INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

ISN 01-92

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité : Méthodes Physiques Expérimentales et Instrumentation

Préparée à l'Institut des Sciences Nucléaires de Grenoble dans le cadre de l'Ecole Doctorale de Physique

Présentée et soutenue publiquement

par

Christophe PEAUCELLE

Le 12 octobre 2001

LA PROBLEMATIQUE DE L'EVOLUTION DES MOMENTS D'UNE DENSITE DE PARTICULES SOUMISES A DES FORCES NON LINEAIRES

Directeur de thèse : **Roger BRISSOT**

JURY :

M. J. REMILLIEUX	Président
MME A. LOMBARDI	Rapporteur
M. A. TKATCHENKO	Rapporteur
M. R. ARVIEU	Examinateur
M. R. BRISSOT	Directeur de thèse
M. J.M. DE CONTO	Co-encadrant

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

ISN 01-92

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité : Méthodes Physiques Expérimentales et Instrumentation

Préparée à l'Institut des Sciences Nucléaires de Grenoble dans le cadre de l'Ecole Doctorale de Physique

Présentée et soutenue publiquement

par

Christophe PEAUCELLE

Le 12 octobre 2001

LA PROBLEMATIQUE DE L'EVOLUTION DES MOMENTS D'UNE DENSITE DE PARTICULES SOUMISES A DES FORCES NON LINEAIRES

Directeur de thèse : **Roger BRISSOT**

JURY :

M. J. REMILLIEUX	Président
MME A. LOMBARDI	Rapporteur
M. A. TKATCHENKO	Rapporteur
M. R. ARVIEU	Examinateur
M. R. BRISSOT	Directeur de thèse
M. J.M. DE CONTO	Co-encadrant

"En essayant continuellement on finit par réussir. Donc : plus ça rate, plus on a de chances que ça marche."

Devise Shadok

Remerciements

En premier lieu, je souhaite remercier M. Joël Chauvin, Directeur de l'Institut des Sciences Nucléaires de Grenoble, pour m'avoir accueilli dans son laboratoire durant mes trois années de thèse. J'adresse mes remerciements à MM. Jean-Loup Belmont et Michel Fruneau pour m'avoir accueilli dans leur service ainsi que pour leurs conseils avisés.

Je remercie M. Jean-Marie De Conto pour m'avoir encadré durant ces trois années. Sa rigueur et ses compétences m'ont beaucoup apporté.
Mes remerciements vont aussi à M. Roger Brissot, qui a dirigé ma thèse, pour ses mille conseils, scientifiques ou non, distillés tout au long de cette période.

Je tiens à remercier l'ensemble du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et leur gentillesse : MME Alessandra Lombardi et M. André Tkatchenko, qui ont accepté la charge de rapporteur, pour leurs critiques et remarques constructives, M. Joseph Remillieux pour avoir accepté de présider le jury et M. Robert Arvieu pour avoir accepté d'en faire partie.

Je souhaite remercier M. Emmanuel Froidefond pour son sens critique et sa disponibilité mais aussi pour m'avoir permis de manger plus lentement!

J'exprime ma reconnaissance à MM. Jean-Marie Carretta, Alain Fontenille, Denis Marchand, Roger Micoud et aussi Jean-Claude Ravel pour leur efficacité lors des mesures sur GENEPI.

Merci à Luisa, Jacob, Luc, Nicolas, Sébastien et Thomas ainsi qu'aux autres thésards du laboratoire, avec qui j'ai partagé de nombreux cafés.

Un immense (et affectueux!) merci à Caroline, qui m'a supporté durant l'intégralité de cette thèse, en particulier pour le supplice des relectures de ce document.

Enfin, je remercie chaleureusement mes parents et mes frères de m'avoir soutenu et fait confiance pendant toute ma période universitaire.

Table des matières

Avertissement

La thèse se scinde en deux parties totalement indépendantes. La première partie est une étude théorique sur la dynamique des moments qui a occupé une grande partie du travail de thèse (chapitre 1 à 4). Il a été jugé important de ne pas limiter le travail à des aspects purement théoriques et une seconde partie, purement expérimentale, porte sur la mesure de la qualification des faisceaux dans un nouvel accélérateur du laboratoire et pour lequel des calculs théoriques avaient été faits lors de sa conception (chapitre 5).

Chapitre 1

Introduction et motivations de la problématique des moments

1.1 Accélérateurs de forte intensité, halo et moments

L'utilisation des accélérateurs linéaires de forte puissance dans différents projets tels que la production de neutrons par spallation ou les réacteurs hybrides [1] a amené à se pencher sur les problèmes de la dynamique de faisceaux de forte intensité, en particulier l'existence d'un halo de particules. Ce halo est une distribution de particules de très faible densité qui peut se former autour du coeur du faisceau. Si l'on veut limiter l'activation de la machine, les pertes tolérables sont de l'ordre de 1 watt/mètre, ce qui correspond à des taux de pertes de $10^{-8}/$mètre, voire $10^{-9}/$mètre compte tenu des puissances moyennes de faisceau très élevées. Il est donc requis de bien maîtriser le halo qui risque de se former autour du coeur du faisceau. Ce halo peut avoir différentes causes. Une d'entre elles est la force (non linéaire) de répulsion coulombienne des particules du faisceau entre elles. C'est l'effet de charge d'espace.

Afin de comprendre le processus de formation de ce halo et les phénomènes de charge d'espace, de nombreuses études théoriques [2] et expérimentales [3] ont été entreprises. La difficulté du problème réside dans une modélisation réaliste d'un faisceau comprenant plusieurs milliards de particules sous un fort effet de charge d'espace. La différence d'échelle entre le nombre de particules dans le faisceau et ses pertes rend considérables les besoins en puissance de calcul. C'est pourquoi la plupart des modèles développés se limitent en général à deux dimensions pour analyser le comportement de ce halo [4]. De très nombreux mécanismes de formation du halo sont aujourd'hui bien connus (comme, par exemple, la physique des interactions résonnantes dans le cas d'un modèle coeur-particules).

De nombreuses méthodes de calcul ont donc été utilisées, nous en décrirons rapidement trois d'entre elles dans le paragraphe (1.3).
Une approche en apparence plus simple que les autres a déjà été proposée [5] : plutôt que de transporter de nombreuses particules, d'une manière ou d'une autre, il a été proposé de transporter directement la densité de charge, décrite uniquement par des paramètres statistiques (les moments). Toutefois, cela n'a jamais donné de résultat probant.

De manière similaire, l'idée de caractériser une densité par ses moments et d'en étudier l'évolu-

tion quand la dynamique est non linéaire, est un problème récurrent en physique et en physique mathématique.
D'une façon générale, la dynamique non linéaire demande de connaître une infinité de moments pour en donner l'évolution (problème dit de fermeture). Si, toutefois, un nombre fini de moments donne une bonne approximation de la densité, on peut envisager d'extrapoler les moments d'ordre supérieur et ainsi contourner la difficulté. Jusqu'alors, les articles rencontrés sur le sujet supposent que ces moments d'ordre supérieur sont nuls, ce qui n'est pas acceptable.

Nous nous sommes donc attachés à comprendre quelle était la signification de ce type de description ainsi que les outils requis pour la développer et plus généralement les difficultés de cette formulation que ce soit dans la physique des accélérateurs ou dans tout autre domaine.

1.2 Rappels et notations de physique des accélérateurs

Nous introduisons, dans ce paragraphe, des notions très élémentaires de la physique des accélérateurs dont nous nous servirons au cours de la présente étude. Pour plus d'informations sur les accélérateurs, nous renvoyons le lecteur aux références [6] et [7].

1.2.1 Référentiel et espace des phases

Afin de pouvoir décrire aisément la dynamique des particules d'un faisceau dans un accélérateur, on se place dans un référentiel ayant deux dimensions transverses notées x et y et une dimension longitudinale curviligne notée s, le long de la trajectoire de référence. Chaque particule se propage selon s et appartient donc, en outre, à un plan transverse (x, y) d'abscisse s orthogonal à cet axe (voir figure *1-1*).

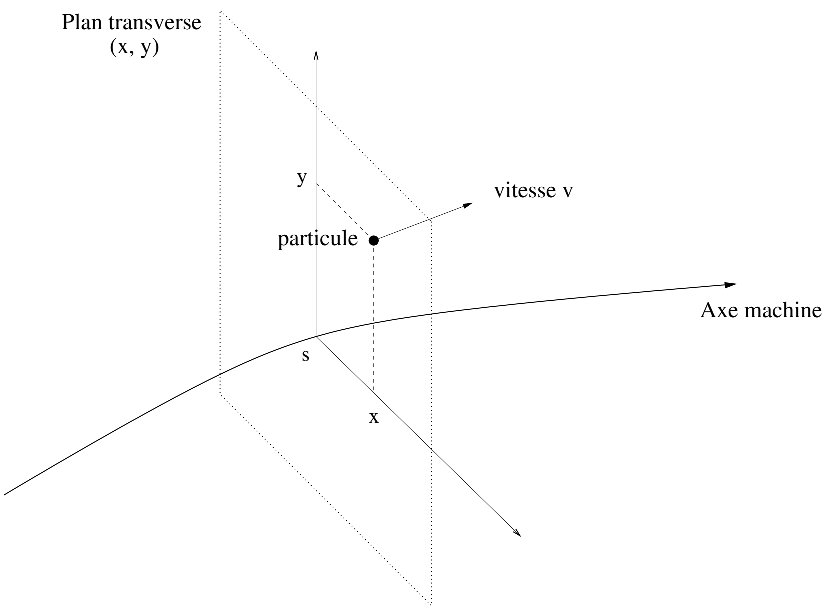


Fig. 1-1 : Référentiel général d'une particule

Une particule est repérée par ses coordonnées x et y mais aussi par l'inclinaison de sa trajectoire sur les axes x et y, c'est-à-dire par les quantités dx/ds et dy/ds que l'on note respectivement x'

et y'. De plus, les particules sont repérées par leur position longitudinale relative à une particule de référence Δl ainsi que par leur quantité de mouvement relative à cette même particule notée $\Delta p/p$. Une particule est donc complètement déterminée par un sextuplet dans un espace que l'on appellera espace des phases de dimension 6 : $(x, x', y, y', \Delta l, \Delta p/p)$ [8].

1.2.2 Hypothèse de paraxialité [9]

En général, la vitesse longitudinale $v_{||}$ d'une particule est beaucoup plus grande que sa vitesse transverse $v_\perp$ (le module de la vitesse v étant défini par $v = \sqrt{v_{||}{}^2 + v_\perp{}^2}$). L'hypothèse de paraxialité consiste à négliger $(v_{||}/v_\perp)^2$ dans le calcul devant $(v/v_\perp)$. Il en découle que la vitesse longitudinale vaut approximativement $v_{||} \approx v$, en supposant que cette vitesse n'est pas modifiée par les éléments de focalisation.

Durant toute notre étude, nous supposerons que cette hypothèse est vérifiée. De plus, on supposera que le terme $\Delta p/p$ est nul et que le faisceau est continu. On pourra donc déjà limiter notre espace des phases à quatre dimensions (x, x', y, y') (ce qui sera le cas des mesures de faisceaulogie sur GENEPI du chapitre 5).

Enfin, nous considérerons, dans la méthode des moments, que les faisceaux étudiés sont à symétrie de révolution dans l'espace transverse (x, y). L'espace des phases en deux dimensions (x, x') suffira donc pour étudier la dynamique des particules. En effet, notre objectif est de savoir comment traiter la dynamique des moments et de bien en comprendre sa signification. Cette condition n'est donc pas limitative.

Remarque : L'espace longitudinal permet de décrire la position des particules au cours du temps. Pour chaque particule, la vitesse peut s'écrire :

$$v \approx v_{||} = \frac{ds}{dt}$$

Le terme x' (qui représente la dérivée de x par rapport à s) s'écrit :

$$x' = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}$$

$$x' = \frac{\dot{x}}{v}$$

où $\dot{x}$ représente la dérivée de x par rapport au temps.

Il est donc équivalent de travailler dans les espace de phases (x, x') et $(x, \dot{x})$. Pour simplifier, nous supposerons, dans tous les chapitres concernant la dynamique de moments, que la vitesse v et la masse des particules sont égales à 1.

1.2.3 Emittance transverse du faisceau

Plaçons-nous dans l'espace de phases (x, x'). Les définitions qui suivent seront aussi valables dans (y, y').
L'ensemble des particules d'un faisceau occupent une certaine surface dans cet espace des

phases. On définit alors un domaine qui contient totalement ou partiellement les particules. Cette enveloppe, appelée émittance peut avoir, *a priori*, une forme quelconque. Cependant, dans une grande majorité des cas, les particules se répartissent de telle manière que l'on peut les délimiter par une ellipse. Une ellipse (centrée sur l'origine dans (x, x')) a pour équation normalisée :

$$\beta x'^2 + 2\alpha x x' + \gamma x^2 = \varepsilon$$

avec pour normalisation $\beta\gamma - \alpha^2 = 1$ et α, β, γ étant les paramètres de l'ellipse. L'aire de l'ellipse est donnée par $\pi\varepsilon$ où ε représente l'émittance [10].

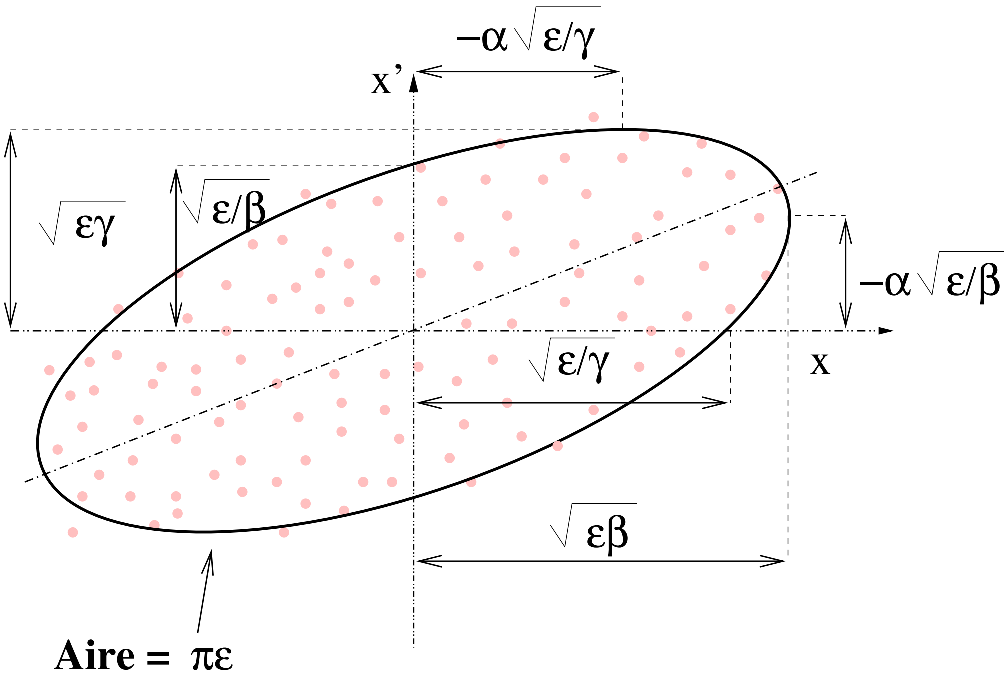


Fig. 1-2 : Ellipse d'émittance dans l'espace des phases (x, x')

On caractérise une distribution de particules quelconque dans (x, x') par ses grandeurs quadratiques moyennes dites RMS (pour Root Mean Square) :

L'enveloppe RMS dans (x, x') d'un faisceau est définie par :

$$\sigma_x = \sqrt{< x^2 >}$$

où le terme $<>$ désigne la moyenne prise sur l'ensemble des particules du faisceau.

Sa divergence RMS $\sigma_{x'}$ est définie par :

$$\sigma_{x'} = \sqrt{< x'^2 >}$$

On construit la matrice dite des covariances Σ_x (ou matrice faisceau) relative à une population de particules dans (x, x') de la façon suivante :

$$\Sigma_x = \begin{bmatrix} < x^2 > & < xx' > \\ < xx' > & < x'^2 > \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

qui permet de définir l'émittance RMS par :

$$\boxed{\varepsilon_{rms} = 2\sqrt{det(\Sigma_x)} = 2\sqrt{< x^2 >< x'^2 > - < xx' >^2}}$$

On définit alors une ellipse, appelée ellipse de concentration, d'équation normalisée :

$$\beta x'^2 + 2\alpha x x' + \gamma x^2 = \varepsilon_{rms}$$

avec les paramètres "faisceau" de la matrice :

$$\beta = 2\frac{< x^2 >}{\varepsilon_{rms}}$$

$$\alpha = -2\frac{< xx' >}{\varepsilon_{rms}}$$

$$\gamma = 2\frac{< x'^2 >}{\varepsilon_{rms}}$$

et la normalisation $\beta\gamma - \alpha^2 = 1$.

L'émittance RMS est la description la plus simple possible d'une distribution dans un espace des phases de dimension 2. L'ellipse de concentration d'aire $\pi\varepsilon_{rms}$ obtenue englobe plus ou moins de particules en fonction de la densité de particules. Par exemple, si la distribution de particules est gaussienne (en x et en x'), cette ellipse contient 63% des particules. Si on prend une ellipse de surface $2\pi\varepsilon_{rms}$homothétique à l'ellipse de concentration, celle-ci contient 86% des particules. Pour un faisceau de densité uniforme, cette dernière ellipse contient 100% des particules.

1.2.4 Forces

Dans un accélérateur, les particules d'un faisceau passent de manière générale à travers des éléments d'optique électro-magnétiques : les particules subissent alors la force de Lorentz ($\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$) qui permet à la fois de les accélérer et de les dévier.

Considérons maintenant un faisceau de particules chargées reprenant les hypothèses simplificatrices du paragraphe (1.2.2) en particulier que le faisceau n'est pas accéléré. Les particules subissent alors l'effet de deux types de forces dans l'espace transverse :

- les forces externes de focalisation et de déviation, chargées de guider le faisceau le long de la machine. On supposera que ces forces sont des fonctions linéaires de la position transverse ;

- les forces internes de répulsion coulombienne, dites de charge d'espace, qui tendent à faire éclater le faisceau. Ces forces sont non linéaires ;

Dans un faisceau de forte intensité, les forces de répulsion ne sont plus négligeables et les forces externes de focalisation doivent compenser l'effet de charge d'espace en plus de servir de guide de faisceau.

Dans la méthode des moments, le problème revêt plusieurs aspects :

– décrire à un instant donné la dynamique des moments d'une distribution de particules sous une force non linéaire (interne ou externe) ;

– faire évoluer la densité ;

– recalculer la nouvelle force non linéaire si celle-ci dépend de la densité (comme les forces internes de répulsion).

Ce dernier point n'est pas le plus difficile si l'on sait faire le lien entre la densité et ses moments. Nous supposerons donc pour l'étude des moments que :
- nous travaillerons dans un espace des phases de dimension 2 (x, x'), ce qui ne limitera pas la compréhension ;
- nous supposerons que les forces considérées sont toutes externes.

Dans ce cas, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit (en x) :

$$m\ddot{x} = F_x(x, y, s) + f_{SC}$$

Ce qui donne, en vertu de la relation entre x' et $\dot{x}$:

$$x'' = \frac{F_x(x, y, s)}{mv^2} + F_{SC}$$

La force de focalisation étant une fonction linéaire de la position transverse de la particule :

$$x'' = -k_x(s)x + F_{SC}$$

1.3 Traitements usuels du problème de la dynamique de la haute intensité

Nous présentons brièvement trois principales façons dont la dynamique des particules dans un accélérateur de forte intensité est généralement traitée : la simulation directe particulaire PPI (Particle-Particle Interaction) qui tient compte des collisions entre toutes les particules, le modèle par cellule PIC (Particle-in-cell) et le modèle coeur-particule PCM (Particle-Core Model).

1.3.1 Le modèle PPI

Dans le cas d'un faisceau de forte intensité, on ne peut plus négliger les forces de charge d'espace entre les particules. La méthode multiparticulaire consiste à calculer la force totale (incluant notamment la force de répulsion) s'exerçant sur chaque particule créée par toutes les autres particules à chaque instant. Cette force dépendant de la position et de la vitesse de toutes les autres particules, ce calcul s'avère extrêmement long. En général, on prend un nombre (limité par la puissance de calcul mais suffisamment grand pour avoir une bonne statistique) de particules afin d'avoir des temps de calculs raisonnables. Cependant, comme nous l'avons vu, il faudrait prendre au moins 10^9 particules pour pouvoir commencer à caractériser les pertes du faisceau et intégrer le problème du halo très faible dans la dynamique du faisceau.

1.3.2 Le modèle PIC

Ce modèle consiste à diviser l'espace en un nombre fini de cellules pour former un maillage. Chaque cellule est supposée contenir un nombre fini de particules ; à chaque pas de temps, on détermine le déplacement de chaque cellule sous l'effet des forces présentes, en particulier de la force de charge d'espace due aux autres cellules. Puis on répartit la cellule déplacée sur les autres cellules formant son point d'arrivée sur le maillage. Globalement les cellules restent fixes mais c'est la répartition des particules à l'intérieur de chacune des cellules qui est modifiée [11]. Ce modèle, plus économique (il évite en effet de considérer toutes les collisions entre les particules), est beaucoup moins réaliste que le précédent et ne paraît pas adapté pour des simulations à 10^{-8} ou 10^{-9} près.

1.3.3 Le modèle coeur-particules

Relativement simple et facile à mettre en place, ce modèle est beaucoup utilisé pour comprendre l'origine du halo dans les accélérateurs de forte intensité [12], [13], [14]. Il a permis de nombreuses études comportementales validées ensuite par des codes particulaires.
Le faisceau est modélisé par un coeur décrit par son équation d'enveloppe RMS et un certain nombre de particules-test qui interagissent uniquement avec le coeur. Nous rappellerons au chapitre 5 que l'évolution RMS d'une distribution de particules sous charge d'espace est bien décrite, sous certaines conditions, par une équation particulière dite d'enveloppe.
Le coeur évolue donc par lui-même de manière simple alors que les particules-test oscillent avec des fréquences qui leur sont propres [15] :

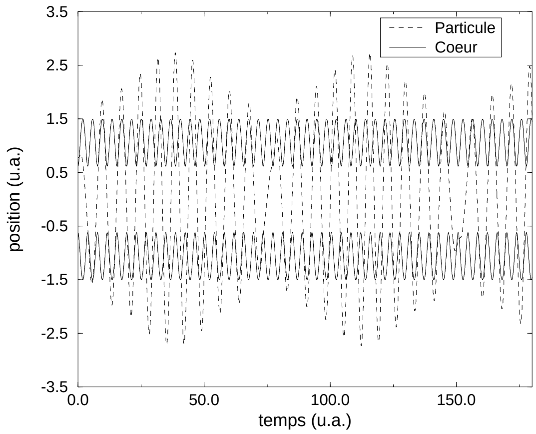


Fig. 1-3 : Evolution en deux dimensions de l'enveloppe du coeur et de la position d'une particule-test en fonction du temps (coordonnées de départ arbitraires)

L'évolution du faisceau est observée de manière stroboscopique : on relève périodiquement sur le même graphique la position des particules-test dans l'espace des phases (voir figure *1-4*).

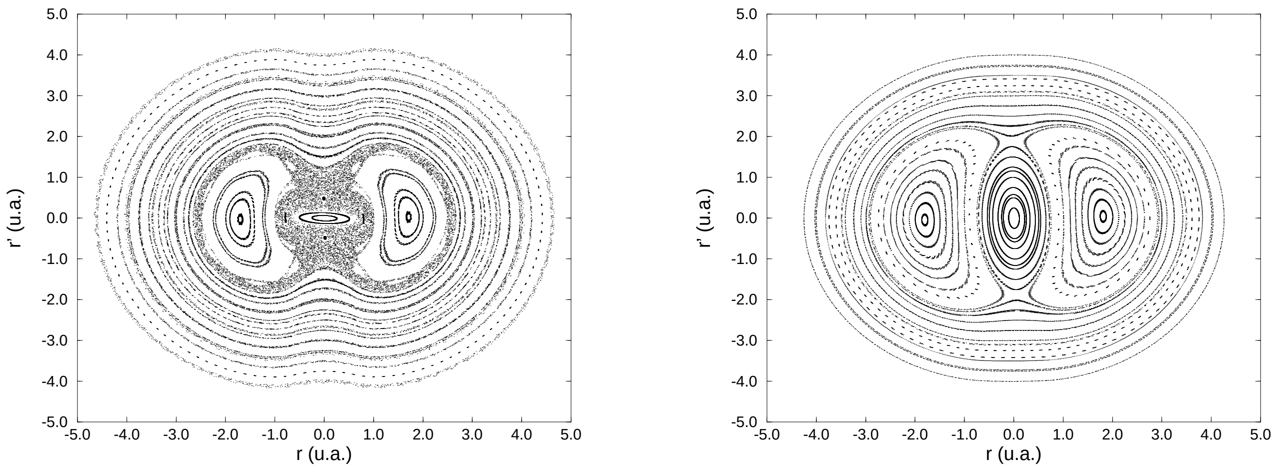


Fig. 1-4 : Sections de Poincaré en deux dimensions pour 32 particules-test dans le cas d'une forte (à gauche) et faible (à droite) charge d'espace.

Les graphes ainsi obtenus (appelés sections de Poincaré), ont permis d'observer et d'étudier les régions de stabilité et de résonance dans un faisceau [9] en fonction de la charge d'espace.

1.4 Méthode des moments

Les méthodes que nous venons de mentionner ont déjà été développées et notre but n'est pas de les étudier.
En effet, bien qu'elles aient donné de très bons résultats, nous avons choisi de considérer le problème de la dynamique des particules dans un faisceau de forte intensité d'une autre manière : nous désirons étudier l'évolution d'un nuage de particules à l'aide d'un nombre fini de ses moments statistiques.

Pour simplifier, on choisit de traiter l'évolution des moments d'une densité de particules soumises à des forces non linéaires par rapport au temps et non plus par rapport à l'abscisse curviligne s dans un espace des phases à deux dimensions. On considère désormais l'espace des phases $(x, \dot{x})$.
On rappelle que l'on suppose que toutes les particules ont la même masse et la même vitesse que l'on égalise à 1 ainsi que la même charge q.

1.4.1 Moments d'une densité en dimension 2

Considérons une densité de particules $\omega(x, \dot{x})$ définie sur un domaine $\mathcal{D}$ dans l'espace des phases $(x, \dot{x})$.

On définit le moment $\mu_{k,l}$ d'ordre global $k+l$ (d'ordre k en x et l en $\dot{x}$) par l'expression suivante :

$$\mu_{k,l} = < x^k \dot{x}^l > = \int_{\mathcal{D}} x^k \dot{x}^l \omega(x, \dot{x}) dx d\dot{x} \tag{1.2}$$

Plus généralement, il existe $n+1$ moments d'ordre global n : $\mu_{n,0}$, $\mu_{n-1,1}$, $\mu_{n-2,2}$, ..., $\mu_{1,n-1}$, $\mu_{0,n}$.

1.4.2 Equation d'évolution des moments. Non fermeture

Notre première démarche est de savoir comment évoluent les moments d'une densité de particules quand celles-ci sont soumises à une force non linéaire f. Nous supposons que cette force peut se modéliser simplement par : $f(x) = -(k_1 x + k_2 x^p)$.
Dans ce cas, la relation fondamentale de la dynamique nous donne (en égalisant la masse à 1) :

$$\ddot{x} = f(x) \text{ avec } f(x) = -(k_1 x + k_2 x^p)$$

L'évolution du moment $\mu_{k,l}$ s'écrit :

$$\dot{\mu}_{k,l} = \frac{d\mu_{k,l}}{dt} = \frac{d < x^k \dot{x}^l >}{dt}$$

Compte tenu du fait que :

$$\frac{d < x^k \dot{x}^l >}{dt} = \left\langle \frac{d(x^k \dot{x}^l)}{dt} \right\rangle$$

et que $\dot{x}$ est la dérivée de x et $\ddot{x}$ celle de $\dot{x}$ par rapport au temps, alors :

$$\frac{d < x^k \dot{x}^l >}{dt} = k < x^{k-1} \dot{x}^{l+1} > + l < x^k \dot{x}^{l-1} \ddot{x} > \tag{1.3}$$

Comme $\ddot{x} = f(x) = -(k_1 x + k_2 x^p)$, l'expression (1.3) s'écrit :

$$\frac{d < x^k \dot{x}^l >}{dt} = k < x^{k-1} \dot{x}^{l+1} > - l k_1 < x^{k+1} \dot{x}^{l-1} > - l k_2 < x^{k+p} \dot{x}^{l-1} > \tag{1.4}$$

ce qui peut s'écrire, en vertu de la relation de définition des moments (1.2) :

$$\boxed{\dot{\mu}_{k,l} = k\mu_{k-1,l+1} - l k_1 \mu_{k+1,l-1} - l k_2 \mu_{k+p,l-1}} \tag{1.5}$$

Il apparaît donc dans l'équation d'évolution du moment $\mu_{k,l}$ le moment d'ordre supérieur $\mu_{k+p,l-1}$ de la densité considérée. Ce terme d'ordre supérieur provient directement de la non linéarité de la force f caractérisée par le coefficient k_2. Si l'on veut déterminer l'évolution exacte de $\mu_{k,l}$ à un instant quelconque, il faut nécessairement connaître les moments d'ordre supérieur (et leur évolution). Par un effet de cascade, nous avons donc besoin de tous les moments, jusqu'à un ordre infini ; on dit alors que la relation n'est pas fermée.

Afin de fermer et d'utiliser cette relation, il est donc indispensable de connaître, ou, au moins, d'estimer les moments d'ordre supérieur de la densité. Dans ce cas, l'intérêt de cette méthode de simulation est qu'elle transporte un petit nombre de moments en comparaison du nombre de particules d'un faisceau dans (x, x').

On peut supposer que la connaissance d'un nombre suffisant de moments permet de bien approximer une densité de particules et donc d'estimer ses moments d'ordre supérieur. C'est ce que nous allons étudier dans le cas simple d'un espace des phases de dimension 2.

Dans cet exemple, on s'est limité à un seul terme non linéaire mais il peut y en avoir plusieurs notamment si l'on développe en série les forces de charge d'espace.

1.4.3 Un exemple de difficulté due aux forces non linéaires

L'étude dans l'espace des phases (x, x') suffit déjà pour voir apparaître une grosse difficulté de description en terme de moments.
Prenons un nuage de 32000 particules dans l'espace (x, x') remplissant uniformément au départ le disque de rayon 1 et étudions son évolution sous l'effet d'une force non linéaire : on constate qu'il apparaît au cours du temps des "filaments" dans le nuage de particules :

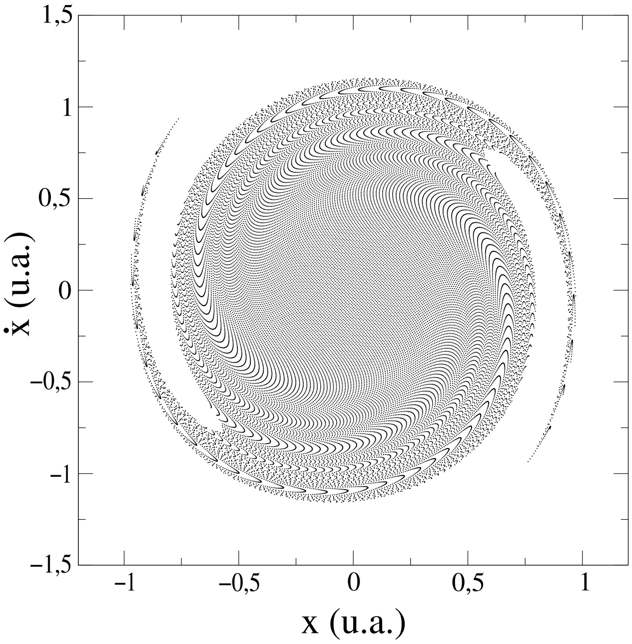


Fig. 1-5 : Nuage de particules dans l'espace de phases à t=20 (u.a.) avec pour densité initiale la densité uniforme sur le disque

Que signifient les moments de cette distribution? Quelles informations peut-on extraire de ces moments et comment les interpréter?

1.5 Plan de l'étude

Pour répondre à ces questions, il est indispensable d'analyser finement les propriétés des moments dans l'espace le plus simple, à une dimension. Le chapitre 2 est donc une étude (mathématique) des moments d'une densité. Elle est principalement fondée sur la relation qu'il existe entre les moments et les polynômes orthogonaux associés à une densité. Nous verrons qu'elle permet d'extraire des moments un certain nombre d'informations sur la densité.

Le chapitre 3 présente une approche simpliste du problème des moments. L'idée de cette méthode est, d'une part, de modéliser la densité considérée par un nombre limité de "macro-particules" déduites des moments initialement connus et, d'autre part, d'extrapoler les moments d'ordre supérieur nécessaires par quadrature. Nous verrons que cette approche est très limitée et pourquoi grâce aux résultats du chapitre 2.

Dans le chapitre 4, on généralise dans un espace des phases de deux dimensions les résultats obtenus au chapitre 2. Nous verrons, qu'à partir d'un nombre limité de moments on peut localiser un nuage de points soumis à une force non linéaire par son enveloppe convexe. Enfin nous appliquerons cette méthode à l'équation d'évolution des moments établie en 1.5.

Chapitre 2

Densité, moments et polynômes orthogonaux en dimension 1

2.1 Introduction et objectifs

L'objet de ce chapitre est de comprendre les liens qui existent entre une densité, ses polynômes orthogonaux et ses moments sur un domaine donné. Son but final est de reconstituer cette densité inconnue avec comme unique hypothèse la connaissance de ses moments.

En partant de la définition des polynômes orthogonaux et de leurs propriétés générales, nous verrons que l'on arrive à un certain nombre de résultats comme, par exemple, une façon originale et rapide de déterminer les polynômes orthogonaux normalisés d'une densité uniquement à partir de ses moments. Puis nous verrons, toujours avec la même hypothèse que l'on peut :

- estimer avec une très bonne précision le domaine sur lequel la densité est définie ;
- extrapoler ses moments d'ordre supérieur ;
- trouver une approximation polynomiale de cette densité sur le domaine trouvé.

Pour simplifier, on prendra dans tous les cas une densité paire (ou fonction de poids) ω définie positive sur un domaine $\mathcal{D}= [-a, a]$ avec a la borne du domaine qui peut être finie ou non. La fonction choisie étant paire, par commodité, on restreindra souvent l'étude à l'intervalle $[0, a]$.

2.2 Rappels sur les polynômes orthogonaux réels et complexes

2.2.1 Définitions

Soit ω une fonction de poids réelle (ou complexe) définie positive ou nulle sur un domaine $\mathcal{D}$.

On définit la suite des polynômes orthogonaux réels (ou complexes) relatifs à ω, la suite de polynômes : P_0,P_1,..., P_n,... de degré respectif 0, 1,..., n,... qui vérifie les relations suivantes dites d'orthogonalité [16] :

$$< P_k|P_l >= \int_{\mathcal{D}} P_k(x)P_l(x)\omega(x)dx = \delta_{kl} \text{ dans le cas réel}$$

et

$$< P_k|P_l >= \frac{1}{2i\pi}\oint_{\Gamma_\infty^+} P_k(z)P_l(z)\omega(z)dz = \delta_{kl} \text{ dans le cas complexe}$$

où δ_{kl} désigne le symbole de Kronecker et Γ_∞^+ un contour fermé dans le plan complexe autour du domaine $\mathcal{D}$.

Ceci définit les polynômes orthogonaux normalisés en vertu de la relation :

$$< P_k|P_k >= 1$$

2.2.2 Relation de récurrence entre trois polynômes orthogonaux consécutifs

Entre trois polynômes orthogonaux consécutifs, il existe une relation de récurrence de la forme (ici dans $\mathbb{R}$ mais c'est aussi valable dans $\mathbb{C}$) :

$$P_{n+1}(x) = (a_{n+1} + b_{n+1}x)P_n(x) + c_{n+1}P_{n-1}(x)$$

où a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1}sont 3 constantes.

Il est facile de démontrer ce théorème connu de la manière suivante [17] :

– Tout d'abord, on ajuste le coefficient b_{n+1} tel que le polynôme $\Pi(x)$ défini ci-dessous soit au plus de degré n :

$$\Pi(x) = P_{n+1}(x) - b_{n+1}xP_n(x)$$

– Puis on développe $\Pi(x)$ sur la base des polynômes $P_j(x)$:

$$\Pi(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j P_j(x)$$

– Enfin, en écrivant toutes les relations d'orthogonalité entre Π et les P_j pour $j < (n-1)$, on obtient :

$$< \Pi|P_j >= \alpha_j = \underbrace{< P_{n+1}|P_j >}_{=0 \ car \ j\neq n+1} - b_{n+1}\underbrace{< P_n|xP_j >}_{=0 \ car \ j+1<n} \quad \forall j < n-1 \tag{2.1}$$

ce qui donne :

$$\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_{n-2} = 0$$

Alors dans la base des P_j, Π s'écrit de la manière suivante :

$$\Pi(x) = P_{n+1}(x) - b_{n+1}xP_n(x) = \alpha_n P_n(x) + \alpha_{n-1}P_{n-1}(x)$$

et l'on obtient bien une relation entre $P_{n+1}(x)$, $P_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$:

$$\boxed{P_{n+1}(x) = b_{n+1}xP_n(x) + \alpha_n P_n(x) + \alpha_{n-1}P_{n-1}(x)} \tag{2.2}$$

2.2.3 Entrelacements des zéros des polynômes orthogonaux réels

Tout polynôme P_n de degré n d'une fonction de poids ω définie sur un domaine $\mathcal{D}$ réel possède n zéros distincts, simples et compris dans l'enveloppe convexe de $\mathcal{D}$ [18].

De plus, on peut montrer que les zéros des polynômes orthogonaux consécutifs P_n et P_{n+1} d'une même fonction sont entrelacés d'après la formule dite de Darboux-Christoffel [19] :
Entre 2 zéros successifs du polynôme P_{n+1}, on trouve un et un seul zéro du polynôme P_n.
Nous verrons au paragraphe (2.7.3) l'importance de cette propriété dans la problématique des moments.

2.2.4 Exemples : les polynômes de Legendre et d'Hermite

On donne deux exemples de polynômes orthogonaux : les polynômes de Legendre et d'Hermite.

2.2.4.1 Les polynômes de Legendre

On définit généralement les polynômes de Legendre comme les polynômes orthogonaux associés à la densité uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$ qui prennent la valeur 1 pour la valeur 1 de la variable ($P_n^L(1) = 1$).
La formule dite de Rodrigues [20] permet également de les définir par :

$$P_n^L(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$$

Les polynômes de Legendre obtenus sont non normalisés.

On a la relation de récurrence suivante :

$$(n+1)P_{n+1}^L(z) = (2n+1)zP_n^L(z) - nP_{n-1}^L(z)$$

Leur norme h_n est donnée par :

$${h_n}^2 = \int_{-1}^{1}\left(P_n^L(z)\right)^2 dz = \frac{2}{2n+1}$$

Enfin, sur un intervalle du type $[-a, a]$, on peut les définir par :

$$\boxed{P_{na}^L(z) = P_n^L(\frac{z}{a})}$$

2.2.4.2 Les polynômes d'Hermite

Les polynômes d'Hermite sont les polynômes orthogonaux associés à la fonction de poids gaussienne sur l'intervalle $[-\infty, +\infty]$.
Ils peuvent être définis (non normalisés) par la relation :

$$K_n(z) = (-1)^n exp\left(\frac{z^2}{2}\right)\frac{d^n}{dz^n}\left(exp\left(\frac{-z^2}{2}\right)\right)$$

Ils sont reliés par la relation de récurrence suivante :

$$K_{n+1}(z) = zK_n(z) - nK_{n-1}(z)$$

Leur norme k_n est donnée par :

$$k_n{}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (K_n(z))^2 exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) dz = n!\sqrt{2\pi}$$

2.3 Moments et polynômes orthogonaux

Le but de ce paragraphe est d'établir une méthode pratique de détermination des polynômes orthogonaux d'une densité ω à partir de ses moments. Pour cela, nous utilisons le formalisme matriciel.

2.3.1 Matrice de moments

On appelle moment d'ordre k de la densité ω définie sur $\mathcal{D}$ réel l'expression :

$$\mu_k =< x^k >= \int_{\mathcal{D}} x^k \omega(x) dx$$

Dans le cas complexe, ce moment est défini par [21] :

$$\mu_k^{\mathbb{C}} =< z^k >= \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_\infty^+} z^k \omega(z) dz$$

où Γ_∞^+ est un contour fermé autour du support de la densité.

Dans le cas d'une densité paire réelle, tous les moments d'ordre impair sont nuls. On peut alors restreindre l'étude à l'intervalle $[0, a]$.
De plus, par définition, on normalise tous les moments de ω de sorte que le moment d'ordre 0 μ_0 soit égal à 1.

Soit X le vecteur colonne :

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ ... \\ x^n \end{bmatrix}$$

Soit $\widetilde{X}$ le vecteur ligne qui est le vecteur transposé de X :

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & ... & x^n \end{bmatrix}$$

On peut alors former le produit tensoriel $X \otimes X$ qui est une matrice :

$$X \otimes X = X\widetilde{X} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ x & x^2 & x^3 & \dots & x^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n & x^{n+1} & x^{n+2} & \dots & x^{2n} \end{bmatrix}$$

Ceci permet d'obtenir la matrice des moments Q :

$$Q =< X \otimes X >=< X\widetilde{X} >= \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots & \mu_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \mu_{n+2} & \dots & \mu_{2n} \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'une densité paire définie dans $\mathbb{R}$:

$$Q =< X\widetilde{X} >= \begin{bmatrix} \mu_0 & 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \dots & \mu_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \mu_{n+1} & 0 & \dots & \mu_{2n} \end{bmatrix}$$

2.3.2 Matrice de polynômes orthogonaux

Considérons les n premiers polynômes P_j de degré respectif j ($j \leq n$) orthogonaux associés à une densité ω.
$P_j(x)$ s'écrit sous la forme suivante (qui est un produit scalaire) :

$$P_j(x) = \sum_{i=0}^{j} p_{ji} x^i = P_j X = \widetilde{X}\widetilde{P}_j$$

où X est le vecteur défini ci-dessus et P_j le vecteur ligne des coefficients du polynôme P_j :

$$P_j = \begin{bmatrix} p_{j0} & p_{j1} & \dots & p_{jj} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

On définit alors P comme la matrice des coefficients des polynômes orthogonaux, rangés horizontalement par ordre croissant telle que :

$$\begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \dots \\ P_{n-1}(x) \\ P_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{00} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ p_{10} & p_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-10} & p_{n-11} & \dots & p_{n-1n-1} & 0 \\ p_{n0} & p_{n1} & \dots & p_{nn-1} & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \dots \\ x^{n-1} \\ x^n \end{bmatrix} = PX$$

Remarque : la matrice P est toujours une matrice triangulaire inférieure. De plus, quand les polynômes orthogonaux sont normalisés, cette matrice est unique (il n'existe alors qu'une seule suite de polynômes orthogonaux rangés selon leur degré et associés à une même densité).

