Théories homologiques des algèbres de Hopf

Rachel Taillefer

ACADEMIE DE MONTPELLIER

UNIVERSITE MONTPELLIER II

SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THESE

présentée à l'Université Montpellier II Sciences et Techniques du Languedoc

pour obtenir le diplôme de DOCTORAT

Spécialité:

MATHEMATIQUES

Ecole doctorale:
Informations, Structures et Systèmes

TITRE:

THEORIES HOMOLOGIQUES DES ALGEBRES DE HOPF

par

Rachel TAILLEFER

Soutenue le 20 Septembre 2001 devant le jury composé de:

M. **Claude CIBILS**	Université Montpellier II	Directeur
M. **Daniel GUIN**	Université Montpellier II	Président
M. **Guy LAFFAILLE**	Université Montpellier II	Examinateur
M. **Jean-Michel OUDOM**	Université Montpellier II	Co-directeur
M. **Claude ROGER**	Université Claude Bernard Lyon I	Examinateur
M. **Marc ROSSO**	ENS Ulm	Rapporteur

RAPPORTEURS

M. **Murray GERSTENHABER**	University of Pennsylvania
M. **Marc ROSSO**	ENS Ulm
Mme. **Andrea SOLOTAR**	Universidad de Buenos Aires

I have a kind soul that would give you thanks,
And knows not how to do it but with tears.
Shakespeare, King John, V7.

Je profite de cette page pour tenter d'exprimer un fragment de ma reconnaissance envers les personnes qui ont contribué à l'existence et au bon déroulement de ma thèse.

Je remercie chaleureusement Claude Cibils d'avoir accepté de diriger ma thèse; il m'a posé des problèmes intéressants et a su me faire profiter de sa culture mathématique. Il m'a soutenue dans les moments difficiles et m'a encouragée à rechercher des horizons nouveaux.

Jean-Michel Oudom a accepté d'encadrer ma thèse. Sa compétence, sa vision des mathématiques et sa disponibilité m'ont été précieuses. J'ai grand plaisir à l'en remercier, ainsi que pour sa gentillesse, ses encouragements et sa compréhension.

Je suis très reconnaissante envers Murray Gerstenhaber, qui a rapporté ma thèse dans des conditions difficiles.

Je remercie vivement Marc Rosso; ses conseils, sa vigilance et l'intérêt avec lequel il a rapporté ma thèse ont amélioré la qualité de mon travail; sans lui, ma thèse ne serait pas ce qu'elle est aujourd'hui. Je le remercie également d'avoir participé à mon jury.

Je dois beaucoup à Andrea Solotar, qui m'a accueillie lors d'un séjour en Argentine, avec qui j'ai eu le plaisir de discuter et de travailler et qui a accepté de rapporter ma thèse dans des délais assez brefs.

Daniel Guin et Guy Laffaille m'ont fait l'honneur d'être dans mon jury. Ils ont eu une grande influence sur moi, en me donnant goût à l'algèbre, en m'encourageant à faire de la recherche. Je leur suis aussi très reconnaissante pour leur soutien dans mes périodes de découragement et pour l'intérêt qu'ils m'ont toujours porté. J'ai également été très sensible à l'amitié avec laquelle Daniel Guin a présidé mon jury.

Je remercie très sincèrement Claude Roger qui a accepté de participer à mon jury.

Je remercie toutes les personnes qui par leur amitié ont rendu mon stage à Bahía Blanca si agréable, María Julia Redondo, Elsa Fernández, Andrea Gatica et Olga Funes en particulier.

Je ne saurais assez remercier Elísabet Gunnlaugsdóttir et Aline Aigon-Dupuy pour leur amitié. Elles ont également partagé avec moi les doutes et les incertitudes des thésardes. Malgré sa soutenance proche, Elísabet m'a accueillie de nombreuses fois au sein de sa famille – j'en profite pour remercier Pierre Mounoud de m'avoir supportée avec le sourire –, pour tenter (avec succès) de me remonter le moral. Elle m'a aussi été de précieux conseil pour la soutenance. Aline, bien que préoccupée par sa propre thèse, a toujours trouvé le temps de m'écouter, de me distraire ou de m'emmener prendre une glace... Merci encore, ce qu'elles m'ont offert ne se résume pas en un paragraphe.

Merci à tous les thésards du département de Mathématiques, en particulier Hélène Davaux, Claudia Strametz, Sébastien Soucaze, Philippe Monnier, Vincent Deconchy, Thierry Champion, Stéphane Sabourau, Stéphane Gaussent, André Diatta, Philippe Malbos et Guillaume Puigt, pour leurs sourires, leurs rires, leur humour, leurs discussions, mathématiques ou autres, pour leur présence même. Merci à François Dupuy et à Jens G.

Jensen. Merci aux membres du laboratoire G.T.A. qui par leur bonne humeur créent une ambiance de travail agréable. Merci aux secrétaires du département pour leur amabilité et leur compétence, en particulier Bernadette Lacan, Pierrette Arnaud et Marie-Christine Dolidier.

Je ne puis exprimer mes sentiments pour ma soeur Frédérique et pour Cyril, pour mon père Dominique et pour Martine, qui ont été d'un soutien permanent au cours de ces années, ainsi que pour ma mère Helen qui a toujours eu une confiance illimitée en mes capacités. Merci.

Table des matières

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude des théories homologiques et cohomologiques d'algèbres associatives et d'algèbres de Hopf. Dans le premier chapitre (Chapitre 1), nous rappelons quelques définitions et propriétés des algèbres de Hopf et des bimodules de Hopf, ainsi que des résolutions bar et cobar en relation avec les bimodules de Hopf.

Ce travail est constitué de trois parties.

Dans la première partie (Chapitres 2 à 4), nous unifions diverses théories cohomologiques pour des algèbres de Hopf de dimension finie, au moyen d'un foncteur Ext. Nous étudions ensuite ces cohomologies à l'aide de cette unification, notamment en définissant un cup-produit, que nous identifions au produit de Yoneda.

Deux des cohomologies que nous avons considérées sont dues à M. Gerstenhaber et S.D. Schack. La première, définie dans [GS90], est une théorie à coefficients, que nous notons $\mathrm{H}^*_{GS}(M,N)$, pour des bimodules de Hopf M et N sur une algèbre de Hopf A. Elle a été utilisée par P. Etingof et S. Gelaki (*cf.* [EG]) pour étudier des algèbres de Hopf de dimension finie, semisimples et cosemisimples, sur un corps de caractéristique positive.

M. Gerstenhaber et S.D. Schack ont introduit une deuxième théorie dans [GS92], qu'ils notent $\mathrm{H}^*_b(A,A)$, dans le but d'étudier les déformations de l'algèbre de Hopf A (comme la cohomologie de Hochschild est un outil pour l'étude des déformations d'algèbres). Ceci est dans la lignée de leurs autres travaux sur les déformations de structures en général, et d'algèbres en particulier. De nombreuses structures algébriques ou géométriques peuvent être déformées, et à chaque type de structure et de déformation, on peut associer une théorie cohomologique, de façon à étudier et contrôler ces déformations. Dans le cas des algèbres associatives, la cohomologie qui apparaît est la cohomologie de Hochschild, pour les algèbres de Lie, il s'agit de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg, pour les algèbres commutatives, de la cohomologie de Harrison. D'autres structures ont été étudiées, *voir* par exemple [GS88], [Ko]. M. Gerstenhaber et A. Giaquinto (*cf.* [GG]) ont étudié des *déformations compatibles*. Ils ont prouvé en particulier que la conjecture de Donald-Flanigan est fausse pour le groupe des quaternions $\mathcal{Q}$, c'est-à-dire que l'algèbre $k\mathcal{Q}$, où k est un corps dont la caractéristique divise l'ordre de $\mathcal{Q}$, n'admet pas de déformation séparable. L'étude de déformations particulières d'algèbres de Hopf (il s'agit de déformations pour lesquelles la multiplication ou la comultiplication est inchangée) a aussi permis à A. Giaquinto, dans sa thèse ([Gi]), d'interpréter la bigèbre des matrices quantique $\mathrm{M}_q(2)$ et le plan quantique k_q^2 comme des déformations de la bigèbre des matrices et du plan classiques. L'approche de M. Gerstenhaber et S.D. Schack de l'étude des déformations est à mettre en relation avec la théorie de l'élément de carré nul de P. Lecomte (*voir* par exemple [Rg]), qui unifie l'étude des déformations de structures, grâce à des algèbres de Lie différentielles graduées et leur cohomologie. Cette théorie a été utilisée par D. Balavoine (*voir* [Ba]), qui a mis en place une théorie unificatrice, au moyen d'algèbres sur des opérades, qui permet de considérer en particulier les cas des algèbres commutatives et des algèbres de Leibniz.

Enfin, C. Ospel a défini dans sa thèse ([Os]) une autre théorie cohomologique, notée ici $\mathrm{H}^*_{A4}(M, A)$, faisant intervenir un bimodule de Hopf N, afin de traduire la construction des groupes quantiques inhomogènes de P. Podleś et S.L. Woronowicz en termes d'algèbres de Hopf et de bimodules de Hopf.

Ces trois théories sont définies à partir de bicomplexes, qui font intervenir des résolutions bar et cobar différentes.

Pour les unifier, nous avons considéré le foncteur Ext dans la catégorie des modules sur une algèbre associative X introduite par C. Cibils et M. Rosso dans [CR98] lorsque l'algèbre de Hopf A est de dimension finie. Cette algèbre associative est une "algèbre enveloppante" de l'algèbre de Hopf A; elle permet de considérer les bimodules de Hopf comme des modules:

Théorème ([CR98]; *voir* Théorème 1.30) Soit A une algèbre de Hopf de dimension finie. On considère l'algèbre associative X définie de la façon suivante: elle est égale à $(A^{*op} \otimes A^*)\breve{\otimes}(A \otimes A^{op})$, le produit sur les deux premiers et les deux derniers facteurs se faisant composante à composante, et le produit sur les autres facteurs étant décrit dans la formule (1.31) p33. Alors il existe une équivalence de catégories, préservant le $k-$espace vectoriel sous-jacent, entre la catégorie des bimodules de Hopf sur A et la catégorie des modules à gauche sur X.

En utilisant des résolutions particulières de bimodules de Hopf et les propriétés des foncteurs Ext, nous montrons:

Théorème (*voir* Théorèmes 2.13, 2.3 et 3.6)

(1) Soit A une algèbre de Hopf quelconque. La cohomologie H^*_{GS} généralise H^*_b :

$$\mathrm{H}^*_{GS}(A, A) \cong \mathrm{H}^*_b(A, A).$$

(2) Soit A une algèbre de Hopf de dimension finie. Les cohomologies à coefficients sont isomorphes:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^*_{GS}(M, N) & \cong & \mathrm{Ext}^*_X(M, N) \\ \mathrm{H}^*_{A4}(M, A) & \cong & \mathrm{Ext}^*_X(M, A). \end{array}$$

Notre interprétation en termes d'extensions de bimodules de Hopf nous permet, par exemple, de donner d'autres définitions de cette théorie unifiée (*voir* Remarque 2.7), ainsi que de démontrer l'invariance Morita. Elle nous permet aussi d'étudier la structure algébrique des espaces de cohomologie (Chapitre 4); nous définissons et étudions un cup-produit, et nous le relions au produit de Yoneda des extensions.

Le chapitre suivant (Chapitre 5) traite d'une généralisation aux algèbres de Hopf d'une autre théorie classique: l'homologie cyclique. Dans [CM99], A. Connes et H. Moscovici ont défini une cohomologie cyclique adaptée aux algèbres de Hopf munies de données supplémentaires (un grouplike et un caractère vérifiant certaines propriétés). A. Connes et H. Moscovici ont introduit la cohomologie cyclique des algèbres de Hopf dans [CM98]. Ils l'ont utilisée pour résoudre un problème de géométrie non commutative: le calcul de l'indice d'opérateurs transversalement elliptiques sur des feuilletages. Inspirés par ce travail, A. Connes et D. Kreimer (*cf.* [CK]) ont établi des résultats pour certaines algèbres de Hopf qui apparaissent naturellement dans la théorie des feuilletages, et dans certaines théories de champs quantiques (algèbres de Hopf d'arbres enracinés). Ces dernières algèbres donnent des solutions à un problème universel pour la cohomologie de Hochschild (une application, importante dans leur étude de l'algèbre de Hopf d'arbres enracinés, est un 1-cocycle).

Dans cette thèse, nous plaçons d'abord cette cohomologie cyclique dans un contexte homologique, par analogie avec les travaux de Loday-Quillen et de Karoubi sur l'homologie cyclique des algèbres (*cf.* [LQ] et [Ka]), en introduisant un module cyclique (*cf.* [Lo]). Nous étudions les algèbres de groupe dans la Section 5.2, et interprétons certaines décompositions classiques de Burghelea [B] et Karoubi-Villamayor [KV] en termes d'homologie cyclique de Connes-Moscovici (*voir* Théorèmes 5.13 et 5.15).

Certaines de ces décompositions se généralisent aux algèbres de Hopf cocommutatives: cela a été étudié par M. Khalkhali et B. Rangipour dans [KR] dans le cas de caractères et grouplikes triviaux; nous montrons que ces résultats sont encore valables dans le cas de caractères et grouplikes non-triviaux (Théorème 5.24), et nous obtenons:

Théorème (*voir* Théorème 5.24) Soit A une algèbre de Hopf cocommutative sur un corps k et soit π un grouplike de A, central dans A et d'ordre fini n, tel que la caractéristique de k ne divise pas n. Alors

$$\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(A) \cong \mathrm{HC}_*(k) \otimes \mathrm{H}_*^h(A;\, {}_\alpha k_\beta),$$

où $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(A)$ désigne l'homogie cyclique de l'algèbre de Hopf A munie du grouplike π et des caractères α et β vérifiant certaines relations, H_*^h est l'homologie de Hochschild, et ${}_\beta k_\alpha$ est le bimodule sur A dont la structure à gauche est donnée par le biais du caractère α et la structure à droite par le biais de β.

Cette section de la thèse doit beaucoup à des discussions que j'ai eues avec Andrea Solotar, que je remercie ici.

Enfin, dans le dernier chapitre (Chapitre 6), nous étudions quelques exemples, et donnons des calculs explicites d'homologies étudiées précédemment. Nous considérons des quotients d'algèbres de carquois.

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux algèbres de carquois tronquées (*i.e.* quotientées par une puissance de l'idéal engendré par les flèches), et calculons leur homologie cyclique classique grâce aux résultats sur l'homologie de Hochschild établis par E. Sköldberg.

Ensuite, nous étudions le cas des algèbres de Taft Λ_n, qui sont un cas particulier des algèbres ci-dessus. Ce sont des algèbres de Hopf qui ne sont ni commutatives, ni cocommutatives. Elles sont intéressantes pour diverses raisons; Λ_p est un exemple d'algèbre de Hopf non-semisimple dont la dimension est le carré d'un nombre premier (*cf.* [M98]). Elles sont de type de représentation fini; de plus, lorsque n est impair, Λ_n est isomorphe au demi-groupe quantique $u_q^+(\mathfrak{sl}_2)$ (q est une racine primitive $n^{ième}$ de l'unité), et c'est le seul demi-groupe quantique $u_q^+(\mathfrak{g})$ en une racine de l'unité qui n'est pas de type de représentation sauvage (*cf.* [C97]). D'autre part, Λ_n n'est pas quasi-triangulaire (pour chaque entier n), mais son groupe de Grothendieck est néanmoins un anneau commutatif (*cf.* [C93], [Gu]). Nous calculons l'homologie cyclique en tant qu'algèbre de Hopf des algèbres de Taft.

Puis, nous considérons les algèbres d'Auslander des algèbres de Taft. Nous en décrivons une présentation par carquois et relations et en calculons l'homologie de Hochschild et l'homologie cyclique classique. Les algèbres d'Auslander sont utiles lorsqu'on considère les algèbres artiniennes de type de représentation fini, puisqu'il y a une bijection entre les classes d'équivalence Morita de telles algèbres et les classes d'équivalence Morita d'algèbres d'Auslander (*cf.* [ARS]).

La structure d'algèbre de Hopf d'une algèbre Λ munit les groupes de Grothendieck $K_0(\Lambda)$ et $\overline{K}_0(\Lambda)$ des classes d'isomorphisme des modules projectifs (*resp.* de tous les modules) d'une structure supplémentaire (qui correspond au produit tensoriel des modules), *via* la comultiplication de Λ. De plus, il y a une correspondance biunivoque entre les modules indécomposables sur une algèbre et les modules projectifs indécomposables sur son algèbre d'Auslander; dans le cas d'une algèbre de Hopf, le groupe de Grothendieck des $\Gamma_\Lambda-$modules projectifs est ainsi muni d'une structure multiplicative. Cependant, cette correspondance ne préserve pas les $k-$modules sous-jacents (k est un anneau commutatif), et cette structure multiplicative ne semble pas recevoir d'interprétation naturelle. Pour finir, nous calculons les caractères de Chern des algèbres de Taft et de leurs algèbres d'Auslander.

Une version abrégée en anglais du texte de cette thèse (sans démonstration) suit cette introduction.

Introduction

In this thesis, we study homological and cohomological theories for associative algebras and Hopf algebras. In the first chapter (Chapter 1), we recall some definitions and properties of Hopf algebras and Hopf bimodules, as well as of the bar and cobar resolutions in relation to Hopf bimodules.

This work is divided into three parts. The first part of this thesis (Chapters 2 to 4) is devoted to the unification of these theories, by means of an Ext functor. We then study these cohomologies, using this unification; in particular, we define a cup-product, which we identify with the Yoneda product.

Two of the cohomologies we consider were introduced by M. Gerstenhaber and S.D. Schack. The first one, which they define in [GS90], is a theory with coefficients, which we denote by $\mathrm{H}^*_{GS}(M, N)$, for Hopf bimodules M and N over a Hopf algebra A. It was used by P. Etingof and S. Gelaki (*cf.* [EG]) to study finite-dimensional semisimple and cosemisimple Hopf algebras over a field of positive characteristic.

M. Gerstenhaber and S.D. Schack introduced a second theory in [GS92], denoted by $\mathrm{H}^*_b(A, A)$, in order to study the deformations of a Hopf algebra A (as Hochschild cohomology is a tool for the study of deformations of associative algebras). This follows other work of theirs on deformations of structures in general, and of algebras in particular. Many algebraic or geometric structures can be deformed, and for each kind of structure and deformation, one can associate a cohomology theory in order to study and control these deformations. In the case of associative algebras, the cohomology which appears is the Hochschild cohomology, for Lie algebras, it is the Chevalley-Eilenberg cohomology, for commutative algebras, it is Harrison cohomology. Other structures have been studied, *see* for instance [GS88], [Ko]. M. Gerstenhaber and A. Giaquinto (*cf.* [GG]) studied *compatible deformations*; as a consequence of their work, they proved that the Donald-Flanigan conjecture fails for the quaternion group $\mathcal{Q}$; in other words, the algebra $k\mathcal{Q}$, where k is a field whose characteristic divides the order of $\mathcal{Q}$, does not have separable deformations. The study of *preferred* deformations of Hopf algebras (deformations for which the multiplication or the comultiplication remains unchanged) also enabled A. Giaquinto, in his thesis ([Gi]), to interpret the quantum bialgebra of matrices $\mathrm{M}_q(2)$ and the quantum plane k_q^2 as deformations of the classical bialgebra of matrices and plane. M. Gerstenhaber and S.D. Schack's approach to the study of deformations is related to P. Lecomte's theory of the square zero element (*see* for instance [Rg]), which unifies the study of deformations of structures, by means of graded differential Lie algebras and their cohomology. This theory was used by D. Balavoine (*see* [Ba]), whose unifying approach, *via* algebras over operads, enables him in particular to consider commutative algebras and Leibniz algebras.

Finally, C. Ospel defined in his thesis ([Os]) another cohomology theory, denoted here by $\mathrm{H}^*_{A4}(M,A)$, involving a Hopf bimodule N, in order to translate P. Podleś and S.L. Woronowicz's construction of inhomogeneous quantum groups in terms of Hopf algebras and Hopf bimodules.

These three theories are defined *via* double complexes, involving various bar and cobar resolutions.

To unify them, we have considered the Ext functor in the category of modules over an associative algebra X introduced by C. Cibils and M. Rosso in [CR98] when the Hopf algebra A is finite dimensional. This associative algebra is an 'enveloping algebra' of the Hopf algebra A; it enables us to view Hopf bimodules as modules:

Theorem ([CR98]; *see* Theorem 1.30) Let A be a finite dimensional Hopf algebra. Consider the algebra X defined as follows: it is equal to $(A^{*op} \otimes A^*)\breve{\otimes}(A \otimes A^{op})$, the product on the first two and the last two tensorands being componentwise, and the product on the other tensorands as in formula (1.31) p33. Then there exists an $k-$vector space-preserving equivalence between the category of Hopf bimodules over A and the category of left modules over X.

Making use of special Hopf bimodule resolutions and of the properties of the Ext functor, we prove:

Theorem (*see* Theorems 0.21, 0.15 and 0.30)

(1) Let A be any Hopf algebra. The cohomology H^*_{GS} generalizes H^*_b :

$$\mathrm{H}^*_{GS}(A,A) \cong \mathrm{H}^*_b(A,A).$$

(2) Let A be a finite dimensional Hopf algebra. The cohomologies with coefficients are isomorphic:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^*_{GS}(M,N) &\cong \mathrm{Ext}^*_X(M,N) \\ \mathrm{H}^*_{A4}(M,A) &\cong \mathrm{Ext}^*_X(M,A). \end{aligned}$$

Our interpretation in terms of extensions enables us, for instance, to give other definitions of this unified theory (*cf.* Remarks 2.7 and 0.16), as well as prove Morita invariance (Sections 2.4 and 0.2.4); it also enables us to study the algebraic structure of the cohomology spaces (Chapter 4 and Section 0.4); we define and study a cup-product, and relate it to the Yoneda product of extensions.

In the next chapter (Chapter 5 and Section 0.5), we study an extension of another classical theory: cyclic homology. In [CM99], A. Connes and H. Moscovici defined a cyclic cohomology theory adapted to Hopf algebras endowed with extra data (a grouplike element and a character, satisfying some properties). A. Connes and H. Moscovici introduced cyclic cohomology of Hopf algebras in [CM98]. They used it to solve a problem in noncommutative geometry, namely the computation of the index of transversally elliptic operators on foliations. Inspired by this work, A. Connes and D. Kreimer (*cf.* [CK]) derived results on some Hopf algebras which appear naturally in the theory of foliations, and in the theory of perturbative quantum field theory (Hopf algebras of rooted trees). The latter provides a solution to a universal problem in Hochschild cohomology (an important map in their study of the algebra of rooted trees is a 1-cocycle).

In this thesis, we first place this cohomology in a homological context, in the spirit of Loday-Quillen and Karoubi's approach to the cyclic homology of algebras (*cf.* [LQ] and [Ka]), by introducing a cyclic module (*cf.* [Lo]). We study group algebras in Sections 5.2 and 0.5.2, and interpret some classical decompositions of Burghelea [B] and Karoubi-Villamayor [KV] in terms of Connes-Moscovici cyclic homology (*see* Theorems 0.40 and 0.42).

Some of these decompositions are also valid for cocommutative Hopf algebras: this was done by M. Khalkhali and B. Rangipour in [KR] in the case of trivial characters and grouplike. We prove that this is still true when the characters and grouplike are non-trivial (Theorems 5.24 and 0.47), and we have:

Theorem (*see* Theorem 0.47) Let A be a cocommutative Hopf algebra over a field k, and let π be a grouplike in H. Assume π is central and of finite order n in H, and that the characteristic of k does not divide n. Then

$$\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(A) \cong \mathrm{HC}_*(k) \otimes \mathrm{H}_*^h(A;\ {}_{\alpha}k_{\beta}).$$

where $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(A)$ denotes the cyclic homology of the Hopf algebra A endowed with the grouplike π and characters α and β satistfying some conditions, H_*^h is Hochschild homology, and ${}_{\beta}k_{\alpha}$ is the $A-$bimodule whose left structure is given *via* the character α and whose right structure is given *via* β.

This section owes much to discussions I have had with Andrea Solotar, whom I thank here.

Finally, in the last chapter (Chapter 6 and Section 0.6), we study some examples, and give explicit computations for some of the homologies we have previously studied. We consider quotients of quiver algebras. In the first instance, we consider truncated quiver algebras (*i.e.* the ideal of relations is a power of the ideal generated by the arrows), and compute their classical cyclic homology, using a result of E. Sköldberg's on their Hochschild homology.

Then, we study the case of the Taft algebras Λ_n, which are special cases of the algebras above. They are Hopf algebras which are neither commutative, nor cocommutative. They are interesting for various reasons; for instance, Λ_p is an example of a non-semisimple Hopf algebra whose dimension is the square of a prime (*cf.* [M98]). They are of finite representation type; furthermore, when n is odd, Λ_n is isomorphic to the half-quantum group $u_q^+(\mathfrak{sl}_2)$ (q primitive $n^{th}-$root of unity), and is the only half-quantum group $u_q^+(\mathfrak{g})$ at a root of unity which is not of wild representation type (*cf.* [C97]). Then, Λ_n is not braided (for any integer n), but its Grothendieck group is a commutative ring nonetheless (*cf.* [C93], [Gu]).

Next , we consider the Auslander algebras of the Taft algebras. We describe a presentation of these algebras by quiver and relations, and compute their Hochschild homology and classical cyclic homology. Auslander algebras are useful when considering Artin algebras of finite representation type, since there is a bijection between the Morita equivalence classes of such algebras and the Morita equivalence classes of Auslander algebras (*cf.* [ARS]).

The Hopf algebra structure on an algebra Λ conveys an additional structure on the Grothendieck groups $K_0(\Lambda)$ and $\overline{K}_0(\Lambda)$ of isomorphism classes of projective (respectively all) modules, since the tensor product over the base ring k of two $\Lambda-$modules is again a $\Lambda-$module, *via* the comultiplication of Λ. Furthermore, there is a one-to-one correspondance between the indecomposable modules over any algebra and the indecomposable projective modules over its

Auslander algebra; in the case of a Hopf algebra, therefore, the Grothendieck group of projective modules of Γ_Λ is endowed with a multiplicative structure. However, this correspondance does not preserve the underlying $k-$modules (k is a commutative ring), and this multiplicative structure does not seem to have a natural interpretation. We finish with the computation of the Chern characters of the Taft algebras and of their Auslander algebras.

An abridged English version of the text of this thesis (without proofs) follows.

Abridged English version

In this chapter, we give a summary in English of the results in this thesis. We refer to the French version for the proofs, and for additional details.

0.1 Generalities

0.1.1 Hopf bimodules over a Hopf algebra

In all this text, k is a commutative field (unless specified). If A is a Hopf algebra, its antipode S will always be bijective. The definitions and properties of Hopf algebras and Hopf bimodules are recalled in Chapter 1. Notations for morphism spaces are given in 1.13 p25; for instance, if M and N are bicomodules over A, the space of bicomodule maps from M to N is denoted by $\mathrm{Hom}^{A-A}(M,N)$; if they are Hopf bimodules over A, the space of Hopf bimodule maps from M to N is denoted by $\mathrm{Hom}_{A4}(M,N)$. The symbol $\otimes$ stands for the tensor product over k.

<u>*Tensor product of Hopf bimodules*</u>

We will need to consider tensor products over k of Hopf bimodules. The tensor product of Hopf bimodules can be endowed with Hopf bimodule structures; if M and N are Hopf bimodules over A, we shall consider two Hopf bimodule structures on $M \otimes N$ (dual of each other), which we will denote by $M \underline{\otimes} N$ and $M \overline{\otimes} N$ (*see* Section 1.2.1 for details). They involve diagonal actions and codiagonal coactions as well as the standard ones.

These notations will also be used for the tensor product of bimodules or bicomodules, 'forgetting' some of the structures (*see* Remark 1.20)

<u>*Relative projective and injective Hopf bimodules*</u>

Definition 0.1 ([Sh-St]) *A Hopf bimodule M is called a* relative projective *if the functor* $\mathrm{Hom}_{A4}(M,-)$ *takes exact sequences of Hopf bimodules that split as sequences of bicomodules to exact sequences of $k-$vector spaces.*

Example 0.2 A projective Hopf bimodule is a relative projective.

Example 0.3 ([Sh-St]) If V is a bicomodule, then the Hopf bimodule $A \underline{\otimes} V \underline{\otimes} A$ is a relative projective (*cf.* Example 1.25 p30).

Definition 0.4 *A resolution of a Hopf bimodule is a* relative projective resolution *if all its terms are relative projectives, and if it splits as a sequence of bicomodules.*

Relative projective resolutions have properties which are similar to those of projective resolutions:

Proposition 0.5 Let $\mathbf{P}_\bullet \longrightarrow M$ be a relative projective resolution of a Hopf bimodule M, and let $\varphi : M \to N$ be a Hopf bimodule morphism. Then, for every resolution $\mathbf{Q}_\bullet \longrightarrow N$ of N which is split as a sequence of bicomodules, there exists a morphism of *Hopf bimodule* complexes $\phi_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \to \mathbf{Q}_\bullet$ extending φ, that is, such that the diagram

$$\begin{tikzcd} P_\bullet \arrow[r, "d_\bullet"] \arrow[d, "\phi_\bullet"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ Q_\bullet \arrow[r, "d_\bullet"'] & N \end{tikzcd}$$

is commutative. This morphism is unique up to a homotopy of Hopf bimodules.

For details, *see* Proposition 1.27 p30.

Dually, we can define relative injectives and relative injective resolutions; they have dual properties (*see* Section 1.2.2).

Corollary 0.6 (1) (*cf.* [Sh-St] Proposition 10.5.3) Two relative projective resolutions are homotopy equivalent as Hopf bimodule complexes.

(2) (*cf.* [Sh-St] Lemma 10.4.1) Let Y and T be two relative projective resolutions of a Hopf bimodule M, and let Z and U be two relative injective resolutions of a Hopf bimodule N. Then the double complexes $\mathrm{Hom}_{A4}(Y, Z)$ and $\mathrm{Hom}_{A4}(T, U)$ endowed with the natural differentials are homotopy equivalent (hence their homologies are isomorphic).

(*See* Corollaries 1.28 and 1.29 p32).

The algebra X

Let A be a finite dimensional Hopf algebra. An algebra X was introduced by C. Cibils and M. Rosso in [CR98], in order to view Hopf bimodules over A as modules over X (just as bimodules over an associative algebra are left modules over its enveloping algebra). This they do by viewing the right $A-$module structure of a Hopf bimodule as a left $A^{op}-$module stucture, its left coaction as a left action of A^{*op}, and its right coaction as a left action of A^*. They obtain an algebra, whose underlying $k-$vector space is $A^{*op} \otimes A^* \otimes A \otimes A^{op}$. For more details, *see* Section 1.2.3. They prove the following:

Theorem 0.7 ([CR98] Theorem 3.1, *see* Theorem 1.30 p33) Let A be a finite dimensional Hopf algebra. There is a *$k-$vector space-preserving* equivalence of categories between the category of left modules over X and the category of Hopf bimodules over A.

Remark 0.8 C. Cibils and M. Rosso also proved that the algebra X is isomorphic to the direct tensor product $\mathcal{H}(A) \otimes \mathcal{D}(A)^{op}$, where $\mathcal{H}(A)$ is the Heisenberg double of A, and $\mathcal{D}(A)$ is the Drinfel'd double of A. However, this isomorphism is not explicit.

0.1.2 Hochschild and Cartier (co)homologies

We shall give a few properties of the bar and cobar resolutions of a Hopf bimodule. For the definitions and proofs, *see* Sections 1.3.1 and 1.3.2.

Hochschild (co)homology

Consider an algebra R, and a left module M over R. The bar complex $B^R_\bullet(M) = \bigoplus_{q\geq -1} R^{\otimes q+1}\otimes M$ is a free left module resolution of M; this can be seen *via* a homotopy h from id to 0. If M is a bimodule over R, the bar resolution becomes a bimodule resolution of M. Now, replacing R by the enveloping algebra $R^e = R\otimes R^{op}$, we can construct another bimodule resolution of M, that is $B^{R^e}_\bullet(M) \cong \bigoplus_{q\geq -1} R^{\otimes q+1}\otimes M\otimes R^{\otimes q+1}$. This latter resolution is a *free* bimodule resolution, which is not necessarily true of the first one, unless $M = R$.

Suppose now that M is a Hopf bimodule over a Hopf algebra A. We can consider the bar resolutions $B^A_\bullet(M)$ and $B_\bullet(M) := B^{A^e}_\bullet(M)$. The bimodules $B^A_q(M)$ and $B_q(M)$ can be endowed with Hopf bimodule structures as follows: $B^A_q(M) = R^{\underline{\otimes} q+1}\underline{\otimes} M$ and $B_q(M) = R^{\underline{\otimes} q+1}\underline{\otimes} M\underline{\otimes} R^{\underline{\otimes} q+1}$ (*see* Section 1.2.1). These complexes are then Hopf bimodule complexes. Moreover, the homotopy h is a Hopf bicomodule map, so that these sequences split as sequences of bicomodules. Therefore, we have:

Proposition 0.9 Let A be a Hopf algebra, and let M be a Hopf bimodule over A. Then $B^A_\bullet(M)$ is a Hopf bimodule resolution of M, and $B_\bullet(M)$ (*resp.* $B^A_\bullet(A)$) is a relative projective resolution of M (*resp.* of A).

Definition-Proposition 0.10 *The Hochschild homology* $\mathrm{H}^h_*(R,M)$ *and Hochschild cohomology* $\mathrm{H}_h^*(R,M)$ *of* R *in* M *are respectively* $\mathrm{Tor}^{R^e}_*(R,M)$ *and* $\mathrm{Ext}^*_{R^e}(R,M)$; *they can be defined explicitly as in Definition 1.39 p36 and Remark 1.40 p36 (the h's stand for Hochschild).*

Cartier cohomology

We can dualize the definitions and results of the previous paragraph: given a coalgebra C and a bicomodule N, we shall consider two complexes, denoted by $C^\bullet_C(N)$, $C^\bullet(N) := C^\bullet_{C^{coe}}(N)$ (where $C^{coe} = C\otimes C^{cop}$). They are bicomodule resolutions of N, called *cobar resolutions.* For more details, *see* Section 1.3.2.

When N is a Hopf bimodule over a Hopf algebra A, they become Hopf bimodule resolutions with the following structures: $C^p_A(N) = A^{\overline{\otimes} p+1}\overline{\otimes} N$ and $C^p(N) = A^{\overline{\otimes} p+1}\overline{\otimes} N\overline{\otimes} A^{\overline{\otimes} p+1}$. As in the case of the bar resolutions, we have:

Proposition 0.11 Let A be a Hopf algebra, and let N be a Hopf bimodule over A. Then $C^\bullet_A(N)$ is a Hopf bimodule resolution of N, and $C^\bullet(N)$ (*resp.* $C^\bullet_A(A)$) is a relative injective resolution of N (*resp.* of A).

Definition-Proposition 0.12 *The Cartier cohomology* $\mathrm{H}^*_c(N,C)$ *of* C *with coefficients in* N *is* $\mathrm{Ext}^*_{C^{coe}}(N,C)$; *it can be defined explicitly as in Definition 1.44 p38 (the c stands for Cartier).*

0.2 Gerstenhaber and Schack's cohomology theories

We shall study the cohomologies that M. Gerstenhaber and S.D. Schack defined in [GS90] and [GS92]. The cohomology of Hopf algebras was introduced in order to study the deformations of Hopf algebras. In fact, the cohomology that we are going to study is adapted to the deformations of Hopf algebras as Drinfel'd quasi-bialgebras; however, M. Gerstenhaber and S.D. Schack also defined a cohomology which studies the deformations of Hopf algebras as Hopf algebras, and they proved that these cohomologies fit into a long exact sequence involving the Hochschild and Cartier cohomologies (*see* Remark 0.20 p5). We study here a cohomology with coefficients, considered in [GS90]),and check that it generalizes the Hopf algebra cohomology mentioned above. Then, we link this theory with the theory of Hopf bimodule extensions when A is finite dimensional.

0.2.1 Cohomology of Hopf bimodules

This cohomology was defined by Gerstenhaber and Schack in [GS90]. Let A be a Hopf algebra, and let M and N be Hopf bimodules over A. Combining the bar and cobar resolutions for M and N, they construct a double complex with $C_{GS}^{p,q}(M,N) = \mathrm{Hom}_{A4}(B_q(M), C^p(N))$ (with the natural differentials; *see* Section 2.1).

Definition 0.13 *We will denote by* $\mathrm{H}^*_{GS}(M,N)$ *the cohomology of the total complex of this double complex* $C_{GS}^{\bullet,\bullet}(M,N)$.

Remark 0.14 The above double complex is isomorphic to the double complex with general term

$$C_{GS}^{p,q}(M,N) \cong \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes q} \otimes M \otimes A^{\otimes q}, A^{\otimes p} \otimes N \otimes A^{\otimes p}),$$

endowed with the appropriate differentials (*see* Remark 2.2 p40).

0.2.2 Link with extensions

Recall that the Hopf bimodules over a finite dimensional Hopf algebra A can be viewed as left modules over the algebra X associated to A (*see* Section 0.1.1). In this paragraph, we are going to compare the cohomologies $\mathrm{H}^*_{GS}(M,N)$ and $\mathrm{Ext}^*_X(M,N)$.

Theorem 0.15 Let A be a finite dimensional Hopf algebra over k, and let M and N be Hopf bimodules over A. Then $\mathrm{H}^*_{GS}(M,N) \cong \mathrm{Ext}^*_X(M,N)$.

Proof: *See* Theorem 2.3 p40. The proof is based on the universal property of Ext_X; the functor Ext^*_X is characterized by the following (*cf.* [McL]):

1. $\mathrm{Ext}^0_X(M,N) \cong \mathrm{Hom}_X(M,N) = \mathrm{Hom}_{A4}(M,N)$,
2. $\mathrm{Ext}^n_X(P,N) = 0$ for every $n \geq 1$ and every projective Hopf bimodule P,
3. $\mathrm{Ext}^*_X(-,N)$ is a cohomological $\delta-$functor (*see* [W] p30).

We also use properties of relative projective and relative injective resolutions. ♠

Remark 0.16 Using the properties of the Ext functor, we can see for instance that $\mathrm{H}^*_{GS}(M,N)$ is the homology of the complex $\mathrm{Hom}_{A4}(\mathbf{P}_\bullet, N)$, where $\mathbf{P}_\bullet$ is a projective reolution of M. This will be useful further on.

Remark 0.17 When A is an infinite dimensional Hopf algebra, we do not know whether the category of Hopf bimodules has enough projective or injective objects. If it had, the proof of Theorem 0.15 would still hold, and Gerstenhaber and Schack's cohomology for two Hopf bimodules $\mathrm{H}^*_{GS}(M,N)$ would be isomorphic to the Ext functor in the Hopf bimodule category $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{H}}(M,N)$ between these Hopf bimodules.

0.2.3 Cohomology of a Hopf algebra

Let A be a Hopf algebra. We may consider $\mathrm{H}^*_{GS}(A,A)$. On the other hand, M. Gerstenhaber and S.D. Schack defined in [GS92] another cohomology for A, denoted by $\mathrm{H}^*_b(A,A)$. The object of this paragraph is to compare them.

Using the resolutions $Bar_\bullet(A) := B^A_\bullet(A)$ and $Cob^\bullet(A) := C^\bullet_A(A)$ (*see* Paragraph 0.1.2 p3), we can construct the double complex

$$C_b^{\bullet,\bullet}(A) := \mathrm{Hom}_{A4}(Bar_\bullet(A), Cob^\bullet(A)),$$

endowed with the natural differentials.

Definition 0.18 *Gerstenhaber and Schack's cohomology* $\mathrm{H}^*_b(A,A)$ *is the homology of the total complex associated to the double complex* $C_b^{\bullet,\bullet}(A)$.

As in the case of $C_{GS}^{\bullet,\bullet}(M,N)$, we can give another description of $C_b^{\bullet,\bullet}(A)$:

$$C_b^{p,q}(A) \cong \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes q}, A^{\otimes p}),$$

with the appropriate differentials.

Example 0.19 If A is a group algebra kG, it is cosemisimple (in the finite dimensional case, this means that its dual is semisimple), therefore $\mathrm{H}^*_b(kG,kG) \cong \mathrm{H}^*_h(kG,k)$ (*see* [GS92]; various situations have been studied in [PW]).

Remark 0.20 Deleting the first row and the first column from the double complex $C_b^{\bullet,\bullet}(A)$ yields another double complex $\hat{C}_b^{\bullet,\bullet}(A)$ (*see* [GS92] p79); the latter is adapted to the study of the deformations of A *as a Hopf algebra*. The cohomology $\hat{\mathrm{H}}^*_b(A,A)$ of this double complex was used by A. Giaquinto in his thesis [Gi], to study *preferred deformations* of Hopf algebras.

There is a long exact sequence (*see* [GS92]) relating the Hopf algebra cohomologies:

$$\ldots \to \hat{\mathrm{H}}^n_b(A,A) \to \mathrm{H}^n_b(A,A) \to \mathrm{H}^n_h(A,k) \oplus \mathrm{H}^n_c(k,A) \to \ldots$$

(for $n \geq 1$), where H^*_h and H^*_c denote respectively Hochschild and Cartier cohomologies (*cf.* Paragraph 0.1.2, p3).

We shall now establish the connection between $\mathrm{H}^*_b(A,A)$ and $\mathrm{H}^*_{GS}(A,A)$.

Theorem 0.21 Let A be any Hopf algebra. Then $\mathrm{H}^*_{GS}(A,A) \cong \mathrm{H}^*_b(A,A)$.

Proof: *See* Theorem 2.13 p44.♠

0.2.4 Morita invariance of $\mathrm{H}^*_{GS}(M,N)$

Let A and B be Hopf algebras which are Morita equivalent *as algebras*, the equivalence being monoidal. Are the associated cohomologies (H^*_{GS} relative to A and B) isomorphic?

