**UNIVERSITE DE PARIS VI**

**THESE**

Spécialité : Physique théorique

Présentée
pour obtenir le titre de

**DOCTEUR EN SCIENCES**
**de L'UNIVERSITE Paris VI**

par

**Pierre PUJOL**

# Sujet : Théories Conformes et Systèmes Désordonnés

Soutenue le 4 octobre 1996 devant la Commission d'examen :

MM. E. Brézin
D. Bernard — Rapporteur
A. Comtet
V. Dotsenko
M. Mézard — Rapporteur
G. Mussardo

# Remerciements

Je tiens à remercier ici tous les membres du Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies des Universités Paris VI et Paris VII pour l'accueil chaleureux qu'ils m'ont réservé.

Je remercie également Vladimir Dotsenko pour avoir bien voulu assurer la direction de mes travaux de recherches ainsi que pour son aide indispensable tout au long de ma thèse.

Monsieur Edouard Brézin a accepté de présider le jury de cette thèse. Je l'en remercie sincèrement.

Je veux aussi remercier Messieurs Denis Bernard et Marc Mézard qui ont accepté avec gentillesse d'être les rapporteurs de cette thèse, ainsi que les autres membres du jury, Alain Comtet et Giuseppe Mussardo.

Je tiens à remercier Marco Picco pour nos amicales collaborations et pour ses précieux conseils tout au long de ma thèse.

Je dois également beaucoup à Victor Villalba pour ses précieux conseils et nos passionnantes conversations à Caracas.

Je remercie Yamilée et tous les membres de ma famille pour leur soutien.

Je remercie également Stéphanne Freychet pour une relecture attentive, et Monsieur Denis Bernia pour sa gentillesse et son efficacité dans la réalisation matérielle de cette thèse.

Enfin, je remercie CONICIT et FUNDAYACUCHO pour avoir financé mes études de doctorat en France.

# Table des matières

# Chapitre 1

# Introduction

La théorie des phénomènes critiques est l'un des sujets les plus importants et qui a connu un grand nombre de progrès ces dernières décennies en mécanique statistique. De façon plus générale, l'étude des transitions de phases est l'un des piliers de la physique moderne aussi bien du point de vue théorique qu'expérimental. A l'heure actuelle, la liste des méthodes d'analyse et de calcul développées pour étudier ces phénomènes est devenue trop longue pour être énoncée ici. Cependant, et malgré la grande diversité des systèmes physiques que l'on a pu étudier, il existe beaucoup de similitudes entre les propriétés au voisinage du point de transition de systèmes qui semblent a priori très différents. Ceci est encore plus remarquable dans les systèmes qui ont une transition de phase du deuxième ordre (ou supérieur). Dans ce cas, et contrairement aux transitions du premier ordre, le paramètre d'ordre devient nul au point de transition de manière continue. L'une des caractéristiques les plus intéressantes des transitions de ce type réside dans le fait que la longueur de corrélation devient infinie et il n'existe donc aucune échelle de distance dans le système. De ce fait, les fluctuations thermiques seront présentes à toutes les longueurs d'onde et la physique d'un tel système sera d'une grande richesse. Un système défini de façon discrète sur un réseau pourra donc être analysé comme un modèle continu à des distances suffisamment grandes. Dans ce cas, les diverses méthodes développées dans le contexte de la théorie des champs euclidienne sont d'une grande utilité. Depuis l'usage des intégrales de chemins de Feynman jusqu'à la théorie de la renormalisation de Wilson, la quantité de techniques de calcul et de résultats provenant de la théorie statistique des champs est inestimable. Dans ce sens, le résultat qui est peut-être le plus important est la notion d'universalité. Celle-ci nous apprend que des modèles qui sont différents à l'échelle microscopique, seront décrits, au point de transition et à des échelles très grandes, par une même classe d'universalité. Celle-ci à son tour ne dépend que de certaines quantités, dites universelles, dont l'exemple le plus courant est celui des exposants critiques qui gouvernent le comportement des quantités physiques telles que la chaleur spécifique ou la susceptibilité magnétique.

Parmi les différents types de phénomènes critiques que l'on peut considérer, les modèles bi-dimensionnels sont d'un intérêt particulier. Bien que leur présence dans la nature soit assez rare, et que la réalisation d'un tel système soit toujours relativement compliquée dans un contexte expérimental, ils jouent un rôle très important dans la théorie des transitions de phases et ce pour deux raisons : la première est qu'il existe une importante quantité de solutions non-triviales de ces modèles, dont l'exemple le plus connu est le modèle d'Ising. Malgré l'apparente simplicité de ceux-ci, la notion d'universalité déjà évoquée, conjuguée à l'indiscutable avantage que donne la connaissance d'une solution exacte, a fait que ces modèles ouvrent de nouveaux horizons en mécanique statistique et en théorie des champs. La seconde raison qui donne à la dimension deux une importance particulière, est le fait que l'invariance conforme, propre à une transition du deuxième ordre, est d'une richesse extraordinaire que l'on ne retrouve pas dans les autres dimensions. En utilisant les informations que procure l'invariance conforme, et en imposant certaines contraintes de "minimalité" que nous expliquerons dans le chapitre suivant, Belavin, Polyakov et Zamolodchikov ont pu identifier tous les exposants critiques d'une grande partie des modèles statistiques (ou plutôt des classes d'universalité). Ce résultat est l'un des plus importants de ces dernières années dans l'étude des phénomènes critiques. Finalement, les systèmes bi-dimensionnels ont aussi l'avantage, par rapport aux modèles en dimensions plus élevées, de permettre d'obtenir des résultats plus précis dans les simulations numériques. Celles-ci sont de grande utilité, du fait qu'elles permettent de modéliser des systèmes trop difficiles à réaliser expérimentalement et dont les mesures peuvent être confrontées aux résultats avancés par la théorie. Elles constituent en quelque sorte un lien supplémentaire entre théorie et expérience.

Nous n'avons évoqué jusqu'ici que des modèles que l'on peut définir sur un réseau régulier et homogène. Cependant, dans des échantillons réels, il existe très souvent des irrégularités ou des impuretés qui rendent la description théorique plus compliquée. Quand on envisage d'étudier un modèle de la mécanique statistique en présence de désordre, il existe une série de questions auxquelles il faut répondre avant d'envisager d'étendre les résultats obtenus pour les modèles réguliers mentionnés plus haut. On peut, tout d'abord, se demander si le désordre changera ou non l'ordre de la transition. Pour les transitions continues, si la forme qualitative de celles-ci est conservée malgré la présence du désordre, il est intéressant de se demander quelle sera la nouvelle classe d'universalité du système. L'essentiel du travail de cette thèse est centré sur cette question. Dans les deux premiers chapitres nous rappellerons respectivement les résultats de base des théories conformes et de quelques-unes des méthodes les plus couramment employées dans l'étude des systèmes désordonnés. Ceux-ci seront indispensables pour la suite où les puissantes techniques de calcul liées à l'invariance conforme et au groupe de renormalisation nous donneront des résultats approchés ou exacts sur certains modèles bi-dimensionnels. Les systèmes considérés décrivent des transitions du type ferro-magnétique, comme celle du modèle d'Ising ou la plus simple de ses généralisations, le modèle de Potts. Nous donnerons alors un résumé des principaux résultats obtenus dans l'étude du modèle d'Ising avec des constantes de couplage aléatoires. Dans ce contexte, la représentation fermionique du modèle nous permettra d'analyser le comportement de la chaleur spécifique du système en présence de désordre. Les méthodes des répliques et supersymétrique, bien connues dans le domaine des systèmes désordonnés, seront les piliers de cette approche, bien qu'une analyse perturbative directe du modèle soit aussi donnée. Malgré la puissance de cette représentation, la forme de la susceptibilité magnétique et des fonctions de corrélation de spins restent hors de portée de cette approche. De ce fait, nous adopterons par la suite la représentation du gaz de Coulomb. Celle-ci, en conjonction avec la méthode des répliques, nous permettra de combler les lacunes de la première approche et de généraliser cette méthode pour étudier le modèle de Potts aléatoire. Pour celui-ci, les exposants critiques liés à la chaleur spécifique et à la susceptibilité magnétique seront calculés de façon perturbative et divers aspects des propriétés de ce modèle à grandes échelles, tels que la charge centrale ou les moments supérieurs des fonctions de corrélation seront brièvement analysés. La méthode du groupe de renormalisation nous permettra aussi dans la suite d'étudier l'effet du désordre dans d'autres modèles minimaux des théories conformes. Plus précisément, nous montrerons que les propriétés de plusieurs modèles multi-critiques couplés par un terme aléatoire peuvent être obtenues de façon exacte. Bien que la forme dont on introduit le désordre dans ce cas soit peu usuelle, la possibilité de décrire la limite infrarouge de ce système par d'autres modèles simples des théories conformes est de grand intérêt. Finalement, dans le dernier chapitre, nous allons effleurer le sujet du désordre dans les transitions du premier ordre. Nous donnerons d'abord un bref résumé des résultats généraux obtenus dans ce contexte et en particulier le résultat surprenant de Aizenman et Wehr, qui montre qu'il ne peut y avoir de transitions de premier ordre dans une grande variété de systèmes bi-dimensionnels désordonnés. Nous illustrerons ceci avec l'étude de Cardy du modèle de Ashkin-Teller aléatoire et sa généralisation simple à plusieurs modèles de Potts couplés. Nous montrerons comment ces systèmes, qui ont une transition du premier ordre dans le cas pur, donneront une transition continue en présence de désordre.

Il est clair que la liste des modèles désordonnés que l'on peut envisager d'étudier à l'heure actuelle est très longue. Les résultats présentés ici pour des systèmes avec un désordre faible ne sont représentatifs que d'une partie des phénomènes auxquels on s'attend dans les transitions de phase de systèmes désordonnés de toute nature. Nous pouvons espérer cependant qu'ils constituent un pas de plus vers une approche plus générale des systèmes bi-dimensionnels qui comprendrait, entre autres, une description exacte de certains modèles désordonnés.

* *

*

# Chapitre 2

# Théories conformes

Dans ce chapitre nous allons présenter un bref résumé des résultats les plus importants des théories conformes. En prêtant un intérêt particulier aux modèles minimaux et à la représentation du gaz de Coulomb pour le calcul des fonctions de corrélations, nous allons voir quelles sont les applications les plus importantes pour étudier certains modèles statistiques. Ces méthodes et résultats seront de grande importance dans la suite de ce travail pour l'étude de systèmes désordonnés en dimension deux. Il existe aujourd'hui une très grande quantité de références à ce sujet. Nous allons ici suivre les lignes de [27, 57, 44, 12] pour la présentation des résultats généraux de même que la référence originale [7].

## 2.1 Invariance conforme en dimension deux

Les systèmes statistiques qui ont une transition de phase du deuxième ordre possèdent la propriété très importante d'invariance d'échelle au point critique (voir par exemple [110, 82] pour une explication plus détaillée). L'invariance de la théorie par une transformation d'échelle globale dans les coordonnées :

$$\sigma^a \to \lambda \sigma^a \tag{2.1}$$

implique au niveau classique que la trace du tenseur énergie impulsion est nulle :

$$T^a_a(\sigma) = 0 \tag{2.2}$$

Au niveau quantique, l'invariance d'échelle (2.1) a lieu si la relation (2.2) est satisfaite. Cette condition, avec aussi l'invariance par translations et rotations, implique que la théorie (locale) sera aussi invariante sous les transformations de la forme [85] :

$$\sigma^a \to \xi^a(\sigma)$$

où le changement de la métrique est de la forme suivante :

$$g_{ab} \to \frac{\partial \xi^c}{\partial \sigma^a}\frac{\partial \xi^d}{\partial \sigma^b} g_{cd} = \rho(\sigma) g_{ab} \tag{2.3}$$

En dimension $D$ arbitraire, l'invariance d'une théorie par les transformations qui satisfont à (2.3) impose des contraintes sur la forme des fonctions de corrélation à deux et à trois points des opérateurs fondamentaux de la théorie :

$$< \phi_i(x)\phi_j(0) > \propto \frac{\delta_{ij}}{|x|^{2\Delta_i}} \tag{2.4}$$

ce qui introduit en quelque sorte une orthogonalité entre les opérateurs fondamentaux, et aussi :

$$< \phi_1\phi_2\phi_3 > \propto \frac{const}{|x_{12}|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}|x_{13}|^{\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3}|x_{23}|^{-\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3}} \tag{2.5}$$

Bien qu'il existe des contraintes sur les fonctions de corrélations d'ordre plus élevé, pour $D$ générique, l'invariance conforme ne permet pas en général à elle seule de fixer de façon précise la forme générale de celles-ci. Ceci est dû au fait qu'en dimension $D$ quelconque, les transformations conformes sont les translations, les rotations, les dilatations et les transformations dites conformes spéciales. Elles sont donc engendrées par un nombre fini d'entre elles et le groupe conforme est de dimension finie. En dimension 2, en revanche, le groupe conforme est constitué des transformations analytiques et anti-analytiques du plan complexe. Il devient de dimension infinie. C'est la source de la richesse des théories conformes bi-dimensionnelles. Ce nombre infini de symétries a en effet permis d'obtenir un grand nombre de résultats supplémentaires. Dans un système de coordonnées complexes $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$, les transformations conformes sont simplement les transformations analytiques et anti-analytiques

$$z \to z'(z)\ ,\ \overline{z} \to \overline{z}'(\overline{z}) \tag{2.6}$$

Dans ce système de coordonnées, l'annulation de la trace de $T$ (utilisant la symétrie de $T$) s'écrit $T_{z\overline{z}} = T_{\overline{z}z} = 0$ et la conservation de $T$ prouve que ses autres composantes $T_{zz}$ et $T_{\overline{z}\overline{z}}$ sont respectivement analytique et anti-analytique :

$$\begin{aligned} \partial_z T_{\overline{z}\overline{z}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad T_{\overline{z}\overline{z}}(z,\overline{z}) = T_{\overline{z}\overline{z}}(\overline{z}) \text{ noté } \overline{T}(\overline{z}) \\ \partial_{\overline{z}} T_{zz} = 0 \quad &\Rightarrow \quad T_{zz}(z,\overline{z}) = T_{zz}(z) \text{ noté } T(z). \end{aligned} \tag{2.7}$$

$T(z)$ et $\overline{T}(\overline{z})$ sont les générateurs des transformations conformes $z \to z'(z)$ et $\overline{z} \to \overline{z}'(\overline{z})$ respectivement, où

$$z \to z + \epsilon(z) \tag{2.8}$$

pour les transformations infinitésimales engendrées par $T(z)$. Le groupe (des transformations) conforme(s) est factorisé : c'est le produit de sa partie analytique par sa partie anti-analytique, c'est pourquoi nous ne considérerons souvent que la partie analytique engendrée par $T(z)$.

Nous pourrions traiter le cas des théories conformes classiques mais préférons passer tout de suite au cas quantique. Dans ce cas, les transformations du tenseur énergie-impulsion $T$ ne se déduisent pas simplement des lois de transformations tensorielles. On écrit donc la forme la plus générale possible de ses variations sous les transformations conformes (qu'il engendre lui-même). Nous donnons le résultat pour ses modes $L_n$ qui sont définis par

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-2} L_n \tag{2.9}$$

chacun des $L_n$ étant le générateur des transformations infinitésimales (2.8) avec

$$\epsilon(z) = \epsilon z^{n+1}. \tag{2.10}$$

Les lois de transformation les plus générales pour ces modes sont données par l'algèbre de Virasoro [102]

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12} n(n-1)(n+1)\delta_{n,-m}. \tag{2.11}$$

On a une algèbre similaire pour les modes $\overline{L}_n$ de $\overline{T}$ qui commutent par ailleurs avec les $L_n$. Le paramètre $c$ ne peut pas être fixé par des considérations générales. Il dépend de la théorie considérée. C'est la charge centrale ou anomalie conforme. Celle-ci a une importance primordiale en mécanique statistique. Si notre système est défini sur une bande de largeur $L$ et de longueur infinie, un calcul simple nous montre que l'énergie libre par unité de longueur sera donnée par (voir [12, 13] pour les détails) :

$$F(L) = \frac{c\pi}{6L} \tag{2.12}$$

Il est immédiat de vérifier que l'algèbre classique des générateurs $z^{n+1}d/dz$ des transformations conformes (2.10) est donnée par (2.11) avec $c = 0$. L'algèbre de Virasoro (2.11) est donc une extension centrale de l'algèbre conforme.

Intéressons-nous maintenant aux opérateurs de la théorie. La loi de transformation la plus naturelle et la plus simple d'un opérateur $\phi^i$ sous une transformation conforme (2.6) est

$$\phi^i(z, \overline{z}) \to \left(\frac{dz'}{dz}\right)^{\Delta_i} \left(\frac{d\overline{z}'}{d\overline{z}}\right)^{\overline{\Delta}_i} \phi^i(z', \overline{z}'). \tag{2.13}$$

L'indice (ou le multi-indice) $i$ sert à distinguer les divers champs. Le champ $\phi^i$ est dit de poids $\Delta_i$ et $\overline{\Delta}_i$. L'équation (2.13) est une extension de la loi de transformation tensorielle classique. Les champs qui ont une loi de transformation donnée par (2.13) sont dits primaires. Tous les champs ne pourront pas être dans ce cas, la dérivée d'un champ primaire n'est déjà clairement pas un champ primaire. Les transformations (2.10) engendrées par les $L_n$ s'écrivent donc pour un tel champ

$$[L_n, \phi^i(z)] = z^n (z\frac{d}{dz} + (n+1)\Delta_i)\phi^i(z) \tag{2.14}$$

où nous n'avons pas écrit la dépendance en $\overline{z}$. Il y a, comme toujours, une expression similaire pour les $\overline{L}_n$.

En théorie conforme il y a une correspondance entre les opérateurs et les états. Les opérateurs engendrent les états à partir du vide. Au vu du développement en modes (2.9) de $T$, le vide $|0>$ "entrant" (correspondant donc à $z=0$) doit être annihilé par les modes $L_n$ tels que $-n-2<0$, sinon $T(z)$ aurait une singularité en 0 :

$$L_n|0>=0 \text{ pour } n \geq -1. \tag{2.15}$$

Le vide $|0>$ est donc en particulier invariant sous les transformations globales de $Sl(2,C)$ engendrées par $L_1, L_0, L_{-1}$. Les états sont obtenus par action des champs sur le vide :

$$|i>=\phi^i(0)|0>\,. \tag{2.16}$$

Si le champ $\phi^i$ est primaire, l'état correspondant est aussi dit primaire et nous réservons par ailleurs la notation (2.16) aux états primaires. On déduit des relations de commutation des champs primaires que les états primaires vérifient

$$L_0|i>=\Delta_i|i> \text{ et } L_n|i>=0 \text{ pour } n\geq 1. \tag{2.17}$$

Comme les états, ils sont dits de poids $\Delta_i$. Contrairement au vide $|0>$, ils ne sont pas $Sl(2,C)$ invariants : il y a maintenant un opérateur inséré en $z=0$ qui est modifié par les transformations $Sl(2,C)$.

La transformation $z\to 1/z$ permet de définir symétriquement les états sortant

$$<i| = \lim_{z,\overline{z}\to\infty} <0|\phi^i(z,\overline{z})z^{2L_0}\overline{z}^{2\overline{L}_0} \tag{2.18}$$

où on a explicité la dépendance en $z$ et $\overline{z}$. Les facteurs $z^{2L_0}$ issus de la transformation $z\to 1/z$ permettent d'avoir une normalisation non singulière malgré la limite infinie (cf Eq.(2.4)) et l'orthogonalité des états

$$<i|j>=\delta_{i,j}. \tag{2.19}$$

La même transformation permet d'obtenir la relation d'orthogonalité

$$(L_n)^\dagger = L_{-n}. \tag{2.20}$$

On en déduit, symétriquement, que le vide et les états sortant sont annihilés par les $L_{-n}$ :

$$\begin{aligned} <0|L_{-n}=0 &\quad \text{pour} \quad -n\leq 1 \\ <i|L_{-n}=0 &\quad \text{pour} \quad -n\leq -1. \end{aligned} \tag{2.21}$$

La propriété $<0|L_{-n}=0$ exprime la régularité du tenseur énergie-impulsion à l'infini.

Nous avons introduit les champs et les états primaires et il est temps maintenant d'examiner quels sont les autres champs et états de la théorie, car ils ne peuvent pas tous être primaires. On a en effet déjà remarqué que la dérivée d'un champ primaire ne l'était pas. De façon plus générale que la dérivée, qui correspond à une translation locale engendrée par $L_{-1}$, on peut appliquer à un champ $\phi^i$ tous les générateurs $L_n$ des transformations conformes locales. Ces opérateurs doivent nécessairement être inclus dans l'algèbre car ils apparaissent par exemple dans le développement à courte distance de $T(z)\phi^i(z')$. Ils sont engendrés à partir des champs primaires par

$$\phi^{i,(-k_1,...,-k_N)}(z) = L_{-k_1}(z)...L_{-k_N}(z)\phi^i(z) \tag{2.22}$$

pour des entiers positifs $k_1, ..., k_N$, d'où leur nom de descendants. Comme les $L_n$ qui sont les modes de $T(z)$ développé autour de 0, les $L_n(z)$ de (2.22) sont les modes pour un développement autour de $z$. Pour les états (donc $z = 0$) on a également les descendants ou états secondaires

$$|i, (-k_1, ..., -k_N)>= L_{-k_1}...L_{-k_N}|i> . \tag{2.23}$$

L'état $|i, \{-k_1, ..., -k_N\}>$ n'est plus annihilé par les $L_n$, $n > 0$, et la condition (2.21) constitue une caractérisation des états primaires. Son poids se calcule aisément par (2.17) et (2.11):

$$L_0|i, (-k_1, ..., -k_N)>= (\Delta_i + k_1 + ... + k_N)|i, (-k_1, ..., -k_N)> . \tag{2.24}$$

Le poids d'un descendant est donc obtenu par accroissement d'un entier positif à partir du poids $\Delta_i$ de l'état primaire dont il est issu. C'est pourquoi on appelle aussi ces derniers, "états de plus haut poids", par référence à une convention de signe opposée[1]. On a ainsi à partir de chaque champ primaire toute une série de champs dits secondaires ou descendants. Ils constituent la famille conforme de $\phi^i$. L'espace de tous les états engendrés par action des $L_{-k}$ sur l'état de plus haut poids $|i>$ est appelé module de Verma et noté ici $\mathcal{H}_i$. C'est une représentation de l'algèbre de Virasoro. Elle est caractérisée par le poids $\Delta_i$.

L'invariance conforme nous permet aussi d'avoir plus d'informations sur le produit d'opérateurs de Wilson standard en théorie des champs:

$$\phi_1(x)\phi_2(y) \sim \sum_i C_i(x-y)O_i(y) \tag{2.25}$$

où les $O$ forment un ensemble complet d'opérateurs. En effet, l'analyse dimensionnelle ainsi que les contraintes supplémentaires imposées par l'invariance conforme nous indiquent que le membre de droite peut s'écrire uniquement en termes des autres opérateurs primaires de la théorie et de ses descendants [7]:

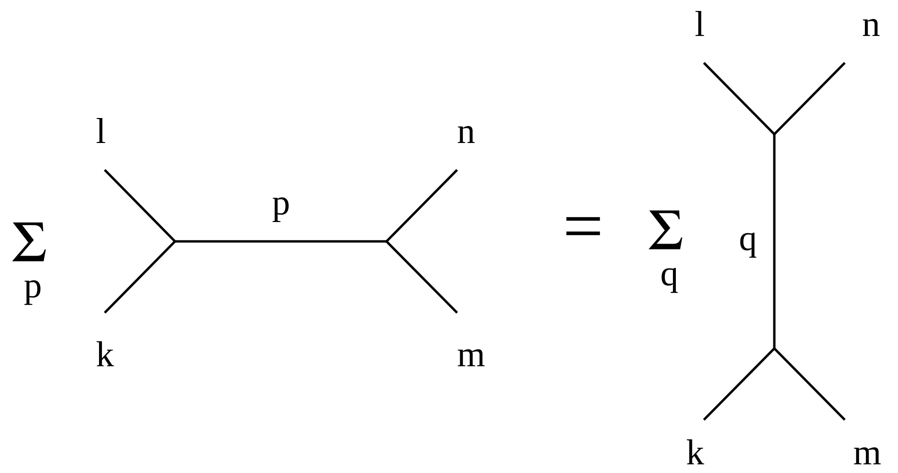
$$\phi_n(z,\overline{z})\phi_m(0) \sim \sum_p \sum_{\{k\},\{\overline{k}\}} C^p_{nm}\ \beta^{p;\{k\}}_{nm}\ \beta^{p;\{\overline{k}\}}_{nm}$$

$$\times\ z^{\Delta_p-\Delta_n-\Delta_m+\sum\{k\}}\ \overline{z}^{\overline{\Delta_p}-\overline{\Delta_n}-\overline{\Delta_m}+\sum\{\overline{k}\}}\ \phi_p^{\{k\},\{\overline{k}\}} \tag{2.26}$$

de plus, l'algèbre est associative, ce qui permet de calculer, par exemple, une fonction de corrélation à quatre points en groupant les opérateurs de deux façons différentes.

1. On a évidemment aussi les descendants $< i, (k_1, ..., k_N)| =< i|L_{k_N}...L_{k_1}$ pour les états sortants.

On peut représenter ceci schématiquement par les diagrammes suivants :




En général, le nombre de champs primaires qui intervient dans l'étape intermédiaire est infini. Ceci nous rend pratiquement impossible la tâche de calculer des fonctions de corrélation de ce type pour le cas général. Il existe cependant des cas où le nombre d'opérateurs primaires qui intervient dans le produit (2.26) est fini. On peut alors obtenir plus d'informations sur ces modèles que dans le cas général. En effet, il existe un nombre fini d'opérateurs qui forment une sous-algèbre qui se découple du reste de la théorie. Dans ce cas, on verra dans les sections suivantes que toutes les fonctions de corrélation comprenant ces opérateurs peuvent être calculées. Ceci nous permettra d'avoir un grand nombre de résultats exacts sur ces modèles.

## 2.2 Modèles minimaux

Il est intéressant d'étudier plus en détail les représentations de l'algèbre de Virasoro. Nous allons présenter ici uniquement les résultats qui seront de grande importance pour la suite et renvoyer le lecteur à des références plus détaillées (voir par exemple [37, 58]). En général, les représentations de l'algèbre de Virasoro sont irréductibles. Cependant, pour une valeur donnée de la charge centrale $c$, il existe des représentations caractérisées par le poids

$$\Delta_{(n,m)} = \Delta_0 + \frac{1}{4}(\alpha_+ n + \alpha_- m)^2 \tag{2.27}$$

avec

$$\Delta_0 = \frac{1}{24}(c-1)\ ;\ \alpha_\pm = \frac{\sqrt{1-c} \pm \sqrt{25-c}}{\sqrt{24}} \tag{2.28}$$

qui sont réductibles. Dans ce cas, il existe dans cette représentation un vecteur descendant $|\chi>$ de poids $\Delta_{(n,m)} + nm$ qui satisfait aux équations des champs primaires (2.17) avec $\Delta_{(n,m)} + nm$ à la place de $\Delta_i$. De ce fait, ce vecteur peut être considéré comme primaire dans son propre module de Verma et donc la représentation de poids $\Delta_{(n,m)}$ n'est pas réductible. On obtient une représentation réductible si l'on impose formellement que le vecteur $|\chi>$ soit nul. Ce choix est possible du fait que grâce à (2.17), celui-ci est orthogonal à tous les autres vecteurs du module de Verma. A ce vecteur "nul" on peut associer un opérateur que l'on notera tout simplement $\chi$. De ce fait, toutes les fonctions de corrélation contenant cet opérateur $\chi$ seront nulles :

$$< \chi\phi_1 \cdots \phi_k >= 0 \tag{2.29}$$

Comme le champ $\chi$ est un $nm$-ième descendant du champs primaire $\phi_{nm}$, et que toute fonction de corrélation contenant un descendant, disons $\phi_{nm}^{(-k_1,\ldots,-k_N)}(z)$, peut s'écrire comme[2] :

$$\begin{aligned} &< \phi_{nm}^{(-k_1,\ldots,-k_N)}(z)\phi_1(z_1)\cdots\phi_s(z_s) > = \\ &\hat{L}_{-k_N}(z,z_i)\cdots\hat{L}_{-k_1}(z,z_i) < \phi_{nm}(z)\phi_1(z_1)\cdots\phi_s(z_s) > \end{aligned} \tag{2.30}$$

où les opérateurs différentiels $\hat{L}_{-k}$ sont donnés par

$$\hat{L}_{-k} = \sum_{i=1}^{s}\left[\frac{(1-k)\Delta_i}{(z-z_i)^k} - \frac{1}{(z-z_i)^{k-1}}\frac{\partial}{\partial z_i}\right] \tag{2.31}$$

la condition (2.29) nous indique alors que la fonction de corrélation

$$< \phi_{nm}(z)\phi_1(z_1)\cdots\phi_s(z_s) >$$

satisfait à une équation différentielle d'ordre $nm$. Etudions maintenant plus en détail l'équation (2.27). Il est clair que si la valeur de la charge centrale est telle que l'on a

$$\alpha_-/\alpha_+ = p/q \tag{2.32}$$

avec $p$ et $q$ entiers positifs, chaque représentation dégénérée aura non seulement un vecteur nul mais une infinité de vecteurs nuls. De plus, et ceci est le point clé des modèles minimaux, les familles d'opérateurs avec $0 < n < p$ et $0 < m < q$ formeront une sous algèbre, fermée par rapport au reste des opérateurs ; en particulier, le produit (2.26) entre des opérateurs de cette sous algèbre ne donnera que des opérateurs (primaires et descendants) de cette même sous algèbre finie. De ce fait, on pourra calculer explicitement le produit d'opérateurs ainsi que toutes les fonctions de corrélation contenant ces opérateurs. Les valeurs de la charge centrale pour lesquelles on aura ces modèles minimaux sont données par (2.32) :

$$c = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq} \tag{2.33}$$

En général, les théories minimales décrites par (2.33) ne sont pas unitaires ; elles contiennent des états, primaires ou descendants dont la norme est négative. Contrairement aux théories de champs quantiques où l'unitarité est de grande importance, elle ne constitue pas une contrainte réelle en mécanique statistique (voir notamment [86] pour un exemple de théorie conforme non-unitaire dans un cas particulier

2. Ceci est une conséquence des identités de Ward conformes

de turbulence). Cependant, la grande majorité des systèmes que nous allons étudier dans la suite sont unitaires. Parmi les modèles minimaux (2.33) seuls ceux qui correspondent à une charge centrale donnée par $q = p + 1$ ou

$$c = 1 - \frac{6}{p(p+1)} \tag{2.34}$$

seront unitaires avec $p \geq 2$ [40]. Il y aura donc $p \times (p-1)$ opérateurs primaires de dimension conforme

$$\Delta_{n',n} = \frac{(pn' - (p+1)n)^2 - 1}{4p(p+1)} \tag{2.35}$$

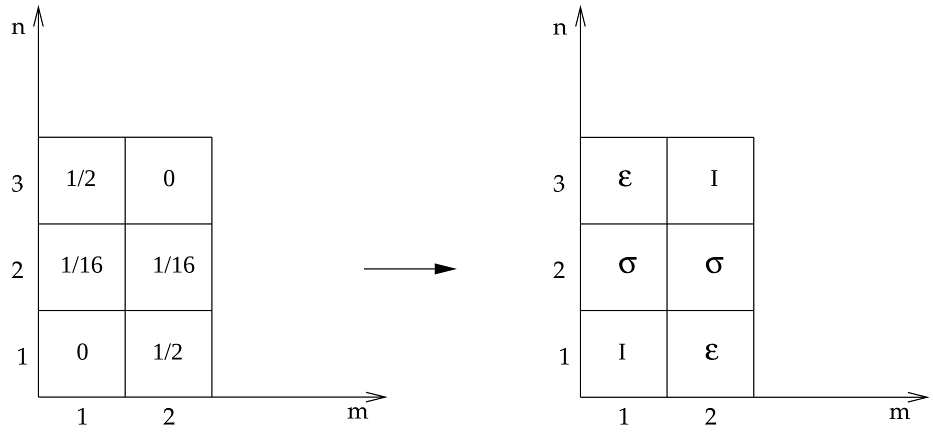
qui formeront la sous algèbre ou grille conforme.