2.3.3 Détermination des polynômes orthogonaux associés à une densité à partir de ses moments

Plaçons-nous dans le cas réel (le calcul est aussi valable dans le cas complexe à $\frac{1}{2i\pi}$ près) et prenons deux polynômes P_n et P_m de degré respectif n et m :

$$P_n(x) = P_nX = \widetilde{X}\widetilde{P}_n$$

$$P_m(x) = P_mX = \widetilde{X}\widetilde{P}_m$$

Le produit scalaire des 2 polynômes peut alors s'écrire :

$$< P_n|P_m >= \int_{\mathcal{D}} P_n(x)P_m(x)\omega(x)dx = \int_{\mathcal{D}} P_nX\widetilde{X}\widetilde{P}_m\omega(x)dx$$

$$< P_n|P_m >=< P_nX\widetilde{X}\widetilde{P}_m >= P_n < X\widetilde{X} > \widetilde{P}_m = P_nQ\widetilde{P}_m = \delta_{nm}$$

En posant $Q =< X\widetilde{X} >$ et en supposant que $\widetilde{P}_m$ et P_n sont indépendants de X.

Ce qui donne plus généralement avec la matrice P définie plus haut :

$$\boxed{PQ\widetilde{P} = I} \tag{2.3}$$

On sait que la matrice Q des moments est définie positive, elle peut donc se décomposer de la manière suivante, avec R une matrice triangulaire inférieure (décomposition dite de Cholesky [22]) :

$$Q = R\widetilde{R}$$

$$PR\widetilde{R}\widetilde{P} = I$$

Une solution évidente pour P est par conséquent :

$$\boxed{P = R^{-1}} \tag{2.4}$$

qui est aussi une matrice triangulaire inférieure. La suite de polynômes orthogonaux normalisés associés à une densité étant unique, la matrice P correspondante l'est aussi. A partir de la relation ci-dessus, on calcule directement tous les polynômes orthogonaux rangés dans la matrice P à partir des moments par un procédé simple et R^{-1} est la seule et unique solution.
Remarque : en dimension 2, on peut faire le même type de calcul mais il n'y a plus unicité des polynômes orthogonaux pour une densité donnée.
Notons que, quand la densité est paire, tous les moments d'ordre impair sont nuls, ce qui implique que les polynômes de degré pair n'ont que des termes de degré pair et ceux de degré impair n'ont que des termes de degré impair ; P prend donc la forme (avec dans l'exemple n impair) :

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ p_{20} & 0 & p_{20} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ p_{n-10} & 0 & p_{n-12} & \dots & p_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & p_{n-11} & 0 & \dots & 0 & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, il devient donc évident que la relation de récurrence (2.2) prend la forme :

$$\boxed{P_{n+1}(x) = b_{n+1}xP_n(x) + c_{n+1}P_{n-1}(x)} \tag{2.5}$$

Conclusion

Grâce à la relation (2.4), on obtient les polynômes orthogonaux normalisés à partir des premiers moments d'une densité par un procédé simple et rapide.
En effet, on trouve, en général, que le calcul des polynômes orthogonaux à une normalisation près à partir des moments est présenté par le calcul du déterminant ci-dessous [23] :

$$P_n(x) = \delta_n \begin{vmatrix} \mu_0 & \dots & \dots & \mu_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \dots & \dots & \mu_{2n-1} \\ 1 & \dots & \dots & x^n \end{vmatrix}$$

L'avantage du procédé que nous venons de développer est qu'il donne directement les coefficients des polynômes orthogonaux voulus sous forme de matrice que l'on peut donc immédiatement exploiter.

2.3.4 Orthogonalité entre les moments et les polynômes orthogonaux

Considérons le produit scalaire suivant :

$$< P_m | x^n >= 0 \ \text{ pour } \ n < m \tag{2.6}$$

L'expression $P_m(x)$ s'écrit en fonction de ses coefficients p_{mj} ainsi :

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} p_{mj} x^j$$

Le produit scalaire précédent devient alors :

$$< P_m|x^n >= \sum_{j=0}^{m} p_{mj} < x^{j+n} >= 0$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{m} p_{mi}\mu_{n+i} = 0 \quad \text{pour} \quad m > n} \tag{2.7}$$

Cette relation nous sera utile au paragraphe (2.7.3) pour l'extrapolation des moments d'ordre supérieur de la densité ω.

2.4 Zéros des polynômes orthogonaux et calculs d'intégrales. Formules de quadrature

La méthode généralisée de Gauss s'applique au calcul d'intégrale de la forme [24] :

$$I = \int_{\mathcal{D}} f(x)\omega(x)dx$$

où f est une fonction suffisamment régulière sur $\mathcal{D}$ et ω une fonction de poids définie positive sur $\mathcal{D}$.

Cette intégrale I peut s'estimer par une relation dite de quadrature, avec n fixé, de la forme suivante :

$$I = \int_{\mathcal{D}} f(x)\omega(x)dx \approx \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$$

avec n couples de poids/points (λ_j, x_j) tels que cette approximation soit exacte pour tous les polynômes de degré inférieur à n.

En particulier, si on connaît les 2n premiers moments μ_k de la fonction de poids ω, on obtient 2n relations qui permettent de trouver les n couples (λ_j, x_j) tels que :

$$\boxed{\mu_k = \int_{\mathcal{D}} x^k\omega(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^k \;\; k = 0,\, 2,\, ...,\, 2(n-1)} \tag{2.8}$$

Notons en effet que pour avoir n couples de poids/points (λ_j, x_j), il faut 2n moments.

On montre que les x_j (pour $j = 1...n$) sont les zéros du polynôme orthogonal de degré n sur $\mathcal{D}$ associé à ω [25]. Les termes λ_j sont appelés les coefficients de Christoffel.

Il existe un algorithme appelé P.D.A. (pour Product Difference Algorithm) permettant de résoudre directement ces 2n équations non linéaires issues des 2n moments d'une fonction [26]. Cet algorithme, qui utilise le fait que les x_j sont les valeurs propres d'une matrice associée aux coefficients de récurrence, fait l'objet de l'annexe A.

En conclusion, si l'on ne connaît que les 2n premiers moments d'une fonction définie positive, on peut trouver n couples de poids/points (λ_j, x_j) qui caractérisent cette fonction ainsi que son domaine puisque ces x_j sont les zéros de son polynôme orthogonal de degré n et que ces zéros sont dans l'enveloppe convexe du domaine.

2.5 Reconstitution d'une densité à partir de ses moments quand le domaine est connu

On veut reconstituer une densité paire définie positive sur un intervalle donné supposé connu $[-a, a]$, a représentant la borne du domaine. Comme dans les cas précédents, la fonction étant paire, on restreint l'étude à l'intervalle $[0, a]$. En outre, on suppose que l'on connaît uniquement ses premiers moments, desquels on déduit instantanément ses polynômes orthogonaux P_j.

2.5.1 Cas général

D'après le théorème de densité de Weierstrass [27], toute fonction continue f sur un intervalle borné peut être approchée uniformément par un polynôme R_n de degré n tel que :

$$|f(x) - R_n(x)| < \varepsilon \ \ \forall x \epsilon \mathcal{D}$$

avec $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut.

La fonction f peut alors se mettre sous la forme :
$f = R_n + e$ où R_n est un polynôme de degré n qui est l'approximation polynomiale à l'ordre n de la fonction f sur $[0, a]$et e le reste.
Décomposons R_n sur la base des polynômes orthogonaux P_j associés à la densité ω définie sur $[0, a]$:

$$R_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j P_j(x)$$

Multiplions par $P_j(x)\omega(x)$ et intégrons sur $[0, a]$:

$$c_j = \int_0^a R_n(x) P_j(x) \omega(x) dx =< R_n | P_j >$$

par définition.

On choisit donc comme approximation de f, le polynôme R_n de degré n qui vérifie les relations :

$$\int_0^a R_n(x)P_j(x)\omega(x)dx = \int_0^a f(x)P_j(x)\omega(x)dx$$

$$R_n(x) = \sum_{j=0}^{n} < f|P_j > .P_j(x)$$

2.5.2 Cas particulier des polynômes de Legendre

Les relations précédentes deviennent d'après le paragraphe (2.2.4.1) :

$$R_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j P_j^L(\frac{x}{a})$$

avec

$$c_j = \int_0^a f(x)P_j^L(\frac{x}{a})dx \quad \text{et} \quad P_j^L(x) = \sum_{k=0}^{j} p_k^L(\frac{x}{a})^k$$

Donc

$$c_j = \sum_{k=0}^{j} \frac{p_k^L}{a^k} \int_0^a f(x)x^k dx = \sum_{k=0}^{j} p_k^L \frac{\mu_k}{a^k}$$

On obtient alors l'approximation polynomiale de f sur $[0, a]$ à partir de ses n premiers moments :

$$\boxed{R_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{j} p_k^L.\frac{\mu_k}{a^k} \right).P_j^L(\frac{x}{a})}$$

La densité étant paire sur l'intervalle donné, ses moments d'ordre impair seront tous nuls.
On peut donc ne considérer que les moments d'ordre pair et d'après la relation entre les moments et les polynômes, on peut ne prendre que les polynômes de Legendre d'ordre pair.

Remarque : dans le cas d'un domaine connexe, on choisit de prendre les polynômes de Legendre qui sont les polynômes orthogonaux associés à la densité uniforme du domaine. Si celui-ci est non connexe (séparé en plusieurs morceaux par exemple), on choisira de prendre les polynômes orthogonaux associés à la densité uniforme du domaine que l'on appellera aussi, abusivement, polynômes de Legendre.

Ecriture vectorielle de l'approximation R_n

On se donne les 2n premiers moments pairs de la densité f jusqu'à l'ordre 2(n-1): μ_0, μ_2, ..., $\mu_{2(n-1)}$.
Appelons M_n le vecteur colonne de taille n fini des polynômes de Legendre pairs jusqu'à l'ordre

2(n-1) normalisés et définis sur le support $[0, a]$:

$$M_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}}{2}(-1 + 3(\frac{x}{a})^2) \\ \frac{3}{8}(3 - 30(\frac{x}{a})^2 + 35(\frac{x}{a})^4) \\ \ldots \end{bmatrix}$$

Soit N_n est le vecteur de même taille obtenu en substituant dans le vecteur M_n la quantité x^j par le moment μ_j (j étant positif ou nul) :

$$N_n = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \frac{\sqrt{5}}{2}(-\mu_0 + 3\frac{\mu_2}{a^2}) \\ \frac{3}{8}(3\mu_0 - 30\frac{\mu_2}{a^2} + 35\frac{\mu_4}{a^4}) \\ \ldots \end{bmatrix}$$

Alors l'approximation R_n de f peut s'écrire simplement en fonction des vecteurs M_n et N_n sous la forme d'un produit scalaire classique :

$$\boxed{R_n(x) = \widetilde{N}_n.M_n} \tag{2.9}$$

Si l'on connaît les moments et le domaine de définition d'une densité paire, on peut déduire aisément l'approximation polynomiale de cette densité grâce à la relation ci-dessus.

2.6 L'intégrale de Stieltjes

On appelle transformée de Stieljes dans $\mathbb{R}$, l'intégrale suivante réelle [28] :

$$F(x) = \int_{\mathcal{D}} \frac{\omega(\xi)d\xi}{x - \xi}$$

En développant cette expression au voisinage de l'infini selon x, on fait apparaître les moments de ω :

$$\frac{1}{x-\xi} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-\xi/x}\right) = \frac{1}{x}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\xi}{x}\right)^j$$

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{\omega(\xi)d\xi}{x-\xi} = \frac{1}{x}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x^j}\int_{\mathcal{D}} \xi^j\omega(\xi)d\xi\right)$$

Donc

$$\boxed{F(x) = \int_{\mathcal{D}} \frac{\omega(\xi)d\xi}{x-\xi} = \frac{1}{x}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\mu_j}{x^j}}$$

Dans $\mathbb{C}$, cette intégrale s'écrit [29] :

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_\infty^+} \frac{\omega(v)dv}{z-v} = \frac{1}{z}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\mu_j^{\mathbb{C}}}{z^j}$$

avec $\mu_j^{\mathbb{C}}$ les moments dans $\mathbb{C}$ définis au paragraphe (2.3.1).

2.6.1 Pôles et enveloppes convexes. Développement en fractions continues

Considérons cette intégrale dans $\mathbb{R}$ pour $u = \frac{1}{x}$. Soit g la fonction définie par :

$$g(u) = \frac{F(u)}{u} = \sum_{j=0}^{+\infty} \mu_j u^j$$

On cherche l'approximant de Padé $g_{[n-1,n]}$ de g qui est, par définition, le rapport de deux polynômes de degré respectif n-1 et n et dont les premiers termes du développement en série correspondent à ceux du développement en série de g (voir annexes B et C) :

$$g(u) \approx g_{[n-1,n]}(u) = \frac{N_{n-1}(u)}{D_n(u)}$$

On sait que [30] :

$$D_n(u) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \cdots & \cdots & \mu_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{n-1} & \cdots & \cdots & \mu_{2n-1} \\ u^n & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{n} a_i u^i$$

Or d'après [31], le n$^{\text{ème}}$ polynôme orthogonal relatif à ω peut s'écrire :

$$P_n(u) = \delta_n \begin{vmatrix} \mu_0 & \cdots & \cdots & \mu_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{n-1} & \cdots & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & \cdots & \cdots & u^n \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} u^i$$

Donc

$$D_n(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{-i} = \frac{1}{x^n} \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = \frac{P_n(x)}{\delta_n x^n}$$

Quant au numérateur $N_{n-1}(u)$, il s'écrit :

$$N_{n-1}(u) = \frac{T_{n-1}(x)}{x^{n-1}}$$

où T_{n-1} est un polynôme de degré n-1.
On peut alors écrire que :

$$g(u) \approx g_{[n-1,n]}(u) = \frac{N_{n-1}(u)}{D_n(u)} = \delta_n x \frac{T_{n-1}(x)}{P_n(x)}$$

et la transformée de Stieljes peut donc s'approximer par :

$$\boxed{F(x) \approx F_{[n-1,n]}(x) = \delta_n \frac{T_{n-1}(x)}{P_n(x)}} \tag{2.10}$$

Nous avons donc montré que le dénominateur de l'approximant de Padé $F_{[n-1,n]}$ de la transformée de Stieljes F est directement le polynôme orthogonal de degré n de la densité ω.

On développe maintenant l'approximant $F_{[n-1,n]}$ en une fraction continue [32] :

$$F_{[n-1,\, n]}(x) \;=\; \cfrac{\beta_1}{x - \alpha_1 + \cfrac{\beta_2}{x - \alpha_2 + \cfrac{\beta_3}{\cdots}}}$$

On sait que le dénominateur de la $n^{\text{ème}}$ réduite est obtenu à une normalisation près par récurrence selon la relation bien connue des fractions continues [33] :

$$P_n(x) = (x - \alpha_n)P_{n-1}(x) + \beta_n P_{n-2}(x)$$

2.6.2 Conclusion et interprétation

La connaissance des moments de ω nous permet alors d'obtenir les premiers polynômes orthogonaux et d'après la récurrence ci-dessus les termes α_n et β_n. Par conséquent, on peut directement calculer l'approximant de Padé de F.

Nous avons présenté les différentes relations existant entre les moments, les polynômes orthogonaux, l'intégrale de Sieljes et son approximant de Padé relatifs à une fonction de poids ω.

Les zéros des polynômes orthogonaux associés à ω sont dans l'enveloppe convexe du domaine $\mathcal{D}$; ils sont aussi les pôles de l'approximant de Padé d'après la relation (2.10). Ces pôles permettent donc de caractériser l'enveloppe convexe du domaine de définition de la densité.

Se donner les premiers moments de ω permet alors d'obtenir cette enveloppe convexe du domaine : physiquement, la transformée de Stieljes correspondante (qui peut s'exprimer par la somme à l'infini des moments de ω) s'interprète comme un observateur placé à grande distance du domaine et le décrivant d'une manière globale et unique.

2.6.3 Application : le champ électrique complexe

2.6.3.1 Relation entre le champ complexe et les zéros des polynômes orthogonaux

Considérons le problème électrostatique d'une ligne infiniment longue perpendiculaire au plan (x, y) uniformément chargée dans un modèle en deux dimensions selon x et y ; le champ créé par une telle ligne est en $\frac{1}{\rho}$ et le potentiel est logarithmique.

Pour un conducteur de forme quelconque dont la section définit un domaine $\mathcal{D}$ dans le plan (x, y) et ayant une distribution de charge $\omega^{\mathbb{C}}$, on définit le potentiel complexe logarithmique $V(z)$ et son champ correspondant $E(z)$ [34] :

$$V(z) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{D}} \omega^{\mathbb{C}}(\xi) ln|z - \xi| d\xi$$

Le champ électrique complexe correspondant est défini par (la notation X^* exprimant le conjugué de X) :

$$E(z) = E_x + iE_y = -\left(\frac{\partial V(z)}{\partial z}\right)^*$$

Le conjugué de $E(z)$ vaut :

$$E^*(z) = E_x - iE_y = -\frac{\partial V(z)}{\partial z} \approx \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{D}} \omega^{\mathbb{C}}(\xi)\frac{\partial ln|z-\xi|}{\partial z}d\xi$$

Le champ complexe peut donc s'écrire en fonction de l'intégrale de Stieljes $F(z)$:

$$\boxed{E^*(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}F(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\mu_j^{\mathbb{C}}}{z^{j+1}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\delta_n\frac{R_{n-1}(z)}{P_n(z)}}$$

avec $\mu_j^{\mathbb{C}}$ le moment complexe déjà défini précédemment. $E^*(z)$ représente le champ complexe à l'extérieur de l'enveloppe convexe.
Cette application répond au problème suivant : comment placer un nombre fini de charges qui reproduisent au mieux ce champ extérieur complexe associé à la densité $\omega^{\mathbb{C}}$? On place donc n charges sur les coordonnées des zéros du polynôme orthogonal de degré n avec pour charges électriques les coefficients de Christoffel. Dans ce cas, les charges électriques correspondent bien à des pôles.

2.6.3.2 Le disque uniformément chargé

Appliquons cette représentation du champ complexe à un disque de rayon R uniformément chargé. Dans ce cas, les moments complexes sur le domaine peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\mu_j^{\mathbb{C}} = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\Gamma_\infty^+} z^j\omega^{\mathbb{C}}(z)dz = \int_{\mathcal{D}}(x+iy)^j\omega(x,y)dxdy = < H_j > +i < K_j >$$

Il est facile de voir que tous les moments $\mu_j^{\mathbb{C}}$ d'ordre impair sont nuls. De plus, on peut montrer par raison de symétrie du domaine que les moments pairs le sont aussi sauf $\mu_0^{\mathbb{C}}$. Par exemple :

$$\mu_2^{\mathbb{C}} = \int_{\mathcal{D}}(x+iy)^2dxdy = \mu_{20} - \mu_{02} + 2i\mu_{11} = 0$$

avec μ_{jk} les moments réels sur le disque définis en introduction . (Sur le disque uniforme $\mu_{20} = \mu_{02}$ et $\mu_{11} = 0$).

$$\mu_4^{\mathbb{C}} = \int_{\mathcal{D}}(x+iy)^4dxdy = \mu_{40} - 6\mu_{22} + \mu_{04} + 4i\underbrace{(\mu_{31} - \mu_{13})}_{=0} = \frac{1}{8} - \frac{6}{24} + \frac{1}{8} = 0$$

Tous les moments complexes sont donc nuls sur ce disque sauf $\mu_0^{\mathbb{C}}$; le champ complexe conjugué devient donc :

$$E^*(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}F(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\mu_0^{\mathbb{C}}}{z}$$

et

$$E_x(x,y) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\mu_0^c \frac{x}{x^2+y^2}$$

Finalement, par un changement de (x,y) en coordonnées polaires (ρ,θ), on retrouve bien le champ électrique d'un cylindre uniformément chargé de base un disque de rayon R en $\frac{1}{\rho}$:

$$\boxed{E_x(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\mu_0^{\mathbb{C}} \frac{cos\theta}{\rho}}$$

2.7 Extrapolation des moments d'ordre supérieur et estimation du support

Jusqu'à maintenant, on supposait que le bord du domaine de la densité était connu. Nous allons voir dans cette section comment on peut déterminer avec une bonne précision ce bord uniquement avec la connaissance des premiers moments de la densité. En effet, si on trace l'approximation polynomiale issue de la relation (2.9) avec une estimation du support peu précise, on obtient, dans certains cas, des sur-oscillations très importantes ; il est donc nécessaire de connaître avec une bonne précision les bornes du domaine.

2.7.1 Extrapolation naïve des moments d'ordre supérieur

Prenons l'exemple de la densité uniforme sur $[-1,1]$ et donnons ses 6 premiers moments pairs :

$$\mu_0 = 1 \quad \mu_2 = \frac{1}{3} \quad \mu_4 = \frac{1}{5} \quad \mu_6 = \frac{1}{7} \quad \mu_8 = \frac{1}{9} \quad \mu_{10} = \frac{1}{11}$$

La densité étant paire, on restreint l'étude sur $[0,1]$; de la relation de quadrature (2.8), on trouve donc les 3 zéros positifs du polynôme de Legendre de degré 6, ainsi que les coefficients de Christoffel associés :

n	x_j	λ_j
6	0.2386191861	0.4679139346
	0.6612093865	0.3607615731
	0.932469514	0.1713244924

Tableau 2-1 : Zéros du polynôme de Legendre d'ordre 6 et coefficients de Christoffel

Remarque : il est indispensable de retenir le plus de décimales possibles pour avoir une bonne précision sur le calcul des moments de la densité.

On peut essayer de chercher les moments d'ordre supérieur à 10 en extrapolant naïvement la relation de quadrature précédente à partir des 3 couples (x_j, λ_j) :

$$\mu_{2n} \approx \sum_{j=0}^{3} \lambda_j x_j^{2n} \quad \text{pour} \quad 2n > 10$$

Regardons ce que l'on obtient, par exemple, pour les moments pairs μ_{12} à μ_{40} et comparons-les aux vrais moments :

	moments vrais	moments extrapolés	erreur relative (en %)
μ_{12}	0.07692	0.07655	0.48
μ_{14}	0.06666	0.06547	1.78
μ_{16}	0.05882	0.05645	4.03
μ_{18}	0.05263	0.04887	7.13
μ_{20}	0.04761	0.04240	10.9
μ_{22}	0.04347	0.03683	15.3
μ_{24}	0.04000	0.03201	20
μ_{26}	0.03703	0.02782	24.9
μ_{28}	0.03448	0.02419	29.9
μ_{30}	0.03225	0.02103	34.8
μ_{40}	0.02439	0.01045	57.1

Tableau 2-2 : Vrais moments et moments extrapolés naïvement pour la densité uniforme

On constate que la précision se dégrade très vite lorsque n croît.
Dans le paragraphe suivant, nous allons donc tenter de comprendre ce que signifie cette extrapolation naïve compte tenu de l'étude que nous avons développée sur les polynômes orthogonaux de manière à y apporter un remède.

2.7.2 Interprétation de l'extrapolation naïve

Nous déduisons de (2.6.1) que si l'on approxime la transformée de Stieljes F par son approximant de Padé $F_{[n-1,n]}$, on obtient au dénominateur le polynôme orthogonal de la densité considérée dont les zéros sont les n x_j.
Se donner les 2n premiers moments revient donc à se donner l'approximant de Padé $F_{[n-1,n]}$ et donc à tronquer la fraction continue correspondante. Ceci revient à supposer que les b_{n+k} sont nuls pour $k > 0$ dans la relation de récurrence (2.5). Dans ce cas, on obtient :

$$P_{n+k}(x) = x^k P_n(x)$$

Par conséquent, le polynôme P_{n+k} a pour zéros ceux de P_n et k fois l'origine. Ce dernier étant un zéro multiple de P_{n+k} et ayant un poids nul dans la quadrature, on obtient donc :

$$\mu_{2n+k} \approx \sum_{j=0}^{n} \lambda_j x_j^{2n+k}$$

Nous avons montré que l'extrapolation naïve, à partir des 2n premiers moments - et donc à partir des n zéros des polynômes orthogonaux- est équivalente à approximer F par son approximant de Padé $F_{[n-1,n]}$. Malheureusement, l'utilisation des approximants de Padé n'apporte aucune information supplémentaire dans le cas de l'extrapolation à partir de la relation de quadrature.

Ceci revient à prendre pour densité approchée un ensemble de distributions de Dirac localisées à l'origine et aux points $\pm x_j,\ j = 1..n$.
Or cette distribution n'est pas physique car, dans notre cas, nous avons toujours des densités continues au moins par morceaux et certainement pas discrètes.
Comment obtenir une distribution continue? Il importe de conserver l'entrelacement des zéros qui doit être ici pris comme un principe. Ainsi, quand le degré des polynômes orthogonaux croît, les zéros se répartissent petit à petit dans l'enveloppe convexe du support.

Une extrapolation réaliste des moments d'ordre supérieur passe donc par l'analyse de la suite de coefficients de la relation de récurrence entre les polynômes orthogonaux. En particulier, intuitivement il semble plus logique de prendre $b_{n+k} = b_n\ \forall k$ plutôt que zéro, car ceci donne l'entrelacement désiré.
Il ne faut donc pas extrapoler directement les moments mais les polynômes orthogonaux associés ; c'est ce que nous allons maintenant étudier.

2.7.3 Extrapolation réaliste des moments d'ordre supérieur

2.7.3.1 Extrapolation de la récurrence

Exploitons la réflexion précédente : on se donne 2n premiers moments pairs de μ_0 à $\mu_{2(n-1)}$ d'une densité ω sur $[-a, a]$. On sait que l'on obtient les n premiers polynômes orthogonaux associés à ω par (2.4) dont les 3 derniers sont reliés par la relation :

$$P_n(x) = b_n x P_{n-1}(x) + c_n P_{n-2}(x)$$

Si l'on suppose que les coefficients b_n et c_n convergent chacun vers une valeur finie quand n devient grand, on fige alors la valeur des b_{n+k} et c_{n+k} (avec $k \geq 1$) à leur dernière valeur trouvée, c'est-à-dire b_n et c_n :

$$\boxed{P_{n+k}(x) = b_n x P_{n+k-1}(x) + c_n P_{n+k-2}(x)\ \ \forall k \geq 1} \tag{2.11}$$

Cela signifie en particulier que l'on ne tronque plus la fraction continue correspondante. On respecte alors les propriétés des fractions continues et des polynômes orthogonaux, notamment l'entrelacement de leurs zéros.

Vérifions que les suites formées par les coefficients b_n et c_n convergent effectivement vers des valeurs limites en fonction du degré de la récurrence (2.11) pour un certain nombre de densités.

Prenons, tout d'abord le cas de la densité uniforme sur $[-1, 1]$ (figure *2-1*) et traçons l'évolution de ces coefficients en fonction du degré de la dernière récurrence connue :

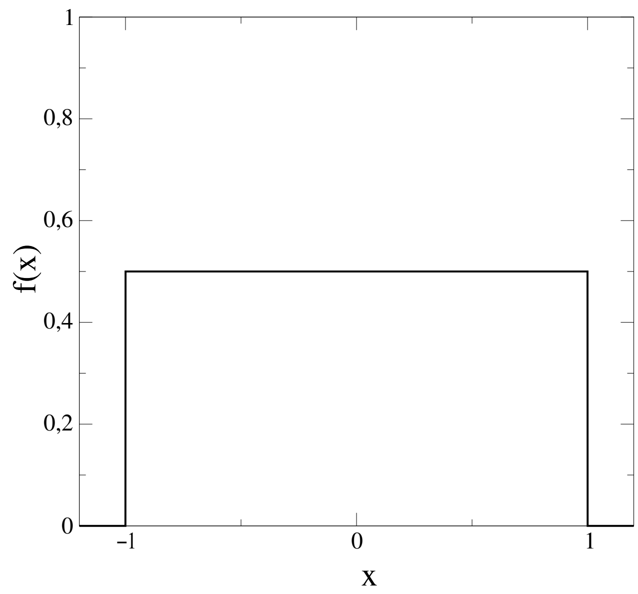


Fig. 2-1 : Densité uniforme

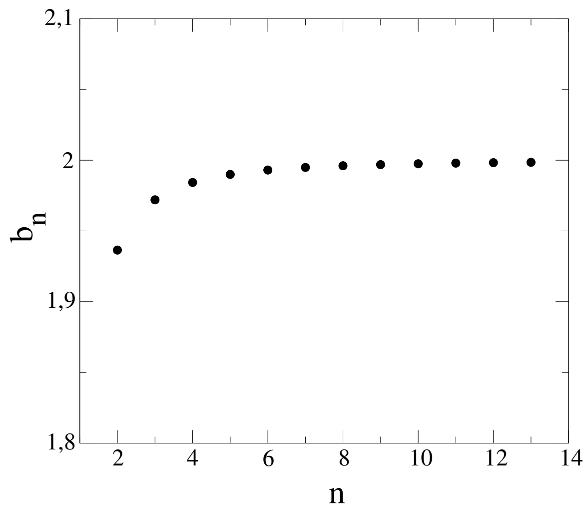


Fig. 2-2 : Coefficients b_n pour la densité uniforme

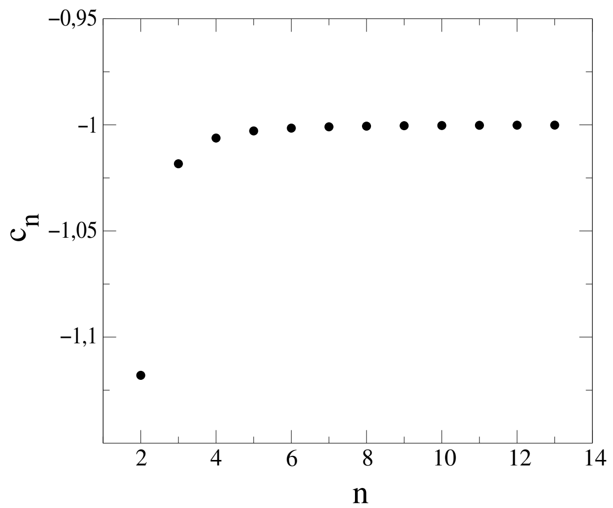


Fig. 2-3 : Coefficients c_n pour la densité uniforme

Les figures *2-2* et *2-3* montrent bien que les b_n et c_n tendent assez rapidement vers des valeurs limites qui sont respectivement 2 et -1 ce que l'on savait déjà puisque les polynômes orthogonaux de la densité uniforme sont les polynômes de Legendre.

Si l'on prend maintenant le cas d'une densité à double bosses ("une bibosse"), centrée sur l'origine (figure *2-4*), nous constatons également que les deux suites b_n et c_n convergent relativement rapidement vers des limites finies (figures *2-5* et *2-6*).

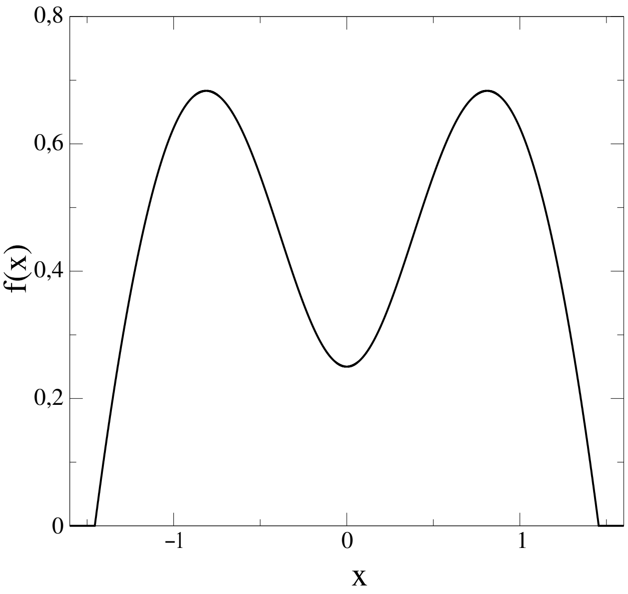


Fig. 2-4 : Densité "bibosse"

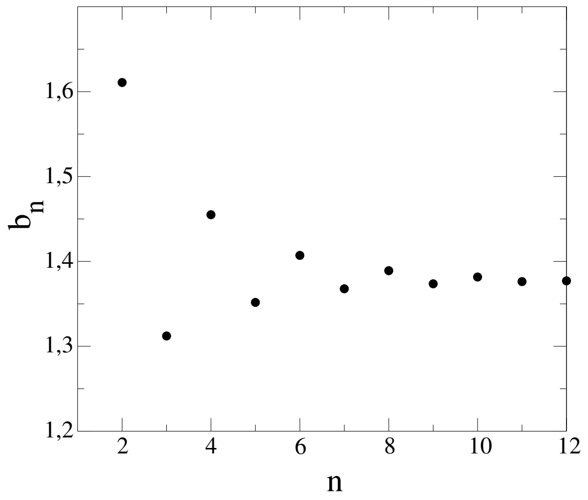


Fig. 2-5 : Coefficients b_n pour la "bibosse"

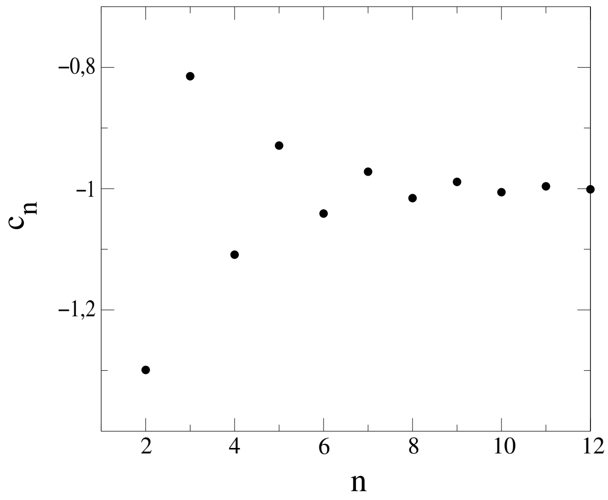


Fig. 2-6 : Coefficients c_n pour la "bibosse"

Par contre, pour "une tribosse", c'est-à-dire une bosse principale centrée en 0 et deux petites bosses latérales symétriques (figure *2-7*), chacune des suites b_n et c_n se décompose en trois sous-suites convergentes correspondant vraisemblablement aux trois bosses de la densité (voir figures *2-8* et *2-9*) :

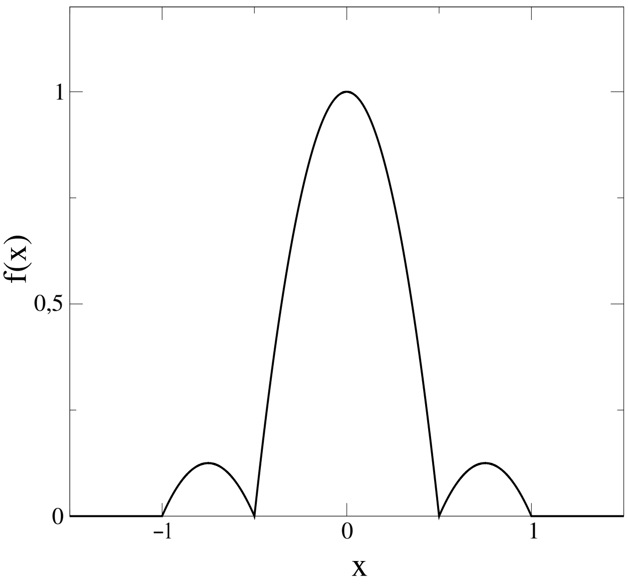


Fig. 2-7 : Densité "tribosse"

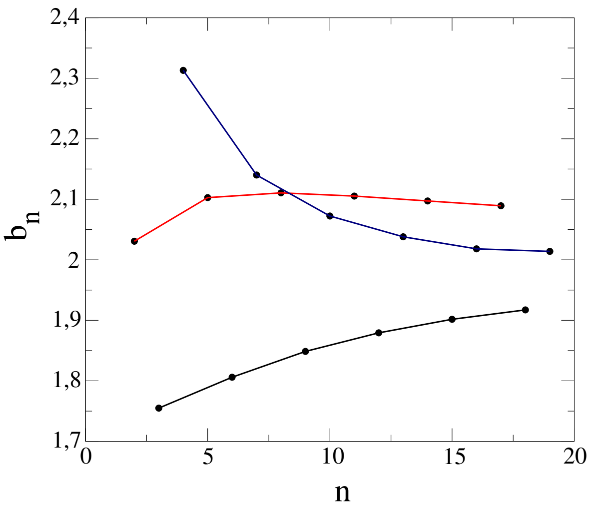


Fig. 2-8 : Coefficients b_n pour la "tribosse"

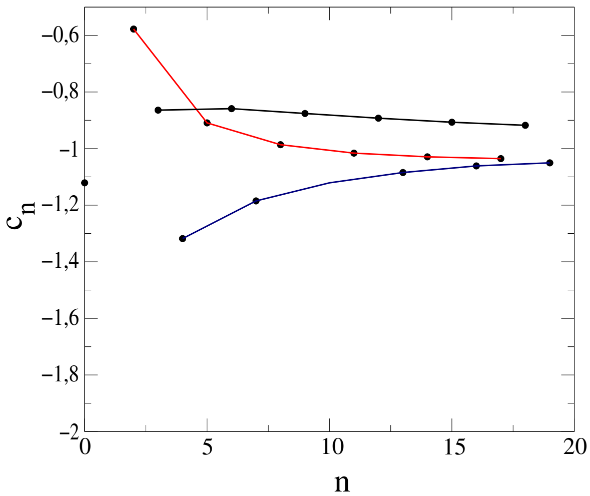


Fig. 2-9 : Coefficients c_n pour la "tribosse"

Enfin, si l'on prend deux bosses décalées et symétriques par rapport à l'origine (figure *2-10*), les suites b_n et c_n se séparent chacune très distinctement en deux sous-suites qui convergent rapidement (figures *2-11* et *2-12*). La limite supérieure de la suite b_n correspond aux n impairs alors que la limite inférieure correspond aux n pairs. Pour la suite c_n, c'est le contraire ;
Nous apporterons un premier élément de réponse à ce phénomène au paragraphe (2.7.4).

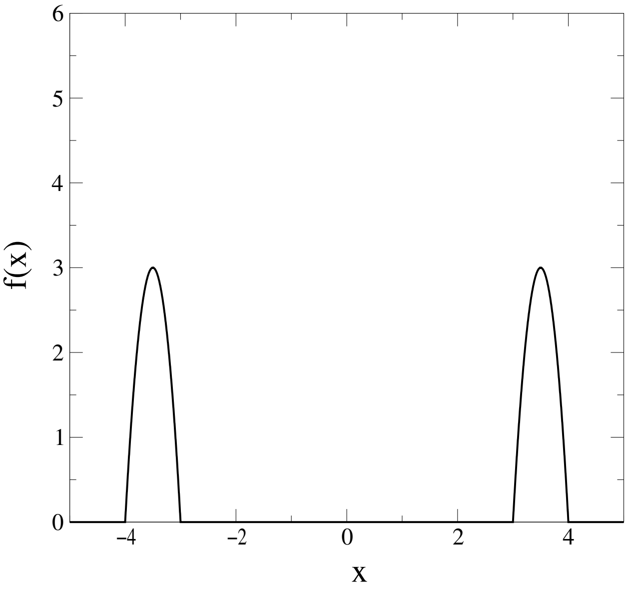
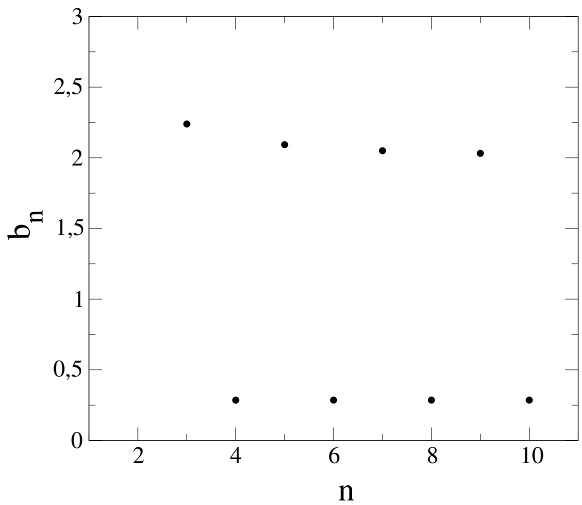


Fig. 2-10 : Densité bosse décalée par rapport à l'origine



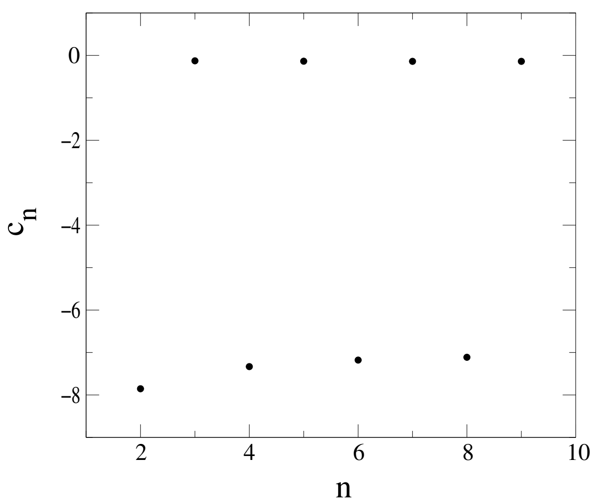


Fig. 2-11 : Coefficients b_n pour la bosse décalée par rapport à l'origine

Fig. 2-12 : Coefficients c_n pour la bosse décalée par rapport à l'origine

Dans beaucoup de cas, les suites b_n et c_n ont un comportement asymptotique connu, éventuellement en termes de sous-suites. Nous pouvons maintenant extrapoler les polynômes orthogonaux de degré supérieur à n en utilisant la relation (2.11).

De la relation d'orthogonalité entre ces polynômes extrapolés et les moments correspondants (2.7), on a :

$$\sum_{j=0}^{n+1} p_{n+1j}\mu_j = 0$$

Soit :

$$\sum_{j=0}^{n} p_{n+1j}\mu_j + p_{n+1n+1}\mu_{n+1} = 0$$

et

$$\boxed{\mu_{n+1} = -\frac{1}{p_{n+1n+1}} \sum_{j=0}^{n} p_{n+1j}\mu_j} \tag{2.12}$$

A partir de la prolongation de la récurrence ci-dessus, on calcule les moments d'ordre supérieur, de proche en proche, jusqu'à un ordre voulu.

