



HAL
open science

Transformations hyperboliques et courbes algébriques en genre 2 et 3

Aline Aigon

► **To cite this version:**

Aline Aigon. Transformations hyperboliques et courbes algébriques en genre 2 et 3. Mathématiques [math]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2001. Français. NNT : . tel-00001154

HAL Id: tel-00001154

<https://theses.hal.science/tel-00001154>

Submitted on 27 Feb 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ACADÉMIE DE MONTPELLIER
UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
- SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC -

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de
DOCTEUR
de l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc

Spécialité : Mathématiques

Transformations Hyperboliques et Courbes Algébriques en genre 2 et 3.

présentée et soutenue publiquement le 19 septembre 2001
par

Aline AIGON

Rapporteurs :

M. Peter BUSER	E.P.F.L, Lausanne
M. Bernard MASKIT	S.U.N.Y, Stony Brook

Composition du Jury

M. José BERTIN	Institut Joseph Fourier, Grenoble	Président
M. Peter BUSER	E.P.F.L, Lausanne	Rapporteur
M. Jacques LAFONTAINE	Université Montpellier II	Examineur
M. Robert SILHOL	Université Montpellier II	Directeur

Voici enfin venu le moment de remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué au bon déroulement de cette thèse. La tâche est délicate ; il est en effet bien difficile d'exprimer à chacun sa reconnaissance sans être redondant ou convenu. Ce manque d'originalité me sera, je l'espère, pardonné.

J'ai eu la chance d'être dirigée dans ce travail par Robert Silhol. Je ne saurais assez le remercier pour sa disponibilité et sa patience incroyables, pour la confiance qu'il m'a témoignée. Je reste également très impressionnée par sa culture et son approche des mathématiques, par la passion, parfois même le sentiment d'urgence qui l'anime.

Je remercie Peter Buser pour la minutie et la patience avec laquelle il a rapporté cette thèse. J'en suis très honorée. J'ai également été très sensible à la chaleur de son accueil à Lausanne en Mars 2001.

Je remercie Bernard Maskit de m'avoir fait le très grand honneur d'accepter d'être rapporteur de ce travail.

Je remercie vivement José Bertin d'avoir accepté de participer au jury et de l'avoir présidé avec efficacité et bonne humeur.

Mes tous premiers pas dans la géométrie hyperbolique ont été guidés par Jacques Lafontaine, sa présence dans le jury me ravit.

Daniel Guin a eu une grande influence sur moi, il est pour beaucoup dans mon désir de faire de la recherche. Je suis touchée et honorée de l'intérêt et l'amitié qu'il m'a toujours manifestés.

Lors de mon séjour à Lausanne en Mars 2001, Klaus-Dietter Semmler m'a fait une suggestion qui m'a été particulièrement utile, je lui en suis très reconnaissante.

J'entends encore le "oui" long et appuyé de Marc Herzlich lorsque je frappais à sa porte. Ses conseils et son aide mathématiques ou non, son écoute et ses encouragements m'ont été utiles et précieux. Merci !

Je tiens à accorder ici une place spéciale à mes deux compagnes depuis le D.E.A Rachel Taillefer et Elísabet Gunnlaugsdóttir. Nous avons partagé les questionnements des thésardes, sommes passées par les mêmes périodes de doutes ; notre soutien réciproque n'est certainement pas étranger au fait que ce travail ait atteint son terme. Rachel, que j'ai découverte en D.E.A est la patience même. Elísabet n'est que douceur et attention. Je tiens aussi à lui manifester ici mon admiration pour avoir su faire coïncider ses vies de thésarde et de maman.

Un grand merci à Helene Davaux et Pierre Mounoud pour leur aide à la préparation de la soutenance.

Merci aux "habitants du rez-de-chaussée" Rachel, Elísabet, Stéphane Sabourau, Stefan Meden, Hélène, Yves, Philippe Malbos, Claudia, Vincent, Stéphane Gaussent, Pierre, Sébastien, Philippe Monnier, de m'avoir supporté pendant ces années et surtout d'avoir habité le rez-de-chaussée en même temps que moi.

Merci à Pierrette Arnaud et Bernadette Lacan pour leur disponibilité, leur gentillesse et leur efficacité.

Merci à Matthieu Gondard pour son aide orthographique ; merci à Jeanie Achard et Marion Lebris pour ce club des cinq si important.

Merci à Isabelle Guigues d'avoir fait tous ces kilomètres pour écouter ce charabia.

Merci enfin à François pour sa grande patience et son attention durant cette période, et aussi et surtout pour plein de choses qui n'ont pas leur place ici.

Table des Matières

Introduction	1
1 Généralités et Préliminaires	5
1.1 Espace de Teichmüller — Espace des Modules — Groupe Modulaire .	5
1.2 Classifications des groupes d'automorphismes en genre 2	6
1.3 Invariants Modulaires d'un polygone	7
2 Actions de groupes sur les familles F_2 et F_6	9
2.1 Actions sur F_2	9
2.1.1 Quadrangles marqués	10
2.1.2 Les revêtements de genre 2	17
2.1.3 Quelques relations entre twists de Dehn et transformations de G_Q	23
2.2 Actions sur F_6	29
2.2.1 Triangles Marqués	30
2.2.2 Les revêtements de genre 2	32
Annexe : Paramétrage et relations dans le quadrangle	39
3 Familles Spéciales	41
3.1 Adaptation de la description hyperbolique : changements de modèles de Polygones et de schéma de recollement	41
3.2 La famille F_4 et ses transformées	44
3.2.1 Familles Transformées par les actions définies sur F_2	45
3.2.2 Transformations Spécifiques	50
3.3 F_6 comme sous famille de F_2	56
4 Familles réelles	65
4.1 Le plan des paramètres et les types	65
4.1.1 Les surfaces des types I, Ia, Ib, III, IV et V	66
4.1.2 Le type II	72
4.2 traces réelles des Familles F_6 et F_4	77
4.2.1 Trace réelle de F_4 : quadrangles tri-orthogonaux ayant un angle de $\frac{\pi}{4}$	77
4.2.2 Trace réelle de F_6 : triangles ayant un angle égal à $\frac{\pi}{3}$	81
4.3 La famille réelle isolée	87
4.3.1 Croisements avec F_4 et F_6	89

5	Involutions en genre 3	93
5.1	Revêtements double de genre 3 du tore	93
5.2	Recollement d'hexagones hyperboliques droits	98
	Références	108

Introduction

Le théorème d'uniformisation de Poincaré-Koebe permet d'affirmer que toute surface de Riemann compacte de genre $g > 1$ est conformément équivalente à un quotient du demi-plan de Poincaré \mathbb{H} par un sous groupe discret Γ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ qui opère de façon proprement discontinue. La projection $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma$ munit alors naturellement la surface d'une structure de surface hyperbolique.

D'un autre côté une surface de Riemann est une courbe algébrique définie sur \mathbb{C} . Elle est donc définie par l'ensemble des zéros d'équations polynomiales à coefficients complexes. Ces courbes algébriques peuvent toujours être réalisées comme des courbes planes, i.e des courbes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, éventuellement singulières en un nombre fini de points. Elles peuvent donc être définies par une équation polynomiale homogène à coefficients complexes, $P(x, y, z) = 0$.

Ainsi, une surface de Riemann compacte de genre $g > 1$ peut être décrite de deux façons : comme une surface hyperbolique et par une équation. Le problème de l'uniformisation est de faire le lien entre ces deux descriptions.

Dans cette thèse, nous nous intéressons au problème de l'uniformisation explicite, c'est-à-dire à la description explicite de la relation entre la structure hyperbolique et les équations en genre 2 et 3. Pour ces genres, les équations ont une forme assez simple :

- $y^2 = P(x)$ avec $\deg(P) = 5$ ou 6 pour les courbes de genre 2,
- $P(x, y, z) = 0$ avec P homogène de degré 4 pour les courbes de genre 3.

Une nouvelle approche pour aborder ce type de problème a été entreprise par Peter Buser et Robert Silhol dans [Bu-Si], puis développée dans [Ai-Si].

Elle consiste à envisager des "uniformisations en famille". Grossièrement dit, la "famille" est définie par le fait que les surfaces qui la constituent sont pavées par le même polygone hyperbolique.

Ce point de vue permet de scinder le problème en deux parties : une partie combinatoire liée à la façon dont les copies du polygone sont assemblées, et une partie intrinsèquement liée à la géométrie du polygone.

La partie combinatoire est principalement celle qui nous intéressera ici. Elle repose sur le fait que les surfaces d'une même famille sont liées par une chaîne de quotients et revêtements passant par l'une ou l'autre des surfaces dont le groupe d'automorphisme est infini : la Sphère de Riemann ou le Tore.

Cette méthode permet notamment de décrire explicitement les relations entre les équations de surfaces obtenues à partir du même polygone assemblé différemment.

Ainsi pour les surfaces de genre 2 avec une involution non-triviale, nous traitons dix surfaces en même temps.

Elle permet également de décrire des familles spéciales, que l'on sait caractériser simplement à la fois du point de vue hyperbolique et du point de vue des équations. Ces familles spéciales sont définies par un plus petit nombre de paramètres que l'espace ambiant (sans que cela corresponde nécessairement à la présence d'automorphismes supplémentaires). C'est par exemple le cas de la famille définie par la forme d'équation :

$$y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - a - 1), \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

Finalement, l'un des aspects les plus importants de cette approche est la description d'actions de groupes, qui se correspondent, sur les structures algébriques et hyperboliques. On trouvera notamment ici une généralisation au cadre complexe de résultats obtenus dans [Bu-Si] en réel, bien que la situation étant moins rigide que celle envisagée dans [Bu-Si], la description de ces actions de groupes est plus compliquée.

Enfin, tout au moins pour certaines classes de surfaces, cette approche permet de réduire le problème de l'uniformisation à la détermination d'invariants modulaires du polygone, c'est-à-dire de l'image de quelques points sur le bord du polygone par une application conforme.

Après un premier chapitre reprenant essentiellement le matériel nécessaire dans la suite, avec notamment la définition des invariants modulaires, la thèse se découpe en deux parties : l'une en genre 2, l'autre en genre 3.

La première partie (et de loin la plus importante) est consacrée aux surfaces de Riemann de genre 2 ayant une involution non-triviale. Elle se répartit en trois chapitres :

— Dans le chapitre 2, nous décrivons des actions de groupes opérant sur les surfaces de genre 2 ayant des automorphismes non-triviaux. Nous généralisons aux surfaces complexes l'action sans point fixe générique de D_5 sur les M -courbes de genre 2 ayant une involution réelle non-triviale décrite par Peter Buser et Robert Silhol dans [Bu-Si].

Plus précisément, nous abordons la question en décrivant des actions de groupes opérant de façon transitive sur les revêtements de genre 2 ramifiés au dessus de cinq points donnés de la Sphère de Riemann.

Nous montrons notamment qu'à la différence du cadre réel, il n'existe pas de choix naturels permettant de rigidifier la forme des équations d'une part, la présentation de la structure hyperbolique d'autre part. En particulier, le groupe qui opère sur les courbes algébriques n'est plus le même que celui qui opère sur les surfaces hyperboliques mais apparaît naturellement comme un quotient de celui-ci.

Plus précisément, le groupe qui opère sur les courbes algébriques est le groupe symétrique S_5 , donnant aux cinq points de la sphère des rôles symétriques.

Le groupe opérant sur les surfaces hyperboliques est constitué des transformations de domaines fondamentaux en quadrangles pour la structure hyperbolique sur la sphère héritée de ses revêtements.

La relation liant ces deux groupes permet d'interpréter en terme de twists de Dehn et demi-twists les relations entre les différents revêtements ramifiés au dessus

de cinq points de la sphère, avec notamment une lecture sur les équations de certains twists de Dehn.

La seconde partie de ce chapitre 2 consiste en une étude similaire sur les surfaces ayant en plus un automorphisme d'ordre 3.

— Dans le chapitre 3, nous prolongeons en complexe la description des familles spéciales algébriques de surfaces qui appartiennent à l'orbite des surfaces dont le groupe d'automorphismes contient strictement $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, sous les actions définies au second chapitre.

— Dans le chapitre 4 nous revenons dans le cadre réel. Nous décrivons notamment les surfaces du “type II”. Ce sont des surfaces ayant des involutions non-triviales et munies d'une structure réelle à une composante réelle pour laquelle les involutions non-triviales sont réelles. L'un des intérêts des surfaces du type II est qu'elles sont reliées via l'action de S_5 à des surfaces n'ayant pas de structure réelle et permettent de donner de nouveaux exemples d'uniformisations exactes pour ce type de surfaces.

Nous étudions également dans ce chapitre les traces réelles des familles spéciales définies au chapitre précédent. Ces surfaces permettent notamment de décrire des liens entre des surfaces réelles dont les types topologiques pour la partie réelle sont différents.

La seconde partie de la thèse se situe en genre trois et est constituée du cinquième et dernier chapitre. Une large partie de ce chapitre est incluse dans la prépublication [Ai-Si].

Nous y étudions les relations entre les équations des quatre revêtements doubles de genre 3 d'une courbe de genre 1, ramifiés au dessus de quatre points donnés. Nous montrons ensuite comment on peut également en décrire la structure hyperbolique dans le cas particulier où ils sont pavés par deux hexagones hyperboliques droits.

Chapitre 1

Généralités et Préliminaires

1.1 Espace de Teichmüller — Espace des Modules — Groupe Modulaire

Nous présentons ici les espaces dans lesquels nous allons travailler. Cette présentation est très rapide compte tenu de l'étendue de la littérature sur le sujet. Nos références concernant l'espace de Teichmüller et le groupe modulaire sont [Bu], [Do] et [Bir1] et [Bir2] ; concernant les surfaces de Riemann et leur structure algébrique, [Fa-Kr] et [Gr-Ha].

1.1.1 Définitions

Soit \bar{S} une surface de Riemann compacte de genre g , qui sert de surface de référence.

Une *surface de Riemann marquée* est un couple (S, f) , où S est une surface de Riemann et f un homéomorphisme $\bar{S} \rightarrow S$.

Le marquage de deux surfaces marquées (S, f) et (S', f') est dit *équivalent* s'il existe une isométrie $m : S \rightarrow S'$ telle que f' et $m \circ f$ soient isotopes.

L'*espace de Teichmüller* des surfaces de genre g est alors

$$\mathcal{T}_g = \{\text{classes d'équivalence de surfaces marquées de genre } g\}.$$

1.1.2 Définition

On garde la surface \bar{S} de genre g comme surface de référence. Le *groupe modulaire de Teichmüller* Γ_g est le groupe des classes d'isotopie d'homéomorphismes $\bar{S} \rightarrow \bar{S}$ préservant l'orientation.

Le groupe modulaire agit sur l'espace de Teichmüller par

$$\begin{aligned} \Gamma_g \times \mathcal{T}_g &\longrightarrow \mathcal{T}_g \\ (h, (S, f)) &\longmapsto (S, f \circ h) \end{aligned}$$

1.1.3 Définition

L'espace des Modules \mathcal{M}_g des surfaces de Riemann compactes de genre g est l'ensemble des classes d'équivalence de biholomorphie de surfaces de Riemann.

On a alors :

1.1.4 Théorème

L'espace des modules \mathcal{M}_g est le quotient de l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_g sous l'action du groupe modulaire Γ_g .

Pour une preuve, voir par exemple [Bu].

Par ailleurs les surfaces de Riemann compactes étant naturellement munies d'une unique structure de courbe algébrique complexe, on a :

$$\mathcal{M}_g = \{\text{classes d'isomorphie de courbes algébriques complexes de genre } g\}.$$

1.2 Classifications des groupes d'automorphismes en genre 2

La classification des surfaces de genre 2 ayant des automorphismes non-triviaux semble être assez ancienne et dater du XIX-ème siècle, la littérature s'accorde à l'attribuer à Bolza ([Bo]).

On commence par rappeler la définition suivante :

1.2.1 Définition

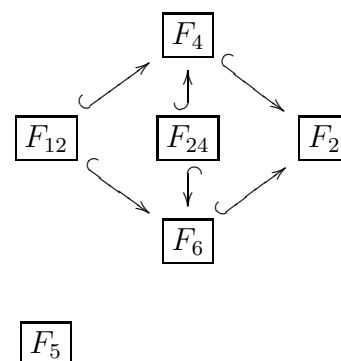
Soit S une surface hyperelliptique de genre g , et τ l'involution hyperelliptique de S .

On appelle *groupe d'automorphismes réduit* de S le groupe

$$\text{Aut}^r(S) = \text{Aut}(S)/\tau .$$

La classification des groupes d'automorphismes réduits possibles est donnée dans le tableau ci-dessous. On donne également la normalisation classique des équations en fonction de leur groupe d'automorphismes réduit et les intersections entre familles.

Famille	Aut^r	Equation
F_2	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - b)$
F_4	D_2	$y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - \frac{1}{a})$
F_6	D_3	$y^2 = x^6 - 2ax^3 + 1$
F_{12}	D_6	$y^2 = x^6 + 1$
F_{24}	S_4	$y^2 = x(x^4 - 1)$
F_5	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$	$y^2 = x^5 - 1$



1.2.2

Nous ne nous intéresserons pas ici à F_5 qui est un point isolé et dont on sait décrire la structure hyperbolique. On sait par exemple que F_5 est obtenue à partir de triangles hyperboliques avec angles aux sommets $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{10}$, voir par exemple [Ku-Na].

Toutes les surfaces auxquelles nous nous intéresseront seront donc des surfaces de F_2 .

Dans les familles dont le groupe d'automorphisme réduit contient strictement $\mathbb{Z}/2$, F_4 et F_6 , les surfaces ont toujours plusieurs involutions qui correspondent à des éléments différents de leur groupe d'automorphismes réduit. Nous aurons besoin de les différencier, aussi, nous introduisons les notations suivantes :

1.2.3 Notations

On note

$$\mathcal{F}_2 = \{(S, \varphi), S \in F_2, \varphi \in \text{Aut}^r(S) \varphi^2 = Id\}$$

Pour $(S, \varphi) \in \mathcal{F}_2$, on note

$$H_\varphi = \langle \varphi, \tau \rangle \subset \text{Aut}(S)$$

C'est sur le groupe H_φ , ou plus précisément sur la sphère S/H_φ que nous nous appuierons pour décrire les actions de groupes sur la famille F_2 .

1.3 Invariants Modulaires d'un polygone

Les invariants modulaires ont été introduits dans [Ai-Si], bien qu'ils apparaissent déjà sans être explicitement définis dans [Bu-Si].

Nous en rappelons ici rapidement la définition. Puis nous donnons le résultat qui fait de ces invariants un outil précieux pour l'uniformisation des surfaces pavées par symétries axiales par plusieurs copies d'un même polygone. Nous les utiliserons notamment dans les chapitres 4 et 5. Plus de détails sur leur calcul peuvent être trouvés dans [Bu-Si] et [Ai-Si].

1.3.1 Proposition-Définition

Soit P un polygone hyperbolique et a_1, a_2, a_3, a_4 quatre points du bord de P .

Il existe une unique application conforme f qui envoie l'intérieur de S sur le demi-plan de Poincaré \mathbb{H} et dont le prolongement continu au bord de P envoie a_1 sur 0, a_2 sur 1 et a_4 sur l'infini.

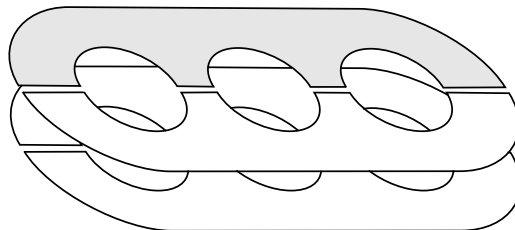
On dit alors que

$$\lambda(\{P, (a_1, a_2, a_3, a_4)\}) = f(a_3) .$$

est l'invariant modulaire de $\{P, (a_1, \dots, a_4)\}$

Soit P un polygone hyperbolique ayant n côtés, $n \geq 4$. Soit $g \leq \frac{n-2}{2}$, on choisit $2g+2$ sommets distincts de P , a_1, \dots, a_{2g+2} , ordonnés cycliquement. Soient P' une copie de P isométrique à P par une isométrie directe, et P'' et P''' deux images miroir de P . Soient a'_i (resp. a''_i, a'''_i) les points de P' (resp. P'', P''') correspondants aux a_i . On considère la surface Σ obtenue en identifiant les arcs $[a_{2i+1}, a_{2i+2}]$ et

$[a''_{2i+1}, a''_{2i+2}]$, $[a_{2i}, a_{2i+1}]$ et $[a'''_{2i}, a'''_{2i+1}]$, $[a'_{2i+1}, a'_{2i+2}]$ et $[a'''_{2i+1}, a'''_{2i+2}]$ et enfin $[a'_{2i}, a'_{2i+1}]$ et $[a''_{2i}, a''_{2i+1}]$. La surface Σ a une unique structure conforme compatible à sa structure hyperbolique, et peut donc être considérée comme une surface de Riemann, i.e comme une courbe algébrique complexe C .



1.3.2 Lemme

Une équation pour la courbe algébrique C construite ci-dessus est

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_{2g-1})$$

avec $\lambda_i = \lambda(\{P, (a_1, a_2, a_{i+2}, a_{2g+2})\})$.

Preuve : voir [Ai-Si].

1.3.3 Remarques

Pour un n -gone P tous les invariants modulaires associés aux choix de quatre des sommets de P ne sont pas indépendants mais ne dépendent en fait que de $n-3$ d'entre eux. En effet, un automorphisme conforme du demi-plan supérieur P est entièrement déterminé par les images de trois points donnés.

Chapitre 2

Actions de groupes sur les familles F_2 et F_6

On s'intéresse ici à l'uniformisation des surfaces des familles F_2 et F_6 . Plus précisément on décrit, tant en terme d'équations que de la structure hyperbolique, des transformations qui conservent ces deux familles. Pour les transformations sur F_2 on trouve une généralisation au cas complexe des actions du groupe diédral D_5 sur des sous-espaces de F_2 constitués de courbes réelles décrites par P.Buser et R.Silhol dans [Bu-Si].

2.1 Actions sur F_2

Nous commençons cette partie par deux remarques qui vont nous guider tout au long de cette étude.

Soit $(S, \varphi) \in \mathcal{F}_2$. D'après Riemann-Hurwitz, φ et $\varphi\tau$ ont deux points fixes chacune, p_1 et p_2 et q_1 et q_2 tels que

$$\varphi(q_1) = q_2 \quad \tau(p_1) = p_2.$$

Notre première remarque est contenue dans le lemme suivant :

2.1.1 Lemme

Soit $(S, \varphi) \in \mathcal{F}_2$. Le revêtement $p_\varphi : S \rightarrow S/H_\varphi \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est ramifié au dessus de cinq points dont 3 sont les images des points de Weierstrass de S et les deux autres les images des p_i et des q_i . La donnée des cinq points sur le quotient et des trois parmi eux qui se relèvent en les points de Weierstrass détermine S .

Preuve : Ceci découle immédiatement du fait que les courbes de genre 2 sont, comme toutes les courbes hyperelliptiques, entièrement déterminées par leurs points de Weierstrass.

Notre seconde remarque est une conséquence immédiate de la première :

2.1.2 Corollaire

Soient r_1, \dots, r_5 cinq points marqués sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Il existe 10 surfaces (S_j, φ_j) , $j = 1, \dots, 10$ de \mathcal{F}_2 telles que les revêtements p_{φ_j} soient ramifiés au dessus des r_i .

Preuve : : Chacune des S_j correspond au choix d'une paire $\{r_k, r_l\}$ parmi les r_i qui ne se relèvent pas en des points de Weierstrass de S_j .

Nous allons montrer ici comment on peut décrire les relations entre les équations et la structure hyperbolique des 10 surfaces de 2.1.2.

Les points de ramifications du revêtement p_φ sont tous d'indice 2, la surface S/H_φ hérite donc, via p_φ , d'une structure de surface hyperbolique ayant cinq points coniques d'angle π .

Nous sommes donc naturellement amenés à nous intéresser dans un premier temps à de telles surfaces.

2.1.1 Quadrangles marqués

Commençons par préciser le choix de présentation de ces surfaces.

Soit Q un quadrangle géodésique hyperbolique dont la somme des angles aux sommets est π . On recolle en leurs milieux les quatre côtés de Q . Les quatre sommets du quadrangle s'identifient en un seul point de la surface obtenue, $S_0(Q)$, qui est donc une sphère hyperbolique ayant cinq points coniques d'angle π .

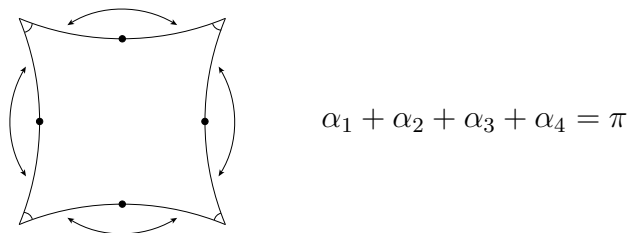


fig. 2.1

Réciproquement, si S_0 est une sphère hyperbolique ayant cinq points coniques d'angle π , on obtient un tel quadrangle en découpant S_0 le long d'arcs géodésiques disjoints reliant l'un des sommets à chacun des quatre autres.

Ce choix de présentation de la surface privilégie un système de générateurs pour un groupe Fuchsien $\Gamma_0(Q)$ de $S_0(Q)$. Par ailleurs le lemme 2.1.1 et le corollaire 2.1.2 mettent en évidence la nécessité de marquer les points. Ceci motive les définitions suivantes :

2.1.3 Définitions

1. On appelle *quadrangle marqué* un système ordonné

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) \mid e_i \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}), \text{tr}(e_i) = 0, \text{tr}(\Pi e_i) = 0.$$

On note \mathcal{Q} l'ensemble des quadrangles marqués quotienté par la relation

$$(e_1, \dots, e_4) \sim (e'_1, \dots, e'_4) \iff \exists \gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}), e'_i = \gamma e_i \gamma^{-1}, i = 1, \dots, 4.$$

2. On appelle *domaine fondamental en quadrangle de S_0* un quadrangle marqué $Q = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ tel que $\Gamma_0(Q) = \langle e_1, \dots, e_4 \rangle$ soit un groupe Fuchsien pour $S_0 = S_0(Q)$.
3. On note \mathcal{Q}_{S_0} l'ensemble des domaines fondamentaux en quadrangle de S_0 quotienté par la même relation.

Mots en les e_i , points, géodésiques et longueurs d'arcs.

Nous précisons ici la façon dont nous allons utiliser la présentation du quadrangle marqué que nous avons adoptée. Elle repose sur l'idée que l'on peut utiliser un même objet, le groupe $\Gamma_0(Q)$, pour décrire non seulement les isométries mais également les objets géométriques qui leur sont attachés.

Cette idée est déjà présente dans la littérature, K.D Semmler dans [Sem] a notamment utilisé une algèbre de quaternions pour décrire à la fois les isométries, les points, et les géodésiques de \mathbb{H} . C'est d'ailleurs K.D Semmler qui nous a suggéré un tel choix de présentation du quadrangle.

Soit $Q = (e_1, e_2, e_3, e_4) \in \mathcal{Q}$. Le groupe $\Gamma_0(Q)$, constitué des mots en les e_i , ne contient que des transformations elliptiques d'ordre 2 et des transformations hyperboliques.

Les premières se caractérisent par le fait que leur trace est nulle, les secondes par le fait que la valeur absolue de leur trace est strictement plus grande que 2.

Si $\gamma(e_i) \in \Gamma_0(Q)$ est elliptique d'ordre 2, sa donnée détermine également son centre. Aussi nous permettrons-nous, principalement sur les figures, de désigner par e_i le centre de e_i .

Si $\gamma(e_i) \in \Gamma_0(Q)$ est hyperbolique, sa donnée porte l'information sur

- une géodésique : son axe.
- la distance λ entre un point de son axe et son transformé, donnée par

$$|\mathrm{tr}(\gamma(e_i))| = 2 \cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right),$$

Ainsi, étant donné (e_1, e_2, e_3, e_4) , le quadrangle géodésique de la figure 2.1, i.e le quadrangle tel que les centres des e_i soient les milieux des côtés est le quadrangle dont les sommets sont les centres de $e_1e_2e_3e_4$, $e_2e_3e_4e_1$, $e_3e_4e_1e_2$ et $e_4e_1e_2e_3$.

Le k -ième côté du quadrangle, c'est-à-dire l'arc géodésique portant le centre de e_k , $k = 1, \dots, 4$, est porté par l'axe de la transformation hyperbolique $e_{k+1}e_{k+2}e_{k+3}$, sa longueur est donnée par

$$2 \operatorname{arccosh} \left(\frac{|\mathrm{tr}(e_{k+1}e_{k+2}e_{k+3})|}{2} \right).$$

Par ailleurs, le quadrangle est entièrement déterminé (voir annexe en fin de chapitre) par les longueurs de ses arcs géodésiques de bord et de l'une de ses diagonales. La première diagonale est donnée par la transformation hyperbolique $e_1e_2e_3e_4e_3e_4e_1e_2$ vérifiant

$$|\mathrm{tr}(e_1e_2e_3e_4e_3e_4e_1e_2)| = | -((\mathrm{tr}(e_1e_2))^2 + \mathrm{tr}((e_3e_4)^2)) | = |(\mathrm{tr}(e_1e_2))^2 + (\mathrm{tr}(e_3e_4))^2 - 2|.$$

Transformations des quadrangles marqués

2.1.4 Définition

On définit les transformations de \mathcal{Q} suivantes :

i) La permutation circulaire σ_0 donnée par

$$\sigma_0(e_1, e_2, e_3, e_4) = (e_2, e_3, e_4, e_1).$$

ii) σ_1 , donnée par

$$\sigma_1(e_1, e_2, e_3, e_4) = (e_3, e_2, e_3e_4e_1e_2, e_3e_4e_3) = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4).$$

Le quadrangle transformé s'obtient comme sur la figure 2.2 ci dessous, à savoir que ses sommets sont donnés, dans l'ordre donné par le marquage, par les centres de

$e'_1e'_2e'_3e'_4 = e_3e_2(e_3e_4e_1e_2)e_3e_4e_3 = e_3e_2(e_2e_1e_4e_3)e_3e_4e_3 = e_3e_1e_3$, l'image du centre de e_1 par e_3 ,

$e'_2e'_3e'_4e'_1 = e_2(e_2e_1e_4e_3)(e_3e_4e_3)e_3 = e_1$, le centre de e_1 ,

$e'_3e'_4e'_1e'_2 = (e_2e_1e_4e_3)(e_3e_4e_3)e_3e_2 = e_2e_1$, l'image du centre de e_1 par e_2 ,

et

$e'_4e'_1e'_2e'_3 = (e_3e_4e_3)e_3e_2(e_2e_1e_4e_3) = (e_3e_4)e_1(e_4e_3)$, l'image du centre de e_1 par la transformation hyperbolique (e_3e_4) .

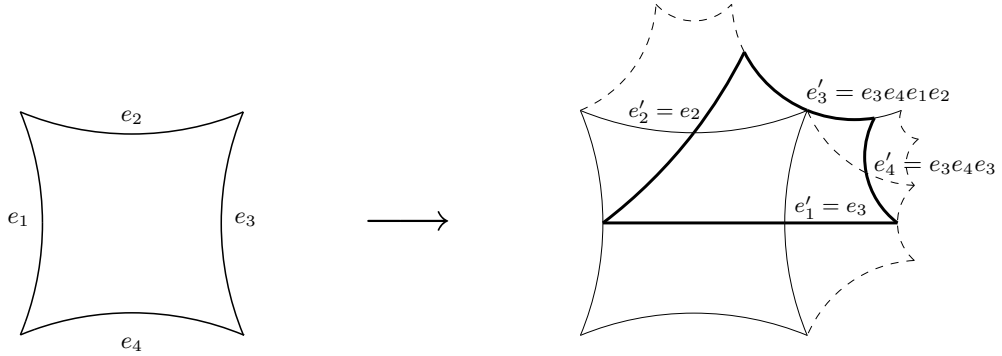


fig. 2.2 la transformation σ_1 .

2.1.5 Remarque

Les transformations σ_0 et σ_1 sont de natures complètement différentes : σ_0 n'agit qu'au niveau du marquage, les quadrangles Q et $\sigma_0(Q)$ étant clairement isométriques.

Pour σ_1 en revanche, le choix du marquage est un peu arbitraire (bien que motivé par l'étude du type II au chapitre 4).

En effet, le rôle de σ_1 est double : d'abord, σ_1 permet de changer de quadrangle, Q et $\sigma_1(Q)$ n'étant pas en général isométriques.

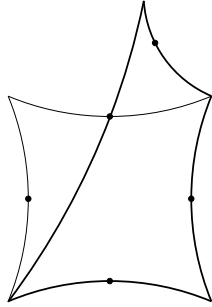
Ensuite les quatre transformations elliptiques définissant $\sigma_1(Q)$ appartiennent à $\Gamma_0(Q)$ et donc $S_0(Q)$ et $S_0(\sigma_1(Q))$ sont isométriques, autrement dit σ_1 conserve \mathcal{Q}_{S_0} . Par contre, les transformations elliptiques centrées en les sommets de Q ne sont pas conjuguées à celles centrées en les sommets de $\sigma_1(Q)$ dans $\Gamma_0(Q) = \Gamma_0(\sigma_1(Q))$. Cela signifie que les sommets de Q et ceux de $\sigma_1(Q)$ ne correspondent pas aux mêmes points parmi les cinq points coniques de $S_0(Q) = S_0(\sigma_1(Q))$, i.e σ_1 permet également de changer le point de S_0 aux sommets du domaine fondamental en quadrangle.

2.1.6 Définition

On appellera *groupe des transformations de \mathcal{Q}* le groupe $G_{\mathcal{Q}}$ engendré par σ_0 et σ_1 .

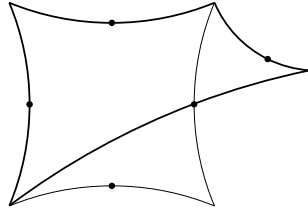
2.1.7 Remarques

1. Les transformations σ_0 et σ_1 , et donc celles de $G_{\mathcal{Q}}$ conservent \mathcal{Q}_{S_0} pour toute surface S_0 de genre 0 ayant cinq points coniques d'angle π . La proposition 2.1.10 ci-dessous montre que ce sont en fait les seules.
2. Bien qu'engendré par des éléments d'ordre fini (voir 2.1.8 ci-dessous), $G_{\mathcal{Q}}$ n'est pas fini. On trouve notamment dans $G_{\mathcal{Q}}$ les transformations d'ordre infini σ_2 et σ_3 qui nous seront utiles dans la suite :



$$\sigma_2 = \sigma_0^2 (\sigma_1^2 \sigma_0^3)^3 \sigma_0^2$$

$$\sigma_2(e_1, e_2, e_3, e_4) = (e_2, e_2 e_1 e_2, e_3, e_4)$$



$$\sigma_3 = (\sigma_0 \sigma_1)^3$$

$$\sigma_3(e_1, e_2, e_3, e_4) = (e_1, e_2, e_3 e_4 e_3, e_3)$$

Notons que σ_2 et σ_3 s'expriment très simplement en termes du système de longueurs caractérisant le quadrangle : si L_i est le cosinus hyperbolique de la longueur du i -ième côté et L celui de la première diagonale, on a

$$\sigma_2(L_1, L_2, L_3, L_4, L) = \left(\frac{(L_1 + L)^2}{L_2 + 1} - 1, L_1, L_3, L_4, L \right).$$

$$\sigma_3(L_1, L_2, L_3, L_4, L) = \left(L_1, L_2, L_4, \frac{(L_4 + L)^2}{L_3 + 1} - 1, L \right).$$

2.1.8 Lemme (Quelques relations dans G_Q)

On a les relations dans G_Q :

1. $\sigma_0^4 = Id$
2. $\sigma_1^3 = Id$
3. $(\sigma_0^2 \sigma_1)^2 = Id$
4. $\sigma_0^2 \sigma_2 \sigma_0^2 \sigma_3 = Id$
5. Pour σ_4 définie par $\sigma_4 = \sigma_0^2 \sigma_2 \sigma_0 \sigma_3 \sigma_0^2 \sigma_1 \sigma_0^{-1}$,
 $\sigma_4^5 = Id$
6. $(\sigma_0^2 \sigma_4)^2 = Id$

Preuve :

On utilise le fait que pour $k \in \{1, \dots, 4\}$, $\prod_{i=0}^3 e_{k+i}$ étant elliptique, on a $e_k e_{k+1} e_{k+2} e_{k+3} = e_{k+3} e_{k+2} e_{k+1} e_k$.

1. évident
2. On a $\sigma_1(e_1, e_2, e_3, e_4) = (e_3, e_2, e_3 e_4 e_1 e_2, e_3 e_4 e_3)$, d'où :

$$\begin{aligned} \sigma_1^2(e_1, e_2, e_3, e_4) &= (e_3 e_4 e_1 e_2, e_2, (e_3 e_4 e_1 e_2)(e_3 e_4 e_3) e_3 e_2, (e_3 e_4 e_1 e_2)(e_3 e_4 e_3)(e_3 e_4 e_1 e_2)) \\ &= (e_3 e_4 e_1 e_2, e_2, (e_2 e_1 e_4 e_3) e_3 e_4 e_2, (e_2 e_1 e_4 e_3)(e_3 e_4 e_3)(e_3 e_4 e_1 e_2)) \\ &= (e_3 e_4 e_1 e_2, e_2, e_2 e_1 e_2, (e_2 e_1) e_4 (e_1 e_2)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_1^3(e_1, e_2, e_3, e_4) &= \sigma_1(e_3 e_4 e_1 e_2, e_2, e_2 e_1 e_2, (e_2 e_1) e_4 (e_1 e_2)) \\ &= (e_2 e_1 e_2, e_2, (e_2 e_1 e_2)(e_2 e_1) e_4 (e_1 e_2) (e_3 e_4 e_1 e_2) e_2, (e_2 e_1 e_2)(e_2 e_1) e_4 (e_1 e_2) (e_2 e_1 e_2)) \\ &= (e_2 e_1 e_2, e_2, e_2 e_4 (e_1 e_2) (e_2 e_1 e_4 e_3) e_2, e_2 e_4 e_2) \\ &= (e_2 e_1 e_2, e_2 e_2 e_2, e_2 e_3 e_2, e_2 e_4 e_2) \\ &\sim (e_1, e_2, e_3, e_4) \end{aligned}$$

3. On a $(\sigma_0^2 \sigma_1)(e_1, e_2, e_3, e_4) = (e_3 e_4 e_1 e_2, e_3 e_4 e_3, e_3, e_2)$ et

$$\begin{aligned} (\sigma_0^2 \sigma_1)^2(e_1, e_2, e_3, e_4) &= (e_3 e_2 (e_3 e_4 e_1 e_2) (e_3 e_4 e_3), e_3 e_2 e_3, e_3, e_3 e_4 e_3) \\ &= (e_3 e_2 (e_2 e_1 e_4 e_3) (e_3 e_4 e_3), e_3 e_2 e_3, e_3, e_3 e_4 e_3) \\ &= (e_3 e_1 e_3, e_3 e_2 e_3, e_3, e_3 e_4 e_3) \\ &\sim (e_1, e_2, e_3, e_4) \end{aligned}$$

4. Donné par les relations sur σ_0 et σ_1 .

5.

On a

$$\begin{aligned} \sigma_4(e_1, e_2, e_3, e_4) &= \sigma_0^2 \sigma_2 \sigma_0 \sigma_3 \sigma_0^2 \sigma_1(e_4, e_1, e_2, e_3) \\ &= \sigma_0^2 \sigma_2 \sigma_0 \sigma_3 \sigma_0^2(e_2, e_1, e_2 e_3 e_4 e_1, e_2 e_3 e_2) \\ &= \sigma_0^2 \sigma_2 \sigma_0 \sigma_3(e_2 e_3 e_4 e_1, e_2 e_3 e_2, e_2, e_1) \\ &= \sigma_0^2 \sigma_2 \sigma_0(e_2 e_3 e_4 e_1, e_2 e_3 e_2, e_2 e_1 e_2, e_2) \\ &= \sigma_0^2 \sigma_2(e_2 e_3 e_2, e_2 e_1 e_2, e_2, e_2 e_3 e_4 e_1) \\ &= \sigma_0^2(e_2 e_1 e_2, e_2(e_1 e_3 e_1) e_2, e_2, e_2 e_3 e_4 e_1) \\ &= (e_2, e_2(e_3 e_4 e_1 e_2) e_2, e_2 e_1 e_2, e_2(e_1 e_3 e_1) e_2) \\ &\sim (e_2, e_3 e_4 e_1 e_2, e_1, e_1 e_3 e_1) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sigma_4^5(e_1, e_2, e_3, e_4) &= \sigma_4^4(e_2, e_3e_4e_1e_2, e_1, e_1e_3e_1) \\
&= \sigma_4^3(e_3e_4e_1e_2, e_1(e_1e_3e_1)(e_2)(e_3e_4e_1e_2), e_2, e_2e_1e_2) \\
&= \sigma_4^3(e_3e_4e_1e_2, e_3e_1e_2(e_2e_1e_4e_3), e_2, e_2e_1e_2) \\
&= \sigma_4^3(e_3e_4e_1e_2, e_3e_4e_3, e_2, e_2e_1e_2) \\
&= \sigma_4(e_2(e_2e_1e_2)(e_2e_1e_4e_3)(e_3e_4e_3), e_1, e_3e_4e_3, e_3(e_1e_2e_3e_4)e_3) \\
&= \sigma_4(e_3, e_1, e_3e_4e_3, e_3(e_4e_3e_2e_1)e_3) \\
&= (e_1, (e_3e_4e_3e_3e_4e_3)e_2(e_1e_3e_3e_1), e_3, e_4) \\
&= (e_1, e_2, e_3, e_4)
\end{aligned}$$

6. Et enfin,

$$\begin{aligned}
(\sigma_0^2\sigma_4)^2(e_1, e_2, e_3, e_4) &= \sigma_0\sigma_4(e_1, e_1e_3e_1, e_2, e_3e_4e_1e_2) \\
&= (e_1, e_1e_2e_1, e_1e_3e_1, e_2(e_2e_1e_4e_3)e_3e_1) \\
&= (e_1, e_1e_2e_1, e_1e_3e_1, e_1e_4e_1) \\
&\sim (e_1, e_2, e_3, e_4)
\end{aligned}$$

2.1.9 Remarque

2.1.8 fait apparaître les sous-groupes diédraux $D_5 \simeq \langle \sigma_0^2, \sigma_4 \rangle$ et $D_3 \simeq \langle \sigma_0^2, \sigma_3 \rangle$ de G_Q . Ces sous-groupes seront étudiés au chapitre 4, où nous verrons notamment que le premier correspond exactement à celui de [Bu-Si].