Les différents modèles de la série minimale (unitaires ou pas) correspondent à des classes d'universalité de systèmes bidimensionels. En effet, des modèles qui à l'échelle du réseau semblent être très différents, peuvent donner dans la limite continue la même théorie conforme. S'il existe un nombre fini d'opérateurs pertinents pour ces systèmes, ceux-ci doivent figurer dans la grille conforme de la théorie correspondante. Pour associer à chacun de ces opérateurs leur correspondant dans cette grille, il faut donc connaître la dimension physique que donne le calcul direct dans chacun des systèmes (si possible). La théorie conforme prend alors la relève en nous indiquant quelles sont les propriétés générales de la classe d'universalité correspondant au système initial. De ce fait, un même modèle minimal peut représenter différents systèmes statistiques dans la limite continue où éventuellement l'interprétation des opérateurs de la grille conforme change en fonction du système initial. Par exemple, pour un modèle de type magnétique la correspondance entre opérateurs peut être établie de la façon suivante : si les quantités physiques sont reliées à la température réduite de la manière standard : $C(\tau) \sim |\tau|^{-\alpha}$, $M(\tau) \sim |\tau|^{\beta}$ et $R(\tau) \sim |\tau|^{-\nu}$ on utilise les relations :

$$\nu = \frac{1}{d - \Delta_{\varepsilon,phys}} \; ; \; \alpha = \frac{d - 2\Delta_{\varepsilon,phys}}{d - \Delta_{\varepsilon,phys}} \; ; \; \beta = \frac{\Delta_{\sigma,phys}}{d - \Delta_{\varepsilon,phys}} \tag{2.36}$$

avec $\tau = (T - T_c)/T_c$ la température réduite, $C$ la chaleur spécifique, $M$ la magnétisation, $R$ la longueur de corrélation et où la dimension physique d'un opérateur est le double de sa dimension conforme.

Le premier modèle non trivial dans la série unitaire minimale correspond au cas $p = 3$. Il a été identifié avec le modèle d'Ising [7]. La grille d'opérateurs ainsi que leurs dimensions conformes sont représentées dans la figure suivante :

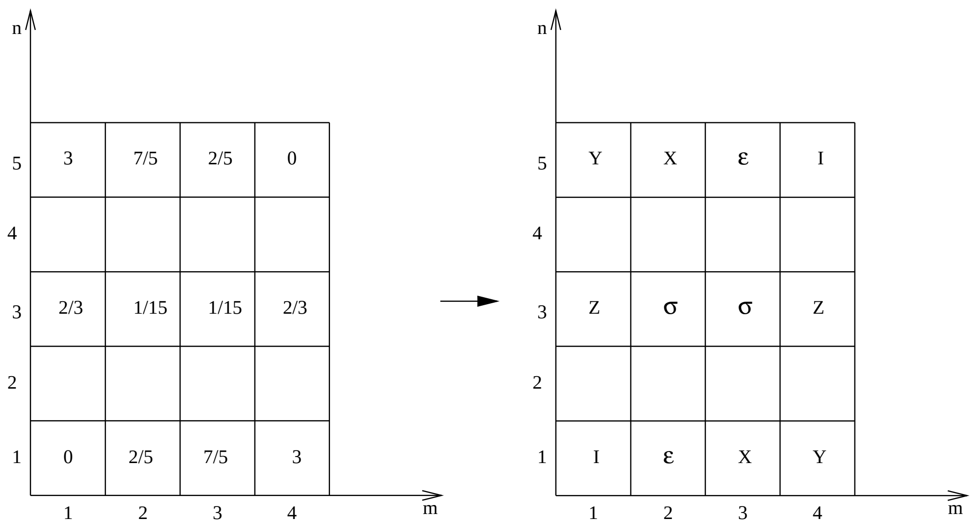



Dans la section (4) nous allons étudier en détail la limite continue de ce modèle ainsi que l'effet du désordre sur celui-ci.

Par la suite, on a identifié avec le cas $p = 5$ le modèle de Potts $Z_3$ [87]. Sa fonction de partition est de la forme

$$Z(\beta) = \sum \{\sigma\} exp \left(\beta \sum (\overline{\sigma}(x)\sigma(x') + \sigma(x)\overline{\sigma}(x'))\right) \tag{2.37}$$

La somme dans l'exposant se fait entre les voisins les plus proches, mais ici les variables de spin sont des racines de l'unité de la forme : $\sigma = exp(2\pi ik/3)$, $k = 0, 1, 2$. Les exposants de ce modèle sont connus grâce à la solution de Baxter du modèle d'hexagones durs [5] qui a la symétrie $Z_3$ et est supposé être dans la même classe d'universalité que le modèle de Potts. Le tableau d'opérateurs correspondant est donné par [28] :




Le modèle de Potts à $q$ états peut être défini pour différentes valeurs de $q$ et même pour des valeurs continues [100, 6]. Pour $q \leq 4$, les transitions sont du deuxième ordre [4] et les exposants critiques dans ce cas ont été obtenus dans la représentation du gaz de Coulomb [78], ces modèles correspondent à des théories avec $c \leq 1$. Dans cette série de modèles, l'opérateur d'énergie est toujours dans la position $(1,2)$ de la grille conforme [26]. La série unitaire minimale avec $p = 4, 6, 8, \cdots$ a été identifiée avec des modèles tri-critiques [78]. Dans ce cas, la position de l'opérateur d'énergie dans la grille conforme est $(2,1)$ [40]. Les deux premiers de ces modèles correspondent respectivement au modèle d'Ising et au modèle de Potts $Z_3$, tous deux tri-critiques. Plusieurs modèles de la série minimale ont été identifiés aussi à des modèles $O(n)$ avec $n \leq 2$ [78] ainsi qu'à des modèles RSOS [54], le paramètre d'ordre étant l'opérateur au centre du tableau conforme.

## 2.3 Méthode du gaz de Coulomb

Nous avons vu dans la section précédente que chaque modèle minimal représente une classe d'universalité qui correspond à la limite continue de plusieurs modèles statistiques. Les outils de l'invariance conforme nous permettent alors d'identifier plusieurs propriétés de chacune de ces classes d'universalité indépendamment des théories de champs sous-jacentes. Nous pouvons aussi choisir une représentation particulière pour un modèle minimal quelconque en sachant que les résultats obtenus seront valables pour toutes les théories de champs représentées. Pour le calcul des fonctions de corrélation que nous allons rencontrer de nombreuses fois tout au long de cette thèse, la représentation du gaz de Coulomb est d'une grande utilité [26] (voir aussi [27] pour une étude très détaillée).

Le cas le plus simple correspond au champ scalaire libre, dont l'action est

$$A[\phi] = \int d^2z \ (\partial_z\phi\partial_{\overline{z}}\phi) \tag{2.38}$$

et le tenseur d'énergie impulsion (en prenant directement l'ordre normal) est donné par :

$$T_{zz} = -\frac{1}{4} : \partial_z\phi\partial_z\phi : \tag{2.39}$$

où la forme de la partie anti-analytique est donnée par le changement $z \to \overline{z}$. Les fonctions de corrélation d'opérateurs locaux $O_i$ sont tout simplement données par :

$$< O_1 \cdots O_n >= \frac{\int D\phi \ e^{-A[\phi]} \ O_1 \cdots O_n}{\int D\phi \ e^{-A[\phi]}} \tag{2.40}$$

et la fonction à deux points du champ $\phi$ est de la forme :

$$< \phi(z,\overline{z})\phi(z',\overline{z}') >= 4 log\frac{R}{|z-z'|} \tag{2.41}$$

où $R$ est un cut-off infrarouge.

Définissons maintenant l'opérateur de vertex suivant :

$$V_\alpha(z) =: e^{i\alpha\phi(z)} : \tag{2.42}$$

(2.41) nous permet de calculer très facilement le produit d'opérateurs

$$T(z)V_\alpha(z') = \frac{\Delta_\alpha}{(z-z')^2}V_\alpha(z') + \frac{1}{(z-z')^2}\partial_{z'}V_\alpha(z') + \cdots \tag{2.43}$$

avec $\Delta_\alpha = \alpha^2$. Nous voyons donc que (2.42) est un opérateur primaire. Nous pouvons calculer aussi en utilisant l'action du champ libre la fonction à deux points :

$$< V_\alpha(z) V_{\alpha'}(z') > \sim \frac{\delta_{0,\alpha+\alpha'}}{(z-z')^{2\alpha^2}} \tag{2.44}$$

Cette relation n'est autre que la loi d'orthogonalité (2.4). Dans ce modèle simple, on peut calculer toutes les fonctions de corrélation de la forme

$$< V_{\alpha_1}(z_1, \overline{z}_1) \cdots V_{\alpha_n}(z_n, \overline{z}_n) > \sim \prod_{i<j} |z_i - z_j|^{4\alpha_i\alpha_j} \tag{2.45}$$

où la fonction de corrélation sera non nulle uniquement si $\sum \alpha_i = 0$.

Finalement, nous pouvons aussi obtenir très simplement la fonction à deux points pour le tenseur d'énergie impulsion :

$$< T(z)T(z') >= \frac{c/2}{(z-z')^4} = \frac{1/2}{(z-z')^4} \tag{2.46}$$

et nous voyons que le modèle de théorie de champs le plus simple dont nous disposons (2.38) correspond à une théorie conforme de charge centrale $c = 1$.

Nous avons vu cependant que les modèles minimaux qui correspondent aux points critiques des modèles statistiques qui nous intéressent ont une charge centrale $c \leq 1$. Afin de pouvoir représenter ces modèles avec un champ scalaire, nous allons déformer le tenseur d'énergie impulsion de la façon suivante :

$$T_{zz} = -\frac{1}{4} : \partial_z\phi\partial_z\phi : + i\alpha_0\partial_z^2\phi \tag{2.47}$$

Cette forme particulière pour $T$ peut provenir de l'action d'un champ scalaire sur une surface de métrique non triviale :

$$S(\phi, g_{ab}) = \frac{1}{4\pi}\int d^2z\sqrt{g}(g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + i\alpha_0 R_g\phi) \tag{2.48}$$

avec $R_g$ la courbure scalaire de la métrique $g$. On peut également obtenir (2.47) en imposant des conditions de bord non triviales sur le champ $\phi$ [12]. Dans le plan complexe, ceci revient à introduire une singularité de courbure ou "charge" à l'infini [27]. Comme nous avons introduit un terme de bord, la fonction à deux points (2.41) reste la même. Nous pouvons donc calculer la fonction de corrélation (2.46) pour la nouvelle forme du tenseur énergie impulsion, le résultat sera de la même forme mais la valeur de la charge centrale sera maintenant

$$c = 1 - 24\alpha_0^2 \tag{2.49}$$

De même, les fonctions de corrélation de la forme

$$< V_{\alpha_1}(z_1, \overline{z}_1) \cdots V_{\alpha_n}(z_n, \overline{z}_n) >$$

seront maintenant non nulles si les poids des opérateurs satisfont :

$$\sum \alpha_i = 2\alpha_0 \tag{2.50}$$

Nous voyons donc que dans les fonctions de corrélation la charge à l'infini que nous avons introduite doit être compensée par celles des opérateurs de vertex. En particulier, (2.50) nous dit que la fonction à deux points sera maintenant non nulle uniquement entre les opérateurs conjugués $V_\alpha$ et $V_{2\alpha_0-\alpha}$. En effet, en calculant le produit d'opérateurs de ces champs avec (2.47) on obtient :

$$\Delta_\alpha = \Delta_{2\alpha_0-\alpha} = \alpha^2 - 2\alpha\alpha_0 \qquad (2.51)$$

On anticipe déjà la raison du dédoublement dans la grille conforme des opérateurs primaires pour $c \leq 1$. En effet, on voit que les opérateurs de vertex $V_\alpha$ et $V_{2\alpha_0-\alpha}$ qui ont des positions différentes dans l'espace des charges correspondent au même opérateur primaire. Bien entendu, ceci est un fait général que l'on voit très clairement dans cette représentation et n'est pas intrinsèque à la série minimale unitaire.

## 2.4 Fonctions de corrélation

Nous disposons maintenant de tous les outils nécessaires pour le calcul des fonctions de corrélation dans les modèles minimaux. Dans la suite de cette thèse, nous allons étudier des modèles dont l'invariance conforme est brisée par un terme provenant du désordre. Il est clair que dans une analyse perturbative, le calcul de fonctions de corrélation à plusieurs points est indispensable pour obtenir les exposants critiques du système au nouveau point fixe. De ce fait, les techniques de calcul que nous allons voir de façon résumée ici vont être de grande importance dans la suite, le lecteur pourra trouver le détail des calculs dans le contexte de la méthode du gaz de Coulomb dans les références originales [26, 27].

L'équation (2.51) nous indique que les opérateurs de vertex $V_\pm = exp(i\alpha_\pm\phi)$ avec $\alpha_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2+1}$ ont un poids conforme $\Delta_\pm = 1$. Si l'on définit alors les opérateurs d'écran

$$J_\pm = \oint_C dz\ V_\pm(z) \qquad (2.52)$$

avec $C$ un contour fermé, on obtient deux opérateurs invariants par rapport à toutes les transformations conformes (le raisonnement s'applique aussi à la partie anti-holomorphe). En fait, si à l'action libre (2.38) on rajoute les termes suivants :

$$A[\phi] \to A[\phi] + \int d^2z \left(\lambda_+ e^{i\alpha_+\phi(z,\bar{z})} + \lambda_- e^{i\alpha_-\phi(z,\bar{z})}\right) \qquad (2.53)$$

on maintient l'invariance conforme. Comme notre seul critère pour la représentation d'une théorie minimale est de préserver l'invariance conforme, on doit considérer toutes les généralisations possibles de l'action pour le champ $\phi$. Dans le calcul des fonctions de corrélation, on développe alors en puissances de $\lambda_+J_+$ et $\lambda_-J_-$

$$< \Phi_1(x_1)\cdots\Phi_N(x_N) > \propto$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} < V_{\alpha_1}(x_1)\cdots V_{\alpha_N}(x_N)(\lambda_+J_+)^l(\lambda_-J_-)^k >$$

et la condition de compensation de charges (2.50) donne un résultat non nul uniquement pour des puissances particulières de $J_+$ et $J_-$. En fait, l'insertion d'écrans dans les fonctions de corrélation n'altère pas ses propriétés sous le groupe de transformations conformes du fait de la loi de transformation triviale de ces opérateurs d'écrans. D'autre part, la relation (2.51) nous indique que dans le calcul d'une fonction à quatre points de l'opérateur $V_\alpha$, on peut utiliser aussi l'opérateur $V_{2\alpha_0-\alpha}$ car tous deux représentent le même opérateur primaire. De ce fait, dans la fonction à quatre points d'un opérateur primaire, on peut utiliser les deux opérateurs et construire ainsi trois types de fonctions à quatre points à l'aide d'opérateurs de vertex : quatre opérateurs identiques, trois identiques et un conjugué ou finalement deux et deux (voir [27]). Le seul résultat non nul (et ceci du fait de la compensation de charge à l'aide d'écrans) sera le deuxième cas, où l'on a alors :

$$< V_\alpha V_\alpha V_\alpha V_{2\alpha_0-\alpha} \oint_{C_1} V_+ \cdots \oint_{C_m} V_+ \oint_{S_1} V_- \cdots \oint_{S_n} V_- > \tag{2.54}$$

La condition (2.50) donne une quantification dans la valeur de $\alpha$ :

$$2\alpha_0 + 2\alpha + n\alpha_- + m\alpha_+ = 2\alpha_0 \tag{2.55}$$

et nous voyons que si l'on décale les valeurs de $n$ et $m$ de 1 on obtient

$$\alpha = \alpha_{n,m} = \frac{1-n}{2}\alpha_- + \frac{1-m}{2}\alpha_+ \tag{2.56}$$

ce qui, à l'aide de (2.51) nous donne les poids conformes des opérateurs du tableau de Kac :

$$\Delta_{n,m} = \frac{(\alpha_- n + \alpha_+ m)^2 + (\alpha_- + \alpha_+)^2}{4} \tag{2.57}$$

De façon plus générale, la fonction à quatre points (dont l'invariance conforme nous permet de fixer trois de ces points) donnée par

$$< V_{\alpha_1}(0) V_{\alpha_2}(z,\overline{z}) V_{\alpha_3}(1) V_{\alpha_4}(\infty) \oint_{C_1} V_+ \cdots \oint_{C_m} V_+ \oint_{S_1} V_- \cdots \oint_{S_n} V_- > \tag{2.58}$$

sera non nulle s'il existe des nombres entiers $n$ et $m$ d'opérateurs d'écrans pour lesquels la condition (2.50) est satisfaite. Il est clair que chaque insertion d'un opérateur d'écran introduit une variable supplémentaire sur laquelle on doit intégrer. On obtient ainsi une représentation intégrale pour les fonctions de corrélations

$$< \Phi_1(0)\Phi_2(z,\overline{z})\Phi_3(1)\Phi_4(\infty) > \propto |z|^{4\alpha_1\alpha_2}|z-1|^{4\alpha_2\alpha_3} \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} \int d^2u_i \int d^2v_j$$

$$\prod_{i=1}^{n} |u_i|^{4\alpha-\alpha_1}|u_i-1|^{4\alpha-\alpha_3}|u_i-z|^{4\alpha-\alpha_2} \prod_{j=1}^{m} |v_j|^{4\alpha+\alpha_1}|v_j-1|^{4\alpha+\alpha_3}|v_j-z|^{4\alpha+\alpha_2}$$

$$\prod_{i<i'} |u_i-u_{i'}|^{4\alpha_-^2} \prod_{j<j'} |v_j-v_{j'}|^{4\alpha_+^2} \prod_{i,j} |u_i-v_j|^{-4} \tag{2.59}$$

Nous n'allons pas donner ici les détails des techniques de calcul des intégrales comme celle présente dans (2.59) (voir par exemple [26]). Il existe deux façons de faire le calcul. La première consiste à faire des changements de variables dans le plan complexe et de déformer les contours d'intégration afin de réduire l'intégrale totale à une somme de produits d'intégrales holomorphes et anti-holomorphes ; ces intégrales d'une seule variable seront à leur tour données par des fonctions hypergéométriques. Dans l'étude perturbative des modèles d'Ising et de Potts que nous allons décrire dans ce travail, cette méthode de calcul sera fondamentale pour obtenir les équations du groupe de renormalisation. La forme de ces intégrales en termes de fonctions Gamma ainsi que les relations que l'on peut obtenir entre des intégrales définies sur des contours différents seront aussi de grande utilité. Dans la deuxième approche on considère directement la partie holomorphe des fonction de corrélation ou blocs conformes. On étudie les transformations de monodromie de ces fonctions analytiques et l'on construit avec les blocs conformes des formes quadratiques invariantes par rapport à des transformations de monodromie. Ces formes invariantes correspondent aux fonctions de corrélation physiques. Cette deuxième méthode permet aussi de calculer les fonctions de corrélation d'une théorie conforme définie sur une surface de genre élevé. De plus, par le calcul des valeurs numériques des blocs conformes, elle donne accès aux constantes de structure des opérateurs primaires et met très clairement en évidence le découplage des opérateurs de la grille conforme du reste de l'algèbre.

## 2.5 Théorème C

Dans les sections précédentes, nous avons donné les résultats principaux de l'étude des théories conformes. Nous avons vu que chaque modèle représente une classe d'universalité que l'on associe à plusieurs modèles de la mécanique statistique en comparant les exposants critiques. Dans la suite nous allons étudier aussi des modèles statistiques en présence de désordre. Comme la solution exacte du système en question défini sur le réseau est le plus souvent hors de portée, il est utile de faire une analyse perturbative (dans le cas du moins d'un désordre faible) autour du point fixe du système pur. Nous disposons alors des résultats sur les modèles minimaux et des techniques de calcul des fonctions de corrélations que nous avons présentés dans les sections précédentes pour développer notre analyse perturbative. On est donc amené à étudier des théories conformes perturbées par un terme qui brise l'invariance conforme. Dans ce cas, le terme de perturbation peut devenir de plus en plus pertinent dans le sens du groupe de renormalisation [106] et donner une théorie effective massive (ce qui exclurait la possibilité d'une transition de phase continue), ou au contraire conduire le système vers un nouveau point fixe où l'on retrouverait une nouvelle théorie conforme. C'est cette deuxième possibilité qui nous intéresse le plus et nous allons donc dans ce chapitre étudier l'effet d'une perturbation sur une théorie conforme. Cette étude est due à Zamolodchikov et pour la méthode générale nous allons donc suivre les lignes de [107]. Nous montrerons les applications aux systèmes désordonnés dans les chapitres (5) et (6). Considérons une théorie décrite par l'hamiltonien suivant :

$$H = H_0 + \sum_i g_i \int d^2x \ \Phi_i(x) \tag{2.60}$$

où $H_0$ est l'hamiltonien d'une théorie conforme, les champs $\Phi_i$ sont les termes de perturbation et les $g_i$ sont les constantes de couplage. On supposera le modèle total renormalisable. Du fait de la brisure de l'invariance conforme, la trace du tenseur d'énergie-impulsion $\Theta(x) = -T_{\mu\mu}(x)$ ne sera plus nulle. Si les termes de perturbation forment un ensemble fini et complet sous le flot de renormalisation (c'est-à-dire s'il n'y aura pas d'autres termes supplémentaires produits à tous les ordres en perturbation) la trace du tenseur $T$ pourra s'exprimer en fonction des champs $\Phi$ :

$$\Theta(x) = \sum_i \beta^i(g) \ \Phi_i(x) \tag{2.61}$$

Si l'on considère maintenant une fonction de corrélation d'opérateurs locaux

$$< O_1(x_1) \cdots O_N(x_N) >$$

sa variation par rapport aux constantes de couplage sera donnée par

$$\frac{\partial}{\partial g_i} < O_1(x_1) \cdots O_N(x_N) >= \sum_{a=1}^{N} < O_1(x_1) \cdots \frac{\partial}{\partial g_i} O_a(x_a) \cdots O_N(x_N) >$$
$$+ \int d^2x \ \ < O_1(x_1) \cdots O_N(x_N) \Phi_i(x) > \tag{2.62}$$

De même, si l'opérateur $D_a$ décrit la variation du champ $O_a$ sous une transformation d'échelle, on a

$$\sum_{a=1}^{N} < O_1(x_1) \cdots \left( \frac{1}{2} x_a^\mu \frac{\partial}{\partial x_a^\mu} + D_a \right) O_a(x_a) \cdots O_N(x_N) >$$
$$= \int d^2x \ \ < O_1(x_1) \cdots O_N(x_N) \Theta(x) > \tag{2.63}$$

En utilisant les équations (2.61), (2.62) et (2.63), on obtient l'équation de Callan-Symanzik pour les fonctions de corrélation :

$$\left( \sum_{a=1}^{N} \left( \frac{1}{2} x_a^\mu \frac{\partial}{\partial x_a^\mu} + \Gamma_a \right) - \sum_i \beta^i(g) \frac{\partial}{\partial g_i} \right) < O_1(x_1) \cdots O_N(x_N) >= 0 \tag{2.64}$$

où l'opérateur

$$\Gamma = D + \sum_i \beta^i(g) \frac{\partial}{\partial g_i}$$

correspond à la matrice de dimension anormale pour les champs $O$. L'ensemble complet de champs $\Phi$ doit donc être invariant par rapport à cet opérateur

$$\Gamma \Phi_i = \gamma_i^j \Phi_j \tag{2.65}$$

et assure l'absence de renormalisation des composantes du tenseur énergie impulsion :

$$(\Gamma - 1)\Theta = (\Gamma - 1)T = (\Gamma - 1)\overline{T} = 0 \tag{2.66}$$

Essayons maintenant d'appliquer ces résultats aux fonctions de corrélation suivantes :

$$< T(z,\overline{z})T(0,0) >= F(\tau)/z^4 \ ; \ < T(z,\overline{z})\Theta(0,0) >= H(\tau)/z^3\overline{z}$$

$$< \Theta(z,\overline{z})\Theta(0,0) >= G(\tau)/z^2\overline{z}^2 \tag{2.67}$$

avec $\tau = log(z\overline{z})$. La loi de conservation de l'énergie-impulsion $\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0$ nous donne les relation suivantes :

$$\dot{F} = \dot{H} - 3H \ ; \ \dot{H} - H = \dot{G} - 2G \tag{2.68}$$

où le point indique la dérivée par rapport à $\tau$. Si l'on définit la fonction

$$c = 2F + 4H - 6G \tag{2.69}$$

la relation

$$\dot{c} = -12G \tag{2.70}$$

est une conséquence immédiate de l'équation (2.68). Il est clair que pour le système "libre" ($g_i = 0, \ \forall i$) la quantité $c$ correspond à la charge centrale de la théorie conforme définie par $H_0$. La positivité de la fonction de corrélation $\Theta - \Theta$ dans (2.67)[3] assure donc que cette fonction sera monotone décroissante le long du flot de renormalisation. Plus encore, si l'on applique l'équation de Callan-Symanzik aux fonctions (2.67), on peut montrer que :

$$\beta^i(g)\frac{\partial}{\partial g_i}c(g) = -12\pi^2 G_{ij}(g)\beta^i(g)\beta^j(g) \tag{2.71}$$

avec

$$G_{ij}(g) =< \Phi_i(1,1)\Phi_j(0,0) > .$$

Dans la limite infrarouge, le système atteindra un nouveau point fixe

$$\beta_i(g_*) = 0 \ ; \ i = 1, \cdots, n$$

et il sera représenté par une nouvelle théorie conforme où la trace du tenseur énergie impulsion $\Theta$ sera à nouveau nulle. On aura donc au point fixe

$$c = 2F \tag{2.72}$$

ce qui à l'aide de (2.67) nous permet d'identifier $c$ comme la charge centrale de la théorie conforme correspondant au nouveau point fixe. Dans le cas particulier où l'ensemble complet des termes de perturbation est formé par un seul champ $\Phi$, on

3. Cela ne sera plus le cas dans le chapitre (5) pour la limite gelée du modèle de Potts dans le contexte de la méthode des répliques.

peut toujours choisir une normalisation adéquate pour la constante de couplage $g$ de façon à obtenir une simplification de (2.71) :

$$\beta(g) = -\frac{1}{12\pi^2}\frac{d}{dg}c(g). \tag{2.73}$$

Les valeurs des charges centrales des théories conformes associées respectivement aux points fixes ultraviolet et infrarouge seront donc reliées par la fonction $\beta$ intégrée tout le long du flot de renormalisation :

$$c_1 - c_0 = -12\pi^2 \int_{g_{*0}}^{g_{*1}} \beta(g)dg \tag{2.74}$$

Nous disposons maintenant de tous les outils pour étudier le cas d'un modèle de la série minimale unitaire $M_p$ décrite dans les sections précédentes. La charge centrale est donnée par $c = 1 - \frac{6}{p(p+1)}$ et dans l'algèbre d'opérateurs $\phi_{m,n}$ avec $n = 1, \cdots, p-1$ et $m = 1, \cdots, p$, on a une sous-algèbre formée par la ligne $\phi_{m,1}$ [7]. Pour $p$ suffisamment grand, le champ $\phi_{3,1}$ de dimension conforme

$$\Delta_{3,1} = 1 - \epsilon \ ; \ \epsilon = 2/(p+1) \tag{2.75}$$

sera le seul champ pertinent de cette sous algèbre dont la dimension est proche de 1. L'étude par le groupe de renormalisation du système décrit par l'hamiltonien

$$H = H_{0,p} + g\int d^2x \ \phi_{3,1}(x) \tag{2.76}$$

sera donnée alors par une seule constante de couplage $g$. Dans (2.76) $H_{0,p}$ représente l'hamiltonien du modèle $M_p$ non perturbé. L'étape suivante consiste à exprimer la fonction $\beta$ en termes de puissance de $g$. Dans les chapitres suivants, nous allons montrer de nombreux exemples de calculs perturbatifs de ce type. Nous nous limiterons ici à indiquer que le premier ordre est tout simplement donné par $1 - \Delta_{3,1}$. Le terme correspondant au deuxième ordre est proportionnel à la constante de structure $C_{3,1}$ donnée par le produit

$$\phi_{3,1}(x)\phi_{3,1}(0) = C_{3,1}|x|^{-2\Delta_{3,1}}\phi_{3,1}(0) + \cdots \tag{2.77}$$

avec [26]

$$C_{3,1} = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{3\epsilon}{2} + O(\epsilon^2)\right) \tag{2.78}$$

Pour calculer les coefficients d'ordre supérieur il faudra utiliser les techniques mentionnées dans la section précédente pour calculer des fonctions de corrélation à quatre points et plus. Le résultat au troisième ordre est donné par [107] :

$$\beta(g) = \epsilon g - \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{3\epsilon}{2}\right)g^2 - \frac{16\pi^2}{3}g^2 + \cdots \tag{2.79}$$

On obtient un point fixe infrarouge non trivial donné par

$$2\pi g_{*1} = (\sqrt{3}/2)\epsilon(1 + \epsilon/2 + O(\epsilon^2)). \tag{2.80}$$

La condition de positivité et le fait que notre théorie dans l'ultraviolet est unitaire nous garantissent que la théorie résultante dans l'infrarouge est aussi unitaire et de charge centrale inférieure. La théorie qui représente notre système dans l'infrarouge doit donc être donnée par un modèle $M_q$ avec $q < p$. En utilisant (2.74) on obtient le développement en $\epsilon$ de la charge centrale dans l'infrarouge :

$$c(g_{*1}) = c_p - (3/2)\epsilon - (3/4)\epsilon^2 + \cdots \tag{2.81}$$

que l'on identifie facilement avec les deux premiers ordres du développement en $1/p$ de

$$c_{p-1} = 1 - 6/p(p-1) \tag{2.82}$$

Ce qui nous montre que le modèle $M_p$ perturbé par le champ $\phi_{3,1}$ sera décrit dans l'infrarouge par le modèle $M_{p-1}$. Ce résultat sera de très grande importance dans le chapitre (6) où l'on étudiera des modèles $M_p$ couplés entre eux par un terme aléatoire. Comme la théorie résultante est aussi un modèle minimal, il est intéressant de se demander quelle sera la position dans la nouvelle grille conforme associée au modèle $M_{p-1}$ des opérateurs avec une position bien définie dans la grille du modèle $M_p$ de l'ultraviolet. Une analyse plus détaillée (voir [107]) nous montre qu'en dérivant la fonction $\beta$ par rapport à $g$, on obtient le développement de la dimension du champ de perturbation ($\phi_{3,1}$ à l'origine) :

$$\Delta = 1 + \epsilon + \epsilon^2 + \cdots = 1 + 2/(p-1) \tag{2.83}$$

qui correspond à la dimension conforme du champ $\phi_{1,3}$ dans le modèle $M_{p-1}$. De la même façon, on peut montrer que sous le flot de renormalisation, on aura aussi la correspondance :

$$\phi^{(p)}_{nn} \;\to\; \phi^{(p-1)}_{nn}$$

avec $n << p$. En général, un opérateur du modèle $M_p$ donnera une combinaison linéaire d'opérateurs de la grille du modèle $M_{p-1}$ et les relations pour un opérateur générique sont plus compliquées que dans les cas simples que nous avons présentés ici. Cependant, du fait de la classification des théories conformes minimales unitaires nous avons pu obtenir un résultat exact à partir d'une étude perturbative par le groupe de renormalisation.

* *

*

# Chapitre 3

# Systèmes désordonnés

Ce chapitre est consacré aux diverses techniques de calcul employées tout au long de cette thèse sur l'étude des systèmes désordonnés. Après avoir mentionné brièvement les différences fondamentales entre les divers types de désordre que l'on peut étudier, et énoncé quelques résultats importants basés sur des considérations générales, nous donnerons une rapide description de quelques-unes des méthodes les plus connues dans l'étude théorique des systèmes désordonnés.

## 3.1 Les différents types de désordre

L'influence des impuretés dans les transitions de phases du deuxième ordre a été étudiée depuis très longtemps par des moyens très divers. Dans un premier temps, il a été suggéré que les impuretés détruisaient complètement les fluctuations de grandes échelles et donc les singularités des quantités thermodynamiques [71, 89]. Parallèlement, certains auteurs défendaient la thèse contraire selon laquelle le désordre ne pouvait altérer le comportement critique d'un système [18, 103]. Postérieurement, en étudiant le désordre dans le contexte de la théorie en $\Phi^4$ [50, 59], on a découvert qu'il pouvait y avoir des situations intermédiaires où le désordre produisait un nouveau comportement critique sans pour autant détruire les singularités du système pur. Il est clair aujourd'hui qu'on ne peut donner une réponse générale sur les transitions de phases des systèmes désordonnés. En effet, le comportement critique dépend non seulement du modèle mais aussi du type de désordre que l'on considère. La liste des travaux sur les systèmes désordonnés est depuis devenue très longue et nous ne prétendons pas en donner une énumération exhaustive dans cette thèse (voir [96] pour un résumé très détaillé des différents résultats).