2.7.3.2 Résultats

Comparons maintenant les moments extrapolés raisonnablement que l'on obtient, toujours à partir des 6 premiers moments de la densité uniforme sur $[-1, 1]$ par rapport aux moments vrais : les valeurs du tableau *2-3* sont en outre à comparer avec celles du tableau *2-2* :

	moments vrais	moments extrapolés	erreur relative (en %)
μ_{12}	0.07692	0.07692	0.003
μ_{14}	0.06666	0.06667	0.01
μ_{16}	0.05882	0.05884	0.03
μ_{18}	0.05263	0.05267	0.07
μ_{20}	0.04761	0.04768	0.13
μ_{22}	0.04347	0.04357	0.21
μ_{24}	0.04000	0.04012	0.31
μ_{30}	0.03225	0.03249	0.74
μ_{34}	0.02857	0.02889	1.14
μ_{38}	0.02564	0.02606	1.63
μ_{40}	0.02439	0.02485	1.91

Tableau 2-3 : Vrais moments et moments extrapolés raisonnablement pour la densité uniforme

Conclusion : à partir des premiers moments d'une densité, on peut connaître ceux d'ordre supérieur avec une bonne précision à condition de respecter l'entrelacement des zéros.

2.7.4 Lois de récurrence et estimation du support

2.7.4.1 Cas où les b_n et c_n ont chacun une limite unique

On se donne les 2n premiers moments pairs (jusqu'à l'ordre 2n) d'une densité paire ω définie sur un domaine de la forme $[-a, a]$ où a est maintenant inconnu. La relation (2.4) nous permet de déduire les n premiers polynômes orthogonaux associés.

On suppose être dans le cas d'une densité dont les coefficients de récurrence b_n et c_n ont convergé, et nous allons en déduire une estimation de la borne supérieure de l'enveloppe convexe du domaine $\mathcal{D}$.
Partons de la relation de récurrence suivante en supposant que les suites b_n et c_n ont convergé respectivement vers b et c :

$$P_n(x) = bxP_{n-1}(x) + cP_{n-2}(x) \tag{2.13}$$

D'après ce que l'on a vu précédemment, le polynôme P_n est différent de 0 en dehors de l'enveloppe convexe du support. Donc cette enveloppe convexe peut être caractérisée par l'expression "$\frac{1}{P_n}$ non définie".

En réalité, on calcule la quantité $Q_n(x)$ suivante :

$$Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)}$$

Divisons (2.13) par $P_{n-1}(x)$:

$$\frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)} = bx + c\frac{P_{n-2}(x)}{P_{n-1}(x)}$$

D'où :

$$Q_n(x) = bx + c\frac{1}{Q_{n-1}(x)}$$

Nous cherchons quand $Q_n(x)$ n'est pas défini ; une possibilité est que la suite Q_n ne converge pas. Nous prendrons alors comme enveloppe convexe du support le domaine de non convergence de la suite Q_n.
Si les Q_n convergent vers une valeur Q, ceci donne :

$$Q = bx + c\frac{1}{Q}$$

$$Q^2 - bxQ - c = 0$$

Le discriminant de cette expression vaut $\Delta = b^2x^2 + 4c$.

La suite Q_n ne converge donc pas quand $\Delta < 0$, ce qui impose la condition suivante :

$$\boxed{|x| < 2\frac{\sqrt{-c}}{b}} \tag{2.14}$$

Nous prendrons alors comme estimation du bord :

$$\boxed{a \approx 2\frac{\sqrt{-c_n}}{b_n}} \tag{2.15}$$

Exemple numérique :

Prenons l'exemple de la densité uniforme sur $[-1, 1]$ et voyons le support que l'on obtient dans le tableau (*2-4*) en appliquant la relation (2.15) pour plusieurs valeurs de n dans la récurrence (2.13) (donc pour 2n moments connus) :

n	b_n	c_n	support estimé
2	1.9364	-1.1180	1.0920
4	1.9843	-1.0062	1.0110
6	1.9930	-1.0015	1.0042
8	1.9960	-1.0006	1.0022
12	1.9982	-1.0001	1.0009

Tableau 2-4 : Estimation des coefficients b_n et c_n et du support en fonction de n pour la densité uniforme

Plus n est grand et plus le bord a est estimé avec précision : plus on connaît de moments d'une densité et plus on peut déterminer avec précision son intervalle de définition.

2.7.4.2 Cas de deux sous-suites convergentes

Revenons au cas où la densité est représentée par deux bosses décalées (figure *2-10* dans paragraphe (2.7.3.1)) : nous avions vu que les suites b_n et c_n tendaient chacune vers deux limites distinctes que nous appelons b_1, b_2 et c_1, c_2. Les limites de chaque suite étant alternées selon n, on peut donc écrire deux relations de la forme de (2.13) que tous les polynômes orthogonaux vérifient alternativement selon que n est pair ou impair :

$$P_n(x) = b_1 x P_{n-1}(x) + c_1 P_{n-2}(x) \tag{2.16}$$
$$P_{n-1}(x) = b_2 x P_{n-2}(x) + c_2 P_{n-3}(x) \tag{2.17}$$
$$P_{n-2}(x) = b_1 x P_{n-3}(x) + c_1 P_{n-4}(x) \tag{2.18}$$
$$P_{n-3}(x) = b_2 \ldots. \tag{2.19}$$

Des trois premières relations, on obtient :

$$P_n(x) = (b_1 b_2 x^2 + c_1 + c_2) P_{n-2}(x) - c_1 c_2 P_{n-4}(x) \tag{2.20}$$

Divisons (2.20) par $P_{n-2}(x)$ et en définissant désormais $Q_n(x)$ par :

$$Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{P_{n-2}(x)}$$

Il vient :

$$Q_n(x) = (b_1 b_2 x^2 + c_1 + c_2) - c_1 c_2 \frac{1}{Q_{n-2}(x)} \tag{2.21}$$

Si la suite $Q_n(x)$ converge vers une valeur Q :

$$Q^2 - (b_1 b_2 x^2 + c_1 + c_2)Q + c_1 c_2 = 0 \tag{2.22}$$

On a vu que la suite Q_n ne converge pas quand $\Delta < 0$, ce qui impose la condition suivante :

$$(b_1 b_2 x^2 + c_1 + c_2)^2 - 4c_1 c_2 < 0$$

Donc :

$$|(b_1 b_2 x^2 + c_1 + c_2)^2| < 4c_1 c_2$$

Ce qui peut s'écrire comme :

$$-2\sqrt{c_1 c_2} < (b_1 b_2 x^2 + c_1 + c_2) < 2\sqrt{c_1 c_2}$$

Finalement :

$$\boxed{\sqrt{\frac{-(c_1 + c_2 + 2\sqrt{c_1 c_2})}{b_1 b_2}} \leq |x| < \sqrt{\frac{-(c_1 + c_2 - 2\sqrt{c_1 c_2})}{b_1 b_2}}}$$

Ce qui donne bien deux bornes quand x est positif et leur symétrique quand x est négatif.

Exemple numérique :

Pour le cas correspondant à la figure *2-10*, à partir des 12 premiers moments, nous obtenons les valeurs suivantes :

$$b_1 = 0.284 \quad b_2 = 2.027 \quad \text{et} \quad c_1 = -7.099 \quad c_2 = -0.141$$

Soit :

$$3.020 \leq |x| \leq 4.005$$

On retrouve alors bien le domaine de définition symétrique des bosses qui était $[3, 4]$.

Conclusion

La caractérisation fine, en termes de sous-suites convergentes, est donc l'outil essentiel qui permet de calculer complètement le domaine en une dimension pour une densité quelconque à partir de ses moments. Plus on connaît de moments, plus la précision sur le bord estimé du domaine est grande.

2.7.4.3 Critère de régularité

Il existe un autre moyen, appelé critère de régularité [35], pour estimer le domaine d'une densité à partir de ses polynômes orthogonaux P_n de degré n : le domaine de la densité considérée est défini par tous les points x vérifiant la condition suivante :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} sup|P_n(x)|^{\frac{1}{n}} \leq 1} \tag{2.23}$$

Reprenons l'exemple précédent de la densité comprise entre 3 et 4 (figure *2-10*) et appliquons ce critère à tous ses polynômes jusqu'à l'ordre 10 (ce qui correspond à la connaissance des 11 premiers moments) ; nous trouvons alors un domaine compris entre 3.031 et 3.973. Nous avons représenté sur la figure *2-13* trois polynômes, P_6, P_8 et P_{10}, pour lesquels le critère de régularité est appliqué :

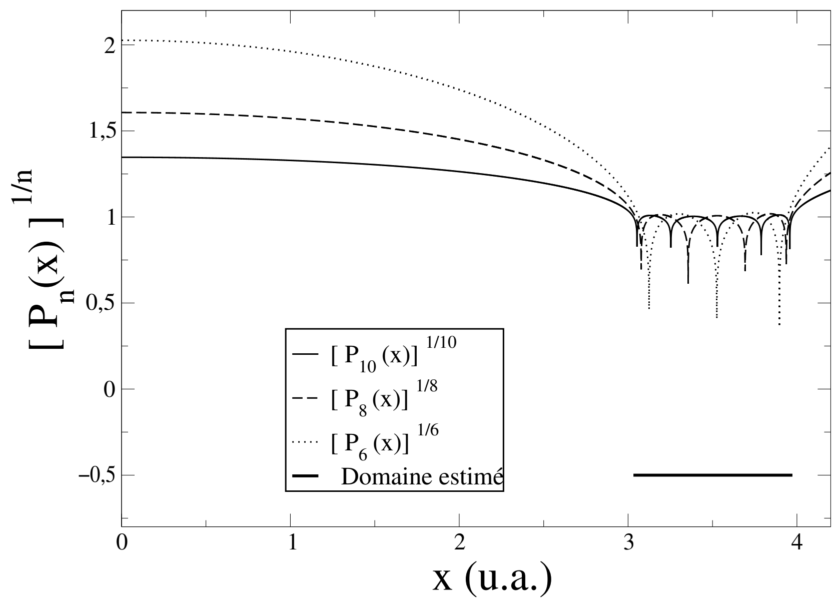


Fig. 2-13 : Estimation du domaine à partir du critère de régularité

Nous constatons donc que ce critère est légèrement moins précis et surtout plus aléatoire que la méthode que nous avons développée. Cependant, il peut donner une première estimation du domaine dans le cas d'une densité compliquée.

2.8 Reconstruction d'une densité uniquement à partir des moments : un exemple complet

On considère la densité suivante, paire et normalisée telle que $\mu_0 = 1$ sur l'intervalle $[-x_c, x_c]$:

$$\omega(x) = \omega_0 \frac{-1.5x^4 + 3.5x^2 + 1}{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad x_c = \sqrt{\frac{1}{6}(7 + \sqrt{73})}$$

On suppose que l'on ne connaît de cette densité ni sa forme analytique, ni le bord de son domaine x_c. Seules sont connues les valeurs numériques des 6 premiers moments pairs, μ_0, μ_2, μ_4, μ_6, μ_8, μ_{10}.

Uniquement à partir de cette hypothèse, nous allons :

1. Extrapoler un nombre choisi de moments d'ordre supérieur ;
2. Trouver une estimation du support x_c ;
3. Reconstruire $\omega(x)$ sous forme polynomiale $\breve{\omega}(x)$.

Par souci de clarté, nous n'avons volontairement pas donné les valeurs numériques des moments initiaux supposés connus ainsi que celles des coefficients des polynômes orthogonaux correspondants.

2.8.1 Moments d'ordre supérieur

Q, la matrice des moments, prend la forme :

$$Q = \begin{bmatrix} \mu_0 & 0 & \mu_2 & 0 & \mu_4 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \mu_4 & 0 & \mu_6 \\ \mu_2 & 0 & \mu_4 & 0 & \mu_6 & 0 \\ 0 & \mu_4 & 0 & \mu_6 & 0 & \mu_8 \\ \mu_4 & 0 & \mu_6 & 0 & \mu_8 & 0 \\ 0 & \mu_6 & 0 & \mu_8 & 0 & \mu_{10} \end{bmatrix}$$

La décomposition de Cholesky nous donne les 5 premiers polynômes orthogonaux rangés dans la matrice P définie au paragraphe (2.3.2) :

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{20} & 0 & p_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{31} & 0 & p_{33} & 0 & 0 \\ p_{40} & 0 & p_{42} & 0 & p_{44} & 0 \\ 0 & p_{51} & 0 & p_{53} & 0 & p_{55} \end{bmatrix}$$

La dernière récurrence connue est donc entre P_5, P_4 et P_3 :

$$P_5(x) = b_5 x P_4(x) + c_5 P_3(x)$$

où l'on calcule :

$$b_5 = \frac{p_{55}}{p_{44}} = 1.2428 \quad \text{et} \quad c_5 = \frac{p_{51} - b_5 p_{40}}{p_{31}} = -0.9684$$

Comme on l'a vu dans le paragraphe (2.7.3), on extrapole la récurrence entre les polynômes orthogonaux en gardant les termes b_5 et c_5 comme limites, ce qui donne pour les polynômes d'ordre supérieur à 5 :

$$\begin{aligned}
P_6(x) &= b_5 x P_5(x) + c_5 P_4(x) \\
P_7(x) &= b_5 x P_6(x) + c_5 P_5(x) \\
P_8(x) &= b_5 x P_7(x) + c_5 P_6(x) \\
&\dots
\end{aligned}$$

On obtient alors une nouvelle matrice P. De la relation (2.12), on extrapole les moments d'ordre supérieur.
Comparons ces moments aux vrais moments de ω mais aussi à ceux obtenus par l'extrapolation naïve :

		Extrapolation rigoureuse		Extrapolation naïve	
	Moments vrais	Moments	Erreur relative (%)	Moments	Erreur relative (%)
μ_{12}	7.6091	7.6086	0.006	7.549	0.79
μ_{14}	15.199	15.194	0.03	14.74	2.9
μ_{16}	31.281	31.252	0.09	29.16	6.76
μ_{18}	65.927	65.795	0.20	58.06	11.9
μ_{20}	141.65	141.12	0.37	115.96	18.1
μ_{22}	309.27	307.37	0.61	231.96	24.9
μ_{24}	684.40	678.00	0.93	464.35	32.1
μ_{30}	7899.7	7711.1	2.38	3731.1	52.7
μ_{34}	42004	40425	3.76	14973	64.3
μ_{38}	228838	216434	5.42	60093	73.7
μ_{40}	538217	504042	6.35	120387	77.6

Tableau 2-5 : Comparaison entre les vrais moments et ceux obtenus par les deux méthodes présentées pour notre densité

On peut alors constater, d'après le tableau (*2-5*), l'efficacité de la méthode rigoureuse face à celle de la méthode naïve dès les premiers moments extrapolés et ceci uniquement avec les 6 premiers moments pairs.
Plus on connaît de moments initialement, plus les moments d'ordre supérieur sont précis.

2.8.2 Support x_c

La borne supérieure x_c du domaine peut être évaluée d'après (2.15) par la relation :

$$x_c = 2\frac{\sqrt{-c_5}}{b_5}$$

compte tenu de la dernière relation de récurrence. On trouve alors :

x_c déduit	x_c vrai	erreur relative (en %)	x_3
1.583	1.609	1.61	1.415

Tableau 2-6 : Comparaison du support estimé au vrai support pour notre densité

A titre de comparaison, nous avons donné dans le tableau (*2-6*) la valeur de x_3 obtenu qui est le zéro de module maximum du polynôme orthogonal de degré 6 (qui est *a priori* le polynôme orthogonal de degré le plus élevé connu).

Si l'on prend plus de moments initiaux connus, on ira plus loin dans la relation de récurrence (2.13) et la précision sur l'estimation du bord sera meilleure. En effet, dans le tableau (*2-7*), on constate que l'on passe d'une erreur relative sur le bord de 1.6% avec 6 moments à 0.12% avec les 14 premiers moments pairs de la densité.

nombre de moments initiaux connus	x_c déduit	x_c vrai	erreur relative (en %)
6	1.583	1.609	1.61
8	1.597	1.609	0.74
10	1.602	1.609	0.43
12	1.605	1.609	0.24
14	1.607	1.609	0.12

Tableau 2-7 : Erreur relative sur le support en fonction du nombre de moments initiaux connus

2.8.3 Reconstruction de la densité

On veut reconstruire la densité sous forme polynomiale à partir de ses 6 premiers moments pairs.
En appliquant la relation (2.9) :

$$\breve{\omega}(x) = \widetilde{N}_6.M_6$$

avec

$$M_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}}{2}(-1+3(\frac{x}{x_c})^2) \\ \frac{3}{8}(3-30(\frac{x}{x_c})^2+35(\frac{x}{x_c})^4) \\ \frac{\sqrt{13}}{16}(-5+105(\frac{x}{x_c})^2-315(\frac{x}{x_c})^4+231(\frac{x}{x_c})^6) \\ \frac{\sqrt{17}}{128}(35-1260(\frac{x}{x_c})^2+6930(\frac{x}{x_c})^4-12012(\frac{x}{x_c})^6+6435(\frac{x}{x_c})^8) \\ \frac{\sqrt{21}}{256}(-63+3465(\frac{x}{x_c})^2-30030(\frac{x}{x_c})^4+90090(\frac{x}{x_c})^6-109395(\frac{x}{x_c})^8+46189(\frac{x}{x_c})^{10}) \end{bmatrix}$$

$$N_6 = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \frac{\sqrt{5}}{2}(-\mu_0+3\frac{\mu_2}{x_c^2}) \\ \frac{3}{8}(3\mu_0-30\frac{\mu_2}{x_c^2}+35\frac{\mu_4}{x_c^4}) \\ \frac{\sqrt{13}}{16}(-5\mu_0+105\frac{\mu_2}{x_c^2}-315\frac{\mu_4}{x_c^4}+231(\frac{\mu_6}{x_c^6}) \\ \frac{\sqrt{17}}{128}(35\mu_0-1260\frac{\mu_2}{x_c^2}+6930\frac{\mu_4}{x_c^4}-12012\frac{\mu_6}{x_c^6}+6435\frac{\mu_8}{x_c^8}) \\ \frac{\sqrt{21}}{256}(-63\mu_0+3465\frac{\mu_2}{x_c^2}-30030\frac{\mu_4}{x_c^4}+90090\frac{\mu_6}{x_c^6}-109395\frac{\mu_8}{x_c^8}+46189\frac{\mu_{10}}{x_c^{10}}) \end{bmatrix}$$

la fonction initiale peut s'approximer sous forme polynomiale :

$$\boxed{\breve{\omega}(x) = 0.2629 + 0.6408x^2 - 0.9031x^4 + 0.5616x^6 - 0.1970x^8 + 0.02812x^{10}}$$

En toute rigueur, on devrait appliquer la relation précédente en considérant non seulement les 6 premiers moments de la densité mais aussi ceux d'ordre supérieur que l'on a calculés par extrapolation. Mais nous n'aurions alors aucun critère pour choisir le degré du dernier moment extrapolé sans inclure dans l'approximation polynomiale trop d'erreurs issues de l'extrapolation des moments d'ordre supérieur.

Enfin comparons graphiquement $\breve{\omega}$ à la vraie fonction ω :

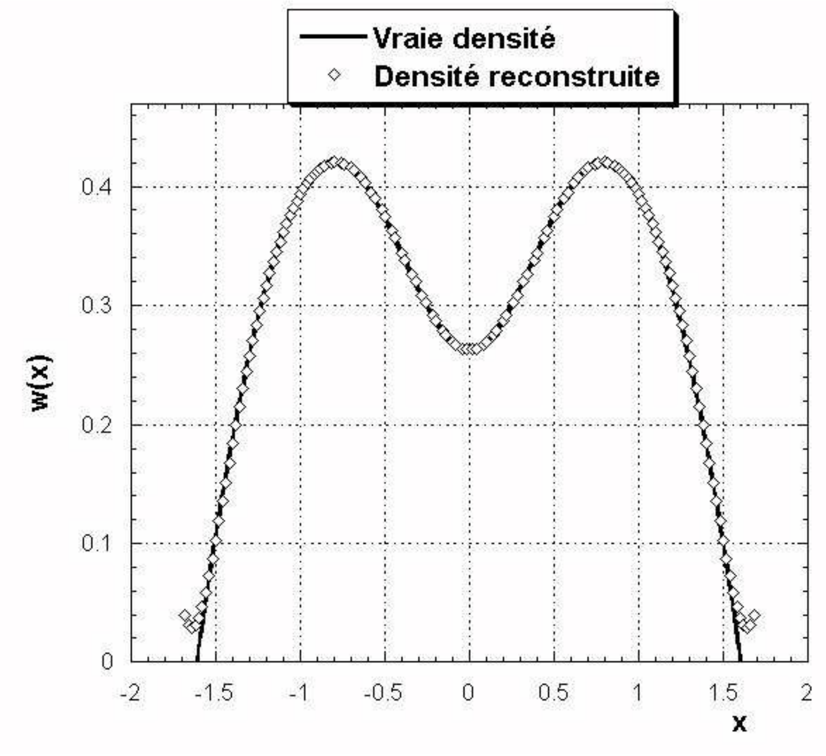


Fig. 2-14 : Comparaison entre la densité vraie et la densité reconstruite

On constate donc que la densité reconstruite reproduit très bien la vraie densité (figure *2-14*). Plus le nombre de moments initiaux sera grand et mieux le bord x_c sera connu et la reconstruction sera plus précise.

2.9 Conclusion du chapitre

Notre analyse des polynômes orthogonaux et des moments en une dimension a permis de comprendre la problématique du sujet et de définir des outils adaptés à une méthodologie dans le cas d'une densité paire :

- tout d'abord, nous avons établi une façon simple et originale de déterminer les polynômes orthogonaux d'une densité à partir de ses moments. De plus, nous avons mis en évidence les relations qui existent entre les moments, les polynômes orthogonaux, les approximants de Padé et l'intégrale de Stieljes d'une densité ;

- ensuite, l'analyse de la récurrence entre trois polynômes orthogonaux successifs - notamment en terme de sous-suites b_n et c_n - a permis de déterminer les sous-domaines où la densité est dérivable. Par extrapolation de cette relation, à partir d'un nombre fini de moments, il est donc possible d'estimer avec une très bonne précision le domaine de définition de la densité ;

- une fois ce domaine estimé, la connaissance des moments a permis de reconstruire la densité sous forme d'un développement polynomial. Plus on aura de moments et plus cette reconstruction sera précise ;

- enfin, à partir de l'extrapolation de la récurrence précédente et la relation d'orthogonalité entre les moments et les polynômes orthogonaux, nous avons pu extrapoler les moments d'ordre supérieur de la densité.

Nous verrons au chapitre 4 dans quelle mesure il est possible de généraliser cette méthodologie pour un espace de deux dimensions.

Chapitre 3

Densité et polynômes en dimension 2 : approche naïve

3.1 Introduction

Nous avons vu en dimension 1 qu'avec les 2n premiers moments pairs d'une densité définie sur $\mathcal{D}$, on peut calculer n couples de poids/points (λ_j, x_j) qui caractérisent la densité sur son domaine de définition à partir de la relation de quadrature suivante :

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^k \tag{3.1}$$

Plaçons-nous maintenant dans l'espace des phases de dimension 2 $(x, \dot{x})$. Nous allons généraliser cette relation pour trouver, à partir d'un certain nombre de moments $\mu_{k,l}$ de la densité $\omega(x, \dot{x})$, un réseau de points la caractérisant dans $(x, \dot{x})$.On suppose la densité symétrique par rapport à l'origine et définie sur un domaine $\mathcal{D}$. C'est pourquoi on limitera souvent l'étude au demi-plan où x est positif.

Nous verrons ensuite comment on envisage d'exploiter ce réseau en terme d'évolution de densité ; nous nous intéresserons en particulier à l'évolution d'un nuage de points au cours du temps [36].

Enfin nous comparerons cette méthode à celle d'une simulation multiparticulaire classique et nous en déduirons ses limites. Il apparaîtra que cette méthode ne peut malheureusement pas être utilisée mais il sera intéressant de comprendre pourquoi.

3.2 Génération d'un réseau en deux dimensions

La généralisation de la relation de quadrature (3.1) en deux dimensions, à partir des moments $\mu_{k,l}$ d'une densité $\omega(x, \dot{x})$ paire peut s'écrire :

$$\boxed{\mu_{k,l} = \int x^k \dot{x}^l \omega(x, \dot{x}) dx d\dot{x} = \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j x_j^k \dot{x}_j^l \quad k + l \ \text{étant pair}} \tag{3.2}$$

3.2.1 Construction d'un réseau rectangulaire

Afin de générer un réseau rectangulaire représentatif de la densité en $(x, \dot{x})$, on applique la relation de quadrature en une dimension avec les moments, sur les axes, $\mu_{k,0}$ et $\mu_{0,k}$ tels que :

$$\mu_{k,0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{xi} x_i^k \;\text{ et }\; \mu_{0,k} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\dot{x}i} \dot{x}_i^k$$

La densité étant paire en x ou en $\dot{x}$, on ne retient que les $\mu_{k,0}$ et $\mu_{0,k}$ avec k pair afin de pouvoir résoudre le système correspondant. On a alors besoin de 2n moments comme $\mu_{0,0}$, $\mu_{2,0}$, ..., $\mu_{2(2n-1),0}$ et 2n moments comme $\mu_{0,0}$, $\mu_{0,2}$, ..., $\mu_{0,2(2n-1)}$ pour obtenir n x_i et n $\dot{x}_i$.
En combinant tous les x_i et les $\dot{x}_i$, on obtient un réseau de points dont chaque poids est déterminé par la résolution du système linéaire en Λ_i donné par la relation (3.2).

Si l'on applique cette méthode à la distribution uniforme sur un disque de rayon 1, on constate certaines anomalies (voir figure *3-1* où la taille de chaque point représente son poids caractéristique) bien que les points du réseau reproduisent parfaitement les premiers moments :

- le disque est mal décrit : certains points sont à l'extérieur du support ;
- les points ne sont pas les zéros des polynômes orthogonaux de la densité comme c'est le cas en une dimension;
- certains points peuvent être dans des régions non-stables pour la dynamique alors que le disque peut être dans une région stable.

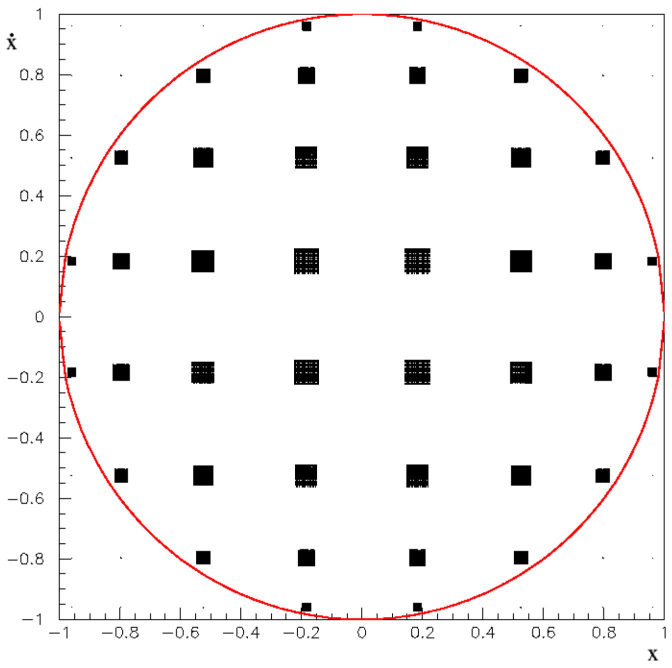


Fig. 3-1 : Réseau de 64 points "classique" pour une densité uniforme sur le disque de rayon 1

C'est pourquoi on cherche un réseau plus approprié, circulaire, afin de mieux décrire le support dans l'espace des phases, toujours dans le cas de la densité uniforme.

3.2.2 Construction d'un réseau à symétrie de révolution

Considérons le changement de variable circulaire ci-dessous :

$$\begin{cases} x & = \rho cos\theta \\ \dot{x} & = \rho sin\theta \end{cases}$$

Nous commençons par générer un premier réseau rectangulaire de n points ρ_i et n points χ_i correspondants à ω dans l'espace (ρ, χ) tels que :

$$\begin{cases} x & = & \rho\chi \\ \dot{x} & = & \rho\sqrt{1-\chi^2} \end{cases}$$

et ce, en utilisant les premiers moments $\mu^r_{k,l}$ calculés dans le jeu de variables (ρ, χ) :

$$\boxed{\mu^r_{k,l} =< \rho^k\chi^l >= \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho^{k+1}\chi^l}{\sqrt{1-\chi^2}}\omega(\rho,\theta)d\rho d\chi} \tag{3.3}$$

compte tenu du Jacobien correspondant :

$$J(\rho,\chi) = \begin{vmatrix} \rho & \chi \\ -\rho\chi/\sqrt{1-\chi^2} & \sqrt{1-\chi^2} \end{vmatrix} = \frac{\rho}{\sqrt{1-\chi^2}}$$

En fait, comme dans le cas du réseau rectangulaire précédent, on n'utilise que les moments $\mu^r_{k,0}$ et $\mu^r_{0,l}$ avec k et l pairs pour obtenir ce réseau en (ρ, χ).

Enfin, à partir de ces n ρ_i et ces n χ_i, on génère les n^2 couples $(x_k, \dot{x}_k)$, $k = 1, 2, .., n^2$ de telle sorte que :

$$\boxed{\begin{cases} x_k & = \rho_i\chi_j & \text{pour} \quad i = 0,1,..,n;\ j = 0,1,..,n \\ \dot{x}_k & = \rho_i\sqrt{1-\chi_j^2} & \text{pour} \quad i = 0,1,..,n;\ j = 0,1,..,n \end{cases}} \tag{3.4}$$

On détermine les n^2 poids associés Λ_i aux $(x_i, \dot{x}_i)$ en reprenant les moments calculés dans l'espace des $(x, \dot{x})$:

$$\mu_{k,l} = \sum_{i=1}^{n^2} \Lambda_i x_i^k y_i^l$$

Finalement, on obtient un réseau de n^2 points $(x_i, \dot{x}_i)$ associés à un poids Λ_i caractéristique de la densité définie sur le domaine $\mathcal{D}$ dans l'espace $(x, \dot{x})$. On appelle ces points, les points d'intégration caractéristiques de la densité ω.

Appliquons cette méthode à la densité uniforme sur le disque de rayon 1. On cherche donc un réseau de points $(x_i, \dot{x}_i)$ caractérisant le disque de rayon 1.
De la relation (3.3) on a les moments dans le jeu de coordonnées (ρ, χ) :

$$\mu_{k,l}^r =< \rho^k \chi^l >= \frac{1}{k+2} \int_0^1 \frac{\chi^l}{\sqrt{1-\chi^2}} d\chi$$

On calcule d'abord les ρ_i et χ_i à partir des moments $\mu_{k,0}^r$ et $\mu_{0,k}^r$, puis on en déduit les couples $(x_i, \dot{x}_i)$ grâce aux relations (3.4).
Enfin, on calcule leur poids Λ_i en utilisant les premiers moments pairs $\mu_{k,l}$ dans le jeu de variables $(x, \dot{x})$.
Dans notre cas, on obtient le réseau de points ci-dessous (figure *3-2*) que l'on peut comparer à celui obtenu précédemment (figure *3-1*) :

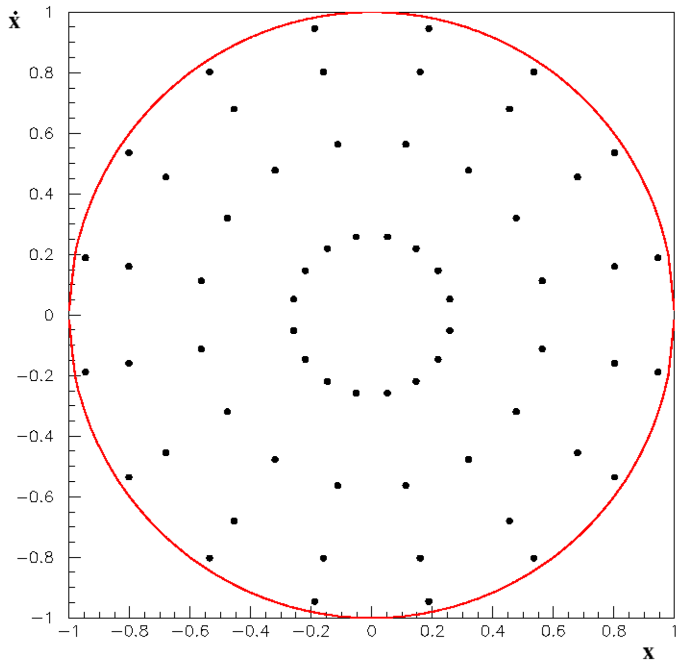


Fig. 3-2 : Réseau circulaire de 64 points adapté à une densité uniforme sur le disque de rayon unité

3.3 Evolution des points d'intégration

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'évolution des paramètres statistiques d'une densité ω définie sur $\mathcal{D}$ dans l'espace des phases - qui est à l'origine du temps uniforme sur le disque centré de rayon 1- et soumise à une force extérieure non linéaire.

Dans un premier temps, nous considérerons notre méthode basée sur un nombre réduit de "macroparticules" décrivant la densité de départ à un ordre donné. Nous prendrons comme ma-

croparticules celles définies au paragraphe précédent. Nous les ferons évoluer comme si elles étaient de vraies particules. Ceci reviendra donc à considérer, en terme de moments, que les moments d'ordre supérieur sont donnés par l'extrapolation naïve. Nous avons considéré cette méthode car c'est la plus simple possible.
Puis nous comparerons les résultats obtenus avec ceux résultant d'une simulation réaliste multiparticulaire faisant appel à un grand nombre de particules (de 10000 à 30000 selon le cas).

De manière à avoir une grande précision, nous utiliserons dans tous les cas le même intégrateur, à savoir un intégrateur symplectique du deuxième ordre qui conserve les propriétés de la canonicité du système [37].

3.3.1 Hypothèses et conditions initiales

Considérons la densité initialement uniforme sur le disque de rayon 1. Au cours du temps, les particules sont supposées soumises à une force non linéaire de la forme $f(x) = -(k_1 x + k_2 x^5)$, ce qui donne l'équation du mouvement suivante :

$$\ddot{x} + k_1 x + k_2 x^5 = 0$$

où l'on prendra dans notre exemple $k_1 = 1.5$ et $k_2 = 1$.

On génère tout d'abord un réseau circulaire comme celui que nous venons de voir au paragraphe (3.2.2). Pour cela, on se donne tous les moments pairs $\mu_{k,l}$ jusqu'à l'ordre N_μ tels que $k + l \leq N_\mu$.

Tous les moments d'ordre supérieur étant extrapolés par la relation de quadrature (3.2), on a :

$$\dot{\mu}_{k,l} = \frac{d}{dt}\left(\sum_j \Lambda_j x_j^k \dot{x}_j^l\right) = \sum_j (\dot{\Lambda}_j x_j^k \dot{x}_j^l + k\Lambda_j x_j^{k-1} \dot{x}_j^l \dot{x}_j + l\Lambda_j x_j^k \dot{x}_j^{l-1} \ddot{x}_j) \tag{3.5}$$

D'autre part, si $\dot{x}$ est la dérivée de x et, d'après l'équation du mouvement, f la dérivée de $\dot{x}$, l'évolution des moments s'écrit :

$$\dot{\mu}_{k,l} = \int (kx^{k-1}\dot{x}^{l+1} + lx^k \dot{x}^{l-1} f(x))\omega(x,\dot{x})dxd\dot{x} + \underbrace{\int x^k \dot{x}^l \frac{d\omega(x,\dot{x})}{dt} dxd\dot{x}}_{=0} \tag{3.6}$$

L'intégrale de droite est nulle de par la constance du nombre de particules. Par contre, dans l'intégrale restante, le moment d'ordre (k-1,l+1) est calculable par quadrature car il est de degré inférieur à N_μ.
Ceci donne donc :

$$\dot{\mu}_{k,l} = \sum_j k\Lambda_j x_j^{k-1} \dot{x}_j^{l+1} + l < x^k \dot{x}^{l-1} f(x) > \tag{3.7}$$

En supposant pour toutes les macroparticules que :
- les poids sont constants, c'est-à-dire que $\dot{\Lambda}_j = 0$;

- $\dot{x_j}$ est bien la dérivée de x ;
- les termes $< x^k \dot{x}^{l-1} f(x) >$ sont calculables par quadrature ;

il vient des relations (3.5) et (3.6) :

$$\sum_j l\Lambda_j x_j^k \dot{x}_j^{l-1} \ddot{x}_j = l < x^k \dot{x}^{l-1} f(x) > \tag{3.8}$$

Enfin, comme la force f s'écrit $f(x) = -(k_1 x + k_2 x^5)$, le terme de gauche peut donc se calculer aussi par quadrature, ce qui donne par identification :

$$\boxed{\ddot{x}_j = -(k_1 x_j + k_2 x_j^5)} \tag{3.9}$$

et

$$\ddot{x}_j + k_1 x_j + k_2 x_j^5 = 0$$

Le mouvement global est équivalent au mouvement individuel des macroparticules. Elles ont donc toutes la même équation du mouvement.

3.3.2 Evolution de l'émittance RMS

Dans un premier temps, nous allons comparer le grossissement relatif de l'émittance RMS ε_{rms} en fonction du temps. Rappelons que l'on a défini cette quantité comme étant :

$$\varepsilon_{rms} = 2\sqrt{\langle x^2\rangle\langle \dot{x}^2\rangle - \langle x\dot{x}\rangle^2} = 2\sqrt{\mu_{2,0}\mu_{0,2} - \mu_{1,1}^2}$$

On tracera le logarithme décimal du grossissement relatif de l'émittance ε_{rms} par rapport à l'émittance de départ ε_{rms0} :

$$Log(\frac{|\varepsilon_{rms} - \varepsilon_{rms0}|}{\varepsilon_{rms0}})$$

En prenant un nuage de 10000 particules sur un disque de densité uniforme dans l'espace des phases que l'on fait évoluer, on obtient la variation d'émittance de la figure *3-3*.

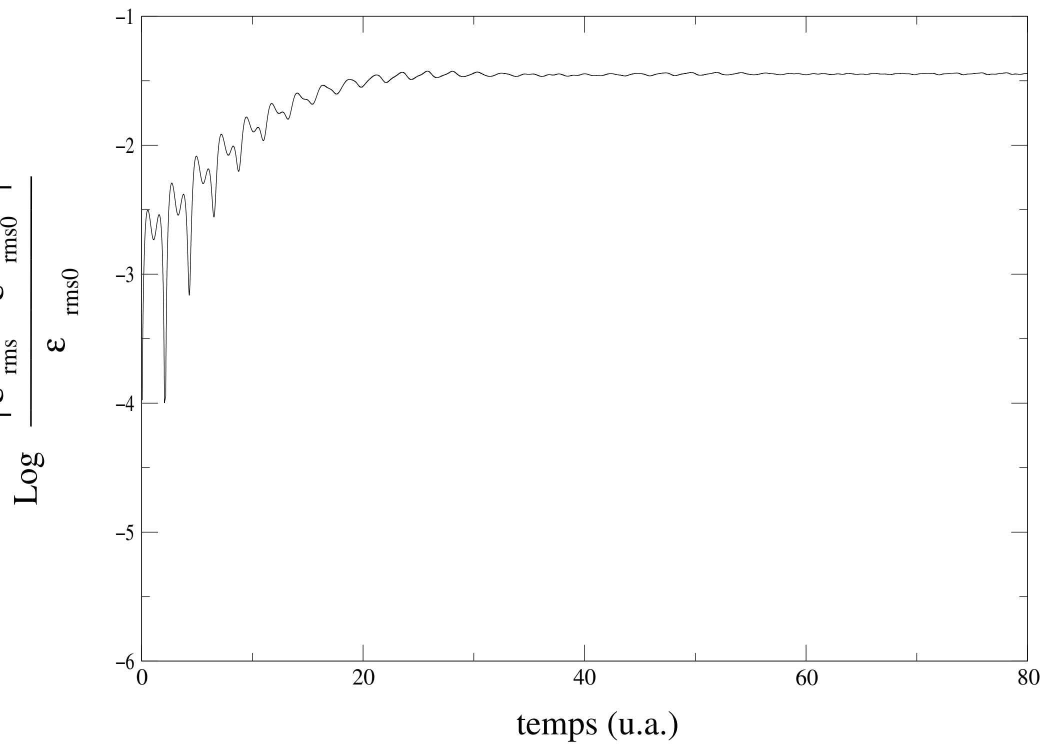


Fig. 3-3 : Logarithme décimal de la variation relative de l'émittance pour un nuage de 10000 particules en fonction du temps

On constate qu'au bout d'un certain temps l'émittance atteint une valeur d'équilibre (aux alentours de t=30). On distingue donc deux régimes caractéristiques qui sont le régime transitoire (pour t $\leq$ 30) et le régime d'équilibre. Dans l'espace des phases, cela signifie que le nuage initial va tourner en se filamentant pour aboutir à une distribution d'équilibre (figures *3-4* et *3-5*).

