Université Aix-Marseille II
Faculté des Sciences de Luminy

Thèse
pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Aix-Marseille II
Spécialité : Mathématiques

soutenue le 26 novembre 2001 par

Sylvie RUETTE

Chaos en dynamique topologique, en particulier sur l'intervalle, mesures d'entropie maximale

après avis des rapporteurs :

M. Eli GLASNER
M. Bernard SCHMITT

devant le jury composé de :

M. François BLANCHARD, directeur de thèse
M. Jérôme BUZZI
M. Albert FATHI
M. Bernard HOST
M. Bernard SCHMITT
M. Serge TROUBETZKOY

Remerciements

Je souhaite avant tout exprimer ma reconnaissance à François Blanchard. J'ai beaucoup apprécié d'avoir une très grande liberté quant aux choix de mes thèmes de recherche et à l'organisation de mon travail. Je tiens à le remercier pour sa confiance sans faille et sa disponibilité, ainsi que pour les orientations scientifiques qu'il m'a suggérées. C'est avec un réel plaisir que j'ai préparé ma thèse sous sa direction.

Je suis très honorée que Bernard Schmitt et Eli Glasner aient accepté la charge de rapporteur.

Je remercie profondément Jérôme Buzzi et Bernard Host pour leur collaboration et l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux, ainsi que pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Ma reconnaissance va à Albert Fathi, dont le cours de systèmes dynamiques m'a incité à faire une thèse sur ce sujet, et qui m'a judicieusement orientée vers l'IML. Je suis heureuse qu'il soit membre de mon jury.

Je remercie également Serge Troubetzkoy qui participe a ce jury et s'est intéressé à mes travaux.

J'adresse mes remerciements à Alejandro Maass pour son accueil à l'Universidad de Chile et nos nombreuses discussions.

Je n'oublie pas les membres de l'équipe DAC, et tout spécialement les thésards et anciens thésards, qui ont contribué à créer une ambiance amicale. Merci en particulier à Anne, dont l'expérience m'a souvent été utile, ainsi qu'à Pascal et Valérie pour leurs conseils.

J'adresse un clin d'œil chaleureux à Bill et je le remercie de son aide en informatique. Merci à Estelle ainsi qu'à Emmanuel pour nos fréquentes soirées amicales. Enfin, toute ma gratitude va à Bruno pour son soutien et ses encouragements ; son amitié m'est précieuse.

Table des matières

Introduction **9**
Le chaos en dynamique topologique . . . 9
Le chaos pour les transformations de l'intervalle . . . 10
Chaînes de Markov et mesures maximales . . . 11
Transformations de l'intervalle et mesures maximales . . . 12
Plan de la thèse . . . 13

1 Généralités **15**
1.1 Systèmes dynamiques topologiques . . . 15
1.2 Systèmes dynamiques mesurés . . . 16
1.3 Entropie . . . 17
1.3.1 Entropie topologique . . . 17
1.3.2 Formule de Bowen . . . 18
1.3.3 Entropie métrique . . . 19
1.3.4 Formule de Katok . . . 19
1.4 Mesures invariantes . . . 19
1.4.1 Décomposition ergodique . . . 20
1.4.2 Principe variationnel . . . 20
1.4.3 Mesures invariantes et facteurs . . . 21
1.5 Shifts, sous-shifts . . . 22

2 Couples asymptotiques dans les systèmes d'entropie non nulle **23**
Introduction . . . 24
2.1 Background . . . 25
2.1.1 Partitions . . . 25
2.1.2 Entropy . . . 25
2.1.3 Excellent partitions . . . 27
2.2 Existence of asymptotic pairs . . . 27
2.2.1 Construction of an excellent partition . . . 28
2.2.2 The invertible case . . . 29
2.2.3 The non-invertible case . . . 30
2.3 Relatively independent squares . . . 30
2.3.1 Background . . . 30
2.3.2 The 'construction $\mathcal{C}$' . . . 32
2.3.3 Application to entropy pairs . . . 33
2.4 Li-Yorke pairs and instability in negative times . . . 34
2.5 There are uncountably many asymptotic pairs . . . 35

2.5.1 Conditional measures 36
2.5.2 Application to asymptotic pairs. 37

3 Chaînes de Markov topologiques 39
3.1 Définitions 40
3.1.1 Graphes et chemins 40
3.1.2 Chaînes de Markov topologiques 41
3.1.3 Mesures de Markov 41
3.1.4 Entropie de Gurevich 42
3.2 Classification des graphes connexes 42
3.2.1 Graphes transients, récurrents nuls et récurrents positifs 42
3.2.2 Sous-graphes et surgraphes de même entropie 45
3.3 Existence de mesures maximales 51
3.3.1 Récurrence positive et mesures maximales 51
3.3.2 Le critère de Gurevich-Zargaryan et sa réciproque 52
3.3.3 Entropie locale et mesures maximales 56
3.4 Mesures presque maximales vers l'infini 59

4 Chaos sur l'intervalle 63
4.1 Notations et propriétés élémentaires 63
4.2 Transitivité et mélange topologique 66
4.3 Sensibilité aux condition initiales 72
4.4 Points périodiques 75
4.4.1 Spécification 75
4.4.2 Points périodiques et composantes transitives 79
4.4.3 Le théorème de Sharkovskii 82
4.5 Entropie topologique 86
4.5.1 Fer à cheval, turbulence 86
4.5.2 Majoration de l'entropie 88
4.5.3 Minoration globale de l'entropie 89
4.5.4 Entropie uniformément positive 93
4.5.5 Entropie et chaos au sens de Devaney 93
4.6 Couples de Li-Yorke, ensembles brouillés 95
4.6.1 Chaos au sens de Li-Yorke 95
4.6.2 Chaos générique 96

5 Mesures maximales pour les transformations de l'intervalle 99
5.1 Mesures maximales et isomorphismes 100
5.2 Diagramme de Markov associé à une transformation 101
5.2.1 Isomorphisme avec un sous-shift 101
5.2.2 Diagramme de Markov 105
5.2.3 Exemples de diagrammes de Markov 111
5.3 Transformations monotones par morceaux 112
5.4 Transformations C^r 113
5.4.1 Entropie locale 114
5.4.2 Entropie à l'infini 115
5.4.3 Existence d'une mesure maximale 120

6 Transformations de l'intervalle mélangeantes C^r sans mesure maximale 123
6.1 Construction and proof of the mixing property 125
6.1.1 General description 125
6.1.2 Method for the proof of mixing property 125
6.1.3 Construction of f_r on $[1, y_1]$ 128
6.1.4 Construction of f_r on $[0, 1]$ and $[y_1, 4]$ and end of the proof of the mixing property 134
6.2 The Markov chain associated to the interval map 135
6.2.1 Definition of the graph 135
6.2.2 Isomorphism between f_r and the Markov chain 136
6.2.3 Non existence of maximal measure 138
6.3 Local entropy 140

Bibliographie 142

Notations 149

Introduction

Le chaos en dynamique topologique

L'idée de chaos a été introduite suite à la mise en évidence de systèmes régis par des règles déterministes ayant néanmoins des comportements imprévisibles à long terme. En particulier, Lorenz s'est aperçu dans les années 1960 que son modèle de météorologie donnait des résultats divergents suite à d'infimes différences dans les conditions initiales – c'est *l'effet papillon*. D'autres études ont ensuite montré que le même type de comportements se rencontrait également dans des systèmes beaucoup plus simples ; par exemple, l'étude de l'évolution d'une population peut se modéliser par la suite $u_{n+1} = ru_n(1 - u_n)$, qui s'avère être chaotique pour des paramètres r suffisamment élevés.

Un système dynamique topologique est la donnée d'une transformation continue T d'un espace X dans lui-même, X étant le plus souvent un ensemble métrique compact. L'évolution du système est donnée par les itérations successives de la transformation, le point $T^n x$ représentant la nouvelle position du point x à l'instant n (le temps est discret). On cherche à étudier le comportement du système pour des temps tendant vers l'infini.

La notion de chaos recouvre les idées d'imprédictibilité, de forte divergence suite à des erreurs de mesure, de multiplicité des comportements observés... La *sensibilité aux conditions initiales* (terminologie introduite dans [40]) indique qu'à proximité de tout point x il existe des points y qui s'éloignent de x d'une distance $\delta > 0$ à un instant donné, c'est-à-dire $d(T^n x, T^n y) \geq \delta$ pour un certain n. Historiquement, le terme de chaos a été introduit par Li et Yorke en 1975 [57] pour qualifier le comportement de certains systèmes sur l'intervalle, mais sans être précisément formalisé. Si (X, T) est un système dynamique topologique, nous dirons que deux points x et y forment un *couple de Li-Yorke* si $T^n x$ et $T^n y$ sont arbitrairement proches à certains instants et sont éloignés d'une distance non nulle (dépendant de x et y) pour d'autres n tendant vers l'infini ; le système (X, T) est *chaotique au sens de Li-Yorke* s'il existe un ensemble S non dénombrable tel que deux points distincts de S forment un couple de Li-Yorke. Cette propriété indique que de nombreux points ont des comportements « indépendants » les uns des autres. Soulignons que l'ensemble S n'est pas nécessairement dense, de sorte que le chaos au sens de Li-Yorke peut être concentré dans un sous-système.

À l'inverse, le *chaos au sens de Devaney* [30] est une propriété uniforme du système, qui doit être transitif, sensible aux conditions initiales et posséder des points périodiques denses ; ici, le chaos est vu comme un mélange d'imprévisibilité et de comportements réguliers. Cette définition se base sur le comportement de systèmes sur la droite réelle. Elle est à la fois populaire et contestée : populaire car elle repose sur des notions élémentaires dont le choix se justifie dans une certaine mesure ; contestée car deux des conditions (la transitivité et la densité des points périodiques) impliquent la troisième (la sensibilité aux conditions initiales), qui semblait pourtant la plus importante [38, 2].

D'autres notions s'inspirent de la théorie de l'information, comme l'entropie topologique [1] et la dispersion [10]. On retrouve là aussi l'opposition entre chaos local et chaos uniforme. En physique, la notion d'*attracteur étrange* joue un rôle important dans la perception du chaos, mais nous ne parlerons pas des attracteurs et nous nous limiterons souvent aux systèmes surjectifs. Citons également le mélange faible topologique, qui implique un comportement fortement chaotique, d'où l'idée d'une gradation dans la chaoticité. Enfin, on peut souhaiter avoir une mesure invariante qui représente correctement le système.

Il faut souligner qu'à ses débuts la formalisation du chaos s'est faite à partir de l'observation de l'évolution de systèmes sur l'intervalle. Or se restreindre à un intervalle, ou plus généralement à un espace de dimension 1, induit des propriétés très spécifiques, de sorte que la classe des systèmes sur l'intervalle mérite d'être traitée à part. Comme on ne retrouve pas ces propriétés dans les systèmes dynamiques sur d'autres espaces, il en résulte que certaines définitions du chaos sont mal adaptées ou complètement vides de sens hors de l'intervalle (citons en particulier la définition de Block et Coppel [15], qui dit qu'une transformation de l'intervalle est chaotique si et seulement s'il existe un point périodique dont la période n'est pas une puissance de 2). De plus, les différentes définitions ne coïncident pas en général, sans qu'aucune puisse figurer comme l'unique « bonne » définition du chaos.

La notion de chaos repose plutôt sur un faisceau de propriétés ; certaines sont plus fortes que d'autres (par exemple, le mélange faible topologique implique la sensibilité aux conditions initiales), ou au contraire ne sont pas corrélées (c'est le cas du mélange faible topologique et de l'entropie non nulle, ces deux propriétés pouvant être satisfaites l'une sans l'autre ou simultanément). Il importe d'étudier ce qu'implique chacune de ces notions et les relations qu'elles nouent entre elles.

La place du chaos au sens de Li-Yorke dans cette hiérarchie s'est précisée récemment. La question de savoir si une entropie non nulle entraîne le chaos au sens de Li-Yorke, restée longtemps ouverte, a reçu une réponse affirmative de la part de Blanchard, Glasner, Kolyada et Maass [9]. Huang et Ye [49] ont montré qu'un système transitif possédant un point périodique, de même qu'un système dispersant, est chaotique au sens de Li-Yorke. Ils ont également étudié des systèmes dynamiques dont tous les couples de points distincts sont des couples de Li-Yorke [50]. On pourrait s'attendre à ce que de tels systèmes soient très chaotiques. Il n'en est rien ; en particulier nous montrons que leur entropie est nécessairement nulle. En fait, un système d'entropie non nulle possède à la fois des couples de Li-Yorke [9] et des couples asymptotiques propres [11] (si (X,T) est un système dynamique, (x,y) est un couple asymptotique propre si $x \neq y$ et la distance entre $T^n x$ et $T^n y$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, autrement dit les deux points ont le même comportement à l'infini).

Le chaos pour les transformations de l'intervalle

Une *transformation de l'intervalle* est un système dynamique défini par une transformation continue d'un intervalle compact dans lui-même. Pour ces systèmes, la situation est essentiellement différente du cas général car les diverses notions de chaos coïncident dans une large mesure. Par exemple, la transitivité, qui est considérée comme une hypothèse de base pour obtenir de l'uniformité, engendre un comportement fortement chaotique sur l'intervalle. En effet, elle implique la sensibilité aux conditions initiales et la densité des points périodiques, donc le chaos au sens de Devaney, de même que le chaos au sens de Li-Yorke et une entropie topologique non nulle. De plus, elle est presque équivalente au mélange topologique, qui entraîne à son tour d'autres propriétés (spécification, entropie uniformément positive).

La question qui se pose alors est la suivante : qu'impliquent les différentes propriétés si on ne suppose pas la transitivité ? Pour certaines, comme la sensibilité, le chaos générique ou la densité des points périodiques, on a une réciproque partielle, à savoir qu'il existe une composante transitive composée d'un ou plusieurs sous-intervalles. D'autre part, les diverses périodes des points périodiques pouvant coexister sont régies précisément par l'ordre de Sharkovskii, et le type de points périodiques est lié à l'entropie topologique : elle est non nulle si et seulement s'il existe un point périodique dont la période n'est pas une puissance de 2. De plus, une entropie non nulle est équivalente à l'existence d'un sous-système chaotique au sens de Devaney.

Après avoir constaté cette cascade de propriétés topologiques, on peut s'interroger sur l'existence de « bonnes » mesures invariantes pour la transformation, qui représenteraient convenablement la transformation de l'intervalle chaotique d'un point de vue probabiliste ou lui confèreraient des propriétés métriques liées au chaos (K-système par exemple). Les mesures invariantes le plus souvent considérées sont les mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue d'une part, et les mesures de probabilité d'entropie maximale (appelées *mesures maximales*) d'autre part. Les premières donnent une statistique de ce qu'on peut observer à l'échelle de l'intervalle ; en outre elles sont aisément manipulables grâce à leur densité. Quant aux mesures maximales, elles reflètent la totalité de la complexité topologique de la transformation et permettent de voir où se concentre cette complexité. Contrairement aux mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, elles sont conservées par conjugaison, ce qui en fait a priori des objets plus intrinsèques. Par la suite, nous nous intéresserons aux mesures maximales mais nous ne parlerons pas des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue.

Chaînes de Markov et mesures maximales

Pour étudier l'existence de mesures maximales pour une transformation de l'intervalle, un outil fondamental est donné par les chaînes de Markov. Une chaîne de Markov topologique est l'ensemble des chemins infinis sur un graphe orienté fini ou dénombrable, muni de la transformation shift (décalage vers la gauche). Pour ce type de systèmes, on connaît des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence et l'unicité de mesures maximales. Pour les chaînes de Markov sur des graphes finis, la situation est simple et parfaitement connue ; en particulier il existe toujours une mesure maximale. Nous ne nous intéresserons qu'aux graphes infinis, plus complexes.

Vere-Jones [84] a classé les graphes orientés connexes en trois catégories – transients, récurrents nuls, récurrents positifs – en fonction de critères combinatoires liés au nombre de chemins à extrémités fixes et aux séries entières associées, ceci par analogie avec les chaînes de Markov probabilistes. Gurevich [45] a montré que cette classification est intimement liée à l'existence de mesures maximales. Si le graphe est connexe, la chaîne de Markov sur ce graphe admet une mesure maximale si et seulement si celui-ci est récurrent positif ; dans ce cas la mesure maximale est unique. Signalons que pour les graphes récurrents nuls, il existe une mesure infinie jouant le même rôle qu'une mesure maximale, mais dans cette situation la notion d'entropie est à redéfinir.

Salama [73] a donné une approche plus géométrique de cette classification. Si un graphe connexe est strictement inclus dans un autre graphe de même entropie, alors il est transient, et la réciproque est également vraie. Inversement, si le graphe G ne possède pas de sous-graphe propre de même entropie, alors G est nécessairement récurrent positif (un tel graphe est appelé *fortement récurrent positif*). Cette méthode de contraction et d'extension ne permet pas de distinguer les graphes récurrents nuls de certains récurrents positifs ; elle s'avère néanmoins efficace.

Nous verrons qu'un graphe G sans mesure maximale possède en fait une suite décroissante de sous-graphes de même entropie, et les chemins dans ces sous-graphes partent de plus en plus loin vers l'infini avant de revenir. On peut traduire ce fait en terme de mesures : il existe une suite de mesures presque maximales fuyant vers l'infini, c'est-à-dire que leur entropie tend vers celle de G

et qu'elles chargent de moins en moins n'importe quel sous-graphe fini.

Un autre critère d'existence de mesures maximales, dû à Gurevich et Zargaryan [43], se base sur la comparaison du nombre de chemins à l'intérieur et à l'extérieur d'un sous-graphe fini. Nous en déduisons une nouvelle condition d'existence utilisant la notion d'entropie locale : si l'entropie de la chaîne de Markov est strictement supérieure à son entropie locale, alors le graphe est fortement récurrent positif [70]. Ceci renforce le résultat, valable pour des systèmes dynamiques plus généraux, qui dit qu'une entropie locale nulle implique l'existence d'une mesure maximale. Il conforte également l'idée que ce résultat serait vrai pour les transformations de l'intervalle, mais cette question est toujours ouverte.

Transformations de l'intervalle et mesures maximales

L'essentiel de la dynamique d'un système sur l'intervalle peut se ramener à une chaîne de Markov sous certaines conditions. Cela a d'abord été montré par Hofbauer [47] pour les applications monotones par morceaux, c'est-à-dire que l'intervalle se subdivise en un nombre fini de sous-intervalles sur lesquels l'application est monotone. On peut associer à un tel système un graphe orienté, généralement infini, et la chaîne de Markov sur ce graphe représente toute la dynamique du système de départ, à l'exception d'un ensemble (lié à l'orbite des points critiques) qui est négligeable pour l'entropie des mesures. Buzzi [23] a ensuite généralisé cette construction en associant un graphe appelé *diagramme de Markov* aux transformations C^1 de l'intervalle. Si la fonction est C^1, elle est strictement monotone sur chacune des composantes connexes de l'ouvert où sa dérivée ne s'annule pas, mais les points critiques (les zéros de la dérivée) peuvent former un ensemble non dénombrable. Les mesures maximales ergodiques de la transformation de l'intervalle f sont en correspondance avec celles du diagramme de Markov associé si l'entropie topologique des points critiques de f est strictement inférieure à l'entropie de f. C'est en particulier vrai si la transformation est C^∞, car dans ce cas l'entropie des zéros de la dérivée est nulle [23].

Quand la transformation de l'intervalle f est convenablement représentée par une chaîne de Markov, on est amené à étudier les mesures maximales pour cette dernière. Si f est monotone par morceaux ou C^∞, alors le système admet au moins une mesure maximale ; de plus, si l'entropie topologique de f est non nulle, les mesures maximales ergodiques sont en nombre fini, et la transitivité implique que la mesure maximale est unique (voir [47] pour les transformations monotones par morceaux et [23] pour le cas C^∞).

En revanche, une transformation de l'intervalle, même transitive, n'a pas nécessairement de mesure maximale, ce qui a été montré par Gurevich et Zargaryan dans le cas continu [42]. Comme on a un résultat d'existence pour les fonctions C^∞, on pourrait espérer affaiblir la condition de régularité ; ce n'est pas possible. En effet, pour tout $r < +\infty$, il existe des transformations de l'intervalle qui sont C^r et transitives mais n'admettent pas de mesure maximale [71]. Pour le démontrer, nous utilisons l'approche géométrique de Salama présentée plus haut pour montrer que leur diagramme de Markov est transient ; l'absence de mesure maximale pour la chaîne de Markov se transporte alors sur l'intervalle.

Néanmoins, la régularité de la transformation nous permet de donner une condition d'existence [26], en combinant les propriétés des chaînes de Markov sans mesure maximale et des résultats liés à la dérivabilité. Si une transformation de l'intervalle f est C^1 et n'a pas de mesure maximale, alors son entropie est bornée par une quantité dépendant de l'entropie des points critiques et de l'entropie locale. Par contraposée, si l'entropie de f est strictement supérieure à cette quantité, alors elle possède au moins une mesure maximale ; nous montrons également que le nombre de mesures maximales ergodiques est fini, et que la mesure maximale est unique si f est transitive.

En utilisant une majoration de l'entropie des points critiques et de l'entropie locale, nous obtenons une condition plus facile à vérifier pour les transformations C^r $(r \geq 1)$: si l'entropie topologique de f est strictement supérieure à $\frac{2}{r}\log\|f'\|_\infty$, alors le nombre de mesures maximales ergodiques est fini et non nul. On ne sait pas si cette inégalité est optimale, mais certains exemples laissent penser que le facteur 2 est superflu.

Plan de la thèse

Dans le premier chapitre, nous introduisons des concepts de base de la dynamique. Nous définissons les systèmes dynamiques topologiques et mesurés, ainsi que l'entropie de ces deux types de systèmes. Nous considérons les mesures invariantes des systèmes dynamiques topologiques, qui font le lien entre l'entropie topologique et l'entropie métrique grâce au principe variationnel, et nous nous intéressons également au transport des mesures invariantes par semi-conjugaison.

Dans le chapitre 2, nous montrons qu'un système dynamique topologique (X, T) d'entropie non nulle possède des couples asymptotiques propres, c'est-à-dire des couples de points distincts (x, y) tels que la distance entre $T^n x$ et $T^n y$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Plus précisément, si on considère une mesure T-ergodique d'entropie non nulle, presque tout point appartient à un couple asymptotique propre. Quand le système (X, T) est inversible, les couples asymptotiques pour T sont en général instables sous l'action de T^{-1}, c'est-à-dire que ce sont des couples de Li-Yorke pour T^{-1}. Nous montrons également que les couples asymptotiques sont denses dans l'ensemble des couples d'entropie topologique.

Le chapitre 3 est consacré aux chaînes de Markov topologiques ; ce sont des systèmes symboliques définis par l'ensemble des chemins infinis sur un graphe orienté dénombrable, muni de la transformation shift. Nous rappelons la classification des graphes connexes en transients, récurrents nuls et récurrents positifs, et nous donnons la caractérisation de certaines classes, due à Salama, en termes de sous-graphes et surgraphes de même entropie. Nous complétons cette approche géométrique en montrant qu'un graphe transient est toujours inclus dans un graphe récurrent de même entropie. Nous nous intéressons ensuite à l'existence de mesures maximales (c'est-à-dire des mesures d'entropie maximale) pour les chaînes de Markov. Nous démontrons de manière détaillée un critère d'existence dû à Gurevich et Zargaryan ; sa réciproque est due à Gurevich et Savchenko, nous en donnons une nouvelle preuve. Puis nous donnons une nouvelle condition suffisante d'existence basée sur la notion d'entropie locale. Enfin, nous nous intéressons aux graphes qui ne sont pas fortement récurrents positifs.

Le chapitre 4 fait un tour d'horizon du chaos pour les transformations de l'intervalle, autrement dit les systèmes dynamiques sur un intervalle compact. Nous exposons les relations entre les différentes notions liées au chaos (transitivité, sensibilité aux conditions initiales, points périodiques, entropie...).

Dans les deux derniers chapitres, nous nous intéressons à la question de l'existence de mesures maximales pour les transformations de l'intervalle. Dans le chapitre 5, nous exposons la méthode permettant de se ramener à l'étude d'une chaîne de Markov topologique, puis nous prouvons un critère d'existence de mesures maximales pour les transformations C^r de l'intervalle $(r \geq 1)$, dont le corollaire est le suivant : si l'entropie de la transformation f est strictement supérieure à $\frac{2}{r}\log\|f'\|_\infty$, alors le nombre de mesures maximales ergodiques est fini et non nul. Enfin, le dernier chapitre est dédié à la construction de transformations de l'intervalle qui sont C^r et mélangeantes mais qui n'admettent pas de mesure maximale.

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions de base de la dynamique, topologique et mesurée, et nous donnons quelques propriétés fondamentales. Nous nous intéressons en particulier à l'entropie et aux mesures invariantes d'un système dynamique topologique.

1.1 Systèmes dynamiques topologiques

Un *système dynamique topologique* (X,T) est la donnée d'un espace métrique compact X et d'une transformation continue $T : X \to X$. La distance sur X est notée d. On note

$$T^n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ fois}}.$$

Si $x \in X$, $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'*orbite* de x. L'ensemble ω-limite de x est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire

$$\omega(x,T) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{T^k x \mid k \geq n\}}.$$

Définition 1.1.1 (transitivité) Un système dynamique topologique (X,T) est *transitif* si pour tous U,V ouverts non vides de X, il existe $n \geq 0$ tel que $T^{-n}U \cap V \neq \emptyset$.

Le système (X,T) est *totalement transitif* si (X,T^n) est transitif pour tout entier $n \geq 1$.

Proposition 1.1.2 *Soit X un espace métrique compact sans point isolé et $T\colon X \to X$ une transformation continue. Alors il existe un point d'orbite dense si et seulement si (X,T) est transitif. De plus, si l'orbite de x est dense, alors $\omega(x,T) = X$ et l'orbite de $T^n x$ est dense pour tout $n \geq 0$.*

Définition 1.1.3 (mélange topologique) Soit (X,T) un système dynamique topologique. On dit que le système est *topologiquement mélangeant* si pour tous ouverts non vides U,V, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $T^{-n}U \cap V \neq \emptyset$.

Définition 1.1.4 (mélange faible topologique) Soit (X,T) un système dynamique topologique. (X,T) est *topologiquement faiblement mélangeant* si $(X \times X, T \times T)$ est transitif.

Proposition 1.1.5 *On a les implications suivantes :*

mélange topologique $\Rightarrow$ mélange faible topologique $\Rightarrow$ transitivité totale $\Rightarrow$ transitivité.

Preuve. Il est facile de montrer que le mélange topologique implique le mélange faible topologique, qui lui-même entraîne la transitivité (voir par exemple [29]). Le fait que le mélange faible topologique entraîne la transitivité totale est un résultat connu mais ne semble pas figurer dans la littérature. Il se démontre de la façon suivante.

Si le système dynamique (X,T) est faiblement mélangeant, alors pour tout entier $n \geq 1$, le système $(X^n, T \times \cdots \times T)$ est transitif [34]. Si U et V sont deux ouverts non vides de X, alors U^k et $V \times T^{-1}V \times \cdots \times T^{-(n-1)}V$ sont des ouverts non vides de X^n, donc il existe $k \geq 0$ tel que

$$U \cap T^{-(k+i)}V \neq \emptyset \text{ pour } i = 0, \ldots, n-1.$$

Soit $0 \leq i \leq n-1$ tel que $k+i$ soit un multiple de n, c'est-à-dire $k+i = pn$. On a $U \cap T^{-pn}V \neq \emptyset$. Par conséquent, (X, T^n) est transitif. □

Définition 1.1.6 (facteur, conjugaison) Soit (X,T), (Y,S) deux systèmes dynamiques topologiques et $\varphi : X \to Y$ est une application continue surjective vérifiant $\varphi \circ T = S \circ \varphi$. On dit que (Y,S) est un *facteur* de (X,T) ou que (X,T) est une *extension* de (Y,S) ; φ est appelée une *semi-conjugaison*.

Si de plus φ est un homéomorphisme, alors (X,T) et (Y,S) sont dits *conjugués*.

Deux systèmes conjugués ont les mêmes propriétés dynamiques.

Quand on a affaire à un système non inversible, il peut être utile de considérer son extension naturelle, qui est inversible et reflète la plupart des propriétés dynamiques du système initial.

Définition 1.1.7 (extension naturelle) Soit X un espace métrique compact et $T: X \to X$ une transformation continue surjective. On définit

$$\widetilde{X} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}} \mid \forall n \in \mathbb{Z}, Tx_n = x_{n+1}\} \quad \text{et} \quad \widetilde{T}\colon \begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \longmapsto & (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

Le système inversible $(\widetilde{X}, \widetilde{T})$ est appelé *l'extension naturelle* de (X,T). La projection canonique $\pi\colon \widetilde{X} \to X$, définie par $\pi((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = x_0$, est surjective.

On appelle également *extension naturelle* de (X,T) tout système conjugué à $(\widetilde{X}, \widetilde{T})$.

Remarque 1.1.8 Si $T\colon X \to X$ n'est pas surjective, l'extension naturelle de (X,T) est définie comme précédemment mais π n'est pas surjective. Si $X_\infty = \bigcap_{n\geq 0} T^n(X)$, alors $T\colon X_\infty \to X_\infty$ est surjective et l'extension naturelle de (X,T) est égale à celle de (X_∞, T).

1.2 Systèmes dynamiques mesurés

Un système dynamique mesuré est la donnée de $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ où $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre de l'espace X, μ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{A}$ et $T : X \to X$ est une transformation $\mathcal{A}$-mesurable telle que la mesure μ est T-invariante, c'est-à-dire que $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. On suppose généralement que la σ-algèbre $\mathcal{A}$ est complète, c'est-à-dire qu'elle contient tous les sous-ensembles des ensembles de mesure nulle.

Les définitions et propriétés ci-dessous peuvent être trouvées par exemple dans [29].

Définition 1.2.1 (facteur, conjugaison) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$ deux systèmes dynamiques mesurés. S'il existe un sous-ensemble $X' \subset X$ de mesure 1 et une application mesurable $\varphi : X' \to Y$ telle que $\varphi \circ T = S \circ \varphi$ et $\nu(B) = \mu(\varphi^{-1}B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$, alors $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$ est appelé un *facteur* de $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$. Si de plus $\varphi : X' \to Y'$ est inversible bimesurable, où $Y' \subset Y$ est de mesure 1, les deux systèmes sont dits *conjugués*.

Définition 1.2.2 (ergodicité) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré. Le système est *ergodique* si tout ensemble $A \in \mathcal{A}$ tel que $T^{-1}A = A$ vérifie $\mu(A) = 0$ ou 1. De façon équivalente, le système est ergodique si tout ensemble $A \in \mathcal{A}$ tel que $T^{-1}A \subset A$ vérifie $\mu(A) = 0$ ou 1.

Le théorème suivant indique que, si on considère une mesure ergodique, l'intégrale d'une fonction peut être calculée en évaluant la fonction le long de l'orbite d'un point.

Théorème 1.2.3 (théorème ergodique de Birkhoff) *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré ergodique et $f: X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors pour presque tout $x \in X$, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \int_X f \, d\mu.$$

Quand X est compact et que T est continue, on a davantage comme l'énonce la propriété suivante.

Proposition 1.2.4 *Soit X un espace compact, $T: X \to X$ une transformation continue et μ une mesure ergodique. Alors presque tout point x est générique pour μ, c'est-à-dire :*

$$\forall f \in C(X), \ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \int_X f \, d\mu.$$

1.3 Entropie

Dans cette section, nous rappelons brièvement les définitions de l'entropie topologique et de l'entropie métrique dans le but d'introduire des notations que nous utiliserons par la suite. Nous énonçons également les formules de Bowen et de Katok, qui donnent une alternative pour le calcul de l'entropie topologique ou métrique.

1.3.1 Entropie topologique

Adler, Konheim et McAndrew ont défini l'entropie topologique d'un système dynamique sur un espace métrique compact [1]. Nous introduisons ci-dessous les notions servant à définir l'entropie topologique. Pour plus de détails, nous renvoyons à [85] ou [29].

On considère un espace métrique compact X et une transformation continue $T: X \to X$. $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_p\}$ est un recouvrement ouvert de X si les U_i sont des ouverts et si $\bigcup_{i=1}^p U_i = X$. Si $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_q\}$ est un autre recouvrement ouvert de X, on définit le recouvrement ouvert

$$\mathcal{U} \vee \mathcal{V} = \{U_i \cap V_j \mid 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}.$$

Si $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_p\}$ est un recouvrement ouvert, on note

$$N(\mathcal{U}) = \min\{n \mid \exists i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, p\}, X = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}\}$$

et

$$N_n(\mathcal{U}) = N\left(\mathcal{U} \vee T^{-1}\mathcal{U} \vee \cdots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{U}\right).$$

L'entropie du recouvrement $\mathcal{U}$ est donnée par

$$h_{top}(\mathcal{U},T) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log N_n(\mathcal{U})}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{\log N_n(\mathcal{U})}{n},$$

et l'entropie topologique du système (X,T) est définie comme

$$h_{top}(X,T) = \sup\{h_{top}(\mathcal{U},T) \mid \mathcal{U} \text{ recouvrement ouvert fini de } X\}.$$

Proposition 1.3.1 *Soit X un espace métrique compact et $T\colon X \to X$ une transformation continue.*
- *Pour tout entier $n \geq 1$, on a $h_{top}(X,T^n) = nh_{top}(X,T)$;*
- *si T est inversible, alors $h_{top}(X,T^{-1}) = h_{top}(X,T)$.*

1.3.2 Formule de Bowen

Soit X un espace métrique, d sa distance et $T\colon X \to X$ une transformation continue. Les notions suivantes ont été introduites par Bowen [19].

La *boule de Bowen* de centre x, de rayon ε et d'ordre n est définie par

$$B_n(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid d(T^k x, T^k y) \leq \varepsilon, 0 \leq k < n\}.$$

$E \subset X$ est un ensemble (n,ε)*-séparé* si, pour tous $x,y \in E$, $x \neq y$, il existe $0 \leq k < n$ tel que $d(T^k x, T^k y) > \varepsilon$. On note $s_n(\varepsilon, Y)$ le cardinal maximal d'un ensemble (n,ε)-séparé inclus dans Y.

$E \subset X$ est un (n,ε)*-recouvrement* de Y si

$$Y \subset \bigcup_{x\in E} B_n(x,\varepsilon).$$

On note $r_n(\varepsilon,Y)$ le cardinal minimal d'un (n,ε)-recouvrement de Y.

On a les inégalités suivantes :

$$r_n(\varepsilon,Y) \leq s_n(\varepsilon,Y) \leq r_n\left(\frac{\varepsilon}{2},Y\right).$$

Dans [20], Bowen montre que l'entropie topologique peut être calculée à l'aide d'ensembles (n,ε)-séparés (voir aussi [68]).

Théorème 1.3.2 (formule de Bowen) *Soit $T\colon X \to X$ une transformation continue sur un espace métrique compact X. Alors*

$$\begin{aligned} h_{top}(X,T) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log s_n(\varepsilon,X) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon,X) \end{aligned}$$

Si X est compact et Y est un sous-ensemble de X, non nécessairement invariant, l'entropie topologique de Y est définie de la même façon, c'est-à-dire

$$h_{top}(Y,T) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log s_n(\varepsilon,Y) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon,Y).$$

1.3.3 Entropie métrique

On considère un système dynamique mesuré $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$.

$\mathcal{P} = \{P_1, \ldots P_p\}$ est une partition finie de X si les P_i sont deux à deux disjoints, $P_i \in \mathcal{A}$ et $\bigcup_{i=1}^{p} = X$. Soit $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_p\}$ et $\mathcal{Q} = \{Q_1, \ldots, Q_q\}$ deux partitions finies de X. On définit

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{P_i \cap Q_j \mid 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}.$$

On dit que $\mathcal{P}$ est plus fine que $\mathcal{Q}$ et on note $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$ si pour tout $1 \leq i \leq p$ il existe $1 \leq j \leq q$ tel que $P_i \subset Q_j$. Si $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$ alors $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \mathcal{P}$.

On note $H_\mu(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{p} -\mu(P_i)\log(\mu(P_i))$ (avec la convention $x \log x = 0$ si $x = 0$). L'entropie de la partition $\mathcal{P}$ est donnée par

$$h_\mu(\mathcal{P}, T) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\mathcal{P}\right) = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\mathcal{P}\right).$$

L'entropie (métrique) du système $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ est définie comme

$$h_\mu(X, T) = sup\{h_\mu(\mathcal{P}, T) \mid \mathcal{P} \text{ partition finie de } X\}.$$

Nous renvoyons le lecteur à [63], [64], [85] pour plus d'informations sur l'entropie d'un système dynamique mesuré.

1.3.4 Formule de Katok

Dans [52], Katok montre que l'entropie d'une mesure ergodique est donnée par une formule analogue à celle de Bowen ; il énonce ce résultat pour un homéomorphisme, mais cette restriction n'est pas nécessaire.

Théorème 1.3.3 (formule de Katok) *Soit $T: X \to X$ une transformation continue sur un espace métrique compact X et μ une mesure ergodique. La quantité*

$$h_\mu(X, T, \varepsilon) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \inf_{\substack{Y \subset X \\ \mu(Y) \geq \lambda}} r_n(\varepsilon, Y)$$

est indépendante du choix de $\lambda \in]0, 1[$, et $h_\mu(X, T) = \lim_{\varepsilon \to 0} h_\mu(X, T, \varepsilon)$.

1.4 Mesures invariantes

Quand on a un système dynamique topologique, on peut le munir d'une mesure T-invariante qui le transforme alors en un système dynamique mesuré.

Soit X un espace métrique et $T : X \to X$ une application continue. On note $\mathcal{B}$ la σ-algèbre des boréliens de X. Si μ est une mesure de probabilité borélienne sur X, le support de μ est le plus petit fermé de mesure 1 ; on le note supp(μ).

Une *mesure invariante* (ou *T-invariante*) est une mesure de probabilité borélienne μ sur X telle que $\mu(T^{-1}B) = \mu(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. On dit qu'une mesure μ est *ergodique* (ou *T-ergodique*) si μ est invariante et le système dynamique mesuré $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est ergodique.

On note $\mathcal{M}_T(X)$ l'ensemble des mesures invariantes de (X,T). L'ensemble $\mathcal{M}_T(X)$ est convexe. On munit $\mathcal{M}_T(X)$ de la topologie faible* : c'est la topologie engendrée par les ensembles $\{\mu \in \mathcal{M}_T(X) \mid |\int_X f\,d\mu| < \varepsilon\}$, où $\varepsilon > 0$ et $f \in C(X)$.

Si l'espace X est compact, alors l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur X est également compact [29]. Si μ est une mesure de probabilité borélienne (par exemple une mesure de Dirac), les moyennes de Cesàro $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu(T^{-n}(\cdot))$ ont une valeur d'adhérence ν par compacité, et ν est une mesure T-invariante. Ainsi, si X est compact, l'ensemble $\mathcal{M}_T(X)$ est non vide. Si on considère un système où X n'est pas compact, on peut également s'intéresser aux mesures invariantes, mais leur existence n'est pas garantie a priori.

1.4.1 Décomposition ergodique

Toute mesure invariante μ se décompose sous forme de barycentre de mesures ergodiques, et l'entropie de μ est également donnée par cette décomposition (voir [29]). Pour cette raison, dans de nombreuses situations on peut se contenter de considérer des mesures ergodiques.

Théorème 1.4.1 *Soit X un espace métrique compact et $T\colon X \to X$ une transformation continue. L'ensemble $\mathcal{M}_T(X)$, muni de la topologie faible*, est un compact convexe non vide, dont les points extrémaux sont les mesures ergodiques.*

Toute mesure invariante μ s'écrit de façon unique comme barycentre de mesures ergodiques, c'est-à-dire qu'il existe une mesure de probabilité P_μ supportée par les mesures ergodiques telle que

$$\forall B \in \mathcal{B},\ \mu(B) = \int_{\mathcal{M}_T(X)} \omega(B)\,dP_\mu(\omega).$$

Théorème 1.4.2 *Soit X un espace métrique compact et $T\colon X \to X$ une transformation continue. L'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_T(X) & \to & [0,+\infty] \\ \mu & \mapsto & h_\mu(X,T) \end{array}$$

est affine et, pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$, on a

$$h_\mu(X,T) = \int_{\mathcal{M}_T(X)} h_\omega(X,T)\,dP_\mu(\omega)$$

où P_μ est la mesure donnée par le théorème 1.4.1.

1.4.2 Principe variationnel

Le principe variationnel fait le lien entre l'entropie topologique et les entropies métriques d'un système [85, 29].

Théorème 1.4.3 (principe variationnel) *Soit X un espace métrique compact et $T\colon X \to X$ une transformation continue. On a*

$$\begin{array}{rcl} h_{top}(X,T) & = & \sup\{h_\mu(X,T) \mid \mu \text{ mesure } T\text{-invariante}\} \\ & = & \sup\{h_\mu(X,T) \mid \mu \text{ mesure } T\text{-ergodique}\} \end{array}$$

Une *mesure maximale* est une mesure invariante μ qui atteint le supremum de l'entropie métrique, c'est-à-dire $h_{top}(X,T) = h_\mu(X,T)$. Il n'existe pas nécessairement de mesure maximale. Par le théorème 1.4.2, une mesure maximale s'écrit comme barycentre de mesures ergodiques maximales.

1.4.3 Mesures invariantes et facteurs

Nous serons amenés par la suite à transporter des mesures invariantes d'un système à un autre quand ils sont isomorphes, ou quand l'un est l'extension naturelle de l'autre ; nous n'aurons pas toujours affaire à des espaces compacts, mais à des sous-ensembles invariants de systèmes compacts.

Soit X, Y des espaces métriques, $T: X \to X$, $S: Y \to Y$ des transformations continues et $\varphi: X \to Y$ une application mesurable surjective telle que $\varphi \circ T = S \circ \varphi$. Si $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$, on définit la mesure $\nu = \varphi_* \mu$ par $\nu(B) = \mu(\varphi^{-1}(B))$ pour tout ensemble borélien $B \subset Y$. On a l'application induite suivante :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_*: & \mathcal{M}_T(X) & \longrightarrow & \mathcal{M}_S(Y) \\ & \mu & \longmapsto & \varphi_*\mu \end{array}$$

Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 1.4.4 *Soit X, Y des espaces métriques, $T: X \to X$, $S: Y \to Y$ des transformations continues et $\varphi: X \to Y$ une application mesurable surjective telle que $\varphi \circ T = S \circ \varphi$.*

i) *Si μ est T-ergodique, alors $\varphi_*\mu$ est S-ergodique ;*

ii) *Si φ est inversible bimesurable, alors $\varphi_*: \mathcal{M}_T(X) \to \mathcal{M}_S(Y)$ est une bijection, et $h_\mu(X,T) = h_{\varphi_*\mu}(Y,S)$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$;*

Quand X et Y sont compacts et que φ est continue, l'application φ_* est de plus surjective. Ce résultat figure dans [29] dans le cas où T et S sont des homéomorphismes, mais il se généralise sans difficulté.

Proposition 1.4.5 *Soit X un espace métrique compact et $T: X \to X$ une transformation continue. Si $\varphi: X \to Y$ est une semi-conjugaison de (X,T) vers (Y,S), alors $\varphi_*: \mathcal{M}_X(T) \to \mathcal{M}_Y(S)$ est surjective. De plus, une mesure S-ergodique a au moins un antécédent T-ergodique par φ_*.*

Le résultat suivant est classique, bien que ne figurant pas dans la littérature. Nous donnons les grandes lignes de la preuve

Théorème 1.4.6 *Soit X un espace métrique compact et $T: X \to X$ une transformation continue. Soit $(\widetilde{X}, \widetilde{T})$ l'extension naturelle de (X,T) et $\pi: \widetilde{X} \to X$ la projection canonique. Alors $\pi_*: \mathcal{M}_{\widetilde{T}}(\widetilde{X}) \to \mathcal{M}_T(X)$ est une bijection préservant l'ergodicité et l'entropie.*

Preuve. On remarque tout d'abord qu'on peut supposer que T est surjective, sinon on considère sa restriction à $X_\infty = \bigcap_{n \geq 0} T^n X$, ensemble qui supporte toutes les mesures invariantes.

Par la proposition 1.4.5, $\pi_*: \mathcal{M}_{\widetilde{T}}(\widetilde{X}) \to \mathcal{M}_T(X)$ est surjective. Une mesure $\nu \in \mathcal{M}_{\widetilde{T}}$ est entièrement déterminée par sa valeur sur les ensembles de la forme

$$\left\{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \widetilde{X} \mid x_i \in \ B_i, 0 \leq i \leq p\right\} = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \widetilde{X} \mid x_0 \in \bigcap_{i=0}^{p} T^{-i} B_i\right\} \ ;$$

on montre alors facilement que ν est entièrement déterminée par $\pi_*\nu$, donc π_* est injective.

Par le lemme 1.4.4(i), si ν est ergodique alors $\pi_*\nu$ l'est également. Selon la proposition 1.4.5, une mesure T-ergodique a un antécédent ergodique par π_*. Ainsi, π_* conserve l'ergodicité.

Soit $\nu \in \mathcal{M}_{\widetilde{T}}(\widetilde{X})$ et $\mu = \pi_*\nu$. Si $(\mathcal{P}_n)_{n\geq 0}$ est une suite de partitions finies de X dont le diamètre tend vers 0, alors $h_\mu(X,T) = \lim_{n\to+\infty} h_\mu(\mathcal{P}_n, T)$. Si $\mathcal{Q}_n = \pi^{-1}\mathcal{P}_n$, alors $h_\nu(\mathcal{Q}_n, \widetilde{T}) = h_\mu(\mathcal{P}_n, T)$.

De plus, on montre que le diamètre de $\bigvee_{i=-n}^{n} \widetilde{T}^{-i}\mathcal{Q}_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$h_\nu(\widetilde{X},\widetilde{T}) = \lim_{n\to+\infty} h_\nu(\mathcal{Q}_n,\widetilde{T}) = h_\mu(X,T),$$

donc π_* préserve l'entropie. $\square$

1.5 Shifts, sous-shifts

Une classe de systèmes que nous rencontrerons à plusieurs reprises est celle des sous-shifts.

Soit A un ensemble fini ou dénombrable, appelé *alphabet*. On munit A de la topologie discrète et $A^{\mathbb{Z}}$ de la topologie produit. L'ensemble $A^{\mathbb{Z}}$ n'est compact que si A est fini. Si A est identifié avec $\mathbb{N}$, une distance compatible avec la topologie de $A^{\mathbb{Z}}$ est donnée par

$$d\left((a_n)_{n\in\mathbb{Z}},(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\left|2^{-a_n}-2^{-b_n}\right|}{2^{|n|}}.$$

Le shift σ est défini sur $A^{\mathbb{Z}}$ par $\sigma((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (a_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$; c'est une application continue. Le système $(A^{\mathbb{Z}},\sigma)$ est appelé le *shift bilatéral* sur A.

Si $\Sigma \subset A^{\mathbb{Z}}$ est un sous-ensemble fermé tel que $\sigma(\Sigma) \subset \Sigma$, le système (Σ,σ) est appelé un *sous-shift*. Un mot de longueur k de Σ est de la forme $(a_0,\ldots,a_{k-1})$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma$.

On définit de même le shift unilatéral $(A^{\mathbb{N}},\sigma)$, où $\sigma((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Si Σ_+ est un sous-ensemble fermé de $A^{\mathbb{N}}$ tel que $\sigma(\Sigma_+) \subset \Sigma_+$, le système (Σ_+,σ) est également appelé un sous-shift. L'extension naturelle de (Σ_+,σ) est (Σ,σ), où

$$\Sigma = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid \forall N \in \mathbb{Z}, (a_{n+N})_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_+\},$$

et la projection canonique $\pi: \Sigma \to \Sigma_+$ est définie par $\pi((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Comme pour les systèmes sur des espaces compacts, il y a une bijection préservant l'ergodicité et l'entropie entre les mesures invariantes d'un sous-shift et celles de son extension naturelle.

Proposition 1.5.1 *Soit (Σ_+,σ) un sous-shift, (Σ,σ) son extension naturelle et $\pi: \Sigma \to \Sigma_+$ la projection canonique. Alors π_* est une bijection préservant l'ergodicité et l'entropie.*

Preuve. On note A l'alphabet du sous-shift Σ_+. Si A est un alphabet fini, Σ et Σ_+ sont compact de sorte que c'est exactement le théorème 1.4.6. On se place dans le cas où A est un alphabet dénombrable. On note $A\cup\{\infty\}$ le compactifié de A ; $(A\cup\{\infty\})^{\mathbb{N}}$ est un ensemble compact métrisable. Soit $\overline{\Sigma}_+$ l'adhérence de Σ_+ dans $(A\cup\{\infty\})^{\mathbb{N}}$ et $\overline{\Sigma} \subset (A\cup\{\infty\})^{\mathbb{Z}}$ l'extension naturelle de $\overline{\Sigma}_+$. On continue de noter π la projection canonique $\pi: \overline{\Sigma} \to \overline{\Sigma}_+$. Par le théorème 1.4.6, π_* est une bijection préservant l'ergodicité et l'entropie entre les mesures invariantes de $(\overline{\Sigma},\sigma)$ et celles de $(\overline{\Sigma}_+,\sigma)$.

Si ν est une mesure invariante sur Σ, on peut la voir comme une mesure de $\overline{\Sigma}$. On a nécessairement $\nu([\infty]) = 0$. Si $\mu = \pi_*\nu$, alors $\mu([\infty]) = 0$, donc, par σ-invariance, μ est concentrée sur $\overline{\Sigma}_+ \cap A^{\mathbb{N}} = \Sigma_+$. De même, si ν est une mesure invariante de $\overline{\Sigma}$ avec $\pi_*\nu$ concentrée sur Σ_+, alors $\nu([\infty]) = 0$ et ν est concentrée sur Σ. De cette façon, l'application π_*, restreinte à $\mathcal{M}_\sigma(\Sigma)$, est une bijection entre $\mathcal{M}_\sigma(\Sigma)$ et $\mathcal{M}_\sigma(\Sigma_+)$; elle préserve l'ergodicité et l'entropie. $\square$

Chapitre 2

Couples asymptotiques dans les systèmes d'entropie non nulle

Ce chapitre a été écrit en collaboration avec F. Blanchard et B. Host et a fait l'objet d'un article [11]. Nous considérons des systèmes dynamiques topologiques (X, T), où X est un espace métrique compact et $T: X \to X$ est continue surjective. Si x et y sont deux points de X, (x, y) est appelé un *couple asymptotique propre* si $x \neq y$ et $\lim_{n\to+\infty} d(T^n x, T^n y) = 0$; on dit que (x, y) est un *couple de Li-Yorke* si $\liminf_{n\to+\infty} d(T^n x, T^n y) = 0$ et $\limsup_{n\to+\infty} d(T^n x, T^n y) > 0$.

Nous montrons qu'un système dynamique (X, T) d'entropie non nulle admet des couples asymptotiques propres. Plus précisément, nous considérons une mesure ergodique μ d'entropie non nulle et nous montrons que l'ensemble des points appartenant à un couple asymptotique propre est de mesure 1 pour μ. On appelle *classe stable* de x l'ensemble des points y qui forment un couple asymptotique avec x. Quand la transformation T est inversible, les classes stables ne sont pas stables sous l'action de T^{-1} : pour μ-presque tout x, il existe un nombre non dénombrable de points y qui sont asymptotiques avec x et tels que (x, y) est un couple de Li-Yorke pour T^{-1}. Nous montrons également que les couples asymptotiques sont denses dans l'ensemble des couples d'entropie topologique.

Introduction

In this article a *topological dynamical system* is a compact metric space X endowed with a homeomorphism $T : X \to X$, except in subsection 3.3 where we drop the assumption that T is invertible; the distance on X is denoted by d.

Classically in Topological Dynamics one considers the asymptotic behaviour of pairs of points. In this article, even when the systems considered are invertible, the definitions of asymptoticity, proximality and Li-Yorke pairs that we use are those fitted to an $\mathbb{N}$-action. A pair $(x, y) \in X \times X$ is said to be *proximal* if $\liminf_{n\to+\infty} d(T^n x, T^n y) = 0$, and (x, y) is called an *asymptotic pair* if $\lim_{n\to+\infty} d(T^n x, T^n y) = 0$; the set of asymptotic pairs is denoted by $\mathbf{A}$. An asymptotic pair (x, y) with $x \neq y$ is said to be *proper*. Asymptoticity is an equivalence relation; the equivalence class of a point is called its *stable class*. We call a proximal pair that is not asymptotic a *Li-Yorke pair*: in 1975 Li and Yorke introduced such pairs in a tentative definition of chaos [57].

It is proven in [9] that positive entropy implies the existence of a topologically 'big' set of Li-Yorke pairs. Here we prove by ergodic methods that in any topological dynamical system with positive topological entropy there is a measure-theoretically 'rather big' set of proper asymptotic pairs; this is obvious for a symbolic system but not in general. The set of asymptotic pairs of any topological dynamical system has been shown to be first category in [50]: it is a small set, but not too small according to the present result. We also show that a 'rather big' set of T-asymptotic pairs are Li-Yorke under the action of T^{-1}.

In [49] Huang and Ye construct a completely scrambled system, that is to say, a dynamical system (X, T) such that all proper pairs in $(X \times X)$ are Li-Yorke. They ask whether such a system may have positive entropy. That it may not is a direct consequence of our Proposition 1. This statement formally generalizes a previous result of Weiss [86], showing that any system (X, T) such that $(X \times X, T \times T)$ is recurrent has entropy 0; recurrence of $(X \times X, T \times T)$ means that any pair (x, y), $x \neq y$, comes back arbitrarily close to itself under the action of powers of T, which implies that it cannot be asymptotic.

Then we study the behaviour of T-asymptotic pairs under T^{-1}. Anosov diffeomorphisms on a manifold have stable and unstable foliations; points belonging to the same stable foliation are asymptotic under T and tend to diverge under T^{-1}, while pairs belonging to the unstable foliation behave the opposite way. Our results show that any positive-entropy system retains a faint flavour of this situation: there is a universal $\delta > 0$ such that outside a 'small' set the stable class of x is non-empty and contains an uncountable set of points y such that $\limsup_{n\to+\infty} d(T^{-n}x, T^{-n}y) \geq \delta$.

We also obtain a result about entropy pairs [10]: the set of asymptotic pairs $\mathbf{A}$ is dense in the set of entropy pairs $E(X, T)$. The proof relies on two facts: that the union of the sets of μ-entropy pairs for all ergodic measures μ is dense in the set of topological entropy pairs [8], and the characterization of the set $E_\mu(X, T)$ of μ-entropy pairs as the support of some measure on $X \times X$ [37].

The article is organized as follows. Section 2.1 contains some background in Ergodic Theory, in particular the old but not very familiar definition of an *excellent partition*. In Section 2.2 using an ad-hoc excellent partition we show that every system of positive entropy admits 'many' asymptotic pairs, and that this is also true for non-invertible systems. In the next section, after recalling the definition of the relative independent square of a measure, we use this notion to show that asymptotic pairs are dense in the set of entropy pairs. In Section 2.4, we show that a system of positive entropy has 'many' pairs that are asymptotic for T and Li-Yorke for T^{-1}. In the last section we show that the sets constructed above are uncountable.

Some results are stated several times in increasingly strong form; Propositions 2.4.2 and 2.5.3

are strongest. We chose this organization in order to avoid a long preliminary section containing all the required background. Most tools are introduced just before the statements that require them for their proofs.

A final remark about the methods. It is not very satisfactory to prove a purely topological result – the existence of many asymptotic pairs in any positive-entropy topological dynamical system – in a purely ergodic way. Proving it topologically is a good challenge. On the other hand Ergodic Theory is a powerful tool; it is not the first time that it demonstrates its strength in a neighbouring field. Here it also permits to prove results that are probabilistic in nature.

We are grateful to X.D. Ye for providing the initial motivation, to W. Huang and him for several valuable observations and to S. Kolyada for various interesting remarks. The referee made significant remarks and corrected many English mistakes.

2.1 Background

Here are some classical definitions and results from Ergodic Theory, and some technical Lemmas that will be needed in the sequel.

A measure-theoretic dynamical system $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ is a Lebesgue probability space $(X, \mathcal{A}, \mu)$ endowed with a measurable transformation $T: X \to X$ which preserves μ. In this article unless stated otherwise T is assumed to be one-to-one and bi-measurable. The σ-algebra $\mathcal{A}$ is assumed to be complete for μ. All measures are assumed to be probability measures; since quasi-invariant measures are not considered in this article, an ergodic measure is always assumed to be invariant.

2.1.1 Partitions

All partitions of X are assumed to consist of atoms belonging to the σ-algebra $\mathcal{A}$. Given a partition $\mathcal{P}$ of X and $x \in X$, denote by $\mathcal{P}(x)$ the atom of $\mathcal{P}$ containing x.

If $(\mathcal{P}_i)_{i\in I}$ is a countable family of finite partitions, the partition $\mathcal{P} = \bigvee_{i\in I} \mathcal{P}_i$ is called a *measurable partition* [63]. The sets $A \in \mathcal{A}$ which are union of atoms of $\mathcal{P}$ form a sub-σ-algebra of $\mathcal{A}$ denoted by $\sigma(\mathcal{P})$ or $\mathcal{P}$ if there is no ambiguity. Every sub-σ-algebra of $\mathcal{A}$ coincides with a σ-algebra constructed in this way outside a set of measure 0.

A sub-σ-algebra $\mathcal{F}$ of $\mathcal{A}$ which is T-invariant, that is, $T^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}$, is called a *factor*. Equivalently, a factor is given by a measure-theoretical system $(Y, \mathcal{B}, S, \nu)$ and a measurable map $\varphi: X \to Y$ such that $\varphi \circ T = S \circ \varphi$; the corresponding T-invariant sub-σ-algebra of $\mathcal{A}$ is $\varphi^{-1}\mathcal{B}$.

Given a measurable partition $\mathcal{P}$, put $\mathcal{P}^- = \bigvee_{n=1}^{+\infty} T^{-n}\mathcal{P}$ and $\mathcal{P}^T = \bigvee_{n=-\infty}^{+\infty} T^{-n}\mathcal{P}$. Define in the same way $\mathcal{F}^-$ and $\mathcal{F}^T$ if $\mathcal{F}$ is a sub-σ-algebra of $\mathcal{A}$. The measurable partition $\mathcal{P}$ (resp. the sub-σ-algebra $\mathcal{F}$) is called *generating* if $\sigma(\mathcal{P}^T)$ (resp. $\mathcal{F}^T$) is equal to $\mathcal{A}$.

2.1.2 Entropy

For the definition of the conditional entropy $H_\mu(\mathcal{P} \mid \mathcal{F})$ of a finite measurable partition $\mathcal{P}$ with respect to the sub-σ-algebra $\mathcal{F}$, of the entropy $h_\mu(\mathcal{P}, T) = H_\mu(\mathcal{P} \mid \mathcal{P}^-)$ of a partition $\mathcal{P}$ with respect to T and of the entropy $h_\mu(X, T)$, refer to [63], [64], [85].

The *Pinsker factor* Π_μ of $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ is the maximal factor with entropy 0; a finite partition $\mathcal{P}$ is measurable with respect to Π_μ if and only if $h_\mu(\mathcal{P}, T) = 0$.

We do not give the proofs of the next two results; they can be found in [63].

Lemma 2.1.1 *If $\mathcal{F}$ is a generating sub-σ-algebra then $\Pi_\mu \subset \mathcal{F}^-$.*

Pinsker Formula *For any finite partitions $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ one has*

$$H_\mu(\mathcal{Q} \vee \mathcal{P} \mid \mathcal{Q}^- \vee \mathcal{P}^-) - H_\mu(\mathcal{P} \mid \mathcal{P}^-) = H_\mu(\mathcal{Q} \mid \mathcal{Q}^- \vee \mathcal{P}^T). \tag{2.1}$$

The next technical Lemma compares the entropy of a partition with the conditional entropy of this partition with respect to the past of another.

Lemma 2.1.2 *Let $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ be a measure-theoretic dynamical system, and let $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \prec \ldots \prec \mathcal{P}_k$ be finite partitions. Then*

$$H_\mu(\mathcal{P}_1 \mid \mathcal{P}_1^-) - H_\mu(\mathcal{P}_1 \mid \mathcal{P}_2^-) = H_\mu(\mathcal{P}_2 \mid \mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2^-) - H_\mu(\mathcal{P}_2 \mid \mathcal{P}_1^T \vee \mathcal{P}_2^-) \tag{2.2}$$

and

$$H_\mu(\mathcal{P}_1 \mid \mathcal{P}_1^-) - H_\mu(\mathcal{P}_1 \mid \mathcal{P}_k^-) \leq \sum_{i=1}^{k-1} \left(H_\mu(\mathcal{P}_i \mid \mathcal{P}_i^-) - H_\mu(\mathcal{P}_i \mid \mathcal{P}_{i+1}^-) \right). \tag{2.3}$$

Proof. Obviously $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_k$. A repeated use of the Pinsker Formula (2.1) yields

$$H_\mu(\mathcal{P}_k \mid \mathcal{P}_k^-) = H_\mu(\mathcal{P}_1 \mid \mathcal{P}_1^-) + H_\mu(\mathcal{P}_2 \mid \mathcal{P}_2^- \vee \mathcal{P}_1^T) + \ldots + H_\mu(\mathcal{P}_k \mid \mathcal{P}_k^- \vee \mathcal{P}_{k-1}^T);$$

also, using the elementary formula for conditional entropy of partitions inductively one gets

$$H_\mu(\mathcal{P}_k \mid \mathcal{P}_k^-) = H_\mu(\mathcal{P}_1 \mid \mathcal{P}_k^-) + H_\mu(\mathcal{P}_2 \mid \mathcal{P}_k^- \vee \mathcal{P}_1) + \ldots + H_\mu(\mathcal{P}_k \mid \mathcal{P}_k^- \vee \mathcal{P}_{k-1}).$$

Combining these two equalities one obtains

$$H_\mu(\mathcal{P}_1 \mid \mathcal{P}_1^-) - H_\mu(\mathcal{P}_1 \mid \mathcal{P}_k^-) = \sum_{i=2}^{k} \left(H_\mu(\mathcal{P}_i \mid \mathcal{P}_k^- \vee \mathcal{P}_{i-1}) - H_\mu(\mathcal{P}_i \mid \mathcal{P}_i^- \vee \mathcal{P}_{i-1}^T) \right).$$

For $k = 2$ this is (2.2).

For $k > 2$, remark that $\mathcal{P}_i^- \prec \mathcal{P}_k^-$ for $i \leq k$ so that $H_\mu(\mathcal{P}_i \mid \mathcal{P}_k^- \vee \mathcal{P}_{i-1}) \leq H_\mu(\mathcal{P}_i \mid \mathcal{P}_i^- \vee \mathcal{P}_{i-1})$, hence

$$H_\mu(\mathcal{P}_1 \mid \mathcal{P}_1^-) - H_\mu(\mathcal{P}_1 \mid \mathcal{P}_k^-) \leq \sum_{i=2}^{k} \left(H_\mu(\mathcal{P}_i \mid \mathcal{P}_i^- \vee \mathcal{P}_{i-1}) - H_\mu(\mathcal{P}_i \mid \mathcal{P}_i^- \vee \mathcal{P}_{i-1}^T) \right).$$

Applying (2.2) (with $\mathcal{P}_{i-1}$ and $\mathcal{P}_i$ in place of $\mathcal{P}_1$ and $\mathcal{P}_2$) to each term in the sum, the inequality above becomes

$$H_\mu(\mathcal{P}_1 \mid \mathcal{P}_1^-) - H_\mu(\mathcal{P}_1 \mid \mathcal{P}_k^-) \leq \sum_{i=2}^{k} \left(H_\mu(\mathcal{P}_{i-1} \mid \mathcal{P}_{i-1}^-) - H_\mu(\mathcal{P}_{i-1} \mid \mathcal{P}_i^-) \right)$$

which is (2.3) up to a change of index. $\square$

2.1.3 Excellent partitions

For any measure-theoretic dynamical system $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ there exists a generating measurable partition with the property that $\bigcap_{k=1}^{+\infty} T^{-k}\mathcal{P}^- = \Pi_\mu$. In the finite-entropy case any finite generating partition has this property. The existence of such a partition in the general case was proven by Rohlin and Sinaĭ and permitted to show that the class of K-systems and the class of completely positive entropy systems coincide [67]; they gave a construction from which the one in Subsection 2.2.1 is derived. The name "excellent" was coined by one of the present authors in a later article.

Definition 2.1.3 Let $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ be a measure-theoretic dynamical system. A measurable partition $\mathcal{P}$ is said to be *excellent* if it is generating and there is an increasing sequence of finite measurable partitions $(\mathcal{P}_n)_{n\geq 1}$ such that $\mathcal{P}_n \to \mathcal{P}$ and $H_\mu(\mathcal{P}_n \mid \mathcal{P}_n^-) - H_\mu(\mathcal{P}_n \mid \mathcal{P}^-) \to 0$ as $n \to +\infty$.