Dans les systèmes de type ferromagnétique bidimensionnels, il existe trois catégories de désordre qui constituent l'essentiel des travaux faits sur ces systèmes jusqu'à présent. La première façon de modéliser le désordre consiste à laisser de manière aléatoire des sites vides dans le réseau. Si les interactions sont uniquement entre les premiers voisins, il y aura donc des spins qui compteront un nombre de voisins réduit. Si $p$ est la concentration des sites occupés par des spins, il existe une concentration critique (de percolation) $p_c$ à partir de laquelle une quantité infinie de spins seront connectés dans un seul amas (dans la limite thermodynamique bien sûr). Il est clair que pour avoir alors la possibilité d'une transition de phase (avec divergences de la susceptibilité et la chaleur spécifique, etc.) cet amas infini doit exister. Ceci nous donne $p_c$ comme borne inférieure pour la concentration de sites occupés afin qu'il puisse exister une transition de phase à température non nulle. Pour ces modèles de sites aléatoires, il existe un théorème dû à Griffiths [46] qui indique que pour toute concentration $p < 1$ la magnétisation $M$ est une fonction non analytique de $H$ à $H = 0$ pour toute température inférieure à $T_c(p = 1)$. Ce résultat a des conséquences très importantes dans la dynamique de ces systèmes.

Un deuxième type de désordre qui a été considéré dans un grand nombre de systèmes consiste à donner des valeurs aléatoires aux couplages entre spins. Plus précisément, on peut considérer le cas où la valeur que prendra chaque lien est indépendante de celle des autres (désordre dé-corrélé) ou, au contraire, que chaque colonne de liens prendra la même valeur (désordre de "bande"), celui-ci s'inscrivant déjà dans le cadre de désordre de portée infinie. Il existe des situations intermédiaires [62] où l'on peut étudier des valeurs aléatoires pour les liens avec une corrélation qui décroît comme une loi de puissance en fonction de la distance. Dans le deuxième cas, il existe des résultats exacts très intéressants, notamment le modèle de McCoy et Wu [71] (voir aussi [64] pour une variante de ce modèle). Ce système consiste en un modèle d'Ising sur un réseau carré où les liens horizontaux prennent tous une valeur constante $J$, et la valeur des liens verticaux dépend de leurs coordonnées verticales $n$ mais pas de leurs coordonnés horizontales $m$ :

$$J_{m,n;m+1,n} = J \ ; \ J_{m,n;m,n+1} = J(n)$$

et les $J(n)$ sont des variables aléatoires. Ce modèle possède une "phase" de Griffiths autour d'une température de transition $T_c$ où la chaleur spécifique est non analytique mais infiniment dérivable. Tout au long de cette phase autour de $T_c$ la susceptibilité est infinie. Une généralisation de ce modèle a été donnée récemment par Fisher [38] : une chaîne quantique de spins avec un champ magnétique transverse. A température nulle, nous retrouvons la phase de Griffiths autour de la valeur critique de transition pour les liens, cette phase sépare le régime ordonné du système de celui désordonné et introduit deux phases supplémentaires appelées phases d'ordre et de désordre faible respectivement. La largeur de cette phase $\Delta J$ diminue avec le degré de désordre comme :

$$\Delta J(g) \sim exp\left(\frac{1}{g}\right)$$

où $g$ est la variance de la distribution de probabilité pour les liens.

Revenons maintenant au cas de désordre dé-corrélé. Tous les systèmes que nous allons étudier dans les chapitres suivants concernent ce type de désordre uniquement. Les résultats obtenus pour le désordre de bande ne peuvent être directement appliqués à ces systèmes. En effet, il n'est pas clair que l'approche perturbative que nous allons employer dans la majorité des cas à suivre puisse s'appliquer directement au désordre avec une corrélation de portée infinie. Dans ce sens, les systèmes comme celui de McCoy et Wu peuvent être considérés comme des cas de désordre fort. Les systèmes avec des constantes de couplage aléatoires consistent à donner à chaque lien du réseau une valeur aléatoire indépendante de celle des autres avec une distribution de probabilité très piquée sur la valeur critique $J_c$. Plus cette distribution se rapproche d'une fonction delta de Dirac, plus nous serons dans le régime de faible désordre où l'approche perturbative peut être appliquée. Le cas extrême consiste à donner aux liens comme seules valeurs possibles $J$ ou 0 avec $J > 0$. Ce cas se rapproche de celui des sites aléatoires que nous avons mentionné plus haut. En fait, ces deux cas devraient donner la même classe d'universalité [96], et il est clair que les problèmes liés aux phénomènes de percolation seront les mêmes. Au delà de cette limite, les constantes de couplage peuvent prendre des valeurs négatives et devenir donc anti-ferromagnétiques. Nous arrivons alors dans le domaine des verres de spins. Dans ce cas, aucune des approches que nous allons présenter ici n'est plus valable, malgré le fait qu'un grand nombre des méthodes que nous allons employer dans la suite aient été empruntées à l'étude des verres de spins (brisure de la symétrie des répliques, etc.).

Finalement, il est intéressant de mentionner un autre type de systèmes avec désordre. Dans le chapitre suivant, nous allons voir que la limite continue du modèle d'Ising avec des constantes de couplage aléatoires peut être représentée comme des fermions de Majorana avec un terme de masse aléatoire. On peut étudier la théorie de Dirac avec différents types de désordre. L'action de Dirac avec des termes aléatoires la plus générale peut s'écrire comme :

$$S = \int \frac{d^2x}{2\pi} \;\; \psi_-(\partial_{\overline{z}} + A_{\overline{z}})\psi_+ + \overline{\psi}_-(\partial_z + A_z)\overline{\psi}_+$$

$$+ i\frac{m(x)}{2}(\overline{\psi}_-\psi_+ - \psi_-\overline{\psi}_+) + i\frac{V(x)}{2}(\overline{\psi^i}_-\psi_+ + \psi^i_-\overline{\psi^i}_+) \tag{3.1}$$

Ici, $m(x)$, $A(x)$ et $V(x)$ jouent le rôle de masse, potentiel vectoriel et potentiel scalaire aléatoire respectivement. Ce modèle fut introduit dans [69] dans le contexte de l'effet Hall quantique (voir aussi [9]). Le cas simple $m = V = 0$ peut être traité exactement. On trouve une famille d'exposants liés aux opérateurs de la théorie qui dépendent continûment de la variance du potentiel vectoriel aléatoire $A$. La transition de l'effet Hall devrait correspondre au cas $m = A = 0$, $V \neq 0$. Dans ce cas, la constante de couplage s'avère être marginale pertinente. Elle nous conduit alors dans un régime de couplage fort (dans le sens de la théorie des champs) où il est très difficile de donner des résultats concrets.

## 3.2 Critère de Harris

Il existe un grand nombre d'approches pour étudier les transitions de phases du deuxième ordre dans les systèmes désordonnés. Il est clair que, selon le modèle, sa dimension et le type de désordre que l'on considère, les méthodes que l'on est contraint d'employer sont très diverses. On dispose cependant d'un critère heuristique, introduit par Harris [51] (voir aussi [47]), qui nous permet d'anticiper sans trop de calculs, indépendamment du modèle et de sa dimension, si le désordre va changer ou non la classe d'universalité de celui-ci. Il s'applique dans une grande variété de cas de désordre dé-corrélé. Ce critère est maintenant bien connu et peut être présenté de diverses façons (voir [57] pour une dérivation très élégante de ce critère). Nous allons utiliser de simples arguments d'échelle pour la dérivation dans sa forme la plus simple. Supposons qu'à notre hamiltonien pur nous ajoutons le terme aléatoire :

$$H_0 \;\rightarrow\; H_0 + \int d^D x g(x)\Phi(x)$$

où le terme aléatoire $g(x)$ se couple au champ générique $\Phi$. Les résultats suivants seront valables uniquement dans le cas où $g(x)$ est indépendant de $g(x')$ pour $x \neq x'$ (désordre dé-corrélé). En fonction de la forme explicite de $\Phi$, le terme $g(x)$ peut représenter par exemple un champ magnétique aléatoire ou provenir de l'existence de constantes de couplage ou sites aléatoires. La dimension du système $D$ est arbitraire. A une température (réduite) $t = \frac{T-T_c}{T_c}$ donnée, la longueur de corrélation du système pur est proportionnelle à :

$$L \;\sim\; t^{-\nu} \tag{3.2}$$

Le système pur sera alors divisé en plusieurs parties $\Omega_L$, chacune de taille linéaire $L$. La présence du désordre fait que chaque partie aura sa propre température de transition dépendante du désordre. La totalité du système aura alors une variance dans la température de transition donnée par :

$$\delta t_g \;\sim\; (\delta g(\Omega_L))^{\Delta_g} \tag{3.3}$$

où $g(\Omega_L)$ est la moyenne du terme aléatoire sur une région $\Omega_L$ et $\delta g(\Omega_L)$ sa variance dans le même domaine. L'exposant dans (3.3) dépend du type de terme aléatoire que l'on considère, nous donnerons plus bas sa valeur pour le cas de constantes de couplages ou sites aléatoires. Le théorème de la limite centrale nous donne :

$$\delta g(\Omega_L) \;\sim\; \sqrt{\overline{g(\Omega_L)^2}} \;\sim\; L^{\frac{-D}{2}}$$

Nous avons donc la relation d'échelle :

$$\delta t_g \;\sim\; L^{\frac{-D\Delta_g}{2}}$$

La deuxième relation (3.2) nous donne alors :

$$\delta t_g \;\sim\; t^{\frac{D\nu\Delta_g}{2}} \tag{3.4}$$

Pour savoir si le désordre changera le comportement du système au voisinage du point critique ($t \rightarrow 0$), il faut savoir si les fluctuations de températures introduites dans chaque région auront une influence sur les quantités thermodynamiques du système. Pour que le comportement critique du système reste inchangé en présence de désordre, il faut donc que ces fluctuations soient beaucoup plus petites que la valeur de $t$ elle-même :

$$\delta t_g << t$$

dans la limite $t \rightarrow 0$, ceci se traduit par la condition :

$$\frac{D\nu\Delta_g}{2} > 1 \tag{3.5}$$

Cette relation est en fait la plus générale pour étudier la pertinence de tout type de désordre dans les transitions de phases du deuxième ordre. Nous pouvons cependant donner une forme plus simple dans le cadre de constantes de couplage ou sites aléatoires. Les constantes de couplage aléatoires (de même que les sites aléatoires, voir [96]) dans les systèmes de type ferromagnétique sur un réseau quelconque se traduisent par un déplacement de la température réduite dans la version continue :

$$J + \delta J_{i,j} \ \rightarrow \ t + \delta t(x)$$

Dans ce cas, il est facile de voir que $g(x)$ correspond précisément à $t(x)$. La relation d'échelle entre $g$ et $t_g$ devient alors triviale et $\Delta_g = 1$ car

$$g(\Omega_L) = \frac{1}{L^D} \int_{x \in \Omega_L} d^D x \delta t(x)$$

La relation (3.5) devient alors :

$$D\nu - 2 > 0 \tag{3.6}$$

L'exposant $\nu$ peut être relié à l'exposant thermique $\alpha$ par les lois d'échelles bien connues (voir [57] par exemple) :

$$D\nu - 2 = -\alpha$$

(3.6) nous dit alors que si l'exposant thermique $\alpha$ est négatif, l'effet du désordre ne changera pas le comportement du système au voisinage de la température critique. Ceci est la forme la plus connue du critère de Harris. Il constitue la façon la plus simple d'anticiper quels seront les effets qualitatifs du désordre dans les transitions de phases du deuxième ordre. Il existe des généralisations de ces arguments pour traiter les cas avec un désordre corrélé en bandes (comme le modèle de McCoy et Wu) [65]. Malgré la généralité des arguments utilisés, il existe des cas où ce critère ne donne pas de réponses définitives. C'est le cas par exemple du modèle d'Ising en dimension deux que nous analyserons en détail dans les chapitres suivants. Ceci est dû au fait que l'exposant $\alpha$ est nul pour ce modèle. En fait, dans tous les modèles où le désordre introduit une perturbation marginale à l' hamiltonien initial, le critère de Harris ne peut prévoir quel sera l'effet du désordre. De plus, il existe dans la littérature certains modèles qui violent explicitement ce critère. Tel est le cas dans [76] où l'on étudie des polymères avec des interactions aléatoires dans un réseau hiérarchique. Un cas qui se rapproche plus des systèmes que nous considérons ici est le modèle de Baxter aléatoire [24]. La chaleur spécifique de ce système est divergente dans le cas pur et avec désordre (bien que la forme de la divergence soit radicalement changée). La violation du critère de Harris dans ce cas particulier est due à la marginalité du système (qui donne une ligne d'exposants critiques). En fait, le critère de Harris correspond à un simple comptage de puissances (ou calcul à l'ordre des arbres) et il est clair que pour des modèles très particuliers comme celui de Baxter une analyse plus détaillée doit être faite.

## 3.3 Méthode des répliques

Dans l'étude des systèmes désordonnés et des verres de spins, il est très difficile de calculer des quantités physiques à partir de l'hamiltonien initial qui contient des variables aléatoires. Il existe quelques résultats exacts, tels que pour le modèle de Sherrington et Kirkpatrick [95], qui consiste en un verre de spins où tous les sites sont en interaction les uns avec les autres et qui correspond donc à un système de dimension infinie. Mais il est clair que dans des modèles plus réalistes, l'approche exacte peut rarement être envisagée. De ce fait, une grande quantité de méthodes et d'astuces différentes ont été proposées. Dans cette section et les suivantes, nous allons résumer (sans prétendre toutefois en donner une liste détaillée) les méthodes les plus courantes pour étudier les systèmes désordonnés. La plus connue d'entre elles est la méthode des répliques. On peut dire qu'elle fut introduite par De Gennes [41] pour étudier les exposants critiques des chaînes auto-évitantes (polymères). Elle fut introduite dans le cadre des verres de spins et systèmes désordonnés postérieurement [36, 34]. Dans cette section, nous allons suivre les lignes de [21] (voir aussi [72, 11] pour une analyse très détaillée). Nous voulons formellement calculer la moyenne sur le désordre de l'énergie libre avec une distribution de probabilité $P[\eta]$ pour les variables de désordre :

$$F = \overline{F[\eta]} = -\frac{1}{\beta}\overline{lnZ[\eta]}$$

où la fonction de partition

$$Z[\eta] = \sum_{\{\sigma\}} exp\left(-\beta H[\sigma,\eta]\right)$$

doit être calculée pour une configuration de désordre (représentée ici par $\eta$) fixe. Pour calculer la moyenne du logarithme de la fonction de partition nous introduisons un nombre (entier bien sûr) $n$ de copies identiques du système. La fonction de partition de l'union de tous ces systèmes est tout simplement donnée par $(Z[\eta])^n$. L'étape suivante consiste à moyenner sur le désordre cette fonction de partition répliquée et faire ensuite un prolongement analytique sur le nombre $n$. En prenant la limite $n \to 0$ on obtient :

$$F = \lim_{n\to 0} \frac{\overline{(Z[\eta])^n - 1}}{n} = \left.\frac{d}{dn}\right|_{n=0} \overline{(Z[\eta])^n} \tag{3.7}$$

Les différentes copies du systèmes, qui étaient découplées pour une configuration de désordre fixe, se couplent entre elles en prenant la moyenne sur le désordre. On obtient ainsi un hamiltonien effectif qui peut nous permettre, perturbativement par exemple, de calculer la fonction de partition comme une fonction analytique de $n$. Il est facile ensuite de prendre la limite gelée $n \to 0$. Il est clair que la validité de cette méthode repose sur l'analycité en $n$ de la fonction de partition effective. Il n'est souvent pas possible de vérifier ceci directement, mais il existe cependant des exemples [72, 69, 9] où la méthode des répliques donne des résultats en parfait accord avec les solutions exactes. Dans le chapitre suivant, dans le cas du modèle d'Ising, nous allons vérifier les résultats obtenus de cette façon par diverses méthodes indépendantes de celle des répliques. La méthode des répliques possède en plus un avantage sur les autres approches en termes d'interprétation [83, 20]. L'hamiltonien $H[\sigma,\eta]$ dépend des variables dynamiques ou de spin $\sigma$ et du désordre représenté par $\eta$ (qui peut représenter les couplages aléatoires entre spins par exemple). Dans le calcul de $F[\eta]$, on suppose que les impuretés sont "gelées" et ne varient donc pas. Cette supposition se base sur le fait que l'échelle de temps caractéristique à laquelle elles évoluent est beaucoup plus grande que celle des variables de spin. En effet, les spins vont atteindre l'équilibre plus rapidement que les impuretés elles-mêmes. Cependant, si l'on s'intéresse à des mesures sur le système à des échelles de temps très longues, les impuretés vont évoluer vers leur propre situation d'équilibre. Dans ce cas, l'énergie libre $F[\eta]$ sera l'hamiltonien effectif pour les degrés de liberté $\eta$. A ces échelles de temps intermédiaires, les degrés de liberté de spin et les impuretés ne seront pas équilibrés. Les variables $\eta$ auront leur propre température $T'$ et la fonction de partition totale du système sera :

$$Z = \int D\eta P[\eta] exp(-\beta' F[\eta]) =$$

$$\int D\eta P[\eta] exp\left(\frac{\beta'}{\beta} lnZ[\eta]\right) = \int D\eta P[\eta](Z[\eta])^n \tag{3.8}$$

Nous voyons alors que le nombre de répliques $n = \frac{T}{T'}$ correspond au rapport entre les températures des degrés de liberté de spins et des impuretés. On peut interpréter maintenant la limite $n = 0$ comme une température infinie dans les variables $\eta$, ce qui indique que les degrés de liberté de spins ne produiront aucun effet sur la distribution des constantes de couplage. Au contraire, le cas $n = 1$ correspond à l'équilibre thermique entre les deux types de degrés de liberté, ce qui correspond à des mesures faites sur des échelle de temps infinies. Les cas $n \neq 0$ et $n \neq 1$ correspondent à des situations intermédiaires présentes dans les différentes étapes de la dynamique des systèmes désordonnés.

## 3.4 Brisure de la symétrie des répliques

Nous avons vu dans la section précédente que la méthode des répliques peut être de grande utilité pour calculer la moyenne sur le désordre de l'énergie libre d'un système donné. Cette méthode peut être employée pour étudier le modèle bien connu de Sherrington et Kirkpatrick [95] dont l'hamiltonien est de la forme :

$$H = -\sum_{i<j} J_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

où les couplages $J_{ij}$ peuvent prendre une valeur positive ou négative de façon aléatoire et les $N$ spins du système sont couplés entre eux. La moyenne de la fonction de partition avec une distribution gaussienne pour les couplages $J$ donne :

$$Z_n = \sum_{\{\sigma^a\}} \int DJ_{ij} exp\left(\beta \sum_{a=1}^{n}\sum_{i<j}^{N} J_{ij}\sigma_i^a\sigma_j^a - \frac{1}{2}\sum_{i<j} J_{ij}^2 N\right)$$

Si l'on intègre sur les variables $J$ et on définit

$$Q_{ab} = \frac{1}{N}\sum_{i}^{N} < \sigma_i^a \sigma_j^b >$$

on peut montrer que la fonction de partition sera de la forme (voir [72, 11] pour les détails) :

$$Z_n = \int DQexp(-\beta nNF[Q])$$

avec

$$F[Q] = -\frac{1}{4}\beta + \frac{\beta}{2n}\sum_{a<b}^{n} Q_{ab}^2 - \frac{1}{\beta n}log\left(\sum_{\{\sigma^a\}} exp\left(\beta^2 \sum_{a<b}^{n} Q_{ab}\sigma_i^a\sigma_j^b\right)\right) \tag{3.9}$$

Dans la limite thermodynamique $N \to \infty$, la fonction de partition sera donnée par $F[Q^*]$ où $Q^*$ est la solution de :

$$\frac{\delta F}{\delta Q_{ab}} = 0 \tag{3.10}$$

Il est clair que nous pouvons toujours trouver une solution pour (3.10) de la forme $Q_{ab} = q = \ cte$, qui correspond à une symétrie complète entre les différentes répliques. Cependant, Parisi a montré que le minimum le plus stable (en imposant donc comme condition supplémentaire $\frac{\delta^2 F}{\delta Q^2} < 0$) donne une forme non symétrique en $Q$. De plus, la matrice $Q$ devient une fonction continue de ses indices $Q_{ab} = Q(a-b) \to q(x)$ avec $0 < x < 1$. Le formalisme de brisure de la symétrie des répliques a été étudié ici dans le cadre du champ moyen. Il existe des études récentes de ce phénomène en présence de fluctuations [74, 75, 61, 19, 43]. L'idée est que la méthode du groupe de renormalisation, bien que très puissante dans certaines conditions, est une technique perturbative autour de la configuration de l'état fondamental et ne peut pas prendre en compte les contributions d'autres minima locaux. Le problème dans l'étude des verres de spins et des systèmes désordonnés est qu'une très grande quantité de ces minima locaux vont être présents, et bien qu'une preuve définitive ne soit pas donnée, on peut penser que le mécanisme de brisure de la symétrie des répliques généraliserait la méthode perturbative pour ce genre de systèmes. Dans le cas particulier du modèle XY, cette méthode a donné des résultats comparables à ceux obtenus dans l'approche variationnelle [43], et qui contredisent les résultats que donne une approche perturbative normale [15]. Nous allons présenter un scénario possible dans le contexte de la théorie $\Phi^4$ qui donnerait naissance à un tel phénomène. Il est clair que pour des cas comme le modèle XY ou le modèle de Potts que nous allons analyser dans la section (5.6), cette technique doit être considérée comme un Ansatz pour améliorer la méthode perturbative. Dans [19], on considère l'action d'un champ scalaire en présence de constantes de couplage aléatoires :

$$Z[\delta\tau] = \int D\phi(x)exp(-H[\phi;\delta\tau]) \tag{3.11}$$

avec

$$H[\phi;\delta\tau] = \int d^D x\left(\frac{1}{2}[\nabla\phi]^2 + \frac{1}{2}[\tau - \delta\tau(x)]\phi^2(x) + \frac{1}{4}g\phi^4(x)\right) \tag{3.12}$$

L'analyse des équations du groupe de renormalisation pour (3.11) a été faite dans [19] en utilisant la méthode des répliques. La solution de point fixe la plus stable est non symétrique dans les répliques, sa forme exacte est sans importance pour la suite. Pour une configuration donnée de désordre, les équations de mouvement pour (3.11) vont donner plusieurs minima locaux. Si on appelle $\psi^i$, $i = 1 \cdots N$ (et $N$ est de l'ordre de la taille du système) ces solutions locales, nous pouvons donner une forme approchée pour la solution globale de la forme :

$$\Phi[x, \delta\tau(x)] = \sum_i \sigma_i \psi^i(x)$$

où les $\sigma_i$ sont $\pm 1$. Ceci vient du fait que chaque solution peut venir avec les deux signes dans la phase désordonnée. L'hamiltonien (répliqué) peut s'écrire comme :

$$H_{rep} = \sum_a H^a[\Phi^a[x, \delta\tau] + \phi^a(x); \delta\tau]$$

où maintenant les champs $\phi^a$ sont les répliques des fluctuations autour de la solution globale $\Phi$. Il est clair que nous ne pouvons pas donner une solution explicite pour les $\psi^i$ et donc pour la solution globale $\Phi$. L'idée de [19] est de supposer qu'une bonne approximation consiste à donner pour toutes les solutions $\psi$ une distribution aléatoire :

$$P[\psi^i] = \prod_i exp\left(-\frac{1}{\sigma}\int d^D x[\psi^i(x) - \psi_0]^2\right)$$

En intégrant sur cette distribution la fonction de partition répliquée et en prenant la limite thermodynamique $N \to \infty$, on obtient une action effective dont les termes pertinents sont de la forme (voir [19] pour les détails) :

$$H_{eff} = \int d^D x \sum_a \left(\frac{1}{2}[\nabla\phi^a]^2 + \frac{1}{2}\tau(\phi^a)^2(x) + \frac{1}{4}g(\phi^a)^4(x) + \sum_b G_{ab}(\phi^a)^2(x)(\phi^b)^2(x)\right) \tag{3.13}$$

et $G_{ab}$ a la même forme que la solution non symétrique obtenue dans l'analyse par le groupe de renormalisation. Bien que ce scénario semble s'adapter très bien à la théorie en $\phi^4$, il n'est pas clair que cela se reproduise dans d'autres systèmes, notamment le modèle de Potts. Cette méthode reste toutefois une possibilité à exploiter dans plusieurs cas comme complément à la méthode des répliques. Dans la section (5.6), nous allons donner la forme explicite que peut prendre la matrice des constantes de couplages ainsi que ses règles de multiplication dans la limite continue. Ceci nous permettra de calculer les exposants critiques qui seront différents de ceux du cas symétrique. Pour le moment, seuls des résultats très précis provenant de simulations numériques du modèle de Potts peuvent donner une idée de la validité de cette méthode.

## 3.5 Méthodes supersymétrique et variationnelle

La diversité d'exemples de systèmes désordonnés est telle que l'on ne peut imaginer qu'une seule technique d'approche puisse s'appliquer efficacement dans tous les cas. Dans le chapitre suivant, nous allons utiliser la méthode des répliques aussi bien que la méthode supersymétrique pour analyser le modèle d'Ising désordonné. Chacune des méthodes a ses avantages, suivant les quantités physiques que l'on veut calculer. Une limitation importante de la méthode supersymétrique par rapport aux répliques est qu'elle ne peut être appliquée que dans le cas d'un hamiltonien gaussien. En effet, toute l'astuce consiste à exprimer un déterminant (ou son inverse) comme une intégrale sur des variables fermioniques (bosoniques), mais ceci présuppose que l'action originale est gaussienne. Cependant, la méthode supersymétrique reste un moyen très élégant de vérifier par exemple la validité de la méthode des répliques. Nous allons alors expliquer brièvement en quoi consiste la méthode supersymétrique. On peut prendre comme exemple la théorie de Dirac aléatoire que nous avons présentée à la fin de la section (3.1). Ecrivons une fonction de partition pour un système fermionique du style de (3.1) comme :

$$Z[\eta] = \int D\psi D\psi^* \; exp\left(-\int d^D x \, (\psi^* D[\eta(x)]\psi)\right) \tag{3.14}$$

où l'opérateur générique $D[\eta(x)]$ contient, en plus des dérivées, tous les termes aléatoires résumés en $\eta(x)$ et nous n'avons aucune restriction sur la dimension $D$. Les variables $\psi$ et $\psi^*$ sont des variables grassmaniennes. Cette fonction de partition est donnée formellement par

$$Z[\eta] = Det\,(D[\eta]) \tag{3.15}$$

et les fonctions de corrélations par :

$$< O_1(x_1) \ldots >_\eta = \frac{1}{Z[\eta]} \int \; D\psi D\psi^* \; O_1(x_1) \cdots \; e^{\int d^D x (\psi^* D[\eta(x)]\psi)} \tag{3.16}$$

Le déterminant dans (3.16) peut être représenté comme une intégrale sur des champs bosoniques :

$$Det^{-1}\,(D[\eta]) = \int D\phi D\phi^* \; exp\left(-\int d^D x \, (\phi^* D[\eta(x)]\phi)\right)$$

Les fonctions de corrélation (3.16) pour une configuration de désordre donnée seront alors données par :

$$< O_1(x_1) \ldots >_\eta = \int \; D\psi D\psi^* \; D\phi D\phi^* \; O_1(x_1) \cdots \; e^{\int d^D x (\psi^* D[\eta(x)]\psi + \phi^* D[\eta(x)]\phi)} \tag{3.17}$$

Si des problèmes de convergence se présentent dans l'écriture du déterminant comme une intégrale sur les variables bosoniques, on peut ajouter à l'action un terme de la forme $-\epsilon\phi^*\phi$. C'est notamment le cas dans le calcul des fonctions de Green dans un problème $D+1$ dimensionnel [35]. On peut maintenant prendre la moyenne sur le désordre des fonctions de corrélations écrites sous la forme (3.17). Ceci introduira dans l'action supersymétrique des couplages entre les variables fermioniques et bosoniques. Le traitement par la suite de cet hamiltonien dépend du modèle que l'on considère. Dans le chapitre suivant nous allons voir que pour le modèle d'Ising une approche perturbative aussi bien que le calcul exact de la matrice $S$ dans ce formalisme peuvent être envisageables. Cette méthode fut employée par Parisi et Sourlas

[81] dans le contexte du modèle d'Ising en champ aléatoire. L'action effective est alors invariante par rotation dans le super espace, ce qui conduit au phénomène inattendu qu'un système $d$ dimensionnel avec un champ aléatoire est équivalent au même système pur en $d-2$ dimensions. Même si la validité de ce résultat dans toutes les dimensions et tous les régimes n'est pas claire, il constitue un exemple où la supersymétrie peut être un outil très puissant dans l'étude des systèmes désordonnés.

Nous avons mentionné la limitation de la méthode supersymétrique ne pouvant traiter que les cas gaussiens. Pour des modèle plus généraux, en plus de la méthode des répliques, il existe aussi la méthode variationnelle. Elle consiste à donner la représentation gaussienne la plus approchée de l'action originale. Elle peut être employée conjointement avec la méthode des répliques. Dans l'exemple du modèle XY avec des phases aléatoires [61, 42, 80], l'action originale donnée par

$$S = \int d^2x \left( K(\partial_\nu \Phi)^2 - \eta(x)e^{i\Phi} - \eta^*(x)e^{-i\Phi} \right)$$

($\eta$ est la variable aléatoire) est remplacée par :

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^2x d^2y \Phi(x) G^{-1}(x-y)\Phi(y)$$

Si $F$ et $F_0$ sont respectivement les énergies libres correspondant aux actions exactes et gaussienne, pour toute réalisation du désordre, on a une borne supérieure pour F :

$$F \leq F_0 + < S - S_0 >_0 .$$

Ceci s'obtient facilement à l'aide des relations :

$$\frac{Z}{Z_0} = < e^{-(S-S_0)} >_0 \geq e^{-<S-S_0>_0}$$

La meilleure approximation pour $S_0$ s'obtient donc en minimisant $F_0 + < S - S_0 >_0$ par rapport à $G$ (ou sa transformée de Fourier $\hat{G}$). Ceci nous donne un noyau pour $S_0$ de la forme :

$$\hat{G}(k) = \frac{1}{K} \left( \frac{1}{k^2 + M^2[\eta]} \right)$$

Le terme de "masse" $M$ contient la dépendance du désordre dans ce noyau. A l'aide de celui-ci nous pouvons alors calculer les quantités physiques telles que l'énergie libre pour une configuration de désordre donnée et prendre ensuite la moyenne pour une distribution arbitraire pour $\eta$. Cette méthode a donné des résultats qui sont en accord avec ceux obtenus en brisant la symétrie des répliques dans une approche perturbative [43]. Ceux-ci sont à comparer avec les résultats provenant de l'analyse perturbative standard faite en [15], Nous ne prétendons pas donner ici des arguments en faveur d'une méthode en particulier, mais il est clair que dans des cas où l'action initiale est non gaussienne, il est intéressant de comparer les résultats que donnent les différentes méthodes. En fait, comme nous l'avons mentionné dans la section précédente, cette méthode est à l'origine de la brisure de la symétrie des répliques dans l'étude des verres de spins, elle a aussi été employée pour étudier le comportement de polymères et d'interfaces dans un milieu aléatoire [90, 73]. L'hamiltonien initial est de la forme suivante (nous avons par simplicité gardé un seul champ $\Phi$) :

$$H = \int d^d x \left( (\partial_\nu \Phi)^2 + \eta(x, \Phi(x)) \right)$$

où $\eta$ est un bruit dont la forme explicite n'est pas importante pour la suite. En utilisant conjointement les méthodes des répliques et variationnelle, on obtient l'hamiltonien gaussien répliqué :

$$H_Q = \int d^d x \left( \sum_a (\partial_\nu \Phi_a)^2 + \sum_{a,b} Q_{ab} \Phi_a \Phi_b \right)$$

Nous n'allons pas entrer dans le détail des calculs, nous mentionnerons tout juste que la solution pour $Q$ qui minimisera l'énergie libre donnera une brisure de la symétrie des répliques. Nous disposons à présent d'un grand nombre de techniques pour étudier différents modèles bidimensionnels désordonnés tels que le modèle d'Ising ou de Potts. Dans le premier cas, du fait que l'action correspondant au modèle pur est gaussienne, la méthode supersymétrique ainsi que les répliques peuvent s'appliquer sans problème, les résultats coïncidant parfaitement. Pour le modèle de Potts, seule la méthode des répliques a été employée à ce jour pour étudier l'effet du désordre. Il est clair que nous sommes loin de pouvoir donner une réponse définitive sur la validité d'une méthode en particulier quand des résultats contradictoires se présentent (voir les commentaires sur le modèle XY dans [10]). Mais l'étude d'un système particulier par ces différentes approches peut aussi nous donner des connaissances plus globales et au-delà du régime non perturbatif dans plusieurs cas (nous le verrons notamment dans le chapitre suivant sur le modèle d'Ising).