2.1.10 Proposition

Pour S_0 comme précédemment, G_Q opère transitivement sur \mathcal{Q}_{S_0} .

Preuve : Soient Q et Q' dans \mathcal{Q}_{S_0} , on construit au moyen de transformations de G_Q une suite de quadrangles $Q = Q_0, \dots, Q_n = Q'$.

Soient a_1, \dots, a_4 les arcs géodésiques de bord de Q' dans S_0 . On oriente les a_i , dans S_0 , de façon à ce qu'ils aient même source.

On commence si nécessaire par une transformation de la forme $\sigma_1\sigma_0^k$ pour se ramener à un quadrangle Q_1 tel que les sommets de Q_1 et Q' correspondent au même point de S_0 .

On découpe ensuite S_0 le long de ∂Q_1 .

Soit, pour chacune des a_i , le nombre k_{i,Q_1} de composantes connexes de $a_i \cap \overset{\circ}{Q}_1$.

On traite les a_i les unes après les autres dans l'ordre donné par le marquage.

Pour a_1 .

Si $k_{1,Q_1} = 0$, cela signifie que a_1 est l'un des côtés de Q_1 et on passe à a_2 .

Si $k_{1,Q_1} \neq 0$, on munit les arcs $a_{1,1}, \dots, a_{1,k_{1,Q_1}}$ correspondants de l'orientation induite par celle de a_1 . Puis, on se ramène au moyen d'une puissance de σ_0 à un quadrangle Q_2 tel que la source de $a_{1,1}$ soit à l'intersection des premier et quatrième côtés de Q_2 . Son but est alors nécessairement sur le deuxième ou le troisième côté. Par σ_2 dans le premier cas et σ_3 dans le second, on construit un quadrangle Q_3 tel que le nombre de composantes connexes k_{1,Q_3} de $a_1 \cap \overset{\circ}{Q}_3$ soit strictement inférieur à $k_{1,Q_2} = k_{1,Q_1}$. En effet, même si l'un des $a_{1,k}$, $k > 1$ pénètre dans le triangle bordé

par $a_{1,1}$, le côté de Q_3 qui n'est pas un côté de Q_2 , et celui de Q_2 qui n'est pas un côté de Q_3 , il ne peut y entrer et en sortir que par ces deux derniers côtés, les $a_{1,k}$ étant disjoints (voir figure 2.3 ci-dessous).

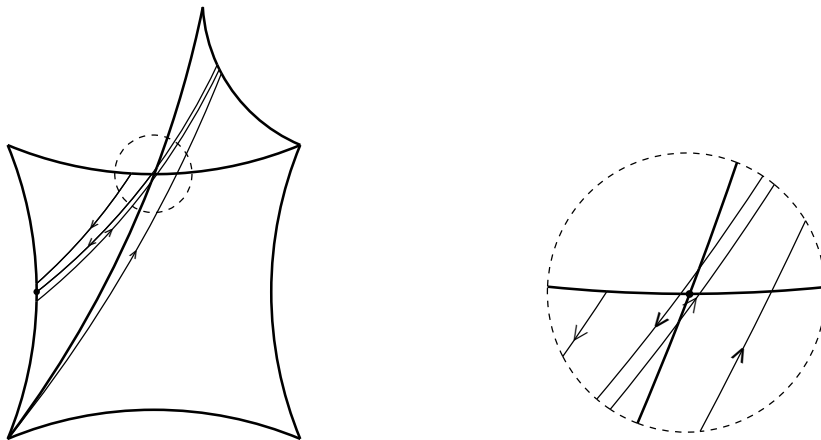


fig. 2.3

On réitère le procédé jusqu'à ce que $k_{1,Q_r} = 0$. Notons que la construction ci-dessus n'affecte que les bords du quadrangle traversés par a_1 . Ainsi, les a_i ne s'intersectant qu'en le point de S_0 correspondant aux sommets de Q' , on peut traiter a_2 , a_3 et a_4 de la même manière, chacune des constructions n'affecte pas les précédentes.

On termine par une puissance de σ_0 pour faire coïncider les marquages.

2.1.11 Remarque

Nous avons choisi de donner cette preuve car elle est constructive, on aurait pu plus simplement remarquer que σ_1 permet de changer de sommet et σ_2 et σ_3 permettent d'ajouter à chaque géodésique de S_0 correspondant à un côté du quadrangle la classe d'homotopie du tour du point correspondant au milieu de chacun des deux côtés voisins.

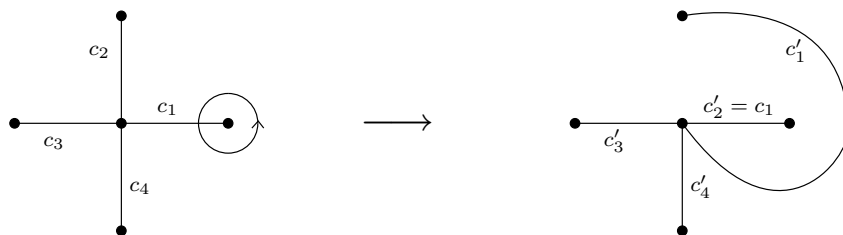


fig. 2.4 Action de σ_2 sur les géodésiques de bord de Q dans $S_0(Q)$

2.1.12 Lemme

Pour une surface de genre 0 S_0 , générique, G_Q opère sans point fixe sur \mathcal{Q}_{S_0} .

Preuve : Si $Q \in \mathcal{Q}$ et $\sigma \in G_Q$ non-triviale est telle que $\sigma.Q = Q$, σ induit une isométrie de S_0 .

2.1.2 Les revêtements de genre 2

Action de G_Q sur $\mathcal{F}_2(Q)$

On commence par une construction.

Soit $Q \in \mathcal{Q}$, et S_Q la surface de genre 2 obtenue en recollant par symétrie en les centres des premier et troisième côtés quatre copies de Q comme sur la figure 2.5 avec le schéma d'identification

$$1-6, 2-4, 3-5, 7-9, 8-10.$$

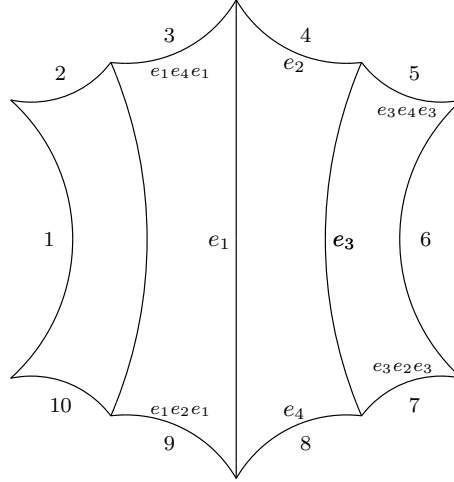


fig. 2.5

2.1.13 Remarques

1. Les transformations hyperboliques correspondant aux identifications de côtés sont données par

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 6 & (e_3e_1)^2 \\ 2 &\rightarrow 4 & (e_2e_3e_1) \\ 3 &\rightarrow 5 & (e_3e_4e_1) \\ 7 &\rightarrow 9 & (e_1e_2e_3) \\ 8 &\rightarrow 10 & (e_1e_3e_4) \end{aligned}$$

La donnée de S_Q est alors équivalente à la donnée d'un système ordonné de générateurs

$$(e_3e_1)^2, e_3e_2e_1, e_3e_4e_1, e_1e_3e_2, e_1e_3e_4$$

d'un groupe Fuchsien Γ_Q de S_Q .

2. Les points de Weierstrass sont les milieux des côtés 2, 3, 4, 5 et 7, 8, 9, 10 et aux sommets du décagone sur la figure 2.5. Les points fixes des involutions non-triviales sont en les milieux des premier et troisièmes côtés des différentes copies de Q .

Le lemme 2.1.1 nous disait que (S, φ) est entièrement déterminée par la connaissance des images des points fixes de φ et $\varphi\tau$ parmi celles des points de ramification de $S \rightarrow S/H_\varphi = S/\langle \varphi, \tau \rangle$, on en a ici un analogue hyperbolique :

2.1.14 Proposition

Soit $(S, \varphi) \in \mathcal{F}_2$, $S_0 = S/H_\varphi$, et $Q \in \mathcal{Q}_{S_0}$ tel que les images p et q des points fixes de φ et $\varphi\tau$ soient sur les premier et troisième côtés de Q .

Alors S est isométrique à S_Q .

2.1.15 Proposition

L'application $Q \mapsto S_Q$ définit une injection de \mathcal{Q} dans l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_2 des surfaces de Riemann de genre 2.

Preuve :

On choisit $Q = (e_1, \dots, e_4) \in \mathcal{Q}$. Le quadrangle étant simplement connexe, pour $Q' = (e'_1, \dots, e'_4) \in \mathcal{Q}$ il existe à isotopie près un unique homéomorphisme

$$Q \xrightarrow{\eta_{Q'}} Q',$$

tel que $\eta_{Q'} \circ e_i = e'_i$.

Cette dernière condition assure que $\eta_{Q'}$ se prolonge en $\hat{\eta}_{Q'}$ tel que

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\eta_{Q'}} & Q' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_Q & \xrightarrow{\hat{\eta}_{Q'}} & S_{Q'} \end{array}$$

Le couple $(S_{Q'}, \hat{\eta}_{Q'})$ définit ainsi un point de l'espace de Teichmüller des surfaces de genre 2, \mathcal{T}_2 .

L'application est, par construction de $\hat{\eta}_{Q'}$, injective.

2.1.16 Notation

On note

$$\mathcal{F}_2(\mathcal{Q}) = \{S_Q, Q \in \mathcal{Q}\} \subset \mathcal{T}_2.$$

On reformule 2.1.12 et 2.1.15 :

2.1.17 Corollaire

L'action induite de G_Q sur $\mathcal{F}_2(\mathcal{Q})$ est génériquement sans point fixe.

2.1.18 Remarque

La famille F_2 est un sous-ensemble des classes d'isométrie/isomorphie de surfaces de Riemann de genre 2, l'espace des modules \mathcal{M}_2 . Par contre, $\mathcal{F}_2(\mathcal{Q})$ est un sous-ensemble de l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_2 , l'ensemble de classes d'équivalence de surfaces marquées. Les espaces F_2 et $\mathcal{F}_2(\mathcal{Q})$ ne sont donc pas des sous-ensembles du même espace.

Il est par ailleurs connu que \mathcal{M}_2 est un quotient de \mathcal{T}_2 par le groupe modulaire Γ_2 , le groupe des classes d'homéomorphisme d'une surface de genre 2 à isotopie près. Nous identifierons quelques éléments de Γ_2 préservant $\mathcal{F}_2(\mathcal{Q})$ dans la section 2.1.3.

Equations pour les surfaces de $\mathcal{F}_2(\mathcal{Q})$ - Action induite sur \mathcal{F}_2 .

La normalisation classique des équations pour les surfaces de \mathcal{F}_2 est celle qui est donnée dans le tableau 1.2.2.

Elle consiste, pour $(S, \varphi) \in \mathcal{F}_2$ à imposer que φ , et par suite $\varphi\tau$, soit induite par $x \mapsto -x$, et à imposer que l'un des points de Weierstrass ait pour coordonnées $(1, 0)$ (et par suite son image par φ et $\varphi\tau$ a pour coordonnées $(-1, 0)$).

Autrement dit, elle consiste à choisir une coordonnée x sur le quotient $S/H_\varphi = S/ \langle \varphi, \tau \rangle$ telle que

1. les images par $p_\varphi : S \mapsto S/H_\varphi$ des points fixes de φ et $\varphi\tau$ soient de coordonnées 0 et ∞ ,
2. l'un des trois points images des points de Weierstrass soit de coordonnée 1.

Un tel choix pour x étant arrêté, les deux autres points images des points de Weierstrass sont alors de coordonnées a et b et

$$y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - b)$$

est une équation pour S .

Les conditions 1. et 2. ci-dessus ne déterminent pas entièrement le choix de x , précisément si x est une telle coordonnée, ce sera également le cas des coordonnées $\frac{x}{a}$, $\frac{x}{b}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{a}{x}$ et $\frac{b}{x}$, pour lesquelles les équations pour S seront différentes.

Pour décrire en terme d'équations des surfaces de \mathcal{F}_2 sous-jacentes l'action de $G_\mathcal{Q}$ sur $\mathcal{F}_2(\mathcal{Q})$ sans ambiguïté, on rigidifie ce choix en y intégrant en partie la géométrie de Q .

Plus précisément, pour $Q \in \mathcal{Q}$ on choisit une coordonnée x_Q sur $S_0 = S_0(Q)$, la surface obtenue en identifiant les bords de Q comme sur la figure 2.1, qui dépend de la position des points coniques de S_0 sur Q de la façon suivante.

On note $r_{1,Q}, \dots, r_{5,Q}$, les points coniques de $S_0(Q)$ dans l'ordre donné par le marquage de Q , $r_{5,Q}$ étant le point correspondant aux sommets de Q .

La coordonnée x_Q est l'unique coordonnée sur $S_0(Q)$ telle que

$$(2.1.19) \quad x_Q(r_{1,Q}) = 0 \quad x_Q(r_{3,Q}) = \infty \quad x_Q(r_{5,Q}) = 1.$$

2.1.20 Définition

Soit $Q \in \mathcal{Q}$, et x_Q comme ci-dessus. On appelle *paramètres d'équation normalisée pour S_Q* le couple (et non la paire)

$$(a, b) = (x_Q(r_{2,Q}), x_Q(r_{4,Q})).$$

2.1.21 Remarque

Notons que la coordonnée x_Q étant entièrement déterminée par les préimages de 0, 1 et ∞ , les paramètres d'équation normalisée pour S_Q ne dépendent que de la position des points sur le quadrangle.

Soit $Q \in \mathcal{Q}$ et $\sigma \in G_{\mathcal{Q}}$, les surfaces $S_0(Q)$ et $S_0(\sigma(Q))$ étant isométriques, on a

$$\{r_{1,Q}, \dots, r_{5,Q}\} = \{r_{1,\sigma(Q)}, \dots, r_{5,\sigma(Q)}\}.$$

Ainsi, σ opère sur l'ensemble des points coniques de $S_0(Q)$ par une permutation.

Plus précisément, à $\sigma \in G_{\mathcal{Q}}$, on associe l'élément $\bar{\sigma}$ du groupe des permutations S_5 défini par

$$\forall Q \in \mathcal{Q} \quad \forall i \in \{1, \dots, 5\} \quad r_{i,\sigma(Q)} = r_{\bar{\sigma}^{-1}(i),Q}.$$

L'application $\sigma \mapsto \bar{\sigma}$ est compatible aux structures de groupe de $G_{\mathcal{Q}}$ et S_5 . En effet,

$$\forall Q \in \mathcal{Q} \quad \forall i \in \{1, \dots, 5\},$$

$$r_{i,\sigma'\sigma(Q)} = r_{\bar{\sigma}'^{-1}(i),\sigma(Q)} r_{\bar{\sigma}'^{-1}(i),\sigma(Q)} = r_{\bar{\sigma}^{-1}\bar{\sigma}'^{-1}(i),\sigma(Q)} = r_{(\bar{\sigma}'\bar{\sigma})^{-1}(i),\sigma(Q)}.$$

L'image est engendrée par les images $\bar{\sigma}_0$ et $\bar{\sigma}_1$ des générateurs σ_0 et σ_1 de $G_{\mathcal{Q}}$, pour lesquels on a :

$$\sigma_0 \cdot (r_{1,Q}, r_{2,Q}, r_{3,Q}, r_{4,Q}, r_{5,Q}) = (r_{2,Q}, r_{3,Q}, r_{4,Q}, r_{1,Q}, r_{5,Q}) \quad \text{d'où} \quad \bar{\sigma}_0 = (4, 3, 2, 1).$$

$$\sigma_1 \cdot (r_{1,Q}, r_{2,Q}, r_{3,Q}, r_{4,Q}, r_{5,Q}) = (r_{3,Q}, r_{2,Q}, r_{5,Q}, r_{4,Q}, r_{1,Q}) \quad \text{d'où} \quad \bar{\sigma}_1 = (1, 5, 3).$$

L'application est donc surjective, $(4, 3, 2, 1)$ et $(1, 5, 3)$ engendrant S_5 .

Son noyau est le sous-groupe $H_{\mathcal{Q}}$ de $G_{\mathcal{Q}}$ constitué des transformations qui conservent la position des points sur le quadrangles, i.e telles que

$$\forall Q \in \mathcal{Q} \quad \forall i \in \{1, \dots, 5\} \quad r_{i,Q} = r_{i,\sigma(Q)}.$$

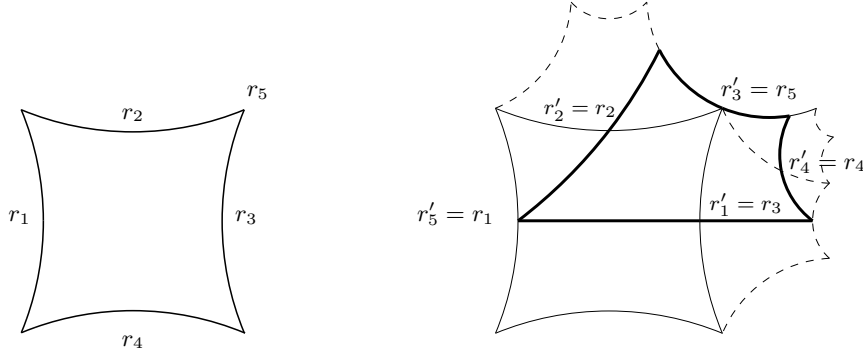


fig. 2.6 $\bar{\sigma}_1 = (1, 5, 3)$

Soit $\sigma \in G_{\mathcal{Q}}$, $\bar{\sigma}$ opère sur les couples (a, b) de la façon suivante.

Les coordonnées x_Q et $x_{\sigma(Q)}$ sur $S_0(Q) = S_0(\sigma(Q))$ se correspondent par l'unique transformation $A_{\bar{\sigma},Q}$ de \mathbb{P}^1 envoyant $x_Q(r_{1,\sigma(Q)})$ sur 0, $x_Q(r_{3,\sigma(Q)})$ sur ∞ et $x_Q(r_{5,\sigma(Q)})$ sur 1, i.e $A_{\bar{\sigma},Q}$ est définie par

$$\begin{aligned} A_{\bar{\sigma},Q}(z) &= \left(\frac{z - x_Q(r_{1,\sigma(Q)})}{z - x_Q(r_{3,\sigma(Q)})} \right) \left(\frac{x_Q(r_{5,\sigma(Q)}) - x_Q(r_{3,\sigma(Q)})}{x_Q(r_{5,\sigma(Q)}) - x_Q(r_{1,\sigma(Q)})} \right) \\ &= \left(\frac{z - x_Q(r_{\bar{\sigma}^{-1}(1),Q})}{z - x_Q(r_{\bar{\sigma}^{-1}(3),Q})} \right) \left(\frac{x_Q(r_{\bar{\sigma}^{-1}(5),Q}) - x_Q(r_{\bar{\sigma}^{-1}(3),Q})}{x_Q(r_{\bar{\sigma}^{-1}(5),Q}) - x_Q(r_{\bar{\sigma}^{-1}(1),Q})} \right) \end{aligned}$$

Et on a

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}.(x_Q(r_2, Q), x_Q(r_4, Q)) &= (x_\sigma(Q)(r_2, \sigma(Q)), x_\sigma(Q)(r_4, \sigma(Q))) \\ &= (A_{\bar{\sigma}, Q}(x_Q(r_2, \sigma(Q))), A_{\bar{\sigma}, Q}(x_Q(r_4, \sigma(Q)))) \\ &= (A_{\bar{\sigma}, Q}(x_Q(r_{\bar{\sigma}^{-1}(2)}, Q)), A_{\bar{\sigma}, Q}(x_Q(r_{\bar{\sigma}^{-1}(4)}, Q)))\end{aligned}$$

Pour les générateurs σ_0 et σ_1 de G_Ω et (a, b) des paramètres d'équation normalisée, on a

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_0 &= (4, 3, 2, 1) & \bar{\sigma}_1 &= (1, 5, 3) \\ A_{\bar{\sigma}_0}(z) &= \frac{z-a}{z-b} \frac{1-b}{1-a} & A_{\bar{\sigma}_1}(z) &= \frac{1}{1-z} \\ \bar{\sigma}_0.(a, b) &= \left(\frac{1-b}{1-a}, \frac{a(1-b)}{b(1-a)} \right) & \bar{\sigma}_1.(a, b) &= \left(\frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-b} \right)\end{aligned}$$

On a donc démontré :

2.1.22 Théorème

L'action sans point fixe de G_Ω sur $\mathcal{F}_2(\Omega) \subset \mathcal{T}_2$ induit une action (ayant des points fixes) du groupe symétrique S_5 sur \mathcal{F}_2 donnée, en terme de paramètres d'équations, par les générateurs

$$\bar{\sigma}_0 : (a, b) \mapsto \left(\frac{1-b}{1-a}, \frac{a(1-b)}{b(1-a)} \right) \quad \bar{\sigma}_1 : (a, b) \mapsto \left(\frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-b} \right).$$

Le tableau suivant donne pour une surface générique de \mathcal{F}_2 un représentant de chacune des dix (d'après 2.1.2) différentes classes d'isomorphie.

σ	$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}.(a, b)$
Id	Id	(a, b)
σ_0	$(4, 3, 2, 1)$	$\left(\frac{1-b}{1-a}, \frac{a(1-b)}{b(1-a)} \right)$
σ_1	$(1, 5, 3)$	$\left(\frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-b} \right)$
σ_1^2	$(1, 3, 5)$	$\left(\frac{-1+a}{a}, \frac{-1+b}{b} \right)$
$\sigma_1\sigma_0$	$(1, 4)(2, 5, 3)$	$\left(\frac{-1+a}{-b+a}, \frac{b(-1+a)}{-b+a} \right)$
$(\sigma_1\sigma_0)^2$	$(2, 3, 5)$	$\left(\frac{1}{1-a}, -\frac{b}{-b+a} \right)$
$(\sigma_1\sigma_0)^3$	$(1, 4)$	$\left(\frac{b-a}{b-1}, \frac{b}{b-1} \right)$
$\sigma_1^2\sigma_0$	$(2, 3)(1, 4, 5)$	$\left(\frac{b-a}{b-1}, \frac{a-b}{a(b-1)} \right)$
$\sigma_2 = \sigma_0^2(\sigma_1^2\sigma_0^3)^3\sigma_0^2$	$(1, 2)$	$\left(\frac{a}{a-1}, \frac{a-b}{a-1} \right)$
$\sigma_3 = (\sigma_0\sigma_1)^3$	$(3, 4)$	$\left(\frac{a(1-b)}{a-b}, 1-b \right)$

2.1.23 Les dix classes d'isomorphie et un de leurs représentants dans G_Ω .

2.1.24 Exemple

Le quadrangle totalement régulier Q_0 tel que $\sigma_0(Q_0) = Q_0$, est donné par les longueurs des arcs géodésiques de bord et de l'une de ses diagonales (qui sont de longueurs égales) :

$$\cosh(l_i) = 3 + 2\sqrt{2} \quad \cosh(l) = 4\sqrt{2} + 5.$$

On a donc pour (a, b) les paramètres d'équation normalisée de S_{Q_0} ,

$$\bar{\sigma}_0.(a, b) = (a, b), \text{ i.e. } a = -i \text{ et } b = i \quad \text{ou} \quad a = i \text{ et } b = -i,$$

et donc $y^2 = (x^2 - 1)(x^4 + 1)$ est une équation pour S_{Q_0} .

Nous donnerons une description adéquate pour les surfaces transformées au chapitre prochain.

2.1.25 Remarque

Le sous-groupe de S_5 qui stabilise les classes d'isomorphie est le sous-groupe $S_{\{1,3\}} \times S_{\{2,4,5\}}$. Il n'est bien évidemment pas normal dans S_5 , ce qui traduit tout simplement le fait qu'il n'y ait pas de structure de groupe associée au choix d'une paire parmi cinq points. Par ailleurs, on vérifie aisément qu'il ne contient pas de sous-groupe normal dans S_5 . Ainsi S_5 est bien le plus petit groupe opérant sur \mathcal{F}_2 dont l'action sur les revêtements ramifiés au dessus de cinq points de la sphère soit transitive.

σ	$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}.(a, b)$
Id	Id	(a, b)
$\sigma_2\sigma_0\sigma_2\sigma_0^{-1}\sigma_2$	$(2, 4)$	(b, a)
σ_0^2	$(1, 3)(2, 4)$	$\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$
$\sigma_0^2\sigma_2\sigma_0\sigma_2\sigma_0^{-1}\sigma_2$	$(1, 3)$	$\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$
$\sigma_0^{-1}\sigma_1\sigma_0$	$(2, 5, 4)$	$\left(\frac{1}{b}, \frac{a}{b}\right)$
$\sigma_0^{-1}\sigma_1^2\sigma_0$	$(2, 4, 5)$	$\left(\frac{b}{a}, \frac{1}{a}\right)$
$\sigma_0\sigma_1\sigma_0$	$(1, 3)(2, 5)$	$\left(a, \frac{a}{b}\right)$
$\sigma_0\sigma_1^2\sigma_0$	$(1, 3)(4, 5)$	$\left(\frac{b}{a}, b\right)$
$\sigma_2\sigma_0\sigma_2\sigma_0^{-1}\sigma_2\sigma_0^{-1}\sigma_1\sigma_0$	$(2, 5)$	$\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)$
$\sigma_2\sigma_0\sigma_2\sigma_0^{-1}\sigma_2\sigma_0^{-1}\sigma_1^2\sigma_0$	$(4, 5)$	$\left(\frac{1}{a}, \frac{b}{a}\right)$
$\sigma_2\sigma_0\sigma_2\sigma_0^{-1}\sigma_2\sigma_0\sigma_1\sigma_0$	$(1, 3)(2, 4, 5)$	$\left(\frac{a}{b}, a\right)$
$\sigma_2\sigma_0\sigma_2\sigma_0^{-1}\sigma_2\sigma_0\sigma_1^2\sigma_0$	$(1, 3)(2, 5, 4)$	$\left(b, \frac{b}{a}\right)$

2.1.26 *Éléments de S_5 opérant trivialement sur les classes d'isomorphie et un de leur représentant dans G_Q .*

2.1.27 Remarque

Nous faisons ici une remarque qui nous sera particulièrement utile dans les chapitres 3 et 4. Pour une surface générique S de F_2 , le groupe d'automorphismes réduit de S est exactement $\mathbb{Z}/2$, i.e S ne possède que deux automorphismes non-triviaux φ et $\varphi\tau$. Les équations du tableau 2.1.26 ci-dessus sont alors les seules équations pour S de la forme $y^2 = (x^2-1)(x^2-a)(x^2-b)$. En effet, les deux seuls automorphismes sont nécessairement ceux induits par $x \mapsto -x$, les changements de coordonnées doivent donc être induits par des transformations de Möbius de la forme $x \mapsto \alpha x$ ou $x \mapsto \frac{\beta}{x}$. Si de plus 1 et -1 doivent être préservés, $\alpha^2 \in \{1, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$, $\beta^2 \in \{1, a, b\}$. Les seules équations obtenues de cette façon sont celles ci-dessus.

2.1.3 Quelques relations entre twists de Dehn et transformations de G_Q

Le sous-groupe K_Q de G_Q constitué des transformations σ telles que $\bar{\sigma} \in S_{\{1,3\}} \times S_{\{2,4,5\}}$ est précisément le sous-groupe qui opère trivialement sur les classes d'isomorphie de courbes algébriques complexes. Ce sous-groupe est nécessairement intimement lié au groupe modulaire Γ_2 de l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_2 . Notons cependant que Γ_2 tout entier ne préserve pas $\mathcal{F}_2(Q)$; c'est son sous groupe $\tilde{\Gamma}_2$ constitué des classes d'homéomorphisme commutant aux involutions que l'on doit considérer.

Nous donnons ici quelques remarques en ce sens.

On commence par rappeler quelques définitions et faits connus sur les groupes modulaires en général et Γ_2 en particulier.

Rappels

2.1.28 Définition

Soit T_g une surface topologique de genre g , c une courbe fermée simple sur T_g et N un voisinage de c . Soit N_0 une surface cylindrique orientée, paramétrée par les coordonnées cylindriques (y, θ) , $-1 \leq y \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, et e un plongement préservant l'orientation tel que $e(N_0) = N$, $e(\{(0, \theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}) = c$.

Le *twist de Dehn positif (resp. négatif) le long de c* est l'homéomorphisme de $\tau_c : T_g \longrightarrow T_g$ (resp τ_c^{-1}), défini par

$$\tau_c = \begin{cases} ehe^{-1} & \text{sur } N \\ Id & \text{sur } T_g \setminus N \end{cases},$$

où $h : N_0 \longrightarrow N_0$, $h(x, \theta) = (y, \theta + \pi(y + 1))$.

2.1.29 Remarque

Si c et d sont des géodésiques orientées transverses, $\tau_c(d)$ ne dépend ni de l'orientation de c ni de celle de d .

2.1.30 Proposition

- i) Soit $\alpha : T_g \longrightarrow T_g$ un homéomorphisme, alors $\tau_{\alpha(c)} = \alpha\tau_c\alpha^{-1}$.
- ii) Si c et d sont des courbes fermées simples isotopes, τ_c et τ_d sont isotopes.

Preuve. voir par exemple [Bir1].

2.1.31 Théorème (Lickorish)

Tout homéomorphisme de T_g préservant l'orientation est isotope à un produit de twists de Dehn le long de courbes fermées simples non séparantes.

Preuve : voir [De], [Li], [Bir1], [Bir2].

Dans le cas particulier des surfaces de genre 2, qui nous intéresse, on a également:

2.1.32 Théorème (Birman)

Le groupe modulaire Γ_2 d'une surface de genre 2 admet la présentation :

générateurs : ζ_1, \dots, ζ_5

$$\begin{aligned} \zeta_i \zeta_j &= \zeta_j \zeta_i & |i - j| \geq 2, 1 \leq i, j \leq 5 \\ \zeta_i \zeta_{i+1} \zeta_i &= \zeta_{i+1} \zeta_i \zeta_{i+1} & 1 \leq i \leq 4 \\ \text{relations : } (\zeta_1 \dots \zeta_5)^6 &= 1 \\ (\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5^2 \zeta_4 \zeta_3 \zeta_2 \zeta_1)^2 &= 1 \\ (\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5^2 \zeta_4 \zeta_3 \zeta_2 \zeta_1) \zeta_i &= \zeta_i (\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5^2 \zeta_4 \zeta_3 \zeta_2 \zeta_1) & 1 \leq i \leq 5. \end{aligned}$$

Preuve : voir [Bir2].

2.1.33 Remarque

Les générateurs ζ_i de (4.5) peuvent être interprétés géométriquement comme étant les courbes tracées sur la surface de la figure 2.7.

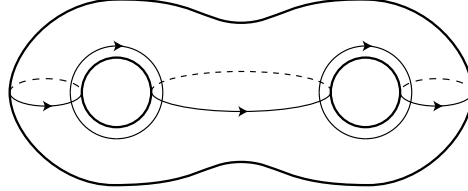


fig. 2.7

Twists de Dehn et demi-twists le long des géodésiques de bord du Quadrangle

Soit $Q = (e_1, e_2, e_3, e_4) \in \mathcal{Q}$. Les géodésiques de S_Q sont représentées par des éléments hyperboliques du groupe Fuchsien Γ_Q de S_Q donc par des mots $m(e_i)$ en les e_i .

On ne s'intéresse ici qu'à des twists de Dehn et demi-twists le long de géodésiques stables par l'involution hyperelliptique, i.e telles que

$$e_2 m(e_i) e_2 = \begin{cases} \gamma m(e_i) \gamma^{-1} & \gamma \in \Gamma_Q \\ \text{ou} \\ \gamma (m(e_i))^{-1} \gamma^{-1} & \gamma \in \Gamma_Q \end{cases},$$

et essentiellement à deux types de twists : des twists le long de géodésiques stables par les involutions et des composés de twists le long de géodésiques et de leur image par les involutions si celles-ci sont disjointes, i.e des éléments de Γ_2 de la forme :

$$(2.1.34.a) \quad \tau_{m(e_i)} \quad \text{avec} \quad e_1 m(e_i) e_1 = \begin{cases} \gamma m(e_i) \gamma^{-1} & \gamma \in \Gamma_Q \\ \text{ou} \\ \gamma (m(e_i))^{-1} \gamma^{-1} & \gamma \in \Gamma_Q \end{cases}$$

ou

$$(2.1.34.b) \quad \tau_{m(e_i)} \circ \tau_{e_1 m(e_i) e_1} \quad \text{si } e_1 m(e_i) e_1 \text{ et } m(e_i) \text{ sont des g\u00e9od\u00e9siques disjointes de } S_Q.$$

Plus pr\u00e9cis\u00e9ment les identifications de twists de Dehn avec des \u00e9l\u00e9ments de K_Q dont nous disposons jusqu'\u00e0 pr\u00e9sent sont tous des compos\u00e9s de twists le long de g\u00e9od\u00e9siques qui rel\u00e8vent des g\u00e9od\u00e9siques joignant deux des points coniques dans les surfaces $S_0(Q)$ (i.e des g\u00e9od\u00e9siques bordant un domaine fondamental en quadrangle pour S_0).

Les lois de groupes dans Γ_2 et K_Q se correspondent bien dans le sens suivant :

2.1.35 Lemme

Soient σ et σ' des transformations de K_Q .

Supposons que pour tout $Q = (e_1, e_2, e_3, e_4) \in \mathcal{Q}$, on ait

$$S_{\sigma(Q)} = \tau(S_Q) \quad \text{et} \quad S_{\sigma'(Q)} = \tau'(S_Q),$$

o\u00f9 $\tau = \tau^{(e_i)} = \tau_{m_1(e_i)} \circ \cdots \circ \tau_{m_{k_1}(e_i)}$ et $\tau' = \tau'^{(e_i)} = \tau_{m'_1(e_i)} \circ \cdots \circ \tau_{m'_{k_2}(e_i)}$ se d\u00e9composent en produits de twists de Dehn le long de g\u00e9od\u00e9siques de S_Q .

Alors

- i) $\tau \circ \tau'(S_Q) = S_{\sigma' \circ \sigma(Q)}$.
- ii) Pour $\tilde{\sigma} \in K_Q$, et $\tau_{\tilde{\sigma}} = \tau^{\tilde{\sigma}(e_i)} = \tau_{m_1(\tilde{\sigma}(e_i))} \circ \cdots \circ \tau_{m_{k_1}(\tilde{\sigma}(e_i))}$, on a

$$\tau_{\tilde{\sigma}}(S_Q) = S_{\tilde{\sigma}^{-1} \sigma \tilde{\sigma}(Q)}.$$

Preuve : C'est une cons\u00e9quence imm\u00e9diate de 2.1.30 i).

Pour i), on a

$$\begin{aligned} \tau \circ \tau'(S_Q) &= \tau \circ (\tau_{m_1(e_i)} \circ \cdots \circ \tau_{m_{k'}(e_i)})(S_Q) \\ &= \tau \circ \left((\tau^{-1} \tau_{\tau(m'_1(e_i))} \tau) \circ \cdots \circ (\tau^{-1} \tau_{\tau(m'_{k'}(e_i))} \tau) \right) (S_Q) \\ &= \left(\tau_{\tau(m'_1(e_i))} \circ \cdots \circ \tau_{\tau(m'_{k'}(e_i))} \right) \circ \tau (S_Q) \\ &= \left(\tau_{\tau(m'_1(e_i))} \circ \cdots \circ \tau_{\tau(m'_{k'}(e_i))} \right) (S_{\sigma(Q)}) \\ &= \left(\tau_{m'_1(\sigma(e_i))} \circ \cdots \circ \tau_{m'_{k'}(\sigma(e_i))} \right) (S_{\sigma(Q)}) \\ &= \tau'_{\sigma}(S_{\sigma(Q)}) \\ &= S_{\sigma' \circ \sigma(Q)}. \end{aligned}$$

Pour ii) Il suffit de remarquer que $\tilde{\sigma}$ appartenant \u00e0 K_Q , il existe $\tilde{\tau} \in \Gamma_2$ tel que $\tilde{\tau}(S_Q) = S_{\tilde{\tau}(Q)}$ et $\tilde{\tau}(m_k(e_i)) = \tilde{\tau}(m_k(\tilde{\sigma}(e_i)))$ et d'appliquer i).

Twists de Dehn le long des géodésiques de bord du quadrangle

Pour $Q \in \mathcal{Q}$, on peut donner le modèle topologique suivant pour S_Q :

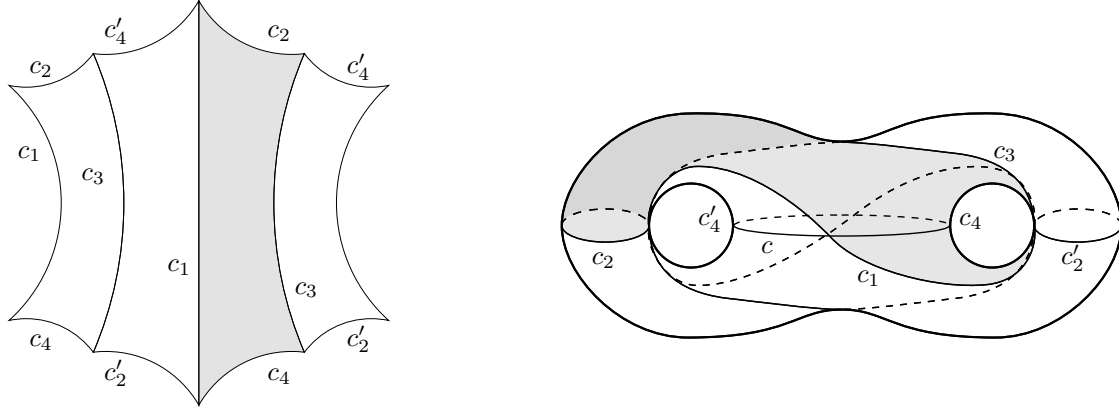


fig. 2.8

Les géodésiques sur la figure ci-dessus sont représentées par les éléments de Γ_Q suivants

$$\begin{array}{ll}
 c_1 & c_1(e_i) = (e_2 e_3 e_4)^2 \\
 c_2 & c_2(e_i) = (e_3 e_4 e_1) \quad c'_2 \quad c'_2(e_i) = e_1 e_3 e_4 \\
 c_3 & c_3(e_i) = (e_4 e_1 e_2)^2 \\
 c_4 & c_4(e_i) = (e_1 e_2 e_3) \quad c'_4 \quad c'_4(e_i) = (e_2 e_3 e_1) \\
 c & (e_1 e_4)^2
 \end{array}$$

Soit $\tau_2 = \tau_{c_2} \circ \tau_{c'_2} = \tau_{c'_2} \circ \tau_{c_2}$. On obtient la correspondance entre τ_2 et la transformation $\sigma = \sigma_0 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_0^3 \sigma_1 \sigma_0$ de K_Q de la façon suivante :

Les images par τ_2 des géodésiques de bord de Q passent au quotient dans $S_0(Q)$ en les géodésiques de bord du domaine fondamental en quadrangle $\sigma(Q)$ de $S_0(Q)$. On construit σ en considérant les intersections de ces géodésiques avec chacune des copies de Q et en utilisant la technique décrite dans la preuve de 2.1.10.