Let us first define what we mean by a monoidal equivalence, and give a description of the equivalence, as established by Mariano Suarez in [SA] (using Galois extensions of the base ring k).

Definition 0.22 *Let A and B be algebras. We say that A and B are Morita equivalent with monoidal equivalence if there exist a $B-A-$bimodule P and an $A-B-$bimodule Q satisfying:*

- $P \otimes_A Q \cong B$ *as $B-$bimodules,*
- $Q \otimes_B P \cong A$ *as $A-$bimodules,*
- *the functor* $P \otimes_A - : A - \underline{\mathrm{Mod}} \to B - \underline{\mathrm{Mod}}$ *is monoidal,*
- *the functor* $- \otimes_A Q : \underline{\mathrm{Mod}} - A \to \underline{\mathrm{Mod}} - B$ *is monoidal.*

Remark 0.23 Let A and B be algebras which are Morita equivalent with monoidal equivalence. Then the functors $P \otimes_A - \otimes_A Q : A - \underline{\mathrm{Bimod}} \to B - \underline{\mathrm{Bimod}}$ and $Q \otimes_B - \otimes_B P : B - \underline{\mathrm{Bimod}} \to A - \underline{\mathrm{Bimod}}$ are monoidal functors which define a category equivalence.

Proposition 0.24 The functor $A - \underline{\mathrm{Bimod}} \xrightarrow{\sim} B - \underline{\mathrm{Bimod}}$ is given by $P \otimes_A - \otimes_A Q$, where P is a $B-A-$bimodule and Q is an $A-B-$bimodule such that $P \otimes_A Q \cong B$ as $B-$bimodules and $Q \otimes_B P \cong A$ as $A-$bimodules. These bimodules P and Q are coalgebras, and we have $B = (P \otimes P)_A := (P \otimes P) \otimes_A k$, and $Q = (A \otimes P)_A := (A \otimes P) \otimes_A k$. The isomorphism $\beta : P \otimes_A Q \xrightarrow{\sim} B$ associates $[pa \otimes p']$ to $p \otimes [a \otimes p']$, and the coalgebra structures of B and Q depend on those of A and P as follows:

For B,

$$\Delta_B[p \otimes p'] = [p^{(1)} \otimes p'^{(2)}] \otimes [p^{(2)} \otimes p'^{(1)}]$$
$$\varepsilon_B[p \otimes p'] = \varepsilon_P(p)\,\varepsilon_P(p').$$

For Q,

$$\Delta_Q[a \otimes p] = [a^{(1)} \otimes p^{(2)}] \otimes [a^{(2)} \otimes p^{(1)}]$$
$$\varepsilon_Q[a \otimes p] = \varepsilon_A(a)\,\varepsilon_P(p).$$

Finally, the natural isomorphisms

$$\alpha : P \otimes_A (M \otimes N) \otimes_A Q \xrightarrow{\sim} (P \otimes_A M \otimes_A Q) \otimes (P \otimes_A N \otimes_A Q)$$

and $u : P \otimes_A k \otimes_A Q \xrightarrow{\sim} k$ are given by:

$$p \otimes (m \otimes n) \otimes [a \otimes p'] \mapsto (p^{(1)} \otimes m \otimes [a^{(1)} \otimes p'^{(2)}]) \otimes (p^{(2)} \otimes n \otimes [a^{(2)} \otimes p'^{(1)}])$$

and $u(p \otimes 1 \otimes [a \otimes p']) = \varepsilon_P(p)\varepsilon_A(a)\varepsilon_P(p')$ for every $m \in M, n \in N, p, p' \in P, a \in A$.

The above enables us to prove:

Proposition 0.25 Let A and B be Hopf algebras which are Morita equivalent with monoidal equivalence. Then the categories of Hopf bimodules over A and over B are equivalent.

Proof: *See* Proposition 2.17 p45. ♠

Let $H^*_{GS/A}$ denote Gerstenhaber and Schack's cohomology of Hopf bimodules over A, and $H^*_{GS/B}$ denote Gerstenhaber and Schack's cohomology of Hopf bimodules over B. Then:

Corollary 0.26 Let A and B be finite dimensional Hopf algebras which are Morita equivalent with monoidal equivalence. Let M and M' be Hopf bimodules over A. Then

$$\mathrm{H}^*_{GS/A}(M,M') \cong \mathrm{H}^*_{GS/B}(P\otimes_A M\otimes_A Q, P\otimes_A M'\otimes_A Q).$$

In particular,

$$\mathrm{H}^*_b(A,A) \cong \mathrm{H}^*_b(B,B).$$

Proof: *See* Corollary 2.18 p46. ♠

0.3 Hopf bimodule cohomology

We are now going to introduce another cohomology adapted to Hopf bimodules, then compare it with Hopf bimodule extensions when A is a finite dimensional Hopf algebra. C. Ospel defined in his thesis [Os] a cohomology for A involving a Hopf bimodule over A. The definition which follows is a generalization of this to two Hopf bimodules.

0.3.1 Definition

The construction of this cohomology is along the same lines as that of Gerstenhaber and Schack's cohomologies, using different bar and cobar resolutions.

Definition-Proposition 0.27 *The spaces*

$$C^{p,q}_{A4}(M,N) = \mathrm{Hom}_{A4}(M\underline{\otimes}A^{\underline{\otimes}q+1}, A^{\overline{\otimes}p+1}\overline{\otimes}N)$$

and the maps

$$\begin{array}{rcl} d_h\,:\, C^{pq}_{A4}(M,N) & \to & C^{p,q+1}_{A4}(M,N)\\ \alpha & \mapsto & \alpha\circ\lambda\\ d_c\,:\, C^{pq}_{A4}(M,N) & \to & C^{p+1,q}_{A4}(M,N)\\ \alpha & \mapsto & (-1)^q\rho\circ\alpha, \end{array}$$

where

$$\begin{array}{rcl} \lambda\,:\, M\otimes A^{\otimes q+2} & \to & M\otimes A^{\otimes q+1}\\ m\otimes \mathbf{a_{0,q+1}} & \mapsto & m\,a_0\otimes \mathbf{a_{1,q+1}}\\ & & \quad +\sum_{i=0}^{q}(-1)^{i+1} m\otimes\ldots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_{q+1}, \text{ and}\\ \\ \rho\,:\, A^{\otimes p+1}\otimes N & \to & A^{\otimes p+2}\otimes N\\ x & \mapsto & \left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\Delta_i + (-1)^{p+1}(1^{\otimes p}\otimes\delta_L^N)\right)(x) \end{array}$$

define a double complex, whose cohomology we shall denote by $\mathrm{H}^*_{A4}(M,N)$, *and call* Hopf bimodule cohomology *(the notation* $\mathbf{a_{m,n}}$ *represents the element* $a_m\otimes\ldots\otimes a_n$*). Let* $D = d_h + d_c$ *denote the differential of the total complex.*

Remark 0.28 As for the previous cohomologies, there are other descriptions of the double complex $C_{A4}^{\bullet;\bullet}(M,N)$ (*see* Remark 3.2 p48).

Remark 0.29 It follows immediately from the definitions that $\mathrm{H}^*_{A4}(A,A) \cong \mathrm{H}^*_b(A,A)$.

0.3.2 Link with extensions

We have once more an identification as follows:

Theorem 0.30 Let A be a finite dimensional Hopf algebra (*cf.* Section 0.1.1), and let M and N be Hopf bimodules over A. Then there exists an isomorphism

$$\mathrm{H}^*_{A4}(M,N) \cong \mathrm{Ext}^*_X(M,N).$$

Proof: The proof uses the universal property of the Ext functor; the functor Ext^*_X is characterized by the following (*cf.* [McL]):

1. $\mathrm{Ext}^0_X(M,N) \cong \mathrm{Hom}_X(M,N) = \mathrm{Hom}_{A4}(M,N)$,
2. $\mathrm{Ext}^n_X(P,N) = 0$ for every $n \geq 1$ and every projective Hopf bimodule P,
3. $\mathrm{Ext}^*_X(-,N)$ is a cohomological $\delta-$functor (*see* [W] p30).

It is therefore enough to check that the functor $\mathrm{H}^*_{A4}(-,N)$ satisfies these properties. For details on this, *see* Theorem 3.6 p50. ♠

0.4 Cup-product

Let $\mathcal{H}$ be the category of Hopf bimodules over a Hopf algebra A, and let M, N and L be three Hopf bimodules over A. There exists a product

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{H}}(M,L) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{H}}(L,N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{H}}(M,N) \\ F \otimes G & \mapsto & G \circ F, \end{array}$$

the Yoneda product. By the Theorems 0.15 p4, 0.30 p8, and 0.21 p5, we therefore know that if A is finite dimensional there exist graded products

$$\mathrm{H}^*_{A4}(M,L) \otimes \mathrm{H}^*_{A4}(L,N) \xrightarrow{\smile} \mathrm{H}^*_{A4}(M,N),$$

$$\mathrm{H}^*_{GS}(M,L) \otimes \mathrm{H}^*_{GS}(L,N) \xrightarrow{\smile} \mathrm{H}^*_{GS}(M,N)$$

and

$$\mathrm{H}^*_b(A,A) \otimes \mathrm{H}^*_b(A,A) \xrightarrow{\smile} \mathrm{H}^*_b(A,A).$$

However, since the isomorphisms $\mathrm{H}^*_{A4} \cong \mathrm{Ext}^*_X$ and $\mathrm{H}^*_{GS} \cong \mathrm{Ext}^*_X$ are not explicit, we cannot deduce the cup-products $\smile$ from the Yoneda product. We shall therefore proceed as follows: we shall introduce a cup-product $\smile$ on H^*_{A4}, independent of X (and therefore without any assumption on the dimension of A). We will define this cup-product on the double complex, then prove that it yields a product on the cohomology. Finally, we shall prove that this cup-product corresponds to the Yoneda product when A is finite dimensional.

Let us begin by defining and studying a cup-product for H^*_{A4}.

0.4.1 Cup-product on the Hopf bimodule cohomology

Proposition 0.31 Let $f \in \mathrm{Hom}_{A-}^{-A}(M \otimes A^{\otimes p-s}, A^{\otimes s} \otimes L)$ be a $p-$cochain and $g \in \mathrm{Hom}_{A-}^{-A}(L \otimes A^{\otimes q-r}, A^{\otimes r} \otimes N)$ be a $q-$cochain. Set $n = p+q$ and $t = s+r$. Define the $n-$cochain $f \smile g \in \mathrm{Hom}_{A-}^{-A}(M \otimes A^{\otimes n-t}, A^{\otimes t} \otimes N)$ by:

$$f \smile g(m \otimes \mathbf{a_{1,n-t}}) = \\ (-1)^{s(q-r)}(1^{\otimes s} \otimes g)\,[f(m \otimes \mathbf{a_{1,p-s}}).(\Delta^{(s-1)}(a_{p-s+1}^{(1)} \dots a_{n-t}^{(1)}) \otimes 1) \otimes \mathbf{a^{(2)}_{p-s+1,n-t}}].$$

The differential $D = d_h + d_c$ of the total complex associated to the Hopf bimodule double complex is a right derivation for the cup-product $\smile$, that is

$$D(f \smile g) = Df \smile g + (-1)^p f \smile Dg,$$

so that the formula for $\smile$ yields a product $\mathrm{H}^*_{A4}(M,L) \otimes \mathrm{H}^*_{A4}(L,N) \to \mathrm{H}^*_{A4}(M,N)$.

Proof: *See* Proposition 4.1 p58. ♠

Remark 0.32 The cup-product in $\mathrm{H}_b^*(A,A)$ is as follows: let f be in $\mathrm{Hom}_k(A^{\otimes p-s}, A^{\otimes s})$ and g in $\mathrm{Hom}_k(A^{\otimes q-r}, A^{\otimes r})$; then

$$\begin{aligned}(f \smile g)(a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-t}) &= (-1)^{s(q-r)} f(a_1^{(1)} \otimes \dots \otimes a_{p-s}^{(1)})\ \Delta^{(s-1)}(a_{p-s+1}^{(1)} \dots a_{n-t}^{(1)}) \\ &\quad \otimes \Delta^{(r-1)}(a_1^{(2)} \dots a_{p-s}^{(2)})\ g(a_{p-s+1}^{(2)} \otimes \dots \otimes a_{n-t}^{(2)}).\end{aligned}$$

0.4.2 Cup-product and Yoneda product

We shall now relate the cup-product $\smile$ with the Yoneda product of extensions.

Theorem 0.33 Let A be a finite dimensional Hopf algebra. Let M, N and L be Hopf bimodules over A. Let $\varphi_{MN} : \mathrm{H}^*_{A4}(M,N) \to \mathrm{Ext}^*_X(M,N)$ be the isomorphism extending $\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{A4}(M,N)}$.

Then, if $f \in \mathrm{H}^p_{A4}(M,L)$ and $g \in \mathrm{H}^q_{A4}(L,N)$, the relationship between the products is given by

$$\varphi^{p+q}_{MN}(f \smile g) = (-1)^{pq}\, \varphi^q_{LN}(g) \circ \varphi^p_{ML}(f) :$$

the cup product and the Yoneda product are equal up to sign.

Proof: After proving universal properties of the cup-product and the Yoneda product, we reduce to the case when $q = 0$; this case is proved by induction on p, thanks to a partial associativity property, and the knowledge of φ^1 (*see* Theorem 3.5 p49 and Proposition 3.11 p54). For the details of the proof, we refer to Theorem 4.4 p60. ♠

0.5 Cyclic homology of Hopf algebras

In this section, we study a cyclic homology theory for Hopf algebras endowed with extra data (a grouplike element and a character satisfying some relations involving the antipode). Connes and Moscovici introduced cyclic cohomology for some Hopf algebras in [CM98]. They used it to solve a problem in noncommutative geometry, namely the computation of the index of transversally elliptic operators on foliations. Their definition may be slightly altered to include a second grouplike element (and thus relax the conditions on the antipode).

In [Cr], Crainic gives an alternative definition of this cyclic cohomology in terms of $X-$-complexes. He also computes some examples, and constructs a non-commutative Weil complex which is related to the cyclic cohomology of Hopf algebras. Cyclic homology of Hopf algebras also appears in the final section of his thesis. It was also used by Gorokhovsky in [Go] to construct some cyclic cocycles associated to a specific vector bundle.

In this section, we first place this cohomology in a homological context, in the spirit of Loday-Quillen and Karoubi's approach to the cyclic homology of algebras (*cf.* [LQ] and [Ka]), by introducing a cyclic module (*cf.* [Lo]). This homology is defined for some Hopf algebras endowed with a grouplike element and two characters. We study group algebras in Sections 5.2 and 0.5.2, and interpret some classical decompositions of Burghelea [B] and Karoubi-Villamayor [KV] in terms of Connes-Moscovici cyclic homology (*see* Theorems 0.40 and 0.42). We also compute the cyclic homology of cyclic group algebras (as Hopf algebras).

In this section, unless specified, k is a commutative ring with unit.

0.5.1 Generalities

Data: Let H be a Hopf algebra over k. Let S denote the antipode of H. Suppose there are two characters $\alpha,\ \beta\ : H \to k$ on H, and a grouplike element π in H. Set $S_\pi = \pi S$ (*i.e.* $S_\pi(a) = \pi S(a)$), and assume that $\alpha(\pi) = 1 = \beta(\pi)$ and

$$(\alpha \star S_\pi \star \beta)^2 = \mathrm{id}, \tag{0.35}$$

where $\star$ is the convolution product (defined for linear maps from H to H or k). The second identity can be rewritten with Sweedler's notation:

$$\alpha(a^{(1)})\alpha(S(a^{(4)}))\pi S^2(a^{(3)})\pi^{-1}\beta(S(a^{(2)}))\beta(a^{(5)}) = a,\ \forall a \in H.$$

Definition-Proposition 0.35 *The following data define a cyclic module (*see *for instance [Lo] Section 2.5)* $C_*^{(\pi,\alpha,\beta)}$:

$$C_n^{(\pi,\alpha,\beta)} = H^{\otimes n} \textit{ for } n \geq 0,$$

and

$$\begin{array}{rcl} d_i : H^{\otimes n+1} & \longrightarrow & H^{\otimes n} \\ a_0 \otimes \ldots \otimes a_n & \mapsto & \begin{cases} \alpha(a_0)a_1 \otimes \ldots \otimes a_n & \textit{if } i = 0, \\ a_0 \otimes \ldots \otimes a_{i-1}a_i \otimes \ldots \otimes a_n & \textit{if } 1 \leq i \leq n, \\ a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}\beta(a_n) & \textit{if } i = n+1, \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} s_i : H^{\otimes n} & \longrightarrow & H^{\otimes n+1} \\ a_1 \otimes \ldots \otimes a_n & \mapsto & \begin{cases} a_1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes a_i \otimes \ldots \otimes a_n & \textit{if } 1 \leq i \leq n, \\ a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \otimes 1 & \textit{if } i = n+1, \textit{ and} \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} t_n : H^{\otimes n} & \longrightarrow & H^{\otimes n} \\ a_1 \otimes \ldots \otimes a_n & \mapsto & \alpha(a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)}) S_\pi(a_1^{(2)} \ldots a_n^{(2)}) \otimes a_1^{(3)} \otimes \ldots \otimes a_{n-1}^{(3)} \beta(a_n^{(3)}), \end{array}$$

when $n \geq 1$. *When* $n = 0$, *the maps become:* $d_0 = \alpha$, $d_1 = \beta$, $s_0 = \eta$ *(the unit of* H*), and* $t_0 = \mathrm{id}_k$.

The cyclic homology of H *is the homology of the usual double complexes associated to a cyclic module, or, when* k *contains* $\mathbb{Q}$, *of the Hochschild complex factored by the cyclic action* $t_\bullet$ (see *[Lo]). We shall denote this homology by* $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(H)$.

Proof: The main difficulty is in the proof of the relation t_n^{n+1}; the details are in Definition-Proposition 5.2 p66. ♠

Example 0.36 Suppose H is a group algebra kG. Then, for any element π in the centre of G, and for any characters α and β on H, provided they take the value 1 at π, we can consider the homology $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(kG)$. We shall study examples of this situation in more detail in Paragraph 0.5.2.

In some cases, it is enough to consider one nontrivial character:

Proposition 0.37 If $(\alpha \circ S^3) \star \beta = (\alpha \circ S) \star \beta$, then

$$\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(H) \cong \mathrm{HC}_*^{(\pi,\varepsilon,(\alpha\circ S)\star\beta)}(H).$$

More statements and proofs are given in Section 5.1. The main situation we shall consider is in the following:

Corollary 0.38 Let H be a commutative or cocommutative Hopf algebra. Then

$$\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(H) \cong \mathrm{HC}_*^{(\pi,\varepsilon,(\alpha\circ S)\star\beta)}(H)$$

for all α and β.

Proof: Indeed, $S^2 = \mathrm{id}$ in this case (*cf.* [Kl] Theorem III.3.4). ♠

Since $C_*^{(\pi,\alpha,\beta)(H)}$ is a cyclic module, we can apply the general theory for cyclic modules. There is a long periodic exact sequence, involving $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(H)$ and the homology of the underlying simplicial module of $C_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(H)$; view k as an $H-$bimodule via:

$$a.\lambda.b = \beta(a)\lambda\alpha(b),\ \forall a, b \in H \text{ and } \lambda \in k.$$

Let ${}_\beta k_\alpha$ denote this bimodule. Then the homology of this simplicial module is in fact the Hochschild homology of the underlying algebra of H with coefficients in ${}_\beta k_\alpha$. Therefore,

Proposition 0.39 There is a long exact sequence (SBI):

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}_n^h(H,\, {}_\beta k_\alpha) \longrightarrow \mathrm{HC}_n^{(\pi,\alpha,\beta)}(H) \longrightarrow \mathrm{HC}_{n-2}^{(\pi,\alpha,\beta)}(H) \longrightarrow \mathrm{H}_{n-1}^h(H,\, {}_\beta k_\alpha) \longrightarrow \cdots$$

(recall that H_*^h denotes Hochschild homology).

We are now going to consider the case of a group algebra.

0.5.2 Cyclic homology of a group algebra

Unless specified, H is a group algebra kG, and the characters are both equal to the counit ε. D. Burghelea, M. Karoubi and O.E. Villamayor (*see* [B], [KV], [Lo]) have established a decomposition of the classical cyclic homology of a group algebra $\mathrm{HC}_*(kG)$. We are going to interpret this in terms of the cyclic homology of Connes and Moscovici.

Theorem 0.40 For any discrete group G, there is a graded isomorphism:

$$\mathrm{HC}_*(kG) \cong \bigoplus_{\langle\pi\rangle\in\langle G\rangle} \mathrm{HC}_*^{(\pi,\varepsilon,\varepsilon)}(kG_\pi).$$

Proof: The proof is close to that of Burghelea's decomposition (*see* Theorem 5.13 p73). ♠

Remark 0.41 Using the results of [Lo] (7.4.11 to 7.4.13), we can give various interpretations and decompositions of $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\varepsilon,\varepsilon)}(kG_\pi)$:

Theorem 0.42 Assume one of the following conditions is satisfied:
(i) G is torsion-free,
(ii) G is abelian,
(iii) k contains $\mathbb{Q}$.
Let $\{\pi\}$ denote the cyclic subgroup of G generated by π. Then, if the order of π in G is finite,

$$\mathrm{HC}_*^{(\pi,\varepsilon,\varepsilon)}(kG_\pi) \cong \mathrm{HC}_*(k) \otimes \mathrm{H}_*(G_\pi/\{\pi\};\, {}_\varepsilon k_\varepsilon),$$

and, when the order of π in G is infinite,

$$\mathrm{HC}_*^{(\pi,\varepsilon,\varepsilon)}(kG_\pi) \cong \mathrm{H}_*(G/\{\pi\};\, {}_\varepsilon k_\varepsilon).$$

Remark 0.43 A similar result was obtained in the cohomological context for Lie algebras, in [CM99] and [CM00].

We will see further on some generalizations of the results of Theorem 0.42.

Remark 0.44 These interpretations also enable us to compute explicitly $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\varepsilon,\varepsilon)}(kG)$ when G is a finite cyclic group, and therefore the classical $\mathrm{HC}_*(kG)$ also: *see* Proposition 5.18 p74 and Corollary 5.19 p74; the results agree with [BACH2].

Now assume k is a characteristic zero field. When G is a finite cyclic group of order m, we can compute its cyclic homology (as a Hopf algebra):

Proposition 0.45 The cyclic homology of the Hopf algebra $H = k\,(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ is given as follows:

$$\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(H) = 0 \text{ if } \alpha \neq \beta,$$
$$\mathrm{HC}_n^{(\pi,\alpha,\alpha)}(H) = \begin{cases} k \oplus Ann(m_\pi)^{n/2} & \text{if } n \text{ is even} \\ (k/m_\pi k)^{n+1/2} & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

where m_π is the order of $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\,/\{\pi\}$ and $Ann(m_\pi) = \{\lambda \in k/\ m_\pi\lambda = 0\}$.

Proof: *See* Paragraph 5.2.2 p74. ♠

0.5.3 Decomposition of the cyclic homology of a Hopf algebra

Some of the results in the previous section generalize to cocommutative Hopf algebras.

Theorem 0.46 ([KR] Theorem 4.1) Let H be a cocommutative Hopf algebra. Then

$$\mathrm{HC}_*^{(1,\varepsilon,\varepsilon)}(H) \cong \mathrm{HC}_*(k) \otimes \mathrm{H}_*^h(H;k).$$

In fact, as in the case of group algebras, this result can be generalized to include non-trivial grouplikes and characters; I am grateful to Andrea Solotar for the fruitful discussions we have had concerning the following result:

Theorem 0.47 Let H be a cocommutative Hopf algebra over a field k, and let π be a grouplike in H. Assume π is central and of finite order n in H, and that the characteristic of k does not divide n. Then

$$\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(H) \cong \mathrm{HC}_*(k) \otimes \mathrm{H}_*^h(H;\ {}_\alpha k_\beta).$$

Proof: *See* Theorem 5.24 p76. ♠

Remark 0.48 There is a partial result for more general Hopf algebras: let H be a Hopf algebra, and assume there exists a grouplike element σ in the centre of H and a $\sigma-$invariant trace tr (*cf.* [KR]) such that $tr(\sigma)$ is invertible in k. Then $\mathrm{HC}_*^{(\sigma,\varepsilon,\varepsilon)}(H)$ is a direct factor in $\mathrm{HC}_*(H)$.

0.6 Examples of computations of various homologies

The details of the results of this section may be found in Chapter 6.

0.6.1 Truncated quiver algebras

Let $\mathfrak{C}$ be a finite quiver (that is a finite oriented graph), k a commutative ring, and let $k\mathfrak{C}$ be the algebra of paths in $\mathfrak{C}$ ($k\mathfrak{C}$ is the free $k-$module with basis the set of paths in $\mathfrak{C}$, and the multiplication is obtained *via* the concatenation of paths). For all $p \in \mathbb{N}$, let $\mathfrak{C}_p$ denote the set of paths of length p in $\mathfrak{C}$, and let $\mathfrak{m}$ denote the ideal of $k\mathfrak{C}$ generated by $\mathfrak{C}_1$. Consider an admissible ideal I in $k\mathfrak{C}$ (that is, an ideal I such that there exists an integer n with $\mathfrak{m}^n \subset I \subset \mathfrak{m}^2$). In [AG], D. Anick and E.L. Green introduced a new quiver Γ which gave them a minimal projective $k\mathfrak{C}/I-$resolution of the algebra $k\mathfrak{C}_0$, graded by the length of paths.

Using D. Anick and E.L. Green's resolution, E. Skldberg, in [Sk], constructed a resolution of the algebra $A := k\mathfrak{C}/\mathfrak{m}^n$ for $n \geq 2$ (*see* Theorem 6.1 p79).

Note that the differentials preserve the gradation, so that the Hochschild homology spaces also are graded. Let $\mathrm{H}^h_{p,q}(A, A)$ denote the q^{th} graded part of the space $\mathrm{H}^h_p(A, A)$.

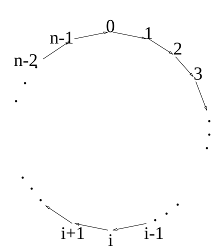
By means of the resolution in Theorem 6.1 p79, E. Skldberg computes the Hochschild homology of A with coefficients in A; to state this result, we shall need some notation: let $\mathcal{C}$ denote the set of cycles in the quiver $\mathfrak{C}$, and for any cycle γ in $\mathcal{C}$, let $L(\gamma)$ denote its length. There is a natural action of the cyclic group $\langle t_\gamma \rangle$ of order $L(\gamma)$ on γ; let $\overline{\gamma}$ denote the orbit of γ under this action, and let $\overline{\mathcal{C}}$ denote the set of orbits of cycles.

Theorem 0.49 ([Sk]) Set $q = cn + e$, for $0 \leq e \leq n-1$ (with $n \geq 2$). Then the Hochschild homology space $\mathrm{H}^h_{p,q}(A, A)$ is given by:

$$\begin{cases} k^{a_q} & \text{if } 1 \leq e \leq n-1 \text{ and } 2c \leq p \leq 2c+1, \\ \bigoplus_{r|q}(k^{(n\wedge r)-1} \oplus Ker(.\frac{n}{n\wedge r} : k \to k))^{b_r} & \text{if } e = 0, \text{ and } 0 < 2c = p, \\ \bigoplus_{r|q}(k^{(n\wedge r)-1} \oplus Coker(.\frac{n}{n\wedge r} : k \to k))^{b_r} & \text{if } e = 0, \text{ and } 0 < 2c-1 = p, \\ k^{\#\mathfrak{C}_0} & \text{if } p = q = 0, \text{ and} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where a_q is the number of cycles of length q in $\overline{\mathcal{C}}$, the integer b_r is the number of cycles of length r in $\overline{\mathcal{C}}$ which are not powers of smaller cycles, and $n \wedge r$ is the greatest common divisor of n and r.

Example 0.50 Suppose $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{(n)}$ is the $n-$crown, that is the quiver with n vertices $e_0, \ldots, e_{n-1}$ and n edges $a_0, \ldots, a_{n-1}$, each edge a_i going from the vertex e_i to the vertex e_{i+1} for $0 \leq i \leq n-2$, and the edge a_{n-1} going from e_{n-1} to e_0, as follows:



The algebra $\Lambda_n := k\mathfrak{C}^{(n)}/\mathfrak{m}^n$ is called the *Taft algebra*.

The Hochschild homology of the Taft algebra Λ_n is given by:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^h_{p,cn}(\Lambda_n, \Lambda_n) & = & k^{n-1} \text{ if } p = 2c \text{ or } p = 2c-1 \\ \mathrm{H}^h_{0,0}(\Lambda_n, \Lambda_n) & = & k^n \\ \mathrm{H}^h_{p,q}(\Lambda_n, \Lambda_n) & = & 0 \text{ in all other cases.} \end{array}$$

The resolution of Theorem 6.1 p79 also enables us to calculate other Hochschild homologies, useful for the computation of $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(A)$. Let α and β be characters on A; the list of characters on A is the following: for each vertex e_i, there is one character α_i which equals 1 on e_i, and 0 on every other path in $\mathfrak{C}$ (the e_i are orthogonal idempotents, and the edges either have different extremities, or have a power which is zero). In particular, the characters vanish on all the paths of length greater than 1, so the differentials vanish. The homology $\mathrm{H}^h_*(A, {}_\beta k_\alpha)$ is:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^h_{2c}(A, {}_\beta k_\alpha) & = & {}_\beta k_\alpha \otimes_{k\mathfrak{C}_0^e} k\mathfrak{C}_{nc} \\ \mathrm{H}^h_{2c+1}(A, {}_\beta k_\alpha) & = & {}_\beta k_\alpha \otimes_{k\mathfrak{C}_0^e} k\mathfrak{C}_{nc+1}. \end{array}$$

Example 0.51 For the Taft algebras, the results are:

$$\begin{cases} \mathrm{H}^h_{2c}(\Lambda_n, {}_\beta k_\alpha) = k \\ \mathrm{H}^h_{2c+1}(\Lambda_n, {}_\beta k_\alpha) = 0 \end{cases} \quad \text{if } \alpha = \beta,$$

$$\begin{cases} \mathrm{H}^h_{2c}(\Lambda_n, {}_\beta k_\alpha) = 0 \\ \mathrm{H}^h_{2c+1}(\Lambda_n, {}_\beta k_\alpha) = k \end{cases} \quad \text{if } \alpha = \alpha_{i+1} \text{ and } \beta = \alpha_i,$$

and in all other cases the homology is 0 in all degrees.

0.6.2 Cyclic homology of graded algebras

In this paragraph, k is a commutative ring which contains $\mathbb{Q}$. When A is a graded $k-$algebra, Connes' SBI exact sequence splits in the following way:

Theorem 0.52 ([Lo] Theorem 4.1.13) Let A be a unital positively graded algebra over k containing $\mathbb{Q}$. Define $\overline{\mathrm{H}}^h_p(A) = \mathrm{H}^h_p(A, A)/\mathrm{H}^h_p(A_0, A_0)$ and $\overline{\mathrm{HC}}_p(A) = \mathrm{HC}_p(A)/\mathrm{HC}_p(A_0)$. Connes' exact sequence for $\overline{\mathrm{HC}}$ reduces to the short exact sequences:

$$0 \to \overline{\mathrm{HC}}_{p-1}(A) \to \overline{\mathrm{H}}^h_p(A) \to \overline{\mathrm{HC}}_p(A) \to 0.$$

This will enable us to compute the classical cyclic homology of truncated quiver algebras; combining the results for Hochschild homology and Theorem 0.52 p15 yields the following:

Proposition 0.53 Suppose $n \geq 2$. Then:

$$\begin{aligned}\dim_k \mathrm{HC}_{2c}(k\mathfrak{C}/\mathfrak{m}^n) &= \#\mathfrak{C}_0 + \sum_{e=1}^{n-1} a_{cn+e} + \sum_{\substack{r|(c+1)n \\ n \notin r\mathbb{N}}} (r \wedge n - 1) b_r \\ \dim_k \mathrm{HC}_{2c+1}(k\mathfrak{C}/\mathfrak{m}^n) &= \sum_{r|n} (r-1) b_r .\end{aligned}$$

Corollary 0.54 When $\mathfrak{C}$ is the $n-$crown, then the results are:

$$\begin{cases} \mathrm{HC}_{2c}(\Lambda_n) = k^n, \\ \mathrm{HC}_{2c+1}(\Lambda_n) = k^{n-1} \text{ for } c \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Example 0.55 Let A be the quotient algebra $k[X]/(X^n)$. It has a presentation by quiver and relations (the quiver has one vertex and one loop), and its cyclic homology is k^n in even degree, and vanishes in odd degree.

Remark 0.56 This agrees with the general results given in [BACH] and [BACH2] (in which k may be a field of positive characteristic, or in fact any commutative ring).

0.6.3 Connes and Moscovici homology of some truncated algebras

Here, k is a commutative ring which contains a primitive $n-$th root of unity ζ. The Taft algebra Λ_n is then a Hopf algebra (*see* [C93]), with the following structure maps:

$$\begin{aligned} \varepsilon(e_i) &= \delta_{i,0}, & \varepsilon(a_i) &= 0, \\ \Delta(e_i) &= \sum_{j+l \equiv i\ [n]} e_j \otimes e_l, & \Delta(a_i) &= \sum_{j+l \equiv i\ [n]} (e_j \otimes a_l + \zeta^l a_j \otimes e_l), \\ S(e_i) &= e_{-i}, & S(a_i) &= -\zeta^{i+1} a_{-i-1}, \end{aligned}$$

where δ is the Kronecker symbol and the indices are written modulo n. We can therefore consider the homology $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(\Lambda_n)$.

First of all, we need to find out which characters and grouplikes (π, α, β) satisfy the necessary conditions (0.35) p10. There are n grouplike elements in Λ_n, given as follows:

$$\pi_i = \sum_{l=0}^{n-1} \zeta^{il} e_l .$$

A triple $(\pi_i, \alpha_u, \alpha_v)$ satisfies relation (0.35) iff $ui \equiv 0 \pmod n$, $vi \equiv 0 \pmod n$, and $v-u+1+i \equiv 0 \pmod n$. For instance, when $u = v$, this means that i is necessarily equal to -1, and u and v are equal to 0 (that is $\alpha_u = \varepsilon = \alpha_v$); when $v = u-1$, it means that i is equal to 0, that is, π_i is equal to 1. We shall not need to know the details of the other possibilities.

Using the long periodic exact sequence (SBI) for $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}$ (Proposition 0.39 p12) and Example 0.51, we obtain the following results:

Proposition 0.57

$$\mathrm{HC}_p^{(\pi_{n-1},\varepsilon,\varepsilon)}(\Lambda_n) = \begin{cases} k^{p/2+1} & \text{if } p \text{ is even,} \\ 0 & \text{if } p \text{ is odd,} \end{cases}$$

$$\mathrm{HC}_p^{(1,\alpha_u,\alpha_{u-1})}(\Lambda_n) = \begin{cases} 0 & \text{if } p \text{ is even,} \\ k^{p+1/2} & \text{if } p \text{ is odd,} \end{cases} \quad \text{for all } u \in \{0,\dots,n-1\},$$

$$\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(\Lambda_n) = 0 \quad \text{in every other case.}$$

Remark 0.58 Note that none of these homologies are direct factors in the classical $\mathrm{HC}_*(\Lambda_n)$, which seems to preclude any possibility of decomposing $\mathrm{HC}_*(\Lambda_n)$ as a sum of Connes and Moscovici cyclic homologies.

0.6.4 Hochschild and cyclic homology of the Auslander algebras Γ_{Λ_n} of the Taft algebras Λ_n

Auslander algebras are useful when considering artin algebras of finite representation type, since there is a bijection between the Morita equivalence classes of such algebras and the Morita equivalence classes of Auslander algebras (cf [ARS]).

The Hopf algebra structure on an algebra Λ conveys an additional structure on the - Grothendieck groups $K_0(\Lambda)$ and $\overline{K}_0(\Lambda)$ of isomorphism classes of projective (respectively all) indecomposable modules, since the tensor product over the base ring k of two $\Lambda-$modules is again a $\Lambda-$module, *via* the comultiplication of Λ. Furthermore, there is a one-to-one correspondance between the indecomposable modules over any algebra and the indecomposable projective modules over its Auslander algebra; in the case of a Hopf algebra, therefore, the Grothendieck group of projective modules of Γ_Λ is endowed with a multiplicative structure. However, this correspondance does not preserve the underlying $k-$modules, and this multiplicative structure doesn't seem to have a natural interpretation.

In this paragraph, we study the example of the Taft algebras; they are Hopf algebras which are neither commutative, nor cocommutative. They are interesting for various reasons; for instance, Λ_p is an example of a non-semisimple Hopf algebra whose dimension is the square of a prime (cf [M98]). They are of finite representation type; furthermore, when n is odd, Λ_n is isomorphic to the half-quantum group $u_q^+(\mathfrak{sl}_2)$(q primitive $n^{th}-$root of unity), and is the only half-quantum group $u_q^+(\mathfrak{g})$ at a root of unity which is not of wild representation type (cf [C97]). Then, Λ_n is not braided, but its Grothendieck group is a commutative ring nonetheless (cf [C93], [Gu]).

These examples show that the non-commutative, non-cocommutative Hopf algebra structure on Λ_n does not yield a natural multiplicative structure on its cyclic homology. There is a product, however, obtained by transporting that of $K_0(\Lambda_n)$ via the Chern characters, which are onto for Λ_n and Γ_{Λ_n}.

In this paragraph, k is an algebraically closed field.

The quiver of the Auslander algebra

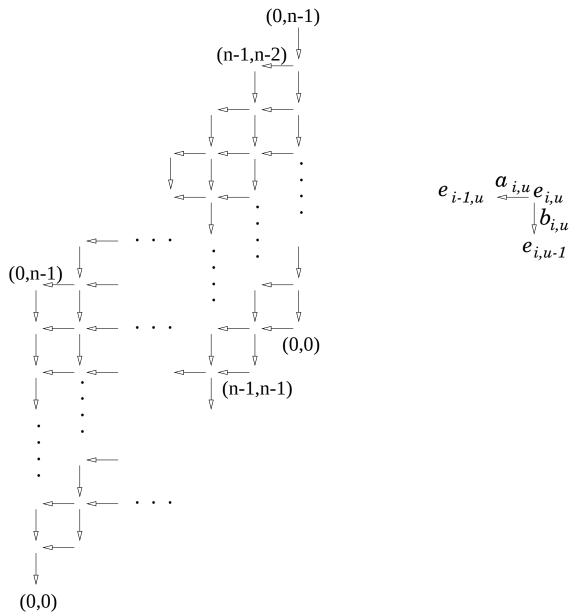
Definition 0.59 *Let Λ be a finite-dimensional basic algebra over an algebraically closed field k, with only a finite number of isomorphism classes of indecomposable modules. The Auslander* *algebra of* Λ *is:*

$$\Gamma_\Lambda := End_\Lambda(\oplus_{M \in \mathrm{ind}M} M)^{op},$$

where ind$M$ *is the set of isomorphism classes of indecomposable* $\Lambda-$*modules.*

The algebra Γ_Λ has a quiver, which is the opposite of the Auslander-Reiten quiver of Λ. The relations on this quiver are given by the mesh relations (*see* [ARS] p232).

When the algebra Λ is Λ_n, with $n \geq 1$, the quiver is the following:



where both vertical outer edges are identified (the quiver is on a cylinder: *see* [GR]). Let Q denote this quiver, let $\{e_{i,u}/(i,u) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ be the set of vertices of Q, and let $\{a_{i,u}\,;\, b_{i,u}/\,(i,u) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ be the set of edges of Q, as in the figure above.

The mesh relations on this quiver are: $a_{i,i-2}\, b_{i,i-1} = 0$ for all $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (the composition of two edges of any 'triangle' under the top diagonal is zero), and $a_{i,iu-1} b_{i,u} + b_{i-1,u} a_{i,u} = 0$ for all i and u in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (the squares are anticommutative).

The algebra Γ_{Λ_n} is the quotient of the path algebra kQ by the ideal generated by these relations.

Remark 0.60 The algebra Γ_{Λ_n} is not a Hopf algebra, since its quiver is not a Cayley graph (*see* [GrS] Theorem 2.3; in relation to this, *see* also [CR97], in which the authors study the case without relations). Another argument can be given: if Γ_{Λ_n} were a Hopf algebra, it would be selfinjective as an algebra (cf [M93]), therefore of homological dimension 0 or ∞; however, the homological dimension of an Auslander algebra is at most 2 in general (*see* [ARS]), and in this case it is not zero, since Λ_n itself is not semisimple ([ARS] Proposition 5.2 p211).

Hochschild and cyclic homologies of Γ_{Λ_n}

We are going to use a minimal projective resolution of Γ_{Λ_n} as a $\Gamma_{\Lambda_n}-$bimodule. This resolution is due to Happel who considers a more general situation in [H] 1.5.