*   *

*

# Chapitre 4

# Modèle d'Ising désordonné

Dans ce chapitre nous allons étudier le modèle qui a été l'objet du plus grand nombre d'études théoriques et numériques parmi les systèmes bi-dimensionnels désordonnés : le modèle d'Ising. Plus précisément, nous allons comparer le comportement du système en présence de désordre au voisinage du point de transition et celui du modèle pur dont on connaît la solution exacte. Cette étude permettra aussi d'illustrer l'utilité des méthodes des répliques et supersymétriques que nous avons présentées au chapitre précédent. Une analyse perturbative directe nous permettra aussi de vérifier la validité de ces méthodes dans ce contexte. L'essentiel de cette étude repose sur la représentation fermionique que l'on peut faire du modèle et que l'on va décrire brièvement dans la première section. Elle donne accès au calcul de la forme de la chaleur spécifique du système au voisinage de la transition.

## 4.1 Représentation fermionique

Il existe une grande variété de méthodes pour étudier le comportement au voisinage de la température critique du modèle d'Ising en dimension deux. Sa fonction de partition a la forme simple :

$$Z(\beta) = \sum_{\{\sigma\}} exp\left(\beta \sum_{<i,j>} \sigma_i \sigma_j\right) \tag{4.1}$$

où $< i,j >$ indique que la somme doit être faite entre les plus proches voisins et $\beta = J/T$ est l'inverse de la température en unités de couplage entre les voisins $J$. Depuis qu'Onsager [79] a donné la solution exacte pour ce modèle, nous disposons d'un système idéal pour appliquer toutes les méthodes de systèmes désordonnés. Cependant, avant de donner une analyse détaillée des différentes méthodes qui peuvent être employées dans le cas désordonné, nous allons faire un bref rappel de la représentation fermionique du modèle pur au voisinage de la température critique. Le but n'est pas d'expliquer de façon détaillée comment obtenir à partir de (4.1) une action en termes de fermions libres présente dans un grand nombre de références. En effet, soit par le formalisme de matrice de transfert (voir par exemple [57, 70]) où l'on obtient l'hamiltonien de fermions libres, soit à l'aide du développement diagrammatique présenté en [23, 22], la fonction de partition (4.1) peut être représentée à grandes échelles et au voisinage de la température critique comme une intégrale sur des fermions de Majorana :

$$Z \sim \int D\psi D\overline{\psi}\ exp\left(-\frac{1}{4\pi}\int d^2x\left(\overline{\psi}\hat{\partial}\psi + m\overline{\psi}\psi\right)\right) \tag{4.2}$$

où $\overline{\psi} = \psi\gamma^5$, $\hat{\partial} = \sigma^i\partial_i$ est l'opérateur de Dirac et $m \sim \tau = \frac{T-T_c}{T_c}$ correspond à la température réduite. Le terme $\varepsilon = \overline{\psi}\psi$ correspond à l'opérateur d'énergie, en termes des variables de spins sur le réseau il correspond au couplage entre deux sites voisins : $\sigma_i\sigma_j$. De ce fait, toute variation locale dans le réseau de la constante de couplage $J \to J + \delta J(i,j)$ donnera dans la version continue un terme de masse dépendant de la position $m \to m + \delta m(x)$. Ce sera notamment le cas quand nous considérerons les constantes de couplage aléatoires dans la section suivante. En termes des variables complexes $z = x + iy$ et $\overline{z} = x - iy$, $\psi_\pm = \psi_1 \pm i\psi_2$, nous pouvons écrire l'action dans (4.2) comme :

$$A_F = \frac{1}{2\pi}\int d^2x\left(\psi_+\overline{\partial}\psi_+ - \psi_-\partial\psi_- + m\psi_-\psi_+\right) \tag{4.3}$$

Le comportement dominant de la chaleur spécifique du modèle pur s'obtient facilement en dérivant deux fois par rapport à la température (ou à $m$) ce qui donne :

$$C(\tau) \sim \int d^2x < \psi_-\psi_+(0)\ \psi_-\psi_+(x) >$$

L'action du modèle pur étant gaussienne, cette fonction de corrélation se calcule facilement et le résultat final est :

$$C(\tau) \sim ln(\tau) \tag{4.4}$$

Ceci constitue le résultat bien connu pour le modèle d'Ising sur la divergence logarithmique de la chaleur spécifique. Nous pouvons également calculer le tenseur énergie impulsion ; dans la limite de masse nulle, ce modèle est invariant conforme et ce tenseur se séparera donc en une partie analytique et anti-analytique qui seront données par :

$$T(z) = -\frac{1}{2}\psi_+\partial\psi_+\ :\ \overline{T}(\overline{z}) = -\frac{1}{2}\psi_-\overline{\partial}\psi_- \tag{4.5}$$

et nous pouvons vérifier facilement que la fonction à deux points sera donnée par :

$$< T(z)T(z') >= \frac{c/2}{(z-z')^4} = \frac{1/4}{(z-z')^4} \tag{4.6}$$

et nous retrouvons donc le résultat de la section (2.2) pour la valeur de la charge centrale du modèle d'Ising $c = 1/2$. Nous disposons maintenant de tous les outils nécessaires pour étudier le comportement de ce modèle en présence de constantes de couplage aléatoires. En particulier, nous verrons les changements qu'induit le désordre dans le comportement de la chaleur spécifique. La représentation fermionique reste cependant limitée pour étudier le comportement des fonctions de corrélation de spins ou de la susceptibilité magnétique. Ceci est dû à la non localité de l'opérateur de spin dans cette représentation. Bien que des techniques de resommation ont permis d'obtenir le résultat correct dans le cas pur pour les fonctions de corrélation de spins [23], la présence du désordre complique les calculs à un tel point que nous serons obligés, dans le cadre des théories conformes, d'employer la représentation du gaz de Coulomb pour obtenir la fonction spin-spin du système désordonné.

## 4.2 Calcul de la chaleur spécifique

Parmi les systèmes statistiques bidimensionnels, le modèle d'Ising est l'un des premiers à avoir été étudié dans le cadre du désordre dé-corrélé. Dans le cas pur, nous disposons de la solution exacte, qui nous indique entre autres que la chaleur spécifique diverge logarithmiquement en fonction de la température réduite. Ceci se traduit par le fait que l'exposant $\alpha$ de la chaleur spécifique est nul. Le critère de Harris ne donne pas alors une réponse définitive sur le comportement à grandes échelles du système en présence de désordre. Pour étudier le comportement de la chaleur spécifique du modèle avec des constantes de couplage aléatoires, nous pouvons utiliser la représentation fermionique que possède le modèle au voisinage du point critique. Pour cela, nous allons suivre la méthode utilisée dans [23, 92] dans le contexte de la méthode des répliques. Commençons par écrire l'action fermionique qui représente l'hamiltonien effectif du modèle d'Ising à grandes échelles et au voisinage de la température critique :

$$A[\psi] = -\frac{1}{4\pi} \int d^2x \left( \overline{\psi} \hat{\partial} \psi + m \overline{\psi} \psi \right) \tag{4.7}$$

Le terme de masse $m$ se divise en deux parties : $m = M_o + m(x)$ où $M_o \sim \frac{t-t_c}{t_c}$ correspond à la déviation de la température par rapport à la température critique du modèle pur et $m(x)$ correspond à la partie aléatoire des liens. On emploiera la loi de distribution gaussienne qui donne :

$$\overline{m(x)} = 0 \ ; \ \overline{m(x)m(x')} = g_o \ \delta(x - x') \tag{4.8}$$

Comme nous l'avons vu dans la section (3.3), la méthode des répliques consiste à considérer la fonction de partition de $n$ copies du système et moyenner par rapport à la distribution de probabilité pour $m(x)$. L'action des $n$ copies du système est tout simplement :

$$A[\psi] = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{n} \int d^2x \left( \overline{\psi^i} \hat{\partial} \psi^i + m \overline{\psi^i} \psi^i \right) \tag{4.9}$$

En moyennant par rapport à $m$, on obtient l'action effective :

$$A_{eff}[\psi] = -\frac{1}{4\pi} \int d^2x \left[ \sum_{i=1}^{n} \left( \overline{\psi^i} \hat{\partial} \psi^i + M_o \overline{\psi^i} \psi^i \right) - \frac{g_o}{2} \left( \sum_{i=1}^{n} \overline{\psi^i} \psi^i \right)^2 \right] \tag{4.10}$$

Cette action est celle du modèle de Gross-Neveu à $n$ couleurs [48]. Pour $n > 2$, cette théorie présente une génération dynamique de masse, semblable au cas de la Chromo Dynamique Quantique. En effet, la matrice $S$ de ce modèle a pu être calculée exactement [108]. Elle présente des pôles qui correspondent, en plus des excitations fondamentales massives, à une infinité d'états liés qui donnent un spectre très riche. Cependant, nous sommes intéressés ici à la limite $n \to 0$. Dans ce cas, la théorie est libre dans l'infrarouge, ce qui donne bien sûr un comportement très différent à grandes échelles du système. Les équations du groupe de renormalisation pour (4.10) peuvent être obtenues très facilement à une boucle. Dans la section (5.2) nous donnerons le calcul détaillé à deux boucles dans le cadre plus général du modèle de Potts à $q$ états (le modèle d'Ising correspondant à $q = 2$). Pour le moment, le résultat à une boucle sera suffisant, (le premier calcul à deux boucles pour le modèle de Gross-Neveu a été fait dans [105]) avec le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dg(l)}{d(ln(l))} &= \frac{1}{\pi}(2-n)g^2(l) \\ \frac{dM(l)}{d(ln(l))} &= \frac{1}{\pi}(1-n)g(l) \end{aligned} \tag{4.11}$$

où $l$ est le paramètre d'échelle dans les transformations du groupe de renormalisation. Nous voyons dans ces équations que la positivité de la fonction $\beta = \frac{dg(l)}{d(ln(l))}$ est assurée pour $n > 2$. Ceci donne la création spontanée de masse que nous avons mentionnée. $\beta$ change de signe cependant pour $n < 2$, indiquant une théorie libre dans l'infrarouge. Ce changement du comportement dans l'infrarouge se fera plus clair dans la section (4.4) quand nous analyserons la forme de la matrice $S$. En intégrant (4.11) nous obtenons :

$$g(l) = \frac{g_o}{1 + (2g_o/\pi)ln(l)} \ ; \ M(l) = \frac{M_o}{[1 + (2g_o/\pi)ln(l)]^{1/2}} \tag{4.12}$$

La chaleur spécifique s'obtient en dérivant l'énergie libre deux fois par rapport à la température. Ceci revient à calculer la fonction de corrélation dans la théorie perturbée :

$$C(M_o) \sim \int d^2x < \overline{\psi}\psi(0) \ \overline{\psi}\psi(x) > \tag{4.13}$$

A l'aide des équations du groupe de renormalisation, nous pouvons facilement calculer les constantes de renormalisation pour les opérateurs $\psi$ et $\overline{\psi}$. Ce calcul sera présenté en détail dans la section (5.2). Il y aura des corrections logarithmiques aux fonctions de corrélations de ce type. Ceci est caractéristique des perturbations marginales. Nous pouvons aussi utiliser les arguments de [63] pour le calcul de la chaleur spécifique qui sera donnée par :

$$C(M_o) \sim -\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left(\frac{M(p)}{M_o}\right)^2 \ TrS^2(p) \tag{4.14}$$

où $S(p) = \frac{M_o - i\hat{p}}{M_o^2 + p^2}$ est la fonction de Green des spineurs libres et

$$\left(\frac{M(p)}{M_o}\right)^2 = [1 + (2g_o/\pi)ln(1/p)]^{-1}$$

En intégrant (4.14) dans la limite $M_o \to 0$, on obtient la divergence :

$$C(M_o) \sim ln\left(ln(1/M_o)\right) \tag{4.15}$$

Nous voyons apparaître une divergence avec un double logarithme au voisinage de la température critique. La singularité est alors moins forte que pour le cas pur.

## 4.3 Vérification par la méthode directe

Le but est maintenant d'obtenir la divergence de la chaleur spécifique pour le modèle d'Ising en dimension 2 avec des constantes de couplage aléatoires sans utiliser la méthode des répliques, mais en utilisant la méthode expliquée en [59] dans le contexte de la théorie en $\Phi^4$. Reprenons alors l'action correspondant à des fermions libres avec une masse aléatoire :

$$A[\psi] = -\frac{1}{4\pi}\int d^2x\left(\overline{\psi}\hat{\partial}\psi + m\overline{\psi}\psi\right) \tag{4.16}$$

où de nouveau le terme de masse $m$ se divise en deux parties : $m = m_o + m(x)$ où $m_o$ correspond à la déviation de la température par rapport à la température critique du modèle pur et $m(x)$ correspond à la partie aléatoire des liens. Rappelons que la loi de distribution gaussienne pour $m$ donne :

$$\overline{m(x)m(x')} = g\ \delta(x-x')\ ;\ \overline{\hat{m}(p)\hat{m}(p')} = 2\pi\ g\ \delta(p+p') \tag{4.17}$$

où $m(x) = \frac{1}{\pi}\int d^2pe^{ip.x}\hat{m}(p)$. Le propagateur correspondant à cette action gaussienne est $G_{[m]} = \left(\hat{\partial}+m\right)^{-1}$ mais il faut prendre en compte que le terme en $m$ dépend des coordonnées. La fonction de partition est donnée par :

$$Z = \int D\psi exp(A[\psi]) \sim \left(det\left(\hat{\partial}+m\right)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.18}$$

et la divergence de la chaleur spécifique par

$$C \sim \frac{d^2}{dm_o^2}\overline{F} = \frac{d^2}{dm_o^2}\overline{ln(Z)} \tag{4.19}$$

Mais ce calcul qui semble direct ne peut être effectué facilement encore une fois du fait de la dépendance non triviale de $m$ dans les coordonnées. Nous allons alors effectuer le calcul de la façon suivante : pour une configuration de désordre donnée, on a :

$$C_{[m]} \sim \int d^2x < \Gamma(0)\Gamma(x) > \tag{4.20}$$

où $\Gamma(x) = (\overline{\psi}\psi)(x)$. Le but est d'obtenir la chaleur spécifique $C = \overline{C_{[m]}}$ en moyennant cette fonction de corrélation. Pour cela, on note que :

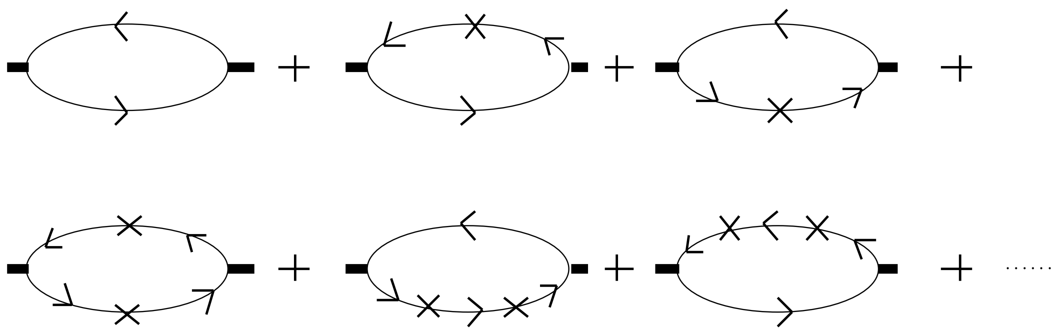
$$\int d^2x < \Gamma(0)\Gamma(x) > \sim Tr\left(G^2_{[m]}\right) = \int d^2p\ tr\left(G^2_{[m]}\right)(p) \tag{4.21}$$

On peut alors développer le propagateur total en puissance de $\hat{m}(p)$ [59] et du propagateur "libre" $S(p) = \frac{m_o - i\hat{p}}{m_o^2 + p^2}$ et puis faire la moyenne de la fonction de corrélation avec l'aide de (4.17). On peut écrire symboliquement le développement de $G$ de la façon suivante :

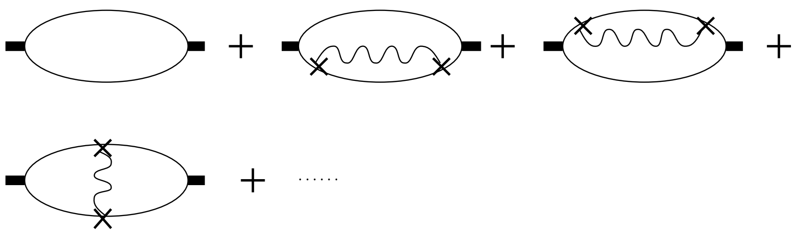
$$G_{[m]} = S - S\hat{m}S + S\hat{m}S\hat{m}S - ..... \tag{4.22}$$

Donc, le développement de $C_{[m]}$ peut s'obtenir sous forme de diagrammes :

$$C_{[m]} \sim Tr\left(G_{[m]}^2\right) = \tag{4.23}$$

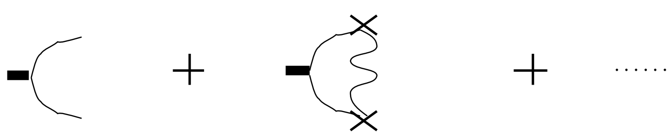


où chaque croix correspond à une insertion de $\hat{m}$. On peut ensuite faire la moyenne sur le désordre. La distribution des $\hat{m}$ étant gaussienne, les $\hat{m}$ se couplent deux à deux avec le résultat (4.17). On peut représenter ceci avec des diagrammes où les insertions de $\hat{m}$ se couplent par une ligne ondulée (les diagrammes avec un nombre impair de $\hat{m}$ s'annulent en moyennant) :

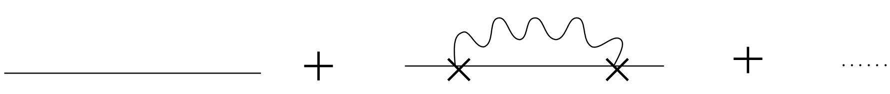


En regroupant et resommant ces diagrammes, on constate que l'on peut effectuer le calcul en définissant un vertex effectif $\Gamma^{eff}(p)$ donné par les diagrammes suivants :

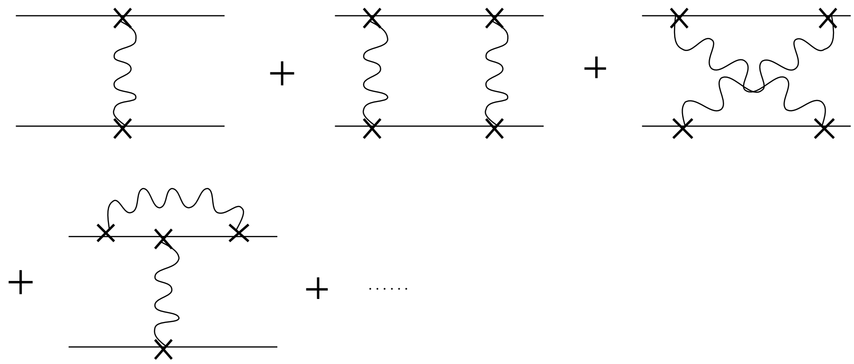
$$\Gamma^{eff} = \tag{4.24}$$



ainsi qu'un $m_o^{eff}$ donné par les diagrammes



et un $g^{eff}(p)$ donné par



Au premier ordre en $g$, on obtient un déplacement de la température critique ainsi qu'une correction logarithmique en $m_o$ :

$$m_o^{eff} = m_o + \frac{g m_o}{\pi} \, ln \left( \frac{\Lambda^2 + m_o^2}{m_o^2} \right) \tag{4.25}$$

où $\Lambda$ est le cut-off ultraviolet. Pour obtenir $\Gamma^{eff}(p)$ et $g^{eff}(p)$, on utilise [63] :

$$\Gamma^{eff}(p) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_p^\Lambda d^2k \; g^{eff}(k) \; \Gamma^{eff}(k) \; \frac{1}{k^2 + (m_o^{eff})^2} \tag{4.26}$$

$$g^{eff}(p) = g - \frac{2}{\pi} \int_p^\Lambda d^2k \; (g^{eff}(k))^2 \; \frac{1}{k^2 + (m_o^{eff})^2} \tag{4.27}$$

Ces équations peuvent se réécrire sous forme différentielle comme :

$$\frac{dg^{eff}(s)}{ds} = -\frac{2}{\pi} \; (g^{eff}(s))^2 \tag{4.28}$$

$$\frac{dln(\Gamma^{eff}(s))}{ds} = -\frac{1}{\pi} \; (g^{eff}(s)) \tag{4.29}$$

avec $s = ln(\Lambda/p)$. On retrouve alors les équations (4.11), présentes aussi dans [23] dans la limite $n \to 0$. La solution est :

$$g^{eff}(s) = \frac{g}{1 + 2 \; \pi^{-1} \; g \; s} \; ; \; \Gamma^{eff}(s) = \frac{1}{(1 + 2 \; \pi^{-1} \; g \; s)^{1/2}} \tag{4.30}$$

Et la chaleur spécifique est donnée par :

$$C(t) \sim \int d^2p \left( \Gamma^{eff}(p) \right)^2 tr(S(p)^2) \tag{4.31}$$

qui est la même intégrale que (4.31) dans [23] et d'où l'on obtient le résultat pour $t \to 0$ :

$$C(t) \sim lnln(1/|t|) \tag{4.32}$$

## 4.4 Matrice $S$ et comportement infrarouge

Dans la section (4.2) nous avons vu que la méthode des répliques appliquée au modèle d'Ising au voisinage de la température critique nous donne un modèle à $n$ fermions couplés. Ce modèle fut étudié par Gross et Neveu [48] dans l'approximation de grand $n$ pour mettre en évidence l'apparition d'un spectre massif. Postérieurement, en utilisant la symétrie $O(n)$ explicite du système, ainsi que des arguments de symétrie croisée, unitarité et factorisabilité, Zamolodchikov et Zamolodchikov [108] ont obtenu la forme explicite de la matrice $S$ pour tout $n \geq 2$. L'application au modèle d'Ising aléatoire a été faite récemment par Mussardo et Simonetti [77]. Ce travail montre l'extension des calculs de Zamolodchikov et Zamolodchikov dans la phase non massive ($n \leq 2$). On obtient alors une nouvelle matrice $S$ qui ne présente plus d'états liés, garde un spectre non massif et dans la limite $n \to 0$ donnerait l'amplitude cherchée pour le modèle d'Ising avec des constantes de couplage aléatoires. Nous allons alors commencer par donner un court résumé des arguments utilisés dans [108] pour obtenir la matrice $S$ dans le cas $n > 2$.

L'intégrabilité d'un modèle repose sur le fait qu'il existe un nombre infini de quantités conservées. Dans ce cas, dans une amplitude de diffusion de particules de même masse, le nombre de particules reste le même après la collision et l'ensemble final d'impulsions des particules reste identique à l'initial. En dimension deux, ceci se traduit par le fait qu'une amplitude de diffusion de plusieurs particules peut se factoriser en termes d'amplitudes à deux particules (voir [108] pour plus de détails). La symétrie $O(n)$ nous conduit à assumer l'existence d'un $n$-plet de particules $A_i$, $i = 1, \cdots, n$ de même masse $m$. La symétrie $O(n)$ de l'amplitude à deux particules donne :

$$
\begin{aligned}
{}_{ik}S_{jl} &= < A_j(p_1')A_l(p_2')|A_i(p_1)A_k(p_2) > \\
&= \delta(p_1 - p_1')\delta(p_1 - p_1')\ [\delta_{ik}\delta_{jl}S_1(s) + \delta_{ij}\delta_{kl}S_2(s) + \delta_{il}\delta_{jk}S_3(s)] \\
&\quad - (i \leftrightarrow k,\ p_1 \leftrightarrow p_2)
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

où $s = (p_1 + p_2)^2$. Il est plus utile de travailler dans ce cas avec les variables de rapidité données par :

$$p^0 = mch\theta\ ;\ p^1 = msh\theta$$

On aura alors $s = 4m^2ch^2(\theta/2)$ avec $\theta = \theta_1 - \theta_2$. La zone "physique" $0 \leq s \leq 4m^2$ est donnée dans ces nouvelles variables par $0 \leq Im\theta \leq \pi$. La symétrie de croisement (qui consiste à changer le signe d'une des impulsions rentrantes) correspond donc à $\theta \to i\pi - \theta$. Cette symétrie consiste à imposer dans (4.33) les relations :

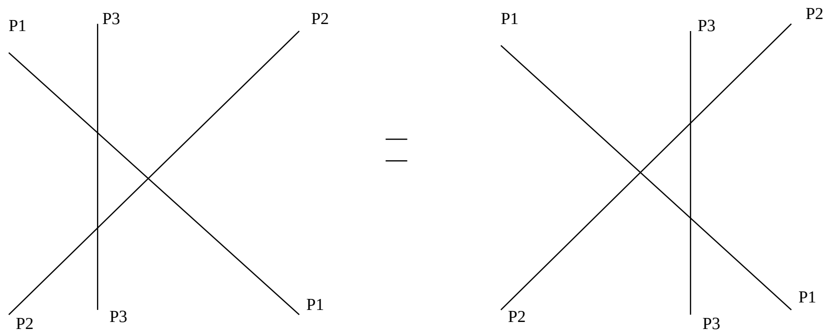
$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta)\ ;\ S_1(\theta) = S_3(i\pi - \theta) \tag{4.34}$$

et l'unitarité donne les relations suivantes :

$$S_2(\theta)S_2(-\theta) + S_3(\theta)S_3(-\theta) = 1\ ;\ S_2(\theta)S_3(-\theta) + S_2(-\theta)S_3(\theta) = 0$$

$$nS_1(\theta)S_1(-\theta) + S_1(\theta)S_2(-\theta) + S_1(\theta)S_3(-\theta) + S_2(\theta)S_1(-\theta) + S_3(\theta)S_1(-\theta) = 0 \tag{4.35}$$

Les dernières restrictions sur $S$ viennent de la factorisabilité. En effet, en décomposant une amplitude à trois particules de deux façons différentes et en imposant que les résultats soient équivalents :




on obtient les conditions suivantes :

$$S_2S_3S_3 + S_3S_3S_2 = S_3S_2S_3 \ ; \ S_2S_1S_1 + S_3S_2S_1 = S_3S_1S_2$$

$$nS_1S_3S_1 + S_1S_2S_3 + S_1S_3S_3 + S_1S_2S_1 + S_2S_3S_1 + S_3S_3S_1 + S_1S_1S_1 = S_3S_1S_3 \quad (4.36)$$

Avec ces conditions, le nombre de solutions pour (4.33) reste encore infini. Il existe cependant une solution "minimale" (avec un nombre minimum de pôles) donnée par :

$$S_3(\theta) = -\frac{i\lambda}{\theta}S_2(\theta) \ ; \ S_1(\theta) = -\frac{i\lambda}{i[(n-2)/2]\lambda - \theta}S_2(\theta)$$

$$S_2(\theta) = -\frac{\Gamma\left(1-\frac{\theta}{2\pi i}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{2\pi i}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2\pi}-\frac{\theta}{2\pi i}\right)\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2\pi}+\frac{\theta}{2\pi i}\right)}{\Gamma\left(\frac{\theta}{2\pi i}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2\pi}+\frac{\theta}{2\pi i}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{2\pi i}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2\pi}-\frac{\theta}{2\pi i}\right)} \quad (4.37)$$

où $\lambda = \frac{2\pi}{n-2}$. Il existe en réalité une autre solution minimale pour les conditions présentées ci-dessus, elle correspond au modèle $O(n)$ sigma non linéaire. La correspondance entre chacune des solutions et ces modèles se fait en prenant dans la solution pour $S$ la limite $n \to \infty$ et en comparant le résultat au développement pour grand $n$ de chacun de ces modèles. On voit apparaître dans (4.37) des singularités qui indiquent la présence d'états liés massifs.

Etudions maintenant le cas $n < 2$ qui nous permettra d'obtenir la matrice $S$ pour le modèle d'Ising gelé [77]. Ceci se base sur la supposition que l'intégrabilité du modèle de Gross-Neveu reste valable en deçà de la barrière $n = 2$. Les équations du groupe de renormalisation que nous avons vues dans la section précédente nous montrent que la théorie sera maintenant asymptotiquement libre dans l'infrarouge. Nous devons alors nous attendre cette fois-ci à avoir un spectre non massif. Ceci produit une séparation du spectre des excitations en une partie gauche et une droite. Appelons respectivement ces excitations $L(p)$ et $R(p)$. Leurs relations de dispersion seront maintenant $p^0 = -p^1 = \frac{m}{2}e^{-\theta}$ et $p^0 = p^1 = \frac{m}{2}e^{\theta}$ respectivement. Le comportement des fermions libres que l'on s'attend à trouver dans l'infrarouge nous indique que la matrice $S$ entre des excitations gauche-gauche ou droite-droite sera simplement $-1$. En revanche pour les processus gauche-droite on pose des relations de commutation :

$$R_a(\theta_1)L_b(\theta_2) = S_{ab}^{cd}L_d(\theta_2)R_c(\theta_1) \quad (4.38)$$

Cette nouvelle matrice satisfait encore les relations de Yang-Baxter (4.36) dues à l'associativité. L'unitarité et la symétrie de croisement donnent maintenant des équations similaires aux antérieures en changeant $S_i(-\theta)$ par $S_i^*(\theta)$. La solution minimale à ces contraintes a toujours la forme de (4.37). Cependant, $\lambda$ est maintenant négatif (car $n < 2$) et les amplitudes ne présentent plus de pôles et d'états liés dans la zone physique. Nous pouvons voir en plus que pour $n = 1$ on retrouve le résultat $-1$ caractéristique des fermions libres. Pour avoir la matrice $S$ caractéristique au modèle d'Ising avec des constantes de couplage aléatoires, on prend la limite $n \to 0$ ce qui donne :

$$S_2(\theta) = -\frac{\theta}{(\pi i - \theta)} \left( \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\theta}{2\pi i}\right) \Gamma\left(-\frac{\theta}{2\pi i}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\theta}{2\pi i}\right) \Gamma\left(\frac{\theta}{2\pi i}\right)} \right)^2 \tag{4.39}$$

Tout ceci consiste à faire un prolongement analytique en $n$ de la région massive de la théorie à la région non massive. Ceci nous donne le premier résultat non perturbatif pour le modèle d'Ising aléatoire qui peut permettre éventuellement par la suite de calculer les facteurs de forme et les fonctions de corrélation du système de façon exacte.