Lemma 2.1.4 [63] *If $\mathcal{P}$ is an excellent partition, then $\bigcap_{k=1}^{+\infty} T^{-k}\mathcal{P}^- = \Pi_\mu$.*

Proof. Let $\mathcal{Q}$ be a finite partition, measurable with respect to $\bigcap_{k=1}^{\infty} T^{-k}\mathcal{P}^-$, and let the partitions $\mathcal{P}_n$ be as in Definition 2.1.3. Applying the Pinsker Formula (2.1) twice one obtains

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{Q} \mid \mathcal{Q}^-) &= H_\mu(\mathcal{P}_n \vee \mathcal{Q} \mid \mathcal{P}_n^- \vee \mathcal{Q}^-) - H_\mu(\mathcal{P}_n \mid \mathcal{P}_n^- \vee \mathcal{Q}^T) \\ &= H_\mu(\mathcal{P}_n \mid \mathcal{P}_n^-) + H_\mu(\mathcal{Q} \mid \mathcal{P}_n^T \vee \mathcal{Q}^-) - H_\mu(\mathcal{P}_n \mid \mathcal{P}_n^- \vee \mathcal{Q}^T). \end{aligned}$$

When n goes to infinity $H_\mu(\mathcal{Q} \mid \mathcal{P}_n^T \vee \mathcal{Q}^-)$ goes to 0, since $\mathcal{P}_n^T$ tends to $\mathcal{P}^T = \mathcal{A}$; on the other hand we assumed that $T^n\mathcal{Q}$ is measurable with respect to $\mathcal{P}^-$ for $n \in \mathbb{Z}$, so $\mathcal{P}_n^- \vee \mathcal{Q}^T$ is contained in $\mathcal{P}^-$ and

$$0 \leq H_\mu(\mathcal{P}_n \mid \mathcal{P}_n^-) - H_\mu(\mathcal{P}_n \mid \mathcal{P}_n^- \vee \mathcal{Q}^T) \leq H_\mu(\mathcal{P}_n \mid \mathcal{P}_n^-) - H_\mu(\mathcal{P}_n \mid \mathcal{P}^-).$$

By our assumption the majoration tends to 0. Thus $H_\mu(\mathcal{Q} \mid \mathcal{Q}^-) = 0$, which means that $\mathcal{Q}$ is coarser than the Pinsker σ-algebra. As this is true for any finite partition $\mathcal{Q}$ measurable with respect to $\bigcap_{k=1}^{+\infty} T^{-k}\mathcal{P}^-$, one has $\bigcap_{k=1}^{+\infty} T^{-k}\mathcal{P}^- \subset \Pi_\mu$.

The reverse inclusion is due to the fact that $\mathcal{P}$ is generating, so that $\Pi_\mu \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} T^{-k}\mathcal{P}^-$ by Lemma 2.1.1. □

2.2 Existence of asymptotic pairs

Let (X, T) be a topological dynamical system, and let $\mathcal{B}$ be the Borel σ-algebra of X. Given two topological dynamical systems (X, T) and (Y, S) a continuous onto map $\pi : (X, T) \to (Y, S)$ such that $\pi \circ T = S \circ \pi$ is called a *topological factor map.*

The definitions of proximal, asymptotic and Li-Yorke pairs are given at the very beginning of the Introduction. Recall that $\mathbf{A}$ is the set of all asymptotic pairs in $X \times X$. See [85] for the definition of topological entropy, and for the

Variational Principle *The topological entropy $h_{top}(X, T)$ of the system (X, T) is equal to the supremum of the entropies $h_\mu(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ where μ ranges over the set of ergodic T-invariant measures.*

2.2.1 Construction of an excellent partition

The next Lemma establishes a connection between asymptotic pairs and entropy. It is our main tool. It is based on the construction of excellent partitions in [63].

Lemma 2.2.1 *Let μ be an ergodic measure on X.*

i) *The system $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ admits an excellent partition $\mathcal{P}$, such that any pair of points belonging to the same atom of $\mathcal{P}^-$ is asymptotic.*

ii) *Moreover, if $h_\mu(X,T) > 0$ then the σ-algebras $\mathcal{P}^-$ and $\mathcal{B}$ do not coincide up to sets of μ-measure 0.*

Proof.
i) Let $(\mathcal{Q}_n)_{n\geq 1}$ be an increasing sequence of finite partitions such that the maximal diameter δ_n of an element of $\mathcal{Q}_n$ goes to 0 as $n \to \infty$, and $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ be a sequence of positive numbers such that $\sum_{i=1}^{+\infty} \epsilon_n < +\infty$.

We construct inductively an increasing sequence $(k_n)_{n\geq 1}$ of non-negative integers such that, if

$$\mathcal{P}_i = T^{-k_1}\mathcal{Q}_1 \vee T^{-k_2}\mathcal{Q}_2 \ldots \vee T^{-k_i}\mathcal{Q}_i$$

for $i \geq 1$ one has

$$H_\mu(\mathcal{P}_i \mid \mathcal{P}_i^-) - H_\mu(\mathcal{P}_i \mid \mathcal{P}_{i+1}^-) < \epsilon_i. \tag{2.4}$$

Put $k_1 = 0$ and $\mathcal{P}_1 = \mathcal{Q}_1$. Take $n \geq 2$, and suppose that the sequence is already defined up to k_{n-1} and the bound (2.4) holds for $1 \leq i \leq n-2$.

By Lemma 2.1.2 (2.2) one has for $k \geq 0$

$$\begin{aligned} D_k &\stackrel{\text{def}}{=} H_\mu(\mathcal{P}_{n-1} \mid \mathcal{P}_{n-1}^-) - H_\mu(\mathcal{P}_{n-1} \mid \mathcal{P}_{n-1}^- \vee T^{-k}\mathcal{Q}_n^-) \\ &= H_\mu(T^{-k}\mathcal{Q}_n \mid \mathcal{P}_{n-1} \vee \mathcal{P}_{n-1}^- \vee T^{-k}\mathcal{Q}_n^-) - H_\mu(T^{-k}\mathcal{Q}_n \mid \mathcal{P}_{n-1}^T \vee T^{-k}\mathcal{Q}_n^-). \end{aligned}$$

By T-invariance of μ the second equality above becomes

$$D_k = H_\mu(\mathcal{Q}_n \mid T^{k+1}\mathcal{P}_{n-1}^- \vee \mathcal{Q}_n^-) - H_\mu(\mathcal{Q}_n \mid \mathcal{P}_{n-1}^T \vee \mathcal{Q}_n^-);$$

when k goes to infinity the conditioning σ-algebra in the first term tends to the conditioning σ-algebra in the second term, and the difference D_k tends to 0.

Fix k_n so that $D_{k_n} < \epsilon_n$, which, putting $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n-1} \vee T^{-k_n}\mathcal{Q}_n$, is Property (2.4) at rank $i = n-1$. Setting $\mathcal{P} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ completes our construction.

It remains to check that $\mathcal{P}$ is excellent.

By construction, $\mathcal{P}^T$ is finer than $\bigvee_{n\geq 1} \mathcal{Q}_n$, and this partition spans $\mathcal{B}$ because of our hypotheses on $(\mathcal{Q}_n)$. Thus $\mathcal{P}$ is generating.

The sequence $(\mathcal{P}_n)$ increases to $\mathcal{P}$; moreover

$$H_\mu(\mathcal{P}_n \mid \mathcal{P}_n^-) - H_\mu(\mathcal{P}_n \mid \mathcal{P}^-) = \lim_{k\to+\infty} \left(H_\mu(\mathcal{P}_n \mid \mathcal{P}_n^-) - H_\mu(\mathcal{P}_n \mid \mathcal{P}_{n+k}^-) \right),$$

and by Lemma 2.1.2 (2.3) one gets

$$H_\mu(\mathcal{P}_n \mid \mathcal{P}_n^-) - H_\mu(\mathcal{P}_n \mid \mathcal{P}^-) \leq \sum_{i=n}^{+\infty} (H_\mu(\mathcal{P}_i \mid \mathcal{P}_i^-) - H_\mu(\mathcal{P}_i \mid \mathcal{P}_{i+1}^-)) < \sum_{i=n}^{+\infty} \epsilon_i, \tag{2.5}$$

a quantity which vanishes as $n \to +\infty$: the second condition for excellence of $\mathcal{P}$ holds.

Let x, y belong to the same atom of $\mathcal{P}^-$. For each $i \geq 1$, $T^i x$ and $T^i y$ belong to the same atom of $\mathcal{P}$, thus $T^{i+k_n} x$ and $T^{i+k_n} y$ belong to the same atom of $\mathcal{Q}_n$ for all $n \geq 1$. For all $k > k_n$ the points $T^k x$ and $T^k y$ belong to the same atom of $\mathcal{Q}_n$, and $d(T^k x, T^k y) \leq \delta_n$, thus x, y are asymptotic.

ii) Assume that $\mathcal{P}^- = \mathcal{B}$, then by (2.5) one obtains $H_\mu(\mathcal{P}_n | \mathcal{P}_n^-) \to 0$. In addition

$$H_\mu(\mathcal{P}_n | \mathcal{P}_n^-) = h_\mu(\mathcal{P}_n, T) \geq h_\mu(\mathcal{Q}_n, T) \to h_\mu(X, T),$$

so $h_\mu(X, T) = 0$. This completes the proof. □

2.2.2 The invertible case

For $x \in X$ denote by $\mathbf{A}(x)$ the set of points of X that are asymptotic to x.

Proposition 2.2.2 *Let (X, T) be an invertible topological dynamical system with positive topological entropy. Then (X, T) has proper asymptotic pairs.*

More precisely, the set of points belonging to a proper asymptotic pair has measure 1 for any ergodic measure on X with positive entropy.

Proof. Let μ be an ergodic measure on X with $h_\mu(X, T) > 0$; the existence of μ follows from the Variational Principle. Let $\mathcal{P}$ be the excellent partition for $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ constructed in Lemma 2.2.1.

Let J be the set of points of X which belong to a proper asymptotic pair. J is measurable and invariant under T.

By ergodicity $\mu(J) = 0$ or 1; assume that $\mu(J) = 0$. Then $\mathbf{A}(x) = \{x\}$ for almost every x, thus $\mathcal{P}^-(x) = \{x\}$ by construction. Then $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{P}^-)$ up to sets of measure 0; by Lemma 2.2.1 (ii) this contradicts $h_\mu(X, T) > 0$. □

Remark 2.2.3 Although $\mathbf{A}$ is Borel, the set J of points that belong to a proper asymptotic pair may not be Borel. Nevertheless J is measurable (modulo null sets) for all Borel measures.

Remark 2.2.4 As $h_{top}(X, T) = h_{top}(X, T^{-1})$, there are also proper asymptotic pairs for T^{-1}. It will be shown later that the stable classes of x under T and T^{-1} do not coincide.

Proposition 2.2.5 *Let $\pi : (X, T) \to (Y, S)$ be a topological factor map, collapsing all proper asymptotic pairs of X. Then $h_{top}(Y, S) = 0$.*

Proof. The difficulty here comes from the fact that the system Y can have proper asymptotic pairs [90].

Denote the Borel σ-algebra of Y by $\mathcal{B}_Y$. Let ν be an ergodic measure on Y: ν has a preimage μ under π, which is T-ergodic [29]. Let $\mathcal{P}$ be the excellent partition of $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ constructed in Lemma 2.2.1. When two points belong to the same atom of $\mathcal{P}^-$ they are asymptotic: they are collapsed by π and belong to the same atom of $\pi^{-1}\mathcal{B}_Y$. This means that the σ-algebra $\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y)$ is contained in the σ-algebra $\mathcal{P}^-$. As $\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y)$ is invariant by T, it follows from Lemma 2.1.4 that it is contained in Π_μ. Thus, for any finite partition $\mathcal{Q}$ of Y, the partition $\pi^{-1}(\mathcal{Q})$ of X is Π_μ-measurable and

$$h_\nu(\mathcal{Q}, S) = h_\mu(\pi^{-1}(\mathcal{Q}), T) = 0.$$

Therefore $h_\nu(Y, S) = 0$; the conclusion follows from the Variational Principle. □

2.2.3 The non-invertible case

Let (X,T) be a non-invertible topological system: X is a compact metric space for the distance d, and $T : X \to X$ is continuous and onto but not one-to-one.

X evidently admits proper asymptotic pairs, namely any pair (x,y) with $x \neq y$ and $T^n x = T^n y$ for some $n > 0$; when (X,T) is a subshift all asymptotic pairs are of this kind. It is nevertheless not obvious, and interesting to know, that the almost-everywhere result of Proposition 2.2.2 holds in the non-invertible case too.

Proposition 2.2.6 *Let (X,T) be a non-invertible topological dynamical system. The set of points belonging to a proper asymptotic pair has measure 1 for any ergodic measure of positive entropy.*

Proof. Recall the definition of the natural extension $(\widetilde{X},\widetilde{T})$ of (X,T): denote by $\tilde{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ a point of $X^{\mathbb{Z}}$, and by $\widetilde{X}$ the closed subset of $X^{\mathbb{Z}}$ consisting of points $\tilde{x}$ such that $x_{n+1} = Tx_n$ for all $n \in \mathbb{Z}$. $\widetilde{X}$ is invariant by the shift $\widetilde{T}$, which is a homeomorphism of $\widetilde{X}$. Moreover, the map $\pi : \tilde{x} \mapsto x_0$ is onto by compactness and satisfies $T \circ \pi = \pi \circ \widetilde{T}$.

The topology of $\tilde{X}$ is defined by the distance

$$\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-|n|} d(x_n, y_n).$$

Thus a pair $(\tilde{x},\tilde{y})$ is asymptotic in $\widetilde{X}$ if and only if the pair (x_0, y_0) is asymptotic in X.

Let J be the subset of X consisting of all points belonging to a proper asymptotic pair, and let $\tilde{J}$ have the same definition in $\tilde{X}$. Since T is onto, $T^{-1}J \subset J$. Let $z \in \pi(\tilde{J})$. Choose $\tilde{x} \in \tilde{J}$ with $x_0 = z$, then there exists $\tilde{y} \neq \tilde{x}$ such that $(\tilde{x},\tilde{y})$ is asymptotic. There exists $k \geq 0$ such that $y_{-k} \neq x_{-k}$, thus (x_{-k}, y_{-k}) is a proper asymptotic pair in X, and $x_{-k} \in J$. It follows from $z = x_0 = T^k x_{-k}$ that $z \in T^k J$. Finally $\pi(\tilde{J}) \subset \bigcup_{k\geq 0} T^k J$.

Let μ be an ergodic measure on X with $h_\mu(X,T) > 0$. It lifts to an ergodic measure $\tilde{\mu}$ on $\tilde{X}$, with $h_{\tilde{\mu}}(\tilde{X},\tilde{T}) > 0$. By Proposition 2.2.2, $\tilde{\mu}(\tilde{J}) = 1$, thus $\mu(\pi(\tilde{J})) = 1$, which by the inclusion above implies that $\mu(T^k J) > 0$ for some k.

For every k, $T^{-k}(T^k J) \subset J$: if $T^k x \in T^k J$ there exist $y \in J$ and z such that $T^k x = T^k y$ and (y,z) is a proper asymptotic pair. Then either (x,z) or (x,y) is a proper asymptotic pair depending on whether $x = y$ or not, and $x \in J$. By the inclusion above it follows that $\mu(J) > 0$, and since μ is ergodic $\mu(J) = 1$. □

2.3 Relatively independent squares

2.3.1 Background

Let (X,T) be a topological dynamical system, $\mathcal{B}$ be its Borel σ-algebra, and μ be an ergodic measure.

For the definition and classical properties of conditional expectations used in this section see [31], [32], [5]. We shall use the

Martingale Theorem *Let $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 1}$ be a decreasing sequence of sub-σ-algebras of $\mathcal{B}$ and let $\mathcal{G} = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{G}_n$. For every $f \in L^2(\mu)$, $\mathbb{E}(f \mid \mathcal{G}_n) \to \mathbb{E}(f \mid \mathcal{G})$ in $L^2(\mu)$ and almost everywhere.*

The definition of the relatively independent (or conditional) product of two systems can be found in [68].

Definition 2.3.1 Let $\mathcal{G}$ be a sub-σ-algebra of $\mathcal{B}$. The *conditional square* $\mu \underset{\mathcal{G}}{\times} \mu$ of μ relatively to $\mathcal{G}$ is the measure on $(X \times X, \mathcal{B} \otimes \mathcal{B})$ determined by

$$\forall A, B \in \mathcal{B},\ \mu \underset{\mathcal{G}}{\times} \mu(A \times B) = \int \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{G})(x)\, \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mid \mathcal{G})(x)\, d\mu(x).$$

$\mu \underset{\mathcal{G}}{\times} \mu$ is a probability measure, and its two projections on X are equal to μ.

By standard arguments for every pair of bounded Borel functions f, g on X one has

$$\int f(x)g(y)\, d(\mu \underset{\mathcal{G}}{\times} \mu)(x,y) = \int \mathbb{E}(f \mid \mathcal{G})(x)\, \mathbb{E}(g \mid \mathcal{G})(x)\, d\mu(x).$$

The following lemma states the properties of conditional squares that will be used.

Lemma 2.3.2 *Let $\mathcal{G}$ be a sub-σ-algebra of $\mathcal{B}$.*

i) *$\mu \underset{\mathcal{G}}{\times} \mu$ is concentrated on the diagonal Δ of $X \times X$ if and only if the σ-algebras $\mathcal{G}$ and $\mathcal{B}$ are equal up to null sets.*

ii) *If the σ-algebra $\mathcal{G}$ is invariant by T, then the measure $\mu \underset{\mathcal{G}}{\times} \mu$ is invariant by $T \times T$.*

iii) *Let f be a bounded $\mathcal{G}$-measurable function on X. Then $f(x) = f(y)$ for $\mu \underset{\mathcal{G}}{\times} \mu$-almost all $(x,y) \in X \times X$.*

iv) *Let $(\mathcal{G}_n)_{n \geq 1}$ be a decreasing sequence of σ-algebras with $\bigcap_{n\geq 1} \mathcal{G}_n = \mathcal{G}$. Then for all $A, B \in \mathcal{B}$ one has*

$$\mu \underset{\mathcal{G}}{\times} \mu(A \times B) = \lim_{n \to +\infty} \mu \underset{\mathcal{G}_n}{\times} \mu(A \times B),$$

and the sequence $(\mu \underset{\mathcal{G}_n}{\times} \mu)_{n \geq 1}$ converges weakly to $\mu \underset{\mathcal{G}}{\times} \mu$.

Proof.
i) If $\mathcal{G} = \mathcal{B}$, then for all $A, B \in \mathcal{B}$ we have $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{G}) = \mathbb{1}_A$ and $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mid \mathcal{G}) = \mathbb{1}_B$ μ-a.e.; then by definition $\mu \underset{\mathcal{G}}{\times} \mu(A \times B) = \mu(A \cap B)$; the measure $\mu \underset{\mathcal{G}}{\times} \mu$ is the image of μ under the map $x \mapsto (x,x)$, thus it is concentrated on Δ.

If $\mu \underset{\mathcal{G}}{\times} \mu$ is concentrated on Δ, for all $A \in \mathcal{B}$ one has $\mu \underset{\mathcal{G}}{\times} \mu(A \times (X \setminus A)) = 0$, that is,

$$\int \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{G})(x)\, \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X\setminus A} \mid \mathcal{G})(x)\, d\mu(x) = 0,$$

thus the product of the two conditional expectations is equal to 0 a.e.. As the sum of these two functions is equal to 1, each of them is equal to 0 or 1 a.e.. It follows that $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{G}) = \mathbb{1}_A$ a.e., and A is measurable with respect to $\mathcal{G}$. The σ-algebras $\mathcal{G}$ and $\mathcal{B}$ are equal up to null sets.

ii) Obvious.

iii) By definition

$$\int f(x)\overline{f(y)}\, d(\mu \underset{\mathcal{G}}{\times} \mu)(x,y) = \int |f(x)|^2\, d\mu(x) \text{ because } f \text{ is } \mathcal{G}\text{-measurable thus}$$

$$\int |f(x) - f(y)|^2 \, d(\mu \underset{\mathcal{G}}{\times} \mu)(x, y) = 0.$$

iv) When f and g are bounded measurable functions on X, by the Martingale Theorem

$$\begin{aligned} \int f(x)g(y)\, d(\mu \underset{\mathcal{G}_n}{\times} \mu)(x,y) &= \int \mathbb{E}(f \mid \mathcal{G}_n)(x)\, \mathbb{E}(g \mid \mathcal{G}_n)(x)\, d\mu(x) \\ &\to \int \mathbb{E}(f \mid \mathcal{G})(x)\, \mathbb{E}(g \mid \mathcal{G})(x)\, d\mu(x) \\ &= \int f(x)g(y)\, d(\mu \underset{\mathcal{G}}{\times} \mu)(x,y). \end{aligned} \tag{2.6}$$

For $f = \mathbb{1}_A$ and $g = \mathbb{1}_B$ this is the first part of (iv). The family of continuous functions F on $X \times X$ such that

$$\int F(x,y)\, d(\mu \underset{\mathcal{G}_n}{\times} \mu)(x,y) \to \int F(x,y)\, d(\mu \underset{\mathcal{G}}{\times} \mu)(x,y)$$

is a closed subspace of $C(X \times X)$. By equation (2.6) it contains all functions $f(x)g(y)$ where f and g belong to $C(X)$ and their linear combinations. By density it is equal to $C(X \times X)$, which completes the proof. □

We consider now the case where $\mathcal{G}$ is associated to a measurable partition, also denoted by $\mathcal{G}$.

Lemma 2.3.3 *Let $\mathcal{G}$ be a measurable partition. Then the set*

$$\Delta_{\mathcal{G}} = \{(x,y) \in X \times X; y \in \mathcal{G}(x)\}$$

belongs to $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$, and $\mu \underset{\mathcal{G}}{\times} \mu$ is concentrated on this set.

Proof. Let $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 1}$ be an increasing sequence of finite partitions with $\bigvee_{n\geq 1} \mathcal{G}_n = \mathcal{G}$. Whenever A, B are two distinct atoms of $\mathcal{G}_n$ it follows immediately from the definition that $\mu \underset{\mathcal{G}_n}{\times} \mu(A \times B) = 0$. By Lemma 2.3.2 (iv), $\mu \underset{\mathcal{G}}{\times} \mu(A \times B) = 0$. Thus, for all n the measure $\mu \underset{\mathcal{G}}{\times} \mu$ is concentrated on $\Delta_{\mathcal{G}_n}$. But the intersection of these sets is $\Delta_{\mathcal{G}}$, and the result follows. □

2.3.2 The 'construction $\mathcal{C}$'

In the sequel we use several times the following construction, referred to as *the construction* $\mathcal{C}$, with the same notation.

Let (X, T) be a topological dynamical system, $\mathcal{B}$ be its Borel σ-algebra and $\mathbf{A}$ be the set of asymptotic pairs; it is a Borel subset of $X \times X$, invariant under $T \times T$.

Let μ be an invariant ergodic measure. Using Lemma 2.2.1, choose an excellent partition $\mathcal{P}$, such that any pair of points belonging to the same atom of $\mathcal{P}^-$ is asymptotic, and put $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{P}^-)$. By Lemma 2.2.1 again if $h_\mu(X,T) > 0$, $\mathcal{F}$ is not equal to $\mathcal{B}$ up to μ-null sets. In the notation of Lemma 2.3.3

$$\Delta_{\mathcal{F}} \subset \mathbf{A}.$$

For every $n \geq 0$ put

$$\mathcal{F}_n = T^{-n}\mathcal{F} \quad \text{and} \quad \nu_n = \mu \underset{\mathcal{F}_n}{\times} \mu;$$

one has

$$\Delta_{\mathcal{F}_n} = (T \times T)^{-n} \Delta_{\mathcal{F}} \subset \mathbf{A} \text{ and } \nu_n = (T \times T)^{-n} \nu_0;$$

thus ν_n is concentrated on $\mathbf{A}$. Moreover, the sequence of sets $(\Delta_{\mathcal{F}_n})_{n\geq 0}$ is increasing; the sequence $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ of σ-algebras is decreasing and its intersection is equal to Π_μ up to sets of μ-measure 0 by Lemma 2.1.4.

Define

$$\lambda = \mu \underset{\Pi_\mu}{\times} \mu.$$

From Lemma 2.3.2 (iv) one gets

Corollary 2.3.4 i) *For every $A, B \in \mathcal{B}$, $\nu_n(A \times B) \to \lambda(A \times B)$ as $n \to +\infty$, and the sequence $(\nu_n)_{n\geq 0}$ of measures on $X \times X$ converges weakly to λ.*

ii) *For every closed subset F of $X \times X$ with $(T \times T)F \supset F$ one has $\lambda(F) \geq \nu_0(F)$.*

iii) *For every open subset U of $X \times X$ with $(T \times T)U \subset U$ one has $\lambda(U) \leq \nu_0(U)$.*

Proof.
i) Immediate from Lemma 2.3.2 (iv).
ii) Since F is closed and $\nu_n \to \lambda$ weakly one has

$$\lambda(F) \geq \limsup_{n\to\infty} \nu_n(F).$$

But the sequence $\nu_n(F) = \nu_0\left((T \times T)^n F\right)$ is increasing and the result follows.
iii) Immediate from (ii). □

The next result shows that a 2-set partition of positive entropy separates some asymptotic pair. Significantly, it does the same for some entropy pair [10].

Corollary 2.3.5 *Let $\mathcal{Q} = (A_1, A_2)$ be a Borel partition with $h_\mu(\mathcal{Q}, T) > 0$. Then there exists an asymptotic pair (x_1, x_2) with $x_1 \in A_1$ and $x_2 \in A_2$.*

Proof. If the result is false, then $(A_1 \times A_2) \cap \mathbf{A} = \emptyset$, and $\nu_n(A_1 \times A_2) = 0$ for all n, thus by Corollary 2.3.4 (i)

$$0 = \lambda(A_1 \times A_2) = \int \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_1} \mid \Pi_\mu)(x)\, \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_2} \mid \Pi_\mu)(x)\, d\mu(x).$$

As the two conditional expectations in the integral are non-negative and have sum equal to 1, each of them is equal to 0 or 1 a.e., which means that the sets A_1 and A_2 belong to the σ-algebra Π_μ; thus $h_\mu(Q, T) = 0$, which contradicts the assumption. □

2.3.3 Application to entropy pairs

The definition of entropy pairs of a topological system (X, T) is given in [7]. The set $E(X, T)$ of entropy pairs is a $T \times T$ invariant subset of $X \times X$, and $E(X, T) \cup \Delta$ is closed. The system (X, T) has entropy pairs if and only if its entropy is positive.

The reader should be reminded of the definition of entropy pairs for an invariant measure μ [10]. Let $x, y \in X$ with $x \neq y$. A partition $\mathcal{Q} = (A, B)$ is said to *separate* x and y if x belongs to the interior of A and y to the interior of B. (x, y) is said to be an *entropy pair for* μ if for any partition $\mathcal{Q}$ separating x and y one has $h_\mu(\mathcal{Q}, T) > 0$. Call $E_\mu(X, T)$ the set of entropy pairs for μ. This set is non-empty if and only if $h_\mu(X, T) > 0$.

It is shown in [8] that $E(X,T) = \overline{\bigcup_\mu E_\mu(X,T)}$, where the union is taken over the family of ergodic measures.

Moreover, Glasner shows in [37] that for any ergodic measure μ, $E_\mu(X,T)$ is the set of non-diagonal points in the topological support of $\mu \underset{\Pi_\mu}{\times} \mu$ (this result also follows easily from the definition of $\mu \underset{\mathcal{F}}{\times} \mu$ and Lemma 2.3.2).

Proposition 2.3.6 *The closure $\overline{\mathbf{A}}$ of $\mathbf{A}$ in $X \times X$ contains the set $E(X,T)$ of entropy pairs.*

Proof. Let μ be an ergodic measure on X. In the notation of the 'construction $\mathcal{C}$', for every n, the measure ν_n is concentrated on the closed set $\overline{\mathbf{A}}$, and so is the weak limit λ of the sequence (ν_n). By Glasner's result $E_\mu(X,T) \subset \overline{\mathbf{A}}$. As this is true for any ergodic μ, the result of [8] quoted above gives the conclusion. □

Corollary 2.3.7 *If (X,T) admits an invariant measure μ of full support such that $(X,\mathcal{B},T,\mu)$ is a K-system, then asymptotic pairs are dense in $X \times X$.*

Proof. For such a measure μ the Pinsker σ-algebra Π_μ is trivial, it follows that $\lambda = \mu \times \mu$, its support is $X \times X$, and $E_\mu(X,T) \cup \Delta = X \times X = \overline{\mathbf{A}}$. □

In this case $E(X,T) \cup \Delta = X \times X$, as shown in [39] by different means.

2.4 Li-Yorke pairs and instability in negative times

Lemma 2.4.1 *Let $(X,\mathcal{B},T,\mu)$ be an ergodic system, and $\lambda = \mu \underset{\Pi_\mu}{\times} \mu$. Then $(X\times X, \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}, T\times T, \lambda)$ is ergodic.*

Proof. Assume that λ is not ergodic. According to Theorems 7.5 and 8.2 in [35] there exists a non-trivial isometric extension of (X,Π_μ,T,μ) (in the measure-theoretic sense) which is a factor of $(X,\mathcal{B},T,\mu)$. An ergodic isometric extension is a factor of an ergodic group extension (Theorem 8.2 in [35]), thus an ergodic isometric extension of a 0-entropy system also has entropy 0, and this contradicts the characterization of Π_μ as the largest factor of X with entropy 0. □

In the next Proposition ν_0 is defined as in the 'construction $\mathcal{C}$' above.

Proposition 2.4.2 *Let (X,T) be a topological system, μ an ergodic measure of positive entropy and*

$$\delta = \sup\{d(x,y) \mid (x,y) \in E_\mu(X,T)\} > 0.$$

For ν_0-almost every pair $(x,y) \in X \times X$ one has

$$\lim_{n\to+\infty} d(T^n x, T^n y) = 0; \tag{2.7}$$

$$\liminf_{n\to+\infty} d(T^{-n}x, T^{-n}y) = 0 \text{ and } \limsup_{n\to+\infty} d(T^{-n}x, T^{-n}y) \geq \delta; \tag{2.8}$$

in particular (x,y) is a Li-Yorke pair for T^{-1}.

Proof. Let U be an open set in $X \times X$, with $\lambda(U) > 0$. For every $M \geq 0$ we write

$$U_M = \bigcup_{m \geq M} (T \times T)^m U.$$

U_M is open, and $(T \times T)U_M = U_{M+1} \subset U_M$. Moreover, $\lambda(U_M) \geq \lambda(U) > 0$. By ergodicity of λ, $\lambda(U_M) = 1$. By Corollary 2.3.4 (iii), $\nu_0(U_M) \geq \lambda(U_M) = 1$. Let

$$V = \bigcap_{M \geq 0} U_M = \bigcap_{M \geq 0} \bigcup_{m \geq M} (T \times T)^m U.$$

V is invariant by $T \times T$, and $\nu_0(V) = 1$.

For every integer $r > 1$, we can cover $\mathrm{supp}(\lambda)$ by a finite number of open balls of radius $1/r$, each of them intersecting $\mathrm{supp}(\lambda)$. Taking the union of all these families we obtain a sequence $(U_k)_{k \geq 1}$ of open sets, with $U_k \cap \mathrm{supp}(\lambda) \neq \emptyset$ for all k; each point of $\mathrm{supp}(\lambda)$ belongs to U_k for infinitely many values of k; the diameter of U_k tends to 0 as $k \to +\infty$. To each k we associate a set V_k as above, and write $G = \bigcap_{k \geq 1} V_k$. We have $\nu_0(G) = 1$.

Let (x, y) be a point in G. For each k, $(T \times T)^{-n}(x, y) \in U_k$ for infinitely many values of n, thus the negative orbit of (x, y) is dense in $\mathrm{supp}(\lambda)$.

By Glasner's result [37], $\mathrm{supp}(\lambda) = E_\mu(X, T) \cup S(\mu)$, where $S(\mu) = \{(x, x) \mid x \in \mathrm{supp}(\mu)\}$. Thus we can choose a pair (x_0, y_0) in $E_\mu(X, T)$ with $d(x_0, y_0) = \delta$ and another pair (z_0, z_0) in $S(\mu)$. It follows that for all $(x, y) \in G$ both (x_0, y_0) and (z_0, z_0) are in the closure of the negative orbit of (x, y), thus $\limsup_{n \to +\infty} d(T^{-n}x, T^{-n}y) \geq \delta$ and $\liminf_{n \to +\infty} d(T^{-n}x, T^{-n}y) = 0$. Finally, every pair $(x, y) \in G$ satisfies Equation (2.8)

Recall that ν_0 is concentrated on $\Delta_{\mathcal{F}}$, that is, $\nu_0(\Delta_{\mathcal{F}}) = 1$, and that every pair in $\Delta_{\mathcal{F}}$ is positively asymptotic. Thus $\nu_0(\Delta_{\mathcal{F}} \cap G) = 1$, and every pair in this set satisfies Equation (2.7). ☐

Remark 2.4.3 μ is a weakly mixing invariant measure on X if $\mu \times \mu$ is ergodic for $T \times T$. If μ is a weakly mixing invariant measure on X, different from a Dirac measure, then $T \times T$ is transitive on $\mathrm{supp}(\mu \times \mu) = \mathrm{supp}(\mu) \times \mathrm{supp}(\mu)$, which is not included in the diagonal of $X \times X$. As in the proof of Proposition 2.4.2, it implies that there exists a G_δ-set G of $X \times X$, invariant under $T \times T$, dense in $\mathrm{supp}(\mu) \times \mathrm{supp}(\mu)$, with $\mu \times \mu(G) = 1$ and such that every pair $(x, y) \in G$ is Li-Yorke. More precisely, there exists $\delta > 0$ such that for every $(x, y) \in G$

$$\liminf_{n \to +\infty} d(T^n x, T^n y) = 0 \text{ and } \limsup_{n \to +\infty} d(T^n x, T^n y) \geq \delta.$$

Here no assumption of positive entropy is needed. This is related to Iwanik's result on independent sets in topologically weakly mixing systems [51].

2.5 There are uncountably many asymptotic pairs

Up to now most of the results were existence results: we have shown that a system of positive entropy has asymptotic pairs, and even pairs which are asymptotic for positive times and Li-Yorke for negative times. It is interesting to know how large a stable class is, and in particular whether it can be countable. We prove that the answer is negative for a.e. class. We need more probabilistic tools.

2.5.1 Conditional measures

Here X is a compact metric space, endowed with its Borel σ-algebra $\mathcal{B}$. Let $\mathcal{M}(X)$ be the set of probability measures on X, endowed with the topology of weak convergence. It is a compact metrizable space. A proof of the next result can be found in [36].

Lemma 2.5.1 *Let μ be a probability measure on X, and $\mathcal{F}$ be a sub-σ-algebra of $\mathcal{B}$. There exists a map $x \mapsto \mu_x$ from X to $\mathcal{M}(X)$, measurable with respect to $\mathcal{F}$, and such that for every bounded function f on X*

$$\mathbb{E}(f \mid \mathcal{F})(x) = \int f(y)\, d\mu_x(y) \quad \text{for } \mu\text{-a.e. } x. \tag{2.9}$$

This map is called a regular version *of the conditional probability.*

We continue to use the notation of this Lemma.

By definition of the conditional square (see Section 2.3.1) the equality

$$\mu \underset{\mathcal{F}}{\times} \mu(K) = \int \mu_x \otimes \mu_x(K)\, d\mu(x) \tag{2.10}$$

holds whenever $K = A \times B$ where A, B are Borel sets in X. By standard arguments, it holds for every Borel subset K of $X \times X$. Thus for every bounded Borel function f on $X \times X$ one has

$$\int f(x,y)\, d(\mu \underset{\mathcal{F}}{\times} \mu)(x,y) = \int \left(\int f(x,y)\, d\mu_x(y) \right) d\mu(x). \tag{2.11}$$

We establish now a condition for the measure μ_x to be atomless μ-almost-everywhere. It is easy to check that the function $(x,y) \mapsto \mu_x(\{y\})$ is Borel, thus the set $\{x \in X \mid \mu_x \text{ is atomless}\}$ is measurable.

Lemma 2.5.2 *Let Δ be the diagonal of $X \times X$. Then $\mu \underset{\mathcal{F}}{\times} \mu(\Delta) = 0$ if and only if μ_x is atomless for μ-almost all $x \in X$.*

Proof. We write $\nu = \mu \underset{\mathcal{F}}{\times} \mu$.

By Fubini's Theorem and Equation (2.10),

$$\nu(\Delta) = \int \mu_x \otimes \mu_x(\Delta)\, d\mu(x) = \int \mu_x(\{x\})\, d\mu(x).$$

The 'if' part of the Lemma is now immediate. Now assume that $\nu(\Delta) = 0$. One has

$$\mu_x(\{x\}) = 0 \text{ for } \mu\text{-almost all } x. \tag{2.12}$$

As the map $x \mapsto \mu_x$ is $\mathcal{F}$-measurable, it follows from Lemma 2.3.2 (iii) that $\mu_x = \mu_y$ for ν-almost all (x,y), thus

$$\mu_x(\{x\}) = \mu_y(\{x\}) \text{ for } \nu\text{-almost all } (x,y). \tag{2.13}$$

As the first projection of ν on X is μ, it follows from Equations (2.12) and (2.13) that

$$\mu_y(\{x\}) = 0 \text{ for } \nu\text{-almost all } (x,y). \tag{2.14}$$

Using Equation (2.11) with $f(x,y) = \mu_y(\{x\})$ one gets

$$0 = \int \mu_y(\{x\})\, d\nu(y) = \int \left(\int \mu_y(\{x\})\, d\mu_y(x) \right) d\mu(y).$$

Hence $\int \mu_y(\{x\})\, d\mu_y(x) = 0$ for μ-almost all y.

But for all y the measure μ_y is larger than its discrete part $\tau_y = \sum_z \mu_y(\{z\})\delta_z$, where δ_z is the Dirac mass at z, and for μ-almost all y we have

$$0 = \int \mu_y(\{x\})\, d\tau_y(x) = \sum_z (\mu_y(\{z\}))^2$$

thus $\mu_y(\{z\}) = 0$ for all z and μ_y is atomless. □

2.5.2 Application to asymptotic pairs.

The next result is a topological counterpart of Proposition 2.4.2.

Proposition 2.5.3 *Assume that $h_{top}(X,T) > 0$. There exist $\delta > 0$, an uncountable subset F of X, and for every $x \in F$ an uncountable subset F_x of X such that for every $y \in F_x$ the relations (2.7) and (2.8) hold, that is,*

$$\lim_{n\to+\infty} d(T^n x, T^n y) = 0;$$
$$\liminf_{n\to+\infty} d(T^{-n}x, T^{-n}y) = 0 \text{ and } \limsup_{n\to+\infty} d(T^{-n}x, T^{-n}y) \geq \delta.$$

Here one can choose any δ such that $0 < \delta < \sup\{d(x,y) \mid (x,y) \in E(X,T)\}$.

Proof. Let $D = \sup\{d(x,y) \mid (x,y) \in E(X,T)\}$. By compactness there exists $(x',y') \in E(X,T)$ with $d(x',y') = D$. Thus for $0 < \delta < D$ there exist an ergodic measure μ and a μ-entropy pair (x_0,y_0) close to (x',y') such that $d(x_0,y_0) \geq \delta$. Recall that in the notations of the 'construction $\mathcal{C}$' $\nu_0 = \mu \underset{\mathcal{F}}{\times} \mu$; denote by μ_x a regular version of the conditional probability given $\mathcal{F}$, as in Lemma 2.5.1.

Lemma 2.5.4 *With the assumptions of Proposition 2.5.3 for μ-almost every x the measure μ_x is atomless.*

Proof (of the Lemma). Assume that the conclusion does not hold. By Lemma 2.5.2, $\nu_0(\Delta) > 0$. As Δ is invariant under $T \times T$, by Corollary 2.3.4 (ii) $\lambda(\Delta) \geq \nu_0(\Delta) > 0$. By Lemma 2.4.1, λ is ergodic for $T \times T$, thus $\lambda(\Delta) = 1$.

By Lemma 2.3.2 (i) it means that $\Pi_\mu = \mathcal{B}$ up to μ-null sets, thus $h_\mu(X,T) = 0$. This is impossible because there exists an entropy pair (x_0,y_0) for μ. □

We continue the proof of Proposition 2.5.3. By Proposition 2.4.2, the relations (2.7) and (2.8) hold for ν_0-almost every $(x,y) \in X \times X$.

For $x \in X$, let F_x be the set of all points $y \in X$ such that these relations hold for (x,y). Since $\nu_0 = \mu \underset{\mathcal{F}}{\times} \mu$ one has $\int \mu_x(F_x)\, d\mu(x) = 1$, thus $\mu_x(F_x) = 1$ for μ-almost all x. Let

$$F = \{x \in X \mid \mu_x(F_x) = 1\} \cap \{x \in X \mid \mu_x \text{ is atomless}\}.$$

Then $\mu(F) = 1$. The measure μ is ergodic and of positive entropy, thus atomless. Hence the set F is uncountable. For $x \in F$, $\mu_x(F_x) = 1$ and μ_x is atomless, therefore F_x is an uncountable set. □

Chapitre 3

Chaînes de Markov topologiques

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux propriétés liées à la classification des graphes orientés connexes ; nous étudions également l'existence de mesures d'entropie maximale pour les chaînes de Markov topologiques. Pour cela, nous faisons le point sur les résultats existants et nous les complétons par des résultats nouveaux.

Une chaîne de Markov est un système topologique donné par l'ensemble des chemins infinis sur un graphe orienté (fini ou dénombrable), muni de la transformation shift ; c'est un cas particulier de sous-shift sur un alphabet dénombrable. Quand le graphe est infini, l'espace des chemins n'est pas compact et l'entropie topologique n'est pas définie. Diverses notions d'entropie peuvent être envisagées, et elles ne sont pas toutes équivalentes [65]. Nous utiliserons exclusivement l'entropie de Gurevich, qui est la plus couramment utilisée ; elle vérifie en particulier le principe variationnel.

Dans [84], Vere-Jones classe les graphes orientés connexes en trois catégories : transients, récurrents nuls et récurrents positifs. Salama donne une approche géométrique de cette classification en termes d'existence de sous-graphes ou de surgraphes de même entropie. Dans un premier temps, il pensait que le fait qu'un graphe puisse être « étendu » ou « contracté » sans changer son entropie déterminait entièrement s'il était transient, récurrent nul ou récurrent positif. En particulier, il a énoncé qu'un graphe était récurrent positif si et seulement s'il ne possédait pas de sous-graphe propre de même entropie [73]. Il a tout d'abord réalisé que la preuve du sens « seulement si » de cet énoncé était fausse (voir l'errata dans [73]), puis il a donné un contre-exemple dans [74]. Dans [73], Salama a également affirmé à tort que le rayon de convergence de la série associée aux boucles de premier retour au sommet u ne dépendait pas de u, avant de rectifier dans [74]. Finalement, il a montré dans [74] qu'un graphe est transient si et seulement s'il possède un surgraphe propre de même entropie et qu'un graphe sans sous-graphe propre de même entropie est récurrent positif. Dans [33], U. Fiebig donne également des caractérisations des graphes sans sous-graphe propre de même entropie ; ces graphes sont appelés fortement récurrents positifs.

Par ailleurs, Gurevich montre que la classe d'un graphe est intimement liée à la question d'existence d'une mesure d'entropie maximale pour la chaîne de Markov sur ce graphe : une telle mesure existe si et seulement si le graphe est récurrent positif [45]. Comme il n'est pas toujours aisé de déterminer si un graphe est récurrent positif ou non, on peut souhaiter disposer d'autres critères. Dans [43], Gurevich et Zargaryan donnent une condition suffisante pour l'existence d'une mesure maximale, formulée en termes de croissance exponentielle du nombre de chemins à l'intérieur et à l'extérieur d'un sous-graphe fini. Dans [41], Gurevich et Savchenko montrent que c'est en fait une condition équivalente à la récurrence positive forte (appelée « positivité stable » dans leur article). Nous donnons un nouveau critère d'existence de mesure maximale basé sur la notion d'entropie locale.

La section 3.1 contient des définitions et des propriétés de base. Dans la section 3.2, nous exposons les travaux de Salama [73, 74] concernant l'existence de sous-graphes et de surgraphes de même entropie ; pour plus de clarté, tous les résultats sont démontrés, certains avec de nouvelles preuves. Nous complétons cette approche par un résultat nouveau : tout graphe transient est contenu dans un graphe récurrent de même entropie, qui est soit récurrent nul, soit récurrent positif selon les propriétés du graphe de départ [70]. La section 3.3 traite du problème d'existence de mesures maximales : nous démontrons de façon détaillée un critère d'existence dû a Gurevich et Zargaryan, et nous donnons une nouvelle preuve de sa réciproque ; nous montrons également que si l'entropie d'une chaîne de Markov est strictement supérieure à son entropie locale, alors il existe une mesure maximale [70]. La dernière section montre qu'un graphe non fortement récurrent positif (en particulier un graphe sans mesure maximale) possède des mesures presque maximales « fuyant » vers l'infini ; ce résultat a été obtenu en collaboration avec J. Buzzi [26].

3.1 Définitions

3.1.1 Graphes et chemins

Soit G un graphe orienté. On note $V(G)$ l'ensemble de ses sommets ; par la suite on supposera toujours que $V(G)$ est fini ou dénombrable. Si u et v sont deux sommets du graphe, il y a au plus une arête $u \to v$. La *matrice d'incidence* P associée à G est donnée par

$$P = (p_{uv})_{u,v \in V(G)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_{uv} = 1 \text{ si } u \to v \text{ est une arête dans } G, \\ p_{uv} = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Le graphe G est entièrement déterminé par sa matrice d'incidence.

Un *chemin* de longueur n est une suite $(u_0, \ldots, u_n)$ telle que $u_i \to u_{i+1}$ dans G pour $0 \leq i \leq n-1$. Ce chemin est appelé une *boucle* si $u_0 = u_n$. Nous dirons que le graphe orienté G est *connexe* si pour tous sommets u et v il existe un chemin de u vers v dans G ; dans la littérature, un tel graphe est également appelé *fortement connexe*. Une *composante connexe* est un sous-graphe G' connexe maximal pour l'inclusion ; deux composantes connexes sont égales ou disjointes.

Si H est un sous-graphe de G, on note $H \subset G$; si de plus $H \neq G$, on note $H \subsetneq G$ et on dit que H est un *sous-graphe propre* de G. Si $H \supset G$, on dit que H est un *surgraphe* de G ; on dit de même que H est un surgraphe propre si $H \supsetneq G$. Si W est un sous-ensemble de $V(G)$, $\overline{W}$ désigne l'ensemble $V(G) \setminus W$. On note également W pour désigner le sous-graphe de G dont les sommets sont W et dont les arêtes sont les arêtes de G entre deux sommets de W.

Soit u et v deux sommets de G. On définit les quantités suivantes (qui peuvent éventuellement être infinies).

- $p_{uv}^G(n)$ est le nombre de chemins $(u_0, \ldots, u_n)$ tels que $u_0 = u$ et $u_n = v$; c'est aussi le coefficient de la ligne u et de la colonne v de la matrice P^n. On note $R_{uv}(G)$ le rayon de convergence de la série $\sum p_{uv}^G(n) z^n$.
- $f_{uv}^G(n)$ est le nombre de chemins $(u_0, \ldots, u_n)$ tels que $u_0 = u$, $u_n = v$ et $u_i \neq v$ pour $0 < i < n$; par convention on pose $f_{uv}^G(0) = 0$. On note $L_{uv}(G)$ le rayon de convergence de la série $\sum f_{uv}^G(n) z^n$.

Les inégalités vérifiées trivialement par les quantités $p_{uv}^G(n)$ et $f_{uv}^G(n)$ mènent au résultat suivant.

Lemme 3.1.1 *Soit G' un graphe orienté, G un sous-graphe de G' et u, v deux sommets de G.*

- $R_{uv}(G) \leq L_{uv}(G)$;

– *$R_{uv}(G') \leq R_{uv}(G)$ et $L_{uv}(G') \leq L_{uv}(G)$.*

Dans [84], Vere-Jones montre la propriété suivante, appelée *propriété de solidarité*.

Proposition 3.1.2 (Vere-Jones) *Si G est un graphe orienté connexe, alors $R_{uv}(G)$ ne dépend pas de u et v ; on le note $R(G)$.*

S'il n'y a pas de confusion possible, $R(G)$ et $L_{uv}(G)$ seront notés R et L_{uv}. Pour un graphe G', les quantités correspondantes seront notées R' et L'_{uv}.

3.1.2 Chaînes de Markov topologiques

Soit G un graphe orienté. On définit Γ_G comme étant l'ensemble des chemins infinis bilatéraux dans G, c'est-à-dire

$$\Gamma_G = \{(v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid \forall n \in \mathbb{Z}, v_n \to v_{n+1} \text{ dans } G\} \subset (V(G))^{\mathbb{Z}}.$$

Le shift sur Γ_G est noté $\sigma : \sigma((v_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (v_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$. La *chaîne de Markov (topologique)* sur le graphe G est le système (Γ_G, σ).

L'ensemble $V(G)$ est muni de la topologie discrète, $(V(G))^{\mathbb{Z}}$ est muni de la topologie produit et la topologie de Γ_G est induite par celle de $(V(G))^{\mathbb{Z}}$. L'espace Γ_G n'est pas compact sauf si G est fini. On munit Γ_G d'une distance d, compatible avec sa topologie, de la façon suivante :
$V(G)$ est identifié à $\mathbb{N}$, on définit la distance D sur $V(G)$ par $D(n,m) = \left|\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m}\right| \leq 1$.
Si $\bar{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\bar{v} = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont deux éléments de Γ_G, on définit

$$d(\bar{u}, \bar{v}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{D(u_n, v_n)}{2^{|n|}} \leq 3.$$

Lemme 3.1.3 *Soit G un graphe orienté. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
- *Le système (Γ_G, σ) est transitif ;*
- *le graphe orienté G est connexe ;*
- *la matrice d'incidence P est irréductible, c'est-à-dire que pour tous $u, v \in V(G)$, il existe $n \geq 1$ tel que $(P^n)_{uv} > 0$.*

Dans la suite, nous nous intéresserons essentiellement aux graphes connexes.

On peut également définir la chaîne de Markov unilatérale sur le graphe G : c'est le système (Γ_G^+, σ), où

$$\Gamma_G^+ = \{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, v_n \to v_{n+1} \text{ dans } G\}.$$

Ce système est non inversible et son extension naturelle est (Γ_G, σ). Toutes les propriétés que nous énonçons pour (Γ_G, σ) restent valables pour (Γ_G^+, σ).

3.1.3 Mesures de Markov

Les mesures de Markov apparaissent naturellement quand on étudie les mesures σ-invariantes d'une chaîne de Markov topologique.

Soit G un graphe orienté. Une *mesure de Markov* μ sur Γ_G est déterminée par une matrice de transition $M = (m_{uv})_{u,v\in V(G)}$ et un vecteur de probabilité stationnaire $\pi = (\pi_u)_{u\in V(G)}$, qui vérifient :

- $m_{uv} \geq 0$ et $\sum_{v \in V(G)} m_{uv} = 1$ pour $u, v \in V(G)$;
- $m_{uv} = 0$ s'il n'y a pas d'arête de u vers v dans G ;
- $\pi_u \geq 0$ et $\sum_{u \in V(G)} \pi_u = 1$;
- le vecteur ligne π est invariant par M, c'est-à-dire $\pi M = \pi$.

La mesure du cylindre $[u_0 u_1 \dots u_k] = \{(v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Gamma_G \mid v_i = u_i, 0 \leq i \leq k\}$ est donnée par

$$\mu([u_0 u_1 \dots u_k]) = \pi_{u_0} m_{u_0 u_1} m_{u_1 u_2} \dots m_{u_{k-1} u_k}.$$

Cette formule permet de définir une mesure de probabilité σ-invariante sur Γ_G. Le système (Γ_G, σ) muni de la mesure de Markov μ devient une chaîne de Markov probabiliste stationnaire [53].

3.1.4 Entropie de Gurevich

Si G est un graphe fini, Γ_G est compact et l'entropie topologique $h_{top}(\Gamma_G, \sigma)$ est définie conformément aux définitions de la section 1.3.1. Si G est un graphe dénombrable, l'*entropie de Gurevich* [44] est donnée par

$$h(G) = \sup\{h_{top}(\Gamma_H, \sigma) \mid H \subset G, H \text{ fini}\}.$$

Cette entropie peut également être calculée de façon combinatoire, comme étant le taux de croissance exponentielle du nombre de chemins d'extrémités fixes [45].

Proposition 3.1.4 (Gurevich) *Soit G un graphe orienté connexe. Pour tous sommets u, v, on a*

$$h(G) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log p_{uv}^G(n) = -\log R(G).$$

Une autre façon de calculer l'entropie est de compactifier l'espace Γ_G puis d'utiliser la définition de l'entropie topologique pour les espaces compacts. Si G est un graphe orienté, on note ∞ un point à l'infini et $V(G) \cup \{\infty\}$ désigne la compactification d'Alexandroff de $V(G)$. On définit alors $\overline{\Gamma}_G$ comme l'adhérence de Γ_G dans $(V(G) \cup \{\infty\})^{\mathbb{Z}}$. Les distances D et d s'étendent naturellement aux espaces $V(G) \cup \{\infty\}$ et $\overline{\Gamma}_G$. Dans [44], Gurevich montre qu'on obtient de cette façon la même entropie, ce qui signifie qu'on a ajouté peu de dynamique lors de la compactification. De plus, l'entropie de Gurevich satisfait le principe variationnel [44].

Théorème 3.1.5 (Gurevich) *Soit G un graphe orienté. On a*

$$h(G) = h_{top}(\overline{\Gamma}_G, \sigma) = \sup\{h_\mu(\Gamma_G, \sigma) \mid \mu \text{ mesure } \sigma\text{-invariante}\}.$$

De plus, le supremum peut n'être pris que sur les mesures de Markov ergodiques.

3.2 Classification des graphes connexes

3.2.1 Graphes transients, récurrents nuls et récurrents positifs

Une chaîne de Markov probabiliste peut être vue comme une marche aléatoire sur un ensemble de sommets V ; elle est définie par une matrice de transition $M = (m_{uv})_{u,v \in V}$, où m_{uv} est la probabilité de passer du sommet u au sommet v. On dit que le sommet u est *récurrent* si en partant de u on revient presque sûrement en u, sinon u est *transient*. Un sommet récurrent u est *récurrent positif* si l'espérance du temps de premier retour en u est fini, sinon u est *récurrent nul*.

Si on note $f^M_{uu}(n)$ la probabilité de premier retour en u au temps n, la classe du sommet u se détermine de la façon suivante [27] : u est transient si $\sum_{n\geq 1} f^M_{uu}(n) < 1$ et u est récurrent si $\sum_{n\geq 1} f^M_{uu}(n) = 1$; si u est récurrent, il est récurrent positif si $\sum_{n\geq 1} n f^M_{uu}(n) < +\infty$ et récurrent nul sinon.

Par analogie avec les chaînes de Markov probabilistes, Vere-Jones a défini les notions de sommet transient, récurrent nul ou récurrent positif pour les chaînes de Markov topologiques [84]. La définition suivante prend en compte le fait que $\sum f^G_{uu}(n) R^n_{uu} \leq 1$ pour tout sommet u du graphe orienté G.

Définition 3.2.1 Soit G un graphe orienté et u un sommet.

Le sommet u est dit *récurrent* (resp. *transient*) si la série $\sum_{n\geq 1} f^G_{uu}(n) R^n_{uu}$ est égale à 1 (resp. est strictement inférieure à 1).

Si le sommet u est récurrent, u est appelé *récurrent nul* (resp. *récurrent positif*) si la série dérivée $\sum n f^G_{uu}(n) R^n_{uu}$ est égale à $+\infty$ (resp. est finie).

Si le graphe orienté G est connexe, alors tous les sommets ont la même classe ; on dit alors que G est transient (resp. récurrent nul, récurrent positif) si tous ses sommets le sont.

Nous rappelons ces définitions dans le tableau 3.1, ainsi que les propriétés de la série $\sum p^G_{uv}(n) z^n$, qui peuvent donner une alternative à la définition ci-dessus.

	transient	récurrent nul	récurrent positif
$\sum_{n>0} f^G_{uu}(n) R^n$	< 1	1	1
$\sum_{n>0} n f^G_{uu}(n) R^n$	$\leq +\infty$	$+\infty$	$< +\infty$
$\sum_{n\geq 0} p^G_{uv}(n) R^n$	$< +\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} p^G_{uv}(n) R^n$	0	0	$\lambda_{uv} > 0$
	$R = L_{uu}$	$R = L_{uu}$	$R \leq L_{uu}$

TAB. 3.1 – Propriétés des séries associées à un graphe transient, récurrent nul ou récurrent positif (G est connexe et u, v sont deux sommets quelconques).

Si G est un graphe orienté connexe, on a $R \leq L_{uu}$ pour tout sommet u (lemme 3.1.1). Dans [74], Salama montre qu'un graphe transient ou récurrent nul vérifie $R = L_{uu}$ pour tout u ; par contraposée, si $R < L_{uu}$ pour un certain u, alors le graphe est récurrent positif. La preuve que nous donnons de ce résultat, plus élémentaire que celle de Salama, est due à U. Fiebig [33].

Proposition 3.2.2 *Soit G un graphe orienté connexe. S'il existe un sommet u tel que $R < L_{uu}$, alors G est récurrent positif. Par conséquent, si G est transient ou récurrent nul, alors $R = L_{uu}$ pour tout sommet u.*

Preuve. Soit u un sommet de G tel que $R < L_{uu}$. Pour tout $x \geq 0$ on pose

$$F(x) = \sum_{n\geq 1} f^G_{uu}(n) x^n.$$

On suppose tout d'abord que G est transient, c'est-à-dire $F(R) < 1$. La fonction F est analytique sur $[0, L_{uu}[$ et $R < L_{uu}$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $F(x) < 1$ pour tout $x \in [R, R+\varepsilon[$. Si on décompose une boucle basée en u en boucles de premier retour, on obtient la formule suivante :

$$p_{uu}^G(n) = \sum_{k\geq 1} \sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_k) \\ n_1+\cdots+n_k=n}} \prod_{i=1}^{k} f_{uu}^G(n_i) \text{ si } n \geq 1,$$

et $p_{uu}^G(0) = 1$ donc, pour tout $x \geq 0$, on a

$$\sum_{n\geq 0} p_{uu}^G(n)x^n = \sum_{k\geq 0} (F(x))^k\,, \tag{3.1}$$

et ces deux séries sont finies en même temps.

Comme $F(x) < 1$ pour tout $x \in [R, R+\varepsilon[$, il existe $x > R$ tel que $\sum_{n\geq 0} p_{uu}^G(n)x^n < +\infty$ grâce à l'équation (3.1), ce qui est une contradiction avec la définition de R. Par conséquent, G est récurrent. De plus, $R < L_{uu}$ par hypothèse, donc $\sum_{n\geq 1} n f_{uu}^G(n)R^n < +\infty$, ce qui implique que le graphe G est récurrent positif.

Par contraposée, si G est transient ou récurrent nul, alors $R = L_{uu}$ pour tout sommet u (on rappelle qu'on a toujours $R \leq L_{uu}$ par le lemme 3.1.1). □

Définition 3.2.3 Soit G un graphe orienté connexe. G est dit *fortement récurrent positif* si $R < L_{uu}$ pour tout sommet u.

Selon la proposition 3.2.2, un graphe fortement récurrent positif est récurrent positif. Par contre, il existe des graphes récurrents positifs qui ne sont pas fortement récurrents positifs : l'exemple 3.2.13 (1) vérifie $R = L_{uu}$ pour tout sommet u.

Lemme 3.2.4 *Soit G un graphe orienté connexe et u un sommet.*

i) *$R < L_{uu}$ si et seulement si $\sum_{n\geq 1} f_{uu}^G(n)L_{uu}^n > 1$;*

ii) *si G est récurrent, alors R est l'unique réel positif x satisfaisant $\sum_{n\geq 1} f_{uu}^G(n)x^n = 1$.*

Preuve. Pour tout $x \geq 0$, on définit $F(x) = \sum_{n\geq 1} f_{uu}^G(n)x^n \in [0, +\infty]$. Cette fonction est strictement croissante pour $x \in [0, L_{uu}]$ (avec éventuellement $F(L_{uu}) = +\infty$) et $F(x) = +\infty$ si $x > L_{uu}$.

i) Si $R < L_{uu}$, alors le graphe G est récurrent positif par la proposition 3.2.2, donc $F(R) = 1$. Par croissance de F, on a $F(L_{uu}) > F(R)$. Réciproquement, si $F(L_{uu}) > 1$, alors $R < L_{uu}$ car on a toujours $F(R) \leq 1$.

ii) La fonction F est strictement croissante sur l'intervalle où elle prend des valeurs finies. Par conséquent, il existe au plus un réel $x \geq 0$ tel que $F(x) = 1$. Par hypothèse, G est récurrent donc $F(R) = 1$. □

3.2.2 Sous-graphes et surgraphes de même entropie

Dans [74], Salama étudie les liens entre la classe d'un graphe et la possibilité d'étendre ou de contracter ce graphe sans modifier son entropie. Il en ressort qu'un graphe connexe est transient si et seulement s'il possède un surgraphe propre de même entropie, et qu'un graphe est fortement récurrent positif si et seulement s'il n'a pas de sous-graphe propre de même entropie. Les graphes récurrents positifs qui ne sont pas fortement récurrents positifs et les graphes récurrents nuls ne peuvent pas être séparés par cette méthode : ils peuvent être contractés mais ne peuvent pas être étendus en gardant la même entropie.

La propriété suivante concerne les graphes transients [73].

Proposition 3.2.5 *Soit G un graphe orienté connexe d'entropie finie non nulle.*

i) *S'il existe un graphe connexe $G' \supsetneq G$ tel que $h(G') = h(G)$ alors G est transient ;*

ii) *si G est transient, alors il existe un graphe G' transient tel que $G' \supsetneq G$ et $h(G') = h(G)$.*

Preuve.
i) Par hypothèse, $h(G) = h(G') < +\infty$, donc $R = R' > 0$. Soit u un sommet de G. Comme $G \subsetneq G'$, il existe n tel que $f^G_{uu}(n) < f^{G'}_{uu}(n)$, par conséquent

$$\sum_{n\geq 1} f^G_{uu}(n)R^n < \sum_{n\geq 1} f^{G'}_{uu}(n)R'^n.$$

Or $\sum_{n\geq 1} f^{G'}_{uu}(n)R'^n \leq 1$, donc $\sum_{n\geq 1} f^G_{uu}(n)R^n < 1$, et le graphe G est transient.

(ii) Soit u un sommet de G. Comme G est transient, $\sum_{n\geq 1} f^G_{uu}(n)R^n < 1$. Soit $k \geq 2$ un entier tel que

$$\sum_{n\geq 1} f^G_{uu}(n)R^n + R^k < 1.$$

On définit le graphe G' en ajoutant une boucle de longueur k basée au sommet u, c'est-à-dire qu'on ajoute les sommets $u_1, \ldots, u_{k-1}$ et les arêtes $u \to u_1$, $u_i \to u_{i+1}$ $(1 \leq i \leq k-2)$ et $u_{k-1} \to u$. On a $f^{G'}_{uu}(n) = f^G_{uu}(n)$ pour tout $n \neq k$ et $f^{G'}_{uu}(k) = f^G_{uu}(k) + 1$. De plus, $R' \leq R$ car $G' \supset G$, donc

$$\sum_{n\geq 1} f^{G'}_{uu}(n)R'^n \leq \sum_{n\geq 1} f^{G'}_{uu}(n)R^n = \sum_{n\geq 1} f^G_{uu}(n)R^n + R^k < 1. \tag{3.2}$$

Par conséquent, le graphe G' est transient. Par la proposition 3.2.2, on a alors $R' = L'_{uu}$. L'équation (3.2) indique également que $R \leq L'_{uu}$. Ainsi, $L'_{uu} = R' \leq R \leq L'_{uu}$ donc $R = R'$, autrement dit $h(G) = h(G')$. □

Remarque 3.2.6 La proposition 3.2.5 implique qu'un sous-graphe propre de même entropie est nécessairement transient.

Dans [74], Salama montre que, si $R = L_{uu}$ pour tout sommet u, alors il existe un sous-graphe propre de même entropie. Nous montrons que la même conclusion reste valable si on suppose seulement que $R = L_{uu}$ pour un certain u. La preuve que nous donnons est une variante de la démonstration de Salama.

Proposition 3.2.7 *Soit G un graphe orienté connexe d'entropie non nulle. On suppose qu'il existe un sommet u tel que $R = L_{uu}$. Alors il existe un sous-graphe connexe $G' \subsetneq G$ tel que $h(G) = h(G')$.*

Preuve. On suppose que $R = L_{uu}$. On pose $u_0 = u$. Si le sommet u a un unique successeur (c'est-à-dire s'il existe une unique arête partant de u), on le note u_1. Si u_1 a un unique successeur, on le note u_2 et ainsi de suite. Si pour tout n le sommet u_n a un unique successeur u_{n+1}, alors l'entropie de G est nulle, ce qui est exclu.

