



HAL
open science

Sur quelques problèmes de la géométrie des systoles

Stéphane Sabourau

► **To cite this version:**

Stéphane Sabourau. Sur quelques problèmes de la géométrie des systoles. Mathématiques [math]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2001. Français. NNT: . tel-00001175

HAL Id: tel-00001175

<https://theses.hal.science/tel-00001175>

Submitted on 28 Feb 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ACADÉMIE DE MONTPELLIER
UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
- SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC -

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de
DOCTEUR
de l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc

Discipline : Mathématiques
École doctorale : Information, Structures, Systèmes

Sur quelques problèmes de la géométrie des systoles.

présentée et soutenue publiquement le 14 Décembre 2001
par

Stéphane SABOURAU

Rapporteurs :

M. Christophe BAVARD Université Bordeaux I
M. Peter BUSER École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Composition du jury :

M. Ivan BABENKO	Université Montpellier II	Directeur
M. Christophe BAVARD	Université Bordeaux I	Président/Rapporteur
M. Peter BUSER	EPFL	Rapporteur
M. Jacques LAFONTAINE	Université Montpellier II	Examineur
M. Daniel MASSART	Université Montpellier II	Examineur

Remerciements

En tout premier lieu, je souhaiterais remercier Ivan Babenko pour avoir guidé, avec exigence et le souci de me rendre indépendant, mes premiers pas dans la recherche. Les remarques et questions qu'il m'a adressées tout au long de ce travail furent des plus stimulantes. Sa bienveillance, sa disponibilité et ses conseils ont été précieux dans l'accomplissement de cette thèse. Je lui suis aussi reconnaissant de la grande liberté qu'il m'a toujours accordée.

Je remercie vivement Christophe Bavard pour plusieurs commentaires fort utiles et pour la minutie avec laquelle il a rapporté cette thèse. Qu'il ait présidé le jury m'honore.

Je remercie aussi chaleureusement Peter Buser pour avoir accepté la tâche de rapporteur. J'ai également apprécié sa bonne humeur lors de la soutenance.

Mes remerciements vont également à Jacques Lafontaine pour son soutien et sa participation au jury.

Daniel Massart a toujours eu la porte de son bureau ouverte pour moi ; sa présence dans le jury m'a réjoui.

Ce travail doit beaucoup au support et à l'accueil chaleureux de l'University of Pennsylvania, dont j'ai bénéficié pendant près d'un an et demi.

Je ne saurais ainsi assez remercier Chris Croke pour les nombreuses discussions que nous avons eues sur bien des domaines, qui ont contribué à élargir mes voies de recherche. La finesse de son intuition géométrique et son goût des problèmes naturels ont pour beaucoup participé à ma formation. Son écoute, ses conseils et son extrême gentillesse ont été d'un grand soutien.

Je souhaiterais aussi exprimer ma reconnaissance envers Wolfgang Ziller pour sa disponibilité et son soutien.

Merci également à Marc Herzlich de m'avoir, entre autres et en plus de ses encouragements, initié à la théorie de la convergence des suites de métriques.

Je remercie les équipes de géométrie de Montpellier et de Philadelphie pour les conversations que j'ai eues avec les membres de chacune d'elles.

Un grand merci à Hélène Davaux pour son aide à régler plusieurs tâches administratives.

Je tiens aussi à exprimer mon amitié envers tous les thésards et thésardes qui ont partagé avec moi ce périple ; en particulier, Aline Aigon, Thierry Champion, Vincent Deconchy, Jimmy Dillies, Elísabet Gunnlaugsdóttir, Sukhendu Mehrotra, Philippe Monnier, Pierre Mounoud, Sébastien Soucaze, Rachel Taillefer et Ollie Watson.

Je n'oublie pas les innombrables thés pris avec Anne-Laure.

J'ai bien sûr une pensée toute particulière pour Aïssa.

Enfin, mes pensées les plus douces et les plus intimes se tournent naturellement vers Sono.

Table des matières

Introduction générale et motivations	1
1 Problème isosystolique sur les surfaces	11
1.1 Métriques extrémales au voisinage des systoles	16
1.2 Métriques plates à singularités coniques	23
2 Short closed geodesics of the sphere	37
2.1 The minimax principle on the space of one-cycles	43
2.2 Diameter and the shortest closed geodesic	46
2.2.1 Curve-shortening process	46
2.2.2 Diameter and the shortest closed geodesic	50
2.3 Filling radius and short closed geodesics	51
2.3.1 Filling radius and the shortest closed geodesic	51
2.3.2 Index of the one-cycles	53
2.3.3 Filling radius and the shortest one-cycle of index one	58
2.4 Filling radius and global minimax processes	62
2.4.1 One-cycles derived from the minimax process	62
2.4.2 Connected components and the minimax process	65
2.5 Area and the shortest closed geodesic	71
3 The shortest geodesic loop	75
3.1 Extension process	80
3.1.1 Preliminaries	80
3.1.2 Extension criterion	81
3.2 Volume and short geodesic loops	84
3.2.1 Filling radii	84
3.2.2 Global volume estimate	85
3.3 Local volume and short geodesic loops	87
3.3.1 Extrinsic filling radius of approximating spheres	87
3.3.2 Intrinsic filling radius of approximating spheres	88
3.3.3 Local volume estimate	88
3.4 Volume and geodesic double loops	89

3.5	Finiteness results	93
3.5.1	Gromov-Hausdorff compactness	93
3.5.2	Homotopic finiteness	93

Introduction générale, motivations et présentation des résultats

Introduction générale, motivations et présentation des principaux résultats

L'étude des problèmes liés à la géométrie systolique est à l'origine de ce travail de recherche. Le point de vue adopté tout au long de cette thèse reflète notre intérêt pour les idées et concepts issus de cette géométrie. Avant d'aller plus loin, nous rappelons quelques étapes de son développement.

Le terme de systole, introduit par M. Berger, désigne l'infimum des longueurs des courbes non contractiles d'une variété riemannienne non simplement connexe. La systole d'une variété riemannienne fermée est ainsi réalisée par la longueur de la plus courte géodésique fermée non homotopiquement triviale. La première inégalité isosystolique a été démontrée en 1949 par C. Loewner dans un travail non publié (voir [17]). Cette inégalité marque la naissance de la géométrie systolique. Elle s'écrit

$$\text{Aire}(\mathbb{T}^2, g) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sys}(\mathbb{T}^2, g)^2$$

où $\text{sys}(\mathbb{T}^2, g)$ représente la systole du tore \mathbb{T}^2 muni d'une métrique riemannienne g . De plus, l'égalité a lieu si et seulement si le tore est isométrique à un tore plat équilatéral.

L'inégalité de Loewner ne dépend pas de la métrique. Elle constitue à ce titre un exemple d'inégalité géométrique universelle tout comme le théorème isoembolique, auquel nous nous référons dans la suite. Sa généralisation apparaît dans la liste de problèmes présentée par S.-T. Yau dans [58, problème 87].

D'autres inégalités isosystoliques ont ensuite été découvertes : tout d'abord sur le plan projectif réel (voir [52]) puis sur les surfaces non simplement connexes (voir [1], [7], [19], [34] et [30]). Le problème pour les variétés de dimension supérieure a été résolu dans l'article "Filling Riemannian manifolds" à l'aide de techniques dites de "filling" (voir [30]). Plus précisément, M. Gromov a montré la rigidité isosystolique des variétés essentielles. Ces dernières comprennent notamment les variétés

asphériques et les espaces projectifs réels. Finalement, les variétés essentielles sont les seules variétés à admettre des inégalités isosystoliques. Ce dernier point a été établi par I. Babenko dans [6].

La notion de systole s'étend en dimension supérieure à l'aide des cycles non homologiquement triviaux. Les résultats sont alors radicalement différents : aucun résultat de rigidité systolique n'est possible dès qu'une systole de dimension supérieure à deux intervient. Le premier contre-exemple a été établi sur $S^1 \times S^3$ par M. Gromov (voir [17]). La conclusion générale revient à I. Babenko, M. Katz et A. Suciuc (voir [6] et [36]).

Dans une voie différente, la géométrie des systoles a récemment été étudiée par P. Schmutz-Schaller dans le cadre de la géométrie hyperbolique (voir [49] et [51]) et par C. Bavard dans celui des variétés abéliennes principalement polarisées (voir [12]). Elle a notamment conduit à une caractérisation des groupes arithmétiques à l'aide du spectre des longueurs (voir [50]).

L'étude des systoles a aussi apporté des réponses géométriques au problème de Schottky sur les jacobiniennes des surfaces de Riemann. Cette approche a été développée par P. Buser et P. Sarnak dans [18] ainsi que par M. Gromov dans [31]. Par la suite, nous considérerons l'aspect riemannien initial. Les variétés en jeu dans la géométrie systolique étant caractérisées, notre attention se tournera vers des questions d'ordre purement géométrique.

Le reste de cette introduction est consacré à la présentation du contenu de cette thèse. Au cours de cette introduction, nous situerons chacun de nos résultats dans le contexte de la géométrie systolique afin d'en souligner les motivations.

Cette thèse se compose de trois parties. Dans leur construction, les différentes parties sont indépendantes, si bien que le lecteur ou la lectrice intéressé(e) par seulement l'une d'entre elles pourra s'y reporter aisément. Afin d'accorder une place réduite aux préliminaires et généralités, nous ne leur avons pas consacré de chapitre. Nous avons préféré effectuer des renvois à la littérature chaque fois que nécessaire.

Le premier chapitre traite des métriques extrémales pour l'inégalité isosystolique sur les surfaces. Bien que la caractérisation topologique des variétés admettant une inégalité isosystolique soit complète, plusieurs questions de nature géométrique restent en suspens. Le principal challenge consiste à établir les inégalités isosystoliques optimales et à décrire les métriques extrémales.

Ce problème est résolu seulement dans le cas du tore, de l'espace projectif réel et de la bouteille de Klein. Dans les deux premiers exemples, les métriques extrémales correspondent à des métriques standard. En revanche, la métrique extrémale de la bouteille de Klein, découverte par C. Bavard (voir [8], [9] et [48]), diffère de la métrique plate standard et présente des singularités.

Ces résultats peuvent être démontrés à l'aide de la représentation conforme des sur-

faces en utilisant la méthode des longueurs extrémales. Pour les surfaces de genre supérieur à deux, ces techniques n'ont malheureusement donné aucun résultat concluant.

La seule étude générale des métriques extrémales pour le problème isosystolique sur les surfaces de genre supérieur à deux est due à E. Calabi. Il a montré dans [20] que les métriques extrémales sont plates au voisinage des points par lesquels passent exactement deux systoles. Il a aussi présenté deux exemples de surfaces plates à singularités coniques de genre trois qu'il conjecture extrémales pour le problème isosystolique.

Dans le même ordre d'idées, nous démontrons un premier théorème dont l'énoncé nous a été communiqué par C. Bavard. La preuve que nous en donnons fournit par la même occasion une réciproque partielle au critère de Beurling issu de la méthode des longueurs extrémales sur l'espace total des métriques.

Théorème I.1. *Soient M une surface extrémale pour le problème isosystolique et γ_0 une systole orientable essentielle. Si la métrique de M est lisse au voisinage de γ_0 alors la surface est plate au voisinage de γ_0 .*

Contrairement au résultat d'E. Calabi sur les métriques extrémales, aucune restriction sur le nombre de systoles passant par un point n'est effectuée dans ce théorème. En revanche, nous devons supposer la métrique extrémale lisse au voisinage d'une systole. Ce point est en fait nécessaire : la métrique extrémale de la bouteille de Klein présente des singularités au voisinage de ses systoles orientables et n'est plate nulle part. De même, il est nécessaire de supposer la systole orientable comme le montre le même exemple au voisinage lisse des systoles non-orientables.

Le résultat suivant, dont aucune preuve complète ne semble figurer dans la littérature, se déduit immédiatement du théorème précédent.

Corollaire I.2. *Les métriques extrémales pour le problème isosystolique des surfaces fermées orientables de genre supérieur ou égal à deux ne sont pas lisses.*

Ces différents résultats et conjectures, ainsi que des considérations sur la structure conforme, suggèrent que les métriques plates à singularités jouent un rôle privilégié pour le problème isosystolique des surfaces orientables.

Une étude attentive du problème sur les surfaces de genre deux permet toutefois de montrer le résultat suivant :

Théorème I.3. *Aucune métrique plate à singularités coniques n'est extrémale pour le problème isosystolique sur les surfaces fermées orientables de genre deux.*

Les théorèmes I.1 et I.3 suggèrent finalement que, dans le cas général, les métriques extrémales possèdent des singularités plus complexes que les seules singularités coniques.

Le deuxième chapitre est consacré à une généralisation riemannienne naturelle du problème isosystolique. Avant d'en exposer les résultats, remarquons que la notion de systole n'a pas de sens sur la sphère et plus généralement sur les variétés simplement connexes. Néanmoins, en oubliant la condition topologique de non-contractilité des systoles, il est possible de considérer, sur les variétés riemanniennes fermées, la longueur de la plus courte géodésique périodique non triviale. Les problèmes de la géométrie systolique se posent dans les mêmes termes avec cette notion étendue de systole.

La première inégalité "isosystolique" généralisée a été obtenue par C. Croke sur la sphère (voir [24]). Elle s'écrit

$$\text{Aire}(S^2, g) \geq \frac{1}{(31)^2} \text{sys}_0(S^2, g)^2$$

où $\text{sys}_0(S^2, g)$ représente la longueur de la plus courte géodésique fermée non triviale de (S^2, g) . Cette inégalité représente le seul exemple d'inégalité "isosystolique" non couvert par le théorème de Gromov sur les variétés essentielles. Soulignons au passage qu'aucun contre-exemple à la rigidité "isosystolique" des variétés riemanniennes n'est connu pour la notion étendue de systole.

En tant que généralisation du problème isosystolique, nous nous intéressons, dans le deuxième chapitre, à l'inégalité de Croke. Nous l'améliorons dans trois directions en proposant une démonstration différente utilisant les techniques de "filling". Nous obtenons tout d'abord une meilleure inégalité, laquelle n'est cependant pas optimale. Ensuite, notre inégalité passe par la minoration d'un invariant plus fin que l'aire dans ce type de problème, appelé rayon de remplissage ou "filling radius" en anglais. Cette minoration complète et unifie les résultats sur les surfaces pour les notions de systoles classiques et généralisées. Enfin, nous précisons la géométrie des géodésiques fermées à considérer, à travers leur dynamique en tant qu'orbites périodiques. Notons que la solution à ce problème pour les systoles classiques est immédiate : celles-ci sont simples d'indice nul.

Notre motivation pour étudier ce dernier point provient de l'exemple d'une sphère riemannienne présentant une taille fine comme la surface d'un sablier. Dans cet exemple, la plus courte géodésique fermée est simple d'indice nul et sa longueur fournit une minoration médiocre de l'aire de la surface. Nous avons cherché à établir une inégalité "isosystolique" prenant en compte ce genre de phénomène. Notre principal résultat dans cette voie s'énonce :

Théorème II.1. *Soit M une sphère riemannienne. On a*

$$\text{Aire}(M) \geq \frac{1}{(20)^2} L(M)^2$$

où $L(M)$ représente la longueur de la plus courte courbe non triviale parmi les géodésiques fermées simples d'indice un et les géodésiques en huit d'indice nul.

L'exemple d'une sphère à trois longs doigts montre qu'il est nécessaire de considérer, dans ce problème, les géodésiques en huit d'indice nul.

La preuve du théorème II.1 fournit en fait une version localisée plus précise que celle énoncée, toujours en accord avec l'intuition.

Au cours de cette preuve, à l'aide d'un principe de minimax provenant de la théorie géométrique de la mesure, établi par F. Almgren et J. Pitts et utilisé par E. Calabi et J. Cao dans [21], nous démontrons en fait le résultat suivant :

Théorème II.2. *Soit M une sphère riemannienne. On a*

$$\text{FillRad}(M) \geq \frac{1}{20} L'_1(M)$$

où $L'_1(M)$ représente la longueur du plus court 1-cycle d'indice un.

L'étude de la structure des 1-cycles d'indice un fournit alors le théorème II.1.

Le principe de minimax global de Birkhoff appliqué à l'espace des 1-cycles est un procédé algébrique naturel conduisant à un 1-cycle d'indice un. La masse de ce 1-cycle défini par la théorie de Morse est notée $L_1(S^2, g)$. Nous montrons qu'elle ne satisfait aucune minoration universelle du filling radius comparable à celle du théorème II.2. Plus précisément, on a :

Théorème II.3. *Il existe une suite g_n de métriques riemanniennes sur S^2 satisfaisant*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{FillRad}(S^2, g_n)}{L_1(S^2, g_n)} = 0$$

Ce résultat met en perspective le rôle joué par le plus court 1-cycle d'indice un. En remplaçant la fonctionnelle masse classique par une fonctionnelle prenant en compte les différentes composantes connexes des 1-cycles, nous définissons un nouveau principe de minimax global dont la valeur critique correspondante minore le filling radius de la sphère. Ce résultat apporte un éclairage sur la nature du contre-exemple construit dans la preuve du théorème II.3.

Pour conclure la présentation du deuxième chapitre de cette thèse, nous introduisons un autre type de relation universelle en décrivant tout d'abord son pendant

dans le cadre de la géométrie systolique : le diamètre et la systole des variétés non simplement connexes satisfont l'inégalité optimale $\text{sys}(M) \leq 2\text{Diam}(M)$, immédiate à vérifier.

Une inégalité similaire, non-optimale, entre le diamètre et la longueur de la plus courte géodésique fermée non triviale a été établie par C. Croke dans [24] puis améliorée par M. Maeda dans [40]. Nous l'améliorons à notre tour et montrons les inégalités suivantes dont les constantes sont meilleures que celles connues jusqu'alors.

Théorème II.4. *Soit M une sphère riemannienne. On a*

$$\text{Diam}(M) \geq \frac{1}{4}\text{sys}_0(M)$$

$$\text{Aire}(M) \geq \frac{2}{81\sqrt{3}}\text{sys}_0(M)^2$$

Nous ne connaissons aucun contre-exemple mettant en défaut l'inégalité $\text{sys}_0(M) \leq 2\text{Diam}(M)$ sur la sphère.

Dans la démonstration de la seconde inégalité, nous utilisons un revêtement ramifié sur la sphère permettant de ramener le problème "isosystolique" sur le tore où l'inégalité de Loewner est optimale. Pour la métrique plate équilatérale sur le tore, le revêtement que nous construisons donne une métrique dégénérée sur la sphère, obtenue en recollant deux copies d'un triangle plat équilatéral le long de leurs bords. Cette métrique correspond précisément à la conjecture de C. Croke pour l'inégalité "isosystolique" sur la sphère.

Après avoir écrit nos résultats, nous avons appris que A. Nabutovsky et R. Rotman ont indépendamment démontré des inégalités similaires à celles du théorème II.4 (voir [42]).

Le dernier chapitre de cette thèse traite du cas des variétés de dimension quelconque. Comme nous l'avons indiqué, ce problème est largement ouvert : aucun exemple ou contre-exemple à la rigidité "isosystolique" pour la longueur de la plus courte géodésique fermée non triviale n'est connu parmi les variétés non-essentielles de dimension supérieure ou égale à trois.

Dans cette partie, nous nous intéressons aux relations entre le volume des variétés riemanniennes et la longueur de leur plus court lacet géodésique non trivial. Les résultats de rigidité obtenus sont de même nature que le théorème isoembolique, démontré par M. Berger dans sa version globale (voir [15]) et par C. Croke dans sa version locale (voir [23]). Ils sont aussi à rapprocher des généralisations de M. Gromov (voir [30]) et de R. Greene et P. Petersen (voir [29]) en terme de la fonction de contractibilité géométrique locale.

Dans leur version globale, ces résultats s'énoncent :

Théorème III.1. *Soit M une variété riemannienne complète. Il existe des constantes C_n et C'_n strictement positives, dépendant seulement de la dimension n de M telles que*

$$\begin{aligned} \text{Vol}(M) &\geq C_n \ell(M)^n \\ \text{Diam}(M) &\geq C'_n \ell(M) \end{aligned}$$

où $\ell(M)$ représente la longueur du plus court lacet géodésique non trivial dans M .

Dans leur version locale, ils prennent la forme :

Théorème III.2. *Soit M une variété riemannienne complète. Il existe une constante C''_n strictement positive, dépendant seulement de la dimension n de M telle que*

$$\text{Vol}(B(x_0, R)) \geq C''_n R^n$$

pour chaque boule $B(x_0, R)$ de rayon $R \leq \frac{1}{2}\ell(M)$ dans M .

Les constantes dans les inégalités précédentes ne sont pas optimales. Toutefois, leurs expressions sont explicites.

Nous établissons aussi des inégalités similaires à celles du théorème III.1 pour la longueur du plus court double lacet géodésique.

Un résultat analogue à la seconde inégalité du théorème III.1 a été démontré par R. Rotman avec des hypothèses supplémentaires sur la courbure et topologie des variétés (voir [47]).

Nous indiquons deux conséquences directes des estimées principales.

Le théorème III.1 permet tout d'abord de se défaire d'une hypothèse dans un théorème de compacité $C^{1,\alpha}$ de M. Anderson sur l'espace des métriques pour la topologie de Lipschitz (voir [3]). Ensuite, dans le cas non compact, le théorème III.2 conduit immédiatement à une estimée sur la croissance du volume des boules de rayon arbitrairement grand.

Les estimées géométriques obtenues et les constructions sur lesquelles elles reposent conduisent à des restrictions topologiques données par le résultat de finitude homotopique suivant :

Théorème III.3. *La classe $\mathcal{C} = \mathcal{C}_n(V_0, \ell_0)$ des variétés riemanniennes complètes M , de dimension n , satisfaisant $\text{Vol}(M) \leq V_0$ et $\ell(M) \geq \ell_0$, contient un nombre fini de types d'homotopie simple.*

Nous terminons en présentant une borne explicite du nombre de types d'homotopie ainsi que des nombres de Betti des variétés dans \mathcal{C} .

Notons que le résultat de finitude homotopique précédent est mis en défaut si l'on remplace la longueur du plus court lacet géodésique par la systole des variétés riemanniennes (voir [6]). En fait, le problème de la finitude des classes d'isomorphisme des groupes fondamentaux sous des hypothèses analogues à celles du théorème III.3 est toujours ouvert en géométrie systolique (voir [31]).

Chapitre 1

Problème isosystolique sur les surfaces

Introduction

L'étude des métriques extrémales pour le problème isosystolique sur les surfaces constitue l'objet de ce chapitre.

Soit (M, g) une variété riemannienne fermée non simplement connexe. La systole de M , notée $\text{sys}(M, g)$, est la borne inférieure des longueurs des courbes fermées non contractiles. Dans le cas où la variété est fermée, elle est atteinte par une géodésique fermée non homotopiquement triviale. Malgré le léger risque de confusion, nous appellerons aussi systoles de M les plus courtes géodésiques fermées non homotopiquement triviales.

La géométrie systolique est née en 1949 lorsque la première inégalité isosystolique du type

$$\mathfrak{S}(M, g) := \frac{\text{Vol}(M, g)}{\text{sys}(M, g)^n} \geq C$$

où C est une constante strictement positive indépendante de la métrique g , fut établie pour le tore 2-dimensionnel par Loewner dans un travail non publié (voir [17] pour une présentation du sujet).

Cette inégalité s'écrit $\text{Aire}(\mathbb{T}^2, g) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sys}(\mathbb{T}^2, g)^2$. Elle est de plus optimale : l'égalité est satisfaite si et seulement si le tore (\mathbb{T}^2, g) est isométrique au tore plat équilatéral.

Seules deux autres inégalités isosystoliques optimales sont connues à ce jour. Il s'agit des inégalités $\mathfrak{S}(\mathbb{R}P^2) \geq \frac{2}{\pi}$ et $\mathfrak{S}(K^2) \geq \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ établies respectivement en 1951 par Pu pour le plan projectif réel (voir [52]) et en 1986 par C. Bavard pour la bouteille de Klein (voir [8], [9] et [48]). Le cas d'égalité pour le plan projectif réel est réalisé par la métrique ronde standard. En revanche, le cas d'égalité pour la bouteille de Klein est réalisé par une métrique singulière, l'égalité n'étant atteinte pour aucune métrique lisse.

Depuis les travaux d'Accola et Blatter en 1960 (voir [1] et [7]), complétés dans [19,

Chap. 5.3], [34] et [30], nous savons que chaque surface fermée non simplement connexe satisfait une inégalité isosystolique. Toutefois, aucune d'entre elles n'est optimale. En dimension supérieure, M. Gromov a montré dans [30] que chaque variété essentielle satisfait une inégalité isosystolique. Une réciproque peut être trouvée dans [5].

Une métrique réalisant un minimum local de la fonctionnelle \mathfrak{S} est dite extrémale. Comme il a été dit, seuls trois exemples sont connus. Pour une notion de systole étendue aux groupes discrets d'isométries de variétés riemanniennes, les métriques extrémales des 17 groupes cristallographiques du plan et des groupes du triangle ont été décrites dans [11]. L'existence de métriques extrémales pour le problème isosystolique sur les surfaces a été démontrée dans [30, theorem 5.6.C']. Les métriques extrémales des surfaces de genre supérieur à deux ont ensuite été étudiées dans [20]. Dans cette référence, E. Calabi présente deux exemples de métriques plates à singularités coniques sur la surface orientable de genre trois qu'il conjecture extrémales pour le problème isosystolique. Il montre aussi que les métriques extrémales sont plates au voisinage des points par lesquels passent deux systoles exactement. Dans [16], M. Berger reprend un exemple, introduit auparavant dans [30, Example 5.6.B'], de métrique plate à singularités coniques sur la surface orientable de genre deux qu'il conjecture extrémale.

Notons que chacune de ces métriques est extrémale pour le problème isosystolique conforme, i.e., lorsque l'on restreint l'espace des métriques à une classe conforme. On se référera à ce propos à [2, Chap. 4] et [10] pour une description de la méthode des longueurs extrémales.

Nous mentionnons aussi les articles [53] et [56] où le problème isosystolique conforme a été étudié pour les surfaces non compactes complètes sans bord avec une notion d'aire généralisée. Les auteurs ont indépendamment montré le théorème suivant.

Théorème 1.0.1. *Soit M une surface orientable non compacte complète sans bord, munie d'une métrique extrémale pour le problème isosystolique conforme avec une notion d'aire généralisée.*

Si la métrique est lisse au voisinage d'un point de M par lequel ne passe qu'une systole alors la surface est plate au voisinage de ce point.

Dans le même ordre d'idées que le résultat précédent ou que celui de Calabi sur la structure des métriques extrémales au voisinage de points par lesquels passent deux systoles exactement, on montre le théorème qui suit. Soulignons auparavant que, contrairement aux deux résultats mentionnés, aucune hypothèse sur le nombre de systoles passant par un point n'est effectuée. En revanche, nous devons supposer la métrique lisse non plus au voisinage d'un point mais au voisinage d'une systole.

Théorème 1.0.2. *Soient M une surface fermée extrémale pour le problème isosystolique et γ_0 une systole orientable essentielle. Si la métrique de M est lisse au voisinage de γ_0 alors la surface est plate au voisinage de γ_0 .*

La définition d'une systole essentielle est donnée dans la section 1.1.

Remarque. La condition du théorème précédent est suffisante dans le sens suivant. Si la systole γ_0 n'est pas orientable ou si la métrique de M n'est pas lisse au voisinage de γ_0 alors la surface M n'est pas nécessairement plate au voisinage de γ_0 . Un contre-exemple est donné par la métrique extrémale de la bouteille de Klein (voir [8]). Cette dernière n'est plate ni au voisinage lisse de ses systoles non-orientables, ni au voisinage non-lisse de ses systoles orientables.

À partir de ce résultat, on déduit immédiatement le corollaire suivant dont une preuve est esquissée dans [13, p. 309].

Corollaire 1.0.3. *Les métriques extrémales pour le problème isosystolique des surfaces fermées orientables de genre supérieur ou égal à deux ne sont pas lisses.*

À la lumière de ces résultats et conjectures, les métriques plates à singularités coniques semblent jouer un rôle privilégié dans le problème isosystolique sur les surfaces, du moins dans le cas orientable. Une étude attentive du problème sur les surfaces de genre deux permet toutefois de montrer le résultat suivant.

Théorème 1.0.4. *Aucune métrique plate à singularités coniques n'est extrémale pour le problème isosystolique sur les surfaces fermées orientables de genre deux.*

Les deux théorèmes démontrés laissent donc à penser que les singularités des métriques extrémales en genre deux ne sont pas réduites à des points.

Ce chapitre est composé de deux parties.

Dans la première, nous démontrons le théorème 1.0.2. Au cours de la preuve, nous établissons une réciproque partielle au critère de Beurling. Une réciproque partielle à ce critère issu de la méthode des longueurs extrémales (voir [2, p. 61]) a été auparavant démontrée dans [56]. La réciproque que nous démontrons s'applique non pas à la classe conforme d'une métrique donnée, mais à l'espace total des métriques. Elle permet aussi de traiter le problème isosystolique dans le cas où le feuilletage systolique n'est pas simple. Dans la seconde partie, nous introduisons les métriques plates à singularités coniques sur les surfaces. Nous traitons ensuite l'exemple d'une surface de genre deux obtenue en recollant trois cylindres plats le long d'arcs de leurs bords. La preuve du théorème 1.0.4 est alors présentée. Elle consiste à ramener le problème à l'exemple précédent en étudiant la géométrie des systoles et ses conséquences sur les angles des singularités coniques.

1.1 Métriques extrémales au voisinage des systoles

Avant d'énoncer le théorème principal de cette section, nous introduisons quelques notations et définitions.

La longueur d'une courbe γ sur une variété fermée M munie d'une métrique g est notée $L_g(\gamma)$. On pose $\text{sys}(g; \alpha) = \inf\{L_g(\gamma) \mid \gamma \in \alpha\}$ où α représente une classe non triviale de $\pi_1(M)$. En particulier, on a $\text{sys}(g) = \inf\{\text{sys}(g; \alpha) \mid \alpha \in \pi_1(M) \setminus \{0\}\}$.

Dans ce qui suit, \widetilde{M} désigne une surface fermée extrémale pour le problème isosystolique. Soit $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ le revêtement universel de M . On munit \widetilde{M} de la métrique "tirée en arrière".

Étant donné $x_0 \in M$, on fixe une pré-image $\tilde{x}_0 \in \widetilde{M}$ de x_0 . Soient γ_0 une systole orientable de M et $\tilde{\gamma}_0$ le relevé de γ_0 passant par \tilde{x}_0 .

On suppose la métrique g lisse au ρ -voisinage tubulaire \mathcal{U} de γ_0 pour un certain ρ positif. Quitte à diminuer ρ , on peut supposer que \mathcal{U} est homéomorphe à un cylindre. La métrique étant lisse sur \mathcal{U} , les systoles homotopes à γ_0 ne se coupent pas dans \mathcal{U} . La pré-image $\tilde{\mathcal{U}}$ de \mathcal{U} par π s'identifie avec le ρ -voisinage tubulaire de $\tilde{\gamma}_0$. Le sous-groupe $\langle \gamma_0 \rangle \subset \pi_1(M, x_0)$ engendré par γ_0 agit par translations sur $\tilde{\mathcal{U}}$. Le quotient s'identifie avec \mathcal{U} .

Puisque γ_0 est orientable, la géodésique $\tilde{\gamma}_0$ est infinie et $\tilde{\mathcal{U}}$ est une bande infinie de largeur 2ρ . De plus, puisque M est une surface, la géodésique $\tilde{\gamma}_0$ est minimisante, i.e., la courbe $\tilde{\gamma}_0$ réalise la distance minimale entre deux quelconques de ses points. En effet, les systoles orientables des surfaces sont stables, c'est-à-dire $\text{sys}(M; [n\gamma]) = n \cdot \text{sys}(M; [\gamma])$.

Remarque. Cette dernière propriété n'est plus vraie en dimension supérieure ou égale à 3. Elle n'est plus vraie non plus pour les systoles multi-dimensionnelles. Ces dernières ne sont pas même stables sur les tores plats (voir [39]).

Le résultat suivant a été établi par E. Calabi dans [20]. Il décrit localement les métriques extrémales au voisinage des points où passent exactement deux systoles.

Proposition 1.1.1. *Soit M une surface fermée extrémale pour le problème isosystolique.*

Au moins deux systoles passent par chaque point de M .

Si deux systoles exactement passent par un point de M , la métrique est plate au voisinage de ce point et les deux systoles sont orthogonales.

Une systole orientable γ est dite essentielle s'il existe un voisinage tubulaire de γ admettant un feuilletage par des systoles homotopes à γ .