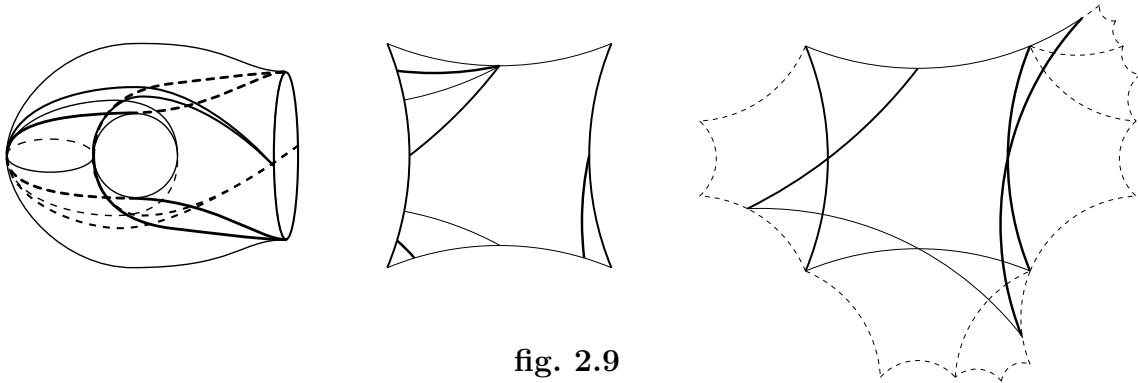


fig. 2.9

2.1.36 Remarque

Pour τ_2 , la transformation σ est telle que $\bar{\sigma} = (2, 5)$ dans G_Q/H_Q . Ainsi, on a une lecture sur les équations de l'action de τ_2 donnée par

$$(a, b) \mapsto \left(\frac{1}{a}, \frac{b}{a} \right).$$

On obtient de la même façon les correspondances suivantes :

$$\begin{aligned}
\tau_4 = \tau_{c_4} \circ \tau_{c'_4} = \tau_{c_2(\sigma_0^2(e_i))} \circ \tau_{c'_2(\sigma_0^2(e_i))} & \qquad \qquad \qquad \sigma' = \sigma_0^3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_0^3 \sigma_1 \sigma_0^3 \\
& \qquad \qquad \qquad (e_1, e_2, e_3, e_4) \mapsto (e_1, e_2, e_3, (e_1 e_2 e_3) e_4) \\
\tau_c & \qquad \qquad \qquad \sigma_0 \sigma_2^2 \sigma_0^{-1} \\
& \qquad \qquad \qquad (e_1, e_2, e_3, e_4) \mapsto ((e_1 e_4)^2 e_1, e_2, e_3, (e_1 e_4)^2 e_4) \\
\tau_{c_1} = \tau_{\tau_4(c)} = \tau_4 \tau_c \tau_4^{-1} & \qquad \qquad \qquad (e_1, e_2, e_3, e_4) \mapsto ((e_2 e_3 e_4)^2 e_1, e_2, e_3, e_4) \\
\tau_{c_3} = \tau_{c_1(\sigma_0^2(e_i))} & \qquad \qquad \qquad (e_1, e_2, (e_4 e_1 e_2)^2 e_3, e_4)
\end{aligned}$$

On trouve également les correspondances remarquables suivantes :

- . La transformation σ_0^2 correspond à $(\tau_{c'_4} \tau_{c_4}^{-1})(\tau_{c_2} \tau_{c'_2}^{-1})(\tau_{c'_4} \tau_{c_4}^{-1})$.
- . La transformation σ_2^2 correspond au twist de Dehn positif le long de la géodésique donnée par $(e_2 e_1)^2$.
- . La transformation $\sigma_3^2 = \sigma_0^2 \sigma_2^{-2} \sigma_0^2$ correspond au twist de Dehn négatif le long de la géodésique donnée par $(e_3 e_4)^2$.
- . La transformation $\sigma_0^{-1} \sigma_2^2 \sigma_0$ correspond au twist de Dehn positif le long de la géodésique $(e_3 e_2)^2$.

Demi-Twists

Certains des twists de Dehn ci-dessus apparaissent comme des carrés de transformations de G_Q . Cela conduit à penser que les transformations correspondantes sont des demi-twists, qui eux ne respectent pas les classes d'isométrie. C'est effectivement le cas pour certaines d'entre elles et notamment pour les transformations de la forme $\sigma_0^k \sigma_2 \sigma_0^{-k}$ et $\sigma_0^k \sigma_3 \sigma_0^{-k}$:

2.1.37 Lemme

Soit $Q \in \mathcal{Q}$.

- i) On passe de S_Q à $S_{\sigma_2(Q)}$ par un demi-twist positif le long de la géodésique $(e_2 e_1)^2$ de S_Q .
- ii) On passe de S_Q à $S_{\sigma_0 \sigma_2 \sigma_0^{-1}(Q)}$ par un demi-twist le long de la géodésique $(e_1 e_4)^2$.
- iii) On passe de S_Q à $S_{\sigma_0^2 \sigma_2 \sigma_0^2(Q)}$ par un demi-twist le long de la géodésique $(e_4 e_3)^2$.
- iv) On passe de S_Q à $S_{\sigma_0^{-1} \sigma_2 \sigma_0(Q)}$ par un demi-twist le long de la géodésique $(e_3 e_2)^2$.

Preuve : L'argument est le même dans tous les cas : on le montre pour σ_2 .

Comme σ_2^2 correspond à un twist de Dehn sur la géodésique correspondante, il faut juste vérifier que σ_2 opère localement comme un demi-twist sur cette géodésique et que ce demi-twist n'est pas composé avec une opération "éloignée", qui commute donc au demi-twist, et dont le carré est trivial.

Or dans S_Q et dans $S_{\sigma_2(Q)}$ la géodésique $(e_2 e_1)^2$, qui joint les milieux des premiers et deuxièmes côtés des différentes copies de Q et $\sigma_2(Q)$, et les géodésiques

correspondant aux quatrièmes côtés des différentes copies de Q et $\sigma_2(Q)$ découpent chacune des deux surfaces en deux pantalons isométriques, et tels que les quatre pantalons ainsi obtenus soient également isométriques.

Remarquons de plus que ces deux découpages sont obtenus de la même façon par rapport aux marquages respectifs des deux surfaces.

Ainsi σ_2 ne peut agir que comme un produit de twists à paramètres non nécessairement entiers le long des géodésiques de bord des pantalons. Comme de plus σ_2^2 est un twist de Dehn le long de $(e_2e_1)^2$, la seule possibilité est que σ_2 soit un demi-twist le long de $(e_2e_1)^2$.

On a alors

2.1.38 Proposition

Soit $\sigma \in G_Q$, il existe une suite $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ de transformations de G_Q telles que

- i) $\sigma_n \cdot \sigma_{n-1} \dots \sigma_1 = \sigma$
- ii) pour $Q_0 \in \mathcal{Q}$ et $Q_i = \sigma_i \dots \sigma_1(Q_0)$, $i = 1, \dots, n$, la transformation σ_{i+1} correspond
 - soit à un demi-twist le long d'une géodésique laissée stable par les involutions non-triviales de S_{Q_i}
 - soit à un produit de twists de Dehn le long de géodésiques de S_{Q_i} de l'un des type 2.1.34.a ou 2.1.34.b.

Preuve : Il suffit de le montrer pour les générateurs σ_0 et σ_1 de G_Q , i.e, il suffit d'exprimer σ_0 et σ_1 comme un produit de transformations que l'on a déjà identifiées comme étant de l'un des deux types ci-dessus.

Pour σ_0 : on vérifie aisément que

$$\sigma_0 = (\sigma')^{-2} \cdot \sigma_2 \cdot (\sigma_0^{-1} \sigma_2 \sigma_0) \cdot (\sigma_0^2 \sigma_2 \sigma_0^2),$$

où pour tout $Q = (e_1, e_2, e_4, e_4)$,

$$\sigma' = \sigma_0^3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_0^3 \sigma_1 \sigma_0^3 : (e_1, e_2, e_3, e_4) \mapsto (e_1, e_2, e_3, (e_1 e_2 e_3) e_4)$$

correspond comme précédemment au produit de twists de Dehn le long des géodésiques $c_4(Q)$ et $c'_4(Q)$. Par ailleurs le lemme 2.1.37 assure que (σ_2) , $(\sigma_0^{-1} \sigma_2 \sigma_0)$ et $(\sigma_0^2 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_0^2)$ correspondent à des demi-twists.

Pour σ_1 , on utilise la transformation $\sigma = \sigma_0 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_0^3 \sigma_1 \sigma_0$ qui pour tout quadrangle Q correspond au produit des twists de Dehn le long des géodésiques $c_2(Q)$ et $c'_2(Q)$, et le fait que ce soit vrai pour σ_0 .

On a donc

$$\sigma_1 = \sigma_0 \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_0^{-1} \sigma \sigma_0^{-1} = \sigma_0 (\sigma_0^2 \sigma_2 \sigma_0^2) \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_0^{-1} \cdot \sigma \cdot \sigma_0.$$

2.1.39 Remarques

1. Toutes les géodésiques sur lesquelles le demi-twist est possible sont stables sous les involutions non-triviales de la surface considérée. Cette restriction semble être nécessaire : il existe des exemples où si on fait simultanément deux demi-twists le long de deux géodésiques échangées par les involutions non-triviales, les surfaces quotients ne sont plus isométriques.

2. On attire l'attention sur un fait qui peut prêter à confusion. Lorsque l'on ne considère que des twists de Dehn, la classe d'isométrie de la surface reste inchangée, en particulier le fait de remarquer, comme nous l'avons fait dans le lemme 2.1.35, que les lois de groupes de $K_{\mathbb{Q}}$ et Γ_2 sont opposées a un sens. En revanche, le fait que l'on autorise des demi-twists oblige à raisonner en terme d'opérations successives.

2.2 Actions sur F_6

Les surfaces S de genre 2 dont le groupe d'automorphismes réduit, $\text{Aut}^r(S)$, contient le groupe diédral D_3 constituent une sous-famille à un paramètre de F_2 .

Cependant, si $S \in F_6$, ses involutions non-triviales et ses automorphismes d'ordre 3 ne commutent pas. En particulier, si φ est une involution non-triviale de S , les automorphismes d'ordre 3 ne passent pas au quotient dans S/H_φ .

Aussi, nous traitons F_6 à part, mais de façon complètement similaire à F_2 .

Pour $S \in F_6$, on note $H = \langle \psi, \varphi, \tau \rangle = D_3 \times \mathbb{Z}_2$ où ψ est un automorphisme d'ordre 3 et φ une involution non-triviale. Notons que pour toute surface de F_6 à l'exception des courbes exceptionnelles F_{12} et F_{24} , H est en fait égal à $\text{Aut}(S)$.

On a des analogues des lemme 2.1.1 et corollaire 2.1.2.

2.2.1 Lemme

Soit $S \in F_6$. Le revêtement $p : S \longrightarrow S/H$ est une application de degré 12 ramifiée en quatre points dont l'un, d'indice de ramification 3 est l'image des points fixes des automorphismes d'ordre 3, et les trois autres, tous d'indice de ramification 2 se répartissent de la façon suivante :

- . un point image des points de Weierstrass.
- . deux points images des points fixes des involutions non-triviales de S .

La donnée des quatre points assortie de la connaissance du point image des points de Weierstrass et du point d'indice de ramification 3 détermine S .

2.2.2 Corollaire

Soient r_0 et r_1, r_2, r_3 quatre points sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Il existe trois surfaces S_j de F_6 non généralement deux à deux isomorphes telles que les revêtements $p_j : S_j \longrightarrow S_j/H_j$ soient ramifiés au dessus des r_i avec indice de ramification 3 en r_0 et 2 en r_1, r_2 et r_3 .

Preuve : Il s'agit de choisir celui des trois points qui est l'image des points de Weierstrass de S_j .

2.2.3 Remarque

Du point de vue hyperbolique, la surface quotient hérite d'une structure de sphère hyperbolique ayant un point conique d'angle total $\frac{2\pi}{3}$ et 3 points d'angle π . Ainsi si S et S' sont des surfaces de F_6 ramifiées au dessus des r_i telles que les points d'indice 3 pour S et S' soient deux points différents parmi les r_i , les surfaces quotients ne sont pas en général isométriques.

2.2.1 Triangles Marqués

Soit T un triangle hyperbolique dont la somme des angles au sommets est $\frac{2\pi}{3}$. On recolle en leur milieu les côtés de T . La surface obtenue $S_1(T)$ est une sphère hyperbolique ayant 3 points coniques d'angle π et un point d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

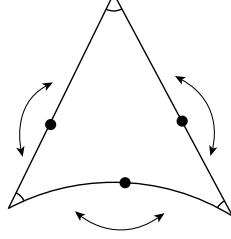


fig. 2.10

Réciproquement, si S_1 est une telle surface, on obtient un triangle du type ci-dessus en découpant S_1 le long des géodésiques dans les classes d'homotopie de trois chemins disjoints reliant le point d'angle $\frac{2\pi}{3}$ à chacun des trois autres points.

La définition du triangle marqué s'appuie comme celle du quadrangle marqué sur un système de générateurs naturels pour un groupe Fuchsien de S_1 :

2.2.4 Définitions

1. On appelle *triangle marqué* un système

$$(e_1, e_2, e_3) \mid e_i \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}), \text{tr}(e_i) = 0, \left| \text{tr}\left(\prod e_i\right) \right| = 1.$$

La condition $|\text{tr}(\prod e_i)| = 1$ assure l'existence d'éléments elliptiques d'ordre 3.

On note \mathcal{T} l'ensemble des triangles marqués quotienté par la relation

$$(e_1, e_2, e_3) \sim (e'_1, e'_2, e'_3) \iff \exists \gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}), e'_i = \gamma e_i \gamma^{-1}, i = 1, 2, 3.$$

2. On appelle *domaine fondamental en triangle de S_1* tout triangle marqué (e_1, e_2, e_3) tel que $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ soit un groupe Fuchsien pour S_1 .

On note \mathcal{T}_{S_1} le sous-ensemble de \mathcal{T} constitué des domaines fondamentaux en triangles de S_1 .

3. Pour $T \in \mathcal{T}$ on note $S_1(T)$ la surface de genre 0 obtenue en identifiant les côtés de T en leur milieu.

2.2.5 Remarque

Le triangle est également entièrement décrit par le triplet ordonné des longueurs de ses géodésiques de bord.

En particulier, si L_i désigne le cosinus hyperbolique du côté de T portant le centre de e_i , on a

$$L_i = \frac{\text{tr}(e_{i-1}e_{i+1})^2 - \text{tr}(e_{i+1}e_i)^2 - \text{tr}(e_i e_{i-1})^2 + \text{tr}(e_i e_{i-1})\text{tr}(e_{i-1}e_{i+1})\text{tr}(e_{i+1}e_i)}{\text{tr}(e_{i-1}e_{i+1})^2 + \text{tr}(e_{i+1}e_i)^2 + \text{tr}(e_i e_{i-1})^2 - \text{tr}(e_i e_{i-1})\text{tr}(e_{i-1}e_{i+1})\text{tr}(e_{i+1}e_i)}$$

indices modulo 3.

La condition sur l'angle total aux sommets de T pour la surface $S_1(T)$ obtenue en identifiant les bord de T s'exprime alors :

$$\frac{(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) + (L_1L_2 + L_2L_3 + L_3L_1) + (L_1 + L_2 + L_3) - L_1L_2L_3}{(L_1 + 1)(L_2 + 1)(L_3 + 1)} = \frac{1}{2}.$$

Etant donné un couple de longueurs (l_i, l_j) , il existe un triangle marqué dont les longueurs des i -ièmes et j -ièmes cotés sont l_i et l_j si les cosinus hyperboliques de l_i et l_j vérifient :

$$L_i \geq \frac{5L_j - 3}{3L_j - 5}.$$

En cas d'égalité, on peut montrer facilement en utilisant les relations trigonométriques dans le triangle que l'angle adjacent aux cotés de longueur l_i et l_j est $\frac{\pi}{3}$. Nous verrons que cette condition caractérise certaines classes de surfaces réelles construites à partir du triangle.

En particulier si $L_2 = L_3 = 3$, on a $L_2 = \frac{5L_2 - 3}{3L_2 - 5} = \frac{5L_3 - 3}{3L_3 - 5}$ et le premier côté vérifie alors $L_1 = 5$. Nous verrons que ce triangle correspond en fait à F_{12} .

Transformations des Triangles marqués

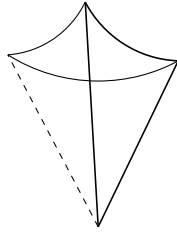
2.2.6 Définitions

On définit les transformations sur \mathcal{T} suivantes :

i) la permutation circulaire ρ_0 donnée par

$$\rho_0 : (e_1, e_2, e_3) \longmapsto (e_2, e_3, e_1).$$

ii)



$$\rho_1 : (e_1, e_2, e_3) \longmapsto (e_1, e_3, e_1e_2e_1) \sim (e_1, e_1e_3e_1, e_2).$$

2.2.7 Remarque

Les transformations ρ_0 et ρ_1 s'expriment très simplement en terme de longueurs des géodésiques de bord. On a pour ρ_1 :

$$(L_1, L_2, L_3) \mapsto (L_2L_3 - L_1 - \frac{1}{2}(L_2 - 1)(L_3 - 1) - 1, L_3, L_2).$$

2.2.8 Définition

On appelle *groupe des transformations des triangles marqués* le groupe $G_{\mathcal{T}}$ engendré par ρ_0 et ρ_1 .

2.2.9 Remarque

Les générateurs ρ_0 et ρ_1 de $G_{\mathcal{T}}$ sont d'ordres respectivement 2 et 3. On trouve néanmoins les transformations d'ordre infini (voir fig.2.15) suivantes :

$$\begin{aligned}\check{\rho}_1 &= \rho_0^2 \rho_1 \rho_0^2 : (e_1, e_2, e_3) \longmapsto (e_1, e_3, e_3 e_2 e_3). \\ \check{\rho}_2 &= \rho_0 \rho_1 : (L_1, L_2, L_3) \longmapsto (L_1, L_1 L_2 - L_3 - \frac{1}{2}(L_1 - 1)(L_2 - 1) - 1, L_2). \\ & (e_1, e_2, e_3) \longmapsto (e_1 e_3 e_1, e_2, e_1). \\ \check{\rho}_3 &= \rho_1 \rho_0 : (L_1, L_2, L_3) \longmapsto (L_3, L_2, L_2 L_3 - L_1 - \frac{1}{2}(L_2 - 1)(L_3 - 1) - 1). \\ & (e_1, e_2, e_3) \longmapsto (e_2, e_2 e_1 e_2, e_3). \\ & (L_1, L_2, L_3) \longmapsto (L_1 L_3 - L_2 - \frac{1}{2}(L_1 - 1)(L_3 - 1) - 1, L_1, L_3).\end{aligned}$$

Nous verrons que l'on peut interpréter très simplement certaines puissances des $\check{\rho}_i$ en terme de twists sur les revêtements de $S_1(T)$.

2.2.10 Proposition

Soit S_1 une surface hyperbolique de genre 0 ayant trois points coniques d'angle π et un point d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Le groupe des transformations des triangles marqués $G_{\mathcal{T}}$ opère transitivement sur \mathcal{T}_{S_1} .

Preuve : La preuve est complètement similaire à celle de 2.1.10. A savoir :

Soient $T, T' \in \mathcal{T}_{S_1}$ on construit une suite $T = T_0, \dots, T_n = T'$.

Soient a_1, a_2, a_3 les arcs géodésiques de bord de T' dans S_1 , orientés de façon à avoir tous même source.

On découpe S_1 le long de ∂T , et on considère pour chaque a_i le nombre l_{i, T_0} de composantes connexes de $\overset{\circ}{T} \cap a_i$.

On traite ensuite les a_i les unes après les autres de la même façon.

Pour a_1 on a :

Si $l_1 = 0$, a_1 correspond à l'un des côtés de T et on passe à a_2 .

Si $l_1 \neq 0$, on considère $a_{1,1}, \dots, a_{1,l_1}$ les adhérences des composantes connexes de $\overset{\circ}{T} \cap a_i$ munies de l'orientation héritée de a_1 .

Si l'origine de $a_{1,1}$ est le centre de $e_{k-1} e_k e_{k+1}$, son but est sur le côté portant e_k . On transforme alors T_0 au moyen de $\rho_1 \rho_0^{k-1}$ et on se ramène à un triangle T_1 tel que le nombre l_{1, T_1} de composantes connexes de $a_1 \cap \overset{\circ}{T}$ soit strictement inférieur à l_{1, T_0} .

On réitère le procédé jusqu'à ce que $l_{1, T_r} = 0$ et traite a_2 et a_3 de la même façon. Il reste à faire coïncider les marquages du triangle obtenu et de T' au moyen d'une puissance de ρ_0 .

2.2.2 Les revêtements de genre 2

Action de $G_{\mathcal{T}}$ sur $F_6(\mathcal{T})$

Soit $T \in \mathcal{T}$ on considère le revêtement de genre 2 de $S_1(T)$, S_T , obtenu en recollant par symétrie en les milieux des côtés 12 copies de T comme sur la figure 2.11 avec la combinatoire :

1—4 , 2—11 , 3—6 , 5—8 , 7—10, 9—12.

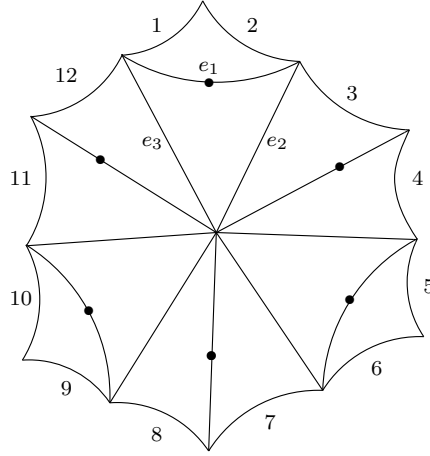


fig. 2.11

2.2.11 Remarques

1. La rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ au centre de la figure est alors donnée par

$$\psi = e_3 e_1 e_2 ,$$

et les identifications de côtés correspondent aux transformations hyperboliques suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1 \rightarrow 4 & (e_2 e_1)^2 & 5 \rightarrow 8 & (e_2 e_1 e_3)(e_2 e_1)^2(e_3 e_1 e_2) & 9 \rightarrow 12 & (e_3 e_1 e_2)(e_2 e_1)^2(e_2 e_1 e_3) \\ 2 \rightarrow 11 & (e_3 e_1)^2 & 6 \rightarrow 3 & (e_2 e_1 e_3)(e_3 e_1)^2(e_3 e_1 e_2) & 10 \rightarrow 7 & (e_3 e_1 e_2)(e_3 e_1)^2(e_2 e_1 e_3) \end{array}$$

Les géodésiques correspondant aux transformations ci-dessus nous seront utiles pour décrire certains twists de Dehn sur S_T .

2. Les points marqués sur la figure sont les points de Weierstrass.

Ils correspondent aux centres de e_1 , $(e_3 e_1 e_2)(e_1)(e_2 e_1 e_3)$, $(e_2 e_1 e_3)(e_1)(e_3 e_1 e_2)$ et $e_3 e_1 e_3$, $(e_3 e_1 e_2)(e_3 e_1 e_3)(e_2 e_1 e_3)$, $(e_2 e_1 e_3)(e_3 e_1 e_3)(e_3 e_1 e_2) = e_2 e_1 e_2$.

2.2.12 Exemple

Considérons le triangle marqué T donné par le triplet de longueurs

$$(\cosh(l_1), \cosh(l_2), \cosh(l_3)) = (5, 3, 3).$$

Si h_1 est la longueur de l'arc géodésique joignant le milieu du premier côté de T , on a

$$h_1 = \frac{l_1}{2} = \operatorname{arccosh}(\sqrt{3}).$$

L'automorphisme d'ordre 3, ψ , de S_T est alors le carré d'un automorphisme ψ_0 d'ordre 6 i.e $S_T = F_{12}$.

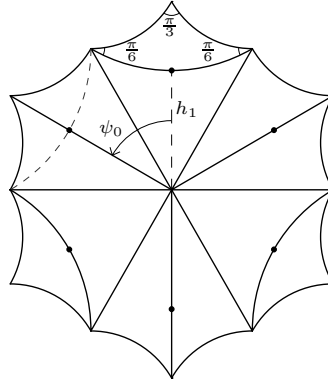


fig. 2.12 F_{12}

On a comme pour les quadrangles un analogue hyperbolique du lemme 2.2.1 :

2.2.13 Lemme

Soit $S \in F_6$, φ une involution non triviale de S et ψ un automorphisme d'ordre 3 de S . Soit $T \in \mathcal{T}$ un domaine fondamental en triangle de $S_1 = S/H = S/\langle \psi, \varphi, \tau \rangle$ tel que l'image des points de Weierstrass de S soit sur le premier côté de T . Alors S est isométrique à S_T .

Avec les mêmes arguments que ceux de 2.1.15, on obtient :

2.2.14 Proposition

L'application $T \mapsto S_T$ définit une injection de \mathcal{T} dans l'espace de Teichmüller des surfaces de genre 2.

2.2.15 Notation

On note

$$F_6(\mathcal{T}) = \{S_T, T \in \mathcal{T}\} \subset \mathcal{T}_2.$$

On a alors

2.2.16 Proposition

L'action de $G_{\mathcal{T}}$ sur $F_6(\mathcal{T})$ est génériquement sans point fixe.

Action induite sur F_6

Plusieurs choix peuvent être faits pour la normalisation des équations des surfaces de F_6 . Nous faisons ici le choix le plus classique, et discuterons d'un autre choix dans la section 3.3.

Les équations des surfaces S de F_6 peuvent toujours être normalisées de sorte que l'automorphisme d'ordre 3, ψ , soit induit par $x \mapsto jx$, $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et que l'involution φ soit induite par $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Le morphisme de revêtement s'écrit alors

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & p & & \\
& & & & \curvearrowright & & \\
S & \longrightarrow & S/\tau & \longrightarrow & S/\langle \psi, \tau \rangle & \longrightarrow & S/H = S_1 \\
(x, y) & \longmapsto & x & \longmapsto & x^3 & \longmapsto & \frac{x^3 + \frac{1}{x^3}}{2}
\end{array}$$

Les points fixes de ψ sont envoyés par p sur ∞ , ceux de φ sur $\{1, -1\}$.

Réciproquement, si x est une coordonnée sur S_1 telle que les images des points fixes des involutions de S soient $\{1, -1\}$ et ∞ l'image des points fixes des automorphismes d'ordre 3, alors pour $a = \frac{b^3 + \frac{1}{b^3}}{2}$ l'image des points de Weierstrass, on reconstruit l'équation normalisée comme ci-dessus pour S :

$$y^2 = (x - b)(x - jb)(x - j^2b)\left(x - \frac{1}{b}\right)\left(x - \frac{j}{b}\right)\left(x - \frac{j^2}{b}\right) = x^6 - 2ax^3 + 1.$$

Si x est une telle coordonnée, c'est également le cas de $-x$ et c'est ici aussi en intégrant en partie la géométrie du triangle que nous allons fixer le choix de la coordonnée sur $S_1 = S_1(T)$ pour construire l'équation de S_T , i.e :

Soit $T \in \mathcal{T}$, $r_{1,T}$, $r_{2,T}$, $r_{3,T}$ les points de $S_1(T)$ correspondant aux milieux des côtés de T , l'ordre étant donné par le marquage, et r_0 le point conique d'angle $\frac{2\pi}{3}$ de S_1 . On choisit la coordonnée x_T sur $S_1 = S_1(T)$ telle que

$$x_T(r_{0,T}) = \infty, \quad x_T(r_{2,T}) = 1, \quad x_T(r_{3,T}) = -1,$$

et on définit :

2.2.17 Définition

Pour $T \in \mathcal{T}$, et x_T comme ci-dessus,

$$a = x_T(r_{1,T})$$

est un *paramètre d'équation normalisée pour S_T* .

A $\rho \in G_{\mathcal{T}}$, on associe l'élément $\bar{\rho}$ de $D_3 = S_3$ défini par :

$$\forall T \in \mathcal{T}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad r_{i,\rho(T)} = r_{\bar{\rho}^{-1}(i),T}.$$

Les générateurs $\bar{\rho}_0$ et $\bar{\rho}_1$ sont donnés par

$$\bar{\rho}_0 = (1, 3, 2) \quad \bar{\rho}_1 = (2, 3),$$

et vérifient donc les relations classiques définissant D_3 , $\bar{\rho}_0^3$, $\bar{\rho}_1^2$, $\bar{\rho}_0\bar{\rho}_1\bar{\rho}_0\bar{\rho}_1$.

Le noyau est le sous-groupe $H_{\mathcal{T}}$ de $G_{\mathcal{T}}$ constitué des transformations ρ telles que

$$\forall T \in \mathcal{T}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad r_{i,T} = r_{i,\rho(T)}.$$

La correspondance entre les coordonnées x_T et $x_{\sigma(T)}$ est donnée par l'unique transformation $A_{\bar{\rho},T}$ de \mathbb{P}^1 qui conserve ∞ , envoie $x_T(r_{2,\rho(T)})$ sur 1, et $x_T(r_{3,\rho(T)})$ sur

–1. Elle est donc définie par

$$\begin{aligned} A_{\bar{\rho},T}(z) &= \left(\frac{2}{x_T(r_{2,\rho(T)}) - x_T(r_{3,\rho(T)})} \right) z - \left(\frac{x_T(r_{2,\rho(T)}) + x_T(r_{3,\rho(T)})}{x_T(r_{2,\rho(T)}) - x_T(r_{3,\rho(T)})} \right) \\ &= \left(\frac{2}{x_T(r_{\bar{\rho}^{-1}(2),T}) - x_T(r_{\bar{\rho}^{-1}(3),T})} \right) z - \left(\frac{x_T(r_{\bar{\rho}^{-1}(2),T}) + x_T(r_{\bar{\rho}^{-1}(3),T})}{x_T(r_{\bar{\rho}^{-1}(2),T}) - x_T(r_{\bar{\rho}^{-1}(3),T})} \right) \end{aligned}$$

On a alors pour ρ_0 et ρ_1 , et a paramètre d'équation normalisée :

$$\begin{array}{ll} \bar{\rho}_0 = (1, 3, 2) & \bar{\rho}_1 = (2, 3) \\ A_{\bar{\rho}_0}(z) = \frac{-2}{a+1}z + \frac{a-1}{a+1} & A_{\bar{\rho}_1}(z) = -z \\ \bar{\rho}_0.a = \frac{a-3}{a+1} & \bar{\rho}_1.a = -a \end{array}$$

On a donc :

2.2.18 Proposition

L'action de $G_{\mathcal{T}}$ sur $F_6(\mathcal{T})$ passe au quotient en une action du groupe symétrique S_3 sur F_6 donnée en terme de paramètres d'équation par

$$\bar{\rho}_0 : a \longmapsto \frac{a-3}{a+1}, \quad \bar{\rho}_1 : a \longmapsto -a.$$

2.2.19 Remarques

1. Le sous-groupe d'ordre 3 de $G_{\mathcal{T}}$ engendré par ρ_0 décrit les trois classes d'isomorphie de revêtements de S_1 . Il nous a cependant semblé intéressant de traiter F_6 de façon similaire à \mathcal{F}_2 , et notamment d'étudier certaines transformations géométriques dont l'action au niveau de l'espace des modules est triviale.
2. On attire l'attention sur le fait que la relation supplémentaire $\bar{\rho}_0\bar{\rho}_1\bar{\rho}_0\bar{\rho}_1$ vérifiée dans S_3 et non dans $G_{\mathcal{T}}$ n'engendre pas de sous-groupe normal de $G_{\mathcal{T}}$.

Le tableau suivant synthétise l'action de D_3 . Notons que les éléments de $G_{\mathcal{T}}$ de la colonne de gauche correspondent à des éléments d'ordre fini alors que ce n'est le cas d'aucune de celles de la colonne de droite.

ρ	$\bar{\rho}$	$\bar{\rho}.a$	ρ	$\bar{\rho}$	$\bar{\rho}.a$
Id	Id	a	ρ_1	$(2, 3)$	$-a$
ρ_0	$(1, 3, 2)$	$\frac{a-3}{a+1}$	$\rho_1\rho_0$	$(1, 2)$	$-\frac{a-3}{a+1}$
ρ_0^2	$(1, 2, 3)$	$\frac{a+3}{1-a}$	$\rho_1\rho_0^2$	$(1, 3)$	$-\frac{a+3}{1-a}$

2.2.20

Quelques twists Remarquables

Soient $c_{1,2}^{(1)}$, $c_{1,2}^{(2)}$ et $c_{1,2}^{(3)}$ les géodésiques représentées par $(e_2e_1)^2$, $(e_2e_1e_3)(e_2e_1)^2(e_3e_1e_2)$, et $(e_3e_1e_2)(e_2e_1)^2(e_2e_1e_3)$, $c_{1,3}^{(1)}$, $c_{1,3}^{(2)}$ et $c_{1,3}^{(3)}$ celles représentées par $(e_3e_1)^2$, $(e_2e_1e_3)(e_3e_1)^2(e_3e_1e_2)$, et $(e_3e_1e_2)(e_3e_1)^2(e_2e_1e_3)$, et $c_{2,3}$ la géodésique représentée par $(e_2e_3)^6$.

Notons que les $c_{1,2}^{(k)}$ sont disjointes et se correspondent par l'automorphisme d'ordre trois, qu'il en est de même pour les $c_{1,3}^k$, elles fournissent donc un découpage de S_T en pantalons dont les longueurs des trois géodésiques de bord sont égales.

Remarquons également que $c_{2,3}$ est laissée stable par $\text{Aut}(S)$.

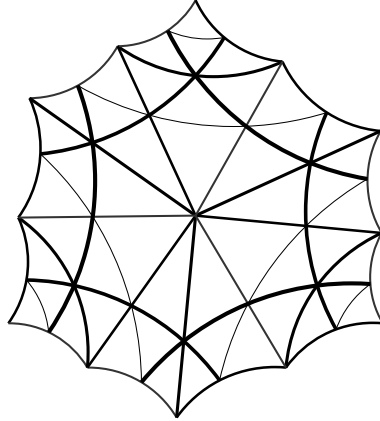


fig. 2.13

Soit $\tau_{1,2} = \tau_{c_{1,2}^{(1)}} \circ \tau_{c_{1,2}^{(2)}} \circ \tau_{c_{1,2}^{(3)}}$.

On a alors, pour $T \in \mathcal{T}$ et $\check{\rho}_2 = \rho_0\rho_1$ comme en 2.2.9

$$\tau_{1,2}(S_T) = S_{\check{\rho}_2^2(T)}.$$

En effet, considérons le modèle topologique suivant pour S_T :

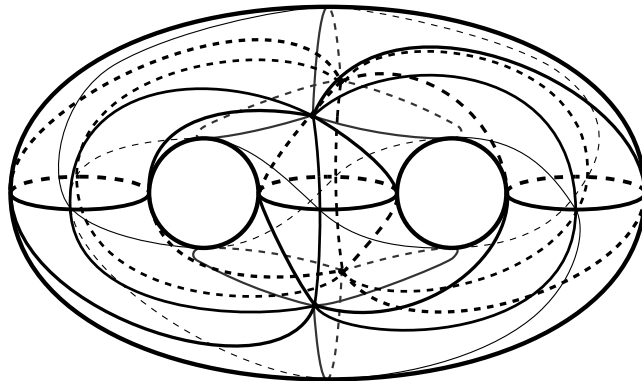


fig. 2.14

Les images par $\tau_{1,2}$ des arcs géodésiques de bord de T passent au quotient dans $S_1(T)$ en les géodésiques de bord de $\rho(T)$, pour $\rho \in G_{\mathcal{T}}$. On retrouve $\rho = \check{\rho}_2^2(T)$ en regardant comment ces géodésiques traversent les différentes copies de T dans S_T et en utilisant 2.2.10.

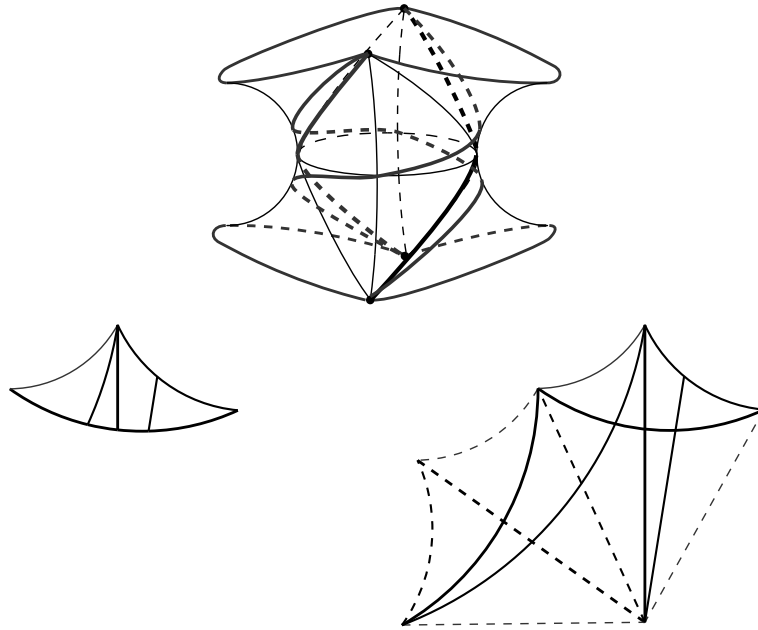


fig. 2.15

On trouve de même

$$\tau_{1,3}(S_T) = \tau_{c_{1,3}^{(1)}} \circ \tau_{c_{1,3}^{(2)}} \circ \tau_{c_{1,3}^{(3)}}(S_T) = S_{\rho_3^2(T)}.$$

$$\tau_{c_{2,3}}(S_T) = S_{\rho_3^6(T)}.$$

Annexe :

Paramétrage et relations sur le quadrangle

Soit $Q = (e_1, \dots, e_4) \in \mathcal{Q}$ un quadrangle marqué. La donnée de Q en terme de générateurs d'un groupe Fuchsien n'est pas toujours très manipulable. Nous exprimons ici des relations de dépendance entre les grandeurs attachées à Q .

Toutes les relations obtenues ici traduisent des relations de traces entre les mots en les e_i données par la condition $\text{tr}(\Pi e_i) = 0$. Elles peuvent plus simplement être déduites de relations connues sur la trigonométrie hyperbolique des triangles. Toutes les formules nécessaires peuvent être trouvées dans [Bu].

Les surfaces de genre 2 ayant une involution non-triviale dépendent de deux paramètres complexes, le quadrangle, qui les décrit, dépend donc de quatre grandeurs réelles. Cependant exprimer toutes les grandeurs attachées au quadrangle en fonction de seulement quatre d'entre elles conduit à des relations inextricables, aussi nous intégrerons une cinquième grandeur.

Conditions d'existence

On considère le quadrangle Q ci-dessous. Soient $l_i, i = 1, \dots, 4$ les longueurs des cotés de Q dans l'ordre donné par le marquage de Q .

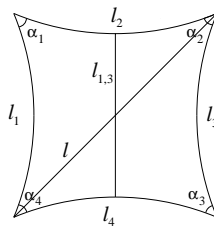


fig. 2.16

Les sommes des angles des triangles dont les longueurs des cotés sont respectivement (l, l_1, l_2) et (l, l_3, l_4) étant complémentaires à π , on a

$$- \frac{(L_1^2 + L^2 + L_2^2) + (LL_1 + L_1L_2 + L_2L) + (L_1 + L + L_2) - L_1LL_2}{(L_1 + 1)(L + 1)(L_2 + 1)} = \frac{(L_3^2 + L^2 + L_4^2) + (LL_3 + L_3L_4 + L_4L) + (L_3 + L + L_4) - L_3LL_4}{(L_3 + 1)(L + 1)(L_4 + 1)}$$

où $L = \cosh l$ et $L_i = \cosh l_i$.

Ce qui donne comme condition pour l'existence du quadrangle, étant données les longueurs l_i :

$$\cosh l_1 + \cosh l_2 + \cosh l_3 + \cosh l_4 \leq 4 \sinh \frac{l_1}{2} \sinh \frac{l_2}{2} \sinh \frac{l_3}{2} \sinh \frac{l_4}{2}$$

Dans ce cas, il existe toujours deux quadrangles en cas d'inégalité stricte, et un quadrangle en cas d'égalité ayant comme longueurs des cotés (l_1, l_2, l_3, l_4) , les cosinus hyperboliques des deux longueurs possibles pour la première diagonale en fonction des l_i sont :

$$L = \frac{L_1 L_2 L_3 L_4 - (L_1 + L_2 + 1)(L_3 + L_4 + 1)}{(L_1 + 1)(L_2 + 1) + (L_3 + 1)(L_4 + 1)} \pm \frac{\sqrt{(L_1 + 1)(L_2 + 1)(L_3 + 1)(L_4 + 1) \left((L_1 - 1)(L_2 - 1)(L_1 - 1)(L_2 - 1) - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4)^2 \right)}}{(L_1 + 1)(L_2 + 1) + (L_3 + 1)(L_4 + 1)}$$

Remarque : Le cinquième paramètre, la longueur de la première diagonale est à choisir parmi deux paramètres, c'est donc un paramètre discret. De plus parmi les deux longueurs possibles, l'une est bien entendu plus grande que l'autre. On désigne par

$$(L_1, L_2, L_2, L_4, \varepsilon)$$

le quadrangle ayant pour longueur des cotés (l_1, l_2, l_3, l_4) et dont la longueur de la première diagonale est maximale pour ces longueurs si $\varepsilon = 1$, minimale si $\varepsilon = -1$.