Theorem 0.61 ([H]) If

$$\ldots \to R_p \to R_{p-1} \to \ldots \to R_1 \to R_0 \to \Gamma_{\Lambda_n} \to 0$$

is a minimal projective resolution of Γ_{Λ_n} as a $\Gamma_{\Lambda_n}-$bimodule, then

$$R_p = \bigoplus_{\substack{(i,u)\\(j,v)}} (\Gamma_{\Lambda_n} e_{j,v} \otimes e_{i,u}\Gamma_{\Lambda_n})^{\dim_k Ext^p_{\Gamma_{\Lambda_n}}(S_{i,u};S_{j,v})}.$$

Specifically:

$$\begin{aligned}
R_0 &= \bigoplus_{(i,u)} \Gamma_{\Lambda_n} e_{i,u} \otimes e_{i,u}\Gamma_{\Lambda_n}\\
R_1 &= \bigoplus_{\begin{cases}(i,u)\\ i\neq u+1\end{cases}} (\Gamma_{\Lambda_n} e_{i-1,u} \otimes e_{i,u}\Gamma_{\Lambda_n}) \oplus \bigoplus_{\begin{cases}(i,u)\\ i\neq u\end{cases}} (\Gamma_{\Lambda_n} e_{i,u-1} \otimes e_{i,u}\Gamma_{\Lambda_n})\\
R_2 &= \bigoplus_{\begin{cases}(i,u)\\ i\neq u\end{cases}} \Gamma_{\Lambda_n} e_{i-1,u-1} \otimes e_{i,u}\Gamma_{\Lambda_n}\\
R_p &= 0 \text{ if } p \geq 3.
\end{aligned}$$

Applying the functor $\Gamma_{\Lambda_n} \otimes_{\Gamma_{\Lambda_n}-\Gamma_{\Lambda_n}} -$, we obtain a complex:

$$\ldots 0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow kQ_0 \longrightarrow 0.$$

This yields:

Proposition 0.62 The Hochschild homology of Γ_{Λ_n} is:

$$\begin{cases}\mathrm{H}^h_0(\Gamma_{\Lambda_n},\Gamma_{\Lambda_n}) = kQ_0 \cong k^{n^2} \\ \mathrm{H}^h_p(\Gamma_{\Lambda_n},\Gamma_{\Lambda_n}) = 0 & \forall p \in \mathbb{N}^*,\end{cases}$$

and hence the cyclic homology of Γ_{Λ_n} is:

$$\begin{cases}\mathrm{HC}_{2p}(\Gamma_{\Lambda_n}) = kQ_0 \cong k^{n^2} \\ \mathrm{HC}_{2p+1}(\Gamma_{\Lambda_n}) = 0\end{cases} \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Remark 0.63 There doesn't seem to be any connection between these results and those for Λ_n.

0.6.5 Chern characters of Λ_n and Γ_{Λ_n}

Let $K_0(\Lambda_n)$ (*resp.* $K_0(\Gamma_{\Lambda_n})$) be the Grothendieck group of projective Λ_n-modules (*resp.* $\Gamma_{\Lambda_n}-$modules). We are interested in the Chern characters $ch_{0,p} : K_0(\Lambda_n) \to \mathrm{HC}_{2p}(\Lambda_n)$ (*resp.* $K_0(\Gamma_{\Lambda_n}) \to \mathrm{HC}_{2p}(\Gamma_{\Lambda_n})$). We shall write $[P_j]$ (*resp.* $[P_{i,u}]$) for the isomorphism class of the projective module at the vertex e_j (*resp.* $e_{i,u}$).

Set $\sigma^p = (y_p, z_p, \dots, y_1, z_1, y_0) \in \mathbb{N}^{2p+1}$ where y_p is given by $y_p = (-1)^p(2p)!/p!$ and $z_p = (-1)^{p-1}(2p)!/2(p!)$. There is a system of generators of $\mathrm{HC}_{2p}(\Lambda_n)$ (*resp.* $\mathrm{HC}_{2p}(\Gamma_{\Lambda_n})$) given by the following set:

$$\{\sigma_i^p := \sigma^p(e_i, \dots, e_i) \in (\mathrm{Tot}CC(\Lambda_n))_{2p} \;/\; i = 0, \dots, n-1\}$$

(*resp.* by $\{\sigma_{i,u}^p := \sigma^p(e_{i,u}, \dots, e_{i,u}) \in (\mathrm{Tot}CC(\Gamma_{\Lambda_n}))_{2p} \;/\; i, u \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$).

Consider the elements

$$\begin{array}{rcl} \epsilon_j : \Lambda_n & \longrightarrow & \Lambda_n \\ \lambda & \mapsto & \lambda e_j \end{array}$$

in $\mathcal{M}_1(\Lambda_n)$ and

$$\begin{array}{rcl} \epsilon_{i,u} : \Gamma_{\Lambda_n} & \longrightarrow & \Gamma_{\Lambda_n} \\ \lambda & \mapsto & \lambda e_{i,u} \end{array}$$

in $\mathcal{M}_1(\Gamma_{\Lambda_n})$; their ranges are the corresponding projective modules. Then by definition of the Chern characters (*see* [Lo] 8.3.4 and [Ka] Chapter II), we have:

$$\begin{array}{l} ch_{0,p}([P_j]) = ch_{0,p}([\epsilon_j]) := \mathrm{tr}(c(\epsilon_j)) = \sigma_j^p \text{ in } \mathrm{HC}_{2p}(\Lambda_n) \\ ch_{0,p}([P_{i,u}]) = ch_{0,p}([\epsilon_{i,u}]) = \sigma_{i,u}^p. \end{array}$$

using the isomorphisms $\mathcal{M}_m(\Lambda) \cong \mathcal{M}_m(k) \otimes \Lambda$ and [Lo] Lemma 1.2.2. Here,

$$c(\epsilon_j) = (y_p \epsilon_j^{\otimes 2p+1}, z_p \epsilon_j^{\otimes 2p}, \dots, z_1 \epsilon_j^{\otimes 2}, y_0 \epsilon_j) \in \mathcal{M}(\Gamma_{\Lambda_n})^{\otimes 2p+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{M}(\Gamma_{\Lambda_n}).$$

Remark 0.64 There is a decomposition formula for the tensor product of indecomposable modules on Λ_n (*see* [C93], [Gu]). From this formula, we get inductively:

$$ch_{0,p}([L_1] \otimes \dots \otimes [L_r]) = \left(1/n^2\right) \prod_{i=1}^{r} (\mathrm{dim} L_i) \; (\sigma_0^p, \dots, \sigma_{n-1}^p), \text{ for } r \geq 2,$$

where the L_i are arbitrary projective Λ_n-modules. Unfortunately, this product in the cyclic homology doesn't seem natural.

Remark 0.65 Let $\overline{K}_0(\Lambda_n)$ be the Grothendieck group of all Λ_n-modules (not just the projective ones). Then $\overline{K}_0(\Lambda_n) \cong K_0(\Gamma_{\Lambda_n})$. Hence, if $N_{i,u}$ is the indecomposable Λ_n-module which starts at the vertex i and ends at the vertex u, it corresponds to the projective $\Gamma_{\Lambda_n}-$module $P_{i,u}$, and we get a map:

$$\begin{array}{rcl} \overline{K}_0(\Lambda_n) & \longrightarrow & \mathrm{HC}_{2p}(\Gamma_{\Lambda_n}) \\ N_{i,u} & \mapsto & \sigma_{i,u}^p. \end{array}$$

Remark 0.66 Although Γ_{Λ_n} is not a Hopf algebra, its Grothendieck group $K_0(\Gamma_{\Lambda_n})$ does have a ring structure, albeit not natural: for every $[P]$ in $K_0(\Gamma_{\Lambda_n})$, there exists a $[B]$ in $K_0(\Lambda_n)$ such that $[P] = [\mathrm{Hom}_{\Lambda_n}(M, B)]$, where M is the sum of all isomorphism classes of indecomposable Λ_n–modules. If $[Q] = [\mathrm{Hom}_{\Lambda_n}(M, C)]$ is another element in $K_0(\Gamma_{\Lambda_n})$, we can set

$$[P].[Q] = [\mathrm{Hom}_{\Lambda_n}(M, B\overline{\otimes}C)]$$

(the k–module $B \otimes C$ is a Λ_n–module since Λ_n is a Hopf algebra). In fact, using the decomposition in [C93] and [Gu], the product can be written:

$$[P_{i,u}][P_{j,v}] = \begin{cases} \sum_{l=0}^{v-j}[P_{i+j+l,u+v-l}] & \text{if } u+v-(i+j) \leq n-1, \\ \sum_{l=0}^{e}[P_{i+j+l,u+v+l-1}] + \sum_{m=e+1}^{v-j}[P_{i+j+m,u+v-m}] & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } e := u+v-(i+j)-(n-1) \geq 0 \end{cases}$$

where u and v represent elements in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ such that $u - i$ and $v - j$ are in $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Chapter 1

Généralités

Ce texte traite de théories (co)homologiques d'algèbres de Hopf. Nous allons donc tout d'abord rappeler quelques définitions et propriétés de ces objets, ainsi que des bimodules de Hopf. Nous ferons aussi quelques rappels sur les résolutions bar et cobar, en précisant certaines de leurs propriétés liées aux bimodules de Hopf.

Dans toute la suite, k est un corps commutatif. Le symbole $\otimes$ désigne le produit tensoriel sur k.

1.1 Algèbres de Hopf

Définition 1.1 *Une* bigèbre *sur k est une algèbre associative (A, μ, η), où $\mu : A \otimes A \to k$ est la multiplication et $\eta : k \to A$ est l'unité, munie de deux structures $k-$linéaires supplémentaires:*

- *une* counité $\varepsilon : A \to k$,
- *une* comultiplication $\Delta : A \to A \otimes A$,

satisfaisant aux propriétés suivantes:

- *la counité* $(\varepsilon \otimes 1) \circ \Delta = \mathrm{id}_A = (1 \otimes \varepsilon) \circ \Delta$
- *la coassociativité* $(\Delta \otimes 1) \circ \Delta = (1 \otimes \Delta) \circ \Delta$
- *ε et Δ sont des morphismes d'algèbres, où $A \otimes A$ est munie de la structure d'algèbre dont le produit est donné par $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$.*

Le triplet (A, Δ, ε) est appelé cogèbre.

Exemple 1.2 Soit G un groupe. L'algèbre du groupe, kG, peut être munie d'une structure de bigèbre de la façon suivante: on pose $\varepsilon(g) = 1$ et $\Delta(g) = g \otimes g$ pour tout élément $g \in G$, et on prolonge par linéarité.

Définition 1.3 *Un élément a de A vérifiant $\Delta(a) = a \otimes a$ est appelé* grouplike.

Notation de Sweedler La comultiplication sera notée $\Delta(a) = a^{(1)} \otimes a^{(2)}$ pour $a \in A$. Grâce à la propriété de coassociativité, lorsqu'on applique à nouveau Δ à l'une quelconque des deux composantes, on obtient le même résultat, qui est noté $a^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes a^{(3)}$. Nous noterons $\Delta^{(2)}$ cette opération, et, plus généralement, $\Delta^{(n)}$ l'application qui à un élément a de A associe $a^{(1)} \otimes \ldots \otimes a^{(n+1)}$.

D'autre part, l'application $\mathrm{id}^{\otimes i-1} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}^{\otimes n-i} : A^{\otimes n} \to A^{\otimes(n+1)}$ sera notée Δ_i.

Définition 1.4 *Soit (C, Δ, ε) une cogèbre. La cogèbre* co-opposée *est $(C^{cop}, \Delta^{op}, \varepsilon)$, dans laquelle la comultiplication Δ^{op} est égale à $\tau \circ \Delta$, où τ est l'automorphisme de $A \otimes A$ qui envoie $a \otimes b$ sur $b \otimes a$. Une cogèbre est dite* cocommutative *si elle est égale à sa co-opposée.*

Un morphisme de cogèbres *$f : C \to C'$ est une application linéaire qui vérifie $\varepsilon \circ f = \varepsilon$ et $\Delta \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta$. Un* morphisme de bigèbres *est une application linéaire qui est à la fois un morphisme d'algèbres et un morphisme de cogèbres.*

Définition 1.5 *Soient C une cogèbre et A une algèbre sur k; alors $\mathrm{Hom}_k(C, A)$ est muni d'une structure d'algèbre* via *le* produit de convolution: $f \star g = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta$.

Définition 1.6 *Soit A une bigèbre. L'inverse de $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_k(A, A)$ pour le produit de convolution, s'il existe, est appelé* antipode *et noté S. C'est un antimorphisme d'algèbres et de cogèbres. Dans la notation de Sweedler, l'antipode est caractérisée par la relation: $a^{(1)}S(a^{(2)}) = \varepsilon(a) = S(a^{(1)})a^{(2)}$ pour tout $a \in A$.*

Dans la suite, nous supposerons toujours que l'antipode est inversible.

Définition 1.7 *Une* algèbre de Hopf *est une bigèbre munie d'une antipode.*

Exemple 1.8 La bigèbre kG est munie d'une structure d'algèbre de Hopf, pour laquelle $S(g) = g^{-1}$, $\forall g \in G$.

1.2 Modules et comodules; bimodules de Hopf

Définition 1.9 *Soit C une cogèbre. Un* comodule à droite *sur C est un $k-$espace vectoriel muni d'une application $k-$linéaire $\delta : M \to M \otimes C$ faisant commuter les diagrammes:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & M \otimes C \arrow[d, "1\otimes\Delta"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\delta\otimes 1"'] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\sim"'] & M \otimes C \arrow[d, "1\otimes\varepsilon"] \\ & M \otimes k \end{tikzcd} .$$

On note $\delta(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)}$.

On peut définir de la même façon un comodule à gauche; *les composantes qui sont dans C sont alors notées avec des indices négatifs.*

Définition 1.10 *Un* morphisme de comodules à droite $f : M \to N$ *est une application* $k-$*linéaire telle que* $\delta^{(N)} \circ f = (f \otimes \mathrm{id}) \circ \delta^{(M)}$.

Définition 1.11 *Soit A une bigèbre. Lorsque M est un $A-$module à droite, munissons $M \otimes A$ de la structure de $A-$module à droite donnée par $(m \otimes a).b = m.b^{(1)} \otimes ab^{(2)}$.*

Un module de Hopf à droite *M sur A est un module à droite sur A qui est aussi un comodule à droite sur A, tel que le morphisme de structure $\delta : M \to M \otimes A$ soit un morphisme de $A-$modules à droite.*

Un bimodule de Hopf *sur A est un module de Hopf à droite et à gauche sur A, ces deux structures étant compatibles:*

- *les actions commutent:* $b.((a \otimes m).c) = (b.(a \otimes m)).c$ *pour tous* $a, b, c \in A$ *et* $m \in M$,
- *les coactions commutent:* $(\delta_L \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_R = (\mathrm{id} \otimes \delta_R) \circ \delta_L$,
- *les coactions sont des morphismes de $A-$bimodules*

(δ_L désigne la coaction à gauche, δ_R la coaction à droite).

Exemple 1.12 La bigèbre A est un bimodule de Hopf sur elle-même, les coactions étant égales à Δ.

Notations 1.13 Etant donnés deux bimodules de Hopf M et N, l'espace des morphismes de bimodules de Hopf de M dans N sera noté $\mathrm{Hom}_{A4}(M, N)$; l'espace des morphismes de bimodules de Hopf de M dans N; la notation $\mathrm{Hom}_{A-}(M, N)$ désigne l'espace des morphismes de $A-$modules à gauche de M dans N; $\mathrm{Hom}^{-A}(M, N)$ est l'espace des morphismes de $A-$comodules à droite, etc. La notation $\mathrm{Hom}_{A-}(M, N)$ sera aussi utilisée lorsque M et N sont des $A-$modules à gauche, la notation $\mathrm{Hom}^{-A}(M, N)$ sera utilisée lorsque ce sont des $A-$comodules à droite, etc.

Lorsque A est une algèbre de Hopf, les bimodules de Hopf sur A ont une structure particulière. Avant de la donner, nous avons besoin d'une définition:

Définition 1.14 *Soit A une algèbre de Hopf, et soit M un $A-$comodule à droite. Les* coinvariants *de M sont les éléments de l'ensemble* $M^R = \{m \in M / \delta_R(m) = m \otimes 1\}$.

Exemple 1.15 Considérons A comme un comodule à droite sur lui-même. Alors $A^R = k1$. En effet, $k1 \subset A^R$ et si $a \in A^R$, nous avons $a = (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(a) = \varepsilon(a)1 \in k1$.

Remarque 1.16 Soit M un bimodule de Hopf. Alors $M^R \cong \mathrm{Hom}^{-A}(k, M)$, où k est le $A-$comodule à droite trivial, c'est-à-dire que $\delta_R(\lambda) = \lambda \otimes 1$ pour tout $\lambda \in k$.

Preuve: Considérons les applications $\phi : \mathrm{Hom}^{-A}(k, M) \longrightarrow M^R$ et $\psi : M^R \longrightarrow \mathrm{Hom}^{-A}(k, M)$ données par $\phi(f) = f(1_k)$ et $\psi(m)(\lambda) = \lambda m$. Ces applications sont bien définies, c'est-à-dire que $\phi(f)$ est un coinvariant à droite et $\psi(m)$ est un morphisme de comodules à droite, et elles sont réciproques l'une de l'autre. ♠

Théorème 1.17 ([M93] 1.9.4, [Sw]) Soit A une algèbre de Hopf, et soit M un bimodule de Hopf. On considère le bimodule de Hopf dont le $k-$espace vectoriel sous-jacent est $A \otimes M^R$ et dont les structures sont données par:

$$\begin{cases} b.(a \otimes v) = (ba) \otimes v \\ \delta_R(a \otimes v) = a^{(1)} \otimes v \otimes a^{(2)} \\ (a \otimes v).b = ab^{(3)} \otimes S^{-1}(b^{(2)}).v.b^{(1)} \\ \delta_L(a \otimes v) = a^{(1)}v_{(-1)} \otimes a^{(2)} \otimes v_{(0)}. \end{cases}$$

Les bimodules de Hopf M et $A \otimes M^R$ sont isomorphes. En particulier, M est libre en tant que $A-$module à gauche et $A-$comodule à droite.

Démonstration: L'isomorphisme est donné par

$$\begin{array}{ccc} A \otimes M^R & \longrightarrow & M \\ a \otimes v & \mapsto & a.v, \end{array}$$

son inverse associant $m_{(2)} \otimes S^{-1}(m_{(1)}).m_{(0)}$ à m. ♠

Remarque 1.18 L'espace M^R n'est pas un sous-bimodule de Hopf de M : c'est un sous-bicomodule, mais pas un sous-bimodule. Cependant, M^R peut être muni d'une structure de bimodule croisé sur A^{op} au sens de Yetter, ou, dans le cas où A est de dimension finie, d'une structure de module sur le double de Drinfel'd $\mathcal{D}(A^{op})$ (*cf.* [Ro]).

Dans le paragraphe 1.2.3, nous verrons une autre interprétation des bimodules de Hopf sur une algèbre de Hopf de dimension finie.

Lemme 1.19 Le foncteur coinvariant $(-)^R$ qui va de la catégorie des bimodules de Hopf dans la catégorie des $k-$espaces vectoriels est exact.

Preuve: Soit $(E) : 0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ une suite exacte de bimodules de Hopf. D'après le Théorème 1.17, le bimodule de Hopf M_1 est libre en tant que comodule à droite, donc injectif (*cf.* [DNR] Section 2.4.), donc la suite (E) est scindée comme suite de comodules à droite.

Ainsi, en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}^{-A}(k, -)$ (grâce à la Remarque 1.16), nous obtenons une suite exacte $0 \to M_1^R \to M_2^R \to M_3^R \to 0$. ♠

1.2.1 Produit tensoriel de bimodules de Hopf

Nous serons souvent amenés à considérer le produit tensoriel sur k de bimodules de Hopf. Celui-ci peut être muni de plusieurs structures de bimodule de Hopf; nous en considérerons deux, que nous présentons ici.

Soient M et N deux bimodules de Hopf. Nous noterons $M\underline{\otimes}N$ le bimodule de Hopf suivant:

$$\begin{array}{rrcl}
\mu_L : & A\otimes M\underline{\otimes}N & \longrightarrow & M\underline{\otimes}N; \\
& a\otimes m\otimes n & \mapsto & am\otimes n \\
\\
\mu_R : & M\underline{\otimes}N\otimes A & \longrightarrow & M\underline{\otimes}N; \\
& m\otimes n\otimes a & \mapsto & m\otimes na \\
\\
\delta_L : & M\underline{\otimes}N & \longrightarrow & A\otimes M\underline{\otimes}N; \\
& m\otimes n & \mapsto & m_{(-1)}n_{(-1)}\otimes m_{(0)}\otimes n_{(0)} \\
\\
\delta_R : & M\underline{\otimes}N & \longrightarrow & M\underline{\otimes}N\otimes A; \\
& m\otimes n & \mapsto & m_{(0)}\otimes n_{(0)}\otimes m_{(1)}n_{(1)}.
\end{array}$$

Les actions sont les actions standard, les coactions sont codiagonales.

L'espace $M\otimes N$ peut être muni d'une autre structure de bimodule de Hopf (duale de la précédente), que nous noterons $M\overline{\otimes}N$:

$$\begin{array}{rrcl}
\mu_L : & A\otimes M\overline{\otimes}N & \longrightarrow & M\overline{\otimes}N; \\
& a\otimes m\otimes n & \mapsto & a^{(1)}m\otimes a^{(2)}n \\
\\
\mu_R : & M\overline{\otimes}N\otimes A & \longrightarrow & M\overline{\otimes}N; \\
& m\otimes n\otimes a & \mapsto & ma^{(1)}\otimes na^{(2)} \\
\\
\delta_L : & M\overline{\otimes}N & \longrightarrow & A\otimes M\overline{\otimes}N; \\
& m\otimes n & \mapsto & m_{(-1)}\otimes m_{(0)}\otimes n \\
\\
\delta_R : & M\overline{\otimes}N & \longrightarrow & M\overline{\otimes}N\otimes A; \\
& m\otimes n & \mapsto & m\otimes n_{(0)}\otimes n_{(1)}.
\end{array}$$

Ici, ce sont les coactions qui sont standard, et les actions qui sont diagonales.

Remarque 1.20 Supposons que M et N soient des bimodules sur une algèbre associative A. Nous pouvons comme ci-dessus munir $M\otimes N$ d'une structure de $A-$bimodule, que nous noterons encore $M\underline{\otimes}N$: les actions à gauche et à droite de A sur $M\underline{\otimes}N$ sont les actions standard décrites ci-dessus.

Lorsque A est une algèbre de Hopf (et M et N sont toujours des bimodules sur A), nous pouvons munir $M\otimes N$ d'une autre structure de bimodule, dont les actions sont des actions diagonales décrites ci-dessus; nous noterons encore $M\overline{\otimes}N$ ce bimodule.

Dualement, étant donnés deux bicomodules M et N sur une cogèbre A, nous pouvons munir $M\otimes N$ de la structure de bicomodule donnée par les coactions standard ci-dessus; nous noterons $M\overline{\otimes}N$ ce bicomodule. Lorsque A est une algèbre de Hopf, nous pouvons considérer un autre bicomodule, noté $M\underline{\otimes}N$, dont les coactions sont codiagonales.

D'autre part, si V est un $k-$espace vectoriel et si M et N sont des bimodules sur une algèbre associative, nous noterons encore $M\underline{\otimes}V\underline{\otimes}N$ le bimodule dont les actions sont standard; si W est un $k-$espace vectoriel et si M et N sont des bicomodules, nous noterons $M\overline{\otimes}W\overline{\otimes}N$ le bicomodule dont les coactions sont standard. Si de plus V (*resp.* W) est un bicomodule (*resp.* un bimodule) et si M et N sont des bimodules de Hopf, alors le bimodule (*resp.* bicomodule) obtenu est un bimodule de Hopf, avec les coactions codiagonales (*resp.* actions diagonales).

Nous allons maintenant rappeler des isomorphismes qui seront utiles par la suite:

Lemme 1.21 Soient C une cogèbre, M un comodule à droite sur C, et E un $k-$espace vectoriel. Alors l'espace $\mathrm{Hom}^{-C}(M, E\overline{\otimes}C)$ des morphismes de comodules à droite de M dans $E\overline{\otimes}C$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_k(M, E)$.

Preuve: Considérons $\alpha : \mathrm{Hom}^{-C}(M, E\overline{\otimes}C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(M, E)$ qui à $f : M \to E \otimes C$ associe $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ f$ et $\beta : \mathrm{Hom}_k(M, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{-C}(M, E\overline{\otimes}C)$ qui à $g : M \to E$ associe $(g \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_R$.

L'application β est bien définie; en effet, si $g \in \mathrm{Hom}_k(M, E)$, il faut vérifier que $\beta(g)$ est un morphisme de comodules à droite: or $\delta_R \circ \beta(g) = \delta_R \circ (g\overline{\otimes}\mathrm{id}) \circ \delta_R = (g \otimes \Delta) \circ \delta_R = (g \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \delta_R = (g \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ (\delta_R \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_R = (\beta(g) \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_R$.

De plus, α et β sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre; en effet, d'une part

$$\alpha(\beta(g)) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ (g \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_R = (g \otimes \mathrm{id}_k) \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \delta_R = g$$

et d'autre part

$$\beta(\alpha(f)) = [((\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ f) \otimes \mathrm{id}] \circ \delta_R = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_R \circ f = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ f = f.$$

Ceci montre l'isomorphisme. ♠

Remarque 1.22 En combinant les morphismes de modules et de comodules, nous pouvons établir d'autres isomorphismes du même type. Citons-en quelques-uns:

(1) Soient C une cogèbre, M un bicomodule sur C et E un $k-$espace vectoriel; alors

$$\mathrm{Hom}^{C-}(M, C\overline{\otimes}E) \cong \mathrm{Hom}_k(M, E)$$

$$\mathrm{Hom}^{C-C}(M, C\overline{\otimes}E\overline{\otimes}C) \cong \mathrm{Hom}_k(M, E).$$

(2) Dualement, soient R une algèbre associative, M un bimodule sur R et E un $k-$espace vectoriel; alors

$$\mathrm{Hom}_{R-}(R\underline{\otimes}E, M) \cong \mathrm{Hom}_k(E, M) \cong \mathrm{Hom}_{-R}(E\underline{\otimes}R, M)$$

$$\mathrm{Hom}_{R-R}(R\underline{\otimes}E\underline{\otimes}R, M) \cong \mathrm{Hom}_k(E, M).$$

(3) Enfin, soient A une algèbre de Hopf, E un bicomodule sur A, F un bimodule sur A et M un bimodule de Hopf sur A; alors

$$\mathrm{Hom}_{A4}(A\underline{\otimes}E\underline{\otimes}A, M) \cong \mathrm{Hom}^{A-A}(E, M)$$

$$\mathrm{Hom}_{A4}(M, A\overline{\otimes}F\overline{\otimes}A) \cong \mathrm{Hom}_{A-A}(M, F)$$

et

$$\mathrm{Hom}_{A4}(A\underline{\otimes}E\underline{\otimes}A, A\overline{\otimes}F\overline{\otimes}A) \cong \mathrm{Hom}_k(E, F)$$

Preuve: Les isomorphismes de (1) se démontrent comme le Lemme 1.21 (on peut aussi prendre la cogèbre coopposée), et ceux du (2) sont classiques. Esquissons les preuves du premier et du troisième isomorphisme du (3), par exemple.

Pour le premier, considérons les applications

$$\alpha : \mathrm{Hom}_{A4}(A\underline{\otimes}E\underline{\otimes}A, M) \to \mathrm{Hom}^{A-A}(E, M)$$

et

$$\beta : \mathrm{Hom}^{A-A}(E, M) \to \mathrm{Hom}_{A4}(A\underline{\otimes}E\underline{\otimes}A, M)$$

définies par $\alpha(f) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ f$ et $\beta(g) = (\mathrm{id} \otimes g \otimes \mathrm{id}) \circ (\delta_L \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_R$. Comme dans la preuve du Lemme 1.21, nous montrons que ces applications sont bien définies et qu'elles sont réciproques l'une de l'autre.

Pour le troisième, nous composons l'isomorphisme précédent avec celui du (1). ♠

1.2.2 Bimodules de Hopf relativement projectifs, injectifs

Nous allons maintenant considérer deux classes de bimodules de Hopf, les bimodules de Hopf relativement projectifs, et ceux qui sont relativement injectifs (les définitions et résultats qui suivent peuvent être trouvés dans [Sh-St] Ch. 10).

Définition 1.23 ([Sh-St]) *Un bimodule de Hopf M est dit* relativement projectif *si le foncteur* $\mathrm{Hom}_{A4}(M, -)$ *(*cf. *paragraphe 1.13 p25) transforme les suites exactes de bimodules de Hopf qui sont scindées comme suites de $A-$bicomodules en suites exactes de $k-$espaces vectoriels (une suite exacte $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ de bicomodules est scindée si la suite $0 \to \mathrm{Im}\, f \to M \to \mathrm{Im}\, g \to 0$ est scindée).*

De façon duale, un bimodule de Hopf N est dit relativement injectif *si le foncteur* $\mathrm{Hom}_{A4}(-, N)$ *transforme les suites exactes de bimodules de Hopf qui sont scindées en tant que suites de $A-$bimodules en suites exactes de $k-$espaces vectoriels.*

Exemple 1.24 Un bimodule de Hopf projectif (c'est-à-dire un bimodule de Hopf P tel que le foncteur $\mathrm{Hom}_{A4}(P, -)$ soit exact) (*resp.* injectif, c'est-à-dire un bimodule de Hopf I tel que le foncteur $\mathrm{Hom}_{A4}(-, I)$ soit exact) est relativement projectif (*resp.* relativement injectif).

Exemple 1.25 ([Sh-St]) Soit V un bicomodule; alors le bimodule de Hopf $A\underline{\otimes}V\underline{\otimes}A$ (*voir* la Remarque 1.20) est relativement projectif. En effet, nous avons un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{A4}(A\underline{\otimes}V\underline{\otimes}A,-)\cong \mathrm{Hom}^{A-A}(V,-)$ (*voir* Remarque 1.22) et ce dernier foncteur transforme bien les suites exactes scindées de bicomodules en suites exactes de $k-$espaces vectoriels.

De même, si V est un bimodule, $A\overline{\otimes}V\overline{\otimes}A$ est relativement injectif (*cf.* Lemme 1.21 et Remarque 1.22).

Nous allons maintenant définir ce qui va s'apparenter aux résolutions projectives et injectives de modules:

Définition 1.26 ([Sh-St]) *Une résolution d'un bimodule de Hopf est dite* relativement projective *si tous ses termes sont relativement projectifs et si elle est scindée comme suite de $A-$bicomodules; elle est dite* relativement injective *si tous ses termes sont relativement injectifs et si elle est scindée en tant que suite de $A-$bimodules.*

Les résolutions relativement projectives (*resp.* relativement injectives) ont des propriétés semblables à celles des résolutions projectives (*resp.* injectives):

Proposition 1.27 Soit $\mathbf{P}_\bullet \longrightarrow M$ une résolution relativement projective de M et soit $\varphi : M \to N$ un morphisme de bimodules de Hopf. Alors, pour chaque résolution $\mathbf{Q}_\bullet \longrightarrow N$ de N qui est scindée comme suite de bicomodules, il existe un morphisme de complexes *de bimodules de Hopf* $\phi_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \to \mathbf{Q}_\bullet$ qui prolonge φ, c'est-à-dire tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} P_\bullet \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\phi_\bullet"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ Q_\bullet \arrow[r, "d_0"'] & N \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Ce morphisme est unique à homotopie (de bimodules de Hopf) près.

Un résultat similaire est valable pour les résolutions relativement injectives.

Preuve: Nous construirons les ϕ_n et montrerons leur unicité par récurrence sur n (en posant $\phi_{-1}=\varphi$), en adaptant la démonstration de [CE] Proposition V.1.1. Auparavant, nous allons donner une propriété des bimodules de Hopf relativement projectifs qui servira à plusieurs reprises:

Propriété 1 Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\tau"] & \\ M' \arrow[r, "\beta"] & M \arrow[r, "\alpha"] & M'', \end{tikzcd}$$

dans lequel P est un bimodule de Hopf relativement projectif, $M' \to M \to M''$ est une suite exacte de bimodules de Hopf scindée en tant que suite de bicomodules et τ est un morphisme de bimodules de Hopf.

Si $\alpha\tau = 0$, alors τ admet une factorisation $\beta \circ \sigma$, où $\sigma : P \to M'$ est un morphisme de bimodules de Hopf.

Preuve: Cela se déduit du fait que la suite

$$\mathrm{Hom}_{A4}(P, M') \xrightarrow{\beta\circ -} \mathrm{Hom}_{A4}(P, M) \xrightarrow{\alpha\circ -} \mathrm{Hom}_{A4}(P, M'')$$

est exacte, puisque P est relativement projectif.

Revenons à la preuve de la Proposition. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} & P_0 \arrow[d, "\varphi\circ d_0"] & \\ Q_0 \arrow[r, "d_0"] & N \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Puisque P_0 est relativement projectif et $Q_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$ est scindée comme suite de bicomodules, d'après la Propriété 1, il existe un morphisme de bimodules de Hopf $\phi_0 : P_0 \to Q_0$ vérifiant $d_0 \circ \phi_0 = \varphi \circ d_0$. Considérons ensuite le diagramme

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[d, "\phi_0\circ d_1"] & \\ Q_1 \arrow[r, "d_1"] & Q_0 \arrow[r, "d_0"] & N. \end{tikzcd}$$

Comme $d_0 \circ \phi_0 \circ d_1 = \varphi \circ d_0 \circ d_1 = 0$, en utilisant à nouveau la Propriété 1, nous voyons qu'il existe $\phi_1 : P_1 \to Q_1$, morphisme de bimodules de Hopf, satisfaisant à la relation $d_1 \circ \phi_1 = \phi_0 \circ d_1$. Supposons donc, par récurrence, qu'il existe des morphismes de bimodules de Hopf $\phi_n : P_n \to Q_n$, avec $d_n \circ \phi_n = \phi_{n-1} \circ d_n$ pour $0 < n < r$ (et $r > 1$). Nous pouvons donc considérer le diagramme

$$\begin{tikzcd} & P_r \arrow[d, "\phi_{r-1}\circ d_r"] & \\ Q_r \arrow[r, "d_r"] & Q_{r-1} \arrow[r, "d_{r-1}"] & Q_{r-2}, \end{tikzcd}$$

et, comme précédemment, en déduire l'existence d'un morphisme de bimodules de Hopf $\phi_r : P_r \to Q_r$ vérifiant $d_r \circ \phi_r = \phi_{r-1} \circ d_r$.

Ceci termine la preuve de l'existence de ϕ.

Supposons maintenant qu'il existe deux morphismes de complexes de bimodules de Hopf $\phi_\bullet$ et $\phi'_\bullet$ de $\mathbf{P}_\bullet$ dans $\mathbf{Q}_\bullet$. Considérons alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} & P_0 \arrow[d, "\tau"] & \\ Q_1 \arrow[r, "d_1"] & Q_0 \arrow[r, "d_0"] & N, \end{tikzcd}$$

où $\tau = \phi'_0 - \phi_0$. Puisque $d_0 \circ \tau = d_0 \circ \phi'_0 - d_0 \circ \phi_0 = \varphi \circ d_0 - \varphi \circ d_0 = 0$, nous pouvons à nouveau utiliser la Propriété 1 pour en déduire l'existence d'un morphisme de bimodules de Hopf $s_0 : P_0 \to Q_1$ avec $d_0 \circ s_0 = \phi'_0 - \phi_0$. Supposons alors, par récurrence, qu'il existe un morphisme de bimodules de Hopf $s_n : P_n \to Q_{n+1}$ satisfaisant à $d_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n = \phi'_n - \phi_n$ pour tout $0 < n < r$. Du diagramme

$$\begin{tikzcd} & P_r \arrow[d, "\tau"] & \\ Q_{r+1} \arrow[r, "d_{r+1}"] & Q_r \arrow[r, "d_r"] & Q_{r-1} \end{tikzcd}$$

avec $\tau = \phi'_r - \phi_r - s_{r-1} \circ d_r$, nous déduisons l'existence de $s_r : P_r \to Q_{r+1}$ tel que $\tau = d_{r+1} \circ s_r$, c'est-à-dire $d_{r+1} \circ s_r + s_{r-1} \circ d_r = \phi'_r - \phi_r$. ♠

Corollaire 1.28 (*cf.* [Sh-St] Proposition 10.5.3) Deux résolutions relativement projectives (*resp.* relativement injectives) d'un bimodule de Hopf sont homotopiquement équivalentes comme complexes de bimodules de Hopf.

Corollaire 1.29 (*cf.* [Sh-St] Lemma 10.4.1) Soient Y et T deux résolutions relativement projectives d'un bimodule de Hopf M et soient Z et U deux résolutions relativement injectives d'un bimodule de Hopf N. Alors les bicomplexes $\mathrm{Hom}_{A4}(Y, Z)$ et $\mathrm{Hom}_{A4}(T, U)$, munis des différentielles naturelles, sont homotopiquement équivalents (donc leurs homologies sont isomorphes).

Preuve: D'après la Proposition 1.27, il existe des équivalences homotopiques de complexes $\phi : T \to Y$ et $\omega : Y \to T$ d'une part et $\psi : Z \to U$ et $\pi : U \to Z$ d'autre part. Considérons

$$\begin{array}{rcl} \overline{\psi} : \mathrm{Hom}_{A4}(Y, Z) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A4}(Y, U) \\ \alpha & \mapsto & \psi \circ \alpha \\ \overline{\pi} : \mathrm{Hom}_{A4}(Y, U) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A4}(Y, Z) \\ \beta & \mapsto & \pi \circ \beta \\ \overline{\phi} : \mathrm{Hom}_{A4}(Y, U) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A4}(T, U) \\ \gamma & \mapsto & \gamma \circ \phi \\ \overline{\omega} : \mathrm{Hom}_{A4}(T, U) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A4}(Y, U) \\ \nu & \mapsto & \nu \circ \omega. \end{array}$$

Ce sont des morphismes de complexes. Montrons que $\overline{\psi}$ et $\overline{\pi}$ définissent une équivalence d'homotopie. Soient h_U et h_Z les homotopies vérifiant

$$\begin{array}{rcl} d_Z h_Z + h_Z d_Z & = & \mathrm{id} - \pi \circ \psi \\ d_U h_U + h_U d_U & = & \mathrm{id} - \psi \circ \pi. \end{array}$$

Définissons $h_1(\alpha) = (-1)^{q+1}h_Z \circ \alpha$ et $h_2(\beta) = (-1)^{q+1}h_U \circ \beta$ pour $\alpha \in \mathrm{Hom}_{A4}(Y_q, Z)$ et $\beta \in \mathrm{Hom}_{A4}(Y_q, U)$. Notons D la différentielle de $\mathrm{Hom}_{A4}(Y, Z)$, donnée par $D(\alpha) = (-1)^q d_Z \circ \alpha + \alpha \circ d_Y$ si $\alpha \in \mathrm{Hom}_{A4}(Y_q, Z)$. Alors h_1 est une homotopie de $\overline{\pi} \circ \overline{\psi}$ à l'identité. En effet:

$$\begin{aligned} Dh_1(\alpha) + h_1 D(\alpha) &= d_Z h_Z \alpha + (-1)^{q+1} h_Z \alpha d_Y + h_Z d_Z \alpha + (-1)^q h_Z \alpha d_Y \\ &= (\mathrm{id} - \pi \circ \psi)\alpha \\ &= \alpha - \overline{\pi} \circ \overline{\psi}(\alpha). \end{aligned}$$

Nous pouvons montrer de la même façon que h_2 est une homotopie de $\overline{\psi} \circ \overline{\pi}$ à l'identité, et que $\overline{\phi}$ et $\overline{\omega}$ définissent une équivalence d'homotopie.

Ainsi, en composant les deux équivalences, nous obtenons le corollaire. ♠

1.2.3 L'algèbre X; interprétation des bimodules de Hopf comme modules

Cette algèbre, introduite par C. Cibils et M. Rosso dans [CR98], permet d'interpréter les bimodules de Hopf comme des modules.

Soit R une algèbre associative. On peut considérer son algèbre enveloppante $R^e = R \otimes R^{op}$, et ainsi identifier les bimodules sur R et les modules sur R^e. Poursuivant ce principe, C. Cibils et M. Rosso ont considéré les bimodules de Hopf sur une algèbre de Hopf A de dimension finie; soit M un tel bimodule de Hopf. Sa structure de $A-$comodule à droite peut être vue comme une structure de module à gauche sur A^* (le dual d'une cogèbre est une algèbre; *voir* par exemple [M93] 1.6.4. ou [Sw]). En transformant ainsi chacune des structures du $A-$bimodule de Hopf M en structure de module à gauche sur une algèbre adaptée, ils obtiennent:

Théorème 1.30 ([CR98]) Soit A une algèbre de Hopf de dimension finie. On considère l'algèbre associative X définie de la façon suivante: elle est égale à $(A^{*op} \otimes A^*)\breve{\otimes}(A \otimes A^{op})$, le produit sur les deux premiers et les deux derniers facteurs se faisant composante à composante, et

$$[(1 \otimes 1) \ \breve{\otimes} \ (a \otimes b)]\,[(l \otimes k)\,\breve{\otimes}\,(1 \otimes 1)] \tag{1.31}$$

$$= l_{(1)}(Sa^{(1)})k_{(1)}(S^{-1}a^{(3)})l_{(3)}(S^{-1}b^{(1)})k_{(3)}(Sb^{(3)})\ [(l_{(2)} \otimes k_{(2)})\breve{\otimes}(a^{(2)} \otimes b^{(2)})],$$

(où on note $\mu^*(l) = l_{(1)} \otimes l_{(2)}$). Alors il existe une équivalence de catégories, préservant le $k-$espace vectoriel sous-jacent, entre la catégorie des bimodules de Hopf sur A et la catégorie des modules à gauche sur X.

Remarque 1.32 Soit M un bimodule de Hopf sur A. Sa structure de $X-$module à gauche s'écrit

$$[(l \otimes k)\breve{\otimes}(a \otimes b)].m = l(a^{(1)}m_{(-1)}b^{(1)})k(a^{(3)}m_{(1)}b^{(3)})(a^{(2)}m_{(0)}b^{(2)}).$$

Remarque 1.33 C. Cibils et M. Rosso ont également démontré que X est isomorphe au produit tensoriel direct $\mathcal{H}(A) \otimes \mathcal{D}(A)^{op}$ du double d'Heisenberg de A avec l'opposé du double de Drinfel'd de A; cet isomorphisme n'est pas explicite.

Remarque 1.34 Les foncteurs qui définissent l'équivalence $X - \underline{\mathrm{Mod}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$, où $X - \underline{\mathrm{Mod}}$ est la catégorie des $X-$modules à gauche et $\mathcal{H}$ est la catégorie des bimodules de Hopf sur A, sont exacts, puisqu'ils préservent les $k-$espaces vectoriels sous-jacents. En effet, soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de $X-$modules. Il s'agit aussi d'une suite de bimodules de Hopf lorsque M', M et M'' sont considérés comme des bimodules de Hopf, et elle est exacte, puisque la suite de $k-$espaces vectoriels sous-jacente l'est.