Soit u_k le dernier sommet ainsi construit ($k = 0$ si u a plusieurs successeurs) ; ce sommet a deux successeurs distincts v et v'. Soit G'_1 le graphe G privé de l'arête $u_k \to v$ et G'_2 le graphe G privé des arêtes $u_k \to w$ pour $w \neq v$. On note G_i la composante connexe de G'_i contenant le sommet u ($i = 1, 2$) ; on a $G_i \subsetneq G$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$f^G_{uu}(n) = f^G_{u_k u}(n-k) = f^{G_1}_{u_k u}(n-k) + f^{G_2}_{u_k u}(n-k),$$

donc $L_{uu} = \min\{L_{u_k u}(G_1), L_{u_k u}(G_2)\}$. Soit $i \in \{1, 2\}$ tel que $L_{uu} = L_{u_k u}(G_i)$. Par le lemme 3.1.1, on a

$$R \leq R(G_i) \leq L_{u_k u}(G_i) = L_{uu} = R,$$

donc $R = R(G_i)$, c'est-à-dire $h(G) = h(G_i)$. □

Le résultat suivant a été démontré par U. Fiebig [33], mais nous en donnons une preuve plus simple.

Proposition 3.2.8 *Soit G un graphe orienté connexe. On suppose qu'il existe un sommet u tel que $R < L_{uu}$. Alors, pour tout sous-graphe $G' \subsetneq G$, on a $h(G') < h(G)$.*

Preuve. Soit $G' \subsetneq G$. On suppose tout d'abord que u est un sommet de G'. Par hypothèse, $R < L_{uu}$ donc G est récurrent positif par la proposition 3.2.2, de sorte que $\sum_{n \geq 1} f^G_{uu}(n) R^n = 1$. Comme $G' \subsetneq G$, il existe n tel que $f^{G'}_{uu}(n) < f^G_{uu}(n)$, donc

$$\sum_{n \geq 1} f^{G'}_{uu}(n) R^n < 1. \tag{3.3}$$

De plus, $L'_{uu} \geq L_{uu}$ (lemme 3.1.1). Si G' est transient, alors $R' = L'_{uu}$ selon la proposition 3.2.2, donc $R' \geq L_{uu} > R$. Si G' est récurrent, alors $\sum_{n \geq 1} f^{G'}_{uu}(n) R'^n = 1$, donc $R' > R$ en raison de (3.3). Dans les deux cas, on obtient $R' > R$, autrement dit $h(G') < h(G)$.

On suppose maintenant que u n'est pas un sommet de G'. On fixe v un sommet de G'. Soit $(u_0 = u, \ldots, u_p = v)$ un chemin (dans G) de plus courte longueur entre u et v, et $(v_0 = v, \ldots, v_q = u)$ un chemin de plus courte longueur entre v et u ; par minimalité des longueurs, $u_i \neq u$ si $1 \leq i \leq p$ et $v_i \neq u$ si $0 \leq i \leq q - 1$.

Si $(w_0 = v, w_1, \ldots, w_n = v)$ est une boucle basée en v à l'intérieur du graphe G', alors

$$(u_0 = u, u_1, \ldots, u_p = w_0, w_1, \ldots, w_n = v_0, v_1, \ldots, v_q = u)$$

est une boucle basée en u et ne passant pas par u en dehors des extrémités. On obtient alors

$$p^{G'}_{vv}(n) \leq f^G_{uu}(n + p + q) \text{ pour tout } n \geq 0,$$

donc $R' \geq L_{uu} > R$. Autrement dit, $h(G') < h(G)$. □

Le corollaire suivant donne une caractérisation des graphes fortement récurrents positifs ; nous l'obtenons comme conséquence immédiate des deux propositions précédentes. Ce résultat est démontré différemment dans [33].

Corollaire 3.2.9 *Soit G un graphe orienté connexe. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *pour tout u on a $R < L_{uu}$ (autrement dit G est fortement récurrent positif) ;*

ii) *il existe u tel que $R < L_{uu}$;*

iii) *G n'a pas de sous-graphe propre de même entropie.*

Preuve. Il est immédiat que (i) implique (ii). La proposition 3.2.8 donne (ii)⇒(iii). Enfin, la contraposée de la proposition 3.2.7 donne (iii)⇒(i). □

Remarque 3.2.10 Dans [74], Salama montre l'équivalence entre les points (i) et (iii) du corollaire 3.2.9. Il affirme également que si $R = \inf_u L_{uu}$ alors $R = L_{uu}$ pour tout sommet u. Ce résultat est faux : la proposition 3.2 dans [41] dit que $R = \inf_u L_{uu}$ dès que le graphe est infini, et il existe des graphes fortement récurrents positifs infinis.

Si G est un graphe orienté connexe fini, le théorème de Perron-Frobenius implique que tout sous-graphe propre a une entropie strictement inférieure à celle de G, via l'étude des matrices d'incidence (voir par exemple [79]). Ceci conduit au résultat suivant.

Proposition 3.2.11 *Tout graphe orienté connexe fini est fortement récurrent positif.*

La proposition 3.2.5 (ii) dit qu'un graphe transient possède un surgraphe transient propre de même entropie ; nous montrons qu'un graphe transient possède également un surgraphe récurrent de même entropie.

Proposition 3.2.12 *Soit G un graphe orienté connexe transient d'entropie finie non nulle. Alors il existe un surgraphe récurrent $G' \supset G$ tel que $h(G) = h(G')$. De plus, G' peut être choisi récurrent positif si $\sum_{n\geq 1} n f_{uu}^G(n) R^n < +\infty$ pour un certain $u \in G$, et G' est nécessairement récurrent nul sinon.*

Preuve. L'entropie de G est finie et non nulle donc $0 < R < 1$ et il existe un entier p tel que $\frac{1}{2} \leq pR < 1$. On pose $\alpha = pR$. Soit u un sommet de G et

$$D = 1 - \sum_{n\geq 1} f_{uu}^G(n) R^n \in]0,1[.$$

On a $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \alpha^n \geq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = 1$, d'où

$$\sum_{n\geq k+1} \alpha^n = \alpha^k \sum_{n\geq 1} \alpha^n \geq \alpha^k. \tag{3.4}$$

Nous allons construire une suite d'entiers $(n_i)_{i\in I}$ tel que $2\sum_{i\in I} \alpha^{n_i} = D$. Pour cela, nous définissons par récurrence une suite (finie ou infinie) strictement croissante $(n_i)_{i\in I}$ telle que pour tout $k \in I$

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha^{n_i} \leq \frac{D}{2} < \sum_{i=0}^{k} \alpha^{n_i} + \sum_{n>n_k} \alpha^n.$$

– On a $\sum_{k\geq 2}\alpha^k \geq \frac{1}{2} > \frac{D}{2}$, $D > 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k\geq n}\alpha^k = 0$. On peut donc définir n_0 comme étant le plus grand entier $n \geq 2$ tel que $\sum_{k\geq n}\alpha^k > \frac{D}{2}$. En raison du choix de n_0, on a $\sum_{n\geq n_0+1}\alpha^n \leq \frac{D}{2}$, donc $\alpha^{n_0} \leq \frac{D}{2}$ par l'équation (3.4). C'est la propriété voulue au rang 0.

– On suppose que $n_0, \dots, n_k$ sont déjà définis. Si $\sum_{i=0}^k \alpha^{n_i} = \frac{D}{2}$, alors $I = \{0, \dots, k\}$ et la construction s'arrête là. Sinon, soit n_{k+1} le plus grand entier $n > n_k$ tel que

$$\sum_{i=0}^k \alpha^{n_i} + \sum_{j\geq n}\alpha^j > \frac{D}{2}.$$

Étant donné le choix de n_{k+1} et en utilisant l'équation (3.4), on obtient

$$\alpha^{n_{k+1}} \leq \sum_{j\geq n_{k+1}+1}\alpha^j \leq \frac{D}{2} - \sum_{i=0}^k \alpha^{n_i}.$$

C'est la propriété de récurrence au rang $k+1$.

On définit un nouveau graphe $G' \supset G$ en ajoutant $2p^{n_i}$ boucles de longueur n_i basées au sommet u. Plus précisément,

- les sommets supplémentaires de G' sont $\{v_k^{i,j} \mid i \in I, 1 \leq j \leq 2p^{n_i}, 0 < k < n_i\}$, où tous les $v_k^{i,j}$ sont distincts ;
- les arêtes supplémentaires de G' sont $v_k^{i,j} \to v_{k+1}^{i,j}$, $u \to v_1^{i,j}$ et $v_{n_i-1}^{i,j} \to u$ ($i \in I, 1 \leq j \leq 2p^{n_i}, 0 < k < n_i - 1$).

Il est à noter que $n_i \geq 2$, de sorte qu'on n'a pas ajouté l'arête $u \to u$ (qui existe peut-être déjà dans G) ; ainsi le graphe G' est bien défini. On a $R' \leq R$ (lemme 3.1.1).

Il est clair que $f_{uu}^{G'}(n_i) = f_{uu}^G(n_i) + 2p^{n_i}$ et $f_{uu}^{G'}(n) = f_{uu}^G(n)$ si $n \notin \{n_i \mid i \in I\}$. De plus, on a $\sum_{i\in I}(pR)^{n_i} = \frac{D}{2}$ par construction. Par conséquent,

$$\sum_{n\geq 1} f_{uu}^{G'}(n)R^n = \sum_{n\geq 1} f_{uu}^G(n)R^n + \sum_{i\in I} 2(pR)^{n_i} = 1. \tag{3.5}$$

Ceci implique que $R \leq L'_{uu}$. Si G' était transient, on aurait $R' = L'_{uu}$ par la proposition 3.2.2 donc $\sum_{n\geq 1} f_{uu}^{G'}(n)L'^n < 1$, ce qui est impossible à cause de l'équation (3.5). Ainsi, G est récurrent. Par le lemme 3.2.4 (ii) et l'équation (3.5), on a $R' = R$.

Par ailleurs,

$$\sum_{n\geq 1} nf_{uu}^{G'}(n)R^n = \sum_{n\geq 1} nf_{uu}^G(n)R^n + \sum_{i\in I} n_i\alpha^{n_i},$$

et cette quantité est finie si et seulement si $\sum nf_{uu}^G(n)R^n$ est fini. Dans ce cas, le graphe G' est récurrent positif.

Si $\sum nf_{uu}^G(n)R^n = +\infty$, soit H un graphe récurrent contenant G avec $R(H) = R$. Alors

$$\sum_{n\geq 1} nf_{uu}^H(n)R^n \geq \sum_{n\geq 1} nf_{uu}^G(n)R^n = +\infty$$

et H est récurrent nul. □

Dans l'exemple suivant, nous illustrons les deux cas de la proposition 3.2.12 en exhibant un graphe transient inclus dans un graphe récurrent positif (resp. récurrent nul) de même entropie. Le cas (1) fournit également un exemple de graphe récurrent positif qui n'est pas fortement récurrent positif, très proche de celui donné dans [74] (seuls les coefficients diffèrent, ceux que nous donnons sont explicites). Dans le même esprit, U. Fiebig construit un exemple de graphe localement fini qui est récurrent positif et possède un sous-graphe propre de même entropie [33]. Soulignons que la forme particulière des graphes considérés dans l'exemple suivant donne immédiatement le nombre de boucles de premier retour $f_{vv}^G(n)$.

Exemple 3.2.13 Nous construisons un graphe G récurrent positif (resp. récurrent nul) tel que $\sum_{n\geq 1} f_{uu}^G(n)L_{uu}^n = 1$, puis nous supprimons une arête pour obtenir un graphe $G' \subset G$ qui est transient et tel que $h(G') = h(G)$. Tout d'abord nous donnons une description de G qui dépend d'une suite d'entiers $a(n)$, ensuite nous donnons deux valeurs différentes à la suite $a(n)$ de façon à obtenir un graphe récurrent positif dans un cas et un graphe récurrent nul dans l'autre.

Soit u un sommet. Le graphe G est formé de boucles basées en u et il n'y a pas d'arête entre deux boucles différentes (voir la figure 3.1). Le graphe est entièrement déterminé par le nombre de boucles de longueur n. Plus précisément, on choisit une suite d'entiers positifs $(a(n))_{n\geq 1}$ telle que $a(1) = 1$; l'ensemble de sommets de G est

$$V = \{u\} \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{v_k^{n,i} \mid 1 \leq i \leq a(n), 1 \leq k \leq n-1\},$$

où les sommets $v_k^{n,i}$ sont tous distincts.

Les seules arêtes présentes dans G sont
- $v_k^{n,i} \to v_{k+1}^{n,i}$ si $1 \leq k \leq n-2$, $1 \leq i \leq a(n)$;
- $u \to v_1^{n,i}$ et $v_{n-1}^{n,i} \to u$ si $n \geq 2$, $1 \leq i \leq a(n)$;
- $u \to u$.

Le graphe G est connexe et $f_{uu}^G(n) = a(n)$ pour $n \geq 1$. Il est à noter qu'il y a une unique arête $u \to u$ car $a(1) = 1$, de sorte que le graphe G est bien défini.

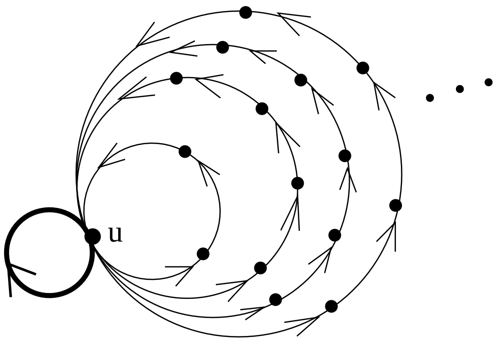


FIG. 3.1 – Les graphes G et G' ; la boucle en gras (sur la gauche) est l'unique arête qui appartient à G et pas à G', autrement les deux graphes coïncident.

On choisit la suite $a(n)$ de façon à avoir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a(n)L^n = 1, \tag{3.6}$$

où L est le rayon de convergence (qui doit être fini et non nul) de la série $\sum a(n)z^n$; on a $L = L_{uu}$. Si G est transient, $R = L_{uu}$ par la proposition 3.2.2, donc $\sum_{n\geq 1} f_{uu}^G(n)R^n = 1$ par l'équation (3.6), ce qui contredit la définition de transience. Par conséquent, G est récurrent. De plus, le lemme 3.2.4 (ii) dit que $R = L$.

Le graphe G' est obtenu à partir du graphe G en supprimant l'arête $u \to u$; les sommets et les autres arêtes sont gardés. Trivialement $f_{uu}^{G'}(n) = f_{uu}^{G}(n)$ si $n \geq 2$, $f_{uu}^{G'}(1) = 0$ et $L'_{uu} = L$. De plus,

$$\sum_{n \geq 1} f_{uu}^{G'}(n) L^n = 1 - L < 1,$$

ce qui implique que $\sum_{n \geq 1} f_{uu}^{G'}(n) R'^n < 1$ car $R' \leq L'_{uu}$, donc le graphe G' est transient. De plus, $R' = L'_{uu}$ par la proposition 3.2.2, donc $R' = R$ et $h(G) = h(G')$.

À présent, nous considérons deux suites $a(n)$ différentes.

1. Soit $a(n^2) = 2^{n^2 - n}$ pour $n \geq 1$ et $a(n) = 0$ si n n'est pas un carré. Il est facile de vérifier que $L = \frac{1}{2}$, et

$$\sum_{n \geq 1} f_{uu}^{G}(n) L^n = \sum_{n \geq 1} 2^{n^2 - n} \frac{1}{2^{n^2}} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} = 1.$$

De plus,

$$\sum_{n \geq 1} n f_{uu}^{G}(n) L^n = \sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{2^n} < +\infty,$$

ainsi le graphe G est récurrent positif; il n'est évidemment pas fortement récurrent positif. Le graphe $G' \subset G$ est transient ; il vérifie $h(G') = h(G)$ et $\sum_n f_{uu}^{G'}(n) R'^n < +\infty$.

2. Soit $a(1) = 1$, $a(2^n) = 2^{2^n - n}$ pour $n \geq 2$ et $a(n) = 0$ sinon. On peut vérifier que $L = \frac{1}{2}$, et

$$\sum_{n \geq 1} f_{uu}^{G}(n) L^n = \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 2} 2^{2^n - n} \frac{1}{2^{2^n}} = \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{2^n} = 1.$$

De plus,

$$\sum_{n \geq 1} n f_{uu}^{G}(n) L^n = \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 2} 2^n \frac{1}{2^n} = +\infty.$$

Ainsi G est récurrent nul. Le graphe G' est transient ; de plus, $h(G') = h(G)$ et $\sum n f_{uu}^{G'}(n) R'^n = +\infty$.

Dans les deux cas, la proposition 3.2.12 donne un graphe G'' contenant G' qui est différent de G (deux boucles de longueur 2 sont ajoutées à G' pour obtenir G''). Ceci est dû au fait que, dans la construction de la proposition 3.2.12, nous avons interdit d'ajouter l'arête $u \to u$.

Exemple 3.2.14 Soit G un graphe transient d'entropie finie, c'est-à-dire $R < 1$. Alors il existe un graphe transient $G' \supset G$ tel que $h(G) = h(G')$ et $\sum_{n \geq 1} n f_{uu}^{G'}(n) R'^n = +\infty$. Pour construire G', on fixe un sommet $u \in G$ et on choisit un entier k tel que

$$\sum_{n \geq k} R^n < 1 - \sum_{n \geq 1} f_{uu}^{G}(n) R^n.$$

Puis pour tout entier $n \geq k$ on pose $m_n = \lfloor R^{-n} \rfloor$ et on ajoute $\lfloor R^{-(m_n - n)} \rfloor$ boucles de longueur m_n basées au sommet u. Il est immédiat que $\sum_{n \geq 1} f_{uu}^{G'}(n) R'^n < 1$ grâce au choix de k, donc $R' = R$ et G' est transient. De plus,

$$\sum_{n \geq k} m_n \lfloor R^{-(m_n - n)} \rfloor R^{m_n} = +\infty$$

donc $\sum_{n\geq 1} n f_{uu}^{G'}(n) R'^n = +\infty$ également.

Par la proposition 3.2.12, on en déduit que tout graphe transient possède un surgraphe récurrent nul de même entropie.

Remarque 3.2.15 L'exemple 3.2.13 montre que le signe $\leq$ apparaissant dans la colonne « transient » du tableau 3.1 doit être interprété comme « soit = soit < », les deux cas étant réalisables. Pour les graphes récurrents positifs, on a soit $R = L_{uu}$ pour tout u soit $R < L_{uu}$ pour tout u (corollaire 3.2.9) ; dans ce dernier cas, la fonction $u \mapsto L_{uu}$ n'est pas constante [41].

Remarque 3.2.16 Dans le cadre plus général du formalisme thermodynamique pour les chaînes de Markov dénombrables [75], Sarig met en évidence une sous-classe des potentiels récurrents positifs, qu'il appelle fortement récurrents positifs [76] ; sa motivation diffère de celle exposée ici, mais les classifications concordent. Si G est un graphe orienté dénombrable, un *potentiel* est une fonction continue $\phi\colon \Gamma_G \to \mathbb{R}$ et la *pression* $P(\phi)$ est l'analogue de l'entropie de Gurevich, les chemins étant pondérés par e^{ϕ} ; un potentiel est soit transient, soit récurrent nul, soit récurrent positif. Si on considère le potentiel nul $\phi \equiv 0$, on retrouve le cas des chaînes de Markov topologiques (non pondérées). Dans [76], Sarig introduit une quantité $\Delta_u[\phi]$; ϕ est transient (resp. récurrent) si $\Delta_u[\phi] < 0$ (resp. $\Delta_u[\phi] \geq 0$). Le potentiel ϕ est appelé *fortement récurrent positif* si $\Delta_u[\phi] > 0$, ce qui entraîne qu'il est récurrent positif. Un potentiel ϕ fortement récurrent positif est stable par perturbations, c'est-à-dire que tout potentiel $\phi + t\psi$ proche de ϕ est également récurrent positif. Pour le potentiel nul, $\Delta_u[0] = \log\left(\sum_{n\geq 1} f_{uu}(n) L_{uu}^n\right)$, donc $\Delta_u[0] > 0$ si et seulement si le graphe est fortement récurrent positif par le lemme 3.2.4 (i). Dans [41], les potentiels fortement récurrents positifs sont appelés *positifs stables*.

Des exemples de potentiels (non nuls) qui sont récurrents positifs mais non fortement récurrents positifs sont donnés dans [76] ; certains ressemblent beaucoup aux chaînes de Markov de l'exemple 3.2.13 car leur graphe est composé de boucles comme dans la figure 3.1.

3.3 Existence de mesures maximales

Soit G un graphe orienté. Une *mesure maximale* est une mesure μ dont l'entropie réalise le supremum des entropies métriques, c'est-à-dire $h_\mu(\Gamma_G, \sigma) = h(G)$.

3.3.1 Récurrence positive et mesures maximales

Une chaîne de Markov sur un graphe fini possède toujours une mesure maximale [62], mais ce n'est pas le cas pour les graphes infinis [44]. Dans [45] Gurevich donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une mesure maximale.

Théorème 3.3.1 (Gurevich) *Soit G un graphe orienté connexe d'entropie finie non nulle. Alors la chaîne de Markov (Γ_G, σ) admet une mesure maximale si et seulement si le graphe est récurrent positif. De plus, si une telle mesure existe, elle est unique et c'est une mesure de Markov ergodique.*

Si G est un graphe orienté connexe, $\lambda = R(G)^{-1}$ est une valeur propre de la matrice d'incidence P si et seulement si G est récurrent (voir par exemple [53]). Le vecteur propre à gauche (resp. à droite) est unique à un scalaire près et peut être choisi avec des coefficients strictement positifs ; on note $X = (X_u)_{u\in V(G)}$ (resp. $Y = (Y_u)_{u\in V(G)}$) un vecteur ligne (resp. colonne) strictement positif tel que $XP = \lambda X$ (resp. $PY = \lambda Y$). Le produit $XY = \sum_{u\in V(G)} X_u Y_u$ est fini si et seulement si G est récurrent positif ; dans ce cas, on normalise X et Y de sorte que $XY = 1$, et on définit :

- $\pi_u = X_u Y_u$, $\pi = (\pi_u)_{u\in V(G)}$;
- $m_{uv} = \frac{Y_u}{\lambda Y_v}$ si $u \to v$, $m_{uv} = 0$ sinon, et $M = (m_{uv})_{u,v\in V(G)}$.

L'unique mesure maximale de Γ_G est alors la mesure de Markov de matrice de transition M et de vecteur de probabilité stationnaire π.

Quand le graphe n'est pas connexe, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 3.3.2 *Soit G un graphe orienté. Si μ est une mesure maximale ergodique sur Γ_G, alors μ est supportée par une composante connexe récurrente positive dont l'entropie vaut $h(G)$.*

Preuve. Une mesure ergodique est supportée par une composante connexe $G' \subset G$ car $\Gamma_{G'}$ est un ensemble σ-invariant. On a d'une part $h_\mu(\Gamma_G, \sigma) = h(G)$ et d'autre part $h_\mu(\Gamma_G, \sigma) \leq h(G') \leq h(G)$, donc $h(G') = h(G)$. On applique alors le théorème 3.3.1 □

Le théorème 3.3.1 résout entièrement la question de l'existence d'une mesure maximale si on connaît la classe du graphe. Néanmoins, il n'est pas toujours aisé de déterminer si un graphe est récurrent positif ou non, et on peut souhaiter avoir d'autres critères.

3.3.2 Le critère de Gurevich-Zargaryan et sa réciproque

Dans [43], Gurevich et Zargaryan donnent une condition suffisante pour l'existence d'une mesure maximale ; il apparaît dans la preuve que cette condition implique que le graphe est fortement récurrent positif. Dans [41], Gurevich et Savchenko étendent ce résultat aux graphes dont les arêtes sont pondérées. Nous donnons une preuve de ce résultat, plus détaillée que celles figurant dans [43] et [41], qui omettent de démontrer qu'un certain déterminant est non nul (ce qui correspond à l'assertion (3.10)).

Soit G un graphe orienté connexe, V un sous-ensemble de sommets et u, v deux sommets de G. On définit les quantités suivantes.

- $t^V_{uv}(n)$ est le nombre de chemins $(v_0, \ldots, v_n)$ tels que $v_0 = u, v_n = v$ et $v_i \in V$ pour $0 < i < n$;
- $\tau^V_{uv} = \limsup\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \log t^V_{uv}(n)$.

On rappelle que $\overline{V} = V(G) \setminus V$.

Théorème 3.3.3 (Gurevich-Zargaryan) *Soit G un graphe orienté connexe d'entropie finie non nulle. On suppose qu'il existe un sous-ensemble fini de sommets W tel que W est connexe et pour tous les sommets $u, v \in W$ on a $h(W) \geq \tau^{\overline{W}}_{uv}$. Alors G est fortement récurrent positif.*

Preuve. Jusqu'à la fin de la preuve, on fixe un sommet $w \in W$, où W satisfait les hypothèses du théorème. Si u, v sont deux sommets de W, on définit les quantités suivantes.

- $a_{uv}(n)$ est le nombre de chemins $(v_0, \ldots, v_n)$ tels que $v_0 = u$, $v_n = v$ et il existe $0 \leq k < n$ tels que $v_i \in W$ pour $0 < i < k$ et $v_i \notin W$ pour $k \leq i < n$. On a $a_{uv}(0) = a_{uv}(1) = 0$;
- $A_{uv}(z) = \sum a_{uv}(n) z^n$ est la série associée, son rayon de convergence est noté r_{uv} ;
- si V est un sous-ensemble de sommets, on note $\rho_{uv}(V)$ le rayon de convergence de la série $T^V_{uv}(z) = \sum t^V_{uv} z^n$, c'est-à-dire $-\log \rho_{uv}(V) = \tau^V_{uv}$;
- si H est un sous-graphe, $F^H_{uv}(x) = \sum_{n>1} f^H_{uv}(n) x^n$.

Dans la suite, $f_{uv}(n)$ et F_{uv} désignent $f^G_{uv}(n)$ et F^G_{uv}, et $R(G)$ est noté R. On pose $L = L_{ww}(G)$. On vérifie qu'on a

$$f_{uw}(n) = f^W_{uw}(n) + a_{uw}(n) + \sum_{v\in W\setminus\{w\}} \sum_{k=2}^{n-1} a_{uv}(k) f_{vw}(n-k),$$

donc, pour tout $x \geq 0$,

$$F_{uw}(x) = F^W_{uw}(x) + A_{uw}(x) + \sum_{v \in W \setminus \{w\}} A_{uv}(x) F_{vw}(x). \tag{3.7}$$

Comme les coefficients sont positifs, toutes les séries considérées sont définies pour tout $x \geq 0$ (elles peuvent être infinies). Dans l'équation (3.7), les quantités de gauche et de droite sont finies en même temps.

Soit J l'ensemble des $x \geq 0$ tels que $F_{ww}(x) < +\infty$; J est égal à l'intervalle $[0, L[$ ou $[0, L]$ selon que $F_{ww}(L) = +\infty$ ou $F_{ww}(L) < +\infty$. Soit u un sommet de G et N la longueur minimale d'un chemin joignant w à u. Il est facile de voir que $f_{uw}(n) \leq f_{ww}(n+N)$, donc $x^N F_{uw}(x) \leq F_{ww}(x)$ et $F_{uw}(x) < +\infty$ pour tout $x \in J$. Si $x \in J \setminus \{0\}$ alors $A_{uv}(x) F_{vw}(x) < +\infty$ par l'équation (3.7) et $F_{vw}(x) > 0$ donc $A_{uv}(x) < +\infty$. Ainsi, pour tout $x \in J$, toutes les séries qui apparaissent dans l'équation (3.7) sont finies.

Si $x \in J$, on définit la matrice $M(x) = \big(m_{uv}(x)\big)_{u,v \in W}$ par $m_{uv}(x) = A_{uv}(x)$ si $v \neq w$ et $m_{uw}(x) = 0$.

L'équation (3.7) donne un système d'équations linéaires dont les variables sont $(F_{uw}(x))_{u \in W}$. Pour $x \in J$, ce système peut se réécrire comme suit :

$$\big(I - M(x)\big) \begin{pmatrix} F_{uw}(x) \end{pmatrix}_{u \in W} = \begin{pmatrix} F^W_{uw}(x) + A_{uw}(x) \end{pmatrix}_{u \in W} \tag{3.8}$$

où I est la matrice identité sur l'ensemble d'indices W.

On peut également écrire $f_{uw}(n)$ comme

$$f_{uw}(n) = f^W_{uw}(n) + a_{uw}(n) + \\ \sum_{k=2}^{n} \sum_{\substack{n_1 + \cdots + n_k = n \\ v_1, \ldots, v_{k-1} \in W \\ v_i \neq w}} a_{uv_1}(n_1) a_{v_1 v_2}(n_2) \ldots a_{v_{k-2} v_{k-1}}(n_{k-1}) \Big(a_{v_{k-1} w}(n_k) + f^W_{v_{k-1} w}(n_k) \Big).$$

On a donc, pour tout $x \geq 0$,

$$F_{uw}(x) = F^W_{uw}(x) + A_{uw}(x) + \\ \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\substack{v_1, \ldots, v_{k-1} \in W \\ v_i \neq w}} A_{uv_1}(x) A_{v_1 v_2}(x) \ldots A_{v_{k-2} v_{k-1}}(x) \Big(A_{v_{k-1} w}(x) + F^W_{v_{k-1} w}(x) \Big). \tag{3.9}$$

Pour tout $x \in J$, on définit la matrice $Q(x) = \big(q_{uv}(x)\big)_{u,v \in W}$ par

$$q_{uv}(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\substack{v_1, \ldots, v_{k-1} \in W \setminus \{w\} \\ v_{k-1} = v}} A_{uv_1}(x) A_{v_1 v_2}(x) \ldots A_{v_{k-2} v_{k-1}}(x) \quad \text{si } v \neq w$$

et $q_{uw}(x) = 0$. Les quantités de gauche et de droite dans l'équation (3.9) sont finies en même temps ; $F_{uw}(x) < +\infty$ pour $x \in J$ et $(A_{vw}(x) + F^W_{vw}(x)) \geq F^W_{vw}(x) > 0$ si $x > 0$ car W est connexe, de sorte que les coefficients de $Q(x)$ sont finis pour tout $x \in J$.

Pour $x \in J$, l'équation (3.9) peut se réécrire comme suit :

$$\begin{pmatrix} F_{uw}(x) \end{pmatrix}_{u \in W} = \big(I + Q(x)\big) \begin{pmatrix} F^W_{uw}(x) + A_{uw}(x) \end{pmatrix}_{u \in W}$$

Pour $x \in J$, tous les coefficients de $M(x)$ et $Q(x)$ sont finis, et un calcul montre facilement que $(I - M(x))(I + Q(x)) = I$, c'est-à-dire

$$I + Q(x) = (I - M(x))^{-1} \text{ et } \det(I - M(x)) \neq 0 \text{ pour tout } x \in J. \tag{3.10}$$

Soit $S = \min\{L_{ww}(W), r_{uv} \mid u, v \in W\}$. Pour $0 \leq x < S$ et $u \in W$, on a $F^W_{uw}(x) < +\infty$, $A_{uw}(x) < +\infty$ et tous les coefficients de la matrice $M(x)$ sont finis. L'application

$$x \mapsto \Delta(x) = \det(I - M(x))$$

est continue et $\Delta(0) = 1$. S'il existe $x < S$ tel que $\Delta(x) = 0$, on pose $\zeta = \min\{x \geq 0 \mid \Delta(x) = 0\}$, sinon on pose $\zeta = S$. Si $x < \zeta$, alors $\Delta(x) \neq 0$, donc le système (3.8) est inversible, ce qui implique que $F_{uw}(x) < +\infty$ pour tout $u \in W$. D'où $\zeta \leq L$.

Nous séparons la preuve en deux cas, selon que $L \geq R(W)$ ou non.

– On suppose que $L \geq R(W)$. Pour tout $n \geq 1$, $f_{ww}(n) \geq f^W_{ww}(n)$ et, puisque G est infini, il existe $n \geq 1$ tel que $f_{ww}(n) > f^W_{ww}(n)$. On en déduit que $F_{ww}(L) > F^W_{ww}(L) \geq F^W_{ww}(R(W))$. Comme W est fini, W est récurrent positif et $F^W_{ww}(R(W)) = 1$, donc $F_{ww}(L) > 1$. Par le lemme 3.2.4 (i) et le corollaire 3.2.9, le graphe G est fortement récurrent positif.

– On suppose que $L < R(W)$. Comme $\zeta \leq L$, cette hypothèse implique $\zeta < R(W)$.

Fait : Quand W satisfait les hypothèse du théorème 3.3.3, on a $R(W) \leq r_{uv}$ pour tout $u, v \in W$.

Preuve du fait. On a

$$a_{uv}(n) = t^{\overline{W}}_{uv}(n) + \sum_{\substack{s \in W \\ s \neq w}} \sum_{k=2}^{n-1} t^{W \setminus \{w\}}_{us}(n-k)\, t^{\overline{W}}_{sv}(k)$$

donc

$$A_{uv}(x) = T^{\overline{W}}_{uv}(x) + \sum_{\substack{s \in W \\ s \neq w}} T^{W \setminus \{w\}}_{us}(x)\, T^{\overline{W}}_{sv}(x). \tag{3.11}$$

Dans l'équation (3.11), les quantités de gauche et de droite sont finies en même temps, donc

$$r_{uv} \geq \min\{\rho_{sv}(\overline{W}), \rho_{us}(W \setminus \{w\}) \mid s \in W\}.$$

$\rho_{us}(W \setminus \{w\}) \geq R(W)$ parce que $t^{W \setminus \{w\}}_{sv}(n) \leq p^W_{sv}(n)$ pour tout $n \geq 1$. De plus, $\rho_{sv}(\overline{W}) \geq R(W)$ par hypothèse du théorème. Ainsi, $r_{uw} \geq R(W)$ et ceci termine la preuve du fait.

Par le fait ci-dessus, $R(W) \leq \min\{r_{uv} \mid u, v \in W\}$. De plus, $R(W) \leq L(W)$, donc $R(W) \leq S$ selon la définition de S. Comme $\zeta < R(W)$, ceci implique que $\zeta < S$, d'où $\Delta(\zeta) = 0$.

Si $F_{ww}(L) < +\infty$ alors $J = [0, L]$; c'est impossible car $\Delta(x) \neq 0$ pour tout $x \in J$ par (3.10) et $\zeta \leq L$. Par conséquent, $F_{ww}(L) = +\infty$, ce qui implique que G est fortement récurrent positif (lemme 3.2.4 (i) et corollaire 3.2.9). $\square$

Le théorème 3.3.3 donne une condition suffisante pour qu'un graphe soit fortement récurrent positif. Nous montrons maintenant que c'est également une condition nécessaire (théorème 3.3.5). Le théorème 3.8 dans [41] démontre la réciproque du théorème 3.3.3 pour des graphes dont les arêtes sont pondérées ; la preuve que nous donnons est différente.

Lemme 3.3.4 *Soit G un graphe orienté connexe et H un sous-graphe fini. Il existe un ensemble fini de sommets W contenant tous les sommets de H tel que le graphe $\overline{W}$ est connexe.*

Preuve. Soit u, v deux sommets de H. Comme G est connexe, il existe n_{uv} et $(w_0^{uv}, \ldots, w_{n_{uv}}^{uv})$ un chemin dans G tel que $w_0^{uv} = u$ et $w_{n_{uv}}^{uv} = v$. On définit

$$W = \bigcup_{u,v \in V(H)} \{w_i^{uv} \mid 0 \leq i \leq n_{uv}\}.$$

Alors $V(H) \subset W$, et $\overline{W}$ est un graphe fini connexe. □

Théorème 3.3.5 *Soit G un graphe orienté connexe d'entropie finie non nulle. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *G est fortement récurrent positif ;*
ii) *il existe un ensemble fini de sommets W tel que $\overline{W}$ est connexe et pour tous sommets $u, v \in W$, $\tau_{uv}^{\overline{W}} < h(G)$;*
iii) *il existe un ensemble fini de sommets W tel que $\overline{W}$ est connexe et pour tous les sommets $u, v \in W$, $\tau_{uv}^{\overline{W}} \leq h(\overline{W})$.*

Dans cette situation, (Γ_G, σ) admet une mesure maximale.

Preuve. L'implication (iii) ⇒ (i) est le théorème 3.3.3. Nous allons montrer (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii).

Soit G un graphe fortement récurrent positif d'entropie finie. Soit W un ensemble fini de sommets tel que $\overline{W}$ est connexe (un tel ensemble existe par le lemme 3.3.4). Soit $u, v \in W$; on choisit un chemin $(v_0, \ldots, v_N)$ dans $\overline{W}$ tel que $v_0 = v, v_N = u$ et la longueur N est minimale (ce qui implique que v_i est différent de u et v pour $0 < i < N$). On définit le sous-graphe $H'(uv) \subset G$ comme suit :

- l'ensemble de sommets de $H'(uv)$ est $\overline{\overline{W}} \cup \{v_0 = v, v_1, \ldots, v_N = u\}$;
- $H'(uv)$ contient toutes les arêtes de $\overline{\overline{W}}$, les arêtes $u \to w$ pour $w \notin W$, les arêtes $w \to u$ pour $w \notin W$ et les arêtes $v_i \to v_{i+1}$ pour $0 \leq i < N$.

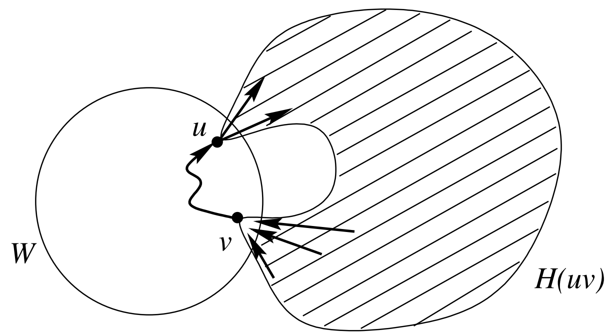


FIG. 3.2 – Le graphe $H(uv)$.

On définit $H(uv)$ comme la composante connexe de $H'(uv)$ qui contient u et v (voir figure 3.2). Si $H(uv)$ est vide, son entropie est nulle par convention. On suppose que $H(uv)$ est non vide. Il ne contient aucune arête $w \to v$ avec $w \in W$ mais une telle arête existe dans G car W est connexe. Par conséquent $H(uv) \subsetneq G$, ce qui implique que $h(H(uv)) < h(G)$ par le corollaire 3.2.9. On pose

$$C = \max\{h(H(uv)) \mid u, v \in W\} < h(G).$$

Pour tout $n \geq 1$, on a $t_{uv}^{\overline{W}}(n) = f_{uv}^{H(uv)}(n) \leq p_{uv}^{H(uv)}(n)$ donc $\tau_{uv}^{\overline{W}} \leq C < h(G)$ pour tout $u, v \in W$, ce qui est le point (ii).

On suppose maintenant que G vérifie (ii). Soit $C = \max\{\tau_{uv}^{\overline{W}} \mid u, v \in W\}$. Comme $C < h(G)$, il existe un ensemble fini de sommets $W' \supset W$ tel que W' est connexe et $h(W') > C$ (voir la définition de l'entropie et le lemme 3.3.4). Soit $u, v \in W'$; on choisit un chemin $(u_0, \ldots, u_p)$ dans W' tel que $u_0 \in W$ et $u_p = u$, de longueur minimale. Par minimalité, $u_i \notin W$ pour $1 \leq i \leq p$ (si u est déjà dans W, alors $p = 0$). De la même façon, soit $(v_0, \ldots, v_q)$ un chemin tel que $v_0 = v$, $v_q \in W$ et $v_i \in W' \setminus W$ pour $0 \leq i \leq q-1$. Si $(w_0, \ldots, w_n)$ est un chemin extérieur à W' joignant u à v (c'est-à-dire $w_0 = u, w_n = v$ et $w_i \notin W'$ pour $0 < i < n$), alors $(u_0, \ldots, u_p = w_0, w_1, \ldots, w_n = v_0, v_1, \ldots, v_q)$ est un chemin extérieur à W. Ceci implique que $t_{uv}^{\overline{W'}}(n) \leq t_{u_0 v_q}^{\overline{W}}(n + p + q)$ et par conséquent

$$\tau_{uv}^{\overline{W'}} = \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log t_{uv}^{\overline{W'}}(n) \leq \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log t_{u_0 v_q}^{\overline{W}}(n + p + q) \leq C < h(W').$$

Ceci est le point (iii).

Enfin, si le point (i) du théorème est vérifié, alors G est récurrent positif, donc (Γ_G, σ) admet une mesure maximale par le théorème 3.3.1. $\square$

3.3.3 Entropie locale et mesures maximales

Pour un système compact, l'*entropie locale* est définie à l'aide d'une distance mais n'en dépend pas. On peut étendre cette définition à des espaces métriques non compacts bien que la notion obtenue de cette façon ne soit pas intrinsèque.

On renvoie à la section 1.3.2 pour les définitions de $B_n(x, \varepsilon)$ et $s_n(\varepsilon, Y)$.

Définition 3.3.6 Soit X un espace métrique, d la distance sur X, et soit $T\colon X \to X$ une transformation continue. L'entropie locale de (X, T) est définie comme $h_{loc}(X, T) = \lim_{\varepsilon \to 0} h_{loc}(X, T, \varepsilon)$, où

$$h_{loc}(X, T, \varepsilon) = \lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sup_{x \in X} \log s_n(\delta, B_n(x, \varepsilon)).$$

Quand $X = \Gamma_G$, on utilise la distance d introduite en section 3.1.2. Il est possible de prouver que l'entropie locale de Γ_G ne dépend pas de l'identification des sommets avec $\mathbb{N}$ et qu'elle est égale à $h_{loc}(\overline{\Gamma}_G, \sigma)$.

Dans cette section, nous montrons que, si $h_{loc}(\Gamma_G, \sigma) < h(G)$, alors G est fortement récurrent positif. Nous introduisons tout d'abord quelques notations.

Soit G un graphe orienté. Si W est un sous-ensemble de sommets, H un sous-graphe de G et $\bar{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Gamma_G$, on définit

$$\mathcal{C}^H(\bar{u}, W) = \{(v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Gamma_H \mid \forall n \in \mathbb{Z}, u_n \in W \Rightarrow (v_n = u_n), u_n \notin W \Rightarrow (v_n \notin W)\}.$$

Si $S \subset \Gamma_G$ et $p, q \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on définit

$$[S]_p^q = \{(v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Gamma_G \mid \exists (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in S, \forall p \leq n \leq q, u_n = v_n\}.$$

Lemme 3.3.7 *Soit G un graphe orienté sur l'ensemble de sommets $\mathbb{N}$.*

i) *Si $W \supset \{0, \dots, p+2\}$, alors pour tout $\bar{u} \in \Gamma_G$ et tout $n \geq 1$, on a $\mathcal{C}^G(\bar{u}, W) \subset B_n(\bar{u}, 2^{-p})$;*

ii) *si $\bar{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\bar{v} = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont deux chemins dans G tels que $(u_0, \dots, u_{n-1}) \neq (v_0, \dots, v_{n-1})$ et $u_i, v_i \in \{0, \dots, q-2\}$ pour $0 \leq i \leq n-1$, alors $(\bar{u}, \bar{v})$ est $(n, 2^{-q})$-séparé, c'est-à-dire qu'il existe $0 \leq i \leq n-1$ tel que $d(\sigma^i \bar{u}, \sigma^i \bar{v}) > 2^{-q}$.*

Preuve. (i) Soit $\bar{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Gamma_G$. Si $\bar{v} = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{C}^G(\bar{u}, W)$, alors $D(u_j, v_j) \leq 2^{-(p+2)}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$ (voir la section 3.1.2 page 41 pour la définition de D). Par conséquent, pour $0 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} d(\sigma^i(\bar{u}), \sigma^i(\bar{v})) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{D(u_{i+k}, v_{i+k})}{2^{|k|}} \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2^{-(p+2)}}{2^{|k|}} \\ &\leq 3.2^{-(p+2)} \\ &< 2^{-p}. \end{aligned}$$

(ii) Soit $0 \leq i \leq n-1$ tel que $u_i \neq v_i$. Par hypothèse, $u_i, v_i \leq q-1$; on suppose $u_i < v_i$. Alors

$$d(\sigma^i(\bar{u}), \sigma^i(\bar{v})) \geq D(u_i, v_i) = 2^{-u_i}(1 - 2^{-(v_i - u_i)}) \geq 2^{-(u_i+1)} \geq 2^{-(q-1)} > 2^{-q}.$$

□

Théorème 3.3.8 *Soit G un graphe orienté connexe d'entropie finie. Si $h_{loc}(\Gamma_G) < h(G)$, alors le graphe G est fortement récurrent positif et la chaîne de Markov (Γ_G, σ) possède une mesure maximale.*

Preuve. On fixe C tel que $h_{loc}(\Gamma_G, \sigma) < C < h(G)$ et $\varepsilon > 0$ tel que $h_{loc}(\Gamma_G, \sigma, \varepsilon) < C$. Soit p un entier tel que $2^{-(p-2)} < \varepsilon$. Étant donnée la définition de $h(G)$, il existe un sous-graphe fini G' tel que $h(G') > C$. Selon le lemme 3.3.4, il existe un sous-ensemble fini de sommets V contenant les sommets de G' ainsi que les sommets $\{0, \dots, p\}$ et tel que le graphe V est connexe. On pose

$$W = \overline{V},\ V_q = \{0, \dots, q\} \text{ et } W_q = V_q \setminus V = W \cap V_q \text{ pour tout } q \geq 1.$$

Soit $u, u' \in V$. Notre but est de majorer $t_{uu'}^W(n) = t_{uu'}^{\overline{V}}(n)$, indépendamment du choix de u, u'. Soit $(w_0, \dots, w_{n_0})$ un chemin joignant u' à u avec $w_i \in V$ pour $0 \leq i \leq n_0$. On fixe un entier $n \geq 1$ jusqu'à la fin de la preuve. Pour chaque chemin $(v_0, \dots, v_n)$ dans G, il existe q tel que $v_0, \dots, v_n \leq q$, donc

$$t_{uu'}^W(n) = \lim_{q\to+\infty} t_{uu'}^{W_q}(n).$$

On fixe $\delta_0 > 0$ tel que

$$\forall \delta \leq \delta_0, \limsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m} \sup_{\bar{v}\in\Gamma_G} \log s_m(\delta, B_m(\bar{v}, \varepsilon)) < C.$$

Soit $q \geq 1$ un entier arbitrairement grand et $\delta < \delta_0$ tel que $\delta < 2^{-(q+1)}$. Soit N un entier (dépendant de δ) tel que

$$\forall m \geq N, \forall \bar{v} \in \Gamma_G, \frac{1}{m} \log s_m(\delta, B_m(\bar{v}, \varepsilon)) < C. \tag{3.12}$$

Si $t_{uu'}^{W_q}(n) \neq 0$, on choisit un chemin $(v_0, \ldots, v_n)$ tel que $v_0 = u, v_n = u'$ et $v_i \in W_q$ pour $0 < i < n$. Le chemin infini $\bar{v}^{(n)} = (v_i^{(n)})_{i\in\mathbb{Z}}$ est le chemin périodique de période $n + n_0$ défini par

- $v_i^{(n)} = v_i$ pour $0 \leq i \leq n$;
- $v_{n+i}^{(n)} = w_i$ pour $0 \leq i \leq n_0$.

On définit l'ensemble $E_q(n,k)$ comme suit (voir la figure 3.3) :

$$E_q(n,k) = \left[\mathcal{C}^{V_q}(\bar{v}^{(n)}, V)\right]_0^{k(n+n_0)} \cap \left[\bar{v}^{(n)}\right]_{-\infty}^0 \cap \left[\bar{v}^{(n)}\right]_{k(n+n_0)}^{+\infty}.$$

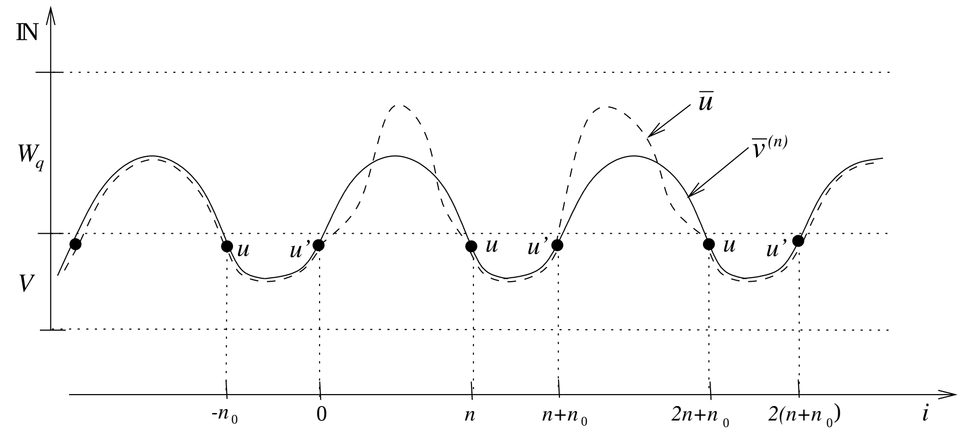


FIG. 3.3 – L'ensemble $E_q(n,k)$ ($k = 2$ sur la figure) : $\bar{v}^{(n)}$ (en trait plein) est un chemin périodique, $\bar{u}$ (en pointillés) est un élément de $E_q(n,k)$. Entre les indices 0 et $k(n+n_0)$, $\bar{v}^{(n)}$ et $\bar{u}$ coïncident quand $v_i^{(n)}$ est dans V, et $\bar{v}^{(n)}$, $\bar{u}$ sont dans W_q en même temps. Avant 0 ou après $k(n+n_0)$, les deux chemins coïncident .

Les chemins de $E_q(n,1)$ sont exactement les chemins comptés par $t_{uu'}^{W_q}$ qui sont prolongés à l'extérieur des indices $\{0, \ldots, n\}$ comme le chemin $\bar{v}^{(n)}$, donc $\#E_q(n,1) = t_{uu'}^{W_q}(n)$. De façon similaire, $\#E_q(n,k) = \left(t_{uu'}^{W_q}(n)\right)^k$.

Par définition, $E_q(n,k) \subset \mathcal{C}^G(\bar{v}^{(n)}, V)$ et $\{0, \ldots, p\} \subset V$, donc $E_q(n,k) \subset B_{k(n+n_0)}(\bar{v}^{(n)}, \varepsilon)$ par le lemme 3.3.7 (i). De plus, si $(w_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et $(w_i')_{i\in\mathbb{Z}}$ sont deux éléments distincts de $E_q(n,k)$, il existe $0 \leq i < k(n+n_0)$ tel que $w_i \neq w_i'$ et $w_i, w_i' \leq q$, de sorte que $E_q(n,k)$ est un ensemble $(k(n+n_0), \delta)$-séparé par le lemme 3.3.7 (ii). On choisit k tel que $k(n+n_0) \geq N$. Par l'équation (3.12), on a

$$\#E_q(n,k) \leq s_{k(n+n_0)}(\delta, B_{k(n+n_0)}(\bar{v}^{(n)}, \varepsilon)) < e^{k(n+n_0)C}.$$

Comme $\#E_q(n,k) = \left(t_{uu'}^{W_q}(n)\right)^k$, on obtient $t_{uu'}^{W_q}(n) < e^{(n+n_0)C}$. Ceci est valable pour tout $q \geq 1$, donc

$$t_{uu'}^{W}(n) = \lim_{q\to+\infty} t_{uu'}^{W_q}(n) \leq e^{(n+n_0)C}.$$

On a la même inégalité pour tout $n \geq 1$ (l'entier n_0 ne dépend pas de n), donc

$$\tau_{uu'}^{W} = \tau_{uv'}^{\overline{V}} \leq C < h(V).$$

Par conséquent, le théorème 3.3.3 s'applique, ce qui conclut la preuve. □

Remarque 3.3.9 On définit l'entropie à l'infini du graphe G par

$$h_\infty(G) = \lim_{n\to+\infty} h(G \setminus G_n),$$

où $(G_n)_{n\geq 0}$ est n'importe quelle suite croissante de graphes finis tels que $\bigcup_n G_n = G$. Si $\varepsilon > 0$, pour tout n_0 assez grand on a

$$\forall \bar{u} \in \Gamma_{G\setminus G_{n_0}}, \forall k \geq 1, \Gamma_{G\setminus G_{n_0}} \subset B_k(\bar{u}, \varepsilon).$$

Soit $n_1 > n_0$. Par le lemme 3.3.7 (ii), il existe $\delta > 0$ tel que, si $\bar{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\bar{v} = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont deux chemins dans $G_{n_1} \setminus G_{n_0}$ avec $(u_0, \ldots, u_k) \neq (v_0, \ldots, v_k)$, alors $(\bar{u}, \bar{v})$ est (k, δ)-séparé. On en déduit que

$$h_{loc}(\Gamma_G, \sigma, \varepsilon) \geq \lim_{n_1\to+\infty} h(G_{n_1} \setminus G_{n_0}) = h(G \setminus G_{n_0}).$$

Par conséquent, $h_{loc}(\Gamma_G, \sigma) \geq h_\infty(G)$. Cependant ces deux quantités ne sont pas égales en général, et la condition $h_\infty(G) < h(G)$ n'implique pas que le graphe G est fortement récurrent positif (ni même récurrent). Ce fait est illustré par l'exemple 3.2.13. Cependant, si à chaque sommet u le nombre d'arêtes entrantes et sortantes est fini (non nécessairement borné pour tous les u), alors la condition $h_\infty(G) < h(G)$ implique que G est fortement récurrent positif. En effet, soit W un ensemble fini de sommets, $u, u' \in W$ et soit $v_1, \ldots, v_p$ (resp. $v'_1, \ldots, v'_q$) l'ensemble de sommets tels que $u \to v_i$ et $v_i \notin W$ (resp. $v'_i \to u'$ et $v'_i \notin W$). Alors

$$t^{\overline{W}}_{uu'}(n) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} p^{\overline{W}}_{v_i v'_j}(n-2)$$

donc

$$\tau_{uu'}(\overline{W}) = \max\{-\log R_{v_i v'_j}(\overline{W}) \mid 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\} \leq h(\overline{W}).$$

Pour ε petit et W suffisamment grand, $h(\overline{W}) \leq h_\infty(G) + \varepsilon < h(G)$, donc $\tau_{uu'}(\overline{W}) < h(G)$, et le théorème 3.3.5 donne la conclusion.

3.4 Mesures presque maximales vers l'infini

Pour achever d'étudier les divers aspects de l'entropie topologique des graphes, nous montrons que, pour un graphe connexe qui n'est pas fortement récurrent positif (en particulier s'il n'a pas de mesure maximale), il existe une suite de mesures presque maximales qui fuient vers l'infini, c'est-à-dire que leur entropie tend vers $h(G)$ et la mesure d'un cylindre $[W]$ tend vers 0 pour tout sous-ensemble fini de sommets W, où $[W] = \{(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Gamma_G \mid u_0 \in W\}$.

Nous construisons tout d'abord un sous-graphe d'entropie maximale dans lequel on supprime la plupart des arêtes joignant les sommets d'un ensemble fini donné.

Lemme 3.4.1 *Soit G un graphe orienté connexe dont l'ensemble des sommets est $\mathbb{N}$ et tel que $R = L_{uu}$ pour tout sommet u. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un sous-graphe connexe $G_n \subset G$ avec $R(G) = R(G_n) = L_{uu}(G_n)$ pour tout sommet u de G_n et tel que, pour tout sommet $v \leq n$ de G_n :*
- *soit il existe une seule arête partant de v dans G_n ;*
- *soit il n'existe pas d'arête $v \to w$ dans G_n avec $w \leq v$.*

Preuve. Si H est un sous-graphe connexe de G avec $R(H) = L(H)$ et si v, w sont deux sommets de G, on appelle $H(v, w)$ le graphe défini comme suit :
– si $v \to w$ n'est pas une arête de H ou si $v \to w$ est la seule arête partant de v dans H, alors $H(v, w) = H$;
– sinon, soit H_1' le graphe H privé de l'arête $v \to w$, H_2' le graphe H privé des arêtes $v \to w'$, $w' \neq w$ et H_i la composante connexe de H_i' contenant v ($i = 1, 2$). Pour tout $n \geq 1$, on a $f_{vv}^H(n) = f_{vv}^{H_1}(n) + f_{vv}^{H_2}(n)$, donc il existe $i \in \{1, 2\}$ tel que $L_{vv}(H) = L_{vv}(H_i)$. Par le lemme 3.1.1 on a $R(H) \leq R(H_i) \leq L_{vv}(H_i) = L_{vv}(H) = R(H)$, donc $R(H) = R(H_i) = L_{vv}(H_i)$, et par le corollaire 3.2.9, $R(H_i) = L_{uu}(H_i)$ pour tout sommet u de H_i. On pose $H(v, w) = H_i$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit une suite de graphes $(H_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$ en appliquant la construction ci-dessus de façon répétée :
– $H_{00} = G(0, 0)$;
– $H_{i0} = H_{i-1,n}(i, 0)$ pour $1 \leq i \leq n$;
– $H_{ij} = H_{i,j-1}(i, j)$ pour $0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$.
Ces graphes sont ordonnés de la façon suivante :

$$H_{00} \supset H_{01} \supset \cdots \supset H_{0n} \supset H_{10} \supset \cdots \supset H_{1n} \supset H_{20} \supset \cdots \supset H_{n0} \supset \cdots \supset H_{nn}.$$

Tous les graphes H_{ij} sont connexes et $R(G) = R(H_{ij}) = L_{uu}(H_{ij})$ pour tout sommet u de H_{ij}. Finalement, $G_n = H_{nn}$ vérifie les propriétés voulues. □

Proposition 3.4.2 *Soit G un graphe orienté connexe qui n'est pas fortement récurrent positif et dont l'entropie est finie et non nulle. Alors il existe une suite de mesures de Markov ergodiques $(\mu_n)_{n \geq 0}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} h_{\mu_n}(\sigma) = h(G)$ et pour tout sous-ensemble fini de sommets W, $\lim_{n \to +\infty} \mu_n([W]) = 0$.*

Preuve. On identifie les sommets de G avec $\mathbb{N}$. Soit v un sommet de G et n un entier ; pour tout $k \geq 1$, $p_{vv}^G(kn) \geq \left[f_{vv}^G(n)\right]^k$, donc $h(G) \geq \frac{1}{n} \log f_{vv}^G(n)$. Or $h(G) < +\infty$ par hypothèse, donc la quantité $f_{vv}^G(n)$ est finie pour tout sommet v et tout entier n. On considère toutes les boucles de longueur au plus k^2 basées à un sommet quelconque $v \leq k$ et on note W_k l'ensemble des sommets apparaissant dans ces boucles. Par ce qui précède, W_k est fini ; soit N_k un entier tel que $W_k \subset \{0, \ldots, N_k\}$. On considère le sous-graphe $G_{N_k} \subset G$ donné par le lemme 3.4.1 et on pose $H_k = G_{N_k}$; on a $h(H_k) = h(G)$ par définition.

Selon le théorème 3.1.5, il existe une mesure de Markov ergodique μ_k sur Γ_{H_k} telle que $h_{\mu_k}(\Gamma_G, \sigma) \geq h(H_k) - \frac{1}{k}$. Il est clair que $\lim_{n \to +\infty} h_{\mu_k}(\Gamma_G, \sigma) = h(G)$.

Soit $v \leq k$ un sommet de G. On a

$$f_{vv}^{H_k}(n) = 0 \text{ pour tout } n \leq k^2. \tag{3.13}$$

Sinon, il existe un entier $n \leq k^2$ et une boucle $(v_0 = v, v_1, \ldots, v_n = v)$ dans H_k. Ceci implique que $v_i \in W_k$, donc $v_i \leq N_k$ pour $0 \leq i \leq n$. En raison de la définition de H_k (voir le lemme 3.4.1), $v_i \to v_{i+1}$ est nécessairement la seule arête partant de v_i dans H_k. Comme le graphe H_k est connexe, il se réduit à cette boucle. Mais $h(H_k) = h(G) > 0$, ce qui mène à une contradiction.

Par ergodicité, pour μ_k-presque tout $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Gamma_{H_k}$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \#\{k \in \{0, \ldots, n-1\} \mid v_k = u\} = \mu_k([u]). \tag{3.14}$$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant l'équation (3.14). Par l'équation (3.13), le temps séparant deux apparitions du sommet u dans un chemin est supérieur à k^2, donc $\#\{k \in \{0,\ldots,n-1\} \mid v_k = u\} \leq \frac{n}{k^2}$. En remplaçant cette inégalité dans l'équation (3.14), on trouve $\mu_k([u]) \leq \frac{1}{k^2}$. On obtient donc

$$\mu_k\left([\{0,\ldots,k-1\}]\right) = \sum_{v=0}^{k-1} \mu_k([v]) \leq \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}.$$

Si W est un ensemble fini de sommets, il existe k arbitrairement grand tel que $W \subset \{0,\ldots,k-1\}$, donc $\mu_n([W]) \leq \frac{1}{k}$ pour tout $n \geq k$. □

La proposition 3.4.2 concerne les graphes connexes qui ne sont pas fortement récurrents positifs ; elle s'étend aux graphes non nécessairement connexes sans mesure maximale, résultat que nous utiliserons au chapitre 5.

Corollaire 3.4.3 *Soit G un graphe orienté d'entropie finie non nulle. On suppose qu'il n'existe aucune mesure maximale ergodique pour Γ_G. Alors il existe une suite de mesures de Markov ergodiques $(\mu_n)_{n\geq 0}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} h_{\mu_n}(\sigma) = h(G)$ et pour tout sous-ensemble fini de sommets W, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n([W]) = 0$.*

Preuve. On suppose tout d'abord que G a une composante connexe G' telle que $h(G') = h(G)$. Par hypothèse, G' n'admet pas de mesure maximale ergodique, donc G' n'est pas fortement récurrent positif par le théorème 3.3.1. La proposition 3.4.2 s'applique et donne le résultat, les mesures sur $\Gamma_{G'}$ pouvant être considérées comme des mesures sur Γ_G.

Inversement, on suppose que G n'a pas de composante connexe d'entropie égale à $h(G)$. La définition de $h(G)$ entraîne clairement que

$$h(G) = \sup\{h(G') \mid G' \text{ composante connexe de } G\}.$$

Ceci implique qu'il existe une suite de composantes connexes distinctes $(G_n)_{n\geq 0}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} h(G_n) = h(G)$. Selon le théorème 3.1.5, il existe une mesure de Markov ergodique μ_n sur Γ_{G_n} telle que $h_{\mu_n}(\Gamma_{G_n},\sigma) \geq h(G_n) - \frac{1}{n}$; μ_n peut être vue comme une mesure sur Γ_G. On a alors $\lim_{n\to+\infty} h_{\mu_n}(\Gamma_G,\sigma) = h(G)$. De plus, si W est un ensemble fini de sommets de G, il existe N tel que $W \cap G_n = \emptyset$ pour tout $n \geq N$, donc $\mu_n([W]) = 0$ pour tout $n \geq N$. □

Le corollaire 3.4.3 concerne les chaînes de Markov sans mesure maximale. À l'opposé de cette situation, si une chaîne de Markov possède une infinité de mesures maximales ergodiques, alors ces mesures partent également à l'infini.

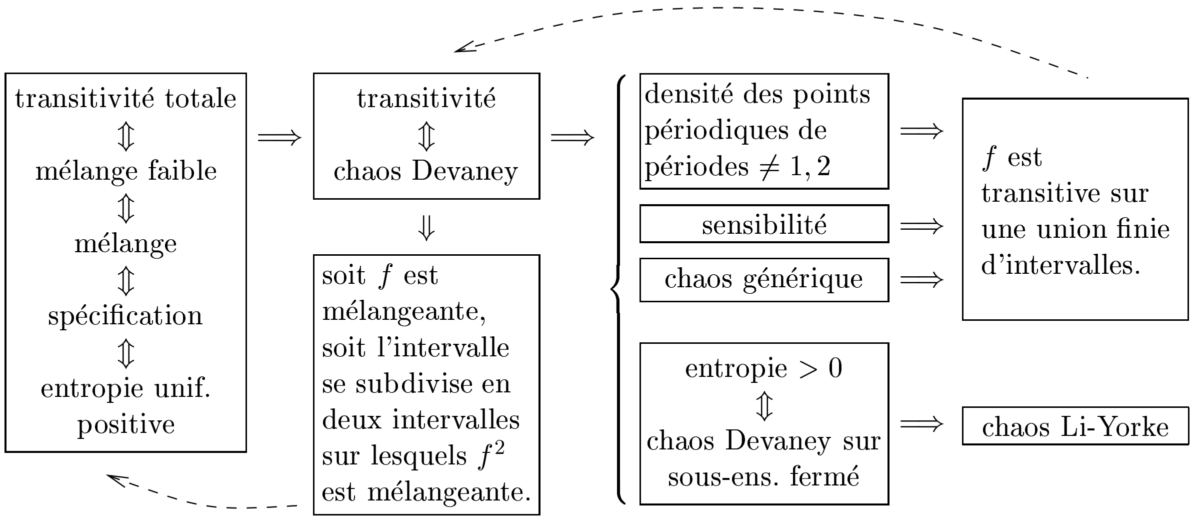
Proposition 3.4.4 *Soit G un graphe orienté d'entropie finie non nulle. On suppose que $(\mu_n)_{n\geq 0}$ est une suite de mesures maximales ergodiques distinctes pour Γ_G. Alors pour tout sous-ensemble fini de sommets W, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n([W]) = 0$.*

Preuve. Par le corollaire 3.3.2, la mesure μ_n est supportée par une composante connexe G_n. De plus, tous les graphes G_n sont disjoints en raison du théorème 3.3.1. Si W un ensemble fini de sommets, il existe un entier N tel que $W \cap V(G_n) = \emptyset$ pour tout $n \geq N$, donc $\mu_n([W]) = 0$ pour tout $n \geq N$. □

Chapitre 4

Chaos sur l'intervalle

Les systèmes dynamiques sur l'intervalle ont été largement étudiés parce qu'ils sont parmi les systèmes les plus simples mais qu'ils présentent néanmoins des comportements complexes. De plus, ils se représentent facilement et permettent des simulations numériques, ce qui a permis d'appréhender certains phénomènes chaotiques. Cependant, les transformations de l'intervalle ont des propriétés très particulières, qui ne sont pas partagées par des systèmes dynamiques sur d'autres espaces. En particulier, la plupart des notions considérées dans l'étude du chaos se « télescopent » : elles sont impliquées les unes par les autres, totalement ou partiellement. Ce sont ces implications que nous étudions dans ce chapitre. Le schéma ci-dessous représente les notions essentielles que nous considérerons et résume les liens qui les unissent.