Les angles α_1 et α_3 étant fonctions croissantes de la longueur de la première diagonale, la longueur de la deuxième diagonale est minimale (resp. maximale) pour les longueurs l_i lorsque celle de la première diagonale est maximale (resp. minimale). Autrement dit, si σ_0 est la permutation circulaire sur les cotés du quadrangle dans le sens indirect,

$$\sigma_0(L_1, L_2, L_2, L_4, \varepsilon) = (L_2, L_3, L_4, L_1, -\varepsilon)$$

Angles Etant donné un quadrangle donné par le système de longueurs $(L_1, L_2, L_3, L_4, \varepsilon)$, les angles sont donnés par

$$\cos \alpha_1 = \frac{\sqrt{L_1 + 1} \sqrt{L_2 + 1} (L_1 L_2 + 1 + L_3 + L_4)}{\sqrt{L_1 - 1} \sqrt{L_2 - 1} ((L_1 + 1)(L_2 + 1) + (L_3 + 1)(L_4 + 1))} - \frac{\varepsilon \sqrt{L_3 + 1} \sqrt{L_4 + 1} \sqrt{(L_1 - 1)(L_2 - 1)(L_1 - 1)(L_2 - 1) - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4)^2}}{\sqrt{L_1 - 1} \sqrt{L_2 - 1} ((L_1 + 1)(L_2 + 1) + (L_3 + 1)(L_4 + 1))}$$

d'où une condition pour $\alpha_1 \geq \frac{\pi}{2}$:

$$2 L_1 L_2 L_3 L_4 + 1 \geq L_1^2 L_2^2 + L_3^2 + L_4^2 + (L_1 + 1)(L_2 + 1)(L_3 + 1)(L_4 + 1).$$

Chapitre 3

Familles Spéciales

Ce chapitre est destiné à l'étude des surfaces liées par le biais des actions de G_Q et de S_5 , aux surfaces des familles F_4 et F_6 . Ces surfaces n'ont pas en général d'autres automorphismes que ceux de \mathcal{F}_2 mais gardent une trace à la fois dans la forme de leurs équations et de leurs pavages en polygones hyperboliques de la structure particulière des surfaces de F_4 ou F_6 auxquelles elles sont liées.

3.1 Adaptation de la description hyperbolique : changements de modèles de Polygones et de schéma de recollement

Les choix de présentation de la métrique hyperbolique des surfaces de \mathcal{F}_2 que nous avons adoptés dans le chapitre précédent étaient adaptés à la lecture des actions de groupes, or ici nous ne nous intéressons plus qu'aux classes d'isométrie/isomorphie, et désirons adapter cette description à la classe de surfaces étudiée. Dans ce contexte, les quadrangles et les triangles ne seront pas toujours les polygones les plus adaptés à la lecture des symétries supplémentaires, aussi nous autoriserons nous à changer de type de bloc de construction.

Par ailleurs, alors que dans le premier chapitre les relations entre les surfaces ayant un quotient commun étaient décrites en fixant la combinatoire de recollement et en faisant varier le bloc de construction au moyen des groupes G_Q et $G_{\mathcal{T}}$, nous fixerons souvent ici le bloc de construction et ferons varier le schéma d'identification.

Polygones pour les quotients de surfaces \mathcal{F}_2

Soit S_0 une surface de genre 0 ayant cinq points coniques d'angle π , Γ_0 un groupe Fuchsien pour S_0 , et P un domaine fondamental convexe (i.e dont les angles sont $\leq \pi$) ayant $2n$ côtés, pour l'action de Γ_0 sur \mathbb{H} .

Le bord de P constitue sur S_0 un graphe G ayant n arêtes et s sommets ($s \geq 5$). La caractéristique d'Euler impose que $s = n + 1$.

Par ailleurs P étant convexe, on peut toujours supposer que la valence v_q en un sommet lisse (i.e d'angle total 2π) vérifie $v_q \geq 3$.

On a

$$2n = \sum v_q = \sum v_{p_i} + \sum_{q \text{ lisse}} v_q \quad \text{avec} \quad \sum v_{p_i} \geq 5, \quad \sum_{q \text{ lisse}} v_q \geq 3(n-4)$$

d'où

$$4 \leq n \leq 7$$

On en déduit facilement les différentes répartitions des valences parmi les sommets et pour chacune d'entre elles les différents graphes possibles.

	valences des des p_i	valences des points lisses	graphes
$n = 4$	4 1 1 1 1		
	3 2 1 1 1		
	2 2 2 1 1		
$n = 5$	1 1 1 1 1	5	
	2 1 1 1 1	4	
	2 2 1 1 1	3	
	3 1 1 1 1	3	
$n = 6$	1 1 1 1 1	4 3	
	2 1 1 1 1	3 3	
$n = 7$	1 1 1 1 1	3 3 3	

3.1.1

Pour chacun des 12 graphes ci-dessus les choix de rotations aux sommets (voir [Rin] chap.2) ne donne qu'un seul type d'identifications à image miroir près. Par ailleurs, dans tous les cas à l'exception du dixième, les identifications sont stables par image miroir.

Polygones pour les quotients de F_6

Soit S_1 une sphère hyperbolique ayant 3 points coniques d'angle π et un point d'angle $\frac{2\pi}{3}$, et Γ_1 un groupe Fuchsien pour S_1 . Soit P un domaine fondamental convexe ayant $2n$ côtés pour l'action de Γ_1 sur \mathbb{H} .

$$2n = \sum v_q = \sum_{p_i} v_{p_i} + \sum_{q \text{ lisse}} v_q \quad \text{avec} \quad \sum v_{p_i} \geq 4, \quad \sum_{q \text{ lisse}} v_q \geq 3(n-3)$$

d'où

$$3 \leq n \leq 5$$

On a alors le tableau de répartition des valences suivant :

	valences des des p_i	valences des points lisses	graphes
$n = 3$	3 1 1 1		
	2 2 1 1		
$n = 4$	1 1 1 1	4	
	2 1 1 1	3	
$n = 5$	1 1 1 1	3 3	

3.1.2

Changement de combinatoire

L'objectif de l'étude menée dans le premier chapitre était de donner une description unifiée des actions sur F_2 , en particulier le schéma de recollement était imposé et c'est le quadrangle, notre bloc de construction, que l'on faisait varier. Ici, notre objectif est autre : nous voulons adapter la description à la classe de surfaces étudiée, et il sera également intéressant de décrire les différentes classes d'isométrie (mais on perdra ce faisant la lecture des actions de groupes) en se fixant le bloc de construction

et en changeant de schéma d'identification. Cette description se fera en plusieurs étapes et plus précisément en considérant le revêtement $S \longrightarrow S_i$, $i = 0, 1$ comme une chaîne de plusieurs revêtement.

Toutes les surfaces étudiées sont des surfaces de F_2 , et ont donc un quotient de genre 1 ayant 2 points coniques d'angle π , et on a donc :

3.1.3 Proposition

Soit C une courbe algébrique de genre 1 ayant deux points marqués p_1 et p_2 . Il existe 4 revêtements doubles de genre 2 de C ramifiés au dessus des p_i .

Preuve : Il existe 4 points q_1, \dots, q_4 sur C tels que $p_1 + p_2 \sim 2q_j$ (équivalence linéaire). De plus, si $i \neq j$, $2(q_i - q_j) \sim 0$. Si q_{j_0} est un tel point, il existe une équation de C de la forme $y^2 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$ pour laquelle q_{j_0} est le point au dessus de $x = \infty$ et les p_i au dessus de $x = 0$. Les a_i sont déterminés à multiplication par un scalaire près par q_{j_0} et les p_i . La courbe de genre 2 $C_{q_{j_0}}$, d'équation $y^2 = (x^2 - a_1)(x^2 - a_2)(x^2 - a_3)$ est donc l'unique revêtement double de C ramifié au dessus des p_i telle que les q_j , $j \neq j_0$ se relèvent en les points de Weierstrass de $C_{q_{j_0}}$.

3.2 La famille F_4 et ses transformées

La famille F_4 est la sous famille de F_2 constituée des surfaces dont le groupe d'automorphismes contient un sous-groupe isomorphe au groupe diédral D_4 , l'involution hyperelliptique τ étant le carré des deux automorphismes d'ordre 4 de D_4 .

Soit $S \in F_4$ et ψ, φ des générateurs de $D_4 \simeq \langle \varphi, \psi \mid \varphi^2, \psi^2, \chi^4 = (\varphi\psi)^4 \rangle$.

Les sous groupes H_φ et H_ψ engendrés par les involutions non-triviales et l'involution hyperelliptique sont normaux dans $\text{Aut}(S)$ et on peut décomposer le revêtement $S \longrightarrow S/D_4$ de deux façons différentes.

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ S/H_\varphi & & S/H_\psi \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ (S/H_\varphi)/\langle \bar{\psi} \rangle & \simeq S/D_4 \simeq & (S/H_\psi)/\langle \bar{\varphi} \rangle \end{array}$$

On peut être plus précis et complet en prenant, comme nous l'avons fait précédemment pour F_2 et F_6 , le quotient S/D_4 pour point de départ.

En effet, pour $S \in F_4$, le revêtement $S \longrightarrow S/D_4$ est ramifié au dessus de quatre points, r_0, r_1, r_2, r_3 avec

- r_0 est l'image des points fixes de χ , d'indice de ramification 4.
- r_1 est l'image des points de Weierstrass de S qui ne sont pas stables par χ , tous d'indice de ramification 2.
- r_2 est l'image des points fixes de φ et $\varphi\tau$, tous d'indice de ramification 2.
- r_3 est l'image des points fixes de ψ et $\psi\tau$, tous d'indice de ramification 2.

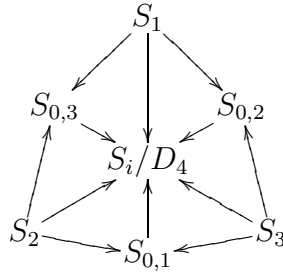
Le quotient S/D_4 hérite alors d'une structure de surface hyperbolique de genre 0 ayant trois points coniques d'angle π et un point conique d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Inversement, si on se donne une surface de genre 0, $S_{0,\{r_0,r_1,r_2,r_3\}}$ avec un point conique d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_0 , et trois points coniques d'angle π , r_1, r_2, r_3 , il existe :

- . 3 revêtements de genre 2, S_1, S_2, S_3 , tous dans F_4 . Chacun est déterminé par le choix du point parmi les r_i qui se relève en les points de Weierstrass.
- . 3 revêtements doubles de genre 0, ayant cinq points coniques d'angle π , $S_{0,1}, S_{0,2}$ et $S_{0,3}$, chacun étant déterminé par le choix du point r_i parmi $\{r_1, r_2, r_3\}$ dont la préimage est un point lisse de $S_{0,i}$. Le revêtement $S_{0,i} \rightarrow S_{0,\{r_0,r_1,r_2,r_3\}}$ est donc ramifié au dessus de r_0 et r_i .

Les points coniques de $S_{0,i}$ sont au dessus de r_0 et r_j , $j \neq i$, $S_{0,i}$ est donc un quotient de S_j , $j \neq i$.

On synthétise la situation dans le diagramme ci-dessous :



3.2.1 Remarque

Notons que la situation est assez différente de celle de F_6 , en effet pour $S \in F_6$, le quotient S/H n'était pas quotient des quotients d'ordre 2 de S . Par contre, F_4 sera naturellement représentée par $\mathcal{F}_2(Q')$ pour $Q' \subset Q$. Cela explique la différence de traitement des deux familles.

Dans un premier temps, nous nous concentrerons sur les revêtements de $S_{0,i}$ n'utilisant son quotient que pour caractériser les équations et les quadrangles des surfaces de F_4 .

Nous nous intéresserons ensuite aux transformations spécifiques à F_4 et plus précisément aux relations entre les revêtements des $S_{0,i}$.

3.2.1 Familles Transformées par les actions définies sur F_2

Notre objectif n'étant pas encore ici de décrire les liens entre les $S_{0,i}$, nous revenons à des notations plus légères.

Equations. Commençons par revenir rapidement sur la normalisation des équations des surfaces de F_4 . Si $S \in F_4$, S définit d'après l'introduction ci-dessus deux éléments (S, φ) et (S, ψ) de \mathcal{F}_2 .

Les automorphismes d'ordre 4 de S , χ et $\chi\tau$ ont, d'après Riemann-Hurwitz deux points fixes qui sont nécessairement des points de Weierstrass. Par ailleurs, ces points fixes sont échangés par les involutions non-triviales (car elles doivent préserver l'ensemble de ces points fixes sans les stabiliser).

La forme classique des équations pour (S, φ) est alors

$$(3.2.2) \quad y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)\left(x^2 - \frac{1}{a}\right),$$

où

$$\chi, \chi\tau : (x, y) \longmapsto \left(\frac{1}{x}, \pm i \frac{y}{x^3}\right),$$

et φ est induite par $x \mapsto -x$. Notons qu'alors les involutions $\psi = \chi\varphi$ et $\psi\tau$ sont induites par $x \mapsto -\frac{1}{x}$.

On donne tout de suite la correspondance entre les équations normalisées comme ci-dessus pour (S, φ) et (S, ψ) . La transformation $x \mapsto i \frac{x-i}{x+i}$ envoie les points fixes i et $-i$ de ψ sur 0 et ∞ , les points fixes 0 et ∞ de φ sur i et $-i$ et laisse stable 1 et -1 . Elle fournit donc l'équation pour (S, ψ) :

$$(3.2.3) \quad y^2 = (x^2 - 1) \left(x^2 + \frac{(\zeta + i)^2}{(\zeta - i)^2} \right) \left(x^2 + \frac{(\zeta - i)^2}{(\zeta + i)^2} \right), \quad \zeta^2 = a.$$

Quadrangles. Du point de vue hyperbolique, le fait que la deuxième involution, ψ , passe au quotient dans S/H_φ , va imposer une forme particulière de domaine fondamental en quadrangle pour S/H_φ . On a :

3.2.4 Proposition

Une surface S de F_2 appartient à F_4 si, et seulement si, S est isométrique à S_Q pour $Q \in \mathcal{Q}$ tel que $\sigma_0^2(Q) = Q$.

Preuve : Soit $S \in F_4$, et φ et ψ ses involutions non-triviales, et $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - \frac{1}{a})$ une équation pour (S, φ) . On se place sur le quotient $S \ni (x, y) \xrightarrow{p_\varphi} x \in \mathbb{P}^1 \simeq S/H_\varphi$.

L'involution $\psi = \chi\varphi$ passe au quotient en $\bar{\psi} : x \mapsto \frac{1}{x}$ qui stabilise 1, image des points fixes de χ , et échange les images 0 et ∞ des points fixes de ψ et les images a et $\frac{1}{a}$ des points de Weierstrass de S qui ne sont pas points fixes de χ .

L'involution $\bar{\psi}$ définit, comme nous l'avons remarqué en introduction, une isométrie de la surface hyperbolique S/H_φ . On choisit alors deux géodésiques c_1 et c_2 sur S/H_φ telles que :

— c_1 joint le point de coordonnée 1 à l'un des points de coordonnée 0 ou ∞ en évitant les autres points de ramification de p_φ .

— c_2 joint le point de coordonnée 1 à l'un des points de coordonnée a ou $\frac{1}{a}$ en évitant les autres points de ramification de p_φ .

Soit c_3 l'image par $\bar{\psi}$ de c_1 , et c_4 celle de c_2 .

On découpe S/H_φ le long des c_i et on obtient un quadrangle Q que l'on munit du marquage induit par l'ordre sur les c_i . Les premier et troisième côtés de Q d'une part, et les deuxième et quatrième d'autre part sont de même longueur ce qui caractérise la condition $\sigma_0^2(Q) = Q$, la première diagonale découpant alors Q

en deux triangles isométriques. Notons qu'alors le point de coordonnée -1 est à l'intersection des deux diagonales de Q qui se coupent en leurs milieux.

Réciproquement, si $S = S_Q$ avec $Q \in \mathcal{Q}$ tel que $\sigma_0^2(Q) = Q$, la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ en les sommets des différentes copies de Q dans S_Q définit un automorphisme d'ordre 4 dont le carré est l'involution hyperelliptique de S_Q , i.e $S = S_Q \in F_4$.

3.2.5 Remarque

Si Q est défini par $Q = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, la symétrie de $S_0(Q)$ centrée à l'intersection des diagonales de Q , se relève en une isométrie e de \mathbb{H} , elliptique d'ordre 2. La condition $Q = \sigma_0^2(Q)$ se traduit donc par

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) = (e_1, e_2, e e_1 e, e e_2 e) \sim (e e_1 e, e e_2 e, e_1, e_2).$$

Familles Transformées

On peut à présent décrire, pour $(S, \varphi) \in \mathcal{F}_2$ telle que $S \in F_4$ les différents revêtements de S/H_φ . Ces surfaces se regroupent en trois familles. Par famille, nous entendons un ensemble de surfaces qui se caractérisent par le fait que leurs paramètres d'équation vérifient la même relation algébrique $b = f(a)$. Elle sont aussi caractérisées par les conditions hyperboliques qui découlent de leur pavage en polygones (ici un quadrangle stable sous l'action de σ_0^2). Notons qu'à part pour celles qui appartiennent à F_4 , leur groupe d'automorphismes réduit n'est pas, en général, plus gros que $\mathbb{Z}/2$.

3.2.6 Proposition

Soit $S \in F_4$, φ une involution non triviale de S . Soit $Q \in \mathcal{Q}$ tel que $\sigma_0^2(Q) = Q$, un domaine fondamental en quadrangle pour $S/H_\varphi = S / \langle \varphi, \tau \rangle$. Soit $(a, \frac{1}{a})$ le couple de paramètres d'équation normalisée pour $S_Q \simeq S$.

i) Les revêtements de S/H_φ sont les surfaces données dans le tableau 3.2.7 de la page 48.

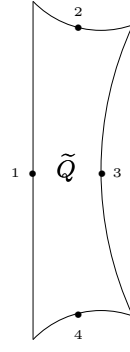
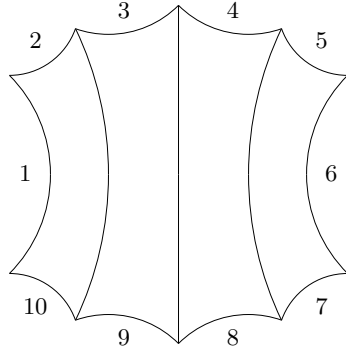
Il existe parmi les dix revêtements de S/H_φ deux surfaces de F_4 . Les huit autres surfaces sont deux à deux isométriques.

ii) Pour une surface de F_4 générique, les six classes d'isométries définies en i) sont distinctes.

Preuve : *i)* On se place sur S/H_φ . Soient r_1, \dots, r_5 les points coniques de S/H_φ dans l'ordre donné par le marquage de Q . Chacune des surfaces de 3.2.7 correspond au choix d'une paire de points parmi les r_i qui se relèvent en les points fixes d'involutions non-triviales.

Plus précisément, on vérifie aisément pour chacune des combinaisons que l'on a les correspondances suivantes :

- | | | | | |
|------|-----------------------|------------------|-------|--|
| 1. | correspond à la paire | $\{r_1, r_3\}$ | | |
| 2. | correspond à la paire | $\{r_2, r_4\}$ | | |
| 3.i) | correspond à la paire | $\{r_1, r_5\}$, | 3.ii) | correspond à la paire $\{r_3, r_5\}$. |
| 4.i) | correspond à la paire | $\{r_2, r_5\}$, | 4.ii) | correspond à la paire $\{r_4, r_5\}$. |
| 5.i) | correspond à la paire | $\{r_1, r_4\}$, | 5.ii) | correspond à la paire $\{r_2, r_3\}$. |
| 6.i) | correspond à la paire | $\{r_1, r_2\}$, | 6.ii) | correspond à la paire $\{r_3, r_4\}$. |



	\tilde{Q}	Combinatoire	Equation	Famille
1.	Q	1 - 6, 2 - 4, 3 - 5, 7 - 9, 8 - 10	$(a, \frac{1}{a})$	} $b = \frac{1}{a}$
2.	$\sigma_0(Q)$	1 - 6, 2 - 4, 3 - 5, 7 - 9, 8 - 10	$(-\frac{1}{a}, -a)$	
\simeq	3.i) Q .	1 - 6, 2 - 9, 3 - 10, 4 - 7, 5 - 8	} $b = a + 1$	}
	3.ii) Q .	1 - 6, 2 - 7, 3 - 8, 4 - 9, 5 - 10		
	4.i) $\sigma_0(Q)$.	1 - 6, 2 - 9, 3 - 10, 4 - 7, 5 - 8	} $(a, 1 + a)$	
\simeq	4.ii) $\sigma_0(Q)$.	1 - 6, 2 - 7, 3 - 8, 4 - 9, 5 - 10		
	5.i) Q .	1 - 6, 2 - 9, 3 - 5, 4 - 7, 8 - 10	} $(1 + \frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a^2})$	} $b = a(2 - a)$
\simeq	5.ii) $\sigma_0(Q)$.	1 - 6, 2 - 4, 3 - 10, 5 - 8, 7 - 9		
	6.i) Q .	1 - 6, 2 - 4, 3 - 10, 5 - 8, 7 - 9	} $(1 + a, 1 - a^2)$	
\simeq	6.ii) $\sigma_0(Q)$.	1 - 6, 2 - 9, 3 - 5, 4 - 7, 8 - 10		

3.2.7 F_4 et ses transformées.

Les isométries entre i) et ii) pour les surfaces 3. à 6. proviennent du fait que l'isométrie induite par σ_0^2 sur $S_0(Q)$ échange r_1 et r_3 d'une part, r_2 et r_4 d'autre part, et laisse r_5 inchangé.

On retrouve les équations des surfaces correspondantes en utilisant la même méthode qu'au chapitre 2. En effet, la coordonnée $x = x_Q$ sur S/H_φ est telle que

$$x(r_1) = 0, \quad x(r_2) = a, \quad x(r_3) = \infty, \quad x(r_4) = \frac{1}{a}, \quad x(r_5) = 1.$$

L'équation de la surface correspondant à la paire $\{r_i, r_j\}$ est construite au moyen d'une transformation de Möbius envoyant $\{x(r_i), x(r_j)\}$ sur $\{0, \infty\}$. Le choix de la préimage de 1 est adapté au fait que la relation algébrique entre les paramètres a et b de l'équation soit la plus simple possible.

ii) Le critère de non-isomorphie est celui donné dans la remarque 2.1.27.

Plus précisément, les deux premières surfaces, qui appartiennent toutes deux à F_4 , n'ont en général pas d'autres automorphismes que ceux donnés par leur ap-

partenance à F_4 (car les points isolés F_{12} et F_{24} sont des sous-ensembles stricts de F_4).

Cela signifie qu'elles n'ont pas en général d'autre involution non-triviale que φ , $\varphi\tau$, ψ , $\psi\tau$.

Or les seules transformations qui commutent à $x \mapsto -x$ et préservent donc la forme d'équation $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - b)$ se déduisent de 2.1.26. Ici, il faut également tenir compte de celles qui échangent $x \mapsto -x$ et $x \mapsto -\frac{1}{x}$ et qui préservent $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Un calcul élémentaire montre que les seules transformations qui font cela sont $x \mapsto \frac{x+i}{ix+1}$ et ses composées avec $x \mapsto -x$, $x \mapsto -\frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$. Dans tous les cas, elles échangent les tableaux 2.1.26 pour $(a, \frac{1}{a})$ et $\left(-\frac{(\sqrt{a}+i)^2}{(\sqrt{a}-i)^2}, -\frac{(\sqrt{a}-i)^2}{(\sqrt{a}+i)^2}\right)$.

De même ceux pour 2. sont données par les tableaux 2.1.26 pour $(-a, -\frac{1}{a})$ et $\left(-\frac{(\sqrt{-a}+i)^2}{(\sqrt{-a}-i)^2}, -\frac{(\sqrt{-a}-i)^2}{(\sqrt{-a}+i)^2}\right)$.

On vérifie aisément que les deux tableaux de 1. et ceux de 2. ne se correspondent pas en général.

Pour les autres surfaces :

Le raisonnement ci-dessus permet de montrer que les surfaces n'appartiennent en général pas à F_4 . En effet, si $S \in F_4$ et φ est une involution non-triviale de S , alors φ doit échanger les points fixes des automorphismes d'ordre 4, ce qui signifie que la forme caractéristique des équations de F_4 doit apparaître dans le tableau 2.1.26, ce qui n'est en général le cas d'aucune des surfaces 3. à 6. ci-dessus. Elles ne possèdent donc que deux automorphismes d'ordre 2 échangés par l'involution hyperelliptique (éventuellement à conjugaison près en cas d'appartenance à F_6). Ce qui signifie qu'elles ne peuvent être deux à deux isomorphes que si leurs tableaux 2.1.26 sont les mêmes à permutation près. On vérifie aisément que ce n'est pas le cas en général.

3.2.8 Remarque

Il existe exactement trois valeurs de a pour lesquelles les six surfaces ne sont pas deux à deux distinctes.

— $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ on a ,

$$1. \cong 4. \cong 6. \quad \text{et} \quad 2. \cong 3. \cong 5.$$

D'autre part nous verrons au chapitre 4 qu'alors Q est donné en terme de cosinus hyperboliques des longueurs par

$$(6 + 3\sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}, 6 + 3\sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}, 5 + 2\sqrt{5}).$$

— $a = i$, nous avons déjà remarqué qu'alors Q est défini par les cosinus hyperboliques des longueurs :

$$(3 + 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 5 + 4\sqrt{2}),$$

et on a

$$1. \cong 2. \quad \text{et} \quad 3. \cong 4. \quad \text{et} \quad 5. \cong 6.$$

— $a = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ on a trois surfaces distinctes

$$1. \cong 3. , \quad 2. , \quad 4. \cong 5. \cong 6.$$

Nous montrerons au chapitre prochain que Q est en fait donné par le système de longueurs

$$(7, 5, 7, 5, 11).$$

3.2.9 Remarque

Pour a réel, les familles ci-dessus sont exactement les familles spéciales de [Bu-Si]. La pièce avec laquelle elles sont pavées dans [Bu-Si] est un quadrangle hyperbolique ayant trois angles droits et un angle égal à $\frac{\pi}{4}$. Nous ferons le lien entre les deux descriptions au chapitre 4. [Bu-Si] fournit d'ailleurs de nombreux exemples.

3.2.10 Remarque

Notons que les identifications (combinatoires)/(équations) que nous avons faites dans 3.2.6 reposent sur la détermination des coordonnées des points en fonction de leur position sur le quadrangle.

On trouve, entre autres, dans G_Q la transformation $\sigma_0^{-1}\sigma_2\sigma_0^2\sigma_2$ qui conserve la condition $\sigma_0^2(Q) = Q$, mais dans $S_5 = G_Q/H_Q$ on a $\overline{\sigma_0^{-1}\sigma_2\sigma_0^2\sigma_2} = (2, 4)$. $\sigma_0^2\sigma_2\sigma_0^2\sigma_2\sigma_0^{-1}$ échange donc la position sur le quadrangle des points portant les paramètres a et $\frac{1}{a}$. Or les surfaces notées 5. et 6. dans le tableau ci-dessus sont échangées si on échange a et $\frac{1}{a}$.

Ce fait aura des conséquences pour relier entre elles les différentes surfaces obtenues à partir des revêtements $S_{0,i}$ de S/D_4 .

3.2.2 Transformations Spécifiques

Nous nous intéressons à présent aux relations entre les différents revêtements des $S_{0,i}$ pour $S_{0,i}$ comme dans l'introduction. Notre étude se fera en deux temps : dans un premier temps nous donnerons les relations entre des domaines fondamentaux en quadrangles pour les $S_{0,i}$, et aux recouvrements ensemblistes entre les trois groupes de surfaces transformées par actions définies sur F_2 . Nous aurons ensuite besoin d'hypothèses supplémentaires pour les attributions précises (équation)/(domaine fondamental).

Relations entre les quadrangles—Recouvrements entres les ensembles de surfaces transformées

Soit $Q \in \mathcal{Q}$ tel que $\sigma_0^2(Q) = Q$, et $S_0(Q)$ la surface obtenue en identifiant les côtés de Q . On adapte les notations à la situation.

On note s_1 et s_2 les points de $S_0(Q)$ correspondant aux milieux des deux premiers côtés de Q , s'_1 et s'_2 ceux correspondant aux milieux des troisième et quatrième côtés, s_3 le point à l'intersection des diagonales de Q , et s_0 le point correspondant aux sommets. On passe alors au quotient sous l'involution centrée en s_0 et s_3 , et on note r_0, r_1, r_2 et r_3 les images des s_i , de sorte qu'avec les notations établies dans l'introduction, on ait $S_0(Q) = S_{0,3}$.

3.2.11 Lemme

On considère le triangle T obtenu en découpant $Q = Q_3$ le long de sa première diagonale.

Soient

- Q_1 le quadrangle obtenu en recollant par symétrie en le centre du premier côté de Q_3 deux copies de T .
- Q_2 le quadrangle obtenu en recollant par symétrie en le centre du deuxième côté de Q_3 deux copies de T .

On munit Q_1 du marquage tel que les relevés de r_3 soient sur les deuxième et quatrième côtés, Q_2 du marquage tel que les relevés de r_3 soient sur les premier et troisième côtés.

Alors

- i) Q_1 est un domaine fondamental en quadrangle pour $S_{0,1}$.
- ii) Q_2 est un domaine fondamental en quadrangle pour $S_{0,2}$.

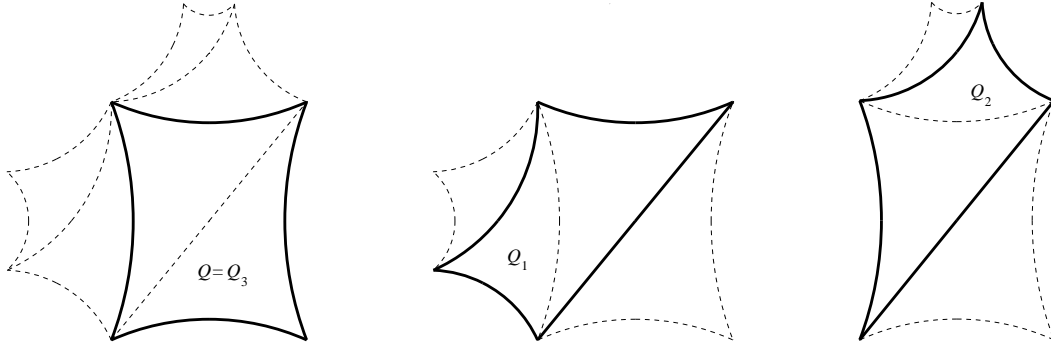


fig. 3.1

3.2.12 Proposition

Les recouvrements entre les surfaces obtenues à partir de Q_1 , Q_2 et Q_3 comme dans 3.2.6 sont les suivants :

$$\begin{aligned} S_{Q_3} &\simeq S_{\sigma_0(Q_1)} \simeq S_2 \\ S_{Q_2} &\simeq S_{\sigma_0(Q_3)} \simeq S_1 \\ S_{Q_1} &\simeq S_{\sigma_0(Q_2)} \simeq S_3 \end{aligned}$$

Les autres surfaces sont en général deux à deux non-isométriques. On obtient donc quinze surfaces différentes à partir du triangle T .

Preuve : Pour les isomorphismes : S_{Q_3} et $S_{\sigma_0(Q_1)}$, par exemple sont deux revêtements de $S_{Q_1}/D_4 = S_{Q_2}/D_4 = S_{Q_3}/D_4$ tels que les préimages de r_1 sont des points de Weierstrass : elles sont donc toutes deux isomorphes à S_1 .

Le critère de non-isomorphie entre les autres surfaces est le même que celui que nous avons utilisé dans 3.2.6 à savoir que si S_{Q_3} admet un couple $(a, \frac{1}{a})$ comme paramètre d'équation normalisée alors

$S_{\sigma_0(Q_1)}$ admet pour équation $y^2 = (x^2 - 1) \left(x^2 + \frac{(\zeta+i)^2}{(\zeta-i)^2} \right) \left(x^2 + \frac{(\zeta-i)^2}{(\zeta+i)^2} \right)$, $\zeta^2 = a$.
et donc S_{Q_1} admet pour équation

$$y^2 = (x^2 - 1) \left(x^2 - \frac{(\zeta + i)^2}{(\zeta - i)^2} \right) \left(x^2 - \frac{(\zeta - i)^2}{(\zeta + i)^2} \right), \quad \zeta^2 = a.$$

De même $S_{\sigma_0(Q_3)}$ a pour équation $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 + a)(x^2 + \frac{1}{a})$ et donc S_{Q_2} a pour équation

$$y^2 = (x^2 - 1) \left(x^2 + \frac{(\zeta + 1)^2}{(\zeta - 1)^2} \right) \left(x^2 + \frac{(\zeta - 1)^2}{(\zeta + 1)^2} \right), \quad \zeta^2 = a.$$

Les équations 3. à 5. de 3.2.6 pour a , $-\frac{(\zeta - i)^2}{(\zeta + i)^2}$, et $\frac{(\zeta - 1)^2}{(\zeta + 1)^2}$ sont alors des équations de surfaces non-isomorphes. En effet, nous avons déjà remarqué que ces surfaces n'ont pas en général d'autres automorphismes non-triviaux que ceux induits par $x \mapsto -x$. Elles ne peuvent être deux à deux isomorphes que si les deux tableaux 2.1.26 correspondants sont identiques à permutation près.

3.2.13 Remarque

Le fait d'avoir utilisé le changement de coordonnées $x \mapsto i \frac{x + i}{x - i}$ pour passer de S_{Q_3} à $S_{\sigma_0(Q_1)}$ puis de $\sigma_0(Q_3)$ à Q_2 ne nous permet pas de déduire la position relative des points de coordonnées $\frac{(\zeta + i)^2}{(\zeta - i)^2}$ et $\frac{(\zeta - i)^2}{(\zeta + i)^2}$ par rapport à ceux de coordonnées 0 et ∞ sur Q_1 . Il en est de même pour $-\frac{(\zeta - 1)^2}{(\zeta + 1)^2}$ et $-\frac{(\zeta + 1)^2}{(\zeta - 1)^2}$ par rapport à 0 et ∞ sur Q_2 .

En effet, si au lieu du triangle T , on choisit le triangle T' obtenu en découpant Q_3 le long de la seconde diagonale, et on construit les quadrangles Q'_1 et Q'_2 à partir de T' de la même façon que l'on a construit Q_1 et Q_2 à partir de T , on a

$$\begin{aligned} Q'_1 &= \sigma_0^{-1} \sigma_2 \sigma_0^2 \sigma_2(Q_2) & \overline{\sigma_0^{-1} \sigma_2 \sigma_0^2 \sigma_2} &= (2, 4) \in S_5, \\ Q'_2 &= \sigma_0^{-1} \sigma_2 \sigma_0^2 \sigma_2(Q_2) \end{aligned}$$

$\sigma_0^{-1} \sigma_2 \sigma_0^2 \sigma_2$ conserve donc la position des points de coordonnées 0 et ∞ sur $S_0(Q_1) = S_0(Q'_1)$ (resp. $S_0(Q_2) = S_0(Q'_2)$) et échange celles de ceux de coordonnées $\frac{(\zeta + i)^2}{(\zeta - i)^2}$ et $\frac{(\zeta - i)^2}{(\zeta + i)^2}$ (resp. $-\frac{(\zeta - 1)^2}{(\zeta + 1)^2}$ et $-\frac{(\zeta + 1)^2}{(\zeta - 1)^2}$).

On construit cependant les mêmes équations pour $S_{Q'_1}$ et S_{Q_1} , et $S_{Q'_2}$ et S_{Q_2} .

Or les équations des surfaces notées 5. et 6. dans 3.2.6 sont échangées si on échange a et $\frac{1}{a}$. On ne sait donc pas a priori attribuer les équations aux domaines fondamentaux pour ces surfaces construites à partir de Q_1 et Q_2 .

Un critère d'identification

La remarque 3.2.13 montre la nécessité de rigidifier notre description. Nous faisons cela en identifiant la position de l'axe réel dans le quadrangle.

Les surfaces de F_4 ayant une structure réelle telle que les involutions φ et ψ soient réelles sont caractérisées par le fait que le paramètre a de l'équation 3.2.2 est

soit réel soit tel que $|a| = 1$ (auquel cas c'est $-\frac{(\sqrt{a} + i)^2}{(\sqrt{a} - i)^2}$ apparaissant dans 3.2.3 qui est réel).

Ces surfaces font l'objet de la section 4.2, aussi nous pouvons exclure momentanément ce cas de notre étude.

Dans cette partie les courbes de F_4 ne sont pas réelles pour une structure réelle commutant aux involutions.

On peut alors préciser le choix de normalisation pour les équations de F_4 :

3.2.14 Définition

Soit $S \in F_4$ comme ci-dessus, et φ et ψ comme précédemment. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R} \cup \{|z| = 1\}\}$ tel que $(a, \frac{1}{a})$ soit un couple de paramètres d'équation pour (S, φ) . Nous dirons que a est le paramètre d'équation normalisée pour (S, φ) si

$$\text{Im}(a) < 0.$$

En particulier si $a = \zeta^2$, avec $\text{Re}(\zeta) < 0$, $\text{Im}(\zeta) > 0$, alors

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{(\zeta + i)^2}{(\zeta - i)^2} \text{ si } |a| < 1 \\ -\frac{(\zeta - i)^2}{(\zeta + i)^2} \text{ si } |a| > 1 \end{array} \right\} \text{ est le paramètre d'équation normalisée pour } (S, \psi).$$

Nous pouvons à présent rigidifier le choix du quadrangle :

3.2.15 Lemme

Soit S, χ, φ comme ci-dessus, et a le paramètre d'équation normalisée pour (S, φ) .

i) Il existe un unique domaine fondamental en quadrangle $Q_\varphi \in \mathcal{Q}$ vérifiant $\sigma_0^2(Q_\varphi) = Q_\varphi$ pour le quotient $S/H_\varphi = S / \langle \varphi, \tau \rangle$, et tel que pour la coordonnée x_{Q_φ} sur $S/H_\varphi = S_0(Q_\varphi)$ comme en 2.1.19 :

1. les premier et troisième côtés de Q_φ soient respectivement homotopes à $[0, 1]$ et $[1, \infty]$.
2. la géodésique joignant les milieux du premier et du troisième côté de Q soit homotope à \mathbb{R}^- .

ii) Pour Q_φ comme en i)

1. Le point de coordonnée a est sur le deuxième côté de Q_φ
2. le disque unité est homotope à la première diagonale de Q_φ si $|a| < 1$, la seconde sinon.

Preuve : i) L'existence d'un quadrangle vérifiant 1. et 2. repose sur l'existence de géodésiques dans les classes d'homotopie considérées, a étant supposé non-réel. L'unicité est immédiate.

Par ailleurs, l'involution $\bar{\psi} : x \mapsto \frac{1}{x}$ laisse globalement stable \mathbb{R}^- et le disque unité et échange $[0, 1]$ et $[1, \infty]$ et les classes d'homotopie des arcs $\{1, a\}$ et $\{1, \frac{1}{a}\}$. On a donc bien $\sigma_0^2(Q_\varphi) = Q_\varphi$.

ii) L'orientation de la droite réelle sur le quadrangle impose la position des points de coordonnées a et $\frac{1}{a}$. La position du lacet géodésique correspondant au disque unité est imposée par le fait qu'il passe par 1, qu'il ne puisse être transverse à aucun des côtés de Q ailleurs qu'en 1, et qu'il sépare la surface en deux composantes connexes contenant chacune deux des quatre autres points.

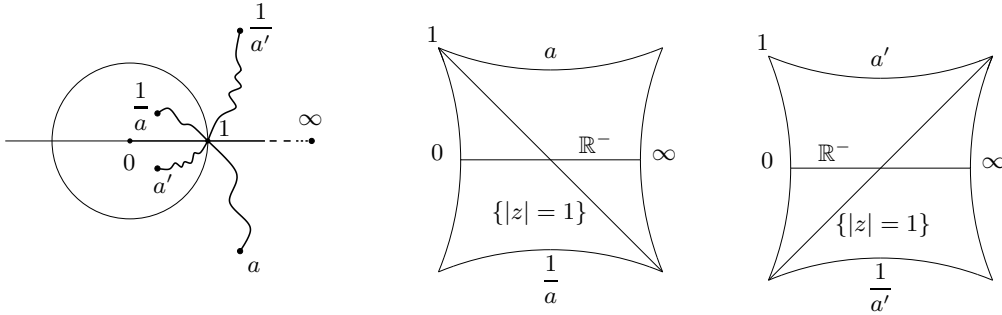


fig. 3.2

3.2.16 Lemme

Soit S, φ, ψ , comme précédemment et Q_φ comme en 3.2.15. Soit T le triangle obtenu en découpant Q_φ par rapport sa diagonale correspondant au disque unité. Alors

i) Q_ψ est le quadrangle obtenu en collant deux copies de T par symétrie en le milieu du premier côté de Q_φ . Son marquage est tel que son deuxième côté correspond au deuxième côté de Q_φ .

ii) pour la coordonnée $x_{\sigma_0(Q_\varphi)}$ sur $S_0(Q_\varphi) = S_0(\sigma_0(Q_\varphi))$, le disque unité correspond à la même diagonale du quadrangle non-marqué $Q_\varphi = \sigma_0(Q_\varphi)$.