Conséquence 1.35 Un $X-$module P est projectif si et seulement s'il est projectif lorsqu'il est considéré comme bimodule de Hopf.

1.3 (Co)homologies de Hochschild et de Cartier

Dans les (co)homologies que nous allons considérer, les (co)homologies de Hochschild et de Cartier ([Ca]; *voir* aussi [Do]) jouent un rôle important. Nous allons donc rappeler certains aspects de ces théories, et les placer dans le contexte des bimodules de Hopf.

1.3.1 (Co)homologie de Hochschild

Résolutions bar

Considérons une algèbre R et un module à gauche M sur R. Posons, pour $q \geq 1$, $B_q^R(M) = R^{\otimes q+1} \otimes M$. C'est un module à gauche sur R *via*

$$a.(r_0 \otimes \ldots \otimes r_q \otimes m) = ar_0 \otimes \ldots \otimes r_q \otimes m, \ \forall a, r_0, \ldots, r_q \in R, \forall m \in M.$$

Pour chaque $q \geq 0$, l'application $\partial_q^h : B_q^R(M) \longrightarrow B_{q-1}^R(M)$, qui envoie $r_0 \otimes \ldots \otimes r_q \otimes m$ sur $\sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i r_0 \otimes \ldots \otimes r_i r_{i+1} \otimes \ldots \otimes r_q \otimes m + (-1)^q r_0 \otimes \ldots \otimes r_q m$, est un morphisme de $R-$modules à gauche, tel que $\partial_q^h \circ \partial_{q+1}^h = 0$ (nous écrivons un h en puissance pour distinguer les différentielles correspondant à Hochschild des autres différentielles qui apparaîtront par la suite).

Définition 1.36 *Le complexe* $B_\bullet^R(M) = \bigoplus_{q \geq -1} B_q^R(M)$, *avec les différentielles* ∂_q^h, *est appelé* complexe bar de M.

Ce complexe est en fait une résolution libre de $R-$modules à gauche de M. Pour voir cela, considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} h_\bullet : & B_\bullet^R(M) & \longrightarrow & B_{\bullet+1}^R(M); \\ & x & \mapsto & 1 \otimes x \end{array}$$

elle satisfait aux identités $\partial^h_{q+1}h_q + h_{q-1}\partial^h_q = \mathrm{id}$, pour $q \geq -1$. Il s'agit donc d'une homotopie de id à 0, et le complexe bar est exact.

Nous pouvons faire la même construction à droite.

Remarque 1.37 Supposons que M soit un bimodule sur R; nous pouvons alors lui associer deux résolutions bar: $B^R_\bullet(M)$ et $B^{R^e}_\bullet(M)$, où $R^e = R \otimes R^{op}$ est l'algèbre enveloppante de R. Ce sont toutes deux des résolutions de bimodules de M; cependant, la seconde est libre en tant que R^e-module, ce qui n'est pas le cas de la première en général, sauf si $M = R$.

Cas des bimodules de Hopf Nous nous intéresserons par la suite à la situation suivante: A est une algèbre de Hopf et M est un bimodule de Hopf sur A. Nous pouvons considérer les résolutions bar $B^A_\bullet(M)$ et $B^{A^e}_\bullet(M)$ de $A-$*bimodules* de M (*voir* la Remarque précédente). Nous noterons pour simplifier $B_\bullet(M) := B^{A^e}_\bullet(M)$.

Dans cette situation, nous pouvons munir $B^A_q(M)$ et $B_q(M)$ de structures de $A-$bimodules de Hopf: dans les notations de la Section 1.2.1, $B^A_q(M) = A^{\underline{\otimes} q+1}\underline{\otimes} M$ et $B_q(M) = A^{\underline{\otimes} q+1}\underline{\otimes} M \underline{\otimes} A^{\underline{\otimes} q+1}$. Ces complexes sont alors des complexes de bimodules de Hopf; montrons par exemple que la différentielle ∂^h_q de la résolution $B^A_\bullet(M)$ est un morphisme de bicomodules. Ecrivons $\partial^h_q = \sum_{i=0}^q (-1)^i d_i$ avec $d_i(r_0 \otimes \ldots \otimes r_q \otimes m) = r_0 \otimes \ldots \otimes r_i r_{i+1} \otimes \ldots \otimes r_q \otimes m$ si $0 \leq i \leq q-1$ et $d_q(r_0 \otimes \ldots \otimes r_q \otimes m) = r_0 \otimes \ldots \otimes r_{q-1} \otimes r_q m$. Alors, chacun des d_i est un morphisme de bicomodules: montrons-le pour d_0 et d_q, pour simplifier les notations. Nous avons:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id} \otimes d_0)(\delta_L(r_0 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} r_q \underline{\otimes} m)) &= (\mathrm{id} \otimes d_0)(r_0^{(1)} \ldots r_q^{(1)} m_{(-1)} \otimes r_0^{(2)} \otimes \ldots \otimes r_q^{(2)} \otimes m_{(0)}) \\
&= r_0^{(1)} \ldots r_q^{(1)} m_{(-1)} \otimes r_0^{(2)} r_1^{(2)} \otimes r_2^{(2)} \otimes \ldots \otimes r_q^{(2)} \otimes m_{(0)} \\
&= \delta_L(r_0 r_1 \underline{\otimes} r_2 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} r_q \underline{\otimes} m) \\
&= \delta_L(d_0(r_0 \otimes \ldots \otimes r_q \otimes m)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d_0 \otimes \mathrm{id})(\delta_R(r_0 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} r_q \underline{\otimes} m)) &= (d_0 \otimes \mathrm{id})(r_0^{(1)} \otimes \ldots \otimes r_q^{(1)} \otimes m_{(0)} \otimes r_0^{(2)} \ldots r_q^{(2)} m_{(1)}) \\
&= r_0^{(1)} r_1^{(1)} \otimes \ldots \otimes r_q^{(1)} \otimes m_{(0)} \otimes r_0^{(2)} \ldots r_q^{(2)} m_{(1)} \\
&= \delta_R(r_0 r_1 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} r_q \underline{\otimes} m) \\
&= \delta_R(d_0(r_0 \otimes \ldots \otimes r_q \otimes m))
\end{aligned}$$

pour d_0 et

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id} \otimes d_q)(\delta_L(r_0 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} r_q \underline{\otimes} m)) &= (\mathrm{id} \otimes d_q)(r_0^{(1)} \ldots r_q^{(1)} m_{(-1)} \otimes r_0^{(2)} \otimes \ldots \otimes r_q^{(2)} \otimes m_{(0)}) \\
&= r_0^{(1)} \ldots r_q^{(1)} m_{(-1)} \otimes r_0^{(2)} \otimes r_2^{(2)} \otimes \ldots \otimes r_{q-1}^{(2)} \otimes r_q^{(2)} m_{(0)} \\
&= \delta_L(r_0 \underline{\otimes} r_2 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} r_{q-1} \underline{\otimes} r_q m) \\
&= \delta_L(d_q(r_0 \otimes \ldots \otimes r_q \otimes m)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d_q \otimes \mathrm{id})(\delta_R(r_0\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}r_q\underline{\otimes}m)) &= (d_q \otimes \mathrm{id})(r_0^{(1)} \otimes \ldots \otimes r_q^{(1)} \otimes m_{(0)} \otimes r_0^{(2)} \ldots r_q^{(2)} m_{(1)}) \\
&= r_0^{(1)} \otimes \ldots \otimes r_{q-1}^{(1)} \otimes r_q^{(1)} m_{(0)} \otimes r_0^{(2)} \ldots r_q^{(2)} m_{(1)} \\
&= \delta_R(r_0\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}r_{q-1}\underline{\otimes}r_q m) \\
&= \delta_R(d_q(r_0 \otimes \ldots \otimes r_q \otimes m))
\end{aligned}$$

pour d_q.

Nous le montrerions de même pour les autres d_i, ainsi que pour les différentielles des autres résolutions bar.

D'autre part, rappelons qu'une suite exacte $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ de bicomodules est scindée si la suite $0 \to \operatorname{Im} f \to M \to \operatorname{Im} g \to 0$ est scindée. Ici, pour chaque q, l'homotopie h_q est un morphisme de $A-$bicomodules, car les structures sont codiagonales (c'est aussi le cas pour $B_\bullet^A(A)$, mais pas pour $B_\bullet^A(M)$), ce qui entraîne que la suite $B_\bullet(M)$ est scindée en tant que suite de bicomodules. Résumons tout cela:

Proposition 1.38 Soient A une algèbre de Hopf et M un bimodule de Hopf sur A. Alors $B_\bullet^A(M)$ est une résolution de bimodules de Hopf de M et $B_\bullet(M)$ (*resp.* $B_\bullet^A(A)$) est une résolution relativement projective de M (*resp.* de A) (*voir* la Définition 1.26).

Preuve: Il reste à vérifier que $B_q(M)$ (*resp.* $B_q^A(A)$) est relativement projectif pour tout $q \geq 0$; ceci découle de l'Exemple 1.25. ♠

Cohomologie et homologie de Hochschild

Soit R une algèbre associative et soit M un bimodule sur R.

Définition 1.39 *Le $n^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie de Hochschild de R à coefficients dans M est le $k-$espace vectoriel*

$$\mathrm{H}_h^n(R, M) = \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_{R-R}(B_\bullet^R(R), M)),\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Le $n^{\text{ième}}$ groupe d'homologie de Hochschild de R à coefficients dans M est le $k-$espace vectoriel

$$\mathrm{H}_n^h(R, M) = \mathrm{H}_n(M \otimes_{R-R} B_\bullet^R(R)).$$

Remarque 1.40 Nous pouvons définir ces complexes de façon plus explicite:

1) La cohomologie de Hochschild de R à coefficients dans M est la cohomologie du complexe

$$0 \to M \xrightarrow{\lambda_0^h} \mathrm{Hom}_k(R, M) \xrightarrow{\lambda_1^h} \ldots \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(R^{\otimes q}, M) \xrightarrow{\lambda_q^h} \mathrm{Hom}_k(R^{\otimes q+1}, M) \longrightarrow \ldots$$

où $\lambda_0^h(m)(r) = rm - mr$, pour tous $m \in M, r \in R$ et

$$\lambda_q^h(f)(\mathbf{r_{0,q}}) = r_0.f(\mathbf{r_{1,q}}) + \sum_{i=0}^{q-1}(-1)^{i+1} f(r_0 \otimes \ldots \otimes r_i r_{i+1} \otimes \ldots \otimes r_q) + (-1)^{q+1} f(\mathbf{r_{0,q-1}}).r_q$$

pour tout $f \in \mathrm{Hom}_k(R^{\otimes q}, M)$; ici $\mathbf{r_{0,q}}$ désigne $r_0 \otimes \ldots \otimes r_q$.

2) L'homologie de Hochschild de R dans M est l'homologie du complexe

$$\ldots \to M \otimes R^{\otimes q+1} \xrightarrow{\rho_q^h} M \otimes R^{\otimes q} \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\rho_1^h} M \otimes R \xrightarrow{\rho_0^h} M \to 0$$

où $\rho_0^h(m \otimes r) = mr - rm$, pour tous $m \in M, r \in R$, et

$$\rho_h^q(m \otimes \mathbf{r_{1,q}}) = mr_1 \otimes \mathbf{r_{2,q}} + \sum_{i=0}^{q-1}(-1)^{i+1} m \otimes \ldots \otimes r_i r_{i+1} \otimes \ldots \otimes r_q + (-1)^{q+1} r_q m \otimes \mathbf{r_{1,q-1}}.$$

Enfin, nous donnons une autre interprétation de ces homologies qui permet de changer de résolution:

Théorème 1.41 La cohomologie et l'homologie de Hochschild de R dans M sont isomorphes respectivement à $\mathrm{Ext}^*_{R^e}(R, M)$ et $\mathrm{Tor}_*^{R^e}(R, M)$.

Nous allons maintenant considérer les versions duales de ces théories.

1.3.2 Cohomologie de Cartier

Résolutions cobar

Considérons une cogèbre C et un comodule à gauche N sur C. Posons, pour $p \geq 1$, $C_C^p(N) = C^{\otimes p+1} \otimes N$: c'est un comodule à gauche sur C *via*

$$c_0 \otimes \ldots \otimes c_p \otimes n \mapsto c_0^{(1)} \otimes c_0^{(2)} \otimes \ldots \otimes c_{p-1} \otimes c_p \otimes n.$$

Pour chaque $p \geq 0$, l'application $\partial_c^p : C_C^p(N) \longrightarrow C_C^{p+1}(N)$, qui envoie $c_0 \otimes \ldots \otimes c_p \otimes n$ sur

$$\sum_{i=0}^{p}(-1)^i c_0 \otimes \ldots \otimes \Delta c_i \otimes \ldots \otimes c_p \otimes n + (-1)^{p+1} c_0 \otimes \ldots \otimes c_p \otimes n_{(-1)} \otimes n_{(0)},$$

est un morphisme de $C-$comodules à gauche tel que $\partial_c^{p+1} \circ \partial_c^p = 0$ (ici, le c en indice symbolise la différentielle de Cartier).

Définition 1.42 *Le complexe* $C_C^\bullet(N) = \bigoplus_{p \geq -1} C_C^p(N)$, *avec les différentielles* $\partial_c^\bullet$, *est appelé* complexe cobar de N.

Comme dans le cas des résolutions bar, nous pouvons voir qu'il s'agit d'une résolution de N grâce à une homotopie ($\varepsilon \otimes \mathrm{id}^{\otimes \bullet+1} : C_C^{\bullet+1}(N) \to C_C^\bullet(N)$) de l'identité à 0.

Ici encore, si N est un bicomodule, $C_C^\bullet(N)$ et $C_{C^{coe}}^\bullet(N)$ sont des résolutions de bicomodules de N, la seconde étant libre (au sens de [DNR]) sur $C^{coe} := C \otimes C^{cop}$, la première l'étant aussi pour $N = C$, mais pas pour un bicomodule quelconque.

Cas des bimodules de Hopf Supposons que N soit un bimodule de Hopf sur A et considérons les résolutions de bicomodules $C_A^\bullet(N)$ et $C^\bullet(N) = C^\bullet_{A^{coe}}(N)$ de N; ce sont des résolutions de bimodules de Hopf, pour les structures de bimodules de Hopf suivantes: $C_A^p(N) = A^{\overline{\otimes} p+1}\overline{\otimes} N$ et $C^p(N) = A^{\overline{\otimes} p+1}\overline{\otimes} N \overline{\otimes} A^{\overline{\otimes} p+1}$. Il s'agit de la situation duale de celle des résolutions bar. Notons $\partial_c^q = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i d^i$, où $d^i = \Delta_i$ pour $0 \leq i \leq p$ et $d^{p+1} = \mathrm{id}^{\otimes p+1} \otimes \delta_L^{(N)}$ la différentielle $\partial_c^\bullet$ de $C_A^\bullet$ et montrons par exemple que d^0 est un morphisme de modules à gauche:

$$\begin{aligned} b.d^0(c_0 \otimes \ldots \otimes c_p \otimes n) &= b.(c_0^{(1)}\overline{\otimes} c_0^{(2)}\overline{\otimes} c_1 \overline{\otimes} \ldots \overline{\otimes} c_p \overline{\otimes} n) \\ &= b^{(1)}c_0^{(1)} \otimes b^{(2)}c_0^{(2)} \otimes b^{(3)}c_1 \otimes \ldots \otimes b^{(p+2)}c_p \otimes b^{(p+3)}n \\ &= d^0(b^{(1)}c_0 \otimes b^{(2)}c_1 \otimes \ldots \otimes b^{(p+1)}c_p \otimes b^{(p+2)}n) \\ &= d^0(b.(c_0 \otimes \ldots \otimes c_p \otimes n)). \end{aligned}$$

Nous montrerions de même que d^0 est un morphisme de comodules à droite, ainsi que les autres d^i.

L'homotopie du complexe cobar $C^\bullet(N)$ est alors un morphisme de bimodules, ainsi que celle de $C_A^\bullet(A)$. Nous en déduisons:

Proposition 1.43 Soient A une algèbre de Hopf et N un bimodule de Hopf sur A. Alors $C_A^\bullet(N)$ est une résolution de bimodules de Hopf de N et $C^\bullet(N)$ (*resp.* $C_A^\bullet(A)$) est une résolution relativement injective de N (*resp.* de A) (*voir* la définition 1.26).

Preuve: D'après l'Exemple 1.25, $C^p(N)$ (*resp.* $C_A^p(A)$) est relativement injectif pour tout $p \geq 0$. ♠

Cohomologie des cogèbres

Nous allons donner brièvement les définitions de la cohomologie d'une cogèbre C, due à Cartier ([Ca]).

Définition 1.44 *La cohomologie* $\mathrm{H}_c^*(N, C)$ *de* C *à coefficients dans un bicomodule* N *est la cohomologie du complexe* $\mathrm{Hom}^{C-C}(N, C_C^\bullet(C))$, *ou encore du complexe suivant:*

$$0 \to \mathrm{Hom}_k(N,k) \xrightarrow{\lambda_0^c} \cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(N, C^{\otimes p}) \xrightarrow{\lambda_p^c} \mathrm{Hom}_k(N, C^{\otimes p+1}) \longrightarrow \cdots,$$

où $\lambda_0^c(f)(n) = n_{(-1)}f(n_{(0)}) - f(n_{(0)})n_{(1)}$ *pour tout* $f \in \mathrm{Hom}_k(N,k)$, *et*

$$\lambda_p^c(f)(n) = n_{(-1)} \otimes f(n_{(0)}) + \sum_{i=1}^{p}(-1)^i\Delta_i(f(n)) + (-1)^{p+1}f(n_{(0)}) \otimes n_{(1)}$$

pour tout $f \in \mathrm{Hom}_k(N, C^{\otimes p})$.

Remarque 1.45 Nous pourrions définir, de manière semblable à l'homologie de Hochschild, l'homologie de la cogèbre C, à l'aide de produits cotensoriels.

Chapter 2

Théories cohomologiques de Gerstenhaber et Schack

Nous allons étudier des cohomologies qui ont été définies par M. Gerstenhaber et S.D. Schack dans [GS90] et [GS92]. La cohomologie des algèbres de Hopf a été introduite dans le but d'étudier les déformations des algèbres de Hopf. En fait, la cohomologie que nous allons considérer est adaptée à l'étude des déformations des algèbres de Hopf en tant que quasi-bigèbres de Drinfel'd; cependant, M. Gerstenhaber et S.D. Schack ont aussi défini une cohomologie qui étudie les déformations d'une algèbre de Hopf en tant qu'algèbre de Hopf et ils ont montré que ces cohomologies peuvent être reliées par une suite exacte longue qui fait intervenir les cohomologies de Hochschild et de Cartier (*cf.* Remarque 2.12). Ils ont étudié les cas d'algèbres de groupe, de bigèbres de fonctions de groupes algébriques, d'algèbres de matrices et d'algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie. Nous présentons ici une théorie à coefficients, considérée dans [GS90], et vérifions que c'est bien une généralisation de la cohomologie des algèbres de Hopf. Nous ferons ensuite le lien avec les extensions de bimodules de Hopf, lorsque l'algèbre de Hopf A est de dimension finie.

2.1 Cohomologie de bimodules de Hopf

Cette cohomologie a été définie par M. Gerstenhaber et S.D. Schack dans [GS90]. Soit A une algèbre de Hopf et considérons des bimodules de Hopf M et N sur A. En combinant les résolutions bar $B_\bullet(M)$ et cobar $C^\bullet(N)$ (*voir* les paragraphes 1.3.1 et 1.3.2), nous pouvons construire un bicomplexe $C_{GS}^{\bullet,\bullet}(M,N) = \mathrm{Hom}_{A4}(B_\bullet(M), C^\bullet(N))$. Plus précisément, $C_{GS}^{p,q}(M,N) = \mathrm{Hom}_{A4}(B_q(M), C^p(N))$ et les différentielles sont définies par

$$\begin{array}{rccc} \delta_h: & C_{GS}^{p,q}(M,N) & \longrightarrow & C_{GS}^{p,q+1}(M,N) \\ & \alpha & \mapsto & \alpha \circ \partial_{q+1}^h \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \delta_c: & C_{GS}^{p,q}(M,N) & \longrightarrow & C_{GS}^{p+1,q}(M,N) \\ & \alpha & \mapsto & (-1)^q \partial_c^p \circ \alpha. \end{array}$$

Définition 2.1 *Nous noterons* $\mathrm{H}^*_{GS}(M,N)$ *la cohomologie du complexe total associé au bicomplexe* $C^{\bullet,\bullet}_{GS}(M,N)$.

Remarque 2.2 En utilisant un isomorphisme de la Remarque 1.22, nous pouvons donner une autre description du bicomplexe $C^{\bullet,\bullet}_{GS}(M,N)$:

$$C^{p,q}_{GS}(M,N) \cong \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes q} \otimes M \otimes A^{\otimes q}, A^{\otimes p} \otimes N \otimes A^{\otimes p})$$

et les différentielles deviennent

$$\begin{aligned}\delta'_h : \alpha \mapsto (\varepsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \varepsilon)\circ \\ &\partial^h[(\mathrm{id} \otimes \mu_R \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mu_L \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ \alpha \circ (\mathrm{id} \otimes \delta_R) \circ \delta_L] \\ &\quad \circ(\eta \otimes \mathrm{id} \otimes \eta)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\delta'_c : \alpha \mapsto (\varepsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \varepsilon)\circ \\ &\partial_c[(\mathrm{id} \otimes \mu_R \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mu_L \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \circ \alpha \circ (\mathrm{id} \otimes \delta_R) \circ \delta_L] \\ &\quad \circ(\eta \otimes \mathrm{id} \otimes \eta);\end{aligned}$$

plus précisément,

$$\begin{aligned}\delta'_h(\alpha)(\mathbf{a_{0,q}} \otimes m \otimes \mathbf{b_{q,0}}) = {}& \Delta^{(2q)}(a_0)\, \alpha(\mathbf{a_{1,q}} \otimes m \otimes \mathbf{b_{q,1}})\, \Delta^{(2q)}(b_0) \\ &+ \sum_{i=1}^{q} (-1)^i\, \alpha(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{i-1}a_i \otimes \ldots \otimes b_i b_{i-1} \otimes \ldots) \\ &+ (-1)^{q+1}\, \alpha(a_0 \otimes \ldots \otimes a_q m b_q \otimes \ldots \otimes b_0)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(-1)^q \delta'_c(\alpha) = {}&(\mathrm{id} \otimes \alpha \otimes \mathrm{id}) \circ (\delta_L \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_R + \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \tilde{\Delta}_i \circ \alpha \\ &+ (-1)^{p+1}[\mathrm{id}^{\otimes p} \otimes ((\mathrm{id} \otimes \delta_R^{(N)}) \circ \delta_L^{(N)}) \otimes \mathrm{id}^{\otimes p}] \circ \alpha,\end{aligned}$$

où $\tilde{\Delta}_i = \Delta_{2p-i+1} \circ \Delta_i$ et $\mathbf{a_{0,q}} = a_0 \otimes \ldots \otimes a_q, \mathbf{b_{q,0}} = b_q \otimes \ldots \otimes b_0$.

2.2 Lien avec les extensions

Rappelons que, lorsque A est de dimension finie, les bimodules de Hopf sur l'algèbre de Hopf A peuvent être identifiés aux modules à gauche sur l'algèbre X associée à A (*voir* la Section 1.2.3). Dans ce paragraphe, nous allons comparer les cohomologies $\mathrm{H}^*_{GS}(M,N)$ et $\mathrm{Ext}^*_X(M,N)$.

Théorème 2.3 Soit A une algèbre de Hopf de dimension finie sur k et soient M et N des bimodules de Hopf sur A. Alors $\mathrm{H}^*_{GS}(M,N) \cong \mathrm{Ext}^*_X(M,N)$.

Démonstration: Considérons le foncteur $\mathrm{Ext}^*_X(-,N)$, avec N fixé. Il est caractérisé par les propriétés suivantes (*cf.* [McL]):

1. $\mathrm{Ext}^0_X(M,N) \cong \mathrm{Hom}_X(M,N) = \mathrm{Hom}_{A4}(M,N)$,
2. $\mathrm{Ext}^n_X(P,N) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et tout bimodule de Hopf projectif P,
3. $\mathrm{Ext}^*_X(-,N)$ est un $\delta-$foncteur cohomologique (*voir* [W] p30).

Il suffit donc de vérifier que le foncteur $\mathrm{H}^*_{GS}(-,N)$ satisfait aux trois propriétés. Dans toute la suite, N est un bimodule de Hopf fixé.

Lemme 2.4 Pour tout bimodule de Hopf M, nous avons un isomorphisme $\mathrm{H}^0_{GS}(M,N) \cong \mathrm{Hom}_{A4}(M,N)$.

Preuve: Soit α un élément de $\mathrm{Hom}_{A4}(A \otimes M \otimes A, A \otimes N \otimes A)$. C'est un cocycle si et seulement si $\delta_h(\alpha) = 0$ et $\delta_c(\alpha) = 0$, c'est-à-dire si $\alpha \circ \partial^h_1 = 0 = \partial^1_c \circ \alpha$, soit si α est nul sur $\mathrm{Im}\,\partial^h_1 = \ker \partial^h_0$ et α est à valeurs dans $\ker \partial^1_c = \mathrm{Im}\,\partial^0_c$, avec ∂^h_0 surjective et ∂^0_c injective. On en déduit (par "passage au quotient") que si α est un cocycle, il induit un unique morphisme $\overline{\alpha} \in \mathrm{Hom}_{A4}(M,N)$ tel que $\partial^0_c \circ \overline{\alpha} \circ \partial^h_0 = \alpha$. D'autre part, si β est un élément de $\mathrm{Hom}_{A4}(M,N)$, alors $\partial^0_c \circ \beta \circ \partial^h_0$ est un cocycle. ♠

Lemme 2.5 Pour tout bimodule de Hopf projectif P et tout entier $n \geq 1$, le $k-$espace vectoriel $\mathrm{H}^n_{GS}(P,N)$ est nul.

Preuve: Soit P un bimodule de Hopf projectif. Alors $\cdots 0 \to 0 \to \cdots \to 0 \to P \to P \to 0$ est une résolution relativement projective de P (car 0 et P sont relativement projectifs, et la résolution est scindée comme suite de bicomodules). Elle est donc homotopiquement équivalente à la résolution bar $B_\bullet(M)$. La cohomologie de Gerstenhaber et Schack est donc l'homologie du bicomplexe dans lequel tous les termes sont nuls sauf ceux de la première ligne, qui est: $\mathrm{Hom}_{A4}(P, C^\bullet(N))$. Celle-ci est acyclique, puisque P est projectif et $C^\bullet(N)$ est exacte. Cette cohomologie est donc nulle en degré strictement positif. ♠

Lemme 2.6 Le foncteur $\mathrm{H}^*_{GS}(-,N)$ transforme les suites exactes courtes $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ de bimodules de Hopf en suites exactes longues

$$\cdots \to \mathrm{H}^n_{GS}(M'',N) \to \mathrm{H}^n_{GS}(M,N) \to \mathrm{H}^n_{GS}(M',N) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^{n+1}_{GS}(M'',N) \to \cdots$$

de $k-$espaces vectoriels.

Preuve: Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de bimodules de Hopf. Alors, pour tout $q \geq 0$, la suite

$$(E_q) : 0 \to A^{\otimes q} \otimes M' \otimes A^{\otimes q} \to A^{\otimes q} \otimes M \otimes A^{\otimes q} \to A^{\otimes q} \otimes M'' \otimes A^{\otimes q} \to 0$$

est une suite exacte de $k-$espaces vectoriels. Les suites

$$\begin{aligned} 0 \to \quad & \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes q} \otimes M'' \otimes A^{\otimes q}, A^{\otimes p} \otimes N \otimes A^{\otimes p}) \\ & \to \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes q} \otimes M \otimes A^{\otimes q}, A^{\otimes p} \otimes N \otimes A^{\otimes p}) \\ & \to \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes q} \otimes M' \otimes A^{\otimes q}, A^{\otimes p} \otimes N \otimes A^{\otimes p}) \to 0 \end{aligned}$$

sont donc exactes pour tous entiers $p, q \geq 0$. Ces suites exactes commutent aux différentielles, et définissent donc une suite exacte de bicomplexes. Nous en déduisons donc une suite exacte longue

$$\cdots \to \mathrm{H}^n_{GS}(M'', N) \to \mathrm{H}^n_{GS}(M, N) \to \mathrm{H}^n_{GS}(M', N) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^{n+1}_{GS}(M'', N) \to \cdots$$

En combinant les trois lemmes, nous démontrons le théorème. ♠

Remarque 2.7 Pour calculer $\mathrm{Ext}^*_X(M, N)$, nous pouvons aussi prendre une résolution projective $\mathbf{P}_\bullet$ de M (*ou* une résolution injective $\mathbf{I}^\bullet$ de N) et considérer l'homologie du complexe $\mathrm{Hom}_{A4}(\mathbf{P}_\bullet, N)$ (ou du complexe $\mathrm{Hom}_{A4}(M, \mathbf{I}^\bullet)$). Ceci donne d'autres complexes pour calculer $\mathrm{H}^*_{GS}(M, N)$.

Remarque 2.8 Lorsque A est une algèbre de Hopf de dimension infinie, on ne sait pas si la catégorie des bimodules de Hopf possède assez d'objets projectifs ou injectifs. Si tel était le cas, la démonstration du Théorème 2.3 resterait valable et la cohomologie de Gerstenhaber et Schack de deux bimodules de Hopf $\mathrm{H}^*_{GS}(M, N)$ serait ainsi isomorphe au foncteur Ext de la catégorie des bimodules de Hopf $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{H}}(M, N)$ entre ces deux bimodules de Hopf.

2.3 Cohomologie d'une algèbre de Hopf

Soit A une algèbre de Hopf quelconque. Nous pouvons considérer $\mathrm{H}^*_{GS}(A, A)$. D'autre part, M. Gerstenhaber et S.D. Schack ont défini, dans [GS92], une autre cohomologie pour l'algèbre de Hopf A, notée $\mathrm{H}^*_b(A, A)$. L'objet de ce paragraphe est de les comparer.

A partir des résolutions $Bar_\bullet(A) := B^A_\bullet(A)$ et $Cob^\bullet(A) := C^\bullet_A(A)$ (*voir* les paragraphes 1.3.1 et 1.3.2), nous pouvons construire le bicomplexe

$$C^{\bullet,\bullet}_b(A) := \mathrm{Hom}_{A4}(Bar_\bullet(A), Cob^\bullet(A)),$$

muni des différentielles naturelles.

Définition 2.9 *La cohomologie* $\mathrm{H}^*_b(A, A)$ *de Gerstenhaber et Schack est l'homologie du complexe total de* $C^{\bullet,\bullet}_b(A)$.

Remarque 2.10 Comme pour le bicomplexe $C_{GS}^{\bullet,\bullet}(M,N)$, nous pouvons donner une autre description de $C_b^{\bullet,\bullet}(A)$:

$$C_b^{p,q}(A) \cong \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes q}, A^{\otimes p}),$$

et les différentielles sont:

$$\begin{aligned} b_h(\alpha)(\mathbf{a_{1,q+1}}) &= \Delta^{(p-1)}(a_1)\alpha(\mathbf{a_{2,q+1}}) + \sum_{i=1}^{q}(-1)^i\alpha(a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{q+1}) \\ &\quad +(-1)^{q+1}\alpha(\mathbf{a_{1,q}})\,\Delta^{(p-1)}(a_{q+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_c(\alpha)(\mathbf{a_{1,q}}) &= a_1^{(1)}\ldots a_q^{(1)} \otimes \alpha(\mathbf{a_{1,q}^{(1)}}) + \sum_{i=1}^{p}(-1)^i\Delta_i(\alpha(\mathbf{a_{1,q}})) \\ &\quad +(-1)^{p+1}\alpha(\mathbf{a_{1,q}^{(1)}}) \otimes a_1^{(2)}\ldots a_q^{(2)} \end{aligned}$$

où la notation $\mathbf{a_{1,q}}$ désigne $a_1 \otimes \ldots \otimes a_q$, et $\mathbf{a_{1,q}^{(1)}}$ désigne $a_1^{(1)} \otimes \ldots \otimes a_q^{(1)}$.

Nous constatons alors que la cohomologie de la $(p+1)^{ième}$ colonne $C_b^{p,\bullet}(A)$ est la cohomologie de Hochschild $\mathrm{H}_h^*(A, A^{\overline{\otimes}p})$, celle de la $(q+1)^{ième}$ ligne $C_b^{\bullet,q}(A)$ est la cohomologie de Cartier $\mathrm{H}_c^*(A^{\underline{\otimes}q}, A)$.

Exemple 2.11 Soit $A = kG$ une algèbre de groupe; elle est cosemisimple (en dimension finie, cela signifie que sa duale est semisimple), donc les lignes du bicomplexe sont acycliques, et l'homologie du bicomplexe est égale à l'homologie de la colonne restante. Il s'agit donc de la cohomologie $\mathrm{H}^*(G,k) = \mathrm{H}_h^*(kG,k)$ (*voir* [GS92]; plusieurs situations pour les bigèbres de groupe ont été étudiées dans [PW]).

Remarque 2.12 Il existe un sous-bicomplexe $\hat{C}_b^{\bullet,\bullet}(A)$ de $C_b^{\bullet,\bullet}(A)$ dont l'homologie est adaptée à l'étude des déformations de A *dans la catégorie des algèbres de Hopf.* Il est obtenu à partir de $C_b^{\bullet,\bullet}(A)$ en remplaçant la première ligne et la première colonne par $0 \to 0 \to \ldots \to 0 \to \ldots$ (*voir* [GS92] p79). La cohomologie $\hat{\mathrm{H}}_b^*(A,A)$ de ce bicomplexe a été utilisée par A. Giaquinto dans sa thèse ([Gi]), pour étudier certaines déformations particulières de la bigèbre des matrices et du plan classiques (il s'agit de déformations pour lesquelles la comultiplication est inchangée).

De plus, cette cohomologie et la cohomologie $\mathrm{H}_b^*(A,A)$ sont reliées (*voir* [GS92]) par la suite exacte suivante:

$$\ldots \to \hat{\mathrm{H}}_b^n(A,A) \to \mathrm{H}_b^n(A,A) \to \mathrm{H}_h^n(A,k) \oplus \mathrm{H}_c^n(k,A) \to \ldots$$

(pour $n \geq 1$), où H_h^* et H_c^* désignent respectivement la cohomologie de Hochschild et la cohomologie de Cartier (*cf.* Paragraphes 1.3.1 et 1.3.2).

Nous allons maintenant faire le lien entre $\mathrm{H}_b^*(A,A)$ et $\mathrm{H}_{GS}^*(A,A)$.

Théorème 2.13 Soit A une algèbre de Hopf quelconque. Alors $\mathrm{H}^*_{GS}(A,A) \cong \mathrm{H}^*_b(A,A)$.

Démonstration: Nous allons utiliser les résolutions relativement projectives et injectives. Nous avons vu que $B_\bullet(A)$ et $Bar_\bullet(A)$ étaient des résolutions relativement projectives (Proposition 1.38) de A; elles sont donc homotopiquement équivalentes (Corollaire 1.28). De même, $C^\bullet(A)$ et $Cob^\bullet(A)$ sont équivalentes. D'après le Corollaire 1.29, les bicomplexes $C^{\bullet,\bullet}_{GS}(A,A)$ et $C^{\bullet,\bullet}_b(A,A)$ sont donc équivalents: leurs cohomologies $\mathrm{H}^*_{GS}(A,A)$ et $\mathrm{H}^*_b(A,A)$ sont isomorphes. ♠

2.4 Invariance Morita de $\mathrm{H}^*_{GS}(M,N)$

Soient A et B deux algèbres de Hopf quelconques, Morita équivalentes *en tant qu'algèbres*, l'équivalence étant monoidale. Les cohomologies associées (H^*_{GS} relative à A et à B) sont-elles isomorphes?

Nous allons d'abord préciser notre définition de la Morita équivalence, puis donner une description de l'équivalence, comme cela a été fait par Mariano Suarez-Alvarez dans son mémoire [SA] (en utilisant des extensions Galois de l'anneau de base k).

Définition 2.14 *Soient A et B des algèbres de Hopf. Nous disons que A et B sont Morita équivalentes d'équivalence monoidale, s'il existe un $B-A-$bimodule P et un $A-B-$bimodule Q vérifiant:*

- $P \otimes_A Q \cong B$ *en tant que $B-$bimodules,*
- $Q \otimes_B P \cong A$ *en tant que $A-$bimodules,*
- *le foncteur $P \otimes_A - : A - \underline{\mathrm{Mod}} \to B - \underline{\mathrm{Mod}}$ est monoidal,*
- *le foncteur $- \otimes_A Q : \underline{\mathrm{Mod}} - A \to \underline{\mathrm{Mod}} - B$ est monoidal.*

Remarque 2.15 Soient A et B des algèbres de Hopf Morita équivalentes d'équivalence monoidale. Alors les foncteurs $P \otimes_A - \otimes_A Q : A - \underline{\mathrm{Bimod}} \to B - \underline{\mathrm{Bimod}}$ et $Q \otimes_B - \otimes_B P : B - \underline{\mathrm{Bimod}} \to A - \underline{\mathrm{Bimod}}$ sont des foncteurs monoidaux qui définissent une équivalence de catégories.

Proposition 2.16 Soient A et B des algèbres de Hopf Morita équivalentes d'équivalence monoidale et soient P et Q les bimodules qui définissent les équivalences. Alors P et Q sont des cogèbres et nous pouvons choisir $B = (P \otimes P)_A := (P \otimes P) \otimes_A k$ et $Q = (A \otimes P)_A := (A \otimes P) \otimes_A k$. L'isomorphisme $\beta : P \otimes_A Q \xrightarrow{\sim} B$ associe $[pa \otimes p']$ à $p \otimes [a \otimes p']$ et les structures de cogèbre de B et Q sont données en fonction de celles de A et de P comme suit:

Pour B, nous avons

$$\Delta_B[p \otimes p'] = [p^{(1)} \otimes p'^{(2)}] \otimes [p^{(2)} \otimes p'^{(1)}]$$
$$\varepsilon_B[p \otimes p'] = \varepsilon_P(p)\, \varepsilon_P(p').$$

Pour Q,

$$\Delta_Q[a\otimes p]=[a^{(1)}\otimes p^{(2)}]\otimes[a^{(2)}\otimes p^{(1)}]$$
$$\varepsilon_Q[a\otimes p]=\varepsilon_A(a)\,\varepsilon_P(p).$$

Enfin, les isomorphismes naturels

$$\alpha: P\otimes_A(M\otimes N)\otimes_A Q \overset{\sim}{\longrightarrow} (P\otimes_A M\otimes_A Q)\otimes(P\otimes_A N\otimes_A Q)$$

et $u: P\otimes_A k\otimes_A Q\overset{\sim}{\longrightarrow} k$ sont donnés par:

$$\alpha(p\otimes(m\otimes n)\otimes[a\otimes p'])=(p^{(1)}\otimes m\otimes[a^{(1)}\otimes p'^{(2)}])\otimes(p^{(2)}\otimes n\otimes[a^{(2)}\otimes p'^{(1)}])$$

et $u(p\otimes 1\otimes[a\otimes p'])=\varepsilon_P(p)\varepsilon_A(a)\varepsilon_P(p')$ pour tous $m\in M, n\in N, p,p'\in P, a\in A$.

Grâce à cette description, nous allons montrer le résultat suivant:

Proposition 2.17 Soient A et B deux algèbres de Hopf Morita équivalentes d'équivalence monoidale. Alors les catégories de bimodules de Hopf sur A et B sont équivalentes.

Preuve: Vérifions d'abord que l'équivalence des catégories de bimodules associe un bimodule de Hopf sur B à un bimodule de Hopf sur A. Soit donc M un bimodule de Hopf sur A. Notons $\rho_l: M\to A\otimes M$ son morphisme de structure de comodule à gauche; $\rho_l(m)=m_{(-1)}\otimes m_{(0)}$. L'application ρ_l est un morphisme de $A-$bicomodules, donc il lui correspond un morphisme de $B-$bicomodules $P\otimes_A M\otimes_A Q\to P\otimes_A(A\otimes M)\otimes_A Q$. En composant avec α et β, nous obtenons un morphisme de $B-$bicomodules

$$\begin{array}{rcl}\theta_l: P\otimes_A M\otimes_A Q & \longrightarrow & B\otimes(P\otimes_A M\otimes_A Q)\\ p\otimes m\otimes[a\otimes p'] & \mapsto & [p^{(1)}m_{(-1)}a^{(1)}\otimes p'^{(2)}]\otimes(p^{(2)}\otimes m_{(0)}\otimes[a^{(2)}\otimes p'^{(1)}]).\end{array}$$

Nous pouvons procéder de même à droite pour obtenir $\theta_r: P\otimes_A M\otimes_A Q\longrightarrow(P\otimes_A M\otimes_A Q)\otimes B$. Il s'agit de vérifier que θ_l et θ_r munissent $P\otimes_A M\otimes_A Q$ d'une structure de bimodule de Hopf sur B. Notons $N=P\otimes_A M\otimes_A Q$.

