F_{T'}$-module $F_{T'} \cdot U'_{T'}(\mathbb{Q}^r)$.

Occupons-nous maintenant des courbes elliptiques: pour $j = 1, \ldots, \overline{n}$, désignons par $P(\mathcal{E}_j)$ le $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$ engendré par les vecteurs $\binom{\omega_{1j}}{\eta_{1j}}$ et $\binom{\omega_{2j}}{\eta_{2j}}$, et par $(\mathcal{E}_j)^\natural$ l'extension universelle vectorielle de $\mathcal{E}_j$. Remarquons que d'après 4.5.1 [2], $\mathrm{Lie}((\mathcal{E}_j)^\natural_{\mathbb{C}}) = T_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}_j) \otimes \mathbb{C}$. Avec toutes ces notations, à partir de $u'_j : \mathbb{Z}^r \longrightarrow \mathcal{E}_j$, on peut construire l'homomorphisme suivant

$$\begin{aligned} U'_j : \mathbb{Q}^r &\longrightarrow \mathrm{Lie}((\mathcal{E}_j)^\natural_{\mathbb{C}})/P(\mathcal{E}_j) \cong \mathbb{C}^2/P(\mathcal{E}_j) \\ e_i &\longmapsto (\overline{\int_0^{P'_{ij}} \omega_j}, \overline{\int_0^{P'_{ij}} \eta_j})^t \end{aligned}$$

où $\{e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)\}_{i=1,\ldots,r}$ est la base canonique de $\mathbb{Q}^r$, et $(\overline{\int_0^{P'_{ij}} \omega_j}, \overline{\int_0^{P'_{ij}} \eta_j})^t$ est l'image de $(\int_0^{P'_{ij}} \omega_j, \int_0^{P'_{ij}} \eta_j)^t$ dans $\mathbb{C}^2/P(\mathcal{E}_j)$ pour $i = 1, \ldots, r$. Pour $j = 1, \ldots, \overline{n}$, notons $I(\mathcal{E}_j)$ le k_j-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^2/P(\mathcal{E}_j)$ engendré par $\{(\overline{\int_0^{P'_{ij}} \omega_j}, \overline{\int_0^{P'_{ij}} \eta_j})^t\}_{i=1,\ldots,r}$, et $\{\vec{Q}_h^{(j)}\}_{h=1,\ldots,\dim_{k_j} I(\mathcal{E}_j)}$ une base de $I(\mathcal{E}_j)$. L'action de k_j sur $U'_j(\mathbb{Q}^r)$ se décrit ainsi

$$\begin{aligned} k_j \cdot U'_j(\mathbb{Q}^r) &\longrightarrow U'_j(\mathbb{Q}^r) \\ \Big(a, (\overline{\int_0^{P'_{ij}} \omega_j}, \overline{\int_0^{P'_{ij}} \eta_j})^t\Big) &\longmapsto \Big(a\overline{\int_0^{P'_{ij}} \omega_j}, \tilde{a}\overline{\int_0^{P'_{ij}} \eta_j}\Big)^t, \end{aligned}$$

où $\tilde{a} = a$ si $\mathcal{E}_j$ n'est pas de type CM, et $\tilde{a} = \overline{a}$ si $\mathcal{E}_j$ est de type CM. et donc (4.6.4.4)

$$k_j \cdot U'_j(\mathbb{Q}^r) = \left\{ \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{r} a_i \overline{\int_0^{P'_{ij}} \omega_j} \\ \sum_{i=1}^{r} \tilde{a}_i \overline{\int_0^{P'_{ij}} \eta_j} \end{pmatrix} ; a_i \in k_j \ \forall\, i \right\} = \Big\{ \sum_{i=1}^{\dim_{\mathbb{Q}} I(\mathcal{E}_j)} a_h \vec{Q}_h^{(j)} \Big\}.$$