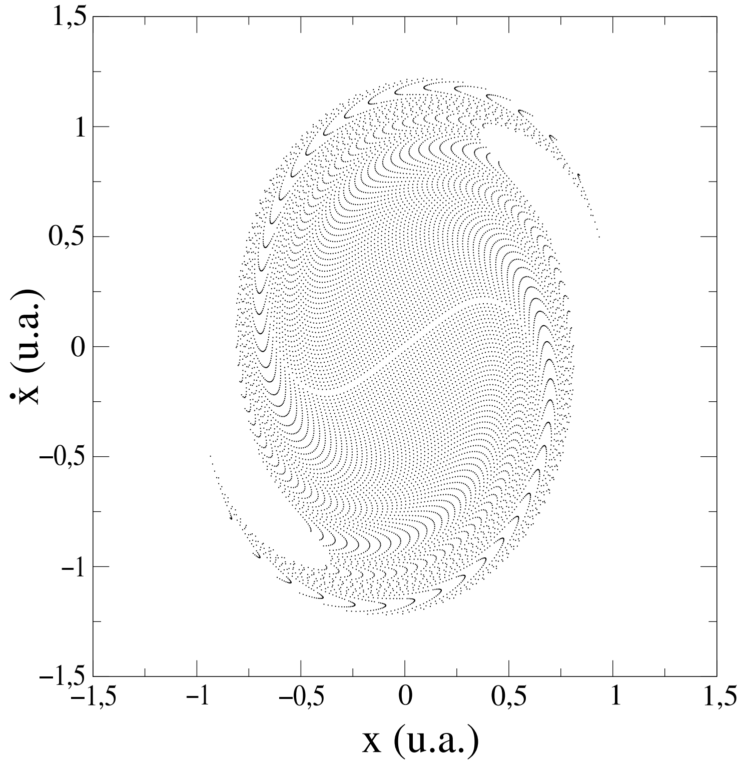


Fig. 3-4 : Distribution du nuage de points à t=15 dans l'espace des phases $(x, \dot{x})$

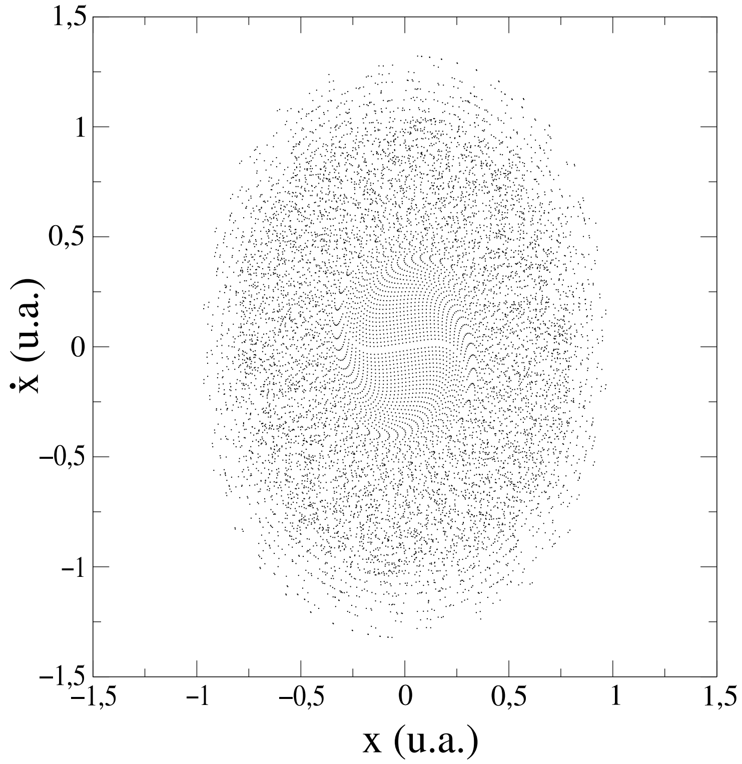


Fig. 3-5 : Distribution du nuage de points à t=200 dans l'espace des phases $(x, \dot{x})$

Comparons cette quantité que l'on obtient en prenant 64 points d'intégration et en les faisant évoluer au cours du temps.

3.3.2.1 Régime transitoire

Pour un temps $t \leq 30$, les deux courbes de variation d'émittance (simulation naïve et simulation réaliste classique) se superposent correctement mais pas totalement comme on peut le voir sur la figure *3-6*.

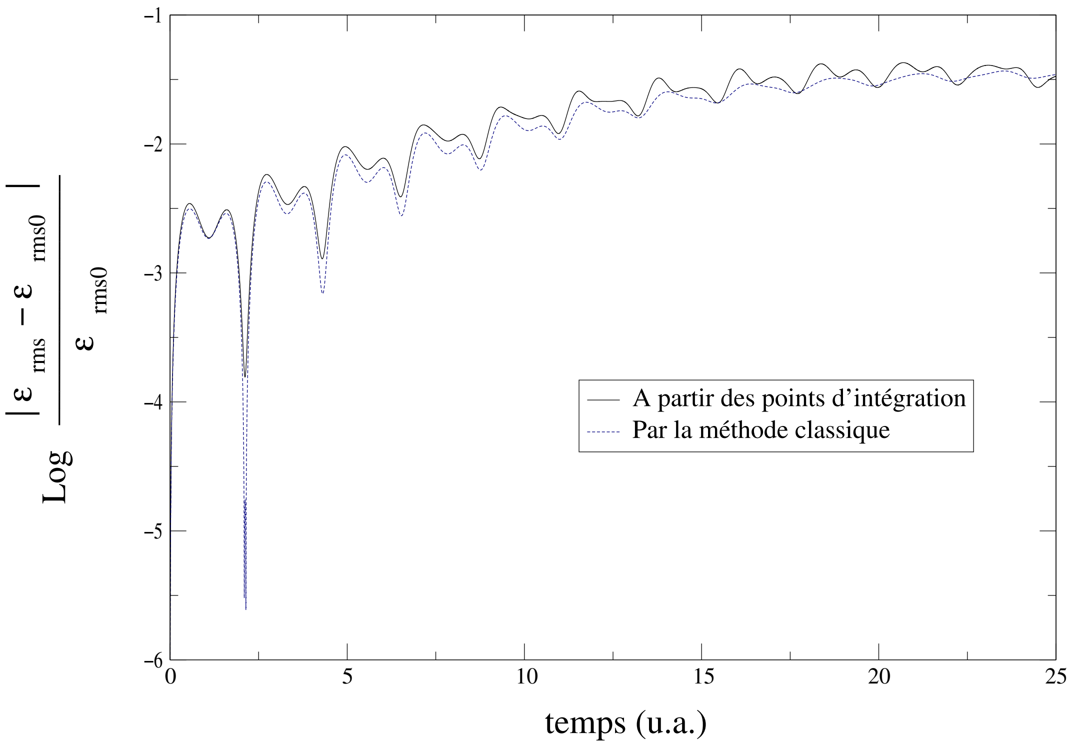


Fig. 3-6 : Logarithme décimal de la variation relative de l'émittance pour un nuage de 10000 particules en fonction du temps

Dans le régime transitoire, l'émittance converge vers celle obtenue par la méthode des points d'intégration quand on augmente le nombre de particules du nuage initial.
On dispose dans ce cas d'une méthode de simulation extrêmement précise avec un nombre réduit de points si l'on connaît exactement la densité initiale.

3.3.2.2 Régime d'équilibre

Alors qu'en réalité l'émittance atteint une valeur d'équilibre, on observe dans le cas de notre méthode une pseudo-périodicité (figure *3-7*) : après avoir atteint une valeur d'équilibre, elle décroît puis remonte de nouveau vers cette valeur. Néanmoins, cette valeur d'équilibre est toujours la même pour les différentes périodes et correspond à celle obtenue avec l'évolution simple illustrée sur la figure *3-3*.

L'explication de ce phénomène est que l'on fait évoluer un nombre fini de points dans l'espace des phases. Cette finitude fait que la périodicité de chacune des trajectoires entraîne une pseudo-périodicité de l'émittance.

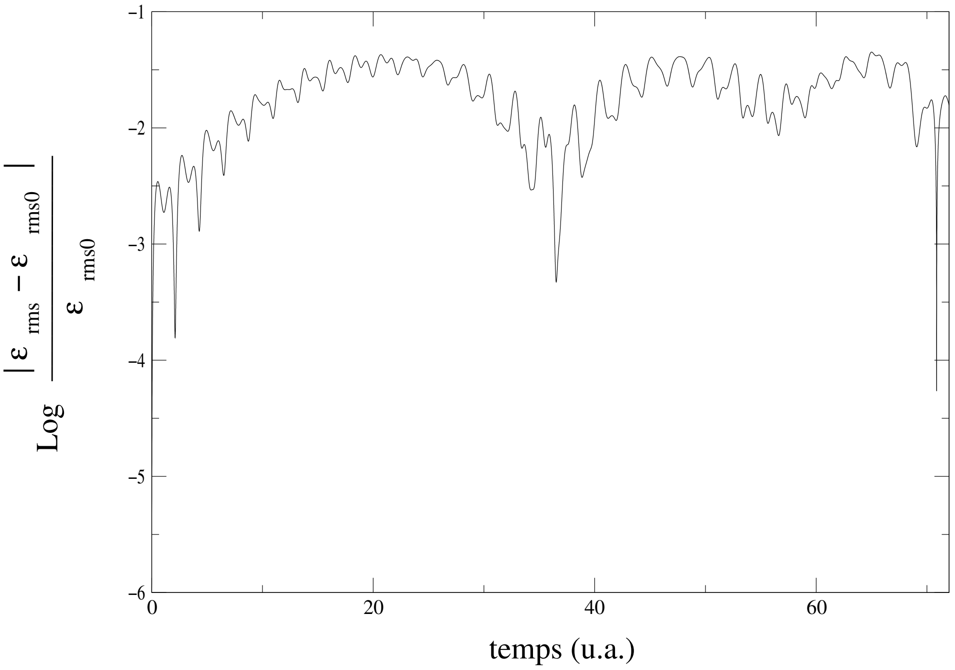


Fig. 3-7 : Logarithme décimal de la variation relative de l'émittance en fonction du temps à partir des 64 points

Si l'on moyenne maintenant temporellement l'émittance RMS issue de notre méthode, son évolution est la même pour les deux méthodes et converge précisément vers la même valeur d'équilibre (figure *3-8*).

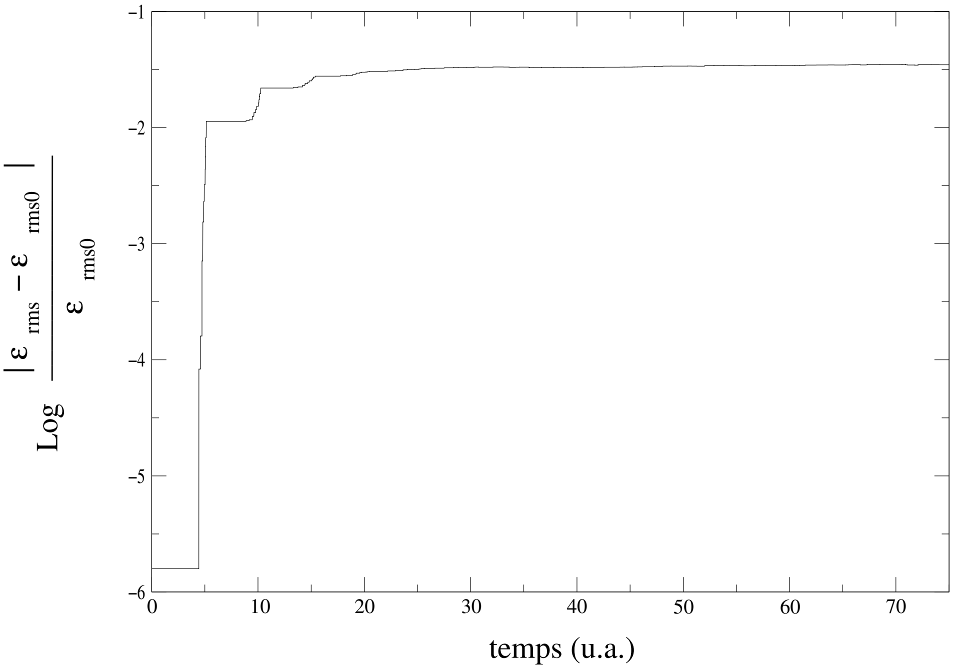


Fig. 3-8 : Logarithme décimal de la variation relative moyennée de l'émittance en fonction du temps à partir des 64 points

Principe du calcul de la moyenne

On cherche à calculer la quantité de la forme :

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

Nous prenons par exemple $f = x^2$.
Pour cela, on exécute la procédure suivante pour chaque point du réseau :

- quand le point x_i est revenu au voisinage de son point de départ, on calcule la quantité $Q_{i,\tau+1}$ définie par (où τ représente le nombre de tours) :

$$Q_{i,\tau+1} = Q_{i,\tau} + \sum_j \lambda_j x_j^2$$

- on compte le temps écoulé T en comptant le nombre total de passages τ au voisinage du point de départ de x_i.

- on calcule donc la quantité :

$$P_{i,\tau+1} = \frac{Q_{i,\tau+1}}{\tau+1}$$

- la moyenne $\bar{f}$ est alors obtenue en intégrant sur tous les points du réseau de la façon suivante :

$$\bar{f}_{\tau+1} = \sum_i \lambda_i P_{i,\tau+1}$$

  qui converge vers $\bar{f}$ quand $\tau \to \infty$.

On obtient la figure *3-8*, décrivant l'évolution de l'émittance par ce procédé. Cette figure est à comparer aux figures *3-3* et *3-4* : le régime transitoire est donc reproduit grossièrement mais l'évolution à long terme est reproduite avec une bonne précision puisque les deux courbes tendent vers la même limite.

3.3.3 Evolution des moments pairs

3.3.3.1 Evolution sans moyenne

Considérons les moments jusqu'à l'ordre 10. On trace leur évolution en fonction du temps, soit pour toutes les particules du nuage dans le cas de la méthode classique, soit pour le réseau de points.
Jusqu'au temps t=25, c'est-à-dire juste avant l'état d'équilibre, on constate que les courbes d'évolution des moments issues des deux méthodes se superposent correctement et ce, jusqu'à l'ordre 8 (voir figures *3-9* et *3-10*) :

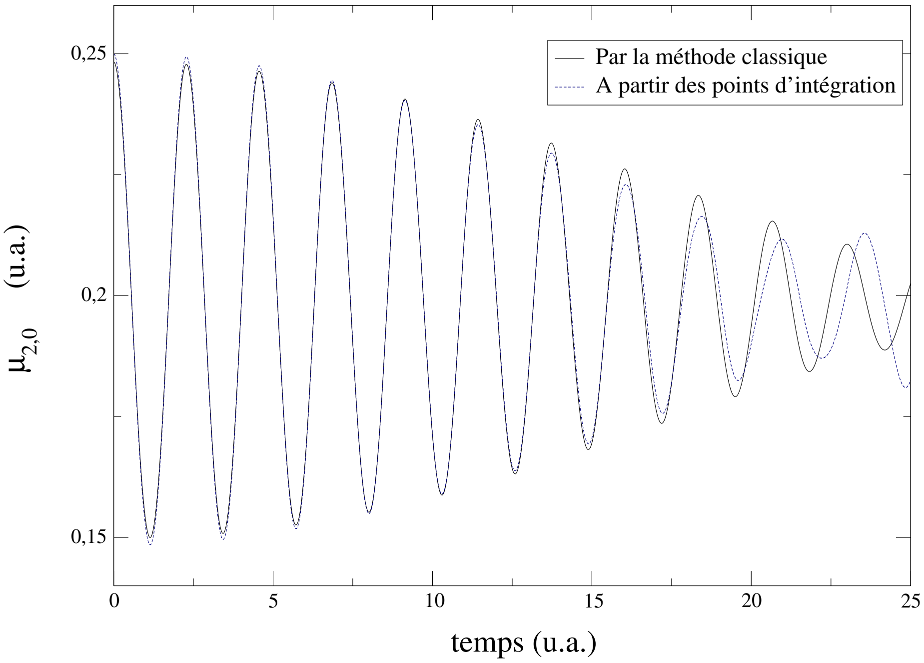


Fig. 3-9 : Comparaison de l'évolution du moment $\mu_{2,0}$ pour t $\leq$ 25 suivant les deux méthodes

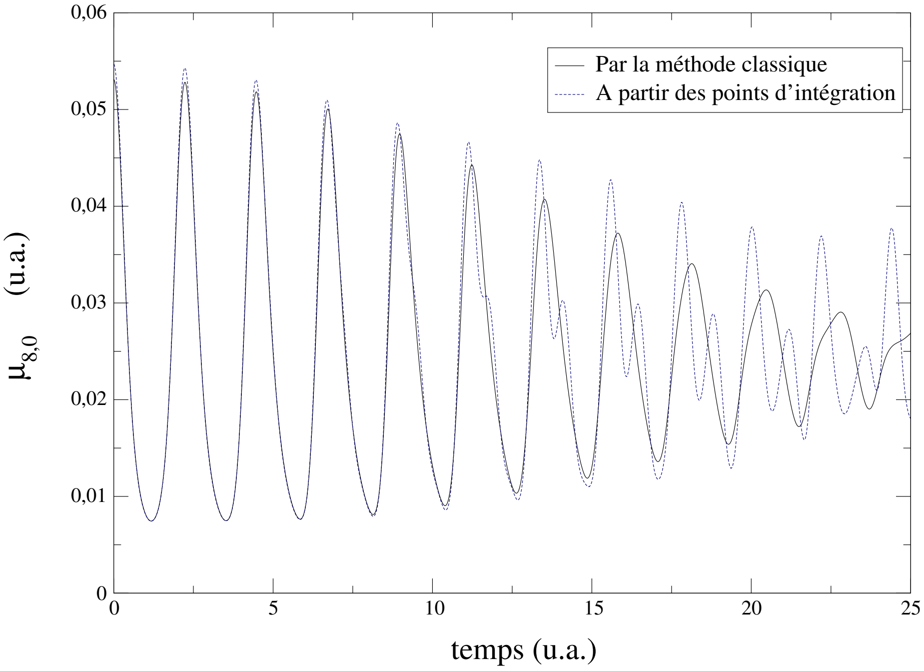


Fig. 3-10 : Comparaison de l'évolution du moment $\mu_{8,0}$ pour t $\leq$ 25 suivant les deux méthodes

Par contre, plus l'ordre du moment est élevé, plus l'erreur due à l'évolution des points d'intégration devient importante : il apparaît des sur-oscillations dès le moment d'ordre 4 et de plus en plus quand on augmente l'ordre. Pour le moment d'ordre 10 par exemple, notre méthode n'est plus du tout fiable comparée à la simulation réaliste classique même pour le régime transitoire (voir figure *3-11*).
Ceci est dû au fait que l'on extrapole très mal les moments d'ordre supérieur.

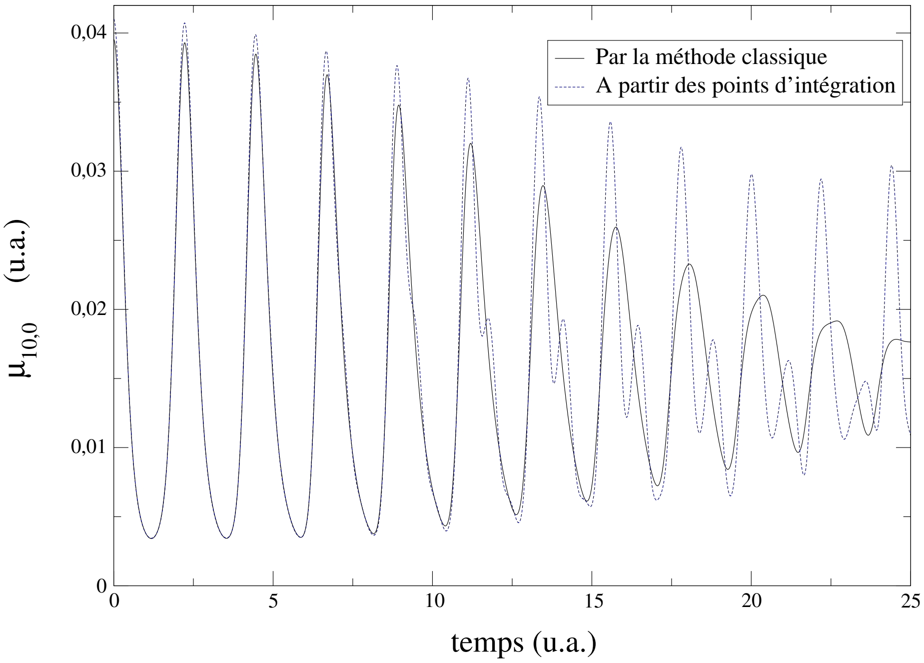


Fig. 3-11 : Comparaison de l'évolution du moment $\mu_{10,0}$ pour t $\leq$ 25 suivant les deux méthodes

3.3.3.2 Obtention des valeurs d'équilibre

Après un temps d'évolution suffisamment long, on observe le régime d'équilibre pour tous les moments, quel que soit l'ordre : ils convergent vers une limite finie différente pour chaque moment comme on le voit sur les figures *3-12* et *3-13* :

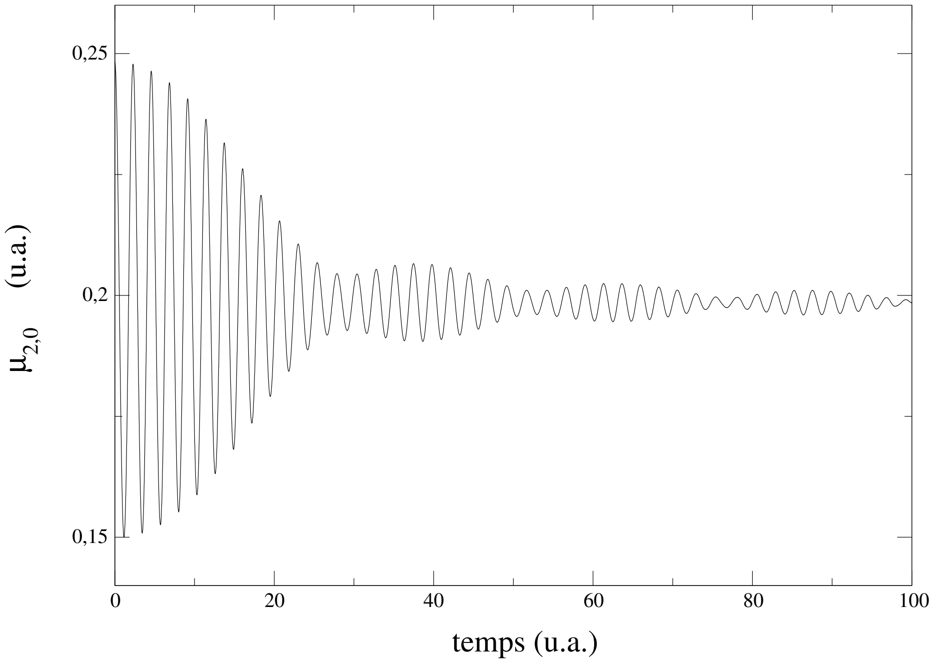


Fig. 3-12 : Evolution du moment $\mu_{2,0}$ calculée à partir du nuage de points en fonction du temps

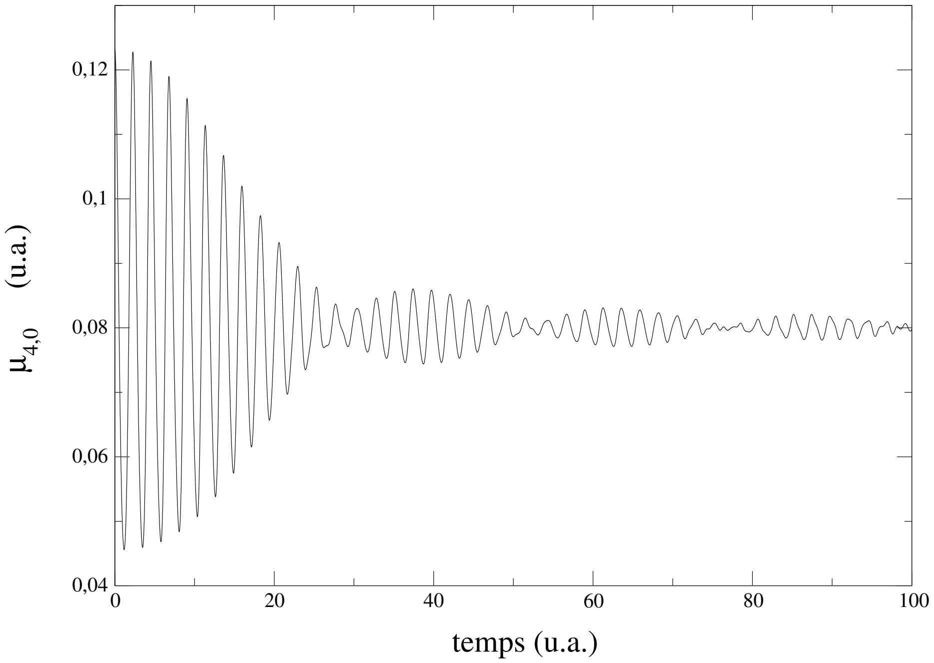


Fig. 3-13 : Evolution du moment $\mu_{4,0}$ calculée à partir du nuage de points en fonction du temps

Avec notre réseau restreint de points, l'évolution des moments devient complètement fausse pour le long terme (et nous ne l'avons donc pas représentée).
Cependant, en effectuant la moyenne présentée au paragraphe (3.3.2.2), on retrouve l'évolution globale des moments pour des temps très grands (sur les figures *3-14* et *3-15* qui sont à comparer aux figures *3-12* et *3-13*) :

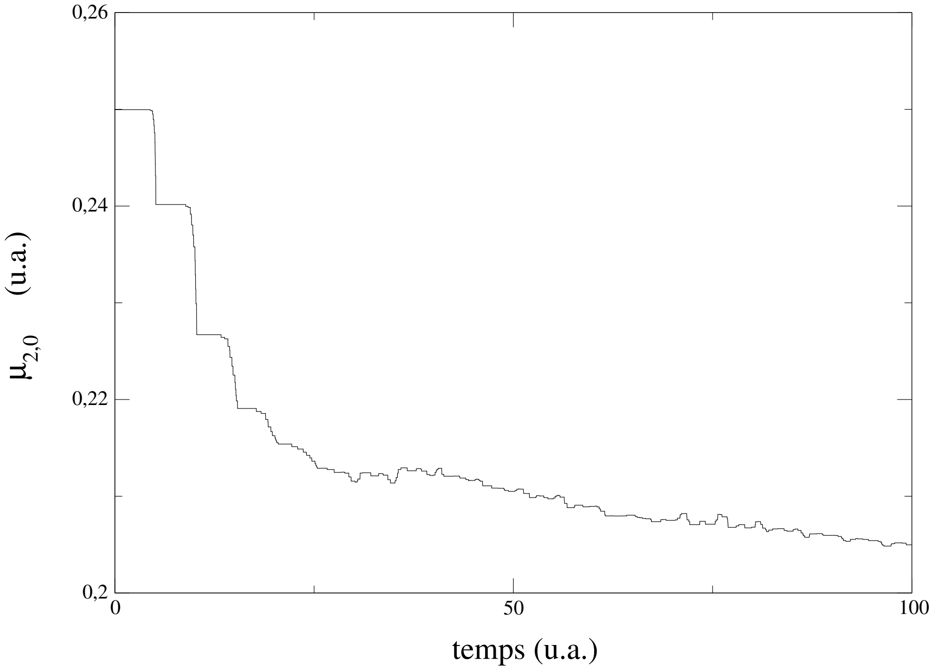


Fig. 3-14 : Evolution du moment $\mu_{2,0}$ moyenné issue des 64 points en fonction du temps

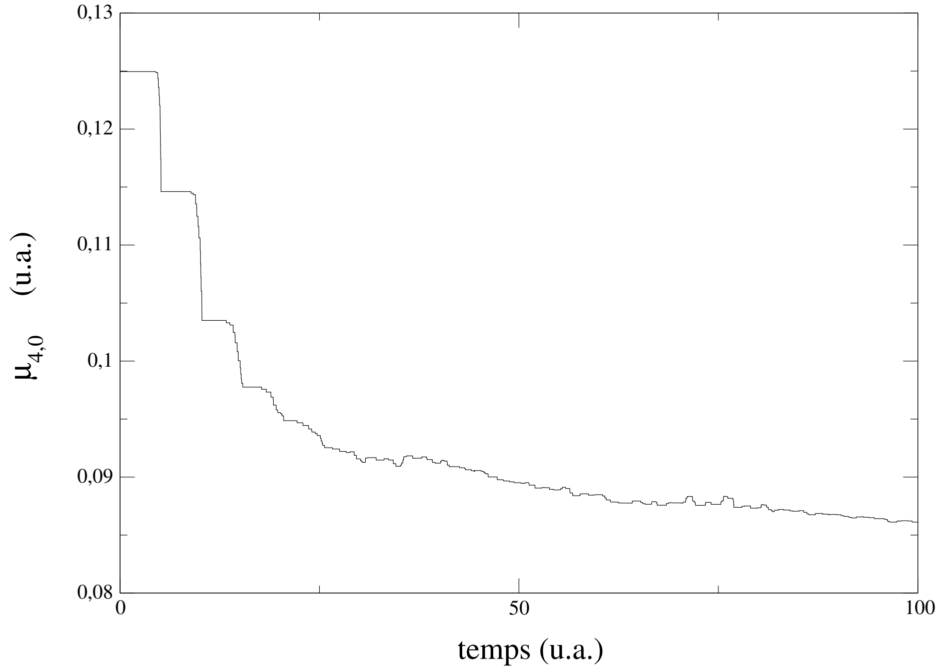


Fig. 3-15 : Evolution du moment $\mu_{4,0}$ moyenné issue des 64 points en fonction du temps

Même si ce traitement est valable pour tous les moments, la convergence est de plus en plus lente au-delà de l'ordre 6. Il faudrait donc faire tourner les points pendant un temps assez long pour avoir une bonne valeur limite.

3.4 Conclusion du chapitre

Même si ses hypothèses ne sont pas toutes rigoureuses (les Λ_i restent constants au cours temps), la simulation naïve de la méthode des points d'intégration permet d'obtenir le régime transitoire de diverses grandeurs statistiques avec une bonne précision pour une distribution de particules considérée. En outre, l'évolution de ces macroparticules donne, à la condition d'effectuer des moyennes temporelles, un moyen rapide et économique pour décrire l'évolution à long terme des moments de la densité et de son émittance. Par contre, l'estimation obtenue est relativement globale. Bien que cette méthode fasse appel à l'extrapolation dite naïve des moments d'ordre supérieur, elle permet d'obtenir un certain nombre de paramètres et les méthodes développées au chapitre 2 pourraient être envisagées pour caractériser la densité au bout d'un certain temps.
Cette étude a aussi montré que la simulation classique de particules a peut-être ses limites puisque les résultats sur les moments dépendent très fortement du nombre de particules : ce problème de stabilité est mis en évidence par les sur-oscillations surtout pour les ordres supérieurs à 4 ; ces oscillations disparaissent quand on augmente le nombre de particules.

En extrapolant, 2000 particules pour un espace des phases de dimension 2 n'est pas si grossier que cela; ceci équivaudrait à $2000^3 = 8.10^9$ particules en dimension 6.
On peut donc légitimement se demander si une simulation avec 10^9 particules serait si réaliste que cela.
Dans un paquet de particules réelles, à 100 mA et 350 MHz on a environ 1000 particules par

espace de deux dimensions ce qui est comparable à 2000 particules. Au vu des courbes, pour des conditions initiales légèrement différentes, on aura probablement des fluctuations d'un paquet de particules à un autre.
Quand on prend 20000 particules, la solution est plus stable et peut être interprêtée comme la moyenne sur plusieurs paquets.

Chapitre 4

Evolution des moments dans un espace de dimension 2 : approche rigoureuse

4.1 Généralisation de l'intégrale de Stieljes. Interprétation physique

L'objectif de ce chapitre est d'utiliser les résultats du chapitre 2 pour des densités définies dans l'espace des phases $(x, \dot{x})$. A partir d'un certain nombre de moments, on cherche donc à définir l'enveloppe convexe d'une densité et d'en estimer ses moments d'ordre supérieur.

Dans tous les cas, on considère une distribution réelle de particules définie sur un domaine d'existence $\mathcal{D}$ symétrique par rapport à l'origine dans $(x, \dot{x})$.

4.1.1 Généralisation de la fonction F en deux dimensions

Nous avons vu au chapitre 2 qu'en dimension 1, les pôles de la transformée de Stieljes définissent le support du domaine de la densité ω :

$$\boxed{F(x) = \int_{\mathcal{D}} \frac{\omega(\xi)d\xi}{x-\xi} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu_j}{x^{j+1}}}$$

Nous allons généraliser la fonction F en deux dimensions en partant du principe que les pôles de la fonction $F(x, \dot{x})$ doivent caractériser le domaine $\mathcal{D}$ en deux dimensions de la densité ω. Nous choisissons donc de considérer F telle que :

$$F(x, \dot{x}) = \int_{\mathcal{D}} \frac{\omega(\xi, \eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (\dot{x}-\eta)^2}} \tag{4.1}$$

Soient X et Z les vecteurs suivants :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

et

$$Z = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

avec $\| X \| = \sqrt{x^2 + \dot{x}^2}$.

En effectuant un développement au voisinage de l'infini, $F(x, \dot{x})$ devient alors :

$$\boxed{F(x,y) = \frac{1}{\| X \|} \int_{\mathcal{D}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(X.Z)^n}{\| X \|^{2n}} \right) \omega(\xi, \eta) d\xi d\eta}$$

En développant le terme $(X.Z)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$$(X.Z)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^{n-p} x^p \dot{x}^{n-p} (\xi^p \eta^{n-p})$$

on obtient :

$$\boxed{F(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\| X \|^{2n+1}} \sum_{p=0}^{n} C_n^{n-p} \mu_{p,n-p} x^p \dot{x}^{n-p}} \tag{4.2}$$

où l'on fait apparaître, dans une même expression, tous les moments d'ordre n $\mu_{p,n-p}$ de la densité considérée $\omega(\xi, \eta)$:

$$\mu_{p,n-p} = \int_{\mathcal{D}} \xi^p \eta^{n-p} \omega(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

4.1.2 Paramétrages angulaire et radial

Passons maintenant en coordonnées polaires avec :

$$\begin{cases} x &= \rho cos\theta \\ \dot{x} &= \rho sin\theta \end{cases}$$

L'expression (4.2) devient alors dans ce système de coordonnées et pour un angle θ fixé :

$$\boxed{F_\theta(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{M}_{\theta,n}}{\rho^{n+1}} \quad \text{où} \quad \mathcal{M}_{\theta,n} = \sum_{p=0}^{n} C_n^{n-p} (cos\theta)^p (sin\theta)^{n-p} \mu_{p,n-p}} \tag{4.3}$$

Pour un angle θ fixé, on retrouve une forme équivalente de la transformée de Stieljes vue en dimension 1. $F_\theta(\rho)$ est donc la transformée de Stieljes de la densité projetée sur la droite de paramètre θ. En faisant varier θ de 0 à 2π, on obtient donc toutes les projections de $F(x, \dot{x})$ dans l'espace des phases.

Les termes $\mathcal{M}_{\theta,n}$ représentent alors les moments de la densité projetée sur la droite faisant un angle θ avec l'axe des abscisses.

Grâce au paramétrage angulaire, on se ramène finalement à un problème à une dimension déjà traité au chapitre 2. La description en termes de pôles est donc une description de l'enveloppe convexe uniquement. Elle correspond à une vision depuis l'infini sous tous les angles.

4.2 Estimation de l'enveloppe convexe en deux dimensions

Soit une distribution de particules définie sur un domaine $\mathcal{D}$ dans l'espace de phases dont on ne connaît que les premiers moments pairs $\mu_{k,l}$ jusqu'à un ordre donné N_μ tel que $k + l \leq N_\mu$ à un instant quelconque. A partir de la relation (4.3) que nous venons d'établir, nous allons voir que l'on peut estimer avec une bonne précision l'enveloppe convexe en deux dimensions de cette densité en n'utilisant que les moments $\mu_{k,l}$ connus.

4.2.1 Calcul du bord pour un θ fixé. Reconstruction de l'enveloppe convexe

On sait que grâce à un paramétrage angulaire, on retrouve une forme équivalente à la transformée de Stieljes en une dimension :

$$\boxed{F_\theta(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{M}_{\theta,n}}{\rho^{n+1}} \text{ où } \mathcal{M}_{\theta,n} = \sum_{p=0}^{n} C_n^{n-p} (cos\theta)^p (sin\theta)^{n-p} \mu_{p,n-p}}$$

En discrétisant l'espace des phases en coordonnées polaires (ρ, θ), on peut calculer pour chaque valeur de θ les moments $\mathcal{M}_{\theta,n}$ de la densité projetée selon θ à partir des $\mu_{k,l}$.
Pour un θ fixé, on se ramène aux hypothèses du chapitre 2 : on connaît les premiers moments de la densité projetée sur la droite faisant un angle θ avec l'axe des abscisses. L'étude se ramène donc à une étude en une dimension.

Par conséquent, pour chaque θ, on peut en déduire les polynômes orthogonaux associés aux moments $\mathcal{M}_{\theta,n}$ grâce à la relation (2.4) puis le support a_θ de cette projection à partir de la relation (2.15).
Une fois ce bord estimé, on cherche la perpendiculaire à cette droite de projection passant par a_θ (figure *4-1*).

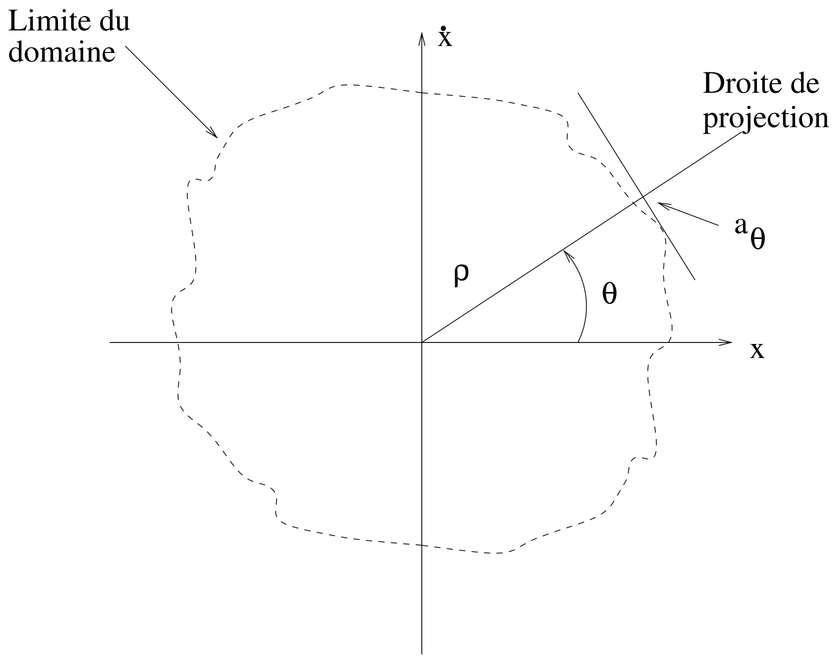


Fig. 4-1 : Projection selon θ du domaine $\mathcal{D}$ dans l'espace des phases

Avec les intersections de deux perpendiculaires successives, on trouve alors un polygone qui représente une estimation de l'enveloppe convexe du domaine $\mathcal{D}$ (figure *4-2*).

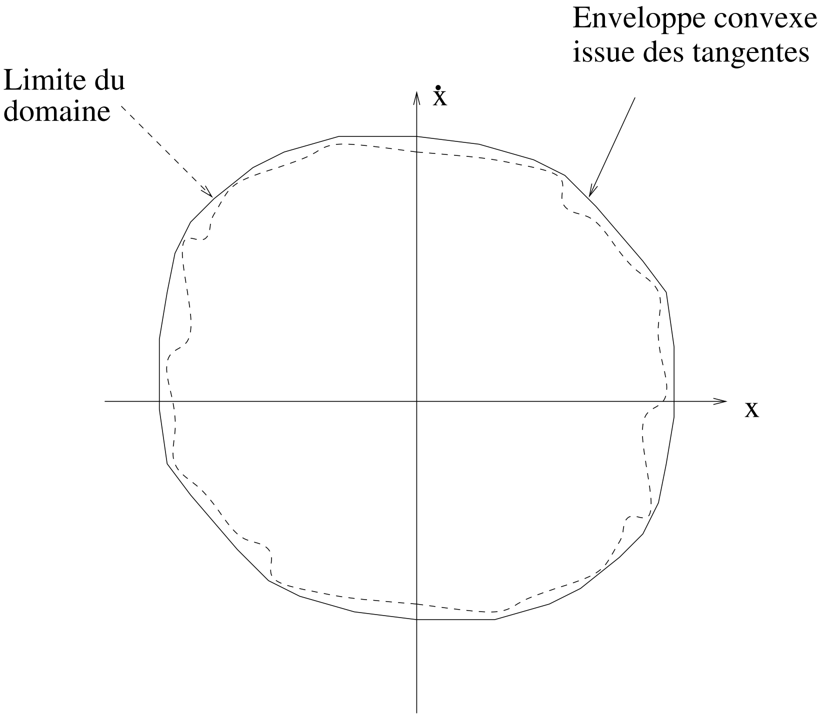


Fig. 4-2 : Détermination de l'enveloppe convexe à partir de l'intersection des perpendiculaires

4.2.2 Exemples des densités uniforme et gaussienne en deux dimensions

Afin d'illustrer ce que nous venons de voir, on considère un nuage de particules ayant toutes la même charge (de 10000 à 100000 particules). Il a pour densité initiale la densité uniforme ou gaussienne dans le disque de rayon 1. Elle est soumise à une force non linéaire similaire à celle du chapitre 3 : $f(x) = -(k_1 x + k_2 x^5)$ avec $k_1 = 1.5$ et $k_2 = 1$.

A l'aide d'un code multiparticulaire classique, on calcule l'évolution de ce nuage au cours du temps. A n'importe quel moment de l'évolution, on calcule les premiers moments $\mu_{k,l}$ de ce nuage en effectuant une somme sur toutes les particules :

$$\mu_{k,l} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j^k \dot{x}_j^l$$

n étant le nombre total de particules dans le nuage et chaque particule j pouvant être caractérisée par sa position dans l'espace des phases par $(x_j, \dot{x}_j)$.
Le nuage étant toujours symétrique, on peut ne considérer que les moments d'ordre pair.

4.2.2.1 Densité initiale uniforme

Pour le cas de la densité uniforme, on prend un nuage de 32000 particules que l'on fait évoluer sous l'effet de la force f. Voyons ce que devient ce nuage à divers instants de son évolution et comparons sa distribution à l'enveloppe convexe que l'on trouve à partir de ses moments pairs calculés jusqu'à l'ordre 10.