En particulier, soit $S^{\sigma_0} = S_{\sigma_0(Q_\varphi)}$, et φ_{σ_0} l'involution de S^{σ_0} telle que $S^{\sigma_0}/H_{\varphi_{\sigma_0}} \simeq S/H_\varphi$. Alors $Q_{\psi_{\sigma_0}}$ est obtenu en collant deux copies de T le long du deuxième côté de Q_φ . Son marquage est tel que son premier côté coïncide avec le premier côté de Q_φ .

Preuve : : i) On relève la coordonnée x_Q sur $S/\tau \simeq \mathbb{P}^1$ en, et on fait le changement de coordonnée

$$f : x \mapsto i \frac{x - i}{x + i}.$$

Les images des points fixes de ψ et $\psi\tau$ dans S/τ sont alors au dessus de 0 et ∞ . De plus, f échange le disque unité et l'axe réel et conserve l'axe imaginaire pur. On passe au quotient par l'involution induite par ψ sur S/τ et on obtient ainsi une coordonnée x_{Q_ψ} sur S/H_ψ telle que le quadrangle obtenu à partir de T comme dans

l'énoncé vérifie *i)* 1. et *i)* 2. de 3.2.15.

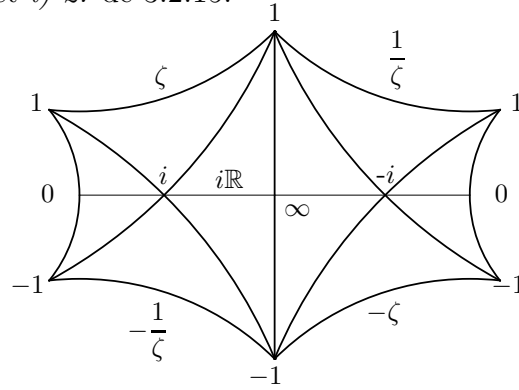


fig. 3.3

Les choix de détermination de la racine carrée pour construire la coordonnée sur S/τ d'une part, et de f parmi f et $\frac{1}{f}$ d'autre part, que nous avons faits sont innocents. En effet, dans tous les cas ils échangent la coordonnée x_{Q_ψ} que nous avons construite avec $\frac{1}{x_{Q_\psi}}$ or $\sigma_0^2(Q_\psi) = Q_\psi$.

ii) Les coordonnées x_Q et $x_{\sigma_0(Q)}$ se correspondent, d'après 2.1.22 par

$$x_{\sigma_0(Q)} = A_{\sigma_0} \circ x_Q \quad \text{avec} \quad A_{\sigma_0}(z) = \frac{a - z}{az - 1}.$$

On vérifie aisément que les images par A_{σ_0} des différentes classes d'homotopie sont celles désirées.

L'assertion concernant Q_{ψ_0} est exactement *i)* appliqué à Q_{φ_0} .

3.2.17 Remarque

Si S, φ, ψ est comme précédemment une surface F_4 n'ayant pas de structure réelle commutant à ses involutions, les paramètres d'équation normalisée de ses deux représentants dans \mathcal{F}_2 , (S, φ) et (S, ψ) n'appartiennent pas à la même région de $\mathbb{C} \setminus |z| = 1$. D'un autre côté, si la diagonale représentant le disque unité est la première dans Q_φ , c'est la seconde de Q_ψ , et réciproquement.

Les quadrangles $Q_1 = \sigma_0(Q_\varphi)$ et $Q_2 = Q'_\psi$ de 3.2.16 ci-dessus sont obtenus à partir de $Q_3 = Q_\varphi$, exactement comme l'étaient ceux également notés Q_2 et Q_3 dans le lemme 3.2.11 si la première diagonale de Q_3 correspond au disque unité. Ce sont ceux notés Q'_1 et Q'_2 dans 3.2.13 sinon. Par ailleurs, on sait positionner les points en fonction de leurs coordonnées dans Q_2 et Q_3 . On peut donc à présent lever les ambiguïtés qui restaient sur les associations (équation)/(combinatoire) dans 3.2.6.

On synthétise en

3.2.18 Proposition

Pour Q_1, Q_2 et Q_3 comme ci dessus. Si a est le paramètre d'équation normalisée de S_{Q_3} , alors

1.

— pour $a_1 = \begin{cases} \frac{(\zeta - i)^2}{(\zeta + i)^2} & \text{si } |a| < 1 \\ \frac{(\zeta + i)^2}{(\zeta - i)^2} & \text{si } |a| > 1 \end{cases}$, $(a_1, \frac{1}{a_1})$ est un couple de paramètres d'équation

normalisée pour S_{Q_1}

— pour $a_2 = \begin{cases} -\frac{(\zeta + 1)^2}{(\zeta - 1)^2} & \text{si } |a| < 1 \\ -\frac{(\zeta - 1)^2}{(\zeta + 1)^2} & \text{si } |a| > 1 \end{cases}$, $(a_2, \frac{1}{a_2})$ est un couple de paramètres d'équation

normalisée pour S_{Q_2} .

2. Les correspondances (équation)/(combinatoire) des surfaces 1. à 6. de 3.2.7 pour $\tilde{Q} = Q_1$ et $\tilde{Q} = Q_2$ sont celles obtenues en remplaçant respectivement a par a_1 et par a_2 .

3.3 F_6 comme sous famille de F_2

Nous commençons par deux remarques élémentaires sur la structure du groupe d'automorphismes de $S \in F_6$. Pour cela, nous excluons momentanément F_{12} et F_{24} . Le groupe d'automorphisme de S est donc isomorphe à $H \simeq D_3 \times \mathbb{Z}/2$. Soit φ une involution non-triviale de S et ψ un automorphisme d'ordre 3.

— Les six involutions non-triviales de S , $\varphi, \varphi\tau, \psi\varphi\psi^{-1}, \psi\varphi\psi^{-1}\tau, \psi^{-1}\varphi\psi, \psi^{-1}\varphi\psi\tau$ sont conjuguées à φ et $\varphi\tau$. Les surfaces quotients $S/H_\varphi, S/H_{\psi\varphi\psi^{-1}}$ et $S/H_{\psi^{-1}\varphi\psi}$ sont donc isomorphes. Nous les noterons dorénavant S/H_φ .

— Ensuite comme nous l'avons déjà remarqué, les automorphismes d'ordre 3 de S ne passent pas au quotient dans S/H_φ .

Nous voulons ici décrire des relations entre les différents revêtements des S/H_φ .

Ces surfaces sont a priori au nombre de 10, et nous verrons que c'est effectivement le cas. Nous verrons également qu'à part S , elles ne possèdent généralement pas d'automorphisme d'ordre 3. Cependant, leurs équations et leurs structures hyperboliques gardent une trace des automorphismes d'ordre 3 de S .

Soit $S \in F_6$, et $H = \langle \varphi, \psi, \tau \rangle \simeq D_3 \times \mathbb{Z}/2$. Le fait que S/H_φ ne soit pas un revêtement de S/H aura des conséquences sur les descriptions algébriques et hyperboliques de S .

Pour la description hyperbolique, le modèle du quadrangle ne sera plus adapté, les points fixes des automorphismes d'ordre 3 n'étant pas visibles dans ce modèle. Aussi, nous privilégierons une autre forme de domaine fondamental pour les quotients S/H_φ .

Pour la description algébrique nous serons amenés à privilégier une autre forme d'équation.

Domaines fondamentaux pour S/H_φ

Soit $(S, \varphi, \psi) \in F_6$, et $T \in G_{\mathcal{T}}$ un domaine fondamental en triangle pour S/H tel que S est isométrique à S_T .

3.3.1 Lemme

Le pentagone P_T obtenu en recollant trois copies de T par symétrie en les milieux de ses deuxième et troisième côtés est un domaine fondamental pour S/H_φ . Les côtés sont repliés en leur milieu, les sommets s'identifient en un point lisse de S/H_φ . Les images des points fixes de φ et $\varphi\tau$ sont alors sur les deuxième et cinquième côtés du pentagone sur la figure 3.4 ci-après.

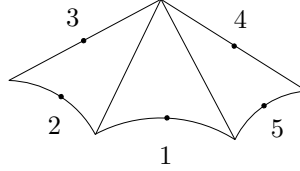


fig. 3.4

Preuve : On se place sur la figure 2.11 de la page 33. Soit φ l'involution dont l'un des points fixes est le milieu du côté 3. On vérifie aisément que l'involution $\varphi\tau$ est celle dont l'un des centres est le milieu du côté 12. Le domaine fondamental s'obtient en regardant la façon dont φ et τ échangent les 12 triangles de S_T .

3.3.2 Remarque

Si $T = (e_1, e_2, e_3)$, les transformations elliptiques d'ordre 2 centrées en les milieux des côtés du pentagone P_T sont données dans l'ordre donné par celui de la figure 3.4, par

$$(e_1, e_2e_3e_2, e_2e_1e_2, e_3e_1e_3, e_3e_2e_3).$$

Elles constituent donc un système de générateurs d'un groupe Fuchsien $\tilde{\Gamma}$ de S/H_φ .

De plus, chaque point conique de S/H_φ est représenté par la classe de conjugaison dans $\tilde{\Gamma} = \langle e_1, e_2e_3e_2, e_2e_1e_2, e_3e_1e_3, e_3e_2e_3 \rangle$ de l'un de ces générateurs.

Equations pour les surfaces de F_6

Le choix de normalisation des équations pour les surfaces de F_6 que nous avons adopté dans le chapitre 2 sous la forme

$$(3.3.3) \quad y^2 = x^6 - 2ax^3 + 1$$

était adapté à la description des automorphismes d'ordre 3, mais ne l'est pas à celle des automorphismes d'ordre 2.

Une autre forme, plus adaptée, est donnée dans [Bu-Si] dans le cadre réel :

$$(3.3.4) \quad v^2 = (u^2 - t^2)(u^2 - f(t)^2)(u^2 - f^2(t)^2), \quad \text{pour } f : t \mapsto \frac{t-3}{1+t}$$

Les automorphismes d'ordre 3 sont alors induits par f et f^2 .

Cependant le morphisme de revêtement $S \rightarrow S/H = S/(D_3 \times \mathbb{Z}/2)$ est alors donné par

$$x \mapsto (x + f(x) + f^2(x))^2,$$

ce qui ne donne pas une lecture aussi aisée de l'action de S_3 sur F_6 définie au chapitre 2.

3.3.5 Remarque

Les transformations de Möbius f , et $\bar{\rho}_0$ définie dans le chapitre 2 sont exactement les mêmes. Nous prenons ici une notation différente car cette identité semble plus être due à la rigidité des transformations de Möbius qu'à la situation géométrique. En effet, f a été introduite dans [Bu-Si] pour décrire les surfaces de F_6 ayant une structure réelle à trois composantes réelles, ce qui impose que les points de Weierstrass soient tous réels. La normalisation de l'automorphisme d'ordre 3 en f était alors la seule telle que cette structure réelle soit la structure réelle naturelle $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$. Il se trouve que $f = \bar{\rho}_0$ est également l'unique transformation de Möbius envoyant les quadruplets $\{1, -1, \infty, a\}$ sur des quadruplets de la même forme en préservant ∞ .

Correspondance entre les deux formes d'équations — coordonnée sur S/H_φ

La forme 3.3.4 étant la plus agréable pour travailler avec des involutions, c'est celle que nous allons adopter.

Soit $g : z \mapsto i\sqrt{3}\frac{z-1}{z+1}$, g fournit une correspondance entre une coordonnée x donnant une équation de la forme 3.3.3 et une coordonnée $u = g \circ x$ donnant une équation de la forme 3.3.4.

On a

$$g(jx) = f(u), \quad j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad g\left(\frac{1}{x}\right) = -u, \quad g(-x) = \frac{3}{u},$$

et g fournit la correspondance entre a de 3.3.3 et t de 3.3.4 :

$$a = \frac{(3 - t^2)(t^2 - 6t - 3)(t^2 + 6t - 3)}{(t^2 + 3)^3}.$$

Notons qu'elle ne donne pas une expression très explicite de t en fonction de a .

Soit $T \in \mathcal{T}$ un domaine fondamental en triangle pour S/H , et x_T la coordonnée sur S/H telle que les milieux des deuxième et troisième côtés de T soient respectivement de coordonnées 1 et -1 . On considère le domaine fondamental P_T pour S/H_φ construit à partir de T comme sur la figure 3.4. La correspondance g permet de construire à partir de x_T une coordonnée x_{P_T} sur S/H_φ de la manière suivante.

Soit x une coordonnée sur S/τ telle que $x_T = \frac{x^3 + 1/x^3}{2}$. Via le changement de coordonnée g on obtient la coordonnée $u = g \circ x$ sur S/τ . Soit $\bar{\varphi}$ l'involution donnée alors par $u \mapsto -u$. La coordonnée x_P sur $S/H_\varphi \simeq (S/\tau)/\bar{\varphi}$ est alors $x_P = u^2$.

Les choix de x parmi $\{x, jx, j^2x\}$ et parmi $\{x, \frac{1}{x}\}$ sont innocents : le premier échange l'involution $\bar{\varphi}$ et l'une de ses conjuguées par f^k , $k = 1$ ou -1 , le second échange $\bar{\varphi}$ et $-\bar{\varphi}$.

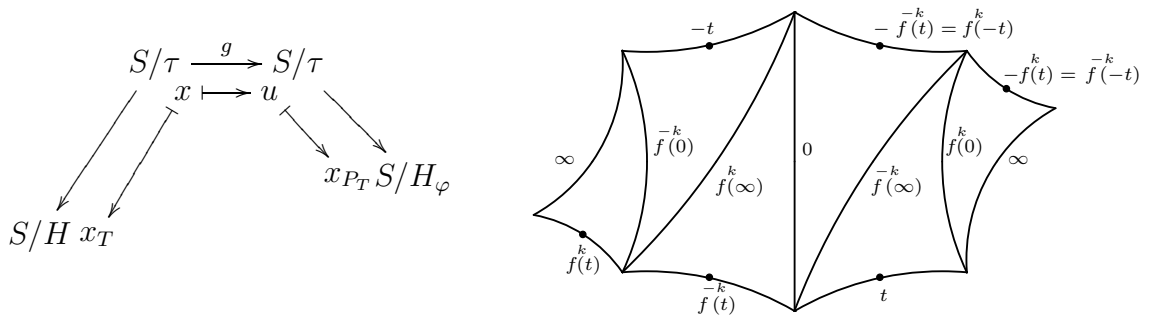


fig. 3.5 La coordonnée u sur S/τ .

La coordonnée x_{P_T} ainsi construite est alors l'unique coordonnée sur S/H_φ vérifiant :

- . le milieu du deuxième côté de P_T est de coordonnée 0, et celui du cinquième côté de coordonnée ∞ .
- . l'ensemble des coordonnées des points images de points de Weierstrass est de la forme $\{t^2, f(t)^2, f^2(t)\}$.

En particulier, il existe un unique $t_0 \in \{t, -t, f(t), -f(t), f(-t) = -f^2(t), -f(-t) = f^2(t)\}$ tel que pour la coordonnée $x_{P_{T_0}}$, on ait

- . Le point sur le premier côté du pentagone est de coordonnée t_0^2
- (3.3.6)
- . Les points sur les troisième et quatrième côtés de P_{T_1} sont respectivement de coordonnées $f(t_0)^2$ et $f(-t_0)^2$.

3.3.7 Remarque

On pourrait, avec un critère du type de celui que nous avons utilisé pour F_4 , caractériser, pour un certain triangle, t_0 en fonction de a parmi les valeurs ci-dessus. Cependant, il faudrait de toute façon commencer par résoudre une équation de degré 3 pour obtenir $\{t_0^2, f(t_0)^2, f(-t_0)^2\}$, et l'expression de t_0 en fonction de a ne pourrait être à la fois explicite et décente. Aussi, il ne nous semble pas intéressant de donner ici cette discussion.

Familles transformées

On décrit à présent les transformées par les actions définies sur F_2 des surfaces de F_6 . Il y a deux points de vue que l'on peut adopter :

D'une part, ces surfaces sont pavées par symétrie en les milieux des côtés par le même polygone hyperbolique, un triangle, ce qui privilégie une description fixant un triangle et faisant varier la combinatoire (c'est le point de vue que nous avons adopté pour décrire F_4).

D'autre part, nous allons le voir, elles se regroupent en trois familles, ce qui implique de se fixer exactement trois types de combinaisons, une par famille, et de travailler avec un nombre plus grand de polygones.

C'est ce deuxième point de vue que nous allons adopter ici.

On commence par définir les triangles dont nous aurons besoin :

3.3.8 Lemme

Soit $S \in F_6$, et $T_0 \in \mathcal{T}$ un domaine fondamental en triangle pour S/H , où $H = D_3 \times \mathbb{Z}/2$, et P_{T_0} le domaine fondamental obtenu à partir de T_0 comme sur la figure 3.4. On construit à partir de T_0 les triangles suivants

$$\begin{array}{ccccc} T_0 & T_1 = \rho_0 \rho_1 \rho_0(T_0) & T_2 = \rho_0^2 \rho_1 \rho_0^2(T_0) & & \\ T_3 = \rho_1(T_0) & T_4 = \rho_0 \rho_1 \rho_0 \rho_1(T_0) & T_5 = \rho_0^2 \rho_1 \rho_0^2 \rho_1(T_0) & & \end{array}$$

- i) les pentagones P_{T_0}, \dots, P_{T_5} sont des domaines fondamentaux pour S/H_φ .
ii) Si r_1, \dots, r_5 sont les points coniques de S/H_φ dans l'ordre donné par le marquage de P_{T_0} , alors les r_j se disposent sur les pentagones P_{T_i} dans l'ordre donné par leur marquage respectif de la façon suivante :

	côté 1	côté 2	côté 3	côté 4	côté 5
P_{T_0}	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
P_{T_1}	r_3	r_5	r_4	r_1	r_2
P_{T_2}	r_4	r_5	r_1	r_3	r_2
P_{T_3}	r_1	r_5	r_4	r_3	r_2
P_{T_4}	r_4	r_2	r_3	r_1	r_5
P_{T_5}	r_3	r_2	r_1	r_4	r_5

Preuve : Si $T_0 = (e_1, e_2, e_3)$ alors les T_i sont donnés par

$$\begin{array}{ccccc} T_0 = (e_1, e_2, e_3) & T_1 = (e_1, e_2 e_3 e_2, e_2) & T_2 = (e_1, e_3, e_3 e_2 e_3) & & \\ T_3 = (e_1, e_3, e_1 e_2 e_1) & T_4 = (e_1, (e_3 e_1) e_2 (e_1 e_3), e_3) & T_5 = (e_1, e_2, (e_2 e_1) e_3 (e_1 e_2)) & & \end{array}$$

En particulier, ils sont tous tels que le centre de e_1 est sur le premier côté. Cela signifie que $S = S_{T_0}$ est isométrique à S_{T_i} , $i = 1, \dots, 5$ et donc que les pentagones P_{T_i} sont des domaines fondamentaux pour S/H_φ . D'où i).

ii) Dans le sens de la remarque 3.3.2, pour chacun des T_i , les transformations elliptiques centrées en les milieux des côtés du pentagone P_{T_i} définissent un système de générateurs $\langle \gamma_{i,1}, \dots, \gamma_{i,5} \rangle$, à conjugaison de tous les générateurs par le même élément près, pour le groupe

$$\tilde{\Gamma} = \langle \gamma_{0,1} = e_1, \gamma_{0,2} = e_2 e_3 e_2, \gamma_{0,3} = e_2 e_1 e_2, \gamma_{0,4} = e_3 e_1 e_3, \gamma_{0,5} = e_3 e_2 e_3 \rangle.$$

Comme r_j , $j = 1, \dots, 5$ est donné par la classe de conjugaison de $\gamma_{0,j}$ dans $\tilde{\Gamma}$, on identifie pour chacun des T_i les classes de conjugaison de $\gamma_{i,j}$:

Par exemple pour T_1 on a :

$$\begin{array}{ccccc} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \gamma_{1,3} & \gamma_{1,4} & \gamma_{1,5} \\ e_1 & (e_2 e_3) e_2 (e_3 e_2) & (e_2 e_3 e_2) e_1 (e_2 e_3 e_2) & e_2 e_1 e_2 & e_3 \end{array}$$

On conjugue tous les $\gamma_{1,j}$ par e_2 :

$$\begin{array}{ccccc} (e_2 e_1 e_2) & (e_3 e_2 e_3) & (e_3 e_2 e_3)(e_3 e_1 e_3)(e_3 e_2 e_3) & e_1 & e_2 e_3 e_2 \\ \gamma_{0,3} & \gamma_{0,5} & \gamma_{0,5} \gamma_{0,4} \gamma_{0,5} & \gamma_{0,1} & \gamma_{0,2} \end{array}$$

On a alors

3.3.9 Proposition

Soient $S \in F_6, T_0, \dots, T_5$, comme ci-dessus et t_0 comme en 3.3.6 pour P_{T_0} .

- i) Des équations sous la forme $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - b)$ pour les dix revêtements de S/H_φ sont données dans le tableau 3.3.10 de la page 62. Ces revêtements se regroupent en trois familles, à l'intérieur desquelles les couples de paramètres $(a, b) = (a(t), b(t))$ vérifient la même relation de dépendance algébrique d'un paramètre t .
- ii) Pour une surface S de F_6 générique, les dix surfaces sont non-isomorphes.

Preuve : *i)*

Soient r_1, \dots, r_5 les points coniques de S/H_φ dans l'ordre donné par la numérotation des côtés de P_{T_0} sur la figure 3.4. Chacune des surfaces correspond au choix d'une paire parmi les r_i dont les préimages sont des points fixes d'involutions non-triviales.

La surface noté 1. est la surface de F_6 , elle correspond donc à la paire $\{r_2, r_5\}$

Pour les surfaces notés 2. à 7. :

— Pour la surface notée 2., l'involution hyperelliptique est la symétrie centrale sur la figure de la page 62, alors que l'une de ses involutions non triviales est la symétrie par rapport au milieu du côté noté 5. La surface 2. correspond donc à la paire $\{r_1, r_2\}$.

— Pour les surfaces 3. à 7, la combinatoire étant imposée, pour chacune des six surfaces la paire correspondante est constitué des points $\{r_k, r_l\}$ sur les premier et deuxième côtés de P_{T_i} .

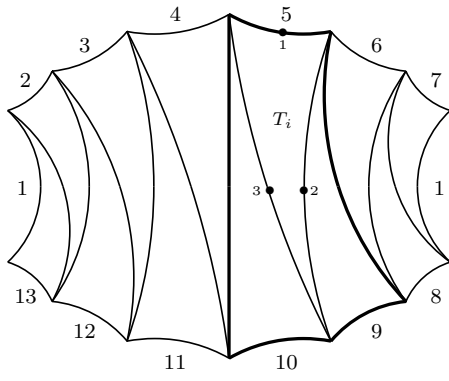
Ainsi, d'après le lemme 3.3.8, on a

- 3. correspond à la paire $\{r_1, r_3\}$
- 4. correspond à la paire $\{r_4, r_5\}$
- 5. correspond à la paire $\{r_1, r_5\}$
- 6. correspond à la paire $\{r_2, r_3\}$
- 7. correspond à la paire $\{r_2, r_4\}$

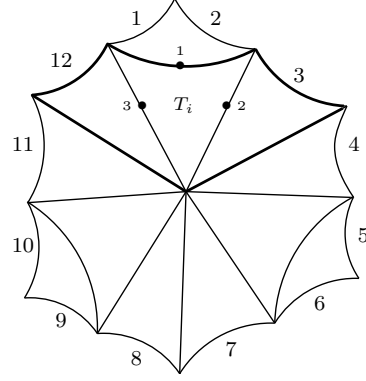
Pour les surfaces 8., 9., et 10. : les points au milieu des premier, deuxième et cinquième côtés du pentagone P_{T_i} en gras sur la figure II. sont points de Weierstrass. Les points aux milieux des troisième et quatrième côtés sont des points fixes de deux involutions non-triviales échangées par l'involution hyperelliptique.

Cela signifie que

- 8. correspond à la paire $\{r_3, r_4\}$
- 9. correspond à la paire $\{r_1, r_4\}$
- 10. correspond à la paire $\{r_1, r_3\}$



I



II

I. 1, 2—5, 8—11, 3—6, 9—12, 4—7, 10—13

II. 1—4, 2—11, 3—6, 5—8, 7—10, 9—12

T_0, \dots, T_5

$$t_0, \frac{t_0 - 3}{1 + t_0}, \frac{t_0 + 3}{1 - t_0}, \frac{3}{t_0}, 3 \frac{t_0 + 1}{t_0 - 3}, 3 \frac{t_0 - 1}{t_0 + 3}$$

$$1. y^2 = (x^2 - t^2) \left(x^2 - \frac{(t-3)^2}{(t+1)^2} \right) \left(x^2 - \frac{(t+3)^2}{(t-1)^2} \right)$$

I. 1, 2—5, 8—11, 3—9, 6—12, 4—10, 7—13

$$\left. \begin{array}{l} 2. T_0 \quad t = t_0 \\ 3. T_1 \quad t = 3 \frac{t_0 + 1}{t_0 - 3} \\ 4. T_2 \quad t = 3 \frac{t_0 - 1}{t_0 + 3} \\ 5. T_3 \quad t = \frac{t_0 - 3}{1 + t_0} \\ 6. T_4 \quad t = \frac{t_0 + 3}{1 - t_0} \\ 7. T_5 \quad t = \frac{3}{t_0} \end{array} \right\} (a(t), b(t)) = \left(\frac{(3+t)(1-t)(t^2+3)}{(t-3)^2}, \frac{(3-t)(1+t)(t^2+3)}{(t+3)^2} \right)$$

II.1—5, 2—10, 3—6, 4—8, 7—11, 9—12

$$\left. \begin{array}{l} 8. T_0 \quad t = t_0, t = \frac{3}{t_0} \\ 9. T_1 \quad t = \frac{t_0 + 3}{1 - t_0} \quad t = 3 \frac{t_0 - 1}{t_0 + 3} \\ 10. T_2 \quad t = \frac{t_0 - 3}{1 + t_0} \quad t = 3 \frac{t_0 + 1}{t_0 - 3} \end{array} \right\} (a(t), b(t)) = \left(\frac{(t-3)(t+1)^3}{(t+3)(t-1)^3}, \frac{(t-3)^3(t+1)}{(t+3)^3(t-1)} \right)$$

3.3.10 F_6 et ses transformées

On retrouve les équations comme précédemment : l'équation de la surface correspondant à la paire $\{r_i, r_j\}$ est obtenue en composant la coordonnée x_{T_0} sur S/H_φ avec une transformation de Möbius envoyant $\{x_{T_0}(r_i), x_{T_0}(r_j)\}$ sur $\{0, \infty\}$ et l'un des $x(r_k)$, $k \neq (i, j)$ sur 1. Cette transformation de Möbius est évidemment adaptée au cas par cas à ce que la dépendance en t des paramètres $a(t)$ et $b(t)$ soit la même à l'intérieur d'une même famille.

ii) Le critère de non-isomorphie est le même que précédemment à savoir que dans la situation générique deux surfaces ne peuvent être isomorphes que si leurs tableaux 2.1.26 sont identiques. Cela fournit un nombre fini d'équations polynomiales en t de degré au plus 6.

3.3.11 Remarque

Nous donnons ici une liste non exhaustive de valeurs du paramètre t_0 pour lesquelles deux au moins des dix surfaces sont isomorphes :

$$- t = \frac{3}{2}\sqrt{-5 + \sqrt{17}} \text{ et } t = \frac{3}{2}\sqrt{-5 - \sqrt{17}}.$$

Dans les deux cas

$$1. \simeq 2. \quad 3. \simeq 10. \quad 4. \simeq 9. \quad 5. \simeq 6.$$

Nous établirions les correspondances géométriques au chapitre prochain.

$$- t = \sqrt{3}.$$

Dans ce cas 1. est isomorphe à F_{12} . Nous avons déjà remarqué que dans ce cas là on peut prendre pour T_0 le triangle dont les longueurs sont données par

$$T_0 = (\operatorname{arccosh}(5), \operatorname{arccosh}(3), \operatorname{arccosh}(3))$$

On a de plus :

$$2. \simeq 7. \quad 3. \simeq 6. \quad 4. \simeq 5. \quad 9. \simeq 10.$$

— $t = \sqrt{2} - i$. Dans ce cas l'équation de 1. est $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - (-3 + 2\sqrt{2}))(x^2 - (-3 - 2\sqrt{2}))$, en transformant via $x \mapsto \sqrt{i} \frac{x-1}{x+1}$, on obtient l'équation

$$y^2 = x(x^4 - 1),$$

i.e 1. est isomorphe à F_{24} . On a :

$$2. \simeq 7. \quad 3. \simeq 6. \quad 4. \simeq 5. \quad 9. \simeq 10.$$

Nous établirions pour ces surfaces aussi les correspondances au chapitre prochain.

— Enfin des valeurs intrigantes, pour lesquelles nous ne connaissons pas la correspondance géométrique est t solution de

$$x^6 - 7x^4 - 16x^3 - 21x^2 + 27 = 0.$$

Notons que les solutions sont de la forme $\{t_1, \frac{3}{t_1}, t_2, \frac{3}{t_2}, t_3, \frac{3}{t_3}\}$, et ne fournissent donc que trois groupes de surfaces transformées différents. Dans ce cas là, on a

$$1. \simeq 8. \quad 2. \simeq 9. \quad 3. \simeq 6. \quad 4. \simeq 5. \quad 7. \simeq 10.$$

3.3.12 Remarque

Dans le sens de la remarque 3.3.7, la détermination de t_0 en fonction du paramètre d'équation normalisée a pour $S = S_{T_0}$, reste problématique. Ainsi, connaissant a il demeure des ambiguïtés sur les attributions des équations aux surfaces hyperboliques 2. à 7. de 3.3.10.

3.3.13 Remarque (Transformées sous D_6)

La remarque 3.3.7 et sa suivante 3.3.12 montrent que l'on va avoir le même type de problème pour différencier les surfaces transformées sous l'action de D_3 sur F_6 , que ceux l'on avait pour différencier les transformées sous les actions spécifiques à F_4 . Nous avons aussi déjà remarqué que le critère d'identification ne pourrait se traduire explicitement. Nous nous limitons ici à donner les correspondances hyperboliques, en constatant notamment que les 6 triangles T_0, \dots, T_5 considérés comme triangles non marqués peuvent non seulement décrire les surfaces transformées de S_{T_0} mais également celles de $S_{\rho_0(T_0)}$ et $S_{\rho_0^{-1}(T_0)}$.

Plus précisément, si note S^+ pour $S_{\rho_0(T_0)}$, S^- pour $S_{\rho_0^{-1}(T_0)}$, et φ_+ et φ_- pour des involutions non-triviales sur S^+ et S^- , on obtient des domaines fondamentaux pour S^+/H_{φ_+} et S^-/H_{φ_-} en considérant les pentagones obtenus à partir de $\rho_0(T_0)$ et $\rho_0^{-1}(T_0)$ comme l'était P_{T_0} à partir de T_0 .

Soient alors les paramètres t_0^+ et t_0^- comme en 3.3.6 pour $P_{\rho_0(T_0)}$ et $P_{\rho_0^{-1}(T_0)}$ et les triangles

$$\begin{aligned} T_0^+ &= \rho_0(T_0), & T_1^+ &= \rho_0^{-1}(T_2), & T_2^+ &= \rho_0^{-1}(T_3), \\ T_3^+ &= \rho_0^{-1}(T_1), & T_4^+ &= \rho_0(T_5) & T_5^+ &= \rho_0(T_4). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_0^- &= \rho_0^{-1}(T_0), & T_1^- &= \rho_0(T_3), & T_2^- &= \rho_0(T_1), \\ T_3^- &= \rho_0(T_2), & T_4^- &= \rho_0^{-1}(T_5), & T_5^- &= \rho_0^{-1}(T_5) \end{aligned}$$

On peut montrer facilement avec les mêmes arguments que ceux utilisés dans le lemme 3.3.8 *ii*) qu'alors les surfaces transformées de S^+ (resp. S^-) sont obtenues en remplaçant les T_i par les T_i^+ et t_0 par t_0^+ (resp T_i^- et t_0^-) dans le tableau 3.3.10.

D'autre part, dans la situation générique, il n'existe qu'une surface de F_6 parmi les dix surfaces de 3.3.10, et les trois surfaces de F_6 S, S^+ et S^- sont non-isométriques. Cela signifie que l'on obtient trente surfaces différentes.

Chapitre 4

Familles réelles

Les surfaces de Riemann réelles sont d'un grand intérêt dans les questions d'uniformisation explicite. En effet, en genre 2 tout au moins, toutes les surfaces "très symétriques" sont réelles.

D'autre part, l'existence de structures réelles, donc de symétries indirectes, assure la plupart du temps l'existence de géodésiques stables que l'on sait paramétrer. Les invariants modulaires fournissent alors une méthode numérique efficace pour calculer des équations pour de telles surfaces pavées par symétries axiales par des polygones hyperboliques.

Nous nous intéressons dans un premier temps aux surfaces de F_2 ayant une structure réelle σ telle que les involutions non-triviales soient réelles. Autrement dit, aux surfaces telles que dans les notations déjà établies, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\sigma} & S \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ S & \xrightarrow{\sigma} & S \end{array}$$

soit commutatif.

Ce qui implique que la surfaces admette une équation de la forme

$$y^2 = (x^2 - 1)(x^4 + \alpha x^2 + \beta) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

4.1 Le plan des paramètres et les types

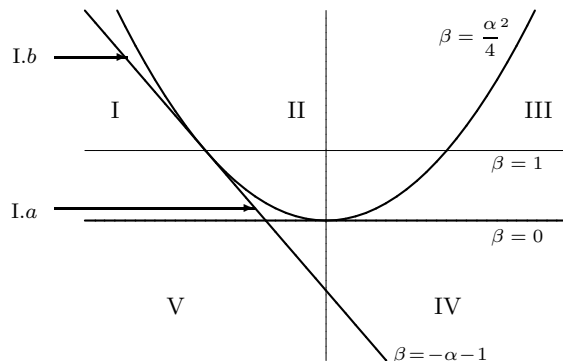
On considère les courbes algébriques d'équation $y^2 = (x^2 - 1)(x^4 + \alpha x^2 + \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Le lieu des courbes singulières, donné par $\{\beta = 0\}$, $\{\beta = \frac{\alpha^2}{4}\}$, $\{\alpha + \beta + 1 = 0\}$, sépare le plan (α, β) en 7 régions correspondant à des types topologiques différents pour la partie réelle.

On définit :

- . le type I : constitué des courbes $y^2 = (x^2 - 1)(x^4 + \alpha x^2 + \beta)$, $0 < \beta < -(\alpha + 1)$
ou $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - b)$, $0 < a < 1 < b$.
- . le type I.a : constitué des courbes $y^2 = (x^2 - 1)(x^4 + \alpha x^2 + \beta)$, $0 < \beta < -(\alpha + 1)$
ou $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - b)$, $0 < a < b < 1$.
- . le type I.b : constitué des courbes $y^2 = (x^2 - 1)(x^4 + \alpha x^2 + \beta)$, $0 < \beta < -(\alpha + 1)$
ou $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - b)$, $0 < 1 < a < b$.

- le type II : constitué des courbes $y^2 = (x^2 - 1)(x^4 + \alpha x^2 + \beta)$, $\beta > \frac{\alpha^2}{4}$ ou $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - \bar{a})$, $a \in \mathbb{C}$.
- le type III : constitué des courbes $y^2 = (x^2 - 1)(x^4 + \alpha x^2 + \beta)$, $\alpha > 0$, $0 < \beta < \frac{\alpha^2}{4}$ ou $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - b)$, $a < 0, b < 0$.
- le type IV : constitué des courbes $y^2 = (x^2 - 1)(x^4 + \alpha x^2 + \beta)$, $\beta < 0, \beta > -(\alpha + 1)$ ou $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - b)$, $b < 0 < a < 1$.
- le type V : constitué des courbes $y^2 = (x^2 - 1)(x^4 + \alpha x^2 + \beta)$, $\beta < 0, \beta < -(\alpha + 1)$ ou $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - b)$, $b < 0 < 1 < b$.



4.1.1 Remarque

L'action de S_5 définie au chapitre 2 ne stabilise pas l'ensemble du plan : nous allons voir que certaines des surfaces transformées des surfaces du type II n'ont pas de structure réelle.

D'autre part, les transformations qui stabilisent les classes d'isomorphie complexes ne stabilisent pas toujours les classes d'isomorphie réelles.

Par ailleurs, parmi les transformations qui changent de classe d'isomorphie complexe, certaines conservent les régions du plan, alors que d'autres les échangent.

4.1.1 Les surfaces des types I, Ia, Ib, III, IV et V

Ces surfaces ont été intensément étudiées dans [Bu-Si]. L'application à ce cas précis des méthodes développées dans le premier chapitre conduit essentiellement aux mêmes résultats que ceux de [Bu-Si], bien que présentés de façon différente. Nous nous limitons ici à donner un dictionnaire entre les deux descriptions.

Les types I, Ia, Ib

Soit S une surface du type I, et $0 < a < 1 < b$ ses paramètres d'équation, et φ l'une de ses involutions induites par $x \mapsto -x$.

L'existence d'une structure réelle sur S , et donc d'une isométrie renversant l'orientation, assure également l'existence d'une isométrie indirecte sur le quotient.

Plus précisément, on considère la coordonnée x sur la surface quotient $S_0 = S/H_\varphi$ telle que les points coniques soient de coordonnées $0, 1, a, b, \infty$.

Les coordonnées des points coniques de S_0 étant réelles, cela signifie que $x \mapsto \bar{x}$ induit une isométrie indirecte sur S_0 pour laquelle les arcs $[0, a]$, $[a, 1]$, $[1, b]$, $[b, \infty]$, et \mathbb{R}^{-1} sont stables, en particulier ce sont des arcs géodésiques.

Si on découpe S_0 le long des arcs $[0, a]$, $[a, 1]$, $[1, b]$, $[b, \infty]$ on obtient un hexagone hyperbolique droit, qui se découpe le long de l'arc \mathbb{R}^- en deux pentagones hyperboliques droits, image miroir l'un de l'autre.

On peut alors construire par symétrie en les points de coordonnées 0 et ∞ un domaine fondamental pour S pour lequel, comme toujours, le schéma de recollement est imposé par la position des points de Weierstrass.

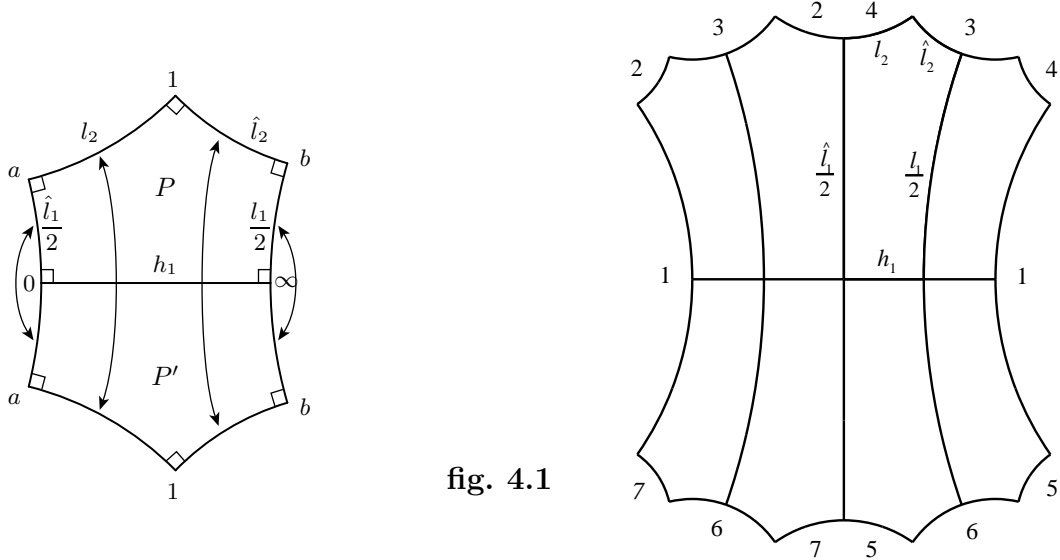


fig. 4.1

On note les longueurs des arcs géodésiques de bords du pentagone P de la façon suivante :

- $\frac{\hat{l}_1}{2}$ est la longueur de l'arc géodésique correspondant à la classe d'homotopie de $[0, a]$,
- l_2 est la longueur de l'arc correspondant à $[a, 1]$,
- \hat{l}_2 est la longueur de l'arc correspondant à $[1, b]$,
- $\frac{l_1}{2}$ est la longueur de l'arc correspondant à $[b, \infty]$
- h_1 est la longueur de l'arc correspondant à \mathbb{R}^- .

Les différentes copies dans S des arcs géodésiques de P de longueurs $\frac{l_1}{2}$ et l_2 constituent trois géodésiques de longueurs respectivement $2l_1$, $2l_2$ et $2l_2$ qui découpent S en deux pantalons hyperboliques \mathcal{P} et \mathcal{P}' isométriques et images miroir l'un de l'autre. On a donc exactement la description hyperbolique de [Bu-Si]. Remarquons également que les arcs dont les longueurs sont notées $\frac{\hat{l}_1}{2}$, l_2 , \hat{l}_2 , $\frac{l_1}{2}$, h_1 sont exactement ceux dont les longueurs sont notées de la même façon dans [Bu-Si]. Le quintuplet de longueurs $(\frac{\hat{l}_1}{2}, l_2, \hat{l}_2, \frac{l_1}{2}, h_1)$ est donc, comme dans [Bu-Si] entièrement déterminé par le couple (\hat{l}_1, l_2) , ce qui traduit la condition d'orthogonalité sur le pentagone P .