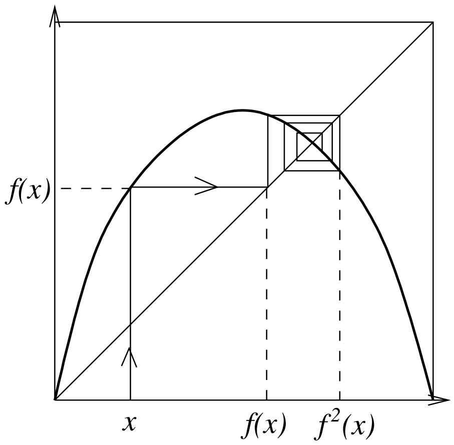
4.1 Notations et propriétés élémentaires

Définition 4.1.1 Si J est un intervalle, on note $|J|$ sa longueur. Un intervalle *non dégénéré* est un intervalle de longueur non nulle, c'est à dire qu'il n'est ni vide ni réduit à un point.

L'ordre de $\mathbb{R}$ induit un ordre partiel sur les intervalles : si J_1 et J_2 sont deux intervalles disjoints, on note $J_1 < J_2$ si J_1 est à gauche de J_2, c'est-à-dire que pour tous $x \in J_1$ et $y \in J_2$, on a $x < y$.

Définition 4.1.2 Une *transformation de l'intervalle* est une application continue $f: I \to I$, où I est un intervalle compact non dégénéré.

Définition 4.1.3 Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. *L'ensemble des points critiques* de f, noté C_f, est l'ensemble des points au voisinage desquels f n'est pas monotone ; C_f est fermé. La transformation f est *monotone par morceaux* si C_f est fini, autrement dit l'intervalle I peut être subdivisé en un nombre fini de sous-intervalles sur lesquels f est monotone.



On peut visualiser l'orbite d'un point x sur le graphe de la transformation ; on se sert de la droite $y = x$ pour réutiliser le résultat d'une itération.

Remarque 4.1.4 Une transformation de l'intervalle est un cas particulier de système dynamique topologique. On peut toujours se ramener à une transformation de $[0,1]$ de la façon suivante. Si $f: [a,b] \to [a,b]$ est une transformation de l'intervalle, elle est conjuguée à une transformation sur $[0,1]$ par l'homéomorphisme affine $h: [0,1] \to [a,b]$ défini par $h(x) = a + (b-a)x$. Cette conjugaison conserve également les propriétés liées à la dérivabilité et à la monotonie.

Remarque 4.1.5 Les ensembles connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles. Par conséquent, tout ouvert s'écrit comme union disjointe dénombrable d'intervalles ouverts non vides. De plus, l'image d'un intervalle par une fonction continue réelle est un intervalle. Cette propriété est fondamentale dans l'étude des transformations de l'intervalle ; nous nous en servirons constamment.

Le lemme suivant est l'outil élémentaire pour montrer l'existence de points fixes. Le lemme 4.1.8 montre l'existence de points périodiques quand des intervalles « s'emboîtent » sous l'action de f.

Lemme 4.1.6 *Soit $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue. Si $f([a,b]) \subset [a,b]$ ou $f([a,b]) \supset [a,b]$, alors f a un point fixe.*

Preuve. On pose $g(x) = f(x) - x$. Si $f([a,b]) \subset [a,b]$, alors $g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$, donc par continuité g s'annule dans $[a,b]$. Si $f([a,b]) \supset [a,b]$, alors il existe $x, y \in [a,b]$ tel que $f(x) \leq a$ et $f(y) \geq b$. On a alors $g(x) = f(x) - x \leq a - x \leq 0$ et $g(y) = f(y) - y \geq b - y \geq 0$, donc g s'annule dans $[a,b]$. Dans les deux cas, f a un point fixe. $\square$

Définition 4.1.7 Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. Si $J_0, \ldots, J_m$ sont des sous-intervalles compacts de I avec $J_k \subset f(J_{k-1})$ pour $k = 1, \ldots, m$, on dit que $(J_0, J_1, \ldots, J_m)$ est une *chaîne d'intervalles* pour f.

Lemme 4.1.8 *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. Si $(J_0, \ldots, J_m)$ est une chaîne d'intervalles, alors il existe un sous-intervalle compact $L \subset J_0$ tel que $f^m(L) = J_m$ et $f^k(L) \subset J_k$ pour $1 \leq k \leq m-1$.*

Si de plus $J_0 \subset J_m$, alors il existe $y \in L$ tel que $f^m(y) = y$ et $f^k(y) \in J_k$ pour $0 \leq k \leq m-1$.

Preuve. On montre le résultat par récurrence sur m.
– Cas $m = 1$. On note $J_1 = [a, b]$. Il existe $x, y \in J_0$ tels que $f(x) = a$ et $f(y) = b$. On suppose que $x < y$ (le cas $y < x$ se traite de façon similaire). On pose alors $y' = \min\{z \geq x \mid f(z) = b\}$ et $x' = \max\{z \leq y' \mid f(z) = a\}$, et on a $f([x', y']) = J_1$.
– Cas général. On suppose que le résultat est vrai pour tout $k \leq m$ et on veut le montrer pour $m+1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence pour m, on trouve un intervalle $L \subset J_0$ avec $f^m(L) = J_m$ et $f^k(L) \subset J_k$ pour $0 \leq k \leq m$. On a donc $f^{m+1}(L) \supset J_{m+1}$. On applique le cas $n = 1$ pour $g = f^{m+1}$ et on trouve un intervalle $L' \subset L$ tel que $f^{m+1}(L') = J_{m+1}$. On a toujours $f^k(L') \subset J_k$ pour $0 \leq k \leq m$.

Si $J_0 \supset J_m$, alors on a $f^m(L) \supset L$ et on applique le lemme 4.1.6 à $g = f^m|_L : L \to J_m$. On trouve un point $y \in L$ tel que $f^m(y) = y$, donc $f^k(y) \in J_k$ pour $0 \leq k \leq m-1$. □

Au cours de ce chapitre, il sera nécessaire de montrer la transitivité d'un certain nombre d'exemples. Les lemmes 4.1.10 et 4.1.11 sont des outils qui, combinés ensemble, permettent de prouver facilement la transitivité de transformations simples.

Définition 4.1.9 Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle ; f est dite *de pente supérieure à* λ si pour tout intervalle $[x, y]$ sur lequel f est monotone, $|f(x) - f(y)| \geq \lambda |x - y|$.

Lemme 4.1.10 *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle de pente supérieure à $\lambda > N$, où N est un entier non nul. Si J est un sous-intervalle non dégénéré, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $f^n(J)$ contient au moins N points critiques distincts.*

Preuve. On pose $\alpha = \frac{\lambda}{N} > 1$. Soit J un sous-intervalle. Si J rencontre exactement k points critiques distincts avec $k \leq N-1$, alors $J \setminus C_f$ a $k+1$ composantes connexes, qu'on note $J_0, \ldots, J_k$. On a $|J_0| + \cdots + |J_k| = |J|$, donc il existe i dans $\{0, \ldots, k\}$ tel que $|J_i| \geq \frac{1}{k+1}|J| \geq \frac{1}{N}|J|$. Comme J_i ne contient pas de point critique et que f est de pente supérieure à λ par hypothèse, on a $|f(J_i)| \geq \lambda |J_i|$. Par conséquent,

$$|f(J)| \geq |f(J_i)| \geq \lambda |J_i| \geq \alpha |J|.$$

Supposons que J est un sous-intervalle non dégénéré et que pour tout $n \geq 0$, $f^n(J)$ contient strictement moins de N points critiques distincts. Par ce qui précède, $|f^n(J)| \geq \alpha^n |J|$, mais ceci est impossible car $\alpha^n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Ceci termine la preuve. □

Lemme 4.1.11 *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. On suppose que a est un point fixe de f et que f est croissante de pente supérieure à $\lambda > 1$ sur $[a, b]$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \geq 0$ tel que $f^n([a, a+\varepsilon]) \supset [a, b]$.*

Preuve. Si $a + \varepsilon \leq b$, alors $f([a, a+\varepsilon]) \supset [a, a+\lambda\varepsilon]$ car a est un point fixe, et f est croissante de pente supérieure à λ sur $[a, b]$. De même, tant que $a + \lambda^{n-1}\varepsilon \leq b$, on a $f^n([a, a+\varepsilon]) \supset [a, a+\lambda^n\varepsilon]$. Comme $\lambda > 1$, il existe un entier n tel que $a + \lambda^{n-1}\varepsilon \leq b < a + \lambda^n\varepsilon$, de sorte que $f^n([a, a+\varepsilon]) \supset [a, b]$. □

4.2 Transitivité et mélange topologique

Pour les transformations de l'intervalle, les notions de transitivité totale, de mélange faible topologique et de mélange topologique sont confondues, contrairement à ce qui se passe pour les systèmes dynamiques topologiques quelconques. De plus, les notions de transitivité et de mélange topologique sont très proches l'une de l'autre. En effet, si f est une application continue sur un intervalle compact et si le système est transitif mais non mélangeant, alors l'intervalle se subdivise en deux sous-intervalles qui sont échangés sous l'action de f, et f^2 est mélangeante sur chacun de ces sous-intervalles. Nous montrons également que les points périodiques sont denses si la transformation est transitive et nous donnons quelques propriétés équivalentes du mélange topologique.

Les résultats de cette section sont classiques, les preuves que nous en donnons proviennent de [15]. Seul le cas C^1 de la proposition 4.2.11 était, semble-t-il, inconnu.

Le lemme suivant montre qu'une transformation transitive ne peut pas être constante sur un sous-intervalle.

Lemme 4.2.1 *Soit $f: I \to I$ une transformation transitive de l'intervalle. Alors l'image d'un intervalle ouvert est un intervalle d'intérieur non vide.*

Preuve. Par connexité, l'image d'un intervalle est un intervalle. Supposons qu'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ dont l'image est réduite à un point y. Par transitivité, il existe un point x d'orbite dense. Soit $n \geq 0$ tel que $f^n(x) \in J$; le point $y = f^{n+1}(x) = y$ est également d'orbite dense, par conséquent il existe $m \geq 1$ tel que $f^m(y) \in J$. De cette façon, le point $y = f^{m+1}(y)$ est périodique, ce qui est impossible puisqu'il est d'orbite dense. $\square$

La proposition suivante donne une définition équivalente du mélange topologique pour les transformations de l'intervalle, plus adaptée que la définition générale.

Proposition 4.2.2 *Soit $f: [a, b] \to [a, b]$ une transformation de l'intervalle. Le système est mélangeant si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-intervalle non dégénéré $J \subset I$ il existe un entier N tel que $\forall n \geq N,\ f^n(J) \supset [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$.*

Preuve. On suppose que f est mélangeante, et on pose $U_1 =]a, a + \varepsilon[$ et $U_2 =]b - \varepsilon, b[$. Si J est un intervalle ouvert non vide, il existe N_1 tel que $\forall n \geq N_1, f^n(J) \cap U_1 \neq \emptyset$ puisque f est mélangeante. De même, il existe N_2 tel que $\forall n \geq N_2, f^n(J) \cap U_2 \neq \emptyset$. Donc pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, $f^n(J)$ rencontre U_1 et U_2, ce qui signifie que $f^n(J) \supset [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ par connexité. Si J est un sous-intervalle non dégénéré non nécessairement ouvert, on considère $\mathrm{Int}\,(J)$ qui n'est pas vide.

Réciproquement, on suppose que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-intervalle non dégénéré J il existe un entier N tel que $\forall n \geq N,\ f^n(J) \supset [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Soit U, V deux ouverts de $[a, b]$. On peut trouver deux intervalles non dégénérés J, K avec $J \subset U$ et $K \subset V$. Quitte à rétrécir K, on peut supposer qu'il ne contient ni a ni b. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $K \subset [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Par hypothèse, il existe N tel que $\forall n \geq N, f^n(J) \supset [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, ce qui entraîne $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Par conséquent, f est mélangeante. $\square$

Exemple 4.2.3 Voici un exemple basique de transformation mélangeante, sous forme d'une application affine par morceaux, de pente constante en valeur absolue. Cet exemple nous servira a construire d'autres transformations dans ce chapitre.

Soit $p \geq 2$. On considère l'application $f\colon [0,1] \to [0,1]$ définie de la façon suivante (voir la figure 4.1) :

$$\begin{aligned} f(x) &= px - 2k \quad \text{si } x \in \left[\frac{2k}{p}, \frac{2k+1}{p}\right], 0 \leq k \leq \frac{p-1}{2}, \\ f(x) &= -px + 2k + 2 \quad \text{si } x \in \left[\frac{2k+1}{p}, \frac{2k+2}{p}\right], 0 \leq k \leq \frac{p-2}{2}. \end{aligned}$$

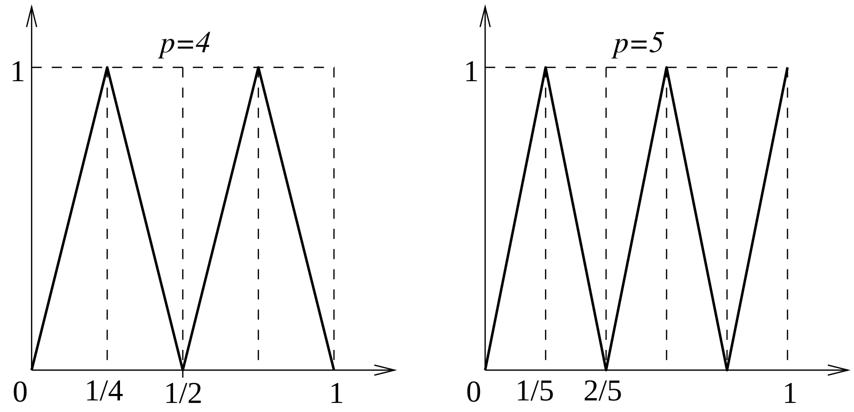


FIG. 4.1 – application mélangeante, de pente constante $\pm p$, avec $p = 4$ et $p = 5$.

f est monotone par morceaux et elle est de pente $\pm p$ sur chaque intervalle de monotonie. Si p est pair, 0 est un point fixe et $f(1) = 0$; si p est impair, 0 et 1 sont des points fixes. De plus, l'image d'un intervalle non dégénéré est non dégénérée.

Soit J un intervalle non dégénéré. Par le lemme 4.1.10, il existe n tel que $f^n(J)$ contient $p-1$ points critiques distincts. Si $p \geq 3$, $f^n(J)$ contient au moins un point critique ayant pour image 0 ; si $p = 2$, $f^n(J)$ contient $\frac{1}{2}$ et $f^2\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = 0$. Dans les deux cas, $f^{n+2}(J)$ est un intervalle non dégénéré contenant 0. Par le lemme 4.1.11, il existe un entier m tel que $f^{n+2+m}(J) \supset \left[0, \frac{1}{p}\right]$, donc $f^{n+m+3}(J) = [0,1]$. $\square$

Nous établissons dans la proposition 4.2.5 que les points périodiques sont denses si le système est transitif, propriété qui nous servira par la suite. Nous avons besoin pour cela du lemme suivant.

Lemme 4.2.4 *Soit $f\colon I \to I$ une transformation de l'intervalle et J un sous-intervalle ne contenant pas de point périodique. Si $y, x, f^m(x)$ et $f^n(y)$ sont des points de J et si $y < x < f^m(x)$, alors $f^n(y) > y$.*

Preuve. Soit $g = f^m$. Par hypothèse, l'intervalle $[x, g(x)]$ ne contient pas de point g-périodique. On montre par récurrence que pour tout $k \geq 1$, $g^k(x) > x$.

– Par hypothèse, c'est vrai pour $k = 1$.

– On suppose que $g^i(x) > x$ pour $i = 1, \ldots, k-1$ et $g^k(x) \leq x$. On classe les points $g^i(x), 0 \leq i \leq k-1$ sous la forme $x_0 < \cdots < x_{k-1}$, de sorte que $g^k(x) \leq x_0 = x < x_1 < \cdots < x_{k-1}$. Soit $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ tel que $x_1 = f^j(x)$; le point x_1 appartient à J car $x_1 \leq g(x)$. On a $g^{k-j}([x_0, x_1]) \supset [g^k(x), g^{k-j}(x)] \supset [x_0, x_1]$, ce qui entraîne que g a un point périodique dans $[x_0, x_1]$ par le lemme 4.1.6. C'est impossible, donc $g^k(x) > x$.

Si $f^n(y) < y$, on a de même $\forall k \geq 1$, $f^{kn}(y) < y$. On a alors $f^{mn}(y) < y < x < f^{mn}(x)$, donc $f^{mn}([x,y]) \subset [x,y]$ et il existe un point périodique entre x et y par le lemme 4.1.6, d'où une contradiction. $\square$

Proposition 4.2.5 *Soit $f: I \to I$ une transformation transitive de l'intervalle. Alors l'ensemble des points périodiques est dense dans I.*

Preuve. On suppose qu'il existe un sous-intervalle non vide $J =]a,b[$ ne contenant pas de points périodiques. Par transitivité, il existe un point x d'orbite dense, qu'on peut choisir dans J. Il existe donc $m > 0$ et $0 < p < q$ tels que $f^m(x) \in]x,b[$ et $a < f^q(x) < f^p(x) < x$. On pose $y = f^p(x)$. On a $f^{q-p}(y) = f^q(x) < y$, $f^m(x) > x$ et les points $x, y, f^m(x), f^{q-p}(y)$ sont tous dans J, ce qui contredit le lemme 4.2.4. On en déduit que tout ouvert non vide contient des points périodiques. $\square$

Si la transformation f est transitive, le résultat suivant montre que soit f est totalement transitive, soit l'intervalle se subdivise en deux sous-intervalles qui sont échangés sous l'action de f ; f^2 est alors totalement transitive sur chacun de ces sous-intervalles [3].

Proposition 4.2.6 *Soit $f: [a,b] \to [a,b]$ une transformation transitive de l'intervalle. Alors on est dans une des deux situations suivantes :*

i) *f est totalement transitive (c'est-à-dire f^n est transitive pour tout $n \geq 1$) ;*

ii) *il existe $c \in]a,b[$ tel que, si on pose $J = [a,c]$ et $K = [c,b]$, alors $f(J) = K$ et $f(K) = J$. Dans ce cas, $f^2|_J$ et $f^2|_K$ sont totalement transitives et c est l'unique point fixe de f .*

Preuve. Soit x_0 un point d'orbite dense pour f : son ensemble ω-limite $\omega(x_0, f)$ est l'intervalle $I = [a,b]$ tout entier. On fixe un entier $n \geq 1$ et on pose $W_i = \omega(f^i(x_0), f^n)$ pour $0 \leq i < n$. Comme $I = W_0 \cup \cdots \cup W_{n-1}$, au moins un des W_i est d'intérieur non vide par le théorème de Baire. De plus, $f(W_i) = W_{i+1}$ pour $0 \leq i < n-1$ et $f(W_{n-1}) = W_0$, donc chaque W_i est d'intérieur non vide par le lemme 4.2.1.

Si $\mathrm{Int}\,(W_i) \cap \mathrm{Int}\,(W_j) \neq \emptyset$, alors $W_i = W_j$. En effet, dans ce cas il existe $k \geq 0$ tel que $f^{kn+i}(x_0) \in \mathrm{Int}\,(W_i) \cap \mathrm{Int}\,(W_j)$. Comme W_j est invariant par f^n, on a $f^{k'n+i}(x_0) \in W_j$ pour tout $k' \geq k$, donc $W_i \subset W_j$. On a de même $W_j \subset W_i$, donc $W_i = W_j$.

On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des composantes connexes des ensembles $\mathrm{Int}\,(W_i)$ $(0 \leq i < n)$. Les éléments de $\mathcal{E}_n$ sont des intervalles ouverts disjoints dont l'union est dense dans I. Pour tout $C \in \mathcal{E}_n$, $f(\overline{C})$ est un intervalle fermé non dégénéré (lemme 4.2.1), et inclus dans un W_i, donc il existe $C' \in \mathcal{E}_n$ tel que $f(\overline{C}) \subset \overline{C'}$. De plus, si on fixe $C \in \mathcal{E}_n$, la densité de l'orbite de x_0 implique que pour tout $C' \in \mathcal{E}_n$ il existe $k \geq 1$ tel que $f^k(\overline{C}) \cap \overline{C'} \neq \emptyset$, donc $f^k(\overline{C}) \subset \overline{C'}$. Par conséquent, $\mathcal{E}_n$ est fini et ses éléments sont permutés cycliquement par f. On note $\mathcal{E}_n = (C_1, \ldots, C_p)$ avec $f(\overline{C_i}) = \overline{C_{i+1}}$ et $f(\overline{C_p}) = \overline{C_1}$ (on a des égalités à la place des inclusions car $\bigcup C_i$ est dense, donc $\bigcup f(C_i)$ aussi).

Si pour tout n le nombre d'éléments de $\mathcal{E}_n$ est 1 alors $\omega(x_0, f^n) = I$ et f est totalement transitive ; c'est le cas (i) de la proposition. Supposons que pour un n donné le nombre p d'éléments de $\mathcal{E}_n$ soit strictement supérieur à 1. Nous allons montrer que $p = 2$. Soit c un point fixe de f (ce point existe par le lemme 4.1.6). S'il existe $C \in \mathcal{E}_n$ avec $c \in C$, alors $f(\overline{C}) = \overline{C}$, ce qui est impossible puisque les p éléments de $\mathcal{E}_n$ sont permutés cycliquement. De façon similaire, c ne peut pas être une des extrémités de I. Par conséquent, le point c est nécessairement une extrémité commune de deux éléments C et C' de $\mathcal{E}_n$, avec $C \neq C'$. On a alors $f(\overline{C}) = \overline{C'}$ et $f(\overline{C'}) = \overline{C}$, ce qui n'est possible que si $p = 2$; ceci implique également que n est pair. Si on note $J = [a, c]$ et $K = [c, b]$, on a $\mathcal{E}_n = \{\mathrm{Int}\,(J)\,, \mathrm{Int}\,(K)\}$ et

$$f(J) = K, \quad f(K) = J. \tag{4.1}$$

De plus, c est l'unique point fixe de f et $c \in \mathrm{Int}\,(I)$. Comme n est pair, on a $\omega(x_0, f^n) \subset \omega(x_0, f^2)$; en combinant ceci avec l'équation (4.1), on voit que $\mathcal{E}_2 = \{\mathrm{Int}\,(J)\,, \mathrm{Int}\,(K)\}$. Ainsi, si on pose $g = f^2$, les applications $g|_J$ et $g|_K$ sont transitives. Si $g|_J$ n'est pas totalement transitive, alors ce qui précède montre que $g|_J$ a un unique point fixe c' avec $c' \in \mathrm{Int}\,(J)$. Or c est déjà un point fixe de $g|_J$ et $c \notin \mathrm{Int}\,(J)$ donc $g|_J$ est totalement transitive, de même que $g|_K$. On est dans le cas (ii) de la proposition. □

Nous montrons maintenant que la transitivité totale implique le mélange topologique [4].

Proposition 4.2.7 *Soit $f\colon I \to I$ une transformation de l'intervalle. Si f est totalement transitive, alors elle est topologiquement mélangeante.*

Preuve. On note $I = [a, b]$. Soit J un sous-intervalle ouvert non vide et $\varepsilon > 0$. Par la proposition 4.2.5, les points périodiques de f sont denses dans I, donc il existe des points périodiques x, y, z tels que $x \in J, y \in]a, a+\varepsilon[$ et $z \in]b-\varepsilon, b[$. Soit m un multiple commun de leurs périodes. On pose $g = f^m$ et $K = \bigcup_{n=1}^{+\infty} g^n(J)$. K est un intervalle car $g^n(J)$ est un intervalle contenant x, point fixe de g. D'autre part, K est dense dans I par transitivité de g, donc il existe i, j tels que $y \in g^i(J)$ et $z \in g^j(J)$. Comme y et z sont des points fixes de g, il en résulte que $y, z \in g^k(J)$, où $k = \max(i, j)$. Par conséquent, $[y, z] \subset f^{km}(J)$.

Par la proposition 4.2.5, il existe un point périodique x_1 dans $]a, a+\varepsilon[$, et on peut prendre x_1 tel que $f^k(x_1) \notin \{a, b\}$ pour tout $k \geq 0$. On note $y_1 = \min_k f^k(x_1)$ et $z_1 = \max_k f^k(x_1)$ les deux points extrémaux de l'orbite de x_1. De même, il existe une orbite périodique contenue dans l'intérieur de I dont le plus grand point z_2 est dans $]b-\varepsilon, b[$; on note y_2 le plus petit point de l'orbite de z_2. On pose $y = \min(y_1, y_2)$ et $z = \max(z_1, z_2)$. Par ce qui précède, il existe $N > 0$ tel que $f^N(J) \supset [y, z]$. En particulier, $f^N(J)$ contient toute l'orbite de y_1, donc $\forall n \geq N,\ f^n(J) \supset [y_1, z_1]$. De même, $\forall n \geq N,\ f^n(J) \supset [y_2, z_2]$. Finalement, $f^n(J)$ contient $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ pour tout $n \geq N$, donc f est topologiquement mélangeante (proposition 4.2.2). □

La proposition suivante énonce que, pour qu'une transformation transitive soit mélangeante, il faut et il suffit qu'elle ait un point périodique de période impaire qui ne soit pas un point fixe.

Proposition 4.2.8 *Soit $f\colon I \to I$ une transformation transitive de l'intervalle. Alors f est mélangeante si et seulement si elle a un point périodique de période impaire différente de 1.*

Preuve. On suppose que f est mélangeante. L'ensemble des points fixes de f est un fermé d'intérieur vide. Soit J un intervalle fermé non dégénéré inclus dans $\mathrm{Int}\,(I)$ et ne contenant pas de point fixe. Grâce à la proposition 4.2.2 il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $f^n(J) \supset J$. En choisissant n impair et en appliquant le lemme 4.1.6, on voit que f^n a un point fixe x dans J ; x est un point périodique de f de période p divisant n, donc p est impair, et $p > 1$ car $x \in J$.

Inversement, si f est transitive mais non mélangeante, alors f est dans le cas (ii) de la proposition 4.2.6 : il existe deux sous-intervalles J et K tels que $f(J) = K$, $f(K) = J$ et $J \cup K = I$. Par conséquent, tous les points périodiques sont de période paire, sauf l'extrémité commune de J et K qui est un point fixe. Par contraposée, une transformation transitive qui a un point périodique de période impaire différente de 1 est mélangeante. □

Si on considère une transformation mélangeante $f\colon[0,1]\to[0,1]$ et si on fixe $\varepsilon>0$, alors l'image par f^n d'un sous-intervalle non dégénéré J recouvre $[\varepsilon,1-\varepsilon]$ pour tout n assez grand. Il n'est pas toujours vrai qu'il existe n tel que $f^n(J)=[0,1]$, mais c'est cependant le cas si f est C^1 ou monotone par morceaux. Cette propriété est liée à l'*accessibilité* des extrémités de l'intervalle, notion dont nous donnons la définition ci-dessous.

Définition 4.2.9 (accessibilité) Soit $f\colon[0,1]\to[0,1]$ une transformation de l'intervalle. S'il existe x dans $]0,1[$ et $n>0$ tel que $f^n(x)=0$ (resp. $f^n(x)=1$), on dit que le point 0 (resp. 1) est *accessible.*

Le lemme suivant précise le comportement d'une transformation mélangeante sur I au voisinage d'un point non accessible et montre que tout sous-intervalle non dégénéré possède un itéré recouvrant I si et seulement si les deux extrémités de I sont accessibles.

Lemme 4.2.10 *Soit $f\colon[0,1]\to[0,1]$ une transformation mélangeante.*

i) *Si l'extrémité 0 est l'unique point non accessible, alors $f(0)=0$. Si les deux extrémités 0 et 1 sont non accessibles, alors soit $f(0)=0$ et $f(1)=1$ soit $f(0)=1$ et $f(1)=0$.*

ii) *Si 0 est non accessible et $f(0)=0$ alors il existe une suite de points fixes $x_n>0$ décroissant vers 0. De plus, $f|_{[x_{n+1},x_n]}$ n'est pas monotone.*

iii) *Pour tout sous-intervalle non dégénéré J, il existe $n\geq 0$ tel que $f^n(J)=[0,1]$ si et seulement si les points 0 et 1 sont accessibles.*

Preuve.
i) Si 0 n'est pas accessible, alors $0\notin f(]0,1[)$, donc $f(0)=0$ ou $f(1)=0$ car f est surjective. Si 1 est accessible et $f(1)=0$ alors 0 est lui aussi accessible. Par conséquent, si 0 est le seul point non accessible alors $f(0)=0$, et si 0 et 1 sont non accessibles alors soit $f(0)=0$ et $f(1)=1$, soit $f(0)=1$ et $f(1)=0$.

ii) On suppose que 0 est non accessible et que $f(0)=0$. Par définition $0\notin f(]0,1[)$. Si 1 est non accessible alors $f(1)=1$, et si 1 est accessible alors $f(1)\neq 0$ sinon 0 serait accessible. Par conséquent, $0\notin f(]0,1])$. Soit $\varepsilon>0$; la transitivité implique que $f([0,\varepsilon])\not\subset[0,\varepsilon]$, donc il existe $y\in]0,\varepsilon]$ tel que $f(y)\geq\varepsilon$, en particulier $f(y)\geq y$. On veut montrer par l'absurde qu'il existe un point fixe différent de 0 entre 0 et y. Pour cela on suppose que pour tout $x\in[0,y]$, $f(x)\geq x$. On pose

$$\delta=\min\{y,\min_{x\in[y,1]}f(x)\}>0.$$

Ainsi, $f([\delta,1])=f([\delta,y])\cup f([y,1])\subset[\delta,1]$, ce qui contredit la transitivité de f. Par conséquent, il existe $x\in[0,y]$ tel que $f(x)<x$, donc $x\neq 0$ et $f([x,y])\supset[f(x),f(y)]\supset[x,y]$. Le lemme 4.1.6 permet d'affirmer que f admet un point fixe z dans $[x,y]$, donc $z\neq 0$ et $z\leq\varepsilon$. Comme ε est choisi arbitrairement petit, on en déduit qu'il existe une suite décroissante de points fixes $x_n>0$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$.

Si f est monotone sur $[x_{n+1},x_n]$, alors $f([x_{n+1},x_n])\subset[x_{n+1},x_n]$, ce qui est exclu puisque f est transitive.

iii) On suppose que 0 et 1 sont accessibles ; soit $x_0,x_1\in]0,1[$ et n_0,n_1 tels que $f^{n_0}(x_0)=0$ et $f^{n_1}(x_1)=1$. On note $m=\max\{n_0,n_1\}$. Soit $\varepsilon>0$ tel que $x_0,x_1\subset]\varepsilon,1-\varepsilon[$. Comme f est mélangeante par hypothèse, pour tout sous-intervalle non dégénéré J, il existe $N\geq 0$ tel que $\forall n\geq N$, $f^n(J)\supset]\varepsilon,1-\varepsilon[$, donc $f^{n+m}(J)$ contient 0 et 1, et par connexité $f^{n+m}(J)\supset[0,1]$.

Réciproquement, si J est un sous-intervalle ne contenant ni 0 ni 1 tel que $f^n(J) = [0,1]$ pour un entier n donné, alors par définition les points 0 et 1 sont accessibles. □

Si f est mélangeante et si 0 est un point fixe non accessible, alors f oscille au voisinage de 0. Le résultat suivant montre que ce comportement n'est pas possible si f est C^1 ou monotone par morceaux.

Proposition 4.2.11 *Soit $f: I \to I$ une transformation mélangeante de l'intervalle. Si f est monotone par morceaux ou C^1 , alors pour tout sous-intervalle non dégénéré J, il existe $n > 0$ tel que $f^n(J) = I$.*

Preuve. On suppose que $I = [0,1]$ et que 0 est une extrémité non accessible. Quitte à considérer f^2, on peut supposer que 0 est un point fixe (lemme 4.2.10 (i)).

Si f est C^1 et $f'(0) = 0$, alors $f(x) < x$ pour tout x assez petit, ce qui est impossible par transitivité, donc $f'(0) > 0$ et f est croissante au voisinage de 0. De même, si f est monotone par morceaux, elle est nécessairement croissante au voisinage de 0 puisque $f(0) = 0$. Dans les deux cas, le lemme 4.2.10 (ii) mène à une contradiction. Le cas où le point 1 est non accessible se traite de la même façon. Ainsi, f n'a pas d'extrémité non accessible et le lemme 4.2.10 (iii) permet de conclure. □

Remarque 4.2.12 La proposition 4.2.11 reste vraie si on suppose seulement que f est mélangeante et monotone au voisinage des extrémités.

Exemple 4.2.13 Nous présentons un exemple de transformation sur $[0,1]$ qui est mélangeante mais telle que pour tout sous-intervalle J ne contenant ni 0 ni 1 et pour tout entier n, $f^n(J) \neq [0,1]$; cet exemple figure dans [4].

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de points ordonnés $\cdots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ tels que $a_n \to 1$ et $a_{-n} \to 0$ quand $n \to +\infty$. On note $I_n = [a_n, a_{n+1}]$ et on définit $f_n: I_n \to I_{n-1} \cup I_n \cup I_{n+1}$ comme étant l'application affine par morceaux définie par

$$f_n(a_n) = a_n,\ f_n(a_{n+1}) = a_{n+1},\ f_n\left(\frac{2a_n + a_{n+1}}{3}\right) = a_{n+2},\ f_n\left(\frac{a_n + 2a_{n+1}}{3}\right) = a_{n-1}.$$

On définit alors $f: [0,1] \to [0,1]$ par $f(0) = 0, f(1) = 1$ et $f(x) = f_n(x)$ si $x \in I_n$ (voir figure 4.2).

On vérifie facilement que f est continue et que les points 0 et 1 ne sont pas accessibles. On montre que f est mélangeante. Comme f est de pente supérieure à 3, on peut appliquer le lemme 4.1.10 : si J est un intervalle non dégénéré, il existe $n \geq 0$ tel que $f^n(J)$ contient deux points critiques distincts, donc $f^{n+1}(J)$ contient un intervalle I_k pour un certain k. De plus, $f^m(I_k) \supset [a_{k-m}, a_{k+m+1}]$ et les longueurs de $[0, a_{k-m}]$ et $[a_{k+m+1}, 1]$ tendent vers 0, donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe m tel que $f^m(J) \supset]\varepsilon, 1-\varepsilon[$. □

On résume les résultats 4.2.2, 4.2.6, 4.2.7, 4.2.8 et 4.2.11 dans le théorème suivant.

Théorème 4.2.14 *Soit $f: [a,b] \to [a,b]$ une transformation de l'intervalle. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *f est transitive et a un point périodique de période impaire différente de 1 ;*

ii) *f^2 est transitive ;*

iii) *f est totalement transitive ;*

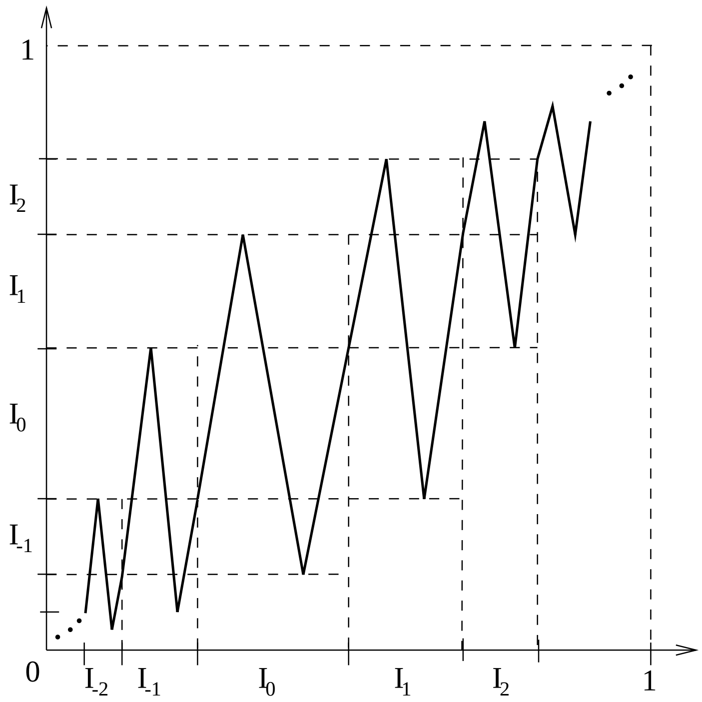


FIG. 4.2 – application mélangeante dont les extrémités sont non accessibles.

iv) *f est mélangeante ;*

v) *pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout sous-intervalle non dégénéré J, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $f^n(J) \supset [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$.*

Si f est C^1 ou monotone par morceaux, alors ce qui précède est équivalent à :

vi) *pour tout sous-intervalle non dégénéré J, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $f^n(J) = I$.*

4.3 Sensibilité aux condition initiales

Définition 4.3.1 (point instable, sensibilité) Soit X un espace métrique et $T: X \to X$ une transformation continue. Le point x est *ε-instable (au sens de Lyapounov)* si pour tout voisinage U de x, il existe $y \in U$ et $n \geq 0$ tels que $d(T^n x, T^n y) \geq \varepsilon$. On note $U_\varepsilon(T)$ l'ensemble des points ε-instables.

Le système (X, T) est *sensible aux conditions initiales* (ou plus brièvement *sensible*) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $U_\varepsilon(T) = X$, autrement dit pour tout $x \in X$ et tout voisinage U de x, il existe $y \in U$ et $n \geq 0$ tels que $d(T^n x, T^n y) \geq \varepsilon$.

Pour une transformation de l'intervalle, la transitivité implique la sensibilité aux conditions initiales. Une transformation de l'intervalle transitive est donc chaotique au sens de Devaney (c'est-à-dire qu'elle est transitive, sensible aux conditions initiales et que les points périodiques sont denses). Inversement, une transformation de l'intervalle sensible aux conditions initiales n'est pas nécessairement transitive, mais il existe néanmoins des sous-intervalles, permutés cycliquement, sur l'union desquels la transformation est transitive.

Dans [3], Barge et Martin montrent que la transitivité implique l'instabilité en tout point. Nous donnons une preuve différente, qui montre de plus que la constante d'instabilité peut être choisie uniformément pour tous les points.

Proposition 4.3.2 *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. Si f est transitive, alors elle est sensible aux conditions initiales. Plus précisément, elle est C-sensible pour toute constante $C < \frac{|I|}{4}$.*

Preuve. On pose $I = [a, b]$. On suppose d'abord que f est mélangeante. Soit $x \in I$, $\varepsilon > 0$ et U un voisinage de x. Par la proposition 4.2.2, il existe un entier n tel que $f^n(U) \supset [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Par conséquent, il existe y et z dans U tels que $f^n(y) = a + \varepsilon$ et $f^n(z) = b - \varepsilon$, de sorte que $\max\{|f^n(x)-f^n(y)|, |f^n(x)-f^n(z)|\} \geq \frac{|I|}{2} - \varepsilon$ et x est un point instable pour la constante $C = \frac{|I|}{2} - \varepsilon$.

Si maintenant f est transitive mais non mélangeante, il existe deux sous-intervalles compacts J et K recouvrant I tels que $f(J) = K, f(K) = J$ et $f^2|_J$ (resp. $f^2|_K$) est mélangeante (propositions 4.2.6 et 4.2.7). Par ce qui précède, $f^2|_J$ est C-sensible si $C < \frac{|J|}{2}$, donc f est également C-sensible. De même, f est C-sensible pour tout $C < \frac{|K|}{2}$. Comme $\max\{|J|, |K|\} \geq \frac{|I|}{2}$, f est C-sensible pour toute constante $C < \frac{|I|}{4}$. □

Remarque 4.3.3 Un système topologique transitif possédant des points périodiques denses est sensible aux conditions initiales, sauf s'il est cyclique [38, 2]. La proposition 4.3.2 n'est donc qu'un cas particulier de ce résultat puisque la transitivité sur l'intervalle entraîne la densité des points périodiques (proposition 4.2.5).

Nous montrons ensuite que l'instabilité sur un sous-intervalle implique l'existence d'une composante transitive constituée d'un nombre fini d'intervalles, c'est-à-dire que l'application est transitive sur l'union de ces intervalles. Ce résultat est dû à Blokh, il figure sans démonstration dans [16].

Lemme 4.3.4 *Soit X un espace métrique et $T: X \to X$ une transformation continue . On a les propriétés suivantes.*

i) *$T(U_\varepsilon(T)) \subset U_\varepsilon(T)$;*

ii) *si V est un ouvert et $V \cap \overline{U_\varepsilon(T)} \neq \emptyset$ alors il existe $n \geq 0$ tel que* $\operatorname{diam}(T^n V) \geq \varepsilon$ *;*

iii) *$\overline{U_\varepsilon(T)} \subset U_{\varepsilon/2}(T)$.*

Preuve.
i) Soit $x \in U_\varepsilon(T)$ et V un voisinage de x. On montre tout d'abord qu'il existe une infinité de n pour lesquels il existe $y \in V$ tel que $d(T^n x, T^n y) \geq \varepsilon$. Sinon, tous les n convenables sont inférieurs à un certain n_0. Par continuité de $T, T^2, \ldots, T^{n_0}$ en x, il existe $\delta > 0$ tel que, si $d(x,y) < \delta$, alors $d(T^k x, T^k y) < \varepsilon$ pour tout $0 \leq k \leq n_0$. Soit $W = V \cap B(x, \delta)$. En distinguant $n \leq n_0$ et $n > n_0$, on obtient que pour tout $y \in W$ et tout $n \geq 0$, $d(T^n x, T^n y) < \varepsilon$, ce qui contredit que x est ε-instable.

On considère maintenant un ouvert V contenant Tx. L'ouvert $U = T^{-1}V$ est un voisinage de x, donc il existe $y \in U$ et $n \geq 2$ tels que $d(T^n x, T^n y) \geq \varepsilon$. En posant $z = Ty \in V$, on a $d(T^{n-1}Tx, T^{n-1}z) \geq \varepsilon$, donc $Tx \in U_\varepsilon(T)$.

ii) Comme V est ouvert, il existe $x \in V \cap U_\varepsilon(T)$, donc il existe un point $y \in V$ et un entier $n \geq 0$ tels que $d(T^n x, T^n y) \geq \varepsilon$.

iii) Soit $y \in \overline{U_\varepsilon(T)}$. Si V est un ouvert contenant y, il existe $x \in U_\varepsilon(T) \cap V$. Comme $x \in U_\varepsilon(T)$, il existe $z \in V$ et $n \geq 0$ tel que $d(T^n x, T^n z) \geq \varepsilon$. Par inégalité triangulaire, on a soit $d(T^n y, T^n z) \geq \varepsilon/2$, soit $d(T^n y, T^n x) \geq \varepsilon/2$, donc $y \in U_{\varepsilon/2}(T)$. □

Proposition 4.3.5 *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble des points ε-instables $U_\varepsilon(f)$ est d'intérieur non vide. Alors il existe un entier $p \geq 1$ et des sous-intervalles fermés non dégénérés disjoints $J_1, \ldots, J_p$ tels que $f(J_i) = J_{i+1}$ pour $i = 1, \ldots, p-1$, $f(J_p) = J_1$, et f est transitive sur $J_1 \cup \cdots \cup J_p$. De plus, $J_1 \cup \cdots \cup J_p \subset \overline{U_\varepsilon(f)}$ et il existe i tel que $|J_i| \geq \varepsilon$.*

Preuve. On considère la famille d'ensembles

$$\mathcal{F} = \{Y \subset \overline{U_\varepsilon(f)} \mid Y \text{ fermé}, f(Y) \subset Y, \mathrm{Int}\,(Y) \neq \emptyset\}.$$

Comme $U_\varepsilon(f)$ est d'intérieur non vide par hypothèse, il existe un intervalle ouvert non vide J inclus dans $U_\varepsilon(f)$. Par le lemme 4.3.4 (i), $f^n(J) \subset U_\varepsilon(f)$ pour tout $n \geq 0$. Par conséquent, l'ensemble $\overline{\bigcup_{n\geq 0} f^n(J)}$ est un élément de $\mathcal{F}$, donc $\mathcal{F}$ est non vide. Soit Y un élément de $\mathcal{F}$. On décompose Y en composantes connexes et on note $(J_k)_{k\geq 1}$ les composantes non réduites à un point en les ordonnant par ordre décroissant de longueur. Soit p le nombre (fini) d'intervalles J_k de longueur supérieure à ε. Comme $J \subset U_\varepsilon(f)$, il existe $n \geq 1$ tel que $|f^n(J)| \geq \varepsilon$ (lemme 4.3.4 (ii)), donc $p \geq 1$.

On munit $\mathcal{F}$ de l'ordre partiel donné par l'inclusion. On va montrer que toute famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathcal{F}$ admet un minorant. Soit $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ totalement ordonnée (c'est-à-dire que tous les éléments de Λ sont comparables entre eux et que si $\lambda \leq \lambda'$ alors $Y_\lambda \subset Y_{\lambda'}$). On pose $Y = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$; Y est fermé, $f(Y) \subset Y$ et $Y \subset \overline{U_\varepsilon(f)}$. De plus, comme chaque Y_λ contient un nombre fini non nul de composantes connexes de longueur supérieure à ε, Y contient également un intervalle de longueur supérieure à ε, donc $\mathrm{Int}\,(Y) \neq \emptyset$ et $Y \in \mathcal{F}$. Toute famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathcal{F}$ admet un minorant, donc le lemme de Zorn s'applique et $\mathcal{F}$ admet un élément minimal Z (c'est-à-dire que tout élément de $\mathcal{F}$ inclus dans Z est égal à Z).

Nous prouvons maintenant que $f|_Z$ est transitive. On note comme précédemment $(J_k)_{k\geq 1}$ les composantes connexes non réduites à un point de Z, avec $|J_i| \geq \varepsilon$ si et seulement si $1 \leq i \leq p$ ($p \geq 1$). Pour tout $i \geq 1$, $\mathrm{Int}\,(J_i) \subset \overline{U_\varepsilon(f)}$, de sorte que le lemme 4.3.4 (ii) s'applique : il existe $n_i \geq 1$ tel que $|f^{n_i}(J_i)| \geq \varepsilon$. Par conséquent, il existe $\tau_i \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $f^{n_i}(J_i) \subset J_{\tau_i}$. On peut donc exhiber un cycle d'intervalles, c'est-à-dire qu'il existe $i \in \{1, \ldots, p\}$ et $m \geq 1$ tels que $f^m(J_i) \subset J_i$. On note $Y = \bigcup_{0\leq n\leq m} f^n(J_i)$. Il est clair que Y appartient à $\mathcal{F}$, donc $Y = Z$ par minimalité. Ainsi, Z se décompose en $Z = I_1 \cup \cdots \cup I_k$, où les I_i sont des intervalles fermés non dégénérés disjoints. Quitte à permuter l'ordre des intervalles, $f(I_i) \subset I_{i+1}$ ($1 \leq i \leq k-1$) et $f(I_k) \subset I_1$; par minimalité ces inclusions sont en fait des égalités. Supposons que $f|_Z$ n'est pas transitive, c'est-à-dire qu'il existe deux ouverts U, V tels que $U \cap Z \neq \emptyset, V \cap Z \neq \emptyset$ et $\forall n \geq 0, f^n(U \cap Z) \cap (V \cap Z) = \emptyset$. Étant donnée la structure de Z, il existe un intervalle ouvert non vide $J \subset U \cap Z$. Soit $X = \overline{\bigcup_{n\geq 0} f^n(J)}$; X appartient à $\mathcal{F}$ et $X \subset Z$, mais $X \cap V = \emptyset$ donc $X \neq Z$, ce qui contredit la minimalité de Z.

En conclusion, $f|_Z$ est transitive, $Z \subset \overline{U_\varepsilon(f)}$ et $|I_1| \geq \varepsilon$. □

Remarque 4.3.6 Pour ε donné, le nombre de cycles $J_1, \ldots, J_p$ donné par la proposition 4.3.5 est fini car deux cycles différents ont des intérieurs disjoints à cause de la transitivité et un des J_i est de longueur supérieure à ε. Par contre, il peut exister une infinité de cycles transitifs correspondant à des constantes de sensibilité tendant vers 0 (voir la figure 4.3). D'autre part, même si tous les points sont ε-instables, l'union des cycles transitifs n'est pas nécessairement dense (voir la figure 4.4).

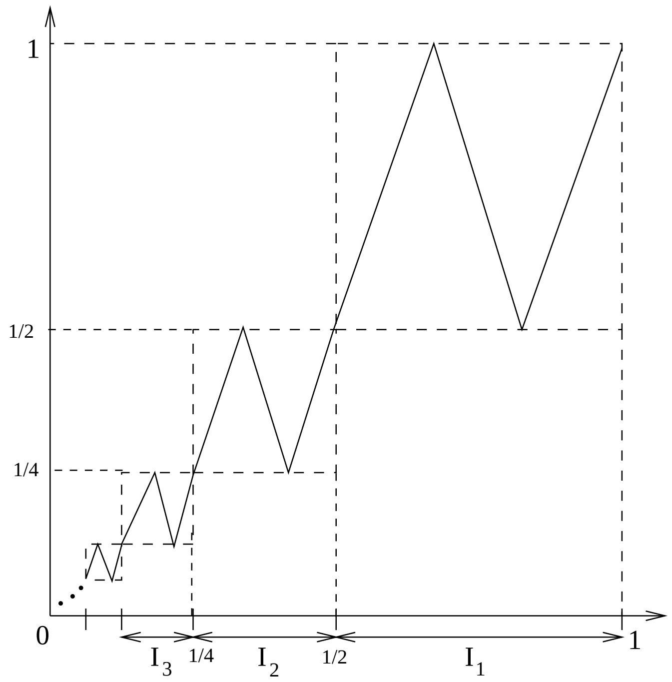


FIG. 4.3 – transformation avec une infinité de composantes transitives $I_1, I_2, \ldots$, où $I_n = \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$ est sensible avec une constante $\frac{1}{2^{n+1}}$.

4.4 Points périodiques

4.4.1 Spécification

On a vu précédemment qu'une transformation transitive de l'intervalle possède des points périodiques denses (proposition 4.2.5). Si le système est de plus mélangeant, il satisfait la propriété de spécification, ce qui signifie approximativement qu'il existe des points périodiques dont l'orbite approche des morceaux d'orbites arbitrairement choisis. Ce résultat est dû à Blokh [17] (voir [18] ou [24] pour la démonstration).

Définition 4.4.1 (spécification) Soit X un espace métrique compact et $T\colon X \to X$ une transformation continue. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier M tel que, si $x_1, \ldots, x_n$ sont des points de X et a_i, b_i sont des entiers satisfaisant $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_n \leq b_n$ et $a_i - b_{i-1} \geq M$ pour $i = 2, \ldots, n$, alors, pour tout entier $q \geq M + b_n - a_1$, il existe un point $x \in X$ satisfaisant $T^q x = x$ et $d(T^k x, T^k x_i) \leq \varepsilon$ si $1 \leq i \leq n$ et $a_i \leq k \leq b_i$. On dit alors que le système (X, T) satisfait la propriété de *spécification*.

Nous montrons tout d'abord trois lemmes puis nous démontrons la propriété de spécification pour les transformations mélangeantes de l'intervalle (théorème 4.4.5).

Lemme 4.4.2 *Soit* $f\colon [0,1] \to [0,1]$ *une transformation de l'intervalle. On considère* $y \in [0,1]$, $0 < \varepsilon < 1/2$ *et* $n \geq 0$. *Alors il existe des sous-intervalles fermés* $J_0, \ldots, J_n$ *tels que*

- $f(J_i) = J_{i+1}$ *pour* $0 \leq i \leq n-1$ *;*
- $f^i(y) \in J_i$ *et* $J_i \subset [f^i(y) - \varepsilon, f^i(y) + \varepsilon]$ *pour* $0 \leq i \leq n$ *;*
- *il existe* $0 \leq i \leq n$ *tel que l'intervalle* J_i *contient soit* $f^i(y) + \varepsilon$ *soit* $f^i(y) - \varepsilon$.

De plus, si $y + \varepsilon \in [0,1]$, on peut choisir $J_0 \subset [y, y+\varepsilon]$.

Preuve. On note $y_k = f^k(y)$ pour $k \geq 0$. On fait une récurrence sur n.
– cas $n = 0$: Comme $\varepsilon < 1/2$, l'intervalle $[0,1]$ contient soit $y+\varepsilon$ soit $y-\varepsilon$. Si $y+\varepsilon \in [0,1]$, on pose $J_0 = [y, y+\varepsilon]$, sinon on pose $J_0 = [y-\varepsilon, y]$.
– On suppose que le lemme est vrai au rang $n-1$, et on note $J_0, \ldots J_{n-1}$ les sous-intervalles obtenus. Si $f(J_{n-1}) \subset [y_n - \varepsilon, y_n + \varepsilon]$, on note $J_n = f(J_{n-1})$ et les intervalles $(J_0, \ldots, J_n)$ conviennent grâce à l'hypothèse de récurrence. Sinon, $f(J_{n-1}) = f^n(J_0) \not\subset [y_n - \varepsilon, y_n + \varepsilon]$. On se place dans le cas où $J_0 \subset [y, y+\varepsilon]$, le cas où $J_0 \subset [y-\varepsilon, y]$ étant analogue. On pose

$$x_0 = \min\{x > y \mid f^n(x) \in \{y_n - \varepsilon, y_n + \varepsilon\}\} < y + \varepsilon.$$

De cette façon, $f^n([y, x_0])$ est égal soit à $[y_n - \varepsilon, y_n]$ soit à $[y_n, y_n + \varepsilon]$. Si on pose $J'_0 = [y, x_0]$ et $J'_i = f^i(J'_0)$ pour $1 \leq i \leq n$, les intervalles $(J'_0, \ldots, J'_n)$ conviennent. Ceci termine la récurrence. □

Lemme 4.4.3 *Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ une transformation mélangeante. On suppose que 0 est un point fixe non accessible. Soit $0 < \varepsilon < 1/2$. Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $y \in [0, \alpha]$ et tout $n \geq 0$, il existe des sous-intervalles fermés non dégénérés $J_0, \ldots, J_n$ tels que*
- *$f(J_i) = J_{i+1}$ pour $0 \leq i \leq n-1$;*
- *$J_i \subset [f^i(y) - \varepsilon, f^i(y) + \varepsilon]$ pour $0 \leq i \leq n$;*
- *$J_0 \subset [\alpha, 1-\alpha]$;*
- *un des intervalles J_i est de taille supérieure à $\varepsilon/4$.*

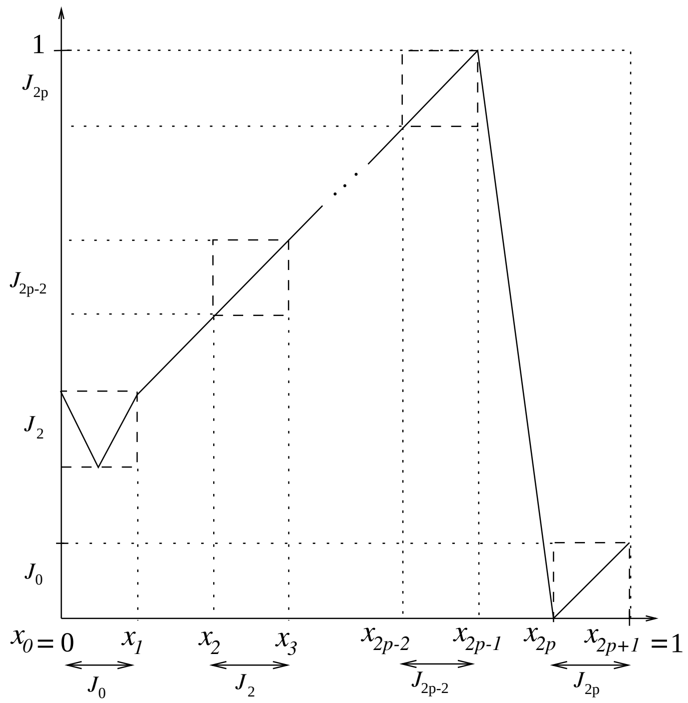


FIG. 4.4 – application ε-instable en tout point ($\varepsilon = \frac{1}{2(2p-1)}$) avec un seul cycle transitif $(K_1, \ldots, K_p)$ où $K_i = \left[\frac{2i-2}{2p-1}, \frac{2i-1}{2p-1}\right]$.

Preuve. Par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) < \varepsilon$ pour tout $x \leq \delta$. Par transitivité, $f([0,\varepsilon]) \not\subset [0,\varepsilon]$ donc il existe $x_0 \in]0,\varepsilon]$ tel que $f(x_0) \geq \varepsilon$. De plus, le lemme 4.2.10 (ii) donne l'existence d'un point fixe $\alpha > 0$ tel que $\alpha < \min\{x_0, \delta, \frac{\varepsilon}{2}\}$. L'ensemble $L = [\alpha, \varepsilon]$ satisfait alors $f(L) \supset L$.

Soit $y \in [0,\alpha]$. On note $y_k = f^k(y)$ pour $k \geq 0$. Soit $m \leq n$ le plus grand entier tel que $y_0, \ldots, y_m \in [0,\alpha]$. Pour tout $i \in \{0, \ldots, m\}$, on a $L \subset [y_i - \varepsilon, y_i + \varepsilon] \cap [\alpha, 1-\alpha]$. Par le lemme 4.1.8, il existe des sous-intervalles $J_0, \ldots, J_m$ tels que $J_m = L$ et $f(J_i) = J_{i+1}$ pour $i = 0, \ldots, m-1$. Si $m = n$, on a terminé car L est de taille supérieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. Si $m < n$, alors $y_{m+1} = f(y_m) \leq \varepsilon$ par choix de δ et $y_{m+1} \geq \alpha$ par choix de m donc $y_{m+1} \in L$. Comme $|L| \geq \frac{\varepsilon}{2}$, L contient soit $y_{m+1} - \frac{\varepsilon}{4}$ soit $y_{m+1} + \frac{\varepsilon}{4}$. Grâce au lemme 4.4.2 on construit des intervalles $J'_{m+1}, \ldots, J'_n$ avec

- $J'_{m+1} \subset L$, $f(J'_i) = J'_{i+1}$ pour $m+1 \leq i \leq n-1$;
- $J'_i \subset [y_i - \frac{\varepsilon}{4}, y_i + \frac{\varepsilon}{4}]$ et $y_i \in J'_i$ pour $m+1 \leq i \leq n$;
- il existe $m+1 \leq i \leq n$ tel que l'intervalle J'_i contient soit $y_i + \frac{\varepsilon}{4}$ soit $y_i - \frac{\varepsilon}{4}$, donc J'_i est de taille supérieure à $\frac{\varepsilon}{4}$.

On restreint les intervalles $J_0, \ldots, J_m$ en $J'_0, \ldots, J'_m$ tels que $f(J'_i) = J'_{i+1}$ pour $i = 0, \ldots, m$ (lemme 4.1.8). La suite $(J'_i)_{0 \leq i \leq n}$ satisfait alors les conditions voulues. □

Lemme 4.4.4 *Soit $f: [0,1] \to [0,1]$ une transformation de l'intervalle et I_0 un sous-intervalle de $[0,1]$. On suppose que pour tout sous-intervalle non dégénéré J il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N, f^n(J) \supset I_0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout sous-intervalle J de taille supérieure à ε et tout $n \geq M$, $f^n(J) \supset I_0$.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ et p un entier tel que $\frac{1}{p} < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $k = 0, \ldots, p-1$, on note N_k un entier tel que pour tout $n \geq N_k, f^n\left(\left]\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}\right[\right) \supset I_0$. On note $M = \max\{N_0, \ldots, N_{p-1}\}$. Soit J un sous-intervalle de taille supérieure à ε ; il contient un intervalle de la forme $\left]\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}\right[$, donc pour tout $n \geq M, f^n(J) \supset I_0$. □

Théorème 4.4.5 *Soit $f: [0,1] \to [0,1]$ une application continue mélangeante. Alors f a la propriété de spécification.*

Preuve. On remarque tout d'abord que, si f^2 a la propriété de spécification, alors f l'a aussi par continuité ; de plus, si f est mélangeante alors f^2 l'est également (propositions 4.2.6 et 4.2.7). On peut donc supposer que les points non accessibles sont des points fixes, quitte à considérer f^2 à la place de f.

Soit $0 < \varepsilon < 1/4$. Si 0 et 1 sont accessibles, on pose $I_0 = [0,1]$. Sinon, on prend le réel $\alpha > 0$ donné par le lemme 4.4.3 et on pose $I_0 = [\alpha, 1]$ ou $I_0 = [0, 1-\alpha]$ ou $I_0 = [\alpha, 1-\alpha]$ selon que 0 ou 1 ou les deux sont des points fixes non accessibles. Comme f est mélangeante et vu le choix de I_0, pour tout sous-intervalle non dégénéré J il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $f^n(J) \supset I_0$. On applique le lemme 4.4.4 et on note M l'entier donné pour $\frac{\varepsilon}{4}$, de sorte que si J est un sous-intervalle satisfaisant $|J| \geq \frac{\varepsilon}{4}$ alors pour tout $m \geq M$, $f^m(J) \supset I_0$.

Si $J_0, \ldots, J_k$ sont des intervalles satisfaisant $f(J_i) = J_{i+1}$ pour $i = 0, \ldots, k-1$ et si $|J_j| \geq \frac{\varepsilon}{4}$ pour un certain j alors

$$\forall m \geq M, \ f^m(J_k) \supset I_0, \tag{4.2}$$

car $m + k - j \geq M$ et $f^m(J_k) = f^{m+k-j}(J_j)$.

Soit $x \in [0,1]$ et $n \geq 0$. Alors il existe des sous-intervalles $J_0, \ldots, J_n$ tels que :

(4.3)
- $J_0 \subset I_0$;
- $J_i \subset [f^i(x) - \varepsilon, f^i(x) + \varepsilon]$ pour $0 \leq i \leq n$;
- $f(J_i) = J_{i+1}$ pour $0 \leq i \leq n-1$;
- il existe $0 \leq i \leq n$ tel que l'intervalle J_i est de taille supérieure à $\frac{\varepsilon}{4}$.

Pour montrer (4.3), on distingue selon que x est dans I_0 ou non. Si $x \in I_0$, alors soit $x - \varepsilon \in I_0$ soit $x + \varepsilon \in I_0$, et on obtient les sous-intervalles $J_0, \ldots, J_n$ en appliquant le lemme 4.4.2. Si 0 est non accessible et si $x \in [0, \alpha]$, alors le lemme 4.4.3 donne les sous-intervalles cherchés puisque $J_0 \subset [\alpha, 1-\alpha] \subset I_0$ et qu'un des J_i est de taille supérieure à $\frac{\varepsilon}{4}$. On a le même résultat si 1 est non accessible et $x \in [1-\alpha, 1]$.

On montre maintenant la propriété suivante par récurrence sur p :
Soit $x_1, \ldots, x_p$ des points de $[0,1]$ et $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_p \leq b_p$ des entiers vérifiant $a_{i+1} - b_i \geq M$ pour $i = 1, \ldots, p-1$. Alors il existe des intervalles fermés $J_{a_1}, \ldots, J_{b_p}$ tels que

(4.4)
- $J_{a_1} \subset I_0$;
- $f(J_i) = J_{i+1}$ *pour* $i = a_1, \ldots, b_p - 1$;
- *si* $1 \leq i \leq p$ *et* $a_i \leq k \leq b_i$, *alors* $J_k \subset [f^k(x_i) - \varepsilon, f^k(x_i) + \varepsilon]$;
- *pour tout* $m \geq M$, $f^m(J_{b_p}) \supset I_0$.