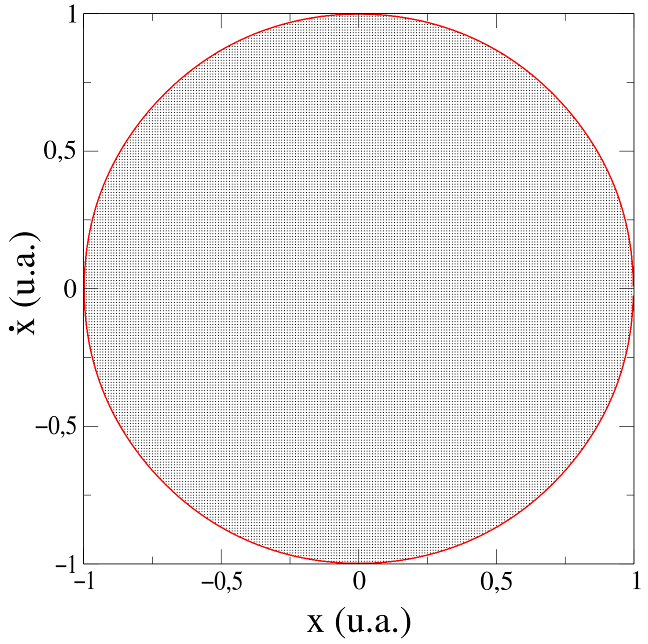


Fig. 4-3 : Comparaison entre le nuage de 32000 particules à l'instant t=0 (u.a.) de densité initiale uniforme et l'enveloppe convexe calculée à partir de ses moments

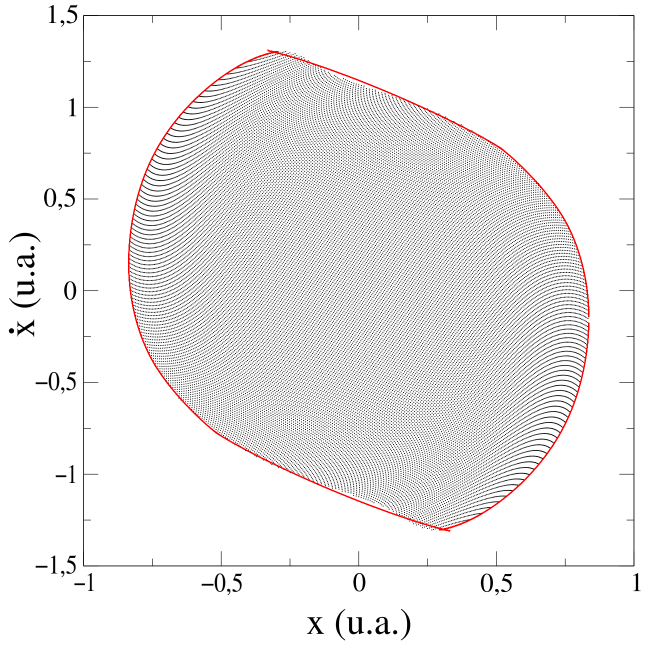


Fig. 4-4 : Comparaison entre le nuage de 32000 particules à l'instant t=3 (u.a.) de densité initiale uniforme et l'enveloppe convexe calculée à partir de ses moments

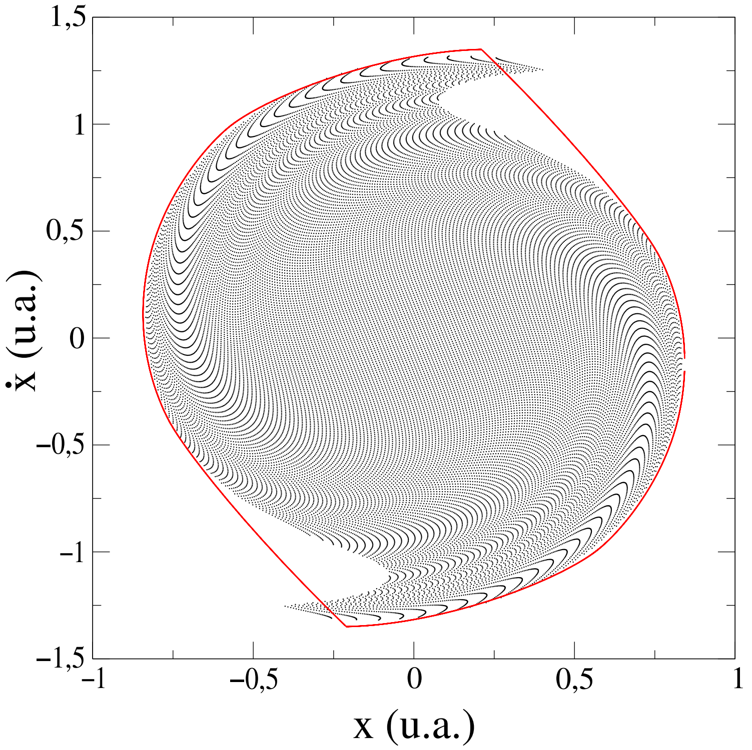


Fig. 4-5 : Comparaison entre le nuage de 32000 particules à l'instant t=10 (u.a.) de densité initiale uniforme et l'enveloppe convexe calculée à partir de ses moments

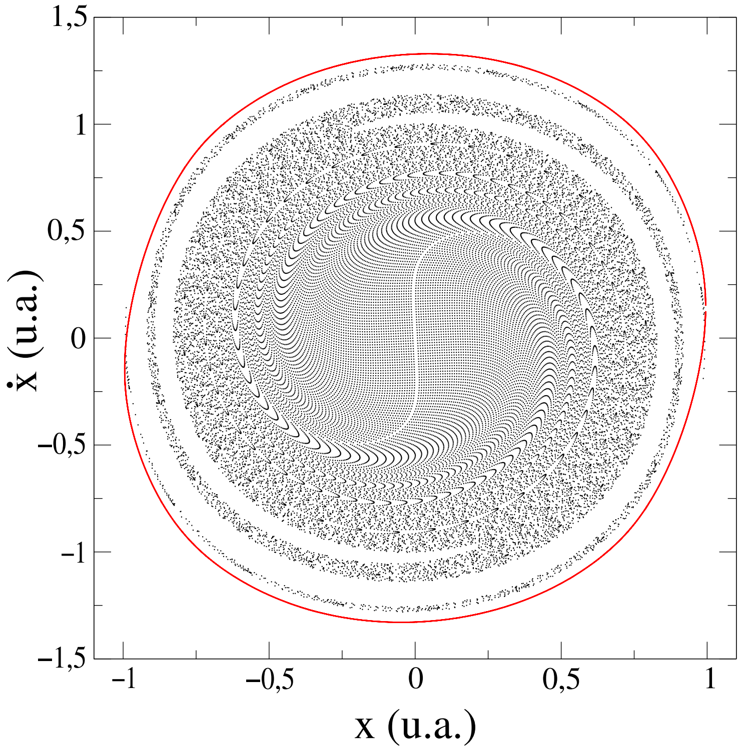


Fig. 4-6 : Comparaison entre le nuage de 32000 particules à l'instant t=50 (u.a.) de densité initiale uniforme et l'enveloppe convexe calculée à partir de ses moments

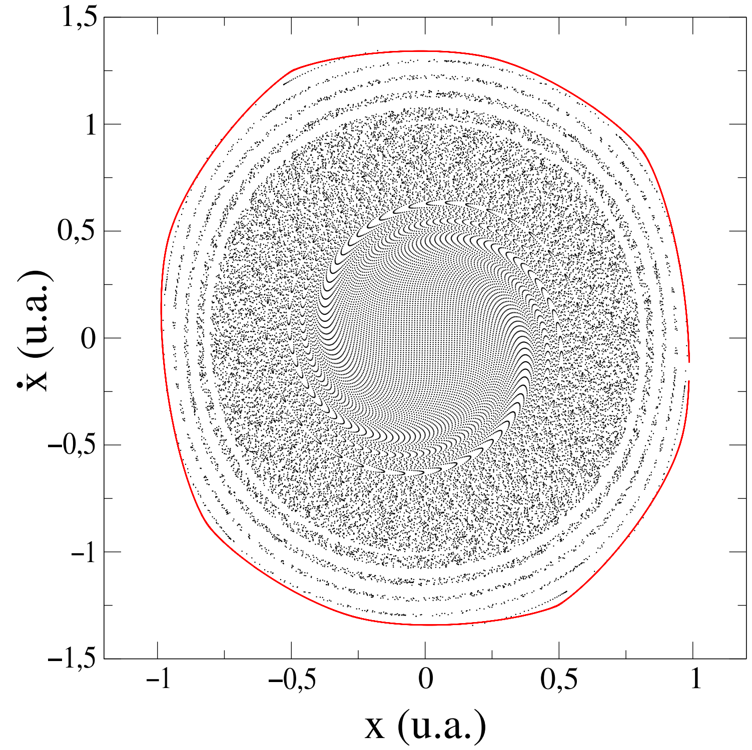


Fig. 4-7 : Comparaison entre le nuage de 32000 particules à l'instant t=100 (u.a.) de densité initiale uniforme et l'enveloppe convexe calculée à partir de ses moments

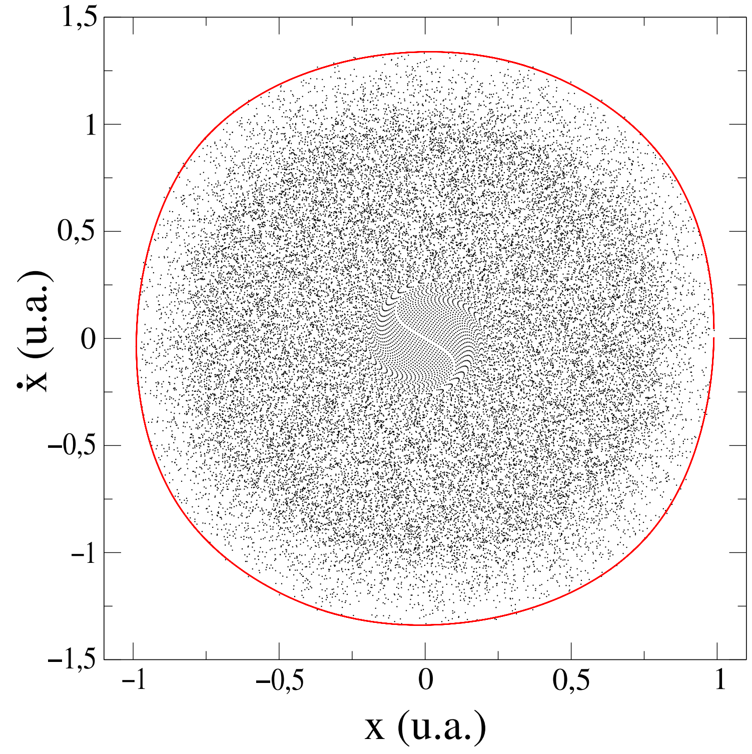


Fig. 4-8 : Comparaison entre le nuage de 32000 particules à l'instant t=2000 (u.a.) de densité initiale uniforme et l'enveloppe convexe calculée à partir de ses moments

Selon la géométrie du nuage de particules obtenu à un instant quelconque de son évolution, on peut donc en déduire une enveloppe convexe du nuage qui englobe relativement bien (figure *4-5*), voire extrêmement bien (figures *4-7* et *4-8*) un maximum de particules et ceci malgré la filamentation. La description d'une densité filamentée à l'aide des moments peut paraître insoluble. En réalité, nous avons montré que les moments nous donnaient une description en termes de convexité et nous avons montré comment y parvenir.

4.2.2.2 Densité initiale gaussienne

Pour la densité gaussienne, on considère l'évolution d'un nuage de 100000 particules que l'on soumet à la force f avec $k_1 = 2$ et $k_2 = 0.1$. Au temps t=20 et t=50 (u.a.), on compare l'enveloppe réelle de ce nuage dans l'espace des phases à celle obtenue à partir des premiers moments du nuage jusqu'à l'ordre 10 (figure *4-9* et *4-10*).

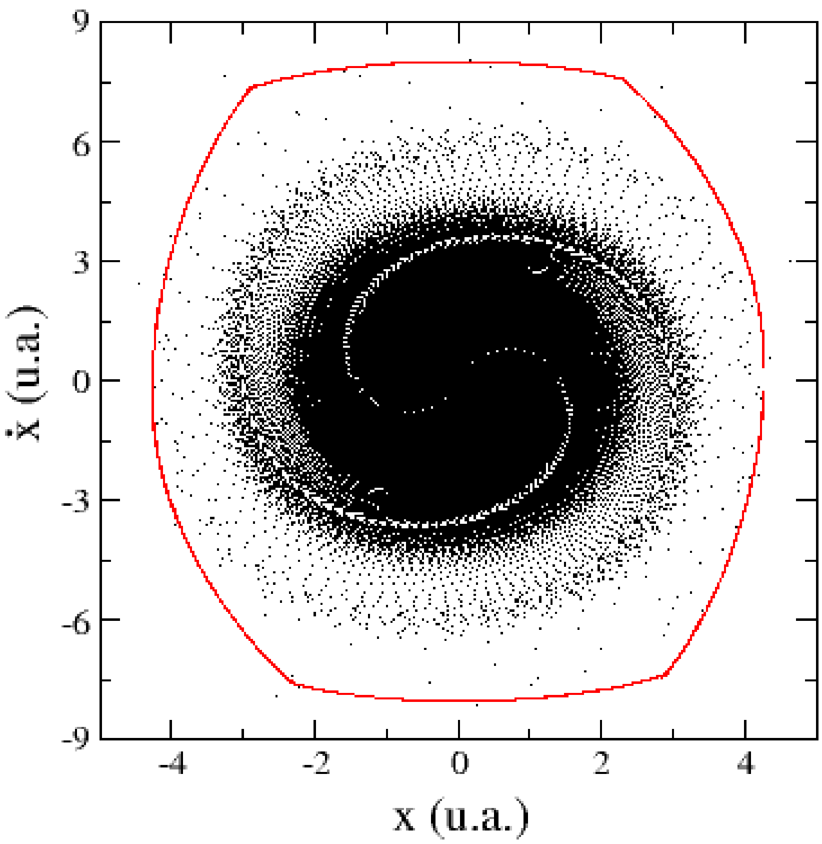


Fig. 4-9 : Comparaison entre le nuage de 100000 particules à l'instant t=20 (u.a.) de densité initiale gaussienne et l'enveloppe convexe calculée à partir de ses moments

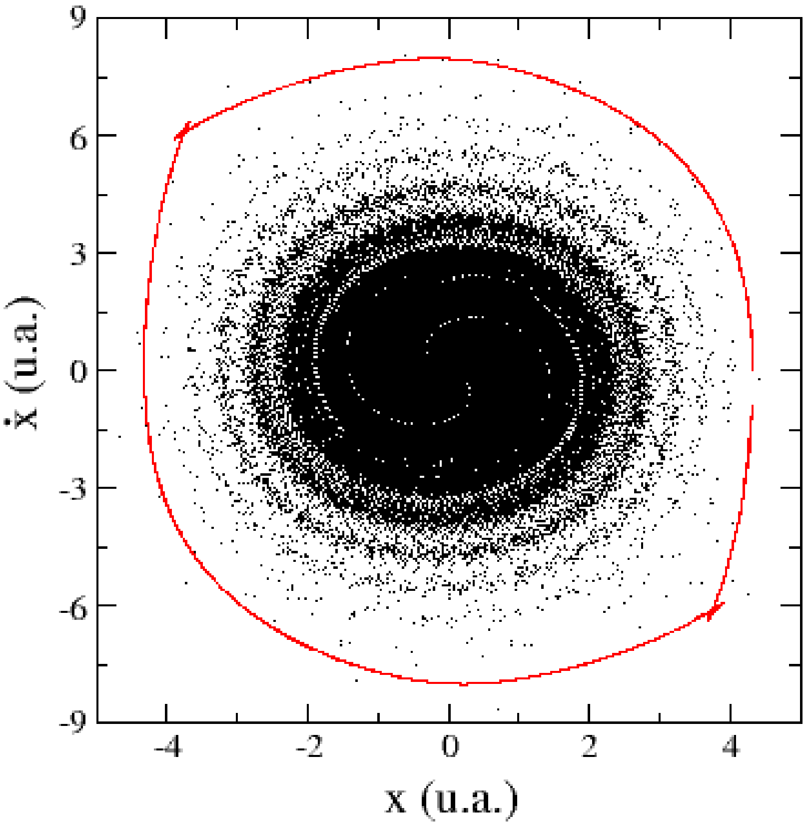


Fig. 4-10 : Comparaison entre le nuage de 100000 particules à l'instant t=50 (u.a.) de densité initiale gaussienne et l'enveloppe convexe calculée à partir de ses moments

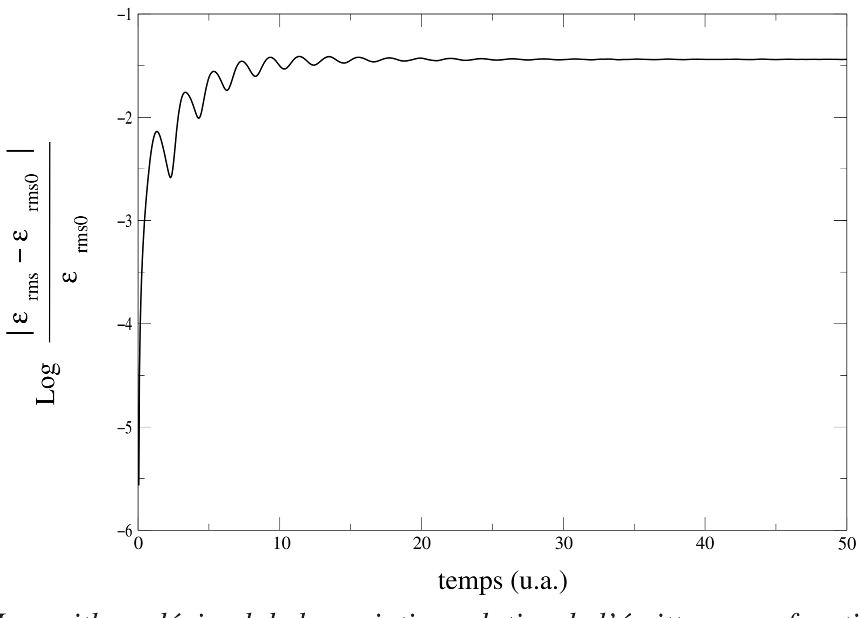


Fig. 4-11 : Logarithme décimal de la variation relative de l'émittance en fonction du temps pour un nuage de 100000 particules de densité gaussienne

Les temps choisis sont relativement courts comparés à ceux de la densité uniforme car l'émittance converge très rapidement vers un état d'équilibre, comme on peut le voir sur la figure *4-11*. Là encore, on entoure un maximum de particules avec notre enveloppe convexe en laissant quelques particules à l'extérieur de ce domaine.

4.2.3 Précision de l'enveloppe convexe en fonction du nombre de moments connus

Si l'on augmente le nombre de moments utilisés pour déterminer l'enveloppe convexe d'un nuage, on constate que cette enveloppe devient de plus en plus précise : reprenons l'exemple du nuage de 32000 particules dont la densité initiale est uniforme. Faisons-le évoluer sous la force f jusqu'au temps t=20 (u.a) et calculons son enveloppe convexe avec, d'une part tous ses moments pairs jusqu'à l'ordre 6 et, d'autre part, tous ses moments pairs jusqu'à l'ordre 10 ; comparons ces deux enveloppes sur la figure *4-12*.

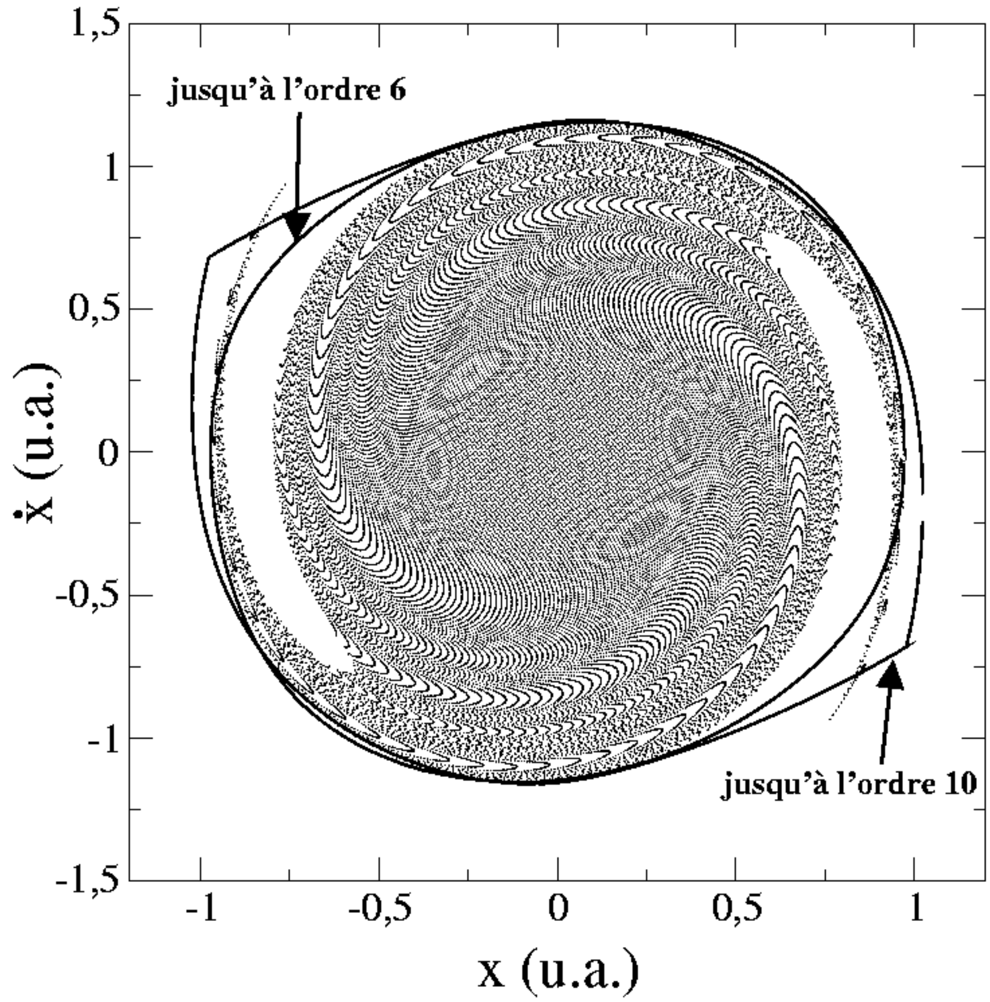


Fig. 4-12 : Enveloppe convexe en fonction du nombre de moments utilisés : jusqu'à l'ordre 6 ou 10 pour un nuage de 32000 particules à l'instant t=20 (u.a.) de densité initiale uniforme

On constate effectivement que l'enveloppe la plus précise, c'est-à-dire celle qui englobe le plus grand nombre de particules est celle qui correspond au plus grand nombre de moments utilisés. Pour ce même nuage, mais à l'instant t=100 dans les mêmes conditions, la différence de précision est encore plus nette puisque l'on "perd" dans le premier cas (moments jusqu'à l'ordre 6) une quantité significative de particules (figure *4-13*) :

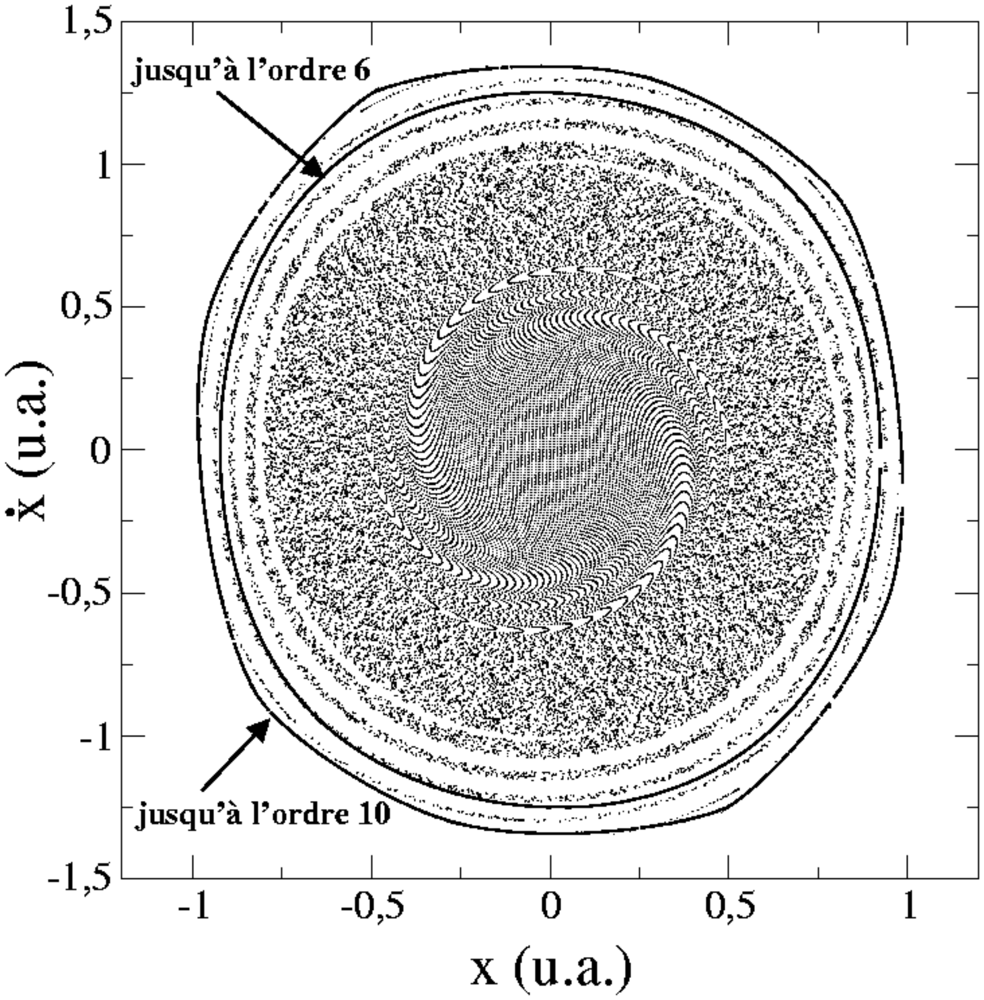


Fig. 4-13 : Enveloppe convexe en fonction du nombre de moments utilisés : jusqu'à l'ordre 6 ou 10 pour un nuage de 32000 particules à l'instant t=100 (u.a.) de densité initiale uniforme

4.2.4 Interprétations

Plus on augmente le nombre de moments initiaux, plus l'enveloppe convexe calculée devient précise : physiquement, cela signifie que l'on englobe un plus grand nombre de particules contenues dans le nuage considéré. La localisation des particules dans l'espace des phases est donc beaucoup plus précise. Autrement dit, plus on connaît de moments initiaux et mieux on localise l'émittance d'un nuage de particules. Les pertes de particules (c'est-à-dire celles qui ne sont pas à l'intérieur de l'enveloppe convexe trouvée) sont alors minimisées. Par exemple, si l'on reprend le cas de la densité initiale uniforme de la figure *4-8*, les particules à l'extérieur de l'enveloppe convexe calculée à partir des moments ne représentent environ qu'une particule pour mille. En augmentant le degré maximum des moments utilisés, on peut encore réduire cette proportion de particules exclues.

Dans l'exemple de la densité initiale gaussienne (figure *4-9*), le nombre de particules "perdues" est d'environ de 16 sur 100000, ce qui fait environ une particule sur 5000 à l'extérieur de l'enveloppe convexe trouvée.

4.3 Calculs des moments d'ordre supérieur

Le but de ce paragraphe est de montrer comment, connaissant les premiers moments $\mu_{k,l}$ jusqu'à l'ordre n (avec n=k+l) d'un nuage de particules soumis à une force extérieure non linéaire, on peut extrapoler les moments d'ordre supérieur au cours de son évolution.

On sait que l'on peut se ramener à un problème à une dimension en générant n premiers moments $\mathcal{M}_{\theta,n}$ de la densité projetée selon θ, et ce pour tout θ de l'espace des phases.
De plus, d'après le chapitre 2, on peut obtenir, pour chaque θ, les moments d'ordre supérieur (de la densité projetée) jusqu'à un ordre voulu n_e par extrapolation de la récurrence des polynômes orthogonaux associés (voir le paragraphe 2.7.3.1). Ces n_e moments extrapolés $\mathcal{M}_{\theta,n+j}$ (avec j allant de 1 a n_e) peuvent alors s'écrire d'après (4.3), pour tout θ :

$$\mathcal{M}_{\theta,n+j} = \sum_{p=0}^{n+j} C_{n+j}^{n+j-p} (cos\theta)^p (sin\theta)^{n+j-p} \mu_{p,n+j-p} \quad \forall\theta$$

avec $\mu_{p,n+j-p}$ les n+j+1 moments d'ordre n+j que l'on recherche pour chaque j de 1 à n_e.

Par une méthode de moindres carrés, en minimisant l'expression intégrale suivante :

$$\int_0^\pi \left(\sum_{p=0}^{n+j} C_{n+j}^{n+j-p} (cos\theta)^p (sin\theta)^{n+j-p} \mu_{p,n+j-p} - \mathcal{M}_{\theta,n+j} \right)^2 d\theta$$

On estime, pour chaque j, tous les moments d'ordre n+j du nuage de particules à tout instant de son évolution.
Illustrons ceci, en prenant l'exemple d'un nuage de 32000 particules, de densité initiale la densité uniforme, soumis à la force f définie précédemment. A l'instant t=20 (u.a.), on calcule les premiers moments pairs jusqu'à l'ordre 10 de l'émittance correspondante (figure *4-14*).

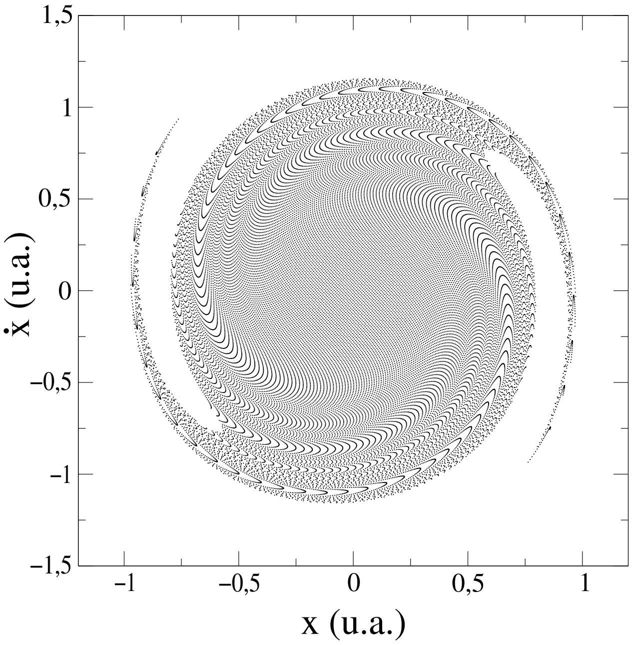


Fig. 4-14 : Nuage de particules dans l'espace de phases à t=20 (u.a.) avec pour densité initiale la densité uniforme sur le disque

Les moments d'ordre 12 et 14 que l'on obtient par cette extrapolation sont rangés dans les tableaux (*4-1*) et (*4-2*) :

moments	valeur réelle	valeur extrapolée	erreur relative (en %)
$\mu_{0,12}$	1.9345e-01	1.9346e-01	0.008
$\mu_{1,11}$	1.6088e-02	1.6094e-02	0.03
$\mu_{2,10}$	1.3065e-02	1.3065e-02	0.005
$\mu_{3,9}$	2.9617e-03	2.9539e-03	0.26
$\mu_{4,8}$	3.2155e-03	3.2189e-03	0.10
$\mu_{5,7}$	9.4050e-04	9.5227e-04	1.25
$\mu_{6,6}$	1.6545e-03	1.6394e-03	0.91
$\mu_{7,5}$	4.2718e-04	4.3469e-04	1.75
$\mu_{8,4}$	1.5427e-03	1.5431e-03	0.02
$\mu_{9,3}$	2.7365e-04	2.7664e-04	1.09
$\mu_{10,2}$	2.7102e-03	2.7046e-03	0.20
$\mu_{11,1}$	3.1681e-04	3.2279e-04	1.88
$\mu_{12,0}$	1.5166e-02	1.5170e-02	0.02

Tableau 4-1 : Moments d'ordre 12 extrapolés comparés aux vraies valeurs à l'instant t=20 connaissant tous les moments pairs jusqu'à l'ordre 10 pour la densité uniforme

moments	valeur réelle	valeur extrapolée	erreur relative (en %)
$\mu_{0,14}$	2.091e-01	2.092e-01	0.04
$\mu_{1,13}$	1.728e-02	1.730e-02	0.09
$\mu_{2,12}$	1.217e-02	1.215e-02	0.10
$\mu_{3,11}$	2.766e-03	2.754e-03	0.43
$\mu_{4,10}$	2.512e-03	2.531e-03	0.73
$\mu_{5,9}$	7.601e-04	7.687e-04	1.13
$\mu_{6,8}$	1.055e-03	1.025e-03	2.80
$\mu_{7,7}$	2.879e-04	3.152e-04	9.46
$\mu_{8,6}$	7.642e-04	7.565e-04	1.00
$\mu_{9,5}$	1.346e-04	1.391e-04	3.29
$\mu_{10,4}$	8.980e-04	8.879e-04	1.13
$\mu_{11,3}$	7.620e-05	8.995e-05	18.0
$\mu_{12,2}$	1.875e-03	1.872e-03	0.16
$\mu_{13,1}$	7.175e-05	8.013e-05	11.6
$\mu_{14,0}$	1.217e-02	1.218e-02	0.07

Tableau 4-2 : Moments d'ordre 14 extrapolés comparés aux vraies valeurs à l'instant t=20 connaissant tous les moments pairs jusqu'à l'ordre 10 pour la densité uniforme

Hormis quelques moments, on retrouve bien les moments d'ordre supérieur de notre distribution de particules par notre méthode d'extrapolation. Ceci est valable à n'importe quel instant de l'évolution d'un nuage de particules quelconque soumis à une force extérieure.

4.4 Evolution d'une densité en deux dimensions à partir de ses moments

La principale application de l'extrapolation des moments d'ordre supérieur d'un nuage de particules en dimension 2 est l'évolution d'une densité à partir de ses moments.

4.4.1 Equation d'évolution des moments

Considérons les moments d'un nuage de particules soumis à une force non linéaire de la forme $f(x) = -(k_1 x + k_2 x^p)$; rappelons que l'équation d'évolution du moment $\mu_{n,m}$ établie dans le chapitre introductif 1 s'écrit :

$$\boxed{\dot{\mu}_{n,m} = n\mu_{n-1,m+1} - mk_1\mu_{n+1,m-1} - mk_2\mu_{n+p,m-1}} \quad (4.4)$$

Cette équation d'évolution du moment $\mu_{n,m}$ nécessite donc la connaissance de $\mu_{n+p,m-1}$ si la force est en x^p. En théorie, nous avons donc besoin d'une infinité de moments, car, pour connaître le moment $\mu_{n+p,m-1}$ à un instant donné, il faut lui appliquer la relation (4.4), ce qui nécessite, en particulier, la connaissance de $\mu_{n+2p,m-2}$ et ainsi de suite...

Si maintenant, on estime directement par extrapolation ce moment $\mu_{n+p,m-1}$, on assure alors la fermeture de la relation précédente. A tout instant, uniquement à partir d'un jeu de moments donnés, on peut alors connaître les moments d'ordre supérieur jusqu'à l'ordre que l'on veut, puis en déduire l'évolution de n'importe quel moment.

La fermeture de la relation (4.4) étant assurée, nous pouvons l'utiliser pour décrire l'évolution d'un nuage de particules défini dans l'espace des phases.

4.4.2 Evolution d'un nuage de particules à partir de ses moments : exemple de la densité uniforme

Prenons un nuage de 32000 particules ayant initialement la densité uniforme, que l'on soumet à la force $f(x) = -(k_1 x + k_2 x^5)$ avec $k_1 = 1.5$ et $k_2 = 1$.
A l'origine des temps, on calcule les premiers moments pairs jusqu'à l'ordre 10.

Afin de décrire l'évolution de ce nuage, nous observons, comme dans le chapitre 3, l'évolution du grossissement relatif de l'émittance RMS dont on rappelle l'expression :

$$\varepsilon_{rms} = 2\sqrt{\mu_{2,0}\mu_{0,2} - \mu_{1,1}^2}$$

Les équations d'évolution des moments $\mu_{2,0}$, $\mu_{1,1}$ et $\mu_{0,2}$ s'écrivent alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\mu}_{2,0} & = & 2\mu_{1,1} \\ \dot{\mu}_{1,1} & = & \mu_{0,2} - k_1\mu_{2,0} - k_2\mu_{6,0} \\ \dot{\mu}_{0,2} & = & -2k_1\mu_{1,1} - 2k_2\mu_{5,1} \end{array}\right.$$

A l'instant t=0, on connaît tous les moments nécessaires à la détermination de ϵ_{rms}. Par contre, au cours du temps, nous avons donc besoin de connaître $\mu_{6,0}$ et $\mu_{5,1}$ dont leur évolution est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\mu}_{6,0} & = & 6\mu_{5,1} \\ \dot{\mu}_{5,1} & = & 5\mu_{4,2} - k_1\mu_{6,0} - k_2\mu_{10,0} \end{array}\right.$$

avec $\mu_{4,2}$ et $\mu_{10,0}$ obéissant à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\mu}_{4,2} & = & 4\mu_{3,3} - 2k_1\mu_{5,1} - 2k_2\mu_{9,1} \\ \dot{\mu}_{10,0} & = & 10\mu_{9,1} \\ \dot{\mu}_{9,1} & = & 9\mu_{8,2} - k_1\mu_{10,0} - k_2\mu_{14,0} \end{array}\right.$$

On arrive donc à $\mu_{14,0}$ que l'on peut déterminer par extrapolation.
A un moment donné, on a besoin de connaître un ou plusieurs moments d'ordre supérieur à

10 pour décrire l'évolution de tous les moments, en particulier $\mu_{2,0}$, $\mu_{1,1}$ et $\mu_{0,2}$. La méthode d'extrapolation des moments que l'on a établie permet donc de déterminer ces moments et ainsi d'arrêter l'effet de cascade dans l'équation (4.4).

En intégrant par rapport au temps, on obtient l'évolution temporelle de ϵ_{rms} pas à pas. Comparons alors les résultats que l'on obtient de cette façon à ceux trouvés en prenant un code multiparticulaire classique appliqué à notre distribution sur la figure *4-15*.

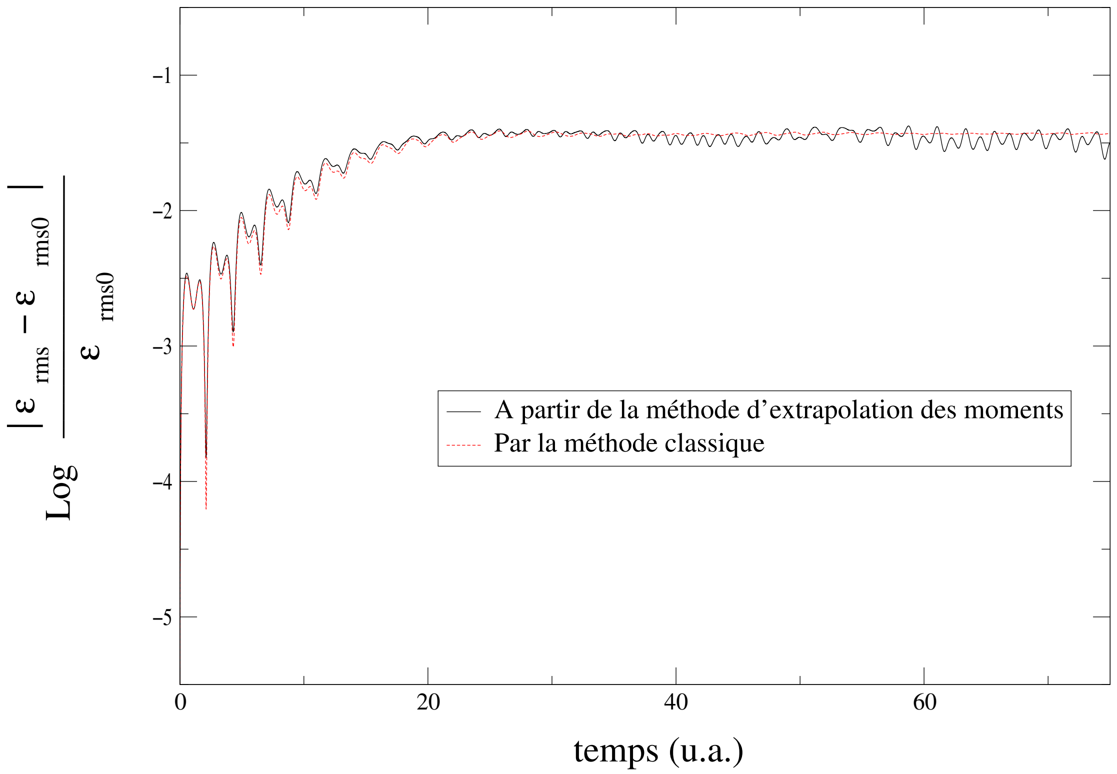


Fig. 4-15 : Logarithme décimal de la variation relative de l'émittance pour un nuage de 32000 particules de densité uniforme en fonction du temps

On retrouve sans problème le régime transitoire et le régime d'équilibre est beaucoup mieux décrit que dans le cas de l'approche naïve décrite au chapitre 3 (voir figure *3-7*). Cependant, au bout d'un temps long, la valeur d'équilibre devient instable. Ceci est très problablement dû à une accumulation d'erreur dans les moments, ceux-ci fluctuant énormément au cours du temps (figure *4-16*). En effet, la filamentation observée sur les nuages de particules au cours du temps introduit des densités projetées à plusieurs bosses non dérivables. Nous savons dans ce cas qu'il est nécessaire de modéliser plus finement la récurrence entre les polynômes orthogonaux du paragraphe (2.7.3.1) en l'analysant en termes de sous-suites.

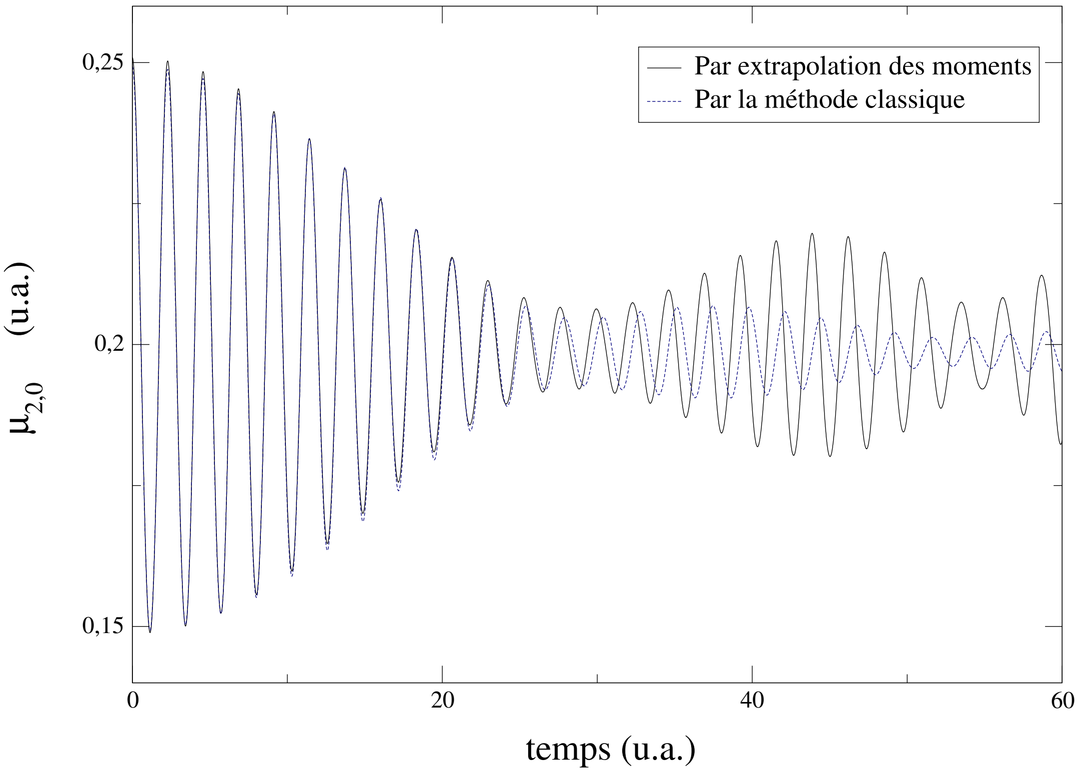


Fig. 4-16 : Moment $\mu_{2,0}$ pour un nuage de 32000 particules de densité uniforme en fonction du temps

Ces moments étant obtenus initialement à partir d'un paramétrage radial et angulaire, on retrouve alors le même problème qu'au chapitre 2, c'est-à-dire la bonne compréhension de l'extrapolation de la récurrence (2.11) en une dimension.