Par la suite, on supposera la systole γ_0 essentielle. D'après la proposition 1.1.1, de telles systoles existent sur M . Dans ce cas, quitte à réduire le voisinage \mathcal{U} , on peut supposer ce dernier feuilleté par une famille γ_λ de systoles homotopes à γ_0 et par leurs trajectoires orthogonales. Fixons un voisinage compact \mathcal{U}' de γ_0 , homéomorphe à un cylindre, contenu dans \mathcal{U} , et bordé par deux systoles homotopes à γ_0 . La métrique étant lisse sur \mathcal{U} , les systoles homotopes à γ_0 coupant \mathcal{U}' sont contenues dans \mathcal{U}' .

DÉFINITION : Une fonction potentielle u de γ_0 est une fonction lisse 1-lipschitzienne définie sur $\tilde{\mathcal{U}}$, constante le long de chaque trajectoire orthogonale, dont le gradient est un vecteur unitaire tangent aux relevés $\tilde{\gamma}_\lambda$ des courbes γ_λ .

On a $u(\gamma_0.\tilde{x}) = u(\tilde{x}) + L(\gamma_0)$ où $\gamma_0.\tilde{x}$ représente l'image de \tilde{x} par l'action de γ_0 .

Les fonctions potentielles existent en toute généralité (voir [20,p. 179]). Dans le cas où la métrique est lisse sur \mathcal{U} , on peut les construire à partir de la trajectoire τ passant par \tilde{x}_0 , orthogonale aux courbes $\tilde{\gamma}_\lambda$. L'arc τ divise $\tilde{\mathcal{U}}$ en deux parties $\tilde{\mathcal{U}}_+$ et $\tilde{\mathcal{U}}_-$. On définit une fonction u en posant :

$$u(\tilde{x}) = \begin{cases} d(\tau, \tilde{x}) & \text{si } \tilde{x} \in \tilde{\mathcal{U}}_+ \\ -d(\tau, \tilde{x}) & \text{si } \tilde{x} \in \tilde{\mathcal{U}}_- \end{cases}$$

Puisque les trajectoires orthogonales à τ correspondent aux géodésiques minimisantes $\tilde{\gamma}_\lambda$, la distance de \tilde{x} à τ est réalisée par l'unique segment (orthogonal à τ), contenu dans une courbe $\tilde{\gamma}_\lambda$, joignant \tilde{x} à τ . Ainsi, l'arc τ n'a pas de point focal dans $\tilde{\mathcal{U}}$ et la fonction u satisfait la définition d'une fonction potentielle de γ_0 .

Nous énonçons maintenant un résultat analogue à la proposition 1.1.1 sans hypothèse sur le nombre de systoles passant par un point d'une surface extrémale.

Théorème 1.1.2. *Soient M une surface fermée extrémale pour le problème isosytolique et γ_0 une systole orientable essentielle.*

Si la métrique de M est lisse au voisinage de γ_0 alors la surface est plate au voisinage de γ_0 .

Preuve. Toutes les fonctions considérées seront lisses sur leur domaine de définition. Étant donnée une fonction potentielle u de γ_0 , il existe une fonction v formant avec u un système de coordonnées de $\tilde{\mathcal{U}}$, noté $z = (u, v)$, telle que $\tilde{g} = |dz|^2 = du^2 + \tilde{C}(u, v)^2 dv^2$ où \tilde{C} est une fonction lisse positive définie sur $\tilde{\mathcal{U}}$ (voir [37, Lemma 4.3.6]). La fonction v est constante le long des relevés dans \mathcal{U} des géodésiques γ_λ . La famille de courbes γ_λ s'étend en un feuilletage de \mathcal{U} défini par les courbes fermées $v = \text{constante}$. Puisque la métrique \tilde{g} est invariante par l'action de $\pi_1(M, x_0)$, la fonction \tilde{C} est $L(\gamma_0)$ -périodique par rapport à sa première variable, c'est-à-dire $\tilde{C}(u + L(\gamma_0), v) = \tilde{C}(u, v)$. Par conséquent, en quotientant par l'action

de $\langle \gamma_0 \rangle$, la métrique g s'écrit $g = du^2 + C(u, v)^2 dv^2$ sur \mathcal{U} .

Si C ne dépend pas de u , la métrique s'écrit $g = du^2 + C(v)^2 dv^2 = du^2 + dw^2$. Dans ce cas, la métrique est plate au voisinage de γ_0 . Nous pouvons donc supposer que $\frac{\partial C}{\partial u}$ n'est pas identiquement nulle au voisinage \mathcal{U}' de γ_0 .

Fixons $\varepsilon > 0$. Les angles que forment les courbes γ_λ avec les géodésiques fermées non homotopes à γ_0 de longueurs inférieures à $\text{sys}(g) + \varepsilon$ sont minorés par une constante $\theta_0 > 0$.

Fixons θ strictement compris entre 0 et $\frac{\theta_0}{2}$. Étant donnée une fonction $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ au support contenu dans l'intérieur de \mathcal{U}' , on définit $\psi = \frac{-\varphi}{C^2 \tan^2 \theta}$ à support dans \mathcal{U}' . On a $(\varphi + \psi)C = \varphi h$ où h est une fonction à support dans \mathcal{U} égale à $(1 - \frac{1}{C^2 \tan^2 \theta})C$ sur \mathcal{U}' . Les systoles homotopes à γ_0 ne se coupent pas dans \mathcal{U} . Puisque $\frac{\partial C}{\partial u}$ n'est pas identiquement nulle sur \mathcal{U}' , la fonction $h(\cdot, v)$ n'est pas constante sur \mathcal{U}' . Il existe donc une fonction φ au support contenu dans l'intérieur de \mathcal{U}' telle que

$$\int_{\gamma_\lambda} \varphi d\sigma \geq 0 \text{ pour chaque systole } \gamma_\lambda \quad (1.1)$$

$$\int_M (\varphi + \psi)C dg < 0 \quad (1.2)$$

Nous définissons une famille à un paramètre de métriques g_t avec $g_0 = g$ en posant dans le système de coordonnées précédent

$$g_t = \begin{cases} (1 + t\varphi)du^2 + (1 + t\psi)C^2 dv^2 & \text{sur } \mathcal{U}' \\ g & \text{hors de } \mathcal{U}' \end{cases}$$

Évaluons la longueur de la systole de g_t au voisinage de 0.

Pour t suffisamment petit, la g -longueur des systoles de g_t est inférieure à $\text{sys}(g) + \varepsilon$. Par conséquent, les systoles de g_t sont à rechercher parmi les classes α non triviales de $\pi_1(M)$ admettant un représentant de g -longueur inférieure à $\text{sys}(g) + \varepsilon$. Montrons qu'il existe $K > 0$ ne dépendant pas de α tel que $\text{sys}(g_t; \alpha) \geq \text{sys}(g) - Kt^2$ pour t suffisamment petit. Ce qui montre que $\text{sys}(g_t) \geq \text{sys}(g) - Kt^2$.

Soit c_t un représentant de α de plus courte g_t -longueur. Par définition, on a $L_{g_t}(c_t) = \text{sys}(g_t; \alpha)$. Les courbes c_t forment une famille de g_t -géodésiques fermées de M . Soit t_n une suite de réels positifs tendant vers 0. D'après le théorème de compacité d'Ascoli, il existe une sous-suite t'_n de t_n telle que $c_{t'_n}$ converge vers une courbe c dans l'espace ΛM des courbes fermées. La courbe c est un représentant de α de plus courte g -longueur. C'est donc une g -géodésique fermée de M .

De plus, $\lim_{n \rightarrow \infty} L_{g_n}(c_n) = L_g(c) = \text{sys}(g; \alpha)$ où $g_n = g_{t'_n}$ et $c_n = c_{t'_n}$.

Supposons α d'indice non nul avec $[\gamma_0]$. Rappelons que les g -angles entre les courbes γ_λ et les g -géodésiques fermées de longueur $< \text{sys}(g) + \varepsilon$ et d'indice non

nul avec γ_0 sont minorés par θ_0 . Par conséquent, pour N suffisamment grand, les g -angles entre les courbes γ_λ et les courbes c_n d'indice non nul avec γ_0 sont minorés par $\frac{\theta_0}{2}$ pour $n \geq N$. Les vecteurs de g_t -norme strictement inférieure à leur g -norme appartiennent au fibré tangent de \mathcal{U}' . Par construction, les g -angles que forment ces vecteurs avec les courbes γ_λ sont inférieurs à θ . En effet, étant donné un vecteur de coordonnées (u, v, u', v') dans $T\mathcal{U}'$ formant un angle θ' avec une courbe γ_λ , on a $\tan \theta' = \frac{v'}{u'}$. De plus,

$$\begin{aligned} (1+t\varphi)u'^2 + (1+t\psi)C^2v'^2 < u'^2 + C^2v'^2 &\Leftrightarrow \varphi u'^2 + \psi' C^2 v'^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{v'}{u'}\right)^2 < -\frac{\varphi}{\psi' C^2} \\ &\Leftrightarrow \tan^2 \theta' < \tan^2 \theta \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'assertion. Ainsi, $L_{g_n}(c_n) \geq L_g(c_n)$. Par conséquent, toute suite de g_t admet une sous-suite g_n vérifiant $\text{sys}(g_n; \alpha) \geq \text{sys}(g; \alpha)$. Il existe donc $t_1 > 0$ tel que $\text{sys}(g_t; \alpha) \geq \text{sys}(g; \alpha)$ pour tout $t < t_1$.

Supposons α différent de $[\gamma_0]$ et d'indice nul avec $[\gamma_0]$. La courbe c ne coupe aucun γ_λ . En effet, la métrique étant lisse au voisinage de γ_λ , les systoles c et γ_λ se coupent au plus une fois. Par conséquent, pour N suffisamment grand, les courbes c_n ne passent pas par \mathcal{U} pour $n \geq N$. Donc $L_{g_n}(c_n) = L_g(c_n) \geq \text{sys}(g)$. Ceci montre comme précédemment qu'il existe $t_2 > 0$ tel que $\text{sys}(g_t; \alpha) \geq \text{sys}(g)$ pour $t < t_2$.

Supposons α égal à $[\gamma_0]$. Si c_n ne passe pas par l'intérieur du support de φ , on a $L_{g_n}(c_n) = L_g(c_n)$ et on conclut comme précédemment. On peut donc supposer que c_n passe par le support de φ . Les g -systoles c et γ_λ sont soit disjointes, soit confondues. Par conséquent, la courbe limite c passant par le support de φ contenu dans l'intérieur de \mathcal{U}' coïncide avec une courbe γ_λ . Il existe donc $t'_3 > 0$ tel que les courbes c_t sont contenues dans \mathcal{U}' pour $t < t'_3$.

Soient \mathcal{M} l'espace des métriques de M et ΓM l'espace des arcs de M . Considérons l'application

$$\begin{aligned} \Theta : \Gamma M \times \mathcal{M} &\longrightarrow T^*(\Gamma M) \times M \times M \\ (\alpha, h) &\longmapsto (dE_\alpha^h(\cdot), \alpha(0), \alpha(1)) \end{aligned}$$

où $E^h(\alpha) = \frac{1}{2} \int_I |\alpha'(x)|_h^2 dx$ représente la fonctionnelle énergie.

La pré-image de $(0, p, q)$ est formée des couples (α, h) où α est un arc h -géodésique, paramétré proportionnellement à sa longueur, d'extrémités p et q . Soit α un arc de \mathcal{U}' de g -longueur inférieure à $\text{sys}(g)$ paramétré proportionnellement à sa longueur d'arc. Les extrémités de α sont notées p et q . On suppose que α réalise la g -distance minimale dans sa classe d'homotopie relative. La dérivée partielle de Θ par rapport

à α en (α, g) existe. Évaluée en un champ de vecteurs A le long de α , elle s'écrit

$$D_\alpha \Theta_{|(\alpha, g)}(A) = (D^2 E_{|\alpha}^g(A, \cdot), A(0), A(1))$$

Puisque l'arc α est de plus courte longueur dans sa classe d'homotopie relative, il n'existe aucune paire de points g -conjugués le long de α . Autrement dit, les g -champs de Jacobi le long de α s'annulant en deux points distincts sont triviaux. La forme quadratique $D^2 E_{|\alpha}^g(\cdot, \cdot)$ est donc non dégénérée. En particulier, la dérivée partielle $D_\alpha \Theta$ au point (α, g) réalise un isomorphisme entre $T_\alpha \Gamma M$ et $T_{dE_{|\alpha}^g(\cdot)} T^*(\Gamma M) \times T_{\alpha(0)} M \times T_{\alpha(1)} M$. Le théorème des fonctions implicites montre qu'il existe $\mathcal{A}, \mathcal{G}, U$ et V voisinages respectifs de α, g, p et q vérifiant la propriété suivante : pour tout $(h, r, s) \in \mathcal{G} \times U \times V$, il existe un unique arc $\alpha(h, r, s)$ dans \mathcal{A} satisfaisant $\Theta(\alpha(h, r, s), h) = (0, r, s)$. En d'autres termes, il existe un unique arc h -géodésique proche de α d'extrémités r et s . De plus, la fonction $\alpha(h, r, s)$ est lisse. Par un argument de compacité relatif à l'ensemble des arcs g -géodésiques de \mathcal{U}' de g -longueur inférieure à $\text{sys}(g)$, on se ramène au cas d'un voisinage uniforme \mathcal{G} de g ne dépendant pas de α .

Il existe $t_3 > 0$ avec $t_3 < t'_3$ tel que $g_t \in \mathcal{G}$ pour tout $t < t_3$. Les arcs g -géodésiques α précédents se déforment de manière lisse avec $t < t_3$ au travers d'une famille α_t d'arcs g_t -géodésiques de mêmes extrémités.

Soit $\tau = \min\{t_1, t_2, t_3\}$. Fixons \bar{t} compris entre 0 et τ . La courbe $c_{\bar{t}}$ coupe une systole γ_λ , notée $\bar{\gamma}$, en au moins deux points distincts p et q . Soit α_0 un des deux arcs de $\bar{\gamma}$ d'extrémités p et q . L'arc α_0 , contenu dans \mathcal{U}' , est le plus court dans sa classe d'homotopie relative. Notons α_s le plus court arc g_s -géodésique homotope à α_0 et de mêmes extrémités. D'après ce qui précède, les arcs α_s sont bien définis et varient de manière lisse avec s sur $[0, \bar{t}]$.

Posons $l(t, s) = L_{g_t}(\alpha_s)$ où t et s appartiennent à $[0, \bar{t}]$. La fonction $l(t, s)$ est donnée par l'intégrale suivante

$$l(t, s) = \int_I \sqrt{(1 + t\varphi)u'_s{}^2 + (1 + t\psi)C^2 v'_s{}^2} dx$$

où $(u_s(x), v_s(x))$ est un paramétrage de α_s dans \mathcal{U} . Le radicande de la racine carrée apparaissant dans la formule précédente est noté $R_{t,s}(x)$.

La fonction $l(t, s)$ étant lisse, la formule de Taylor fournit le développement suivant

$$l(\bar{t}, \bar{t}) = l(0, 0) + \bar{t} \frac{d}{dt} l(t, t)|_{t=0} + \frac{\bar{t}^2}{2} \frac{d^2}{dt^2} l(t, t)|_{t=\bar{t}}$$

où \bar{t} appartient à $]0, \bar{t}[$.

La dérivée de $l(t, t)$ est donnée par

$$\frac{d}{dt} l(t, t) = \frac{\partial}{\partial t} l(t, s)|_{s=t} + \frac{\partial}{\partial s} l(t, s)|_{s=t}$$

Puisque α_t est un arc g_t -géodésique, les variations premières de sa longueur sont nulles. En particulier, le second terme du membre de droite s'annule.

$$\frac{d}{dt}l(t, t) = \frac{\partial}{\partial t}l(t, s)|_{s=t} = \frac{1}{2} \int_I \frac{\varphi u_t'^2 + \psi C^2 v_t'^2}{\sqrt{(1+t\varphi)u_s'^2 + (1+t\psi)C^2 v_s'^2}} dx$$

En $t = 0$, on a

$$\frac{d}{dt}l(t, t)|_{t=0} = \frac{1}{2} \int_{\alpha_0} \varphi d\sigma \quad (1.3)$$

où $d\sigma$ représente l'élément de longueur de g .

Évaluons maintenant la dérivée seconde de $l(t, t)$ donnée par

$$\frac{d^2}{dt^2}l(t, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}l(t, s)|_{s=t} + 2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}l(t, s)|_{s=t} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}l(t, s)|_{s=t} \quad (1.4)$$

Nous avons déjà remarqué que $\frac{\partial}{\partial s}l(t, s)|_{s=t} = 0$. Par conséquent, la dérivée de cette fonction s'annule aussi.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial s}l(t, s)|_{s=t} \right] = 0$$

En développant cette dérivée, on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}l(t, s)|_{s=t} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}l(t, s)|_{s=t} = 0$$

Par conséquent, l'équation (1.4) s'écrit

$$\frac{d^2}{dt^2}l(t, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}l(t, s)|_{s=t} - \frac{\partial^2}{\partial s^2}l(t, s)|_{s=t}$$

Évaluons à présent chacun des deux termes du membre de droite.

La dérivée seconde de la racine carrée d'une fonction w s'écrit $(\sqrt{w})'' = \frac{2ww'' - w'^2}{4w^{3/2}}$. Cette formule appliquée à $R_{t,s}$ conduit à l'expression

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}l(t, s) = - \int_I \frac{[\varphi u_s'^2 + \psi C^2 v_s'^2]^2}{4R_{t,s}^{3/2}} dx$$

La majoration en valeur absolue de φ et ψ par $M = \max\{|\varphi|, |\psi|\}$ fournit les inégalités

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2}l(t, s) \right| &\leq \frac{M^2}{4} \int_I \sqrt{R_{0,s}} dx + \mathcal{O}_s(t) \\ &\leq \frac{M^2}{4} L_g(\alpha_s) + \mathcal{O}_s(t) \end{aligned}$$

Les longueurs $L_g(\alpha_s)$, où $s = t \leq \bar{t}$, sont uniformément bornées pour $\bar{t} \leq \tau$. Il en est de même pour le terme $\mathcal{O}_s(t)$. Par conséquent, la dérivée partielle seconde $\frac{\partial^2}{\partial t^2} l(t, s)|_{s=t}$ est uniformément bornée sur $[0, \bar{t}]$.

Le terme $\frac{\partial^2}{\partial s^2} l(t, s)|_{s=t}$ est donné par la variation seconde de la longueur.

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} l(t, s)|_{s=t} = \int_I \langle \nabla_T S, \nabla_S T \rangle + \langle R(S, T)S, T \rangle - (T \langle S, T \rangle)^2 dx$$

où T et S sont les champs de vecteurs définis par $\alpha_{s*} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ et $\alpha_{s*} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)$ en $s = t$ (voir [22, p. 20]).

Par compacité, $\frac{\partial^2}{\partial s^2} l(t, s)|_{s=t}$ est aussi uniformément borné sur $[0, \bar{t}]$.

En conclusion, il existe $K > 0$ tel que pour tout \bar{t} de $[0, \tau]$ et pour tout t de $[0, \bar{t}]$, on a

$$\left| \frac{d^2}{dt^2} l(t, t) \right| \leq \frac{K}{2}$$

Cette dernière inégalité et l'équation (1.3) conduisent à la minoration suivante dans la formule de Taylor

$$L_{g_t}(\alpha_t) \geq L_g(\alpha_0) + \frac{t}{2} \int_{\alpha_0} \varphi d\sigma - \frac{K}{2} t^2$$

Une inégalité similaire est satisfaite par les arcs g_t -géodésiques de plus courte longueur homotopes à $\bar{\gamma} \setminus \alpha_0$ et de mêmes extrémités. En sommant ces deux inégalités, on obtient

$$L_{g_t}(c_t) \geq L_g(\bar{\gamma}) + \frac{t}{2} \int_{\bar{\gamma}} \varphi d\sigma - K t^2$$

pour tout $t \leq \tau$. L'inégalité (1.1) conduit finalement à la minoration voulue

$$\text{sys}(g_t; \alpha) \geq \text{sys}(g) - K t^2$$

Évaluons maintenant l'aire de g_t au voisinage de 0. L'aire de g_t admet le développement limité suivant

$$\begin{aligned} A(g_t) &= \int \sqrt{(1+t\varphi)(1+t\psi)} C dudv + \int_{M \setminus U} dg_0 \\ &= A(g_0) + \frac{t}{2} \int_M (\varphi + \psi) C dudv + \mathcal{O}(t^2) \end{aligned}$$

Les résultats précédents montrent que le taux isosystolique de g_t admet la majoration suivante

$$\begin{aligned} \frac{A(g_t)}{\text{sys}^2(g_t)} &\leq \frac{A(g_t)}{(\text{sys}(g) - Kt^2)^2} \\ &\leq \frac{A(g_0)}{\text{sys}^2(g_0)} \left[1 + \frac{t}{2A(g_0)} \int_M (\varphi + \psi) C \, dudv + \mathcal{O}(t^2) \right] \end{aligned}$$

L'inégalité (1.2) montre que pour $t \neq 0$ suffisamment petit

$$\mathfrak{S}(g_t) < \mathfrak{S}(g)$$

Par conséquent, la métrique g n'est pas extrémale. Cette contradiction montre par l'absurde que la métrique g est plate au voisinage de γ_0 . \square

1.2 Métriques plates à singularités coniques en genre deux

L'objet de cette section est de démontrer le théorème 1.0.4.

Les définitions et généralités suivantes ont été établies dans [55].

Fixons $\theta \in \mathbb{R}$. Le quotient de $\{(r, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/\theta\mathbb{Z}\}$ par $\{(0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}/\theta\mathbb{Z}\}$, muni de la métrique $ds^2 = dr^2 + r^2 d\alpha^2$, représente le cône d'angle θ . Il est noté C_θ .

Le plan complexe \mathbb{C} muni de la métrique $ds^2 = |z|^{2\beta} |dz|^2$ où $\beta = \frac{\theta}{2\pi} - 1$ est isométrique à C_θ . L'origine de \mathbb{C} s'identifie au sommet du cône.

Une surface possède une métrique plate à singularités coniques (x_i) d'angles (θ_i) si la surface $M \setminus \{x_i \mid i \in I\}$ est localement euclidienne et s'il existe un voisinage de x_i dans M , isométrique à un voisinage du sommet de C_{θ_i} pour chaque $i \in I$.

Remarquons que si la surface M est fermée, le nombre de singularités coniques est fini.

Exemple. Soient C_1, C_2 et C_3 trois copies du cylindre plat $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, \frac{1}{2}]$ muni de la métrique produit. Notons $\alpha_i, \alpha'_i, \beta_i$ et β'_i les arcs du bord de C_i correspondant respectivement à $[0, \frac{1}{2}] \times \{0\}$, $[\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}$, $[0, \frac{1}{2}] \times \{1\}$ et $[\frac{1}{2}, 1] \times \{1\}$.

La surface M formée à partir des cylindres C_i en identifiant les arcs α_i et α'_{i+2} , et β_i et β'_{i+2} (les indices sont considérés modulo 3) est plate avec quatre singularités d'angle 3π . Deux systoles orthogonales passent par chaque point régulier de M .

Cette surface est extrémale pour le problème isosystolique si l'on restreint l'ensemble des métriques à sa classe conforme (voir [30, Sect. 5.6.B'] et [10, Sect. 4.4]).

Toutefois, elle n'est pas extrémale dans l'ensemble des métriques de M . En effet, un "twist" le long de la géodésique $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{\frac{1}{4}\}$ de C_1 ne change pas le taux isosystolique de M . La nouvelle métrique ainsi obtenue n'est pas extrémale puisqu'il existe des points par lesquels ne passe qu'une systole (voir Proposition 1.1.1). Par conséquent,

le taux systolique de M ne réalise pas de minimum local. Plus généralement, aucune systole obtenue en recollant trois cylindres plats de différentes hauteurs le long d'arcs de leurs bords n'est extrémale.

Les formules de Gauss-Bonnet pour les surfaces compactes plates à singularités coniques et pour les disques polygonaux plats à singularités coniques et arêtes géodésiques s'écrivent respectivement

$$\sum (2\pi - \theta_i) = 2\pi\chi(M)$$

$$\sum (2\pi - \theta_i) + \sum (\pi - \alpha_i) = 2\pi$$

Les angles des singularités coniques et les angles intérieurs aux coins des disques polygonaux sont représentés par θ_i et α_i . L'entier $\chi(M)$ désigne la caractéristique d'Euler.

L'angle que forme en chacun de ses points une courbe de longueur localement minimisante est supérieur à π . En particulier, aucune systole ne passe par une singularité conique d'angle strictement inférieur à 2π .

Dans la suite de cette section, la surface M est supposée être une surface fermée orientable de genre 2 munie d'une métrique plate à singularités coniques, extrémale pour le problème isosystolique. D'après la remarque précédente, les angles des singularités de M sont supérieurs à 2π . On suppose la métrique normalisée de sorte que la longueur des systoles de M soit égale à 1.

DÉFINITIONS : Une courbe est singulière si elle passe par une singularité conique. Une courbe est régulière si elle n'est pas singulière. Un point est générique s'il n'appartient pas à une systole singulière.

Un disque D adapté à une singularité conique x_0 est un disque centré en x_0 ne contenant aucune singularité conique autre que x_0 et par lequel ne passe aucun arc de systole singulière autre que ceux passant par x_0 .

La terminologie est justifiée par la remarque suivante. Puisque la métrique est à courbure négative au sens d'Alexandrov, il ne passe qu'une géodésique entre deux singularités coniques du revêtement universel de M . Par conséquent, il n'existe qu'un nombre fini de systoles singulières.

Puisque les systoles singulières sont en nombre fini, chaque singularité conique admet un disque adapté.

Le lemme suivant précise la géométrie de l'ensemble des systoles de M .

Lemme 1.2.1. *Avec les notations et conditions précédentes, on a*

- i) Les points d'intersection entre deux systoles forment un ensemble connexe. L'indice entre deux systoles vaut donc -1 , 0 ou 1 .*
- ii) Un nombre fini de systoles passe par chaque point de M .*
- iii) Les systoles ne sont pas homologiquement triviales.*
- iv) Deux systoles homologues différentes sont disjointes et bordent un cylindre plat.*

Preuve. Supposons que les points d'intersection entre deux systoles c_1 et c_2 forment un ensemble comprenant plusieurs composantes connexes. Les systoles c_1 et c_2 se décomposent alors respectivement en $a_1 \cup b_1$ et $a_2 \cup b_2$ où a_1 , b_1 , a_2 et b_2 sont des arcs géodésiques différents de mêmes extrémités. La courbe $a_1 \cup a_2$ n'est pas homotopiquement triviale sinon elle borderait un disque plat à singularités coniques hyperboliques dont le bord, géodésique par morceaux, possède au plus deux angles $< \pi$. D'où une contradiction avec la formule de Gauss-Bonnet.

En particulier, $L(a_1) + L(a_2) \geq 1$. Il en va de même en remplaçant a_i par b_i . En sommant les inégalités $L(a_1) + L(a_2) \geq 1$, $L(a_i) + L(b_j) \geq 1$ et $L(b_1) + L(b_2) \geq 1$, on obtient $L(a_1) + L(a_2) + L(b_1) + L(b_2) \geq 2$. L'égalité a lieu dans cette dernière inégalité, entraînant l'égalité dans chacune des inégalités sommées. En particulier, la courbe $a_1 \cup a_2$ est une systole et $L(a_1) = L(a_2) = \frac{1}{2}$. De même pour $a_1 \cup b_2$, $a_2 \cup b_1$ et $b_1 \cup b_2$. Les systoles c_1 et c_2 ont ainsi exactement deux points d'intersection. Ces derniers séparent c_1 et c_2 en deux arcs de même longueur.

Un voisinage tubulaire T suffisamment petit de $c_1 \cup c_2$ est homéomorphe à une sphère privée de quatre disques correspondant à quatre des six systoles $a_1 \cup a_2$, $a_1 \cup b_1$, $a_1 \cup b_2$, $a_2 \cup b_1$, $a_2 \cup b_2$ et $b_1 \cup b_2$. La surface M est de genre deux. Par conséquent, deux des quatre composantes de bord de T sont homotopes. Ainsi, deux des six systoles ci-dessus sont homotopes.

Pour obtenir une contradiction et prouver le point i), il suffit de montrer le résultat suivant.

Sous-lemme. *Deux systoles homotopes différentes sont disjointes et bordent un cylindre plat.*

Preuve. Soient γ_1 et γ_2 deux systoles homotopes différentes. Les géodésiques γ_1 et γ_2 ne se coupent pas transversalement. En effet, dans le cas contraire, les courbes homotopes γ_1 et γ_2 admettraient un deuxième point d'intersection. Il existerait donc deux arcs géodésiques dans une même classe d'homotopie relative. La métrique étant à courbure négative au sens d'Alexandrov, on obtient une contradiction.

Les systoles γ_1 et γ_2 sont donc simples sans point d'intersection transverse. Elles bordent un cylindre C dont les angles des singularités coniques éventuelles sont supérieurs à π . La formule de Gauss-Bonnet montre que le cylindre C est en fait plat. Puisque γ_1 et γ_2 sont des systoles, le cylindre C est isométrique au cylindre

plat rectangle $S^1 \times [0, h]$ où S^1 est le cercle de longueur 1 et h représente la hauteur du cylindre. Les courbes γ_1 et γ_2 s'identifient à $S^1 \times \{0\}$ et $S^1 \times \{h\}$. Par la suite, nous identifierons le cylindre C contenu dans M avec $S^1 \times [0, h]$.

Supposons que les courbes non transversales γ_1 et γ_2 ne sont pas disjointes. Elles ont alors une singularité conique x en commun. Dans le cylindre C , le point x induit deux points x_0 et x_h , où $x_0 \in S^1 \times \{0\}$ et $x_h \in S^1 \times \{h\}$, obtenus en découpant M le long de $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Les courbes de C joignant x_0 et x_h se projettent sur des courbes fermées non homotopiquement triviales dans M . Leur longueur est donc supérieure à 1. Par conséquent, la hauteur du cylindre vérifie $h \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Cette hauteur satisfait aussi $h \leq 1$, autrement une unique systole passerait par chaque point de l'intérieur de $C \subset M$, ce qui contredit la proposition 1.1.1.

Rappelons qu'au moins deux systoles passent par chaque point de C . Si $h = 1$, le cylindre C admet un feuilletage par des arcs de systoles orthogonaux aux courbes $S^1 \times \{y\}$ où $0 \leq y \leq 1$. Ces arcs de systoles sont de longueur $h = 1$. Par conséquent, leurs extrémités s'identifient, entraînant $\gamma_1 = \gamma_2$, ce qui est exclu. Par conséquent, la hauteur du cylindre vérifie aussi $h < 1$.

Soit D un disque adapté à x . Considérons une systole régulière γ' passant par un point générique x' de $D \cap C$ et coupant γ_1 dans $D \cap C$. La systole γ' varie continûment avec x' au travers d'une famille de systoles parallèles quand x' tend vers x . L'angle que forment ces systoles avec γ_1 est donc constant non nul. À la limite, on obtient une systole γ issue de x passant par C . Puisque $h < 1$, la géodésique γ , issue de $x_0 \in S^1 \times [0, h]$, sort du cylindre en coupant γ_2 en un point x'_0 différent de x_h . Soit α l'arc de γ reliant dans C le point x_0 à x'_0 . Soit $\beta = \gamma \setminus \alpha$ l'arc complémentaire. Notons α' le plus court arc de γ_2 reliant x_h à x'_0 . On a $L(\alpha') \leq \frac{1}{2}$. Puisque $L(\alpha) \geq h \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, le lacet $\alpha' \cup \beta$ est de longueur < 1 . Les arcs de systoles α' et β sont donc homotopes à extrémités fixes. Par conséquent, on a $L(\alpha') = L(\beta)$. La longueur du lacet non homotopiquement trivial $\alpha \cup \alpha' \subset C$ est ainsi égale à 1. Ce dernier pouvant être raccourci en lissant l'angle entre α et α' , on obtient une contradiction. \square

Montrons maintenant le point ii). Supposons qu'une infinité de systoles passe par un point x_0 . Puisque les systoles singulières sont en nombre fini, une infinité de systoles régulières passe par x_0 . En particulier, le point x_0 est régulier. Puisque les systoles régulières passant par x_0 sont déterminées par leur vecteur tangent, deux d'entre elles sont arbitrairement proches et donc homotopes. Ce qui contredit le sous-lemme.

Supposons qu'il existe une systole γ homotopiquement triviale. Rappelons qu'au moins deux systoles passent par chaque point et que les systoles singulières sont en nombre fini. Il existe une systole régulière γ' coupant γ (en un point régulier). Puisque la courbe γ est homotopiquement triviale, il existe un second point d'intersection. Ceci contredit le sous-lemme et prouve le point iii).