Par conséquent, $\{k_j \cdot \vec{Q}_h^{(j)}\}_{h=1,\dots,\dim_{\mathbb{Q}} I(\mathcal{E}_j)}$ est l'ensemble des composantes irréductibles du k_j-module $k_j \cdot U'_j(\mathbb{Q}^r)$ pour $j = 1, \dots, \overline{n}$.
Si on note $(A')^\natural$ l'extension universelle vectorielle de A', grâce à la formule de Künneth on trouve que $\mathrm{Lie}((A')^\natural_{\mathbb{C}}) = \mathrm{Lie}((\mathcal{E}_1)^\natural_{\mathbb{C}}) \times \dots \times \mathrm{Lie}((\mathcal{E}_{\overline{n}})^\natural_{\mathbb{C}})$ et donc l'homomorphisme $U' = U'_{T'} \times U'_1 \times \dots \times U'_{\overline{n}}$ s'explicite ainsi

$$\begin{aligned} U' : \mathbb{Q}^r &\longrightarrow \mathrm{Lie}(\mathbb{G}_m^{\overline{s}})/(2i\pi\mathbb{Q})^{\overline{s}} \times \Pi_{j=1}^{\overline{n}} \Big(\mathrm{Lie}((\mathcal{E}_j)^\natural_{\mathbb{C}})/P(\mathcal{E}_j)\Big) \cong (\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Q})^{\overline{s}} \times \Pi_{j=1}^{\overline{n}} \Big(\mathbb{C}^2/P(\mathcal{E}_j)\Big) \\ ne_i &\longmapsto \Big(n\overline{\log}\vec{q'}_i, (n\overline{\int_0^{P'_{i1}} \omega_1}, n\overline{\int_0^{P'_{i1}} \eta_1})^t, \dots, (n\overline{\int_0^{P'_{i\overline{n}}} \omega_{\overline{n}}}, n\overline{\int_0^{P'_{i\overline{n}}} \eta_{\overline{n}}})^t\Big). \end{aligned}$$

L'action de F sur $u'(\mathbb{Z}^r)$ s'étend à $U'(\mathbb{Q}^r)$ de la façon suivante

$$F \cdot U'(\mathbb{Q}^r) \cong (F'_{T'} \cdot U'_{T'}(\mathbb{Q}^r)) \times (k_1 \cdot U'_1(\mathbb{Q}^r)) \times \dots \times (k_{\overline{n}} \cdot U'_{\overline{n}}(\mathbb{Q}^r))$$

où les actions à droite de l'égalité sont décrites par (4.6.4.3) et (4.6.4.4). On obtient donc que

$$F \cdot U'(\mathbb{Q}^r) \cong \sum_{l=1}^{\dim_{\mathbb{Q}} L(\overline{T})} F_{T'} \cdot (\overline{\log} q'_{i_l, j_l}\, e_1) \times \sum_{h=1}^{\dim_{k_1} I(\mathcal{E}_1)} k_1 \cdot \vec{Q}_h^{(1)} \times \dots \times \sum_{h=1}^{\dim_{k_{\overline{n}}} I(\mathcal{E}_{\overline{n}})} k_{\overline{n}} \cdot \vec{Q}_h^{(\overline{n})}.$$

Par conséquent $\{F_{T'} \cdot (\overline{\log} q'_{i_l, j_l}\, e_1)\}_{1,\dots,\dim_{\mathbb{Q}} L(\overline{T})}$ et $\{k_j \cdot \vec{Q}_h^{(1)}\}_{h=1,\dots,\dim_{k_j} I(\mathcal{E}_j)}$ pour $j = 1, \dots, \overline{n}$ forment l'ensemble des composantes irréductibles du F-module $F \cdot U'(\mathbb{Q}^r)$. Mais alors, puisque d'après la formule de Künneth $\mathrm{H}_1(G'_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) = \mathrm{H}_1(T'_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) \oplus \mathrm{H}_1(A'_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})$, en appliquant le lemme de Schur séparément à la partie torique et aux parties elliptiques on trouve que

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(\mathrm{F} \cdot u'(\mathbb{Z}^r); \mathrm{H}_1(G'_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})) = \dim_{\mathbb{Q}} L(T') + \sum_{j=1}^{\overline{n}} \dim_{k_j} I(\mathcal{E}_j)$$

et donc, grâce à (4.6.4.1), on peut finalement conclure que $\dim_{\mathbb{Q}} U(MT(M_{\mathbb{C}})) = \dim_{\mathbb{Q}} L(T) + \sum_{j=1}^{\overline{n}} \dim_{k_j} I(\mathcal{E}_j)$.$\diamondsuit$