4.5 Conclusion du chapitre

En partant du principe que les pôles de l'intégrale de Stieljes doivent caractériser l'enveloppe convexe d'une densité, nous avons réussi à généraliser cette intégrale en deux dimensions. Puis, avec un paramétrage de l'espace des phases en coordonnées polaires, nous nous sommes ramenés à l'étude d'une densité à partir de ses moments en une seule dimension. Le formalisme établi au chapitre 2 a alors permis de mettre au point une méthode d'estimation de l'enveloppe convexe en deux dimensions d'une distribution de particules soumises à une force non linéaire, symétrique par rapport à l'origine, uniquement à partir de ses premiers moments.

De plus, nous avons vu que la précision de cette enveloppe dépend du nombre de moments connus : plus on connaît initialement de moments, plus on entoure un maximum de particules du nuage à n'importe quel instant de son évolution. On minimise alors les pertes de particules si l'on considère que cette enveloppe convexe représente l'émittance de la distribution dans l'espace des phases. En prenant les premiers moments jusqu'à l'ordre 10 , ces pertes vont de 2 à 10 particules pour 10000 dans l'espace $(x, \dot{x})$. Certes, nous sommes encore loin des pertes de l'ordre de une particule pour un milliard désirées dans l'espace à six dimensions (dans l'étude de faisceaux intenses), mais ceci donne un début de réponse dans la recherche de la localisation des particules dans l'espace transverse d'un faisceau générant une force interne non linéaire.

Enfin, l'extrapolation des moments d'ordre supérieur nous a permis d'assurer la fermeture de l'équation d'évolution des moments. En étudiant l'évolution d'un densité uniquement à partir des équations d'évolution de ses moments, nous nous sommes retrouvés face au problème de l'extrapolation de la récurrence des polynômes orthogonaux en une dimension déjà rencontré au chapitre 2. Nous ne l'avons pas encore totalement résolu. Néanmoins, en une ou deux dimensions, le problème est bien identifié comme étant la bonne compréhension de cette relation de récurrence en une dimension.

Chapitre 5

Mesures de faisceaulogie sur l'accélérateur GENEPI

5.1 Introduction

5.1.1 Contexte historique

Conformément à la loi du 30 décembre 1991 relative aux recherches sur la gestion des déchets radioactifs de haute activité et à vie longue, plusieurs études sur la séparation et la transmutation de ces éléments ont été menées, en particulier des travaux sur la possibilité de leur destruction par fission ou transmutation.

Les études sur les systèmes incinérateurs hybrides s'incrivent dans ce contexte : un réacteur hybride est un réacteur nucléaire sous-critique associé à une source externe de neutrons. Cette source de neutrons est généralement fournie par un accélérateur de particules chargées. Les particules chargées produites viennent frapper une cible au centre du coeur du réacteur et donnent des neutrons en cassant les noyaux de la cible par spallation. Le but de ces études est d'établir les caractéristiques de tels systèmes et d'en évaluer les potentialités [38].

Le programme MUSE (MUltiplication de Source Externe) constitue la composante neutronique expérimentale des études sur ces systèmes hybrides qui se déroule auprès du réacteur de recherche MASURCA (MAquette de SURgénérateur à CAdarache) du Centre d'Etudes Nucléaires du CEA à Cadarache.

L'accélérateur de particules GENEPI (GEnérateur de NEutrons Pulsé Intense) a donc été conçu dans le cadre de ces études pour en être la source complémentaire de neutrons.

5.1.2 Objectif de notre étude

Dans ce chapitre, nous nous attacherons particulièrement aux caractéristiques du faisceau de particules sortant de GENEPI, à partir de mesures effectuées à l'ISN, avant l'installation de GENEPI à Cadarache.
De ce fait, nous ne considérerons pas GENEPI en tant que source de neutrons externe associée à un réacteur mais seulement en tant que "simple" accélérateur de particules (c'est-à-dire sans

la cible). Pour plus d'informations sur les sytèmes hybrides, nous renvoyons le lecteur aux références bibliographiques [39], [40] et [41].

Nous ferons, dans le paragraphe suivant, la description générale de GENEPI. Puis, après quelques calculs théoriques sur les faisceaux de particules, nous décrirons le système de mesures que nous avons développé pour étudier le faisceau. Enfin nous analyserons les résultats expérimentaux que nous avons obtenus.

5.2 Description générale de l'accélérateur GENEPI

5.2.1 Généralités, spécificités

Le GEnérateur de NEutrons Pulsé Intense (GENEPI) produit des impulsions de neutrons rapides d'une durée de 0.5 à quelques microsecondes, par l'intermédiaire d'un faisceau pulsé de deutons (impulsions d'ions de deutérium D). Ces deutons sont produits par une source, puis sont focalisés, accélérés et transportés sur une cible dans laquelle est implanté du deutérium (D) ou du tritium (T) selons les besoins. Les réactions nucléaires (D, D) ou (D, T) produisent alors des neutrons d'énergie respective 2.67 MeV et 14.1 MeV.

GENEPI est un accélérateur électrostatique classique, mais ici la production moyenne de neutrons est plus faible que pour beaucoup d'autres petites machines. L'originalité de GENEPI est son fonctionnement à grand courant crête d'ions, de l'ordre de 50 mA maximum, avec un temps de descente de l'impulsion de neutrons de l'ordre de 10^{-7} seconde.

5.2.2 Constitution de GENEPI

GENEPI est constitué successivement :

- de la source d'ions et des électrodes d'extraction et de focalisation ;
- du tube accélérateur ;
- du guide de faisceau comprenant le séparateur de masse et la ligne de transport jusqu'à la cible ;
- de la cible (deutérée ou tritiée) ;
- d'annexes assurant le fonctionnement de l'ensemble : pompes à vide, alimentations électriques, commandes et contrôles.

Les caractéristiques complètes de ces éléments sont décrites dans le rapport "L'accélérateur GENEPI" [42] ; nous allons les décrire brièvement.

5.2.2.1 La source d'ions de deutérium (deutons)

La source d'ions choisie est de type duoplasmatron [43]. Elle est constituée essentiellement de 3 électrodes dans un milieu contenant du deutérium, isotope d'hydrogène :

- une cathode chaude, émissive d'électrons ;
- une électrode intermédiaire appelée cône ;
- une anode qui reçoit les électrons de la cathode et les ions créés dans son voisinage par un arc électrique.

Lorsqu'une tension entre la cathode et l'anode est appliquée, l'envoi d'une impulsion de tension positive sur le cône déclenche une décharge appelée arc entre la cathode et l'anode : le filament fournit alors une avalanche d'électrons dans le gaz qui s'ionise. La formation et la disparition du plasma dues à cette décharge sont rapides et la fréquence de répétition peut être de 0 à 5000 Hz. Le plasma est donc pulsé. De plus, le cône constitue une puissante lentille magnétique pour les électrons et focalise ce plasma sur un petit trou situé sur l'axe de l'anode. Enfin, une électrode d'extraction portée à une tension négative $-V_{ext}$ (de plus de 50 kV) extrait les ions du plasma issu de l'anode pour former le faisceau d'ions.

Sans champ magnétique, la source ne produit pas d'ions. Ce champ est produit par 2 bobines parcourues par un courant appelé "i_{bobine}". D'une part, ce champ resserre le plasma dans le trou de l'anode, d'autre part, il crée une élévation locale du potentiel qui conduit une partie des ions du plasma à se diriger du côté de l'anode d'où ils pourront être extraits.

Cette source permet donc de transformer une partie du gaz deutérium injecté en impulsions de deutons. Le faisceau obtenu est environ composé à 75 % d'ions D^+, 25 % d'ions D_2^+ et en plus faible proportion de D_3^+.

5.2.2.2 Le tube accélérateur

C'est un tube accélérateur électrostatique classique de 250 keV maximum, de taille modeste et transportable, adapté spécialement pour GENEPI. Il accélère les deutons sortant de l'anode de la source à l'énergie désirée (en général entre 150 et 250 keV).

5.2.2.3 Le guide de faisceau

Le long de son transport (sur environ 5 mètres), le faisceau est contenu par des lentilles de focalisation et conduit jusqu'à l'extrémité du guide qui est en forme de "doigt de gant".

- L'aimant-spectromètre :
  C'est un dipôle à 45 degrés qui sépare les ions D^+ des autres ions parasites (de masse différente) aussi produits par la source : après le passage à travers cet aimant, il ne reste plus que des ions D^+ dans le faisceau. Il permet aussi de détecter des particules associées à la production des neutrons (particules alphas et protons), pour le monitorage de cette production.

- Les quadripôles *Q0*, *Q1*, *Q2*, *Q3* :
  Le premier quadripôle *Q0* est un aimant permanent constitué de ferrites. Les suivants sont des lentilles de focalisation électrostatiques réglables, sous vide. Ils permettent de contenir le faisceau et de le "mettre en forme" afin qu'il ait les caractéristiques désirées à l'entrée du doigt de gant.

- Les quadripôles *Q4* dans le doigt de gant :
  Le doigt de gant est un tube rectangulaire conduisant le faisceau jusqu'à la cible tritiée (placée au coeur du réacteur à Cadarache). Ses dimensions, relativement réduites, ont été imposées par la géométrie du réacteur. Il contient un système optique (de type *FODO*)

formé de 6 quadripôles électrostatiques identiques *Q4* pour focaliser le faisceau et ainsi limiter au maximum les effets de la charge d'espace.
Une photo du doigt de gant démonté est donnée sur la figure *5-1*.

Fig. 5-1 : Doigt de gant et quadripôles Q4

- Les correcteurs de trajectoires : "steerers" :
  Même avec un positionnement précis du matériel, il est difficile de centrer le faisceau sur la cible. Des correcteurs de trajectoire, appelés "steerers" ont donc été disposés le long de la voie de faisceau. Ils sont, soit magnétiques (*STM1(v)*, *STM2(h)*, *STM3(h)* et *STM3(v)*), soit électriques (*STE(v)*). Il est alors possible de déplacer le faisceau horizontalement *(h)* et verticalement *(v)* pour le centrer au niveau de la cible. Nous étudierons les effets des steerers *STM3(h)* et *STM3(v)* dans le paragraphe (5.5.4).

5.2.2.4 La cible

La cible est située au bout du doigt de gant, elle est au centre du réacteur ; c'est un disque de cuivre d'un millimètre d'épaisseur, recouvert d'une couche de titane retenant du deutérium ou du tritium.

5.2.3 Systèmes de diagnostic du faisceau

Trois diagnostics sont disposés le long du faisceau. Les deux premiers, appelés D1 et D4, sont du même type : un translateur introduit dans le faisceau une coupe de Faraday munie d'un piège à électrons tandis qu'une petite fente balaye ce faisceau. Ce dispositif permet de relever le profil de la densité radiale du faisceau. D1 est placé en sortie du tube accélérateur et D4 est placé après l'aimant.

Si le faisceau n'est pas intercepté par D1 ou D4, il arrive sur le dernier système de mesure, D6. Celui-ci, positionné à la place de la cible, est plus complexe puisqu'il permet d'effectuer des mesures d'émittance. C'est à partir de ce système que nous avons fait la présente étude. Il sera décrit au paragraphe (5.4.1).

Pour les trois systèmes, il est possible de connaître simultanément le courant moyen, par un micro-ampèremètre, et le courant instantané en fonction du temps avec un oscilloscope.

L'ensemble GENEPI est représenté sur la figure *5-2* avec tous les éléments de l'optique et sur la figure *5-3* avec le système de mesure D6 en bout de doigt de gant.

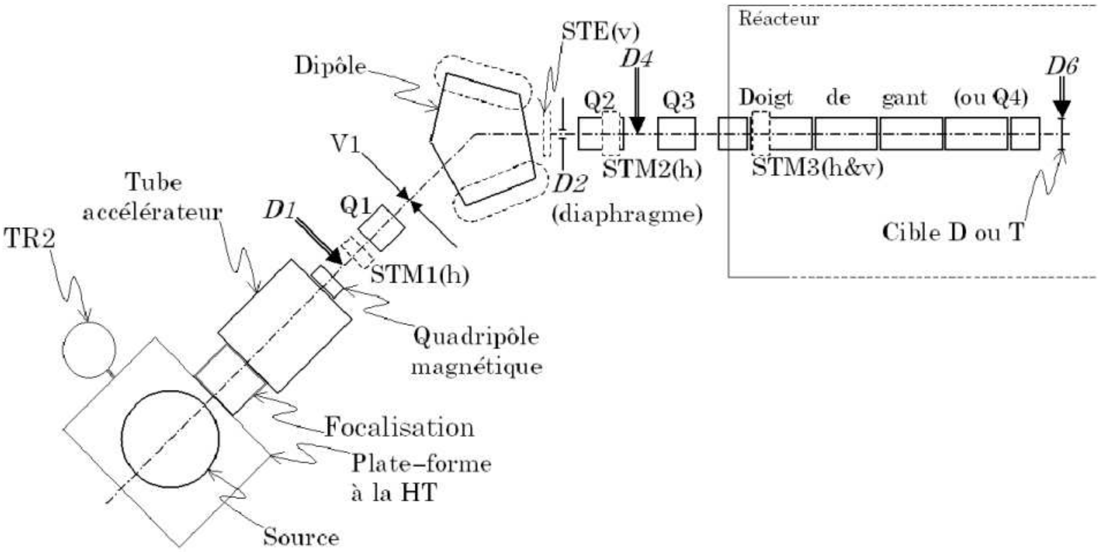


Fig. 5-2 : Vue en coupe horizontale de l'ensemble GENEPI

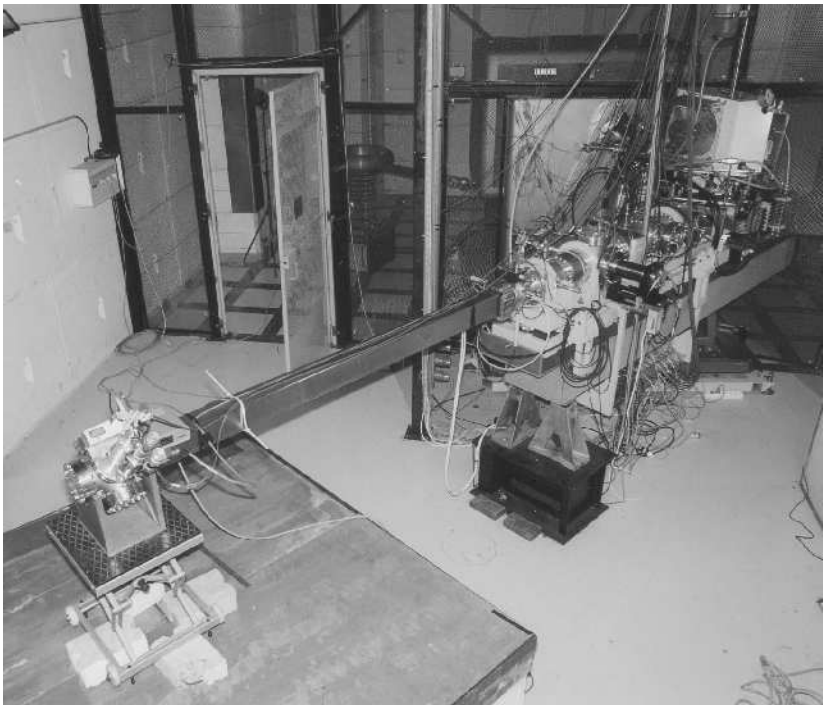


Fig. 5-3 : Photo de l'ensemble GENEPI avec le système de diagnostic D6 à l'ISN

5.2.3.1 Les réglages standards

Des réglages nominaux, dits "réglages standards", des éléments de GENEPI ont été établis en fonction de l'énergie des ions (de 150 à 250 keV) pour une intensité crête maximum sur la cible. C'est avec ces réglages que toutes les mesures à forte intensité seront faites. A basse intensité, nous verrons que nous avons très légèrement repris ces réglages.

5.3 Aspects théoriques

Nous nous plaçons dans l'hypothèse de paraxialité du chapitre introductif qui permet de traiter indépendamment le mouvement transverse et le mouvement longitudinal d'une particule. Dans ce chapitre, nous appelerons s, l'abscisse curviligne qui représente la position longitudinale de chaque particule. Elle définit alors l'axe principal de la structure de la machine. L'étude théorique qui suit correspond donc au plan transverse (x, y) pour un s donné, orthogonal à l'axe principal.

5.3.1 Faisceau K-V

Kapchinskij et Vladimirskij ont démontré [44] qu'il existe une distribution ellipsoïde dans l'espace des phases à quatre dimensions (x, x', y, y') qui conduit à des forces de charge d'espace parfaitement linéaires à l'intérieur du faisceau. Les particules de cette distribution K-V, sont uniformément réparties dans une surface elliptique de dimension 4 [45] :

$$f(x, x', y, y') = \frac{Nq}{\pi^2 a^2 b^2}\delta\left(\frac{1}{a^2}(x^2 + x'^2) + \frac{1}{b^2}(y^2 + y'^2) - 1\right)$$

où : N est le nombre de particules par mètre, q leur charge et a et b les enveloppes du faisceau dans l'espace transverse (x, y). De plus, les particules ont toutes la même énergie transverse.

Dans n'importe quelle projection à deux dimensions (u, v) de l'espace des phases (x, x', y, y'), cette fonction de distribution devient :

$$f(u, v) = \frac{Nq}{\pi ab}\Theta\left(1 - \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}\right)$$

où $\Theta(\zeta)$ vaut 1 si $\zeta \geq 0$ et 0 sinon.
Ainsi les projections dans les espaces (x, x'), (y, y'), (x, y) et (x', y') forment des ellipses uniformes. De plus, le profil transverse est et reste une ellipse uniforme lorsque les forces de focalisation extérieures sont linéaires. C'est cette propriété qui garantit que les forces de charge d'espace sont linéaires tout au long du transport du faisceau K-V [49].

5.3.2 Emittance diamétrale et émittance totale

5.3.2.1 Définition et objectifs

Considérons un faisceau rond, ayant la symétrie de révolution dans l'espace transverse (x, y) et centré. Par définition, on appelle émittance diamétrale ε_r, l'émittance mesurée selon un diamètre du faisceau. Si l'on prend le cas de l'espace des phases (x, x'), ceci signifie que cette émittance diamétrale est mesurée selon x pour $y = 0$. L'émittance totale ε_x dans (x, x'), est l'émittance calculée selon x intégrée sur toutes les valeurs de y. A cette émittance ε_r, on fait correspondre une émittance RMS σ_{ε_r}.

Nous verrons au paragraphe (5.4.3) que toutes les mesures de faisceaulogie sur GENEPI - en particulier les mesures d'émittance - ont été effectuées selon un diamètre du faisceau et non sur toute sa surface dans l'espace (x, y) ; or, nous voulons remonter à une information totale en termes d'émittance. C'est pourquoi nous avons cherché la relation qui existe entre les émittances diamétrale et totale du faisceau en fonction de sa distribution de particules.

5.3.2.2 Relation entre l'émittance diamétrale et l'émittance totale

Soit $n(r)$ la densité selon le rayon de notre faisceau. On souhaite relier l'émittance RMS en (x, x'), σ_{ε_x} et l'émittance mesurée selon un diamètre σ_{ε_r}, que l'on appelle aussi émittance en (r, r') [46].
Le faisceau étant supposé centré, on a donc $< x >=< x' >= 0$.

- Calcul de l'enveloppe $\sigma_x^2 =< x^2 >$:
  L'élément de surface dans l'espace des phases est:

$$dS = rdrd\theta.$$

  Pour normaliser les intégrales, on calcule :

$$a = \int_0^{+\infty} ndS = \int_0^{+\infty} n(r)rd\theta dr = 2\pi \int_0^{+\infty} rn(r)dr$$

$$< x^2 >= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} x^2 nds = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} r^2cos^2\theta n(r)rd\theta dr = \frac{\pi}{a}\int_0^{+\infty} r^3n(r)dr$$

  Finalement, on a :

$$< x^2 >= \frac{1}{2}\frac{\int\limits_0^{+\infty} r^3n(r)dr}{\int\limits_0^{+\infty} rn(r)dr} \tag{5.1}$$

- Le faisceau ayant la symétrie de révolution, celle-ci impose que la vitesse radiale soit colinéaire au rayon vecteur, soit :

$$x' = r'cos\theta = r'\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$y' = r'sin\theta = r'\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

  où r' a une distribution supposée indépendante des autres variables.

- Calcul de l'enveloppe $\sigma^2_{x'} =< x'^2 >$:
  Soit dV l'élément de "volume" selon les coordonnées (x, y, r') :

$$< x'^2 >= \int x'^2 n(x,y,r')dV = \int \frac{x^2}{x^2+y^2} r'^2 n(x,y,r')dV$$

de même:

$$< y'^2 >= \int y'^2 n(x,y,r')dV = \int \frac{y^2}{x^2+y^2} r'^2 n(x,y,r')dV$$

Comme, par symétrie, $< x'^2 >=< y'^2 >$,

$$\sigma^2_{r'} = \int r'^2 n(x,y,r')dV =< x'^2 > + < y'^2 >= 2 < x'^2 >$$

car les variables sont supposées indépendantes.

La matrice faisceau (1.1) dite "totale" en (x, x') décrite d'après la distribution diamétrale s'écrit :

$$\Sigma_x = \begin{bmatrix} < x^2 > & 0 \\ 0 & \frac{{\sigma_{r'}}^2}{2} \end{bmatrix}$$

Par définition, l'émittance RMS en (x, x') devient :

$$\boxed{\sigma_{\varepsilon_x} = 2\sqrt{det\Sigma_x} = \sigma_{r'}\sigma_x \quad \text{et} \quad \beta_x = 2\frac{\sigma_x}{\sigma_{r'}}} \tag{5.2}$$

Cas d'une répartition gaussienne en (r, r') de la densité des ions :

$$n(r) = \frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}\right)$$

On calcule que :

$$< x^2 >= \frac{1}{2}\frac{\int_0^{+\infty} r^3 n(r)dr}{\int_0^{+\infty} rn(r)dr} = \sigma_r$$

et $< xx' >= 0$.
La matrice faisceau en (r, r') devient donc :

$$\Sigma_r = \begin{bmatrix} {\sigma_x}^2 & 0 \\ 0 & \frac{{\sigma_{r'}}^2}{2} \end{bmatrix}$$

Et l'émittance RMS en (r, r') vaut :

$$\sigma_{\varepsilon_r} = 2\sqrt{det\Sigma_r} = \sqrt{2}\sigma_{r'}\sigma_x$$

Finalement, on trouve :

$$\frac{\sigma_{\varepsilon_r}}{\sigma_{\varepsilon_x}} = \sqrt{2}\frac{\sigma_x \sigma_{r'}}{\sigma_x \sigma_{r'}}$$

Soit :

$$\boxed{\sigma_{\varepsilon_r} = \sqrt{2}\sigma_{\varepsilon_x} \quad \beta_r = \frac{\beta_x}{\sqrt{2}} \quad \alpha_r = \frac{\alpha_x}{\sqrt{2}}} \tag{5.3}$$

Cas d'une densité uniforme dans un cercle de rayon ρ en (r, r') :

$$< x^2 >= \frac{3}{4}\sigma_r^2$$

Ce qui conduit à :

$$\boxed{\sigma_{\varepsilon_r} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{2}\sigma_{\varepsilon_x} \quad \beta_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\beta_x}{\sqrt{2}} \quad \alpha_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\alpha_x}{\sqrt{2}}} \tag{5.4}$$

On remarque donc qu'il n'y a pas une grande différence entre le cas gaussien et le cas uniforme car $\frac{2}{\sqrt{3}}$ est proche de 1 (≈ 1.15). On estimera donc qu'il y a un facteur $\sqrt{2}$ dans les calculs entre les émittances diamétrale et totale.
Cette relation est évidemment valable, par raison de symétrie, entre l'émittance totale définie dans l'espace (y, y') et l'émittance diamétrale calculée selon y pour $x = 0$.

5.3.3 Equation d'enveloppe du faisceau

Soit un faisceau de particules subissant un effet de charge d'espace de densité inconnue, ne subissant pas d'accélération et ayant la symétrie elliptique dans l'espace transverse (x, y). On soumet ce faisceau à des forces externes de focalisation en x et y. On veut déterminer l'équation d'enveloppe de ce faisceau de particules.
Pour cela, partons de la définition de l'enveloppe RMS σ_x (le calcul est identique pour l'enveloppe RMS σ_y en y) et dérivons-la par rapport à s :

$$\sigma_x = \sqrt{< x^2 >}$$

$$\sigma'_x = \frac{< xx' >}{\sigma_x} \tag{5.5}$$

Soit encore :

$$\sigma_x \sigma'_x =< xx' > \tag{5.6}$$

En dérivant l'équation (5.6) et compte tenu de la relation (5.5), il en découle :

$$\sigma_x \sigma''_x + \frac{< xx' >^2}{{\sigma_x}^2} =< xx'' > +< x'^2 >$$

ou bien encore :

$$\sigma_x'' = \frac{< xx'' >}{\sigma_x} + \frac{{\sigma_x'}^2}{\sigma_x} - \frac{< xx' >^2}{{\sigma_x}^3}$$

En faisant apparaître l'émittance RMS, $\sigma_{\varepsilon_x} = 2\sqrt{{\sigma_{x'}}^2{\sigma_x}^2 - < xx' >^2}$, on obtient l'équation d'enveloppe RMS σ_x générale :

$$\boxed{\sigma_x'' = \frac{< xx'' >}{\sigma_x} + \frac{{\sigma_{\varepsilon_x}}^2}{4{\sigma_x}^3}} \tag{5.7}$$

Nous avons vu dans le chapitre introductif que l'on supposait les forces de focalisation nécessaires au guidage du faisceau linéaires. On rappelle alors que la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$x'' + k_x(s)x - F_x = 0 \tag{5.8}$$

où F_x représente la force due aux champs électriques et magnétiques internes créés à l'intérieur du faisceau (charge d'espace). Elle est définie par [47] :

$$F_x = \frac{qE_x(1-\beta_L^2)}{\gamma_L mc^2\beta_L^2} = \frac{qE_x}{m\gamma_L^3(c\beta_L)^2} \tag{5.9}$$

E_x étant le champ électrique en x et β_L et γ_L les coefficients de Lorentz. Le terme en β_L^2 correspond à la force magnétique qui tend à annuler le terme de charge d'espace pour un faisceau relativiste.

En multipliant par x la relation (5.8) et en moyennant sur toute la distribution de particules du faisceau, on a :

$$\boxed{< xx'' > + k_x(s)\sigma_x^2 - < xF_x > = 0} \tag{5.10}$$

En combinant les équations (5.7) et (5.10), il vient l'équation générale de l'enveloppe RMS σ_x sous charge d'espace (c'est la même pour σ_y) :

$$\boxed{\sigma_x'' + k_x(s)\sigma_x - \frac{{\sigma_{\varepsilon_x}}^2}{4{\sigma_x}^3} - \frac{< xF_x >}{\sigma_x} = 0} \tag{5.11}$$

On montre que le terme de force de charge d'espace moyenne $< xF_x >$ est quasiment indépendant (à quelques dizièmes de % près) de la forme de la distribution (ayant la symétrie elliptique) et qu'il a donc la même valeur que dans le cas d'une distribution K-V [48] :

$$< xF_x > = \frac{K}{2}\frac{\sigma_x}{\sigma_x + \sigma_y} \tag{5.12}$$

où K est la pervéance généralisée du faisceau définie par :

$$K = \frac{qI}{2\pi\epsilon_0 m(\beta_L\gamma_L c)^3} \tag{5.13}$$

En remplaçant cette expression dans l'équation (5.11), il vient les équations des enveloppes RMS σ_x et σ_y du faisceau considéré :

$$\boxed{\sigma_x'' + k_x(s)\sigma_x - \frac{{\sigma_{\varepsilon_x}}^2}{4{\sigma_x}^3} - \frac{K}{2(\sigma_x + \sigma_y)} = 0} \tag{5.14}$$

$$\boxed{\sigma_y'' + k_y(s)\sigma_y - \frac{{\sigma_{\varepsilon_y}}^2}{4{\sigma_y}^3} - \frac{K}{2(\sigma_x + \sigma_y)} = 0} \tag{5.15}$$

5.3.4 Exemple : cas d'un faisceau rond de densité uniforme

Pour le cas particulier d'un faisceau rond de rayon R_0 et de densité uniforme sur ce disque, nous montrons, à titre d'exemple, la façon dont on obtient le terme de force de l'équation (5.11) introduit précedemment.
Dans ce cas, la densité projetée p sur x est :

$$p(x) = \frac{4}{R_0\pi}\sqrt{1 - \frac{x^2}{R_0^2}}$$

Le champ vaut alors, d'après le theorème de Gauss :

$$E_x = \frac{I}{\beta_L c 2\pi\epsilon_0}\frac{x}{R_0^2}$$

Le terme de force $< xF_x >$ s'exprime, grâce à la relation (5.9) :

$$< xF_x >= \frac{qI}{2\pi\epsilon_0 m(\beta_L\gamma_L c)^3}\frac{4}{R_0^3\pi}\int_0^{R_0} x.x\sqrt{1 - \frac{x^2}{R_0^2}}dx$$

Nous reconnaissons la pervéance K et retrouvons donc le terme de force (5.12) :

$$< xF_x >= \frac{K}{4}$$

L'équation d'enveloppe RMS (5.11) devient donc :

$$\boxed{\sigma_x'' + k_x(s)\sigma_x - \frac{{\sigma_{\varepsilon_x}}^2}{4{\sigma_x}^3} - \frac{K}{4\sigma_x} = 0} \tag{5.16}$$

5.3.5 Notion de faisceau équivalent

On peut introduire la notion de faisceau équivalent, qui est le faisceau K-V dont les grandeurs RMS sont les mêmes que celles du faisceau étudié. On définit alors les enveloppes X et Y du faisceau ainsi que les émittances totales ε_X et ε_Y telles que [49] :

$$\begin{cases} X = 2\sigma_x & Y = 2\sigma_y \\ \varepsilon_X = 4\sigma_{\varepsilon_x} & \varepsilon_Y = 4\sigma_{\varepsilon_y} \end{cases}$$

Dans ce cas, les équations d'enveloppe (5.14) et (5.15) s'écrivent :

$$X'' + k_x(s)X - \frac{{\varepsilon_X}^2}{4X^3} - \frac{2K}{X+Y} = 0 \tag{5.17}$$

$$Y'' + k_y(s)Y - \frac{{\varepsilon_Y}^2}{4Y^3} - \frac{2K}{X+Y} = 0 \tag{5.18}$$

Dans l'analyse des résultats de GENEPI, en particulier les remontées d'émittance (5.5.7), nous considérerons les enveloppes de faisceau dites à 2 écarts-type en X et en Y. On choisit de prendre l'enveloppe comme étant $2\sigma_x$ (ou $2\sigma_y$) pour dimensionner correctement les éléments d'optique de l'accélérateur.
Cependant, pour des raisons pratiques, on exprimera les équations (5.17) et (5.18) en fonction des émittances RMS σ_{ε_x} et σ_{ε_y} :

$$X'' + k_x(s)X - \frac{4{\sigma_{\varepsilon_x}}^2}{X^3} - \frac{2K}{X+Y} = 0 \tag{5.19}$$

$$Y'' + k_y(s)Y - \frac{4{\sigma_{\varepsilon_y}}^2}{Y^3} - \frac{2K}{X+Y} = 0 \tag{5.20}$$

En effet, nous verrons que l'on peut relier l'émittance RMS en x (respectivement en y) et l'émittance géométrique horizontale (respectivement verticale) obtenue expérimentalement. Ceci nous permettra d'établir les équations d'enveloppe relatives aux caractéristiques du faisceau de GENEPI.

5.4 Le système de mesures D6

Afin de mieux connaître les caractéristiques du faisceau de GENEPI, il a été décidé de faire une série de mesures au niveau de la cible, avant que la machine ne soit installée auprès de MASURCA. Nous avons donc conçu un système de diagnostic simple, rapide et économique pour mesurer les profils de densité au niveau de la source ainsi que l'émittance du faisceau [50].

5.4.1 Description du dispositif

Le système de diagnostic D6 de faisceau utilise une plaque à trous appelée "poivrière" : en sortie du doigt de gant, à 66 mm en amont du positionnement de la cible, on la place perpendiculairement à l'axe du faisceau. Elle est percée de petits trous sur deux diamètres orthogonaux formant une croix. Deux fentes d'analyse (de 0.2 mm de large), représentant elles aussi une croix, sont montées sur un axe motorisé, appelé translateur et placé à 54 mm en aval de la poivrière, de sorte que ces deux fentes soient toujours parallèles aux lignes correspondant aux trous de la plaque. Chaque fente est à l'avant d'une micro-coupe de Faraday qui permet de mesurer le courant passant à travers chaque fente (voir les schémas de montage figures 5-4 et 5-5).

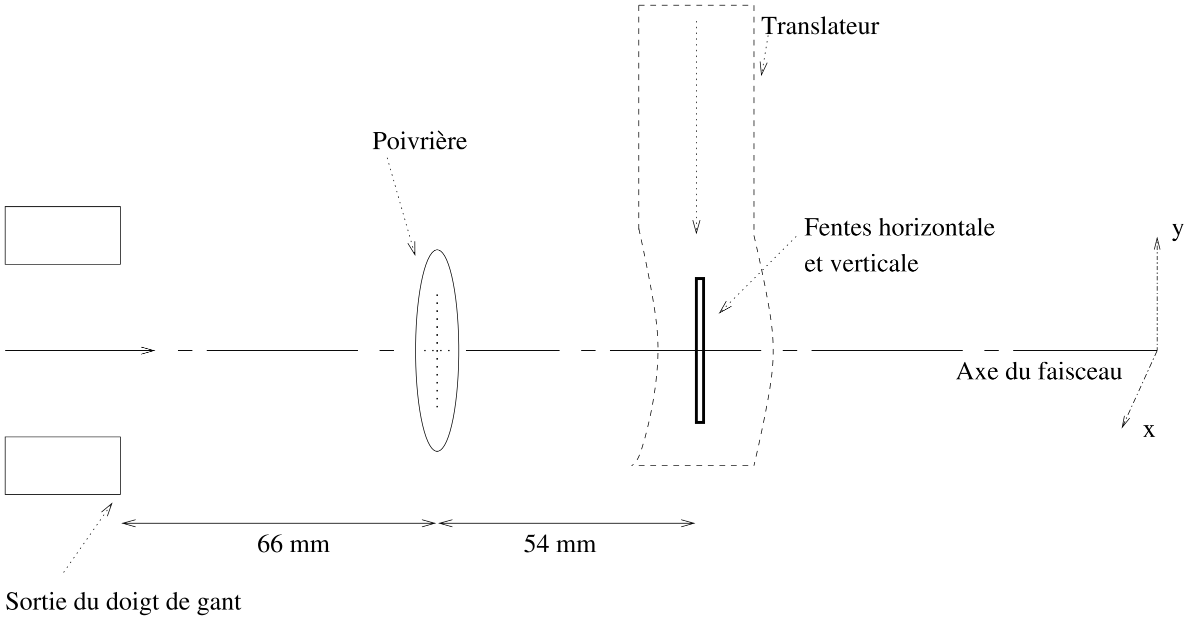


Fig. 5-4 : Schéma de montage longitudinal

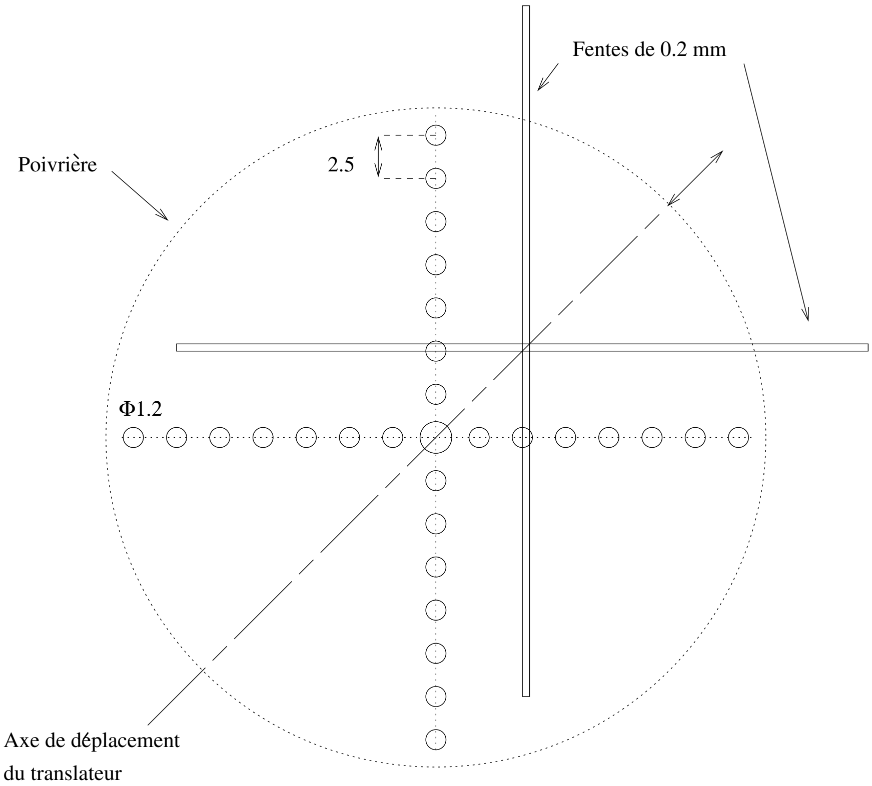


Fig. 5-5 : Schéma de montage transversal

En général, on gardera une orientation du translateur de 45 degrés telle que l'on puisse déduire aisément les profils diamétraux horizontal et vertical du faisceau (*i.e* Nord-Ouest ou Nord-Est sur la figure 5-6). Par abus de langage, on parlera à l'avenir de fentes et trous "horizontaux" et verticaux".

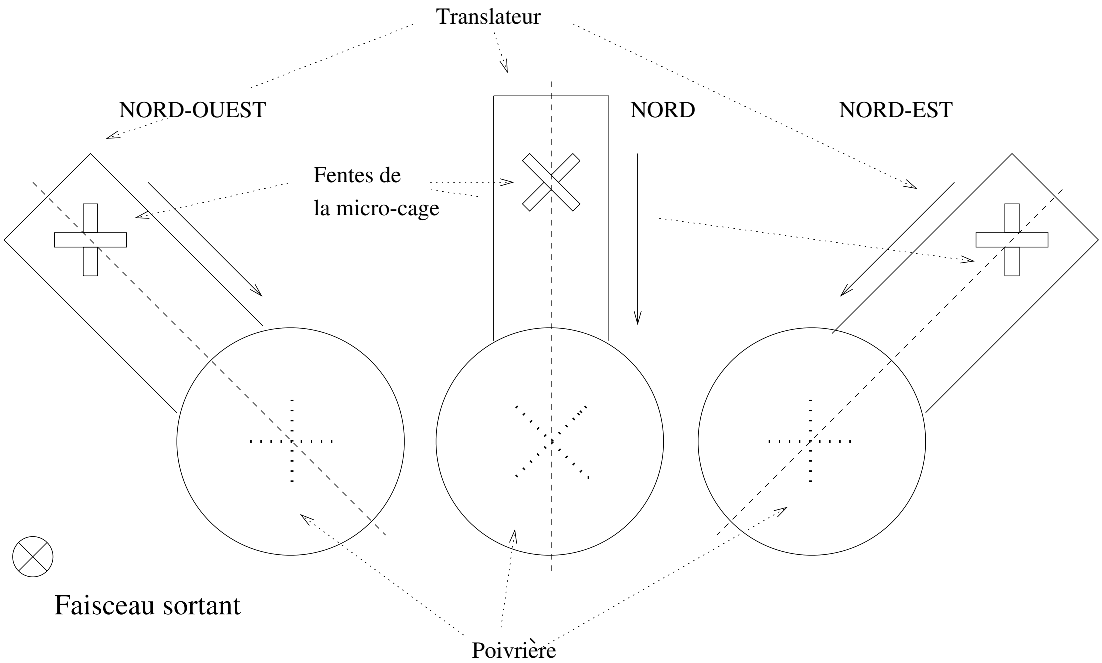


Fig. 5-6 : Orientations possibles du dispositif

Le faisceau passant par les trous de la poivrière forme des micro-faisceaux : la micro-coupe de Faraday verticale balaye les trous horizontaux de la poivrière et l'horizontale, les trous verticaux. Grâce à ce double balayage, on obtient deux successions de pics (selon chaque diamètre) donnant les deux profils en intensité du faisceau issues des deux lignes de trous de la poivrière, et ceci en un seul déplacement du translateur.

Cependant, si l'on veut le profil du faisceau sur d'autres diamètres, il suffit de tourner le dispositif de 45 degrés comme on l'a vu sur la figure *5-6* ce qui permettra d'avoir une idée plus précise de la forme du faisceau en sortie d'accélérateur.

A titre d'information, les principales caractéristiques du système de diagnostic, en particulier de la poivrière, sont regroupées dans le tableau *5-1* :

Nombre de trous total	29
Nombre de trous par axe (celui du milieu confondu)	15
Diamètre des trous sauf celui du centre	1.2 mm
Diamètre du trou central	1.6 mm
Distance entre 2 trous d'axe à axe	2.5 mm
Distance sortie de doigt de gant-poivrière	66 mm
Distance poivrière-fentes	54 mm

Tableau 5-1 : Principales caractéristiques du système de mesure

Le trou du centre avait été prévu plus large que les autres afin de savoir si la poivrière et le système fentes/coupes était dans le même axe et pour mesurer ce décalage dans le cas contraire.