– Cas $p = 1$. On applique (4.3) avec $x = f^{a_1}(x_1)$ et $n = b_1 - a_1$; la dernière condition est obtenue grâce à l'équation (4.2).
– On suppose que la propriété est vraie au rang $p-1$ et on note $J_{a_1}, \ldots, J_{b_{p-1}}$ les intervalles correspondant. On applique (4.3) avec $x = f^{a_p}(x_p)$ et $n = b_p - a_p$ et on appelle $J'_{a_p}, \ldots, J'_{b_p}$ les intervalles obtenus. Par l'équation (4.2), $f^m(J'_{b_p}) \supset I_0$ pour tout $m \geq M$. On pose $J_i = f^{i-b_{p-1}}(J_{b_{p-1}})$ pour $b_{p-1} < i \leq a_p$. Comme $a_p - b_{b_{p-1}} \geq M$ par hypothèse, on a $J_{a_p} = f^{a_p - b_{p-1}}(J_{b_{p-1}}) \supset I_0 \supset J'_{a_p}$ par l'équation (4.2). On peut donc restreindre les intervalles $J_{a_1}, \ldots, J_{a_p - 1}$ en des intervalles $J'_{a_1}, \ldots, J'_{a_p-1}$ tels que $f(J'_i) = J'_{i+1}$ pour $a_1 \leq i \leq a_p - 1$ (lemme 4.1.8). La suite d'intervalles $J'_{a_1}, \ldots, J'_{b_p}$ vérifie alors (4.4).

Il est maintenant aisé de conclure que f satisfait la propriété de spécification. Soit $x_1, \ldots, x_p$ des points de $[0,1]$ et $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \cdots < a_p \leq b_p$ des entiers vérifiant $a_{i+1} - b_i \geq M$ pour $i = 1, \ldots, p-1$. Soit q un entier supérieur à $b_p - a_1 + M$. On construit des intervalles $J_{a_1}, \ldots, J_{b_p}$ satisfaisant (4.4). Pour tout $m \geq M$, $f^m(J_{b_p}) \supset I_0$, donc $f^q(J_{a_1}) = f^{q-b_p+a_1}(J_{b_p}) \supset I_0 \supset J_{a_1}$. Par le lemme 4.1.8, il existe un point $x \in J_{a_1}$ tel que $f^q(x) = x$. On note $y = f^{q-a_1}(x)$ de sorte que $f^{a_1}(y) = x \in J_{a_1}$. On a $f^q(y) = y$ et

$$\forall 1 \leq i \leq p, \forall a_i \leq k \leq b_i,\ f^k(y) \in J_k \subset [f^k(x_i) - \varepsilon, f^k(x_i) + \varepsilon].$$

C'est exactement la propriété de spécification. □

Remarque 4.4.6 La propriété de spécification implique le mélange topologique [29] ; il y a donc équivalence entre le mélange topologique et la propriété de spécification pour les transformations de l'intervalle.

4.4.2 Points périodiques et composantes transitives

Pour les transformations de l'intervalle, la transitivité implique la densité des points périodiques (proposition 4.2.5). La réciproque est évidemment fausse, mais on peut se poser la question suivante : si les points périodiques sont denses, existe-t-il un ensemble formé d'un ou plusieurs sous-intervalles sur lequel la transformation est transitive ? Il est nécessaire de ne considérer que les points périodiques dont la période n'est ni 1 ni 2, car l'application identité ou $f(x) = 1 - x$ sur $[0,1]$ (qui vérifie $f^2 = Id$) fournissent des contre-exemples. Si les points périodiques de périodes différentes de 1 et 2 sont denses dans l'intervalle, alors l'ensemble des points instables est d'intérieur non vide, ce qui entraîne une réponse affirmative à la question que nous nous posons. Ce résultat, sous une forme légèrement plus générale, est énoncé sans preuve dans [16] ; nous en donnons ici une démonstration.

Lemme 4.4.7 *Soit $f\colon I \to I$ une transformation de l'intervalle. Si les points périodiques sont denses dans I et si J est un intervalle fermé non dégénéré, alors l'ensemble $\bigcup_{n\geq 0} f^n(J)$ a au plus deux composantes connexes.*

Preuve. Soit J un intervalle fermé non dégénéré et $x \in J$ un point périodique ; on note p sa période. Pour tout $n \geq 0$, $x \in f^{np}(J)$ donc $\bigcup_{n\geq 0} f^n(J)$ a au plus p composantes connexes, qui sont des intervalles fermés disjoints. On les note $J_1, \ldots, J_q$ avec $J_1 < J_2 < \cdots < J_q$.

Soit $1 \leq i \leq q$; par connexité, il existe $\sigma(i) \in \{1, \ldots, q\}$ tel que $f(J_i) \subset J_{\sigma(i)}$. On note i_0 l'entier satisfaisant $J \subset J_{i_0}$. Pour tout $1 \leq i \leq q$ il existe $n \geq 0$ tel que $f^n(J) \subset J_i$, donc $\sigma^n(i_0) = i$, ce qui implique que σ est une permutation cyclique de $\{1, \ldots, q\}$.

On suppose que $q \geq 2$. On va montrer que $q = 2$. Supposons qu'il existe $1 \leq i \leq q-1$ tel que $|\sigma(i) - \sigma(i+1)| \geq 2$; on choisit k un entier strictement compris entre $\sigma(i)$ et $\sigma(i+1)$. On note a l'extrémité droite de J_i et b l'extrémité gauche de J_{i+1}. Comme J_i et J_{i+1} sont fermés et disjoints, l'ouvert $]a, b[$ est non vide. De plus, $f(a) \in J_{\sigma(i)}$ et $f(b) \in J_{\sigma(i+1)}$, ce qui implique par connexité que $f(]a,b[)$ contient J_k. Soit $V \subset]a,b[$ un intervalle ouvert non vide tel que $f(V) \subset J_k$. Pour tout $n \geq 1$, $f^n(V) \subset J_1 \cup \cdots \cup J_q$, donc $f^n(V) \cap V = \emptyset$, ce qui est impossible puisque V contient des points périodiques par hypothèse. On en déduit

$$\forall 1 \leq i \leq q-1,\ |\sigma(i) - \sigma(i+1)| = 1.$$

Si $\sigma(2) - \sigma(1) = 1$, on obtient de proche en proche que $\sigma(k) = \sigma(1) + k - 1$. Comme σ est cyclique de longueur $q \geq 2$, $\sigma(1) \geq 2$ donc $\sigma(q) \geq q+1$, ce qui est impossible. Par conséquent, $\sigma(2) - \sigma(1) = -1$ et $\sigma(q) = \sigma(1) - q + 1$. Comme $\sigma(q) \geq 1$, ceci impose $\sigma(1) = q$ et $\sigma(q) = 1$. Or σ est un cycle de longueur q, donc $q = 2$. □

La proposition suivante établit que, si les points périodiques de périodes différentes de 1 et 2 sont denses dans l'intervalle, alors tous les points sont instables, sauf peut-être les points de période 1 ou 2 .

Proposition 4.4.8 *Soit $f\colon I \to I$ une transformation de l'intervalle. Si les points périodiques de périodes différentes de 1 et 2 sont denses dans I, alors tout point x tel que $f^2(x) \neq x$ est instable, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ dépendant de x tel que x soit ε-instable.*

Preuve. Si U est un intervalle ouvert non vide, l'ensemble $\left(\overline{U}\right)_f = \bigcup_{n\geq 0} f^n(\overline{U})$ a une ou deux composantes connexes par le lemme 4.4.7. Soit x un point tel que $f^2(x) \neq x$. S'il existe un intervalle ouvert U_0 contenant x tel que $\left(\overline{U_0}\right)_f$ a deux composantes connexes, on note J_1 et J_2 ses deux composantes connexes avec $\overline{U_0} \subset J_1$ et on pose $g = f^2$. On a nécessairement $f(J_1) \subset J_2$ et $f(J_2) \subset J_1$. Si U est un intervalle ouvert inclus dans U_0, alors $\overline{U} \subset J_1$, $f(\overline{U}) \subset J_2$ et $\left(\overline{U}\right)_f \subset J_1 \cup J_2$, de sorte que $\left(\overline{U}\right)_f$ a également deux composantes connexes. Inversement, si $\left(\overline{U}\right)_f$ est connexe pour tout intervalle ouvert U contenant x, on pose $g = f$ et $U_0 = I$. De cette façon, $\left(\overline{U}\right)_g$ est connexe pour tout intervalle ouvert $U \subset U_0$ contenant x.

On note $x_n = g^n(x)$ pour tout $n \geq 0$, $a = \inf_{n\geq 0} x_n$ et $b = \sup_{n\geq 0} x_n$. Comme $g(x) \neq x$, les points a et b sont distincts. Supposons qu'il existe un intervalle ouvert non vide $J \subset]a, b[$ qui ne contient aucun des points $\{x_n \mid n \geq 0\}$. On note z le milieu de J et $\varepsilon = \frac{|J|}{2}$. Soit $U \subset U_0$ un intervalle ouvert contenant x. L'ensemble $\left(\overline{U}\right)_g$ est connexe et contient les points $\{x_n \mid n \geq 0\}$ donc $\left(\overline{U}\right)_g \supset]a, b[\supset J$. En particulier, il existe $y \in \overline{U}$ et $n \geq 0$ tel que $g^n(y) = z$. On a

$$|g^n(x) - g^n(y)| \geq \inf_{k\geq 0} |x_k - z| \geq \varepsilon,$$

donc le point x est ε-instable.

Supposons maintenant que les points x_n sont denses dans $[a, b]$ Comme de plus $g(x_n) = x_{n+1}$, on obtient que $g([a, b]) \subset [a, b]$. De plus, $g|_{[a,b]}$ est transitive car l'orbite de x est dense dans $[a, b]$. Par la proposition 4.3.2, l'application $g|_{[a,b]}$ est ε-sensible pour $0 < \varepsilon < \frac{|b-a|}{4}$; en particulier le point x est ε-instable. □

Nous déduisons de la proposition 4.4.8 qu'il existe au moins une composante transitive formée d'un ou deux sous-intervalles.

Proposition 4.4.9 *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. On suppose que les points périodiques de périodes différentes de 1 et 2 sont denses dans I. Alors soit il existe un sous-intervalle fermé non dégénéré $J \subset I$ tel que $f(J) = J$ et $f|_J$ est transitive, soit il existe deux sous-intervalles fermés disjoints non dégénérés J_1, J_2 tels que $f(J_1) = J_2, f(J_2) = J_1$ et $f|_{J_1\cup J_2}$ est transitive.*

Preuve. On pose $P_2 = \{x \in I \mid f^2(x) = x\}$. Par hypothèse P_2 est d'intérieur vide. Par la proposition 4.4.8, tous les points hors de P_2 sont instables, donc $I = P_2 \cup \bigcup_{n\geq 1} U_{\frac{1}{n}}(f)$, d'où

$$I = P_2 \cup \bigcup_{n\geq 1} \overline{U_{\frac{1}{n}}(f)}.$$

Selon le théorème de Baire, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\overline{U_{\frac{1}{n}}(f)}$ soit d'intérieur non vide. Or $\overline{U_{\frac{1}{n}}(f)} \subset U_{\frac{1}{2n}}(f)$ par le lemme 4.3.4 (iii), donc $\mathrm{Int}\left(U_{\frac{1}{2n}}(f)\right) \neq \emptyset$. En appliquant la proposition 4.3.5, on trouve des intervalles fermés disjoints non dégénérés $J_1, \ldots, J_p$ tels que $f(J_i) = J_{i+1}$ pour $i = 1, \ldots, p-1$, $f(J_p) = J_1$ et $f|_{J_1\cup\cdots\cup J_p}$ est transitive. En fait, $p = 1$ ou 2 par le lemme 4.4.7. □

Le corollaire suivant établit que les composantes transitives données par la proposition 4.4.9 sont denses dans l'intervalle. On obtient alors une décomposition du système illustrée par la figure 4.5.

Corollaire 4.4.10 *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. Supposons que les points périodiques de périodes différentes de 1 et 2 sont denses dans I. Alors l'intervalle I se décompose en composantes transitives C_n de la façon suivante :*

- *$f|_{C_n}$ est transitive ;*
- *C_n est un intervalle fermé non dégénéré ou C_n est l'union de deux intervalles fermés non dégénérés disjoints ;*
- *le complémentaire de $\bigcup_n C_n$ est inclus dans $P_2 = \{x \in I \mid f^2(x) = x\}$; en particulier $\bigcup_n C_n$ est dense dans I.*

De plus, les composantes transitives C_n sont en nombre fini ou dénombrable et leurs intérieurs sont deux à deux disjoints.

Preuve. Dans la suite, on appelle *composante transitive* (de f) un ensemble C formé d'une union d'intervalles fermés non dégénérés disjoints et tel que $f|_C$ est transitive.

On note X_0 la réunion des composantes transitives de f. On veut montrer que X_0 est dense dans I. Pour cela, on suppose le contraire, autrement dit l'ouvert $Y = I \setminus \overline{X_0}$ est non vide. Soit J une composante connexe de Y. Si l'ensemble $f(J) \cap \mathrm{Int}\,(X_0)$ est non vide, il contient un sous-intervalle non dégénéré car X_0 est une union d'intervalles non dégénérés ; par conséquent il existe un sous-intervalle non dégénéré $J_0 \subset J$ tel que $f(J_0) \subset X_0$, de sorte que $f^n(J_0) \cap J_0 = \emptyset$ pour tout $n \geq 1$. Mais ceci est exclu car J_0 contient des points périodiques par hypothèse. On en déduit que

$$f(J) \subset I \setminus \mathrm{Int}\,(X_0) = \overline{I \setminus X_0} = \overline{Y}.$$

Ainsi, $f(Y) \subset \overline{Y}$, et par continuité

$$f(\overline{Y}) \subset \overline{Y}. \tag{4.5}$$

Soit K une composante connexe de $\overline{Y}$ qui n'est pas réduite à un point. Comme les points périodiques sont denses, il existe $n \geq 1$ tel que $f^n(K) \cap K \neq \emptyset$. De plus, en utilisant l'équation (4.5) et la connexité, on voit que $f^n(K)$ est inclus dans une composante connexe de $\overline{Y}$, donc $f(K) \subset K$. On considère la transformation de l'intervalle

$$g = f^n|_K \colon K \to K.$$

Par la proposition 4.4.8, tous les points de $K \setminus P_2$ sont instables pour f ; par continuité ils sont également instables pour g. De même que dans la preuve de la proposition 4.4.9, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $U_\varepsilon(g)$ est d'intérieur non vide. En appliquant la proposition 4.3.5, on obtient l'existence d'une composante transitive C pour g. L'ensemble $C' = C \cup f(C) \cup \cdots \cup f^{n-1}(C)$ est une composante transitive pour f ; de plus, $C' \subset \overline{Y} = I \setminus \mathrm{Int}\,(X_0)$ et C' est d'intérieur non vide donc C' n'est pas inclus dans X_0, ce qui contredit la définition de X_0. On en conclut que X_0 est dense dans I.

Si C et C' sont deux composantes transitives telles que $V = \mathrm{Int}\,(C) \cap \mathrm{Int}\,(C')$ soit non vide, alors par transitivité

$$\overline{\bigcup_{n \geq 0} f^n(V)} = C = C'.$$

Les composantes transitives sont au plus dénombrables car leurs intérieurs sont non vides et disjoints. Par ailleurs, une composante transitive C est composée d'un ou deux intervalles fermés non dégénérés disjoints par le lemme 4.4.7 ; en particulier,

$$\text{si } J \text{ est une composante connexe de } C, \text{ alors } f^2(J) \subset J. \tag{4.6}$$

On montre maintenant que $I \setminus X_0 \subset P_2$. Si $x \notin X_0$, il existe une suite monotone $x_n \to x$ avec $x_n \in X_0$. Soit J_n la composante connexe de la composante transitive contenant x_n. Si la suite $(J_n)_{n \geq 0}$ est constante à partir du rang n_0, alors $x = \lim_{n \to +\infty} x_n$ appartient à J_{n_0}, qui est fermé, donc $x \in X_0$, ce qui est exclu. Par conséquent, $|J_n| \to 0$. On fixe $\varepsilon > 0$. Par continuité de f^2, il existe $0 < \alpha < \varepsilon$ tel que $|f^2(y) - f^2(z)| < \varepsilon$ dès que $|y - z| < \alpha$. Soit n tel que $|x - x_n| < \alpha$ et $|J_n| < \varepsilon$. On a $|x - f^2(x)| \leq |x - x_n| + |x_n - f^2(x_n)| + |f^2(x_n) - f^2(x)| < 3\varepsilon$ car $f^2(x_n) \in J_n$ par l'équation (4.6). En passant à la limite, on trouve $f^2(x) = x$, donc $I \setminus X_0 \subset P_2$. $\square$

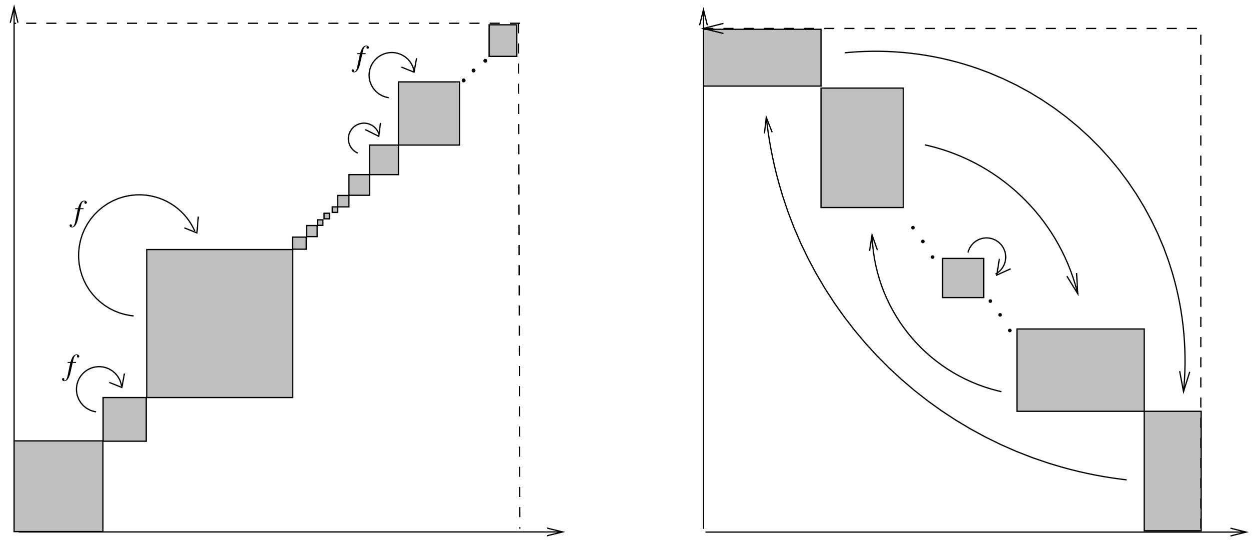


FIG. 4.5 – Décomposition en composantes transitives d'une application f dont les points périodiques de périodes différentes de 1 et 2 sont denses (deux cas). Le graphe de f est inclus dans les zones grisées, qui symbolisent les composantes transitives. Les points où s'accumulent des composantes transitives de chaque côté ne sont pas instables.

4.4.3 Le théorème de Sharkovskii

Le théorème de Sharkovskii établit que la présence d'un point périodique de période donnée entraîne l'existence d'autres périodes ; ces périodes sont déterminées à partir de la période initiale à l'aide de *l'ordre de Sharkovskii.* La preuve originelle de ce résultat, en russe, se trouve dans [77, 78] ; la preuve que nous présentons dérive de celle figurant dans [13]. Avant de démontrer ce théorème, nous donnons d'abord plusieurs lemmes.

Si $a \neq b$, on note $\langle a, b\rangle = [a, b]$ ou $[b, a]$ selon que $a < b$ ou $b < a$.

Définition 4.4.11 Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. On considère un point périodique x de période n et on note $x_1 < \ldots < x_n$ les points $\{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$. On pose $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ pour $1 \leq j \leq n-1$ et on écrit $I_j \to I_k$ si $I_k \subset \langle f(x_j), f(x_{j+1})\rangle$. On obtient un graphe orienté qui est appelé le *graphe de l'orbite périodique de x.*

Dans ce graphe, un cycle est dit *primitif* si ce n'est pas un cycle plus court parcouru plusieurs fois. Un cycle $J_0 \to J_1 \to \ldots \to J_{n-1} \to J_0$ est dit *fondamental* si J_0 a une extrémité c telle que $f^k(c)$ est une extrémité de J_k pour tout $0 \leq k \leq n-1$.

Lemme 4.4.12 *Dans le graphe d'une orbite périodique, il existe un unique cycle fondamental. Dans ce cycle, chaque sommet du graphe apparaît au plus deux fois, et l'un d'eux apparaît exactement deux fois. On peut décomposer le cycle fondamental en deux cycles primitifs plus courts.*

Preuve. On considère une orbite périodique de période n composée des point $x_1 < \cdots < x_n$ et on note $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ les sommets du graphe de cette orbite périodique. On pose $c = x_1$ et $J_0 = I_1$, et on construit par récurrence une suite d'intervalles $(J_k)_{k\geq 0}$ telle que $f^k(c)$ est une extrémité de J_k et $J_k \to J_{k+1}$ pour tout $k \geq 0$:
Si $J_{k-1} = [a,b]$ est déjà construit, alors soit $a = f^{k-1}(c)$ soit $b = f^{k-1}(c)$. L'intervalle J_k doit vérifier $J_k \subset \langle f(a), f(b)\rangle$ et $f^k(c)$ est une extrémité de J_k, ce qui détermine uniquement J_k.

Comme $f^n(x_1) = x_1 < x_i$ pour $2 \leq i \leq n$, on a nécessairement $J_n = J_0$, donc $J_0 \to J_1 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_0$ est un cycle fondamental.

Soit $K_0 \to K_1 \to \cdots \to K_n = K_0$ un cycle fondamental et d le point tel que $f^j(d)$ est une extrémité de K_j pour $0 \leq j \leq n-1$. Il existe k tel que $d = f^k(x_1)$; ainsi $f^{n-k}(d) = f^n(x_1) = x_1$ est une extrémité de K_{n-k}, donc $K_{n-k} = J_0$. Ceci implique que

$$(K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}, K_0) = (J_k, J_{k+1}, \ldots, J_{n-1}, J_0, \ldots, J_k),$$

c'est-à-dire que le cycle fondamental exhibé précédemment est unique.

Si on fixe I_k un sommet du graphe ($1 \leq k \leq n-1$), il existe $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$ distincts tels que $I_k = [f^i(x_1), f^j(x_1)]$, donc seuls J_i et J_j peuvent valoir I_k, de sorte que tout sommet apparaît au plus deux fois dans le cycle $J_0 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_0$. Comme il n'y a que $n-1$ sommets dans le graphe, l'un d'eux apparaît au moins deux fois puisque le cycle fondamental est de longueur n. Les deux cycles obtenus en coupant le cycle fondamental au niveau d'un sommet I_k apparaissant deux fois sont primitifs car ils ne contiennent qu'une seule fois I_k. □

Lemme 4.4.13 *Soit $f\colon I \to I$ une transformation de l'intervalle. Si le graphe associé à une orbite périodique contient un cycle primitif $J_0 \to J_1 \to \cdots \to J_{m-1} \to J_0$ de longueur m, alors f a un point périodique y de période m, avec $f^k(y) \in J_k$ pour $0 \leq k \leq m-1$.*

Preuve. Par le lemme 4.1.8, il existe y tel que $f^m(y) = y$ et $f^k(y) \in J_k$ pour $0 \leq k \leq m-1$. Comme le cycle est primitif, y est de période m sauf éventuellement si y est une des extrémités de J_0 ; on note n la période de y, elle divise m. Étant donné J_{k-1}, l'intervalle J_k est entièrement déterminé par les propriétés $(J_{k-1} \to J_k)$ et $(f^k(y) \in J_k)$, donc le cycle $J_0 \to J_1 \to \cdots \to J_{m-1} \to J_0$ (qui est primitif) est égal au cycle fondamental de l'orbite de y, ce qui implique que $n = m$. □

Lemme 4.4.14 *Soit $f\colon I \to I$ une transformation de l'intervalle.*

i) *Si x est un point périodique de période n pour f, alors x est de période $\frac{n}{d}$ pour f^k, où $d = \mathrm{pgcd}(n,k)$.*

ii) *Si x est un point périodique de période m pour f^k, alors il existe d tel que x est de période $m\frac{k}{d}$ pour f, où d divise k et $\mathrm{pgcd}(m,d) = 1$.*

Preuve.
i) Soit $k' = \frac{k}{d}$. Alors $f^{k\frac{n}{d}}(x) = f^{nk'}(x) = x$. De plus, si $f^{km}(x) = x$, alors on peut écrire $km = pn$ pour un certain entier p, donc $m = \frac{pn}{k} = \frac{pn}{k'd}$. Comme $\mathrm{pgcd}(n, k') = 1$, il faut que $\frac{p}{k'}$ soit entier et m est un multiple de $\frac{n}{d}$.

ii) Soit x un point périodique de période m pour f^k, et n la période de x pour f. n divise km donc on peut écrire $km = dn$ pour un certain entier d. Si $p = \mathrm{pgcd}(m,d) \neq 1$, on a $k\frac{m}{p} = \frac{d}{p}n$ et x est de période au plus $\frac{m}{p} < m$ pour f^k, ce qui est exclu, donc $\mathrm{pgcd}(m,d) = 1$ et $n = \frac{k}{d}m$, et d divise nécessairement k. □

Lemme 4.4.15 *On considère $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle possédant un point périodique de période impaire différente de 1. Soit x un point périodique de période n, où $n > 1$ est la plus petite période impaire possible. On note c le point médian de l'orbite de x. Si $c < f(c)$, alors les points sont dans l'ordre suivant :*

$$f^{n-1}(c) < f^{n-3}(c) < \cdots < f^2(c) < c < f(c) < \cdots < f^{n-2}(c).$$

De plus, le graphe associé à cette orbite périodique est celui représenté en figure 4.6. Si $c > f(c)$, on a l'ordre inverse.

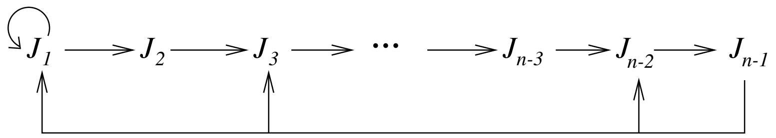


FIG. 4.6 – graphe d'une orbite périodique de période $n > 1$ impaire minimale.

Preuve. On considère le graphe associé à l'orbite périodique de x. Par le lemme 4.4.12 le cycle fondamental de x se décompose en deux cycles primitifs dont un est nécessairement de longueur impaire; en appliquant le lemme 4.4.13 cette longueur est 1 par choix de n. Le cycle fondamental s'écrit donc $J_1 \to J_1 \to J_2 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_1$, avec $J_i \neq J_1$ si $2 \leq i \leq n-1$ car un intervalle apparaît au plus deux fois (lemme 4.4.12). Si $J_i = J_j$ pour $2 \leq i < j \leq n-1$, les cycles

$$J_1 \to J_2 \to \cdots \to J_i = J_j \to J_{j+1} \to \cdots \to J_{n-1} \to J_1$$

et

$$J_1 \to J_1 \to J_2 \to \cdots \to J_i = J_j \to J_{j+1} \to \cdots \to J_{n-1} \to J_1$$

sont de longueurs respectives $n+i-j-1$ et $n+i-j$. Une de ces longueurs est impaire et elle est strictement comprise entre 2 et n. En appliquant le lemme 4.4.13, on obtient une contradiction avec le choix de n. Donc $(J_1, \ldots, J_{n-1})$ est une permutation des $n-1$ sommets du graphe. De même, si $J_i \to J_k$ avec $1 \leq i, k \leq n-1$ et $k > i+1$, ou si $J_i \to J_1$ avec $2 \leq i \leq n-2$, on obtient un cycle primitif de longueur impaire (en ajoutant ou non la boucle $J_1 \to J_1$) strictement comprise entre 2 et n, d'où une contradiction par le lemme 4.4.13.

On note $x_1 < \cdots < x_n$ les points de l'orbite de x et $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ pour $1 \leq j \leq n-1$. Soit k tel que $J_1 = I_k$. Le sommet J_1 n'est dirigé que sur J_1 et J_2, donc J_1 et J_2 sont adjacents. Comme $f(x_j) \neq x_j$ ($1 \leq j \leq n$), on a les deux possibilités suivantes :

- si $J_2 = I_{k-1}$ alors $x_{k+1} = f(x_k)$ et $x_{k-1} = f^2(x_k)$;
- si $J_2 = I_{k+1}$ alors $x_k = f(x_{k+1})$ et $x_{k+2} = f^2(x_{k+1})$.

On ne regarde que le premier cas, le deuxième se traite de façon symétrique et aboutit à l'ordre inverse. On note $c = x_k$. Si $n = 3$, on a terminé. Si $n > 3$, on a $f^3(c) > f^2(c)$, sinon on aurait $J_2 \to J_1$. Si $k > 3$, $J_2 \not\to J_k$ donc $f^3(c) = x_{k+2}$ et $J_3 = [f(c), f^3(c)] = I_{k+1}$. De même, $f^4(c) < f^2(c)$, sinon $f^4(c) > f^3(c) = x_{k+2}$ et $J_3 \to J_1$, ce qui est exclu. Si $k > 4$, $J_3 \not\to J_k$, donc $f^4(c) = x_{k-2}$ et $J_4 = [f^4(c), f^2(c)] = I_{k-2}$. En continuant ainsi, on trouve que les points sont ordonnés comme suit :

$$f^{n-1}(c) < f^{n-3}(c) < \cdots < f^2(c) < c < f(c) < \cdots < f^{n-2}(c).$$

Le point c est le point médian de l'orbite; on est dans le cas $c < f(c)$. L'ordre de ces points permet de vérifier que le graphe de l'orbite périodique est celui donné en figure 4.6. $\square$

Lemme 4.4.16 *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. Si f a un point périodique de période impaire $n > 1$, alors f a des points périodiques de période m pour tout m pair et pour tout $m \geq n$ impair.*

Preuve. On montre le résultat pour n étant la plus petite période impaire différente de 1. On considère le graphe associé à un point périodique de période n et on adopte les notations de la figure 4.6. Soit m un entier pair tel que $2 \leq m < n$. Le cycle

$$J_{n-m} \to J_{n-m+1} \to \cdots \to J_{n-1} \to J_{n-m}$$

est un cycle primitif de longueur m. Par ailleurs, en ajoutant des boucles $J_1 \to J_1$ à la fin du cycle fondamental, on obtient des cycles primitifs de longueur m pour $m \geq n$ arbitraire. Le lemme 4.4.13 prouve alors l'existence de points périodiques de période m pour tout m pair et tout $m \geq n$ impair. □

Théorème 4.4.17 (Sharkovskii) *On considère l'ordre suivant :*

$$3 \lhd 5 \lhd 7 \lhd 9 \lhd \cdots \lhd 2 \cdot 3 \lhd 2 \cdot 5 \lhd \cdots \lhd 2^2 3 \lhd 2^2 5 \lhd \cdots \lhd 2^3 \lhd 2^2 \lhd 2 \lhd 1$$

Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. Si f a un point périodique de période n, alors f a des points périodiques de période m pour tout $m \rhd n$.

Preuve. Si f a un point périodique de période $n > 1$ impaire, il suffit d'appliquer le lemme 4.4.16.

On traite le cas général en commençant par l'existence de points périodiques de période $m = 1$ ou 2. Par le lemme 4.1.6, l'application f a un point fixe. De plus, si f a un point périodique de période $n > 1$, f a un point de période 2. En effet, soit n la plus petite période différente de 1, et supposons $n \geq 3$. Par le lemme 4.4.12 le cycle fondamental de ce point périodique, qui est de longueur n, se décompose en deux cycles primitifs plus courts, un des deux est donc de longueur m avec $2 \leq m < n$. Par le lemme 4.4.13, f a un point périodique de période m, ce qui est une contradiction.

On suppose que f a un point périodique x de période $n = 2^d q$, où q est un entier impair. On veut montrer que f a un point périodique de période m si $m \rhd n$. On traite trois cas.

i) Cas $q = 1$ et $m = 2^e$ avec $0 < e < d$. On pose $g = f^{m/2}$. Par le lemme 4.4.14, le point x est de période $2^{d-e+1} > 1$ pour g, donc g a un point périodique de période 2 par ce qui précède. En appliquant de nouveau le lemme 4.4.14, f a un point périodique de période $m = 2^e$.

ii) Cas $q > 1$ et $m = 2^d r$ avec r pair. On pose $g = f^{2^d}$. Le point x est de période q (impaire) pour g, donc g possède un point périodique y de période r par le lemme 4.4.16. En appliquant le lemme 4.4.14, on voit que y est de période $m = 2^d r$ pour f.

iii) Cas $q > 1$ et $m = 2^d r$ avec $r > q$ impair. De même qu'au point (ii), on pose $g = f^{2^d}$. Le point x est de période q (impaire) pour g, donc g possède un point périodique y de période r par le lemme 4.4.16. Par le lemme 4.4.14, il existe $e \leq d$ tel que y est de période $2^e r$ pour f. Si $e = d$, on a terminé. Si $e < d$, on pose $r' = 2^{d-e} r$. Ainsi, f a un point périodique de période $2^e r$ avec r impair et l'entier m s'écrit $m = 2^e r'$, avec r' pair. En appliquant le cas (ii), on trouve que f a un point périodique de période m.

Ceci termine la preuve du théorème. □

Remarque 4.4.18 Une transformation de l'intervalle est dite *de type* n avec n un entier si les périodes des points périodiques sont exactement les entiers m vérifiant $m \trianglerighteq n$. Dans [82], Štefan construit des transformations de l'intervalle de type n pour tout entier n. Il existe également des transformations de type 2^∞, c'est-à-dire que l'ensemble des périodes est exactement $\{2^n \mid n \geq 0\}$ [28].

4.5 Entropie topologique

L'entropie topologique d'un système dynamique topologique est définie dans la section 1.3.1.

4.5.1 Fer à cheval, turbulence

Une façon de minorer l'entropie topologique consiste à exhiber un fer à cheval, c'est-à-dire une union d'intervalles d'intérieurs disjoints qui est recouverte par l'image de chacun des intervalles [13].

Définition 4.5.1 Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. Si $J_1, \ldots, J_p$ sont des sous-intervalles compacts non dégénérés d'intérieur disjoints tels que $J_1 \cup \cdots \cup J_p \subset f(J_i)$ pour $i = 1, \ldots, p$, on dit que $(J_1, \ldots, J_p)$ est un *p-fer à cheval* pour f.

Proposition 4.5.2 *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. Si f a un p-fer à cheval, alors $h_{top}(I, f) \geq \log p$.*

Preuve. Soit $J_1, \ldots, J_p$ les intervalles compacts d'intérieur disjoints donnés par la définition de p-fer à cheval. On commence par supposer que les intervalles $J_1, \ldots, J_p$ sont disjoints. Dans ce cas, il existe des intervalles ouverts disjoints $U_1, \ldots, U_p$ avec $J_i \subset U_i$ pour $i = 1, \ldots, p$. Soit $U_{p+1} = I \setminus \bigcup_{i=1}^p J_i$. Alors $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_{p+1}\}$ est un recouvrement ouvert de I et $U_{p+1} \cap J_i = \emptyset$ pour $i = 1, \ldots, p$. On définit $J_{i_0,\ldots,i_{n-1}} = \{x \in I \mid f^k(x) \in J_{i_k}, 0 \leq k \leq n-1\}$ pour tout n-uplet $(i_0, \ldots, i_{n-1})$ d'éléments de $\{1, \ldots, p\}$. Comme $(J_1, \ldots, J_p)$ est un p-fer à cheval, l'ensemble $J_{i_0,\ldots,i_{n-1}}$ est non vide par le lemme 4.1.8. De plus, il est contenu dans un unique élément de $\mathcal{U} \vee f^{-1}\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\mathcal{U}$, qui est $U_{i_0} \cap f^{-1}U_{i_2} \cap \cdots \cap f^{-(n-1)}U_{i_{n-1}}$. Par conséquent, $N_n(\mathcal{U}, f) \geq p^n$, donc

$$h_{top}(I, f) \geq h_{top}(\mathcal{U}, f) \geq \frac{\log N_n(\mathcal{U}, f)}{n} \geq \log p.$$

On montre maintenant la proposition dans le cas général (les intervalles $J_1, \ldots, J_p$ peuvent avoir des extrémités communes). Soit $n \geq 1$. En appliquant le lemme 4.1.8 à toutes les chaînes d'intervalles $(J_{i_1}, \ldots, J_{i_n})$ pour i_k variant dans $\{1, \ldots, p\}$, on montre que f^n possède un p^n-fer à cheval. Si on numérote les p^n intervalles de ce fer à cheval selon leur ordre sur I et qu'on considère uniquement les intervalles de numéro impair, on obtient un $\left\lceil \frac{p^n}{2} \right\rceil$-fer à cheval dont les intervalles sont disjoints. Ainsi, on peut appliquer le premier point de la démonstration à f^n, et $h_{top}(I, f^n) \geq \log\left(\frac{p^n}{2}\right)$. Comme $h_{top}(I, f) = \frac{1}{n} h_{top}(I, f^n)$ (propositon 1.3.1), on obtient à la limite $h_{top}(I, f) \geq \log p$. □

L'existence de fers à cheval est essentielle pour obtenir de l'entropie : le résultat suivant, dû à Misiurewicz [58], est en quelque sorte une réciproque de la proposition 4.5.2 (voir [59] ou [15] pour la preuve).

Théorème 4.5.3 (Misiurewicz) *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. Pour tout λ satisfaisant $0 < \lambda < h_{top}(I, f)$ et tout entier N il existe des intervalles fermés disjoints $J_1, \ldots, J_p$ et un entier $n \geq N$ tels que $(J_1, \ldots, J_p)$ est un p-fer à cheval pour f^n et $\frac{\log p}{n} \geq \lambda$.*

Une application *turbulente* est une application possédant un 2-fer à cheval. Cette terminologie est due à Lasota et Yorke [55]. Non seulement son entropie est supérieure à $\log 2$, mais elle est également de type 3 pour l'ordre de Sharkovskii [14].

Définition 4.5.4 (turbulence) Soit $f\colon I \to I$ une transformation de l'intervalle. On dit que f est *turbulente* si elle possède un 2-fer à cheval et *strictement turbulente* si de plus les deux intervalles du fer à cheval sont disjoints.

Proposition 4.5.5 *Soit $f\colon I \to I$ une transformation de l'intervalle. Si f est turbulente, alors elle possède des points de toutes les périodes.*

Preuve. Soit J et K deux intervalles formant un 2-fer à cheval pour f. On suppose tout d'abord que J et K sont disjoints. Soit $n \geq 1$. Si on applique le lemme 4.1.8 à la chaîne d'intervalles $(I_0, \ldots, I_n)$ avec $I_i = K$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $I_0 = I_n = J$, on obtient un point x dans J tel que $f^n(x) = x$ et $f^k(x) \in K$ pour $k = 1, \ldots, n-1$, donc la période de x est exactement n.

On suppose maintenant que les deux intervalles ont un point commun b et que J est à gauche de K ; on note $J = [a, b]$ et $K = [b, c]$. Si b est un point fixe, on définit

$$d = \min\{x \geq b \mid f(x) \in \{a, c\}\} > b.$$

De cette façon, $f([b, d[)$ ne contient ni a ni c ; or $f([b, c])$ contient $[a, c]$ donc $f([d, c])$ contient a et c, et par connexité $[a, c] \subset f([d, c])$. On pose $K' = [d, c]$, et ainsi (J, K') forme un 2-fer à cheval avec des intervalles disjoints, de sorte qu'on se ramène au cas précédent. On suppose maintenant que b n'est pas un point fixe. Par le lemme 4.1.8 appliqué à (J, K, K, J), il existe un point x tel que $f^3(x) = x$, avec $x \in J, f(x) \in K$ et $f^2(x) \in K$. Le point x est de période p divisant 3, donc p vaut 1 ou 3. Si $p = 1$, alors $x \in J \cap K = \{b\}$, ce qui est exclu. Donc f a un point de période 3 et, grâce au théorème 4.4.17, elle a des points de toutes les périodes. $\square$

Une transformation ayant un point périodique de période 3 n'est pas nécessairement turbulente. L'exemple 4.5.12 avec $\delta = 1/4$ donne un exemple de transformation d'entropie strictement inférieure à $\log 2$ et pour laquelle le point 0 est périodique de période 3. Cependant Block et Coppel ont montré que, si f possède un point périodique de période impaire différente de 1, alors f^2 est turbulente [14].

Proposition 4.5.6 *Soit $f\colon I \to I$ une transformation de l'intervalle. Si f a un point périodique de période impaire différente de 1, alors f^2 est strictement turbulente. De plus, les deux intervalles du fer à cheval peuvent être choisis de façon à ne pas contenir les extrémités de I.*

Preuve. On choisit $n > 1$ impair minimal tel que f a un point périodique de période n. Selon le lemme 4.4.15, il existe un point périodique x de période n dont l'orbite $\{x_i = f^i(x), 0 \leq i \leq n-1\}$ est dans l'ordre suivant

$$x_{n-1} < x_{n-3} < \cdots < x_2 < x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-2}$$

ou dans l'ordre inverse. On suppose que c'est l'ordre ci-dessus.

L'intervalle $f([x_0, x_1])$ contient $[x_2, x_0]$, donc il existe d tel que $x_0 < d < x_1$ et $f(d) = x_0$, de sorte que $d < f^2(d) = x_1$. Comme $f^2([x_{n-1}, x_{n-3}]) \supset [x_{n-1}, x_1]$, il existe un point a dans $]x_{n-1}, x_{n-3}[$ tel que $f^2(a) > d$. On a également $f^2([a, x_{n-3}]) \supset [x_{n-1}, d]$, donc il existe un point $b \in]a, x_{n-3}[$ tel que $f^2(b) < a$. De même, comme $f^2([x_{n-3}, d]) \supset [x_{n-1}, d]$, on peut choisir $x \in]x_{n-3}, d[$ tel que $f^2(x) < a$.On pose alors $J = [a, b]$ et $K = [c, d]$, d'où $f^2(J) \cap f^2(K) \supset J \cup K$. Comme $x_{n-1} < a$ et $d < x_1$, les intervalles J et K ne contiennent pas les extrémités de I. $\square$

Une transformation de l'intervalle possédant un point périodique dont la période n'est pas une puissance de 2 est parfois appelée *chaotique* [15]. L'ordre de Sharkovskii (théorème 4.4.17) entraîne qu'un tel système possède des points périodiques pour une infinité de périodes différentes. Le théorème suivant montre que cette propriété est équivalente à une entropie topologique non nulle. Ce résultat est une conséquence du théorème de Misiurewicz (théorème 4.5.3). Une preuve n'utilisant pas le théorème de Misiurewicz a également été donnée par Xiong [89].

Théorème 4.5.7 *Soit $f\colon I \to I$ une transformation de l'intervalle. L'entropie topologique de f est non nulle si et seulement si f possède un point périodique dont la période n'est pas une puissance de* 2.

Preuve. Si f possède un point de période $2^n q$, où $q > 1$ est un nombre impair, alors f^n possède un point de période impaire et f^{2n} est turbulente par la proposition 4.5.6, donc $h_{top}(I, f^n) \geq \log 2$ et $h_{top}(I, f) > 0$. Réciproquement, si $h_{top}(I, f) > 0$ alors par le théorème 4.5.3 il existe un entier n tel que f^n possède un fer à cheval, donc f^n possède un point périodique de période 3 par la proposition 4.5.5, et f possède un point périodique dont la période n'est pas une puissance de 2. □

4.5.2 Majoration de l'entropie

Une transformation de l'intervalle peut avoir une entropie topologique infinie, comme le montre l'exemple de la figure 4.7 ; les transformations d'entropie infinie forment même un G_δ dense dans $C([0,1])$ [15]. Cependant, une application lipschitzienne (en particulier une application C^1) a une entropie finie [29].

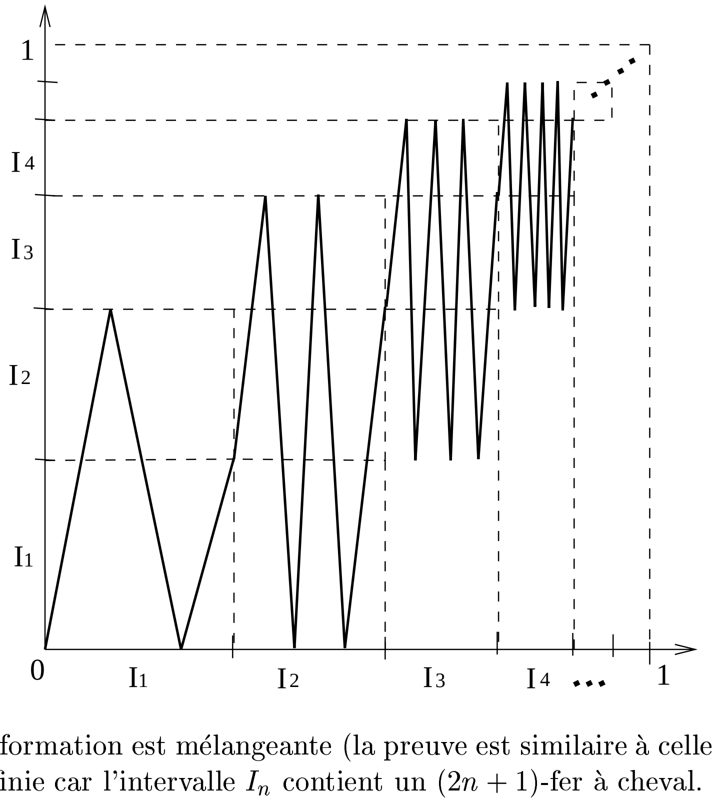


FIG. 4.7 – Cette transformation est mélangeante (la preuve est similaire à celle de l'exemple 4.2.13) et son entropie est infinie car l'intervalle I_n contient un $(2n+1)$-fer à cheval.

Proposition 4.5.8 *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. Si f est λ-lipschitzienne avec $\lambda > 1$, alors $h_{top}(I, f) \leq \log \lambda$.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, $n \geq 1$ et E un ensemble (n, ε)-séparé de cardinalité $s_n(f, \varepsilon)$ (on renvoie à la section 1.3.2 pour les définitions). Si x, y sont deux points distincts de E, il existe $0 \leq k < n$ tel que $|f^k(x) - f^k(y)| \geq \varepsilon$. Or f est λ-lipschitzienne, donc $|f^k(x) - f^k(y)| \leq \lambda^k |x - y| \leq \lambda^n |x - y|$, ce qui implique $|x - y| \geq \lambda^{-n}\varepsilon$. Par conséquent,

$$s_n(f, \varepsilon) = \#E \leq \left\lfloor \frac{|I|}{\varepsilon} \lambda^n \right\rfloor + 1.$$

Si on calcule l'entropie de f à l'aide de la formule de Bowen (théorème 1.3.2), on trouve que $h_{top}(I, f) \leq \log \lambda$. ☐

4.5.3 Minoration globale de l'entropie

Une transformation transitive de l'intervalle est toujours d'entropie non nulle ; on peut même minorer uniformément cette entropie. La minoration de l'entropie des transformations transitives (resp. transitives avec deux points fixes) est classique, de même que les exemples réalisant le minimum que nous donnons. En revanche, la détermination de la borne inférieure (qui n'est pas un minimum) de l'entropie des transformations mélangeantes ne semble pas figurer dans la littérature.

Lemme 4.5.9 *Soit $f: [0, 1] \to [0, 1]$ une transformation transitive. Si f est non turbulente, alors elle possède un unique point fixe. De plus, ce point fixe n'est ni 0 ni 1.*

Preuve. La transformation f a au moins un point fixe par le lemme 4.1.6. Si 0 est l'unique point fixe de f, alors $f(x) < x$ pour tout $x \in]0, 1]$, ce qui contredit la transitivité ; de même, f ne peut pas avoir un unique point fixe égal à 1.

Supposons maintenant que f a au moins deux points fixes a et b avec $a < b$; les propositions 4.2.6 et 4.2.7 impliquent que f est mélangeante. L'ensemble des points fixes de f est un fermé d'intérieur vide par transitivité, donc on peut choisir a et b de sorte que f n'ait pas de point fixe dans $]a, b[$. Si $f(x) > a$ pour tout $x > a$, alors l'intervalle $[a, 1]$ est invariant, ce qui implique que $a = 0$ par transitivité, et 0 est un point non accessible car $0 \notin f(]0, 1])$. Mais alors il existe une suite de points fixes convergeant vers 0 (lemme 4.2.10), ce qui contredit le choix de a et b. On en déduit qu'il existe $x > a$ tel que $f(x) \leq a$. Comme $f(b) = b > a$, il existe $d > a$ tel que $f(d) = a$; on choisit d minimum. Si pour tout x dans $]a, d[$, $f(x) \neq d$, alors $a < f(x) < d$ pour tout $x \in]a, d[$, donc l'intervalle $[a, d]$ est invariant et $d \notin f([a, d])$, ce qui est impossible par transitivité. On en déduit l'existence de $c \in]a, d[$ tel que $f(c) = d$. On pose alors $J = [a, c]$ et $K = [c, d]$; (J, K) est un 2-fer à cheval pour f, donc f est turbulente. ☐

Dans la proposition suivante, le point (ii) est dû à Block et Coppel [14] et le point (iii) à Block et Coven [12]. Le point (i) est nouveau.

Proposition 4.5.10 *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle.*

i) *Si f est mélangeante, alors f^2 est strictement turbulente et $h_{top}(I, f) > \frac{\log 2}{2}$;*
ii) *Si f est transitive, alors f^2 est turbulente et $h_{top}(I, f) \geq \frac{\log 2}{2}$;*
iii) *Si f est transitive et possède au moins deux points fixes, alors f est turbulente et $h_{top}(I, f) \geq \log 2$.*

Preuve.
i) Si f est mélangeante, elle possède un point périodique de période impaire (proposition 4.2.8), donc il existe deux intervalles J et K disjoints, ne contenant pas les extrémités de I et formant un 2-fer à cheval pour f^2 (proposition 4.5.6). Soit L un intervalle fermé non dégénéré inclus entre J et K. Comme f est mélangeante, il existe $n \geq 1$ tel que $f^{2n}(L) \supset J \cup L \cup K$ (proposition 4.2.2). En appliquant le lemme 4.1.8 itérativement, on montre qu'il existe 2^n intervalles fermés inclus dans $J \cup K$ et d'intérieurs disjoints, qu'on note I_i $(1 \leq i \leq 2^n)$, tels que $f^{2n}(I_i) \supset J \cup K$, donc par connexité $f^{2n}(I_i) \supset J \cup L \cup K$. De cette façon, $(L, I_1, \ldots, I_{2^n})$ forme un (2^n+1)-fer à cheval pour f^{2n}, donc $h_{top}(I,f) \geq \frac{\log(2^n+1)}{2n} > \frac{\log 2}{2}$ (proposition 4.5.2).

ii) Si f est transitive mais non mélangeante, alors l'intervalle I se subdivise en deux sous-intervalles J et K tels que $f^2|_J$ et $f^2|_K$ sont mélangeantes (propositions 4.2.6 et 4.2.7). Comme $J \cap K = \{x\}$ est un point fixe de f, x est également un point fixe de $f^2|_J$, qui n'est pas intérieur à J. Le lemme 4.5.9 permet d'en déduire que $f^2|_J$ est turbulente, donc f^2 aussi, et $h_{top}(I,f) \geq \frac{\log 2}{2}$ (proposition 4.5.2).

iii) C'est une conséquence immédiate du lemme 4.5.9 et de la proposition 4.5.2. $\square$

Nous montrons maintenant que les minorations de la proposition 4.5.10 sont optimales, c'est-à-dire qu'il existe une transformation transitive d'entropie $\frac{\log 2}{2}$, une transformation transitive avec deux points fixes d'entropie $\log 2$ et que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une transformation mélangeante d'entropie inférieure à $\frac{\log 2}{2} + \varepsilon$.

Exemple 4.5.11 On définit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ et $g\colon [0,1] \to [0,1]$ par

$$\begin{cases} f(x) = 2x \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ f(x) = 2(1-x) \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) = \frac{1}{2} + 2x \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ g(x) = \frac{3}{2} - 2x \text{ si } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ g(x) = 1 - x \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Ces deux transformations sont représentées en figure 4.8.

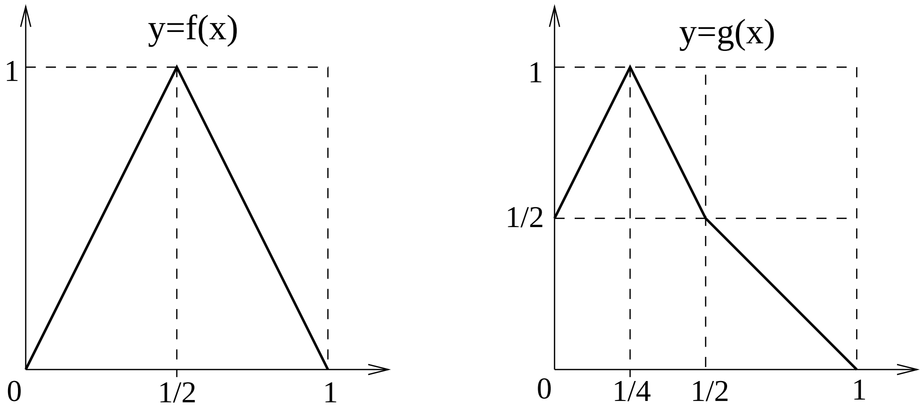


FIG. 4.8 – la transformation de gauche (application « tente ») est mélangeante et d'entropie $\log 2$; celle de droite est transitive sans être mélangeante et d'entropie $\frac{\log 2}{2}$.

L'application f est mélangeante (voir exemple 4.2.3).

Comme f est 2-lipschitzienne, son entropie est inférieure ou égale à $\log 2$ par la proposition 4.5.8. De plus, f a deux points fixes (0 et $\frac{2}{3}$), donc $h_{top}([0,1],f) \geq \log 2$ par la proposition 4.5.10 (iii) ; par conséquent $h_{top}([0,1],f) = \log 2$ et l'égalité du cas (iii) de la proposition 4.5.10 est réalisée.

La transformation g n'est pas mélangeante car les intervalles $J = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $K = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ sont échangés par g. Par contre, $g^2|_J$ et $g^2|_K$ sont mélangeantes et d'entropie $\log 2$ pour les mêmes raisons que précédemment (le graphe de $g^2|_K$ est le même que celui de f à une échelle deux fois plus petite, le graphe de $g^2|_J$ est similaire mais inversé). Donc $h_{top}([0,1], g) = \frac{\log 2}{2}$, et g réalise l'égalité du cas (ii) de la proposition 4.5.10. $\square$

Exemple 4.5.12 Soit $0 < \varepsilon < 1$ et n un entier tel que $2^{-n+3} \leq \varepsilon$. On pose $\delta = 2^{-n}$ et $\alpha = \frac{1}{2^n(1+\varepsilon)}$. On définit la transformation f affine par morceaux par

$$f(0) = \frac{1}{2} - \delta,\ f(\alpha) = \frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{4}\right) = 1,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},\ f(1) = 0$$

et f est affine entre ces points.

On pose $g = f^2$. Les transformations f et g sont représentées en figure 4.9 ; on a également indiqué sur la figure la valeur de la pente (en valeur absolue) sur chaque segment affine.

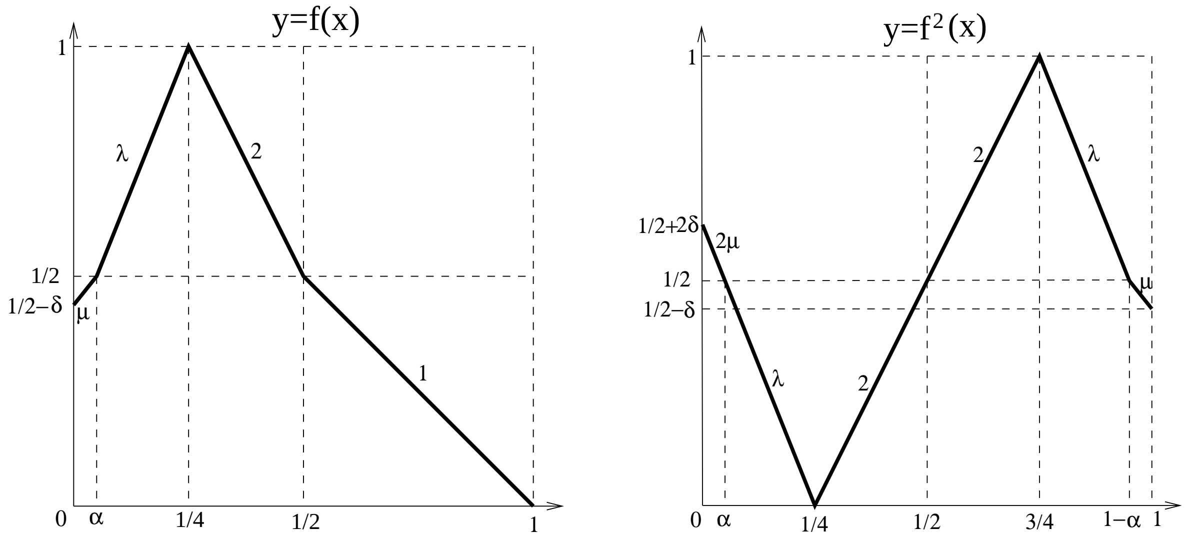


FIG. 4.9 – La transformation f (à gauche) est mélangeante et son entropie topologique est inférieure à $\frac{\log(2+2\varepsilon)}{2}$ (le nombre δ dépend de ε et $\alpha = \frac{\delta}{1+\varepsilon}$). À droite, on a représenté la transformation $g = f^2$. Sur les graphes, on a indiqué les différentes pentes de f et g, en valeur absolue, en posant $\mu = 1+\varepsilon$ et $\lambda = \frac{2}{1-4\alpha}$.

On pose $\mu = 1 + \varepsilon$ (pente de f entre 0 et α) et $\lambda = \frac{2}{1-4\alpha} > 2$ (pente de f entre α et $\frac{1}{4}$). On a $\lambda = 2 + \frac{8\alpha}{1-4\alpha}$. Comme $\alpha \leq 2^{-n}$ et vu le choix de n, on a

$$\frac{8\alpha}{1-4\alpha} \leq 16\alpha \leq 2^{-n+4} \leq 2\varepsilon.$$

De plus, $2\mu = 2 + 2\varepsilon$, donc g est lipschitzienne avec une constante $2 + 2\varepsilon$, d'où $h_{top}([0,1], g) \leq \log(2 + 2\varepsilon)$ par la proposition 4.5.8.

On veut montrer que g est mélangeante. Pour cela, on commence par montrer que tout sous-intervalle non dégénéré J possède une image par g^n contenant $\frac{1}{2}$ pour un certain n. Si J contient α ou $1 - \alpha$, alors $1/2$ appartient à $g(J)$. On peut donc se restreindre à un intervalle J ne contenant ni $1/2$, ni α, ni $1 - \alpha$.

Nous traitons tout d'abord le cas où $J \subset [\alpha, 1/2]$ et $1/4 \in J$. On écrit $J = J_1 \cup J_2$, avec $J_1 \subset [\alpha, 1/4]$ et $J_2 \subset [1/4, 1/2]$. Soit $i \in \{1, 2\}$ tel que $|J_i| \geq |J|/2$. L'application g est de pente supérieure à 2 sur J_i, donc $|g(J_i)| \geq 2|J_i| \geq |J|$. On a $1/4 \in J_i$, donc $0 \in g(J_i)$. Si $g(J_i)$ contient α, alors $g^2(J)$ contient $1/2$. Sinon, $g(J_i) \subset [0, \alpha]$, de sorte que

$$|g^2(J)| \geq |g^2(J_i)| \geq 2|g(J_i)| \geq 2|J|.$$

Le cas où $J \subset [1/2, 1-\alpha]$ et $3/4 \in J$ se traite de façon similaire, et on obtient soit $1/2 \in g^2(J)$ soit $|g^2(J)| \geq \mu |J|$.

Si J ne contient aucun des points $\alpha, 1/4, 1/2, 3/4, 1-\alpha$, alors J est inclus dans une partie affine et $|g(J)| \geq \mu|J|$.

Comme la taille de l'intervalle $g^n(J)$ ne peut pas croître indéfiniment (on rappelle que $\mu > 1$), il découle de ce qui précède qu'il existe n tel que $1/2 \in g^n(J)$.

L'image par g d'un intervalle non dégénéré est un intervalle non dégénéré, donc il existe $\beta > 0$ tel que $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \beta\right] \subset g^{n+1}(J)$ ou $\left[\frac{1}{2} - \beta, \frac{1}{2}\right] \subset g^{n+1}(J)$. Selon le lemme 4.1.11, il existe un entier n_1 tel que $g^{n_1}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \beta\right]\right) \supset \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, donc $g^{n_1+1}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \beta\right]\right) \supset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et

$$g^{n_1+k}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \beta\right]\right) \supset \left[\frac{1}{2} - \delta, 1\right] \text{ pour tout } k \geq 2. \tag{4.7}$$

De même, il existe n_2 tel que $g^{n_2}\left(\left[\frac{1}{2} - \beta, \frac{1}{2}\right]\right) \supset \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, et

$$g^{n_2+k}\left(\left[\frac{1}{2} - \beta, \frac{1}{2}\right]\right) \supset \left[0, \frac{1}{2} + 2\delta\right] \text{ pour tout } k \geq 2. \tag{4.8}$$

En associant (4.7) et (4.8), on trouve un entier m tel que

$$g^m\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \beta\right]\right) = [0, 1] \text{ et } g^m\left(\left[\frac{1}{2} - \beta, \frac{1}{2}\right]\right) = [0, 1].$$

On en déduit que $g^{n+m+1}(J) = [0, 1]$, ce qui permet de conclure que g est mélangeante, donc f aussi. Par la proposition 4.5.10 (i), $h_{top}([0,1], f) > \frac{\log 2}{2}$, et par ailleurs

$$h_{top}([0,1], f) = \frac{h_{top}([0,1], g)}{2} \leq \frac{\log(2 + 2\varepsilon)}{2}.$$

Ainsi, $\inf\{h_{top}([0,1], f) \mid f \text{ mélangeante}\} = \dfrac{\log 2}{2}$. □

Dans [13], Block, Guckenheimer, Misiurewicz et Young donnent une minoration de l'entropie d'une transformation de l'intervalle en fonction de la période d'un point périodique ; dans chaque cas il existe une transformation réalisant l'égalité. Nous rappelons que si tous les point périodiques ont une période égale à une puissance de 2, alors l'entropie est nulle (théorème 4.5.7).

Théorème 4.5.13 *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. Si f a un point périodique de période $2^m q$, avec q impair, $q > 1$, alors $h_{top}(I, f) \geq \frac{\log \lambda_q}{2^m}$, où λ_q est la plus grande racine du polynôme $X^q - 2X^{q-2} - 1$.*

4.5.4 Entropie uniformément positive

On a vu qu'une transformation mélangeante est nécessairement d'entropie strictement positive (proposition 4.5.10). En fait, tout recouvrement par deux ouverts non denses a une entropie non nulle; on dit que le système est d'*entropie uniformément positive.* Ce résultat n'apparaît pas en tant que tel dans la littérature, mais il est connu que la spécification entraîne la propriété d'entropie uniformément positive [6], et on a vu qu'une transformation mélangeante de l'intervalle a la propriété de spécification (théorème 4.4.5).

Théorème 4.5.14 *Soit $f: I \to I$ une transformation mélangeante de l'intervalle. Alors tout recouvrement par deux ouverts non denses a une entropie strictement positive.*

Preuve. Soit U_0, U_1 deux ouverts non denses qui recouvrent I. On note $\mathcal{U} = (U_0, U_1)$. L'ensemble $U_0 \setminus \overline{U_1}$ est un ouvert non vide. On peut donc choisir I_0 un intervalle fermé non dégénéré inclus dans $U_0 \setminus \overline{U_1}$ et ne contenant aucune extrémité de I. On choisit de même $I_1 \subset U_1 \setminus \overline{U_0}$ un intervalle fermé non dégénéré ne contenant aucune extrémité de I.