## 4.5 Moments supérieurs et supersymétrie

Une fois obtenue l'action effective pour le modèle d'Ising avec la méthode des répliques, il est facile de poursuivre le développement pour étudier à l'aide des équations du groupe de renormalisation les fonctions de corrélation moyennées. Il est aussi possible de calculer la moyenne de produits de fonctions de corrélation du type :

$$\overline{< O_1 \cdots >< O_2 \cdots >< O_3 \cdots > \ldots}$$

où les $O_i$ sont des opérateurs composites de $\psi$ et $\overline{\psi}$. Malheureusement, l'opérateur de spin ne peut être représenté de façon locale à l'aide de ces opérateurs. Pour calculer des fonctions de corrélation ou des produits de fonctions de corrélation contenant des opérateurs de spin, il faudra donc utiliser les outils des théories conformes et représentation du gaz de Coulomb dans un contexte qui permet une généralisation très facilement au modèle de Potts. La méthode générale sera présentée dans la section (5.1) et le résultat pour les fonctions de corrélation de spins sera donné dans (5.3) et (5.4) pour les moments supérieurs. La représentation fermionique reste cependant intéressante du fait que pour une configuration de désordre donnée l'action est gaussienne, ce qui permet en particulier d'appliquer la méthode supersymétrique présentée dans la section (3.5). Nous allons pour cela suivre les lignes de [10]. Reprenons alors l'action (4.7) et introduisons $2N$ copies du système (sans prendre cette fois-ci la limite $N \to 0$). Ceci nous permettra de calculer le produit de $2N$ fonctions de corrélation. Pour chaque paire de copie $\psi_1^i$ et $\psi_2^i$ on peut définir :

$$\psi_\pm^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1^i \pm \psi_2^i)$$

et en utilisant les variables $z$ et $\overline{z}$ on obtient l'action :

$$S_F = \sum_{i=1}^{N} S_1^i[m(x)] + S_2^i[m(x)]$$

$$= \int \frac{d^2x}{2\pi} \sum_{i=1}^{N} \left( \psi_-^i \partial_{\overline{z}} \psi_+^i + \overline{\psi^i}_- \partial_z \overline{\psi^i}_+ + i\frac{m(x)}{2} (\overline{\psi^i}_- \psi_+^i - \psi_-^i \overline{\psi^i}_+) \right) \tag{4.40}$$

Avec cette action, on pourrait formellement calculer le produit de $2N$ fonctions de corrélation pour une configuration de désordre donnée :

$$\prod_{i=1}^{N} < O_1^i(x^i) \ldots >_{m(x)} < O_2^i(y^i) \ldots >_{m(x)} =$$

$$\frac{1}{Z[m(x)]} \int \prod_{i=1}^{N} D\psi_1^i D\psi_2^i \; O_1^i(x^i) O_2^i(y^i) \cdots \; e^{-S_F} \tag{4.41}$$

où dans l'intégrale fonctionnelle $O_1^i$ et $O_2^i$ sont exprimés en termes des variables des $(1,i)$-iémes et $(2,i)$-iémes copies du système respectivement. Comme $S_F$ est gaussienne, la fonction de partition peut s'écrire comme un déterminant provenant d'une intégration grassmanienne :

$$Z[m(x)] = \int \prod_{i=1}^{N} D\psi_1^i D\psi_2^i \; e^{-S_F} = Det \begin{pmatrix} -i\frac{m(x)}{2} & \partial_{\overline{z}} \\ \partial_z & i\frac{m(x)}{2} \end{pmatrix}^N \tag{4.42}$$

Nous retrouvons le même problème que dans la section (4.3) : du fait de la dépendance en la position du terme de masse, ce déterminant ne peut être calculé directement. Nous pourrions reprendre les méthodes employées dans ce chapitre-là pour faire un développement en $m$ et exprimer les fonctions de corrélation en termes de propagateurs et vertex effectifs. Nous disposons cependant d'un moyen plus efficace pour travailler avec ce déterminant. Il s'agit de la méthode supersymétrique qui consiste à exprimer l'inverse de la fonction de partition comme une intégration sur des champs bosoniques :

$$\frac{1}{Z[m(x)]} = \int \prod_{i=1}^{N} D\eta^i D\gamma^i \; exp \left( \int \frac{d^2x}{2\pi} \left[ \eta^i \partial_{\overline{z}} \gamma^i + \overline{\eta^i} \partial_z \overline{\gamma^i} + i\frac{m(x)}{2} (\overline{\eta^i} \gamma^i - \eta^i \overline{\gamma^i}) \right] \right) \tag{4.43}$$

cette expression n'a un sens que formel, du fait qu'elle correspond à une intégration sur une gaussienne imaginaire. Nous pouvons assurer sa convergence en ajoutant à l'action bosonique (que nous appellerons $S_B$) un terme positif qui jouera le rôle de régulateur. Le produit des fonctions de corrélation peut alors s'écrire comme :

$$\prod_{i=1}^{N} < O_1^i(x^i) \ldots >_{m(x)} < O_2^i(y^i) \ldots >_{m(x)} =$$

$$\int \prod_{i=1}^{N} D\psi_1^i D\psi_2^i \; D\eta^i D\gamma^i \;\; O_1^i(x^i) O_2^i(y^i) \cdots \; e^{-S_T} \tag{4.44}$$

où $S_T = S_F + S_B$. Cette action totale peut être aussi décomposée comme $S_T = S_0 + i\int \frac{d^2x}{4\pi} m(x)\Phi(x)$ où :

$$S_0 = \int \frac{d^2x}{2\pi} \sum_{i=1}^{N} \left( \psi^i_- \partial_{\bar{z}} \psi^i_+ + \overline{\psi^i}_- \partial_z \overline{\psi^i}_+ + \eta^i \partial_{\bar{z}} \gamma^i + \overline{\eta^i} \partial_z \overline{\gamma^i} \right) \qquad (4.45)$$

et

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \overline{\psi^i}_- \psi^i_+ - \psi^i_- \overline{\psi^i}_+ + \overline{\eta^i}\gamma^i - \eta^i \overline{\gamma^i} \qquad (4.46)$$

L'action $S_0$ est invariante par rapport à une algèbre supersymétrique dont les courants conservés sont :

$$\begin{aligned}
G^{ij}_{\pm}(x) &= \eta^i(x)\psi^j_{\pm}(x) \ ; \ \hat{G}^{ij}_{\pm}(x) = \gamma^i(x)\psi^j_{\pm}(x) \\
K^{ij}(x) &= \eta^i(x)\eta^j(x) \ ; \ \hat{K}^{ij}(x) = \gamma^i(x)\gamma^j(x) \ ; \ i \leq j \\
L^{ij}(x) &= \psi^i_+(x)\psi^j_+(x) \ ; \ \hat{L}^{ij}(x) = \psi^i_-(x)\psi^j_-(x) \ ; \ i < j \\
J^{ij}(x) &= : \psi^i_-(x)\psi^j_+(x) : \ ; \ H^{ij}(x) = : \gamma^i(x)\eta^j(x) : \qquad (4.47)
\end{aligned}$$

Ils forment une représentation de l'algèbre de courants affine $OSp(2N \mid 2N)$ de niveau un. Il est évident que les charges liées aux courants $G_{\pm}$ et $\hat{G}_{\pm}$ sont nilpotentes. Pour prendre la moyenne sur le désordre des fonctions de corrélation (4.44), on intègre alors sur la distribution symétrique gaussienne en $m$. En ne gardant que les termes pertinents, on obtient une action effective donnée par :

$$S_{eff} = S_0 + \frac{g}{8} \int \frac{d^2x}{\pi} m(x)\Phi^2(x) \qquad (4.48)$$

La perturbation peut maintenant s'écrire comme un terme courant-courant :

$$\Phi^2 = 2\sum_{i,j=1}^{N} \left[ \overline{J}^{ij} J^{ij} - \overline{H}^{ij} H^{ij} + \frac{1}{2}(\overline{K}^{ij}\hat{K}^{ij} + \overline{\hat{K}}^{ij} K^{ij}) \right]$$

$$+ 2\sum_{i,j=1}^{N} \left[ -\frac{1}{2}(\overline{L}^{ij}\hat{L}^{ij} + \overline{\hat{L}}^{ij} L^{ij}) + \overline{G}^{ij}_-\hat{G}^{ij}_+ - \overline{\hat{G}}^{ij}_- G^{ij}_+ - \overline{G}^{ij}_+\hat{G}^{ij}_- - \overline{\hat{G}}^{ij}_+ G^{ij}_- \right] \qquad (4.49)$$

Ceci garantit que la symétrie $OSp(2N \mid 2N)$ est préservée dans le modèle perturbé. Au-delà du simple calcul de produits de fonctions de corrélation, cette méthode peut nous donner des informations importantes sur le modèle sans se baser sur le prolongement analytique implicite dans la méthode des répliques. Le calcul effectué dans la section (4.3) possède l'avantage de ne pas reposer sur la méthode des répliques, mais reste un résultat perturbatif. Le résultat exact de la matrice $S$ se base sur ce prolongement analytique de la phase massive à la phase non massive de la théorie. Il serait donc intéressant de disposer de la matrice $S$ pour le modèle $OSp(2N \mid 2N)$ de Gross-Neveu pour retrouver ainsi le comportement infrarouge du modèle d'Ising aléatoire par une méthode indépendante de celle des répliques.

## 4.6 Résultats expérimentaux et numériques

Dans les sections précédentes, nous avons évoqué une grande diversité de méthodes pour étudier d'un point de vue théorique le comportement du modèle d'Ising en présence de désordre. La première différence par rapport au modèle pur se trouve dans le comportement de la chaleur spécifique. En effet, nous avons vu que la divergence logarithmique présente dans le modèle pur devient une fonction double logarithmique dans le cas désordonné. Ce résultat théorique a été le premier à être confronté à des expériences et des simulations numériques. En utilisant des composés de $Rb_2Co_xMg_{1-x}F_4$ [55, 49] la formation de cristaux très grands contreint l'interaction magnétique à des couches de $Co/F$, donnant un échantillon quasi idéal de système ferromagnétique bidimensionnel. Les ions non magnétiques de $Mg$ sont très similaires aux $Co$ et entrent dans le réseau de façon aléatoire. Les mesures ont été faites par diffusion de neutrons. Les résultats obtenus montrent que le comportement du système se trouve dans la même classe d'universalité du modèle d'Ising en 2D. Cependant, la précision des mesures effectuées, bien que très grande, ne permet pas de distinguer entre un comportement logarithmique ou double logarithmique. Ces résultats confirment alors partiellement les prédictions théoriques présentées dans cette section, du fait qu'elle indiquent que la classe d'universalité est bien la même que pour le modèle d'Ising pur, mais la précision des mesures ne donne pas une réponse définitive pour les différences entre les modèles purs et désordonnés. Dans ce sens les simulations numériques peuvent apporter une réponse plus complète. Un grand nombre de simulations ont été faites aussi bien pour le modèle d'Ising avec des constantes de couplage aléatoires [2, 25, 98, 99, 52] que pour le modèle avec dilution de sites aléatoires [97]. Tous ces résultats montrent que la classe d'universalité d'Ising reste identique en présence de désordre. D'autres résultats [60] semblent montrer que pour un désordre important, les exposants dépendent continûment de la concentration d'impuretés. Il a été suggéré qu'un tel phénomène proviendrait de l'existence de deux régimes différents ; dans un régime de faible désordre la classe d'universalité d'Ising serait conservée tandis que pour un désordre plus fort un régime de "faible universalité" donnerait des exposants qui varient de cette façon et l'approche théorique que nous avons présentée ici n'aurait alors aucun pouvoir prédictif dans ce cas-là. Il n'est pas clair cependant si de tels résultats ne seraient pas plutôt le fait que les tailles de réseaux ne sont pas assez importantes. Dans ce cas, comme il a été suggéré dans [2], les résultats obtenus en [60] correspondraient à des exposants effectifs qui eux dépendent assurément du désordre. En effet, les tailles de réseaux importantes permettent de passer du régime ordonné (que l'on trouve à des échelles de l'ordre de quelques espacements du réseau) au régime désordonné qui apparaît à des échelles beaucoup plus grandes. Ceci se voit clairement dans les calculs des sections précédentes sur le comportement de la chaleur spécifique. Les fonctions de corrélation ayant des corrections logarithmiques, pour des petites tailles de réseaux, la divergence de la chaleur spécifique en fonction de la taille du réseau (au point critique) sera logarithmique. Le comportement double-logarithmique apparaîtra pour des tailles plus grandes que l'échelle caractéristique donnée par :

$$L \sim exp(-1/g)$$

où $g$ est la variance des liens aléatoires dans le modèle que nous avons étudié dans les sections précédentes. Il est important alors dans les simulations numériques de considérer des tailles de réseaux importantes afin de pouvoir atteindre le régime infrarouge final correspondant au système désordonné. Dans [2, 25, 98, 99], des tailles de réseaux de jusqu'à $1000 \times 1000$ ont été étudiées, pour des configurations de désordre qui donnent une longueur caractéristique $L$ de l'ordre de 30 unités de réseau. Dans ces simulations, le comportement en double logarithme de la chaleur spécifique caractéristique du système désordonné à été clairement identifié. Malgré les effets de taille finie qui restent importants et ont un comportement différent dans le cas pur et désordonné, il semblerait que les prédictions théoriques sur le modèle d'Ising désordonné coïncident de mieux en mieux avec les résultats numériques les plus récents.

* *

*

# Chapitre 5

# Extension au modèle de Potts

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié en détail le cas du modèle d'Ising avec des constantes de couplage aléatoires. Comme nous l'avons vu, on dispose d'une représentation gaussienne en terme de fermions de ce modèle au voisinage du point critique (dans le cas pur). Par ailleurs, le critère de Harris ne nous a pas donné de réponse définitive sur la pertinence du désordre dans ce modèle, ceci du fait que l'exposant $\alpha$ de la chaleur spécifique du modèle pur est nul. Ces conditions très particulières se traduisent en termes de théories des champs par le fait que la perturbation à l'hamiltonien libre introduite par le désordre est marginale, ce qui donne tout au plus des corrections logarithmiques dans les fonctions de corrélation. Dans ce contexte, le cas générique du modèle de Potts à $2 < q \leq 4$ états est plus intéressant. En effet, comme nous l'avons vu dans le chapitre (2), dans le cas pur ces modèles présentent une transition de phase du deuxième ordre avec un exposant $\alpha$ pour la chaleur spécifique positif. Le critère de Harris nous laisse alors anticiper qu'en présence d'impuretés, le système sera conduit vers une nouvelle classe d'universalité. Un cas particulièrement intéressant correspond à $q = 3$. Celui-ci pourrait être pertinent pour les transitions de phases dans des sous-couches de Kr dans le graphite [8], le désordre pouvant représenter des impuretés dans le substrat de graphite. Dans ce cas, l'exposant de la chaleur spécifique est donné par $\alpha = 2-2\Delta_\varepsilon = \frac{2}{5}$ où $\Delta_\varepsilon$ est la dimension physique de l'opérateur d'énergie du modèle pur. Ce travail fut initié par Ludwig dans [67], où il montra le comportement du système sous le groupe de renormalisation ainsi que le changement dans l'exposant critique lié à l'opérateur d'énergie en présence de désordre. L'approche perturbative consiste à faire un développement analytique en $q-2$ des exposants, ce qui nous permet d'avoir des résultats dans tout le domaine $2 \leq q \leq 4$, et en particulier dans le cas $q = 2$ (Ising). Ce terme sera en fait un régulateur comme dans le développement en $\epsilon$ de la théorie en $\Phi^4$. Cette méthode nous permettra aussi d'analyser le comportement des fonctions de corrélation de spins, ce qui nous était impossible antérieurement du fait de la non localité de l'opérateur de spin dans la représentation fermionique.

## 5.1 Méthode des répliques

Notre point de départ est l'hamiltonien du modèle de Potts à $q$ états à la température critique :

$$S_0 = \sum_{<i,j>} (\beta J_0)\delta_{s_i,s_j} \tag{5.1}$$

où $s_i$ sont les variables de spins pouvant prendre $q$ valeurs différentes, $J_0$ correspond au couplage entre les variables de spin à la valeur critique, et $< i, j >$ indique que la somme doit être faite sur les plus proches voisins. La fonction de partition du modèle pur sera donc :

$$Z_0 = Tr_{s_i} e^{-S_0}$$

$Tr_{s_i}$ indique une sommation sur toutes les configurations de spin. Si l'on inclut pour chaque couplage entre spins voisins un terme aléatoire : $J_0 \rightarrow J_0 + \Delta J_{i,j}$, la fonction de partition du système avec des constantes de couplage aléatoires peut s'écrire dans le continu comme :

$$Z = Tr_{s_i} e^{-S_0 - \int m(z)\varepsilon(z)d^2z} \tag{5.2}$$

Le terme de masse aléatoire et dépendant de la position $m(z)$ correspond au terme $\Delta J_{i,j}$ dans la forme continue et $\varepsilon(z)$ correspond à l'opérateur d'énergie $\delta_{s_i,s_j}$. Nous avons donc la fonction de partition d'une théorie invariante conforme perturbée par un terme de masse aléatoire. L'idée est alors d'étudier perturbativement ce système en utilisant la méthode des répliques. Comme nous l'avons vu dans la section (3.3), il faut moyenner la $n$-ième puissance de la fonction de partition pour une distribution de probabilité pour $m(z)$ donnée. Dans le cas d'une distribution gaussienne on a :

$$\overline{Z^n} = \int \prod_z dm(z) Z^n e^{-\frac{1}{2g_0}(m(z)-m_0)^2}$$

Ce qui donne :

$$\overline{Z^n} = \prod_{a=1}^{n} Tr_{a,s_i} e^{-\sum_{a=1}^{n} S_{0,a} + g_0 \int \sum_{a,b=1}^{n} \varepsilon_a(z)\varepsilon_b(z)d^2z - m_0 \int \sum_{a=1}^{n} \varepsilon_a(z)d^2z} \tag{5.3}$$

La moyenne de la fonction de partition répliquée avec une distribution de probabilité plus compliquée donnerait dans (5.3) des termes supplémentaires provenant des cumulants supérieurs de cette distribution de probabilité. Cependant, en examinant la sous algèbre de l'opérateur d'énergie dans la section (2.2), il est facile de voir que pour $q < 4$, les termes provenant de cumulants supérieurs ainsi que les termes avec le même indice de répliques dans $\int \sum_{a,b=1}^{n} \varepsilon_a(z)\varepsilon_b(z)d^2z$, produiront des opérateurs non pertinents ou un décalage dans la température critique. Nous avons alors la fonction de partition effective donnée par :

$$\prod_{a=1}^{n} Tr_{a,s_i} e^{-\sum_{a=1}^{n} S_{0,a} + g_0 \int \sum_{a\neq b} \varepsilon_a(z)\varepsilon_b(z)d^2z - m_0 \int \sum_{a=1}^{n} \varepsilon_a(z)d^2z} \tag{5.4}$$

Dans la limite $m_0 \to 0$, ce modèle correspond à une théorie conforme perturbée par un terme quadratique de l'opérateur d'énergie. Dans un développement perturbatif on peut alors étudier, grâce aux équations du groupe de renormalisation (R.G.), l'évolution des constantes de couplage ainsi que le comportement des fonctions de corrélation. Dans le calcul d'une fonction de corrélation $< O(0)O(R) >$, où $O$ est un opérateur local, on procédera perturbativement :

$$< O(0)O(R) >=< O(0)O(R) >_0 + < S_I O(0)O(R) >_0 + \frac{1}{2} < S_I^2 O(0)O(R) >_0 + ...$$

où $<>_0$ correspond à la valeur moyenne par rapport à $S_0$ et

$$S_I = \int H_I(z) d^2z = g_0 \int \sum_{a \neq b} \varepsilon_a(z)\varepsilon_b(z) d^2z \tag{5.5}$$

L'opérateur $O$ sera alors renormalisé par la constante

$$O \to O(1 + A_1 g_0 + A_2 g_0^2 + A_3 g_0^3 + \cdots) \equiv Z_0 O.$$

Les intégrales présentes dans le calcul des fonctions de corrélation peuvent être calculées par prolongement analytique dans la méthode du gaz de Coulomb de la section (2.3). Pour cela, nous allons paramétrer la charge centrale par :

$$c = 1 - 24\alpha_0^2 \qquad ; \qquad \alpha_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 1} \tag{5.6}$$
$$\alpha_+ \alpha_- \;\; = \;\; -1$$

et $\alpha_+^2 = \frac{2p}{2p-1} = \frac{4}{3} + \epsilon$. Pour le modèle d'Ising, on aura $\alpha_+^2 = \frac{4}{3}$, $c = \frac{1}{2}$ et pour le modèle de Potts à 3 états, nous aurons $\alpha_+^2 = \frac{6}{5}$, $c = \frac{4}{5}$ et $\epsilon = -\frac{2}{15}$. Comme nous l'avons vu dans la section (2.2), le champ de spin $\sigma$ est représenté par l'opérateur de vertex $V_{p,p-1}$ et $V_{1,2}$ correspond dans les deux cas (Ising et Potts) à l'opérateur d'énergie. Remarquons que dans le cas du modèle d'Ising, l'opérateur de spin peut aussi être représenté par $V_{21}$ (étant donné que les deux opérateurs coïncident dans la limite $\epsilon \to 0$). A l'image de la régularisation dimensionnelle, les divergences ultraviolettes donneront des pôles en $\epsilon$. Cette méthode fut déjà employée dans [29] pour étudier les fonctions de corrélations dans le modèle d'Ising en dehors de la température critique. Nous allons alors représenter $\sigma$ par $V_{k,k-1}$ où $k = \frac{2+3\lambda\epsilon}{1+3\epsilon}$. On a alors $\lambda = 2$ pour $V_{21}$ et $\lambda = \frac{1}{2}$ pour $V_{p,p-1}$.

## 5.2 Equations du groupe de renormalisation

Dans cette section, on va utiliser la méthode du groupe de renormalisation pour calculer le comportement à grandes distances des fonctions de corrélation des modèles d'Ising et Potts avec des constantes de couplage aléatoires décrits antérieurement. Pour cela, nous avons besoin de connaître l'effet du désordre sur les opérateurs $\varepsilon$ et $\sigma$ et calculer alors les opérateurs renormalisés $\varepsilon'$ et $\sigma'$. Il suffit ensuite de calculer les constantes $Z_\varepsilon$ et $Z_\sigma$ telles que :

$$\varepsilon' = Z_\varepsilon \varepsilon \quad \text{et} \quad \sigma' = Z_\sigma \sigma \tag{5.7}$$

Pour définir les constantes $Z_\varepsilon$ et $Z_\sigma$ on peut considérer l'action plus générale :

$$\sum_{a=1}^{n} S_{0,a} - g_0 \int \sum_{a,b=1}^{n} \varepsilon_a(z)\varepsilon_b(z)d^2z + m_0 \int \sum_{a=1}^{n} \varepsilon_a(z)d^2z - h_0 \int \sum_{a=1}^{n} \sigma_a(z)d^2z \qquad (5.8)$$

qui correspond à l'action (5.3) avec un terme additionnel correspondant à un champ magnétique couplé au champ $\sigma$. Connaissant l'algèbre d'opérateurs provenant de contraction entre les opérateurs $\varepsilon$ et $\sigma$, on calculera l'effet que produit le terme $\int \sum_{a,b=1}^{n} \varepsilon_a(z)\varepsilon_b(z)d^2z$ (la partie aléatoire du modèle) sur les termes de couplage

$$m_0 \int \sum_{a=1}^{n} \varepsilon_a(z)d^2z$$

et

$$h_0 \int \sum_{a=1}^{n} \sigma_a(z)d^2z$$

Dans un contexte général (la théorie en $\lambda\phi^4$ par exemple), on peut séparer le champ $\phi$ comme $\phi_{lent} + \phi_{rapide}$ qui contiennent les impulsions plus petites et plus grandes qu'un cut-off $\Lambda$ respectivement. En intégrant sur les degrés de liberté rapides, on obtient une action effective

$$exp\left(-S_{eff}(\phi_{lent}; m, \lambda)\right) = \int D\phi_{rapide}\ exp\left(-S\left(\phi_{lent} + \phi_{rapide}; m_0, \lambda_0\right)\right)$$

qui nous permettra d'obtenir les équations du groupe de renormalisation pour $m$ et $\lambda$. Dans notre cas, en intégrant le terme d'interaction autour des opérateurs $\varepsilon$ et $\sigma$ jusqu'à une distance $r$, on obtiendra les constantes de couplage effectives $m$ et $h$. Par exemple, au premier ordre en $g_0$, nous avons :

$$m_0 \sum_{a=1}^{n} \varepsilon_a(0) + g_0 \int_{|z|<r} \sum_{a,b=1}^{n} \varepsilon_a(z)\varepsilon_b(z)d^2z \ \ m_0 \sum_{a=1}^{n} \varepsilon_a(0) \simeq m \sum_{a=1}^{n} \varepsilon_a(0) + \cdots \qquad (5.9)$$

et

$$h_0 \sum_{a=1}^{n} \sigma_a(0) + g_0 \int_{|z|<r} \sum_{a,b=1}^{n} \varepsilon_a(z)\varepsilon_b(z)d^2z \ \ h_0 \sum_{a=1}^{n} \sigma_a(0) \simeq h \sum_{a=1}^{n} \sigma_a(0) + \cdots \qquad (5.10)$$

Ce calcul sera fait perturbativement jusqu'à un certain ordre de puissance en $g_0$. En réalité, le premier pas du calcul consiste à déterminer la constante renormalisée $g$ dont dépendront les constantes $Z_\varepsilon$ et $Z_\sigma$. En effet, les interactions entre les termes de perturbation pour des distances plus petites que $r$ donneront une constante de couplage effective $g$. Celle-ci sera déterminée par l'algèbre d'opérateurs de $\varepsilon$ dans le développement perturbatif $g = g_0 + A_2 g_0^2 + A_3 g_0^3 + \cdots$ où $A_2$ provient de

$$\frac{1}{2} \int_{|z|<r} \sum_{a,b=1}^{n} \varepsilon_a(z)\varepsilon_b(z)d^2z \sum_{a,b=1}^{n} \varepsilon_a(0)\varepsilon_b(0) = A_2 \sum_{a,b=1}^{n} \varepsilon_a(0)\varepsilon_b(0) + \cdots \qquad (5.11)$$

et $A_3$ de

$$\frac{1}{6}\left(\int_{|z|<r}\sum_{a,b=1}^{n}\varepsilon_a(z)\varepsilon_b(z)d^2z\right)^2\sum_{a,b=1}^{n}\varepsilon_a(0)\varepsilon_b(0)=A_3\sum_{a,b=1}^{n}\varepsilon_a(0)\varepsilon_b(0)+\cdots \quad (5.12)$$

Nous limiterons notre calcul au troisième ordre en $g_0$. Les détails techniques pour le calcul de $A_2$ et $A_3$ sont présentés dans [30]. Le résultat pour la constante renormalisée est :

$$g(r)=r^{-3\epsilon}\left(g_0-g_0^2 4\pi(n-2)\frac{r^{-3\epsilon}}{3\epsilon}+g_0^3 8\pi^2(n-2)\frac{r^{-6\epsilon}}{3\epsilon}\left(1+\frac{2(n-2)}{3\epsilon}\right)\right) \quad (5.13)$$

où nous avons multiplié notre résultat par $r^{-3\epsilon}$ pour avoir une constante $g(r)$ sans dimension. On calcule alors la fonction $\beta$ en termes de la constante de couplage renormalisée, donnée par :

$$\beta(g)=\frac{dg}{dln(r)}=-3\epsilon g(r)+4\pi(n-2)g^2(r)-16\pi^2(n-2)g^3(r)+O(g^4(r)) \quad (5.14)$$

En prenant la limite du modèle gelé $n\to 0$, on obtient pour la fonction $\beta$ (au troisième ordre en $g$) :

$$\beta(g)=-3\epsilon g-8\pi g^2+32\pi^2 g^3+\cdots \quad (5.15)$$

On remarque immédiatement, dans la limite $\epsilon\to 0$ (auquel correspond le modèle d'Ising), que le point fixe infrarouge de $\beta(g)$ se trouve en $g=0$. Pour le cas $\epsilon<0$ (ce qui correspond au modèle de Potts), on obtient un point fixe infrarouge non trivial donné par $g_c=-\frac{3\epsilon}{8\pi}+\frac{9\epsilon^2}{16\pi}+O(\epsilon^3)$.

Pour être en mesure de calculer les fonctions de corrélation de $\sigma$ et $\varepsilon$, la seconde étape consiste à déterminer les constantes multiplicatives $Z_\sigma$ et $Z_\varepsilon$. Cela se fera en calculant les termes de couplage renormalisés

$$m\int\sum_{a=1}^{n}\varepsilon_a(z)d^2z=(m_0Z_\varepsilon)\int\sum_{a=1}^{n}\varepsilon_a(z)d^2z$$

et

$$h\int\sum_{a=1}^{n}\sigma_a(z)d^2z=(h_0Z_\sigma)\int\sum_{a=1}^{n}\sigma_a(z)d^2z.$$

Le calcul direct de $m$ et $h$ nous donnera alors les constantes $Z_\sigma$ et $Z_\varepsilon$. Comme pour le cas de $g=Z_g g_0$, on calculera perturbativement :

$$m_0\sum_{a=1}^{n}\varepsilon_a(0)\ +g_0m_0\int_{|z|<r}\sum_{a,b=1}^{n}\varepsilon_a(z)\varepsilon_b(z)d^2z\sum_{a=1}^{n}\varepsilon_a(0)+ \quad (5.16)$$

$$+\frac{g_0^2}{2}m_0\left(\int_{|z|<r}\sum_{a,b=1}^{n}\varepsilon_a(z)\varepsilon_b(z)\right)^2\sum_{a=1}^{n}\varepsilon_a(0)+\cdots\simeq m\sum_{a=1}^{n}\varepsilon_a(0)$$

et $m = m_0(1 + B_1 g_0 + B_2 g_0^2 + \cdots)$ avec $B_1$ défini par

$$\int_{|z|<r} \sum_{a,b=1}^{n} \varepsilon_a(z)\varepsilon_b(z) d^2z \sum_{a=1}^{n} \varepsilon_a(0) = B_1 \sum_{a=1}^{n} \varepsilon_a(0) + \cdots$$

et $B_2$ par

$$\left(\int_{|z|<r} \sum_{a,b=1}^{n} \varepsilon_a(z)\varepsilon_b(z)\right)^2 \sum_{a=1}^{n} \varepsilon_a(0) = B_2 \sum_{a=1}^{n} \varepsilon_a(0) + \cdots$$

Ici aussi, les détails du calcul sont présentés dans [30] et nous nous limiterons a donner le résultat :

$$r^{-1+\frac{3}{2}\epsilon} m(r) = m_0\Big(1 - 4\pi(n-1)g_0 \frac{r^{-3\epsilon}}{3\epsilon} + 4\pi^2(n-1)g_0^2 \frac{r^{-6\epsilon}}{3\epsilon}(1 + \frac{4n-6}{3\epsilon})\Big)$$

De nouveau, nous avons multiplié $m(r)$ par $r^{-1+\frac{3}{2}\epsilon}$ dans le but d'avoir une constante sans dimensions. Ce résultat nous permet d'obtenir l' équation du groupe de renormalisation pour $Z_\varepsilon$ que nous utiliserons plus tard :

$$\frac{dln(Z_\varepsilon(r))}{dln(r)} = 4\pi(n-1)g - 8\pi^2(n-1)g^2 \tag{5.17}$$

De façon similaire, dans [30] nous présentons le calcul jusqu'au troisième ordre de la renormalisation pour $h_0$ avec le résultat suivant :

$$\begin{aligned} r^{-\frac{15}{8}-a(\epsilon)} h(r) &= h_0(1 + (n-1)g_0^2\pi^2 \frac{r^{-6\epsilon}}{2} \left[1 + \frac{4}{3}(2-\lambda)\frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3})\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3})\Gamma^2(-\frac{1}{6})}\right] \\ & -12(n-1)(n-2)g_0^3\pi^3 \left(\frac{r^{-9\epsilon}}{9\epsilon}\right) \left[1 + \frac{8}{9}(2-\lambda)\frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3})\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3})\Gamma^2(-\frac{1}{6})}\right]) \end{aligned} \tag{5.18}$$

Le terme multiplicatif $r^{-\frac{15}{8}-a(\epsilon)}$ devant $h(r)$ est introduit afin d'obtenir une constante sans dimensions. Ici, $a(\epsilon)$ est une fonction de $\epsilon$ qui dépend de la représentation du champ de spin que nous avons choisie dans la représentation du gaz de Coulomb (voir la section (2.3)). Sa forme explicite s'avérera sans importance pour la suite. L'équation du groupe de renormalisation pour $Z_\sigma$ sera alors :

$$\begin{aligned} \frac{dln(Z_\sigma(r))}{dln(r)} &= -3(n-1)g^2(r)\pi^2\epsilon \left[1 + \frac{4}{3}(2-\lambda)\frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3})\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3})\Gamma^2(-\frac{1}{6})}\right] \\ & +4(n-1)(n-2)\pi^3 g^3(r) \end{aligned} \tag{5.19}$$

## 5.3 Fonctions de corrélation

Nous disposons maintenant de toutes les données nécessaires pour calculer les fonctions de corrélation. Pour cela, nous allons utiliser l'équation de Callan Symanzik dans le contexte du groupe de renormalisation. Celle-ci nous donne, en utilisant les résultats de la section précédente :

$$< \varepsilon(0)\varepsilon(sR) >_{r,g(r)}= \frac{Z_\varepsilon^2(sr, g(sr))}{Z_\varepsilon^2(r, g(r))} s^{-2\Delta_\varepsilon} < \varepsilon(0)\varepsilon(R) >_{r,g(sr)}$$

Cette équation peut être écrite comme :

$$< \varepsilon(0)\varepsilon(sR) >_{r,g(r)}= e^{2\int_{g_0}^{g(s)} \frac{\gamma_\varepsilon(g)}{\beta(g)} dg} s^{-2\Delta_\varepsilon} < \varepsilon(0)\varepsilon(R) >_{r,g(sr)} \tag{5.20}$$

où nous avons utilisé la notation :

$$\frac{dlnZ_\varepsilon}{dlnr} = \gamma_\varepsilon(g) \tag{5.21}$$

et $g(s) = g(sr); g_0 = g(r)$. Nous assumons maintenant que $r$ est une échelle de cut-off associée au réseau. De façon similaire, nous avons pour $< \sigma(0)\sigma(R) >$ :

$$< \sigma(0)\sigma(sR) >_{r,g(r)}= e^{2\int_{g_0}^{g(s)} \frac{\gamma_\sigma(g)}{\beta(g)} dg} s^{-2\Delta_\sigma} < \sigma(0)\sigma(R) >_{r,g(sr)} \tag{5.22}$$

avec

$$\frac{dlnZ_\sigma}{dlnr} = \gamma_\sigma(g) \tag{5.23}$$

Dans les équations (5.20)-(5.22), nous allons supposer la dépendance en $s$ du terme

$$< \sigma(0)\sigma(r) >_{r,g(s)}$$

négligeable par rapport aux deux premiers termes. Nous verrons que dans le cas du modèle d'Ising, $g(s) \to 0$ pour $s$ grand, et la contribution de ce terme sera sous-dominante par rapport au premier ordre en $g_0$ de l'intégrale dans (5.20)-(5.22). Pour le modèle de Potts, seul le changement dans l'exposant critique nous intéresse et il est facile de voir dans ce cas que ce dernier terme ne donnera aucune contribution à l'exposant. $R$ est une échelle qui peut être fixée à une unité d'espacement du réseau d'un système statistique réel. $s$ mesurera le nombre d'espacements du réseau entre les deux spins dans $< \sigma(0)\sigma(sR) >$. Nous allons dans la suite adopter le choix $r = 1$ et traiter d'abord le cas du modèle d'Ising ($q = 2$) pour ensuite nous spécialiser dans le cas $q$ générique.