Une fois cet écart relatif estimé, on aurait alors pu en déduire la position du faisceau par rapport à l'axe de la machine (nous allons voir dans le paragraphe suivant que nous avons procédé autrement pour estimer le décalage du faisceau).

5.4.2 Les coupes de Faraday

La géométrie des coupes de Faraday, situées derrière les fentes d'analyse est un peu particulière puisqu'elles ne sont pas totalement symétriques ; une des 2 coupes (disons la verticale dans une orientation Nord-Ouest) est divisée en deux comme on le voit sur la figure *5-7* :

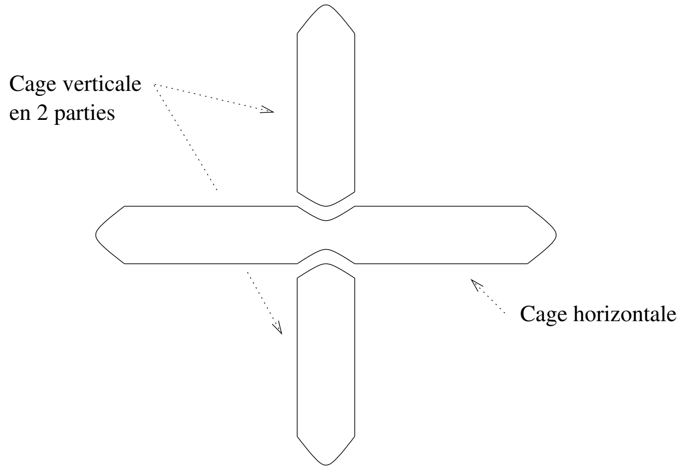


Fig. 5-7 : Géométrie des deux micro-coupes de Faraday derrière les fentes d'analyse (vue de haut)

Il y a, en fait, non pas 2 coupes mais 3 coupes de Faraday dans le dispositif de mesures mais les 2 coupes verticales correspondent aux mesures horizontales. Ces coupes (dont la surface de réception est en cuivre) sont donc de conception relativement sommaire (elles ne possèdent pas de repousseur d'électrons) car nous voulons seulement des mesures de courant relatives dans les deux dimensions.
La conséquence de cette construction est qu'une partie du faisceau (correspondant à l'intersection des deux coupes) n'est pas balayée ; on a alors un "trou" dans le profil horizontal.

On constate aussi que, d'après ce dispositif, quand les deux croix formées par les deux séries de trous et les deux fentes coïncident, il y a un maximum d'intensité (les deux fentes passent par tous les trous) ; on a alors deux saturations simultanées en courant. Nous profiterons de cette double saturation des micro-coupes de Faraday pour nous repérer et savoir si le faisceau est centré ou non par rapport à l'axe de la machine et pour mesurer ces décalages en x et en y. Ceci donnera une information complémentaire à celle déjà obtenue de la position du trou central.

On donne en figure *5-8* un exemple de profil horizontal caractéristique avec un trou manquant (dû à la conception des coupes de Faraday) et une zone de saturation (due à la superposition des fentes d'analyse et trous).

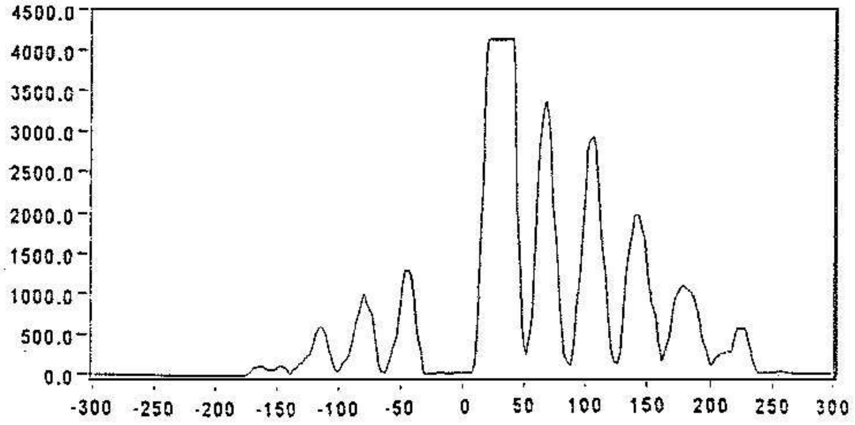


Fig. 5-8 : Exemple de profil horizontal (ici à 200 kV avec un fort courant ; en dixième de mm divisé par $\sqrt{2}$ en X, unités arbitraires en Y).

Enfin, simultanément, on peut avoir le courant moyen passant par D6, à l'aide d'une autre coupe de Faraday avec piègeage des électrons.

L'ensemble du système de diagnostic de faisceau en D6 est représenté sur la figure *5-9* :

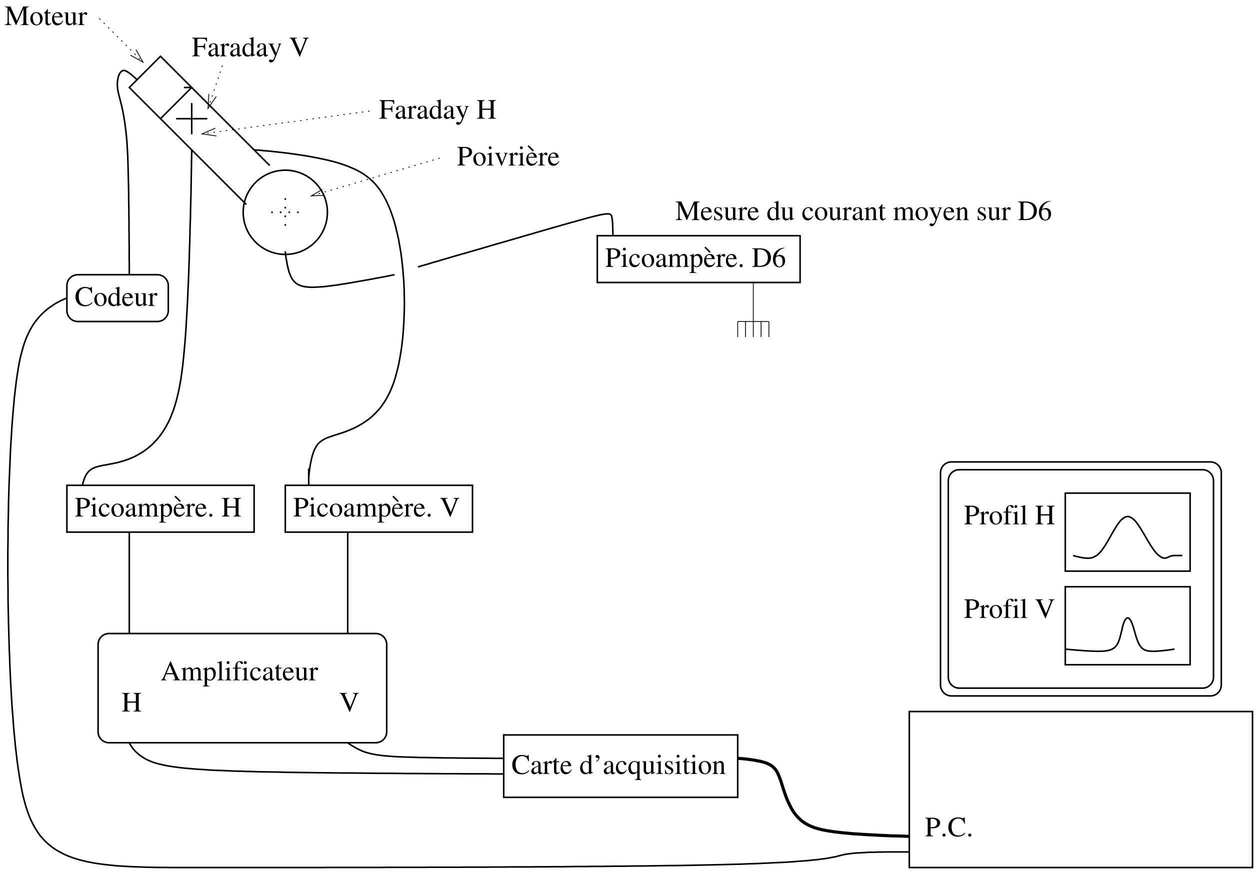


Fig. 5-9 : Schéma d'ensemble du sytème de diagnostic de faisceau en D6

5.4.3 Principe des mesures d'émittance

Les mesures de profils étant uniquement diamétrales, nous allons voir comment l'on reconstruit l'émittance dite diamétrale définie au paragraphe (5.3.2.1). On cherche donc, à partir des relevés de pics d'intensité obtenus, à reconstruire une ellipse d'émittance géométrique dans l'espace des phases (r, r'). On utilise l'indice *r* pour insister sur l'aspect diamétral des mesures. Dans la pratique, on utilisera les indices *h* et *v* qui correspondent aux diamètres horizontal et vertical.

Considérons un relevé selon un diamètre (qui correspond donc à une seule série de trous). Le faisceau présentant une divergence, deux trous consécutifs, d'entre-axe ϕ_{inter} donné, produisent deux pics d'entre-axe différent dp. Cette différence d'entre-axe permet alors de déterminer l'inclinaison de l'ellipse d'émittance (représentée par le paramètre α_r de l'émittance). Par convention, on prendra $\alpha_r > 0$ pour un faisceau convergent et $\alpha_r < 0$ pour un faisceau divergent.

Le faisceau ayant une émittance non nulle, chaque trou de diamètre donné ϕ_{trou}, produit un pic de largeur dx différente.

La variation des distances entre les centres de gravité des pics relevés et la distance entre les trous donne la divergence globale $\Delta r'$ du faisceau représentée dans l'espace des phases par la pente de l'ellipse d'émittance.

L'élargissement des pics dx par rapport au diamètre des trous de la poivrière donne la divergence locale $\delta r'$.

A chaque trou, il correspond donc une bande de faisceau rectangulaire caractérisée par sa divergence locale $\delta r'$ et son épaisseur dx. On reconstitue alors l'émittance discrétisée formée d'autant de rectangles que de trous exploitables (figure 5-10) [51].

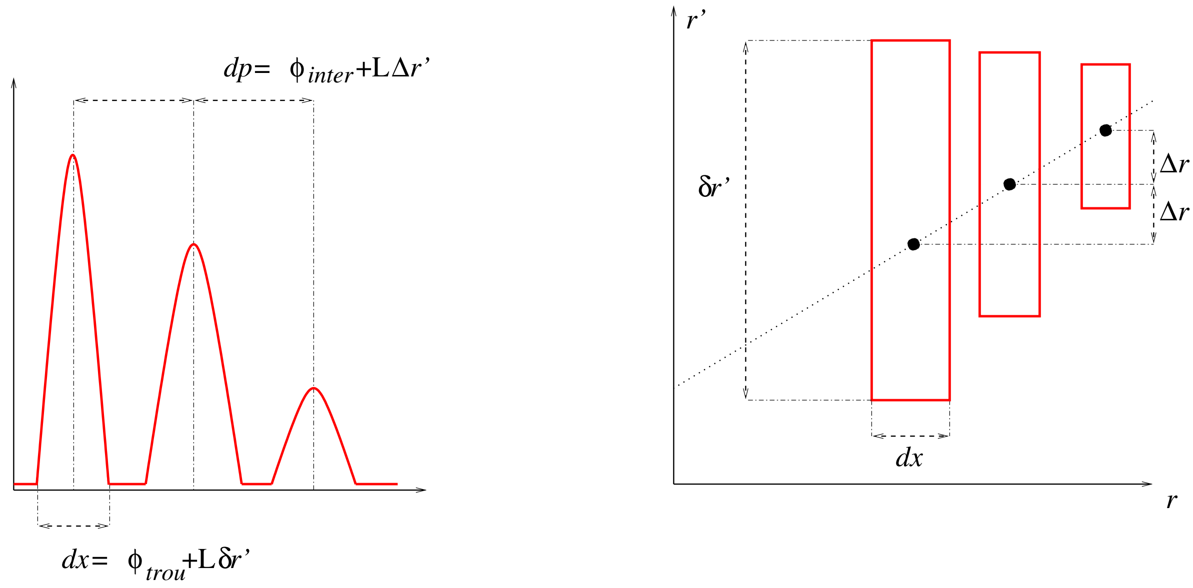


Fig. 5-10 : Principe de reconstruction de l'émittance

A partir de cette discrétisation, on cherche l'ellipse représentant le mieux possible l'aire décrite par tous les rectangles. Cette ellipse représente donc l'émittance géométrique diamétrale d'aire $\pi\varepsilon_r$ et d'équation normalisée (figure 5-11) :

$$\beta_r r'^2 + 2\alpha_r r r' + \gamma_r r^2 = \varepsilon_r$$

avec pour normalisation $\beta_r\gamma_r - \alpha_r^2 = 1$.

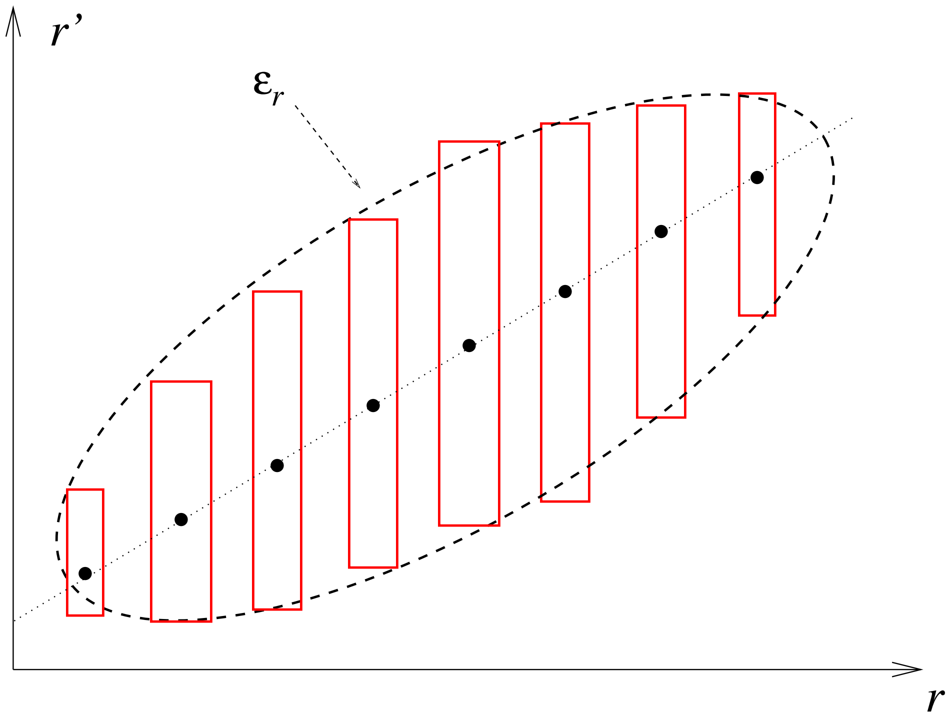


Fig. 5-11 : Emittance reconstituée à partir du faisceau passant par la poivrière.

Nous pouvons donc obtenir à partir de nos relevés de profils l'émittance diamétrale horizontale (selon x pour $y = 0$) que nous notons ε_h et l'émittance diamétrale verticale (selon y pour $x = 0$) notée ε_v.

5.5 Résultats expérimentaux et analyse des mesures

Pour chaque mesure, nous avons relevé les profils horizontaux et verticaux en D6 mais aussi les profils en D1 et D4 ainsi que les intensités crêtes et moyennes à ces trois endroits.

Les mesures de profils que nous avons effectuées avec le système de diagnostic D6 nous ont permis de connaître immédiatement quelques caractéristiques de GENEPI : la géométrie de son faisceau, le taux de transmission de la machine. Elles ont aussi permis l'amélioration des réglages de l'optique ; elles ont surtout permis de reconstituer l'émittance du faisceau dans les plans horizontaux et verticaux à partir du principe décrit au paragraphe (5.4.3).

5.5.1 Position et taille du faisceau en sortie du doigt de gant

L'accélérateur GENEPI est conçu spécifiquement pour la réalisation des expériences de neutronique dans le réacteur Masurca situé à Cadarache. Dans le cas de la production de neutrons, il est donc important de connaître la géométrie du faisceau arrivant sur la cible dans laquelle est implanté le deutérium (ou le tritium) afin d'en évaluer son usure. En effet, le deutérium (ou le tritium) étant en quantité limitée sur la cible, celle-ci produira plus ou moins de réactions avec les deutons issus de l'accélérateur en fonction de la position du faisceau au cours du temps [39].

Notre système de mesure D6 étant monté à la place de la cible, on peut donc avoir une idée de la position du faisceau qui arrivera au niveau de la cible lors des expériences prévues à Cadarache.

Afin de déterminer la position transverse du faisceau par rapport à l'axe de la machine, nous nous sommes servis des caractéristiques mécaniques de construction vues au paragraphe (5.4.2). En localisant leur conséquence (la double saturation et le trou dans les profils), nous en avons déduit que le faisceau est centré dans le plan horizontal et qu'il est décalé de 4 à 5 mm vers le haut par rapport à l'axe de la machine.

A chaque démontage, on a regardé la tache que faisait le faisceau sur les différents éléments de la machine (voir figure *5-12*). Même si ces taches sont le résultat d'un grand nombre de réglages, elles ont permis de voir que le faisceau n'était pas totalement décentré.

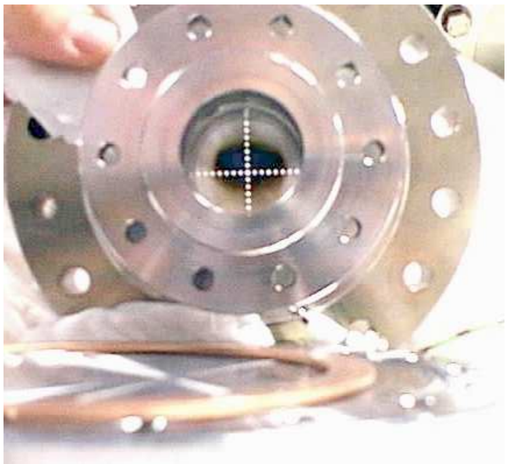


Fig. 5-12 : Tache du faisceau sur la poivrière

Sur la cible, avant les mesures en D6, la tache était de forme elliptique de 19 mm d'axe horizontal et 12 mm d'axe vertical.
Sur la poivrière, elle a la même forme mais sa taille est de 26 mm $\times$ 20 mm. On constate aussi qu'elle est décalée vers le haut ce qui est confirmé par les profils, au niveau des fentes où la taille du faisceau est de l'ordre de 30 mm $\times$ 25 mm.
D'après les profils horizontaux et verticaux obtenus, on peut déduire que le faisceau est grossièrement à symétrie de révolution dans l'espace transverse. Désormais, nous supposerons donc que le faisceau est rond dans l'espace transverse.

5.5.2 Reprise des réglages à basse intensité

A basse intensité, les profils obtenus (dans les deux dimensions) sont très étalés et disparates. Comme nous l'avons vu, il est préférable d'avoir des profils de faisceau plus concentrés au niveau de la cible afin de la bombarder sur une région limitée et connue et donc d'"économiser" la cible. C'est la raison pour laquelle nous avons repris les réglages de l'optique à faible courant. Les éléments les plus sensibles sont la tension d'extraction V_{ext} et la tension des quadripôles du doigt de gant *Q4*. Par simplicité, on se limite volontairement à ne reprendre à chaque fois qu'une seule tension, V_{ext}. Les valeurs des tensions d'extraction obtenues pour un faisceau concentré sont données dans le tableau *5-2* en fonction de l'intensité dans la bobine magnétique du duoplasmatron i_{bobine} (qui permet de faire varier l'intensité crête du faisceau).

Energie (keV)	i_{bobine} =1.5 A	i_{bobine} =2 A	i_{bobine} =2.5 A
180	16	19	24
190	17.8	/	/
200	20	23	28
220	23	/	/
230	25.5	29	36.2

Tableau 5-2 : Réglages de la tension d'extraction à basse intensité en kV

Au-delà de i_{bobine}=2.5 A, on retrouve les valeurs V_{ext} des réglages standards.

La figure *5-13* montre la différence entre deux profils dont l'extraction est reprise en fonction du tableau *5-2* (en unités arbitraires à 200 keV et 2mA) :

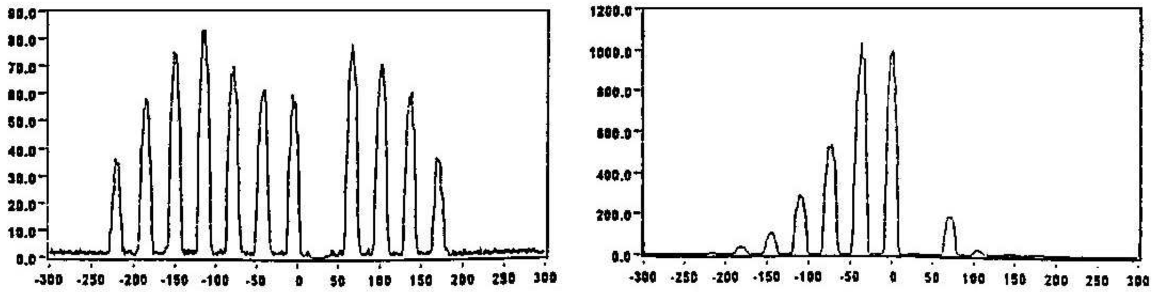


Fig. 5-13 : Profils horizontaux avec l'extraction non reprise (à g.) puis reprise (à d.)

Si l'on reprend à la fois la tension aux bornes de *Q4* et celle de l'extraction V_{ext}, on obtient un faisceau très concentré et intense, ce qui aurait pour conséquence de détériorer prématurément la cible au cours des expériences relatives à la production de neutrons.

Dorénavant, à basse intensité, nous ne considérerons que les profils dont la tension d'extraction V_{ext} a été reprise.
En outre, nous allons, dans le paragraphe suivant, montrer que le fait de modifier cette tension améliore le taux de transmission du faisceau tout le long de la machine.

5.5.3 Taux de transmission en D^+ entre les différents diagnostics

Pour un grand nombre de mesures, on a relevé les courants crête et moyen non seulement en D6 mais aussi aux diagnostics D1 et D4. Ces données nous ont permis d'évaluer le taux de transmission de la machine dans sa globalité (de D1 à D4, D4 à D6 et D1 à D6).

Dans ces calculs de taux, on a tenu compte de l'effet de séparation de l'aimant : en sortie de source, il y a dans le faisceau environ 75 % de D^+, les autres 25 % étant principalement des ions D_2^+ et des D_3^+ en plus faible proportion. L'aimant, placé après le diagnostic D4, a pour effet de séparer les ions D^+ des autres ions.

5.5.3.1 A faible intensité

Dans ce cas, le taux de transmission de D^+ est quasiment le même quelle que soit l'énergie des ions (mesures faites de 180 à 230 keV). A titre de comparaison, on a mis dans le tableau ci-dessous les taux obtenus avant et après la reprise de la tension d'extraction pour un courant moyen en sortie du doigt de gant de l'ordre de 2 mA :

V_{ext}	D1 $\rightarrow$ D4	D4 $\rightarrow$ D6	D1 $\rightarrow$ D6
Non reprise	36 %	74 %	27 %
Reprise	39 %	95 %	37 %

Tableau 5-3 : Taux de transmission des ions D^+ à faible courant

On constate donc que le taux de transmission de D^+ est très nettement amélioré entre D4 et D6 après adaptation de l'extraction même s'il reste plutôt modeste.
Notons que la machine a été initialement conçue pour des courants exclusivement forts, elle n'est donc pas nécessairement adaptée à des faisceaux de faible intensité.

5.5.3.2 A forte intensité

Selon l'énergie, le taux de transmission à forte intensité varie légèrement :

Energie keV	$\overline{I_{D6}}$ (mA)	D1 $\rightarrow$ D4	D4 $\rightarrow$ D6	D1 $\rightarrow$ D6
180	39	67 %	78 %	52 %
200	42	70 %	80 %	56 %
230	46	74 %	81 %	60 %

Tableau 5-4 : Taux de transmission des ions D^+ à fort courant

où $\overline{I_{D6}}$ représente le courant moyen mesuré en D6.

Les faibles taux de transmission entre les diagnostics D1 et D4 peuvent s'expliquer par le fait que le faisceau touche les parois et est donc "diaphragmé" comme on pourra le voir dans le paragraphe (5.5.7) sur les calculs de remontée des mesures d'émittance.
En effet, sur les figures *5-18* à *5-24*, on constate que la dimension de l'enveloppe du faisceau est importante (parfois plus grande que le rayon de gorge des quadripôles), le faisceau tape alors dans les parois et est perdu.

5.5.4 Etalonnage des steerers magnétiques

Le faisceau, dans la dimension horizontale, est presque centré à fort courant (et avec les réglages standards) alors qu'en vertical, il est décalé de quelques millimètres par rapport à l'axe de la machine. Pour un réglage donné (énergie des ions, intensité du faisceau) à fort courant, on retrouve toujours quasiment le même décentrage au cours des différentes séries de mesures. L'accélérateur reste donc stable au cours du temps en ce qui concerne la position du faisceau. Pour une énergie donnée, ce sera donc probablement toujours la même partie de la cible qui sera touchée par le faisceau pendant la production de neutrons : cette partie s'use sous l'impact du faisceau et le taux de production finit alors par diminuer. Le faisceau n'occupant pas toute la surface de la cible, il est possible de le décaler légèrement afin qu'il bombarde une autre région de la cible en utilisant les steerers magnétiques placés à l'entrée du doigt de gant. Déplacer le faisceau peut alors conduire à un changement dans le taux de production des neutrons.

On décale le faisceau horizontalement avec le steerer vertical *STM3(v)* et verticalement avec celui horizontal *STM3(h)*.
Afin de pouvoir jouer sur ces steerers quelque soit intensité du faisceau, nous avons donc étalonné leurs effets ; à chaque énergie, on se place dans le cas des réglages standards et l'on n'agit que sur l'un ou l'autre des steerers. On en déduit alors le déplacement relatif du faisceau en horizontal et en vertical en mm/A.

5.5.4.1 Etalonnage du steerer magnétique horizontal : *STM3(h)*

Le déplacement du faisceau au niveau de la cible en fonction de l'énergie des ions E_{keV} est représenté pour le steerer *STM3(h)* sur la figure *5-14*.

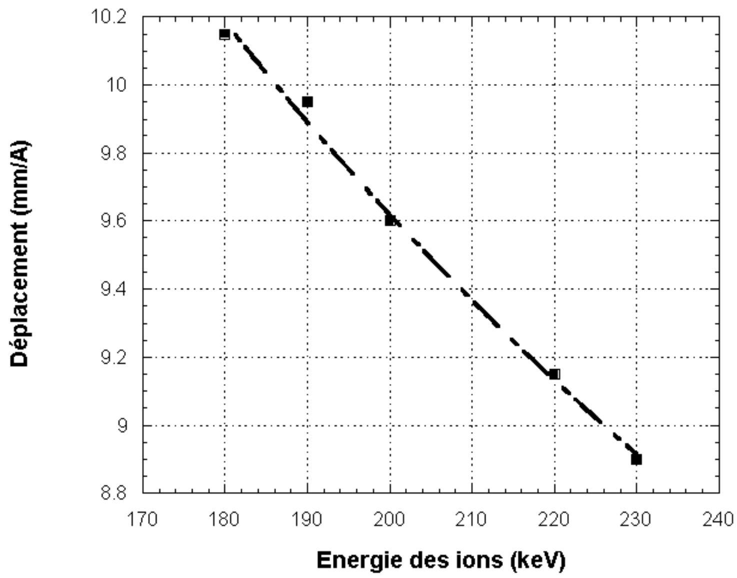


Fig. 5-14 : Etalonnage du steerer STM3(h)

Sous l'effet de correcteurs de trajectoire magnétiques, le déplacement théorique du faisceau est une loi en $\frac{I_b}{\sqrt{E_{keV}}}$ où E_{keV} est l'énergie des ions et I_b, l'intensité dans les bobines du steerer. On trouve un ajustement selon cette loi, en bon accord avec les mesures expérimentales, valables pour le steerer *STM3(h)*. Ceci donne pour le déplacement d du faisceau à faible courant :

$$\boxed{d \approx I_b \frac{135}{\sqrt{E_{keV}}}}$$

avec d en mm, I_b en A et E_{keV} en keV.
Nous avons vérifier que cet étalonnage de ce steerer est indépendant de l'intensité du faisceau de particules.

5.5.4.2 Etalonnage du steerer magnétique vertical : *STM3(v)*

On retrouve la même loi d'étalonnage que précédemment pour le steerer *STM3(v)* (à quelques % près) quelque soit l'intensité du faisceau :

$$\boxed{d \approx I_b \frac{133}{\sqrt{E_{keV}}}}$$

Le déplacement du faisceau au niveau de la cible en fonction de l'énergie des ions E_{keV} est représenté pour le steerer *STM3(v)* sur la figure *5-15*.

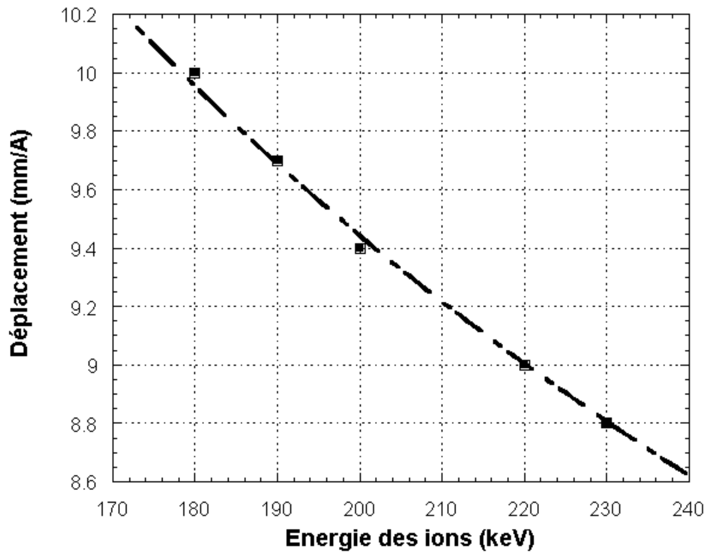


Fig. 5-15 : Etalonnage du steerer STM3(v)

5.5.5 Comparaison des profils à faible et forte intensité

A 230 keV, on trace les profils à basse et haute intensité en normalisant les courbes en amplitude. L'optique correspond aux réglages standards et est la même à forte et faible intensité sauf la tension d'extraction qui a été reprise à faible courant comme on l'a vu précédemment. On constate que, sous l'effet de la charge d'espace, les profils s'élargissent de manière très sensible, de l'ordre de 60% dans les deux dimensions (voir figures *5-16* et *5-17*).

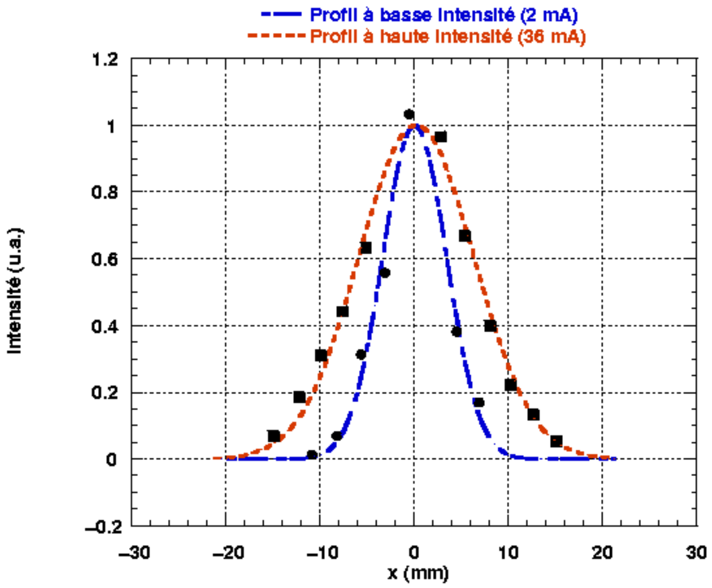


Fig. 5-16 : Profils horizontaux à 230 keV

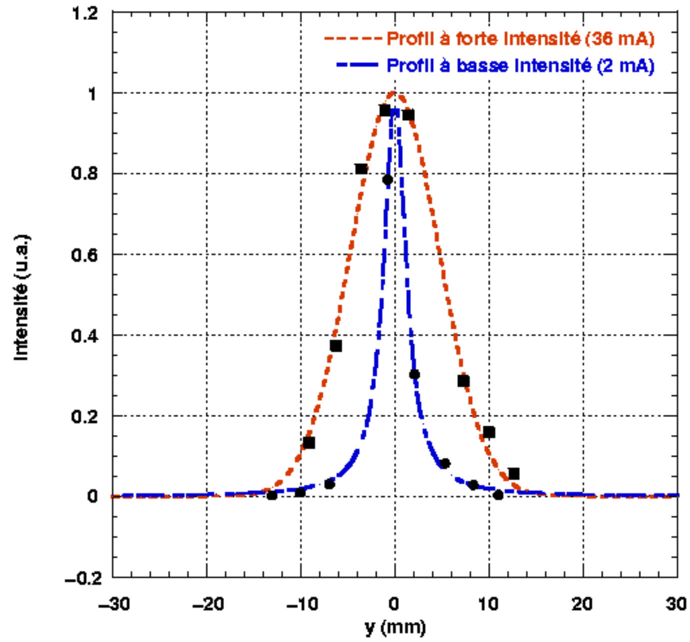


Fig. 5-17 : Profils verticaux à 230 keV

A forte intensité, les profils horizontaux et verticaux selon les rayons (où les mesures ont été faites) peuvent être assimilés à des profils gaussiens quelque soit l'énergie. On peut donc en déduire que le profil complet est gaussien.
A basse intensité, on a aussi en général des gaussiennes comme on peut le voir dans l'exemple ci-dessus.

5.5.6 Mesures d'émittance à faible et forte intensité

A partir des profils "radiaux" mesurés horizontalement et verticalement, on reconstitue les émittances elliptiques radiales ε_h et ε_v approchées selon le principe de reconstruction du paragraphe (5.4.3). Les émittances obtenues sont donc des ellipses géométriques dont l'aire vaut $\pi\varepsilon_h$ et $\pi\varepsilon_v$. A ces émittances, on fait correspondre des émittances RMS σ_{ε_h} et σ_{ε_v} que l'on détermine selon la forme de la densité du faisceau et la proportion de particules contenues dans les ellipses de surface $\pi\varepsilon_h$ et $\pi\varepsilon_v$. On déduit aussi de ces émittances géométriques les enveloppes de faisceau au niveau de la poivrière E_p et de la cible E_{cible} ainsi que la divergence du faisceau E'.

5.5.6.1 A faible intensité

Les résultats obtenus sont dans le tableau *5-5*.

E_{keV} (keV)	I_{crete} (mA)	Axe	E_p (mm)	E_{cible} (mm)	E' (mrad)	ε (mm mrad)	α	β (m)
180	2	Horiz.	10.3	10	6.1	53	0.77	2.00
		Vert.	10.8	8.2	42.4	201.2	2.044	0.579
200	2	Horiz.	11.4	11.2	6.6	61.4	0.7	2.11
		Vert.	9.9	7.1	45.2	177.2	2.310	0.553
230	2	Horiz.	8.8	8.6	5.5	39.3	0.5	1.93
		Vert.	8.9	7.2	29.6	127	1.816	0.623

Tableau 5-5 : Calcul d'émittance à bas courant

On constate que les émittances dans les deux dimensions varient beaucoup (d'un facteur 4 environ) et que les paramètres d'ellipse varient beaucoup d'une mesure à l'autre. Cependant, ces paramètres étant très sensibles, on s'attache aux enveloppes de faisceau et à sa divergence qui sont des paramètres plus significatifs : on constate que le faisceau est grossièrement à symétrie de révolution avec un diamètre de l'ordre de 10 mm au niveau de la poivrière, ce qui est raisonnable. En revanche, au niveau de la cible, le faisceau se déforme légèrement sous l'effet de la divergence verticale. Ceci est probablement dû à un effet de diaphragme en vertical qui coupe une partie du faisceau et aboutit à une mesure d'émittance peu fiable. De plus, les pics des relevés obtenus à faible intensité se superposent légèrement ce qui rend difficile leur lecture et donc la reconstruction de l'émittance correspondante.

5.5.6.2 A forte intensité

La reconstitution de l'émittance radiale à forte intensité donne les résultats suivants :

E_{keV} (keV)	I_{crete} (mA)	Axe	E_p (mm)	E_{cible} (mm)	E' (mrad)	ε (mm mrad)	α	β (m)
180	30	Horiz.	16.5	15.9	18	250	0.641	1.09
		Vert.	16	14.1	32	225	2.04	1.14
200	34	Horiz.	17.2	16.3	20.8	278	0.810	1.064
		Vert.	18.4	16.3	34.4	252	2.304	1.343
230	38	Horiz.	16	15.2	22	286	0.717	0.895
		Vert.	17.2	14.8	40	260	2.494	1.15

Tableau 5-6 : Calcul d'émittance à fort courant

A forte intensité, les émittances ε_h et ε_v sont comparables à 10 % près ainsi que les enveloppes de faisceau horizontale et verticale : le faisceau est donc rond non seulement au niveau de la poivrière mais aussi au niveau de la cible. Une fois encore, bien que les paramètres d'ellipse (α, β) varient beaucoup d'une mesure à l'autre, les enveloppes E_p, E_{cible} et E' restent stables et cohérentes.

5.5.6.3 Emittance RMS

Les figures *5-16* et *5-17* nous montrent que la distribution des particules est gaussienne selon r ; on suppose qu'elle l'est également en r'. Si n est la proportion de particules du faisceau dans l'ellipse géométrique $\pi\varepsilon_r$ (r représentant h ou v), on peut alors montrer que la valeur de n est donnée par [52] :

$$n = 1 - exp\left(-\frac{\varepsilon_r}{\sigma_{\varepsilon_r}}\right) \tag{5.21}$$

Dans ce cas, σ_{ε_r} est l'écart type de la distribution des particules.
Dans notre étude, les ellipses géométriques correspondant aux émittances radiales, obtenues par reconstitution (que ce soit horizontalement ou verticalement), incluent près de 95 % des particules du faisceaux. En appliquant (5.21), ceci correspond à une ellipse de surface $\pi\varepsilon_r = \pi 3\sigma_{\varepsilon_r}$, soit :

$$\boxed{\sigma_{\varepsilon_r} = \frac{\varepsilon_r}{3}} \tag{5.22}$$

5.5.7 Calculs de la forme du faisceau par remontée en amont des mesures d'émittance

On constate expérimentalement que le faisceau est de densité gaussienne ; en reconstituant l'émittance elliptique, on constate qu'elle contient environ 95 % de ce faisceau gaussien, ce qui a donné la relation (5.22) :

$$\sigma_{\varepsilon_r} = \frac{\varepsilon_r}{3}$$

On constate également que sur la cible, le faisceau est, grossièrement, de révolution. Nous avons vu que ceci permet de relier approximativement l'émittance RMS diamétrale à l'émittance RMS totale en x ou en y selon l'équation (5.3) :

$$\sigma_{\varepsilon_r} = \sqrt{2}\sigma_{\varepsilon_x}$$

Les équations d'enveloppe transverse (5.19) et (5.20) deviennent donc en fonction de l'émittance mesurée horizontalement et verticalement :

$$X'' + k_x(s)X - \frac{2K}{X+Y} - \frac{4}{X^3}\left(\frac{\varepsilon_h}{3\sqrt{2}}\right)^2 = 0 \quad (5.23)$$

$$Y'' + k_y(s)Y - \frac{2K}{X+Y} - \frac{4}{Y^3}\left(\frac{\varepsilon_v}{3\sqrt{2}}\right)^2 = 0 \quad (5.24)$$

A partir de l'émittance du faisceau à la cible, on peut calculer la forme de l'enveloppe de ce faisceau par remontée en amont le long du guidage. Pour cela, nous avons utilisé un code de calcul sous charge d'espace, "Sacherer", basé sur les équations d'enveloppe modifiées (5.19) et (5.20) dont les paramètres principaux sont l'optique de la machine et les caractéristiques du faisceau sous la forme du triplet (α, β, ε). On a également vérifié, au moins dans notre cas, que le code de calcul était réversible.

On a remonté les mesures d'émittance de la sortie du doigt de gant au quadripôle *Q1* pour les 3 énergies, 180, 200, 230 keV à fort et bas courant. On ne remonte donc pas complètement le faisceau jusqu'en sortie du tube accélérateur puisque l'on ne considère pas le premier quadripôle *Q0* alors que dans toutes les mesures, *Q0* était bien présent : ce quadripôle a été ajouté ultérieurement pour corriger une légère dissymétrie du faisceau et l'on ne connaissait pas ses caractéristiques ; de ce fait, nous n'avons pas pu l'inclure dans nos remontées de faisceaux.
A bas courant (ici 2 mA), la tension d'extraction V_{ext} est reprise comme on l'a vue au paragraphe (5.5.2).

Sur chaque graphe, on visualise en ordonnée positive l'enveloppe du faisceau dans le demi-plan vertical et en ordonnée négative, l'enveloppe du faisceau dans le demi-plan horizontal (en mètre).
Rappelons que ces enveloppes ont été tracées à chaque fois à 2 écarts-type σ_x (ou σ_y).

5.5.7.1 Remontée des émittances à 180 keV

A 180 keV et à forte intensité, le courant crête est de 30 mA.

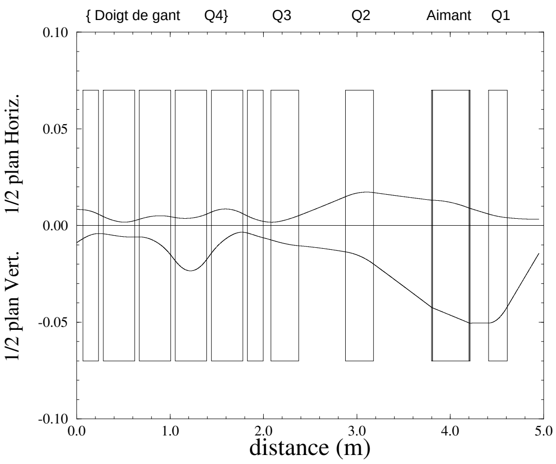


Fig. 5-18 : A 2 mA, réglages standards

Mesure avec Q0 en sortie de tube

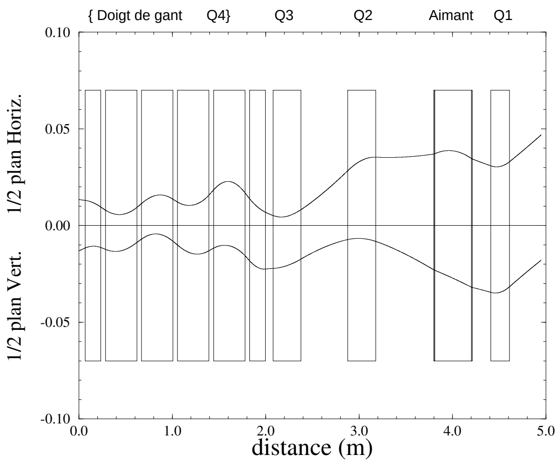


Fig. 5-19 : A 30 mA, réglages standards

Mesure avec Q0 en sortie de tube

5.5.7.2 Remontée des émittances à 200 keV

A 200 keV et à forte intensité, le courant crête est de 34 mA.