Montrons le point iv). Soient γ_1 et γ_2 deux systoles homologues. Découpons la surface M le long de ces deux courbes simples, sans point d'intersection transverse d'après i). On obtient deux composantes connexes dont l'une est homéomorphe à un cylindre, puisque la surface est de genre deux. En particulier, les systoles γ_1 et γ_2 sont homotopes. Le sous-lemme fournit alors le résultat. \square

Nous introduisons maintenant deux nouvelles définitions.

Soient x_0 une singularité conique de M , D un disque adapté à x_0 et γ une systole passant par un point générique de D . Puisque la métrique est plate au voisinage de γ , il est possible de faire varier par translations la courbe γ au travers d'une famille de géodésiques parallèles. On rapproche ainsi γ de x_0 . À la limite, on obtient une systole singulière passant nécessairement par x_0 , d'après la définition d'un disque adapté.

Les systoles singulières obtenues comme limites de systoles régulières parallèles sont appelées systoles limites. Les systoles passant par une singularité se divisent en deux catégories : les systoles limites et les systoles isolées.

Par la suite, nous ne considérerons que des systoles limites. Les systoles limites passant par x_0 décomposent D en secteurs.

Deux systoles limites passant par x_0 sont dites partiellement parallèles si elles coïncident sur un segment d'intérieur non vide.

L'indice entre deux systoles limites γ_1 et γ_2 passant par x_0 est déterminé par leur intersection en x_0 . Plus précisément, leur indice est égal à ± 1 si leur intersection est transverse et à 0 si elle ne l'est pas.

D'après le lemme 1.2.1.i), seul le cas où les systoles sont partiellement parallèles nécessite un argument supplémentaire. Si l'indice entre γ_1 et γ_2 est non nul, l'angle entre ces deux géodésiques est minoré par l'angle non nul que forment deux de leurs systoles régulières parallèles. L'intersection entre γ_1 et γ_2 est donc transverse.

Par la suite, nous déduirons immédiatement l'indice entre deux systoles limites d'après leur position relative au voisinage de x_0 .

Lemme 1.2.2. *Soient x_0 une singularité conique de M et D un disque adapté à x_0 . Au plus quatre systoles passent par chaque point générique de D .*

Preuve. Soit $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice anti-symétrique de dimension n dont la partie triangulaire supérieure ne contient que des 1.

Supposons que six systoles passent par un point générique. Avec des orientations convenables, leur matrice d'intersection est alors donnée par J_6 . Le déterminant de J_6 est égal à 1. Les classes d'homologie de ces six systoles sont donc linéairement indépendantes dans $H_1(M, \mathbb{Z})$. Ce qui est impossible car la dimension de $H_1(M, \mathbb{Z})$ est égale à 4.

Au plus cinq systoles passent donc par un point générique de D .

Supposons que cinq systoles passent effectivement par un point générique de D . Notons $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 5}$ les cinq systoles limites passant par x_0 qu'elles induisent. Quitte à les renuméroter et à changer leurs orientations, on peut supposer, d'après le lemme 1.2.1.i), que leur matrice d'intersection est donnée par J_5 . Les mineurs issus des termes de la diagonale sont non nuls. Par conséquent, quatre quelconques des courbes γ_i induisent en homologie une base de $H_1(M, \mathbb{Z})$.

Les systoles γ_1 et γ_2 délimitent un secteur, en tout point générique duquel passent exactement cinq systoles.

Une famille de systoles non homologues aux γ_i passe par le secteur délimité par γ_5 et $-\gamma_1$ d'après le lemme 1.2.1.iv) sinon il ne passerait qu'une systole en tout point générique de celui-ci. Cette famille induit par parallélisme une systole limite γ_6 passant par x_0 . L'indice entre γ_1 et γ_6 est non nul. On oriente γ_6 de sorte que celui-ci soit égal à 1. D'après les arguments précédents, il existe une systole limite γ_7 passant par x_0 provenant d'une famille de systoles passant par le secteur délimité par $-\gamma_2$ et $-\gamma_3$. Elle est orientée de sorte que l'indice entre γ_2 et γ_7 soit égal à -1 . La systole limite γ_7 peut éventuellement coïncider avec γ_6 .

La matrice d'intersection des γ_i est égale à

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & e \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & b & f \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & c & g \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & d & h \\ -1 & -a & -b & -c & -d & 0 & i \\ -e & 1 & -f & -g & -h & -i & 0 \end{bmatrix}$$

où les coefficients appartiennent à $\{-1, 0, 1\}$.

Les coefficients de la matrice A sont soumis aux restrictions suivantes.

L'indice entre deux systoles limites passant par x_0 est non nul si et seulement si leur intersection en x_0 est transverse. Par conséquent, l'étude des positions relatives de γ_6 avec les courbes $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 5}$ montre que les coefficients du vecteur colonne d'intersection avec γ_6 vérifient $1 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq -1$. De manière analogue, on a $1 \geq -e \geq h \geq g \geq f \geq -1$.

Puisque quatre quelconques des courbes $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 5}$ induisent en homologie une base de $H_1(M, \mathbb{Z})$, les vecteurs $(1, a, b, c, d)$ et $(e, -1, f, g, h)$ sont différents à une coordonnée près des vecteurs colonnes de J_5 et $-J_5$. En effet, dans le cas contraire, γ_6 ou γ_7 serait homologue à γ_i ou $-\gamma_i$ pour $1 \leq i \leq 5$. D'après le lemme 1.2.1.iv), ce n'est pas possible.

Rappelons, plus généralement, que le rang de la matrice d'intersection A n'excède pas $\dim H_1(M, \mathbb{Z}) = 4$.

Un test sur ordinateur montre que seules quatre combinaisons $\xi = (a, b, c, d, e, f, g, h, i)$

de coefficients de A satisfont les conditions précédentes. Plus précisément, le vecteur ξ est égal à l'un des quatre 9-uplets suivants

$$\begin{aligned}\xi_1 &= (1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0) & \xi_2 &= (0, 0, 0, -1, -1, 0, 0, 0, -1) \\ \xi_3 &= (1, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, -1) & \xi_4 &= (0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0)\end{aligned}$$

Supposons qu'il ne soit pas possible de choisir γ_6 et γ_7 différents. Dans ce cas $\xi = \xi_1$. Deux systoles exactement passent par chaque point générique du secteur délimité par γ_4 et γ_5 (resp. $-\gamma_4$ et $-\gamma_5$). Elles sont parallèles à γ_1 et γ_5 (resp. γ_2 et γ_3). D'après le lemme 1.2.1, ces systoles sont deux à deux orthogonales. Ainsi, les courbes γ_1 et γ_5 (resp. γ_2 et γ_3) se coupent orthogonalement. Par conséquent, l'angle que forme γ_3 en x_0 est strictement inférieur à π . D'où une contradiction.

Supposons que $\xi = \xi_2$. Soit γ une systole limite passant par x_0 différente des $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 6}$. D'après le lemme 1.2.1.iv), les courbes γ et γ_i ne sont pas homologues pour $1 \leq i \leq 6$.

Si γ est d'indice non nul avec γ_1 (par exemple, $\text{ind}(\gamma_1, \gamma) = 1$), la matrice d'intersection des courbes $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 5}$, γ et γ_7 est égale à A avec $\xi = \xi_2$ d'après l'étude précédente. Par conséquent, les courbes γ_6 et γ sont homologues. Elles sont donc confondues.

Si γ est d'indice nul avec γ_1 , son indice est non nul avec γ_2 (par exemple, $\text{ind}(\gamma_2, \gamma) = -1$). En effet, dans le cas contraire, la systole γ ne couperait aucune courbe $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 4}$ transversalement en x_0 car l'angle des différents secteurs délimités à l'aide de γ_1 et γ_2 est strictement inférieur à π . La systole γ serait donc homotologiquement triviale, ce qui contredit le lemme 1.2.1.iii). Comme précédemment, la matrice d'intersection des courbes $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 6}$ et γ est égale à A avec $\xi = \xi_2$. Les courbes γ_7 et γ sont donc confondues.

En conclusion, les courbes $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 7}$ sont les seules systoles limites passant par x_0 . Par conséquent, une seule systole passe par chaque point générique du secteur délimité par γ_7 et $-\gamma_2$. D'où une contradiction avec la proposition 1.1.1.

Le cas où $\xi = \xi_3$ se ramène au cas où $\xi = \xi_2$ par symétrie, en changeant l'indice et l'orientation des courbes γ_i . Plus précisément, il suffit de renommer $\gamma_1, \dots, \gamma_7$ par $\gamma_2, \gamma_1, -\gamma_5, -\gamma_4, -\gamma_3, \gamma_7, \gamma_6$.

Supposons maintenant qu'aucun des trois cas précédents n'est satisfait. On a alors $\xi = \xi_4$. Une systole limite γ passant par x_0 , d'indice non nul avec γ_2 (égal à -1), différente des γ_i pour $1 \leq i \leq 6$, coïncide avec γ_7 . En effet, par hypothèse, la matrice d'intersection des courbes $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 6}$ et γ est égale à A avec $\xi = \xi_4$. Les courbes γ_7 et γ ont ainsi les mêmes indices dans la base homologique induite par $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et γ_4 . Elles sont donc confondues. De même, une systole limite passant par x_0 d'indice non nul avec γ_1 coïncide avec l'une des courbes γ_i . Une systole limite

passant par x_0 est d'indice non nul avec γ_1 ou γ_2 . Autrement, elle ne couperait aucune courbe $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 4}$ transversalement en x_0 . Elle serait donc homologiquement triviale, ce qui contredit le lemme 1.2.1.iii).

En conclusion, les courbes $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 7}$ sont les seules systoles limites passant par x_0 . Comme précédemment, une seule systole passe par chaque point générique du secteur délimité par $-\gamma_7$ et $-\gamma_2$. D'où une contradiction avec la proposition 1.1.1. \square

Nous pouvons à présent démontrer le théorème 1.0.4. Pour cela, nous analysons la position relative des systoles au voisinage des singularités coniques afin de déduire des conditions de rigidité sur ces dernières.

Preuve du théorème 1.0.4. La preuve se décompose en trois étapes.

Première étape. Montrons que les angles des singularités coniques de M sont égaux à $\frac{5\pi}{2}$ ou 3π . Avec les notations précédentes, au plus quatre systoles passent par un point générique de D d'après le lemme 1.2.2. Deux cas sont envisagés.

Cas 1 : Au plus trois systoles passent par un point générique de D .

Supposons qu'exactly deux systoles passent par un point de D . Dans ce cas, deux systoles orthogonales passent par chaque point de D . Cette propriété se montre à l'aide de la proposition 1.1.1 et de l'hypothèse qu'au plus trois systoles passent par un point générique de D . D'après cette même hypothèse, on déduit que l'angle de la singularité conique x_0 est un multiple de $\frac{\pi}{2}$. Les feuilletages systoliques orthogonaux se "referment" bien en faisant le tour de x_0 . Il existe quatre systoles limites $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et γ_4 passant par x_0 dont les indices satisfont $\text{ind}(\gamma_1, \gamma_2) = 1$, $\text{ind}(\gamma_1, \gamma_3) = 1$, $\text{ind}(\gamma_1, \gamma_4) = 0$, $\text{ind}(\gamma_2, \gamma_3) = 0$, $\text{ind}(\gamma_2, \gamma_4) = 0$ et $\text{ind}(\gamma_3, \gamma_4) = 1$ telles que γ_1 et γ_4 d'une part, et γ_2 et γ_3 d'autre part sont partiellement parallèles. Les courbes γ_i induisent une base de $H_1(M, \mathbb{Z})$. Si l'angle de la singularité conique est $\geq \frac{7\pi}{2}$, il existe une systole limite γ passant par x_0 partiellement parallèle à γ_4 qui ne coupe transversalement aucune systole γ_i en x_0 . Ainsi, la courbe γ est homologiquement triviale, ce qui contredit le lemme 1.2.1.iii). Par conséquent, l'angle de la singularité conique x_0 est égal à $\frac{5\pi}{2}$ ou 3π .

Supposons que trois systoles exactement passent par chaque point générique de D . Chaque systole limite admet ainsi une systole limite partiellement parallèle. Soient γ_1, γ_2 et γ_3 trois systoles limites passant par x_0 , induites par trois systoles passant par un même point générique de D . On peut supposer que leur matrice d'intersection est donnée par J_3 et que $\gamma_i(0) = x_0$. Les systoles γ_1, γ_2 et γ_3 coïncident avec des systoles limites γ_7, γ_4 et γ_5 , sur un voisinage à droite de 0. En particulier, elles sont partiellement parallèles à ces dernières. La systole γ_1 est aussi partiellement parallèle à une systole γ_6 , orientée de sorte que $\text{ind}(\gamma_5, \gamma_6) = 1$. Puisque trois systoles exactement passent par les secteurs délimités par γ_1 et $-\gamma_3$, et γ_6 et $-\gamma_4$, on a $\text{ind}(\gamma_3, \gamma_6) = 0$ et $\text{ind}(\gamma_4, \gamma_7) = 0$.

La matrice d'intersection des γ_i est égale à

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & a & b & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & -1 & 0 & 1 & c \\ 0 & -b & 0 & -1 & -1 & 0 & d \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -c & -d & 0 \end{bmatrix}$$

où les coefficients appartiennent à $\{-1, 0, 1\}$.

L'étude des positions relatives des courbes γ_2 , γ_5 et γ_6 montre que $0 \leq a \leq b \leq 1$. On obtient alors une contradiction, car le rang de la matrice d'intersection B excède $\dim H_1(M, \mathbb{Z}) = 4$.

Cas 2 : Quatre systoles passent effectivement par un point générique de D . Notons $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 4}$ les quatre systoles limites passant par x_0 qu'elles induisent. On peut supposer que leur matrice d'intersection est donnée par J_4 . Les courbes γ_i induisent une base de $H_1(M, \mathbb{Z})$.

Soit γ une systole limite passant par x_0 , différente des γ_i , telle que $\text{ind}(\gamma_1, \gamma) = 1$. La matrice d'intersection des γ_i est égale à

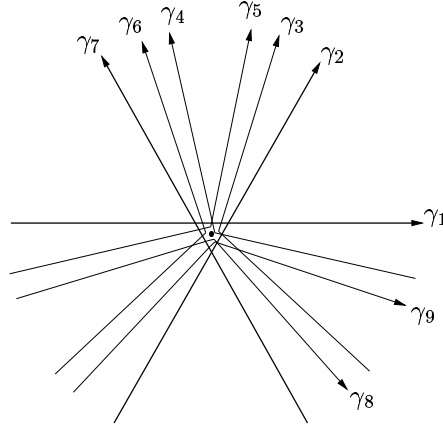
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & a \\ -1 & -1 & 0 & 1 & b \\ -1 & -1 & -1 & 0 & c \\ -1 & -a & -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

où les coefficients appartiennent à $\{-1, 0, 1\}$.

Des arguments analogues à ceux de la preuve du lemme 1.2.2 montrent que les coefficients de la matrice C vérifient $1 \geq a \geq b \geq c \geq -1$. Puisque seulement quatre familles de systoles passent par le secteur délimité par γ_1 et γ_2 , on a aussi $a \neq -1$. La courbe γ n'est homologue à aucune courbe $(\pm\gamma_i)_{1 \leq i \leq 4}$, le vecteur $(1, a, b, c)$ est donc différent des vecteurs colonnes de $\pm J_4$. De plus, le rang de la matrice d'intersection C n'excède pas $\dim H_1(M, \mathbb{Z}) = 4$. Seules trois combinaisons $\xi = (a, b, c)$ de coefficients de C satisfont ces conditions. Elles sont données par les trois triplets $\xi_1 = (0, 0, -1)$, $\xi_2 = (0, 0, 0)$ et $\xi_3 = (1, 0, 0)$.

Soit γ' une systole limite passant par x_0 , différente des γ_i , telle que $\text{ind}(\gamma_2, \gamma') = -1$. Par un argument de symétrie, le vecteur $\xi' = (\text{ind}(\gamma_1, \gamma'), \text{ind}(\gamma_3, \gamma'), \text{ind}(\gamma_4, \gamma'))$ est égal à un des trois triplets $\xi'_1 = (0, -1, 0)$, $\xi'_2 = (0, 0, 0)$ ou $\xi'_3 = (-1, 0, 0)$.

D'après le lemme 1.2.1.iv), deux systoles passant par x_0 ayant des indices identiques avec les courbes $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 4}$ sont confondues. Par conséquent, au plus neuf systoles limites passent par x_0 . Leurs positions relatives au voisinage de x_0 , dans le cas où ces systoles existent, est donnée par la figure suivante.



Considérons le cas où trois systoles au moins passent par chaque point de D . Neuf systoles limites exactement passent par x_0 sinon il existerait des secteurs, en tout point générique desquels ne passeraient que deux systoles. De plus, la courbe γ_3 et les systoles correspondant à $\xi = \xi_1$ et $\xi' = \xi'_1$ sont deux à deux partiellement parallèles. Par conséquent, l'angle de la singularité conique x_0 est égal à 3π .

Considérons maintenant le cas où deux systoles exactement passent par un point de D . Quitte à renuméroter les courbes γ_i , on peut supposer qu'exactly deux systoles passent par un point du secteur délimité par γ_3 et γ_4 . D'après la proposition 1.1.1, ces deux systoles, parallèles à γ_1 et γ_4 , sont orthogonales. L'angle entre γ_1 et γ_4 est donc droit. En particulier, les courbes γ_2 et γ_3 ne se coupent pas orthogonalement. Ainsi, trois systoles exactement passent par chaque point générique du secteur délimité par $-\gamma_3$ et $-\gamma_4$ (voir la figure précédente). Il existe donc une systole γ_9 partiellement parallèle à $-\gamma_4$, dont l'intersection avec les courbes γ_i est donnée par ξ'_1 .

Supposons qu'il existe une systole limite γ_5 dont les intersections avec les courbes γ_i sont données par ξ_1 . Il existe alors une systole limite passant par le secteur délimité par γ_4 et $-\gamma_1$ sinon une seule famille de systoles passerait au voisinage de $-\gamma_1$ dans le secteur délimité par $-\gamma_1$ et $-\gamma_4$.

S'il n'existe qu'une systole limite γ du type précédent, deux familles de systoles exactement passent au voisinage de $-\gamma_1$ dans le secteur délimité par $-\gamma_1$ et $-\gamma_4$. Les courbes γ et γ_5 sont donc orthogonales. La courbe γ est partiellement parallèle à γ_4 sinon deux familles de systoles exactement passeraient par le secteur délimité par γ_4 et γ . Les courbes γ_5 et γ_1 seraient donc orthogonales, ce qui est impossible car γ_4 et γ_1 sont orthogonales. Ainsi, γ est orthogonale à la fois à γ_1 et à γ_5 , ce qui est absurde.

Il existe donc deux systoles limites γ_6 et γ_7 correspondant à $\xi = \xi_2$ et $\xi = \xi_3$. Pour les mêmes raisons que précédemment, la courbe γ_6 est partiellement orthogonale à γ_4 , Les courbes γ_6 et γ_9 sont aussi partiellement parallèles. En effet, dans le cas contraire, les courbes $-\gamma_6$ et $-\gamma_9$ délimitent un secteur, en tout point

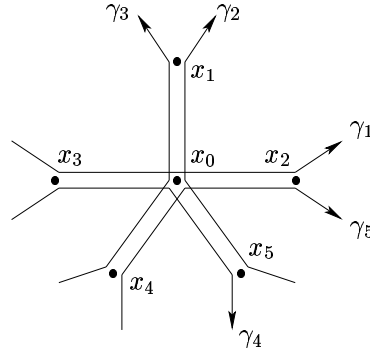
générique duquel passent exactement deux systoles. Il existe donc une systole limite γ_8 correspondant à ξ'_2 formant un angle droit avec γ_7 . L'angle entre $-\gamma_2$ et γ_9 est strictement supérieur à $\frac{\pi}{2}$. En particulier, l'angle entre $-\gamma_4$ et γ_1 est strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Autrement dit, l'angle que forme γ_4 en x_0 n'est pas plat. D'où une contradiction.

Par conséquent, les courbes γ_4 , γ_6 et γ_9 sont deux à deux partiellement parallèles. L'angle de la singularité conique x_0 est égal à 3π . Les courbes γ_3 , γ_5 et γ_8 sont aussi deux à deux partiellement parallèles. En particulier, en tout point du secteur délimité par γ_3 et γ_4 passent au moins trois systoles, ce qui contredit l'hypothèse.

En conclusion, il n'existe pas de systole limite correspondant à $\xi = \xi_1$. Par un raisonnement analogue au précédent, on montre qu'il existe deux systoles limites γ_6 et γ_7 correspondant à ξ_2 et ξ_3 se coupant orthogonalement, avec γ_4 et γ_6 partiellement parallèles. L'angle entre γ_4 et $-\gamma_1$ est en particulier strictement supérieur à $\frac{\pi}{2}$. Par conséquent, l'angle que forme γ_1 en x_0 est strictement supérieur à π . Ce qui est absurde.

Deuxième étape. Montrons que les angles des singularités coniques de M sont égaux à 3π .

Supposons qu'il existe une singularité conique x_0 d'angle $\frac{5\pi}{2}$. D'après la première étape, il existe alors cinq systoles limites $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 5}$ passant par x_0 dont les positions relatives sont données par la figure suivante où les points x_i représentent des singularités coniques.



Deux systoles γ_i se coupant transversalement se croisent en un angle droit. Les singularités coniques x_i sont deux à deux différentes d'après le lemme 1.2.1.i). Soit γ'_i la systole limite parallèle à γ_i , i.e., bordant avec γ_i un cylindre plat. La courbe γ'_1 ne passe pas par x_0 , x_2 et x_3 d'après le lemme 1.2.1.iv). Elle ne passe pas non plus par x_4 et x_5 d'après le lemme 1.2.1.i) car γ'_1 coupe orthogonalement γ_2 et γ_3 le long de $[x_0, x_2]$. Par symétrie, les courbes γ'_i ne passent pas par x_j avec $j \neq i$.

Supposons qu'il existe deux singularités coniques x et x' différentes des x_i . D'après la formule de Gauss-Bonnet, l'angle de chaque singularité de M est alors égal à $\frac{5\pi}{2}$. Les positions relatives des systoles limites orthogonales autour de chaque

singularité de M sont similaires à celles autour de x_0 (voir figure). Ainsi, une courbe γ'_i passant par x_i passe par x et x' . Une courbe γ'_i ne passant pas par x_i passe par x ou x' . Par conséquent, il existe deux systoles limites, parmi les γ'_i , se coupant orthogonalement en x ou x' . Ces deux systoles passent par deux autres singularités coniques. Puisque chacune d'elles passe au plus par une singularité x_i , elles se coupent une deuxième fois en x' ou x . D'où une contradiction avec le lemme 1.2.1.i).

Supposons qu'il existe une seule singularité conique x différente des x_i . Si toutes les courbes γ'_i passent par x , l'angle de la singularité x est égal à $\frac{5\pi}{2}$. En effet, l'orthogonalité étant préservée par parallélisme, les positions relatives des courbes γ'_i en x sont les mêmes que celles des courbes γ_i en x_0 . Par conséquent, les courbes γ'_i passent par deux autres singularités coniques, ce qui est impossible. Il existe donc une courbe γ'_i ne passant pas par x . Elle passe alors par x_i . L'angle en x_i est égal à 3π sinon la courbe γ_i passerait par une autre singularité conique, ce qui est exclu. D'après la formule de Gauss-Bonnet, l'angle des autres singularités coniques est égal à $\frac{5\pi}{2}$. Aucune courbe γ'_j avec $j \neq i$ ne passe par x_j sinon elle passerait par deux autres singularités, ce qui est impossible. Par conséquent, il existe deux systoles limites, parmi les γ'_j , se coupant orthogonalement en x . Ces deux systoles passent par une autre singularité conique, ce qui est exclu.

Supposons que les singularités coniques x_i sont les seules singularités de M . Les courbes γ'_i passent alors par x_i . D'après la formule de Gauss-Bonnet, l'angle en une singularité x_i est égal à $\frac{5\pi}{2}$. La systole γ'_i , coupant orthogonalement en x_i une courbe γ_j avec $j \neq i$, passe donc par une autre singularité conique. D'où une contradiction.

Troisième étape. Les angles des singularités coniques de M sont égaux à 3π . D'après la formule de Gauss-Bonnet, la surface M a exactement quatre singularités coniques.

Soient γ_1 et γ_2 deux systoles limites partiellement parallèles le long d'un segment $[x_-, x_+]$. Les points x_- et x_+ sont des singularités d'angle 3π . D'après l'étude menée dans la première étape, deux telles systoles existent. De plus, il existe deux autres systoles limites γ_3 et γ_4 (éventuellement confondues), partiellement parallèles à la fois à γ_1 et à γ_2 , passant respectivement par x_- et x_+ .

Si la courbe γ_1 passe par les quatre singularités de M , les courbes γ_1 et γ_2 , ou γ_1 et γ_3 ont deux segments disjoints en commun. Ce qui est impossible d'après le lemme 1.2.1.i).

Si la courbe γ_1 passe par trois singularités exactement, les systoles γ_3 et γ_4 sont partiellement parallèles. Aucune systole γ_i ne s'écrit comme combinaison linéaire des autres courbes γ_j avec $j \neq i$. Ainsi, les courbes γ_i induisent une base de $H_1(M, \mathbb{Z})$. Or leur matrice d'intersection est nulle, d'où une contradiction.

La courbe γ_1 passe donc par deux singularités exactement. Il en est de même pour γ_2, γ_3 et γ_4 . Les courbes γ_3 et γ_4 sont confondues. La famille de systoles parallèles à γ_i définit un cylindre plat droit de bords γ_i et γ'_i . Les systoles limites γ'_i passent par des singularités x'_- ou x'_+ différentes de x_- et x_+ . Deux des systoles limites γ'_i passent par une même singularité. Quitte à les renuméroter, on peut supposer qu'il s'agit de γ'_1 et γ'_2 . Puisque leur indice est nul, les courbes γ'_1 et γ'_2 ne se coupent pas transversalement. Par conséquent, d'après l'étude menée dans la première étape, elles sont partiellement parallèles. Elles passent par les deux singularités x'_- et x'_+ . Les mêmes arguments montrent que les courbes γ'_i sont deux à deux partiellement parallèles. Les singularités x_- et x_+ (resp. x'_- et x'_+) décomposent les courbes γ_i (resp. γ'_i) en deux arcs de longueur $\frac{1}{2}$.

La surface M est ainsi composée de trois cylindres identifiés deux à deux le long de deux paires d'arcs de leurs bords. L'exemple étudié au début de cette section montre que cette configuration n'est pas extrémale pour le problème isosystolique. \square

Chapter 2

Filling radius and short closed geodesics of the sphere

Introduction

Let M be a closed connected Riemannian manifold of dimension n . The natural embedding $i : M \hookrightarrow L^\infty(M)$ defined by $i(x)(\cdot) = \text{dist}_M(x, \cdot)$ is an isometry between metric spaces. Considering M isometrically embedded in the space $L^\infty(M)$ of all bounded functions on M with the sup-norm, we define $U_r(M)$ as the r -tubular neighborhood of M in $L^\infty(M)$. The homology coefficients will be in \mathbb{Z} , if M is orientable, and in \mathbb{Z}_2 , otherwise.

DEFINITION: The filling radius of M , denoted $\text{FillRad}(M)$, is the infimum of positive reals r such that the inclusion $i : M \hookrightarrow U_r(M)$ is homologically trivial. That means that the induced map $i_* : H_n(M) \longrightarrow H_n(U_r(M))$ vanishes.

Main Theorem (weak version). *Let M be a Riemannian two-sphere, then*

$$\text{FillRad}(M) \geq \frac{1}{12} \text{scg}(M)$$

where $\text{scg}(M)$ denotes the length of the shortest nontrivial closed geodesic on M .

This theorem extends to the simply connected case some filling radius estimates related to the one-dimensional systole.

The one-dimensional systole of a non-simply connected closed Riemannian manifold (M, g) is defined as the infimum of the lengths of noncontractible closed curves. This lower bound, denoted $\text{sys}_1(M, g)$, is reached by the length of a closed geodesic.

In [30], M. Gromov showed that every essential manifold of dimension n satisfies the isosystolic inequality

$$\text{Vol}(M, g) \geq C_n \text{sys}_1(M, g)^n$$

where C_n is a positive constant depending only on n .

In the above statement, whose converse was established in [5], a closed manifold M is said essential if there is a map f from M to a $K(\pi, 1)$ space such that $f_*([M]) \neq 0$ where $[M] \in H_n(M)$ is the fundamental class of M . In particular, $T^n, \mathbb{R}P^n$ and all compact $K(\pi, 1)$ spaces are essential.

The proof of Gromov's result rests on two filling radius inequalities. The first one asserts that $\text{FillRad}(M) \geq \frac{1}{6}\text{sys}_1(M)$ for all the essential Riemannian manifolds. In particular, this inequality holds for all the surfaces except the sphere. The second, more difficult to establish (though in the case of the sphere S^2 it may be obtained in a more elementary way), asserts that $\text{FillRad}(M) \leq c_n \text{Vol}(M)^{\frac{1}{n}}$ for all Riemannian n -manifolds.

Therefore, our inequality completes the study of surfaces and leads to the following corollary which improves Croke's theorem (see below and [24]) providing an alternative proof.

Corollary. *Let M be a Riemannian sphere, then*

$$\text{Area}(M) \geq \frac{1}{(12)^2} \text{scg}(M)^2$$

Examples of non-essential manifolds with "long" systole and "small" volume can easily be constructed. The product metric on $S^1 \times S^2$ where the length of S^1 is long and the area of S^2 is small provides such an example. However, they may still have a short contractible closed geodesic.

An answer to the general question: "Does the length of the shortest nontrivial closed geodesic provide a lower bound to the volume of Riemannian manifolds?" is only known for the essential manifolds and the two-sphere. This latter point was established by C. Croke who showed in [24] that

$$\text{Area}(S^2) \geq \frac{1}{(31)^2} \text{scg}(S^2)^2$$

for all Riemannian spheres.

This inequality does not provide any information about the geometry of the shortest closed geodesic to consider (for instance, about the index and the number of self-intersection points). Does the length of the shortest closed geodesic of a given type yield such a lower bound?

The example of a Riemannian sphere with a thin waist looking like a hour-glass draws some comments illustrating this remark. In this example, the shortest closed geodesic is a simple geodesic of null index. But its length does not provide

a “good” lower bound on the area as it can be made arbitrarily small while the area remains constant.

Keeping this example in mind, we established a stronger version of the main theorem specifying the geometry of the closed geodesic to consider. Note, however, that the constant involved is not as good as in the weak version.

Main Theorem (strong version). *Let M be a Riemannian two-sphere, then*

$$\text{FillRad}(M) \geq \frac{1}{20}L(M)$$

where $L(M)$ is the length of the shortest nontrivial curve among the simple closed geodesics of index one and the figure eight geodesics of null index.

Some examples illustrating the different cases of this theorem are presented in this chapter.

The proof of the main theorem rests on a minimax principle derived from Morse Theory on the space of one-cycles. This principle has been established by F. Almgren and J. Pitts using the geometric measure theory and has been used by E. Calabi and J. Cao in [21]. We actually prove the following

Theorem. *Let M be a Riemannian two-sphere, then*

$$\text{FillRad}(M) \geq \frac{1}{20}L'_1(M)$$

where $L'_1(M)$ is the length of the shortest one-cycle of index one.

The study of the structure of the shortest one-cycle of index one makes this statement more explicit and leads to the main theorem.

The global minimax principle à la Birkhoff applied to the space of one-cycles yields a one-cycle of index one. The mass of this one-cycle, denoted $L_1(M)$ and defined by a natural algebraic principle, provides, however, no universal lower bound on the filling radius of the sphere. More precisely, we have

Theorem. *There exists a sequence g_n of Riemannian metrics on S^2 which satisfies*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{FillRad}(S^2, g_n)}{L_1(S^2, g_n)} = 0$$

This result puts in perspective the role played by the shortest one-cycle of index one.

We define a new functional on the space of one-cycles as the supremum of the masses of the connected components of one-cycles. Contrary to the mass functional, the minimax value of the global minimax principle applied to this new functional bounds from below the filling radius of the sphere. This result makes the example constructed in the previous theorem clearer.

In this chapter, using techniques involved in the proof of the main theorem, we also prove the following

Theorem. *Let M be a Riemannian two-sphere of diameter $Diam(M)$, then*

$$scg(M) \leq 4Diam(M)$$

Actually, this result, which improves an inequality of [24] and [40], may also be derived from the weak version of the main theorem and the general filling inequality $FillRad(M) \leq \frac{1}{3}Diam(M)$ established in [35]. However, we present its short proof because it illustrates in a simple way some techniques used in this chapter.