Le modèle d'Ising correspond au cas $\epsilon \to 0$ et la fonction $\beta$ est donnée par :

$$\beta(g) = -8\pi g^2 + 32\pi^2 g^3 \tag{5.24}$$

Nous voyons alors que le point fixe infrarouge se trouve en $g = 0$. Les équations (5.17), (5.19) pour $n = 0, \epsilon = 0$ nous montrent alors, avec les définitions (5.21), (5.23),

$$\gamma_\varepsilon(g) = -4\pi g + 8\pi^2 g^2 \tag{5.25}$$

$$\gamma_\sigma(g) = 8\pi g^3 \tag{5.26}$$

Ceci nous permet de calculer l'intégrale devant la fonction de corrélation (5.20):

$$\begin{aligned} 2\int_{g_0}^{g(s)} \frac{\gamma_\varepsilon(g)}{\beta(g)}dg &= \int_{g_0}^{g(s)} \frac{1-2\pi g}{1-4\pi g}\frac{dg}{g} \approx \int_{g_0}^{g(s)} (1+2\pi g)\frac{dg}{g} \\ &= 2\pi(g(s)-g_0) + ln\left(\frac{g(s)}{g_0}\right) \end{aligned} \tag{5.27}$$

Pour avoir un résultat final, nous avons besoin de la forme explicite de $g(s)$.

L'intégration de l'équation $\beta(g) = \frac{dg}{dln(r)}$ donne:

$$\int_{g_0}^{g(s)} \frac{dg}{-8\pi g^2 + 32\pi^2 g^3} = \int_r^{sr} dlnr$$

avec la solution suivante jusqu'au deuxième ordre:

$$g(s) = \frac{g_0}{1+8\pi g_0 ln(s)}(1 + \frac{4\pi g_0 ln(1+8\pi g_0 ln(s))}{1+8\pi g_0 ln(s)}) + O(g_0^3) \tag{5.28}$$

la fonction de corrélation $<\varepsilon\varepsilon>$ est donc donnée par:

$$\begin{aligned} <\varepsilon(0)\varepsilon(s)>_{g_0} &\sim \frac{g(s)}{g_0}\left(1-2\pi(g_0-g(s))\right)s^{-2\Delta_\varepsilon} \qquad (5.29) \\ \sim \frac{1}{1+8\pi g_0 ln(s)} &\left(1+\frac{4\pi g_0}{1+8\pi g_0 ln(s)}(ln(1+8\pi g_0 ln(s)) - 4\pi g_0 ln(s))\right)s^{-2\Delta_\varepsilon} + O(g_0^2) \end{aligned}$$

Nous voyons apparaître des corrections logarithmiques dues au désordre. Ces corrections seront les responsables du comportement singulier de la chaleur spécifique près de la température critique que nous avons décrit dans la section (4.2). Pour les fonctions de corrélation de $\sigma$, le calcul est similaire. Dans ce cas, nous avons $\gamma_\sigma(g) = 8\pi^3 g^3$. En gardant uniquement le premier ordre de la fonction $\beta$ ($\beta(g) = -8\pi g^2$), on obtient:

$$2\int_{g_0}^{g(s)} \frac{\gamma_\sigma(g)}{\beta(g)}dg = -2\pi^2 \int_{g_0}^{g(s)} gdg = -\pi^2\left(g(s)^2 - g_0^2\right) + O(g_0^3) \tag{5.30}$$

La fonction de corrélation $<\sigma\sigma>$ sera donnée alors par:

$$\begin{aligned} <\sigma(0)\sigma(s)> &\sim \left(1+\pi^2\left(g_0^2 - g(s)^2\right)\right)s^{-2\Delta_\sigma} \\ &\sim \left(1+\pi^2 g_0^2\left(1-\frac{1}{(1+8\pi g_0 ln(s))^2}\right)\right)s^{-2\Delta_\sigma} + O(g_0^3) \end{aligned} \tag{5.31}$$

Ce résultat nous montre une correction sous dominante par rapport au modèle pur qui n'altère pas le comportement à grandes distances. Ceci confirme les observations de [91, 94, 66] basées sur l'absence de renormalisation de cette fonction au premier ordre. Dans une récente simulation numérique [99], la fonction de corrélation spin-spin a été mesurée directement. Les résultats montrent que dans le rapport entre cette fonction dans le modèle désordonné et la même dans le modèle pur, une déviation dans des échelles de distances intermédiaires semble confirmer le résultat ci-dessus. Cependant, les effets de taille finie semblent être différents dans le cas pur et le cas désordonné et ne permettent pas de donner de réponse définitive sur ce comportement sous-dominant prédit par la théorie. Il est clair que seules des simulations sur des tailles de réseaux très grandes permettront de séparer ce comportement intrinsèque au désordre des divers effets de taille finie.

Considérons maintenant le modèle de Potts à trois états. Avec la convention que nous avons adoptée, ce cas correspond à $\epsilon = -\frac{2}{15}$. La fonction $\beta(g)$ sera maintenant (5.15) et

$$\gamma_\varepsilon(g) = -4\pi g + 8\pi^2 g^2 \tag{5.32}$$

$$\gamma_\sigma(g) = 3\pi^2\epsilon\left(1+\frac{4}{3}(2-\lambda)\frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3})\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3})\Gamma^2(-\frac{1}{6})}\right)g^2 + 8\pi^3 g^3 \tag{5.33}$$

A grandes distances, les intégrales dans (5.20), (5.22) seront dominées par la région $g \sim g_c$, avec $g_c = -\frac{3\epsilon}{8\pi} + \frac{9\epsilon^2}{16\pi} + O(\epsilon^3)$. La principale différence avec le modèle d' Ising est que $\gamma_\varepsilon(g_c)$ et $\gamma_\sigma(g_c)$ ont des valeurs finies pour $g = g_c$. Donc,

$$\int_{g_0}^{g(s)} \frac{\gamma_\varepsilon(g)}{\beta(g)}dg \approx \gamma_\varepsilon(g_c) ln(s) \qquad \text{et} \qquad \int_{g_0}^{g(s)} \frac{\gamma_\sigma(g)}{\beta(g)}dg \approx \gamma_\varepsilon(g_c) ln(s) \tag{5.34}$$

Les fonctions de corrélation peuvent alors être déduites directement

$$< \varepsilon(0)\varepsilon(s) >_{g_0} \sim s^{-(2\Delta_\varepsilon - 2\gamma_\varepsilon(g_c))} \quad \text{et} \quad < \sigma(0)\sigma(s) >_{g_0} \sim s^{-(2\Delta_\sigma - 2\gamma_\sigma(g_c))} \tag{5.35}$$

Nous observons qu'une conséquence directe du nouveau point fixe infrarouge est une modification des exposants critiques $\Delta_\varepsilon$ et $\Delta_\sigma$. Un calcul direct nous donne les nouveaux exposants :

$$\begin{aligned} 2\Delta'_\varepsilon = 2\Delta_\varepsilon - 2\gamma_\varepsilon(g_c) &= 2\Delta_\varepsilon + 8\pi g_c - 16\pi^2 g_c^2 \\ &= 2\Delta_\varepsilon - 3\epsilon + \frac{9}{4}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \end{aligned} \tag{5.36}$$

et

$$\begin{aligned} 2\Delta'_\sigma = 2\Delta_\sigma - 2\gamma_\sigma(g_c) &= 2\Delta_\sigma - 6\pi^2 g_c^2\epsilon\left[1+\frac{4}{3}(2-\lambda)\frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3})\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3})\Gamma^2(-\frac{1}{6})}\right] - 16\pi^3 g_c^3 \\ &= 2\Delta_\sigma - \frac{9}{8}(2-\lambda)\frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3})\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3})\Gamma^2(-\frac{1}{6})}\epsilon^3 + O(\epsilon^4) \end{aligned} \tag{5.37}$$

Ici, $\lambda = \frac{1}{2}$, et le résultat final pour les nouveaux exposants critiques est :

$$2\Delta'_\sigma = 2\Delta_\sigma - \frac{27}{16}\frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3})\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3})\Gamma^2(-\frac{1}{6})}\epsilon^3 + O(\epsilon^4) \tag{5.38}$$

Le changement de l'exposant critique induit par le désordre pour l'opérateur d'énergie a été calculé, jusqu'au deuxième ordre par Ludwig [67]. Le calcul que nous avons fait pour la déviation de l'exposant critique de l'opérateur de spin nous montre que les corrections apparaissent au troisième ordre. Cette déviation est très faible. Pour le cas du modèle de Potts à trois états pur on a $2\Delta_\sigma = \frac{4}{15}$, et pour le modèle avec désordre $2\Delta'_\sigma = \frac{4}{15} + 0,00264 = 0,26931$. La déviation produite par le désordre correspond donc à une modification de l'ordre de 1%.

## 5.4 Multifractalité

Dans la section précédente nous avons montré que les fonctions de corrélation moyennées sur le désordre pour les opérateurs de spin et d'énergie peuvent être calculées de façon perturbative. L'étape suivante consiste à reproduire la même méthode dans le cas des moments supérieurs des fonctions de corrélation [66]. Plus exactement, supposons que nous voulons calculer la moyenne :

$$\overline{< \sigma(x)\sigma(y) >^k}$$

pour $k$ arbitraire. Cette quantité est le $k$-ième moment de la distribution de probabilité pour la fonction de corrélation $< \sigma(x)\sigma(y) >$ et nous aide à mesurer la dispersion que celle-ci peut avoir. En effet, les quantités extensives telles que l'énergie libre, la chaleur spécifique, la susceptibilité où la magnétisation totale prennent une valeur moyenne dans un échantillon avec une probabilité de un dans la limite thermodynamique. En revanche, si on prend le cas des fonctions de corrélation de spin au point critique, on aura un comportement de la forme :

$$\overline{< \sigma(0)\sigma(R) >^k} \sim R^{\Delta_k} \tag{5.39}$$

et nous verrons que $\Delta_k \neq k\Delta_\sigma$. $\Delta_k$ sera une fonction non-linéaire en $k$, ce qui met en évidence la nature multifractale [33] du modèle en donnant une hiérarchie infinie d'exposants critiques qui lui sont associés. Pour cela, nous allons étudier la renormalisation de l'opérateur $\sigma_1 \cdots \sigma_k$ de la même façon que précédemment. Malheureusement, la complexité des intégrales présentes dans ce calcul nous oblige à nous restreindre au premier ordre en $\epsilon$. Au premier ordre, la renormalisation est déterminée par l'algèbre entre les opérateurs de spin et d'énergie :

$$\sigma\varepsilon \to [\sigma] + \cdots$$

L'apparition d'autres familles conformes ($[S]$ par exemple pour $q = 3$) est sans importance pour la suite. Plus exactement, on a pour $q$ générique :

$$\sigma(0)\varepsilon(x) = \frac{C^\sigma_{\sigma,\varepsilon}}{|x|^{\Delta_\varepsilon}}\sigma(0) + \cdots$$

où $C^\sigma_{\sigma,\varepsilon} = \frac{1}{2} + O(\epsilon)$. L'algèbre entre le terme de perturbation et l'opérateur générique $\sigma_1 \cdots \sigma_k$ sera alors :

$$(\sigma_1 \cdots \sigma_k)(0) \left( \sum_{a\neq b}^{n} \varepsilon_a(z)\varepsilon_b(z) \right) = \frac{k(k-1)}{4|z|^{2\Delta_\varepsilon}} (\sigma_1 \cdots \sigma_k)(0) + \cdots \tag{5.40}$$

Dans ce calcul, il faudra prendre la limite $n \to 0$ en gardant $k$ fixe. On peut alors reproduire la procédure des chapitres précédents pour le calcul des fonctions de corrélations moyennées en ne gardant que le premier ordre en $\epsilon$ pour la valeur de $g_c$. Pour le cas du modèle d'Ising on obtient :

$$\overline{<\sigma(0)\sigma(R)>^k} \sim R^{\frac{-k}{4}} \left(g_0 ln(R)\right)^{\frac{k(k-1)}{8}} \tag{5.41}$$

On voit apparaître les corrections logarithmiques à partir du deuxième moment, ce qui nous indique que la largeur de la distribution de probabilité pour cette fonction de corrélation s'annule comme $1/\sqrt{ln(g_0 ln(R))}$ pour $R$ grand.

Dans le cas $q > 2$ ($\epsilon < 0$), il est très facile de refaire le même calcul que précédemment pour obtenir cette fois-ci, la hiérarchie d'exposants critiques :

$$\overline{<\sigma(0)\sigma(R)>^k} \sim R^{-2k\Delta_\sigma + \frac{3}{16}k(k-1)\epsilon + \cdots} \tag{5.42}$$

où $\Delta_\sigma$ est la dimension physique de l'opérateur de spin dans le cas pur. Nous voyons apparaître dans ce résultat dès le premier ordre la non-linéarité en $k$ de l'exposant ce qui, comme il a été dit, provient de la multifractalité du système.

## 5.5 Charge centrale

Le calcul perturbatif effectué ci-dessus nous permet aussi de calculer le changement dans la charge centrale dû au désordre [68]. Pour cela, nous allons reproduire la méthode utilisée dans la section (2.5) à partir de l'équation (2.70) (où nous avons légèrement changé la notation) :

$$\dot{c} = -12G$$

la fonction $G$ étant donnée par

$$G(g) = (\beta(g))^2 < \Phi(1,1)\Phi(0,0) >$$

et $\Phi$ correspond au champ qui perturbe l'hamiltonien pur qui dans ce cas, et en reprenant la notation de la section (2.5), correspond à

$$\Phi(x) = \frac{\pi}{2}\sum_{a\neq b}^{n} \varepsilon_a(x)\varepsilon_b(x)$$

La normalisation de ce champ sera maintenant :

$$< \Phi(1,1)\Phi(0,0) >= \frac{\pi^2}{4} 2n(n-1) \tag{5.43}$$

Nous allons d'abord étudier le cas $n$ générique pour analyser ensuite en détail comment la limite gelée peut être obtenue. Les équations (5.43) et (2.74) nous permettent alors de calculer la différence entre les charges centrales du modèle initial et du modèle perturbé :

$$c_{pert} = c_{ini} - 6\pi^2 \int_0^{g_c} \beta(g)\ dg \tag{5.44}$$

où $g_c = \frac{3\epsilon}{4\pi(n-2)} + \frac{9\epsilon^2}{4\pi(n-2)^2}$ est la valeur de la constante de couplage au point fixe infrarouge. Il faut préciser que, formellement, (5.44) n'a de sens que pour $n < 2$, étant donné que seul dans cette région la théorie atteindra un point fixe infrarouge invariant conforme. Cependant, le changement de signe dans (5.44) qu'implique ce prolongement analytique invalide les prévisions sur l'unitarité et la décroissance de la charge centrale du théorème $c$ de la section (2.5). La positivité de la fonction $\beta$ dans le cas $n > 2$ laisse présager, à l'image du modèle de Gross-Neveu, une génération dynamique de masse qui détruirait complètement l'invariance d'échelle. A l'aide de (5.14) et de la valeur de $g_c$ nous pouvons facilement intégrer (5.44) pour donner la différence entre la charge centrale des modèles perturbé et pur jusqu'au quatrième ordre en $\tau = -3\epsilon$ :

$$c_{pert} = c_{ini} + 2n(n-1)\left(-\frac{\tau^3}{4^2(n-2)^2} + \frac{3\tau^4}{32(n-2)^2}\right) + O(\tau^5) \tag{5.45}$$

Avec ce résultat nous pouvons maintenant étudier quelle sera la valeur de la charge centrale pour le cas gelé du modèle de Potts avec des constantes de couplage aléatoires. La formule de l'énergie libre moyennée est $\overline{f} = \frac{\overline{Z^n}-1}{n}$ où l'on doit prendre la limite $n \to 0$. Dans cette équation, on peut écrire $\overline{Z^n}$ comme $e^{f(n)}$ où $f(n)$ est proportionnelle à $n$. On peut donc écrire l'énergie libre moyennée comme :

$$\overline{f} = \frac{d}{dn} f(n)\bigg|_{n=0} \tag{5.46}$$

A son tour, la charge centrale est donnée par la valeur de l'énergie libre par unité de longueur dans une bande de largeur $L$ :

$$f(L) = A - \frac{\pi c}{6L^2} + O\left(\frac{1}{L^2}\right)$$

Ces résultats nous permettent de dire que, d'une part la charge centrale des $n$ modèles couplés que nous avons appelés modèle initial sera $n$ fois celle du modèle de Potts pur, et que de l'autre, la charge centrale du modèle gelé sera donnée par :

$$c_{gel} = \frac{d}{dn} c_{pert}(n)\bigg|_{n=0} \tag{5.47}$$

A l'aide de (5.45), nous obtenons la solution finale :

$$c_{gel} = c_{pur} + \frac{\tau^3}{2^5} - \frac{3\tau^4}{2^6} + \ O(\tau^5) \tag{5.48}$$

En introduisant la valeur numérique de $\tau = \frac{2}{5}$ pour le modèle de Potts à trois états on obtient la différence induite par le désordre entre les charges centrales :

$$c_{gel} = c_{pur} + \frac{1}{1250} + \cdots \tag{5.49}$$

Rappelons que la valeur de la charge centrale pour le modèle pur est $c_{pur} = \frac{4}{5}$. Contrairement au cas étudié dans la section (2.5), et comme le laissait présager le changement de signe dans (5.43) quand on prend la limite $n \to 0$, la charge centrale correspondant au modèle perturbé est ici supérieure à celle du modèle pur. La différence reste cependant très faible (de l'ordre de $0,1\%$), ce qui rend très difficile la mesure de cette différence dans une simulation numérique.

## 5.6 Brisure de la symétrie des répliques

Dans les résultats présentés dans les sections précédentes, nous avons supposé que la symétrie des répliques n'est pas brisée dans l'hamiltonien initial et reste préservée dans le calcul du groupe de renormalisation. Cependant, nous avons vu dans la section (3.4) que dans les modèles non gaussiens, le mécanisme de brisure de la symétrie des répliques permet de prendre en considération le développement autour de plusieurs minima locaux dans une approche perturbative. Sans parvenir à démontrer que dans le cas précis du modèle de Potts ce mécanisme intègre effectivement un développement perturbatif plus général que dans le cas symétrique, nous allons toutefois étudier les différences que celui-ci apporte par rapport au cas symétrique [31]. L'idée est de donner une méthode pour généraliser très simplement les résultats des sections précédentes. Nous allons alors utiliser un hamiltonien plus général que celui présenté en (5.3) donné par :

$$H = \sum_{a=1}^{n} H_0^a + \int d^2x \sum_{a\neq b} g_{ab}\varepsilon_a(x)\varepsilon_b(x) \tag{5.50}$$

$g_{ab}$ est maintenant une matrice du type de Parisi. Nous allons supposer dans la suite cette conjecture et donner la solution de la théorie (5.50). Il est clair que les arguments de la section (5.1) concernant les termes diagonaux dans le terme de perturbation restent valables ce qui nous conduit à prendre tous les éléments diagonaux de $g$ nuls. En utilisant les techniques des sections précédentes, l'équation de la fonction $\beta$ pour le modèle gelé (5.15) devient :

$$\frac{dg_{ab}}{d\xi} = \beta_{ab} = -3\epsilon g_{ab} + 4\pi(g^2)_{ab} - 16\pi^2((g^2)_{aa}g_{ab} - (g_{ab})^3) \tag{5.51}$$

avec $(g^2)_{ab} = \sum_c g_{ac}g_{cb}$. Les points fixes de la théorie s'obtiennent maintenant à l'aide de l'équation matricielle :

$$-3\epsilon g_{ab} + 4\pi(g^2)_{ab} - 16\pi^2((g^2)_{aa}g_{ab} - (g_{ab})^3) = 0 \tag{5.52}$$

L'étape suivante dans l'ansatz de Parisi consiste à prendre un paramètre continu pour remplacer les indices de la matrice : $g_{ab} \sim g(a-b) \sim g(x)$. Les règles de multiplication de ces matrices seront alors :

$$(g^2)_{aa} \to -\int_0^1 dy g^2(y)$$

$$(g^2)_{ab} \to -2g(x)\int_0^1 dy g(y) - \int_0^x dy(g(x)-g(y))^2 \tag{5.53}$$

Pour simplifier la notation dans la suite, nous définissons $\tau = 3|\epsilon|$ ($\epsilon$ est négatif dans le cas du modèle de Potts) et $g \to \frac{1}{4\pi}g$. En utilisant les règles (5.53) dans (5.52) on obtient l'équation pour les points fixes de forme continue :

$$\tau g(x) - 2\bar{g}g(x) - \int_0^x dy(g(x)-g(y))^2 + g^3(x) + g(x)\bar{g^2} = 0 \tag{5.54}$$

avec $\bar{g} = \int_0^1 dyg(y)$, $\bar{g^2} = \int_0^1 dyg^2(y)$. Il est intéressant de remarquer que la structure de l'équation coïncide avec celle du minimum pour le paramètre d'ordre de Parisi dans le cas du verre de spins avec des interactions de portée infinie au voisinage du point de transition (le paramètre $\tau$ dans ce cas correspond à la température réduite $\tau = (1 - T/T_c) << 1$). La solution de (5.54) s'obtient facilement en dérivant par rapport à $x$ :

$$\tau g'(x) - 2\bar{g}g'(x) - 2g'(x)\int_0^x dy(g(x) - g(y)) + 3g'(x)g^2(x) + g'(x)\bar{g^2} = 0 \quad (5.55)$$

On a alors deux solutions de cette équation qui sont

$$g'(x) = 0$$

et

$$\tau - 2\bar{g} - 2\int_0^x dy(g(x) - g(y)) + 3g^2(x) + \bar{g}^2 = 0$$

En dérivant à nouveau on obtient

$$-2g'(x)x + 6g'(x)g(x) = 0$$

Les deux solutions sont donc : $g(x) = const \equiv g_1$ et $g(x) = \frac{1}{3}x$ Prenons alors la solution générale pour $g(x)$ de la forme :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x, & 0 < x < x_1 \\ g_1, & x_1 < x < 1 \end{cases} \quad (5.56)$$

avec $x_1 = 3g_1$ et on l'introduit dans l'équation originale (5.54). En particulier :

$$\bar{g} = g_1 - \frac{3}{2}g_1^2, \quad \bar{g^2} = g_1^2 - 2g_1^3$$

Et l'on obtient, après de simples calculs :

$$g_1 \approx \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}\tau^2, \quad x_1 \approx \frac{3}{2}\tau + \frac{3}{2}\tau^2 \quad (5.57)$$

résultat valable jusqu'au deuxième ordre en $\tau = 3|\epsilon|$. Cette solution peut être comparée avec celle du cas symétrique :

$$g_{ab} \sim g(x) = const = \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{4}\tau^2, \ 0 < x < 1 \quad (5.58)$$

donnée dans la section (5.2) (après le changement $g_{ab} \to \frac{1}{4\pi}g_{ab}$). Remarquons qu'en termes des équations “dynamiques” (5.51), la solution de point fixe continue (5.56) est la seule marginalement attractive. Ceci est garanti par le fait que le spectre de valeurs propres de la matrice hessienne correspondante dans le cas des verres de spins est non positive. En plus, toutes les autres solutions non triviales de point fixe qui ont une structure d'escalier (elles correspondent à un nombre fini de répliques dans la matrice $g_{ab}$) sont instables car elles donnent des valeurs propres positives.

Nous pouvons maintenant calculer les dimensions des opérateurs $\varepsilon$ et $\sigma$ pour la solution (5.54). La généralisation de (5.32) est facile à obtenir :

$$\gamma_\varepsilon(g) = 4\pi\frac{1}{n}\sum_{ab} g_{ab} - 8\pi^2(g^2)_{aa} + O(g^3) \tag{5.59}$$

$$\gamma_\sigma(g) = 3\pi^2\epsilon\left(1 + 2\frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3})\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3})\Gamma^2(-\frac{1}{6})}\right)(g^2)_{aa} + 8\pi^3(g^3)_{aa} + O(g^4) \tag{5.60}$$

En utilisant maintenant l'ansatz de Parisi $g_{ab} \to g(x)$ avec les règles (5.53) et, en plus

$$(g^3)_{aa} \to \int_0^1 dx(xg^3(x) + 3g(x)\int_0^x dy\, g^2(y)) \tag{5.61}$$

on obtient l'expression suivante :

$$\gamma_\varepsilon(g) = -4\pi\int_0^1 g(x)dx + 8\pi^2\int_0^1 g^2(x)dx + O(g^3) \tag{5.62}$$

$$\gamma_\sigma(g) = -3\pi^2\epsilon\left(1 + 2\frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3})\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3})\Gamma^2(-\frac{1}{6})}\right)\int_0^1 g^2(x)dx$$
$$+ 8\pi^3\int_0^1\left(xg^3(x) + 3g(x)\int_0^x g^2(y)dy\right)dx + O(g^4) \tag{5.63}$$

Une simple analyse des expressions ci-dessus nous montre que les modifications de $\Delta_\sigma$ dues à la brisure de la symétrie des répliques seront d'ordre $\epsilon^4$. Comme nous n'avons pas calculé les termes d'ordre $\epsilon^4$, la précision de notre résultat ne nous permet pas de calculer les corrections dans cet exposant. En revanche, la précision dans le calcul de $\gamma_\varepsilon(g)$ est suffisante pour voir les changements que produit la solution (5.56) dans le nouvel exposant pour l'opérateur d'énergie :

$$\Delta''_\varepsilon = \Delta_\varepsilon - \gamma_\varepsilon(g) = \Delta_\varepsilon - \frac{3}{2}\epsilon + O(\epsilon^3) = 1 + O(\epsilon^3) \tag{5.64}$$

Il est intéressant de comparer ce résultat à celui donné par le cas symétrique présenté dans la section (5.3) $\Delta'_\epsilon = 1,02 + O(\epsilon^3)$. Nous disposons maintenant de deux résultats pour l'exposant de l'opérateur d'énergie que nous pouvons comparer à une récente simulation numérique faite par Picco. En utilisant des tailles de réseaux de $50\times 50$ à $1000\times 1000$, le modèle de Potts à trois états a été simulé dans le cadre du désordre auto-dual. Ceci consiste à donner de façon aléatoire aux liens deux valeurs différentes avec la même probabilité. Cette méthode a l'avantage de permettre de calculer exactement la température critique du modèle désordonné. Afin de permettre au système d'avoir une longueur caractéristique (l'échelle pour laquelle se fait le passage du régime pur au régime désordonné) nettement inférieure aux tailles de réseaux présentes, le rapport entre les deux valeurs possibles pour les liens a été pris de 1/10. Ceci constitue un désordre très fort, ce qui garantit que les mesures pour les tailles de réseaux les plus grandes correspondent effectivement au comportement infrarouge du système désordonné. Le comportement de la chaleur spécifique en fonction de la taille du réseau est :

$$C(L) = A + BL^{-x}$$

où $x = 0.08 \pm 0.02$. La relation $x = 2\Delta'_\varepsilon - 2$ nous donne alors le résultat numérique :

$$\Delta'_\varepsilon = 1.04 \pm 0.01$$

Ce résultat se rapproche davantage de l'exposant obtenu sans brisure de symétrie des répliques, bien que la correspondance ne soit pas encore complète. Pour l'exposant de spin, la simulation numérique a donné le résultat :

$$\Delta'_\sigma = \Delta_\sigma(1+\delta)\ ;\ \delta = 0.003 \pm 0.005$$

Notre résultat théorique (qui comme nous l'avons vu est le même à cet ordre avec ou sans brisure de symétrie des répliques) est $\delta = 0.01$. Il est clair que, même si le comportement qualitatif de la simulation numérique semble aller dans la direction des prédictions théoriques, un calcul à des ordres plus élevés en perturbation et des simulations pour des valeurs du désordre différentes ainsi que des tailles de réseau plus grandes permettra de donner une réponse définitive sur ce modèle.

* *

*

# Chapitre 6

# Modèles multicritiques désordonnés

Dans les deux chapitres précédents, nous avons étudié des systèmes statistiques dont la définition sur le réseau est relativement simple. Nous allons analyser maintenant, en gardant la méthode des répliques et l'approche du groupe de renormalisation comme outils de base, des modèles avec désordre dont la représentation est plus compliquée. Plus précisément, nous allons voir quel est le comportement de systèmes multicritiques dont les densités d'énergie sont couplées par des termes aléatoires. Pour des raisons de simplicité, nous étudierons d'abord le couplage entre deux modèles pour ensuite généraliser nos résultats à un nombre arbitraire de modèles couplés.

## 6.1 Couplage aléatoire

Dans le premier chapitre, nous avons vu que parmi la série de théories conformes unitaires minimales, en plus du modèle d'Ising et de Potts, figurent les modèles multicritiques. Ce sont les modèles de la série unitaire minimale $M_p$ dont la charge centrale est : $c = 1 - \frac{6}{p(p+1)}$ [40], [26]. La dimension conforme des opérateurs dans la grille conforme est $\Delta_{n',n} = \frac{(pn'-(p+1)n)^2-1}{4p(p+1)}$ (la dimension physique est $2\Delta_{n',n}$). Dans le cas des modèles de Potts et d'Ising que nous avons étudié dans les sections précédentes, l'opérateur d'énergie était représenté par $\varepsilon = \phi_{1,2}$. En revanche, pour les modèles multicritiques, l'opérateur d'énergie sera représenté par $\hat{\varepsilon} = \phi_{2,1}$ [40], [26] et sa dimension conforme sera $\Delta_{2,1} = \frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{4}$ avec $\epsilon = \frac{3}{p+1}$. Il est important de remarquer que, de même que dans le cas précédent, les opérateurs $[\phi_{i,1}]$ forment une sous algèbre dans $M_p$. Il est intéressant de voir quels seront les effets du désordre dans ces systèmes multicritiques. Par analogie avec les cas précédents, considérer des constantes de couplage aléatoires consiste à ajouter à l'hamiltonien pur un terme de "masse" aléatoire couplé à l'opérateur d'énergie :

$$H = H_0 + \int d^2x \; m(x) \; \hat{\varepsilon}(x)$$

Naïvement, en moyennant par rapport à une distribution de probabilité symétrique pour $m$, la fonction de partition répliquée donnerait l'hamiltonien effectif :

$$H_{eff} = \sum_i H_{0,i} + \sum_{i,j} \sigma_1 \int d^2x\ \hat{\varepsilon}^i(x)\hat{\varepsilon}^j(x) + \sum_{i,j,k,l} \sigma_2 \int d^2x\ \hat{\varepsilon}^i(x)\hat{\varepsilon}^j(x)\hat{\varepsilon}^l(x)\hat{\varepsilon}^k(x) \quad (6.1)$$

où nous avons gardé les termes pertinents uniquement. $\sigma_1$ et $\sigma_2$ sont les deuxième et quatrième cumulants respectivement de la distribution de probabilité pour $m$. La dimension triviale du terme couplé au deuxième cumulant est donnée par $1-\epsilon$. $\sigma_1$ étant toujours non nul dans toute distribution non triviale, la forte pertinence de ce terme fait que toute approche perturbative est impossible dans cette représentation. La théorie semble donner un terme de masse non nul ce qui indiquerait une transition de phase du premier ordre. Nous verrons dans le chapitre suivant que sous certaines conditions, les systèmes aléatoires ne peuvent avoir de transitions de phase du premier ordre. Nous ne pouvons affirmer alors avec certitude quelle sera la nature du comportement d'un tel système multicritique en présence de désordre.