4.6.5. **Corollaire**
Avec les notations de 4.6.4, supposons que $\mathcal{E}_j$ ne soit pas de type CM pour $j = 1, \dots, n_1$ et soit de type CM pour $j = n_1 + 1, \dots, n$. Posons $n_2 = n - n_1$. Alors

$$\dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}}) =$$

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{Q}} L(T)+1 & \textit{si } T\neq 0 \textit{ et } A=0, \\ \sum_{j=1}^{n} \dim_{\mathbb{Q}} I(\mathcal{E}_j)+3n+1 & \textit{si } T=0,\ n_1\neq 0 \textit{ et } n_2=0, \\ \sum_{j=1}^{n} \dim_{k_j} I(\mathcal{E}_j)+n+1 & \textit{si } T=0,\ n_1=0 \textit{ et } n_2\neq 0, \\ \sum_{j=1}^{n_1} \dim_{\mathbb{Q}} I(\mathcal{E}_j)+\sum_{j=n_1+1}^{n} \dim_{k_j} I(\mathcal{E}_j)+3n_1+n_2+1 & \textit{si } T=0,\ n_1\neq 0 \textit{ et } n_2\neq 0, \\ \dim_{\mathbb{Q}} L(T)+\sum_{j=1}^{n} \dim_{\mathbb{Q}} I(\mathcal{E}_j)+3n+1 & \textit{si } T\neq 0,\ n_1\neq 0 \textit{ et } n_2=0, \\ \dim_{\mathbb{Q}} L(T)+\sum_{j=1}^{n} \dim_{k_j} I(\mathcal{E}_j)+n+1 & \textit{si } T\neq 0,\ n_1=0 \textit{ et } n_2\neq 0, \\ \dim_{\mathbb{Q}} L(T)+\sum_{j=1}^{n_1} \dim_{\mathbb{Q}} I(\mathcal{E}_j)+\sum_{j=n_1+1}^{n} \dim_{k_j} I(\mathcal{E}_j)+3n_1+n_2+1 & \textit{si } T\neq 0,\ n_1\neq 0 \textit{ et } n_2\neq 0. \end{cases}$$

PREUVE: Conséquence immediate de (4.6.1.1), 4.6.4 et 4.6.3. $\diamondsuit$

4.7. Preuve des équivalences.

4.7.1. La démonstration de 4.4.1 repose sur deux calculs:

- le calcul de la matrice des périodes de M;
- le calcul de la dimension sur $\mathbb{Q}$ du groupe de Mumford-Tate de $M_{\mathbb{C}}$.

PREUVE de 4.4.1:
(A) (CPG?) implique (III.4?):
Notons k la clôture algébrique de $\mathbb{Q}(q_l, j(\mathcal{E}_j), P_{ij})_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,r_j}\ l=1,\dots,s}$ dans $\mathbb{C}$.
Posons $r = \max\{r_j, s\}_{j=1,\dots,n}$, $P_{ij} = 0\ \forall i > r_j$ et $q_l = 1\ \forall l > s$, et considérons le 1-motif défini sur k, $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u} A \times \mathbb{G}_m]$ avec $A = \prod_{j=1}^n \mathcal{E}_j$ et $u(1,\dots,1) = (\vec{R}_1, \dots, \vec{R}_r)$, où $\vec{R}_i = (P_{i1}, \dots, P_{in}, q_i)$.
D'après 4.5.3 les périodes de M sont les $\omega_{1j}, \omega_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j}, p_{ij}, d_{ij}, 2i\pi, \log q_i$ pour $j = 1, \dots, n$ et $i = 1, \dots, r$, et d'après 4.6.5 $\dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}}) = \dim_{\mathbb{Q}} L(T) +$ $\sum_{j=1}^{n_1} \dim_{\mathbb{Q}} I(\mathcal{E}_j) + \sum_{j=n_1+1}^{n} \dim_{k_j} I(\mathcal{E}_j) + 3n_1 + n_2 + 1$. On observe alors que (CPG?) appliquée à M nous fournit l'inegalité recherchée

$$\begin{gathered}\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, k(2i\pi, \log q_i, \omega_{1j}, \omega_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j}, p_{ij}, q_{ij})_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,r}} \geq \\ \dim_{\mathbb{Q}} L(T) + \sum_{j=1}^{n_1} \dim_{\mathbb{Q}} I(\mathcal{E}_j) + \sum_{j=n_1+1}^{n} \dim_{k_j} I(\mathcal{E}_j) + 3n_1 + n_2 + 1,\end{gathered}$$

c'est à dire

$$\begin{gathered}\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(2i\pi, q_l, \log q_l, j(\mathcal{E}_j), \omega_{1j}, \omega_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j}, P_{ij}, p_{ij}, q_{ij})_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,r_j}\ l=1,\dots,s} \geq \\ \dim_{\mathbb{Q}} L(T) + \sum_{j=1}^{n_1} \dim_{\mathbb{Q}} I(\mathcal{E}_j) + \sum_{j=n_1+1}^{n} \dim_{k_j} I(\mathcal{E}_j) + 3n_1 + n_2 + 1.\end{gathered}$$