Par hypothèse, f est mélangeante, donc il existe $p > 0$ tel que $f^p(J_i) \supset J_0 \cup J_1$ pour $i = 0, 1$ (proposition 4.2.2). On pose $g = f^p$ et on choisit $n \geq 1$. Le lemme 4.1.8 montre que pour tout choix de $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \in \{0,1\}^n$, il existe un sous-intervalle fermé non dégénéré J tel que $g^k(J) \subset J_{\varepsilon_k}$ pour $k = 0, \ldots, n-1$. Ainsi, pour toute suite $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, il existe $x \in J_{\varepsilon_0} \cap g^{-1}(J_{\varepsilon_1}) \cap \cdots \cap g^{-(n-1)}(J_{\varepsilon_{n-1}})$ et le seul élément de $\mathcal{U} \vee g^{-1}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee g^{-(n-1)}(\mathcal{U})$ contenant x est $U_{\varepsilon_0} \cap g^{-1}(U_{\varepsilon_1}) \cap \cdots \cap g^{-(n-1)}(U_{\varepsilon_{n-1}})$. Par conséquent, $N_n(\mathcal{U}, g) = 2^n$ et $h_{top}(\mathcal{U}, g) = \log 2$. Or on a

$$h_{top}(\mathcal{U}, f) = \frac{1}{p} h_{top}(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee f^{-(p-1)}(\mathcal{U}), g) \geq \frac{1}{p} h_{top}(\mathcal{U}, g) = \frac{\log 2}{p}$$

donc $h_{top}(\mathcal{U}, f) > 0$. □

Remarque 4.5.15 La conclusion du théorème 4.5.14 est fausse si on suppose seulement que la transformation est transitive. En effet, si f est transitive mais non mélangeante, on appelle J et K les intervalles donnés par la proposition 4.2.6 et on choisit deux ouverts non denses U_0, U_1 tels que $J \subset U_0$ et $K \subset U_1$; on note $\mathcal{U} = (U_0, U_1)$. Soit x un point de J. Alors $f^{2n}(x) \in U_0$ et $f^{2n+1}(x) \in U_1$ pour tout $n \geq 0$; on a le résultat inverse si $x \in K$. On en déduit que $N_n(\mathcal{U}, f) \leq 2$ pour tout $n \geq 0$, donc $h_{top}(\mathcal{U}, f) = 0$. De façon plus générale, la propriété d'entropie uniformément positive implique le mélange faible topologique [6], qui est équivalent au mélange topologique pour les transformations de l'intervalle.

4.5.5 Entropie et chaos au sens de Devaney

Dans [15], Block et Coppel montrent que, si une transformation de l'intervalle est strictement turbulente, alors il existe un sous-ensemble fermé invariant sur lequel l'action de la transformation est presque un shift sur deux éléments.

Proposition 4.5.16 *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. Si f est strictement turbulente, alors il existe un sous-ensemble fermé $X \subset I$ et une application continue surjective $\varphi: X \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tels que*
- *$f(X) = X$;*
- *$\varphi \circ f(x) = \sigma \circ \varphi(x)$ pour tout $x \in X$ (σ désigne le shift sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$) ;*

– *tout point de* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *a au plus deux antécédents par* φ *et l'ensemble des points ayant deux antécédents est au plus dénombrable.*

Preuve. Soit J_0, J_1 deux intervalles fermés disjoints tels que $J_0 \cup J_1 \subset f(J_0) \cap f(J_1)$. On définit par récurrence sur n l'ensemble $J_{\alpha_0\dots\alpha_n}$ comme étant un sous-intervalle de $J_{\alpha_0\dots\alpha_{n-1}}$ de longueur minimale tel que $f(J_{\alpha_0\dots\alpha_n}) = J_{\alpha_1\dots\alpha_n}$, où $\alpha_k \in \{0,1\}$. On voit que

$$J_{\alpha_0\dots\alpha_n} \cap J_{\beta_0\dots\beta_n} = \emptyset \text{ si } \alpha_0\dots\alpha_n \neq \beta_0\dots\beta_n.$$

Soit $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$; σ désigne le shift sur Σ. Pour tout $\bar{\alpha} = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose

$$J_{\bar{\alpha}} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} J_{\alpha_0\dots\alpha_n}.$$

C'est une intersection d'intervalles compacts décroissants, donc $J_{\bar{\alpha}}$ est un intervalle compact non vide, qui peut être réduit à un point. De plus, $J_{\bar{\alpha}} \cap J_{\bar{\beta}} = \emptyset$ si $\bar{\alpha} \neq \bar{\beta}$. Comme f est continue, on a

$$f(J_{\bar{\alpha}}) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} f(J_{\alpha_0\dots\alpha_n}) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} J_{\alpha_1\dots\alpha_n} = J_{\sigma(\bar{\alpha})}.$$

Soit $X = \bigcup_{\bar{\alpha}\in\Sigma} \partial J_{\bar{\alpha}}$, autrement dit X est l'ensemble des extrémités des intervalles $J_{\bar{\alpha}}$. Nous montrons que X est fermé. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de X convergeant vers $y \in I$. On note $\bar{\alpha}_n$ l'élément de Σ tel que $x_n \in J_{\bar{\alpha}_n}$. Quitte à se restreindre à une sous-suite, on peut supposer que $(\bar{\alpha}_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\bar{\beta} = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma$. Ainsi, pour un entier k donné, $J_{\bar{\alpha}_n} \subset J_{\beta_0\dots\beta_k}$ pour tout n assez grand. Comme $J_{\beta_0\dots\beta_k}$ est fermé, ceci implique que pour tout $k \geq 0$, $y \in J_{\beta_0\dots\beta_k}$, de sorte que $y \in J_{\bar{\beta}}$. De plus, si $y \in \mathrm{Int}\left(J_{\bar{\beta}}\right)$ alors $x_n \in \mathrm{Int}\left(J_{\bar{\beta}}\right)$ pour tout n assez grand, ce qui est impossible car $x_n \in X$. Par conséquent, $y \in \partial J_{\bar{\beta}} \subset X$, et X est fermé.

On a vu que $f(J_{\bar{\alpha}}) = J_{\sigma(\bar{\alpha})}$. De plus, f envoie les deux extrémités de $J_{\alpha_0\dots\alpha_n}$ sur les deux extrémités de $J_{\alpha_1\dots\alpha_n}$ car $J_{\alpha_0\dots\alpha_n}$ a été choisi de longueur minimale. Par conséquent, $f(\partial J_{\bar{\alpha}}) = \partial J_{\sigma(\bar{\alpha})}$. Il en découle que $f(X) = X$.

On définit

$$\begin{array}{rccl}\varphi\colon & X & \longrightarrow & \Sigma \\ & x & \longmapsto & \bar{\alpha} \text{ si } x \in J_{\bar{\alpha}}\end{array}$$

De cette façon, tout point de Σ est l'image par φ d'un ou deux points de X. De plus, le nombre de $\bar{\alpha} \in \Sigma$ tels que $J_{\bar{\alpha}}$ est un intervalle non dégénéré est au plus dénombrable car les $J_{\bar{\alpha}}$ sont disjoints, donc l'ensemble des $\bar{\alpha} \in \Sigma$ ayant deux antécédents par φ est au plus dénombrable. Par ailleurs, soit $\varepsilon_n > 0$ la distance minimale entre deux intervalles de la forme $J_{\alpha_0\dots\alpha_n}$. Soit $x, y \in X$ avec $\varphi(x) = \bar{\alpha}$ et $\varphi(y) = \bar{\beta}$; si $|x - y| < \varepsilon_n$ alors $\alpha_0\dots\alpha_n = \beta_0\dots\beta_n$. Par conséquent, φ est continue. Enfin, on a $\varphi \circ f(x) = \sigma \circ \varphi(x)$ pour tout $x \in X$. □

Dans [30], Devaney introduit une définition du chaos, donnée ci-dessous ; il s'intéresse en fait aux systèmes qui sont chaotiques sur un sous-ensemble fermé.

Définition 4.5.17 (Chaos au sens de Devaney) Soit X un espace métrique et $T\colon X \to X$ une transformation continue. Le système (X, T) est dit *chaotique au sens de Devaney* si

– (X, T) est transitif ;
– les points périodiques sont denses dans X ;

– (X, T) est sensible aux conditions initiales.

Remarque 4.5.18 La troisième condition est impliquée par les deux autres dès que l'espace X est infini [2, 38].

Nous avons déjà montré qu'une transformation transitive de l'intervalle est chaotique au sens de Devaney (propositions 4.2.5 et 4.3.2). Dans [56], Li montre qu'il existe un sous-ensemble fermé sur lequel une puissance de f est chaotique au sens de Devaney si et seulement si $h_{top}(I, f) > 0$. Le sens « si » découle directement de la proposition 4.5.16, car $h_{top}(I, f) > 0$ si et seulement si f^n est strictement turbulente pour un certain n (résultats 4.5.2 et 4.5.3).

Théorème 4.5.19 (Li) *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
- $h_{top}(I, f) > 0$ *;*
- *il existe un sous-ensemble fermé infini $X \subset I$ et un entier $n \geq 1$ tels que $f^n(X) = X$ et $f^n|_X$ est chaotique au sens de Devaney.*

Remarque 4.5.20 Dans [87], Xiong montre que, si l'entropie de f est non nulle, alors il existe un sous-ensemble X et un entier n tels que
- $f^n|_X$ est topologiquement mélangeante ;
- les points périodiques sont denses dans X ;
- l'ensemble des périodes des points périodiques est infini.

Ce résultat peut se déduire facilement de la proposition 4.5.16.

Réciproquement, il est montré dans [15] que s'il existe un sous-ensemble fermé infini X et un entier n tels que $f^n|_X$ est topologiquement mélangeante, alors l'entropie de f est non nulle.

4.6 Couples de Li-Yorke, ensembles brouillés

4.6.1 Chaos au sens de Li-Yorke

Définition 4.6.1 Soit (X, T) un système dynamique topologique. Si $x, y \in X$, on dit que (x, y) est un *couple de Li-Yorke* si

$$\limsup_{n\to+\infty} d(T^n x, T^n y) > 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} d(T^n x, T^n y) = 0.$$

On appelle *ensemble brouillé* un ensemble $B \subset X$ tel que tout couple de points distincts de B est un couple de Li-Yorke.

Dans [57], Li et Yorke montrent qu'une transformation de l'intervalle ayant un point périodique de période 3 possède un ensemble brouillé non dénombrable, comportement qu'ils ont qualifié de *chaotique*.

Définition 4.6.2 (chaos au sens de Li-Yorke) Soit X un espace métrique compact et $T: X \to X$ une transformation continue. Le système (X, T) est dit *chaotique au sens de Li-Yorke* s'il existe un ensemble brouillé non dénombrable.

Théorème 4.6.3 (Li-Yorke) *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. Si f possède un point périodique de période 3, alors il existe un ensemble brouillé B non dénombrable, tel que, pour tout point périodique y et tout $x \in B$, on a $\limsup_{n\to+\infty} |f^n(x) - f^n(p)| > 0$.*

Ce théorème se généralise de la façon suivante. Rappelons que l'existence d'un point périodique dont la période n'est pas une puissance de 2 est équivalente à une entropie topologique non nulle (théorème 4.5.7).

Corollaire 4.6.4 *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. Si f possède un point périodique dont la période n'est pas une puissance de 2, alors f est chaotique au sens de Li-Yorke.*

Remarque 4.6.5 Une transformation chaotique au sens de Li-Yorke peut avoir une entropie topologique nulle : des exemples ont été exhibés par Xiong [88] et Smítal [80]

Sur l'intervalle, un seul couple de Li-Yorke entraîne l'existence d'un ensemble brouillé non dénombrable, comme l'ont montré Kuchta et Smítal [54].

Théorème 4.6.6 (Kuchta-Smítal) *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. S'il existe un couple de Li-Yorke, alors f est chaotique au sens de Li-Yorke.*

Par le corollaire 4.6.4, une transformation $f: I \to I$ mélangeante possède un ensemble brouillé non dénombrable. Dans [22], Bruckner et Hu montrent davantage : si f est mélangeante alors elle possède un ensemble non dénombrable dense qui est extrêmement brouillé, c'est-à-dire que pour tout couple (x, y) formé de points distincts de cet ensemble,

$$\limsup_{n\to+\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = |I| \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0.$$

De plus, l'existence d'un ensemble extrêmement brouillé dense est équivalente au mélange topologique pour les transformations de l'intervalle.

Théorème 4.6.7 (Bruckner-Hu) *Soit $f: [0,1] \to [0,1]$ une transformation de l'intervalle. Si f est mélangeante, alors il existe un ensemble B non dénombrable dense tel que, pour $x, y \in B, x \neq y$, la suite $(f^n(x) - f^n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[-1, 1]$.*

La transformation f est mélangeante si et seulement s'il existe un ensemble dense B tel que, pour tous $x, y \in B, x \neq y$,

$$\limsup_{n\to+\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 1.$$

Par la suite, Iwanik a montré un résultat plus fort, concernant tous les systèmes dynamiques topologiquement faiblement mélangeants [51].

Définition 4.6.8 Soit X un espace métrique compact et $T: X \to X$ une transformation continue. L'ensemble $E \subset X$ est dit *indépendant* si toute suite finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments distincts de E est d'orbite dense dans X^n pour $T \times \cdots \times T$.

Théorème 4.6.9 (Iwanik) *Soit X un espace métrique compact et $T: X \to X$ une transformation continue. Si le système (X, T) est topologiquement faiblement mélangeant, alors il existe un ensemble indépendant qui est dense et non dénombrable.*

4.6.2 Chaos générique

Le chaos au sens de Li-Yorke demande l'existence d'un ensemble brouillé non dénombrable dans l'intervalle. Le *chaos générique* fait intervenir un aspect 2-dimensionnel. Cette notion a été introduite par Lasota (voir [66]).

Définition 4.6.10 Soit $f : I \to I$ une transformation de l'intervalle. L'application f est dite *génériquement chaotique* si l'ensemble des couples de Li-Yorke contient un G_δ dense de $X \times X$.

Si $f : I \to I$ est mélangeante, il est facile de voir qu'elle est génériquement chaotique : $f \times f$ est transitive, donc les couples (x, y) d'orbite dense dans $I \times I$ forment un G_δ dense, et ce sont également des couples de Li-Yorke.

Les transformations transitives sont également génériquement chaotiques. La réciproque n'est pas vraie, bien que la différence entre le chaos générique et la transitivité ne soit pas grande, comme l'a montré Snoha [81].

Théorème 4.6.11 (Snoha) *Soit $f : I \to I$ une transformation de l'intervalle. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- *f est génériquement chaotique ;*
- *soit il existe un sous-intervalle J tel que $f|_J$ est transitive, soit il existe deux sous-intervalles J_1, J_2 qui ont un point commun tels que $f|_{J_i}$ est transitive ($i = 1, 2$). De plus, si K est un sous-intervalle non dégénéré, il existe un intervalle J sur lequel f est transitive et un entier n tels que $f^n(K) \cap \operatorname{Int}(J) \neq \emptyset$.*

Remarque 4.6.12 Soit $f : I \to I$ une transformation de l'intervalle. Dans [81], Snoha dit que f est *densément chaotique* si l'ensemble des couples de Li-Yorke est dense dans $I \times I$. De plus, il dit que f est génériquement ε-chaotique (resp. densément ε-chaotique) si l'ensemble des couples $(x, y) \in I \times I$ satisfaisant

$$\limsup_{n \to +\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > \varepsilon \quad \text{et} \quad \liminf_{n \to +\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$$

contient un G_δ dense (resp. est dense).

Il montre que le chaos générique, le chaos ε-générique et le chaos ε-dense, pour un certain $\varepsilon > 0$, sont équivalents. Par contre, ces propriétés ne sont pas équivalentes au chaos dense.

Chapitre 5

Mesures maximales pour les transformations de l'intervalle

On a vu au chapitre 4 que le fait de se restreindre aux systèmes dynamiques sur l'intervalle mène à des cascades de propriétés. On peut espérer voir la liste s'allonger, en particulier on peut s'interroger sur l'existence de « bonnes » mesures. Les deux types de mesures habituellement considérées sont les mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue et les mesures d'entropie maximale (appelées *mesures maximales*). Les premières donnent des mesures relativement maniables par le biais de leur densité mais leur existence n'est pas conservée par conjugaison. Les mesures maximales, auxquelles nous nous intéressons dans ce chapitre, sont davantage intrinsèques puisqu'elles sont préservées par conjugaison ; curieusement, l'ordre de dérivabilité intervient de façon déterminante dans les résultats.

L'existence d'une mesure maximale, connue pour les transformations markoviennes, a d'abord été montrée pour les β-shifts [46]. Dans [47], Hofbauer étend la technique utilisée pour les β-shifts – associer une chaîne de Markov au système initial – aux transformations monotones par morceaux. Il montre que de telles transformations admettent un nombre fini non nul de mesures maximales ergodiques dès que leur entropie topologique est non nulle, et la transitivité implique l'unicité de la mesure maximale.

Dans [23], Buzzi étend la construction d'un diagramme de Markov à toutes les transformations de l'intervalle ; sous certaines conditions, l'étude des mesures maximales du système initial se ramène à celle de la chaîne de Markov associée. Il montre que le nombre de mesures maximales ergodiques est fini et non nul si la transformation est C^∞, et que la mesure maximale est unique si le système est transitif ; on obtient ainsi les mêmes résultats que pour les transformations monotones par morceaux. La condition de régularité ne peut pas être affaiblie (voir [23] et le chapitre 6), néanmoins la régularité de la transformation nous permet de donner une nouvelle condition suffisante pour l'existence et la finitude des mesures maximales ergodiques, en terme d'entropie des points critiques et d'entropie locale (théorème 5.4.11). En particulier, ce résultat implique que, si $f\colon I \to I$ est une transformation C^r de l'intervalle telle que $h_{top}(I,f) > \frac{2}{r}\log\|f'\|_\infty$, alors elle possède une mesure maximale (corollaire 5.4.13), ce qui est un critère facilement vérifiable. Nous soulignons que cette condition n'implique pas la semi-continuité supérieure de l'entropie métrique, qui est la méthode généralement utilisée pour montrer l'existence de mesures maximales (en particulier pour les transformations monotones par morceaux et C^∞).

Ce chapitre rassemble des résultats connus et des résultats obtenus en collaboration avec J. Buzzi [26], ces derniers faisant l'objet de la dernière section. Après quelques considérations sur les mesures maximales, nous présentons dans la section 5.2 la construction du diagramme de Markov associé à une transformation de l'intervalle ; nous illustrons également la construction d'un diagramme de Markov sur des exemples. En section 5.3, nous donnons les résultats concernant les transformations monotones par morceaux. Enfin, en section 5.4 nous montrons une condition suffisante pour l'existence et la finitude de mesures maximales ergodiques pour les transformations C^r, $r \geq 1$; ce théorème permet de retrouver les résultats, déjà connus, concernant les transformations C^∞.

5.1 Mesures maximales et isomorphismes

Soit $T: X \to X$ une transformation continue sur un espace métrique compact X. Une *mesure maximale* μ est une mesure réalisant le supremum des entropies métriques : elle vérifie $h_\mu(X,T) = h_{top}(X,T)$.

Remarque 5.1.1 Soit $T: X \to X$ une transformation continue sur un espace métrique compact X. Selon le théorème 1.4.2, une mesure maximale s'écrit comme barycentre de mesures ergodiques maximales.

Si $T: X \to X$ est une transformation continue sur un espace métrique X (non nécessairement compact), on note

$$h_{met}(X,T) = \sup\{h_\mu(X,T) \mid \mu \text{ mesure } T\text{-ergodique}\}.$$

et on appelle *mesure maximale ergodique* une mesure ergodique telle que $h_\mu(X,T) = h_{met}(X,T)$. Si X est compact, $h_{met}(X,T) = h_{top}(X,T)$. Dans le cas non compact, on ne s'intéresse qu'aux mesures ergodiques car la remarque 5.1.1 n'est plus valable et les bijections entre mesures que nous rencontrerons concernent uniquement les mesures ergodiques.

Soit X, Y deux espaces métriques, $T: X \to X$, $S: Y \to Y$ deux transformations continues et $\varphi: X \to Y$ une bijection bimesurable telle que $\varphi \circ T = S \circ \varphi$. On rappelle que φ induit une bijection préservant l'entropie et l'ergodicité entre les mesures T-invariantes μ de X et les mesures S-invariantes ν de Y, par le biais de la transformation $\mu \mapsto \nu = \varphi_*\mu$ (voir la section 1.4.3).

Proposition 5.1.2 *Soit X, Y deux espaces métriques, $T: X \to X$, $S: Y \to Y$ deux transformations continues, $X_0 \subset X$ un sous-ensemble T-invariant et $Y_0 \subset Y$ un sous-ensemble S-invariant. Soit $\varphi: X_0 \to Y_0$ une bijection bimesurable telle que $\varphi \circ T = S \circ \varphi$. On suppose que*

$$h_{met}(X,T) > h_{met}(X \setminus X_0, T) \text{ et } h_{met}(Y,S) > h_{met}(Y \setminus Y_0, S).$$

Si on pose

$$H = \max\{h_{met}(X \setminus X_0, T), h_{met}(Y \setminus Y_0, S)\},$$

alors $\mu \mapsto \nu = \varphi_*\mu$ est une bijection préservant l'entropie entre les mesures T-ergodiques μ sur X et les mesures S-ergodiques ν sur Y telles que $h_\mu(X,T) > H$ et $h_\nu(Y,S) > H$.

En particulier, $h_{met}(X,T) = h_{met}(Y,S)$ et φ induit une bijection entre les mesures maximales ergodiques de (X,T) et celles de (Y,S).

Preuve. Soit μ une mesure T-ergodique sur X telle que $h_\mu(X,T) > H$. Par choix de H, on a $\mu(X \setminus X_0) < 1$, et par ergodicité $\mu(X \setminus X_0) = 0$, donc μ est concentrée sur X_0. Il en est de même pour les mesures ν S-ergodiques sur Y telles que $h_\nu(Y,S) > H$. Par le lemme 1.4.4, $\mu \mapsto \nu = \varphi_*\mu$

est une bijection préservant l'entropie entre les mesures T-ergodiques μ sur X et les mesures S-ergodiques ν sur Y telles que $h_\mu(X,T) > H$ et $h_\nu(Y,S) > H$.

Par hypothèse, on a soit $h_{met}(X,T) > H$, soit $h_{met}(Y,S) > H$. Si $h_{met}(X,T) > H$, alors

$$\begin{aligned} h_{met}(X,T) &= \sup\{h_\mu(X,T) \mid \mu \text{ mesure } T\text{-ergodique}, h_\mu(X,T) > H\} \\ &= h_{met}(X_0,T) \end{aligned}$$

Or $h_{met}(X_0,T) = h_{met}(Y_0,S) \leq h_{met}(Y,S)$, donc $h_{met}(Y,S) > H$ et $h_{met}(X,T) = h_{met}(Y,S)$. Il en est de même si $h_{met}(Y,S) > H$. □

Définition 5.1.3 Soit X, Y deux espaces métriques et $T: X \to X$, $S: Y \to Y$ deux transformations continues. Les systèmes (X,T) et (Y,S) sont dits *h-conjugués* s'il existe $X_0 \subset X$, $Y_0 \subset Y$ et une bijection bimesurable $\varphi: X_0 \to Y_0$ tels que $\varphi \circ T = S \circ \varphi$,

$$h_{met}(X,T) > h_{met}(X \setminus X_0, T) \text{ et } h_{met}(Y,S) > h_{met}(Y \setminus Y_0, S).$$

Par la proposition 5.1.2, il y a une bijection entre les mesures maximales ergodiques de deux systèmes h-conjugués.

5.2 Diagramme de Markov associé à une transformation

Dans cette section, nous exposons la construction d'une chaîne de Markov topologique associée à une transformation continue de l'intervalle et les conditions permettant de s'y ramener pour l'étude des mesures maximales. Cette construction se fait en deux étapes : tout d'abord, on se ramène à un sous-shift sur un alphabet infini, puis on associe à ce sous-shift une chaîne de Markov sur un graphe orienté, appelé *diagramme de Markov*; la décomposition de la construction sert avant tout à construire les bijections entre les mesures maximales de part et d'autre. Dans la section 5.2.3, on explique comment construire concrètement un diagramme de Markov à partir d'exemples.

En général, la chaîne de Markov ne représente pas entièrement le système de départ. La question de l'existence de mesures maximales pour le système de départ ne peut se ramener à l'étude de la chaîne de Markov que si les parties non représentées sont négligeables.

La construction proposée dans cette section est due à Buzzi [23] ; c'est une généralisation de la méthode de Hofbauer, qui associe une chaîne de Markov à une transformation monotone par morceaux [47], méthode déjà employée pour les β-shifts [83, 46]. Pour simplifier, nous ne considérons que des transformations continues, et nous appelons *transformation de l'intervalle* une application continue d'un intervalle compact dans lui-même.

5.2.1 Isomorphisme avec un sous-shift

Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle. On note C_f l'ensemble des points au voisinage desquels f n'est pas strictement monotone ; c'est un ensemble fermé, qu'on appelle *ensemble des points critiques* de f. Si C est un fermé contenant C_f, la *partition $\mathcal{P}$ associée à C* est l'ensemble des composantes connexes de $I \setminus C$, qui sont des intervalles ouverts. Si $A \in \mathcal{P}$, l'application $f|_A$ est strictement monotone.

Remarque 5.2.1 Formellement, $\mathcal{P}$ est une partition de $I \setminus C$ et non de I. Dans le cas général, $\mathcal{P}$ peut être vide, finie ou dénombrable. Si f est monotone par morceaux, C_f et $\mathcal{P}$ sont finis ; si f est C^1 et n'est constante sur aucun sous-intervalle, $I \setminus C_f$ est un ouvert dense de I.

Remarque 5.2.2 On prend généralement $C = C_f$. Cependant il peut être intéressant de considérer un ensemble C plus gros : dans la section 5.4.2, on ajoute un nombre fini de points à C_f de sorte que $|A| \leq \delta$ pour tout $A \in \mathcal{P}$, tout en gardant $h_{top}(C,f) = h_{top}(C_f, f)$; dans le chapitre 6, on considère un ensemble C qui donne une partition de Markov.

Si $A_0, \ldots, A_n$ sont des éléments de $\mathcal{P}$, on définit

$$[A_0 \ldots A_n]_f = \{x \in I \mid f^k(x) \in A_k, 0 \leq k \leq n\} = \bigcap_{k=0}^{n} f^{-k}(A_k).$$

Par la suite, il sera parfois plus judicieux de noter cet ensemble avec des indices négatifs ; l'ensemble $f^n([A_{-n} \ldots A_0]_f)$ représente les points dont « l'itinéraire passé » est $(A_{-n} \ldots A_0)$.

Lemme 5.2.3 *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle, $\mathcal{P}$ la partition associée au fermé $C \supset C_f$, et $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{P}$. Alors $[A_0 \ldots A_n]_f$ est un intervalle ouvert, et f^nest strictement monotone sur $[A_0 \ldots A_n]_f$. En particulier, $f^n([A_0 \ldots A_n]_f)$ est un intervalle ouvert.*

Preuve. On montre par récurrence sur n que $[A_0 \ldots A_n]_f$ est un intervalle ouvert sur lequel f^{n+1} est strictement monotone.
– Si n=0, alors $[A_0]_f = A_0$ est un intervalle ouvert sur lequel f est strictement monotone par définition de $\mathcal{P}$.
– On suppose que la propriété de récurrence est vraie au rang $n-1$. Soit $J = [A_0 \ldots A_{n-1}]_f$. On a $[A_0 \ldots A_n]_f = J \cap f^{-n}(A_n)$. Par hypothèse de récurrence, $g = f^n|_J : J \to f^n(J)$ est un homéomorphisme, donc $J \cap f^{-n}(A_n) = g^{-1}(A_n)$ est un intervalle ouvert. De plus, $f^{n+1}|_{J\cap f^{-n}(A_n)} = (f|_{A_n}) \circ (f^n|_J)$. Comme $f|_{A_n}$ et $f^n|_J$ sont strictement monotones, $f^{n+1}|_{[A_0 \ldots A_n]_f}$ l'est également. Ceci termine la preuve par récurrence.

Si $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{P}$, alors f^n est strictement monotone sur $[A_0 \ldots A_n]_f \subset [A_0 \ldots A_{n-1}]_f$, de sorte que $f^n([A_0 \ldots A_n]_f)$ est un intervalle ouvert. $\square$

Si $x \in I \setminus C$, il existe un unique élément de $\mathcal{P}$ contenant x ; on le note $\mathcal{P}(x)$. On pose $C^- = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(C)$. On définit l'application *itinéraire*

$$\begin{array}{rccl} \varphi\colon & I \setminus C^- & \longrightarrow & \mathcal{P}^{\mathbb{N}} \\ & x & \longmapsto & (\mathcal{P}(f^n(x)))_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

L'application φ est continue et, si σ désigne le shift sur $\mathcal{P}^{\mathbb{N}}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} I \setminus C^- \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{P}^{\mathbb{N}} \arrow[d, "\sigma"] \\ I \setminus C^- \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{P}^{\mathbb{N}} \end{tikzcd}$$

On note $\Sigma'_+ = \varphi(I \setminus C^-)$ l'ensemble des itinéraires et $\Sigma_+ = \overline{\Sigma'_+}$ son adhérence dans $\mathcal{P}^{\mathbb{N}}$. Si la partition $\mathcal{P}$ est finie, Σ_+ est compact mais ce n'est pas le cas en général. Par la suite, Σ désignera l'extension naturelle de Σ_+ (voir la section 1.5).

Remarque 5.2.4 Soit $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{P}$. Alors $[A_0 \ldots A_n]_f \neq \emptyset$ si et seulement si $A_0 \ldots A_n$ est un mot de Σ_+.

Soit $H(f) = \{x \in I \setminus C^- \mid \exists y \neq x,\ \varphi(x) = \varphi(y)\}$; l'application φ est injective sur $I \setminus (C^- \cup H(f))$. Si Σ''_+ est l'image par φ de cet ensemble, on a une bijection $\varphi: I \setminus (C^- \cup H(f)) \to \Sigma''_+$. L'application réciproque est continue et est donnée par

$$\begin{array}{rccl} \varphi^{-1}: & \Sigma''_+ & \longrightarrow & I \setminus (C^- \cup H(f)) \\ & (A_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & x, \text{ où } \{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(A_n) \end{array}$$

On montre d'une part que $\Sigma_+ \setminus \Sigma''_+$ est dénombrable, et d'autre part qu'une mesure ergodique non atomique ne charge pas $H(f)$.

Lemme 5.2.5 (Buzzi) *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle, $\mathcal{P}$ la partition associée au fermé $C \supset C_f$ et Σ_+, Σ''_+ définis comme précédemment. Alors l'ensemble $\Sigma_+ \setminus \Sigma''_+$ est dénombrable.*

Preuve. Soit $x \in H(f)$ et $\varphi(x) = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'ensemble

$$J_x = \{y \in I \setminus C^- \mid \varphi(x) = \varphi(y)\} = \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(A_n) = \bigcap_{n\geq 0} [A_0 \dots A_n]_f$$

est inclus dans $H(f)$ et c'est un intervalle par le lemme 5.2.3. De plus, J_x contient au moins deux points distincts, donc c'est un intervalle d'intérieur non vide. Deux ensembles de ce type sont soit confondus soit disjoints, donc le nombre d'ensembles distincts J_x est au plus dénombrable. Comme $\varphi(J_x)$ est réduit à un point, $\varphi(H(f)) = \Sigma'_+ \setminus \Sigma''_+$ est dénombrable.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_+ \setminus \Sigma'_+$. Comme $\Sigma_+ = \overline{\Sigma'_+}$, pour tout $n \geq 0$ le mot $A_0 \dots A_n$ est le début d'un élément de Σ'_+, donc $[A_0 \dots A_n]_f \neq \emptyset$. Par ailleurs, $\left(\overline{[A_0 \dots A_n]_f}\right)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de compacts, donc

$$\bigcap_{n\geq 0} \overline{[A_0 \dots A_n]_f} \neq \emptyset. \tag{5.1}$$

L'ensemble $\bigcap_{n\geq 0} [A_0 \dots A_n]_f$ est vide, sinon $(A_n)_{n\geq 0} \in \Sigma'_+$. On a donc

$$\begin{aligned} \bigcap_{n\geq 0} \overline{[A_0 \dots A_n]_f} &= \left(\bigcap_{n\geq 0} \overline{[A_0 \dots A_n]_f}\right) \setminus \bigcap_{n\geq 0} [A_0 \dots A_n]_f \\ &= \bigcap_{n\geq 0} \left(\overline{[A_0 \dots A_n]_f} \setminus [A_0 \dots A_n]_f\right) \\ &\subset \overline{A_0} \setminus A_0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

En combinant les équations (5.1) et (5.2), on voit qu'il existe $x \in \overline{A_0} \setminus A_0$ tel que, pour tout $n \geq 0$, $x \in \overline{[A_0 \dots A_n]_f}$, ce qui implique que x est une extrémité de l'intervalle ouvert $[A_0 \dots A_n]_f$.

Soit $n \geq 0$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $B(x, \varepsilon) \cap A_0 \subset [A_0 \dots A_n]_f$, de sorte que A_n est l'unique élément de $\mathcal{P}$ intersectant $f^n(B(x,\varepsilon) \cap A_0)$. Ainsi, la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est entièrement déterminée par (A_0, x). Or $\mathcal{P}$ est dénombrable, $A \in \mathcal{P}$ et le point x appartient à l'ensemble dénombrable $\bigcup_{A\in\mathcal{P}} \overline{A} \setminus A = \bigcup_{A\in\mathcal{P}} \{\inf A, \sup A\}$. On en déduit que l'ensemble $\Sigma_+ \setminus \Sigma'_+$ est dénombrable.

Par ce qui précède, $\Sigma_+ \setminus \Sigma'_+$ et $\Sigma'_+ \setminus \Sigma''_+$ sont dénombrables, ce qui termine la preuve. □

Le résultat suivant est énoncé mais non démontré dans [23]. Par souci de clarté, nous en donnons une preuve.

Lemme 5.2.6 *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle, C un fermé contenant C_f et $H(f)$ défini comme ci-dessus. Si μ est une mesure ergodique non atomique, alors $\mu(H(f)) = 0$.*

Preuve. Si $x \in H(f)$, on pose $J_x = \{y \in I \setminus C^- \mid \varphi(y) = \varphi(x)\}$; c'est un intervalle (voir la preuve du lemme 5.2.5). Soit $x_0 \in H(f)$ et $\varphi(x_0) = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $U = \operatorname{Int}(J_{x_0})$. On distingue deux cas.

Premièrement, on suppose que les ensembles $(f^n(U))_{n\geq 0}$ sont disjoints. On a alors

$$\sum_{n\geq 0} \mu(f^n(U)) \leq 1. \tag{5.3}$$

Par ailleurs, $\mu(f^n(U)) = \mu(f^{-n}(f^n(U))) \geq \mu(U)$. En remplaçant dans l'équation (5.3), on trouve $\mu(U) = 0$. De plus, $\mu(J_{x_0}) = \mu(U) = 0$ car μ est non atomique.

Deuxièmement, on suppose qu'il existe $p < q$ tels que $f^p(U) \cap f^q(U) \neq \emptyset$. Ainsi, pour tout $n \geq 0$ on a $f^{p+n}(U) \cap f^{q+n}(U) \neq \emptyset$. Or $f^{p+n}(U) \subset A_{p+n}$ et $f^{q+n}(U) \subset A_{q+n}$, donc

$$A_{p+n} = A_{q+n} \text{ pour tout } n \geq 0. \tag{5.4}$$

On pose $m = q - p$ et $K = \{y \in I \setminus C^- \mid \varphi(y) = (A_{p+n})_{n\in\mathbb{N}}\}$. L'ensemble K est un intervalle et $f^p(J_{x_0}) \subset K$ donc $\mu(K) = \mu(f^{-p}(K)) \geq \mu(J_{x_0})$. De plus $f^m(K) \subset K$ par l'équation (5.4).

Par le lemme 5.2.3, $f^m|_K$ est strictement monotone car $K \subset [A_p \ldots A_{m+p-1}]_f$. Soit $g = f^{2m}|_K$; $g(K) \subset K$ et $g: K \to K$ est strictement croissante. Soit $x \in K$. Si $g(x) > x$, il existe $y > x$ tel que $g(y) = y$; on pose $y_0 = \min\{y > x \mid g(y) = y\}$. Il est facile de voir que la suite $(g^k(x))_{k\geq 0}$ est croissante et majorée par y_0, donc elle converge vers un point fixe de g, qui est y_0. De même, si on a $g(x) \leq x$, la suite $(g^k(x))_{k\geq 0}$ converge vers un point fixe de g. Ainsi, si $\mu(K) > 0$, μ est nécessairement concentrée sur les points fixes de f^{2m}, donc μ est atomique par ergodicité, ce qui est exclu. On obtient donc $\mu(K) = 0$, d'où $\mu(J_{x_0}) = 0$.

On a $H(f) = \bigcup_{x\in H(f)} J_x$. On a vu dans la preuve du lemme 5.2.5 que les J_x distincts sont en nombre au plus dénombrable. Par ce qui précède, $\mu(J_x) = 0$ pour tout $x \in H(f)$, donc $\mu(H(f)) = 0$. □

Les lemmes 5.2.5 et 5.2.6 conduisent à l'isomorphisme suivant.

Proposition 5.2.7 (Buzzi) *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle et C un fermé contenant C_f. Avec les notations introduites ci-dessus, l'application $\varphi : I \setminus (C^- \cup H(f)) \to \Sigma''_+$ est inversible bimesurable et $\varphi \circ f = \sigma \circ \varphi$.*

De plus, Σ''_+ est de mesure 1 dans Σ_+ pour toute mesure sans atome, et $I \setminus (C^- \cup H(f))$ est de mesure 1 dans I pour toute mesure ergodique sans atome ne chargeant pas C.

Quand l'ensemble C est dénombrable, il est de mesure nulle pour toute mesure non atomique. De même, l'ensemble C_f est négligeable pour toute mesure d'entropie non nulle si f est C^1. Pour le montrer, nous utilisons un résultat dû à Ruelle [69], que nous énonçons dans le cadre restreint d'une transformation de l'intervalle et d'une mesure ergodique.

Théorème 5.2.8 (inégalité de Ruelle-Margulis) *Soit $f: I \to I$ une transformation C^1 de l'intervalle et μ une mesure ergodique pour f. La quantité*

$$\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |(f^n)'(x)| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log |f'(f^k(x))|$$

est bien définie dans $[-\infty, +\infty[$ *pour presque tout* x *et est constante presque partout. Si on note* λ *cette constante, on a* $h_\mu(I, f) \leq \max(\lambda, 0)$.

Lemme 5.2.9 *Soit* $f\colon I \to I$ *une transformation* C^1 *de l'intervalle et* μ *une mesure ergodique. Si* $\mu(C_f) > 0$ *alors* $h_\mu(I, f) = 0$.

Preuve. On remarque tout d'abord que $C_f \subset \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$. On définit $\lambda(x)$ et λ comme dans le théorème 5.2.8. Soit $E = \{x \in I \mid \lambda(x) = \lambda\}$. On a $\mu(E) = 1$ et $\mu(E \cap C_f) > 0$. Si $x \in E \cap C_f$, alors $f'(x) = 0$, donc $(f^n)'(x) = \prod_{k=0}^n f'(f^k(x)) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi, $\lambda = \lambda(x) = -\infty$, et $h_\mu(I, f) \leq \max(0, \lambda) = 0$ par le théorème 5.2.8. □

Remarque 5.2.10 Dans [23], le lemme 5.2.9 est énoncé uniquement pour les transformations C^1 dont la dérivée est hölderienne (la preuve n'en est pas donnée). On voit que cette restriction n'est pas nécessaire.

5.2.2 Diagramme de Markov

Soit $\alpha = A_{-n} \dots A_0$ et $\beta = B_{-m} \dots B_0$ deux mots de Σ. On dit que α et β sont *équivalents* ($\alpha \approx \beta$) s'il existe $0 \leq k \leq \min\{n, m\}$ tel que

$$A_{-k} \dots A_0 = B_{-k} \dots B_0 \ ; \tag{5.5}$$

$$f^k([A_{-k} \dots A_0]_f) = f^n([A_{-n} \dots A_0]_f) = f^m([B_{-m} \dots B_0]_f). \tag{5.6}$$

Si k est l'entier minimal tel que $A_{-n} \dots A_0 \approx A_{-k} \dots A_0$, alors $A_{-k} \dots A_0$ est appelé la *partie significative* de $A_{-n} \dots A_0$. Deux mots de Σ sont équivalents si et seulement s'ils ont la même partie significative.

Si $\alpha = A_{-n} \dots A_0$ est un mot de Σ, on définit

$$\langle \alpha \rangle = f^n([A_{-n} \dots A_0]_f) = \bigcap_{i=0}^{n} f^i(A_{-i}).$$

Deux mots équivalents α, β satisfont $\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle$ par hypothèse, mais la réciproque n'est pas vraie à cause de la condition (5.5) (voir l'exemple donné par la figure 5.3).

De façon informelle, l'ensemble $\langle A_{-n} \dots A_0 \rangle$ représente les points de A_0 dont le « passé » est $A_{-n} \dots A_{-1}$. La partie significative d'un mot α est le passé minimum nécessaire pour connaître $\langle \alpha \rangle$, et donc le futur des points de $\langle \alpha \rangle$.

On définit le graphe orienté D de la façon suivante :
- les sommets de D sont les mots de Σ, quotientés par la relation d'équivalence $\approx$;
- il y a une arête $\alpha \to \beta$ si et seulement s'il existe $A_{-n}, \dots, A_0, A_1$ des éléments de $\mathcal{P}$ tels que $\alpha = A_{-n} \dots A_0/_\approx$ et $\beta = A_{-n} \dots A_0 A_1/_\approx$.

Si $\alpha = A_{-n} \dots A_0/_\approx$, on note $\langle \alpha \rangle = \langle A_{-n} \dots A_0 \rangle$ et on dit que $A_{-k} \dots A_0$ est la partie significative de α si c'est celle de $A_{-n} \dots A_0$.

On définit

$$D_n = \{\alpha \in D \mid \exists k \leq n, \exists A_0, \dots, A_k \in \mathcal{P}, \alpha = A_0 \dots A_k/_\approx\}.$$

On dit qu'un élément $\alpha \in D$ est de *hauteur* n si $\alpha \in D_n \setminus D_{n-1}$, ce qu'on note $H(\alpha) = n$.

Γ_D (resp. Γ_D^+) est l'ensemble des chemins infinis indexés par $\mathbb{Z}$ (resp. par $\mathbb{N}$) sur le graphe D ; si σ désigne le shift, (Γ_D, σ) est la chaîne de Markov (bilatérale) sur le graphe D. L'entropie du graphe D (ou de la chaîne de Markov sur D) est introduite dans la section 3.1.4 ; elle est notée $h(D)$. Nous rappelons qu'elle vérifie le principe variationnel (theorème 3.1.5), et cette propriété peut être prise comme définition équivalente :

$$h(D) = \sup\{h_\mu(\Gamma_D, \sigma) \mid \mu \text{ mesure } \sigma\text{-ergodique sur } \Gamma_D\}.$$

Le graphe D est appelé le *diagramme de Markov* associé à f relativement à C.

Dans la section 5.2.3 figurent des exemples de diagrammes de Markov, qui sont construits de proche en proche à partir de la fonction f.

Lemme 5.2.11 (Buzzi) *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle et D le diagramme de Markov associé à f relativement au fermé $C \supset C_f$. Soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ un chemin de D et A_k l'élément de $\mathcal{P}$ contenant $\langle \alpha_k \rangle$. Si $\alpha_0 = B_{-m} \ldots B_0/_\approx$, alors $\alpha_n = B_{-m} \ldots B_0 A_1 \ldots A_n/_\approx$.*

Preuve. Comme $\alpha_0 \to \alpha_1$, il existe $A_{-p}, \ldots, A_0, A_1 \in \mathcal{P}$ tels que $B_{-m} \ldots B_0 \approx A_{-p} \ldots A_0$ et $\alpha_1 = A_{-p} \ldots A_0 A_1/_\approx$. Par définition de l'équivalence, il existe $k \leq \min\{m, p\}$ tel que $B_{-k} \ldots B_0 = A_{-k} \ldots A_0$, et

$$\langle \alpha_0 \rangle = f^p([A_{-p} \ldots A_0]_f) = f^m([B_{-m} \ldots B_0]_f),$$

autrement dit

$$\bigcap_{i=0}^{p} f^i(A_{-i}) = \bigcap_{i=0}^{m} f^i(B_{-i}).$$

On en déduit immédiatement que $A_{-k} \ldots A_0 A_1 = B_{-k} \ldots B_0 A_1$ et

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 \rangle = f^{p+1}([A_{-p} \ldots A_0 A_1]_f) &= A_1 \cap \bigcap_{i=0}^{p} f^{i+1}(A_{-i}) \\ &= A_1 \cap \bigcap_{i=0}^{m} f^{i+1}(B_{-i}) \\ &= f^{m+1}([B_{-m} \ldots B_0 A_1]_f), \end{aligned} \tag{5.7}$$

c'est-à-dire $A_{-k} \ldots A_0 A_1 \approx B_{-m} \ldots B_0 A_1$. De plus $\langle \alpha_1 \rangle \subset A_1$ par (5.7).

Le reste de la preuve est obtenu par récurrence. $\square$

On a une application naturelle

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \Sigma_+ & \longrightarrow & \Gamma_D^+ \\ & (A_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (A_0 \ldots A_n/_\approx)_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$$

mais ψ ne commute pas avec le shift. Pour remédier à cela, on passe aux extensions naturelles de part et d'autre, mais il est nécessaire de se restreindre au sous-ensemble σ-invariant suivant :

$$\Sigma_0 = \{(A_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma \mid \forall n \in \mathbb{Z}, \exists k_0 \leq n, \forall k \leq k_0, A_k \ldots A_n \approx A_{k_0} \ldots A_n\}.$$

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_0$, alors $A_k \ldots A_n/_\approx$ est ultimement constant quand $k \to -\infty$, de sorte que l'application suivante est bien définie :

$$\begin{array}{rccc} \overline{\psi}: & \Sigma_0 & \longrightarrow & \Gamma_D \\ & (A_n)_{n \in \mathbb{Z}} & \longmapsto & (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \text{ où } \alpha_n = \lim\limits_{k \to -\infty} A_k \ldots A_n/_\approx \end{array}$$

On a alors :

Proposition 5.2.12 (Buzzi) *Soit $f\colon I \to I$ une transformation de l'intervalle et C un fermé contenant C_f. Avec les notations introduites ci-dessus, l'application $\overline{\psi}\colon \Sigma_0 \to \Gamma_D$ est inversible bimesurable et $\overline{\psi}\circ\sigma = \sigma\circ\overline{\psi}$.*

Preuve. Il est immédiat que $\overline{\psi}\circ\sigma = \sigma\circ\overline{\psi}$.

On définit

$$\begin{array}{rccl} \theta\colon & \Gamma_D & \longrightarrow & \mathcal{P}^{\mathbb{Z}} \\ & (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \longmapsto & (A_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ \text{où}\ \langle\alpha_n\rangle\subset A_n. \end{array}$$

Vu la définition de $\overline{\psi}$, on a $\theta\circ\overline{\psi} = \mathrm{Id}$. Il reste à montrer que $\theta(\Gamma_D)\subset\Sigma_0$ et que $\overline{\psi}\circ\theta = \mathrm{Id}$.

Soit $\bar{\alpha} = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Gamma_D$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \theta(\bar{\alpha})$. On fixe $n \geq 0$. Soit $B_{-m}\dots B_0$ la partie significative de α_{-n}, avec $B_0 = A_{-n}$. Par le lemme 5.2.11, on a $\alpha_n = B_{-m}\dots B_{-1}A_{-n}\dots A_n/_{\approx}$. En particulier,

$$\langle\alpha_n\rangle = f^{m+2n}\left([B_{-m}\dots B_{-1}A_{-n}\dots A_n]_f\right) \neq \emptyset,$$

de sorte que $f^m([B_{-m}\dots B_{-1}A_{-n}\dots A_n]_f)\neq\emptyset$. Or

$$[A_{-n}\dots A_n]_f \supset f^m([B_{-m}\dots B_{-1}A_{-n}\dots A_n]_f),$$

donc $[A_{-n}\dots A_n]_f$ n'est pas vide, ce qui signifie exactement que $A_{-n}\dots A_n$ est un mot de Σ_+. On en déduit que $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\Sigma$.

Soit $n\geq 0$ et $B_m\dots B_n$ la partie significative de α_n ($m = n - H(\alpha_n)\in\mathbb{Z}$). Soit $k\leq m$. Il existe $p\in\mathbb{Z}$ et $C_p,\dots,C_k\in\mathcal{P}$ tels que $\alpha_k = C_p\dots C_k/_{\approx}$, avec $C_k = A_k$. Selon le lemme 5.2.11, on a $\alpha_n = C_p\dots C_{k-1}A_kA_{k+1}\dots A_n/_{\approx}$. Étant donnée la définition de la partie significative, on a $B_m\dots B_n = A_m\dots A_n$ et

$$\langle\alpha_n\rangle = \langle C_p\dots C_{k-1}A_kA_{k+1}\dots A_n\rangle = \langle B_m\dots B_n\rangle\,.$$

Or

$$\langle C_p\dots C_{k-1}A_kA_{k+1}\dots A_n\rangle \subset \langle A_k\dots A_n\rangle$$

et

$$\langle B_m\dots B_n\rangle = \langle A_m\dots A_n\rangle \supset \langle A_k\dots A_n\rangle\,,$$

Donc $\langle\alpha_n\rangle = \langle A_k\dots A_n\rangle$ et $\alpha_n = A_k\dots A_n/_{\approx}$. Ceci est vrai pour tout $k\leq m$, donc l'application $k\mapsto A_k\dots A_n/_{\approx}$ est ultimement constante quand $k\to-\infty$, et α_n est égale à cette constante. On en déduit que $\theta(\bar{\alpha}) = (A_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\Sigma_0$ et $\overline{\psi}((A_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \bar{\alpha}$, c'est-à-dire $\overline{\psi}\circ\theta = \mathrm{Id}$. Ainsi, $\overline{\psi}$ est inversible et $\overline{\psi}^{-1} = \theta$. On vérifie que θ est continue et que $\overline{\psi}$ est mesurable. □

L'ensemble $\Sigma\setminus\Sigma_0$ est appelé la *partie non markovienne* de Σ. Il reste à évaluer son entropie. Dans [23], il est montré qu'elle est bornée par l'entropie topologique de C. On rappelle que l'entropie topologique d'un ensemble non nécessairement invariant est définie à partir du nombre de boules de Bowen recouvrant cet ensemble ; on renvoie à la section 1.3.2 pour la définition précise.

Proposition 5.2.13 (Buzzi) *Soit $f\colon I\to I$ une transformation de l'intervalle, C un ensemble fermé contenant C_f et Σ le sous-shift correspondant, construit ci-dessus. Alors*

$$h_{met}(\Sigma\setminus\Sigma_0,\sigma)\leq h_{top}(C,f).$$

Nous soulignons le fait que $h_{top}(C,f)$ n'est pas égale au supremum des entropies des mesures chargeant C car l'ensemble C n'est pas un fermé invariant. Nous donnerons plus loin une majoration de $h_{top}(C_f,f)$ pour des transformations régulières (proposition 5.4.12).

Les applications φ (définie en section 5.2.1) et $\overline{\psi}$ (ci-dessus) identifient partiellement la transformation de l'intervalle f avec un sous-shift, puis ce sous-shift avec une chaîne de Markov. Elles permettent de définir une application d'une partie de Γ_D vers I, de la façon suivante.

On note p la projection canonique de Σ sur Σ_+, $\mathcal{N} = \overline{\psi}\left(p^{-1}(\Sigma_+ \setminus \Sigma''_+) \cap \Sigma_0\right)$, et on définit :

$$\begin{array}{rrcl} \pi = \varphi^{-1} \circ p \circ \overline{\psi}^{-1}\colon & \Gamma_D \setminus \mathcal{N} & \longrightarrow & I \setminus (C_f^- \cup H(f)) \\ & (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \longmapsto & x, \text{ où } \langle \alpha_n \rangle \subset A_n \in \mathcal{P} \text{ et } \{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(A_n). \end{array}$$

L'application π est bien définie ; elle est mesurable, surjective, et $\pi \circ \sigma = f \circ \pi$.

$$\begin{array}{rcccccl} & \Gamma_D & \xrightarrow{\overline{\psi}^{-1}} & \Sigma_0 \subset \Sigma & \xrightarrow{p} & \Sigma_+ & \\ & & & & & \Sigma''_+ \xrightarrow{\varphi^{-1}} & I \setminus (C_f^- \cup H(f)) \\ \pi\colon & \Gamma_D \setminus \mathcal{N} & & \longrightarrow & & & I \setminus (C_f^- \cup H(f)) \end{array}$$

FIG. 5.1 – L'application π vue comme composition d'applications.

L'application π n'est évidemment pas inversible mais elle induit cependant une bijection entre les mesures ergodiques de « grande entropie », comme l'énonce le théorème suivant. L'hypothèse (i) servira à étudier les transformations monotones par morceaux en section 5.3, et l'hypothèse (ii), concernant les transformations C^1, sera utilisée dans la section 5.4.

Théorème 5.2.14 *Soit $f\colon I \to I$ une transformation de l'intervalle et C un ensemble fermé contenant C_f. On suppose qu'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

i) *C est dénombrable ;*

ii) *f est C^1 et $C = C_f \cup C_*$, où C_* est un ensemble fini.*

On suppose de plus que $h_{top}(I,f) > h_{top}(C,f)$. On utilise les notations définies ci-dessus. Alors $\nu \mapsto \mu = \pi_*\nu$ est une bijection préservant l'entropie entre les mesures σ-ergodiques ν sur Γ_D et les mesures f-ergodiques μ sur I telles que $h_\nu(\Gamma_D,\sigma) > h_{top}(C,f)$ et $h_\mu(I,f) > h_{top}(C,f)$.

En particulier, $h(D) = h_{top}(I,f)$ et π induit une bijection entre les mesures maximales ergodiques de f et celles de Γ_D.

De plus, $\mathcal{N}$ est de mesure nulle pour toute mesure σ-ergodique ν telle que $h_\nu(\Gamma_D,\sigma) > h_{top}(C,f)$.

Preuve. Soit μ une mesure f-ergodique telle que $h_\mu(I,f) > 0$, donc sans atome. On montre que $\mu(C) = 0$.
i) Si C est dénombrable, alors $\mu(C) = 0$;
ii) si $C = C_f \cup C_*$, où C_* est un ensemble fini, alors $\mu(C) = \mu(C_f)$. Par le lemme 5.2.9, $\mu(C_f) = 0$ si f est C^1.

Par les propositions 5.2.7 et 5.1.2, $\nu \mapsto \mu = \varphi_*^{-1}\nu$ est une bijection préservant l'entropie entre les mesures f-ergodiques μ sur I et les mesures σ-ergodiques ν sur Σ_+ telles que $h_\mu(I,f) > 0$ et $h_\nu(\Sigma_+,\sigma) > 0$.

Par la proposition 1.5.1, $\mu \mapsto p_*\mu$ est une bijection préservant l'entropie entre les mesures σ-ergodiques de Σ et de Σ_+.

Par les propositions 5.2.12, 5.2.13 et 5.1.2, $\nu \mapsto \mu = \overline{\psi}_*^{-1}\nu$ est une bijection préservant l'entropie entre les mesures σ-ergodiques μ sur Σ et les mesures σ-ergodiques ν sur Γ_D telles que $h_\mu(\Sigma,\sigma) > h_{top}(C,f)$ et $h_\nu(\Gamma_D,\sigma) > h_{top}(C,f)$.

Comme $\pi = \varphi^{-1} \circ p \circ \overline{\psi}^{-1}$, la combinaison des résultats précédents termine la preuve. □

Nous aurons besoin ultérieurement du résultat suivant.

Lemme 5.2.15 *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle et C un fermé contenant C_f. On garde les notations précédentes. Soit $\bar{\alpha} = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Gamma_D \setminus \mathcal{N}$ et $x = \pi(\bar{\alpha})$. Si la partie significative de α_n est $A_{-k}\dots A_0$ et si $k \leq n$, alors $f^{n-i}(x) \in A_{-i}$ pour $0 \leq i \leq k$.*

Preuve. Soit $0 \leq i \leq k$. Si $\alpha_{n-i} = B_{-m}\dots B_0/_\approx$, alors par le lemme 5.2.11 il existe $B_1,\dots,B_i \in \mathcal{P}$ tels que

$$\alpha_n = A_{-k}\dots A_0/_\approx = B_{-m}\dots B_0B_1\dots B_i/_\approx.$$

Par conséquent $B_0\dots B_i = A_{-i}\dots A_0$. En particulier, $\langle\alpha_{n-i}\rangle \subset B_0 = A_{-i}$. Par définition de π, ceci implique que $f^{n-i}(x) \in A_{-i}$. □

Sous les hypothèses du théorème 5.2.14, les mesures maximales ergodiques de f sont en bijection avec celles de Γ_D. Une chaîne de Markov transitive ne possède pas nécessairement de mesures maximales, mais elle en possède au plus une (lemme 3.1.3 et théorème 3.3.1). Le résultat suivant montre que cette propriété d'unicité se transmet aux transformations transitives de l'intervalle [23] ; la preuve que nous en donnons est tirée de [26].

Proposition 5.2.16 *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle et C un fermé contenant C_f. On suppose que les hypothèses du théorème 5.2.14 sont satisfaites et que f est transitive. Alors le diagramme de Markov D associé à f relativement à C contient au plus une composante connexe d'entropie strictement supérieure à $h_{top}(C,f)$. En particulier, f possède au plus une mesure maximale.*

Preuve. Soit G une composante connexe de D telle que $h(G) > h_{top}(C,f)$ et $\alpha_0 = A_{-p}\dots A_0/_\approx$ un sommet de D. Nous allons construire un chemin de α_0 vers G.

On définit $\mathcal{P}^n$ comme l'ensemble des intervalles ouverts disjoints $[A_0\dots A_{n-1}]_f$ avec $A_i \in \mathcal{P}$. Si $x \in I$, $\mathcal{P}^n(x)$ désigne l'élément de $\mathcal{P}^n$ contenant x si un tel élément existe.

$J = \langle\alpha_0\rangle$ est un intervalle ouvert (lemme 5.2.3) qui est non vide. L'ensemble $E = \bigcup_{n\geq 0} f^n(J)$ est une union d'intervalles, et par transitivité il existe k tel que $f^k(J) \cap J \neq \emptyset$, de sorte que E est une union finie d'intervalles. Par transitivité, E est dense dans I, donc $I \setminus E$ est réduit à un nombre fini de points.

On fixe une mesure ergodique ν sur Γ_G telle que $h_\nu(\Gamma_G,\sigma) > h_{top}(C,f)$ et on pose $\mu = \pi_*\nu$. Par le théorème 5.2.14, $h_\mu(I,f) = h_\nu(\Gamma_D,\sigma)$ et μ est ergodique ; en particulier μ est non atomique.

On note comme ci-dessus $\mathcal{N}$ le sous-ensemble sur lequel π n'est pas définie. On a les propriétés suivantes :

i) $\mu(E) = 1$;

ii) $\mu(\pi(\Gamma_G \setminus \mathcal{N})) = 1$;

iii) $\mu\left(\bigcup_{n,m\geq 0} f^{-n}f^m(C)\right) = 0$.

La propriété (i) est due au fait que μ est non atomique et que $I \setminus E$ consiste en un nombre fini de points. La propriété (ii) est immédiate car ν est supportée par Γ_G et $\nu(\mathcal{N}) = 0$ (théorème 5.2.14). Supposons que (iii) n'est pas vérifiée. Il existe $n, m \geq 0$ tels que $\mu(f^m(C)) = \mu(f^{-n}f^m(C)) > 0$, ce qui implique $h_\mu(I,f) \leq h_{top}(f^m(C),f) = h_{top}(C,f)$ par la formule de Katok (théorème 1.3.3). Or $h_\mu(I,f) = h_\nu(\Gamma_G,\sigma) > h_{top}(C,f)$, ce qui est une contradiction.

On déduit des propriétés (i), (ii), (iii) qu'il existe un point y appartenant à $E \cap \pi(\Gamma_G \setminus \mathcal{N})$ tel que $y \notin \bigcup_{n,m\geq 0} f^{-n}f^m(C)$. Comme $y \in \pi(\Gamma_D \setminus \mathcal{N}) = I \setminus (C^- \cup H(f))$, $\mathcal{P}^n(y)$ est bien défini pour tout $n \geq 0$. Les ensembles $\mathcal{P}^n(y)$ sont des intervalles décroissants, et leur longueur tend vers 0 (voir la définition de π). Soit $\bar{\beta} = (\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Gamma_G$ tel que $y = \pi(\bar{\beta})$. On note $B_{-q}\dots B_0$ la partie significative de β_0 et $z = \pi(\sigma^{-q}(\bar{\beta}))$. Par le lemme 5.2.15, on a $f^{q-i}(z) \in B_{-i}$ pour $0 \leq i \leq q$. Or $f^q(z) = y$, donc

$$y \in f^q(B_{-q}) \cap \dots \cap f^{-1}(B_{-1}) \cap B_0 = \langle \beta_0 \rangle \,.$$

Ainsi, l'ensemble $K = \langle \beta_0 \rangle$ contient y et c'est un intervalle ouvert (lemme 5.2.3). Comme $y \in E$, il existe $x \in J = \langle \alpha_0 \rangle$ et $k \geq 0$ tel que $y = f^k(x)$. Par le choix de y, $x \notin C^-$ donc pour tout $n \geq 0$, il existe $A_n \in \mathcal{P}$ tel que $f^n(x) \in A_n$. Pour tout $n \geq 0$, on définit $\alpha_n = A_{-p}\dots A_n/_\approx$ (on rappelle que $\alpha_0 = A_{-p}\dots A_0/_\approx$). L'ensemble $K' = \langle \alpha_k \rangle$ est un intervalle ouvert contenant y.

Par le lemme 5.2.11, $\beta_n = B_{-q}\dots B_{-1}A_kA_{k+1}\dots A_{k+n}/_\approx$ avec $B_0 = A_k$. L'intervalle $\mathcal{P}^n(y)$ est égal à $[A_k\dots A_{k+n-1}]_f$, et sa longueur tend vers 0. Par conséquent, il existe $n \geq 0$ tel que $[A_k\dots A_{k+n}]_f \subset K \cap K'$. On a

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_{n+k} \rangle &= f^{n+k+p}([A_{-p}\dots A_{n+k}]_f) \\
&= f^n(f^{k+p}([A_{-p}\dots A_k]_f) \cap [A_k\dots A_{n+k}]_f) \\
&= f^n(K' \cap [A_k\dots A_{n+k}]_f) \\
&= f^n([A_k\dots A_{n+k}]_f).
\end{aligned}$$

Le même calcul donne

$$\langle \beta_n \rangle = f^n(K \cap [A_k\dots A_{n+k}]_f) = f^n([A_k\dots A_{n+k}]_f).$$

Par conséquent, $\alpha_{n+k} = \beta_n$, et $(\alpha_0,\dots,\alpha_{n+k})$ est un chemin entre α_0 et $\beta_n \in G$.

Si G_1 et G_2 sont deux composantes connexes de D telles que $h(G_i) > h_{top}(C,f)$ $(i = 1,2)$, ce qui précède montre qu'il existe un chemin de G_1 vers G_2 et un chemin de G_2 vers G_1. Par conséquent $G_1 = G_2$, et D possède au plus une composante connexe d'entropie strictement supérieure à $h_{top}(C,f)$. La chaîne de Markov Γ_D admet au plus une mesure maximale ergodique par le corollaire 3.3.2, donc il en est de même pour f (théorème 5.2.14). Par la remarque 5.1.1, f admet au plus une mesure maximale. □

Pour faire le tour des résultats existants, citons le théorème de Buzzi [25], qui montre qu'une transformation $C^{1+\alpha}$ de l'intervalle est bien représentée par une chaîne de Markov dès que son entropie topologique est non nulle (on dit que f est $C^{1+\alpha}$ si f est C^1 et f' est α-hölderienne). Dans sa preuve, chacune des composantes connexes de $I \setminus C_f$ est redécoupée en un nombre infini d'intervalles. De cette façon, la dérivée de la transformation peut être minorée par un réel non nul sur chacun des intervalles considérés, qui sont d'autant plus petits que la dérivée est proche de zéro. Ce résultat est valable en dimension supérieure sous une hypothèse appelée *entropie-expansivité*.

Théorème 5.2.17 (Buzzi) *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle $C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$, telle que $h_{top}(I,f) > 0$. Alors il existe un ensemble fermé $C \supset C_f$ tel que l'extension naturelle de (I,f) soit h-conjuguée à (Γ_D,σ), où D est le diagramme de Markov associé à f relativement à C. En particulier, il y a une bijection entre les mesures maximales de (I,f) et celles de (Γ_D,σ).*

5.2.3 Exemples de diagrammes de Markov

Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle, C un fermé contenant C_f, $\mathcal{P}$ la partition associée à C et D le diagramme de Markov correspondant. On a $D_0 = \mathcal{P}$. Pour savoir quelles sont les arêtes partant de $A \in \mathcal{P}$ dans le graphe D, on considère $f(A)$ et on l'intersecte avec les éléments de $\mathcal{P}$. Si $B \in \mathcal{P}$ est tel que $B \subset f(A)$, alors on a une arête $A \to B$; si $B \cap f(A) \neq \emptyset$ mais $B \not\subset f(A)$ alors $AB \in D_1 \setminus D_0$ et $A \to AB$. De cette façon, on obtient l'ensemble des arêtes partant de D_0 et l'ensemble des sommets de D_1.

De même, si $A_0 \dots A_n \in D_n$ et $A_{n+1} \in \mathcal{P}$, il y a une arête $A_0 \dots A_n \to A_0 \dots A_n A_{n+1}$ si et seulement si $A_{n+1} \cap f(\langle A_0 \dots A_n \rangle) \neq \emptyset$. Le sommet $A_0 \dots A_n A_{n+1}$ appartient à D_{n+1}, mais peut être identifié à un sommet de D_n déjà construit. Les arêtes partant de D_n et les sommets de D_{n+1} sont obtenus exhaustivement de cette manière.