Tout d'abord,

$$\begin{aligned}&(\varepsilon_B\otimes\mathrm{id})\theta_l(p\otimes m\otimes[a\otimes p'])\\ &\quad=\varepsilon_P(p^{(1)}m_{(-1)}a^{(1)})\varepsilon_P(p'^{(2)})(p^{(2)}\otimes m_{(0)}\otimes[a^{(2)}\otimes p'^{(1)}])\\ &\quad=\varepsilon_P(p^{(1)})\varepsilon_A(m_{(-1)})\varepsilon_A(a^{(1)})\varepsilon_P(p'^{(2)})(p^{(2)}\otimes m_{(0)}\otimes[a^{(2)}\otimes p'^{(1)}])\\ &\quad=p\otimes m\otimes[a\otimes p'],\end{aligned}$$

ce qui démontre la première propriété des comodules pour N. Puis, d'une part,

$$\begin{aligned}&(\Delta_B\otimes\mathrm{id})\theta_l(p\otimes m\otimes[a\otimes p'])\\ &\quad=\Delta_B([p^{(1)}m_{(-1)}a^{(1)}\otimes p'^{(2)}])\otimes(p^{(2)}\otimes m_{(0)}\otimes[a^{(2)}\otimes p'^{(1)}])\\ &\quad=[p^{(1)}m_{(-2)}a^{(1)}\otimes p'^{(3)}]\otimes[p^{(2)}m_{(-1)}a^{(2)}\otimes p'^{(2)}]\otimes(p^{(3)}\otimes m_{(0)}\otimes[a^{(3)}\otimes p'^{(1)}])\end{aligned}$$

et d'autre part

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{id}\otimes\theta_l)\theta_l(p\otimes m\otimes[a\otimes p'])\\
&\quad=[p^{(1)}m_{(-1)}a^{(1)}\otimes p'^{(2)}]\otimes\theta_l(p^{(2)}\otimes m_{(0)}\otimes[a^{(2)}\otimes p'^{(1)}])\\
&\quad=[p^{(1)}m_{(-2)}a^{(1)}\otimes p'^{(3)}]\otimes[p^{(2)}m_{(-1)}a^{(2)}\otimes p'^{(2)}]\otimes(p^{(3)}\otimes m_{(0)}\otimes[a^{(3)}\otimes p'^{(1)}]);
\end{aligned}
$$

ainsi, puisque ces deux quantités sont égales, la deuxième propriété des comodules est vérifiée pour N.

Les propriétés correspondantes sont vérifiées pour θ_r de la même façon. Enfin, les propriétés de commutation de θ_l et θ_r découlent de celles de ρ_l et ρ_r et de la naturalité de α. Ainsi, $P\otimes_A M\otimes_A Q$ est un bimodule de Hopf sur B.

Nous pouvons effectuer la même opération dans l'autre sens.

Soit maintenant M un $A-$bimodule de Hopf. Si nous lui appliquons la composée des deux foncteurs $A-\underline{\mathrm{Mod}}\longrightarrow B-\underline{\mathrm{Mod}}$ et $B-\underline{\mathrm{Mod}}\longrightarrow A-\underline{\mathrm{Mod}}$, nous obtenons un $A-$bimodule de Hopf M', qui est isomorphe à M *en tant que $A-$bimodule.* De plus, les morphismes de structure des $A-$comodules M et M' se correspondent par cet isomorphisme (puisque la composée des deux foncteurs induit un isomorphisme sur les espaces de morphismes de $A-$bimodules). Ainsi, M et M' sont isomorphes en tant que $A-$bimodules de Hopf.

Le même raisonnement est valable pour les $B-$bimodules de Hopf. Ainsi, l'équivalence de catégories entre $A-\underline{\mathrm{Mod}}$ et $B-\underline{\mathrm{Mod}}$ induit une équivalence entre les catégories de bimodules de Hopf. ♠

Notons $H^*_{GS/A}$ la cohomologie de Gerstenhaber et Schack des bimodules de Hopf sur A et $H^*_{GS/B}$ celle des bimodules de Hopf sur B. Nous déduisons de ce qui précède:

Corollaire 2.18 Soient A et B des algèbres de Hopf de dimension finie, Morita équivalentes d'équivalence monoidale et soient M et M' des bimodules de Hopf sur A. Alors

$$\mathrm{H}^*_{GS/A}(M,M')\cong\mathrm{H}^*_{GS/B}(P\otimes_A M\otimes_A Q,P\otimes_A M'\otimes_A Q).$$

En particulier,

$$\mathrm{H}^*_b(A,A)\cong\mathrm{H}^*_b(B,B).$$

Preuve: Soit $\mathbf{P}_\bullet$ une résolution projective de $A-$bimodules de Hopf de M. Alors $P\otimes_A\mathbf{P}_\bullet\otimes_A Q$ est une résolution projective de $B-$bimodules de Hopf de $P\otimes_A M\otimes_A Q$. Donc

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}^*_{GS/B}(P\otimes_A M\otimes_A Q,P\otimes_A M'\otimes_A Q) &= \mathrm{H}^*\{\mathrm{Hom}_{B4}(P\otimes_A\mathbf{P}_\bullet\otimes_A Q,P\otimes_A M'\otimes_A Q)\}\\
&\cong \mathrm{H}^*\{\mathrm{Hom}_{A4}(\mathbf{P}_\bullet,M')\}\\
&= \mathrm{H}^*_{GS/A}(M,M')
\end{aligned}
$$

puisque ces cohomologies sont les Ext dans les catégories de bimodules de Hopf sur B et A respectivement. ♠

Chapter 3

Cohomologie des bimodules de Hopf

Nous allons maintenant introduire une autre cohomologie adaptée aux bimodules de Hopf, puis comparer celle-ci aux extensions de bimodules de Hopf. Soit A une algèbre de Hopf; C. Ospel a défini dans sa thèse [Os] une cohomologie pour A faisant intervenir un bimodule de Hopf. La définition qui suit en est une généralisation à deux bimodules de Hopf.

3.1 Définition

Soient M et N deux bimodules de Hopf. Considérons les résolutions $B^A_\bullet(M)$ de M comme $A-$module à droite et $C^\bullet_A(N)$ de N comme $A-$comodule à gauche. Comme les autres résolutions bar et cobar que nous avons vues jusqu'à présent, ce sont des résolutions de bimodules de Hopf; cependant, elles ne sont pas relativement projectives ou injectives en général.

Définition-Proposition 3.1 *Les espaces*

$$C^{p,q}_{A4}(M,N) = \mathrm{Hom}_{A4}(M\underline{\otimes}A^{\underline{\otimes}q+1}, A^{\overline{\otimes}p+1}\overline{\otimes}N)$$

et les applications

$$\begin{array}{rcl} d_h\ :\ C^{pq}_{A4}(M,N) & \to & C^{p,q+1}_{A4}(M,N) \\ \alpha & \mapsto & \alpha\circ\lambda \\ d_c\ :\ C^{pq}_{A4}(M,N) & \to & C^{p+1,q}_{A4}(M,N) \\ \alpha & \mapsto & (-1)^q\rho\circ\alpha, \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcl} \lambda\ :\ M\otimes A^{\otimes q+2} & \to & M\otimes A^{\otimes q+1} \\ m\otimes \mathbf{a_{0,q+1}} & \mapsto & m\,a_0\otimes \mathbf{a_{1,q+1}} \\ & & +\sum_{i=0}^q(-1)^{i+1}m\otimes\ldots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_{q+1},\ \textit{et} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \rho\ :\ A^{\otimes p+1}\otimes N & \to & A^{\otimes p+2}\otimes N \\ x & \mapsto & (\sum_{i=0}^p(-1)^i\Delta_i+(-1)^{p+1}(1^{\otimes p}\otimes\delta_L^{(N)}))(x) \end{array}$$

définissent un bicomplexe, dont la cohomologie sera notée $\mathrm{H}^*_{A4}(M,N)$, *et appelée* cohomologie des bimodules de Hopf. *La différentielle du complexe total sera notée* $D = d_h + d_c$.

Remarque 3.2 Ce bicomplexe est isomorphe au bicomplexe dont les modules sont les espaces

$$\mathrm{Hom}_{A-}^{-A}(M \otimes A^{\otimes q}, A^{\otimes p} \otimes N),$$

dans lequel la différentielle verticale prend la forme $\alpha \mapsto d(\alpha)$ avec

$$\begin{aligned} d(\alpha)(m \otimes \mathbf{a_{1,q+1}}) &= \alpha(m\, a_1 \otimes \mathbf{a_{2,q+1}}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{q} (-1)^i \alpha(m \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{q+1}) \\ &\quad + (-1)^{q+1} \alpha(m \otimes \mathbf{a_{1,q}})\, \Delta^{(p)}(a_{q+1}), \end{aligned}$$

et la différentielle horizontale devient

$$\alpha \mapsto (1 \otimes \alpha) \circ \delta_L + \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \Delta_i \circ \alpha + (-1)^{p+1} (1^{\otimes p} \otimes \delta_L^{(N)}) \circ \alpha.$$

De plus, lorsque N est le bimodule de Hopf A, le bicomplexe $C_{A4}^{\bullet;\bullet}(M,A)$ est isomorphe au bicomplexe défini par Ospel dans sa thèse [Os].

Remarque 3.3 Lorsque M et N sont tous deux égaux à A, le bicomplexe $C_{A4}^{\bullet;\bullet}(A,A)$ est isomorphe au bicomplexe qui définit la cohomologie des algèbres de Hopf de Gerstenhaber et Schack $\mathrm{H}^*_b(A,A)$ (*voir* [GS92] et la Section 2.3); par conséquent, $\mathrm{H}^*_{A4}(M,N)$ généralise $\mathrm{H}^*_b(A,A)$.

Remarque 3.4 Lorsque N est égal à A, l'homologie de la $p^{ième}$ colonne est la cohomologie de Hochschild de A à coefficients dans $\mathrm{Hom}_{A-}(M, A^{\overline{\otimes} p})$, ce dernier espace étant muni de la structure de bimodule suivante: si $f \in \mathrm{Hom}_{A-}(M, A^{\otimes p})$, $a \in A$ et $v \in M$,

$$(a.f)(v) = f(v.a) \text{ et } (f.a)(v) = f(v)a.$$

L'homologie de la $q^{ième}$ ligne est la cohomologie de Cartier $\mathrm{H}^*_c(M \otimes A^{\otimes q}, A)$ ([Ca] et Définition 1.3.2).

3.2 Lien avec les extensions

Soit A une algèbre de Hopf de dimension finie. Nous allons comparer les cohomologies $\mathrm{H}^*_{A4}(M,N)$ et $\mathrm{Ext}^*_X(M,N)$ pour des bimodules de Hopf M et N.

Commençons par énoncer une légère généralisation d'un théorème prouvé par C. Ospel ([Os] Théorème 2.1). Nous en donnons aussi une démonstration, qui sera utile dans les démonstrations du Théorème 4.4 et de la Proposition 3.11.

Théorème 3.5 ([Os] Théorème 2.1) Soit A une algèbre de Hopf quelconque. Soient M et N des bimodules de Hopf sur A. Il existe un isomorphisme

$$\mathrm{H}^1_{A4}(M,N) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(M,N)$$

($\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(M,N)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence des suites exactes courtes $0 \to N \to E \to M \to 0$ de bimodules de Hopf, pour la relation d'équivalence habituelle).

Démonstration: Considérons une 1-cochaîne $f = (f_0, f_1)$ dans $\mathrm{Hom}^{-A}_{A-}(M\underline{\otimes}A, N) \oplus \mathrm{Hom}^{-A}_{A-}(M, A\overline{\otimes}N)$. Considérons la suite de $k-$espaces vectoriels

$$0 \to N \xrightarrow{i} N \oplus M \xrightarrow{p} M \to 0.$$

Nous devons définir, lorsque f est un cocycle, une structure de bimodule de Hopf sur $N \oplus M$ de sorte que i et p soient des morphismes de bimodules de Hopf. Munissons-le des structures suivantes:

$$\begin{pmatrix} \mu_R^N & f_0 \\ 0 & \mu_R^M \end{pmatrix} \text{ pour la structure de } A-\text{module à droite,}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_L^N & f_1 \\ 0 & \delta_L^M \end{pmatrix} \text{ pour la structure de } A-\text{comodule à gauche,}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_L^N & 0 \\ 0 & \mu_L^M \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \delta_R^N & 0 \\ 0 & \delta_R^M \end{pmatrix} \text{ pour les structures qui restent.}$$

Précisons par exemple la deuxième ligne: si (n,m) est un élément de $N \oplus M$, alors

$$\delta_L(n,m) = n_{(-1)} \otimes (n_{(0)}, 0) + (f_1(m))_A \otimes ((f_1(m))_N, 0) + m_{(-1)} \otimes (0, m_{(0)}),$$

avec $f_1(m) = (f_1(m))_A \otimes (f_1(m))_N$.

Nous pouvons constater que les relations suivantes sont toujours vérifiées:

$$a.[b.(n,m)] = (ab).(n,m) \quad \text{et} \quad (\delta_R \otimes \mathrm{id})\delta_R(n,m) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\delta_R(n,m).$$

De plus, δ_R est clairement un morphisme de modules à gauche, et c'est aussi un morphisme de comodules à droite car f_0 est un morphisme de comodules à droite. Enfin, δ_L est toujours un morphisme de modules à gauche, car f_1 l'est.

Montrons maintenant que F est une extension de bimodules de Hopf (c'est-à-dire que les trois conditions manquant pour que $N \oplus M$ soit un bimodule de Hopf sont vérifiées) si et seulement si f est un cocycle:

Regardons d'abord la condition $[(n,m).a].b = (n,m).(ab)$ $(*)$ pour $n \in N, m \in M$, et $a, b \in A$. D'une part, $[(n,m).a].b = (nab + f_0(m \otimes a).b + f_0(ma \otimes b), mab)$ et, d'autre part, $(n,m).(ab) = (nab + f_0(m \otimes ab), mab)$. La relation $(*)$ est donc satisfaite si et seulement si f_0 est un 1-cocycle pour la différentielle d_h.

De même, la condition $(1 \otimes \delta_L)\delta_L(n,m) = (\Delta \otimes 1)\delta_L(n,m)$ est satisfaite si et seulement si f_0 est un 1-cocycle pour la différentielle d_c.

Considérons enfin la condition $\delta_L((n,m).a) = \delta_L(n,m).a$. Nous avons

$$\begin{aligned}\delta_L((n,m).a) &= \delta_L(na + f_0(m\otimes a), ma)\\ &= (n_{(-1)}a^{(1)} \otimes n_{(0)}a^{(2)} + f_0(m\otimes a)_{(-1)} \otimes f_0(m\otimes a)_{(0)} + f_1(ma),\\ &\qquad m_{(-1)}a^{(1)} \otimes m_{(0)}a^{(2)})\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\delta_L(n,m).a &= (n_{(-1)} \otimes n_{(0)} + f_1(m), m_{(-1)} \otimes m_{(0)}).a\\ &= (n_{(-1)}a^{(1)} \otimes n_{(0)}a^{(1)} + f_1(m).a + m_{(-1)}a^{(1)} \otimes f_0(m_{(0)}a^{(2)}),\\ &\qquad m_{(-1)}a^{(1)} \otimes m_{(0)}a^{(2)})\end{aligned}$$

qui sont égaux si et seulement si $(1\otimes f_0).\delta_L(m\otimes a) - \delta_L f_0(m\otimes a) = -[f_1(ma) - f_1(m).a]$, *i.e.* $d_c(f_0)(m\otimes a) = -d_h(f_1)(m\otimes a)$; c'est la dernière relation à satisfaire pour que f soit un cocycle.

En conclusion, si on considère un 1-cocycle f, l'extension de $k-$espaces vectoriels F est en fait une extension de bimodules de Hopf. Dans l'autre sens, si on considère une extension de bimodules de Hopf F, on définit une cochaîne (f_0, f_1) en posant $f_0(m\otimes a) = q((0,m).a)$ et $f_1(m) = (\mathrm{id}\otimes q)(\delta_L(m))$ où $q : N\oplus M \to N$ désigne la première projection; alors F est une extension de bimodules de Hopf telle que la structure de bimodule de Hopf de $N\oplus M$ est déterminée par f_0 et f_1 et donc (f_0, f_1) est un cocycle d'après ce qui précède. ♠

Ce résultat peut se généraliser de la façon suivante:

Théorème 3.6 Soient A une algèbre de Hopf de dimension finie, et M et N des bimodules de Hopf sur A. Il existe alors un isomorphisme

$$\mathrm{H}^*_{A4}(M,N) \cong \mathrm{Ext}^*_X(M,N).$$

Démonstration: Considérons le foncteur $\mathrm{Ext}^*_X(-,N)$, avec N fixé. Il est caractérisé par les propriétés suivantes (*cf.* [McL]):

1. $\mathrm{Ext}^0_X(M,N) \cong \mathrm{Hom}_X(M,N) = \mathrm{Hom}_{A4}(M,N)$,

2. $\mathrm{Ext}^n_X(P,N) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et tout bimodule de Hopf projectif P,

3. $\mathrm{Ext}^*_X(-,N)$ est un $\delta-$foncteur cohomologique (*voir* [W] p30).

Il suffit donc de vérifier que le foncteur $\mathrm{H}^*_{A4}(-,N)$ satisfait aux trois propriétés. Dans toute la suite, N est un bimodule de Hopf fixé.

Lemme 3.7 Pour tout bimodule de Hopf M, nous avons un isomorphisme $\mathrm{H}^0_{A4}(M,N) \cong \mathrm{Hom}_{A4}(M,N)$.

Preuve: Soit α un élément de $\mathrm{Hom}_{A4}(M \otimes A, A \otimes N)$. C'est un cocycle si et seulement si $d_h(\alpha) = 0$ et $d_c(\alpha) = 0$, c'est-à-dire si $\alpha \circ \partial_1^h = 0 = \partial_c^1 \circ \alpha$, donc α est nul sur $\mathrm{Im}\, \partial_1^h = \ker \partial_0^h$ et α est à valeurs dans $\ker \partial_c^1 = \mathrm{Im}\, \partial_c^0$. On en déduit (par "passage au quotient") que si α est un cocycle, il induit un morphisme $\overline{\alpha} \in \mathrm{Hom}_{A4}(M, N)$. D'autre part, si β est un élément de $\mathrm{Hom}_{A4}(M, N)$, alors $\partial_c^0 \circ \beta \circ \partial_0^h$ est un cocycle. ♠

Lemme 3.8 Pour tout bimodule de Hopf projectif P et tout entier $n \geq 1$, le $k-$espace vectoriel $\mathrm{H}^n_{A4}(P, N)$ est nul.

Preuve: Soit P un bimodule de Hopf projectif. Considérons sa résolution bar:

$$B_\bullet^A(P) : \cdots \to P\underline{\otimes}A^{\underline{\otimes}q+2} \xrightarrow{\partial_q^h} P\underline{\otimes}A^{\underline{\otimes}q+1} \xrightarrow{\partial_{q-1}^h} \cdots \to P\underline{\otimes}A^{\underline{\otimes}2} \xrightarrow{\partial_0^h} P\underline{\otimes}A \xrightarrow{\partial_{-1}^h} P \to 0,$$

avec $\partial_{-1}^h(u \otimes a) = u.a$.

Comme P est projectif et ∂_{-1}^h est surjective, ∂_{-1}^h admet une section: il existe un morphisme de bimodules de Hopf $s : P \to P\underline{\otimes}A$ vérifiant $\partial_{-1}^h(s(u)) = u$ pour tout $u \in P$.

Posons

$$\begin{array}{rcl} h_q \;: P\underline{\otimes}A^{\underline{\otimes}q+1} & \longrightarrow & P\underline{\otimes}A^{\underline{\otimes}q+2} \\ u\underline{\otimes}a_0\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}a_q & \mapsto & s(u)\underline{\otimes}a_0\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}a_q. \end{array}$$

C'est un morphisme de bimodules de Hopf: en effet, $h_q = s\underline{\otimes}\mathrm{id}^{\underline{\otimes}q}$, et nous appliquons le lemme suivant:

Lemme: Soient $f : M \to N$ et $g : M' \to N'$ des morphismes de bimodules de Hopf. Alors $f\underline{\otimes}g : M\underline{\otimes}M' \to N\underline{\otimes}N'$ est un morphisme de bimodules de Hopf.

Preuve: Vérifions que $f\underline{\otimes}g$ est un morphisme de bimodules: soient $m \in M$, $m' \in M'$ et $a, b \in A$. Alors:

$$\begin{array}{rcl} a.\left((f\underline{\otimes}g)(m\underline{\otimes}m')\right).b & = & a.(f(m)\underline{\otimes}g(m')).b \\ & = & (a.f(m))\underline{\otimes}(g(m').b) \\ & = & f(a.m)\underline{\otimes}g(m'.b) \\ & = & (f\underline{\otimes}g)((a.m)\underline{\otimes}(m'.b)) \\ & = & (f\underline{\otimes}g)(a.(m\underline{\otimes}m').b). \end{array}$$

Vérifions maintenant que $f\underline{\otimes}g$ est un morphisme de comodules à gauche:

$$\begin{array}{rcl} \delta_L((f\underline{\otimes}g)(m\underline{\otimes}m')) & = & \delta_L(f(m)\underline{\otimes}g(m')) \\ & = & f(m)_{(-1)}g(m')_{(-1)} \otimes f(m)_{(0)}\underline{\otimes}g(m')_{(0)} \\ & = & m_{(-1)}m'_{(-1)} \otimes f(m_{(0)})\underline{\otimes}g(m'_{(0)}) \\ & = & (\mathrm{id} \otimes f\underline{\otimes}g)(m_{(-1)}m'_{(-1)} \otimes m_{(0)}\underline{\otimes}m'_{(0)}) \\ & = & (\mathrm{id} \otimes f\underline{\otimes}g)(\delta_L(m\underline{\otimes}m')). \end{array}$$

Enfin, $f\underline{\otimes}g$ est un morphisme de comodules à droite:

$$\begin{aligned}
\delta_R((f\underline{\otimes}g)(m\underline{\otimes}m')) &= \delta_R(f(m)\underline{\otimes}g(m')) \\
&= f(m)_{(0)}\underline{\otimes}g(m')_{(0)} \otimes f(m)_{(1)}g(m')_{(1)} \\
&= f(m_{(0)})\underline{\otimes}g(m'_{(0)}) \otimes m_{(1)}m'_{(1)} \\
&= (f\underline{\otimes}g \otimes \mathrm{id})(m_{(0)}\underline{\otimes}m'_{(0)} \otimes m_{(1)}m'_{(1)}) \\
&= (f\underline{\otimes}g \otimes \mathrm{id})(\delta_R(m\underline{\otimes}m')).
\end{aligned}$$

Revenons à la preuve du lemme 3.8. Notons $s(u) = \sum_{i=1}^t v_i\underline{\otimes}b_i$, et calculons $\partial_q^h h_q + h_{q-1}\partial_{q-1}^h$:

$$\begin{aligned}
\partial_q^h h_q(u\underline{\otimes}a_0\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_q) &= \partial_q^h(s(u)\underline{\otimes}a_0\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_q) \\
&= \partial_q^h(\sum_{i=1}^t v_i\underline{\otimes}b_i\underline{\otimes}a_0\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_q) \\
&= \sum_{i=1}^t [v_i.b_i\underline{\otimes}a_0\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_q \\
&\qquad -v_i\underline{\otimes}b_ia_0\underline{\otimes}a_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_q \\
&\qquad +\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\, v_i\underline{\otimes}b_i\underline{\otimes}a_0\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_ja_{j+1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_q] \\
&= \partial_{-1}^h(s(u))\underline{\otimes}a_0\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_q \\
&\qquad -(s(u).a_0)\underline{\otimes}a_1\dots\underline{\otimes}a_q \\
&\qquad +\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\, s(u)\underline{\otimes}a_0\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_ja_{j+1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_q \\
&= u\underline{\otimes}a_0\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_q \\
&\qquad -s(u.a_0)\underline{\otimes}a_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_q \\
&\qquad +\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\, s(u)\underline{\otimes}a_0\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_ja_{j+1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_q
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
h_{q-1}\partial_{q-1}^h(u\underline{\otimes}a_0\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_q) &= h_{q-1}(u.a_0\underline{\otimes}a_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_q) \\
&\qquad +\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^{j+1}\, h_{q-1}(u\underline{\otimes}a_0\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_ja_{j+1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_q) \\
&= s(u.a_0)\underline{\otimes}a_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_q \\
&\qquad -\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\, s(u)\underline{\otimes}a_0\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_ja_{j+1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}a_q.
\end{aligned}$$

En ajoutant, nous obtenons:

$$(\partial_q^h h_q + h_{q-1}\partial_{q-1}^h)(u\underline{\otimes}a_0\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}a_q) = u\underline{\otimes}a_0\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}a_q.$$

Donc $h_\bullet$ est une homotopie de bimodules de Hopf de id à 0.

Maintenant, fixons $p \in \mathbb{N}$, et considérons le complexe $\mathrm{Hom}_{A4}(B_\bullet^A(P), C_A^p(N))$; l'homotopie $h_\bullet$ de $B_\bullet^A(P)$ induit une homotopie $- \circ h_\bullet$ de id à 0 sur ce complexe.

Ainsi, le bicomplexe suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
\vdots & & \vdots & & \\
\mathrm{Hom}_{A4}(B_1^A(P), C_A^0(N)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A4}(B_1^A(P), C_A^1(N)) & \longrightarrow & \ldots \\
\uparrow & & \uparrow & & \\
\mathrm{Hom}_{A4}(B_0^A(P), C_A^0(N)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A4}(B_0^A(P), C_A^1(N)) & \longrightarrow & \ldots \\
\uparrow & & \uparrow & & \\
\mathrm{Hom}_{A4}(P, C_A^0(N)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A4}(P, C_A^1(N)) & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

qui est le bicomplexe $C_{A4}^{\bullet,\bullet}(P,N)$ auquel nous avons ajouté une ligne, a des colonnes exactes. Son homologie est donc celle de la première ligne $\mathrm{Hom}_{A4}(P, C_A^\bullet(N))$ (*cf.* [W] p59-60). Or P est projectif et $C_A^\bullet(N)$ est exact, donc l'homologie de ce complexe est nulle en degré > 0 (et vaut $\mathrm{Hom}_{A4}(P,N)$ en degré 0). ♠

Lemme 3.9 Le foncteur $\mathrm{H}_{A4}^*(-,N)$ transforme les suites exactes courtes $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ de bimodules de Hopf en suites exactes longues

$$\cdots \to \mathrm{H}_{A4}^n(M'',N) \to \mathrm{H}_{A4}^n(M,N) \to \mathrm{H}_{A4}^n(M',N) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}_{A4}^{n+1}(M'',N) \to \cdots$$

de $k-$espaces vectoriels.

Preuve: Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de bimodules de Hopf. Alors, pour tout $q \geq 0$, la suite

$$(E_q) : 0 \to M'\underline{\otimes}A^{\underline{\otimes}q} \to M\underline{\otimes}A^{\underline{\otimes}q} \to M''\underline{\otimes}A^{\underline{\otimes}q} \to 0$$

est aussi une suite exacte de bimodules de Hopf.

Assertion: Ces suites sont scindées comme suites de $A-$modules à gauche et $A-$comodules à droite.

En admettant ceci, nous voyons que les suites

$$\begin{array}{rcl}
0 \to \mathrm{Hom}_{A-}^{-A}(M''\underline{\otimes}A^{\underline{\otimes}q}, A^{\overline{\otimes}p}\overline{\otimes}N) & \to & \mathrm{Hom}_{A-}^{-A}(M\underline{\otimes}A^{\underline{\otimes}q}, A^{\overline{\otimes}p}\overline{\otimes}N) \\
& \to & \mathrm{Hom}_{A-}^{-A}(M'\underline{\otimes}A^{\underline{\otimes}q}, A^{\overline{\otimes}p}\overline{\otimes}N) \to 0
\end{array}$$

pour tous entiers $p, q \geq 0$ sont exactes, et nous en déduisons donc une suite exacte longue

$$\cdots \to \mathrm{H}_{A4}^n(M'',N) \to \mathrm{H}_{A4}^n(M,N) \to \mathrm{H}_{A4}^n(M',N) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}_{A4}^{n+1}(M'',N) \to \cdots$$

Revenons à l'assertion; pour simplifier les notations, montrons-la pour (E_0). D'après le Lemme 1.19, la suite

$$(E_0^R) : 0 \to M'^R \longrightarrow M^R \longrightarrow M''^R \to 0$$

est une suite exacte de $k-$espaces vectoriels. Elle est donc scindée. Pour revenir à la suite (E_0), on tensorise la suite (E_0^R) par A sur k à gauche. Les sections et rétractions induisent des applications qui sont des morphismes de $A-$modules à gauche et de $A-$comodules à droite.

En combinant les trois lemmes, on démontre le théorème. ♠

Remarque 3.10 En fait, nous avons démontré que $\mathrm{H}^*_{A4}(-,N)$ et $\mathrm{Ext}^*_X(-,N)$ sont des $\delta-$foncteurs qui sont isomorphes, l'isomorphisme étant l'unique morphisme de $\delta-$foncteurs qui prolonge $\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{A4}(-,N)}$. C'est vrai aussi pour l'autre variable.

Enfin, nous pouvons faire le lien entre les deux théorèmes précédents (ceci servira dans le Chapitre 4):

Proposition 3.11 Soit A une algèbre de Hopf de dimension finie. L'isomorphisme du Théorème 3.5 est égal à l'isomorphisme du Théorème 3.6 en degré 1.

Preuve: Notons ψ_N l'isomorphisme $\mathrm{H}^1_{A4}(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_X(M,N)$ du Théorème 3.5 et φ^*_{MN} l'isomorphisme $\mathrm{H}^*_{A4}(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^*_X(M,N)$ du Théorème 3.6. Supposons d'abord que ψ commute au premier homomorphisme de connexion δ^1. Alors il existe un unique morphisme de $\delta-$foncteurs $\mathrm{H}^*_{A4}(M,-) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^*_X(M,-)$ qui prolonge le couple d'applications $(\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{A4}(M,-)}, \psi)$; celui-ci est nécessairement égal à φ^*_M, qui est l'unique morphisme de $\delta-$foncteurs prolongeant $\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{A4}(M,-)}$. Ainsi, ψ est égal à φ^1_M.

Il nous suffit donc de montrer que ψ commute à δ^1. Soit $(E) : 0 \to M' \to M' \oplus M'' \to M'' \to 0$ une suite exacte de bimodules de Hopf, la structure de bimodule de Hopf de $M' \oplus M''$ étant déterminée par un 1-cocycle $(\alpha, \beta) \in \mathrm{H}^1_{A4}(M'', M')$, comme dans la démonstration du Théorème 3.5. L'homomorphisme de connexion de la suite exacte longue associée à (E) par le foncteur $\mathrm{Ext}^*_X(M,-)$ est donné par le produit de Yoneda à droite par (E). Nous voulons donc montrer que, pour tout $g \in \mathrm{Hom}_{A4}(M,N) = \mathrm{H}^0_{A4}(M,N)$, nous avons $\psi_{M''}(\delta''(g)) = g \circ (E)$ (ici, $\circ$ désigne le produit de Yoneda).

D'une part, $g \circ (E)$ est la suite de $k-$espaces vectoriels

$$0 \to N \to {N \oplus M' \oplus M''}\Big/_{< (g(m'), m', 0); m' \in M' >} \to M'' \to 0,$$

dans laquelle les structures de bimodule de Hopf de l'espace du milieu sont données par

$$(n, m', m'').a = (na, m'a + \alpha(m'' \otimes a), m''a) = (na + g(\alpha(m'' \otimes a)), m'a, m''a)$$

pour la structure de module à droite, donc $(n, 0, m'').a = (na + g(\alpha(m'' \otimes a)), 0, m''a)$ et

$$\begin{aligned} \delta_L(n, m', m'') &= (\delta_L^{(N)}(n), \delta_L^{(M')}(m') + \beta(m''), \delta_L^{(M'')}(m'')) \\ &= (\delta_L^{(N)}(n) + (1 \otimes g)\beta(m''), \delta_L^{(M')}(m'), \delta_L^{(M'')}(m'')) \end{aligned}$$

pour la structure de comodule à gauche, d'où

$$\delta_L(n, 0, m'') = (\delta_L^{(N)}(n) + (1 \otimes g)\beta(m''), 0, \delta_L^{(M'')}(m'')).$$

Ainsi, $g \circ (E)$ est équivalente à $0 \to N \to N \oplus M'' \to M'' \to 0$, pour laquelle la structure de bimodule de Hopf est déterminée par $(g\alpha, (1 \otimes g)\beta)$.

D'autre part, $\delta^1 g$ est un 1-cocycle $(k_0, k_1) \in \mathrm{H}^1_{A4}(M'', N)$ tel que

$$(k_0(p \otimes 1), k_1(p \otimes 1)) = Dh,$$

avec $h \in \mathrm{Hom}_{A-}^{-A}(M' \oplus M'', N)$ satisfaisant $hi = g$. Nous voulons montrer que $\delta^1 g$ et $(g\alpha, (1 \otimes g)\beta)$ sont des 1-cocycles équivalents.

Ecrivons

$$\begin{array}{rcl} h : M' \oplus M'' & \longrightarrow & N \\ (m', m'') & \mapsto & g(m') + u(m''). \end{array}$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} k_0(m'' \otimes a) & = & h((0, m'').a) - h(0, m'').a \\ & = & h(\alpha(m'' \otimes a), m''a) - u(m'').a \\ & = & g\alpha(m'' \otimes a) + \delta_h u(m'' \otimes a). \end{array}$$

De la même façon, nous avons $k_1 = (1 \otimes g)\beta + \delta_c u$. Par conséquent, nous obtenons $\delta^1 g = (g\alpha, (1 \otimes g)\beta) + Du$, qui est bien la relation cherchée. ♠

Chapter 4

Cup-produit

Soit $\mathcal{H}$ la catégorie des bimodules de Hopf sur une algèbre de Hopf A et soient M, N et L trois bimodules de Hopf sur A. Il existe un produit

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{H}}(M,L) \otimes \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{H}}(L,N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{H}}(M,N) \\ F \otimes G & \mapsto & G \circ F, \end{array}$$

qui est le produit de Yoneda: si $F = 0 \to L \xrightarrow{\alpha} F_p \to \ldots \to F_1 \to M \to 0$ et $G = 0 \to N \to G_q \to \ldots \to G_1 \xrightarrow{\beta} L \to 0$, alors

$$G \circ F = 0 \to N \to G_q \to \ldots \to G_1 \xrightarrow{\alpha\circ\beta} F_p \to \ldots \to F_1 \to M \to 0.$$

Grâce aux Théorèmes 2.3, 3.6 et 2.13, nous savons donc que si A est de dimension finie, il existe des produits gradués

$$\mathrm{H}^*_{A4}(M,L) \otimes \mathrm{H}^*_{A4}(L,N) \xrightarrow{\smile} \mathrm{H}^*_{A4}(M,N),$$

$$\mathrm{H}^*_{GS}(M,L) \otimes \mathrm{H}^*_{GS}(L,N) \xrightarrow{\smile} \mathrm{H}^*_{GS}(M,N)$$

et

$$\mathrm{H}^*_{b}(A,A) \otimes \mathrm{H}^*_{b}(A,A) \xrightarrow{\smile} \mathrm{H}^*_{b}(A,A).$$

Cependant, comme les isomorphismes $\mathrm{H}^*_{A4} \cong \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{H}}$ et $\mathrm{H}^*_{GS} \cong \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{H}}$ ne sont pas explicites, nous ne pouvons pas déduire les cup-produits $\smile$ du produit de Yoneda. Nous allons donc procéder de la façon suivante: nous allons introduire un cup-produit $\smile$ sur H^*_{A4}, indépendemment de l'algèbre X (et donc sans hypothèse sur la dimension de A). Nous définissons ce cup-produit au niveau du bicomplexe et montrons qu'il définit bien un produit sur la cohomologie. Enfin, nous montrerons que ce produit correspond bien, lorsque A est de dimension finie, au produit de Yoneda.

4.1 Cup-produit sur la cohomologie des bimodules de Hopf

Proposition 4.1 Soit $f \in \mathrm{Hom}_{A-}^{-A}(M \otimes A^{\otimes p-s}, A^{\otimes s} \otimes L)$ une $p-$cochaîne et soit $g \in \mathrm{Hom}_{A-}^{-A}(L \otimes A^{\otimes q-r}, A^{\otimes r} \otimes N)$ une $q-$cochaîne. Posons $n = p+q$ et $t = s+r$. Définissons une $n-$cochaîne $f \smile g \in \mathrm{Hom}_{A-}^{-A}(M \otimes A^{\otimes n-t}, A^{\otimes t} \otimes N)$ par:

$$\begin{aligned} &f \smile g(m \otimes \mathbf{a_{1,n-t}}) = \\ &\qquad \sum (-1)^{s(q-r)}(1^{\otimes s} \otimes g)\left[f(m \otimes \mathbf{a_{1,p-s}}).(\Delta^{(s-1)}(a^{(1)}_{p-s+1} \ldots a^{(1)}_{n-t}) \otimes 1) \otimes \mathbf{a^{(2)}_{p-s+1,n-t}}\right]. \end{aligned}$$

La différentielle $D = d_h + d_c$ du complexe total associé au bicomplexe $C^{\bullet,\bullet}_{A4}(A)$ est une dérivation à droite pour le cup-produit $\smile$, c'est-à-dire que

$$D(f \smile g) = Df \smile g + (-1)^p f \smile Dg.$$

La formule pour $\smile$ induit donc un produit $\smile$: $\mathrm{H}^*_{A4}(M, L) \otimes \mathrm{H}^*_{A4}(L, N) \to \mathrm{H}^*_{A4}(M, N)$.