(B) (III.4?) implique (CPG?):
Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ algébriquement fermé, mais qui n'est pas nécessairement algébrique. Considérons un 1-motif défini sur K, de la forme $M = [\mathbb{Z}^r \xrightarrow{u} A \times \mathbb{G}_m^s]$ avec $A = \prod_{j=1}^n \mathcal{E}_j$ produit fini de courbes elliptiques, deux à deux non isogènes, et $u(1,\dots,1) = (\vec{R}_1, \dots, \vec{R}_r)$ avec $\vec{R}_i = (\vec{P}_i, \vec{q}_i)$ où $\vec{P}_i = (P_{i1}, \dots, P_{in}) \in A(K)$ et $\vec{q}_i = (q_{i1}, \dots, q_{is}) \in \mathbb{G}_m^s(K)$.
D'après 4.5.3 les périodes de M sont les $\omega_{1j}, \omega_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j}, p_{ij}, d_{ij}, \log q_{il}, 2i\pi$ pour $j = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, s$ et $i = 1, \dots, r$. La conjecture (III.4?) nous dit alors que

$$\begin{gathered}\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, K(\text{périodes}(M)) \geq \\ \text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(2i\pi, q_{il}, \log q_{il}, j(\mathcal{E}_j), \omega_{1j}, \omega_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j}, P_{ij}, p_{ij}, d_{ij})_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,r_j}\ l=1,\dots,s} \geq \\ \dim_{\mathbb{Q}} L(T) + \sum_{j=1}^{n_1} \dim_{\mathbb{Q}} I(\mathcal{E}_j) + \sum_{j=n_1+1}^{n} \dim_{k_j} I(\mathcal{E}_j) + 3n_1 + n_2 + 1.\end{gathered}$$

Mais alors, grâce à 4.6.5 on obtient finalement que

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, K(\text{périodes}(M)) \geq \dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}}).\diamondsuit$$

4.7.2. Terminons en donnant la preuve de 4.2.1 et 4.3.4:

PREUVE de 4.2.1:
(A) (CPG?) implique la conjecture de Schanuel:
Distinguons deux cas possibles:
(A1) $2i\pi$ appartient au $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $x_1, \dots, x_s$:
Supposons que $2i\pi = x_s$. Notons k la clôture algébrique de $\mathbb{Q}(q_1, \dots, q_{s-1})$ dans $\mathbb{C}$, où $q_1 = e^{x_1}, \dots, q_{s-1} = e^{x_{s-1}}$, et considérons le 1-motif, défini sur $k, M = [\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{G}_m^{s-1}]$, avec $u(1) = (q_1, \dots, q_{s-1}) \in (K^*)^{s-1}$.
D'après 4.5.3 les périodes de M sont $\log q_1, \dots, \log q_{s-1}, 2i\pi$ et puisque les $x_1, \dots,$ x_{s-1} sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, grâce à 4.6.5 on a $\dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}}) = s$. Par conséquent, (CPG?) appliquée à ce 1-motif sans partie abélienne, nous fournit l'inégalité recherchée

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, k(\log q_1, \dots, \log q_{s-1}, 2i\pi) \geq s$$

c'est à dire

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_s, e^{x_1}, \dots e^{x_s}) \geq s.$$

(A2) $2i\pi$ n'appartient pas au $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $x_1, \dots, x_s$:
Notons k la clôture algébrique de $\mathbb{Q}(q_1, \dots, q_s)$ dans $\mathbb{C}$ où $q_1 = e^{x_1}, \dots, q_s = e^{x_s}$, et considérons le 1-motif, défini sur $k, M = [\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{G}_m^s]$, avec $u(1) = (q_1, \dots, q_s) \in (K^*)^s$.
Grâce à 4.5.3 les périodes de M sont $\log q_1, \dots, \log q_s, 2i\pi$ et puisque les $x_1, \dots, x_s$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, d'après 4.6.5 $\dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}}) = s + 1$.
La conjecture (CPG?) appliquée à ce 1-motif sans partie abélienne, nous dit alors que $\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, k(\log q_1, \dots, \log q_s, 2i\pi) \geq s + 1$ et donc