Le quadrangle Q_H

A partir du domaine fondamental H pour $S_0 = S/H_\varphi$ de la figure 4.1, on construit un domaine fondamental en quadrangle Q_H de S_0 comme sur la figure 4.2:

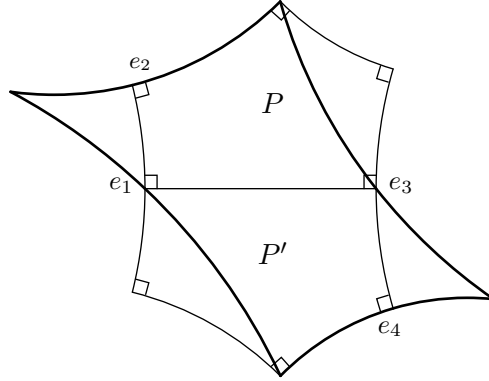


fig. 4.2

Plus précisément $Q_H = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ où le centre de e_1 est le point de H correspondant au point de coordonnée 0 dans S_0 , celui de e_2 est le point de P correspondant au point de coordonnée a dans S_0 , celui de e_3 est le point de H correspondant au point de coordonnée ∞ , celui de e_4 est le point de P' correspondant au point de coordonnée b dans S_0 .

La condition d'orthogonalité en les sommets du pentagone se traduit par des relations entre les traces de transformations hyperboliques qui s'expriment comme des mots en les e_i .

En effet, il est connu que si T est un triangle ayant un angle droit dont les longueurs des côtés adjacents sont respectivement l et l' , l'orthogonalité en le sommet est caractérisée par le fait que le côté opposé est de longueur l'' avec

$$\cosh(l'') = \cosh(l) \cosh(l').$$

Or, on peut découper dans P cinq triangles de ce type, en prenant respectivement chacun des cinq sommets de P pour sommet du triangle ayant un angle droit. De plus, les cosinus hyperboliques des cinq longueurs des bords de P s'expriment comme des traces de mots en les e_i .

On a par exemple pour le triangle tel que $l = \frac{\hat{l}_1}{2}$ et $l' = h_1$

$$|\mathrm{tr}(e_1 e_2)| = 2 \cosh\left(\frac{\hat{l}_1}{2}\right) \quad |\mathrm{tr}(e_1 e_3)| = 2 \cosh(h_1),$$

d'où

$$2 |\mathrm{tr}(e_2 e_3)| = |\mathrm{tr}(e_1 e_3)| |\mathrm{tr}(e_1 e_2)| = 4 \cosh(h_1) \cosh\left(\frac{\hat{l}_1}{2}\right).$$

On obtient de la même façon :

$$\begin{aligned}
2 |\operatorname{tr}(e_2 e_3)| &= |\operatorname{tr}(e_1 e_3)| |\operatorname{tr}(e_1 e_2)| = 4 \cosh(h_1) \cosh\left(\frac{\hat{l}_1}{2}\right) \\
2 |\operatorname{tr}(e_2 e_3 e_4)| &= |\operatorname{tr}(e_1 e_2)| |\operatorname{tr}(e_3 e_4 e_1)| = 4 \cosh\left(\frac{\hat{l}_1}{2}\right) \cosh(l_2) \\
(4.1.2) \quad 2 |\operatorname{tr}(e_4 e_1 e_2 e_1)| &= |\operatorname{tr}(e_3 e_4 e_1)| |\operatorname{tr}(e_3 e_1 e_2)| = 4 \cosh(l_2) \cosh(\hat{l}_2) \\
2 |\operatorname{tr}(e_4 e_1 e_2)| &= |\operatorname{tr}(e_3 e_4)| |\operatorname{tr}(e_3 e_1 e_2)| = 4 \cosh(\hat{l}_2) \cosh\left(\frac{l_1}{2}\right) \\
2 |\operatorname{tr}(e_1 e_4)| &= |\operatorname{tr}(e_3 e_4)| |\operatorname{tr}(e_1 e_3)| = 4 \cosh\left(\frac{l_1}{2}\right) \cosh(h_1)
\end{aligned}$$

Réciproquement, si $Q' = (e'_1, \dots, e'_4)$ est un quadrangle vérifiant les relations 4.1.2, on peut associer à Q' un hexagone hyperbolique droit se découpant en deux pentagones, en considérant l'hexagone dont les sommets sont, dans l'ordre cyclique, donnés par les centres de $e_2, e_3 e_4 e_1 e_2, e_3 e_4 e_3, e_4, e_1 e_2 e_3 e_4, e_1 e_2 e_1$.

Nous avons montré en 2.1.8 que la transformation σ_4 définie par

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) \longmapsto (e_2, e_3 e_4 e_1 e_2, e_1, e_1 e_3 e_1)$$

est d'ordre 5, et que $\langle \sigma_4, \sigma_0^2 \rangle$ engendre un groupe isomorphe au groupe diédral D_5 .

On peut également vérifier facilement que σ_4 et σ_0^2 préservent les relations 4.1.2 ci-dessus. De plus si l'hexagone H est défini par le couple de longueurs

$$(l_1, l_2) = \left(\operatorname{arccosh}\left(\frac{|\operatorname{tr}(e_3 e_4)|^2}{2} - 1\right), \operatorname{arccosh}(|\operatorname{tr}(e_3 e_4 e_1)|) \right)$$

alors

$$\begin{aligned}
\sigma_4.(l_1, l_2) &= \left(\operatorname{arccosh}\left(\frac{|\operatorname{tr}(e_3 e_1)|^2}{2} - 1\right), \operatorname{arccosh}(|\operatorname{tr}(e_3 e_1 e_2)|) \right) \\
&= (2h_1, \hat{l}_2)
\end{aligned}$$

On retrouve exactement la description hyperbolique du générateur d'ordre 5 de D_5 , ψ de [Bu-Si] (voir 5.17 p 230). D'autre part, la coordonnée x sur S_0 est telle que 0 est sur le premier côté, a sur le second, ∞ sur le troisième, b sur le quatrième côté de Q_H et 1 aux sommets. La surface S_{Q_H} , isométrique à S , admet donc le couple (a, b) comme paramètres d'équation normalisée. La transformation σ_4 est telle que $\bar{\sigma}_4 = (1, 3, 4, 5, 2)$, on obtient donc pour la surface $S_{\sigma_4(Q_H)}$ le couple de paramètres d'équation normalisée

$$\sigma_4.(a, b) = \left(\frac{b(1-a)}{b-a}, \frac{b}{b-a} \right),$$

qui est exactement la description algébrique de ψ de [Bu-Si].

De même, on a

$$\sigma_0.(l_1, l_2) = (\hat{l}_1, \hat{l}_2) \quad \bar{\sigma}_0.(a, b) = \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a} \right),$$

σ_0^2 s'identifie donc au générateur d'ordre 2 de D_5 , noté φ dans [Bu-Si]

Ainsi le sous groupe $\langle \sigma_4, \sigma_0^2 \rangle$ s'identifie au même groupe diédral D_5 agissant sur les surfaces du type I que celui défini dans [Bu-Si].

Notons de plus que si σ_0^2 opère trivialement sur les classes d'isomorphie complexes, i.e sur les classes d'isométrie, ce n'est pas le cas de σ_4 , qui permet donc de construire cinq des dix classes d'isométrie de revêtements de S_0 .

Les surfaces des type I.a et I.b sont réelles isomorphes à celles du type I, nous ne les étudions pas ici.

Surfaces des type III, IV, V

Dans l'étude faite ci-dessus pour S une surface du type I, et S_0 son quotient de genre 0, il manque cinq des dix classes d'isomorphie complexes de revêtements de S_0 . Une étude de signe complètement élémentaire dans le tableau 2.1.23 donnant des paramètres d'équations normalisées pour les dix classes d'isomorphie montre que les autres surfaces sont en fait des surfaces des types III, IV ou V, dépendant de la paire de paramètres choisie parmi celles du tableau 2.1.26.

Dans [Bu-Si], un passage entre les types I et III est décrit en terme de longueurs et de paramètres d'équations et permet de transporter l'action de D_5 sur ce type.

Nous nous limitons ici à montrer que ce passage coïncide exactement avec la transformation σ_2 de G_Ω . Les cinq surfaces manquantes seront obtenues par ce biais là.

Par ailleurs nous ne voulons pas ici, à la différence de la présentation de [Bu-Si], insister sur le choix de la structure réelle parmi celles des trois types. Nous nous limiterons à donner la classe d'isomorphie complexe et discuterons rapidement des structures réelles correspondant à chacun des trois types.

On part de l'hexagone H précédent et de S la surface du type I obtenue à partir de H comme sur la figure 4.1.

Notons que les géodésiques de longueurs $2\hat{l}_1, 2\hat{l}_2, 2\hat{l}_2$ fournissent un autre découpage de S en pantalons hyperboliques assemblés par images miroir.

Le passage entre les types I et III dans [Bu-Si] s'obtient en faisant un demi-twist le long de la géodésique de longueur $2\hat{l}_1$.

Or dans l'identification de S avec S_{Q_H} ce découpage est exactement celui de la preuve de 2.1.37 à savoir :

- La géodésique de longueur $2\hat{l}_1$ relève l'arc joignant les milieux des deux premiers côtés de Q_H ,
- Les géodésiques de longueurs $2\hat{l}_1$ relèvent le quatrième côté de Q_H .

A présent, nous avons précisément montré en 2.1.37 que la surface obtenue à partir de $S = S_{Q_H}$ par un demi-twist le long de la géodésique de longueur $2\hat{l}_1$ est $S' = S_{\sigma_2(Q_H)}$.

Les paramètres d'équation normalisée de $S' = S_{\sigma_2(Q_H)}$ sont $\left(-\frac{a}{1-a}, \frac{b-a}{1-a}\right)$, l'équation ainsi construite fait donc de S' une surface du type V.

Les autres paramètres d'équation pour S' donnés par le tableau 2.1.26, se répartissent entre les types de la façon suivante :

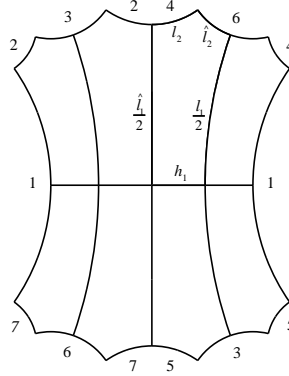
$$\begin{array}{ccc}
\text{type III} & \text{type IV} & \text{type V} \\
\left(\begin{array}{cc} -\frac{a}{1-a}, -\frac{a}{b-a} \\ -\frac{b-a}{a}, -\frac{1-a}{a} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} -\frac{1-a}{a}, \frac{1-a}{b-a} \\ -\frac{a}{b-a}, \frac{1-a}{b-a} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} -\frac{a}{1-a}, \frac{b-a}{1-a} \\ -\frac{b-a}{a}, \frac{b-a}{1-a} \end{array} \right)
\end{array}$$

Notons que les deux équations du type III se correspondent par $(a, b) \mapsto (\frac{1}{b}, \frac{1}{a})$ mais que cette transformation échange les équations des types IV et V sur la même ligne. Elle correspond de plus à l'isomorphisme complexe $(x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, i\frac{y}{x^3})$ qui échange dans tous les cas la structure réelle naturelle $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ et sa composée avec l'involution hyperelliptique $(x, y) \mapsto (\bar{x}, -\bar{y})$.

Notons également que pour chacun des types IV et V, les deux équations de S' conduisent à des surfaces réelles isomorphes. Plus, précisément, pour le type IV comme pour le type V, la correspondance entre les deux équations de la même colonne dans le tableau ci-dessus se correspondent par $(a, b) \mapsto (\frac{b}{a}, b)$. Cela correspond à l'isomorphisme réel $(x, y) \mapsto \left(\frac{\sqrt{b}}{x}, \sqrt{-ab} \frac{y}{x^3} \right)$, $a < 0 < b$.

Notons enfin que l'on passe de l'équation du type V sur la première ligne à celle du type III sur la même ligne par $(a, b) \mapsto \left(a, \frac{a}{b} \right)$ qui correspond à l'isomorphisme complexe $(x, y) \mapsto \left(i \frac{\sqrt{-a}}{x}, \sqrt{-ab} \frac{y}{x^3} \right)$.

On peut comme pour S déduire de H un domaine fondamental pour S' rendant visible les structures réelles :



L'involution hyperelliptique est au centre de la figure. On identifie les points de coordonnées $\pm\sqrt{-\frac{a}{1-a}}$, $\pm\sqrt{\frac{b-a}{1-a}}$ et ± 1 de la surface du type V $S' = S_{\sigma_2(Q_H)}$. Les premiers correspondent respectivement au centre de la figure et au milieu du côté 1, les deuxièmes aux milieux des côtés 3 et 6, les troisièmes aux extrémités communes à 4 et 6 et à 2 et 3. La structure réelle du type V correspond donc à la symétrie par rapport à la géodésique de longueur $2l_1$. Les considérations ci-dessus sur les correspondances entre structures réelles permettent d'identifier les structures réelles associées aux autres équations. Celle associée aux équations du type IV correspond à la composée de la précédente avec la symétrie centrale.

Celle associée à l'équation du type III sur la première ligne du tableau est la symétrie horizontale, celle associée à l'équation du type III sur la seconde ligne est la symétrie verticale.

4.1.2 Le type II

Quadrangles pour les surfaces du type II

Le modèle du quadrangle est tout à fait adapté à la description des surfaces du type II. Ce sont d'ailleurs les surfaces du type II qui ont motivé le choix du quadrangle comme bloc de construction (les choix de générateurs de G_Q ont été eux aussi guidés par l'étude de ce type).

4.1.3 Lemme

Soit S une surface du type II, et $a \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(a) < 0$ son paramètre d'équation. Il existe pour S un unique quadrangle Q admettant une symétrie par rapport à l'axe joignant les milieux des premier et troisième côtés. Pour un tel quadrangle, le point de coordonnée a est le milieu de la seconde face de Q . Réciproquement, si une surface admet un quadrangle de cette forme, la courbe algébrique sous-jacente admet une équation du type II.

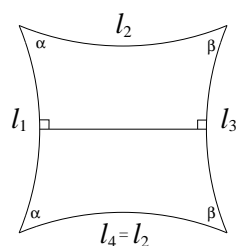


fig. 4.3

Preuve : Nous avons déjà utilisé le même argument pour les surfaces de F_4 et pour les surfaces du type I : La structure réelle sur S induit une isométrie indirecte sur le quotient. Plus précisément, on retrouve le quadrangle en découpant le quotient $S_0 = S/H_\varphi$ le long des classes d'homotopie de \mathbb{R}^+ pour la coordonnée induite sur le quotient. La classe d'homotopie de \mathbb{R}^- est alors l'arc géodésique joignant les milieux des premier et troisième côtés. La structure réelle correspond alors à la symétrie par rapport à cet axe sur le quadrangle.

4.1.4 Notation

On note \mathcal{Q}_{II} le sous ensemble de \mathcal{Q} constitué des quadrangles comme ci-dessus pour les surfaces du type II.

4.1.5 Remarque

La structure réelle sur le quotient se relève en quatre structures réelles sur S_Q , données par $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ et $(x, y) \mapsto (\bar{x}, -\bar{y})$ d'une part, et $(x, y) \mapsto (-\bar{x}, -\bar{y})$ et $(x, y) \mapsto (-\bar{x}, \bar{y})$ d'autre part. Les deux premières sont du type II, la troisième a une composante séparante, elle correspond donc à la symétrie horizontale sur S_Q , la dernière n'a pas de point fixe.

Caractérisation de \mathcal{Q}_{II} . Soit $Q = (e_1, e_2, e_3, e_4) \in Q$, alors $Q \in \mathcal{Q}_{\text{II}}$ si, et seulement si, les e_i vérifient les relations de traces suivantes :

$$(4.1.6) \quad \begin{aligned} |\text{tr}(e_1 e_2)| &= |\text{tr}(e_1 e_4)| \\ |\text{tr}(e_3 e_2)| &= |\text{tr}(e_3 e_4)| \\ |\text{tr}(e_1 e_2 e_3)| &= |\text{tr}(e_1 e_4 e_3)| \end{aligned}$$

Les relations ci-dessus traduisent tout simplement que les deuxième et quatrième côtés du quadrangle sont de même longueur, que les arcs géodésiques joignant le milieu du premier côté à ceux des deuxième et quatrième cotés sont de même longueur et que les arcs géodésiques joignant le milieu du troisième côté à ceux des deuxième et quatrième cotés sont de même longueur.

Ces relations se traduisent par le fait que le quadrangle est entièrement déterminés par les longueurs l_1 et l_3 des ses premier et troisième cotés. On utilisant la trigonométrie des triangles, on obtient :

$$\begin{aligned} L_2 = L_4 &= \frac{(L_1 + L_3 + 2)\sqrt{L_1 - 1}\sqrt{L_3 - 1} + (L_1 + 1)(L_3 + 1)}{(L_1 - 1)(L_3 - 1) - 4}, \\ L = L' &= \frac{\sqrt{L_1 - 1}\sqrt{L_3 - 1}(L_1 L_3 - 1) + (L_1 + 1)(L_3 + 1)}{(L_1 - 1)(L_3 - 1) - 4}, \end{aligned}$$

où L_i et L désignent les cosinus hyperboliques des longueurs des cotés et de la première diagonale de Q .

Action de D_3 sur les surfaces du type II

4.1.7 Proposition

Le sous-groupe $\langle \sigma_0^2, \sigma_1 \rangle$ de $G_{\mathcal{Q}}$ s'identifie au groupe diédral D_3 et définit une action sans point fixe sur \mathcal{Q}_{II} . L'action correspondante sur F_2 est génériquement sans point fixe sur les classes d'isomorphie réelles de courbes algébriques du type II.

Preuve : Le fait que $\langle \sigma_0^2, \sigma_1 \rangle$ s'identifie à D_3 résulte immédiatement de 1., 2. et 3. de 2.1.8.

De plus, on vérifie aisément que σ_0^2 et σ_1 respectent les relations de traces 4.1.6. Enfin, on a

$$\begin{array}{cc|cc} Id & (a, \bar{a}) & \overline{\sigma_0^2} & \left(\frac{1}{\bar{a}}, \frac{1}{a}\right) \\ \overline{\sigma_1} & \left(\frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-\bar{a}}\right) & \overline{\sigma_0^2 \sigma_1} & (1-\bar{a}, 1-a) \\ \overline{\sigma_1^2} & \left(\frac{a-1}{a}, \frac{\bar{a}-1}{\bar{a}}\right) & \overline{\sigma_0^2 \sigma_1^2} & \left(\frac{\bar{a}}{\bar{a}-1}, \frac{a}{a-1}\right) \end{array}$$

Il est clair que deux surfaces dans la même colonne ne sont pas complexes isomorphes. De plus l'isomorphisme complexe entre deux surfaces sur la même ligne est donné par $(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \pm i \frac{y}{x^3}\right)$ et échange donc la structure réelle naturelle $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ sur l'une des surface avec $(x, y) \mapsto (\bar{x}, -\bar{y})$ sur l'autre. Génériquement, les deux surfaces ne sont donc pas réelles isomorphes.

4.1.8 Remarque

On a alors les expressions σ_0^2 et σ_1 en fonction (L_1, L_3) :

$$\begin{aligned}\sigma_0^2(L_1, L_3) &= (L_3, L_1) \\ \sigma_1(L_1, L_3) &= \left(2 \frac{(L_1 + 1)(L_3 + 1)(\sqrt{L_1 - 1}\sqrt{L_3 - 1} + 2)^2}{((L_1 - 1)(L_3 - 1) - 4)^2} - 1, L_1 \right)\end{aligned}$$

4.1.9 Remarque

Les sous espaces stables sous les transformations d'ordre 2 de D_3 définissent trois familles spéciales réelles :

. La famille stable sous σ_0^2 . C'est la trace sur le type II de la famille F_4 , caractérisée par

$$|a| = 1 \quad \text{i.e.} \quad \beta = 1,$$

nous y reviendrons plus amplement en 4.2.

. La famille stable sous $\sigma_0^2\sigma_1$. Les équations se caractérisent par le fait que :

$$2 \operatorname{Re}(a) = 1 \quad \text{ou} \quad \alpha = -1,$$

les longueurs par la relation :

$$L_1 = \frac{L_3^2 + 10 L_3 - 7}{(L_3 - 3)^2}.$$

. La famille stable sous $\sigma_0^2\sigma_1^2$. Les équations se caractérisent par le fait que :

$$2 \operatorname{Re}(a) = |a|^2 \quad \text{ou} \quad \alpha = -\beta,$$

les longueurs par la relation :

$$L_3 = \frac{L_1^2 + 10 L_1 - 7}{(L_1 - 3)^2}.$$

Les deux dernières familles sont échangées par σ_0^2 , elles définissent donc deux familles réelles distinctes mais les surfaces à l'intérieur des deux familles sont deux à deux complexes isomorphes.

A l'intersection des trois familles se trouve le point fixe de σ_1 . Il est défini par

$$a = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \quad L_1 = L_3 = 7, \quad L_2 = L_4 = 5, \quad L = L' = 11.$$

Autres surfaces transformées

Soit S une surface du type II, de paramètre d'équation a , $\operatorname{Im}(a) < 0$. L'action de S_3 ci-dessus ne donne que 3 des classes d'isomorphie complexes des revêtements de S/H_φ . Les sept autres surfaces n'appartiennent pas, en général, au plan (α, β) .

Plus précisément, on a

4.1.10 Proposition

Soit S une surface du type II, a , $\text{Im}(a) < 0$ son paramètre d'équation et $S_0 = S/H_\varphi$ les dix classes d'isomorphie de revêtements de S_0 se répartissent de la façon suivante :

- trois surfaces du type II.
- une surface ayant une structure réelle à trois composantes ne commutant pas à φ et $\varphi\tau$.
- six surfaces n'ayant pas de structure réelle et deux à deux complexes conjuguées.

Le tableau suivant donne les correspondances entre quadrangles et équations pour les dix surfaces. Pour $Q \in \mathcal{Q}$, $\text{miroir}(Q)$ désigne le quadrangle de \mathcal{Q} isométrique à Q par une isométrie indirecte envoyant le premier côté de Q sur le premier côté de $\text{miroir}(Q)$.

Type II			
1.	Id	(a, \bar{a})	$Q \in \mathcal{Q}_{\text{II}}$
2.	σ_1	$\left(\frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-\bar{a}} \right)$	$\sigma_1(Q)$
3.	σ_1^2	$\left(\frac{a-1}{a}, \frac{\bar{a}-1}{\bar{a}} \right)$	$\sigma_1^2(Q)$
Structure réelle — involution non-réelle			
4.	σ_0	$\left(\frac{1-\bar{a}}{1-a}, \frac{a(1-\bar{a})}{\bar{a}(1-a)} \right)$	$\sigma_0(Q) = \text{miroir}(\sigma_0(Q))$
Surfaces deux à deux complexes conjuguées			
5.	σ_2	$\left(\frac{a}{a-1}, \frac{a-\bar{a}}{a-1} \right)$	$\sigma_2(Q)$
6.	$\sigma_0^{-1}\sigma_3\sigma_0$	$\left(\frac{\bar{a}}{\bar{a}-1}, \frac{\bar{a}-a}{\bar{a}-1} \right)$	$\text{miroir}(\sigma_2(Q))$
7.	$\sigma_2\sigma_1$	$\left(\frac{1}{a}, \frac{\bar{a}-a}{a(\bar{a}-1)} \right)$	$\sigma_2\sigma_1(Q)$
8.	$\sigma_0^{-1}\sigma_3\sigma_0\sigma_1$	$\left(\frac{1}{\bar{a}}, \frac{a-\bar{a}}{\bar{a}(a-1)} \right)$	$\text{miroir}(\sigma_2\sigma_1(Q))$
9.	$\sigma_2\sigma_1^2$	$\left(1-a, \frac{\bar{a}-a}{\bar{a}} \right)$	$\sigma_2\sigma_1^2(Q)$
10.	$\sigma_0^{-1}\sigma_3\sigma_0\sigma_1^2$	$\left(1-\bar{a}, \frac{a-\bar{a}}{a} \right)$	$\text{miroir}(\sigma_2\sigma_1^2(Q))$

4.1.11

Preuve : : La preuve est entièrement contenue dans ce qui précède et le tableau ci-dessus : pour les six dernières surfaces, pour que la surface soit définie sur \mathbb{R} , il faut qu'il existe un automorphisme anti-holomorphe de \mathbb{P}^1 qui stabilise l'ensemble des racines du polynôme P de l'équation $y^2 = P(x)$ se déduisant des paramètres

donnés dans le tableau. On vérifie facilement que cette condition est trop restrictive en général.

Pour la quatrième surface, l'équation déduite des paramètres $\left(\frac{1-\bar{a}}{1-a}, \frac{a(1-\bar{a})}{\bar{a}(1-a)}\right)$ ci-dessus est stable sous $(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, i\frac{\bar{y}}{x^3}\right)$. Notons que chacun des points de Weierstrass est réel pour cette structure réelle. Notons également que cette structure réelle ne commute pas aux involutions $(x, y) \mapsto (-x, y)$ et $(x, y) \mapsto (-x, -y)$.

4.1.12 Remarque

La surface notée 4. donnée par $\sigma_0(Q)$, qui possède une structure réelle telle que les points de Weierstrass sont tous réels, est précieuse pour les calculs effectifs :

Notons d'abord qu'en transformant son équation par $x \mapsto i\frac{x-i}{x+i}$, on obtient une équation de la forme

$$y^2 = (x^2 - 1)(x - a_1)(x + \frac{1}{a_1})(x - a_2)(x + \frac{1}{a_2}),$$

pour laquelle les involutions sont induites par $x \mapsto -\frac{1}{x}$.

Les coefficients a_1 et a_2 ci-dessus peuvent être calculés numériquement à partir des longueurs l_1 et l_3 des premier et troisième cotés de Q .

En effet, on considère les deux quadrangles isométriques et images miroirs l'un de l'autre obtenus en découpant Q le long de l'arc joignant ses premier et troisième côtés. Ces quadrangles ont chacun deux angles droits consécutifs et deux angles complémentaires à $\frac{\pi}{2}$ obtenus en découpant Q le long de l'arc joignant ses premier et troisième côtés. On en assemble deux copies par symétrie en le centre de la seconde face de Q et on obtient ainsi un hexagone hyperbolique droit H admettant une symétrie centrale.

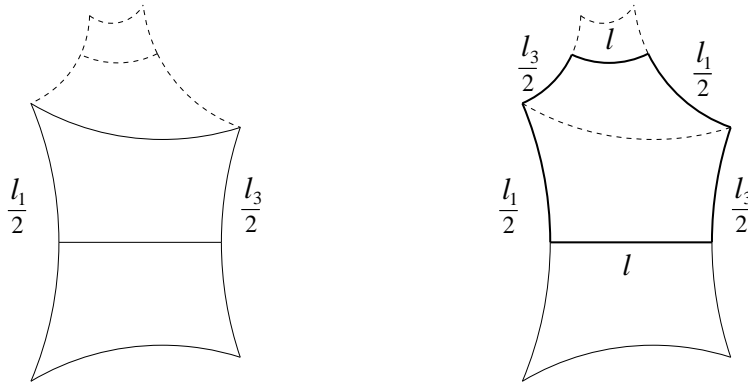


fig. 4.4

Mais alors, on vérifie aisément que $S_{\sigma_0(Q)}$ est obtenue en identifiant quatre copies de H comme en 1.3.2. Les coefficients a_1 et a_3 sont obtenus à partir des invariants modulaires de H . En effet la symétrie sur H impose que l'on puisse se ramener à des invariants de la forme $\{1, -1, a_1, -\frac{1}{a_1}, a_2, -\frac{1}{a_2}\}$, les points envoyés sur 1 et -1 sont alors les points correspondant aux sommets de Q , ce qui permet de retrouver l'équation de la surface du type II S_Q .

Notons de plus que si l'on part de l'un des quadrangle $\sigma_1(Q)$ ou $\sigma_1^2(Q)$, l'hexagone H que l'on construit est le même. En effet l'ensemble des longueurs des cotés de H est $(\frac{l_1}{2}, \frac{l_3}{2}, l, \frac{l_1}{2}, \frac{l_3}{2}, l)$ où l est la longueur de l'arc géodésique joignant les milieux des premier et troisième cotés de Q . Or l est également la demi-longueur du premier coté de $\sigma_1(Q)$, $\frac{l_1}{2}$ celle du troisième coté de $\sigma_1(Q)$, et $\frac{l_3}{2}$ la longueur de l'arc joignant les milieux des premier et troisième cotés de $\sigma_1(Q)$.

En revanche les invariants $\{1, -1, a'_1, -\frac{1}{a'_1}, a'_2, -\frac{1}{a'_2}, a'_2\}$ et $\{1, -1, a''_1, -\frac{1}{a''_1}, a''_2, -\frac{1}{a''_2}\}$ que l'on calcule en faisant la construction à partir de $\sigma_1(Q)$ et $\sigma_1^2(Q)$ sont ceux tels que les points envoyés sur 1 et -1 correspondent respectivement au milieu du premier coté de Q et au milieu du troisième coté de Q .

4.1.13 Exemple

L'exemple ci-dessous a été obtenu numériquement avec la méthode indiquée ci-dessus. Nous l'avons choisi parce que les descriptions algébriques et hyperboliques donnent de jolis résultats.

Si pour Q , $L_1 = \cosh(l_1) = 9$ et $L_3 = \cosh(l_3) = 3$, l'hexagone de calcul ci-dessus est donné par les cosinus hyperboliques des longueurs de géodésiques de bords $(\sqrt{5}, \sqrt{2}, \sqrt{10}, \sqrt{5}, \sqrt{2}, \sqrt{10})$.

Les valeurs numériques obtenues pour les invariants modulaires sont

$$22.180339887499, 18.944271909999, 5.236067977500,$$

ce qui donne à penser qu'il s'agit en fait de

$$11 + 5\sqrt{5}, 10 + 4\sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}.$$

Les coefficients a_1 et a_2 sont alors :

$$(a_1, a_2) = \left(3, \frac{5\sqrt{5} - 2}{11}\right), \text{ d'où les paramètres } \left(\frac{-7 - 24i}{25}, \frac{117 + 44i}{125}\right) \text{ pour } S_{\sigma_0(Q)}.$$

On a alors

	$\cosh(l_1)$	$\cosh(l_2)$	$\cosh(l_3)$	$\cosh(l_4)$	$\cosh(l)$	a	b
Id	9	8	3	8	12	$-2-4i$	$-2+4i$
σ_1	19	4	9	4	16	$\frac{3-4i}{25}$	$\frac{3+4i}{25}$
σ_1^2	3	7	19	7	13	$\frac{11-2i}{10}$	$\frac{11+2i}{10}$
σ_0	8	3	8	9	12	$\frac{-7-24i}{25}$	$\frac{117+44i}{125}$
σ_2	48	9	3	8	12	$\frac{22+4i}{25}$	$\frac{32+24i}{25}$
$\sigma_0^{-1}\sigma_3\sigma_0$	48	8	3	9	27	$\frac{22-4i}{25}$	$\frac{32-24i}{25}$
$\sigma_2\sigma_1$	244	19	9	4	16	$\frac{-1+2i}{10}$	$\frac{8+44i}{125}$
$\sigma_0^{-1}\sigma_3\sigma_0\sigma_1$	244	4	8	19	171	$\frac{-1-2i}{10}$	$\frac{8-44i}{125}$
$\sigma_2\sigma_1^2$	31	3	19	7	13	$3+4i$	$\frac{8-4i}{5}$
$\sigma_0^{-1}\sigma_3\sigma_0\sigma_1^2$	31	7	19	3	57	$3-4i$	$\frac{8+4i}{5}$

4.2 traces réelles des Familles F_6 et F_4

4.2.1 Trace réelle de F_4 : quadrangles tri-orthogonaux ayant un angle de $\frac{\pi}{4}$

Nous avons laissé de côté au chapitre précédent le cas des surfaces de F_4 ayant une structure réelle commutant à ses involutions. Ces surfaces sont caractérisées par le

fait que leur paramètre a apparaissant dans leur équation $y^2 = (x^2-1)(x^2-a)(x^2-\frac{1}{a})$ est soit réel, soit tel que $|a| = 1$.

Nous reprenons les notations du chapitre précédent, à savoir que S est donnée par (S, φ, ψ, χ) , où χ est un automorphisme d'ordre 4 de S dont le carré est l'involution hyperelliptique de S , et φ et $\psi = \chi\varphi$ sont deux involutions non-triviales.

Nous avons également montré que si a est un paramètre pour l'équation de S telle que φ soit induite par $x \mapsto -x$, et si Q est un domaine fondamental en quadrangle pour S/H_φ tel que $\sigma_0^2(Q) = Q$ et que S soit isométrique à S_Q , alors $-a$ est un paramètre pour la surface $S_{\sigma_0(Q)}$. Nous avons aussi montré que si a est un paramètre pour (S, φ) , alors $\left(\frac{\sqrt{a}-i}{\sqrt{a}+i}\right)^2$ est un paramètre pour (S, φ) .

Donc, dans tous les cas, si $a \in \mathbb{R}$ ou $|a| = 1$ on a

$$|a| = 1, \quad \text{ou} \quad \left| \left(\frac{\sqrt{a}-i}{\sqrt{a}+i} \right)^2 \right| = 1, \quad \text{ou} \quad \left| \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} \right)^2 \right| = 1.$$

En particulier toute surface réelle de F_4 est liée à une surface de F_4 admettant une équation de type II.

C'est sur les surfaces de F_4 du type II que nous allons nous appuyer pour décrire la trace réelle de F_4 .

4.2.1 Lemme

Soit (S, φ) une surface de F_4 du type II, et a , $\text{Im } a < 0$ son paramètre d'équation.

Alors l'unique quadrangle $Q \in Q_{\text{II}}$ tel que $S = S_Q$ est tel que tous ses angles sont égaux à $\frac{\pi}{4}$. Q se découpe alors en quatre quadrangles hyperboliques droits ayant trois angles droits et un angle de $\frac{\pi}{4}$. En particulier, $Q = \sigma_0^2(Q)$.

Preuve : On commence par remarquer que dans ce cas, la surface donnée par $S_{\sigma_0(Q)}$ est une surface de F_4 du type II.

On raisonne comme précédemment sur les classes d'homotopie. Comme la coordonnée x_Q sur $S_0(Q)$ est telle que $[0, 1]$ correspond au premier côté de Q , $[0, \infty]$ au troisième coté et \mathbb{R}^- à l'arc joignant les premier et troisième côtés, les deuxième et quatrième cotés correspondent nécessairement aux classes d'homotopie des arcs respectivement $\{z \text{ t.q } |z| = 1, \text{Im}(z) \leq 0, \text{Re}(z) \geq \text{Re}(a)\}$ et $\{z \text{ t.q } |z| = 1, \text{Im}(z) \geq 0, \text{Re}(z) \geq \text{Re}(a)\}$.

De même, l'arc joignant les milieux des premier et troisième côtés correspond à la classe d'homotopie de $\{z \text{ t.q } |z| = 1, \text{Re}(z) \leq \text{Re}(a)\}$.

Or les coordonnées x_Q et $x_{\sigma_0(Q)}$ sur $S_0(Q)$ se correspondent via la transformation $z \mapsto \frac{z-a}{z-\bar{a}} \frac{1-\bar{a}}{1-a}$, qui échange le disque unité et l'axe réel.

Cela signifie que $\sigma_0(Q)$ est le quadrangle du type II pour $S_{\sigma_0(Q)}$. Mais alors Q admet aussi la symétrie par rapport à l'axe joignant ses deuxième et quatrième côtés.

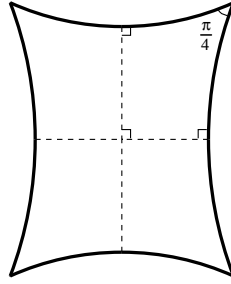


fig. 4.5

Soit S une surface de F_4 du type II, et H , comme au chapitre précédent, le sous groupe de $\text{Aut}(S)$ isomorphe à D_4 . On peut à présent compléter la proposition 3.2.12 pour les surfaces réelles de F_4 :

On reprend les notations de 3.2.12 pour $Q = Q_3$ et Q_1 et Q_2 obtenus à partir de Q comme en 3.2.11, de sorte que l'on ait pour les surfaces de genre 2 :

$$\begin{aligned} S_{Q_3} &\simeq S_{\sigma_0(Q_1)} \simeq S_2 \\ S_{Q_2} &\simeq S_{\sigma_0(Q_3)} \simeq S_1 \\ S_{Q_1} &\simeq S_{\sigma_0(Q_2)} \simeq S_3 \end{aligned}$$

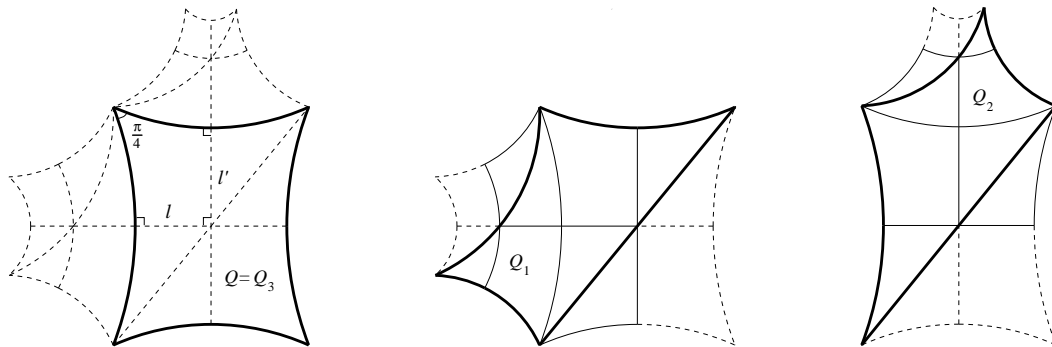


fig. 4.6

Il nous manquait dans 3.2.12 la connaissance des points en fonction de leurs coordonnées sur les différents quadrangles.

Commençons par les équations et les répartitions entre types.

Si a , $\text{Im}(a) < 0$ est le paramètre d'équation pour S_{Q_3} , $a = \xi^2$, $\text{Re}(\xi) < 0$, $\text{Im}(\xi) > 0$, les couples de paramètres d'équations pour les différentes surfaces sont soit réels soit complexes conjugués. Ce deuxième cas correspond aux surfaces du type II. Dans tous les cas, on dispose d'une façon de les ordonner. Le tableau suivant donne la répartition entre les types. On n'y donne que l'un des paramètres parmi a et $\frac{1}{a}$.

type II		type I		type III	
S_{Q_3}	a	$S_{\sigma_0(Q_1)}$	$0 < -\left(\frac{\xi - i}{\xi + i}\right)^2 < 1$	S_{Q_1}	$\left(\frac{\xi + i}{\xi - i}\right)^2 < -1$
$S_{\sigma_0(Q_3)}$	$-\frac{1}{a}$	S_{Q_2}	$0 < -\left(\frac{\xi + 1}{\xi - 1}\right)^2 < 1$	$S_{\sigma_0(Q_2)}$	$\left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1}\right)^2 < -1$

Pour les identifications géométriques :

On considère le quadrangle \mathcal{Q} ayant trois angles droits et un angle égal à $\frac{\pi}{4}$, obtenu en découpant Q le long des arcs joignant les milieux des premier et troisième côtés d'une part, et des deuxième et quatrième cotés d'autre part.

Soit H_1 l'hexagone hyperbolique droit obtenu en collant deux copies de \mathcal{Q} image miroir l'une de l'autre le long des bords correspondant au premier coté de Q puis deux copies du pentagone obtenu le long des bords correspondant à l'arc joignant les milieux des premier et troisième cotés de Q . Soit H_2 celui obtenu en identifiant \mathcal{Q} le long des deux autres cotés opposés à son angle de $\frac{\pi}{4}$.

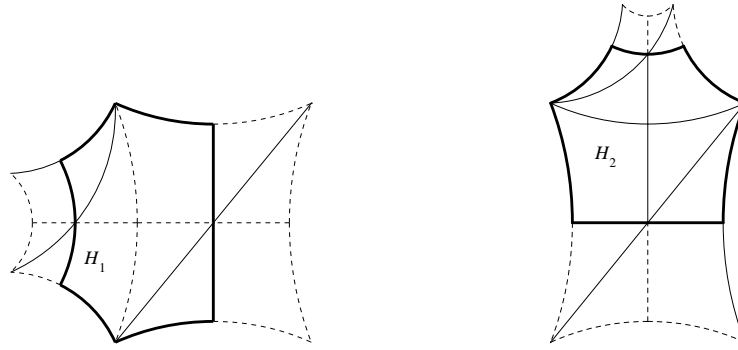


fig. 4.7

Alors $S_{\sigma_0(Q_1)}$ est la surface du type I construite à partir de H_1 comme en 4.1.1. En effet, en reprenant les notations de 4.1.1, on a $\sigma_0(Q_1) = \sigma_0^{-1}\sigma_2\sigma_0^2\sigma_2(Q_{H_1})$, avec $\sigma_0^{-1}\sigma_2\sigma_0^2\sigma_2 = (2, 4)$.