Définition 5.2.18 Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle, $\mathcal{P}$ la partition associée au fermé $C \supset C_f$ et D le diagramme de Markov correspondant. L'application f est dite *markovienne* si C est fini ou dénombrable et si, pour tous $A, B \in \mathcal{P}$ tels que $f(A) \cap B \neq \emptyset$, on a $f(A) \supset B$.

Si l'application f est markovienne, alors $D = \mathcal{P}$ et $\Sigma = \Gamma_D$. On a représenté en figure 5.2 une transformation f qui est markovienne relativement à une partition finie.

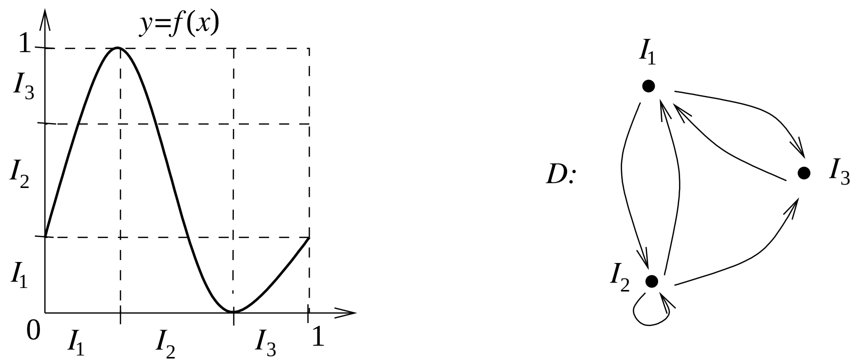


FIG. 5.2 – La transformation markovienne f et son diagramme de Markov D.

La figure 5.3 représente une transformation de l'intervalle g monotone par morceaux qui n'est pas markovienne ; on a représenté les premiers niveaux de son diagramme de Markov (relativement à C_g). On remarque que des sommets distincts peuvent avoir la même représentation sur l'intervalle, par exemple $\langle I_1 I_3 \rangle = \langle I_2 I_3 \rangle$ mais $I_1 I_3 \not\approx I_2 I_3$.

Dans [47], Hofbauer associe un graphe de Markov aux transformations monotones et continues par morceaux (c'est-à-dire que la transformation peut avoir des discontinuités). Les sommets du graphe sont les $\langle \alpha \rangle$, avec α mot de Σ. Cette construction, différente de celle présentée ici, ne vérifie pas le lemme 5.2.15.

Une famille d'exemples de transformations monotones et continues par morceaux est donnée par les β-shifts ($\beta > 1$) :

$$\begin{array}{rccc} T_\beta : & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & \beta x \bmod 1 \end{array}$$

Ces transformations sont markoviennes ou non selon la valeur de β. Nous renvoyons le lecteur à [83] et [46].

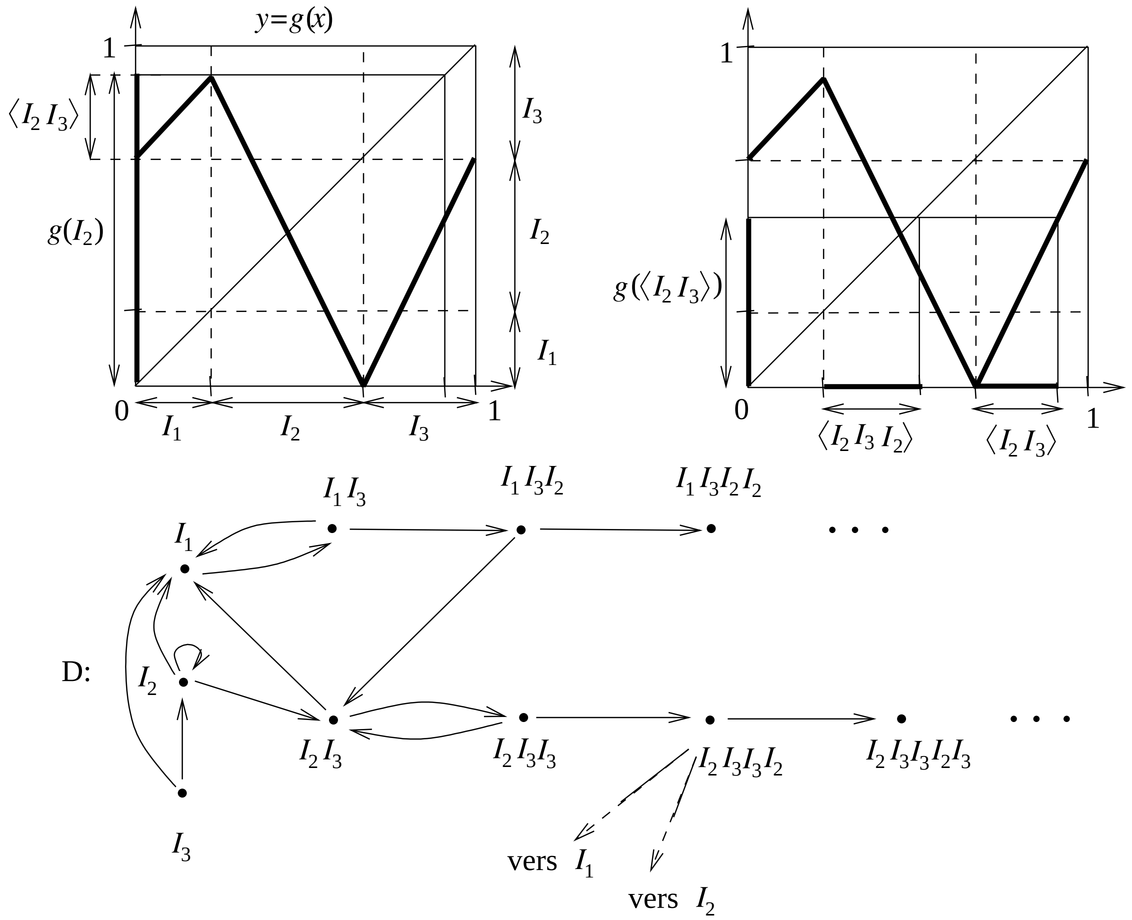


FIG. 5.3 – Diagramme de Markov de la transformation g. Pour visualiser les arêtes partant du sommet I_2 dans D, on décompose $g(I_2) = I_1 \cup I_2 \cup \langle I_2 I_3 \rangle$; à droite on a représenté $g(\langle I_2 I_3 \rangle) = I_1 \cup \langle I_2 I_3 I_2 \rangle$. En dessous figurent les premiers niveaux du diagramme de Markov D de g.

5.3 Transformations monotones par morceaux

On dit qu'une transformation f est *monotone par morceaux* si f est continue et C_f est fini. Dans [47], Hofbauer étudie la question des mesures maximales pour les transformations monotones par morceaux en utilisant une méthode qui généralise celle utilisée dans [46] et [83] pour les β-shifts et dont dérive celle présentée en section 5.2.

Soit $f : I \to I$ une transformation de l'intervalle monotone par morceaux d'entropie topologique non nulle. On considère la partition $\mathcal{P}$ associée à C_f, Σ_+ le sous-shift correspondant et D le diagramme de Markov de f relativement à C_f (voir la section 5.2). L'ensemble C_f est fini, de sorte qu'une mesure sans atome ne charge pas C_f, et on a également $h_{top}(C_f, f) = 0 < h_{top}(I, f)$. Ainsi, l'étude des mesures maximales ergodiques de f se ramène à celles de Σ_+ (propositions 5.2.7 et 5.1.2) ou à celles de Γ_D (théorème 5.2.14).

L'existence d'une mesure maximale se déduit directement des propriétés de (Σ_+, σ). La partition

$\mathcal{P}$ est finie, de sorte que Σ_+ est compact. Une distance sur Σ_+ est donnée par

$$d((A_n)_{n\in\mathbb{N}},(B_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\geq 0} \frac{1-\delta_{A_nB_n}}{2^n}, \text{ où } \delta_{ij}=1 \Leftrightarrow i=j.$$

Si $\bar{A}=(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\bar{B}=(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux éléments distincts de Σ_+, il existe un entier n tel que $A_n \neq B_n$, d'où $d(\sigma^n(\bar{A}),\sigma^n(\bar{B})) \geq 1$. Autrement dit, le système dynamique topologique (Σ_+,σ) est expansif. Or un système expansif possède au moins une mesure maximale [29], donc il possède également une mesure maximale ergodique (remarque 5.1.1). Par les propositions 5.2.7 et 5.1.2, f admet au moins une mesure maximale ergodique. Si f est transitive, la proposition 5.2.16 implique que la mesure maximale de f est unique.

Si f n'est pas transitive, il faut considérer les composantes connexes de D, qui sont au plus en nombre dénombrable. Dans [47], il est montré que l'entropie à l'infini du graphe D est nulle. On rappelle que $h(G)$ désigne l'entropie du graphe G (voir la section 3.1.4).

Lemme 5.3.1 (Hofbauer) *Soit $f: I \to I$ une transformation de l'intervalle monotone par morceaux et D le diagramme de Markov associé à f relativement à C_f. Alors* $\lim_{n\to+\infty} h(D\setminus D_n)=0$.

Comme le sous-graphe D_n est fini, il rencontre un nombre fini de composantes connexes, les autres sont donc incluses dans $D\setminus D_n$. Pour n assez grand, le lemme 5.3.1 dit que $h(D\setminus D_n) < h(D)$, ce qui implique que le nombre de composantes connexes d'entropie égale à $h(D)$ est fini. Par le théorème 3.3.1, chacune d'elles supporte au plus une mesure maximale ergodique. On en déduit que le nombre de mesures maximales ergodiques sur Γ_D est fini, donc il en est de même pour f par le théorème 5.2.14.

Remarque 5.3.2 La preuve d'existence de mesures maximales peut se faire en considérant uniquement le diagramme de Markov. La structure du graphe D – qui est non ramifié à l'infini, et dont l'entropie à l'infini est nulle – permet d'exhiber « à la main » une mesure maximale pour chaque composante connexe en étudiant la matrice d'incidence du graphe. Ceci est fait dans [48].

Les résultats ci-dessus donnent le théorème suivant.

Théorème 5.3.3 (Hofbauer) *Soit $f: I\to I$ une transformation de l'intervalle continue et monotone par morceaux. Si $h_{top}(I,f)>0$, alors f admet un nombre fini non nul de mesures maximales ergodiques ; si de plus f est transitive, la mesure maximale est unique.*

Remarque 5.3.4 Dans [47], Hofbauer étudie en fait les transformations monotones et continues par morceaux, c'est-à-dire que l'intervalle I se subdivise en sous-intervalles $I_1,\ldots,I_n$ tels que $f|_{I_i}$ est continue et monotone pour $1\leq i\leq n$, mais f n'est pas nécessairement continue sur I. Le théorème 5.3.3 reste valable dans cette situation.

5.4 Transformations C^r

Les résultats de cette section ont été obtenus en collaboration avec J. Buzzi [26]. Notre objectif est de montrer une condition suffisante pour l'existence d'une mesure maximale pour une transformation C^r de l'intervalle, $r\geq 1$. Pour cela, nous utilisons le fait qu'une chaîne de Markov sans mesure maximale admet une suite de mesures ergodiques presque maximales qui s'échappent vers l'infini, c'est-à-dire qui chargent de moins en moins n'importe quel sous-ensemble fini de sommets ; nous avons énoncé ce résulat dans le chapitre 3 (corollaire 3.4.3). Nous montrons ici que, quand la chaîne de Markov considérée est celle associée à f , alors l'entropie de telles mesures est majorée à la limite par $h_{top}(C_f, f) + h_{loc}(I, f)$ (la définition de l'entropie locale $h_{loc}(I, f)$ figure dans la section suivante). Comme les mesures ergodiques presque maximales de f correspondent à celles de son diagramme de Markov grâce au théorème 5.2.14, une transformation f vérifiant $h_{top}(I, f) > h_{top}(C_f, f) + h_{loc}(I, f)$ ne peut pas être dans cette situation, et possède donc une mesure maximale. On montre également que le nombre de mesures maximales ergodiques est fini.

En corollaire de ce critère d'existence, on obtient qu'une transformation de l'intervalle C^r admet une mesure maximale si $h_{top}(I, f) > \frac{2}{r} \log \|f'\|_\infty$, condition plus facilement calculable. À partir de ce résultat, on retrouve l'existence et la finitude du nombre de mesures maximales ergodiques pour une transformation C^∞ de l'intervalle [23].

Définition 5.4.1 Soit $f: I \to \mathbb{R}$ et $r \geq 1$ un réel. Soit $n = \lfloor r \rfloor$ et $\alpha = r - n \in [0, 1[$. On dit que f est C^r si f est C^n et $f^{(n)}$ est α-hölderienne.

5.4.1 Entropie locale

La notion d'*entropie locale* apparaît dans [61] et [23] ; elle s'inspire des idées de Bowen [21].

On rappelle quelques définitions (données dans la section 1.3.2). Soit X un espace métrique compact et $T: X \to X$ une ytansformation continue.

- $B_n(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(T^k x, T^k y) \leq \varepsilon, 0 \leq k < n\}$;
- si $Y \subset X$, un (n, ε)-recouvrement de Y est un ensemble $E \subset Y$ tel que $Y \subset \bigcup_{x \in E} B_n(x, \varepsilon)$;
- le cardinal minimal d'un (n, ε)-recouvrement de Y est noté $r_n(\varepsilon, Y)$.

Définition 5.4.2 Soit $T: X \to X$ une transformation continue sur un espace métrique compact X. L'*entropie locale* de (X, T) est définie par $h_{loc}(X, T) = \lim_{\varepsilon \to 0} h_{loc}(X, T, \varepsilon)$, où

$$h_{loc}(X, T, \varepsilon) = \lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \sup_{x \in X} r_n(\delta, B_n(x, \varepsilon)).$$

L'intérêt de l'entropie locale est qu'elle borne le défaut de semi-continuité supérieure de l'entropie métrique ([23], d'après [61]).

Proposition 5.4.3 *Soit $T: X \to X$ une transformation continue sur un espace métrique compact X. Si $(\mu_n)_{n \geq 0}$ est une suite de mesures invariantes convergeant vers μ, alors*

$$\limsup_{n \to +\infty} h_{\mu_n}(X, T) \leq h_\mu(X, T) + h_{loc}(X, T).$$

Si X est une variété riemannienne, l'entropie locale peut être majorée à l'aide de la dimension de X, de la norme de la différentielle et de l'ordre de différentiabilité de T. Ce résultat est montré de façons différentes dans [61, 91] et [23]. Nous l'énonçons dans le cadre restreint des transformations de l'intervalle.

Proposition 5.4.4 *Soit $f: I \to I$ une transformation C^r de l'intervalle, où $r \geq 1$ est un réel. Alors $h_{loc}(I, f) \leq \frac{1}{r} \log \|f'\|_\infty$.*

Remarque 5.4.5 Dans la proposition 5.4.4, la quantité $\|f'\|_\infty$ peut être remplacée par $R(f) = \inf_{n \geq 1} \sqrt[n]{\|(f^n)'\|_\infty}$; il suffit de considérer f^n pour tout $n \geq 1$.

Remarque 5.4.6 Si f est C^∞, son entropie locale est nulle par la proposition 5.4.4. Par conséquent, l'application $\mu \mapsto h_\mu(I,f)$ est semi-continue supérieurement (proposition 5.4.3), et f admet au moins une mesure maximale.

On rappelle que la formule de Katok (théorème 1.3.3) permet de calculer l'entropie d'une mesure ergodique à l'aide de recouvrements par des boules de Bowen. On a le résultat suivant.

Lemme 5.4.7 *Soit $T\colon X \to X$ une transformation continue sur un espace métrique compact X et μ une mesure ergodique. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$h_\mu(X,T) \le h_\mu(X,T,\varepsilon) + h_{loc}(X,T,\varepsilon).$$

Preuve. On fixe $\lambda \in]0,1[$. Soit $\delta > 0$, n un entier arbitrairement grand et $Y \subset X$ tel que $\mu(Y) \ge \lambda$. Soit C un (n,ε)-recouvrement de Y de cardinal $r_n(\varepsilon,Y)$. Pour tout $x \in C$, on prend un (n,δ)-recouvrement de $B_n(x,\varepsilon)$ de cardinal $r_n(\delta, B_n(x,\varepsilon))$. L'ensemble de toutes ces boules de Bowen de rayon δ et d'ordre n forme un (n,δ)-recouvrement de Y, donc

$$r_n(\delta,Y) \le r_n(\varepsilon,Y) \max_{x\in C} r_n(\delta, B_n(x,\varepsilon)),$$

autrement dit,

$$\frac{1}{n}\log r_n(\delta,Y) \le \frac{1}{n}\log r_n(\varepsilon,Y) + \frac{1}{n}\log \sup_{x\in X} r_n(\delta, B_n(x,\varepsilon)).$$

En prenant la limite quand $\delta \to 0$ et en utilisant la formule de Katok (théorème 1.3.3), on obtient $h_\mu(X,T) \le h_\mu(X,T,\varepsilon) + h_{loc}(X,T,\varepsilon)$. □

5.4.2 Entropie à l'infini

Soit D le diagramme de Markov associé à f relativement au fermé $C = C_f \cup C_*$, où C_* est un ensemble fini. Nous considérons une suite de mesures ergodiques sur Γ_D qui chargent de moins en moins chaque sous-ensemble fini de sommets et dont l'entropie est minorée par $h_{top}(C_f,f)$. Nous montrons que ces mesures chargent de moins en moins le sous-graphe D_N quand N tend vers l'infini (proposition 5.4.8). Puis nous montrons que, sous certaines hypothèses sur l'ensemble C, l'entropie de ces mesures est bornée (proposition 5.4.10).

Si $F \subset D$, le cylindre $[F]$ est défini par $[F] = \{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Gamma_D \mid \alpha_0 \in F\}$.

Proposition 5.4.8 *Soit $f\colon I \to I$ une transformation C^1 de l'intervalle et C_* un sous-ensemble fini de I. On considère le diagramme de Markov D associé à f relativement à $C = C_f \cup C_*$. Soit $(\nu_n)_{n\ge 0}$ une suite de mesures ergodiques sur Γ_D telles que $h_{\nu_n}(\Gamma_D,\sigma) > h_{top}(C_f,f)$. Si $\lim_{n\to+\infty} \nu_n([F]) = 0$ pour tout sous-ensemble fini de sommets $F \subset D$, alors $\lim_{n\to+\infty} \nu_n([D_N]) = 0$ pour tout entier N.*

Preuve. On fixe un entier N. Si $r > 0$, on définit le sous-ensemble de sommets suivant :

$$F_r = \{A_{-k} \dots A_0/\!\approx\, \in D \mid k \le N \text{ et } |A_{-i}| > r \text{ pour tout } 0 \le i \le k\} \subset D_N.$$

L'ensemble F_r est fini parce que le nombre d'éléments $A \in \mathcal{P}$ tels que $|A| > r$ est fini. Par hypothèse, il existe $n(r)$ tel que $\nu_n([F_r]) < \varepsilon$ pour tout $n \ge n(r)$. La transformation f est C^1 donc C_f est inclus dans l'ensemble $(f')^{-1}(0)$. Comme $C = C_f \cup C_*$ et que C_* est fini, il existe $r_0 > 0$ tel que, pour tout $r \le r_0$ et $A \in \mathcal{P}$,

$$|A| \le r \Rightarrow \forall x \in A, d(x,(f')^{-1}(0)) \le r.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $0 < \beta < 1$ tel que $\frac{\log \|f'\|_\infty}{|\log \beta|} < \frac{\varepsilon}{N+1}$. Par continuité de f', on peut choisir $r > 0$ tel que

$$A \in \mathcal{P}, |A| \leq r \Rightarrow \forall x \in A, |f'(x)| < \beta. \tag{5.8}$$

Soit $\pi: \Gamma_D \setminus \mathcal{N} \to I$ l'application définie dans la section 5.2.2. On pose $\mu_n = \pi_* \nu_n$ pour tout entier $n \geq 0$; par le théorème 5.2.14, la mesure μ_n est ergodique et $h_{\mu_n}(I, f) = h_{\nu_n}(\Gamma_D, \sigma) > 0$. Soit $\lambda(x) = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \log |f'(f^i(x))|$. Le théorème 5.2.8 donne $0 < h_{\mu_n}(I, f) \leq \lambda(x)$ pour μ_n-presque tout x. Par conséquent, il existe un point $\bar{\alpha} = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \Gamma_D$, générique pour ν_n, tel que pour $x = \pi(\bar{\alpha})$, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \log |f'(f^i(x))| > 0.$$

Soit k suffisamment grand pour que $\sum_{i=0}^{k-1} \log |f'(f^i(x))| > 0$. On définit

$$\mathcal{I} = \{0 \leq i < k \mid \exists A \in \mathcal{P}, |A| \leq r, f^i(x) \in A\}.$$

En utilisant l'équation (5.8), on obtient

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{i=0}^{k-1} \log |f'(f^i(x))| &= \sum_{i\in\mathcal{I}} \log |f'(f^i(x))| + \sum_{\substack{0 \leq i < k \\ i \notin \mathcal{I}}} \log |f'(f^i(x))| \\ &\leq \#\mathcal{I} \cdot \log \beta + k \log \|f'\|_\infty. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\#\mathcal{I} < \frac{k \log \|f'\|_\infty}{|\log \beta|} < \frac{k\varepsilon}{N+1}.$$

Soit $N \leq i < k$ tel que $\alpha_i \in D_N \setminus F_r$, autrement dit la partie significative de α_i est de la forme $A_{-m} \ldots A_0$ avec $m \leq N$ et $|A_{-j}| \leq r$ pour un certain $0 \leq j \leq m$. Comme $j \leq i$, le lemme 5.2.15 s'applique et $f^{i-j}(x) \in A_{-j}$, de sorte que $i - j \in \mathcal{I}$. On remarque que, pour un i donné, il y a au plus $N + 1$ indices j comme ci-dessus, donc

$$\frac{1}{N+1} \#\{N \leq i < k \mid \alpha_i \in D_N \setminus F_r\} \leq \#\mathcal{I}.$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \#\{0 \leq i < k \mid \alpha_i \in D_N \setminus F_r\} &\leq \frac{N}{k} + \frac{(N+1)\#\mathcal{I}}{k} \\ &\leq \frac{N}{k} + \varepsilon \end{aligned}$$

et cette inégalité est valable pour tous les entiers k suffisamment grands. De plus, $\bar{\alpha}$ est générique pour ν_n, donc

$$\nu_n([D_N \setminus F_r]) = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \#\{0 \leq i < k \mid \alpha_i \in D_N \setminus F_r\} \leq \varepsilon.$$

Pour $n \geq n(r)$, on obtient

$$\nu_n([D_N]) = \nu_n([D_N \setminus F_r]) + \nu_n([F_r]) \leq 2\varepsilon.$$

Ceci termine la preuve. □

Nous aurons besoin du lemme combinatoire suivant.

Lemme 5.4.9 *Soit* $0 < \alpha < 1/2$ *et* $\varepsilon > 0$. *On définit* $\phi(\alpha) = -\alpha \log \alpha - (1-\alpha)\log(1-\alpha)$. *Alors* $\lim_{\alpha \to 0} \phi(\alpha) = 0$ *et pour tout entier* n *suffisamment grand on a*

$$n \binom{n}{\alpha n} \leq e^{(\phi(\alpha)+\varepsilon)n}.$$

Preuve. En utilisant la formule de Stirling, on obtient l'équivalence suivante pour $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned} \binom{n}{\alpha n} &\sim K \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{(\alpha n)^{\alpha n} e^{-\alpha n}\sqrt{\alpha n}\,.\,[(1-\alpha)n]^{(1-\alpha)n} e^{-(1-\alpha)n}\sqrt{(1-\alpha)n}} \\ &\sim K' \frac{1}{\alpha^{\alpha n}(1-\alpha)^{(1-\alpha)n}\sqrt{n}} \end{aligned}$$

où K et K' sont deux constantes strictement positives. Par conséquent,

$$\binom{n}{\alpha n} \sim K'\sqrt{n}\; e^{\phi(\alpha)n},$$

et pour tout entier n suffisamment grand, on a

$$\binom{n}{\alpha n} \leq e^{(\phi(\alpha)+\varepsilon)n}.$$

De plus, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \alpha \log \alpha = 0$, donc $\lim\limits_{\alpha \to 0} \phi(\alpha) = 0$. □

Proposition 5.4.10 *Soit* $f: I \to I$ *une transformation* C^1. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *satisfaisant la propriété suivante. On définit* $C_* = I \cap \mathbb{Z}\delta$ *et on considère le diagramme de Markov* D *associé à* f *relativement à* $C = C_f \cup C_*$. *Soit* $(\nu_n)_{n \geq 0}$ *une suite de mesures ergodiques sur* Γ_D *telle que* $\lim_{n \to +\infty} \nu_n([F]) = 0$ *pour tout sous-ensemble fini de sommets* $F \subset D$. *On a alors*

$$\limsup_{n \to +\infty} h_{\nu_n}(\Gamma_D, \sigma) \leq h_{top}(C_f, f) + h_{loc}(I, f) + \varepsilon.$$

Preuve. Étant données la formule de Bowen (théorème 1.3.2) et la définition de l'entropie locale (définition 5.4.2), il existe $\delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} h_{top}(C_f, f, \delta) &< h_{top}(C_f, f) + \varepsilon \\ h_{loc}(I, f, 4\delta) &< h_{loc}(I, f) + \varepsilon. \end{aligned}$$

L'ensemble C_* est fini et $r_n(\delta, C) \leq r_n(\delta, C_f) + \#C_*$ pour tout $n \geq 0$, donc

$$h_{top}(C, f, \delta) \leq h_{top}(C_f, f, \delta) < h_{top}(C_f, f) + \varepsilon.$$

Soit C_n un (n, δ)-recouvrement de C de cardinalité $r_n(\delta, C)$, c'est-à-dire

$$C_n \subset C, \; C \subset \bigcup_{x \in C_n} B_n(x, \delta) \text{ et } \#C_n \text{ est minimal.}$$

Il existe un entier N_0 tel que

$$\#C_n \leq e^{(h_{top}(C_f, f)+\varepsilon)n} \text{ pour tout } n \geq N_0. \tag{5.9}$$

Selon le lemme 5.4.9, il existe deux entiers M_0, N tels que $N \geq N_0$ et

$$\forall n \geq M_0,\ \frac{n}{N}\binom{n}{2n/N} < \frac{e^{\varepsilon n}}{N} \leq e^{\varepsilon n}. \tag{5.10}$$

Soit $(\nu_n)_{n\geq 0}$ une suite de mesures ergodiques sur Γ_D satisfaisant l'hypothèse de la proposition. On peut supposer sans perte de généralité que $h_{\nu_n}(\Gamma_D, \sigma) > h_{top}(C_f, f)$ pour tout $n \geq 0$. Par la proposition 5.4.8, $\lim_{n\to+\infty} \nu_n([D_N]) = 0$. Soit $\pi\colon \Gamma_D \setminus \mathcal{N} \to I$ l'application définie dans la section 5.2.2. On fixe $m \geq M_0$ tel que $\nu_m([D_N]) < \varepsilon$ et on pose $\nu = \nu_m$, $\mu = \pi_*\nu$. Le théorème 5.2.14 donne $h_\mu(I, f) = h_\nu(\Gamma_D, \sigma)$.

Par le théorème ergodique de Birkhoff, pour ν-presque tout $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Gamma_D$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\#\{0 \leq k < n \mid \alpha_k \in D_N\} = \nu([\mathcal{D}_N]) < \varepsilon.$$

Par conséquent, il existe un ensemble $E_0 \subset \Gamma_D$ et un entier $M \geq M_0$ tel que $\nu(E_0) > 0$ et

$$\forall (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in E_0, \forall n \geq M, \frac{1}{n}\#\{0 \leq k < n \mid \alpha_k \in D_N\} < \varepsilon. \tag{5.11}$$

Soit $\beta \in D$ tel que $\nu(E_0 \cap [\beta]) > 0$. L'ensemble $\mathcal{N}$ sur lequel π n'est pas définie est de ν-mesure nulle (théorème 5.2.14). On pose $E = (E_0 \cap [\beta]) \setminus \mathcal{N}$. On a $\mu(\pi(E)) \geq \nu(E) > 0$. Notre objectif est de borner $r_n(4\delta, \pi(E))$, ce qui conduira à une majoration de $h_\nu(\Gamma_D, \sigma)$.

Dans la suite, l'intervalle d'entiers $[a, b] \cap \mathbb{Z}$ est noté $[\![a, b]\!]$, avec des conventions évidentes pour $[\![a, b[\![$, etc.

Soit $\bar{\alpha} = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in E$ et $x = \pi(\bar{\alpha})$. Fixons maintenant $n \geq M$. On rappelle que $H(\beta) = k$ si $\beta \in D_k \setminus D_{k-1}$. On définit un ensemble fini $\{1, \ldots, p\}$ et des intervalles disjoints $([\![a_i, b_i[\![)_{1\leq i\leq p}$, qui satisfont les propriétés suivantes.

i) $-H(\beta) \leq a_p < b_p \leq a_{p-1} < \cdots \leq a_2 < b_2 \leq a_1 < b_1 \leq n$;
ii) $n_i = b_i - a_i > N$ pour tout $1 \leq i \leq p$;
iii) $\#\left([\![0, n[\![\setminus \bigcup_{i=1}^p [\![a_i, b_i[\![\right) < \varepsilon n$;
iv) il existe $z_i \in C_{n_i}$ tel que $f^{a_i}(x) \in B_{n_i}(z_i, 2\delta)$ pour tout $1 \leq i \leq p$.

Pour définir p et les intervalles $[\![a_i, b_i[\![$, on pose $a_0 = n$ et on procède par récurrence. Supposons que a_{i-1} est déjà défini. Soit k le plus grand entier tel que $0 < k \leq a_{i-1}$ et $\alpha_k \notin D_N$. Si un tel k n'existe pas, alors on pose $p = i - 1$ et la construction s'arrête. Sinon, on pose $b_i = k$ et $a_i = b_i - H(\alpha_{b_i})$. Comme $H(\alpha_{b_i}) > N$ par choix de k, la construction finit par s'arrêter.

On montre à présent que ces intervalles ont les propriétés voulues. La partie significative de $\alpha_0 = \beta$ est de la forme $A_{-H(\beta)} \ldots A_0$. Par le lemme 5.2.11, il existe $A_k \in \mathcal{P}, k \geq 1$, tels que $\alpha_k \approx A_{-H(\beta)} \ldots A_0 A_1 \ldots A_k$ pour tout $k \geq 0$. Ceci implique que $H(\alpha_k) \leq H(\beta) + k$, d'où $a_i = b_i - H(\alpha_{b_i}) \geq -H(\beta)$; ceci implique la propriété (i).

Par définition, $\alpha_{b_i} \notin D_N$, autrement dit $H(\alpha_{b_i}) > N$. Comme $n_i = b_i - a_i = H(\alpha_{b_i})$, la propriété (ii) est satisfaite.

Soit $\mathcal{I} = \{0 \leq k < n \mid \alpha_k \in D_N\}$. L'équation (5.11) indique que $\#\mathcal{I} < n\varepsilon$. Si k vérifie $0 < k \leq a_p$ ou $b_i < k \leq a_{i-1}$ pour un certain $1 \leq i \leq p$, alors $\alpha_k \in D_N$ en raison de la définition de $(b_i)_{1\leq i\leq p}$. Par conséquent,

$$]\!]0, a_p]\!] \cup \bigcup_{i=1}^p]\!]b_i, a_{i-1}]\!] \subset \mathcal{I}.$$

On a
$$[\![0,n[\![\setminus \bigcup_{i=1}^{p}[\![a_i,b_i[\![= [\![0,a_p[\![\cup \bigcup_{i=1}^{p}[\![b_i,a_{i-1}[\![.$$
De plus, $\#[\![a,b[\![=\#]\!]a,b]\!]$, si bien que
$$\#\left([\![0,n[\![\setminus \bigcup_{i=1}^{p}[\![a_i,b_i[\![\right) = \#\left(]\!]0,a_p]\!]\cup \bigcup_{i=1}^{p}]\!]b_i,a_{i-1}]\!]\right) \leq \#\mathcal{I} < n\varepsilon.$$
C'est la propriété (iii).

Finalement, nous montrons que la propriété (iv) est vérifiée. Soit $1 \leq i \leq p$; on note $A_{-k}\dots A_0$ la partie significative de α_{a_i}. Par le lemme 5.2.11, il existe $A_1,\dots,A_{n_i} \in \mathcal{P}$ tels que $\alpha_{b_i} = A_{-k}\dots A_0A_1\dots A_{n_i}/\approx$. D'autre part, la partie significative de α_{b_i} est de la forme $B_{-n_i}\dots B_0$ (car $H(\alpha_{b_i}) = n_i$). La définition de la partie significative donne alors $A_0\dots A_{n_i} = B_{-n_i}\dots B_0$ et
$$f^{n_i-1}([B_{-(n_i-1)}\dots B_0]_f) \supsetneq f^{n_i}([B_{-n_i}\dots B_0]_f).$$
Par définition,
$$\begin{aligned} f^{n_i}([B_{-n_i}\dots B_0]_f) &= \bigcap_{k=0}^{n_i} f^k(B_{-k}) \\ &= f^{n_i}(B_{-n_i}) \cap f^{n_i-1}([B_{-(n_i-1)}\dots B_0]_f), \end{aligned}$$
donc $f^{n_i}(B_{-n_i}) \not\supset f^{n_i-1}([B_{-(n_i-1)}\dots B_0]_f)$, ce qui entraîne que
$$f(B_{-n_i}) \not\supset [B_{-(n_i-1)}\dots B_0]_f. \tag{5.12}$$
En outre, $[B_{-n_i}\dots B_0]_f \neq \emptyset$ de sorte que
$$f(B_{-n_i}) \cap [B_{-(n_i-1)}\dots B_0]_f \neq \emptyset. \tag{5.13}$$
La fonction f est monotone sur B_{-n_i} et l'ensemble $[B_{-(n_i-1)}\dots B_0]_f$ est un intervalle (lemme 5.2.3) ; en combinant ceci avec les équations (5.12) et (5.13), il s'ensuit qu'il existe $z \in \partial B_{-n_i}$ tel que $f(z) \in [B_{-(n_i-1)}\dots B_0]_f$. Autrement dit, $f^k(z) \in \overline{B_{-n_i+k}}$ pour $0 \leq k \leq n_i$.

$H(\alpha_{b_i}) = n_i$ et $b_i = a_i + n_i$, de sorte que $f^{b_i-(n_i-k)}(x) = f^{a_i+k}(x) \in B_{-n_i+k}$ pour tout $0 \leq k \leq n_i$ selon le lemme 5.2.15. De plus, la longueur de chaque élément de $\mathcal{P}$ est inférieur à δ à cause de la définition de C. Par conséquent, $|f^{a_i+k}(x) - f^k(z)| \leq \delta$ pour $0 \leq k < n_i$, c'est-à-dire $f^{a_i}(x) \in B_n(z,\delta)$. Comme $z \in \partial B_{-n_i} \subset C$, il existe $z_i \in C_{n_i}$ tel que $z \in B_{n_i}(z_i,\delta)$, de sorte que $f^{a_i}(x) \in B_{n_i}(z_i,2\delta)$. La propriété (iv) est satisfaite.

Une *description* de x jusqu'au temps n est une suite de points $(x_k)_{0\leq k<n}$ telle que
- $x_{a_i+k} = f^k(z_i)$ si $1 \leq i \leq p$ et $0 \leq k < n_i$;
- $x_k \in C_*$ et $|f^k(x) - x_k| \leq \delta$ si $k \notin \bigcup_{i=1}^{p}[\![a_i,b_i[\![$.

On souligne que ces conditions impliquent que $|f^k(x) - x_k| \leq 2\delta$ pour $0 \leq k < n$. Nous allons majorer le nombre de descriptions distinctes possibles.

Premièrement, $p \leq \frac{n+H(\beta)}{N}$ et, quand p est déjà fixé, il y a au plus $\binom{n+H(\beta)}{2p}$ choix pour les positions des entiers $(a_i,b_i)_{1\leq i\leq p}$ dans $[\![-H(\beta),n[\![$. Ainsi, le nombre total de choix de p et des intervalles $([\![a_i,b_i[\![)_{1\leq i\leq p}$ est majoré par
$$\frac{n+H(\beta)}{N}\binom{n+H(\beta)}{2(n+H(\beta))/N} < e^{\varepsilon n},$$

l'inégalité provenant de l'équation (5.10).

Deuxièmement, pour chaque $1 \leq i \leq p$, le nombre de choix de $z_i \in C_{n_i}$ est au plus $\#C_{n_i} \leq e^{(h_{top}(C_f,f)+\varepsilon)n_i}$ par l'équation (5.9) car $n_i > N \geq N_0$. Ainsi, le nombre de choix de $(z_i)_{1\leq i\leq p}$ est majoré par

$$\prod_{i=1}^{p} e^{(h_{top}(C_f,f)+\varepsilon)n_i} \leq e^{(h_{top}(C_f,f)+\varepsilon)n}.$$

Troisièmement, on considère $k \in [\![0,n[\![\setminus \bigcup_{i=1}^{p} [\![a_i,b_i[\![$. Si $k=0$, alors le nombre de choix de x_0 est inférieur à $\#C_*$. Si $k>0$, alors

$$\begin{aligned} |x_k - f(x_{k-1})| &\leq |x_k - f^k(x)| + |f^k(x) - f(x_{k-1})| \\ &\leq 2\delta + |f^{k-1}(x) - x_{k-1}| \|f'\|_\infty \\ &\leq \delta\left(2\|f'\|_\infty + 2\right). \end{aligned}$$

Ainsi, x_k est dans l'intervalle de longueur $L = \delta(4\|f'\|_\infty + 4)$ centré autour de $f(x_{k-1})$. Si les points $x_0,\ldots,x_{k-1}$ sont déjà choisis, le nombre de choix de x_k dans C_* est borné par la quantité $L/\delta + 1 = 4\|f'\|_\infty + 5$. De plus, $\#\left([\![0,n[\![\setminus \bigcup_{i=1}^{p} [\![a_i,b_i[\![\right) < \varepsilon n$ à cause de la propriété (iii). Par conséquent, $\#(C_*)\left(4\|f'\|_\infty + 5\right)^{\varepsilon n}$ majore le nombre de choix de x_k pour $k \in [\![0,n[\![\setminus \bigcup_{i=1}^{p} [\![a_i,b_i[\![$.

Finalement, le nombre de descriptions distinctes est inférieur à

$$N_d = \#(C_*) e^{(h_{top}(C_f,f)+\varepsilon+\varepsilon\log(4\|f'\|_\infty+5))n}.$$

Si x,y ont la même description, alors $|f^k(x) - f^k(y)| \leq 4\delta$ pour tout $0 \leq k < n$. Par conséquent, il existe un $(n,4\delta)$-recouvrement de $\pi(E)$ de cardinal inférieur à N_d, c'est-à-dire $r_n(4\delta,\pi(E)) \leq N_d$. Par la formule de Katok (théorème 1.3.3), $h_\mu(I,f,4\delta) \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log r_n(4\delta,\pi(E))$ car $\mu(\pi(E)) > 0$, de sorte que

$$h_\mu(I,f,4\delta) \leq h_{top}(C_f,f) + \varepsilon + \varepsilon\log(4\|f'\|_\infty + 5).$$

En appliquant le lemme 5.4.7 et vu le choix initial de δ, on a

$$\begin{aligned} h_\mu(I,f) &\leq h_\mu(I,f,4\delta) + h_{loc}(I,f,4\delta) \\ &\leq h_{top}(C_f,f) + h_{loc}(I,f) + \varepsilon(2 + \log(4\|f'\|_\infty + 5)) \end{aligned}$$

On rappelle que $h_\nu(\Gamma_D,\sigma) = h_\mu(I,f)$. Quitte à diviser ε par $(2+\log(4\|f'\|_\infty+5))$, ceci termine la preuve. □

5.4.3 Existence d'une mesure maximale

Nous montrons un critère d'existence et de finitude de mesures maximales pour une transformation C^1 de l'intervalle. Nous en déduisons deux corollaires pour les fonctions C^r et C^∞.

Théorème 5.4.11 *Soit $f\colon I \to I$ une transformation C^1 de l'intervalle telle que $h_{top}(I,f) > h_{top}(C_f,f) + h_{loc}(I,f)$. Alors f admet une mesure maximale. De plus, le nombre de mesures maximales ergodiques est fini et, si f est transitive, la mesure maximale est unique.*

Preuve. On montre en fait le résultat suivant :

Soit $f: I \to I$ une transformation C^1 de l'intervalle telle que $h_{top}(I,f) > h_{top}(C_f,f)$. Si f n'a pas de mesure maximale ergodique, ou si f admet une infinité de mesures maximales ergodiques distinctes, alors $h_{top}(I,f) \leq h_{top}(C_f,f) + h_{loc}(I,f)$.

On fixe $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ le réel donné par la proposition 5.4.10, $C_* = I \cap \mathbb{Z}\delta$, $C = C_f \cup C_*$ et D le diagramme de Markov correspondant. Par hypothèse, $h_{top}(I,f) > h_{top}(C_f,f) = h_{top}(C,f)$ donc $h_{top}(I,f) = h(D)$ et il y a une bijection entre les mesures maximales ergodiques de (I,f) et celles de (Γ_D, σ) par le théorème 5.2.14.

On suppose tout d'abord que f n'a pas de mesure maximale ergodique. Ainsi, Γ_D n'a pas de mesure maximale ergodique non plus, et le corollaire 3.4.3 s'applique : il existe une suite de mesures ergodiques $(\nu_n)_{n\geq 0}$ telles que $h_{\nu_n}(\Gamma_D,\sigma) \to h(D)$ et pour tout ensemble fini de sommets $F \subset D$, $\nu_n([F]) \to 0$ quand $n \to +\infty$. La proposition 5.4.10 donne alors

$$\limsup_{n\to+\infty} h_{\nu_n}(\Gamma_D,\sigma) \leq h_{top}(C_f,f) + h_{loc}(I,f) + \varepsilon,$$

ce qui donne $h_{top}(I,f) = h(D) \leq h_{top}(C_f,f) + h_{loc}(I,f) + \varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$h_{top}(I,f) \leq h_{top}(C_f,f) + h_{loc}(I,f),$$

ce qui est le résultat souhaité.

On suppose maintenant que f admet une infinité de mesures maximales ergodiques distinctes, qu'on note $(\mu_n)_{n\geq 0}$. Pour tout $n \geq 0$, on définit ν_n comme étant la mesure sur Γ_D correspondant à μ_n par le théorème 5.2.14 ; on a $h_{\nu_n}(\Gamma_D,\sigma) = h_{\mu_n}(I,f) = h_{top}(I,f)$. Les ν_n sont des mesures maximales ergodiques distinctes, de sorte que la proposition 3.4.4 s'applique : pour tout ensemble fini de sommets $F \subset D$, $\lim_{n\to+\infty} \nu_n([F]) = 0$. La proposition 5.4.10 donne alors

$$h_{top}(I,f) = \lim_{n\to+\infty} h_{\nu_n}(\Gamma_D,\sigma) \leq h_{top}(C_f,f) + h_{loc}(I,f) + \varepsilon.$$

Comme précédemment, on fait tendre ε vers 0 et on obtient

$$h_{top}(I,f) \leq h_{top}(C_f,f) + h_{loc}(I,f).$$

Ceci termine la preuve du résultat ci-dessus.

Par contraposée, si f satisfait les hypothèses du théorème, alors elle admet une mesure maximale, et le nombre de mesures maximales ergodiques distinctes est fini. Enfin, l'unicité en cas de transitivité provient de la proposition 5.2.16. □

Le résultat suivant montre que l'entropie des points critiques (qui sont inclus dans les zéros de la dérivée) est d'autant plus faible que la transformation est régulière [23].

Proposition 5.4.12 (Buzzi) *Soit $f: I \to I$ une transformation C^r de l'intervalle, avec $r \geq 1$ un réel. Soit $Z_f = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$. Alors $h_{top}(Z_f,f) \leq \frac{1}{r}\log\|f'\|_\infty$.*

Corollaire 5.4.13 *Soit $f: I \to I$ une transformation C^r de l'intervalle, où $r \geq 1$ est un réel. Si $h_{top}(I,f) > \frac{2}{r}\log\|f'\|_\infty$, alors f admet un nombre fini non nul de mesures maximales ergodiques.*

Preuve. Par les propositions 5.4.12 et 5.4.4, on a

$$h_{top}(C_f,f) \leq \frac{1}{r}\log\|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad h_{loc}(I,f) \leq \frac{1}{r}\log\|f'\|_\infty.$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème 5.4.11 pour obtenir le résultat. □

Le corollaire 5.4.13 donne immédiatement le résultat suivant pour les transformations C^∞.

Corollaire 5.4.14 *Soit $f: I \to I$ une transformation C^∞ de l'intervalle telle que $h_{top}(I,f) > 0$. Alors f admet un nombre fini non nul de mesures maximales ergodiques.*

Remarque 5.4.15 Dans [23], il est déjà montré que le nombre de mesures maximales est fini si f est C^r avec $r > 1$ et $h_{top}(I,f) > \frac{1}{r} \log \|f'\|_\infty$. Le résultat de finitude du corollaire 5.4.13 est donc plus faible (sauf pour $r = 1$).

Par ailleurs, l'existence de mesures maximales pour les transformations C^∞ a été montrée dans [61] et [23] (voir aussi la remarque 5.4.6). Le corollaire 5.4.14 ne contient donc rien de nouveau.

Chapitre 6

Transformations de l'intervalle mélangeantes C^r sans mesure maximale

Au chapitre 5, nous nous sommes intéressés à l'existence de mesures invariantes d'entropie maximale (ou *mesures maximales*) dans le cadre des transformations de l'intervalle, et nous avons montré une condition suffisante pour l'existence d'une telle mesure quand la transformation est C^1. Nous avons également vu que les transformations de l'intervalle qui sont monotones par morceaux ou C^∞ possèdent au moins une mesure maximale.

Cependant, une transformation de l'intervalle n'admet pas nécessairement une mesure maximale. Il est facile de construire un contre-exemple non transitif en juxtaposant sur le même intervalle une infinité de transformations. Dans [42], Gurevich et Zargaryan construisent une transformation de l'intervalle continue d'entropie finie qui est transitive (en fait mélangeante) et qui n'a pas de mesure maximale. Cette transformation est composée d'un nombre dénombrable de morceaux linéaires ; elle est très semblable à l'exemple 4.2.13. Les auteurs se demandent si leur exemple peut être rendu C^1. La proposition 4.2.11 énoncée au chapitre 4 montre que c'est en fait impossible, les extrémités de l'intervalle n'étant pas accessibles.

Dans [23], Buzzi construit une transformation de l'intervalle f qui est C^r ($1 \leq r < +\infty$) et qui a une infinité de composantes transitives mais aucune d'entropie maximale, si bien que f n'a pas de mesure maximale. Il ébauche également, sans entrer dans les détails, la construction d'une transformation de l'intervalle C^r d'entropie non nulle qui a une unique composante transitive (pouvant être un ensemble de Cantor) mais qui n'admet aucune mesure maximale. Pour montrer l'absence de mesure maximale, il utilise un résultat de Salama [72], qui s'est avéré être faux (voir le théorème 2.3 et l'errata dans [73], l'article [74], ainsi que le chapitre 3). Néanmoins, la preuve de Buzzi peut être modifiée – en utilisant un surgraphe plutôt qu'un sous-graphe, ainsi que nous le faisons dans la section 6.2.3 – de façon à se baser sur un autre théorème de Salama.

Ce chapitre a fait l'objet d'un article [71], que nous reproduisons à la suite de cette introduction. Notre but est de construire, pour tout entier $r \geq 1$, une transformation de l'intervalle mélangeante et C^r qui n'a pas de mesure maximale. Obtenir un système transitif nous suffirait, mais il n'est pas plus difficile de montrer directement la propriété de mélange. Cette famille d'exemples s'inspire de ceux de Buzzi [23], la différence essentielle est que le système est ici transitif sur l'intervalle tout entier. L'absence de mesure maximale empêche l'entropie métrique d'être semi-continue supérieurement. Ceci fait un parallèle avec le résultat de Misiurewicz et Szlenk [60], qui dit que l'entropie topologique, considérée comme une fonction sur l'ensemble des transformations C^r de l'intervalle, n'est pas semi-continue supérieurement pour la topologie C^r.

Dans la section 6.1, nous définissons pour tout $r \geq 1$ une transformation de l'intervalle f_r qui est mélangeante et C^r. En fait, elle est C^∞ partout sauf en un point. L'application f_r est constituée d'un nombre dénombrable de morceaux monotones et elle est markovienne relativement à une partition dénombrable. De plus, elle peut être vue comme une application C^r du tore en identifiant les deux extrémités de l'intervalle. Dans la section suivante, nous étudions la chaîne de Markov associée à f_r et nous en déduisons qu'elle n'a pas de mesure maximale grâce à des résultats de Gurevich [44, 45] et Salama [73]. Comme il y a un isomorphisme modulo des ensembles dénombrables entre la chaîne de Markov et le système sur l'intervalle, la transformation f_r n'a pas de mesure maximale non plus. La section 6.3 est consacrée au calcul de l'entropie locale de nos exemples. Dans [23], Buzzi montre que l'entropie locale borne le défaut de semi-continuité supérieure de l'entropie métrique et en donne une majoration à l'aide de l'ordre de dérivabilité et de la norme de la dérivée. Nos exemples montrent que ces bornes sont précises car les deux sont atteintes. De plus, l'entropie locale est égale à l'entropie topologique. Ce fait a une certaine importance : il est conjecturé qu'une mesure maximale existe dès que l'entropie topologique est strictement supérieure à l'entropie locale [23].

Parallèlement au problème d'existence des mesures maximales, on peut se poser la question de l'unicité : une transformation transitive de l'intervalle dont l'entropie est non nulle peut-elle posséder plusieurs mesures maximales ? Nous avons vu au chapitre 5 certaines conditions impliquant l'unicité de la mesure maximale. Au vu de ces résultats, il est raisonnable de penser qu'une transformation transitive de l'intervalle possède au plus une mesure maximale si elle est suffisamment régulière, mais la question est totalement ouverte si elle est simplement continue.

6.1 Construction and proof of the mixing property

In this section, we construct a family of C^r maps $f_r: I \to I$ for $r \geq 1$, where $I = [0,4]$. We first give a general idea of their aspect (see Figure 6.2). Then we give some Lemmas which will be useful to prove the mixing property. Finally, we define f_r by pieces and check some properties at each step. At the end of the section, the maps f_r are totally defined and are proved to be mixing.

6.1.1 General description

Let $\lambda \geq 14$ ($\log \lambda$ will be the entropy of f_r). The map f_r is increasing on $[0,1/2]$ and decreasing on $[1/2,1]$. Moreover, $f_r(x) = \lambda^r x$ for $0 \leq x \leq \frac{5}{2}\lambda^{-r}$, $f_r(0) = f_r(1) = 0$, $f_r(1/2) = 4$.

Let $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ and $y_n = x_n + \frac{1}{2n^2}$ for every $n \geq 1$, and let M_n be a sequence of odd numbers with $(\log M_n)/n \longrightarrow \log \lambda$. We choose a family of C^∞ maps $s_n: [0, M_n] \to [-1,1]$ such that s_n is nearly 2-periodic and has M_n oscillations; $s_n(0) = 0$ and $s_n(M_n) = 1$ (see Figure 6.1).

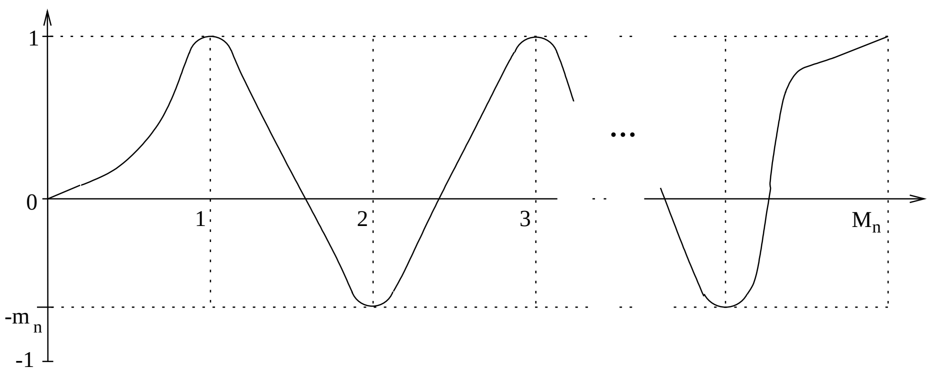


Figure 6.1: the map s_n

Then we define f_r on $[x_n, y_n]$ by

$$f_r(x) = \lambda^{-nr}\left[x_n + (y_n - x_n)s_n\left(M_n\frac{x - x_n}{y_n - x_n}\right)\right].$$

In this way, $f_r(x_n) = \lambda^{-nr}x_n$, $f_r(y_n) = \lambda^{-nr}y_n$ and f_r oscillates M_n times between x_n and y_n like s_n. It is worth mentioning that x_n and y_n are periodic points with period $n+1$, because f_r is linear of slope λ^r on $[0, y_1\lambda^{-r}]$.

On $[y_{n+1}, x_n]$, f_r is increasing.

Finally, f_r is increasing on $[y_1, 4]$, with $f_r(4) = 4$. Figure 6.2 gives a general idea of f_r.

The map f_r will be built to be mixing and C^r on $[0,4]$, and $\|f_r'\|_\infty = \lambda^r$. Furthermore, the minimum of s_n will be chosen such that $f_r(x) = \lambda^{-nr}y_{n+1}$ if x is a local minimum of f_r in $]x_n, y_n[$ in order to obtain a Markov map.

This brief description is sufficient to build the Markov chain associated to f_r and prove that f_r has no maximal measure, which is done in Section 6.2. The rest of this section, which may be skipped a first reading, is devoted to prove that maps satisfying these properties do exist.

6.1.2 Method for the proof of mixing property

We will show that for any non degenerate subinterval $J \subset I$, there exists $n \geq 0$ such that $f_r^n(J) = I$. So $f_r^k(J) = I$ for every $k \geq n$ and the system is mixing. For this, we will show that, for some

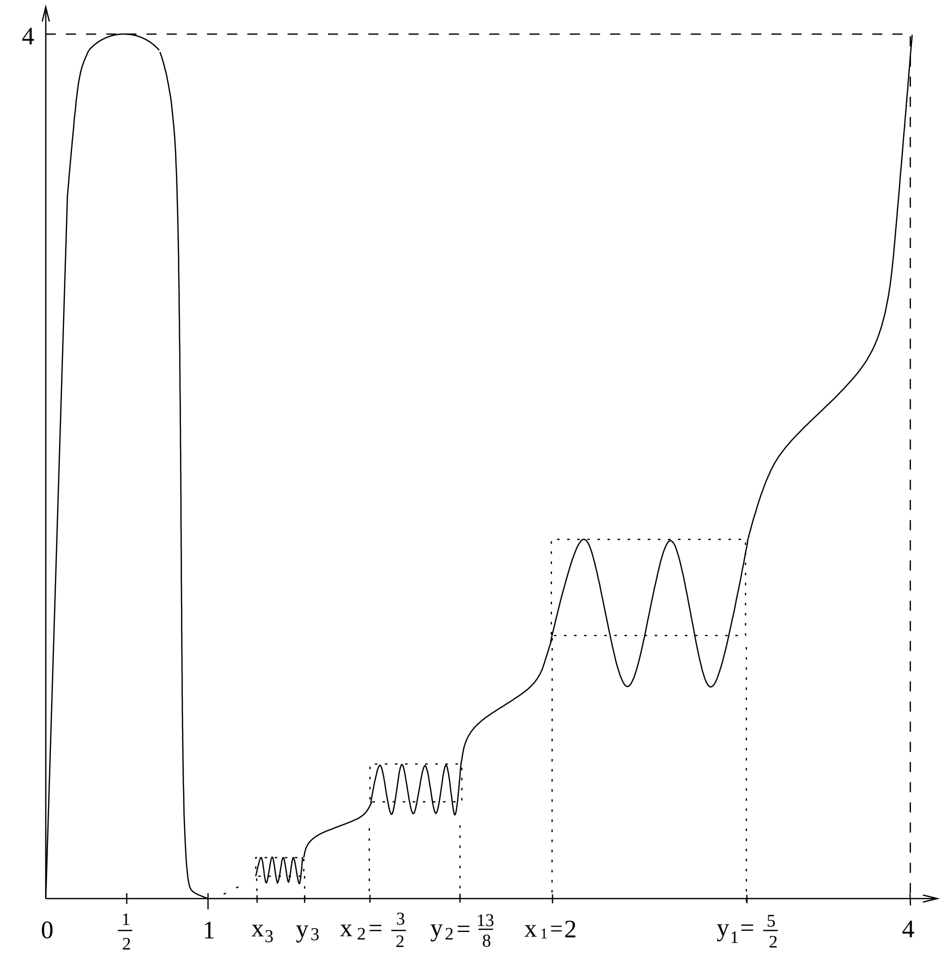


Figure 6.2: the map f_r (scale is not respected)

constant $\mu_0 > 1$, any non degenerate subinterval J satisfies one of the two following conditions:

(6.1) $\exists k \geq 0$ such that $|f_r^k(J)| \geq \mu_0 |J|$, where $|J|$ denotes the length of J,

or

(6.2) $\exists k \geq 0, \exists n \geq 1$ such that either $0 \in f_r^k(J)$ or $\mathrm{Int}\left(f_r^k(J)\right)$ contains x_n or y_n.

Then it will be enough to show that for any non degenerate subinterval J containing 0 or x_n or y_n, there is a k such that $f_r^k(J) = I$.

Lemma 6.1.2 says that an interval near a suitable extremum satisfies (6.1) or (6.2). Lemma 6.1.1, which is trivial, says how an interval containing a repelling periodic point behaves.

Lemma 6.1.1 *Let $f: I \to I$ be a C^1 map where I is a compact interval and let z_0 be a periodic point of period p. Assume $(f^p)'(x) \geq \mu > 1$ for every $x \in [z_0, z_1]$. Then for every $x > z_0$ there exists $n \geq 0$ such that $f^n([z_0, x]) \supset [z_0, z_1]$.*

Lemma 6.1.2 *Let $f: I \to I$ be a continuous map where I is a compact interval and let z_0 be an extremum such that $z_1 = f^k(z_0)$ is a periodic point of period p. Suppose $f^k(x) = z_1 + C(x - z_0)^\alpha$ for $|x - z_0| \leq \delta$, with $C \neq 0$ and α an even integer. Let $z_2 = f^k(z_0 - \delta) = f^k(z_0 + \delta)$. Suppose $f^p|_{[z_1, z_2]}$ is linear of slope $\mu > 1$, and $\frac{\alpha|z_2 - z_1|}{\delta} \geq \mu_0$. Then for every non degenerate interval $J \subset [z_0 - \delta, z_0 + \delta]$, there exists $n \geq 0$ for which one of the following cases holds:*

i) $|f^n(J)| \geq \mu_0 |J|$.

ii) $z_2 \in \mathrm{Int}\,(f^n(J))$.

Proof. Let $J = [a, b]$ be an interval in $[z_0 - \delta, z_0 + \delta]$ with $a < b$. If $z_0 \in J$ then $f^k(J) = [z_1, y]$ for some y. The hypotheses imply that $f^p(z_2) > z_2$, hence z_2 cannot be an end point of I and one can choose $1 < \mu' < \mu$ and $z_3 > z_2$ such that $(f^p)'(x) > \mu'$ for all $x \in [z_1, z_3]$. According to Lemma 6.1.1 there exists n such that $f^n(J) \supset [z_1, z_3]$, thus $z_2 \in \mathrm{Int}\,(f^n(J))$, which is (ii).

Now assume that $z_0 \notin J$. We restrict to the case $C > 0$ and $z_0 < a < b \leq z_0 + \delta$. Let $J' = f^k(J) = [a', b'] \subset]z_1, z_2]$ and $g = f^p$. The point z_1 is fixed for g and g is linear of slope $\mu > 1$ on $[z_1, z_2]$, so the map g can be iterated on J' as long as $g^m(b') \leq z_2$. Let m be the minimal integer satisfying $g^m(b') > z_2$. Then there are two cases:

- $g^m(a') < z_2 < g^m(b')$, which implies (ii) with $n = mp + k$.
- $z_2 \leq g^m(a') < g^m(b')$.

In this case, as $(f^k)'$ is positive and increasing on $[z_0, z_0 + \delta]$ one gets $|J'| \geq \alpha C(a - z_0)^{\alpha - 1}|J|$ and

$$|f^{mp+k}(J)| \geq \mu^m \alpha C(a - z_0)^{\alpha-1}|J|.$$

But $g^m(a') - z_1 = \mu^m(a' - z_1) \geq z_2 - z_1$, so

$$\mu^m \geq \frac{z_2 - z_1}{a' - z_1} = \frac{z_2 - z_1}{C(a - z_0)^\alpha},$$

and

$$|f^{mp+k}(J)| \geq \frac{\alpha|z_2 - z_1|}{|a - z_0|}|J| \geq \frac{\alpha|z_2 - z_1|}{\delta}|J| \geq \mu_0|J|.$$

□

We add a Lemma which will be useful for some estimates.

Lemma 6.1.3 *Let $\lambda \geq 8$ and $\lfloor \cdot \rfloor$ refer to the entire part of a number. Then for all $n \geq 1$:*

i) $\dfrac{\lambda^n}{n^2} \geq \lambda$.

ii) $\dfrac{\lambda^n}{2n^2} \leq 2\left\lfloor \dfrac{\lambda^n}{2n^2} \right\rfloor - 1 \leq \dfrac{\lambda^n}{n^2}$.

iii) $2\left\lfloor \dfrac{\lambda^n}{2n^2} \right\rfloor - 1 \geq \lambda - 3$.

Proof. (i) is obtained by studying the function $x \mapsto \lambda^{x-1} - x^2$.

For the first inequality of (ii), we write

$$2\left\lfloor \frac{\lambda^n}{2n^2} \right\rfloor - 1 \geq \frac{\lambda^n}{2n^2} + \left(\frac{\lambda^n}{2n^2} - 3\right) \geq \frac{\lambda^n}{2n^2}$$

thanks to (i). The second inequality is obvious.

(iii) comes from $2\left\lfloor \dfrac{\lambda^n}{2n^2} \right\rfloor - 1 \geq \dfrac{\lambda^n}{n^2} - 3$ and from (i). □

6.1.3 Construction of f_r on $[1, y_1]$

Recall that $\lambda \geq 14$, $f_r(1) = 0$, $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ and $y_n = x_n + \frac{1}{2n^2}$ for $n \geq 1$; in particular $y_1 = \frac{5}{2}$. In this subsection, we define f_r on $[1, y_1]$ with more details. For this purpose, we define f_r on each $[x_n, y_n]$ and then on each $[y_{n+1}, x_n]$. At each step, we check that the various pieces can be glued together in a C^∞ way and $|f_r'(x)| \leq \lambda^r$ for $x \in [1, y_1]$. In addition, we show that f_r is C^r on the right of 1. Finally, we focus on the mixing property. The map f_r is not totally defined yet, but at this stage we only need to know that $f_r(x) = \lambda^r x$ for $0 \leq x \leq \frac{5}{2}\lambda^{-r}$ and $f_r(\frac{1}{2}) = 4$ in order to prove that any non degenerate subinterval of $[1, y_1]$ satisfies (1) (6.1) or (6.2) with $\mu_0 = \frac{4}{3}$. Then we show that for an open interval J containing x_n or y_n there is a k satisfying $f_r^k(J) = [0, 4]$.

a) On the subintervals $[x_n, y_n]$

Set $M_n = 2\left\lfloor \dfrac{\lambda^n}{2n^2} \right\rfloor - 1$ (where $\lfloor \cdot \rfloor$ denotes the entire part), $m_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$, $\delta = \lambda^{-r}$, $C = \frac{1}{4\delta^2}$ and $k_n = \frac{2\lambda^r}{M_n}$.

First, we choose a sequence of C^∞ functions $s_n \colon [0, M_n] \to [-m_n, 1]$ satisfying:

(6.3) $s_n(0) = 0$, $s_n(M_n) = 1$, s_n is increasing on each $[2k, 2k+1]$ $(0 \leq k \leq (M_n - 1)/2)$, s_n is decreasing on each $[2k+1, 2k+2]$ $(0 \leq k \leq (M_n - 3)/2)$.

(6.4) $s_n(x) = 1 - C(x-a)^2$ for $|x - a| \leq \delta$ if a is a local maximum of s_n with $a \neq M_n$, and $s_n(x) = -m_n + C(x-b)^2$ for $|x - b| \leq \delta$ if b is a local minimum of s_n with $b \neq 0$.

(6.5) $s_n(x) = k_n(x - M_n) + 1$ for $M_n - \delta \leq x \leq M_n$.

(6.6) $s_n(x) = k_n x$ for $x \in [0, \delta]$.