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_s, e^{x_1}, \dots e^{x_s}, 2i\pi) \geq s + 1.$$

Mais ceci implique finalement que

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_s, e^{x_1}, \dots e^{x_s}) \geq s.$$

(B) La conjecture de Schanuel implique (CPG?):
Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ algébriquement fermé, mais qui n'est pas nécessairement algébrique. Considérons un 1-motif $M = [\mathbb{Z}^r \stackrel{u}{\longrightarrow} \mathbb{G}_m^s]$ défini sur K, sans partie abélienne, avec $u(1, \dots, 1) = (\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_r)$ où $\vec{q}_i = (q_{i1}, \dots, q_{is}) \in (K^*)^s$ pour $i = 1, \dots, r$.
D'après 4.5.3 les périodes de M sont $2i\pi$ et $\log q_{ij}$ pour $i = 1, \dots, r$ et $j = 1, \dots, s$. Soit $P(M)$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par ces périodes, notons d sa dimension et $x_1, \dots, x_d$ une $\mathbb{Q}$-base. Puisque les $x_1, \dots, x_d$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, d'après la conjecture de Schanuel $\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_d, e^{x_1}, \dots, e^{x_d}) \geq d$ et donc

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, K(2i\pi, \log q_{ij}, i = 1, \ldots, r, j = 1, \ldots, s) \geq d.$$

Mais puisque d'après 4.6.5 $\dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}}) = d$, on peut conclure que

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, K(\text{périodes}(M)) \geq \dim_{\mathbb{Q}} MT(M_{\mathbb{C}}).\diamondsuit$$

PREUVE de 4.3.4:
(A) (CP?) implique (II.2?):
D'après 4.5.3, les périodes de $A = [0 \longrightarrow A]$ sont les $\{\omega_{1i}, \omega_{2i}, \eta_{1i}, \eta_{2i}\}_i$ et d'après 4.6.3 $\dim_{\mathbb{Q}} MT(A_{\mathbb{C}}) = 3n_1 + n_2 + 1$, où n_1 est le nombre de courbes elliptiques pas de type CM et $n_2 = n - n_1$. Par conséquent (CP?) appliquée à A nous dit que

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \overline{\mathbb{Q}}(\omega_{1i}, \omega_{2i}, \eta_{1i}, \eta_{2i}, i = 1, \ldots, n) = 3n_1 + n_2 + 1. \tag{4.7.2.1}$$

Puisque les courbes elliptiques sont définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$, leurs invariants modulaires sont algébriques et donc (4.7.2.1) nous fournit l'égalité recherchée

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \overline{\mathbb{Q}}(j(\mathcal{E}_i), \omega_{1i}, \omega_{2i}, \eta_{1i}, \eta_{2i}, i = 1, \ldots, n) = 3n_1 + n_2 + 1.$$

(B) (II.2?) implique (CP?):
Puisque les courbes elliptiques sont définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$, leurs invariants modulaires elliptiques sont algébriques et donc (II.2?) nous dit que

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \overline{\mathbb{Q}}(\omega_{1i}, \omega_{2i}, \eta_{1i}, \eta_{2i}, i = 1, \ldots, n) \geq 3n_1 + n_2 + 1. \tag{4.7.2.2}$$

Maintenant d'après 4.5.3 les périodes de $A = [0 \longrightarrow A]$ sont les $\{\omega_{1i}, \omega_{2i}, \eta_{1i}, \eta_{2i}\}_i$ et d'après 4.6.3 $\dim_{\mathbb{Q}} MT(A_{\mathbb{C}}) = 3n_1 + n_2 + 1$. Par conséquent (4.7.2.2) peut se reécrire sous la forme:

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \overline{\mathbb{Q}}(\text{périodes}(A)) \geq \dim_{\mathbb{Q}} MT(A_{\mathbb{C}}).$$

Mais grâce à [D82] 1.6, on sait que $\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \overline{\mathbb{Q}}(\text{périodes}(A)) \leq \dim_{\mathbb{Q}} MT(A_{\mathbb{C}})$ et donc on peut conclure que

$$\text{deg.transc}_{\mathbb{Q}}\, \overline{\mathbb{Q}}(\text{périodes}(A)) = \dim_{\mathbb{Q}} MT(A_{\mathbb{C}}).\ \diamondsuit$$