Preuve:

Première étape: $\mathbf{d_h(f \smile g) = d_h f \smile g + (-1)^p f \smile d_h g}$.

$$\begin{aligned} &d_h(f \smile g)(m \otimes \mathbf{a_{1,n-t+1}}) = (f \smile g)(ma_1 \otimes \mathbf{a_{2,n-t+1}}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-t} (-1)^i (f \smile g)(m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n-t+1}) \\ &\quad +(-1)^{n-t+1}(f \smile g)(m \otimes \mathbf{a_{1,n-t}})\, \Delta^{(t)}(a_{n-t+1}) \\ &= (-1)^{s(q-r)}(1^{\otimes s} \otimes g)[f(ma_1 \otimes \mathbf{a_{2,p-s+1}}) \\ &\qquad\qquad (\Delta^{(s-1)}(a^{(1)}_{p-s+2} \ldots a^{(1)}_{n-t+1}) \otimes 1) \otimes \mathbf{a^{(2)}_{p-s+2,n-t+1}}] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p-s} (-1)^{i+s(q-r)}(1^{\otimes s} \otimes g)[f(m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{p-s+1}) \\ &\qquad\qquad (\Delta^{(s-1)}(a^{(1)}_{p-s+2} \ldots a^{(1)}_{n-t+1}) \otimes 1) \otimes \mathbf{a^{(2)}_{p-s+2,n-t+1}}] \\ &+ \sum_{i=1}^{q-r} (-1)^{p-s+i+s(q-r)}(1^{\otimes s} \otimes g)[f(m \otimes \mathbf{a_{1,p-s}})\, (\Delta^{(s-1)}(a^{(1)}_{p-s+1} \ldots a^{(1)}_{n-t+1}) \otimes 1) \\ &\qquad\qquad \otimes a^{(2)}_{p-s+1} \otimes \ldots \otimes a^{(2)}_{p-s+i} a^{(2)}_{p-s+i+1} \otimes \ldots \otimes a^{(2)}_{n-t+1}] \\ &\quad +(-1)^{n-t+s(q-r)}(1^{\otimes s} \otimes g)[f(m \otimes \mathbf{a_{1,p-s}}) \\ &\qquad\qquad (\Delta^{(s-1)}(a^{(1)}_{p-s+1} \ldots a^{(1)}_{n-t}) \otimes 1) \otimes \mathbf{a^{(2)}_{p-s+1,n-t}}] \\ &\qquad\qquad (\Delta^{(s-1)}(a^{(1)}_{n-t+1}) \otimes \Delta^{(r)}(a^{(2)}_{n-t+1})) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{s(q-r)}(1^{\otimes s} \otimes g)[d_h f(m \otimes \mathbf{a_{1,p-s+1}})\\
&\qquad (\Delta^{(s-1)}(a^{(1)}_{p-s+2} \dots a^{(1)}_{n-t+1}) \otimes 1) \otimes \mathbf{a^{(2)}_{p-s+2,n-t+1}}]\\
&\quad -(-1)^{s(q-r)+p-s+1}(1^{\otimes s} \otimes g)[f(m \otimes \mathbf{a_{1,p-s}}))\\
&\qquad (\Delta^{(s-1)}(a^{(1)}_{p-s+1} \dots a^{(1)}_{n-t+1}) \otimes a^{(2)}_{p-s+1}) \otimes \mathbf{a^{(2)}_{p-s+2,n-t+1}}]\\
&\quad +(-1)^{s(q-r)+p-s}(1^{\otimes s} \otimes d_h g)[f(m \otimes \mathbf{a_{1,p-s}}))\\
&\qquad (\Delta^{(s-1)}(a^{(1)}_{p-s+1} \dots a^{(1)}_{n-t+1}) \otimes 1) \otimes \mathbf{a^{(2)}_{p-s+1,n-t+1}}]\\
&\quad -(-1)^{s(q-r)+p-s}(1^{\otimes s} \otimes g)[f(m \otimes \mathbf{a_{1,p-s}}))\\
&\qquad (\Delta^{(s-1)}(a^{(1)}_{p-s+1} \dots a^{(1)}_{n-t+1}) \otimes 1)\, (1^{\otimes s} \otimes a^{(2)}_{p-s+1}) \otimes \mathbf{a^{(2)}_{p-s+2,n-t+1}}]\\
&= [d_h f \smile g + (-1)^p f \smile d_h g](m \otimes \mathbf{a_{1,n-t+1}}).
\end{aligned}
$$

Deuxième étape: $\mathbf{d_c(f \smile g) = (-1)^{q-r}\, d_c f \smile g + (-1)^s\, f \smile d_c g}$.

$$
\begin{aligned}
&d_c(f \smile g)(m \otimes \mathbf{a_{1,n-t}}) = m_{(-1)}a^{(1)}_1 \dots a^{(1)}_{n-t} \otimes (f \smile g)(m_{(0)} \otimes \mathbf{a^{(2)}_{1,n-t}})\\
&\quad + \sum_{i=1}^{t} (-1)^i \Delta_i \circ (f \smile g)(m \otimes \mathbf{a_{1,n-t}})\\
&\quad +(-1)^{t+1}(1^{\otimes t-1} \otimes \delta_L) \circ (f \smile g)(m \otimes \mathbf{a_{1,n-t}})\\
&= (-1)^{s(q-r)}(1^{\otimes s+1} \otimes g)(m_{(-1)}a^{(1)}_1 \dots a^{(1)}_{n-t} \otimes (f(m_{(0)} \otimes \mathbf{a^{(2)}_{1,p-s}})\\
&\qquad (\Delta^{(s-1)}(a^{(2)}_{p-s+1} \dots a^{(2)}_{n-t}) \otimes 1)) \otimes \mathbf{a^{(3)}_{p-s+1,n-t}})\\
&\quad + \sum_{i=1}^{s}(-1)^{i+s(q-r)}(1^{\otimes s+1} \otimes g)\\
&\qquad (\Delta_i \circ f(m \otimes \mathbf{a_{1,p-s}})\, \Delta_i(\Delta^{(s-1)}(a^{(1)}_{p-s+1} \dots a^{(1)}_{n-t}) \otimes 1) \otimes \mathbf{a^{(2)}_{p-s,n-t}})\\
&+ \sum_{i=1}^{r}(-1)^{s+i+s(q-r)}(1^{\otimes s} \otimes \Delta_i \circ g)\\
&\qquad (f(m \otimes \mathbf{a_{1,p-s}})(\Delta^{(s-1)}(a^{(1)}_{p-s+1} \dots a^{(1)}_{n-t}) \otimes 1) \otimes \mathbf{a^{(2)}_{p-s+1,n-t}}\\
&\quad +(-1)^{t+1+s(q-r)}(1^{\otimes s} \otimes [(1^{\otimes r-1} \otimes \delta_L) \circ g])\\
&\qquad (f(m \otimes \mathbf{a_{1,p-s}})\, (\Delta^{(s-1)}(a^{(1)}_{p-s+1} \dots a^{(1)}_{n-t}) \otimes 1) \otimes \mathbf{a^{(2)}_{p-s+1,n-t}})\\
&= (-1)^{s(q-r)}(1^{\otimes s+1} \otimes g)(d_c f(m \otimes \mathbf{a_{1,p-s}})(\Delta^{(s)}(a^{(1)}_{p-s+1} \dots a^{(1)}_{n-t}) \otimes 1) \otimes \mathbf{a^{(2)}_{p-s+1,n-t}})\\
&\quad -(-1)^{s+1+s(q-r)}(1^{\otimes s+1} \otimes g)(((1^{\otimes s-1} \otimes \delta_L) \circ\\
&\qquad f(m \otimes \mathbf{a_{1,p-s}}))(\Delta^{(s)}(a^{(1)}_{p-s+1} \dots a^{(1)}_{n-t}) \otimes 1) \otimes \mathbf{a^{(2)}_{p-s+1,n-t}})\\
&\quad +(-1)^{s(q-r)+s}(1^{\otimes s} \otimes d_c g)(f(m \otimes \mathbf{a_{1,p-s}})(\Delta^{(s-1)}(a^{(1)}_{p-s+1} \dots a^{(1)}_{n-t}) \otimes 1) \otimes \mathbf{a^{(2)}_{p-s+1,n-t}})\\
&\quad -(-1)^{s(q-r)+s}(1^{\otimes s+1} \otimes g) \circ (1^{\otimes s-1} \otimes \delta_L)\\
&\qquad (f(m \otimes \mathbf{a_{1,p-s}}))(\Delta^{(s)}(a^{(1)}_{p-s+1} \dots a^{(1)}_{n-t}) \otimes 1) \otimes \mathbf{a^{(2)}_{p-s+1,n-t}})\\
&= [(-1)^{q-r} d_c f \smile g + (-1)^s f \smile d_c g](m \otimes \mathbf{a_{1,n-t}}).
\end{aligned}
$$

Troisième étape:

$$\begin{aligned} D(f \smile g) &= (d_h(f \smile g); (-1)^{n-t} d_c(f \smile g)) \\ &= (d_h f \smile g + (-1)^p f \smile d_h g; (-1)^{p-s} d_c f \smile g + (-1)^{p+q-r} f \smile d_c g) \\ &= Df \smile g + (-1)^p f \smile Dg. \spadesuit \end{aligned}$$

Remarque 4.2 Grâce aux isomorphismes de la Remarque 1.22, le cup-produit sur le bicomplexe définissant $\mathrm{H}_b^*(A, A)$ prend la forme suivante: soient f dans $\mathrm{Hom}_k(A^{\otimes p-s}, A^{\otimes s})$ et g dans $\mathrm{Hom}_k(A^{\otimes q-r}, A^{\otimes r})$, alors

$$\begin{aligned} (f \smile g)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-t}) &= (-1)^{s(q-r)} f(a_1^{(1)} \otimes \ldots \otimes a_{p-s}^{(1)})\ \Delta^{(s-1)}(a_{p-s+1}^{(1)} \ldots a_{n-t}^{(1)}) \\ &\quad \otimes \Delta^{(r-1)}(a_1^{(2)} \ldots a_{p-s}^{(2)})\ g(a_{p-s+1}^{(2)} \otimes \ldots \otimes a_{n-t}^{(2)}). \end{aligned}$$

Remarque 4.3 Remarquons que si $A = kG$ est une algèbre de groupe, alors la cohomologie $\mathrm{H}_b^*(kG, kG)$ est la cohomologie de Hochschild $\mathrm{H}_h^*(kG, k)$ (*cf.* Exemple 2.11) et le cup-produit sur $\mathrm{H}_b^*(kG, kG)$ est le cup-produit de Hochschild sur $\mathrm{H}_h^*(kG, k)$.

Etablissons maintenant le lien avec le produit de Yoneda:

4.2 Cup-produit et produit de Yoneda

Théorème 4.4 Soit A une algèbre de Hopf de dimension finie sur k. Soient M, N et L des bimodules de Hopf sur A. Soit $\varphi_{MN}^* : \mathrm{H}_{A4}^*(M, N) \to \mathrm{Ext}_X^*(M, N)$ l'isomorphisme qui prolonge $\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{A4}(M,N)}$.

Alors, si $f \in \mathrm{H}_{A4}^p(M, L)$ et $g \in \mathrm{H}_{A4}^q(L, N)$, la relation entre les produits est donnée par:

$$\varphi_{MN}^{p+q}(f \smile g) = (-1)^{pq}\, \varphi_{LN}^q(g) \circ \varphi_{ML}^p(f);$$

le cup-produit et le produit de Yoneda sont égaux au signe près.

Démonstration: Nous allons utiliser les propriétés universelles des produits.

Soit f un cocycle représentant un élément de $\mathrm{H}_{A4}^p(M, L)$ et posons $F = \varphi_{ML}^p(f)$. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications $\alpha_N^n = (-1)^{np} f \smile - : \mathrm{H}_{A4}^n(L, N) \to \mathrm{H}_{A4}^{n+p}(M, N)$ et $\beta_N^n = - \circ F : \mathrm{Ext}_X^n(L, N) \to \mathrm{Ext}_X^{n+p}(M, N)$. Nous voulons montrer que les morphismes α_N et β_N se correspondent par φ. Pour cela, nous allons montrer que α et β sont des morphismes de $\delta-$foncteurs universels (*cf.* [W] Section 2.1).

Admettons cela provisoirement; nous voulons prouver que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}_{A4}^n(L, N) \arrow[r, "\alpha_N^n"] \arrow[d, "\varphi_{-N}^n"'] & \mathrm{H}_{A4}^{n+p}(M, N) \arrow[d, "\varphi_{-N}^{n+p}"] \\ \mathrm{Ext}_X^n(L, N) \arrow[r, "\beta_N^n"'] & \mathrm{Ext}_X^{n+p}(M, N) \end{tikzcd}$$

commute pour tout $n \in \mathbb{N}$. Grâce aux propriétés universelles de α et β, il suffira de montrer qu'il commute pour $n = 0$, c'est-à-dire que

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0_{A4}(L,N) \arrow[r, "\alpha^0_N"] \arrow[d, "\varphi^0_{-N}"'] & \mathrm{H}^p_{A4}(M,N) \arrow[d, "\varphi^p_{-N}"] \\
\mathrm{Ext}^0_X(L,N) \arrow[r, "\beta^0_N"'] & \mathrm{Ext}^p_X(M,N)
\end{tikzcd} \tag{4.6}$$

commute, ce que nous ferons par récurrence sur p.

Revenons donc au morphisme α; nous voulons montrer que c'est un morphisme de $\delta-$foncteurs. Pour cela, considérons une suite exacte de bimodules de Hopf $(E) : 0 \to N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N'' \to 0$. Elle induit le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & (L,N')_n \arrow[rr, hook, "(1\otimes u)\circ -"] \arrow[dl, "\alpha^n_{N'}"'] \arrow[dd, dotted, "D_n"] & & (L,N)_n \arrow[rr, two heads, "(1\otimes v)\circ -"] \arrow[dl, "\alpha^n_N"'] \arrow[dd, dotted, "D_n"] & & (L,N'')_n \arrow[dl, "\alpha^n_{N''}"'] \arrow[dd, "D_n"] \\
(M,N')_{n+p} \arrow[rr, hook, "(1\otimes u)\circ -"] \arrow[dd, "D_{n+p}"'] & & (M,N)_{n+p} \arrow[rr, two heads, "(1\otimes v)\circ -"] \arrow[dd, "D_{n+p}"] & & (M,N'')_{n+p} \arrow[dd, "D_{n+p}"] & \\
 & (L,N')_{n+1} \arrow[rr, hook, dotted, "(1\otimes u)\circ -"] \arrow[dl, dotted, "\alpha^{n+1}_{N'}"'] & & (L,N)_{n+1} \arrow[rr, two heads, dotted, "(1\otimes v)\circ -"] \arrow[dl, dotted, "\alpha^{n+1}_N"'] & & (L,N'')_{n+1} \arrow[dl, "\alpha^{n+1}_{N''}"] \\
(M,N')_{n+p+1} \arrow[rr, hook, "(1\otimes u)\circ -"] & & (M,N)_{n+p+1} \arrow[rr, two heads, "(1\otimes v)\circ -"] & & (M,N'')_{n+p+1} &
\end{tikzcd}$$

où nous avons utilisé la notation $(L,N)_n := \bigoplus_{0\leq r\leq n} \mathrm{Hom}_{A-}^{-A}(L \otimes A^{\otimes n-r}, A^{\otimes r} \otimes N)$.

Par construction de l'homomorphisme de connexion, pour voir que α est un morphisme de $\delta-$foncteurs, il suffit de vérifier que tous les carrés de ce diagramme commutent. Le fait que les applications $(1 \otimes u) \circ -$ et $(1 \otimes v) \circ -$ commutent à α se vérifie aisément; elles commutent aussi aux différentielles, en utilisant le fait que u et v sont des morphismes de bimodules de Hopf, donc en particulier de modules à droite et de comodules à gauche. Enfin, α commute à la différentielle parce que cette dernière est une dérivation pour le cup-produit et f est un cocycle.

Maintenant, étudions β. Dans le cas des extensions, l'homomorphisme de connexion est donné par le produit à gauche par (E) ([BKI] Chapitre 10, Proposition 5), qui commute clairement à β (le produit de Yoneda est associatif).

Il reste donc à montrer que le diagramme (4.6) commute. Faisons-le pour $p = 1$. Nous allons utiliser la démonstration du Théorème 3.5 (grâce à la Proposition 3.11).

Nous sommes dans la situation suivante: $f = (f_0, f_1) \in \mathrm{Hom}_{A-}^{-A}(M \otimes A, L) \oplus \mathrm{Hom}_{A-}^{-A}(M, A \otimes L)$ est un 1-cocycle et F est la suite exacte $0 \to L \to L \oplus M \to M \to 0$ dans laquelle les structures de bimodule de Hopf sont déterminées par les matrices

$$\begin{pmatrix} \mu_R^{(L)} & f_0 \\ 0 & \mu_R^{(M)} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \delta_L^{(L)} & f_1 \\ 0 & \delta_L^{(M)} \end{pmatrix}.$$

Si $g \in \mathrm{Hom}_{A4}(L, N)$ est un 0-cocycle, alors $f \smile g$ est un 1-cocycle et $\varphi^1_{MN}(f \smile g)$ est égal à $0 \to N \to N \oplus M \to M \to 0$ où

$$\begin{pmatrix} \mu_R^{(N)} & (f \smile g)_0 \\ 0 & \mu_R^{(M)} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \delta_L^{(N)} & (f \smile g)_1 \\ 0 & \delta_L^{(M)} \end{pmatrix}$$

déterminent les structures de bimodule de Hopf.

De plus, comme dans la preuve de la Proposition 3.11, $g \circ F$ est équivalente à la suite exacte $0 \to N \to N \oplus M \to M \to 0$ avec les structures de bimodule de Hopf determinées par gf_0 et $(1 \otimes g)f_1$. Comme ces dernières applications sont respectivement égales à $(f \smile g)_0$ et $(f \smile g)_1$, ceci montre que $g \circ F$ est équivalente à $\varphi^1_{MN}(f \smile g)$.

Ceci termine le cas $p = 1$. On en déduit que pour tous $f \in \mathrm{H}^1_{A4}(M, L)$ et $g \in \mathrm{H}^n_{A4}(L, N)$,

$$\varphi^n_{MN}(f \smile g) = (-1)^n \varphi^n_{ML}(g) \circ F.$$

Avant de passer au cas général, nous allons établir une propriété d'associativité partielle du cup-produit:

Lemme 4.6 Soient f, g et h des cocycles representant des éléments de $\mathrm{H}^p_{A4}(M, R)$, $\mathrm{H}^q_{A4}(R, L)$ et $\mathrm{H}^0_{A4}(L, N)$. Alors $(f \smile g) \smile h = f \smile (g \smile h)$.

Preuve: En effet, les deux cocycles sont des éléments du type $(u_t)_{t=0,\dots,p+q}$ dans $\bigoplus_{t=0}^{p+q} \mathrm{Hom}_{A-}^{-A}(M \otimes A^{\otimes p+q-t}, A^{\otimes t} \otimes N)$ et, dans les deux cas, la composante de degré t, c'est-à-dire u_t, est égale à

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{r+s=t} (1^{\otimes t} \otimes h) \\ &\quad [(-1)^{s(q-r)} (1^{\otimes s} \otimes g)(f(m \otimes \mathbf{a_{1,p-s}}).\Delta^{(s-1)}(a_{p-s+1} \dots a_{n-t}) \otimes 1) \otimes \mathbf{a^{(2)}_{p-s+1,n-t}}] \\ &\quad = (1^{\otimes t} \otimes h) \circ (f \smile g)_t. \quad \spadesuit \end{aligned}$$

Revenons à la démonstration du théorème: supposons, par récurrence sur p, que f soit un $(p+1)-$cocycle. Nous pouvons alors écrire $F = E_p \circ E_1$, où E_1 est une extension dans $\mathrm{Ext}^1_X(M, R)$ et E_p est une extension dans $\mathrm{Ext}^p_X(R, L)$, pour un bimodule de Hopf R.

D'après le cas $p = 1$, nous avons

$$f = (\varphi^{p+1}_{MN})^{-1}(F) = (\varphi^{p+1}_{MN})^{-1}(E_p \circ E_1) = (-1)^p (\varphi^1_{MR})^{-1}(E_1) \smile (\varphi^p_{RL})^{-1}(E_p). \qquad (4.8)$$

Alors, si g est un 0-cocycle dans $\mathrm{Hom}_{A4}(L, N)$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} (\varphi^{p+1}_{MN})^{-1}(g \circ F) &= (\varphi^{p+1}_{MN})^{-1}(g \circ E_p \circ E_1) \\ &= (-1)^p (\varphi^1_{MR})^{-1}(E_1) \smile (\varphi^p_{RN})^{-1}(g \circ E_p) \\ &= (-1)^p (\varphi^1_{MR})^{-1}(E_1) \smile [(\varphi^p_{RL})^{-1}(E_p) \smile (\varphi^0_{LN})^{-1}(g)] \\ &= (-1)^p [(\varphi^1_{MR})^{-1}(E_1) \smile (\varphi^p_{RL})^{-1}(E_p)] \smile (\varphi^0_{LN})^{-1}(g) \\ &= f \smile g \end{aligned}$$

en utilisant le cas $p = 1$, l'hypothèse de récurrence, le Lemme 4.6 et la relation (4.8).

Le diagramme (4.6) commute donc en général et ceci termine la démonstration. ♠

Remarque 4.8 Si le cup-produit est remplacé par $f \times g = (-1)^{|f|\cdot|g|} f \smile g$, le produit $\times$ est égal au produit de Yoneda, mais D est alors une dérivation *à gauche* pour $\times$.

Conséquence 4.9 Le produit de Yoneda étant associatif, c'est le cas aussi du cup-produit. Ceci peut aussi se démontrer à l'aide de propriétés universelles.

Chapter 5

Homologie cyclique des algèbres de Hopf

Dans [CM99], A. Connes et H. Moscovici ont défini une cohomologie cyclique adaptée aux algèbres de Hopf munies de données supplémentaires (un grouplike et un caractère vérifiant certaines propriétés). Connes et Moscovici avaient déjà introduit la cohomologie cyclique des algèbres de Hopf dans [CM98]; ils l'ont utilisée pour résoudre un problème de géométrie non commutative: le calcul de l'indice d'opérateurs transversalement elliptiques sur des feuilletages. Cette définition peut être légèrement modifiée pour inclure un deuxième grouplike (et donc assouplir les conditions sur l'antipode). Nous étudierons ici la version duale, l'homologie cyclique d'une algèbre de Hopf, par le biais d'un module cyclique. Cette homologie est définie pour une algèbre de Hopf munie d'un grouplike est de *deux* caractères.

Dans [Cr], Crainic donne une autre définition de cette cohomologie cyclique en termes de $X-$complexes. Il calcule certains exemples et construit un complexe de Weil non-commutatif qui est relié à la cohomologie cyclique des algèbres de Hopf. Il considère aussi la version duale, dans la dernière partie de sa thèse.

Cette cohomologie a aussi été considérée par Gorokhovsky dans [Go] pour construire des cocycles cycliques associés à un fibré vectoriel spécifique.

Dans ce chapitre, k est un anneau commutatif unitaire, sauf précision contraire.

5.1 Généralités

Considérons une algèbre de Hopf H et supposons qu'elle soit munie des données supplémentaires suivantes.

Données: On se donne un grouplike π de H et deux caractères α et β sur H, vérifiant $\alpha(\pi) = 1 = \beta(\pi)$ et

$$(\alpha \star S_\pi \star \beta)^2 = \mathrm{id}, \tag{5.2}$$

où S_π désigne l'application qui à un élément a associe $\pi S(a)$; nous étendons la notation $\star$ (produit de convolution) de la Définition 1.5, pour inclure la situation où nous faisons le produit de convolution d'un caractère sur H et d'un endomorphisme de H : ce produit de convolution est donné par la même formule que dans la Définition 1.5. La deuxième identité peut être écrite avec la notation de Sweedler:

$$\alpha(a^{(1)})\alpha(S(a^{(4)}))\pi S^2(a^{(3)})\pi^{-1}\beta(S(a^{(2)}))\beta(a^{(5)}) = a, \ \forall a \in H.$$

Rappelons qu'un module cyclique (*voir* par exemple [Lo] Section 2.5) fournit une théorie d'homologie cyclique. On définit ici un module cyclique $C_n^{(\pi,\alpha,\beta)}(H)$ de la façon suivante:

Définition-Proposition 5.2 *Le module $C_n^{(\pi,\alpha,\beta)}(H)$ est égal à $\mathrm{H}^{\otimes n}$, et*

$$\begin{array}{rcl}
d_i : \mathrm{H}^{\otimes n+1} & \longrightarrow & \mathrm{H}^{\otimes n} \\
a_0 \otimes \ldots \otimes a_n & \mapsto & \begin{cases} \alpha(a_0)a_1 \otimes \ldots \otimes a_n & si\ i = 0, \\ a_0 \otimes \ldots \otimes a_{i-1}a_i \otimes \ldots \otimes a_n & si\ 1 \leq i \leq n, \\ a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}\beta(a_n) & si\ i = n+1, \end{cases} \\
s_i : \mathrm{H}^{\otimes n} & \longrightarrow & \mathrm{H}^{\otimes n+1} \\
a_1 \otimes \ldots \otimes a_n & \mapsto & \begin{cases} a_1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes a_i \otimes \ldots \otimes a_n & si\ 1 \leq i \leq n, \\ a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \otimes 1 & si\ i = n+1,\ et \end{cases} \\
t_n : \mathrm{H}^{\otimes n} & \longrightarrow & \mathrm{H}^{\otimes n} \\
a_1 \otimes \ldots \otimes a_n & \mapsto & \alpha(a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)})S_\pi(a_1^{(2)} \ldots a_n^{(2)}) \otimes a_1^{(3)} \otimes \ldots \otimes a_{n-1}^{(3)}\beta(a_n^{(3)}).
\end{array}$$

*lorsque $n \geq 1$. Si $n = 0$, les applications deviennent $d_0 = \alpha$, $d_1 = \beta$, $s_0 = \eta$ (l'unité de H) et $t_0 = \mathrm{id}_k$. L'homologie cyclique de H est l'homologie de l'un des bicomplexes usuels associés à ce module cyclique, ou, lorsque k contient $\mathbb{Q}$, du complexe de Hochschild soumis à des relations données par l'action cyclique $t_\bullet$ (*cf.* [Lo]). Nous noterons $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(H)$ cette homologie.*

Remarque 5.3 Lorsque nous dualisons la définition de la cohomologie de Connes et Moscovici, nous obtenons le module cyclique $C_\bullet^{(\pi,\varepsilon,\beta)}(H)$, où $(\pi, \varepsilon, \beta)$ vérifie les conditions (5.2), α étant remplacé par ε.

Preuve: La plupart des relations qui doivent être satisfaites par un module cyclique se vérifient aisément; il s'agit des relations suivantes:

$$
\begin{array}{ll}
d_i d_j = d_{j-1} d_i & \text{pour } i < j \\
s_i s_j = s_{j+1} s_j & \text{pour } i \leq j \\
d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & \text{pour } i < j \\ \mathrm{id} & \text{pour } i = j,\ i = j+1 \\ s_j d_{i-1} & \text{pour } i > j+1 \end{cases} & \\
d_i t_n = t_{n-1} d_{i-1} & \text{pour } 1 \leq i \leq n+1 \\
d_0 t_n = d_n & \\
s_i t_n = t_{n+1} s_{i-1} & \text{pour } 2 \leq i \leq n+1 \\
s_1 t_n = t_{n+1}^2\ s_{n+1}. &
\end{array}
$$

La vérification de la dernière relation $t_n^{n+1} = \mathrm{id}$ est plus technique. Nous utiliserons les propriétés suivantes de S_π : $S_\pi(ab) = S_\pi(b)S(a)$ et $S_\pi^2(ab) = S_\pi^2(a)S_\pi^2(b)$. Calculons d'abord le carré de t_n :

$$
\begin{aligned}
t_n^2(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) &= \alpha(a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)})\alpha\left(S_\pi((a_1^{(2)} \ldots a_n^{(2)})^{(3)})(a_1^{(3)} \ldots a_{n-1}^{(3)})^{(1)}\right) \\
&\quad S_\pi\left(S_\pi((a_1^{(2)} \ldots a_n^{(2)})^{(2)})(a_1^{(3)} \ldots a_{n-1}^{(3)})^{(2)}\right) \otimes S_\pi((a_1^{(2)} \ldots a_n^{(2)})^{(1)}) \\
&\quad \otimes (a_1^{(3)})^{(3)} \otimes \ldots \otimes (a_{n-2}^{(3)})^{(3)} \beta((a_{n-1}^{(3)})^{(3)})\beta(a_n^{(3)}) \\
&= \alpha(a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)})\alpha\left(S(a_n^{(4)})S(a_1^{(4)} \ldots a_{n-1}^{(4)})\, a_1^{(5)} \ldots a_{n-1}^{(5)}\right) \\
&\quad S_\pi\left(S_\pi(a_n^{(3)})S(a_1^{(3)} \ldots a_{n-1}^{(3)})\, a_1^{(6)} \ldots a_{n-1}^{(6)}\right) \\
&\quad \otimes S_\pi(a_1^{(2)} \ldots a_n^{(2)}) \otimes a_1^{(7)} \otimes \ldots \otimes a_{n-2}^{(7)}\, \beta(a_{n-1}^{(7)})\beta(a_n^{(5)}) \\
&= \alpha(a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)})\alpha(S(a_n^{(4)}))\ S_\pi^2(a_n^{(3)}) \otimes S_\pi(a_1^{(2)} \ldots a_n^{(2)}) \\
&\quad \otimes a_1^{(3)} \otimes \ldots \otimes a_{n-2}^{(3)}\, \beta(a_{n-1}^{(3)})\beta(a_n^{(5)}).
\end{aligned}
$$

Prenons $2 \leq j \leq n-2$. Supposons par récurrence que:

$$
\begin{aligned}
t_n^j(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) &= \alpha(a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)})\alpha\left(S(a_{n-j+2}^{(4)} \ldots a_n^{(4)})\right)\ S_\pi^2(a_{n-j+2}^{(3)}) \\
&\quad \otimes S_\pi^2(a_{n-j+3}^{(3)}) \otimes \ldots \otimes S_\pi^2(a_n^{(3)}) \otimes S_\pi(a_1^{(2)} \ldots a_n^{(2)}) \\
&\quad \otimes a_1^{(3)} \otimes \ldots \otimes a_{n-j}^{(3)} \beta(a_{n-j+1}^{(3)})\beta(a_{n-j+2}^{(5)} \ldots a_n^{(5)}).
\end{aligned}
$$

Alors

$$\begin{aligned}
t_n^{j+1}(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) &= \alpha(a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)})\alpha\left(S(a_{n-j+2}^{(4)} \ldots a_n^{(4)})\right) \\
&\quad \alpha\left(S_\pi^2((a_{n-j+2}^{(3)})^{(1)}) \ldots S_\pi^2((a_n^{(3)})^{(1)})\right. \\
&\qquad\qquad \left. S_\pi((a_1^{(2)} \ldots a_n^{(2)})^{(3)})(a_1^{(3)})^{(1)} \ldots (a_{n-j}^{(3)})^{(1)}\right) \\
&\quad S_\pi\left(S_\pi^2((a_{n-j+2}^{(3)})^{(2)}) \ldots S_\pi^2((a_n^{(3)})^{(2)})\right. \\
&\qquad\qquad \left. S_\pi((a_1^{(2)} \ldots a_n^{(2)})^{(2)})(a_1^{(3)})^{(2)} \ldots (a_{n-j}^{(3)})^{(2)}\right) \\
&\quad S_\pi^2((a_{n-j+2}^{(3)})^{(3)}) \otimes \ldots \otimes S_\pi^2((a_n^{(3)})^{(3)}) \otimes S_\pi((a_1^{(2)} \ldots a_n^{(2)})^{(1)}) \\
&\quad (a_1^{(3)})^{(3)} \otimes \ldots \otimes (a_{n-j-1}^{(3)})^{(3)}\, \beta((a_{n-j}^{(3)})^{(3)})\beta(a_{n-j+1}^{(3)} a_{n-j+2}^{(5)} \ldots a_n^{(5)}) \\
&= \alpha(a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)})\alpha\left(S(a_{n-j+2}^{(8)} \ldots a_n^{(8)})\right) \\
&\quad \alpha\left(S^2(a_{n-j+2}^{(5)} \ldots a_n^{(5)}))\alpha(S(a_1^{(4)} \ldots a_n^{(4)})a_1^{(5)} \ldots a_{n-j}^{(5)}\right) \\
&\quad S_\pi\left(S_\pi^2(a_{n-j+2}^{(6)} \ldots a_n^{(6)})S_\pi(a_1^{(3)} \ldots a_n^{(3)})a_1^{(6)} \ldots a_{n-j}^{(6)}\right) \\
&\quad S_\pi^2(a_{n-j+2}^{(7)}) \otimes \ldots \otimes S_\pi^2(a_n^{(7)}) \otimes S_\pi(a_1^{(2)} \ldots a_n^{(2)}) \\
&\quad \otimes a_1^{(7)} \otimes \ldots \otimes a_{n-j-1}^{(7)}\, \beta(a_{n-j}^{(7)})\beta(a_{n-j+1}^{(5)})\beta(a_{n-j+2}^{(9)} \ldots a_n^{(9)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_n^{j+1}(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) &= \alpha(a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)})\alpha\left(S(a_{n-j+2}^{(8)} \ldots a_n^{(8)})\right) \\
&\quad \alpha\left(S^2(a_{n-j+2}^{(5)} \ldots a_n^{(5)}))\alpha(S(a_1^{(4)} \ldots a_n^{(4)})a_1^{(5)} \ldots a_{n-j}^{(5)}\right) \\
&\quad S_\pi\left(\pi S^2(a_{n-j+2}^{(6)} \ldots a_n^{(6)})S(a_{n-j+2}^{(3)} \ldots a_n^{(3)})S(a_{n-j+1}^{(3)})\right. \\
&\qquad\qquad \left. S(a_1^{(3)} \ldots a_{n-j}^{(3)})a_1^{(4)} \ldots a_{n-j}^{(4)}\right) \\
&\quad S_\pi^2(a_{n-j+2}^{(7)}) \otimes \ldots \otimes S_\pi^2(a_n^{(7)}) \otimes S_\pi(a_1^{(2)} \ldots a_n^{(2)}) \\
&\quad \otimes a_1^{(7)} \otimes \ldots \otimes a_{n-j-1}^{(7)}\, \beta(a_{n-j}^{(7)})\beta(a_{n-j+1}^{(5)})\beta(a_{n-j+2}^{(9)} \ldots a_n^{(9)}) \\
&= \alpha(a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)})\alpha\left(S(a_{n-j+2}^{(4)} \ldots a_n^{(4)}))\alpha(S(a_{n-j+1}^{(4)})\right) \\
&\quad S_\pi^2(a_{n-j+1}^{(3)}) \otimes S_\pi^2(a_{n-j+2}^{(4)}) \otimes \ldots \otimes S_\pi^2(a_n^{(4)}) \otimes S_\pi(a_1^{(2)} \ldots a_n^{(2)}) \\
&\quad \otimes a_1^{(3)} \otimes \ldots \otimes a_{n-j-1}^{(3)}\, \beta(a_{n-j}^{(3)})\beta(a_{n-j+1}^{(5)})\beta(a_{n-j+2}^{(5)} \ldots a_n^{(5)});
\end{aligned}$$

ceci termine la récurrence. Finalement,

$$
\begin{aligned}
t_n^{n+1}(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) &= t_n^2\left(t_n^{n-1}(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)\right)\\
&= t_n^2\{\alpha(a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)})\alpha\left(S(a_3^{(4)} \ldots a_n^{(4)})\right)\ S_\pi^2(a_3^{(3)}) \otimes S_\pi^2(a_4^{(3)}) \otimes \ldots\\
&\quad \otimes S_\pi^2(a_n^{(3)}) \otimes S_\pi(a_1^{(2)} \ldots a_n^{(2)}) \otimes a_1^{(3)}\beta(a_2^{(3)})\beta(a_3^{(5)} \ldots a_n^{(5)})\}\\
&= \alpha(a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)})\alpha\left(S(a_3^{(4)} \ldots a_n^{(4)})\right)\\
&\quad \alpha\left(S_\pi^2((a_3^{(3)})^{(1)}) \ldots S_\pi^2((a_n^{(3)})^{(1)})S_\pi((a_1^{(2)})^{(3)} \ldots (a_n^{(2)})^{(3)})(a_1^{(3)})^{(1)}\right)\\
&\quad \alpha(S((a_1^{(3)})^{(4)}))\ S_\pi^2((a_1^{(3)})^{(3)})\\
&\quad S_\pi\left(S_\pi^2((a_3^{(3)})^{(2)}) \ldots S_\pi^2((a_n^{(3)})^{(2)})S_\pi((a_1^{(2)})^{(2)} \ldots (a_n^{(2)})^{(2)})(a_1^{(3)})^{(2)}\right)\\
&\quad S_\pi^2((a_3^{(3)})^{(3)}) \otimes \ldots \otimes S_\pi^2((a_n^{(3)})^{(3)})\\
&\quad \beta\left(S_\pi((a_1^{(2)})^{(1)} \ldots (a_n^{(2)})^{(1)})\right) \beta((a_1^{(3)})^{(5)})\beta(a_2^{(5)})\beta(a_3^{(5)} \ldots a_n^{(5)}))\\
&= \alpha(a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)})\alpha\left(S(a_3^{(4)} \ldots a_n^{(4)})\right)\\
&\quad \alpha\left(S^2(a_3^{(5)} \ldots a_n^{(5)})S(a_3^{(4)} \ldots a_n^{(4)})S(a_2^{(4)})S(a_1^{(4)})a_1^{(5)}\right)\\
&\qquad\qquad \alpha(S(a_1^{(8)}))\ S_\pi^2(a_1^{(7)})\\
&\quad \otimes S_\pi\left(\pi S^2(a_3^{(6)} \ldots a_n^{(6)})S(a_3^{(3)} \ldots a_n^{(3)})S(a_2^{(3)})S(a_1^{(3)})a_1^{(6)}\right)\\
&\quad \otimes S_\pi^2(a_3^{(7)}) \otimes \ldots \otimes S_\pi^2(a_n^{(7)})\ \beta\left(S(a_1^{(2)} \ldots a_n^{(2)})\right) \beta(a_1^{(9)}a_2^{(5)} \ldots a_n^{(5)})\\
&= \alpha(a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)})\alpha\left(S(a_3^{(4)} \ldots a_n^{(4)})\right) \alpha(S(a_2^{(4)}))\alpha(S(a_1^{(4)}))\ S_\pi^2(a_1^{(3)})\\
&\quad \otimes S_\pi^2(a_2^{(3)}) \otimes \ldots \otimes S_\pi^2(a_n^{(3)})\ \beta\left(S(a_1^{(2)} \ldots a_n^{(2)})\right) \beta(a_1^{(5)}a_2^{(5)} \ldots a_n^{(5)})\\
&= (\alpha \star S_\pi \star \beta)^2(a_1) \otimes \ldots \otimes (\alpha \star S_\pi \star \beta)^2(a_n),
\end{aligned}
$$

qui est égal à $a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$ d'après la condition (5.2). ♠

Exemple 5.4 Lorsque H est l'algèbre de Hopf triviale k, alors $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(k)$ coïncide avec l'homologie cyclique classique $\mathrm{HC}_*(k)$ (le triplet (π,α,β) est nécessairement égal à $(1, \mathrm{id}_k, \mathrm{id}_k)$).

Exemple 5.5 Supposons que H soit une algèbre de groupe kG. Alors, pour tout élément π dans le centre de G et tous caractères α et β sur H valant 1 en π, nous pouvons considérer l'homologie $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(kG)$. Nous allons étudier des exemples de cette situation dans la Section 5.2.

Lorsque nous changeons les caractères dans un triplet (π,α,β), il arrive que les homologies cycliques associées soient isomorphes:

Proposition 5.6 Soit γ un caractère tel que $\gamma(\pi)=1$. Alors $(\pi,\gamma\star\alpha,\gamma\star\beta)$ vérifie (5.2) si et seulement si $(\gamma\circ S^2)\star\beta=\gamma\star\beta$. Nous avons alors $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(H)\cong\mathrm{HC}_*^{(\pi,\gamma\star\alpha,\gamma\star\beta)}(H)$.

Preuve: Supposons que nous ayons $(\gamma\circ S^2)\star\beta=\gamma\star\beta$. Montrons d'abord que $(\gamma\star\alpha\star S_\pi\star\gamma\star\beta)^2=\mathrm{id}$. Pour cela, calculons $(\gamma\circ S\star\mathrm{id})(\gamma\star(\alpha\star S_\pi\star\beta)^2)$; si nous l'appliquons à un élément h de H, nous obtenons: $\gamma(h^{(1)})\alpha(h^{(2)})\alpha(Sh^{(6)})\gamma(S^3h^{(4)})S_\pi^2(h^{(5)})\beta(Sh^{(3)})\beta(h^{(7)})$, qui est égal à

$$\gamma(h^{(1)})\alpha(h^{(2)})\alpha(Sh^{(6)})\gamma(Sh^{(4)})S_\pi^2(h^{(5)})\beta(Sh^{(3)})\beta(h^{(7)})$$

grâce à l'hypothèse (en groupant $\gamma(S^3h^{(4)})$ et $\beta(Sh^{(3)})$). Le calcul de $(\gamma\star\alpha\star S_\pi\star\gamma\star\beta)^2(h)$ donne la même expression. Ainsi, $(\gamma\star\alpha\star S_\pi\star\gamma\star\beta)^2=(\gamma\circ S\star\mathrm{id})(\gamma\star\mathrm{id})=\mathrm{id}$.

Réciproquement, supposons que $(\gamma\star\alpha\star S_\pi\star\gamma\star\beta)^2$ soit égal à l'identité. En appliquant

$$\varepsilon\circ(\gamma\star\beta\star(\alpha\circ S^{-1})\star(\gamma\circ S^{-1})\star\mathrm{id}\star\gamma\star\alpha)$$

à cette identité, nous obtenons la condition. Notons que l'antipode est bien inversible, d'inverse $\alpha\star(\beta\circ S)\star\pi S\pi^{-1}\star(\alpha\circ S)\star\beta$.

Enfin, lorsque ces conditions sont vérifiées, les applications

$$\begin{array}{rcl}\chi : C^{(\pi,\gamma\star\alpha,\gamma\star\beta)}(H) & \longrightarrow & C^{(\pi,\alpha,\beta)}(H)\\ h_1\otimes\ldots\otimes h_n & \mapsto & \gamma(h_1^{(1)}\ldots h_n^{(1)})\,h_1^{(2)}\otimes\ldots\otimes h_n^{(2)}\\ & \text{et} & \\ \chi' : C^{(\pi,\alpha,\beta)}(H) & \longrightarrow & C^{(\pi,\gamma\star\alpha,\gamma\star\beta)}(H)\\ h_1\otimes\ldots\otimes h_n & \mapsto & \gamma(S(h_1^{(1)}\ldots h_n^{(1)}))\,h_1^{(2)}\otimes\ldots\otimes h_n^{(2)}\end{array}$$

définissent des morphismes de modules cycliques inverses l'un de l'autre. Vérifions d'abord que χ commute à d_0 :

$$\begin{array}{rcl}\chi(d_0(h_0\otimes\ldots\otimes h_n)) & = & \chi((\gamma\star\alpha)(h_0)\,h_1\otimes\ldots\otimes h_n)\\ & = & \gamma(h_0^{(1)})\,\alpha(h_0^{(2)})\,\gamma(h_1^{(1)}\ldots h_n^{(1)})\,h_1^{(2)}\otimes\ldots\otimes h_n^{(2)}\\ & = & d_0(\chi(h_0\otimes\ldots\otimes h_n));\end{array}$$

nous vérifierions de même que χ commute à d_{n+1}, et que χ' commute à d_0 et d_{n+1}. Maintenant, soit $1\leq i\leq n$; montrons que χ commute à d_i :

$$\begin{array}{rcl}\chi(d_i(h_0\otimes\ldots\otimes h_n)) & = & \chi(h_0\otimes\ldots\otimes h_{i-1}h_i\otimes\ldots\otimes h_n)\\ & = & \gamma(h_0^{(1)}\ldots h_{i-1}^{(1)}h_i^{(1)}\ldots h_n^{(1)})\,h_0^{(2)}\otimes\ldots\otimes h_{i-1}^{(2)}h_i^{(2)}\otimes\ldots\otimes h_n^{(2)}\\ & = & d_i(\chi(h_0\otimes\ldots\otimes h_n));\end{array}$$

nous procéderions de même pour χ'. Nous pourrions vérifier de manière similaire que χ

et χ' commutent aux s_i. Montrons maintenant que χ commute à l'action cyclique:

$$\begin{aligned}
\chi(t_n(h_1 \otimes \ldots \otimes h_n)) &= \chi((\gamma \star \alpha)(h_1^{(1)} \ldots h_n^{(1)})\, S_\pi(h_1^{(2)} \ldots h_n^{(2)}) \\
&\quad \otimes h_1^{(3)} \otimes \ldots \otimes h_{n-1}^{(3)}\, (\gamma \star \beta)(h_n^{(3)}) \\
&= \gamma(h_1^{(1)} \ldots h_n^{(1)})\, \alpha(h_1^{(2)} \ldots h_n^{(2)})\, \gamma(S_\pi(h_1^{(4)} \ldots h_n^{(4)}) h_1^{(5)} \ldots h_{n-1}^{(5)}) \\
&\quad S_\pi(h_1^{(3)} \ldots h_n^{(3)}) \otimes h_1^{(6)} \otimes \ldots \otimes h_{n-1}^{(6)}\, \gamma(h_n^{(5)})\, \alpha(h_n^{(6)}) \\
&= \gamma(h_1^{(1)} \ldots h_n^{(1)})\, \alpha(h_1^{(2)} \ldots h_n^{(2)})\, \gamma(S(h_n^{(4)})) \\
&\quad S_\pi(h_1^{(3)} \ldots h_n^{(3)}) \otimes h_1^{(4)} \otimes \ldots \otimes h_{n-1}^{(4)}\, \gamma(h_n^{(5)})\, \alpha(h_n^{(6)}) \\
&= \gamma(h_1^{(1)} \ldots h_n^{(1)})\, \alpha(h_1^{(2)} \ldots h_n^{(2)}) \\
&\quad S_\pi(h_1^{(3)} \ldots h_n^{(3)}) \otimes h_1^{(4)} \otimes \ldots \otimes h_{n-1}^{(4)}\, \alpha(h_n^{(4)}) \\
&= t_n(\chi(h_1 \otimes \ldots \otimes h_n)),
\end{aligned}$$

nous ferions de même pour χ'. Enfin,

$$\chi(\chi'(h_1 \otimes \ldots \otimes h_n)) = \gamma(S(h_1^{(1)} \ldots h_n^{(1)}))\, \gamma(h_1^{(2)} \ldots h_n^{(2)})\, h_1^{(3)} \otimes \ldots \otimes h_n^{(3)} = h_1 \otimes \ldots \otimes h_n$$

donc $\chi \circ \chi' = \mathrm{id}$, et de même $\chi' \circ \chi = \mathrm{id}$.
♠

Conséquence 5.7 Nous pouvons, dans certains cas, nous contenter de considérer un seul caractère non trivial: si $(\alpha \circ S^3) \star \beta = (\alpha \circ S) \star \beta$, alors

$$\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(H) \cong \mathrm{HC}_*^{(\pi,\varepsilon,(\alpha\circ S)\star\beta)}(H).$$

Corollaire 5.8 Soit H une algèbre de Hopf commutative ou cocommutative. Alors

$$\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(H) \cong \mathrm{HC}_*^{(\pi,\varepsilon,(\alpha\circ S)\star\beta)}(H)$$

pour tous α, β et π vérifiant la condition (5.2).