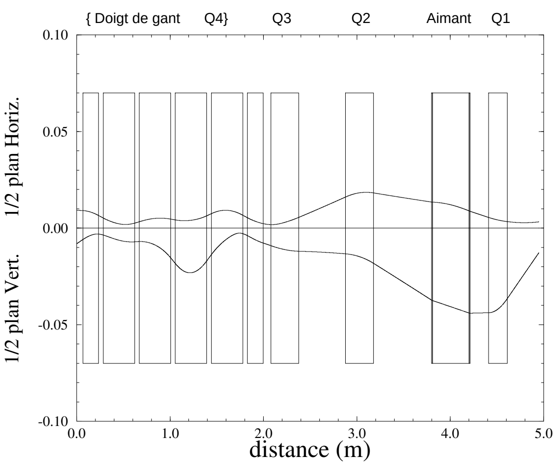


Fig. 5-20 : A 2 mA, réglages standards

Mesure avec Q0 en sortie de tube

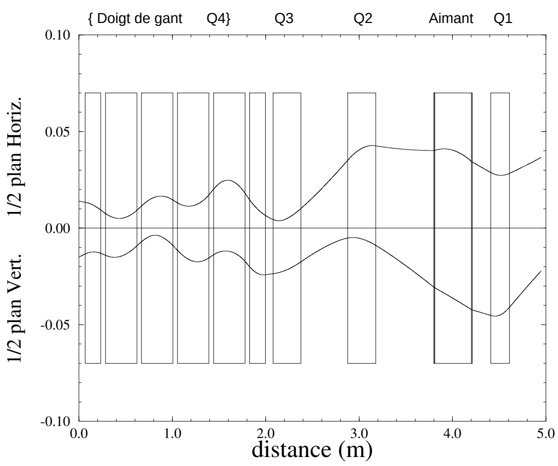


Fig. 5-21 : A 34 mA, réglages standards

Mesure avec Q0 en sortie de tube

5.5.7.3 Remontée des émittances à 230 keV

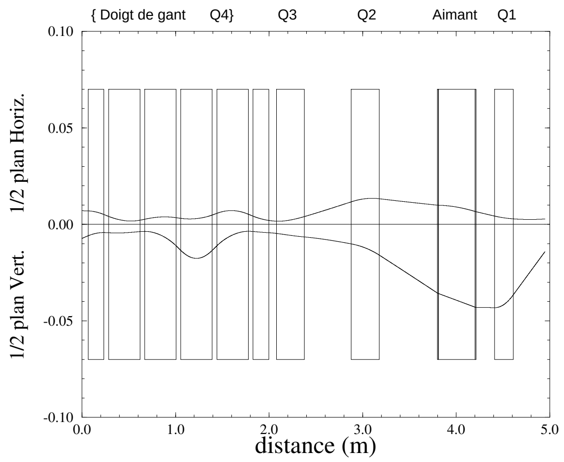


Fig. 5-22 : A 2 mA, réglages standards ; mesure avec Q0 en sortie de tube

A 230 keV et à forte intensité, le courant crête est de 38 mA.
Les réglages théoriques initiaux, ayant servis à la conception de la machine, étaient prévus avec un faisceau, en sortie du tube accélérateur, supposé rond dans l'espace transverse, d'intensité 50 mA et d'énergie 250 keV. Bien que, dans ces simulations, *Q0* n'apparaisse pas, nous avons représenté figure *5-23* la remontée correspondant à ces réglages pour la comparer à celle issue des mesures *5-24*.

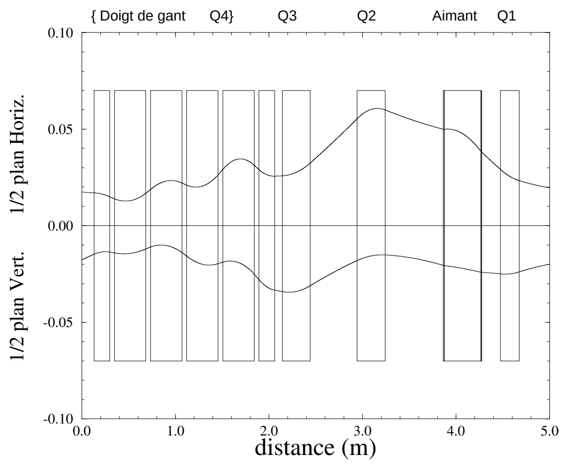


Fig. 5-23 : Réglages théoriques initiaux

Simulation sans Q0

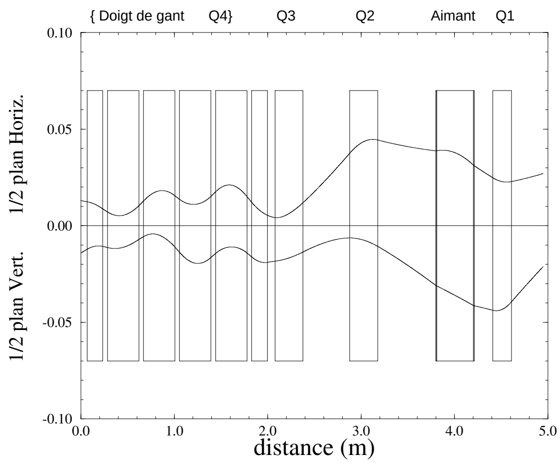


Fig. 5-24 : A 38 mA, réglages standards

Mesure avec Q0 en sortie de tube

5.5.7.4 Conclusion

A bas courant, les remontées des mesures d'émittance semblent très correctes et cohérentes même si nous ne pouvons pas les comparer avec des réglages théoriques correspondant à une faible intensité (aucun calcul n'ayant été fait à bas courant).

A forte intensité et quelle que soit l'énergie, les enveloppes de faisceau ont toujours des dimensions raisonnables. En effet, si on les compare (*Fig. 5-19* ou *Fig. 5-21*) à la remontée du faisceau théorique (qui correspondait à un faisceau rond à 250 keV et 50 mA, *Fig. 5-23*), on constate que, en sortie de source, les dimensions en x et y sont sensiblement les mêmes.
De plus, nous n'avons pas tenu compte du premier quadripôle *Q0* - dont on ne connaît pas la distance focale exacte - situé après la source dans les remontées des mesures : assimilé à une lentille mince, on trouve que *Q0* doit avoir une distance focale de 1.40 m environ pour rendre le faisceau remonté de révolution en sortie de tube (ce qui est vraisemblable puisque la distance focale réelle de *Q0*, mal connue, est du même ordre de grandeur, environ 1 m).

5.6 Conclusion du chapitre

Les mesures de faisceaulogie en sortie du doigt de gant ont permis d'établir quelques caractéristiques de GENEPI telles que la taille approchée du faisceau de deutons, son taux de transmission à faible et fort courant, l'étalonnage des "steerers" principaux et le type de densité de profils. De plus, en reprenant les réglages de la machine à basse intensité, celle-ci a produit un faisceau de deutons exploitable et concentré, ce qui n'était pas prévu lors de la conception de GENEPI puisque les études avant sa construction n'avaient été réalisées que pour des faisceaux de fort courant.

La conception de la machine a été faite uniquement sur des estimations des paramètres faisceaux en sortie du tube accélérateur (nous n'avions pas de mesures d'émittances pour aider à la conception). Ces paramètres avaient été obtenus par une modélisation et une simulation de l'ensemble source/tube accélérateur à fort courant. En outre, les calculs de transport de faisceau avaient été réalisés principalement par des codes d'enveloppe mais également particulaires.
La différence entre les valeurs des réglages théoriques et les vrais réglages s'explique par une différence (modérée) entre les émittances supposée et mesurée en sortie du tube accélérateur. Ceci explique ainsi la nécessité du quadripôle *Q0*, non prévu initialement.
Par contre, on constate un excellent accord entre les calculs théoriques initiaux (qui avaient servi à concevoir l'accélérateur) et les résultats expérimentaux (obtenus par remontée d'émittance) dès l'instant où l'on considère les bons paramètres faisceaux.

Conclusion et perspectives

La première partie de cette thèse, d'un contenu purement théorique, a été motivée par le besoin de calculs extrêmement précis dans le domaine des accélérateurs de haute intensité où les particules sont soumises à des forces non linéaires. Plus particulièrement, notre motivation initiale a été de disposer d'outils à la fois moins lourds et plus réalistes que les méthodes courantes, telles que la simulation multiparticulaire ou l'utilisation du modèle coeur-particule. Décrire l'évolution d'une distribution de particules à partir de l'étude de la dynamique de ses paramètres statistiques (méthode de moments) est donc apparu légitime. Nous avons alors supposé que nous ne connaissions qu'un nombre limité de ces moments.

Certaines études menées dans d'autres laboratoires sont basées sur une troncature qui est irréaliste (les moments d'ordre supérieur sont supposés nuls à partir d'un certain ordre) et qui conduit à des résultats non-satisfaisants. Bien que l'outil mathématique développé dans ce cadre soit lourd, il ne résoud pas le problème car la modélisation de départ est incorrecte.

Afin de cerner et de comprendre la réelle problématique d'une éventuelle méthode de moments, nous nous sommes placés dans le cas d'un faisceau cylindrique non accéléré, ayant des distributions symétriques de particules, et soumis à des forces non linéaires. Dans ce cas, l'étude s'est restreinte au cadre d'un espace de phases de dimension 2. Cette simplification n'est pas aussi limitative qu'il n'y paraît car elle inclut les difficultés majeures du problème comme, par exemple, la filamentation du faisceau qui est de nature topologique.

Nous avons tout d'abord montré que remplacer une densité donnée par un jeu de macroparticules issues des mêmes moments (jusqu'à un ordre donné) était possible mais ne permettait pas d'étudier son évolution correctement. La raison pour laquelle cette modélisation n'est pas valable est le fait que les moments d'ordre supérieur, ici non nuls, sont toujours mal extrapolés.

Les deux problèmes clés sont, à partir d'un nombre fini de moments, de déterminer où sont localisées les particules et quel est le profil de densité. Nous avons présenté comment aborder le problème de manière plus fondamentale. Une importante étude préliminaire en dimension 1, nous a permis de montrer que l'outil fondamental était l'utilisation des polynômes orthogonaux de la densité que nous avons déduits simplement à partir des moments. Nous nous sommes attachés à extrapoler les polynômes orthogonaux de degré supérieur à partir des premiers déduits. Au cours de cette étude, nous avons naturellement introduit l'approximant de Padé d'une intégrale particulière, l'intégrale de Stieljes relative à cette densité. Nous avons alors établi que les pôles de cet approximant étaient aussi les zéros des polynômes orthogonaux. D'une part, ces derniers caractérisant l'enveloppe convexe de la densité et, d'autre part, l'intégrale de Stieljes pouvant s'exprimer par la somme à l'infini des moments, nous avons conclu, en se donnant

les premiers moments d'une densité, que nous pouvions obtenir l'enveloppe convexe où sont confinées les particules.
Nous avons alors montré comment l'étude de cette enveloppe convexe dans l'espace de phases de dimension 2 se ramenait à un cas plus simple en dimension 1, obtenu en observant la distribution considérée sous tous les angles possibles. Physiquement, l'outil de Stieljes relatif à une densité s'interprète alors comme un observateur placé à grande distance du domaine et le décrivant de manière globale. Nous avons aussi montré l'existence de propriétés de convergence dans les coefficients de la relation de récurrence reliant trois polynômes orthogonaux successifs, ce qui a permis d'extrapoler les polynômes orthogonaux d'ordre supérieur de manière plus réaliste et ainsi de résoudre les deux problèmes clés déjà cités. Le domaine a pu être alors estimé par l'étude du comportement asymptotique des coefficients de recurrence entre les polynômes.

Bilan et perspectives de la partie théorique : cette étude repose sur des objets et des outils (notamment mathématiques) rarement utilisés dans le domaine de la physique des accélérateurs si bien que l'on redécouvre parfois certains points peut-être mieux connus dans d'autres domaines. Cependant, elle a permis de mieux comprendre et de poser le problème de la description d'une densité à partir de ses moments dans un cadre non restrictif puis de fournir un outillage mathématique de base adapté. L'application à la simulation d'accélérateur semble encore difficile à ce jour, mais on comprend pourquoi le passage à un espace des phases à six dimensions est si ardu. Cette étude a donc permis de cerner les limites et les difficultés associées au problème des moments.
Par contre, on peut penser que pour la description de la densité, les propriétés asymptotiques des outils employés pourront permettre d'aborder des problèmes variés comme le traitement d'images ou encore l'électrostatique.

Nous avons présenté dans une deuxième partie, beaucoup plus expérimentale, l'accélérateur de forte intensité GENEPI. Grâce à un mesureur de profils simplifié, certaines des caractéristiques principales du faisceau de GENEPI ont pu être déterminées rapidement. Ceci a permis de calibrer le faisceau de la machine. Ces données seront utiles au cours des expériences à Cadarache, notamment pour déplacer le faisceau et évaluer son impact sur la cible tritiée.

L'analyse de ces mesures (en particulier d'émittance) effectuées en sortie de la machine a permis de valider expérimentalement les calculs théoriques initiaux mis en oeuvre pour sa conception. Aujourd'hui, l'ensemble des outils et des paramètres de conception et de fonctionnement de GENEPI sont donc bien maîtrisés ce qui sera utile dans l'éventualité de la construction d'une deuxième machine de géométrie quelque peu différente.

Annexes

Annexe A : L'algorithme PDA

Annexe B : Les fractions continues. Calculs et récurrences sur les réduites

Annexe C : Approximants de Padé

Annexe A

L'algorithme PDA

Nous présentons l'algorithme P.D.A., introduit au paragraphe (2.4) puis utilisé dans notre approche naïve au chapitre 2. Il permet d'obtenir n couples de poids/points (λ_j, x_j) caractérisant une densité ω, définie positive sur $\mathcal{D}$, à partir de ses 2n premiers moments non nuls μ_k, tels que :

$$\mu_k = \int_{\mathcal{D}} x^k \omega(x) dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^k$$

La détermination de ces couples se déroule en deux étapes : dans un premier temps, on transforme les moments μ_0, μ_1, μ_2, ..., μ_{2n} de la densité ω en une série de coefficients α_1, α_2, ..., α_{2n+1} selon l'algorithme P.D.A. ; la deuxième étape est l'utilisation de ces coefficients pour construire une matrice tridiagonale. En diagonalisant cette matrice, on trouve les x_j qui en sont les valeurs propres. Les λ_j dépendent des éléments de la matrice des vecteurs propres.

La validité de cette construction a été démontrée par Gordon en 1968.

Coefficients α_k : Product Difference Algorithm

Pour déterminer ces coefficients, on construit un tableau triangulaire $\mathcal{P}_{i,j}$, en fonction des moments μ de ω, obéissant aux contraintes suivantes :

- la première colonne est initialisée à 0 sauf le premier terme $\mathcal{P}_{1,1}$ qui vaut 1 ;
- les éléments de la deuxième colonne sont :

$$\mathcal{P}_{i,2} = (-1)^{i-1} \mu_{i-1} \qquad \text{avec} \quad i = 0, ..., 2n + 1$$

- les colonnes suivantes sont remplies avec la relation de récurrence ci-dessous :

$$\mathcal{P}_{i,j} = \mathcal{P}_{1,j-1} \mathcal{P}_{i+1,j-2} - \mathcal{P}_{1,j-2} \mathcal{P}_{i+1,j-1}$$

Par exemple, le tableau obtenu en considérant les quatre premiers moments a la forme suivante :

1	μ_0	μ_1	$(\mu_0\mu_2 - {\mu_1}^2)$	$\mu_0(\mu_3\mu_1 - {\mu_2}^2)$	$\mu_0\mu_1(\mu_2(\mu_0\mu_4 - {\mu_2}^2 + 2\mu_1\mu_3) - {\mu_1}^2\mu_4 - \mu_0{\mu_3}^3)$
0	$-\mu_1$	$-\mu_2$	$(\mu_2\mu_1 - \mu_0\mu_3)$	$\mu_0(\mu_2\mu_3 - \mu_1\mu_4)$	
0	μ_2	μ_3	$(\mu_0\mu_4 - \mu_1\mu_3)$		
0	$-\mu_3$	$-\mu_4$			
0	μ_4				
0					

Cet algorithme est appelé "Product Difference Algorithm" du fait du calcul de la différence des produits effectué dans la relation de récurrence utilisée.

Les coefficients α_k sont alors donnés par les relations :

$$\boxed{\alpha_1 = \mu_0 \qquad \text{et} \quad \alpha_k = \frac{\mathcal{P}_{1,k+1}}{\mathcal{P}_{1,k}\mathcal{P}_{1,k-1}} \qquad \text{pour} \quad k \geq 2}$$

Construction et diagonalisation de la matrice

A partir de coefficients α_k nous construisons une matrice $\mathcal{M}$, réelle, symétrique et tridiagonale dont les éléments sont donnés par (les autres éléments étant nuls) :
$\mathcal{M}_{1,1} = \alpha_2$,
$\mathcal{M}_{j,j} = \alpha_{2j-1} + \alpha_{2j}$, j=2, ..., n,
$\mathcal{M}_{j,j+1} = \mathcal{M}_{j+1,j} = -\sqrt{\alpha_{2j}\alpha_{2j}}$, j=1, ..., n-1,

La matrice obtenue est la suivante :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\sqrt{\alpha_2\alpha_3} & 0 & 0 & 0 & \\ -\sqrt{\alpha_2\alpha_3} & \alpha_3 + \alpha_4 & -\sqrt{\alpha_4\alpha_5} & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & -\sqrt{\alpha_4\alpha_5} & \alpha_5 + \alpha_6 & -\sqrt{\alpha_6\alpha_7} & 0 & \\ & \dots & & \ddots & -\sqrt{\alpha_{2n-2}\alpha_{2n-1}} & \alpha_{2n-1} + \alpha_{2n} \end{bmatrix}$$

Si $\mathcal{U}$ est la matrice des vecteurs propres, les valeurs propres u_j de $\mathcal{M}$ sont données par :

$$u_j = (\mathcal{U}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{U})_{jj} \qquad j = 1, ..., n$$

Le couple (λ_j, x_j) est alors déterminé par :

$$\boxed{x_j = u_j \qquad \text{et} \qquad \lambda_j = \alpha_1(\mathcal{U}_{1,j})^2}$$

Annexe B

Les fractions continues. Calculs et récurrences sur les réduites

Les fractions continues finies

Par définition, on appelle fraction continue R_n d'ordre n une expression de la forme :

$$R_n = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \dots + \cfrac{a_n}{b_n}}}}}$$

Il existe plusieurs notations utilisant une écriture linéaire, dont les formes conventionnelles sont les suivantes:

$$R_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n} \tag{B.1}$$

ou encore :

$$R_n = b_0 + a_1/b_1 + a_2/b_2 + \dots + a_n/b_n$$

a_k s'appelle le numérateur partiel et b_k, le dénominateur partiel. Si on développe une fraction continue finie, elle prend la forme d'une fraction rationnelle que l'on note :

$$R_n = \frac{A_n}{B_n}$$

où A_n et B_n sont des polynômes de variables a_0, a_1, ..., a_n et b_0, b_1, ..., b_n.

Par définition, on appelle réduite d'ordre p (avec $p \leq n$) d'une fraction continue d'ordre n, la fraction continue tronquée à l'ordre p, notée :

$$\boxed{R_p = \frac{A_p}{B_p}}$$

Par exemple, les premières réduites successives de la fraction continue (B.1) sont données par :

$$R_0 = \frac{A_0}{B_0} = b_0$$

$$R_1 = \frac{A_1}{B_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1}$$

$$R_2 = \frac{A_2}{B_2} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + a_2/b_2} = \frac{b_0 b_1 b_2 + a_1 b_2 + a_1 b_0}{b_1 b_2 + a_2}$$

Les termes A_p et B_p sont obtenus par identification des numérateurs et des dénominateurs.

Relations de récurrence entre les termes des réduites

Les termes des réduites précédentes sont reliés par la relation ci-dessous :

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{b_2 A_1 + a_2 A_0}{b_2 B_1 + a_2 B_0} \tag{B.2}$$

On démontre, par récurrence, que cette expression se généralise de la manière suivante :

$$\boxed{\frac{A_p}{B_p} = \frac{b_p A_{p-1} + a_p A_{p-2}}{b_p B_{p-1} + a_p B_{p-2}} \qquad \forall p \geq 2}$$

Il apparaît évident que cette relation contient deux égalités : une pour les numérateurs A_k, l'autre pour les dénominateurs B_k :

$$\begin{cases} A_p = b_p A_{p-1} + a_p A_{p-2} & \forall p \geq 2 \\ B_p = b_p B_{p-1} + a_p B_{p-2} & \forall p \geq 2 \end{cases}$$

Si maintenant on multiple la première égalité par B_{p-1} et la deuxième par A_{p-1}, en les retranchant, il vient :

$$A_p B_{p-1} - A_{p-1} B_p = -a_p (A_{p-1} B_{p-2} - A_{p-2} B_{p-1})$$

En posant $U_p = A_p B_{p-1} - A_{p-1} B_p$, on a :

$$U_p = -a_p U_{p-1}$$

Or $U_1 = A_1 B_0 - A_0 B_1 = (b_0 b_1 + a_1)1 - b_0 b_1 = a_1$. On établit une deuxième relation de récurrence :

$$\boxed{U_p = A_p B_{p-1} - A_{p-1} B_p = (-1)^{p-1} \prod_{k=1}^{p} a_k} \tag{B.3}$$

Les fractions continues infinies

Dans ce cas, la fraction continue (B.1) devient illimitée :

$$R_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + ... + \frac{a_n|}{|b_n} + ...$$

La notion de convergence s'introduit tout naturellement. Considérons la réduite R_n d'ordre n d'une fraction continue infinie. Si R_n tend vers une limite R lorsque n croît indéfiniment, on dit que la fraction continue est convergente et a pour limite R. Dans le cas contraire, elle est divergente.

Fractions continues équivalentes

Deux fractions continues sont dites équivalentes (notée $\cong$) si leurs réduites sont identiques. Si ρ_1, ρ_2, ... est une suite de nombres non nuls alors :

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + ... \cong b_0 + \frac{\rho_1 a_1|}{|\rho_1 b_1} + \frac{\rho_1 \rho_2 a_2|}{|\rho_2 b_2} + ... + \frac{\rho_{n-1} \rho_n a_2|}{|\rho_n b_2} + ...$$

Si les réduites sont notées A_n/B_n et A'_n/B'_n, on vérifie par récurrence que pour $n \geq 1$:

$$A'_n = (\rho_1 ... \rho_n) A_n \quad , \quad B'_n = (\rho_1 ... \rho_n) B_n$$

Soit : $A_n/B_n = A'_n/B'_n$ pour $n \geq 1$.

Développement en fraction continue à partir d'un développement en série entière

On dit que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = c_0 + c_1 + c_2 + ...$$

est équivalente (notée $\cong$) à la fraction continue :

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + ...$$

si on a :

$$c_0 + c_1 + ... + c_n = \frac{A_n}{B_n} \qquad \forall n = 0, 1, 2, ...$$

où A_n/B_n est la $n^{\text{ème}}$ réduite de la fraction continue.

Par ailleurs, si $c_0 + c_1 + c_2 + ...$ est une série donnée, on a l'équivalence suivante :

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cong b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + ...$$

où :

$$b_0 = c_0 \ , \quad a_1 = c_1 \ , \quad b_1 = 1 \ , \quad a_n = -\frac{c_n}{c_{n-1}} \ , \quad b_n = 1 + \frac{c_n}{c_{n-1}} \ , \quad n \geq 2$$

Soit :

$$\boxed{c_0 + c_1 + c_2 + ... \cong c_0 + \frac{c_1|}{|1} + \frac{-c_2/c_1|}{|1 + c_2/c_1} + \frac{-c_3/c_2|}{|1 + c_3/c_2} + ...}$$

Par exemple, si l'on considère le développement général d'une fonction en série de Mac Laurin :

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$$

S peut donc se développer en une fraction continue de la forme :

$$S \cong \alpha_0 + \frac{\alpha_1 x|}{|1} - \frac{x\alpha_2/\alpha_1|}{|1 + x\alpha_2/\alpha_1} - ... - \frac{x\alpha_n/\alpha_{n-1}|}{|1 + x\alpha_n/\alpha_{n-1}}$$

Annexe C

Approximants de Padé

Par définition, un approximant de Padé est une fraction continue qui a été tronquée à un certain ordre. Il en résulte qu'un approximant se présente toujours sous la forme d'une fraction rationnelle au sens le plus large.

Le théorème fondamental de Padé

Soit f une fonction développable en série entière au voisinage de $x = 0$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... \qquad \text{avec} \;\; a_0 \neq 0$$

Théorème de Padé :
Parmi toutes les fractions irréductibles dont les termes ont des degrés égaux au plus à p pour le numérateur et au plus à q pour le dénominateur (p et q étant éléments de $\mathbb{N}$), il existe une fraction $R_p(x)/P_q(x)$ qui fournit une approximation de $f(x)$ dont l'ordre est supérieur à celui de n'importe quelle autre approximation. En général, les approximants les plus précis sont fournis par les schémas tels que $p = q$ ou $p = q + 1$.

On souhaite donc trouver une approximation de $f(x)$ telle que :

$$f(x) \approx \frac{R_p(x)}{P_q(x)} \tag{C.1}$$

$R_p(x)$ étant un polynôme de degré p et $P_q(x)$ un polynôme de degré q.

Le produit $f(x)P_q(x)$ peut s'écrire :

$$f(x)P_q(x) = R_p(x) + \varepsilon(x^{p+q+1}) \tag{C.2}$$

où $\varepsilon(x^{p+q+1})$ est un infiniment petit dont l'ordre est au moins égal à $p + q + 1$.

Par définition $P_q(x)$ s'écrit :

$$P_q(x) = \sum_{k=0}^{q} l_k x^k$$

L'expression (C.2) devient :

$$f(x)P_q(x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{k=0}^{q} l_k x^k\right) = \sum_{i=0}^{\infty}(a_i l_0 + a_{i-1} l_1 + a_{i-2} l_2 + ... + a_{i-q} l_q)x^i \quad \text{(C.3)}$$

en prenant, comme convention, que les coefficients affectés d'un indice négatif sont nuls.

Afin d'avoir l'approximant de Padé à l'ordre "(p, q)" tel que $f(x)P_q(x) \approx R_p(x)$, on égalise à 0 tous les coefficients des termes en x de degré $p+1$, $p+2$, ..., $p+q$ dans le développement (C.3). On obtient alors un système linéaire constitué de q équations à $q+1$ inconnues que l'on écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} a_{p+1} & a_p & a_{p-1} & \cdots & a_{p-q+1} \\ a_{p+2} & a_{p+1} & a_p & \cdots & a_{p-q+2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{p+q} & a_{p+q-1} & a_{p+q-2} & \cdots & a_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_0 \\ l_1 \\ \vdots \\ l_q \end{bmatrix} = 0 \quad \text{(C.4)}$$

En résolvant ce système, on trouve donc les coefficients l_k du polynôme P_q en fonction des a_k.

Comme on ne conserve que les termes de degré inférieur à p dans (C.3), on déduit par identification les coefficients b_k de $R_p(x)$:

$$R_p(x) = \sum_{i=0}^{p}(a_i l_0 + a_{i-1} l_1 + a_{i-2} l_2 + ... + a_{i-q} l_q)x^i = \sum_{k=0}^{p} b_k x^k \quad \text{(C.5)}$$

avec la même convention que précédemment.

L'approximant de Padé de la fonction f vaut alors :

$$\boxed{f(x) \approx \frac{R_p(x)}{P_q(x)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{p} b_k x^k}{\sum\limits_{i=0}^{q} l_i x^i}} \quad \text{(C.6)}$$

Estimation de l'erreur commise

L'erreur mathématique s'écrit :

$$E_{[f(x)]} = f(x) - \frac{R_p(x)}{P_q(x)}$$

On montre qu'on peut l'estimer par :

$$\boxed{E_{[f(x)]} = \left(\sum_{k=0}^{q} l_k a_{p+q-1-k}\right) \frac{x^{p+q+1}}{P_q(x)}}$$

Développements de $exp(x)$ (exemple donné par Padé)

On part du développement en série entière de l'exponentielle au voisinage de 0 :

$$exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Par souci de lisibilité, on notera l'inverse d'un nombre, $1/x$, par $\underline{x}$.

Approximation par la fraction rationnelle telle que $p = 1$, $q = 3$

En fixant $l_0 = 1$, l'expression (C.4) donne le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -\underline{2} \\ \underline{2} & 1 & 1 & -\underline{6} \\ \underline{6} & \underline{2} & 1 & -\underline{24} \end{bmatrix}$$

La résolution donne :

$$l_0 = 1 \quad , \quad l_1 = -\frac{3}{4} \quad , \quad l_2 = \frac{1}{4} \quad , \quad l_3 = -\frac{1}{24}$$

ou encore, en multipliant par un facteur convenable :

$$l_0 = 24 \quad , \quad l_1 = -18 \quad , \quad l_2 = 6 \quad , \quad l_3 = -1$$

A partir de l'équation (C.5), on déduit les valeurs des b_k :

$$b_0 = 24 \quad , \quad b_1 = 6$$

D'où l'approximant :

$$\boxed{exp(x) \approx \frac{24 + 6x}{24 - 18x + 6x^2 - x^3}}$$

Approximation par la fraction rationnelle telle que $p = 2$, $q = 3$

Tous calculs faits, on trouve l'approximant suivant :

$$\boxed{exp(x) \approx \frac{60 + 24x + 3x^2}{60 - 36x + 9x^2 - x^3}}$$

Approximation par la fraction rationnelle telle que $p = 3$, $q = 3$

Après calculs, on trouve l'approximant suivant :

$$\boxed{exp(x) \approx \frac{120 + 60x + 12x^2 + x^3}{120 - 60x + 12x^2 - x^3}}$$

Précision des approximants

x	Vraie valeur d'$exp(x)$	Approximant $p = 1, q = 3$	Approximant $p = 2, q = 3$	Approximant $p = 3, q = 3$
1	2.7182818284590	2.7272727272727	2.7187500000000	2.7183098591549
0.5	1.6487212707001	1.6488549618321	1.6487252124646	1.6487213997308
0.1	1.1051709180756	1.1051709420908	1.1051709182319	1.1051709180767
0.01	1.0100501670842	1.0100501670844	1.0100501670842	1.0100501670842
0.001	1.0010005001667	1.0010005001667	1.0010005001667	1.0010005001667

Plus x s'éloigne de 0, moins l'approximant est précis (ce qui est normal car il est valable au voisinage de 0). On constate donc que l'on obtient très vite des approximants de l'exponentielle de très grande précision pour des valeurs de p et q raisonnables. Remarquons, dans cet exemple, que le meilleur approximant de Padé est obtenu pour $p = q$.

Généralisation des approximants de Padé, méthode de Maehly

Les approximants de Padé donnent d'excellentes approximations pour f au voisinage de 0. Quand on considère une fonction f sur un espace quelconque fini $[a, b]$, cette précision décroît. Dans ce cas, on réduit, par une transformation linéaire, l'intervalle $[a, b]$ à $[-1, 1]$ et on développe la fonction en série de polynômes de Tchebycheff. En effet, ces polynômes sont ceux qui s'écartent le moins de l'axe des abscisses sur $[-1, 1]$. La précision de l'approximant obtenu sera donc plus homogène sur tout le domaine (l'erreur oscillant entre deux *extrema*).

Cette méthode, dite de Maelhy, est la transposition directe de la méthode de Padé. Elle donne une approximation de f sur un intervalle fini par :

$$\boxed{f(x) \approx \frac{R_p(x)}{P_q(x)} = \frac{\sum_{k=0}^{p} b_k T_k(x)}{\sum_{i=0}^{q} l_i T_i(x)}} \tag{C.7}$$

où les $T_{k \text{ ou } i}$ sont les polynômes de Tchebycheff.

Bibliographie

[1] J.M. Lagniel, *High-power proton linac for a multi-user facility*, Proc. EPAC, Vienne, 2000.

[2] P.N. Ostroumov, K.W. Shepard, *Multiple-charge beam dynamics in an ion linac*, Physical review special topics - accelerators and beams, Vol 3, 2000.

[3] M. Pabst *et al.*, *Halo simulation in a realistic proton linac design*, Proc. LINAC, Genève, 1996.

[4] H. Okamoto, M, Ikegami, *simluation study of halo formation in breathing round beams*, Phys. Rev. E 55, 1997.

[5] W.P. Lysenko, *The moment approch to high order accelerator beam optics*, Nucl. Inst. Meth. A 363, 1995.

[6] M. Reiser, *Theory and design of charged particle beams*, John Wiley & Sons, New york, 1994.

[7] A.W. Chao, M. Tigner, *Handbook of accelerator physics and engineering*, World scientific, Singapore, 1999.

[8] J-M. De conto, *Eléments d'optique corpusculaire et introduction à la physique des accélérateurs de particules*, Cours de D.E.A. Méthodes Physiques Expérimentales, 1997.

[9] N. Pichoff, *Etude théorique et expérimentale du halo d'un faisceau intense de particules chargées dans un accélérateur*, Thèse de Doctorat Université Paris XI-Orsay, décembre 1997, pp 170-179.

[10] H. Wiedemann, *Particle accelerator Physics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993.

[11] S. Humphries, *Charged particle beams*, John Wiley & Sons, New york, 1990.

[12] R.L Gluckstern, *Analytic model for halo formation in high current ion linacs*, Phys. Rev. Lett. 73, 1247, 1994.

[13] J. Gao, *Analytical investigation on the halo formation in space charge dominated beams*, Particle Accelerator Conference, New York, 1999.

[14] M Ikegami, *Particle-core analysis of beam halo formation in anisotropic beams*, Mucl. Instrum. Methods Phy. Res., Sect. A 435, 284, 1999.

[15] T.P. Wangler *et al*, *Particle-Core model for transverse dynamics of beam halo*, Physical review special topics - accelerators and beams, Vol 1, 1998.

[16] D.Bessis, *Orthogonal polynomials, Padé approximations and Julia sets*, NATO ASI Series Vol 294, P. Nevai ed., 1990, p 65.

[17] C. Guilpin, *Manuel de calcul numérique appliqué*, EDP Sciences, Paris, 1999.

[18] H. Stahl, V.Totik, *General orthogonal polynomials*, Cambridge Universty Press, 1992, p 31.

[19] A.F. Nikiforov, V.B. Uvarov, *Special functions of mathematical physics*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1988.

[20] M. Chossat, *Mathématiques de l'ingénieur*, Dunod, Paris, 1996.

[21] D. Bessis, *Orthogonal polynomials, Padé approximations and Julia sets*, NATO ASI Series Vol 294, P. Nevai ed., 1990, p 63-64.

[22] F.R. Gantmacher, *Théorie des matrices, tome 1*, Dunod, Paris, 1966.

[23] G.A. Baker, *Essentials of Padé Approximants*, Academic press inc., New york, 1975, pp 85-86.

[24] G. Arfken, *Mathematical methods for physicists*, troisième édition, academic press, Orlando, 1985.

[25] A.F. Nikiforov, V.B. Uvarov, *Special functions of mathematical physics*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1988.

[26] J.C. Wheeler, R.G. Gordon, *Bounds for averages using moments constraints* Mathematics in science and engineering, Vol 71, The Padé Approximants in theoretical physics, Academic press, New york, 1970.

[27] P. Benoist-Gueutal, M. Courbage, *Mathématiques pour la physique, tome 1*, Eyrolles, Paris, 1992.

[28] G.A. Baker, P. Graves-Morris, *Padé approximants*, Cambridge Universty Press, 1996, p 129.

[29] S.D. Chatterji, *Cours d'Analyse 2, Analyse complexe*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1997.

[30] G.A. Baker, P. Graves-Morris, *Padé approximants*, Cambridge Universty Press, 1996, p 3.

[31] G.A. Baker, *Essentials of Padé Approximants*, Academic press inc., New york, 1975, pp 85-86.

[32] C.M. Bender, S.A. Orszag, *Advanced mathematical methods for scientists ans engineers*, Mc Graw Hill, Singapore, 1978.

[33] C.M. Bender, K.A. Milton, *Continued fraction as a discrete non linear transform*, J. Math. Phys. Vol 35, n$\circ$ 1, 1994.

[34] E. Durand, *Electrostatique et magnétostatique*, Masson, Paris, 1953.

[35] H. Stahl, V.Totik, *General orthogonal polynomials*, Cambridge Universty Press, 1992, p 60.

[36] C. Peaucelle, *Méthode des points d'intégration ; comparaison entre la méthode dite "naïve" et la réalité* , rapport personnel, 1999.

[37] Ruth, *A canonical integration technique*, IEEE Trans. Nucl.Sci., Ns-30, 2669, 1983.

[38] http://isnwww.in2p3.fr/reacteurs-hybrides/french/GeneralIntro/GeneralIntro.html.

[39] L. Perrot, *Validation des propriétés neutroniques de matériaux élémentaires par méthodes expérimentales*, Thèse de Doctorat Université Joseph Fourier-Grenoble 1, en cours.

[40] http://isnwww.in2p3.fr/reacteurs-hybrides/french/reacteurs-hybrides.html

[41] S. David, *Capacités des réacteurs hybrides au plomb pour la production d'énergie et l'incinération avec multirecyclage des combustibles. Evolution des paramètres physiques. Radiotoxicités induites*, Thèse de Doctorat Université Joseph Fourier-Grenoble 1, mars 1999.

[42] J.L. Belmont, J.M. De conto, *L'accélérateur GENEPI. Conception, technologie, caractéristiques*, rapport interne ISN00.77, juillet 2000.

[43] J.L. Belmont, *Recherche d'une intense source de protons pulsée à la micro-seconde*, Thèse de Doctorat Université des sciences de Grenoble, février 1965.

[44] I.M. Kapchinskij and V.V. Vladimirskij, *Proc. Int. Conf. on High Energy Accelerators*, CERN, Geneva, 1959, p. 274.

[45] S.Y. Lee, *Accelerator physics*, World Scientific , 1999, p61.

[46] J.M. De conto, *Notes de travail*, 1998.

[47] M. Reiser, *Theory and design of charged particle beams*, John Wiley & Sons, New york, 1994.

[48] F.J. Sacherer, *RMS envelope equations with space charge*, IEEE Trans. Nucl.Sci., Ns-18, 1105, 1971.

[49] N. Pichoff, *Etude théorique et expérimentale du halo d'un faisceau intense de particules chargées dans un accélérateur*, Thèse de Doctorat Université Paris XI-Orsay, décembre 1997, p 21.

[50] C. Peaucelle, *Mesure de faisceaulogie sur GENEPI*, rapport personnel, avril 2000.

[51] A. Asfour, *Etude expérimentale du faisceau intense de protons ou de deutons destiné au générateur de neutrons GENEPI*, Rapport de stage de D.E.A., juin 1998.

[52] N. Chauvin, *La transformation d'état de charge $1^+ \rightarrow n^+$ pour l'accélération des ions radioactifs* , Thèse de Doctorat Université Joseph Fourier-Grenoble 1, juillet 2000.

La problématique de l'évolution des moments d'une densité de particules soumises à des forces non linéaires

L'utilisation des accélérateurs linéaires de forte puissance dans différents projets (production de neutrons par spallation, réacteurs hybrides) nous a amené à se pencher sur les problèmes de la dynamique de faisceaux de haute intensité. Dans le cas de faisceaux intenses, les particules sont soumises à des forces non linéaires, principalement dues à l'effet de charge d'espace. Afin de disposer d'outils à la fois moins lourds et plus réalistes que les méthodes classiques de simulation (interaction particule-particule, modèle coeur-particule), la description de l'évolution d'une distribution de particules à partir de ses paramètres statistiques, ses moments, a donc été envisagée.

Nous présentons donc dans une première partie une analyse détaillée de la problématique, menée dans un cadre simplifié mais non limitatif : tout d'abord, nous développons un formalisme original basé sur les propriétés fines des polygones orthogonaux permettant l'étude des moments d'une densité en une dimension. De cette analyse, nous voyons que l'on peut extraire, d'un nombre fini de moments, un certain nombre d'informations concernant la densité. En particulier, il en découle la notion fondamentale d'enveloppe convexe définissant le domaine d'existence de cette densité. Ceci permet de mieux comprendre la signification des moments. La généralisation de cette description en deux dimensions permet d'estimer avec une bonne précision où sont localisées les particules dans cet espace des phases. Enfin, nous abordons les difficultés rencontrées au cours de cette étude, fixant ainsi les limites de cette méthode.

La deuxième partie de cette thèse, plus expérimentale, présente les mesures de faisceaulogie effectuées sur l'accélérateur GENEPI (GEnérateur de NEutrons Pulsé Intense) dans le cadre de l'étude des systèmes hybrides. Elles permettent, entre autres, la calibration du faisceau et la validation des codes de calculs nécessaires à la conception de la machine.

Fundamental aspects of the moments problems associated to the evolution of a particle density under non linear forces

High-power linear accelerators are needed as driver for several projects (spallation neutron sources, hybrid system). This interest brings us to the question of dynamics of high intensity particle beam. Inside intense beam, particles are under non linear forces mainly due to space charge effects. In order to have less heavy and more realistic tools than classical simulation methods (particle-particle interactions, particle-core model), we consider a description of the evolution of a particle density from its statistical parameters, its moments.

In a first part, a detailed analysis of the moment problems is shown in a simplified but non restrictive case. To begin with, we develop an original study based on orthogonal polynomial properties which allows us to study one-dimension density moments. We can see that we obtain information about density from only few moments. Such an investigation is essential for a better understanding of moment significance. Then, we apply this description to two-dimension phase space, so that we can precisely estimate where particles are in this phase space. Finally, we enumerate difficulties met and deduce the limits of this method.

The second part of this thesis, more experimental, presents beam the measurements of the beam characteristics of accelerator "GENEPI" as a part of hybrid reactor program. Moreover, we show how these specifications yields to beam calibration and validation of theoretical calculations used to design GENEPI.

Mots clefs

Dynamique non linéaire, polynômes orthogonaux, charge d'espace, accélérateurs de particules, problème de moments, simulation, accélérateur GENEPI.

Institut des Sciences Nucléaires de Grenoble - 53, avenue des Martyrs - 38026 Grenoble CEDEX