Bibliographie

[Ax71] AX J., *On Schanuel's conjecture*, Annals of math., 93, (1971), p. 252-268.
[A92] ANDRE Y., *Mumford-Tate groups of mixed Hodge structures and the theorem of the fixed part*, Compos. Math., 82, (1992), p. 1-24.
[A96] ANDRE Y., *Pour une théorie inconditionnelle des motifs* , Pub. Math. de l'I.H.E.S., 83, (1996), p. 5-49.
[A97] ANDRE Y., *Quelques conjectures de transcendance issues de la géométrie algébrique*, preprint de l'Inst. Math. de Jussieu, 121 (1997).
[Be94] BERTRAND D., *1-motifs et relations d'orthogonalité dans les groupes de Mordell-Weil*, Publ. Math. Univ. Paris VI, 108, Problèmes Diophantiens 9293, exposé 2. (Math. Zapiski, 2, (1996), p. 2-22).
[Be98] BERTRAND D., *Relative splitting of one-motives*, Number Theory (Tiruchirapalli, 1996), Contemp. Math., 210, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1998).
[Br87] BREEN L., *Bientensions alternées*, Compos. Math., 63, (1987), p. 99-122.
[B83] BRYLINSKI J.-L., *1-motifs et formes automorphes (théorie arithmétique des domaines de Siegel)*, Publ. Math. Univ. Paris VII, 15, (1983), p. 43-106.
[BL92] BIRKENHAKE C., LANGE H., *Complex abelian varieties*, Springer-Verlag 302 (1992).
[C80] COLEMAN R., *On a stronger version of the Schanuel-Ax theorem*, Amer. J. of Math., 102, (1980), p. 595-624.
[D71] DELIGNE P., *Théorie de Hodge II*, Pub. Math. de l'I.H.E.S., 40, (1971), p. 5-57.
[D75] DELIGNE P., *Théorie de Hodge III*, Pub. Math. de l'I.H.E.S., 44, (1975), p. 6-77.
[D82] DELIGNE P., *Hodge cycles on abelian varieties*, Hodge cycles, motives and Shimura varieties, Springer L.N. 900, (1982), p. 9-100.
[DM82] DELIGNE P., MILNE J.-S., *Tannakian categories*, Hodge cycles, motives and Shimura varieties, Springer L.N. 900, (1982), p. 101-228.
[G66] GROTHENDIECK A., *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Pub. Math. de l'I.H.E.S., 29, (1966), p. 351-359.
[G72I] GROTHENDIECK A., *Biextensions de faisceaux en groupes*, Exp.VII, SGA 7, Springer L.N. 288, (1972), p. 185-217.
[G72II] GROTHENDIECK A., *Compléments sur les biextensions, propriétés générales des biextensions de schémas en groupes*, Exp.VIII, SGA 7, Springer L.N.

288, (1972), p. 218-312.
[JR87] JACQUINOT O., RIBET K., *Deficient points on extensions of abelian varieties by* $\mathbb{G}_m$, J. Number Th., 25, (1987), p. 133-151.
[KM90] KUMAR MURTY V., *Computing the Hodge group of an abelian variety*, Séminaire de théorie des nombres Paris 1988-1989, Prog. in Math. 91, (1990), p. 141-156.
[L66] LANG S., *Transcendental numbers*, 4176 Addison-Wesley (1966).
[M90] MILNE J.-S., *Canonical models of (mixed) Shimura varieties and automorphic vector bundles*, Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions I, (1990), p. 283-411.
[MM74] MAZUR B., MESSING W., *Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology*, Springer L.N. 170, (1974).
[Mo99] MOONEN B., *Notes on Mumford-Tate groups*, Notes de cours du centre Emile Borel, N. 19, (1999).
[Mu70] MUMFORD D., *Abelian varieties*, Oxford University Press (1970).
[N96] NESTERENKO Y., *Modular functions and transcendence questions*, Math. Sb. 187 (1996).
[Ra71] RAYNAUD M., *Variétés abéliennes et géométrie rigide*, Actes du Congrès Intern. des Math. Nice, Vol.1, , (1971), p. 473-477.
[R87] RIBET K., *Cohomological realization of a family of 1-motifs*, J. Number Th., 25, (1987), p. 152-161.
[S72] SAAVEDRA RIVANO N., *Catégories tannakiennes*, Springer L.N. 265 (1972)
[Se59] SERRE J.-P., *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann (1959).
[Se68] SERRE J.-P., *Abélian ℓ-adic representations and elliptic curves*, W.A. Benjamin INC (1968).