The optimal constant of the above corollary is not known, even for spheres with nonnegative curvature. Actually, C. Croke conjectures that the degenerate metric obtained by gluing two copies of a flat equilateral triangle along their boundaries is extremal. The constant equals $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ for this metric.

With this example in mind, we introduce a ramified covering from the torus onto the sphere in order to bring back the problem on the torus. Loewner's theorem (see [14]) then yields an inequality between the systole and the area of tori which leads to a better estimate than the one of the above corollary. More precisely, we have

Theorem. *Let M be a Riemannian two-sphere, then*

$$Area(M) \geq \frac{2}{81\sqrt{3}}scg(M)^2$$

This chapter divides into five sections. In the first one, we study a minimax principle on the space of one-cycles which yields a nontrivial closed geodesic on the sphere. The use of the space of one-cycles rather than the ordinary free loop space allows to cut and paste closed curves using several component loops. In Section 2.2, we illustrate the general use of this principle and show that the diameter of the sphere bounds from above the length of the shortest closed geodesic. We also define a curve-shortening process, which will be used several times throughout this chapter. Section 2.3 is devoted to the proof of the filling radius estimates of the main theorem. The geometrical structure of the shortest one-cycle of index one

is described here. In Section 2.4, we construct a (counter)-example showing that the mass of the one-cycles derived from the global minimax principle does not provide any lower bound on the filling radius. We put in perspective this example by defining another functional for which the global minimax principle yields a universal lower bound on the filling radius. In Section 2.5, we consider a ramified covering from the torus onto the sphere and use the systolic inequality on the torus to get an inequality between the area and the length of the shortest closed geodesic on the sphere.

2.1 The minimax principle on the space of one-cycles

In this section, we introduce the space of one-cycles and present a method to find a nontrivial closed geodesic on the two-sphere. Originally, G. D. Birkhoff established the existence of such a geodesic by using a minimax argument on the free loop space. This argument was extended in higher dimension by Fet and Lyusternik (see [38]). Since we shall need a modified version of this minimax principle, we briefly recall it.

Let M be a compact Riemannian manifold such that $\pi_{k+1}M \neq 0$. The space ΛM of piecewise smooth curves $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ parametrized proportionally to arclength is called the free loop space. It is endowed with the C^0 -topology and the length functional L . The subspace of point curves is noted $\Lambda^0 M$.

A homotopically nontrivial smooth map $\varphi : S^{k+1} \rightarrow M$ induces a continuous map $\psi : (B^k, \partial B^k) \rightarrow (\Lambda M, \Lambda^0 M)$ representing a nontrivial class in $\pi_k(\Lambda M, \Lambda^0 M)$ (see [38]).

Theorem 2.1.1. *There exists a nontrivial closed geodesic of length*

$$\ell := \inf_{\varphi \neq 0} \sup_{t \in B^k} L(\psi_t)$$

In particular, let $(\sigma_t)_{0 \leq t \leq 1}$ be a one-parameter family of closed curves starting and ending at point curves such that the induced map $\sigma : S^2 \rightarrow S^2$ has nonzero degree. The sphere S^2 has a nontrivial closed geodesic no longer than the longest curve of $(\sigma_t)_{0 \leq t \leq 1}$. In other words, there exists a closed geodesic on S^2 of length ℓ where $\ell := \inf_{\deg \sigma \neq 0} \sup_{0 \leq t \leq 1} L(\sigma_t)$ is the minimax value of the length functional.

Remark. This method yields sometimes a “short” geodesic. Actually, ℓ is effectively the length of the shortest nontrivial closed geodesic on spheres with non-negative curvature (see [21]). Such a result is no longer true for an arbitrary metric. In fact, the minimax value ℓ may be quite “long”, for instance for a sphere with three long spikes (see the remark following Corollary 2.3.7 for a more precise description of this example).

Although C. Croke established a rigidity inequality between the area and the length of the shortest closed geodesic on the sphere using the Birkhoff minimax principle on ΛS^2 , the free loop space is not very well adapted to this problem. We prefer to use the space of one-cycles.

In the rest of this section, we introduce the space of integral one-cycles and generalize on it the minimax principle (see [41],[45] and [21]).

All the one-forms considered will be smooth. The dual of the space of one-forms on M is called the space of one-currents. It is endowed with the weak topology, that is

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_i = T \text{ if and only if } \lim_{i \rightarrow \infty} T_i(\omega) = T(\omega) \text{ for every one-form } \omega \text{ on } M$$

The support of a one-form ω , noted $\text{Supp}(\omega)$, is defined as the closure of $\{x \in M \mid \omega(x) \text{ is not null in } T_x M\}$ in M .

By duality, the support of a one-current T is the smallest closed set C such that

$$\text{Supp}(\omega) \cap C = \emptyset \text{ implies that } T(\omega) = 0 \text{ for every one-form } \omega \text{ on } M$$

Let T be a one-current whose support decomposes into connected components C_i . The connected components of T are the one-currents T_i defined by

$$T_i(\omega) = T(\varphi_i \cdot \omega) \text{ for every one-form } \omega \text{ on } M$$

where φ_i is a smooth function which equals 1 on C_i and vanishes on $\bigcup_{j \neq i} C_j$. This definition does not depend on the choice of φ_i .

The mass of a one-current T is defined by

$$\text{mass}(T) = \sup\{T(\omega) \mid \omega \text{ one-form on } M \text{ with } \sup_x |\omega(x)| \leq 1\}$$

Note that the mass functional is only semicontinuous with respect to the weak topology on the space of one-currents.

Any oriented one-dimensional rectifiable set T induces a current

$$T(\omega) = \int_T \omega \text{ for every one-form } \omega \text{ on } M$$

Such currents are called rectifiable currents.

In particular, if γ is a piecewise smooth curve with only finitely many intersection points, then γ induces a rectifiable current and $\text{mass}(\gamma) = L(\gamma)$.

A one-current T is said closed if it satisfies

$$T(df) = \int_T df = 0 \text{ for all smooth function } f \text{ on } M$$

From Stockes'theorem, closed curves induce closed currents.

We define the space $\mathcal{Z}_1(S^2, \mathbb{Z})$ of one-cycles with integral coefficients over S^2 as follows

$$\mathcal{Z}_1(S^2, \mathbb{Z}) = \left\{ \sum a_i T_i \mid a_i \in \mathbb{Z} \text{ and } T_i \text{ is a closed rectifiable one-current} \right\}$$

It is endowed with the weak topology. Note that the weak and flat norm topologies coincide on the space of one-cycles (see [41, Sect. 4.3]).

The space $\mathcal{Z}_k(M, \mathbb{Z})$ of k -dimensional integral cycles is defined in higher dimension in a similar manner.

The structure of the one-cycles is the following. A one-cycle is indecomposable if it is induced by an oriented simple closed curve. Every one-cycle T decomposes (not necessarily in a unique way) into a sum of indecomposable one-cycles T_i , i.e., $T = \sum_{i \in \mathbb{N}} T_i$, such that $\text{mass}(T) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{mass}(T_i)$ (see [25, p. 420]).

We describe now this structure for the local minima of the mass functional.

Lemma 2.1.2. *Let M be a Riemannian two-sphere. The local minima of the mass functional are the finite sums of disjoint simple closed geodesics of null index.*

Proof. A local minimum of the mass functional is a locally minimizing current, that is a disjoint union of simple closed geodesics (see [41, Sect. 8]), which are of null index.

Conversely, a simple closed geodesic γ of null index admits a ε -tubular neighborhood homeomorphic to a cylinder such that the length of the closed curves non-homologous to zero in this cylinder is not less than $L(\gamma)$. We can choose $\varepsilon > 0$ such that every couple of points (x, y) in $U_\varepsilon(\gamma)$ with $d(x, y) < 3\varepsilon$ may be joined by a segment in $U_\varepsilon(\gamma)$.

Suppose that γ is not a local minimum of the mass functional. Let z_i be a sequence of one-cycles converging to γ with $\text{mass}(z_i) < L(\gamma)$. For i large enough, $\gamma \subset U_\varepsilon(\text{Supp}z_i)$. Let x_j be a ε -subdivision of γ . We project every x_j to a closest point y_j of γ . We have $y_j \in U_\varepsilon(\gamma)$ and $d(y_j, y_{j+1}) < 3\varepsilon$. The minimizing segments joining y_j to y_{j+1} form a piecewise geodesic loop c . For ε small enough, the loop c represents a nontrivial class in $H_1(U_\varepsilon(\gamma))$. Therefore, $L(c) \geq L(\gamma)$. But, $L(c) \leq \text{mass}(z_i)$ by construction. Hence a contradiction.

The same arguments apply for a finite sum of disjoint simple closed geodesics of null index. \square

The following theorem, established by F. Almgren in [4], determines the homotopy groups of the space of integral cycles.

Theorem 2.1.3. *Let M be a complete manifold. There exists a natural isomorphism*

$$\pi_m(\mathcal{Z}_k(M, \mathbb{Z}), \{0\}) \simeq H_{m+k}(M, \mathbb{Z}) \text{ for every } m, k \in \mathbb{N}.$$

In particular, $\pi_1(\mathcal{Z}_1(S^2, \mathbb{Z}), \{0\}) \simeq H_2(S^2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

For the rest of this chapter, M designates a Riemannian two-sphere. Let us consider the one-parameter families $(z_t)_{0 \leq t \leq 1}$ of one-cycles on M which satisfy the following conditions

$$- z_t \text{ starts and ends at null-currents} \tag{C.1}$$

$$- z_t \text{ induces a nontrivial class } [z] \text{ in } \pi_1(\mathcal{Z}_1(M, \mathbb{Z}), \{0\}) \tag{C.2}$$

The previous theorem permits us to apply the minimax principle to the space of integral one-cycles on the sphere (see [45] and [21] for a proof).

Theorem 2.1.4. *Let M be a Riemannian two-sphere. There exists a union of nontrivial closed geodesics on M of total length*

$$L_1(M) := \inf_{[z] \neq 0} \sup_{0 \leq t \leq 1} \text{mass}(z_t)$$

Remark. This minimax process can be extended in higher dimension but it is no longer clear that the obtained critical points correspond to closed geodesics (see [44] for a study of critical one-cycles on any manifold and [45] for a generalization in term of minimal hypersurfaces).

2.2 Diameter and length of the shortest closed geodesic

An inequality between the length of the shortest closed geodesic and the diameter of the sphere is established in this section. In a first time, we present the curve-shortening process. Then, we derive the desired upper bound. Some constructions and arguments on which the proof of this inequality rests will be used in the next sections.

2.2.1 Curve-shortening process

First, we state the main properties of the curve-shortening process. The construction of the process will be presented afterwards.

For the rest of this chapter, we shall assume the metric on the sphere M generic. Here, generic means that the metric lies in an open dense set of the metric space for which the closed geodesics are non-degenerate with different lengths and the length spectrum is discret. This assumption is not restrictive in our case since the inequalities of the theorems we establish are stable by small perturbations as we shall explain afterwards.

Let \mathcal{C} be a finite collection of piecewise smooth curves formed either of closed curves in ΛM or of paths and closed curves lying in a convex domain Ω homeomorphic to a disk such that the endpoints of the paths of \mathcal{C} lie in the boundary of Ω . The curve-shortening process depends on the collection \mathcal{C} and deforms simultaneously the curves of \mathcal{C} . The flow of $\gamma \in \mathcal{C}$ which it induces is noted γ_t . The curve-shortening process does not increase the lengths of the curves $\gamma \in \mathcal{C}$, i.e., $L(\gamma_t) \leq L(\gamma_s)$ whenever $s \leq t$. It leaves the endpoints of the paths of \mathcal{C} fixed. Moreover, the family γ_t converges to a geodesic of null index (possibly reduced to a point). The geodesics of null index are the only fixed points of this process. Through the curve-shortening process, a simple curve remains simple. Furthermore, two non-intersecting simple curves do not intersect at any time; however, their limits may agree. The two latter properties on the simple curves and the non-intersecting simple curves define a property, denoted (P), of homotopies. Note that the simple closed geodesics of \mathcal{C} converge to local minima of the mass functional from Lemma 2.1.2.

Remark. Other curve-evolution processes exist satisfying some of these properties. For instance, the Birkhoff process (see [24]) shortens curves but simple curves do not necessarily remain simple. The disk flow defined in [33] satisfies most of these properties but it may increase lengths at non-integral time. The curvature flow defined on ΛM satisfies these properties for embedded curves (see [28]). But the proof of this result, involving analytic techniques, has been established only for simple closed curves and not for arcs with fixed endpoints. Moreover, it is still unknown if the flow converges for non-embedded curves.

Let us now define the curve-shortening process of \mathcal{C} . It is possible to deform the curves of \mathcal{C} into polygonal curves through a length-non-increasing homotopy of the curves of \mathcal{C} , satisfying the property (P). Without loss of generality, we can assume that the curves of \mathcal{C} are polygonal. The curve-shortening process of \mathcal{C} rests on the two following steps.

First step: Let D be a disk of M of radius less than $\frac{1}{2}\text{inj}(M)$. Let α be a simple arc whose endpoints may agree. Let c be a geodesic line of D passing by the endpoints of α . The arc c decomposes D into two domains D^+ and D^- . By hypothesis, we assume that α lies in D^+ and that the endpoints of α are the only

intersection points with c . The arc α and the subarc of c , joining the endpoints of α , bound a disk Δ in D^+ . Let us define a homotopy α_t in Δ between α and c . Let c_t be a geodesic foliation of the convex disk D^+ with $c_0 = c$ such that

- the intersections $\alpha \cap c_t$ are formed of a finite number of points (H.1)

- the values of the function h , at its local extrema, are distinct (H.2)

where h is defined on α by $h^{-1}(t) = \alpha \cap c_t$. Such a foliation exists.

Let Δ_t be the region of Δ between c and c_t . The local maxima and the local minima of h are respectively noted a_i^+ and a_i^- , with $h(a_i^+)$ and $h(a_i^-)$ decreasing. Let α_i^+ (resp. α_i^-) be the subarc of α , starting and ending at local minima (resp. local maxima) of h , such that a_i^+ (resp. a_i^-) is the only extremum of h in the interior of α_i^+ (resp. α_i^-).

Let us consider the local maxima a_i^+ (resp. the local minima a_i^-) of h such that the disk Δ is convex in a neighborhood of a_i^+ (resp. a_i^-). We deform α in Δ by replacing the subarc of α_i^+ , lying in $\Delta \setminus \Delta_t$, with endpoints in c_t , by the geodesic segment with the same endpoints, where t decreases from $h(a_i^+)$ to $\max h(\partial\alpha_i^+)$. This deformation of α_i^+ , with fixed endpoints, is noted $\alpha_{i,t}^+$. Similarly, we define a homotopy $\alpha_{i,t}^-$ by deforming α_i^- in Δ , with t increasing from $h(a_i^-)$ to $\min h(\partial\alpha_i^-)$.

If one of the homotopies $\alpha_{i,t}^+$ or $\alpha_{i,t}^-$ does not cut $\alpha \setminus \alpha_i^+$ or $\alpha \setminus \alpha_i^-$ for some i , it defines a deformation α_t of α in Δ . This deformation stops when $\alpha_{i,t}^+$ or $\alpha_{i,t}^-$ agrees with a segment whose one of the endpoints x_0 is a local maximum or a local minimum of h . We slightly deform this segment into another segment, keeping fixed the endpoint x_0 , in such a way that the function h' , defined by $h'^{-1}(t) = \alpha' \cap c_t$ on the new arc α' obtained by deforming α , satisfies the conditions (H.1-2) and has fewer local extrema than h .

Let us show that the assumption on which this construction rests always holds. In this case, the homotopy α_t in Δ between α and c is defined by induction on the number of local extrema of the height function on α .

The point a_1^+ represents the global maximum of h . If the homotopy $\alpha_{1,t}^+$ does not pass through a local maximum of h , we get the conclusion. Otherwise, we consider the greatest value t_0 at which $\alpha_{1,t}^+$ passes by a local maximum of h , different from a_1^+ . The domain Δ_{t_0} is formed of two disks. One of them, noted Δ^+ , does not meet the segment c . By induction on the number of local extrema, the curve $\partial\Delta^+ \setminus \alpha_{1,t_0}^+$ satisfies the stated assumption.

Thus, the homotopy α_t is well defined. By construction, it does not increase the length and the curves α_t are simple.

We can now define the second step.

Second step: Let D be a disk of M of radius less than $\frac{1}{2}\text{inj}(M)$, whose boundary ∂D meets every curve of \mathcal{C} transversely. If \mathcal{C} is formed of arcs and closed curves lying in a convex domain Ω , we replace D by $D \cap \Omega$. The intersections of the curves of \mathcal{C} with D form a collection of subarcs α_i . Let us describe the curve-shortening

process of \mathcal{C} with respect to D , which straightens every subarc α_i into the geodesic segment of the same endpoints.

Using the process defined in the first step, we can deform, one at a time, the closed curves of \mathcal{C} lying in D and the loops lying in D , formed of the subarcs of the curves of \mathcal{C} , into point curves. Thus, we can assume that no closed curve of \mathcal{C} lies in D and that the arcs α_i are simple.

Let c_1 be the geodesic segment joining the endpoints of α_1 . Let us define a homotopy in D between c_1 and α_1 . If c_1 agrees with α_1 , the homotopy is constant. If c_1 meets the curves α_i along nontrivial segments or cuts them at non-transverse intersection points, we slightly deform the curves α_i through a homotopy of polygonal arcs with fixed endpoints, in such a way that the two following properties hold.

The homotopy does not increase the lengths of the curves α_i and satisfies the property (P). The segment c_1 cuts the new arcs α_i so-deformed, finitely many times, at transverse intersection points.

Let α be a subarc of some α_i , which bounds with c_1 a disk Δ in D , such that no other subarc of some α_i bounds with c_1 a disk in Δ . We deform the arc α with fixed endpoints by applying the first step with α and c_1 . Then, we repeat the second step with the new collection of curves until the arc α_1 is deformed into c_1 . The process stops after a finite number of iterations. We successively apply the same construction with every arc α_i of D . After each iteration, a new arc of the original collection is straightened into a geodesic segment. The curve-shortening process with respect to D stops when all the arcs are straightened into geodesic segments.

Let D_i be a periodic sequence of disks of radius less than $\frac{1}{2}\text{inj}(M)$. We choose the disks D_i well-positioned relative to \mathcal{C} (see [33, p. 26]) such that the union covers M . The successive iterations of the curve-shortening process with respect to the disks D_i define the curve-shortening process. The convergence of this process follows from the proof of [33, Theorem 1.8]. We recall that the geodesics of M are isolated and non-degenerate. Using arbitrarily small perturbations of curves for large t , we can assume that the curves of \mathcal{C} converge to local minima of the length functional through the curve-shortening process. The other properties, mentioned above, hold by construction.

Remark. For a non-generic metric, the curve-shortening process may not converge to closed geodesics but oscillate between them.

Here is another useful property of the curve-shortening process.

Lemma 2.2.1. *Let γ be a simple closed curve bounding a convex domain Ω of M with $L(\gamma) < \text{scg}(M)$. There exists a homotopy $\gamma_t \in \Lambda M$ obtained by the curve-shortening process which satisfies*

- $\gamma_0 = \gamma$, γ_1 is a point curve, γ_t is a simple curve of Ω bounding the convex domain $\Omega_t := \{x \in \Omega \mid t \leq s \leq 1\}$.
- $L(\gamma_t)$ is non-increasing.
- $\{\gamma_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$ gives rise in a natural way to a map of degree ± 1 from the two-disk D^2 onto Ω .

Proof. The proof follows [24] and [21]. □

2.2.2 Diameter and the shortest closed geodesic

Following the ideas used in [24], we can now prove

Theorem 2.2.2. *Let M be a Riemannian two-sphere of diameter $\text{Diam}(M)$, then*

$$\text{scg}(M) \leq 4\text{Diam}(M)$$

where $\text{scg}(M)$ is the length of the shortest nontrivial closed geodesic on M .

Remark. In [24], C. Croke showed the inequality $\text{scg}(M) \leq 9\text{Diam}(M)$. It was then improved with the constant 5 by M. Maeda (see [40]).

The example of the round sphere or of the sphere composed of two copies of flat disks glued together along their boundaries shows that the optimal constant is not less than 2.

Proof. Let $x, y \in M$ such that $d(x, y) = \text{Diam}(M)$. We can assume that $\text{Diam}(M) < \frac{1}{2}\text{scg}(M)$. Berger's lemma (see [22, p. 106]) asserts that for any non-zero tangent vector $v \in T_x M$ there exists a minimizing geodesic γ from x to y such that $\angle(v, \dot{\gamma}(0)) \leq \frac{\pi}{2}$. In the case of the sphere, it can be stated in the following more precise way (see [24]).

Lemma 2.2.3. *Let $x, y \in M$ such that $d(x, y) = \text{Diam}(M)$. There exist $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq m}$ minimizing geodesics from x to y such that the closed curves $\gamma_i \cup (-\gamma_{i+1})$ bound convex domains Ω_i in M with $i = 1, \dots, m$.*

Thus, M decomposes into convex domains Ω_i with $L(\partial\Omega_i) = 2\text{Diam}(M)$. In particular, $L(\partial\Omega_i) < \text{scg}(M)$. Lemma 2.2.1 asserts that there is a homotopy $c_t^i \in \Lambda M$ lying in Ω_i between $\alpha_i := \gamma_i \cup (-\gamma_{i+1}) = \partial\Omega_i$ and a point curve p_i which satisfies $L(c_t^i) \leq L(\partial\Omega_i)$.

We define a one-parameter family of one-cycles on M as follows. We start from the sum of the points p_1, \dots, p_{m-1} . We deform p_1 into α_1 via the homotopy c_t^1 , then we deform p_2 into α_2 via the homotopy c_t^2 . At this stage, the one-cycle obtained is the sum $\alpha_1 + \alpha_2 = \gamma_1 - \gamma_3$ (as one-cycles). Then, we deform p_3

to α_3 through the homotopy c_t^3 . We get the one-cycle $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \gamma_1 - \gamma_4$. We repeat this process so on, deforming p_i to α_i through the homotopy c_t^i one at a time. We obtain a homotopy from the null-current to $\gamma_1 - \gamma_m$. Using the homotopy c_t^m , we contract this latter curve into the null-current.

Since the homotopies c_t^i give rise to maps of degree one onto each domain Ω_i of the decomposition of M , the one-parameter family of one-cycles z_t defined above satisfies (C.1-2). Moreover, the mass of each of these one-cycles is bounded from above by $4\text{Diam}(M)$. Therefore, from the minimax principle of Theorem 2.1.4, there exists a nontrivial closed geodesic of length $\leq 4\text{Diam}(M)$. In other words, $\text{scg}(M) \leq 4\text{Diam}(M)$. \square

2.3 Filling radius and length of short closed geodesics

We show first that the filling radius of the sphere, whose definition has been given in the introduction, is bounded from below by the length of the shortest closed geodesic. In a second time, we define the index of the one-cycles and study the structure of the shortest one-cycle of index one on the sphere. Eventually, we show that the length of this latter provides a lower bound on the filling radius of the sphere.

2.3.1 Filling radius and the shortest closed geodesic

In what follows, the sphere M is considered isometrically embedded, as metric space, in $L^\infty(M)$.

Let $L_0(M)$ be the length of the shortest nontrivial simple closed geodesic on M of null index. Equivalently, $L_0(M)$ is the smallest length of the nontrivial local minima of the mass functional (see Lemma 2.1.2). In particular, every simple closed curve of length less than $L_0(M)$ converges to a point curve through the curve-shortening process.

Theorem 2.3.1. *Let M be a Riemannian two-sphere, then*

$$\text{FillRad}(M) \geq \min\left\{\frac{1}{6}L_0(M), \frac{1}{12}L_1(M)\right\}$$

In particular, $\text{FillRad}(M) \geq \frac{1}{12}\text{scg}(M)$ where $\text{scg}(M)$ is the length of the shortest nontrivial closed geodesic on M .

Remark. In [30], M. Gromov has shown that $\text{FillRad}(M) \geq \frac{1}{6}\text{sys}_1(M)$ for non-simply connected surfaces. Moreover, this inequality is sharp; it is satisfied for instance by the flat tori. The general inequality $\text{FillRad}(M) \leq \frac{1}{3}\text{Diam}(M)$ (see [35])

applied to the example given in the remark of Theorem 2.2.2 shows that the optimal constant in the last inequality of Theorem 2.3.1 is not greater than $\frac{1}{9}$.

Proof. By definition, the fundamental class $[M]$ of M vanishes in $U_\delta(M) \subset L^\infty(M)$ where $\delta > \text{FillRad}(M)$. Therefore, there exists a $(n+1)$ -dimensional chain c in $U_\delta(M)$, with coefficients in \mathbb{Z}_2 , which fills M , i.e., whose boundary ∂c contained in M represents $[M]$. Using a piecewise linear approximation of c , we construct a $(n+1)$ -dimensional polyhedron P in $U_\delta(M)$ representing c and containing a sub-complex $Q \subset M$ which represents ∂c , that is $[M]$. In this case, the induced natural map $i_* : H_n(M) \longrightarrow H_n(U_\delta(M))$ is null.

Let P be a 3-dimensional polyhedron in $U_\delta(M)$ containing M as a sub-polyhedron, i.e., $M \subset P \subset U_\delta(M) \subset L^\infty(M)$. Fix $\delta > 0$. We show that if $\delta < \min\{\frac{1}{6}L_0(M), \frac{1}{12}L_1(M)\}$, the inclusion $M \hookrightarrow P$ admits a retraction. Thus M does not bound in $U_\delta(M)$, hence the inequality.

Subdividing P if necessary, we can assume that the diameter of all simplices in P is less than $\varepsilon > 0$ with $\varepsilon < \frac{1}{6}\text{scg}(M) - 2\delta$ and $\varepsilon < \text{conv}(M)$, where $\text{conv}(M)$ is the convexity radius of M . Using the Birkhoff process with fixed endpoints if necessary, we can also assume that the edges of P lying in M are minimizing segments. We are going to construct successively on the skeleton of P a retraction $r : P \longrightarrow M$.

We define $r : P^0 \longrightarrow M$ on the 0-skeleton of P by sending each vertex p_i of P to a nearest point v_i of M , as we wish. The vertices of M are thus fixed. Let us extend this map to the 1-skeleton P^1 of P . Since $i : M \hookrightarrow U_\delta(M)$ is isometric, we have for every pair p_i, p_j of adjacent vertices of P

$$\begin{aligned} d_M(v_i, v_j) &\leq d_{L^\infty(M)}(v_i, p_i) + d_{L^\infty(M)}(p_i, p_j) + d_{L^\infty(M)}(p_j, v_j) \\ &\leq 2\delta + \varepsilon =: \rho < \min\{\frac{1}{3}L_0(M), \frac{1}{6}L_1(M)\} \end{aligned}$$

where v_i and v_j are the images by r of p_i and p_j . We map $[p_i, p_j]$ to a minimizing segment $[v_i, v_j] \subset M$ joining v_i to v_j . This defines an extension $P^1 \longrightarrow M$ which leaves the edges of M fixed.

Let us now extend this map to P^2 . Let Δ^2 be a 2-simplex of P which lies in M . We extend r by the identity on Δ^2 . Since the edges of Δ^2 are minimizing segments and $\text{Diam}(\Delta^2) \leq \text{conv}(M)$, Δ^2 is convex and the curve-shortening process contracts $\partial\Delta^2$ into a point through a homotopy of free loops lying in Δ^2 (see Lemma 2.2.1). Let Δ^2 be a 2-simplex of P which does not lie in M . Since the boundary $\partial\Delta^2$ maps onto a geodesic triangle T of perimeter less than $3\rho < L_0(M)$, the curve-shortening process defines a map from the disk $D \simeq \Delta^2$ to M which sends $\partial D \simeq \partial\Delta^2$ onto T . This construction yields a map $r : P^2 \longrightarrow M$ whose restriction to M is the identity.

We now want to extend it to P^3 . This is possible if the restriction $\varphi : \partial\Delta \rightarrow M$ of $r : P^2 \rightarrow M$ to the boundary $\partial\Delta$ of each 3-simplex Δ of P is of null degree. We recall that $\partial\Delta$ is homeomorphic to a sphere. The curve-shortening process used in the construction of $r : P^2 \rightarrow M$ provides homotopies c_t^i defined on each face Δ_i of Δ between $\partial\Delta_i$ and point curves p_i such that $L(\varphi(c_t^i)) \leq L(\partial\Delta_i)$.

We define a one-parameter family of one-cycles on M putting together the homotopies $c_t^1 + c_t^2$ and $c_t^3 + c_t^4$ as follows. We start from the sum of p_1 and p_2 . We deform it through the sum of the homotopies c_t^1 and c_t^2 into $\partial\Delta_1 + \partial\Delta_2$ with $\partial\Delta_1 + \partial\Delta_2 = \partial\Delta_3 + \partial\Delta_4$ as one-cycles. Then, we deform $\partial\Delta_3 + \partial\Delta_4$ into $p_3 + p_4$ using the homotopies c_t^3 and c_t^4 .

The one-parameter family z_t of one-cycles on $\partial\Delta$ so-defined starts and ends at null-currents. Since the homotopies c_t^i give rise to maps of degree one on each face Δ_i of $\partial\Delta$, it represents a generator of $\pi_1(\mathcal{Z}_1(\partial\Delta), \{0\}) \simeq \pi_2(\partial\Delta) \simeq \mathbb{Z}$. Moreover, $\text{mass}(\varphi(z_t)) \leq 6\rho < L_1(M)$. Therefore, by definition of $L_1(M)$, the family $\varphi(z_t)$ represents a null-class in $\pi_1(\mathcal{Z}_1(M), \{0\})$.

$$\begin{array}{ccc} \text{So, } \varphi_* : \pi_1(\mathcal{Z}_1(\partial\Delta), \{0\}) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{Z}_1(M), \{0\}) \text{ is trivial.} \\ & \wr & \wr \\ & \pi_2(\partial\Delta) & \pi_2(M) \end{array}$$

That is the degree of φ is null.

In conclusion, $\varphi : \partial\Delta \rightarrow M$ can be extended to Δ for each 3-simplex Δ of P^3 . Therefore, the inclusion $M \hookrightarrow P$ admits a retraction. \square

Using the inequality $\text{FillRad}(S^2) \leq \text{Area}(S^2)^{\frac{1}{2}}$ established in [30, p. 128], we immediately have

Corollary 2.3.2. *Let M be a Riemannian sphere, then*

$$\text{Area}(M) \geq \frac{1}{(12)^2} \text{scg}(M)^2$$

where $\text{scg}(M)$ is the length of the shortest nontrivial closed geodesic on M .

2.3.2 Index of the one-cycles

A closed geodesic is a critical point for both the length and mass functionals. We define the index of a one-cycle for the mass functional by analogy with the length functional.

Given $\kappa > 0$, let $\mathcal{Z}_1^\kappa(M) = \{z \in \mathcal{Z}_1(M) \mid \text{mass}(z) < \kappa\}$. Similarly, we define $\Lambda^\kappa(M)$. Recall that the metric is supposed generic. The classical index of a closed geodesic γ of length κ agrees with $\text{ind}_\Lambda(\gamma) = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \pi_i(\Lambda^\kappa(M) \cup \{\gamma\}, \Lambda^\kappa(M)) \text{ is nontrivial}\}$ (see [38]). The index of a one-cycle z of

length κ , noted $\text{ind}_{\mathcal{Z}_1}(z)$, is defined by analogy as $\min\{i \in \mathbb{N} \mid \pi_i(\mathcal{Z}_1^\kappa(M) \cup \{z\}, \mathcal{Z}_1^\kappa(M))$ is nontrivial}. If the index of z is finite, then z is a closed geodesic. The proof of this statement comes from the proof of Theorem 2.1.4.

Define $L'_1(M) = \inf\{\text{mass}(z) \mid z \text{ one-cycle of index one of } M\}$. In particular, we have $L'_1(M) \leq L_1(M)$.

Remark. For a non-generic metric, the index of a one-cycle for the mass functional cannot be defined as easily. However, we can still define $L'_1(M)$ as $\inf\{\kappa > 0 \mid \pi_1(\mathcal{Z}_1^{\leq \kappa}(M), \mathcal{Z}_1^\kappa(M))$ is nontrivial}. But since the results we obtain are stable by perturbation, we can actually assume without loss of generality that the metric is generic.

The following useful claim comes from the definition of $L'_1(M)$.