(6.7) $\forall k \geq 1$, $\exists A_k$, $\forall n \geq 1$, $\|s_n^{(k)}\|_\infty \leq A_k$.

(6.8) $\|s_n'\|_\infty \leq \lambda^r$ and $|s_n'(x)| \geq \min\{1/2, k_n\}$ if $|x - d| \geq \delta$ for all local extrema $d \in]0, M_n[$.

Property (6.7) can be fulfilled because m_n and k_n are bounded ($3/4 \leq m_n \leq 1$, $k_n \leq \lambda^r$) and the maps s_n have a 2-periodic looking.

If d is a local extremum in $]0, M_n[$, then $|s_n(d-\delta) - s_n(d)| = |s_n(d+\delta) - s_n(d)| = 1/4$; moreover $|s_n(\delta) - s_n(0)| \leq 1/4$ and $|s_n(M_n - \delta) - s_n(M_n)| \leq 1/4$. Thus if d and d' are two successive extrema in $[0, M_n]$ the absolute value of the average slope between $d+\delta$ and $d'-\delta$ is at least $\dfrac{m_n + 1/2}{1 - 2\delta} > \dfrac{1}{2}$ and is less that 2. Since $|s_n'(d+\delta)| = |s_n'(d-\delta)| = \frac{\lambda^r}{2}$ for any extremum $d \in]0, M_n[$, Property (6.8) can be fulfilled.

Secondly, recall that f_r is defined for $x \in [x_n, y_n]$ by

$$f_r(x) = \lambda^{-nr}\left[x_n + (y_n - x_n)s_n\left(M_n \frac{x - x_n}{y_n - x_n}\right)\right].$$

Now, we look at the C^r character of f_r near 1. The definition of f_r gives

$$f_r^{(k)}(x) = \frac{\lambda^{-nr} M_n^k}{(y_n - x_n)^{k-1}} s_n^{(k)}\left(M_n \frac{x - x_n}{y_n - x_n}\right) \text{ for } x \in [x_n, y_n],$$

where $f_r^{(k)}(x_n)$ and $f_r^{(k)}(y_n)$ are to be understood as left (resp. right) derivatives at this stage.

Since $M_n \leq \frac{\lambda^n}{n^2}$, Property (6.7) leads to

$$|f_r^{(k)}(x)| \leq \lambda^{-n(r-k)} n^{-2} 2^{k-1} A_k.$$

One has $A_1 = \lambda^r$ by (6.8), thus $|f'(x)| \leq \lambda^r$. Moreover, for $0 \leq k \leq r$,

$$|f_r^{(k)}(x)| \to 0 \text{ when } x \to 1,\ x \in \bigcup_{n \geq 1} [x_n, y_n].$$

Notice that the main factor in this estimate is $\lambda^{-n(r-k)}$. If $k > r$, the k-th derivative $f_r^{(k)}$ does not tend to zero any longer and it can be shown that f_r cannot be C^{r+1} at point 1.

As $f_r(x) = \lambda^r x$ for $x \in [0, y_1\lambda^{-r}]$, the $(n+1)$-th iterate of the map on $[x_n, y_n]$ is given by $f_r^{n+1}(x) = \lambda^{nr} f_r(x)$.

Notice that m_n is chosen such that $\min\{f_r^{n+1}(x) \mid x \in [x_n, y_n]\} = y_{n+1}$. Moreover $f_r^{n+1}(x_n) = x_n$ and $f_r^{n+1}(y_n) = y_n$.

We sum up the previous results in two Lemmas, the first one is about derivatives and the second summarizes the behaviour of f_r on $[x_n, y_n]$.

Lemma 6.1.4
- $|f_r'(x)| \leq \lambda^r$ *for* $x \in [x_n, y_n]$.
- $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \in \cup_{n \geq 1}[x_n, y_n]}} f_r^{(k)}(x) = 0$ *for* $0 \leq k \leq r$.

Lemma 6.1.5 *Let* $t_i^n = x_n + \dfrac{i(y_n - x_n)}{M_n}$ *for* $i = 0, \cdots, M_n$. *Then*

- f_r *is monotone on* $[t_{i-1}^n, t_i^n]$, $1 \leq i \leq M_n$.
- $f_r(t_i^n) = \lambda^{-nr} y_{n+1}$ *if i is even,* $i \neq 0$, *and* $f_r(x_n) = \lambda^{-nr} x_n$.
- $f_r(t_i^n) = \lambda^{-nr} y_n$ *if i is odd.*

b) On the subintervals $[y_{n+1}, x_n]$

We define

$$w_n = y_{n+1} + \frac{n+2}{2n(n+1)^2 M_{n+1} k_{n+1}}.$$

We have $w_n \in]y_{n+1}, x_n[$. On $[y_{n+1}, w_n]$, we define f_r to be affine of slope $\lambda^{-(n+1)r} M_{n+1} k_{n+1}$ (recall that $f_r(y_{n+1}) = \lambda^{-(n+1)r} y_{n+1}$ is already defined). Because of this definition f_r is affine (thus C^∞) in a neighbourhood of y_{n+1}. Moreover

$$f_r(w_n) = \lambda^{-(n+1)r} y_{n+1} + \lambda^{-(n+1)r} \frac{n+2}{2n(n+1)^2} = \lambda^{-(n+1)r}\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

so $f_r(w_n) = \lambda^{-(n+1)r} x_n$ and $f_r^{n+2}(w_n) = x_n$. As we are going to extend f_r in a C^∞ way on $[w_n, x_n]$, we will have

$$f_r'(x_n) = 2\lambda^{-(n-1)r}, \; f_r'(w_n) = 2\lambda^{-nr}, \text{ and } f_r^{(k)}(x_n) = f_r^{(k)}(w_n) = 0 \text{ for } k \geq 2.$$

Set $h_n = f_r(x_n) - f_r(w_n)$ and $L_n = x_n - w_n$. We compute upper and lower bounds for h_n and L_n. First

$$h_n = \lambda^{-nr}\left(x_n - \lambda^{-r} y_{n+1} - \lambda^{-r}\frac{n+2}{2n(n+1)^2}\right) \leq 2\lambda^{-nr}.$$

We have

$$\frac{n+2}{2n(n+1)^2} = \frac{3}{8} \quad \text{for} \quad n = 1$$

and

$$\frac{n+2}{2n(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{2n^2(n+1)^2} \leq \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{8} \quad \text{for} \quad n \geq 2.$$

One has $x_n \geq 1, y_{n+1} \leq y_2 = \frac{13}{8}$ and $\frac{n+2}{2n(n+1)^2} \leq \frac{3}{8}$ for all $n \geq 1$, thus one gets

$$h_n \geq \lambda^{-nr}(1 - 2\lambda^{-r}) \geq \frac{6}{7}\lambda^{-nr}.$$

For L_n one has

$$\begin{aligned} L_n &= 1 + \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{n+2}{2n(n+1)^2 M_{n+1} k_{n+1}} \\ &= \frac{n+2}{2n(n+1)^2}\left(1 - \frac{1}{2\lambda^r}\right). \end{aligned}$$

As $\frac{n+2}{2n(n+1)^2} \leq \frac{3}{8}$, one gets $L_n \leq \frac{3}{8}$ too. Moreover

$$\frac{n+2}{2n(n+1)^2} \geq \frac{1}{2(n+1)^2}$$

and $\frac{1}{2\lambda^r} \leq \frac{1}{2}$ thus $L_n \geq \frac{1}{4(n+1)^2}$. Finally we obtain the inequalities

$$\frac{6}{7}\lambda^{-nr} \leq h_n \leq 2\lambda^{-nr} \qquad \text{and} \qquad \frac{1}{4(n+1)^2} \leq L_n \leq \frac{3}{8}. \tag{6.9}$$

We normalize f_r on $[w_n, x_n]$ as follows: we define $\varphi_n : [0,1] \to [0,1]$ by

$$\varphi_n(x) = h_n^{-1}[f_r(w_n + L_n x) - f_r(w_n)].$$

The aim of this normalization is to check that the sequence φ_n can be chosen with uniformly bounded k-th derivatives then to come back to f_r and show that f_r is C^r at the right of 1. We want to have

$$\varphi_n'(1) = 2h_n^{-1}L_n\lambda^{-(n-1)r},\ \varphi_n'(0) = 2h_n^{-1}L_n\lambda^{-nr}, \tag{6.10}$$

$$\varphi_n^{(k)}(0) = \varphi_n^{(k)}(1) = 0 \text{ for } k \geq 2, \tag{6.11}$$

thus $\varphi_n'(1) \leq \frac{7}{8}\lambda^r$ and $\varphi_n'(0) \leq \frac{7}{8}$ by Equation (6.9). Consequently, it is possible to build a sequence of functions φ_n satisfying Equations (6.10) and (6.11) and the following additional conditions:

$$\forall k \geq 1,\ \exists B_k,\ \forall n \geq 1,\ \|\varphi_n^{(k)}\|_\infty \leq B_k, \tag{6.12}$$

$$\forall x \in [0,1],\ \frac{2}{3}\varphi_n'(0) \leq \varphi_n'(x) \leq \lambda^r. \tag{6.13}$$

Accordind to the definition of φ_n and by Equation 6.12, the derivatives of f_r satisfy

$$f_r^{(k)}(x) = h_nL_n^{-k}\varphi_n^{(k)}\left(\frac{x-w_n}{L_n}\right) \leq \lambda^{-nr}(n+1)^{2k}2^{2k+1}B_k \text{ for } w_n \leq x \leq x_n,$$

hence for every $k \geq 0$

$$f_r^{(k)}(x) \to 0 \text{ when } x \to 1, x \in \bigcup_{n\geq 1}[y_{n+1}, x_n].$$

Moreover, for every $x \in [w_n, x_n]$ one has $\frac{4}{3}\lambda^{-nr} \leq f_r'(x) \leq \lambda^r h_n L_n^{-1}$ by Equations (6.10) and (6.13); according to Lemma 6.1.3 (i), one obtains

$$h_nL_n^{-1} \leq \frac{8(n+1)^2}{\lambda^{nr}} \leq 1.$$

The next Lemma recalls the behaviour of f_r on $[y_{n+1}, x_n]$.

Lemma 6.1.6

- $\frac{4}{3}\lambda^{-nr} \leq f_r'(x) \leq \lambda^r$ *for* $x \in [y_{n+1}, x_n]$.
- $f_r(w_n) = \lambda^{-(n+1)r}x_n$.
- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in\bigcup_{n\geq 1}[y_{n+1},x_n]}} f_r^{(k)}(x) = 0$ *for* $0 \leq k \leq r$.

c) Beginning of the proof of the mixing property

We show that any non degenerate subinterval $J \subset [1, y_1]$ satisfies (6.1) or (6.1) with $\mu_0 = \frac{4}{3}$. It is sufficient to consider $J \subset [x_n, y_n]$ or $J \subset [y_{n+1}, x_n]$.

First, we look at $[y_{n+1}, x_n]$. For $x \in [y_{n+1}, x_n]$, $f_r^{n+1}(x) = \lambda^{nr}f_r(x)$ and the derivative of f_r satisfies $f_r'(x) \geq \frac{4}{3}\lambda^{-nr}$ by Lemma 6.1.6, so $|f_r^{n+1}(J)| \geq \frac{4}{3}|J|$ if $J \subset [y_{n+1}, x_n]$.

Now, we focus on $[x_n, y_n]$. According to Property (6.8), $s_n'(x) \geq \min\{k_n, 1/2\}$ for all points x in $[M_n - 1 + \delta, M_n]$ thus

$$(f_r^{n+1})'(x) \geq \min\{M_nk_n, M_n/2\} \geq 2 \text{ for all } x \in \left[y_n - \frac{(y_n - x_n)(1-\delta)}{M_n}, y_n\right].$$

Because of Property (6.4), $s_n(M_n - 1 + \delta) = -m_n + 1/4 < 0$, thus

$$f_r^{n+1}\left(y_n - \frac{(y_n-x_n)(1-\delta)}{M_n}\right) < x_n.$$

Let $t_n = \dfrac{y_n - x_n}{\lambda^r M_n}$, then according to Lemma 6.1.1, there exists an integer α such that

$$f_r^{(n+1)\alpha}([y_n - t_n, y_n]) \supset [x_n, y_n],$$

so there exists $z \in [y_n - t_n, y_n[$ with $f_r^{(n+1)\alpha}(z) = x_n$. Because of the choice of t_n and Property (6.5), f_r^{n+1} is affine of slope $k_n M_n = 2\lambda^r$ on $[y_n - t_n, y_n]$. Let $k \geq 0$ be the maximal integer i such that $\lambda^{ri}(y_n - z) \leq t_n$. Then $z_n = y_n - \lambda^{rk}(y_n - z)$ belongs to $[y_n - t_n, y_n - \frac{t_n}{2\lambda^r}]$ and $f_r^{(n+1)\alpha_n}(z_n) = x_n$ if $\alpha_n = \alpha + k$.

Set $\delta_n = \sqrt{\dfrac{(y_n - z_n)(y_n - x_n)}{CM_n^2}}$, and let a be a local maximum of f_r on $]x_n, y_n[$. If $|t| \leq \delta_n$, then

$$\left|\frac{M_n t}{y_n - x_n}\right|^2 \leq \frac{y_n - z_n}{C(y_n - x_n)} \leq \frac{1}{CM_n\lambda^r} \leq \delta^2.$$

Now we check the hypotheses of Lemma 6.1.2 for the extremum a:

- $f_r^{n+1}(a) = y_n$ and $f_r^{n+1}(y_n) = y_n$.
- $f_r^{n+1}(a + t) = y_n - \dfrac{C(M_n t)^2}{y_n - x_n}$ if $|t| \leq \delta_n$ (because of Property (6.4)).
- $f_r^{n+1}(a - \delta_n) = f_r^{n+1}(a + \delta_n) = z_n$.
- f_r^{n+1} is linear on $[z_n, y_n]$, with a slope $k_n M_n \geq 2$.
- $\dfrac{2|z_n - y_n|}{\delta_n} = 2\sqrt{\dfrac{CM_n^2(y_n - z_n)}{y_n - x_n}} \geq 2\sqrt{\dfrac{CM_n^2 t_n}{2\lambda^r(y_n - x_n)}} = 2\sqrt{\dfrac{M_n}{8}}$
 and the last quantity is greater than 2 because $M_n \geq \lambda - 3$ by Lemma 6.1.3 (iii) and $\lambda \geq 14$.

Consequently, we can apply Lemma 6.1.2 at this maximum: for any non degenerate subinterval $J \subset [a - \delta_n, a + \delta_n]$, there exists k such that either $z_n \in \mathrm{Int}\left(f_r^k(J)\right)$ or $|f_r^k(J)| \geq 2|J|$. Since $f_r^{(n+1)\alpha_n}(z_n) = x_n$ and $f_r^{(n+1)\alpha_n}$ is a local homeomorphism in a neighbourhood of z_n, if $z_n \in \mathrm{Int}\left(f_r^k(J)\right)$ then $x_n \in \mathrm{Int}\left(f_r^{k'}(J)\right)$ with $k' = k + (n+1)\alpha_n$.

Set $\delta'_n = \sqrt{\dfrac{(w_n - y_{n+1})(y_n - x_n)}{CM_n^2}}$ and let $b \in]x_n, y_n[$ be a local minimum. If $|t| \leq \delta'_n$, then

$$\left|\frac{M_n t}{y_n - x_n}\right|^2 \leq \frac{w_n - y_{n+1}}{C(y_n - x_n)} = \frac{2n(n+2)}{(n+1)^2\lambda^{3r}} \leq \frac{2}{\lambda^{3r}} \leq \delta^2.$$

We check the hypotheses of Lemma 6.1.2 for the extremum b:

- $f_r^{n+1}(b) = y_{n+1}$ and $f_r^{n+2}(y_{n+1}) = y_{n+1}$.
- $f_r^{n+1}(b + t) = y_{n+1} + \dfrac{C(M_n t)^2}{y_n - x_n}$ if $|t| \leq \delta'_n$ (because of Property (6.4)).
- $f_r^{n+1}(b - \delta'_n) = f_r^{n+1}(b + \delta'_n) = w_n$ and $f_r^{n+2}(w_n) = x_n$.
- f_r^{n+2} is linear on $[y_{n+1}, w_n]$ of slope $M_{n+1}k_{n+1} \geq 2$.

- $\dfrac{2|y_{n+1}-w_n|}{\delta'_n} \geq 2$.

To prove the last point, define

$$C_n = \left(\frac{w_n - y_{n+1}}{\delta'_n}\right)^2 = \frac{n(n+2)M_n^2\lambda^r}{8(n+1)^2}.$$

One has $M_n \geq \lambda - 3$ (Lemma 6.1.3 (iii)), $\lambda \geq 14$ and

$$\frac{2n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 + n^2 + 2n - 1}{(n+1)^2} > 1,$$

thus $C_n \geq \frac{14 \times 11^2}{16} > 1$.

Hence we can apply Lemma 6.1.2 to this extremum: for any non degenerate subinterval $J \subset [b - \delta'_n, b + \delta'_n]$, there exists k such that either $x_n \in \mathrm{Int}\left(f_r^k(J)\right)$ or $|f_r^k(J)| \geq 2|J|$.

If $|x - d| \geq \delta|y_n - x_n|/M_n$ for all local extrema $d \in]x_n, y_n[$, then

$$|(f_r^{n+1})'(x)| \geq \min\{2\lambda^r, M_n/2\} \geq 2$$

according to Property (6.8). If $a \in]x_n, y_n[$ is a local maximum and $\delta_n \leq |x - a| \leq \dfrac{\delta|y_n - x_n|}{M_n}$, then

$$|(f_r^{n+1})'(x)| \geq |(f_r^{n+1})'(a + \delta_n)| = \frac{2M_n^2 C\delta_n}{y_n - x_n} \geq \sqrt{M_n/2}.$$

If $b \in]x_n, y_n[$ is a local minimum and $\delta'_n \leq |x - b| \leq \dfrac{\delta|y_n - x_n|}{M_n}$, then

$$|(f_r^{n+1})'(x)| \geq |(f_r^{n+1})'(b + \delta'_n)| = \frac{2M_n^2 C\delta'_n}{y_n - x_n} = \lambda^{\frac{r}{2}} \frac{M_n}{2}\sqrt{\frac{2n(n+2)}{(n+1)^2}} \geq \lambda^{\frac{r}{2}} M_n/2.$$

Consequently, $|(f_r^{n+1})'(x)| \geq 2$ if for all local maxima a, $|x - a| \geq \delta_n$ and for all local minima b, $|x - b| \geq \delta'_n$.

Finally, if J is a non degenerate subinterval of $[x_n, y_n]$, there exists k such that either $|f_r^k(J)| \geq 2|J|$ or $\mathrm{Int}\left(f_r^k(J)\right)$ contains x_n. Together with the previous result on $[y_{n+1}, x_n]$ it gives:

Lemma 6.1.7 *If J is a non degenerate subinterval of $[1, y_1]$, there exist $k \geq 0$ and $n \geq 1$ such that either $|f_r^k(J)| \geq \frac{4}{3}|J|$ or $x_n \in \mathrm{Int}\left(f_r^k(J)\right)$ or $y_n \in \mathrm{Int}\left(f_r^k(J)\right)$.*

The point x_n is periodic of period $n+1$, and $(f_r^{n+1})'(x) \geq 2$ for $x_n \leq x \leq x_n + \frac{y_n - x_n}{2M_n}$. In this situation, we can apply Lemma 6.1.1. For any interval $J = [x_n, x]$ with $x > x_n$ there exists k such that $f_r^k(J) \supset [x_n, x_n + \frac{y_n - x_n}{2M_n}]$. But

$$f_r^{n+1}\left(x_n + \frac{y_n - x_n}{2M_n}\right) \geq x_n + \frac{y_n - x_n}{M_n} \quad \text{and} \quad f_r^{n+1}\left(x_n + \frac{y_n - x_n}{M_n}\right) = y_n.$$

Hence $f_r^{k+2(n+1)}(J) \supset [x_n, y_n]$.

We do the same thing for y_n: for any interval $J = [y, y_n]$ with $y < y_n$ there exists k such that $f_r^k(J) \supset [x_n, y_n]$.

Moreover

$$f_r^{2(n+1)}([x_n, y_n]) = f_r^{n+1}([y_{n+1}, y_n]) = [\lambda^{-1}y_{n+1}, y_n] \supset [1/2, 1],$$

so $f_r^{2(n+1)+1}([x_n, y_n]) = [0, 4]$. This leads to the next Lemma.

Lemma 6.1.8 *If J is an open subinterval with $x_n \in J$ or $y_n \in J$, then there exists $k \geq 0$ such that $f_r^k(J) = [0,4]$.*

6.1.4 Construction of f_r on $[0,1]$ and $[y_1, 4]$ and end of the proof of the mixing property

Recall that $f_r(x) = \lambda^r x$ for $0 \leq x \leq \frac{5}{2}\lambda^{-r}$ and $\delta = \lambda^{-r}$. We define f_r near the points $1/2$, 1 and 4 as follows:

- $f_r(x) = 4 - C_0(x-1/2)^2$ for $|x - 1/2| \leq \delta$, with $C_0 = \frac{3}{2}\delta^{-1}$.
- $f_r(x) = C_1(x-1)^{\alpha_1}$ for $1-\delta \leq x \leq 1$, with $\alpha_1 = 2r$ and $C_1 = \delta^{1-\alpha_1}$.
- $f(x) = 4 + \lambda^r(x-4)$ for $4 - \frac{3}{2}\delta \leq x \leq 4$.

The definition of f_r on the left of 1, together with Lemmas 6.1.4 and 6.1.6, leads to the next Lemma.

Lemma 6.1.9 *f_r is C^r in a neighbourhood of 1.*

Now we complete the map such that the pieces are glued together in a C^∞ way (except at 1 where f_r is only C^r). As $f_r'(1/2-\delta) = 3$ and

$$\frac{f_r(1/2-\delta) - f_r(\frac{5}{2}\delta)}{(1/2-\delta) - \frac{5}{2}\delta} = \frac{3 - 3\lambda^{-r}}{1 - 7\lambda^{-r}} \in [2,6],$$

the map can be chosen such that $3/2 \leq f_r'(x) \leq \lambda^r$ for every $x \in [\frac{5}{2}\delta, \frac{1}{2} - \delta]$. In the same way, it is possible to have $-\lambda^r \leq f_r'(x) \leq -3/2$ for every $x \in [1/2+\delta, 1-\delta]$ because $f_r'(1/2+\delta) = -3$, $f_r'(1-\delta) = -2r$ and

$$\frac{f_r(1/2+\delta) - f_r(1-\delta)}{1/2 - 2\delta} = \frac{8 - 5\lambda^{-r}}{1 - 4\lambda^{-r}} \in [7,12].$$

Finally, $f_r'(y_1) = 2$ because of the earlier construction of f_r on $[x_1, y_1]$ (see parag. a in Section 6.1.3) and

$$\frac{f_r(4 - \frac{3}{2}\delta) - f_r(y_1)}{(4 - \frac{3}{2}\delta) - y_1} = \frac{4 - 4\lambda^{-r}}{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\lambda^{-r}} = \frac{8}{3}.$$

Hence it is possible to have $\frac{3}{2} \leq f_r'(x) \leq \lambda^r$ for $y_1 \leq x \leq 4$.

Consequently, $\frac{3}{2} \leq |f_r'(x)| \leq \lambda^r$ if $x \in [0, \frac{1}{2} - \delta] \cup [\frac{1}{2} + \delta, 1 - \delta] \cup [y_1, 4]$.

A quick check shows that Lemma 6.1.2 can be applied to the two extrema $1/2$ and 1 (we apply it only to the left of 1). For $z_0 = 1$, the repulsive periodic point is $z_1 = 0$, the interval $[z_1, z_2]$ is $[0, \lambda^{-r}]$, and the growth factor is $\frac{\alpha_0\delta}{\delta} = 2r$. For $z_0 = 1/2$, the repulsive periodic point is $z_1 = 4$, the interval $[z_1, z_2]$ is $[4 - \frac{3}{2}\lambda^{-r}, 4]$, and the growth factor is $\frac{2\delta}{\frac{3}{2}\lambda^{-r}} = 3$.

Since $f_r^2(\lambda^{-r}) = 0$ and $f_r(4 - \frac{3}{2}\lambda^{-r}) = y_1$, for any non degenerate interval $J \subset [0,1] \cup [y_1, 4]$ there exists k such that either $|f_r^k(J)| \geq \frac{3}{2}|J|$ or $f_r^k(J)$ contains one of the points $0, 4, y_1$.

Lemma 6.1.10 *If J is a non degenerate subinterval of $[0,1] \cup [y_1, 4]$, there exists $k \geq 0$ such that either $|f_r^k(J)| \geq \frac{3}{2}|J|$ or $0 \in f_r^k(J)$ or $4 \in f_r^k(J)$ or $y_1 \in \mathrm{Int}\left(f_r^k(J)\right)$.*

Since $f_r^2([0,\lambda^{-r}]) = [0,4]$ and $f_r^3([4-\frac{3}{2}\lambda^{-r},4]) = f_r^2([y_1,4]) = [0,4]$, applying Lemma 6.1.1 we obtain the next Lemma.

Lemma 6.1.11 *If J is a non degenerate subinterval containing either 0 or 4, then there exists $k \geq 0$ such that $f_r^k(J) = [0,4]$.*

The construction of $f_r\colon[0,4] \to [0,4]$ is now finished. The map is C^r on $[0,4]$ (and is C^∞ on $[0,4]\setminus\{1\}$), and $\|f_r'\|_\infty = \lambda^r$. Furthermore, if we put together Lemmas 6.1.7, 6.1.8, 6.1.10 and 6.1.11, we see that for any non degenerate subinterval $J \subset [0,4]$, there exists $k \geq 0$ such $f_r^k(J) = [0,4]$.

Proposition 6.1.12 *$f_r\colon I \to I$ is C^r, mixing and $\|f_r'\|_\infty = \lambda^r$.*

Remark 6.1.13 If we identify the two end points 0 and 4, the map f_r can be seen as a mixing C^r map on the torus, since $f_r^{(k)}(0) = f_r^{(k)}(4)$ for every $k \geq 1$.

6.2 The Markov chain associated to the interval map

We show that f_r is a Markov map for a suitable countable partition. The associated Markov chain reflects almost all topological properties of the system (I, f_r).

6.2.1 Definition of the graph

We explicit the Markov partition V_r and the associated graph G_r.

Let $t_0^n = x_n < t_1^n < \cdots < t_{M_n}^n = y_n$ the local extrema of f_r on $[x_n, y_n]$. Let

$$\begin{aligned} V_r \;=\; & \{[t_{i-1}^n, t_i^n] \mid 1 \leq n, 1 \leq i \leq M_n\} \\ & \cup\{[\lambda^{-kr}x_n, \lambda^{-kr}y_n] \mid 1 \leq k \leq n\} \\ & \cup\{[\lambda^{-kr}y_{n+1}, \lambda^{-kr}x_n] \mid 1 \leq n, 0 \leq k \leq n\} \\ & \cup\{[\lambda^{-nr}y_n, \lambda^{-(n-1)r}] \mid 2 \leq n\} \\ & \cup\{[\lambda^{-r}y_1, 1/2], [1/2, 1], [y_1, 4]\}. \end{aligned}$$

The elements of V_r have pairwise disjoint interior and their union is $]0,4]$. We check that the map f_r is monotone on each element of V_r and if $J \in V_r$ then $f_r(J)$ is a union of elements of $V_r \cup \{0\}$.

- By Lemma 6.1.5, f_r is monotone on $[t_{i-1}^n, t_i^n]$, $f_r([t_0^n, t_1^n]) = [\lambda^{-nr}x_n, \lambda^{-nr}y_n]$ and
$$f_r([t_{i-1}^n, t_i^n]) = [\lambda^{-nr}y_{n+1}, \lambda^{-nr}x_n] \cup [\lambda^{-nr}x_n, \lambda^{-nr}y_n] \text{ if } 2 \leq i \leq M_n.$$
- By Lemmas 6.1.5 and 6.1.6, f_r is increasing on $[y_{n+1}, x_n]$ for all $n \geq 1$ and
$$\begin{aligned} f_r([y_{n+1}, x_n]) &= [\lambda^{-(n+1)r}y_{n+1}, \lambda^{-nr}x_n] \\ &= [\lambda^{-(n+1)r}y_{n+1}, \lambda^{-nr}] \cup \bigcup_{k \geq n} [\lambda^{-nr}x_{k+1}, \lambda^{-nr}y_{k+1}] \cup [\lambda^{-nr}y_{k+1}, \lambda^{-nr}x_k]. \end{aligned}$$
- Since $f_r(x) = \lambda^r x$ for $x \in [0, \lambda^{-r}y_1]$ we have
  – $f_r([\lambda^{-kr}x_n, \lambda^{-kr}y_n]) = [\lambda^{-(k-1)r}x_n, \lambda^{-(k-1)r}y_n]$ for $1 \leq k \leq n$
  and this set belongs to V_r except $[x_n, y_n] = \bigcup_{i=1}^{M_n} [t_{i-1}^n, t_i^n]$ which is a union of elements of V_r.

– $f_r([\lambda^{-kr}y_{n+1}, \lambda^{-kr}x_n]) = [\lambda^{-(k-1)r}y_{n+1}, \lambda^{-(k-1)r}x_n]$ for $1 \le k \le n$.
– for all $n \ge 1$,

$$\begin{aligned} f_r([\lambda^{-(n+1)r}y_{n+1}, \lambda^{-nr}]) &= [\lambda^{-nr}y_{n+1}, \lambda^{-(n-1)r}] \\ &= [\lambda^{-nr}y_{n+1}, \lambda^{-nr}x_n] \cup [\lambda^{-nr}x_n, \lambda^{-nr}y_n] \cup [\lambda^{-nr}y_n, \lambda^{-(n-1)r}]. \end{aligned}$$

- f_r is monotone on $[0,1/2]$, $[1/2,1]$ and $[y_1,4]$ (see Subsection 6.1.4) and
  – $f_r([\lambda^{-r}y_1, 1/2]) = [y_1, 4]$.
  – $f_r([1/2,1]) = [0,4] = \{0\} \cup \bigcup_{J \in V_r} J$.
  –
$$\begin{aligned} f_r([y_1,4]) &= [\lambda^{-r}y_1, 4] \\ &= [\lambda^{-r}y_1, 1/2] \cup [1/2,1] \cup [y_1,4] \cup \textstyle\bigcup_{n\ge1}[y_{n+1}, x_n] \cup \displaystyle\bigcup_{\substack{1\le n \\ 1 \le i \le M_n}} [t^n_{i-1}, t^n_i]. \end{aligned}$$

We define the directed graph G_r as follows: the set of vertices of G_r is V_r and there is an arrow from A to B if and only if $B \subset f_r(A)$. The decomposition above of $f_r(A)$ into elements of V_r for all $A \in V_r$ gives an exhaustive description of the arrows in G_r.

Notice that the graphs G_r are identical for all $r \ge 1$, the only difference being the name of the vertices, corresponding to the partition of f_r ; we just write G when we want to talk about one of the G_r without referring to the partition assiciated to f_r.

6.2.2 Isomorphism between f_r and the Markov chain

Let Γ_r^+ be the set of all one-sided infinite sequences $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ such that $A_n \in V_r$ and $A_n \to A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, and let Γ_r be the set of all two-sided infinite sequences $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. We write σ for the shift transformation in both spaces. (Γ_r, σ) is called the *Markov chain associated to* f_r. As the systems (Γ_r, σ) are isomorphic for all $r \ge 1$, we just write (Γ, σ) when we want to talk about one of them without referring to the partition associated to f_r.

We are going to build an isomorphism modulo countable sets between (I, f_r) and (Γ_r^+, σ), that is, a map $\phi_r : I \setminus \mathcal{N}_r \longrightarrow \Gamma_r^+ \setminus \mathcal{M}_r$ where $\mathcal{N}_r$, $\mathcal{M}_r$ are countable sets, ϕ_r is bijective bicontinuous and $\phi_r \circ f_r = \sigma \circ \phi_r$.

Define

$$\mathcal{P}_r = \{\lambda^{-kr}x_n, \lambda^{-kr}y_n \mid 1 \le k \le n\} \cup \{t^n_i \mid 1 \le n, 0 \le i \le M_n\} \cup \{\lambda^{-nr} \mid 1 \le n\} \cup \{0, 1/2, 1, 4\},$$

and let $\mathcal{N}_r = \bigcup_{n\ge0} f_r^{-n}(\mathcal{P}_r)$, which is a countable set. We have $f_r(\mathcal{N}_r) = \mathcal{N}_r$ and $f_r(I \setminus \mathcal{N}_r) = I \setminus \mathcal{N}_r$. If $x \in I \setminus \mathcal{P}_r$ then there is a unique $A \in V_r$ such that $x \in A$ (in fact $x \in \mathrm{Int}\,(A)$). Hence if $x \in I \setminus \mathcal{N}_r$, for every $n \ge 0$ there is a unique $A_n \in V$ such that $f_r^n(x) \in A_n$. Moreover $(A_n)_{n\ge0} \in \Gamma_r^+$. We define

$$\begin{array}{rccc} \phi_r : & I \setminus \mathcal{N}_r & \longrightarrow & \Gamma_r^+ \\ & x & \longmapsto & (A_n)_{n\ge0} \end{array}$$

This application satisfies $\phi_r \circ f_r(x) = \sigma \circ \phi_r(x)$.

For any $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma_r^+$, the set $J = \bigcap_{n\ge0} f_r^{-n}(A_n)$ is a compact interval because f_r is monotone on each A_n. The map f_r is mixing (Proposition 6.1.12) and $f_r^n(J) \subset A_n$, hence J is necessarily reduced to a single point $\{x\}$. We define

$$\begin{array}{rccc} \psi_r : & \Gamma_r^+ & \longrightarrow & I \\ & (A_n)_{n\ge0} & \longmapsto & x \end{array}$$

Let $\mathcal{M}_r = \psi_r^{-1}(\mathcal{N}_r)$. The application ψ_r, restricted to $\Gamma_r^+ \setminus \mathcal{M}_r$, is the inverse of ϕ_r. Moreover, both ϕ_r and ψ_r are continuous. Indeed, choose $x_0 \in I \setminus \mathcal{N}_r$ and write $(A_n)_{n\geq 0} = \phi_r(x_0)$ and $J_n = \bigcap_{k=0}^n f_r^{-k}(A_k)$. The diameters of the compact intervals J_n tend to 0, the point x_0 belongs to $\operatorname{Int}(J_n)$ for every n, and for every $x \in J_n \backslash \mathcal{N}_r$ the sequence $\phi_r(x)$ begins with $(A_0, \cdots, A_n)$. Hence ϕ_r is continuous. Inversely, fix $\bar{\alpha} = (A_n)_{n\geq 0} \in \Gamma_r^+ \backslash \mathcal{M}_r$, then for every sequence $\bar{\beta} \in \Gamma_r^+ \backslash \mathcal{M}_r$ beginning with $(A_0, \cdots, A_n)$ the point $\psi_r(\gamma)$ belongs to J_n which is an arbitrarily small neighbourhood of $\psi_r(\gamma_0)$. Hence ψ_r is continuous too.

Now, we are going to show that $\mathcal{M}_r$ is countable. It is sufficient to show that $\psi_r^{-1}(x)$ is finite for any $x \in \mathcal{N}_r$. For any $y \in I$ there are at most two elements of V_r containing y. Let $x \in \mathcal{N}_r$. If there is a k such that $f_r^k(x) = 0$ then $\psi_r^{-1}(x) = \emptyset$. If there is a k such that $f_r^k(x) = 4$ then $\psi^{-1}(x)$ is finite because $\psi^{-1}(4)$ contains only the constant sequence of symbol $[y_1, 4]$. Otherwise there exist k, n such that $f_r^k(x) = x_n$ or $f_r^k(x) = y_n$. Thus it is sufficient to focus on the points x_n and y_n.

We begin with x_n. The intervals $A_0 = [y_{n+1}, x_n]$ and $B_0 = [x_n, t_1^n]$ are the only two elements of V_r containing x_n. If we try to build $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ and $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ which are elements of $\psi_r^{-1}(x_n)$, we see that there are only two possibilities, which are cycles, namely:

- $A_0 = [y_{n+1}, x_n] \to A_1 = [\lambda^{-nr} y_{n+1}, \lambda^{-nr} x_n] \to \cdots \to A_{n+1} = A_0 \to \cdots$
- $B_0 = [x_n, t_1^n] \to B_1 = [\lambda^{-nr} x_n, \lambda^{-nr} y_n] \to \cdots \to B_{n+1} = B_0 \to \cdots$

Hence, $\#\psi_r^{-1}(x_n) = 2$.

The situation is the same for $y_n, n \geq 2$, with two slightly different cycles, namely:

- $A_0 = [t_{M_n-1}^n, y_n] \to A_1 = [\lambda^{-nr} x_n, \lambda^{-nr} y_n] \to \cdots \to A_{n+1} = A_0 \to \cdots$
- $B_0 = [y_n, x_{n-1}] \to B_1 = [\lambda^{-nr} y_n, \lambda^{-(n-1)r}] \to \cdots \to B_{n+1} = B_0 \to \cdots$

A quick look at the map f_r gives the last two cycles for y_1.

Consequently, the cardinal of $\psi_r^{-1}(x)$ is finite for every $x \in \mathcal{N}_r$, $\mathcal{M}_r$ is countable, and the map $\phi_r \colon I \setminus \mathcal{N}_r \longrightarrow \Gamma_r^+ \setminus \mathcal{M}_r$ is an isomorphism modulo countable sets.

ϕ_r transforms any ergodic measure that does not charge $\mathcal{N}_r$ into an ergodic measure that does not charge $\mathcal{M}_r$, and inversely. A measure supported by $\mathcal{N}_r$ or $\mathcal{M}_r$ is of zero entropy, thus $h_{top}(I, f_r) = h(G_r)$, where

$$h(G_r) = sup\{h_\mu \mid \mu\ \sigma\text{-ergodic measure on } \Gamma_r^+\},$$

and ϕ_r establishes a bijection between the sets of ergodic maximal measures.

On the other hand, $h(\Gamma_r^+, \sigma) = h(\Gamma_r, \sigma)$ and there is a bijection between the ergodic maximal measures of (Γ_r^+, σ) and those of (Γ_r, σ), because the latter is the natural extension of the former (see Proposition 1.5.1). Recall that all the graphs G_r are identical and G represents equally one of them. Hence the question of existence of ergodic maximal measures for (I, f_r) can be studied by looking at G. The graph G is connected, thus a maximal measure for Γ_G is necessarily ergodic by Theorem 3.3.1. Moreover, if f admits a maximal measure then it admits an ergodic maximal measure by Theorem 1.4.2.

Proposition 6.2.1 *$h_{top}(I, f_r) = h(G)$ and (I, f_r) admits a maximal measure if and only if the Markov chain on G admits one.*

6.2.3 Non existence of maximal measure

If H is a connected directed graph, then Γ_H is the set of all sequences $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ such that $\alpha_n \to \alpha_{n+1}$ in H, and σ is the shift on Γ_H. The (Gurevich) entropy of H (or of the Markov chain (Γ_H, σ)) is given by

$$h(H) = \sup\{h_\mu(\Gamma_H, \sigma) \mid \mu \ \sigma\text{-ergodic measure on } \Gamma_H\}$$

(see Section 3.1 for more details).

Following the terminology of Vere-Jones [84] a transitive Markov chain is either transient, positive recurrent or null recurrent ; these definitions are given in Section 3.2. According to a result of Gurevich [45], a transitive Markov chain admits a maximal measure if and only if its graph is positive recurrent, and in this case it is ergodic (Theorem 3.3.1).

We recall the statement of Proposition 3.2.5(i), which is due to Salama [73]: if H is a connected oriented graph such that there exists $H' \supsetneq H$ with $h(H) = h(H')$, then H is transient.

This leads to the following Proposition.

Proposition 6.2.2 *Let H be a connected directed graph. If there exists a graph H' such that $H \subsetneq H'$ and $h(H) = h(H')$ then H has no maximal measure.*

Next, we compute $h(G_r)$ then we show that G_r is strictly included in a graph on equal entropy, which is enough to conclude that f_r has no maximal measure by Proposition 6.2.1. As all graphs G_r are identical, it is sufficient to focus on G_1.

Proposition 6.2.3 $h_{top}(I, f_r) = h(G_r) = \log \lambda$.

Proof. It is already known that $h_{top}(I, f_r) = h(G_r) = h(G_1)$ by Proposition 6.2.1. According to Proposition 6.1.12, $\|f_1'\|_\infty = \lambda$, thus Proposition 4.5.8 applies and $h_{top}(I, f_1) \le \log \lambda$ because $\|f_1'\|_\infty = \lambda$.

Now, let $H_n \subset G_1$ be the subgraph whose vertices are:

$$\{[t^n_{i-1}, t^n_i] \mid 1 \le i \le M_n\} \cup \{[\lambda^{-k}x_n, \lambda^{-k}y_n] \mid 1 \le k \le n\}.$$

The edges of H_n are all possible edges of G_1 between two vertices, namely:

- $[t^n_{i-1}, t^n_i] \to [\lambda^{-n}x_n, \lambda^{-n}y_n]$ for $1 \le i \le M_n$,
- $[\lambda^{-k}x_n, \lambda^{-k}y_n] \to [\lambda^{-k+1}x_n, \lambda^{-k+1}y_n]$ for $2 \le k \le n$,
- $[\lambda^{-1}x_n, \lambda^{-1}y_n] \to [t^n_{i-1}, t^n_i]$ for $1 \le i \le M_n$.

The graph H_n is represented in Figure 6.3.

The system $(\Gamma_{H_n}, \sigma^{n+1})$ is a full shift on M_n symbols, plus n fixed points, thus $h_{top}(\Gamma_{H_n}, \sigma^{n+1}) = \log M_n$ (see e.g. [29, p111]) and $h(H_n) = h_{top}(\Gamma_{H_n}, \sigma) = \dfrac{\log M_n}{n+1}$.

By definition of M_n,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log M_n}{n+1} = \log \lambda.$$

As H_n is a subgraph of G_1, $h(H_n) \le h(G_1)$. Therefore $h(G_1) = \log \lambda$. □

Lemma 6.2.4 *There exists a graph $H \supsetneq G_1$ such that $h(H) = h(G_1)$.*

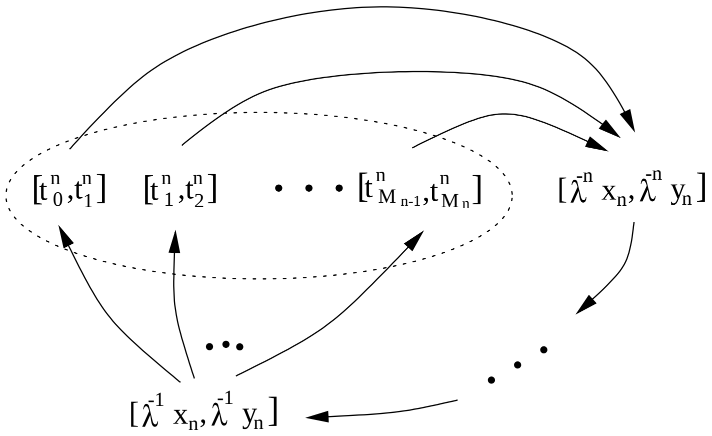


Figure 6.3: the graph H_n; σ^{n+1} is a full shift on the set of vertices inside the dots.

Proof. We are going to build a Markov map g, very similar to f_1, such that $\|g'\|_\infty \leq \lambda$ and the Markov graph H associated to g expands strictly G_1. Suppose g is already built. According to Proposition 4.5.8, $h(H) = h_{top}(I, g) \leq \log \lambda$. As $G_1 \subset H$ we have $h(H) \geq h(G_1)$, thus $h(H) = h(G_1)$ by Proposition 6.2.3.

The map $g: I \to I$ is defined as $g(x) = f_1(x)$ for all $x \in I \setminus [x_2, y_2]$. Let

$$\widetilde{M}_2 = M_2 + 2 \text{ and } \widetilde{k}_2 = \frac{2\lambda}{\widetilde{M}_2}$$

and choose $\widetilde{s}_2: [0, \widetilde{M}_2] \to [-m_2, 1]$ satisfying Properties (6.3)-(6.8) except that M_2 and k_2 are replaced respectively by $\widetilde{M}_2$ and $\widetilde{k}_2$. Then we define g on $[x_2, y_2]$ by

$$g(x) = \lambda^{-2}\left[x_2 + (y_2 - x_2)\widetilde{s}_2\left(\widetilde{M}_2 \frac{x - x_2}{y_2 - x_2}\right)\right].$$

By Properties (6.5) and (6.6), $g'(x_2) = g'(y_2) = \lambda^{-2}\widetilde{M}_2\widetilde{k}_2 = 2\lambda^{-1}$, thus $g'(x_2) = f_1'(x_2)$, $g'(y_2) = f_1'(y_2)$ and g is C^1. Moreover for all $x \in [x_2, y_2]$,

$$|g'(x)| \leq \lambda^{-2}\widetilde{M}_2\|\widetilde{s}_2'\|_\infty \leq \lambda^{-1}\widetilde{M}_2$$

thus $|g'(x)| < \lambda$ because $\widetilde{M}_2 = M_2 + 2 = 2\left\lfloor \frac{\lambda}{8} \right\rfloor + 1 < \lambda^2$. Since $\|f_1'\|_\infty = \lambda$ by Proposition 6.1.12, one concludes that $\|g'\|_\infty \leq \lambda$.

Define the Markov graph H associated to g as in Subsection 6.2.1; as for f_r, we have $h(H) = h_{top}(I, g)$. Denote by W the set of vertices of H. Compared to V_1, W has two additional vertices because f_1 has M_2 monotone pieces between x_2 and y_2 and g has $M_2 + 2$. If

$$\widetilde{t}_i = x_2 + \frac{i(y_2 - x_2)}{M_2 + 2}$$

for $0 \leq i \leq M_2 + 2$ then it is not hard to check that the graph G_1 is equal to H deprived of the vertices $[\widetilde{t}_{M_2}, \widetilde{t}_{M_2+1}]$ and $[\widetilde{t}_{M_2+1}, \widetilde{t}_{M_2+2}]$ and all the edges that begin or end at one of them. Consequently $G_1 \subsetneq H$, which ends the proof. $\square$

Remark 6.2.5 We can see intuitively what happens for an f_r-invariant measure when its entropy tends to $\log\lambda$. On each finite subgraph H_n, there is a measure of entropy $\frac{\log M_n}{n+1}$. This measure has a corresponding measure μ_n on the interval, the support of which is contained in $\bigcup_{k=0}^{n}[\lambda^{-kr}x_n, \lambda^{-kr}y_n]$ (in fact, the support of μ_n is exactly the Cantor set of all points which never escape from that set). We have of course $h_{\mu_n}(I, f_r) \to \log\lambda$. But if we consider what happens near 0, we see that μ_n converges to δ_0, the Dirac measure at 0, whose entropy is null.

6.3 Local entropy

We recall first some definitions due to Bowen [19] and then we define the local entropy. There exist different definitions of local entropy, we give here that of Buzzi [23].

Definition 6.3.1 Let $T: X \to X$ be a continuous map on a compact metric space X.

The *Bowen ball* of radius r and order n, centered at x is

$$B_n(x, r) = \{y \in X \mid d(T^k(y), T^k(x)) \leq r, 0 \leq k < n\}.$$

An (n, ε)*-separated set* of $Y \subset X$ is a subset $E \subset Y$ such that $\forall y \neq y'$ in E, $\exists\, 0 \leq k < n$, $d(T^k(y), T^k(y')) > \varepsilon$. The maximal cardinality of an (ε, n)-separated set of Y is denoted by $s_n(\varepsilon, Y)$.

Definition 6.3.2 The *local entropy* of T, $h_{loc}(X, T)$, is defined as

$$h_{loc}(X,T) = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sup_{x\in X}\log s_n(\delta, B_n(x,\varepsilon)).$$

Local entropy is interesting because it bounds the defect of upper semicontinuity of the metric entropy $\mu \mapsto h_\mu(X, T)$. On a compact Riemannian m-dimensional manifold, local entropy of the C^r map f is bounded by $\frac{m \log R(f)}{r}$, where $R(f)$ is the spectral radius of the differential and r is the differential order. These results are stated by Buzzi [23] and follow works of Yomdin [91] and Newhouse [61]. In particular, they directly imply that a C^∞ map on a compact Riemannian manifold always has a maximal measure (this result can be found in Newhouse's work [61]). These results are given in the next two Theorems, the second one is stated for interval maps only.

Theorem 6.3.3 *Let $T: X \to X$ be a continuous map on a compact metric space. Assume that μ_n is a sequence of T-invariant measures on X, converging to a measure μ. Then*

$$\limsup_{n\to\infty} h_{\mu_n}(X,T) \leq h_\mu(X,T) + h_{loc}(X,T).$$

Theorem 6.3.4 *Let $f: I \to I$ be a C^r map on a compact interval I, $r \geq 1$, and let $R(f) = \inf_{k\geq 1}\sqrt[k]{\|(f^k)'\|_\infty}$. Then the local entropy satisfies*

$$h_{loc}(I, f) \leq \frac{\log R(f)}{r}.$$

In our family of examples, the local entropy can be computed explicitly.

Proposition 6.3.5 *For every $r \geq 1$ the local entropy of f_r is*

$$h_{loc}(I, f_r) = \frac{\log R(f_r)}{r} = \log\lambda.$$

Proof. The map f_r is such that $\|f_r'\|_\infty \leq \lambda^r$ (Proposition 6.1.12) and 0 is a fixed point with $f_r'(0) = \lambda^r$. Hence $R(f_r) = \lambda^r$ and

$$h_{loc}(I, f_r) \leq \frac{\log R(f_r)}{r} = \log \lambda$$

according to Theorem 6.3.4.

We are going to show the reverse inequality.

Fix $\varepsilon > 0$ and choose n such that $\frac{1}{2n^2} < \varepsilon$. Put $\delta_0 = \frac{1}{2n^2 M_n}$. If x is a point of $[x_n, y_n]$ which satisfies $f^{n+1}(x) \in [x_n, y_n]$ then $|f^i(x) - f^i(x_n)| < \varepsilon$ for $0 \leq i \leq n+1$. We write $I_i = [t^n_{i-1}, t^n_i]$ for $1 \leq i \leq M_n$. The length of each I_i is δ_0.

Choose a finite sequence $\omega = (\omega_0, \cdots, \omega_{p-1})$ with $1 \leq \omega_i \leq M_n$. Thanks to the isomorphism between (I, f_r) and the Markov chain (Γ_r, σ) (Section 6.2), there is a point $x_\omega \in [x_n, y_n]$ with $f^{(n+1)i}(x_\omega) \in I_{\omega_i}$ for $0 \leq i \leq p-1$. Consider the set $E_{n,p} = \{x_\omega \mid \omega = (\omega_0, \cdots, \omega_{p-1}), \omega_i \text{ odd}\}$. The cardinality of $E_{n,p}$ is

$$\left(\frac{M_n + 1}{2}\right)^p \geq \left(\frac{\lambda^n}{4n^2}\right)^p$$

by Lemma 6.1.3 (ii). If $x \in E_{n,p}$ then $|f^k(x_n) - f^k(x)| < \varepsilon$ for $0 \leq k < (n+1)p$. Moreover, if $x_\omega, x_{\omega'}$ are two distinct elements of $E_{n,p}$, then there exists $0 \leq i \leq p-1$ with $|\omega_i - \omega_i'| \geq 2$, hence $|f^{(n+1)i}(x_\omega) - f^{(n+1)i}(x_{\omega'})| \geq \delta_0$. Consequently, $E_{n,p}$ is an $((n+1)p, \delta)$-separated set of $B_{(n+1)p}(x_n, \varepsilon)$ for every $\delta < \delta_0$, and

$$h_{loc}(I, f_r) \geq \lim_{n \to +\infty} \limsup_{p \to \infty} \frac{\log \# E_{n,p}}{(n+1)p} \geq \log \lambda.$$

$\square$

This computation shows that the bound $\frac{\log R(f)}{r}$ is a sharp one to estimate the local entropy. Moreover, we remarked (Remark 6.2.5) that there exists a sequence of measures μ_n converging to the Dirac measure δ_0, with $h_{\mu_n}(I, f_r) \to h_{top}(I, f_r)$. Hence, the local entropy is exactly the defect of upper semicontinuity of the metric entropy in this case.

Bibliographie

[1] R.L. Adler, A.G. Konheim, and M.H. McAndrew. Topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114 :309–319, 1965.

[2] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey. On Devaney's definition of chaos. *Amer. Math. Monthly*, 99(4) :332–334, 1992.

[3] M. Barge and J. Martin. Chaos, periodicity, and snakelike continua. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 289(1) :355–365, 1985.

[4] M. Barge and J. Martin. Dense orbits on the interval. *Michigan Math. J.*, 34(1) :3–11, 1987.

[5] P. Billingsley. *Probability and measure.* John Wiley & Sons Inc., New York, third edition, 1995.

[6] F. Blanchard. Fully positive topological entropy and topological mixing. In *Symbolic dynamics and its applications (New Haven, CT, 1991)*, Contemp. Math., 135, pages 95–105. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[7] F. Blanchard. A disjointness theorem involving topological entropy. *Bull. Soc. Math. France*, 121(4) :465–478, 1993.

[8] F. Blanchard, E. Glasner, and B. Host. A variation on the variational principle and applications to entropy pairs. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 17(1) :29–43, 1997.

[9] F. Blanchard, E. Glasner, S. Kolyada, and A. Maass. On Li-Yorke pairs. Preprint, 2000.

[10] F. Blanchard, B. Host, and A. Maass. Topological complexity. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 20(3) :641–662, 2000.

[11] F. Blanchard, B. Host, and S. Ruette. Asymptotic pairs in positive-entropy systems. Preprint (2000), to appear in *Ergod. Th. Dynam. Sys.*

[12] L. Block and E.M. Coven. Topological conjugacy and transitivity for a class of piecewise monotone maps of the interval. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 300(1) :297–306, 1987.

[13] L. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz, and L.S. Young. Periodic points and topological entropy of one dimentional maps. In *Global Theory of Dynamical Systems*, Lecture Notes in Mathematics, 819, pages 18–34. Springer-Verlag, 1980.

[14] L.S. Block and W.A. Coppel. Stratification of continuous maps of an interval. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 297(2) :587–604, 1986.

[15] L.S. Block and W.A. Coppel. *Dynamics in One Dimension.* Lecture Notes in Mathematics, 1513. Springer-Verlag, 1992.

[16] A.M. Blokh. On sensitive mappings of the interval. *Russ. Math. Surv.*, 37 :203–204, 1982.

[17] A.M. Blokh. Decomposition of dynamical systems on an interval. *Russ. Math. Surv.*, 38(5) :133–134, 1983. Erratum. *Uspekhi Mat. Nauk*, 42, no. 6(258) :233, 1987.

[18] A.M. Blokh. The "spectral" decomposition for one-dimensional maps. In *Dynamics Reported*, Dynam. Report. Expositions Dynam. Systems (N.S.), 4, pages 1–59. Springer, Berlin, 1995.

[19] R. Bowen. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 153 :401–414, 1971.

[20] R. Bowen. Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 154 :377–397, 1971.

[21] R. Bowen. Entropy-expansive maps. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 164 :323–331, 1972.

[22] A.M. Bruckner and T. Hu. On scrambled sets for chaotic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 301(1) :289–297, 1987.

[23] J. Buzzi. Intrinsic ergodicity of smooth interval maps. *Israel J. Math.*, 100 :125–161, 1997.

[24] J. Buzzi. Specification on the interval. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(7) :2737–2754, 1997.

[25] J. Buzzi. On entropy-expanding maps. Preprint, 2000.

[26] J. Buzzi and S. Ruette. Large topological entropy implies existence of measures of maximal entropy : the case of interval maps. Preprint, 2001.

[27] K. L. Chung. *Markov chains with stationary transition probabilities.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 104. Springer-Verlag, second edition, 1967.

[28] J.-P. Delahaye. Fonctions admettant des cycles d'ordre n'importe quelle puissance de 2 et aucun autre cycle. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 291(4) :A323–A325, 1980. Addendum, 291(13) :A671, 1980.

[29] M. Denker, C. Grillenberger, and K. Sigmund. *Ergodic theory on compact spaces.* Lecture Notes in Mathematics, 527. Springer-Verlag, 1976.

[30] R.L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems.* Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA, second edition, 1989.

[31] J.L. Doob. *Stochastic processes.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1990.

[32] J.L. Doob. *Measure Theory.* Graduate Texts in Mathematics, 143. Springer-Verlag, New York, 1994.

[33] U. Fiebig. Symbolic dynamics and locally compact markov shifts, 1996. Habilitationsschrift, U. Heidelberg.

[34] H. Furstenberg. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation. *Math.System Th*, 1 :1–55, 1967.

[35] H. Furstenberg. Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions. *J. Analyse Math.*, 31 :204–256, 1977.

[36] H. Furstenberg. *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981. M. B. Porter Lectures.

[37] E. Glasner. A simple characterization of the set of μ-entropy pairs and applications. *Israel J. Math.*, 102 :13–27, 1997.

[38] E. Glasner and B. Weiss. Sensitive dependence on initial conditions. *Nonlinearity*, 6(6) :1067–1075, 1993.

[39] E. Glasner and B. Weiss. Strictly ergodic, uniform positive entropy models. *Bull. Soc. Math. France*, 122(3) :399–412, 1994.

[40] J. Guckenheimer. Sensitive dependence to initial conditions for one-dimensional maps. *Comm. Math. Phys.*, 70(2) :133–160, 1979.

[41] B.M. Gurevich and S.V. Savchenko. Thermodynamic formalism for coutable symbolic Markov chains. *Russian Math. Surveys*, 53(2) :245–344, 1998.

[42] B.M. Gurevich and A.S. Zargaryan. A continuous one-dimensional mapping without a measure with maximal entropy. *Functional Anal. Appl.*, 20(2) :134–136, 1986.

[43] B.M. Gurevich and A.S. Zargaryan. Existence conditions of a maximal measure for a countable symbolic Markov chain. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 1988.

[44] B.M. Gurevič. Topological entropy of enumerable Markov chains. *Soviet. Math. Dokl.*, 10(4) :911–915, 1969.

[45] B.M. Gurevič. Shift entropy and Markov measures in the path space of a denumerable graph. *Soviet. Math. Dokl.*, 11(3) :744–747, 1970.

[46] F. Hofbauer. β-shifts have unique maximal measure. *Monatsh. Math.*, 85(3) :189–198, 1978.

[47] F. Hofbauer. On intrinsic ergodicity of piecewise monotonic transformations with positive entropy. *Israel J. Math.*, **I.** 34(3) :213–237, 1979. **II.** 38(1–2) :107–115, 1981.

[48] F. Hofbauer. Piecewise invertible dynamical systems. *Probab. Theory Relat. Fields*, 72(3) :359–386, 1986.

[49] W. Huang and X. Ye. Devaney's chaos or 2-scattering implies Li-Yorke's chaos. Preprint.

[50] W ; Huang and X. Ye. Homeomorphisms with the whole compacta being scrambled sets. *Ergod. Th. Dynam. Systems*, 21(1) :77–91, 2001.

[51] A. Iwanik. Independent sets of transitive points. In *Dynamical systems and ergodic theory (Warsaw, 1986)*, Banach Center Publ., 23, pages 277–282. PWN, Warsaw, 1989.

[52] A. Katok. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 51 :137–173, 1980.

[53] B.P. Kitchens. *Symbolic dynamics.* Springer-Verlag, Berlin, 1998. One-sided, two-sided and countable state Markov shifts.

[54] M. Kuchta and J. Smítal. Two-point scrambled set implies chaos. In *European Conference on Iteration Theory (Caldes de Malavella, 1987)*, pages 427–430. World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1989.

[55] A. Lasota and J.A. Yorke. On the existence of invariant measures for transformations with strictly turbulent trajectories. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 25(3) :233–238, 1977.

[56] S. Li. ω-chaos and topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 339(1) :243–249, 1993.

[57] T.Y. Li and J.A. Yorke. Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly*, 82(10) :985–992, 1975.

[58] M. Misiurewicz. Horseshoes for mappings of the interval. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math.*, 27(2) :167–169, 1979.

[59] M. Misiurewicz. Horseshoes for continuous mappings of an interval. In *Dynamical systems (Bressanone, 1978)*, pages 125–135. Liguori, Naples, 1980.

[60] M. Misiurewicz and W. Szlenk. Entropy of piecewise monotone mappings. *Studia Math.*, 67(1) :45–63, 1980.

[61] S.E. Newhouse. Continuity properties of entropy. *Ann. of Math. (2)*, 129(2) :215–235, 1989. Corrections, 131(2) :409–410, 1990.

[62] W. Parry. Intrinsic Markov chains. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 112 :55–66, 1964.

[63] W. Parry. *Entropy and generators in ergodic theory.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[64] W. Parry. *Topics in ergodic theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

[65] K. Petersen. Chains, entropy, coding. *Ergod. Th. Dynam. Systems*, 6(3) :415–448, 1986.

[66] J. Piórek. On the generic chaos in dynamical systems. *Univ. Iagel. Acta Math.*, 25 :293–298, 1985.

[67] V.A. Rohlin and Ya.G. Sinaĭ. Construction and properties of invariant measurable partitions. *Sov. Math.*, 2(6) :1611–1614, 1961.

[68] D.J. Rudolph. *Fundamentals of measurable dynamics.* The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1990. Ergodic theory on Lebesgue spaces.

[69] D. Ruelle. An inequality for the entropy of differentiable maps. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 9(1) :83–87, 1978.

[70] S. Ruette. On the Vere-Jones classification and existence of maximal measures for topological Markov chains. Preprint, 2000.

[71] S. Ruette. Mixing C^r maps of the interval without maximal measure. *Israel J. Math*, to appear.

[72] I.A. Salama. *Topological entropy and classification of countable chains.* PhD thesis, University of North Carolina, Chapel Hill, 1984.

[73] I.A. Salama. Topological entropy and recurrence of countable chains. *Pacific J. Math.*, 134(2) :325–341, 1988. Errata, 140(2) :397, 1989.

[74] I.A. Salama. On the recurrence of countable topological Markov chains. In *Symbolic dynamics and its applications (New Haven, CT, 1991)*, Contemp. Math, 135, pages 349–360. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[75] O.M. Sarig. Thermodynamic formalism for countable Markov shifts. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(6) :1565–1593, 1999.

[76] O.M. Sarig. Phase transitions for countable Markov shifts. *CMP*, to appear.

[77] O.M. Šarkovs′kiĭ. Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself. *Ukrain. Mat. Ž.*, 16 :61–71, 1964. (Russian).

[78] O.M. Šarkovs′kiĭ. On cycles and the structure of a continuous mapping. *Ukrain. Mat. Ž.*, 17 :104–111, 1965. (Russian).

[79] E. Seneta. *Nonnegative matrices and Markov chains.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1981.

[80] J. Smítal. Chaotic functions with zero topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 297(1) :269–282, 1986.

[81] L′. Snoha. Generic chaos. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 31(4) :793–810, 1990.

[82] P. Štefan. A theorem of Šarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line. *Comm. Math. Phys.*, 54(3) :237–248, 1977.

[83] Y. Takahashi. Isomorphisms of β-automorphisms to Markov automorphisms. *Osaka J. Math.*, 10 :175–184, 1973.

[84] D. Vere-Jones. Geometric ergodicity in denumerable Markov chains. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 13 :7–28, 1962.

[85] P. Walters. *An introduction to ergodic theory.* Springer-Verlag, New York, 1982.

[86] B. Weiss. Multiple recurrence and doubly minimal systems. In *Topological dynamics and applications (Minneapolis, MN, 1995)*, pages 189–196. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[87] J. Xiong. Chaoticity of interval self-maps with positive entropy. Preprint.

[88] J. Xiong. A chaotic map with topological entropy zero. *Acta Math. Sci. (English Ed.)*, 6(4) :439–443, 1986.

[89] J. Xiong. A simple proof of a theorem of Misiurewicz. *J. China Univ. Sci. Tech.*, 19(1) :21–24, 1989. (Chinese).

[90] X. Ye. personal communication.

[91] Y. Yomdin. Volume growth and entropy. *Israel J. Math.*, 57(3) :285–300, 1987. C^k-resolution of semi-algebraic mappings. Addendum to : "Volume growth and entropy", 57(3) :301-318, 1987.

Notations

$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels (positifs ou nuls)
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{R}$	ensemble des réels
$\# E$	cardinal de l'ensemble E
$\operatorname{Int}(A)$	intérieur de l'ensemble A
$\overline{A}$	adhérence de l'ensemble A
∂A	frontière de l'ensemble A
$\operatorname{diam}(A)$	diamètre de l'ensemble A
$B(x, r)$	boule ouverte de centre x de rayon r
$C(X)$	ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$
$\mathbb{1}_A$	fonction caractéristique de l'ensemble A
$\lfloor x \rfloor$	partie entière inférieure du réel x
$\lceil x \rceil$	partie entière supérieure du réel x
$\mathbb{E}(f \mid \mathcal{F})$	espérance conditionnelle de f relativement à la σ-algèbre $\mathcal{F}$