De même S_{Q_2} est la surface du type I construire à partir de H_2 , Q_2 étant alors égal à Q_{H_2} .

De plus l'orientation de la droite réelle impose la position des points en fonction de leur coordonnée sur les hexagones H_1 et H_2 .

Les surfaces transformées sous l'action de S_5 s'obtiennent comme en 4.1.1 à partir de H_1 et H_2 .

4.2.2 Remarque

Si $Q \in \mathcal{Q}_{II}$ est un quadrangle pour une surface de F_4 du type II, alors pour L'_1 et L'_2 les cosinus hyperbolique de ses deux premiers côtés et L et L' ceux de ses diagonales, on a :

$$L'_2 = \frac{3L'_1 - 1}{L'_1 - 3}, \quad L = L' = L_1'^2 - L_1' + 2, L_1' > 3$$

Les hexagones H_1 et H_2 sont alors avec les notations de 4.1.1 par

$$\begin{aligned}
H_1 : \quad (l_1, l_2) &= \left(\operatorname{arccosh} \left(\frac{L'_1 - 1}{2} \right), \operatorname{arccosh} \left(\sqrt{2} \sqrt{\frac{L'_1 - 1}{L'_1 - 3}} \right) \right) \\
H_2 : \quad (l_1, l_2) &= \left(\operatorname{arccosh} \left(\frac{L'_2 - 1}{2} \right), \operatorname{arccosh} \left(\sqrt{2} \sqrt{\frac{L'_2 - 1}{L'_2 - 3}} \right) \right) \\
&= \left(\operatorname{arccosh} \left(\frac{L'_1 + 1}{L'_1 - 3} \right), \operatorname{arccosh} \left(\frac{\sqrt{L'_1 + 1}}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

4.2.3 Exemple

[Bu-Si] donne de nombreux exemples exacts de surfaces de F_4 des types I et III. Contrairement à ce qui précède, nous allons utiliser certains de ces exemples du type I pour donner les surfaces de F_4 correspondantes en type II.

— Si H_1 est donné par $(\cosh(l_1), \cosh(l_2)) = \left(2 + \sqrt{5}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$, $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(c'est le premier exemple de 3.2.8),

alors Q_3 est donné par $L'_1 = 2 + \sqrt{5}$, $L'_2 = 5 + 2\sqrt{5}$,

$$a' = -17 + 8\sqrt{5} - 7i\sqrt{-2 + 2\sqrt{5}} + 3i\sqrt{-2 + 2\sqrt{5}\sqrt{5}}$$

ou

$$\alpha = 34 - 16\sqrt{5}, \beta = 1.$$

— Si H_1 est donné par $(\cosh(l_1), \cosh(l_2)) = \left(3 + 2\sqrt{3}, \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{2}} \right)$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

alors Q_3 est donné par $L'_1 = 7 + 4\sqrt{3}$, $L'_2 = 2 + \sqrt{3}$

$$a' = 112\sqrt{3} - 193 + 60i\sqrt{2}(3)^{3/4} - 104i\sqrt{2}\sqrt[4]{3}$$

ou

$$\alpha = 386 - 224\sqrt{3}, \beta = 1.$$

4.2.2 Trace réelle de F_6 : triangles ayant un angle égal à $\frac{\pi}{3}$

Etude des équations : répartition entre les types

On s'intéresse ici aux surfaces réelles de F_6 , i.e aux surfaces $S \in F_6$ d'équation

$$(4.2.4) \quad y^2 = x^6 - 2ax^3 + 1, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

D'autre part, si $S = S_1$ est une telle surface, et $H \simeq D_3 \times \mathbb{Z}/2 \subset \operatorname{Aut}(S)$, on a vu que les deux autres revêtements de S/H appartenant à F_6 , S_2 et S_3 , ont pour paramètres d'équation

$$\overline{\rho}_0(a) = \frac{a-3}{1+a} \quad \text{et} \quad \overline{\rho}_0^2(a) = \frac{a+3}{1-a}$$

S_2 et S_3 sont donc également réelles.

Une étude complètement élémentaire des paramètres a , $\frac{a-3}{1+a}$ et $\frac{a+3}{1-a}$ montre que

$$|a| < 1 \iff \left(\frac{a-3}{1+a} < -1 \quad \text{et} \quad \frac{a+3}{1-a} > 1 \right),$$

et donc dans tous les cas le paramètre de l'un des S_i est de valeurs absolue inférieure à 1, alors que ceux des deux autres sont de valeur absolue supérieure à 1.

Dans toute la suite, S_1 désigne la surface de paramètre d'équation $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$, S_2 désigne la surface de paramètre d'équation $\frac{a-3}{1+a}$, et S_3 celle de paramètre d'équation $\frac{a+3}{1-a}$.

On commence par caractériser les triangles pour les surfaces de D_3 réelles.

Caractérisation des triangles

4.2.5 Lemme

Soit $S = S_1 \in F_6$ et $-1 < a < 1$ un paramètre d'équation pour S .

Il existe un unique triangle $T \in \mathcal{T}$ tel que

— S_1 est isométrique à S_T et le paramètre d'équation pour S_T est a .

— l'angle opposé au premier côté de T est $\frac{\pi}{3}$.

Réciproquement, si $T \in \mathcal{T}$ est tel que l'angle opposé au premier côté est $\frac{\pi}{3}$, alors le paramètre d'équation normalisée a de la surface S_T est réel, et vérifie $-1 < a < 1$.

On se place sur le quotient de genre 0, $S_1/H = S_1/(D_3 \times \mathbb{Z}/2)$.

La structure réelle naturelle sur S_1 associée à son équation $y^2 = x^6 - 2ax^3 + 1$ induit une structure réelle sur le quotient S_1/H , i.e une isométrie renversant l'orientation, telle que pour la coordonnée induite sur S_1/H , les arcs $], \infty, -1]$, $[-1, a]$ et $[a, 1]$ et $[1, \infty]$ soient stables. Ce sont donc des arcs géodésiques.

On découpe S_1/H le long des arcs $], \infty, -1]$, $[a, 1]$ et $[1, \infty]$. On obtient un domaine fondamental se découpant en deux quadrangles \mathcal{Q} et \mathcal{Q}' , isométriques, image miroir l'un de l'autre, et ayant trois angles droits et un angle égal à $\frac{\pi}{3}$.

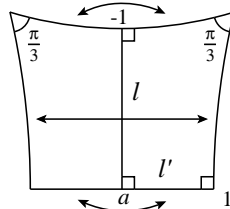


fig. 4.8

A partir du domaine fondamental précédent pour S_1/H , on retrouve le domaine fondamental en triangle T pour S_1/H comme sur la figure ci-après.

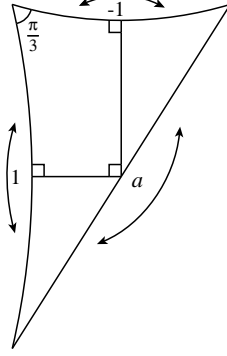


fig. 4.9

Notons que T est tel que les points de coordonnée 1 et -1 sont respectivement sur le second et le troisième côté de T . Cela signifie que la coordonnée déduite de l'équation de S_1 et la coordonnée x_T coïncident.

L'unicité du triangle provient de la position des arcs géodésiques correspondant à l'axe réel.

Réciproquement soit $T \in \mathcal{T}$ est tel que l'angle opposé au premier côté est $\frac{\pi}{3}$. La rigidité de la condition sur la somme des angles dans le triangle impose l'existence de deux quadrangles comme sur la figure 4.8 ci-dessus.

4.2.6 Remarque

Si l est la longueur du côté de \mathcal{Q} correspondant à $[-1, a]$ et l' celle correspondant à $[a, -1]$, on a que si a croît, l croît et l' décroît. Comme de plus si $a = 0$, l'isométrie donnée par $x \mapsto -x$ sur S_1/D_6 échange les arcs de longueurs l et l' , si $0 \leq a < 1$ alors $l' \leq l$.

4.2.7 Remarque

La condition sur l'angle au sommet de T s'exprime très simplement en fonction des longueurs des côtés de T . Si L_i désigne le cosinus hyperbolique de la longueur du i -ième côté, on a :

$$(L_1, L_2, L_3) = \left(\frac{3L^2 - 3L + 2}{3L - 5}, L, \frac{5L - 3}{3L - 5} \right).$$

Hexagones du type I, Quadrangles du type II.

Le triangle T et le quadrangle \mathcal{Q} de 4.2.5 vont nous servir de bloc de construction pour les domaines fondamentaux de $S_1 = S_T$, $S_2 = S_{\rho_0(T)}$ et $S_3 = S_{\rho_0^2(T)}$.

Cependant, ces domaines fondamentaux seront de natures différentes pour S_1 d'une part, et pour S_2 et S_3 d'autre part.

Répartition entre types On commence par faire des considérations sur les structures réelles et les points de Weierstrass des surfaces S_i .

Pour S_1 : La structure réelle naturelle $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ sur S_1 n'a qu'une seule composante qui est séparante. En particulier, aucun des points de Weierstrass est réel. En revanche ils sont tous réels pour les structures réelles induites par $x \mapsto \frac{1}{\bar{x}}$.

Mais alors la correspondance $g : z \mapsto i\sqrt{3}\frac{z-1}{z+1}$ que nous avons utilisée à la page 58 fournit une équation pour S_1 sous la forme :

$$v^2 = (u^2 - t^2)(u^2 - f(t)^2)(u^2 - f^2(t)^2), \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

En choisissant t tel que $f^2(t)^2 < t^2 < f(t)^2$ et en renormalisant via $u \mapsto \frac{u}{t}$, on obtient l'équation du type I pour S_1 :

$$(4.2.8) \quad v^2 = (u^2 - 1) \left(u^2 - \frac{f(t)^2}{t^2} \right) \left(u^2 - \frac{f^2(t)^2}{t^2} \right).$$

Notons par ailleurs que la structure réelle naturelle pour l'équation

$$y^2 = x^6 - 2ax^3 + 1$$

correspond pour cette deuxième équation à celle induite par $u \mapsto -\bar{u}$.

Pour S_2 et S_3 , les structures réelles sont du même type, nous les traitons ensemble.

La structure réelle naturelle fournie par l'équation

$$y^2 = x^6 - 2a_i x^3 + 1, \quad a_2 = \overline{\rho_0}(a) \text{ et } a_3 = \overline{\rho_0^2}(a), \quad a_i \in \mathbb{R}, |a_i| > 1,$$

a également une seule composante mais cette composante n'est pas séparante et passe par deux points de Weierstrass échangés par les involutions de S_i , $i = 2$ ou 3 . Notons également que la structure réelle induite par $x \mapsto \frac{1}{x}$ a une seule composante séparante et passe aussi par les points fixes des involutions des S_i .

La correspondance $g : z \mapsto i\sqrt{3}\frac{z-1}{z+1}$ envoie les points de Weierstrass réels sur des points imaginaires et fournit donc à chacun des S_i une équation de la forme

$$v^2 = (u^2 - t_i^2)(u^2 - f(t_i)^2)(u^2 - f^2(t_i)^2), \text{ avec } t_i \in i\mathbb{R}, i = 2, 3.$$

Comme de plus

$$t \in i\mathbb{R} \iff (f^2(t))^2 = \overline{(f(t))^2},$$

en renormalisant chacune des équations via $u \mapsto \frac{u}{t_i}$, $i = 1, 2$, on obtient des équations

$$(4.2.9) \quad v^2 = (u^2 - 1) \left(u^2 - \frac{f(t_i)^2}{t_i^2} \right) \left(u^2 - \overline{\left(\frac{f(t_i)^2}{t_i^2} \right)} \right), \quad i = 2, 3,$$

qui font des S_i des surfaces du type II.

De plus, comme S_2 est telle que $a_2 < 0$ et S_3 est telle que $a_3 > 0$, on a

$$|t_2| > \sqrt{3} \quad |t_3| < \sqrt{3},$$

et en choisissant

$$t_2 \in i\mathbb{R}^+ \text{ et } t_3 \in i\mathbb{R}^-,$$

on a

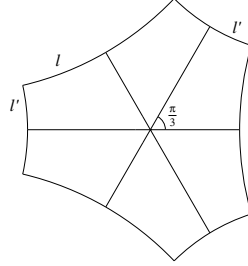
$$\operatorname{Im} \left(\frac{(t_i - 3)^2}{(t_i + 1)^2 t_i^2} \right) < 0 \quad i = 2, 3.$$

Notons enfin qu'après renormalisation par $u \mapsto \frac{u}{t_i}$, les structures réelles naturelles pour les équations du type II et les équations en a_i des S_i , $i = 2, 3$, se correspondent et que $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur les équations en a_i correspond à $u \mapsto -\bar{u}$ sur les équations du type II.

Type I

Pour la surface $S_1 = S_T$ du type I, il a été montré dans [Bu-Si] (Lemme 6.6) que les trois géodésiques de la découpe en pantalons que nous avons mentionnée dans 4.1.1 sont de longueurs égales. Chacun de ces pantalons se découpe lui-même en deux hexagones hyperboliques droits dont trois des longueurs de bords sont égales.

Nous nous limitons ici à remarquer que l'hexagone se découpe en 6 copies du quadrangle \mathcal{Q} que nous avons utilisé pour construire le triangle T :



On différencie les côtés correspondants aux composantes réelles pour l'équation du type I par le fait que le point sur le quotient de coordonnée -1 à l'extrémité du coté de \mathcal{Q} de longueur l se relève après renormalisation par g en deux points réels pour la structure réelle naturelle associée à l'équation du type I, alors que les relevés du point de coordonnée 1 sont réels pour sa composée avec l'involution hyperelliptique.

Type II Les surfaces $S_2 = S_{\rho_0(T)}$ et $S_3 = S_{\rho_0^2(T)}$ sont donc du type II et admettent donc des quadrangles Q_1 et Q_2 du type II. Nous reconstruisons ces quadrangles à partir des pentagones $P_{\rho_0(T)}$ et $P_{\rho_0^2(T)}$ que nous avons introduits au chapitre 3, et en utilisant les considérations sur les comparaisons entre les structures réelles du type II et les structures réelles associées aux équations en a_i , $i = 2, 3$.

On se place sur $\rho_0^2(T)$, l'étude pour $\rho_0(T)$ étant absolument similaire.

La coordonnée $x_{\rho_0^2(T)}$ sur la surface quotient est telle que $[1, \frac{a+3}{1-a}]$ est l'arc géodésique joignant le premier et le second coté et $[1, -1]$ est l'arc géodésique joignant deuxième et le troisième coté.

Les arcs $[1, \frac{a+3}{1-a}]$ et $[\frac{a+3}{1-a}, \infty[$ se relèvent en des points réels pour la structure réelle $(x, y) \mapsto (\bar{x}, -\bar{y})$ associée l'équation en $a_3 = \frac{a+3}{1-a}$ pour $S_{\rho_0^2(T)}$, et donc en des points réels pour la structure réelle $(x, y) \mapsto (\bar{x}, -\bar{y})$ associée à l'équation du type II.

L'arc $[-1, 1]$ se relève en la composante réelle de la structure réelle $x \mapsto \frac{1}{x}$ pour l'équation en $\frac{a+3}{1-a}$, et donc en la composante réelle de $u \mapsto -\bar{u}$ pour l'équation du type II. Nous avons déjà remarqué qu'en repassant au quotient dans S/H_φ , cette composante correspond à l'arc joignant les milieux des premier et troisième côtés du quadrangle du type II.

Le quadrangle est alors retrouvé comme sur la figure ci-dessous :

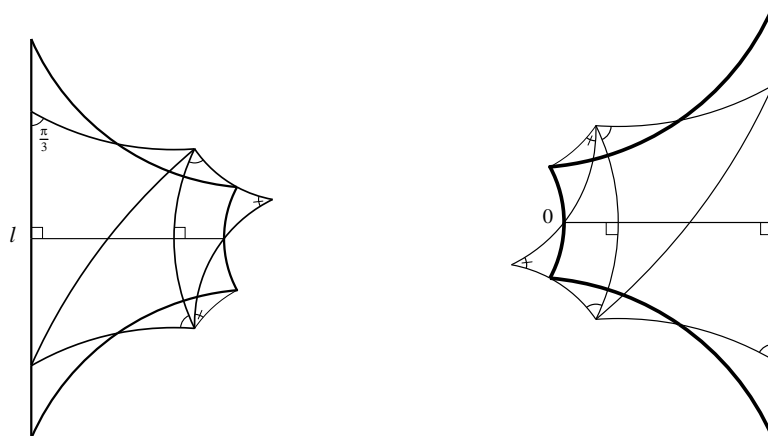


fig. 4.10

Le marquage est imposé par le fait que $0 = g(1)$ se relève en des points réels pour $(x, y) \mapsto (\bar{x}, -\bar{y})$ et que par ailleurs, il se trouve sur le premier côté de Q .

Si T est donné par le système de longueurs $\left(\frac{3L^2-3L+2}{3L-5}, L, \frac{5L-3}{3L-5}\right)$, alors $\rho_0^2(T)$ est caractérisé par les longueurs $\left(\frac{5L-3}{3L-5}, \left(\frac{3L^2-3L+2}{3L-5}\right), L\right)$, et on obtient les expressions des cosinus hyperboliques des premier et troisième côtés du quadrangle en fonction de $L = \cosh(l)$

$$L_1 = \frac{3L-1}{4}$$

$$L_3 = \frac{9L^2-3L-4}{3L-5},$$

De même, le quadrangle pour $S_2 = S_{\rho_0(T)}$ est donné par les longueurs ci-dessus en remplaçant L par $\frac{5L-3}{3L-5}$ et en échangeant le premier et le troisième côté.

On obtient

$$L'_1 = \frac{1}{11} \frac{72L^2 + 57L - 53}{3L-5},$$

$$L'_3 = \frac{1}{2} \frac{6L+1}{3L-5}.$$

Les quadrangles du type II correspondant à des surfaces de F_6 sont donc car-

actérisés par les relations :

$$L_3 = \frac{4L_1^2 + L_1 - 1}{L_1 - 1} \quad \text{ou} \quad L_1 = \frac{4L_3^2 + L_3 - 1}{L_3 - 1}$$

$$L_2 = L_4 = \frac{1}{2} \frac{7L_3^2 - 2L_3 - 1}{(L_3 - 1)^2} \quad L_2 = L_4 = \frac{1}{2} \frac{7L_1^2 - 2L_1 - 1}{(L_1 - 1)^2}$$

Intersection avec les familles spéciales du type II

Les conditions ci-dessus montrent que la famille stable sous σ_0^2 n'a pas d'intersection avec celle des surfaces de F_6 de type II.

Dans les deux autres familles spéciales du type II, on trouve les deux premiers exemples donnés dans 3.3.11 des surfaces de F_6 dont l'orbite sous l'action de S_5 contient moins de dix surfaces :

. Dans la famille stable sous $\sigma_0^2\sigma_1$:

$$L_1 = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}, \quad L_3 = 9 + 2\sqrt{17}, \quad \text{le triangle est alors donné par } L = 2 + \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

On a alors $t = \frac{i}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{17}} = \frac{-3}{\frac{3i}{2}\sqrt{5 + \sqrt{17}}}$, d'où des équations

$$y^2 = x^6 - 2(-217 + 54\sqrt{17})x^3 + 1 \quad y^2 = (x^2 - 1)\left(x^4 - x^2 + \frac{897 + 217\sqrt{17}}{8}\right)$$

. Dans la famille stable sous $\sigma_0^2\sigma_1^2$:

$$L_1 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \quad L_3 = 12 + 3\sqrt{17}, \quad \text{le triangle est alors donné par } L = \frac{11 + 2\sqrt{17}}{3}.$$

On a alors $t = \frac{3i}{2}\sqrt{5 - \sqrt{17}}$, d'où des équations

$$y^2 = x^6 - 2(217 + 54\sqrt{17})x^3 + 1 \quad y^2 = (x^2 - 1)\left(x^4 - \left(\frac{897 + 217\sqrt{17}}{512}\right)x^2 + \frac{897 + 217\sqrt{17}}{512}\right).$$

4.3 La famille réelle isolée

Nous terminons ce chapitre avec une dernière famille réelle. Elle a la particularité de ne pas être la restriction au cadre réel d'une famille définie dans le cadre complexe.

Il s'agit de la famille des surfaces définies par des équations de la forme :

$$(4.3.1) \quad y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - \alpha)\left(x^2 - \frac{1}{\alpha}\right), \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{|z| = 1\}.$$

Pour S une telle surface, la structure réelle qui nous intéresse, a priori unique à l'action de l'involution hyperelliptique près est induite par $x \mapsto \frac{1}{x}$. Notons de plus que les involutions non triviales de S , induites par $x \mapsto -x$, ne sont pas réelles pour ces structures réelles.

En transformant l'équation par $x \mapsto i\frac{x-1}{x+1}$, on obtient une équation pour S pour laquelle la structure réelle ci-dessus est la structure réelle naturelle :

$$(4.3.2) \quad y^2 = x(x^4 + \lambda x^3 + \mu x^2 - \lambda x + 1),$$

avec

$$\lambda = 8 \frac{\operatorname{Im}(\alpha)}{\operatorname{Re}(\alpha)^2 + \operatorname{Im}(\alpha)^2 - 2 \operatorname{Re}(\alpha) + 1}, \quad \mu = 2 \frac{\operatorname{Re}(\alpha)^2 + \operatorname{Im}(\alpha)^2 + 6 \operatorname{Re}(\alpha) + 1}{\operatorname{Re}(\alpha)^2 + \operatorname{Im}(\alpha)^2 - 2 \operatorname{Re}(\alpha) + 1}$$

Cette famille se caractérise également par une forme de domaine fondamental en quadrangle particulière pour le quotient S/H_φ , où φ est comme toujours l'une des involutions induites par $x \mapsto -x$.

4.3.3 Lemme

Pour S comme ci-dessus, le quotient S/H_φ admet un domaine fondamental en quadrangle ayant une symétrie par rapport à sa première diagonale. Réciproquement, si Q est un quadrangle de cette forme, et $S_0(Q)$ est la surface de genre 0 obtenue en identifiant les bords de Q , $S_0(Q)$ a un revêtement S ayant une équation de la forme 4.3.1.

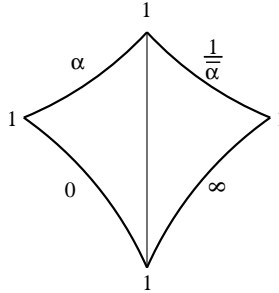


fig. 4.11

Preuve : La preuve repose exactement sur les mêmes argument que ceux utilisés précédemment. A savoir : on considère la coordonnée x sur S/H_φ déduite de l'équation 4.3.1.

La structure réelle sur S passe au quotient en une isométrie renversant l'orientation σ de la surface hyperbolique $S_0 = S/H_\varphi$; σ s'écrit en coordonnée $x \mapsto \frac{1}{x}$ et a donc le disque unité comme composante stable.

Quitte à échanger α et $\frac{1}{\alpha}$, on peut supposer que $|\alpha| < 1$. On choisit alors deux chemins disjoints sur la surface hyperbolique S_0 :

— un chemin c_1 joignant le point de coordonnée 1 à celui de coordonnée 0, et tel que $\forall p \in c_1, |x(p)| < 1$,

— un chemin c_2 joignant le point de coordonnée 1 à celui de coordonnée α , et tel que $\forall p \in c_2, |x(p)| < 1$.

On obtient alors un quadrangle comme dans l'énoncé en découpant la surface hyperbolique S_0 le long des géodésiques dans les classes d'homotopie de c_1, c_2 et $c_3 = \sigma(c_2), c_4 = \sigma(c_1)$. Notons que si le marquage est donné par l'ordre sur les c_i , la première diagonale correspond au disque unité.

Réciproquement, soit Q un quadrangle admettant une symétrie par rapport à sa première diagonale, $S_0(Q)$, la surface hyperbolique de genre 0 obtenue en identifiant

les côtés de Q , et p_i , $i = 1, \dots, 5$ les points coniques de $S_0(Q)$ dans l'ordre donné par le marquage de Q .

Soit x l'unique coordonnée sur $S_0(Q)$ telle que $x(p_1) = 0$, $x(p_4) = \infty$ et $x(p_5) = 1$. La symétrie σ sur $S_0(Q)$ donnée par la symétrie par rapport à la première diagonale de Q correspond à l'unique automorphisme anti-holomorphe de \mathbb{P}^1 échangeant 0 et ∞ et préservant 1, i.e $\sigma(x) = \frac{1}{x}$. Les coordonnées de p_2 et p_3 sont donc de la forme $x(p_2) = \alpha$, $x(p_3) = \frac{1}{\alpha}$, $|\alpha| < 1$. Le revêtement de genre 2 S de $S_0(Q)$ ramifié au dessus des p_i et tel que p_2 , p_3 et p_5 se relèvent en les points de Weierstrass a donc l'équation 4.3.1 pour α .

4.3.4 Remarques

1. La condition sur la symétrie par rapport à la première diagonale ne définit pas entièrement le quadrangle du lemme 4.3.3. La transformation d'ordre infini $(\sigma_2\sigma_3) = \sigma_3\sigma_2$ de G_Q , par exemple, conserve ces conditions.

2. Si Q est un quadrangle ayant une symétrie par rapport à sa première diagonale, et S le revêtement de $S_0(Q)$ construit à partir de Q comme dans 4.3.3, la position sur Q des images des points fixes des involutions de S n'est pas la position habituelle, et on a en fait $S \simeq S_{\sigma_2\sigma_0^2(Q)}$.

Les correspondances entre les transformations σ de G_Q est les éléments $\bar{\sigma}$ de S_5 agissant sur les paramètres d'équations que nous avons établies au chapitre 2 ne sont donc plus valides dans ce cadre.

S est cependant obtenue à partir du domaine fondamental construit à partir de Q comme sur la figure 2.5 de la page 17 mais avec le schéma de recollement :

$$1-6, 2-9, 3-5, 4-7, 8-10.$$

3. On trouve parmi les transformées sous l'action de S_5 une autre surface S' ayant une équation de la forme 4.3.1, non-isomorphe en général à S . La surface S' est obtenue à partir de $\sigma_0^2(Q)$ de la même façon que S l'est à partir de Q . Si α , $|\alpha| < 1$ est le paramètre pour S construit comme dans 4.3.3, alors le paramètre pour S' est $\frac{1-\alpha}{\bar{\alpha}-1}$.

Les autres surfaces transformées sont en général distinctes et n'ont pas de structures réelles (sauf bien sûr si $\alpha \in \mathbb{R}$, auquel cas S et S' sont dans F_4).

4.3.1 Croisements avec F_4 et F_6

Un croisement avec F_4 : quadrangles dont tous les bords sont de même longueur

4.3.5 Proposition

Soit $Q \in \mathcal{Q}$ un quadrangle dont toutes les longueurs des arcs de bords sont égales. La surface S_Q est une surface de F_4 d'équation

$$y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - \frac{1}{a}), \quad a \in i\mathbb{R}.$$

Preuve : Comme toutes les longueurs de Q sont égales, on a

- Q est tel que $\sigma_0^2(Q) = Q$,
- Q est symétrique par rapport à ses deux diagonales.

Soient $p_i, i = 1, \dots, 5$ les points coniques de $S_0(Q)$ dans l'ordre donné par le marquage de Q . On considère alors deux coordonnées x_1 et x_2 sur $S_0(Q)$.

La coordonnée x_1 est $x_1 = x_Q$ avec les notations du chapitre 2 et permet donc de construire l'équation normalisée pour $S_1 = S_Q$.

La coordonnée x_2 est la coordonnée que nous avons utilisé dans 4.3.3 pour construire l'équation sous la forme 4.3.1 du revêtement S_2 de $S_0(Q)$ dont les points fixes des involutions non-triviales sont les relevés de p_1 et p_4 .

On a donc :

$$x_2(p_2) = \frac{1}{\alpha}, \quad x_2(p_4) = \alpha, \quad |\alpha| > 1, \quad \text{et}$$

$$x_1 = A \circ x_2, \quad A(z) = (1 - \alpha) \frac{z}{z - \alpha} \quad a = x_1(p_2) = \frac{1}{x_1(p_4)},$$

d'où

$$\operatorname{Re}(\alpha) = 1, \quad \text{et} \quad a = \frac{1 - \alpha}{1 - |\alpha|^2} \in i\mathbb{R}.$$

4.3.6 Exemple

On considère le quadrangle Q donné par le quintuplet de cosinus hyperboliques des longueurs de bords et de la première diagonale par

$$(3 + 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3}).$$

Les deux triangles obtenus en découpant Q le long de sa première diagonale ont donc leurs trois longueurs de bords égales. La surface S_Q/D_4 a donc un automorphisme d'ordre 3. Soit $(a, \frac{1}{a})$ un couple de paramètres d'équation normalisée pour S_Q . On considère la coordonnée $x' = \frac{x^2 + 1/x^2}{2}$ sur S_Q/D_4 déduite de l'équation normalisée de S_Q . L'existence de l'automorphisme d'ordre 3 sur le quotient S_Q/D_4 impose que l'on ait :

$$\frac{a + 1/a}{2} = \pm i\sqrt{3}.$$

Des considérations techniques sur les structures réelles sur le quotient S_Q/D_4 et la façon dont elles se relèvent dans $S_0(Q)$ permettent d'affirmer qu'en fait $\frac{a + 1/a}{2} = i\sqrt{3}$, et que le couple de paramètres d'équation normalisée pour S_Q est en fait $(i(\sqrt{3} - 2), i(\sqrt{3} + 2))$.

Les équations des surfaces transformées sont données dans le tableau 3.2.7 de la page 48 pour $\tilde{Q} = Q$ et $a = i(\sqrt{3} - 2)$.

Intersection avec F_6 : triangles ayant deux côtés de longueurs égales

On commence par caractériser les équations des surfaces de F_6 admettant une équation de la forme 4.3.1 :

4.3.7 Lemme

Soit S une surface de F_6 , S admet une équation de la forme 4.3.1 si, et seulement si S admet une équation

$$y^2 = x^6 - 2ax^3 + 1, \quad a \in i\mathbb{R}.$$

Preuve : Pour une surface S de F_6 générique, toute les involutions sont conjuguées à l'action de l'involution hyperelliptique près.

Cela signifie que les deux seules équations de S sous la forme

$$y^2 = (x^2 - t^2)(x^2 - (f(t))^2)(x^2 - (f^2(t))^2)$$

sont données par t et $\frac{3}{t}$, et que ses équations sous la forme $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - b)$ s'en déduisent.

En particulier si S admet une équation de la forme 4.3.1, il existe $t \in \mathbb{C}$ tel que

$$\frac{(t-3)^2}{(t+1)^2 t^2} = \frac{(\bar{t}-1)^2 \bar{t}^2}{(\bar{t}+3)^2}, \quad \text{i.e.} \quad |t| = \sqrt{3}.$$

Mais alors, pour la correspondance g que nous avons déjà utilisée, on a $g^{-1} : x \mapsto -\frac{x+i\sqrt{3}}{x-i\sqrt{3}}$ qui envoie t sur $b \in i\mathbb{R}$. Le paramètre $a = \frac{b^3 + 1/b^3}{2}$ de l'équation $y^2 = x^6 - 2ax^3 + 1$ est donc imaginaire pur.

4.3.8 Lemme

Soit S une surface de F_6 d'équation $y^2 = x^6 - 2ax^3 + 1$, $a \in i\mathbb{R}$.

Il existe un unique domaine fondamental en triangle pour le quotient $S/H \simeq S/(D_3 \times \mathbb{Z}/2)$ tel que

— $S \simeq S_T$, et a et le paramètre d'équation normalisée de S_T ,

— T admet une symétrie par rapport à l'axe joignant le milieu du premier côté de T à son angle opposé. En particulier le deuxième et le troisième côtés de T sont de même longueur.

Preuve : les structures réelles induites par $x \mapsto -\frac{1}{x}$ sur S passent au quotient dans S/H en la structure réelle $x \mapsto -\bar{x}$. Le triangle T est obtenu en découpant S/H le long de l'arc $[a, \infty] \subset i\mathbb{R}$.

Soit T comme ci-dessus, et L_i , $i = 1, \dots, 3$, les cosinus hyperboliques des longueurs des cotés de T , la condition $L_2 = L_3$ impose de plus que :

$$L_2 = L_3 = \frac{L_1 + 1 + \sqrt{6}\sqrt{L_1 + 1}(L_1 - 1)}{3L_1 - 5}.$$

On retrouve un quadrangle comme dans le lemme 4.3.3 pour S comme sur la figure ci-dessous :

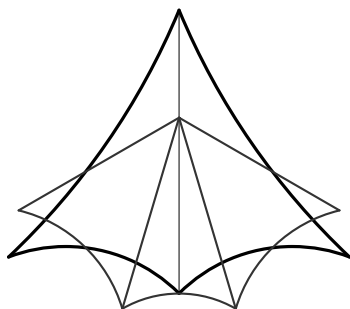


fig. 4.12

Les relations sur les longueurs L_1, L_2, L_3 dans le triangle impose que pour les cosinus hyperboliques L'_i des longueurs des côtés du quadrangle on ait :

$$L'_1 = L'_4 = \frac{1}{8} \frac{16 + 9\sqrt{6}(L_1 - 1)^2 \sqrt{L_1 + 1}}{3L_1 - 5},$$

$$L'_2 = L'_3 = \frac{1}{8} (9L_1^2 + 6L_1 - 7)$$

$$L' = \frac{1}{2} \frac{6L_1 - 2 + 3\sqrt{6}(L_1 - 1)\sqrt{L_1 + 1}}{3L_1 - 5}$$

4.3.9 Exemple

Pour le triangle T tel que $L_1 = 1 + \frac{4}{3}\sqrt{2}$, le quadrangle Q est donné par :

$$L'_1 = 3 + 2\sqrt{2}, \quad L'_2 = 5 + 4\sqrt{2}, \quad L' = 3 + 2\sqrt{2},$$

le quadrangle $\sigma_2(Q)$ est alors le quadrangle donné par les longueurs

$$(5 + 4\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 5 + 4\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}),$$

qui est stable sous l'action σ_0^2 et est donc un quadrangle de F_4 . En découpant ce quadrangle le long de sa première diagonale, et en recollant les deux triangles obtenus par symétrie en le milieu du côté de longueur $5 + 4\sqrt{2}$, on obtient le quadrangle totalement régulier associé à la surface d'équation $y^2 = (x^2 - 1)(x^4 + 1)$. Cela signifie que le revêtement S de $S_0(Q)$ obtenu à partir de Q comme en 4.3.3 est isomorphe à F_{24} .

Chapitre 5

Involutions en genre 3

Nous nous intéressons ici aux surfaces de genre 3 ayant une involution. Ces dernières ne sont pas en général hyperelliptiques et donc pas revêtements de la sphère de Riemann. En revanche, elles sont revêtements double du tore ayant lui aussi un groupe d'automorphisme infini. C'est, comme dans le cas de la sphère sur ce groupe d'automorphisme que l'on s'appuie pour décrire des relations entre les équations et la structure hyperbolique de telles surfaces.

Dans un premier temps nous montrons qu'il existe quatre surfaces de Riemann de genre 3 non généralement isomorphes ramifiées au dessus des quatre même points d'une surface de genre 1, et donnons une procédure pour relier les équations des surfaces. Nous utiliserons ensuite ce résultat dans le cas de surfaces de genre 3 obtenues à partir d'hexagones hyperboliques droits.

5.1 Revêtements double de genre 3 du tore

Il est connu (voir par exemple [Gr]) que les courbes de genre 3 se répartissent en :

- les hyperelliptiques dont les équations peuvent être normalisées sous la forme $y^2 = P(x)$, avec $\deg(P) = 2g + 1$ ou $2g + 2$.
- les non-hyperelliptiques qui sont des quartiques lisses de \mathbb{P}^2 .

Le résultat suivant permet de reconstruire les équations des revêtements double de genre 3, à partir d'équations bien choisies de la courbe de genre 1 et des coordonnées des points de ramifications.

5.1.1 Proposition

Soit C une courbe algébrique complexe de genre 1 et p_1, p_2, p_3, p_4 quatre points distincts de C . Il existe quatre revêtements double de genre 3 non généralement isomorphes ramifiés au dessus des p_i . Chacun de ces revêtements correspond à un choix d'origine différent pour la structure de groupe sur C .

Preuve : Il est connu que, C étant définie sur \mathbb{C} , il existe exactement 16 points p tels que les diviseurs $\sum p_i$ et $4p$ soient équivalents. Par ailleurs si p et p' sont deux tels points alors le diviseur $p - p'$ est d'ordre 4 dans $\text{Pic}^0(C)$.

Etape 1: Construction d'un revêtement C_p pour p tel que $\sum p_i \sim 4p$.

Soit (C, p) la courbe elliptique dont l'origine est p , et x et y des fonctions coordonnées de Weierstrass sur (C, p) . Cela signifie que x et y admettent en p des pôles d'ordre respectivement 2 et 3, que $(x, y, 1)$ est une base de $\mathcal{L}(3p)$ et que le plongement associé fournit l'équation affine pour C :

$$(*) \quad y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x - a_1)(x - a_2)(x + a_1 + a_2).$$

Au lieu du plongement précédent de C dans \mathbb{P}^2 , on considère celui dans \mathbb{P}^3 associé à la base $(x, y, x^2, 1)$ de $\mathcal{L}(4p)$ qui envoie C sur $\{[x, y, t, z] \in \mathbb{P}^3 / x^2 = tz, y^2 = 4xt - g_2xz - g_3z^2\}$. Les diviseurs $4p$ et $\sum p_i$ étant équivalents, l'image de $\sum p_i$ est une section hyperplane $ax + by + cz + dt = 0$.

Si $b = 0$, cela signifie que la fonction s'annulant en les p_i et ayant un pôle d'ordre 4 en p (i.e fournissant l'équivalence linéaire entre $4p$ et $\sum p_i$) ne dépend pas de y . Les coordonnées affines des p_i associées au plongement dans \mathbb{P}^2 sont donc de la forme $(x_1, \pm y_1), (x_2, \pm y_2)$. En transformant l'équation $(*)$ par la transformation de Möbius $x \mapsto \frac{x-x_1}{x-x_2}$, on obtient une équation affine pour C de la forme

$$y^2 = (x - 1)(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3),$$

où les p_i sont à présent au dessus de $x = 0$ et $x = \infty$.

On définit le revêtement de genre 3 de C , C_p , ramifié au dessus des p_i par l'équation $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - b_1)(x^2 - b_2)(x^2 - b_3)$, le morphisme de revêtement étant alors donné par $(x, y) \mapsto (x^2, y)$.

Si $b \neq 0$, on peut supposer $b = 1$. La transformation de \mathbb{P}^3 donnée par $[x, y, t, z] \mapsto [x, y - ax - ct - dz, t, z]$ permet de réaliser C dans \mathbb{P}^3 sous la forme

$$(E_p) \quad \{[x, y, t, z] \in \mathbb{P}^3 / x^2 = tz, y^2 + 2yf_1(x, t, z) + \tilde{f}_0(x, t, z) = 0\},$$

où \tilde{f}_1 et \tilde{f}_0 sont des polynômes homogènes de degrés respectivement 1 et 2. Les p_i sont alors donnés par la section hyperplane $\{y = 0\}$. Si $f_1(x) = \tilde{f}_1(x, x^2, 1)$ et $f_0(x) = \tilde{f}_0(x, x^2, 1)$, alors $y^2 + 2yf_1(x) + f_0(x) = 0$ est une équation affine pour C . On définit alors le revêtement de genre 3, C_p , ramifié au dessus de p_i par l'équation affine

$$y^4 + 2y^2f_1(x) + f_0(x) = 0,$$

le morphisme de revêtement étant alors donné par $(x, y) \mapsto (x, y^2)$.

Etape 2 : Il existe au plus 4 revêtements C_p non-isomorphes.

Il y a deux choses à montrer. D'abord que la construction C_p ne dépend pas du choix des fonctions coordonnées de Weierstrass choisies. Ensuite que si p et p' sont tels que $2(p - p')$ est un diviseur principal, ou autrement dit si p' est un point d'ordre 2 de la courbe elliptique (C, p) , alors C_p et C'_p sont isomorphes.

Si (x, y) est un choix de fonctions coordonnées de Weierstrass, alors tout autre choix est de la forme (λ^2x, λ^3y) , avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Les termes g_2 et g_3 de l'équation affine de C dans \mathbb{P}^2 sont alors respectivement remplacés par λ^4g_2 et λ^6g_3 . Les plongement dans \mathbb{P}^3 sont échangés par la transformation $[x, y, t, z] \mapsto [\lambda^2x, \lambda^3y, \lambda^4t, z]$, qui envoie l'hyperplan $\{ax + by + ct + dz = 0\}$ définissant les p_i sur l'hyperplan $\{a\lambda x + by + \frac{c}{\lambda}t + \lambda^3z = 0\}$.

Si $b = 0$, les équations construites pour C_p sont évidemment les mêmes dans les deux cas ; si $b \neq 0$, les deux équations pour C_p se correspondent via l'isomorphisme $(x, y) \mapsto (\lambda^2 x, \lambda^{\frac{3}{2}} y)$.