Claim 2.3.3. *Let $(z_t)_{0 \leq t \leq 1}$ be a homotopy of one-cycles. If $\text{mass}(z_t) < L'_1(M)$, then z_0 and z_1 are homotopic through one-cycles of mass $\leq \max\{\text{mass}(z_0), \text{mass}(z_1)\}$. In particular, for a generic metric, two local minima of the mass functional are not homotopic through one-cycles of mass $< L'_1(M)$, unless they agree.*

The structure of the one-cycles critical for the mass functional is described by

Theorem 2.3.4. *Let M be a Riemannian two-sphere. A shortest one-cycle of index one on the sphere is*

- *either a simple closed geodesic of index one as geodesic*
- *or a figure eight geodesic of null index as geodesic.*

Proof. Let $\gamma \in \mathcal{Z}_1(M)$ be the shortest one-cycle of index one. No connected component of γ is a local minimum of the mass functional, otherwise γ would not be the shortest one-cycle of index one. No connected component of γ has an index greater than one for the same reason. Therefore, γ has only one connected component. The support of γ decomposes as the union of closed geodesics. This union forms a link, still noted γ .

We consider three cases. In the first two, γ is formed of a single closed geodesic. Under this assumption, we have $\text{ind}_\Lambda(\gamma) \geq 1$ from Lemma 2.1.2 since γ is not a local minimum of the mass functional.

Case 1. Suppose that γ is simple. Let us show now that $\text{ind}_\Lambda(\gamma) \leq 1$.

Let $\varepsilon_i > 0$ be a decreasing sequence converging to 0. Since γ is a simple closed geodesic, there exists a tubular neighborhood of γ , noted $\mathcal{U}_i(\gamma)$, homeomorphic to a cylinder such that every one-cycle z of $\mathcal{U}_i(\gamma)$ non-homologous to zero in $H_1(\mathcal{U}_i(\gamma))$ satisfies $\text{mass}(z) > \kappa - \varepsilon_i$ where $\kappa = L(\gamma)$.

Let z_t with $-1 \leq t \leq 1$ be a path of one-cycles such that $\text{mass}(z_t) < \kappa$ for $t \neq 0$ and $z_0 = \gamma$. This path induces a class $[z]$ in $\pi_1(\mathcal{Z}_1^\kappa(M) \cup \{\gamma\}, \mathcal{Z}_1^\kappa(M))$. We can assume that there exists a decreasing sequence $t_i > 0$ converging to zero such that $z_i := z_{t_i} \in \mathcal{U}_i(\gamma)$. The sequence z_i converges to γ for the flat norm topology. Moreover, $\text{mass}(z_i) < L(\gamma)$ and $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{mass}(z_i) = L(\gamma)$. The one-cycle z_i decomposes as a sum of indecomposable one-cycles $z_i = \sum_{j \in J_i} c_j$ such that $\text{mass}(z_i) = \sum_{j \in J_i} \text{mass}(c_j)$.

For i large enough, z_i is not homologically trivial in $H_1(\mathcal{U}_i(\gamma))$. Therefore, there exists an indecomposable component c_i of z_i which represents a nontrivial class in $H_1(\mathcal{U}_i(\gamma))$. We have $\text{mass}(c_i) > \kappa - \varepsilon_i$ and $\sum_{j \neq i} \text{mass}(c_j) < \varepsilon_i$.

By construction, the sequence c_i converges to γ for both the flat norm and the Hausdorff distance. Since γ is a closed geodesic, every sequence of arcs v_i which converges to a subarc v of γ for the Hausdorff distance satisfies $\liminf_{i \rightarrow \infty} L(v_i) \geq L(v)$. The equality holds if and only if v_i converges to v for the Frechet topology. Therefore, c_i converges to γ for the Frechet topology.

Since the mass of the one-cycle $\sum_{j \neq i} \text{mass}(c_j)$ is less than $\text{inj}(M)$, it contracts to a null-current. Thus, z_i retracts onto c_i through a mass-non-increasing homotopy z_i^t . Put together, the homotopies z_i^t , $(z_t)_{t_i \leq t \leq t_{i+1}}$ and z_{i+1}^t define a homotopy c_t^i with $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ between c_i and c_{i+1} . The homotopies c_t^i form a path $(c_t)_{0 \leq t \leq 1}$ homotopic to $(z_t)_{0 \leq t \leq 1}$ with the same endpoints.

We show now that c_t^i deforms in $\mathcal{Z}_1^\kappa(M)$ into a path of $\Lambda^\kappa(M)$ with the same endpoints. The simple closed curves c_i and c_{i+1} , converge to local minima of the mass functional by the curve-shortening process. We can therefore assume that the endpoints of c_t^i are local minima of the mass functional. Since $\text{mass}(c_t^i) < L_1'(M)$, the endpoints of c_t^i either agree or are both reduced to point curves from Claim 2.3.3. Moving the point curves if necessary, we can assume that only the former case occurs, where the loop $(c_t^i)_{0 \leq t \leq 1}$ contracts to its basepoint. This achieves the deformation of c_t^i into a path of $\Lambda^\kappa(M)$ with the same endpoints.

This last result leads to the conclusion. Since c_i converges to γ , the path $(z_t)_{0 \leq t \leq 1}$ is homotopic in $\mathcal{Z}_1^\kappa(M) \cup \{\gamma\}$ to a path in $\Lambda^\kappa(M) \cup \{\gamma\}$ with the same endpoints. The same goes for $(z_t)_{-1 \leq t \leq 0}$. Therefore, the path $(z_t)_{-1 \leq t \leq 1}$ is homotopic in $\mathcal{Z}_1^\kappa(M) \cup \{\gamma\}$ to a path in $\Lambda^\kappa(M) \cup \{\gamma\}$ with endpoints in $\Lambda^\kappa(M)$. In particular, if $[z] \neq 0$, the class it induces in $\pi_1(\Lambda^\kappa(M) \cup \{\gamma\}, \Lambda^\kappa(M))$ in this way is nontrivial. Hence the result.

Case 2. Suppose that γ is a figure eight geodesic. Since γ is not a local minimum of the length functional, there exists a path $\gamma_t \in \Lambda M$ of figure eight curves with $\gamma_0 = \gamma$ and $L(\gamma_t) < L(\gamma)$ for $t \neq 0$. The closed geodesic γ decomposes into two geodesic loops γ^+ and γ^- , which bound convex domains Ω^+ and Ω^- . These loops form a closed curve $c = \gamma^+ \cup (-\gamma^-)$, which bounds the convex domain $\Omega := M \setminus (\Omega^+ \cup \Omega^-)$. The figure eight curves of the path γ_t decomposes into loops γ_t^+ and γ_t^- . These latter give rise to a path $c_t = \gamma_t^+ \cup (-\gamma_t^-) \in \Lambda M$

starting from c . The curve γ^+ , bounding the convex domain Ω^+ , converges in Ω^+ to a local minimum α^+ of the mass functional through a homotopy $\gamma_{|s}^+$ given by the curve-shortening process. If the curve α^+ is trivial, the homotopy $\gamma_{|s}^+$ gives rise to a map of degree one onto Ω^+ (see Lemma 2.2.1). The same goes for γ^- and c , which converge respectively to α^- and α .

Put together, the homotopies γ_t^+ and $\gamma_{|s}^+$ define a homotopy between γ_1^+ and α^+ . Since the mass of the one-cycles of this homotopy is $< L'_1(M)$, this latter deforms in $\mathcal{Z}_1(M)$ into a path $\gamma_{1,t}^+$ with the same endpoints such that $\text{mass}(\gamma_{1,t}^+) < L(\gamma_1^+)$ from Claim 2.3.3. The same goes for γ_1^- . Similarly, we define a homotopy between c_1 and α . The mass of the one-cycles of this homotopy is $< L'_1(M)$ except for c , which satisfies $\text{mass}(c) = L'_1(M)$. Since c is not a geodesic, the homotopy deforms as previously into a path $c_{1,t}$ with the same endpoints such that $\text{mass}(c_{1,t}) < L(c_1)$. Put together, the homotopies of one-cycles c_t and $\gamma_t^+ - \gamma_t^-$ (resp. $c_{1,t}$ and $\gamma_{1,t}^+ - \gamma_{1,t}^-$) form a one-parameter family of one-cycles z_t (resp. $z_{1,t}$). By construction, the families z_t and $z_{1,t}$ are homotopic with the same endpoints z_+ and z_- . Since the curves α^+ and α^- are disjoint, the one-cycles z_+ and z_- are local minima of the mass functional (see Lemma 2.1.2). Note that $\text{mass}(z_{1,t}) < L(\gamma)$. If α^+ , α^- and α are not all trivial, the one-cycles z_+ and z_- , endpoints of $z_{1,t}$, are different, which contradicts Claim 2.3.3. If α^+ , α^- and α are all trivial, the homotopies $\gamma_{|s}^+$, $\gamma_{|s}^-$ and $c_{|s}$ gives rise to maps of degree one onto Ω^+ , Ω^- and Ω . Therefore, the family z_t satisfies the conditions (C.1-2) of Section 2.1. Since the family $z_{1,t}$ is homotopic to z_t , it also satisfies (C.1-2). The minimax principle of Theorem 2.1.4 shows that $\sup_{0 < t < 1} \text{mass}(z_{1,t}) \geq L_1(M) \geq L'_1(M)$. But $\text{mass}(z_{1,t}) < L(\gamma)$. Hence another contradiction.

Case 3. Suppose that the link γ has at least two points of self-intersection (which possibly agree). It decomposes M into convex (open) domains D_i , $i \in I = \{0, \dots, k\}$ such that $M \setminus \gamma = \coprod_{i \in I} D_i$ where the union is disjoint. Given $x_0 \in D_0$, the index of D_i is defined as the winding number of γ around any point of D_i in the plane $M \setminus x_0$. The boundary γ_i of the convex domain D_i converges in D_i to a local minimum α_i of the mass functional through a homotopy $\gamma_{i,t}$ given by the curve-shortening process. If the curve α_i is trivial, the homotopy $\gamma_{i,t}$ gives rise to a map of degree one onto D_i (see Lemma 2.2.1). The set I decomposes into the disjoint union of I^+ and I^- where the index of D_i is even if $i \in I^+$ and odd if $i \in I^-$. The union of the γ_i 's for $i \in I^+$ (resp. $i \in I^-$) agrees with γ . Put together, the homotopies of one-cycles $\sum_{i \in I^+} \gamma_{i,t}$ and $\sum_{i \in I^-} \gamma_{i,t}$ form a one-parameter family of one-cycles z_t with $\text{mass}(z_t) \leq L(\gamma)$. Since the α_i 's are disjoint, the family z_t starts and ends at local minima of the mass functional (see Lemma 2.1.2). Moreover, z_0 and z_1 are either different or both trivial. In this latter case, the family z_t satisfies (C.1-2).

We are going to modify z_t into a homotopic family z'_t with the same endpoints which satisfies $\text{mass}(z'_t) < L(\gamma)$. We derive then a contradiction as in the conclusion

of Case 2.

Let $p \in M$ be a point of self-intersection of γ . Let $\mathcal{V} \subset U_p M$ be the (finite) set of unit vectors based at p tangent to γ . Every pair of adjacent vectors of \mathcal{V} spans a domain D_i for some $i \in I$. There exist two different domains in $\{D_i \mid i \in I\}$ spanned by two pairs, $\{u, v\}$ and $\{u', v'\}$, of vectors of \mathcal{V} such that u, v, u' and v' are consecutive for the cyclic order on $U_p M$. Renumbering the D_i 's if necessary, we can assume that the pairs $\{u, v\}$, $\{v, u'\}$ and $\{u', v'\}$ respectively span D_0 , D_1 and D_2 . The indices of D_0 and D_2 have the same parity, even for instance.

Suppose that there are at least three domains of even index. The arcs $\gamma_0 \cup \gamma_2$ and γ_1 agree along a piecewise geodesic subarc c_1 broken in p . We shorten c_1 by smoothing it in D_1 at the neighborhood of p in a way that the arc c'_1 so-obtained still bounds a convex domain in D_1 . Using Claim 2.3.3 and arguments similar to those of Case 2, we deduce that the simple closed curve γ'_1 converges to α_1 along a path $\gamma'_{1,t}$ of one-cycles with $L(\gamma'_{1,t}) \leq L(\gamma'_1)$. Let us consider the homotopy of one-cycles $\gamma_{0,t} + \gamma_{2,t} + \sum_{i \in I^+ \setminus \{0,2\}} \alpha_i$ starting from $\sum_{i \in I^+} \alpha_i$ and joining $\gamma_0 + \gamma_2 + \sum_{i \in I^+ \setminus \{0,2\}} \alpha_i$. We extend it by deforming first the subarc c_1 of $\gamma_0 \cup \gamma_2$ into c'_1 , then the curves α_i into γ_i through $\gamma_{i,t}$ for $i \in I^+ \setminus \{0,2\}$. We get a one-cycle which agrees with $\gamma'_1 + \sum_{i \in I^- \setminus \{1\}} \gamma_i$ where $\gamma'_1 = (\gamma \setminus c_1) \cup c'_1$. Using the homotopies $\gamma'_{1,t}$ and $\gamma_{i,t}$, we deform the one-cycle so-obtained into $\sum_{i \in I^-} \alpha_i$. The above construction defines a one-parameter family of one-cycles z'_t which starts at $\sum_{i \in I^+} \alpha_i$ and ends at $\sum_{i \in I^-} \alpha_i$. By construction, z'_t is homotopic to z_t and satisfies $\text{mass}(z'_t) < L(\gamma)$. Hence the conclusion.

Suppose that D_0 and D_2 are the only domains of even index. Since γ is not a figure eight geodesic, γ_0 and γ_2 cannot be both geodesic loops based at p . We shall assume that γ_0 is not a geodesic loop. Let c_0 be a piecewise geodesic subarc of γ_0 broken at some point $q \neq p$. We shorten c_0 by smoothing it in D_0 at the neighborhood of q in a way that the arc c'_0 so-obtained still bounds a convex domain in D_0 . We extend the homotopy of one-cycles $\gamma_{0,t} + \alpha_2$ starting from $\alpha_0 \cup \alpha_2$ and joining $\gamma_0 \cup \alpha_2$ by deforming the subarc c_0 of γ_0 into c'_0 . We perturb the one-cycle so-obtained by deforming first the subarc c_1 into c'_1 , then the subarc c'_0 into c_0 . At this stage, we get a one-cycle which agrees with $\gamma'_1 + \sum_{i \in I^- \setminus \{1\}} \gamma_i$. This latter deforms into $\sum_{i \in I^-} \alpha_i$ as previously. The above construction defines a one-parameter family of one-cycles z'_t which satisfies $\text{mass}(z'_t) < L(\gamma)$. \square

Remark. Both simple closed geodesics of index one and figure eight geodesics of null index can occur as the shortest one-cycles of index one. Examples are presented in the remark following Corollary 2.3.7.

2.3.3 Filling radius and the shortest one-cycle of index one

This section aims at extending the results of Theorem 2.3.1.

An admissible geodesic on the sphere M is by definition a nontrivial simple closed geodesic of length $\leq \frac{1}{2}L'_1(M)$ and of null index as geodesic. From Lemma 2.1.2, an admissible geodesic is also a local minimum of the mass functional. Note that admissible geodesics exist on M if and only if $L_0(M) \leq \frac{1}{2}L'_1(M)$. An admissible geodesic, which divides M into two disks D and D' , is said to be extremal with respect to D if no other admissible geodesic lies in D .

Lemma 2.3.5. *Let γ be an admissible geodesic of M . Every simple geodesic arc of length $\leq \frac{1}{2}L'_1(M)$ with endpoints in γ is a subarc of γ .*

Proof. Let us suppose that there exists a simple geodesic arc c of length $\leq \frac{1}{2}L'_1(M)$ with endpoints in γ which lies in the interior of D . The arc c divides D into two convex domains D_1 and D_2 with $L(\partial D_1) + L(\partial D_2) \leq L'_1(M)$. The simple closed curves ∂D_1 and ∂D_2 converge in the convex domains D_1 and D_2 to simple closed geodesics disjoint from γ and from each other by the curve-shortening process. The sum of the homotopies so-defined is a one-parameter family of one-cycles z_t . This family joins two different local minima of the mass functional and satisfies $\text{mass}(z_t) < L'_1(M)$. We get therefore a contradiction with Claim 2.3.3. \square

Now, we can prove

Theorem 2.3.6. *Let M be a Riemannian two-sphere, then*

$$\text{FillRad}(M) \geq \frac{1}{20}L'_1(M)$$

where $L'_1(M)$ is the length of the shortest closed geodesic of index one as one-cycle on M .

Proof. Without loss of generality, we can assume the metric generic. We can also assume that there exists an admissible geodesic, otherwise Theorem 2.3.1 immediately yields the result. Since there are finitely many geodesics of length uniformly bounded, there exists an admissible geodesic γ_0 which divides M into two connected components D and D' extremal with respect to D .

We argue as in the proof of Theorem 2.3.1. Fix $\delta > 0$. Let P be a 3-dimensional polyhedron in $U_\delta(M)$ containing M as a subpolyhedron. We show that if $\delta < \frac{1}{20}L'_1(M)$, the inclusion $M \hookrightarrow P$ admits a retraction. Therefore, the manifold M does not bound in $U_\delta(M)$.

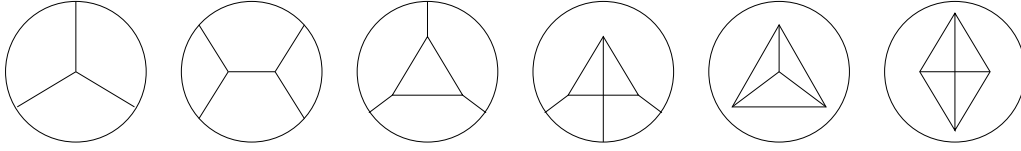
We subdivide P and define a map $r : P^1 \rightarrow M$ on the 1-skeleton of P which leaves fixed the edges of M as in the proof of Theorem 2.3.1. Since $i : M \hookrightarrow U_\delta(M)$

is isometric, the length of the images of the edges of P are bounded from above by ρ with $\rho < \frac{1}{10}L'_1(M)$. Therefore, the images of the edges of P cut γ_0 at most once from Lemma 2.3.5. In particular, the images of the boundaries of the 2-simplices of P cut γ_0 at most twice. On every edge of P whose image cuts γ_0 , we introduce a new vertex given by the pre-image of the intersection with γ_0 . A 3-simplex Δ^3 having new vertices has exactly three or four. Every pair of new vertices lying in a same face defines a new edge. These three or four new edges of Δ^3 bound a new face in Δ^3 . This defines a new simplicial structure on P modeled on three kinds of building blocks and not only on standard simplices anymore.

Let p and q be two new vertices of P whose images by r are noted \bar{p} and \bar{q} . There is a unique 2-simplex Δ^2 for the original simplicial structure of P which contains p and q . The part of the image of $\partial\Delta^2$ lying in D forms a simple arc γ_{pq} of endpoints \bar{p} and \bar{q} . The intersections of the images of the 2-simplices of P with D form a finite collection \mathcal{C} of simple arcs γ_{pq} and closed curves of D . We apply the curve-shortening process to the collection \mathcal{C} . The arc γ_{pq} converges to a simple geodesic arc \bar{pq} of D with endpoints \bar{p} and \bar{q} . Since $L(\partial\Delta^2) < \frac{1}{2}L'_1(M)$, this arc lies in γ_0 from Lemma 2.3.5. We extend the map r on the 1-skeleton P^1 of the new simplicial structure of P sending the new edges $[p, q]$ onto the arcs \bar{pq} of γ_0 .

We now want to extend r to P^2 . Let Δ^2 be a face of a building block of P . When Δ^2 lies in M , we fill the boundary $\partial\Delta^2$ as in the proof of Theorem 2.3.1. If the image of $\partial\Delta^2$ lies in D' , we fill it by the disk it bounds in D' . Otherwise, it lies in D . In this case, if $\partial\Delta^2$ has an edge which does not lie in the original simplicial structure of P , its image contracts into the image of this edge by construction. If it does not, its image, of length $< \frac{1}{2}L'_1(M)$, contracts either into an admissible geodesic of D , that is γ_0 , which is homotopic to a point in D' , or into a point in D . In conclusion, we get a map of degree one from Δ^2 onto its image in M which agrees with r on the boundary. This yields an extension $r : P^2 \rightarrow M$ whose restriction to M is the identity.

Let us extend it to P^3 . The restriction of $r : P^2 \rightarrow M$ to the boundary Σ of a building block Δ^3 of P is noted $\varphi : \Sigma \rightarrow M$. When the image of Σ lies in D or D' , it extends to a map defined on Δ^3 whose image lies in D or D' . In the general case, the image of Σ lies in M and induces a class $[\Sigma]$ in $H_2(M, D') \simeq H_2(D, \partial D)$. The map φ extends to $\Delta^3 \rightarrow M$ if and only if $[\Sigma]$ vanishes in $H_2(D, \partial D)$. Since the image of the edges of Σ are minimizing segments, the image of the 1-skeleton of Σ is isotopic to one of the following graphs when it is not degenerated.



GRAPHS 1-6

In the three following cases, Σ is identified with its image by φ .

Case 1. Suppose that only one vertex of Σ maps in the interior of D (see graph 1). Let c_1 , c_2 and c_3 be the three edges of Σ based at this vertex and α_1 , α_2 and α_3 be the other edges of Σ with the same endpoints as $c_2 \cup c_3$, $c_3 \cup c_1$ and $c_1 \cup c_2$. By construction, these three latter arcs are simple and respectively converge to α_1 , α_2 and α_3 , which lie in ∂D , through homotopies given by the curve-shortening process. The sum of these homotopies defines a one-parameter family z_t of one-cycles of D which represents $[\Sigma]$. The images by the curve-shortening process of curves which do not cut each other do not cross. Therefore, the family z_t , which starts from a null-current, ends at a one-cycle lying in ∂D representing either a null-current or ∂D . Since $\text{mass}(z_t) \leq 6\rho < L'_1(M)$, this one-cycle represents a null-current, otherwise γ_0 would not be a local minimum of the mass functional from Claim 2.3.3. Therefore, $[\Sigma] = 0$ in $H_2(D, \partial D)$.

Suppose now that only two vertices of Σ map in the interior of D (see graph 2). We argue in the same way. We construct as previously a one-parameter family of one-cycles z_t in D representing $[\Sigma]$ with $\text{mass}(z_t) \leq 10\rho < L'_1(M)$. This homotopy, starting from a null-current, ends also at a null-current. Therefore, it induces a trivial class in homology, that is $[\Sigma] = 0$ in $H_2(D, \partial D)$.

Case 2. Suppose that exactly three vertices of Σ map in the interior of D (see graphs 3 and 4). They define a face Δ^2 of Σ . The edges of the boundary $\partial\Delta^2$ are noted e_1 , e_2 and e_3 . Let c_1 , c_2 and c_3 be the three edges of Σ which join the vertices of Δ^2 to ∂D (we recall that Σ is identified with its image by φ). By construction, the arcs $c_2 \cup e_1 \cup c_3$, $c_3 \cup e_2 \cup c_1$ and $c_1 \cup e_3 \cup c_2$ are simple and converge to the edges of Σ lying in ∂D through homotopies given by the curve-shortening process. The sum of these homotopies defines a one-parameter family of one-cycles z_t in D . This family starts from $\partial\Delta^2$ and ends at a one-cycle lying in ∂D representing either a null-current or ∂D .

Suppose that it ends at a null-current. Since simple closed curves remain simple through the curve-shortening process, $\partial\Delta^2$ converges either into a point or to ∂D . This homotopy extends the one-parameter family z_t .

Since $\text{mass}(z_t) \leq 9\rho < L'_1(M)$, we conclude as previously that $[\Sigma] = 0$.

Suppose that the family z_t ends at ∂D . If $\partial\Delta^2$ contracts into a point, we extend z_t and conclude similarly. Otherwise, $\partial\Delta^2$ is homotopic to ∂D by the curve-shortening

process. The sum of this homotopy with z_t , endowed with the orientations induced by the one on Σ , defines a new one-parameter family of one-cycles. Since the orientations of the homotopies are induced by the one on Σ , this new one-parameter family starts at a null-current. Furthermore, since simple curves remain simple through the curve-shortening process, it also ends at a null-current. Thus, the class $[\Sigma]$ it represents vanishes in $H_2(D, \partial D)$.

Case 3. Suppose that the four vertices of Σ map in the interior of D (see graphs 5 and 6). The boundaries of the faces of Σ lie in the interior of D and converge either to points or to ∂D through homotopies z_i^t given by the curve-shortening process. The faces of Σ decompose into two pairs such that the edges of the faces of each pair do not intersect transversely (see graphs 5 and 6). Since the images by the curve-shortening process of curves which do not cut each other do not cross, at most two homotopies z_i^t converge to ∂D .

Suppose that z_1^t , z_2^t and z_3^t converge to points. The one-parameter family of one-cycles z_t formed of $z_1^t + z_2^t + z_3^t$ and z_4^t starts from a null-current and ends either at a null-current or at ∂D . Since $\text{mass}(z_t) \leq 9\rho < L'_1(M)$, we conclude as previously that the class $[\Sigma]$ it represents vanishes in $H_2(D, \partial D)$.

Suppose that z_1^t and z_2^t converge to ∂D . Since the orientations of the homotopies are induced by the one on Σ , their sum ends at a null-current. Thus, the one-parameter family of one-cycles $z_1^t + z_2^t + z_3^t + z_4^t$, which represents $[\Sigma]$, starts and ends at null-currents. This implies that $[\Sigma] = 0$.

In conclusion, we have extended r on each building block of P . This defines a retraction $r : P \rightarrow M$. Hence the result. \square

Remark. Let \mathcal{D} be the set of disks with geodesic boundary containing no simple closed geodesic of null index in their interior. The one-cycles which are the shortest among the one-cycles of index one of D for some disk $D \in \mathcal{D}$ form a collection of curves. The proof of Theorem 2.3.6 shows that the length of the longest of these curves bounds from below the filling radius of the sphere. This statement permits us to get a better estimate on the filling radius in the case, for instance, of a round sphere with a small bump looking like a mushroom.

The theorems 2.3.4 and 2.3.6 and the lower bounds on the area and the diameter provided by the filling radius lead to

Corollary 2.3.7. *Let M be a Riemannian sphere, then*

$$\begin{aligned} \text{Area}(M) &\geq \frac{1}{(20)^2}L^2 \\ \text{Diam}(M) &\geq \frac{3}{20}L \end{aligned}$$

where L is the length of the shortest nontrivial curve among the simple closed geodesics of index one and the figure eight geodesics of null index.

Remark. We show in the following examples that it is not possible to restrict the set of curves considered in Theorem 2.3.6 to a single type of geometry.

The round sphere has no non-simple closed geodesic. Therefore, the length of the shortest simple closed geodesic of index one provides in this example the lower bound on the filling radius.

Three long tubes capped with half-hemispheres glued along the boundary components of a hyperbolic pair of pants forms a sphere. This sphere can be perturbed into a three-leg sphere with arbitrarily small area such that the simple closed geodesics and the closed geodesics of index one are arbitrarily long. In this example of a sphere with three long spikes, the length of the shortest figure eight geodesic of null index provides the lower bound on the filling radius.

2.4 Filling radius and global minimax processes

In the previous section, we showed that the filling radius of the sphere is bounded from below by the mass of the shortest one-cycle of index one. The global minimax process described in Section 2.1 yields a one-cycle of index one. But, contrary to the previous case, the mass of this one-cycle does not provide any lower bound on the filling radius. This result is established in the first part. In the second part, the mass functional is replaced by another one taking the connected components of the one-cycles into account. For this new functional, the global minimax principle yields a lower bound on the filling radius of the sphere. This last result has to be compared with the counter-example constructed in the first part.

2.4.1 One-cycles derived from the minimax process

The goal of this part is to prove

Theorem 2.4.1. *There exists a sequence g_n of Riemannian metrics on S^2 which satisfies*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{FillRad}(S^2, g_n)}{L_1(S^2, g_n)} = 0$$

Let us construct a sequence of metrics g_n satisfying the above theorem. Fix $\varepsilon > 0$. Three copies S, S' and S'' of the circle $\mathbb{R}/2\varepsilon\mathbb{Z}$ are said to be glued together if the following identifications hold

- $x \in S$ and $x \in S'$ are identified for $-\varepsilon \leq x \leq 0$
- $x \in S$ and $x \in S''$ are identified for $0 \leq x \leq \varepsilon$
- $x \in S'$ and $x \in S''$ are identified for $0 \leq x \leq \varepsilon$

Fix $n \in \mathbb{N}^*$. The quotient of the strip $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -n \leq y \leq n\}$ by the subgroup of displacements Γ generated by the translation of vector $(2\varepsilon, 0)$ defines a flat rectangle cylinder C . The curves $\sigma_y = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}\}/\Gamma$ where $-n \leq y \leq n$ are called sections of C . The connected components of ∂C agree with $C^+ = \sigma_n$ and $C^- = \sigma_{-n}$. The cylinder C decomposes into two semi-cylinders $\{\sigma_y \mid -n \leq y < 0\}$ and $\{\sigma_y \mid 0 \leq y \leq n\}$.

We define by induction the cylindrical tree of height n for every $n \in \mathbb{N}^*$. The cylindrical tree of height 1 is the flat rectangle cylinder C . Its basis is C^- . The cylindrical tree of height $n+1$ is defined by gluing together the basis of two copies of cylindrical trees of height n with the boundary C^+ of C . The boundary C^- of C forms the basis of the cylindrical tree of height $n+1$.

The tubes modeled on C which form the cylindrical tree T_n of height n are noted M_i with $i \in I$. The union of M_i and the semi-cylinders of T_n adjacent to M_i is noted $\mathcal{U}M_i$.

Let M be the Riemmanian sphere (S^2, g_n) obtained by gluing round hemispheres of circumference 2ε along the connected components of the boundary of T_n . It is clear that $\text{FillRad}(S^2, g_n) \leq \varepsilon$. Let us show that the sequence $L_1(S^2, g_n)$ is unbounded.

Let $(z_t)_{0 \leq t \leq 1}$ be a one-parameter family of one-cycles on M satisfying the conditions (C.1-2) of Section 2.1. The truncated family z_s with $0 \leq s \leq t$ induces a 2-current S_t with $\partial S_t = z_t$ and $\partial \text{Supp}(S_t) \subset \text{Supp}(z_t)$ (see [4] and [46, Sect. III.1.4]). The one-parameter family S_t is continuous.

We define the index of a tube at the time t by N_t^i where

$$N_t^i = \begin{cases} 1 & \text{if there is a simple closed curve in } \text{Supp}(S_t) \cap M_i \text{ which} \\ & \text{induces a nontrivial class in } H_1(M_i) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

For n large enough, we can assume that $\text{mass}(z_t) < n$ for every $0 \leq t \leq 1$, otherwise the result is immediate.

At this stage, we need the three following lemmas.

Lemma 2.4.2. *Let M_i and M_j be two adjacent tubes such that $N_t^i = 1$ and $N_t^j = 0$ with t fixed. Then, there is an irreducible component, i.e., a simple closed curve, of $\text{Supp}(z_t) \cap \mathcal{U}M_i$ homotopic in T_n to a section of M_i or M_j .*

Proof. Assume that no irreducible component of $\text{Supp}(z) \cap \mathcal{U}M_i$ is homotopic to a section of M_j in T_n . Let M_k be the tube adjacent to both M_i and M_j . Let c be a simple closed curve in $\text{Supp}(S_t) \cap M_i$ representing a nontrivial class in $H_1(M_i)$. Recall that we have supposed $\text{mass}(z_t) < n$. Therefore, from the coarea inequality, there exist c_j and c_k in $\mathcal{U}M_i$, sections of M_j and M_k , which do not intersect $\text{Supp}(z_t)$. Let $\Upsilon \subset \mathcal{U}M_i$ be the connected domain bounded by c , c_j and c_k . Let $\text{Supp}_0(S_t)$ be the connected component of $\text{Supp}(S_t)$ containing c . The curve c is homologous to $\partial\Upsilon_t \setminus c$ in $\Upsilon_t := \text{Supp}_0(S_t) \cap \Upsilon$. We have $\partial\Upsilon_t \subset [\text{Supp}(z_t) \cap \Upsilon] \amalg [\text{Supp}_0(S_t) \cap \partial\Upsilon]$ where the union is disjoint. Since $N_t^j = 0$, the intersection $\text{Supp}_0(S_t) \cap \partial\Upsilon$ reduces either to c or to $c \cup c_k$. By assumption, no irreducible component of $\text{Supp}(z_t) \cap \mathcal{U}M_i$ is homotopic to c_j in T_n . Therefore, the irreducible components of $\text{Supp}(z_t) \cap \Upsilon$ are either homotopically trivial in T_n or homotopic to c or c_k in T_n . In conclusion, there is an irreducible component of $\text{Supp}(z_t) \cap \mathcal{U}M_i$ homotopic to a section of M_i in T_n , otherwise the curve c would be homologous to c_k in T_n , which is absurd. \square

We define by induction the height of a tube on a cylindrical tree T_n . The tube at the basis of T_n is at the height zero. Every tube adjacent to a tube of height k which is not itself of height $\leq k$ is by definition of height $k + 1$. The height of a tube $M_i \subset T_n$, noted $h(M_i)$, satisfies $0 \leq h(M_i) \leq n - 1$.