Nous pouvons étudier cependant le cas particulier de deux modèles multicritiques superposés liés par un couplage aléatoire [32]. La manière dont les deux modèles sont couplés est la suivante : si $H_{0,1}$ et $H_{0,2}$ sont respectivement les hamiltoniens des deux modèles purs, l'hamiltonien total est :

$$H = H_{0,1} + H_{0,2} + \int d^2x\ q(x)\ \hat{\varepsilon}_1(x)\hat{\varepsilon}_2(x) \quad (6.2)$$

où $q(x)$ est un terme de couplage entre les deux systèmes. Dans le contexte de la méthode des répliques, nous prenons la moyenne de la n-ième puissance de la fonction de partition :

$$\overline{Z^n} = \int \prod_x dP[q(x)] Z^n \quad (6.3)$$

Nous supposerons la distribution de probabilité normalisée $dP[q(x)]$ pour $q(x)$ symétrique. (6.3) donne naïvement l'hamiltonien effectif :

$$H = \sum_{i=1}^{n}(H_{0,1}^i + H_{0,2}^i) - \sigma \sum_{i,j=1}^{n} \int d^2x \left(\hat{\varepsilon}_1^i\hat{\varepsilon}_2^i\hat{\varepsilon}_1^j\hat{\varepsilon}_2^j\right)(x)\ + \cdots \quad (6.4)$$

où nous avons écrit uniquement le terme provenant du deuxième cumulant de $dP[q(x)]$. Si $p$ est suffisamment grand, la dimension de l'opérateur d'énergie sera proche de $\frac{1}{2}$, ce qui fera que les contributions des cumulants supérieurs donneront des termes non pertinents au sens du groupe de renormalisation. Comme dans le cas du modèle de Potts que nous avons vu précédemment, le cas gelé s'obtiendra dans la limite $n \to 0$. Dans une première étape, nous allons étudier le modèle (6.4) pour $n$ générique et nous spécialiser ultérieurement dans le cas gelé.

Il faut toutefois faire encore une remarque importante avant de se lancer dans des calculs détaillés. La sous-algèbre d'opérateurs de $\varepsilon$ contient aussi l'opérateur $\phi_{3,1}$ et ses descendants :

$$\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon} \to [I] + [\phi_{3,1}]$$

La dimension conforme de $\phi_{3,1}$ est donnée par $\Delta_{3,1} = 1 - \frac{2\epsilon}{3}$ et c'est donc un opérateur pertinent. En fait, dans le terme d'interaction ci-dessus, les termes avec les mêmes indices de réplique ou provenant de cumulants supérieurs de la distribution de probabilité produiront, mis à part des termes non pertinents ou des contributions triviales, un terme de la forme :

$$\int d^2x \sum_{i=1}^{n} \left( \Phi_1^i(x) + \Phi_2^i(x) \right)$$

où $\Phi$ représente l'opérateur $\phi_{3,1}$. Le problème d'un modèle du type $M_p$ perturbé par l' opérateur $\phi_{3,1}$ a été étudié en détail dans [107]. Il y a un point fixe infrarouge non trivial, et il a été montré que le flot de renormalisation conduit le système à un modèle $M_{p-1}$. Ce point fixe sera aussi présent ici dans le comportement sous le groupe de renormalisation de notre système et sera d'un intérêt particulier dans le cas du système gelé.

## 6.2 Cas générique

Dans ce cas, notre modèle consiste en $2n$ modèles minimaux couplés. L'idée est d'étudier le comportement sous le groupe de renormalisation de (6.4) pour $n > 2$ et d'identifier les différents points fixes qui peuvent apparaître. Comme nous l'avons expliqué dans la section précédente, le modèle que l'on va considérer est celui décrit par un hamiltonien plus général :

$$H = \sum_{i=1}^{n} H_{0,1}^i + H_{0,2}^i + \lambda \int d^2x \sum_{i=1}^{n} \left( \Phi_1^i(x) + \Phi_2^i(x) \right) + g \int d^2x \sum_{i \neq j}^{n} \left( \hat{\varepsilon}_1^i \hat{\varepsilon}_2^i \hat{\varepsilon}_1^j \hat{\varepsilon}_2^j \right)(x) \quad (6.5)$$

où $H_{0,1}^i$ et $H_{0,2}^i$ sont les hamiltoniens des systèmes purs, chacun correspondant à un modèle $M_p$. Par commodité, nous avons remplacé $\sigma$ par $-g$ et le cas du modèle gelé s'obtiendra donc dans la région $g < 0$. Les équations du groupe de renormalisation à une boucle s'obtiendront à l'aide de l'algèbre d'opérateurs des termes de perturbation :

$$\sum_{i \neq j}^{n} \left( \hat{\varepsilon}_1^i \hat{\varepsilon}_2^i \hat{\varepsilon}_1^j \hat{\varepsilon}_2^j \right)(x) \quad \sum_{k \neq l}^{n} \left( \hat{\varepsilon}_1^k \hat{\varepsilon}_2^k \hat{\varepsilon}_1^l \hat{\varepsilon}_2^l \right)(y) \quad \rightarrow \quad 4(n-2)|x-y|^{-2+2\epsilon} \sum_{i \neq j}^{n} \left( \hat{\varepsilon}_1^i \hat{\varepsilon}_2^i \hat{\varepsilon}_1^j \hat{\varepsilon}_2^j \right)(y)$$

$$+4(n-1) C_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}^{\Phi} |x-y|^{-2+\frac{8\epsilon}{3}} \sum_{i=1}^{n} \left( \Phi_1^i(y) + \Phi_2^i(y) \right) + \cdots$$

$$\sum_{l=1}^{n} \left( \Phi_1^l(x) + \Phi_2^l(x) \right) \sum_{i=1}^{n} \left( \Phi_1^i(y) + \Phi_2^i(y) \right) \rightarrow C_{\Phi\Phi}^{\Phi} |x-y|^{-2+\frac{4\epsilon}{3}} \sum_{i=1}^{n} \left( \Phi_1^i(y) + \Phi_2^i(y) \right) + \cdots$$

$$\sum_{l=1}^{n} \left( \Phi_1^l(x) + \Phi_2^l(x) \right) \quad \sum_{i \neq j}^{n} \left( \hat{\varepsilon}_1^i \hat{\varepsilon}_2^i \hat{\varepsilon}_1^j \hat{\varepsilon}_2^j \right)(y) \quad \rightarrow \quad 4 C_{\Phi\hat{\varepsilon}}^{\hat{\varepsilon}} |x-y|^{-2+\frac{4\epsilon}{3}} \sum_{i \neq j}^{n} \left( \hat{\varepsilon}_1^i \hat{\varepsilon}_2^i \hat{\varepsilon}_1^j \hat{\varepsilon}_2^j \right)(y) + \cdots \quad (6.6)$$

Nous avons omis les termes contenant les opérateurs descendants. $C_{\Phi\Phi}^{\Phi}$ et $C_{\Phi\hat{\varepsilon}}^{\hat{\varepsilon}}$ sont les constantes de structure du modèle $M_p$. Elles sont symétriques sous permutation des indices et leurs valeurs peuvent être obtenues dans [26] :

$$C_{\Phi\hat{\varepsilon}}^{\hat{\varepsilon}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + O(\epsilon) \quad ; \quad C_{\Phi\Phi}^{\Phi} = \frac{4}{\sqrt{3}} + O(\epsilon)$$

En utilisant les formules du groupe de renormalisation à une boucle [10], [107] :

$$\dot{g}_i = (2 - dim(g_i))g_i - \pi K_{jk}^i g_j g_k$$

(où $g_i = g, \lambda$) et les valeurs des constantes de structure généralisée $K_{jk}^i$ provenant de (6.6), on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \dot{g} &= 2\epsilon g - 4\pi(n-2)g^2 - 4\pi\sqrt{3}\lambda g \\ \dot{\lambda} &= \frac{4\epsilon}{3}\lambda - \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\lambda^2 - 2\pi\sqrt{3}(n-1)g^2 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Le premier pas dans l'étude du flot de renormalisation consiste à trouver les points fixes de (6.7). Ceci équivaut à imposer les conditions $\dot{g} = \dot{\lambda} = 0$ dans (6.7). Pour $n > 2$ on obtient quatre solutions qui sont :

$$\lambda = 0 \quad ; \quad g = 0 \tag{6.8}$$

$$\lambda = \frac{\epsilon}{\pi\sqrt{3}} \quad ; \quad g = 0 \tag{6.9}$$

$$\lambda = \frac{\epsilon}{2\pi\sqrt{3}}(1+b) \quad ; \quad g = -\frac{\epsilon b}{2\pi(n-2)} \tag{6.10}$$

$$\lambda = \frac{\epsilon}{2\pi\sqrt{3}}(1-b) \quad ; \quad g = \frac{\epsilon b}{2\pi(n-2)} \tag{6.11}$$

où par simplicité nous avons défini $b = \sqrt{\frac{2(n-2)^2}{2(n-2)^2+9(n-1)}}$. Remarquons que (6.8) et (6.9) sont les points fixes présents dans le travail de Zamolodchikov [107] que nous avons présenté dans la section (2.5). Nous rappelons simplement ici que le comportement dans l'infrarouge du modèle $M_p$ perturbé par l'opérateur $\phi_{3,1}$ sera donné par le point fixe (6.9) qui correspond à $M_{p-1}$. L'étape suivante consiste à étudier la stabilité de ces points fixes. Pour cela nous linéarisons (6.7) autour des solutions montrées ci-dessus $g = g^* + \delta g$ ; $\lambda = \lambda^* + \delta\lambda$ et on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{g} \\ \delta\dot{\lambda} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta g \\ \delta\lambda \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice $A$ dans chacun des cas (6.8) à (6.11) nous donnent des informations sur la stabilité de ces points fixes. Il est facille de voir que pour (6.8) les deux valeurs propres sont positives, ce qui indique que ce point fixe est instable dans les deux directions, et que (6.9) est un point fixe stable. Pour (6.10) et (6.11) les valeurs propres sont aussi réelles mais de signe contraire, ce qui indique que ces points fixes sont stables dans une direction et instables dans l'autre ; ils peuvent être atteints uniquement en faisant un réglage fin sur les valeurs de $g$ et $\lambda$ pour garder notre système sur la ligne de stabilité de ces points. En examinant en détail le diagramme de flot de (6.7) on peut voir que les conditions initiales $\lambda = 0$ ; $g \neq 0$ nous conduiront en dehors de la région où se trouvent les points fixes ci-dessus vers une théorie massive ou un point fixe qui ne peut être vu à cet ordre de la théorie des perturbations.

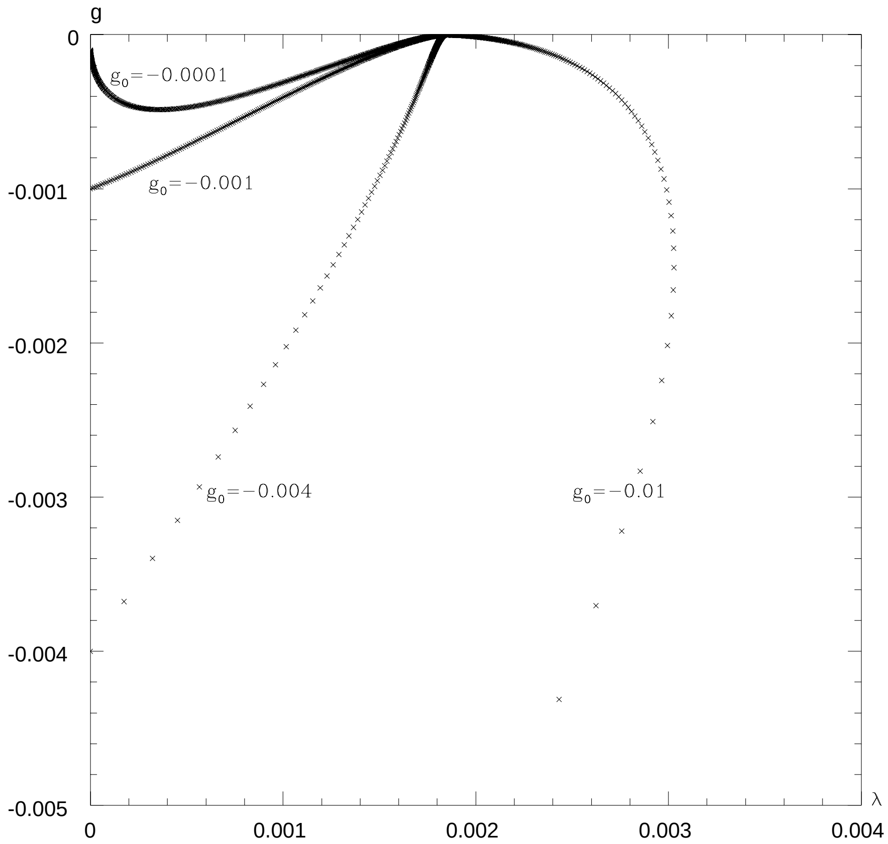
## 6.3 Système gelé

Considérons maintenant le cas $n = 0$ qui correspond au cas gelé de deux systèmes minimaux aléatoirement couplés. En remplacant $n = 0$ dans (6.7), on obtient le système d'équations du groupe de renormalisation suivant :

$$\dot{g} = 2\epsilon g + 8\pi g^2 - 4\pi\sqrt{3}\lambda g$$

$$\dot{\lambda} = \frac{4\epsilon}{3}\lambda - \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\lambda^2 + 2\pi\sqrt{3}g^2 \tag{6.12}$$

Dans ce nouveau système, (6.8) et (6.9) sont toujours des points fixes avec le même type de stabilité mais il n'y a plus de points fixes avec $g \neq 0$ (les points (6.10) et (6.11) sont maintenant complexes), (6.8) et (6.9) sont donc les seuls points fixes présents à cet ordre de la théorie des perturbation. En supposant que les contributions d'ordre supérieur pour (6.12) donneront des corrections d'ordre $\epsilon^2$ mais ne changeront pas le comportement qualitatif du flot de renormalisation au voisinage des deux points fixes présents, on peut voir que les conditions initiales $\lambda_0 = 0$ ; $g_0 < 0$ conduiront notre système dans l'infrarouge au point fixe (6.9). Malgré le fait que nous ne disposons pas de solution exacte pour le système (6.12), ceci est supporté par le calcul numérique représenté par le graphique suivant :




pour différentes valeurs de $g_0$. Les conditions initiales $\lambda_0 = 0$ ; $g_0 < 0$ sont précisément celles que l'on attend dans le cas du système gelé, car le terme dans l'hamiltonien original proportionnel à l'opérateur $\Phi$ contient un facteur $n$, provenant des contractions des autres paires d'opérateurs d'énergie dans (6.4). Donc, dans la limite $n = 0$, $\lambda_0$ s'annule et $g_0 = -\sigma < 0$. Nous connaissons exactement les propriétés du point fixe (6.9), ce résultat nous indique qu'en ajoutant un faible couplage aléatoire à travers les opérateurs d'énergie à deux modèles minimaux $m_p$ le comportement dans l'infrarouge sera celui de deux modèles $M_{p-1}$ découplés.

Nous pouvons étendre ces résultats au cas de $M$ modèles couplés. L'hamiltonien (6.5) est donc remplacé par

$$H = \sum_{a=1}^{M}\sum_{i=1}^{n} H_{0,a}^{i} + \lambda \int d^2x \sum_{a=1}^{M}\sum_{i=1}^{n} \left(\Phi_a^i(x)\right) + \rho \int d^2x \sum_{a\neq b, c\neq d}^{M} \sum_{i\neq j}^{n} \left(\hat{\varepsilon}_a^i \hat{\varepsilon}_b^i \hat{\varepsilon}_c^j \hat{\varepsilon}_d^j\right)(x) \quad (6.13)$$

Dans la suite, il sera préférable d'exprimer le dernier terme comme

$$\rho \int d^2x \sum_{a\neq b, c\neq d}^{M} \sum_{i\neq j}^{n} \left(\hat{\varepsilon}_a^i \hat{\varepsilon}_b^i \hat{\varepsilon}_c^j \hat{\varepsilon}_d^j\right)(x) \quad =$$

$$g \int d^2x \sum_{a\neq b}^{M} \sum_{c\neq d}^{M} \sum_{i\neq j}^{n} \left(\hat{\varepsilon}_a^i \hat{\varepsilon}_b^i \hat{\varepsilon}_c^j \hat{\varepsilon}_d^j\right)(x) \quad + \quad \sigma \int d^2x \sum_{<a,b,c,d>}^{M} \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{\varepsilon}_a^i \hat{\varepsilon}_b^i \hat{\varepsilon}_c^i \hat{\varepsilon}_d^i\right)(x) \quad (6.14)$$

Ici, $< a, b, c, d >$ indique que la somme sur les indices $a, b, c, d$ est faite pour des valeurs différentes de ceux-ci deux à deux. Par rapport aux transformations du groupe de renormalisation, chaque terme aura un comportement différent, on aura donc deux équations différentes pour $g$ et $\sigma$. En fait, ceci est vrai pour $M \geq 4$. Pour $M < 4$, le terme $\sigma$ est absent. A partir de l'ensemble d'équations pour $g, \sigma$ et $\lambda$, nous serons en mesure de retrouver le cas $M = 2$ et $M = 3$ en supprimant simplement $\sigma$. Le cas $M = 2$ est celui que nous avons étudié plus haut et le cas $M = 3$ sera mentionné à la fin de cette section. Les équations du groupe de renormalisation pour $g, \sigma$ et $\lambda$ peuvent s'obtenir très facilement à partir du produit d'opérateurs (6.6). On obtient

$$\begin{aligned}
\dot{g} &= 2\epsilon g - \frac{1}{2} g^2 (M(M-1)(n-2) + 4(M-2)^2) - g\sigma(M-2)(M-3) - \lambda g + \cdots \\
\dot{\sigma} &= 2\epsilon\sigma - \frac{3}{2}\sigma^2(M-4)(M-5) - \frac{3}{2} g^2 (n-1) M(M-1) - \lambda\sigma + \cdots \\
\dot{\lambda} &= \frac{4\epsilon}{3}\lambda - \frac{1}{3}\lambda^2 - \frac{3}{4} g^2 (n-1) M(M-1)^2 - \frac{1}{4}\sigma^2 (M-1)(M-2)(M-3) + \cdots
\end{aligned} \quad (6.15)$$

En prenant directement la limite gelée, on obtient

$$\begin{aligned}
\dot{g} &= 2\epsilon g - g^2 (2(M-2)^2 - M(M-1)) - g\sigma(M-2)(M-3) - \lambda g + \cdots \\
\dot{\sigma} &= 2\epsilon\sigma - \frac{3}{2}\sigma^2(M-4)(M-5) + \frac{3}{2} g^2 M(M-1) - \lambda\sigma + \cdots \\
\dot{\lambda} &= \frac{4\epsilon}{3}\lambda - \frac{1}{3}\lambda^2 + \frac{3}{4} g^2 M(M-1)^2 - \frac{1}{4}\sigma^2 (M-1)(M-2)(M-3) + \cdots
\end{aligned} \quad (6.16)$$

L'étape suivante consiste à calculer les points fixes associés à ce système d'équations. A cet ordre en $\epsilon$, on obtient les points suivants : d'abord, comme $\dot{g} = g(\ldots)$, il existe un groupe de solutions données par $g = 0$ et, après quelques calculs :

$$\sigma = 0 \quad ; \quad \lambda = 0 \quad (6.17)$$

$$\sigma = 0 \quad ; \quad \lambda = 4\epsilon \quad (6.18)$$

$$\sigma = \epsilon x \quad ; \quad \lambda = 2\epsilon(1-y) \quad (6.19)$$

$$\sigma = -\epsilon x \quad ; \quad \lambda = 2\epsilon(1+y) \quad (6.20)$$

où nous avons défini les quantités suivantes

$$\begin{aligned}
x &= \frac{4}{\sqrt{3}} \left[(M-1)(M-2)(M-3) + 3(M-4)^2(M-5)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \\
y &= \frac{3x}{4}(M-4)(M-5)
\end{aligned}$$

On a en plus une deuxième série de solutions avec $g \neq 0$ (avec quelques conditions supplémentaires sur $M$, voir plus bas). Après quelques calculs un peu longs, le résultat est

$$g = -\epsilon X_M^+ \quad ; \quad \sigma = -\epsilon Z_M^+ X_M^+ \tag{6.21}$$

$$g = -\epsilon X_M^- \quad ; \quad \sigma = -\epsilon Z_M^- X_M^- \tag{6.22}$$

$$g = \epsilon X_M^+ \quad ; \quad \sigma = \epsilon Z_M^+ X_M^+ \tag{6.23}$$

$$g = \epsilon X_M^- \quad ; \quad \sigma = \epsilon Z_M^- X_M^- \tag{6.24}$$

et $\lambda = 2\epsilon - g(2(M-2)^2 - M(M-1)) - \sigma(M-2)(M-3)$. On a utilisé aussi les définitions suivantes

$$\begin{aligned} Z_M^\pm &= \frac{-(2(M-2)^2 - M(M-1)) \pm 2\sqrt{f_M}}{2((M-2)(M-3) - \frac{3}{2}(M-4)(M-5))} \\ X_M^\pm &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{3}(Z_M^\pm(M-2)(M-3) + (2(M-2)^2 - M(M-1)))^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}(Z_M^\pm)^2(M-1)(M-2)(M-3) - \frac{3}{4}M(M-1)^2)^{-\frac{1}{2}} \\ f_M &= M^4 - 17M^3 + 65M^2 - 64M + 16 \end{aligned} \tag{6.25}$$

Ces quatre dernières solutions n'existent pas pour tout $M$. En fait, on a des contraintes supplémentaires : $f_M$ est positif et les points fixes réels uniquement pour $M \geq 13$ ; $X_M^+$ est réel si $M \leq 66$. Donc, les quatre solutions (6.21-6.24) sont réelles pour $13 \leq M \leq 66$ et pour $M \geq 67$ seules (6.22,6.24) existent. Etudions maintenant la stabilité de ces solutions. Remarquons que les conditions initiales physiques sont

$$\lambda = 0 \quad ; \quad g = \sigma < 0 \tag{6.26}$$

Comme $\dot{g} = g(...)$, on a la condition $g \leq 0$. Les deux dernières solutions (6.23) et (6.24) peuvent donc être rejetées. Il nous reste alors 6 solutions qui peuvent être pertinentes. La première ($g = \sigma = \lambda = 0$) est instable et peut donc être aussi éliminée. En revanche, le point ($g = \sigma = 0, \lambda = 4\epsilon$) est stable ($\delta\dot{g} = -2\epsilon\delta g, \delta\dot{\sigma} = -2\epsilon\delta\sigma, \delta\dot{\lambda} = -\frac{4}{3}\epsilon\delta\lambda$ ) et ceci pour tout $M$. Il correspond au point fixe stable (6.9) du cas de deux modèles couplés. Les deux solutions suivantes ($g = 0, \sigma = \pm\epsilon x, \lambda = 2\epsilon(1 \mp y)$) sont aussi instables. On peut voir ceci en remarquant que

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{\sigma} \\ \delta\dot{\lambda} \end{pmatrix} = \epsilon A_\pm \begin{pmatrix} \delta\sigma \\ \delta\lambda \end{pmatrix} \tag{6.27}$$

avec

$$A_\pm = \mp\frac{1}{2}x \begin{pmatrix} 3(M-4)(M-5) & 2 \\ (M-1)(M-2)(M-3) & -2(M-4)(M-5) \end{pmatrix} \tag{6.28}$$

et donc

$$\det A_\pm = -\frac{1}{4}x^2(6(M-4)^2(M-5)^2 + 2(M-1)(M-2)(M-3)) < 0 \tag{6.29}$$

pour tout $M \geq 4$, ce qui implique qu'il y a deux valeurs propres de signe opposé. Il reste alors les deux dernières solutions, (6.21) et (6.22) pour les valeurs de $M$ mentionnées plus haut. Ces points fixes seront aussi instables. Comme nous ne pouvons pas donner une preuve analytique pour tout $M$, on a calculé numériquement les valeurs propres de la matrice $A_\pm$ définie par

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{g} \\ \delta\dot{\sigma} \\ \delta\dot{\lambda} \end{pmatrix} = \epsilon A_\pm \begin{pmatrix} \delta g \\ \delta\sigma \\ \delta\lambda \end{pmatrix} \tag{6.30}$$

On a obtenu que pour $13 \leq M \leq 1000$, au moins l'une des valeurs propres de $A_-$ est positive, et de même pour $A_+$ pour tout $13 \leq M \leq 66$. Finalement, la dernière étape consiste à vérifier si sous le groupe de renormalisation, le système va atteindre le point fixe (6.18). Ceci a été fait numériquement. Les flots de renormalisation construit pour des valeurs de $M$ entre 4 et 1000 montrent que le système dans chaque cas atteint asymptotiquement le point fixe (6.18). Avant de conclure, il est important de faire quelques commentaires sur le cas $M = 3$. Les équations du groupe de renormalisation dans ce cas sont obtenues à partir de (6.16) en supprimant le terme $\sigma$. On obtient en fait uniquement les points fixes ($g = \lambda = 0$) et ($g = 0, \lambda = 4\epsilon$) avec le même type de stabilité et le comportement de ce système est tout à fait analogue à celui de deux modèles couplés, en donnant notamment des modèles $M_{p-1}$ découplés dans l'infrarouge.

Cette analyse nous montre que le comportement à grandes distances de différents systèmes multicritiques en présence de désordre dépend crucialement du type de désordre et du modèle particulier que nous considérons. En effet, nous avons vu dans (6.1) que les constantes de couplage aléatoires dans ces modèles multicritiques introduisent dans l'hamiltonien des termes de très forte pertinence, ce qui rend très difficile une approche perturbative. En revanche, les résultats exacts du deuxième modèle (6.4) et sa généralisation à plusieurs modèles couplés contredisent l'idée que le désordre pourrait unifier dans une même classe d'universalité des modèles dont les comportements sans désordre seraient très différents.

* *

*

# Chapitre 7

# Impuretés et transitions du premier ordre

Dans la dernière partie de cette thèse, nous allons montrer quel est l'effet du désordre sur des systèmes ayant une transition de phase du premier ordre dans le cas pur. Après avoir évoqué quelques résultats généraux qui sont de grande importance pour les systèmes bi-dimensionnels de ce type, nous étudierons les modèles d'Ashkin-Teller aléatoires, dont l'étude a été initiée par Cardy, et sa généralisation à $N$ modèles de Potts couplés. Bien que le comportement de ces modèles dans le cas pur soit très différent de celui des autres systèmes que nous avons mentionnés ici, les résultats des chapitres antérieurs seront de grande utilité pour l'étude des effets du désordre.

## 7.1 Résultats généraux

Jusqu'à présent nous avons étudié quel était l'effet du désordre dans des systèmes qui ont une transition de phase du deuxième ordre. Dans tous les exemples de modèles avec des constantes de couplage aléatoires, nous avons vu que la singularité liée à la chaleur spécifique au point de transition devenait plus "douce" en présence de désordre. Il serait intéressant de voir maintenant quel sera le comportement d'un système qui a une transition de phase du premier ordre quand on ajoute des impuretés. Il est vrai que le fait de ne pas avoir dans ce cas la notion d'universalité nous rend plus difficile d'essayer de caractériser les changements dûs au désordre tel que le fait, par exemple, le critère de Harris pour les transitions continues. Il existe cependant quelques travaux théoriques et numériques sur ce sujet. Parmi les premiers se trouvent les arguments de Imry et Wortis [56] qui anticipent que la discontinuité dans le paramètre d'ordre dans le cas désordonné doit diminuer sinon disparaître. L'idée est de généraliser les arguments de Harris dans le contexte des transitions du premier ordre. En décomposant notre système dans des amas de sites qui "sont" dans la même phase, on peut définir une température de transition pour chacun de ces amas. En effet, à chaque concentration d'impuretés $p$, on peut associer une température de transition $T_c(p)$. Les fluctuations de concentration $\Delta p$ entre les différents amas donneront alors des fluctuations dans la température de transition qui seront de l'ordre de $\Delta T_c = \left|\frac{dT_c(p)}{dp}\right|\Delta p$. Il est clair que, du fait de ces fluctuations locales de la température de transition, dans un processus où l'on décroît la température, les changements de phases dans les différents secteurs du système se produiront à des moments différents. Il faut toutefois mentionner que, entre deux amas voisins qui se trouvent dans des phases différentes, il se formera une énergie d'interface qui tend à empêcher la formation de fluctuations locales. On a donc un phénomène de compétition entre énergie d'interface et fluctuations dues aux variations de la concentration d'impuretés. De ce fait, on ne peut pas dire que la transition pour les différents amas se fera à la température $T_c(p) + \Delta T_c$. Si $f_1$ et $f_2$ sont respectivement les densités d'énergie libre pour les deux phases du système, la transition dans un amas de taille linéaire $l$ se fera à la température $T = T_c(p) + \Delta T$ à partir de laquelle la différence d'énergie libre entre les deux phases sera suffisante pour compenser le coût en énergie superficielle :

$$l^d(f_1(p + \Delta p, T)) - f_2(p + \Delta p, T)) > \sigma l^\lambda \tag{7.1}$$

où $\sigma$ est une constante proportionnelle à la tension superficielle et $l^\lambda$ est proportionnelle à la taille de l'interface (on a $\lambda < d$ et en général $\lambda = d - 1$). Si $\Delta p$ est grand dans (7.1), la différence en température $\Delta T$ à laquelle cette inégalité sera satisfaite sera grande aussi. Il est clair que pour des amas très grands, du fait que $d > \lambda$, le terme provenant des énergies libres l'emportera plus rapidement sur l'énergie de surface, et la transition se fera donc pour des $\Delta T$ plus grands. Mais pour des amas grands, la probabilité d'avoir un $\Delta p$ grand est très faible. En effet, la probabilité d'avoir un écart en concentration $\Delta p$ dans un réseau de $N$ sites est de l'ordre de :

$$P(\Delta p) \sim \left(\frac{N}{2\pi p(1-p)}\right)^{1/2} exp\left(-N(\Delta p)^2/2p(1-p)\right) \tag{7.2}$$

Il y aura donc une faible quantité d'amas très grands qui changeront de phase avant le point de transition global $T_c(p)$ et de la même façon, d'autres qui auront leur transition postérieure à ce point. Ceci fera que la discontinuité présente à $T_c(p)$ sera moindre car une partie des amas qui étaient mis à contribution pour produire le saut dans le paramètre d'ordre ne sera plus présente. Si les caractéristiques du système sont telles que l'inégalité (7.1) est satisfaite pour des tailles d'amas $l$ moins grandes (et donc des $\Delta p$ probables plus grands), ce phénomène se produira aussi pour une quantité d'amas plus grande, ce qui réduira de plus en plus la discontinuité au point de transition. Ces arguments ne nous permettent pas de dire si la transition deviendra continue ou restera du premier ordre, mais nous pouvons anticiper déjà que dans tous les cas la discontinuité sera moindre en présence de désordre.

Il existe cependant un théorème [1] très général sur les transitions de phases en présence de désordre pour des systèmes en dimension $d \leq 2$. Nous ne prétendons pas donner ici une preuve détaillée du théorème de Aizenman et Wehr, mais nous limiter à donner les conditions et conséquences de ce résultat dans la suite. Ce théorème s'applique à différents types de modèles :

– Le modèle d'Ising en champ aléatoire dont l'hamiltonien est :

$$H(\sigma) = -\frac{1}{2}\sum_{x,y} J_{x-y}\sigma_x\sigma_y - \sum_x (h + \varepsilon\eta_x)\sigma_x \tag{7.3}$$

Cet hamiltonien peut inclure des interactions à longue portée avec $J_{x-y} \leq const\ |x-y|^{-\alpha}(\alpha > d)$.

- Le modèle de Potts à $q$ états avec des constantes de couplages aléatoires données par :

$$H(\sigma) = -\frac{1}{2}\sum_{x,y}(J_{x-y} - \varepsilon\eta_{x,y})\,\delta_{\sigma_x,\sigma_y} \tag{7.4}$$

où $q$ est générique (et en particulier $q > 4$) et les interactions peuvent être aussi à longue portée avec le même type de conditions que pour le cas antérieur.

- Le modèle de verre de spins donné par :

$$H(\sigma) = -\frac{1}{2}\sum_{|x-y|=1}\varepsilon\eta_{x,y}\sigma_x\sigma_y \tag{7.5}$$

Les interactions sont restreintes maintenant aux plus proches voisins, mais la constante de couplage entre spins peut prendre des signes différents.

Dans chacun des cas, $\eta$ représente le terme aléatoire et $\varepsilon$ est une constante qui mesure l'intensité du désordre. Si la distribution de probabilité pour $\eta$ satisfait les conditions suivantes :

$$\overline{\eta} = 0\ ;\ \overline{\eta^2} = 1\ ;\ \overline{e^{s\eta}} < \infty \tag{7.6}$$

pour tout $s$ réel, alors, pour tout $\varepsilon$ non nul, le système n'aura pas de transition de premier ordre. Ce résultat est l'un des plus importants dans l'étude des transitions de phases des systèmes bidimensionnels désordonnés. En effet, la forme que peut avoir l'hamiltonien pour que le théorème s'applique est suffisamment générale pour couvrir une grande variété de systèmes différents. Ceci avait été anticipé dans des travaux antérieurs basés sur des calculs du groupe de renormalisation [8]. Il existe une simulation numérique récente [16] sur le modèle de Potts à huit états avec des constantes de couplages aléatoires. Ces résultats confirment le comportement prédit par le théorème, mais semblent montrer en plus que la transition continue induite par le désordre est du type Ising, avec $\gamma/\nu \sim 1.75$, $\beta/\nu \sim 0.125$ et $\alpha = 0$. Il est clair que si le théorème de Aizenman et Wehr laisse prévoir que la transition en présence de désordre sera continue, nous ne pouvons pas savoir a priori quelle sera la nouvelle classe d'universalité du système. Dans les sections suivantes nous allons donner des exemple précis de transitions de phase qui deviennent continues en présence de désordre et essayer d'identifier les nouvelles classes d'universalité de ces modèles avec désordre.