Si p' est un point d'ordre 2 de (C, p) , donné par exemple par $(a_i, 0)$, alors ,

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{a_i x + a_i^2 - a_{i+1}^2 - a_i a_{i+1}}{x - a_i}, \frac{y(2a_i + a_{i+1})(a_{i+1} - a_i)}{(x - a_i)^2} \right)$$

(indices mod 3 avec toujours $a_3 = -(a_1 + a_2)$) fournit un isomorphisme entre les courbes elliptiques (C, p) et (C, p') .

Cet isomorphisme induit une transformation de \mathbb{P}^3 laissant l'image de C globalement stable. Il est aisé de voir, compte tenu de la façon dont les hyperplans définissant les p_i sont échangés, que les revêtements C_p et $C_{p'}$ auront même équation dans le cas hyperelliptiques où seront isomorphes via

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{a_i x + a_i^2 - a_{i+1}^2 - a_i a_{i+1}}{x - a_i}, \frac{y \sqrt{(2a_i + a_{i+1})(a_{i+1} - a_i)}}{x - a_i} \right),$$

sinon.

Les sous groupes des points d'ordre 4 et 2 dans $\text{Pic}^0(C)$ étant respectivement d'ordre 16 et 4, cela montre qu'il existe au plus 4 revêtements C_p non-isomorphes.

Le lemme suivant termine la preuve :

5.1.2 Lemme

Si \tilde{C} est un revêtement double de C ramifié au dessus des p_i alors \tilde{C} est isomorphe à C_p pour $p \in C$ tel que $\sum p_i \sim 4p$.

Preuve :

Les cas hyperelliptique et non hyperelliptique sont ici aussi traités séparément.

Si \tilde{C} est hyperelliptique, l'involution φ telle que $C \simeq \tilde{C}/\varphi$ peut être normalisée sous la forme $(x, y) \mapsto (-x, y)$. L'équation de \tilde{C} est alors de la forme $y^2 = (x^2 - b_1)(x^2 - b_2)(x^2 - b_3)(x^2 - b_4)$ et induit l'équation $y^2 = (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)(x - b_4)$ pour C , les p_i étant au dessus de $x = 0$ et $x = \infty$.

Soit $r_j = (b_j, 0)$, $j = 1, \dots, 4$. Si l'un des r_j est choisi comme origine pour la loi de groupe sur C , alors les autres sont les points d'ordre 2 de (C, r_j) . Par ailleurs les $r_j, j = 1, \dots, 4$ sont évidemment tels que $\sum p_i \sim 4r_j$. On montre que \tilde{C} est isomorphe à C_{r_j} pour $j = 1, \dots, 4$.

Soit $g : x \mapsto \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ une transformation de Möbius permettant de mettre l'équation de C sous une forme de Weierstrass $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$, et envoyant r_j à l'infini (donc $\frac{\delta}{\gamma} = -b_j$). Les p_i sont à présent au dessus de $x_1 = \frac{\alpha}{\gamma}$ et $x_2 = \frac{\beta}{\delta}$.

L'équation de C_{r_j} est construite comme dans l'étape 1 de 5.1.1, au moyen d'une des transformations $x \mapsto \frac{x-x_1}{x-x_2}$ et $x \mapsto \frac{x-x_2}{x-x_1}$ et en prenant le revêtement double. Ce qui signifie que C_{r_j} et \tilde{C} sont isomorphes, l'isomorphisme étant précisément induit par $x \mapsto \frac{x}{b_j}$ ou $x \mapsto \frac{b_j}{x}$.

Si \tilde{C} n'est pas hyperelliptique, elle peut être réalisée comme une quartique lisse de \mathbb{P}^2 . Comme cela la réalise comme une courbe canonique de \mathbb{P}^2 , l'involution φ peut toujours être normalisée sous la forme $(x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$. Ainsi \tilde{C} admet une équation affine de la forme $y^4 + 2y^2f_1(x) + f_0(x) = 0$, et son quotient C hérite de l'équation

$$y^2 + 2yf_1(x) + f_0(x) = 0 ,$$

les p_i étant alors définis par $f_0(x) = 0$, $y = 0$.

Soient r_j , $j = 1, \dots, 4$ les points définis par $y + f_1(x) = 0$. L'application de degré 2 donnée par $(x, y) \mapsto x \in \mathbb{P}^1$ est précisément ramifiée au dessus de r_j , ce qui signifie que si l'un des r_j est choisi comme origine pour la loi de groupe sur C , les autres sont les points d'ordre 2 de (C, r_j) .

On considère le plongement de C dans \mathbb{P}^3 donné par $\psi : (x, y) \mapsto (x, y, x^2, 1)$. Les r_j sont définis par la section hyperplane $\{y + \tilde{f}_1(x, t, z) = 0\}$, où $\tilde{f}_1(x, t, z)$ est le polynôme homogène de degré 1 tel que $f_1(x) = \tilde{f}_1(x, x^2, 1)$. Les p_i étant eux aussi définis par une section hyperplane, $\{y = 0\}$, les diviseurs $\sum p_i$ et $\sum r_j$ sont linéairement équivalents. Les r_j étant les points d'ordre 2 de toute structure de groupe ayant l'un d'entre eux comme origine, on a $\sum r_j \sim 4r_k$, et donc $\sum p_i \sim 4r_j$, pour $j = 1, \dots, 4$.

On montre alors comme dans le cas hyperelliptique que \tilde{C} est isomorphe à C_{r_j} pour tout $j = 1, \dots, 4$.

Soit $g : x \mapsto \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ une transformation de Möbius permettant de mettre l'équation de C sous une forme de Weierstrass $v^2 = 4u^3 - g_2u - g_3$, et envoyant r_j à l'infini.

Soit ν le coefficient dominant de $f_1^2 - f_0$, et posons $\eta = \sqrt{\frac{(-\gamma^4 g_3 - g_2 \gamma^3 \delta + 4\gamma \delta^3)}{\nu}}$ si $\gamma \neq 0$ et $\eta = \frac{2}{\sqrt{\nu}}$ sinon. On a

$$u = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad v = \eta \frac{y + f_1(x)}{(\gamma x + \delta)^2}$$

Les plongements $\psi(C)$ et E_{r_j} de C dans \mathbb{P}^3 sont échangés par la transformation

$$[x, y, t, z] \mapsto [(\alpha\delta + \gamma\beta)x + \beta\delta z + \alpha\gamma t, \eta y, 2\alpha\beta x + \beta^2 z + \alpha^2 t, 2\gamma\delta x + \delta^2 z + \gamma^2 t].$$

En regardant la façon dont les hyperplans définissant les p_i sont échangés on conclut facilement que \tilde{C} et C_{r_j} sont isomorphes, l'isomorphisme étant précisément donné par $(x, y) \mapsto \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \sqrt{\eta} \frac{y}{\gamma x + \delta} \right)$.

5.1.3 Remarque

Nous verrons dans la suite des exemples où les quatre revêtements sont effectivement non-isomorphes.

Si C est une courbe de genre 1 définie par une équation affine de la forme $y^2 = P(x)$ où $\deg(P) = 3$ ou 4 , on plonge C dans \mathbb{P}^3 au moyen de $(x, y) \mapsto [x, y, x^2, 1]$

et choisit une section hyperplane sur le plongement. Si p_i , $i = 1, \dots, 4$ sont les points définis par cette section, on peut construire exactement comme en 5.1.1 un revêtement ramifié au dessus des p_i . Si r_j , $j = 1, \dots, 4$ sont les points $(x_j, 0)$, avec $P(x_j) = 0$, alors ce revêtement sera d'après 5.1.2 isomorphe à C_{r_j} . On utilisera cette caractérisation dans la suite que l'on formalise :

5.1.4 Proposition

Soit C une courbe de genre 1. Tout revêtement double de C est entièrement déterminé par

- . une équation affine $y^2 = P(x)$ avec $\deg(P) = 3$ ou 4 pour C ,
- . l'équation $ax + by + ct + dz = 0$ d'un hyperplan de \mathbb{P}^3 .

Jusqu'à présent les points de ramifications étaient fixés sur la courbe de genre 1 et on faisait varier l'origine de la structure de groupe. Nous aurons également besoin du point de vue inverse.

On commence par introduire une notation :

5.1.5 Notation

Soit C comme précédemment, p_1, \dots, p_4 quatre points sur C et p tel que $4p \sim \sum p_i$, on note $C_p(\{p_1, p_2, p_3, p_4\})$ le revêtement double de C ramifié en les p_i et défini par le choix de p comme origine de la structure de groupe sur C .

On a alors

5.1.6 Lemme

Soit C une courbe de genre 1 et p_1, \dots, p_4 quatre points sur C . Soit $p \in C$ tel que $4p \sim \sum p_i$, q un point d'ordre 4 dans la courbe elliptique (C, p) et t_q la translation par q . Alors,

$$C_q(\{p_1, p_2, p_3, p_4\}) \cong C_p(\{t_q(p_1), t_q(p_2), t_q(p_3), t_q(p_4)\}) .$$

Preuve : Commençons par remarquer que puisque $4(q - p) \sim 0$, i.e $\sum p_i \sim 4q$, on a $\sum t_q(p_i) \sim \sum p_i \sim 4p$, et donc que les deux revêtements sont bien définis.

D'autre part soit $q' \in C$ tel que $t_q(q') = q$, q' est un inverse de q dans q' , d'où $2(q - q') \sim 4(q - p) \sim 0$. D'après le deuxième point de 5.1.1, cela signifie que $C_q(\{p_1, p_2, p_3, p_4\}) \cong C_{q'}(\{p_1, p_2, p_3, p_4\})$.

Or t_q est un isomorphisme entre les courbes elliptiques (C, q) et (C, p) envoyant p_i , sur $t_q(p_i)$, $i = 1, \dots, 4$, et donc $C_{q'}(\{p_1, p_2, p_3, p_4\}) \cong C_p(\{t_q(p_1), t_q(p_2), t_q(p_3), t_q(p_4)\})$.

5.1.7 Corollaire

Soit $q_0 \in C$ tel que $\sum p_i \sim 4q_0$, et q_1, q_2 et q_3 trois points d'ordre 4 de la courbe elliptique (C, q_0) tels que $q_i - q_j$, $0 \leq i < j \leq 3$, ne soit pas d'ordre 2. Les quatre revêtements double de C ramifiés au dessus des p_i sont

$$C_{q_0}(\{t_{q_j}(p_1), \dots, t_{q_j}(p_4)\}), \quad j = 1, \dots, 4.$$

5.2 Recollement d'hexagones hyperboliques droits

On commence par une construction.

Soit H_1 un hexagone hyperbolique droit, H_1 est entièrement déterminé par le triplet (l_1, l_2, l_3) des longueurs de trois de ses côtés non consécutifs. On notera \hat{l}_1 la longueur du côté adjacent à l_2 et l_3 , \hat{l}_2 celle du côté adjacent à l_3 et l_1 , et \hat{l}_3 celle du côté adjacent à l_1 et l_2 .

Soit H_2 un autre hexagone hyperbolique droit défini par le triplet (l_1, l_2, l_4) (et les longueurs opposées \check{l}_1, \check{l}_2 et \check{l}_3). On recolle H_1 et H_2 le long de leurs côtés de longueurs l_1 et l_2 et deux images miroir de l'anneau obtenu le long des autres côté comme sur la figure 5.1.

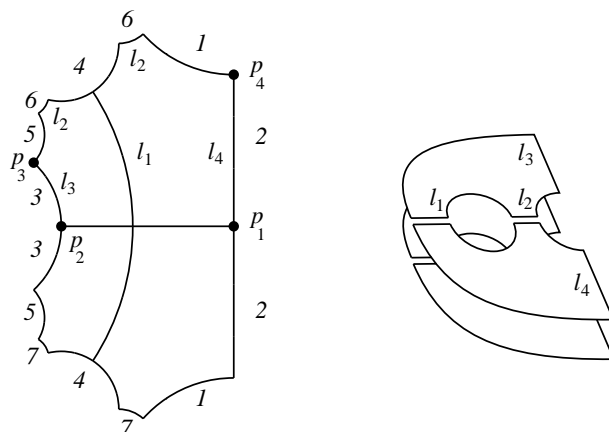


fig. 5.1

La surface obtenue, C est une courbe de genre 1 ayant quatre points coniques d'angle π , p_1, p_2, p_3, p_4 correspondant aux extrémités des côtés de longueurs l_3 et l_4 . Par ailleurs, C a une involution inversant l'orientation σ à deux composantes, pour laquelle les p_i sont stables et tous sur la même composante.

On considère le polygone obtenu par symétrie le long des arcs de longueurs l_4 à partir du domaine fondamental ci-dessus pour C .

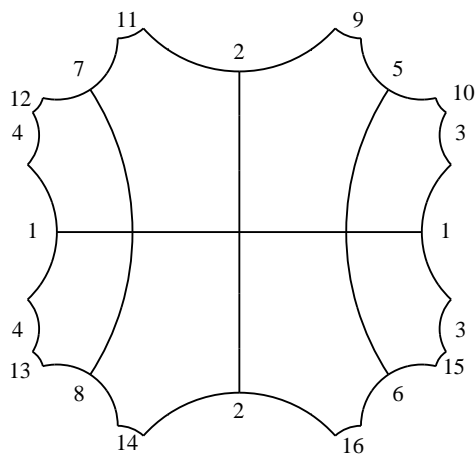


fig. 5.2

5.2.1 Lemme

i) Les quatre revêtements double de genre 3 de C sont les surfaces C_1, \dots, C_4 dont un domaine fondamental est donné sur la figure 5.2 avec les schémas de recollement:

C_1	1, 2, 3, 4, 5 – 6, 7 – 8, 9 – 10, 11 – 12, 13 – 14, 15 – 16
C_2	5 – 7, 6 – 8, 9 – 10, 11 – 12, 13 – 14, 15 – 16
C_3	5 – 6, 7 – 8, 9 – 13, 10 – 14, 11 – 15, 12 – 16
C_4	5 – 7, 6 – 8, 9 – 13, 10 – 14, 11 – 15, 12 – 16

ii) Pour un choix générique des longueurs l_1, \dots, l_4 les surfaces C_i ne sont pas isométriques.

Preuve : i) Si S est un revêtement double de C ramifié en les p_i . Le point p_1 étant point de ramification, on construit également par symétrie centrale en p_1 le polygone de la figure 5.2, les angles en les sommets des copies de H_1 et H_2 étant droit. Les schémas de recollement ci-dessus sont alors les seuls tels que les surfaces obtenues soient lisses de genre 3 et tels que la symétrie centrale ait les relevés des p_i comme points fixes.

ii) Pour un choix générique des longueurs l_i , la surface C ne possède pas d'isométrie et les surfaces C_i possèdent la symétrie en le centre de la figure pour seule isométrie directe. Ainsi si ψ est une isométrie entre C_i et C_j et π_i et p_j sont les morphismes de revêtement, on a nécessairement $\pi_j = \pi_i \circ \psi$. Or la préimage de la géodésique fermée de C de longueur $2l_1$ sur la figure 5.1 est connexe dans C_2 et C_4 mais ne l'est pas dans C_1 et C_3 . De même, la préimage de la géodésique correspondant au côté noté 4 sur la figure 5.1 est connexe dans C_1 et C_2 et a deux composantes connexes dans C_3 et C_4 . Cela montre ii).

L'isométrie indirecte σ sur C se relève dans tous les cas en deux isométries indirectes différentes sur les revêtements. Soit φ_i , $i = 1, \dots, 4$ l'involution sur C_i telle que $C_i/\varphi_i = C$, σ_i l'isométrie indirecte de C_i correspondant à la symétrie horizontale sur la figure 5.2, et σ'_i celle correspondant à la symétrie verticale. On a $\varphi_i = \sigma_i \circ \sigma'_i = \sigma'_i \circ \sigma_i$. Cela signifie que dans tous les cas les courbes algébriques correspondant aux C_i et leurs involutions sont réelles. Comme de plus φ_i , $i = 1, \dots, 4$ peut toujours être normalisée sous la forme $(x, y) \mapsto (-x, y)$ dans le cas hyperelliptique et $(x, y) \mapsto (x, -y)$ sinon, C_i admet une équation à coefficients réels de l'une des formes $y^2 = P(x^2)$ ou $y^4 + 2y^2 f_1(x) + f_0(x) = 0$, selon qu'elle est hyperelliptique ou pas.

Nous allons montrer comment cette correspondance entre isométries indirectes sur les surfaces hyperboliques et structures réelles sur les courbes algébriques complexes correspondantes permet de déduire une équation pour chacune des quatre courbes algébriques de la connaissance d'une équation pour l'une d'entre elles. Nous faisons cela en deux étapes. D'abord, dans un lemme technique, nous établissons les relations entre les équations, puis nous montrons comment en lisant l'actions des isométries indirectes sur les équations on peut déduire quelle équation correspond à quelle courbe.

5.2.2 Lemme

L'un au moins des revêtements double de C est défini comme en 5.1.4 par une équation de Legendre pour C , $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 1$, et un hyperplan $ax + by + ct + dz = 0$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Chacun des autres revêtements est alors défini par une équation affine de la forme $y^2 = P(x)$, $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ et un hyperplan à coefficients réels $a_i x + b_i y + c_i t + d_i z = 0$, où les équations et les coefficients a_i , b_i , c_i et d_i sont donnés dans le tableau 5.2.3.

	Equation pour C	Coefficients des Hyperplans
1.	$y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$	a, b, c, d
2.	$y^2 = (x^2-1) \left(x^2 - (2\lambda - 2\sqrt{\lambda^2 - \lambda} - 1) \right)^2$	$a_2 = -2(\lambda-1)(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda-1})b$ $b_2 = a+c+d/\lambda$ $c_2 = a+c+(2\lambda-1)d/\lambda$ $d_2 = (2\sqrt{\lambda^2 - \lambda} - 2\lambda + 1)(a + (2\lambda-1)c + d/\lambda)$
3.	$y^2 = (x^2+1) \left(x^2 + \frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}} \right)^2$	$a_3 = 2b\lambda(\sqrt{\lambda}-1)$ $b_3 = -(\lambda-1)(c\lambda-d)$ $c_3 = 2\lambda a + (\lambda+1)(c\lambda+d)$ $d_3 = (c\lambda+d)(\sqrt{\lambda}-1)^2$
4.	$y^2 = x^4 + 2(1-2/\lambda)x^2 + 1$	$a_4 = -2(\lambda-1)b/\sqrt{\lambda}$ $b_4 = -a - \lambda c - d$ $c_4 = -(a + \lambda c - (\lambda-2)d/\lambda)$ $d_4 = a - (\lambda-2)c + d$

5.2.3

Preuve : Les p_i sont des points réels pour la structure réelle σ sur C . Il existe donc $q_0 \in C$ tel que q_0 est réel et tel que $4q_0 \sim \sum p_i$. On peut donc prendre une équation pour C de la forme $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 1$, où q_0 est le point à l'infini.

Les quatre revêtements de C sont alors isomorphes à C_{q_j} , $j = 0 \dots 3$, où les points q_j , $j = 1, \dots, 3$ sont des points d'ordre 4 de la courbe elliptique (C, q_0) tels que $2(q_j - q_k) \neq 0$. Du "Group Law Algorithm" donné par J.H. Silverman ([Silv] p. 58–59), on peut facilement déduire que q_1 , q_2 et q_3 peuvent être choisis comme

$$\begin{aligned} q_1 &= (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \lambda}, \sqrt{\lambda^2 - \lambda}(\sqrt{\lambda} - 1 - \sqrt{\lambda})) , \\ q_2 &= (\sqrt{\lambda}, i(\sqrt{\lambda} - \lambda)) , \\ q_3 &= q_1 + q_2 = (1 - i\sqrt{\lambda - 1}, \lambda - 1 + i\sqrt{\lambda - 1}) . \end{aligned}$$

On plonge C dans \mathbb{P}^3 via $(x, y) \mapsto [x, y, x^2, 1]$. Le point q_0 est alors défini par la section hyperplane $\{z = 0\}$, les p_i par une section hyperplane $\{ax + by + ct + dz = 0\}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

On peut à présent utiliser 5.1.7 pour trouver des équations et hyperplans pour les autres revêtements de C .

En effet, les points d'ordre 4 de (C, q_0) correspondent aux sections hyperplanes intersectant l'image de C dans \mathbb{P}^3 en un seul point (voir par exemple [Silv]). Les translations par des points d'ordre 4 sont alors représentées des transformations projectives d'ordre 4 de \mathbb{P}^3 qui préservent globalement l'image de C et échangent deux de ces hyperplans. De plus ces transformations peuvent être à nouveau déduites du "Group Law Algorithm" de J.H Silverman.

Plus précisément si, comme en 5.1.7, t_{q_1} , t_{q_2} et t_{q_3} sont les translations d'ordre 4 correspondant aux points q_1 , q_2 et q_3 , alors t_{q_1} , t_{q_2} et t_{q_3} sont respectivement induites par A , B et AB avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda & \sqrt{\lambda} & -\lambda\sqrt{\lambda} \\ -2\lambda\sqrt{\lambda^2-\lambda} & 0 & \sqrt{\lambda^2-\lambda} & \lambda\sqrt{\lambda^2-\lambda} \\ -2\lambda\sqrt{\lambda-1} & 2\lambda & \lambda(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda-1}) & -\lambda^2(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda-1}) \\ 2\sqrt{\lambda-1} & 2 & \sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda-1} & -\lambda(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda-1}) \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 & \sqrt{\lambda} & \lambda\sqrt{\lambda} \\ 0 & 0 & i\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda-1}) & -i\lambda\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda-1}) \\ -2\lambda(\lambda+1-\sqrt{\lambda}) & -2i\lambda(\sqrt{\lambda-1}) & \lambda & \lambda^2 \\ -2(\lambda+1-\sqrt{\lambda}) & 2i(\sqrt{\lambda-1}) & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

D'autre part, pour passer de l'équation **1.** de C à l'équation **2.**, on considère la transformation de \mathbb{P}^3 envoyant $\{[x, y, t, z] \text{ t.q. } x^2 = tz, \text{ et } y^2 = xt - (1+\lambda)tz + \lambda xz\}$ sur $\{[x, y, t, z] \text{ t.q. } x^2 = tz, \text{ et } y^2 = (t-z) \left(t - (2\lambda - 2\sqrt{\lambda^2 - \lambda} - 1)z \right)\}$ de matrice C_2 , avec

$$D_2 = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & -4\sqrt{\lambda(\lambda-1)}\xi & 0 & 0 \\ 2\lambda-2\sqrt{\lambda(\lambda-1)} & 0 & -\xi & -\lambda \\ 2\frac{-\sqrt{\lambda(\lambda-1)}+\lambda}{\xi} & 0 & -\xi^{-1} & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \text{où } \xi = 2\lambda - 2\sqrt{\lambda^2 - \lambda} - 1.$$

De même les équations **3.** et **4.** sont obtenues au moyen de D_3 et D_4 avec

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & -i\lambda \\ 0 & 4\frac{i\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{\lambda} & 0 & -1 & -\lambda \\ 2\sqrt{\lambda} & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

et

$$D_4 = \begin{pmatrix} -i & 0 & \frac{i}{2} & i\frac{\lambda}{2} \\ 0 & 2\frac{\sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda}} & 0 & 0 \\ i\sqrt{\lambda} & 0 & \frac{\sqrt{\lambda-1}-i}{2\sqrt{\lambda}} & -\frac{\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda-1}+i)}{2} \\ i\sqrt{\lambda} & 0 & -\frac{\sqrt{\lambda-1}+i}{2\sqrt{\lambda}} & \frac{\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda-1}-i)}{2} \end{pmatrix}$$

Les images de l'hyperplan $ax + by + ct + dz = 0$ par D_1A , D_2B et D_3AB sont celles données dans le tableau 5.2.3.

5.2.4 Remarque

On aurait pu déduire directement des équations pour C_{q_1} , C_{q_2} , et C_{q_3} des matrices A , B , et AB . Cependant, d'une part les points q_2 et q_3 n'étant pas réels pour σ , les équations construites pour C_{q_2} et C_{q_3} n'auraient pas été réelles. D'autre part, le fait que $b = 0$ est une condition forte sur C_{q_0} , puisque la section 5.1 assure que c'est la condition d'hyperellipticité. Les équations données dans le tableau 5.2.3 isolent ce paramètre dans les équations des hyperplans pour C_{q_1} , C_{q_2} , et C_{q_3} .

On connaît à présent les structures hyperboliques des quatre revêtements de C par 5.2.1, et par 5.2.2 la forme de leurs équation. Il reste à attribuer une équation à chaque structure hyperbolique.

5.2.5 Proposition ((8.9))

Soit C_1, \dots, C_4 les revêtements de C comme en 5.2.1.

- i) C_1 peut être définie par l'équation pour C et l'hyperplan **1.** de 5.2.3.
- ii) Dans ce cas,
 - C_2 est définie par **2.** de 5.2.3.
 - C_3 est définie par **3.** de 5.2.3.
 - C_4 est définie par **4.** de 5.2.3.

Preuve : *i)* Les surfaces C_1 et C_2 de 5.2.1 possèdent chacune une isométrie indirecte ayant quatre composantes stables : σ_1 sur C_1 et σ_2 sur C_2 . En revanche, ce n'est pas le cas de C_3 et C_4 .

Du point de vue des équations, les revêtements définis par les équations et hyperplans **1.** et **2.** de 5.2.3 ont une structure réelle ayant quatre composantes. En effet, **2.** est isomorphe à la courbe obtenue à partir la matrice A de la preuve de 5.2.2, qui conserve l'équation $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ pour C , et envoie points réels sur points réels. Dans 5.2.2, la structure réelle naturelle sur C pour l'équation $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est induite par σ . En particulier C a deux composantes réelles et les p_i sont tous sur la même composante. Dans le cas où le revêtement défini par **1.** ou **2.** est hyperelliptique cela signifie que les coordonnées affines $(x_1, \pm y_1)$ et $(x_2, \pm y_2)$ des p_i dans C sont telles que $0 < x_1 < 1$ et $0 < x_2 < 1$ ou $x_1 > \lambda$ et $x_2 > \lambda$. Dans les deux cas, en transformant par $x \mapsto \frac{x-x_1}{x-x_2}$, puis en prenant le carré, l'équation pour le revêtement $y^2 = (x^2-1)(x^2-b_1)(x^2-b_2)(x^2-b_3)$ que l'on construit est telle que $b_i > 0$ et donc la courbe algébrique a quatre composantes réelles.

Dans le cas non-hyperelliptique, on considère l'équation de C sous la forme $y^2 + 2yf_1(x) + f_0(x) = 0$ induite par **1.** ou par l'équation et l'hyperplan obtenu à partir de la matrice A de 5.2.2. Pour cette équation, C n'a qu'un point à l'infini (q_0 ou q_1 de 5.2.2), et donc une seule composante non bornée. Quitte à translater par un point d'ordre 2 de la courbe elliptique correspondante, on peut supposer que les p_i sont sur cette composante. Ils correspondent de plus à l'intersection de la courbe avec l'axe des x . Quitte à changer y en $-y$, ce qui n'a pour effet que d'échanger la structure réelle naturelle avec sa composée avec l'involution φ_i sur le revêtement, la composante bornée se relève en deux composantes différentes. La composante non bornée donne deux autres composantes et le revêtement a quatre composantes.

Pour achever la preuve de *i)* il suffit à présent de remarquer que les surfaces hyperboliques C_1 et C_2 sont construites de façon symétrique. En effet, on reconsidère les hexagones H_1 et H_2 que l'on a utilisés pour construire C . Soit h_3 la longueur de l'arc géodésique orthogonal aux bords de longueurs l_3 et \hat{l}_3 dans H_1 et h_4 celle de l'arc orthogonal au bords de longueurs l_4 et \check{l}_4 dans H_2 . On considère les hexagones H'_1 et H'_2 définis par $(\hat{l}_1 + \check{l}_1, \hat{l}_1 + \check{l}_1, h_3)$ et $(\hat{l}_1 + \check{l}_1, \hat{l}_1 + \check{l}_1, h_4)$. Les hexagones H'_1 et H'_2 fournissent un autre découpage de C en quatre hexagones assemblés de la même manière que H_1 et H_2 . Cela signifie que l'on peut construire à partir de H'_1 et H'_2 un domaine fondamental du même type pour les revêtements que celui que l'on avait

construit à partir de H_1 et H_2 . On vérifie aisément dans ce cas là qu'en gardant les mêmes schémas de recollement et en changeant H_1 et H_2 en H'_1 et H'_2 , on échange C_1 et C_2 (et C_3 et C_4).

ii) Si on choisit l'équation définie par **1.** pour C_1 , l'argument que nous avons utilisés ci dessus montre qu'alors C_2 est nécessairement définie par **2.**

Il ne reste donc plus qu'à différencier C_3 et C_4 .

Notons que dans chacune des quatre surfaces les géodésiques portant les arcs de longueurs l_3 et l_4 sont stables sous σ'_i , la symétrie verticale de la figure 5.2. En revanche, celles relevant la composante réelle lisse de C sont stables sous σ_1 et σ_3 dans C_1 et C_3 , et sous σ'_2 et σ'_4 dans C_2 et C_4 .

Cela signifie que si l'on considère deux points de C , chacun sur l'une des composantes réelles de C , s'il existe une structure réelle sur C_1 telle que les relevés de ces deux points soient des points réels, alors il existe aussi une structure réelle de ce type sur C_3 mais pas sur C_2 et C_4 . Réciproquement, si une telle structure réelle n'existe pas pour C_1 , elle n'existera pas non plus pour C_3 mais existera pour C_2 et C_4 .

De l'autre côté, pour les équations sur les revêtements déduites de 5.2.3, les structures réelles sont données par $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ et $(x, y) \mapsto (-\bar{x}, \bar{y})$, dans le cas hyperelliptique, et par $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ et $(x, y) \mapsto (\bar{x}, -\bar{y})$ dans le cas non-hyperelliptique. Pour chaque revêtement, la structure réelle pour laquelle un point réel de C est réel est donnée par le signe de sa coordonnée affine x si le revêtement est hyperelliptique, par le signe de y sinon. Et deux points se relèvent en des points réels pour la même structure réelle si ce signe est le même. Ces considérations pour les équations fournies par le tableau 5.2.3 permettent de différencier C_3 et C_4 .

5.2.6 Remarque

Les lemmes 5.2.1 et 5.2.2 peuvent être interprétés très simplement en terme de réseaux mais nous devons commencer par faire une remarque. Les équations pour C construites dans 5.2.2 étaient, pour chacune d'entre elles, précisément adaptées à ce que la structure réelle naturelle corresponde à l'isométrie indirecte σ sur la surface hyperbolique C .

Du point de vue algébrique, on peut également considérer la structure réelle σ' obtenue en composant la structure réelle naturelle avec l'involution elliptique $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Cette structure réelle ne correspond pas en général à une isométrie indirecte sauf dans le cas où l'un des revêtements est hyperelliptique (celui pour lequel les p_i sont deux à deux conjugués).

En ce sens là les points q_1 et q_2 de 5.2.2 étaient respectivement réels pour σ et pour σ' .

A présent si Λ est un réseau définissant l'une des quatre structures elliptiques sur C héritées du revêtement C_1 , alors C ayant une structure réelle à deux composantes pour laquelle le point base est réel, Λ est engendré par 1 et $i\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$. Les points réels pour σ correspondent alors aux points $(r + i\frac{n}{2}\nu)$, $r \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ du plan, ceux réels pour σ' correspondent aux points $(\frac{n}{2} + ir')$, $r' \in \mathbb{R}, n' \in \mathbb{Z}$.

Les ensembles $\{\frac{n}{2} + m\frac{i\mu}{2}, (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$, $\{\frac{2n+1}{4} + i\mu\frac{m}{2}, (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$, $\{\frac{n}{2} + (2m+1)\frac{i\mu}{4}, (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$, $\{\frac{2n+1}{4} + (2m+1)\frac{i\mu}{4}, (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$ sont donc respectivement les origines possibles, dans le plan, des structure elliptiques sur C héritées de C_1 , C_2 , et C_3 .

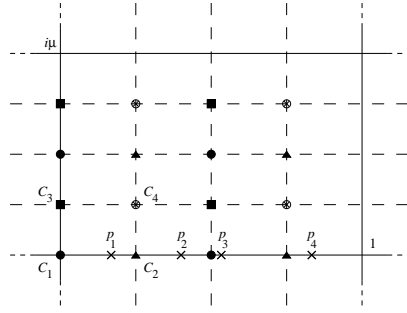


fig. 5.3

5.2.7 Remarque

Les méthodes dont nous disposons jusqu'à présent ne permettent d'obtenir des exemples que dans le cas où C_1 ou C_2 est hyperelliptique, par exemple C_1 .

Cela signifie que les hexagones H_1 et H_2 sont isométriques, images miroir l'un de l'autre.

Il faut remarquer que dans ce cas là, C_1 possède également un revêtement de genre 2, et C_2 possède deux autres quotients de genre 1. Dans [Ai-Si] des techniques permettant de décrire les relations entre les équations de ces surfaces liées par quotients et revêtements sont également décrites. Combinées avec celles développées dans ce chapitre, elles permettent de décrire à partir d'un seul hexagone les relations entre équations et pavages en hexagones de trente surfaces de genre 3 généralement différentes.

Exemples

Les exemples ci-dessous proviennent tous du cas où C_1 est hyperelliptique, i.e le cas où il n'y a en fait qu'un seul hexagone $H_1 = H$. La méthode pour trouver l'équation du quotient et les coordonnées des points de ramification est la suivante :

Soient $a_i, i = 1 \dots 6$ les sommets de H ordonnés cycliquement, où a_1 est l'une des extrémités du côté de longueur l_1 , a_2 et a_3 sont les sommets du côté de longueur l_2 . Alors d'après le lemme 1.3.2 le paramètre λ définissant l'équation de $C = C_1/\varphi_1$ est donné par

$$\lambda = \lambda(\{H_1, (a_1, a_2, a_3, a_6)\}),$$

et les coordonnées en x des p_i sont données par

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda(\{H_1, (a_1, a_2, a_4, a_6)\}) \\ x_2 &= \lambda(\{H_1, (a_1, a_2, a_5, a_6)\}). \end{aligned}$$

5.2.8. $\cosh(l_1) = 3 \cosh(l_2) = \cosh(l_3) = \cosh(l_4) = \sqrt{3}$

Ce premier exemple est exact : la surface de genre 2 obtenue en identifiant quatre copies de H comme en 4.1.1, i.e comme en 1.3.2 est liée par le biais de l'action de C_5 à la surface exceptionnelle F_{12} . Les invariants de H peuvent être déduits de l'équation de cette surface de genre 2 (voir [Bu-Si] p.244). On a

$$\lambda = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{array}{llll} C_1 & a = \frac{5-4\sqrt{3}}{2} & b = 0 & c = \frac{\sqrt{3}-3}{2} & d = 1 \\ C_2 & a_2 = 0 & b_2 = 1 & c_2 = -(2 + \sqrt{3}) & d_2 = \frac{1-\sqrt{3}-1\sqrt{3+2\sqrt{3}}\sqrt{3}+2\sqrt{3+2\sqrt{3}}}{2} \\ C_3 & a_3 = 0 & b_3 = 1 & c_3 = \frac{32\sqrt{3}-5}{39} & d_3 = \frac{14\sqrt{3}-3}{39} \\ C_4 & a_4 = 0 & b_4 = 1 & c_4 = -1 + \frac{8}{7}\sqrt{3} & d_4 = -\frac{1}{7} \end{array}$$

L'équation de C_3 est alors

$$y^4 + ((10\sqrt{3}-64)x^2 + 6\sqrt{3}-28)y^2 + (592-320\sqrt{3})x^4 + (344\sqrt{3}-704)x^2 + 592\sqrt{3}-960$$

Celle de C_4 :

$$y^4 + ((14-16\sqrt{3})x^2 + 2)y^2 + (192-112\sqrt{3})x^4 + (376\sqrt{3}-672)x^2 - 48$$

5.2.9. $\cosh(l_1) = \cosh(l_2) = \cosh(l_3) = \cosh(l_4) = 2$

Cet exemple est également exact. L'hexagone H est totalement régulier. La surface de genre 2 obtenue en identifiant quatre copies de H comme en 1.3.2 est exactement F_{12} .

$$\lambda = \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{llll} C_1 & a = -5 & b = 0 & c = 1 & d = 6 \\ C_2 & a_2 = 0 & b_2 = 0 & c_2 = 1 & d_2 = 0 \\ C_3 & a_3 = 0 & b_3 = 1 & c_3 = \frac{5}{3} & d_3 = \frac{25-10\sqrt{6}}{3} \\ C_4 & a_4 = 0 & b_4 = 1 & c_4 = \frac{3\sqrt{3}}{5} & d_4 = -\frac{15\sqrt{3}-18\sqrt{2}}{5} \end{array}$$

Dans ce cas C_2 est hyperelliptique, les points de ramification sont en 0 et ∞ d'où son équation :

$$y^2 = x^8 + (4\sqrt{3}-8)x^4 + 7 - 4\sqrt{3}$$

C_3 a pour équation :

$$y^4 + (5 - 5/2 x^2) y^2 + 4 + 5x^2 + x^4 = 0,$$

et C_4

$$y^4 + (6x^2 - 6) y^2 - 16x^4 - \frac{104}{3} x^2 - 16 = 0$$

5.2.10. $\cosh(l_1) = \cosh(l_2) = \sqrt{6}$ $\cosh(l_3) = \cosh(l_4) = 4$

Ce dernier exemple a été obtenu numériquement, nous l'avons choisi car les coefficients semblent être rationnels.

$$\lambda = \frac{25}{16}$$

$$\begin{array}{llll} C_1 & a = \frac{-35}{3} & b = 0 & c = 1 & d = \frac{50}{3} \\ C_2 & a_2 = 0 & b_2 = 0 & c_2 = 12 & d_2 = -\frac{1}{12} \\ C_3 & a_3 = 0 & b_3 = 1 & c_3 = \frac{35}{29} & d_3 = \frac{35}{261} \\ C_4 & a_4 = 0 & b_4 = 1 & c_4 = -\frac{29}{35} & d_4 = -\frac{29}{35} \end{array}$$

Et les équations sont, pour C_2 :

$$y^2 = x^8 - \frac{36860}{8809}x^6 + \frac{56118}{8809}x^4 - \frac{36860}{8809}x^2 + 1.$$

pour C_3 :

$$y^4 + (630x^2 + 35)y^2 + 31104x^4 - 23456x^2 + 96 = 0.$$

et pour C_4 :

$$y^4 + \left(\frac{290}{7}x^2 - 70\right)y^2 - \frac{9600}{49}x^4 - 1856x^2 + 384 = 0.$$

Références

- [Ai-Si] A. AIGON, R. SILHOL, *Hyperbolic Hexagons and algebraic curves in genus 3*. preprint.
- [Bir1] J.S BIRMAN, *The Algebraic Structure of Surface Mapping Class Group* Discrete groups and automorphic functions (Proc. Conf., Cambridge, 1975), pp. 163–198. Academic Press, London, 1977.
- [Bir2] J.S BIRMAN, *Braids, Links, and Mapping Class Group*, Ann. of Math. Stud. No 82, 1975.
- [Bo] O. BOLZA, *On binary sextics with linear transformations into themselves*, Am. Jour. of Math, **10**, (1888), 47–70.
- [Bu] P. BUSER, *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*, Prog.Math. **106**, Birkhäuser, Boston, 1992.
- [Bu-Si] P. BUSER, R.SILHOL, *Geodesics, Periods, and Equations of Real Hyperelliptic Curves*, Duke Math. Jour. **108** (2001) 211–250.
- [De] M. DEHN, *Die Gruppe der Abbildungsklassen* Acta Math. **69** (1938) 135–206.
- [Do] A. DOUADY, *Travaux de Thurston sur les surfaces* Astérisque. **66-67**, Société Mathématique de France, Paris, 1979, Exposé 7. 127–139.
- [Fa-Kr] H.M. FARKAS, I.KRA, *Riemann Surfaces*, Springer G.T.M Graduate Texts in Mathematics, **71**, New York, 1992.
- [Gr] P. GRIFFITHS, *Introduction to algebraic curves*. Translations of Mathematical Monographs, 76. American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.
- [Gr-Ha] P. GRIFFITHS, J. HARRIS, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.
- [Jo-Na] T. JØRGENSEN, M. NÄÄTÄNEN, *Surfaces of genus 2: generic fundamental polygons*. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **33** (1982), no. 132, 451–461.
- [Ku-Na] M. NÄÄTÄNEN, T. KUUSALO, *On arithmetic genus 2 subgroups of triangle groups*. Extremal Riemann Surfaces (San Francisco, CA, 1995), 21–28, Contemp. Math., **201**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [Li] W. B. R.LICKORISH, *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold*. Proc. Cambridge Philos. Soc. **60-62** 1964-1966, 769–778, 679-681.

- [Ri-Ro] G.RIERA R.RODRIGUEZ, *Uniformization of surfaces of genus two with automorphisms*. Math. Ann. **282** (1988), no. 1, p. 51–67.
- [Rin] G.RINGEL *Map Color Theorem*, Springer-Verlag, Berlin Heilderberg New York, 1974.
- [Sem] K.D SEMMLER *A fundamental domain for the Teichmüller space of compact Riemann Surfaces in genus 2*, thèse.
- [Silv] J.H SILVERMAN, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer G.T.M **106**, Berlin Heilderberg New York Tokyo, 1986.