Define N_t as the cardinal of $A_t = \{(i, j) \mid M_i \text{ and } M_j \text{ are adjacent with } N_t^i = 1 \text{ and } N_t^j = 0\}$.

Lemma 2.4.3. *Let $0 \leq t \leq 1$. We have $\text{mass}(z_t) \geq \frac{1}{8}N_t\varepsilon$.*

Proof. The set A_t decomposes into the disjoint union of $A'_t = \{(i, j) \in A_t \mid h(M_i) \text{ is odd}\}$ and $A''_t = \{(i, j) \in A_t \mid h(M_i) \text{ is even}\}$. Define the projection π on the first coordinate by $\pi(i, j) = i$. It is possible to divide A'_t into two subsets whose π -projections contain no pair $\{i, i'\}$ such that M_i and $M_{i'}$ are adjacent. The same goes for A''_t . In this way, the set A_t decomposes into four disjoint subsets. One of them, noted B_t , contains at least $\frac{1}{4}N_t$ elements. From Lemma 2.4.2, there exists an irreducible component of $\text{Supp}(z_t) \cap \mathcal{U}M_i$ of length $\geq 2\varepsilon$ for every $i \in \pi(B_t)$. By construction, the neighborhoods $\mathcal{U}M_i$ where $i \in \pi(B_t)$ are disjoint. Therefore, $\text{mass}(z_t) \geq 2|\pi(B_t)|\varepsilon$. But $|\pi(B_t)| \geq \frac{1}{4}|B_t| \geq \frac{1}{16}N_t$, hence the result. \square

Lemma 2.4.4. *Let $0 \leq t \leq 1$. The number of tubes of M of index one at the time t can be written under the form $\sum_{i \in S} \epsilon_i(2^{n_i} - 1)$ where $S \subset \{0, \dots, N_t\}$, $\epsilon_i = \pm 1$ and $1 \leq n_i \leq n$.*

In particular, there are at most $(2n)^{N_t+1}$ such numbers.

Proof. We follow the proof of [27, Lemma 6]. Define $B'_t = \{(i, j) \in A_t \mid h(M_i) > h(M_j)\}$ and $B''_t = \{(i, j) \in A_t \mid h(M_i) < h(M_j)\}$. The tube $M_i \subset T_n$ is the basis of a unique cylindrical tree of maximal height $n - h(M_i)$ contained in T_n . Given $k \in \mathbb{N}$, let τ_k^+ be the union of the cylindrical trees of T_n of basis M_i and of maximal height with $h(M_i) = k$ and $(i, j) \in B'_t$ for some j . For $k = 0$, τ_0^+ agrees with the empty set if the index of the basis of T_n is null or with T_n otherwise. Similarly, let τ_k^- be the union of the cylindrical trees of T_n of basis M_j and of maximal height with $h(M_j) = k$ and $(i, j) \in B''_t$ for some j .

The set of the tubes of M of index one at the time t agrees with the disjoint union $(\dots((\tau_0^+ \setminus \tau_0^-) \amalg \tau_1^+) \setminus \tau_1^-) \amalg \tau_2^+ \cdots \setminus \tau_{n-2}^-) \amalg \tau_{n-1}^+$. Therefore, the number of the tubes of M of index one at the time t equals

$$\sum_{(i,j) \in B'_t} (2^{n-h(M_i)} - 1) - \sum_{(i,j) \in B''_t} (2^{n-h(M_j)} - 1) \text{ if the index of the basis of } T_n \text{ is null}$$

and

$$\sum_{(i,j) \in B'_t} (2^{n-h(M_i)} - 1) - \sum_{(i,j) \in B''_t} (2^{n-h(M_j)} - 1) + 2^n - 1 \text{ otherwise.}$$

In both cases, it is of the desired form. \square

Let us show how to conclude from the previous lemmas.

Slightly perturbing the homotopy z_t if necessary, we can suppose that the indices N_t^i change one at a time throughout the homotopy. Note that the small perturbations used do not increase the mass of the one-cycles z_t more than any preliminary given number. When t varies from 0 to 1, the number of tubes of M of index one varies from 0 at $t = 0$ to $2^n - 1$ at $t = 1$. Thus, each integer between 0 and $2^n - 1$ occurs as the number of tubes of M of index one at some time t . Therefore, we have $(2n)^{N_t+1} \geq 2^n$ for some t . That is N_t is bigger than $c \frac{n}{\ln n}$ for some t where c is a positive constant independent of n and t . In particular, we get $\sup_{0 \leq t \leq 1} \text{mass}(z_t) \geq c' \frac{n}{\ln n} \varepsilon$ with $c' > 0$ independent of n from Lemma 2.4.3. Therefore, $L_1(S^2, g_n)$ is unbounded.

2.4.2 Connected components and the minimax process

In order to state and prove the results of this part, we need to introduce a new functional on the space of one-cycles, define the minimizing closed geodesics and describe the curve-deformation process.

Let M be a Riemannian sphere. Without loss of generality, we shall assume the metric generic. Let $N \subset M$ be a connected domain whose boundary ∂N is a finite union of closed geodesics c_i with $i \in I$. We define the functional μ on $\mathcal{Z}_1(M, \mathbb{Z})$ by $\mu(z) = \sup\{\text{mass}(z_i) \mid z_i \text{ is a connected component of } z\}$.

Every nontrivial simple closed curve γ of M admits two sides defined as the connected components of $M \setminus \gamma$. A nontrivial simple closed geodesic γ is said to be

minimizing with respect to one of its sides if every pair of points of γ can be joined by a segment which does not pass through this side. A simple closed geodesic minimizing with respect to both sides is said to be minimizing.

Let us consider the one-parameter families of one-cycles $(z_t)_{0 \leq t \leq 1}$ on N which satisfy the following conditions.

$$- z_0 = \cup_{i \in I_0} c_i \text{ and } z_1 = \cup_{i \in I_1} c_i \text{ for some partition of } I = I_0 \amalg I_1 \quad (C'.1)$$

$$- z_t \text{ induces a nontrivial class } [z] \text{ in } H_2(N, \partial N). \quad (C'.2)$$

If I_0 or I_1 is empty, the corresponding one-cycles are reduced to the null-current.

We define a critical value of the functional μ by a global minimax principle

$$L_1''(N) = \inf_{[z] \neq 0} \sup_{0 \leq t \leq 1} \mu(z_t)$$

Now, we can state

Proposition 2.4.5. *Let M be a Riemannian two-sphere and $N \subset M$ be a connected domain whose boundary ∂N is a finite union of minimizing closed geodesics c_i . Then,*

$$FillRad(M) \geq \frac{1}{18} L_1''(N)$$

The curve-deformation process described below plays a key role in the proof of the above proposition.

Let γ be a non-minimizing simple closed geodesic and c be a minimizing arc intersecting γ only at the endpoints. The arc c divides γ into c^+ and c^- . The simple closed curves $c^+ \cup c$ and $c^- \cup c$, endowed with the orientations induced by c , converge to simple closed geodesics γ^+ and γ^- through homotopies z_t^+ and z_t^- given by the curvature flow. Applying the curve-shortening process if necessary, we can extend the homotopies and suppose that γ^+ and γ^- are local minima of the mass functional. Since the curves $c^+ \cup c$ and $c^- \cup c$ do not intersect transversely and bound convex domains, the simple closed curves z_t^+ and z_t^- are disjoint for $t > 0$. The sum $z_t = z_t^+ + z_t^-$ defines the curve-deformation process of γ with respect to c . The homotopy of one-cycles z_t is μ -non-increasing and satisfies $\mu(z_t) \leq L(\gamma)$. In particular, $L(\gamma^+)$ and $L(\gamma^-)$ are less than $L(\gamma)$.

In the following two lemmas, we assume that the only minimizing geodesics of N are the connected components of the boundary ∂N .

Lemma 2.4.6. *Let γ and γ' be two disjoint nontrivial simple closed geodesics of N . Suppose that γ (resp. γ') is minimizing with respect to the side which does not contain γ' (resp. γ).*

Then, γ or γ' is a connected component of ∂N .

Proof. The geodesics γ and γ' bound a connected domain $N' \subset N$ with $\gamma, \gamma' \subset \partial N'$. Suppose that γ does not lie in ∂N . Since the only minimizing geodesics of N are the connected components of ∂N , γ is not minimizing. Therefore, there exists a minimizing arc c in N' with endpoints in γ which does not lie in γ . The curve-deformation process applied to γ with respect to c yields two disjoint simple closed geodesics of N' . The union of these two geodesics is noted z_1 . Let us define by induction on k a sequence z_k formed of a disjoint union of simple closed geodesics of N' . This sequence of one-cycles is μ -non-increasing. Furthermore, each z_k bounds with γ a connected domain D_k of N' with $\partial D_k = z_k \cup \gamma$. If one of the geodesics of z_k is not minimizing with respect to the side opposed to γ , we apply to it the curve-deformation process with respect to this side. Otherwise, if one of them is not minimizing with respect to the side containing γ , we apply to it the curve-deformation process. In both cases, we obtain a new collection \mathcal{C} of simple closed geodesics which do not intersect each other. We define z_{k+1} as the union of the nontrivial geodesics of \mathcal{C} which can be joined to γ by paths cutting no geodesic of \mathcal{C} . This induction process stops after a finite number n of steps when z_n is only formed of minimizing geodesics of N' . Since there is no minimizing geodesic in the interior of N , we have $z_n \subset \partial N$. Therefore, the geodesic γ' , which lies between z_n and ∂N , is a connected component of ∂N . \square

Lemma 2.4.7. *Let γ be a simple closed geodesic of N with $L(\gamma) < L_1''(N)$. Suppose that γ is minimizing with respect to no side.*

There exists a non-minimizing simple closed geodesic of N , lying in a side of γ , which is minimizing with respect to the side opposed to γ .

Proof. Assume that every simple closed geodesic of N , disjoint from γ and minimizing with respect to the side opposed to γ is minimizing. Let us recall that the only minimizing geodesic of N are the connected components of ∂N . We apply the curve-deformation process to γ with respect to each of its sides N_1 and N_2 . Then, we extend these homotopies as in the proof of Lemma 2.4.6. One lies in N_1 , the other in N_2 from the assumption. Since there is no minimizing geodesic in the interior of N , these homotopies, put together, yield a one-parameter family of one-cycles z_t which starts from $\partial N_1 \cap \partial N$, passes through γ and ends at $\partial N_2 \cap \partial N$. Furthermore, the family z_t induces a nontrivial class in $H_2(N, \partial N)$ and satisfies $\mu(z_t) \leq L(\gamma)$. Therefore, $L(\gamma) \geq L_1''(N)$ from the definition of $L_1''(N)$. \square

Remark. From Lemma 2.4.6, there are such closed geodesics in only one side of γ .

Lemma 2.4.7 and the above remark permit us to define the side of deformation of a geodesic and to make the curve-deformation process more precise.

DEFINITION: The side of deformation of a non-minimizing simple closed geodesic γ of N of length $< L_1''(N)$ is :

- the opposite side with respect to which γ is minimizing, if γ is minimizing with respect to a side.
- the side which does not contain any geodesic minimizing with respect to γ except the connected components of ∂N , otherwise.

From now on, when we shall apply the curve-deformation process to such a geodesic γ , it will always be with respect to a minimizing arc with endpoints in γ lying in the deformation side of γ .

Proof of Proposition 2.4.5. Let us assume first that the only minimizing geodesics of N are the connected components of ∂N . We argue as in the proof of Theorem 2.3.6. Fix $\delta > 0$. Let P be a 3-dimensional polyhedron in $U_\delta(M)$ containing M as a subpolyhedron. We show that if $\delta < \frac{1}{18}L_1''(M)$, then the inclusion $M \hookrightarrow P$ admits a retraction. Therefore, M does not bound in $U_\delta(M)$, that is $\text{FillRad}(M) \geq \delta$.

First step. We subdivide P and define a map $r : P^1 \rightarrow M$ on the 1-skeleton of P which leaves the edges of M fixed as in the proof of Theorem 2.3.1. By construction, the images of the edges of P are minimizing segments of length less than ρ with $\rho < \frac{1}{9}L_1''(N)$. Since the connected components of ∂N are minimizing closed geodesics, the images of the edges of P cut ∂N at most twice. In particular, the images of the boundary of the 2-simplices of P cut ∂N at most six times. On every edge of P whose image cuts ∂N , we introduce new vertices given by the pre-images of the intersection points with ∂N . Let Δ^2 be a 2-simplex of P . Every pair of new vertices of Δ^2 which map to a same connected component of ∂N defines a new edge in Δ^2 . By definition, the images of these new edges are the minimizing segments (lying in ∂N) joining the image of their endpoints. We number the vertices of P , old and new, and consider the natural order induced. The new edges of Δ^2 which map to N bound a domain D^2 of Δ^2 . We introduce new edges on D^2 joining the greatest vertex of D^2 to every other vertex of D^2 . This decomposes Δ^2 into triangles. The triangles of the faces of every 3-simplex Δ^3 whose boundaries map to N bound a domain D^3 of Δ^3 . We introduce, as previously, new edges on D^3 joining the greatest vertex of D^3 to every other vertex of D^3 . These new edges define new faces in Δ^3 . These new faces decompose Δ^3 into 3-simplices. By definition, each new edge maps onto a minimizing segment of N joining the image of its endpoints.

In conclusion, we have defined a new simplicial structure on P , a map $r : P^1 \rightarrow M$ which leaves the edges of M fixed and a decomposition of P into two finite subcomplexes P' and P'' such that

- the boundary of every 2-simplex of P' maps into a geodesic triangle whose length of the edges is less than $\frac{3}{2}\rho < \frac{1}{6}L_1''(N)$
- the image of the 1-skeleton of every 3-simplex of P' (resp. P'') lies in N (resp. $M \setminus N$).

Second step. We want to extend r to P^2 . Let D_i be the connected components of $M \setminus N$ bounded by c_i . We have $M = N \cup_i D_i$. Let $\partial\Delta^2$ be the boundary of a 2-simplex Δ^2 of P . If Δ^2 lies in M , we fill $\partial\Delta^2$ as in the proof of Theorem 2.3.1. If the image of $\partial\Delta^2$ lies in a connected component c_i of ∂N , it contracts into a point in D_i . If $\partial\Delta^2$ is not contained in P' , we fill its image by the disk it bounds in $M \setminus N$. Otherwise, the image of $\partial\Delta^2$ lies in N . In this case, it converges to a simple closed geodesic c of N by the curve-shortening process. We want now to define a μ -non-increasing homotopy of one-cycles in N between c and connected components of ∂N , which gives rise to a filling of the image of $\partial\Delta^2$ in M .

The images of the boundaries of the 2-simplices of P' converge to simple closed geodesics of N . The set formed of these simple closed geodesics which are not minimizing is noted \mathcal{C} . It is finite since P' is a finite simplicial complex. We want to define homotopies of one-cycles in N between every curve of \mathcal{C} and minimizing geodesics. Let us consider the deformation sides of two disjoint geodesics of \mathcal{C} . From Lemma 2.4.6, either one is contained in the other or their intersection is disjoint. Therefore, there exists $\gamma_0 \in \mathcal{C}$ such that no geodesic of \mathcal{C} lies in the deformation side of γ_0 . The curve-deformation process applied to γ_0 yields a homotopy of one-cycles z_t defined for $0 \leq t \leq 1$ between γ_0 and the disjoint union $\gamma_0^+ \cup \gamma_0^-$ of two simple closed geodesics. The flow of every other curve of \mathcal{C} is constant for $0 \leq t \leq 1$. We repeat this construction with the set of the non-minimizing closed geodesics of $\{\gamma \in \mathcal{C}, \gamma \neq \gamma_0\} \cup \{\gamma_0^+, \gamma_0^-\}$. Since for a generic metric there are only finitely many closed geodesics of length uniformly bounded, this process stops after a finite number of iterations. From Lemma 2.4.6, the deformation side of every simple closed geodesic of N lying in the deformation side of a geodesic γ does not contain γ . Therefore, the iterations of this process give rise to μ -non-increasing homotopies of one-cycles between the geodesics γ of \mathcal{C} and the connected components of ∂N which lie in the deformation side of γ . A contraction of these latter into points in $M \setminus N$ yields a filling of the boundary of the 2-simplices of P' in M . Furthermore, the homotopies arising from geodesics of \mathcal{C} which do not intersect each other remain disjoint at every time t , except possibly for some connected components lying in ∂N which may coincide. Thus, the sum z_t of the homotopies arising from two disjoint geodesics γ and γ' of \mathcal{C} satisfies $\mu(z_t) \leq L(\gamma) + L(\gamma') \leq 9\rho$. In conclusion, for every 2-simplex Δ^2 of P , we get a map of degree one from Δ^2 onto its image in M which agrees with r on the boundary. This yields an extension $r : P^2 \longrightarrow M$ whose restriction to M is the identity.

Let us extend this map to P^3 . Let Δ^3 be a 3-simplex of P . The restriction of r to the boundary $\partial\Delta^3$ is noted $\varphi : \partial\Delta^3 \rightarrow M$. If Δ^3 lies in P'' , it extends to a map defined on Δ^3 whose image lies in some D_i . Otherwise, Δ^3 lies in P' and the map φ induces a class $[\partial\Delta^3]$ in $H_2(M, M \setminus N) \simeq H_2(N, \partial N)$. This map extends to $\Delta^3 \rightarrow M$ if and only if $[\partial\Delta^3]$ vanishes in $H_2(N, \partial N)$. Since the images of the edges of Δ^3 are minimizing segments, the image of the 1-skeleton of Δ^3 is isotopic to the graph 5 or 6 as in Case 3 of Theorem 2.3.6. Therefore, the faces of Δ^3 decompose into two pairs such that the edges of the faces of each pair do not intersect transversely. By construction, the images of the faces of $\partial\Delta^3$ are defined by μ -non-increasing homotopies of one-cycles z_i^t between the images of their boundaries and some connected components of ∂N or null-currents. Furthermore, the sum of the two homotopies z_1^t and z_2^t arising from the faces of a same pair satisfies $\mu(z_1^t + z_2^t) \leq 9\rho$. The same goes for the other pair of faces defined by z_3^t and z_4^t . Putting together the homotopies $z_1^t + z_2^t$ and $z_3^t + z_4^t$, we get a one-parameter family of one-cycles z_t . By construction, z_t represents $[\partial\Delta^3]$ and satisfies $\mu(z_t) \leq 9\rho < L_1''(N)$. Therefore, the class $[\partial\Delta^3]$ vanishes in $H_2(N, \partial N)$.

Thus, the map r extends to each simplex of P and gives rise to a retraction $P \rightarrow M$. This proves the inequality when N has no minimizing geodesic in its interior.

Suppose that N admits a minimizing geodesic γ which does not lie in ∂N . It decomposes N into two connected components N_1 and N_2 whose boundaries are finite unions of minimizing simple closed geodesics. By induction on the number of nontrivial minimizing geodesics which lie in the interior of N , we have $\text{FillRad}(M) \geq \frac{1}{18}L_1''(N_i)$ for $i = 1, 2$. Let us consider homotopies of one-cycles on N_i between the connected components of ∂N_i with $i = 1, 2$ which induce nontrivial classes in $H_2(N_i, \partial N_i)$. Put together, these homotopies yield one-parameter families of one-cycles satisfying (C'.1-2). In particular, we get $L_1''(N) \leq \max\{L_1''(N_1), L_1''(N_2)\}$. This proves the result by induction. \square

The following theorem deduces from Proposition 2.4.5 when $N = M$ and $\partial N = \emptyset$.

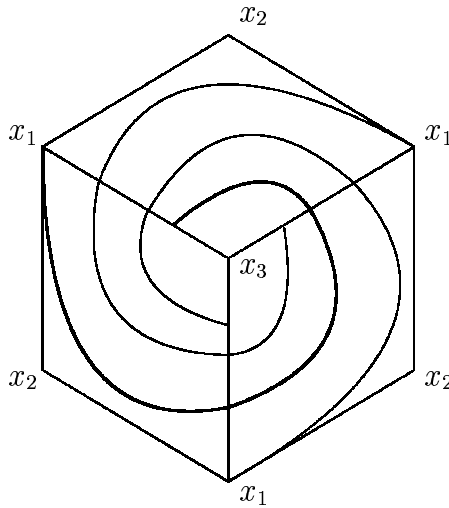
Theorem 2.4.8. *Let M be a Riemannian two-sphere, then*

$$\text{FillRad}(M) \geq \frac{1}{18}L_1''(M)$$

2.5 Area and length of the shortest closed geodesic

An inequality between the length of the shortest closed geodesic and the area of the sphere, which improves Croke's inequality, is established in this section. We recall that the degenerate metric obtained by gluing two copies of a flat equilateral triangle along their boundaries is conjectured as extremal. This conjecture will appear somewhat more natural by the use we make of a ramified covering from the torus onto the sphere. This covering permits us to bring back the problem on the torus, where Loewner's theorem dealing with the classical notion of systole holds.

Given three points x_1, x_2, x_3 in S^2 , there exists a covering $\pi : T^2 \rightarrow S^2$ of degree three from the torus onto the sphere ramified above x_1, x_2 and x_3 . The following hand-construction of π introduces some domains on T^2 playing the role of "fundamental domain" of S^2 for the covering π . First, we cut S^2 along two minimizing segments joining x_1 to x_2 and x_1 to x_3 . We get what we shall call a geodesic parallelogram. Then we glue three copies along the segments $[x_1, x_3]$ so as to obtain a hexagon (see figure). Eventually, the identification of the opposed sides gives us a torus. Thus, the isometric rotation, defined on the hexagon, centered at x_3 and permuting the geodesic parallelograms, passes to quotient and defines the ramified Riemannian covering $\pi : T^2 \rightarrow S^2$.



Let g be a Riemannian metric on the sphere. We consider the torus T^2 endowed with the pulled-back metric π^*g . In particular, we have $\text{Area}(T^2, \pi^*g) = 3\text{Area}(S^2, g)$. Loewner's systolic inequality on the torus (see [14]) assures that $\text{Area}(T^2, \pi^*g) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sys}_1(T^2, \pi^*g)^2$, with equality only for the hexagonal flat torus. That is $\text{Area}(S^2, g) \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}\text{sys}_1(T^2, \pi^*g)^2$.

The following lemma shows that a control of the geometry of three points on the sphere yields bounds on the length of closed geodesics.

Proposition 2.5.1. *Let (S^2, g) be a Riemannian sphere.*

i) Let x_1, x_2, x_3 be three points in S^2 distant from at least $\frac{\alpha}{2} \text{scg}(S^2, g)$ with $\alpha \leq 1$. Suppose that every (simple geodesic) loop based at x_i of length less than $\alpha \cdot \text{scg}(S^2, g)$ is homotopically trivial in $S^2 \setminus \{x_j, x_k\}$ for $i = 1, 2, 3$.

Then, $\text{Area}(S^2, g) \geq \frac{\alpha^2}{2\sqrt{3}} \text{scg}(S^2, g)^2$.

ii) Let x_1, x_2, x_3 be three points in S^2 whose sum of the distances is noted L . There exists a simple closed geodesic of length at least L .

Remark. The assertion ii) will not be used afterwards; we state it because it completes the study of the geometry of triplets of points on the sphere. Furthermore, the given lower bound is sharp. The proof uses arguments of [21] where a similar statement has been established with the diameter.

Proof. Let us consider the above Riemannian covering $\pi : T^2 \rightarrow S^2$ of degree three ramified over the punctual singularities x_1, x_2 and x_3 . The singularities x_i being distant from at least $\frac{\alpha}{2} \text{scg}(S^2, g)$, we can assume that the systole of (T^2, π^*g) passes at most through one singularity. Otherwise we immediately get the assertion i) from Loewner's inequality. Two cases are now to be considered.

Case 1. Suppose that the systole of the torus passes through no singularity, then it projects onto a simple closed geodesic of length $\leq \text{sys}_1(T^2, \pi^*g)$. Loewner's inequality yields the proposition again. In this case, we even get an optimal result when $\alpha = 1$.

Case 2. Suppose that the systole of the torus effectively passes through a singularity. We then have the following

Lemma 2.5.2. *The geodesic loop of S^2 based at one of the x_i 's onto which the systole of the torus projects is simple and homotopically trivial in $S^2 \setminus \{x_j, x_k\}$.*

Proof. Let us show that the systole of (T^2, π^*g) lies in one of the geodesic parallelograms of T^2 and joins two opposed singularities.

Suppose that the trajectory of a systole on T^2 emanating from a pre-image of x_i , which will still be noted x_i , cuts the edges of a geodesic parallelogram. The edges of the parallelograms being minimizing arcs, the trajectory necessarily cuts an edge non-adjacent to x_i otherwise the systoles could be shortened. By symmetry, we actually have three geodesic arcs, pieces of systoles of T^2 , emanating from x_i and joining an opposed side c_j (see figure). The trajectories of these arcs which arise from the same base point x_i are simple and cannot cut each other anymore, otherwise the systoles could be shortened. Therefore, since they are symmetric, each of them continue into an adjacent parallelogram and leaves it by an adjacent side c_k

from the Jordan theorem (see figure). We repeat the same arguments so forth. Thus the trajectories wind up around a singularity. In particular, they cut twice the minimizing segments c_i , hence a contradiction. \square

Therefore, the length of the systole of (T^2, π^*g) is not less than $\alpha \cdot \text{scg}(S^2, g)$ and we deduce the proposition from Loewner's inequality.

The first assertion is thus established, let us go now to the second. On each one of the spaces T^3 and $S^2 \times S^2 \times S^2$ where $T^3 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^3$ represents the 3-dimensional torus, we consider the equivalence relation which identifies triplets distinct by the order of their coordinates. The quotient spaces are noted $[T^3]$ and $[S^2 \times S^2 \times S^2]$. Let Σ be the space of simple closed curves of S^2 parametrized proportionally to arclength. We define the map

$$\begin{aligned} \Phi : \Sigma \times [T^3] &\longrightarrow [S^2 \times S^2 \times S^2] \\ (\gamma, [s_1, s_2, s_3]) &\longrightarrow [\gamma(s_1), \gamma(s_2), \gamma(s_3)] \end{aligned}$$

The group $O(2)$ acts on each of the factors of $\Sigma \times [T^3]$ in the following way. The action of $s \in SO(2) \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ is given by $(\gamma(\cdot - s), [s_1 + s, s_2 + s, s_3 + s])$ and the action of $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(2)$ is defined by $(\gamma(1 - \cdot), [1 - s_1, 1 - s_2, 1 - s_3])$. The quotient of Σ by $O(2)$ gives the space of unparametrized simple closed curves $\tilde{\Sigma} = \Sigma/O(2)$. The map Φ is invariant by $O(2)$, therefore it passes to the quotient and defines $\tilde{\Phi} : X \longrightarrow [S^2 \times S^2 \times S^2]$, where X represents the quotient of $\Sigma \times [T^3]$ by $O(2)$. Let $\Delta \subset [S^2 \times S^2 \times S^2]$ formed by the elements having at least two equal coordinates and $\Delta_0 = \tilde{\Phi}^{-1}(\Delta)$. The space of unparametrized circles of (S^2, can) , noted \mathcal{C} , is homeomorphic to $\mathbb{R}P^3$ when all point curves are identified. Furthermore, the space (Σ, Σ_0) retracts onto $(\mathcal{C}, \mathcal{C}_0)$, where $\Sigma_0 = \mathcal{C}_0$ represents the set of point curves. There exists a unique circle on (S^2, can) whose image by $\text{id} : (S^2, \text{can}) \longrightarrow (S^2, g)$ contains any given triplet of distinct points of (S^2, g) . Therefore, the restriction of $\tilde{\Phi}$ to the quotient of $\mathcal{C} \times [T^3]$ induces an isomorphism

$$\tilde{\Phi}_* : H_6(X, \Delta_0) \longrightarrow H_6([S^2 \times S^2 \times S^2], \Delta)$$

where the coefficients of the homology are in \mathbb{Z}_2 .

Therefore, any three-parameter family of curves homotopic to \mathcal{C} contains a curve passing through any given triplet of points of S^2 . From the three closed geodesic theorem of Lusternik-Schnirelmann (see [38]), we get a simple closed geodesic of length $\geq L$. \square

At this stage, we can prove the following

Theorem 2.5.3. *Let M be a Riemannian two-sphere, then*

$$\text{Area}(M) \geq \frac{2}{81\sqrt{3}} \text{scg}(M)^2$$

where $\text{scg}(M)$ is the length of the shortest nontrivial closed geodesic on M .

Proof. Let us go over the proof of Theorem 4.2 of [24]. Fix $\alpha = \frac{2}{9}$. Let $p, q \in M$ such that $d(p, q) = \text{Diam}(M)$ and τ be a minimizing segment from p to q parametrized by arclength. From Theorem 2.2.2, $\text{scg}(M) \leq 4\text{Diam}(M)$, so the interval $I = [\frac{\alpha}{2}\text{scg}(M), \text{Diam}(M) - \frac{\alpha}{2}\text{scg}(M)]$ is not empty. We can assume that for every $t \in I$, there exists a simple geodesic loop γ_t of length less than $\alpha \cdot \text{scg}(M)$ based at $\tau(t)$ and noncontractible in $M \setminus \{p, q\}$; otherwise we apply Lemma 2.5.1 to get the desired result. The loop γ_t separates M into two parts: $\Omega(\gamma_t)_p$ and $\Omega(\gamma_t)_q$, the former containing p and the latter q . The loop γ_t being geodesic, one of these two domains is convex. Let $S_p = \{t \in I \mid \text{there exists } \gamma_t \text{ as previously such that } \Omega(\gamma_t)_p \text{ is convex}\}$, similarly we define S_q . The subsets S_p and S_q are closed and cover I . A simple closed curve γ will be said convex to a domain Ω if this latter is convex with boundary γ . We consider now the two following cases.

Case 1. Suppose that S_p and S_q have a point in common. There exist two geodesic loops γ^p and γ^q of length $\leq \alpha \cdot \text{scg}(M)$ based at a same point z of τ such that γ^p is convex to $\Omega_p = \Omega(\gamma^p)_p$ and γ^q is convex to $\Omega_q = \Omega(\gamma^q)_q$. Thus M decomposes into three parts Ω_p, Ω_q and Ω . Recall that the geodesic segment τ passes through z . The loops γ^p and γ^q leave the small neighborhoods of z from one side of τ and join it back by the other side. Therefore, $\gamma^p \cup \gamma^q$ or $\gamma^p \cup -\gamma^q$ is convex to Ω , moreover $L(\partial\Omega) < 2\alpha \cdot \text{scg}(M) \leq \text{scg}(M)$. Applying Lemma 2.2.1 to Ω_p , we get a length non-increasing homotopy lying in Ω_p from $\partial\Omega_p$ to a point. The same goes for Ω_q and Ω . We can now put these three homotopies together as in the proofs of Theorems 2.2.2 and 2.3.1 to get a one-parameter family z_t of one-cycles which starts at the sum of the two points p and q , reaches $\partial\Omega$ and contracts into a point of Ω . It satisfies (C.1-2) and $\text{mass}(z_t) < 2\alpha \cdot \text{scg}(M) \leq \text{scg}(M)$ which contradicts the minimax process of Theorem 2.1.4.

Case 2. Suppose that S_p and S_q are disjoint. One of them is then empty. For instance, S_p and so $S_q = I$. There exists a geodesic loop γ of length $\leq \alpha \cdot \text{scg}(M)$, non-homotopically trivial in $M \setminus \{p, q\}$, based at $z_0 \in \tau$ with $d(p, z_0) = \frac{\alpha}{2}\text{scg}(M)$ such that γ is convex to $\Omega(\gamma)_q$. Since p is at maximum distance from q , there also exist minimizing geodesics τ_1 and τ_2 from p to q such that $\tau'(0)$, $\tau_1'(0)$ and $\tau_2'(0)$ do not lie in an open half plane. Shortening γ if necessary, we can assume that τ , τ_1 and τ_2 intersect γ only at z_0, z_1 and z_2 respectively. The length of γ is $\leq \alpha \cdot \text{scg}(M)$ and $d(p, z_0) = \frac{\alpha}{2}\text{scg}(M)$ so we have $d(p, z_1) \leq \alpha \cdot \text{scg}(M)$ and $d(p, z_2) \leq \alpha \cdot \text{scg}(M)$. The geodesic triangles $p z_i z_{i+1}$ formed of the segments $[p, z_i]$ and the arcs $\overline{z_i z_{i+1}}$ of γ are convex of convexity not oriented toward q . The lengths of $p z_i z_{i+1}$ and γ are less than $\text{scg}(M)$, therefore, putting together the homotopies obtained using Lemma 2.2.1, we can construct a one-parameter family z_t of one-cycles which satisfies (C.1-2). Introducing the lengths a_i of the arcs $\overline{z_i z_{i+1}}$ with $a_1 + a_2 + a_3 = L(\gamma)$ and the bounds on $d(p, z_i)$, this can be done in such a way that $\text{mass}(z_t) < \frac{9}{2}\alpha \cdot \text{scg}(M) = \text{scg}(M)$. Hence a contradiction with the minimax process. \square

Chapter 3

Global and local volume bounds and the shortest geodesic loop

Introduction

The relations between the volume of complete Riemannian manifolds and the length of their shortest nontrivial geodesic loops are studied in this chapter. The geometric estimates obtained lead to topological restrictions through homotopical finiteness results.