## 7.2 Le modèle $N$-Ashkin-Teller aléatoire

Dans cette section et la suivante nous allons traiter des modèles statistiques dont la transition de phase a des propriétés très intéressantes. En général, dans les systèmes qui ont une transition de phase, un simple calcul en champ moyen nous permet d'anticiper la nature de la transition et notamment l'ordre qu'elle aura. En calculant l'énergie libre en fonction de la température on peut aussi, dans le cas d'une transition du premier ordre, obtenir la chaleur latente ainsi que la discontinuité dans le paramètre d'ordre au point critique. Il existe cependant des systèmes dont les propriétés à l'ordre des arbres (champ moyen) semblent indiquer que la transition serait continue, mais les fluctuations thermiques changent radicalement le comportement à grandes échelles et rendent la transition discontinue. Dans cette section nous allons étudier, suivant les lignes de Cardy [14], quel effet introduit le désordre dans le modèle d'Ashkin-Teller à $N$ couleurs. Nous allons pour cela d'abord résumer brièvement les propriétés du modèle pur.

Considérons $N$ modèles d'Ising couplés de la manière suivante ; l'hamiltonien total est donné par :

$$H = \beta \sum_{<i,j>} \left( \sum_{a=1}^{N} \sigma_a(i)\sigma_a(j) - g \left( \sum_{a=1}^{N} \sigma_a(i)\sigma_a(j) \right)^2 \right) \tag{7.7}$$

où la somme sur $< i, j >$ se fait uniquement entre des sites voisins. Si $N = 2$, le modèle est intégrable par la correspondance avec le modèle de Baxter [3]. Le cas $N > 2$ a été étudié dans un premier temps dans une approche perturbative pour un couplage faible [45]. Ces résultats montrent que pour $g > 0$ la transition est du deuxième ordre et pour $g < 0$ la transition devient du premier ordre. On peut anticiper ceci en examinant l'équation du groupe de renormalisation pour $g$ :

$$dg/dl = 4(N-2)g^2 + \cdots \tag{7.8}$$

avec $l$ le paramètre d'échelle. On voit alors que, à une boucle, si $g < 0$, le terme de couplage est marginal non pertinent et la transition est continue et du type Ising (avec des corrections logarithmiques) en revanche, le cas $g > 0$ nous donne un terme marginal pertinant qui donnera lieu à une transition discontinue. En effet, une analyse de Fradkin dans la limite $N \to \infty$ [39] (en remplaçant $g$ par $g/N$), confirme ce résultat de couplage faible. Shankar [93] a montré postérieurement que dans le régime $g > 0$ ce modèle correspond à celui de Gross-Neveu. L'origine de la transition de premier ordre vient du fait que pour $N > 2$, ce modèle nous conduit dans un régime de couplage fort où les excitations sont massives, donnant lieu à des longueurs de corrélation finies. L'hamiltonien précédent peut s'écrire sous la forme :

$$H = H_c + \sum_{\vec{r}} \left( \tau \sum_{a=1}^{N} \varepsilon_a(\vec{r}) - g \sum_{a \neq b}^{N} \varepsilon_a(\vec{r})\varepsilon_b(\vec{r}) \right) \tag{7.9}$$

où l'on a introduit la densité d'énergie $\varepsilon(\vec{r})$ pour chacune des copies du système. Le terme $\tau$ est proportionnel à la déviation par rapport à la température critique et $H_c$ correspond à la somme des hamiltoniens des modèles d'Ising à la température critique.

Introduisons maintenant du désordre dans (7.9) en considérant des constantes de couplage aléatoires. Ceci introduit dans la masse un terme supplémentaire aléatoire $\tau \to \tau + \delta\tau(x)$ avec $\overline{\delta\tau(x)} = 0$ et $\overline{\delta\tau(x)\delta\tau(x')} = \Delta\delta(x - x')$. En introduisant $n$

répliques $i = 1, \ldots, n$ et en moyennant sur le désordre on obtient l'hamiltonien effectif répliqué :

$$H = \sum_i^n H_c^i + \sum_{\vec{r}} \left( \tau \sum_{a,i} \varepsilon_a^i(\vec{r}) - g \sum_{a \neq b, i} \varepsilon_a^i(\vec{r}) \varepsilon_b^i(\vec{r}) - \Delta \sum_{a,b,i,j} \varepsilon_a^i(\vec{r}) \varepsilon_b^j(\vec{r}) \right) \tag{7.10}$$

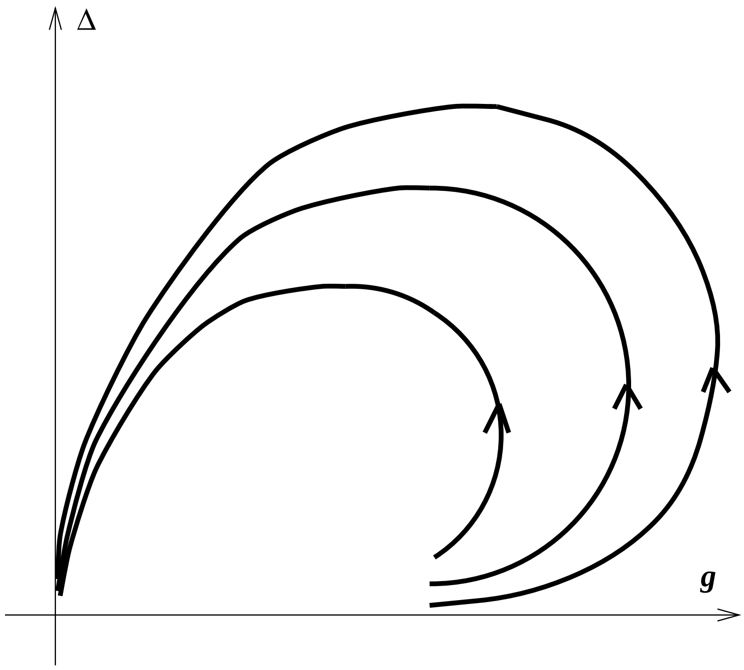
où les indices $a$, $b$ vont de 1 à $N > 2$ et $i$, $j$ de 1 à $n$ (que l'on fera tendre vers 0 dans la limite gelée). Cet hamiltonien est très similaire dans sa forme à celui que nous avons étudié pour les modèles d'Ising et de Potts avec des constantes de couplage aléatoires dans la section (5.1). On peut très facilement étendre les résultats de cette section pour obtenir les équations du groupe de renormalisation correspondant à (7.10), à une boucle dans la limite $n \to 0$ [14] :

$$\begin{aligned} dg/dl &= 4(N-2)g^2 - 8g\Delta + \cdots \\ d\Delta/dl &= -8\Delta^2 + 8(N-1)g\Delta + \cdots \\ dt/dl &= t\,(1 - 4\Delta + 4(N-1)g) + \cdots \end{aligned} \tag{7.11}$$

Les trajectoires du flot de renormalisation satisfont à la relation suivante :

$$g = const.(\Delta/g)^{(n-2)/N)} e^{-2\Delta/Ng} \tag{7.12}$$

que l'on peut représenter schématiquement sur la figure suivante :




On peut espérer que les corrections aux équations du groupe de renormalisation provenant de termes supérieurs ne changeront pas le comportement qualitatif de ce comportement pour les trajectoires. On voit que le flot pousse les trajectoires dans un premier temps loin du point fixe ultraviolet, ce qui semblerait indiquer que l'on se dirige vers un régime de couplage fort (qui donnerait peut-être lieu à une théorie massive) où l'approche perturbative n'est plus valable. Cependant, pour tout désordre non nul ($\Delta \neq 0$), ces trajectoires se retournent pour se diriger finalement vers le point fixe trivial $g = \Delta = 0$. Ce phénomène donne lieu à une transition du type Ising (avec $\alpha = 0$) avec tout au plus des corrections logarithmiques. Avec les résultats numériques obtenus dans [16], ce modèle constitue un deuxième exemple de système où le désordre induit une transition du type Ising. Il est intéressant alors de voir si pour une généralisation simple de ce modèle que nous allons donner dans la section suivante ce phénomène persiste.

## 7.3 Généralisation à $N$ modèles de Potts couplés

Le modèle que nous avons étudié dans la section précédente peut être généralisé très simplement [88]. En effet, au lieu de $N$ modèles d'Ising couplés, considérons maintenant $N$ modèles de Potts à $q \leq 4$ états couplés par leurs densités d'énergie. En particulier, le cas $N = 2$ est intégrable [101] sans la présence de désordre. Dans ce cas il a été exactement établi que la théorie résultante est massive. Pour un $N$ générique, les équations du groupe de renormalisation du modèle pur sont très similaires à celle du modèle de Ashkin-Teller de la section précédente :

$$dg/dl = \epsilon g + (N-2)g^2 + \cdots$$

où maintenant la dimension de l'opérateur d'énergie est différente (voir la section (5.1)). Ici, par commodité, on a redéfinit $\epsilon$ comme $2-2\Delta_\varepsilon$ (ce qui introduit un facteur de $-3$ par rapport à la notation de (5.1)). Pour $g$ positif, le flot de renormalisation nous mène aussi au-delà de la région perturbative. Bien que seul dans le cas $N = 2$ la création d'une masse soit établie, la similitude de ce modèle avec celui de la section précédente nous permet de croire que ce régime non perturbatif sera celui d'une transition de premier ordre. En présence de désordre, après usage de la méthode des répliques, l'hamiltonien sera donc identique à (7.10). En utilisant les mêmes méthodes que dans la section (5.1), on obtient facilement les équations du groupe de renormalisation à deux boucles pour les constantes de couplage $g$ et $\Delta$ :

$$\begin{aligned} dg/dl &= \epsilon g + (N-2)g^2 - g\Delta - (N-2)g^3 - (2N-5)g^2\Delta + 4g\Delta + \cdots \\ d\Delta/dl &= \epsilon\Delta - 2\Delta^2 + 2(N-1)g\Delta + 2\Delta^3 - (N-1)g^2\Delta - 2(N-1)\Delta^2 g + \cdots \end{aligned} \quad (7.13)$$

où l'on a pris la limite gelée $n \to 0$ et par simplicité nous avons fait le changement $g \to 4\pi g$, $\Delta \to 4\pi\Delta$. La présence d'un $\epsilon$ non nul dans ces équations introduit de nouveaux points fixes non triviaux que l'on obtient en imposant $\dot{g} = \dot{\Delta} = 0$ :

$$g = 0 \quad ; \quad \Delta = 0 \quad (7.14)$$

$$g = -\frac{\epsilon}{(N-2)} + \frac{\epsilon^2}{(N-2)^2} + O(\epsilon^3) \quad ; \quad \Delta = 0 \quad (7.15)$$

$$g = 0 \quad ; \quad \Delta = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{4} + O(\epsilon^3) \quad (7.16)$$

$$g = \frac{\epsilon^2}{2N} + O(\epsilon^3) \quad ; \quad \Delta = \frac{\epsilon}{2} + \frac{(3N-2)\epsilon^2}{4N} + O(\epsilon^3) \tag{7.17}$$

Les autres points fixes présents dans (7.13) sont d'ordre constant et donc au-delà du régime perturbatif. Les points fixes (7.15) (pour $N > 2$, $g < 0$) et (7.16) sont ceux présents dans le cas de $N$ modèles couplés sans désordre et de un modèle désordonné respectivement. Il y a cependant un nouveau point fixe (7.17) qui apparaît et qui ne peut être vu dans le calcul à une boucle. Comme il est usuel, nous pouvons étudier la stabilité de chacun de ces points fixes en ré-exprimant (7.13) autour des solutions ci-dessus $g = g_c + \delta g$, $\Delta = \Delta_c + \delta\Delta$ et en ne gardant que le premier ordre non nul en $\epsilon$. Ceci nous donnera pour chaque cas un système linéaire:

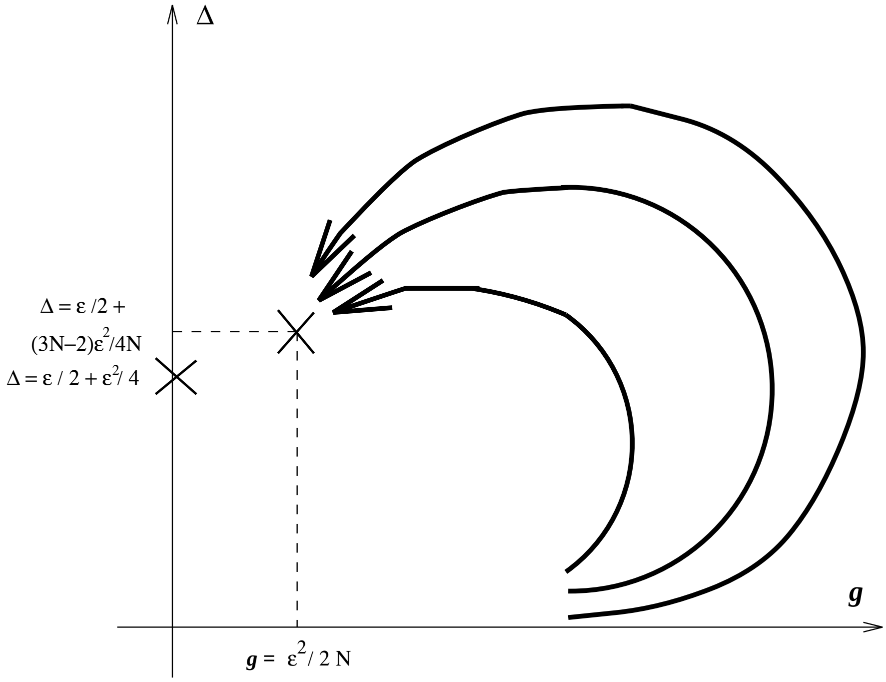
$$\begin{pmatrix} \delta\dot{g} \\ \delta\dot{\Delta} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta g \\ \delta\Delta \end{pmatrix}$$

Le calcul des valeurs propres de la matrice $A$ pour chacun des cas nous indique que (7.14) est instable, (7.15) et (7.17) sont stables alors que (7.16) n'est stable que si $g = 0$. Ce résultat nous dit que le point fixe de la section (5.2) pour un seul modèle ne peut être atteint si un petit couplage est ajouté entre les différents modèles. Pour étudier le flot de (7.13), il est utile dans une première étape de ne garder que les deux premiers ordres en $\epsilon$. Dans ce cas, on peut montrer que pour un $\epsilon$ générique et pour des conditions initiales $\Delta(0)$ , $g(0) > 0$ la solution est donnée par

$$\Delta(l) = \epsilon\tau\Delta_0(\tau) \quad ; \quad g(l) = \epsilon\tau g_0(\tau) \tag{7.18}$$

où $\tau = e^{\epsilon l}/\epsilon$, $l$ est le paramètre d'échelle dans le groupe de renormalisation et $\Delta_0$, $g_0$ sont les solutions de (7.11). En analysant en détail (7.12), on peut voir que pour $\tau \to \infty$, on a $g_0(\tau) << \Delta_0(\tau)$ et $\Delta_0(\tau) \sim \frac{1}{2\tau}$. Les trajectoires des constantes de couplage pour $\epsilon$ générique vont donc se diriger vers la région $g(l) << \Delta(l)$ et $\Delta(l) \sim \frac{\epsilon}{2}$. Celle-ci est précisément la région où les corrections de troisième ordre dans (7.13) nous indiquent que les trajectoires atteindront asymptotiquement le point fixe

(7.17), ce qui est représenté schématiquement sur la figure suivante :




Du fait que la différence entre les points fixes (7.17) et (7.16) est d'ordre $\epsilon^2$, nous ne pouvons voir à cet ordre en perturbation de différence par rapport à (5.38) pour l'exposant de l'opérateur de spin. En revanche, pour l'opérateur d'énergie, l'exposant associé à ce nouveau point fixe sera jusqu'au deuxième ordre donné par :

$$\begin{aligned} \Delta'_\varepsilon &= \Delta_\varepsilon + \Delta_c - (N-1)g_c - \frac{\Delta_c^2}{2} + \cdots \\ &= \Delta_\varepsilon + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{8} + O(\epsilon^3) \end{aligned} \tag{7.19}$$

ce qui donne le résultat remarquable (à cet ordre en perturbation) que la valeur de cet exposant est la même pour $N$ générique que pour $N = 1$. On remarque cependant que les nouveaux exposants de spin et d'énergie sont tels que la transition n'est plus du type Ising (avec $\alpha = 0$), contrairement à ce que l'on a vu dans le cas précédent. Ce qui est cependant clair, c'est que la transition devient continue avec des exposants que l'on peut calculer perturbativement.

* *

*

# Chapitre 8

# Conclusion

Tout au long de ce travail, nous avons vu à travers quelques exemples précis quel effet pouvaient avoir les impuretés dans des systèmes bi-dimensionnels. Nous nous sommes particulièrement intéressés aux cas où le désordre était faible, de façon à être en mesure de donner une analyse perturbative. Il est clair que des modèles qui présentent une forme de désordre que l'on peut appeler fort, et dont les exemples plus connus sont les systèmes de verres de spins ou le modèle de McCoy et Wu, ne peuvent être décrits par cette approche. Malgré les progrès très importants qui ont été faits ces dernières années, plusieurs questions restent ouvertes dans ce domaine. En particulier, l'existence de phases de Griffiths dans des modèles de chaînes quantiques à $T = 0$ ne semble pas être présente dans les systèmes que nous avons étudiés. Malgré quelques suggestions dans le cas du modèle d'Ising avec des constantes de couplage aléatoires [109], les différentes méthodes évoquées dans ce travail (e. g. méthode des répliques, supersymétrique et analyse perturbative directe) ne donnent aucun résultat dans ce sens. Tel est le cas aussi des diverses simulations numériques faites sur ces modèles. D'autre part, plusieurs études théoriques et numériques [14, 17] semblent montrer qu'une grande quantité de systèmes différents ont une transition du type Ising en présence de désordre. Il serait tentant d'imaginer que le désordre (faible) puisse unifier dans une même classe d'universalité plusieurs systèmes a priori très différents, tel qu'il a été suggéré par Cardy. Cependant, les résultats obtenus ici pour le modèle de Potts aussi bien que pour les systèmes multicritiques (bien que dans ce dernier cas le désordre intervient d'une manière différente) montrent le contraire.

Il est clair que pour donner des réponses définitives à tous ces problèmes, des résultats au-delà de l'analyse perturbative seront les bien-venus. Dans ce contexte, le calcul de la matrice $S$ dans la méthode des répliques ou la formulation supersymétrique du modèle d'Ising constituent un premier pas. L'élargissement de nos connaissances dans le domaine des théories conformes semble indispensable pour cela. De même, des simulations numériques pour des tailles de réseaux plus importantes seront de grande utilité ; les effets de taille finie, déjà importants dans les simulations des systèmes purs, deviennent un obstacle presque insurmontable à l'heure actuelle. En effet, nous avons vu que les échelles de distances pour lesquelles le système entre dans le “régime désordonné” sont d'autant plus grandes que le désordre est faible. De ce fait, dans les tailles de réseaux que l'on considère actuellement (jusqu'à $1000 \times 1000$), on est contraint d'employer des amplitudes de désordre grandes, au risque sinon d'être dans un régime intermédiaire, où les exposants effectifs que l'on mesurerait seraient très difficiles à extrapoler. Une plus grande précision dans les résultats numériques permettrait aussi, dans le cas par exemple du modèle de Potts, de mettre en évidence s'il y a ou pas le phénomène de brisure de la symétrie des répliques que l'on rencontre dans l'étude théorique. En fait, l'étude des systèmes statistiques bi-dimensionnels est l'un des sujets à l'heure actuelle où la confrontation entre résultats théoriques d'un coté et numériques ou expérimentaux de l'autre est la plus riche.

* *

*

# Annexe A

## Renormalisation-group calculation of correlation functions for the 2D random bond Ising and Potts models

Nuclear Physics **B455** (1995) 701-723.

# Annexe B

## Spin-spin critical point correlation functions for the 2D random bond Ising and Potts models

Physics Letters **B 347** (1995) 113-119.

# Annexe C

## Renormalization Group Solution for the Two-Dimensional Random Bond Potts Model with Broken Replica Symmetry

EUROPHYSICS LETTERS **32** (5) (1995) 425-429.

# Annexe D

**Effect of randomness in many coupled Potts models**

EUROPHYSICS LETTERS **35** (4) (1996) 283-288.

# Annexe E

## Randomly coupled minimal models

PAR–LPTHE 95/63 (Physics Letters **B**)

# Bibliographie

[1] M. Aizenman et J. Wehr, *Commun. Math. Phys.* **130**, 489 (1990).

[2] V. B. Andreichenko, Vl. S. Dotsenko, W. Selke et J. -S. Wang, *Nucl. Phys.* **B344**, 531 (1990).

[3] R. J. Baxter, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 832 (1971); L. P. Kadanoff et F. J. Wegner, *Phys. Rev.* **B 4**, 3989 (1971); F. Y. Wu *Phys. Rev.* **B 4**, 3212 (1971).

[4] R. J. Baxter, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **6**, L445 (1973).

[5] R. J. Baxter, *J. Phys. A: Math. Gen.* **13**, L61 (1980).

[6] R. J. Baxter, S. B. Kelland et F. Y. Wu, *J. Phys. A: Math. Gen.* **9**, 397 (1976).

[7] A. A. Belavin, A. M. Polyakov et A. B. Zamolodchikov, *Nuc. Phys.* **B 241**, 333 (1984), *J. Statist. Phys.* **34**, 763 (1984).

[8] A. N. Berker, S. Oslund et F. A. Putnam, *Phys. Rev.* **B17**, 3650 (1978).

[9] D. Bernard, *Nucl. Phys.* **B441**, 471 (1995).

[10] D. Bernard, dans 1995 Cargèse Summer School, hep-th@xxx.lanl.gov No. 9509137.

[11] K. Binder et A. P. Young, *Rev. Mod. Phys.* **58**, 801 (1986).

[12] J. Cardy, dans *Fields, Strings and Critical Phenomena,* (1988), Les Houches Scool, E. Brézin et J. Zinn-Justin, eds., Elsevier Science Publ., Amsterdam (1989).

[13] J. Cardy, dans *Phase Transitions and critical Phenomena,* **11**, C. Domb et J. L. Lebowitz, eds.,Academic Press, New York (1986).

[14] J. Cardy, cond-mat@xxx.lanl.gov No. 9511112.

[15] J. L. Cardy et S. Ostlund, *Phys. Rev.* **B 25**, 6899 (1982).

[16] S. Chen, A. M. Ferrenberg et D. P. Landau, *Phys. Rev. E* **52**, 1377 (1995).

[17] E. Domany et S. Wiseman, *Phys. Rev.* **E 51**, 3074 (1995).

[18] C. Domb, *J. Phys. C* **5**, 1399 (1972).

[19] Vik. S. Dotsenko, A. B. Harris, D. Sherrington et R. B. Stinchcombe, cond-mat/9412106.

[20] Vik. Dotsenko, S. Franz et M. Mézard, *J. Phys.* **A 27**, 2351 (1994).

[21] Vik. Dotsenko, *An Introduction to the Theory of Spin Glasses and Neural Networks* **World Scientific**, (1994).

[22] Vl. S. Dotsenko et A. M. Polyakov, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **16**, 171 (1988).

[23] Vik. S. Dotsenko et Vl. S. Dotsenko, *Sov. Phys. JETP Lett.* **33**, 37 (1981); *Adv. Phys.* **32**, 129 (1983).

[24] Vik. S. Dotsenko et Vl. S. Dotsenko, *J. Phys. A* **17**, L301 (1984).

[25] Vl. S. Dotsenko et V. B. Andreichenko, *Europhys. Lett.* **11**, 301 (1990); J. -S. Wang, W. Selke, Vl. S. Dotsenko et V. B. Andreichenko, *Physica A* **164**, 221 (1990).

[26] Vl. S. Dotsenko et V. A. Fateev, *Nucl. Phys.* **B240**, 312 (1984), **B251**, 691 (1985).

[27] Vl. S. Dotsenko, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **16**, 123 (1988).

[28] Vl. S. Dotsenko, *Nucl. Phys.* **B235**, 54 (1984), *J. Statist. Phys.* **34**, 781 (1984).

[29] Vl. S. Dotsenko, *Nucl. Phys.* **B340**, 684 (1989).

[30] Vl. S. Dotsenko, M. Picco et P. Pujol, *Phys. Lett.* **B347**, 113 (1995); *Nucl. Phys.* **B455**, 701 (1995); *Nucl. Phys.* **B** (Proc. Suppl.) 45A, 145 (1996).

[31] Vik. S. Dotsenko, Vl. S. Dotsenko, M. Picco et P. Pujol, *Europhys. Lett.* **32**, 425 (1995).

[32] Vl. S. Dotsenko, M. Picco et P. Pujol, hep-th/9512087 .

[33] B. Duplantier et A. W. W. Ludwig, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 247 (1991).

[34] S. F. Edwards et P. W. Anderson, *J. Phys.* **F 5**, 965 (1975).

[35] K. Efetov, *Adv. Phys.* **32**, 53 (1983).

[36] V. J. Emery, *Phys. Rev.* **B 11**, 239 (1975).

[37] B. L. Feigen et D. B. Fuks, *Funktz. Analiz.* **16**, 47 (1982).

[38] D. S. Fisher, *Phys. Rev.* **B51**, 6411 (1995).

[39] E. Fradkin, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 1967 (1984).

[40] D. Friedan, Z. Qiu et S. Shenker, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1575 (1984).

[41] P. G. De Gennes, *Phys. Lett.* **A 38**, 339 (1972).

[42] T. Giamarchi et P. Le Doussal, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1530 (1994).

[43] T. Giamarchi et P. Le Doussal, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 606 (1995).

[44] P. Ginsparg, dans *Fields, Strings and Critical Phenomena,* (1988), Les Houches Scool, E. Brézin et J. Zinn-Justin, eds., Elsevier Science Publ., Amsterdam (1989).

[45] G. Grest et M. Widom, *Phys. Rev. B* **24**, 6508 (1981).

[46] R. B. Griffiths, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 17 (1969).

[47] G. Grinstein et A. Luther, *Phys. Rev.* **B13**, 1329 (1976).

[48] D. J. Gross et A. Neveu, *Phys. Rev. D* **10**, 3235 (1974).

[49] M. Hagen, R. A. Cowley R. M. Nicklow et H. Ikeda, *J. Phys. Rev.* **B36**, 401 (1987).

[50] A. B. Harris et T. C. Lubensky, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1540 (1974).

[51] A. B. Harris, *J. Phys. C* **7**, 1671 (1974).

[52] H. O. Heuer, *Europhys. Lett.* **16**, 503 (1991); *Phys. Rev.* **B45**, 5691 (1992).

[53] K. Hui et N. Berker, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2507 (1989); **63**, 2433 (1989).

[54] D. A. Huse, *Phys. Rev.* **B 30**, 3908 (1984).

[55] H. Ikeda, *J. Phys. Soc. Jpn.* **50**, 3215 (1981).

[56] Y. Imry et M. Wortis, *Phys. Rev. B* **19**, 3580 (1979).

[57] C. Itzykson et J. M. Drouffe, *Théorie statistique des champs* Vol. 1 et 2,**Inter-Editions** 1989.

[58] V. C. Kac, *Lecture Notes in Phys.* **94**, 441 (1979).

[59] D. E. Khmelnitskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **68**, 1960 (1975) [Sov. Phys. **JETP 41** 981 (1975)].

[60] J. K. Kim et A. Patrascioiu, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2785 (1994).

[61] S. E. Korshunov, *Phys. Rev.* **B 48**, 3969 (1993).

[62] A. L. Korzhenevskii, A. A. Luzhkov et W. Schirmacher, *Phys. Rev.* **B50**, 3661 (1994).

[63] A. I. Larkin et D. E. Khmelnitskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **56**, 2087 (1969) [Sov. Phys. **JETP 29** 1123 (1969)].

[64] L. Longa, *J. Phys. A* **176**, 631 (1982).

[65] T. C. Lubensky, *Dans "I11-Condensed Matter"* (R. Balian, R. Maynard et G. Toulouse, eds.), North Holland, (1974).

[66] A. W. W. Ludwig, *Nucl. Phys.* **B330**, 639 (1990), *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2388 (1988)

[67] A. W. W. Ludwig, *Nucl. Phys.* **B285**, 97 (1987).

[68] A. W. W. Ludwig et J. L. Cardy *Nucl. Phys.* **B285**, 687 (1987).

[69] A. W. W. Ludwig, M. Fisher, R. Shankar et G. Grinstein, *Phys. Rev.* **B50**, 7526 (1994).

[70] B. M. McCoy et T. T. Wu, *The Two-Dimensional Ising Model*, (Harvard University Press), (1973).

[71] B. M. McCoy et T. T. Wu, *Phys. Rev.* **176**, 631 (1968).

[72] M. Mézard, G. Parisi et M. Virasoro, *Spin-Glass Theory and Beyond* **World Scientific**, (1987).

[73] M. Mézard et G. Parisi, *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**, L1229 (1990).

[74] M. Mézard et G. Parisi, *J. Phys. A I* **1**, 809 (1991).

[75] M. Mézard et A. P. Young, *Europhys. Lett.* **18**, 653 (1992).

[76] S. Mukherji et S. M. Bhattacharjee, *Phys. Rev. E* **52**, 1930 (1995).

[77] G. Mussardo et P. Simonetti *Phys. Lett.* **B351**, 515 (1995).

[78] B. Nienhuis, *J. Statist. Phys.* **34**, 731 (1984).

[79] L. Onsager, *Phys. Rev.* **65**, 117 (1944).

[80] H. Orland et Y. Shapir, *Europhys. Lett.* **30**, 103 (1995).

[81] G. Parisi et N. Sourlas, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 744 (1979).

[82] A. Z. Patashinskii et V. L. Pokrovskii, *Fluctuation Theory of Phase transitions,* (1979), Pergamon, Oxford.

[83] R. W. Penney, T. Coolen et D. Sherrington, *J. Phys.* **A 26**, 3681 (1993).

[84] M. Picco, cond-mat/9507025

[85] A. M. Polyakov, *JETP Lett.* **12**, 381 (1970).

[86] A. M. Polyakov, *Nuc. Phys.* **B 396**, 367 (1993).

[87] R. B. Potts, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **48**, 106 (1952).

[88] P. Pujol, *Europhys. Lett.* **35**, 283 (1996).

[89] D. C. Rapaport, *J. Phys. C* **5**, 1830 (1972).

[90] E. I. Shakhnovich et A. M. Gutin, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, 1647 (1989).

[91] B. N. Shalaev, *Sov. Phys. Solid State* **26**, 1811 (1984).

[92] B. N. Shalaev, *Phys. Reports* **237**, 129 (1994).

[93] R. Shankar, *Phys. Rev. Lett.* **5**, 453 (1985).

[94] R. Shankar, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2466 (1987).

[95] D. S. Sherrington et S. Kirkpatrick, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1972 (1975).

[96] R. B. Stinchcombe, *Phase Transition and Critical Phenomena* Vol. 7 *ed. Domb et Lebowitz* 1983.

[97] E. Stoll et T. Schneider, *J. Phys.* **A9**, L 67 (1976).

[98] A. L. Talapov et L. N. Shchur, *J. Phys.; Condens. Matter* **6**, 8295 (1994).

[99] A. L. Talapov et L. N. Shchur, hep-lat@xxx.lanl.gov No. 9404001

[100] H. N. V. Temperley et E. H. Lieb, *Proc. Roy. Soc. London A.* **332**, 251 (1971).

[101] I. Vaysburd, *Nucl. Phys.* **B 446**, 387 (1995).

[102] M. A. Virasoro, *Phys. Rev. D* **1**, 2933 (1970).

[103] P. G. Watson, *J. Phys. C* **3**, L25 (1970).

[104] A. Weinrib et B. I. Halperin, *Phys. Rev.* **B27**, 413 (1983).

[105] W. Wetzel, *Phys. Rev. Lett.* **153B**, 297 (1985).

[106] K. G. Wilson et J. Kogut, *Phys. Rep.* **12**, 75 (1974).

[107] A. B. Zamolodchikov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **46**, 6 (1987). *Advanced Studies in Pure Mathematics* **19**, 641 (1989).

[108] A. B. Zamolodchikov et A. B. Zamolodchikov *Annals of Physics* **120**, 253 (1979).

[109] K. Ziegler, *Nucl. Phys.* **B344**, 499 (1990); *Europhys. Lett.* **14**,415 (1991).

[110] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena,* (1989), Oxford University Press, New York.