Preuve: En effet, $S^2 = \mathrm{id}$ dans ce cas (*cf.* [Kl] Theorem III.3.4.). ♠

A tout module cyclique est associée une suite exacte longue périodique (SBI) (*cf.* [Lo] 2.2.1), qui fait intervenir l'homologie du module cyclique et l'homologie du module simplicial sous-jacent. Munissons k de la structure de $H-$bimodule suivante:

$$a.\lambda.b = \beta(a)\lambda\alpha(b),\ \forall a, b \in H \text{ and } \lambda \in k.$$

Notons ${}_\beta k_\alpha$ ce bimodule. La suite SBI prend alors la forme suivante:

Proposition 5.9 Il existe une suite exacte (SBI):

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}_n^h(H,\, {}_\beta k_\alpha) \longrightarrow \mathrm{HC}_n^{(\pi,\alpha,\beta)}(H) \longrightarrow \mathrm{HC}_{n-2}^{(\pi,\alpha,\beta)}(H) \longrightarrow \mathrm{H}_{n-1}^h(H,\, {}_\beta k_\alpha) \longrightarrow \cdots$$

(rappelons que H_*^h désigne l'homologie de Hochschild).

Nous allons maintenant considérer le cas d'une algèbre de groupe.

5.2 Homologie cyclique d'une algèbre de groupe

5.2.1 Cas des caractères triviaux; décompositions

Dans cette section, H est une algèbre de groupe kG et les caractères sont tous deux égaux à la counité ε. D. Burghelea, M. Karoubi et O.E. Villamayor (*voir* [B], [KV], [Lo]) ont établi des décompositions de l'homologie cyclique classique d'une algèbre de groupe $\mathrm{HC}_*(kG)$. Nous allons interpréter cela en termes d'homologie cyclique de Connes et Moscovici.

Ecrivons d'abord les morphismes du module cyclique $C_\bullet^{(\pi,\varepsilon,\varepsilon)}(kG)$:

$$\begin{aligned}
d_0(g_0 \otimes \ldots \otimes g_n) &= g_1 \otimes \ldots \otimes g_n, \\
d_i(g_0 \otimes \ldots \otimes g_n) &= g_0 \otimes \ldots \otimes g_{i-1}g_i \otimes \ldots \otimes g_n \text{ si } 1 \leq i \leq n, \\
d_{n+1}(g_0 \otimes \ldots \otimes g_n) &= g_0 \otimes \ldots \otimes g_{n-1}, \\
s_i(g_1 \otimes \ldots \otimes g_n) &= g_1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes g_i \otimes \ldots \otimes g_n \text{ pour } 1 \leq i \leq n, \text{ et} \\
t_n(g_1 \otimes \ldots \otimes g_n) &= \pi(g_1 \ldots g_n)^{-1} \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_{n-1},
\end{aligned}$$

pour tous $g_0, \ldots g_n$ dans G.

Nous pouvons considérer un autre module cyclique associé à G et π :

Définition-Proposition 5.10 ([Lo] 7.4.4.) *Soit G un groupe discret et soit π un élément quelconque de G. On définit un module cyclique $k\Gamma_\bullet(G,\pi)$ comme suit: en tant qu'ensemble, $\Gamma_n(G,\pi)$ est l'ensemble de tous les $(g_0, \ldots, g_n)$ dans G^{n+1} tels que le produit $g_0 \ldots g_n$ soit conjugué à π. Les faces, les dégénérescences et l'action cyclique sont usuelles:*

$$\begin{aligned}
d_i(g_0, \ldots, g_n) &= (g_0, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_n) \text{ pour } 0 \leq i < n, \\
d_n(g_0, \ldots, g_n) &= (g_n g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}), \\
s_i(g_0, \ldots, g_n) &= (g_0, \ldots, g_i, 1, g_{i+1}, \ldots, g_n), \text{ et} \\
t_n(g_0, \ldots, g_n) &= (g_n, g_0, \ldots, g_{n-1}).
\end{aligned}$$

Il y a une décomposition canonique de modules cycliques:

$$C_\bullet(kG) \cong \bigoplus_{\langle\pi\rangle \in \langle G \rangle} k(\Gamma_\bullet(G,\pi))$$

où $C_\bullet(kG)$ désigne le module cyclique classique de kG.

Nous allons maintenant faire le lien avec l'homologie cyclique de Connes et Moscovici:

Proposition 5.11 L'application

$$\begin{aligned}
(\theta_\pi)_n : C_n^{(\pi,\varepsilon,\varepsilon)}(kG_\pi) &\longrightarrow k(\Gamma_n(G,\pi)) \\
g_1 \otimes \ldots \otimes g_n &\mapsto \pi(g_1 \ldots g_n)^{-1} \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_n,
\end{aligned}$$

où G_π est le centralisateur de π dans G, est un morphisme de modules cycliques qui induit un isomorphisme sur les homologies.

Preuve: Il est clair que θ_π est un morphisme simplicial; de plus, comme π est central dans G_π, l'application θ_π commute à l'action cyclique.

Au niveau des modules simpliciaux, θ_π se factorise comme suit:

$$C_\bullet^{(\pi,\varepsilon,\varepsilon)}(kG_\pi) = C_\bullet(G_\pi, k) \xrightarrow{\psi} C_\bullet(G, k\langle\pi\rangle) \xrightarrow{\phi^{-1}} k(\Gamma_\bullet(G,\pi)),$$

où $\psi(g_1, \dots, g_n) = (\pi; g_1, \dots, g_n)$ et $\phi(g_0, \dots, g_n) = (g_1 \dots g_n g_0; g_1, \dots, g_n)$. Le module $k\langle\pi\rangle$ est induit par l'inclusion $G_\pi \hookrightarrow G$ du $G_\pi-$module trivial k. D'après le lemme de Shapiro, ψ est un quasi-isomorphisme. Comme ϕ est aussi un quasi-isomorphisme (*voir* [Lo] 7.4.2.), il en est de même pour θ_π. Finalement, les suites exactes longues SBI pour les deux modules cycliques, et le "lemme des cinq", montrent que θ_π induit un isomorphisme entre les homologies cycliques. ♠

Remarque 5.12 Cette preuve est très proche de la preuve de la décomposition de Burghelea de [Lo] 7.4.5. Ceci permet de voir que les $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\varepsilon,\varepsilon)}(kG_\pi)$ sont bien les facteurs de la décomposition de Burghelea.

En combinant ces deux propositions, on obtient:

Théorème 5.13 Soit G un groupe discret. Il existe un isomorphisme gradué:

$$\mathrm{HC}_*(kG) \cong \bigoplus_{\langle\pi\rangle \in \langle G\rangle} \mathrm{HC}_*^{(\pi,\varepsilon,\varepsilon)}(kG_\pi).$$

Remarque 5.14 En utilisant les résultats de [Lo] (7.4.11 à 7.4.13), nous pouvons donner diverses interprétations et décompositions de $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\varepsilon,\varepsilon)}(kG_\pi)$:

Théorème 5.15 Supposons que l'une des conditions suivantes soit satisfaite:
(i) G est sans torsion,
(ii) G est abélien,
(iii) k contient $\mathbb{Q}$.

Notons $\{\pi\}$ le sous-groupe cyclique de G engendré par π. Alors, si π est d'ordre fini dans G,

$$\mathrm{HC}_*^{(\pi,\varepsilon,\varepsilon)}(kG_\pi) \cong \mathrm{HC}_*(k) \otimes \mathrm{H}_*(G_\pi/\{\pi\};\, {}_\varepsilon k_\varepsilon),$$

et, lorsque π est d'ordre infini dans G,

$$\mathrm{HC}_*^{(\pi,\varepsilon,\varepsilon)}(kG_\pi) \cong \mathrm{H}_*(G/\{\pi\};\, {}_\varepsilon k_\varepsilon).$$

Remarque 5.16 Un résultat similaire a été obtenu dans le cadre cohomologique pour les algèbres de Lie, dans [CM99] et [CM00].

Nous verrons plus loin certaines généralisations des résultats du Théorème 5.15.

Remarque 5.17 Ces interprétations nous permettent aussi de calculer explicitement $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\varepsilon,\varepsilon)}(kG)$ quand G est un groupe cyclique et d'en déduire l'homologie cyclique classique $\mathrm{HC}_*(kG)$:

Proposition 5.18 Soient G un groupe abélien et π un élément de G. Supposons que $G/\{\pi\}$ soit un groupe cyclique d'ordre fini m_π. Soit k un anneau, que l'on considère comme un $k\left(\mathbb{Z}/m_\pi\mathbb{Z}\right)-$module trivial. Notons $Ann(m_\pi) = \{\lambda \in k/\ m_\pi\lambda = 0\}$. Alors:

$$\mathrm{HC}_n^{(\pi,\varepsilon,\varepsilon)}(kG) = \begin{cases} k \oplus Ann(m_\pi)^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ (k/m_\pi k)^{n+1/2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Preuve: Soit σ_π un générateur de $\mathbb{Z}/m_\pi\mathbb{Z}$ et soit $N_\pi = 1 + \sigma_\pi + \sigma_\pi^2 + \ldots + \sigma_\pi^{m_\pi - 1}$ sa norme. L'homologie de $\mathbb{Z}/m_\pi\mathbb{Z}$ à coefficients dans k est donnée comme suit (*voir* [W]):

$$\mathrm{H}_n(\mathbb{Z}/m_\pi\mathbb{Z}; k) = \begin{cases} k/(\sigma_\pi - 1)k = k & \text{si } n = 0, \\ k^G/N_\pi k = k/m_\pi k & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \{\lambda \in k/N_\pi\lambda = 0\}/(\sigma_\pi - 1)k = Ann(m_\pi) & \text{si } n \text{ est pair} > 0 \end{cases}$$

(rappelons que k est le $k\left(\mathbb{Z}/m_\pi\mathbb{Z}\right)-$module trivial). Le Théorème 5.15 fournit le résultat. ♠

Corollaire 5.19 Avec les mêmes notations, nous pouvons exprimer l'homologie cyclique classique de kG :

$$\mathrm{HC}_n(kG) = \begin{cases} k^{\#G} \oplus \left(\bigoplus_{\pi\in G} Ann(m_\pi)^{n/2}\right) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \bigoplus_{\pi\in G}(k/m_\pi k)^{n+1/2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Remarque 5.20 Ceci est en accord avec les résultats de [BACH2].

Remarque 5.21 Nous pouvons considérer certains cas particuliers de ces résultats. Par exemple, si m_π n'est pas un diviseur de zero dans k, alors $\mathrm{HC}_n^{(\pi,\varepsilon,\varepsilon)}(kG)$ est égal à k si n est pair et à $(k/m_\pi k)^{n+1/2}$ si n est impair, donc $\mathrm{HC}_n(kG)$ est égal à $k^{\#G}$ lorsque n est pair et à $\bigoplus_{\pi\in G}(k/m_\pi k)^{n+1/2}$ quand n est impair; si de plus l'ordre de G est premier, cela donne le résultat de [CGV] Theorem 1.

5.2.2 Cas de caractères non-triviaux lorsque G est un groupe cyclique

Supposons dans ce paragraphe que k soit un corps de caractéristique nulle. Posons $H = kG$, avec $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et soient α et β des caractères sur H. Dans un premier temps, nous allons calculer l'homologie de Hochschild $\mathrm{H}_*^h(H,\, {}_\beta k_\alpha)$. Pour cela, nous allons utiliser une résolution projective simplifiée définie dans [CGV]:

$$\cdots \longrightarrow H^{\otimes 2} \xrightarrow{\sum_{i=0}^{m-1} g^i \otimes g^{m-i}} H^{\otimes 2} \xrightarrow{-1\otimes 1 + g \otimes g^{m-1}} H^{\otimes 2} \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H^{\otimes 2} \xrightarrow{\sum_{i=0}^{m-1} g^i \otimes g^{m-i}} H^{\otimes 2} \xrightarrow{-1\otimes 1 + g \otimes g^{m-1}} H^{\otimes 2} \xrightarrow{\mu} H \longrightarrow 0$$

où g est un générateur fixé de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, l'application μ est la multiplication de H et les différentielles sont données par la multiplication par les expressions qui figurent au-dessus des flèches.

Supposons tout d'abord que $\alpha \neq \beta$. En tensorisant la résolution ci-dessus par ${}_\beta k_\alpha$ sur l'algèbre enveloppante H^e, nous obtenons le complexe suivant:

$$\cdots \xrightarrow{\zeta\rho^{-1}-1} {}_\beta k_\alpha \xrightarrow{0} {}_\beta k_\alpha \xrightarrow{\zeta\rho^{-1}-1} \cdots \xrightarrow{0} {}_\beta k_\alpha \xrightarrow{\zeta\rho^{-1}-1} {}_\beta k_\alpha \longrightarrow 0$$

où $\zeta = \alpha(g)$ et $\rho = \beta(g)$ sont des racines $m^{ièmes}$ de l'unité distinctes dans k. L'homologie de ce complexe est nulle: $\mathrm{H}_*^h(H,\ {}_\beta k_\alpha) = 0$.

La suite exacte SBI de la Proposition 5.9 nous permet donc de déterminer l'homologie cyclique de H lorsque $\alpha \neq \beta$.

Nous allons maintenant étudier le cas $\alpha = \beta$ (sans utiliser l'homologie de Hochschild). Soit $\pi = g^s$ un élément de G tel que $\zeta^s = 1$ (c'est-à-dire $\alpha(\pi) = 1$). D'après le Corollaire 5.8, nous avons:

$$\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\alpha)}(kG) \cong \mathrm{HC}_*^{(\pi,\varepsilon,\varepsilon)}(kG).$$

En utilisant la Proposition 5.18, nous obtenons finalement:

Proposition 5.22 Supposons que k soit un corps de caractéristique nulle. L'homologie cyclique de l'algèbre de Hopf $H = k\,(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est égale à:

$$\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(H) = 0 \text{ si } \alpha \neq \beta,$$
$$\mathrm{HC}_n^{(\pi,\alpha,\alpha)}(H) = \begin{cases} k \oplus Ann(m_\pi)^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ (k/m_\pi k)^{n+1/2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

où m_π est l'ordre du groupe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/\{\pi\}$.

5.3 Décomposition de l'homologie cyclique d'une algèbre de Hopf

Certains des résultats de la section précédente se généralisent aux algèbres de Hopf cocommutatives:

Théorème 5.23 ([KR] Theorem 4.1) Soit H une algèbre de Hopf cocommutative. Alors

$$\mathrm{HC}_*^{(1,\varepsilon,\varepsilon)}(H) \cong \mathrm{HC}_*(k) \otimes \mathrm{H}_*^h(H;k).$$

En fait, comme dans le cas des algèbres de groupe, ce résultat peut aussi se généraliser à certains grouplikes non-triviaux et même à des caractères non-triviaux; je remercie Andrea Solotar pour les discussions utiles que nous avons eues concernant le résultat suivant:

Théorème 5.24 Soit H une algèbre de Hopf cocommutative sur un corps k et soit π un grouplike de H, central dans H et d'ordre fini n qui ne soit pas multiple de la caractéristique de k. Alors

$$\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(H) \cong \mathrm{HC}_*(k) \otimes \mathrm{H}_*^h(H;\ {}_\beta k_\alpha).$$

Démonstration: La démonstration qui suit est similaire à celle du cas d'une algèbre de groupe (*cf.* [W] p342). Remarquons que, grâce au Corollaire 5.8, il suffit de montrer la décomposition de $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\varepsilon,\delta)}(H)$.

Tout d'abord, la décomposition du Théorème 5.23 de Khalkhali et Rangipour se généralise aisément à des caractères non-triviaux: il suffit de remplacer l'action cyclique du Lemme 4.1 de [KR] par

$$t_n(h_0 \otimes \ldots \otimes h_n) = (h_0 h_1^{(1)} \ldots h_n^{(1)}) \otimes S(h_1^{(2)} \ldots h_n^{(2)}) \otimes h_1^{(3)} \otimes \ldots \otimes h_{n-1}^{(3)}\, \delta(h_n^{(3)}),$$

et k par ${}_\delta k := {}_\delta k_\varepsilon$. Nous avons alors une décomposition:

$$\mathrm{HC}_*^{(1,\varepsilon,\delta)}(H) \cong \mathrm{HC}_*(k) \otimes \mathrm{H}_*^h(H;\ {}_\delta k). \tag{5.26}$$

Passons maintenant à un grouplike non trivial.

Notons H_π le quotient $H/[\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}(\pi^p - 1)H] = H/K^+H$, où K est l'algèbre du groupe cyclique engendré par π et K^+ est l'intersection de K avec le noyau de ε.

L'application

$$\begin{array}{rcl} \kappa : C_*^{(\pi,\varepsilon,\delta)}(H) & \longrightarrow & C_*^{(1,\varepsilon,\delta)}(H_\pi) \\ h_1 \otimes \ldots \otimes h_n & \mapsto & \overline{h_1} \otimes \ldots \otimes \overline{h_n} \end{array}$$

est un morphisme de modules cycliques. Il induit une application $\mathrm{H}_*^h(H;{}_\delta k) \to \mathrm{H}_*^h(H_\pi;{}_\delta k)$ qui est naturelle, puisque la composition $C_*^{(1,\varepsilon,\delta)}(H) \xrightarrow{\sim} C_*^{(\pi,\varepsilon,\delta)}(H) \longrightarrow C_*^{(1,\varepsilon,\delta)}(H_\pi)$ de morphismes de modules *simpliciaux* avec l'isomorphisme naturel est l'application naturelle de passage au quotient.

Nous allons montrer que cette application est un isomorphisme; pour cela, nous allons utiliser le théorème de Stefan suivant:

Théorème 5.26 ([St] Theorem 4.5) Soit H une algèbre de Hopf, soient A un $H-$comodule algèbre et $B = A^R$ la sous-algèbre des coinvariants de A. Supposons que A/B soit une extension $H-$Galois, c'est-à-dire que $\beta : A \otimes_B A \to A \otimes H,\ x \otimes_B y \mapsto x.y_{(0)} \otimes y_{(1)}$ est un isomorphisme. Supposons aussi que A soit projectif comme $B-$module à droite et à gauche, et soit M un $A-$bimodule.

Alors il existe une suite spectrale

$$E_{p,q}^2 = \mathrm{H}_p^h(H; \mathrm{H}_q^h(B,M)) \Rightarrow \mathrm{H}_{p+q}^h(A,M)$$

qui est naturelle en M.

Appliquons ce théorème à la situation suivante: A est égal à H, qui est un comodule-algèbre sur H_π *via* $h \mapsto h^{(1)} \otimes \overline{h^{(2)}}$. L'algèbre K est une sous-algèbre de Hopf de dimension finie de H, qui est semisimple (c'est l'algèbre d'un groupe fini, qui est semisimple puisque la caractéristique de k ne divise pas l'ordre du groupe cyclique engendré par π), donc d'après [NR] Theorem 4, H est libre comme $K-$module à droite ou à gauche. Enfin, B est l'espace des coinvariants de H, qui est bien égal à K grâce à [M93] Proposition 3.4.3., en utilisant le fait que π est central dans H, et le fait que H est libre comme $K-$module; la démonstration de cette proposition précise aussi que l'extension H/K est $H_\pi-$Galois.

Ainsi, toutes les conditions du Théorème de Stefan sont réunies et il existe une suite spectrale

$$E^2_{p,q} = \mathrm{H}^h_p(H_\pi; \mathrm{H}^h_q(K;_\delta k)) \Rightarrow \mathrm{H}^h_{p+q}(H;_\delta k).$$

Mais comme K est semisimple, l'homologie $\mathrm{H}^h_q(K;_\delta k)$ est nulle sauf quand $q = 0$ et donc la suite spectrale dégénère pour donner un isomorphisme $\mathrm{H}^h_*(H_\pi;_\delta k) \cong \mathrm{H}^h_*(H;_\delta k)$ qui est naturel. Le morphisme de modules cycliques κ induit donc un isomorphisme naturel sur les homologies des modules simpliciaux.

Nous en déduisons, en utilisant la suite exacte longue SBI et le lemme des cinq, les isomorphismes suivants:

$$\mathrm{HC}^{(\pi,\varepsilon,\delta)}_*(H) \cong \mathrm{HC}^{(1,\varepsilon,\delta)}_*(H_\pi) \cong \mathrm{HC}_*(k) \otimes \mathrm{H}^h_*(H_\pi;_\delta k) \cong \mathrm{HC}_*(k) \otimes \mathrm{H}^h_*(H;_\delta k),$$

le deuxième isomorphisme provenant de l'isomorphisme (5.26). ♠

Remarque 5.27 Il existe un résultat partiel pour des algèbres de Hopf plus générales: soit H une algèbre de Hopf et supposons qu'il existe un grouplike σ central dans H ainsi qu'une trace tr qui soit $\sigma-$invariante (*cf.* [KR]) et telle que $tr(\sigma)$ soit inversible dans k. Alors $\mathrm{HC}^{(\sigma,\varepsilon,\varepsilon)}_*(H)$ est facteur direct dans $\mathrm{HC}_*(H)$ ([KR] Théorème 3.1).

Chapter 6

Exemples de calculs de diverses homologies

6.1 Algèbres de carquois tronquées

6.1.1 Une résolution graduée

Soit $\mathfrak{C}$ un carquois fini (c'est-à-dire un graphe orienté fini) et soit $k\mathfrak{C}$ l'algèbre de chemins de $\mathfrak{C}$, ($k\mathfrak{C}$ est le module libre sur k dont la base est l'ensemble des chemins de $\mathfrak{C}$ et la multiplication est donnée par la concaténation des chemins). Pour tout $p \in \mathbb{N}$, notons $\mathfrak{C}_p$ l'ensemble des chemins de longueur p dans $\mathfrak{C}$ et soit $\mathfrak{m}$ l'idéal de $k\mathfrak{C}$ engendré par $\mathfrak{C}_1$. Considérons un idéal admissible I dans $k\mathfrak{C}$ (*i.e.* un idéal tel qu'il existe n avec $\mathfrak{m}^n \subset I \subset \mathfrak{m}^2$). Dans [AG], D. Anick et E.L. Green ont introduit un nouveau carquois Γ qui fournit une résolution projective minimale de $k\mathfrak{C}/I-$modules de $k\mathfrak{C}_0$. Cette résolution est graduée par la longueur des chemins.

Lorsque I est égal à $\mathfrak{m}^n$, pour un entier $n \geq 2$, l'ensemble des sommets de ce carquois Γ est $\mathfrak{C}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{C}_{n-1}$ et les flèches sont données comme suit:

$$\begin{array}{ll} a \leftarrow e & \text{si } a \in \mathfrak{C}_1, e \in \mathfrak{C}_0 \text{ et le terminus de } a \text{ est } e, \\ \gamma \leftarrow a & \text{si } a \in \mathfrak{C}_1, \gamma \in \mathfrak{C}_{n-1} \text{ et le terminus de } \gamma \text{ est l'origine de } a, \\ a \leftarrow \gamma & \text{si } a \in \mathfrak{C}_1, \gamma \in \mathfrak{C}_{n-1} \text{ et le terminus de } a \text{ est l'origine de } \gamma. \end{array}$$

Si $\Gamma^{(i)}$ désigne l'ensemble des chemins de longueur i dans Γ, alors $\Gamma^{(2c)}$ peut être identifié à $\mathfrak{C}_{nc}$ et $\Gamma^{(2c+1)}$ à $\mathfrak{C}_{nc+1}$.

En utilisant cette résolution de D. Anick et E.L. Green, E. Sköldberg a construit dans [Sk] une résolution de l'algèbre $A := k\mathfrak{C}/\mathfrak{m}^n$ pour $n \geq 2$ comme suit:

Théorème 6.1 ([Sk] Theorem 1) Considérons le complexe

$$\mathbf{P}_A : \cdots \xrightarrow{d_{i+1}} P_i \xrightarrow{d_i} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0,$$

où

$$P_i = A \otimes_{k\mathfrak{C}_0} k\Gamma^{(i)} \otimes_{k\mathfrak{C}_0} A,$$

les différentielles sont définies par:

$$d_{2c+1}(u \otimes a_1 \cdots a_{cn+1} \otimes v) = ua_1 \otimes a_2 \cdots a_{cn+1} \otimes v \ - \ u \otimes a_1 \cdots a_{cn} \otimes a_{cn+1}v,$$

$$d_{2c}(u \otimes a_1 \cdots a_{cn} \otimes v)$$

$$= \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} ua_1 \cdots a_j \otimes a_{j+1} \cdots a_{(c-1)n+j+1} \otimes a_{(c-1)n+j+2} \cdots a_{cn}v \ \text{ si } c > 0,$$

et l'augmentation $d_0 : A \otimes_{k\mathfrak{C}_0} A \cong A \otimes_{k\mathfrak{C}_0} k\Gamma^{(0)} \otimes_{k\mathfrak{C}_o} A \longrightarrow A$ est donnée par

$$d_0(u \otimes v) = uv.$$

C'est une résolution projective du $A-$bimodule A qui est graduée par la longueur des chemins.

6.1.2 Homologie de Hochschild à coefficients dans l'algèbre

A l'aide de la résolution du Théorème 6.1, E. Skldberg calcule l'homologie de Hochschild de A à coefficients dans A; dans cette situation, puisque les différentielles du Théorème 6.1 préservent la graduation, les groupes d'homologie de Hochschild sont aussi gradués. Notons $\mathrm{H}^h_{p,q}(A, A)$ la partie homogène de degré q de $\mathrm{H}^h_p(A, A)$.

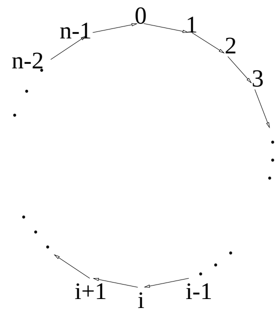
Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des cycles du carquois $\mathfrak{C}$ et pour chaque cycle γ dans $\mathcal{C}$, notons $L(\gamma)$ sa longueur. Le groupe cyclique $\langle t_\gamma \rangle$ d'ordre $L(\gamma)$ agit naturellement sur γ; notons $\overline{\gamma}$ l'orbite de γ sous cette action et $\overline{\mathcal{C}}$ l'ensemble des orbites des cycles du carquois.

Théorème 6.2 ([Sk]) Posons $q = cn + e$, avec $0 \leq e \leq n-1$ (avec $n \geq 2$). Alors l'espace $\mathrm{H}^h_{p,q}(A, A)$ est donné par:

$$\begin{cases} k^{a_q} & \text{si } 1 \leq e \leq n-1 \text{ et } 2c \leq p \leq 2c+1, \\ \bigoplus_{r|q}(k^{(n\wedge r)-1} \oplus Ker(.\frac{n}{n\wedge r} : k \to k))^{b_r} & \text{si } e = 0, \text{ et } 0 < 2c = p, \\ \bigoplus_{r|q}(k^{(n\wedge r)-1} \oplus Coker(.\frac{n}{n\wedge r} : k \to k))^{b_r} & \text{si } e = 0, \text{ et } 0 < 2c-1 = p, \\ k^{\#\mathfrak{C}_0} & \text{si } p = q = 0, \text{ et} \\ 0 & \text{dans tous les autres cas,} \end{cases}$$

où a_q est le nombre de cycles de longueur q dans $\overline{\mathcal{C}}$, l'entier b_r est le nombre de cycles de longueur r dans $\overline{\mathcal{C}}$ qui ne sont pas des puissances de cycles plus courts, et $n \wedge r$ est le pgcd de n et r.

Exemple 6.3 Supposons que $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{(n)}$ soit la couronne de longueur n, c'est-à-dire le carquois à n sommets $e_0, \ldots, e_{n-1}$ et n flèches $a_0, \ldots, a_{n-1}$, chaque flèche a_i allant du sommet e_i au sommet e_{i+1} si $0 \leq i \leq n-2$, et la flèche a_{n-1} allant de e_{n-1} à e_0, comme sur la figure:



L'algèbre $\Lambda_n := k\mathfrak{C}^{(n)}/\mathfrak{m}^n$ est appelée *algèbre de Taft*.

L'homologie de Hochschild de l'algèbre de Taft Λ_n est donnée par:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^h_{p,cn}(\Lambda_n, \Lambda_n) &= k^{n-1} \text{ si } p = 2c \text{ ou } p = 2c-1 \\ \mathrm{H}^h_{0,0}(\Lambda_n, \Lambda_n) &= k^n \\ \mathrm{H}^h_{p,q}(\Lambda_n, \Lambda_n) &= 0 \text{ dans tous les autres cas.} \end{aligned}$$

Remarque 6.4 La cohomologie de Hochschild de ces algèbres de carquois tronquées a été calculée dans [BLM], [Li] et [EH].

Nous pouvons aussi considérer les cas où $n = 0$ et $n = 1$.

Lorsque $n = 1$, l'algèbre $k\mathfrak{C}/\mathfrak{m}$ est isomorphe à $k\mathfrak{C}_0 \cong \times_{s\in\mathfrak{C}_0} ks$, et donc

$$\mathrm{H}^h_p(k\mathfrak{C}/\mathfrak{m}, k\mathfrak{C}/\mathfrak{m}) = \bigoplus_{s\in\mathfrak{C}_0} \mathrm{H}^h_p(ks, ks) = \begin{cases} \bigoplus_{s\in\mathfrak{C}_0} ks & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p > 0. \end{cases}$$

Lorsque $n = 0$, nous pouvons énoncer:

Proposition 6.5 L'homologie de Hochschild de $k\mathfrak{C}$ est donnée par:

$$\begin{cases} \mathrm{H}^h_0(k\mathfrak{C}, k\mathfrak{C}) = k\overline{\mathcal{C}}, \\ \mathrm{H}^h_1(k\mathfrak{C}, k\mathfrak{C}) = \{\sum_{i=0}^{L(\gamma)-1} t^i_\gamma(\gamma)/\ \gamma \in \overline{\mathcal{C}}, L(\gamma) \geq 1\} \\ \mathrm{H}^h_p(k\mathfrak{C}, k\mathfrak{C}) = 0 \text{ si } p \geq 2. \end{cases}$$

Preuve: Nous allons utiliser la résolution suivante (*voir* par exemple [C91]):

Lemme 6.6 ([C91] Theorem 2.5) Le complexe qui suit est une résolution projective de $k\mathfrak{C}$−bimodules de $k\mathfrak{C}$:

$$\ldots 0 \longrightarrow k\mathfrak{C} \otimes_{k\mathfrak{C}_0} k\mathfrak{C}_1 \otimes_{k\mathfrak{C}_0} k\mathfrak{C} \longrightarrow k\mathfrak{C} \otimes_{k\mathfrak{C}_0} k\mathfrak{C} \longrightarrow k\mathfrak{C} \longrightarrow 0,$$

la première différentielle non nulle associant $xa\otimes y - x\otimes ay$ à $x\otimes a\otimes y$, la suivante associant xy à $x \otimes y$.

En tensorisant par $k\mathfrak{C}$ sur $k\mathfrak{C}^e$, on obtient le complexe suivant:

$$\begin{array}{ccccc} \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow & k\mathfrak{C} \otimes_{k\mathfrak{C}_0^e} k\mathfrak{C}_1 & \xrightarrow{\delta} & k\mathcal{C} & \longrightarrow 0. \\ & \nu \otimes a & \mapsto & \nu a - a\nu & \end{array}$$

L'espace $\mathrm{H}_0^h(k\mathfrak{C}, k\mathfrak{C})$ est engendré par les cycles de $\mathcal{C}$, soumis aux relations données par l'image de δ. Comme $\delta(\nu \otimes a) = \nu a - t_{\nu a}(\nu a)$, les relations identifient deux cycles qui sont dans la même orbite, et $\mathrm{H}_0^h(k\mathfrak{C}, k\mathfrak{C}) = k\overline{\mathcal{C}}$.

Ce complexe est $\overline{\mathcal{C}}-$gradué; ainsi, pour trouver $\mathrm{H}_1^h(k\mathfrak{C}, k\mathfrak{C}) = \ker \delta$, il suffit de considérer les éléments du type $x = \sum_{i=0}^{L(\gamma)-1} \lambda_i t_\gamma^i(\gamma)$, où $\nu \otimes a$ est identifié à νa, et les λ_i sont dans k. Or $\delta(x) = 0$ si et seulement si $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{L(\gamma)-1}$, et le résultat en découle. ♠

6.1.3 Homologie de Hochschild à coefficients dans ${}_\beta k_\alpha$

La résolution du Théorème (6.1) nous permet aussi de calculer d'autres homologies de Hochschild, utiles pour déterminer $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(A)$. Soient α et β des caractères sur A; nous allons calculer l'homologie de Hochschild $\mathrm{H}_*^h(A,\, {}_\beta k_\alpha)$, lorsque $n \geq 2$. Elle est égale à $\mathrm{Tor}_*^{A^e}(A,\, {}_\beta k_\alpha)$, c'est-à-dire à l'homologie du complexe ${}_\beta k_\alpha \otimes_{A^e} \mathbf{P}_A$. Ce complexe est isomorphe au complexe ${}_\beta k_\alpha \otimes_{k\mathfrak{C}_0^e} \Gamma^{(\bullet)}$ muni des différentielles suivantes:

$$\begin{array}{rcl} {}_\beta k_\alpha \otimes_{k\mathfrak{C}_0^e} \Gamma^{(2c)} & \longrightarrow & {}_\beta k_\alpha \otimes_{k\mathfrak{C}_0^e} \Gamma^{(2c-1)} \\ 1 \otimes b_1 \ldots b_{nc} & \mapsto & \sum_{j=0}^{n-1} \alpha(b_{(c-1)n+j+2} \ldots b_{cn}) \beta(b_1 \ldots b_j) \otimes b_{j+1} \ldots b_{(c-1)n+j+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} {}_\beta k_\alpha \otimes_{k\mathfrak{C}_0^e} \Gamma^{(2c+1)} & \longrightarrow & {}_\beta k_\alpha \otimes_{k\mathfrak{C}_0^e} \Gamma^{(2c)} \\ 1 \otimes b_1 \ldots b_{nc+1} & \mapsto & \alpha(b_1) \otimes b_2 \ldots b_{nc+1} - \beta(b_{nc+1}) \otimes b_1 \ldots b_{nc}. \end{array}$$

On remarque que, dans ce cas, les différentielles ne préservent pas la graduation.

Maintenant, précisons les caractères sur A : pour chaque sommet e_i, il y a exactement un caractère α_i qui lui correspond; il vaut 1 en e_i, et 0 en tout autre chemin de $\mathfrak{C}$ (en effet, les e_i sont des idempotents orthogonaux, et les flèches ont soit des extrémités différentes, soit une puissance nulle).

En particulier, les caractères s'annulent sur tous les chemins de longueur supérieure ou égale à 1, donc les différentielles sont nulles. Ainsi, l'homologie est:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}_{2c}^h(A,\, {}_\beta k_\alpha) & = & {}_\beta k_\alpha \otimes_{k\mathfrak{C}_0^e} k\mathfrak{C}_{nc} \\ \mathrm{H}_{2c+1}^h(A,\, {}_\beta k_\alpha) & = & {}_\beta k_\alpha \otimes_{k\mathfrak{C}_0^e} k\mathfrak{C}_{nc+1} \end{array}$$

(en utilisant les identifications de la Section 6.1.1).

Exemple 6.7 Pour les algèbres de Taft Λ_n, les résultats deviennent:

$$\begin{cases} \mathrm{H}^h_{2c}(\Lambda_n,\ {}_\beta k_\alpha) = k \\ \mathrm{H}^h_{2c+1}(\Lambda_n,\ {}_\beta k_\alpha) = 0 \end{cases} \quad \text{si } \alpha = \beta,$$

$$\begin{cases} \mathrm{H}^h_{2c}(\Lambda_n,\ {}_\beta k_\alpha) = 0 \\ \mathrm{H}^h_{2c+1}(\Lambda_n,\ {}_\beta k_\alpha) = k \end{cases} \quad \text{si } \alpha = \alpha_{i+1} \text{ et } \beta = \alpha_i,$$

et dans tous les autres cas, l'homologie est nulle en tous degrés.

Remarque 6.8 Nous pouvons là encore calculer l'homologie $\mathrm{H}^h_*(A,\ {}_\beta k_\alpha)$ lorsque n est égal à 0 ou 1.

Si $n = 0$, nous allons à nouveau utiliser la résolution du Lemme 6.6. En la tensorisant par ${}_\beta k_\alpha$ sur $k\mathfrak{C}^e$, nous obtenons le complexe suivant:

$$\ldots 0 \longrightarrow {}_\beta k_\alpha \otimes_{k\mathfrak{C}_0^e} k\mathfrak{C}_1 \longrightarrow {}_\beta k_\alpha \otimes_{k\mathfrak{C}_0^e} k\mathfrak{C}_0 \longrightarrow 0.$$

Toutes les applications de ce complexe sont nulles (les caractères s'annulent sur les flèches). Etant donné un caractère χ, notons e_χ l'unique sommet tel que $\chi(e_\chi) = 1$. Alors $\mathrm{H}^h_0(k\mathfrak{C},\ {}_\beta k_\alpha) = {}_\beta k_\alpha \otimes_{k\mathfrak{C}_0^e} k\mathfrak{C}_0$ est égal à 0 si $\alpha \neq \beta$ et à ke_α si $\alpha = \beta$ et $\mathrm{H}^h_1(k\mathfrak{C}) = {}_\beta k_\alpha \otimes_{k\mathfrak{C}_0^e} k\mathfrak{C}_0 \cong e_\alpha\, k\mathfrak{C}_1\, e_\beta$.

Lorsque $n = 1$, en considérant le carquois formé des sommets de $\mathfrak{C}$, nous avons $k\mathfrak{C}/\mathfrak{m} \cong k\mathfrak{C}_0$ en tant qu'algèbres. Utilisons à nouveau le Lemme 6.6: la résolution de $k\mathfrak{C}/\mathfrak{m}$ est donc

$$\ldots 0 \to k\mathfrak{C}_0 \otimes_{k\mathfrak{C}_0} k\mathfrak{C}_0 \to k\mathfrak{C}_0 \to 0$$

et $\mathrm{H}^h_*(k\mathfrak{C}/\mathfrak{m},\ {}_\beta k_\alpha)$ est l'homologie du complexe

$$\ldots 0 \to {}_\beta k_\alpha \otimes_{k\mathfrak{C}_0^e} k\mathfrak{C}_0 \to 0.$$

Or ${}_\beta k_\alpha \otimes_{k\mathfrak{C}_0^e} k\mathfrak{C}_0 \cong \times_{s\in\mathfrak{C}_0}\, {}_\beta k_\alpha \otimes_{k\mathfrak{C}_0^e} ks$ et ${}_\beta k_\alpha \otimes_{k\mathfrak{C}_0^e} ks = k$ si $\alpha = \beta$ ou si les deux caractères sont différents de α_s; dans les autres cas, ${}_\beta k_\alpha \otimes_{k\mathfrak{C}_0^e} ks = 0$.

Par conséquent, nous avons

$$\begin{cases} \mathrm{H}^h_0(k\mathfrak{C}/\mathfrak{m},\ {}_\beta k_\alpha) = k^{\#\mathfrak{C}_0} & \text{si } \alpha = \beta, \\ \mathrm{H}^h_0(k\mathfrak{C}/\mathfrak{m},\ {}_\beta k_\alpha) = k^{\#\mathfrak{C}_0 - 2} & \text{si } \alpha \neq \beta, \text{ et} \\ \mathrm{H}^h_p(k\mathfrak{C}/\mathfrak{m},\ {}_\beta k_\alpha) = 0 & \text{pour tout } p > 0 \text{ et pour tous } \alpha \text{ et } \beta. \end{cases}$$

6.1.4 Homologie cyclique classique

Dans ce paragraphe, k est un anneau commutatif qui contient $\mathbb{Q}$. Lorsque A est une $k-$algèbre graduée, la suite exacte SBI de Connes se décompose de la façon suivante:

Théorème 6.9 ([Lo] Theorem 4.1.13) Soit A une $k-$algèbre unitaire graduée positivement contenant $\mathbb{Q}$. Posons $\overline{\mathrm{H}}^h_p(A) = \mathrm{H}^h_p(A,A)/\mathrm{H}^h_p(A_0,A_0)$ et $\overline{\mathrm{HC}}_p(A) = \mathrm{HC}_p(A)/\mathrm{HC}_p(A_0)$. La suite exacte SBI de Connes pour $\overline{\mathrm{HC}}$ se décompose en suites exactes courtes:

$$0 \to \overline{\mathrm{HC}}_{p-1}(A) \to \overline{\mathrm{H}}^h_p(A) \to \overline{\mathrm{HC}}_p(A) \to 0.$$

Ceci va nous permettre de calculer l'homologie cyclique classique des algèbres de carquois tronquées.

Considérons d'abord les cas $n = 0$ et $n = 1$. En combinant les résultats pour l'homologie de Hochschild et le Théorème 6.9, nous obtenons:

Proposition 6.10 L' homologie cyclique de $k\mathfrak{C}$ et de $k\mathfrak{C}/\mathfrak{m}$ est donnée par:

$$\begin{aligned} \mathrm{HC}_{2c}(k\mathfrak{C}/\mathfrak{m}) &= \oplus_{s\in\mathfrak{C}_0} ks \\ \mathrm{HC}_{2c+1}(k\mathfrak{C}/\mathfrak{m}) &= 0 \\ &\text{et} \\ \mathrm{HC}_0(k\mathfrak{C}) &= k\overline{\mathcal{C}} \\ \mathrm{HC}_{2c}(k\mathfrak{C}) &= k^{\#\mathfrak{C}_0} \\ \mathrm{HC}_{2c+1}(k\mathfrak{C}) &= 0, \end{aligned}$$

pour tout $c \in \mathbb{N}$.