The first theorem we shall prove provides lower bounds both on the volume and on the diameter of M in terms of the length of the shortest geodesic loop.

Theorem 3.0.1. *Let M be a complete Riemannian manifold. Then there exists a positive constant C_n depending only on the dimension n of M such that*

$$\text{Vol}(M) \geq C_n \text{sgl}(M)^n$$

$$\text{Diam}(M) \geq C'_n \text{sgl}(M)$$

where $\text{sgl}(M)$ designates the length of the shortest nontrivial geodesic loop in M .

Actually, a lower bound holds not only on the whole volume of manifolds but also on the volume of each sufficiently small ball. More precisely, we shall prove the following local version of the previous global volume estimate.

Theorem 3.0.2. *Let M be a complete Riemannian manifold. Then there exists a positive constant C''_n depending only on the dimension n of M such that*

$$\text{Vol}B(x_0, R) \geq C''_n R^n$$

for every ball $B(x_0, R)$ of radius $R \leq \frac{1}{2} \text{sgl}(M)$ in M .

Explicit formulas for C_n , C'_n and C''_n will be calculated. In the noncompact case, Theorem 3.0.2 immediately leads to the following volume growth estimate.

Corollary 3.0.3. *Let M be a complete noncompact Riemannian manifold with $\text{sgl}(M) \geq \ell_0 > 0$. Then there exists a positive constant C depending on ℓ_0 and the dimension n of M such that*

$$\text{Vol}B(x_0, R) \geq CR$$

for every ball $B(x_0, R)$ of radius $R \geq \frac{1}{2}\ell_0$ in M .

Similar curvature-free estimates have been first obtained with the injectivity radius. Namely, M. Berger proved in [15] the isoembolic theorem

$$\text{Vol}(M) \geq C_n \text{inj}(M)^n$$

for all complete Riemannian manifolds with a sharp constant C_n . A local version was then established by C. Croke in [23]

$$\text{Vol}B(x_0, R) \geq C_n R^n \text{ for all } R \leq \frac{1}{2} \text{inj}(M)$$

for all complete Riemannian manifolds but with a nonsharp constant.

Replacing the notion of injectivity radius with one of local geometric contractibility, M. Gromov extended Berger's global volume estimate in [30]. In the same way, an extension of Croke's local version was then established by R. Greene and P. Petersen in [29].

Let us note that we have a stronger result in the following two cases.

A n -dimensional manifold M is by definition k -essential if there exists a continuous map $\psi : M \rightarrow K$ into a $K(\pi, k)$ space such that $\psi_*[M] \neq 0$ where $[M] \in H_n(M)$ is the fundamental class of M . The homology coefficients are in \mathbb{Z} , if M is orientable, and in \mathbb{Z}_2 , otherwise. For 1-essential manifolds, M. Gromov showed in [30] that the inequalities of Theorem 3.0.1 hold if we replace $\text{sgl}(M)$ by the length of the shortest closed geodesic, noted $\text{scg}(M)$. The same goes for the two-dimensional sphere as it was proved by C. Croke in [24]. Apart from these two cases, no other similar rigidity result is known.

Let us also notice that $\text{scg}(M)$ may be greater than $\text{sgl}(M)$ and does not provide any uniform lower bound on the volume of the balls of M . A counter-example is given by any Riemannian manifold on which a long and thin spike is glued. Therefore, Theorem 3.0.2 has no analogue in this case.

Introducing the lengths of geodesic double loops, we can refine Theorem 3.0.1 for 2-essential manifolds as follows

Theorem 3.0.4. *Let M be a 2-essential complete Riemannian manifold. Then there exists a positive constant c_n depending only on the dimension n of M such that*

$$\text{Vol}(M) \geq c_n \ell_0(M)$$

with $\ell_0(M) = \min\{\text{scg}(M), L_0(M)\}$ where $L_0(M)$ is the length of the shortest minimizing geodesic double loop formed of two nontrivial loops of the same length.

Note that non-closed geodesic loops run twice are not minimizing. Therefore, they are not taken into account in the definition of $\ell_0(M)$ (see Section 3.4 for a more precise statement). Theorem 3.0.4 improves Theorem 3.0.1 for 2-essential manifolds but does not admit a local version. The example of a long and thin cone glued to a Riemannian manifold yields again a counter-example.

In [3], M. Anderson proved a compactness theorem for metrics whose Ricci curvature, diameter, volume and length of the shortest geodesic loop are bounded. From Theorem 3.0.1, it turns out that the required bound on the volume can be dropped.

In a recent article [47], an upper bound similar to the second inequality of Theorem 3.0.1 has also been established for simply connected Riemannian manifolds with nontrivial second homology group and with nonnegative curvature. These topological and geometrical assumptions on the manifold can actually also be dropped.

From Theorem 3.0.2 and using constructions involved in the proof of Theorem 3.0.1, it is possible to derive the following homotopy finiteness result.

Theorem 3.0.5. *The class $\mathcal{C} = \mathcal{C}_n(V_0, \ell_0)$ of all complete Riemannian manifolds M of dimension n with volume $\leq V_0$ and $\text{sgl}(M) \geq \ell_0$ contains finitely many simple homotopy types.*

Furthermore, an explicit upper bound on the number of homotopy types in \mathcal{C} as well as an explicit estimate of the Betti numbers of manifolds in \mathcal{C} will be given. Similar finiteness results have been established with the injectivity radius and the function of local geometric contractibility in [57] and [43]. But, from [5], these statements do not hold for $n \geq 3$ when $\text{sgl}(M)$ is replaced by the systole of M , i.e., the length of the shortest non-contractible closed geodesic of M .

In the first section, we give a map extension criterion based on a simplex filling process. Used several times throughout this chapter, it will constitute a fundamental tool in the construction of maps. In Section 3.2, the notion of filling radius is presented and the proof of Theorem 3.0.1 is then established. Constructions similar to those involved in this proof will appear afterwards. Section 3.3 is devoted to the proof of Theorem 3.0.2. Following [29], we give an extrinsic filling

radius estimate of submanifolds approximating the small distance spheres. Then, we derive an intrinsic filling radius estimate leading to the proofs of Theorem 3.0.2 and of the corollary. It is worth noting that these latter require the diameter estimate of Theorem 3.0.1. In Section 3.4, we introduce the double loop space and describe the structure of some critical points. Then, we present the proof of Theorem 3.0.4. Finiteness results are established in Section 3.5. The compactness of \mathcal{C} for the Gromov-Hausdorff topology is stated and the construction of homotopy equivalences are presented. Then, explicit upper bounds on both the number of homotopy types and the homology of manifolds of \mathcal{C} are calculated.

3.1 Extension process

In this part, we construct an extension process for maps defined on the vertices of simplicial complexes. This process will play a key role in the proofs of Theorems 3.0.1, 3.0.2 and 3.0.4.

3.1.1 Preliminaries

The notion of retraction of loop spaces for arbitrary metric spaces and the definition of ordered complex are presented in this section. They will be used to establish the extension process in the next section.

Let (X, d) be a metric space, more simply noted X , and $*$ be a point in X . The loop space of X based at $*$, noted $\Omega_* X$, is by definition the space of continuous loops $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ with endpoints $*$. It is endowed with the C^0 -topology. Let $\kappa \geq 0$, we define $\Omega_*^\kappa X$ as the space of loops based at $*$ of length less than κ . The length of a loop γ of a metric space is given by

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} d(\gamma(s_i), \gamma(s_{i+1})) \mid (s_i)_{0 \leq i \leq m} \text{ subdivision of } [0, 1] \right\}$$

The Birkhoff curve-shortening process with fixed endpoints defined on the loop space of Riemannian manifolds (cf. [38] for a precise definition) satisfies the following properties. It is continuous and does not increase the length of loops $\gamma \in \Omega M$, i.e., $L(\gamma_t) \leq L(\gamma_s)$ whenever $s \leq t$. Moreover, the family γ_t above converges to a geodesic loop and geodesic loops are the only fixed points of this process. Therefore, if $\kappa < \text{sgl}(M)$, there exists no nontrivial critical point for the length functional in $\Omega_*^\kappa X$ and the Birkhoff process gives rise to a retraction from any loop space $\Omega_*^\kappa X$ into the singleton formed by the point curve $*$.

This property of retraction of loop spaces can also be set out for general metric spaces. Furthermore, it may be weakened, requiring that only finite dimensional

subspaces of the loop space be retractible.

In the rest of this part $\kappa_0 \geq 0$ and $m \in \mathbb{N}$ are fixed and the metric spaces X considered satisfy the following property :

For every point $* \in X$, every continuous map $f : P \longrightarrow \Omega_*^{\kappa_0} X$ defined on any simplicial complex of dimension $\leq m$, there exists a continuous map $F : P \times [0, 1] \longrightarrow \Omega_*^{\kappa_0} X$ such that

- F agrees with f on $P \times \{0\}$
- F reduces to the constant loop $*$ on $P \times \{1\}$
- $L(\gamma_{p,t}) \leq L(\gamma_{p,s})$ whenever $0 \leq s \leq t \leq 1$ where $\gamma_{p,t} = F(p, t)$.

An ordered complex is, by definition, a simplicial complex endowed with a total order relation on the set of its vertices. For instance, a complex whose vertices are numbered is ordered by the natural order of \mathbb{N} .

A subcomplex of an ordered complex will be endowed with the order induced by restriction. In particular, a k -dimensional simplex Δ of P will be considered as a $(k+1)$ -uplet (v_0, v_1, \dots, v_k) with $v_0 < v_1 < \dots < v_k$.

Note that the order induced by restriction is compatible with the inclusion. More precisely, let $P'' \subset P' \subset P$ be subcomplexes, the order on P'' induced by the inclusion $P'' \subset P'$ is the same as the one induced by $P'' \subset P$. We shall need this property to establish Proposition 3.1.1.

3.1.2 Extension criterion

In this section, we state an extension criterion for maps defined on the vertices of simplicial complexes. We also treat the case where the extension is prescribed on a subcomplex.

Let P be a locally finite n -dimensional simplicial complex and $f : P^0 \longrightarrow X$ be a map from the 0-skeleton P^0 of P to X .

Fix $\alpha_n = \frac{1}{4 \cdot 3^{n-1} - 1}$.

Proposition 3.1.1. *If the distance between the images of any pair of adjacent vertices is less than ρ with $\rho < \alpha_n \kappa_0$, then f extends to a continuous map $F : P \longrightarrow X$. Furthermore, the image by F of any simplex of P lies at distance less than $\rho_n := 2 \cdot 3^n \rho$ from the image by f of its vertices.*

Proof. Let us number the vertices of P by natural integers and consider the induced order. The construction of the extension $F : P \longrightarrow X$ carries out successively on the skeleton of P .

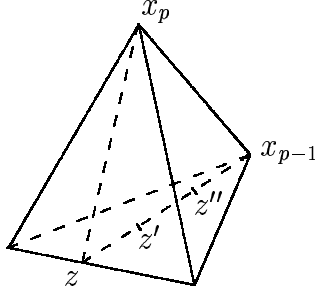
We define F on the 1-skeleton of P by mapping each edge of P to a minimizing arc between the images of the endpoints by f . In particular, the lengths of the images of the edges of P are bounded from above by ρ .

Suppose now that we have defined by induction an extension $F : P^k \rightarrow X$ of f on the k -skeleton P^k of P . Every $(k+1)$ -dimensional simplex Δ^{k+1} of f is endowed with the order induced by restriction and identifies in a natural way with the $(k+1)$ -dimensional standard ordered simplex $\Delta_0^{k+1} = (x_0, \dots, x_{k+1})$.

Let $\varphi : \partial\Delta^{k+1} \rightarrow X$ be the restriction of F to the boundary $\partial\Delta^{k+1}$ of a $(k+1)$ -dimensional simplex Δ^{k+1} of P . The simplex $\Delta_I^p = (x_{i_0}, \dots, x_{i_p}) \simeq \Delta_0^p$ where $I = \{i_0, \dots, i_p\}$ is a subset with $p+1$ elements of $\{0, \dots, k+1\}$ with $i_0 < \dots < i_p$ and $p \leq k$ represents a p -face of Δ_0^{k+1} . It identifies in a natural way with the p -dimensional standard ordered simplex Δ_0^p . We also suppose that for any $2 \leq p \leq k$, the restrictions of φ to the faces Δ_I^p of Δ_0^{k+1} , noted $\varphi_{I,p} : \Delta_I^p \simeq \Delta_0^p \rightarrow X$ or more generally $\psi : \Delta_0^p \simeq \Delta_I^p \rightarrow X$, satisfy the extension condition (\mathcal{E}) which follows :

Let $x \in \Delta_0^{p-1} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_{p-1}}) \subset \Delta_0^p$, we designate by $x_p x$ the ray of Δ_0^p emanating from x_p and joining Δ_0^{p-1} at x . The images by ψ of the rays $x_p x$ for x lying in Δ_0^{p-1} are parametrized proportionally to arclength. They are given by induction on p from the restriction of φ to the 1-skeleton of $\partial\Delta_0^{k+1}$ in the following way.

Given $z \in \Delta_0^{p-2} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_{p-2}}) \subset \Delta_0^p$, let x be a point lying in the ray $x_{p-1} z$ contained in Δ_0^{p-1} arising from x_{p-1} and joining z (see figure). This ray decomposes into three segments $z z'$, $z' z''$ and $z'' x_{p-1}$ of equal lengths.



For any given x running through $z z'$, there exists a point w in $z x_{p-1}$ which divides $z x_p$ into the same ratio as x divides $z z'$. The map ψ takes then the ray $x_p x$ to the path $\psi(x_p z) \cup \psi(z w) \cup \psi(w x)$ where $\psi(x_p z)$, $\psi(z w)$ and $\psi(w x)$ are given by induction as images of segments lying in some $(p-1)$ -faces of Δ_0^{k-1} .

Similarly, for any given x running through $z' z''$, there exists a point w in $x_{p-1} x_p$ which divides $x_{p-1} x_p$ into the same ratio as x divides $z' z''$. The map ψ takes the ray $x_p x$ to the path $\psi(x_p z) \cup \psi(z x_{p-1}) \cup \psi(x_{p-1} w) \cup \psi(w x_{p-1}) \cup \psi(x_{p-1} x)$.

For $x = z''$, we get the path $\gamma \cup \psi(x_p x_{p-1}) \cup \psi(x_{p-1} z'')$ where γ is a loop based at x_p , image by ψ of the triangle $x_p z z_{p-1}$ of sides $x_p z$, $z z_{p-1}$ and $z_{p-1} x_p$. The loop γ contracts into x_p through a homotopy γ_t , with $0 \leq t \leq 1$, given by the images of the rays $x_p x$. More precisely, if x divides $z'' x_{p-1}$ into a ratio t , the ray $x_p x$ is sent by ψ to the path $\gamma_t \cup \psi(x_p x_{p-1}) \cup \psi(x_{p-1} x)$. The maps ψ are

thus defined by induction from the restriction of φ to the 1-skeleton of $\partial\Delta_0^{k+1}$ and some continuous families of homotopies. Furthermore, we assume that the images by ψ of the rays $x_p x$ where x lies in Δ_0^{p-1} are of length bounded from above by $\ell_p := (2 \cdot 3^{p-1} - 1)\rho$. This concludes the statement of the extension condition (\mathcal{E}) .

Now, we want to define an extension Φ of φ to Δ_0^{k+1} as a cone over $\Delta_0^k = (x_0, \dots, x_k)$ based at x_{k+1} such that the lengths of the images of the rays arising from x_{k+1} are bounded from above by $\ell_{k+1} = 3\ell_k + 2\rho$.

Let $x \in \Delta_0^k$. The ray of Δ_0^{k+1} emanating from x_{k+1} and joining x is noted $x_{k+1}x$. By definition, the images by the extension Φ of the rays $x_{k+1}x$ where x lies in Δ_0^k are parametrized proportionally to arclength. They are defined as follows.

Let z be the base point in Δ_0^{k-1} of the ray of Δ_0^k arising from x_k and passing through x where $x \in \Delta_0^k$, $x \neq x_k$. The image by φ of the triangle $x_{k+1}zx_k$ of Δ_0^{k+1} of sides $x_{k+1}z$, zx_k and x_kx_{k+1} is noted γ_z . We define the images by Φ of the rays arising from x_{k+1} in the same manner as the restrictions ψ of φ to the faces of $\partial\Delta_0^{k+1}$ are defined (see above); that is from a continuous family of homotopies. This family of homotopies $\gamma_{z,t}$ must be defined for $(z, t) \in \Delta_0^{k-1} \times [0, 1]$ and must contract the loops $\gamma_{z,0} = \gamma_z$ based at x_{k+1} into the constant loops $\gamma_{z,1} = x_{k+1}$. Since Φ extends φ , the restrictions of this family to $(z, t) \in \partial\Delta_0^{k-1} \times [0, 1]$ must agree with the homotopies given by the restrictions ψ of φ to the faces of $\partial\Delta_0^{k+1}$ (see above). The family of homotopies $\gamma_{z,t}$ is thus prescribed for $(z, t) \in \Delta_0^{k-1} \times \partial[0, 1] \cup \partial\Delta_0^{k-1} \times [0, 1] = P \simeq S^{k-1}$. By construction, the lengths of the loops $\gamma_{z,t}$ for $(z, t) \in P$ are bounded from above by $2\ell_k + \rho < \kappa_0$. Therefore, the family $\gamma_{z,t}$ given by a map $P \rightarrow \Omega_{x_{k+1}}^{2\ell_k + \rho} X$ extends to $P \times [0, 1] / P \times \{1\} \simeq \Delta_0^{k-1} \times [0, 1] / \Delta_0^{k-1} \times \{1\} \simeq B^k$ with $L(\gamma_{z,t}) \leq 2\ell_k + \rho$. That completes the construction of the extension $\Phi : \Delta_0^{k+1} \rightarrow X$ of φ . By definition, $L(\Phi(x_{k+1}x)) \leq 3\ell_k + 2\rho$ where x lies in Δ_0^k . Therefore the map $F : P^k \rightarrow X$ extends to the $(k+1)$ -skeleton of P and satisfies the induction hypothesis. The last statement of the proposition comes from the construction of F . \square

Remark. The extension F may be prescribed on a subcomplex Q of P provided that the restrictions of F to the simplices of Q satisfy the extension condition (\mathcal{E}) defined in the proof of Proposition 3.1.1. We shall use this remark afterwards in the following manner.

The identification of the simplices of Q with the standard simplex yields a natural metric length structure on Q . The restrictions of any ε -Lipschitz map $f : P^0 \cup Q \rightarrow X$ to the simplices of Q with ε sufficiently small with respect to κ_0 satisfy the extension condition (\mathcal{E}) . In this case, if f fulfills the hypothesis of Proposition 3.1.1, it extends to a continuous map $F : P \rightarrow X$ as previously.

3.2 Volume and short geodesic loops

The proof of Theorem 3.0.1, resting on the notion of filling radius, is established in this part. It illustrates in a simple way the use of our extension criterion. Similar arguments will be only sketched in the other parts.

3.2.1 Filling radii

In this section, we first present distinct definitions of filling radii. Then we state general results related to this notion introduced by M. Gromov in [30].

Let M be a connected complete manifold of dimension n topologically embedded into an arbitrary metric space X . The r -tubular neighborhood of M in X will be denoted by $U_r(M) \subset X$. The chains c of X that we shall consider will be locally finite, i.e., every bounded subset in X intersects only finitely many singular simplices of c .

Definition. *The filling radius of M in X , denoted $\text{FillRad}(M \subset X)$, is the infimum of positive reals r such that there exists a locally finite $(n + 1)$ -dimensional chain c in $U_r(M)$ whose boundary ∂c , contained in M , represents the fundamental class of M in $H_n(M)$ where the homology is with noncompact supports and the coefficients are in \mathbb{Z} if M is orientable and in \mathbb{Z}_2 otherwise. That means the homomorphism $H_n(M) \rightarrow H_n(U_r(M))$ induced by the inclusion map vanishes.*

In particular, the (extrinsic) filling radius is defined for submanifolds of Riemannian manifolds. An (intrinsic) filling radius can also be defined for manifolds M endowed with an arbitrary not-necessarily-Riemannian metric dist_M using the following natural embedding.

Let $L^\infty(M)$ be the space of all Borel functions on M with the sup-distance d_{L^∞} . Because of the possible noncompactness of M , we consider unbounded functions on M ; therefore the distance between two of them may be infinite. However, the natural embedding $i : M \hookrightarrow L^\infty(M)$ defined by $i(x)(\cdot) = \text{dist}_M(x, \cdot)$ is an isometry between metric spaces. That is

$$\sup_{y \in M} |\text{dist}_M(x, y) - \text{dist}_M(x', y)| = \text{dist}_M(x, x')$$

The filling radius of M with a given metric is then defined by:
 $\text{FillRad}(M, d) := \text{FillRad}(M \subset L^\infty(M))$.

Using the following lemma (see [30, p. 8]), we can compare the filling radii of different metrics.

Lemma 3.2.1. *Let d_1 and d_2 be two metrics on a manifold M . If $d_1 \leq d_2$ then $\text{FillRad}(M, d_1) \leq \text{FillRad}(M, d_2)$.*

In particular, if M is a submanifold of a Riemannian manifold X we may define two metrics on M : the metric induced by the distance function on X , defined as $d_{ind}(x, y) := \text{dist}_M(x, y)$ for all $x, y \in M$, and the distance function d_{Riem} of the induced Riemannian metric on M . The inequality $d_{ind} \leq d_{Riem}$ holds, therefore $\text{FillRad}(M, d_{ind}) \leq \text{FillRad}(M, d_{Riem})$.

We also have the two following results, which provide upper bounds on the filling radius of Riemannian manifolds.

The first one was established by M. Gromov in [30, p. 41].

Theorem 3.2.2. *Let M be a complete Riemannian manifold of dimension n , then*

$$\text{FillRad}(M) \leq c_n \text{Vol}(M)^{\frac{1}{n}}$$

where c_n is a positive constant depending only on the dimension of M with $c_n < (n+1)n^n \sqrt{(n+1)!}$

And the second one was proved by M. Katz in [35].

Theorem 3.2.3. *Let M be a closed Riemannian manifold of diameter $\text{Diam}(M)$, then*

$$\text{FillRad}(M) \leq \frac{1}{3} \text{Diam}(M)$$

Remark. The proof of this last statement shows in fact that $\text{FillRad}(M) \leq \frac{1}{3} \text{Rad}(M)$ where $\text{Rad}(M)$ designates the radius of M , i.e., the lower bound of the radii of balls covering M .

3.2.2 Global volume estimate

The two last inequalities of the previous section and the following lower bound on the filling radius in terms of the length of the shortest geodesic loop prove Theorem 3.0.1.

Proposition 3.2.4. *Let M be a complete Riemannian manifold of dimension n , then*

$$\text{FillRad}(M) \geq \frac{\alpha_{n+1}}{2} \text{sgl}(M)$$

Proof. By definition, the fundamental class $[M]$ of M vanishes in $U_\delta(M) \subset L^\infty(M)$ where $\delta > \text{FillRad}(M)$. Therefore, there exists a continuous map $\tilde{\sigma} : P \rightarrow U_\delta(M)$ from a $(n+1)$ -dimensional simplicial complex P such that its restriction $\sigma : \partial P \rightarrow M$ to the boundary $Q = \partial P$ of P represents $[M]$ in $H_n(M)$.

We show that if $\delta < \frac{\alpha_{n+1}}{2} \text{sgl}(M)$ then σ extends to a continuous map $F : P \rightarrow M$. Therefore, σ induces the trivial class in $H_n(M)$. This leads to a contradiction since σ represents a generator of $H_n(M)$, hence the inequality.

The identification of the simplexes of Q with the standard simplex yields a natural metric length structure on Q . The map $\sigma : Q \rightarrow M$ can be approximated by continuous maps homotopic to σ whose restrictions to the simplices of Q are Lipschitz. These maps represent the same class as σ in $H_n(M)$. Therefore, we shall assume that the restrictions of σ to the simplices of Q are Lipschitz. Every simplicial complex endowed with the coherent topology admits a subdivision finer than a given open covering \mathcal{U} (see [54, p. 126]). Fix $\varepsilon > 0$, we apply this result to the open covering \mathcal{U}_ε of P where $\mathcal{U}_\varepsilon = \{U \subset P \mid U \text{ open, } f|_{U \cap Q} \text{ is } k\text{-Lipschitz and } \text{Diam}(U \cap Q) \leq \frac{\varepsilon}{k} \text{ for some } k > 0\}$. Then we dilate the metric on Q so that every simplex of the new triangulation of Q is isometric to the standard simplex. The map σ is ε -Lipschitz with respect to this new metric on Q .

We first define a map $f : P^0 \rightarrow M$ on the 0-skeleton of P by sending each vertex p_i of P to a nearest point of $\tilde{\sigma}(p_i)$ in M , as we wish. This map agrees with σ on Q^0 and therefore extends to $f : P^0 \cup Q \rightarrow M$ with $f|_Q = \sigma$. Since $i : M \hookrightarrow U_\delta(M)$ is isometric, we have for any pair p_i, p_j of adjacent vertices of P

$$\begin{aligned} d_M(f(p_i), f(p_j)) &\leq d_{L^\infty}(f(p_i), \tilde{\sigma}(p_i)) + d_{L^\infty}(\tilde{\sigma}(p_i), \tilde{\sigma}(p_j)) + d_{L^\infty}(\tilde{\sigma}(p_j), f(p_j)) \\ &\leq 2\delta + \varepsilon =: \rho < \alpha_{n+1} \text{sgl}(M) \end{aligned}$$

From the remark of Proposition 3.1.1, f extends to $F : P \rightarrow M$ provided that ε has been chosen to be sufficiently small. This completes the proof. \square

The constants C_n and C'_n in Theorem 3.0.1 can be chosen respectively equal to $\left(\frac{\alpha_{n+1}}{2c_n}\right)^n$ and $\frac{3}{2}\alpha_{n+1}$.

Remark. The geodesic loops of Riemannian homogeneous manifolds agree with the simple closed geodesics. This well-known statement, whose proof is given below, refines Theorem 3.0.1 for homogeneous manifolds. We have $\text{Vol}(M) \geq C_n \text{scg}(M)^n$ for every Riemannian homogeneous manifold. This inequality contrasts with the case of the multi-dimensional systoles. In appendix D of [32], M. Katz constructs a sequence of homogeneous metrics on $S^3 \times S^3$ such that $\frac{\text{Vol}(g_n)}{\text{sys}_3(g_n)^2} \rightarrow 0$ where $\text{sys}_3(g) = \inf\{\text{Vol}_g(S) \mid S \text{ is a 3-cycle such that } [S] \neq 0 \in H_3(S^3 \times S^3)\}$.

Given a geodesic loop γ based at $x_0 \in M$, the first variation formula shows that $\frac{d}{dt}L(\gamma_t) = g(\dot{\gamma}(1), X(x_0)) - g(\dot{\gamma}(0), X(x_0)) = 0$ where γ_t is the variation of γ induced by the Killing vector field X . Since the Killing vector fields generate the tangent space of homogeneous Riemannian manifolds, we have $\dot{\gamma}(1) = \dot{\gamma}(0)$. Therefore, γ is closed.

3.3 Local volume and short geodesic loops

In this part, using the extension criterion and the ideas of the proof of Theorem 3.0.1, a lower bound on the intrinsic filling radius of small approximating spheres is first derived from a lower bound on their extrinsic filling radius. The proofs of Theorem 3.0.2 and of its corollary are then presented.

3.3.1 Extrinsic filling radius of approximating spheres

Let us go over the ideas of [29]. In order to bound from below the volume of balls of radius less than $\text{sgl}(M)$, we would like to estimate the volume of spheres. But, since the injectivity radius of M may be less than $\text{sgl}(M)$, the distance spheres are not necessarily smooth submanifolds of M . We get around this drawback by approximating the distance function with smooth functions. The extrinsic filling radius of the approximating spheres can then be easily bounded from below.

Let M be a complete Riemannian manifold and $x_0 \in M$. From [29, p. 59] there exists for all $\varepsilon > 0$ a smooth function f_ε on M such that

- $\|f_\varepsilon - \text{dist}_M(x_0, \cdot)\| < \varepsilon$
- $\|df_\varepsilon\| \leq 1 + \varepsilon$

In particular, f_ε converges uniformly on M to $\text{dist}_M(x_0, \cdot)$ as $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Fix x_0 in M , $0 < r_- < r_+ < \text{Rad}(M)$ and $\varepsilon > 0$ such that $\varepsilon < r_-$ and $\varepsilon < \text{Rad}(M) - r_+$. Let r be a noncritical value of f_ε with $r_- < r < r_+$. In this case, $\{x \in M, f_\varepsilon \leq r\}$ is a compact C^∞ n -dimensional manifold with boundary distinct from M . Let B_ε be the connected component of this manifold with boundary which contains x_0 and note its boundary ∂B_ε by $S_\varepsilon(r)$ or more simply by S_ε .

The following lemma yields an extrinsic filling radius estimate of S_ε .

Lemma 3.3.1. *With the previous notations,*

$$S_\varepsilon(r) \text{ does not bound in } \{x \in M \mid \varepsilon \leq \text{dist}_M(x_0, x) \leq \text{Rad}(M) - \varepsilon\}$$

In particular, $\text{FillRad}(S_\varepsilon(r) \subset M) \geq \text{Min}\{r - \varepsilon, \text{Rad}(M) - r - \varepsilon\}$.

Proof. Let x'_0 be a point at distance $\text{Rad}(M)$ from x_0 . The submanifold S_ε divides M into two manifolds B_ε and B'_ε admitting S_ε as common boundary. If S_ε bounds in $\{x \in M \mid \varepsilon \leq \text{dist}_M(x_0, x) \leq \text{Rad}(M) - \varepsilon\}$ then there exists a chain ξ in $M - \{x_0, x'_0\}$ with coefficients in \mathbb{Z}_2 whose boundary $\partial\xi$ equals S_ε . Subdividing ξ if necessary, we can assume that ξ splits into the sum of two chains ζ and ζ' with ζ in $B_\varepsilon - x_0$ and ζ' in $B'_\varepsilon - x'_0$. Since $\partial\xi$ represents S_ε , $\partial\zeta$ and $\partial\zeta'$ must be respectively supported in $\partial B_\varepsilon = S_\varepsilon$ and $\partial B'_\varepsilon = S_\varepsilon$. But a basic excision argument (see [54, p. 300]) shows that no nonzero n -chain in $B_\varepsilon - x_0$ or in $B'_\varepsilon - x'_0$ has its

boundary in S_ε . Therefore $\zeta = \zeta' = 0$ so $\xi = 0$, hence a contradiction. The last statement arises from a triangle inequality. \square

3.3.2 Intrinsic filling radius of approximating spheres

In the previous section, we gave a lower bound on the extrinsic filling radius of approximating spheres as submanifolds of M . We now consider the approximating spheres S_ε as metric spaces with distance function induced from that of M . The intrinsic filling radius for the induced distance is always bounded from above by the extrinsic filling radius (see [30, p. 8]). That is $\text{FillRad}(S_\varepsilon, \text{dist}_{ind}) \leq \text{FillRad}(S_\varepsilon \subset M)$. We show that the lower bound on the extrinsic filling radius of S_ε previously stated gives rise to a lower bound on the intrinsic filling radius of small approximating spheres. More precisely, we establish the following

Lemma 3.3.2. *With the previous notations, we have*

$$\text{FillRad}(S_\varepsilon(r), \text{dist}_{ind}) \geq \lambda := \text{Min} \left\{ \frac{\alpha_n}{2} \text{sgl}(M), \frac{\text{Min}\{r, \text{Rad}(M) - r\} - 2\varepsilon}{4.3^n} \right\}$$

In particular, if $r \leq \frac{3}{4}\alpha_{n+1} \text{sgl}(M)$ then $\text{FillRad}(S_\varepsilon(r), \text{dist}_{Riem}) \geq \frac{r-2\varepsilon}{4.3^n}$.

Proof. We consider (S_ε, d_{ind}) isometrically embedded in $L^\infty(S_\varepsilon)$ and argue as in the proof of Proposition 3.2.4. Given $\delta > \text{FillRad}(S_\varepsilon, \text{dist}_{ind})$, there exists a continuous map $\tilde{\sigma} : P \rightarrow U_\delta(S_\varepsilon)$ defined on a n -dimensional simplicial complex P whose restriction $\sigma : \partial P \rightarrow S_\varepsilon$ to the boundary $Q = \partial P$ of P represents $[S_\varepsilon]$ in $H_n(S_\varepsilon)$. We show that if $\delta < \lambda$ then σ extends to a continuous map $F : P \rightarrow M$ whose image lies in $\{x \in M \mid \varepsilon < d(x_0, x) < \text{Rad}(M) - \varepsilon\}$. Thus S_ε bounds in this set, which yields a contradiction with Lemma 3.3.1, hence the inequality.

We define a map $f : P^0 \cup Q \rightarrow S_\varepsilon(r)$ as in the proof of Proposition 3.2.4. Namely, subdividing P if necessary, we first endow Q with a natural metric length structure such that σ may be approximated by ε -Lipschitz maps with $\varepsilon > 0$ fixed. Then, we project the images by $\tilde{\sigma}$ of the vertices of P to S_ε . For ε small enough, the distance between the images of any pair of adjacent vertices is less than 2λ and f extends to $F : P \rightarrow M$ from the remark of Proposition 3.1.1 as previously. The image of F lies in $\{x \in M \mid r - \varepsilon - \rho_n < d(x_0, x) < r + \varepsilon + \rho_n\}$ where $\rho_n < 2.3^n \lambda$. In particular, $\rho_n < r - 2\varepsilon$ and $\rho_n < \text{Rad}(M) - r - 2\varepsilon$, hence the result.

The last statement comes from the inequalities $\text{FillRad}(S_\varepsilon, d_{Riem}) \geq \text{FillRad}(S_\varepsilon, d_{ind})$ given by Lemma 3.2.1 and $2r \leq \text{Rad}(M)$. This latter comes from $\frac{\alpha_{n+1}}{2} \text{sgl}(M) \leq \frac{1}{3}\text{Rad}(M)$ arising from the remark of Theorem 3.2.3 and Proposition 3.2.4. \square

3.3.3 Local volume estimate

The lower bound on the volume of balls of Theorem 3.0.2 leading to a volume growth estimate in the noncompact case is established in this section from the

filling radius estimate of Lemma 3.3.2.

Proof of Theorem 3.0.2. Let $x_0 \in M$ and $R \leq \frac{3}{4}\alpha_{n+1}\text{sgl}(M)$. In this case, we have already noted that $R \leq \frac{1}{2}\text{Rad}(M)$.

The ball $B(x_0, R)$ contains $\{x \in M, f_\varepsilon(x) \leq R - \varepsilon\}$ where f_ε is given by Section 3.3.1, so its volume satisfies :

$$\begin{aligned} \text{Vol}B(x_0, R) &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Vol} \{x \in M, f_\varepsilon(x) \leq R - \varepsilon\} \\ &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Vol} \{x \in M, r_- < f_\varepsilon(x) < r_+\} \end{aligned}$$

where $0 < r_- < r_+ = R$.

The coarea formula applied to the $(1 + \varepsilon)$ -Lipschitz functions f_ε gives

$$\text{Vol}B(x_0, R) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r_-}^{r_+} \text{Vol}S_\varepsilon(t) dt$$

Now, we consider only those t 's which are not critical values of f_ε . Theorem 3.2.2 and our filling radius estimate $\text{FillRad}(S_\varepsilon, d_{\text{Riem}}) \geq \frac{t-2\varepsilon}{4.3^n}$ for $t \leq R$ lead to

$$\text{Vol}B(x_0, R) \geq \frac{R^n}{nc_{n-1}^{n-1}(4.3^n)^{n-1}}$$

when r_- goes to 0.

That is $\text{Vol}B(x_0, R) \geq C_n'' R^n$ for all $R \leq \frac{\text{sgl}(M)}{2}$ with $C_n'' = \frac{(3\alpha_{n+1})^n}{n2^n c_{n-1}^{n-1} (4.3^n)^{n-1}}$ hence the result. \square

In the noncompact case, a classical argument permits us to derive lower bounds on the volume growth of large balls from a local volume estimate.

Proof of Corollary 3.0.3. Let $x_0 \in M$. By noncompactness and completeness of M , there exists a geodesic ray γ based in x_0 with unit speed such that $d(x_0, \gamma(t)) = t$. The balls of centers $\gamma(k \cdot \ell_0)$ and of radius $\frac{1}{2}\ell_0$ are disjoint for k integer with $\ell_0 = \text{sgl}(M)$. Furthermore, their volume is bounded from below by $\frac{C_n''}{2^n} \ell_0^n$. Therefore, if k represents the integer part of $\frac{R}{\ell_0}$, we get $\text{Vol}B(x_0, R) \geq \frac{C_n''}{2^n} \ell_0^n k$. The corollary follows immediately. \square

3.4 Volume and geodesic double loops

In this part, we define a functional the double loop space and study the structure of some critical points. The proof of Theorem 3.0.4 is then presented.

Let M be a complete Riemannian manifold. All the functional spaces will be endowed with the C^0 -topology. Let \mathcal{C} be the space of piecewise smooth curves

$\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$. We recall that ΛM and ΩM designate respectively the free loop space and the pointed loop space.

The spaces $\Gamma' = \{\Phi = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mid \gamma_1(0) = \gamma_1(1) \text{ and } \gamma_2(0) = \gamma_2(1)\}$ and $\Gamma'' = \{\Phi = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mid \gamma_1(0) = \gamma_2(1) \text{ and } \gamma_1(1) = \gamma_2(0)\}$ identify naturally with $\Lambda M \times \Lambda M$ and ΛM .

Let Γ be the union of Γ' and Γ'' and $\Gamma^0 \subset \Gamma$ be the set of point curves.

The intersection of Γ' and Γ'' , noted X , represents the double loop space.

Next proposition will not be used afterwards. We state it because describing the relative homotopy of Γ it sets up the basis of a variational calculus on the double loop space (see [21]).

Proposition 3.4.1. *Let M be a simply connected closed manifold. Then, $\pi_1(\Gamma, \Gamma^0)$ is naturally isomorphic to $\pi_2(M)$.*

Proof. Let us consider the natural projection

$$\begin{aligned} p : \Gamma &\longrightarrow M \times M \\ \Phi &\longmapsto (\gamma_1(0), \gamma_2(0)) \end{aligned}$$

This projection gives rise to two Serre fibrations with fiber $\Omega M \times \Omega M$:

$$p' : \Gamma' = \Lambda M \times \Lambda M \longrightarrow M \times M \text{ and } p'' : \Gamma'' = \Lambda M \longrightarrow M \times M.$$

Let $\Delta \simeq M$ be the diagonal of $M \times M$. We have $X = p^{-1}(\Delta) = \Lambda M \times \Lambda M \cap \Lambda M$ and $p : X = \Gamma' \cap \Gamma'' \longrightarrow \Delta$ is the restricted fibration. The space Γ may be written as $\Lambda M \times \Lambda M \amalg_X \Lambda M$. From Van Kampen's theorem, $\pi_1(\Gamma)$ is naturally isomorphic to $\pi_1(\Lambda M \times \Lambda M) *_{\pi_1(X)} \pi_1(\Lambda M)$. Since M is simply connected, the exactness of the homotopy sequences of the fibrations implies that the groups $\pi_1(\Lambda M \times \Lambda M)$ and $\pi_1(X)$ are isomorphic to $\pi_1(\Lambda M) \oplus \pi_1(\Lambda M)$. Furthermore, the inclusion $X \hookrightarrow \Lambda M \times \Lambda M$ induces an isomorphism $\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(\Lambda M \times \Lambda M)$. Therefore, $\pi_1(\Gamma)$ is naturally isomorphic to $\pi_1(\Lambda M)$. Since M is simply connected, $\pi_1(\Gamma)$ and $\pi_1(\Lambda M)$ are respectively isomorphic to $\pi_1(\Gamma, \Gamma^0)$ and $\pi_2(M)$. Hence the result. \square

We introduce the functional \mathcal{L} on Γ defined by $\mathcal{L}(\Phi) = \max\{L(\gamma_1), L(\gamma_2)\}$ where $\Phi = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma$. The restriction of \mathcal{L} to X induces a functional \mathcal{L}_X on the double loop space. Let $L_0(M)$ be twice the infimum of the positive local minima of \mathcal{L}_X .

The following lemma describes the structure of the local minima of \mathcal{L}_X .

Lemma 3.4.2. *Let $\Phi \in X$ be a positive local minimum of \mathcal{L}_X .*

Then, Φ is formed either of a nontrivial closed geodesic to which a loop is attached or of two nontrivial geodesic loops γ_1 and γ_2 of the same length based at the same point. In the second case, the differences v_1 and v_2 of the tangent vectors at the endpoints of γ_1 and γ_2 point to different directions. That is $g(v_1, v_2) \leq 0$ where $v_i = \dot{\gamma}_i(1) - \dot{\gamma}_i(0)$.

Proof. Let γ_1 and γ_2 be the two loops forming Φ . Suppose that none of them is a closed geodesic of index 0. If $L(\gamma_1) > L(\gamma_2)$, since γ_1 is homotopic to a shorter loop, there exists a \mathcal{L} -decreasing deformation of Φ . This is impossible because Φ is a local minimum of \mathcal{L}_X . Switching the roles of γ_1 and γ_2 , we get $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$. The loops γ_1 and γ_2 are geodesic, otherwise the Birkhoff curve-shortening flow with fixed endpoints would decrease the length of one of them. This would contradict the inequality $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$ for the local minima of \mathcal{L}_X . If $g(v_1, v_2) > 0$, the first variation formula shows that it would be possible to decrease simultaneously the lengths of γ_1 and γ_2 through a local flow. Hence another contradiction. \square

Remark. When $L_0(M)$ is positive -for instance, when M is compact- the structure of the positive local minima of \mathcal{L}_X is preserved by passing to the limit. In particular, $L_0(M)$ is reached either by the length of a nontrivial closed geodesic of null index run twice or by the length of a geodesic double loop formed of two nontrivial geodesic loops of the same length. In this last case, the geodesic double loop does not reduce to a geodesic loop run twice.

We derive Theorem 3.0.4 from Theorem 3.2.2 and the following inequality.

Proposition 3.4.3. *Let M be a 2-essential complete Riemannian manifold, then*

$$\text{FillRad}(M) \geq \frac{1}{8}\ell_0(M)$$

where $\ell_0(M) = \min\{\text{scg}(M), L_0(M)\}$.

Proof. Fix $\delta > 0$. Let $\tilde{\sigma} : P \rightarrow U_\delta(M)$ be a continuous map from a $(n+1)$ -dimensional simplicial complex P such that the restriction $\sigma : \partial P \rightarrow M$ represents the fundamental class of M . Since M is 2-essential, there exists a continuous map $\psi : M \rightarrow K$ into a $K(\pi, 2)$ space, which induces a nontrivial morphism $\psi_* : H_n(M) \rightarrow H_n(K)$. The image of ∂P by $\psi \circ \sigma$ represents $\psi_*[M]$ in $H_n(K)$. Suppose that $\delta < \frac{1}{8}\ell_0(M)$. We are going to construct a continuous map $F : P \rightarrow K$ which agrees with $\psi \circ \sigma$ on ∂P . This is absurd since $\psi_*[M] \neq 0$. therefore, M does not bound in $U_\delta(M)$. That is $\text{FillRad}(M) \geq \frac{1}{8}\ell_0(M)$.

We first define a map $f : P^0 \cup Q \rightarrow M$, where $Q = \partial P$, by sending each vertex p_i of P to a nearest point of $\tilde{\sigma}(p_i)$ in M . Then, we extend it to P^1 taking the edges of P to minimizing segments joining the image of their endpoints. Let Δ^2

be a 2-simplex of P . Since $i : M \hookrightarrow U_\delta(M)$ is isometric, the length of the image of $\partial\Delta^2$ is less than $\text{scg}(M)$. Therefore, the Birkhoff curve-shortening process defines a map from the disk $D \simeq \Delta^2$ to M , which sends $\partial D = \partial\Delta^2$ onto its image. This construction yields an extension $f : P^2 \cup Q \rightarrow M$ of σ .

We want now to extend it to P^3 . This is possible if the image of the boundary $\partial\Delta^3$ of every 3-simplex Δ^3 of P bounds a ball in M . Let Δ_i be the faces of Δ^3 . The boundaries $\partial\Delta_i$ converge to point curves through homotopies $(c_t^i)_{0 \leq t \leq 1}$, given by the Birkhoff curve-shortening process, which define the images of Δ_i . Using a homotopy to reparametrize the curves if necessary, we can assume that $c_0^1(s)$ and $c_0^2(s)$ agree and run through their common edge for $\frac{2}{3} \leq s \leq 1$. The family $\Phi_t = (c_{1-t}^1, c_{1-t}^2) \in \Gamma''$, $0 \leq t \leq 1$, extends to Γ through the homotopy $\Phi_t(s) = (c_0^1(\frac{s}{t}), c_0^2(\frac{s}{t})) \in \Gamma'$ where $1 \leq t \leq \frac{3}{2}$ and $0 \leq s \leq 1$. The same goes for c_t^3 and c_t^4 . This yields two homotopies of Γ . We use now homotopies to reparametrize the final curves so that they agree. Putting these two homotopies together gives rise to a one-parameter family of curves $\Phi_t \in \Gamma$, $0 \leq t \leq 3$, starting and ending at point curves. We show now that the class it induces in $\pi_1(\Gamma, \Gamma^0)$ is trivial.

The family decomposes into three parts :

- $(\Phi_t)_{0 \leq t \leq 1}$ and $(\Phi_t)_{2 \leq t \leq 3}$, which join in Γ'' point curves to double loops.
- $(\Phi_t)_{1 \leq t \leq 2}$, which join in Γ' the two double loops Φ_1 and Φ_2 .

Since $\mathcal{L}(\Phi_1)$ and $\mathcal{L}(\Phi_2)$ are $< L_0(M)$, the two double loops Φ_1 and Φ_2 converge to point curves through \mathcal{L} -non-increasing homotopies Φ_t^1 and Φ_t^2 of X . In particular, each of the loops which compose them converge to point curves through homotopies given by Φ_t^1 and Φ_t^2 . The length of the loops of these homotopies is $< \text{scg}(M)$. Therefore, they are homotopic to the c_t^i 's. Indeed, two homotopies starting from the same loop and ending at point curves form a path in ΛM with endpoints in $\Lambda^0 M$. Such a path composed of loops of length $< \text{scg}(M)$ is homotopically trivial in $\pi_1(\Lambda M, \Lambda^0 M)$ from the minimax principle of Fet and Lyusternik (see [38]). Since we want to show that the family Φ_t bounds in M , we can assume that $(\Phi_t)_{0 \leq t \leq 1}$ and $(\Phi_t)_{2 \leq t \leq 3}$ agree with Φ_t^1 and Φ_t^2 . Under this assumption, Φ_t lies in $\Gamma' \simeq \Lambda M$. It gives rise to a path in ΛM which starts and ends at point curves with $L(\Phi_t) < \text{scg}(M)$. As previously, this implies that this path is homotopically trivial. Therefore, the image of the boundary of every 3-simplex of P bounds a ball in M . The map f extends to P^3 .

From obstruction theory, the map $F : P^3 \cup Q \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\psi} K$ extends to P . Hence the result. \square

Remark. Generically, i.e., for a metric lying in a dense open set of the space of metrics endowed with the C^2 topology, closed geodesics are non-degenerate and have different lengths. This property does not hold for geodesic loops. It is not possible to get rid of the geodesic double loops formed of two loops of the same length slightly perturbing the metric.

We only sketch the arguments. Let us consider a metric which has two distinct geodesic loops of the same length based at the same point x_0 . We suppose that

these geodesic loops are non-degenerate and that their index is null. This construction may be carried out by modifying the metric on a tubular neighborhood of a figure-eight curve. These two geodesic loops vary continuously with their base-point in the neighborhood of x_0 . Locally, the set of base-points for which the two geodesic loops have equal length forms a hypersurface. This hypersurface is stable and does not disappear slightly perturbing the metric. Therefore, on open sets of metrics, points do exist through which two geodesic loops of the same length pass.

3.5 Finiteness results

In this part, Theorem 3.0.5 is proved showing that two manifolds at closed Hausdorff distance are homotopic. Explicit bounds on the number of homotopic types and the homology of manifolds in \mathcal{C} are also calculated.

3.5.1 Gromov-Hausdorff compactness

The classical Hausdorff distance between two subsets X and Y of a metric space is defined by

$$d_H(X, Y) = \inf \{ \varepsilon \geq 0 \mid X \subset N_\varepsilon(Y) \text{ and } Y \subset N_\varepsilon(X) \}$$

where $N_\varepsilon(\cdot)$ designates the ε -neighborhood of a set.

The Gromov-Hausdorff distance between two abstract metric spaces X and Y is then defined as the infimum of $d_H(X, Y)$ over all the metrics on the disjoint union $X \amalg Y$ extending the ones of X and Y . This distance, noted d_{GH} , defines the Gromov-Hausdorff topology on the class of compact metric spaces.

In order to state Gromov's compactness theorem (see [32]), we need to introduce another definition. The covering function $\text{Cov}(X, \cdot)$ of a compact metric space X is defined by $\text{Cov}(X, R) = \inf \{ N \in \mathbb{N} \mid X \text{ is covered by } N \text{ balls of radius } R \}$ for all $R > 0$. We have then

Theorem 3.5.1. *The class of compact metric spaces with a covering function uniformly bounded from above is compact in the Gromov-Hausdorff topology.*

Remark. From Theorem 3.0.2, the volume of radius R balls in Riemannian manifolds with $\text{sgl}(M) \geq \ell_0$ is bounded from below. Therefore, a classical packing argument shows that the class of the manifolds considered in Theorem 3.0.5 admits covering-functions $\text{Cov}(\cdot, R)$ uniformly bounded from above by $N(V_0, R) = \frac{2^n V_0}{C_n'' R^n}$ for $R \leq \text{sgl}(M)$. It is thus bounded for the Gromov-Hausdorff distance.

3.5.2 Homotopic finiteness

Let M and N be Riemannian manifolds of dimension n . Fix a metric on $M \amalg N$ whose restrictions to M and N agree with the metrics on M and N and

such that M (resp. N) is contained in the δ -tubular neighborhood of N (resp. M) with $\delta > d_{GH}(M, N)$. If $d_{GH}(M, N) < \beta_n \text{sgl}(N)$ with $\beta_n = \frac{\alpha_n}{16.3^n}$, it is possible to choose δ between these two numbers. As previously, M will be considered as simplicial complex. We construct $f : M \rightarrow N \subset M \amalg N$ sending the vertices of M to their closest points in N . Since the embedding of N in $M \amalg N$ is an isometry, the distance between the images of any pair of adjacent vertices of P is less than $2\beta_n \text{sgl}(N)$ provided that the triangulation of M is fine enough. From Proposition 3.1.1, this map extends to M and satisfies $d_{M \amalg N}(x, f(x)) < \frac{\alpha_n}{4} \text{sgl}(N)$. Therefore, we have proved the following

Lemma 3.5.2. *Let M and N be Riemannian manifolds of dimension n . If $d_{GH}(M, N) < \beta_n \text{sgl}(N)$, then there exists a continuous map $f : M \rightarrow N$ such that $d_{M \amalg N}(x, f(x)) < \frac{\alpha_n}{4} \text{sgl}(N)$.*

It is known that two uniformly closed maps defined on a Riemannian manifold are homotopic. The following lemma gives a quantitative version of this qualitative statement.

Lemma 3.5.3. *Let M and N be Riemannian manifolds of dimension n and $f_1, f_2 : M \rightarrow N$ be continuous maps. If $d(f_1(x), f_2(x)) < \frac{\alpha_n}{2} \text{sgl}(N)$, then f_1 and f_2 are homotopic.*

Proof. Since f_i can be approximated by smooth maps homotopic to f_i for $i = 0, 1$, we can assume that f_1 and f_2 are smooth. Let $P = M \times [0, 1]$ and $Q = M \times \{0, 1\}$. This latter being considered as simplicial complex, it is possible to endow P with a simplicial complex structure which contains Q as a subcomplex without adding any vertices. Let $f : Q \rightarrow N$ be a map whose restrictions to $M \times \{i\}$ agree with f_i for $i = 0, 1$. Subdividing Q if necessary, the distance between the images by f of any pair of adjacent vertices is less than $\alpha_n \text{sgl}(N)$. From the remark of Proposition 3.1.1, f extends to $f : P \rightarrow N$, which yields a homotopy between f_1 and f_2 . \square

The following result and Corollary 3.2 of [26] immediately prove Theorem 3.0.5.

Proposition 3.5.4. *Let M and N be Riemannian manifolds of dimension n such that the length of the shortest nontrivial geodesic loop is greater than ℓ_0 . If $d_{GH}(M, N) < \beta_n \ell_0$, then M and N are homotopically equivalent.*

Proof. From Lemma 3.5.2, switching the roles of M and N , there exist two maps $f : M \rightarrow N$ and $g : N \rightarrow M$ such that

$$\begin{aligned} d(x, g \circ f(x)) &\leq d(x, f(x)) + d(f(x), g \circ f(x)) \\ &< \frac{\alpha_n}{4} \text{sgl}(M) + \frac{\alpha_n}{4} \text{sgl}(M) = \frac{\alpha_n}{2} \text{sgl}(M) \end{aligned}$$

Therefore, from Lemma 3.5.3, $g \circ f$ and id_X are homotopic. The same goes for $f \circ g$, which is homotopic to id_Y . Hence the proposition. \square

Remark. From Proposition 3.5.4, it is possible to evaluate the number of homotopy types in $\mathcal{C}(V_0, \ell_0)$. Indeed, a bound on the covering-function of (\mathcal{C}_n, d_{GH}) at $\beta_n \ell_0$, that is $\text{Cov}(\mathcal{C}, \beta_n \ell_0)$, gives such an estimate.

Let us note that two manifolds of \mathcal{C} are $\beta_n \ell_0$ -closed if each of them is covered by N radius R balls, whose centers will be identified to $\{1, \dots, N\}$, such that the distance functions restricted to these centers agree up to ε , with $2R + \varepsilon \leq \beta_n \ell_0$ (for instance $R = \varepsilon = \frac{\beta_n}{3} \ell_0$). The diameter of the manifolds of \mathcal{C} is bounded from above by $D = 2N(V_0, \ell_0) \ell_0$. Therefore, the restrictions to $\{1, \dots, N\}$ of the distance functions lie in $[0, D]^{N^2}$ where $N = N(V_0, R)$. Given a subdivision of $[0, D]$ in subintervals of length 2ε with $\frac{D}{2\varepsilon}$ points, we can construct $(\frac{D}{2\varepsilon})^{N^2}$ functions lying in $[0, D]^{N^2}$ such that the restricted distance functions described above agree up to ε with some of them. The expression of $N(V_0, \cdot)$ given in the remark of Theorem 3.5.1 yields an explicit upper bound on the number of homotopy types in \mathcal{C} under the form $c_1 \frac{V_0}{\ell_0^n}$ to the power $c_2 \left(\frac{V_0}{\ell_0^n}\right)^2$.

Besides this estimate, we also have an explicit bound on the homology of the manifolds of \mathcal{C} given by

Corollary 3.5.5. *Every $M \in \mathcal{C}_n(V_0, \ell_0)$ satisfies*

$$\sum_{i=1}^n b_i(M, F) \leq (n+1)^{n+1} N(V_0, k_n \ell_0)^n$$

where $b_i(M, F)$ is the i^{th} Betti number with field coefficients F and $k_n = \frac{\alpha_n}{4(4 \cdot 3^{n+1})}$

Proof. From the remark of Theorem 3.5.1, every manifold M of \mathcal{C} can be covered by $N = N(V_0, R) = \frac{2^n V_0}{C^n R^n}$ balls of radius R with $R \leq k_n \ell_0$. The covering dimension of M is equal to its dimension as manifold, therefore there exists a refinement α of order $n+1$ with at most $(n+1)N$ elements. By definition of the nerve \mathcal{N}_α associated to α , the natural map $i : M \rightarrow \mathcal{N}_\alpha$ is an α -map, that is, for every $p \in \mathcal{N}_\alpha$, $i^{-1}(p) \subset V_\alpha$ for some $V_\alpha \in \alpha$. Let us recall that $\text{Diam}(V_\alpha) \leq 2R$. We can then construct a map $r : \mathcal{N}_\alpha \rightarrow M$ sending the vertices of \mathcal{N}_α to some points in their pre-images by i . By construction, the distance between the images of any pair of adjacent vertices of \mathcal{N}_α is less than $4R$. Therefore, r extends to \mathcal{N}_α from Proposition 3.1.1. By construction, the map $r \circ i$ is at distance less than $2 \cdot 3^n (4R) + 2R \leq \frac{\alpha_n}{2} \text{sgl}(M)$ from id_M , so it is homotopic to id_M from Lemma 3.5.3. The simplicial complex \mathcal{N}_α has no more than $(n+1)N$ vertices and dominates M , therefore we have $\sum_{i=1}^n b_i(M, F) \leq \sum_{k=0}^n \binom{(n+1)N(V_0, k_n \ell_0)}{k}$ hence the corollary. \square

Références

- [1] R. Accola, *Differential and extremal lengths on Riemann surfaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. **46** (1960) 540-543.
- [2] L. Ahlfors, *Conformal invariants: topics in geometric function theory*, McGraw-Hill, 1973.
- [3] M. T. Anderson, *Ricci curvature bounds and Einstein metrics on compact manifolds*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989) 455-490.
- [4] F. Almgren, *The homotopy groups of the integral cycle groups*, Topology **1** (1960) 257-299.
- [5] I. Babenko, *Asymptotic invariants of smooth manifolds*, Russian Acad. Sci. Izv. Math. **41** (1993) 1-38.
- [6] ———, *Strong intersystolic softness of closed manifolds*, Russian Math. Surveys **55** (2000) 987-988.
- [7] C. Blatter, *Über extremallängen auf geschlossenen flächen*, Comment. Math. Helvetici **35** (1961) 153-168.
- [8] C. Bavard, *Inégalité isosystolique pour la bouteille de Klein*, Math. Ann. **274** (1986) 439-441.
- [9] ———, *Inégalités isosystoliques conformes pour la bouteille de Klein*, Geom. Dedicata **27** (1988) 349-355.
- [10] ———, *Inégalités isosystoliques conformes*, Comment. Math. Helvetici **67** (1992) 146-166.
- [11] ———, *L'aire systolique conforme des groupes cristallographiques du plan*, Ann. Inst. Fourier **43** (1993) 815-842.
- [12] ———, *Systole et invariant d'Hermite* J. Reine Angew. Math. **482** (1997) 93-120.

- [13] M. Berger, *Lectures on geodesics in Riemannian geometry*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1965.
- [14] ———, *À l'ombre de Loewner*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **4** (1972) 241-260.
- [15] ———, *Une borne inférieure pour le volume d'une variété riemannienne en fonction du rayon d'injectivité*, Ann. Inst. Fourier, **30** (1980) 259-265.
- [16] ———, *Filling Riemannian manifolds or isosystolic inequalities*, Global Riemannian geometry, Ellis Horwood Ser. Math. Appl. (1983) 75-84.
- [17] ———, *Systoles et applications selon Gromov*, Séminaire Bourbaki, Exp. 711, Astérisque **216** (1993) 279-310.
- [18] P. Buser & P. Sarnak, *On the period matrix of a Riemann surface of large genus*, Invent. Math. **117** (1994) 27-56.
- [19] Y. Burago & V. Zalgaller, *Geometric inequalities*, Springer, New-York, 1988.
- [20] E. Calabi, *Extremal isosystolic metrics for compact surfaces*, Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle, Semin. Congr. 1 (1996), Soc. Math. France, 146-166.
- [21] E. Calabi & J. Cao, *Simple closed geodesics on convex surfaces*, J. Differential Geometry **36** (1992) 517-549.
- [22] J. Cheeger & D. Ebin, *Comparaison theorems in Riemannian geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [23] C. B. Croke, *Some isoperimetric inequalities and eigenvalue estimates*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **13** (1980) 519-535.
- [24] ———, *Area and the length of shortest closed geodesic*, J. Differential Geometry **27** (1988) 1-22.
- [25] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, New York, 1969.
- [26] S. Ferry, *The homeomorphism group of a compact Hilbert cube manifold is an ANR*, Ann. Math. **106** (1977) 101-119.
- [27] S. Frankel & M. Katz, *Morse landscape of a Riemannian disk*, Ann. Inst. Fourier **43** (1993) 503-507.
- [28] M. Grayson, *Shortening embedded curves*, Ann. Math. **129** (1989) 71-111.
- [29] R. Greene & P. Petersen V, *Little topology, big volume*, Duke Math. J. **67** (1992) 273-290.

- [30] M. Gromov, *Filling Riemannian manifolds*, J. Differential Geometry **18** (1983) 1-147.
- [31] ———, *Systoles and intersystolic inequalities*, Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle, Semin. Congr. 1 (1996), Soc. Math. France, 291-362.
- [32] ———, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progr. Math., Vol. 152, Birkhäuser, Boston, MA, 1998.
- [33] J. Hass & P. Scott, *Shortening curves on surfaces*, Topology **33** (1994) 25-43.
- [34] J. Hebda, *Some lower bounds for the area of surfaces*, Invent. Math. **65** (1982) 485-490.
- [35] M. Katz, *The filling radius of two-point homogeneous spaces*, J. Differential Geometry **18** (1983) 505-511.
- [36] M. Katz & A. Suciuc, *Systolic freedom of loop space*, Geom. Funct. Anal. **11** (2001) 60-73.
- [37] W. Klingenberg, *A course in differential geometry*, Springer-Verlag, New-York, 1978.
- [38] ———, *Lectures on closed geodesics*, Appendix, Grundlehren Math. Wiss. 230, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [39] H.B. Lawson, *The stable homology of a flat torus*, Math. Scand. **36** (1975) 49-73.
- [40] M. Maeda, *The length of a closed geodesic on a compact surface*, Kyushu J. Math. **48** (1994), no. 1, 9-18.
- [41] F. Morgan, *Geometric measure theory. A beginner's guide*, Second Edition, Academic Press, San Diego, CA, 1995.
- [42] A. Nabutovsky & R. Rotman, *The length of the shortest closed geodesic on a 2-dimensional sphere*, Preprint.
- [43] P. Petersen V, *A finiteness theorem for metric spaces*, J. Differential Geometry **31** (1990) 387-395.
- [44] J. Pitts, *Regularity and singularity of one dimensional stationary integral varifolds on manifolds arising from variational methods in the large*, Symposia Mathematica, Vol. XIV, Roma, Italy, 1974.
- [45] ———, *Existence and regularity of minimal surfaces on Riemannian manifolds*, Math. Notes 27, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981.

- [46] G. de Rham, *Differentiable manifolds*, Grundlehren Math. Wiss. 266, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [47] R. Rotman, *Upper bounds on the length of the shortest closed geodesic on simply connected manifolds*, Math. Z. **233** (2000) 365-398.
- [48] T. Sakai, *A proof of the isosystolic inequality for the Klein bottle*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988) 589-590.
- [49] P. Schmutz, *Riemann surfaces with shortest geodesic of maximal length*, Geom. Funct. Anal. **3** (1993) 564-631.
- [50] ———, *Arithmetic groups and the length spectrum of Riemann surfaces*, Duke Math. J. **84** (1996) 199-215
- [51] ———, *Systoles and topological Morse functions for Riemann surfaces*, J. Differential Geometry **52** (1999) 407-452.
- [52] P. Pu, *Some inequalities in certain nonorientable manifolds*, Pacific J. Math. **2** (1952) 55-71.
- [53] K. Ranganathan, *A criterion for flatness in minimal area metrics that define string diagrams*, Commun. Math. Phys. **146** (1992) 429-445.
- [54] E. Spanier, *Algebraic topology*, Springer-Verlag, Berlin, 1995
- [55] M. Troyanov, *Les surfaces euclidiennes à singularités coniques*, Enseign. Math. **32** (1986) 79-94.
- [56] M. Wolf & B. Zwiebach, *The plumbing of minimal area surfaces*, J. Geom. Phys. **15** (1994) 23-56.
- [57] T. Yamaguchi, *Homotopy type finiteness theorems for certain precompact families of Riemannian manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988) 660-666.
- [58] S.-T. Yau, *Seminar on Differential Geometry : Problem section*, Ann. Math. Stud. 102, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1982.