Le cas $n \geq 2$ fait intervenir les mêmes méthodes:

Proposition 6.11 Supposons que $n \geq 2$. Alors:

$$\begin{aligned} \dim_k \mathrm{HC}_{2c}(k\mathfrak{C}/\mathfrak{m}^n) &= \#\mathfrak{C}_0 + \sum_{e=1}^{n-1} a_{cn+e} + \sum_{\substack{r\mid(c+1)n \\ n\notin r\mathbb{N}}} (r\wedge n-1)b_r \\ \dim_k \mathrm{HC}_{2c+1}(k\mathfrak{C}/\mathfrak{m}^n) &= \sum_{r\mid n}(r-1)b_r. \end{aligned}$$

Preuve: Tout d'abord, A_0 est égal à $k\mathfrak{C}_0$, et nous connaissons donc les homologies de A_0 (*voir* la Proposition 6.10). De plus, nous avons $\mathrm{HC}_0(A) = \mathrm{H}_0^h(A,A) = k^{\#\mathfrak{C}_0+\sum_{e=1}^{n-1} a_e}$. Alors, en utilisant le Théorème 6.9 et les résultats sur l'homologie de Hochschild, nous obtenons la formule suivante:

$$\dim_k \mathrm{HC}_{2c}(A) + \dim_k \mathrm{HC}_{2c+1}(A) = \#\mathfrak{C}_0 + \sum_{r\mid(c+1)n} (r\wedge n-1)b_r + \sum_{e=1}^{n-1} a_{cn+e}.$$

En particulier, $\dim_k \mathrm{HC}_1(A) = \sum_{r\mid n}(r-1)b_r$.

On conclut par récurrence. ♠

Corollaire 6.12 Lorsque $\mathfrak{C}$ est la couronne $\mathfrak{C}^{(n)}$, ces résultats deviennent:

$$\begin{cases} \mathrm{HC}_{2c}(\Lambda_n) = k^n, \\ \mathrm{HC}_{2c+1}(\Lambda_n) = k^{n-1} \text{ pour } c \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Exemple 6.13 Soit A l'algèbre quotient $k[X]/(X^n)$. Elle admet une présentation par carquois et relations (le carquois a un sommet et une boucle) et son homologie cyclique est k^n en degré pair, et s'annule en degré impair.

Remarque 6.14 Ceci est en accord avec les résultats généraux de [BACH] et [BACH2].

6.1.5 Homologie cyclique de Connes et Moscovici

Maintenant, k est un anneau commutatif qui contient une racine primitive $n^{ième}$ de l'unité ζ. L'algèbre de Taft Λ_n est alors une algèbre de Hopf (*voir* [C93]); ses morphismes de structure sont déterminés par:

$$\begin{aligned} \varepsilon(e_i) &= \delta_{i,0}, & \varepsilon(a_i) &= 0, \\ \Delta(e_i) &= \sum_{j+l\equiv i\ [n]} e_j \otimes e_l, & \Delta(a_i) &= \sum_{j+l\equiv i\ [n]} (e_j \otimes a_l + \zeta^l a_j \otimes e_l), \\ S(e_i) &= e_{-i}, & S(a_i) &= -\zeta^{i+1} a_{-i-1}, \end{aligned}$$

où δ est le symbole de Kronecker et les indices sont écrits modulo n. Nous pouvons donc considérer l'homologie cyclique $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(\Lambda_n)$ de Connes et Moscovici.

Pour cela, il nous faut déterminer quels sont les caractères et grouplikes (π, α, β) qui satisfont aux conditions (5.2). Les n grouplikes de Λ_n sont:

$$\pi_i = \sum_{l=0}^{n-1} \zeta^{il} e_l.$$

Un triplet $(\pi_i, \alpha_u, \alpha_v)$ satisfait à (5.2) si et seulement si $ui \equiv 0 \pmod n$, $vi \equiv 0 \pmod n$ et $v - u + 1 + i \equiv 0 \pmod n$. Par exemple, lorsque $u = v$, cela signifie que i est nécessairement égal à -1 et u et v sont nuls, c'est-à-dire que $\alpha_u = \varepsilon = \alpha_v$; lorsque $v = u - 1$, cela signifie que i est égal à 0, c'est-à-dire que π_i est égal à 1. Nous n'aurons pas besoin de connaître les détails des autres possibilités.

Grâce à la suite exacte SBI pour $\mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}$ (Proposition 5.9) et à l'Exemple 6.7, nous obtenons les résultats suivants par récurrence:

Proposition 6.15

$$\begin{aligned} \mathrm{HC}_p^{(\pi_{n-1},\varepsilon,\varepsilon)}(\Lambda_n) &= \begin{cases} k^{p/2+1} & \text{si } p \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } p \text{ est impair,} \end{cases} \\ \mathrm{HC}_p^{(1,\alpha_u,\alpha_{u-1})}(\Lambda_n) &= \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est pair,} \\ k^{p+1/2} & \text{si } p \text{ est impair,} \end{cases} \quad \text{pour chaque } u \in \{0, \ldots, n-1\}, \\ \mathrm{HC}_*^{(\pi,\alpha,\beta)}(\Lambda_n) &= \quad 0 \quad \text{dans tous les autres cas.} \end{aligned}$$

Remarque 6.16 Notons qu'aucune de ces homologies n'est facteur direct dans l'homologie cyclique classique $\mathrm{HC}_*(\Lambda_n)$.

Cependant, il serait intéressant de voir si ces deux homologies peuvent être reliées grâce à une suite spectrale.

6.2 Algèbres d'Auslander Γ_{Λ_n} des algèbres de Taft Λ_n

L'objet de cette partie est de calculer l'homologie cyclique et les caractères de Chern des algèbres de Taft Λ_n et de leurs algèbres d'Auslander Γ_{Λ_n}, de façon à étudier une éventuelle influence de la structure d'algèbre de Hopf de Λ_n sur ces objets.

Les algèbres d'Auslander sont utiles lorsqu'on considère les algèbres artiniennes de type de représentation fini, puisqu'il y a une bijection entre les classes d'équivalence Morita de telles algèbres et les classes d'équivalence Morita d'algèbres d'Auslander (*cf.* [ARS]).

La structure d'algèbre de Hopf d'une algèbre Λ munit les groupes de Grothendieck $K_0(\Lambda)$ et $\overline{K}_0(\Lambda)$ des classes d'isomorphisme des modules projectifs (*resp.* de tous les modules) indécomposables d'une structure supplémentaire, *via* la comultiplication de Λ. De plus, il y a une correspondance biunivoque entre les modules indécomposables sur une algèbre et les modules projectifs indécomposables sur son algèbre d'Auslander; dans le cas d'une algèbre de Hopf, le groupe de Grothendieck des $\Gamma_\Lambda-$modules projectifs est ainsi muni d'une structure multiplicative. Cependant, cette correspondance ne préserve pas les $k-$modules sous-jacents et cette structure multiplicative ne reçoit pas d'interprétation naturelle.

Ici, nous étudions l'exemple des algèbres de Taft; ce sont des algèbres de Hopf qui ne sont ni commutatives, ni cocommutatives. Elles sont intéressantes pour diverses raisons; Λ_p est un exemple d'algèbre de Hopf non-semisimple dont la dimension est le carré d'un nombre premier (*cf.* [M98]). Elles sont de type de représentation fini; de plus, lorsque n est impair, Λ_n est isomorphe au demi-groupe quantique $u_q^+(\mathfrak{sl}_2)$ (q est une racine primitive $n^{ième}$ de l'unité) et c'est le seul demi-groupe quantique $u_q^+(\mathfrak{g})$ en une racine de l'unité qui n'est pas de type de représentation sauvage (*cf.* [C97]). D'autre part, Λ_n n'est pas quasi-triangulaire, mais son groupe de Grothendieck est néanmoins un anneau commutatif (*cf.* [C93], [Gu]).

Ces exemples montrent que la structure d'algèbre de Hopf de Λ_n n'induit pas une structure multiplicative naturelle sur son homologie cyclique. Il y a bien un produit, cependant, qui est obtenu en transportant celui de $K_0(\Lambda_n)$ à l'aide des caractères de Chern, qui sont surjectifs pour les algèbres Λ_n et Γ_{Λ_n}.

Dans cette partie, k est un corps algébriquement clos.

6.2.1 Le carquois de l'algèbre d'Auslander

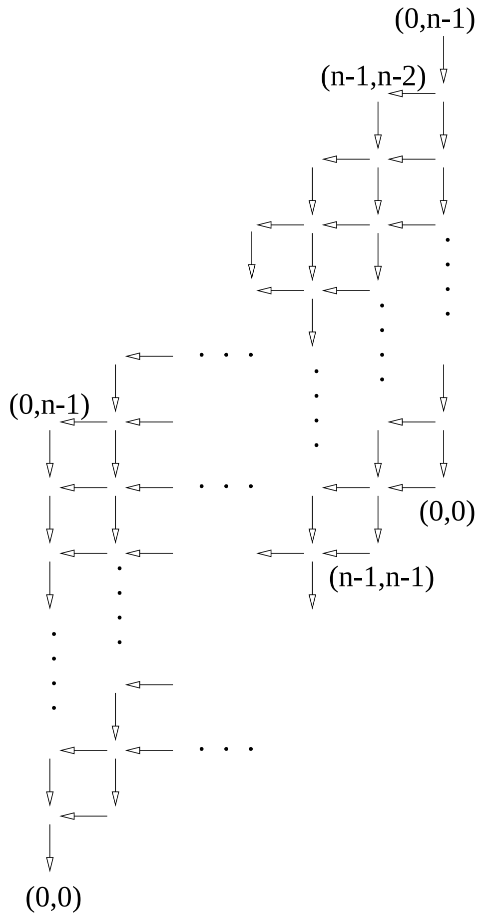
Définition 6.17 *Soit Λ une algèbre basique de dimension finie sur un corps algébriquement clos k, tel que le nombre de classes d'isomorphisme de modules indécomposables soit fini. L'algèbre d'Auslander de Λ est:*

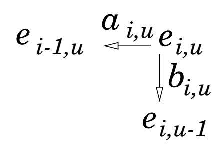
$$\Gamma_\Lambda := End_\Lambda(\oplus_{M\in \mathrm{ind}M} M)^{op},$$

où ind$M$ *est l'ensemble des classes d'isomorphisme de modules indécomposables.*

L'algèbre Γ_Λ a un carquois, qui est l'opposé du carquois d'Auslander-Reiten de Λ. Les relations sont données par les relations de maille (*voir* [ARS] p232).

Lorsque l'algèbre Λ est égale à l'algèbre de Taft Λ_n, avec $n \geq 1$, le carquois prend la forme suivante:





Dans cette figure, les bords verticaux extérieurs sont identifiés (le carquois est sur un cylindre: *voir* [GR]). Notons Q ce carquois, $\{e_{i,u}/(i,u) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ l'ensemble de ses sommets et $\{a_{i,u}\,;\, b_{i,u}/\,(i,u) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ l'ensemble de ses flèches, comme dans la figure ci-dessus.

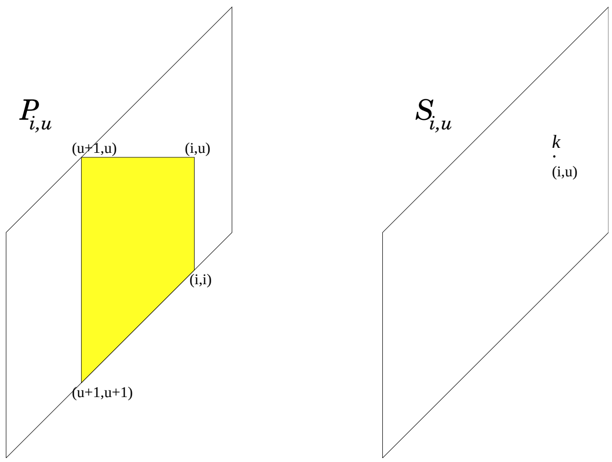
Les relations de maille sur ce carquois sont: $a_{i,i-2}\, b_{i,i-1} = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (la composée des deux flèches d'un 'triangle' situé sous la diagonale supérieure est nulle) et $a_{i,iu-1} b_{i,u} + b_{i-1,u} a_{i,u} = 0$ pour tous i et u dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (les carrés sont anticommutatifs).

L'algèbre Γ_{Λ_n} est le quotient de l'algèbre des chemins kQ par l'idéal engendré par ces relations.

Remarque 6.18 L'algèbre Γ_{Λ_n} n'est pas une algèbre de Hopf, puisque son carquois n'est pas un graphe de Cayley (*voir* [GrS] Theorem 2.3, et [CR97]). Un autre argument peut être donné: si Γ_{Λ_n} était une algèbre de Hopf, elle serait semisimple en tant qu'algèbre (*cf.* [M93]), donc de dimension homologique 0 ou ∞; or ici, cette dimension n'est pas nulle, puisque Λ_n elle-même n'est pas semisimple ([ARS] Proposition 5.2 p211); elle est donc ∞. Cependant, la dimension homologique d'une algèbre d'Auslander est au plus 2 en général (*voir* [ARS]).

6.2.2 Résolutions projectives de Γ_{Λ_n}−modules simples

Soit $P_{i,u}$ un Γ_{Λ_n}−module projectif indécomposable au sommet $e_{i,u}$ et soit $S_{i,u} = \mathrm{top}(P_{i,u}) := P_{i,u}/\mathrm{rad}(P_{i,u})$ le module simple correspondant. Ces modules sont décrits sur le carquois par:



où chaque sommet de la partie grisée est représenté par k et chaque flèche de cette partie est représenté par id. Partout ailleurs, les sommets et les flèches sont représentés par 0 (*cf.* [GR] Section 2).

Pour calculer l'homologie de Hochschild de Γ_{Λ_n}, nous utiliserons une résolution de Happel (*cf.* Théorème 6.21). Pour cela, il nous faudra calculer les $\mathrm{Ext}_{\Gamma_{\Lambda_n}}$ entre modules simples; auparavant, déterminons les résolutions projectives minimales des Γ_{Λ_n}−modules simples:

Proposition 6.19 Les résolutions projectives des modules simples qui sont obtenues par couvertures projectives successives sont:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & \longrightarrow & P_{i-1,i} & \longrightarrow & P_{i,i} & \longrightarrow & S_{i,i} & \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow & P_{i-1,i-2} & & \longrightarrow & P_{i,i-2} & \longrightarrow & P_{i,i-1} & \longrightarrow & S_{i,i-1} & \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow & P_{i-1,i-j-1} & & \longrightarrow & P_{i-1,i-j} \oplus P_{i,i-j-1} & \longrightarrow & P_{i,i-j} & \longrightarrow & S_{i,i-j} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

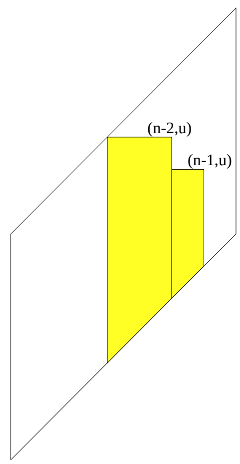
avec $2 \leq j \leq n-1$.

Preuve: Il suffit de considérer les $S_{n-1,u}$, puisque les autres cas peuvent être obtenus en translatant le carquois le long du cylindre dans lequel il est contenu.

Représentons maintenant le radical du module $P_{n-1,u}$: la représentation est obtenue grâce à la suite exacte

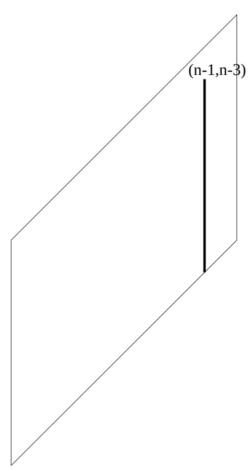
$$0 \longrightarrow \mathrm{rad}P_{n-1,u} \longrightarrow P_{n-1,u} \longrightarrow S_{n-1,u} \longrightarrow 0$$

comme suit:



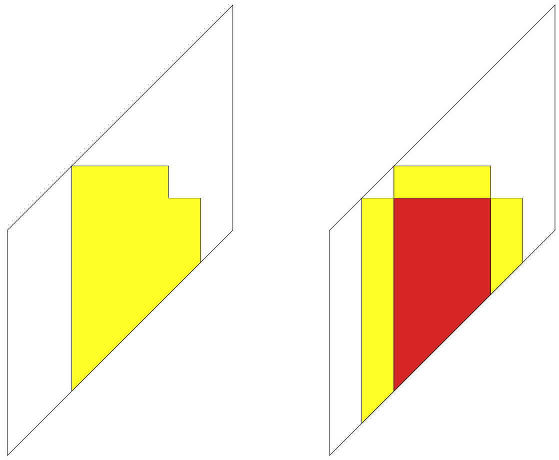
Considérons d'abord le module simple $S_{n-1,n-1}$. Le radical de $P_{n-1,n-1}$ est égal à $P_{n-2,n-1}$, qui est un module projectif indécomposable. On en déduit donc la résolution de $S_{n-1,n-1}$ que l'on souhaitait.

Ensuite, étudions le cas de $S_{n-1,n-2}$. Le radical de $P_{n-1,n-2}$ est:



Considérons maintenant le module projectif $P_{n-1,n-3}$. La projection de $P_{n-1,n-3}$ sur rad$P_{n-1,n-2}$ est essentielle (aucune restriction à un sous-module n'est surjective), ce qui signifie que c'est la couverture projective de rad$P_{n-1,n-2}$. Le noyau de cette application est $P_{n-2,n-3}$, qui est projectif; il termine donc la résolution de $S_{n-1,n-1}$.

Enfin, considérons $S_{n-1,u}$, pour $u < n-2$. Représentons le radical de $P_{n-1,u}$, ainsi que le module $P_{n-2,u} \oplus P_{n-1,u-1}$:



Dans le second carquois, les sommets de la partie la plus sombre sont représentés par k^2, ceux de la partie plus claire par k et les autres par 0. La projection $P_{n-2,u} \oplus P_{n-1,u-1} \rightarrow \mathrm{rad}P_{n-1,u}$ est une couverture projective, et son noyau est $P_{n-2,u-1}$, qui est projectif. ♠

En particulier, ces résolutions nous permettent de calculer les $\mathrm{Ext}^p_{\Gamma_{\Lambda_n}}(S\,;T)$, où S et T sont deux modules simples:

Proposition 6.20 Soit S un $\Gamma_{\Lambda_n}-$module simple. Alors:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^0_{\Gamma_{\Lambda_n}}(S_{i,u}\,;S) &= \begin{cases} k & \text{si } S = S_{i,u}, \\ 0 & \text{si } S \neq S_{i,u}, \end{cases} \\
\mathrm{Ext}^1_{\Gamma_{\Lambda_n}}(S_{i,i}\,;S) &= \begin{cases} k & \text{si } S = S_{i-1,i}, \\ 0 & \text{si } S \neq S_{i-1,i}, \end{cases} \\
\mathrm{Ext}^1_{\Gamma_{\Lambda_n}}(S_{i,i-1}\,;S) &= \begin{cases} k & \text{si } S = S_{i,i-2}, \\ 0 & \text{si } S \neq S_{i,i-2}, \end{cases} \\
\mathrm{Ext}^1_{\Gamma_{\Lambda_n}}(S_{i,i-j}\,;S) &= \begin{cases} k & \text{si } S = S_{i,i-j-1} \text{ ou } S = S_{i-1,i-j}, \\ 0 & \text{si } S \neq S_{i-1,i-j-1} \text{ et } S \neq S_{i-1,i-j}, \end{cases} \quad \text{si } 1 \leq j \leq n-1 \\
\mathrm{Ext}^2_{\Gamma_{\Lambda_n}}(S_{i,i}\,;S) &= 0 \\
\mathrm{Ext}^2_{\Gamma_{\Lambda_n}}(S_{i,i-j}\,;S) &= \begin{cases} k & \text{si } S = S_{i-1,i-j-1}, \\ 0 & \text{si } S \neq S_{i-1,i-j-1}, \end{cases} \quad \text{si } 1 \leq j \leq n-1 \\
\mathrm{Ext}^p_{\Gamma_{\Lambda_n}}(S_{i,u}\,;S) &= 0 \text{ si } p \geq 3.
\end{aligned}$$

Preuve: Il suffit d'appliquer le foncteur $\mathrm{Hom}_{\Gamma_{\Lambda_n}}(-;S)$ aux résolutions de la Proposition 6.19, en utilisant le fait que

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_{\Lambda_n}}(P;S) = \begin{cases} k & \text{si top}P = S, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(grâce au Lemme de Schur). ♠

6.2.3 Homologie de Hochschild et homologie cyclique de Γ_{Λ_n}

Nous allons utiliser les résultats précédents pour calculer explicitement une résolution projective minimale de Γ_{Λ_n} comme $\Gamma_{\Lambda_n}-$bimodule. Cette résolution est dûe à D. Happel, qui considère une situation plus générale (*voir* [H] 1.5.):

Théorème 6.21 ([H]) Si $\ldots \to R_p \to R_{p-1} \to \ldots \to R_1 \to R_0 \to \Gamma_{\Lambda_n} \to 0$ est une résolution projective minimale de Γ_{Λ_n} comme $\Gamma_{\Lambda_n}-$bimodule, alors

$$R_p = \bigoplus_{\substack{(i,u)\\(j,v)}} (\Gamma_{\Lambda_n} e_{j,v} \otimes e_{i,u}\Gamma_{\Lambda_n})^{\dim_k \mathrm{Ext}^p_{\Gamma_{\Lambda_n}}(S_{i,u};S_{j,v})}.$$

Précisément:

$$\begin{aligned}
R_0 &= \bigoplus_{(i,u)} \Gamma_{\Lambda_n} e_{i,u} \otimes e_{i,u}\Gamma_{\Lambda_n} \\
R_1 &= \bigoplus_{\begin{cases}(i,u)\\ i\neq u+1\end{cases}} (\Gamma_{\Lambda_n} e_{i-1,u} \otimes e_{i,u}\Gamma_{\Lambda_n}) \oplus \bigoplus_{\begin{cases}(i,u)\\ i\neq u\end{cases}} (\Gamma_{\Lambda_n} e_{i,u-1} \otimes e_{i,u}\Gamma_{\Lambda_n}) \\
R_2 &= \bigoplus_{\begin{cases}(i,u)\\ i\neq u\end{cases}} \Gamma_{\Lambda_n} e_{i-1,u-1} \otimes e_{i,u}\Gamma_{\Lambda_n} \\
R_p &= 0 \text{ si } p \geq 3.
\end{aligned}$$

En appliquant le foncteur $\Gamma_{\Lambda_n} \otimes_{\Gamma_{\Lambda_n}-\Gamma_{\Lambda_n}} -$, nous obtenons un complexe:

$$\ldots 0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow kQ_0 \longrightarrow 0.$$

Ceci nous donne:

Proposition 6.22 L'homologie de Hochschild de Γ_{Λ_n} est:

$$\begin{cases} \mathrm{H}^h_0(\Gamma_{\Lambda_n}, \Gamma_{\Lambda_n}) = kQ_0 \cong k^{n^2} & \\ \mathrm{H}^h_p(\Gamma_{\Lambda_n}, \Gamma_{\Lambda_n}) = 0 & \forall p \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

et donc son homologie cyclique est:

$$\begin{cases} \mathrm{HC}_{2p}(\Gamma_{\Lambda_n}) = kQ_0 \cong k^{n^2} \\ \mathrm{HC}_{2p+1}(\Gamma_{\Lambda_n}) = 0 \end{cases} \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Remarque 6.23 Il ne semble pas y avoir de lien entre ces résultats et ceux pour Λ_n (*voir* l'Exemple 6.3 et le Corollaire 6.12).

6.3 Caractères de Chern de Λ_n et Γ_{Λ_n}

Soit $K_0(\Lambda_n)$ (*resp.* $K_0(\Gamma_{\Lambda_n})$) le groupe de Grothendieck des Λ_n-modules projectifs (*resp.* des $\Gamma_{\Lambda_n}-$modules projectifs). Nous nous intéressons aux caractères de Chern $ch_{0,p} : K_0(\Lambda_n) \to \mathrm{HC}_{2p}(\Lambda_n)$ (*resp.* $K_0(\Gamma_{\Lambda_n}) \to \mathrm{HC}_{2p}(\Gamma_{\Lambda_n})$).

Nous noterons $[P_j]$ (*resp.* $[P_{i,u}]$) la classe d'isomorphisme du module projectif au sommet e_j (*resp.* $e_{i,u}$).

Posons $\sigma^p = (y_p, z_p, \ldots, y_1, z_1, y_0) \in \mathbb{N}^{2p+1}$ avec $y_p = (-1)^p(2p)!/p!$ et avec $z_p = (-1)^{p-1}(2p)!/2(p!)$. Un système de générateurs de $\mathrm{HC}_{2p}(\Lambda_n)$ (*resp.* $\mathrm{HC}_{2p}(\Gamma_{\Lambda_n})$) est donné par l'ensemble suivant:

$$\{\sigma_i^p := \sigma^p(e_i, \ldots, e_i) \in (\mathrm{Tot}^\bullet C_{\bullet,\bullet}(\Lambda_n))_{2p} \ / \ i = 0, \ldots, n-1\}$$

(*resp.* par $\{\sigma_{i,u}^p := \sigma^p(e_{i,u}, \ldots, e_{i,u}) \in (\mathrm{Tot}^\bullet C_{\bullet,\bullet}(\Gamma_{\Lambda_n}))_{2p} \ / \ i, u \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$), où $C_{\bullet,\bullet}(\Lambda)$ désigne le bicomplexe qui définit l'homologie cyclique classique de Λ.

Considérons les éléments

$$\begin{array}{rcl} \epsilon_j : \Lambda_n & \longrightarrow & \Lambda_n \\ \lambda & \mapsto & \lambda e_j \end{array}$$

dans $\mathcal{M}_1(\Lambda_n)$ et

$$\begin{array}{rcl} \epsilon_{i,u} : \Gamma_{\Lambda_n} & \longrightarrow & \Gamma_{\Lambda_n} \\ \lambda & \mapsto & \lambda e_{i,u} \end{array}$$

dans $\mathcal{M}_1(\Gamma_{\Lambda_n})$; leurs images sont les modules projectifs correspondants: $\mathrm{Im}\,\epsilon_j = P_j$ et $\mathrm{Im}\,\epsilon_{i,u} = P_{i,u}$. Alors, par définition des caractères de Chern (*voir* [Lo] 8.3.4 et [Ka] Chapitre II), nous avons:

$$\begin{array}{l} ch_{0,p}([P_j]) = ch_{0,p}([\epsilon_j]) := \mathrm{tr}(c(\epsilon_j)) = \sigma_j^p \text{ dans } \mathrm{HC}_{2p}(\Lambda_n), \\ \text{ et de même } \quad ch_{0,p}([P_{i,u}]) = ch_{0,p}([\epsilon_{i,u}]) = \sigma_{i,u}^p, \end{array}$$

en utilisant les isomorphismes $\mathcal{M}_m(\Lambda) \cong \mathcal{M}_m(k) \otimes \Lambda$ et [Lo] Lemma 1.2.2. Ici,

$$c(\epsilon_j) = (y_p \epsilon_j^{\otimes 2p+1}, z_p \epsilon_j^{\otimes 2p}, \ldots, z_1 \epsilon_j^{\otimes 2}, y_0 \epsilon_j) \in \mathcal{M}(\Lambda_n)^{\otimes 2p+1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{M}(\Lambda_n).$$

Remarque 6.24 Il existe une formule de décomposition pour le produit tensoriel de Λ_n-modules indécomposables (*voir* [C93], [Gu]). Grâce à cette formule, nous avons:

$$ch_{0,p}([L_1] \otimes \ldots \otimes [L_r]) = \frac{1}{n^2} \prod_{i=1}^{r} \dim L_i \ (\sigma_0^p, \ldots, \sigma_{n-1}^p), \ \text{ pour } r \geq 2,$$

où les L_i sont des Λ_n-modules projectifs quelconques.

Remarque 6.25 Notons $\overline{K}_0(\Lambda_n)$ le groupe de Grothendieck de tous les Λ_n−modules (pas seulement les projectifs). Alors $\overline{K}_0(\Lambda_n) \cong K_0(\Gamma_{\Lambda_n})$. Nous voyons donc que, si $N_{i,u}$ est le Λ_n−module indécomposable qui commence au sommet i et qui termine au sommet u, il correspond au Γ_{Λ_n}−module projectif $P_{i,u}$, et nous obtenons une application:

$$\begin{array}{ccc} \overline{K}_0(\Lambda_n) & \longrightarrow & \mathrm{HC}_{2p}(\Gamma_{\Lambda_n}) \\ N_{i,u} & \mapsto & \sigma^p_{i,u}. \end{array}$$

Remarque 6.26 L'algèbre Γ_{Λ_n} n'est pas une algèbre de Hopf; cependant, son groupe de Grothendieck $K_0(\Gamma_{\Lambda_n})$ est muni d'une structure d'anneau (bien que non naturelle): pour chaque $[P]$ dans $K_0(\Gamma_{\Lambda_n})$, il existe un $[B]$ dans $\overline{K}_0(\Lambda_n)$ tel que $[P] = [\mathrm{Hom}_{\Lambda_n}(M, B)]$, où M est la somme de toutes les classes d'isomorphisme de Λ_n−modules indécomposables. Si $[Q] = [\mathrm{Hom}_{\Lambda_n}(M, C)]$ est un autre élément de $K_0(\Gamma_{\Lambda_n})$, nous pouvons poser

$$[P].[Q] = [\mathrm{Hom}_{\Lambda_n}(M, B\overline{\otimes}C)]$$

(le k−module $B \otimes C$ est un Λ_n−module puisque Λ_n est une algèbre de Hopf). En fait, en utilisant la décomposition de [C93] et [Gu], le produit peut être écrit de la manière suivante:

$$[P_{i,u}][P_{j,v}] = \begin{cases} \sum_{l=0}^{v-j}[P_{i+j+l,u+v-l}] \ \text{ si } u+v-(i+j) \leq n-1, \\ \sum_{l=0}^{e}[P_{i+j+l,u+v+l-1}] + \sum_{m=e+1}^{v-j}[P_{i+j+m,u+v-m}] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } e := u+v-(i+j)-(n-1) \geq 0 \end{cases}$$

où u et v sont les représentants d'éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tels que $u-i$ et $v-j$ soient dans $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Bibliography

[AG] Anick, D. et Green, E. L., On the Homology of Quotients of Path Algebras, *Comm. Alg.* **15** (1987), pp 309-341.

[ARS] Auslander, M., Reiten, I. et Smalø, S.O., Representation Theory of Artin Algebras, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* **36**, *Cambridge University Press, Cambridge* (1997).

[BACH] Buenos Aires Cyclic Homology Group, Cyclic Homology of Algebras With One Generator, *K-Theory* **5** (1991), no. 1, pp 51-69. Jorge A. Guccione, Juan José Guccione, María Julia Redondo, Andrea Solotar et Orlando E. Villamayor ont participé à cette recherche.

[BACH2] Buenos Aires Cyclic Homology Group, Cyclic Homology of Monogenic Algebras, *Comm. Algebra* **22** (1994), no. 12, pp 4899-4904. Jorge A. Guccione, Juan José Guccione, María Julia Redondo, Andrea Solotar et Orlando E. Villamayor ont participé à cette recherche.

[Ba] Balavoine, D., Thèse, Université Montpellier II (1997).

[BLM] Bardzell, M.J., Locateli, A.C., et Marcos, E.N., On the Hochschild Cohomology of Truncated Cycle Algebras, *Comm. Algebra* **28** (2000), no. 3, pp 1615-1639.

[B] Burghelea, D., The Cyclic Homology of the Group Rings, *Comment. Math. Helv.* **60** (1985), no. 3, pp 354-365.

[BKI] Bourbaki, N., Eléments de Mathématiques, Algèbre, Ch.10, Algèbre Homologique. *Masson* (1980).

[Ca] Cartier, P., Cohomologie des Coalgèbres, *Sém. Sophus Lie* exp.5 (1955-1956).

[CE] Cartan, E. et Eilenberg, S., Homological Algebra. *Princeton University Press, Princeton, N. J.* (1956).

[C93] Cibils, C., A Quiver Quantum Group, *Comm. Math. Phys.* **157** (1993), no. 3, pp 459-477.

[C91] Cibils, C., Rigid Monomial Algebras, *Math. Ann.* **289** (1991), no. 1, pp 95-109.

[C97] Cibils, C., Half-quantum Groups at Roots of Unity, Path Algebras, and Representation Type. Internat. Math. Res. Notices 1997, no. 12, pp 541–553.

[CR98] Cibils, C. et Rosso, M., Hopf Bimodules Are Modules, *J. Pure and Applied Algebra* **128** (1998), pp 225-231.

[CR97] Cibils, C. et Rosso, M., Algèbre des Chemins Quantiques, *Adv. Math.* **125** (1997), pp 171-199.

[CK] Connes, A. et Kreimer, D., Hopf Algebras, Renormalization and Noncommutative Geometry, *Comm. Math. Phys.* **199** (1998), no. 1, pp 203-242.

[CM99] Connes, A. et Moscovici, H., Cyclic Cohomology and Hopf Algebras, *Lett. Math. Phys.* **48** (1999), no. 1, pp 97-108.

[CM98] Connes, A. et Moscovici, H., Hopf Algebras, Cyclic Cohomology and the Transverse Index Theorem, *Comm. Math. Phys.* **198** (1998), no. 1, pp 199-246.

[CM00] Connes, A. et Moscovici, H., Cyclic Cohomology and Hopf Algebra Symmetry, *Lett. Math. Phys.* **52** (2000), no. 1, pp 1-28.

[CGV] Cortinas, G., Guccione, J. et Villamayor, O.E., Cyclic Homology of $K[Z/pZ]$, *Proceedings of Research Symposium on K-Theory and its Applications (Ibadan, 1987), K-Theory 2,* **5** (1989), pp 603-616.

[Cr] Crainic, M., Cyclic Cohomology of Hopf Algebras, and a Non-commutative Chern-Weil Theory, *prépublication:* http://xxx.lpthe.jussieu.fr/abs/math.QA/9812113.

[DNR] Dăscălescu, S., Năstăsescu, C., et Raianu, Ş., Hopf algebras. An introduction. *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics,* **235**, *Marcel Dekker, Inc., New York,* (2001).

[Do] Doi, Y., Homological Coalgebra, *J. Math. Soc. Japan* **33** (1981), no. 1, pp 31-50.

[EG] Etingof, P. et Gelaki, S., On Finite-dimensional Semisimple and Cosemisimple Hopf Algebras in Positive Characteristic, *prépublication:* http://xxx.lpthe.jussieu.fr/abs/math.QA/9805106.

[EH] Erdmann, K. et Holm, T., Twisted Bimodules and Hochschild Cohomology for Self-injective Algebras of Class A_n, *Forum Math.* **11** (1999), no. 2, pp 177-201.

[GR] Gabriel, P. et Riedtmann, Ch., Group Representations Without Groups, *Comment. Math. Helv.* **54** (1979), no. 2, pp 240-287.

[Ge] GERSTENHABER, M., The Cohomology Structure of an Associative Ring, *Annals of Math.* **78 (2)** (1963), pp 267-288.

[GS90] GERSTENHABER, M. et SCHACK, S.D., Bialgebra Cohomology, Deformations, and Quantum Groups, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **87** (1990), pp 478-481.

[GS92] GERSTENHABER, M. et SCHACK, S.D., Algebras, Bialgebras, Quantum Groups, and Algebraic Deformations, *Contemp. Math.* **134** (1992), pp 51-92.

[GS88] GERSTENHABER, M. et SCHACK, S.D., Algebraic Cohomology and Deformation Theory, Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications, *Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.* **247** (1988), pp 11-264, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.

[GG] GERSTENHABER, M., et GIAQUINTO, A., Compatible Deformations. Trends in the Representation Theory of Finite-dimensional Algebras, *Contemp. Math.* **229** (1998), pp 159-168.

[Gi] GIAQUINTO, A., Deformation Methods in Quantum Groups, *PhD. Thesis, University of Pennsylvania* (May 1991).

[Go] GOROKHOVSKY, A., Secondary Characteristic Classes and Cyclic Cohomology of Hopf Algebras, *prépublication:* http: //xxx.lpthe.jussieu.fr/abs/math.OA/0002126.

[GrS] GREEN, E.L. et SOLBERG, Ø., Basic Hopf Algebras and Quantum Groups, *Math. Zeit.* **299** (1998), no. 1, pp 45-76.

[Gu] GUNNLAUGSDÓTTIR, E., Monoidal Structure of the Category of u_q^+−modules, *à paraître dans Linear Algebra and Appl.,* et *prépublication:* http: //xxx.lpthe.jussieu.fr/abs/math.QA/0010116.

[H] HAPPEL, D., Hochschild Cohomology of Finite-dimensional Algebras, *Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin, 39ème Année (Paris, 1987/1988),* pp 108-126, *Lecture Notes in Math.* **1404**, *Springer, Berlin-New York* (1989).

[Ka] KAROUBI, M., Homologie cyclique et K-théorie, *Astérisque* **149** (1987).

[KV] KAROUBI, M. et VILLAMAYOR, O.E., Homologie Cyclique d'Algèbres de Groupes, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **311** (1990), no. 1, pp 1-3.

[Kl] KASSEL, C., Quantum groups, *Graduate Texts in Mathematics,* **155**, *Springer-Verlag, New York,* (1995).

[KR] KHALKHALI, M. et RANGIPOUR, B., A New Cyclic Module for Hopf Algebras, *prépublication:* http: //xxx.lpthe.jussieu.fr/abs/math.KT/0010153.

[Ko] Kontsevich, M., Deformation Quantization of Poisson Manifolds, I, *prépublication:* http: //xxx.lpthe.jussieu.fr/abs/q-alg/9709040.

[KS] Kontsevich, M. et Soibelman, Y., Deformations of Algebras over Operads and Deligne's Conjecture, *prépublication:* http: //xxx.lpthe.jussieu.fr/abs/math.QA/0001151.

[Li] Locateli, A. C., Hochschild Cohomology of Truncated Quiver Algebras, *Comm. Algebra* **27** (1999), no. 2, pp 645-664.

[Lo] Loday, J-L., Cyclic Homology, Appendix E by María O. Ronco. *Springer-Verlag, Berlin* (1992).

[LQ] Loday, J-L. et Quillen, D., Cyclic Homology and the Lie Algebra Homology of Matrices, *Comment. Math. Helv.* **59** (1984), no. 4, pp 569-591.

[McL] MacLane, S., Homology. *Springer, New York* (1963).

[M93] Montgomery, S., Hopf Algebras and Their Actions on Rings. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics* **82**, *Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI* (1993).

[M98] Montgomery, S., Classifying Finite-dimensional Semisimple Hopf Algebras, *Contemp. Math.* **229** (1998), pp 265-279.

[NR] Nichols, W.D. et Richmond, M.B., Freeness of Infinite Dimensional Hopf Algebras, *Comm. Algebra* **20** (1992), no. 5, pp 1489-1492.

[Os] Ospel, C., Thèse, Université Louis Pasteur (Strasbourg I), Strasbourg 1999, *Prepublications of the Institute of Advanced Mathematical Research* (1999/2).

[Pa] Pareigis, B., Categories and Functors, *Academic Press, New York-London* (1970).

[PW] Parshall, B. and Wang, J., On Bialgebra Cohomology, *Bull. Soc. Math. Belg., Ser. A42* (1990) , no. 3, pp 607-642.

[Rg] Roger, C. Algèbres de Lie Graduées et Quantification, Symplectic Geometry and Mathematical Physics (Aix-en-Provence, 1990), *Progr. Math.* **99** *Birkhuser Boston, Boston, MA* (1991), pp 374-421.

[Ro] Rosso, M., Algèbres de Battages Quantiques, *Adv. Math.* **125** (1997), no. 2 , pp 171-199.

[Sh-St] Shnider, S. et Sternberg, S., Quantum Groups. From Coalgebras to Drinfel'd Algebras: A Guided Tour. *Graduate Texts in Mathematical Physics, II. International Press, Cambridge, MA* (1993).

[Sk] SKÖLDBERG, E., The Hochschild Homology of Truncated and Quadratic Monomial Algebras, *J. London Math. Soc. (2)* **59** (1999), no. 1, pp 76-86.

[St] ŞTEFAN, D., Hochschild Cohomology on Hopf Galois Extensions, *J. Pure and Applied Alg.* **103** (1995), pp.221-233.

[SA] SUÁREZ-ÁLVAREZ, M., Mémoire de l'Universidad Nacional de Rosario.

[Sw] SWEEDLER, M.E., Hopf Algebras. *Mathematics Lecture Note Series W. A. Benjamin, Inc., New York* (1969).

[T1] TAILLEFER, R., Cohomology Theories of Hopf Bimodules and Cup-product, *Prépublication de l'Université Montpellier II,* (2000), no. 2; et *prépublication:* http: //xxx.lpthe.jussieu.fr/abs/math.QA/0005019.

[T2] TAILLEFER, R., Cyclic Homology of Hopf Algebras, *à paraître dans K-Theory*; et *prépublication:* http: //xxx.lpthe.jussieu.fr/abs/math.QA/0009213.

[T3] TAILLEFER, R., Cyclic Homology of the Taft Algebras and of Their Auslander Algebras, *Prépublication de l'Université Montpellier II,* (2000), no. 17; et *prépublication:* http: //xxx.lpthe.jussieu.fr/abs/math.QA/0009214.

[T4] TAILLEFER, R., Cohomology Theories of Hopf Bimodules and Cup-product, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **332** (2001), no. 3, pp 189-94.

[Ta] TAMARKIN, D., Another Proof of M. Kontsevich Formality Theorem, *prépublication:* http: //xxx.lpthe.jussieu.fr/abs/math/9803025.

[W] WEIBEL, C., An Introduction to Homological Algebra. *Cambridge University Press, Cambridge* (1994).